



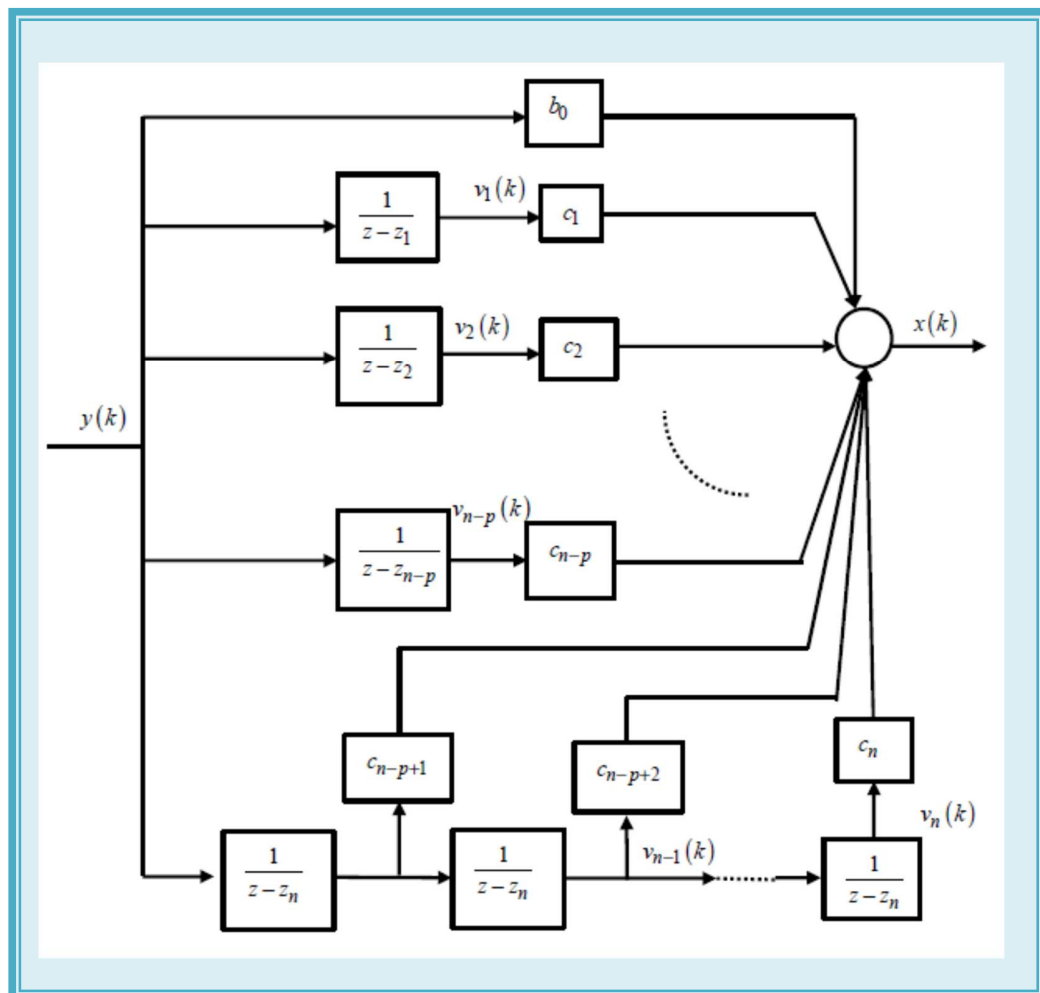
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје

Факултет за електротехника и информациски
технологии - Скопје



ЕЛИЗАБЕТА ЛАЗАРЕВСКА

ДИГИТАЛНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ



Скопје, 2021

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:

д-р Елизабета Лазаревска, редовен професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

Рецензенти

1. д-р Весна Ојлеска Латкоска, вонреден професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје
2. д-р Горјан Наџински, доцент на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

Техничка обработка

Д-р Елизабета Лазаревска

Лектура на македонски јазик:

Дијана Ристова

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

621.38.037.37:004.312]:681.5(075.8)

ЛАЗАРЕВСКА, Елизабета

Дигитални системи на автоматско управување [Електронски извор] / Елизабета Лазаревска. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Факултет за електротехника и информациски технологии, 2021

Начин на пристапување (URL):

http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41. - Текст во PDF формат, содржи 420 стр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 05.07.2021. - Библиографија: стр. 419

ISBN 978-9989-43-454-9

а) Дигитални системи -- Автоматско управување -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 54280197

ПРЕДГОВОР

Книгата во прв ред е наменета за студентите од трета година на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, кои на насоката Компјутерско системско инженерство, автоматика и роботика го слушаат предметот Теорија на автоматско управување 2. Меѓутоа, таа успешно ќе им послужи и на сите останати студенти од техничките факултети кои го изучуваат или се сретнуваат со проблеми од широкото подрачје на дигиталните системи на автоматско управување како, на пример, на студентите од машинските, технолошките и металуршките факултети. Несомнено, корисни примери и информации во книгата ќе најдат и сите оние кои веќе работат во областа на дигиталните системи на автоматско управување или само се интересираат за неа.

Системите на автоматско управување имаат многу широка примена во индустријата, техниката и нашето секојдневие, поаѓајќи од авионите и вселенските летала, па преку роботите и индустриските процеси, до апаратите што ги користиме во нашиот секојдневен живот. Знаењето на еден инженер автоматичар нема да биде комплетно, ако покрај теоријата на континуалните, тој не ја владее и теоријата на дигиталните системи на автоматско управување. Ова е посебно релевантно во денешно време, кога дигиталните управувачки системи сè повеќе ги заменуваат конвенционалните континуални управувачки системи.

Извонредно важната проблематика на теоријата на дигиталните системи на автоматско управување (ДСАУ) во книгата е поделена на осум поглавја и е изложена преку голем број примери. Притоа, од сите видови дискретни системи, книгата ја третира само теоријата на линеарните стационарни дискретни динамички системи и во склоп на нив, на линеарните дигитални системи на автоматско управување. Теоријата на нелинеарните и нестационарни дигитални системи на автоматско управување излегува надвор од рамките на овој труд.

Во првата глава која е воведна, читателот полесно се воведува во теоријата на дигиталните односно дискретните системи. Тука се дадени основните поими и дефиниции за дискретните сигнали и системи, нивната поделба, математичкиот опис и, се разбира, сето тоа е илустрирано со некои интересни примери за реални дискретни системи.

Во втората глава е претставен математичкиот апарат за анализа на дигиталните системи на автоматско управување и воопшто на дискретните динамички системи. Воведен е поимот за конечни разлики на еден дискретен сигнал и, следствено, поимот за диферентна равенка, која се состои од конечни разлики на влезниот и излезниот сигнал на набљудуваниот систем, како модел на овие системи. Да се изврши анализа на поведението на еден систем, во крајна линија значи да се реши неговиот математички модел, па, во оваа глава, се прикажани постапки за решавање на диферентните равенки на динамичко поведење на дискретните системи, првенствено во временското подрачје, односно просторот на оригиналите. Решението на една диферентна равенка во комплексното подрачје детално е изложено во третата глава.

Третата глава е посветена на математичкиот апарат на Z – трансформацијата, кој е многу моќна алатка за анализа на линеарните дискретни системи. Многу детално се изложени основните особини на директната Z – трансформација и начините на пресметување на инверзната Z – трансформација. Сето тоа е илустрирано со голем број примери. На крајот е прикажано влијанието на половите на Z – сликата врз трајната

вредност на дискретниот оригинал, заради неговата важност при дефиницијата на стабилноста на линеарните дискретни системи.

Четвртата глава претставува сериозен вовед во анализата на линеарните стационарни дискретни динамички системи. Таа ги презентира различните модели на оваа класа дискретни системи како во временско, така и во комплексно односно фреквенциско подрачје. Воведен е поимот за тежинска низа на дискретните системи, кој е еквивалентен и по улогата и по значењето со импулсниот одзив кај линеарните континуални системи, состојбените големини, кои детално се презентирани во осмата глава од оваа книга, како и поимот за дискретна преносна функција, кој е главен модел на дискретните системи во комплексното подрачје. На крајот е посветено детално внимание и на дискретните модели на континуалните системи, имајќи на ум дека најголемиот број реални дискретни системи се добиваат токму со дискретизација на континуалните системи.

Петтата глава го третира прашањето за стабилноста на дискретните системи, која е фундаментално својство на секој еден систем за автоматско управување. Дадена е дефиницијата на стабилност на дискретните системи од типот на ограничен влез – ограничен излез и нејзината соодветна математичка интерпретација. Изведени се нужните и доволни услови за стабилност и изложени најчесто користените критериуми за иследување на стабилноста на дискретните системи.

Шестата глава конечно се зафаќа со анализата на линеарните дискретни системи на автоматско управување и го воведува поимот на реалните дискретни односно дигиталните системи на автоматско управување. Изложена е основната структура на овие системи и дискутирани се нивните основни компоненти. Како што е познато, дигиталните системи на автоматско управување односно реалните дискретни системи на автоматско управување се всушност хибридни системи, кои имаат дигитални и континуални компоненти. Од тој аспект, нивната изведба значително се разликува од изведбата на континуалните системи на автоматско управување, затоа што мора да содржат компоненти кои ќе овозможат претворба од еден во друг вид сигнали. Во шестата глава детално се изложени овие А/Д и Д/А претворувачи, нивната изведба и принцип на работа, како и еквивалентните дискретни модели на континуалните системи. Исто така се прикажани и основните дигитални закони на управување. На крајот должно внимание е посветено на анализата на поведението на дигиталните системи на автоматско управување во преоден и стационарен режим на работа, како и на изборот на периодата на дискретизација.

Седмата глава е целосно посветена на постапката на геометриско место на корени и нејзината примена за анализа на дискретните системи на автоматско управување. Детално е изложена процедурата на конструкција на геометриското место на корени и илустрирана низ примери неговата примена кај дискретните системи. На крајот е дадена анализа на влијанието на дополнителните нули и полови во преносната функција на соодветниот отворен дискретен систем врз отскочниот одзив односно поведението на набљудуваниот затворен систем.

Конечно, во осмата глава од оваа книга е прикажана анализата на дискретните системи во просторот на состојби. Просторот на состојби и состојбените големини спаѓаат во современите постапки за анализа на дискретните системи, за разлика од трансформациските постапки и геометриското место на корени кои претставуваат класичен приод. Најнапред се изложени постапките за избор на состојбените големини, а потоа е направена анализа на движењето на дискретните системи во просторот на

состојби. Воведени се некои многу важни величини и својства на дискретните системи во просторот на состојби, какви што се фундаменталната матрица, како уште еден модел на дискретните системи, и својството за управливост и набљудливост.

Книгата прилично детално ја има изложено анализата општо на линеарните стационарни дискретни динамички системи и посебно на поткласата линеарни дигитални системи на автоматско управување. Ова е прв ваков детален труд на македонски јазик и тоа го зголемува уште повеќе нејзиното значење. Во тој контекст, авторот се надева дека ќе им биде од значителна полза на нејзините читатели.

Од авторот,

Скопје, 2021

СОДРЖИНА		
1	ВОВЕД	1
1-1	ПОДЕЛБА НА СИСТЕМИТЕ НА КОНТИНУАЛНИ И ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	2
1-2	ВИДОВИ ДИСКРЕТНИ СИГНАЛИ И ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	3
1-3	ОСНОВНИ ПОИМИ ВРЗАНИ ЗА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ	8
1-4	ПОДЕЛБА НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ	12
1-5	МАТЕМАТИЧКИ ОПИС НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ ВО ВРЕМЕНСКОТО ПОДРАЧЈЕ	22
1-6	ПРИМЕРИ НА ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	24
1-7	ЕЛЕМЕНТАРНИ ДИСКРЕТНИ СИГНАЛИ	26
2	МАТЕМАТИЧКИ АПАРАТ ЗА АНАЛИЗА НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ	37
2-1	ВОВЕДНИ ЗАБЕЛЕШКИ	37
2-2	КОНЕЧНИ РАЗЛИКИ НА ФУНКЦИИТЕ ОД ДИСКРЕТНА НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЛИВА	37
2-3	МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИФЕРЕНТНИ РАВЕНКИ СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ	44
2-3-1	АНАЛИТИЧКО РЕШЕНИЕ	45
2-3-2	НУМЕРИЧКО РЕШЕНИЕ	50
2-3-3	РЕШЕНИЕ СО ПОМОШ НА Z-ТРАНСФОРМАЦИЈАТА	52
3	Z-ТРАНСФОРМАЦИЈА	55
3-1	ВОВЕД	55
3-2	ДИРЕКНА Z-ТРАНСФОРМАЦИЈА	55
3-3	ОСОБИНИ НА ЕДНОСТРАНАТА Z-ТРАНСФОРМАЦИЈА	64
3-4	ИНВЕРЗНА Z-ТРАНСФОРМАЦИЈА	92
3-4-1	ПРИМЕНА НА ГОТОВИ ТАБЛИЦИ Z – ТРАНСФОРМАЦИСКИ ПАРОВИ	93
3-4-2	РАЗВОЈ НА СЛИКАТА $F(z)$ ВО СТЕПЕНСКИ РЕД ОД НЕГАТИВНИТЕ СТЕПЕНИ НА КОМПЛЕКСНАТА ПРОМЕНЛИВА z	93
3-4-3	БЕСКОНЕЧНО АЛГЕБАРСКО ДЕЛЕЊЕ НА БРОИТЕЛОТ И ИМЕНИТЕЛОТ НА ДРОБНО-РАЦИОНАЛНАТА ФУНКЦИЈА $F(z)$	95
3-4-4	РАЗВОЈ НА ДРОБНО-РАЦИОНАЛНАТА ФУНКЦИЈА $F(z)$ ВО ПАРЦИЈАЛНИ ДРОПКИ	97
3-4-5	ИНТЕГРАЛНА ФОРМУЛА ЗА ИНВЕРЗНА Z – ТРАНСФОРМАЦИЈА	108
3-5	ВЛИЈАНИЕ НА ПОЛОВИТЕ НА Z – СЛИКАТА ВРЗ ТРАЈНАТА ВРЕДНОСТ НА ОРИГИНАЛОТ	117
4	МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	125
4-1	МОДЕЛИРАЊЕ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ СО ДИФЕРЕНТНИ РАВЕНКИ	125

4-2	МОДЕЛИРАЊЕ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ СО СОСТОЈБЕНИ ГОЛЕМИНИ	128
4-3	ПОИМ ЗА ТЕЖИНСКА НИЗА КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	130
4-4	МОДЕЛИРАЊЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ СО ПРЕНОСНА ФУНКЦИЈА	146
4-5	МОДЕЛИРАЊЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ ПРЕКУ ФРЕКВЕНЦИСКА ПРЕНОСНА ФУНКЦИЈА	160
4-6	МОДЕЛИРАЊЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ СО АЛГЕБРА НА БЛОК-ШЕМИ	170
4-7	ДИСКРЕТНИ МОДЕЛИ НА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ	170
4-7-1	НУМЕРИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА	171
4-7-1-1	ОЈЛЕРОВА ПРАВОАГОЛНА АПРОКСИМАЦИЈА НАНАПРЕД	171
4-7-1-2	ОЈЛЕРОВА ПРАВОАГОЛНА АПРОКСИМАЦИЈА НАНАЗАД	175
4-7-1-3	БИЛИНЕАРНА ТУСТИНОВА ИЛИ ТРАПЕЗОИДНА АПРОКСИМАЦИЈА	180
4-7-2	МЕТОД НА ПРЕСЛИКУВАЊЕ НУЛИ И ПОЛОВИ	185
4-7-3	МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТЕН ИМПУЛСЕН ОДСИВ	186
4-7-4	МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТЕН ОТСКОЧЕН ОДСИВ	187
4-7-5	МОДЕЛ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	187
5	СТАБИЛНОСТ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	189
5-1	НЕОПХОДЕН УСЛОВ ЗА СТАБИЛНОСТ НА ЕДЕН ЛИНЕАРЕН ДИСКРЕТЕН СИСТЕМ	195
5-2	КРИТЕРИУМИ ЗА КОНТРОЛА НА СТАБИЛНОСТА КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	197
5-2-1	КОНФОРМНО ПРЕСЛИКУВАЊЕ НА ЕДИНИЧНИОТ КРУГ $ z \leq 1$ ОД z – КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА ВО s – КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА	197
5-2-2	АЛГЕБАРСКИ КРИТЕРИУМ НА I.E. JURY	203
5-2-3	КРИТЕРИУМ НА МИХАИЛОВ ЗА ИСПИТУВАЊЕ НА СТАБИЛНОСТА КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	205
5-2-4	НАЈКВИСТОВ КРИТЕРИУМ ЗА СТАБИЛНОСТ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ	219
5-3	ПАРАМЕТАРСКА ОБЛАСТ НА СТАБИЛНОСТ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ	231
5-4	РЕЛАТИВНА СТАБИЛНОСТ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ И РЕЗЕРВА НА СТАБИЛНОСТ	235
6	ДИГИТАЛНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ	239
6-1	ВОВЕД	239

6-2 КАРАКТЕРИСТИКИ НА ДИГИТАЛНИТЕ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ	245
6-3 ОСНОВНИ СТРУКТУРИ НА ДИГИТАЛНИТЕ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ	253
6-4 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ НА А/Д ПРЕТВОРУВАЧ	255
6-4-1 ИДЕАЛЕН ДИСКРЕТИЗАТОР	256
6-4-2 РЕАЛЕН ДИСКРЕТИЗАТОР	262
6-4-3 КОНВЕНЦИОНАЛЕН ДИСКРЕТИЗАТОР	263
6-5 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ НА Д/А ПРЕТВОРУВАЧ	263
6-5-1 ФОРМАТОР ОД НУЛТИ РЕД	265
6-5-2 ФОРМАТОР ОД ПРВ РЕД	267
6-6 ДИСКРЕТНИ ЕКВИВАЛЕНТИ НА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ	270
6-6-1 ДИСКРЕТЕН ЕКВИВАЛЕНТ НА КОНТИНУАЛЕН СИСТЕМ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ВЛЕЗОТ	274
6-6-2 ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ НА КОНТИНУАЛЕН СИСТЕМ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ИЗЛЕЗОТ	275
6-6-3 ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ КАСКАДНА ВРСКА ОД ДВА КОНТИНУАЛНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ	277
6-6-4 ДИСКРЕТЕН ЕКВИВАЛЕНТ НА АНТИПАРАЛЕЛНА ВРСКА ОД ДВА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ВЛЕЗОТ ОД БЛОКОТ ВО ДИРЕКТНАТА ГРАНКА	282
6-6-5 ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ НА АНТИПАРАЛЕЛНА ВРСКА ОД ДВА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ИЗЛЕЗОТ ОД БЛОКОТ ВО ДИРЕКТНАТА ГРАНКА	283
6-6-6 ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ НА АНТИПАРАЛЕЛНА ВРСКА ОД ДВА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ВЛЕЗОТ ОД БЛОКОТ ВО ПОВРАТНАТА ГРАНКА	284
6-6-7 ДИСКРЕТИЗАТОР НА ВЛЕЗОТ ОД ФОРМАТОР ОД НУЛТИ РЕД	286
6-7 КОНВЕНЦИОНАЛНИ ДИГИТАЛНИ ПИД УПРАВУВАЧКИ ЗАКОНИ	290
6-8 ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ДИГИТАЛЕН СИСТЕМ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ ВО СТАЦИОНАРЕН РЕЖИМ	292
6-9 ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ДИГИТАЛЕН СИСТЕМ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ ВО ПРЕОДЕН РЕЖИМ	298
6-10 ИЗБОР НА ПЕРИОДАТА НА ДИСКРЕТИЗАЦИЈА	307
7 АНАЛИЗА НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ СО МЕТОДОТ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	311
7-1 ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	311

7-2 ЗАВИСНОСТ НА ПОЛОВИТЕ НА ЗАТВОРЕНИОТ СИСТЕМ ОД КОЕФИЦИЕНТОТ НА ЗАСИЛУВАЊЕ НА ОТВОРЕНИОТ СИСТЕМ	313
7-3 КРИТЕРИУМ НА АРГУМЕНТ И МОДУЛ	315
7-4 БРОЈ ГРАНКИ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	316
7-5 ГРАНКИ КОИ ЛЕЖАТ НА РЕАЛНАТА ОСКА ВО КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА	317
7-6 АСИМПТОТИ НА ГРАНКИТЕ ОД ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	318
7-7 ТОЧКИ НА СОСТАВУВАЊЕ ОДНОСНО РАЗДВОЈУВАЊЕ НА ГРАНКИТЕ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	321
7-8 АГЛИ НА ОДДАЛЕЧУВАЊЕ НА ГРАНКИТЕ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ ОД ПОЛОВИТЕ И АГЛИ НА НИВНО ПРИБЛИЖУВАЊЕ КОН НУЛИТЕ НА ОТВОРЕНИОТ СИСТЕМ	323
7-9 КОНСТРУКЦИЈА НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН ДИСКРЕТЕН СИСТЕМ	326
7-10 ОДРЕДУВАЊЕ НА ПРЕНОСНАТА ФУНКЦИЈА НА ЗАТВОРЕНИОТ ДИСКРЕТЕН СИСТЕМ И НЕГОВИОТ ОДСИВ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	328
7-11 ОДРЕДУВАЊЕ НА РЕЗЕРВИТЕ НА ЗАСИЛУВАЊЕ И ФАЗА НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН ДСАУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	331
7-12 ВЛИЈАНИЕ НА ДОПОЛНИТЕЛНИТЕ НУЛИ И ПОЛОВИ ВО ОТВОРЕНИОТ СИСТЕМ ВРЗ ПОВЕДЕНИЕТО НА ЗАТВОРЕНИОТ СИСТЕМ	335
8 АНАЛИЗА НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	341
8-1 ОПИС НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	341
8-2 ВЕКТОР НА СОСТОЈБА И СОСТОЈБЕНИ ГОЛЕМИНИ КАЈ ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ	342
8-3 ПОСТАПКИ ЗА ИЗБОР НА СОСТОЈБЕНИ ГОЛЕМИНИ КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	346
8-3-1 МОДЕЛ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ	346
8-3-1-1 МОДЕЛ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ ВО СЛУЧАЈ КОГА $G(z)$ ИМА САМО ПРОСТИ РЕАЛНИ ПОЛОВИ	347
8-3-1-2 ПРОШИРУВАЊЕ НА МОДЕЛОТ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ ВО СЛУЧАЈОТ КОГА $G(z)$ ИМА И ПОВЕЌЕКРАТЕН РЕАЛЕН ПОЛ	351
8-3-1-3 ПРОШИРУВАЊЕ НА МОДЕЛОТ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ ВО СЛУЧАЈОТ КОГА $G(z)$ ИМА ПРОСТИ КОМПЛЕКСНИ ПОЛОВИ	356
8-3-2 ИТЕРАТИВНА ПОСТАПКА - СЕРИСКИ МОДЕЛ	359

8-3-3 МЕТОД СО ПОМОШНА ПРОМЕНЛИВА	364
8-3-4 МОДЕЛ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ И ИЗЛЕЗ	370
8-3-5 МОДЕЛ СО КОНЕЧНИ РАЗЛИКИ	375
8-4 ДИСКРЕТЕН МОДЕЛ НА КОНТИНУАЛЕН СИСТЕМ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	380
8-5 УПРАВЛИВОСТ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	382
8-6 НАБЉУДЛИВОСТ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	389
8-7 ДВИЖЕЊЕ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	395
8-8 ОДРЕДУВАЊЕ НА МАТРИЦАТА НА ПРЕНОСНИ ФУНКЦИИ КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ ПРЕКУ МОДЕЛОТ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	402
ДОДАТОК 1. Z – ТРАНСФОРМАЦИСКИ ПАРОВИ	405
ДОДАТОК 2. АЛГЕБРА НА БЛОК-ШЕМИТЕ КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ	409
ДОДАТОК 3. ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ НА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ	411
ДОДАТОК 4. МАТРИЦИТЕ M_n КАЈ БИЛИНЕАРНАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА $z = (1+s)/(1-s)$	415
ДОДАТОК 5. МАТРИЦИТЕ P_n КАЈ БИЛИНЕАРНАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА $z = (s+1)/(s-1)$	417
ЛИТЕРАТУРА	419

1 ВОВЕД

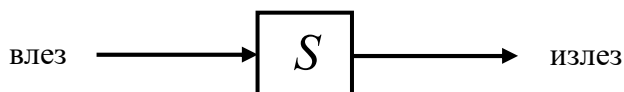
За целите на анализата што следува, еден систем може да се дефинира како сèвкупност од елементи, меѓусебно поврзани на одреден осмислен начин, кои чинат една изведбена и функционална целина. Физичката природа на системите може да биде најразлична: електрична, механичка, хидрауличка, пневматска, термичка, а многу често е комбинирана: електро-механичка, механичко-хидрауличка итн. Впрочем, системите воопшто не мора да бидат од физичка и техничка природа. Тие исто така можат да бидат и биолошки, социолошки и друг вид системи, меѓутоа нашето внимание во рамките на овој труд ќе биде свртено исклучиво кон физичките и техничките системи.

Секој систем се карактеризира со множество физички големини. Дел од нив ги опишуваат конструктивните т.е. изведбените, техничките и други својства на набљудуваниот систем и тие се нарекуваат **параметри** на системот. Останатите карактеристични големини ги опишуваат одделните појави, дејствија и движења, односно процеси, во набљудуваниот систем. Во зависност од појавите и дејствијата, односно процесите што ги опишуваат, овие карактеристични големини можат да се поделат на **возбуди** или **влезови** и **реакции** односно **одсиви** или **излези** на набљудуваниот систем. Притоа, влезови или влезни големини на еден систем се сите оние карактеристични физикални големини, кои ги опишуваат надворешните влијанија врз тој систем. Бидејќи влезовите го принудуваат системот на одреден одговор, тие се нарекуваат **возбуди**, а бидејќи воопшто не зависат од самиот систем, уште се нарекуваат **надворешни големини**. Наспроти влезовите, излезите на еден систем се големини кои го опишуваат одговорот на тој систем на некоја возбуда односно го опишуваат неговото движење и поведење и затоа се нарекуваат **одсиви** на системот. Тие секако зависат од системот и од неговите особини и затоа претставуваат **внатрешни големини**. Бројот на излезите на еден систем во општ случај не е фиксен и зависи од бројот на појавите и процесите што се набљудуваат односно следат во тој систем.

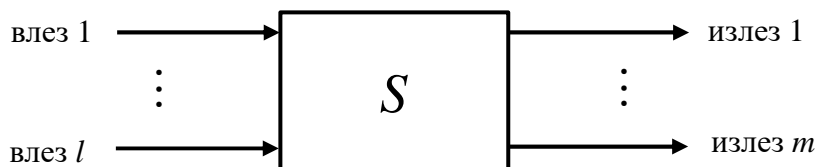
Влезовите и излезите на еден систем, во зависност од неговата природа, може да имаат најразличен физички карактер. Меѓутоа, за целите на анализата на поведението на еден систем воопшто не е битна неговата физичка природа и конкретната конструктивна изведба, како и физичката природа на неговите карактеристични големини. Затоа секој еден систем може симболично да се претстави со блок, како што е тоа сторено на сликите 1-1 и 1-2. Со блоковскиот приказ на системите нивната физичка природа и конструктивната изведба се прикриени, а системите се претставени само преку нивните влезови и излези и врската што постои помеѓу нив, која овде е означена со симболот S . Во овој момент доволно е S да се сфати како оператор кој дејствува врз влезот на набљудуваниот систем со цел да го генерира неговиот соодветен одсив.

За каква и да било математичка анализа на еден систем, потребно е да се располага со неговиот **математички опис** или **математички модел**. Овој математички модел треба на соодветен начин да го опишува поведението на набљудуваниот систем, што значи дека тој треба да биде доволно детален и точен верно да го опишува однесувањето на системот, но едновременно треба да биде и доволно едноставен да ја овозможи саканата анализа. Тоа значи дека помеѓу точноста на еден модел и неговата решливост секогаш се постига одреден компромис, затоа што овие барања се спротивставени.

Вообичаено, математичкиот модел на еден систем ја дефинира врската помеѓу неговите влезови и излези. Влезните големини на еден систем, во зависност од неговата динамика, на одреден начин влијаат врз излезните големини на системот. Една од



Слика 1-1 Систем со еден влез и еден излез

Слика 1-2 Систем со l влезови и m излези

основните и примарни задачи на анализата е да ја определи природата и видот на овој влезно-излезен однос. Математичкиот модел на еден систем се составува врз основа на познавањето на физичките и на другите закони кои владеат во тој систем. Очигледно, составувањето на математичкиот модел на еден систем е сложена и тешка задача, која како резултат има добивање на една или на повеќе релации што ја дефинираат врската помеѓу влезовите и излезите на набљудуваниот систем (по една релација за секој излез на системот) и на тој начин го опишуваат самото поведење на системот. По правило, овие релации се одредени равенки, чиј изглед зависи од типот на системот.

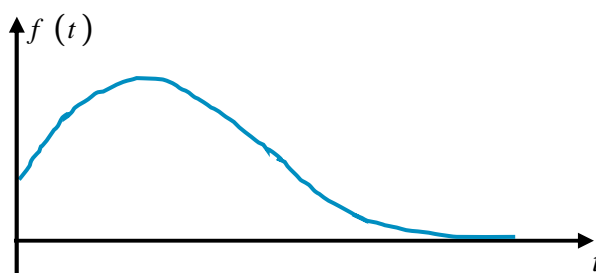
1-1 ПОДЕЛБА НА СИСТЕМИТЕ НА КОНТИНУАЛНИ И ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Вообичаено е влезните и излезните големини на еден систем, кои по правило се одредени функции, т.е. зависно променливи големини, да се нарекуваат влезни и излезни **сигнали** на тој систем. Имено, терминот сигнал генерално се применува на нешто што носи во себе одредена информација, каква што е, на пример, информацијата за поведението на еден физички систем содржана во неговиот излез. Во зависност од видот на овие сигнали, системите може да се поделат на континуални и дискретни системи.

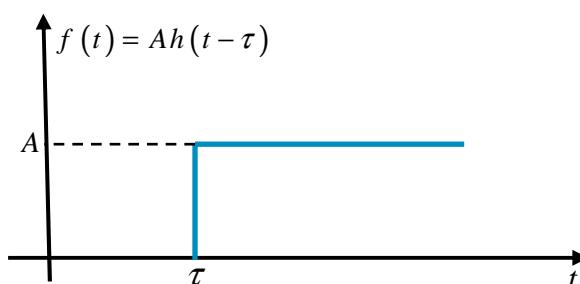
Нека t е независно променлива која може да поприма бесконечно многу вредности од даден интервал (a,b) . Тогаш t се нарекува **континуална независно променлива**. Зависно променливата на еден систем, која зависи од континуална независно променлива, се нарекува **функција од континуална независно променлива** или едноставно **континуален сигнал** и симболично се означува како $f(t)$. На сликата 1-3 графички е прикажан еден произволен континуален сигнал.

Воведениот поим за континуален сигнал треба да се разликува од математичкиот поим за континуалност на една функција, кој имплицира дека математички континуална функција не смее да има прекини во својот домен на дефинираност. Најдобра илустрација за разликата во двата поими за континуална функција и континуален сигнал односно функција од континуална независно променлива е отскочната функција прикажана на сликата 1-4, која не претставува континуална функција во математичка

смисла, затоа што има прекин во точката τ . Меѓутоа, таа е функција од континуалната независно променлива t и во согласност со тоа, претставува континуален сигнал. Други примери за континуални сигнали се електричниот напон $u(t)$ и електричната струја $i(t)$ во едно електрично коло, нивото на течност $h(t)$ и количеството дотек $q(t)$ во еден резервоар, температурата на воздухот T итн. Системите во кои сите сигнали се континуални, се нарекуваат **континуални системи**.



Слика 1-3 Графички приказ на произволен континуален сигнал



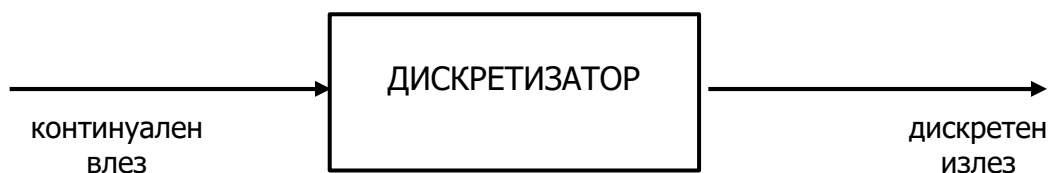
Слика 1-4 Графички приказ на произволна отскочна функција

Аналогно на дадената дефиниција за континуални системи, дискретните системи може да се дефинираат како системи во кои постојат дискретни сигнали. Примери за дискретни системи се дигиталните пресметувачи и радарските системи за следење. За дискретните системи допрва ќе стане збор, затоа што тие се предмет на изучување и анализа во рамките на овој труд.

1-2 ВИДОВИ ДИСКРЕТНИ СИГНАЛИ И ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Во одредени случаи, дискретните сигнали може да соодветствуваат на реални појави и процеси какви што се, на пример, влезните и излезните сигнали во радарските системи за следење, дневната средна вредност на некоја валута во дадена курсна листа, максималната вредност на некој економски индикатор во даден временски период, на пример, еднаш неделно или месечно, големината на пораст на популацијата на одредени видови риби кои се размножуваат само во специфични временски периоди итн. Меѓутоа, многу почесто, дискретните сигнали се добиваат во процесот на преобразба на континуалните сигнали во дискретни. Ваквиот случај се јавува, на пример, кога континуалните сигнали треба да се обработуваат со помош на дигитални сметачи и процесори, кои заради самиот свој принцип на работа претпоставуваат исклучиво дискретни влезови (и генерираат исклучиво дискретни излези). Процесот на

претворање на еден континуален сигнал во дискретен се нарекува **дискретизација** и дискретизацијата претставува еден од основните концепти во теоријата на дигиталното управување и дигиталната обработка на сигнали односно податоци. Уредот со кој што се врши дискретизацијата се нарекува **дискретизатор** и следствено, дискретизаторот е направа која континуалниот сигнал од својот влез го претвора во дискретен сигнал на својот излез, како што тоа во многу идеализирана смисла е прикажано на сликата 1-5. Притоа континуалните сигнали може да бидат дискретизирани на различни начини односно по различни параметри: по ниво, по време и едновремено и по ниво и по време.



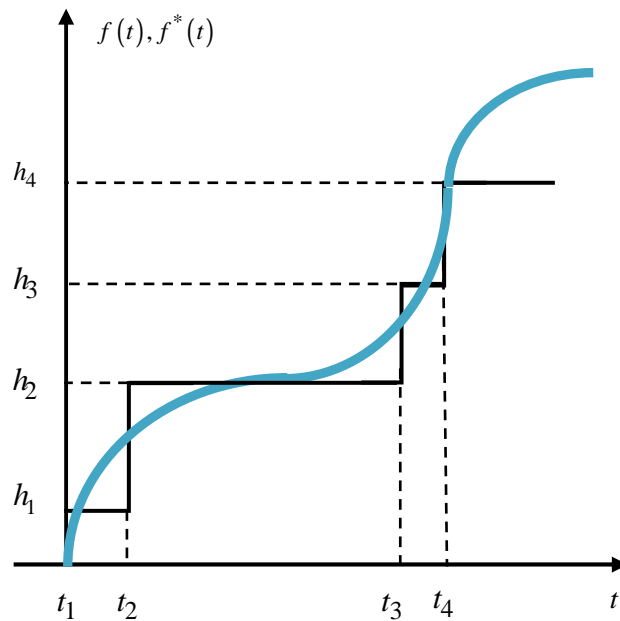
Слика 1-5 Симболичен приказ на еден дискретизатор

Дискретизацијата по ниво е процес при кој вредноста на еден континуален сигнал на некој временски интервал се заменува со одредена однапред фиксирана константна вредност која е најблизу до вредноста на сигналот во тој временски интервал. Сигналот кој е дискретизиран по ниво може да поприма само точно определени и фиксирани вредности од даден опсег. Овие вредности ги дефинираат т.н. **дискретни нивоа** или **нивоа на дискретизација** на дискретизираниот сигнал, а разликата помеѓу две соседни дискретни нивоа се нарекува **чекор на дискретизација**. Во општ случај, чекорот на дискретизација по ниво не е константна големина. По ниво дискретизираниот сигнал скоковито ја менува својата вредност односно минува од едно на друго соседно дискретно ниво во произволни временски мигови, бидејќи овој премин настанува само тогаш кога вредноста на оригиналниот континуален сигнал доволно ќе се доближи или ќе го достигне соседното дискретно ниво. Овие моменти се нарекуваат **моменти на дискретизација по ниво** и тие односно нивното настапување зависи од обликот на континуалниот сигнал што се дискретизира и алгоритмот по кој се извршува дискретизацијата по ниво. На сликата 1-6 е прикажан еден произволен континуален сигнал $f(t)$ кој е дискретизиран по ниво со нееднакви чекори на дискретизација.

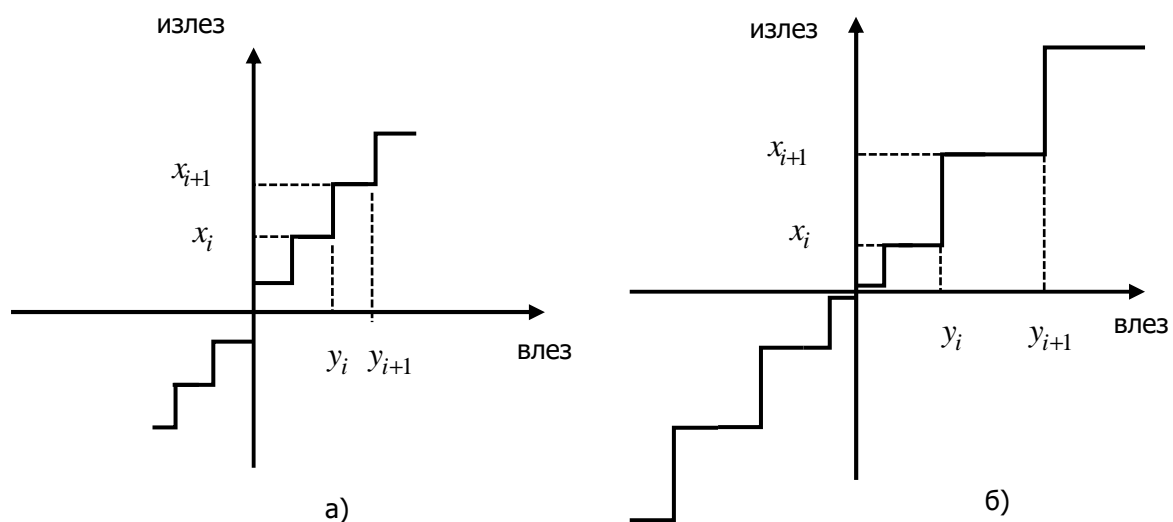
Соодветниот дискретен сигнал добиен во овој процес е означен со $f^*(t)$. Процесот на дискретизација по ниво со неконстантен чекор се нарекува **неуниформна дискретизација по ниво**.

Уредот којшто врши дискретизација по ниво се нарекува **дискретизатор по ниво** и тој има нелинеарна влезно-излезна карактеристика како на сликата 1-7. Нивоата на дискретизација може да бидат еквилистантни, како што е тоа случај на сликата 1-7 под а), и во тој случај се работи за дискретизатор со константен чекор на дискретизација, а самиот процес се нарекува **униформна дискретизација по ниво**, наспроти дискретизаторот со неконстантен чекор на дискретизација, прикажан на сликата 1-7 под б). Во пракса, заради поголема едноставност, нивоата на дискретизација по правило се еквилистантни. Ваква карактеристика може да поседува едно повеќепозициско реле, жичан потенциометар, дигитален претворник и др. Наједноставен вид на униформен дискретизатор по ниво е идеалното двопозициско реле, чија влезно-излезна карактеристика е прикажана на сликата 1-8. Континуалниот сигнал од својот влез, тоа

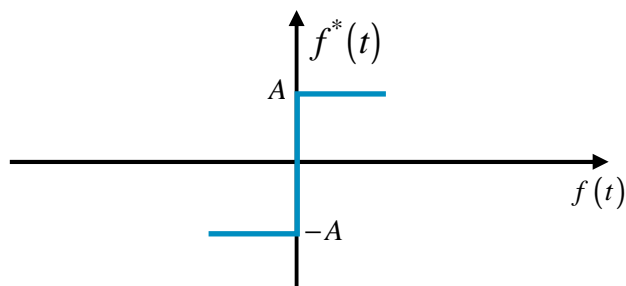
го претвора во дискретен сигнал на својот излез со само две нивоа, како што е покажано на сликата 1-9.



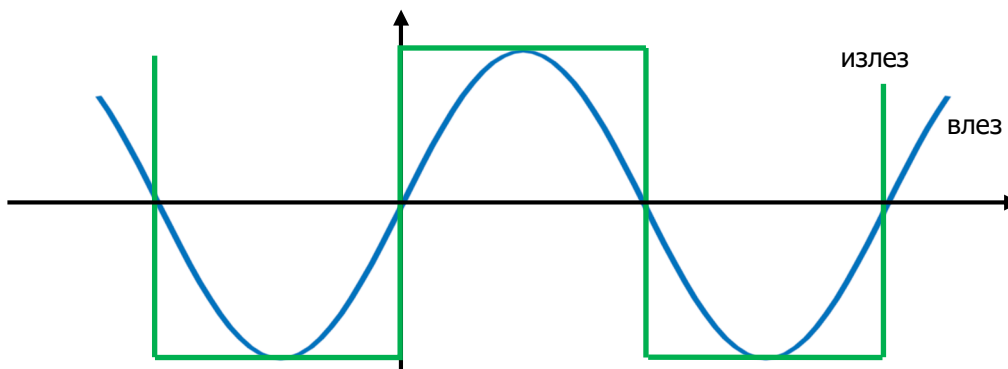
Слика 1-6 Графички приказ на произволен континуален сигнал $f(t)$ и соодветниот дискретен сигнал $f^*(t)$ добиен во процес на дискретизација со неуниформен чекор



Слика 1-7 Влезно-излезна карактеристика на дискретизатор по ниво со: а) константен чекор на дискретизација и б) променлив чекор на дискретизација

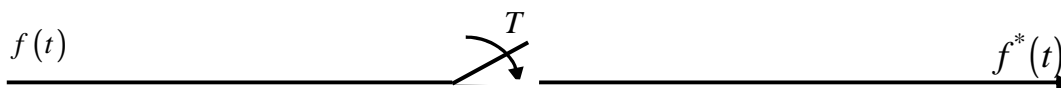


Слика 1-8 Влезно-излезна карактеристика на идеално двопозициско реле



Слика 1-9 Графички приказ на влезот и излезот на релето од сликата 1-8

Дискретизацијата по време е таков процес, при кој даден континуален сигнал се заменува со низа од неговите вредности во точно одредени и фиксирани временски мигови t_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Следствено, еден **по време дискретизиран сигнал** $f^*(t)$ претставува низа составена од дискретните вредности $f(t_k)$ на оригиналниот континуален сигнал што се дискретизира, при што t_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) се т.н. **мигови на дискретизација по време**. Едноставен модел на **дискретизатор по време** е прикажан на сликата 1-10, каде дискретизаторот е претставен со прекинувач кој е отворен цело време освен во миговите на дискретизација t_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), кога, под претпоставка, мигновено се затвора за да го пропушти влезниот сигнал.



Слика 1-10 Симболичен приказ на дискретизатор по време

Нека на влезот од овој дискретизатор е доведен континуалниот сигнал $f(t)$. Тогаш неговиот излез ќе биде низа од броеви кои се јавуваат во миговите на дискретизација t_k и имаат исти вредности како влезниот континуален сигнал во тие мигови. Во општ случај дискретните временски мигови t_k се нееквидистантни. Меѓутоа, во праксата најчесто t_k се еквидистантни временски мигови, односно:

$$t_{k+1} - t_k = T = \text{const.} > 0; T \in \mathfrak{R}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-1)$$

каде што T е т.н. **периода на дискретизација**, па тогаш станува збор за **еквидистантна** или **униформна дискретизација по време**. Периодата на дискретизација T е реципрочна со т.н. **фреквенција на дискретизација** $f_d = 1/T$.

Еквидистантните временски мигови $t_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ се означуваат на следниот начин:

$$t_k = kT; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-2)$$

На сликата 1-11 графички е прикажан еден произволен континуален сигнал $f(t)$ дискретизиран по време, заедно со дискретниот сигнал $f^*(t)$ добиен во тој процес на дискретизација.

Пример 1-1. Нека влезот на дискретизаторот од сликата 1-10 е сигналот:

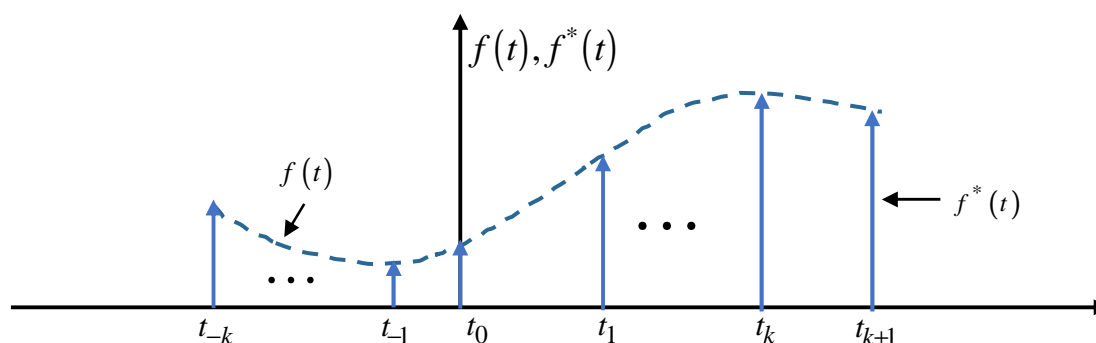
$$f(t) = 2 + 3t + \sin(5t); t \in (-\infty, \infty) \quad (1-3)$$

Да се определи неговиот излез.

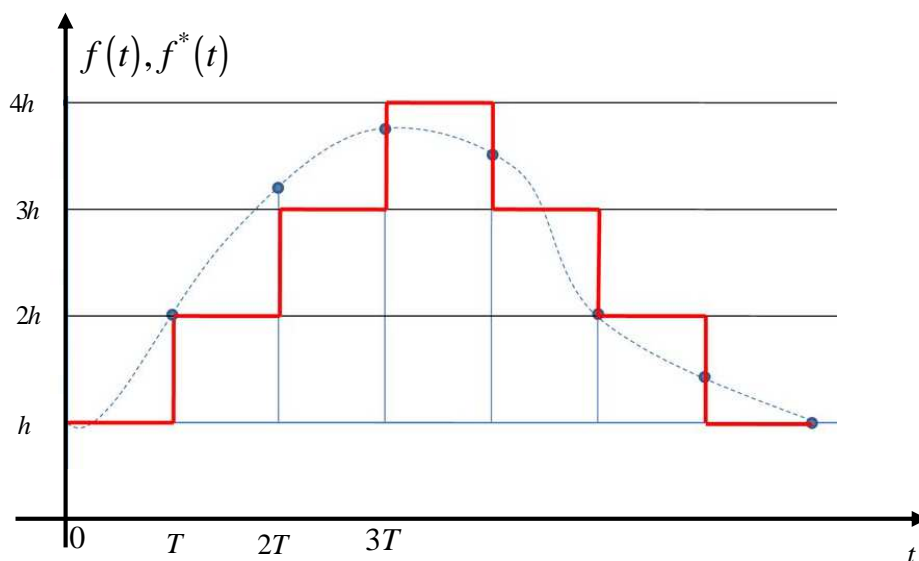
Решение: Излезот на дискретизаторот по време од сликата 1-10 ќе биде низа од броеви кои се јавуваат во миговите на дискретизација $t_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, прикажани на сликата 1-11, и ги имаат следните вредности:

$$f(t_k) = 2 + 3t_k + \sin(5t_k); k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-4)$$

Процесот на **дискретизација и по време и по ниво** ги опфаќа и двете погоре опишани операции. На сликата 1-12 е прикажан произволен континуален сигнал дискретизиран и по време и по ниво, што значи дека е заменет со низа од дискретни вредности од даден опсег најблиски до неговата стварна вредност во миговите на дискретизација. Ваквите сигнали уште се нарекуваат **дигитални сигнали**.



Слика 1-11 Графички приказ на произволен континуален сигнал $f(t)$ дискретизиран по време со неуниформна дискретизација и соодветниот дискретен сигнал $f^*(t)$ добиен во тој процес на дискретизација



Слика 1-12 Графички приказ на континуален сигнал $f(t)$ дискретизиран и по ниво и по време и соодветниот дигитален сигнал $f^*(t)$ добиен во тој процес на дискретизација

Во зависност од видот дискретни сигнали кои постојат во еден дискретен систем, дискретните системи може да се поделат на:

релејни дискретни системи – дискретни системи во кои постојат сигнали дискретизирани по ниво

импулсни дискретни системи – дискретни системи во кои постојат сигнали дискретизирани по време и

дигитални дискретни системи – системи во кои постојат сигнали дискретизирани и по ниво и по време

Релејните системи претставуваат специјален случај на **нелинеарни дискретни системи** и како такви нема да бидат разгледувани во рамките на овој труд. Дигиталните дискретни системи претставуваат релејни импулсни системи и како такви ги обединуваат својствата на останатите две класи дискретни системи. Тие слободно може да се набљудуваат како специјален случај на **нелинеарни импулсни дискретни системи** па, затоа, исто така нема да бидат изучувани во рамките на овој труд. Вниманието во овој труд ќе биде насочено исклучиво кон импулсните дискретни системи, кои во продолжение насекаде во текстот ќе се нарекуваат едноставно само со **дискретни системи** и кон дигиталните системи на автоматско управување под кои се подразбираат системи на автоматско управување со дигитален управувачки дел.

1-3 ОСНОВНИ ПОИМИ ВРЗАНИ ЗА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

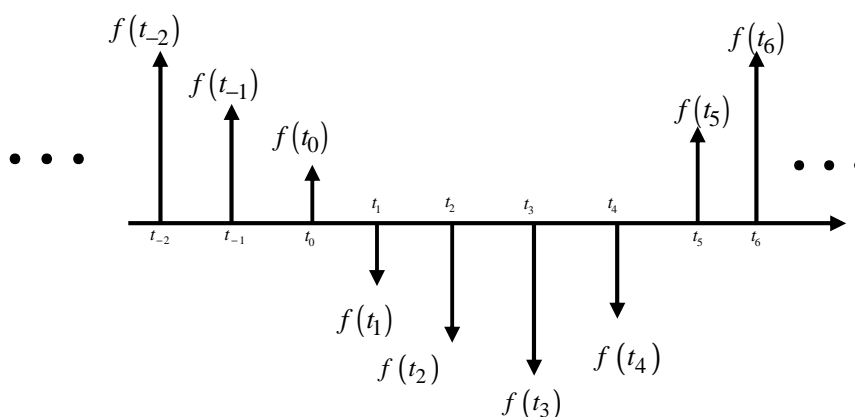
Со оглед на класата дискретни системи која се набљудува во рамките на овој труд, дефиницијата на еден дискретен сигнал може да се даде на аналоген начин како и дефиницијата на континуален сигнал во поглавјето 1-1. За таа цел се воведува поимот на дискретна независно променлива големина. Ако една независно променлива големина може да поприма само одреден конечен број или најмногу преброиво бесконечно вредности од својот опсег, тогаш таа се нарекува **дискретна независно променлива**. Дискретната независно променлива симболично се означува со t_k , каде

што k е цел број, т.е. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Зависно променливата големина f , која е функција од една дискретна независно променлива, се нарекува **функција од дискретна независно променлива** или едноставно **дискретен сигнал** и таа симболично се означува со $\{f(t_k)\}$. Функцијата $\{f(t_k)\}$ е дефинирана само во дискретните временски мигови t_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), додека помеѓу тие мигови таа не е дефинирана. На сликата 1-13 е прикажан еден произволен дискретен сигнал и од неа е очигледно дека тој е претставен со множеството свои вредности во миговите t_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), што значи претставува една низа:

$$\{\dots, f(t_{-k}), \dots, f(t_{-2}), f(t_{-1}), f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_k), \dots\} \quad (1-5)$$

Меѓутоа, заради поголема едноставност на записот, функциите од дискретна независно променлива се означуваат упросто како $f(t_k)$. На ова место ќе потенцираме дека не е исправно да се смета дека функцијата $f(t_k)$ е нула помеѓу миговите на дискретизација, наместо недефинирана.

Примери за дискретни сигнали односно функции од дискретна независно променлива се радарските сигнали, сигналите на сонарските системи кои се користат за подводно следење и лоцирање цели, сигналите во еден дигитален пресметувач итн. И курсната листа претставува дискретна информација, затоа што се менува во точно определени временски интервали, на пример еднаш дневно. Системи чии сите сигнали се дискретни, се **чисто дискретни системи**. Тоа значи дека постои и друга класа дискретни системи, но за неа ќе зборуваме подоцна.



Слика 1-13 Графички приказ на функција од дискретна независно променлива

Пример 1-2. Да се состави математичкиот модел на еден нумерички интегратор за приближно пресметување на определениот интеграл:

$$x(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau \quad (1-6)$$

Решение: Приближното нумеричко интегрирање се применува во оние случаи кога подинтегралната функција $y(t)$ нема примитивна функција, па интегралот (1-6) не

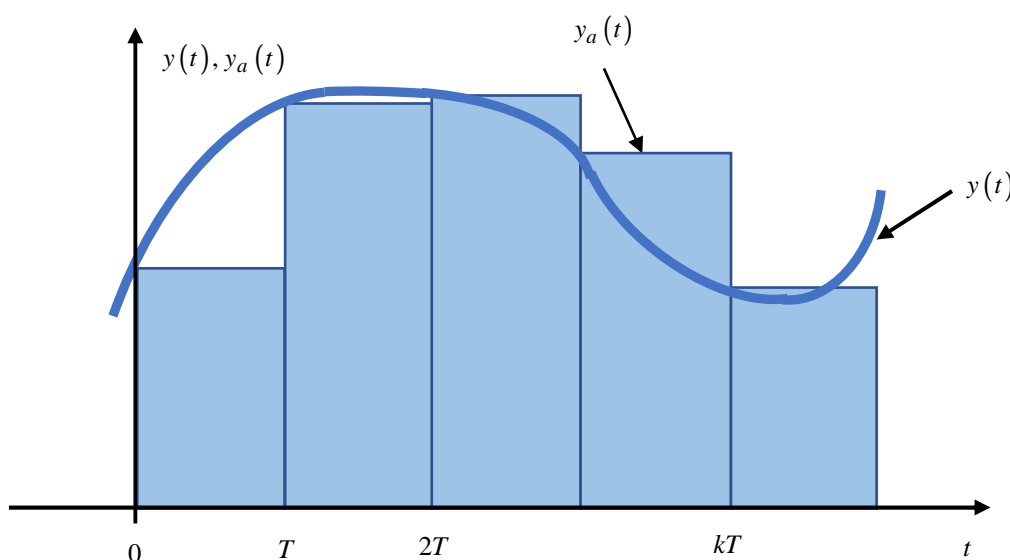
може да се определи во затворен аналитички облик. Тогаш стандардна процедура е интегрираната функција $y(t)$ најнапред да се апроксимира со дел по дел константна функција $y_a(t)$, како што е покажано на сликата 1-14. Притоа функцијата $y_a(t)$ е зададена со аналитичкиот израз:

$$y_a(t) = y(kT); kT \leq t < kT + T; k = 0, 1, 2, \dots \quad (1-7)$$

Од математиката е познато дека определениот интеграл (1-6), кој ја дефинира површината помеѓу кривата $y(t)$ и апсисната оска t на интервалот $(0, kT)$, може да се апроксимира со сумата од површините на елементарните правоаголници со ширина T и височина $y(iT)$; $i = 0, 1, 2, \dots, kT - T$, односно:

$$x(kT) = \int_0^{kT} y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^{k-1} Ty(iT) \quad (1-8)$$

Читателот лесно може да воочи дека овде се работи за вообичаената дефиниција на определениот интеграл, кој се добива кога во (1-8) се пушти T да тежи кон нулата и k да тежи кон бесконечност.



Слика 1-14 Графички приказ на процесот на нумеричко интегрирање

Со цел да се пресмета вредноста на интегралот (1-6) во $t = kT$ според релацијата (1-8), потребно е познавање на вкупно k претходни вредности на подинтегралната функција $y(t)$: $y(0), y(T), y(2T), \dots, y(kT - T)$. Ако равенката (1-8) се програмира на дигитален пресметувач, тоа автоматски значи и ангажирање значителен мемориски простор. Затоа многу поедноставно е интегралот (1-6), наместо по формулата (1-8), да се пресметува по формулата што се добива кога изразот (1-8) за $x(kT)$ се одземе од соодветниот израз за $x(kT + T)$:

$$x(kT + T) = \int_0^{kT+T} y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^k Ty(iT) \quad (1-9)$$

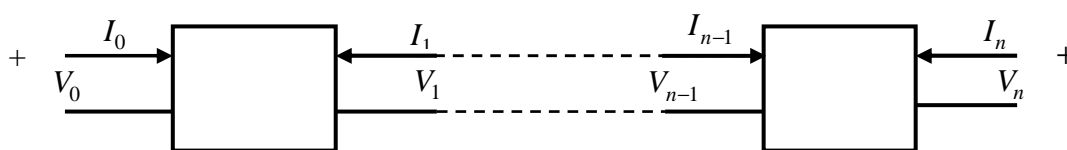
Тогаш се добива равенката:

$$\begin{aligned}
 x(kT+T) - x(kT) &= \int_0^{kT+T} y(\tau) d\tau - \int_0^{kT} y(\tau) d\tau = \int_0^T y(\tau) d\tau \approx \\
 &\approx \sum_{i=0}^k Ty(iT) - \sum_{i=0}^{k-1} Ty(iT) = Ty(kT); \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{1-10}$$

која овозможува вредноста $x(kT+T)$ на интегралот $x(t)$ во секој нареден миг $t = kT + T$ да се определи само врз основа на неговата претходна вредност $x(kT)$ и претходната вредност на интегрираната функција $y(t)$ во мигот $t = kT$; $k = 0, 1, 2, \dots$ Програмирањето на релацијата (1-10) на дигитален пресметувач, наместо релацијата (1-8), значи значителна заштеда во мемориски простор, посебно во случаите кога k е голем број, зашто овде постојано треба да се паметат само две претходни вредности. \square

Математичкиот модел на нумеричкиот интегратор е модел на еден дискретен систем и претставува **диферентна равенка**. Како што може да се забележи, во диферентната равенка односно математичкиот модел на еден дискретен систем фигурираат дискретни вредности на влезот и излезот на тој систем. Меѓутоа, за диферентните равенки допрва ќе зборуваме.

Пример 1-3. Да се состави математички модел на електричната мрежа од четворокрајници, прикажана на сликата 1-15.



Слика 1-15 Моделирање на електрична мрежа од четворокрајници

Решение: Секој четворокрајник во мрежата е опишан со следниот модел:

$$\begin{bmatrix} V_k \\ -I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{k-1} \\ I_{k-1} \end{bmatrix}; \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{1-11}$$

каде што:

$$A_k = \left. \frac{V_k}{V_{k-1}} \right|_{I_{k-1} \equiv 0}; \quad B_k = \left. \frac{V_k}{I_{k-1}} \right|_{V_{k-1} \equiv 0}; \quad C_k = \left. \frac{-I_k}{V_{k-1}} \right|_{I_{k-1} \equiv 0}; \quad D_k = \left. \frac{-I_k}{I_{k-1}} \right|_{V_{k-1} \equiv 0} \tag{1-12}$$

а негативниот знак крај струјата I_k се должи на фактот дека излезната струја од претходниот четворокрајник е влезна струја во следниот. На овој начин може директно да се пресмета врската помеѓу излезната струја и напон на последниот четворокрајник и влезната струја и напон на првиот четворокрајник во дадената мрежа, како производ на матриците на параметрите на сите четворокрајници. \square

Математичкиот модел (1-11) е исто така модел на дискретен систем, затоа што содржи две диферентни равенки. (Бројот на равенките во математичкиот модел е поврзан со бројот излези во системот, кои во конкретниот пример се два.) Меѓутоа, она што е карактеристично во овој случај, е дека дискретната независно променлива на моделот не претставува време, туку положба на четворокрајникот во мрежата. Тоа значи дека во општ случај дискретната независно променлива големина воопшто не мора да биде време, но најчесто е, заради природата на системите кои ги анализираме.

1-4 ПОДЕЛБА НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

Поделбата на дискретните системи може да се врши на различни начини, според различни критериуми. Некоја поделба е суштинска, додека друга е помалку суштинска. Математичкиот модел на еден дискретен систем, за кој веќе констатиравме дека е равенка која ја дефинира врската помеѓу влезот и излезот на тој систем, ќе зависи од типот на дискретниот систем. Во продолжение ќе изложиме неколку основни поделби на дискретните системи и соодветните математички модели на истите. Ќе почнеме од поделбата која не е суштинска, меѓутоа се наметна самата по себе низ претходните два примери, а тоа е **поделбата на дискретните системи според бројот на влезови и излези**. Така, во согласност со овој критериум, дискретните системи може да се поделат на **системи со еден влез и еден излез** и **системи со повеќе влезови и повеќе излези**. Системите со еден влез и еден излез понекогаш во литературата се нарекуваат **едновеличински системи**, додека системите со повеќе влезови и повеќе излези се нарекуваат **повеќевеличински системи**. Ние сметаме дека е посоодветен првиот назив. Математичкиот модел на систем со еден влез и еден излез е една равенка, која ја дефинира врската помеѓу единствениот влез и единствениот излез на тој систем, додека математичкиот модел на еден дискретен систем со повеќе влезови и повеќе излези е систем од соодветни влезно-излезни релации. Минималниот број потребни равенки во моделот одговара на бројот излези на системот. Моделот може да има повеќе равенки отколку што има излези, но не смее да има помалку. Ако има помалку равенки, тој нема целосно да го опишува набљудуваниот систем. Ако има повеќе, вишокот равенки можат да се искористат за други цели, на пример проверка на добиениот модел. Нумеричкиот интегратор беше пример за дискретен систем со еден влез и еден излез, додека моделот на електричната мрежа од каскадно врзани четворокрајници беше пример за дискретен систем со повеќе влезови и излези. Бројот на влезови и излези кај еден дискретен систем не е никако меѓусебно обусловен. Дискретниот систем може да има ист број влезови и излези, помал број влезови од излези и помал број излези од влезови. Бројот на влезовите и излезите на еден систем зависи од тоа кои величини во системот сакаме да ги набљудуваме, а кои не, односно чие влијание го земаме предвид, а чие го занемаруваме.

Друга поделба на дискретните системи е **поделбата на динамички и нединамички дискретни системи** и оваа поделба е суштинска. Пример за нединамички дискретен систем е систем кај кој излезот во даден временски миг зависи исклучиво од вредноста на влезот на системот во тој ист временски миг. Математичкиот модел на еден нединамички дискретен систем е обична алгебарска равенка од следниот облик:

$$x(kT) = b_1 y(kT) + b_0; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1-13)$$

каде што $y(kT)$ е влез во системот, $x(kT)$ е неговиот излез, додека b_0 и b_1 се параметри на системот. Математичкиот модел (1-13) е модел на нединамички дискретен систем со еден влез и еден излез.

Пример за динамички дискретен систем е систем кај кој излезот во даден временски миг зависи и од идни и/или минати вредности на влезот во тој систем. Таков е моделот на електричната мрежа во примерот 1-3, во кој излезот на моделот во мигот $t = kT$ зависи од влезот на системот во претходниот миг $t = kT - T$. Притоа, читателот лесно може да забележи дека под терминот влез и излез во овој пример подразбираме всушност вектор на влезови и вектор на излези со димензија 2, бидејќи моделот има два влеза и два излези. Математичкиот модел на еден дискретен динамички систем е диферентна равенка или систем од диферентни равенки, во зависност од бројот на излези на тој систем. Меѓу нединамичките и динамичките дискретни системи, многу поинтересни се динамичките, затоа што се менува нивното поведење со текот на времето. Ние во рамките на овој труд ќе ги набљудуваме динамичките дискретни системи. Притоа, во случајот на дискретен систем со повеќе влезови и излези, доволно е неговиот математички модел да содржи барем една диферентна равенка, за тој систем да се смета динамички.

Кога сме веќе кај поделбата на дискретните системи на нединамички и динамички, мораме да ја споменеме и поделбата на системите на **дискретни системи без меморија** и **дискретни системи со меморија**. Очигледно, нединамичките дискретни системи се системи без меморија, затоа што не мора да паметат никакви дополнителни вредности на влезот во системот освен тековната, додека динамичките дискретни системи се системи со меморија, затоа што освен тековните, паметат и други минати и/или идни вредности на влезот. Моделот (1-10) на нумеричкиот интегратор е пример за динамички дискретен систем со меморија еден, затоа што памети само вредност на влезот во минатиот миг на време. Оваа меморија на еден дискретен динамички систем може да биде произволна, но е конечна.

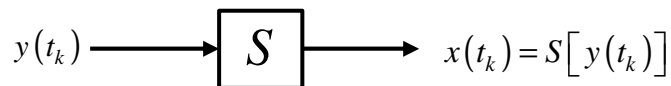
Следната поделба на дискретните системи, која е тесно поврзана со динамичките дискретни системи, е **поделбата на неантиципативни и антиципативни дискретни системи**. Неантиципативни дискретни системи се динамички дискретни системи чиј излез зависи само од минати вредности на влезот. Овие системи немаат можност за предвидување. Сите системи со кои се сретнуваме се неантиципативни системи и затоа уште се нарекуваат **реални дискретни системи или каузални системи**. Антиципативните дискретни системи се динамички дискретни системи чиј излез зависи и од идни вредности на влезот. Тоа се системи со можност за предвидување. Ние сèуште не сме во состојба да направиме такви системи, и затоа тоа се за сега **нереални дискретни системи**. Меѓутоа, тоа не значи дека во иднина нема да има и такви системи. Доколку одзивот на еден антиципативен дискретен систем зависи од тековната, минатите и идни вредности на влезот, таквиот систем се нарекува **некаузален дискретен систем**. Доколку неговиот одзив зависи исклучиво од тековната и од идни вредности на влезот и воопшто не зависи од минатите вредности на влезот, таквиот систем се нарекува **антикаузален дискретен динамички систем**. Моделот на нумеричкиот интегратор е пример за неантиципативен или каузален дискретен систем, исто како и моделот на електричната мрежа. Моделот на еден некаузален (антиципативен) дискретен систем со еден влез $y(kT)$ и еден излез $x(kT)$ би можел да изгледа како следната диферентна равенка:

$$x(kT) = \frac{1}{2}y(kT - T) + \frac{1}{2}y(kT + T); k = 0, 1, 2, \dots \quad (1-14)$$

Конечно, следната равенка претставува модел на еден антикаузален (антиципативен) систем:

$$\begin{aligned}
 a_2x(kT + 2T) + a_1x(kT + T) + a_0x(kT) = \\
 = b_1y(kT + 4T) + b_0y(kT + 3T); k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{1-15}$$

Следната поделба на дискретните системи е суштинска. Тоа е **поделбата на линеарни и нелинеарни дискретни системи**. Нека е даден еден дискретен систем со еден влез $y(t_k)$ и еден излез $x(t_k)$, како на сликата 1-16.



Слика 1-16 Блоковски приказ на еден дискретен систем со еден влез и еден излез

Нека $x_1(t_k)$ е одзивот на тој систем на влезот $y_1(t_k)$, а $x_2(t_k)$ е одзивот на тој систем на влезот $y_2(t_k)$. Тогаш за дискретниот систем од сликата 1-16 се вели дека е линеарен, ако неговиот одзив $x(t_k)$ на линеарна комбинација од влезовите $y_1(t_k)$ и $y_2(t_k)$, односно на влезот:

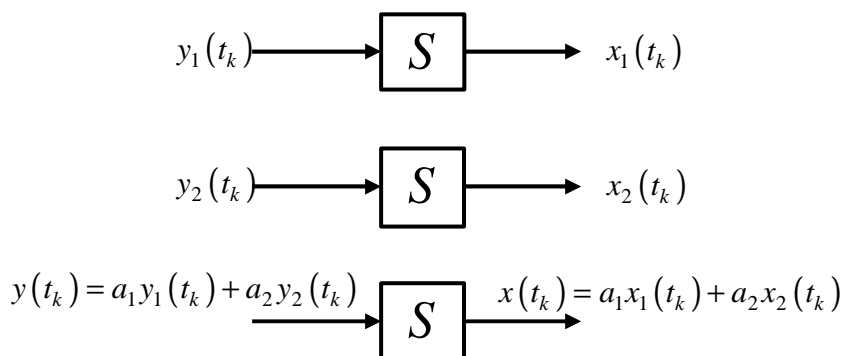
$$y(t_k) = a_1y_1(t_k) + a_2y_2(t_k) \tag{1-16}$$

каде што a_1 и a_2 се произволни реални константи, $a_1, a_2 = const. \in \mathfrak{R}$, под претпоставка дека системот првобитно бил во мирување, е еднаков на истата таа линеарна комбинација од неговите одсиви $x_1(t_k)$ и $x_2(t_k)$ на одделните влезови $y_1(t_k)$ и $y_2(t_k)$, т.е.:

$$x(t_k) = a_1x_1(t_k) + a_2x_2(t_k) \tag{1-17}$$

За линеарните дискретни системи важи принципот на суперпозиција.

Својството за линеарност на еден дискретен систем е илустрирано на сликата 1-17. Дискретните системи кои не го поседуваат својството се нарекуваат **нелинеарни дискретни системи**. За нелинеарните дискретни системи не важи принципот на суперпозиција.



Слика 1-17 Илустрација на својството за линеарност на еден дискретен систем со еден влез и еден излез

Пример 1-4. Да се испита дали нумеричкиот интегратор од примерот 1-2, каде што T е позитивна реална константа, е линеарен дискретен систем.

Решение: Ако $x_1(kT)$ и $x_2(kT)$ се одсиви на набљудуваниот систем од примерот 1-2 на влезовите $y_1(kT)$ и $y_2(kT)$, соодветно, тогаш во согласност со (1-10) ќе важи:

$$x_1(kT + T) - x_1(kT) = Ty_1(kT) \quad (1-18)$$

и:

$$x_2(kT + T) - x_2(kT) = Ty_2(kT) \quad (1-19)$$

Нека сега на влезот од нумеричкиот интегратор со моделот (1-10) се доведе сигналот:

$$y(kT) = a_1 y_1(kT) + a_2 y_2(kT) \quad (1-20)$$

каде што a_1 и a_2 се произволни реални константи, $a_1, a_2 = \text{const.} \in \mathfrak{R}$. Неговиот одсив $x(kT)$ на овој влез, согласно (1-10), мора да ја задоволува диферентната равенка:

$$x(kT + T) - x(kT) = Ty(kT) = T[a_1 y_1(kT) + a_2 y_2(kT)] \quad (1-21)$$

Меѓутоа, со воведување на изразите (1-18) и (1-19) на десната страна од равенката (1-21) се добива:

$$\begin{aligned} x(kT + T) - x(kT) &= Ty(kT) = T[a_1 y_1(kT) + a_2 y_2(kT)] = \\ &= a_1 Ty_1(kT) + a_2 Ty_2(kT) = a_1 [x_1(kT + T) - x_1(kT)] + a_2 [x_2(kT + T) - x_2(kT)] = \\ &= [a_1 x_1(kT + T) + a_2 x_2(kT + T)] - [a_1 x_1(kT) + a_2 x_2(kT)] \end{aligned} \quad (1-22)$$

од каде непосредно следува дека:

$$x(kT) = a_1 x_1(kT) + a_2 x_2(kT) \quad (1-23)$$

Со други зборови, нумеричкиот интегратор од примерот (1-2) е линеарен дискретен систем. Математичкиот модел на еден линеарен дискретен динамички систем е линеарна диферентна равенка (или систем од линеарни диферентни равенки за дискретен динамички систем со повеќе влезови и излези). □

Пример 1-5. Даден е дискретен динамички систем со еден влез $y(kT)$ и еден излез $x(kT)$ опишан со моделот:

$$x(kT + T) + \sqrt{x(kT)} = y(kT) \quad (1-24)$$

Да се покаже дека овој систем е нелинеарен.

Решение: Нека $x_1(kT)$ е одзив на набљудуваниот дискретен систем на влез $y_1(kT)$. Тогаш $y_1(kT)$ и $x_1(kT)$ мора да ја задоволуваат диферентната равенка на динамичко поведење на тој систем (1-24), односно мора да важи:

$$x_1(kT+T) + \sqrt{x_1(kT)} = y_1(kT) \quad (1-25)$$

Нека сега $x_2(kT)$ е одзив на истиот дискретен систем на влез $y_2(kT)$. Тогаш $y_2(kT)$ и $x_2(kT)$ исто така ја задоволуваат равенката (1-24), т.е. важи:

$$x_2(kT+T) + \sqrt{x_2(kT)} = y_2(kT) \quad (1-26)$$

За да се испита линеарноста на набљудуваниот дискретен систем, треба да се определи неговиот одзив $x(kT)$ на влезот $y(kT)$, даден со (1-20). Притоа ќе важи релацијата:

$$x(kT+T) + \sqrt{x(kT)} = y(kT) = a_1 y_1(kT) + a_2 y_2(kT) \quad (1-27)$$

Ако набљудуваниот систем е линеарен, неговиот одзив на влезот (1-20) ќе биде даден со (1-23). Меѓутоа, со воведување на (1-25) и (1-26) во десната страна од (1-27) се добива:

$$\begin{aligned} x(kT+T) + \sqrt{x(kT)} &= y(kT) = a_1 y_1(kT) + a_2 y_2(kT) = \\ &= a_1 [x_1(kT+T) + \sqrt{x_1(kT)}] + a_2 [x_2(kT+T) + \sqrt{x_2(kT)}] = \\ &= [a_1 x_1(kT+T) + a_2 x_2(kT+T)] + [a_1 \sqrt{x_1(kT)} + a_2 \sqrt{x_2(kT)}] \neq \\ &\neq [a_1 x_1(kT+T) + a_2 x_2(kT+T)] + \sqrt{a_1 x_1(kT) + a_2 x_2(kT)} \end{aligned} \quad (1-28)$$

со што непобитно се утврдува дека набљудуваниот дискретен систем е нелинеарен.

Математичкиот модел на еден нелинеарен дискретен динамички систем е нелинеарна диферентна равенка или систем од нелинеарни диферентни равенки за дискретен динамички систем со повеќе влезови и излези. Притоа, доволно е моделот на повеќевеличинскиот систем да содржи барем една нелинеарна равенка, за системот да биде нелинеарен. □

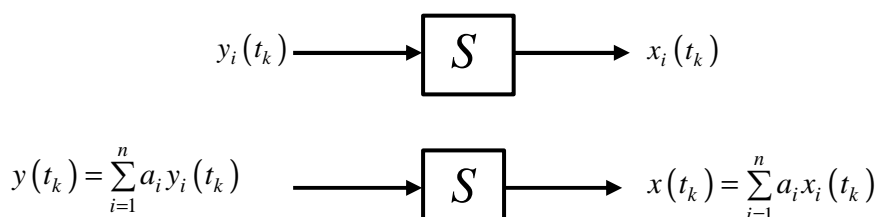
Својството на линеарност на еден дискретен систем може да се обопшти и на случајот на линеарна комбинација од произволен, но конечен број n влезови. Така, ако $x_i(t_k)$ е одзивот на еден систем на влез $y_i(t_k)$, тогаш набљудуваниот систем ќе биде линеарен, доколку неговиот одзив на линеарната комбинација од n влезови:

$$y(t_k) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t_k) \quad (1-29)$$

каде што a_i се произволни реални константи, $a_i = \text{const.} \in \mathfrak{R}$; $i = 1, 2, \dots, n$ ќе биде истата таа линеарна комбинација од одзивите $x_i(t_k)$ на одделните влезови $y_i(t_k)$:

$$x(t_k) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t_k) \quad (1-30)$$

Ова е илустрирано на сликата 1-18.



Слика 1-18 Илустрација на својството за линеарност на еден дискретен систем со повеќе влезови и еден излез

Својството на линеарност на еден дискретен систем може да се искажи и на малку поинаков начин. Доколку $x_1(t_k)$ и $x_2(t_k)$ се одсиви на набљудуваниот систем на влезовите $y_1(t_k)$ и $y_2(t_k)$, тогаш за системот велиме дека е линеарен ако и само ако тој едновременно ги исполнува следните два услови:

$$S[y_1(t_k) + y_2(t_k)] = S[y_1(t_k)] + S[y_2(t_k)] = x_1(t_k) + x_2(t_k) \quad (1-31)$$

и:

$$S[ay(t_k)] = aS[y(t_k)] = ax(t_k) \quad (1-32)$$

каде што S го означува описот односно моделот на набљудуваниот дискретен систем, а a е произволна реална константа. (Теоретски, a може да биде и комплексен број, меѓутоа таквиот систем не може физички да се реализира.)

Релацијата (1-31) го опишува **својството на адитивност** на еден систем, според кое системот ќе биде адитивен доколку неговиот одзив на збир од влезови претставува збир од одзивите на одделните влезови. Притоа бројот влезови може да биде и произволен, но конечен. Релацијата (1-32) го опишува **својството на хомогеност** на еден дискретен систем, според кое одзивот на еден хомоген систем на a -пати засилен или ослабен влез е еднаков на одзивот на конкретниот оригинален влез засилен односно ослабен исто така a -пати. (Дали соодветните сигнали ќе бидат засилени или ослабени зависи од големината на константата a ; ако $a > 1$ сигналот ќе биде засилен, додека за $a < 1$ истиот ќе биде ослабен.) Овие две својства се обединуваат во својството за линеарност, односно суперпозиција според релацијата:

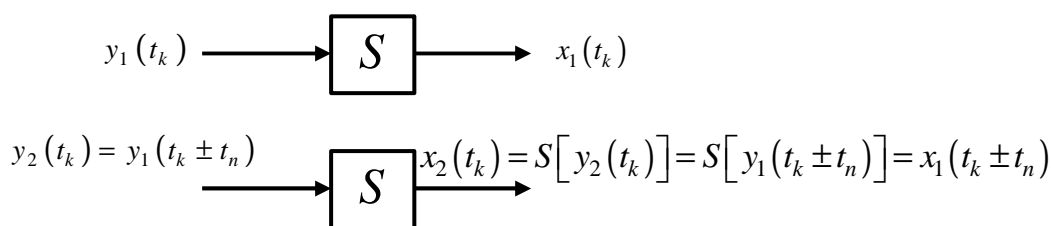
$$x(t_k) = S[y(t_k)] = S\left[\sum_{i=1}^n a_i y_i(t_k)\right] = \sum_{i=1}^n a_i S[y_i(t_k)] = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t_k) \quad (1-33)$$

која важи за најопштиот случај на нееквидистантни дискретни мигови t_k и произволен, но конечен број n влезови.

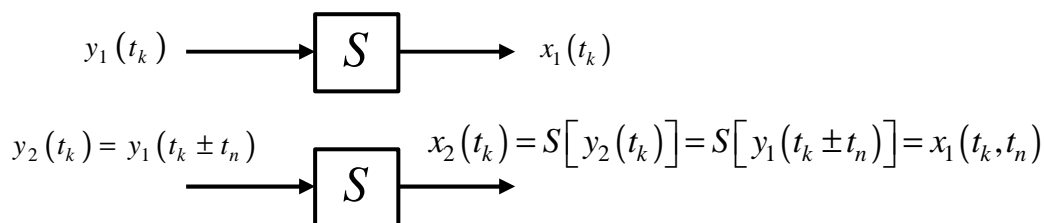
Следната поделба на дискретните системи е поделбата на стационарни и нестационарни дискретни системи. Нека $x(t_k)$ е одзив на дискретниот систем од сликата 1-16 на влезот $y(t_k)$. Тогаш за системот се вели дека е **стационарен дискретен систем**, доколку неговиот одзив на влезот $y(t_k \pm t_n)$, каде што n е цел број, е $x(t_k \pm t_n)$ за секое t_k , t_n и $y(t_k)$, при што за системот се претпоставува дека пред доведувањето на соодветниот влез бил во мирување, т.е. немал во себе акумулирано енергија. Својството на стационарност на еден дискретен систем е илустрирано на сликата 1-19.

Својството на стационарност на еден систем кажува дека односот влез - излез на тој систем не зависи од времето. Тоа значи дека врската влез – излез на еден стационарен дискретен систем ќе биде иста и во мигот t_k и во мигот $t_k \pm t_n$, без оглед на тоа дали системот е линеарен или не. Со други зборови, одзивот на еден стационарен дискретен систем $x_1(t_k)$ на влез $y_1(t_k) = y(t_k \pm t_n)$ не зависи од мигот на појавувањето на влезот односно од временските мигови t_k и t_n , туку само од разликата $t_k - t_n$ или збирот $t_k + t_n$:

$$x_1(t_k) = S[y_1(t_k)] = S[y(t_k \pm t_n)] = x(t_k \pm t_n) \quad (1-34)$$



Слика 1-19 Илустрација на својството за стационарност на еден дискретен систем со еден влез и еден излез



Слика 1-20 Илустрација на еден нестационарен дискретен систем со еден влез и еден излез

Математичкиот модел на еден стационарен дискретен динамички систем е диферентна равенка со константни коефициенти – коефициенти кои не зависат од дискретната независно променлива t_k .

Дискретните системи кои не го исполнуваат условот за стационарност се нарекуваат **нестационарни дискретни системи**. Одзивот на еден нестационарен дискретен систем $x_1(t_k)$ на влез $y_1(t_k) = y(t_k \pm t_n)$ зависи од мигот на појавувањето на влезот односно од временските мигови t_k и t_n :

$$x_1(t_k) = S[y_1(t_k)] = S[y(t_k \pm t_n)] = x(t_k, t_n) \quad (1-35)$$

Математичкиот модел на еден нестационарен дискретен динамички систем е диферентна равенка со коефициенти кои зависат од дискретната независно променлива t_k . Со други зборови, дискретната независно променлива t_k фигурира експлицитно во математичкиот модел на еден нестационарен дискретен систем, додека не фигурира експлицитно во моделот на стационарен дискретен систем.

Пример 1-6. Да се провери кој од дискретните системи со еден влез и еден излез, опишани со моделите:

$$x(kT+T) - x^2(kT) = y(kT) \quad (1-36)$$

$$x(kT+T) - x(kT) = kTy(kT) \quad (1-37)$$

е стационарен.

Решение: Нека $x_1(kT)$ е одзив на системот со модел (1-36) на влезот $y_1(kT)$. Тогаш важи:

$$x_1(kT+T) - x_1^2(kT) = y_1(kT) \quad (1-38)$$

а, оттука, за $k \rightarrow k \pm n$ се добива:

$$x_1(kT+T \pm nT) - x_1^2(kT \pm nT) = y_1(kT \pm nT) \quad (1-39)$$

Нека сега на влезот од системот се доведе сигналот $y_2(kT) = y_1(kT \pm nT)$. Одзивот $x_2(kT)$ на системот (1-36) на овој влез ќе биде решение на равенката (1-36), односно:

$$x_2(kT+T) - x_2^2(kT) = y_2(kT) = y_1(kT \pm nT) \quad (1-40)$$

Меѓутоа, решение на оваа равенка е и $x_1(kT \pm nT)$, што лесно се покажува со изедначување на левите страни од равенките (1-39) и (1-40):

$$x_2(kT+T) - x_2^2(kT) = x_1(kT+T \pm nT) - x_1^2(kT \pm nT) \quad (1-41)$$

Следствено:

$$x_2(kT) = x_1(kT \pm nT) \quad (1-42)$$

Оттука може да се заклучи дека моделот (1-36) опишува стационарен дискретен динамички систем.

Ако сега сигналот $y_2(kT) = y_1(kT \pm nT)$ се доведе на влезот од системот (1-37), тогаш одзивот на овој систем мора да ја задоволува равенката (1-37). Оттука ќе биде:

$$\begin{aligned} x_2(kT + T) - x_2(kT) &= kTy_2(kT) = kTy_1(kT \pm nT) = \\ &= (kT \pm nT \mp nT) y_1(kT \pm nT) = (kT \pm nT) y_1(kT \pm nT) \mp nTy_1(kT \pm nT) \neq \\ &\neq x_1(kT \pm nT + T) - x_1(kT \pm nT) \end{aligned} \quad (1-43)$$

Од (1-43) е очигледно дека $x_2(kT) = x_1(kT \pm nT)$ не претставува решение на диферентната равенка (1-37). Следствено, (1-37) е модел на нестационарен дискретен систем. □

Пример 1-7. Да се испита стационарноста на дискретниот систем:

$$x(k) = y(Mk), \quad -\infty < k < \infty \quad (1-44)$$

каде што M е цел позитивен број.

Решение: Дискретниот систем опишан со моделот (1-44) уште се нарекува **компресор**. Тој ја креира излезната низа вредности $x(k)$, селектирајќи ја секоја M -та вредност на влезот $y(k)$, што значи отфрла $(M - 1)$ влезни вредности од секои M .

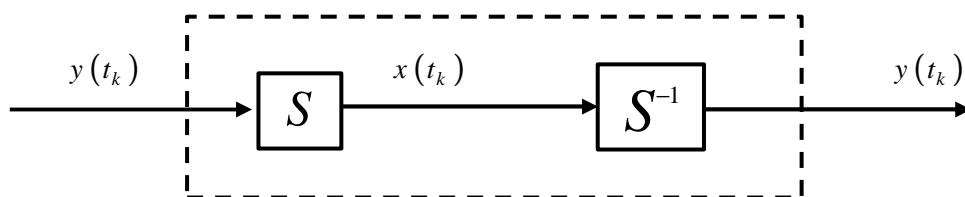
Одзивот на системот (1-44) на влезот $y_1(k) = y(k - n)$ се добива непосредно од (1-44):

$$x_1(k) = y_1(Mk) = y(Mk - n) \neq y(Mk - Mn) = x(k - n), \quad -\infty < k < \infty \quad (1-45)$$

од каде се гледа дека $x_1(k) \neq x(k - n)$. Следствено, компресорот (1-44) не претставува стационарен дискретен систем. □

Ова не е целосната поделба на дискретните системи. Можни се и натамошни поделби како, на пример, на **инвертибилни** и **неинвертибилни дискретни системи**, **стабилни** и **нестабилни дискретни системи**, **детерминистички** и **недетерминистички дискретни системи** итн. За стабилноста на дискретните системи допрва ќе зборуваме, затоа што тоа е фундаментално својство на дискретните системи на автоматско управување. Овде уште ќе кажеме нешто за инвертибилните и неинвертибилните дискретни системи, како и за детерминистичките и недетерминистичките дискретни системи.

За еден дискретен систем велиме дека е инвертибилен, доколку помеѓу неговите влезни и излезни вредности, $y(k)$ и $x(k)$, постои еднозначно пресликување $x(k) = S[y(k)]$. Во спротивниот случај, системот е неинвертибилен. Ако еден систем е неинвертибилен, тогаш мора да постојат барем две влезни низи $y_1(kT) \neq y_2(kT)$ за кои се добива ист излез. Својството на инвертибилност може да се илустрира со сликата 1-21. Кога еден систем $S[\cdot]$ е инвертибилен, тогаш сигурно постои негов инверзен систем $S^{-1}[\cdot]$, така што ќе биде исполнет условот $S[\cdot]S^{-1}[\cdot] = 1$.



Слика 1-21 Илустрација на својството на инвертибилност на еден дискретен систем со еден влез и еден излез

Пример 1-8. Да се покаже дека системот:

$$x(k) = \begin{cases} y(k-1), & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (1-46)$$

е инвертибилен.

Решение: Соодветниот инверзен систем за овој систем е следниот:

$$y(k) = x^{-1}(k) = \begin{cases} x(k+1), & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (1-47)$$

Пример 1-9. Да се покаже дека системот:

$$x(k) = y(k) - y(k-1), \quad -\infty < k < \infty \quad (1-48)$$

е неинвертибилен.

Решение: Да ги набљудуваме влезните низи:

$$y_1(k) = 5, \quad -\infty < k < \infty \quad (1-49)$$

$$y_2(k) = 1, \quad -\infty < k < \infty \quad (1-50)$$

Тогаш, одзивот на зададениот систем и во двата случаи ќе биде еднаков на 0:

$$x(k) = y_1(k) - y_1(k-1) = 5 - 5 = 0 = 1 - 1 = y_2(k) - y_2(k-1), \quad -\infty < k < \infty \quad (1-51)$$

што значи дека системот не е инвертибилен. \square

Детерминистички дискретен систем е систем кај кој сите сигнали се детерминистички. Недетерминистички дискретен систем е систем, кој содржи недетерминистички односно случајни сигнали. Од сите наведени дискретни системи, во рамките на овој труд ќе бидат разгледувани линеарните стационарни каузални детерминистички дискретни динамички системи, чиј математички модел е линеарна диферентна равенка со константни коефициенти или систем од вакви равенки. Притоа, секогаш, освен ако тоа не е поинаку нагласено, ќе биде претпоставена униформна дискретизација со периода на дискретизација T .

1-5 МАТЕМАТИЧКИ ОПИС НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ ВО ВРЕМЕНСКОТО ПОДРАЧЈЕ

Како што можевте да забележите, математичкиот модел на еден дискретен систем е некоја равенка, која ја дефинира врската помеѓу нејзиниот влез и излез за едновеличинските системи, односно систем од равенки кои ја дефинираат врската помеѓу излезите и влезовите на еден повеќевеличински систем. Притоа изгледот на таа равенка односно систем од равенки зависи од типот на самиот дискретен систем, како што беше покажано во делот посветен на поделбата на дискретните системи. Како што беше веќе истакнато, математичкиот модел на еден линеарен стационарен каузален дискретен динамички систем со еден влез $y(kT)$ и еден излез $x(kT)$ е линеарна диферентна равенка со константни коефициенти од следниот општ облик:

$$\begin{aligned} a_n x((k+n)T) + a_{n-1} x((k+n-1)T) + \dots + a_1 x((k+1)T) + a_0 x(kT) = \\ = b_m y((k+m)T) + b_{m-1} y((k+m-1)T) + \dots + b_1 y((k+1)T) + b_0 y(kT) \end{aligned} \quad (1-52)$$

каде што $y(kT)$ е позната функција, а $x(kT)$ е непознатата односно решението на дадената диферентна равенка.

Во диферентната равенка, која претставува модел на еден дискретен динамички систем во временско подрачје, фигурираат дискретните вредности на влезот и излезот на набљудуваниот дискретен систем. Последната, n -та дискретна вредност на непознатата $x(kT)$, го определува редот на набљудуваната диферентна равенка. Едновременно, тој одговара на **редот на моделираниот дискретен систем**. Тоа значи дека дискретните системи имаат одреден ред кој се „отсликува“ во редот на неговиот математички модел, а се пресметува како разлика $(k+n) - k = n$.

Коефициентите a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) на диферентната равенка (1-52) се комбинации од параметрите на дискретниот систем и, следствено, го опишуваат односно дефинираат динамичкото поведење на системот опишан со дадената диферентна равенка во однос на неговиот влез и неговиот излез. Од физичката остварливост на моделираниот дискретен систем произлегува ограничувањето $m \leq n$, зашто во спротивно моделираниот дискретен систем нема да биде каузален, туку ќе биде антиципативен. Со други зборови, за $m > n$ одзивот на набљудуваниот дискретен систем ќе зависи и од идни вредности на влезот.

Доколку десната страна на диферентната равенка (1-52) е нулева (не постои познатата функција $y(kT)$), диферентната равенка се нарекува **хомогена диферентна равенка**. Отсуството на десната страна во равенката (1-52) значи отсуство на влез односно возбуда на дискретниот систем моделиран со таа равенка, па следствено системот е **автономен дискретен динамички систем**. Со други зборови, моделот на еден автономен дискретен динамички систем (без возбуда) е хомогена диферентна равенка.

Да се анализира поведението на еден дискретен динамички систем, во крајна линија, значи да се реши неговата диферентна равенка на динамичко поведење, затоа што

решението на таа диферентна равенка го претставува одзивот на набљудуваниот дискретен систем за конкретна влезна возбуда, а врз основа на тој одзив можеме да судиме за самиот дискретен систем и за неговите особини. Решението на секоја диферентна равенка е определено со познатата функција на нејзината десна страна и соодветните почетни услови. Бројот почетни услови на една диферентна равенка одговара на нејзиниот ред. Доколку моделираниот дискретен систем пред почетниот миг на набљудување бил во мирување, што значи нема никаква акумулирана енергија во него, почетните услови на неговата диферентна равенка ќе бидат нулеви.

Пример 1-10. Да се реши диферентната равенка на нумеричкиот интегратор од примерот 1-2.

Решение: Бидејќи нумеричкиот интегратор е систем од прв ред, неговата диферентна равенка е исто така од прв ред, па за нејзино решавање ќе биде потребен само еден почетен услов. Почетниот услов $x(0)$ се определува од релацијата (1-6) на следниот начин:

$$x(0) = \int_0^0 y(\tau) d\tau = 0 \quad (1-53)$$

Потоа равенката (1-10) се решава за $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$k = 0: x(T) = Ty(0) + x(0) = Ty(0)$$

$$k = 1: x(2T) = Ty(T) + x(T) = Ty(T) + Ty(0)$$

$$k = 2: x(3T) = Ty(2T) + x(2T) = Ty(2T) + Ty(T) + Ty(0) \quad (1-54)$$

.....

Од решението (1-54) е очигледно дека равенката (1-10) означува низа од одреден број чекори кои се повторуваат, односно **итерации**. Затоа таа уште се нарекува **итеративна равенка**. □

Пример 1-11. Да се определи одзивот $x(kT)$ на линеарниот дискретен динамички систем со влез $y(kT)$, опишан со следната диферентна равенка:

$$x(kT + T) - ax(kT) = y(kT + 2T); a = const. \in \mathfrak{R} \quad (1-55)$$

ако на неговиот влез е доведен дискретниот сигнал:

$$y(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (1-56)$$

и да се одговори на прашањето каков е тој систем. Системот, под претпоставка, нема во себе акумулирано енергија.

Решение: Со смената $m = k + 1$ и враќање на старата променлива k , равенката (1-55) може да се доведе на облик:

$$x(kT) - ax(kT - T) = y(kT + T); a = \text{const.} \in \mathfrak{R} \quad (1-57)$$

од каде, по мало преуредување, следува:

$$x(kT) = ax(kT - T) + y(kT + T) \quad (1-58)$$

За различни вредности на аргументот $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ од изразот (1-58) може да се пресметаат дискретните вредности $\dots, x(-2T), x(-T), x(0), x(T), x(2T), \dots$ на бараното решение $x(kT)$. Така, под направената претпоставка дека системот (1-55) бил првобитно во мирување, се добива:

$$x(kT) = 0 \quad \forall k < -1 \quad (1-59)$$

додека:

$$k = -1: x(-T) = ax(-2T) + y(0) = y(0) = 1$$

$$k = 0: x(0) = ax(-T) + y(T) = ax(-T) = a$$

$$k = 1: x(T) = ax(0) + y(2T) = ax(0) = a^2$$

$$k = 2: x(2T) = ax(T) + y(3T) = ax(T) = a^3$$

.....

$$k: x(kT) = ax(kT - T) + y(kT + T) = ax(kT - T) = a^{k+1} \quad (1-60)$$

Следствено, одзивот на набљудуваниот дискретен систем аналитички е опишан со изразот:

$$x(kT) = \begin{cases} 0, & k < -1 \\ a^{k+1}, & k \geq -1 \end{cases} \quad (1-61)$$

од каде лесно се воочува дека одзивот се јавува и пред појавата на влезот. Тоа значи дека се работи за еден антиципативен односно антикаузален систем. \square

1-6 ПРИМЕРИ НА ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Во претходното излагање веќе беа дадени одредени примери на дискретни системи, каков што беше, на пример, нумеричкиот интегратор или курсната листа. Во продолжение ќе бидат илустрирани уште некои такви системи.

Идеалното коло за доцнење односно задршка, кое е опишано со моделот:

$$x(kT) = y((k - n)T); n \in \mathfrak{N} \quad (1-62)$$

каде што n е цел позитивен број, е пример за едноставен дискретен уред кој е присутен во современите дигитални системи. Тоа се нарекува идеално, затоа што воопшто не

влијае врз карактеристиките на влезниот сигнал – само го задоцнува за одредено време (фиксен број периоди на дискретизација) односно ја транслира влезната низа $y(kT)$ за n периоди на дискретизација во десно долж временската оска. Кога n би бил цел негативен број, идеалното коло за доцнење би ја транслирало влезната низа $y(kT)$ за n периоди на дискретизација во лево долж временската оска, што одговара на забрзување место задоцнување, меѓутоа ова не е физички остварливо.

Многу појави во економијата се опишуваат со дискретни модели. Таков е, на пример, случајот со банкарската камата која се пресметува во одредени временски интервали.

Пример 1-12. Влогот во една банка носи 5% камата годишно, која се пресметува во месечни рати. Ако првобитниот влог изнесувал 1,000,000 денари, колку тој ќе изнесува после 5 години?

Решение: Бидејќи каматата се пресметува месечно, со $x(k)$ ќе го означиме износот на влогот во k -тиот месец. Бидејќи секој месец тој се зголемува за $1/12$ од 5%, може да се запише:

$$x(k) = x(k-1) + \frac{0.05}{12} x(k-1) = \frac{241}{240} x(k-1); x(0) \quad (1-63)$$

Решението на оваа диферентна равенка е:

$$x(k) = \left(\frac{241}{240}\right)^k x(0) \quad (1-64)$$

Оттука, на крајот од петтата година, почетниот влог $x(0) = 1,000,000$ ќе порасне на:

$$x(60) = \left(\frac{241}{240}\right)^{60} x(0) = 1,283,359 \quad \square \quad (1-65)$$

Медиан филтерот е нелинеарен дигитален филтер кој често се користи за отстранување шум од некоја слика или сигнал. Отстранувањето на шумот е типичен чекор во препроцесирањето на сигнали и слики, со цел да се подобри понатамошното процесирање на истите (на пример, при детектирањето на ивиците на една слика). Основниот принцип врз кој работи еден медијан филтер е обработка на секој влезен примерок и негова замена со средниот примерок од соседните подредени по големина примероци. Шемата на соседни примероци се нарекува „прозорец“ кој се поместува врз секој примерок од влезниот сигнал.

Пример 1-13. Да се примени медиан филтер со „прозорец“ со големина три, на следниот сигнал:

$$y = (2, 3, 80, 6) \quad (1-66)$$

Што ќе се добие на излезот од филтерот?

Решение: Очигледно вредноста на третиот примерок во влезниот сигнал е многу голема и многу поголема од вредностите на останатите примероци. Таа најверојатно се должи на присуството на шум, кој може да се отстрани со примена на медиан филтер. Така, излезниот сигнал на медиан филтерот од примерот ќе биде:

$$x_1 = \text{med}(2, 2, 3) = 2$$

$$x_2 = \text{med}(2, 3, 80) = 3$$

$$x_3 = \text{med}(3, 80, 6) = \text{med}(3, 6, 80) = 6$$

$$x_4 = \text{med}(80, 6, 6) = \text{med}(6, 6, 80) = 6$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{med}(2, 3, 6, 6) \quad (1-67)$$

Бидејќи во наведениот пример не постои вредност која претходи на првиот примерок, првата вредност се повторува, како и последната, за да се обезбеди потребниот број примероци во прозорецот. Ова е само еден начин на решавање на проблемот со недостаток на примероци во прозорецот. Постојат и други кои имаат предност во одредени апликации. □

Сонарните системи служат за подводно детектирање и локација на објекти со помош на звук. Еден сонар испушта импулси од звучни бранови низ водата, кои се одбиваат од подводните објекти како, на пример, риби, подморници, бродови, морската вегетација, морското дно итн. Уредот го мери потребното време звучниот бран да се врати назад и на тој начин ја проценува длабочината на која се наоѓа конкретниот објект. Исто така, преку мерење на јачината на одбиениот звучен импулс ја мери цврстината на детектираниот објект. Колку што е детектираниот објект поцврст, толку одбиениот звук е појак.

1-7 ЕЛЕМЕНТАРНИ ДИСКРЕТНИ СИГНАЛИ

Во анализата на линеарните дискретни системи често ќе се сретнуваме со следните елементарни дискретни сигнали:

Кронекер–делта функција

отскочна функција од дискретна независно променлива

„рампа“ функција од дискретна независно променлива

линеарно растечка функција од дискретна независно променлива

синусна функција од дискретна независно променлива

експоненцијална функција од дискретна независно променлива

Специјален случај на **Кронекер–делта функција** е единичната Кронекер–делта функција во мигот $k = 0$. Таа е дефинирана на следниот начин:

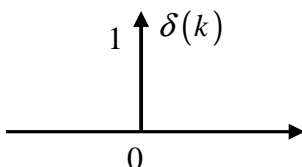
$$f_1(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (1-68)$$

и графички е прикажана на сликата 1-22.

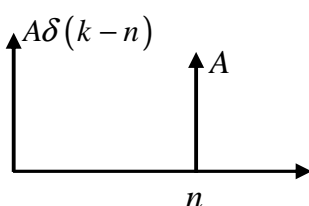
Најопштиот случај на Кронекер–делта функција е Кронекер–делта функцијата со произволна амплитуда A во произволен миг $k = n$. Таа е дефинирана на следниот начин:

$$f_2(k) = A\delta(k-n) = \begin{cases} A, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (1-69)$$

и графички е прикажана на сликата 1-23. Кронекер–делта функцијата за дискретните системи е она што е Дираковиот импулс за континуалните системи, со тоа што Кронекер–делта функцијата е дефинирана многу поедноставно од Дираковиот импулс.



Слика 1-22 Единична Кронекер–делта функција во мигот $k = 0$



Слика 1-23 Кронекер–делта функција со произволна амплитуда A во произволен миг $k = n$

Специјален случај на **отскочната функција од дискретна независно променлива** е единичната отскочна функција која се појавува во мигот $k = 0$. Таа е дефинирана на следниот начин:

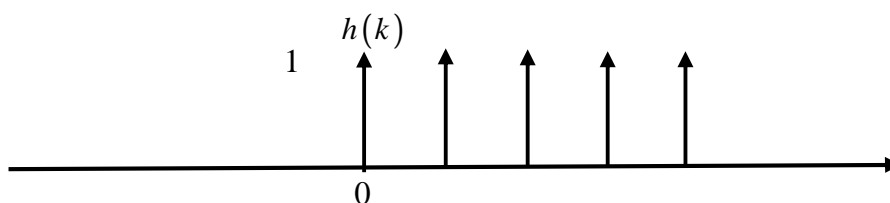
$$f_3(k) = h(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases} \quad (1-70)$$

и графички е прикажана на сликата 1-24.

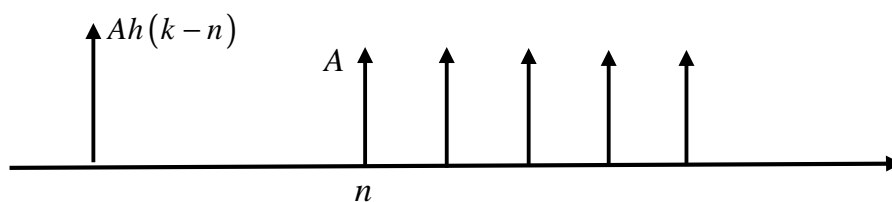
Најопштиот случај на отскочната функција од дискретна независно променлива е отскочната функција со произволна амплитуда A која се јавува во произволен временски миг $k = n$. Таа е дефинирана на следниот начин:

$$f_4(k) = Ah(k-n) = \begin{cases} 0, & k < n \\ A, & k \geq n \end{cases} \quad (1-71)$$

и графички е прикажана на сликата 1-25.



Слика 1-24 Единична отскочна функција од дискретна независно променлива во мигот $k = 0$



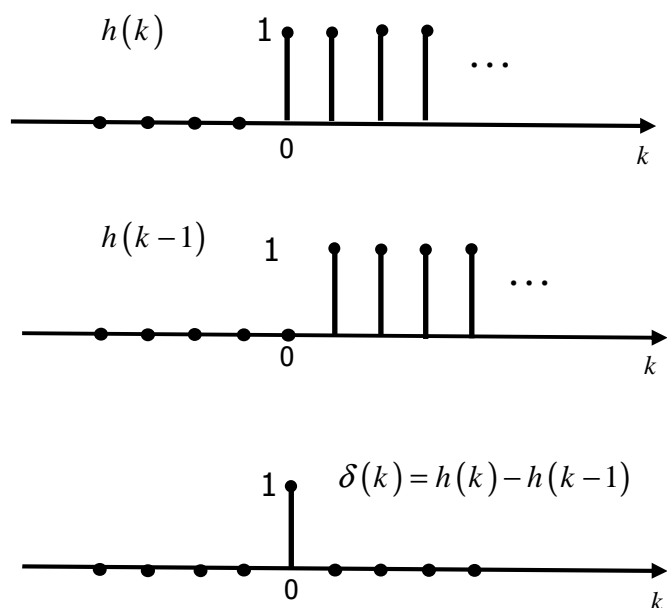
Слика 1-25 Отскочна функција од дискретна независно променлива со произволна амплитуда A во произволен миг $k = n$

Помеѓу единичната Кронекер-делта функција и единичната отскочна функција од дискретна независно променлива постојат следните релации:

$$\delta(k) = h(k) - h(k-1) \quad (1-72)$$

$$h(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n) \quad (1-73)$$

Релацијата (1-72) е илустрирана на сликата 1-26, додека релацијата (1-73) е илустрирана на сликата 1-27.

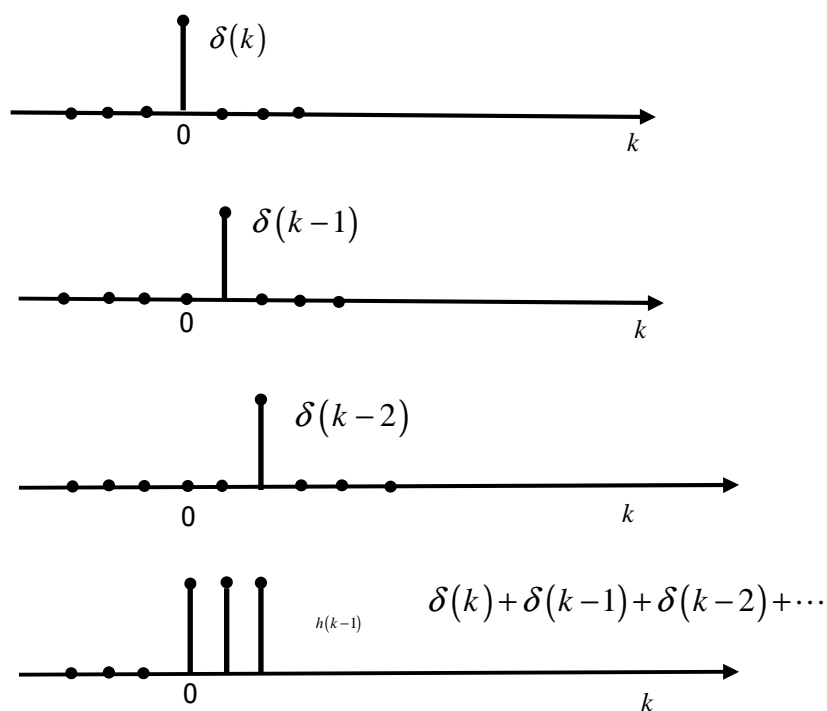


Слика 1-26 Илустрација на релацијата (1-72)

Сличен однос постои и помеѓу произволната Кронекер-делта функција и произволната отскочна функција од дискретна независно променлива:

$$A\delta(k-n) = Ah(k-n) - Ah(k-n-1) \quad (1-74)$$

$$Ah(k-n) = \sum_{m=0}^{\infty} A\delta(k-n-m) \quad (1-75)$$



Слика 1-27 Илустрација на релацијата (1-73)

Доколку амплитудата на отскочната функција не се променува мигновено од една во друга вредност, туку постепено во текот на одреден број чекори на дискретизација, зборуваме за т.н. **„рампа“ функција од дискретна независно променлива**. Специјален случај на оваа функција е единичната „рампа“ функција, која е опишана на следниот начин:

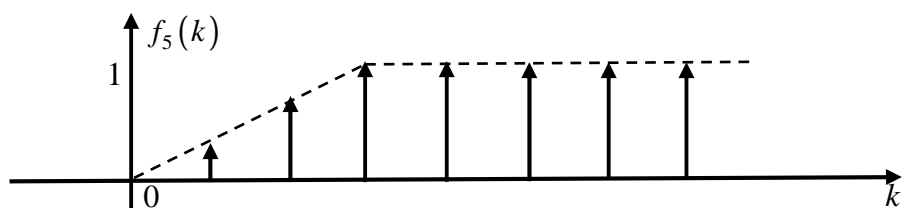
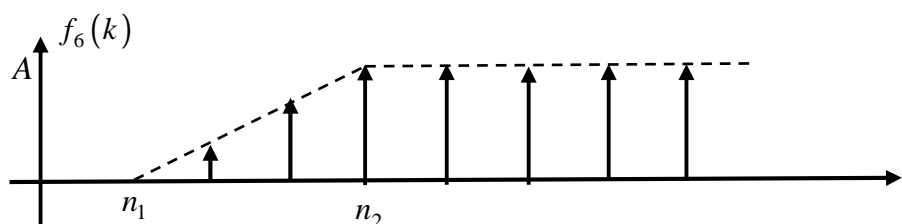
$$f_5(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \frac{k}{n}, & 0 \leq k < n \\ 1, & k \geq n \end{cases} \quad (1-76)$$

и графички е прикажана на сликата 1-28.

Најопштиот случај на „рампа“ функција од дискретна независно променлива е опишан на следниот начин:

$$f_6(k) = \begin{cases} 0, & k < n_1 \\ A \frac{k - n_1}{n_2 - n_1}, & n_1 \leq k < n_2 \\ A, & k \geq n_2 \end{cases} \quad (1-77)$$

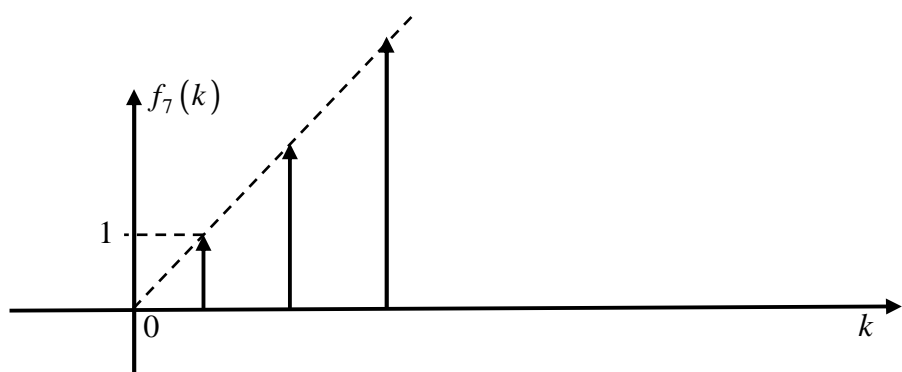
и графички е прикажана на сликата 1-29.

Слика 1-28 Единична „рампа“ функција од дискретна независно променлива во мигот $k = 0$ Слика 1-29 „Рампа“ функција од дискретна независно променлива во мигот $k = n_1$

Специјален случај на **линеарно растечката функција од дискретна независно променлива** е функцијата со единичен наклон која се појавува во мигот $k = 0$. Таа е дефинирана на следниот начин:

$$f_7(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ k, & k \geq 0 \end{cases} \quad (1-78)$$

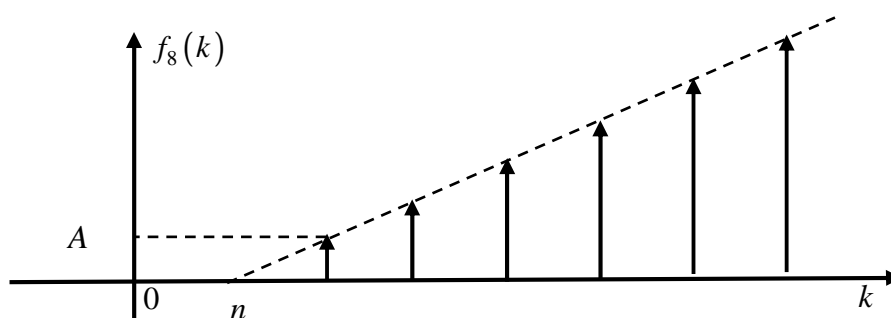
и графички е прикажана на сликата 1-30.

Слика 1-30 Линеарно растечка функција од дискретна независно променлива со единичен наклон и појава во мигот $k = 0$

Најопштиот случај на линеарно растечка функција од дискретна независно променлива е функцијата со произволен наклон A која се јавува во произволен временски миг $k = n$ и таа е дефинирана на следниот начин:

$$f_8(k) = Af_7(k-n) = \begin{cases} 0, & k < n \\ A(k-n), & k \geq n \end{cases} \quad (1-79)$$

Графички е прикажана на сликата 1-31.

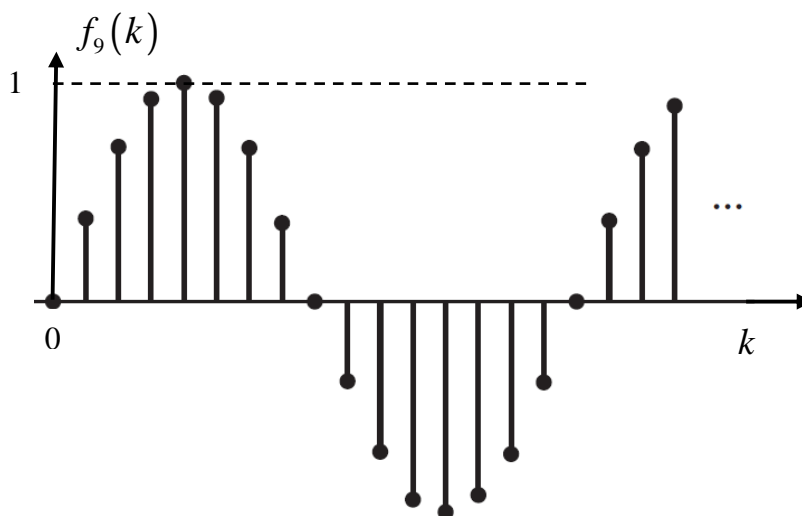


Слика 1-31 Линеарно растечка функција од дискретна независно променлива со произволен наклон A во произволен миг $k = n$

Специјален случај на **синусна функција од дискретна независно променлива** е синусна функција со амплитуда еднаква на 1, нулева фаза и почеток во мигот $k = 0$. Таа е дефинирана на следниот начин:

$$f_9(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \sin(\omega_0 k), & k \geq 0 \end{cases} \quad (1-80)$$

и графички е прикажана на сликата 1-32.

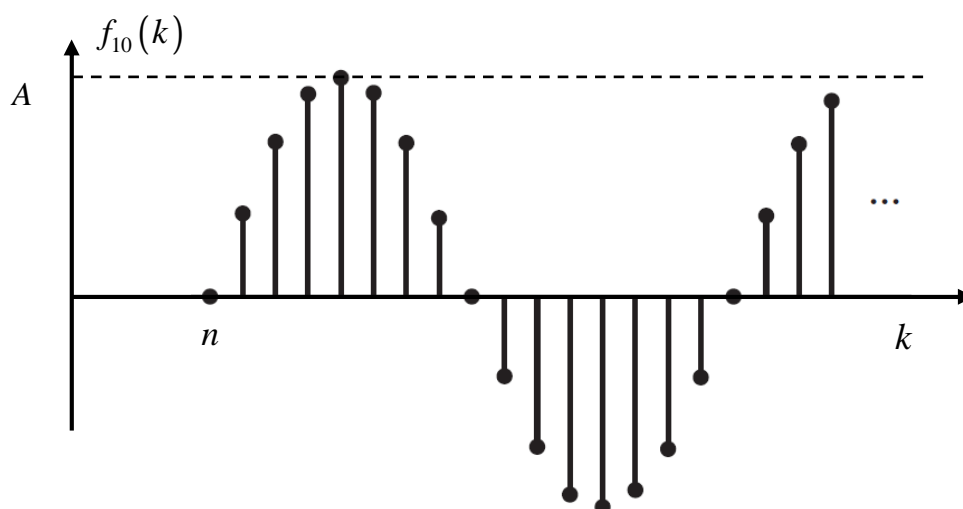


Слика 1-32 Синусна функција со единична амплитуда и појава во мигот $k = 0$

Најопштиот случај на синусна функција од дискретна независно променлива е функцијата со произволна амплитуда A и произволна фаза φ , која се јавува во произволен временски миг $k = n$. Таа е дефинирана на следниот начин:

$$f_{10}(k) = \begin{cases} 0, & k < n \\ A \sin[\omega_0(k-n) + \varphi], & k \geq n \end{cases} \quad (1-81)$$

и графички е прикажана на сликата 1-33.



Слика 1-33 Синусна функција од дискретна независно променлива со произволна амплитуда и појава во мигот $k = n$

По аналогија со континуалниот случај, величината ω_0 се нарекува **фреквенција** на синусната функција, додека φ се нарекува нејзина **фаза**. Меѓутоа, бидејќи k е бездимензионален цел број, димензијата на ω_0 се радијани. За поблиска аналогија со континуалниот случај, единиците на фреквенцијата ω_0 можеме да ги изразиме како радијани/примерок, а единицата на k да биде примерок.

Фактот дека дискретната независно променлива k во (1-80) е секогаш цел број води кон битна разлика во својствата на дискретните и континуалните синусни сигнали. Нека, за пример, ја набљудуваме низата $f(k) = A \sin(\omega_0 k + \varphi)$ со фреквенција $\omega_0 + 2\pi$. Во овој случај, важи:

$$f(k) = A \sin[(\omega_0 + 2\pi)k + \varphi] = A \sin(\omega_0 k + \varphi) \quad (1-82)$$

Општо земено, синусните низи со фреквенции $\omega_0 + 2\pi r$, каде што r е цел позитивен број, не се разликуваат меѓусебе:

$$f(k) = A \sin[(\omega_0 + 2\pi r)k + \varphi] = A \sin(\omega_0 k + \varphi) \quad (1-83)$$

Оттаму, при анализата на реални синусни дискретни сигнали од облик $A \sin(\omega_0 k + \varphi)$, доволно е истите да се набљудуваат само во интервали фреквенции еднакви на 2π .

Вообичаено, се избира или $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ или $0 \leq \omega_0 < 2\pi$. Значението на овој факт ќе стане појасно при изучување на фреквенциските својства на дискретните системи.

Сè она што е кажано за синусната функција од дискретна независно променлива, важи и за косинусната функција од дискретна независно променлива, затоа што:

$$\cos(\omega_0 k) = \sin\left(\omega_0 k + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-84)$$

Друга битна разлика помеѓу континуалните и дискретните синусни сигнали се однесува на нивната периодичност во однос на дискретната независно променлива k . Еден континуален синусен сигнал $f(t)$ е периодичен по времето t , доколку важи:

$$f(t) = f(t + T_0) \quad \forall t \quad (1-85)$$

од каде што следува дека:

$$\begin{aligned} f(t + T_0) &= A \sin[\omega(t + T_0)] = A \sin(\omega t) \cos(\omega T_0) + A \cos(\omega t) \sin(\omega T_0) = \\ &= A \sin(\omega t) = f(t) \Leftrightarrow \omega T_0 = 2l\pi \Rightarrow T_0 = \frac{2l\pi}{\omega}; \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1-86)$$

Оттука, основната периода на континуалниот синусен сигнал $f(t)$ го претставува најмалиот можен позитивен реален број T_0 за кој важи равенството (1-85) и таа е еднаква на $2\pi/\omega_0$. Во случајот на дискретните сигнали, една низа се смета за периодична, доколку за секое k важи:

$$f(k) = f(k + n) \quad \forall k \quad (1-87)$$

каде што периодата n е задолжително позитивен цел број. Основната периода на дискретниот сигнал е најмалиот можен позитивен цел број n за кој важи равенството (1-87). Ако овој услов за периодичност на една низа го примениме на дискретниот синусен сигнал, ќе добиеме:

$$A \sin(\omega_0 k + \varphi) = A \sin(\omega_0 k + \omega_0 n + \varphi) \quad (1-88)$$

при што мора да биде исполнето:

$$\omega_0 n = 2\pi r \quad (1-89)$$

каде што r е цел позитивен број. Следствено, во општ случај, синусните низи не се периодични по k со основна периода $2\pi/\omega_0$ и, во зависност од вредноста на ω_0 , може и воопшто да не бидат периодични.

Пример 1-14. Да се определи основната периода на дискретниот сигнал:

$$x_1(k) = \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) \quad (1-90)$$

Потоа да се определи основната периода на истиот сигнал, ако неговата фреквенција се промени од вредност $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ на вредност $\omega_0 = \frac{3\pi}{8}$. Што можеме да заклучиме од овој пример?

Решение: Набљудуваниот сигнал има основна периода $n = 8$. Тоа лесно може да се провери на следниот начин:

$$x_1(k+8) = \cos\left[\frac{\pi(k+8)}{4}\right] = \cos\left[\frac{\pi k}{4} + 2\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) = x_1(k) \quad (1-91)$$

Наспроти случајот кај континуалните синусни сигнали, кај дискретните синусни сигнали зголемувањето на фреквенцијата ω_0 не секогаш значи намалување на периодата на осцилациите. За таа цел го набљудуваме дискретниот сигнал:

$$x_2(k) = \cos\left(\frac{3\pi k}{8}\right) \quad (1-92)$$

кој има поголема фреквенција од дискретниот сигнал $x_1(k)$. Меѓутоа, сигналот $x_2(k)$ не е периодичен со основна периода $n = 8$, бидејќи:

$$x_2(k+8) = \cos\left[\frac{3\pi(k+8)}{8}\right] = \cos\left[\frac{3\pi k}{8} + 3\pi\right] = -x_2(k) \quad (1-93)$$

Напротив, неговата основна периода изнесува $n = 16$:

$$x_2(k+16) = \cos\left[\frac{3\pi(k+16)}{8}\right] = \cos\left[\frac{3\pi k}{8} + 6\pi\right] = \cos\left(\frac{3\pi k}{8}\right) = x_2(k) \quad (1-94)$$

Оттука, со зголемувањето на фреквенцијата ω_0 на дискретниот сигнал $x_1(k)$ од вредност $\omega_0 = \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8}$ на вредност $\omega_0 = \frac{3\pi}{8}$, се зголемува и неговата основна периода од вредност $n = 8$ на вредност $n = 16$. Ова е резултат на фактот дека k е цел позитивен број. □

Пример 1-15. Да се определи периодата на дискретниот косинусен сигнал:

$$x_3(k) = \cos(k) \quad (1-95)$$

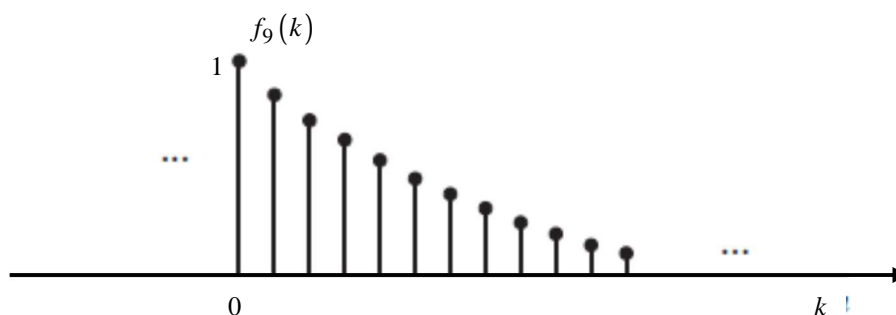
Што можеме да заклучиме од овој пример?

Решение: Лесно може да се утврди дека не постои позитивен цел број n за кој сигналот (1-95) ќе го задоволи условот (1-87) за периодичност за секое k . Ова повторно се должи на фактот дека дискретниот синусен сигнал е функција од целобројна дискретна независно променлива. □

Експоненцијалната функција од дискретна независно променлива, односно експоненцијалната низа, претставува уште една важна класа елементарни дискретни сигнали. Специјален случај на оваа функција е опишан со релацијата:

$$f_{11}(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \alpha^k, & k \geq 0 \end{cases} \quad (1-96)$$

и истата е прикажана графички на сликата 1-34.

Слика 1-34 Експоненцијална функција од дискретна независно променлива со почеток во $k = 0$

Најопштиот случај на експоненцијалната функција од дискретна независно променлива е даден со релацијата:

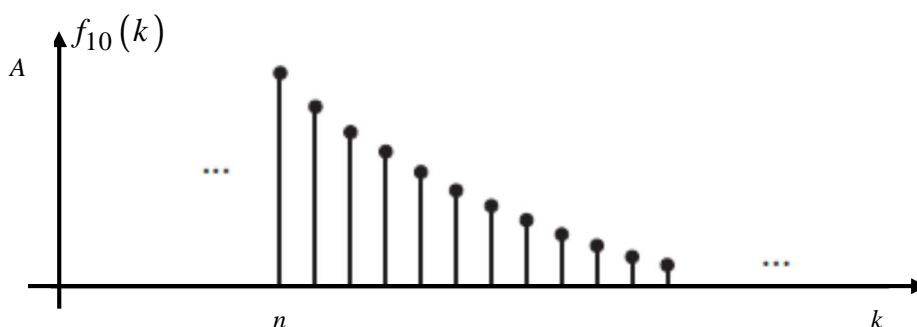
$$f_{12}(k) = Af_9(k-n) = \begin{cases} 0, & k < n \\ A\alpha^{k-n}, & k \geq n \end{cases} \quad (1-97)$$

и истата е прикажана на сликата 1-35. Кога A и α се реални броеви, набљудуваната низа е исто така реална. Доколку $0 < \alpha < 1$ и $A > 0$, вредностите на низата се позитивни и опаѓаат кога k расте.

Кога $-1 < \alpha < 0$ и $A > 0$, вредностите на елементите од низата менуваат наизменично знак, но повторно опаѓаат кога k расте. Доколку $|\alpha| > 1$, реалната експоненцијална низа ќе расте по амплитуда со порастот на k .

Експоненцијалната функција $f(k) = A\alpha^k$, кога α е комплексен број, има реален и имагинарен дел, кои претставуваат експоненцијално пригушувана косинусна и синусна функција. Имено, за $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$, низата $f(k) = A\alpha^k$ може да се претстави на еден од следните начини:

$$f(k) = A\alpha^k = A|\alpha|^k e^{j\omega_0 k} = A|\alpha|^k [\cos(\omega_0 k) + j \sin(\omega_0 k)] \quad (1-98)$$

Слика 1-35 Експоненцијална функција од дискретна независно променлива со почеток во $k = n$

Конечно, доколку и A е комплексен број, $A = |A|e^{j\varphi}$, експоненцијалната низа $f(k) = A\alpha^k$ ќе има облик:

$$A\alpha^k = |A|e^{j\varphi}|\alpha|^k e^{j\omega_0 k} = |A||\alpha|^k e^{j(\omega_0 k + \varphi)} = |A||\alpha|^k [\cos(\omega_0 k + \varphi) + j\sin(\omega_0 k + \varphi)] \quad (1-99)$$

Низата $f(k) = A\alpha^k$ осцилира со експоненцијално растечка енvelope за $|\alpha| > 1$, односно со експоненцијално опаѓачка енvelope за $|\alpha| < 1$. Како пример можеме да го земеме специјалниот случај кога $\omega_0 = \pi$.

За $|\alpha| = 1$, низата $f(k) = A\alpha^k$ добива облик:

$$A\alpha^k = |A|e^{j\varphi}e^{j\omega_0 k} = |A|e^{j(\omega_0 k + \varphi)} = |A|[\cos(\omega_0 k + \varphi) + j\sin(\omega_0 k + \varphi)] \quad (1-100)$$

што значи дека нејзиниот реален и имагинарен дел ќе имаат неопаѓачки односно нерастечки амплитуди.

Фактот дека дискретната независно променлива k во (1-98) е секогаш цел број води кон битна разлика во својствата на дискретните и континуалните комплексни експоненцијални сигнали. Нека, за пример, ја набљудуваме дискретната низа $f(k) = A\alpha^k$ со фреквенција $\omega_0 + 2\pi$. Во овој случај, важи:

$$A\alpha^k = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)k} = Ae^{j\omega_0 k} e^{j2\pi k} = Ae^{j\omega_0 k} \quad (1-101)$$

Општо земено, комплексните експоненцијални низи со фреквенции $\omega_0 + 2\pi r$, каде што r е цел позитивен број, не се разликуваат меѓусебе:

$$A\alpha^k = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi r)k} = Ae^{j\omega_0 k} e^{j2\pi rk} = Ae^{j\omega_0 k} \quad (1-102)$$

Оттаму, при анализата на комплексни експоненцијални дискретни сигнали од обликот $Ae^{j\omega_0 k}$ доволно е истите да се набљудуваат само во интервали фреквенции еднакви на 2π .

Како што може да се забележи, сите елементарни функции се дефинирани на следниот начин:

$$\begin{cases} 0, & k < 0 \\ f(k), & k \geq 0 \end{cases} \quad (1-103)$$

што значи се идентично еднакви на нула за негативните вредности на аргументот. Ваквите сигнали се нарекуваат **каузални сигнали**. Бидејќи ние во иднина ќе се занимаваме со анализа исклучиво на каузални дискретни системи, сите сигнали во тие системи ќе бидат каузални. Оттаму, во продолжение ќе зборуваме само за каузални сигнали, кои може да се прикажат и на следниот еквивалентен начин:

$$f(k)h(k) \quad (1-104)$$

каде што $h(k)$ е единичната отскочна функција од дискретна независно променлива $f_3(k)$.

2 МАТЕМАТИЧКИ АПАРАТ ЗА АНАЛИЗА НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

2-1 ВОВЕДНИ ЗАБЕЛЕШКИ

Врз основа на досега кажаното, следува дека дискретен систем е таков систем, кој во својата структура содржи дискретни елементи. Меѓутоа, за целите на математичката анализа дискретниот систем може да се дефинира и поинаку. Така, дискретен систем е оној систем, чиј математички модел содржи диферентни равенки.

Меѓу диферентните равенки кои го опишуваат поведението на дискретните динамички системи и диференцијалните равенки кои го опишуваат поведението на континуалните динамички системи, постои само формална аналогија. Имено, додека во диференцијалните равенки фигурираат изводите на бараното решение, во диферентната равенка фигурираат дискретните вредности на решението или нивните конечни разлики. Овие конечни разлики уште се нарекуваат **диференции** и оттаму доаѓа и името на диферентните равенки.

2-2 КОНЕЧНИ РАЗЛИКИ НА ФУНКЦИИТЕ ОД ДИСКРЕТНА НЕЗАВИСНО ПРОМЕНЛИВА

Конечните разлики односно диференции на една функција од дискретна независно променлива $f(kT)$ се дефинираат на следниот начин:

$$\Delta f(kT) = f((k+1)T) - f(kT)$$

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta[\Delta f(kT)] = \Delta f((k+1)T) - \Delta f(kT) =$$

$$= [f((k+2)T) - f((k+1)T)] - [f((k+1)T) - f(kT)] =$$

$$= f((k+2)T) - 2f((k+1)T) + f(kT)$$

.....

$$\Delta^n f(kT) = \Delta[\Delta^{n-1} f(kT)] \tag{2-1}$$

и тие се нарекуваат прва, втора, . . . , n -та **конечна разлика** или **диференција** на функцијата $f(kT)$. Конечните разлики (2-1) уште се нарекуваат и **десни конечни разлики**, затоа што се формираат како разлика помеѓу една дискретна вредност на функцијата $f(kT)$ и следните дискретни вредности десно од неа. Со помош на математичка индукција може да се покаже дека произволната n -та десна конечна разлика на функцијата $f(kT)$ е дадена со формулата:

$$\Delta^n f(kT) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f((k+i)T); \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-2)$$

каде што:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (2-3)$$

се **биномни коефициенти**.

Наспроти нив, може да се дефинираат и т.н. **леви конечни разлики или диференци** на една функција од дискретна независно променлива $f(kT)$:

$$\nabla f(kT) = f(kT) - f((k-1)T)$$

$$\nabla^2 f(kT) = \nabla[\nabla f(kT)] = \nabla f(kT) - \nabla f((k-1)T) =$$

$$= [f(kT) - f((k-1)T)] - [f((k-1)T) - f((k-2)T)] =$$

$$= f(kT) - 2f((k-1)T) + f((k-2)T)$$

.....

$$\nabla^n f(kT) = \nabla[\nabla^{n-1} f(kT)] \quad (2-4)$$

каде што конечната разлика се формира помеѓу една дискретна вредност на функцијата $f(kT)$ и претходните дискретни вредности лево од неа. Произволната n -та лева конечна разлика на функцијата $f(kT)$ е дадена со изразот:

$$\nabla^n f(kT) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f((k-i)T); \quad n = 1, 2, \dots \quad (2-5)$$

Првата, втората, ..., n -та конечна разлика претставуваат конечни разлики од прв, втор, ..., n -ти ред, без оглед дали се работи за лева или десна конечна разлика. По дефиниција, нултата конечна разлика, односно конечната разлика од нулти ред на една функција од дискретна независно променлива $f(kT)$ е еднаква со самата таа функција:

$$\Delta^0 f(kT) = f(kT)$$

$$\nabla^0 f(kT) = f(kT) \quad (2-6)$$

Пример 2-1. Да се определат десните и левите конечни разлики на дискретниот сигнал $f(kT)$, опишан со следниот аналитички израз:

$$f(kT) = 5kT, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-7)$$

Решение: Набљудуваниот дискретен сигнал го претставува множеството дискретни вредности:

$$\begin{aligned} \{f(kT)\} &= \{\dots, f(-2T), f(-T), f(0), f(T), f(2T), \dots\} = \\ &= \{\dots, -25T, -20T, -15T, -10T, -5T, 0, 5T, 10T, 15T, 20T, 25T, \dots\} \end{aligned} \quad (2-8)$$

Следствено, неговите конечни разлики од прв ред ќе изнесуваат:

$$\begin{aligned} \Delta f(kT) &= f((k+1)T) - f(kT) = 5T \vee k \\ \nabla f(kT) &= f(kT) - f((k-1)T) = 5T \vee k \end{aligned} \quad (2-9)$$

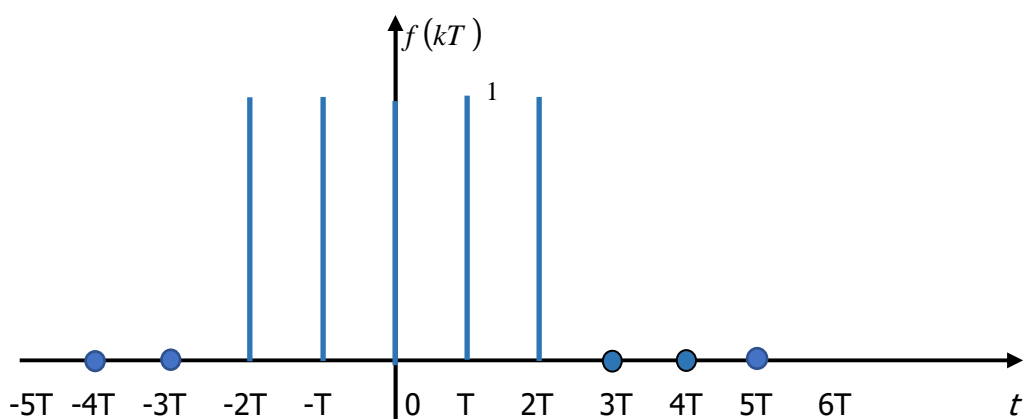
додека конечните разлики од втор и повисок ред се нулеви:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(kT) &= \Delta f((k+1)T) - \Delta f(kT) \equiv 0 \vee k \\ \nabla^2 f(kT) &= \nabla f(kT) - \nabla f((k-1)T) \equiv 0 \vee k \end{aligned} \quad (2-10)$$

.....

$$\begin{aligned} \Delta^n f(kT) &= \Delta[\Delta^{n-1} f(kT)] \equiv 0 \vee k; \quad n = 2, 3, \dots \\ \nabla^n f(kT) &= \nabla[\nabla^{n-1} f(kT)] \equiv 0 \vee k; \quad n = 2, 3, \dots \quad \square \end{aligned} \quad (2-11)$$

Пример 2-2. Да се определат првата и втората десна конечна разлика на дискретниот сигнал $f(kT)$, прикажан графички на сликата 2-1.



Слика 2-1 Илустрација кон примерот 2-2

Решение: Дискретниот сигнал $f(kT)$ од сликата 2-1 е опишан со следниот аналитички израз:

$$f(kT) = \begin{cases} 0; & k < -2 \\ 1; & -2 \leq k \leq 2 \\ 0; & 2 < k \end{cases} \quad (2-12)$$

и е претставен со множеството дискретни вредности:

$$\begin{aligned} f(kT) &= \{\dots, f(-3T), f(-2T), f(-T), f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots\} = \\ &= \{\dots, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots\} \end{aligned} \quad (2-13)$$

па, оттука:

$$\begin{aligned} \Delta f(kT) &= f((k+1)T) - f(kT) = 0, \quad k < -3 \\ \Delta f(kT) &= f((k+1)T) - f(kT) = 1, \quad k = -3 \\ \Delta f(kT) &= f((k+1)T) - f(kT) = 0, \quad -2 \leq k < 2 \\ \Delta f(kT) &= f((k+1)T) - f(kT) = -1, \quad k = 2 \\ \Delta f(kT) &= f((k+1)T) - f(kT) = 0, \quad k > 2 \end{aligned} \quad (2-14)$$

Имено:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ f(-4T) - f(-5T) &= 0 - 0 = 0 \\ f(-3T) - f(-4T) &= 0 - 0 = 0 \\ f(-2T) - f(-3T) &= 1 - 0 = 1 \\ f(-T) - f(-2T) &= 1 - 1 = 0 \\ f(0) - f(-T) &= 1 - 1 = 0 \\ f(T) - f(0) &= 1 - 1 = 0 \\ f(2T) - f(T) &= 1 - 1 = 0 \\ f(3T) - f(2T) &= 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$f(4T) - f(3T) = 0 - 0 = 0$$

$$f(5T) - f(4T) = 0 - 0 = 0 \quad (2-15)$$

$$\vdots$$

На сличен начин, за вторите десни конечни разлики на дискретниот оригинал (2-12) се добива:

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) \equiv 0 \vee k < -4$$

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = 1, \quad k = -4$$

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = -1, \quad k = -3$$

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = 0, \quad -2 \leq k \leq 0$$

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = -1, \quad k = 1$$

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = 1, \quad k = 2$$

$$\Delta^2 f(kT) = \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = 0, \quad k \geq 3 \quad (2-16)$$

бидејќи:

$$\Delta^2 f(-5T) = f(-3T) - 2f(-4T) + f(-5T) \equiv 0, \quad k = -5$$

$$\Delta^2 f(-4T) = f(-2T) - 2f(-3T) + f(-4T) = 1, \quad k = -4$$

$$\Delta^2 f(-3T) = f(-T) - 2f(-2T) + f(-3T) = -1, \quad k = -3$$

$$\Delta^2 f(-2T) = f(0) - 2f(-T) + f(-2T) = 0, \quad k = -2$$

$$\Delta^2 f(-T) = f(T) - 2f(0) + f(-T) = 0, \quad k = -1$$

$$\Delta^2 f(0) = f(2T) - 2f(T) + f(0) = 0, \quad k = 0$$

$$\Delta^2 f(T) = f(3T) - 2f(2T) + f(T) = -1, \quad k = 1$$

$$\Delta^2 f(2T) = f(4T) - 2f(3T) + f(2T) = 1, \quad k = 2$$

$$\Delta^2 f(3T) = f(5T) - 2f(4T) + f(3T) = 0, \quad k = 3 \quad \square \quad (2-17)$$

Равенката од облик:

$$\begin{aligned} A_n \Delta^n x(kT) + A_{n-1} \Delta^{n-1} x(kT) + \dots + A_1 \Delta x(kT) + A_0 \Delta^0 x(kT) = \\ = B_m \Delta^m y(kT) + B_{m-1} \Delta^{m-1} y(kT) + \dots + B_1 \Delta y(kT) + B_0 \Delta^0 y(kT) \end{aligned} \quad (2-18)$$

каде што $x(kT)$ е непознатата функција, а $y(kT)$ е некоја позната функција од дискретната независно променлива k , додека A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и B_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) се произволни реални коефициенти, се нарекува диферентна равенка од n -ти ред. Во неа фигурираат конечните разлики на непознатата функција $x(kT)$ заклучно со конечната разлика од n -ти ред и конечните разлики на познатата функција $y(kT)$ заклучно со конечната разлика од m -ти ред. Притоа, по дефиниција:

$$\begin{aligned} \Delta^0 y(kT) &= y(kT) \\ \Delta^0 x(kT) &= x(kT) \end{aligned} \quad (2-19)$$

Редот на диферентната равенка е определен со највисокиот ред на конечната разлика од непознатата функција $x(kT)$ што се јавува во равенката.

Решението на диферентната равенка (2-18) е непознатата функција $x(kT)$ и тоа е еднозначно одредено со познатата функција $y(kT)$ и потребните n почетни услови:

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1, x(2T) = x_2, \dots, x((n-1)T) = x_{n-1} \quad (2-20)$$

Се разбира, наместо почетните услови (2-20) може да се усвојат и почетните услови:

$$x(-lT), x((-l+1)T), x((-l+2)T), \dots, x((-l+n-1)T); l \in \mathbb{N}, l < n \quad (2-21)$$

каде што n го означува редот на набљудуваната диферентна равенка, а за произволниот природен број l важи дека $l < n$. Читателот лесно може да забележи дека за $l = 0$ од (2-21) се добиваат токму условите (2-20). Во техничките апликации по правило се користат почетните услови (2-20).

Со помош на изразите (2-1) диферентната равенка (2-18) може да се запише во следниот, т.н. **каноничен облик**:

$$\begin{aligned} a_n x((k+n)T) + a_{n-1} x((k+n-1)T) + \dots + a_1 x((k+1)T) + a_0 x(kT) = \\ = b_m y((k+m)T) + b_{m-1} y((k+m-1)T) + \dots + b_1 y((k+1)T) + b_0 y(kT) \end{aligned} \quad (2-22)$$

со истите почетни услови (2-20). Притоа, коефициентите a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) во (2-22) се линеарни комбинации од коефициентите A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) и B_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) на равенката (2-18). Равенките (2-18) и (2-22) се еквивалентни во однос на решението $x(kT)$.

Една диферентна равенка може да биде формирана и од леви конечни разлики на соодветните функции во неа. Тогаш таа ќе го има следниот облик:

$$\begin{aligned} A_n \nabla^n x(kT) + A_{n-1} \nabla^{n-1} x(kT) + \dots + A_1 \nabla x(kT) + A_0 \nabla^0 x(kT) = \\ = B_m \nabla^m y(kT) + B_{m-1} \nabla^{m-1} y(kT) + \dots + B_1 \nabla y(kT) + B_0 \nabla^0 y(kT) \end{aligned} \quad (2-23)$$

со соодветните почетни услови:

$$x(-T), x(-2T), x(-3T), \dots, x(-nT) \quad (2-24)$$

каде што:

$$\begin{aligned} \nabla^0 y(kT) &= y(kT) \\ \nabla^0 x(kT) &= x(kT) \end{aligned} \quad (2-25)$$

Со смените (2-4), равенката (2-23) може да се трансформира во следниот каноничен облик:

$$\begin{aligned} a_n x(kT) + a_{n-1} x((k-1)T) + \dots + a_1 x((k-n+1)T) + a_0 x((k-n)T) = \\ = b_m y(kT) + b_{m-1} y((k-1)T) + \dots + b_1 y((k-m+1)T) + b_0 y((k-m)T) \end{aligned} \quad (2-26)$$

со истите почетни услови (2-24). Равенките (2-23) и (2-26) се еквивалентни во однос на решението $x(kT)$. Тие исто така се еквивалентни со равенките (2-18) и (2-22).

Пример 2-3. Да се состави моделот на нумеричкиот интегратор во облик (2-18) и (2-23).

Решение: Во примерот 1-2 беше изведен моделот на нумеричкиот интегратор во облик:

$$x(kT + T) - x(kT) = Ty(kT); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2-27)$$

Ако се погледне подобро, може да се забележи дека на левата страна од оваа равенка фигурира првата десна конечна разлика на излезот од нумеричкиот интегратор. Следствено, бараниот модел (2-18) на нумеричкиот интегратор ќе биде:

$$\Delta x(kT) = Ty(kT); k = 0, 1, 2, \dots \quad (2-28)$$

Овој модел се добива така што од вредноста $x(kT + T)$ се одзема вредноста $x(kT)$. Ако сега од вредноста $x(kT)$:

$$x(kT) = \int_0^{kT} y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^{k-1} Ty(iT) \quad (2-29)$$

ја одземеме вредноста $x(kT - T)$:

$$x(kT - T) = \int_0^{kT-T} y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^{k-2} Ty(iT) \quad (2-30)$$

ќе добиеме:

$$x(kT) - x(kT - T) = \sum_{i=0}^{k-1} Ty(iT) - \sum_{i=0}^{k-2} Ty(iT) = Ty(kT - T) \quad (2-31)$$

Меѓутоа, изразот на левата страна од равенката (2-31) е левата конечна разлика од прв ред на излезот на нумеричкиот интегратор, па така се добива моделот (2-23):

$$\nabla x(kT) = Ty(kT - T) \quad \square \quad (2-32)$$

2-3 МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИФЕРЕНТНИ РАВЕНКИ СО КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Да се анализира поведението на еден систем во крајна линија значи да се определи неговиот одзив на даден влез, затоа што одзивот зборува за поведението на тој систем. На пример, доколку одзивот на системот на ограничен по амплитуда влез е неограничен по амплитуда, лесно ќе заклучиме дека тој систем е нестабилен. Или доколку одзивот на системот на аperiодичен влез е осцилаторен, можеме да заклучиме дека системот има сопствена фреквенција. Од математичка гледна точка, да се определи одзивот на еден систем значи да се реши неговиот математички модел во однос на непознатиот излез на системот. Со оглед на фактот дека вниманието во овој труд е ограничено на линеарните стационарни дискретни динамички системи, во продолжение ќе се осврнеме на постапките за решавање на линеарните диферентни равенки со константни коефициенти, кои претставуваат математички модел на ваквите системи. Овие диферентни равенки може да се решат на еден од следните начини:

- со аналитичка постапка
- со нумеричка постапка
- со Z – трансформација

2-3-1 АНАЛИТИЧКО РЕШЕНИЕ

Еден начин за решавање на линеарните диферентни равенки со константни коефициенти е со дефинирање на операторот на поместување D на следниот начин:

$$D^0 f(kT) = f(kT)$$

$$Df(kT) = f(kT + T)$$

$$D^2 f(kT) = D[Df(kT)] = D[f(kT + T)] = f(kT + 2T)$$

.....

$$D^n f(kT) = D[D^{n-1} f(kT)] = D[f(kT + nT - T)] = f(kT + nT) \quad (2-33)$$

Тогаш линеарната диферентна равенка (2-22) може да се запише на следниот начин со помош на операторот D :

$$\begin{aligned} a_n D^n x(kT) + a_{n-1} D^{n-1} x(kT) + \dots + a_1 D x(kT) + a_0 D^0 x(kT) = \\ = b_m D^m y(kT) + b_{m-1} D^{m-1} y(kT) + \dots + b_1 D y(kT) + b_0 D^0 y(kT) \end{aligned} \quad (2-34)$$

односно:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) x(kT) = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0) y(kT) \quad (2-35)$$

Без ограничување на општоста на дискусијата што следува, може да се претпостави дека коефициентот a_n пред операторот D^n е еднаков на единица, зашто ако не е, лесно може да се направи да биде, делејќи ја левата и десната страна од равенката (2-34) со неговата вредност.

Секое решение на диферентната равенка (2-34) може да се претстави како збир од нејзиното посебно и општо решение:

$$x(kT) = x_{opsto}(kT) + x_{posebno}(kT) \quad (2-36)$$

каде што $x_{opsto}(kT)$ е решението на диферентната равенка (2-34) со нулева десна страна, значи хомогеното решение:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) x_{opsto}(kT) = 0 \quad (2-37)$$

а $x_{posebno}(kT)$ е решението на диферентната равенка (2-34) за нулеви почетни услови.

Решавањето на хомогената равенка (2-37) подразбира најнапред решавање на карактеристичната равенка:

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 = 0 \quad (2-38)$$

и одредување на нејзините корени $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Овие корени може да се определат алгебарски во случаите кога $n \leq 4$, но најчесто не и во останатите случаи. Во сите случаи корените на карактеристичната равенка (2-38) може да се определат со нумерички методи.

Кога сите корени на карактеристичната равенка (2-38) се прости односно еднократни, што значи сите се разликуваат помеѓу себе, решението на хомогената диферентна равенка ќе има облик:

$$x_{opsto}(kT) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \dots + c_n \lambda_n^k \quad (2-39)$$

каде што коефициентите c_1, c_2, \dots, c_n се определуваат со помош на дадените почетни услови. Доколку сите корени $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ се реални броеви, тогаш и коефициентите c_1, c_2, \dots, c_n ќе бидат сите реални. Доколку некои корени се комплексни, и соодветните коефициенти од множеството c_1, c_2, \dots, c_n ќе бидат исто така комплексни. Комплексните корени секогаш се јавуваат во конјугирано-комплексни парови, исто како и соодветните коефициенти во решението (2-39) крај овие корени.

Ако $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ е комплексен корен на карактеристичната равенка (2-38), тогаш и неговиот конјугирано-комплексен пар $\bar{\lambda}_i = \alpha_i - j\beta_i$ ќе претставува корен на (2-38), па во општото решение (2-39) на набљудуваната диферентна равенка (2-34) ќе постојат членовите:

$$\begin{aligned} c_i \lambda_i^k + \bar{c}_i \bar{\lambda}_i^k &= c_i (\alpha_i + j\beta_i)^k + \bar{c}_i (\alpha_i - j\beta_i)^k = \\ &= (\gamma_i + j\delta_i)(\alpha_i + j\beta_i)^k + (\gamma_i - j\delta_i)(\alpha_i - j\beta_i)^k = \\ &= (\gamma_i + j\delta_i) \rho_i^k (\cos k\theta_i + j \sin k\theta_i) + (\gamma_i - j\delta_i) \rho_i^k (\cos k\theta_i - j \sin k\theta_i) = \\ &= 2\rho_i^k (\gamma_i \cos k\theta_i - \delta_i \sin k\theta_i) \end{aligned} \quad (2-40)$$

каде што:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \\ \theta_i &= \arctg \frac{\beta_i}{\alpha_i} \end{aligned} \quad (2-41)$$

Изразот (2.41) може да се запише и на следниот начин:

$$2\rho_i^k (\gamma_i \cos k\theta_i - \delta_i \sin k\theta_i) = 2\rho_i^k M_i \cos(k\theta_i + \psi_i) \quad (2-42)$$

каде што:

$$M_i = \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2}$$

$$\psi_i = \operatorname{arctg} \frac{\delta_i}{\gamma_i} \quad (2-43)$$

Доколку λ_i е корен на карактеристичната равенка (2-38) со кратност r_i , тогаш во општото решение (2-39) на набљудуваната диферентна равенка (2-34) ќе се појават членови од облик:

$$c_{i1}\lambda_i^k + c_{i2}k\lambda_i^k + \dots + c_{ir_i}k^{r_i-1}\lambda_i^k \quad (2-44)$$

Партикуларното (посебно) решение на диферентната равенка (2-34) се бара во облик на познатата функција на десната страна од равенката (2-34).

Пример 2-4. Да се најде решението $x(k)$, $k \geq 0$ на линеарната диферентна равенка:

$$-x(k+2) + x(k+1) + 3x(k) = k \quad (2-45)$$

Решение: Општото решение на равенката (2-45) е:

$$-x_{opsto}(k+2) + x_{opsto}(k+1) + 3x_{opsto}(k-2) = 0$$

$$-\lambda^{k+2} + \lambda^{k+1} + 3\lambda^k = \lambda^k(-\lambda^2 + \lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow$$

$$x_{opsto}(k) = c_1(-2.3)^k + c_2(1.3)^k \quad (2-46)$$

Врз основа на изгледот на десната страна од равенката (2-45) можеме да заклучиме дека нејзиното посебно решение ќе биде од облик:

$$x_{posebno}(k) = \alpha k + \beta \quad (2-47)$$

каде што α и β се константи кои допрво треба да се определат. Со воведување на изразот (2-47) во равенката (2-45) се добива:

$$-x_{posebno}(k+2) + x_{posebno}(k+1) + 3x_{posebno}(k) = k$$

$$-\left[\alpha(k+2)+\beta\right]+\left[\alpha(k+1)+\beta\right]+3(\alpha k+\beta)=k$$

$$k=0: -(2\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)+3\beta=-\alpha+3\beta=0$$

$$k=1: -(3\alpha+\beta)+(2\alpha+\beta)+3(\alpha+\beta)=2\alpha+3\beta=1$$

$$\alpha=\frac{1}{3}; \beta=\frac{1}{9} \Rightarrow x_{posebno}(k)=\frac{1}{3}k+\frac{1}{9} \quad (2-48)$$

Оттука, решението на дадената диферентна равенка (2-45) ќе биде:

$$x(k)=x_{opsto}(k)+x_{posebno}(k)=c_1(-2.3)^k+c_2(1.3)^k+\frac{k}{3}+\frac{1}{9} \quad (2-49)$$

Пример 2-5. Да се најде решението $x(k)$, $k \geq 0$ на линеарната диферентна равенка:

$$x(k)-0.7x(k-1)+0.1x(k-2)=2y(k)-y(k-2) \quad (2-50)$$

за влез:

$$y(k)=4^k h(k) \quad (2-51)$$

Решение: Општото решение на равенката (2-50) е:

$$x(k)-0.7x(k-1)+0.1x(k-2)=0$$

$$\lambda^k-0.7\lambda^{k-1}+0.1\lambda^{k-2}=\lambda^{k-2}(\lambda^2-0.7\lambda+0.1)=0 \Rightarrow \lambda_1=0.5; \lambda_2=0.2 \Rightarrow$$

$$x_{opsto}(k)=c_1 0.5^k+c_2 0.2^k \quad (2-52)$$

Партикуларното решение на равенката (2-50) ќе го бараме во облик:

$$x_{posebno}(k)=K 4^k h(k) \quad (2-53)$$

каде што $h(k)$ е единичната отскочна функција од дискретна независно променлива, па, со воведување на (2-53) во (2-50) се добива:

$$K 4^k h(k)-0.7 K 4^{k-1} h(k-1)+0.1 K 4^{k-2} h(k-2)=(2) 4^k h(k)-4^{k-2} h(k-2)$$

$$k=2: 4^2 K-0.7(4)K+0.1K=(2)4^2-1 \Rightarrow$$

$$16K-2.8K+0.1K=32-1 \Rightarrow K=2.33$$

$$x_{posebno}(k)=2.33(4)^k h(k) \quad (2-54)$$

Оттука, решението на дадената диферентна равенка (2-50) ќе биде:

$$x(k) = x_{opsto}(k) + x_{posebno}(k) = \left[c_1 0.5^k + c_2 0.2^k + 2.33(4)^k \right] h(k) \quad (2-55)$$

Коефициентите c_1 и c_2 може да се определат на следниот начин. Од диферентната равенка (2-50) непосредно следува:

$$k = 0: x(0) - 0.7x(-1) + 0.1x(-2) = 2y(0) - y(-2) \Rightarrow x(0) = 2 \quad (2-56)$$

$$k = 1: x(1) - 0.7x(0) + 0.1x(-1) = 2y(1) - y(-1) \Rightarrow x(1) = 1.4 + 8 = 9.4 \quad (2-57)$$

а од решението (2-55) се добива:

$$k = 0: x(0) = c_1 + c_2 + 2.33 \quad (2-58)$$

$$k = 1: x(1) = 0.5c_1 + 0.2c_2 + 9.32 \quad (2-59)$$

па, со изедначување на равенките (2-56) и (2-57) со равенките (2-58) и (2-59), соодветно, се добива:

$$x(0) = 2 = c_1 + c_2 + 2.33$$

$$x(1) = 9.4 = 0.5c_1 + 0.2c_2 + 9.32$$

$$c_1 = 0.466; c_2 = -0.807 \quad (2-60)$$

Оттука, решението на дадената диферентна равенка (2-50) конечно ќе биде:

$$x(k) = \left[0.466(0.5)^k - 0.807(0.2)^k + 2.33(4)^k \right] h(k) \quad \square \quad (2-61)$$

Доколку десната страна на диферентната равенка (2-34) е полином од дискретната независно променлива од степен r , истата нехомогена диферентна равенка може да се сведе на хомогена, така што ќе се најде нејзината конечна разлика од ред $r+2$ и потоа се решава како хомогена диферентна равенка.

Пример 2-6. Да се најде решението на диферентната равенка:

$$x(k+1) - x(k) = k, \quad k \geq 0 \quad (2-62)$$

Решение:

$$x(k+1) - x(k) = k \Rightarrow \Delta x(k) = k \quad (2-63)$$

$$\Delta^2 x(k) = \Delta[\Delta x(k)] = \Delta x(k+1) - \Delta x(k) = k+1 - k = 1 \quad (2-64)$$

$$\Delta^3 x(k) = \Delta[\Delta^2 x(k)] = \Delta^2 x(k+1) - \Delta^2 x(k) = 1 - 1 = 0 \quad (2-65)$$

Решението на дадената диферентна равенка (2-62) е идентично со решението на хомогената диферентна равенка (2-65), кое изнесува:

$$x(k) = c_1 + c_2 k + c_3 k^2, \quad k \geq 0 \quad (2-66)$$

Коефициентите c_1 , c_2 и c_3 се определуваат со помош на ненулевите почетни услови на решавањата диферентна равенка. \square

2-3-2 НУМЕРИЧКО РЕШЕНИЕ

Аналитичкото решение на диферентните равенки, односно решението во затворен аналитички облик, е можно само во специјален случај. Таков е случајот на линеарните диферентни равенки со константни коефициенти. Меѓутоа, во општ случај, решението на една диферентна равенка се пресметува со т.н. **рекурентна метода**. Тоа е постапка според која вредностите $x(kT)$ на решението на дадената диферентна равенка, за различни вредности на аргументот k , се пресметуваат врз основа на нејзините претходни вредности. Така, решението на диферентната равенка (2-22) е дадено со следната **рекурентна формула** односно равенка:

$$x((k+n)T) = \frac{1}{a_n} [-a_{n-1}x((k+n-1)T) - \dots - a_1x((k+1)T) - a_0x(kT) + b_m y((k+m)T) + b_{m-1}y((k+m-1)T) + \dots + b_1y((k+1)T) + b_0y(kT)] \quad (2-67)$$

за почетни услови:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \quad x(2T) = x_2, \quad \dots, \quad x((n-1)T) = x_{n-1} \quad (2-68)$$

додека решението на диферентната равенка (2-26) е дадено со рекурентната формула:

$$x(kT) = \frac{1}{a_n} [-a_{n-1}x((k-1)T) - \dots - a_1x((k-n+1)T) - a_0x((k-n)T) + b_m y(kT) + b_{m-1}y((k-1)T) + \dots + b_1y((k-m+1)T) + b_0y((k-m)T)] \quad (2-69)$$

за почетни услови:

$$x(-T), \quad x(-2T), \quad x(-3T), \quad \dots, \quad x(-nT) \quad (2-70)$$

Во математиката, **рекурентна равенка** е таква равенка, која рекурентно дефинира низа од дискретни вредности за дадени почетни услови, при што, секој следен елемент од низата е дефиниран како функција од претходните. По својата природа, диферентните равенки се рекурентни равенки и затоа термините диферентни и рекурентни равенки понекогаш се користат наизменично односно рамноправно. Меѓутоа, мора да се истакне дека постојат рекурентни равенки, кои не може да се еквивалентираат со диферентни равенки.

За $k = 0$ од (2-69) се добива:

$$x(0) = \frac{1}{a_n} \left[-a_{n-1}x(-T) - \dots - a_1x((-n+1)T) - a_0x(-nT) + b_my(0) + b_{m-1}y(-T) + \dots + b_1y((-m+1)T) + b_0y(-mT) \right] \quad (2-71)$$

За $k = 1$ важи:

$$x(T) = \frac{1}{a_n} \left[-a_{n-1}x(0) - \dots - a_1x((2-n)T) - a_0x((1-n)T) + b_my(T) + b_{m-1}y(0) + \dots + b_1y((2-m)T) + b_0y((1-m)T) \right] \quad (2-72)$$

За $k = 2$ е:

$$x(2T) = \frac{1}{a_n} \left[-a_{n-1}x(T) - \dots - a_1x((3-n)T) - a_0x((2-n)T) + b_my(2T) + b_{m-1}y(T) + \dots + b_1y((3-m)T) + b_0y((2-m)T) \right] \quad (2-73)$$

итн. Ако решаваната диферентна равенка е дадена во обликот (2-18) или во обликот (2-23), тогаш со помош на смените (2-1) односно смените (2-4), треба најнапред да се доведе во обликот (2-22) односно (2-26), соодветно, и потоа да се примени соодветната рекурентна формула.

Предноста на изложената постапка се состои во нејзината применливост за решавање диферентни равенки од многу општ облик:

$$x(k+n) = f \left[k, x(k), x(k+1), \dots, x(k+n-1) \right] \quad (2-74)$$

кои воопшто не мора да бидат линеарни и со константни коефициенти. Единствен услов е сите опфатени членови во равенката да може да се програмираат. Предноста на постапката за решавање линеарни диферентни равенки со константни коефициенти се состои во едноставноста на пресметките опфатени со неа, нејзината погодност за програмирање односно решавање со помош на дигитален пресметувач и можноста за добивање на бараното решение на зададената диферентна равенка независно од познавањето или непознавањето на нулите од нејзиниот карактеристичен полином, за што повеќе ќе стане збор подоцна. Недостаток на оваа постапка е што бараното решение не може да се добие во затворен аналитички облик, освен во некои специјални случаи.

Пример 2-7. Да се најде решението на диферентната равенка:

$$3\Delta^2x(kT) + 2\Delta x(kT) + 7x(kT) = 0; x(0) = 3, x(T) = 6 \quad (2-75)$$

за $k = 0, 1, 2, 3$.

Решение: Со смените (2.1), диферентната равенка (2-75) се доведува на облик:

$$3[x(kT+2T) - 2x(kT+T) + x(kT)] + 2[x(kT+T) - x(kT)] + 7x(kT) = 0$$

$$3x(kT+2T) - 4x(kT+T) + 8x(kT) = 0 \quad (2-76)$$

и таа може да се реши по следната рекурентна формула:

$$x(kT+2T) = \frac{4}{3}x(kT+T) - \frac{8}{3}x(kT) \quad (2-77)$$

Оттука:

$$k=0: x(2T) = \frac{4}{3}x(T) - \frac{8}{3}x(0) = 0 \quad (2-78)$$

$$k=1: x(3T) = \frac{4}{3}x(2T) - \frac{8}{3}x(T) = -16 \quad (2-79)$$

$$k=2: x(4T) = \frac{4}{3}x(3T) - \frac{8}{3}x(2T) = -\frac{64}{3} \quad (2-80)$$

$$k=3: 3x(5T) = \frac{4}{3}x(4T) - \frac{8}{3}x(3T) = -\frac{128}{3} \quad (2-81)$$

2-3-3 РЕШЕНИЕ СО ПОМОШ НА Z-ТРАНСФОРМАЦИЈАТА

Основната идеја врз која е заснована Z – трансформацијата им била позната на математичарите од многу одамна. Уште во 18-тиот век, поточно во 1730-та година, за првпат ја употребил De Moivre (Abraham de Moivre, 1667 – 1754) во своите трудови од областа на теоријата на веројатност. Идејата зад Z – трансформацијата му била позната и на Лаплас (Pierre Simon Laplace, 1749 - 1827). Повторно е воведена 1947-та година од страна на Хурвиц (W. Hurevicz, 1904 - 1956) и други, како начин за анализа на радарските дискретни системи. Називот Z – трансформација ѝ го дале Рагацини (John Ralph Ragazzini, 1912 – 1988) и Заде (Lotfi Aliasker Zadeh, 1921 - 2017) во 1952-та година, кога биле дел од тимот автоматичари на Универзитетот во Колумбија, САД. Подоцна Џари (Eliahu Ibrahim Jury, 1923 - 2020) ја развил и популаризирал модифицираната Z – трансформација. Како и со Лапласовата трансформација, така и со Z – трансформацијата, се случило истото: откриена од страна на математичарите пред векови, таа повторно е откриена од страна на инженерите пред неколку децении.

Z – трансформацијата претставува моќен математички апарат за решавање линеарни диферентни равенки со константни коефициенти. Со помош на неа, една функција од дискретна независно променлива се трансформира во функција од комплексната променлива z . Аналогно, една линеарна диферентна равенка со константни коефициенти, со помош на Z – трансформацијата, се трансформира во соодветна алгебарска равенка. Со тоа, посложениот проблем на решавање линеарни диферентни равенки во временско подрачје, се заменува со многу поедноставниот проблем на

решавање алгебарски равенки во z – комплексното подрачје. Предноста на Z – трансформацијата за решавањето линеарни диферентни равенки со константни коефициенти над останатите методи се состои, пред сè, во фактот дека почетните услови на решаваната равенка автоматски влегуваат во пресметките уште на самиот почеток и, следствено, се содржани во решението, како и во фактот дека сите пресметки се извршуваат во комплексното подрачје на променлива z , каде што соодветните операции се многу поедноставни. Исто така, решението на зададената диферентна равенка се добива во затворен аналитички облик. Недостаток на постапката е што не е применлива за решавање нелинеарни диферентни равенки или равенки со коефициенти кои зависат од дискретната независно променлива.

Бидејќи Z – трансформацијата е погодна за решавање линеарни диферентни равенки со константни коефициенти, таа е погодна и за анализа на линеарните стационарни дискретни динамички системи, чиј математички модел е токму од таков облик. Z – трансформацијата е моќно „орудие“ во изучувањето на класата линеарни стационарни дискретни динамички системи. Затоа во продолжение посебно внимание ќе ѝ посветиме на Z – трансформацијата и нејзините особини.

3 Z-ТРАНСФОРМАЦИЈА

3-1 ВОВЕД

Постапките за изучување на динамичките системи со примена на одреден вид математички трансформации имаат широка примена во инженерската пракса. Така, во областа на конвенционалното континуално линеарно автоматско управување и телекомуникациите, Лапласовата и Фуриеовата трансформација имаат извонредно важно место и значење. Со нивна помош на едноставен начин се добива решението на линеарните диференцијални равенки со кои се опишани таквите управувачки односно комуникациски системи. Слично значење и важност има и Z – трансформацијата за линеарните дискретни системи.

3-2 ДИРЕКТНА Z-ТРАНСФОРМАЦИЈА

Директната Z – трансформација на една функција од дискретна независно променлива $f(kT)$ се дефинира како функционален степенски ред по негативните степени на комплексната променлива z , чии коефициенти се амплитудите на таа функција односно дискретните вредности $f(0)$, $f(T)$, $f(2T)$, ... итн. Во продолжение, заради едноставност, директната Z – трансформација ќе ја нарекуваме само Z – трансформација. Како и во случајот на Лапласовата трансформација, може да се дефинира **еднострана Z – трансформација**:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots \quad (3-1)$$

и **двострана Z – трансформација**:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \dots + f(-kT)z^k + \dots + f(-2T)z^2 + f(-T)z + f(0) + \\ &+ f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots = \sum_{k=-\infty}^{-1} f(kT)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} f(kT)z^{-k} + F(z) \end{aligned} \quad (3-2)$$

Едностраната Z – трансформација носи информации само за вредностите на функцијата $f(kT)$ за ненегативни вредности на аргументот k , додека двостраната Z – трансформација содржи информација за вредностите на функцијата $f(kT)$ во сите дискретни мигови во кои таа е дефинирана. За $f(kT) \equiv 0$ за секое $k < 0$, едностраната и двостраната Z – трансформација се идентични. Меѓутоа, кога $f(kT) \neq 0$ за $k < 0$, дефинициите (3-1) и (3-2) природно водат кон различни резултати. Оттука, за да се определи функцијата $f(kT)$ чија Z – трансформација е дадена, најнапред треба да се знае за која Z – трансформација се работи.

Пример 3-1. Нека е дадена функцијата:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} \quad (3-3)$$

Да се најде функцијата $f(kT)$, чија што Z – трансформација е дадена со (3-3).

Решение: Најнапред ќе претпоставиме дека функцијата (3-3) претставува еднострана Z – трансформација на функцијата $f(kT)$:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots \quad (3-4)$$

За да ја најдеме функцијата $f(kT)$, функцијата $F(z)$ ќе ја изразиме преку негативните степени на комплексната променлива z , што се постига со делење на нејзиниот броител и именител со највисокиот степен на z и воведување помошна променлива $u = z^{-1}$:

$$F(z) = \frac{(2z+1)/z^2}{(z^2+z-2)/z^2} = \frac{2z^{-1}+z^{-2}}{1+z^{-1}-2z^{-2}} = \frac{2u+u^2}{1+u-2u^2} = F(u) \quad (3-5)$$

Сега функцијата $F(u)$ се развива во Тајлоров ред во околина на точката $u = z^{-1} = 0$ ($z = \infty$), кој важи за $|z^{-1}| < \frac{1}{2}$ односно за $|z| > 2$:

$$F(u) = \frac{2u+u^2}{1+u-2u^2} = F(0) + F'(0)u + \frac{1}{2!}F''(0)u^2 + \frac{1}{3!}F'''(0)u^3 + \dots \quad (3-6)$$

каде што вредностите на функцијата $F(u)$ и нејзините последователни изводи во нулата се пресметуваат на следниот начин:

$$\begin{aligned} F(0) &= \lim_{u \rightarrow 0} F(u) = 0 \\ F'(0) &= \lim_{u \rightarrow 0} F'(u) = 2 \\ F''(0) &= \lim_{u \rightarrow 0} F''(u) = -2 \\ F'''(0) &= \lim_{u \rightarrow 0} F'''(u) = 30 \end{aligned} \quad (3-7)$$

Така, развојот на функцијата $F(u)$ во Тајлоров ред во околина на нулата е:

$$F(u) = 0 + 2u - u^2 + 5u^3 - 7u^4 + \dots \quad (3-8)$$

од каде, со враќање на старата променлива z се добива:

$$F(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots \quad (3-9)$$

Бидејќи коефициентите пред негативните степени на комплексната променлива z во изразот за едностраната Z -трансформација (3-1) се дискретните вредности на функцијата $f(kT)$, бараното решение ќе биде:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(-2)^k, & k > 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

Нека сега функција (3-3) претставува двострана Z -трансформација на функцијата $f(kT)$:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \mathcal{F}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} f(kT)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (3-11)$$

Од математичка гледна точка, двостраната Z -трансформација може да се набљудува како Лоренов ред на аналитичката функција $F(z)$ по комплексната променлива z . Оттука, со развој на функцијата (3-3) во Лоранов ред во прстенот $1 < |z| < 2$ се добива:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = \mathcal{F}_1(z) + \mathcal{F}_2(z) \\ \mathcal{F}_1(z) &= \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots; \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1 \\ \mathcal{F}_2(z) &= \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots; \quad \left| \frac{z}{2} \right| < 1 \Rightarrow |z| < 2 \\ \mathcal{F}(z) &= \dots - \frac{z^3}{16} + \frac{z^2}{8} - \frac{z}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots; \quad 1 < |z| < 2 \end{aligned} \quad (3-12)$$

па, врз основа на дефиницијата на двостраната Z -трансформација (3-2), функцијата $f(kT)$ ќе биде:

$$f(kT) = \begin{cases} (-2)^k / 2, & k < 0 \\ 1/2, & k = 0 \\ 1, & k > 0 \end{cases} \quad (3-13)$$

Очигледно добиените изрази (3-10) и (3-13) се разликуваат меѓу себе, што значи се работи за две различни функции $f(kT)$. □

Двостраната Z -трансформација првенствено и главно се користи за анализа и решавање проблеми поврзани со случајните стационарни процеси, кога во никој случај не може да се претпостави дека $f(kT) \equiv 0$ за секое $k < 0$. Бидејќи во анализата на

линеарните дискретни системи се разгледуваат исклучиво каузални сигнали (сигнали кои го задоволуваат условот $f(kT) \equiv 0$ за секое $k < 0$), без проблем може да се користи едностраната Z – трансформација. Затоа, во продолжение, секогаш ќе станува збор за еднострана Z – трансформација, без тоа посебно да се нагласува.

Функцијата $f(kT)$ често се нарекува **дискретен оригинал**, додека функцијата $F(z)$ во (3-1) се нарекува Z – **слика** што му припаѓа на дискретниот оригинал $f(kT)$. Аргументот на функцијата $F(z)$ е комплексна променлива $z = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z = \rho e^{j\phi}$ и се нарекува променлива на Z – трансформацијата.

Дискретниот оригинал $f(kT)$ и неговата Z – слика чинат еден Z – **трансформациски пар**. Скоро во секоја литература посветена на линеарните дискретни системи се дадени таблица на основните и најчесто сретнувани Z – трансформациски парови. Таква таблица е дадена и во оваа книга како додаток 1.

Трансформацијата (3-1) накусо може да се запише на следниот начин:

$$F(z) = Z\{f(kT)\} \quad (3-14)$$

при што со овој запис симболично е означена математичката операција која подразбира определување на сумата $F(z)$ на бесконечниот ред $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$, кој фигурира на десната страна од (3-1). Меѓутоа, таа сума ќе постои само доколку редот е конвергентен, поради што прашањето за конвергенција на редот $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$ е едно од основните прашања во теоријата на Z – трансформацијата и бара посебно внимание. Во продолжение е дадена теоремата за апсолутна конвергенција на едностраната Z – трансформација, која гласи: Ако оригиналот $f(kT)$ го задоволува условот:

$$|f(kT)| < \infty, k \neq \infty \quad (3-15)$$

и ако постојат позитивни константи N , r и K такви што:

$$|f(kT)| \leq Nr^k, k \geq K \quad (3-16)$$

тогаш едностраната Z – трансформација апсолутно конвергира за секое $\rho = |z| > r$.

При доказот на теоремата се поаѓа од дефиницијата на едностраната Z – трансформација (3-1), од каде непосредно следува:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{K-1} f(kT)z^{-k} + \sum_{k=K}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (3-17)$$

Оттука:

$$|F(z)| \leq \sum_{k=0}^{K-1} |f(kT)|\rho^{-k} + \sum_{k=K}^{\infty} |f(kT)|\rho^{-k} \leq$$

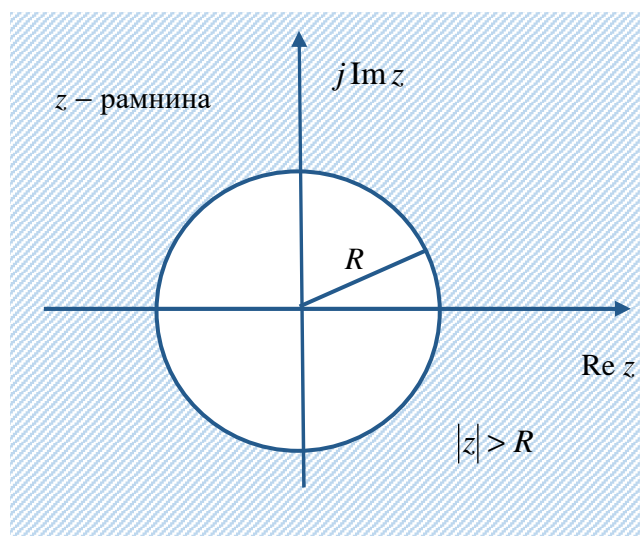
$$\leq M \sum_{k=0}^{K-1} \rho^{-k} + N \sum_{k=K}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \leq M \frac{1-\rho^{-K}}{1-\rho^{-1}} + N \sum_{k=K}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \quad (3-18)$$

Првата сума на десната страна од (3-17) претставува геометриски ред, чија сума е конечна за секое $\rho > r$, додека втората сума е конечна за секое конечно r и K . Со тоа е завршен доказот на теоремата за апсолутна конвергенција на едностраната Z -трансформација.

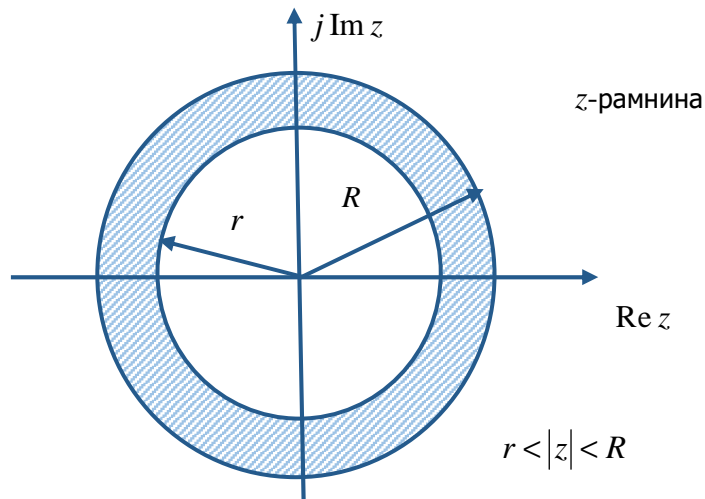
Најмалата вредност на r за која $F(z)$ апсолутно конвергира за секое $\rho = |z| > r$ се нарекува **радиус на апсолутна конвергенција** на едностраната Z -трансформација и се означува со R . Поимот за радиус на апсолутна конвергенција кај едностраната Z -трансформација е аналоген со поимот за апциса на апсолутна конвергенција кај Лапласовата трансформација.

Областа на апсолутна конвергенција на едностраната Z -трансформација е надворешноста на круг во комплексната z -рамнина со центар во координатниот почеток и радиус R и таа е прикажана на сликата 3-1. Кружницата $|z| = R$ се нарекува **кружница на апсолутна конвергенција** на едностраната Z -трансформација. Областа на апсолутна конвергенција на двостраната Z -трансформација (3-2) е кружен прстен во комплексната z -рамнина со центар во координатниот почеток и радиуси r и R , при што $r < R$ и истата е прикажана на сликата 3-2. За споредба и аналогија со Лапласовата трансформација, да се потсетиме дека едностраната Лапласова трансформација конвергира во полурамнина од s -комплексната рамнина десно од правата $\text{Re } s = \sigma_0$, каде што σ_0 претставува оска на апсолутна конвергенција на набљудуваната L -слика, додека двостраната Лапласова трансформација конвергира во вертикален појас од s -рамнината.

Кон теоремата за апсолутна конвергенција на едностраната Z -трансформација се надоврзува теоремата за униформна конвергенција и аналитичност на сликата $F(z)$, која може да се искаже на следниот начин: Ако Z -сликата $F(z)$ апсолутно конвергира



Слика 3-1 Графички приказ на областа на апсолутна конвергенција на едностраната Z -трансформација



Слика 3-2 Графички приказ на областа на апсолутна конвергенција на двостраната Z -трансформација

за секое $|z| > r$, тогаш таа униформно конвергира и е аналитичка во областа $|z| > r$. Доказот на оваа теорема произлегува непосредно од дефиницијата на Z -трансформацијата како степенски ред по степените на z^{-1} . Следствено, вториот дел од теоремата имплицира дека сите сингуларни точки на $F(z)$ мора да се наоѓаат во внатрешноста или на кружницата од кругот $|z| \leq R$. Општо земено, кружницата $|z| = R$ минува низ сингуларната точка на $F(z)$ која има најголем модул, односно се наоѓа на најголемо растојание од координатниот почеток во комплексната z -рамнина.

Од досега кажаното произлегуваат следните заклучоци:

- Сумата $F(z)$ ќе постои само доколку редот $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$ е конвергентен
- Z -сликата $F(z)$, која претставува сума на редот $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$, постои и е дефинирана само во неговата областа на апсолутна конвергенција, а тоа е надворешноста на кругот $|z| \leq R$
- Сликата $F(z)$ е регуларна функција во областа $|z| > R$, што значи дека сите нејзини сингуларни точки лежат во внатрешноста на кругот на апсолутна конвергенција $|z| \leq R$ или на неговата кружница

Во продолжение е прикажана постапката за одредување на сумата $F(z)$ на редот $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$ за конкретен случај, односно е прикажано одредувањето на Z -сликата $F(z)$ на даден дискретен оригинал по дефиниција на едностраната Z -трансформација.

Пример 3-2. Да се определи Z -сликата $F(z)$ на дискретниот оригинал:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ a, & k \geq 0 \end{cases} \quad a = \text{const.} \quad (3-19)$$

Решение: Врз основа на дефиницијата на едностраната Z – трансформација, Z – сликата $F(z)$ на набљудуваниот дискретен оригинал е дадена со сумата на бесконечен геометриски ред со коефициент a :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} az^{-k} = a + az^{-1} + az^{-2} + \dots + az^{-k} + \dots \quad (3-20)$$

која може да се определи како гранична вредност на конечната сума:

$$S_k = a + az^{-1} + az^{-2} + \dots + az^{-k+1} = a \frac{1 - z^{-k}}{1 - z^{-1}} \quad (3-21)$$

кога $k \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \frac{a}{1 - z^{-1}} \left(1 - \lim_{k \rightarrow \infty} z^{-k} \right) \quad (3-22)$$

Меѓутоа, граничната вредност $\lim_{k \rightarrow \infty} z^{-k}$ постои само за $|z| > 1$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^{-k} = \begin{cases} 0, & |z| > 1 \\ \text{неопределена,} & |z| = 1 \\ \text{дивергентна,} & |z| < 1 \end{cases} \quad (3-23)$$

Оттука произлегува дека сумата (3-22) постои и е конвергентна само за точки од областа $|z| > 1$, односно во надворешноста на кругот $|z| \leq 1$ и тогаш:

$$S = \frac{a}{1 - z^{-1}} = \frac{az}{z - 1}, \quad |z| > 1 \quad (3-24)$$

Во внатрешноста на кругот $|z| \leq 1$, т.е. во областа $|z| < 1$, сумата S е дивергентна. Следствено, Z – сликата $F(z)$ на дискретниот оригинал (3-19) ќе биде:

$$F(z) = \begin{cases} \frac{az}{z - 1}, & |z| > 1 \\ \text{не постои,} & |z| \leq 1 \end{cases} \quad (3-25)$$

и нејзиниот радиус на апсолутна конвергенција е $R = 1$.

Дискретниот оригинал (3-19) може да се претстави аналитички и во следниот облик:

$$f(kT) = ah(kT) \quad (3-26)$$

каде што:

$$h(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases} \quad (3-27)$$

е дискретен облик на единичната отскочна функција $h(t)$ позната како Хевисајдова функција. Тогаш, за $a = 1$, од (3-25) директно се добива Z -сликата $H(z)$ на функцијата $h(kT)$:

$$H(z) = Z\{h(kT)\} = \begin{cases} \frac{z}{z-1}, & |z| > 1 \\ \text{не постои,} & |z| \leq 1 \end{cases} \quad (3-28)$$

Како што може да се забележи, сликата (3-28) е дробно рационална функција од комплексната променлива z . Всушност, Z -сликите на сите дискретни оригинали со кои ќе се сретнуваме во анализата на линеарните стационарни дискретни динамички системи се дробно рационални функции од комплексната променлива z . Оттука, тие секогаш може да се претстават со општиот облик:

$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (3-29)$$

каде што $a(z)$ и $b(z)$ се полиноми од комплексната променлива z со степени n и m , соодветно:

$$a(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \quad (3-30)$$

$$b(z) = b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0, \quad m \leq n \quad (3-31)$$

Ограничувањето $m \leq n$ произлегува од фактот дека се работи за едностраната Z -трансформација. Имајќи на ум дека нулите на еден полином се дефинирани како вредности на неговиот аргумент за кои полиномот поприма вредност 0, произлегува дека нулите на полиномот $a(z)$ во именителот на (3-29) ќе претставуваат сингуларни точки на Z -сликата $F(z)$ во кои таа поприма бесконечно голема вредност, односно нејзини полови. Од друга страна, нулите на полиномот $b(z)$ во броителот на (3-29) се едновременно нули и на дробно рационалната функција $F(z)$. Еден полином има онолку нули, колку што изнесува неговиот степен. Следствено, дробно рационалната функција $F(z)$ дефинирана со (3-29) – (3-31) ќе има n полови и m нули. Ако половите на функцијата $F(z)$ ги означиме со z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а нулите со w_j ($j = 1, 2, \dots, m$), истата може да се претстави во следниот факторизиран облик:

$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - w_j)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (z - w_j)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} \quad (3-32)$$

За Z -сликите кои претставуваат дробно рационални функции од комплексната променлива z , областа на апсолутна конвергенција може да се дефинира на следниот

начин: дробно рационалната функција $F(z)$ е апсолутно конвергентна, односно постои во делот од z -комплексната рамнина, кој не содржи ниту еден нејзин пол, што значи дека сите полови на сликата $F(z)$ мора да се опфатени со кругот на апсолутна конвергенција $|z| \leq R$. Притоа, кружницата $|z| = R$ минува низ полот на $F(z)$ кој има најголем модул, односно се наоѓа на најголемо растојание од координатниот почеток во комплексната z -рамнина.

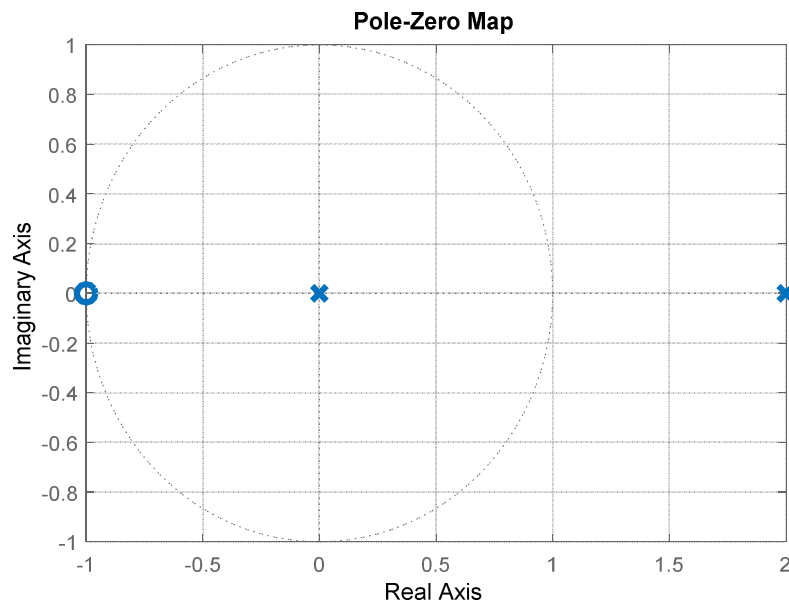
Пример 3-3. Да се определи областа на апсолутна конвергенција на Z -сликите:

$$F_1(z) = \frac{z+1}{z(z-2)} \quad (3-33)$$

$$F_2(z) = \frac{z \sin(2T)}{z^2 - 2z \cos(2T) + 1} \quad (3-34)$$

Решение: Z -сликата $F_1(z)$ има два прости реални пола $z_1 = 0$ и $z_2 = 2$, кои се прикажани на сликата 3-3. Следствено, нејзиниот радиус на апсолутна конвергенција ќе биде $R_1 = 2$, а таа ќе постои во надворешноста на кругот $|z| \leq 2$, односно во областа $|z| > 2$, па може да се запише:

$$F_1(z) = \frac{z+1}{z(z-2)}, \quad |z| > 2 \quad (3-35)$$



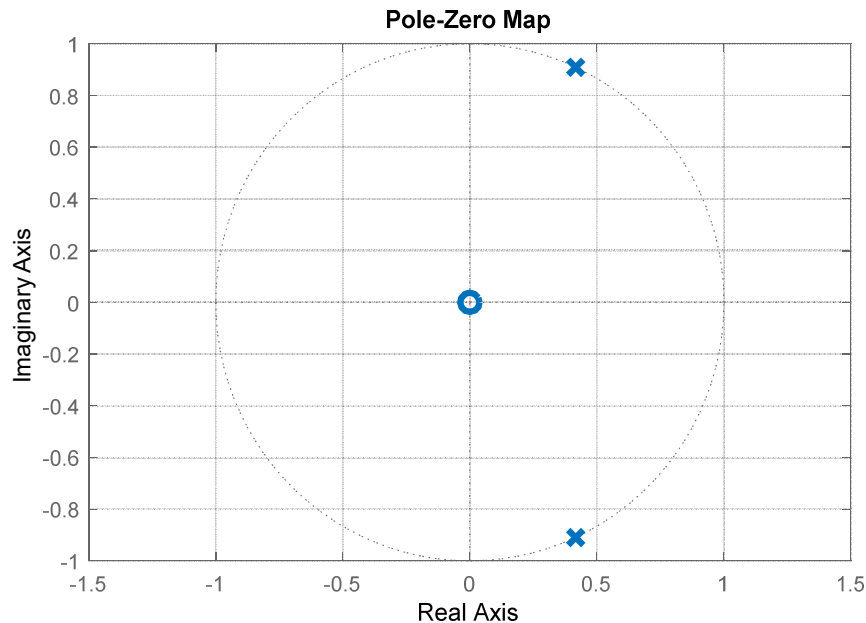
Слика 3-3 Положба на нулите и половите на Z -сликата $F_1(z)$ во комплексната z -рамнина

Z -сликата $F_2(z)$ може да се претстави во следниот факторизиран облик:

$$F_2(z) = \frac{z \sin(2T)}{z^2 - 2z \cos(2T) + 1} = \frac{z \sin(2T)}{(z - e^{-j2T})(z - e^{j2T})} \quad (3-36)$$

од каде се гледа дека таа има пар прости конјугирано-комплексни полови во точките $z_{1,2} = e^{\pm j2T}$, сликата 3-4. Следствено, нејзиниот радиус на апсолутна конвергенција изнесува $R_2 = |z_1| = |z_2| = |e^{-j2T}| = |e^{j2T}| = 1$, па сликата $F_2(z)$ постои во областа $|z| > 1$:

$$F_2(z) = \frac{z \sin(2T)}{z^2 - 2z \cos(2T) + 1}, \quad |z| > 1 \quad (3-37)$$



Слика 3-4 Положба на нулите и половите на Z – сликата $F_2(z)$ во комплексната z – рамнина \square

3-3 ОСОБИНИ НА ЕДНОСТРАНАТА Z – ТРАНСФОРМАЦИЈА

Особините на Z – трансформацијата се искажани преку основните теореми на Z – трансформацијата. Овие теореми наоѓаат широка примена при одредувањето Z – слики на дадени дискретни оригинали, решавање диферентни равенки со константни коефициенти и за некои други примени за кои ќе стане збор подоцна. Теоремите најчесто одат во парови и имаат по два рамноправни наслови – едниот го опишува она што се случува во просторот на дискретните оригинали, а другиот она што се случува во просторот на Z – сликите. Најголем дел од нив се докажуваат поаѓајќи од дефиницијата на едностраната Z – трансформација (3-1). Во продолжение се дадени некои од поважните теореми на Z – трансформацијата.

Теорема I – Теорема за линеарност на Z – трансформацијата. Z – трансформацијата поседува едно многу битно својство, а тоа е својството на линеарност. Линеарноста на Z – трансформацијата имплицира дека Z – сликата на линеарна комбинација од дискретни оригинали е истата таа линеарна комбинација од Z – сликите на одделните оригинали, се разбира, под услов тие слики да постојат. Теоремата може да се искаже на следниот начин: Ако оригиналите $f_1(kT)$ и $f_2(kT)$ имаат Z – слики $F_1(z)$ и $F_2(z)$ со радиуси на апсолутна конвергенција R_1 и R_2 , соодветно:

$$f_1(kT) \xrightarrow{Z} F_1(z) = Z\{f_1(kT)\}, |z| > R_1$$

$$f_2(kT) \xrightarrow{Z} F_2(z) = Z\{f_2(kT)\}, |z| > R_2 \quad (3-38)$$

тогаш и оригиналот:

$$f(kT) = a_1 f_1(kT) + a_2 f_2(kT) \quad (3-39)$$

кадешто a_1 и a_2 се произволни константи:

$$a_1, a_2 = const. \in \mathbf{C} \quad (3-40)$$

има Z – слика $F(z)$ за која важи:

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{f(kT)\} = Z\{a_1 f_1(kT) + a_2 f_2(kT)\} = Z\{a_1 f_1(kT)\} + Z\{a_2 f_2(kT)\} = \\ &= a_1 Z\{f_1(kT)\} + a_2 Z\{f_2(kT)\} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \end{aligned} \quad (3-41)$$

При доказот на теоремата се поаѓа од дефиницијата на едностраната Z – трансформација (3-1), од каде со оглед на (3-39) непосредно следува:

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} [a_1 f_1(kT) + a_2 f_2(kT)] z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_1 f_1(kT) z^{-k} + a_2 f_2(kT) z^{-k}] = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 f_1(kT) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_2 f_2(kT) z^{-k} = \\ &= a_1 \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) z^{-k} + a_2 \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT) z^{-k} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z); |z| > \max(R_1, R_2) \end{aligned} \quad (3-42)$$

Својството за линеарност на Z – трансформацијата ги опфаќа **својството на хомогеност** и **својството на адитивност**, кои може да се искажат на следниот начин:

својство на хомогеност -

$$Z\{af(kT)\} = aZ\{f(kT)\}, a = const. \in \mathbf{C} \quad (3-43)$$

својство на адитивност -

$$Z\{f_1(kT) + f_2(kT)\} = Z\{f_1(kT)\} + Z\{f_2(kT)\} \quad (3-44)$$

Теоремата за линеарност на Z – трансформацијата може да се прошири и на поголем, но конечен број собироци N . Тогаш таа ќе гласи: ако оригиналите $f_i(kT)$ имаат Z – слики $F_i(z) = Z\{f_i(kT)\}$, соодветно:

$$f_i(kT) \xrightarrow{Z} F_i(z) = Z\{f_i(kT)\}, |z| > R_i; i = 1, 2, \dots, N \quad (3-45)$$

тогаш и оригиналот:

$$f(kT) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(kT) \quad (3-46)$$

каде што a_i се произволни константи:

$$a_i = \text{const.} \in \mathbf{C}; i = 1, 2, \dots, N \quad (3-47)$$

има своја Z – слика $F(z)$, за која важи:

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^N a_i f_i(kT) \right] z^{-k} = \\ &= \sum_{i=1}^N a_i \sum_{k=0}^{\infty} f_i(kT) z^{-k} = \sum_{i=1}^N a_i F_i(z); |z| > \max_{i=1,2,\dots,N} (R_i) \end{aligned} \quad (3-48)$$

притоа N е конечен природен број.

Теоремата за линеарност наоѓа примена како за одредување Z – слики на дискретни оригинали, така и при решавањето линеарни диферентни равенки со Z – трансформација.

Теорема II – Теорема за множење на дискретниот оригинал $f(kT)$ со a^{kT} односно теорема за промена на z – размерот. Теоремата може да се искаже на следниот начин: Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$ со радиус на апсолутна конвергенција R :

$$f(kT) \xrightarrow{Z} F(z) = Z\{f(kT)\}, |z| > R \quad (3-49)$$

тогаш и оригиналот:

$$g(kT) = a^{kT} f(kT) \quad (3-50)$$

каде што a е произволна константа:

$$a = \text{const.} \in \mathbf{C} \quad (3-51)$$

има Z – слика $G(z)$, за која важи:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{a^{kT} f(kT)\} = F(za^{-T}), |z| > R|a^T| \quad (3-52)$$

Со други зборови, на множењето со a^{kT} во просторот на оригиналите му одговара промена на z – скалата во просторот на Z – сликите.

Доказот на теоремата (3-52) повторно поаѓа од дефиницијата на едностраната Z – трансформација (3-1) од каде, со оглед на (3-50), непосредно следува:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\{g(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^{kT} f(kT)z^{-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot (za^{-T})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot (w)^{-k} = F(w) = F(za^{-T}), |z| > R|a^T| \end{aligned} \quad (3-53)$$

Во продолжение, низ неколку примери е илустрирана примената на првата и втората теорема на Z – трансформацијата за одредување на Z – сликите од некои дискретни оригинали.

Пример 3-4. Да се определат Z – сликите на следните оригинали:

$$f_1(kT) = e^{-j\omega kT} h(kT); \omega = const. > 0, \omega \in \mathfrak{R} \quad (3-54)$$

$$f_2(kT) = e^{j\omega kT} h(kT); \omega = const. > 0, \omega \in \mathfrak{R} \quad (3-55)$$

$$f_3(kT) = A \sin(\omega kT) h(kT); A, \omega = const. \in \mathfrak{R}; \omega > 0 \quad (3-56)$$

$$f_4(kT) = A \cos(\omega kT) h(kT); A, \omega = const. \in \mathfrak{R}; \omega > 0 \quad (3-57)$$

Решение: а) Врз основа на дефиницијата на едностраната Z – трансформација, Z – сликата $F_1(z)$ на оригиналот (3-54) е дадена со изразот:

$$F_1(z) = Z\{f_1(kT)\} = Z\{e^{-j\omega kT} h(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega kT} h(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{j\omega T} z)^{-k} \quad (3-58)$$

односно како сума на бесконечниот ред:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{j\omega T} z)^{-k} = 1 + (e^{j\omega T} z)^{-1} + (e^{j\omega T} z)^{-2} + \dots \quad (3-59)$$

За среќа, пресметувањето на оваа сума може да се избегне со примена на втората теорема на Z – трансформацијата, ако се вовде смената:

$$a = e^{-j\omega} \quad (3-60)$$

Тогаш, врз основа на (3-53) и (3-60), за Z – сликата $F_1(z)$ се добива:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= Z\{f_1(kT)\} = Z\{e^{-j\omega kT} h(kT)\} = Z\{h(kT)\}_{z \rightarrow ze^{j\omega T}} = H(z)_{z \rightarrow ze^{j\omega T}} = \\ &= \left(\frac{z}{z-1} \right)_{z \rightarrow ze^{j\omega T}} = \frac{(ze^{j\omega T})}{(ze^{j\omega T})-1} = \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}, |z| > |e^{-j\omega T}| = 1 \end{aligned} \quad (3-61)$$

при што е искористен резултатот (3-28).

б) На сличен начин како во примерот под а), со помош на втората теорема на Z – трансформацијата се определува и Z – сликата $F_2(z)$ на оригиналот (3-55), за која важи:

$$\begin{aligned} F_2(z) &= Z\{f_2(kT)\} = Z\{e^{j\omega kT} h(kT)\} = Z\{h(kT)\}_{z \rightarrow ze^{-j\omega T}} = H(z)_{z \rightarrow ze^{-j\omega T}} = \\ &= \left(\frac{z}{z-1}\right)_{z \rightarrow ze^{-j\omega T}} = \frac{(ze^{-j\omega T})}{(ze^{-j\omega T})-1} = \frac{z}{z-e^{j\omega T}}, |z| > |e^{j\omega T}| = 1 \end{aligned} \quad (3-62)$$

в) Z – сликата на даден оригинал секогаш може да се определи според дефиницијата на едностраната Z – трансформација (3-1). Следствено, за Z – сликата $F_3(z)$ на оригиналот (3-56) се добива:

$$F_3(z) = Z\{f_3(kT)\} = Z\{A \sin(\omega kT) h(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} A \sin(\omega kT) z^{-k} \quad (3-63)$$

Меѓутоа, одредувањето на една Z – слика по дефиницијата на Z – трансформацијата, односно како сума на одреден бесконечен ред, по правило, не е едноставна задача, што се гледа и од изразот (3-63). Овие потешкотии успешно се избегнуваат со примена на соодветните особини односно теореми на Z – трансформацијата. Тоа е сторено и во конкретниот случај.

Оригиналот (3-56) преку Ојлеровите смени секогаш може да се претстави во облик:

$$f_3(kT) = A \sin(\omega kT) h(kT) = \frac{A}{2j} (e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}) h(kT) \quad (3-64)$$

Тогаш, со примена на теоремата за линеарност на Z – трансформацијата, се добива:

$$\begin{aligned} F_3(z) &= Z\{f_3(kT)\} = Z\{A \sin(\omega kT) h(kT)\} = Z\left\{\frac{A}{2j} (e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}) h(kT)\right\} = \\ &= \frac{A}{2j} Z\{e^{j\omega kT} h(kT)\} - \frac{A}{2j} Z\{e^{-j\omega kT} h(kT)\} \end{aligned} \quad (3-65)$$

Ако сега во изразот (3-65) се воведат резултатите (3-61) и (3-62), тогаш за бараната Z – слика $F_3(z)$ на оригиналот (3-56) дефинитивно следува:

$$\begin{aligned} F_3(z) &= \frac{A}{2j} Z\{e^{j\omega kT} h(kT)\} - \frac{A}{2j} Z\{e^{-j\omega kT} h(kT)\} = \\ &= \frac{A}{2j} \left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega T}} \right) = \frac{Az}{2j} \left[\frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{Az(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{2j(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} = \frac{Az \sin(\omega T)}{z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z + 1} = \\
 &= \frac{Az \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}; |z| > |e^{\pm j\omega T}| = 1
 \end{aligned} \tag{3-66}$$

г) Оригиналот (3-57) со помош на Ојлеровите смени може да се претстави во облик:

$$f_4(kT) = A \cos(\omega kT) h(kT) = \frac{A}{2} (e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}) h(kT) \tag{3-67}$$

Потоа, на сличен начин како и во примерот под в), за неговата Z – слика $F_4(z)$ се добива:

$$\begin{aligned}
 F_4(z) &= Z\{f_4(kT)\} = Z\{A \cos(\omega kT) h(kT)\} = Z\left\{\frac{A}{2}(e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}) h(kT)\right\} = \\
 &= \frac{A}{2} Z\{e^{j\omega kT} h(kT)\} + \frac{A}{2} Z\{e^{-j\omega kT} h(kT)\} = \frac{A}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) = \\
 &\frac{Az}{2} \left[\frac{2z - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})}{(z - e^{j\omega T})(z - e^{-j\omega T})} \right] = Az \cdot \frac{z - \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}; |z| > |e^{\pm j\omega T}| = 1 \quad \square
 \end{aligned} \tag{3-68}$$

Теорема III – Теорема за множење на дискретниот оригинал $f(kT)$ со независно променливата kT односно диференцирање на Z – сликата $F(z) = Z\{f(kT)\}$. Оваа теорема на Z – трансформацијата гласи: Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$ со радиус на апсолутна конвергенција R , (3-49), тогаш и оригиналот:

$$g(kT) = kTf(kT) \tag{3-69}$$

има Z – слика $G(z)$ за која важи:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{kTf(kT)\} = -zT \frac{d}{dz} F(z) \tag{3-70}$$

При доказот на теоремата се тргнува од дефиницијата на Z – трансформацијата (3-1) и Ваерштрасовата (Weierstrass) теорема за диференцирање конвергентни редови, според која еден конвергентен ред може да се диференцира произволен број пати во својата област на конвергенција и пак да остане конвергентен во таа област. Така, со диференцирање на (3-1) се добива:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \left| \frac{d}{dz} (\cdot) \right.$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = -k \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k-1} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} kf(kT) z^{-k} \Big|_{(-zT)}$$

$$-zT \frac{dF(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} kTf(kT) z^{-k} \quad (3-71)$$

Имено, во согласност со Ваерштрасовата теорема, изводот од произволен n -ти ред на дадена Z – слика е конвергентен во истата област во која е конвергентна и самата Z – слика. Редот (3-1) со кој е дефинирана сликата $F(z)$ е конвергентен на множеството $|z| > R$, каде што R е негов радиус на апсолутна конвергенција, па, следствено, на тоа множество е конвергентен и редот добиен со негово диференцирање член по член, односно важи (3-71).

Со споредување на дефиницијата за $G(z)$ и (3-71) се добива дека:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{kTf(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} kTf(kT) z^{-k} = -zT \frac{d}{dz} F(z) \quad (3-72)$$

со што е докажана теоремата III.

Теоремата на Z – трансформацијата за диференцирање на Z – сликата може да се прошири на следниот начин:

$$F_n(z) = Z\{f_n(kT)\} = Z\{(kT)^n f(kT)\} = -zT \frac{d}{dz} F_{n-1}(z) \quad (3-73)$$

каде што:

$$F_{n-1}(z) = Z\{f_{n-1}(kT)\} = Z\{(kT)^{n-1} f(kT)\}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3-74)$$

Пример 3-5. Со примена на третата теорема на Z – трансформацијата и резултатот (3-53), да се определи Z – сликата на оригиналот:

$$f(kT) = kTa^{kT} h(kT); \quad k \geq 0; \quad a = cont. \in \mathfrak{R} \quad (3-75)$$

Решение: Врз основа на (3-70), (3-53) и (3-28), за бараната Z – слика се добива:

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = Z\{kTa^{kT} h(kT)\} = -zT \frac{d}{dz} Z\{a^{kT} h(kT)\} =$$

$$= -zT \frac{d}{dz} H(za^{-T}) = -zT \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-a^T} \right) = \frac{zTa^T}{(z-a^T)^2}, \quad |z| > |a^T| \quad \square \quad (3-76)$$

Теорема IV – Теорема за делење на дискретниот оригинал $f(kT)$ со дискретната независно променлива kT односно за интегрирање на Z – сликата $F(z)$. Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, што е искажано со (3-

49), и ако постои граничната вредност $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(kT)}{kT}$ и истата е конечна, тогаш и оригиналот:

$$g(kT) = \frac{f(kT)}{kT} \quad (3-77)$$

има Z – слика $G(z)$ и за таа слика важи:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\left\{\frac{f(kT)}{kT}\right\} = \frac{1}{T} \int_z^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega} d\omega + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(kT)}{kT} \quad (3-78)$$

Доказот на теоремата IV е следниот. Според дефиницијата на Z – трансформацијата (3-1) следува:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\left\{\frac{f(kT)}{kT}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kT)}{kT} z^{-k} \quad (3-79)$$

Од друга страна:

$$\frac{dG(z)}{dz} = -\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{f(kT)}{kT} z^{-k-1} = -\frac{1}{zT} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = -\frac{F(z)}{zT} \quad (3-80)$$

па, оттука:

$$dG(z) = -\frac{1}{T} \cdot \frac{F(z)}{z} dz \quad (3-81)$$

Со интегрирање на диференцијалната равенка (3-81) од z до ∞ :

$$dG(z) = -\frac{1}{T} \cdot \frac{F(z)}{z} dz \Big|_z^{\infty} \int_z^{\infty} (\cdot) d\omega \Rightarrow \int_z^{\infty} G(\omega) d\omega = -\frac{1}{T} \int_z^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-82)$$

се добива:

$$G(\infty) - G(z) = -\frac{1}{T} \int_z^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-83)$$

од каде непосредно следува:

$$G(z) = \frac{1}{T} \int_z^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega} d\omega + G(\infty) \quad (3-84)$$

притоа:

$$G(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} G(z) \quad (3-85)$$

Врз основа на граничната теорема на Z – трансформацијата за почетната вредност на еден дискретен оригинал за која допрва ќе стане збор, граничната вредност на десната страна од изразот (3-85) може да се определи како:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = \lim_{k \rightarrow 0} g(kT) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(kT)}{kT} \quad (3-86)$$

Оттука за Z – сликата $G(z)$ дефинитивно се добива (3-78). Оваа теорема се користи за одредување нови Z – трансформационски парови.

Пример 3-6. Да се определи Z – сликата на оригиналот:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, k \leq 0 \\ a^{kT}, k > 0 \end{cases} \quad (3-87)$$

Решение: Според дефиницијата на Z – трансформацијата (3-1):

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = Z\left\{\frac{a^{kT}}{kT} h((k-1)T)\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{kT}}{kT} z^{-k} \quad (3-88)$$

Диференцирајќи го изразот (3-88) во однос на променливата z се добива:

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} &= -\frac{1}{zT} \sum_{k=1}^{\infty} a^{kT} z^{-k} = -\frac{1}{zT} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^{kT} z^{-k} - 1 \right) = \\ &= -\frac{1}{zT} \left(\frac{z}{z-a^T} - 1 \right) = \frac{-a^T}{zT(z-a^T)}; |z| > |a^T| \end{aligned} \quad (3-89)$$

а решението на диференцијалната равенка (3-89) ќе биде:

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} dF(\omega) &= \frac{-a^T}{T} \int_z^{\infty} \frac{d\omega}{\omega(\omega-a^T)} \Rightarrow \\ F(\infty) - F(z) &= \frac{-1}{T} \int_z^{\infty} \left(\frac{-1}{\omega} + \frac{1}{\omega-a^T} \right) d\omega \Rightarrow \\ \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) - F(z) &= \frac{1}{T} \left[\ln(\omega) - \ln(\omega-a^T) \right]_z^{\infty} \Rightarrow \\ f(0) - F(z) &= \frac{1}{T} \ln \frac{\omega}{\omega-a^T} \Big|_z^{\infty} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$f(0) - F(z) = \frac{1}{T} \left(\ln 1 - \ln \frac{z}{z - a^T} \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(kT) - F(z) = -\frac{1}{T} \ln \frac{z}{z - a^T} \Rightarrow$$

$$F(z) = \frac{1}{T} \ln \frac{z}{z - a^T} + \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \frac{1}{T} \ln \frac{z}{z - a^T}; |z| > |a^T| \quad \square \quad (3-90)$$

Третата и четвртата теорема на Z – трансформацијата може да се сметаат за пар. Тие се користат при одредувањето Z – слики на некои дискретни оригинали.

Теорема V – Теорема за транслација на независно променливата во просторот на оригиналите односно множење на Z – сликата со нејзиниот аргумент. Теоремата може да се искаже на следниот начин: Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, тогаш и оригиналот:

$$g(kT) = f((k+n)T) \quad (3-91)$$

каде што n е цел позитивен број, има Z – слика $G(z)$ за која важи:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{f((k+n)T)\} = z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right] \quad (3-92)$$

Со други зборови, Z – сликата на дискретниот оригинал $f(kT)$ поместен во лево долж временската оска за n периоди на дискретизација T , може да се определи според изразот (3-92), доколку постои и е позната неговата слика $F(z)$. Доказот на теоремата IV е следниот. Врз основа на дефиницијата на едностраната Z – трансформација (3-1),

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{f((k+n)T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f((k+n)T) z^{-k} \quad (3-93)$$

Меѓутоа, со воведување на смената $m = k + n$ во (3-93) се добива:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\{g(kT)\} = Z\{f((k+n)T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f((k+n)T) z^{-k} = \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} f(mT) z^{n-m} = z^n \sum_{m=n}^{\infty} f(mT) z^{-m} = \\ &= z^n \left[\sum_{m=n}^{\infty} f(mT) z^{-m} + \sum_{m=0}^{n-1} f(mT) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT) z^{-m} \right] = \\ &= z^n \left[\sum_{m=0}^{\infty} f(mT) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT) z^{-m} \right] \end{aligned} \quad (3-94)$$

од каде, по враќањето на старата променлива k следува:

$$G(z) = z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right] = z^n \left[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right] \quad (3-95)$$

Со тоа е завршен доказот на теоремата V.

Се покажува дека важи и релацијата:

$$W(z) = Z\{w(kT)\} = Z\{f((k-n)T)\} = z^{-n} \left[F(z) - \sum_{k=-n}^{-1} f(kT) z^{-k} \right] \quad (3-96)$$

каде што n е позитивен цел број и $n \leq k$. Со други зборови, Z – сликата $W(z)$ на дискретниот оригинал $f(kT)$, поместен во десно долж временската оска за n периоди на дискретизација T , може да се определи според (3-96), доколку постои и е позната сликата $F(z)$. Навистина, според дефиницијата на Z – трансформацијата (3-1), следува:

$$W(z) = Z\{w(kT)\} = Z\{f((k-n)T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f((k-n)T) z^{-k} \quad (3-97)$$

Од друга страна, ако во (3-97) се воведи смената $m = k - n$ се добива:

$$\begin{aligned} W(z) &= Z\{w(kT)\} = Z\{f((k-n)T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f((k-n)T) z^{-k} = \\ &= \sum_{m=-n}^{\infty} f(mT) z^{-n-m} = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} f(mT) z^{-m} = \\ &= z^{-n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f(mT) z^{-m} + \sum_{m=-n}^{-1} f(mT) z^{-m} \right] \end{aligned} \quad (3-98)$$

или, по враќањето на старата променлива k следува:

$$W(z) = Z\{w(kT)\} = Z\{f((k-n)T)\} = z^{-n} \left[F(z) - \sum_{k=-n}^{-1} f(kT) z^{-k} \right] \quad (3-99)$$

Со тоа е докажана точноста на релацијата (3-96). Ако $f(kT) \equiv 0$ за секое $k < 0$, што е вообичаен случај, тогаш (3-96) станува:

$$W(z) = Z\{w(kT)\} = Z\{f((k-n)T)\} = z^{-n} F(z), \quad |z| > R \quad (3-100)$$

Пример 3-7. Да се определи Z – сликата $G(z)$ на оригиналот:

$$g(kT) = f((k+1)T) \quad (3-101)$$

ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, што е искажано со (3-49).

Решение: Од (3-1) непосредно следува:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\{g(kT)\} = Z\{f((k+1)T)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f((k+1)T)z^{-k} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} f(mT)z^{1-m} = z \sum_{m=1}^{\infty} f(mT)z^{-m} = z \left[\sum_{m=1}^{\infty} f(mT)z^{-m} + f(0) - f(0) \right] = \\ &= z \left[\sum_{m=0}^{\infty} f(mT)z^{-m} - f(0) \right] = zF(z) - zf(0), \quad |z| > R \quad \square \end{aligned} \quad (3-102)$$

Теорема VI – Теорема за трансформација на конечните разлики. а) Десни конечни разлики. Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, (3-49), тогаш и оригиналот:

$$\Delta f(kT) = f((k+1)T) - f(kT) \quad (3-103)$$

има Z – слика и за таа слика важи:

$$Z\{\Delta f(kT)\} = Z\{f((k+1)T) - f(kT)\} = (z-1)F(z) - zf(0) \quad (3-104)$$

За доказ на теоремата VI може да се искористи претходната теорема V. Имено:

$$Z\{\Delta f(kT)\} = Z\{f((k+1)T) - f(kT)\} = Z\{f((k+1)T)\} - Z\{f(kT)\} \quad (3-105)$$

па, ако во овој израз се воведо резултатот (3-105), ќе се добие:

$$\begin{aligned} Z\{\Delta f(kT)\} &= Z\{f((k+1)T) - f(kT)\} = Z\{f((k+1)T)\} - Z\{f(kT)\} = \\ &= zF(z) - zf(0) - F(z) = (z-1)F(z) - f(0) \end{aligned} \quad (3-106)$$

Втората конечна разлика на еден дискретен сигнал $f(kT)$ е дадена со изразот:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(kT) &= \Delta[\Delta f(kT)] = \Delta[f((k+1)T) - f(kT)] = \\ &= \Delta[f((k+1)T)] - \Delta[f(kT)] = [f((k+2)T) - f((k+1)T)] - \\ &- \Delta[f((k+1)T) - f(kT)] = f((k+2)T) - 2f((k+1)T) + f(kT) \end{aligned} \quad (3-107)$$

па, врз основа на (3-107) и теоремата V, за нејзината Z – слика се добива:

$$Z\{\Delta^2 f(kT)\} = Z\{f((k+2)T) - 2f((k+1)T) + f(kT)\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= Z\{f((k+2)T)\} - 2Z\{f((k+1)T)\} + Z\{f(kT)\} = \\
 &= [z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(T)] - 2[zF(z) - zf(0)] + F(z) = \\
 &= (z-1)^2 F(z) - z\Delta f(0) - z(z-1)f(0) \tag{3-108}
 \end{aligned}$$

До истиот резултат (3-108) може да се дојде и со помош на резултатот (3-106). Имено:

$$\begin{aligned}
 Z\{\Delta^2 f(kT)\} &= Z\{\Delta[\Delta f(kT)]\} = (z-1)Z\{\Delta f(kT)\} - z\Delta f(0) = \\
 &= (z-1)[(z-1)F(z) - zf(0)] - z\Delta f(0) = (z-1)^2 F(z) - z(z-1)f(0) - z\Delta f(0) \tag{3-109}
 \end{aligned}$$

Аналогно се пресметуваат Z – сликите на третата, четвртата и останатите десни конечни разлики на еден дискретен оригинал $f(kT)$, при што Z – сликата на десна конечна разлика од произволен ред n на дискретниот оригинал $f(kT)$ е дадена со формулата:

$$Z\{\Delta^n f(kT)\} = (z-1)^n F(z) - z \sum_{m=0}^{n-1} (z-1)^{n-m-1} \Delta^m f(0); \quad n=0,1,2,\dots \tag{3-110}$$

Релацијата (3-110) се докажува со помош на математичка индукција.

б) Леви конечни разлики. Со оглед на дефиницијата на левите конечни разлики (2-4), за првата лева конечна разлика на дискретниот оригинал $f(kT)$ важи:

$$\nabla f(kT) = f(kT) - f((k-1)T) \tag{3-111}$$

Оттука:

$$\begin{aligned}
 Z\{\nabla f(kT)\} &= Z\{f(kT) - f((k-1)T)\} = Z\{f(kT)\} - Z\{f((k+1)T)\} = \\
 &= F(z) - [z^{-1}F(z) + f(-T)] = (1 - z^{-1})F(z) - f(-T) \tag{3-112}
 \end{aligned}$$

или, за случајот кога $f(kT) \equiv 0$ за секое $k < 0$:

$$Z\{\nabla f(kT)\} = (1 - z^{-1})F(z) = \frac{z-1}{z} F(z); \quad |z| > R; \quad f(kT) \equiv 0 \forall k < 0 \tag{3-113}$$

Теоремата може едноставно да се прошири на случајот на лева конечна разлика од произволен конечен n –ти ред: Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, искажано со (3-49), тогаш и оригиналот:

$$\nabla^n f(kT) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^n F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{n-m-1} \nabla^m f(-T); \quad n=0,1,2,\dots \tag{3-114}$$

Релацијата (3-114) може да се докаже со математичка индукција. За $f(kT) \equiv 0$ за секое $k < 0$, формулата (3-114) добива облик:

$$\nabla^n f(kT) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^n F(z); \quad f(kT) \equiv 0 \forall k < 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3-115)$$

Теоремите V и VI на Z – трансформацијата имаат најголема примена за решавање линеарни диферентни равенки со константни коефициенти. Со помош на овие теореми, дадената диферентна равенка од просторот на оригиналите се пресликува во обична алгебарска равенка во просторот на Z – сликите. Притоа, ако диферентната равенка е формирана од конечни разлики како во (2-18) односно (2-23), тогаш таа се пресликува во просторот на Z – сликите со помош на теоремата VI, односно со помош на релациите (3-110) или (3-114). Ако, пак, диферентната равенка е дадена во каноничен облик како во (2-22) односно (2-26), тогаш нејзината трансформација во просторот на Z – сликите се врши со помош на теоремата V, односно релациите (3-92) или (3-96). На тој начин може да се определи Z – сликата $F(z)$ на бараното решение $f(kT)$ на зададената диферентна равенка. Одредувањето на самиот оригинал $f(kT)$ потоа не претставува проблем, зашто тој се добива како инверзна Z – трансформација од неговата слика $F(z)$.

Пример 3-8. Да се определи сликата $F(z)$ на решението $f(kT)$ на диферентната равенка:

$$\Delta^2 f(kT) - 2\Delta f(kT) = g(kT) \quad (3-116)$$

со почетни услови:

$$f(0) = 1, \quad f(T) = 2 \quad (3-117)$$

ако, под претпоставка, $g(kT)$ е позната и однапред зададена функција од дискретната независно променлива k .

Решение: Со Z – трансформација на равенката (3-116), и земајќи ги предвид почетните услови (3-117), се добива:

$$\Delta^2 f(kT) - 2\Delta f(kT) = g(kT) \Big| Z\{\cdot\}$$

$$Z\{\Delta^2 f(kT) - 2\Delta f(kT)\} = Z\{g(kT)\}$$

$$Z\{\Delta^2 f(kT)\} - 2Z\{\Delta f(kT)\} = Z\{g(kT)\}$$

$$\left[(z-1)^2 F(z) - z(z-1)f(0) - z\Delta f(0) \right] - 2\left[(z-1)F(z) - zf(0) \right] = G(z)$$

$$(z^2 - 4z + 3)F(z) - z(z-2) = G(z)$$

$$(z^2 - 4z + 3)F(z) = G(z) + z(z-2) \quad (3-118)$$

Оттука, Z – сликата $F(z)$ на решението $f(kT)$ на диферентната равенка (3-116) ќе биде:

$$F(z) = \frac{G(z)}{(z^2 - 4z + 3)} + \frac{z(z-2)}{(z^2 - 4z + 3)} \quad (3-119)$$

Самото решение $f(kT)$ на равенката (3-116) се добива со инверзна Z – трансформација на сликата (3-119). Како што може да се забележи, сликата (3-119) има два члена, од кои

едниот се должи на присуството на познатата функција $g(kT)$ на десната страна од нехомогената диферентна равенка (3-116), а вториот член е тн. **оператор на почетни услови**, кој произлегува од ненулевите почетни услови (3-117) на решаваната диферентна равенка. □

Пример 3-9. Диферентната равенка (3-116) со почетни услови (3-117) да се запише во каноничен облик и потоа да се определи Z – сликата $F(z)$ на нејзиното решение $f(kT)$.

Решение: Ако изразите (3-103) и (3-107) за првата и втората конечна разлика на оригиналот $f(kT)$ се внесат во равенката (3-116), таа ќе го добие следниот каноничен облик:

$$f((k+2)T) - 4f((k+1)T) + 3f(kT) = g(kT) \quad (3-120)$$

при што за равенката (3-120) важат истите почетни услови (3-117). Со Z – трансформација на равенката (3-120), во просторот на Z – сликите се добива:

$$f((k+2)T) - 4f((k+1)T) + 3f(kT) = g(kT) \Big| Z\{\cdot\}$$

$$Z\{f((k+2)T) - 4f((k+1)T) + 3f(kT)\} = Z\{g(kT)\}$$

$$Z\{f((k+2)T)\} - 4Z\{f((k+1)T)\} + 3Z\{f(kT)\} = Z\{g(kT)\}$$

$$[z^2F(z) - z^2f(0) - zf(T)] - 4[zF(z) - zf(0)] + 3F(z) = G(z)$$

$$[z^2F(z) - z^2 - 2z] - 4[zF(z) - z] + 3F(z) = G(z)$$

$$(z^2 - 4z + 3)F(z) = G(z) + z^2 - 2z$$

$$F(z) = \frac{G(z)}{(z^2 - 4z + 3)} + \frac{z(z-2)}{(z^2 - 4z + 3)} \quad (3-121)$$

Следствено, за $F(z)$ се добива истиот израз (3-119), што можеше и да се очекува, бидејќи диферентните равенки (3-116) и (3-120) се еквивалентни во однос на решението $f(kT)$. □

Теорема VII. Теорема за пресликување конечна сума од просторот на оригиналите во комплексното подрачје. Оваа особина на Z – трансформацијата може да се искаже на следниот начин: Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, (3-49), тогаш и конечната сума:

$$S_{k-1} = \sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-122)$$

има Z – слика и за таа слика важи:

$$Z \left\{ \sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT) \right\} = \frac{F(z)}{z-1} + \frac{z}{z-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} f(kT) \quad (3-123)$$

Доказот на теоремата може да се изведе на следниот начин. Нека се набљудува првата конечна разлика на сумата (3-122):

$$\Delta \left[\sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT) \right] = \sum_{m=-\infty}^k f(mT) - \sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT) = f(kT) \quad (3-124)$$

чија Z – слика во согласност со теоремата VI е:

$$Z \left\{ \Delta \left[\sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT) \right] \right\} = (z-1) Z \left\{ \sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT) \right\} - z \sum_{k=-\infty}^{-1} f(kT) = Z \{ f(kT) \} \quad (3-125)$$

Тогаш, од (3-125) непосредно следува дека:

$$F(z) = Z \{ f(kT) \} = Z \left\{ \Delta \left[\sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT) \right] \right\} = (z-1) Z \left\{ \sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT) \right\} - z \sum_{k=-\infty}^{-1} f(kT) \quad (3-126)$$

од каде се добива (3-123). Со тоа е докажана теоремата VII.

Пример 3-10. Да се определи Z – сликата на конечната сума:

$$S = \sum_{m=0}^k f(mT); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-127)$$

Решение: Првата десна конечна разлика на оригиналот (3-127) е:

$$\Delta \left[\sum_{m=0}^k f(mT) \right] = \sum_{m=0}^{k+1} f(mT) - \sum_{m=0}^k f(mT) = f((k+1)T) \quad (3-128)$$

а нејзината Z – слика:

$$Z \left\{ \Delta \left[\sum_{m=0}^k f(mT) \right] \right\} = (z-1) Z \left\{ \sum_{m=0}^k f(mT) \right\} - zf(0) = zF(z) - zf(0) \quad (3-129)$$

Оттука:

$$Z \left\{ \sum_{m=0}^k f(mT) \right\} = \frac{z}{(z-1)} F(z) \quad (3-130)$$

Теоремата VII со успех се користи за одредување на некои конечни суми. Имено, врз основа на (3-123), за $f(kT) = 0 \forall k < 0$ следува:

$$\sum_{m=0}^{k-1} f(mT) = Z^{-1} \left\{ \frac{F(z)}{z-1} \right\} \quad (3-131)$$

и врз основа на (3-130) произлегува:

$$\sum_{m=0}^k f(mT) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} F(z) \right\} \quad \square \quad (3-132)$$

Пример 3-11. Со помош на Z – трансформацијата и нејзините особини да се пресмета конечната сума:

$$S = \sum_{m=0}^k (2m+3)^2 \quad (3-133)$$

Решение: Сумата (3-133) може да се развие во облик:

$$S = 4 \sum_{m=0}^k m^2 + 12 \sum_{m=0}^k m + 9 \sum_{m=0}^k 1 \quad (3-134)$$

Тогаш, имајќи предвид дека:

$$Z\{k^2\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}; \quad |z| > 1 \quad (3-135)$$

и:

$$Z\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}; \quad |z| > 1 \quad (3-136)$$

врз основа на (3-132) се добива:

$$\sum_{m=0}^k m^2 = Z^{-1} \left\{ \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4} \right\} = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) \quad (3-137)$$

и:

$$\sum_{m=0}^k m = Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{(z-1)^3} \right\} = \frac{1}{2} k(k+1) \quad (3-138)$$

Оттука, бараната сума s ќе биде:

$$S = \frac{4}{6}k(k+1)(2k+1) + \frac{12}{2}k(k+1) + 9(k+1) = \frac{(k+1)(4k^2 + 20k + 27)}{3} \quad \square \quad (3-139)$$

Теорема VIII – Теорема за одредување на сумата на бесконечен конвергентен ред. Теоремата VIII на Z – трансформацијата овозможува одредување на сумата на некои бесконечни конвергентни редови. Таа гласи: Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, чии полови сите лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, тогаш бесконечниот ред:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \quad (3-140)$$

е конвергентен, па, неговата сума постои, е конечна и може да се определи според изразот:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) \quad (3-141)$$

Релацијата (3-141) може да се докаже со помош на втората теорема на Абел.

Теоремата VIII на Z – трансформацијата смее да се користи само ако функцијата $F(z)$ е регуларна во областа $|z| \geq 1$, што значи дека сите нејзини полови мора да се наоѓаат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z –комплексната рамнина. Постапките за одредување на положбата на половите на една дробно-рационална функција од комплексната променлива z во z –комплексната рамнина се дискутирани во глава 4 од овој труд, бидејќи тоа прашање е тесно поврзано со прашањето за стабилноста на линеарните дискретни системи. Овде е доволно да се истакне само следното: Дробно-рационалната функција $F(z)$ од облик:

$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (3-142)$$

каде што $a(z)$ и $b(z)$ се полиноми од комплексната променлива z од произволен степен n и m , соодветно, при што $m \leq n$, ќе биде регуларна на множеството $|z| \geq 1$ доколку сите нули на полиномот $a(z)$ во нејзиниот именител лежат во внатрешноста на кругот $|z| \leq 1$. Ваквиот полином се нарекува уште Хурвицов z –полином.

Пример 3-12. Да се определи сумата на бесконечниот ред:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^{kT} \quad (3-143)$$

каде што $a = \text{const.} < 1$ и $T = \text{const.} > 0$.

Решение: Во овој случај е:

$$f(kT) = a^{kT} h(kT) \quad (3-144)$$

каде што $h(kT)$ е единичната Хевисајдова функција од дискретна независно променлива, па:

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = \frac{z}{z - a^T}; \quad |z| > a^T \quad (3-145)$$

Единствениот пол на сликата (3-145) $z = -a^T$ се наоѓа во внатрешноста од единичниот круг $|z| \leq 1$, па во согласност со (3-141), за сумата (3-143) се добива:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^{kT} = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = F(1) = \frac{1}{1 - a^T} \quad \square \quad (3-146)$$

Теорема IX – Теорема за почетната вредност на оригиналот. Z – трансформацијата поседува особина која овозможува да се определи почетната вредност на еден дискретен оригинал преку неговата Z – слика. Оваа особина на Z – трансформацијата е искажана со следната теорема, која уште се нарекува **прва гранична теорема на Z – трансформацијата**: Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, дефинирана со (3-49), тогаш почетната вредност :

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) \quad (3-147)$$

на тој оригинал може да се пресмета според изразот:

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (3-148)$$

Со други зборови, теоремата тврди дека поведението на оригиналот $f(kT)$ во околина на нулата, т.е. за $k = 0$, е еднакво со поведението на неговата Z – слика $F(z)$ во бесконечност. Теоремата на Z – трансформацијата за почетната вредност на оригиналот овозможува да се определи почетната вредност на еден дискретен оригинал чија Z – слика е позната, без да има потреба од познавање на самиот оригинал, односно без да се врши инверзна Z – трансформација на неговата слика.

При доказот на теоремата се поаѓа од дефиницијата (3-1) на едностраната Z – трансформација и фактот дека сликата $F(z)$ е регуларна функција во сите точки од множеството $|z| > R$, па, следствено, и во точката $z \rightarrow \infty$. Оттука, ако (3-1) се запише во облик:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f(kT) z^{-k} \quad (3-149)$$

и во изразот (3-149) се пушти $z \rightarrow \infty$, ќе се добие токму изразот (3-148), бидејќи:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(kT) z^{-k} = 0 \quad (3-150)$$

Пример 3-13. Да се определи почетната вредност на оригиналот $f(kT)$, ако е позната неговата Z – слика:

$$F(z) = \frac{3z^2 + 2z + 1}{2z^2 - 8z + 6}, \quad |z| > 3 \quad (3-151)$$

Решение: Во согласност со (3-148), за бараната почетна вредност се добива:

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^2 + 2z + 1}{2z^2 - 8z + 6} = \frac{3}{2} \quad \square \quad (3-152)$$

Теорема X – Теорема за трајната вредност на оригиналот. Оваа теорема на Z – трансформацијата и претходната се нарекуваат со едно име **гранични теореми на Z – трансформацијата**, затоа што со нивна помош може да се определат граничните вредности на еден оригинал, односно неговата почетна и трајна вредност. Теоремата на Z – трансформацијата за трајната вредност на оригиналот или, како што уште се нарекува **втора гранична теорема на Z – трансформацијата**, овозможува да се определи трајната вредност на еден оригинал чија Z – слика е дадена, без да има потреба од познавање на самиот оригинал, односно без да се врши инверзна Z – трансформација на неговата Z – слика. Меѓутоа, теоремата има ограничување во својата примена. Таа гласи: Ако оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, дефинирана со (3-49), и ако сите полови на функцијата $(z-1)F(z)$ лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, тогаш постои граничната вредност :

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) \quad (3-153)$$

и таа гранична вредност може да се определи според изразот:

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad (3-154)$$

При доказот на теоремата се поаѓа од претпоставката дека функцијата $(z-1)F(z)$ нема полови во областа $|z| \geq 1$. Тогаш на тоа множество ќе биде регуларна и функцијата $(z-1)F(z) - zf(0)$, бидејќи регуларноста на една функција не се нарушува со додавање или одземање полиномен член.

Нека оригиналот $f(kT)$ има Z – слика $F(z)$, што е искажано со (3-49). Тогаш првата десна конечна разлика на овој оригинал дадена со (3-103), ќе има Z – слика (3-104). Од првите конечни разлики на оригиналот $f(kT)$ може да се формира бесконечниот конвергентен ред:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f((k+1)T) - \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) = f(\infty) - f(0) \quad (3-155)$$

чија сума, според (3-141), е дадена со:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \Delta f(kT) z^{-k} = \lim_{z \rightarrow 1} Z\{\Delta f(kT)\} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)F(z) - zf(0)] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) - f(0) \quad (3-156)$$

Со изедначување на десните страни од изразите (3-155) и (3-156), чии леви страни се еднакви, се добива:

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) - f(0) \quad (3-157)$$

односно:

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) \quad (3-158)$$

кој израз е идентичен со изразот (3-154).

При одредувањето на трајната вредност на еден оригинал со втората гранична теорема на Z – трансформацијата неопходно е најнапред да се провери дали е исполнет условот од теоремата функцијата $(z-1)F(z)$ да биде регуларна на множеството $|z| \geq 1$. Формалната примена на теоремата, без проверка на овој услов, ќе доведе до погрешен резултат. За критериумите за контрола на регуларноста на една функција $F(z)$, односно функцијата $(z-1)F(z)$ подетално ќе стане збор во делот од овој труд посветен на стабилноста на линеарните дискретни системи.

Пример 3-14. Да се определи трајната вредност на оригиналите што им припаѓаат на Z – сликите:

$$F_1(z) = \frac{2z^3 - 4z^2 + 2z - 1}{(z-1)(z^3 - 0.75z^2 + 0.125z)}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (3-159)$$

$$F_2(z) = \frac{2z^3 - 4z^2 + 2z - 1}{(z-1)(z^3 - 6z^2 + 4z - 24)}, \quad |z| > 2 \quad (3-160)$$

$$F_3(z) = \frac{3z^2 + 2z + 1}{2z^2 - 8z + 6}, \quad |z| > 3 \quad (3-161)$$

Решение: Според теоремата X, најнапред треба да се провери дали функциите:

$$(z-1)F_1(z) = \frac{2z^3 - 4z^2 + 2z - 1}{z^3 - 0.75z^2 + 0.125z} \quad (3-162)$$

$$(z-1)F_2(z) = \frac{2z^3 - 4z^2 + 2z - 1}{z^3 - 6z^2 + 4z - 24} \quad (3-163)$$

$$(z-1)F_3(z) = (z-1) \frac{3z^2 + 2z + 1}{2z^2 - 8z + 6} \quad (3-164)$$

се или не се регуларни во областа $|z| \geq 1$, т.е. дали полиномите:

$$a_1(z) = z^3 - 0.75z^2 + 0.125z \quad (3-165)$$

$$a_2(z) = z^3 - 6z^2 + 4z - 24 \quad (3-166)$$

$$a_3(z) = \frac{2z^2 - 8z + 6}{z - 1} \quad (3-167)$$

се или не се Хурвицови z -полиноми. Лесно може да се утврди дека полиномот $a_1(z)$ е Хурвицов z -полином, бидејќи неговите три нули лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ од z -комплексната рамнина:

$$a_1(z) = z^3 - 0.75z^2 + 0.125z = z(z^2 - 0.75z + 0.125) = z\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right) \quad (3-168)$$

додека полиномите $a_2(z)$ и $a_3(z)$ не се Хурвицови z -полиноми:

$$a_2(z) = z^3 - 6z^2 + 4z - 24 = (z - 6)(z^2 + 4) = (z - 6)(z + j2)(z - j2) \quad (3-169)$$

$$a_3(z) = \frac{2z^2 - 8z + 6}{z - 1} = \frac{2(z - 1)(z - 3)}{z - 1} = 2(z - 3) \quad (3-170)$$

бидејќи нивните нули се наоѓаат надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$. Следствено, за $f_1(\infty)$ се добива:

$$f_1(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z^3 - 4z^2 + 2z - 1}{z^3 - 0.75z^2 + 0.125z} = -\frac{8}{3} \quad (3-171)$$

додека:

$$f_2(\infty) \neq \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z^3 - 4z^2 + 2z - 1}{z^3 - 6z^2 + 4z - 24} = \frac{1}{25} \quad (3-172)$$

и:

$$f_3(\infty) \neq \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F_3(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{3z^2 + 2z + 1}{2z^2 - 8z + 6} = -\frac{3}{2} \quad (3-173)$$

Со други зборови, резултатот добиен со формална примена на теоремата X во случајот на функциите (3-160) и (3-161) не ја дава точната вредност $f_2(\infty)$ односно $f_3(\infty)$, која или не постои или е неограничена, бидејќи полиномите $a_2(z)$ и $a_3(z)$ не се Хурвицови z -полиноми. □

Теорема XI – Теорема за конволуција на два дискретни оригинали или множење на две Z – слики. Оваа особина на Z – трансформацијата овозможува да се определи Z – сликата на конволуција од два дискретни оригинали како производ од Z – сликите на тие оригинали и може да се искаже на следниот начин: Ако оригиналите $f_1(kT)$ и $f_2(kT)$ имаат Z – слики $F_1(z)$ и $F_2(z)$ со радиуси на апсолутна конвергенција R_1 и R_2 , соодветно, што е искажано со (3-38), тогаш и оригиналот:

$$f(kT) = \sum_{n=0}^k f_1(nT) f_2((k-n)T), \quad k \geq n \quad (3-174)$$

има Z – слика $F(z)$ и за таа слика важи:

$$F(z) = F_1(z) F_2(z) \quad (3-175)$$

Со други зборови, Z – сликата на конволуциската сума (3-174) претставува производ од сликите $F_1(z)$ и $F_2(z)$ на соодветните оригинали $f_1(kT)$ и $f_2(kT)$ од кои е формирана сумата (3-174) или, на конволуциската сума (3-174) од просторот на оригиналите ѝ одговара производот (3-175) во просторот на Z – сликите.

Доказот на теоремата е следниот. Со Z – трансформација на двете страни од изразот (3-174) се добива:

$$\begin{aligned} F(z) &= Z\{f(kT)\} = Z\left\{\sum_{n=0}^k f_1(nT) f_2((k-n)T)\right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^k f_1(nT) f_2((k-n)T) \right] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{n=0}^k f_1(nT) f_2((k-n)T) \end{aligned} \quad (3-176)$$

Горната граница на втората сума во (3-176) може да се прошири од k на ∞ , бидејќи важи претпоставката:

$$f_2((k-n)T) \equiv 0, \quad k < n \quad (3-177)$$

па (3-176) станува:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) f_2((k-n)T) \quad (3-178)$$

Со промена на редоследот на сумирање во (3-178) и воведување на смената $m = k - n$ се добива:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) \sum_{k=0}^{\infty} f_2((k-n)T) z^{-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} f_2(mT) z^{-m} \end{aligned} \quad (3-179)$$

а бидејќи, под претпоставка, $f_2(mT) \equiv 0 \forall m < 0$, долната граница на втората сума во (3-179) може да се зголеми на нула. Оттука, (3-179) дефинитивно станува:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f_2(mT) z^{-m} = F_1(z) F_2(z) \quad (3-180)$$

со што е завршен доказот на теоремата XI за Z – сликата на реална конволуција.

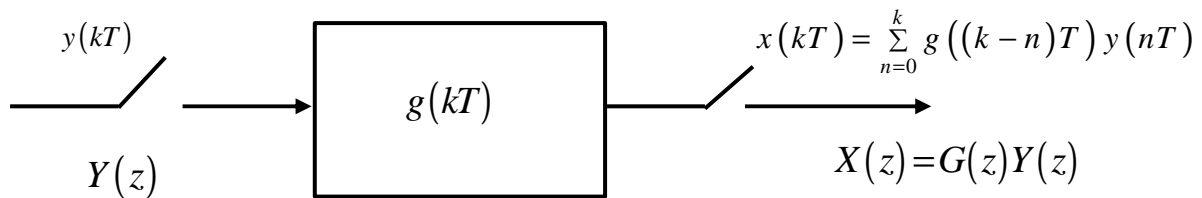
Оригиналот $f(kT)$ што ѝ припаѓа на сликата $F(z)$, освен според изразот (3-174), може да се определи и непосредно со инверзна Z – трансформација на сликата (3-180):

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\{F_1(z)F_2(z)\} \quad (3-181)$$

Теоремата XI има најважна примена во анализата на линеарните дискретни системи, бидејќи овозможува да се определи одзивот на еден дискретен систем за даден влез. Имено, излезот $x(kT)$ на еден линеарен дискретен систем каков што е системот од слика 3-5 кој иницијално бил во мирување, секогаш може да се претстави како конволуција од неговиот влез $y(kT)$ и неговата тежинска низа $g(kT)$, за што ќе стане збор во третата глава од овој труд. Следствено, во согласност со теоремата XI, Z – сликата $X(z)$ на одзивот $x(kT)$ на системот од слика 3-5 за влез може да се претстави како производ од Z – сликата на неговата тежинска низа $g(kT)$, односно неговата дискретна преносна функција $G(z)$, и Z – сликата $Y(z)$ на неговиот влез $y(kT)$:

$$X(z) = G(z)Y(z) \quad (3-182)$$

Релацијата (3-182) ја претставува основната релација во анализата на линеарните дискретни системи.



Слика 3-5 Блок-шема на линеарен стационарен дискретен динамички систем со еден влез и еден излез

Теорема XII – Теорема за множење на два дискретни оригинали или конволуција на две Z – слики. Ако оригиналите $f_1(kT)$ и $f_2(kT)$ имаат Z – слики $F_1(z)$ и $F_2(z)$ со радиуси на апсолутна конвергенција R_1 и R_2 , соодветно, што е искажано со (3-38), тогаш и нивниот производ:

$$f(kT) = f_1(kT) f_2(kT) \quad (3-183)$$

има Z – слика $F(z)$ и за таа слика важи:

$$F(z) = Z\{f_1(kT) f_2(kT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{F_1(\omega) F_2(z/\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-184)$$

каде што интегрирањето во (3-184) се врши во позитивна насока (спротивна од насоката на движењето на стрелката на часовникот) по кружницата C дадена како:

$$C: \omega = Re^{j\varphi}; R_1 < R < \frac{|z|}{R_2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3-185)$$

Доказот на теоремата е следниот. По дефиницијата на едностраната Z – трансформација (3-1), Z – сликата на производот (3-183) ќе биде:

$$Z\{f_1(kT) f_2(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) f_2(kT) z^{-k} \quad (3-186)$$

Од друга страна, според формулата за инверзна Z – трансформација:

$$f_1(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F_1(\omega) \omega^{k-1} d\omega \quad (3-187)$$

каде што C е кружница со која се опфатени сите полови на подинтегралната функција во (3-187). Со воведување на (3-187) во (3-186) се добива:

$$\begin{aligned} Z\{f_1(kT) f_2(kT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_C F_1(\omega) \omega^{k-1} d\omega \right] f_2(kT) z^{-k} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT) z^{-k} \oint_C \frac{F_1(\omega) \omega^k}{\omega} d\omega \end{aligned} \quad (3-188)$$

Редоследот на сумирањето и интегрирањето во (3-188) може да се промени, па, следствено:

$$Z\{f_1(kT) f_2(kT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F_1(\omega)}{\omega} \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT) \left(\frac{z}{\omega}\right)^{-k} \right] d\omega \quad (3-189)$$

Сумата:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_2(kT) \left(\frac{z}{\omega}\right)^{-k} \quad (3-190)$$

во (3-189) ја претставува Z – сликата $F_2(z/\omega)$, која униформно конвергира за $R_2 < |z/\omega|$ односно $|\omega| < |z|/R_2$. Бидејќи сликата $F_1(\omega)$ конвергира за $|\omega| > R_1$, областа на конвергенција на интегралот во (3-189) е кружен прстен, кој ги раздвојува половите на функциите $F_1(\omega)/\omega$ и $F_2(z/\omega)$:

$$R_1 < |\omega| < \frac{|z|}{R_2} \quad (3-191)$$

Оттука:

$$Z\{f_1(kT)f_2(kT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F_1(\omega)F_2(z/\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-192)$$

при што C лежи во кружниот прстен (3-191). Теоремата XII е илустрирана со примерот 3-15.

Пример 3-15. Да се определи Z – сликата на дискретниот оригинал:

$$f(kT) = kTa^{kT}h(kT); k \geq 0; a = const. \in \mathfrak{R} \quad (3-193)$$

Решение: Нека:

$$f_1(kT) = kT, k \geq 0$$

$$f_2(kT) = a^{kT}, k \geq 0 \quad (3-194)$$

Тогаш:

$$F_1(z) = \frac{zT}{(z-1)^2}, |z| > 1$$

$$F_2(z) = \frac{z}{z-a^T}, |z| > |a^T| \quad (3-195)$$

Следствено, според (3-184) се добива:

$$F(z) = Z\{f_1(kT)f_2(kT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\omega T}{(\omega-1)^2} \cdot \frac{z}{z-a^T\omega} \cdot \frac{d\omega}{\omega} \quad (3-196)$$

каде што C е кружница со радиус $1 < R < \left| \frac{z}{a^T} \right|$. Оттука:

$$F(z) = \operatorname{Re}_{\omega=1} z \frac{\omega T}{(\omega-1)^2} \cdot \frac{z}{z-a^T\omega} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{a^T T z}{(z-a^T)^2}; |z| > |a^T| \quad (3-197)$$

Сликата (3-197) може алтернативно да се определи и со помош на III-тата теорема на Z – трансформацијата, како што е тоа сторено во примерот 3-5. □

Теорема XIII – Парсервалова теорема за дискретните системи. За специјалниот случај:

$$f_1(kT) \equiv f_2(kT) \equiv f(kT) \quad (3-198)$$

врз основа на теоремата XII на Z – трансформацијата за множење на два оригинали се добива:

$$Z\{f^2(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) z^{-k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(\omega)F(z/\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-199)$$

каде што интегрирањето во (3-199) се врши во позитивна насока (спротивна од насоката на движењето на стрелката на часовникот) по кружницата C дадена со изразот:

$$C: \omega = \rho e^{j\varphi}; R < \rho < \frac{|z|}{R}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3-200)$$

при што R е радиус на конвергенција на сликата $F(z) = Z\{f(kT)\}$.

Во продолжение ќе биде разгледан изразот (3-199) кога Z – сликата $F(z) = Z\{f(kT)\}$ е аналитичка функција во областа $|z| \leq 1$, односно кога сите нејзини полови (сингуларни точки) се наоѓаат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина. Ако $F(z) = Z\{f(kT)\}$ е аналитичка функција во областа $|z| \geq 1$, тогаш нејзиниот оригинал $f(kT) \rightarrow 0$ кога $k \rightarrow \infty$ и, значи, постои сумата:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) \quad (3-201)$$

Од друга страна, ако функцијата $F(z) = Z\{f(kT)\}$ е аналитичка во областа $|z| \geq 1$, тогаш интегралот (3-199) конвергира и за $|\omega|=1$, па во таквиот случај за крива на интеграцијата C во (3-199) може да се одбере единичната кружница $|\omega|=1$ во ω -комплексната рамнина, т.е.:

$$Z\{f^2(kT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \frac{F(\omega)F(z/\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-202)$$

Со помош на изразот (3-202) може да се определи сумата (3-201). Имено, имајќи предвид што значи симболот $Z\{f^2(kT)\}$, равенката (3-202) може да се запише во следниот облик:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) z^{-k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \frac{F(\omega)F(z/\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-203)$$

Тогаш, ако постои сумата (3-201), ќе биде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \frac{F(\omega)F(1/\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-204)$$

или, по враќањето на старата комплексна променлива z :

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \frac{F(z)F(1/z)}{z} dz \quad (3-205)$$

Изразот (3-205) ја претставува познатата Парсервалова теорема за случајот на дискретните системи. Оваа равенка треба да се „чита“ од лево на десно; со други зборови, ако постои сумата (3-201), тогаш важи релацијата (3-205). Спротивното тврдење не мора секогаш да важи. Ако постои комплексниот интеграл:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \frac{F(z)F(1/z)}{z} dz \quad (3-206)$$

тоа уште не значи дека постои сумата (3-201).

Изразот (3-206) може да се докаже на следниот начин. Ако постои интегралот (3-199), тогаш постои и граничната вредност:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) z^{-k} \quad (3-207)$$

Но, според (3-203) е:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) z^{-k} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{z \rightarrow 1} \oint_{|\omega|=1} \frac{F(\omega)F(z/\omega)}{\omega} d\omega \quad (3-208)$$

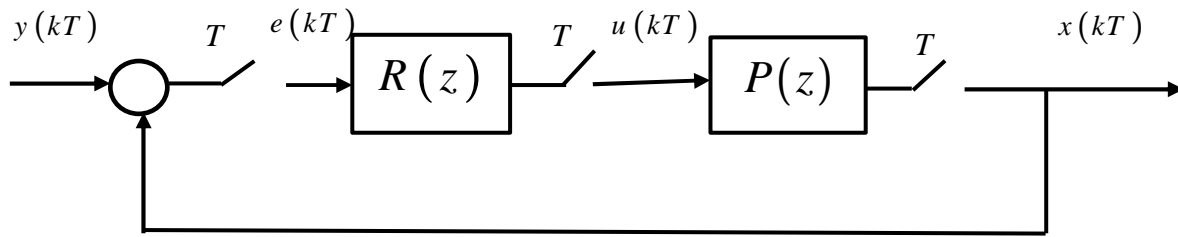
од каде произлегува (3-205).

На крајот уште еднаш е потребно да се нагласи дека Парсерваловата теорема (3-199) важи исклучиво за функции $f(kT)$, чии што Z – слики $F(z)$ претставуваат аналитички функции на целото множество $|z| \leq 1$. Имено, само ако сликата $F(z) = Z\{f(kT)\}$ е регуларна функција на множеството $|z| \geq 1$, односно доколку сите нејзини полови лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, во равенството (3-204) ќе може комплексната променлива z да се замени со единица, па по враќањето на старата променлива, ќе се добие (3-205).

Парсерваловата теорема може со успех да се искористи за аналитичка синтеза на затворените дискретни системи на автоматско управување на следниот начин. Ако преку $e(kT)$ се означи регулационото отстапување, односно грешката на еден затворен дискретен систем на автоматско управување каков што е системот од сликата 3-6, и ако сите полови на неговата Z – слика $E(z) = Z\{e(kT)\}$ лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, тогаш според теоремата XIII ќе биде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \frac{E(z)E(1/z)}{z} dz \quad (3-209)$$

каде што сега интегрирањето во (3-209) се врши во позитивна насока (спротивна на насоката на движење на стрелките од часовникот) по единичната кружница $|z| = 1$.



Слика 3-6 Структурна блок шема на затворен дискретен систем на автоматско управување

Бидејќи кај линеарните дискретни системи на автоматско управување со константни коефициенти сликата $E(z) = Z\{e(kT)\}$ е дробно-рационална функција од комплексната променлива z , пресметките што се опфатени со десната страна на изразот (3-209) може да се извршат со алгебарски средства. На тој начин бесконечната сума:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT) \quad (3-210)$$

се добива како функција од променливите параметри на проектираниот затворен дискретен систем на автоматско управување, па со нејзина минимизација се одредуваат оптималните вредности на овие параметри кои, се разбира, треба да припаѓаат на параметарската област на стабилност на проектираниот систем на автоматско управување. На ова место треба уште еднаш јасно да се нагласи дека изразот (3-209) важи само во случајот кога сите полови на сликата $E(z) = Z\{e(kT)\}$ лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$. Во спротивниот случај, кога барем еден пол на $E(z)$ не лежи во кругот $|z| < 1$, или лежи на кружницата $|z| = 1$, релацијата (3-209) не важи.

3-4 ИНВЕРЗНА Z – ТРАНСФОРМАЦИЈА

Трансформацијата (3-1) уште се нарекува **директна Z – трансформација**. Одредувањето на дискретниот оригинал $f(kT)$ кој припаѓа кон дадена Z – слика $F(z)$ е обратна задача од задачата за одредување на директната Z – трансформација и се нарекува **инверзна Z – трансформација**. Инверзната Z – трансформација на сликата $F(z)$ симболично се означува на следниот начин:

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}, k \geq 0 \quad (3-211)$$

Првото прашање што веднаш се наметнува е дали за секоја функција $F(z)$ постои соодветен дискретен оригинал. Одговорот е не. Меѓутоа, за сликите $F(z)$ со кои ние ќе се сретнуваме во рамките на овој труд, а тоа се дробно-рационални функции од комплексната променлива z од обликот (3-29), секогаш ќе постои соодветен дискретен оригинал. Така во иднина нема да се грижиме околу ова прашање.

Дискретниот оригинал $f(kT)$ и неговата Z – слика $F(z)$ чинат еден Z – трансформациски пар. Притоа, оригиналот $f(kT)$ што припаѓа кон Z – сликата $F(z)$ може да се определи на повеќе начини:

1. Со употреба на готови таблици на Z – трансформациски парови
2. Со развој на сликата $F(z)$ во степенски ред по негативните степени на комплексната променлива z .
3. Кога сликата $F(z)$ е од облик (3-29), со бесконечно алгебарско делење на броителот и именителот на дробно-рационалната функција $F(z)$
4. Кога сликата $F(z)$ е од облик (3-29), со развој во парцијални дробки на дробно-рационалната функција $F(z)$
5. Со примена на интегрална формула за одредување на инверзната Z – трансформација

Во продолжение се дискутирани сите овие начини одделно.

3-4-1 ПРИМЕНА НА ГОТОВИ ТАБЛИЦИ Z – ТРАНСФОРМАЦИСКИ ПАРОВИ

Наједноставен начин да се определи еден дискретен оригинал кон дадена Z – слика е ако се употреби некоја од готовите таблици на Z – трансформациски парови, кои се дадени скоро во секоја литература од областа на дискретните системи и Z – трансформацијата. Таква е и таблицата во Прилог 1 наведена на крајот од овој труд. Се разбира, на овој начин не може да се определи оригиналот кон произволна Z – слика, зашто во таблиците од разбирливи причини, не се наведени сите можни Z – трансформациски парови, туку само најкарактеристичните и најчесто користените.

3-4-2 РАЗВОЈ НА СЛИКАТА $F(z)$ ВО СТЕПЕНСКИ РЕД ОД НЕГАТИВНИТЕ СТЕПЕНИ НА КОМПЛЕКСНАТА ПРОМЕНЛИВА z

Друг начин да се определи дискретниот оригинал $f(kT)$ кон дадена Z – слика $F(z)$ е преку развој на функцијата $F(z)$ во степенски ред по негативните степени на комплексната променлива z во околина на точката $z^{-1} = 0$, бидејќи во областа на конвергенција на сликата $F(z)$ нејзиниот развој во степенски ред е единствен, односно еднозначно одреден. Постапката веќе е изложена во делот 3-2 преку примерот 3-1, па овде само ќе ја повториме.

Нека е дадена функцијата $F(z)$ која, под претпоставка, е еднострана Z – трансформација на некој дискретен оригинал $f(kT)$ и има општ облик:

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}; \quad |z| > R \quad (m \leq n) \quad (3-212)$$

За да ја најдеме функцијата $f(kT)$, функцијата $F(z)$ ќе ја изразиме преку негативните степени на комплексната променлива z , што се постига со делење на нејзиниот броител и именител со највисокиот степен на z и воведување помошна променлива $u = z^{-1}$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0) / z^n}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 / z^n} = \\ &= \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{1-n} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} = \\ &= \frac{b_m u^{n-m} + b_{m-1} u^{n-m+1} + \dots + b_1 u^{n-1} + b_0 u^n}{a_n + a_{n-1} u + \dots + a_1 u^{n-1} + a_0 u^n} = F(u); u = z^{-1} \end{aligned} \quad (3-213)$$

Сега функцијата $F(u)$ се развива во Тајлоров ред во околина на точката $u = z^{-1} = 0$ ($z = \infty$), кој важи за $|z^{-1}| < R^{-1}$ односно за $|z| > R$:

$$F(u) = F(0) + F'(0)u + \frac{1}{2!} F''(0)u^2 + \frac{1}{3!} F'''(0)u^3 + \dots \quad (3-214)$$

каде што вредностите на функцијата $F(u)$ и нејзините последователни изводи во нулата се пресметуваат на следниот начин:

$$F^{(i)}(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d^i}{du^i} [F(u)]; i = 0, 1, 2, \dots \quad (3-215)$$

Со враќање на старата променлива z , од (3-215) се добива:

$$F(z) = F(0) + F'(0) \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} F''(0) \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} F'''(0) \frac{1}{z^3} + \dots \quad (3-216)$$

Бидејќи коефициентите пред негативните степени на комплексната променлива z во изразот за едностраната Z – трансформација (3-1) се дискретните вредности на функцијата $f(kT)$, бараното решение ќе биде:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \frac{1}{k!} F^{(k)}(0); & k \geq 0 \end{cases} \quad (3-217)$$

Пример 3-16. Да се определи оригиналот $f(kT)$ кон Z – сликата $F(z)$:

$$F(z) = \frac{zT}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1 \quad (3-218)$$

со нејзин развој во степенски ред по негативните степени на комплексната променлива z во околина на точката $z^{-1} = 0$.

Решение: Со развој на функцијата (3-218) во Тајлоров ред во околина на точката $z^{-1} = 0$ ($z = \infty$) се добива:

$$F(z) = \frac{zT}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}}{(z^{-1}-1)^2} = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots + kTz^{-k} + \dots \quad (3-219)$$

Од друга страна, според дефиницијата на едностраната Z – трансформација Z – сликата (3-218) е дефинирана како:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{zT}{(z-1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \\ &= f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots \end{aligned} \quad (3-220)$$

Следствено, со изедначување на десните страни од изразите (3-219) и (3-220), за бараниот оригинал $f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}$ се добива:

$$f(0) = 0$$

$$f(T) = T$$

$$f(2T) = 2T$$

.....

$$f(kT) = kT \quad (3-221)$$

односно, во затворен аналитички облик:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ kT, & k \geq 0 \end{cases} \quad (3-222)$$

Недостатокот на оваа постапка е што бараниот дискретен оригинал може да се добие во затворен аналитички облик само во специјален случај, каков што е овој од примерот 3-16. Во општ случај постапката ги дава само дискретните вредности на бараниот оригинал $f(kT)$ за различно k . Предност ѝ е што може да се користи и за функции $F(z)$ кои не се дробно-рационални.

3-4-3 БЕСКОНЕЧНО АЛГЕБАРСКО ДЕЛЕЊЕ НА БРОИТЕЛОТ И ИМЕНТЕЛОТ НА ДРОБНО-РАЦИОНАЛНАТА ФУНКЦИЈА $F(z)$

Во случаите кога Z – сликата $F(z)$ е дробно-рационална функција од комплексната променлива z од обликот (3-29), а такви се сие случаи разгледувани во рамките на овој труд, оригиналот $f(kT)$ кон сликата $F(z)$ може да се определи со бесконечно алгебарско делење на броителот $b(z)$ на сликата $F(z)$ со нејзиниот именител $a(z)$:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + b_{m-2} z^{m-2} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0} = \\
 &= \frac{b_m}{a_n} z^{m-n} + \frac{1}{a_n} \left(b_{m-1} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-1} \right) z^{m-n-1} + \frac{1}{a_n} \left[\left(b_{m-2} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-2} \right) - \frac{a_{n-2}}{a_n} \left(b_{m-1} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-1} \right) \right] z^{m-n-2} + \\
 &+ \frac{1}{a_n} \left\{ \left[\left(b_{m-3} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-3} \right) - \frac{a_{n-2}}{a_n} \left(b_{m-1} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-1} \right) \right] - \right. \\
 &\left. - \frac{a_{n-1}}{a_n} \left[\left(b_{m-2} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-2} \right) - \frac{a_{n-1}}{a_n} \left(b_{m-1} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-1} \right) \right] \right\} z^{m-n-3} + \dots
 \end{aligned} \tag{3-223}$$

од каде, за дискретните вредности на бараниот оригинал $f(kT)$ се добива:

$$\begin{aligned}
 f((n-m)T) &= \frac{b_m}{a_n} \\
 f((n-m+1)T) &= \frac{1}{a_n} \left(b_{m-1} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-1} \right) \\
 f((n-m+2)T) &= \frac{1}{a_n} \left[\left(b_{m-2} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-2} \right) - \frac{a_{n-1}}{a_n} \left(b_{m-1} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-1} \right) \right] \\
 f((n-m+3)T) &= \frac{1}{a_n} \left\{ \left[\left(b_{m-3} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-3} \right) - \frac{a_{n-2}}{a_n} \left(b_{m-1} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-1} \right) \right] - \right. \\
 &\left. - \frac{a_{n-1}}{a_n} \left[\left(b_{m-2} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-2} \right) - \frac{a_{n-1}}{a_n} \left(b_{m-1} - \frac{b_m}{a_n} a_{n-1} \right) \right] \right\} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3-224}$$

Изложената постапка се користи кога е потребно да се определат нумеричките вредности на оригиналот $f(kT)$, чија Z – слика $F(z)$ е дадена, за различно k . Како и претходната постапка така и оваа го има истиот принципиелен недостаток – со неа во општ случај не може да се определи бараниот оригинал $f(kT)$ во затворен аналитички облик. Предноста на постапката се состои во тоа што пресметките опфатени со неа се едноставни и лесно се програмираат на дигитален пресметувач. Притоа не е потребно да се определуваат сингуларните точки на функцијата $F(z)$. Затоа оваа постапка е посебно погодна за употреба и наоѓа често примена во случаите кога не може да се искористат готовите таблици Z – трансформационски парови, или кога не се познати, односно не може да се определат половите (сингуларните точки) на сликата $F(z)$. Постапката нема своја аналогија кај Лапласовата трансформација.

Пример 3-17. Да се определи инверзната Z – трансформација на сликата $F(z)$:

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + 1.5z - 1}, \quad |z| > 2 \quad (3-225)$$

за $k = 0, 1, 2, 3, 4$ со постапката на бесконечно алгебарско делење.

Решение: Со непосредно делење на полиномите во броителот и именителот на сликата (3-225) се добива:

$$F(z) = z^{-2} - 1.5z^{-3} + 3.25z^{-4} + \dots \quad (3-226)$$

Следствено:

$$f(0) = 0$$

$$f(T) = 0$$

$$f(2T) = 1$$

$$f(3T) = -1.5$$

$$f(4T) = 3.25 \quad \square \quad (3-227)$$

3-4-4 РАЗВОЈ НА ДРОБНО-РАЦИОНАЛНАТА ФУНКЦИЈА $F(z)$ ВО ПАРЦИЈАЛНИ ДРОПКИ

Во случаите кога се бара општиот израз за оригиналот $f(kT)$ кон дадена Z – слика $F(z)$ кој важи за секое $k \geq 0$, се користи или постапката на развој во парцијални дробки или соодветната интегрална формула за одредување на инверзна Z – трансформација. Постапката со развој на Z – сликата $F(z)$ во парцијални дробки е можеби најпопуларната и директна метода за добивање на инверзната Z – трансформација кон дадена дробно-рационална слика $F(z)$.

Суштината на постапката на развој на дробно-рационалната Z – слика $F(z)$ во парцијални дробки е иста кај Z – трансформацијата како и кај Лапласовата трансформација. Основна претпоставка за развој на една дробно-рационална функција во парцијални дробки е дека полиномот во нејзиниот броител има понизок степен од полиномот во нејзиниот именител. Следствено, при развојот на дробно-рационалната Z – слика $F(z)$ во парцијални дробки генерално се можни два случаи: кога $m < n$ и кога $m \geq n$, каде што m е степенот на полиномот во нејзиниот броител и n е степенот на полиномот во нејзиниот именител. Кога $m < n$, функцијата $F(z)$ може веднаш да се развива во парцијални дробки, зашто ја исполнува неопходната претпоставка за развој. Доколку $m \geq n$, сликата $F(z)$ може да се претстави во следниот облик:

$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_0(z)a(z) + b_1(z)}{a(z)} = b_0(z) + \frac{b_1(z)}{a(z)} = b_0(z) + F_1(z) \quad (3-228)$$

каде што полиномите $b_0(z)$ и $b_1(z)$ се различни од $a(z)$, а дробно-рационалната слика $F_1(z)$ има броител со понизок степен од нејзиниот именител. Изразот (3-228) се добива со алгебарско делење на броителот од дробно-рационалната функција $F(z)$ со нејзиниот именител, при што полиномот $b_0(z)$ е количникот од тоа делење, а $F_1(z)$ е остатокот. Остатокот $F_1(z)$ е дробно-рационална функција од комплексната променлива z , која има ист именител како и оригиналната дробно-рационална функција $F(z)$, но нејзиниот броител има барем за еден понизок степен од именителот и како таква може да се развива во парцијални дробки. Оттука, оригиналот кон Z – слика $F(z)$ за случајот $m \geq n$ ќе биде даден со следниот израз:

$$\begin{aligned} f(kT) &= Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\{b_0(z) + F_1(z)\} = Z^{-1}\{b_0(z)\} + Z^{-1}\{F_1(z)\} = \\ &= Z^{-1}\{\dots + B_2z^2 + B_1z + B_0\} + Z^{-1}\{\text{развој на } F_1(z) \text{ во парцијални дробки}\} = \\ &= \dots + B_2\delta((k+2)T) + B_1\delta((k+1)T) + B_0\delta(kT) + \\ &+ Z^{-1}\{\text{развој на } F_1(z) \text{ во парцијални дробки}\} \end{aligned} \quad (3-229)$$

Оттука, во продолжение ќе го разгледуваме случајот кога $m < n$. На ова место само ќе истакнеме дека случајот $m > n$ не е можен ако се работи за едностраната Z – трансформација, додека случајот $m = n$ кај дискретните системи е можен и многу почесто се јавува отколку кај континуалните системи.

Идејата зад постапката на одредување инверзна Z – трансформација со развој на дробно-рационалната слика $F(z)$ во парцијални дробки се состои во следното: откако еднаш е извршен развој на дробно-рационалната функција $F(z)$ во парцијални дробки по нејзините полови, нејзиниот оригинал може да се претстави како збир од оригиналите кои припаѓаат кон одделните парцијални дробки. Овие парцијални дробки, како што ќе видиме, претставуваат елементарни слики што може да се најдат во готовите таблици на Z – трансформацијски парови, па нивните оригинали лесно се наоѓаат.

За да се развие дробно-рационалната функција $F(z)$ во парцијални дробки, освен што треба нејзиниот броител да има понизок степен од нејзиниот именител, треба да се познати и нејзините полови p_1, p_2, \dots, p_n . Бидејќи броителот и именителот на дробно-рационалната функција $F(z)$ може да се изразат било преку позитивните степени било преку негативните степени од комплексната променлива z , нејзиниот развој во парцијални дробки може да се врши било по z било по z^{-1} . Притоа, развојот на $F(z)$

во парцијални друпки по z^{-1} е поблизок до развојот на дробно-рационалните функции $F(s)$ кај Лапласовата трансформација, додека развојот во парцијални друпки при позитивните степени на z бара поголемо внимание.

Развојот на сликата $F(z)$ во парцијални друпки по нејзините полови зависи од кратноста на тие полови. Можни се два случаи: кога сите полови на сликата $F(z)$ се прости, и кога $F(z)$ има и кратни полови. Во продолжение ќе бидат разгледани и двата случаи.

Сликата $F(z)$ има исклучиво прости полови. Најнапред ќе биде разгледан случајот кога дробно-рационалната слика $F(z)$ е од облик:

$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{m-j}}{z^n + \sum_{i=1}^n a_i z^{n-i}} = \frac{b_0 z^m + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} \dots + a_{n-1} z + a_n}; m < n \quad (3-230)$$

Бидејќи, под претпоставка, $m < n$, сликата $F(z)$ може директно да се развива во парцијални друпки по нејзините полови. Меѓутоа, наместо сликата $F(z)$, во парцијални друпки се развива сликата $F(z)/z$ од причини кои наскоро ќе станат очигледни. Под направената претпоставка дека сите полови на сликата $F(z)/z$ се прости, нејзиниот развој во парцијални друпки ќе биде од облик:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{b(z)}{z a(z)} = \frac{b(z)}{z \prod_{i=1}^n (z - p_i)} = \frac{c_0}{z} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - p_i} \quad (3-231)$$

каде што коефициентите на развој на сликата $F(z)/z$ во парцијални друпки се определуваат по формулата:

$$c_i = \left[(z - p_i) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=p_i}; i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3-232)$$

Оттука, самата слика $F(z)$ ќе биде:

$$F(z) = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z - p_i} \quad (3-233)$$

а нејзиниот оригинал е даден со изразот:

$$f(kT) = Z^{-1} \{F(z)\} = Z^{-1} \left\{ c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z - p_i} \right\} = c_0 \delta(kT) + \sum_{i=1}^n c_i (p_i)^k \quad (3-234)$$

Сега е очигледно зашто наместо сликата $F(z)$ во парцијални дробки се развива сликата $F(z)/z$. На овој начин во броителот на парцијалните слики ќе се најде факторот z , кој овозможува соодветниот оригинал да биде дефиниран за секое $k \geq 0$:

$$F_i(z) = \frac{c_i z}{z - p_i} \leftrightarrow f_i(kT) = c_i (p_i)^k; k \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3-235)$$

Кога дробно-рационалната слика $F(z)$ е претставена преку негативните степени на комплексната променлива z :

$$F(z) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} = \frac{b(z^{-1})}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} = \frac{b(z^{-1})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}}; m < n \quad (3-236)$$

нејзиниот развој во парцијални дробки под направените претпоставки ќе биде од облик:

$$F(z) = \frac{b(z^{-1})}{a(z^{-1})} = \frac{b(z^{-1})}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} = \frac{b(z^{-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1 - p_i z^{-1})} \quad (3-237)$$

каде што коефициентите c_i се пресметуваат по формулата:

$$c_i = \left[(1 - p_i z^{-1}) F(z) \right]_{z^{-1}=p_i^{-1}}; i=1, 2, \dots, n \quad (3-238)$$

Тогаш оригиналот $f(kT)$ кон Z – сликата (3-237) ќе биде:

$$f(kT) = Z^{-1} \{ F(z) \} = Z^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{1 - p_i z^{-1}} \right\} = \sum_{i=1}^n c_i (p_i)^k \quad (3-239)$$

Пример 3-18. Да се определи оригиналот $f(kT)$ кон сликата $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z(z-4)}{(z-2)(z-3)}, |z| > 3 \quad (3-240)$$

со нејзин развој во парцијални дробки.

Решение: Функцијата $F(z)$ го има z како множител во броителот, па наместо функцијата $F(z)$, во парцијални дробки ќе ја развиеме функцијата $\frac{F(z)}{z}$:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z-4}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} \quad (3-241)$$

каде што:

$$A = \left[(z-2) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=2} = \left[\frac{z-4}{z-3} \right]_{z=2} = \frac{2-4}{2-3} = 2$$

$$B = \left[(z-3) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=3} = \left[\frac{z-4}{z-2} \right]_{z=3} = \frac{3-4}{3-2} = -1 \quad (3-242)$$

Оттука:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-3} \Rightarrow F(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{z-3} \quad (3-243)$$

па, бараниот дискретен оригинал ќе биде:

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{2z}{z-2}\right\} - Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\} = [2(2)^{kT} - (3)^{kT}]h(kT) \quad (3-244)$$

Пример 3-19. Да се определи оригиналот $f(kT)$ кон сликата $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z-4}{(z-2)(z-3)}, \quad |z| > 3 \quad (3-245)$$

со нејзин развој во парцијални дробки.

Решение: Во овој случај функцијата $F(z)$ нема множител од типот на променливата z во броителот и не може веднаш да се формира функцијата $F(z)/z$. Овој проблем се надминува на тој начин што функцијата $F(z)$ најнапред се множи и дели со комплексната променлива z и дури потоа се развива во парцијални дробки функцијата $F(z)/z$:

$$F(z) = \frac{z-4}{(z-2)(z-3)} = \frac{z(z-4)}{z(z-2)(z-3)} \Rightarrow$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z-4}{z(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} \quad (3-246)$$

каде што:

$$A = \left[z \frac{F(z)}{z} \right]_{z=0} = \left[\frac{z-4}{(z-2)(z-3)} \right]_{z=0} = \frac{-4}{(-2)(-3)} = \frac{-2}{3}$$

$$B = \left[(z-2) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=2} = \left[\frac{z-4}{z(z-3)} \right]_{z=2} = \frac{2-4}{2(2-3)} = 1$$

$$C = \left[(z-3) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=3} = \left[\frac{z-4}{z(z-2)} \right]_{z=3} = \frac{3-4}{3(3-2)} = \frac{-1}{3} \quad (3-247)$$

Оттука:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-2}{3z} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{3(z-3)} \Rightarrow F(z) = \frac{-2}{3} + \frac{z}{z-2} - \frac{z}{3(z-3)} \quad (3-248)$$

па, бараниот дискретен оригинал ќе биде:

$$\begin{aligned} f(kT) &= Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{-2}{3}Z^{-1}\{1\} + Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} - \frac{1}{3}Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\} = \\ &= \frac{-2}{3}\delta(kT) + (2)^{kT}h(kT) - \frac{1}{3}(3)^{kT}h(kT) \quad \square \end{aligned} \quad (3-249)$$

Пример 3-20. Да се определи оригиналот $f(kT)$ кон сликата $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z-4}{(z-2)(z-3)}, \quad |z| > 3 \quad (3-250)$$

со нејзин развој во парцијални дробки.

Решение: Ова е истата функција $F(z)$ од претходниот пример, која нема z во броителот, само сега проблемот ќе го решиме на малку поинаков начин. Имено, ќе дефинираме помошна функција $G(z)$, таква што $F(z) = z^{-1}G(z)$, и неа ќе ја развиеме во парцијални дробки:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z-4}{(z-2)(z-3)} = z^{-1}G(z) \Rightarrow G(z) = \frac{z(z-4)}{(z-2)(z-3)} \\ \frac{G(z)}{z} &= \frac{z-4}{(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-3} \Rightarrow \\ G(z) &= \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{z-3} \end{aligned} \quad (3-251)$$

Оттука, дискретниот оригинал $g(kT)$ ќе биде:

$$g(kT) = Z^{-1}\{G(z)\} = 2(2)^{kT}h(kT) - (3)^{kT}h(kT) \quad (3-252)$$

Меѓутоа, бидејќи $F(z) = z^{-1}G(z)$, следува дека бараниот оригинал $f(kT)$ ќе биде:

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\{z^{-1}G(z)\} = g(k-1) = \left[2(2)^{(k-1)T} - (3)^{(k-1)T}\right]h(kT-T) \quad (3-253)$$

Иако решенијата (3-249) и (3-253) изгледаат различно, се работи за ист дискретен сигнал, што може да се види ако се пресметаат дискретните вредности $f(0), f(1), f(2), \dots$ во двата случаи. \square

Пример 3-21. Да се определи оригиналот кон Z – сликата:

$$F(z) = \frac{z(z+1)}{(z+0.5)(z-0.5)} \quad (3-254)$$

кога истата е претставена преку позитивни и негативни степени на комплексната променлива z .

Решение: Кога $F(z)$ е претставена со позитивни степени од z :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z+0.5)(z-0.5)} = \frac{c_1}{z+0.5} + \frac{c_2}{z-0.5} \quad (3-255)$$

$$c_1 = \left[(z+0.5) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=-0.5} = \left(\frac{z+1}{z-0.5} \right)_{z=-0.5} = -0.5 \quad (3-256)$$

$$c_2 = \left[(z-0.5) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=0.5} = \left(\frac{z+1}{z+0.5} \right)_{z=0.5} = 1.5 \quad (3-257)$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-0.5}{z+0.5} + \frac{1.5}{z-0.5} \Rightarrow$$

$$F(z) = -0.5 \frac{z}{z+0.5} + 1.5 \frac{z}{z-0.5} \Rightarrow$$

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = -0.5(-0.5)^k + 1.5(0.5)^k, k \geq 0 \quad (3-258)$$

Кога $F(z)$ е изразена преку негативните степени од z :

$$F(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.5z^{-1})} = \frac{c_1}{1+0.5z^{-1}} + \frac{c_2}{1-0.5z^{-1}} \quad (3-259)$$

$$c_1 = \left[(1+0.5z^{-1})F(z) \right]_{z^{-1}=-2} = \left(\frac{1+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \right)_{z^{-1}=-2} = -0.5 \quad (3-260)$$

$$c_2 = \left[(1-0.5z^{-1})F(z) \right]_{z^{-1}=2} = \left(\frac{1+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}} \right)_{z^{-1}=2} = 1.5 \quad (3-261)$$

$$F(z) = \frac{-0.5}{1+0.5z^{-1}} + \frac{1.5}{1-0.5z^{-1}} = \frac{-0.5z}{z+0.5} + \frac{1.5z}{z-0.5} \Rightarrow \quad (3-262)$$

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = -0.5(-0.5)^k + 1.5(0.5)^k, k \geq 0 \quad (3-263)$$

Еден начин да се провери точноста на добиениот оригинал кон дадена Z – слика е да се пресмета почетната и трајната вредност на оригиналот:

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (3-264)$$

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \begin{cases} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z), & \text{доколку } (z-1)F(z) \text{ е регуларна во } |z| > 1 \\ \text{неограничена, доколку } (z-1)F(z) \text{ не е регуларна во } |z| > 1 \end{cases} \quad (3-265)$$

Сакаме да истакнеме дека позитивната проверка не гарантира дека оригиналот кон дадената Z – слика е точно пресметан, меѓутоа негативната проверка значи сигурно дека пресметаниот оригинал не одговара на дадената Z – слика.

Сликата $F(z)$ има кратни полови. Во наједноставниот случај, дробно-рационалната функција $F(z)$ ќе има барем еден кратен пол и ќе има облик:

$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b(z)}{(z-p_1)^r \prod_{i=r+1}^n (z-p_i)} \quad (3-266)$$

кад што полот p_1 , под претпоставка, има кратност r , а преостанатите $(n-r)$ полови се прости, додека во најопштиот случај, сите полови на Z – сликата $F(z)$ ќе имаат соодветна кратност и тогаш таа може да се прикаже во следниот облик:

$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b(z)}{(z-p_1)^{r_1} (z-p_2)^{r_2} \dots (z-p_q)^{r_q}}; r_1 + r_2 + \dots + r_q = n \quad (3-267)$$

Најнапред ќе го разгледаме случајот кога дробно-рационалната слика $F(z)$ е изразена преку позитивните степени на комплексната променлива z и заради поголема едноставност на пресметките, ќе го усвоиме наједноставниот случај кога $F(z)$ има само еден кратен пол со кратност еднаква на r . Наместо функцијата $F(z)$, во парцијални дробки се разложува функцијата $F(z)/z$ и бидејќи, под претпоставка, $m < n$, овој развој може директно да се спроведе:

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z} &= \frac{b(z)}{z(z-p_1)^r \prod_{i=r+1}^n (z-p_i)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_{11}}{(z-p_1)^r} + \frac{c_{12}}{(z-p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{c_{1r}}{z-p_1} + \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i}{z-p_i} = \\ &= \frac{c_0}{z} + \sum_{i=1}^r \frac{c_{1i}}{(z-p_1)^{r-i+1}} + \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i}{z-p_i} \end{aligned} \quad (3-268)$$

каде што коефициентите на развој на сликата $F(z)/z$ во парцијални дробки се определуваат по формулите:

$$c_0 = [F(z)]_{z=0} \quad (3-269)$$

$$c_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} \left[(z-p_1)^r \frac{F(z)}{z} \right]_{z=p_1}; i=1,2,\dots,r \quad (3-270)$$

$$c_i = \left[(z - p_i) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=p_i} ; i = r+1, r+2, \dots, n \quad (3-271)$$

Развојот на дробно-рационалната функција $F(z)/z$ во парцијални дробки по кратниот пол има онолку парцијални дробки, колку што изнесува кратноста на тој пол, а коефициентите крај тие парцијални дробки се пресметуваат на стандарден начин според формулата (3-270). Самата слика $F(z)$ ќе биде:

$$F(z) = c_0 + \sum_{i=1}^r \frac{c_{1i} z}{(z - p_1)^{r-i+1}} + \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i z}{z - p_i} \quad (3-272)$$

па, нејзиниот оригинал $f(kT)$ е даден со изразот:

$$\begin{aligned} f(kT) &= Z^{-1} \{F(z)\} = Z^{-1} \left\{ c_0 + \sum_{i=1}^r \frac{c_{1i} z}{(z - p_1)^{r-i+1}} + \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i z}{z - p_i} \right\} = \\ &= c_0 \delta(kT) + Z^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{c_{1i} z}{(z - p_1)^{r-i+1}} \right\} + \sum_{i=r+1}^n c_i (p_i)^k \end{aligned} \quad (3-273)$$

Z – сликите $\frac{z}{(z - p_1)^{r-i+1}}$ се од општ облик:

$$\frac{z}{(z - a)^{m+1}} \quad (3-274)$$

и нивните оригинали се дадени во таблицата 3-1 за $m = 1, 2, 3, 4$. Оригиналот кон сликата (3-274) за произволно m е даден во додатокот 1 на крајот од оваа книга.

Кога дробно-рационалната слика (3-266) е претставена преку негативните степени на комплексната променлива z , нејзиниот развој во парцијални дробки под направените претпоставки ќе биде од облик:

$$F(z) = \frac{b(z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})^r \prod_{i=r+1}^n (1 - p_i z^{-1})} = \sum_{i=1}^r \frac{c_{1i}}{(1 - p_1 z^{-1})^{r-i+1}} + \sum_{i=r+1}^n \frac{c_i}{1 - p_i z^{-1}} \quad (3-275)$$

каде што коефициентите c_i се пресметуваат по формулите:

$$c_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} \left[(1 - p_1 z^{-1})^r F(z) \right]_{z^{-1}=p_1^{-1}} ; i = 1, 2, \dots, r \quad (3-276)$$

$$c_i = \left[(1 - p_i z^{-1}) F(z) \right]_{z^{-1}=p_i^{-1}} ; i = r+1, r+2, \dots, n \quad (3-277)$$

Таблица 3-1 Елементарни слики и нивните дискретни оригинали кои се користат при инверзна Z – трансформација со развој во парцијални друпки

m	$F_i(z) = Z\{f_i(kT)\}$	$f_i(kT) = Z^{-1}\{F_i(z)\}$
$m = 1$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	ka^{k-1}
$m = 2$	$\frac{z}{(z-a)^3}$	$\frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}$
$m = 3$	$\frac{z}{(z-a)^4}$	$\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}a^{k-3}$
$m = 4$	$\frac{z}{(z-a)^5}$	$\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}a^{k-4}$

Тогаш оригиналот $f(kT)$ кон Z – сликата (3-275) ќе биде:

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\left\{\sum_{i=1}^r \frac{c_{1i}}{(1-p_1z^{-1})^{r-i+1}}\right\} + \sum_{i=r+1}^n c_i (p_i)^k \quad (3-278)$$

Z – сликите $\frac{1}{(1-p_1z^{-1})^{r-i+1}}$ се од општ облик:

$$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}} \quad (3-279)$$

и нивните оригинали се дадени во таблицата 3-2 за $m=1, 2, 3, 4$. Оригиналот кон сликата (3-279) за произволно m е даден во додатокот 1 на крајот од оваа книга.

Таблица 3-2 Елементарни слики и нивните дискретни оригинали кои се користат при инверзна Z – трансформација со развој во парцијални друпки

m	$F_i(z) = Z\{f_i(kT)\}$	$f_i(kT) = Z^{-1}\{F_i(z)\}$
$m = 1$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$(k+1)a^k$
$m = 2$	$\frac{z^3}{(z-a)^3}$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^k$
$m = 3$	$\frac{z^4}{(z-a)^4}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}a^k$
$m = 4$	$\frac{z^5}{(z-a)^5}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}a^k$

Пример 3-22. Да се определи оригиналот $f(kT)$ кон Z – сликата $F(z)$:

$$F(z) = \frac{z^2 + 2z + 2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}, \quad |z| > 2 \quad (3-280)$$

со развој на сликата $F(z)$ во парцијални друпки по позитивните и негативните степени на комплексната променлива z .

Решение: Развојот на функцијата $F(z)/z$ во парцијални друпки е:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2 + 2z + 2}{z(z-1)^2(z-2)} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1} + \frac{c_2}{z-2} \quad (3-281)$$

каде што:

$$c_0 = [F(z)]_{z=0} = -1$$

$$c_{11} = \left[(z-1)^2 \frac{F(z)}{z} \right]_{z=1} = \left[\frac{z^2 + 2z + 2}{z(z-2)} \right]_{z=1} = -5$$

$$c_{12} = \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{F(z)}{z} \right]_{z=1} = \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2 + 2z + 2}{z(z-2)} \right]_{z=1} = 4$$

$$c_2 = \left[(z-2) \frac{F(z)}{z} \right]_{z=2} = \left[\frac{z^2 + 2z + 2}{z(z-1)^2} \right]_{z=2} = 5 \quad (3-282)$$

Оттука, за сликата $F(z)$ се добива:

$$F(z) = \frac{z^2 + 2z + 2}{(z-1)^2(z-2)} = -1 - \frac{5z}{(z-1)^2} - \frac{4z}{z-1} + \frac{5z}{z-2} \quad (3-283)$$

па, бараниот оригинал $f(kT)$ кој одговара на сликата $F(z)$ според таблицата 3-1 ќе биде:

$$f(k) = -\delta(k) - 5kh(k) - 4h(k) + 5(2)^k h(k) \quad (3-284)$$

Доколку сликата $F(z)$ се изрази преку негативните степени на комплексната променлива z :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3}}{1 - 4z^{-1} + 5z^{-2} - 2z^{-3}} = -1 + \frac{1 - 3z^{-1} + 7z^{-2}}{1 - 4z^{-1} + 5z^{-2} - 2z^{-3}} = \\ &= -1 + \frac{1 - 3z^{-1} + 7z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2(1 - 2z^{-1})} \end{aligned} \quad (3-285)$$

нејзиниот развој во парцијални друпки ќе гласи:

$$F(z) = -1 + \frac{c_{11}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{c_{12}}{(1-z^{-1})} + \frac{c_2}{(1-2z^{-1})} \quad (3-286)$$

каде што:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \left[(1-z^{-1})^2 \frac{1-3z^{-1}+7z^{-2}}{(1-z^{-1})^2(1-2z^{-1})} \right]_{z^{-1}=1} = \left[\frac{1-3z^{-1}+7z^{-2}}{(1-2z^{-1})} \right]_{z=1} = -5 \\ c_{12} &= \frac{d}{dz} \left[(1-z^{-1})^2 \frac{1-3z^{-1}+7z^{-2}}{(1-z^{-1})^2(1-2z^{-1})} \right]_{z^{-1}=1} = \frac{d}{dz} \left[\frac{1-3z^{-1}+7z^{-2}}{(1-2z^{-1})} \right]_{z=1} = 1 \\ c_2 &= \left[(1-2z^{-1}) \frac{1-3z^{-1}+7z^{-2}}{(1-z^{-1})^2(1-2z^{-1})} \right]_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \left[\frac{1-3z^{-1}+7z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} \right]_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = 5 \end{aligned} \quad (3-287)$$

па, бараниот оригинал $f(kT)$ кој одговара на сликата $F(z)$ според таблицата 3-2 ќе биде:

$$\begin{aligned} f(k) &= -\delta(k) - 5(k+1)h(k) + h(k) + 5(2)^k h(k) = \\ &= -\delta(k) - 5kh(k) - 4h(k) + 5(2)^k h(k) \end{aligned} \quad (3-288)$$

3-4-5 ИНТЕГРАЛНА ФОРМУЛА ЗА ИНВЕРЗНА Z – ТРАНСФОРМАЦИЈА

Најелегантен и најопшт начин за одредување инверзна Z – трансформација на дадена Z – слика е со помош на интегралната формула за инверзна Z – трансформација, според која:

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz, \quad k \geq 0 \quad (3-289)$$

Притоа C е кружница со центар во координатниот почеток во z -комплексната рамнина и радиус $r > R$, каде што R е радиусот на конвергенција на сликата $F(z)$, и интегрирањето по таа кружница се врши во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Евидентно е дека со C се заобиколени сите полови на функцијата $F(z)$ и, следствено, и на функцијата $F(z)z^{k-1}$.

Формулата за инверзна Z – трансформација произлегува директно од фактот дека едностраната Z – трансформација (3-1) е Лоранов ред со главен дел и константен член, па $f(kT)$ всушност се пресметува според формулата за коефициентите на Лорановиот ред. Тоа е покажано во продолжение.

Врз основа на теоремата за униформна конвергенција и аналитичност на едностраната Z – трансформација, Z – сликата $F(z) = Z\{f(kT)\}$ дадена со изразот:

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (3-290)$$

е регуларна функција во надворешноста на кругот на конвергенција $|z| \leq R$, т.е. во областа $|z| > R$. Меѓутоа, во таа област е регуларна и функцијата $F(z)z^{k-1}$:

$$F(z)z^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{k-n-1} \quad (3-291)$$

бидејќи множителот z^{k-1} не внесува полими кои би биле надвор од областа $|z| \leq R$.

Со интегрирање на (3-291) по кружницата C :

$$C: z = \rho e^{j\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3-292)$$

која ги опфаќа сите полими на сликата $F(z)z^{k-1}$, се добива:

$$\oint_C F(z) z^{k-1} dz = \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{k-n-1} dz = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \oint_C z^{k-n-1} dz \quad (3-293)$$

Вредноста на интегралот на десната страна во (3-293) може лесно да се пресмета:

$$\oint_C z^{k-n-1} dz = \oint_C \frac{dz}{z^{n-k+1}} = \begin{cases} 2\pi j, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases} \quad (3-294)$$

Следствено, (3-293) станува:

$$\oint_C F(z) z^{k-1} dz = 2\pi j \cdot f(kT) \quad (3-295)$$

од каде што непосредно се добива изразот:

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz \quad (3-296)$$

кој е идентичен со изразот (3-289). Меѓутоа, овој израз е токму формулата за коефициентите на Лорановиот ред.

Интегралот на десната страна од (3-296) може да се пресмета со помош на Кошиевата теорема за остатоците, па, оттука:

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz = \sum_i \operatorname{Res}_{z=z_i} F(z) z^{k-1} \quad (3-297)$$

во сите различни полови $z = z_i$ на функцијата $F(z)z^{k-1}$ што лежат во областа $|z| < \rho$. Притоа, остатоците на функцијата $F(z)z^{k-1}$ во нејзините полови се определуваат според формулата:

$$\operatorname{Rez}_{z=z_i} F(z)z^{k-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_i)^m F(z)z^{k-1} \right]_{z=z_i} \quad (3-298)$$

односно формулата:

$$\operatorname{Rez}_{z=z_i} F(z)z^{k-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_i)^m F(z)z^{k-1} \right] \right\} \quad (3-299)$$

каде што z_i е i -тиот пол на функцијата $F(z)z^{k-1}$ со кратност $m = N_i$. Формулата (3-298) се користи во случаите кога функцијата $F(z)z^{k-1}$ е дадена во факторизиран облик по нејзините полови:

$$F(z)z^{k-1} = \frac{b(z)z^{k-1}}{(z-z_1)^{N_1} \cdots (z-z_i)^{N_i} \cdots (z-z_p)^{N_p}} \quad (3-300)$$

па множителот $(z-z_i)^{N_i}$ во (3-298) може да се скрати со идентичниот член во именителот на $F(z)z^{k-1}$. Меѓутоа, кога $F(z)z^{k-1}$ не е дадена во факторизиран облик, пресметувањето на нејзините остатоци во конкретните полови z_i треба да се врши според формулата (3-299), бидејќи смената $z = z_i$ во (3-298) би довела до неопределен израз од типот $0/0$.

Очигледно за $m = N_i = 1$ изразот (3-298) поминува во:

$$\operatorname{Rez}_{z=z_i} F(z)z^{k-1} = \left[(z-z_i) F(z)z^{k-1} \right]_{z=z_i} \quad (3-301)$$

а изразот (3-299) поминува во следниот израз:

$$\operatorname{Rez}_{z=z_i} F(z)z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow z_i} \left\{ \left[(z-z_i) F(z)z^{k-1} \right] \right\} \quad (3-302)$$

бидејќи по дефиниција:

$$0! = 1 \quad (3-303)$$

и:

$$\frac{d^0 [F(z)]}{dz^0} = F(z) \quad (3-304)$$

Следствено, (3-301) и (3-302) се формули по кои се пресметуваат остатоците на функцијата $F(z)z^{k-1}$ во нејзините прости полови, односно полови со кратност еден. Овде треба уште да се истакне дека за $k = 0$ функцијата $F(z)z^{k-1}$ може да има пол во координатниот почеток со одредена кратност, иако сликата $F(z)$ нема таков пол, па во тој случај треба да се пресмета и остатокот на функцијата $F(z)z^{k-1}$ во полот $z = 0$.

Пример 3-23. Со примена на интегралната формула (3-289) да се определи оригиналот $f(kT)$ кој припаѓа на Z – сликата:

$$F(z) = \frac{z}{z - 2^T}; \quad |z| > 2^T \quad (3-305)$$

Решение: Функцијата $f(kT)$ е одредена со изразот:

$$f(kT) = \sum_i \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} \quad (3-306)$$

Меѓутоа, функцијата $F(z)z^{k-1}$ има само еден прост пол во точката $z = 2^T$:

$$F(z)z^{k-1} = \frac{z^k}{z - 2^T} \quad (3-307)$$

и нејзиниот остаток во тој пол според (3-301) е:

$$\operatorname{Rez}_{z=2^T} F(z)z^{k-1} = \left[(z - 2^T) F(z)z^{k-1} \right]_{z=2^T} = \left[(z - 2^T) \frac{z^k}{(z - 2^T)} \right]_{z=2^T} = 2^{kT} \quad (3-308)$$

Следствено, бараниот оригинал $f(kT)$ кон сликата (3-305) ќе биде:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 2^{kT}, & k \geq 0 \end{cases} \quad (3-309)$$

Пример 3-24. Да се определи оригиналот $f(k)$ кој припаѓа кон Z – сликата:

$$F(z) = \frac{z(3z-1)}{(z-1)^3}; \quad |z| > 1 \quad (3-310)$$

Решение: Во овој случај функцијата $F(z)z^{k-1}$ има трикратен пол во точката $z = 1$:

$$F(z)z^{k-1} = \frac{z^k(3z-1)}{(z-1)^3} \quad (3-311)$$

Тогаш остатокот на (3-311) во тој пол може да се определи според (3-298), па, следува:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-1)^3 F(z) z^{k-1} \right]_{z=1} = \\
 &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-1)^3 \cdot \frac{z^k (3z-1)}{(z-1)^3} \right]_{z=1} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left[z^k (3z-1) \right]_{z=1} = \\
 &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left[(3z^{k+1} - z^k) \right]_{z=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left[3(k+1)z^k - kz^{k-1} \right]_{z=1} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[3(k+1)kz^{k-1} - k(k-1)z^{k-2} \right]_{z=1} = \frac{1}{2} \cdot \left[3(k+1)k - k(k-1) \right] = k(k+2) \quad (3-312)
 \end{aligned}$$

Оригиналот $f(k)$ што припаѓа кон Z – сликата (3-310) е:

$$f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ k(k+2), & k \geq 0 \end{cases} \quad \square \quad (3-313)$$

Пример 3-25. Да се определи оригиналот $f(k)$ кон Z – сликата:

$$F(z) = \frac{z(z^2 - 2z + 2)}{(z-1)(z-2)^2}; \quad |z| > 2 \quad (3-314)$$

Решение: Бидејќи функцијата $F(z)z^{k-1}$ има прост пол во точката $z=1$ и двократен пол во точката $z=2$, бараниот оригинал $f(k)$ кон сликата (3-314) ќе биде:

$$\begin{aligned}
 f(k) &= Z^{-1} \{F(z)\} = \sum_i \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} = \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} + \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} = \\
 &= \left[(z-1) \frac{z^k (z^2 - 2z + 2)}{(z-1)(z-2)^2} \right]_{z=1} + \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 \frac{z^k (z^2 - 2z + 2)}{(z-1)(z-2)^2} \right]_{z=2} = \\
 &= \left[\frac{z^k (z^2 - 2z + 2)}{(z-2)^2} \right]_{z=1} + \frac{d}{dz} \left[\frac{z^k (z^2 - 2z + 2)}{(z-1)} \right]_{z=2} = \\
 &= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 + k \cdot 2^k, & k \geq 0 \end{cases} \quad \square \quad (3-315)
 \end{aligned}$$

Од досега изложеното се гледа дека за одредување на инверзната Z – трансформација според интегралната формула (3-289) неопходно е познавањето на сите полови на сликата $F(z)$ и нивните соодветни кратности. Меѓутоа, кај дробно-рационалните слики $F(z)$ од обликот (3-29) тоа не претставува никаков проблем.

Пример 3-26. Да се определи оригиналот $f(kT)$ кон Z – сликата:

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)}; |z| > 1 \quad (3-316)$$

Решение: Функцијата $F(z)$ има еден единствен пол во точката $z=1$. Меѓутоа, функцијата $F(z)z^{k-1}$ освен полот $z=1$ има и пол во координатниот почеток за $k=0$. Следствено, мора да се пресмета и остатокот на функцијата $F(z)z^{k-1}$ во овој пол. Оттука, бараниот оригинал $f(kT)$ кон сликата (3-316) ќе биде:

$$\begin{aligned} f(kT) &= Z^{-1}\{F(z)\} = \sum_i \operatorname{Rez}_{z=z_i} F(z)z^{k-1} = \operatorname{Rez}_{z=0, k=0} F(z)z^{k-1} + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z)z^{k-1} = \\ &= \operatorname{Rez}_{z=0, k=0} F(z)z^{-1} + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z)z^{k-1} = \\ &= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \operatorname{Rez}_{z=0, k=0} F(z)z^{-1} + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z)z^{-1}, & k = 0 \\ \operatorname{Rez}_{z=1} F(z)z^{k-1}, & k > 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ -1+1=0, & k = 0 \\ 1, & k > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 1, & k > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-317)$$

Оригиналот $f(kT)$ кон сликата (3-316) може да се определи и на следниот начин:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ f(0), & k = 0 \\ \operatorname{Rez}_{z=1} F(z)z^{k-1}, & k > 0 \end{cases} \quad (3-318)$$

каде што $f(0)$ е почетната вредност на оригиналот $f(kT)$ кога $k \rightarrow 0$ и се определува со помош на првата гранична теорема на Z – трансформацијата:

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(z-1)} = 0 \quad (3-319)$$

Следствено, бидејќи:

$$\operatorname{Rez}_{z=1} F(z)z^{k-1} = 1 \quad \forall k \quad (3-320)$$

за оригиналот $f(kT)$ се добива:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 1, & k > 0 \end{cases} \quad (3-321)$$

Пример 3-27. Да се определи оригиналот $f(kT)$ кон Z – сликата $F(z)$, дадена со следниот израз:

$$F(z) = \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2}, |z| > 1 \quad (3-322)$$

Решение: Функцијата $F(z)$ има четирикратен пол во точката $z=0$ и двократен пол во точката $z=1$ за секое k . Меѓутоа, функцијата $F(z)z^{k-1}$ освен полот $z=1$ има и петкратен пол во координатниот почеток $z=0$ за $k=0$, четирикратен пол во координатниот почеток $z=0$ за $k=1$, трикратен пол во координатниот почеток $z=0$ за $k=2$, двократен пол во координатниот почеток $z=0$ за $k=3$ и прост пол во координатниот почеток $z=0$ за $k=4$. Оттаму, бараниот оригинал $f(kT)$ кон сликата (3-322) ќе биде:

$$\begin{aligned} f(kT) &= Z^{-1}\{F(z)\} = \sum_i \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} = \operatorname{Rez}_{z=0, k=0} F(z) z^{k-1} + \operatorname{Rez}_{z=0, k=1} F(z) z^{k-1} + \\ &+ \operatorname{Rez}_{z=0, k=2} F(z) z^{k-1} + \operatorname{Rez}_{z=0, k=3} F(z) z^{k-1} + \operatorname{Rez}_{z=0, k=4} F(z) z^{k-1} + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z) z^{k-1} = \\ &= \operatorname{Rez}_{z=0, k=0} F(z) z^{-1} + \operatorname{Rez}_{z=0, k=1} F(z) + \operatorname{Rez}_{z=0, k=2} F(z) z + \operatorname{Rez}_{z=0, k=3} F(z) z^2 + \\ &+ \operatorname{Rez}_{z=0, k=4} F(z) z^3 + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z) z^{k-1} = \\ &= \begin{cases} 0, k < 0 \\ \operatorname{Rez}_{z=0, k=0} F(z) z^{-1} + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z) z^{-1}, k = 0 \\ \operatorname{Rez}_{z=0, k=1} F(z) + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z), k = 1 \\ \operatorname{Rez}_{z=0, k=2} F(z) z + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z) z, k = 2 \\ \operatorname{Rez}_{z=0, k=3} F(z) z^2 + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z) z^2, k = 3 \\ \operatorname{Rez}_{z=0, k=4} F(z) z^3 + \operatorname{Rez}_{z=1} F(z) z^3, k = 4 \\ \operatorname{Rez}_{z=1} F(z) z^{k-1}, k \geq 5 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, k < 0 \\ f(0), k = 0 \\ f(T), k = 1 \\ f(2T), k = 2 \\ f(3T), k = 3 \\ f(4T), k = 4 \\ \operatorname{Rez}_{z=1} F(z) z^{-1}, k \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, k < 2 \\ \frac{1}{2}, k = 2 \\ 2, k = 3 \\ \frac{9}{2}, k = 4 \\ 4k - 12, k \geq 5 \end{cases} \quad (3-323) \end{aligned}$$

бидејќи:

$$\begin{aligned}
 f(T) &= \lim_{z \rightarrow \infty} [zF(z) - zf(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} = 0 \\
 f(2T) &= \lim_{z \rightarrow \infty} [z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} = \frac{1}{2} \\
 f(3T) &= \lim_{z \rightarrow \infty} [z^3F(z) - z^3f(0) - z^2f(1) - zf(2)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[z^3F(z) - \frac{1}{2}z \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{z^3(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} - \frac{1}{2}z \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z(z-1)^2} - \frac{1}{2}z \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{(z+1)^2(z^2+1) - z^2(z-1)^2}{2z(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{4z^3 + z^2 + 2z + 1}{2z(z-1)^2} \right] = 2 \\
 f(4T) &= \lim_{z \rightarrow \infty} [z^4F(z) - z^4f(0) - z^3f(1) - z^2f(2) - zf(3)] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[z^4F(z) - \frac{1}{2}z^2 - 2z \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[z^4 \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} - \frac{1}{2}z^2 - 2z \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{(z+1)^2(z^2+1) - z^2(z-1)^2 - 4z(z-1)^2}{2(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{9z^2 - 2z + 1}{2(z-1)^2} \right] = \frac{9}{2} \quad \square \quad (3-324)
 \end{aligned}$$

Пример 3-28. Да се определи оригиналот $f(kT)$ кон Z – сликата $F(z)$, дадена со следниот израз:

$$F(z) = \frac{2z^2 - 0.5z}{z^2 - 0.5z - 0.5}, \quad |z| > 1 \quad (3-325)$$

според постапката за бесконечно алгебарско делење, со развој на сликата (3-325) во парцијални дробки и според интегралната формула за инверзна Z – трансформација.

Решение: Со бесконечно алгебарско делење на полиномите во броителот и именителот на дробно-рационалната функција (3-325) се добива:

$$F(z) = 2 + 0.5z^{-1} + 1.25z^{-2} + 0.875z^{-3} + 1.0625z^{-4} + \dots \quad (3-326)$$

Оттука, дискретните вредности на бараниот оригинал $f(kT)$ ќе бидат:

$$f(0) = 2$$

$$\begin{aligned}
 f(T) &= 0.5 \\
 f(2T) &= 1.25 \\
 f(3T) &= 0.875 \\
 f(4T) &= 1.0625 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{3-327}$$

или:

$$f(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 + (-0.5)^k, & k \geq 0 \end{cases} \tag{3-328}$$

Со развој на функцијата (3-325) во парцијални дробки се добива:

$$\begin{aligned}
 \frac{F(z)}{z} &= \frac{2z - 0.5}{z^2 - 0.5z - 0.5} = \frac{2z - 0.5}{(z - 1)(z + 0.5)} = \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 0.5} \Rightarrow \\
 F(z) &= \frac{z}{z - 1} + \frac{z}{z + 0.5}
 \end{aligned} \tag{3-329}$$

па бараниот оригинал $f(kT)$ ќе биде:

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z - 1}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{z}{z + 0.5}\right\} = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 + (-0.5)^k, & k \geq 0 \end{cases} \tag{3-330}$$

Функцијата (3-325) има прости полови во точките $z = 1$ и $z = -0.5$. Функцијата $F(z)z^{k-1}$ ги има истите полови како и сликата (3-325). Таа нема пол во координатниот почеток ни за $k = 0$. Следствено, според (3-297), за $f(kT)$ се добива:

$$\begin{aligned}
 f(kT) &= Z^{-1}\{F(z)\} = \sum_i \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} = \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} \Big|_{z=1} + \operatorname{Rez} F(z) z^{k-1} \Big|_{z=-0.5} = \\
 &= \left[(z - 1) \frac{2z^2 - 0.5z}{(z - 1)(z + 0.5)} \right]_{z=1} + \left[(z + 0.5) \frac{2z^2 - 0.5z}{(z - 1)(z + 0.5)} \right]_{z=-0.5} = \\
 &= \left[\frac{2z^2 - 0.5z}{(z + 0.5)} \right]_{z=1} + \left[\frac{2z^2 - 0.5z}{(z - 1)} \right]_{z=-0.5} = \\
 &= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 + (-0.5)^k, & k \geq 0 \end{cases} \quad \square
 \end{aligned} \tag{3-331}$$

3-5 ВЛИЈАНИЕ НА ПОЛОВИТЕ НА Z – СЛИКАТА ВРЗ ТРАЈНАТА ВРЕДНОСТ НА ОРИГИНАЛОТ

Определувањето на оригиналот $f(kT)$ кон дадена Z – слика $F(z)$ претпоставува познавање на сите полови на функцијата $F(z)$. Текот на еден оригинал $f(kT)$ зависи од положбата на половите на неговата Z – слика $F(z) = Z\{f(kT)\}$ во z – комплексната рамнина. Аналогно, од положбата на половите на сликата $F(z) = Z\{f(kT)\}$ во z – комплексната рамнина зависи и трајната вредност $f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ на оригиналот $f(kT)$. Бидејќи прашањето за влијанието на положбата на половите на една Z – слика врз трајната вредност на нејзиниот оригинал е тесно поврзана со прашањето за стабилност на линеарните дискретни системи, тоа заслужува посебно внимание. Во продолжение е дискутирано влијанието на положбата на половите на Z – сликата $F(z)$ врз трајната вредност на нејзиниот оригинал $f(kT)$ со уважување на карактерот и кратноста на половите на $F(z)$.

Прост реален пол. Нека, под претпоставка, сликата $F(z)$ има прост реален пол во точката $z = z_i$. Тој пол ќе има облик:

$$z_i = a^T \tag{3-332}$$

каде што a е произволна реална константа:

$$a = \text{const.} \in \mathfrak{R} \tag{3-333}$$

Тогаш, компонентата на сликата $F(z)$ која резултира од постоењето на полот z_i ќе биде:

$$F_i(z) = \frac{1}{z - a^T} \tag{3-334}$$

Оригиналот $f_i(kT)$ што припаѓа кон сликата $F_i(z)$ е:

$$f_i(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \text{Rez}_{z=z_i} F_i(z) z^{k-1}, & k > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \left[(z - z_i) F_i(z) z^{k-1} \right]_{z=z_i}, & k > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ a^{(k-1)T}, & k > 0 \end{cases} \tag{3-335}$$

а неговата трајна вредност е дадена со изразот:

$$f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k-1)T} \tag{3-336}$$

Од (3-336) е очигледно дека трајната вредност на оригиналот $f_i(kT)$ зависи од бројната вредност на простиот реален пол $z_i = a^T$ и тоа на следниот начин:

1) Ако $|z_i| < 1$, односно ако простиот реален пол z_i лежи во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, тогаш:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k-1)T} = 0; \quad |a^T| < 1 \quad (3-337)$$

па, следствено, трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ е нулева:

$$f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k-1)T} = 0; \quad |a^T| < 1; \quad a \in \mathfrak{R} \quad (3-338)$$

2) Ако $|z_i| > 1$, односно ако простиот реален пол z_i лежи надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, тогаш $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k-1)T}$ е неограничена, па, следствено, таква е и трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$, за која се добива:

$$|f_i(\infty)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_i(kT)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a^{(k-1)T}| = \infty; \quad |a^T| > 1; \quad a \in \mathfrak{R} \quad (3-339)$$

Апсолутната вредност во изразот (3-339) е употребена, затоа што во случајот на негативен реален пол трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ е неопределена, со оглед на фактот дека оригиналот претставува псевдопериодична компонента, па $f_i(\infty)$ осцилира помеѓу $+\infty$ и $-\infty$.

Ако $|z_i| = 1$, односно ако простиот реален пол z_i лежи на единичната кружница $|z| = 1$ во z -комплексната рамнина, што значи дека $|a^T| = 1$, тогаш трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ ќе биде ограничена:

$$|f_i(\infty)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_i(kT)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a^{(k-1)T}| = 1; \quad |a^T| = 1; \quad a \in \mathfrak{R} \quad (3-340)$$

Во случајот на позитивен реален пол таа ќе биде еднаква на единица, а во случајот на негативен реален пол таа ќе биде неопределена.

Прост комплексен пол. Нека сега a во (3-332), под претпоставка, е произволна комплексна константа:

$$a = \text{Re}a + j\text{Im}a = \text{const.} \in \mathbb{C} \quad (3-341)$$

што значи дека набљудуваната функција $F(z)$ има прост комплексен пол во точката $z_i = a^T$. Тогаш оригиналот $f_i(kT)$ даден со (3-335), што припаѓа кон сликата $F_i(z)$ определена со (3-334), може да се запише во облик:

$$f_i(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \left(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a\right)^{\frac{(k-1)T}{2}} e^{j(k-1)T \arctg \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a}}, & k > 0 \end{cases} \quad (3-342)$$

а, оттука, за неговата трајна вредност:

$$\begin{aligned} f_i(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a\right)^{\frac{(k-1)T}{2}} e^{j(k-1)T \arctg \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a\right)^{\frac{(k-1)T}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{j(k-1)T \arctg \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a}} \end{aligned} \quad (3-343)$$

непосредно следува:

1) Ако $|z_i| < 1$, односно ако простиот комплексен пол z_i лежи во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, што значи дека $\left(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a\right)^{\frac{T}{2}} < 1$, тогаш трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ е нулева, бидејќи:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a\right)^{\frac{(k-1)T}{2}} = 0 \quad (3-344)$$

па, важи:

$$f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a\right)^{\frac{(k-1)T}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{j(k-1)T \arctg \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a}} = 0; \quad |a^T| < 1; \quad a \in \mathbb{C} \quad (3-345)$$

2) Ако $|z_i| > 1$, односно ако простиот комплексен пол z_i лежи надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, што значи дека $\left(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a\right)^{\frac{T}{2}} > 1$, тогаш:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a\right)^{\frac{(k-1)T}{2}} = \infty \quad (3-346)$$

па, трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ на оригиналот $f_i(kT)$ ќе биде неограничена, иако граничната вредност:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{j(k-1)\text{Tarctg} \frac{\text{Im} a}{\text{Re} a}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \left[(k-1)\text{Tarctg} \frac{\text{Im} a}{\text{Re} a} \right] + j \lim_{k \rightarrow \infty} \sin \left[(k-1)\text{Tarctg} \frac{\text{Im} a}{\text{Re} a} \right] \quad (3-347)$$

е неопределена.

3) Ако $|z_i| = 1$, односно ако простиот комплексен пол z_i лежи на единичната кружница $|z| = 1$ во z -комплексната рамнина, што значи дека $(\text{Re}^2 a + \text{Im}^2 a)^{\frac{T}{2}} = 1$, оригиналот (3-335) станува:

$$f_i(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ e^{j(k-1)\text{Tarctg} \frac{\text{Im} a}{\text{Re} a}}, & k > 0 \end{cases} \quad (3-348)$$

па, оттука, трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ е ограничена помеѓу 1 и -1, иако граничната вредност (3-347) не може да се определи.

Кратен реален пол. Нека во продолжение претпоставиме дека сликата $F(z)$, дадена со (3-212), има кратен реален пол во точката $z_i = a^T$ со кратност $N_i = q$. Тогаш компонентата $F_i(z)$ на сликата $F(z)$, која е резултат на постоењето на еден ваков пол, ќе има облик:

$$F_i(z) = \frac{zT^{q-1} (z^{q-2} + d_1 z_i z^{q-3} + d_2 z_i^2 z^{q-4} + \dots + d_{q-2} z_i^{q-3} + z_i^{q-2})}{(z - a^T)^q} \quad (3-349)$$

а оригиналот $f_i(kT)$ што припаѓа кон сликата $F_i(z)$ ќе биде:

$$\begin{aligned} f_i(kT) &= \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \text{Re}_{z=z_i} F_i(z) z^{k-1}, & k > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left[(z - z_i)^q F_i(z) z^{k-1} \right]_{z=z_i}, & k > 0 \end{cases} \\ f_i(kT) &= \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ (kT)^{q-1} a^{(k-1)T}, & k > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-350)$$

Трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ очигледно зависи од полот $z_i = a^T$ и за неа важи:

1) Ако $|z_i| < 1$, односно ако кратниот реален пол $z_i = a^T$ лежи во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, тогаш трајната вредност

$f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ е нулева, бидејќи брзината со која членот $a^{(k-1)T}$ тежи кон нулата е поголема од брзината со која членот $(kT)^{q-1}$ тежи кон ∞ . Следствено, важи изразот:

$$f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} (kT)^{q-1} a^{(k-1)T} = 0; \quad |a^T| < 1; \quad a \in \mathfrak{R} \quad (3-351)$$

2) Ако $|z_i| > 1$, односно ако кратниот реален пол z_i лежи надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, тогаш $\lim_{k \rightarrow \infty} (kT)^{q-1} a^{(k-1)T}$ е неограничена, бидејќи и $|a^{(k-1)T}|$ и $(kT)^{q-1}$ тежат кон бесконечност кога $k \rightarrow \infty$, па, следствено, таква е и трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$, за која се добива:

$$|f_i(\infty)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_i(kT)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |(kT)^{q-1} a^{(k-1)T}| = \infty; \quad |a^T| > 1; \quad a \in \mathfrak{R} \quad (3-352)$$

3) Ако $|z_i| = 1$, односно ако простиот реален пол z_i лежи на единичната кружница $|z| = 1$ во z -комплексната рамнина, што значи дека $|a^T| = 1$, тогаш трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ ќе биде неограничена и ќе важи:

$$|f_i(\infty)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_i(kT)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |(kT)^{q-1} a^{(k-1)T}| = \lim_{k \rightarrow \infty} (kT)^{q-1} = \infty; \quad |a^T| = 1; \quad a \in \mathfrak{R} \quad (3-353)$$

Кратен комплексен пол. На крајот останува да се разгледа случајот кога сликата $F(z)$ има кратен комплексен пол во точката $z_i = a^T$, со произволна кратност $N_i = q$. Тогаш константата a е дадена со (3-341), а оригиналот (3-350) што припаѓа кон сликата (3-349) може да се запише во облик:

$$f_i(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ (kT)^{q-1} \left(\text{Re}^2 a + \text{Im}^2 a \right)^{\frac{(k-1)T}{2}} e^{j(k-1)T \arctg \frac{\text{Im} a}{\text{Re} a}}, & k > 0 \end{cases} \quad (3-354)$$

Функцијата $f_i(kT)$ е компонента на оригиналот $f(kT)$ што припаѓа кон сликата (3-349), а се должи на постоењето на кратниот комплексен пол $z_i = a^T$ и неговата трајна вредност ќе биде:

$$\begin{aligned} f_i(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} (kT)^{q-1} \left(\text{Re}^2 a + \text{Im}^2 a \right)^{\frac{(k-1)T}{2}} e^{j(k-1)T \arctg \frac{\text{Im} a}{\text{Re} a}} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (kT)^{q-1} \left(\text{Re}^2 a + \text{Im}^2 a \right)^{\frac{(k-1)T}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{j(k-1)T \arctg \frac{\text{Im} a}{\text{Re} a}} \end{aligned} \quad (3-355)$$

Тогаш, за (3-355) се добива:

1) Ако $|z_i| < 1$, односно ако кратниот комплексен пол z_i лежи во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, што значи дека $(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a)^{\frac{T}{2}} < 1$, тогаш трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ е нулева, бидејќи:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a)^{\frac{(k-1)T}{2}} = 0 \quad (3-356)$$

па, важи:

$$f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a)^{\frac{(k-1)T}{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{j(k-1)T \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a}} = 0; \quad |a^T| < 1; \quad a \in \mathbb{C} \quad (3-357)$$

2) Ако $|z_i| > 1$, односно ако кратниот комплексен пол z_i лежи надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, што значи дека $(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a)^{\frac{T}{2}} > 1$, трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ ќе биде неограничена, бидејќи:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a)^{\frac{(k-1)T}{2}} = \infty \quad (3-358)$$

иако граничната вредност:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{j(k-1)T \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \left[(k-1)T \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a} \right] + j \lim_{k \rightarrow \infty} \sin \left[(k-1)T \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a} \right] \quad (3-359)$$

е неопределена.

3) Ако $|z_i| = 1$, односно ако кратниот комплексен пол z_i лежи на единичната кружница $|z| = 1$ во z -комплексната рамнина, што значи дека $(\operatorname{Re}^2 a + \operatorname{Im}^2 a)^{\frac{T}{2}} = 1$, оригиналот (3-354) станува:

$$f_i(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ (kT)^{q-1} e^{j(k-1)T \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a}}, & k > 0 \end{cases} \quad (3-360)$$

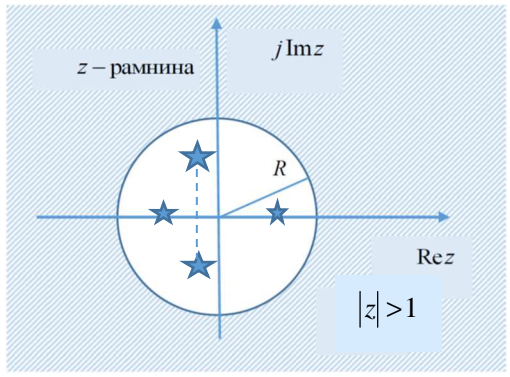
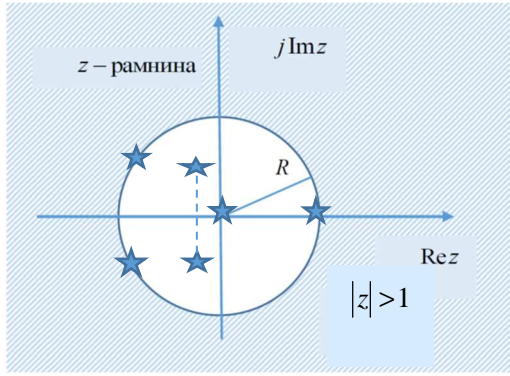
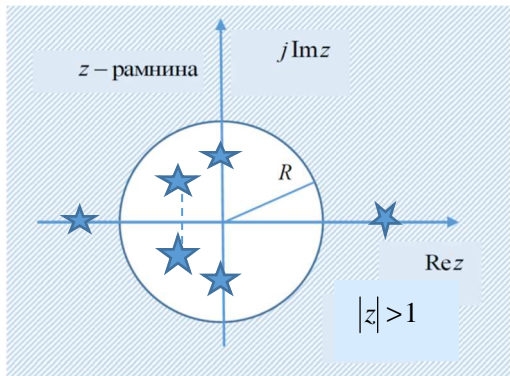
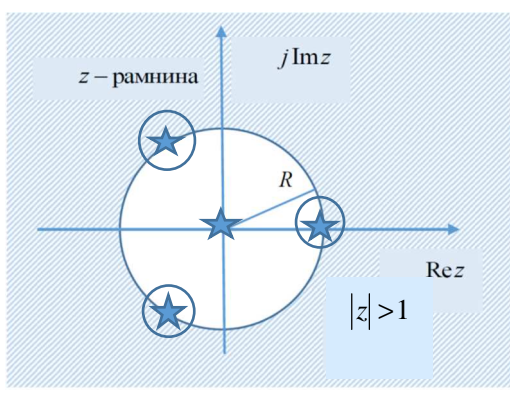
па, оттука, трајната вредност $f_i(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i(kT)$ повторно е неограничена, бидејќи

$\lim_{k \rightarrow \infty} (kT)^{q-1} = \infty$, иако граничната вредност (3-359) не може да се определи, бидејќи осцилира помеѓу $+\infty$ и $-\infty$. Меѓутоа, можеме да запишеме:

$$|f_i(\infty)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f_i(kT)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |(kT)^{q-1} a^{(k-1)T}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |(kT)^{q-1}| = \infty; \quad |a^T| = 1; \quad a \in \mathbb{C} \quad (3-361)$$

Врз основа на досега кажаното следуваат следните заклучоци: 1) Ако сите полови на сликата $F(z)$ лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, соодветниот оригинал

Таблица 3-3 Влијание на положбата на половите на една Z – слика врз трајната вредност на нејзиниот оригинал

	<p>$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ е нулева без оглед на карактерот и кратноста на половите</p>
	<p>$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ е ограничена, иако е неопределена во случајот на прост комплексен или прост негативен реален пол на единичната кружница и без полови надвор од единичниот круг</p>
	<p>$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ е неограничена, иако е неопределена во случајот на комплексен или негативен реален пол надвор од единичниот круг, без оглед на неговата кратност</p>
	<p>$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ е неограничена, иако е неопределена во случајот на кратен комплексен или кратен негативен реален пол на единичната кружница и без полови надвор од единичниот круг</p>

$f(kT)$ ќе биде ограничена функција за сите цели k , а трајната вредност $f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ ќе биде нулева, без оглед на карактерот и кратноста на тие полови.

2) Оригиналот $f(kT)$ исто така ќе биде ограничен за сите цели k и во случајот кога сликата $F(z)$ има прости полови кои лежат на единичната кружница $|z|=1$, доколку сите останати нејзини полови лежат во областа $|z|<1$. Во таквиот случај граничната вредност $f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ ќе биде ограничена, иако нема да постои во случајот на прост комплексен или негативен реален пол. 3) Ако барем еден пол на сликата $F(z)$ лежи надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$, соодветниот оригинал $|f(kT)|$ неограничено ќе расте при $k \rightarrow \infty$, без оглед на карактерот и кратноста на тој пол. 4) Оригиналот $f(kT)$ исто така ќе биде неограничен при $k \rightarrow \infty$, доколку соодветната слика $F(z)$ има барем еден кратен пол на единичната кружница $|z|=1$ и нема полови надвор од единичниот круг, без оглед на карактерот на тој пол, при што во случајот на кратен комплексен пол или негативен реален пол граничната вредност $f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$ нема да постои. Наведените заклучоци се прикажани во таблицата 3-3. Тие може корисно да послужат при изучувањето и одредувањето на стабилноста на линеарните дискретни системи.

4 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Еден дискретен динамички систем може да се опише односно моделира на повеќе различни, но еквивалентни начини, односно со повеќе различни, но еквивалентни модели, од кои се најважни следните:

- ❖ диферентна равенка
- ❖ тежинска низа
- ❖ состојбени големини
- ❖ дискретна преносна функција
- ❖ фреквенциска преносна функција
- ❖ структурна блок-шема

Секој од овие модели има свој аналог кај континуалните системи: диферентната равенка од n -ти ред има иста улога како и диференцијалната равенка од n -ти ред; дискретната преносна функција е аналогна со континуалната преносна функција; тежинската низа на еден дискретен систем одговара на импулсната карактеристика кај континуалните системи; диферентните равенки на векторот на состојби кај дискретните системи се соодветни на диференцијалните равенки на состојбените големини кај континуалните системи; фреквенциската преносна функција кај дискретните системи има исто значење како и фреквенциската преносна функција кај континуалните системи; алгебрата на блок-шемите е иста кај двата типа системи.

Дел од дадените модели ги опишуваат конкретните дискретни системи во просторот на оригиналите, односно во временското подрачје. Затоа ги нарекуваме едноставно **модели во временското подрачје**. Такви се, на пример, диферентните равенки, тежинската низа и состојбените големини. Други ги претставуваат дискретните системи во комплексното подрачје, како на пример, дискретната преносна функција, фреквенциската преносна функција и структурните блок-шеми. Затоа ги нарекуваме **модели во комплексното подрачје**. Во продолжение ќе стане посебно збор за секој од наведените модели.

4-1 МОДЕЛИРАЊЕ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ СО ДИФЕРЕНТНИ РАВЕНКИ

За линеарните диферентни равенки веќе зборувавме. Затоа овде само ќе резимираме. Еден линеарен стационарен каузален дискретен динамички систем од n -ти ред со еден влез $y(kT)$ и еден излез $x(kT)$ секогаш може да се опише со следната линеарна диферентна равенка од ист ред со константни коефициенти:

$$\begin{aligned} x((k+n)T) + a_1 x((k+n-1)T) + \dots + a_{n-1} x((k+1)T) + a_n x(kT) = \\ = b_0 y((k+m)T) + b_1 y((k+m-1)T) + \dots + b_{m-1} y((k+1)T) + b_m y(kT); \quad m \leq n \end{aligned} \quad (4-1)$$

со почетни услови:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \quad \dots, \quad x((n-1)T) = x_{n-1} \quad (4-2)$$

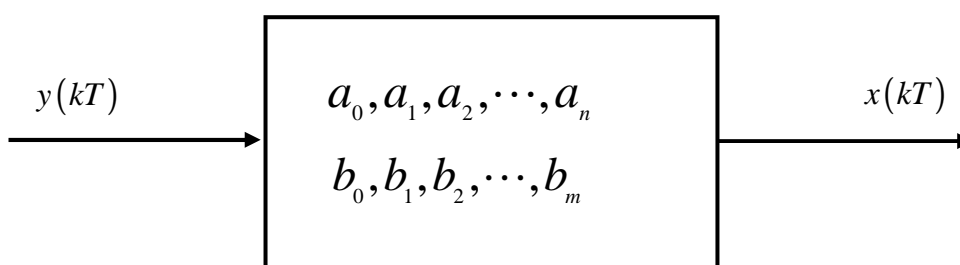
каде што $y(kT)$ и $x(kT)$ се вредности на влезот односно излезот на набљудуваниот дискретен систем во дискретните мигови $t_k = kT$; $k = 0, 1, 2, \dots$; $T = \text{const.} > 0 \in \mathfrak{R}$, соодветно. Редот на диферентната равенка (4-1), математички одреден со разликата $(k+n) - k = n$ е еднаков со редот на опишуваниот дискретен систем. Коефициентите a_i ; $i = 1, 2, \dots, n$ и b_j ; $j = 1, 2, \dots, m$ во (4-1) се константни, фиксни броеви, кои произлегуваат од параметрите на опишуваниот дискретен систем и го одредуваат неговото динамичко поведение. (Сетете се на моделот на нумеричкиот интегратор, каде што $b_0 = T$.) Ако тие не се фиксни броеви, туку зависат од дискретната променлива k , тоа ќе значи дека системот (4-1) не е стационарен. Меѓутоа, нестационарните дискретни системи не се предмет на изучување во овој труд.

На сликата 4-1 е прикажана структурната блок-шема на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем опишан со моделот (4-1). Влезот во овој систем е бројната низа:

$$\{y(0), y(T), y(2T), \dots\} \quad (4-3)$$

а излез е низата:

$$\{x(0), x(T), x(2T), \dots\} \quad (4-4)$$



Слика 4-1 Блок-шема на дискретен динамички систем со еден влез и еден излез

Тогаш, да се анализира поведението на системот (4-1) во временско подрачје, значи да се определи неговиот излез $x(kT)$ во мигот $t_k = kT$ во функција од влезната низа $\{y(kT), y((k-1)T), y((k-2)T), \dots\}$ и сите претходни вредности на излезот $\{x((k-1)T), x((k-2)T), x((k-3)T), \dots\}$, или, со други зборови кажано, да се реши диферентната равенка (4-1).

Равенката (4-1) многу лесно може да се испрограмира на дигитален пресметувач. Така, со нејзино решавање во однос на $x((k+n)T)$ се добива:

$$x((k+n)T) = \sum_{j=0}^m b_j y((k+m-j)T) - \sum_{i=1}^n a_i x((k+n-i)T) \quad (4-5)$$

или, што е еквивалентно:

$$x(kT) = \sum_{j=0}^m b_j y((k-j)T) - \sum_{i=1}^n a_i x((k-i)T) \quad (4-6)$$

Тогаш бројот $x(kT)$ го претставува излезот на дигиталниот пресметувач во дискретниот временски миг $t_k = kT$, додека $x((k-1)T)$, $x((k-2)T)$, $x((k-3)T)$, \dots се неговите минати вредности, сместени во меморијата на сметачот. Аналогно, $y(kT)$, $y((k-1)T)$, $y((k-2)T)$, $y((k-3)T)$, \dots се вредности на неговиот влез во миговите $kT, (k-1)T, (k-2)T, \dots$. Во случај на каузални сигнали, $y(t) = x(t) \equiv 0 \forall k < 0$ па, соодветните почетни услови $x(-T), x(-2T), \dots, x(-nT), y(-T), \dots, y(-mT)$ на равенката (4-6) се нулеви. Очигледно, равенката (4-6) е рекурентна релација која се повторува секоја итерација.

За решавањето линеарни диферентни равенки во временско подрачје веќе зборувавме, па, затоа овде само уште ќе напоменеме дека иако периодата на дискретизација T се јавува експлицитно во аргументот на дискретните оригинали во (4-3) и (4-4), многу често таа се испушта од него, и сигналите $y(kT)$ и $x(kT)$ се запишуваат едноставно како $y(k)$ и $x(k)$. Ова е можно затоа што T е константа.

Се разбира, диферентната равенка може да се реши и во комплексното подрачје со примена на Z – трансформацијата. Така, со Z – трансформација на равенката (4-6) се добива:

$$\begin{aligned} Z \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x((k-i)T) = \sum_{j=0}^m b_j y((k-j)T) \right\} \\ Z \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x((k-i)T) \right\} &= Z \left\{ \sum_{j=0}^m b_j y((k-j)T) \right\} \\ \sum_{i=0}^n a_i Z \{ x((k-i)T) \} &= \sum_{j=0}^m b_j Z \{ y((k-j)T) \} \\ \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} \left[X(z) + \sum_{k=-i}^{-1} x(kT) z^{-k} \right] &= \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} \left[Y(z) + \sum_{k=-j}^{-1} y(kT) z^{-k} \right] \\ \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} X(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} Y(z) + \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} \sum_{k=-j}^{-1} y(kT) z^{-k} &- \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} \sum_{k=-i}^{-1} x(kT) z^{-k} \\ X(z) \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} = Y(z) \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} + \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} \sum_{k=-j}^{-1} y(kT) z^{-k} &- \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} \sum_{k=-i}^{-1} x(kT) z^{-k} \\ X(z) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j} Y(z) + \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} \sum_{k=-j}^{-1} y(kT) z^{-k} - \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} \sum_{k=-i}^{-1} x(kT) z^{-k}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \end{aligned} \quad (4-7)$$

и оттука може да се определи одзивот на набљудуваниот дискретен систем за секој даден влез. За нулеви почетни услови изразот (4-7) поминува во следниот облик:

$$X(z) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} Y(z) \quad (4-8)$$

Математичкиот модел со диферентни равенки претставува модел во просторот на оригиналите односно временското подрачје и тој е применлив како на линеарни, така и на нелинеарни дискретни динамички системи, со тоа што моделот на нелинеарен дискретен динамички систем е нелинеарна диферентна равенка. Подеднакво, овој модел може да се примени и на стационарни и нестационарни дискретни динамички системи, со тоа што моделот на нестационарен дискретен динамички систем ќе биде диферентна равенка со коефициенти кои зависат од дискретната независно променлива. Конечно, на овој начин може да се претстават односно моделираат како системи со еден влез и еден излез, така и системи со повеќе влезови и излези, при што моделот на повеќевеличински дискретен систем ќе биде систем од диферентни равенки, чиј број мора да одговара на бројот излези од системот.

4-2 МОДЕЛИРАЊЕ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ СО СОСТОЈБЕНИ ГОЛЕМИНИ

Од математиката е познато дека една диферентна равенка од n – ти ред, може секогаш да се претстави со еквивалентен систем n диферентни равенки од прв ред со воведување соодветни смени. Нека е дадена диферентната равенка (4-6). Со воведување на смените:

$$\begin{aligned} v_1(kT) &= x((k-1)T) \\ v_2(kT) &= x((k-2)T) \\ &\vdots \\ v_n(kT) &= x((k-n)T) \end{aligned} \quad (4-9)$$

истата се претвора во следниот систем диферентни равенки од прв ред:

$$\begin{aligned} v_1((k+1)T) &= x(kT) = y(kT) - \sum_{i=1}^n a_i v_i(kT) \\ v_2((k+1)T) &= v_1(kT) \\ v_3((k+1)T) &= v_2(kT) \\ &\vdots \\ v_n((k+1)T) &= v_{n-1}(kT) \end{aligned} \quad (4-10)$$

Решенијата на овие диферентни равенки се нарекуваат **состојбени големини** на моделираниот дискретен систем и претставуваат елементи на **векторот на состојби** на системот:

$$\mathbf{v}(kT) = \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \\ v_3(kT) \\ \vdots \\ v_n(kT) \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

со димензија $n \times 1$. Системот равенки (4-10) може да се запише во кус матричен облик на следниот начин:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{B}y(kT) \quad (4-12)$$

каде што \mathbf{A} е квадратна матрица со константни елементи со димензија $n \times n$, додека \mathbf{B} е матрица – колона односно вектор со константни елементи со димензија $n \times 1$; притоа n е редот на набљудуваниот дискретен систем.

Состојбените големини на еден дискретен систем наполно ја определуваат неговата положба во просторот на состојби во секој дискретен миг на време $t_k = kT$, ако е позната неговата почетна состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ и влезната низа $\{y(0), y(T), \dots, y((k-1)T)\}$. Така, пресметувајќи последователно за $k = 0, 1, 2, \dots$ итн. од (4-12) се добива:

$$\mathbf{v}(T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(0) + \mathbf{B}y(0)$$

$$\mathbf{v}(2T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(T) + \mathbf{B}y(T) = \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{v}(0) + \mathbf{B}y(0)] + \mathbf{B}y(T) =$$

$$= \mathbf{A}^2\mathbf{v}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}y(0) + \mathbf{B}y(T)$$

$$\mathbf{v}(3T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(2T) + \mathbf{B}y(2T) = \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\mathbf{v}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}y(0) + \mathbf{B}y(T)] + \mathbf{B}y(2T) =$$

$$= \mathbf{A}^3\mathbf{v}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}y(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}y(T) + \mathbf{B}y(2T)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}(kT) = \mathbf{A}^k\mathbf{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i\mathbf{B}y((k-i-1)T); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4-13)$$

Изразот (4-13) покажува дека состојбата на еден дискретен систем во секој миг на време $t_k = kT$ навистина зависи само од неговата почетна состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ и од неговата влезна низа $\{y(0), y(T), \dots, y((k-1)T)\}$.

Постапките за анализа и синтеза на динамичките системи засновани врз концептот на просторот на состојби наоѓаат голема примена и во изучувањето на дискретните системи на автоматско управување. Всушност, најголемиот број современи методи за анализа и синтеза на дискретните системи на автоматско управување се искажани токму преку јазикот на просторот на состојби. Методите на просторот на состојби се погодни за анализа и синтеза на дискретните системи на автоматско управување и од гледиште на примена на дигиталните сметачи. Покрај тоа, ваквиот приод овозможува единствена постапка за третирање на дискретните системи со различни процеси на дискретизација. Осмата глава во овој учебник е посветена токму на анализата на дискретните системи во просторот на состојби.

4-3 ПОИМ ЗА ТЕЖИНСКА НИЗА КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Концептот за импулсна карактеристика односно импулсен одзив има извонредно голема важност кај линеарните континуални системи. Имено, ако е познат импулсниот одзив $g(t)$ на еден линеарен стационарен континуален динамички систем, тогаш, под претпоставка дека системот претходно бил во мирување, односно не поседува акумулирана енергија во себе, неговиот одзив $x(t)$ на кој и да било познат влез $y(t)$ секогаш може да се определи со примената на конволуцискиот интеграл:

$$x(kT) = \int_0^t g(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad (4-14)$$

или, со други зборови, линеарниот стационарен континуален систем без акумулирана енергија во себе е наполно определен со својот импулсен одзив. (Доколку набљудуваниот систем има во себе акумулирано некоја енергија, што значи ненулеви почетни услови, кон излезот (4-14) треба да се додаде и компонента која се должи на тие ненулеви почетни услови).

Сличен концепт постои и кај линеарните стационарни дискретни системи, а тоа е **тежинската низа**. За негово воведување се поаѓа од аналогијата со импулсниот одзив кај линеарните континуални системи. Импулсниот одзив на еден континуален систем е дефиниран како одзив на тој систем на Дираков импулс на неговиот влез, односно на влезна Диракова-делта функција, за нулеви почетни услови. Кај дискретните системи, наместо со функции од континуална независно променлива, се работи со функции од дискретна независно променлива или бројни низи. Оттука, да се опише еден линеарен дискретен систем на сличен начин како континуалните системи преку нивниот импулсен одзив, потребна е функција од дискретна независно променлива односно влезна низа, која ќе има аналогни својства со Дираковата-делта функција односно Дираковиот импулс. Таква е т.н. **Кронекер-делта низата**, дефинирана со општиот израз:

$$\delta_n(kT) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (4-15)$$

од кој се гледа дека оваа низа е нулева за сите дискретни временски мигови $t_k = kT$, каде што $k \neq n$, освен за $t_n = nT$, т.е. при $k = n$, кога таа има вредност 1.

Сега, користејќи ја аналогијата со континуалните системи, може да се воведат концептот за тежинска низа на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем, со модел

од обликот (4-6). За таа цел, нека на влезот од системот се доведе возбудата:

$$y(kT) = \delta_0(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (4-16)$$

што претставува специјален случај на низата (4-15) за $n = 0$. Системот (4-6), под претпоставка, бил во мирување сè до моментот на појавување на влезот (4-16), па, за неговиот одзив до тој момент ќе важи:

$$x(kT) \equiv 0 \quad \forall k < 0 \quad (4-17)$$

додека останатите негови вредности за $k = 0, 1, 2, \dots$ т.е. во дискретните временски мигови $0, T, 2T, \dots$ се добиваат непосредно од рекурентната релација (4-6). Така, за $x(0), x(T), x(2T), \dots$ итн. се добива:

$$x(0) = b_0 y(0) = b_0$$

$$x(T) = b_1 y(0) - a_1 x(0) = b_1 - a_1 b_0$$

$$x(2T) = b_2 y(0) - a_2 x(0) - a_1 x(T) = b_2 - a_1 b_1 + (a_1^2 - a_0) b_0 \quad (4-18)$$

⋮

Меѓутоа, по дефиниција, одзивот $x(kT)$ на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем на влез од обликот (4-16) ја претставува тежинската низа на тој систем и таа вообичаено се означува со $g(kT)$. Тогаш, тежинската низа $g(kT)$ на системот (4-6) ќе биде определена на следниот начин:

$$g(kT) \equiv 0 \quad \forall k < 0$$

$$g(0) = b_0$$

$$g(T) = b_1 - a_1 b_0$$

$$g(2T) = b_2 - a_1 b_1 + (a_1^2 - a_0) b_0$$

⋮

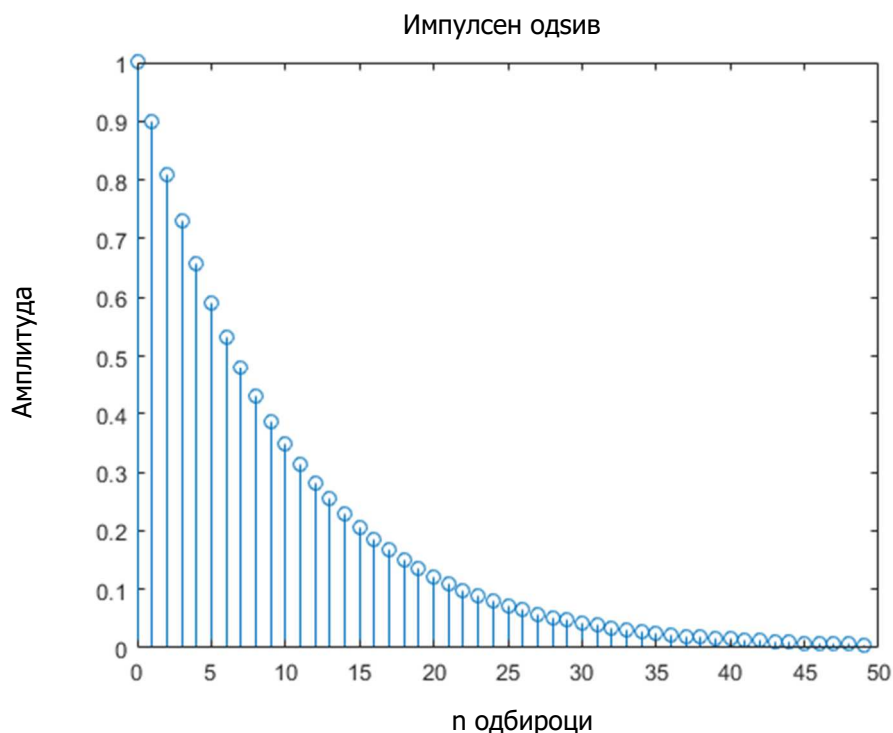
(4-19)

или:

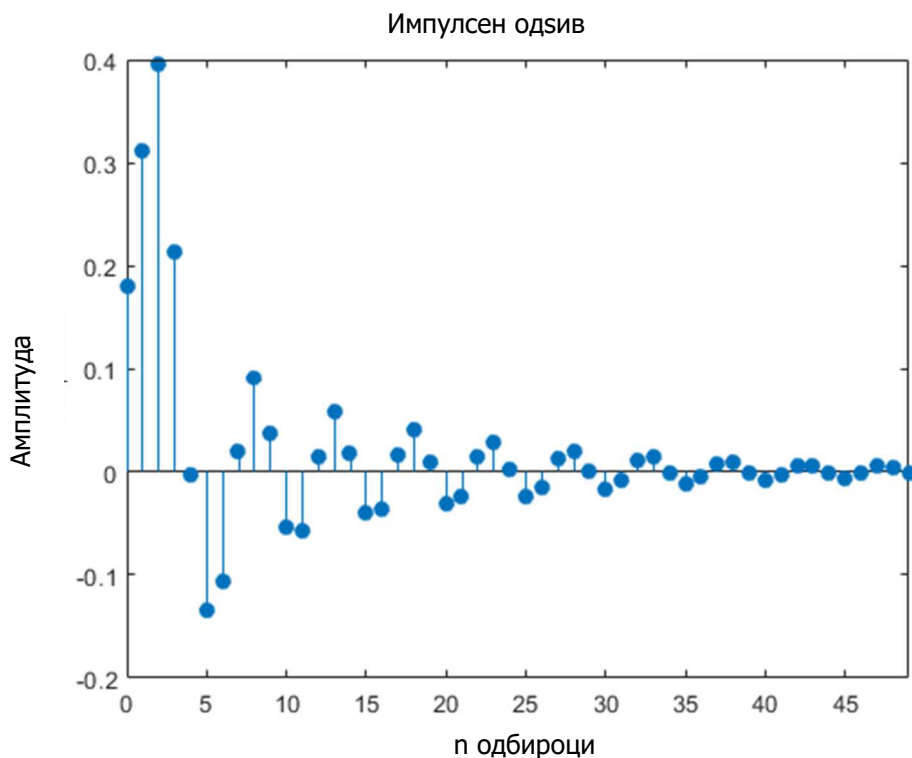
$$g(kT) = x(kT) \Big|_{y(kT)=\delta_0(kT)} = S[\delta_0(kT)] \quad (4-20)$$

каде што со $S[\cdot]$ е означена линеарната трансформација што системот ја врши врз влезниот сигнал. Со други зборови, тежинската низа $g(kT)$ на еден дискретен систем

е одзив на системот на единична Кронекер-делта возбудна функција $\delta_0(kT)$ доведена на неговиот влез, под претпоставка на нулеви почетни услови. Две типични тежински низи на линеарните дискретни системи графички се прикажани на сликата 4-2 и 4-3.



Слика 4-2 Графички приказ на типична тежинска низа на стабилен линеарен стационарен дискретен динамички систем



Слика 4-3 Графички приказ на уште една типична тежинска низа на стабилен линеарен стационарен дискретен динамички систем

Бидејќи набљудуваниот дискретен систем (4-6) е линеарен, неговиот одзив $x(kT)$ на влез од обликот:

$$y_0(kT) = \alpha_0 \delta_0(kT) = \begin{cases} \alpha_0, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (4-21)$$

ќе биде даден со изразот:

$$x_0(kT) = \alpha_0 g(kT), \quad k \geq 0 \quad (4-22)$$

каде што дискретниот сигнал $g(kT)$ е неговата тежинска низа. Овој резултат може да се обопшти, па, за таа цел, на влезот од системот (4-6) најнапред се доведува Кронекер-делта функцијата:

$$y_1(kT) = \alpha_1 \delta_1(kT) = \begin{cases} \alpha_1, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases} \quad (4-23)$$

Притоа повторно претпоставуваме дека системот (4-6) првобитно бил во мирување, што значи дека за влезот (4-23) неговиот одзив $x(kT)$ ќе биде:

$$x_1((k-1)T) \equiv 0 \quad \forall k < 1 \quad (4-24)$$

Тогаш од (4-6) за $k = 0, 1, 2, \dots$ директно се добива:

$$\begin{aligned} x_1(T) &= b_0 y_1(T) = b_0 \alpha_1 \\ x_1(2T) &= b_1 y_1(T) - a_1 x_1(T) = (b_1 - a_1 b_0) \alpha_1 \\ x_1(3T) &= b_2 y_1(T) - a_2 x_1(T) - a_1 x_1(2T) = [b_2 - a_1 b_1 + (a_1^2 - a_0) b_0] \alpha_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4-25)$$

односно:

$$x_1(kT) = \alpha_1 g((k-1)T), \quad k \geq 1 \quad (4-26)$$

На сличен начин се одредуваат и одзивите на системот (4-6) на возбудите $y_2(kT) = \alpha_2 \delta_2(kT)$, $y_3(kT) = \alpha_3 \delta_3(kT)$ итн. Нека, конечно, на влезот од системот (4-6), кој, под претпоставка, бил првобитно во мирување, се доведе влезната возбуда:

$$y_n(kT) = \alpha_n \delta_n(kT) \quad (4-27)$$

Тогаш, одзивот на набљудуваниот дискретен систем ќе биде:

$$x_n((k-n)T) \equiv 0 \quad \forall k < n \quad (4-28)$$

и:

$$\begin{aligned}
x_n(nT) &= b_0 y_n(nT) = b_0 \alpha_n \\
x_n((n+1)T) &= b_1 y_n(nT) - a_1 x_n(nT) = (b_1 - a_1 b_0) \alpha_n \\
x_n((n+2)T) &= b_2 y_n(nT) - a_2 x_n(nT) - a_1 x_n((n+1)T) = \\
&= [b_2 - a_1 b_1 + (a_1^2 - a_0) b_0] \alpha_n
\end{aligned} \tag{4-29}$$

односно:

$$x_n(kT) = \alpha_n g((k-n)T), \quad k \geq n \tag{4-30}$$

Само за потсетување, резултатите (4-22), (4-26) и (4-30) може да се добијат и директно со примена на својството за линеарност и стационарност на системот (4-6).

Добиените резултати може да се употребат за одредување на одзивот на произволен линеарен дискретен систем на кој и да било познат влез $y(kT)$. Така, нека на влезот од системот (4-6), кој, под претпоставка, првобитно бил во мирување, се доведе произволна влезна возбуда $y(kT)$. Таа претставува низа од дискретните вредности $\{y(0) = \alpha_0, y(T) = \alpha_1, \dots, y(kT) = \alpha_k, \dots\}$, чиј аналитички запис е:

$$y(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \alpha_k, & k \geq 0 \end{cases} \tag{4-31}$$

Меѓутоа, функцијата (4-31) секогаш може да се претстави преку елементарните Кронекер-делта функции (4-15) на следниот начин:

$$y(kT) = \alpha_0 \delta_0(kT) + \alpha_1 \delta_1(kT) + \dots + \alpha_n \delta_n(kT) + \dots = \sum_{n=0}^k \alpha_n \delta_n(kT) \tag{4-32}$$

Тогаш одзивот $x(kT)$ на набљудуваниот дискретен систем (4-6) на влезот (4-32) може да се определи со примена на својството за линеарност на системот (4-6). Имено, поради линеарност на набљудуваниот дискретен систем, неговиот одзив $x(kT)$ на влезот (4-32) ќе биде линеарна комбинација од одзивите $x_i(kT)$ на одделните влезови $y_i(kT) = \alpha_i \delta_i(kT)$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ односно:

$$x(kT) = x_0(kT) + x_1(kT) + \dots + x_n(kT) + \dots = \sum_{n=0}^k x_n(kT) \tag{4-33}$$

Меѓутоа, со оглед на (4-30), изразот (4-33) станува:

$$x(kT) = \sum_{n=0}^k x_n(kT) = \sum_{n=0}^k \alpha_n g((k-n)T) \tag{4-34}$$

ОДНОСНО:

$$x(kT) = \sum_{n=0}^k y(nT) g((k-n)T); k = 0, 1, 2, \dots \quad (4-35)$$

Изразот (4-35) се нарекува конволуциска сума за дискретниот систем (4-6). Нејзината аналогија со конволуцискиот интеграл (4-14) кај континуалните системи е очигледна, па, тежинската низа кај дискретните системи ја игра истата улога како импулсниот одсив кај континуалните системи. Ако е позната тежинската низа $g(kT)$ на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем, тогаш, под претпоставка дека системот нема во себе акумулирано енергија, неговиот одсив $x(kT)$ на кој и да било познат влез $y(kT)$ секогаш може да се определи со примена на конволуциската сума (4-35).

Со цел да се прикаже алтернативниот облик на конволуциската сума (4-35), во изразот (4-35) се воведува смена на променливите:

$$m = k - n \quad (4-36)$$

при што целобројните аргументи m , k и n се поврзани со релацијата (4-36) така што за нив важи таблицата 4-1 и следните релации:

$$y(nT) = y((k-m)T) \quad (4-37)$$

$$g((k-n)T) = g(mT) \quad (4-38)$$

Таблица 4-1 Табеларен приказ на релацијата (4-36)

m	k	$k-1$	$k-2$	\dots	0
n	0	1	2	\dots	k

Тогаш, со смените (4-36) – (4-38) изразот (4-35) може да се запише како:

$$x(kT) = \sum_{m=k}^0 g(mT) y((k-m)T) \quad (4-39)$$

и со оглед на тоа дека во (4-39) се врши собирање на $k+1$ броеви, редоследот на сумирањето во него може да се промени. Така дефинитивно се добива:

$$x(kT) = \sum_{m=0}^k g(mT) y((k-m)T) \quad (4-40)$$

или, со враќањето на старата променлива n :

$$x(kT) = \sum_{n=0}^k g(nT) y((k-n)T) \quad (4-41)$$

Може да се забележи дека броевите $g(nT)$ во изразот (4-41) им дават на некој начин „тежина“ на дискретните вредности на влезната низа $y((k-n)T)$, па, оттаму, низата $g(kT)$ и го добила своето име, односно називот тежинска низа. Изразите (4-35) и (4-41) за конволуциската сума кај дискретните системи се напoлно рамноправни.

При изведувањето на конволуциската сума (4-35) односно (4-41) се претпоставува дека влезниот сигнал $y(kT)$ почнува да дејствува врз системот во мигот $t_0 = 0$ ($k = 0$). Меѓутоа, во општ случај возбудата $y(kT)$ може да настапи во кој и да било временски миг $t_k = kT$ ($k = 0, \pm 1, 2, \dots$). Тогаш овој поопшт случај е опишан со следниот облик на конволуциската сума (4-35) односно (4-41):

$$x(kT) = \sum_{n=-\infty}^k y(nT)g((k-n)T); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-42)$$

$$x(kT) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)y((k-n)T); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-43)$$

Всушност, најопштиот облик на конволуциската сума за еден дискретен систем со тежинска низа $g(kT)$ и даден влез $y(kT)$ е:

$$x(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)g((k-n)T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)y((k-n)T); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-44)$$

и со него на единствен начин е претставен одзивот на даден влез на кој и да било линеарен стационарен дискретен динамички систем, вклучувајќи ги тука и антиципативните системи. Меѓутоа, тежинската низа на еден линеарен стационарен дискретен систем кој е физички остварлив го поседува својството:

$$g(kT) \equiv 0 \quad \forall k < 0 \quad (4-45)$$

и:

$$g((k-n)T) \equiv 0 \quad \forall k < n \quad (4-46)$$

Во продолжение, бидејќи работиме само со каузални системи и сигнали, за влезната возбуда на набљудуваниот дискретен систем ќе важи:

$$y(kT) \equiv 0 \quad \forall k < 0 \quad (4-47)$$

и:

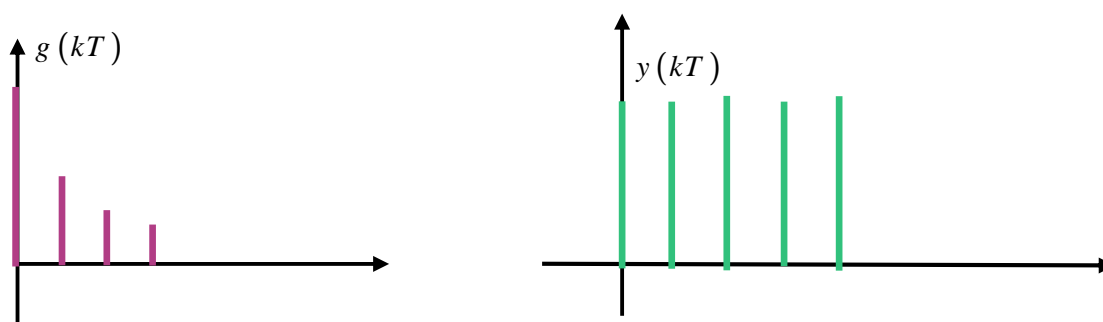
$$y((k-n)T) \equiv 0 \quad \forall k < n \quad (4-48)$$

Оттука, за физички остварливите дискретни системи, а такви се неантиципативните дискретни системи, поради ограничувањата (4-45)–(4-48), границите во конволуциската сума (4-44) се стеснуваат на 0 и k :

$$x(kT) = \sum_{n=0}^k y(nT)g((k-n)T) = \sum_{n=0}^k g(nT)y((k-n)T); k = 0, 1, 2, \dots \quad (4-49)$$

Пресметувањето на конволуциската сума (4-49) може да се прикаже и графички. За таа цел нека се дадени влезот $y(kT)$ и тежинската низа на некој линеарен дискретен систем прикажани на сликата 4-4. За да се добие влезот $y((k-n)T)$, се зема ликот во огледало на $y(nT)$, слика 4-5 а), и се транслира за k дискретни периоди T во десно, како што е тоа прикажано на сликата 4-5 б) за $k = 2$. Во продолжение, графиконот на тежинската низа $g(nT)$ се црта под графиконот на влезната низа $y((k-n)T)$, слика 4-5 в), и се врши множење на $g(nT)$ со $y((k-n)T)$ така што се множат соодветните ординати од сликата 4-5 б) и сликата 4-5 в), кои се наоѓаат непосредно една под друга. Конечно, одсивот на набљудуваниот дискретен систем $x(2T)$ по графички пат се добива со собирање на резултатите од одделните множења во претходниот чекор, слика 4-5 г), па, така:

$$x(2T) = \sum_{n=0}^2 g(nT)y((2-n)T) = g(0)y(2T) + g(T)y(T) + g(2T)y(0) \quad (4-50)$$



Слика 4-4 Графички приказ на влезот $y(kT)$ и тежинската низа $g(kT)$ на еден стабилен линеарен стационарен дискретен динамички систем

Пример 4-1. Да се определи тежинската низа $g(kT)$ на дискретниот систем опишан со линеарната диферентна равенка:

$$x(kT) - ax((k-1)T) = y(kT); x(-T) = 0; a = \text{const.} \in \mathfrak{R} \quad (4-51)$$

Решение: Одсивот $x(kT)$ на зададениот дискретен систем (4-51) на влезната Кронекер-делта функција од обликот (4-16) се добива со последователна примена на релацијата (4-51) за $k=0, 1, 2, \dots$:

$$x(0) = y(0) = 1$$

$$x(T) = ax(0) = a$$

$$x(2T) = ax(T) = a^2$$

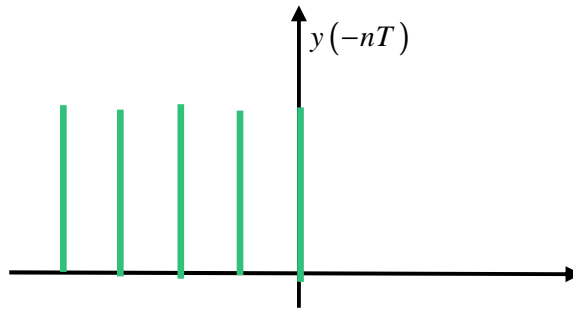
$$x(3T) = ax(2T) = a^3$$

.....

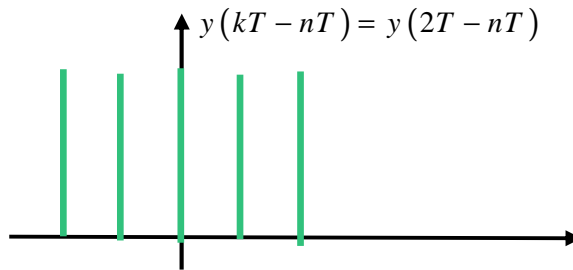
$$x(kT) = ax((k-1)T) = a^k$$

(4-52)

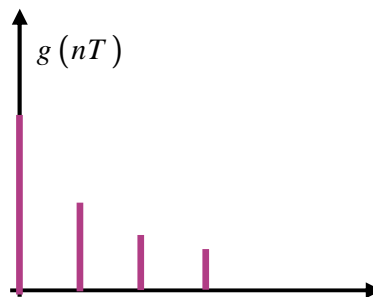
а)



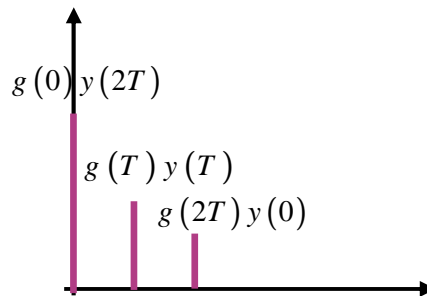
б)



в)



г)



Слика 4-5 Илустрација на конволуцијата на сигналите $y(kT)$ и $g(kT)$ од сликата 4-4 за $k = 2$

Следствено, тежинската низа на системот (4-51) ќе биде опишана со аналитичкиот израз:

$$g(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ a^k, & k \geq 0 \end{cases} \quad (4-53)$$

Дискретната конволуција на два оригинали $g(kT)$ и $y(kT)$ симболично се означува на следниот начин:

$$g(kT) * y(kT) = y(kT) * g(kT) \quad (4-54)$$

Врз основа на дефиницијата на дискретната конволуција $g(kT) * y(kT)$:

$$x(kT) = \sum_{n=0}^k y(nT) g((k-n)T) = \sum_{n=0}^k g(nT) y((k-n)T) \quad (4-55)$$

може да се дојде до следниот интересен резултат:

$$k = 0: x(0) = g(0) y(0)$$

$$k = 1: x(T) = g(0) y(T) + g(T) y(0)$$

$$k = 2: x(2T) = g(0) y(2T) + g(T) y(T) + g(2T) y(0)$$

.....

$$k: x(kT) = g(0) y(kT) + g(T) y((k-1)T) + \dots + g(kT) y(0) \quad (4-56)$$

или во матричен облик:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(T) \\ \vdots \\ x(kT) \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1} = \begin{bmatrix} g(0) & 0 & \dots & 0 \\ g(T) & g(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(kT) & g((k-1)T) & \dots & g(0) \end{bmatrix}_{(k+1) \times (k+1)} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(T) \\ \vdots \\ y(kT) \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1} = \mathbf{G} \mathbf{y} \quad (4-57)$$

односно:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(T) \\ \vdots \\ x(kT) \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1} = \begin{bmatrix} y(0) & 0 & \dots & 0 \\ y(T) & y(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(kT) & y((k-1)T) & \dots & y(0) \end{bmatrix}_{(k+1) \times (k+1)} \begin{bmatrix} g(0) \\ g(T) \\ \vdots \\ g(kT) \end{bmatrix}_{(k+1) \times 1} = \mathbf{Y} \mathbf{g} \quad (4-58)$$

Последната релација овозможува да се пресмета тежинската низа на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем врз основа на информации за неговиот влез и излез:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{x} \quad (4-59)$$

и затоа таа се користи при идентификацијата на дискретните системи. Оваа постапка на идентификација уште се нарекува **деконволуција**.

Со Z – трансформација на дискретната конволуција $g(kT) * y(kT)$ се добива основната релација во анализата на линеарните стационарни дискретни динамички системи во комплексното подрачје:

$$Z\{x(kT)\} = Z\left\{\sum_{n=0}^k y(nT) g((k-n)T)\right\} = Z\left\{\sum_{n=0}^k g(nT) y((k-n)T)\right\} = G(z)Y(z) \quad (4-60)$$

според која, Z – сликата $X(z) = Z\{x(kT)\}$ на одсивот $x(kT)$ на набљудуваниот дискретен систем е производ од Z – сликата $G(z) = Z\{g(kT)\}$ на неговата тежинска низа $g(kT)$ и Z – сликата $Y(z) = Z\{y(kT)\}$ на влезот $y(kT)$, под претпоставка на нулеви почетни услови. Веќе во следното поглавје ќе видиме дека Z – сликата $G(z)$ претставува дискретна преносна функција на набљудуваниот дискретен систем, па, оттука следува дека тежинската низа $g(kT)$ и дискретната преносна функција $G(z)$ на еден дискретен динамички систем претставуваат Z – трансформациски пар.

Конволуциската сума (4-35) односно (4-41) ги поседува следните особини:

1) Дискретната конволуција $g(kT) * y(kT)$ е комутативна, што значи дека:

$$y(kT) * g(kT) = g(kT) * y(kT) \quad (4-61)$$

Графичката интерпретација на оваа особина е дадена на сликата 4-6.

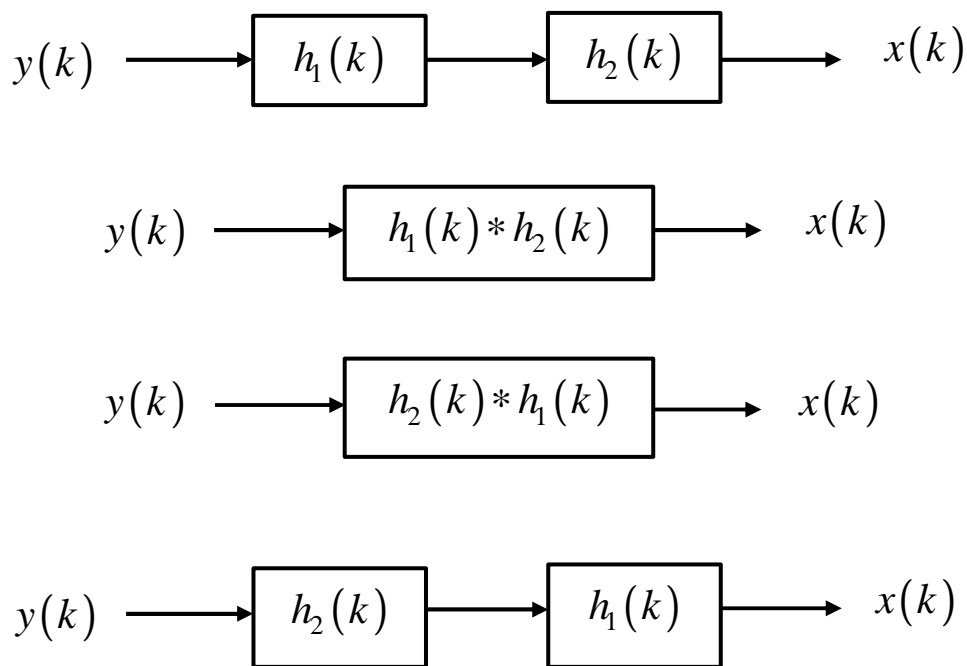
2) Дискретната конволуција $g(kT) * y(kT)$ е дистрибутивна во однос на собирањето, што математички може да се искаже на следниот начин:

$$[g_1(kT) + g_2(kT)] * y(kT) = g_1(kT) * y(kT) + g_2(kT) * y(kT) \quad (4-62)$$

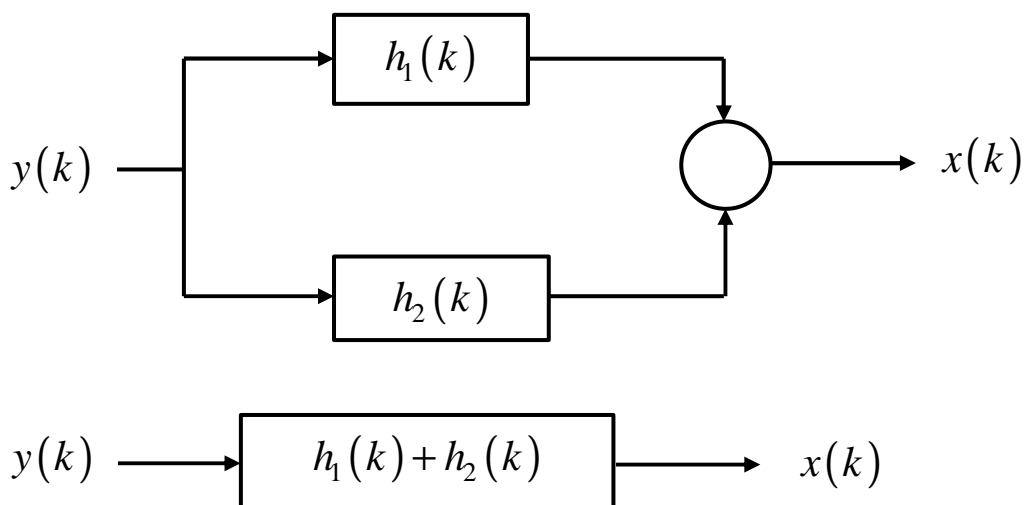
Доказот на оваа особина произлегува непосредно од дефиницијата на дискретната конволуција:

$$\begin{aligned} [g_1(nT) + g_2(nT)] * y(kT) &= \sum_{n=0}^k [g_1(nT) + g_2(nT)] y((k-n)T) = \\ &= \sum_{n=0}^k g_1(nT) y((k-n)T) + \sum_{n=0}^k g_2(nT) y((k-n)T) = \\ &= g_1(kT) * y(kT) + g_2(kT) * y(kT) \end{aligned} \quad (4-63)$$

Графичката интерпретација на оваа особина е дадена на сликата 4-7.



Слика 4-6 Илустрација на својството на комутативност на тежинските низи на два дискретни системи во сериска врска



Слика 4-7 Графичка интерпретација на дистрибутивното својство на дискретната конволуција

3) Дискретната конволуција $g(kT) * y(kT)$ е асоцијативна, што математички се исказува на следниот начин:

$$\left[g_1(kT) * g_2(kT) \right] * y(kT) = g_2(kT) * \left[g_1(kT) * y(kT) \right] \quad (4-64)$$

Доказот на оваа особина може да се спроведе на следниот начин. Нека:

$$g(kT) = g_1(kT) * g_2(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1(nT) g_2((k-n)T) \quad (4-65)$$

$$x_1(kT) = g_1(kT) * y(kT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT) g_1((k-l)T) \quad (4-66)$$

Тогаш:

$$\begin{aligned} g(kT) * y(kT) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT) g((k-l)T) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1(nT) g_2((k-l-n)T) \right] \end{aligned} \quad (4-67)$$

и:

$$\begin{aligned} g_2(kT) * x_1(kT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(nT) g_2((k-n)T) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT) g_1((n-l)T) \right] g_2((k-n)T) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1((n-l)T) g_2((k-n)T) \right] \end{aligned} \quad (4-68)$$

Со воведување на смената $m = n - l$, од каде следува дека $n = m + l$, изразот (4-68) поминува во следниот израз:

$$g_2(kT) * x_1(kT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_1(mT) g_2((k-m-l)T) \right] \quad (4-69)$$

Ако сега се вратиме на старата променлива n , изразот (4-69) ќе помине во обликот:

$$g_2(kT) * x_1(kT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(lT) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1(nT) g_2((k-n-l)T) \right] \quad (4-70)$$

Очигледно, десните страни на изразите (4-67) и (4-70) се идентични, од каде следува дека такви ќе бидат и левите страни, односно важи особината (4-63).

4) Конволуцијата со временски поместена тежинска низа има за резултат временски поместен одзив за истиот број периоди на дискретизација, што може математички да се искаже на следниот начин:

$$y(kT) * g((k-m)T) = x((k-m)T); m \in \mathbb{N} \quad (4-71)$$

Доказот произлегува непосредно од дефиницијата на дискретната конволуција:

$$y(kT) * g((k-m)T) = \sum_{n=0}^k y(nT) g((k-n-m)T) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 Z\{y(kT) * g((k-m)T)\} &= Y(z)z^{-m}G(z) = \\
 &= z^{-m}[Y(z)G(z)] = z^{-m}Z\{y(kT) * g(kT)\} \Rightarrow \\
 Z\{y(kT) * g((k-m)T)\} &= x((k-m)T) \tag{4-72}
 \end{aligned}$$

Меѓутоа, треба да се внимава, затоа што:

$$x((k-m)T) \neq y((k-m)T) * g((k-m)T) = x((k-2m)T); m \in \mathbb{N} \tag{4-73}$$

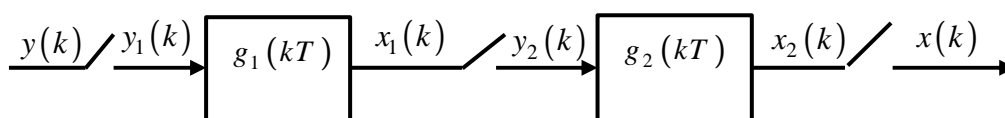
Доказот на релацијата е оставен на самите читатели.

Својството за комутативност и асоцијативност на дискретната конволуција $g(kT) * y(kT)$ за последица го има следното својство на линеарните дискретни системи:

$$\begin{aligned}
 [g_1(kT) * g_2(kT)] * y(kT) &= g_1(kT) * [g_2(kT) * y(kT)] = \\
 [g_2(kT) * g_1(kT)] * y(kT) &= g_2(kT) * [g_1(kT) * y(kT)] \tag{4-74}
 \end{aligned}$$

Пример 4-2. Да се определи тежинската низа на каскадната врска од два линеарни стационарни дискретни динамички системи прикажана на сликата 4-8.

Решение: За два системи се вели дека се врзани во каскада, доколку излезот од првиот систем претставува влез за вториот. Еквивалентен назив на каскадната врска е сервиска врска. Сите величини кои се однесуваат на првиот систем на сликата 4-8 се означени со индекс 1, додека величините кои го карактеризираат вториот систем се означени со индекс 2. Така, $y_1(kT)$ е влез, а $x_1(kT)$ е излез на првиот систем, додека $y_2(kT)$ е влез, а $x_2(kT)$ е излез на вториот систем.



Слика 4-8 Каскадна врска на два дискретни системи

Нека, во продолжение, тежинските низи на двата система во каскадна врска од сликата 4-8 се означени со $g_1(kT)$ и $g_2(kT)$, соодветно. Тогаш врквата помеѓу влезот $y_1(kT)$ и излезот $x_1(kT)$ на првиот систем од каскадата ќе биде дадена со релацијата:

$$x_1(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1((k-n)T) y_1(nT) \tag{4-75}$$

а меѓу влезот $y_2(kT)$ и излезот $x_2(kT)$ на вториот систем од каскадата со релацијата:

$$x_2(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_2((k-n)T) y_2(nT) \quad (4-76)$$

Меѓутоа, од начинот на поврзување на системите на сликата 4-8, очигледно е дека $y_1(kT)$ е всушност влезот $y(kT)$ на целата каскадна врска, а $x_2(kT)$ е нејзиниот излез $x(kT)$. Следствено, по иста аналогича, $g(kT)$ ќе биде тежинската низа на целата каскадна врска. Ако сега се претпостави дека влезот $y_1(kT)$ на првиот систем е Кронекер-делта функцијата $\delta_0(kT)$, тогаш неговиот излез $x_1(kT)$ по дефиниција ќе биде еднаков со неговата тежинска низа $g_1(kT)$, односно ќе важи:

$$x_1(kT) = g_1(kT) \quad \forall k \quad (4-77)$$

Меѓутоа:

$$y_2(kT) = x_1(kT) \quad (4-78)$$

што произлегува од шемата на сликата 4-8, а се должи на начинот на формирање на каскадната врска од два динамички системи, па, следствено:

$$y_2(kT) = x_1(kT) = g_1(kT) \quad \forall k \quad (4-79)$$

Оттука, одзивот $x_2(kT)$ на вториот систем од каскадата ќе биде даден со сумата:

$$\begin{aligned} x_2(kT) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_2((k-n)T) y_2(nT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_2((k-n)T) x_1(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_2((k-n)T) g_1(nT) = g_1(kT) * g_2(kT) \end{aligned} \quad (4-80)$$

Изразот (4-80) е конволуциска сума и ја претставува тежинската низа на каскадната врска од сликата 4-8. Следствено:

$$g(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1((k-n)T) g_2(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1(nT) g_2((k-n)T) \quad (4-81)$$

На овој начин секогаш е можно каскадната врска на два линеарни стационарни дискретни динамички системи со тежински низи $g_1(kT)$ и $g_2(kT)$, соодветно, да се замени со еден еквивалентен линеарен дискретен систем со тежинска низа $g(kT)$, така што за $g(kT)$ ќе важи релацијата (4-81).

Со смената на променливите $m = k - n$ во изразот (4-81) и потоа враќање на старата променлива n , се добива дека $g(kT)$ е исто така одредена и со следната сума:

$$g(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1((k-n)T) g_2(nT) \quad (4-82)$$

што значи дека тежинската низа, а со тоа и одзивот на два линеарни стационарни дискретни динамички системи врзани во каскада не зависи од редоследот по кој тие се

врзани. Изложената постапка може на едноставен начин да се прошири и на поголем но конечен број каскадно врзани линеарни дискретни системи. □

Пример 4-3. Да се определи еквивалентната тежинска низа $g(kT)$ на два идентични каскадно врзани дискретни системи, чии тежински низи се од обликот (4-53).

Решение: Еквивалентната тежинска низа на каскадната врска од дадените дискретни системи ќе биде:

$$g(kT) = \sum_{n=0}^k g_1((k-n)T) g_2(nT) = \sum_{n=0}^k a^{k-n} a^n = \sum_{n=0}^k a^k = (k+1)a^k; k = 0, 1, 2, \dots \quad (4-83)$$

Пример 4-4. Да се определи одсивот $x(kT)$ на системот од примерот 4-1 на единичен отскочен влез:

$$y(kT) = h(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases} \quad (4-84)$$

Решение: Со примена на конволуциската сума (4-41) и резултатот (4-53), за одсивот $x(kT)$ на набљудуваниот дискретен систем се добива:

$$x(kT) = \sum_{n=0}^k g(nT) y((k-n)T) = \sum_{n=0}^k a^n = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}; k = 0, 1, 2, \dots \quad \square \quad (4-85)$$

Неопходен услов за физичка остварливост на еден линеарен стационарен континуален динамички систем е неговиот импулсен одсив да биде идентички еднаков на нула за сите негативни вредности на аргументот t . Аналогно, неопходен услов за физичка остварливост на еден линеарен стационарен дискретен систем е неговата тежинска низа да го задоволува условот (4-45).

Пример 4-5. Да се определи тежинската низа на линеарниот дискретен систем опишан со следната диферентната равенка:

$$x(kT) - ax((k-1)T) = y((k+1)T); a = const. \in \mathfrak{R} \quad (4-86)$$

Решение: Нека на влезот од системот (4-86) е доведена Кронекер-делта функцијата $\delta_0(kT)$. Тогаш одсивот $x(kT)$ на овој систем на ваквата влезна возбуда, под претпоставка дека иницијално истиот бил во мирување, ќе биде:

$$x(kT) = 0; k < -1$$

$$x(-T) = y(0) = 1; k = -1$$

$$x(0) = ax(-T) = a; k = 0$$

$$x(T) = ax(0) = a^2; k = 1$$

$$\vdots$$

$$x(kT) = ax((k-1)T) = a^{k+1}; k \quad (4-87)$$

Следствено, тежинската низа на набљудуваниот дискретен систем аналитички е опишана со изразот:

$$g(kT) = \begin{cases} 0, & k < -1 \\ a^{k+1}, & k \geq -1 \end{cases} \quad (4-88)$$

Како што може да се забележи од изразот (4-88), во конкретниот случај не е задоволен условот (4-45), бидејќи:

$$g(-T) = 1 \neq 0; k = -1 < 0 \quad (4-89)$$

Тоа се должи на фактот дека дискретниот систем од примерот 4-5 е неантиципативен дискретен систем, што значи дека неговиот одзив $x(kT)$ во тековниот миг kT зависи и од идни вредности на влезот. Меѓутоа, без разлика на ова, во случајот на антиципативните системи тежинската низа ја има истата улога како и кај неантиципативните дискретни системи.

Очигледно, тежинската низа претставува модел на еден дискретен систем во временското подрачје, кој е применлив само кај линеарните стационарни дискретни динамички системи.

4-4 МОДЕЛИРАЊЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ СО ПРЕНОСНА ФУНКЦИЈА

Примената на математичкиот апарат на Z – трансформацијата во изучувањето на линеарните дискретни системи овозможува и кај нив воведување на концептот на преносна функција, познат од теоријата на линеарните континуални системи. Имено, сликата на одзивот на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем, кој претходно бил во мирување, исто како и кај континуалните системи, секогаш може да се претстави како производ од преносната функција на системот и сликата на неговиот влез. Ова може многу едноставно да се покаже.

Врската помеѓу влезната низа $y(kT)$ и излезната низа $x(kT)$ на секој еден линеарен стационарен дискретен динамички систем од произволен n -ти ред кој, под претпоставка, првобитно бил во мирување, е дадена со конволуциската сума (4-49), или сумата (4-44) во најопштиот случај, при што $g(kT)$ и во двата случаи е тежинската низа на набљудуваниот дискретен систем. Од друга страна пак, Z – сликата на конволуциската сума (4-49), врз основа на теоремата XI на Z – трансформацијата за множење во просторот на Z – сликите изнесува:

$$X(z) = G(z)Y(z) \quad (4-90)$$

каде што $Y(z) = Z\{y(kT)\}$, $X(z) = Z\{x(kT)\}$ и $G(z) = Z\{g(kT)\}$ се Z – слики на

оригиналите $y(kT)$, $x(kT)$ и $g(kT)$, соодветно. Притоа, областа на апсолутна конвергенција на сликата (4-90) е делот од рамнината во која едновременно конвергираат и сликата $Y(z)$ и сликата $G(z)$. Ако сега се изврши делење во (4-90) со $Y(z)$, ќе се добие дека:

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} \Big|_{\text{нулеви почетни услови}} \quad (4-91)$$

кој однос, по аналогија со континуалните системи, се нарекува преносна функција на набљудуваниот дискретен систем или, едноставно, **дискретна преносна функција**. Следствено, Z – сликата $X(z)$ на одзивот $x(kT)$ на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем кој претходно бил во мирување, навистина е определена со производот од дискретната преносна функција на системот $G(z)$ и Z – сликата $Y(z)$ на неговиот влез $y(kT)$.

Од изразот (4-91) следува дека преносната функција на еден дискретен систем претставува количник помеѓу Z – сликите на неговиот влез и излез, под претпоставка на нулеви почетни услови. Но исто така, таа претставува и Z – слика на одзивот на набљудуваниот дискретен систем на влезна возбуда од обликот (4-16), односно Z – слика на неговата тежинска низа:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} \quad (4-92)$$

Имено, Z – сликата на Кронекер-делта функцијата (4-16) е:

$$D_0(z) = Z\{\delta_0(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_0(kT) z^{-k} = 1 \quad (4-93)$$

па, за $y(kT) = \delta_0(kT)$ и $Y(z)$ одредена со (4-93), од (4-90) непосредно следува:

$$X(z) = G(z)Y(z) = G(z) \cdot 1 = G(z) \quad (4-94)$$

односно:

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{X(z)}{1} = X(z) \quad (4-95)$$

Меѓутоа, по дефиниција, одзивот $x(kT) = Z^{-1}\{X(z)\}$ на еден дискретен систем на Кронекер-делтата функцијата (4-16) е неговата тежинска низа, со што е докажано тврдењето (4-92).

Пример 4-6. Да се определи преносната функција $G(z)$ на системот опишан со линеарната диферентна равенка (4-51).

Решение: Тежинската низа на системот (4-51) е дадена со изразот (4-53), па врз основа на релацијата (4-92), неговата дискретна преносна функција $G(z)$ ќе биде:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{a^k h(kT)\} = \frac{z}{z-a}; \quad |z| > |a| \quad (4-96)$$

Пример 4-7. Да се определи преносната функција $G(z)$ на каскадната врска од сликата 4-8.

Решение: Еквивалентната тежинска низа на каскадната врска од два линеарни стационарни дискретни динамички системи е дадена со (4-81). Тогаш, Z – сликата на оваа конволуциска сума, според теоремата XI на Z – трансформацијата, ќе биде:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\{g(kT)\} = Z\{g_1(kT) * g_2(kT)\} = Z\{g_2(kT) * g_1(kT)\} = \\ &= G_1(z)G_2(z) = G_2(z)G_1(z) \end{aligned} \quad (4-97)$$

Оттука, еквивалентната преносна функција на каскадна врска од два линеарни стационарни дискретни динамички системи е производ од преносните функции на одделните системи поврзани во каскада. Овој резултат е аналоген со истиот резултат и кај континуалните системи.

Друг начин да се определи преносната функција на каскадната врска од сликата 4-8 е следниот. За системите врзани во каскада важат следните равенки во просторот на Z – сликите:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= G_1(z)Y_1(z) \\ X_2(z) &= G_2(z)Y_2(z) \end{aligned} \quad (4-98)$$

Меѓутоа, од начинот на поврзувањето на системите следува:

$$X(z) = X_2(z); \quad Y(z) = Y_1(z); \quad Y_2(z) = X_1(z) \quad (4-99)$$

па, оттука:

$$\begin{aligned} X(z) &= X_2(z) = G_2(z)Y_2(z) = G_2(z)X_1(z) = \\ &= G_2(z)G_1(z)Y_1(z) = G_2(z)G_1(z)Y(z) = G(z)Y(z) \quad \square \end{aligned} \quad (4-100)$$

Дискретната преносна функција $G(z)$ на еден дискретен систем може да се добие со Z – трансформација на диферентната равенка на динамичко поведење на системот, под претпоставка на нулеви почетни услови. Така, со Z – трансформација на диферентната равенка (4-6) за нулеви почени услови се добива решението (4-8). Тгаш, ако левата и десната страна на оваа равенка се поделат со сликата $Y(z)$, ќе се добие токму резултатот (4-91). Од самата дефиниција на дискретната преносна функција $G(z)$ следува дека таа не зависи од временскиот тек на влезот и излезот на дискретниот систем, но зависи од тоа меѓу кој влез и излез е дефинирана (доколку системот има повеќе влезови и излези).

Додека диферентната равенка е модел на еден дискретен динамички систем во временското подрачје односно просторот на оригиналите, дискретната преносна

функција е негов модел во просторот на Z – сликите односно комплексното подрачје. За еден линеарен стационарен дискретен динамички систем таа има облик:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{X(z)}{Y(z)} \Big|_{\text{нулеви почетни услови}} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}} = \\
 &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m}}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{n-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}} = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (4-101)
 \end{aligned}$$

Лесно може да се забележи дека дискретната преносна функција $G(z)$ претставува реална дробно-рационална функција од комплексната променлива z со константни коефициенти. Велеме дека е реална функција од комплексната променлива z , затоа што нејзините коефициенти a_i и b_j се реални броеви. Таа е дробно-рационална функција, затоа што е претставена со количник од два полиноми од комплексната променлива z . Тоа се полиномот $b(z)$ во нејзиниот броител и полиномот $a(z)$ во нејзиниот именител:

$$b(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_m z^{n-m} = \sum_{j=0}^m b_j z^{n-j} \quad (4-102)$$

$$a(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} \quad (4-103)$$

Нулите на полиномот $b(z)$ во броителот на дискретната преносна функција $G(z)$ се едновременно и нули на самата преносна функција, додека нулите на полиномот $a(z)$ во именителот на дискретната преносна функција $G(z)$ се нејзини полови. Нека нулите на преносната функција $G(z)$ ги означиме со w_j ($j = 1, 2, \dots, m$), а нејзините полови со z_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Преку своите нули и полови, дискретната преносна функција $G(z)$ секогаш може да се претстави во следниот факторизиран облик:

$$G(z) = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - w_j)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - w_j)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} \quad (4-104)$$

каде што $K = b_0/a_0$ е засилувањето на дискретната преносна функција $G(z)$.

Нулите и половите на дискретната преносна функција $G(z)$ може да бидат прости односно еднократни и повеќекратни со произволна кратност. Од друга страна, тие може да бидат реални или комплексни. Комплексните нули и полови на дискретната преносна

функција $G(z)$ секогаш се јавуваат во конјугирано-комплексни парови, бидејќи таа има реални коефициенти.

На ова место ќе кажеме нешто за физичката остварливост на преносната функција $G(z)$ на еден дискретен систем. Како што веќе констатиравме, каузален систем е систем кај кој излезот не му претходи на влезот. Со други зборови, одзивот на еден каузален систем во мигот $t = kT$ зависи само од тековната и од минатите вредности на влезот. Тогаш за преносната функција на еден каузален линеарен систем велиме дека е **физички остварлива**, зашто системот се состои од физички компоненти. Со развој на преносната функција $G(z)$ во степенски ред по негативните степени на комплексната променлива z , се добива ред чии коефициенти одговараат на вредностите на тежинската низа на системот. Така, коефициентот пред членот z^{-k} одговара на вредноста $g(kT)$ на тежинската низа во мигот $t = kT$. Тогаш очигледно е дека за да набљудуваниот дискретен систем биде каузален, или физички остварлив (што е еквивалентно), развојот на $G(z)$ во степенски ред не смее да содржи позитивни степени од комплексната променлива z . Секој позитивен степен на z индицира „предвидување“, што значи излезот на таков систем му претходи на влезот. Оттаму, за $G(z)$ да биде физички остварлива, степенот на нејзиниот броител мора да биде помал или најмногу еднаков на степенот од нејзиниот именител, односно $m \leq n$. Случајот $m = n$ е многу редок во пракса, затоа што тој значи одсив на скоковита промена на влезниот сигнал. Читателот треба да забележи дека, без оглед на тоа колкав е степенот m , системот, односно неговата преносна функција $G(z)$, има ист број нули и полови. Тоа значи дека за $m < n$, $G(z)$ има m конечни нули и $n - m$ бесконечни нули.

Во случајот на повеќевеличински дискретни системи со l влезови и m излези, моделот во комплексното подрачје ќе биде матрица од преносни функции, чии елементи се парцијалните преноси помеѓу секој еден излез и влез на повеќевеличинскиот систем:

$$\mathbf{G}(z) = [G_{ij}(z)]_{m \times l} = \begin{bmatrix} X_i(z) \\ Y_j(z) \end{bmatrix}_{m \times l} \quad (4-105)$$

За разлика од диферентните равенки, со преносна функција се моделираат само линеарни стационарни дискретни динамички системи, затоа што во случајот на нелинеарни и/или нестационарни дискретни системи Z – трансформацијата тешко се пресметува и преносната функција нема повеќе да биде дробно-рационална реална функција со константни коефициенти.

Концептот на преносна функција значително ги поедноставува пресметките врзани со одредувањето на одзивот на линеарните дискретни системи на даден влез. Во продолжение ќе биде определен тој одсив.

Нека е даден линеарен стационарен дискретен динамички систем со еден влез $y(kT)$ и еден излез $x(kT)$ опишан со следната диферентна равенка:

$$a_0 x((k+n)T) + a_1 x((k+n-1)T) + \dots + a_{n-1} x((k+1)T) + a_n x(kT) =$$

$$= b_0 y((k+n)T) + b_1 y((k+n-1)T) + \dots + b_{n-1} y((k+1)T) + b_n y(kT); m=n \quad (4-106)$$

со почетни услови:

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1, \dots, x((n-1)T) = x_{n-1} \quad (4-107)$$

Z – сликата на одсивот $x(kT)$ на набљудуваниот дискретен систем се добива со Z – трансформација на диферентната равенка (4-106):

$$\begin{aligned} Z \left\{ \sum_{i=0}^n a_{n-i} x((k+i)T) \right\} &= Z \left\{ \sum_{i=0}^n b_{n-i} y((k+i)T) \right\} \\ \sum_{i=0}^n a_{n-i} Z \{ x((k+i)T) \} &= \sum_{i=0}^n b_{n-i} Z \{ y((k+i)T) \} \\ \sum_{i=0}^n a_{n-i} [z^i X(z) - z^i x_0 - \dots - z x_{i-1}] &= \sum_{i=0}^n b_{n-i} [z^i Y(z) - z^i y_0 - \dots - z y_{i-1}] \\ \sum_{i=0}^n a_{n-i} z^i X(z) &= \sum_{i=0}^n b_{n-i} z^i Y(z) + \sum_{i=1}^n c_{n-i} z^i \\ a(z) X(z) &= b(z) Y(z) + c(z) \\ X(z) &= \frac{b(z)}{a(z)} Y(z) + \frac{c(z)}{a(z)} \end{aligned} \quad (4-108)$$

каде што $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ се следните полиноми:

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{i=0}^n a_{n-i} z^i = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \\ b(z) &= \sum_{i=0}^n b_{n-i} z^i = \sum_{i=0}^n b_i z^{n-i} = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n \\ c(z) &= \sum_{i=1}^n c_{n-i} z^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i z^{n-i} = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z \end{aligned} \quad (4-109)$$

Притоа, коефициенти на полиномите $a(z)$ и $b(z)$ се коефициентите на диферентната равенка (4-106), соодветно, додека коефициенти на полиномот $c(z)$ се ненулевите почетни услови на влезот и излезот од набљудуваниот систем:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 x_0 - b_0 y_0 \\ c_1 &= (a_0 x_1 - b_0 y_1) + (a_1 x_0 - b_1 y_0) \\ c_2 &= (a_0 x_2 - b_0 y_2) + (a_1 x_1 - b_1 y_1) + (a_2 x_0 - b_2 y_0) \\ &\dots \end{aligned} \quad (4-110)$$

При изведувањето на изразот за Z – сликата на одзивот на набљудуваниот дискретен систем, заради поголема едноставност на математичките изрази, а без ограничување на општоста на заклучоците што следуваат, е усвоен граничниот случај кога $m=n$. Во спротивен случај, кога $m < n$, само соодветните коефициенти b_i со индекс поголем од m ќе се изедначат со нула.

Од изразот (4-108) може да се воочи дека одзивот на набљудуваниот дискретен систем има две компоненти – една, која зависи од влезот во системот и втора – која зависи исклучиво од почетните услови на системот. Оттаму, првата компонента на одзивот на системот уште се нарекува **принудна компонента** или едноставно **принуден одзив**, додека втората компонента во одзивот на системот се нарекува **слободна компонента** или **слободен одзив**:

$$X(z) = X_{\text{принудно}}(z) + X_{\text{слободно}}(z) \quad (4-111)$$

Во општ случај одзивот на еден дискретен систем секогаш ќе ги има овие две компоненти – принудната, која е резултат на дејството на влезот во системот и кој претставува еден вид принуда (оттаму и називот принуден одзив) и слободната, која не зависи од влезот туку само од почетните услови во системот (оттаму и називот слободен одзив, одзив без принуда). Се разбира, доколку почетните услови на набљудуваниот систем се нулеви, нема да постои слободната компонента во неговиот одзив, туку ќе постои само принудната и обратно, доколку врз системот не дејствува никаква надворешна возбуда односно принуда, одзивот на системот ќе ја има само слободната компонента. (Случајот на систем со нулеви почетни услови без принуда нема смисла.)

Принудниот одзив на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем во комплексното z -подрачје е даден со изразот:

$$X_{\text{принудно}}(z) = \frac{b(z)}{a(z)} Y(z) = G(z) Y(z) \quad (4-112)$$

и имајќи на ум дека и дискретната преносна функција $G(z)$ на овој систем и сликата $Y(z)$ на неговиот влез се дробно-рационални функции од комплексната променлива z , може да се запише во следниот облик:

$$X_{\text{принудно}}(z) = G(z) Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} \quad (4-113)$$

Очигледно и $X_{\text{принудно}}(z)$ е дробно-рационална функција од комплексната променлива z , чии полови се половите на преносната функција на системот $G(z)$ и половите на сликата на влезот $Y(z)$, односно нулите на полиномите $a(z)$ и $A(z)$. Ако сега дробно-рационалната функција (4-113) ја развиеме во парцијални дробки по сите нејзини полови и потоа ги групираме парцијалните дробки кои се добиени со развој на сликата $X_{\text{принудно}}(z)$ по половите од $G(z)$ и половите од $Y(z)$, ќе го добиеме следниот резултат:

$$X_{\text{принудно}}(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{d_1(z)}{a(z)} + \frac{d_2(z)}{A(z)} \quad (4-114)$$

Значи, и принудната компонента на одсивот на еден дискретен систем има две компоненти – првата, чиј временски тек очигледно зависи од половите на преносната функција на системот $G(z)$ и втората – чиј временски тек зависи од половите на сликата на влезот $Y(z)$. Првата компонента на принудниот одсив го карактеризира преодниот работен режим на системот и затоа се нарекува **преодна компонента** или едноставно **преоден одсив**, додека втората компонента го карактеризира стационарниот режим на работа на системот и се нарекува **стационарна компонента** или **стационарен одсив**:

$$X_{\text{prinudno}}(z) = X_{\text{preodno}}(z) + X_{\text{stacionarno}}(z) \quad (4-115)$$

Бидејќи Z – сликата на преодниот одсив на еден дискретен систем $X_{\text{preodno}}(z)$ има исти полови како и неговата дискретна преносна функција $G(z)$, самиот преоден одсив ќе има ист временски тек како и тежинската низа на набљудуваниот дискретен систем. Од друга страна, бидејќи Z – сликата на стационарниот одсив на системот $X_{\text{stacionarno}}(z)$ има исти полови како и Z – сликата на влезот $Y(z)$, самиот стационарен одсив ќе има ист временски тек како и влезната низа. Доколку набљудуваниот систем нема нулеви почетни услови, тогаш кон овие две компоненти на одсивот треба да се додаде и слободната компонента, па така за најопштиот случај ќе важи:

$$X(z) = X_{\text{preodno}}(z) + X_{\text{stacionarno}}(z) + X_{\text{slobodno}}(z) \quad (4-116)$$

Притоа, слободната компонента на одсивот ќе има ист временски тек како и неговата тежинска низа, затоа што Z – сликата $X_{\text{slobodno}}(z)$ ги има истите полови како и дискретната преносна функција $G(z)$. Тоа значи дека слободниот одсив се суперпонира на преодниот одсив на системот.

Самите оригинали кон сликите $X_{\text{preodno}}(z)$ и $X_{\text{stacionarno}}(z)$ ќе ги добиеме со инверзна Z – трансформација на сликата $X_{\text{prinudno}}(z)$:

$$\begin{aligned} x_{\text{prinudno}}(kT) &= Z^{-1} \{X_{\text{prinudno}}(z)\} = Z^{-1} \{d_0 + \tilde{X}_{\text{prinudno}}(z)\} = \\ &= d_0 + Z^{-1} \{\text{развој на } \tilde{X}_{\text{prinudno}}(z) \text{ по половите на } G(z)\} + \\ &+ Z^{-1} \{\text{развој на } \tilde{X}_{\text{prinudno}}(z) \text{ по половите на } Y(z)\} \end{aligned} \quad (4-117)$$

Константата d_0 се јавува во изразот (4-117) кога броителот и именителот на сликата $X_{\text{prinudno}}(z)$ се со ист степен и таа претставува количник на делењето на броителот на $X_{\text{prinudno}}(z)$ со нејзиниот именител, додека $\tilde{X}_{\text{prinudno}}(z)$ е остатокот од тоа делење.

Нека, под претпоставка, набљудуваниот дискретен систем има само прости (еднократни) полови различни од половите на сликата $Y(z)$. Оваа претпоставка воопшто не ја намалува општоста на заклучоците што следуваат туку само ги упростила изведувањата. Тогаш развојот на сликата $X_{\text{prinudno}}(z)$ во парцијални дробки по овие полови ќе има облик:

$$X_{\text{принудно}}(z) = d_0 + \frac{d_1}{z - z_1} + \frac{d_2}{z - z_2} + \dots + \frac{d_n}{z - z_n} + \{ \text{развој на } \tilde{X}_{\text{принудно}}(z) \text{ по половите на } Y(z) \} \quad (4-118)$$

а самиот принуден одсив ќе биде:

$$x_{\text{принудно}}(kT) = Z^{-1} \{ X_{\text{принудно}}(z) \} = \begin{cases} d_0; & k = 0 \\ \sum_{i=1}^n d_i z_i^{k-1} + x_{\text{стационарно}}(kT); & k \geq 1 \end{cases} \quad (4-119)$$

Бидејќи во моментот нè интересира само преодниот одсив, стационарниот одсив во (4-119) воопшто не е пресметан.

Лесно се забележува дека преодниот одсив на системот, зададен со изразот:

$$x_{\text{преодно}}(kT) = \sum_{i=1}^n d_i z_i^{k-1}; \quad k \geq 1 \quad (4-120)$$

каде што $z_i; i = 1, 2, \dots, n$ се половите на системот кои, под претпоставка, се прости, го поседува следното својство:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\text{преодно}}(kT) = 0, \quad |z_i| < 1; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4-121)$$

што значи дека преодната компонента на одсивот на еден систем ќе исчезне со текот на времето, доколку сите полови на системот лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина. Истиот заклучок важи и во случајот кога системот има кратни полови кои лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, без оглед на нивната природа. Овој заклучок се темели на дискусијата за влијанието на положбата на половите на една Z – слика врз трајната вредност на соодветниот оригинал изложена во делот 3-5. Наведеното својство е од извонредно значење за системите на автоматско управување, затоа што во тие системи сакаме преодниот одсив да исчезне со времето и да се воспостави стационарниот режим на работа на системот. Теоретски, преодниот одсив ќе исчезне после бесконечно време, меѓутоа практично по доволно кусо време амплитудите на преодниот одсив ќе станат толку мали, што нема да имаат никакво влијание врз стационарниот одсив. Истото важи и за слободниот одсив на еден систем, зашто неговата слика за полови ги има половите од преносната функција на системот.

Пример 4-8. Да се најде одсивот $x(kT)$ на единечна отскочна влезна возбуда $y(kT) = h(kT)$ на системот, чија дискретна преносна функција $G(z)$ е од обликот:

$$G(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2}; \quad z_1, z_2 \neq 1 \quad (4-122)$$

Притоа z_1 и z_2 се полови на набљудуваниот дискретен систем кои, под претпоставка се различни од 1. Исто така да се претпостават нулеви почетни услови.

Решение: Z – сликата $X(z)$ на одзивот на дискретниот систем (4-122) ќе биде:

$$X(z) = G(z)Y(z) = \frac{b_0z + b_1}{z^2 + a_1z + a_2} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{b_0z^2 + b_1z}{(z-1)(z-z_1)(z-z_2)} \quad (4-123)$$

и истата може да се развие во парцијални дробки на следниот начин:

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{b_0z + b_1}{(z-1)(z-z_1)(z-z_2)} = \\ &= \frac{c_1}{z-z_1} + \frac{c_2}{z-z_2} + \frac{b_0 + b_1}{(1-z_1)(1-z_2)(z-1)} \Rightarrow \\ X(z) &= \frac{c_1z}{z-z_1} + \frac{c_2z}{z-z_2} + \frac{(b_0 + b_1)z}{(1-z_1)(1-z_2)(z-1)} \end{aligned} \quad (4-124)$$

каде што c_1 и c_2 се коефициенти на развојот на сликата $\frac{X(z)}{z}$ по половите z_1 и z_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(b_0z_1 + b_1)z_1}{(z_1 - z_2)(z_1 - 1)} \\ c_2 &= \frac{(b_0z_2 + b_1)z_2}{(z_2 - z_1)(z_2 - 1)} \end{aligned} \quad (4-125)$$

Оттука:

$$x(kT) = \begin{cases} 0, & k < 1 \\ c_1z_1^{k-1} + c_2z_2^{k-1} + \frac{b_0 + b_1}{(1-z_1)(1-z_2)}, & k \geq 1 \end{cases} \quad (4-126)$$

Од изразот (4-126) е очигледно дека параметрите на дискретниот систем (4-122), односно коефициентите a_i и b_j на неговата дискретна преносна функција $G(z)$, во значителна мерка влијаат врз неговиот одзив (4-126). Имено, половите на дискретниот систем (4-122) директно зависат од коефициентите a_i на неговата преносна функција, додека коефициентите c_i на развојот на Z – сликата на неговиот одзив во парцијални дробки зависат и од коефициентите a_i и од коефициентите b_j .

Преодната компонента на одзивот (4-126) на набљудуваниот дискретен систем (4-122) е дадена со изразот:

$$x_{preodno}(kT) = c_1z_1^{k-1} + c_2z_2^{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (4-127)$$

додека неговата стационарна компонента изнесува:

$$x_{stationarno}(kT) = \frac{b_0 + b_1}{(1 - z_1)(1 - z_2)}, \quad k \geq 1 \quad (4-128)$$

Очигледно е дека $x_{preodno}(kT) \rightarrow 0$ за $k \rightarrow \infty$ само доколку половите z_1 и z_2 на системот лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, односно кога $|z_1| < 1$ и $|z_2| < 1$. Од друга страна, може да се забележи дека стационарната компонента $x_{stationarno}(kT)$ на одзивот $x(kT)$ на набљудуваниот дискретен систем (4-122) на влезот $y(kT) = h(kT)$ има ист облик како и самиот влезен сигнал, само со различна амплитуда. □

Поопшт случај од оној изложен во примерот 4-8 е кога на влезот од системот со дискретна преносна функција:

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}}{z^n + \sum_{i=1}^n a_i z^{n-i}} \quad (4-129)$$

се доведе возбуда од обликот:

$$y(kT) = \begin{cases} d_0, & k = 0 \\ \sum_{j=1}^m d_j p_j^{k-1}, & k \geq 1 \end{cases} \quad (4-130)$$

Може да се покаже дека за произволно големо m со изразот (4-130) на сосема задоволителен начин се апроксимира многу широка класа дискретни сигнали $y(kT)$. Затоа од интерес е да се определи одзивот на набљудуваниот дискретен систем на една ваква влезна возбуда.

Пример 4-9. Да се определи одзивот на дискретниот систем опишан со преносната функција (4-129) на влезната возбуда (4-130), под претпоставка на нулеви почетни услови.

Решение: Повторно, заради поголема едноставност на пресметките, а не намалувајќи ја општоста на изведените заклучоци, ќе претпоставиме дека половите p_j ($j = 1, 2, \dots, m$) на Z -сликата $Y(z)$ на влезот $y(kT)$ и половите z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на набљудуваниот дискретен систем (4-129) се прости и меѓусебно различни. Z -сликата $Y(z)$ на влезот (4-130) е:

$$Y(z) = d_0 + \sum_{j=1}^m \frac{d_j}{z - p_j} = \frac{B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \dots + B_{m-1} z + B_m}{\prod_{j=1}^m (z - p_j)} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \dots + B_{m-1} z + B_m}{z^m + A_1 z^{m-1} + \dots + A_{m-1} z + A_m} \quad (4-131)$$

додека Z – сликата $X(z)$ на одсивот на системот (4-129) за нулеви почетни услови ќе изнесува:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= G(z)Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}}{z^n + \sum_{i=1}^n a_i z^{n-i}} \cdot \frac{\sum_{j=0}^m B_j z^{m-j}}{z^m + \sum_{j=1}^m A_j z^{m-j}} = \\
 &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \cdot \frac{B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \dots + B_{m-1} z + B_m}{z^m + A_1 z^{m-1} + \dots + A_{m-1} z + A_m} = \\
 &= \frac{C_0 z^{n+m} + C_1 z^{n+m-1} + \dots + C_{n+m-1} z + C_{n+m}}{\prod_{i=1}^n (z - z_i) \prod_{j=1}^m (z - p_j)} = \\
 &= c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - z_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{d}_j}{z - p_j} \tag{4-132}
 \end{aligned}$$

Коефициентите c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и \tilde{d}_j ($j = 1, 2, \dots, m$) на развој на сликата $X(z)$ во парцијални дробки се дадени со релациите:

$$\begin{aligned}
 c_i &= \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i)G(z)Y(z)]; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 \tilde{d}_j &= \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - p_j)G(z)Y(z)]; \quad (j = 1, 2, \dots, m) \tag{4-133}
 \end{aligned}$$

Бараниот оригинал $x(kT)$ кон Z – сликата (4-132) има две компоненти:

$$x_{preodno}(kT) = Z^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - z_i} \right\} = \sum_{i=1}^n c_i z_i^{k-1}, \quad k \geq 1 \tag{4-134}$$

$$x_{stacionarno}(kT) = Z^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{d}_j}{z - p_j} \right\} = \sum_{j=1}^m \tilde{d}_j p_j^{k-1}, \quad k \geq 1 \tag{4-135}$$

Преодната компонента на одсивот $x_{preodno}(kT) \rightarrow 0$ кога $k \rightarrow \infty$ само ако $|z_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Притоа, преодниот одсив $x_{preodno}(kT)$ ќе биде занемарлив во однос на стационарниот одсив $x_{stacionarno}(kT)$ за мали k само ако $|z_i| \ll |p_j|$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$), или, со други зборови, кога модулот на половите на дискретниот систем е многу помал од модулот на половите на Z – сликата од неговиот влез.

Стационарната компонента $x_{stacionarno}(kT)$ на одсивот на набљудуваниот дискретен систем има ист облик со влезниот сигнал (4-130), што може да се заклучи со споредување на изразите (4-130) и (4-135). Единствената разлика меѓу овие два изрази

се состои во различните коефициенти d_j ($j = 1, 2, \dots, m$) и \tilde{d}_j ($j = 1, 2, \dots, m$) и е резултат на влијанието на дискретниот систем. Имено, влијанието на дискретниот систем (4-129) врз неговиот стационарен одсв (4-135) се отсликува токму преку коефициентите \tilde{d}_j ($j = 1, 2, \dots, m$), кои може да се искажат на следниот начин:

$$\tilde{d}_j = \lim_{z \rightarrow z_j} [(z - p_j)G(z)Y(z)] = d_j G(p_j); \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (4-136)$$

Така на пример, ако компонентата $d_j p_j^{k-1}$ на влезната низа (4-130) не треба да се појави на излезот од набљудуваниот дискретен систем (4-129), односно ако системот треба да претставува филтер, кој на својот излез нема да ја пропушти влезната компонента $d_j p_j^{k-1}$, тогаш тоа се постига преку соодветен избор на коефициентот \tilde{d}_j во (4-135), кој треба да биде што е можно помал и во идеален случај еднаков на нула:

$$\tilde{d}_j = \lim_{z \rightarrow z_j} [(z - p_j)G(z)Y(z)] = d_j G(p_j) = 0 \quad (4-137)$$

Очигледно ова ќе биде исполнето доколку набљудуваниот дискретен систем има нула во точката $z = p_j$ (затоа што $d_j \neq 0$).

Пример 4-10. Да се определат параметрите b , z_c и z_p на дискретниот систем со преносна функција:

$$G(z) = b \frac{z - z_c}{z - z_p}; \quad |z| > |z_p| \quad (4-138)$$

на чиј влез е доведена возбуда од обликот:

$$y(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \alpha + \beta a^k, & k \geq 0 \end{cases} \quad (4-139)$$

така што системот на својот излез ќе ја пропушта само константната компонента на влезот α и преодниот режим во системот ќе заврши после една периода на дискретизација.

Решение: Z – сликата $Y(z)$ на влезот $y(kT)$ на набљудуваниот дискретен систем е:

$$Y(z) = \frac{\alpha z}{z-1} + \frac{\beta z}{z-a} = \frac{z[(\alpha + \beta)z - (a\alpha + \beta)]}{(z-1)(z-a)} \quad (4-140)$$

Оттука, неговиот одсв во комплексното подрачје ќе биде даден со изразот:

$$X(z) = G(z)Y(z) = b \frac{z - z_c}{z - z_p} \cdot \frac{z[(\alpha + \beta)z - (a\alpha + \beta)]}{(z-1)(z-a)} =$$

$$= b \frac{z(z-z_c)[(\alpha+\beta)z-(a\alpha+\beta)]}{(z-1)(z-a)(z-z_p)} \quad (4-141)$$

Со цел да се обезбедат бараните филтерски својства на системот (4-138), неговата нула z_c се одбира така што во изразот (4-141) да се скрати полот a на сликата (4-140).

Тогаш, за $z_c = a$, изразот (4-141) се сведува на следниот израз:

$$\begin{aligned} X(z) &= b \frac{z[(\alpha+\beta)z-(a\alpha+\beta)]}{(z-1)(z-z_p)} = \\ &= b(\alpha+\beta) + b \frac{(\alpha+\alpha z_p + \beta z_p - a\alpha)z - z_p(\alpha+\beta)}{(z-1)(z-z_p)} = \\ &= b(\alpha+\beta) + \frac{\alpha b(1-a)}{(1-z_p)(z-1)} + \frac{bz_p(\alpha z_p + \beta z_p - a\alpha - \beta)}{(z_p-1)(z-z_p)} \end{aligned} \quad (4-142)$$

па, неговиот одзив во временско подрачје ќе биде:

$$x(kT) = \begin{cases} b(\alpha+\beta), & k=0 \\ \frac{b}{(1-z_p)} [\alpha(1-a) + (\beta + a\alpha - \alpha z_p - \beta z_p) z_p^{k-1}], & k \geq 1 \end{cases} \quad (4-143)$$

Ако сега полот z_p на системот (4-138) се одбере во нулата, тогаш за одзивот (4-143) ќе се добие:

$$x(kT) = \begin{cases} b(\alpha+\beta), & k=0 \\ b(1-a)\alpha, & k \geq 1 \end{cases} \quad (4-144)$$

со што е обезбедено преодниот режим на набљудуваниот дискретен систем од примерот да заврши по само една периода на дискретизација.

Конечно, параметарот b на системот (4-138) се одбира од условот:

$$x(kT) = \alpha, \quad k \geq 1 \quad (4-145)$$

од каде што непосредно се добива:

$$b = \frac{1}{1-a} \quad (4-146)$$

Така, преносната функција (4-138) на набљудуваниот дискретен систем, во согласност со поставените барања, ќе го има следниот конкретен облик:

$$G(z) = \frac{z-a}{(1-a)z} \quad (4-147)$$

а неговиот одсив на влезната возбуда (4-139) ќе биде:

$$x(kT) = \begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{1-a}, & k=0 \\ \alpha, & k \geq 1 \end{cases} \quad (4-148)$$

4-5 МОДЕЛИРАЊЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ ПРЕКУ ФРЕКВЕНЦиска ПРЕНОСНА ФУНКЦИЈА

Нека на влезот од линеарен стационарен дискретен динамички систем е доведен периодичен сигнал од облик:

$$y(kT) = Y e^{jk\omega T} = Y \cos(k\omega T) + j \sin(k\omega T) \quad (4-149)$$

Овој сигнал не е физички остварлив, но претставува соодветен математички начин за едновремено претставување на двата реални и физички остварливи периодични сигнали:

$$y_1(kT) = \operatorname{Re} [Y e^{jk\omega T}] = Y \cos(k\omega T) \quad (4-150)$$

и:

$$y_2(kT) = \operatorname{Im} [Y e^{jk\omega T}] = Y \sin(k\omega T) \quad (4-151)$$

Одсивот на системот на една ваква влезна возбуда е даден со изразот:

$$\begin{aligned} x(kT) &= Z^{-1} \{X(z)\} = Z^{-1} \{G(z)Y(z)\} = Z^{-1} \left\{ \frac{Y}{z - e^{j\omega T}} G(z) \right\} = \\ &= Z^{-1} \left\{ \frac{c_1}{z - e^{j\omega T}} + \text{развој на } X(z) \text{ по половите на } G(z) \right\} \end{aligned} \quad (4-152)$$

Првиот член во изразот ја претставува **стационарната компонента** на одсивот, додека вториот член ја претставува **преодната компонента**. Ако сега претпоставиме дека сите полови на системот се наоѓаат во внатрешноста од единичниот круг $|z| \leq 1$, преодната компонента ќе исчезне со текот на времето и ќе остане само стационарната компонента, која е дадена со следниот израз:

$$x_{stac}(kT) = Z^{-1} \{X_{stac}(z)\} = Z^{-1} \left\{ \frac{c_1}{z - e^{j\omega T}} \right\} = c_1 e^{j(k-1)\omega T}, \quad k \geq 1 \quad (4-153)$$

Константата c_1 во горниот израз се пресметува едноставно, бидејќи се работи за прост пол:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \left\{ \left(z - e^{j\omega T} \right) G(z) Y(z) \right\}_{z=e^{j\omega T}} = \left\{ \left(z - e^{j\omega T} \right) \frac{Yz}{z - e^{j\omega T}} G(z) \right\}_{z=e^{j\omega T}} = \\
 &= \left[YzG(z) \right]_{z=e^{j\omega T}} = Y e^{j\omega T} G(e^{j\omega T}) \quad (4-154)
 \end{aligned}$$

Оттука, за стационарниот одзив на набљудуваниот линеарен стационарен дискретен систем се добива:

$$\begin{aligned}
 x_{stac}(kT) &= Y e^{j\omega T} G(e^{j\omega T}) e^{j(k-1)(\omega T)} = \\
 &= G(e^{j\omega T}) Y e^{jk\omega T} = G(e^{j\omega T}) y(kT), \quad k \geq 0 \quad (4-155)
 \end{aligned}$$

Комплексната величина $G(e^{j\omega T})$ го дефинира односот помеѓу стационарната компонента на одзивот на периодична влезна возбуда и самата таа возбуда и се нарекува **фреквенциска преносна функција на дискретниот систем**. Таа може да се добие од дискретната преносна функција на набљудуваниот систем $G(z)$ со смената $z = e^{j\omega T}$, каде што T е соодветната периода на дискретизација:

$$G(z)_{z=e^{j\omega T}} = G(e^{j\omega T}) = G(j\omega T) \quad (4-156)$$

што значи дека фреквенциската преносна функција $G(e^{j\omega T})$ е слика на дискретната преносна функција $G(z)$ на единичната кружница $|z|=1$ во z -комплексната рамнина. Фреквенциската преносна функција $G(e^{j\omega T})$ претставува периодична функција со кружна фреквенција ω и периода $2\pi r/T$, бидејќи:

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega T + 2r\pi)} = e^{j(\omega + 2r\pi/T)T} = e^{j\omega T} e^{j2r\pi}; \quad r \in \mathbb{Z} \quad (4-157)$$

Значи, за разлика од спектарот на континуалните сигнали и системи, спектарот на дискретните сигнали и системи е периодична функција.

Заради поголема едноставност на математичкиот запис, фреквенциската преносна функција се запишува како $G(j\omega T)$, наместо $G(e^{j\omega T})$. Таа е комплексна величина и како таква може да се претстави преку својот реален и имагинарен дел, односно преку својот модул и аргумент:

$$G(j\omega T) = \operatorname{Re}[G(j\omega T)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega T)] = U(\omega T) + jV(\omega T) \quad (4-158)$$

$$G(j\omega T) = |G(j\omega T)| e^{j \arg[G(j\omega T)]} = G(\omega) e^{j\varphi} \quad (4-159)$$

каде што:

$$G(\omega) = |G(j\omega T)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[G(j\omega T)] + \operatorname{Im}^2[G(j\omega T)]} = \sqrt{U^2(\omega T) + V^2(\omega T)} \quad (4-160)$$

ја претставува амплитудно-фреквенциската карактеристика на системот, додека:

$$\varphi = \arg[G(j\omega T)] = \arctg \frac{\operatorname{Im}[G(j\omega T)]}{\operatorname{Re}[G(j\omega T)]} = \arctg \frac{V(\omega T)}{U(\omega T)} \quad (4-161)$$

ја претставува неговата фазно-фреквенциска карактеристика. Амплитудно-фреквенциската карактеристика на еден систем ги покажува неговите својства како филтер. Со други зборови, кажува како системот ги пропушта компонентите со различни фреквенции од неговиот влез, на неговиот излез. Фазно-фреквенциската карактеристика на системот, покажува како системот ги задоцнува одредените влезни компоненти со различни фреквенции. Притоа, терминот „задоцнува“ треба да се разбере послободно – системот може различните фреквенции да ги задоцнува, да ги забрзува, или воопшто да не ги менува. Имајќи ги на ум изразите (4-160) и (4-161), изразот (4-155) може да се запише во следниот еквивалентен облик:

$$x_{stac}(kT) = G(e^{j\omega T}) Y e^{jk\omega T} = [G(\omega) Y] e^{j(k\omega T + \varphi)}, \quad k \geq 0 \quad (4-162)$$

Амплитудната и фазната фреквенциска карактеристика може да се определат и експериментално, како однос помеѓу амплитудата на излезот и амплитудата на влезот, односно како разлика помеѓу фазите на излезниот и влезниот сигнал:

$$G(\omega) = \frac{|x(kT)|}{|y(kT)|} = \frac{X}{Y} \quad (4-163)$$

$$\varphi = \arg[G(j\omega T)] = \arg[x(kT)] - \arg[y(kT)] = \theta_2 - \theta_1 \quad (4-164)$$

Електронскиот уред со помош на кој се врши експериментално снимање на фреквенциските карактеристики на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем со полови во внатрешноста од единичниот круг во z -рамнината, се нарекува **анализатор на спектар** или **спектрален анализатор**. Фактот дека фреквенциските карактеристики може да се добијат и по експериментален пат е основната предност и причина за фреквенциското моделирање на линеарните дискретни динамички системи.

Бидејќи $e^{j\omega T}$ е периодична функција со периода од 2π , таква ќе биде и фреквенциската преносна функција $G(j\omega T)$, па нема смисла да се набљудува и анализира надвор од основното подрачје $\omega T \in [-\pi, \pi]$, а бидејќи $|G(j\omega T)|$ е парна функција од аргументот ω , додека $\arg[G(j\omega T)]$ е непарна функција од истиот аргумент, фреквенциските карактеристики на дискретните системи се прикажуваат само во интервалот $\omega T \in [0, \pi]$ односно интервалот $\omega \in [0, \pi/T]$.

Пример 4-11. Да се определи фреквенцискиот одзив на дискретниот систем од прв ред опишан со преносната функција:

$$G(z) = \frac{z}{z+a} \quad (4-165)$$

за $a = -0.8$ и $a = 0.8$ и да се нацрта неговата амплитудно-фреквенциска карактеристика.

Решение: Фреквенциската преносна функција на набљудуваниот дискретен систем е:

$$G(j\omega T) = G(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{z}{z+a} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} + a} = \frac{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T)}{\cos(\omega T) + j \sin(\omega T) + a} =$$

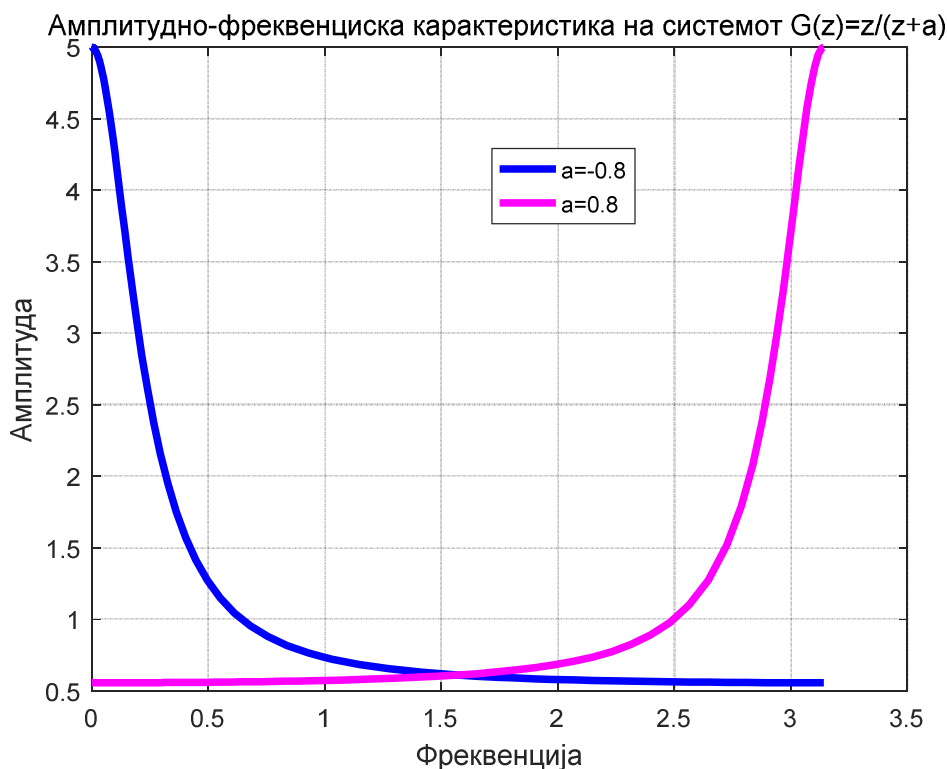
$$= \frac{1}{\sqrt{[a + \cos(\omega T)]^2 + [\sin(\omega T)]^2}} e^{j\omega T - \arctg \frac{\sin(\omega T)}{a + \cos(\omega T)}} \quad (4-166)$$

Оттука следуваат амплитудната и фазната фреквенциска карактеристика:

$$G(\omega T) = |G(j\omega T)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1 + 2a \cos(\omega T)}} \quad (4-167)$$

$$\varphi = \omega T - \arctg \frac{\sin(\omega T)}{a + \cos(\omega T)} \quad (4-168)$$

Амплитудната фреквенциска карактеристика за двете дадени вредности на параметарот a е прикажана на сликата 4-9. Врз основа на добиените криви може да се заклучи дека за $a = -0.8$ системот се однесува како нископропусен филтер, затоа што ги пропушта само компонентите со ниски фреквенции, додека за $a = 0.8$ системот се однесува како високопропусен филтер, затоа што ги пропушта компонентите со високи фреквенции.



Слика 4-9 Амплитудно-фреквенциска карактеристика на системот од примерот 4-11 □

Бидејќи фреквенциската преносна функција е комплексна големина, за секоја конкретна вредност на фреквенцијата ω може да се претстави со вектор, чиј почеток се наоѓа во координатниот почеток на комплексната рамнина, а врвот му се наоѓа во точка, чии координати се реалниот и имагинарниот дел од фреквенциската преносна функција за конкретна фреквенција. Ако се пушти фреквенцијата ω да се менува од 0 до π/T , векторот $G(j\omega T)$ ќе се врти во комплексната рамнина околу својот почеток, а неговиот врв ќе опишува геометриско место на точки, кое се нарекува **Најквистова крива**. Најквистовата крива на еден систем е **амплитудно-фазна фреквенциска карактеристика** на системот, но најчесто од практични причини се нарекува само **фреквенциска карактеристика**. Најквистовата крива има голема важност при анализата и синтезата на линеарните дискретни системи. Една нејзина битна примена е за испитување на стабилноста на дискретните системи, за што ќе стане збор подоцна.

Пример 4-12. Да се скицира фреквенциската карактеристика на дискретниот систем со преносна функција:

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad |z| > 2 \quad (4-169)$$

Решение: За фреквенциската преносна функција на набљудуваниот дискретен систем се добива:

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega T}) &= \frac{1}{(e^{j\omega T} - 1)(e^{j\omega T} - 2)} = \frac{(e^{-j\omega T} - 1)(e^{-j\omega T} - 2)}{(e^{j\omega T} - 1)(e^{j\omega T} - 2)(e^{-j\omega T} - 1)(e^{-j\omega T} - 2)} = \\ &= \frac{e^{-j2\omega T} - 3e^{-j\omega T} + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = \\ &= \frac{\cos(2\omega T) - j\sin(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + j3\sin(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = \\ &= \frac{\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} + j \frac{3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T)}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} \quad (4-170) \end{aligned}$$

Оттука, нејзиниот реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

$$U(\omega T) = \frac{\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} \quad (4-171)$$

$$V(\omega T) = \frac{3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T)}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} \quad (4-172)$$

Почетокот на фреквенциската карактеристика е за $\omega = 0$ во точката $[U(0), jV(0)]$:

$$U(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} U(\omega T) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-2T \sin(2\omega T) + 3T \sin(\omega T)}{2T \sin(\omega T) [9 - 8 \cos(\omega T)]} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-4 \cos(2\omega T) + 3 \cos(\omega T)}{2 [9 \cos(\omega T) - 8 \cos(2\omega T)]} = -\frac{1}{2}$$

$$V(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} V(\omega T) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{3 \sin(\omega T) - \sin(2\omega T)}{2 [1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4 \cos(\omega T)]} =$$

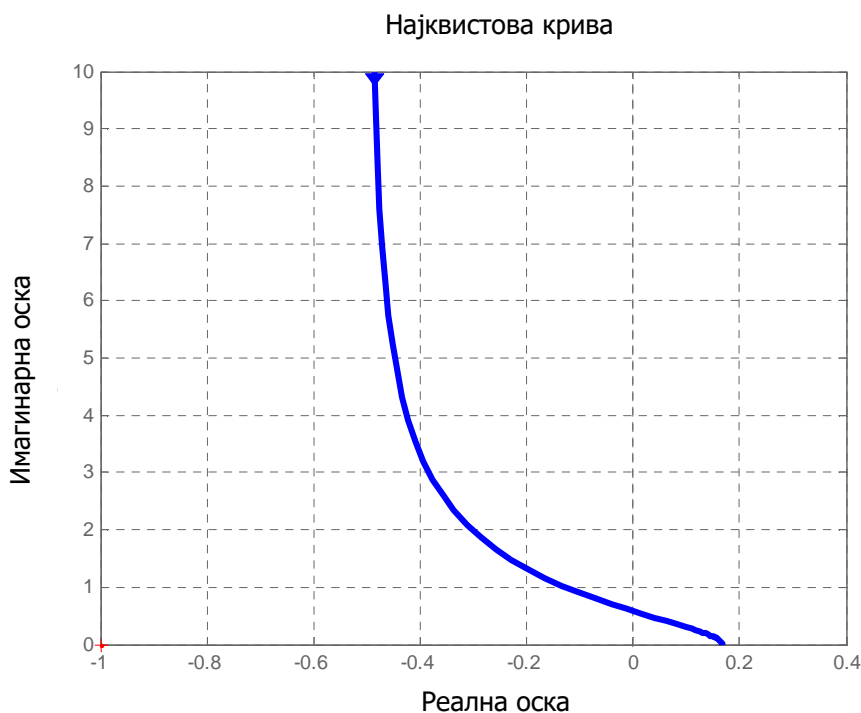
$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{3 \cos(\omega T) - 2 \cos(2\omega T)}{2 \sin(\omega T) [9 - 8 \cos(\omega T)]} = +\infty \quad (4-173)$$

а завршува за $\omega T = \pi$ во точката $[U(\pi), jV(\pi)]$:

$$U(\pi) = \lim_{\omega T \rightarrow \pi} U(\omega T) = \lim_{\omega T \rightarrow \pi} \frac{\cos(2\pi) - 3 \cos(\pi) + 2}{2 [1 - \cos(\pi)] \cdot [5 - 4 \cos(\pi)]} = \frac{1}{6}$$

$$V(\pi) = \lim_{\omega T \rightarrow \pi} V(\omega T) = 0 \quad (4-174)$$

Карактеристиката е прикажана на сликата 4-10.



Слика 4-10 Фреквенциска карактеристика на системот од примерот 4-12

Пресеците на карактеристиката од сликата 4-10 со координатните оски се одредени со решенијата на следните равенки:

$$U(\omega T) = \frac{\cos(2\omega T) - 3 \cos(\omega T) + 2}{2 [1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4 \cos(\omega T)]} = 0 \Rightarrow \text{пресек со Im-оска}$$

$$\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2 = 2\cos^2(\omega T) - 3\cos(\omega T) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\omega T) = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = 0.3820 \Rightarrow \omega T = \arccos(0.3820)$$

$$V(\omega_1 T) = \frac{3(0.9242) - 0.9242}{2[1 - 0.382] \cdot [5 - 4(0.382)]} = 0.48 \quad (4-175)$$

$$V(\omega T) = \frac{3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T)}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = 0 \Rightarrow \text{нема пресек со Re-оска}$$

$$3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T) = \sin(\omega T)[3 - 2\cos(\omega T)] = 0 \Rightarrow \cos(\omega T) = 1.5 > 1 \quad \square \quad (4-176)$$

Фреквенциската карактеристика на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем секогаш почнува и завршува во конечна точка на Re-оската, освен во случаите кога системот има пол во точката $z=1$ со произволна кратност q . Тогаш фреквенциската карактеристика на дискретниот систем ќе почне во бесконечност, како што е тоа случај во примерот 4-12. Преносната функција на дискретен систем со пол во точката $z=1$ од произволна кратност q може да се претстави на следниот начин:

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b(z)}{(z-1)^q c(z)} \quad (4-177)$$

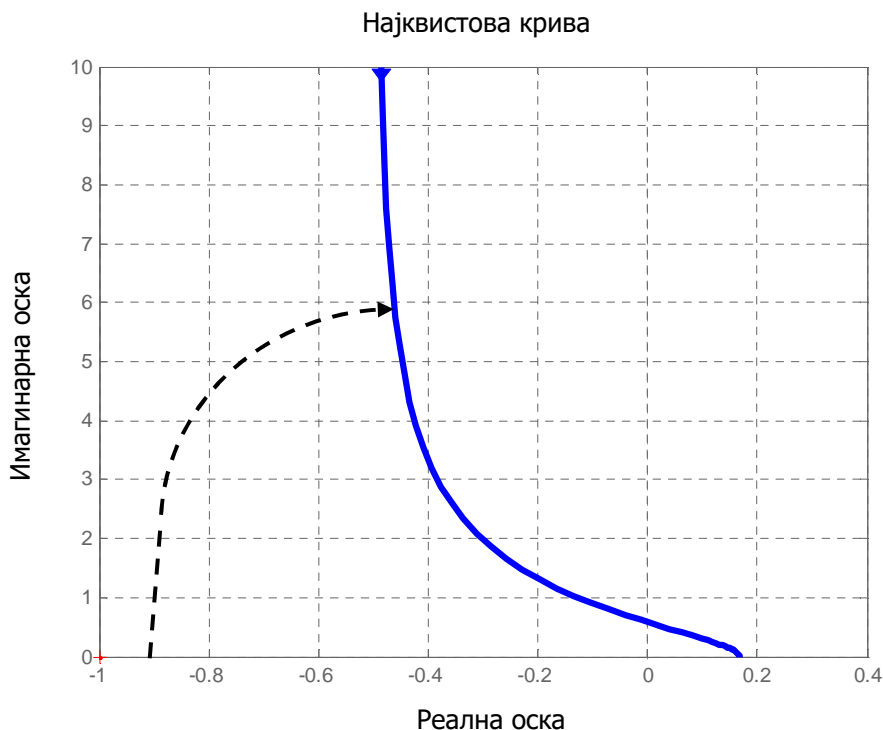
каде што $c(z)$ е полином од степен $(n-q)$. За ваквите дискретни системи се вели дека имаат астатизам од ред q и тогаш нивната карактеристика се надополнува со **лак на астатизам**, кој започнува на реалната оска во бесконечност, се одвива во негативна насока (насока на движењето на стрелката од часовникот), опфаќа централен агол од $-q\pi/2$ радијани и завршува на фреквенциската карактеристика во бесконечност. За $b(1)c(1) > 0$ лакот на астатизам почнува на позитивниот дел од реалната оска, додека за $b(1)c(1) < 0$ тој започнува на негативниот дел од реалната оска. Системот од примерот 4-7 има прост пол во точката $z=1$, што значи дека поседува астатизам од прв ред, и $b(1)c(1) < 0$. Следствено, неговиот лак на астатизам ќе започне на негативниот дел од реалната оска во бесконечност, ќе се одвива во негативна насока, ќе опфаќа агол од $-\pi/2$ и ќе изгледа како на сликата 4-11.

За цртање на Бодевите дијаграми на еден дискретен систем, најнапред треба неговата преносна функција да се доведе на Бодевиниот облик, кој во случајот на дискретни системи е даден со следниот општ израз:

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{K(z-w_1)^{P_1} \cdots (z-w_\mu)^{P_\mu}}{(z-1)^q (z-p_1)^{R_1} \cdots (z-p_\eta)^{R_\eta}}; \quad \begin{matrix} P_1 + \cdots + P_\mu = m \\ q + R_1 + \cdots + R_\eta = n \end{matrix} \quad (4-178)$$

Оттука, за фреквенциската преносна функција на дискретниот систем се добива:

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{b(e^{j\omega T})}{a(e^{j\omega T})} = \frac{K(e^{j\omega T} - w_1)^{P_1} \dots (e^{j\omega T} - w_\mu)^{P_\mu}}{(e^{j\omega T} - 1)^q (e^{j\omega T} - p_1)^{R_1} \dots (e^{j\omega T} - p_\eta)^{R_\eta}} \quad (4-179)$$



Слика 4-11 Фреквенциска карактеристика од сликата 4-10 дополнета со лак на астатизам

Амплитудно-фреквенциската логаритамска карактеристика е дадена со изразот:

$$G(\omega T)_{dB} = 20 \log_{10} K + 20P_1 \log_{10} |e^{j\omega T} - w_1| + \dots + 20P_\mu \log_{10} |e^{j\omega T} - w_\mu| - \\ - 20q \log_{10} |e^{j\omega T} - 1| - 20R_1 \log_{10} |e^{j\omega T} - p_1| - \dots - 20P_\eta \log_{10} |e^{j\omega T} - p_\eta| \quad (4-180)$$

додека фазно-фреквенциската полулогаритамска карактеристика е:

$$\arg[G(j\omega T)] = \arg(K) + P_1 \arg(e^{j\omega T} - w_1) + \dots + P_\mu \arg(e^{j\omega T} - w_\mu) - \\ - q \arg(e^{j\omega T} - 1) - R_1 \arg(e^{j\omega T} - p_1) - \dots - P_\eta \arg(e^{j\omega T} - p_\eta) \quad (4-181)$$

Очигледно е дека не постојат едноставни асимптотски апроксимации за Бодеовите дијаграми на елементарните членови во изразот за $G(e^{j\omega T})$. Затоа Бодеовите дијаграми на дискретните системи по правило се добиваат со примена на готови компјутерски програми.

Битно е да се забележи дека и амплитудата и фазата на дискретната фреквенциска функција се периодични функции од фреквенцијата ω , бидејќи:

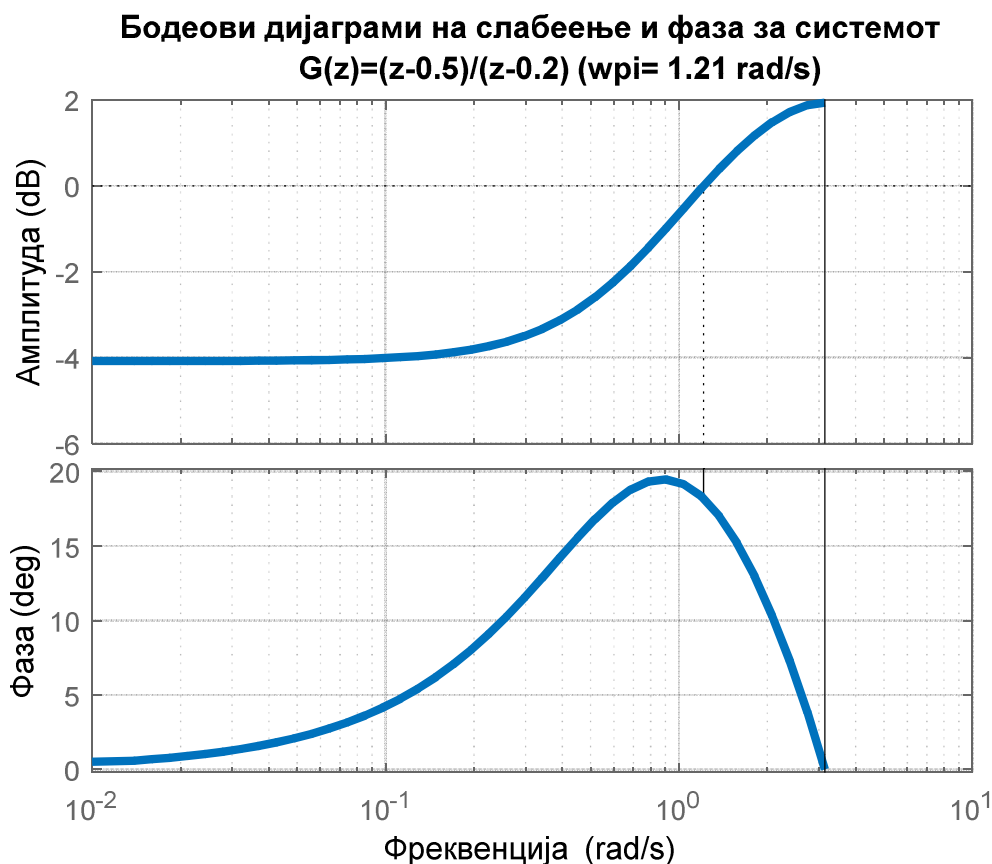
$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega T + 2n\pi)} = e^{j(\omega + 2n\pi/T)T} = e^{j\omega T} e^{j2n\pi}; n \in \mathbb{Z} \quad (4-182)$$

Оттука, доволно е Бодевите дијаграми на слабење и фаза да се цртаат само во интервалот $-\pi \leq \omega T \leq \pi$.

Пример 4-13. Да се нацртаат Бодевите дијаграми за дискретниот систем опишан со следниот модел:

$$G(z) = \frac{z - 0.5}{z - 0.2}, \quad |z| > 0.2 \quad (4-183)$$

Решение: Саканите Бодевите дијаграми се добиени со помош на MATLAB Control Toolbox и се прикажани на сликата 4-12. Фреквенцијата при која Бодевите дијаграм на слабење ја сече оската $G(\omega T)_{dB} = 0$ се нарекува **пресечна фреквенција на засилување** и по договор се означува како ω_1 , додека фреквенцијата при која Бодевите дијаграм на фаза ја сече оската $\varphi = -\pi$ се нарекува **пресечна фреквенција на фаза** и по договор се означува како ω_π . Во конкретниот случај од примерот 4-13, Бодевите дијаграм на слабење ја сече хоризонталната оска при фреквенција $\omega_1 = 1.21 \text{ rad/s}$, додека Бодевите дијаграм на фаза воопшто не ја сече оската $\varphi = -\pi$, па $\omega_\pi = \infty$. Кога се дадени Бодевите дијаграми лесно може да се нацрта соодветната Најквистова крива за набљудуваниот дискретен систем и обратно, како што е покажано во следниот пример.

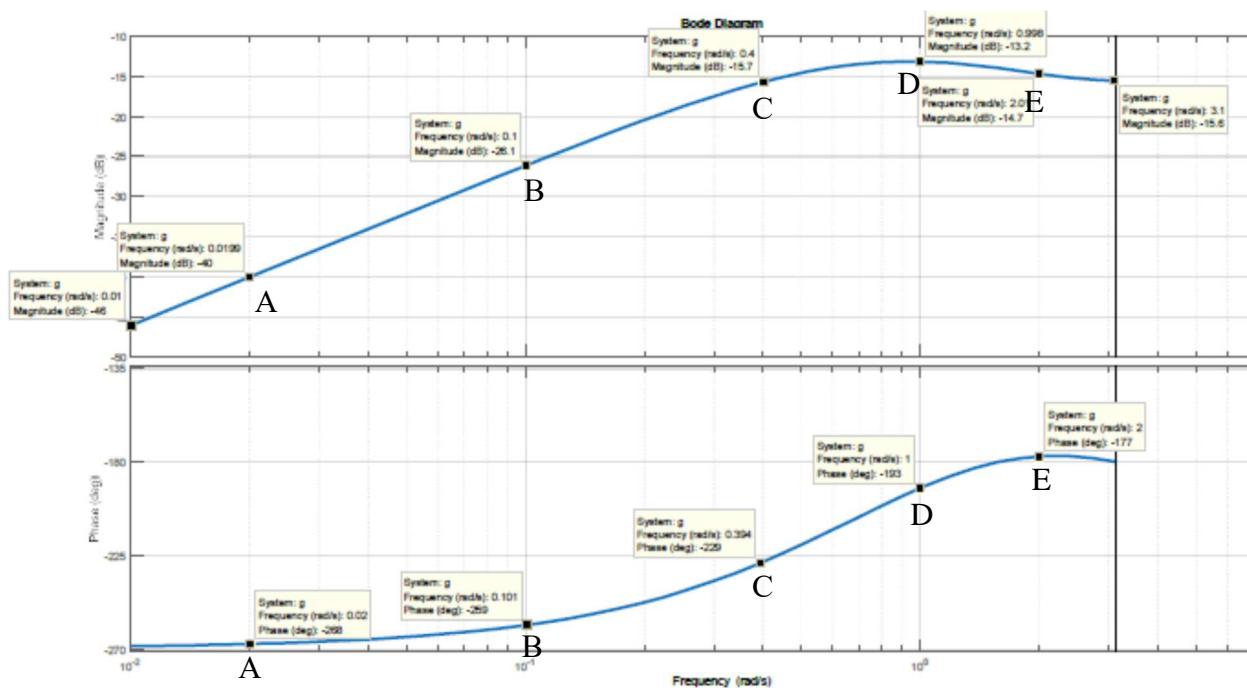


Слика 4-12 Бодевите дијаграми на системот од примерот 4-13 □

Пример 4-14. На сликата 4-13 се дадени Бодевите дијаграми на некој дискретен систем, од кој се снимени пет точки, прикажани во таблицата 4-2. Да се нацрта соодветната Најквистова крива за овој систем.

Таблица 4-2 Неколку снимени точки од Бодевите дијаграми прикажани на сликата 4-13

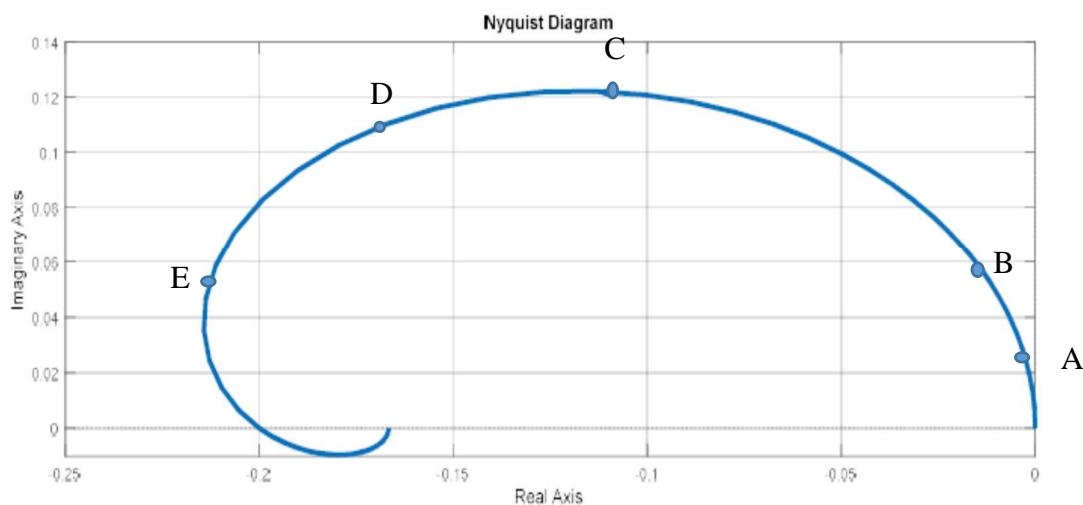
	ω	$G(\omega T)$	$\varphi(\omega T)$
A	0.02	0.0100	-268°
B	0.1	0.0495	-259°
C	0.4	0.1041	-229°
D	1	0.2188	-193°
E	2	0.1841	-177°



Слика 4-13 Бодевите дијаграми на системот од примерот 4-14

Решение: Најквистова крива на набљудуваниот дискретен систем е прикажана на сликата 4-14. Неопходно е да се истакне дека моделираниот дискретен систем мора да биде линеарен, стационарен и стабилен, зашто само тогаш предниот режим практично завршува и се воспоставува стационарен режим. Следствено фреквенциската преносна функција е модел на еден линеарен, стационарен, стабилен дискретен систем во фреквенциско подрачје. Основната предност на моделирањето дискретни системи во

фреквенциско подрачје лежи токму во фактот дека нивните фреквенциски карактеристики може да се определат по експериментален пат.



Слика 4-14 Најквистова крива на дискретниот систем од примерот 4-14, добиена врз основа на неговите Бодеови дијаграми □

4-6 МОДЕЛИРАЊЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ СО АЛГЕБРА НА БЛОК-ШЕМИ

Математичкиот модел на еден систем кај кој е прикажана врска помеѓу одделните компоненти односно променливи на системот преку блок-дијаграми се нарекува **структурна блок-шема**. Множеството правила кои овозможуваат трансформација, еквивалентирање и упростување на структурните блок-шеми едноставно се нарекува **правила на алгебрата на блок-шемите**. Правилата на алгебрата на блок-шемите се дадени во додатокот 2 и се формално идентични за континуалните и дискретните системи. Суштинската разлика лежи во фактот дека континуалната преносна функција $G(s)$ е функција од s -комплексната променлива, додека дискретната преносна функција $G(z)$ е функција од z -комплексната променлива. И ова е модел исклучиво на линеарни стационарни дискретни динамички системи во комплексното подрачје.

4-7 ДИСКРЕТНИ МОДЕЛИ НА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ

Како што е познато, чисто дискретните системи во природата се ретки. Тие најчесто се добиваат со дискретизација на континуални системи, при што дискретизацијата е процес во кој континуалниот систем се заменува и апроксимира со соодветен дискретен модел. Дискретниот модел наплно го опишува континуалниот систем во миговите на дискретизација $t_k = kT$; $T = \text{const.} > 0$, но не и помеѓу тие мигови, затоа што таму тој не е дефиниран. По правило дискретните мигови се еквилистантни и тогаш нивното растојание се нарекува **периода на дискретизација** $t_{k+1} - t_k = (k+1)T - kT = T = \text{const.} > 0$. Математички гледано, процесот на дискретизација на еден континуален систем се сведува на апроксимација на неговата континуална преносна функција со соодветна дискретна преносна функција, при што овој процес не е еднозначен. Дискретните реализации на една континуална преносна функција се разликуваат според начинот на апроксимација на сигналите помеѓу миговите на дискретизација и најчесто се користат следните постапки:

- Нумеричка интеграција
- Пресликување нули и полови
- Инваријантност на импулсниот одсив
- Инваријантност на отскочниот одсив
- Модел во просторот на состојби

4-7-1 НУМЕРИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА

Овие постапки се засноваат врз одредување дискретен еквивалент на континуален интегратор, кој математички е опишан со релацијата:

$$x(t) = \int_0^{\infty} y(t) dt; \quad y(t) \equiv 0 \forall t < 0 \quad (4-184)$$

Дискретниот модел на нумеричкиот интегратор се добива на следниот начин. За $t = kT$; $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$x(kT) = \int_0^{kT} y(t) dt = \int_0^{(k-1)T} y(t) dt + \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt = x((k-1)T) + \Delta \quad (4-185)$$

што претставува диферентна равенка од прв ред.. Првиот член на десната страна $x((k-1)T)$ претставува апроксимација на површината под кривата до мигот $(k-1)T$, додека Δ претставува апроксимација на површината под кривата помеѓу соседните мигови $(k-1)T$ и kT . Во зависност од начинот на апроксимација на површината Δ , се формулираат следните нумерички постапки:

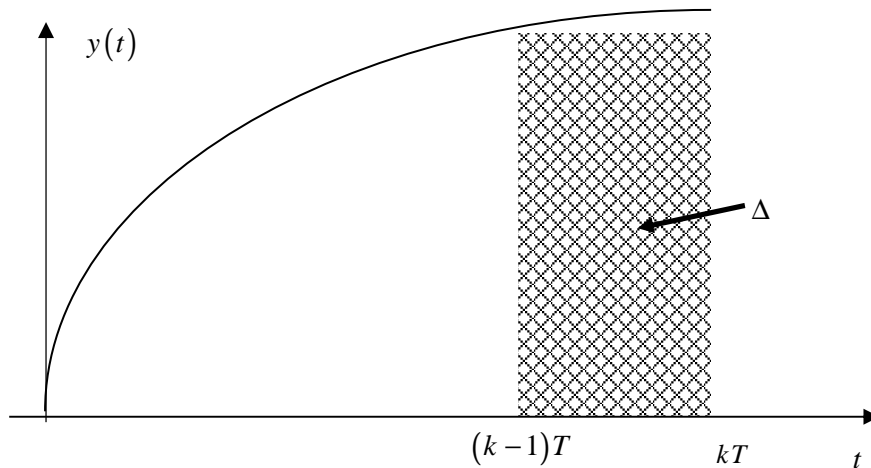
- Ојлерова правоаголна апроксимација напред
- Ојлерова правоаголна апроксимација наназад
- Билинеарна Тустенова или трапезоидна трансформација
- Модифицирана Тустенова трансформација

4-7-1-1 ОЈЛЕРОВА ПРАВОАГОЛНА АПРОКСИМАЦИЈА НАНАПРЕД

Површината Δ се апроксимира со правоаголник со ширина T и височина $y((k-1)T)$, како на слика 4-15, па соодветната диферентна равенка на нумеричкиот интегратор ќе гласи:

$$x(kT) = x((k-1)T) + Ty((k-1)T) \quad (4-186)$$

Со Z – трансформација на диферентната равенка на нумеричкиот интегратор (4-186) се добива неговата преносна функција:



Слика 4-15 Ојлерова апроксимација нанапред

$$Z\{x(kT) = x((k-1)T) + Ty((k-1)T)\} \Rightarrow X(z) = z^{-1}X(z) + Tz^{-1}Y(z)$$

$$(1 - z^{-1})X(z) = Tz^{-1}Y(z) \Rightarrow X(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})}Y(z) = \frac{T}{(z-1)}Y(z) \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{T}{(z-1)}, \quad |z| > 1 \tag{4-187}$$

Бидејќи изведената преносна функција на нумеричкиот интегратор ја апроксимира преносната функција на еден континуален интегратор:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re } s > 0 \tag{4-188}$$

оваа постапка може да се формулира на следниот начин:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} \tag{4-189}$$

што значи дека формално дискретната преносна функција $G(z)$ на еден континуален систем според Ојлеровата апроксимација нанапред се добива со замена на комплексната променлива s во $G(s)$ со $s = \frac{z-1}{T}$. Основен недостаток на оваа постапка е дека истата

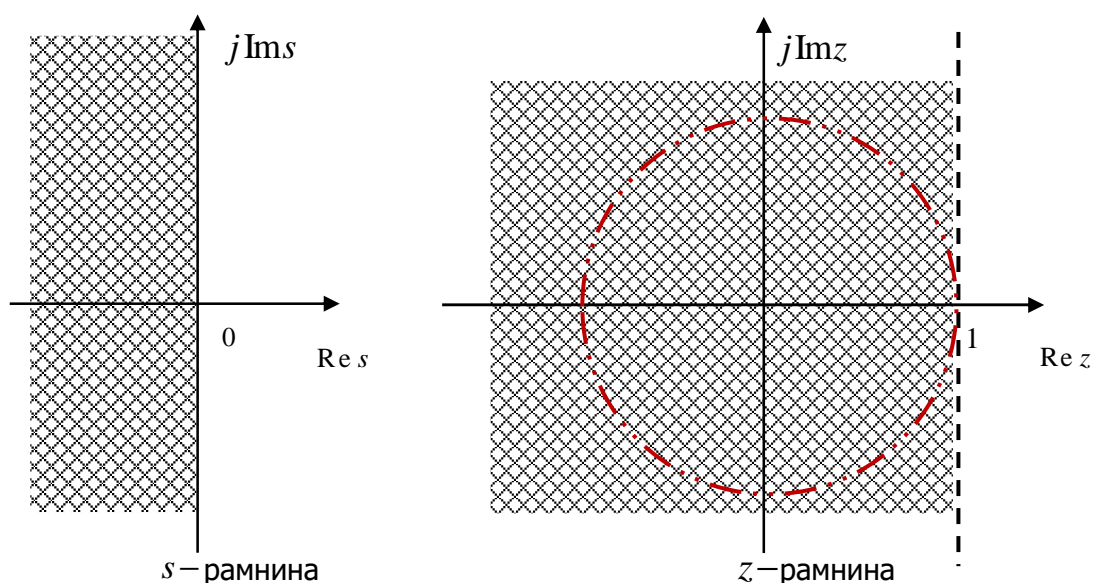
не е инваријантна во однос на својството на стабилност, што значи дека дискретниот еквивалент на еден стабилен континуален систем не мора да биде исто така стабилен. Имено, имагинарната оска од s -рамнината во z -рамнината се пресликува во права нормална на реалната оска во $z = 1$:

$$s = \frac{z-1}{T} \Rightarrow j\omega = \frac{z-1}{T} \Rightarrow z = 1 + j\omega T \Rightarrow \text{Re } z = 1 = \text{const.} \tag{4-190}$$

додека левата полурамнина од s -рамнината во z -рамнината се пресликува во полурамнина лево од правата $\operatorname{Re} z = 1$, слика 4-16. Единствено континуалните системи чии што полови лежат во внатрешноста на круг со центар во точката $\left(-\frac{1}{T}, j0\right)$ и радиус еднаков на $1/T$ ќе останат стабилни и по примената на Ојлеровата апроксимација напред.

Пример 4-15. Со помош на Ојлеровата апроксимација напред и чекор $T = \ln 2$, да се определи дискретната преносна функција на континуалниот динамички систем $G(s)$:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s(s+1)}, \operatorname{Re} s > 0 \quad (4-191)$$



Слика 4-16 Пресликување на областа на стабилност на континуалниот интегратор од s - во z -рамнина кај Ојлеровата апроксимација напред

Решение: Формално, дискретниот еквивалент $G(z)$ на континуалниот систем $G(s)$ може да се добие со смената (4-189), па, следствено:

$$\begin{aligned} G(z) &= G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{1}{\frac{z-1}{T} \left(\frac{z-1}{T} + 1 \right)} = \frac{T^2}{(z-1)(z-1+T)} = \\ &= \frac{\ln^2 2}{(z-1)(z-1+\ln 2)} = \frac{0.48}{(z-1)(z-1+0.693)} = \frac{0.48}{(z-1)(z-0.307)}; |z| > 1 \square \end{aligned} \quad (4-192)$$

Пример 4-16. Со помош на Ојлеровата апроксимација напред и чекор $T = 1s$, да се пресмета вредноста на решението $x(4)$ на диференцијалната равенка:

$$x'(t) = x(t); x(0) = 1 \quad (4-193)$$

Решение:

$$t_0 = 0$$

$$x'(t_0) = x(t_0) = x(0) = 1 = x'(0)$$

$$t_1 = t_0 + T = 0 + 1 = 1$$

$$x(t_1) = x(t_0) + Tx'(t_0) = x(0) + Tx'(0) = 1 + 1 = 2 = x(1) \quad (4-194)$$

$$x'(t_1) = x(t_1) = x(1) = 2 = x'(1)$$

$$t_2 = t_1 + T = 1 + 1 = 2$$

$$x(t_2) = x(t_1) + Tx'(t_1) = x(1) + Tx'(1) = 2 + 2 = 4 = x(2) \quad (4-195)$$

$$x'(t_2) = x(t_2) = x(2) = 4 = x'(2)$$

$$t_3 = t_2 + T = 2 + 1 = 3$$

$$x(t_3) = x(t_2) + Tx'(t_2) = x(2) + Tx'(2) = 4 + 4 = 8 = x(3) \quad (4-196)$$

$$x'(t_3) = x(t_3) = x(3) = 8 = x'(3)$$

$$t_4 = t_3 + T = 3 + 1 = 4$$

$$x(t_4) = x(t_3) + Tx'(t_3) = x(3) + Tx'(3) = 8 + 8 = 16 = x(4) \quad (4-197)$$

Истиот резултат ќе се добие и на следниот начин:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s-1}, \quad \text{Re } s > 1$$

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{1}{s-1} \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{1}{\frac{z-1}{T}-1} = \frac{T}{(z-1)-T} = \frac{1}{z-2}; \quad |z| > 2$$

$$X(z) = G(z)Y(z) = \frac{1}{z-2}Y(z) \Rightarrow$$

$$(z-2)X(z) = 0 \Rightarrow zX(z) = 2X(z)$$

$$x(k+1) = x(k) \Rightarrow \quad (4-198)$$

$$k=0: x(1) = 2x(0) = 2$$

$$k=1: x(2) = 2x(1) = 4$$

$$k = 2: x(3) = 2x(2) = 8$$

$$k = 3: x(4) = 2x(3) = 16 \quad (4-199)$$

За поголема едноставност, пресметките се дадени во таблицата 4-3.

Таблица 4-3 Решение на диференцијалната равенка (4-193)

k	t_k	$f(x_k, t_k)$	$\Delta x_k = Tf(x_k, t_k)$	$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$
0	0	1	1	2
1	1	2	2	4
2	2	4	4	8
3	3	8	8	16
4	16			

4-7-1-2 ОЈЛЕРОВА ПРАВОАГОЛНА АПРОКСИМАЦИЈА НАНАЗАД

Кај оваа постапка површината Δ се апроксимира со правоаголник со ширина T и височина $y(kT)$, па соодветната диферентна равенка на нумеричкиот интегратор ќе гласи:

$$x(kT) = x((k-1)T) + Ty(kT) \quad (4-200)$$

Со Z -трансформација на диферентната равенка на нумеричкиот интегратор (4-200) се добива неговата преносна функција:

$$Z\{x(kT) = x((k-1)T) + Ty(kT)\} \Rightarrow X(z) = z^{-1}X(z) + TY(z)$$

$$(1 - z^{-1})X(z) = TY(z) \Rightarrow X(z) = \frac{T}{(1 - z^{-1})}Y(z) = \frac{Tz}{z-1}Y(z) \Rightarrow$$

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{Tz}{z-1}, \quad |z| > 1 \quad (4-201)$$

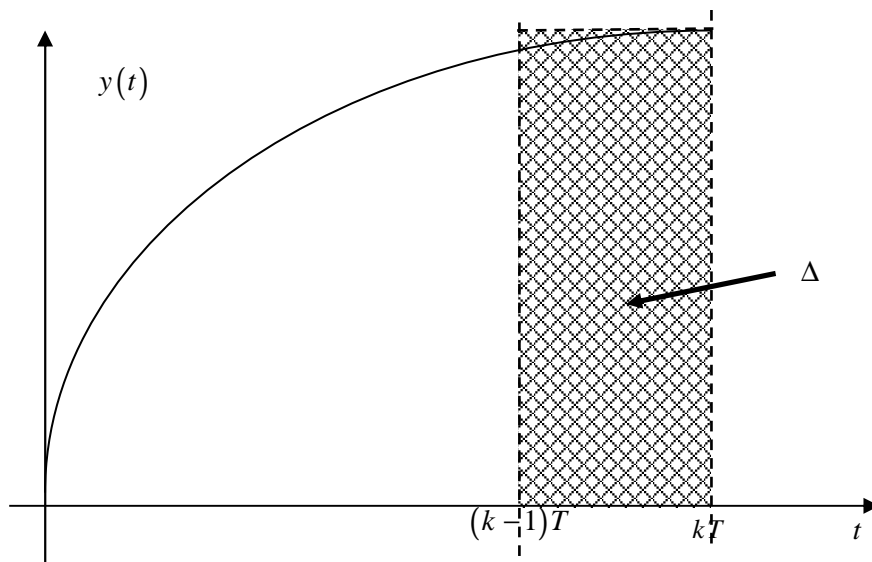
Бидејќи изведената преносна функција (4-201) на нумеричкиот интегратор ја апроксимира преносната функција на еден континуален интегратор:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re } s > 0 \quad (4-202)$$

оваа постапка може да се формулира на следниот начин:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \quad (4-203)$$

што значи дека формално дискретната преносна функција $G(z)$ на еден континуален систем според Ојлеровата апроксимација наназад се добива со замена на комплексната променлива s во $G(s)$ со $s = \frac{z-1}{Tz}$.



Слика 4-17 Ојлерова апроксимација наназад

Оваа постапка е инваријантна во однос на својството на стабилност, што значи дека дискретниот еквивалент на еден стабилен континуален систем ќе биде исто така стабилен. Имено, имагинарната оска од s -рамнината во z -рамнината се пресликува во кружница со центар во точката $(1/2, j0)$ и радиус $1/2$:

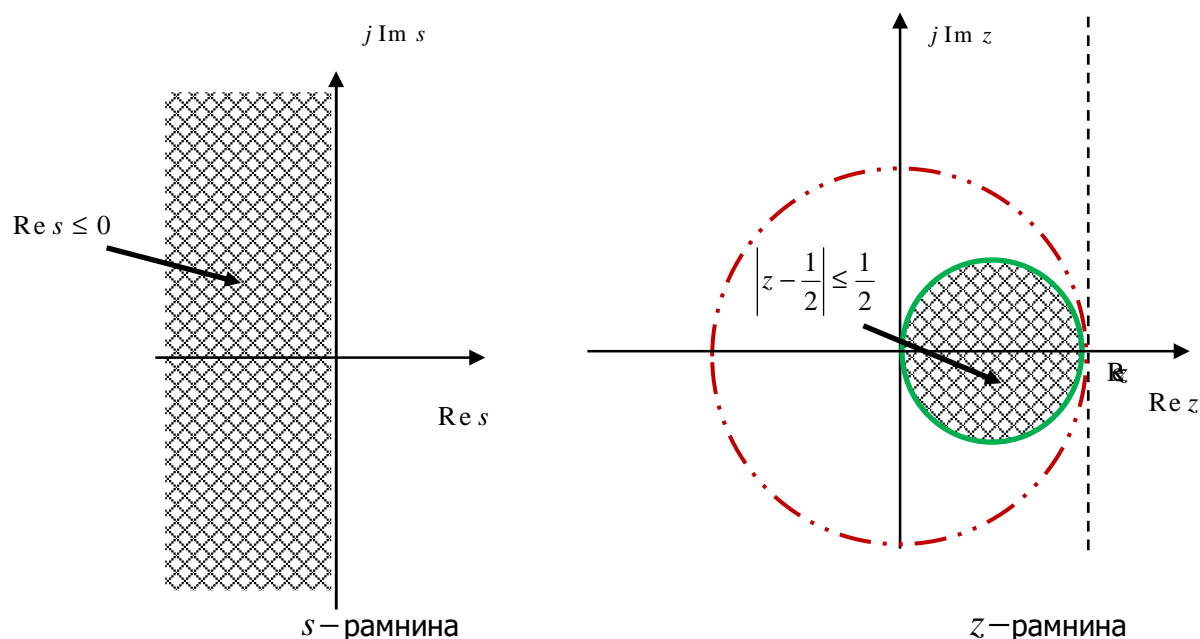
$$s = \frac{z-1}{Tz} \Rightarrow j\omega = \frac{z-1}{Tz} \Rightarrow z = \frac{1}{1-j\omega T} \Rightarrow z = \frac{1+j\omega T}{1+\omega^2 T^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} \Rightarrow 1+\omega^2 T^2 = \frac{1}{\operatorname{Re} z} \Rightarrow \omega^2 T^2 = \frac{1}{\operatorname{Re} z} - 1$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} \Rightarrow \operatorname{Im}^2 z = \frac{(\omega T)^2}{(1+\omega^2 T^2)^2} \Rightarrow \operatorname{Im}^2 z = \frac{\frac{1}{\operatorname{Re} z} - 1}{\left(\frac{1}{\operatorname{Re} z}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Im}^2 z = \operatorname{Re} z - \operatorname{Re}^2 z \Rightarrow \left(\operatorname{Re} z - \frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{Im}^2 z = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (4-204)$$

додека левата полурамнина од s -рамнината во z -рамнината се пресликува во внатрешноста на кругот $\left|z - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$, која припаѓа на областа на стабилност на дискретните системи $|z| < 1$. Следствено, дискретниот еквивалент на стабилен континуален систем секогаш ќе биде стабилен.



Слика 4-18 Пресликување на областа на стабилност на континуалниот интегратор од s - во z -рамнина кај Ојлеровата апроксимација наназад

Пример 4-17. Со помош на Ојлеровата апроксимација наназад и чекор $T = \ln 2$, да се определи дискретната преносна функција на континуалниот динамички систем $G(s)$:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s(s+1)}, \quad \text{Re } s > 0 \quad (4-205)$$

Решение: Формално, дискретниот еквивалент $G(z)$ на континуалниот систем $G(s)$ може да се добие со смената (4-203), па следствено:

$$\begin{aligned} G(z) &= G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{1}{\frac{z-1}{Tz} \left(\frac{z-1}{Tz} + 1 \right)} = \frac{T^2 z^2}{(z-1)(z-1+Tz)} = \\ &= \frac{z^2 \ln^2 2}{(z-1)(z-1+z \ln 2)} = \frac{0.48z^2}{(z-1)(z-1+0.693z)} = \frac{0.48z^2}{(z-1)(1.693z-1)}; \quad |z| > 1 \\ &= \frac{0.48z^2}{1.693(z-1) \left(z - \frac{1}{1.693} \right)} = \frac{0.2835z^2}{(z-1)(z-0.59)}; \quad |z| > 1 \quad \square \end{aligned} \quad (4-206)$$

Пример 4-18. Да се примени Ојлеровата апроксимација наназад со чекор $T = 0.2s$ за нумеричко решение на диференцијалната равенка:

$$x'(t) = 3(1+t) - x(t), \quad x(0) = 0 \quad (4-207)$$

на интервалот $t \in [0, 1]$.

Решение:

$$t_0 = 0$$

$$x'(t_0) = 3(1+t_0) - x(t_0) = 3(1+0) - x(0) = 3 = x'(0)$$

$$t_1 = t_0 + T = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$x'(t_1) = 3(1+t_1) - x(t_1) = 3(1+0.2) - x(0.2) = 3.6 - x(0.2) = x'(0.2)$$

$$x(t_1) = x(t_0) + Tx'(t_1) = x(0) + 0.2x'(0.2) = 3 + 0.2[3.6 - x(0.2)] = x(0.2) \Rightarrow$$

$$0.72 = 1.2x(0.2) \Rightarrow x(0.2) = 0.6 \quad (4-208)$$

$$t_2 = t_1 + T = 0.2 + 0.2 = 0.4$$

$$x'(t_2) = 3(1+t_2) - x(t_2) = 3(1+0.4) - x(0.4) = 4.2 - x(0.4) = x'(0.4)$$

$$x(t_2) = x(t_1) + Tx'(t_2) = x(0.2) + 0.2x'(0.4) = 0.6 + 0.2[4.2 - x(0.4)] = x(0.4) \Rightarrow$$

$$0.6 + 0.84 - 0.2x(0.4) = x(0.4) \Rightarrow 1.44 = 1.2x(0.4) \Rightarrow x(0.4) = 1.2 \quad (4-209)$$

$$t_3 = t_2 + T = 0.4 + 0.2 = 0.6$$

$$x'(t_3) = 3(1+t_3) - x(t_3) = 3(1+0.6) - x(0.6) = 4.8 - x(0.6) = x'(0.6)$$

$$x(t_3) = x(t_2) + Tx'(t_3) = x(0.4) + 0.2x'(0.6) = 1.2 + 0.2[4.8 - x(0.6)] = x(0.6) \Rightarrow$$

$$2.16 - 0.2x(0.6) = x(0.6) \Rightarrow 2.16 = 1.2x(0.6) \Rightarrow x(0.6) = 1.8 \quad (4-210)$$

$$t_4 = t_3 + T = 0.6 + 0.2 = 0.8$$

$$x'(t_4) = 3(1+t_4) - x(t_4) = 3(1+0.8) - x(0.8) = 5.4 - x(0.8) = x'(0.8)$$

$$x(t_4) = x(t_3) + Tx'(t_4) = x(0.6) + 0.2x'(0.8) = 1.8 + 0.2[5.4 - x(0.8)] = x(0.8) \Rightarrow$$

$$2.88 - 0.2x(0.8) = x(0.8) \Rightarrow 2.88 = 1.2x(0.8) \Rightarrow x(0.8) = 2.4 \quad (4-211)$$

$$t_5 = t_4 + T = 0.8 + 0.2 = 1.0$$

$$x'(t_5) = 3(1+t_5) - x(t_5) = 3(1+1) - x(1) = 6 - x(1) = x'(1)$$

$$x(t_5) = x(t_4) + Tx'(t_5) = x(0.8) + 0.2Tx'(1) = 2.4 + 0.2[6 - x(1)] = x(1) \Rightarrow$$

$$3.6 - 0.2x(1) = x(1) \Rightarrow 3.6 = 1.2x(1) \Rightarrow x(1) = 3 \quad (4-212)$$

Истиот резултат ќе се добие и на следниот начин:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s+1}, \text{ Re } s > 1$$

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = \frac{1}{\frac{z-1}{Tz} + 1} = \frac{Tz}{(z-1+Tz)} = \frac{0.2z}{1.2z-1} = \frac{0.167z}{z-0.833}; |z| > 0.833$$

$$X(z) = G(z)Y(z) = \frac{0.167z}{z-0.833}Y(z) \Rightarrow$$

$$(z-0.833)X(z) = 0.167zY(z) \Rightarrow zX(z) = 0.833X(z) + 0.167zY(z) \Rightarrow$$

$$x((k+1)T) = 0.833x(kT) + 0.167y((k+1)T) \quad (4-213)$$

$$k=1: y(T) = 3(1+kT) = 3(1+0.2) = 3.6 = y(0.2)$$

$$x(0.2) = 0.833x(0) + 0.167y(0.2) = 0.167(3.6) = 0.6$$

$$k=2: y(kT) = 3(1+kT) = 3(1+0.4) = 4.2 = y(0.4)$$

$$x(0.4) = 0.833x(0.2) + 0.167y(0.4) = 0.833(0.6) + 0.167(4.2) = 1.2 \quad (4-214)$$

$$k=3: y(kT) = 3(1+kT) = 3(1+0.6) = 4.8 = y(0.6)$$

$$x(0.6) = 0.833x(0.4) + 0.167y(0.6) = 0.833(1.2) + 0.167(4.8) = 1.8 \quad (4-215)$$

$$k=4: y(kT) = 3(1+kT) = 3(1+0.8) = 5.4 = y(0.8)$$

$$x(0.8) = 0.833x(0.6) + 0.167y(0.8) = 0.833(1.8) + 0.167(5.4) = 2.4 \quad (4-216)$$

$$k=5: y(kT) = 3(1+kT) = 3(1+1) = 6 = y(1)$$

$$x(1.0) = 0.833x(0.8) + 0.167y(1.0) = 0.833(2.4) + 0.167(6.0) = 3.0 \quad (4-217)$$

Решението е прикажано во таблицата 4-4.

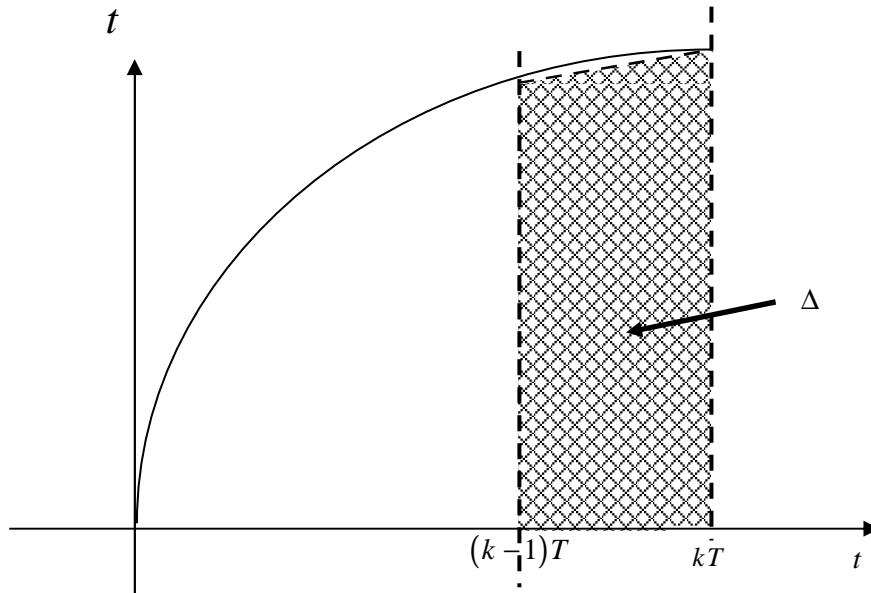
Таблица 4-4 Решение на диференцијалната равенка (4-207)

k	t_k	x_k
0	0	0
1	0.2	0.6
2	0.4	1.2
3	0.6	1.8
4	0.8	2.4
5	1.0	3.0

4-7-1-3 БИЛИНЕАРНА ТУСТИНОВА ИЛИ ТРАПЕЗОИДНА АПРОКСИМАЦИЈА

Ако површината Δ се апроксимира со правоаголен трапез со основици $y((k-1)T)$ и $y(kT)$ и висина T , слика 4-19, диферентната равенка на нумеричкиот интегратор ќе се сведе на следната равенка:

$$x(kT) = x((k-1)T) + T \frac{y((k-1)T) + y(kT)}{2} \quad (4-218)$$



Слика 4-19 Трапезоидна апроксимација

а соодветната дискретна преносна функција ќе биде:

$$Z \left\{ x(kT) = x((k-1)T) + T \frac{y((k-1)T) + y(kT)}{2} \right\} \Rightarrow$$

$$X(z) = z^{-1}X(z) + T \frac{z^{-1}Y(z) + Y(z)}{2} \Rightarrow (1 - z^{-1})X(z) = T \frac{z^{-1} + 1}{2}Y(z) \Rightarrow$$

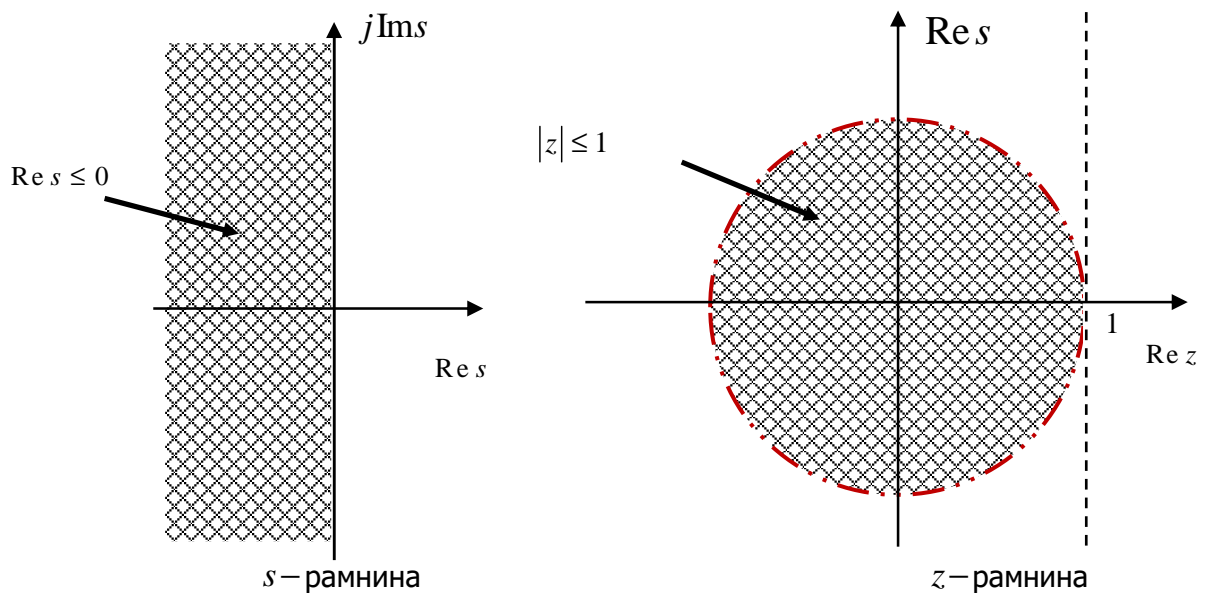
$$X(z) = T \frac{1 + z^{-1}}{2(1 - z^{-1})}Y(z) = \frac{T(z+1)}{2(z-1)}Y(z) \Rightarrow G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{T(z+1)}{2(z-1)} \quad (4-219)$$

Оваа апроксимација формално се остварува на следниот начин:

$$G(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \quad (4-220)$$

што значи дека формално дискретната преносна функција $G(z)$ на еден континуален систем според билинеарната Тустинова апроксимација се добива со замена на комплексната променлива Δ во $G(s)$ со $s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$. Таа е инваријантна во однос на

својството на стабилност, што значи дека дискретниот модел на еден стабилен континуален систем секогаш е стабилен. Имено, областа на стабилност $\text{Re } s < 0$ во s -рамнината се пресликува во единичниот круг $|z| < 1$ во z -рамнината, слика 4-20:



Слика 4-20 Пресликување на областа на стабилност на континуалниот интегратор од s - во z -рамнина кај Тустиновата билинеарна апроксимација

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \Rightarrow j\omega = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \Rightarrow z = \frac{2 + j\omega T}{2 - j\omega T} \Rightarrow |z| = 1$$

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \Rightarrow \delta + j\omega = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \Rightarrow z = \frac{(2 + \delta T) + j\omega T}{(2 - \delta T) - j\omega T} \Rightarrow$$

$$z \cdot \bar{z} = z = \frac{(2 + \delta T) + j\omega T}{(2 - \delta T) - j\omega T} \cdot \frac{(2 + \delta T) - j\omega T}{(2 - \delta T) + j\omega T} \Rightarrow \frac{(2 + \delta T)^2 + (\omega T)^2}{(2 - \delta T)^2 + (\omega T)^2} \leq 1 \Rightarrow$$

$$(2 + \delta T)^2 + (\omega T)^2 \leq (2 - \delta T)^2 + (\omega T)^2 \Rightarrow 8\delta T \leq 0 \Rightarrow \delta \leq 0 \quad (4-221)$$

Пример 4-19. Со помош на билинеарната Тустинова апроксимација и чекор $T = \ln 2$, да се определи дискретната преносна функција на континуалниот динамички систем $G(s)$:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s(s+1)}, \text{ Re } s > 0 \quad (4-222)$$

Решение: Формално, дискретниот еквивалент $G(z)$ на континуалниот систем $G(s)$ може да се добие со смената (4-220), па следствено:

$$\begin{aligned} G(z) &= G(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{1}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 1 \right)} = \\ &= \frac{T^2 (z+1)^2}{2(z-1)[2(z-1) + T(z+1)]} = \frac{0.48(z+1)^2}{2(z-1)[2(z-1) + 0.693(z+1)]} = \\ &= \frac{0.48(z+1)^2}{2(z-1)(2.693z - 1.307)} = \frac{0.089(z+1)^2}{(z-1)(z-0.4853)}; |z| > 1 \quad \square \end{aligned} \quad (4-223)$$

Пример 4-20. Да се примени Тустиновата апроксимација со чекор $T = \frac{\pi}{2}$ за нумеричко решавање на диференцијалната равенка:

$$x'(t) = -x(t) + \cos t; \quad x(0) = 0 \quad (4-224)$$

на интервалот $t \in [0, 2\pi]$.

Решение:

$$t_0 = 0$$

$$x'(t_0) = -x(t_0) + \cos t_0 = -x(0) + \cos 0 = 0 + 1 = 1 = x'(0)$$

$$t_1 = t_0 + T = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$x'(t_1) = -x(t_1) + \cos t_1 = -x\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2} = -x\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 = -x\left(\frac{\pi}{2}\right) = x'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= x(t_0) + \frac{T}{2} [x'(t_0) + x'(t_1)] = x(0) + \frac{\pi}{4} \left[x'(0) + x'\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \\
&= 0 + \frac{\pi}{4} \left[1 - x\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{4} \left[1 - x\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = x\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\pi+4}
\end{aligned} \tag{4-225}$$

$$t_2 = t_1 + T = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$x'(t_2) = -x(t_2) + \cos t_2 = -x(\pi) + \cos \pi = -x(\pi) - 1 = x'(\pi)$$

$$x(t_2) = x(t_1) + \frac{T}{2} [x'(t_1) + x'(t_2)] = x\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \left[x'\left(\frac{\pi}{2}\right) + x'(\pi) \right] =$$

$$= x\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \left[-x\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 - x(\pi) \right] = \frac{4-\pi}{4} x\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} x(\pi) =$$

$$\frac{\pi+4}{4} x(\pi) = -\frac{\pi^2}{2(\pi+4)} \Rightarrow x(\pi) = -2 \frac{\pi^2}{(\pi+4)^2} \tag{4-226}$$

$$t_3 = t_2 + T = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$x'(t_3) = -x(t_3) + \cos t_3 = -x\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos \frac{3\pi}{2} = -x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = x'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$x(t_3) = x(t_2) + \frac{T}{2} [x'(t_2) + x'(t_3)] = x(\pi) + \frac{\pi}{4} \left[x'(\pi) + x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] =$$

$$= x(\pi) + \frac{\pi}{4} \left[-x(\pi) - 1 - x\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = \frac{4-\pi}{4} x(\pi) - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^3 - 16\pi^2 - 16\pi}{4(\pi+4)^2} = \frac{4+\pi}{4} x\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3 - 16\pi^2 - 16\pi}{(\pi+4)^3} \tag{4-227}$$

$$t_4 = t_3 + T = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$x'(t_4) = -x(t_4) + \cos t_4 = -x(2\pi) + \cos 2\pi = 1 - x(2\pi) = x'(2\pi)$$

$$x(t_4) = x(t_3) + \frac{T}{2} [x'(t_3) + x'(t_4)] = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \left[x'(2\pi) + x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] =$$

$$= x\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \left[1 - x(2\pi) - x\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = \frac{4-\pi}{4} x\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} x(2\pi) = x(2\pi) \Rightarrow$$

$$x(2\pi) = \frac{48\pi^3}{(\pi+4)^4} \quad (4-228)$$

Истиот резултат ќе се добие и на следниот начин:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re } s > 1$$

$$G(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{1}{\frac{2(z-1)}{T(z+1)} + 1} =$$

$$= \frac{T(z+1)}{2(z-1) + T(z+1)} = \frac{T(z+1)}{(2+T)z + T - 2}$$

$$X(z) = G(z)Y(z) = \frac{T(z+1)}{(2+T)z + T - 2} Y(z) \Rightarrow$$

$$[(2+T)z + T - 2] X(z) = T(z+1)Y(z) \Rightarrow (2+T)zX(z) =$$

$$= (2-T)X(z) + T(z+1)Y(z) \Rightarrow$$

$$zX(z) = \frac{(2-T)}{(2+T)} X(z) + \frac{T(z+1)}{(2+T)} Y(z) \Rightarrow$$

$$x((k+1)T) = \frac{(4-\pi)}{(4+\pi)} x(kT) + \frac{\pi}{(4+\pi)} y((k+1)T) + \frac{\pi}{(4+\pi)} y(kT) \quad (4-229)$$

$$k=0: y(0) = \cos 0 = 1; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{(4+\pi)}$$

$$k=1: y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; y(\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$x(\pi) = \frac{(4-\pi)}{(4+\pi)} x\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{(4+\pi)} y(\pi) + \frac{\pi}{(4+\pi)} y\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x(\pi) = \frac{-2\pi^2}{(4+\pi)^2} \quad (4-230)$$

$$k = 2: y(\pi) = \cos(\pi) = -1; y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0;$$

$$x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{(4-\pi)}{(4+\pi)}x(\pi) + \frac{\pi}{(4+\pi)}y(\pi) + \frac{\pi}{(4+\pi)}y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3 - 16\pi^2 - 16\pi}{(4+\pi)^3} \quad (4-231)$$

$$k = 3: y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0; y(2\pi) = \cos(2\pi) = 1;$$

$$x(2\pi) = \frac{(4-\pi)}{(4+\pi)}x\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{(4+\pi)}y(2\pi) + \frac{\pi}{(4+\pi)}y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x(2\pi) = \frac{48\pi^3}{(4+\pi)^4} \quad \square \quad (4-232)$$

4-7-2 МЕТОД НА ПРЕСЛИКУВАЊЕ НУЛИ И ПОЛОВИ

Дадената преносна функција на еден континуален систем во факторизиран облик:

$$G(s) = K_s \frac{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}; m \leq n \quad (4-233)$$

се апроксимира со следниот дискретен еквивалент:

$$G(z) = K_z \frac{(z+1)^{n-m}(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_m)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}; m \leq n \quad (4-234)$$

каде што нулите и половите на дискретната преносна функција $G(z)$ се добиени со пресликување на соодветните нули и полови на изворната преносна функција $G(s)$ во

согласност со трансформацијата:

$$z = e^{sT} \quad (4-235)$$

Следствено:

$$r_i = e^{p_i T}; i = 1, 2, \dots, m \quad (4-236)$$

$$z_i = e^{s_i T}; i = 1, 2, \dots, n \quad (4-237)$$

Нулата $z = -1$ со кратност $n-m$ е додадена во изразот (4-234) за да се изедначат степените на полиномите во броителот и именителот на дискретната преносна функција $G(z)$.

Константата K_z вообичаено се одредува од условот за идентично засилување на континуалната и дискретната преносна функција во стационарен режим:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (4-238)$$

од каде што непосредно следува:

$$K_z \frac{2^{n-m} (1-r_1)(1-r_2)\cdots(1-r_m)}{(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_n)} = K_s \frac{(-p_1)(-p_2)\cdots(-p_m)}{(-s_1)(-s_2)\cdots(-s_n)} \quad (4-239)$$

Овој метод обезбедува сличен степен на точност како и билинеарната трансформација, која исто така го чува статичкото засилување, но е поедноставна за примена од аспект на пресметките, затоа што користи поедноставни алгебарски операции.

4-7-3 МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТЕН ИМПУЛСЕН ОДСИВ

Овој метод е заснован врз претпоставката дека импулсниот одсив на континуалниот систем се поклопува со тежинската низа на дискретниот систем во миговите на дискретнизација:

$$G(z) = Z \{g(kT)\} = Z \left\{ L^{-1} [G(s)]_{t=kT} \right\} \quad (4-240)$$

Практично оваа постапка може да се реализира на следниот начин. Најнапред континуалната преносна функција се развива во парцијални дробки. Доколку сите полови на континуалната преносна функција се прости, овој развој во парцијални дробки ќе го има следниот облик:

$$G(s) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s-s_k}; \quad c_k = \left[(s-s_k)G(s) \right]_{s=s_k} \quad (4-241)$$

Тогаш импулсниот одсив на набљудуваниот континуален систем ќе биде:

$$g(t) = L^{-1} \{G(s)\} = \sum_{k=1}^n L^{-1} \left\{ \frac{c_k}{s-s_k} \right\} = \sum_{k=1}^n c_k e^{s_k t}; \quad t \geq 0 \quad (4-242)$$

од каде следува:

$$g(kT) = \sum_{k=1}^n c_k e^{s_k kT}; \quad k \geq 0 \quad (4-243)$$

па, еквивалентната дискретна преносна функција ќе гласи:

$$G(z) = Z \{g(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i kT} z^{-k} = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{k=0}^{\infty} e^{s_i kT} z^{-k} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i z}{z - e^{s_i T}} \quad (4-244)$$

Со други зборови, дискретниот еквивалент на континуалниот систем се добива со замена на елементарните слики од парцијалниот развој на неговата преносна функција $G(s)$ со нивните дискретни еквиваленти:

$$\frac{c_i}{s-s_i} \rightarrow \frac{c_i z}{z - e^{s_i T}} \quad (4-245)$$

Доколку континуалната преносна функција $G(s)$ има и кратни полови, на пример полот s_i со кратност q_i , него во парцијалниот развој на континуалната преносна функција ќе му одговараат членови од облик $\frac{c_j}{(s-s_i)^j}$; $j=1,2,\dots,q_i$, чии дискретни еквиваленти се:

$$\frac{c_j}{s-s_i} \rightarrow \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[\frac{c_j z}{z-e^{sT}} \right]_{s=s_i} \quad (4-246)$$

4-7-4 МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТЕН ОТКОЧЕН ОДСИВ

Методот на инваријантен отскочен одсив е заснован врз претпоставката дека отскочниот одсив на континуалниот систем е идентичен со отскочниот одсив на дискретниот систем во миговите на дискретизација kT ; $k=0,1,2,\dots$:

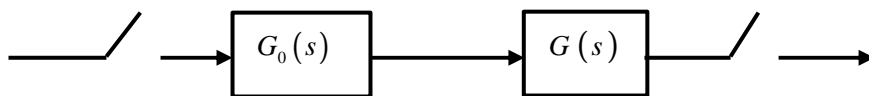
$$x(kT) = Z^{-1} \left\{ G(z) \frac{z}{z-1} \right\} = x(t)_{t=kT} = L^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right]_{t=kT} \quad (4-247)$$

Со примена на Z – трансформацијата врз релацијата (4-247) се добива:

$$G(z) \frac{z}{z-1} = Z \left\{ L^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right]_{t=kT} \right\} \Rightarrow$$

$$G(z) = (1-z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right]_{t=kT} \right\} = Z \left\{ G(s) \frac{1-e^{-sT}}{s} \right\} = Z \{ G_0(s) G(s) \} \quad (4-248)$$

каде што $G_0(s)$ е преносната функција на форматор од нулти ред. Оваа постапка може да се илустрира со структурната блок-шема од сликата 4-21.



Слика 4-21 Метод на инваријантен отскочен одсив

Практичната примена на постапката се состои во развој на функцијата $\frac{G(s)}{s}$ во парцијални дробки и замена на секој од тие парцијални дробки со соодветен дискретен еквивалент.

4-7-5 МОДЕЛ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

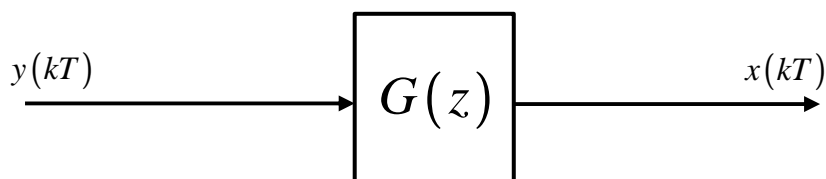
За дискретните модели на континуалните системи во просторот на состојби детално ќе стане збот во осмата глава од оваа книга.

5 СТАБИЛНОСТ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Со оглед на својата важност, прашањето за стабилноста на дискретните системи заслужува посебно внимание при изучувањето на истите. Ова произлегува од фактот дека во автоматското управување нестабилен систем е неупотреблив систем. Затоа при проектирањето на системите на автоматско управување, најнапред треба да се обезбеди проектираниот систем да биде стабилен, па сè друго потоа.

Физичката дефиниција на својството на стабилност на еден дискретен систем е идентична со физичката дефиниција на стабилноста на еден континуален систем. Така, за еден дискретен систем велиме дека е стабилен, ако на ограничен по амплитуда влез реагира со ограничен по амплитуда излез. Дискретниот систем ќе биде нестабилен, ако на ограничен по амплитуда влез реагира со неограничен по амплитуда излез. Освен овие состојби, еден дискретен систем може да се наоѓа и на границата на стабилност, кога е ниту стабилен ниту нестабилен, за што ќе зборуваме наскоро.

За да се определат математичките услови под кои еден дискретен систем ќе биде стабилен, потребно е дадената физичка интерпретација на поимот стабилност на дискретните системи да се формулира математички. За таа цел го набљудуваме дискретниот систем прикажан на сликата 5-1. Со помош на правилата на алгебрата на блок-шемите структурата на секој линеарен стационарен дискретен систем може да се доведе на обликот прикажан на сликата 5-1.



Слика 5-1 Структурна блок-шема на линеарен стационарен дискретен динамички систем со еден влез и еден излез

Како што веќе е покажано во поглавјето 4-4, одсивот на набљудуваниот дискретен систем на произволна влезна возбуда има две компоненти:

$$x(kT) = x_{preodno}(kT) + x_{stacionarno}(kT) \quad (5-1)$$

при што преодната компонента на одсивот може да ја содржи и слободната компонента од ненулевите почетни услови, затоа што и таа има ист временски тек. Тогаш, врз основа на дефиницијата за стабилност на еден дискретен систем, набљудуваниот дискретен систем од сликата 5-1 ќе биде стабилен, доколку неговиот одсив (5-1) на ограничен по амплитуда влез ќе биде исто така ограничен по амплитуда.

За да биде ограничен по амплитуда дискретниот сигнал (5-1), треба едновремено да бидат ограничени по амплитуда двете негови компоненти $x_{preodno}(kT)$ и $x_{stacionarno}(kT)$.

Меѓутоа, врз основа на анализата направена во поглавјето 4-4, знаеме дека стационарниот одсив на набљудуваниот дискретен систем има ист временски тек како и влезот во системот, па за ограничен по амплитуда влез, и стационарниот одсив $x_{stationarno}(kT)$ ќе биде ограничен по амплитуда, иако оваа амплитуда најверојатно се разликува од амплитудата на влезот. Тогаш останува да ги одредиме условите под кои и преодниот одсив $x_{preodno}(kT)$ ќе биде ограничен по амплитуда за ограничен по амплитуда влез. Меѓутоа, исто така од направената анализа во поглавјето 4-4, знаеме дека временскиот тек на преодниот одсив на еден дискретен систем, вклучувајќи го тука и слободниот одсив, зависи исклучиво од половите на самиот дискретен систем, односно од половите на неговата преносна функција. Така, за дискретен систем со прости полови, тој ќе биде даден со изразот:

$$x_{preodno}(kT) = Z^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - z_i} \right\} = \sum_{i=1}^n c_i z_i^{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (5-2)$$

додека за дискретен систем со кратни полови тој ќе има облик:

$$x_{preodno}(kT) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q_i} c_{i,j} (kT)^{j-1} z_i^{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (5-3)$$

каде што z_1, z_2, \dots, z_p се p -те кратни полови на дискретната преносна функција $G(z)$ со соодветна кратност q_1, q_2, \dots, q_p , при што, се разбира $q_1 + q_2 + \dots + q_p = n$.

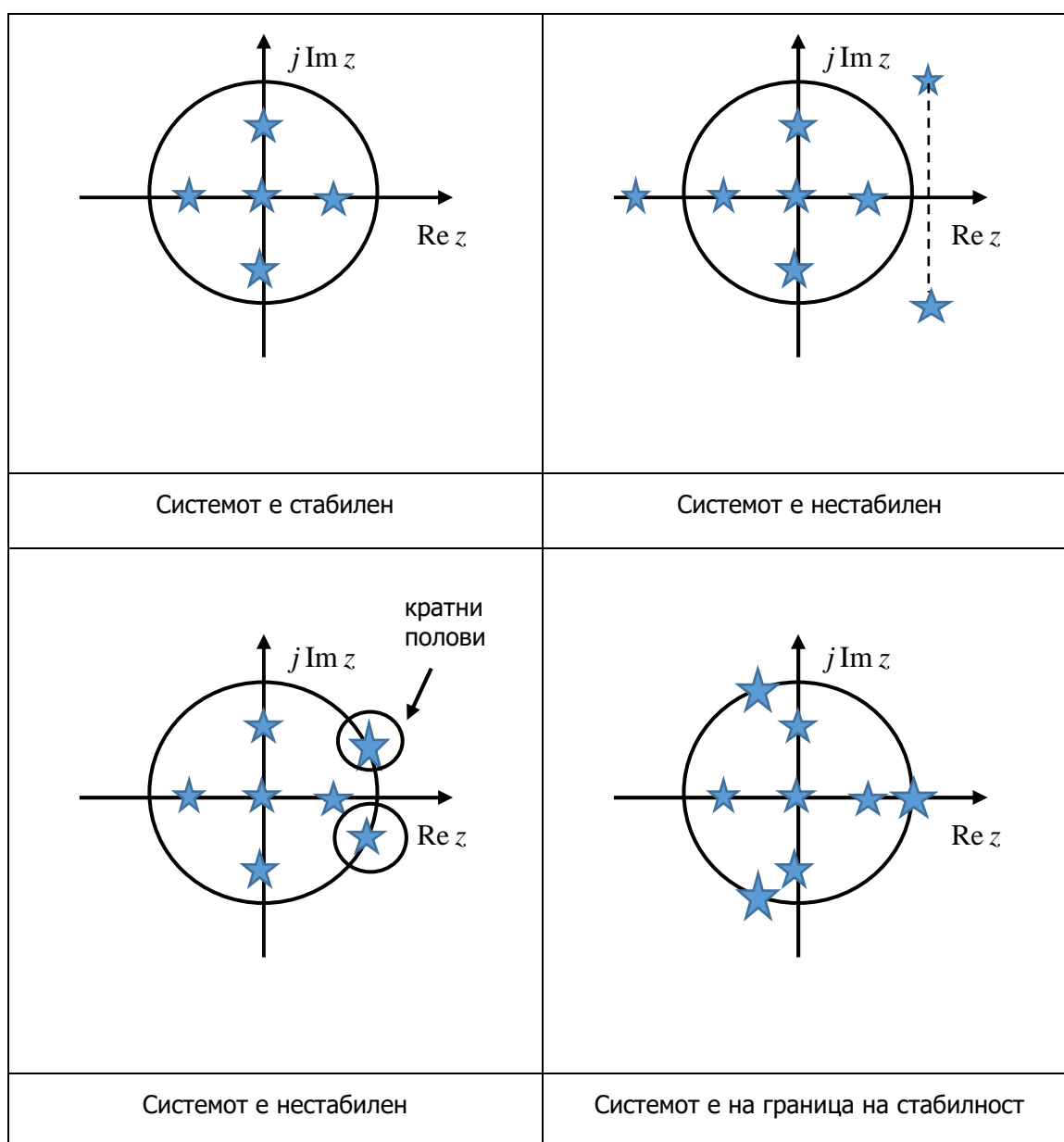
Во поглавјето 3-5 детално беше проучено прашањето за зависноста на ограниченоста на еден дискретен оригинал од положбата на половите на неговата Z -слика во z -комплексната рамнина. Притоа се изведени следните заклучоци:

- ❖ дискретниот оригинал ќе биде ограничена по амплитуда функција, доколку сите полови на неговата Z -слика лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина;
- ❖ дискретниот оригинал ќе биде ограничена по амплитуда функција и доколку неговата Z -слика има прости полови кои лежат на единичната кружница $|z| = 1$ и нема полови надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина;
- ❖ ако барем еден од половите на неговата Z -слика лежи во надворешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, дискретниот оригинал ќе биде неограничена по амплитуда функција;
- ❖ тој ќе биде неограничен по амплитуда и кога барем еден кратен пол на неговата Z -слика се наоѓа на кружницата $|z| = 1$, иако сите останати полови се во внатрешноста од единичниот круг $|z| \leq 1$.

Врз основа на овие заклучоци, доаѓаме до сознание дека преодниот одсив на набљудуваниот дискретен систем од сликата 5-1 ќе биде ограничен по амплитуда, само доколку сите полови на системот лежат во внатрешноста од единичниот круг

или тој има само прости полови на единичната кружница $|z|=1$. Оттаму, математичките услови за стабилност на еден дискретен систем може да се искажат на следниот начин:

- ❖ Дискретниот систем е стабилен, доколку сите полови од неговата преносна функција $G(z)$ се наоѓаат во внатрешноста од единичниот круг $|z| \leq 1$. Во спротивен случај тој нема да биде стабилен.
- ❖ Дискретниот систем ќе биде нестабилен, доколку барем еден пол од неговата преносна функција лежи надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$, без оглед на неговата природа и кратност.



Слика 5-2 Зависност на стабилноста на еден дискретен систем од положбата на неговите полови во z – комплексната рамнина

- ❖ Дискретниот систем ќе биде исто така нестабилен и ако има барем еден кратен пол на единичната кружница, иако сите останати негови полови лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, без оглед на природата на тој пол (реален или комплексен).
- ❖ Дискретниот систем ќе се наоѓа на границата на стабилност, доколку има барем еден прост пол на единичната кружница $|z| = 1$, а сите останати негови полови лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, без оглед на природата на тој пол (реален или комплексен).

Ова е илустрирано на сликата 5-2.

Следствено, за да одговориме на прашањето за стабилност на еден дискретен систем, најнапред треба да ги најдеме нумерички неговите полови и потоа да ја испитаме нивната положба во z – комплексната рамнина.

Пример 5-1. Да се испита стабилноста на следните дискретни системи:

$$G_1(z) = \frac{4z}{z-0.2}; |z| > 0.2 \quad (5-4)$$

$$G_2(z) = \frac{z}{z-2}; |z| > 2 \quad (5-5)$$

$$G_3(z) = \frac{z}{z-1}; |z| > 1 \quad (5-6)$$

$$G_4(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}; |z| > 1 \quad (5-7)$$

Решение: Системот (5-4) има еден единствен прост реален пол во точката $z = 0.2$, кој има модул помал од единица. Следствено, системот $G_1(z)$ е стабилен.

Системот (5-5) има еден единствен прост реален пол во точката $z = 2$ и неговиот модул е поголем од единица. Следствено, системот $G_2(z)$ е нестабилен.

Системот (5-6) има прост реален пол во точката $z = 1$, со модул еднаков на единица. Следствено, системот $G_3(z)$ се наоѓа на границата на стабилност.

Системот (5-7) има двократен реален пол во точката $z = 1$, со модул еднаков на единица. Следствено, системот $G_4(z)$ ќе биде нестабилен.

За да го покажеме ова, ќе претпоставиме дека на влезот од системите е доведена единичната Хевисајдова функција од дискретната независно променлива $h(kT)$, која е ограничена по амплитуда. Тогаш, одзивите на системите (5-4) – (5-7) на оваа влезна возбуда ќе бидат дадени со следните изрази:

$$x_1(k) = Z^{-1}\{G_1(z) \cdot H(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{4z^2}{(z-1)(z-0.2)}\right\} = [5 - (0.2)^k]h(k) \quad (5-8)$$

$$x_2(k) = Z^{-1}\{G_2(z) \cdot H(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-1)(z-2)}\right\} = [2(2)^k - 1]h(k) \quad (5-9)$$

$$x_3(k) = Z^{-1}\{G_3(z) \cdot H(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-1)^2}\right\} = (k+1)h(k) \quad (5-10)$$

$$x_4(k) = Z^{-1}\{G_4(z) \cdot H(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right\} = k^2h(k) \quad (5-11)$$

Оттука:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_1(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} [5 - (0.2)^k] = 5 \quad (5-12)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_2(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} [(2)^k - 1] = \infty \quad (5-13)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_3(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty \quad (5-14)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_4(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} (k^2) = \infty \quad (5-15)$$

со што се потврдува направениот заклучок за стабилноста на овие системи. Дискретниот систем (5-6) дава неограничен по амплитуда излез, иако е на границата на стабилност, само затоа што има ист пол како и сликата на влезната возбуда $H(z)$, па полот во точката $z=1$ станува кратен и произведува неограничен по амплитуда одзив. За друг ограничен влез, чија Z -слика има пол различен од единица и модул помал од 1, трајната вредност на одзивот на системот ќе биде ограничена по амплитуда.

Во продолжение, без ограничување на општоста на заклучоците што ќе ги изведеме, ќе претпоставиме дека на влезот од системите (5-4) – (5-9) е доведена Кронекер-делта функцијата $\delta_0(kT)$, која секако е ограничена по амплитуда. Тогаш, одзивите на набљудуваните дискретни системи на оваа влезна возбуда ќе бидат дадени со следните изрази:

$$x_1(k) = Z^{-1}\{G_1(z) \cdot 1\} = Z^{-1}\left\{\frac{4z}{z-0.2}\right\} = 4(0.2)^k h(k) \quad (5-16)$$

$$x_2(k) = Z^{-1}\{G_2(z) \cdot 1\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} = (2)^k h(k) \quad (5-17)$$

$$x_3(k) = Z^{-1}\{G_3(z) \cdot 1\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} = h(k) \quad (5-18)$$

$$x_4(k) = Z^{-1}\{G_4(z) \cdot 1\} = Z^{-1}\left\{\frac{(z+1)}{(z-1)^2}\right\} = (2k-1)h(k) \quad (5-19)$$

Оттука:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_1(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_1(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} [4(0.2)^k] = 0 \quad (5-20)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_2(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_2(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} (2)^k = \infty \quad (5-21)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_3(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_3(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad (5-22)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_4(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_4(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k-1) = \infty \quad (5-23)$$

Бидејќи под направената претпоставка за влезот во набљудуваните системи нивните одсиви се едноставно нивните тежински низи, може да ја дадеме и следната дефиниција на стабилноста на еден дискретен систем:

- Дискретниот систем е стабилен, доколку неговата тежинска низа тежи кон нулата кога $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(kT) = 0 \quad (5-24)$$

- Дискретниот систем ќе биде нестабилен, доколку неговата тежинска низа е неограничена по амплитуда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |g(kT)| = \infty$$

- Дискретниот систем ќе биде на границата на стабилност, доколку неговата тежинска низа е ограничена по амплитуда:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |g(kT)| = \text{const.} \neq 0 \quad (5-25)$$

Дефиницијата е општа и важи за сите линеарни стационарни дискретни динамички системи, а не само за набљудуваните. □

За жал, половите на една Z – слика не може така лесно нумерички да се пресметаат, посебно кога се работи за системи од повисок ред, затоа што нивното нумеричко пресметување подразбира решавање алгебарски равенки од степен n . Имено, веќе констатиравме дека половите на еден дискретен систем се нули на полиномот $a(z)$ во именителот од неговата преносна функција $G(z)$. Бидејќи половите на еден систем го карактеризираат поведението на тој систем, за што допрва ќе зборуваме,

полиномот во именителот на преносната функција $G(z)$ уште се нарекува **карактеристичен полином**. Тогаш, за да ги најдеме нулите на овој полином, треба да ја решаваме **карактеристичната равенка**:

$$a(z) = 0 \quad (5-26)$$

која има степен еднаков на редот на системот n . Решавањето алгебарски равенки од степен поголем од 2, веќе почнува да прави проблеми, додека решавањето алгебарски равенки од висок степен практично може да се изврши само со приближни пресметки.

За среќа, развиени се критериуми кои овозможуваат за стабилноста на еден дискретен систем да се суди врз основа на коефициентите на неговиот карактеристичен полином, без да има потреба од нумеричко пресметување на неговите полови. Тие критериуми може да се поделат на алгебарски и графички, односно графо-аналитички критериуми и најважните од нив се дадени во продолжение.

5-1 НЕОПХОДЕН УСЛОВ ЗА СТАБИЛНОСТ НА ЕДЕН ЛИНЕАРЕН ДИСКРЕТЕН СИСТЕМ

Од аспект на стабилноста на дискретните системи, кружницата $|z|=1$ во z -комплексната рамнина има иста улога како имагинарната оска на s -комплексната рамнина кај континуалните системи. Оттука, да се определи стабилноста на еден дискретен систем значи да се определи дали нулите на неговиот карактеристичен полином $a(z)$ лежат во внатрешноста на кругот $|z| \leq 1$. Со други зборови, одредувањето на стабилноста на еден дискретен систем се сведува на одредување на положбата во z -комплексната рамнина на нулите на полиномот $a(z)$ во именителот на неговата преносна функција $G(z)$. Како што ќе видиме во продолжение, тоа може да се направи без пресметување на нивната нумеричка вредност.

Во најопшт случај, карактеристичниот полином на еден дискретен систем е полином од следниот облик:

$$a(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i} \quad (5-27)$$

Меѓутоа, тој секогаш може да се доведе на следниот облик:

$$a(z) = a_0 \left(z^n + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i z^{n-i} \right) = a_0 \tilde{a}(z); \quad \tilde{a}_i = \frac{a_i}{a_0} \quad (5-28)$$

Полиномите $a(z)$ и $\tilde{a}(z)$ имаат исти нули, затоа што нулите на еден полином не се менуваат ако истиот се помножи или подели со константа. Затоа во продолжение ќе

усвоиме дека коефициентот a_0 пред највисокиот степен на комплексната променлива z во полиномот $a(z)$ е еднаков на единица.

Нека нулите на полиномот $a(z)$, под претпоставка, лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$. Ваквиот полином се нарекува **Хурвицов z – полином** по аналогија со Хурвицовиот s – полином кај континуалните системи. За потсетување, Хурвицовиот полином кај континуалните системи е полином чии нули сите лежат во левата полурамнина од s – комплексната рамнина, додека Хурвицовиот полином кај дискретните системи е полином чии сите нули лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z – комплексната рамнина. За да ги разликуваме, првиот го нарекуваме Хурвицов s – полином, а вториот Хурвицов z – полином.

Преку своите нули, z_1, z_2, \dots, z_n , земајќи ја предвид и нивната евентуална кратност, што значи дека во општ случај некои од броевите z_1, z_2, \dots, z_n може да бидат еднакви меѓу себе, полиномот $a(z)$ може да се запише во факторизиран облик на следниот начин:

$$a(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - z_i) = \prod_{i=1}^n (z - z_i); \quad a_0 = 1 \quad (5-29)$$

при што $|z_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Од (5-28) и (5-29) за коефициентите на полиномот $a(z)$ следува:

$$\begin{aligned} |a_1| &= |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| < n \\ |a_2| &= |z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_n + z_2 z_3 + z_2 z_4 + \dots + z_2 z_n + \dots + z_{n-1} z_n| \leq \\ &\leq |z_1 z_2| + |z_1 z_3| + \dots + |z_1 z_n| + |z_2 z_3| + |z_2 z_4| + \dots + |z_2 z_n| + \dots + |z_{n-1} z_n| < \frac{n(n-1)}{2!} \\ |a_{n-1}| &= |z_1 z_2 \dots z_{n-1} + z_1 z_2 \dots z_{n-2} z_n + \dots + z_1 z_n + \dots + z_2 z_3 \dots z_{n-1} z_n| \leq \\ &\leq |z_1 z_2 \dots z_{n-1}| + |z_1 z_2 \dots z_{n-2} z_n| + \dots + |z_2 z_3 \dots z_{n-1} z_n| < n \\ |a_n| &= |z_1 z_2 \dots z_{n-1} z_n| \leq |z_1| |z_2| \dots |z_n| < 1 \end{aligned} \quad (5-30)$$

Оттука, неопходните услови $a(z)$ да биде Хурвицов z – полином гласат:

$$|a_i| < \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-31)$$

Меѓутоа, нужните услови не се и доволни услови. Полиномот $a(z)$ што не ги исполнува условите (5-31), сигурно не е Хурвицов z – полином, а полиномот што ги задоволува овие услови може, но не мора да биде Хурвицов z – полином. Затоа,

покрај проверката на условите (5-31), неопходно е да се спроведе и дополнителна проверка за утврдување на стабилноста на набљудуваниот дискретен систем со карактеристичен полином $a(z)$.

Од досега изложеното произлегува дека при практичната проверка на стабилноста на еден дискретен систем најнапред треба да се провери дали се задоволени неопходните услови за стабилност (5-31), односно да се провери дали набљудуваниот дискретен систем не е стабилен или „претендира“ да биде стабилен. (Овде ќе истакнеме дека има разлика помеѓу тоа дали еден систем не е стабилен или е нестабилен. Ако не е стабилен, тој може да биде нестабилен или да се наоѓа на границата на стабилност. Исто така, системот што ги задоволува нужните услови за стабилност, може, но не мора да биде стабилен и затоа е употребен терминот „претендира“).

Пример 5-2. Да се провери кој од дадените дискретни системи сигурно не е стабилен, а кој од нив претендира да биде стабилен, ако нивните карактеристични полиноми се:

$$a_1(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4 \quad (5-32)$$

$$a_2(z) = z^3 - 0.5z^2 + 0.25z - 0.125 \quad (5-33)$$

Првиот дискретен систем сигурно не е стабилен, бидејќи коефициентите $a_0 = 1$ и $a_3 = -4$ на карактеристичниот полином $a_1(z)$ не го задоволуваат нужниот услов $|a_n| < |a_0| = 1$. И навистина, нулите на полиномот $a_1(z)$ се наоѓаат во точките $z_1 = 1$ и $z_{2,3} = \pm j2$, што значи дека тие не лежат во единичниот круг $|z| \leq 1$. Вториот дискретен системи ги задоволува нужните услови за стабилност, па истиот може, но не мора да биде стабилен. Така, со проверка се утврдува дека вториот систем има полови во точките $z_1 = 0.5$ и $z_{2,3} = \pm j0.5$, кои се наоѓаат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, што значи дека овој систем е навистина стабилен. □

5-2 КРИТЕРИУМИ ЗА КОНТРОЛА НА СТАБИЛНОСТА КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

5-2-1 КОНФОРМНО ПРЕСЛИКУВАЊЕ НА ЕДИНИЧНИОТ КРУГ $|z| \leq 1$ ОД z – КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА ВО s – КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА

Оваа постапка се темели врз особините на т.н. **билинеарна трансформација**:

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (5-34)$$

со која внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ од z – комплексната рамнина конформно се пресликува во левата полурамнина од s – комплексната рамнина. Оваа особина може да се искористи за контрола на стабилноста на дискретните

системи со помош на кој и да било критериум за контрола на стабилноста на континуалните системи. Така, по смената (5-34) во равенката (5-26), се добива:

$$a(z) \Big|_{z=\frac{1+s}{1-s}} = a\left(\frac{1+s}{1-s}\right) = \frac{b(s)}{(1-s)^n} = 0 \quad (5-35)$$

Ако $a(z)$ е Хурвицов z – полином, полиномот $b(s)$ ќе биде Хурвицов s – полином. Следствено, доволно е со кој и да било критериум за иследување на стабилноста на континуалните системи да се провери дали полиномот $b(s)$ е или не е Хурвицов s – полином, за да се заклучи за положбата на нулите на оригиналниот полином $a(z)$ во z – комплексната рамнина.

Коефициентите на соодветните полиноми $b(s)$ добиени врз основа на релацијата (5-35), за полиноми од прв, втор, трет и четврти степен се дадени во таблицата 5-1.

Таблица 5-1 Таблица 5-1 Коефициенти на полиномот $b(s)$ добиен со конформно пресликување на полиномот $a(z)$

n	$a(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$	$b(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^{n-i}$	$b_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$
1	$a_0 z + a_1$	$b_0 s + b_1$	$b_0 = a_0 - a_1$ $b_1 = a_0 + a_1$
2	$a_0 z^2 + a_1 z + a_2$	$b_0 s^2 + b_1 s + b_2$	$b_0 = a_0 - a_1 + a_2$ $b_1 = 2(a_0 - a_2)$ $b_2 = a_0 + a_1 + a_2$
3	$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$	$b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3$	$b_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$ $b_1 = 3(a_0 + a_3) - (a_1 + a_2)$ $b_2 = 3(a_0 - a_3) + (a_1 - a_2)$ $b_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$
4	$a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$	$b_0 s^4 + b_1 s^3 + b_2 s^2 + b_3 s + b_4$	$b_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$ $b_1 = 4(a_0 - a_4) - 2(a_1 - a_3)$ $b_2 = 6(a_0 + a_4) - 2a_2$ $b_3 = 4(a_0 - a_4) + 2(a_1 - a_3)$ $b_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

Пример 5-3. Со помош на билинеарната трансформација (5-34) да се испита стабилноста на дискретните системи, чии карактеристични полиноми се следните:

$$a_1(z) = 2z^3 - z^2 + z - 1 \quad (5-36)$$

$$a_2(z) = z^4 - z^3 + 0.5z^2 - z + 0.5 \quad (5-37)$$

Решение: Полиномот (5-36) ги задоволува нужните услови за стабилност. Следствено, тој може, но не мора да биде Хурвицов z – полином. Дали навистина е Хурвицов z – полином ќе провериме со помош на билинеарната трансформација (5-34). Така, со воведување на смената (5-34) во полиномот (5-36) се добива следниот полином во s – комплексното подрачје:

$$b_1(s) = 5s^3 + 3s^2 + 7s + 1 \quad (5-38)$$

(Коефициентите на полиномот $b_1(s)$ може да се пресметаат и според таблицата 5-1). Со проверка, на пример, според Рут-Шуровиот критериум за стабилност на континуалните системи, лесно може да заклучиме дека полиномот $b_1(s)$ е Хурвицов s – полином. Следствено, полиномот $a_1(z)$ ќе биде Хурвицов z – полином, што значи дека соодветниот дискретен систем е стабилен.

На сличен начин, се утврдува дека полиномот $a_2(z)$ ги задоволува нужните услови за стабилност, па дали навистина е Хурвицов z – полином ќе провериме со помош на билинеарната трансформација (5-34). Така за полиномот $b_2(s)$ се добива:

$$b_2(s) = 4s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 2s = 2s(2s^3 + s^2 + 4s + 1) \quad (5-39)$$

Очигледно, полиномот $b_2(s)$ не е Хурвицов s – полином, бидејќи има пол во точката $s = 0$. Со проверка, на пример, според Рут-Шуровиот критериум, се утврдува дека тој нема нули во десната полурамнина од s – комплексната рамнина. Следствено, може да заклучиме дека дискретниот систем претставен со карактеристичниот полином $a_2(z)$ се наоѓа на границата на стабилност. Навистина, полиномот $a_2(z)$ има еден прост пол во точката $z_1 = 1$, прост реален пол во точката $z_2 = 0.58975$ и пар прости конјугирано комплексни полови во точките $z_{3,4} = 0.3 \pm j0.865$. □

Од таблицата 5-1 се гледа дека коефициентите на полиномот $b(s)$ се линеарни комбинации од коефициентите на оригиналниот полином $a(z)$. Оттука, може да се запише:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{M}_n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (5-40)$$

каде што матриците \mathbf{M}_n за $n = 1, 2, \dots, 7$ се дадени во додатокот 4.

Наместо билинеарната трансформација (5-34), може да се набљудува и билинеарната трансформација:

$$z = \frac{s+1}{s-1} \quad (5-41)$$

со која внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ од z -комплексната рамнина конформно се пресликува во левата полурамнина од s -комплексната рамнина. (Конформно пресликување е такво пресликување при кое аглиите се зачувуваат, додека должините не.) Навистина, ако од (5-41) ја изразиме комплексната променлива s , ќе се добие:

$$s = \frac{z+1}{z-1} \quad (5-42)$$

Комплексната променлива z , пак, преку незиниот модул ρ и аргумент φ може да се претстави на следниот начин:

$$z = \rho e^{j\varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (5-43)$$

при што е:

$$\rho = |z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z} \quad (5-44)$$

и:

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (5-45)$$

Од равенството:

$$s + \bar{s} = 2 \operatorname{Re} s \quad (5-46)$$

непосредно следува:

$$\operatorname{Re} s = \frac{s + \bar{s}}{2} \quad (5-47)$$

Оттука, ако во (5-47) се воведо смената (5-42) ќе се добие:

$$\operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \left(\frac{z+1}{z-1} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \right) = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} - (z + \bar{z}) + 1} \quad (5-48)$$

Изразот:

$$z\bar{z} - (z + \bar{z}) + 1 = |z|^2 - 2 \operatorname{Re} z + 1 = \operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z - 2 \operatorname{Re} z + 1 =$$

$$= (\operatorname{Re} z - 1)^2 + \operatorname{Im}^2 z > 0 \quad (5-49)$$

кој претставува именител во (5-48) очигледно е секогаш позитивен, бидејќи претставува збир од квадрати. Оттука, знакот во изразот (5-48) ќе зависи само од знакот на неговиот броител:

$$z\bar{z} - 1 = |z|^2 - 1 = \rho^2 - 1 \quad (5-50)$$

Нека сега, под претпоставка, точката z , дефинирана со (5-44) и (5-45), припаѓа на внатрешноста од единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, односно нека важи:

$$\rho = |z| < 1 \quad (5-51)$$

Тогаш изразот (5-50) ќе биде секогаш помал од нулата:

$$\rho^2 - 1 < 0 \quad \forall \rho \in (0, 1) \quad (5-52)$$

па, оттука:

$$\operatorname{Re} s = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} - (z + \bar{z}) + 1} = \frac{\rho^2 - 1}{(\operatorname{Re} z - 1)^2 + \operatorname{Im}^2 z} < 0 \quad \forall |z| < 1 \quad (5-53)$$

Со тоа е докажана точноста на тврдењето дека со билинеарната трансформација (5-41), исто како и со билинеарната трансформација (5-34), точките од внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина се пресликуваат во точки од левата полурамнина на s -комплексната рамнина.

По смената (5-41) во карактеристичната равенка (5-26) на набљудуваниот дискретен систем се добива:

$$a(z) \Big|_{z=\frac{s+1}{s-1}} = a\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{c(s)}{(s-1)^n} = 0 \quad (5-54)$$

при што коефициентите на полиномот $c(s)$:

$$c(s) = \sum_{i=0}^n c_i s^{n-i} \quad (5-55)$$

во (5-54) се линеарни комбинации од коефициентите на оригинално испитуваниот полином $a(z)$ во (5-26), односно:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}_n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (5-56)$$

Кога $a(z)$ е Хурвицов z -полином и $c(s)$ е Хурвицов s -полином, што непосредно произлегува од погоре докажаната особина на билинеарната трансформација (5-41), за пресликување на областа $|z| < 1$ од z -комплексната рамнина во областа $\text{Re } s < 0$ во s -комплексната рамнина. Следствено, при испитувањето на стабилноста на линеарните стационарни дискретни динамички системи со карактеристична равенка (5-26), наместо да се набљудува оригиналниот карактеристичен полином $a(z)$, доволно е со кој и да било критериум за иследување на стабилноста на линеарните континуални системи да се провери дали полиномот $c(s)$ од (5-54) е Хурвицов s -полином.

Во таблицата 5-2 се дадени коефициентите на полиномот $c(s)$ за $n=1,2,3,4$, додека матриците \mathbf{P}_n со димензија $n \times n$ од (5-56) за $n=1,2,\dots,7$ се дадени во додатокот 5.

Таблица 5-2 Коефициенти на полиномот $c(s)$ добиен со конформно пресликување на полиномот $a(z)$

n	$a(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}$	$c(s) = \sum_{i=0}^n c_i s^{n-i}$	$c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$
1	$a_0 z + a_1$	$c_0 s + c_1$	$c_0 = a_0 + a_1$ $c_1 = a_0 - a_1$
2	$a_0 z^2 + a_1 z + a_2$	$c_0 s^2 + c_1 s + c_2$	$c_0 = a_0 + a_1 + a_2$ $c_1 = 2(a_0 - a_2)$ $c_2 = a_0 - a_1 + a_2$
3	$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$	$c_0 s^3 + c_1 s^2 + c_2 s + c_3$	$c_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ $c_1 = 3(a_0 - a_3) + (a_1 - a_2)$ $c_2 = 3(a_0 + a_3) - (a_1 + a_2)$ $c_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$
4	$a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$	$c_0 s^4 + c_1 s^3 + c_2 s^2 + c_3 s + c_4$	$c_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ $c_1 = 4(a_0 - a_4) + 2(a_1 - a_3)$ $c_2 = 6(a_0 + a_4) - 2a_2$ $c_3 = 4(a_0 - a_4) - 2(a_1 - a_3)$ $c_4 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4$

Лесно може да се забележи дека меѓу коефициентите c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) на полиномот $c(s)$ добиен со конформното пресликување (5-41) и коефициентите b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) на полиномот $b(s)$ добиен со конформното пресликување (5-34) постои следната врска:

$$c_i = b_{n-i}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5-57)$$

5-2-2 АЛГЕБАРСКИ КРИТЕРИУМ НА I.E. JURY

Алгоритамот за иследување на стабилноста на линеарните стационарни дискретни динамички системи изложен во поглавјето 5-2-1 се помни лесно и обично лесно се применува. Меѓутоа, тој бара претходно пресметување на коефициентите на полиномот $b(s)$ односно полиномот $c(s)$ како функции од коефициентите на оригинално испитуваниот полином $a(z)$. Овие дополнителни пресметки во одредени случаи може да станат неудобни и сложени, посебно кога некои од коефициентите на испитуваниот полином $a(z)$ содржат неопределени параметри (случаи кога се одредува параметарската област на стабилност на испитуваниот дискретен систем). Тогаш множењето во (5-40) односно (5-56) на векторот $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T$ со матрицата \mathbf{M}_n односно \mathbf{P}_n може да биде макотрпно. Со цел да се избегне овој проблем, I. E. Jury (1923-2020) развил алгоритам заснован врз резултатите на A. Marden (1934 -), кој овозможува испитување на стабилноста на дискретните системи директно во z -комплексната рамнина, односно преку коефициентите на карактеристичниот полином $a(z)$ на набљудуваниот дискретен систем.

За карактеристичниот полином на испитуваниот дискретен систем $a(z)$ од обликот (5-27) со $a_0 > 0$, алгоритамот на I. E. Jury е прикажан во таблицата 5-3. Условот $a_0 > 0$ не претставува никакво ограничување, затоа што наместо полиномот $a(z)$ секогаш може да го набљудуваме полиномот $-a(z)$. Притоа редиците на оваа таблица се формираат на следниот начин: Првата редица ги содржи сите коефициенти на карактеристичниот полином $a(z)$ на испитуваниот дискретен систем, подредени по опаѓачки редослед на степените на комплексната променлива z . Во втората редица од таблицата 5-3 овие коефициенти се јавуваат во обратен редослед. Третата редица ја сочинуваат елементите b_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) пресметани на следниот начин:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, \dots, \quad b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (5-58)$$

при што може да се забележи дека детерминантите (5-58) се состојат од парови колони формирани од елементите на првите две редици од таблицата 5-3. Четвртата редица ги има истите елементи како и третата, само подредени во обратен редослед. Елементите на петтата редица ги чинат детерминантите:

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}, c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{vmatrix}, \dots, c_{n-2} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{vmatrix} \quad (5-59)$$

кои се состојат од парови колони формирани од елементите на третата и четвртата редица. Шестата редица е составена од елементите (5-59), подредени во обратен редослед итн. сè додека не се формира $(2n - 3)$ – тата редица со само три елементи s_0, s_1, s_2 . Тогаш условите полиномот (5-27) да биде Хурвицов z – полином, односно сите негови нули да лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$, може да се искажат на следниот начин: Потребни и доволни услови полиномот (5-27) да биде Хурвицов z – полином се:

$$a(1) > 0, (-1)^n a(-1) > 0$$

$$a_0 > |a_n|$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|$$

$$|c_0| > |c_{n-2}|$$

$$|s_0| > |s_2| \quad (5-60)$$

Таблица 5-3 Критериум за стабилност на I. E. Jury

1	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	a_{n-4}	...	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	b_{n-5}	...	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	...	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	c_{n-6}	...	c_0		
...
$2n - 3$	s_0	s_1	s_2			...			

Пример 5-4. Со помош на критериумот на I. E. Jury да се провери дали полиномот:

$$a(z) = 4z^3 - 1.5z^2 - 1.5z - 0.5 \quad (5-61)$$

е Хурвицов z – полином.

Решение: За полиномот (5-61) важи:

$$a(1) = 4 - 1.5 - 1.5 - 0.5 = 0.5 > 0$$

$$(-1)^3 a(-1) = -(-4 - 1.5 + 1.5 - 0.5) = 4.5 > 0 \quad (5-62)$$

Соодветната таблица 5-1 за овој конкретен случај ќе го има изгледот претставен со таблицата 5-2, па, оттука:

$$a_0 = 4 > 0.5 = |a_3|$$

$$|b_0| = 15.75 > 6.75 = |b_2| \quad (5-63)$$

Таблица 5-4

1	4	-1.5	-1.5	-0.5
2	-0.5	-1.5	-1.5	4
3	15.75	-6.75	-6.75	

Очигледно, полиномот (5-61) ги исполнува нужните и доволни услови (5-60). Следствено, тој е Хурвицов z -полином. \square

По правило, постапката на проверка на условите (5-60) завршува со првиот неисполнет услов. Доволно е да не биде задоволен само еден од условите (5-60), па со сигурност да се тврди дека испитуваниот полином $a(z)$ не е Хурвицов z -полином.

Треба да се забележи дека за $n=1$ критериумот на Jury се сведува на условите:

$$a(1) > 0, (-1)^n a(-1) > 0 \quad (5-64)$$

додека за $n=2$ соодветните услови ќе бидат:

$$a(1) > 0, (-1)^n a(-1) > 0$$

$$a_0 > |a_n| \quad (5-65)$$

Очигледно, за $n=2$ Jury-евата таблица содржи само една редица. Секое зголемување на редот на испитуваниот дискретен систем за еден, води кон додавање две нови редици во таблицата на Jury.

5-2-3 КРИТЕРИУМ НА МИХАИЛОВ ЗА ИСПИТУВАЊЕ НА СТАБИЛНОСТА КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Критериумот на Михаилов во основа претставува геометриска интерпретација на познатиот **принцип на аргументот**, кој се засновува врз примента на **Кошиевата теорема на аргументот**. Принципот на аргументот е општ и важи како во s -комплексната рамнина, така и во z -комплексната рамнина. Оттука, критериумот на Михаилов за испитување на стабилноста на линеарните континуални системи има свој аналог кај дискретните системи.

Кошиевата теорема на аргументот во z -комплексната рамнина може да се искаже на следниот начин: Ако $F(z) = P(z)/Q(z)$ е реална рационална функција, а C е затворена контура во z -комплексната рамнина, таква што $F(z)$ нема полови на C и има N нули и P полови во внатрешноста на контурата C , тогаш при еднократно завртување по контурата C во позитивна насока (спротивно од насоката на движење на стрелките од часовникот), со нејзино пресликување преку функцијата $F(z)$ во $F(z)$ -рамнината ќе се добие контура која $(N - P)$ -пати ќе го опфати координатниот почеток во својата рамнина. Тоа значи дека векторот $F(z)$ ќе се заврти околу координатниот почеток во својата рамнина во позитивна насока $(N - P)$ -пати, што може аналитички да се искаже преку прирастот на аргументот на векторот $F(z)$ по контурата C на следниот начин:

$$\Delta_C \arg [F(z)] = 2\pi(N - P) \quad (5-66)$$

Принципот односно критериумот на аргументот следува непосредно од оваа теорема ако се усвои дека $F(z)$ е еднаков на карактеристичниот полином на набљудуваниот линеарен систем $a(z)$, а за контурата C се усвои единичната кружница $|z| = 1$ во z -комплексната рамнина. Бидејќи полиномот $a(z)$ од n -ти степен нема полови и има само нули, во случајот на стабилен дискретен систем сите n нули на карактеристичниот полином $a(z)$ ќе лежат во внатрешноста од контурата C , па Кошиевата теорема на аргументот за набљудуваниот случај се сведува на обликот:

$$\Delta_{C:|z|=1} \arg [a(z)] = \Delta_{-\pi \leq \omega T \leq \pi} \arg [a(j\omega T)] = 2\pi n \quad (5-67)$$

Од друга страна, бидејќи коефициентите на полиномот се реални броеви, долната половина од кружницата ќе се прслика врз горната на идентичен начин, односно:

$$\Delta_{-\pi \leq \omega T \leq 0} \arg [a(j\omega T)] = \Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [a(j\omega T)] \quad (5-68)$$

па, оттука:

$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [a(j\omega T)] = \pi n \quad (5-69)$$

При изведувањето на критериумот на Михаилов за линеарните дискретни динамички системи се поаѓа од карактеристичниот полином $a(z)$ на набљудуваниот дискретен

систем, кој во општ случај (за линеарен дискретен систем од n -ти ред) е полином од n -ти степен од обликот (5-27). Со воведување на смената $z = \exp(j\omega T)$ во (5-27) се добива т.н. **карактеристичен вектор** на иследуваниот дискретен систем или **вектор на Михаилов**:

$$a(j\omega T) = a_0 e^{j\omega T} + a_1 e^{j\omega(n-1)T} + a_2 e^{j\omega(n-2)T} + \dots + a_{n-1} e^{j\omega T} + a_n \quad (5-70)$$

чиј што реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

$$u(\omega T) = \operatorname{Re}[a(j\omega T)] = a_0 \cos(\omega T) + a_1 \cos[\omega(n-1)T] + \dots + a_{n-1} \cos(\omega T) + a_n$$

$$v(\omega T) = \operatorname{Im}[a(j\omega T)] = a_0 \sin(\omega T) + a_1 \sin[\omega(n-1)T] + \dots + a_{n-1} \sin(\omega T) \quad (5-71)$$

Од (5-71) е очигледно дека реалниот дел на векторот на Михаилов е парна, додека имагинарниот дел е непарна функција од честотата ω :

$$u(-\omega T) = u(\omega T)$$

$$v(-\omega T) = -v(\omega T) \quad (5-72)$$

Почетокот на векторот на Михаилов е во точката $(0, j0)$, додека врвот му се наоѓа во точката $[u(\omega_0/2), jv(\omega_0/2)]$ за конкретно ω_0 . При измената на честотата ω од 0 до $\omega_0/2$, каде што ω_0 е фреквенцијата на дискретизација, векторот на Михаилов се врти во комплексната рамнина околу својот почеток, при што неговиот врв опишува крива, која се нарекува **карактеристична крива** или **крива на Михаилов** за иследуваниот дискретен систем. Таа претставува ходограф на векторот на Михаилов за $\omega \in \langle 0, \omega_0/2 \rangle$. Врз основа на нејзиниот тек, односно откако еднаш кривата на Михаилов се нацрта во рамнината на векторот на Михаилов, еднозначно може да се утврди дали карактеристичниот полином $a(z)$ е или не е Хурвицов z -полином и, следствено, дали иследуваниот дискретен систем е или не е стабилен. Имено, Михаилов констатирал дека карактеристичната крива за еден стабилен линеарен стационарен дискретен динамички систем ги поседува следните својства:

- ❖ Почнува на позитивниот дел од реалната оска за $u(0) > 0$, односно на негативниот дел од реалната оска за $u(0) < 0$
- ❖ Се одвива во позитивна насока
- ❖ Не минува низ координатниот почеток за ни една вредност на честотата ω
- ❖ Наизменично ги сече координатните оски
- ❖ Аргументот на векторот на Михаилов монотонно расте во позитивна насока од вредност 0 до вредност $n\pi$, при што вкупната измена на аргументот на векторот на Михаилов изнесува

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg [a(j\omega T)] = n\pi \quad (5-73)$$

Овие особини се прикажани во следниот критериум, наречен **изворен критериум на Михаилов**, кој гласи: полиномот (5-27) е Хурвицов z -полином, односно соодветниот дискретен систем со карактеристичен полином (5-27) е стабилен, само доколку едновременно се исполнети следните три услови

1. Да бидат исполнети нужните услови за стабилност (5-31)
2. Модулот $|a(j\omega T)|$ на векторот на Михаилов (5-70) да биде различен од нула за секое ω
3. Аргументот $\arg[a(j\omega T)]$ на векторот на Михаилов $a(j\omega T)$ при измената на ω од 0 до $\omega_0/2$ монотонно да расте во позитивна насока од вредност 0 до вредност $n\pi$, каде што n е степенот на полиномот $a(z)$, односно редот на испитуваниот дискретен систем.

При доказот на критериумот на Михаилов за линеарните дискретни системи се поаѓа од карактеристичниот полином $a(z)$ на испитуваниот дискретен систем, кој преку своите нули z_1, z_2, \dots, z_n секогаш може да се претстави во следниот факторизиран облик:

$$a(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - z_i) \quad (5-74)$$

Тогаш, со воведување на смената $z = \exp(j\omega T)$ во (5-74), векторот на Михаилов може да се претстави во следниот облик:

$$a(j\omega T) = a_0 \prod_{i=1}^n (e^{j\omega T} - z_i) \quad (5-75)$$

односно како производ од елементарните вектори $e^{j\omega T} - z_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), па, очигледно, модулот на векторот на Михаилов ќе биде производ од модулите на елементарните вектори $e^{j\omega T} - z_i$ ($i=1, 2, \dots, n$):

$$|a(j\omega T)| = |a_0| \prod_{i=1}^n |e^{j\omega T} - z_i| \quad (5-76)$$

а неговиот аргумент ќе биде збир од аргументите на елементарните вектори $e^{j\omega T} - z_i$ ($i=1, 2, \dots, n$):

$$\arg [a(j\omega T)] = \sum_{i=1}^n \arg (e^{j\omega T} - z_i) \quad (5-77)$$

При измената на честотата ω од 0 до $\omega_0/2$, одделните вектори $e^{j\omega T} - z_i$ ќе се завртат во комплексната рамнина за одредени агли, па вкупната измена на аргументот на векторот на Михайлов $a(j\omega T)$, кога ω се менува од 0 до $\omega_0/2$, ќе биде еднаква на збирот од промените на аргументите на елементарните вектори $e^{j\omega T} - z_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg[a(j\omega T)] = \sum_{i=1}^n \Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_i) \quad (5-78)$$

Следствено, за да се определи (5-78), треба да се определат измените на аргументите на елементарните вектори $e^{j\omega T} - z_i$. За таа цел, со оглед на фактот дека нулите на карактеристичниот полином $a(z)$ може да бидат или реални или парови конјугирано-комплексни броеви, во продолжение се разгледувани двата можни случаи.

1) Корените z_i и z_{i+1} на карактеристичниот полином $a(z)$ на иследуваниот дискретен систем чинат еден конјугирано-комплексен пар. Тогаш измената на аргументите на елементарните вектори $e^{j\omega T} - z_i$ и $e^{j\omega T} - z_{i+1}$, кога ω се менува од 0 до $\omega_0/2$, ќе изнесува:

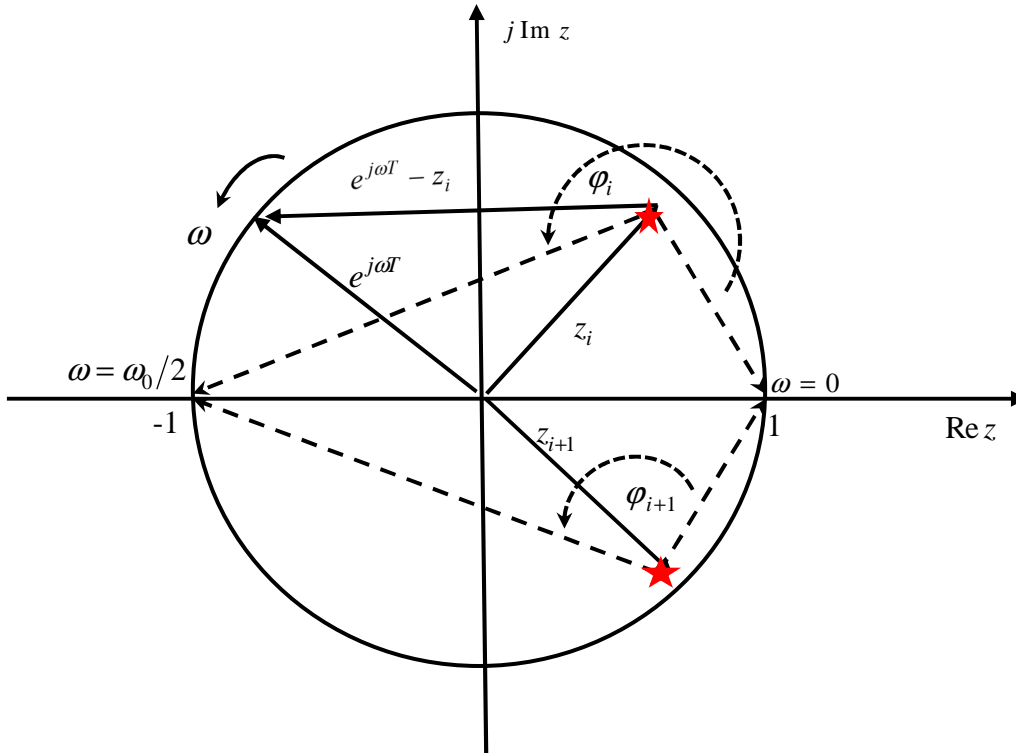
$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_i) + \Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_{i+1}) \quad (5-79)$$

при што $\operatorname{Re} z_{i+1} = \operatorname{Re} z_i$ и $\operatorname{Im} z_{i+1} = -\operatorname{Im} z_i$. Нека, под претпоставка, корените z_i и z_{i+1} лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, односно $|z_i| = |z_{i+1}| < 1$, како што е тоа покажано на сликата 5-3. На сликата 5-3 едновремено се прикажани и векторите $e^{j\omega T}$, $e^{j\omega T} - z_i$ и $e^{j\omega T} - z_{i+1}$. Тогаш, при промена на честотата ω од 0 до $\omega_0/2$, врвот на векторот $e^{j\omega T}$ и, соодветно, и на векторот $e^{j\omega T} - z_i$, ќе се движи по горната половина на единичната кружница $|z| = 1$. Питоа, $e^{j\omega T}$ за $\omega = 0$ е 1, додека за $\omega = \omega_0/2$ изнесува -1 . Следствено, промената на аргументот на векторот $e^{j\omega T} - z_i$, за ω од 0 до $\omega_0/2$, ќе биде еднаква на аголот φ_i . Од друга страна, од сликата 5-3 исто така се гледа дека измената на аргументот на векторот $e^{j\omega T} - z_{i+1}$, за истата промена на честотата ω од 0 до $\omega_0/2$, ќе биде $\varphi_{i+1} = 2\pi - \varphi_i$. Оттука:

$$\begin{aligned} & \Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_i) + \Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_{i+1}) = \\ & = \varphi_i + 2\pi - \varphi_i = 2\pi; \quad |z_i| = |z_{i+1}| < 1 \end{aligned} \quad (5-80)$$

Аналогно се покажува дека ако парот конјугирано-комплексни корени z_i и z_{i+1} лежат надвор од единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, односно $|z_i| = |z_{i+1}| > 1$, како што е тоа покажано на сликата 5-4, важи дека $\varphi_{i+1} = -\varphi_i$, па:

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_i) + \Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_{i+1}) = \varphi_i - \varphi_i = 0; |z_i| = |z_{i+1}| > 1 \quad (5-81)$$



Слика 5-3 Графички приказ на векторите $e^{j\omega T}$, $e^{j\omega T} - z_i$ и $e^{j\omega T} - z_{i+1}$ во z -комплексната рамнина за $|z_i| = |z_{i+1}| < 1$

2) **Коренот z_i на карактеристичниот полином $a(z)$ на иследуваниот дискретен систем е реален број.** Ако коренот z_i е реален број, тој ќе лежи на реалната оска во z -комплексната рамнина. Тогаш, за двата случаи од интерес, $|z_i| < 1$ и $|z_i| > 1$, ќе важи:

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_i) = \pi; |z_i| < 1, \text{Im } z = 0 \quad (5-82)$$

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg(e^{j\omega T} - z_i) = 0; |z_i| > 1, \text{Im } z = 0 \quad (5-83)$$

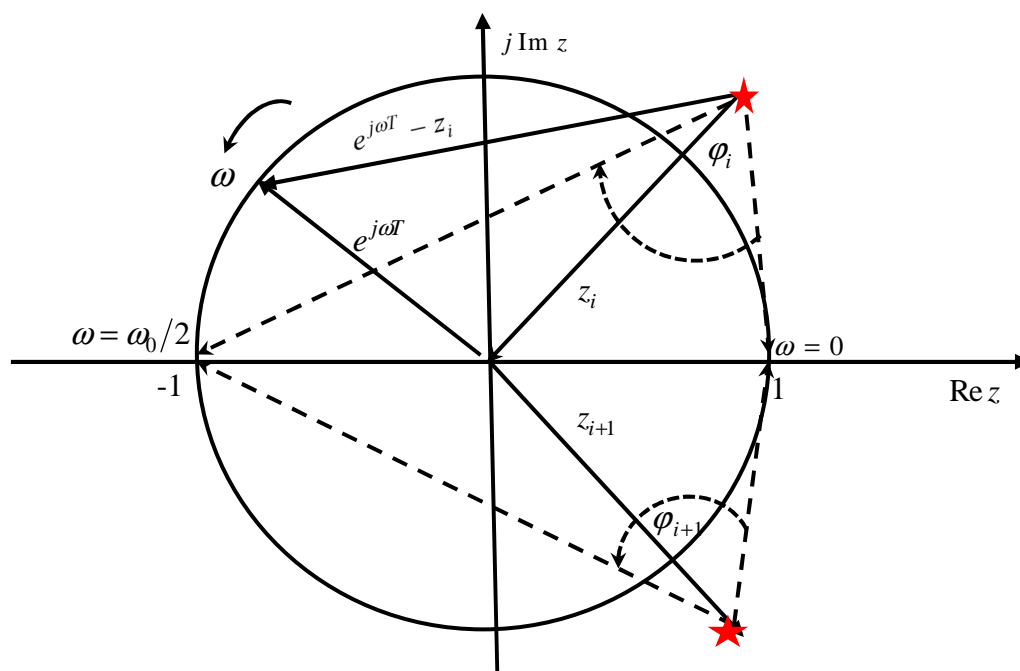
што може да се види од сликата 5-4.

Случајот кога коренот z_i лежи на единичната кружница $|z| = 1$, односно кога $|z_i| = 1$, без оглед на тоа дали z_i е реален или комплексен број, е граничен и може да се приклучи кон соодветниот од двата погоре разгледани случаи. Меѓутоа, за $|z_i| = 1$ набљудуваниот дискретен систем сигурно не е стабилен (во најдобар случај тој може да биде на границата на стабилност), па како таква можност $|z_i| = 1$ не е од интерес при разгледувањето односно дефинирањето на условите за стабилност на линеарните дискретни системи.

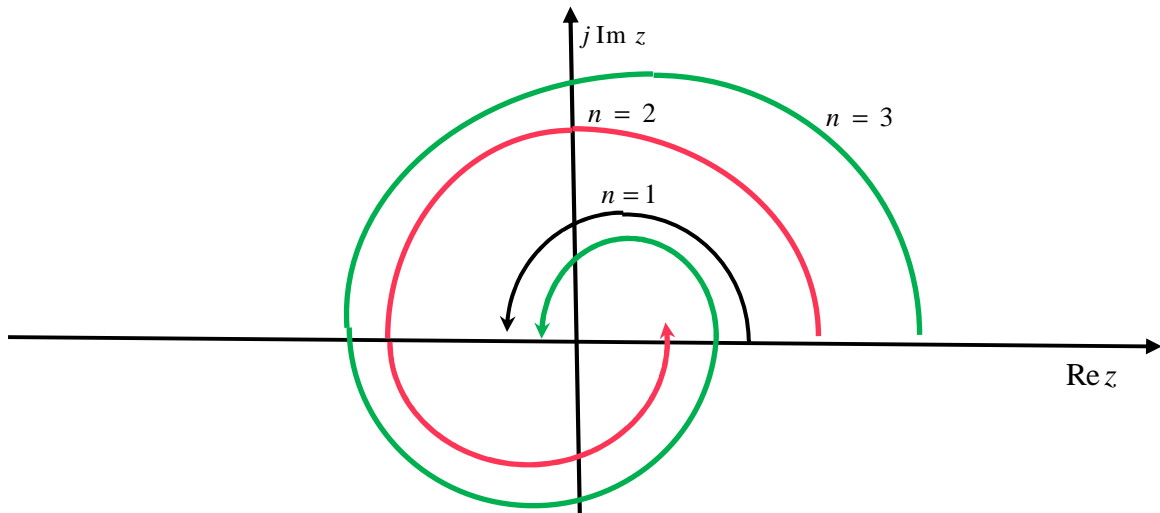
Врз основа на досега изложеното може да се заклучи дека ако сите нули на карактеристичниот полином $a(z)$ лежат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, ќе важи равенството:

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg [a(j\omega T)] = n\pi; |z_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5-84)$$

каде што n е степенот на карактеристичниот полином $a(z)$, односно редот на иследуваниот дискретен систем. Условот (5-84) е математички запис на критериумот на Михаилов за дискретните системи и тој може да се интерпретира на следниот начин: векторот на Михаилов $a(j\omega T)$ на стабилен линеарен стационарен дискретен динамички систем од n -ти ред, при измената на честотата ω од 0 до $\omega_0/2$, ќе се заврти околу својот почеток во позитивна насока за агол еднаков на $n\pi$, при што неговиот ходограф ќе мине низ $2n$ квадранти во z -комплексната рамнина. На сликата 5-5 се прикажани ходографите на векторите $a(j\omega T)$ на стабилни дискретни системи од прв, втор и трет ред.

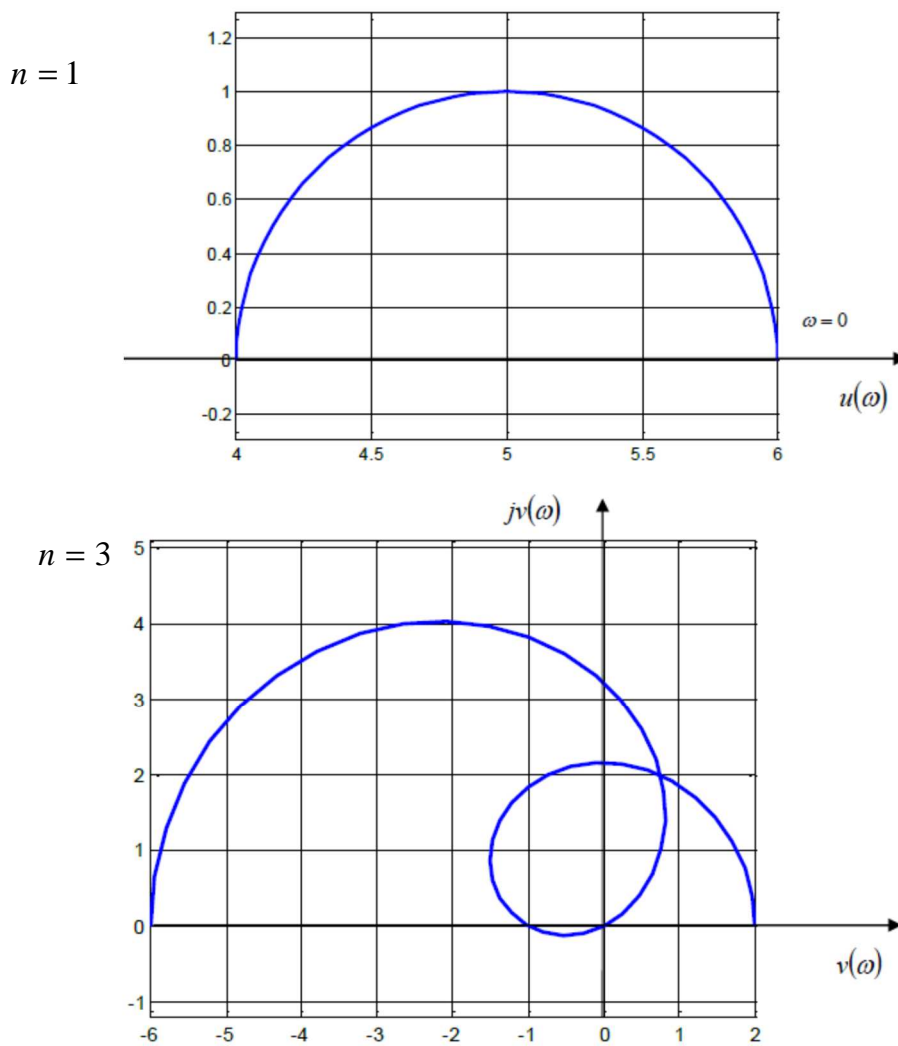


Слика 5-4 Векторите $e^{j\omega T}$, $e^{j\omega T} - z_i$ и $e^{j\omega T} - z_{i+1}$ во z -рамнината за $|z_i| = |z_{i+1}| > 1$



Слика 5-5 Криви на Михаилов за стабилни дискретни системи од прв, втор и трет ред

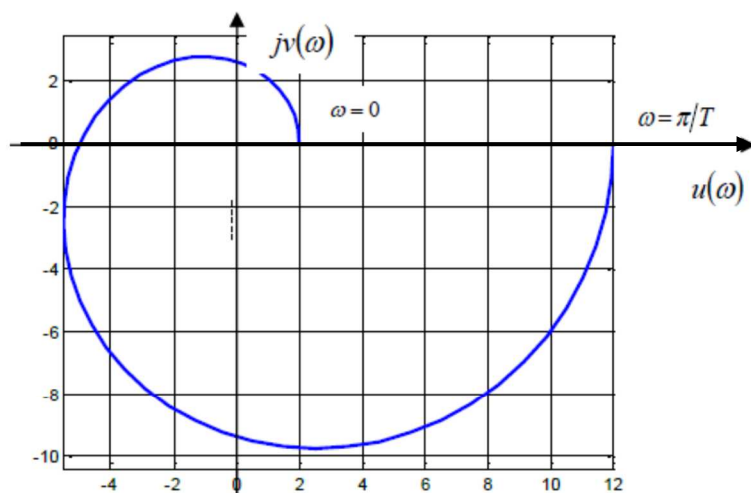
На сликата 5-6 се прикажани ходографите на векторите $a(j\omega T)$ на нестабилни дискретни системи од прв и трет ред.



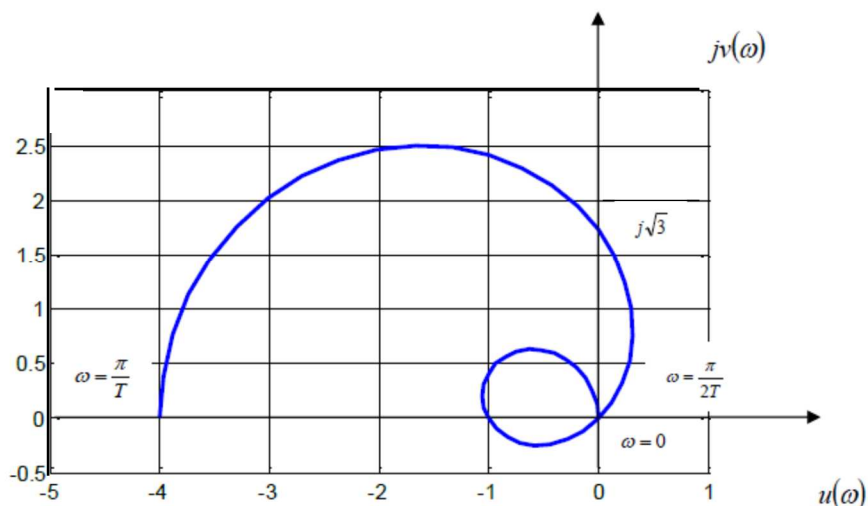
Слика 5-6 Криви на Михаилов за нестабилни дискретни системи од прв и трет ред

Пример 5-5. Со помош на критериумот на Михаилов да се испита стабилноста на линеарните дискретни системи, чии што карактеристични криви се прикажани на сликата 5-7, при што n е редот на соодветниот дискретен систем.

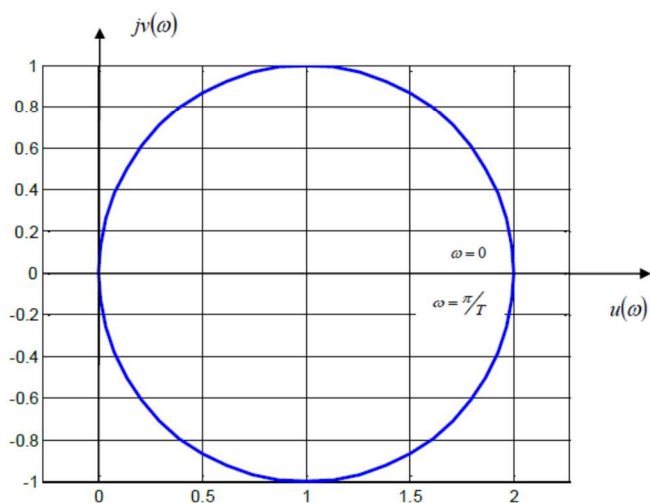
а) $n = 2$



б) $n = 3$



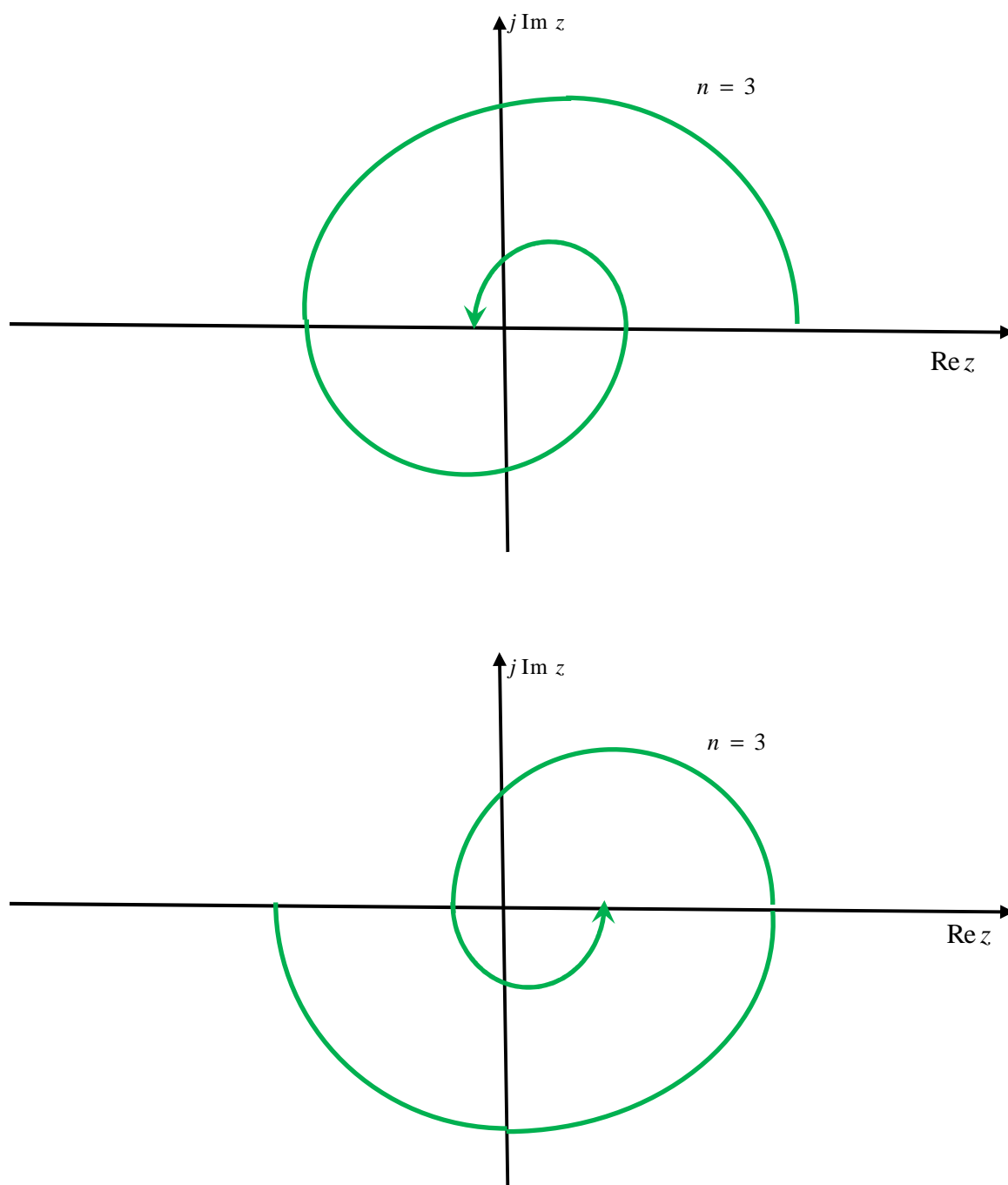
в) $n = 2$



Слика 5-7 Илустрација кон примерот 5-5

Решение: Врз основа на текот на кривите на Михаилов за дадените дискретни системи лесно може да се заклучи дека под а) се работи за стабилен дискретен систем, додека системите под б) и в) се нестабилни, бидејќи, меѓу другото, не го исполнуваат условот $|a(j\omega)| \neq 0 \forall \omega$. \square

Пример 5-6. Со помош на критериумот на Михаилов да се испита стабилноста на затворените дискретни системи од трет ред, чии карактеристични криви се дадени на сликата 5-8.



Слика 5-8 Криви на Михаилов за два дискретни системи од трет ред

Решение: И во двата случаи од сликата 5-8 аргументот на векторот $a(j\omega T)$ монотонно расте во позитивна насока од вредност 0 до вредност $n\pi = 3\pi$:

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg [a(j\omega T)] = n\pi; |z_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5-85)$$

што значи дека соодветните криви на Михаилов се одвиват во позитивна насока, наизменично ги сечат координатните оски и не минуваат низ координатниот почеток за ни едно ω , односно:

$$|a(j\omega)| \neq 0 \quad \forall \omega \quad (5-86)$$

Единствената разлика помеѓу нив е што едната почнува на позитивниот дел од реалната оска, а другата на негативниот. Тоа се должи на знаците на коефициентите на карактеристичниот полином. Имено, за $\omega = 0$:

$$a(j0) = u(0) = \sum_{i=0}^n a_i \quad (5-87)$$

па, кога $u(0) > 0$, кривата на Михаилов на стабилен дискретен систем ќе почне на позитивниот дел од реалната оска, додека за $u(0) < 0$ таа ќе почне на негативниот дел од реалната оска во комплексната рамнина на векторот $a(j\omega T)$. Меѓутоа, и двете криви опишуваат стабилни линеарни дискретни системи. □

Изразот (5-87) го дефинира почетокот на кривата на Михаилов за еден дискретен систем, кој се наоѓа во точката $[u(0), j0]$. Нејзиниот крај е во точката $[u(\omega_0/2), j0]$ и се добива за $\omega = \omega_0/2$:

$$a(j\omega_0 T/2) = a(j\pi) = \sum_{i=0}^n a_i e^{j(n-i)\pi} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} a_i = u(\omega_0 T/2) \quad (5-88)$$

што значи дека кривата на Михаилов кај линеарните дискретни системи започнува за $\omega = 0$ во точка на реалната оска и завршува за $\omega = \omega_0/2$ повторно во точка на реалната оска, за разлика од кривите на Михаилов кај континуалните системи, кои завршуваат за $\omega = \infty$ во точки во бесконечност.

Ако барем една нула z_i на карактеристичниот полином $a(z)$ на набљудуваниот дискретен систем лежи на единичната кружница $|z| = 1$, односно $z_i = e^{j\omega_i T}$ и, следствено, $|z_i| = 1$, тогаш од (5-75) непосредно следува дека $a(j\omega_i T) = 0$, односно ходографот на векторот на Михаилов $a(j\omega T)$ минува низ координатниот почеток во комплексната рамнина за $\omega = \omega_i$. Меѓутоа, во овој случај набљудуваниот дискретен систем сигурно не е стабилен.

Пример 5-7. Со помош на критериумот на Михаилов да се испита стабилноста на линеарниот дискретен систем од прв ред, чиј карактеристичен полином $a(z)$ има облик:

$$a(z) = 2z - 1 \quad (5-89)$$

Решение: Векторот на Михаилов за дадениот дискретен систем е:

$$\begin{aligned} a(j\omega T) &= 2e^{j\omega T} - 1 = 2[\cos(\omega T) + j\sin(\omega T)] - 1 = \\ &= 2\cos(\omega T) - 1 + j2\sin(\omega T) \end{aligned} \quad (5-90)$$

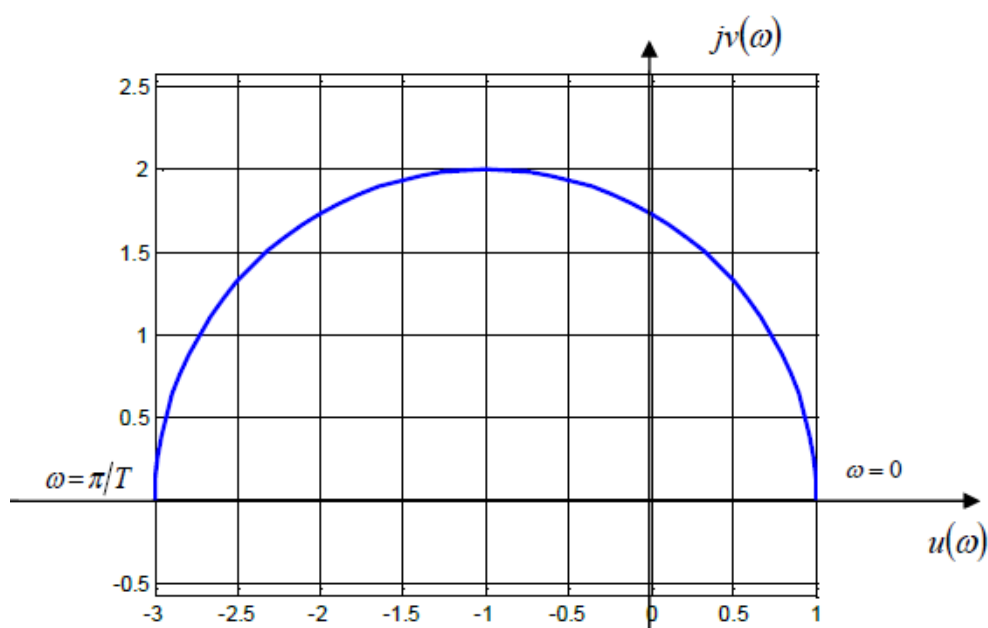
а неговиот реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

$$\begin{aligned} u(\omega T) &= 2\cos(\omega T) - 1 \\ v(\omega T) &= 2\sin(\omega T) \end{aligned} \quad (5-91)$$

Со елиминирање на параметарот ωT од системот равенки (5-91) се добива равенката на карактеристичната крива за набљудуваниот дискретен систем, која има облик:

$$[u(\omega T) + 1]^2 + v^2(\omega T) = 4 \quad (5-92)$$

и таа претставува равенка на кружница со центар во точката $(-1, j0)$ и радиус еднаков на 2.



Слика 5-9 Крива на Михаилов за дискретниот систем од примерот 5-7

За $\omega = 0$ и $\omega = \omega_0/2$ од (5-91) се добива $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, $u(\pi) = -3$ и $v(\pi) = 0$, што значи дека карактеристичната крива на набљудуваниот дискретен систем почнува во точката $(1, j0)$ на позитивниот дел од реалната оска и завршува во точката $(-3, j0)$ на негативниот дел од реалната оска во комплексната рамнина.

Следствено, таа лежи на горната половина од кружницата (5-92) и аналитички е определена со системот равенки (5-91) за $\omega \in \langle 0, \omega_0/2 \rangle$. Кривата на Михаилов за набљудуваниот дискретен систем од примерот графички е прикажана на сликата 5-9. Врз основа на нејзиниот тек и фактот дека:

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_0/2} \arg [a(j\omega T)] = n\pi = \pi \quad (5-93)$$

се заклучува дека набљудуваниот дискретен систем со карактеристичен полином (5-89) е стабилен. \square

Од изворниот критериум на Михаилов и од особините на кривата на Михаилов за стабилен дискретен систем произлегува т.н. **модифициран критериум на Михаилов** за испитување на стабилноста на линеарните стационарни дискретни динамички системи, кој може да се искаже на следниот начин: Линеарниот дискретен систем со карактеристичен полином $a(z)$ од обликот (5-27) ќе биде стабилен ако и само ако едновремено се исполнети следниве две барања:

1) кривата на Михаилов за набљудуваниот дискретен систем да започнува за $\omega = 0$ во точка на позитивниот дел од реалната оска во комплексната рамнина на векторот на Михаилов и да завршува за $\omega = \omega_0/2$ во точка на негативниот дел од реалната оска за n непарно, односно во точка на позитивниот дел од реалната оска за n парно, што математички се искажува на следниот начин:

$$a(j0) > 0, \begin{cases} a(j\omega_0 T/2) < 0 \text{ за } n \text{ непарно} \\ a(j\omega_0 T/2) > 0 \text{ за } n \text{ парно} \end{cases} \quad (5-94)$$

притоа n е редот на иследуваниот дискретен систем. Овој услов може да се искаже и на алтернативен начин:

$$a(j0) < 0, \begin{cases} a(j\omega_0 T/2) > 0 \text{ за } n \text{ непарно} \\ a(j\omega_0 T/2) < 0 \text{ за } n \text{ парно} \end{cases} \quad (5-95)$$

2) Кривата на Михаилов мора да се одвива во позитивна насока и наизменично да ги сече координатните оски од комплексната рамнина, што математички се искажува на следниот начин:

$$\left[\frac{dv(\omega T)}{d\omega} \right]_{\omega=0} > 0 \quad (5-96)$$

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{2\nu} < \omega_{2\nu+1} < \dots < \omega_0/2 \quad (5-97)$$

каде што $\omega_{2\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) се корени на равенката:

$$v(\omega T) = \text{Im}[a(j\omega T)] = 0 \quad (5-98)$$

и ги дефинираат пресеците со реалната оска, а $\omega_{2\nu+1} (\nu = 0, 1, 2, \dots)$ се решенија на равенката:

$$u(\omega T) = \text{Re}[a(j\omega T)] = 0 \quad (5-99)$$

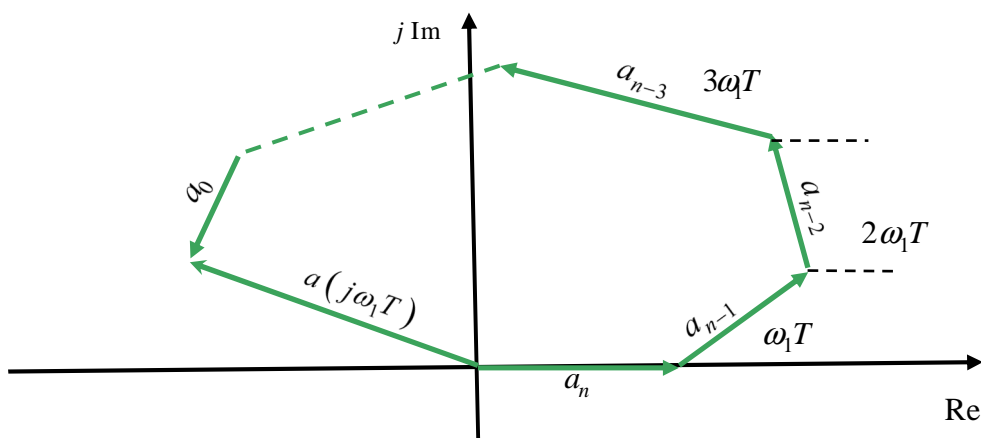
и ги дефинираат пресеците со имагинарната оска.

Условите (5-94) односно (5-95) се само нужни, но не и доволни услови. Меѓутоа, ако тие не се исполнети, непотребно е конструирањето на кривата на Михаилов за набљудуваниот дискретен систем и натамошните проверки, зошто системот сигурно не е стабилен.

Инаку, кривата на Михаилов за даден систем, односно ходографот на векторот на Михаилов $a(j\omega T)$, може да се определи и по графички пат на следниот начин. За фиксна честота $\omega = \omega_1$ од (5-70) се добива:

$$a(j\omega_1 T) = a_0 e^{j\omega_1 n T} + a_1 e^{j\omega_1 (n-1) T} + a_2 e^{j\omega_1 (n-2) T} + \dots + a_{n-1} e^{j\omega_1 T} + a_n \quad (5-100)$$

Следствено, векторот $a(j\omega_1 T)$ претставува збир од вектори од обликот $a_i e^{j\omega_1 (n-i) T}$ кои што имаат модул еднаков на $|a_i|$ и фаза еднаква на $\omega_1 (n-i) T$ за $i = 0, 1, 2, \dots, n$. На сликата 5-10 е прикажана соодветната геометриска конструкција на векторот $a(j\omega_1 T)$. Постапката се повторува за различни честоти ω од интервалот $\omega \in \langle 0, \omega_0/2 \rangle$ и така се добива бараното геометриско место на точки во комплексната рамнина, кое ја дефинира кривата на Михаилов за набљудуваниот дискретен систем.



Слика 5-10 Геометриска конструкција на векторот $a(j\omega_1 T)$

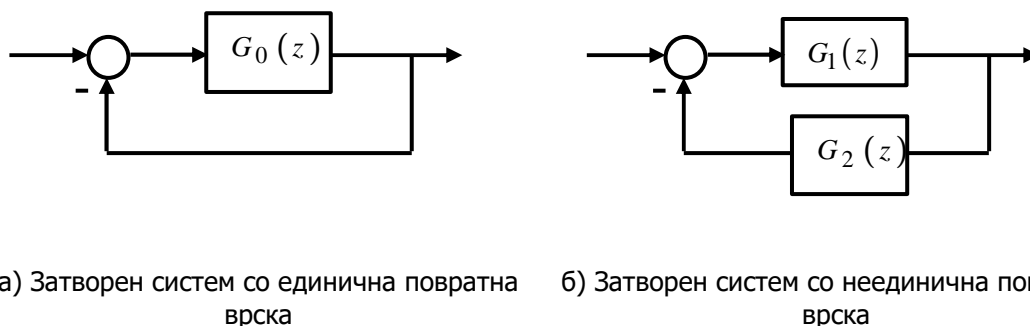
5-2-4 НАЈКВИСТОВ КРИТЕРИУМ ЗА СТАБИЛНОСТ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

Како и критериумот на Михаилов, така и критериумот на Најквист се засновува врз принципот на аргумент, кој важи како во s -така и во z -комплексната рамнина. Оттаму, критериумот на Најквист, исто како и критериумот на Михаилов, е подеднакво применлив како за испитување на стабилноста на линеарните континуални системи, така и за испитување на стабилноста на линеарните дискретни системи.

Со Најквистовиот критериум за стабилност се испитува стабилноста на еден затворен систем со единична негативна повратна врска, врз основа на фреквенциската карактеристика на соодветниот отворен систем. Во тоа се состои и неговата предност над останатите критериуми за иследување на стабилноста на линеарните континуални и дискретни системи. Имено, фреквенциската карактеристика на еден систем секогаш може да се сними по експериментален пат, што овозможува анализа на конкретниот систем и кога неговата преносна функција не е позната. Во продолжение е изложен Најквистовиот критериум за испитување на стабилноста кај дискретните системи.

Со примена на правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи и правилата на алгебрата на блок-шемите, структурата на секој еден затворен дискретен систем може да се сведе на една од двете блок-шеми прикажани на сликата 5-11.

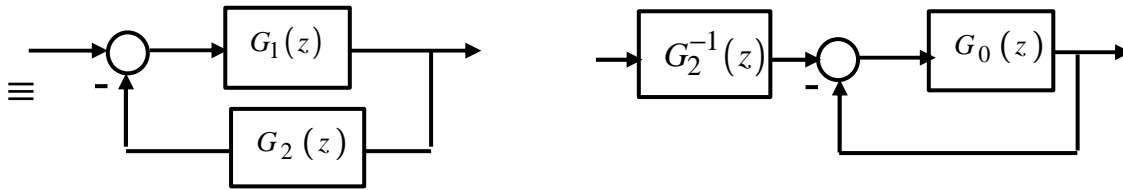
Најквистовиот критериум се применува за иследување на стабилноста на затворените системи со единична негативна повратна врска. Меѓутоа, и затворените системи со неединична повратна врска може да се направат со единична негативна повратна врска, како што е покажано на сликата 5-12. Тогаш Најквистовиот критериум се применува на затворениот систем со единична негативна повратна врска, додека стабилноста на блокот со преносна функција $G_2^{-1}(z)$ мора да се испита посебно.



Слика 5-11 Основна структура на затворен дискретен систем

Нека $G(z)$ е дискретната преносна функција на еден затворен систем со единична негативна повратна врска, чиј соодветен отворен систем има дискретна преносна функција $G_0(z)$:

$$G(z) = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)} = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (5-101)$$



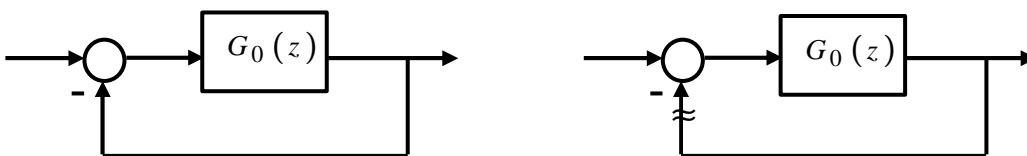
Слика 5-12 Трансформација на дискретен систем со неединична повратна врска во систем со единична повратна врска

Најквистовиот критериум за дискретните системи следува непосредно од Кошиевата теорема на аргументот кога ќе се усвои $F(z) = 1 + G_0(z)$ и за контурата C се усвои надворешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина.

При изведувањето на Најквистовиот критериум за иследување на стабилноста на затворените дискретни системи се поаѓа од дискретната преносна функција на соодветниот отворен систем $G_0(z)$ со следниот општ облик:

$$G_0(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (5-102)$$

која се добива со сведување на иследуваниот затворен дискретен систем на основната структура од слика 5-13 а) и мисловно прекинување на повратната врска непосредно пред компараторот, како што е покажано на сликата 5-13 б). Бидејќи се работи за затворен дискретен систем со единична негативна повратна врска, и отворениот и затворениот систем ќе имаат ист ред n .



а) Основна структурна блок-шема на еден затворен линеарен дискретен систем

б) Системот од сликата а) во отворена повратна врска

Слика 5-13 Дефиниција на отворен систем за даден затворен дискретен систем

Карактеристичната равенка на затворениот дискретен систем е:

$$a(z) = 1 + G_0(z) = 0 \quad (5-103)$$

па, потребни и доволни услови за стабилност на овој систем се сите корени на карактеристичната равенка (5-103) да се наоѓаат во внатрешноста на единичниот круг $|z| \leq 1$ во z -комплексната рамнина, односно да лежат во областа $|z| < 1$, или, што е еквивалентно, полиномот $a(z)$ да биде Хурвицов z -полином.

Функцијата:

$$F(z) = 1 + G_0(z) = 1 + \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{A(z) + B(z)}{A(z)} = \frac{a(z)}{A(z)} \quad (5-104)$$

во именителот на преносната функција $G(z)$ е реална дробно-рационална функција од комплексната променлива z , чиј броител $a(z)$ е карактеристичниот полином на иследуваниот затворен систем, додека именителот $A(z)$ е карактеристичен полином на соодветниот отворен систем. Тогаш потребните и доволни услови за стабилност на затворениот дискретен систем се сведуваат на условот функцијата $F(z)$ да нема нули во областа $|z| \geq 1$.

Со смената $z = e^{j\omega T}$, од изразот за преносната функција на отворениот систем $G_0(z)$ се добива изразот за неговата фреквенциска преносна функција $G_0(j\omega T)$:

$$G_0(j\omega T) = \frac{B(j\omega T)}{A(j\omega T)} = U(\omega T) + jV(\omega T) = G_0(\omega T) e^{j\varphi(\omega T)} \quad (5-105)$$

каде што:

$$G_0(\omega T) = |G_0(j\omega T)| = \sqrt{U^2(\omega T) + V^2(\omega T)} \quad (5-106)$$

$$\varphi(\omega T) = \arg[G_0(j\omega T)] = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega T)}{U(\omega T)} \quad (5-107)$$

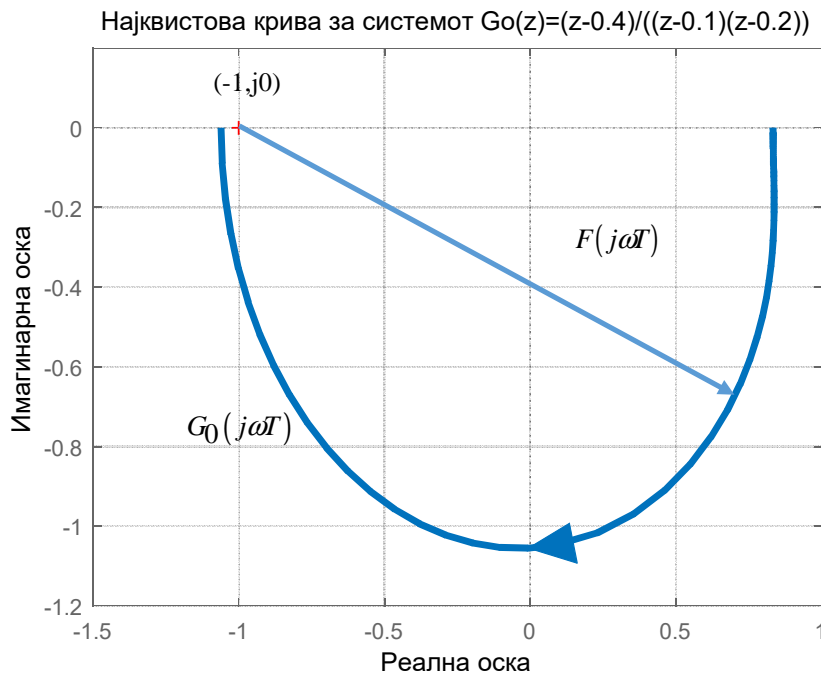
Едновремено, со истата смена $z = e^{j\omega T}$, од изразот за $G(z)$, се добива фреквенциската преносна функција на затворениот систем $G(j\omega T)$:

$$G(j\omega T) = \frac{G_0(j\omega T)}{1 + G_0(j\omega T)} \quad (5-108)$$

чијшто именител е векторот:

$$F(j\omega T) = 1 + G_0(j\omega T) \quad (5-109)$$

Овој вектор има почеток во точката $(-1, j0)$, а врвот му лежи на фреквенциската карактеристика на отворениот систем, како што е покажано на сликата 5-14.

Слика 5-14 Векторот $F(j\omega T)$ во комплексната рамнина

Кога фреквенцијата ω се менува во интервалот $\omega T \in \langle 0, \pi \rangle$, векторот $F(j\omega T)$ се врти во комплексната рамнина околу својот почеток, а неговиот врв се движи по целата фреквенциска карактеристика на соодветниот отворен систем $G_0(j\omega T)$. Најквистовиот критериум за иследување на стабилноста на затворените дискретни системи е врзан со движењето на векторот $F(j\omega T)$ во комплексната рамнина, односно со измената на неговиот аргумент кога фреквенцијата ω се менува во интервалот $\omega T \in \langle 0, \pi \rangle$ и може да се искаже на следниот начин: Потребен и доволен услов за стабилност на затворениот дискретен систем со единична негативна повратна врска е при измената на фреквенцијата ω во интервалот $\omega T \in \langle 0, \pi \rangle$, векторот $F(j\omega T)$ да се заврти во позитивна насока околу својот почеток $(-1, j0)$ во комплексната рамнина за агол $p_0\pi$, каде што p_0 е бројот полови на отворениот систем $G_0(z)$ со модул поголем од единица.

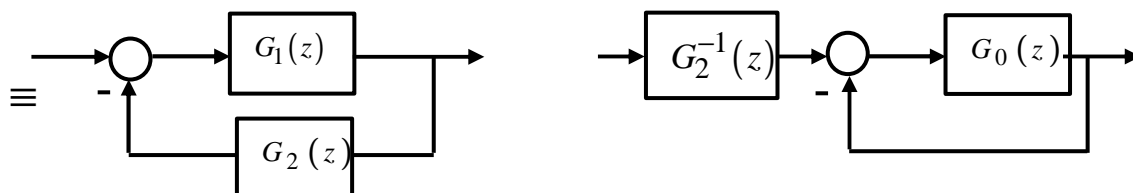
Со оглед на значењето на точката $(-1, j0)$ при дефинирањето на Најквистовиот критериум за стабилност, таа уште се нарекува и **критична точка**. Така, со помош на критичната точка, Најквистовиот критериум за иследување на стабилноста на линеарните дискретни системи може да се искаже на следниот начин: затворениот дискретен систем е сигурно стабилен, доколку фреквенциската карактеристика на соодветниот отворен систем ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$ точно $p_0/2$ – пати, каде што p_0 е бројот полови на отворениот систем $G_0(z)$ со модул поголем од единица. Доколку отворениот систем е стабилен, односно нема полови со модул поголем од единица ($p_0 = 0$) и во тој случај Најквистовиот критериум може да се искаже на следниот начин: доколку отворениот систем нема полови во надворешноста на единичниот круг во z – комплексната рамнина, затворениот

дискретен систем ќе биде стабилен доколку фреквенциската карактеристика на отворениот систем не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$.

Пример 5-8. Со помош на Најквистовиот критериум да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем со неединична негативна повратна врска од сликата 5-15, ако:

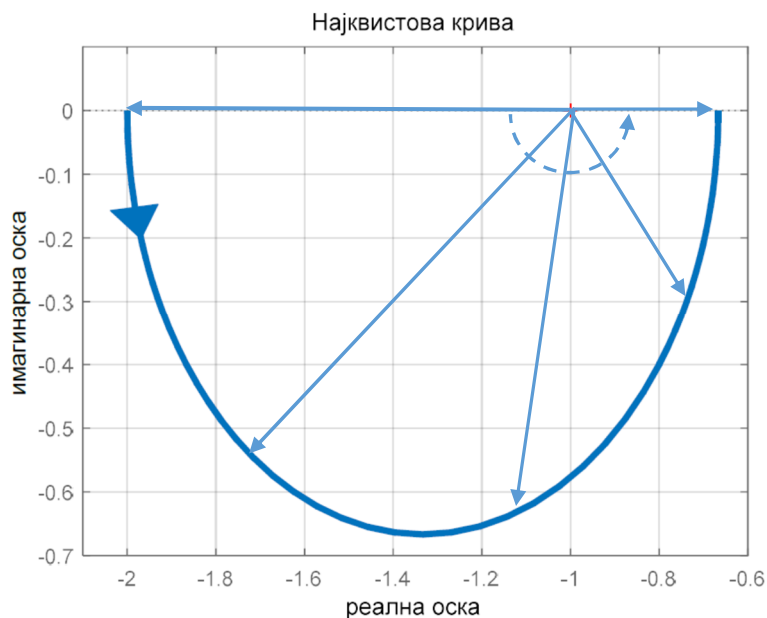
$$G_1(z) = \frac{2}{z - 0.5} \quad (5-110)$$

$$G_2(z) = \frac{z - 0.5}{z - 2} \quad (5-111)$$



Слика 5-15 Илустрација кон примерот 5-8

Решение: Фреквенциската преносна функција на отворениот систем е прикажана на сликата 5-16.



Слика 5-16 Фреквенциска карактеристика на отворениот систем (5-106)

Оттука се гледа дека затворениот дискретен систем е стабилен, бидејќи компонентата $G_2^{-1}(z)$:

$$G_2^{-1}(z) = \frac{z-2}{z-0.5} \quad (5-112)$$

има само еден позитивен пол со модул помал од единица, а фреквенциската карактеристика на отворениот систем $G_0(z)$:

$$G_0(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{2}{z-0.5} \cdot \frac{z-0.5}{z-2} = \frac{2}{z-2} \quad (5-113)$$

ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$ $p_0/2$ – пати, каде што $p_0 = 1$ е бројот полови на отворениот систем со модул поголем од единица. \square

Најквистовиот критериум за иследување на стабилноста на затворените дискретни системи математички се искажува на следниот начин:

$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [F(j\omega T)] = p_0\pi = \frac{p_0}{2} \cdot 2\pi \quad (5-114)$$

Следствено, за да се испита стабилноста на еден затворен дискретен систем со единична негативна повратна врска со Најквистовиот критериум, најнапред треба да се нацрта фреквенциската карактеристика на соодветниот отворен систем, и потоа да се пресмета вкупниот агол што ќе го опише векторот $F(j\omega T)$ кога се врти во комплексната рамнина околу својот почеток при измена на фреквенцијата ω во интервалот $\omega T \in \langle 0, \pi \rangle$. Оттаму овој критериум е графо-аналитички критериум.

Кога отворениот систем нема полови во точката $z=1$, односно нема астатизам, примената на Најквистовиот критериум е директна, но кога отворениот систем има астатизам од произволен ред, најнапред неговата фреквенциска карактеристика треба да се надополни со соодветниот лак на астатизам, па дури потоа да се примени Најквистовиот критериум. Во овој случај векторот $F(j\omega T)$ најнапред се движи по лакот на астатизам сè додека не дојде до фреквенциската карактеристика на отворениот систем и потоа продолжува по неа, како што е илустрирано со следниот пример 5-9.

Пример 5-9. Со помош на Најквистовиот критериум да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad |z| > 2 \quad (5-115)$$

Решение: За фреквенциската преносна функција на отворениот дискретен систем се добива:

$$\begin{aligned}
 G_0(e^{j\omega T}) &= \frac{1}{(e^{j\omega T} - 1)(e^{j\omega T} - 2)} = \frac{(e^{-j\omega T} - 1)(e^{-j\omega T} - 2)}{(e^{j\omega T} - 1)(e^{j\omega T} - 2)(e^{-j\omega T} - 1)(e^{-j\omega T} - 2)} = \\
 &= \frac{e^{-j2\omega T} - 3e^{-j\omega T} + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = \\
 &= \frac{\cos(2\omega T) - j\sin(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + j3\sin(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = \\
 &= \frac{\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} + j \frac{3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T)}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} \quad (5-116)
 \end{aligned}$$

Оттука, реалниот и имагинарниот дел се дадени со изразите:

$$U_0(\omega) = \frac{\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} \quad (5-117)$$

$$V_0(\omega) = \frac{3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T)}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} \quad (5-118)$$

Почетокот на фреквенциската карактеристика е во точката $[U_0(0), jV_0(0)]$:

$$\begin{aligned}
 U_0(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} U_0(\omega T) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-2T\sin(2\omega T) + 3T\sin(\omega T)}{2T\sin(\omega T)[9 - 8\cos(\omega T)]} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{3 - 4\cos(\omega T)}{2[9 - 8\cos(\omega T)]} = \frac{-1}{2} \quad (5-119)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_0(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} V_0(\omega T) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T)}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{3T\cos(\omega T) - 2T\cos(2\omega T)}{2T\sin(\omega T)[9 - 8\cos(\omega T)]} = +\infty \quad (5-120)
 \end{aligned}$$

пресеците со координатните оски се одредени со решенијата на следните равенки:

$$U_0(\omega) = \frac{\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = 0 \Rightarrow \text{пресек со Im-оска}$$

$$\cos(2\omega T) - 3\cos(\omega T) + 2 = 2\cos^2(\omega T) - 3\cos(\omega T) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\cos(\omega T) = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = 0.3820 \Rightarrow \omega T = \arccos(0.3820) = 1.1788$$

$$V_0(1.18/T) = \frac{3(0.9242) - 0.9242}{2[1 - 0.382] \cdot [5 - 4(0.382)]} = 0.48 \quad (5-121)$$

$$V_0(\omega) = \frac{3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T)}{2[1 - \cos(\omega T)] \cdot [5 - 4\cos(\omega T)]} = 0 \Rightarrow \text{нема пресек со Re-оска}$$

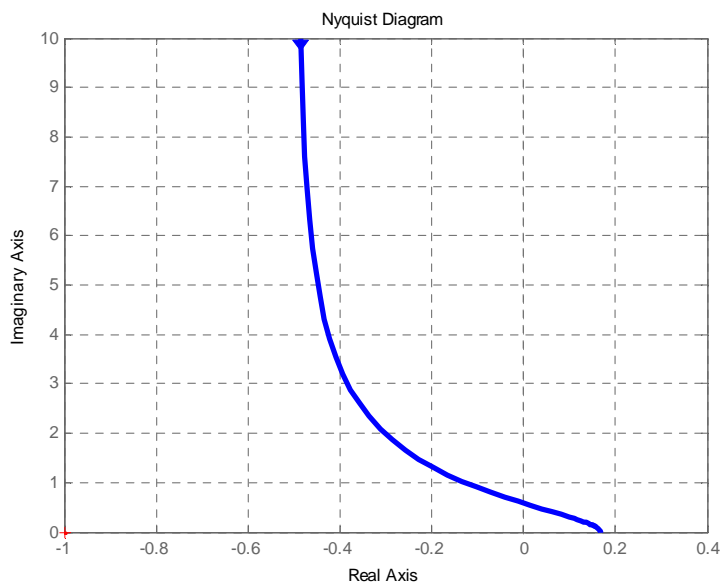
$$3\sin(\omega T) - \sin(2\omega T) = \sin(\omega T)[3 - 2\cos(\omega T)] = 0 \Rightarrow \cos(\omega T) = 1.5 > 1 \quad (5-122)$$

и завршува за $\omega T = \pi$ во точката $[U_0(\pi), jV_0(\pi)]$

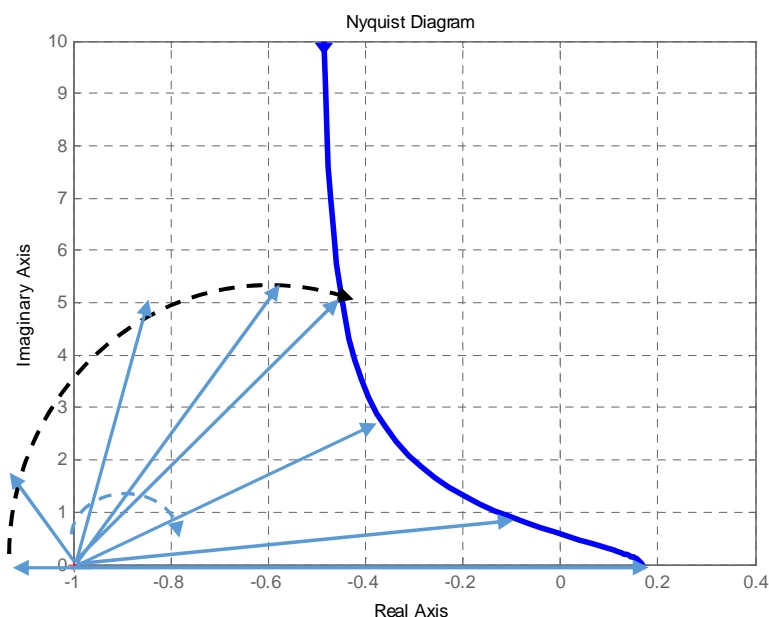
$$U_0(\pi) = \lim_{\omega T \rightarrow \pi} U_0(\omega T) = \lim_{\omega T \rightarrow \pi} \frac{\cos(2\pi) - 3\cos(\pi) + 2}{2[1 - \cos(\pi)] \cdot [5 - 4\cos(\pi)]} = \frac{1}{6} \quad (5-123)$$

$$V_0(\pi) = \lim_{\omega T \rightarrow \pi} V_0(\omega T) = 0 \quad (5-124)$$

Карактеристиката е прикажана на сликата 5-17. Системот од примерот 5-9 има прост пол во точката $z = 1$, следствено тој има астатизам од прв ред, и $b(1)c(1) < 0$. Оттаму, неговиот лак на астатизам ќе започне на негативниот дел од реалната оска во бесконечност, ќе се одвива во негативна насока, ќе опфаќа агол од $-\pi/2$ и ќе изгледа како на сликата 5-18.



Слика 5-17 Фреквенциска карактеристика на отворениот систем од примерот 5-9



Слика 5-18 Фреквенциската карактеристика од сликата 5-17 со лак на астатизам

Сега може да се пресмета вкупниот агол што ќе го опише векторот $F(j\omega T)$ кога ќе се заврти во комплексната рамнина околу својот почеток при измена на фреквенцијата ω во интервалот $\omega T \in (0, \pi)$:

$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [F(j\omega T)] = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \neq p_0\pi = \pi \quad (5-125)$$

Следствено, затворениот систем не е стабилен. Тоа лесно може да се потврди ако се увиди дека карактеристичниот полином на затворениот систем не го задоволува ни нужниот услов за стабилност $|a_0| > |a_2|$, бидејќи $a_0 = 1$ и $a_2 = 3$:

$$a(z) = z^2 - 3z + 3 \quad \square \quad (5-126)$$

Во продолжение е даден доказот на Најквистовиот критериум за стабилност кај дискретните системи преку следење на движењето на векторот $F(j\omega T)$ во комплексната рамнина. Притоа се набљудуваат следните три случаи:

1) **Отворениот дискретен систем е стабилен** ($p_0 = 0$). Тоа значи дека сите корени на карактеристичната равенка:

$$A(z) = 0 \quad (5-127)$$

на отворениот дискретен систем $G_0(z)$ лежат во внатрешноста на единичниот круг $z \leq 1$ во z -комплексната рамнина. Тогаш, врз основа на принципот на аргументот за карактеристичниот полином на еден систем (критериумот на Михаилов) следува:

$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [A(j\omega T)] = n\pi \quad (5-128)$$

каде што n е степенот на карактеристичната равенка односно карактеристичниот полином на отворениот систем, што е еднакво со неговиот ред.

За да биде затворениот дискретен систем од n -ти ред стабилен треба врз основа на истиот принцип на аргумент да биде:

$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [a(j\omega T)] = n\pi \quad (5-129)$$

каде што $a(j\omega T)$ е карактеристичниот вектор на затворениот систем $G(z)$, и едновременно броител на изразот:

$$F(j\omega T) = 1 + G_0(j\omega T) = 1 + \frac{B(j\omega T)}{A(j\omega T)} = \frac{A(j\omega T) + B(j\omega T)}{A(j\omega T)} = \frac{a(j\omega T)}{A(j\omega T)} \quad (5-130)$$

Тогаш, аргументот на векторот $F(j\omega T)$ ќе биде:

$$\arg [F(j\omega T)] = \arg [a(j\omega T)] - \arg [A(j\omega T)] \quad (5-131)$$

а неговата вкупна измена кога фреквенцијата ω се менува во интервалот $\omega T \in \langle 0, \pi \rangle$ е:

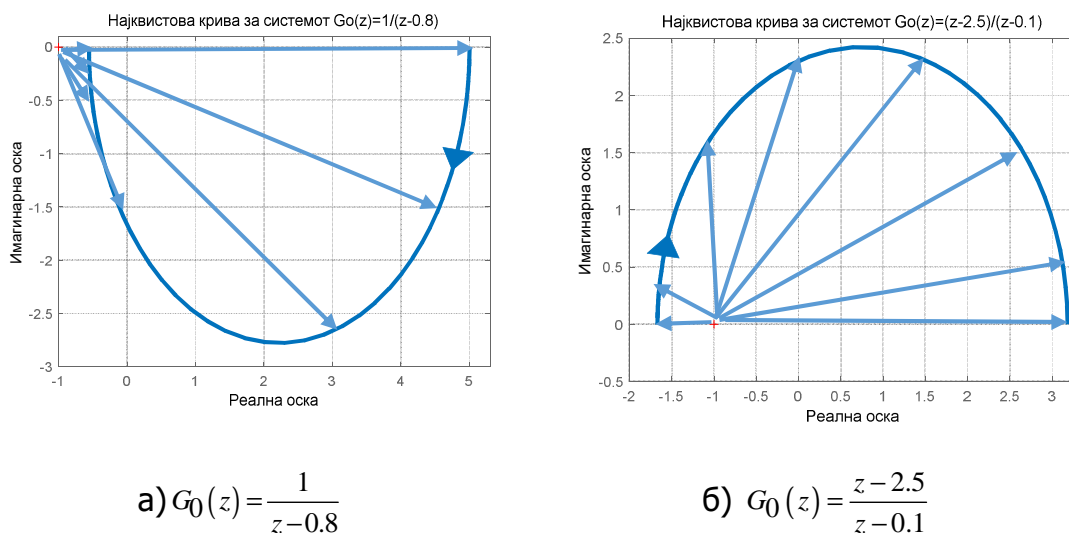
$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [F(j\omega T)] = \Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [a(j\omega T)] - \Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [A(j\omega T)] \quad (5-132)$$

Врз основа на (5-128) и (5-129) од (5-132) непосредно следува дека:

$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [F(j\omega T)] = n\pi - n\pi = 0 \quad (5-133)$$

Следствено, Најквистовиот критериум за стабилност на еден затворен дискретен систем со единична негативна повратна врска при стабилен отворен систем може да се формулира на следниот начин: за да биде стабилен затворениот дискретен систем при стабилен отворен систем потребен и доволен услов е вкупната измена на аргументот на векторот $F(j\omega T)$ кога фреквенцијата ω се менува во интервалот $\omega T \in (0, \pi)$ да биде еднаква на нула, или, што е еквивалентно, фреквенциската карактеристика на отворениот систем да не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$.

На сликата 5-19 се прикажани два случаи: кога критичната точка $(-1, j0)$ односно почетокот на векторот $F(j\omega T)$ се наоѓа надвор од фреквенциската карактеристика на стабилен отворен дискретен систем, и кога критичната точка $(-1, j0)$ е опфатена со ходографот на векторот $G_0(j\omega T)$ исто така на стабилен отворен дискретен систем.



Слика 5-19 Примери на а) стабилен и б) нестабилен затворен дискретен систем при стабилни отворени дискретни системи

Лесно се проверува дека во првиот случај е задоволен условот (5-133), додека во вториот не е.

2)Отворениот дискретен систем е нестабилен. Тоа значи дека некои од корените на карактеристичната равенка на отворениот систем (5-127) се наоѓаат надвор од единичниот круг $z \leq 1$ во z -комплексната рамнина. Нека нивниот број го означиме со p_0 . Тогаш, во согласност со Михаиловиот критериум за нестабилен отворен систем се добива:

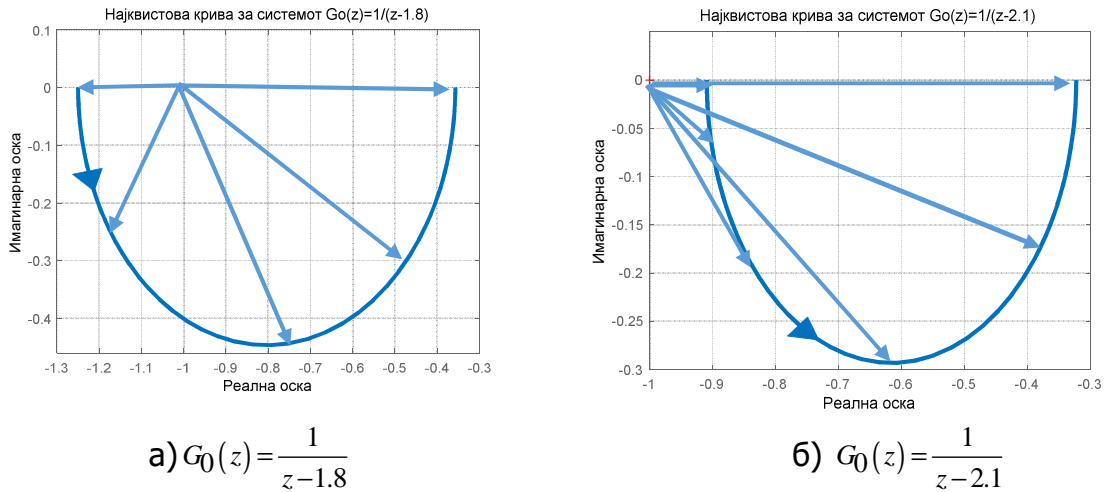
$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [A(j\omega T)] = (n - p_0)\pi \quad (5-134)$$

бидејќи корените на (5-127) кои лежат вон единичниот круг $z \leq 1$ не влијаат врз измената на аргументот на векторот $A(j\omega T)$ кога ω се менува во интервалот $\omega T \in \langle 0, \pi \rangle$. За да биде стабилен затворениот дискретен систем неопходно е да биде исполнет условот (5-129), каде што n е степенот на карактеристичниот полином $a(z)$ односно редот на затворениот дискретен систем. Тогаш, со воведување на (5-129) и (5-134) во (5-132) се добива:

$$\Delta_{0 \leq \omega T \leq \pi} \arg [F(j\omega T)] = n\pi - (n - p_0)\pi = p_0\pi \quad (5-135)$$

Оттука, Најквистовиот критериум за испитување на стабилноста на затворените дискретни системи при нестабилен отворен систем гласи: Неопходен и доволен услов набљудуваниот затворен дискретен систем да биде стабилен при нестабилен отворен систем со p_0 полови со модул поголем од единица е, при промената на фреквенцијата ω во интервалот $\omega T \in (0, \pi)$, вкупната измена на аргументот на векторот $F(j\omega T)$ да биде $p_0\pi$, односно фреквенциската карактеристика на

отворениот систем да ја опфаќа критичната точка $p_0/2$ – пати. На сликата 5-20 се прикажани два случаи кои одговараат на стабилен и нестабилен затворен дискретен систем при нестабилен отворен систем со $p_0 = 1$.



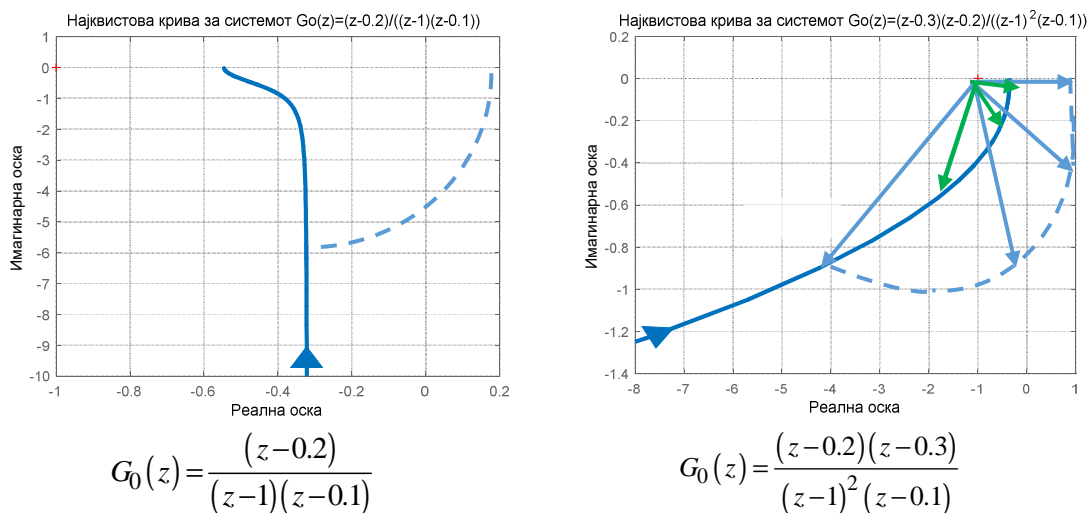
Слика 5-20 а) Стабилен и б) нестабилен затворен дискретен систем при нестабилни отворени системи

3) **Отворениот дискретен систем има пол во точката $z = 1$.** Фреквенциската карактеристика на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем секогаш почнува и завршува во конечна точка на Re –оска, освен во случаите кога системот има пол во точката $z = 1$ со произволна кратност q . Тогаш фреквенциската карактеристика на дискретниот систем ќе почне во бесконечност како што е тоа случај и во примерот 5-9. Преносната функција на дискретен систем со пол во точката $z = 1$ од произволна кратност може да се претстави на следниот начин:

$$G_0(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{(z-1)^q C(z)} \quad (5-136)$$

каде што $c(z)$ е полином од степен $(n - q)$. За ваквите дискретни системи се вели дека имаат астатизам од ред q и тогаш нивната карактеристика се надополнува со **лак на астатизам**, кој започнува на реалната оска во бесконечност, се одвива во негативна насока (насока на движењето на стрелката од часовникот), опфаќа централен агол од $-q\pi/2$ радијани и завршува на фреквенциската карактеристика во бесконечност. За $b(1)c(1) > 0$ лакот на астатизам почнува на позитивниот дел од реалната оска, додека за $b(1)c(1) < 0$ тој започнува на негативниот дел од реалната оска. Тогаш за стабилноста на затворениот дискретен систем се суди по вака дополнетата фреквенциска карактеристика на соодветниот отворен систем според веќе искажаниот Најквистов критериум. На сликата 5-21 се прикажани два примери на стабилни затворени дискретни системи при астатични отворени системи со астатизам од прв и втор ред.

Целата досегашна дискусија околу Најквистовиот критериум за иследување на стабилноста на затворените дискретни системи со единична негативна повратна врска се однесува на случајот кога соодветниот отворен систем нема полови на единичната кружница $|z|=1$ во z -комплексната рамнина, освен во точката $z=1$. Меѓутоа, реалните системи најчесто го задоволуваат овој услов.



Слика 5-21 Стабилни затворени дискретни системи со астатични отворени системи со астатизам од а) прв и б) втор ред

5-3 ПАРАМЕТАРСКА ОБЛАСТ НА СТАБИЛНОСТ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

Кога сите параметри на еден дискретен систем се познати, коефициентите на неговиот карактеристичен полином $a(z)$ се исто така познати и може директно да се одговори на прашањето дали набљудуваниот дискретен систем е или не е стабилен. Меѓутоа, доколку иследуваниот дискретен систем има и непознати или неопределени односно променливи параметри, не може директно да се просуди дали тој систем е или не е стабилен, зашто неговата стабилност ќе зависи од конкретните вредности на непознатите или на променливите параметри. Во такви случаи, најдобро што може да сториме е да ја определиме т.н. **параметарска област на стабилност** на набљудуваниот дискретен систем. Тоа е област на вредности на непознатите односно на променливите параметри на еден систем за кои системот ќе биде стабилен. Ако системот има само еден променлив параметар, тогаш неговата област на стабилност ќе биде едноставно интервал дозволени вредности. Доколку системот има два неопределени параметри, неговата област на стабилност ќе биде некоја површина итн. За вредности на параметрите на системот внатре во областа на стабилност, набљудуваниот дискретен систем ќе биде стабилен, за вредности на параметрите надвор од параметарската област на стабилност, тој ќе биде нестабилен и конечно, за вредности на параметрите на системот од границите на параметарската област на стабилност набљудуваниот дискретен систем ќе се наоѓа на границата на стабилност. За одредување на параметарската област на стабилност на еден дискретен систем може да се искористи кој и да било од наведените критериуми за иследување на стабилноста на дискретните системи.

Пример 5-10. Со помош на критериумот на Михаилов да се определат условите за стабилност на дискретниот систем со карактеристичен полином:

$$a(z) = a_0 z + a_1 \quad (5-137)$$

каде што:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\exp(-T/\tau) + K[1 - \exp(-T/\tau)] \quad (5-138)$$

Решение: Векторот на Михаилов за набљудуваниот дискретен систем ќе биде:

$$a(j\omega T) = a_0 \exp(j\omega T) + a_1 = a_0 \cos(\omega T) + a_1 + ja_0 \sin(\omega T) \quad (5-139)$$

а неговиот реален и имагинарен дел се:

$$u(\omega T) = a_0 \cos(\omega T) + a_1$$

$$v(\omega T) = a_0 \sin(\omega T) \quad (5-140)$$

Со исклучување на параметарот ωT од системот равенки (5-140) се добива:

$$[u(\omega T) - a_1]^2 + v^2(\omega T) = a_0^2 \quad (5-141)$$

Равенката (5-141) претставува равенка на кружница со центар во точката $(a_1, j0)$ и радиус a_0 . При промена на честотата ω од 0 до $\omega_0/2$, се опишува горната половина на кружницата (5-141), што се гледа и од изразите (5-140) за $a_0 > 0$.

Набљудуваниот дискретен систем од примерот ќе биде стабилен ако соодветната крива на Михаилов започнува на реалната оска во точката $a_0 + a_1$, минува во позитивна насока и последователно низ $2n = 2$ квадранти и завршува на реалната оска во точката $a_1 - a_0$, како што е тоа прикажано на сликата 5-22 за $a_1 > 0$ и $a_1 < 0$. Овие услови ќе бидат исполнети доколку:

$$|a_1| < |a_0| \quad (5-142)$$

(нежниот услов за стабилност) односно ако:

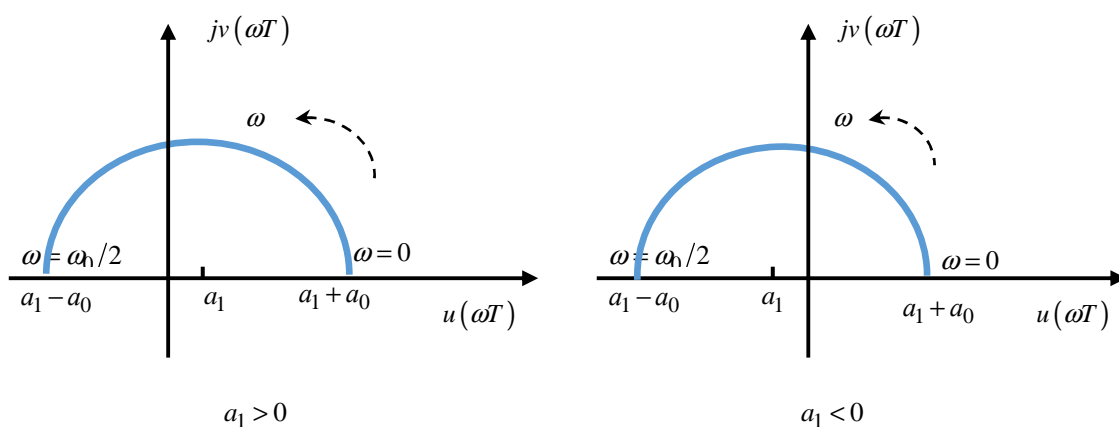
$$-a_0 < a_1 < a_0 \quad (5-143)$$

$$a_0 + a_1 = 1 - \exp(\omega T/\tau) + K[1 - \exp(\omega T/\tau)] = (1 + K)[1 - \exp(\omega T/\tau)] > 0$$

$$a_0 - a_1 = 1 + \exp(\omega T/\tau) - K[1 - \exp(\omega T/\tau)] > 0 \quad (5-144)$$

и бидејќи секогаш $1 - \exp(\omega T/\tau) > 0$, условите (5-144) се сведуваат на условот:

$$-1 < K < \frac{1 + \exp(\omega T/\tau)}{1 - \exp(\omega T/\tau)} = \operatorname{cotgh}\left(\frac{T}{2\tau}\right) \quad (5-145)$$



Слика 5-22 Крива на Михаилов за дискретниот систем од примерот 5-10 за $|a_1| < |a_0|$ □

Најквистовиот критериум овозможува да се анализира влијанието на коефициентот на засилување на отворениот систем за набљудуваниот затворен дискретен систем со единична повратна врска. Кога коефициентот на засилување K на отворениот дискретен систем $G_0(z)$ е неопределен, односно променлив, не може да се нацрта неговата Најквистова крива. Во најдобар случај, може да се нацрта само семејство од Најквистови криви кои одговараат на различни вредности за K . За да се избегне ова, наместо преносната функција $G_0(j\omega T)$ се набљудува нормализираната фреквенциска преносна функција $\tilde{G}_0(j\omega T) = G_0(j\omega T)/K$, која нема неопределени коефициенти, и се црта нејзината Најквистова крива. Тогаш, критичната точка за оваа крива ќе биде точката $(-1/K, j0)$. (Со промената на K се менува само критичната точка, но не и Најквистовата крива).

Пример 5-11. Со помош на Најквистовиот критериум да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(z) = \frac{K}{z - 0.5} \quad (5-146)$$

Решение: Нормализираната фреквенциска преносна функција на отворениот дискретен систем (5-146) е:

$$\tilde{G}_0(j\omega T) = \frac{G_0(j\omega T)}{K} = \frac{1}{e^{j\omega T} - 0.5} = \frac{\cos(\omega T) - 0.5 - j \sin(\omega T)}{1.25 - \cos(\omega T)} \quad (5-147)$$

чиј реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

$$\tilde{U}_0(\omega T) = \frac{\cos(\omega T) - 0.5}{1.25 - \cos(\omega T)}$$

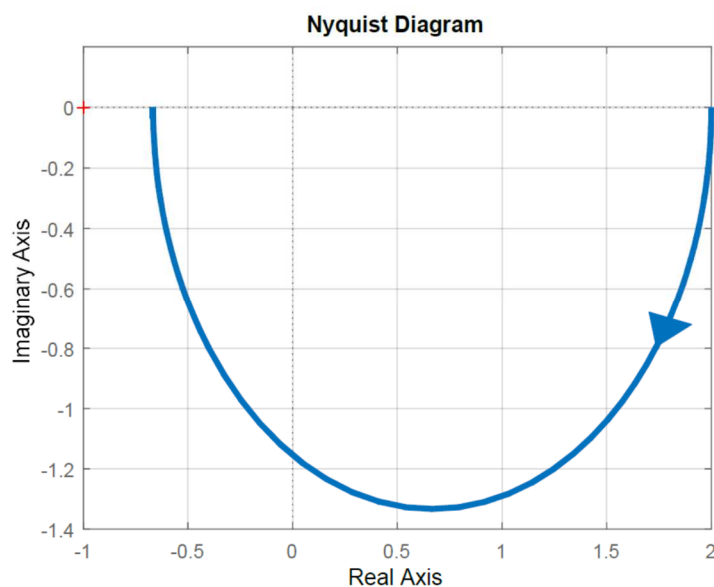
$$\tilde{V}_0(j\omega T) = -\frac{\sin(\omega T)}{1.25 - \cos(\omega T)} \quad (5-148)$$

Нормализираната Најквистова крива почнува во точката $[\tilde{U}_0(0), j\tilde{V}_0(0)] = (2, j0)$, завршува во точката $[\tilde{U}_0(\pi), j\tilde{V}_0(\pi)] = (-2/3, j0)$, нема пресеци со реалната оска и има само еден пресек со имагинарната оска во точката $[\tilde{U}_0(\frac{\pi}{3}), j\tilde{V}_0(\frac{\pi}{3})] = (0, -j\frac{2\sqrt{3}}{3})$:

$$\tilde{U}_0(\omega T) = \frac{\cos(\omega T) - 0.5}{1.25 - \cos(\omega T)} = 0 \Rightarrow \cos(\omega T) - 0.5 = 0 \Rightarrow \cos(\omega T) = 0.5 \Rightarrow \omega T = \frac{\pi}{3} \quad (5-149)$$

$$\tilde{V}_0(j\omega T) = -\frac{\sin(\omega T)}{1.25 - \cos(\omega T)} = 0 \Rightarrow \sin(\omega T) = 0 \Rightarrow \omega T = 0, \pi \quad (5-150)$$

Најквистовата крива на нормализираниот отворен дискретен систем од примерот 5-11 е прикажана на сликата 5-23.



Слика 5-23 Најквистова крива за нормализираниот отворен систем $G_0(z)/K$ од примерот 5-11

Бидејќи отворениот дискретен систем е стабилен, затворениот дискретен систем ќе биде стабилен само доколку неговата Најквистова крива не ја опфаќа критичната точка $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$. Оттаму се добиваат следните услови, односно ограничувања на вредностите на коефициентот на засилување K на отворениот систем:

$$-\frac{1}{K} \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty) \Rightarrow -\frac{1}{2} < K < \frac{3}{2} \quad (5-151)$$

За вредности на параметарот K на границите од параметарската област на стабилност (5-151), затворениот дискретен систем ќе биде на границата на стабилност. □

5-4 РЕЛАТИВНА СТАБИЛНОСТ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ И РЕЗЕРВА НА СТАБИЛНОСТ

Освен поимот за стабилност, кај системите е битен и поимот за **релативна стабилност** односно **резерва на стабилност**, кој условно кажува колку еден систем е далеку од својата граница на стабилност. Така на пример, патничките авиони мора да поседуваат многу голема релативна стабилност заради безбедноста на патниците (што ги прави потроми), во споредба со воените авиони, кои имаат многу помала резерва на стабилност (што ги прави многу побрзи и поспособни за брзи маневри). За оценка на степенот на релативна стабилност, односно резервата на стабилност на еден затворен дискретен систем со единична негативна повратна врска се користат параметрите d и ϕ_r , кои се дефинираат на следниот начин:

ϕ_r е **резерва на фаза**. Ако со ω_1 се означи фреквенцијата за која $|G_0(j\omega_1 T)| = 1$, резервата на фаза ϕ_r може да се претстави како збир од аргументот на $G_0(j\omega T)$ и 180°

$$\phi_r = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1 T)] \quad \text{во степени} \quad (5-152)$$

при што ω_1 е **пресечната фреквенција на засилување**. Кај стабилните системи резервата на фаза е позитивен агол, кај нестабилните е негативен. Ако $\phi_r = 0$, системот е на граница на стабилност. Еден систем ќе има дотолку поголема резерва на стабилност, доколку ϕ_r е поголемо од 0.

d е **резерва на засилување**. Ако со ω_π се означи фреквенцијата за која $\arg[G_0(j\omega_\pi T)] = \pi$, резервата на засилување d може да се претстави како реципрочна вредност од модулот на фреквенциската преносна функција $G_0(j\omega T)$ за $\omega = \omega_\pi$:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} \quad (5-153)$$

при што ω_π е **пресечната фреквенција на фаза**. Кај стабилните системи $d > 1$,

додека кај нестабилните $d < 1$. Ако $d = 1$, системот се наоѓа на границата на стабилност. Резервата на стабилност на еден систем е дотолку поголема, доколку d е поголемо од 1.

Овие четири показатели може да се прикажат на фреквенциската карактеристика на соодветниот отворен систем за еден затворен систем. Имено, пресечната фреквенција на засилување е онаа фреквенција при која фреквенциската преносна функција на отворениот систем има модул еднаков на единица. Следствено, тоа е онаа фреквенција при која Бодеовиот дијаграм на слабеење на отворениот систем ја сече хоризонталната оска, односно:

$$20\log|G_0(j\omega T)| = 20\log 1 = 0 \quad (5-154)$$

Пресечната фреквенција на фаза е онаа фреквенција при која аргументот на фреквенциската преносна функција на отворениот систем има вредност $-\pi$. Следствено, тоа е онаа фреквенција при која Бодеовиот дијаграм на фаза ја сече оската $-\pi$. Тогаш, резервата на засилување на набљудуваниот затворен систем кажува за колку може да се подигне дијаграмот на слабеење на отворениот систем (за колку може да се зголеми неговиот коефициент на засилување K), за затворениот систем да остане стабилен, додека резервата на фаза кажува за колку може да се спушти дијаграмот на фаза на соодветниот отворен систем, а затворениот систем да остане стабилен. Тоа значи дека ако $20\log G_0(j\omega_\pi T) > 0$ или ако $\arg[G_0(j\omega_\pi T)] < -180^\circ$, системот сигурно ќе биде нестабилен.

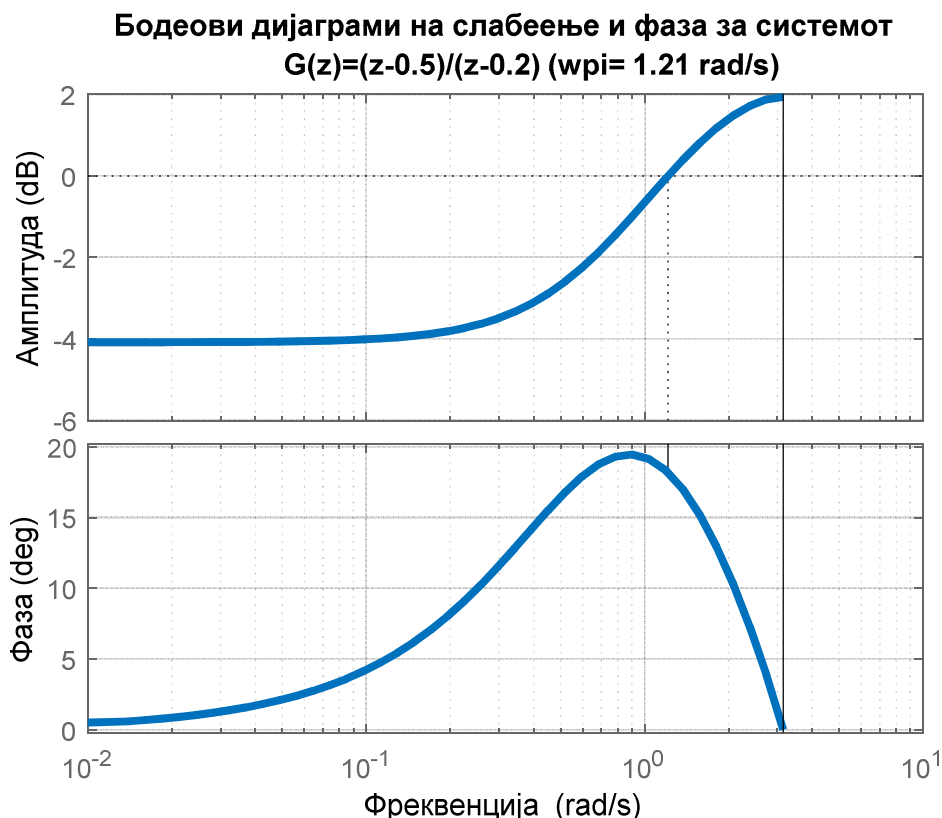
Пример 5-12. Да се нацртаат Бодеоите дијаграми за дискретниот систем опишан со следниот модел:

$$G_0(z) = \frac{z-0.5}{z-0.2}, \quad |z| > 0.2 \quad (5-155)$$

и да се определат пресечната фреквенција на засилување и фаза, како и резервите на засилување и фаза за соодветниот затворен дискретен систем.

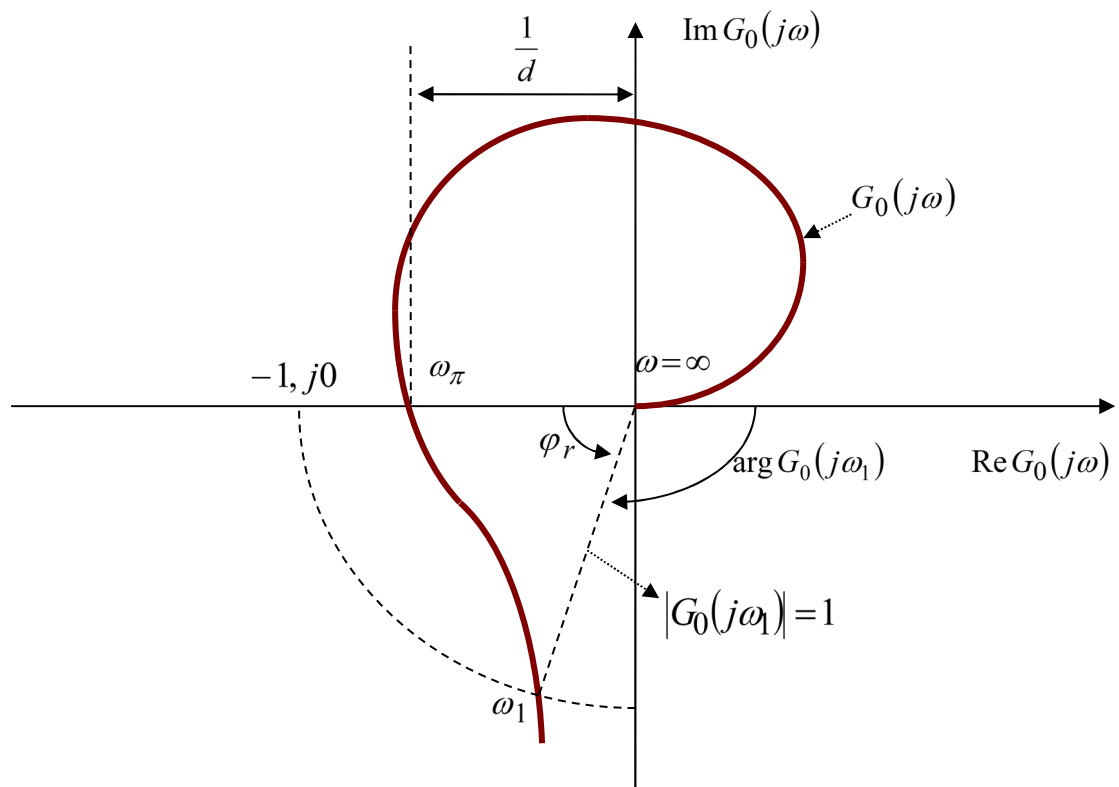
Решение: Саканите Бодеои дијаграми се добиени со помош на MATLAB и се прикажани на сликата 5-24.

Во конкретниот случај, Бодеоиот дијаграм ја сече хорионталната оска при фреквенција $\omega_1 = 1.21 \text{ rad/sec}$, додека Бодеоиот дијаграм на фаза воопшто не ја сече оската $\varphi = -\pi$, па $\omega_\pi = \infty$.



Слика 5-24 Бодев дијаграми на системот од примерот 5-12 □

Истите показатели може да се дефинираат и на фреквенциската карактеристика на соодветниот отворен систем за испитуваниот затворен дискретен систем, како што е покажано на сликата 5-25. Бидејќи пресечната фреквенција на засилување е онаа фреквенција при која фреквенциската преносна функција на отворениот систем има модул еднаков на единица, истата ќе се добие во преекот на фреквенциската карактеристика на отворениот систем $G_0(j\omega T)$ и кружница со радиус еднаков на единица со центар во координатниот почеток од комплексната рамнина. Од друга страна, пресечната фреквенција на фаза ја дефинира точката на пресек на фреквенциската карактеристика на отворениот систем со реалната оска. Тогаш, резервата на засилување d ќе биде реципрочна вредност од модулот на фреквенциската преносна функција $G_0(j\omega T)$ за $\omega = \omega_\pi$, односно реципрочна вредност од $|U_0(\omega_\pi T)|$, а резервата на фаза ќе биде должината на векторот $G_0(j\omega_\pi T)$. Очигледно при стабилен отворен систем мора $|G_0(j\omega_\pi T)| < 1$, бидејќи фреквенциската карактеристика не смее да ја опфати критичната точка $(-1, j0)$ и оттука, $d > 1$ за стабилен затворен дискретен систем.



Слика 5-25 Илустрација на резервите на засилување и фаза

6 ДИГИТАЛНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ

6-1 ВОВЕД

Кај најголемиот број современи технички системи, потребно е да се управува со една или повеќе од променливите на тие системи. Ова се постига со примената на соодветни управувачки елементи, потсистеми или дури и цели системи, кои едноставно се нарекуваат **управувачи**, без оглед на нивната изведбена сложеност. Управувачите имаат задача да го обезбедат саканото поведење на еден управуван систем, кој едноставно се нарекува **објект на управување** или само **објект**, без оглед на неговата изведбена сложеност. Тогаш целиот систем, кој се состои од управувач и објект на управување, се нарекува **систем на автоматско управување**. Во идеални услови, во отсуство на различни надворешни несакани влијанија, кои едноставно се нарекуваат **пречки**, внатрешни несакани влијанија наречени **шумови**, и во отсуство на непожелни промени на параметрите на системот, **отворените системи на автоматско управување** ќе ја остварат својата задача. Тоа значи дека излезот на еден ваков систем на автоматско управување, кој се нарекува **управувана големина**, успешно ќе го следи саканиот влез, наречен **референтен влез**. Притоа не е битно дали се работи за систем со еден влез и еден излез или систем со повеќе влезови и излези, во кој случај под влез и излез на системот всушност подразбираме вектор на влезовите и вектор на излезите на системот. Без оглед на сложеноста на изведба, структурата на еден отворен систем на автоматско управување може да се прикаже како на сликата 6-1, на која се прикажани двете основни компоненти на еден систем на автоматско управување – управувачот и објектот, и соодветните сигнали во системот. Како што може да се забележи од сликата 6-1, влез во управувачот е **референтниот сигнал**, а неговиот излез е т.н. **управувачки сигнал** или едноставно **управувањето**, што значи дека управувачот го генерира соодветниот управувачки закон само врз основа на информации за саканиот влез на системот и нема никаква информација за она што се добива на излезот од системот на управување, односно за вистинската вредност на управуваната големина. Излезот од управувачот е влез во објектот на управување, а излезот од објектот на управување е управуваната големина.



Слика 6-1 Отворен систем на автоматско управување

За жал, во реалните системи на автоматско управување постојано дејствуваат некои несакани надворешни и внатрешни влијанија, кои се карактеризираат како шумови и/или пречки. На пример, да го набљудуваме системот за автоматско управување со брзината на некое возило, познат како **cruise control**, слика 6-2. Тој мора да ги земе во предвид и да ги компензира гравитациските сили кои се јавуваат како резултат од промената на наклонот на патот, а кои сили дејствуваат како пречки во набљудуваниот систем на автоматско управување. Слично влијание има и ветерот врз брзината на движење на возилото. Друг пример за пречки би биле изненадни налети на ветер врз антената на некој радарски систем за следење, кои предизвикуваат големи несакани вртливи моменти, влијаејќи на тој начин врз положбата на антената,

слика 6-3. Исто така, сончевата светлина што влегува низ прозорецот иако е тој затворен, дејствува како пречка за автоматскиот клима-уред, слика 6-4.



Слика 6-2 Cruise control – систем за втоматско управување со брзината на возило (интернет)



Слика 6-3 Ветерот влијае врз положбата на антената (интернет)

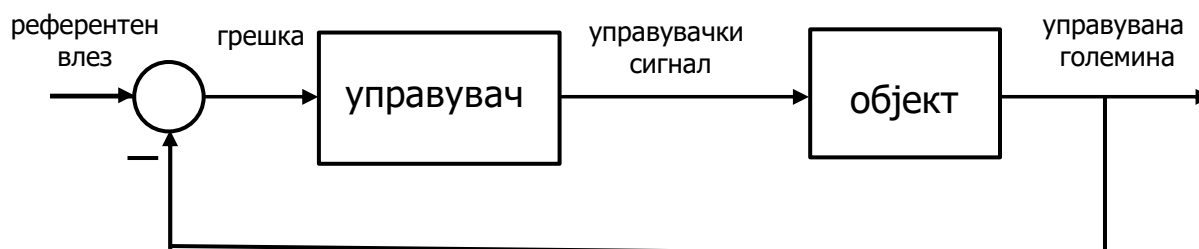
Шумовите, од своја страна, прават управуваната големина да отстапува од нејзината вистинска вредност, без оглед на тоа дали постојат пречки или не. Општо земено, тие се резултат на технологијата која се користи за мерење на сигналите. На пример, во случајот на електрични сигнали, шумовите може да бидат предизвикани од интерференција со други електрични извори, со несоодветно или неправилно заземјување, недобра изолација итн. Исто така, може да бидат резултат на стареењето на елементите, нивното неправилно отчитување и друго.

Од наведените причини, за да остварат задоволително поведење на управуваниот објект, како во преоден така и во стационарен работен режим, реалните системи на автоматско управување мора да применуваат некој вид негативна повратна врска, што значи дека управувачот во системот мора да има информација не само за

саканиот влез, туку и за реалниот излез на управуваниот систем. Со други зборови, управувачот го генерира соодветниот управувачки закон врз основа на информација за саканиот влез и стварниот излез на објектот на управување. Системите на автоматско управување со повратна врска се нарекуваат **затворени системи на автоматско управување** и една типична структура на затворен систем на автоматско управување е прикажана на сликата 6-5.



Слика 6-4 Автоматски клима-уред (интернет)



Слика 6-5 Затворен систем на автоматско управување

Како што може да се забележи, ниту шемата од сликата 6-1, ниту шемата од сликата 6-5, ги прикажуваат пречките во системите на автоматско управување. Меѓутоа, на овој проблем ќе се навратиме многу подетално во анализата на дискретните системи на автоматско управување.

Во почетокот, управувачот кој дејствувал врз објектот во еден систем на автоматско управување и го принудувал на саканото поведение, бил **аналоген управувачки систем**, без оглед на тоа дали вклучувал електрични, хидраулични, пневматски или механички компоненти. Сите овие управувачки системи имале аналогни влезови и излези, што значи дека нивните влезни и излезни сигнали биле дефинирани на континуален временски интервал и имале вредности дефинирани врз континуален опсег на амплитуди. Меѓутоа, во поново време, во последните неколку децении, аналогните управувачи најчесто се заменуваат со **дигитални управувачи**, чии влезови и излези се дефинирани само во одредени дискретни временски мигови и нивните амплитуди исто така може да завземат само определени дискретни вредности

од даден опсег. Дигиталните управувачи може да бидат реализирани како дигитални кола, дигитални сметачи или микропроцесори.

Интуитивно, управувачите кои континуално го следат влезот и излезот на еден систем мора да се супериорни во однос на управувачите кои управувачкиот закон го базираат само врз дискретни вредности на влезот и излезот. Истотака, логично е да се заклучи дека континуалниот управувачки закон (излезот од управувачот) ќе постигне подобро управување од дигиталниот управувачки закон кој дејствува само дискретно. Ова се должи на фактот дека континуалните управувачи работат во реално време и може да поседуваат многу голем пропусен опсег, што е еквивалентно на дигитален управувач со бесконечна фреквенција на дискретизација, така што тој всушност ќе работи континуално. Тогаш неминовно се наметнува прашањето – што е причината што аналогните управувачи во пракса сè почесто се заменуваат со дигитални управувачи?

Доколку сите околности за аналогните и дигиталните управувачи би биле идентични, тогаш навистина аналогните управувачи би биле супериорни во однос на дигиталните. Меѓутоа, тоа не е така. Дигиталните управувачи имаат одредени значителни предности над аналогните, кои ги прават попопуларни и директно ја условуваат замената на аналогните управувачи со дигитални. Еве некои од најзначајните:

Точноста. Дигиталните сигнали содржат информации во кодиран (најчесто бинарен) облик. Тоа значи дека секој бит информација е одреден со 1 (високо ниво) или 0 (ниско ниво). Оттаму, дигиталните сигнали се многу понечувствителни кон влијанието на шумовите и пречките, сè додека амплитудите на шумовите не се толку големи да не може да се разликува високо од ниско ниво. Амплитудите на аналогните сигнали се менуваат континуално и се чувствителни на влијанието на шумовите на секое ниво, што може да услови големи грешки, затоа што шумовите и пречките кај овие сигнали се постојано присутни. Дигиталните сигнали исто така се помалку подложни на стареење и помалку чувствителни на промените на околината.

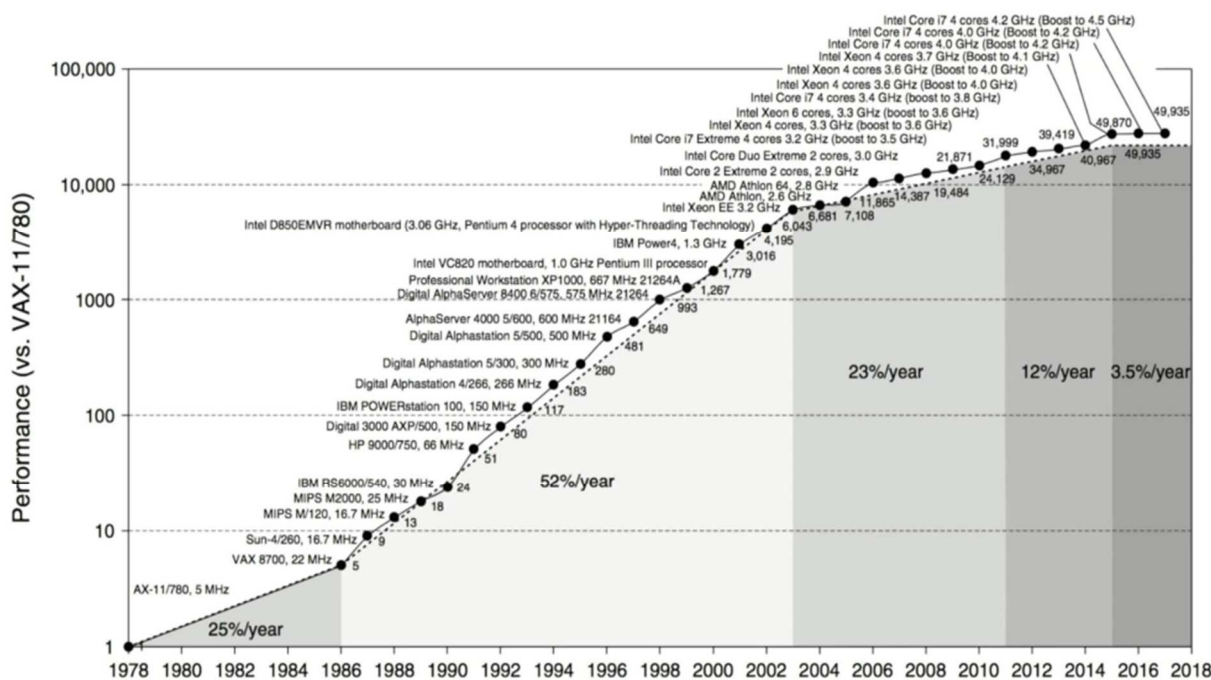
Процесирачки грешки. Дигиталното процесирање на управувачките сигнали опфаќа собирање и множење на меморирани нумерички вредности. Аритметичките грешки и грешките на претставувањето се занемарливи. Наспроти ова, процесирањето на аналогните сигнали се врши со помош на уреди како, на пример, отпорници и кондензатори, кои доведуваат до значително отстапување на фактичките вредности на сигналот од номиналните односно од референтните вредности.

Флексибилност. Откако еднаш е реализиран хардверски, еден аналоген управувач тешко може да се модифицира. Обично треба да се направи нов управувачки уред. Дигиталниот управувач многу полесно се модифицира за да излезе во пресрет на соодветни промени во проектните барања или да се приспособи кон одредено адаптивно поведење, без да има потреба од целосна замена на оригиналниот управувач, затоа што соодветниот управувачки закон е реализиран софтверски. Исто така, управувачкиот закон на дигиталниот управувач не мора да следи некој од едноставните закони како аналогните управувачи. Типичните аналогни управувачи реализираат П–, И– и Д– управувачки закони и нивни комбинации. Дигиталните управувачи може да реализираат многу посложени управувачки закони, затоа што тоа обично бара само дополнителни аритметички операции, кои многу лесно се имплементираат.

Брзина. Брзината на сметачите се зголемува по експоненцијален закон некаде од 1980 година. Порастот на процесирачката брзина овозможува дискретизација и процесирање на управувачките сигнали со многу голема брзина. Тоа, пак, од своја

страна овозможува многу мала периода на дискретизација, поради што дигиталните управувачи по своето дејствие се доближуваат до аналогните.

Цена на чинење. Од нивната појава па до денес, дигиталните сметачи остваруваат драматичен развој. Иако цената на многу добра и услуги постојано расте, цената на дигиталните компоненти продолжува да опаѓа. Нивната големина и нивната цена постојано се намалуваат по експоненцијален закон. Од друга страна, бројот активни логички елементи од кои е направен еден сметач по cm^3 постојано расте. На сликата 6-6 е прикажан експоненцијалниот раст на т.н. „густината на транзистори“ (мерка



Слика 6-6 Муров закон за растот на „густината на транзистори“ (интернет)

за сметачките можности) во еден микропроцесор со време или т.н. Муров закон. Во согласност со него, густината на транзистори се удвојува во почетокот секоја година, а подоцна секоја втора година. Тоа е голем напредок од, на пример, популарниот INTEL 8086 од 1976 год., кој содржел само 29000 транзистори и работел со брзина од само 10 Mhz, додека денешните современи сметачи поседуваат над 10^9 транзистори и брзина од редот на GHz. Достигањата во VLSI (very large-scale integration) технологијата овозможуваат производство на подобри, побрзи и посигурни интегрирани кола, по пониски цени. Тоа, пак, од своја страна ги прави дигиталните управувачи економични дури и за евтини апликации. Меѓутоа, стручњаците се согласуваат дека компјутерите ќе ги достигнат физичките граници на Муровиот закон некаде во текот на 2020-та година. Високите температури на транзисторите ќе направат наскоро да биде невозможно нивно удвојување на еден микрочип, зашто ладењето на транзисторите ќе бара поголема енергија од енергијата што минува низ нив.

Забележителниот и значаен развој на сметачките можности на современите дигитални сметачи, ја револуционизирал современата примена на автоматиката и проектирањето на современите САУ. Денес управувањето на индустриските и комерцијалните процеси сè повеќе се изведува со помош на дигитални сметачи, што е во прв ред резултат на нивната задоволителна брзина на процесирање, ниска цена на чинење и малите

димензии. Така, дигиталните управувачки системи се применуваат во металната и хемиската индустрија, во авто и авио индустрија. На сликата 6-7 е прикажан пример на дигитален управувачки систем во авио индустријата.



Слика 6-7 Управувачкиот пулт на авионот А380 (интернет)

Друг пример на дигитален управувачки систем прикажан на сликата 6-8 е во роботиката.



Слика 6-8 Роботски манипулатори во автомобилската индустрија (интернет)

Роботските манипулатори се во состојба да извршуваат задачи со брзина и точност што ги надминува значително истите кај луѓето работници. Меѓутоа, за да може да ја извршува својата задача постојано, точно и сигурно, положбата и брзината на роботскиот манипулатор се управува дигитално. И како последен, но се разбира не единствен, ќе го наведеме примерот на радарскиот систем за следење, илустриран на сликата 6-9.



Слика 6-9 Радарски систем на следење (интернет)

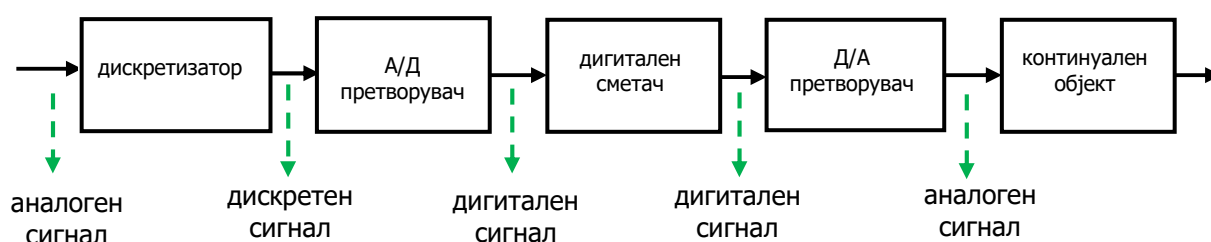
Во заклучок само ќе кажеме дека вкупниот број дигитални системи за автоматско управување во индустријата постојано се зголемува. Проценка е дека денес во употреба има приближно 10^8 управувачки системи кои користат некој вид дигитален пресметувач за управувачки цели, иако големината на сметачите и нивните можности значително се разликуваат.

6-2 КАРАКТЕРИСТИКИ НА ДИГИТАЛНИТЕ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ

Она што е карактеристично за дигиталните системи на автоматско управување, е што тие во суштина се хибридни системи, што значи дека едновременно поседуваат и дискретни и континуални компоненти; следствено, во нив едновременно постојат и континуални и дискретни сигнали. Тоа произлегува од фактот дека објектите на управување по правило имаат континуална природа, додека современите управувачки системи се многу често дигитални. Оттаму, овие системи поседуваат компоненти кои не се сретнуваат кај континуалните системи на автоматско управување (САУ), а тоа се компоненти за претворба на сигналите од еден во друг вид. Имено, дигиталните сметачи, кои се најчестите управувачки елементи во дигиталните системи на автоматско управување, на влез може да примат само дигитални сигнали. Следствено, на влезот од дигиталниот управувач мора да постои уред, кој аналогните сигнали ќе ги претвора во дигитални. Овие уреди едноставно се нарекуваат **А/Д претворувачи**.

Излезот на дигиталниот управувач исто така е дигитален. Меѓутоа, за овој управувачки сигнал да биде во состојба да го побуди континуалниот објект на управување, мора најнапред да се претвори во соодветен аналоген сигнал. Уредите со кои се остварува оваа задача се нарекуваат едноставно **Д/А претворувачи**. На сликата 6-10 е прикажан карактеристичниот дел од структурната блок-шема на еден дигитален систем на автоматско управување (ДСАУ) со основните компоненти и видови сигнали.

На влезот на системот од сликата 6-10 се наоѓа континуален сигнал, кој е дефиниран во секој миг на време во даден опсег. Амплитудите на овој сигнал во општ случај исто така може да попримаат произволна вредност во даден опсег. Тогаш тој континуален сигнал се нарекува **аналоген сигнал**. Треба да се истакне дека аналогниот сигнал е специјален случај на континуалниот сигнал, иако често термините се користат наизменично.

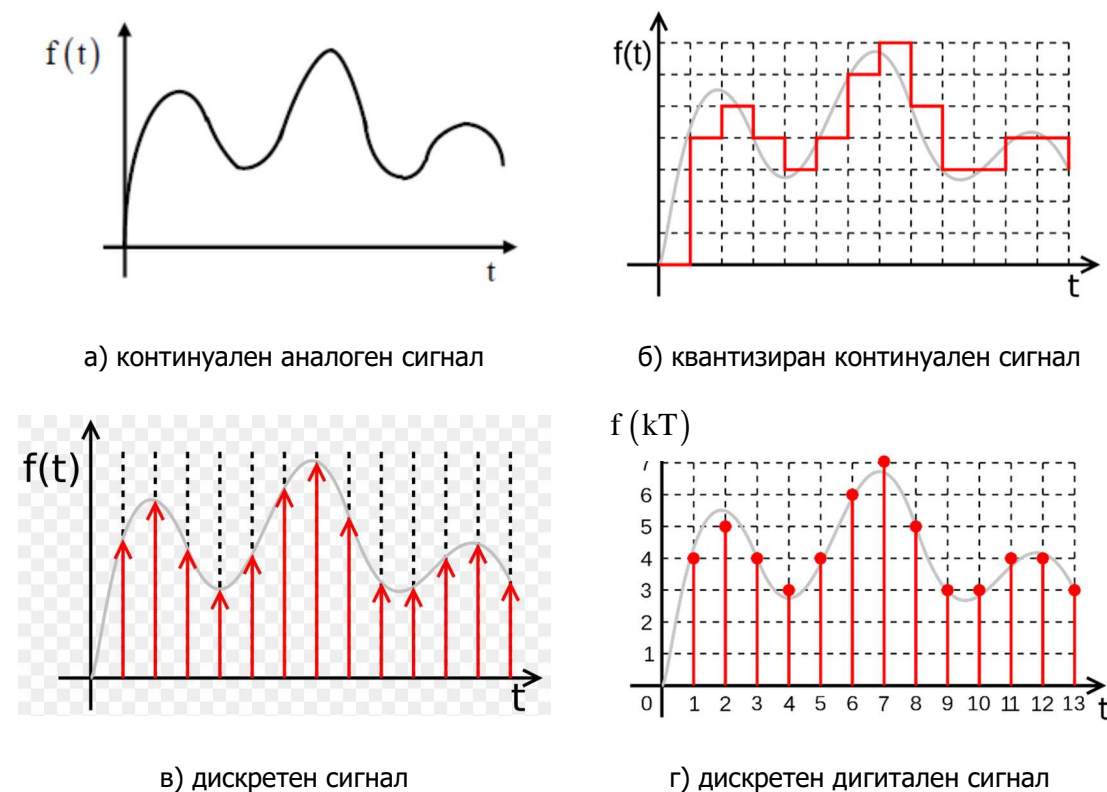


Слика 6-10 Структурна блок-шема на отворен дигитален систем на автоматско управување

Амплитудите на еден континуален сигнал може да попримаат произволна вредност од даден интервал, или само конечен број вредности. Во овој вториот случај, за континуалниот сигнал се вели дека е квантизиран. **Квантизацијата** е процес во кој се дискретизираат амплитудите на континуалниот сигнал и тие може да попримат само одредено множество вредности, наречени **квантизациски вредности**. Дискретизаторот е уред кој врши дискретизација на својот влез по време. Така, на излезот од дискретизаторот ќе се добие дискретен сигнал, чии што амплитуди сèуште не се ограничени на никој дополнителен начин. Во процесот на А/Д претворба се врши дискретизација и на нивото односно амплитудите на дискретниот сигнал. Следствено, квантизација може да се врши и на континуални и на дискретни сигнали. Нивото на еден квантизиран сигнал се менува само во одредени чекори. Квантизираниот дискретен сигнал се нарекува **дигитален сигнал**. Треба да се истакне дека дигиталниот сигнал е специјален случај на дискретен сигнал, меѓутоа двата термина често се користат наизменично. Дигиталниот сигнал претставува влез на дигиталниот управувачки систем. Бидејќи тоа по правило се дигитални пресметувачи или процесори, овие дигитални сигнали се бинарни. Таков е и излезот од дигиталниот управувач. Затоа овој сигнал мора да претрпи Д/А конверзија, пред да биде доведен на влезот од континуалниот објект на управување. Четирите вида сигнали карактеристични за дигиталните системи на автоматско управување се прикажани на сликата 6-11. Бидејќи претворбата на сигнали од континуални во дискретни и обратно е карактеристична само за ДСАУ, додека не постои кај континуалните САУ, во продолжение ќе обрнеме внимание на уредите за А/Д и Д/А конверзија.

А/Д претворба. А/Д претворбата не е мигновен процес и се одвива во два чекори. Во еден А/Д претворувач, аналогниот (континуален) сигнал најнапред се претвора во дискретен сигнал и дури потоа се квантизира, односно претвора во дигитален сигнал.

Затоа, помеѓу аналогниот влез и дигиталниот излез на А/Д претворувачот постои одредена временска задршка односно доцнење. Фреквенцијата на дискретизација на континуалниот сигнал мора да биде барем двапати поголема од широчината на неговиот пропусен опсег, за да не дојде до изобличување при неговата реконструкција. Минималната фреквенција на дискретизација се нарекува **Најквистова брзина на дискретизација**.

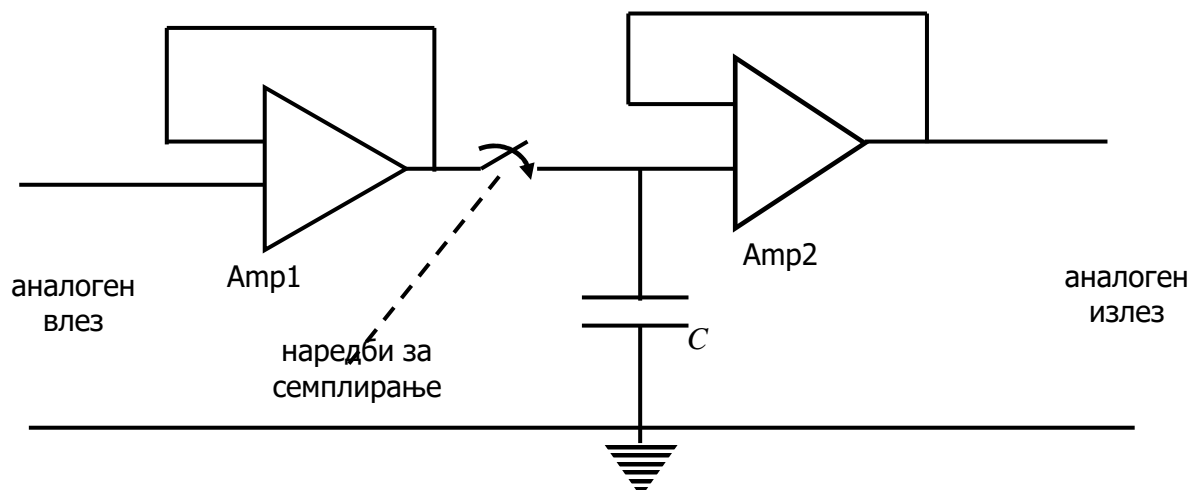


Слика 6-11 Различни видови сигнали во еден дигитален систем на автоматско управување

Во секој чекор на дискретизација, се задржува дискретната вредност од влезниот аналоген сигнал, што се остварува со помош на соодветно коло за задршка. На излезот од ова коло се добива „скалеста“ апроксимација на аналогниот влезен сигнал, затоа што влезниот напон се држи константен во текот на секој интервал на дискретизација. Процесот на задршка на дискретните вредности помеѓу миговите на дискретизација е неопходен затоа што А/Д претворувачот го претвора дискретниот сигнал во дигитален со помош на дигитален бројач, за што му треба одредено време. Затоа во процесот на А/Д претворба мора во текот на секој интервал на дискретизација да постои континуален напон. Комерцијално, колата за дискретизација и задршка се изведуваат како едно коло, наречено **коло за семплирање и задршка**, иако процесите на дискретизација и задршка математички се моделираат одвоено, како што ќе биде покажано во продолжение.

Едно едноставно коло за семплирање и задршка е прикажано на сликата 6-12. Тоа се состои од два операциони засилувачи, прекинувач и кондензатор. Операциониот засилувач A_{mp1} е влезен засилувач со многу голема влезна импеданса. Операциониот засилувач A_{mp2} е излезен засилувач. Колото работи во два режима: првиот режим се воспоставува со затворање на прекинувачот и тогаш се доведува влезниот сигнал на кондензаторот. Бидејќи полнежот на кондензаторот го следи доведениот влезен напон, овој режим се нарекува режим на следење. Вториот режим се воспоставува со

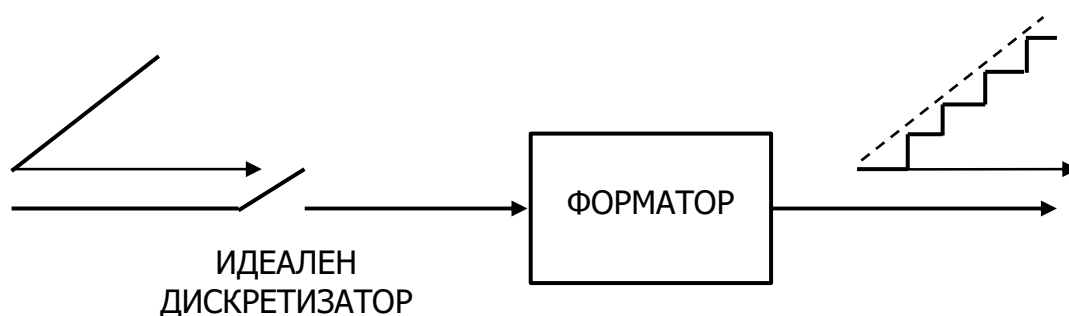
отварање на прекинувачот, кога се исклучува влезниот напон, и тогаш напонот на кондензаторот се одржува константен за одреден временски период, диктиран со периодата на дискретизација. Затоа овој режим се нарекува режим на задршка.



Слика 6-12 Едноставно коло за семплирање и задршка

Во реалноста, прекинувачот не се затвора и отвора мигновено. Исто така, напонот на кондензаторот не се задржува идеално константен, туку со времето малку се намалува. За да се ублажи овој пад на напонот на кондензаторот, се користи излезен операционен засилувач со многу голема влезна импеданса.

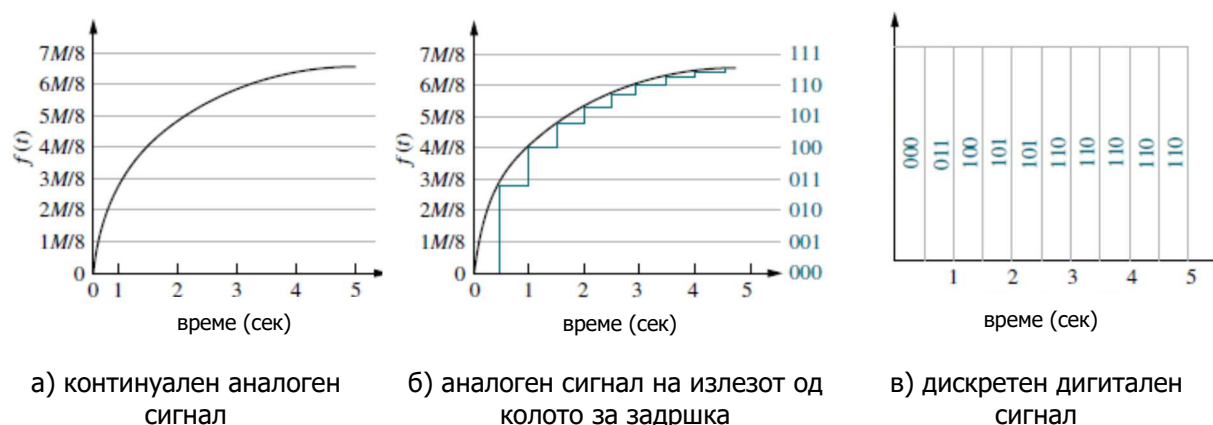
Иако колата за семплирање и задршка се произведуваат како еден чип, за аналитички цели посоодветно е процесот на семплирање и процесот на задршка да се третираат одделно. Затоа, за целите на математичката анализа, под претпоставка дека времетраењето на семплирањето е многу помало од периодата на дискретизација T и дека доцнењето како резултат на процесот на семплирање и задршка е доволно мало, колото од сликата 6-12 може да се моделира со блок-шемата прикажана на сликата 6-13, која се состои од **идеален дискретизатор** и т.н. **форматор**. За овие елементи на еден дигитален систем на автоматско управување допрва ќе зборуваме.



Слика 6-13 Шематски приказ на коло за семплирање и задршка

Кога еден аналоген сигнал треба да се претвори во дигитален сигнал, А/Д претворувачот ги изведува следните последователни операции: семплирање и задршка, квантизација и кодирање. Семплирањето е потребно за да се изврши

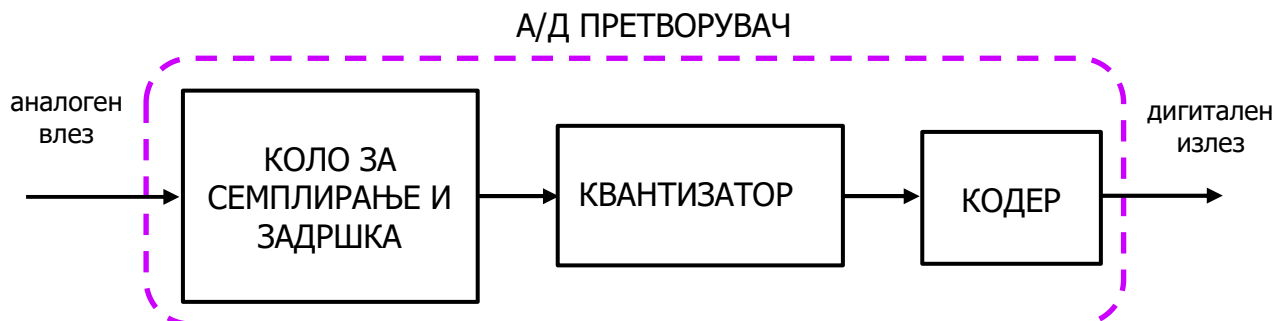
дискретизација на аналогниот сигнал во фиксни периодични интервали. Теоретски гледано, операцијата на задршка не е потребна. Меѓутоа, во пракса се применува со цел да се редуцира ефектот од варијациите на амплитудата на сигналот во текот на конверзијата, затоа што реалното време на А/Д конверзија не е нулево. А/Д претворувачот го претвора дискретниот сигнал во дигитален низ процесот на квантизација, кој се одвива на следниот начин. Динамичкиот опсег на аналогниот сигнал е поделен на одреден број дискретни нивоа и на секое ниво му е доделен еден дигитален број. Бројот дискретни нивоа е одреден со бројот битови употребени за аналого-дигитална конверзија и изнесува 2^n , каде што n е бројот бинарни битови. За $n = 3$, на пример, амплитудите на аналогниот сигнал ќе бидат поделени на 8 нивоа, а секое ниво ќе биде претставено со еден трибитен бинарен број: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Еден **квантизациски чекор** се дефинира како опсег помеѓу две соседни квантизациски нивоа и е даден со количникот $M/2^n$, каде што M е целиот осег на аналогниот сигнал. Треба да се забележи дека првиот бит во еден бинарен број има најголема тежина, која изнесува половина од M , додека последниот бит има најмала тежина, еднаква на $M/2^n$. Затоа првиот бит се вика **најзначаен бит** – MSB, а последниот **најмалку значаен бит** – LSB. Во процесот на квантизација, аналогниот напон се заокружува на следното повисоко или пониско ниво, зависно од тоа до кое е поблизу, така што секогаш ќе постои одредена грешка за секоја дигитална вредност на аналогниот сигнал, освен на границите од неговиот динамички опсег. Оваа грешка се нарекува едноставно **грешка на квантизација** и нејзината максимална големина е еднаква на половината од разликата помеѓу две соседни квантизациски нивоа, односно $(1/2)(M/2^n)$. Големината на оваа грешка зависи од квантизацискиот чекор, и може да се прави произволно мала со намалување на чекорот на квантизација, што од своја страна значи зголемување на бројот битови n . А/Д претворбата е илустрирана на сликата 6-14, додека соодветната структурна шема на еден А/Д претворувач е дадена на сликата 6-15.



Слика 6-14 Илустрација на А/Д конверзијата

А/Д претворбата е посложен процес од Д/А претворбата и А/Д претворувачот има посложена изведба. Во споредба со еден Д/А претворувач, А/Д претворувачот е поскап и има побавен одзив при иста точност на конверзија. Грешката на квантизацијата на еден А/Д претворувач се намалува со зголемување на резолуцијата (точноста) на А/Д претворувачот, меѓутоа, тоа едновременно ја зголемува сложеноста на неговата изведба и вкупното време на конверзија, кое зависи од резолуцијата на А/Д уредот и

применетата постапка на конверзија. Кај комерцијалните А/Д уреди ова време се движи помеѓу 100ns и 200µs. Времето на конверзија на еден А/Д претворувач во затворениот дигитален систем на автоматско управување се јавува во улогата на временско доцнење во системот, кое од своја страна има негативно влијание врз стабилноста на затворениот систем.



Слика 6-15 Шематски приказ на А/Д претворувач

Ако А/Д претворувачот има висока резолуција (голема точност), тогаш нелинеарниот ефект на процесот на квантизација може да се занемари. Исто така, преносната функција на кодерот е едноставно засилување, па така структурната блок-шема на А/Д претворувачот од сликата 6-15 може да се сведе на многу поедноставната шема од сликата 6-16.

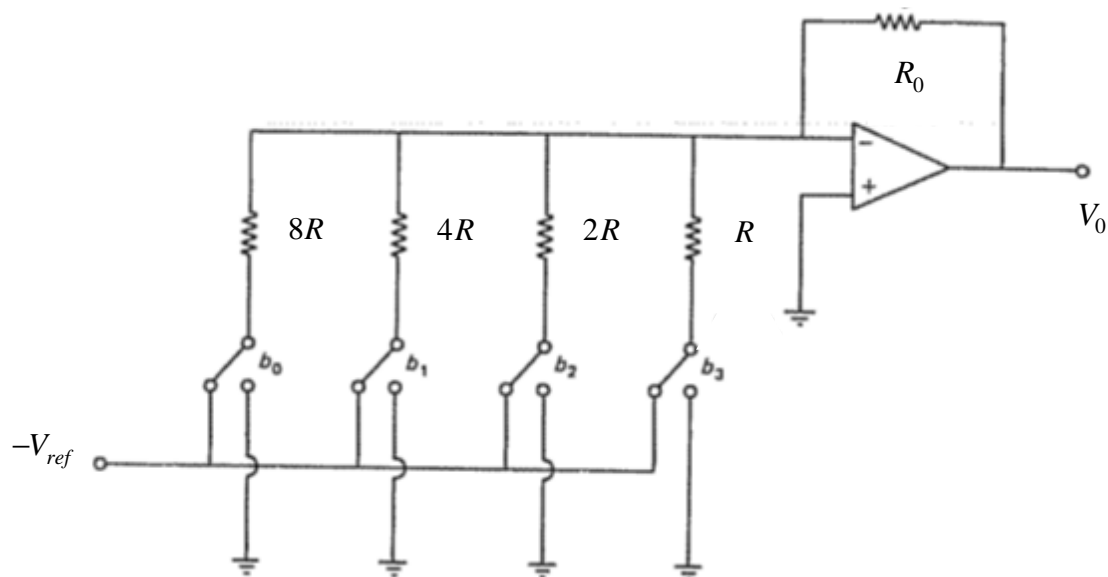


Слика 6-16 Упростена структурна блок-шема на еден А/Д претворувач

Д/А претворба. Д/А претворувачот е уред, кој дигиталниот сигнал на својот влез го претвора во аналоген сигнал на својот излез. Овој излез во најголемиот број случаи е напон. При Д/А претворбата постои еднозначна кореспонденција помеѓу дигиталниот влезен и аналогниот излезен сигнал. Така, на дигитален сигнал претставен со n – битни зборови, ќе соодветствуваат 2^n аналогни вредности, вклучувајќи ја и нулата. На сликата 6-17 е прикажана шемата на Д/А претворувач кој користи отпорници со скалирана отпорност за $n = 4$.

Отпорностите на влезните отпорници во шемата од сликата 6-17 се скалирани на бинарен начин, што значи последниот отпорник има отпорност R , што е еднакво на $R \cdot 2^0$, претпоследниот има отпорност $2R$, што одговара на $R \cdot 2^1$, сè до првиот, кој има отпорност $R \cdot 2^{n-1}$. Секој од овие отпорници преку електронски прекинувач е поврзан или со референтниот напон V_{ref} или со заземјувањето. Прекинувачите се

управуваат преку соодветно логичко коло. Кога логичкото коло ќе добие на некој влез 1, прекинувачот го поврзува соодветниот отпорник на референтниот напон. Кога логичкото коло ќе добие на истиот влез нула, прекинувачот го поврзува соодветниот отпорник на земја. Во пракса овие Д/А претворувачи се од паралелен тип, што значи дека сите битови дејствуваат симултано за секој дигитален влез. Така Д/А претворувачот генерира аналоген излезен напон од типот:



Слика 6-17 Шематски приказ на Д/А претворувач со отпорници

$$V_0 = \frac{R_0}{R} \left(b_{n-1} + \frac{b_{n-2}}{2} + \frac{b_{n-3}}{4} + \dots + \frac{b_0}{2^{n-1}} \right) V_{ref} \quad (6-1)$$

каде што $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ се битовите во дигиталниот збор, почнувајќи од најзначајниот бит b_{n-1} до битот со најмало значење b_0 . За случајот на Д/А конверзија на 3-битни зборови, ако на влезот се појави дигитален збор 101, на излезот од претворувачот со референтен напон $V_{ref} = 5V$ ќе се добие напон од 6.25V. Имено, кога гранката на најзначајниот бит MSB е поврзана со референтниот напон ($b_2 = 1$), а другите две гранки се поврзани на земја ($b_1 = b_0 = 0$), излезниот напон на Д/А претворникот, кој одговара на дигиталниот збор 100, ќе изнесува:

$$V_0 = \frac{R_0}{R} \left(1 + \frac{0}{2} + \frac{0}{4} \right) V_{ref} = \frac{R_0}{R} V_{ref} \quad (6-2)$$

Излезниот напон на Д/А претворувачот, за дигиталниот збор 110, се добива од (6-1) за $n = 3$ и $b_2 = 1, b_1 = 1, b_0 = 0$:

$$V_0 = \frac{R_0}{R} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} \right) V_{ref} = \frac{3R_0}{2R} V_{ref} \quad (6-3)$$

Максималната вредност на 3-битниот збор 111 одговара на излезен напон:

$$V_0 = \frac{R_0}{R} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) V_{ref} = \frac{7R_0}{4R} V_{ref} \quad (6-4)$$

Од друга страна, излезниот напон на Д/А претворникот за дигиталниот збор 001, кој одговара на најмалку значајниот бит LSB, изнесува:

$$V_0 = \frac{R_0}{R} \left(0 + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} \right) V_{ref} = \frac{R_0}{4R} V_{ref} \quad (6-5)$$

па, полната скала FS на Д/А претворникот ќе биде:

$$FS = \frac{7R_0}{4R} V_{ref} + \frac{R_0}{4R} V_{ref} = \frac{2R_0}{R} V_{ref} \quad (6-6)$$

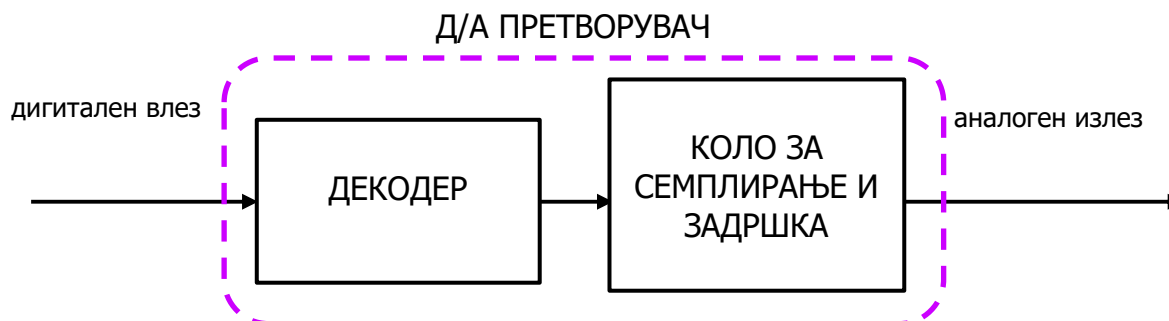
За $R_0 = R$ и $V_{ref} = 5V$, $FS = 10V$. Во таблицата 6-1 се дадени излезните напони на еден 3-битен Д/А претворувач со $FS = 10V$, кои одговараат на сите дигитални влезови. Очигледно е дека со зголемувањето на бројот битови во еден дигитален збор, расте опсегот вредности на отпорностите на отпорниците, и се зголемува точноста на уредот за Д/А претворба.

Таблица 6-1 Излезниот напон на 3-битен Д/А претворувач за соодветните дигитални влезови

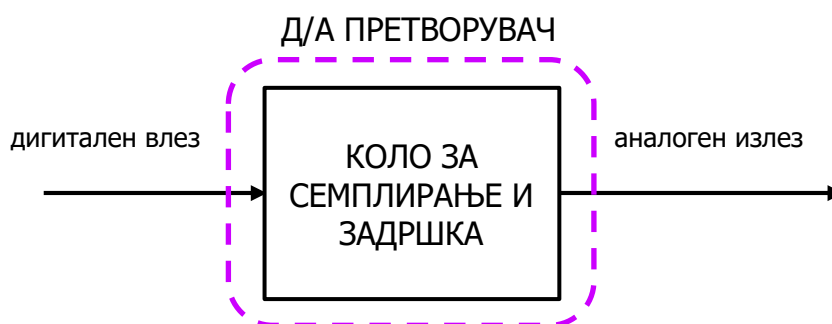
дигитален збор	излезен напон V_0	дел од FS	излезен напон за скала FS=10V
001	$\frac{R_0}{4R} V_{ref}$	$\frac{FS}{8} = \text{LSB}$	1.25
010	$\frac{R_0}{2R} V_{ref}$	$\frac{FS}{4}$	2.50
011	$\frac{3R_0}{4R} V_{ref}$	$\frac{3FS}{8}$	3.75
100	$\frac{R_0}{R} V_{ref}$	$\frac{FS}{2}$	5.00
101	$\frac{5R_0}{4R} V_{ref}$	$\frac{5FS}{8}$	6.25
110	$\frac{3R_0}{2R} V_{ref}$	$\frac{3FS}{4}$	7.50
111	$\frac{7R_0}{4R} V_{ref}$	$FS - \text{LSB} = \frac{7FS}{8}$	8.75

Од функционална гледна точка, Д/А претворувачот може да се смета за уред кој се состои од декодер и коло за семплирање и задршка, како што е покажано на сликата 6-18. Притоа, операцијата семплирање, која што е автоматски вклучена во колото за

семплирање и задршка, е непотребна. Преносната функција на декодерот е едноставно константно засилување, кое во идеален случај е еднакво на 1. Оттаму, за целите на математичката анализа Д/А претворувачот се моделира со колото за семплирање и задршка, слика 6-19.



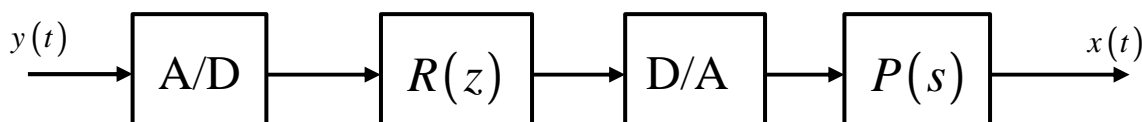
Слика 6-18 Шематски приказ на Д/А претворувач



Слика 6-19 Упростена структурна блок-шема на еден Д/А претворувач

6-3 ОСНОВНИ СТРУКТУРИ НА ДИГИТАЛНИТЕ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ

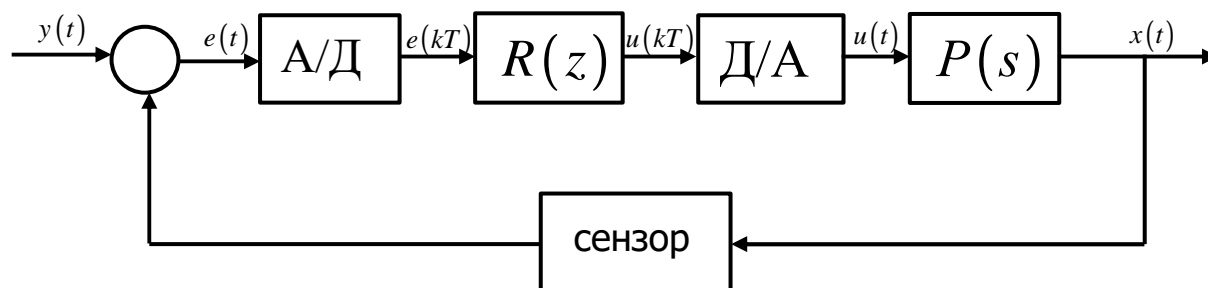
На сликата 6-20 и сликата 6-21 се прикажани структурните блок-шеми на два типични дигитални системи на автоматско управување. Системот од сликата 6-20 е отворен дигитален систем, додека системот од сликата 6-21 е затворен дигитален систем на автоматско управување. Очигледно, кај отворениот дигитален систем на автоматско управување, за разлика од затворениот, на неговиот влез не постои повратна информација за неговиот излез.



Слика 6-20 Структурна блок-шема на отворен дигитален систем на автоматско управување

Без оглед на тоа дали се работи за отворен или за затворен систем, секој еден дигитален систем на автоматско управување се состои од А/Д претворувач, кој аналогниот сигнал од својот влез го претвора во дигитален сигнал на својот излез, Д/А

претворувач, кој врши обратна задача од А/Д претворувачот, што значи дека дигиталниот сигнал од својот влез го претвора во аналоген сигнал на својот излез, дигитален управувачки елемент $R(z)$, кој го генерира соодветниот дигитален закон на управување и објектот на управување $P(s)$. Затворениот дигитален систем на автоматско управување на својот влез има уште и компаратор, кој врши споредување на саканиот излез, зададен преку референтниот влез, со стварниот излез на набљудуваниот дискретен систем.



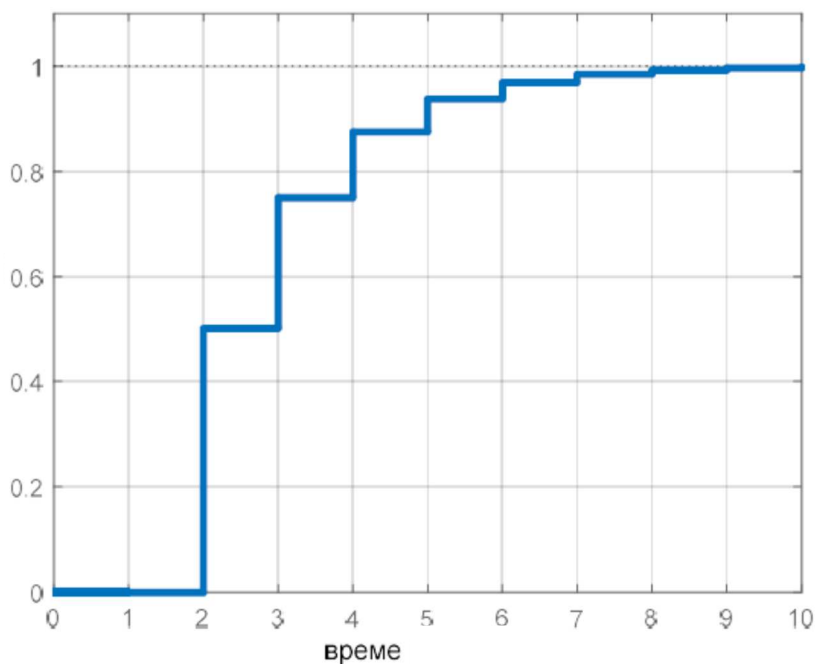
Слика 6-21 Структурна блок-шема на затворен дигитален систем на автоматско управување

Дигиталниот управувачки дел на дигиталните системи на автоматско управување уште се нарекува **дигитален корекционен член** или едноставно **дигитален регулатор**. Притоа со $R(z)$ е означена неговата дискретна преносна функција, во која е опфатен соодветниот нумерички алгоритам на управување. Тој алгоритам претставува одредена диферентна равенка која се решава со помош на дигиталниот регулатор $R(z)$. Така блокот $R(z)$ може да се набљудува како еднонаменски дигитален процесен пресметувач, кој со управуваниот процес е поврзан преку А/Д и Д/А претворувачи. Аналогниот потсистем на еден дигитален систем на автоматско управување ги опфаќа не само аналогниот управуван објект, туку и сите засилувачи и актуатори неопходни за неговото управување.

За разлика од континуалните системи на автоматско управување, кај кои сите сигнали се од континуална природа, кај дигиталните системи на автоматско управување постојат сигнали и со дискретна природа. Така, кај отворените дигитални системи на автоматско управување, влез во управувачкиот дел е управната големина односно референтниот сигнал $y(t)$, додека кај затворените дигитални системи на автоматско управување тоа е регулационото отстапување односно грешката на самиот систем на автоматско управување $e(t)$. Меѓутоа, бидејќи овие две големини имаат континуална природа, за да може да бидат прифатени од дигиталниот регулатор $R(z)$ најнапред се трансформираат во соодветни дигитални сигнали $y(kT)$ и $e(kT)$. Оттука, стварниот влез во блокот $R(z)$ се сигналите $y(kT)$ односно $e(kT)$.

Излезот од дигиталниот регулатор $R(z)$ е дигитален управувачки сигнал $u(kT)$, кој како таков не може непосредно да се доведе на влезот од управуваниот објект $P(s)$. Затоа овој сигнал најнапред се претвора во аналоген континуален сигнал $u(t)$ со

помош на соодветен Д/А претворувач. Најчесто излезот од Д/А претворувачот е од облик како на сликата 6-22, односно претставува дел по дел константна функција.



Слика 6-22 Графички приказ на типичен управувачки сигнал кај дигиталните системи на автоматско управување

Од погоре кажаното произлегува дека кај дигиталните системи на автоматско управување се јавува еден нов, поинаков начин на регулација и управување, кога управувачкиот сигнал што влегува во континуалниот објект на управување не е континуален во математичка смисла, т.е. не е неиспрекинат, туку е по делови испрекинат односно дисконтинуален, како што е тоа покажано на сликата 6-22. Притоа бројот на прекини на управувачкиот сигнал е бесконечен, но преброиво бесконечен, што значи дека множеството на тие прекини е еднакво со множеството природни броеви. Ваквиот начин на регулација и управување е квалитативно и квантитативно сосема поинаков од регулацијата и управувањето кај континуалните системи и тој бара нови постапки за изучување на ваквите системи. За нив ќе стане збор во продолжение. Всушност, да се анализира еден дигитален систем на автоматско управување, на крајот од краиштата значи различните видови сигнали во тој систем и нивните меѓусебни врски да се обработат на единствен начин. Тој единствен начин го обезбедува математичкиот апарат на Z -трансформацијата и затоа во следните неколку поглавја ќе бидат изложени постапките за анализа на линеарните дигитални системи на автоматско управување со помош на методите на Z -трансформацијата.

6-4 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ НА А/Д ПРЕТВОРУВАЧ

Процесот на А/Д претворба претставува суштински концепт во теоријата на дигиталните системи на автоматско управување. Во основа, се работи за процес на дискретизација на континуалните сигнали, која се реализира со некој вид дискретизатор. Дискретизација во еден дигитален систем може да се одвива на различни начини. На пример, дискретизаторот може да реализира неуниформна дискретизација или дискретизација со циклично променлива брзина на дискретизација. Исто така, често се сретнуваат дигитални системи на автоматско

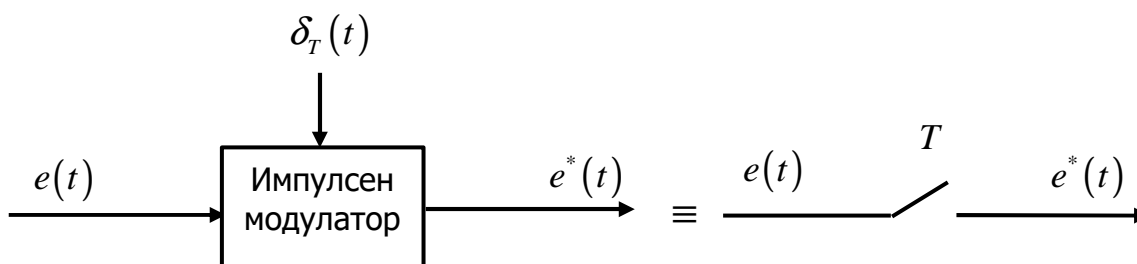
управување кои поседуваат повеќе дискретизатори со различна брзина на дискретизација. Овие различни брзини на дискретизација може, но не мораат да бидат поврзани, исто како што може но не мораат да бидат синхронизирани. Дури постојат и такви суштинско дискретни системи кај кои дискретизацијата се врши по сосема случајна шема. Во продолжение ќе ги разгледаме само дискретизаторите со униформна дискретизација и системите во кои сите дискретизатори се синхронизирани со иста брзина на дискретизација.

6-4-1 ИДЕАЛЕН ДИСКРЕТИЗАТОР

При изведувањето на математичкиот модел на еден А/Д претворувач, ќе ги направиме следните претпоставки:

- ❖ Излезот на А/Д претворувачот по амплитуда одговара точно на својот влез, што значи дека е претпоставена занемарлива грешка на квантизација
- ❖ А/Д го генерира дигиталниот излез мигновено
- ❖ Дискретизацијата е совршено униформна, што значи дека се одвива со фиксна брзина

Тогаш под овие претпоставки, А/Д претворувачот може да се моделира како **идеален дискретизатор** односно прекинувач со периода на дискретизација T , како што е покажано на сликата 6-23.



Слика 6-23 Идеален прекинувач како модел на еден А/Д претворувач

Се разбира, направените претпоставки се идеализација и истите во пракса се само приближно точни. Имено, грешката на квантизација е навистина мала, но сепак не е нулева; во пракса навистина настапуваат промени во брзината на дискретизација, но се занемарливо мали и, конечно, физичките што значи реалните А/Д претворувачи имаат конечно време на конверзија. И покрај ова, за најголемиот број инженерски апликации, моделирањето на еден реален А/Д претворувач со идеалниот дискретизатор од сликата 6-23 е прифатливо.

Под претпоставка, прекинувачот од сликата δ_T се затвора мигновено секои T секунди и на својот излез генерира импулси $f(kT)\delta(t-kT)$, каде што $\delta(t)$ е Диракова-делта функција. Излезот на импулсниот дискретизатор, значи, по дефиниција е:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) \quad (6-7)$$

и претставува временска низа Диракови импулси со „амплитуди“ $f(kT)$, кои се јавуваат во интервали од T секунди.

Со Лапласова трансформација на изразот (6-7), под претпоставка дека $f(kT) \equiv 0 \forall k < 0$, се добива:

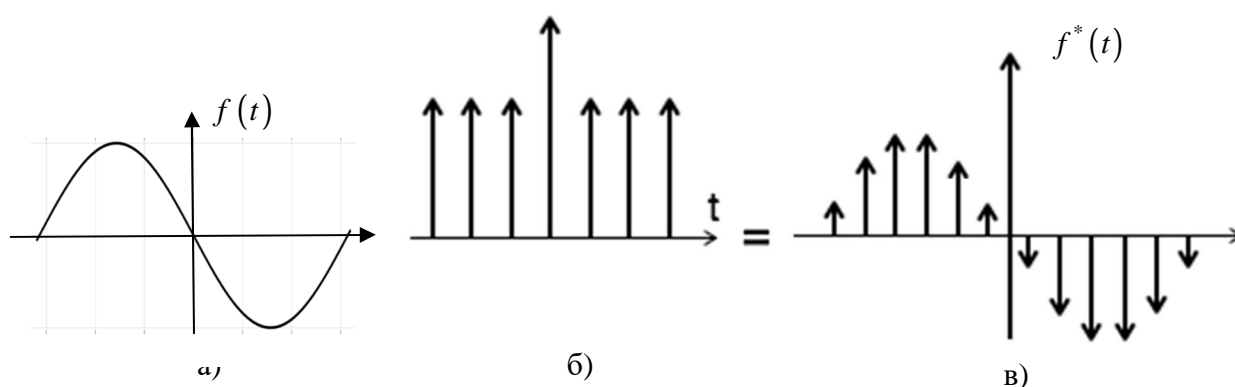
$$F^*(s) = L\{f^*(t)\} = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) \right] e^{-st} dt \quad (6-8)$$

Со замена на местата на операциите за интегрирање и сумирање, изразот (6-8) се трансформира во следниот израз:

$$F^*(s) = L\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \int_0^{\infty} \delta(t - kT) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT} \quad (6-9)$$

$F^*(s)$ претставува Лапласова трансформација на излезот на идеален дискретизатор и треба да се воочи дека $F^*(s) \neq F(s) = L\{f(t)\}$. За сигналите чии L – слики се дробно-рационални функции од комплексната променлива s , бесконечната сума (6-9) може да се запише и во попогоден затворен аналитички облик преку променливата e^{sT} како што ќе биде покажано во продолжение.

Типичниот влез и излез на еден идеален дискретизатор се прикажани на сликата 6-24. Излезот од идеалниот дискретизатор претставува поворка од импулси чија јачина одговара на дискретните вредности на влезот во миговите на дискретизација. Бидејќи една импулсна функција по дефиниција има нулево траење и бесконечна амплитуда, импулсите на излезот од идеалниот дискретизатор се означени со стрелки.



Слика 6-24 а) Влез, б) поворка единични Диракови импулси и в) излез на идеален дискретизатор

За сликата $F^*(s)$ може да се изведат и следните алтернативни изрази:

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^k \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} \cdot \frac{1}{1 - \exp[-T(s - s_i)]} \quad (6-10)$$

каде што:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (6-11)$$

и s_i е i -тиот прост пол на сликата $F(s)$, која има исклучиво прости полови;

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{m_i} \frac{(-1)^{m_i-l} C_{il}}{(m_i-l)!} \cdot \frac{\partial^{m_i-l}}{\partial s^{m_i-l}} \left[\frac{1}{1-\exp(-Ts)} \right] \quad (6-12)$$

каде што C_{il} се коефициенти на развој на функцијата $F(s)$ во парцијални дробки по нејзините кратни полови:

$$C_{il} = \frac{(-1)^{m_i-l}}{(l-1)!} \cdot \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} \left[(s-s_i)^{m_i} F(s) \right]_{s=s_i} \quad (6-13)$$

и s_i е i -тиот кратен пол на сликата $F(s)$ со кратност $m_i > 1$, при што $F(s)$ има исклучиво кратни полови;

$$F^*(s) = \frac{f(0^+)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(s + jr\omega_0) \quad (6-14)$$

Пример 6-1. Да се најде L -сликата на излезот на идеален дискретизатор, на чиј влез е доведен сигналот:

$$f(t) = \exp(-at)h(t) \quad (6-15)$$

Решение: Врз основа на изразот (6-7), за излезот на идеалниот дискретизатор важи релацијата:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-akT) \delta(t-kT) \quad (6-16)$$

со чија Лапласова трансформација се добива:

$$F^*(s) = L\{f^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-akT) \exp(-skT) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp[-(s+a)kT] \quad (6-17)$$

За да ја пресметаме бесконечната сума на десната страна од изразот (6-17), најнапред изразот (6-17) ќе го помножиме со $\exp[-(s+a)T]$:

$$\exp[-(s+a)T] F^*(s) = \exp[-(s+a)T] \sum_{k=0}^{\infty} \exp[-(s+a)kT] \quad (6-18)$$

и потоа (6-18) ќе го одземеме од (6-17):

$$F^*(s) - \exp[-(s+a)T] F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp[-(s+a)kT] - \exp[-(s+a)T] \sum_{k=0}^{\infty} \exp[-(s+a)kT] = 1 \quad (6-19)$$

од каде што следува дека:

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - \exp[-(s+a)T]}; \quad |\exp[-(s+a)T]| < 1 \quad (6-20)$$

$|\exp[-(s+a)T]| < 1$ е условот бесконечниот ред во (6-17) да конвергира.

Во продолжение задачата ќе ја решиме преку Лапласовата слика на влезот (6-15), која гласи:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s+a} \quad (6-21)$$

Бидејќи сликата $F(s)$ им само еден прост пол во точката $s = -a$, ќе ја користиме формулата (6-10), според која се добива:

$$F^*(s) = \frac{B(-a)}{A'(-a)} \cdot \frac{1}{1 - \exp[-(s+a)T]} = \frac{1}{1 - \exp[-(s+a)T]} \quad (6-22)$$

бидејќи:

$$B(a) = 1; \quad A'(a) = (s+a)'_{s=-a} = 1 \quad (6-23)$$

Истиот резултат може да се добие и од формулата (6-12), со тоа што во овој случај $k = 1 \Rightarrow i = 1, l = 1$ и $m_i = 1$, па истата се сведува на многу едноставниот случај:

$$F^*(s) = \left[\frac{1}{1 - \exp(-Ts)} \right]_{s=s+a} = \frac{1}{1 - \exp[-(s+a)T]} \quad \square \quad (6-24)$$

Пример 6-2. Да се најде L -сликата на излезот од идеален дискретизатор, на чиј влез е доведен сигналот:

$$f(t) = th(t) \quad (6-25)$$

Решение: L -сликата на влезот (6-25) гласи:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2} \quad (6-26)$$

и таа има двократен пол во точката $s = 0$. Затоа ќе ја користиме формулата (6-12). Во конкретниот случај $k = 1$ и $m_i = 2$, па коефициентите на развој на функцијата (6-26) во парцијални дропки се:

$$c_{11} = \left[s^2 F(s) \right]_{s=0} = 1$$

$$c_{12} = \frac{\partial}{\partial s} \left[s^2 F(s) \right]_{s=0} = 0 \quad (6-27)$$

Оттука, со воведување на (6-27) во формулата (6-12) за конкретниот случај се добива:

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \sum_{l=1}^2 (-1)^{2-l} c_{1l} \cdot \frac{\partial^{2-l}}{\partial s^{2-l}} \left[\frac{1}{1 - \exp(-Ts)} \right]_{s=0} = \\ &= -c_{11} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{1 - \exp(-Ts)} \right] + c_{12} \left[\frac{1}{1 - \exp(-Ts)} \right] = -\frac{T \exp(-Ts)}{[1 - \exp(-Ts)]^2} \quad \square \end{aligned} \quad (6-28)$$

Во принцип, задачите од примерот 6-1 и примерот 6-2 може да се решат и со примена на формулата (6-14), меѓутоа таа бара посложени пресметки. Оттука формулата (6-14) многу ретко се користи за одредување на сликите $F^*(s)$. Исто така, и формулата (6-9) може да се искористи за одредување на конкретните слики $F^*(s)$. Недостаток на оваа формула е што решението се добива во вид на бесконечен ред, чија сума допрва треба да се определи, а тоа често се покажува како тешка задача.

Функциите $F^*(s)$ поседуваат некои интересни својства кои потоа наоѓаат широка примена во анализата и синтезата на дигиталните системи на автоматско управување:

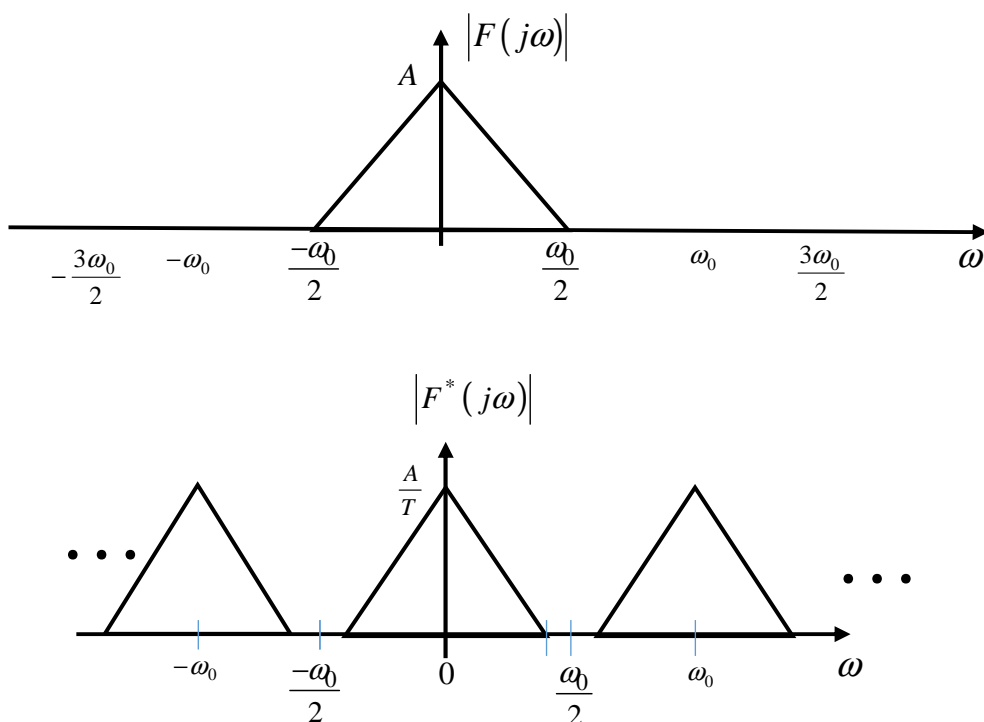
1. Функцијата $F^*(s)$ е периодична функција со периода ω_0 , каде што $\omega_0 = 2\pi/T$ е фреквенцијата на дискретизација и r е произволен цел број:

$$F^*(s + jr\omega_0) = F^*(s) \quad (6-29)$$

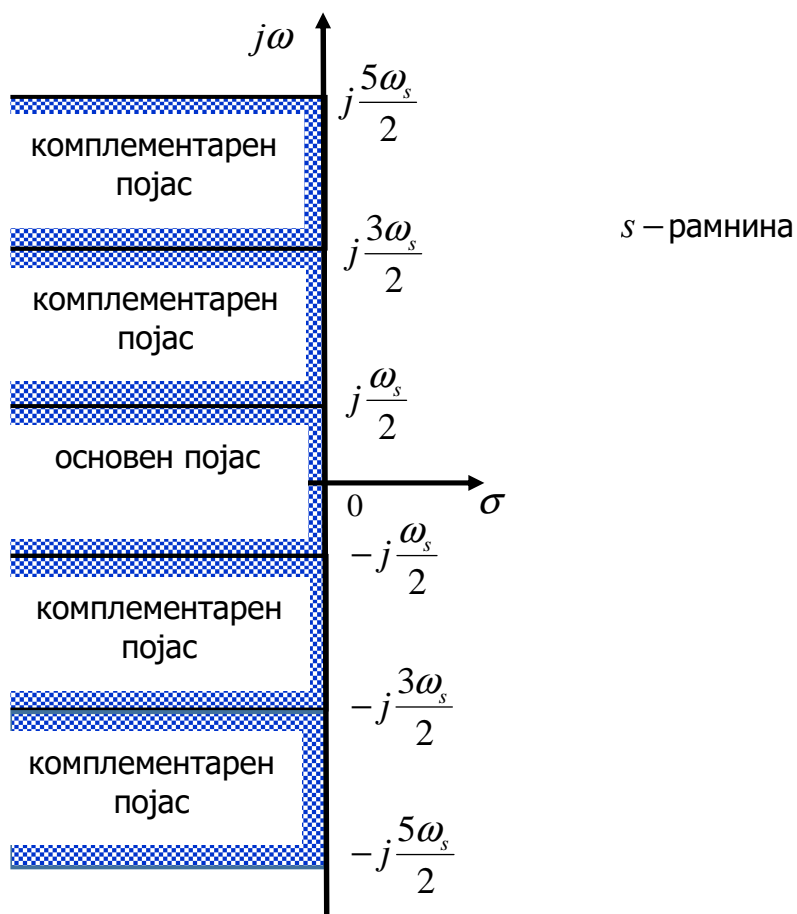
2. Доколку функцијата $F^*(s)$ има пол во точката $s = s_1$, тогаш таа ќе има полови и во точките $s = s_1 + jr\omega_0$, каде што $r \in (-\infty, \infty)$ е цел број.

Првото својство на функцијата $F^*(s)$ станува очигледно од графиконите на сликата 6-25, кои го прикажуваат амплитудниот спектар на функциите $F(s)$ и $F^*(s)$, односно на влезот и излезот на идеалниот дискретизатор.

Изразот (6-29) кажува дека функцијата $F^*(s)$ ќе има иста вредност во сите точки $s + jr\omega_0$. Рамнината на функцијата $F^*(s)$ на сликата 6-26 е поделена на бесконечен број периодични појаси со широчина од ω_0 , каде што $\omega_0 = 2\pi/T$. Појасот помеѓу $-\omega_0/2$ и $\omega_0/2$ се нарекува **примарен појас**, додека останатите појаси се нарекуваат **комплементарни појаси**.



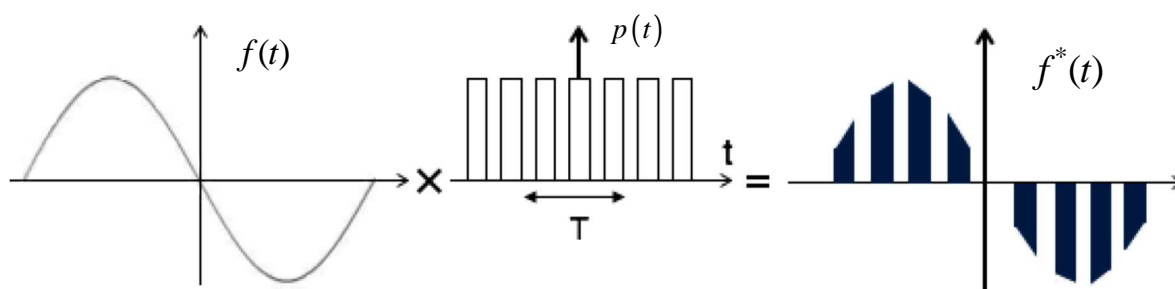
Слика 6-25 Амплитудна фреквенциска карактеристика на влезот и излезот на идеален дискретизатор



Слика 6-26 Периодични појаси во s – комплексната рамнина

6-4-2 РЕАЛЕН ДИСКРЕТИЗАТОР

Излезот на идеалниот дискретизатор може да се претстави како производ на влезот $f(t)$ и поворка единични Диракови импулси со периода T , при што амплитудите на излезните импулси се менуваат соодветно на амплитудите од влезот. Меѓутоа, идеалниот дискретизатор не може практично да се реализира, затоа што не може да се генерираат импулси со нулево траење и не може да се реализира поворка од Диракови импулси. На сликата 6-27 е прикажан влезот, поворката импулси и излезот на еден **реален дискретизатор**, кој може да се реализира.



Слика 6-27 Влезот, поворката импулси и излезот на еден реален дискретизатор

Принципот на работа на реалниот дискретизатор е сличен со принципот на работа на идеалниот дискретизатор, само што сега поворката Диракови импулси со кои се множи влезот во дискретизаторот е заменета со поворка периодични правоаголни импулси. Со други зборови, излезот на реалниот дискретизатор се добива со множење на влезниот сигнал со поворка од многу тесни правоаголни импулси со константна единична амплитуда, траење еднакво на τ и периода еднаква на T . Оваа поворка може математички да се опише на следниот начин:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn2\pi f_0 t} \quad (6-30)$$

каде што $\omega_0 = 2\pi/T$ е фреквенцијата на дискретизација. Бидејќи $p(t)$ претставува поворка правоаголни импулси, коефициентот P_n ќе биде даден со изразот:

$$P_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} P(jn\omega_0) \quad (6-31)$$

Па, со воведување на (6-31) во (6-30) се добива:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (6-32)$$

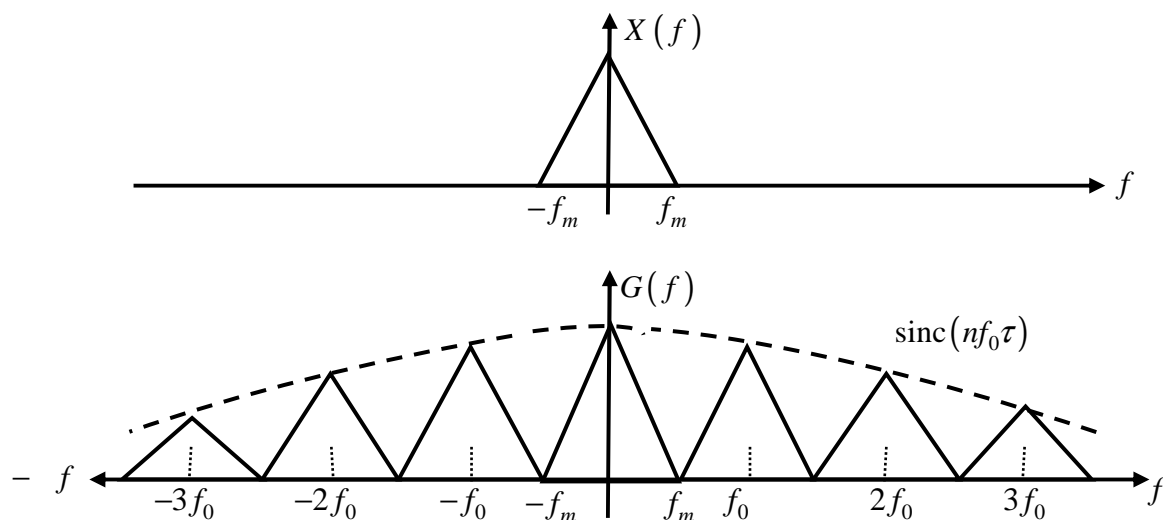
Тогаш излезот на реалниот дискретизатор ќе биде даден со изразот:

$$f^*(t) = p(t) f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(jn\omega_0) f(t) e^{jn\omega_0 t} \quad (6-33)$$

а неговата фреквенциска преносна функција ќе биде:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(jn\omega_0) F(j\omega - jn\omega_0) \quad (6-34)$$

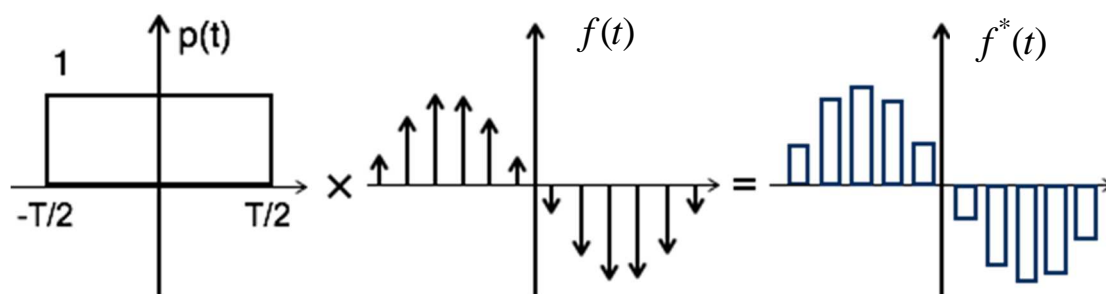
Спектарот на излезниот сигнал од реалниот дискретизатор е прикажан на сликата 6-28.



Слика 6-28 Спектар на излезниот сигнал од реалниот дискретизатор

6-4-3 КОНВЕНЦИОНАЛЕН ДИСКРЕТИЗАТОР

Шумот што се јавува кај излезната поворка импулси на реалниот дискретизатор, може да се елиминира доколку се обезбеди излезот од дискретизаторот да претставува поворка од правоаголни импулси, односно импулси со константни амплитуди. Ваквиот дискретизатор ќе го наречеме **конвенционален дискретизатор** затоа што се користи во праксата. Излезот од овој дискретизатор може да се претстави со конволуција од излезот на идеалниот дискретизатор и правоаголен импулс со амплитуда 1 и траење T , како што е покажано на сликата 6-29.



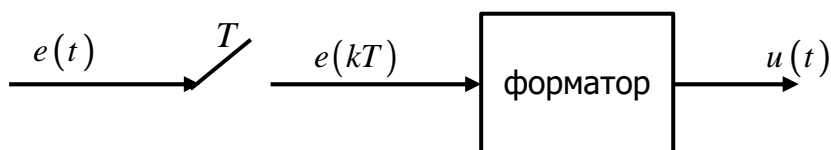
Слика 6-29 а) Правоаголен импулс, б) влез и в) излез на конвенционален дискретизатор

6-5 МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ НА Д/А ПРЕТВОРУВАЧ

Многу битен дел на секој еден дигитален систем на автоматско управување е елементот (колото, склопот), чија задача е дискретниот сигнал односно бројната низа од својот влез да ја претвори во континуален сигнал на својот излез, со цел да се

обезбеди соодветен влез за континуалниот објект на управување. Кога влезот на ваквиот елемент е дискретен сигнал, тој се нарекува едноставно **форматор**. Меѓутоа, кога неговиот влез е дигитален сигнал каков што е, на пример, излезот од дигиталниот пресметувач, тогаш овој елемент обезбедува уште и Д/А претворба на сигналите. Затоа во овој случај тој се нарекува Д/А претворувач. Д/А претворувачот автоматски ја реализира и функцијата на форматорот. Бидејќи од математичка гледна точка меѓу форматорот и Д/А претворувачот не постои никаква разлика, при нивната анализа тие може да се третираат на аналоген начин, што е и сторено во продолжение.

На сликата 6-30 е дадена шемата на еден Д/А претворувач со соодветен форматор. Нејзиниот принцип на работа е следниот. Прекинувачот од сликата, под претпоставка, се затвора мигновено секои T секунди, за на неговиот излез да се генерира бројната низа $e(kT)$. Таа претставува влез за дигитално-аналогниот претворувач Д/А со вграден форматор, кој ја претвора во континуален сигнал $u(t)$, способен да го побуди односно управува континуалниот објект $P(s)$. Континуалната функција $u(t)$ на излезот од Д/А претворувачот треба барем приближно да одговара на енвелопата на влезната низа $e(kT)$. Оттука, помеѓу соседните мигнови на дискретизација, односно за $kT \leq t < kT + T; k = 0, 1, 2, \dots$, форматорот од Д/А претворувачот мора да екстраполира помеѓу тековната и следната вредност на влезната низа. Со тоа форматорот всушност работи како обичен **екстраполатор**.



Слика 6-30 Шематски приказ на еден Д/А претворувач

Погоден облик на екстраполација е т.н. **полиномна екстраполација**. Тогаш се претпоставува дека сигналот $u(t)$ на излезот од форматорот може на соодветен начин да се апроксимира со полином од m – ти степен од обликот:

$$u(kT + \tau) = a_m \tau^m + a_{m-1} \tau^{m-1} + \dots + a_1 \tau + a_0, \quad 0 \leq \tau < T; k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-35)$$

Со смената $t = \tau + kT$, полиномот (6-35) може да се трансформира во следниот еквивалентен облик:

$$u(t) = a_m (t - kT)^m + a_{m-1} (t - kT)^{m-1} + \dots + a_0, \quad kT \leq t < kT + T; k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-36)$$

Ваквиот форматор се нарекува форматор од m – ти ред. Меѓутоа, бидејќи излезот на форматорот $u(t)$ треба да биде енvelopa на низата $e(kT)$ на неговиот влез, природно е да се очекува сигналот $u(t)$ во миговите на дискретизација $t = kT$ да ги има истите вредности со соодветните членови на низата $e(kT)$, односно да биде:

$$u(t)_{t=kT} = u(kT) = e(kT) \quad \forall k \quad (6-37)$$

па, коефициентите $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ на полиномот (6-36), за секој интервал $kT \leq t < kT + T; k = 0, 1, 2, \dots$ се определуваат од условот (6-37), односно од условот:

$$u(kT) = e(kT); k = n - m, n - m + 1, \dots, n - 1, n \quad (6-38)$$

што значи дека $u(kT + \tau)$ е полином што минува низ $m + 1$ вредност на влезот $e(kT)$. Следствено, излезот на форматорот од m -ти ред во секој тековен миг на време зависи од $m + 1$ претходни вредности на влезот. По секоја периода на дискретизација T на влезот од форматорот се појавува нов член на низата $e(kT)$, така што во миговите на дискретизација процесот на екстраполација мора постојано да се повторува. Тоа значи дека коефициентите $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ на полиномот (6-35) односно (6-36) се пресметуваат одново по секоја периода на дискретизација T .

6-5-1 ФОРМАТОР ОД НУЛТИ РЕД

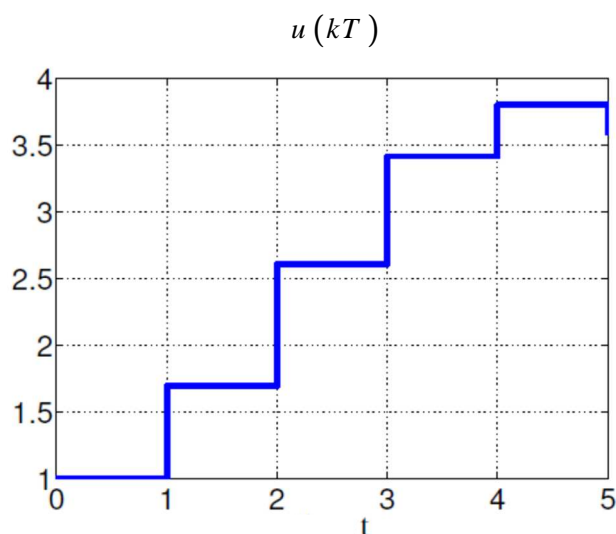
Наједноставен вид на полиномен екстраполатор е кога $u(t)$ е полином од нулти степен ($m = 0$). Тогаш излезот на екстраполаторот е даден со едноставната релација:

$$u(kT + \tau) = e(kT), 0 \leq \tau < T; k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-39)$$

односно со релацијата:

$$u(t) = e(kT), kT \leq t < kT + T; k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-40)$$

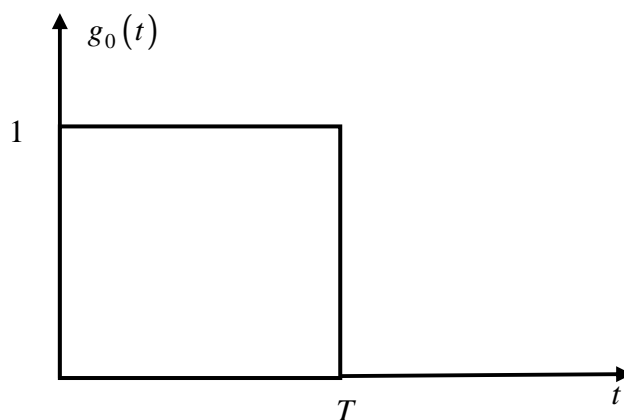
Следствено, (6-40) е влезно-излезната релација на форматор од нулти ред, и од неа се гледа дека форматорот од нулти ред на својот излез дава т.н. „скалест“ сигнал, односно сигнал кој има константна вредност меѓу секои два последователни мигови на дискретизација. На сликата 6-31 е прикажан графички типичниот одзив на форматор од нулти ред.



Слика 6-31 Графички приказ на типичен излез на форматор од нулти ред

Одзивот на форматор од нулти ред на единична импулсна возбуда во мигот $t = 0$ графички е прикажан на сликата 6-32 и аналитички е опишан со изразот:

$$g_0(t) = h(t) - h(t - T) \quad (6-41)$$



Слика 6-32 Импулсен одзив на форматор од нулти ред

Оттука, со Лапласова трансформација на (6-41) се добива:

$$G_0(s) = \frac{1 - \exp(-sT)}{s} \quad (6-42)$$

а тоа по дефиниција е преносната функција на форматорот од нулти ред.

Во продолжение ќе ја пресметаме фреквенциската преносна функција на форматорот од нулти ред:

$$G_0(j\omega) = \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{j\omega} \quad (6-43)$$

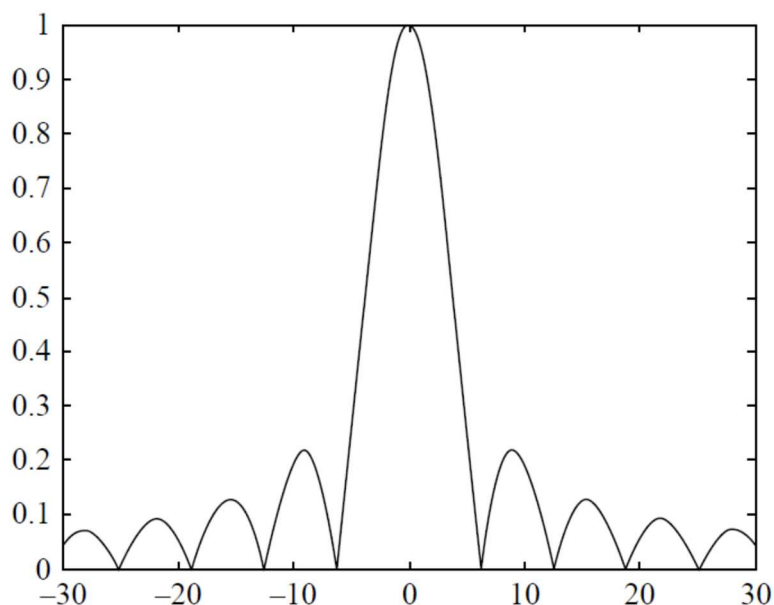
Фреквенциската преносна функција (6-43) може да се трансформира во следниот облик:

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{1 - \exp(-j\omega T)}{j\omega} = \frac{\exp(-j\omega T/2)}{\omega} \left[\frac{\exp(j\omega T/2) - \exp(-j\omega T/2)}{j} \right] = \\ &= \frac{\exp(-j\omega T/2)}{\omega} [2 \sin(\omega T/2)] = T \exp(-j\omega T/2) \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \end{aligned} \quad (6-44)$$

од каде што непосредно следува:

$$|G_0(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right| \quad (6-45)$$

$$\arg[G_0(j\omega)] = -\omega T/2; \quad -2\pi/T < \omega < 2\pi/T \quad (6-46)$$



Слика 6-33 Амплитуда на фреквенциската преносна функција на форматор од нулти ред за $T = 1s$.

Во фреквенцискиот опсег од интерес, функцијата $G_0(j\omega)$ е позитивна и аргументот на фреквенциската преносна функција опаѓа линерно со честотата, додека амплитудата ѝ е пропорционална на $\left| \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right|$ функцијата. Како што може да се забележи од сликата 6-33, амплитудата $|G_0(j\omega)|$ е осцилаторна со максимална вредност еднаква на периодата на дискретизација T , која настапува за нулева честота.

6-5-2 ФОРМАТОР ОД ПРВ РЕД

Ако, под претпоставка, $u(t)$ е полином од прв степен ($m=1$), тогаш тој ќе има облик:

$$u(kT + \tau) = a_1\tau + a_0, \quad 0 \leq \tau < T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-47)$$

односно:

$$u(t) = a_1(t - kT) + a_0, \quad kT \leq t < kT + T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-48)$$

при што важат условите:

$$u(kT) = e(kT)$$

$$u(kT - T) = e(kT - T) \quad (6-49)$$

Од равенството (6-47) и условите (6-49) за $\tau = 0$ и $\tau = -T$ се добива:

$$a_0 = e(kT)$$

$$a_1 = \frac{e(kT) - e(kT - T)}{T} \quad (6-50)$$

Следствено, равенката на излезот на екстраполатор односно форматор од прв ред е:

$$u(kT + \tau) = \frac{e(kT) - e(kT - T)}{T} \tau + e(kT), \quad 0 \leq \tau < T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-51)$$

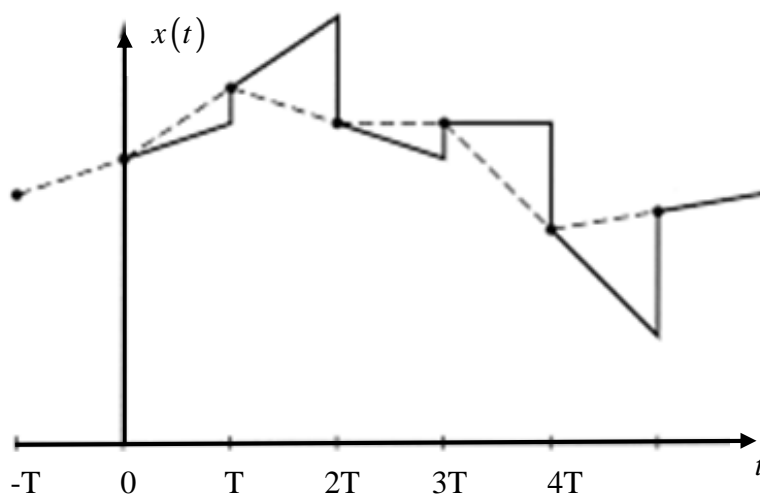
односно:

$$u(t) = \frac{e(kT) - e(kT - T)}{T} (t - kT) + e(kT), \quad kT \leq t < kT + T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-52)$$

Типичен одсив на форматор од прв ред е прикажан на сликата 6-34.

Импулсниот одсив $g_1(t)$ на форматор од прв ред се добива како одсив на системот на единична импулсна возбуда доведена во мигот $t = 0$. Тогаш за $k = 0$ и под претпоставка дека $e(kT) \equiv 0 \quad \forall k < 0$, од (6-52) се добива:

$$g_1(t) = \frac{e(0) - e(-T)}{T} t + e(0) = 1 + \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t < T \quad (6-53)$$



Слика 6-34 Типичен одсив на форматор од прв ред

додека за $k = 1$ следува:

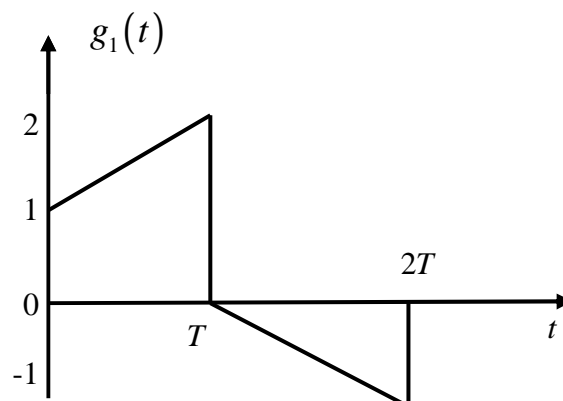
$$g_1(t) = \frac{e(T) - e(0)}{T} (t - T) + e(T) = 1 - \frac{t}{T}, \quad T \leq t < 2T \quad (6-54)$$

За сите останати $k \geq 2$ $g_1(t)$ е идентички еднаков на нула, бидејќи $e(kT) \equiv 0 \quad \forall k \geq 1$. Оттука, и врз основа на (6-53) и (6-54), импулсниот одсив на форматор од прв ред ќе има облик каков што е прикажан на сликата 6-35, а е опишан со аналитичкиот израз:

$$g_1(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right)h(t) - 2\left(1 + \frac{t-T}{T}\right)h(t-T) + \left(1 + \frac{t-2T}{T}\right)h(t-2T) \quad (6-55)$$

Со Лапласова трансформација на изразот (6-55), се добива преносната функција на форматорот од прв ред:

$$G_1(s) = \frac{Ts+1}{Ts^2}(1-e^{-sT})^2 \quad (6-56)$$



Слика 6-35 Импулсен одзив на форматор од прв ред

Фреквенциската преносна функција на форматор од прв ред се добива со воведување на смената $s = j\omega$ во изразот за неговата преносна функција $G_1(s)$:

$$G_1(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{T} \left(\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} \right)^2 \quad (6-57)$$

при што нејзината амплитуда е дадена со изразот:

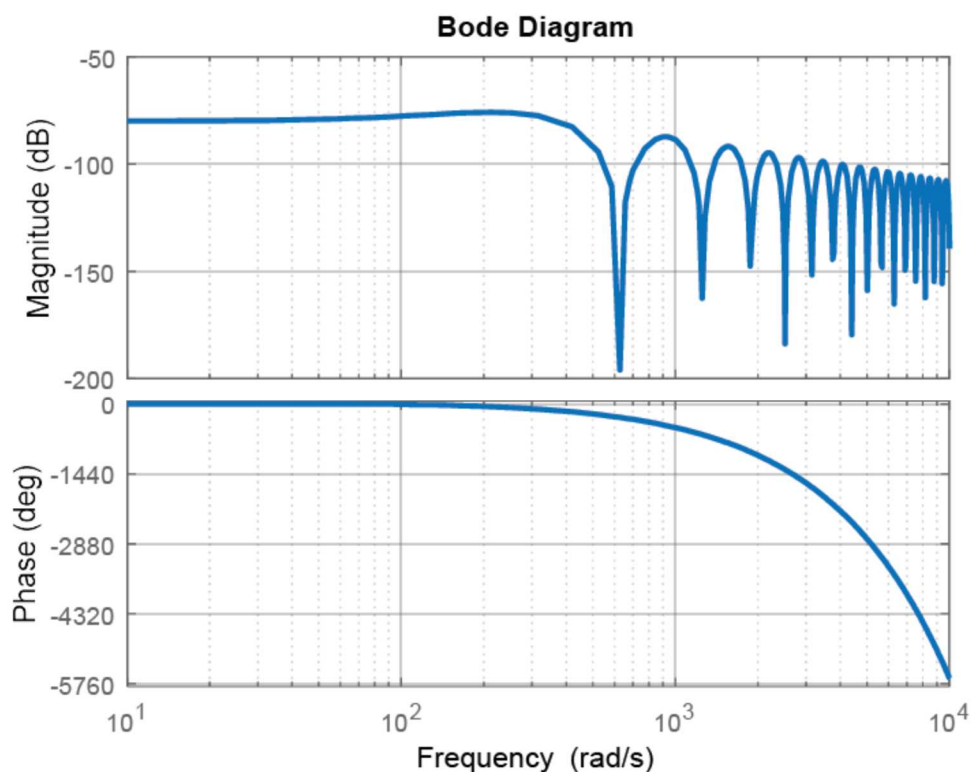
$$|G_1(j\omega)| = \frac{2\pi}{\omega_c} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_c^2} \left[\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} \right]^2} \quad (6-58)$$

додека нејзината фаза е:

$$\arg[G_1(j\omega)] = \text{atan}\left(\frac{2\pi\omega}{\omega_s}\right) - \frac{2\pi\omega}{\omega_s} \quad [\text{rad}] \quad (6-59)$$

На сликата 6-36 се прикажани Бодевите дијаграми на форматорот од прв ред.

На сличен начин може да се опишат и форматорите од повисок ред ($m \geq 2$). На пример, излезот на форматор од втор ред е квадратна функција односно парабола во текот на секоја периода на дискретизација. Меѓутоа, во современите дигитални системи на автоматско управување не се користат форматори од повисок ред поради задоцнувањето што го внесуваат во одзивот на системот. Исто така, тие се многу почувствителни на влијанието на пречки и потешко се реализираат.



Слика 6-36 Бодеови дијаграми на форматор од прв ред

За конструкција на аналоген сигнал од дигитален, може да се применат и други функции. На пример, наместо полиномна екстраполација, може да се примени експоненцијална, полигонална екстраполација итн. Во праксата, Д/А претворувачите не го генерираат својот излез мигновено туку за некое кусо ненулево време. Исто така, нивниот излез не е точно верен на амплитудата на влезот, туку може незначително да отстапува од неа во текот на една периода на дискретизација. Меѓутоа, за најголемиот број инженерски апликации, прикажаниот модел на еден Д/А претворувач е задоволително точен. Форматорот од нулти ред, кој уште се нарекува коло со задршка од нулти ред, е најчесто применуван модел на еден Д/А претворувач иако се можни и други модели.

6-6 ДИСКРЕТНИ ЕКВИВАЛЕНТИ НА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ

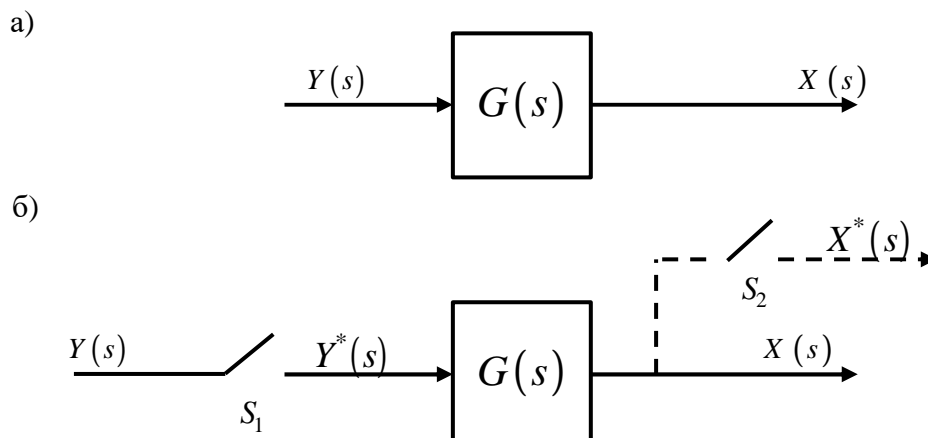
Како што е добро познато, преносната функција на еден линеарен стационарен континуален динамички систем е дефинирана како количник помеѓу L -сликата на неговиот излез и L -сликата на неговиот влез, за нулеви почетни услови:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad (6-60)$$

Ако на влезот од истиот систем сега се доведе дискретизириот сигнал $y^*(t)$, како што е покажано на сликата 6-37 под б), треба да се најде соодветна влезно-излезна релација за набљудуваниот хибриден систем. Лапласовата трансформација на излезот од системот од сликата 6-37 б) е:

$$X(s) = G(s)Y^*(s) \quad (6-61)$$

каде што $Y^*(s) = L\{y^*(t)\}$ и $G(s)$ е дефинирана со (6-60).



Слика 6-37 а) Континуален динамички систем; б) континуален систем со дискретизиран влез

Иако влезно-излезната релација (6-61) на хибридниот систем се добива прилично едноставно, таа содржи дискретен и континуален сигнал и тешко се обработува аналитички. Оттука, посоодветно е системот да се опише со влезно-излезна релација која ќе ја дефинира врската помеѓу дискретизираниот влез и излез на набљудуваниот систем. За таа цел, на излезот од системот $G(s)$ ќе воведеме фиктивен дискретизатор S_2 , како што е покажано на сликата 6-37 б). Притоа се претпоставува дека прекинувачот S_2 е синхронизиран со прекинувачот S_1 и има иста периода на дискретизација T . Лапласовата трансформација на дискретизираниот излез $x^*(t)$, врз основа на (6-9), е дадена со еден од следните изрази:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \exp(-kTs) \quad (6-62)$$

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(s + jr\omega_0); x(0) = 0 \quad (6-63)$$

Слични изрази може да се запишат и за L -сликата на влезот $y^*(t)$:

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \exp(-kTs) \quad (6-64)$$

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} Y(s + jr\omega_0); y(0) = 0 \quad (6-65)$$

Од сликата 6-37 б) следува:

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(s + jr\omega_0) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} G(s + jr\omega_0)Y^*(s + jr\omega_0) \quad (6-66)$$

Користејќи го својството за периодичност на функцијата $Y^*(s)$:

$$Y^*(s) = Y^*(s + jr\omega_0) \quad (6-67)$$

равенката (6-66) се трансформира во следната равенка:

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} G(s + jr\omega_0)Y^*(s + jr\omega_0) = \frac{1}{T} Y^*(s) \sum_{r=-\infty}^{\infty} G(s + jr\omega_0) \quad (6-68)$$

Меѓутоа, бидејќи:

$$G^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} G(s + jr\omega_0) \quad (6-69)$$

со воведување на (6-69) во (6-68) се добива:

$$X^*(s) = G^*(s)Y^*(s) \quad (6-70)$$

каде што:

$$G^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \exp(-kTs) \quad (6-71)$$

Сега можеме да ја дефинираме **импулсната преносна функција** на набљудуваниот континуален систем со дискретизатор на својот влез:

$$G^*(s) = X^*(s)/Y^*(s) \quad (6-72)$$

Со воведување на смената $z = \exp(sT)$ во (6-71) се добива дискретната преносна функција $G(z)$ на континуалниот систем со дискретизиран влез. Имено, со воведување на смената $z = \exp(sT)$ во (6-62), (6-64) и (6-71) се добива:

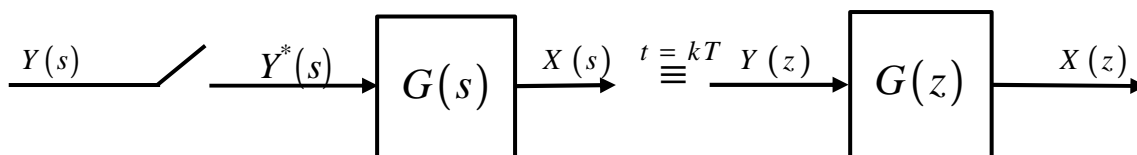
$$\begin{aligned} [Y^*(s)]_{z=\exp(sT)} &= \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k} \triangleq Y(z) \\ [X^*(s)]_{z=\exp(sT)} &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \triangleq X(z) \\ [G^*(s)]_{z=\exp(sT)} &= \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) z^{-k} \triangleq G(z) \end{aligned} \quad (6-73)$$

Оттука:

$$G(z) = X(z)/Y(z) \quad (6-74)$$

Следствено, $G(z)$ е **дискретен еквивалент** на набљудуваниот континуален систем од сликата 6-37 б). Битно е да се воочи дека ова дискретно еквивалентирање, прикажано на сликата 6-38, важи само за миговите на дискретизација $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), додека надвор од тие мигови не важи. Имено, еден дискретен систем $G(z)$ е дефиниран само во миговите на дискретизација $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), додека континуалниот систем $G(s)$ е дефиниран за секое t .

Алтернативен начин за изведување на изразот (6-74) е следниот. Нека, под претпоставка, на влезот од системот прикажан на сликата 6-37 б) во мигот $t = 0$ е доведен Дираков импулс $\delta(t)$. Тогаш одзивот на системот ќе биде едноставно неговиот импулсен одзив $g(t)$. Излезот од фиктивниот дискретизатор S_2 е опишан со следниот израз:



Слика 6-38 Одредување дискретен еквивалент на континуалниот систем со дискретизатор на неговиот влез

$$x^*(t) = g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \delta(t - kT) \quad (6-75)$$

каде што $g(kT)$ е тежинската низа на системот. Кога дискретизиран сигнал $y^*(t)$ е доведен на влезот од линеарен систем, излезот на системот може да се претстави на следниот начин:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) g(t - nT) \quad (6-76)$$

За $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), изразот (6-76) се трансформира во изразот:

$$x(kT) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) g(kT - nT) \quad (6-77)$$

Со Z – трансформација на изразот (6-77), се добива:

$$Z\{x(kT)\} = Z\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y(nT) g(kT - nT)\right\}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} y(nT) g(kT - nT) \right] z^{-k}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) \left[\sum_{k=0}^{\infty} g(kT - nT) z^{-k} \right]$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) \left[\sum_{m=-n}^{\infty} g(mT) z^{-m-n} \right]$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} g(mT) z^{-m} \right]$$

$$X(z) = G(z) \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n}$$

$$X(z) = G(z)Y(z) \quad (6-78)$$

каде што $G(z)$ е зададена со (6-74). (Долната граница во сумата по m е подигната на 0, бидејќи $g(kT)$, под претпоставка, е каузален сигнал.)

6-6-1 ДИСКРЕТЕН ЕКВИВАЛЕНТ НА КОНТИНУАЛЕН СИСТЕМ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ВЛЕЗОТ

Да се определи дискретниот еквивалент на еден континуален систем во суштина значи тој да се замени со еквивалентен дискретен модел односно систем, чие поведење се поклопува со поведението на изворниот континуален систем. Меѓутоа, уште еднаш нагласуваме дека оваа еквиваленција важи само во миговите на дискретизација $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), додека надвор од тие мигови не важи. Ако за даден континуален систем е определен неговиот дискретен еквивалент, тогаш без проблем преку него може да се определат дискретните вредности $x(kT)$ на одзивот $x(t)$ на континуалниот систем во миговите на дискретизација $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Положбата на дискретизаторот во однос на континуалниот систем има големо влијание врз неговото дискретно еквивалентирање. Така, нека најнапред набљудуваме континуален систем со дискретизатор на неговиот влез. Набљудуваниот систем веќе е прикажан на сликата 6-37 б). Неговиот дискретизиран влез $y^*(t)$ ќе го претставиме во согласност со (6-7) како поворка од Диракови импулси:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \delta(t - kT) \quad (6-79)$$

Во тој случај за излезот $x(t)$ на набљудуваниот континуален систем се добива:

$$x(t) = \int_0^t g(t - \tau) y^*(\tau) d\tau = \int_0^t g(t - \tau) \left[\sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \delta(\tau - kT) \right] d\tau \quad (6-80)$$

од каде што, со промена на редоследот на интегрирањето и сумирањето, произлегува:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \int_0^t g(t-\tau) \delta(\tau-kT) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) g(t-kT) \quad (6-81)$$

Конечно, со дискретизација на излезот $x(t)$ се добива конволуциската сума:

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) g(nT-kT); n = 0, 1, 2, \dots \quad (6-82)$$

Конволуциската сума (6-82) има Z – слика:

$$X(z) = G(z)Y(z) \quad (6-83)$$

Можеме да заклучиме дека во овој случај постои дискретна преносна функција $G(z)$ на континуалниот систем од сликата 6-37 б) и истата претставува негов дискретен модел. Битно е да се истакне дека дискретната преносна функција $G(z)$ не се добива со формална замена на комплексната променлива s во преносната функција на континуалниот систем $G(s)$ со комплексната променлива z , туку според релацијата:

$$G(z) = Z\{G(s)\} = Z\{L^{-1}[G(s)]_{t=kT}\} \quad (6-84)$$

која ги опфаќа следните три математички операции: 1) одредување на импулсната карактеристика $g(t)$ на континуалниот систем со преносна функција $G(s)$, односно пресметување на инверзната Лапласова трансформација:

$$g(t) = L^{-1}[G(s)] \quad (6-85)$$

2) дискретизирање на импулсната карактеристика $g(t)$, односно пресметување на дискретниот оригинал $g(kT)$:

$$g(kT) = g(t)|_{t=kT}; k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-86)$$

и 3) одредување на Z – трансформацијата на оригиналот $g(kT)$, односно Z – сликата $G(z)$:

$$G(z) = Z\{g(kT)\} \quad (6-87)$$

6-6-2 ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ НА КОНТИНУАЛЕН СИСТЕМ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ИЗЛЕЗОТ

Овој случај е прикажан на сликата 6-39. Лапласовата трансформација на излезот на системот од сликата 6-39 ќе биде:

$$X(s) = G(s)Y(s) \quad (6-88)$$

додека самиот одсвив $x(t)$ се добива со инверзна Лапласова трансформација на сликата (6-88):

$$x(t) = \int_0^t g(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad (6-89)$$

Ако сега го дискретизираме одсвивот на набљудуваниот континуален систем $x(t)$, како што е покажано со следниот израз:

$$x(kT) = \int_0^{kT} g(\tau) y(kT-\tau) d\tau; k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-90)$$

јасно е дека не е возможно раздвојување на двете временски функции $g(t)$ и $y(t)$, кои ја сочинуваат конволуцијата (6-89). Тоа, пак, значи дека не постои дискретна преносна функција за набљудуваниот континуален систем. Меѓутоа, Z – сликата на неговиот одсвив $x(t)$ сèуште може да се определи:

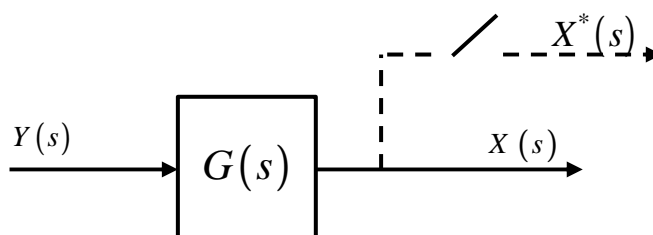
$$X(s) = G(s)Y(s)$$

$$[X(s)]^* = [G(s)Y(s)]^*$$

$$X^*(s) = GY^*(s) \neq G^*(s)Y^*(s) \quad (6-91)$$

Со воведување на смената $z = \exp(sT)$ во (6-91) се добива:

$$X(z) = GY(z) \neq G(z)Y(z) \quad (6-92)$$



Слика 6-39 Континуален динамички систем со дискретизиран излез

Овде е битно да се воочат следните работи. Најнапред, Лапласовата трансформација $X^*(s)$ на дискретизиран сигнал $x^*(t)$ ќе ја нарекуваме * – трансформација. Притоа, * – трансформацијата на дискретизираниот сигнал се разликува од неговата L – трансформација, а со смената $z = \exp(sT)$ поминува во неговата Z – трансформација:

$$X^*(s) = L\{x^*(t)\} \neq X(s) = L\{x(t)\} \quad (6-93)$$

$$\left[X^*(s) \right]_{z=\exp(sT)} = X(z) \quad (6-94)$$

* – трансформацијата $[G(s)Y(s)]^*$ симболично се запишува како $GY^*(s)$, при што важи:

$$GY^*(s) \neq G^*(s)Y^*(s) \quad (6-95)$$

односно:

$$L\{x^*(t)\} = L\left\{[g(t)y(t)]^*\right\} \neq L\{g^*(t)\} \cdot L\{y^*(t)\} \quad (6-96)$$

Аналогно, за Z – сликата $X(z) = GY(z)$ важи:

$$X(z) = GY(z) = Z\{G(s)Y(s)\} = Z\left\{L^{-1}\left[G(s)Y(s)\right]_{t=kT}\right\} \neq G(z)Y(z) \quad (6-97)$$

што значи дека таа во никој случај не е еднаква на производот од Z – сликите $G(z)$ и $Y(z)$, туку се определува како Z – слика од инверзната L –трансформација на производот $G(s)Y(s)$, дискретизирана во миговите $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

6-6-3 ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ КАСКАДНА ВРСКА ОД ДВА КОНТИНУАЛНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

Положбата на дискретизаторот во структурната блок-шема на еден дискретен систем со повеќе континуални потсистеми во каскада и повеќе дискретизатори има големо влијание врз еквивалентната преносна функција на врската. Под претпоставка дека сериската врска не ги менува математичките модели на потсистемите, Лапласовата трансформација на излезот на системот од сликата 6-40 ќе биде:

$$X(s) = G_2(s)Y_2(s) = G_2(s)G_1(s)Y(s) \quad (6-98)$$

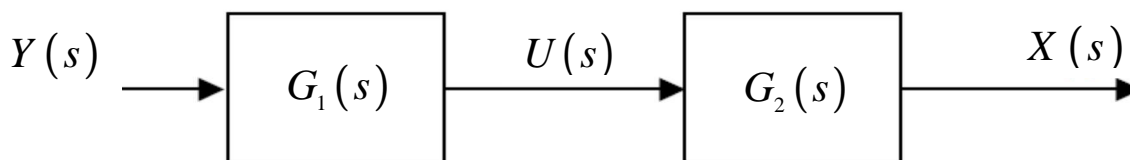
додека самиот одзив $x(t)$ се добива со инверзна Лапласова трансформација на сликата (6-98):

$$x(t) = \int_0^t g_2(t-\tau)u(\tau) d\tau = \int_0^t g_2(t-\tau) \left[\int_0^\tau g_1(\tau-\lambda)y(\lambda) d\lambda \right] d\tau \quad (6-99)$$

Оттука, со замена на редоследот на интегрирањето и променливите на интеграција во (6-99) се добива:

$$x(t) = \int_0^t y(t-\tau) \left[\int_0^\tau g_1(\tau-\lambda)g_2(\lambda) d\lambda \right] d\tau = \int_0^t y(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (6-100)$$

кадешто:



Слика 6-40 Каскадна врска на два континуални системи

$$g(t) = \int_0^t g_1(t-\tau) g_2(\tau) d\tau \quad (6-101)$$

Следствено, импулсниот одсив на каскадна врска од два динамички системи претставува конволуција од импулсните одсиви на динамичките системи што се поврзани во каскада. Истиот резултат ќе се добие и со инверзна Лапласова трансформација на сликата (6-98), меѓутоа решението во временското подрачје е посоодветно во случајот кога се присутни дискретизатори. Така, ако импулсниот одсив на каскадната врска е дискретизиран, како што е покажано со следниот израз:

$$x(kT) = \int_0^{kT} y(kT - \tau) g(\tau) d\tau; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-102)$$

јасно е дека не е возможно раздвојување на трите временски функции $g_1(t)$, $g_2(t)$ и $y(t)$, кои ја сочинуваат конволуцијата. Тогаш, Лапласовата трансформација на дискретизираниот излез од набљудуваната каскадна врска ќе биде:

$$X(s) = G_1(s)G_2(s)Y(s)$$

$$[X(s)]^* = [G_1(s)G_2(s)Y(s)]^*$$

$$X^*(s) = G_1G_2Y^*(s) \neq G_1^*(s)G_2^*(s)Y^*(s) \quad (6-103)$$

и, соодветно:

$$X(z) = G_1G_2Y(z) = Z\left\{L^{-1}[G_1(s)G_2(s)Y(s)]_{t=kT}\right\} \neq G_1(z)G_2(z)Y(z) \quad (6-104)$$

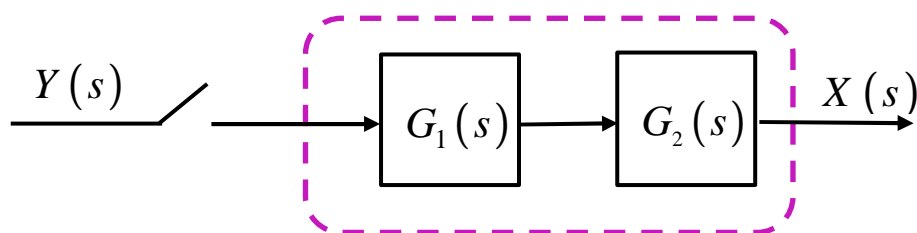
Со други зборови, во конкретниот случај не може да се најде еквивалентна дискретна преносна функција на каскадната врска од континуални системи, односно не постои нејзин дискретен еквивалент.

Нека сега постои дискретизатор на влезот од првиот елемент од каскадната врска, како што е тоа покажано на сликата 6-41. За L -сликата на дискретизираниот излез на набљудуваната каскадна врска од сликата 6-41 важи:

$$X(s) = G_1(s)G_2(s)Y^*(s)$$

$$[X(s)]^* = [G_1(s)G_2(s)]^* Y^*(s)$$

$$X^*(s) = G_1 G_2^*(s) Y^*(s) \quad (6-105)$$



Слика 6-41 Каскадна врска од два линеарни континуални системи со дискретизатор на влезот и во z -комплексното подрачје:

$$X(z) = G_1 G_2(z) Y(z) = Z \left\{ L^{-1} \left[G_1(s) G_2(s) \right]_{t=kT} \right\} Y(z) \quad (6-106)$$

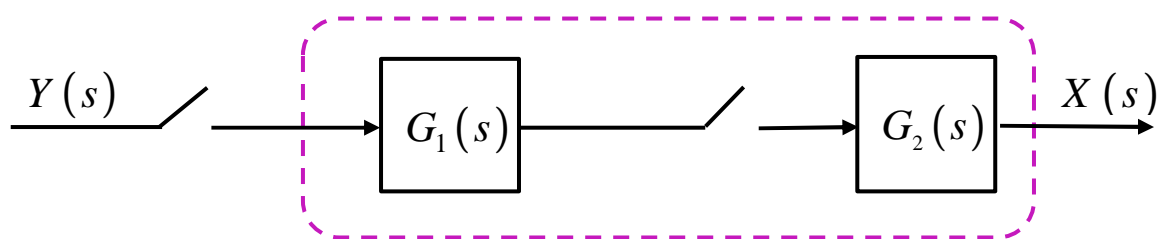
Во овој случај постои еквивалентна дискретна преносна функција на набљудуваната каскадна врска и истата изнесува:

$$G(z) = G_1 G_2(z) = Z \left\{ L^{-1} \left[G_1(s) G_2(s) \right]_{t=kT} \right\} \quad (6-107)$$

Кога N линеарни континуални системи се поврзани во каскада со дискретизатор на влезот од каскадата, еквивалентната дискретна преносна функција на целата каскада ќе биде дадена со изразот:

$$X(z) = \left(\prod_{i=1}^N G_i \right) (z) Y(z) \Rightarrow G(z) = \left(\prod_{i=1}^N G_i \right) (z) = G_1 G_2 \cdots G_N(z) \quad (6-108)$$

Во продолжение го набљудуваме случајот кога сите континуални елементи во каскадата се раздвоени со дискретизатори, како што е тоа покажано на сликата 6-42.



Слика 6-42 Каскадна врска од два линеарни континуални системи со дискретизатори на својот влез

За L -сликата на дискретизираниот излез на набљудуваната каскадна врска од сликата 6-42 важи:

$$X(s) = X_2(s) = G_2(s) Y_2^*(s) = G_2(s) X_1^*(s)$$

$$X_1(s) = G_1(s) Y_1^*(s) = G_1(s) Y^*(s)$$

$$X_1^*(s) = G_1^*(s)Y_1^*(s)$$

$$X(s) = G_2(s)X_1^*(s) = G_2(s)G_1^*(s)Y_1^*(s)$$

$$X^*(s) = G_2^*(s)G_1^*(s)Y_1^*(s) \quad (6-109)$$

и во z -комплексното подрачје:

$$X(z) = G_1(z)G_2(z)Y(z) \quad (6-110)$$

Еквивалентната дискретна преносна функција на набљудуваната каскадна врска изнесува:

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) \quad (6-111)$$

Кога N континуални системи поврзани во каскада се развоени со дискретизатори поставени на нивниот влез, еквивалентната дискретна преносна функција на целата каскада ќе биде:

$$X(z) = \prod_{i=1}^N G_i(z)Y(z) \Rightarrow G(z) = \prod_{i=1}^N G_i(z) \quad (6-112)$$

Пример 6-3. Да се најде еквивалентната дискретна преносна функција на каскадната врска од два континуални системи со преносни функции:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$G_2(s) = \frac{2}{s+4} \quad (6-113)$$

ако: а) системите се поврзани како на слика 6-41 и б) системите се поврзани како на слика 6-42.

Решение: а) За првиот случај важи:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)}$$

$$g(t) = L^{-1}\{G_1(s)G_2(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)(s+4)}\right\} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right\} =$$

$$= (e^{-2t} - e^{-4t})h(t) \Rightarrow g(kT) = (e^{-2kT} - e^{-4kT})h(kT) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{z}{z - e^{-2T}} - \frac{z}{z - e^{-4T}} = \frac{(e^{-2T} - e^{-4T})z}{(z - e^{-2T})(z - e^{-4T})} \quad (6-114)$$

б) Во вториот случај се добива:

$$G_1(z) = \frac{z}{z - e^{-2T}}$$

$$G_2(z) = \frac{z}{z - e^{-4T}}$$

$$G(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{z^2}{(z - e^{-2T})(z - e^{-4T})} \Rightarrow$$

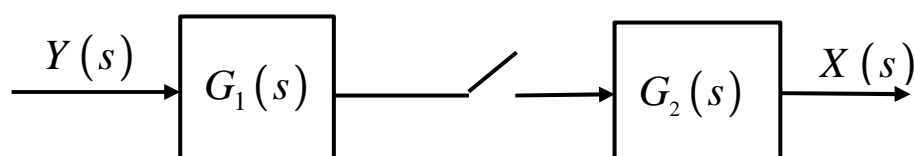
$$g(kT) = Z^{-1}\{G(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z - e^{-2T})(z - e^{-4T})}\right\} \Rightarrow$$

$$g(kT) = \frac{2}{e^{-2T} - e^{-4T}} Z^{-1}\left\{\frac{e^{-2T}z}{z - e^{-2T}} - \frac{e^{-4T}z}{z - e^{-4T}}\right\} \Rightarrow$$

$$g(kT) = \frac{2}{e^{-2T} - e^{-4T}} [e^{-2(k+1)T} - e^{-4(k+1)T}] h(kT) \quad (6-115)$$

Од примерот јасно се гледа влијанието на положбата на дискретизаторот врз импулсниот одзив и соодветната дискретна преносна функција на набљудуваната каскада. □

На крајот ќе го разгледаме случајот кога двата континуални системи врзани во каскада се раздвоени со дискретизатор поставен помеѓу нив, како што е покажано на сликата 6-43.



Слика 6-43 Каскадна врска од два линеарни континуални системи со дискретизатор помеѓу нив

За L -сликата на дискретизираниот излез на набљудуваната каскадна врска од сликата 6-43 се добива:

$$X(s) = X_2(s) = G_2(s)Y_2^*(s) = G_2(s)X_1^*(s)$$

$$X_1(s) = G_1(s)Y_1(s) = G_1(s)Y(s)$$

$$X_1^*(s) = G_1Y^*(s)$$

$$X(s) = G_2(s)X_1^*(s) = G_2(s)G_1Y^*(s)$$

$$X^*(s) = G_2^*(s)G_1Y^*(s) \quad (6-116)$$

и во z -комплексното подрачје:

$$X(z) = G_1(z)G_2Y(z) \quad (6-117)$$

Во конкретниот случај не може да се дефинира еквивалентна дискретна преносна функција на набљудуваната каскадна врска, што значи не постои нејзин дискретен еквивалент. Меѓутоа, Z – сликата на нејзиниот излез $X(z)$ сèуште може да се определи во согласност со (6-117).

6-6-4 ДИСКРЕТЕН ЕКВИВАЛЕНТ НА АНТИПАРАЛЕЛНА ВРСКА ОД ДВА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ВЛЕЗОТ ОД БЛОКОТ ВО ДИРЕКТНАТА ГРАНКА

Правилата за дискретно еквивалентирање на континуални системи може да се применат и кај затворените дискретни системи. Така, на сликата 6-44 е прикажана структурната блок-шема на едноставен затворен систем со дискретизатор во директната гранка. Системот е опишан со следниот математички систем равенки:

$$E(s) = Y(s) - G_2(s)X(s)$$

$$X(s) = G_1(s)E^*(s) \quad (6-118)$$

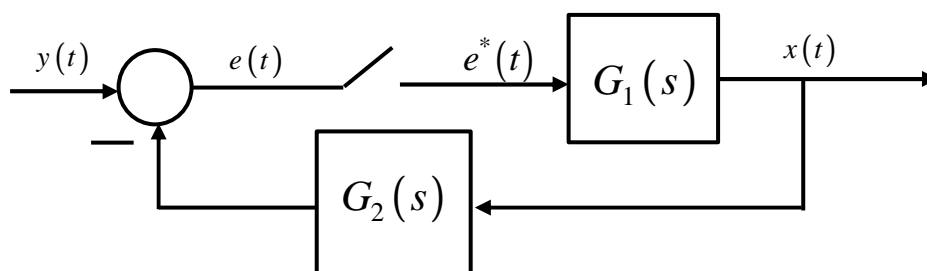
кои претставуваат влезно-излезни релации на соодветните елементи во шемата. Со воведување на втората равенка од системот равенки (6-118) во првата, се добива:

$$E(s) = Y(s) - G_2(s)G_1(s)E^*(s) \quad (6-119)$$

од каде непосредно следува:

$$E^*(s) = Y^*(s) - G_2G_1^*(s)E^*(s) \Rightarrow$$

$$E^*(s) = \frac{1}{1 + G_2G_1^*(s)} Y^*(s) \quad (6-120)$$



Слика 6-44 Антипаралелна врска на два континуални системи со дискретизатор на влезот од блокот во директната гранка

Сега изразот за $E^*(s)$ може да се воведе во равенката за сликата $X^*(s)$, која се добива непосредно од втората равенка на системот (6-118):

$$X^*(s) = G_1^*(s)E^*(s) \quad (6-121)$$

па, така, се добива:

$$X^*(s) = \frac{G_1^*(s)}{1 + G_2G_1^*(s)} Y^*(s) \quad (6-122)$$

Релацијата (6-122) без проблем може да се трансформира во релацијата:

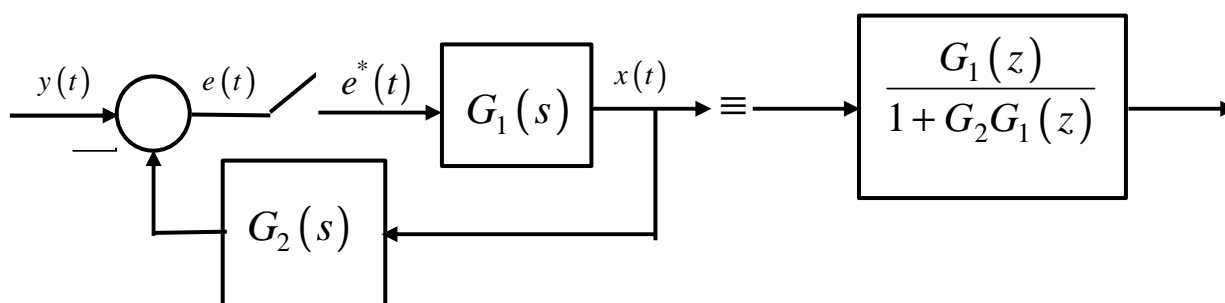
$$X(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_2G_1(z)} Y(z) \quad (6-123)$$

каде што:

$$G_2G_1(z) = Z\left\{L^{-1}\left[G_2(s)G_1(s)\right]_{t=kT}\right\} \quad (6-124)$$

Во заклучок може да се констатира дека набљудуваниот затворен систем има дискретен еквивалент и тој е прикажан на сликата 6.45. Неговата дискретна преносна функција изнесува:

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_2G_1(z)} \quad (6-125)$$



Слика 6-45 Еквивалентен дискретен модел на системот од сликата 6-44 во миговите на дискретизација

6-6-5 ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ НА АНТИПАРАЛЕЛНА ВРСКА ОД ДВА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ИЗЛЕЗОТ ОД БЛОКОТ ВО ДИРЕКТНАТА ГРАНКА

На сличен начин се бара и дискретниот еквивалент на затворениот систем со дискретизатор на излезот од блокот во директната гранка, чија структурна блок-шема е прикажана на сликата 6-46. Антипаралелната врска од сликата 6-46 е опишана со следниот математички систем равенки:

$$E(s) = Y(s) - G_2(s) X^*(s)$$

$$X(s) = G_1(s) E(s) \quad (6-126)$$

Оттука, со воведување на првата равенка од системот (6-126) во втората, се добива:

$$X(s) = G_1(s) [Y(s) - G_2(s) X^*(s)] = G_1(s) Y(s) - G_1(s) G_2(s) X^*(s) \quad (6-127)$$

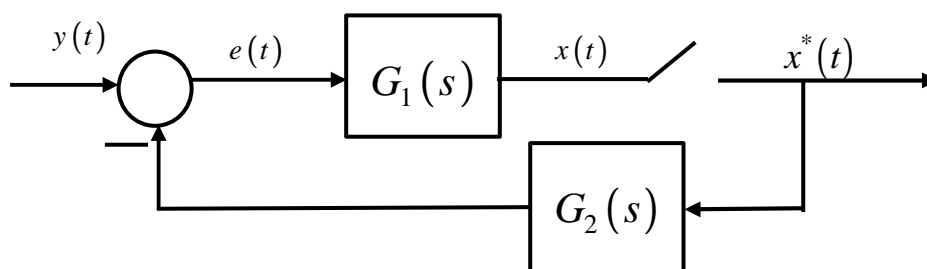
од каде непосредно следува:

$$X^*(s) = G_1 Y^*(s) - G_1 G_2^*(s) X^*(s) \quad (6-128)$$

Изразот за Z – сликата $X(z)$ се добива од (6-128) по воведувањето на смената $z = \exp(sT)$ во него:

$$X(z) = G_1 Y(z) - G_1 G_2(z) X(z) \Rightarrow X(z) = \frac{G_1 Y(z)}{1 + G_1 G_2(z)} \quad (6-129)$$

Во конкретниот случај не може да се дефинира дискретната преносна функција $G(z) = X(z)/Y(z)$ на целиот затворен систем, бидејќи во изразот (6-129) не фигурира посебно Z – сликата $Y(z)$ на неговиот влез. Следствено, не може да се определи количникот $X(z)/Y(z)$.



Слика 6-46 Антипаралелна врска на два континуални системи со дискретизатор на излезот од блокот во директната гранка

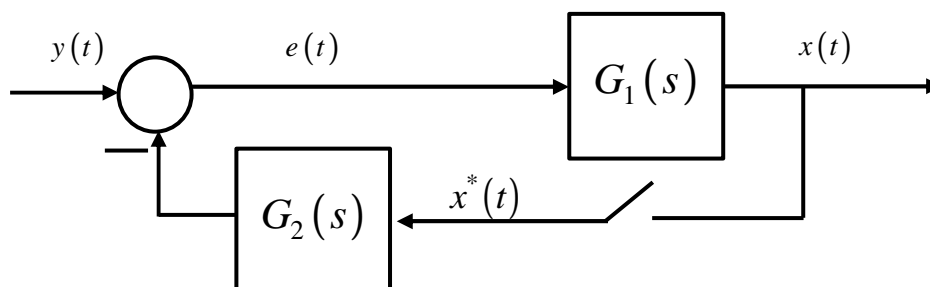
6-6-6 ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ НА АНТИПАРАЛЕЛНА ВРСКА ОД ДВА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ СО ДИСКРЕТИЗАТОР НА ВЛЕЗОТ ОД БЛОКОТ ВО ПОВРАТНАТА ГРАНКА

Структурната блок-шема на антипаралелната врска на два континуални системи со дискретизатор на влезот од блокот во повратната гранка е прикажана на сликата 6-47. Оваа антипаралелна врска е опишана со следниот математички систем равенки:

$$E(s) = Y(s) - G_2(s) X^*(s)$$

$$X(s) = G_1(s)E(s) \quad (6-130)$$

кои претставуваат влезно-излезни релации на соодветните елементи во шемата.



Слика 6-47 Антипаралелна врска на два континуални системи со дискретизатор на влезот од блокот во повратната гранка

Со воведување на првата равенка од системот равенки (6-130) во втората, се добива:

$$X(s) = G_1(s)[Y(s) - G_2(s)X^*(s)] = G_1(s)Y(s) - G_1(s)G_2(s)X^*(s) \quad (6-131)$$

од каде непосредно следува:

$$X^*(s) = G_1Y^*(s) - G_1G_2^*(s)X^*(s) \Rightarrow X^*(s) = \frac{G_1Y^*(s)}{1 + G_1G_2^*(s)} \quad (6-132)$$

Изразот за Z – сликата $X(z)$ се добива од (6-132) по воведувањето на смената $z = \exp(sT)$ во него:

$$X(z) = \frac{G_1Y(z)}{1 + G_1G_2(z)} \quad (6-133)$$

каде што:

$$G_1Y(z) = Z\left\{L^{-1}\left[G_1(s)Y(s)\right]_{t=kT}\right\}$$

$$G_2G_1(z) = Z\left\{L^{-1}\left[G_2(s)G_1(s)\right]_{t=kT}\right\} \quad (6-134)$$

Во заклучок може да се констатира дека за набљудуваниот затворен систем не може да се дефинира дискретен еквивалент, затоа што влезниот сигнал не е дискретизиран независно, односно не постои сигналот $y^*(t)$. Меѓутоа, сепак може да се најде дискретизираниот излез на системот $x^*(t)$, односно $x(kT)$, со инверзна Z – трансформација на сликата (6-133).

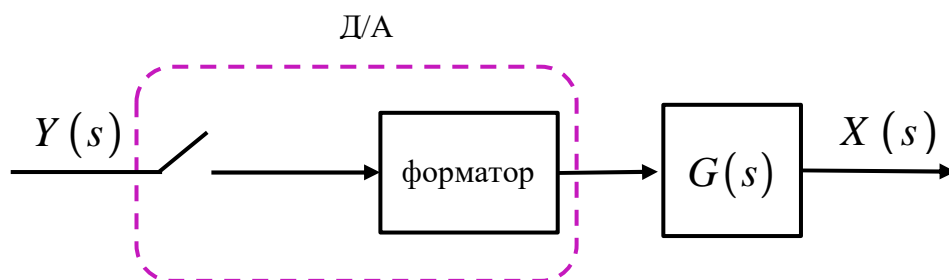
Изразот (6-133) е истоветен со изразот (6-129), иако во основа се работи за два различни затворени системи. Имено, системот од сликата 6-46, опишан со изразот (6-129) е со дискретизиран излез, додека системот од сликата 6-47 опишан со изразот (6-133) има дискретизиран сигнал во повратната гранка на влезот од блокот $G_2(s)$.

Системите се разликуваат по местото на приклучување на дискретизаторот во шемата, па идентичноста на изразите (6-129) и (6-133) важи само за миговите на дискретизација, но не и надвор од нив.

Се разбира, можна е и друга локација на дискретизаторот во набљудуваната структурна блок-шема. На пример, тој може да се најде на излезот од блокот во повратната гранка. Најважните правила на дискретното еквивалентирање на континуални системи се дадени во додатокот 3.

6-6-7 ДИСКРЕТИЗАТОР НА ВЛЕЗОТ ОД ФОРМАТОР ОД НУЛТИ РЕД

Каскадната врска прикажана на сликата 6-48 е составен дел на реалните дискретни САУ.



Слика 6-48 Дел од структурната блок-шема на реален ДСАУ со Д/А претворувач на влезот од континуалниот објект

Д/А претворувачот од шемата најчесто се реализира со форматор од нулти ред, па од тие причини, преносната функција на форматорот од нулти ред заслужува посебно внимание. Со Z – трансформација на преносната функција на форматорот од нулти ред зададена со изразот (6-42) се добива:

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \Rightarrow$$

$$Z\{G_0(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s}\right\} \Rightarrow$$

$$G_0(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s}\right\} \Rightarrow$$

$$G_0(z) = (1 - z^{-1})\frac{z}{z-1} = 1 \quad (6-135)$$

Резултатот (6-135) можеше и да се очекува, затоа што форматорот од нулти ред едноставно го задржува дискретниот влез $y(kT)$ во текот на една периода на

дискретизација, па со инверзна Z – трансформација на сликата $G_0(z)Y(z)$ ќе се добие оригиналот $y(kT)$. Меѓутоа овој резултат сам по себе нема големо физичко значење ако форматорот од нулти ред стои сам за себе, што никогаш не е случај во реалните дискретни САУ. Како што се гледа од шемата прикажана на сликата 6-48, форматорот од нулти ред по правило се наоѓа пред континуален блок со преносна функција $G(s)$. Во продолжение ќе ја определеме врската помеѓу излезот од овој блок $x(t)$ и дискретниот влез $y^*(t)$.

L –сликата $X(s)$ на излезот $x(t)$ на континуалниот објект со преносна функција $G(s)$, врз основа на шемата од сликата 6-48, е дадена со изразот:

$$X(s) = G(s)G_0(s)Y^*(s) \quad (6-136)$$

Оттука произлегува дека:

$$X^*(s) = [G(s)G_0(s)]^* Y^*(s) \quad (6-137)$$

и:

$$X(z) = Z\{G_0(s)G(s)\}Y(z) \quad (6-138)$$

каде што:

$$P(z) = Z\{G_0(s)G(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad (6-139)$$

Релацијата (6-139) ја дефинира дискретната преносна функција $P(z)$ на континуален систем со преносна функција $G(s)$, кој на својот влез има дискретизатор и форматор од нулти ред. Факторот $(1-z^{-1})$ во изразот (6-139) произлегува од теоремата на Z – трансформацијата за доцнење на дискретниот оригинал. Овде ќе укажеме на едно интересно својство на Z – трансформацијата.

Теоретски гледано, кога фреквенцијата на дискретизација $\omega_0 = 2\pi/T \rightarrow \infty$, дискретниот систем се враќа на изворниот континуален систем без Д/А претворувачот. Меѓутоа, тоа аналитички не значи дека, ако:

$$G(z) = Z\{G(s)\} \quad (6-140)$$

тогаш:

$$\lim_{T \rightarrow 0} G(z) = G(s) \quad (6-141)$$

Бидејќи теоријата на Z – трансформацијата е заснована врз импулсно-амплитудна модулација на континуални сигнали со периода на дискретизација T , намалувањето на периодата на дискретизација T до 0 ($T \rightarrow 0$), за резултат има „натрупување“ на сите импулси од типот $y(kT)\delta(t-kT)$ еден врз друг, што физички нема смисла. Со други зборови ако еден континуален сигнал $y(t)$ е дискретизиран со идеален дискретизатор во сигналот $y^*(t)$, тогаш пуштањето на периодата на дискретизација T да тежи кон нулата, односно фреквенцијата на дискретизација ω_0 да тежи кон бесконечност, нема да го претвори $y^*(t)$ назад во $y(t)$. Ова објаснува зашто изразот (6-141) не важи во општ случај. Меѓутоа, доколку сигналот $y^*(t)$ најнапред се пропушти низ форматор од нулти ред чиј излез ќе го означиме со $u(t)$, и дури потоа да пуштиме T да тежи кон нулата, тогаш ќе важи:

$$\lim_{T \rightarrow 0} u(t) = y(t) \quad (6-142)$$

и:

$$\lim_{T \rightarrow 0} U(s) = Y(s) \quad (6-143)$$

Важноста на овој резултат лежи во фактот дека ако еден континуален сигнал $y(t)$ е пропуштен низ Д/А претворувач со периода на дискретизација T , излезот на форматорот од нулти ред $u(t)$ може да се трансформира назад во континуалниот сигнал $y(t)$ ако се пушти $T \rightarrow 0$. Ова е илустрирано со следниот пример.

Пример 6-4. Нека, под претпоставка, влезот $y(t)$ во Д/А претворувачот од сликата 6-48 со форматор од нулти ред е следниот сигнал:

$$y(t) = \exp(-at)h(t) \quad (6-144)$$

Да се определи граничната вредност $\lim_{T \rightarrow 0} u(t)$, каде што $u(t)$ е излезот на форматорот од нулти ред.

Решение: Лапласовата трансформација на сигналот $y(t)$ е дадена со изразот:

$$Y(s) = \frac{1}{s+a} \quad (6-145)$$

додека Лапласовата трансформација на дискретизираниот сигнал $y^*(t)$ изнесува:

$$Y^*(s) = \frac{\exp(Ts)}{\exp(Ts) - \exp(-aT)} \quad (6-146)$$

Лапласовата трансформација на излезот $u(t)$ на форматорот од нулти ред е дадена со

производот од неговата преносна функција $G_0(s)$ и L -сликата $Y^*(s)$:

$$U(s) = G_0(s)Y^*(s) = \frac{1 - \exp(-sT)}{s} \cdot \frac{\exp(Ts)}{\exp(Ts) - \exp(-aT)} \quad (6-147)$$

Ако сега се побара граничната вредност $\lim_{T \rightarrow 0} U(s)$ ќе се добие:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} U(s) &= \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \exp(-sT)}{s} \cdot \frac{\exp(Ts)}{\exp(Ts) - \exp(-aT)} \right] = \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{s \exp(Ts)}{s^2 \exp(Ts) - s \exp(-aT)} \right] = \frac{1}{s+a} = Y(s) \end{aligned} \quad (6-148)$$

При пресметувањето на граничната вредност (6-148) е применето Л'опиталовото правило. Изразот (6-148) покажува дека граничната вредност на излезот на еден Д/А претворувач кога периодата на дискретизација $T \rightarrow 0$ е еднаква на влезот во Д/А претворувачот. □

Уште поважно е следното својство на Z – сликата (6-139):

$$\lim_{T \rightarrow 0} P(z) = \lim_{T \rightarrow 0} Z \{ G_0(s) G(s) \} = G(s) \quad (6-149)$$

кое може да се докаже со воведување на изразот за преносната функција $G_0(s)$ на форматорот од нулти ред во равенството (6-149):

$$\lim_{T \rightarrow 0} P(z) = \lim_{T \rightarrow 0} Z \{ G_0(s) G(s) \} = \lim_{T \rightarrow 0} Z \left\{ \frac{1 - \exp(-sT)}{s} G(s) \right\} \quad (6-150)$$

Со развој на функцијата $\exp(-sT)$ во степенски ред и задржување на првите два члена од тој развој:

$$\exp(-sT) \approx 1 - Ts \quad (6-151)$$

равенството (6-150) се упростува на облик:

$$\lim_{T \rightarrow 0} P(z) = \lim_{T \rightarrow 0} Z \{ G_0(s) G(s) \} = \lim_{T \rightarrow 0} Z \{ TG(s) \} = \lim_{T \rightarrow 0} TG(z) \quad (6-152)$$

Релацијата (6-152) значи дека едновременно важи и релацијата:

$$\lim_{T \rightarrow 0} P^*(s) = \lim_{T \rightarrow 0} [G_0(s) G(s)]^* = \lim_{T \rightarrow 0} TG^*(s) \quad (6-153)$$

во која ќе ја воведеме смената (6-69):

$$\lim_{T \rightarrow 0} P^*(s) = \lim_{T \rightarrow 0} [G_0(s)G(s)]^* = \lim_{T \rightarrow 0} TG^*(s) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} G(s + jr\omega_0) \quad (6-154)$$

Кога $T \rightarrow 0$, бесконечната сума на десната страна во релацијата (6-154) станува $G(s)$, бидејќи сите нејзини хармониски компоненти се поместуваат во бесконечност кога $\omega_0 \rightarrow \infty$. Така равенството (6-154) поминува во обликот:

$$\lim_{T \rightarrow 0} P^*(s) = \lim_{T \rightarrow 0} [G_0(s)G(s)]^* = G(s) \quad (6-155)$$

Бидејќи $P^*(s)_{z=e^{sT}} = P(z)$, равенството (6-149) е докажано.

Пример 6-5. Да се покаже својството (6-149) за преносната функција:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad (6-156)$$

Решение:

$$\begin{aligned} G(z) &= Z\{G_0(s)G(s)\} = Z\left\{\frac{1-\exp(-sT)}{s} \cdot \frac{K}{s(s+a)}\right\} = \\ &= \left(\frac{z-1}{z}\right) Z\left\{\frac{K}{s^2(s+a)}\right\} = \frac{KT}{a(z-1)} - \frac{K(1-e^{-aT})}{a^2(z-e^{-aT})} \end{aligned} \quad (6-157)$$

Со воведување на смените $\exp(sT) \approx 1 + Ts$ и $\exp(-aT) \approx 1 - aT$ во (6-157) се добива:

$$\lim_{T \rightarrow 0} G(z) = \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{K}{as} - \frac{K}{a(s+a)} \right] = \frac{K}{s(s+a)} = G(s) \quad \square \quad (6-158)$$

6-7 КОНВЕНЦИОНАЛНИ ДИГИТАЛНИ ПИД УПРАВУВАЧКИ ЗАКОНИ

Наједноставните конвенционални дигитални закони на управување може да се добијат со едноставна дискретизација на аналогните ПИД закони на управување. Така се добиваат дигиталните ПИД регулатори, чии параметри може да се нагодуваат со помош на познатите постапки од теоријата и праксата на континуалното управување.

Еден едноставен сериски аналоген ПИД регулатор го реализира следниот управувачки закон:

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d e'(t) \right] \quad (6-159)$$

каде што $e(t) = y(t) - x(t)$, $y(t)$ и $x(t)$ се грешката, извршната големина и излезот на набљудуваниот систем, соодветно; K_p е коефициент на засилување, а T_i и T_d се временски константи на интегрирачкото и диференцирачкото дејство на регулаторот.

За мала периода на дискретизација T , дискретниот еквивалент на аналогниот ПИД управувачки закон може да се добие со апроксимација на интегралот во (6-158) со сума и замена на изводот од (6-158) со конечна разлика. Така се добива релацијата:

$$u(kT) = K_p \left\{ e(kT) + \frac{1}{T_i} \sum_{n=0}^k T e(nT) + T_d \left[\frac{e(kT) - e(kT - T)}{T} \right] \right\} \quad (6-160)$$

која го претставува т.н. **нерекурентен** или **позиционен дигитален ПИД-закон на управување**. Очигледно, за реализација на интегрирачкото дејство во (6-160), потребно е познавање на сите претходни вредности на сигналот на грешката $e(kT)$, $e((k-1)T)$, $e((k-2)T)$, \dots , $e(0)$. Оттука, за програмска реализација на дигиталните ПИД закони на управување со помош на дигитален пресметувач погодни се т.н. рекурентни алгоритми, според кои управувачкиот закон $u(kT)$ се пресметува само врз основа на неговата претходна вредност $u((k-1)T)$ и тековната и две претходни вредности на грешката $e(kT)$. Таков **рекурентен** или **инкрементален ПИД закон на управување** се добива ако најнапред се пресмета вредноста $u((k-1)T)$ на управувачкиот сигнал $u(kT)$:

$$u(kT - T) = K_p \left\{ e(kT - T) + \frac{1}{T_i} \sum_{n=0}^{k-1} T e(nT) + T_d \left[\frac{e(kT - T) - e(kT - 2T)}{T} \right] \right\} \quad (6-161)$$

и потоа изразот (6-161) се извади од изразот (6-160):

$$\begin{aligned} u(kT) - u(kT - T) &= K_p \left\{ e(kT) + \frac{1}{T_i} \sum_{n=0}^k T e(nT) + T_d \left[\frac{e(kT) - e(kT - T)}{T} \right] \right\} - \\ &- K_p \left\{ e(kT - T) + \frac{1}{T_i} \sum_{n=0}^{k-1} T e(nT) + T_d \left[\frac{e(kT - T) - e(kT - 2T)}{T} \right] \right\} = \\ &= K_p \left[e(kT) - e(kT - T) \right] + \frac{K_p T}{T_i} e(kT) + \\ &+ \frac{K_p T_d}{T} \left[e(kT) - 2e(kT - T) + e(kT - 2T) \right] \end{aligned} \quad (6-162)$$

Лесно се воочува дека разликата на левата страна од релацијата (6-162) е првата лева конечна разлика на управувачкиот сигнал $u(kT)$, додека на десната страна од (6-162) се јавуваат првата и втората лева конечна разлика на сигналот на грешка $e(kT)$.

Така за инкременталниот дигитален ПИД управувачки закон дефинитивно се добива изразот:

$$\nabla u(kT) = K_p \nabla e(kT) + \frac{K_p T}{T_i} e(kT) + \frac{K_p T_d}{T} \nabla^2 e(kT) \quad (6-163)$$

Позициониот закон на управување (6-160) може да се добие од рекурентниот закон на управување (6-163), со дополнително процесирање на рекурентната релација:

$$u(kT) = u(kT - T) + \nabla u(kT); \quad k = 1, 2, \dots \quad (6-164)$$

Со Z – трансформација на изразот (6-160) односно (6-163) се добива дискретната преносна функција $R(z)$ на дигиталниот ПИД регулатор, која гласи:

$$R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T} \cdot \frac{z-1}{z} \right) \quad (6-165)$$

Дискретната преносна функција (6-165) се сретнува и во следниот облик:

$$R(z) = r_p + r_i \frac{z}{z-1} + r_d \left(\frac{z-1}{z} \right) \quad (6-166)$$

каде што $r_p = K_p$, $r_i = K_p T / T_i$ и $r_d = K_p T_d / T$ се параметри на дигиталниот ПИД регулатор и тоа на дискретниот еквивалент на П, И и Д – дејството, соодветно. Овде на крајот ќе укажеме на една мала недоследност во називите на соодветните дигитални управувачки закони. На читателот сигурно му е јасно дека (6-160) односно (6-163) се само дискретни еквиваленти на аналогниот ПИД управувачки закон и термините дигитален ПИД управувач и дигитално ПИД управување генерално гледано не се коректни. Меѓутоа, заради поголема едноставност во изразувањето во литературата е усвоен називот дигитално ПИД управување и ние тоа истото го сторивме во оваа книга.

6-8 ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ДИГИТАЛЕН СИСТЕМ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ ВО СТАЦИОНАРЕН РЕЖИМ

За квалитетот на поведението на еден дигитален САУ во стационарен режим има смисол да се говори само доколку тој е стабилен. Тогаш карактерот на поведението на набљудуваниот систем во стационарен режим е одреден со редот на астатизам на соодветниот отворен систем во однос на влезниот сигнал, а се оценува преку стационарната вредност на сигналот на грешката во системот.

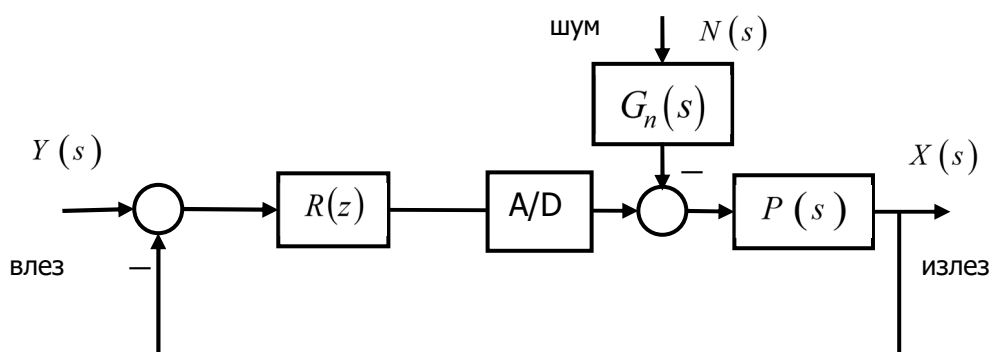
На сликата 6-49 е прикажана структурната блок-шема на еден типичен затворен дигитален САУ со референтен влез $y(t)$, излез $x(t)$ и пречки $n(t)$. Z – сликата $E(z)$ на сигналот на грешка $e(t)$ во овој систем е:

$$E(z) = Y(z) - X(z) = \frac{1}{1 + R(z)P(z)} Y(z) + \frac{PG_n N(z)}{1 + R(z)P(z)} \quad (6-167)$$

додека за нејзината трајна вредност важи:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) E(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1 + R(z)P(z)} Y(z) + \frac{PG_n N(z)}{1 + R(z)P(z)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1 + R(z)P(z)} Y(z) \right] + \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{PG_n N(z)}{1 + R(z)P(z)} \right] = \\ &= e_y(\infty) + e_n(\infty) \end{aligned} \quad (6-168)$$

Нека, најнапред се набљудува стационарното поведение на системот од сликата 6-49 во отсуство на пречки и шумови, $n(kT) \equiv 0 \forall k$, и кога на неговиот влез дејствуваат типични влезни сигнали: отскочен, линеарно растечки и параболичен.



Слика 6-49 Структурна блок-шема на типичен затворен дигитален систем на автоматско управување со референтен влез $y(t)$ и пречки $n(t)$

Кога референтниот влез $y(t)$ е Хевисајдова функција со Z – слика:

$$Y(z) = \frac{c_0 z}{z-1}, \quad |z| > 1 \quad (6-169)$$

за стационарната вредност на сигналот на грешката $e(kT)$ се добива:

$$e(\infty) = e_y(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) E_y(z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+R(z)P(z)} Y(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} \cdot \frac{c_0 z}{z-1} \right] = \\
&= \frac{c_0}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z)} = \frac{c_0}{1 + K_p} \tag{6-170}
\end{aligned}$$

каде што $G_0(z) = R(z)P(z)$ е дискретната преносна функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем.

Граничната вредност:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) \tag{6-171}$$

се нарекува **константа на положба** на дигиталниот САУ и нејзината вредност зависи од редот на астатизам на соодветниот отворен систем:

$$G_0(z) = K \frac{D(z)}{(z-1)^r C(z)}; \quad K = \frac{b_p}{a_q} \tag{6-172}$$

Ако отворениот систем $G_0(z)$ има астатизам од нулти ред ($r = 0$) во однос на влезниот сигнал (6-169), константата на положба K_p ќе има константна конечна вредност $\neq 0$,

па затворениот систем $G(z) = \frac{G_0(z)}{1+G_0(z)}$ ќе го следи отскочниот референтен влез со

одредена произволно мала константна грешка $e(\infty) = \frac{c_0}{1+K_p}$. Само ако отворениот

систем $G_0(z)$ има астатизам од некој ред ($r \geq 1$), затворениот систем $G(z)$ ќе може идеално да го следи отскочниот референтен влез (6-169). Со други зборови:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{D(z)}{(z-1)^r C(z)} = \begin{cases} K_p, & r = 0 \\ \infty, & r \geq 1 \end{cases} \tag{6-173}$$

и:

$$e_y(\infty) = \frac{c_0}{1+K_p} = \begin{cases} \frac{c_0}{1+K_p}, & r = 0 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \tag{6-174}$$

Кога на влезот од системот од сликата 6-49 се доведе променлив влезен сигнал со константна брзина на промена v_0 со Z – слика:

$$Y(z) = \frac{v_0 z T}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1 \tag{6-175}$$

за неговата стационарна грешка $e(\infty)$ се добива:

$$\begin{aligned}
 e(\infty) &= e_y(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_y(z) = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+R(z)P(z)} Y(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} \cdot \frac{v_0 T z}{(z-1)^2} \right] = \\
 &= \frac{v_0 T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z)} = \frac{v_0 T}{K_v} \tag{6-176}
 \end{aligned}$$

Граничната вредност:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) \tag{6-177}$$

се нарекува **брзинска константа** на набљудуваниот дигитален систем на автоматско управување и таа зависи од редот на астатизам на отворениот систем $G_0(z)$:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{D(z)}{(z-1)^{r-1} C(z)} = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ K_v, & r = 1 \\ \infty, & r \geq 2 \end{cases} \tag{6-178}$$

Следствено, грешката (6-175) ќе биде:

$$e_y(\infty) = \frac{v_0 T}{K_v} = \begin{cases} \infty, & r = 0 \\ \frac{v_0 T}{K_v}, & r = 1 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases} \tag{6-179}$$

Од изразот (6-179) непосредно следува дека затворениот дигитален систем од сликата 6-49 нема да биде во состојба да го следи референтниот влез (6-175) кој се менува со константна брзина, доколку соодветниот отворен систем има астатизам од нулти ред; кога отворениот систем $G_0(z)$ има астатизам од прв ред, излезот на набљудуваниот затворен ДСАУ го следи линеарниот референтен сигнал со одредена константна грешка – оваа грешка е толку помала колку што е брзинската константа на системот поголема; конечно, за отворен систем со астатизам од најмалку втор ред, излезот на затворениот дигитален систем на автоматско управување идеално го следи референтниот влез со константна брзина на промена.

Ако на влезот од затворениот дигитален систем од сликата 6-49 се доведе параболичен референтен сигнал со Z – слика:

$$Y(z) = \frac{a_0 z T^2 (z+1)}{2(z-1)^3}, \quad |z| > 1 \tag{6-180}$$

неговата стационарна грешка $e(\infty)$ ќе биде:

$$e(\infty) = e_y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_y(z) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+R(z)P(z)} Y(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} \cdot \frac{a_0 T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \right] = \\
&= \frac{a_0 T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z)} = \frac{a_0 T^2}{K_a} \tag{6-181}
\end{aligned}$$

Граничната вредност:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z) \tag{6-182}$$

се нарекува **константа на забрзување** на набљудуваниот дигитален систем на автоматско управување и таа зависи од редот на астатизам на отворениот систем $G_0(z)$:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{D(z)}{(z-1)^{r-2} C(z)} = \begin{cases} 0, & r \leq 1 \\ K_a, & r = 2 \\ \infty, & r \geq 3 \end{cases} \tag{6-183}$$

Бидејќи за отворени системи со астатизам од нулти и прв ред K_a има вредност нула, во затворениот дигитален систем на автоматско управување од сликата 6-49 практично не се воспоставува стационарен режим кога на неговиот влез дејствува параболичен референтен сигнал – амплитудата на сигналот на грешка расте со тек на времето и излезот на системот (управуваната променлива) не е во состојба да го следи доведениот закон на промена кој се менува со константно забрзување. Ако во отворениот систем се вгради астатизам од втор ред, константата на забрзување K_a ќе има константна конечна вредност и затворениот систем ќе го следи влезниот сигнал во стационарен режим со одредено константно отстапување. Набљудуваниот затворен дигитален систем на автоматско управување од сликата 6-49 идеално ќе следи параболичен референтен влез, само доколку соодветниот отворен систем има астатизам барем од трет ред. Со други зборови:

$$e_y(\infty) = \frac{a_0 T^2}{K_a} = \begin{cases} \infty, & r \leq 0 \\ \frac{a_0 T^2}{K_a}, & r = 2 \\ 0, & r \geq 3 \end{cases} \tag{6-184}$$

Поведението на затворениот дигитален систем на автоматско управување од сликата 6-49 во стационарен режим за трите референтни влезови е прикажано во таблицата 6-2. Како што може да се забележи од таблицата 6-2, со зголемување на редот на астатизам на соодветниот отворен систем, се зголемува точноста на работа на набљудуваниот затворен дигитален систем на автоматско управување во стационарен

режим и неговата способност да следи брзо променливи референтни влезни сигнали. Оттаму се наметнува првобитниот (погрешен) заклучок дека треба да се настојува соодветниот отворен систем да има астатизам од што е можно повисок ред. Меѓутоа, во пракса многу ретко се проектираат системи со астатизам чиј ред е повисок од два. Ова се должи на фактот дека повеќекратните полови на отворениот систем во точката $z=1$, чија кратност е поголема од 2, значително ја загрозуваат или дури оневозможуваат стабилноста на затворениот систем.

Таблица 6-2 Стационарната грешка на затворениот дигитален систем од сликата 6-49 во отсуство на пречките $n(t)$ за различен референтен влезен сигнал и отворен систем со различен ред на астатизам

Влез	$y(t) = c_0 h(t)$	$y(t) = v_0 t h(t)$	$y(t) = \frac{a_0 t^2}{2} h(t)$
$r = 0$	$e(\infty) = \frac{c_0}{1 + K_p}$	$e(\infty) = \infty$	$e(\infty) = \infty$
$r = 1$	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{v_0 T}{K_v}$	$e(\infty) = \frac{a_0 T^2}{K_a}$
$r = 2$		$e(\infty) = 0$	
$r = 3$			$e(\infty) = 0$

Нека, во продолжение, се набљудува затворениот дигитален систем од сликата 6-49 во отсуство на референтен влез, $y(kT) \equiv 0 \forall k$, кога во него дејствуваат само пречките $n(kT)$. Стационарната грешка $e(\infty)$ на системот во овој случај е:

$$\begin{aligned}
 e(\infty) &= e_n(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_n(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) E_n(z) = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{P G_n N(z)}{1 + R(z) P(z)} \right] \tag{6-185}
 \end{aligned}$$

и таа зависи како од сигналот на шумот $n(t)$ и вкупната преносна функција $P G_n N(z)$ помеѓу сигналот на шумот и излезот на набљудуваниот дигитален систем, така и од преносната функција на соодветниот отворен систем $G_0(z)$. Поради тоа влијанието на пречките и шумовите врз излезот $x(kT)$ во стационарен режим мора да се испитува одделно за секој конкретен случај. Така, ако пречките може да се претстават со Хевисајдова функција (константни нарушувања), $n(t) = n_0 h(t)$, а објектот $P(s)$ нема

полови во во точката $s = 0$, додека дигиталниот регулатор има пол во точката $z = 1$, и двете преносни функции $PG_nN(z)$ и $G_0(z)$ во (6-185) ќе имаат прост пол во $z = 1$, па за стационарната грешка $e(\infty)$ на системот од сликата 6-49 во отсуство на референтен влез се добива 0. Тоа значи дека присуството на пол во $z = 1$ пред точката во која дејствуваат вакви пречки сосема ќе го елиминира нивното влијание врз управуваната големина во стационарен режим.

Врз основа на претходното излагање може да се изведат следните заклучоци:

1. За да се елиминира стационарната грешка и излезот на еден затворен дигитален систем на автоматско управување во стационарна состојба идеално да го следи доведениот референтен влез, потребно е да се обезбеди соодветниот отворен систем да има астатизам од одреден ред.
2. Со зголемувањето на редот на астатизам на отворениот систем во однос на влезниот сигнал, се влошуваат условите за стабилност и се намалува брзината на одсив на затворениот дигитален систем на автоматско управување.
3. Точноста на работа на дигиталниот систем на автоматско управување во стационарен режим зависи од периодот на дискретизација T и се зголемува со намалување на T .
4. За да се елиминира влијанието на константни или бавнопроменливи пречки врз управуваната големина во стационарен режим, доволно е регулаторот, кој се наоѓа пред точката во која дејствуваат пречките, да поседува интегрално дејство.

6-9 ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ДИГИТАЛЕН СИСТЕМ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ ВО ПРЕОДЕН РЕЖИМ

Поведението на еден континуален систем на автоматско управување во преоден режим се оценува врз основа на бројните вредности на параметрите од некој негов типичен одсив, каков што е отскочниот или фреквенцискиот. Тие параметри овозможуваат да се проценат битните динамички својства на системот како: резервата на стабилност, брзината на одсив, времетраењето на преодниот режим, способноста на системот да го елиминира влијанието на несаканите надворешни влијанија и пречки, итн. Кое множество параметри ќе биде усвоено за оценка на квалитетот на поведението на системот во преодниот режим зависи од избраната постапка на синтеза. Така, ако синтезата се врши во временско подрачје, се користат параметрите на отскочниот одсив: максималниот прескок, времето на доцнење на одсивот, времето на пораст и смирување на одсивот, доминантната временска константа и сл.; кога синтезата се врши во фреквенциско подрачје, се користат параметрите на фреквенцискиот одсив, како: резервата на засилување и фаза, широчината на пропусниот опсег, резонантниот врв и др. За одреден број типични системи од понизок ред, возможно е да се воспостави врска помеѓу овие параметри и половите на набљудуваниот затворен систем. На сличен начин се постапува и при оценката на поведението на еден дигитален САУ во преоден режим. Имено, и кај дигиталните САУ управуваниот објект е континуален по својата природа; разликата во однос на континуалните САУ е содржана во управувачкиот дел од системот, кој е дискретен по природа. Следствено, одсивот на еден дигитален САУ на некој типичен влез може да се окарактеризира на ист начин како и кај континуалните системи. Во продолжение, динамичките карактеристики на еден дигитален САУ ќе бидат прикажани преку положбата на неговите полови во комплексната рамнина. Од тие причини, пожелно е

да се согледа пресликувањето на половите на еден систем од s – во z –комплексната рамнина. Ова пресликување е прикажано на сликата 6-50 и се состои во следното:

1. Реален s пол во нулата се пресликува во позитивен реален z пол во единицата
2. Реален негативен s пол се пресликува во позитивен реален z пол со модул помал од единица
3. Реален негативен s пол подалеку од имагинарната оска се пресликува во позитивен реален z пол со модул помал од единица поблизу до координатниот почеток
4. Реален позитивен s пол се пресликува во позитивен реален z пол со модул поголем од единица
5. Конјугирано-комплексен пар s полови со позитивен реален дел се пресликува во конјугирано-комплексен пар z полови со позитивен реален дел и модул поголем од единица
6. Конјугирано-комплексен пар s полови на имагинарната оска се пресликува во конјугирано-комплексен пар z полови со позитивен реален дел и модул еднаков на единица
7. Конјугирано-комплексен пар s полови со негативен реален дел се пресликува во конјугирано-комплексен пар z полови со позитивен реален дел и модул помал од единица
8. Конјугирано-комплексен пар s полови со негативен реален дел, кој е подалеку од имагинарната оска, се пресликува во конјугирано-комплексен пар z полови со позитивен реален дел и модул помал од единица поблизу до координатниот почеток
9. Конјугирано-комплексен пар s полови со негативен реален дел, кои лежат на правата $\pm j\omega_0/2$, се пресликува во реален негативен z пол со модул помал од единица (ω_0 е фреквенцијата на дискретизација)
10. Конјугирано-комплексен пар s полови со негативен реален дел, кои лежат на правата $\pm j\omega_0/2$, а се наоѓаат подалеку од имагинарната оска, се пресликува во реален негативен z пол со модул помал од единица поблизу до координатниот почеток

Пресликувањето на половите од s – во z –комплексната рамнина е претставено со функцијата:

$$z = e^{sT} \quad (6-186)$$

Така, конјугирано-комплексниот пар s полови со негативен реален дел од општ облик:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (6-187)$$

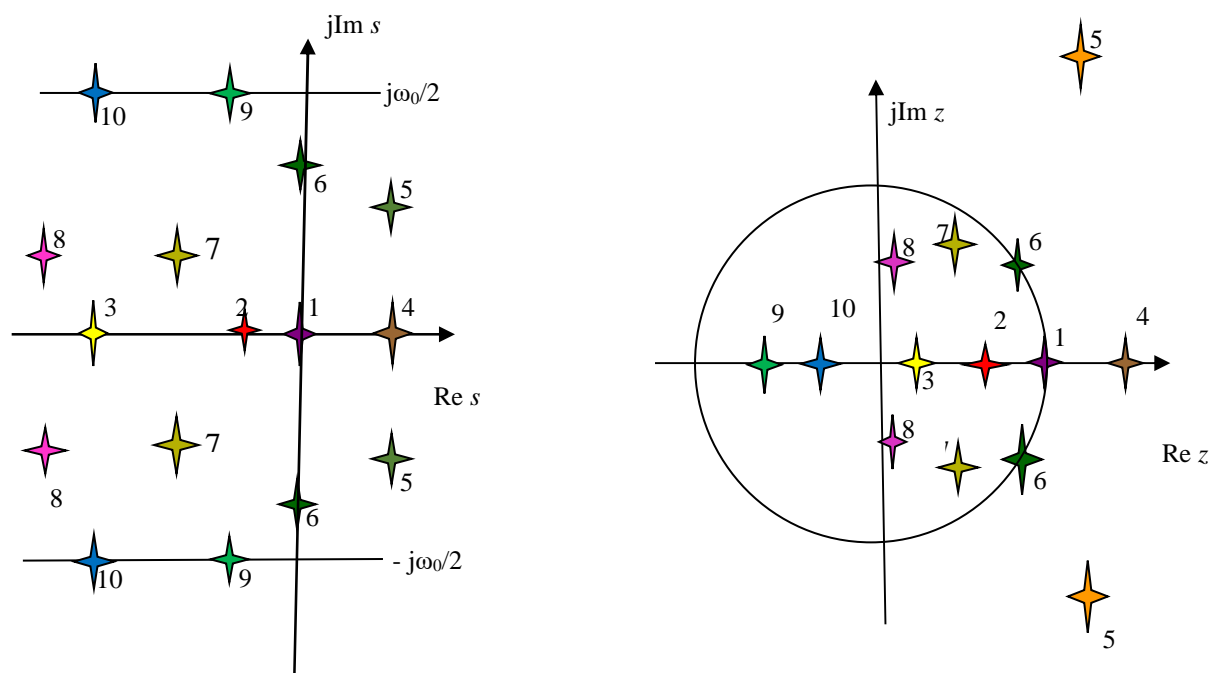
каде што ζ е фактор на релативно придушување, а ω_n е природната (непридушувана) фреквенција, со функцијата (6-186) се пресликува во следниот конјугирано-комплексен пар z полови:

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T} = e^{-\zeta\omega_n T \pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} = \rho e^{\pm j\varphi} \quad (6-188)$$

каде што:

$$\rho = |z| = e^{-\zeta\omega_n T}$$

$$\varphi = \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2} \quad (6-189)$$



Слика 6-50 Пресликување на полови од s - во z -комплексната рамнина

Друг начин да се претстават половите (6-188) е преку нивниот реален и имагинарен дел:

$$\operatorname{Re} z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \cos\left(\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$\operatorname{Im} z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \sin\left(\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}\right) \quad (6-190)$$

Понекогаш е потребно да се реши обратната задача: ако се познати половите во z -комплексната рамнина, да се определат соодветните полови во s -комплексната рамнина. Тогаш, со решавање на равенките (6-189) по ζ и ω_n , се добиваат релациите:

$$\zeta = \frac{-\ln \rho}{\sqrt{\ln^2 \rho + \varphi^2}} \quad (6-191)$$

$$\omega_n = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2 \rho + \phi^2} \quad (6-192)$$

Во продолжение, во таблицата 6-3 е прикажано влијанието на одделните видови полови врз преодниот одсив на еден дискретен систем. Како што може да се види од неа, половите надвор од единичниот круг внесуваат нестабилни компоненти; полот $z=1$ предизвикува константна компонента, додека парот конјугирано-комплексни полови на единичниот круг предизвикува периодична компонента на одсивот со константна амплитуда; позитивните реални полови внатре во единичниот круг, предизвикуваат аperiodични придушувани компоненти, додека конјугирано-комплексните парови полови со модул помал од единица предизвикуваат придушувани периодични компоненти; негативните реални полови внатре во единичниот круг исто така предизвикуваат придушувани периодични компоненти во одсивот; што е модулот на полот од внатрешноста на единичниот круг поблизу до 1, тоа придушувањето на амплитудите од соодветната компонента на одсивот е помало и обратно; колку што е аргументот на еден пол поголем, толку е помала фреквенцијата на осцилациите при дадена периода T , и обратно.

Врз основа на претходното излагање, може да се извлечат следните битни заклучоци:

- Колку што е полот на еден стабилен континуален систем подалеку од имагинарната оска во s - комплексната рамнина, толку пресликаниот пол е поблизу до координатниот почеток во z -комплексната рамнина. Бидејќи влијанието на овие s полови далеку од имагинарната оска врз одсивот е занемарливо, такво ќе биде и влијанието на пресликаните z полови близу до координатниот почеток.
- Реалните негативни полови во внатрешноста на единичниот круг од z - комплексната рамнина се непожелни и треба да се избегнуваат при синтезата на дискретните САУ. Ако нивното присуство не може да се избегне, тогаш треба да се настојува тие да бидат што е можно поблизу до координатниот почеток, зашто тогаш придушувањето на соодветните компоненти во импулсниот одсив е најголемо.
- Најголемо влијание врз одсивот на еден континуален стабилен систем имаат неговите полови што се наоѓаат најблизу до имагинарната оска. Бидејќи тие се пресликуваат во z полови чиј модул е блиску до единица, следува дека овие z полови ќе имаат најголемо влијание врз преодниот одсив на дискретниот систем.
- Пресликувањето на половите од s - во z -комплексната рамнина битно зависи од големината на периодата на дискретизација T

При задавањето на брзината на одсив на еден систем преку природната фреквенција на доминантниот пар полови, треба да се внимава таа да не биде поголема од вредноста дозволена со усвоената периода на дискретизација T :

$$\omega_n < \frac{\pi}{T \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (6-193)$$

Таблица 6-3 Полови на еден дискретен систем и компоненти на одзивот на дискретниот систем (тежинската низа) кои одговараат на тие полови

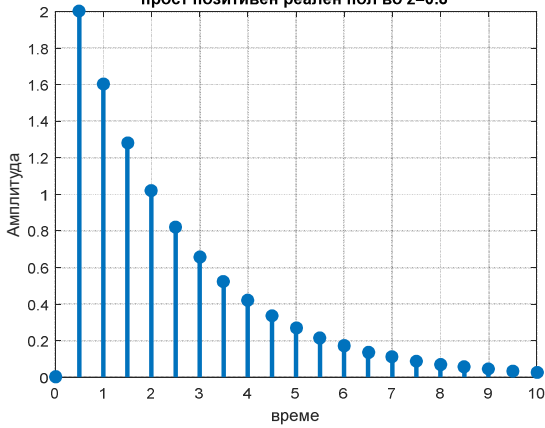
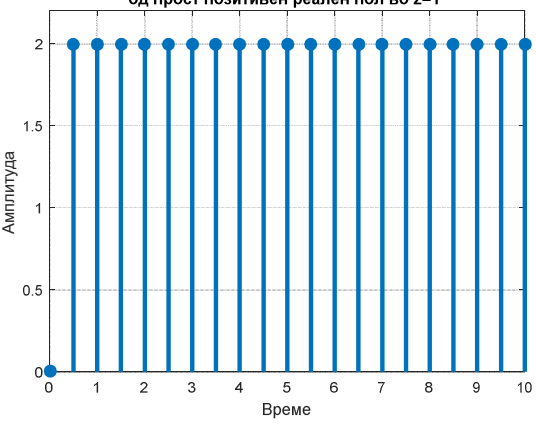


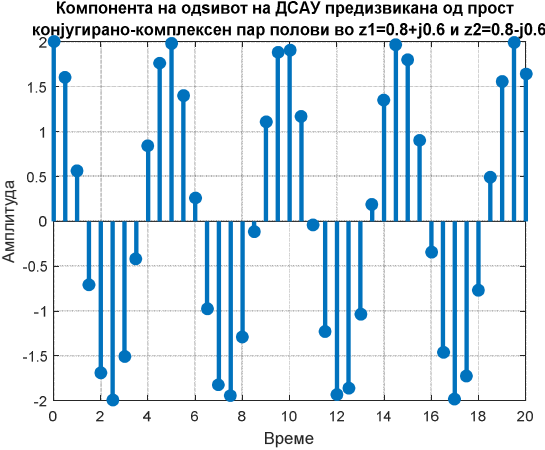
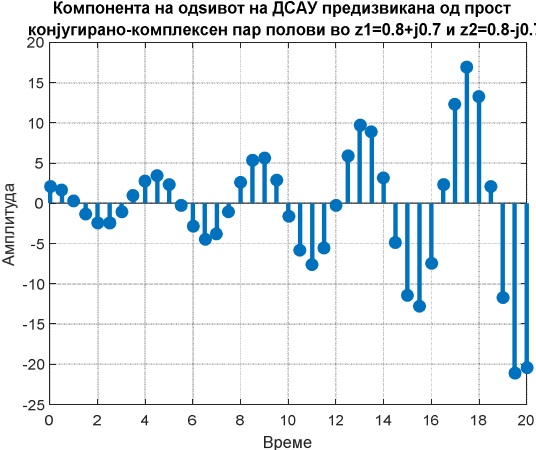
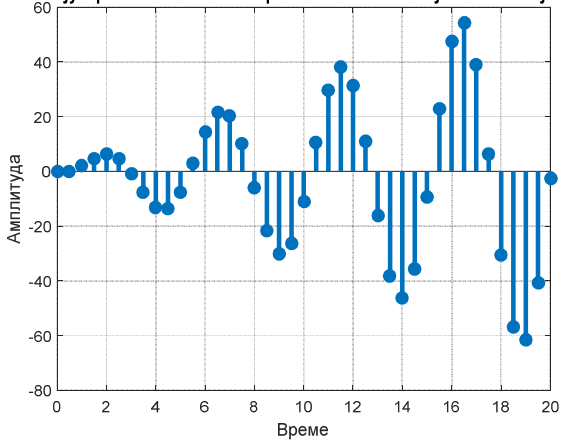
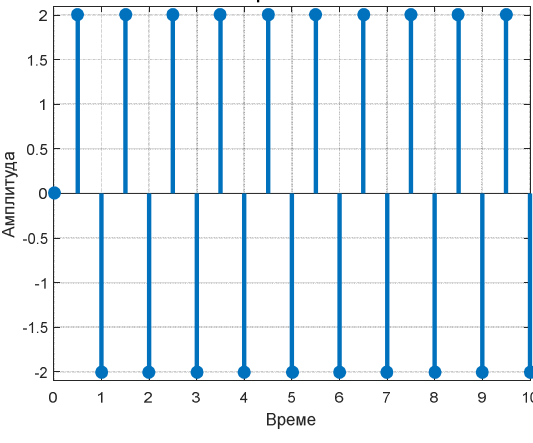
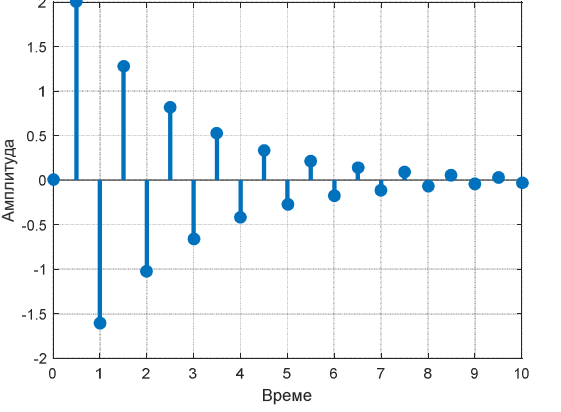
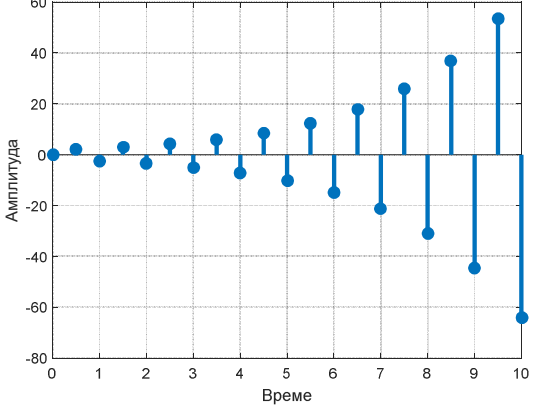
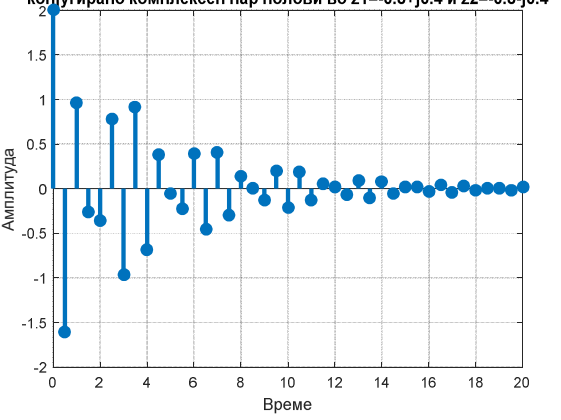
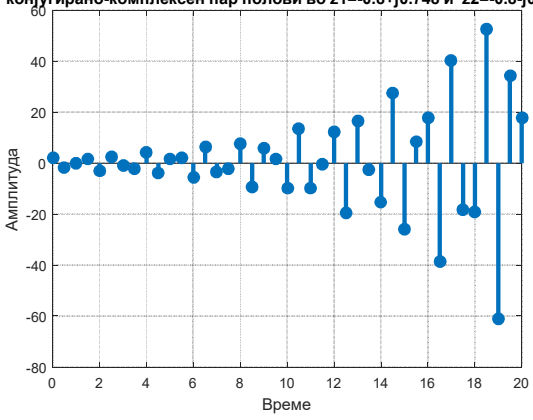
<p>Прост позитивен реален пол во $z < 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост позитивен реален пол во $z=0.8$</p> 	<p>Прост позитивен реален пол на $z = 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост позитивен реален пол во $z=1$</p> 
<p>Прост позитивен реален пол во $z > 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост позитивен реален пол во $z=1.2$</p> 	<p>Прости комплексни полови во $z < 1$, $\text{Re } z_{1,2} > 0$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост конјугирано-комплексен пар полови во $z_1=0.8+j0.4$ и $z_2=0.8-j0.4$</p> 
<p>Прости комплексни полови на $z = 1$ $\text{Re } z_{1,2} > 0$</p>	<p>Прости комплексни полови во $z > 1$, $\text{Re } z_{1,2} > 0$</p>
<p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост конјугирано-комплексен пар полови во $z_1=0.8+j0.6$ и $z_2=0.8-j0.6$</p> 	<p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост конјугирано-комплексен пар полови во $z_1=0.8+j0.7$ and $z_2=0.8-j0.7$</p> 

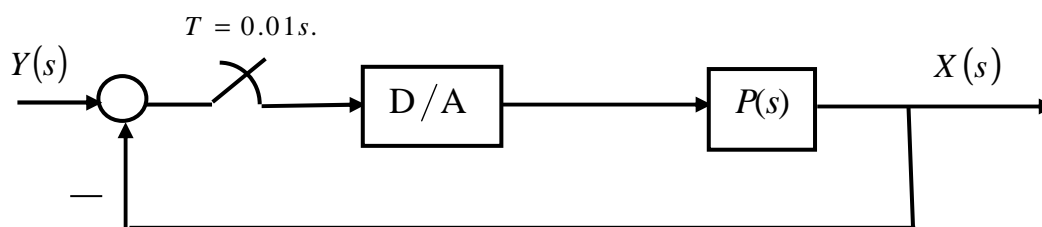
Таблица 6-3 (продолжение). Полови на еден дискретен систем и компоненти на одзивот на дискретниот систем (тежинската низа) кои одговараат на тие полови

<p>Двократни комплексни полови $\operatorname{Re} z_{1,2} > 0$ на $z =1$</p>	<p>Прост негативен реален пол на $z =1$</p>
<p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од двократен конјугирано-комплексен пар полови во $z_1=0.8+j0.6$ и $z_2=0.8-j0.6$</p> 	<p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост негативен реален пол во $z=-1$</p> 
<p>Прост негативен реален пол во $z < 1$</p>	<p>Прост негативен реален пол во $z > 1$</p>
<p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост негативен реален пол во $z=-0.8$</p> 	<p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост негативен реален пол во $z=-1.2$</p> 
<p>Прости комплексни полови со $\operatorname{Re} z_{1,2} < 0$ во $z < 1$</p>	<p>Прости комплексни полови $\operatorname{Re} z_{1,2} < 0$ во $z > 1$</p>
<p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост конјугирано комплексен пар полови во $z_1=-0.8+j0.4$ и $z_2=-0.8-j0.4$</p> 	<p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост конјугирано-комплексен пар полови во $z_1=-0.8+j0.748$ и $z_2=-0.8-j0.748$</p> 

Слично како и кај континуалните системи на автоматско управување, преодниот одзив на еден дигитален систем на автоматско управување може да се карактеризира преку времето на пораст, времето на смирување, максималниот прескок, времето на максимален прескок итн. Тоа е илустрирано со следниот пример.

Пример 6-6. Даден е затворениот дигитален систем на автоматско управување од сликата 6-51. Врз основа на неговите полови, да се определат параметрите на континуалниот отскочен одзив – факторот на релативно придушување, природната фреквенција, доминантната временска константа. Добиениот резултат да се спореди со параметрите на отскочниот одзив на континуалниот систем, кој се добива со отстранување на прекинувачот и Д/А претворувачот од шемата на сликата 6-51:

$$P(s) = \frac{32}{s^2 + 8s + 32} \quad (6-194)$$



Слика 6-51 Структурна блок-шема на затворениот САУ од примерот 6-6

Решение: Дискретната преносна функција $G_0(z)$ на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$\begin{aligned} G_0(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot P(s) \right\} = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{32}{s^2 + 8s + 32} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ \frac{32}{s(s^2 + 8s + 32)} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ \frac{32}{s[(s+4)^2 + 16]} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{32}{s(s+4+j4)(s+4-j4)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s+4}{(s+4)^2 + 16} - \frac{4}{(s+4)^2 + 16} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ 1 - e^{-4T} \cos(4T) - e^{-4T} \sin(4T) \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - ze^{-4T} \cos(4T)}{z^2 - 2ze^{-4T} \cos(4T) + e^{-8T}} - \frac{ze^{-4T} \sin(4T)}{z^2 - 2ze^{-4T} \cos(4T) + e^{-8T}} \right] = \\ &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - 0.96z}{z^2 - 1.92z + 0.923} - \frac{0.038421z}{z^2 - 1.92z + 0.923} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - 0.9216z}{z^2 - 1.92z + 0.923} \right] = (z-1) \left[\frac{1}{z-1} - \frac{z - 0.9216}{z^2 - 1.92z + 0.923} \right] = \\
 &= (z-1) \left[\frac{0.0016z + 0.0014}{(z-1)(z^2 - 1.92z + 0.923)} \right] = \frac{0.0016z + 0.0014}{z^2 - 1.92z + 0.923} \quad (6-195)
 \end{aligned}$$

додека дискретната преносна функција $G(z)$ на самиот затворен систем изнесува:

$$G(z) = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)} = \frac{0.0016z + 0.0014}{z^2 - 1.9184z + 0.9244} \quad (6-196)$$

Нејзините полови се:

$$z_{1,2} = 0.96 \pm j0.066 = 0.9623e^{\pm j0.0686} \quad (6-197)$$

па за параметрите на континуалниот отскочен одсив се добива:

$$\zeta = \frac{-\ln \rho}{\sqrt{\ln^2 \rho + \phi^2}} = 0.49 \quad (6-198)$$

$$\omega_n = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2 \rho + \phi^2} = 7.86 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (6-199)$$

$$T_s = \frac{1}{\zeta \omega_n} = \frac{-T}{\ln \rho} = 0.26s \quad (6-200)$$

Ако е познат факторот на пригушување ζ и природната фреквенција ω_n , лесно ќе се пресмета максималниот прескок на отскочниот одсив на набљудуваниот систем и времето на максималниот прескок, затоа што тие се поврзани со следните релации:

$$M = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (6-201)$$

$$T_m = -\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6-202)$$

Соодветни релации постојат и помеѓу другите показатели на квалитет на преодниот режим и половите на самиот затворен систем на автоматско управување.

На сликата 6-52 е прикажан чисто континуалниот систем на автоматско управување, кој се добива кога во системот од сликата 6-51 ќе се отстранат прекинувачот и А/Д претворувачот. Неговата преносна функција $G(s)$ изнесува:

$$G(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)} = \frac{32}{s^2 + 8s + 64} = \frac{\frac{1}{2}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6-203)$$

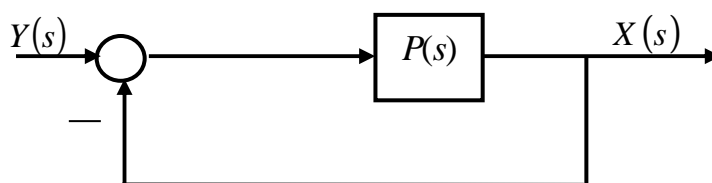
па, оттука, за параметрите на континуалниот отскочен одсив се добива:

$$\zeta = \frac{2}{\omega_n} = 0.5 \quad (6-204)$$

$$\omega_n = \sqrt{64} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (6-205)$$

$$T_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{2} = 0.25\text{s} \quad (6-206)$$

Ако добиените вредности (6-198) – (6-200) се споредат со вредностите (6-204) – (6-206), може да се заклучи дека континуалниот систем има поголемо придушување, поголема резерва на стабилност, поголема брзина на одсив и покусо време на смирување на одсивот во споредба со неговиот дискретен еквивалент. Тоа значи дека во процесот на дискретизација на еден континуален систем, во одредена мерка се влошуваат динамичките карактеристики на системот во целина.



Слика 6-52 Структурна блок-шема на континуалниот затворен САУ од примерот 6-6 □

Пример 6-7. Да се повтори примерот 6-6, така што сега ќе се споредат резонантниот врв, времето на резонантниот врв и широчината на пропусниот опсег на набљудуваниот дискретен систем од сликата 6-51, со истите тие показатели на изворниот континуален систем од сликата 6-52.

Решение: Во примерот 6-6 веќе ги определивме факторот на релативно пригушување и природната фреквенција на набљудуваниот затворен дискретен систем. Меѓу нив и резонантниот врв на фреквенцискиот одсив, времето на резонантниот врв и широчината на пропусниот опсег постојат следните релации:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (6-207)$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad (6-208)$$

$$\omega_0 = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad (6-209)$$

Оттука:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 1.16 \quad (6-210)$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \approx 5.67 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (6-211)$$

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \approx 10.09 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (6-212)$$

Од друга страна, истите параметри за изворниот континуален систем од сликата 6-52 изнесуваат:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 1.1547 \quad (6-213)$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \approx 5.657 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (6-214)$$

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \approx 10.18 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (6-215)$$

Оттука се гледа дека изворниот затворен континуален систем има за нијанса подобра стабилност, затоа што има помал резонантен врв и покусо резонантно време, како и поголема брзина на отскочен одсвив, затоа што има поголем пропушен опсег. □

6-10 ИЗБОР НА ПЕРИОДАТА НА ДИСКРЕТИЗАЦИЈА

Изборот на периодата на дискретизација е многу битен кај дигиталните системи на автоматско управување, затоа што од нејзината големина зависи квалитетот на поведение на самиот систем. Така, од таблицата 6-3 лесно се забележува дека стационарната грешка на овие системи зависи обратно пропорционално од периодата на дискретизација T , што значи дека точноста на работа на еден дискретен систем во стационарен режим е поголема и неговите динамички карактеристики се подобри ако периодата на дискретизација T е помала. Во продолжение, примерите 6-6 и 6-7 покажуваат дека динамичкото поведение на еден дискретен систем добиен со дискретизација на изворно континуален систем, е „полошо“ од поведението на соодветниот континуален систем, што се должи на фактот дека при процесот на дискретизација доаѓа до делумно губење на информациите што ги носи континуалниот систем. Со несоодветен избор на периодата на дискретизација, може да се случи дискретниот модел на еден континуален систем да стане нестабилен, или да го изгуби својството на управливост и набљудливост, иако изворниот континуален систем е стабилен, управлив и/или набљудлив. Меѓутоа, ова не значи дека дигиталните системи на автоматско управување општо гледано се полоши од континуалните, зашто квалитетот на еден систем не зависи само од количеството на информации што ги содржи, туку и од начинот на кој тие информации се користат. Впрочем, од гледиште на обработката на информации и развојот на различни алгоритми за управување, дигиталните системи имаат далеку поголеми можности.

Врз изборот на периодата на дискретизација T влијаат следните чинители: саканиот квалитет на поведение на системот во преоден и стационарен режим, динамиката и физичките ограничувања на објектот на управување, постапката за формирање на моделот на објектот на управување, фреквенциското подрачје во кое дејствуваат

надворешните нарушувања, карактеристиките на извршните органи и претворувачите на физичките величини и ограничувањата кои ги наметнува условот за работа во реално време.

Саканиот квалитет на динамичко поведење на еден дискретен систем се постига со избор на мала периода на дискретизација T . Колку што е периодата на дискретизација T помала, толку дискретниот систем по квалитетот на преодниот режим се приближува до својот континуален еквивалент. Меѓутоа, ова смалување на периодата на дискретизација T е ограничено на вредност која приближно изнесува една десетина од времето потребно отскочниот одсив на системот да постигне 95% од својата стационарна вредност. Натомошното намалување на периодата на дискретизација T нема смисла, зашто така оствареното подобрување на динамичките својства на дискретниот систем е занемарливо. Од друга страна, со претераното намалување на периодата на дискретизација T , се јавува опасност да дојде до израз т.н. немоделирана динамика на системот и нејзиното влијание врз неговото динамичкото поведење. Имено, при моделирањето на објектот на управување, секогаш се прават одредени апроксимации, при кои се занемаруваат високофреквенциските карактеристики на истиот. Така, критичните фреквенции во преносната функција на објектот одговараат на инерцијалните компоненти, додека половите кои одговараат на компонентите со изразито брз одсив не се земени предвид. Со намалувањето на периодата на дискретизација T , може да се случи да дојде до израз и влијанието на овие полови врз динамичкото поведење на целиот систем.

Изборот на периодата на дискретизација T во најголем степен зависи од динамиката на објектот на управување односно од неговата структура, временските константи и транспортното доцнење. Периодата на дискретизација T мора да биде помала од најмалата временска константа на објектот, како и од времето на транспортно доцнење, зашто инаку се губат информации за мигновните вредности на управуваната големина.

Еден затворен систем на автоматско управување има поголема брзина на одсив од соодветниот отворен систем. Меѓутоа, при проектирањето затворени САУ, не може да се бара многу поголема брзина на одсив на затворениот систем од онаа што ја дозволува динамиката на објектот на управување (отворениот систем). Теоретски гледано, затворениот систем може да има произволно голема брзина на одсив, меѓутоа практично тоа би значело примена на компензатори од висок ред со изразено диференцијално дејство, што пак, за последица, има неможност на објектот на управување да ја следи управувачката големина на својот влез. Оттаму, во пракса, при зададена брзина на одсив на проектираниот дискретен САУ, односно зададена широчина на пропусниот опсег ω_0 , периодата на дискретизација T се одбира да биде 3 до 4 пати поголема од граничната вредност на пропусниот опсег на системот:

$$T = \frac{3 \div 4}{f_0} \quad (6-216)$$

Зависноста (6-216) е искусвена и ги исполнува условите за квалитетен одсив на проектираниот систем, но не е доволна. При различни режими на работа на системот и ограничувања, треба да се земат предвид и други чинители. Еден од нив е влијанието на надворешните пречки и нарушувања врз работата на системот. Кога проектираниот систем треба да работи во услови на значителни надворешни пречки и нарушувања,

се разликуваат три фреквенциски подрачја на работа: (1) подрачје на ниски фреквенции или ниско фреквенциско подрачје ($0 \leq \omega \leq \omega_1$), во кое фреквенцискиот спектар на нарушувањата е мал, па може да се занемари нивното влијание врз управуваната големина; (2) подрачје на средни фреквенции ($\omega_1 < \omega \leq \omega_2$), во кое шумот содржи значителен дел од својата енергија и може битно да влијае врз управуваната големина, и (3) подрачје на високи фреквенции ($\omega_2 < \omega < \infty$), каде што шумот исто така содржи голем дел од својата енергија, но неговото влијание врз управуваната големина е занемарливо, со оглед на тоа дека слабеењето на објектот на управување во ова подрачје е многу големо. Со цел да се минимизира влијанието на пречките врз управуваната големина, пропусниот опсег на затворениот систем не смее да биде поголем од $\omega_{\max} = \omega_1$ и тогаш мора да се усвои:

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}} \quad (6-217)$$

Условите (6-216) и (6-217) не се противречни, и дозволуваат избор на мала периода на дискретизација T . Меѓутоа, ако објектот на управување поседува извршен орган со голема инерција, може да се случи при мала периода на дискретизација T тој да не може да ја обработи управувачката променлива меѓу два соседни временски мига на дискретизација.

Исто така, постојат дигитални системи кај кои однапред е позната периодата на дискретизација T . Такви се системите кои поседуваат дискретни детектори на физички променливи: хемиски анализатори, енкодери од нумерички тип за мерење на брзината и позицијата од оската на еден мотор и сл. На пример, кај електромоторните погони со голема снага во кои како засилувачи на снага се употребуваат тиристорски претворувачи, периодата на дискретизација T е однапред зададена и изнесува $1/6$ од периодата на мрежниот напон: $T = 0.02/6 = 3333\mu s$.

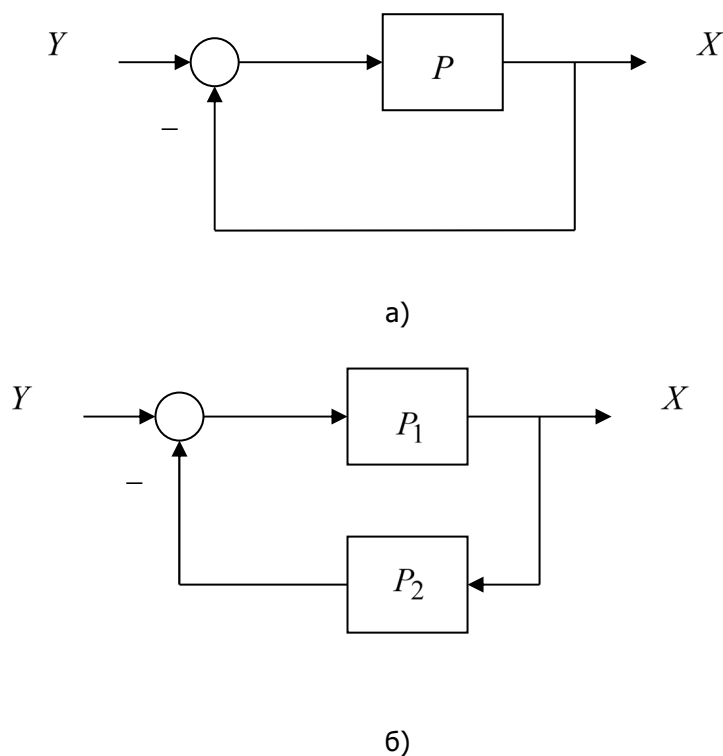
Ако проектираниот дигитален САУ треба да работи во реално време, при што едновремено со дигиталното управување се врши и идентификација или проценка на параметрите или состојбите на објектот, периодата на дискретизација T не смее да се одбере премногу мала. Имено, таа треба да биде доволно голема за да може да се реализираат конкретните алгоритми на идентификација, проценка и управување.

Во заклучок, може да се каже дека изборот на периодата на дискретизација зависи од повеќе фактори, од кои некои се и противречни, како на пример барањето за точност на дискретниот модел и времето на процесирање на дискретните сигнали и алгоритми. Затоа најчесто се усвојува компромисно решение, а во интерес на едноставноста на системите на автоматско управување, за сите објекти на управување во еден систем најчесто се усвојува иста периода на дискретизација.

7 АНАЛИЗА НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ СО МЕТОДОТ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

7-1 ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

На сликата 7-1 се прикажани два типа затворени дискретни системи на автоматско управување со негативна повратна врска. Првиот систем има единична негативна повратна врска, додека вториот систем се одликува со неединична негативна повратна врска.



Слика 7-1 Два типа затворени дискретни системи на автоматско управување со негативна повратна врска: а) систем со единична негативна повратна врска, б) систем со неединична негативна повратна врска

Ако $P_1(z)$ ја претставува еквивалентната преносна функција во директната гранка од набљудуваниот затворен систем, а $P_2(z)$ ја претставува еквивалентната преносна функција во повратната гранка, тогаш за првиот систем $P_1(z) = P(z)$ и $P_2(z) = 1$.

Соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем со единична негативна повратна врска се добива со мисловно прекинување на повратната врска непосредно пред компараторот и неговата преносна функција изнесува:

$$G_{01}(z) = P(z) \tag{7-1}$$

Соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем со неединична повратна врска се добива на ист начин и неговата преносна функција изнесува:

$$G_{02}(z) = P_1(z)P_2(z) \quad (7-2)$$

Преносните функции на двата типа затворени дискретни системи од сликата 7-1 се:

$$G_1(z) = \frac{P(z)}{1+P(z)} = \frac{G_{01}(z)}{1+G_{01}(z)} \quad (7-3)$$

и:

$$G_2(z) = \frac{P_1(z)}{1+P_1(z)P_2(z)} = \frac{P_1(z)}{1+G_{02}(z)} \quad (7-4)$$

соодветно. Како што може да се забележи, карактеристичната равенка за двата затворени системи има ист облик:

$$a(z) = 1 + G_0(z) = 0 \quad (7-5)$$

каде што $G_0(z)$ е преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем. Оттаму, дискусијата што следи ќе се однесува и на двата типа затворени системи од сликата 7-1, со тоа што треба да се има на ум дека во случајот на затворениот систем од сликата 7-1a):

$$G_0(z) = G_{01}(z) \quad (7-6)$$

а во случајот на затворениот систем од сликата 7-1b):

$$G_0(z) = G_{02}(z) \quad (7-7)$$

Ако преносната функција на отворениот систем се претстави во облик:

$$G_0(z) = K \frac{B(z)}{A(z)} \quad (7-8)$$

каде што K е соодветен коефициент на засилување, а $A(z)$ и $B(z)$ се полиноми од комплексна променлива z и соодветен степен со реални коефициенти, за карактеристичната равенка на затворениот систем се добива:

$$a(z) = 1 + G_0(z) = 1 + K \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{A(z) + KB(z)}{A(z)} = A(z) + KB(z) = 0 \quad (A \neq 0) \quad (7-9)$$

Постапката геометриско место на корени овозможува одредување на половите на еден затворен систем, каков што е системот од сликата 7-1b), во функција од коефициентот

на засилување K на соодветниот отворен систем $G_{02}(z) = P_1(z)P_2(z)$, за што е потребно да се познаваат само половите и нулите на отворениот систем, а не е потребно да се врши факторизација на карактеристичниот полином на затворениот систем. Постапката геометриско место на корени не само што овозможува анализа, туку подеднакво успешно се користи и за синтеза на затворените дискретни системи на автоматско управување.

7-2 ЗАВИСНОСТ НА ПОЛОВИТЕ НА ЗАТВОРЕНИОТ СИСТЕМ ОД КОЕФИЦИЕНТОТ НА ЗАСИЛУВАЊЕ K НА ОТВОРЕНИОТ СИСТЕМ

Се набљудува затворениот дискретен систем од сликата 7-1 б). Неговата преносна функција е дадена со изразот:

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{P_1(z)}{1 + P_1(z)P_2(z)} = \frac{P_1(z)}{1 + G_0(z)} \quad (7-10)$$

Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$G_0(z) = G_{02}(z) = P_1(z)P_2(z) = K \frac{B(z)}{A(z)} \quad (7-11)$$

Со воведување на смената (7-11) во (7-10), за преносната функција на затворениот дискретен систем од сликата 7-1.б) се добива:

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{P_1(z)}{1 + G_0(z)} = \frac{P_1(z)}{1 + K \frac{B(z)}{A(z)}} = \frac{A(z)P_1(z)}{A(z) + KB(z)} \quad (7-12)$$

Половите на затворениот систем се корени на карактеристичната равенка:

$$a(z) = 1 + G_0(z) = 1 + K \frac{B(z)}{A(z)} = A(z) + KB(z) = 0 \quad (7-13)$$

и, очигледно, нивната положба во комплексната z -рамнина зависи од коефициентот на засилување K на отворениот систем. Графичкиот приказ на геометриското место на корени на равенката (7-13) во комплексната z -рамнина во функција од коефициентот K на отворениот систем се нарекува едноставно **геометриско место на корени** (ГМК) на набљудуваниот затворен систем. Лесно може да се заклучи дека геометриското место на корени не претставува една крива, туку множество криви кои се нарекуваат гранки – по една за секој од половите на набљудуваниот затворен систем.

За $K = 0$, корените на равенката (7-13) се поклопуваат со половите на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем. За $K \rightarrow \infty$, корените на равенката (7-13) тежат кон нулите на отворениот систем (вклучувајќи ги и конечните и бесконечните нули). Следствено, **како K се менува од 0 до ∞ , гранките на**

геометриското место корени на затворениот систем поаѓаат од половите на соодветниот отворен систем и завршуваат во нулите на отворениот систем.

Пример 7-1. Да се нацрта ГМК на затворениот линеарен дискретен динамички систем, чиј што отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = P_1(z)P_2(z) = K \frac{B(z)}{A(z)} = K \frac{z+2}{z(z+4)}; K > 0 \quad (7-14)$$

Решение: За $P_2(z) = 1$ (кога затворениот систем е со единична негативна повратна врска), преносната функција на затворениот систем ќе биде:

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{P_1(z)}{1+P_1(z)} = \frac{G_0(z)}{1+G_0(z)} = \frac{K(z+2)}{z^2 + (K+4)z + 2K}; K > 0 \quad (7-15)$$

а нејзините полови се:

$$p_1 = -\frac{1}{2}(4+K) + \sqrt{4 + \frac{1}{4}K^2} \quad (7-16)$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(4+K) - \sqrt{4 + \frac{1}{4}K^2} \quad (7-17)$$

За $K = 0$, полот p_1 ќе биде во точката $p_1 = -4/2 + \sqrt{4} = 0$, додека полот p_2 ќе се наоѓа во точката $p_2 = -4/2 - \sqrt{4} = -4$. Овие точки одговараат на половите на отворениот

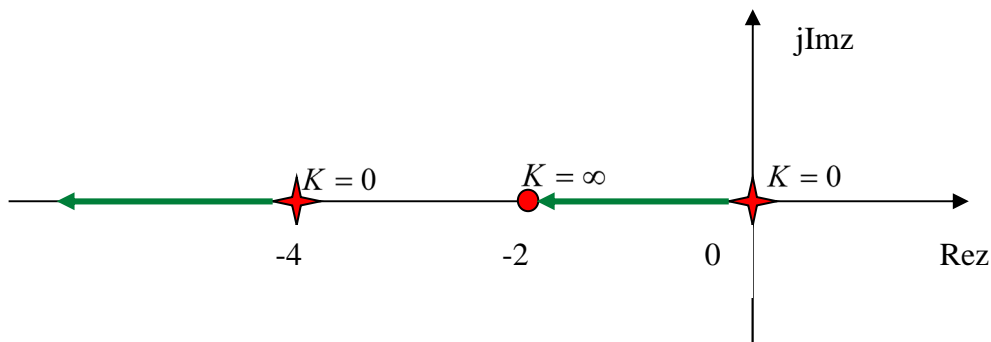
систем (7-14). Кога K станува многу големо, (под претпоставка, $K > 0$) полот p_1 ќе тежи кон вредноста -2 :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} p_1 = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}(4+K) + \sqrt{4 + \frac{1}{4}K^2} \right] = -2 \quad (7-18)$$

додека полот p_2 ќе тежи кон $-\infty$:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} p_2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}(4+K) - \sqrt{4 + \frac{1}{4}K^2} \right] = -\infty \quad (7-19)$$

Овие вредности одговараат на конечната нула на отворениот систем (7-14) во -2 и бесконечната нула во $-\infty$. Очигледно, положбата на половите на набљудуваниот затворен систем зависи од коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем и таа зависност графички е прикажана на сликата 7-2. Геометриското место на корени за набљудуваниот затворен систем има две гранки, по една за секој пол на отворениот систем и тие гранки лежат на реалната оска во z – комплексната рамнина.



Слика 7-2 Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 7-1□

7-3 КРИТЕРИУМ НА АРГУМЕНТ И МОДУЛ

Ако гранка од геометриското место на корени на системот од сликата 7-16) минува низ точката p_1 во комплексната рамнина, тоа значи дека таа точка претставува корен на карактеристичната равенка (7-13), односно пол на набљудуваниот затворен систем, за некоја реална вредност на K . Со други зборови, мора да важи:

$$A(p_1) + KB(p_1) = 0 \quad (7-20)$$

односно:

$$G_0(p_1) = P_1(p_1)P_2(p_1) = \frac{KB(p_1)}{A(p_1)} = -1 \quad (7-21)$$

што е еквивалентно.

Од (7-21) непосредно следува **критериумот на аргументот**, кој може да се искаже на следниот начин. Точката p_1 ќе биде пол на затворениот систем за дадено $K > 0$ само доколку:

$$\arg G_0(p_1) = 180^\circ + 360^\circ l = (2l+1)\pi \text{ radiani}; l = 0, 1, 2, \dots \quad (7-22)$$

Критериумот на аргумент може да се прошири и за $K < 0$ на следниот начин:

$$\arg [G_0(p_1)] = \begin{cases} (2l+1)\pi, & K > 0 \\ 2l\pi, & K < 0 \end{cases}; l = 0, 1, 2, \dots \quad (7-23)$$

Ако точката p_1 претставува пол на набљудуваниот затворен систем, тогаш таа мора, освен критериумот на аргумент, да го задоволува и **критериумот на модул** кој се искажува на следниот начин. Точката p_1 ќе биде пол на затворениот систем за дадено K само доколку:

$$|G_0(p_1)| = \left| K \frac{B(p_1)}{A(p_1)} \right| = 1 \quad (7-24)$$

што значи дека вредноста на K ќе биде дадена со изразот:

$$K = \left| \frac{A(p_1)}{B(p_1)} \right| \quad (7-25)$$

Благодарение на овие два критериуми, геометриското место корени за даден затворен систем може да се конструира рачно, така што ќе се поврзат сите точки во комплексната рамнина кои го задоволуваат критериумот на аргумент, а потоа критериумот на модул се користи за да се определи конкретната вредност на K за секоја од тие точки. Меѓутоа, денес постојат готови компјутерски програми со помош на кои се избегнува рачното цртање на геометриското место корени за еден систем.

7-4 БРОЈ ГРАНКИ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

Бројот гранки во геометриското место на корени на еден затворен систем одговара на бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$ – по една гранка за секој пол на отворениот систем.

Пример 7-2. Дадена е преносната функција на соодветниот отворен систем за еден затворен дискретен систем:

$$G_0(z) = \frac{K(z-0.1)(z-0.2)}{z(z^2-z+0.5)} = \frac{K(z-0.1)(z-0.2)}{z(z-0.5+j0.5)(z-0.5-j0.5)} \quad (7-26)$$

Да се определи бројот на гранки во геометриското место на корени за зададениот затворен систем.

Решение: ГМК на дадениот затворен систем ќе има три гранки, бидејќи отворениот систем (7-26) има три пола:

$$z_1^* = 0; \quad z_{2,3}^* = 0.5 \pm j0.5 \quad (7-27)$$

Пример 7-3. Зошто бројот гранки во геометриското место на корени на затворениот систем мора да одговара на бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$?

Решение: Секоја гранка од геометриското место на корени на затворениот систем претставува по еден пол на затворениот систем. Следствено, геометриското место на корени на затворениот систем мора да има онолку гранки, колку што затворениот систем има полови. Бидејќи бројот полови на затворениот систем е еднаков со бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$, следува дека бројот гранки на геометриското место на корени на затворениот систем одговара на бројот полови на отворениот систем. □

7-5 ГРАНКИ КОИ ЛЕЖАТ НА РЕАЛНАТА ОСКА ВО КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА

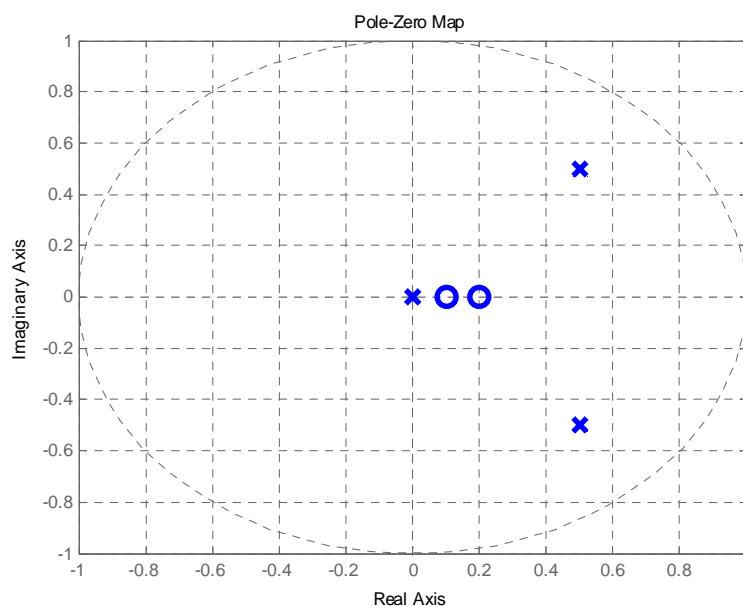
Деловите од геометриското место на корени на затворениот систем кои лежат на реалната оска во комплексната рамнина се определуваат во зависност од знакот на коефициентот на засилување на отворениот систем K врз основа на следните две правила:

Сите точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од непарен број конечни нули и полови на отворениот систем припаѓаат на геометриското место на корени на затворениот систем за $K > 0$. Доколку нема точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од непарен број конечни нули и полови на отворениот систем за $K > 0$, тогаш ни една гранка од геометриското место на корени на затворениот систем не лежи на реалната оска.

Сите точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од парен број конечни нули и полови на отворениот систем припаѓаат на геометриското место на корени на затворениот систем за $K < 0$. Доколку нема точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од парен број конечни нули и полови на отворениот систем за $K < 0$, тогаш ни една гранка од геометриското место на корени на затворениот систем не лежи на реалната оска.

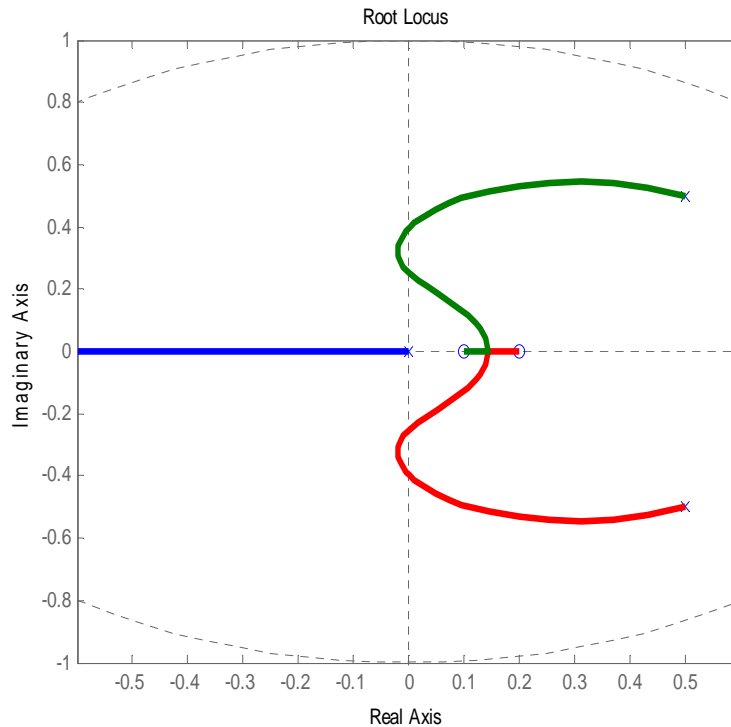
Пример 7-4. За отворениот систем (7-26) да се прикажат нулите и половите во комплексната z -рамнина и да се определат деловите од геометриското место на корени на соодветниот затворен систем кои лежат на реалната оска од z -рамнината.

Решение: Положбата на нулите и половите на отворениот систем (7-26) во комплексната z -рамнина е прикажана графички на сликата 7-3. Делот од реалната



Слика 7-3 Положба на нулите и половите на отворениот систем (7-26) во z -комплексната рамнина

оска помеѓу точките 0.1 и 0.2 се наоѓа лево од непарен број (три) конечни полови и нули на отворениот систем (7-26). Следствено, тој припаѓа на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$. Исто така и делот од реалната оска помеѓу $-\infty$ и 0 се наоѓа лево од непарен број (пет) нули и полови на отворениот систем (7-26). Следствено, и тој припаѓа на ГМК на набљудуваниот затворен систем. Геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (7-26), е прикажано на сликата 7-4.



Слика 7-4 ГМК на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (7-26) □

7-6 АСИМПТОТИ НА ГРАНКИТЕ ОД ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

На големи растојанија од координатниот почеток во комплексната рамнина, гранките на геометриското место на корени се приближуваат кон одредени асимптоти. Овие асимптоти поаѓаат од точка во комплексната рамнина која се наоѓа на реалната оска и се нарекува **центар на асимптитите** σ_c . Центарот на асимптитите се пресметува според формулата:

$$\sigma_c = \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \right) \quad (7-28)$$

каде што p_i се половите, z_i се нулите, n е бројот полови, а m е бројот нули на отворениот систем $G_0(z)$. Аголот што овие асимптоти го зафаќаат со реалната оска се пресметува според формулата:

$$\beta = \begin{cases} (2l+1)\pi/(n-m), & K > 0 \\ 2l\pi/(n-m), & K < 0 \end{cases}; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-m-1 \quad (7-29)$$

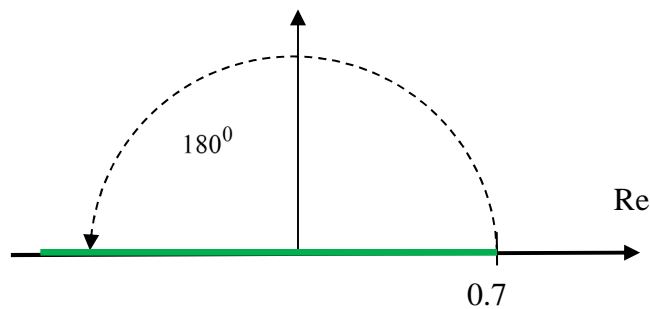
Од (7-28) следува дека бројот асимптоти е $n - m$.

Пример 7-5. Да се определи центарот на асимптитите на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со формулата (7-26).

Решение: Бидејќи $n - m = 3 - 2 = 1$, бројот асимптоти е еднаков на еден. Центарот на оваа асимптота е во точката:

$$\sigma_c = \frac{0 + 0.5 - j0.5 + 0.5 + j0.5 - 0.1 - 0.2}{3 - 2} = 0.7$$

За $K > 0$, асимптитата зафаќа агол од $\beta = \pi$ радиани со реалната оска. Асимптитите на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (7-26) се прикажани на сликата 7-5.



Слика 7-5 Асимптоти на ГМК за затворениот систем (7-26) □

Пример 7-6. Да се определи центарот и аглиите на асимптитите на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

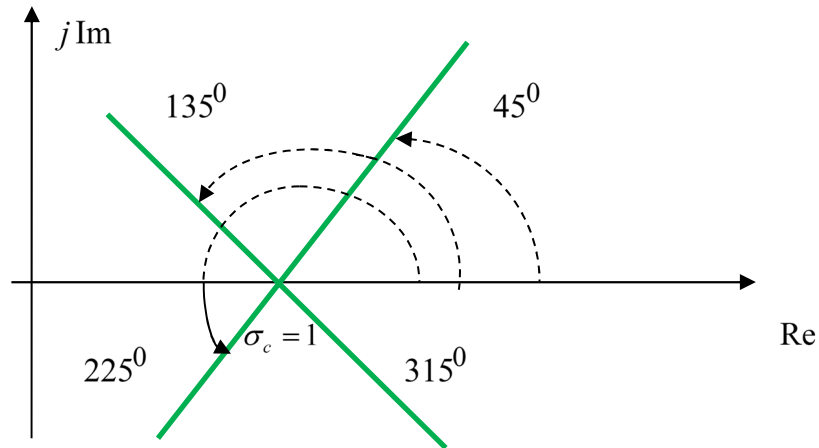
$$G_0(z) = \frac{K}{z(z-2)(z-1+j)(z-1-j)} \quad (7-30)$$

Решение: Центарот на асимптитите е во точката:

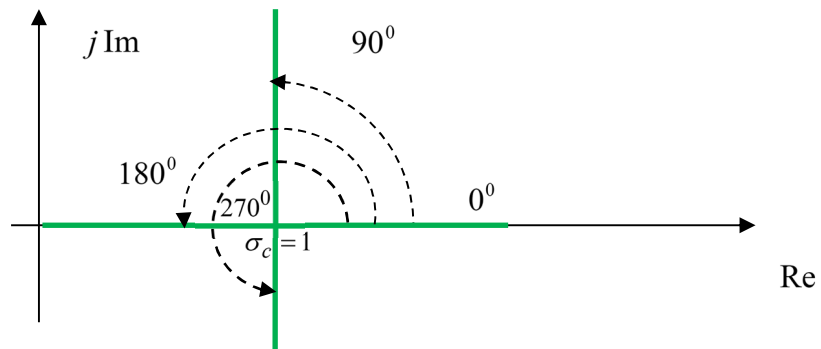
$$\sigma_c = \frac{0 + 2 + 1 - j + 1 + j - 0}{4 - 0} = 1 \quad (7-31)$$

Геометриското место на корени на затворениот систем има три асимптоти, кои за $K > 0$ со реалната оска зафаќаат агли $\beta_1 = \pi/4$, $\beta_2 = 3\pi/4$, $\beta_3 = 5\pi/4$ и $\beta_4 = 7\pi/4$. Тие се

прикажани на сликата 7-6. За $K < 0$, асимптотите зафаќаат агли од $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi/2$, $\beta_3 = \pi$ и $\beta_4 = 3\pi/2$ радиани со реалната оска и се прикажани на сликата 7-7.



Слика 7-6 Графички приказ на асимптотите на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (7-30) за $K > 0$



Слика 7-7 Асимптотите на ГМК за затворениот систем од примерот 7-6 за $K < 0$ □

Пример 7-7. Да се покаже дека центарот на асимптотите на геометриското место на корени на еден затворен систем е одреден со формулата (7-28).

Решение: Точките од геометриското место на корени на еден затворен систем ја задоволуваат карактеристичната равенка на системот:

$$A(z) + KB(z) = 0 \quad (7-32)$$

која го има следниот конкретен облик:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 + K(z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0) = 0 \quad (7-33)$$

Кога (7-33) се подели со полиномот $B(z)$ ќе се добие:

$$z^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})z^{n-m-1} + \dots + K = 0 \quad (7-34)$$

Кога првиот коефициент (коефициентот пред највисокиот степен на комплексната променлива) е еднаков на единица, вториот коефициент е еднаков на сумата од нулите на тој полином со негативен знак. Оттаму:

$$A(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \Rightarrow a_{n-1} = -\sum_{i=1}^n p_i \quad (7-35)$$

$$B(z) = z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0 \Rightarrow b_{m-1} = -\sum_{i=1}^m z_i \quad (7-36)$$

$$-(a_{n-1} - b_{m-1}) = \left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \quad (7-37)$$

За големи вредности на K и соодветно големо растојание од координатниот почеток во комплексната рамнина, $n - m$ - те корени на карактеристичната равенка (7-34) тежат кон прави асимптоти долж кои збирот на овие $n - m$ корени е еднаков на $-(a_{n-1} - b_{m-1})$. Бидејќи $-(a_{n-1} - b_{m-1})$ е реален број, асимптотите мора да ја сечат реалната оска во одредена точка, во која збирот од $n - m$ еднакви корени е еднаков на $-(a_{n-1} - b_{m-1})$. Така се добива равенката (7-28). (За подетален доказ да се види [10]). □

7-7 ТОЧКИ НА СОСТАВУВАЊЕ ОДНОСНО РАЗДВОЈУВАЊЕ НА ГРАНКИТЕ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

Точка на раздвојување односно составување σ_b е точка на реалната оска од која поаѓаат, односно во која се сретнуваат, две или повеќе гранки на геометриското место на корени на еден затворен систем.

Точката на раздвојување односно составување на две или повеќе гранки од геометриското место на корени на еден затворен систем се определува како решение на следната равенка:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_b - p_i} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{\sigma_b - z_i} \right) \quad (7-38)$$

каде што p_i се половите, а z_i се нулите на отворениот систем G_0 .

Решението на равенката (7-38) претпоставува одредување на нулите на полином по непознатата σ_b од произволен степен $n + m - 1$. Оттаму, точката на раздвојување односно составување на гранките од геометриското место на корени на еден затворен систем може да се определи аналитички само во случаите кога отворениот систем има релативно едноставна преносна функција. Во другите случаи положбата на оваа точка се определува приближно било интуитивно, било со примена на компјутерски програми.

Пример 7-8. Да се определат точките на спојување односно раздвојување на гранките на геометриското место на корени за затворениот дискретен систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{K(z+5)}{(z+2+j2)(z+2-j2)} \quad (7-39)$$

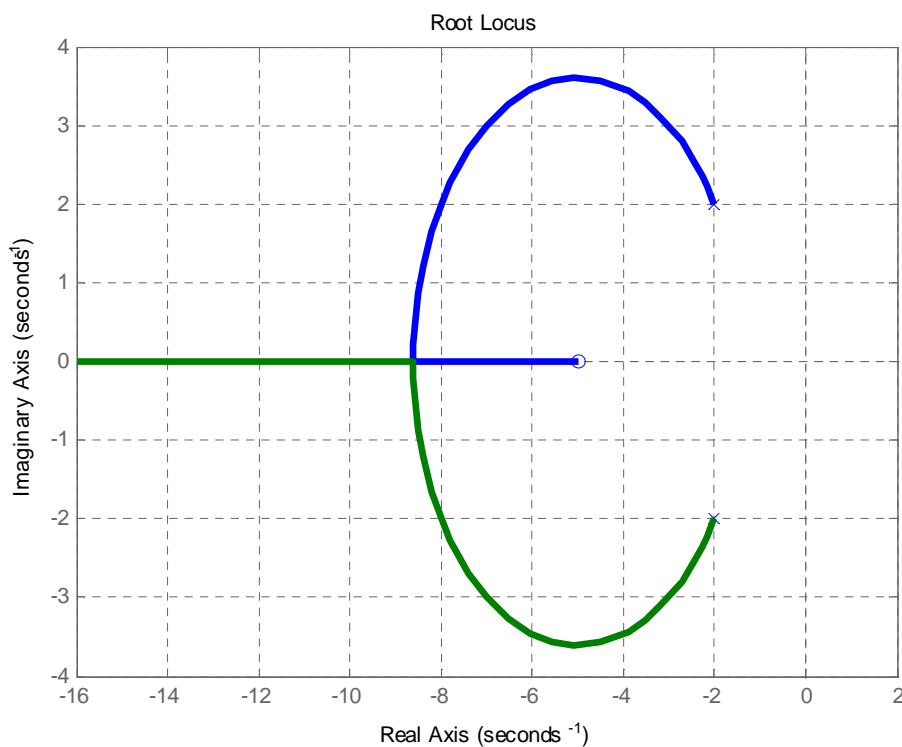
Решение: Од равенките (7-38) и (7-39) непосредно следува:

$$\frac{1}{\sigma_b + 2 + j2} + \frac{1}{\sigma_b + 2 - j2} = \frac{1}{\sigma_b + 5} \quad (7-40)$$

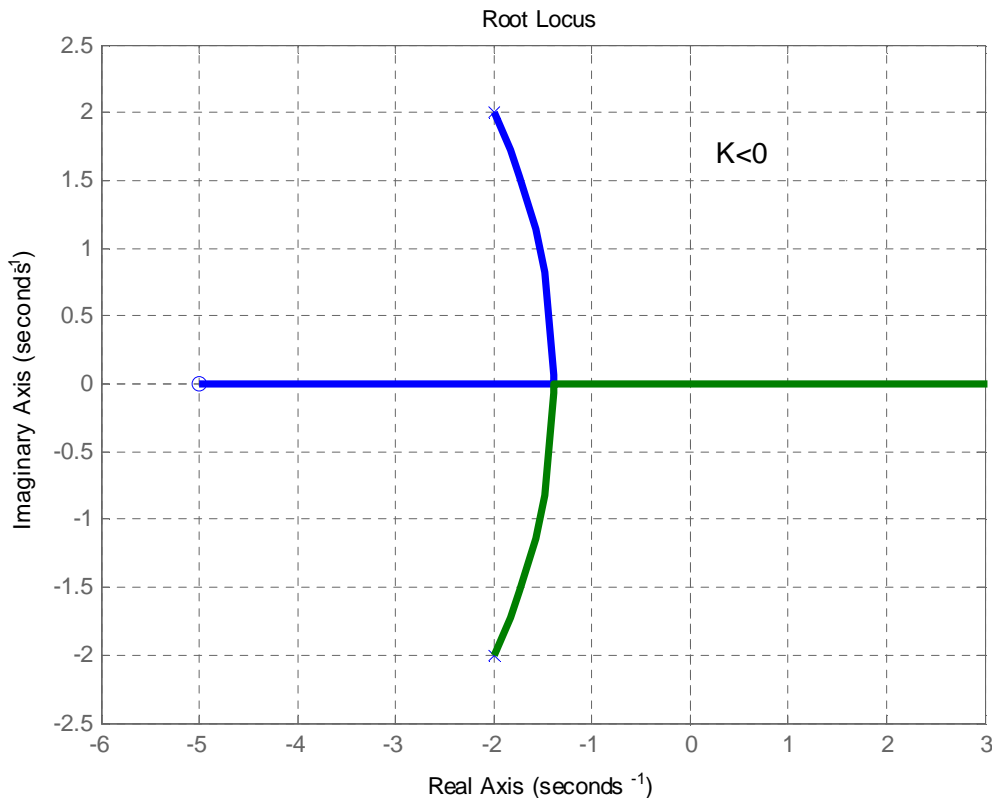
па бараните точки се решенијата на равенката:

$$\sigma_b^2 + 10\sigma_b + 12 = 0 \Rightarrow \sigma_{b1} = -8.6; \sigma_{b2} = -1.39 \quad (7-41)$$

Точката $\sigma_b = -8.6$ е точка на спојување на гранките на ГМК на затворениот систем за $K > 0$, слика 7-8, додека точката $\sigma_b = -1.4$ е точка на спојување на ГМК на затворениот систем за $K < 0$, како што е покажано на сликата 7-9.



Слика 7-8 Точка на раздвојување на гранките од ГМК за затворениот систем од примерот 7-8 за $K > 0$



Слика 7-9 Графички приказ на точката на раздвојување на гранките од ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (7-39) за $K < 0$ □

7-8 АГЛИ НА ОДДАЛЕЧУВАЊЕ НА ГРАНКИТЕ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ ОД ПОЛОВИТЕ И АГЛИ НА НИВНО ПРИБЛИЖУВАЊЕ КОН НУЛИТЕ НА ОТВОРЕНИОТ СИСТЕМ

Аголот под кој геометриското место на корени се оддалечува од еден комплексен пол се определува според формулата:

$$\theta_D = 180^\circ + \arg G_0' \quad (7-42)$$

каде што $\arg G_0'$ е фазата на G_0 пресметана во комплексниот пол, со занемарување на влијанието на самиот пол.

Аголот под кој геометриското место на корени се приближува до една комплексна нула се определува според формулата:

$$\theta_A = 180^\circ - \arg G_0'' \quad (7-43)$$

каде што $\arg G_0''$ е фазата на G_0 пресметана во комплексната нула, со занемарување на влијанието на самата нула.

Пример 7-9. Да се определи аголот на оддалечување на геометриското место на корени на затворениот дискретен систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{K(z+2)}{(z+1+j)(z+1-j)}, \quad K > 0 \quad (7-44)$$

од комплексниот пол $z = -1 + j$.

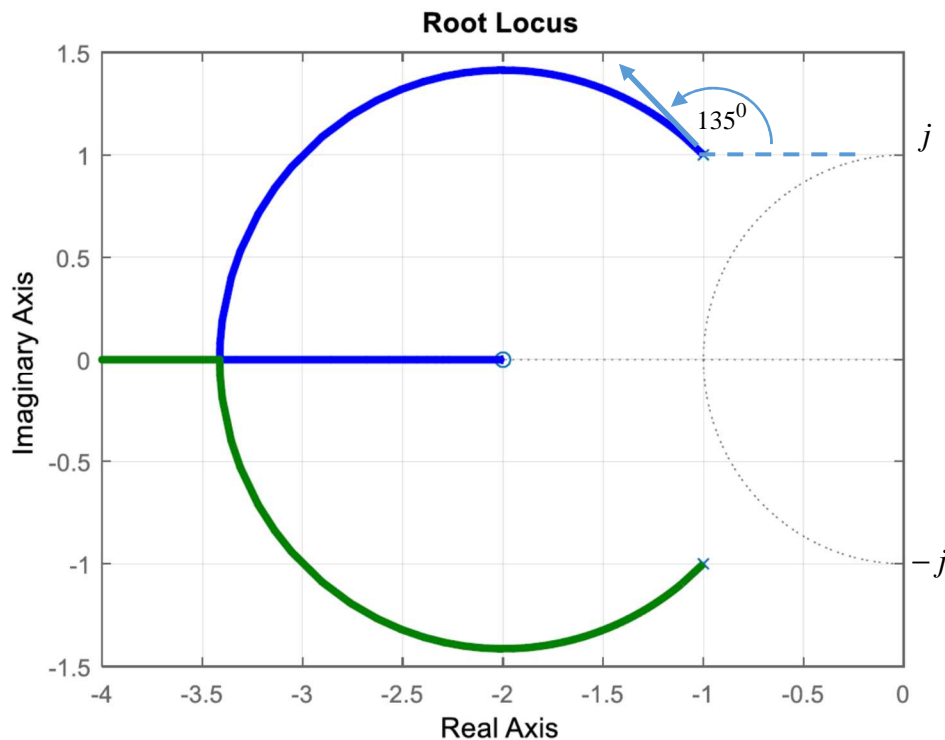
Решение: Аргументот на $G_0(z)' = \lim_{z \rightarrow -1+j} (z+1-j)G_0(z)$ е:

$$\begin{aligned} \arg[G_0(-1+j)'] &= \arg \frac{K(-1+j+2)}{(-1+j+1+j)} = \arg \frac{K(1+j)}{2j} = \\ &= \arg K \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) = \arctg(-1) = -\arctg 1 = -45^\circ \end{aligned} \quad (7-45)$$

Оттука, аголот на оддалечување на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем од комплексниот пол $z = -1 + j$ е:

$$\theta_D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \quad (7-46)$$

како што е покажано на сликата 7-10.



Слика 7-10 Аголот на оддалечување на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (7-44) од комплексниот пол $z = -1 + j$

Пример 7-10. Да се определи аголот на приближување на геометриското место на корени на затворениот дискретен систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{K(z-j)(z+j)}{z(z+1)}, \quad K > 0 \quad (7-47)$$

до комплексната нула $z = j$.

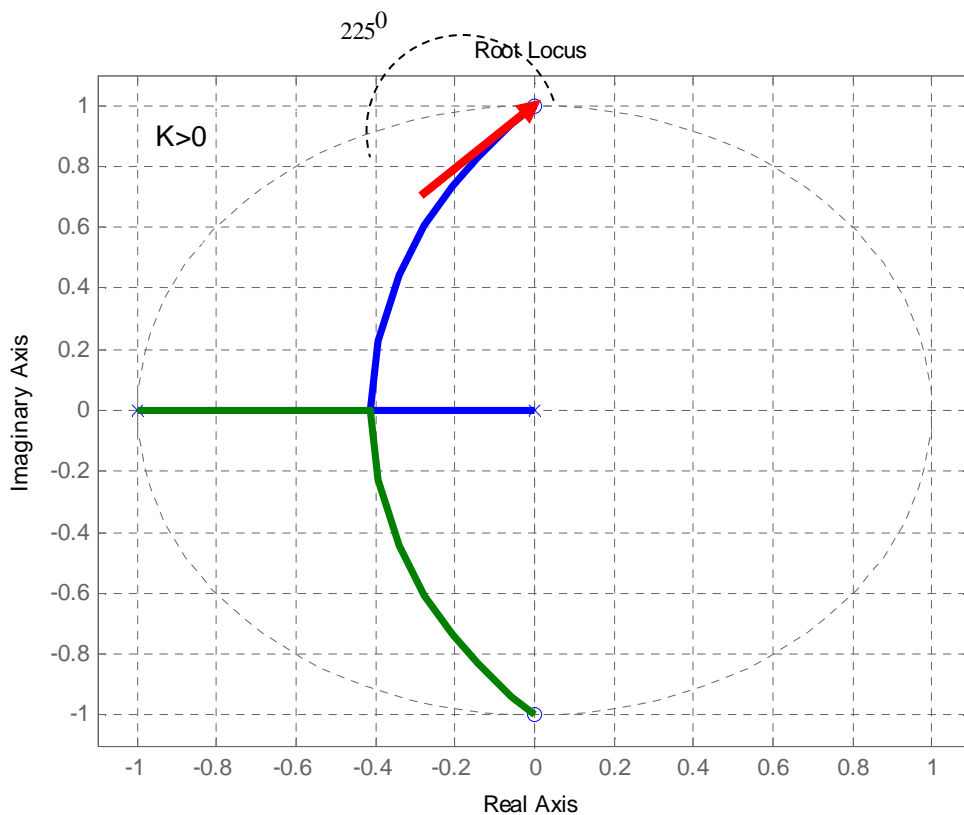
Решение: Аргументот на $G_0(z)'' = \lim_{z \rightarrow j} \frac{G_0(z)}{(z-j)}$ е:

$$\arg[G_0(j)''] = \arg \frac{K(j+j)}{j(j+1)} = \arg \left(2K \frac{1-j}{2} \right) = \operatorname{arctg}(-1) = -45^\circ \quad (7-48)$$

Оттука, аголот на приближување на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем кон комплексната нула $z = j$ е:

$$\theta_A = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ \quad (7-49)$$

како што е покажано на сликата 7-11.



Слика 7-11 Аголот на приближување на ГМК за затворениот систем од примерот 7-10 до нулата $z = j$ □

7-9 КОНСТРУКЦИЈА НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН ДИСКРЕТЕН СИСТЕМ

Постапката за скицирање на геометриското место на корени се состои во следното:

- 1) Најнапред се определува бројот гранки на геометриското место корени за набљудуваниот затворен систем.
- 2) Потоа се определува делот односно деловите од геометриското место корени кои лежат на реалната оска од комплексната рамнина.
- 3) Во продолжение, се определува центарот и аглиите на асимптотите на гранките од геометриското место корени и истите се исцртуваат на дијаграмот.
- 4) Како следно, се определуваат аглиите на приближување кон комплексните нули и оддалечување од комплексните полови, доколку такви постојат, и истите се означуваат на дијаграмот.
- 5) На крајот се скицираат гранките од геометриското место на корени, така што секоја гранка почнува од некој пол и завршува во некоја конечна нула на отворениот систем или се стреми кон бесконечност долж некоја од асимптотите. Прецизноста на исцртувањето на геометриското место корени, се разбира, се зголемува со искуството на цртачот.

Точноста на скицираното геометриско место на корени се подобрува ако се определат точките на раздвојување односно спојување на неговите гранките и ако се примени принципот на аргумент за одредени точки од гранките. Принципот на модул се користи за определување на вредноста на коефициентот K на отворениот систем која одговара на конкретна точка од геометриското место на корени.

Бидејќи коефициентите на полиномите во броителот и именителот на преносната функција од набљудуваниот затворен систем се реални броеви, неговите комплексни полови се јавуваат во конјугирано-комплексни парови, па геометриското место на корени е симетрично во однос на реалната оска.

Пример 7-11. Да се нацрта геометриското место корени на затворениот линеарен дискретен динамички систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = G(z)H(z) = \frac{K}{(z-1)(z-0.2)(z-0.4)}, \quad K > 0 \quad (7-50)$$

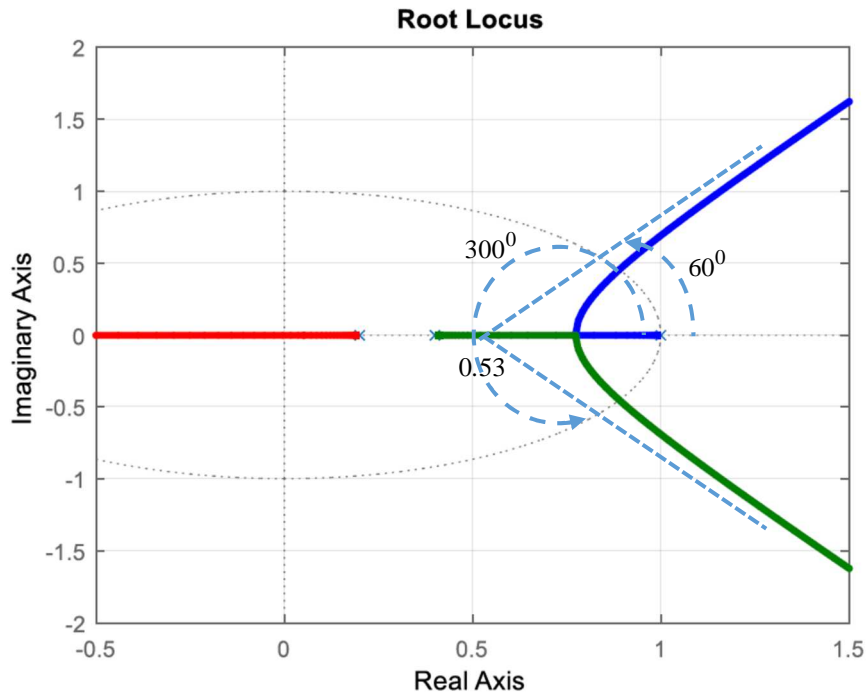
Решение: Бараното геометриско место на корени е скицирано на сликата 7-12. Деловите од реалната оска помеѓу 0.4 и 1 и помеѓу $-\infty$ и 0.2 припаѓаат на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем за $K > 0$. Центарот на асимптотите се определува според (7-28) и се наоѓа во точката:

$$\sigma_c = \frac{1+0.2+0.4}{3} = 0.533 \quad (7-51)$$

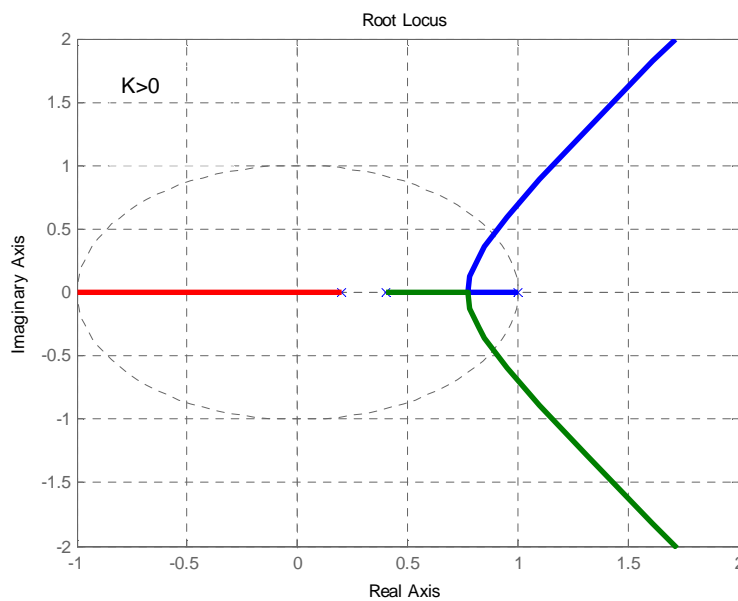
ГМК за набљудуваниот затворен систем има три асимптоти и тие зафаќаат агол со реалната оска $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$ и $\beta_3 = 300^\circ$, соодветно. Бидејќи две гранки од ГМК се раздвојуваат на реалната оска помеѓу 0.4 и 1, на тој дел мора да постои точка на раздвојување, која претставува решение на равенката:

$$\frac{1}{\sigma_b - 1} + \frac{1}{\sigma_b - 0.2} + \frac{1}{\sigma_b - 0.4} = 0 \Rightarrow 3\sigma_b^2 - 3.2\sigma_b + 0.68 = 0 \quad (7-52)$$

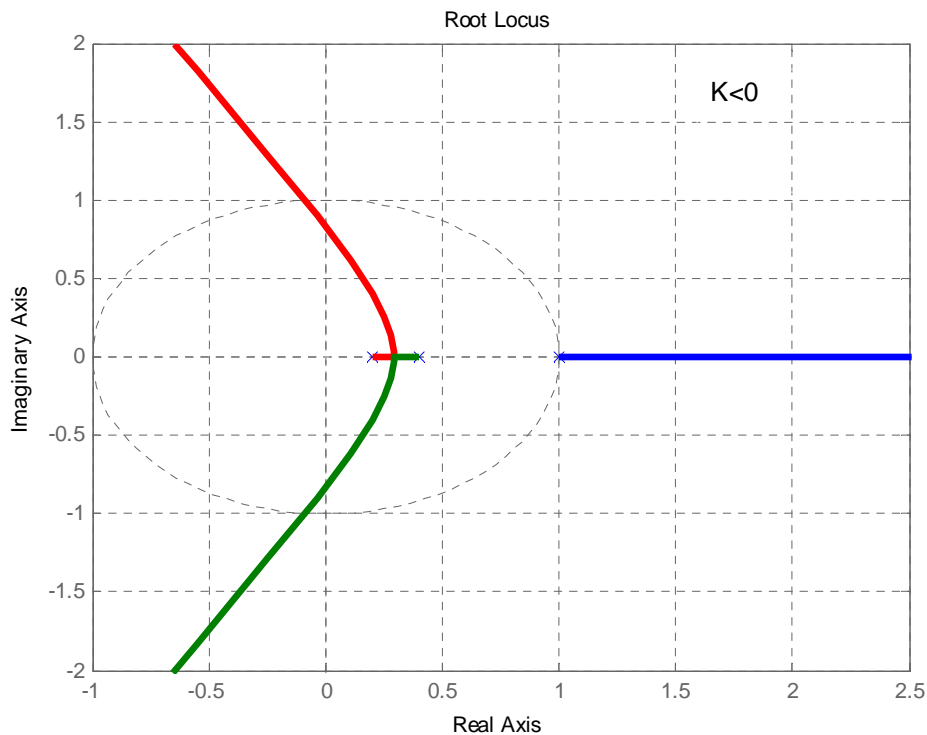
Тоа е точката $\sigma_{b1} = 0.77$, бидејќи решението $\sigma_{b2} = 0.3$ на (7-52) не припаѓа на интервалот (0.4,1).



Слика 7-12 ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (7-50)



Слика 7-13 ГМК од примерот 7-11 добиено со помош на MATLAB за $K > 0$



Слика 7-14 Геометриското место корени од примерот 7-11 добиено со помош на MATLAB за $K < 0$ □

7-10 ОДРЕДУВАЊЕ НА ПРЕНОСНАТА ФУНКЦИЈА НА ЗАТВОРЕНИОТ ДИСКРЕТЕН СИСТЕМ И НЕГОВИОТ ОДСИВ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

Преносната функција на затворениот дискретен систем $G(z)$ може лесно да се определи од неговото геометриско место на корени за конкретна вредност на коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем $G_0(z)$. Нека, под претпоставка, таа е од облик:

$$G(z) = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)} \quad (7-53)$$

што значи дека затворениот систем е со единична негативна повратна врска. Преносната функција на објектот во директната гранка $P(z)$ во овој случај е и преносна функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем и таа има општ облик:

$$G_0(z) = K \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{K(z-w_1)(z-w_2)\cdots(z-w_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} \quad (7-54)$$

Со воведување на смената (7-54) во (7-53) се добива:

$$G(z) = \frac{G_0(z)}{1+G_0(z)} = \frac{K \frac{B(z)}{A(z)}}{1+K \frac{B(z)}{A(z)}} = \frac{KB(z)}{A(z)+KB(z)} \quad (7-55)$$

Од изразот (7-55) е очигледно дека $G(z)$ и $G_0(z)$ имаат исти нули, но различни полови. Конкретно, преносната функција $G(z)$ има облик:

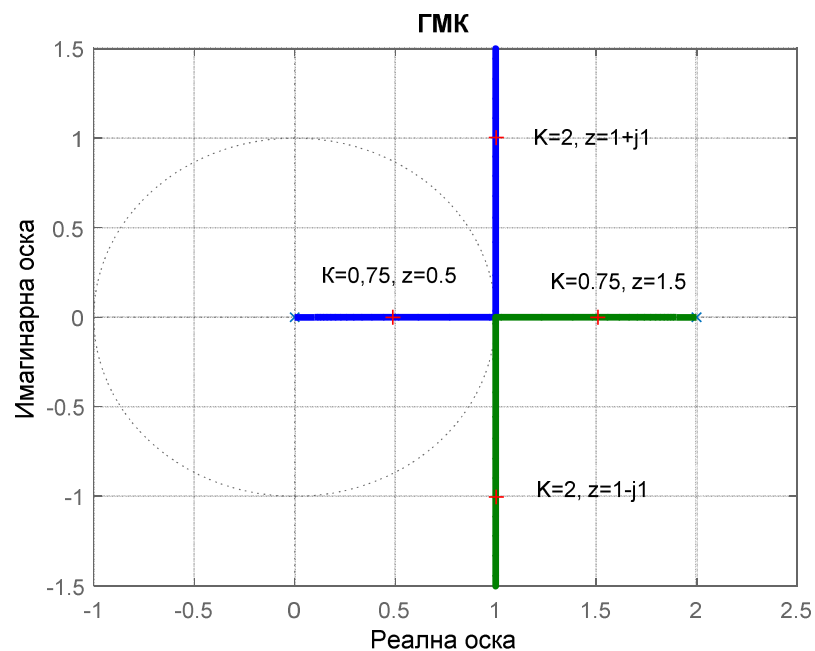
$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{K(z-w_1)(z-w_2)\cdots(z-w_m)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)} \quad (7-56)$$

Половите z_1, z_2, \dots, z_n на затворениот систем (7-56) се определуваат директно од неговото геометриско место на корени за секоја дадена вредност на K .

Пример 7-12. Даден е затворениот линеарен стационарен дискретен динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{K}{z(z-2)}; K > 0 \quad (7-57)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на сликата 7-15. Да се определи преносната функција на затворениот систем.



Слика 7-15 Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 7-12

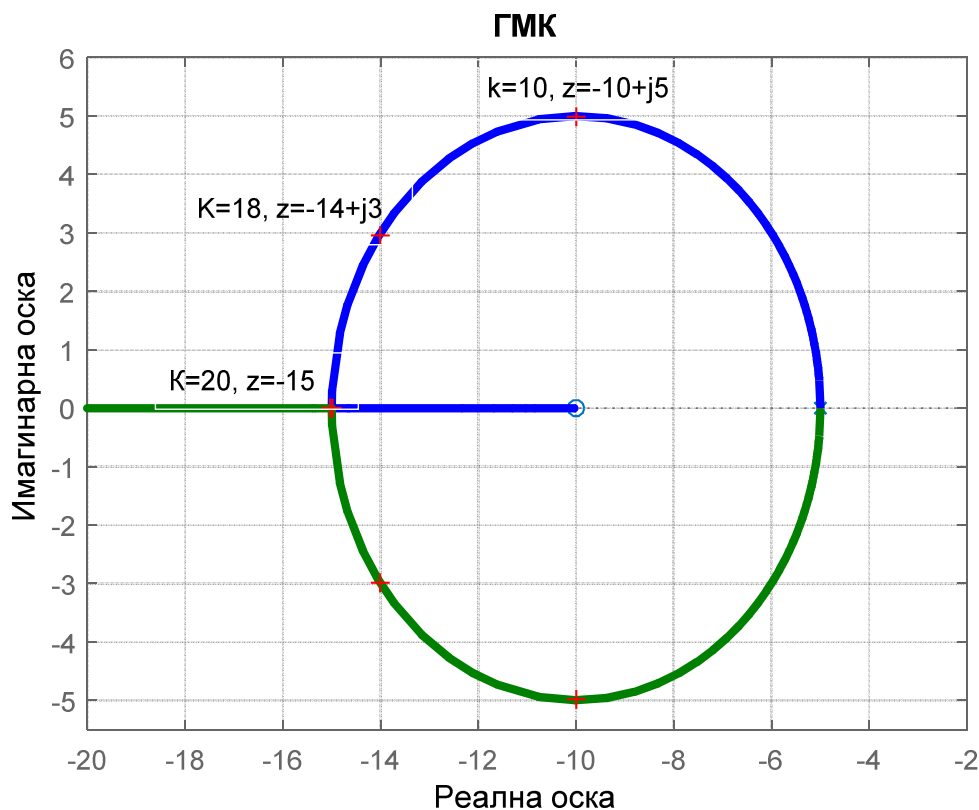
Решение: На сликата 7-15 се прикажани половите на затворениот систем за неколку вредности на коефициентот K . Така, за $K = 0.75$ затворениот систем има прости реални полови во точките $z_1 = 0.5$ и $z_2 = 1.5$, па неговата преносна функција ќе биде од облик:

$$G(z) = \frac{0.75}{(z-0.5)(z-1.5)} \quad \square \quad (7-58)$$

Пример 7-13. Даден е затворениот линеарен стационарен дискретен динамички систем со неединична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = P_1(z)P_2(z) = \frac{K(z+10)}{(z+5)} \cdot \frac{1}{(z+5)} = \frac{K(z+10)}{(z+5)^2}; K > 0 \quad (7-59)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на сликата 7-16. Да се определи преносната функција на затворениот систем.



Слика 7-16 Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 7-13 \square

Решение: На сликата 7-16 се прикажани половите на затворениот систем за неколку вредности на коефициентот K . Така, за $K = 20$ затворениот систем има двократен реален пол во точката $z = -15$, па неговата преносна функција ќе биде од облик:

$$G(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{20(z+10)}{(z+15)^2}; K > 0 \quad (7-60)$$

Кога затворениот систем, чија преносна функција се одредува, не е со единична негативна повратна врска, туку има преносна функција од општ облик:

$$G(z) = \frac{P_1(z)}{1 + P_1(z)P_2(z)} = \frac{P_1(z)}{1 + G_0(z)} \quad (7-61)$$

каде што $P_2(z)$ е преносната функција во повратната гранка, неговите полови се определуваат непосредно од геометриското место на корени, но неговите нули мора да се определат посебно од изразот (7-59).

7-11 ОДРЕДУВАЊЕ НА РЕЗЕРВИТЕ НА ЗАСИЛУВАЊЕ И ФАЗА НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН ДСАУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

Резервата на засилување е најголемиот фактор за кој може да се зголеми коефициентот на засилување K на отворениот систем, а затворениот систем и понатаму да остане стабилен. Таа може да се определи од геометриското место на корени на затворениот систем според формулата:

$$\text{резерва на засилување} = \frac{\text{вредност на } K \text{ на границата на стабилност}}{\text{изведбена вредност на } K} \quad (7-62)$$

За потсетување, границата на стабилност за дискретните системи е единичната кружница во z -комплексната рамнина. **Ако геометриското место на корени не ја минува границата на стабилност, резервата на засилување на затворениот систем е бесконечно голема.**

Пример 7-14. Да се определи резервата на засилување на затворениот дискретен систем, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(z) = \frac{0.25}{z(z-1)}; K > 0 \quad (7-63)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на сликата 7-17.

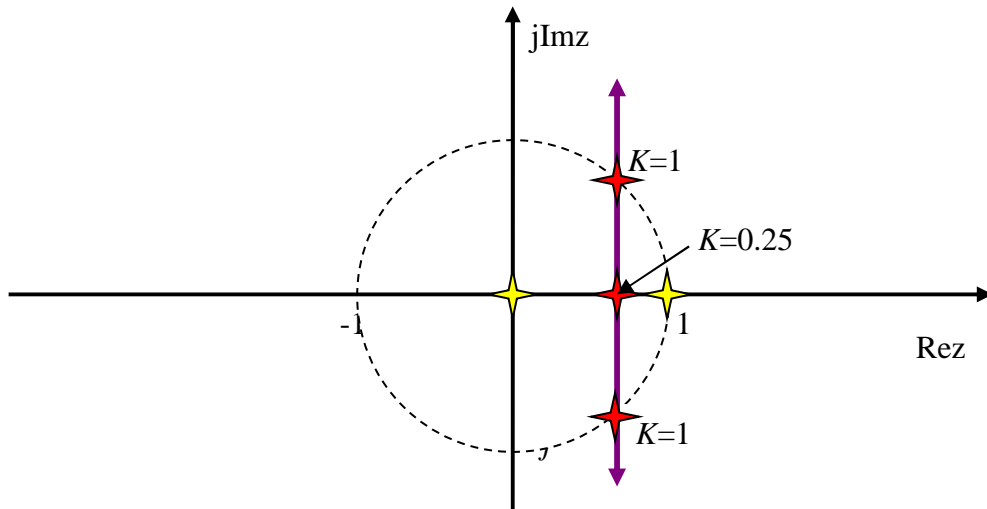
Решение: Од сликата 7-17 се гледа дека геометриското место на корени ја сече единичната кружница за $K=1$. Следствено, резервата на засилување на набљудуваниот систем е:

$$\text{резерва на засилување} = \frac{1}{0.25} = 4 \quad \square \quad (7-64)$$

Резервата на фаза на еден затворен систем исто така може да се определи од неговото геометриско место на корени. За таа цел најнапред треба да се определи точката ω_1 на

границата на стабилност за која $|G_0(j\omega_1)| = 1$ за изведбената (конструктивна) вредност K на коефициентот на засилување на отворениот систем. Тогаш резервата на фаза на набљудуваниот систем се определува според формулата:

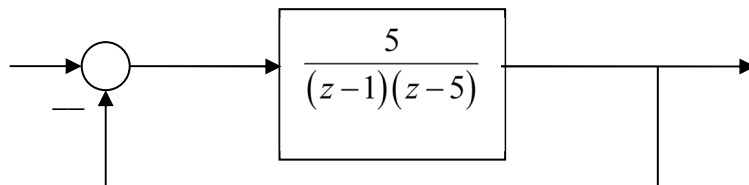
$$\text{резерва на фаза} = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] \quad (7-65)$$



Слика 7-17 Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 7-14 □

Пример 7-15. Даден е затворениот дискретен систем од сликата 7-18, а неговото геометриско место на корени е прикажано на сликата 7-19. Да се определи резервата на фаза на набљудуваниот затворен систем. Преносната функција на соодветниот отворен систем е следната:

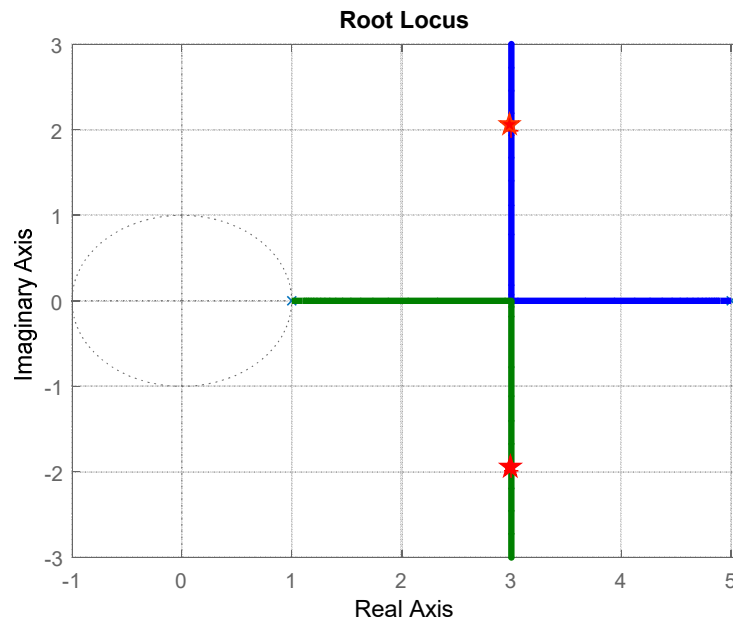
$$G_0(z) = \frac{5}{(z-1)(z-5)}; K > 0 \quad (7-66)$$



Слика 7-18 Структурна блок-шема на затворениот систем од примерот 7-15

Решение: Решението на равенката:

$$|G_0(j\omega_1 T)| = G_0(\omega_1 T) = \frac{5}{\sqrt{2-2\cos(\omega_1 T)} \cdot \sqrt{26-10\cos(\omega_1 T)}} = 1 \quad (7-67)$$



Слика 7-19 Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 7-15

е $\omega_1 = 1.13 \text{ rad/sec}$ и тоа ја одредува точката на имагинарната оска во z -комплексната рамнина за која $|G_0(j\omega_1 T)| = 1$. Аргументот на $G_0(j\omega_1)$ е -291° , па резервата на фаза на набљудуваниот затворен систем е:

$$\text{резерва на фаза} = 180^\circ - 291^\circ = -111^\circ \quad (7-68)$$

Изворно, постапката ГМК била развиена за испитување на зависноста на половите на затворениот систем од коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем. Меѓутоа, постапката може да се употреби и за испитување на зависноста на половите на затворениот систем (нивната положба во комплексната рамнина) и од останатите параметри на отворениот систем. Тоа е илустрирано со следниот пример.

Пример 7-16. Даден е затворен дискретен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(z) = \frac{(z+a)}{(z-1)(z-0.5)} \quad (7-69)$$

Со помош на методот ГМК да се определи вредноста на параметарот a , за која затворениот систем ќе биде гранично стабилен.

Решение: Карактеристичната равенка на набљудуваниот затворен систем е следната:

$$1 + G_0(z) = 1 + \frac{(z+a)}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{(z-1)(z-0.5) + (z+a)}{(z-1)(z-0.5)} = 0 \quad (7-70)$$

па неговиот карактеристичен полином $a(z)$ ќе има облик:

$$a(z) = z^2 - 0.5z + 0.5 + a \quad (7-71)$$

За да се испита влијанието на параметарот a врз половите на затворениот систем, се набљудува карактеристичната равенка:

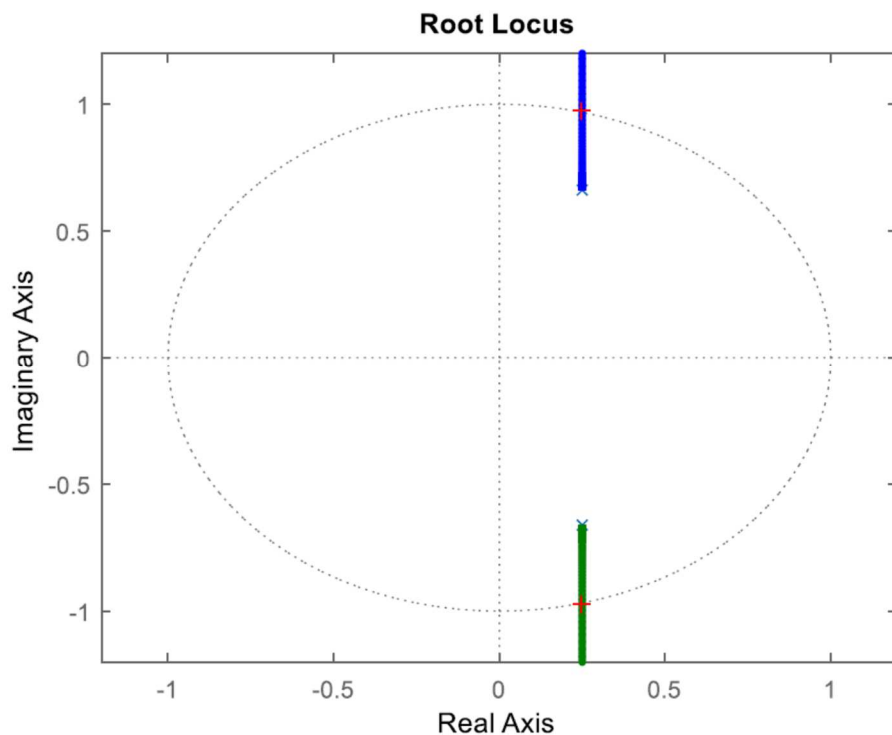
$$1 + \frac{a}{z^2 - 0.5z + 0.5} = 0 \quad (7-72)$$

каде што:

$$\tilde{G}_0(z) = \frac{a}{z^2 - 0.5z + 0.5} \quad (7-73)$$

е новиот отворен систем со помош на кој се определува ГМК за соодветниот затворен систем $\tilde{G}(z)$. Овој затворен систем има исти полови како и оригиналниот затворен систем $G(z)$, па наместо да се испитува условот за гранична стабилност на затворениот систем $G(z)$ во функција од неопределениот параметар a , се испитува условот за гранична стабилност на затворениот систем $\tilde{G}(z)$.

ГМК на затворениот систем $\tilde{G}(z)$ добиено со помош на MATLAB е прикажано на слика 7-20 и оттаму може да се прочита дека критичната вредност на параметарот a за која тој ќе биде гранично стабилен е $a = 0.5$.



Слика 7-20 ГМК на затворениот систем $\tilde{G}(z)$ со гранична вредност на параметарот a □

Имено, критичната вредност на коефициентот на засилување $\tilde{K} = a$ за која набљудуваниот затворен систем $\tilde{G}(z)$ ќе биде гранично стабилен односно ќе се наоѓа на границата на стабилност, е онаа вредност на $\tilde{K} = a$ која одговара на пресечната точка на ГМК со единичната кружница $|z|=1$. Во конкретниот случај, тоа е вредноста $a = 0.5$. Решението може да се добие и со помош на специјалната наредба на MATLAB **rlocfind(g)**, каде што **g** е преносната функција на отворениот систем $\tilde{G}(z)$.

7-12 ВЛИЈАНИЕ НА ДОПОЛНИТЕЛНИТЕ НУЛИ И ПОЛОВИ ВО ОТВОРЕНИОТ СИСТЕМ ВРЗ ПОВЕДЕНИЕТО НА ЗАТВОРЕНИОТ СИСТЕМ

ГМК има значајна улога во квалитативната анализа на поведението на еден затворен систем кога во преносната функција на отворениот систем ќе се додадат дополнителни нули и полови. Ова ќе го илустрираме низ неколку примери.

Пример 7-17. Да се испита влијанието на дополнителната нула во точката $z = z_1$, која се додава во преносната функција на соодветниот отворен систем:

$$G_0(z) = \frac{0.15K(z + 0.7453)}{(z - 1)(z - 0.4119)} \quad (7-74)$$

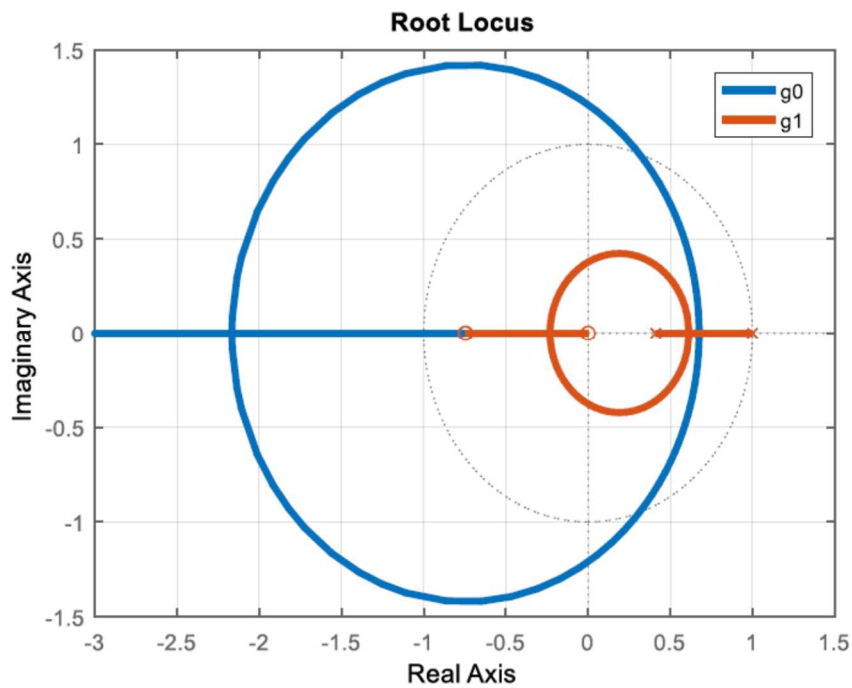
врз поведението на затворениот систем со единична повратна врска.

Решение: Дискусијата ќе биде повеќе теоретска, затоа што функцијата $z - z_1$ не е физички остварлива. За $z_1 = 0$ преносната функција на отворениот систем ќе помине во облик:

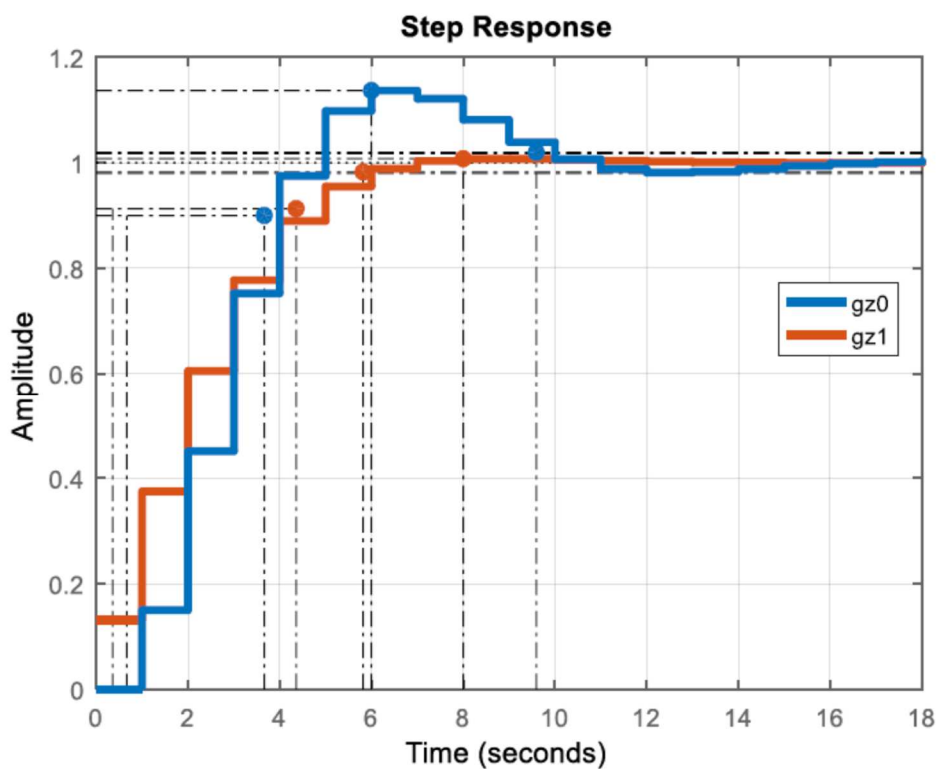
$$G_{01}(z) = \frac{0.15Kz(z + 0.7453)}{(z - 1)(z - 0.4119)} \quad (7-75)$$

и соодветното ГМК на затворениот систем е прикажано на сликата 7-21. Оттука се гледа дека затворениот систем е стабилен за секое $K > 0$, затоа што неговото ГМК не ја сече единичната кружница $|z|=1$, а додавањето нула во точката $z_1 = 0$ кон преносната функција на отворениот систем $G_0(z)$ ја подобрува стабилноста на затворениот систем.

На сликата 7-22 е прикажан отскочниот одсив на затворениот систем за двата случаи. Добиените резултати се прикажани во таблицата 7-1. Додадената нула во преносната функција на отворениот систем, ќе претставува нула и на затворениот систем и таа има влијание врз неговиот отскочен одсив. Така од таблицата 7-1 може да се забележи дека максималниот прескок на отскочниот одсив на затворениот систем со додадената нула во координатниот почеток изнесува 0.78%, наспроти максималниот прескок од околу 13.7% на отскочниот одсив на затворениот систем без додадената нула. Едновременно, додека придушувачето на отскочниот одсив расте и максималниот прескок на одсивот се намалува, со додавањето на дополнителна нула во преносната функција на отворениот систем се зголемуваат времињата на пораст и на максимален прескок на отскочниот одсив на затворениот систем. Отскочниот одсив на затворениот систем од примерот 7-17 со додадена нула има скок во нулата, затоа што неговата преносна функција сега има ист број нули и полови, за разлика од изворниот затворен систем.



Слика 7-21 ГМК на затворениот систем со отворен систем $G_0(z)$ и со отворен систем $G_{01}(z)$



Слика 7-22 Отскочен одсив на затворениот систем со отворен систем $G_0(z)$ и $G_{01}(z)$ □

Таблица 7-1 Временски показатели на отскочниот одсив на затворениот систем без и со дополнителна нула во $z = 0$ во преносната функција на отворениот систем

	$M\%$	T_m	T_p	T_s
$G_0(z)$	13.7%	6	3	9.59
$G_{01}(z)$	0.78%	8	4	5.82

Во заклучок можеме да кажеме дека додавањето нула во преносната функција на соодветниот отворен систем општо земено го зголемува придружувањето на отскочниот одсив на затворениот систем и го намалува неговиот максимален прескок. Ако нулата што се додава се наоѓа во десната полурамнина од комплексната z – рамнина, времето на пораст на отскочниот одсив од затворениот систем ќе се зголемува, додека ако додадената нула се наоѓа во левата полурамнина од комплексната z – рамнина, времето на пораст на отскочниот одсив ќе се намалува. Дополнителната нула во преносната функција на отворениот систем (7-74) не влијае врз поведението на затворениот систем во стационарен режим, затоа што системот (7-74) е од тип 1, односно има астатизам од прв ред. Дополнителната нула треба да биде со модул помал од единица, зошто во спротивен случај ќе го дестабилизира затворениот систем.

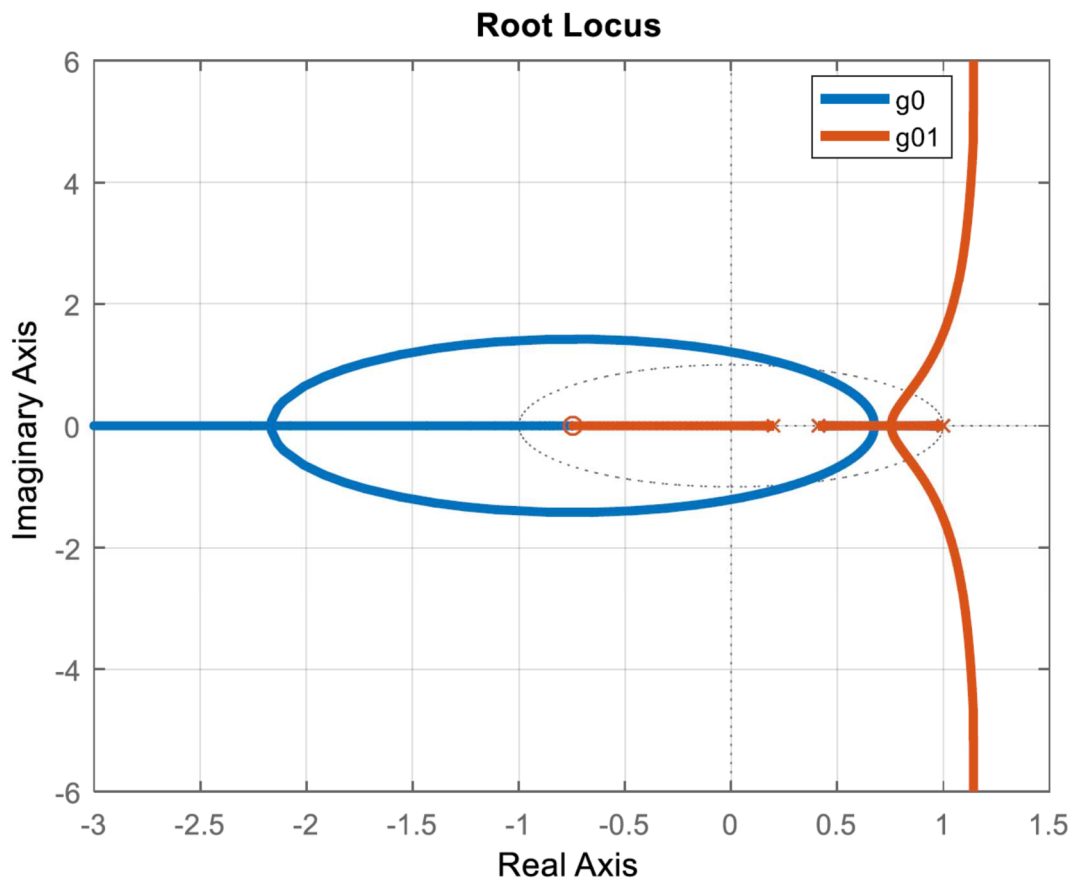
Во продолжение го набљудуваме случајот кога во преносната функција на отворениот систем се додава дополнителен пол во точката $z = p_1$. Општо земено, кога овој пол се наоѓа во десната полурамнина од комплексната z – рамнина, тој доведува до зголемување на максималниот прескок на отскочниот одсив на затворениот систем и умерено зголемување на времето на пораст на отскочниот одсив. Ако полот се поместува во десно, може да доведе до дестабилизација на затворениот систем. Кога додадениот пол лежи на негативниот дел од реалната оска во z – комплексната рамнина, тој може да го намали максималниот прескок во отскочниот одсив, посебно ако се наоѓа блиску до -1 , меѓутоа времето на пораст на отскочниот одсив ќе расте. Исто така, додавањето на дополнителен пол во преносната функција на отворениот систем, прави отскочниот одсив на затворениот систем да доцни, затоа што неговата преносна функција ќе има уште поголем број полови отколку нули во споредба со изворниот затворен систем.

Пример 7-18. Да се испита влијанието на дополнителниот пол во точката $z = p_1 = 0.2$, која се додава во преносната функција на соодветниот отворен систем (7-74) врз поведението на затворениот систем со единична повратна врска.

Решение: За $z = p_1 = 0.2$ преносната функција на отворениот систем ќе помине во облик:

$$G_{01}(z) = \frac{0.15K(z + 0.7453)}{(z - 1)(z - 0.2)(z - 0.4119)} \quad (7-76)$$

и соодветното ГМК на затворениот систем е прикажано на сликата 7-23.

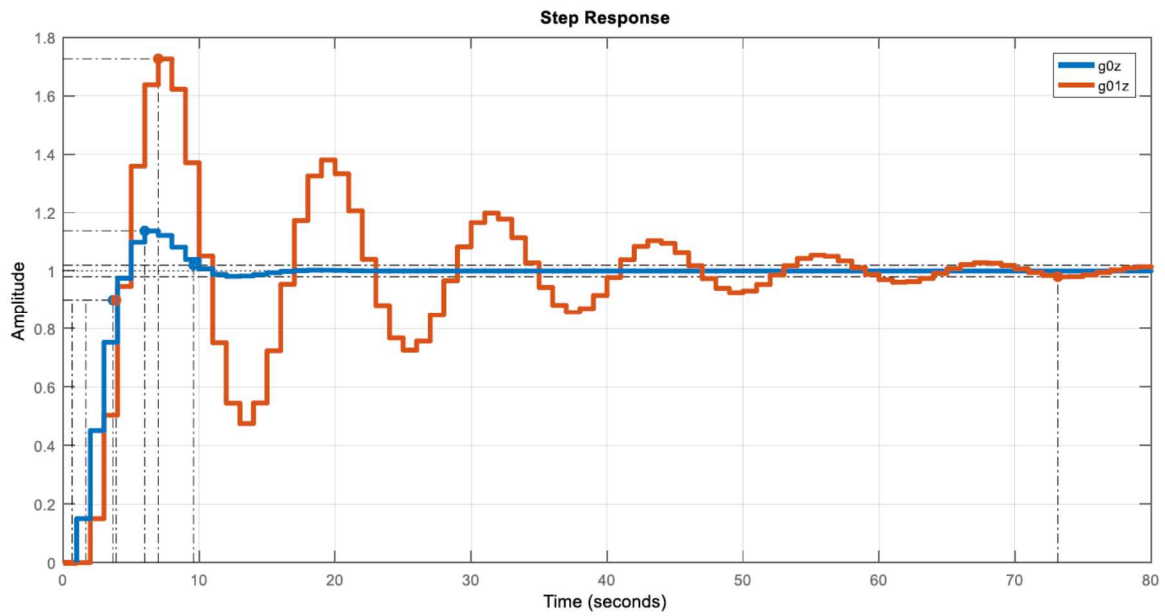


Слика 7-23 ГМК на затворениот систем со отворен систем $G_0(z)$ и со отворен систем $G_{01}(z)$

На сликата 7-24 е прикажан отскочниот одзив на затворениот систем за двата случаи. Добиените резултати се прикажани во таблицата 7-2. Оттука може да се забележи дека максималниот прескок на отскочниот одзив на затворениот систем со додаден пол во 0.2 изнесува 72.6%, наспроти максималниот прескок од околу 13.7% на отскочниот одзив на затворениот систем без додадениот пол. Едновремено, додека придрушувањето на отскочниот одзив се намалува и максималниот прескок на одзивот расте, со додавањето на дополнителниот пол во преносната функција на отворениот систем се зголемуваат и времињата на максимален прескок и смирување на отскочниот одзив на затворениот систем.

Таблица 7-2 Временски показатели на отскочниот одзив на затворениот систем без и со дополнителен пол во $z = p_1 = 0.2$ во преносната функција на отворениот систем (7-74)

	$M\%$	T_m	T_p	T_s
$G_0(z)$	13.7%	6	3	9.59
$G_{01}(z)$	72.6%	7	2.23	73.2



Слика 7-24 Отскочен одзив на затворениот систем со отворен систем $G_0(z)$ и со отворен систем $G_{01}(z)$ □

8 АНАЛИЗА НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

8-1 ОПИС НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

Воведувањето на поимот за преносна функција го поедноставува проблемот на опишување и изучување на линеарните стационарни динамички системи. Имено, за проучување на поведението на кој и да било линеарен стационарен динамички систем доволно е да се познава неговата преносна функција и соодветниот оператор на почетни услови. Меѓутоа, методите на трансформација од временско во фреквенциско и комплексно подрачје се засновани врз принципот на суперпозиција, што практично значи дека концептот на преносна функција е наполно неупотреблив кај линеарните нестационарни и нелинеарните динамички системи. Ова е подеднакво верно и за континуалните и за дискретните системи. Затоа се барани поинакви форми за математичко опишување на динамичките системи.

Кон крајот на 50-тите години од минатиот век била воведена идејата за опишување на динамичките системи од произволен n – ти ред преку системи од n диференцијални или диферентни равенки од прв ред и наскоро таа станала стандарден приод и стандарден математички апарат во нивното изучување. Концептот е наречен **концепт на просторот на состојби** и тој овозможува изучување на динамичките системи преку нивниот модел односно опис со состојбени големини.

Суштината на описот на динамичките системи во просторот на состојби е следната: динамичкиот систем од n – ти ред, наместо со една диференцијална односно диферентна равенка од n – ти ред, се опишува со симултан систем од n диференцијални или диферентни равенки од прв ред. Решенијата на тој систем равенки се нарекуваат **состојбени големини** на набљудуваниот систем и тие се елементи на т.н. **вектор на состојба** на изучуваниот динамички систем.

Значењето на описот на динамичките системи преку векторот на состојба е многу подлабоко од самата погодност во нотацијата. Имено, концептот на состојбени големини, за разлика од другите концепти, дава целосен опис не само на надворешната, туку и на внатрешната динамика на набљудуваниот систем. Покрај тоа, векторот на состојба во секој временски миг во себе ја опфаќа сета „предисторија“ на конкретниот систем.

Постојат и други причини за сè пошироката примена на концептот на просторот на состојби во изучувањето на динамичките системи:

1. Концептот на просторот на состојби подеднакво успешно се применува и кај системите со еден влез и едне излез и кај системите со повеќе влезови и излези;
2. Ваквиот приод може да се примени и на одредени класи нелинеарни и/или нестационарни системи;
3. Некои битни одлики на динамичките системи, какви што се управливоста и набљудливоста, може лесно да се воочат и едноставно да се формулираат кога моделот на набљудуваниот систем е даден во просторот на состојби;
4. Концептот на просторот на состојби, наспроти популарните трансформационски методи, често овозможува синтезата на еден динамички систем целосно да се

изврши во временско подрачје, што има голема важност и значење кога проектираниот систем не е линеарен, па трансформациските методи, на пример, Лапласовата, Фуриеовата или Z – трансформацијата, не може директно да се применат, а и постапките за анализа и синтеза на динамичките системи во временско подрачје даваат подобар увид во самата анализа и синтеза.

Заради овие погоре наведени причини, постапките за анализа и синтеза на динамичките системи засновани врз концептот на просторот на состојби наоѓаат голема примена и во изучувањето на дискретните системи. Всушност, најголемиот број современи методи за анализа и синтеза на дискретните динамички системи се искажани токму преку јазикот на просторот на состојби. Методите на просторот на состојби за анализа и проектирање на дискретните системи се погодни и од гледиште на примена на дигиталните сметачи. Покрај тоа, ваквиот приод овозможува единствена постапка за третирање на дискретните системи со различни процеси на дискретизација.

8-2 ВЕКТОР НА СОСТОЈБА И СОСТОЈБЕНИ ГОЛЕМИНИ КАЈ ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

На сликата 8-1 со еквивалентна блок-шема, на многу симболичен начин, е претставен еден дискретен динамички систем од произволен n – ти ред со p влезови и q излези, опишан во просторот на состојби. Трите вида променливи прикажани на сликата се влезните, излезните и состојбените големини на набљудуваниот систем. Влезните големини y_1, y_2, \dots, y_p претставуваат надворешни сигнали, кои влијаат врз динамиката, односно движењето на системот во просторот на состојби. Излезните променливи x_1, x_2, \dots, x_q се карактеристични големини на системот, кои може директно да се мерат. Конечно, v_1, v_2, \dots, v_n се состојбени големини на системот кои ја карактеризираат неговата внатрешна динамика. Кај дискретните динамички системи, влезните, излезните и состојбените големини се функции од дискретната независно променлива t_k :

$$y_1 = y_1(t_k), y_2 = y_2(t_k), \dots, y_p = y_p(t_k) \quad (8-1)$$

$$x_1 = x_1(t_k), x_2 = x_2(t_k), \dots, x_q = x_q(t_k) \quad (8-2)$$

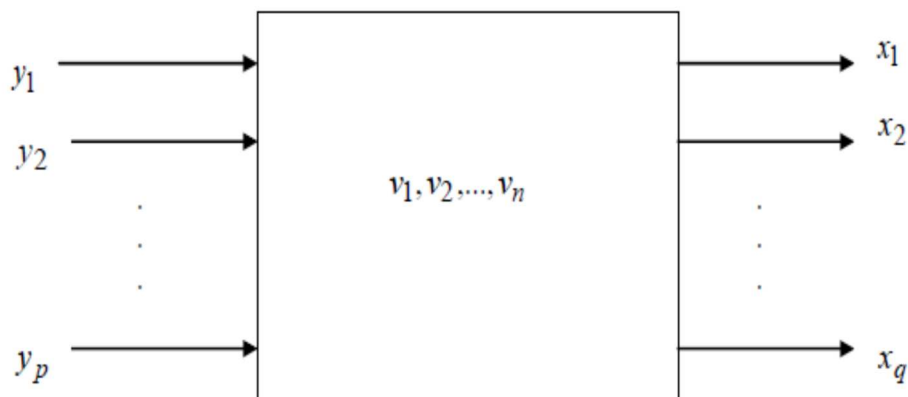
$$v_1 = v_1(t_k), v_2 = v_2(t_k), \dots, v_n = v_n(t_k) \quad (8-3)$$

Заради поголема едноставност во записот, множеството влезни променливи на повеќевеличинскиот дискретен систем (8-1) се претставува со **векторот на влезови**, односно влезниот вектор y :

$$y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_p]^T = [y_1(t_k) \quad y_2(t_k) \quad \dots \quad y_p(t_k)]^T = y(t_k) \quad (8-4)$$

кој е вектор со димензија $p \times 1$. Аналогно, множеството излезни променливи (8-2) се претставува со **векторот на излезите** или излезниот вектор x :

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_q]^T = [x_1(t_k) \quad x_2(t_k) \quad \dots \quad x_q(t_k)]^T = x(t_k) \quad (8-5)$$



Слика 8-1 Симболичен приказ на динамички систем од n – ти ред со p влезови и q излези во просторот на состојби

кој е $q \times 1$ димензиски вектор и, конечно, множеството состојбени променливи (8-3) се претставува со $n \times 1$ димензиски **вектор на состојба** \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T = [v_1(t_k) \quad v_2(t_k) \quad \cdots \quad v_n(t_k)]^T = \mathbf{v}(t_k) \quad (8-6)$$

Изборот на состојбените големини $v_i(t_k)$ ($i=1,2,\dots,n$) за даден дискретен систем не е еднозначна работа. Тоа значи дека векторот на состојба $\mathbf{v}(t_k)$ може да се формира на повеќе начини, односно еден ист дискретен систем во просторот на состојби може да се опише со повеќе модели. Меѓутоа, сите тие модели имаат една заедничка одлика – бројот елементи на векторот на состојба кај сите нив е еднаков, минимален и одговара на редот на набљудуваниот дискретен систем.

Состојбените големини $v_i(t_k)$ ($i=1,2,\dots,n$) зависат од почетната состојба на набљудуваниот дискретен систем зададена преку $\mathbf{v}(t_0)$ и неговиот влез $\mathbf{y}(t_k)$. Притоа, ако е познат векторот на состојба $\mathbf{v}(t_k)$ и влезниот вектор $\mathbf{y}(t_k)$ во дискретниот миг t_k , неговата состојба во мигот t_{k+1} ќе биде наплно определена:

$$v_i(t_{k+1}) = f_i[\mathbf{v}(t_k), \mathbf{y}(t_k), t_k]; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-7)$$

каде што f_i е скаларна функција од векторите $\mathbf{v}(t_k)$ и $\mathbf{y}(t_k)$. Изразот (8-7) во векторски облик станува:

$$\mathbf{v}(t_{k+1}) = \mathbf{f}[\mathbf{v}(t_k), \mathbf{y}(t_k), t_k] \quad (8-8)$$

при што \mathbf{f} е векторска функција од векторите $\mathbf{v}(t_k)$ и $\mathbf{y}(t_k)$:

$$\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T = [f_1(\mathbf{v}, \mathbf{y}, t_k), f_2(\mathbf{v}, \mathbf{y}, t_k), \dots, f_n(\mathbf{v}, \mathbf{y}, t_k)]^T \quad (8-9)$$

со димензија $n \times 1$.

На сличен начин, излезот $x_j(t_k); j = 1, 2, \dots, q$ на набљудуваниот дискретен систем во секој миг $t_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ на единствен начин е определен со векторите $\mathbf{v}(t_k)$ и $\mathbf{y}(t_k)$:

$$x_j(t_k) = g_j[\mathbf{v}(t_k), \mathbf{y}(t_k), t_k]; j = 1, 2, \dots, q \quad (8-10)$$

каде што g_j е скаларна функција од векторите $\mathbf{v}(t_k)$ и $\mathbf{y}(t_k)$. Во векторски облик изразот (8-10) станува:

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{g}[\mathbf{v}(t_k), \mathbf{y}(t_k), t_k] \quad (8-11)$$

каде што \mathbf{g} е вектор со димензија $q \times 1$:

$$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_q]^T = [g_1(\mathbf{v}, \mathbf{y}, t_k), g_2(\mathbf{v}, \mathbf{y}, t_k), \dots, g_q(\mathbf{v}, \mathbf{y}, t_k)]^T \quad (8-12)$$

Во случај на еквиливантна дискретизација, кој е вообичаен, дискретните мигови t_k се еквиливантни, односно настапуваат по ист временски период T :

$$t_{k+1} - t_k = T = \text{const} > 0; k = 0, 1, 2, \dots \quad (8-13)$$

па може да се претстават на следниов начин:

$$t_k = kT; k = 0, 1, 2, \dots \quad (8-14)$$

Тогаш, изразите (8-8) и (8-11) ќе добијат облик:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{f}[\mathbf{v}(kT), \mathbf{y}(kT), kT] \quad (8-15)$$

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{g}[\mathbf{v}(kT), \mathbf{y}(kT), kT] \quad (8-16)$$

или, поедноставно:

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{v}(k), \mathbf{y}(k), k] \quad (8-17)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{v}(k), \mathbf{y}(k), k] \quad (8-18)$$

Притоа, векторската равенка (8-15), односно (8-17) претставува систем n диферентни равенки од прв ред и тоа се равенките на векторот на состојба на набљудуваниот дискретен систем. Заедно со равенките на излезите (8-16), односно (8-18), тие го чинат моделот на еден повеќевеличински дискретен систем во просторот на состојби.

Кај линеарните повеќевеличински дискретни системи, \mathbf{f} и \mathbf{g} се линеарни функции од своите аргументи, па моделот (8-15)-(8-16) односно моделот (8-17)-(8-18), го добива следниов облик:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{A}(kT)\mathbf{v}(kT) + \mathbf{B}(kT)\mathbf{y}(kT)$$

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C}(kT)\mathbf{v}(kT) + \mathbf{D}(kT)\mathbf{y}(kT) \quad (8-19)$$

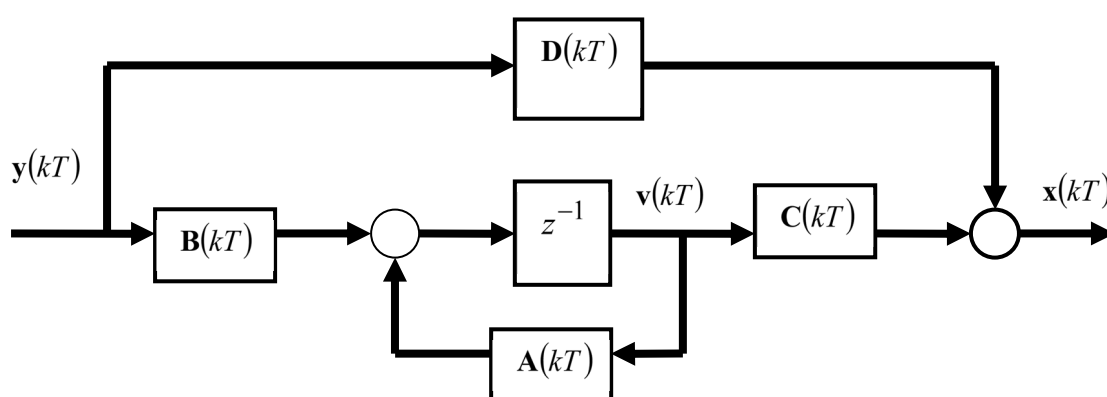
ОДНОСНО:

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{v}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{y}(k)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{v}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{y}(k) \quad (8-20)$$

каде што $\mathbf{A}(kT), \mathbf{B}(kT), \mathbf{C}(kT), \mathbf{D}(kT)$ се $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ и $q \times p$ димензиски матрици, соодветно, чии елементи, во општ случај, се функции од дискретниот аргумент k .

На сликата 8-2 е прикажана структурната блок-шема на еден линеарен дискретен систем опишан со моделот (8-19), односно моделот (8-20).



Слика 8-2 Структурна блок-шема на моделот (8-19)

Аргументот kT во изразите (8-19) се јавува експлицитно само во случаите кога набљудуваниот дискретен систем е нестационарен. Во спротивно, кога се работи за стационарен дискретен систем, што значи дека ниеден од неговите параметри не се менува со времето, kT не се јавува експлицитно во моделот на системот, а матриците $\mathbf{A}(kT), \mathbf{B}(kT), \mathbf{C}(kT), \mathbf{D}(kT)$ имаат константни елементи. Тогаш моделот (8-19) ќе го има следниот изглед:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{y}(kT)$$

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(kT) \quad (8-21)$$

Конечно, ако се работи за линеарен стационарен дискретен динамички систем со еден влез и еден излез, моделот (8-21) ќе гласи:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{b}\mathbf{y}(kT)$$

$$x(kT) = \mathbf{c}\mathbf{v}(kT) + d\mathbf{y}(kT) \quad (8-22)$$

каде што \mathbf{b} е вектор со димензија $n \times 1$, \mathbf{c} е матрица-редица со димензија $1 \times n$ и d е скалар.

8-3 ПОСТАПКИ ЗА ИЗБОР НА СОСТОЈБЕНИ ГОЛЕМИНИ КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Се набљудуваат линеарни стационарни дискретни динамички системи со еден влез и еден излез, чијашто надворешна динамика е опишана со следната диферентна равенка од n – ти ред:

$$\begin{aligned} x(k+n) + a_1x(k+n-1) + \dots + a_{n-1}x(k+1) + a_nx(k) = \\ = b_0y(k+n) + b_1y(k+n-1) + \dots + b_{n-1}y(k+1) + b_ny(k) \end{aligned} \quad (8-23)$$

односно со дискретната преносна функција:

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_{n-1}z + b_n}{z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n} \quad (8-24)$$

каде што $Y(z) = Z\{y(k)\}$ и $X(z) = Z\{x(k)\}$ се Z – слики на влезот и излезот на набљудуваниот дискретен систем.

Секогаш кога полиномите во броителот и именителот од преносната функција (8-24) се со ист степен, најнапред се врши нивно еднократно делење, при што се добива количник од делењето и остаток:

$$G(z) = b_0 + \frac{\tilde{b}_1z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{n-1}z + \tilde{b}_n}{z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n} = b_0 + \tilde{G}(z) \quad (8-25)$$

каде што $\tilde{G}(z)$ е дробно-рационална функција која има ист именител како и преносната функција $G(z)$, но броител со барем за еден понизок степен. Притоа:

$$\tilde{b}_i = b_i - b_0a_i; i = 1, 2, \dots, n \quad (8-26)$$

8-3-1 МОДЕЛ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ

Без какво и да било ограничување на општоста на добиените резултати и изведените заклучоци, во продолжение ќе биде разгледан случајот кога полиномите $a(z)$ и $b(z)$ во преносната функција $G(z)$ се со ист степен, односно кога набљудуваниот дискретен систем е опишан со преносната функција (8-24). Тогаш, со делење на полиномот $b(z)$ во броителот од преносната функција $G(z)$ со полиномот $a(z)$ во нејзиниот именител, преносната функција (8-24) може да се доведе на обликот (8-25). Нека, под претпоставка, z_1, z_2, \dots, z_n , земајќи ја предвид и нивната евентуална кратност, што значи дека некои од броевите z_1, z_2, \dots, z_n може да бидат и еднакви помеѓу себе. Преку своите полови, функцијата $G(z)$ секогаш може да се претстави во следниов факторизиран облик:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \\
&= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)} = \\
&= b_0 + \frac{\tilde{b}_1 z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{n-1} z + \tilde{b}_n}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)} \tag{8-27}
\end{aligned}$$

и потоа да се развие во парцијални дробки врз основа на познатите правила. Моделот со разгранет влез е заснован токму на развојот на дискретната преносна функција (8-27) во парцијални дробки, при што се можни неколку случаи:

1. дискретната преносна функција $G(z)$ има само прости реални полови;
2. дискретната преносна функција $G(z)$ има и кратни реални полови;
3. дискретната преносна функција $G(z)$ има барем еден конјугирано-комплексен пар прости полови, додека останатите полови се реални и прости;
4. дискретната преносна функција $G(z)$ има и повеќекратни комплексни полови.

Во продолжение се разгледани првите три случаи одделно.

8-3-1-1 МОДЕЛ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ ВО СЛУЧАЈ КОГА $G(z)$ ИМА САМО ПРОСТИ РЕАЛНИ ПОЛОВИ

Со развој на функцијата $G(z)$, дадена со (8-27), во парцијални дробки по нејзините полови се добива:

$$G(z) = b_0 + \frac{c_1}{(z - z_1)} + \frac{c_2}{(z - z_2)} + \dots + \frac{c_n}{(z - z_n)} = b_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(z - z_i)} \tag{8-28}$$

каде што:

$$c_i = \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i) \tilde{G}(z)]; \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{8-29}$$

се коефициенти на тој развој. Тогаш равенката на излезот на набљудуваниот систем во просторот на Z – сликите ќе биде:

$$X(z) = b_0 Y(z) + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - z_i} Y(z) \tag{8-30}$$

Состојбените големини $v_1 = v_1(k), v_2 = v_2(k), \dots, v_n = v_n(k)$ на системот (8-28) се одбираат така што за нивните Z – слики да важи:

$$V_i(z) = \frac{1}{z - z_i} Y(z); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-31)$$

Тогаш, со ослободување од именителите на десната страна од (8-31) и и мало преуредување, се добиваат диферентните равенки на векторот на состојбана моделираниот систем претставени во z – комплексното подрачје:

$$zV_i(z) = z_i V_i(z) + Y(z); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-32)$$

На изразот (8-32) во просторот на оригиналите му одговараат равенките:

$$v_i((k+1)T) = z_i v_i(kT) + y(kT); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-33)$$

Равенките (8-33) претставуваат систем од n диферентни равенки од прв ред и тоа се равенките на векторот на состојба на дискретниот систем (8-28). Равенката на излезот се добива со воведување на смените (8-31) во (8-30):

$$X(z) = b_0 Y(z) + \sum_{i=1}^n c_i V_i(z) \quad (8-34)$$

и таа во просторот на оригиналите ќе гласи:

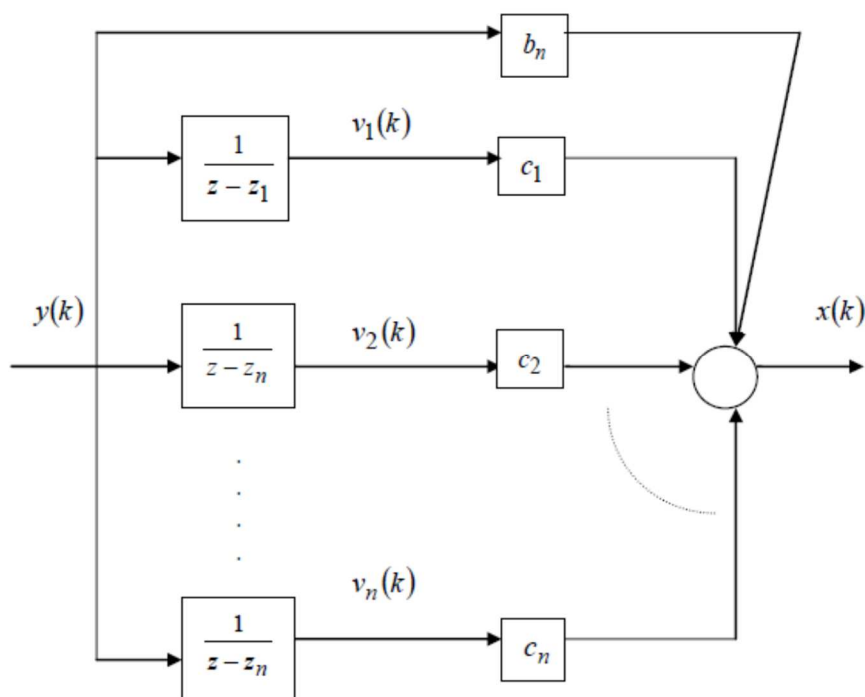
$$x(kT) = b_0 y(kT) + \sum_{i=1}^n c_i v_i(kT) \quad (8-35)$$

Равенките на векторот на состојба (8-33) и равенката на излезот (8-35) од набљудуваниот дискретен систем го чинат моделот во просторот на состојби на дискретниот систем (8-28), кој го има следниот матричен запис:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(kT) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \mathbf{v}(kT) + b_0 y(kT) \quad (8-36)$$

На моделот (8-36) му одговара структурната блок-шема од сликата 8-3. Со оглед на нејзиниот изглед, изложената постапка за избор на состојбените големини на еден линеарен стационарен дискретен систем го добила своето име **модел со разгранет влез**. Од (8-36) може да се забележи дека при опишувањето на дискретните системи со помош на моделот (8-36), матрицата на моделот A е дијагонална матрица, чиишто елементи се половите на набљудуваниот систем. Затоа моделот уште се нарекува **канонична дијагонална форма**. Недостаток на моделот е што претпоставува познавање на половите од моделираниот систем, кои мора да бидат прости и реални.



Слика 8-3 Структурна блок-шема на моделот со разгранет влез за еден дискретен систем

Пример 8-1. Со помош на моделот со разгранет влез (8-36), да се опише во просторот на состојби дискретиот систем со еден влез $y(k)$ и еден излез $x(k)$ со преносна функција:

$$G(z) = \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2 + 5z + 6} \quad (8-37)$$

и да се нацрта соодветната структурна блок-шема за тој модел.

Решение: Со делење на полиномите во броителот и именителот од преносната функција (8-37) се добива:

$$G(z) = 2 - \frac{8z + 11}{z^2 + 5z + 6} = 2 - \tilde{G}(z) \quad (8-38)$$

Дробно-рационалната функција $\tilde{G}(z)$ има прости полови во $z = -2$ и $z = -3$, па нејзиниот развој во парцијални дропки е:

$$\tilde{G}(z) = \frac{8z + 11}{z^2 + 5z + 6} = \frac{-5}{z + 2} + \frac{13}{z + 3} \quad (8-39)$$

Оттука, за Z – сликата $X(z)$ на одзивот на моделираниот дискретен систем се добива:

$$X(z) = G(z)Y(z) = \left[2 - \tilde{G}(z) \right] Y(z) = \left(2 + \frac{5}{z + 2} - \frac{13}{z + 3} \right) Y(z) =$$

$$= 2Y(z) + \frac{5}{z+2}Y(z) - \frac{13}{z+3}Y(z) \quad (8-40)$$

Состојбените големини $v_1(k)$ и $v_2(k)$ се одбираат така што за нивните Z – слики важи:

$$V_1(z) = \frac{1}{z+2}Y(z)$$

$$V_2(z) = \frac{1}{z+3}Y(z) \quad (8-41)$$

од каде што, со мало преуредување, се добиваат следните равенки на векторот на состојба во комплексното подрачје:

$$zV_1(z) = -2V_1(z) + Y(z)$$

$$zV_2(z) = -3V_2(z) + Y(z) \quad (8-42)$$

Со воведување на смените (8-41) во (8-40), за излезот на набљудуваниот систем $X(z)$ се добива:

$$X(z) = 2Y(z) + 5V_1(z) - 13V_2(z) \quad (8-43)$$

Равенките (8-42)-(8-43) го претставуваат бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот дискретен систем прикажан во комплексното подрачје, додека соодветниот модел во просторот на оригиналите ќе гласи:

$$v_1(k+1) = -2v_1(k) + y(k)$$

$$v_2(k+1) = -3v_2(k) + y(k)$$

$$x(k) = 5v_1(k) - 13v_2(k) + 2y(k) \quad (8-44)$$

или, во матричен облик:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(kT) = [5 \quad -13] \mathbf{v}(kT) + 2y(kT) \quad (8-45)$$

Моделот (8-45) може да се добие и директно од (8-36), ако се воочи дека во конкретниот случај $n=2$, $z_1=-2$, $z_2=-3$, $c_1=5$, $c_2=-13$ и $d=2$. Соодветната структурна блок-шема, која одговара на моделот (8-45) е прикажана на сликата 8-4. Елементите на моделот (8-44) се:

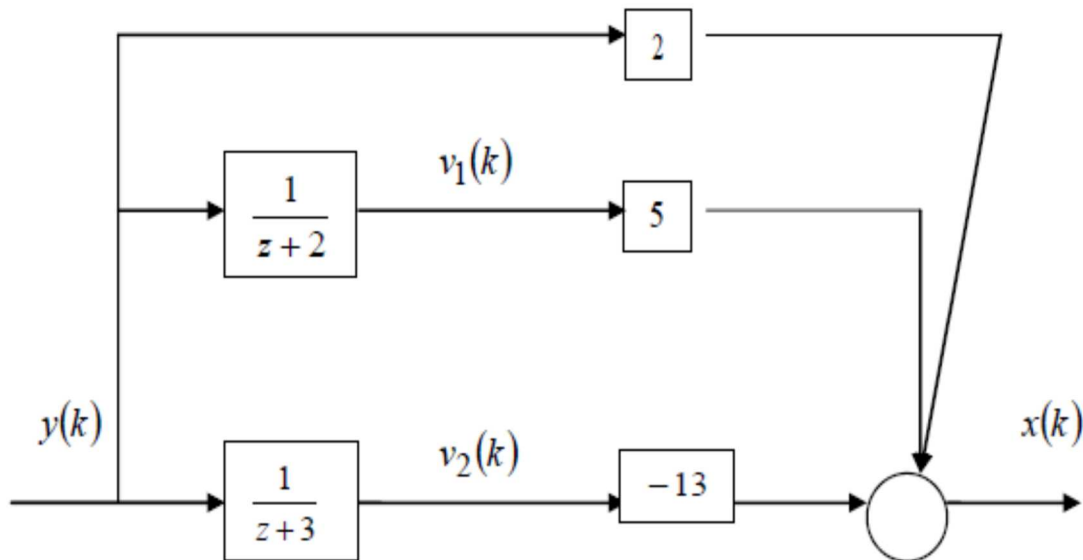
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [5 \quad -13]$$

$$d = 2$$

(8-46)



Слика 8-4 Структурна блок-шема на дискретниот систем од примерот 8-1 □

8-3-1-2 ПРОШИРУВАЊЕ НА МОДЕЛОТ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ ВО СЛУЧАЈОТ КОГА $G(z)$ ИМА И ПОВЕЌЕКРАТЕН РЕАЛЕН ПОЛ

Нека набљудуваната дискретна преносна функција $G(z)$, дадена со (8-27), има, под претпоставка, барем еден кратен реален пол. Општоста на заклучоците изведени во продолжение нема воопшто да се намали ако се претпостави дека $G(z)$ има еден единствен кратен реален пол со кратност p , додека сите нејзини останати полови се реални и прости.

Нека z_n е повеќекратниот реален пол на $G(z)$ со кратност p . Тогаш $G(z)$ преку своите полови $z_1, z_2, \dots, z_{n-p}, z_n$ може да се претстави на следниот начин:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \\ &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-p})(z - z_n)^p} = \end{aligned}$$

$$= b_0 + \frac{\tilde{b}_1 z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{n-1} z + \tilde{b}_n}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-p})(z - z_n)^p} \quad (8-47)$$

Со развој на (8-47) во парцијални дробки се добива:

$$G(z) = b_0 + \frac{c_1}{(z - z_1)} + \frac{c_2}{(z - z_2)} + \dots + \frac{c_{n-p}}{(z - z_{n-p})} +$$

$$+ \frac{c_{n-p+1}}{(z - z_n)} + \frac{c_{n-p+2}}{(z - z_n)^2} + \dots + \frac{c_n}{(z - z_n)^p} \quad (8-48)$$

каде што коефициентите c_{n-p+i} ($i = 1, 2, \dots, p$) се определуваат со помош на вообичаените методи за развој на една дробно-рационална функција во парцијални дробки по нејзините кратни полови:

$$c_{n-p+i} = \frac{1}{(p-i)!} \lim_{z \rightarrow z_n} \left\{ \frac{d^{p-i}}{dz^{p-i}} \left[(z - z_n)^p \tilde{G}(z) \right] \right\}; i = 1, 2, \dots, p \quad (8-49)$$

Следствено, равенката на излезот на набљудуваниот дискретен систем (8-47) во просторот на Z – сликите ќе биде:

$$X(z) = b_0 Y(z) + \frac{c_1}{(z - z_1)} Y(z) + \frac{c_2}{(z - z_2)} Y(z) + \dots + \frac{c_{n-p}}{(z - z_{n-p})} Y(z) +$$

$$+ \frac{c_{n-p+1}}{(z - z_n)} Y(z) + \frac{c_{n-p+2}}{(z - z_n)^2} Y(z) + \dots + \frac{c_n}{(z - z_n)^p} Y(z) =$$

$$= b_0 Y(z) + \sum_{i=1}^{n-p} \frac{c_i}{(z - z_i)} Y(z) + \sum_{i=n-p+1}^n \frac{c_i}{(z - z_n)^{i-n+p}} Y(z) \quad (8-50)$$

Состојбените големини v_1, v_2, \dots, v_n на системот (8-47) се одбираат така што за нив да важи:

$$V_i(z) = \frac{1}{(z - z_i)} Y(z); i = 1, 2, \dots, n - p$$

$$V_{n-p+1}(z) = \frac{1}{(z - z_n)} Y(z)$$

$$V_j(z) = \frac{1}{(z - z_n)} V_{j-1}(z); j = n - p + 2, \dots, n - 1, n \quad (8-51)$$

или, што е еквивалентно:

$$zV_i(z) = z_i V_i(z) + Y(z); i = 1, 2, \dots, n - p$$

$$zV_{n-p+1}(z) = z_n V_{n-p+1}(z) + Y(z)$$

$$zV_j(z) = z_n V_j(z) + V_{j-1}(z); j = n - p + 2, \dots, n - 1, n \quad (8-52)$$

Тогаш врз основа на (8-50) и (8-51), за одзивот $X(z)$ на системот (8-47) во комплексното подрачје се добива:

$$\begin{aligned} X(z) &= b_0 Y(z) + c_1 V_1(z) + c_2 V_2(z) + \dots + c_{n-p} V_{n-p}(z) + \\ &+ c_{n-p+1} V_{n-p+1}(z) + c_{n-p+2} V_{n-p+2}(z) + \dots + c_{n-1} V_{n-1}(z) + c_n V_n(z) = \\ &= b_0 Y(z) + \sum_{i=1}^n c_i V_i(z) \end{aligned} \quad (8-53)$$

На равенките (8-52) и (8-53) во просторот на оригиналите им одговараат следните равенки:

$$v_i((k+1)T) = z_i v_i(kT) + y(kT); i = 1, 2, \dots, n - p$$

$$v_{n-p+1}((k+1)T) = z_n v_{n-p+1}(kT) + y(kT)$$

$$v_j((k+1)T) = z_n v_j(kT) + v_{j-1}(kT); j = n - p + 2, \dots, n - 1, n \quad (8-54)$$

$$x(kT) = b_0 y(kT) + \sum_{i=1}^n c_i v_i(kT) \quad (8-55)$$

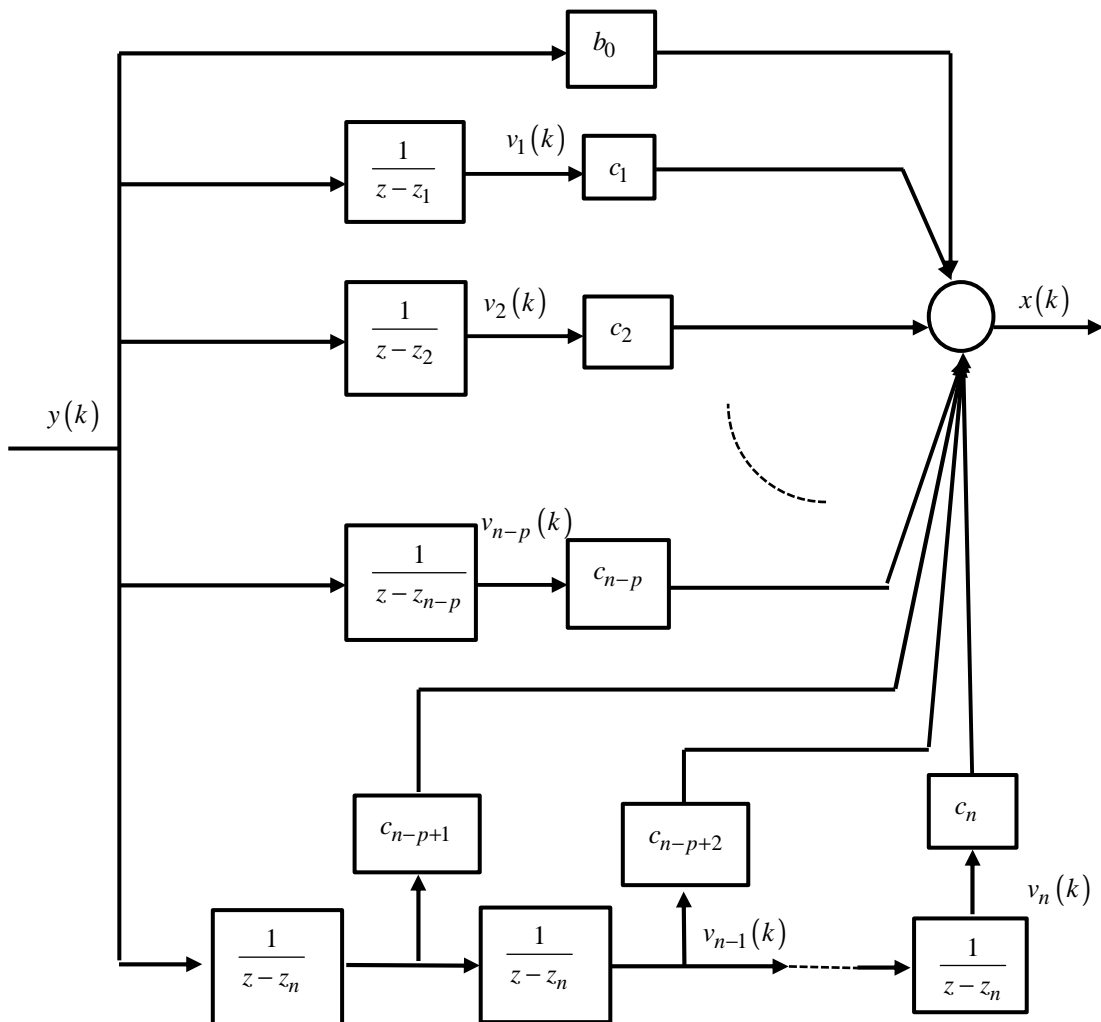
и тие го претставуваат бараниот модел на системот (8-47) со кратен реален пол во просторот на состојби.

Во матричен облик моделот (8-54)-(8-55) ќе гласи:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_{n-p} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & z_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & z_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & z_n \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(kT) \quad (8-56)$$

$$x(kT) = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n] \mathbf{v}(kT) + b_0 y(kT) \quad (8-57)$$

и нему му одговара структурната блок-шема од сликата 8-5.



Слика 8-5 Структурна блок-шема на системот (8-56)-(8-57)

Од изразот (8-56) може да се забележи дека матрицата \mathbf{A} во моделот со разгранет влез кога $G(z)$ има и повеќекратни, а не само прости реални полови, се разликува од дијагоналната матрица \mathbf{A} дефинирана во (8-36) за случајот кога сите полови на преносната функција $G(z)$ се реални и прости. За матрицата \mathbf{A} уште се вели дека е во **Џорданова канонична форма**.

Пример 8-2. Да се состави моделот во просторот на состојби на системот со дискретна преносна функција:

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{z^3 + 4z^2 + 5z + 3}{z^3 + 4z^2 + 5z + 2} = 1 + \frac{1}{(z+1)^2(z+2)} \quad (8-58)$$

и да се нацрта соодветната структурна блок-шема за тој модел.

Решение: Со развој на функцијата $G(z)$ во парцијални дробки се добива:

$$G(z) = 1 - \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)} \quad (8-59)$$

Ако состојбените големини $v_1(kT)$, $v_2(kT)$ и $v_3(kT)$ на системот се одберат така што:

$$V_1(z) = -\frac{1}{(z+1)}Y(z) \quad (8-60)$$

$$V_2(z) = \frac{1}{(z+1)}V_1(z) \quad (8-61)$$

$$V_3(z) = \frac{1}{(z+2)}Y(z) \quad (8-62)$$

тогаш бараниот модел во просторот на состојби на системот од примерот ќе биде:

$$v_1((k+1)T) = -v_1(kT) + y(kT)$$

$$v_2((k+1)T) = v_1(kT) - v_2(kT)$$

$$v_3((k+1)T) = -2v_3(kT) + y(kT)$$

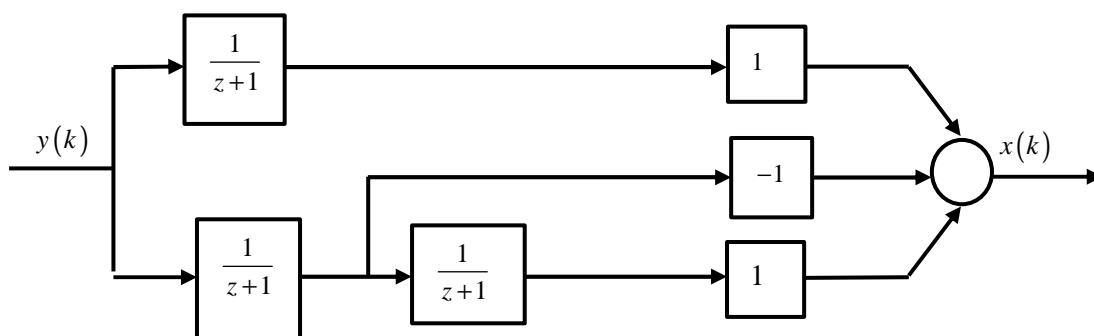
$$x(kT) = -v_1(kT) + v_2(kT) + v_3(kT) + y(kT) \quad (8-63)$$

или, во матричен облик:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(kT) \quad (8-64)$$

$$x(kT) = [-1 \ 1 \ 1] \mathbf{v}(kT) + y(kT) \quad (8-65)$$

Структурната блок-шема која одговара на моделот (8-63) е прикажана на сликата 8-6.



Слика 8-6 Структурната блок-шема за моделот (8-63) □

8-3-1-3 ПРОШИРУВАЊЕ НА МОДЕЛОТ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ ВО СЛУЧАЈОТ КОГА $G(z)$ ИМА ПРОСТИ КОМПЛЕКСНИ ПОЛОВИ

Нека набљудуваниот дискретен систем претставен со дискретната преносна функција (8-27) има пар конјугирано-комплексни полови z_1 и $z_2 = \bar{z}_1$, додека останатите негови полови се прости и реални. Во тој случај неговата преносна функција $G(z)$ може да се претстави во облик:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_3) \dots (z - z_n)} = \\ &= b_0 + \frac{\tilde{b}_1 z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{n-1} z + \tilde{b}_n}{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_3) \dots (z - z_n)} \end{aligned} \quad (8-66)$$

Со развој на (8-66) во парцијални друпки се добива:

$$G(z) = b_0 + \frac{c_1}{(z - z_1)} + \frac{c_2}{(z - z_2)} + \frac{c_3}{(z - z_3)} + \dots + \frac{c_n}{(z - z_n)} \quad (8-67)$$

каде што коефициентите c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) се определуваат според изразот (8-29).

Лесно може да се покаже дека кога z_1 и z_2 се конјугирано-комплексни полови, тогаш и c_1 и c_2 чинат еден конјугирано-комплексен пар, т.е. $c_2 = \bar{c}_1$. Следствено, ако половите z_1 и z_2 ги претставиме преку нивниот реален и имагинарен дел:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha + j\beta \\ z_2 &= \alpha - j\beta = \bar{z}_1 \end{aligned} \quad (8-68)$$

тогаш коефициентите c_1 и c_2 ќе бидат:

$$\begin{aligned} c_1 &= a + jb \\ c_2 &= a - jb = \bar{c}_1 \end{aligned} \quad (8-69)$$

Равенката на излезот на набљудуваниот дискретен систем (8-67) во комплексното подрачје може да се претстави во облик:

$$\begin{aligned} X(z) &= b_0 Y(z) + \left[\frac{a + jb}{(z - \alpha) - j\beta} + \frac{a - jb}{(z - \alpha) + j\beta} \right] Y(z) + \sum_{i=3}^n \frac{c_i}{(z - z_i)} Y(z) = \\ &= b_0 Y(z) + \frac{2a(z - \alpha) - 2b\beta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} Y(z) + \sum_{i=3}^n \frac{c_i}{(z - z_i)} Y(z) \end{aligned} \quad (8-70)$$

каде што ќе ги воведеме следните смени:

$$X_1(z) = b_0 Y(z) \quad (8-71)$$

$$X_2(z) = \frac{2a(z - \alpha) - 2b\beta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} Y(z) \quad (8-72)$$

$$X_3(z) = \sum_{i=3}^n \frac{c_i}{(z - z_i)} Y(z) \quad (8-73)$$

Ако, во продолжение се воведи помошната променлива $w(kT)$, така што за нејзината Z – слика ќе важи:

$$W(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} Y(z) \quad (8-74)$$

за $X_2(z)$ се добива:

$$X_2(z) = [2a(z - \alpha) - 2b\beta] W(z) \quad (8-75)$$

На релациите (8-74) и (8-75) во просторот на оригиналите им одговараат равенките:

$$w((k+2)T) - 2\alpha w((k+1)T) + (\alpha^2 + \beta^2)w(kT) = y(kT)$$

$$x_2(kT) = 2aw((k+1)T) - 2(a\alpha + b\beta)w(kT) \quad (8-76)$$

Тогаш состојбените големини $v_1(kT)$ и $v_2(kT)$ на системот (8-66) се одбираат на следниот начин:

$$\begin{aligned} v_1((k+1)T) &= v_2(kT) \\ v_2((k+1)T) &= y(kT) - (\alpha^2 + \beta^2)v_1(kT) + 2\alpha v_2(kT) \end{aligned} \quad (8-77)$$

а равенката за компонентата $x_2(kT)$ на излезот (8-70) ќе има облик:

$$x_2(kT) = -2(a\alpha + b\beta)v_1(kT) + 2av_2(kT) \quad (8-78)$$

Преостанатите $n - 2$ состојбени големини на системот (8-66) се одбираат како што е покажано во параграфот 8-2.1.1, т.е. така што:

$$V_i(z) = \frac{1}{z - z_i} Y(z); \quad i = 3, 4, \dots, n \quad (8-79)$$

на кој израз во просторот на оригиналите му одговараат равенките:

$$v_i((k+1)T) = z_i v_i(kT) + y(kT); \quad i = 3, 4, \dots, n \quad (8-80)$$

Во тој случај компонентата $x_3(kT)$ на излезот (8-70) ќе има облик:

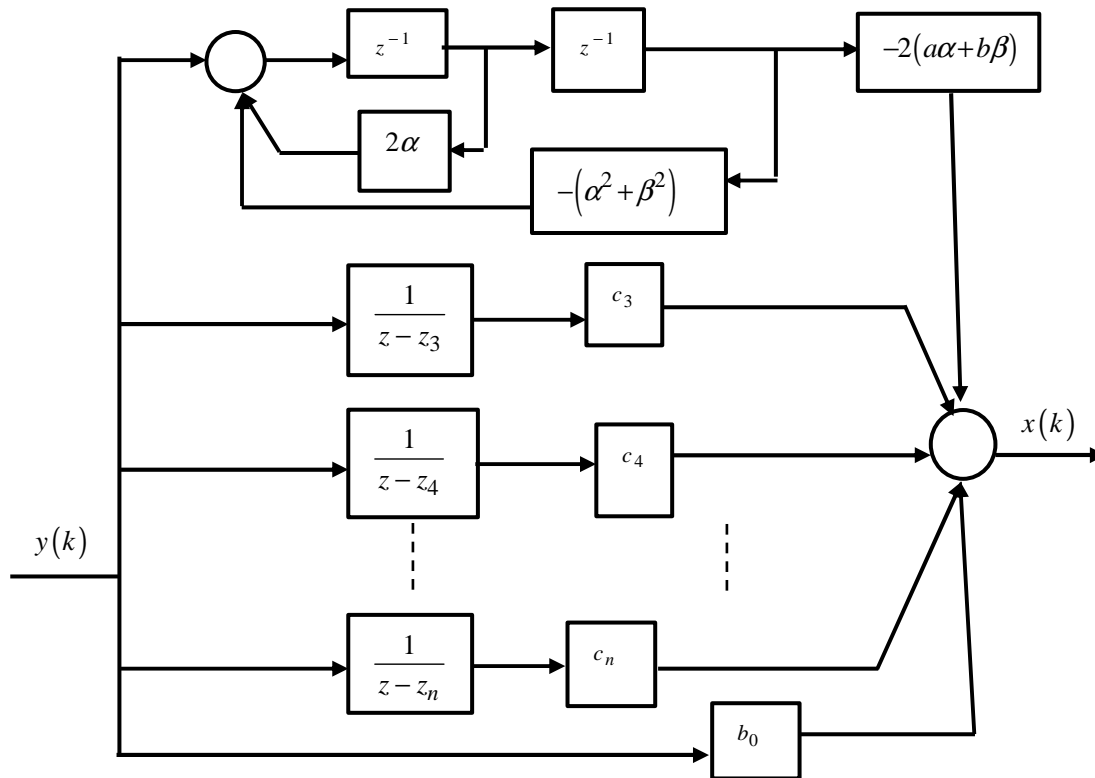
$$x_3(kT) = \sum_{i=3}^n c_i v_i(kT) \quad (8-81)$$

па, моделот на набљудуваниот дискретен систем (8-66) во просторот на состојби ќе гласи:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -(\alpha^2 + \beta^2) & 2\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & z_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(kT) = \begin{bmatrix} -2(a\alpha + b\beta) & 2a & c_3 & c_4 & \dots & c_n \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + b_0 y(kT) \quad (8-82)$$

Структурната блок-шема која одговара на овој модел е прикажана на сликата 8-7.



Слика 8-7 Структурната блок-шема за моделот (8-82)

8-3-2 ИТЕРАТИВНА ПОСТАПКА - СЕРИСКИ МОДЕЛ

И оваа постапка за избор на состојбените големини на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем поаѓа од неговата преносна функција, која во најопшт случај има облик (8-25). Постапката има ограничување во примената, затоа што бара познавање и на половите и на нулите од дробно рационалната функција $\tilde{G}(z)$ во (8-26). Уште повеќе, тие нули и полови мора да бидат реални.

Ако Z – сликата $X(z)$ на одзивот од набљудуваниот дискретен систем (8-25) се претстави во облик:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= G(z)Y(z) = [b_0 + \tilde{G}(z)]Y(z) = \\
 &= b_0Y(z) + \frac{\tilde{b}_1z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{n-1}z + \tilde{b}_n}{z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n}Y(z) = \\
 &= b_0Y(z) + Y(z) \frac{\tilde{b}_1(z - w_1)(z - w_2) \dots (z - w_{n-1})}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)} = \\
 &= b_0Y(z) + \left\{ \left\{ \left\{ Y(z) \frac{\tilde{b}_1}{(z - z_1)} \right\} (z - w_1) \right\} \dots \frac{(z - w_{n-1})}{(z - z_n)} \right\} \quad (8-83)
 \end{aligned}$$

каде што w_1, w_2, \dots, w_{n-1} се нулите, а z_1, z_2, \dots, z_n се половите на дробно рационалната функција $\tilde{G}(z)$, може да се воочи како се одбираат состојбените големини кај серискиот модел:

$$\begin{aligned} V_1(z) &= \frac{\tilde{b}_1}{z - z_1} Y(z) \\ V_2(z) &= \frac{z - w_1}{z - z_2} V_1(z) \\ &\vdots \\ V_n(z) &= \frac{z - w_{n-1}}{z - z_n} V_{n-1}(z) \end{aligned} \tag{8-84}$$

Со преуредување на равенките (8-84) се добива:

$$\begin{aligned} (z - z_1)V_1(z) &= \tilde{b}_1 Y(z) \\ (z - z_2)V_2(z) &= (z - w_1)V_1(z) \\ &\vdots \\ (z - z_n)V_n(z) &= (z - w_{n-1})V_{n-1}(z) \end{aligned} \tag{8-85}$$

односно:

$$\begin{aligned} zV_1(z) &= z_1V_1(z) + \tilde{b}_1 Y(z) \\ zV_2(z) &= z_2V_2(z) + (z - w_1)V_1(z) \\ &\vdots \\ zV_n(z) &= z_nV_n(z) + (z - w_{n-1})V_{n-1}(z) \end{aligned} \tag{8-86}$$

Равенките (8-86) се диферентни равенки од прв ред, претставени во z – комплексното подрачје, чишто решенија се состојбените големини на моделираниот дискретен систем. Следствено, тоа се равенките на векторот на состојба. Тие мора да бидат функции само од тековните вредности на состојбените големини и влезот на набљудуваниот дискретен систем. Затоа членовите $zV_i(z)$; $i = 1, 2, \dots, n - 1$ на десната страна во (8-86) се елиминираат со воведување на секоја претходна равенка од (8-86) во следната. Притоа се добива:

$$zV_1(z) = z_1V_1(z) + \tilde{b}_1 Y(z)$$

$$\begin{aligned}
zV_2(z) &= z_2V_2(z) + (z_1 - w_1)V_1(z) + \tilde{b}_1Y(z) \\
&\vdots \\
zV_n(z) &= z_nV_n(z) + (z_{n-1} - w_{n-1})V_{n-1}(z) + \dots + (z_1 - w_1)V_1(z) + \tilde{b}_1Y(z)
\end{aligned} \tag{8-87}$$

Равенката на излезот на набљудуваниот дискретен систем по воведенире смени е:

$$X(z) = V_n(z) + b_0Y(z) \tag{8-88}$$

На равенките (8-87) во просторот на оригиналите им одговараат равенките:

$$\begin{aligned}
v_1(k+1) &= z_1v_1(k) + \tilde{b}_1y(k) \\
v_2(k+1) &= z_2v_2(k) + (z_1 - w_1)v_1(k) + \tilde{b}_1y(k) \\
&\vdots \\
v_n(k+1) &= z_nv_n(k) + (z_{n-1} - w_{n-1})v_{n-1}(k) + \dots + (z_1 - w_1)v_1(k) + \tilde{b}_1y(k)
\end{aligned} \tag{8-89}$$

кои заедно со равенката на излезот:

$$x(k) = v_n(k) + b_0y(k) \tag{8-90}$$

го чинат серискиот модел на дискретниот систем (8-25). Негови елементи се:

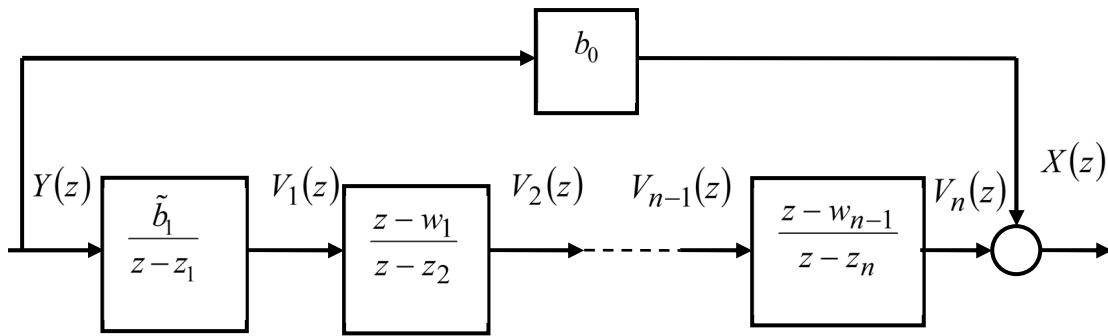
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z_1 - w_1 & z_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ z_1 - w_1 & z_2 - w_2 & z_3 & \dots & 0 & 0 \\ z_1 - w_1 & z_2 - w_2 & z_3 - w_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ z_1 - w_1 & z_2 - w_2 & z_3 - w_3 & \dots & z_{n-1} - w_{n-1} & z_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \tilde{b}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

$$d = b_0 \tag{8-91}$$

Називот на моделот произлегува од изгледот на соодветната структурна блок-шема, која е прикажана на сликата 8-8.



Слика 8-8 Структурна блок-шема на серискиот модел во просторот на состојби на еден дискретен систем

Пример 8-3. Да се состави сериски модел во просторот на состојби на дискретиот систем од примерот 8-1.

Решение: Со оглед на тоа дека полиномите во броителот и именителот од преносната функција на моделираниот дискретен систем (8-37) се со ист степен, најнапред се врши нивно еднократно делење, при што се добива (8-38). Дробнорационалната функција $\tilde{G}(z)$ во (8-38) има два прости реални пола во $z_1 = -2$ и $z_2 = -3$ и една проста реална нула во $w_1 = -11/8$, па може да се запише во следниот факторизиран облик:

$$\tilde{G}(z) = \frac{8z + 11}{(z + 2)(z + 3)} \quad (8-92)$$

Тогаш, за Z -сликата $X(z)$ на одзивот $x(k)$ од набљудуваниот дискретен систем (8-37) се добива:

$$X(z) = 2Y(z) - \frac{8\left(z + \frac{11}{8}\right)}{(z + 2)(z + 3)}Y(z) \quad (8-93)$$

Состојбените големини $v_1(k)$ и $v_2(k)$ се одбираат така што нивните Z -слики се:

$$V_1(z) = \frac{8}{(z + 2)}Y(z)$$

$$V_2(z) = \frac{\left(z + \frac{11}{8}\right)}{(z + 3)}V_1(z) \quad (8-94)$$

Равенките на векторот на состојба на набљудуваниот дискретен систем се добиваат со преуредување на равенките (8-94) и со елиминирање на членовите $zV_i(z)$ ($i = 1, 2$) кои се јавуваат на десната страна во нив:

$$\left. \begin{aligned} (z+2)V_1(z) &= 8Y(z) \\ (z+3)V_2(z) &= \left(z + \frac{11}{8}\right)V_1(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} zV_1(z) &= -2V_1(z) + 8Y(z) \\ zV_2(z) &= -3V_2(z) + \left(z + \frac{11}{8}\right)V_1(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} zV_1(z) &= -2V_1(z) + 8Y(z) \\ zV_2(z) &= -3V_2(z) - \frac{5}{8}V_1(z) + 8Y(z) \end{aligned} \right\} \tag{8-95}$$

Следствено, бараниот модел во просторот на состојби ќе биде:

$$\begin{aligned} zV_1(z) &= -2V_1(z) + 8Y(z) \\ zV_2(z) &= -3V_2(z) - \frac{5}{8}V_1(z) + 8Y(z) \\ X(z) &= 2Y(z) - V_2(z) \end{aligned} \tag{8-96}$$

Односно:

$$\begin{aligned} v_1(k+1) &= -2v_1(k) + 8y(k) \\ v_2(k+1) &= -3v_2(k) - \frac{5}{8}v_1(k) + 8y(k) \\ \hline x(k) &= 2y(k) - v_2(k) \end{aligned} \tag{8-97}$$

Елементите на моделот (8-97) се:

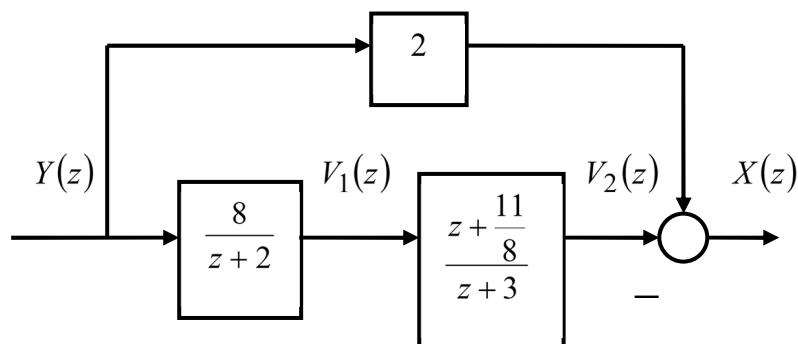
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -\frac{5}{8} & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [0 \quad -1]$$

$$d = 2 \quad (8-98)$$

а неговата структурна блок-шема е прикажана на сликата 8-9.



Слика 8-9 Структурна блок-шема на серискиот модел во просторот на состојби на дискретниот систем (8-97) □

8-3-3 МЕТОД СО ПОМОШНА ПРОМЕНЛИВА

Многу често нулите и половите на преносната функција од набљудуваниот дискретен систем не се познати, ниту може да се определат едноставно. Исто така, тие во никој случај не мора да бидат реални. Тогаш, за избор на состојбените големини може да се примени т.н. **метод со помошна променлива**, кој се состои во следното. Најнапред полиномите во броителот и во именителот од преносната функција (8-24) се делат со најголемиот степен од комплексната променлива z :

$$G(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-n+1} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}} \quad (8-99)$$

Потоа се воведува помошната променлива $w(k)$, така што за нејзината Z – слика да важи:

$$W(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}} Y(z) \quad (8-100)$$

Состојбените големини на набљудуваниот дискретен систем се одбираат преку помошната променлива $w(k)$ односно нејзините дискретни вредности $w(k-1)$, $w(k-2)$, ..., $w(k-n)$:

$$V_1(z) = z^{-1} W(z)$$

$$V_2(z) = z^{-2} W(z)$$

$$\vdots$$

$$V_n(z) = z^{-n} W(z) \quad (8-101)$$

Тогаш, од (8-101) непосредно следува:

$$zV_1(z) = W(z)$$

$$zV_2(z) = z^{-1}W(z) = V_1(z)$$

$$\vdots$$

$$zV_n(z) = z^{-n+1}W(z) = V_{n-1}(z) \quad (8-102)$$

или, во просторот на оригиналите:

$$v_1(k+1) = w(k)$$

$$v_2(k+1) = v_1(k)$$

$$\vdots$$

$$v_n(k+1) = v_{n-1}(k) \quad (8-103)$$

Равенката на излезот:

$$\begin{aligned} X(z) &= G(z)Y(z) = \frac{b_0z^n + b_1z^{n-1} + \dots + b_{n-1}z + b_n}{z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n} Y(z) = \\ &= (b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{n-1}z^{-n+1} + b_nz^{-n})W(z) \end{aligned} \quad (8-104)$$

со воведување на смените (8-101) станува:

$$\begin{aligned} X(z) &= b_0W(z) + b_1z^{-1}W(z) + \dots + b_{n-1}z^{-n+1}W(z) + b_nz^{-n}W(z) = \\ &= b_0W(z) + b_1V_1(z) + \dots + b_{n-1}V_{n-1}(z) + b_nV_n(z) \end{aligned} \quad (8-105)$$

или, во просторот на оригиналите:

$$x(k) = b_0w(k) + b_1v_1(k) + \dots + b_{n-1}v_{n-1}(k) + b_nv_n(k) \quad (8-106)$$

Останува уште да се определи $W(z)$ од равенката (8-100):

$$\begin{aligned}
W(z) + a_1 z^{-1} W(z) + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} W(z) + a_n z^{-n} W(z) &= Y(z) \Rightarrow \\
W(z) &= -a_1 z^{-1} W(z) - \dots - a_{n-1} z^{-n+1} W(z) - a_n z^{-n} W(z) + Y(z) \Rightarrow \\
W(z) &= -a_1 V_1(z) - \dots - a_{n-1} V_{n-1}(z) - a_n V_n + Y(z) \tag{8-107}
\end{aligned}$$

па, моделот (8-103) – (8-106) да се доведе на конечниот облик:

$$\begin{aligned}
v_1(k+1) &= -a_1 v_1(k) - a_2 v_2(k) - \dots - a_n v_n(k) + y(k) \\
v_2(k+1) &= v_1(k) \\
&\vdots \\
v_n(k+1) &= v_{n-1}(k) \\
x(k) &= (b_1 - b_0 a_1) v_1(k) + \dots + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) v_{n-1}(k) + (b_n - b_0 a_n) v_n(k) + b_0 y(k) = \\
&= \tilde{b}_1 v_1(k) + \dots + \tilde{b}_{n-1} v_{n-1}(k) + \tilde{b}_n v_n(k) + b_0 y(k) \tag{8-108}
\end{aligned}$$

Соодветната структурна блок-шема, која одговара на моделот (8-108), е прикажана на сликата 8-10.

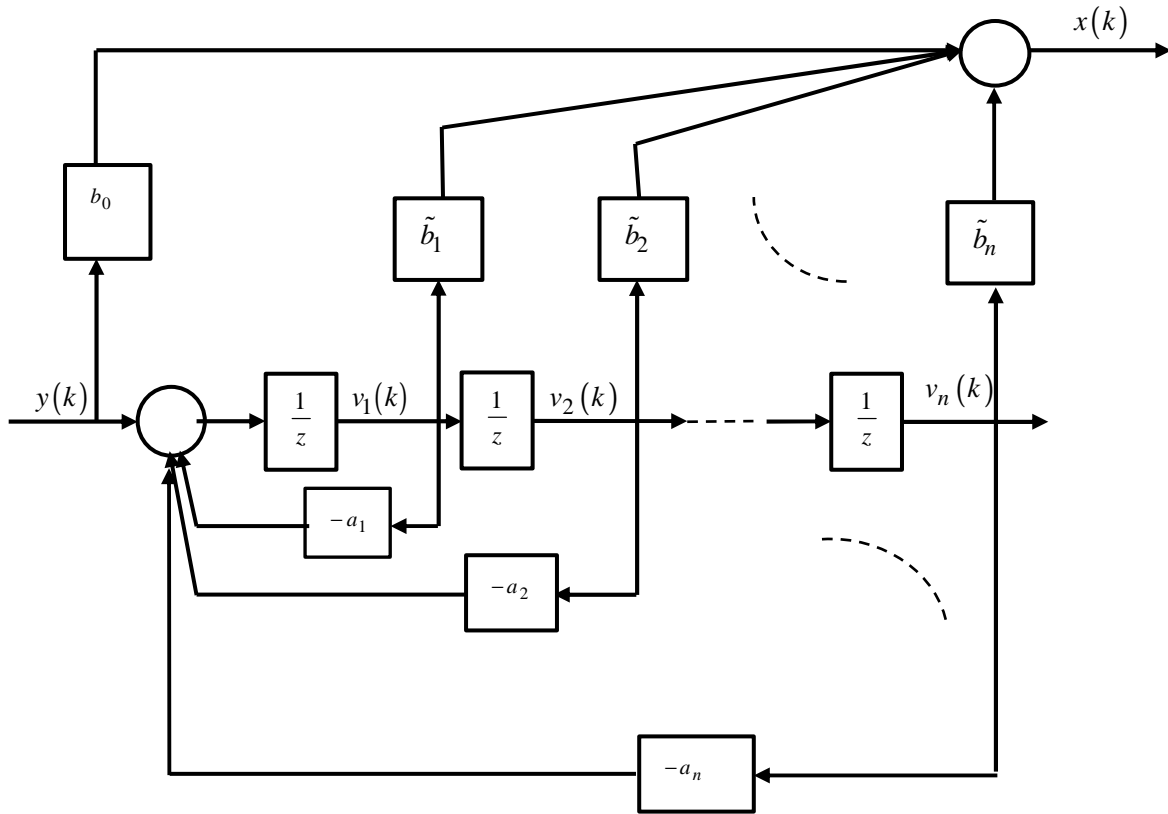
Елементите на моделот (8-108) се:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [\tilde{b}_1 \quad \tilde{b}_2 \quad \dots \quad \tilde{b}_n]$$

$$d = b_0 \tag{8-109}$$



Слика 8-10 Структурна блок-шема на моделот (8-107)

Ако дефинираме нови состојбени големини во обратен редослед:

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_1(k) \\ \hat{v}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{v}_{n-1}(k) \\ \hat{v}_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n(k) \\ v_{n-1}(k) \\ \vdots \\ v_2(k) \\ v_1(k) \end{bmatrix} \quad (8-110)$$

моделот (8-108) ќе помине во облик:

$$\hat{v}_1(k+1) = \hat{v}_2(k)$$

$$\hat{v}_2(k+1) = \hat{v}_3(k)$$

$$\vdots$$

$$\hat{v}_{n-1}(k+1) = \hat{v}_n(k)$$

$$\hat{v}_n(k) = -a_1 \hat{v}_1(k) - a_2 \hat{v}_2(k) - \cdots - a_n \hat{v}_n(k) + y(k)$$

$$\begin{aligned}
 x(k) &= (b_n - b_0 a_n) \hat{v}_1(k) + \dots + (b_2 - b_0 a_2) \hat{v}_{n-1}(k) + (b_1 - b_0 a_1) \hat{v}_n(k) + b_0 y(k) = \\
 &= \tilde{b}_n \hat{v}_1(k) + \dots + \tilde{b}_2 \hat{v}_{n-1}(k) + \tilde{b}_1 \hat{v}_n(k) + b_0 y(k)
 \end{aligned} \tag{8-111}$$

со елементи:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \vdots & -a_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{c}} = [\tilde{b}_n \quad \tilde{b}_{n-1} \quad \dots \quad \tilde{b}_1]$$

$$\hat{d} = d = b_0 \tag{8-112}$$

Пример 8-4. Со помош на методот со помошна променлива, да се опише во просторот на состојби дискретниот систем од примерот 8-1.

Решение: За Z -сликата $W(z)$ на помошната променлива $w(k)$ во конкретниот случај се добива:

$$W(z) = \frac{1}{1 + 5z^{-1} + 6z^{-2}} Y(z) \tag{8-113}$$

од каде што непосредно следува:

$$W(z) = -5z^{-1}W(z) - 6z^{-2}W(z) + Y(z) \tag{8-114}$$

Состојбените големини на моделираниот дискретен систем се одбираат во согласност со (8-101):

$$V_1(z) = z^{-1}W(z)$$

$$V_2(z) = z^{-2}W(z) \tag{8-115}$$

па, со нивно воведување во (8-113) се добива:

$$W(z) = -5V_1(z) + 6V_2(z) + Y(z) \quad (8-116)$$

Бараниот модел на дискретниот систем од примерот 8-1 во просторот на состојби, добиен со воведување помошна променлива, во z -комплексното подрачје ќе гласи:

$$zV_1(z) = W(z) = -5V_1(z) - 6V_2(z) + Y(z)$$

$$zV_2(z) = z^{-1}W(z) = V_1(z)$$

$$X(z) = -8V_1(z) - 11V_2(z) + 2Y(z) \quad (8-117)$$

или, во просторот на оригиналите:

$$v_1(k+1) = -5v_1(k) - 6v_2(k) + y(k)$$

$$v_2(k+1) = v_1(k)$$

$$x(k) = -8v_1(k) - 11v_2(k) + 2y(k) \quad (8-118)$$

Неговите елементи се:

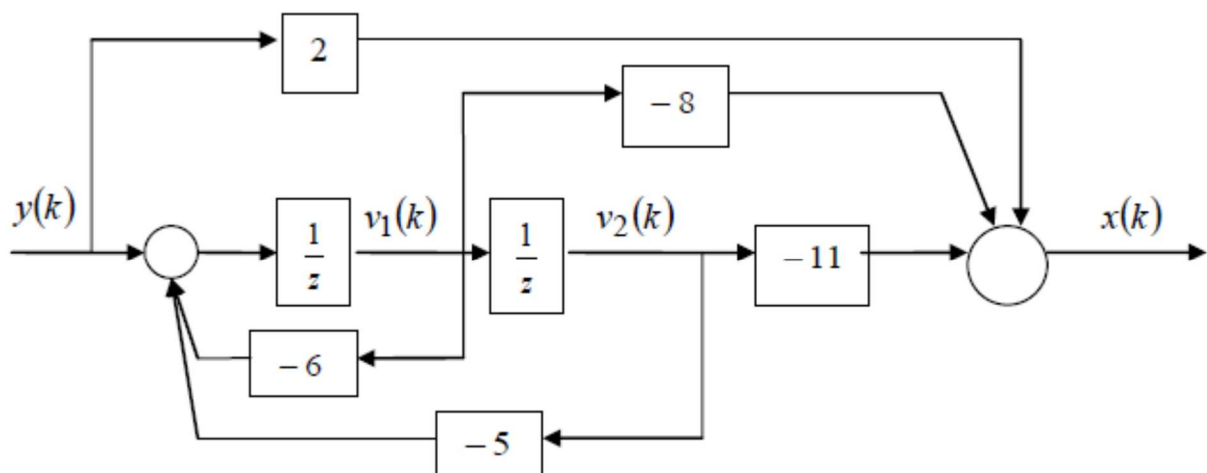
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-119)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-120)$$

$$\mathbf{c} = [-8 \quad -11] \quad (8-121)$$

$$d = 2 \quad (8-122)$$

а соодветната структурна блок-шема е прикажана на сликата 8-11.



Слика 8-11 Структурна блок-шема на моделот (8-118) □

8-3-4 МОДЕЛ СО РАЗГРАНЕТ ВЛЕЗ И ИЗЛЕЗ

Моделот со разгранет влез и излез е уште еден начин за опис на линеарните дискретни системи во просторот на состојби, во случај кога нулите и половите на дискретната преносна функција (8-24) не се познати и/или не може да се определат. Називот го добил по изгледот на соодветната структурна блок-шема.

Нека набљудуваниот дискретен систем е опишан со преносната функција (8-24) кога, под претпоставка, нејзиниот броител и именител имат исти степени, $m=n$. Тогаш, по делењето на броителот и именителот во (8-24) со најголемиот степен на комплексната променлива z , таа ќе добие облик (8-99) од каде непосредно следува:

$$\begin{aligned} & (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}) X(z) = \\ & = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-n+1} + b_n z^{-n}) Y(z) \end{aligned} \quad (8-123)$$

Со групирање на членовите пред истите степени на комплексната променлива z и мало преуредување, равенката (8-123) поминува во облик:

$$\begin{aligned} & X(z) - b_0 Y(z) + z^{-1} [a_1 X(z) - b_1 Y(z)] + z^{-2} [a_2 X(z) - b_2 Y(z)] + \dots + \\ & + z^{-n} [a_n X(z) - b_n Y(z)] = 0 \end{aligned} \quad (8-124)$$

од каде за Z – сликата $X(z)$ на одсивот $x(k)$ на системот (8-24) се добива:

$$\begin{aligned} & X(z) = b_0 Y(z) + z^{-1} [b_1 Y(z) - a_1 X(z)] + \dots + z^{-n} [b_n Y(z) - a_n X(z)] \\ & X(z) = b_0 Y(z) + z^{-1} \{ [b_1 Y(z) - a_1 X(z)] + z^{-1} \{ [b_2 Y(z) - a_2 X(z)] + \dots + \\ & + z^{-1} [b_n Y(z) - a_n X(z)] \} \dots \} \end{aligned} \quad (8-125)$$

Изразот (8-125) овозможува избор на состојбените големини $v_1 = v_1(k)$, $v_2 = v_2(k)$, \dots , $v_n = v_n(k)$ за набљудуваниот дискретен систем на следниот начин:

$$\begin{aligned} & V_1(z) = z^{-1} [b_1 Y(z) - a_1 X(z) + V_2(z)] \\ & V_2(z) = z^{-1} [b_2 Y(z) - a_2 X(z) + V_3(z)] \\ & \quad \vdots \\ & V_{n-1}(z) = z^{-1} [b_{n-1} Y(z) - a_{n-1} X(z) + V_n(z)] \\ & V_n(z) = z^{-1} [b_n Y(z) - a_n X(z)] \end{aligned} \quad (8-126)$$

Тогаш, врз основа на (8-125) и (8-126), равенката на излезот $x(k)$ на дискретниот систем (8-99) во z -комплексното подрачје ќе добие облик:

$$X(z) = b_0 Y(z) + V_1(z) \quad (8-127)$$

Со мало преуредување, (8-126) се трансформираат во следните равенки:

$$zV_1(z) = b_1 Y(z) - a_1 X(z) + V_2(z)$$

$$zV_2(z) = b_2 Y(z) - a_2 X(z) + V_3(z)$$

$$\vdots$$

$$zV_{n-1}(z) = b_{n-1} Y(z) - a_{n-1} X(z) + V_n(z)$$

$$zV_n(z) = b_n Y(z) - a_n X(z) \quad (8-128)$$

од каде што се гледа дека станува збор за равенките на векторот на состојба, прикажани во z -комплексното подрачје.

На равенките (8-128) и (8-127) во просторот на оригиналите им одговараат равенките:

$$v_1(k+1) = -a_1 x(k) + v_2(k) + b_1 y(k)$$

$$v_2(k+1) = -a_2 x(k) + v_3(k) + b_2 y(k)$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1}(k+1) = -a_{n-1} x(k) + v_n(k) + b_{n-1} y(k)$$

$$v_n(k+1) = -a_n x(k) + b_n y(k)$$

$$-----$$

$$x(k) = b_0 y(k) + v_1(k) \quad (8-129)$$

Со елиминирање на променливата $x(k)$ од равенките на векторот на состојба во (8-129), се добива следниот модел во просторот на состојби за набљудуваниот дискретен систем:

$$v_1(k+1) = -a_1 v_1(k) + v_2(k) + (b_1 - b_0 a_1) y(k)$$

$$v_2(k+1) = -a_2 v_1(k) + v_3(k) + (b_2 - b_0 a_2) y(k)$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1}(k+1) = -a_{n-1} v_1(k) + v_n(k) + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) y(k)$$

$$v_n(k+1) = -a_n v_1(k) + (b_n - b_0 a_n) y(k)$$

$$x(k) = b_0 y(k) + v_1(k) \quad (8-130)$$

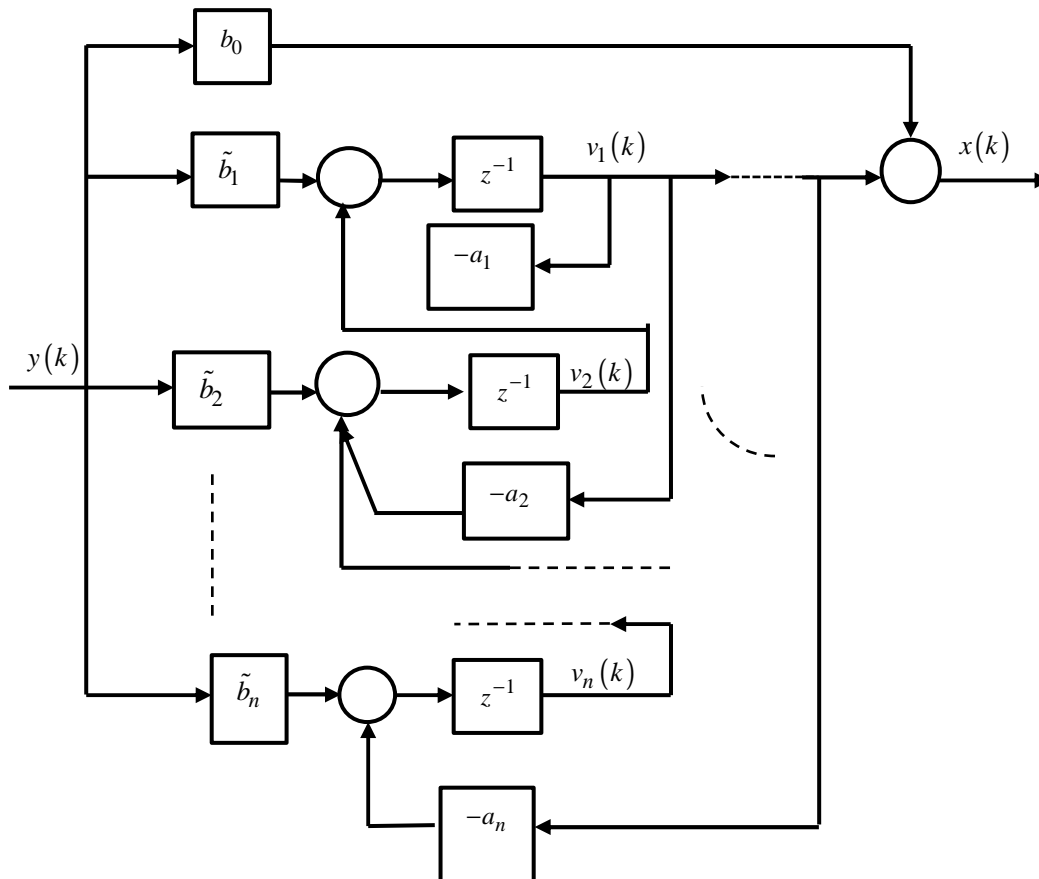
со елементи:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0], \quad d = b_0 \quad (8-131)$$

Нему му одговара структурната блок-шема од сликата 8-12.



Слика 8-12 Структурна блок-шема на моделот (8-130)

Ако се спореди матрицата \mathbf{A} во моделот (8-130) со матрицата \mathbf{A} во моделот (8-108) ќе се дојде до интересен заклучок дека тие се транспонирани една во однос на друга. Уште повеќе, ако елементите на моделот со помошна променлива ги означиме со индекс c , а елементите на моделот со разгранет влез и излез ги означиме со индекс o , тогаш ќе воочиме дека меѓу овие два модели постои следната врска:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_o &= \mathbf{A}_c^T \\ \mathbf{B}_o &= \mathbf{C}_c^T \\ \mathbf{C}_o &= \mathbf{B}_c^T \\ \mathbf{D}_o &= \mathbf{D}_c\end{aligned}\tag{8-132}$$

Ако дефинираме нови состојбени променливи во обратен редослед:

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_1(k) \\ \hat{v}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{v}_{n-1}(k) \\ \hat{v}_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n(k) \\ v_{n-1}(k) \\ \vdots \\ v_2(k) \\ v_1(k) \end{bmatrix}\tag{8-133}$$

моделот (8-130) ќе помине во облик:

$$\begin{aligned}\hat{v}_1(k+1) &= -a_n \hat{v}_n(k) + (b_n - b_0 a_n) y(k) \\ \hat{v}_2(k+1) &= \hat{v}_1(k) - a_{n-1} \hat{v}_n(k) + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}) y(k) \\ &\quad \vdots \\ \hat{v}_{n-1}(k+1) &= \hat{v}_{n-2}(k) - a_2 \hat{v}_n(k) + (b_2 - b_0 a_2) y(k) \\ \hat{v}_n(k+1) &= \hat{v}_{n-1}(k) - a_1 \hat{v}_n(k) + (b_1 - b_0 a_1) y(k) \\ \text{-----} \\ x(k) &= b_0 y(k) + v_n(k)\end{aligned}\tag{8-134}$$

со елементи:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_n \\ \tilde{b}_{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{b}_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{c}} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$

$$\hat{d} = d = b_0 \quad (8-135)$$

Пример 8-5. Со помош на методот со разгранет влез и излез, да се опише во просторот на состојби дискретниот систем од примерот 8-1.

Решение: Ако Z – сликата $X(z)$ на одзивот од набљудуваниот дискретен систем се претстави во облик:

$$\begin{aligned} X(z) &= -5z^{-1}X(z) - 6z^{-2}X(z) + 2Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = \\ &= 2Y(z) + z^{-1}[2Y(z) - 5X(z)] + z^{-2}[Y(z) - 6X(z)] = \\ &= 2Y(z) + z^{-1}\{[2Y(z) - 5X(z)] + z^{-1}[Y(z) - 6X(z)]\} \end{aligned} \quad (8-136)$$

станува очигледно како може да се одберат состојбените големини на моделираниот дискретен систем. Нека:

$$\begin{aligned} V_1(z) &= z^{-1}\{[2Y(z) - 5X(z)] + V_2(z)\} \\ V_2(z) &= z^{-1}\{[Y(z) - 6X(z)]\} \end{aligned} \quad (8-137)$$

Тогаш:

$$X(z) = 2Y(z) + V_1(z) \quad (8-138)$$

па, бараниот модел ќе биде:

$$\begin{aligned} v_1(k+1) &= -5x(k) + v_2(k) + 2y(k) \\ v_2(k+1) &= -6x(k) + y(k) \\ x(k) &= 2y(k) + v_1(k) \end{aligned} \quad (8-139)$$

Дефинитивниот облик на (8-139) се добива по елиминирањето на $x(k)$ од равенките на векторот на состојба:

$$v_1(k+1) = -5v_1(k) + v_2(k) - 8y(k)$$

$$v_2(k+1) = -6v_1(k) - 11y(k)$$

$$x(k) = 2y(k) + v_1(k) \quad (8-140)$$

Неговите елементи се:

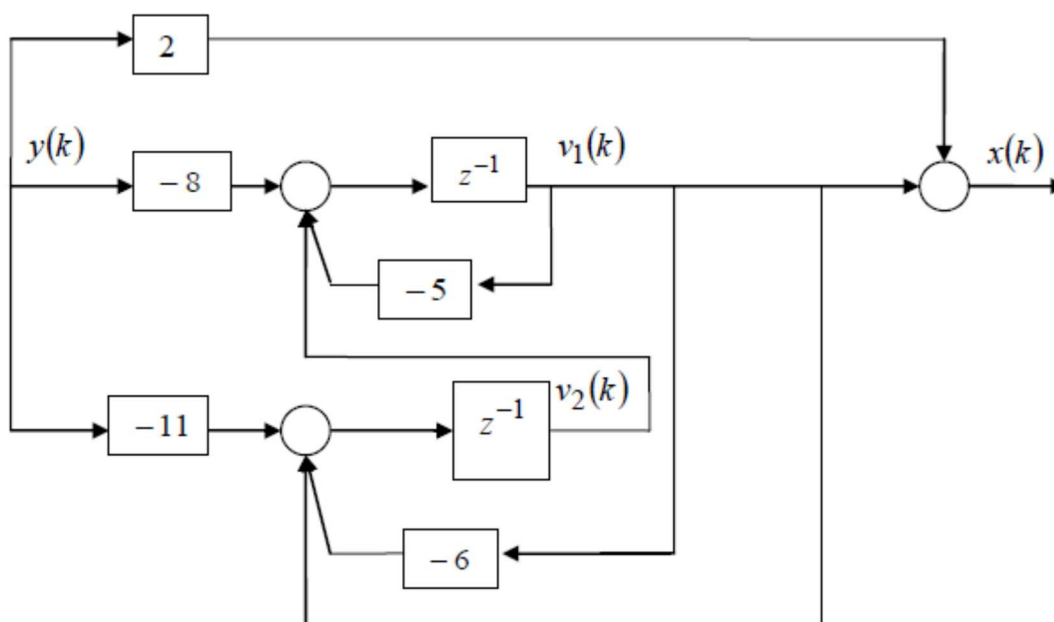
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [1 \quad 0]$$

$$d = 2 \quad (8-141)$$

а соодветната структурна блок-шема е прикажана на сликата 8-13.



Слика 8-13 Структурна блок-шема на моделот (8-140) □

8-3-5 МОДЕЛ СО КОНЕЧНИ РАЗЛИКИ

Диферентната равенка (8-23) со која е опишано поведението на набљудуваната класа дискретни системи е во т.н. законичен облик. Меѓутоа, диферентната равенка на динамичко поведење на еден дискретен систем може да биде запишана и преку конечните разлики на зависно променливите наместо преку самите променливи,

односно нивните вредности во последователните временски мигови $t_k = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Така диферентната равенка:

$$\begin{aligned} \Delta^n x(k) + A_1 \Delta^{n-1} x(k) + A_2 \Delta^{n-2} x(k) + \dots + A_{n-1} \Delta x(k) + A_n x(k) = \\ = B_0 \Delta^n y(k) + B_1 \Delta^{n-1} y(k) + B_2 \Delta^{n-2} y(k) + \dots + B_{n-1} \Delta y(k) + B_n y(k) \end{aligned} \quad (8-142)$$

претставува еквивалентен модел на дискретниот систем опишан со (8-23), при што диферентната равенка (8-23) може да се добие од диферентната равенка (8-142) со помош на смените:

$$\Delta^i x(k) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} x(k+j); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8-143)$$

каде што:

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!} \quad (8-144)$$

се биномни коефициенти.

Во продолжение ќе биде разгледан случајот кога набљудуваниот дискретен систем е опишан со диферентната равенка:

$$\Delta^n x(k) + A_1 \Delta^{n-1} x(k) + A_2 \Delta^{n-2} x(k) + \dots + A_{n-1} \Delta x(k) + A_n x(k) = B_0 y(k) \quad (8-145)$$

Тогаш еден начин за да се одберат состојбените големини на системот (8-142) е преку конечните разлики на излезот $x(k)$, така што:

$$\begin{aligned} v_1(k) &= \Delta^0 x(k) = x(k) \\ v_2(k) &= \Delta x(k) = x(k+1) - x(k) = v_1(k+1) - v_1(k) \\ v_3(k) &= \Delta^2 x(k) = \Delta[\Delta x(k)] = \Delta x(k+1) - \Delta x(k) = v_2(k+1) - v_2(k) \\ &\vdots \\ v_n(k) &= \Delta^{n-1} x(k) = \Delta[\Delta^{n-2} x(k)] = \Delta^{n-2} x(k+1) - \Delta^{n-2} x(k) = v_{n-1}(k+1) - v_{n-1}(k) \end{aligned} \quad (8-146)$$

Следствено, равенките на векторот на состојба на набљудуваниот дискретен систем со моделот (8-145) ќе бидат:

$$v_1(k+1) = v_1(k) + v_2(k)$$

$$v_2(k+1) = v_2(k) + v_3(k)$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1}(k+1) = v_{n-1}(k) + v_n(k) \quad (8-147)$$

Последната равенка на векторот на состојби се одредува со помош на равенката (8-145), од каде непосредно следува:

$$\begin{aligned} \Delta^n x(k) &= -A_1 \Delta^{n-1} x(k) - A_2 \Delta^{n-2} x(k) - \dots - A_{n-1} \Delta x(k) - A_n x(k) + B_0 y(k) \Rightarrow \\ \Delta^n x(k) &= -A_1 v_n(k) - A_2 v_{n-1}(k) - \dots - A_{n-1} v_2(k) - A_n v_1(k) + B_0 y(k) \end{aligned} \quad (8-148)$$

Меѓутоа:

$$\Delta^n x(k) = \Delta [\Delta^{n-1} x(k)] = v_n(k+1) - v_n(k) \quad (8-149)$$

па, врз основа на (8-145) и (8-146) се добива:

$$\begin{aligned} \Delta^n x(k) &= -A_1 v_n(k) - A_2 v_{n-1}(k) - \dots - A_{n-1} v_2(k) - \\ &- A_n v_1(k) + B_0 y(k) = v_n(k+1) - v_n(k) \end{aligned} \quad (8-150)$$

ОДНОСНО:

$$v_n(k+1) = (1 - A_1) v_n(k) - A_2 v_{n-1}(k) - \dots - A_{n-1} v_2(k) - A_n v_1(k) + B_0 y(k) \quad (8-151)$$

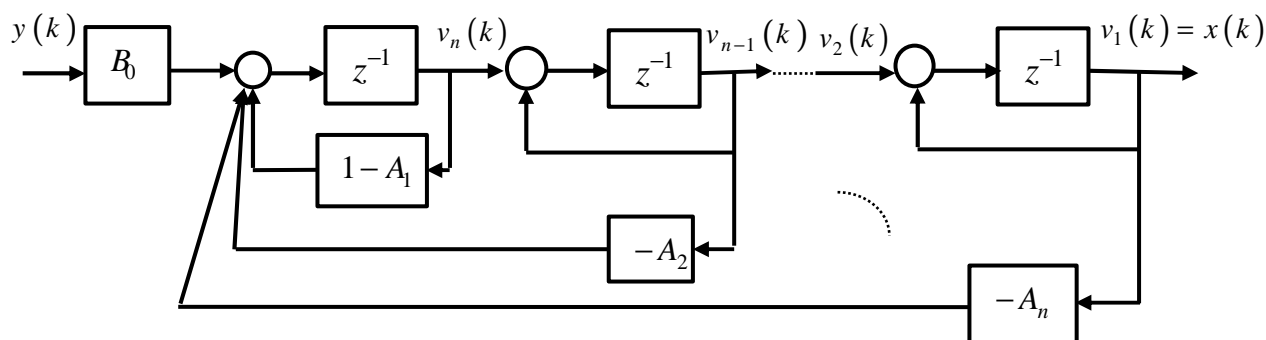
Следствено, равенките на векторот на состојба на набљудуваниот дискретен систем (8-145) во матричен облик се:

$$\mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -A_n & -A_{n-1} & -A_{n-2} & -A_{n-3} & \dots & 1 - A_1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B_0 \end{bmatrix} y(k) \quad (8-152)$$

додека равенката на излезот се добива непосредно од дефиницијата на првата состојбена големина во (8-146) и во матричен облик таа гласи:

$$x(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{v}(k) \quad (8-153)$$

Равенките (8-152) и (8-153) го чинат моделот во просторот на состојби на набљудуваниот дискретен систем (8-145), прикажан во матричен облик. Нему му одговара структурната блок-шема од сликата 8-14. Поради тоа што моделот (8-152)-(8-153) е добиен така што за состојбени големини се одбрани конечните разлики на излезниот сигнал, овој модел е наречен **модел со конечни разлики**.



Слика 8-14 Структурна блок-шема на моделот со конечни разлики (8-151) - (8-152)

Пример 8-6. Дискретниот систем опишан со диферентната равенка:

$$2\Delta^2 x(k) - 4\Delta x(k) = y(k) \quad (8-154)$$

да се претстави во просторот на состојби преку моделот со конечни разлики.

Решение: Нека:

$$v_1(k) = x(k)$$

$$v_2(k) = \Delta x(k) \quad (8-155)$$

Тогаш:

$$\Delta v_1(k) = v_2(k)$$

$$\Delta v_2(k) = 2v_2(k) + 0.5y(k) \quad (8-156)$$

односно:

$$v_1(k+1) = v_1(k) + v_2(k)$$

$$v_2(k+1) = 3v_2(k) + 0.5y(k) \quad (8-157)$$

Оттука, бараниот модел во просторот на состојби на дискретниот систем (8-154) ќе гласи:

$$v_1(k+1) = v_1(k) + v_2(k)$$

$$v_2(k+1) = 3v_2(k) + 0.5y(k)$$

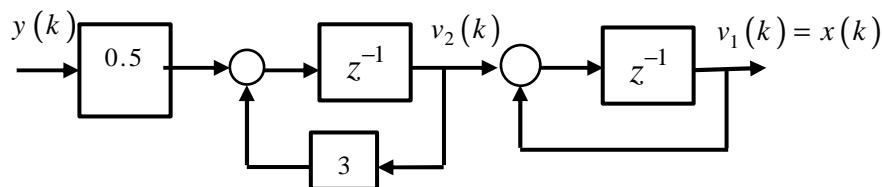
$$x(k) = v_1(k) \quad (8-158)$$

или во матричен облик:

$$\mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} y(k)$$

$$x(k) = [1 \quad 0] \mathbf{v}(k) \quad (8-159)$$

Нему му одговара структурната блок-шема од сликата 8-15.



Слика 8-15 Структурна блок-шема на моделот со конечни разлики (8-158) □

Врз основа на досегашното излагање е јасно дека изборот на состојбени големини за еден систем не е еднозначна работа. Низ примерите 8-1, 8-3, 8-4 и 8-5 покажавме дека за една иста преносна функција $G(z)$ се можни различни модели во просторот на состојби. Меѓутоа, сите тие модели се меѓусебно поврзани со соодветна трансформација на сличност. Нека го набљудуваме моделот во просторот на состојби (8-21) на некој систем и нека дефинираме нов вектор на состојби $\hat{\mathbf{v}}(k)$ за истиот, таков што за него ќе важи:

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}(k) \quad (8-160)$$

каде што \mathbf{P} е несингуларна матрица¹⁾. Со воведување на смената (8-160) во моделот (8-21) се добива:

$$\mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}(k) + \mathbf{B} y(k) \quad (8-161)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C} \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}(k) + \mathbf{D} y(k) \quad (8-162)$$

Ако сега равенката на векторот на состојба (8-161) се помножи од лево со инверзната матрица \mathbf{P}^{-1} , моделот (8-161) – (8-162) ќе помине во облик:

$$\hat{\mathbf{v}}(k+1) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}(k) + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} y(k) \quad (8-163)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C} \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}(k) + \mathbf{D} y(k) \quad (8-164)$$

Со смените $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{P}$ и $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$, моделот (8-163) – (8-164) ќе го добиеме во стандарден облик, со што сме покажале дека моделите (8-21) и (8-163) – (8-

¹⁾ Бидејќи и двата вектори $\mathbf{v}(k)$ и $\hat{\mathbf{v}}(k)$ се со димензија $n \times 1$, тие се поврзани со несингуларна матрица.

164) се еквивалентни помеѓу себе. Бидејќи \mathbf{P} може да биде која и да било несингуларна матрица со димензија $n \times n$, произлегува дека постојат бесконечно многу модели во просторот на состојби за еден систем.

8-4 ДИСКРЕТЕН МОДЕЛ НА КОНТИНУАЛЕН СИСТЕМ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

Движењето на континуалните системи во просторот на состојби може да се набљудува и преку нивните дискретни модели, односно само во дискретните временски мигови t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Ваквиот приод е од посебен интерес од гледиштето на примена на нумеричките методи во анализата на динамичките системи и нивната симулација со помош на дигитални сметачки машини, а е заснован врз дискретноста на елементите на векторот на состојба, влезовите и излезите на набљудуваниот континуален систем. Притоа, периодот на дискретизација T мора да биде доволно мал за добиените резултати со задоволителна точност да го апроксимираат реалното континуално решение. Во општ случај, дискретизацијата треба да се врши така што во текот на еден период на дискретизација T , влезните сигнали значително да не се изменат, односно да може да се сметаат за приближно константни.

Во продолжение е изложена постапка за добивање на диферентните равенки на векторот на состојба за еден линеарен стационаран повеќевеличински континуален систем со концентрирани параметри врз основа на неговите диференцијални равенки. Со нумеричко решавање на тие диферентни равенки, потоа може да се определат вредностите на сите состојбени големини на набљудуваниот континуален систем во дискретните временски мигови t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Набљудуваниот линеарен континуален динамички систем, чијшто дискретен модел во просторот на состојби треба да се определи, е опишан со системот равенки:

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t) \quad (8-165)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{v}(t) + \mathbf{D}\mathbf{y}(t) \quad (8-166)$$

Решението на матричната равенка на векторот на состојба (8-165) е:

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{y}(\tau) d\tau = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{v}(0) + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{y}(\tau) d\tau \quad (8-167)$$

Оттука, за $t = t_k = kT$ и $t = t_{k+1} = kT + T$, непосредно се добива:

$$\mathbf{v}(kT) = e^{\mathbf{A}kT} \mathbf{v}(0) + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{y}(\tau) d\tau \quad (8-168)$$

$$\mathbf{v}(kT + T) = e^{\mathbf{A}(k+1)T} \mathbf{v}(0) + \int_0^{kT+T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{y}(\tau) d\tau \quad (8-169)$$

Ако равенката (8-168) се помножи со e^{At} и потоа се одземе од равенката (8-169), ќе се добие:

$$\mathbf{v}(kT + T) - e^{AT} \mathbf{v}(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{y}(\tau) d\tau \quad (8-170)$$

Со воведување на смената $\tau = kT + T - t$, под претпоставка дека влезовите на набљудуваниот континуален систем се константни во текот на секоја периода на дискретизација T , односно:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(kT), \quad kT \leq t < kT + T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8-171)$$

равенката (8-170) добива облик:

$$\mathbf{v}(kT + T) - e^{AT} \mathbf{v}(kT) = - \int_T^0 e^{At} \mathbf{B}\mathbf{y}(kT) dt = \int_0^T e^{At} \mathbf{B}\mathbf{y}(kT) dt \quad (8-172)$$

односно:

$$\mathbf{v}(kT + T) = e^{AT} \mathbf{v}(kT) + \left[\int_0^T e^{At} \mathbf{B} dt \right] \mathbf{y}(kT) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{v}(kT) + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{y}(kT) \quad (8-173)$$

Матриците $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$, кои се пресметуваат според формулите:

$$\tilde{\mathbf{A}} = e^{AT} \quad (8-174)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \int_0^T e^{At} \mathbf{B} dt \quad (8-175)$$

заедно со матриците $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$ и $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$ го определуваат дискретниот модел во просторот на состојби на системот (8-165) – (8-166):

$$\mathbf{v}(kT + T) = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{v}(kT) + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{y}(kT) \quad (8-176)$$

$$\mathbf{x}(kT) = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{v}(kT) + \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{y}(kT) \quad (8-177)$$

Пример 8-7. Да се определи дискретниот модел во просторот на состојби на континуалниот систем од втор ред, чии што диференцијални равенки на векторот на состојба се:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) \quad (8-178)$$

Решение: Фундаменталната матрица $\mathbf{f}(t)$ на набљудуваниот континуален систем е:

$$\mathbf{f}(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (8-179)$$

па, за $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$, се добива:

$$\tilde{\mathbf{A}} = e^{AT} = \mathbf{f}(T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \quad (8-180)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \int_0^T e^{At} \mathbf{B} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{T}{2} - \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) & T \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) & 0 \end{bmatrix} \quad (8-181)$$

Оттука, диферентните равенки на векторот на состојба за набљудуваниот континуален систем ќе бидат:

$$\mathbf{v}(kT + T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} \frac{T}{2} - \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) & T \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(kT) \quad (8-182)$$

За $T = 1s$, на пример, равенките (8-182) стануваат:

$$\mathbf{v}(kT + T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.432 \\ 0 & 0.135 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 0.284 & 1 \\ 0.432 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}(kT) \quad (8-183)$$

8-5 УПРАВЛИВОСТ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Својството на управливост кај линеарните дискретни и континуални системи се дефинира на сличен начин. Разликата се состои во тоа што математичките услови за управливост кај дискретните системи се дефинираат врз основа на диферентните равенки, а кај континуалните системи врз основа на диференцијалните равенки на векторот на состојба. За еден линеарен стационарен дискретен систем од n -ти ред со следниот модел во просторот на состојби:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{y}(kT), \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(kT) \quad (8-184)$$

каде што $\mathbf{y}(kT)$ е вектор на влезовите со димензија $l \times 1$, $\mathbf{x}(kT)$ е вектор на излезите со димензија $m \times 1$, $\mathbf{v}(kT)$ е вектор на состојбите со димензија $n \times 1$, \mathbf{v}_0 е вектор на почетната состојба, \mathbf{A} е квадратна матрица на состојбите со димензија $n \times n$, \mathbf{B} е матрица на влезовите со димензија $n \times l$, \mathbf{C} е матрица на излезите со димензија $m \times n$

и \mathbf{D} е влезно-излезна матрица со димензија $m \times l$, велиме дека е управлив доколку постои влез $\mathbf{y}(kT)$ кој ќе го преведе системот од дадена почетна состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ во дадена крајна состојба $\mathbf{v} = \mathbf{v}(NT)$ за конечно време од N периоди на дискретизација T , каде што N е позитивен цел број. Тоа значи дека мора да постои влезната низа $\{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T), \mathbf{y}(2T), \dots, \mathbf{y}((N-1)T)\}$, која ќе ја оствари оваа задача. Вака дефинираната управливост е **делумна управливост**, затоа што се однесува на преведување на системот од некоја почетна состојба во некоја крајна состојба. Во теоријата на автоматско управување, ние сме заинтересирани за **целосна управливост** на еден систем, која се дефинира на следниот начин: за набљудуваниот линеарен стационарен дискретен систем (8-184) велиме дека е целосно управлив доколку може да се најде влез $\mathbf{y}(kT)$ кој ќе го преведе системот од произволна (која и да било) почетна состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ во произволна (која и да било) крајна состојба $\mathbf{v} = \mathbf{v}(NT)$ за конечно време од N периоди на дискретизација T ²⁾.

Математичкиот услов за целосна управливост на еден систем ќе го изведеме на следниот начин. Без ограничување на општоста на заклучоците што следат, може да се усвои дека крајната состојба е рамнотежната нулева состојба $\mathbf{v} = \mathbf{v}(NT) = \mathbf{0}$. Тогаш, решението на диферентните равенки на векторот на состојби ќе биде:

$$\mathbf{v}(kT) = \mathbf{0} = \mathbf{A}^k \mathbf{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{y}(iT) \quad (8-185)$$

од каде што се добива:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{v}(0) = - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{y}(iT)$$

$$\mathbf{v}(0) = - \mathbf{A}^{-k} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{y}(iT)$$

$$\mathbf{v}(0) = - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{-i-1} \mathbf{B} \mathbf{y}(iT) \quad (8-186)$$

Последниот израз може да се запише во следниот матричен облик:

$$\begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ \vdots \\ v_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{-N} \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(T) \\ \vdots \\ \mathbf{y}((N-1)T) \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(T) \\ \vdots \\ \mathbf{y}((N-1)T) \end{bmatrix} \quad (8-187)$$

²⁾ Условот да постои управување $\mathbf{y}(kT)$ кое ќе го „преведе“ системот од една во друга состојба е неопходен, зашто без соодветна возбуда не може да се оствари саканото движење на набудуваниот систем во просторот на состојби. Исто така и условот за движење во конечен број периоди на дискретизација е неопходен, зашто ако е потребно неограничено време да се оствари саканото движење на системот во просторот на состојби, всушност немаме управување.

кој претставува систем од n алгебарски равенки со $N \cdot l$ непознати: $y_1(0), y_1(T), \dots, y_1((N-1)T); y_2(0), y_2(T), \dots, y_2((N-1)T); \dots; y_l(0), y_l(T), \dots, y_l((N-1)T)$.

Очигледно за $N < n$, каде што n е редот на системот, решението на системот равенки (8-187) не постои, бидејќи должината на управувачката низа е помала од бројот на равенките. За позната почетна состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$, равенката (8-187) ќе има единствено

решение по векторите $[\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(T) \ \dots \ \mathbf{y}((N-1)T)]^T$ доколку $N = n$ и доколку матрицата \mathbf{U} , која има димензија $n \times nl$, има n линеарно независни колони, што е еквивалентно на условот нејзиниот ранг да биде еднаков на редот на системот n :

$$\text{rang } \mathbf{U} = n \quad (8-188)$$

Оттука, еден повеќевеличински линеарен стационарен дискретен систем ќе биде целосно управлив доколку постои множеството влезни вредности $[\mathbf{y}_1(iT) \ \mathbf{y}_2(iT) \ \dots \ \mathbf{y}_l(iT)]^T$ во миговите на дискретизација $0, T, 2T, \dots, (n-1)T$ кои набљудуваниот систем ќе го преведат од произволна почетна состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ во произволна крајна состојба $\mathbf{v} = \mathbf{v}(nT)$ за конечно време од n периоди на дискретизација T ³⁾, каде што n е еднакво со редот на системот. Тоа значи дека за целосно набљудлив систем равенката (8-187) ќе има решение, што ќе биде исполнето доколку матрицата \mathbf{U} има барем n линеарно независни колони. Матрицата \mathbf{U} се нарекува **матрица на управливост** на набљудуваниот дискретен систем и барањето за n линеарно независни колони е еквивалентно со барањето нејзиниот ранг да биде еднаков на n :

$$\text{rang } \mathbf{U} = \text{rang} [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{-n}\mathbf{B}] = n \quad (8-189)$$

Математичкиот услов за целосна управливост може да се искаже и на следните рамноправни начини:

$$\text{rang } \mathbf{U}^* = \text{rang} [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (8-190)$$

Односно:

$$\text{rang } \mathbf{U}^{**} = \text{rang} [\mathbf{B} \ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{-(n-1)}\mathbf{B}] = n \quad (8-191)$$

³⁾ Кога условот за целосна управливост на еден дискретен систем е исполнет, тој дискретен систем може да се преведе од која и да било почетна состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ во саканата крајна состојба $\mathbf{v} = \mathbf{v}(nT)$ во текот на најмногу n периоди на дискретизација T . Меѓутоа, ова важи само во случаите кога управувачката променлива $\mathbf{y}(kT)$ може да поприма произволно големи вредности. Ако $\mathbf{y}(kT)$ е ограничена по амплитуди, преведувањето на управливиот дискретен систем од една во друга состојба може да трае и подолго од n периоди на дискретизација T .

затоа што матриците \mathbf{U} , \mathbf{U}^* и \mathbf{U}^{**} се еквивалентни. Доколку набљудуваниот дискретен систем има само еден влез и еден излез, неговата матрица на управливост ќе има еден од следните облици:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^{-2}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-n}\mathbf{b}] \quad (8-192)$$

$$\mathbf{U}^* = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (8-193)$$

или:

$$\mathbf{U}^{**} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-n+1}\mathbf{b}] \quad (8-194)$$

каде што \mathbf{b} е вектор со димензија $n \times 1$. Тогаш условот за целосна управливост на набљудуваниот систем се сведува на условот за несингуларност на неговата матрица на управливост, што значи нејзината детерминанта мора да биде различна од нула:

$$\det \mathbf{U} = |\mathbf{U}| \neq 0 \quad (8-195)$$

$$\det \mathbf{U}^* = |\mathbf{U}^*| \neq 0 \quad (8-196)$$

или:

$$\det \mathbf{U}^{**} = |\mathbf{U}^{**}| \neq 0 \quad (8-197)$$

Во случајот на управлив систем со еден влез и еден излез, решението на равенката:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(T) \\ \vdots \\ y((n-1)T) \end{bmatrix} = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^{-2}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-n}\mathbf{b}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ \vdots \\ v_n(0) \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ \vdots \\ v_n(0) \end{bmatrix} \quad (8-198)$$

е еднозначно. Меѓутоа, во случајот на повеќевеличински систем, решението на равенката:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(T) \\ \vdots \\ \mathbf{y}((N-1)T) \end{bmatrix} = [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{-2}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-n}\mathbf{B}]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ \vdots \\ v_n(0) \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ \vdots \\ v_n(0) \end{bmatrix} \quad (8-199)$$

не е еднозначно и зависи од тоа кои колони на матрицата на управливост го сочинуваат множеството n линеарно независни вектори. Овие линеарно независни колони дефинираат едно множество од n вредности на влезните променливи $[\mathbf{y}_1(kT) \quad \mathbf{y}_2(kT) \quad \dots \quad \mathbf{y}_l(kT)]^T$ во миговите $0, T, 2T, \dots, (n-1)T$. Притоа останатите $nl - n$ вредности на влезните променливи се нулеви. За друго множество од n линеарно

независни колони на матрицата на управливост ќе се добие друго множество од n вредности на влезните променливи $[y_1(kT) \ y_2(kT) \ \dots \ y_l(kT)]^T$ во миговите $0, T, 2T, \dots, (n-1)T$.

Треба да се истакне дека моделот во просторот на состојби на еден дискретен систем добиен со воведување помошна променлива претставува **управлива канонична форма**. Тоа значи дека систем претставен во овој модел во просторот на состојби ќе биде сигурно целосно управлив.

Кога системот е претставен во просторот на состојби со модел добиен со постапката на разгранет влез, што значи дека неговата матрица на состојби A е дијагонална матрица, при што нејзините елементи се сите различни помеѓу себе, тој ќе биде целосно управлив доколку сите елементи на векторот b се различни од нула.

Доколку набљудуваниот дискретен систем има и кратни полови, тогаш неговиот модел во Џорданова канонична форма ќе биде целосно управлив доколку секој Џорданов блок одговара на само еден различен пол и доколку елементите на B кои одговараат на последната редица од соодветниот Џорданов блок не се сите нулеви. За илустрација ќе го набљудуваме следниот пример.

Пример 8-8. Да се испита целосната управливост на дискретните системи опишани во просторот на состојби со следните модели:

$$\begin{bmatrix} v_1((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} y(kT) \quad (8-200)$$

и:

$$\begin{bmatrix} v_1((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \\ v_2(kT) \\ v_2(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} y(kT) \quad (8-201)$$

Решение: Сите елементи на векторот b во моделот (8-200) се различни од нула. Исто така, елементите на матрицата B кои одговараат на последните редици од двата Џорданови блокови во матрицата A на моделот (8-201) се различни од нула. Следствено, набљудуваните дискретни системи се целосно управливи. \square

Пример 8-9. Да се испита целосната управливост на дискретните системи опишани во просторот на состојби со следните модели:

$$\begin{bmatrix} v_1((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} y(kT) \quad (8-202)$$

и:

$$\begin{bmatrix} v_1((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \\ v_2(kT) \\ v_2(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(kT) \quad (8-203)$$

Решение: Очигледно, вториот елемент на векторот \mathbf{b} во моделот (8-202) е еднаков на нула. Исто така, елементите на матрицата \mathbf{B} кои одговараат на последните редици од двата Џорданови блокови во матрицата \mathbf{A} на моделот (8-203) се еднакви на нула. Следствено, системите опишани со моделите (8-202) и (8-203) во просторот на состојби не се целосно управливи. \square

Условот за целосна управливост на еден дискретен систем може да се искаже и во z -комплексното подрачје. Тој може да се искаже на следниот начин: потребен и доволен услов набљудуваниот дискретен систем да биде целосно управлив е да нема кратење помеѓу исти нули и полови во дискретната преносна функција на системот, односно матрицата на преносни функции на повеќевеличинскиот систем.

Пример 8-10. Да се провери целосната управливост на дискретниот систем, опишан со следната преносна функција:

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{z+0.2}{(z+0.2)(z+0.8)} \quad (8-204)$$

Решение: Еден модел на набљудуваниот дискретен систем во просторот на состојби е следниот:

$$\begin{bmatrix} v_1((k+1)T) \\ v_2((k+1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix} y(kT) \quad (8-205)$$

Неговата матрица на управливост е дадена со изразот:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 0.64 \end{bmatrix} \quad (8-206)$$

и лесно се утврдува дека таа е сингуларна:

$$\det \mathbf{U} = \begin{vmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 0.64 \end{vmatrix} = 0 \quad (8-207)$$

Следствено, набљудуваниот дискретен систем не е целосно управлив. \square

Кога еден систем опишан со својот модел во просторот на состојби го задоволува условот за целосна управливост по состојбите, вообичаено се вели дека парот (\mathbf{A}, \mathbf{B}) е целосно управлив.

На читаелот веројатно веќе му е јасно дека управливоста за која досега дискутиравме е всушност **управливост на состојбите** на набљудуваниот дискретен систем, иако тоа не беше посебно нагласено. Меѓутоа, може да се дефинира **и управливост на излезите** на еден дискретен систем. Оваа управливост се дефинира на следниот начин: излезите на еден дискретен систем опишан со моделот (8-184) во просторот на состојби ќе бидат целосно управливи, доколку постои управување $\mathbf{y}(kT)$, дефиниран за конечен број периоди на дискретизација $0 \leq kT < nT$, таков што секој излез $\mathbf{x}(kT)$ ќе го „преведе“ од почетната точка $\mathbf{x}(0)$ во крајната точка $\mathbf{x}(nT)$ во просторот на излезите за најмногу n периоди на дискретизација T .

Математичкиот услов за целосна управливост на моделот на еден дискретен систем во просторот на состојби по излезите се изведува на следниот начин. Се поаѓа од равенката на излезите на моделот на набљудуваниот дискретен систем во просторот на состојби:

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{y}(iT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(kT) \quad (8-208)$$

и се пресметува принудниот одзив на истиот:

$$\mathbf{x}(kT) - \mathbf{C}\mathbf{A}^k \mathbf{v}(0) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{y}(iT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(kT) \quad (8-209)$$

Од равенката (8-209) непосредно следува:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(nT) - \mathbf{C}\mathbf{A}^n \mathbf{v}(0) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-i-1} \mathbf{B}\mathbf{y}(iT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(nT) = \\ &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}\mathbf{y}(0) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B}\mathbf{y}(T) + \dots + \mathbf{C}\mathbf{A} \mathbf{B}\mathbf{y}((n-1)T) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{y}(nT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(nT) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(nT) \\ \mathbf{y}((n-1)T) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(T) \\ \mathbf{y}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8-210)$$

Оттука, потребниот и доволен услов системот дефиниран со равенките (8-210) да биде целосно управлив во однос на излезите е матрицата:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (8-211)$$

која што има димензија $m \times (n+1)l$ да поседува m линеарно независни колони. Матрицата \tilde{U} се нарекува **матрица на целосна управливост на излезите** на набљудуваниот дискретен систем. Матриците:

$$\tilde{U}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{-n}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (8-212)$$

$$\tilde{U}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{CB} & \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{-(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (8-213)$$

се еквивалентни со матрицата \tilde{U} . Условот за целосна управливост на излезите се сведува на условот матрицата на управливост на излезите да поседува ранг еднаков на бројот излези на системот, односно:

$$\text{rang } \tilde{U}^* = \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \dots & \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = m \quad (8-214)$$

$$\text{rang } \tilde{U} = \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{-2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{-n}\mathbf{B} \end{bmatrix} = m \quad (8-215)$$

или:

$$\text{rang } \tilde{U}^{**} = \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{CB} & \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{-(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix} = m \quad (8-216)$$

Целосната управливост на состојбите имплицира целосна управливост на излезите само доколку n -те редици на матрицата \mathbf{C} се линеарно независни.

Поимот за управливост на динамичките системи игра важна улога при нивната оптимизација во однос на некој однапред зададен критериум. Имено, проблемот на оптимизација најчесто се состои во преведување на оптимизираниот динамички систем од некоја почетна во друга, однапред зададена состојба и тоа по оптимална траекторија во просторот на состојби долж која специфицираниот индекс на оптималност има екстремна (оптимална) вредност. Ако набљудуваниот динамички систем е управлив, ова може да се постигне со негово возбудување во текот на конечен временски интервал со оптимални управувачки променливи. Следствено, изложениот проблем на оптимизација се сведува на генерирање оптимален управувачки влез, односно оптимален управувачки вектор $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{opt}$.

8-6 НАБЉУДЛИВОСТ НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Бидејќи состојбените големини на еден динамички систем во општ случај не мора да се совпаѓаат со неговите физички променливи, од гледиште на теоријата на автоматско управување посебен интерес претставува можноста за добивање или реконструкција на состојбените големини на системот врз основа на мерење на неговите (мерливи) излезни променливи. Ова е можно кај системите кои го поседуваат својството за набљудливост.

За еден линеарен стационарен дискретен систем од n -ти ред со следниот модел во просторот на состојби:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{y}(kT), \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(kT) \quad (8-217)$$

каде што $\mathbf{y}(kT)$ е вектор на влезовите со димензија $l \times 1$, $\mathbf{x}(kT)$ е вектор на излезите со димензија $m \times 1$, $\mathbf{v}(kT)$ е вектор на состојбите со димензија $n \times 1$, \mathbf{v}_0 е вектор на почетната состојба, \mathbf{A} е квадратна матрица на состојбите со димензија $n \times n$, \mathbf{B} е матрица на влезовите со димензија $n \times l$, \mathbf{C} е матрица на излезите со димензија $m \times n$ и \mathbf{D} е влезно-излезна матрица со димензија $m \times l$, велиме дека е набљудлив доколку врз основа на мерење на излезот на системот $\mathbf{x}(kT)$ во минати N мигови на дискретизација $kT-T, kT-2T, \dots, kT-NT$ за конечно време од N периоди на дискретизација T , каде што N е позитивен цел број, може да се одреди неговата состојба $\mathbf{v} = \mathbf{v}(kT)$ во мигот kT . Вака дефинираната набљудливост е **делумна набљудливост**, затоа што се однесува на некоја конкретна состојба $\mathbf{v} = \mathbf{v}(kT)$, а не на сите. Во теоријата на автоматско управување, ние сме заинтересирани за **целосна набљудливост** на еден систем, која се дефинира на следниот начин: за набљудуваниот линеарен стационарен дискретен систем (8-217) велиме дека е целосно набљудлив доколку произволна состојба $\mathbf{v} = \mathbf{v}(kT)$ може да се реконструира врз основа на мерење на излезот на системот $\mathbf{x}(kT)$ во минати N мигови на дискретизација $kT-T, kT-2T, \dots, kT-NT$ за конечно време од N периоди на дискретизација. Набљудливоста на системите игра важна улога во синтезата на дискретните системи на автоматско управување, кога често е потребно да се генерира управувачки влез на системот во функција од неговите состојбени големини, кои се реконструираат врз основа на мерења на излезот од системот, бидејќи најчесто не се достапни за мерење.

Математичкиот услов за целосна набљудливост на еден систем ќе го изведеме на следниот начин. Од равенката на векторот на состојба во моделот (8-217) произлегува:

$$k=1: \mathbf{v}(kT) = \mathbf{A}\mathbf{v}((k-1)T) + \mathbf{B}\mathbf{y}((k-1)T) \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}((k-1)T) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}((k-1)T)$$

$$\vdots$$

$$k=N: \mathbf{v}((k-N)T) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}((k-N+1)T) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}((k-N)T) \quad (8-218)$$

додека од равенката на излезот на набљудуваниот систем се добива:

$$k=1: \mathbf{x}((k-1)T) = \mathbf{C}\mathbf{v}((k-1)T) + \mathbf{D}\mathbf{y}((k-1)T) =$$

$$\mathbf{x}((k-1)T) = \mathbf{C}[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}((k-1)T)] + \mathbf{D}\mathbf{y}((k-1)T) =$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}((k-1)T) &= \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{v}(kT) - (\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{y}((k-1)T) \\
 &\quad \vdots \\
 k = N: \mathbf{x}((k-N)T) &= \mathbf{C}\mathbf{v}((k-N)T) + \mathbf{D}\mathbf{y}((k-N)T) = \\
 &= \mathbf{C}[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}((k-N+1)T) - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}((k-N)T)] + \mathbf{D}\mathbf{y}((k-N)T) = \\
 &= \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{v}((k-N+1)T) - (\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{y}((k-N)T) = \\
 &= \mathbf{CA}^{-N}\mathbf{v}(kT) - \sum_{i=1}^N \mathbf{CA}^{-N+i-1}\mathbf{B}\mathbf{y}((k-i)T) + \mathbf{D}\mathbf{y}((k-N)T) \tag{8-219}
 \end{aligned}$$

Лесно можеме да забележиме дека во последната релација, матриците \mathbf{C} , \mathbf{A} и \mathbf{B} се познати, исто како и влезовите $\mathbf{y}((k-N)T)$ за $N=1,2,\dots,k$. Оттука, освен првиот член на десната страна, сите останати членови имаат константни вредности кои не зависат од состојбите на системот и како такви не влијаат врз пресметките за состојбите $\mathbf{v}(kT)$ во функција од мерените излези $\mathbf{x}((k-i)T)$ за $i=1,2,\dots,k$ и $k \geq N$. Затоа тие членови може да се испуштат, сметајќи дека сите влезови се идентички еднакви на нула, па равенките за излезите (8-219) може да се напишат во облик:

$$\begin{aligned}
 k = 1: \mathbf{x}((k-1)T) &= \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{v}(kT) \\
 k = 2: \mathbf{x}((k-2)T) &= \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{CA}^{-2}\mathbf{v}(kT) \\
 &\quad \vdots \\
 k = N: \mathbf{x}((k-N)T) &= \mathbf{CA}^{-N}\mathbf{v}(kT) \tag{8-220}
 \end{aligned}$$

или, во матричен облик:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}((k-1)T) \\ \mathbf{x}((k-1)T) \\ \vdots \\ \mathbf{x}((k-1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^{-1} \\ \mathbf{CA}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{-N} \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) = \mathbf{N}\mathbf{v}(kT) \tag{8-221}$$

Очигледно е дека системот ќе биде целосно набљудлив доколку равенката (8-221) има решение по непознатиот вектор на состојба. Матрицата \mathbf{N} се нарекува **матрица на целосна набљудливост** на состојбите на еден дискретен систем и таа има едвивалентни облици:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^{-1} \\ \mathbf{CA}^{-2} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{-N} \end{bmatrix} \quad (8-222)$$

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix} \quad (8-223)$$

односно:

$$\mathbf{N}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^{N-1})^T \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \quad (8-224)$$

Димензијата на оваа матрица за најопштиот случај на повеќевеличински дискретен систем е $m \times n$, додека во случајот на систем со еден влез и еден излез таа е квадратна матрица со димензија $n \times n$. Математичкиот услов за целосна управливост на набљудуваниот дискретен систем гласи: $N = n$ и рангот на матрицата на набљудливост треба да биде еднаков на n ⁴⁾, каде што n е редот на набљудуваниот систем, или, што е еквивалентно, матрицата на набљудливост да има n линеарно независни редици. Во случајот на систем со еден влез и еден излез овој услов се сведува на условот матрицата на набљудливост да не биде сингуларна, односно нејзината детерминанта да биде различна од нула:

$$\det \mathbf{N} \neq 0 \quad (8-225)$$

$$\det \mathbf{N}^* \neq 0 \quad (8-226)$$

или:

$$\det \mathbf{N}^{**} \neq 0 \quad (8-227)$$

Очигледно е дека кај повеќевеличинските дискретни системи за одредување на состојбата $\mathbf{v} = \mathbf{v}(kT)$ на набљудуваниот повеќевеличински систем не е потребно мерење на вредностите на сите негови излези во одреден конечен број изминати (претходни) дискретни временски мигови како во случајот на дискретните системи со еден влез и еден излез, туку само на некои. Кои излези ќе бидат потребни зависи од одбраното подмножество од n линеарно независни редици на матрицата \mathbf{N} на повеќевеличинскиот дискретен систем, која има вкупно m редици. Ако набљудуваниот повеќевеличински дискретен систем е целосно набљудлив, барем n од вкупно m редици на матрицата \mathbf{N} ќе бидат линеарно независни.

⁴⁾ Матрицата \mathbf{M} има ранг r ако меѓу нејзините квадратни подматрици постои барем една несингуларна квадратна подматрица од ред r , додека сите подматрици од ред повисок од r , ако постојат, се сингуларни. Рангот на нултата матрица $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ е нула.

Кога еден систем претставен со соодветен модел во просторот на состојби ги задоволува условите за набљудливост, вообичаено се вели дека парот (A, C) е целосно набљудлив. Овде ќе истакнеме дека моделот на еден дискретен систем во просторот на состојби добиен со постапката на разгранет влез и излез претставува **набљудлива канонична форма**. Тоа значи дека системот опишан со овој модел ќе биде сигурно набљудлив.

Доколку набљудуваниот дискретен систем е опишан во просторот на состојби со моделот со разгранет влез и има исклучиво прости полови, тој ќе биде целосно набљудлив доколку ни една од колоните на матрицата-редица C не содржи нули. Кога моделот на набљудуваниот дискретен систем е во Џорданова канонична форма и има кратни полови, состојбите на системот ќе бидат целосно набљудливи доколку секој Џорданов блок одговара на еден кратен пол на набљудуваниот систем и елементите на матрицата C кои одговараат на првата колона од соодветниот Џорданов блок не се сите еднакви на нула.

Пример 8-11. Да се испита целосната набљудливост на дадените дискретни системи:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT)$$

$$x(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) \quad (8-228)$$

и:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) \quad (8-229)$$

Решение: Сите елементи на матрицата-редица C во моделот (8-228) се различни од нула. Исто така, сите елементи на матрицата C , кои одговараат на првите колони од соодветните два Џорданови блока на матрицата A во моделот (8-229), се различни од нула. Следствено, системите (8-228) и (8-229) се целосно набљудливи. \square

Пример 8-12. Да се испита целосната набљудливост на дадените дискретни системи:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT)$$

$$x(kT) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) \quad (8-230)$$

и:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}(kT)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & \textcircled{0} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \textcircled{0} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) \quad (8-231)$$

Решение: Првиот елемент на матрицата-редица \mathbf{c} во моделот (8-230) е еднаков на нула. Исто така, сите елементи на матрицата \mathbf{C} , кои одговараат на првата колона од вториот Џорданов блок на матрицата \mathbf{A} во моделот (8-231), се еднакви на нула. Следствено, системите (8-229) и (8-230) не се целосно набљудливи. \square

Условот за целосна набљудливост на еден дискретен систем може да се искаже и во z -комплексното подрачје. Тогаш, за еден дискретен систем велиме дека е целосно набљудлив доколку нема кратење исти нули и полови во неговата преносна функција.

Пример 8-13. Да се провери целосната набљудливост на дискретниот систем, опишан со следната преносна функција:

$$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{(z+1)(z+4)}{(z+1)(z+2)(z+3)} \quad (8-232)$$

Решение: Еден модел на набљудуваниот дискретен систем во просторот на состојби е следниот:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(kT) = [4 \quad 5 \quad 1] \mathbf{v}(kT) \quad (8-233)$$

Неговата матрица на набљудливост е дадена со изразот:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad (8-234)$$

и лесно се утврдува дека таа е сингуларна:

$$\det \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -6 & -7 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8-235)$$

Следствено, набљудуваниот дискретен систем не е целосно набљудлив. □

За дискретните системи важи следниот принцип на двојност. Нека го набљудуваме дискретниот систем опишан со моделот (8-21) во просторот на состојби. Овој систем ќе го означиме како S_1 . И нека го набљудуваме системот S_2 , чиј модел во просторот на состојби е:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}((k+1)T) &= \mathbf{A}^T \mathbf{v}(kT) + \mathbf{C}^T \mathbf{y}(kT) \\ \mathbf{x}(kT) &= \mathbf{B}^T \mathbf{v}(kT) \end{aligned} \quad (8-236)$$

Тогаш, ако системот S_1 е целосно управлив, системот S_2 ќе биде целосно набљудлив и обратно. Доказот е многу едноставен и е даден во продолжение. Условот за целосна управливост на системот S_1 гласи:

$$\text{rang}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (8-237)$$

додека условот за целосна набљудливост на истиот систем е:

$$\text{rang}[\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^{n-1})^T \mathbf{C}^T] = n \quad (8-238)$$

Аналогно, условот за целосна управливост на системот S_2 ќе биде:

$$\text{rang}[\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^{n-1})^T \mathbf{C}^T] = n \quad (8-239)$$

Додека условот за целосна набљудливост на истиот систем ќе гласи:

$$\begin{aligned} &\text{rang} \left[\begin{array}{cccc} (\mathbf{B}^T)^T & (\mathbf{A}^T)^T (\mathbf{B}^T)^T & \left((\mathbf{A}^T)^2 \right)^T (\mathbf{B}^T)^T & \left((\mathbf{A}^T)^{n-1} \right)^T (\mathbf{B}^T)^T \end{array} \right] = \\ &= \text{rang}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \end{aligned} \quad (8-240)$$

Лесно се забележува дека условот (8-237) е идентичен со условот (8-240), додека условот (8-238) е идентичен со условот (8-239).

8-7 ДВИЖЕЊЕ НА ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

Просторот на состојби на еден дискретен систем од ред n е n -димензионален простор чии координатни оски се v_1, v_2, \dots, v_n . Секоја точка во просторот на состојби одредена со координатите v_1, v_2, \dots, v_n претставува една состојба на набљудуваниот систем во просторот на состојби. Одредувањето на траекторијата на движење на еден дискретен систем во просторот на состојби подразбира решавање на диферентните равенки на

векторот на состојби за дадена почетна состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ и познати вредности на влезот $\mathbf{y}(kT)$ во дискретните временски мигови kT ($k = 0, 1, 2, \dots$). Матричната равенка:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{y}(kT), \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0) \quad (8-241)$$

Може да се реши со едноставна рекурентна постапка. Така, за $k = 0$ и $k = 1$ од (8-241) се добива:

$$k = 0: \quad \mathbf{v}(T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(0) + \mathbf{B}\mathbf{y}(0) \quad (8-242)$$

$$k = 1: \quad \mathbf{v}(2T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(T) + \mathbf{B}\mathbf{y}(T) \quad (8-243)$$

или, по воведувањето на (8-242) во (8-243):

$$k = 1: \quad \mathbf{v}(2T) = \mathbf{A}^2\mathbf{v}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}(0) + \mathbf{B}\mathbf{y}(T) \quad (8-244)$$

На сличен начин, за $k = 2$ и $k = 3$ од (8-241) се добива:

$$k = 2: \quad \mathbf{v}(3T) = \mathbf{A}^3\mathbf{v}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{y}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}(T) + \mathbf{B}\mathbf{y}(2T) \quad (8-245)$$

$$k = 3: \quad \mathbf{v}(4T) = \mathbf{A}^4\mathbf{v}(0) + \mathbf{A}^3\mathbf{B}\mathbf{y}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{y}(T) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}(2T) + \mathbf{B}\mathbf{y}(3T) \quad (8-246)$$

ИТН.

Врз основа на изложената постапка може да се заклучи дека за секое цело позитивно k важи:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(kT) &= \mathbf{A}\mathbf{v}((k-1)T) + \mathbf{B}\mathbf{y}((k-1)T) = \\ &= \mathbf{A}^k\mathbf{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1}\mathbf{B}\mathbf{y}(iT) \end{aligned} \quad (8-247)$$

со што е одредено движењето на набљудуваниот дискретен систем во просторот на состојби, зашто равенката (8-247) овозможува да се одредат сите состојби на овој систем во миговите kT ($k = 0, 1, 2, \dots$) ако се знае почетната состојба $\mathbf{v}(0)$ и влезната низа $\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T), \dots, \mathbf{y}((k-1)T)$.

На сличен начин може да се одреди решението на матричната равенка (8-241) и кога како почетен миг на набљудување наместо $kT = 0$ се одбере некое произволно kT . Тогаш од (8-241), врз основа на изложената рекурентна постапка се добива:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \mathbf{A}\mathbf{v}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{y}(kT)$$

$$\mathbf{v}((k+2)T) = \mathbf{A}^2 \mathbf{v}(kT) + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y}(kT) + \mathbf{B} \mathbf{y}((k+1)T)$$

$$\mathbf{v}((k+3)T) = \mathbf{A}^3 \mathbf{v}(kT) + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mathbf{y}(kT) + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y}((k+1)T) + \mathbf{B} \mathbf{y}((k+2)T)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}((k+n)T) = \mathbf{A}^n \mathbf{v}(kT) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-i-1} \mathbf{B} \mathbf{y}((k+i)T); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8-248)$$

каде што n е цел позитивен број. Равенките (8-247) и (8-248) го определуваат векторот на состојба односно решението на матричната равенка (8-241) за најопштиот случај на повеќевеличински линеарен стационарен дискретен динамички систем. Во случајот на дискретен систем со еден влез и еден излез, решението на матричната равенка на векторот на состојби ќе има ист облик како и (8-247) односно (8-248), само што сега \mathbf{B} нема повеќе да биде матрица туку ќе биде матрица-колона односно вектор \mathbf{b} со димензија $n \times 1$, а $y(kT)$ ќе биде скалар.

Во равенката (8-247) може да се воведат смената:

$$\boldsymbol{\Psi}(kT) = \mathbf{A}^k \quad (8-249)$$

каде што $\boldsymbol{\Psi}(kT)$ е квадратна матрица со димензија $n \times n$. Тогаш равенката (8-247) ќе го добие обликот:

$$\mathbf{v}(kT) = \boldsymbol{\Psi}(kT) \mathbf{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{\Psi}((k-i-1)T) \mathbf{B} \mathbf{y}(iT); \quad k = 1, 2, \dots \quad (8-250)$$

Со воведување на релациите (8-247) односно (8-250) во равенката на излезот на набљудуваниот дискретен систем:

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{v}(kT) + \mathbf{D} \mathbf{y}(kT) \quad (8-251)$$

се добива изразот:

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B} \mathbf{y}(iT) + \mathbf{D} \mathbf{y}(kT); \quad k = 1, 2, \dots \quad (8-252)$$

односно:

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}(kT) \mathbf{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}((k-i-1)T) \mathbf{B} \mathbf{y}(iT) + \mathbf{D} \mathbf{y}(kT); \quad k = 1, 2, \dots \quad (8-253)$$

Од изразот (8-250) се гледа дека векторот на состојба на еден линеарен дискретен систем се состои од две компоненти: компонентата $\boldsymbol{\Psi}(kT) \mathbf{v}(0)$, која зависи само од почетната состојба на набљудуваниот систем и компонентата $\sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{\Psi}((k-i-1)T) \mathbf{B} \mathbf{y}(iT)$, која зависи само од влезниот вектор $\mathbf{y}(kT)$ во миговите kT ($k = 0, 1, 2, \dots$), односно од

влезната низа $y(0), y(T), \dots, y((k-1)T)$. Првата компонента на векторот на состојби го одредува излезот на системот во отсуство на каков и да било влез:

$$\mathbf{x}(kT) = \mathbf{C}\Psi(kT)\mathbf{v}(0); k = 1, 2, \dots; \mathbf{y}(kT) \equiv \mathbf{0} \quad (8-254)$$

Втората компонента е таа, која што го одредува поведението на стабилен дискретен систем во стационарен работен режим:

$$\mathbf{x}(kT) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}\Psi((k-i-1)T)\mathbf{B}\mathbf{y}(iT) + \mathbf{D}\mathbf{y}(kT); k = 1, 2, \dots; \mathbf{v}(0) \equiv \mathbf{0} \quad (8-255)$$

При проектирањето на дискретните системи на автоматско управување, преку избор на соодветниот управувачки закон $y(kT)$, инженерот автоматичар може да делува само на втората компонента на векторот на состојба $\mathbf{v}(kT)$ и, следствено, само преку неа да влијае на целокупната состојба на проектираниот дискретен систем на автоматско управување.

За секој дискретен систем матрицата $\Psi(kT)$ е единствена матрица со димензија $n \times n$, која го задоволува условот:

$$\Psi((k+1)T) = \mathbf{A}\Psi(kT); \Psi(0) = \mathbf{I} \quad (8-256)$$

Очигледно решението на равенката (8-255) е:

$$\Psi(kT) = \mathbf{A}^k \quad (8-257)$$

Оваа матрица се нарекува **фундаментална матрица** и таа го има истото значење во анализата на линеарните дискретни системи во просторот на состојби како и фундаменталната матрица кај линеарните континуални системи. За стабилен линеарен дискретен систем фундаменталната матрица го поседува следното својство:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi(kT) = \mathbf{0} \quad (8-258)$$

Нека го набљудуваме дискретниот систем опишан со моделот (8-21) во просторот на состојби во отсуство на влез, односно за $\mathbf{y}(kT) \equiv \mathbf{0}$. Тогаш решението на матричната равенка на векторот на состојба ќе биде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}((k+1)T) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(kT), \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0) \Rightarrow \\ \mathbf{v}(kT) &= \mathbf{A}^k \mathbf{v}(0) = \Psi(kT) \mathbf{v}(0) \end{aligned} \quad (8-259)$$

Лесно може да се забележи дека решението на матричната равенка на векторот на состојба за автономен режим ($\mathbf{y}(kT) \equiv \mathbf{0}$) претставува само трансформација $\Psi(kT)$ на почетната состојба $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$. Во продолжение, фундаменталната матрица го одредува и слободниот одзив на набљудуваниот дискретен систем.

За решавање на диферентните равенки на векторот на состојба на еден дискретен систем и, следствено, за изучување на линеарните стационарни дискретни системи опишани во просторот на состојби со успех може да се примени и математичкиот апарат на Z – трансформацијата. Така, со Z – трансформација на матричните равенки (8-217) во просторот на Z – сликите се добива:

$$z\mathbf{V}(z) - z\mathbf{v}(0) = \mathbf{A}\mathbf{V}(z) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(z) \quad (8-260)$$

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{C}\mathbf{V}(z) + \mathbf{D}\mathbf{Y}(z) \quad (8-261)$$

или, по мало средување:

$$\mathbf{V}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{v}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}(z) \quad (8-262)$$

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{C}z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{v}(0) + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}(z) + \mathbf{D}\mathbf{Y}(z) \quad (8-263)$$

каде што \mathbf{I} е единичната дијагонална матрица со димензија $n \times n$. Равенките (8-262) и (8-263) ги определуваат векторот на состојба $\mathbf{v}(kT)$ и векторот на излезите $\mathbf{x}(kT)$ на дискретниот систем во z –комплексното подрачје, при што:

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ \vdots \\ v_n(0) \end{bmatrix} \quad (8-264)$$

е векторот на почетна состојба на набљудуваниот дискретен систем,

$$\mathbf{Y}(z) = Z\{\mathbf{y}(kT)\} = Z\left\{ \begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \\ \vdots \\ y_p(kT) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Z\{y_1(kT)\} \\ Z\{y_2(kT)\} \\ \vdots \\ Z\{y_p(kT)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_1(z) \\ \vdots \\ Y_p(z) \end{bmatrix} \quad (8-265)$$

е векторот на Z – сликите на влезовите на истиот систем со димензија $p \times 1$,

$$\mathbf{X}(z) = Z\{\mathbf{x}(kT)\} = Z\left\{ \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_q(kT) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Z\{x_1(kT)\} \\ Z\{x_2(kT)\} \\ \vdots \\ Z\{x_q(kT)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_q(z) \end{bmatrix} \quad (8-266)$$

е векторот на Z – сликите на излезите на набљудуваниот дискретен систем со димензија $q \times 1$ и:

$$\mathbf{V}(z) = Z\{\mathbf{v}(kT)\} = Z \begin{bmatrix} v_1(kT) \\ v_2(kT) \\ \vdots \\ v_n(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\{v_1(kT)\} \\ Z\{v_2(kT)\} \\ \vdots \\ Z\{v_n(kT)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \\ \vdots \\ V_n(z) \end{bmatrix} \quad (8-267)$$

е векторот на Z – сликите на состојбените големини на системот со димензија $n \times 1$. Векторот на состојба $\mathbf{v}(kT)$ и векторот на излезите $\mathbf{x}(kT)$ во просторот на оригиналите се определуваат со инверзна Z – трансформација на нивните Z – слики:

$$\mathbf{v}(kT) = Z^{-1}\{\mathbf{V}(z)\} \quad (8-268)$$

$$\mathbf{x}(kT) = Z^{-1}\{\mathbf{X}(z)\} \quad (8-269)$$

Пример 8-14. Да се определи векторот на состојба $\mathbf{v}(kT)$ и излезот $x(kT)$ на линеарниот стационарен дискретен систем со еден влез $y(kT)$ и еден излез $x(kT)$ опишан со следниот модел во просторот на состојби:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.3 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(kT) = [0 \quad 1] \mathbf{v}(kT) \quad (8-270)$$

ако:

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{0} \quad (8-271)$$

и:

$$y(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases} \quad (8-272)$$

Решение: Врз основа на (8-262), за Z – сликата на векторот на состојба се добива:

$$\mathbf{V}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{v}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}(z) =$$

$$= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}(z) = \begin{bmatrix} z+0.5 & 0.3 \\ -0.2 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{(z-1)(z+0.2)(z+0.3)} \begin{bmatrix} z^2 \\ 0.2z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{(z-1)(z+0.2)(z+0.3)} \\ \frac{0.2z}{(z-1)(z+0.2)(z+0.3)} \end{bmatrix} \quad (8-273)$$

Оттука:

$$\begin{aligned} v_1(kT) &= Z^{-1}\{V_1(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-1)(z+0.2)(z+0.3)}\right\} = \\ &= Z^{-1}\left\{\frac{0.64z}{(z-1)} + \frac{1.67z}{(z+0.2)} - \frac{2.31z}{(z+0.3)}\right\} = 0.64 + 1.67(-0.2)^k - 2.31(-0.3)^k, \quad k \geq 0 \quad (8-274) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(kT) &= Z^{-1}\{V_2(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{0.2z}{(z-1)(z+0.2)(z+0.3)}\right\} = \\ &= Z^{-1}\left\{\frac{0.13z}{(z-1)} - \frac{1.67z}{(z+0.2)} + \frac{1.54z}{(z+0.3)}\right\} = 0.13 - 1.67(-0.2)^k + 1.54(-0.3)^k, \quad k \geq 0 \quad (8-275) \end{aligned}$$

Изразите (8-274) и (8-275) го определуваат и излезот на набљудуваниот дискретен систем од примерот, бидејќи според (8-269) е:

$$x(kT) = [0 \quad 1] \mathbf{v}(kT) = v_2(kT) = 0.13 - 1.67(-0.2)^k + 1.54(-0.3)^k, \quad k \geq 0 \quad \square \quad (8-276)$$

Од досега изложеното и од примерот 8-14 се гледа дека решавањето на диферентните равенки на векторот на состојба со помош на математичкиот апарат на Z – трансформацијата кај линеарните дискретни системи во целост е аналогно со решавањето на истиот проблем кај линеарните континуални системи, кога се користат методите и апаратот на Лапласовата трансформација.

На крајот од овој параграф останува уште да се споредат изразите (8-250) и (8-262). Бидејќи $\mathbf{v}(kT)$ и $\mathbf{V}(z)$ претставуваат еден Z – трансформациски пар, релацијата (8-250) може да се добие со инверзна Z – трансформација на релацијата (8-262) или обратно, релацијата (8-262) е Z – трансформација на релацијата (8-250). Оттука лесно се заклучува дека изразот $z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ претставува Z – слика на фундаменталната матрица, односно важат релациите:

$$\Psi(z) = Z\{\psi(kT)\} = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (8-277)$$

$$\psi(kT) = Z^{-1}\{\Psi(z)\} = Z^{-1}\left\{z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} \quad (8-278)$$

8-8 ОДРЕДУВАЊЕ НА МАТРИЦАТА НА ПРЕНОСНИ ФУНКЦИИ КАЈ ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ ПРЕКУ МОДЕЛОТ ВО ПРОСТОРТ НА СОСТОЈБИ

Матрицата на преносни функции $\mathbf{G}(z)$ на еден линеарен стационарен дискретен систем опишан во просторот на состојби со моделот (8-217) произлегува непосредно од изразот (8-262) за $\mathbf{x}(z)$. Имено, за нулеви почетни услови, од изразот (8-263) се добива:

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{Y}(z) + \mathbf{D}\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{Y}(z) \quad (8-279)$$

па, следствено:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (8-280)$$

Матрицата $\mathbf{G}(z)$ е $m \times l$ димензионална матрица, чии елементи се парцијалните преносни функции на набљудуваниот дискретен систем, дефинирани помеѓу секој еден негов влез и излез:

$$\mathbf{G}(z) = [G_{ij}(z)]_{m \times l} = \begin{bmatrix} X_i(z) \\ Y_j(z) \end{bmatrix}_{m \times l} \quad (8-281)$$

Притоа изразот (8-280) може да се запише и како:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}z^{-1} \left[z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right] \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (8-282)$$

па, во согласност со (8-277), за $\mathbf{G}(z)$ се добива:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}z^{-1} \mathbf{\Psi}(z) \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (8-283)$$

Ако е позната матрицата на преносни функции $\mathbf{G}(z)$ на еден повеќевеличински дискретен систем и векторот на неговите влезови $\mathbf{y}(kT)$, тогаш за нулеви почетни услови секогаш ќе биде наполно определен и векторот на излезите на тој систем $\mathbf{x}(kT)$.

Оригиналот $\mathbf{g}(kT)$ кон Z – сликата $\mathbf{G}(z)$ е $m \times l$ димензионална матрица;

$$\mathbf{g}(kT) = [g_{ij}(kT)]_{m \times l} \quad (8-284)$$

чиј елемент $g_{ij}(kT)$ го претставува i – тиот одзив на системот со нулеви почетни услови на Кронекер-делта функција доведена на неговиот j – ти влез. Оттука, со инверзна Z – трансформација на сликата (8-283) за $\mathbf{g}(kT)$ се добива:

$$\mathbf{g}(kT) = Z^{-1} \{ \mathbf{C}z^{-1}\Psi(z)\mathbf{B} + \mathbf{D} \} = \mathbf{C}\psi((k-1)T)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta_0(kT) \quad (8-285)$$

или, што е еквивалентно:

$$\mathbf{g}(kT) = \begin{cases} \mathbf{D}, & k=0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & k>0 \end{cases} \quad (8-286)$$

Матрицата на преносни функции може да се запише и на следниот начин:

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A})} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (8-287)$$

од каде што се гледа дека карактеристичниот полином на набљудуваниот дискретен систем е:

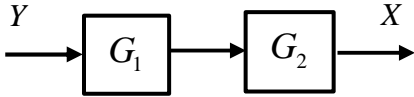
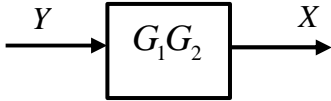
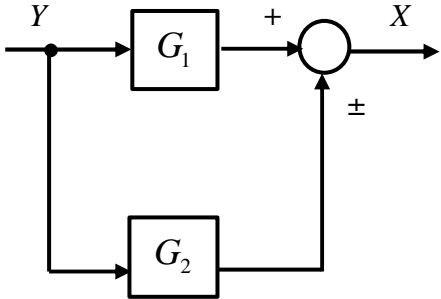
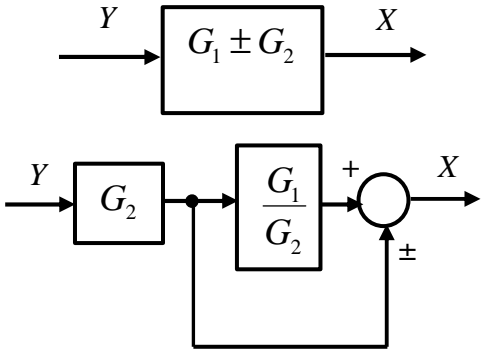
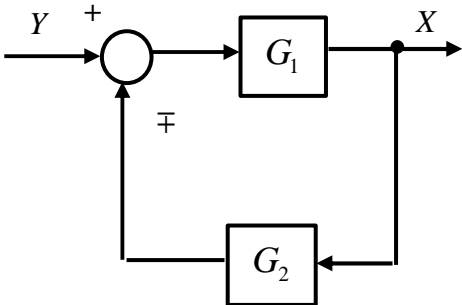
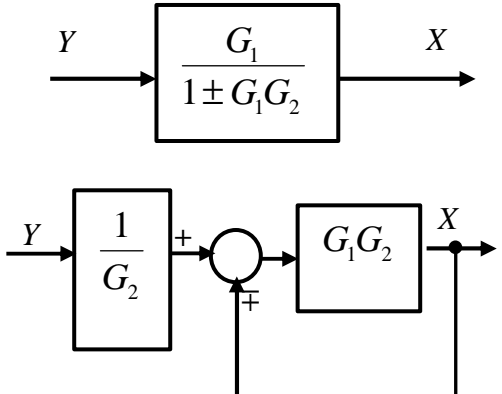
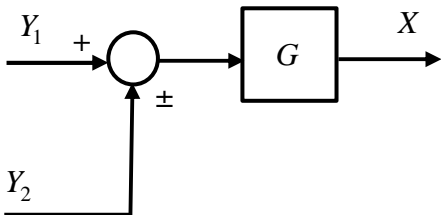
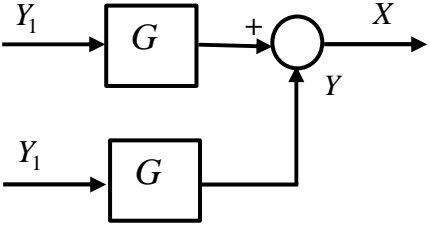
$$a(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) \quad (8-288)$$

Z-ТРАНСФОРМАЦИСКИ ПАРОВИ	
$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$\delta(k-m)$	z^{-m}
$h(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$h(k-m)$	$\frac{z^{-m+1}}{z-1}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{k}$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$
k^2a^k	$\frac{az(z+1)}{(z-a)^3}$
k^3a^k	$\frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$
k^4a^k	$\frac{az(z^3+11az^2+11a^2z+a^3)}{(z-a)^5}$
k^5a^k	$\frac{az(z^4+26az^3+66a^2z^2+26a^3z+a^4)}{(z-a)^6}$
$\frac{1}{k}$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$

Z-ТРАНСФОРМАЦИСКИ ПАРОВИ (продолжение)	
$\frac{a^k}{k!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
e^{ak}	$\frac{z}{z - e^a}$
ke^{ak}	$\frac{ze^a}{(z - e^a)}$
$1 - e^{ak}$	$\frac{1 - e^a}{(z - 1)(z - e^a)}$
$\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)}{m!}$	$\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$
$\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)}{m!} a^m$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$
$\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)a^k}{m!}$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$
$a^k \sin(k\omega T)$	$\frac{az \sin(\omega T)}{z^2 - 2az \cos(\omega T) + a^2}$
$a^k \cos(k\omega T)$	$\frac{z[z - a \cos(\omega T)]}{z^2 - 2az \cos(\omega T) + a^2}$
$\cos(k\omega T + \theta)$	$\frac{z[z \cos(\theta) - \cos(\omega T - \theta)]}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$
$ka^k \sin(k\omega T)$	$\frac{z(z^2 - a^2) a \sin(\omega T)}{[z^2 - 2az \cos(\omega T) + a^2]^2}$
$ka^k \cos(k\omega T)$	$\frac{az[z^2 \cos(\omega T) - 2az + a^2 \cos(\omega T)]}{z^2 - 2az \cos(\omega T) + a^2}$
$a^k \sinh(k\omega T)$	$\frac{az \sinh(\omega T)}{z^2 - 2az \cosh(\omega T) + a^2}$

Z-ТРАНСФОРМАЦИСКИ ПАРОВИ (продолжение)	
$a^k \cosh(k\omega T)$	$\frac{z[z - a \cosh(\omega T)]}{z^2 - 2az \cosh(\omega T) + a^2}$
$\frac{n!}{(n-k)!k!} a^k b^{(n-k)}$	$\frac{(bz + a)^n}{z^n}$

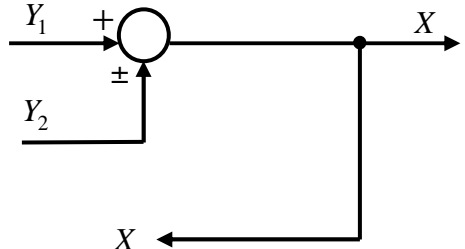
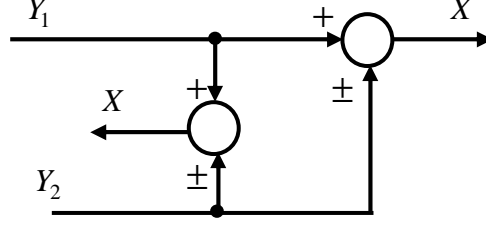
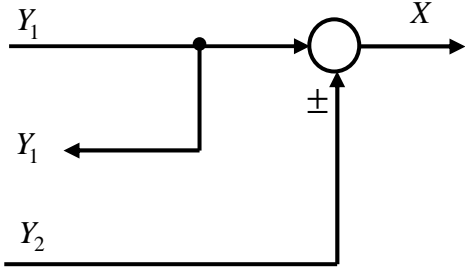
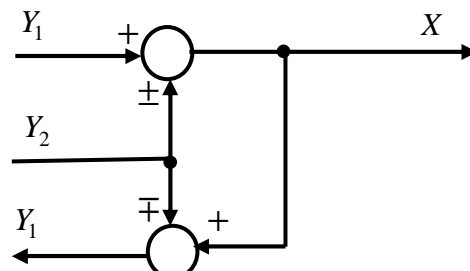
ДОДАТОК 2 - АЛГЕБРА НА БЛОК-ШЕМИТЕ КАЈ ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

правило	шеMATски приказ	еквивалентна шема
Сериска врска		
Паралелна врска		
Антипаралелна врска		
Префрлање суматор од влез на излез на динамички блок		

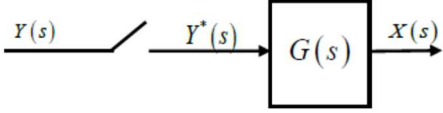
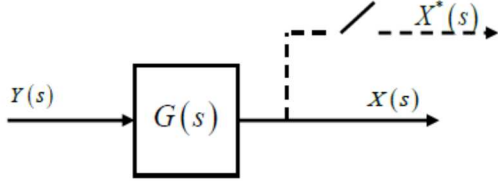
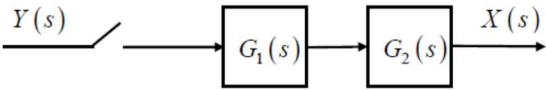
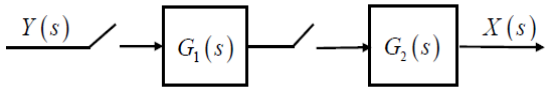
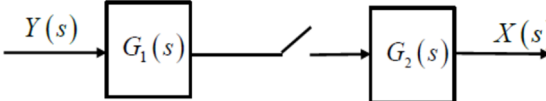
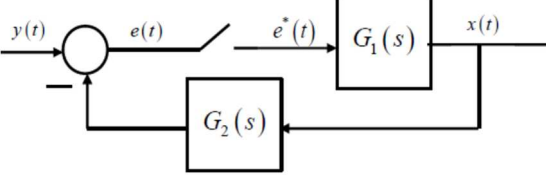
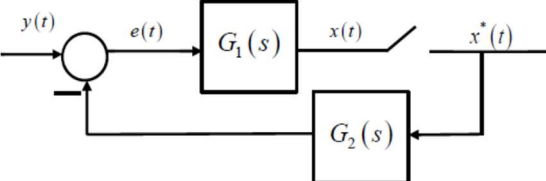
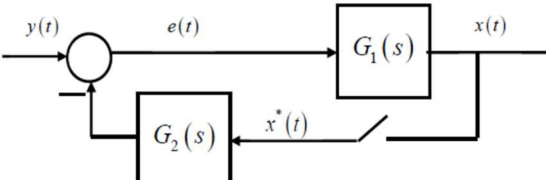
ДОДАТОК 2 - АЛГЕБРА НА БЛОК-ШЕМИТЕ КАЈ ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

правило	шематски приказ	еквивалентна шема
<p>Префрлање суматор од излез на влез на динамички блок</p>		
<p>Замена на местата на елементи за алгебарско собирање</p>		
<p>Замена на местата на елементи за алгебарско собирање</p>		
<p>Префрлање на јазол од излезот на влез од динамички блок</p>		
<p>Префрлање на јазол од влезот на излезот од динамички блок</p>		

ДОДАТОК 2 - АЛГЕБРА НА БЛОК-ШЕМИТЕ КАЈ ДИСКРЕТНИТЕ СИСТЕМИ

правило	шематски приказ	еквивалентна шема
<p>Префрлање на јазол од излезот на влезот од елемент за алгебарско собирање</p>		
<p>Префрлање на јазол од излезот на влезот од елемент за алгебарско собирање</p>		

ПРАВИЛА ЗА ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ

		$X(z) = G(z)Y(z)$
	/	$X(z) = GY(z)$
	$G(z) = G_1G_2(z)$	$X(z) = G_1G_2(z)Y(z)$
	$G(z) = G_1(z)G_2(z)$	$X(z) = G_1(z)G_2(z)Y(z)$
	/	$X(z) = G_1(z)G_2Y(z)$
	$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_2G_1(z)}$	$X(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_2G_1(z)}Y(z)$
	/	$X(z) = \frac{G_1Y(z)}{1 + G_1G_2(z)}$
	/	$X(z) = \frac{G_1Y(z)}{1 + G_1G_2(z)}$

ПРАВИЛА ЗА ДИСКРЕТНО ЕКВИВАЛЕНТИРАЊЕ КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

	$G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$	$X(z) = \frac{G_1(z)Y(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}$
	$G(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2G_3(z)}$	$X(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)Y(z)}{1 + G_1(z)G_2G_3(z)}$
	<p style="text-align: center;">/</p>	$X(z) = \frac{G_2(z)G_1Y(z)}{1 + G_1G_2G_3(z)}$

МАТРИЦИТЕ \mathbf{M}_n КАЈ БИЛИНЕАРНАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА $z = (1+s)/(1-s)$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 10 & -2 & -2 & 2 & 2 & -10 \\ 10 & 2 & -2 & -2 & 2 & 10 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & -6 \\ 15 & -5 & -1 & 3 & -1 & -5 & 15 \\ 20 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 15 & 5 & -1 & -3 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**МАТРИЦИТЕ \mathbf{M}_n КАЈ БИЛИНЕАРНАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА $z = (1+s)/(1-s)$
(ПРОДОЛЖЕНИЕ)**

$$\mathbf{M}_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 7 & -5 & 3 & -1 & -1 & 3 & -5 & 7 \\ 21 & -9 & 1 & 3 & -3 & -1 & 9 & 21 \\ 35 & -5 & -5 & 3 & 3 & -5 & -5 & 35 \\ 35 & 5 & -5 & -3 & 3 & 5 & -5 & 35 \\ 21 & 9 & 1 & -3 & -3 & 1 & 9 & 21 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

МАТРИЦИТЕ \mathbf{P}_n КАЈ БИЛИНЕАРНАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА $z = (s+1)/(s-1)$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 \\ 10 & 2 & -2 & -2 & 2 & 10 \\ 10 & -2 & -2 & 2 & 2 & -10 \\ 5 & -3 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 15 & 5 & -1 & -3 & -1 & 5 & 15 \\ 20 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 15 & -5 & -1 & 3 & -1 & -5 & 15 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**МАТРИЦИТЕ \mathbf{P}_n КАЈ БИЛИНЕАРНАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА $z = (s+1)/(s-1)$
(ПРОДОЛЖЕНИЕ)**

$$\mathbf{P}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & -5 & -7 \\ 21 & 9 & 1 & -3 & -3 & 1 & 9 & 21 \\ 35 & 5 & -5 & -3 & 3 & 5 & -5 & 35 \\ 35 & -5 & -5 & 3 & 3 & -5 & -5 & 35 \\ 21 & -9 & 1 & 3 & -3 & -1 & 9 & 21 \\ 7 & -5 & 3 & -1 & -1 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Joseph J. Distefano, Allen R. Stubberud, Wan J. Williams, **Theory and Problems of Feedback and Control Systems**, (Second Edition), McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1990.
- [2] M. Sami Fadali, Antonio Visioli, **Digital Control Engineering: Analysis and Design** (Second Edition), Academic Press, Waltham, MA, USA, 2013.
- [3] Gene F. Franklin, J. D. Powell, **Digital Control of Dynamic Systems**, (Third Edition), Addison-Wesley, Menlo Park, CA, USA, 1998.
- [4] Raymond G. Jacquot, **Modern Digital Control Systems**, (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 1995.
- [5] Benjamin C. Kuo, **Digital Control Systems**, (Second Edition), Oxford University Press, Oxford, UK, 2007.
- [6] Katsuhiko Ogata, **Discrete-Time Control Systems**, (Second edition), Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ., USA, 1995.
- [7] Milić Stojić, **Digitalni sistemi upravljanja**, (peto izdanje), Akademska misao, Beograd, Srbija, 2004.
- [8] Е. Лазаревска, **Анализа на линеарните дискретни системи на автоматско управување**, "ЖАКИ", Скопје, 1994.

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на било кој начин без претходна писмена согласност на авторот.

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41