д-р Костадин Тренчевски

д-р Билјана Крстеска

ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

Скопје, 2019

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
Билјана Крстеска, Природно – математички факултет

Рецензенти
1. д-р Марија Оровчанец, редовен професор на ПМФ - Скопје
2. д-р Ѓорѓи Маркоски, редовен професор на ПМФ - Скопје

Техничка обработка
д-р Билјана Крстеска

Лектура на македонски јазик: Виолета Јовановска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

512.64(075.8)

ТРЕНЧЕВСКИ, Костадин
Линеарна алгебра / Костадин Тренчевски, Билјана Крстеска. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј" - Скопје, 2019

Начин на пристап (URL): http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41. - Текст во PDF формат, содржи 405 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 13.12.2019. - Библиографија: стр. [404]-405

ISBN 978-9989-43-432-7
1. Крстеска, Билјана [автор]
а) Линеарна алгебра - Високошколски учебници COBISS.MK-ID 111862026

Со љубов на Марија, Ирина, Марија и Аритон

ПРЕДГОВОР

Линеарната алгебра претставува суштински дел од математичкиот апарат потребен на математичарите, инженерите, информатичарите, физичарите, економистите, и статистичарите, меѓу другите. Оваа потреба ја рефлектира важноста и широката примена на линеарната алгебра.

Овој учебник е наменет за студентите од прва година на Природно–математичкиот факултет во Скопје, запишани на студиските програми Наставна математика, Теориска математика, Актуарска и финансиска математика, Применета математика, Математика–информатика и Математика–физика.

Пошироко, учебникот е прикладен за употреба во кој било почетен курс по линеарна алгебра или како додаток на сите тековни стандардни учебници. Тој презентира вовед во линеарната алгебра и е корисен за широк круг на читатели без оглед на нивната област на интерес.

Учебникот се состои од 11 поглавја. Во секое поглавје се обработени предвидените содржини преку изложување на релевантни дефиниции, проследени со докажани својства и теореми, како и низа решени примери кои ја илустрираат теоријата. На крајот од секое поглавје дадени се задачи за самостојна работа кои поттикнуваат базично повторување на претходно усвоениот материјал.

Првите три поглавја ги третираат векторите во Евклидовиот простор, матричната алгебра и системите на линеарни равенки. Овие поглавја обезбедуваат мотивација и основни пресметковни алатки за воведување на векторските простори и линеарните пресликувања кои следат во понатамошните четири поглавја.

Поимот за детерминанта којшто е еден од фундаменталните поими во линеарната алгебра, е поместен во осмото поглавје. Во деветтото поглавје спроведена е детална дискусија за сопствени вредности и сопствени вектори кои даваат услови за репрезентација на линеарен оператор со дијагонална матрица. Ова природно води кон проучување на разни канонични форми, конкретно, триаголна форма, Жорданова форма, и рационална канонична форма, кои што се поместени во десеттото поглавје. Во последната глава се поместени содржини од линеарни функционали и дуални простори.

На крајот од учебникот се поместени додатоци коишто опфаќаат основи од теоријата на множества и пресликувања, алгебарски структури, вклучувајќи модули и полиноми над поле. Тие ги содржат основните знаења со кои што треба да располага читателот и имаат за цел да му го олеснат совладувањето на материјалот.

На крај, сакаме да ја искажеме нашата голема благодарност на рецензентите на овој учебник, проф. д-р Марија Оровчанец и проф. д-р Ѓорѓи Маркоски, кои внимателно го прочитаа ракописот за овој учебник и со своите сугестии и забелешки значително придонесоа за подобрување на неговиот квалитет.

Авторите однапред ќе бидат благодарни на секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, и веруваат дека оваа книга ќе придонесе студентите побрзо и полесно да ги совладуваат целите предвидени со предметните програми во рамките на соодветните студиски програми.

Јули, 2019 Од авторите

СОДРЖИНА

1. ВЕКТОРИ ВО $\mathbb{R}^n$ И $\mathbb{C}^n$

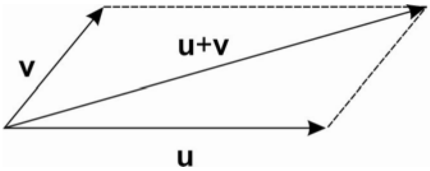
1.1 Вовед

Во физиката често се појавуваат величини, како што се температурата, време, маса, волумен итн., кои имаат само „големина", и се наполно определени само со вредности во множеството реални броеви, наречени **скалари.**

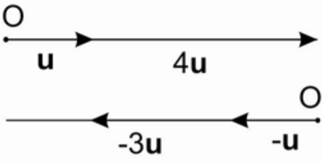
Од друга страна, постојат величини, како што се силата, брзината, забрзувањето итн., коишто имаат „големина" и „насока". Овие величини се определени со насочени отсечки со почеток во фиксирана точка О, наречени **вектори**.

Ќе започнеме со дефинирање на следниве операции со вектори.

(i) **Собирање**. Збирот $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ на два вектори $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ е дијагоналата на паралелограмот формиран со $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ како што е прикажано на цртеж 1.



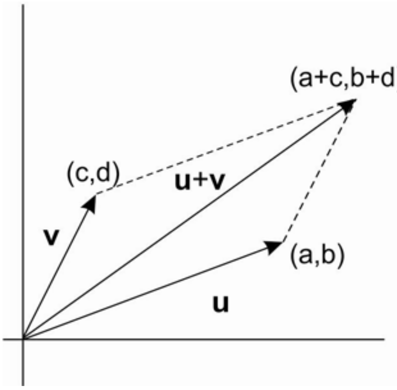
Цртеж 1



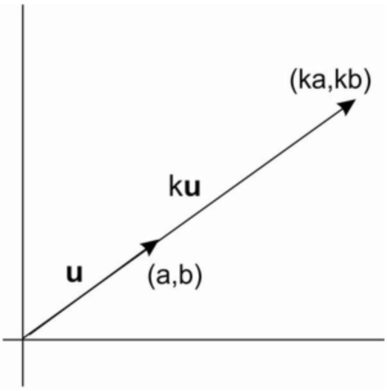
Цртеж 2

(ii) **Множење со скалар**. Производот $k\mathbf{u}$ на реален број k и вектор $\mathbf{u}$ се добива со множење на должината на векторот $\mathbf{u}$ со k. Притоа, производот има иста насока како векторот $\mathbf{u}$ ако $k > 0,$ и има спротивна насока од насоката на векторот $\mathbf{u}$ ако $k < 0,$ како што е прикажано на цртеж 2. Ако $k = 0,$ тогаш $k\mathbf{u} = 0.$

Ако координатниот почеток го избереме за почетна точка O на векторите, тогаш секој вектор е еднозначно определен со координатите на своите крајни точки, коишто претставуваат подреден пар реални броеви. Во продолжение ќе ја предочиме врската меѓу дефинираните операции и координатите на крајните точки на векторите.



Цртеж 3



Цртеж 4

(i) **Собирање**. Ако (a,b) и (c,d) се координатите на крајните точки на векторите $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, соодветно, тогаш $(a+c,b+d)$ се координатите на крајните точки на векторот $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ (цртеж 3).

(ii) **Множење со скалар**. Ако (a,b) се координатите на крајните точки на векторот $\mathbf{u}$ тогаш (ka,kb) се координатите на крајните точки на векторот $k\mathbf{u}$ (цртеж 4).

Математички, го идентификуваме векторот со неговите крајни точки, односно, подредениот пар (a,b) од реални броеви го сметаме за вектор. Овој пристап може да го генерализираме и да сметаме дека подредена n-торка $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ од реални броеви е вектор. Уште повеќе, можеме да сметаме дека координатите на n-торката се комплексни броеви.

1.2 Вектори во $\mathbb{R}^n$

Множеството од сите подредени n-торки реални броеви се нарекува реален n-димензионален простор и ќе го означуваме со $\mathbb{R}^n$. Секоја n-торка

$$u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$$

во $\mathbb{R}^n$ ќе ја нарекуваме **точка** или **вектор**, додека реалните броеви $u_i,\ i=1,2,\dots,n$ ќе ги нарекуваме **координати** на векторот $\mathbf{u}$. Елементите од множеството реални броеви $\mathbb{R}$ ќе ги нарекуваме **скалари**.

Пример. Да ги разгледаме векторите

$$(0,1), \quad (1,-3), \quad (0,-2,\sqrt{5}), \quad (0,-2,5), \quad \left(\frac{1}{2},-4,0,\frac{3}{7}\right)$$

Првите два вектора имаат по две координати и претставуваат точки во $\mathbb{R}^2$, третиот и четвртиот вектор имаат по три координати и претставуват точки во $\mathbb{R}^3$, додека последниот вектор има четири координати и претставува точка во $\mathbb{R}^3$. ♦

Два вектора $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ и $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ се еднакви ако соодветните координати им се еднакви, односно ако важи

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ \ldots,\ u_n = v_n.$$

Пример. Векторите $u=(1,2,3)$ и $v=(3,2,1)$ не се еднакви бидејќи соодветните компоненти не им се еднакви. ♦

Пример. Да претпоставиме дека $(x-y,x+y,z-1)=(4,2,3)$. Тогаш, според дефиницијата за еднаквост на вектори, го добиваме системот

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \\ z-1=3 \end{cases}$$

чиешто решение е $x=3$, $y=-1$ и $z=4$. ♦

1.3 Собирање на вектори и множење на вектор со скалар

Нека u и v се вектори во $\mathbb{R}^n$

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \text{ и } v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Збир на векторите u и v е векторот $u + v$ добиен со собирање на соодветните координати

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

Производ на векторот u со реален број k е векторот ku добиен со множење на секоја координата од векторот u со k

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

Да забележиме дека $u + v$ и ku се исто така вектори во $\mathbb{R}^n$. Исто така дефинираме

$$-u = (-1)u \quad \text{и} \quad u - v = u + (-v)$$

Збир на вектори со различен број на координати не се дефинира.

Пример. Нека $u = (1, -3, 2, 4)$ и $v = (3, 5, -1, -2)$. Тогаш

$$u + v = (1 + 3, -3 + 5, 2 - 1, 4 - 2)$$

$$5u = (5 \cdot 1, 5 \cdot (-3), 5 \cdot 2, 5 \cdot 4) = (5, -15, 10, 20)$$

$$2u - 3v = (2, -6, 4, 8) + (-9, -15, 3, 6) = (-7, -21, 7, 14) \ \blacklozenge$$

Пример. Векторот $(0, 0, \ldots, 0)$ во $\mathbb{R}^n$ го означуваме со 0 и го нарекуваме **нулти вектор**. За било кој вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$$u + 0 = (u_1 + 0, u_2 + 0, \ldots, u_n + 0) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = u \ \blacklozenge$$

Основните својства на операцијата собирање вектори како и множење на вектор со скалар се дадени со следната теорема:

Теорема 1.1. За било кои вектори $u,v,w \in \mathbb{R}^n$ и било кои скалари $k,k' \in \mathbb{R}$ важат следниве тврдења

(i) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (ii) $u+0=u$

(iii) $u+(-u)=0$ (iv) $u+v=v+u$

(v) $k(u+v)=ku+kv$ (vi) $(k+k')u = ku+k'u$

(vii) $(kk')u = k(k'u)$ (viii) $1u=u$

Доказ. Доказот почива на фактот дека $(\mathbb{R},+,\cdot)$ е поле. Нека $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ и $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ се произволни вектори во $\mathbb{R}^n$.

(i)
$$\begin{aligned}(u+v)+w &= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+((v_1,v_2,\ldots,v_n)+(w_1,w_2,\ldots,w_n)) = \\ &= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1+w_1,v_2+w_2,\ldots,v_n+w_n) = \\ &= (u_1+(v_1+w_1),u_2+(v_2+w_2),\ldots,u_n+(v_n+w_n) = \\ &= ((u_1+v_1)+w_1,(u_2+v_2)+w_2,\ldots,(u_n+v_n)+w_n) = \\ &= (u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n)+(w_1,w_2,\ldots,w_n) = \\ &= ((u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n))+(w_1,w_2,\ldots,w_n) = \\ &= u+(v+w)\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}u+0 &= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+(0,0,\ldots,0) = \\ &= (u_1+0,u_2+0,\ldots,u_n+0) = \\ &= (u_1,u_2,\ldots,u_n) = u\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}u+(-u) &= (u_1,u_2,\ldots,u_n)+(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n) = \\ &= (u_1-u_1,u_2-u_2,\ldots,u_n-u_n) = \\ &= (0,0,\ldots,0) = 0\end{aligned}$$

(iv) $u+v=(u_1,u_2,\dots,u_n)+(v_1,v_2,\dots,v_n)=$

$=(u_1+v_1,u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)=$

$=(v_1+u_1,v_2+u_2,\dots,v_n+u_n)=v+u$

(v) $k(u+v)=k((u_1,u_2,\dots,u_n)+(v_1,v_2,\dots,v_n))=$

$=k(u_1+v_1,u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)=$

$=(k(u_1+v_1),k(u_2+v_2),\dots,k(u_n+v_n))=$

$=(ku_1+kv_1,ku_2+kv_2,\dots,ku_n+kv_n)=$

$=(ku_1,ku_2,\dots,ku_n)+(kv_1,kv_2,\dots,kv_n)=$

$=k(u_1,u_2,\dots,u_n)+k(v_1,v_2,\dots,v_n)=ku+kv$

(vi) $(k+k')u=(k+k')(u_1,u_2,\dots,u_n)=$

$=((k+k')u_1,(k+k')u_2,\dots,(k+k')u_n)=$

$=(ku_1+k'u_1,ku_2+k'u_2,\dots,ku_n+k'u_n)=$

$=(ku_1,ku_2,\dots,ku_n)+(k'u_1,k'u_2,\dots,k'u_n)=$

$=k(u_1,u_2,\dots,u_n)+k'(u_1,u_2,\dots,u_n)=ku+k'u$

(vii) $(kk')u=(kk')(u_1,u_2,\dots,u_n)=$

$=((kk')u_1,(kk')u_2,\dots,(kk')u_n)=$

$=(k(k'u_1),k(k'u_2),\dots,k(k'u_n))=$

$=k(k'u_1,k'u_2,\dots,k'u_n)=k(k'u)$

(viii) $1u=1(u_1,u_2,\dots,u_n)=$

$=(1u_1,1u_2,\dots,1u_n)=(u_1,u_2,\dots,u_n)=u$ ■

Забелешка. Нека u и v се вектори во $\mathbb{R}^n$ такви што $u=kv$ за некој ненулти скалар $k\in\mathbb{R}$. Тогаш велиме дека u има иста насока со v ако $k>0$, и спротивна насока од v ако $k<0$.

1.4 Скаларен производ

Нека u и v се вектори во $\mathbb{R}^n$

$$u=(u_1,u_2,\dots,u_n) \text{ и } v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$$

Скларен производ $u\cdot v$ на векторите u и v е скаларот добиен со множење на соодветните компоненти и собирање на добиените производи

$$u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$$

Векторите u и v се нарекуваат **ортогонални** или **нормални** ако нивниот скаларен производ е нула, односно $u\cdot v=0$.

Пример. Нека $u=(1,-2,3,-4)$, $v=(6,7,1,-2)$ и $w=(5,-4,5,7)$. Тогаш имаме дека

$$u\cdot v=1\cdot 6+(-2)\cdot 7+3\cdot 1+(-4)\cdot(-2)=3$$

$$u\cdot w=1\cdot 5+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 5+(-4)\cdot 7=0$$

Може да заклучиме дека векторите u и w се ортогонални. ♦

Во следнава теорема се дадени основните својства на скаларниот производ во $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2. За било кои вектори $u,v,w\in\mathbb{R}^n$ и било кој скалари $k\in\mathbb{R}$ важат следниве тврдења:

(i) $(u+v)\cdot w=u\cdot w+u\cdot w$ (ii) $(ku)\cdot v=k(u\cdot v)$

(iii) $u\cdot v=v\cdot u$ (iv) $u\cdot u\geq 0$ и $u\cdot u=0$ акко $u=0$

Доказ. Најнапред да ги запишеме векторите преку своите координати

$$u=(u_1,u_2,\dots,u_n),\quad v=(v_1,v_2,\dots,v_n) \text{ и } w=(w_1,w_2,\dots,w_n)$$

Доказот следува од равенствата

$$\begin{aligned}(i)\,(u+v)\cdot w &= (u_1+v_1,u_2+v_2,\dots,u_n+v_n)\cdot(w_1,w_2,\dots,w_n)=\\ &=(u_1+v_1)w_1+(u_2+v_2)w_2+\cdots+(u_n+v_n)\cdot w_n=\\ &=(u_1w_1+v_1w_1)+(u_2w_2+v_2w_2)+\cdots+(u_nw_n+v_nw_n)=\\ &=(u_1w_1+u_2w_2+\cdots+u_nw_n)+(v_1w_1+v_2w_2+\cdots+v_nw_n)=\\ &=u\cdot w+v\cdot w\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ (ku)\cdot v &= (ku_1,ku_2,\dots,ku_n)\cdot(v_1,v_2,\dots,v_n)=\\ &=(ku_1)v_1+(ku_2)v_2+\cdots+(ku_n)v_n=\\ &=k(u_1v_1)+k(u_2v_2)+\cdots+k(u_nv_n)=\\ &=k(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)=\\ &=k(u\cdot v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(iii)\ u\cdot v &= u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=\\ &=v_1u_1+v_2u_2+\cdots+v_nu_n=\\ &=v\cdot u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(iv)\ u\cdot u &= u_1u_1+u_2u_2+\cdots+u_nu_n=\\ &=u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots+u_n{}^2\geq 0\end{aligned}$$

Притоа, имаме $u\cdot u=0$ ако и само ако $u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots+u_n{}^2=0$ ако и само ако $u_1=u_2=\cdots=u_n=0$ ако и само ако $u=0$. ■

Забелешка. Множеството $\mathbb{R}^n$ со вака дефинираните операции собирање на вектори и множење на вектор со скалар, како и скаларниот производ се нарекува **n-димензионален Евклидски простор**.

1.5 Норма и растојание

Нека u и v се вектори во $\mathbb{R}^n$

$$u=(u_1,u_2,\dots,u_n) \text{ и } v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$$

Растојание $d(u,v)$ меѓу точките u и v се дефинира со

$$d(u,v)=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}$$

Норма или **должина** на векторот u се дефинира со

$$\|u\|=\sqrt{u\cdot u}=\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots+u_n{}^2}$$

Според Теорема 1.2 $u\cdot u\geq 0,$ па квадратниот корен постои.

Да забележиме дека $\|u\|\geq 0$ и $\|u\|=0$ ако и само ако $u=0.$

Освен тоа, имаме $\|u-v\|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}$, па може да заклучиме дека

$$\|u-v\|=d(u,v)$$

Во таа смисла, $\|u\|=\|u-0\|=d(u,0),$ односно $\|u\|$ е растојанието на точката $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ од координатниот почеток.

Пример. Нека $u=(1,-2,4,1)$ и $v=(3,1,-5,0).$ Тогаш

$$\|u\|=\|(1,-2,4,1)\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2+1^2}=\sqrt{22}$$

$$\|u\|=\|(3,1,-5,0)\|=\sqrt{3^2+1^2+(-5)^2+0^2}=\sqrt{35}$$

$$d(u,v)=\sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2+(4+5)^2+(1-0)^2}=\sqrt{95}$$

$$\|u-v\| = \|(1-3,-2-1,4+5,1-0)\| =$$

$$= \sqrt{(1-3)^2+(-2-1)^2+(4+5)^2+(1-0)^2} = \sqrt{95} \quad \blacklozenge$$

Забелешка. Вектор е се нарекува **единичен вектор** ако неговата норма е 1, односно $\|e\| = 1$. Да забележиме дека за било кој вектор $u \in \mathbb{R}^n$, векторот $e_u = \dfrac{u}{\|u\|}$ е единичен вектор со иста насока како векторот u.

Во продолжение ќе проследиме фундаментална врска кај векторите позната под името Коши-Шварцовото неравенство.

Теорема 1.3. (**Коши-Шварцовото неравенство**) За било кои $u, v \in \mathbb{R}^n$, важи неравенството

$$|u \cdot v| \le \|u\| \, \|v\| \tag{1}$$

Доказ. Нека $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Тогаш неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)^2-(u^2{}_1+u^2{}_2+\cdots+u^2{}_n)(v^2{}_1+v^2{}_2+\cdots+v^2{}_n) \le 0$$

Да ја разгледаме квадратната функција

$$f(x) = (u_1x-v_1)^2+(u_2x-v_2)^2+\cdots+(u_nx-v_n)^2 =$$

$$= (u_1{}^2+u_2{}^2+\cdots+u_n{}^2)x^2-2(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)x+$$

$$+(v_1{}^2+v_2{}^2+\cdots+v_n{}^2)$$

Бидејќи $f(x) \ge 0$ заклучуваме дека нејзината дискриминанта е негативна, односно

$$4(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)^2-4(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2)(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2)\le 0$$

од каде што следува дека

$$(u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n)^2\le(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2)(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2)$$

што е еквивалентно со неравенството (1). ■

Забележуваме дека $|u\cdot v|=\|u\|\,\|v\|$ ако $u=\lambda v$, за $\lambda\ge 0$, што значи векторите u и v се исто насочени. Освен тоа $|u\cdot v|=-\|u\|\,\|v\|$ ако $u=\lambda v$, за $\lambda\le 0$, што значи векторите u и v се спротивно насочени.

Врз основа на Теорема 1.3 аголот θ меѓу векторите u и v го дефинираме со релацијата

$$\cos\theta=\frac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$$

Притоа забележуваме $u\cdot v=0$ ако и само ако $\cos\theta=0$, односно $\theta=\frac{\pi}{2}$, што е во согласност со дефиницијата за ортогоналност на вектори.

1.6 Комплексни броеви

Множеството од комплексни броеви го означуваме со $\mathbb{C}$. Формално, комплексен број е подреден пар (a,b) од реални броеви a и b. Притоа, еднаквост, собирање и множење на комплексни броеви се дефинира на следниов начин

$(a,b)=(c,d)$ ако и само ако $a=c$ и $b=d$

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Секој комплексен број a може да се идентификува со реален број $(a,0)$ со придружувањето $a\mapsto(a,0)$. Ова е можно бидејќи придружувањето ги запазува операциите собирање и множење реални броеви

$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$ и $(a,0)(b,0)=(ab,0)$

Заради направената идентификација можеме да сметаме дека множеството реални броеви $\mathbb{R}$ е подмножество од множеството комплексни броеви $\mathbb{C}$ и да го замениме $(a,0)$ со a секогаш кога е корисно и возможно.

Комплексниот број $(0,1)$, означен со i има својство дека

$$i^2=ii=(0,1)(0,1)=(-1,0) \text{ или } i=\sqrt{-1}$$

Уште повеќе користејќи го фактот дека

$$(a,b)=(a,0)+(0,b) \text{ и } (0,b)=(b,0)(0,1)$$

имаме дека

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)(0,1)=a+ib$$

Ознаката $a+ib$ е попрактична од ознаката (a,b). Имено користејќи ги дистрибутувниот и комутативниот закон, и фактот дека $i^2=-1$ имаме дека

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+bi+di=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+ib)(c+id)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

Конјугиран на комплексниот број $z=(a,b)=a+bi$ се нарекува бројот

$$\overline{z}=a-bi$$

Забележуваме дека $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$. Освен тоа, ако $z\neq 0$, тогаш инверзниот z^{-1} на z ќе биде

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Делењето и одземањето на комплексни броеви, и спротивен број на комплексен број се дефинирани со

$$\frac{w}{z}=wz^{-1},\ z\neq 0;\qquad w-z=w+(-z);\qquad -z=(-1)z$$

Пример. Нека $z=2+3i$ и $w=5-2i$. Тогаш

$$z+w=(2+3i)+(5-2i)=(2+5)+(3-2)i=7+i$$

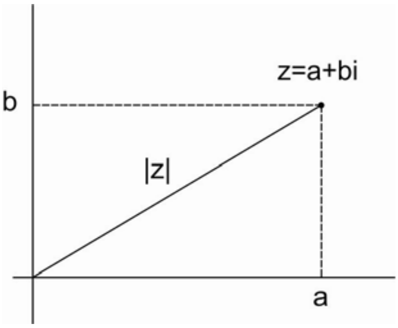
$$zw=(2+3i)(5-2i)=10+15i-4i-6i^2=16+11i$$

$$\overline{z}=\overline{2+3i}=2-3i \text{ и } \overline{w}=\overline{5-2i}=5+2i$$

$$\frac{w}{z}=\frac{5-2i}{2+3i}=\frac{(5-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{4}{13}-\frac{19}{13}i \ \blacklozenge$$

Аналогно како што реалните броеви можат да бидат претставени како точки од права, комплексните броеви може да бидат претставени како точки од рамнина (цртеж 5).

Имено на точката (a,b) од координатната рамнина и го придружуваме комплексниот број $z=a+bi$. Модул на комплексниот број



Цртеж 5

z се дефинира со растојанието на z од координатниот почеток

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Забележуваме дека $|z|$ е еднаков на нормата на векторот (a,b). Исто така, $|z| = z\bar{z}$.

Пример. Нека $z = 4 + 3i$ и $w = 2 - 5i$. Тогаш

$$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ и } |w| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

Забелешка. Множеството $\mathbb{C}$ во однос на операциите собирање (+) и множење (·) образува поле, односно $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ е поле.

1.7 Вектори во $\mathbb{C}^n$

Множеството од n-торки комплексни броеви, означено со $\mathbb{C}^n$ се нарекува **n-димензионален комплексен простор**. Како и кај n-торки реални броеви, елементите на $\mathbb{C}^n$ се нарекуваат **точки** или **вектори**, а елементите од $\mathbb{C}$ се нарекуваат **скалари.**

Нека z и w се вектори во $\mathbb{C}^n$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \text{ и } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

Збир на векторите z и w е векторот $z + w$ добиен со собирање на соодветните координати

$$z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots, z_n + w_n)$$

Производ на векторот z со комплексниот број k е векторот kz добиен со множење на секоја координата од векторот z со k

$$kz = (kz_1, kz_2, \ldots, kz_n)$$

Нека z и w се вектори во $\mathbb{C}^n$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \text{ и } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

Пример. Имаме

$$(3 + 2i, 3 - i, 2) + (4 + 3i, 7i, 0) = (7 + 5i, 3 + 6i, 2) \text{ и}$$

$$3i(3 - 5i, 2 + 4i, 2i) = (15 + 9i, -12 + 6i, -6) \ \blacklozenge$$

Нека z и w се вектори во $\mathbb{C}^n$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \text{ и } w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

Внатрешен производ $z \cdot w$ на векторите z и w е скаларот добиен со множење на соодветните координати на z со соодветните координати на w и собирање на добиените производи

$$z \cdot w = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}$$

Во случај кога z и w се реални вектори ($w_i = \overline{w_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$), тогаш $z \cdot w$ се совпаѓа со скаларниот производ на z и w.

Норма векторот на z се дефинира со

$$\|z\| = \sqrt{z\cdot z} = \sqrt{z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + \cdots + z_n\overline{z_n}} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

Забележуваме дека $z\cdot z$ и $\|z\|$ се позитивни реални броеви ако $z \neq 0$ и тие се еднакви на нула кога $z = 0$.

Пример. Нека $z = (2+3i, 4-i, 2i)$ и $w = (3-2i, 5, 4-6i)$. Тогаш

$$\begin{aligned} z\cdot w &= (2+3i, 4-i, 2i)\cdot(3-2i, 5, 4-6i) = \\ &= (2+4i)(\overline{3-2i}) + (4-i)(\overline{5}) + (2i)(\overline{4-6i}) = \\ &= (2+4i)(3+2i) + (4-i)(5) + (2i)(4+6i) = \\ &= 6+19i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\cdot z &= (2+3i, 4-i, 2i)\cdot(2+3i, 4-i, 2i) = \\ &= (2+3i)(\overline{2+3i}) + (4-i)(\overline{4-i}) + (2i)\cdot(\overline{2i}) = \\ &= (2+3i)(2-3i) + (4-i)(4+i) + (2i)\cdot(-2i) = 34 \end{aligned}$$

$$\|z\| = \sqrt{z\cdot z} = \sqrt{34}$$ ♦

Забелешка. Множеството $\mathbb{C}^n$ со вака дефинираните операции собирање на вектори и множење на вектор со скалар, како и внатрешниот производ се нарекува комплексен **n-димензионален Евклидски простор**.

Забелешка. Ако внатрешниот производ $z\cdot w$ се дефинира со

$$z\cdot w = z_1w_1 + z_2w_2 + \cdots + z_nw_n$$

тогаш може да се случи $z\cdot z = 0$ дури и кога $z \neq 0$. На пример, ако $z = (1, i, 0)$ тогаш $z\cdot z = (1, i, 0)\cdot(1, i, 0) = 1 - 1 + 0 = 0$.

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај

а) $(3,-4,5)+(1,1,-2)$ б) $-3(5,-5,-6)$

2. Нека $u=(2,-7,1)$, $v=(-3,0,4)$ и $w=(0,5,-8)$. Најди

а) $5u$ б) $-2v$ в) $3u-4v$ г) $2u+3v-4w$

3. Најди ги x и y, ако

а) $(4,y)=x(2,3)$ б) $x(1,2)=-4(y,3)$

в) $x(2,y)=y(1,-2)$ г) $(x,x+y)=(y-2,6)$

4. Најди ги x, y и z, ако

а) $(2,-3,4)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)$

б) $(8,-1,2)=x(1,1,1)+y(1,-1,0)+z(1,0,0)$

5. Пресметај го скаларниот производ $u\cdot v$, ако

а) $u=(2,-3,6)$, $v=(8,2,-3)$

б) $u=(1,-8,0,5)$, $v=(4,-3,2,0)$

6. Пресметај го k така што векторите u и v да бидат ортогонални, ако

а) $u=(1,k,-3)$, $v=(2,-5,4)$

б) $u=(2,3k,-4,1,5)$, $v=(6,-1,3,7,2k)$

7. Нека се дадени векторите

$$e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0) \text{ и } e_3=(0,0,1).$$

Покажи дека за било кој вектор $u = (a,b,c)$ во $\mathbb{R}^3$ важи

а) $u = ae_1 + be_2 + ce_3$

б) $u \cdot e_1 = a,\ \ u \cdot e_2 = b$ и $u \cdot e_3 = c$

8. Нека се дадени векторите

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0),\ \ e_2 = (0,1,0,\dots,0),\ \ \dots\dots\ e_3 = (0,0,\dots,0,1)$$

Покажи дека за било кој вектор $u = (u_1,u_2,\dots,u_n)$ во $\mathbb{R}^n$ важи

а) $u = u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_ne_n$

б) $u \cdot e_1 = u_1,\ \ u \cdot e_2 = u_2,\ \ \dots\dots\ \ u \cdot e_n = u_n$

9. Пресметај го растојанието $d(u,v)$ меѓу векторите u и v, ако

а) $u = (1,7),\ \ v = (6,-5)$

б) $u = (3,-5,4),\ \ v = (6,2,-1)$

в) $u = (5,3,-2,-4,-1),\ \ v = (2,-1,0,-7,2)$

10. Најди го k, ако $d(u,v) = 6,\ \ u = (2,k,1,-4)$ и $v = (3,-1,6,-3)$

11. Пресметај $\|u\|$ ако

а) $u = (2,-7)$ б) $u = (3,-12,-4)$

12. Најди го k, ако $\|u\| = \sqrt{39}$ и $u = (1,k,-2,5)$.

13. Нека $u = (3,-2,1,4)$ и $v = (7,1,-3,6)$. Пресметај

а) $u + v$ б) $4u$ в) $2u - 3v$

г) $u \cdot v$ д) $\|u\|$ и $\|v\|$ ѓ) $d(u,v)$

14. Покажи дека за било кои $u, v \in \mathbb{R}^n$, важи неравенството

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

15. Упрости ги изразите

а) $(5+3i)(2-7i)$ б) $(4+3i)^2$ в) $\frac{1}{3-4i}$

г) $\frac{2-7i}{5+3i}$ д) $(1+3i)^3$ ѓ) $\left(\frac{1}{2-3i}\right)^2$

16. Нека $z = 2-3i$ и $w = 4+5i$. Пресметај

а) $z+w$ б) zw в) $\frac{z}{w}$ г) $\bar{z}$

д) $\overline{w}$ ѓ) $|z|$ е) $|w|$

17. Докажи дека за било кои комплексни броеви $z, w \in \mathbb{C}$, важи

а) $\overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w}$ б) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$ в) $\bar{\bar{z}} = z$

18. Докажи дека за било кои комплексни броеви $z, w \in \mathbb{C}$, важи

а) $|z+w| \leq |z| + |w|$ б) $|zw| = |z||w|$

19. За векторите $z = (3-2i, 4i, 1+6i)$ и $w = (5+i, 2-3i, 5)$, најди

а) $z+w$ б) $4iz$ в) wi

г) $(1+i)w$ д) $(1-2i)u + (3+i)w$

20. Пресметај ги внатрешните производи $z \cdot w$ и $w \cdot z$, ако

а) $z = (1-2i, 3+i)$ и $w = (4+2i, 5-6i)$

б) $z = (3-2i, 4i, 1+6i)$ и $w = (5+i, 2-3i, 7+2i)$

21. Пресметај $\|z\|$ ако

а) $z=(3+4i,5-4i,1-6i)$ б) $z=(4-i,2i,3+2i,1-5i)$

22. Нека $u=(7-2i,2+5i)$ и $v=(1+i,1,-3-6i)$. Пресметај

а) $u+v$ б) $2iu$ в) $(3-i)v$

г) $u\cdot v$ д) $\|u\|$ и $\|v\|$

23. Докажи дека за било кои комплексни броеви $z,w\in\mathbb{C}$, и за било кој скалар k, важи

а) $z\cdot w=\overline{w\cdot z}$ б) $(kz)\cdot w=k(z\cdot w)$ в) $z\cdot(kw)=\overline{k}(z\cdot w)$

2. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

2.1 Вовед

Системите линеарни равенки играат важна и мотивирачка улога во предметот на линеарната алгебра. Всушност, многу проблеми во линеарна алгебра се сведуваат на наоѓање решение на систем линеарни равенки. Така, техниките воведени во ова поглавје ќе се применуваат во концепти кои што ќе бидат воведени подоцна. Од друга страна, некои од резултатите ќе ни дадат нови сознанија за структурата и својствата на системите линеарни равенки.

Без губење на општоста може да претпоставиме дека сите скалари кои што ќе ги користиме во ова поглавје припаѓаат во полето реални броеви $\mathbb{R}$.

2.2 Линеарна равенка

Под линеарна равенка во полето реални броеви $\mathbb{R}$, ќе подразбираме израз од облик

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \qquad (2.1)$$

каде што $a_{i,}\, b \in \mathbb{R}$ и x_i се непознати. Скаларите a_k се нарекуваат **коефициенти** пред непознатите x_k, соодветно, а b се нарекува **слободен член** на равенката. Множество вредности за непознатите

$$x_1 = u_1,\ x_2 = u_2, \ldots,\ x_n = u_n,$$

е решение на (3.1) ако важи релацијата

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = b$$

Во таков случај велиме дека множеството вредности ја **задоволува** равенката. Множеството решенија на равенката може да го запишеме со подредена $n-$торка $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Забелешка. Со цел да се избегнат индекси, кога бројот на непозати е релативно мал, обично ги користиме ознаките x; y за две непознати; x; y; z за три непознати; и x; y; z; t за четири непознати.

Пример. Да ја разгледаме следнава линеарна равенка со три непознати x; y; z:

$$x + 2y - 4z + t = 3$$

Забележуваме дека $x = 3,\ y = 2,\ z = 1,\ t = 0,$ или, еквивалентно, подредената четворка $u = (3, 2, 1, 0)$ е решение на равенката, бидејќи

$$3 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 0 = 3$$

Од друга страна, подредената четворка $v = (1, 2, 4, 1)$ не е решение на равенката, бидејќи $1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 1 = -10 \neq 3.$ Други решенија на равенката се векторите $(3,0,0,0)$, $\left(0,\frac{3}{2},0,0\right)$, $\left(0,0,-\frac{3}{4},0\right)$, $(0,0,0,3)$. ♦

Да се реши линеарна равенка значи да се најде множеството од сите n-торки $(u_1,u_2,...,u_n)$ кои што ја задоволуваат равенката. При решавање на равенката (2.1) наидуваме на следниве три случаи:

Случај I. Ако барем еден од коефициентите $a_i \neq 0$, да речеме $a_1 \neq 0$, тогаш равенката (2.1) е еквивалентна со равенката

$$a_1x_1 = b - a_2x_2 - ... - a_nx_n,$$

односно, со равенката

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 - ... - \frac{a_n}{a_1}x_n$$

Земајќи произволни вредности $t_2,...,t_n$ за $x_2,...,x_n$, соодветно, добиваме вредност $\frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}t_2 - ... - \frac{a_n}{a_1}t_n$ за x_1 така што

$$\left\{\left(\frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}t_2 - ... - \frac{a_n}{a_1}t_n, t_2, \ldots, t_n\right) \mid t_2,...,t_n \in \mathbb{R}\right\}$$

го претставува множеството решенија на равенката (2.1).

Специјално, ако $n = 1$ ја добиваме равенката

$$ax = b \ (a \neq 0)$$

која што има единствено решение $x = \frac{b}{a}$.

Пример. Да ја разгледаме равенката

$$3x - 2y + z = 6$$

Таа е еквивалентна со равенките $3x = 2y - z + 6$ и $x = 2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z$. Земајќи произволни вредности за y и z, $y = t_1$ и $z = t_2$ се добива множеството решенија

$$\left\{ \left(2 + \frac{2}{3}t_1 - \frac{1}{3}t_2, t_2, t_3 \right) | \, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Да забележиме дека се можни и други презентации на множеството решенија. ♦

Случај II Ако сите коефициенти во равенката (2.1) се еднакви на нула, и $b \neq 0$, тогаш добиваме

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b$$

од каде што заклучуваме дека равенката нема решение.

Случај III Ако сите коефициенти во равенката (2.1) се еднакви на нула и $b = 0$, тогаш равенката гласи

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$$

и таа е задоволена за секоја n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, односно множеството решенија на равенката е целото множество $\mathbb{R}^n$.

2.3 Системи линеарни равенки

Да разгледаме систем од m линеарни равенки со n непознати $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

каде што a_{ij}, $i = 1,2,..,m$, $j = 1,2,...,n$, и b_i, $i = 1,2,..,m$, се во полето реални броеви $\mathbb{R}$. Ако $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$ тогаш системот се нарекува **хомоген** систем линеарни равенки. Подредена $n-$торка реални броеви $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ се нарекува **решение** (**партикуларно решение**) на системот ако $n-$торката ја задоволува секоја равенка на системот. Множеството решенија на системот се нарекува **општо решение** на системот. Да се реши системот значи да се најде општото решение на системот.

Ако во системот (2.2) барем еден слободен член е различен од нула, тогаш системот линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

се нарекува хомоген систем асоциран со системот (2.2). Притоа системот (2.3) секогаш има едно решение $(0,0,....,0)$ наречено **нулто** или **тривијално решение**. Секое друго решение на системот, ако постои, се нарекува **ненулто** или **нетривијално решение**.

Се поставува прашањето каква е врската помеѓу системите (2.2) и (2.3).

Теорема 2.1. Ако u е партикуларно решение на нехомогениот систем (2.2) и W е општото решение на асоцираниот хомоген систем (2.3), тогаш

$$u + W = \{u + w \mid w \in W\}$$

е општо решение на нехомогениот систем (2.2).

Доказ. Нека U е општо решение на нехомогениот систем (2.2). За произволно партикуларно решение $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ на системот (2.2), и за произволно општо решение $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ на хомогениот систем (2.3) имаме дека

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n = b_i, \; i = 1,2,\ldots,m$$

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n = 0, \; i = 1,2,\ldots,m$$

Тогаш за $u + w = (u_1 + w_1, u_2 + w_2, \ldots, u_n + w_n)$ добиваме дека

$$\begin{aligned} &a_{i1}(u_1 + w_1) + a_{i2}(u_2 + w_2) + \cdots + a_{in}(u_n + w_n) = \\ &= \left(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n\right) + \left(a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n\right) = \\ &= b_i + 0 = b_i, \; i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

од каде што заклучуваме дека $u + w$ е решение на системот (2.2), што повлекува дека $u + w \in U$. Со тоа покажавме дека $u + W \subseteq U$.

Обратно, произволна n-торка $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in U$ може да се запише во облик $v = u + (v - u)$, за некое $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U$. Од

$$\begin{aligned} &a_{i1}(u_1 - w_1) + a_{i2}(u_2 - w_2) + \cdots + a_{in}(u_n - w_n) = \\ &= \left(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n\right) - \left(a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n\right) = \\ &= b_i - b_i = 0, \; i = 1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

може да заклучиме дека $v-u\in W$, од каде што следува дека $v\in u+W$. Според тоа, имаме дека $U\subseteq u+W$. Конечно, од двете инклузии следува дека $U=u+W$, односно $u+W$ е општо решение на нехомогениот систем (2.2). ■

2.4 Решение на систем линеарни равенки

Да забележиме дека погорната теорема е од теоретско значење и не дава метод за наоѓање на решенијата на системот (2.2). Во продолжение ќе изнесеме метод за негово решавање, познат како **Гаусов метод на елиминација**.

Чекор 1. Ги пермутираме равенките во системот (2.2), така што во првата равенка пред првата променлива x_1 има ненулти коефициент, односно $a_{11}\neq 0$. Доколку сите коефициенти пред x_i се еднакви на нула, тогаш ги пермутираме променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ така што да биде $a_{11}\neq 0$.

Чекор 2. За секое $i>1$ за кој што $a_{i1}\neq 0$ ја применуваме трансформацијата

$$L_i \to -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i,$$

односно, $i-$тата линеарна равенка L_i ја заменуваме со равенката добиена со множење на првата равенка L_1 со $-a_{i1}$ и додавање на $i-$тата линеарна равенка L_i помножена со a_{11}.

Со овој чекор се добива еквивалентен систем на (2.2), односно систем со исто множество решенија како (2.2) од облик

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{2j_2}x_{j_2} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{mj_2}x_{j_2} + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

и притоа $a_{11} \neq 0$. Тука x_{j_2} ја означува првата непозната со ненулти коефициент во равенка различна од првата; според чекор 2 имаме дека $x_{j_2} \neq x_1$.

Пример. Да го разгледаме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 2x + 4y - z + 2v + 2w = 1 \\ 3x + 6y + z - v + 4w = -7 \\ 4x + 8y + z + 5v - w = 3 \end{cases}$$

Ја елимираме непознатата x од втората и третата равенка со примена на следниве трансформации

$$L_2 \to -3L_1 + 2L_2 \quad \text{и} \quad L_3 \to -2L_1 + L_3$$

при што појдовниот систем се сведува на следниот еквивалентен систем

$$\begin{cases} 2x + 4y - z + 2v + 2w = 1 \\ \qquad 5z - 8v + 2w = -17 \\ \qquad 3z + v - 5w = 1 \end{cases}$$

Да забележиме дека непознатата y е елиминирана од втората и третата равенка. Овде непознатата z игра улога на непознатата x_{j_2} погоре. ♦

Да забележиме дека погорните равенки, со исклучок на првата, формираат потсистем со помалку равенки и помалку непознати од појдовниот систем (2.2). Ако во постапката на елиминација се појави равенка од облик

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b,\ \ b\neq 0,$$

тогаш системот е **неконзистентен** или **противречен** и нема решение, додека ако се појави равенка од облик

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$$

тогаш таа равенка може да се отфрли без да се промени решението.

Продолжувајќи ја погорната постапка со секој „помал" потсистем, со индукција добиваме дека системот (2.2) е или неконзистентен или се сведува на еквивалентен систем од следниот облик

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots\ +a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad a_{2j_2}x_{j_2}\ +a_{2,j_2+1}x_{j_2+1}+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{rj_r}x_{j_r}\ +a_{r,j_r+1}x_{j_r+1}+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{2.4}$$

каде што $1<j_2<\cdots<j_r$ и каде што водечките коефициенти

$$a_{11}\neq 0,\ \ a_{2j_2}\neq 0,\ \ldots,\ \ a_{rj_r}\neq 0$$

За системот (2.4) велиме дека е во **ешалонски облик** или **скалест облик**. Непознатите x_i, $i\neq 1,j_2,\ldots,j_r$, се викаат **слободни променливи**. За системот (2.4) важи следната теорема:

Теорема 2.2. За решението на системот (2.4) важи:

(1) Ако $r = n$, односно ако има равенки колку непознати, тогаш системот има единствено решение.

(2) Ако $r < n$, односно ако има помал број равенки отколку непознати, тогаш избирајќи произволни $n - r$ вредности за слободните променливи се добива едно решение на системот.

Доказ. Доказот го спроведуваме со индукција по бројот r на равенки во системот.

Ако $r = 1$ системот се сведува на равенката

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_1,\ a_1 \neq 0$$

Земајќи произволни вредности $x_2 = u_2, \ldots, x_n = u_n$ за слободните променливи добиваме дека

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}u_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}u_n$$

Овие вредности даваат решение на равенката, бидејќи со замена добиваме

$$a_1\left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}u_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1}\right) + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = b_1,$$

Во случај кога $r = n = 1$, равенката $a_1x_1 = b_1$ има единствено решение $x_1 = \frac{b_1}{a_1}$.

Да претпоставиме дека $r > 1$, и дека теоремата важи за систем од $r - 1$ равенки. Потсистемот од (2.4) со $r - 1$ равенки

$$\begin{cases} a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

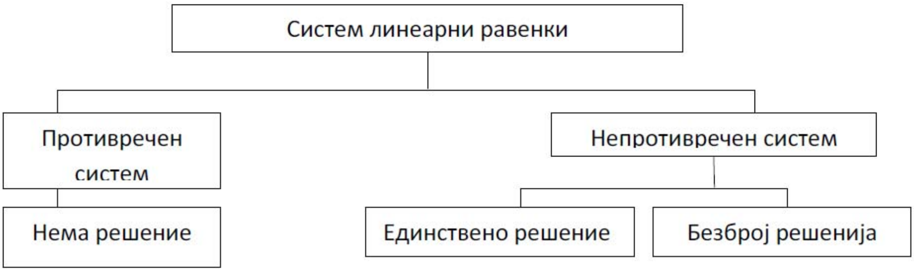
и може да го сметаме за систем по непознатите $x_{j_2}, x_{j_2+1}, \dots, x_n$. Овој систем е во скалеста форма и од индуктивната претпоставка земајќи $(n - j_2 + 1) - (r - 1) = n - j_2 - r + 2$ вредности за слободните променливи, добиваме решение $x_{j_2} = u_{j_2}, x_{j_2+1} = u_{j_2+1}, \dots, x_n = u_n$. Заменувајќи ги овие вредности во првата равенка во (2.4) и земајќи произволни вредности $x_2 = u_2, \dots, x_{j_2-1} = u_{j_2-1}$ за слободните променливи наоѓаме дека

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}u_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}u_n$$

Така, добиваме решение на (2.4) со $(n - j_2 - r + 2) - (j_2 - 2) = n - r$ слободни променливи. Уште повеќе, овие вредности за $x_1, x_2, \dots, x_n$ исто така ги задоволуваат другите равенки, бидејќи во овие равенки коефициентите пред $x_1, x_2, \dots, x_{j_2-1}$ се еднакви на нула.

Ако $n = r$, тогаш $j_2 = 2$. Според индуктивната претпоставка потсистемот од $r - 1$ равенки има единствено решение (бидејќи $r - 1 = n - 1$). Според тоа, x_1 е еднозначено определено од првата равенка во (2.4). Значи, системот (2.4) има единствено решение.■

Според направената дискусија досега ја имаме следната табела:



Заради Теорема 2.1 може да заклучиме дека системот (2.2) има единствено решение ако асоцираниот хомоген систем има само тривијално решение.

Пример. Системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x+\ \ 2y-2z+\ \ 3w=\ 2 \\ 2x+\ \ 4y-3z+\ \ 4w=\ 5 \\ 5x+10y-8z+11w=12 \end{cases}$$

со трансформациите

$$L_2\to -2L_1+L_2 \text{ и } L_3\to -5L_1+L_3$$

сведува на нему еквивалетниот систем

$$\begin{cases} x+\ \ 2y-2z+3w=2 \\ \qquad\qquad z-2w=1 \\ \qquad\quad\ \ 2z-4w=2 \end{cases}$$

Во следниот чекор со трансформацијата

$$L_3\to -2L_2+L_3$$

доаѓаме до систем еквивалентен на погорниот

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ z - 2w = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Очигледно е дека добиениот систем е конзистентен, и бидејќи има повеќе променливи отколку равенки, тој има бесконечно многу решенија.

За наоѓање на партикуларно решение избираме вредности за y и w. На пример, ако $w = 1$ и $y = -2$, со замена во втората равенка добиваме $z = 3$, а потоа со замена во првата равенка добиваме $x = 9$. Според тоа, подредената четворка $(9, -2, 3, 1)$ е партикуларно решение на системот.

За наоѓање на општо решение, на слободните променливи им доделуваме произволни вредности, на пример, $y = a$ и $w = b$. Со замена во втората равенка добиваме $z = 1 + 2b$, а потоа со замена во првата равенка добиваме $x = 4 - 2a + b$. Според тоа, општото решение на системот е подредената четворка $(4 - 2a + b, a, 1 + 2b, b)$, каде што a и b се произволни броеви. Општото решение може да се изрази преку слободните променливи (наместо преку a и b). Во тој случај велиме дека подредената четворка $(4 - 2y + w, y, 1 + 2w, w)$ е решение на дадениот систем. ♦

Да го разгледаме системот од две линеарни равенки со две непознати

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (a_1^2 + b_1^2 \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (a_2^2 + b_2^2 \neq 0) \end{cases}$$

Согласно со погорната дискусија можни се следниве три случаи:

(i) Системот е противречен

(ii) Системот е еквивалентен со две равенки во скалест облик

(iii) Системот е еквивалентен со една равенка во скалест облик

Бидејќи барем еден од коефициентите во првата равенка е различен од нула, односно $a_1 \neq 0$ или $b_1 \neq 0,$ равенката

$$a_1x + b_1y = c_1$$

може да се смета како равенка на права во рамнина. Исто така, барем еден од коефициентите во втората равенка е различен од нула, односно $a_2 \neq 0$ или $b_2 \neq 0,$ равенката

$$a_2x + b_2y = c_2$$

може да се смета како равенка на права во рамнина.

Затоа погорните случаи може да се интерпретираат геометриски на следниов начин:

(i) Двете прави се паралелни (немаат заедничка точка)

(ii) Двете прави се сечат (имаат единствена заедничка точка)

(iii) Двете прави се совпаѓаат (имаат бесконечно многу заеднички точки).

2.5 Решение на хомоген систем линеарни равенки

Методот за решавање на систем линеарни равенки важи и за хомоген систем линеарни равенки. Но, во овој случај отпаѓа можноста за противречен систем, бидејќи $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ е едно решение на системот. Затоа системот секогаш може се редуцира во еквивалентен систем во скалеста форма:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Можни се следниве два случаја:

(i) $r = n$. Тогаш системот има само едно решение (0,…,0)

(ii) $r < n$. Тогаш системот има ненулто решение.

Ако започнеме со помалку равенки отколку непознати, тогаш во скалестиот облик $r < n$ и според тоа системот има ненулто решение. Во тој случај бројот на слободни променливи е $n - r$. Според тоа, ја имаме следнава теорема:

Теорема 2.3. Хомоген систем од линеарни равенки со повеќе променливи отколку равенки има ненулто решение. ■

Пример. Хомогениот систем линеарни равенки

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

може да се редуцира до систем во скалест облик

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Добиениот систем има ненулто решение, бидејќи има две равенки со три непознати во скалест облик. Всушност имаме $3-2=1$ слободна променилва. Ставајќи $z=t$ добиваме $y=\frac{3}{5}t$ и $x=\frac{2}{5}t$. Според тоа, општото решение на системот е

$$\left\{\left(\frac{2}{5}t,\frac{3}{5}t,t\right)\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

Едно негово нетривијално решение е подредената тројка $(2,3,5)$. ♦

Пример. Хомогениот систем линеарни равенки

$$\begin{cases} x+\ \ y-\ z=0 \\ 2x+4y-\ z=0 \\ 3x+2y+2z=0 \end{cases}$$

може да се редуцира до систем во скалест облик

$$\begin{cases} x+y-\ z=0 \\ \quad 2y+z=0 \\ \qquad 11z=0 \end{cases}$$

Добиениот систем има три равенки со три непознати во скалест облик, па затоа има само нулто решение $(0,0,0)$. ♦

Задачи за самостојна работа

Реши ги следниве системи линеарни равенки:

1. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+4y=10 \\ 3x+6y=15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+\ \ y-3z=5 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 5x-3y-\ \ z=16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-\ \ y+4z=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=5 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y-3z+2w=2 \\ 2x+5y-8z+6w=5 \\ 3x+4y-5z+2w=4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-\ \ z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+5y+4z-13w=3 \\ 3x-\ \ y+2z+\ \ 5w=2 \\ 2x+2y+3z-\ \ 4w=1 \end{cases}$

9. Определи ја вредноста k така што системот

$$\begin{cases} kx+y+\ \ z=1 \\ x+ky+\ \ z=1 \\ x+\ \ y+kz=1 \end{cases}$$

(а) има единствено решение б) нема решение

в) има повеќе од едно решение

10. Определи ја вредноста на k така што системот

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ kz=2 \\ 3x+4y+2z=k \\ 2x+3y-\ \ z=1 \end{cases}$$

(а) има единствено решение б) нема решение

в) има повеќе од едно решение

11. Определи ги условите за a и b под кои што системот

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x-\ \ y+2z=b \\ x-5y+8z=c \end{cases}$$

има решение.

12. Определи дали системот има ненулто решение.

а) $\begin{cases} x+3y-2z=0 \\ x-8y+8z=0 \\ 3x-2y+4z=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-4y+7z+4v-5w=0 \\ 9x+3y+2z-7v+\ \ w=0 \\ 5x+2y-3z+\ \ v+3w=0 \\ 6x-5y+4z-3v-2w=0 \end{cases}$

13. Определи дали векторите u, v и w се линеарно независни, ако

а) $u=(1,3,-1)$, $v=(2,0,1)$, $w=(1,-1,1)$

б) $u=(1,1,-1)$, $v=(2,1,0)$, $w=(1,1,2)$

в) $u=(1,-2,3,1)$, $v=(3,2,1,-2)$, $w=(1,6,-5,-4)$

14. Даден е системот од две линеарни равенки со две непознати x и y

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

Покажи дека се точни следниве тврдења

а) ако $ad-bc\neq 0$, тогаш системот има единствено решение

$x=\dfrac{de-bf}{ad-bc}$ и $y=\dfrac{af-ce}{ad-bc}$

б) ако $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}\neq\dfrac{e}{f}$, тогаш системот нема решение в) ако $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{e}{f}$, тогаш системот има повеќе од едно решение.

15. Даден е системот линеарни равенки со еднаков број на равенки и еднаков број на непознати

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

а) Покажи дека ако асоцираниот хомоген систем има само нулто решение, тогаш системот има единствено решение за секој избор на константите $b_i, i=1,2,\dots,n$.

б) Покажи дека ако асоцираниот хомоген систем има ненулто решение, тогаш постојат константи $b_i, i=1,2,\dots,n$, за кои што системот нема решение. Исто така, покажи дека ако системот има решение, тогаш има повеќе од едно решение.

3. МАТРИЦИ

3.1 Вовед

При работа со системи линеарни равенки само коефициентите и нивните места се битни. Овие коефициенти можат да бидат во една правоаголна шема наречена матрица. Во оваа глава ќе ги изучуваме матриците и операциите дефинирани над нив.

Доколку не е нагласено, сите елементи во матрицата се од произволно поле $\mathbb{K}$. Елементите на $\mathbb{K}$ ќе ги нарекуваме **скалари**. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Исто така, да напомeнеме дека елементите од $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ згодно е да ги претставиме со вектор – редици или вектор – колони, коишто се специјални случаи на матрици.

3.2 Матрици

Нека $\mathbb{K}$ е произволно поле. Правоаголна шема од облик

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

каде што $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$, се нарекува **матрица со елементи во** $\mathbb{K}$, или само **матрица** ако $\mathbb{K}$ се подразбира, и се означува со $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,....,n$, или само со $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

m-те хоризонтални n-торки

$$(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}),\ (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})\ \ (m \text{ на број})$$

се нарекуваат **редици** на марицата а n-те вертикални m-торки

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ (n \text{ на број})$$

се викаат **колони** на матрицата. Елементот a_{ij} се нарекува $ij-$ти **елемент** или $ij-$та **компонента** и тој се наоѓа во пресекот на $i-$тата редица и $j-$тата колона. Матрицата со m-редици и n-колони се нарекува m по n матрица, или матрица со димензија mxn, и означува како mxn матрица.

Пример. Матрицата $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ е 2x3 матрица чиишто редици се $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, и колони се $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$. ♦

Матриците обично ќе ги означуваме со големи латинични букви, A, B, ..., и елементите над полето $\mathbb{K}$ со мали латинични букви $a, b, \ldots$.

За две матрици $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ велиме дека се **еднакви**, запишуваме $A = B$, ако се од исти ред, односно имаат исти број на редици и на колони, и соодветните елементи им се еднакви, односно $a_{ij} = b_{ij}$, за секои $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$. Според тоа, матрично равенство на две mxn матрици е еквивалентно на систем од mn равенства.

Пример. Матричното равенство

$$\begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

е еквивалентно со системот

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2z+w=5 \\ z-w=4 \end{cases}$$

Решението на системот е $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ и $w = -1$. ♦

Забелешка. Матрица со една редица $(m = 1)$ се нарекува **вектор-редица**, а матрица со една колона $(n = 1)$ се наекува **вектор колона**. Освен тоа, секој скалар може да се смета за 1x1 матрица.

3.3 Собирање на матрици.

Множење на матрица со скалар

Нека A и B се две матрици со иста димензија, на пример mxn

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Збир $A+B$ на матриците A и B, е матрица со елементи $a_{ij}+b_{ij}$, за $i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,....,n$,

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Производ kA на матрицата A со димензија mxn со скалар k е матрица со елементи ka_{ij}, за $i=1,2,...,m,\ \ j=1,2,....,n$,

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Да забележиме дека $A+B$ и kA се матрици со димензија mxn. Освен тоа, збир на матрици со различна димензија не е дефиниран. Исто така, дефинираме

$$-A=(-1)A \quad \text{и} \quad A-B=A+(-B)$$

Пример. Нека се дадени матриците

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

Тогаш имаме дека

$$A+B=\begin{pmatrix}1+3 & -2+0 & 3+2\\ 4-7 & 5+1 & -6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9\\ 12 & 15 & -18\end{pmatrix}$$

$$2A-3B=2\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 0 & 6\\ -21 & 3 & 24\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0\\ 29 & 7 & -36\end{pmatrix}$$ ♦

Една матрица се нарекува **нулта матрица** ако сите нејзини елементи се еднакви на 0

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

и вообичаено се бележи со O. Слично, како за скаларот 0, за секоја mxn матрица $A=\left(a_{ij}\right)$, за $i=1,2,...,m$, $j=1,2,....,n$, важи равенството $A+O=\left(a_{ij}+0\right)=\left(a_{ij}\right)=A$.

Основните својства на собирањето на матрици и множење на матрици со скалар се дадени со следната теорема:

Теорема 3.1. Нека V е множеството од сите $m x n$ матрици над поле $\mathbb{K}$. Тогаш за произволни матрици $A, B, C \in V$ и произволни скалари $k_1, k_2 \in K$, важи:

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(ii) $A + O = O + A = A$

(iii) $A + (-A) = (-A) + A = O$

(iv) $A + B = B + A$

(v) $k_1(A + B) = k_1 A + k_1 B$

(vi) $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$

(vii) $k_1(k_2 A) = (k_1 k_2)A$

(viii) $1A = A$ и $0A = O$.

Доказ. Нека $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$, $C = \left(c_{ij}\right)$ і $O = \left(0\right)$. Заради својствата на операциите собирање и множење во полето $\mathbb{K}$, за $(i, j) -$ тиот елемент важат равенствата:

(i) $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$,

(ii) $a_{ij} + 0 = 0 + a_{ij} = a_{ij}$,

(iii) $a_{ij} + (-a_{ij}) = (-a_{ij}) + a_{ij} = 0$,

(iv) $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$,

(v) $k_1(a_{ij} + b_{ij}) = k_1 a_{ij} + k_1 b_{ij}$,

(vi) $(k_1 + k_2)a_{ij} = k_1 a_{ij} + k_2 a_{ij}$,

(vii) $k_1(k_2a_{ij}) = (k_1k_2)a_{ij}$,

(viii) $1a_{ij} = a_{ij}$ и $0a_{ij} = 0$,

за секои $i = 1,2,..,m$, $j = 1,2,...,n$. Според дефиницијата за еднакви матрици следува дека се точни соодветните матрични равенства искажани во теоремата. ■

Да забележиме дека од (vi) и (viii) непосредно следува дека

$$A + A = 2A, \quad A + A + A = 3A, \ldots$$

Забелешка. Да претпоставиме дека векторите во $\mathbb{R}^n$ се претставени со вектор редици (или вектор колони), на пример

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \text{ и } v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Тогаш разгледувани како матрици, овие вектори се собираат и се множат со скалар на истиот начин како што се собирааат вектори во $\mathbb{R}^n$ и како што се множат вектори со скалар во $\mathbb{R}^n$. Имено, имаме

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \text{ и}$$

$$ku = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

3.4 Множење на матрици

Пред да ја воведеме дефиниција за производ на две матрици ќе изнесеме неколку забелешки.

(i) Нека $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ се вектори во $\mathbb{R}^n$ при што A е вектор-редица, а B е вектор-колона. Тогаш нивниот скаларен производ е даден на следниот начин

$$A \cdot B = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Според тоа, може да дефинираме матричен производ на редица од A со колона од B.

(ii) Да го разгледаме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = y_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = y_2 \end{cases} \tag{1}$$

Тој е еквивалентен со матричното равенство

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ или накусо } BX = Y$$

каде што $B = \left(b_{ij}\right)$, $X = \left(x_i\right)$ и $Y = \left(y_j\right)$, ако дефинираме

$$BX = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 \cdot X \\ B_2 \cdot X \end{pmatrix}$$

каде што B_1 и B_2 се редиците на B. Да забележиме дека производ на матрица со вектор-колона е пак вектор колона, но во општ случај со друга димензионалност.

(iii) Да го разгледаме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = z_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = z_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Тој е еквивалентен со матричното равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ или накусо } AY = Z$$

каде што $A = \left(a_{ij}\right)$, $Y = \left(y_i\right)$ и $Z = \left(z_j\right)$. Со замена на вредностите на y_1 и y_2 од (1) во (2) добиваме

$$\begin{cases} a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) = z_1 \\ a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) = z_2 \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23})x_1 = z_1 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23})x_3 = z_2 \end{cases} \qquad (3)$$

Користејќи ја матричната равенка $BX = Y$ и за менувајќи го Y во равенката $AY = Z$, добиваме

$$ABX = Z$$

Ова е всушност системот (3) ако производ на A и B се дефинира на следниот начин

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & A_1 \cdot B^3 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & A_2 \cdot B^3 \end{pmatrix}$$

каде A_1 и A_2 се редиците на матрицата A, а B^1, B^2 и B^3 се колоните на матрицата B. Да забележиме дека во општ случај единствено барање е бројот на променливи y_i во (1) и (2) да бидат еднакви, што значи бројот на колони на матрицата A да биде еднаков на бројот на редици на матрицата B.

Врз основа на овие дискусии ја имаме следната дефиниција:

Дефиниција. Нека $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ се матрици такви што бројот на колони на A е еднаков на бројот на редици на B, односно A е mxp матрица, а B е pxn матрица. Тогаш A·B е mxn матрица чиј што $ij-$ти елемент се добива со множење на $i-$тата редица A_i на A со j-та колона B^j на B, односно

$$AB=\begin{pmatrix} A_1\cdot B^1 & A_1\cdot B^2 & \cdots & A_1\cdot B^n \\ A_2\cdot B^1 & A_2\cdot B^2 & \cdots & A_2\cdot B^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_m\cdot B^1 & A_m\cdot B^2 & \cdots & A_m\cdot B^n \end{pmatrix}$$

односно

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

каде што $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$.

Да нагласиме дека производот AB не е дефиниран ако A е mxp матрица и B е qxn матрица, каде што $p \neq q$.

Пример. Според правилото за множење на матрици, за производот на матриците $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+1\cdot 2 & 1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 4+1\cdot 1 \\ 0\cdot 3+2\cdot 2 & 0\cdot 1+2\cdot 0 & 0\cdot 4+2\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

Пример. За производ на матриците $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ имаме

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa_1+qb_1 & pa_2+qb_2 & pa_3+qb_3 \\ ra_1+sb_1 & ra_2+sb_2 & ra_3+sb_3 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

Забелешка. Да забележиме дека производот на матрици не е комутативен, односно за две матрици A и B, производите AB и BA не мора да бидат еднакви.

Пример. За матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ имаме дека

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 0\cdot 3+2\cdot 1 & 0\cdot 1+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1+1\cdot 0 & 3\cdot 1+1\cdot 2 \\ 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

Да забележиме дека производот на две ненулти матрици може да биде нултата матрица.

Пример. За матриците $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}$ имаме дека

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

За матричниот производ важи следнава теорема

Теорема 3.2. Нека A, B и C се матрици. Ако се дефинирани збировите и производите, тогаш важат следниве тврдења:

(i) $(AB)C=A(BC)$ (асоцијативен закон)

(ii) $A(B+C)=AB+AC$ (лев дистрибутивен закон)

(iii) $(B+C)A=BA+CA$ (десен дистрибутивен закон)

(iv) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ каде што k е скалар

Доказ. Согласно својствата на операциите собирање и множење во поле $\mathbb{K}$, за производот на $(i,j)-$место од левата страна L и десната страна D важи:

(i) Ако $A=\left(a_{ij}\right)$ е $m\times p$ матрица, $B=\left(b_{ij}\right)$ е $p\times q$ матрица, и $C=\left(c_{ij}\right)$ е $q\times n$ матрица, тогаш

$$L_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\sum_{r=1}^{q}b_{kr}c_{rj}=\sum_{r=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kr}c_{rj}=\sum_{r=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kr}\right)c_{rj}=D_{ij}$$

Бидејќи соодветните елементи се еднакви, важи равенството (i).

(ii) Ако $A=\left(a_{ij}\right)$ е $m\times p$ матрица, а $B=\left(b_{ij}\right)$ и $C=\left(c_{ij}\right)$ се $p\times n$ матрици, тогаш

$$L_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{p}a_{ik}c_{kj}=D_{ij}$$

Бидејќи соодветните елементи се еднакви, важи равенството (ii).

(iii) Ако $B=\left(b_{ij}\right)$ и $C=\left(c_{ij}\right)$ се $m\times p$ матрици, а $A=\left(a_{ij}\right)$ е $p\times n$ матрица, тогаш

$$L_{ij}=\sum_{k=1}^{p}(b_{ik}+c_{ik})a_{kj}=\sum_{k=1}^{p}(b_{ik}a_{kj}+c_{ik}a_{kj})=\sum_{k=1}^{p}b_{ik}a_{kj}+\sum_{k=1}^{p}c_{ik}a_{kj}=D_{ij}$$

Бидејќи соодветните елементи се еднакви, важи равенството (iii).

(iv) Ако $A=\left(a_{ij}\right)$ е $m\times p$ матрица, а $B=\left(b_{ij}\right)$ е $p\times n$ матрица, тогаш

$$k\sum_{r=1}^{p}a_{ir}b_{rj}=\sum_{r=1}^{p}(ka_{ir})b_{rj}=\sum_{r=1}^{p}a_{ir}(kb_{rj})$$

Бидејќи соодветните елементи се еднакви, важи равенството (iv). ■

Да забележиме дека за матрици A и B важат равенствата

$$0A=O \text{ и } B0=O,$$

каде што O е нултата матрица.

3.5 Транспонирана матрица

Нека A е mxn матрица. **Транспонираната матрица** A^t на A е

nxm матрица во која редиците на A се земени како колони, а колоните на A се земени како редици. Имено

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример. Транспонирана матрица на 3×2 матрицата

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, е 2×3 матрицата $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. ♦

За операцијата транспонирање на матрици важат следниве својства:

Теорема 3.3. Нека A и B се матрици, и k е скалар. Ако се дефинирани збировите и производите, тогаш важат следниве тврдења:

(i) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(ii) $(A^t)^t = A$

(iii) $(kA)^t = kA^t$

(iv) $(AB)^t = B^t A^t$

Доказ. Нека $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ се матрици. Во доказот на теоремата ќе го користиме фактот дека $a_{ij}{}^t = a_{ji}$ и $b_{ij}{}^t = b_{ji}$, што следува непосредно од дефиницијата за транспонирана матрица.

(i) За $(i,j)-$тиот елемент на матриците $(A+B)^t$ и A^t+B^t важи

$$L_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})^t=a_{ji}+b_{ji}=a_{ij}^t+b_{ij}^t=D_{ij}$$

Бидејќи соодветните елементи се еднакви, важи равенството (i).

(ii) За $(i,j)-$тиот елемент на матриците $(A^t)^t$ и A важи

$$L_{ij}=(a_{ij}^t)^t=a_{ji}^t=a_{ij}=D_{ij}$$

Бидејќи соодветните елементи се еднакви, важи равенството (ii).

(iii) За $(i,j)-$тиот елемент на матриците $(kA)^t$ и kA^t важи

$$L_{ij}=(ka_{ij})^t=ka_{ji}=ka_{ij}^t=D_{ij}$$

Бидејќи соодветните елементи се еднакви, важи равенството (iii).

(iv) Имаме дека $(i,j)-$тиот елемент во матрицата $(AB)^t$ е еднаков на $(j,i)-$тиот елемент во матрицата AB и тој гласи

$$\sum_{k=1}^{p} a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj}$$

па затоа тој е производот на $i-$тата редица на матрицата B^t со $j-$тата колона на матрицата A^t, односно $(i,j)-$тиот елемент на производот B^tA^t. Бидејќи соодветните елементи се еднакви, важи равенството (iv). ■

3.6 Матрици и системи линеарни равенки

Системот од линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

е еквивалентен со матричната равенка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ или накусо } AX = B \qquad (2)$$

каде што $A = (a_{ij})$, $X = (x_i)$ и $B = (b_i)$. Секое решение на (1) е решение на (2) и обратно. Да напоменеме дека асоцираниот хомоген систем на (1) е еквивалентен со матричната равенка $AX = 0$.

Матрицата A се вика **коефициентна матрица** (матрица од коефициенти) на системот (1), а матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

се нарекува **проширена матрица** на системот. Системот (1) е наполно определен со проширената матрица.

Пример. Коефициентната матрица и проширената матрица на системот

$$\begin{cases} 4x + 5y - 3z = 2 \\ -x + 2y - 4z = 7 \end{cases}$$

се матриците

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

При изучување на линеарните системи, поедноставно е да се користи матричната терминологија.

Теорема 3.4. Нека $u_1, u_2, \ldots, u_n$ се решенија на хомоген систем линеарни равенки $AX = 0$. Тогаш секоја линеарна комбинација на u_i од облик $k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n$ каде што k_i се скалари, е исто така решение на системот $AX = 0$.

Специјално, ако u е решение на систем линеарни равенки $AX = 0$, тогаш и ku е решение на системот линеарни равенки $AX = 0$.

Доказ. Фактот дека $u_1, u_2, \ldots, u_n$ се решенија на хомогениот систем линеарни равенки $AX = 0$ означува дека

$$Au_1 = Au_2 = \ldots = Au_n = 0$$

Тогаш имаме дека

$$A(k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n) = k_1Au_1 + k_2Au_2 + \cdots + k_nAu_n =$$
$$= k_10 + k_20 + \cdots + k_n0 = 0$$

од каде што следува дека $k_1u_1 + k_2u_2 + \cdots + k_nu_n$ е решение на хомогениот систем линеарни равенки $AX = 0$. ■

Теорема 3.5. Нека $\mathbb{K}$ е бесконечно поле (на пример, полето реални броеви $\mathbb{R}$ или полето комплексни броеви $\mathbb{C}$). Тогаш системот $AX = B$ нема решение или има единствено решение или има бесконечно многу решенија.

Доказ. Доволно е да се докаже дека ако системот $AX = B$ има повеќе од едно решение, тогаш тој има бесконечно многу решенија. Да претпоставиме дека u и v се две различни решенија на системот $AX = B$, односно дека $Au = B$ и $Av = B$. Тогаш за произволен скалар $k \in \mathbb{K}$ имаме дека

$$A(u + k(u - v)) = Au + k(Au - Av) = B + k(B - B) = B$$

Според тоа, за секое $k \in \mathbb{K}$ имаме дека $u + k(u - v)$ е решение на системот $AX = B$. Бидејќи $\mathbb{K}$ е бесконечно поле и бидејќи сите решенија од овој облик се различни, може да заклучиме дека системот $AX = B$ има бесконечно многу решенија.

3.7. Скалести матрици

За матрицата $A = \left(a_{ij}\right)$ велиме дека е **скалеста** или ешалонска форма, ако секоја ненулта редица започнува со барем еден ненулти елемент повеќе од претходната редица, а секоја наредна редица на нулта редица е исто така нулта редица. Тоа значи, дека ако со t_i се означи бројот на почетните нули во $i -$ та редица $(1 \le i \le m)$, тогаш

$$t_1 < t_2 < \dots < t_r < t_{r+1} = \dots = t_m = n,$$

(ако $m - r -$ те последни редици се со сите нулти елементи) или

$$t_1 < t_2 < \dots < t_m$$

(ако првите $m - 1$ редици се ненулти).

Првите ненулти елементи во секоја ненулта редица на матрица во скалеста форма се нарекуваат **издвоени** елементи.

Пример. Следните матрици имаат скалеста форма

$$B=\begin{pmatrix}1^* & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3^*\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2^* & 3 & 1 & 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 3^* & 0 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1^* & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1^* & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^*\end{pmatrix}$$

и издвоените елементи во нив се означени со ѕвезда. ♦

Во специјален случај, една скалеста матрица се вели дека има **редично редуцирана скалеста форма**, ако

(i) издвоените елементи се единици

(ii) издвоените елементи се единствените ненулти елементи во соодветните колони.

Пример. Матрицата C во претходниот пример има редично редуцирана скалеста форма, бидејќи издвоените елементи се единици и тие се единствените ненулти елементи во соодветните колони, додека матриците A и B немаат редично редуцирана скалеста форма. ♦

3.8 Редична еквивалентност и елементарни трансформации со редици

Една матрица A е редично еквивалентна со матрица B, ако матрицата B може да се добие од матрицата A со конечна низа од следните **елементарни редични трансформации**:

E_1 : Замена на $i-$та редица со $j-$та редица и обратно, односно $R_i \leftrightarrow R_j$;

E_2 : Множење на $i-$та редица со ненулти скалар $k,$ односно $R_i \to kR_i$, $(k \neq 0)$;

E_3 : $j-$та редица помножена со k се додава на $i-$та редица, односно $R_i \to kR_j + R_i$ (притоа сите редици освен $i-$тата остануваат непроменети).

Со комбинација на трансформациите E_2 и E_3 се добива следната трансформација:

$i-$тата редица се множи со ненулти скалар k и кон неа се додава $j-$тата редица помножена со произволен скалар $k',$ односно

$$E_2 \wedge E_3 : \quad R_i \to kR_i + k'R_j, \quad k \neq 0.$$

Аналогни трансформации на овие три трансформации може да се применат на систем линеарни равенки и при секоја таква извршена трансформација добиваме систем еквивалентен со претходниот. Имено, ако

- две равенки во системот си ги заменат местата се добива еквивалентен систем;
- ако некоја од равенките се поможи со ненулти скалар се добива еквивалентен систем и
- ако некоја равенка помножена со некој скалар се додаде на друга равенка се добива еквивалентен систем.

Следниот алгоритам ни овозможува трансформација на матрици во скалеста форма со помош на редични трансформации.

Чекор 1. Нека j_1-та колона е првата колона со ненулти елемент. Ги заменуваме редиците така што овој ненулти елемент ќе се појави во првата редица, односно $a_{1j_1} \neq 0$.

Чекор 2. За секое $i > 1$ се применува комбинираната трансформација

$$R_i \to -a_{ij_1}R_1 + a_{1j_1}R_i$$

Да воочиме дека со чекор 2 сите елементи во j_1-та колона под елементот a_{1j_1} се сведуваат на нула. Чекорите 1 и 2 се повторуваат за подматрицата добиена со изоставување на првата редица. Овој процес продолжува се додека матрицата не се трансформира во скалеста форма.

Пример. Матрицата А е редуцирана до скалеста матрица со трансформациите $R_2 \to -2R_1 + R_2$ и $R_3 \to -3R_1 + R_3$, и потоа со трансформацијата $R_3 \to -5R_2 + 4R_3$, односно

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\2&4&-2&2\\3&6&-4&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&0&4&2\\0&0&5&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-3&0\\0&0&4&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}\blacklozenge$$

Да претпоставиме дека матрицата $A=\left(a_{ij}\right)$ е доведена во скалеста форма со издвоени елементи $a_{1j_1},a_{2j_2},\ldots,a_{rj_r}$. Со цел да ја трансформираме матрицата до редично редуцирана матрична форма постапуваме на следниот начин:

За $i=2$ ги применуваме следните комбинирани редични трансформации:

$$R_k\rightarrow -a_{kj_i}R_i+a_{ij_i}R_k,\qquad k=1,2,\ldots,i-1$$

Потоа ги применуваме истите трансформации за $i=3,\ i=4,\ldots,i=r$. На тој начин матрицата A се трансформира до скалеста форма чиишто издвоени елементи се единствените ненулти елементи во соодветните колони. Потоа множејќи ја $i-$та редица со $a^{-1}_{ij_i}$, $1\le i\le r$, издвоените елементи стануваат единици, а со тоа конечно матрицата сме ја трансформирале до редично редуцирана скалеста форма.

Со тоа докажавме дека секоја матрица A е редично еквивалентна со барем една матрица во редично редуцирана скалеста форма. Подоцна ќе видиме дека редично редуцираната скалеста форма на матрицата A е единствена и затоа ќе ја наречеме **редична канонична форма** на A.

Пример. Скалестата форма на матрицата A од претходниот пример ќе ја трансформираме до редично редуцирана скалеста форма со трансформациите последователна примена на трансформациите $R_1 \to 4R_1 + 3R_2$, $R_1 \to R_1 - 3R_3$ и $R_2 \to R_2 - R_3$, и на крај со трансформациите $R_1 \to \frac{1}{4}R_1$, $R_2 \to \frac{1}{4}R_2$ и $R_3 \to \frac{1}{2}R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

Пример. Ако на скалестата матрица A ја примениме трансформацијата $R_1 \to -4R_2 + 3R_1$, и потоа ги примениме трансформациите $R_1 \to R_3 + R_1$ и $R_2 \to -5R_3 + 2R_2$ ја добиваме матрицата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

која што со трансформациите $R_1 \to \frac{1}{6}R_1$, $R_2 \to \frac{1}{6}R_2$ и $R_3 \to \frac{1}{2}R_3$ се трансформира во редично редуцирана скалеста форма

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 7/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

3.9 Квадратни матрици

Матрица A се вика **квадратна**, ако бројот на редици е еднаков со бројот на колони. Ако бројот на колони, односно редици е n, велиме дека A е квадратна матрица од ред n или $n-$квадратна матрица. Елементите $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ја сочинуваат главната дијагонала.

Пример. Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

е квадратна матрица од ред 3 со дијагонални елементи 1, 2, 3. ♦

Горнотриаголна матрица е квадратна матрица, чии елементи под главната дијагонала се еднакви на нула:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Долнотриаголна матрица е квадратна матрица, чии елементи над главната дијагонала се еднакви на нула:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Дијагонална матрица е квадратна матрица чии елементи надвор од главната дијагонала се еднакви на нула:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Единична матрица е дијагонална матрица чиишто дијагонални елементи се еднакви на 1 и се означува со I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Вообичаено, дијагоналната матрица со елементи по главната дијагонала $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ја означуваме со $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, додека единечната матрица од ред n ја означуваме со I_n.

Пример. Имаме $\text{diag}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.♦

За секоја $n-$квадратна матрица A е точно дека $AI_n = I_n A = A$.

Матрица од облик kI_n, каде што k е реален број, се нарекува **скаларна матрица**. Тоа е всушност, дијагонална матрица чиишто елементи на дијагоналата се еднакви на k

$$kI_n = \text{diag}(\underbrace{k, k, \dots, k}_{n}).$$

Квадратната матрица A се нарекува

- **симетрична**, ако $A^t = A$
- **антисиметрична** (или кососиметрична), ако $A^t = -A$
- **ортогонална**, ако $AA^t = I$
- **нилпотентна**, ако постои m, така што $A^m = O$
- **хермитска** ако $(\overline{A})^t = A$
- **антихермитска** ако $(\overline{A})^t = -A$

- **унитарна** ако $A(\overline{A})^t = I$

каде што $\overline{A}$ е матрица со конјугираните елементи на матрицата A.

Пример. Матрицата $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ е антисиметрична.

Матрицата $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ е симетрична.

Матрицата $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ е нилпотентна, бидејќи $A^2 = O$. ♦

Пример. За произволна квадратна матрица A е точно дека

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

значи $A + A^t$ е симетрична матрица. Потоа,

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$$

што значи дека $A - A^t$ е антисиметрична матрица. ♦

Да се потсетиме дека не секои две матрици може да се соберат или помножат. Меѓутоа, ако разгледуваме само квадратни матрици од ред n тогаш операциите собирање, множење со скалар, множење и транспонирање ќе бидат допуштени и резултатот ќе биде nxn матрица. Во таа смисла, може да дефинираме степен на било која квадратна $n-$матрица со

$$A^2 = AA,\ \ A^3 = AA^2, \ldots, A^m = AA^{m-1}$$

Затоа, за било кој полином

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$

од $m-$та степен, може да дефинираме матричен полином со

$$f(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_mA^m$$

којшто е добро дефинирана матрица. Во случај кога $f(A)$ е нултата матрица велиме дека A е **корен** или **нула** на матричниот полином $f(A)$.

Пример. Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Тогаш

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$$

Ако $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, тогаш

$$f(A) = 2A^2 - 3A + 5 =$$

$$= 2\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}$$

Ако $g(x) = x^2 + 3x - 10$, тогаш

$$g(A) = A^2 + 3A - 10 =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

што значи A е нула на матричниот полиномот $g(A)$. ♦

3.10 Инверзни матрици

Една квадратна матрица A се нарекува **инверзибилна** (**несингуларна** или **регуларна**), ако постои матрица B од ист ред како A, така што да важи

$$AB = BA = I$$

Матрицата B, ако постои, е единствена, бидејќи од

$$AB_1 = B_1A = I \text{ и } AB_2 = B_2A = I$$

следува дека

$$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2.$$

Матрицата B ќе ја нарекуваме **инверзна** на матрицата A и ќе ја означуваме со A^{-1}. Да забележиме дека релацијата е симетрична, односно ако B е инверзна матрица на матрицата A, тогаш матрицата A е инверзна на матрицата B.

Пример. Од равенствата

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

следува дека матриците $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ се инверзибилни и се инверзни една на друга. ♦

Очигледно е дека $(A^{-1})^{-1} = A$. Освен тоа, ќе покажеме дека $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ако A и B се инверзибилни. Имено, тоа следува од равенствата

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I \text{ и}$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB = I$$

Нека е зададена 2×2 матрица $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. За да ја најдеме матрицата A^{-1} (ако постои), бараме скалари x, y, z и t така што

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

што се сведува на решавање на следниве два системи од линеарни равенки со две непознати

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} ay+bt=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}$$

Од овде се добива дека

$$x=\frac{d}{\det A}, \quad y=\frac{-b}{\det A}, \quad z=\frac{-c}{\det A} \quad \text{и} \quad t=\frac{a}{\det A},$$

ако $\det A = ad-bc \neq 0$. Значи ако $\det A \neq 0$, тогаш дадената матрица е инверзибилна и нејзината инверзна матрица е

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{\det A} & \dfrac{-b}{\det A} \\ \dfrac{-c}{\det A} & \dfrac{a}{\det A} \end{pmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Забележуваме дека добиената матрица A^{-1}, при $\det A \neq 0$, го исполнува условот $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Според тоа, при $\det A \neq 0$ матрицата A е инверзибилна и A^{-1} е бараната инверзна матрица.

3.11 Блок матрици

Поставувајќи хоризонтални и вертикални линии, една матрица A може да се разбие на помали матрици наречени **блокови** или **ќелии**. Матрицата A тогаш се нарекува **блок – матрица**.

Матрицата A може да се разбие на блокови на повеќе начини. Така, на пример

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & | & 5 & 7 & | & -2 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 3 & 1 & | & 4 & 5 & | & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 1 & 3 \\ - & - & - & - & - & - \\ 2 & 3 & 5 & | & 7 & -2 \\ - & - & - & - & - & - \\ 3 & 1 & 4 & | & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Погодноста од разбивањето на матрица во блокови е дека резултатот од операциите со блок матрици може да се добие со извршување на операциите со блоковите, како да се всушност елементи на матрици. Во таа смисла, нека A е матрица разбиена на блокови

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Блок матрица се множи со скалар k така што се множи секој блок со скаларот k

$$kA = \begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1n} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{m1} & kA_{m2} & \cdots & kA_{mn} \end{pmatrix}$$

Сега, да претпоставиме дека B е матрица разбиена на исти број блокови како матрицата A

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

Уште повеќе, да претпоставиме дека соодветните блокови на матриците A и B имат иста димензија. Збир на блок матриците A и B е блок матрицата која што се добива со собирање на соодветните блокови

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2n} + B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} + B_{m1} & A_{m2} + B_{m2} & \cdots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}$$

Понатаму, ако матриците U и V се разбиени на блокови на следниот начин

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1p} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_{m1} & U_{m2} & \cdots & U_{mp} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{p1} & V_{p2} & \cdots & V_{pn} \end{pmatrix}$$

така што бројот на колони на секој блок U_{ik} е еднаков на бројот на редици на секој блок V_{kj}. Тогаш, аналогно на начинот на кој што множиме матрици имаме дека

$$UV = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1p} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{m1} & W_{m2} & \cdots & W_{mp} \end{pmatrix}$$

каде што $W_{ij} = U_{i1}V_{1j} + U_{i2}V_{2j} + \cdots + U_{ip}V_{1p}$.

3.12. Елементарни трансформации и примена

Една матрица се нарекува **елементарна**, ако може да се добие само со една елементарна редична трансформација применета на единичната матрица I. Според тоа имаме три вида елементарни матрици:

(i) матрица добиена со замена на две редици $R_i \leftrightarrow R_j$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & & j & \quad & \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}; \qquad (i \neq j) \end{array}$$

(ii) матрица добиена со множење на една редица со скалар $R_i \to kR_i$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & i & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \text{diag}(\underbrace{1,\ldots 1,k,1\ldots,1}_{i})$$

(iii) матрица добиена со замена на $i-$та редица со редица добиена како збир на $i-$та и $j-$тата редица помножена со скалар $R_i \to kR_j + R_i$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (i \neq j)$$

Пример. Елементарни 3×3 матрици се:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, k \neq 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

Теорема 3.6. Нека $\bar{e}$ е елементарна редична трансформација, и E е соодветната $m\times m$ квадратна елементарна матрица, односно $E = e(I)$. Тогаш за произволна $m\times n$ матрица A важи

$$\bar{e}(A) = EA,$$

односно исходот од примената на трансформацијата $\overline{e}$ претставува множење од лево со соодветната елементарна матрица E.

Доказ. Нека R_i е $i-$ та редица на A $(1 \le i \le m)$. Матрицата A ќе ја запишеме како $A = (R_1, R_2, ..., R_m)$. Тогаш, ако AB е дефинирана, важи $AB = (R_1B, R_2B, ..., R_mB)$. Нека

$$e_1 = (1,0,0,...,0),\ e_2 = (0,1,0,...,0), \ldots, e_m = (0,0,0,...,1).$$

Тогаш $I = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ и $e_i(A) = R_i$. Можни се следниве три случаи:

(i) Ако $\overline{e}$ е елементарната трансформација $R_i \leftrightarrow R_j$, тогаш

$$E = \overline{e}(I) = \overline{e}(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_j, \ldots, e_m) = (e_1, \ldots, e_j, \ldots, e_i, \ldots, e_m)$$

и

$$\overline{e}(A) = (R_1, \ldots, R_j, \ldots, R_i, \ldots, R_m).$$

Затоа, имаме дека

$$EA = (e_1A, \ldots, e_jA, \ldots, e_iA, \ldots, E_mA) =$$
$$= (R_1, \ldots, R_j, \ldots, R_i, \ldots, R_m) = \overline{e}(A).$$

(ii) Ако $\overline{e}$ е елементарната трансформација $R_i \to kR_i$, тогаш

$$E = \overline{e}(I) = (e_1, \ldots, ke_i, \ldots, e_m) \quad \text{и} \quad \overline{e}(A) = (R_1, \ldots, kR_i, \ldots, R_m).$$

Затоа, имаме дека

$$EA = (e_1A, \ldots, ke_iA, \ldots, e_mA) = (R_i, \ldots, kR_i, \ldots, R_m) = \overline{e}(A).$$

(iii) Ако $\overline{e}$ е елементарната трансформација $R_i \to kR_j + R_i$, тогаш имаме дека

$$E = \bar{e}(I) = (e_1, \dots, ke_j + e_i, \dots, e_m) \quad \text{и}$$

$$\bar{e}(A) = (R_1, \dots, kR_j + R_i, \dots, R_m).$$

Користејќи дека $(ke_j + e_i)(A) = k(e_jA) + e_iA = kR_j + R_i$, добиваме

$$EA = (e_1A, ..., (ke_j + e_i)A, ..., e_mA) =$$

$$= (R_1, ..., kR_j + R_i, ..., R_m) = \bar{e}(A). \ ■$$

Пример. Имаме $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & k & 3k \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2k & k+5 & 3k+1 \end{pmatrix} ♦$$

Како последица од теоремата добиваме:

Последица 3.7. Матрицата A е редично еквивалентна со матрицата B, ако постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \dots, E_s$, така што

$$E_sE_{s-1} \cdots E_2E_1A = B.$$

Доказ. Матрицата A е редично еквивалентна со матрицата B, ако постојат трансформации $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_s$ за кои што важи

$$\bar{e}_s(\cdots(\bar{e}_2(\bar{e}_1A))\cdots) = B$$

Но, според Теорема 3.6 равенството важи, ако и само ако

$$E_sE_{s-1} \cdots E_2E_1A = B$$

каде што E_i е елементарната матрица соодветна на $\bar{e}_i$.■

Последица 3.8. Елементарните матрици се инверзибилни и нивните инверзни матрици се пак елементарни матрици.

Доказ. Според Теорема 3.6 доволно е да се докаже дека секоја елементарна редична трансформација е инверзибилна и дека нејзината инверзна матрица е пак елементарна редична трансформација.

(i) Нека елементарната редична трансформација $\bar{e}$ е замена на редици, односно $R_i \leftrightarrow R_j$. Тогаш $\bar{e} \circ \bar{e} = \varepsilon$, па имаме $\bar{e} = (\bar{e})^{-1}$.

(ii) Нека елементарната редична трансформација $\bar{e}$ е множење на редица со скалар, односно $R_i \to kR_i$, $(k \neq 0)$. Тогаш, ако $\bar{e}'$ е елементарната редична трансформација $R_i \to \frac{1}{k}R_i$, добиваме дека $\bar{e} \circ \bar{e}' = \varepsilon$ и $\bar{e}' \circ \bar{e} = \varepsilon$, , што значи дека $\bar{e}' = (\bar{e})^{-1}$.

(iii) Нека елементарната редична трансформација $\bar{e}$ е замена на $i-$та редица со редица добиена како збир на $i-$та и $j-$тата редица помножена со скалар, односно $R_i \to kR_j + R_i$. Нека $\bar{e}'$ е елементарната редична трансформација $R_i \to -kR_j + R_i$. Тогаш имаме дека $\bar{e} \circ \bar{e}' = \varepsilon$ и $\bar{e}' \circ \bar{e} = \varepsilon$, што значи дека $\bar{e}' = (\bar{e})^{-1}$.■

Пример. Согласно Последица 3.8 имаме дека

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Теорема 3.9. Следните услови се меѓу себе еквивалентни:

(i) A е инверзибилна матрица;

(ii) A е редично еквивалентна со единичната матрица I;

(iii) A е производ на елементарни матрици.

Доказ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Нека A е инверзибилна матрица. Да претпоставиме дека A е редично еквивалентна со редично редуцирана скалеста матрица B. Ќе покажеме дека $B = I$. Постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \dots, E_s$, така што

$$E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = B.$$

Бидејќи A е инверзибилна, а исто така и $E_1, E_2, \dots, E_s$, се инверзибилни, следува дека и B е инверзибилна. Ако $B \neq I$, тогаш B има нулта редица (последната редица). Тогаш за произволна квадратна матрица B' од ист ред како и B, последната редица на BB' е нулта, па значи $BB' \neq I$. Значи, B не е инверзибилна, што претставува контрадикција. Затоа, $B = I$ и

$$E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = I$$

што покажува дека A е редично еквивалентна со I.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ако A е редично еквивалентна со I, тогаш постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \dots, E_s$, такви што

$$E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A = I.$$

Затоа, имаме дека

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

и бидејќи E_i^{-1} се елементарни матрици, A е производ од елементарни матрици.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Ако важи (iii), односно ако

$$A = E_1 E_2 \cdots E_s$$

тогаш A е инверзибилна како производ на инверзибилни матрици. ■

Теорема 3.10. Нека A и B се квадратни матрици од ист ред. Ако $AB = I$, тогаш $B = A^{-1}$. Имено, $AB = I$ ако и само ако $BA = I$.

Доказ. Нека за квадратните матрици A и B важи $AB = I$ и да претпоставиме дека A не е инверзибилна матрица. Тогаш A не е редично еквивалентна со единичната матрица I и постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \dots, E_s$ така што $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 A$ има нулта редица. Затоа и $E_s E_{s-1} \cdots E_2 E_1 AB$ има нулта редица. Значи AB е еквивалентна со матрица која има нулта редица. Но ова претставува контрадикција, бидејќи $AB = I$. Значи A е инверзибилна матрица и постои A^{-1}. Тогаш имаме дека

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}. \blacksquare$$

Нека A е инверзибилна матрица и нека на пример со елементарните редични трансформации $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_s$ таа се редуцира до единичната матрица I. Ќе покажеме дека оваа низа од елементарни редични трансформации применета на I ја дава инверзната матрица A^{-1}.

Нека E_i $(1 \le i \le s)$ е елементарната редична матрица што одговара на трансформацијата $\bar{e}_i$. Тогаш имаме дека

$$E_sE_{s-1}\cdots E_2E_1A = I$$

односно $(E_sE_{s-1}\cdots E_2E_1I)A = I.$ Отука следува дека

$$A^{-1} = E_sE_{s-1}\cdots E_2E_1I$$

односно A^{-1} се добива со примена на елементарните редични трансформации $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_s$ кон $I.$

Ова се користи како алгоритам за наоѓање на инверзна матрица, познат како **Гаусов алгоритам за инверзна матрица**. Него ќе го илустрираме со следниов пример.

Пример. Да ја најдеме матрицата A^{-1} за $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Со примена на Гаусовиот алгоритам добиваме

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left(I \vdots A^{-1}\right).$$

Оттука, следува дека $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$ ♦

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја матрицата $3A-2B+C$, ако

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\4&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-3\\4&1\end{pmatrix}\ \text{и}\ \ C=\begin{pmatrix}5&3\\-1&1\\3&2\end{pmatrix}$$

2. Најди ги коефициентите x, y, z и t, така што да важи

$$x\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}.$$

3. Нека A е $m\times n$ матрица, а B е $n\times m$ матрица. Најди го типот на матриците AB и BA. Дали може $AB=BA$, ако $m\neq n$?

4. Избери две

а) 2×2 матрици A и B, и провери дали $AB\neq BA$,

б) 3×3 матрици A и B, и провери дали $AB\neq BA$.

Дали може да се изберат 2×2 матрици A и B така што $AB=BA$?

5. Пресметај ги производите:

а) $\begin{pmatrix}\cos x&\sin x\\-\sin x&\cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos y&\sin y\\-\sin y&\cos y\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\\0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}$

6. Докажи, дека $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} c_n & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_{n-2} \end{pmatrix}$ за каде c_n се Фибоначиевите броеви дефинирани со $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$.

7. Најди ја матрицата A^t, ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. За кои вредности на параметрите x, y и z важи равенството $A = A^t$, ако $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2y & 1+z & x \\ 1+x & y-1 & y \end{pmatrix}$?

9. Дали постојат реални броеви x и y така што $A = A^t$, ако

$$A = \begin{pmatrix} xy & x^2 \\ -1-y^2 & -xy \end{pmatrix}?$$

10. Нека A е $n \times n$ матрица. Докажи дека $(AA^t)^t = AA^t$.

11. Дадени се матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t$. Најди ги производите AB и BA.

12. Запиши го во матричен вид следниот систем линеарни равенки

а) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = 1 \\ x - y + 3z + 2t = -10 \\ -5y + 3z + 2t = -3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z + t - u = -3 \\ -2x - 10z - t + u = 2 \end{cases}$.

13. Запиши го системот линеарни равенки зададен со проширената матрица а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

14. Без да го решаваш системот зададен со проширената матрица, обиди се да одговориш дали тој има решение и дали тоа е единствено

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

15. Избери две матрици кои имаат скалеста форма, но не и редично редуцирана скалеста форма и означи ги издвоените елементи.

16. Избери две матрици кои имаат редично редуцирана скалеста форма.

17. Дали нултата матрица има

а) скалеста форма

б) редично редуцирана скалеста форма?

18. Запиши ги сите можни 2×2 матрици со редично редуцирана скалеста форма.

19. Дали скалестата форма на една матрица е единствена?

20. а) Дали секоја дијагонална квадратна матрица со ненулти елементи по дијагоналата има скалеста форма?

б) Дали секоја дијагонална квадратна матрица има скалеста форма?

21. Со помош на редични трансформации, трансформирај ги следните матрици во скалеста форма

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

22. Со помош на редични трансформации, трансформирај ги следните матрици во редична канонична форма

а) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \\ -3 & 3 & -11 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

23. Каков е обликот на една матрица во редична канонична форма, ако нејзината транспонирана матрица е исто така во редична канонична форма.

24. Каков е обликот на една произволна

а) 3×1 матрица б) 1×3 матрица

во редична канонична форма?

25. Докажи дека релацијата редична еквивалентност на матрици е релација на еквиваленција, односно таа е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

26. Докажи дека $I_m^n = I_n$, за секој природен број n.

27. Нека A е $n-$квадратна матрица, а $D = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е дијагонална матрица. Најди ги матриците AD и DA, а потоа објасни како може да се смета дека се добиени овие две матрици од матрицата A.

28. Ако A е $n-$квадратна матрица, докажи дека AA^t е симетрична матрица.

29. Ако $n-$квадратната матрица A е

а) симетрична

б) антисиметрична,

дали е симетрична или антисиметрична матрицата A^m?

30. Докажи дека матрицата $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ е ортогонална.

31. Докажи дека матрицата $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ е нилпотентна.

32. Нека е дадена матрицата $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Најди ја матрицата $A^2 = AA$, а потоа покажи дека $A^2A = AA^2$. Докажи дека за секоја $n \times n$ матрица A важи $A^2A = AA^2$.

33. Доколку следните матрици се инверзибилни, а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$

најди ги нивните инверзни матрици.

34. Доколку следните матрици се инверзибилни,

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

најди ги нивните инверзни матрици.

35. Најди ги инверзните матрици на матриците

а) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

36. Нека $D = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е дијагонална матрица, каде што $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$. Најди ја инверзната матрица на матрицата D.

37. Реши ја матричната равенка $AX + B = 2Y$, ако

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

38. Докажи дека множеството од сите несингуларни квадратни матрици од ред n е група во однос на множењето на матрици.

39. Ако на една биективна линеарна трансформација соодветствува матрица A, докажи дека на инверзната трансформација соодветствува инверзната матрица A^{-1}.

40. Избери неколку 2×2 и 2×3 елементарни матрици од различни видови и најди ги нивните инверзни матрици.■

Најди ја инверзната матрица на следните матрици со помош на Гаусовиот метод (41-42).

41. а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix}6 & 3\\ 8 & 4\end{pmatrix}$

42. а) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}4 & 3 & 8\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$.

43. Да се решат следниве матричните равенки:

а) $XA = B$ б) $AY = B$

ако $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

44. Дали може производ на две квадратни матрици од ист ред, од кои едната е сингуларна, да биде несингуларна матрица?

45. Запиши ја матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ како производ на елементарни матрици.

4. ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

4.1 Векторски простори

Во поглавје 1 ги изучувавме структурите $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ и дојдовме до некои нивни особини. Во оваа глава тие особини ќе ги земеме како аксиоми за да дефинираме еден општ „векторски простор". Всушност не добиваме ништо ново бидејќи како што ќе видиме во поглавје 5 секој векторски простор над $\mathbb{R}$ со конечна димензија може да биде идентификуран со $\mathbb{R}^n$ за некое n.

Дефиницијата на векторскиот простор вклучува произволно поле $\mathbb{K}$ чиишто елементи се нарекуваат **скалари**. Ќе ги усвоиме следниве ознаки:

$\mathbb{K}$	поле од **скалари**.
a, b, c или k	елememти од $\mathbb{K}$
V	векторскиот простор
u, v, w	елемнти од V.

Да забележиме дека не губиме од општоста ако полето $\mathbb{K}$ се замени со полето реални броеви $\mathbb{R}$ или полето комплексни броеви $\mathbb{C}$.

Дефиниција. Непразно множество V во коешто за секои елементи $u, v \in V$ е дефиниран збирот $u+v \in V,$ и за секој елемент $u \in V$ и реален број, скалар $k \in \mathbb{K},$ е дефиниран производот $ku \in V$ се нарекува **векторски простор**, а неговите елементи **вектори**, ако се исполнети условите:

$C_1:$ $(u+v)+w = u+(v+w)$ за секои $u, v, w \in V$.

$C_2:$ Постои (единствен) елемент од $V,$ наречен **нулти вектор** означен со $0,$ така што $u+0 = 0+u = u$ за секој $u \in V$.

$C_3:$ За секој $u \in V,$ постои (единствен) елемент од V наречен спротивен и означен со $-u$ така што $u+(-u) = (-u)+u = 0$.

$C_4: u+v = v+u$ за секои $u, v \in V$.

$M_1:$ $a(u+v) = au+av$ за секои $u, v \in V$ и секој $a \in \mathbb{K}$.

$M_2:$ $(a+b)u = au+bu$ за секои $a, b \in \mathbb{K}$ и секој $u \in V$.

$M_3:$ $(ab)u = a(bu)$ за секои $a, b \in \mathbb{K}$ и секој $u \in V$.

$M_4:$ $1u = u$ зе секој $u \in V$ и единицата $1 \in \mathbb{K}$.

Да забележиме дека множењето на вектор со скалар не е операција, бидејќи не пресликува два вектора во вектор, но сепак се договараме и неа да ја викаме операција.

Првите четири аксиоми: $C_1 - C_4$ се однесуваат на својствата на операцијата собирање на вектори, и според нив, $(V, +)$ е **комутативна група**. Тоа значи дека за збирот од вектори

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

не се потребни загради и не зависи од редоследот на сумирање. Понатаму, нултиот вектор 0 е единствен, и спротивниот вектор $-u$ на векторот u е единствен. Важи и законот за кратење, односно

$$u + w = v + w \text{ повлекува } u = v, \text{ за секои } u, v, w \in V$$

Исто така, одземањето е дефинирано со

$$u - v = u + (-v), \text{ за секои } u, v \in V$$

Останатите четири аксиоми: $M_1 - M_4$ се однесуваат на својствата на операцијата множење на вектор со скалар.

Според нашите ознаки користиме ист симбол 0 и за нулата како број и за нултиот вектор како елемент на V. Дали се работи за нулата како број или за нулти вектор, не е тешко за се заклучи од содржината на текстот. Поточно, скаларот секогаш го пишуваме пред векторот, па во изразот $0u$ се подразбира дека 0 е бројот нула, а во изразот $k0$ се подразбира дека 0 е нулти вектор.

Непосредно од аксиомите следуваат неколку едноставни својства на векторски простор, искажани во следнава теорема.

Теорема 4.1. Нека V е векторски простор. Тогаш

(i) $(\forall k \in \mathbb{R})$ и $0 \in V$, $k0 = 0$,

(ii) $(\forall u \in V)$ и за $0 \in \mathbb{R}$, $0u = 0$,

(iii) ако $ku = 0$ каде што $k \in \mathbb{R}$ и $u \in V$, тогаш $k = 0$ или $u = 0$,

(iv) $(\forall k \in \mathbb{R})(\forall u \in V)$ $(-k)u = k(-u) = -ku$.

Доказ. (i) Според аксиома C_2 за $u = 0$ добиваме $0 + 0 = 0$. Според аксиома M_1, $k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$. Оттука следува дека $k0 = 0$, согласно со единственоста на 0.

(ii) Бидејќи имаме дека $0 + 0 = 0$ $(0 \in \mathbb{R})$, од M_2 добиваме дека $0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$. Оттука следува дека $0u = 0$.

(iii) Нека $ku = 0$. Ако $k \neq 0$, тогаш постои $k^{-1} \in \mathbb{R}$ така што $k^{-1}k = 1$. Од овде имаме

$$u = 1u = (k^{-1}k)u = k^{-1}(ku) = k^{-1}0 = 0.$$

(iv) Од $u + (-u) = 0$ добиваме $0 = k0 = k\big(u + (-u)\big) = ku + k(-u)$, односно $0 = ku + k(-u)$. Додавајќи $-ku$ кон двете страни на последното равенство добиваме $-ku = k(-u)$. Користејќи дека $k + (-k) = 0$, добиваме дека $0 = 0u = \big(k + (-k)\big)u = ku + (-k)u$. Додавајќи $-ku$ кон двете страни, добиваме дека $-ku = (-k)u$. Дефинитивно, имаме дека $-ku = k(-u)$ за секој $k \in \mathbb{R}$ и секој $u \in V$. ■

Примери на векторски простори

Во продолжение ќе наведеме неколку примери на векторски простори коишто се обопштување на векторскиот простор $\mathbb{R}^n$.

Пример. Нека $\mathbb{K}$ е произволно поле. Во множеството

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$$

од сите подредени n-торки реални броеви дефинираме операција собирање со

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$

и операција множење со скалар $k\in\mathbb{K}$,

$$k(a_1,a_2,...,a_n)=(ka_1,ka_2,...,ka_n).$$

Со непосредна проверка на аксиомите C_1-C_4 и аксиомите M_1-M_4, како и случајот $\mathbb{R}^n$ докажан во глава 1, се покажува дека $\mathbb{K}^n$ е векторски простор над полето $\mathbb{K}$. Нулти вектор во $\mathbb{K}^n$ е подредената n-торки реални броеви $0=(0,0,\ldots,0)$. Спротивен вектор на векторот $(x_1,x_2,...,x_n)$ е векторот $(-x_1,-x_2,...,-x_n)$. ♦

Пример. Нека V е множеството од сите полиноми

$$P_n[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{K},\ i=1,2,\ldots,n\}$$

(n произволен природен број) со коефициенти во $\mathbb{K}$. Тогаш V е векторски простор во однос на вообичаеното собирање на полиноми и множење на полином со константа. Нултиот полином е нулти вектор; додека векторот $(-a_0)+(-a_1)x+(-a_2)x^2+...+(-a_n)x^n$ е спротивен вектор на векторот $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. ♦

Пример. Нека X е непразно множество и нека V се состои од сите функции $f:X\to\mathbb{K}$. Дефинираме збир $f+g\in V$ на функциите $f,g\in V$, и производ $kf\in V$ со $k\in\mathbb{K}$ на следниов начин

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \text{за секој}\quad x\in X,\ \text{и}$$

$$(kf)(x)=kf(x),\ \text{за секој}\quad x\in X,\ \text{секој}\ k\in\mathbb{K}.$$

Се покажува дека V со вака дефинираните операции е векторски простор над $\mathbb{K}$. Притоа нултиот вектор 0 е нултата функција, $0(x)=0,$ за секој $x\in X.$ За $f\in V,$ спротивен вектор е функцијата $-f\in V$ дефинирана со $(-f)(x)=-f(x),$ за секој $x\in X.$ ♦

Пример. Нека $\mathbb{K}$ е произволно поле. Множеството

$$M_{mn}=\left\{(a_{ij})_{mxn}\,\middle|\,a_{ij}\in\mathbb{K}\right\}$$

од сите матрици од ред mxn со елементи во полето $\mathbb{K}$ со вообичаените операции собирање на матрици и множење матрица со скалар е векторски простор. Нултата матрица е нулти вектор; додека векторот $(-a_{ij})_{mxn}$ е спротивен вектор на векторот $(a_{ij})_{mxn}$. ♦

Пример. Нека $\mathbb{E}$ е произволно поле коешто содржи потполе $\mathbb{K}$. Тогаш $\mathbb{E}$ може да се разгледува како векторски простор над $\mathbb{K}$, така што собирањето на вектори во $\mathbb{E}$ е вообичаеното собирање во $\mathbb{E}$, и множењето со скалар $kv,$ за $k\in\mathbb{K}$ и $v\in\mathbb{E}$ е вообичаеното множење на k и v како елементи од полето $\mathbb{E}$.

Така на пример, $\mathbb{C}$ е векторски простор над полето $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ е векторски простор над полето $\mathbb{Q}$, и $\mathbb{R}$ е векторски простор над полето $\mathbb{Q}$. ♦

4.2 Векторски потпростори

Нека W е подмножество од векторски простор над поле $\mathbb{K}$. W се нарекува **векторски потпростор** или само **потпростор** од V, ако W е векторски простор над $\mathbb{K}$ во однос на операциите собирање и множење со скалар во V.

Следнава теорема дава едноставен критериум за идентификација на потпростор:

Теорема 4.2. Подмножеството W е потпростор од V, ако и само се исполнети следниве услови:

(i) W е непразно множество,

(ii) W е затворено во однос на собирањето, односно ако $v, w \in W$, тогаш $v + w \in W$,

(iii) W е затворено во однос на множењето со скалар, односно ако $v \in W$ и $k \in \mathbb{K}$, тогаш $kv \in W$.

Доказ. Ако W е потпростор тогаш условите (i), (ii) и (iii) се исполнети согласно со дефиницијата на векторски потпростор.

Обратно, нека W ги задоволува условите (i), (ii) и (iii), односно $W \neq \emptyset$ и собирањето и множењето со скалар се добро дефинирани. Аксиомите C_1, C_4, M_1, M_2, M_3 и M_4 важат во W, бидејќи векторите во W се вектори и во V. Останува да се докажат аксиомите C_2 и C_3.

Нека $u \in W$, ($W \neq \emptyset$). Од (iii) следува дека $0u = 0 \in W$ и освен тоа $v + 0 = v$ за секое $v \in W$. Затоа C_2 важи. Нека сега $v \in W$. Тогаш $(-1)v = -v \in W$ и освен тоа $v + (-v) = 0$. Затоа важи и C_3. Значи W е потпростор од V. ■

Од оваа теорема ја добиваме последицата:

Последица 4.3. Подмножеството W е потпростор од V, ако и само ако се исполнети следниве услови:

(i) $0 \in W$ (или $W \neq \emptyset$) и

(ii) $a, b \in \mathbb{K} \wedge v, w \in W \Rightarrow av + bw \in W$.

Доказ. Нека W е потпростор. Тогаш согласно со горедокажаната теорема имаме дека $0 \in W$, $(W \neq \emptyset)$. Освен тоа од (ii) и (iii) добиваме дека

$$a,b \in \mathbb{K} \ \wedge \ v,w \in W \Rightarrow av \in W \ \wedge \ bw \in W \Rightarrow av + bw \in W.$$

Обратно, нека се исполнети условите (i) и (ii). Од (ii) за $a = b = 1$ и за $v,w \in W$ следува дека $1v + 1w = v + w \in W$. Потоа за $b = 0$ добиваме $av + 0w = av \in W$, а посебно, за $a = -1$, $(-1)v \in W$ за секој $v \in W$. W го содржи нултиот вектор, согласно со (i). Исполнети се сите останати услови за векторите од W, како вектори од V, значи W е потпростор. ■

Пример. Нека V е векторски простор. Тогаш V и $\{0\}$ се потпростори од V наречени **тривијални потпростори**. ♦

Пример. Нека $V = \mathbb{K}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{K}\}$. Тогаш

$W = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{K}\}$ е потпростор од V. ♦

Пример. Нека V е векторски простор од сите полиноми, а W е множеството од полиноми со степен помал или еднаков на даден фиксиран природен број n. Тогаш W е потпростор од V. ♦

Пример. Нека V е векторски простор од сите функции $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \neq \emptyset)$. Множеството W од сите ограничени функции $f : X \to \mathbb{R}$ е потпростор од V (f е ограничена функција, ако постои $M \in 3$ така што $|f(x)| \leq M$ за секој $x \in X$). ♦

Пример. Нека V е векторскиот простор од сите nxn матрици со елементи во полето $\mathbb{K}$. Множеството W од сите матрици

$A=(a_{ij})_{nxn}$ такви што $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=1,2,\dots,n$, наречени **симетрични матрици**, е потпростор од векторскиот простор V. ♦

Пример. Да го разгледаме хомогениот систем од m равенки со n непознати

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Секое решение на овој систем може да се смета како елемент од $\mathbb{R}^n$. Множеството W од сите решенија на овој систем е векторски потпростор од $\mathbb{R}^n$, наречен **потпростор на решенија на системот**. ♦

Пример. Нека U и W се векторски потпростори од векторски простор V. Ќе покажеме дека нивниот пресек $U\cap V$ е векторски потпростор од V.

Јасно е дека $0\in U$ и $0\in W$ бидејќи U и W се векторски потпростори. Оттука следува дека $0\in U\cap W$.

Понатаму, нека $u,v\in U\cap W$. Тогаш $u,v\in U$ и $u,v\in W$. Бидејќи U и W се векторски потпростори, добиваме дека

$$au+bv\in U \text{ и } au+bv\in W, \text{ за секои } a,b\in\mathbb{K}.$$

Оттука следува дека $au+bv\in U\cap W$, од каде што заклучуваме дека $U\cap W$ е векторски потпростор од V. ♦

Следната теорема е обопштување на последниот пример.

Теорема 4.4. Пресекот на конечен број потпростори на векторски простор V е потпростор од V.

Доказ. Нека $W_1, W_2, ..., W_k$ $(k \geq 2)$ се потпростори од векторски простор V. Тогаш $0 \in W_1, 0 \in W_2, ..., 0 \in W_k$, од каде што добиваме дека $0 \in W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_k$. Нека $u, v \in W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n$. Тоа значи дека $u, v \in W_i$, за $i = 1, 2, ..., k$, од каде што следува дека

$$au + bv \in W_i,\ i = 1, 2, ..., k, \text{ за секои } a, b \in \mathbb{K}$$

бидејќи W_i, $i = 1, 2, ..., k$ се потпростори. Оттука добиваме дека $au + bv \in W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n$, што повлекува дека $W_1 \cap W_2 \cap ... \cap W_n$ е потпростор од V, согласно со последица 4.3. ■

Забелешка. Теоремата 4.4 важи исто така ако наместо конечен број на потпростори земеме произволна фамилија од потпростори и доказот е аналоген.

Пример. Нека $V = \mathbb{R}^3$. Тогаш

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ и } W = \{(0, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$$

се потпростори од V. Притоа лесно се добива дека нивниот пресек

$$U \cap W = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

е исто така е потпростор од V. ♦

4.3. Линеарна комбинација и линеарна покривка

Нека V е векторски простор над $\mathbb{K}$ и нека $v_1, ..., v_m \in V$. Било кој вектор од V од облик

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m$$

каде што $a_1,\ldots,a_m \in \mathbb{K}$ се нарекува **линеарна комбинација** на векторите $v_1,\ldots,v_m$ со коефициенти $a_1,\ldots,a_m$. Важи следната теорема:

Теорема 4.5. Нека S е непразно подмножество од векторски простор V над поле $\mathbb{K}$. Множеството од сите линеарни комбинации на векторите во S, означено со $L(S)$, е потпростор од V што го содржи S. Освен тоа, ако W е произволен потпростор од V што го содржи S, тогаш $L(S) \subseteq W$, односно $L(S)$ е најмалиот потпростор што го содржи множеството S.

Доказ. Ако $v \in S$, тогаш $v = 1v \in L(S)$. Од произволноста на v од S следува дека $S \subseteq L(S)$. Освен тоа $L(S) \neq \varnothing$, бидејќи $S \neq \varnothing$.

Нека $v,w \in L(S)$ и нека

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m \quad \text{и} \quad w = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_pw_p$$

за некои $v_i,w_j \in S$ и $a_i,b_j \in \mathbb{K}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,p$. Тогаш за произволни $k_1,k_2 \in \mathbb{K}$, векторот

$$k_1v + k_2w = (k_1a_1)v_1 + \ldots + (k_1a_m)v_m + (k_2b_1)w_1 + \ldots + (k_2b_p)w_p =$$

$$= c_1v_1 + \ldots + c_mv_m + c_{m+1}w_1 + \ldots + c_{m+p}w_p \in L(S)$$

каде што $c_i = k_ia_i$, $i=1,2,\ldots,m$, $c_{m+j} = k_2b_j$, $j=1,2,\ldots,p$. Од произволноста на векторите $v,w \in L(S)$ и $k_1,k_2 \in \mathbb{K}$, следува дека $L(S)$ е потпростор од V.

Нека W е потпростор од V што го содржи S и нека $v_1,\ldots,v_m \in S \subseteq W$. Тогаш $a_1v_1,a_2v_2,\ldots,a_mv_m \in L(S)$ за секое $a_i \in \mathbb{K}$,

$i=1,2,\ldots,m$ и $a_1v_1+\ldots+a_mv_m \in W$, бидејќи W ги содржи сите линеарни комбинации од елементите на S. Тогаш $L(S) \subseteq W$. ■

Бидејќи $L(S)$ е најмалиот потпростор од V што го содржи S, потпросторот $L(S)$ се вика **потпростор генериран од S** или **покривка на S**. По дефиниција прифаќаме $L(\varnothing)=\{0\}$.

Пример. Нека u е вектор во $\mathbb{R}^3$. Потпросторот генериран од векторот u, $\{u\}$ се состои од сите вектори колинеарни со u, односно

$$L\{u\}=\{ku \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Геометриски тоа претставува права низ координатниот почеток и колинеарна со u. Ако $S=\{u,v\}$, каде што u и v не се колинеарни вектори, тогаш геометриски $L(S)$ претставува рамнина низ координатниот почеток што е паралелна со векторите u и v, односно

$$L\{u,v\}=\{k_1u+k_2v \mid k_1,k_2 \in \mathbb{R}\}.♦$$

Пример. Векторите $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$ и $\vec{e}_3=(0,0,1)$ го генерираат векторскиот простор $\mathbb{R}^3$. Навистина, за произволен вектор $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ имаме

$$(a,b,c)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3.♦$$

Пример. Полиномите $1,t,t^2,t^3,\ldots$ го генерираат векторскиот простор V од сите полиноми по t, бидејќи секој полином е линеарна комбинација од $1,t,t^2,t^3,\ldots$ ♦

Пример. Да се испита дали векторот $v=(3,9,-4,-2)\in\mathbb{R}^4$ припаѓа на покривката генерирана од $S=\{u_1,u_2,u_3\}\subseteq\mathbb{R}^4$, каде што $u_1=(1,-2,0,3)$, $u_2=(2,3,0,-1)$ и $u_3=(2,-1,2,1)$, значи да се провери дали векторот v е линеарна комбинација од векторите u_1,u_2,u_3, односно дали постојат броеви $x,y,z\in\mathbb{R}$ така што

$$\begin{aligned}(3,9,-4,-2)&=x(1,-2,0,3)+y(2,3,0,-1)+z(2,-1,2,1)=\\&=(x+2y+2z,-2x+3y-z,2z,3x-y+z).\end{aligned}$$

На тој начин проблемот се сведува на решавање на системот:

$$\begin{cases}x+2y+2z=3\\-2x+3y-z=9\\2z=-4\\3x-y\quad+z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y+2z=3\\7y+3z=15\\2z=-4\\-7y-5z=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y+2z=3\\7y+3z=15\\2z=-4\end{cases}$$

чииштo решенија се $x=1$, $y=3$ и $z=-2$. Според тоа, имаме дека

$$(3,9,-4,-2)=1\cdot(1,-2,0,3)+3\cdot(2,3,0,-1)+(-2)\cdot(2,-1,2,1)$$

односно векторот v е линеарна комбинација од векторите u_1,u_2 и u_3 $(v=u_1+3u_2-2u_3)$. Според тоа векторот v припаѓа на линеарната покривка генерирана со векторите u_1,u_2 и u_3. ♦

4.4. Редичен простор на матрица

Нека A е дадена $m\times n$ матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

Редиците на матрицата A

$$R_1 = \left(a_{11}, a_{12} \ldots, a_{1n}\right), R_2 = \left(a_{21}, a_{22} \ldots, a_{2n}\right), \ldots, \; R_m = \left(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}\right)$$

разгледувани како вектори во $\mathbb{K}^n$ генерираат потпростор од $\mathbb{K}^n$, наречен **редичен простор** на матрицата A, којшто се означува со

$$L(R_1, R_2, \ldots, R_m).$$

Аналогно, колоните на матрицата A, разгледувани како вектори во $\mathbb{K}^m$ генерираат потпростор од $\mathbb{K}^m$, наречен **колоничен простор** на матрицата A.

Да ги примениме сега елементарните редични трансформации на матрицата A. По извесен број трансформации нека сме ја добиле матрицата B. Со примена на секоја од трансформациите:

(i) $R_i \leftrightarrow R_j$;

(ii) $R_i \to kR_i$;

(iii) $R_i \to kR_j + R_i$,

редичниот простор на матрицата останува непроменет. Затоа, матриците A и B имаат ист редичен простор. Според тоа, важи следната теорема:

Теорема 4.6. Редично еквивалентните матрици имаат ист редичен простор.

Важи и следниот посилен резултат:

Теорема 4.7. Редично редуцираните скалести матрици имаат ист редичен простор ако и само ако имаат исти ненулти редици.

Доказ. Ако матриците А и В имаат исти ненулти редици во редично редуцирана канонична форма, јасно е дека тие имаат ист редичен простор.

Обратно, нека матриците А и В имаат ист редичен простор, како потпростор од $\mathbb{K}^n$. Тогаш, двете матрици А и В имаат по n колони. Освен тоа, ако матриците А и В имаат различен број редици, можеме да додадеме нулти редици на матрицата со помал број редици, така што двете матрици ќе имаат ист број редици и редичниот простор нема да им се промени. Значи, без губење на општоста можеме да претпоставиме дека двете матрици имаат исти димензии, на пример $m \times n$. Со индукција по m ќе докажеме дека А и В имаат исти ненулти редици.

Нека $m = 1$. За матриците А и В да имаат ист редичен простор, неопходно е нивните вектор-редици да бидат колинеарни. Но, бидејќи првиот ненулти елемент во вектор-редицата на А и вектор-редицата на В е еднаков на 1, тие вектор-редици се еднакви. Со тоа е докажано тврдењето во овој специјален случај.

Да претпоставиме дека тврдењето важи за матрицата со $m-1$ редица. Нека А и В се $m \times n$ матрици во редично редуцирана скалеста форма, кои имаат ист редичен простор. Да ги означиме со R_A и R_B ненултите редици на А и В соодветно, што започнуваат со најголем број нули. Прво ќе покажеме дека овие две редици започнуваат со ист број нули. Навистина, ако на пример R_A започнува со поголем број нули од R_B, со тоа започнува со поголем број нули и од секоја од ненултите редици на матрицата В, па јасно е дека R_A не припаѓа на редичниот простор на матрицата B. Имено, R_A не може да се изрази како линеарна комбинација од редицита на матрицата B. Според тоа, неопходно е R_A и R_B да почнуваат со ист број нули. Бидејќи сите ненулти редични вектори на матрицата A започнуваат со различен број нули, а редицата R_B е линеарна комбинација од векторите на A, тоа е можно само ако $R_B = \lambda R_A$. Но, првите ненулти елементи на R_A и R_B се единици, па тоа е можно само ако $\lambda = 1$, односно $R_A = R_B$. Освен тоа, и колоните на матриците A и B кои ги содржат првите ненулти елементи на редиците R_A и R_B (означени со *) се еднакви, бидејќи матриците A и B се во редично редуцирана канонична форма

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1* & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (R_A), \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1* & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (R_B). \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Ако од матриците A и B ги отфрлиме редиците R_A и R_B, заедно со соодветните колони кои минуваат низ првиот ненулти елемент во соодветната редица (означен со *), добиваме две $(m-1)\times(n-1)$ матрици A' и B', коишто, исто така, се во редично редуцирана канонична форма и освен тоа имаат ист редичен потпростор од $\mathbb{K}^{n-1}$. Према индуктивната претпоставка, матриците A' и B' имаат исти редици, па затоа и матриците A и B имаат исти редици. ■

Овој неочигледен резултат има голема примена. Според оваа теорема, **секоја матрица е еквивалентна со единствена редично редуцирана**, **скалеста форма која се нарекува редична канонична форма.**

За да провериме дали два редични потпростори на две матрици се еднакви, двете матрици ги доведуваме до редично редуцирана канонична форма, односно редична канонична форма. Ако тие имаат исти ненулти редици, тогаш двата редични потпростори се еднакви, а ако пак, тие се разликуваат во барем една редица, тогаш двата редични потпростори се различни.

Пример. Во $\mathbb{R}^4$ над $\mathbb{R}$ нека U е потпросторот генериран со векторите

$$u_1=(1,2,-1,3),\quad u_2=(2,4,1,-2)\ \text{ и }\ u_3=(3,6,3,-7),$$

а V е потпросторот генериран со векторите

$$v_1=(1,2,-4,11)\ \text{ и }\ v_2=(2,4,-5,14).$$

За да провериме дали овие два потпростори се еднакви, ги формираме матриците

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&4&1&-2\\3&6&3&-7\end{pmatrix}\ \text{ и }\ B=\begin{pmatrix}1&2&-4&11\\2&4&-5&14\end{pmatrix}$$

и со елементарни трансформации ги наоѓаме нивните редично редуцирани канонични форми:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\2&4&1&-2\\3&6&3&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&3&-8\\0&0&6&-16\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&0&3&-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1/3\\0&0&1&-8/3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-4&11\\2&4&-5&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-4&11\\0&0&3&-8\end{pmatrix}\to$$
$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&1/3\\0&0&1&-8/3\end{pmatrix}$$

Бидејќи тие имаат исти ненулти редици, потпросторите U и V се еднакви.

Да забележиме дека задачата може да се реши и елементарно. Имено, може да се покаже дека секој од векторите u_1,u_2 и u_3 е линеарна комбинација од векторите v_1 и v_2 и обратно, секој од векторите v_1 и v_2 е линеарна комбинација од векторите u_1,u_2 и u_3. ♦

4.5. Збир и директен збир на потпростори

Нека U и W се потпростори од векторскиот простор V. **Збир на потпросторите** U и W е множеството од сите можни суми $u+w$, каде што $u\in U$, $w\in W$, односно

$$U+W=\{u+w \ |u\in U \text{ и } w\in W\}.$$

Теорема 4.8. Збирот $U+V$ на потпросторите U и W од векторскиот простор V е потпростор од V.

Доказ. Од $0\in U$ и $0\in W$ следува дека $0=0+0\in U+W$. Нека $u+w,\ u'+w'\in U+W$, при што $u,u'\in U$, а $w,w'\in W$, и нека $k_1,k_2\in\mathbb{K}$. Тогаш, имаме дека

$$k_1(u+w)+k_2(u'+w')=(k_1u+k_2u')+(k_1w+k_2w')=$$

$$=u''+w''\in U+W,$$

каде што $u''=k_1u+k_2u'\in U$, бидејќи U е потпростор од V, и $w''=k_1w+k_2w'\in W$, согласно со претпоставката дека W е потпростор од V. Од произволноста на $k_1,k_2\in\mathbb{K}$, $u+w,\ u'+w'\in U+W$ следува дека $U+W$ е потпростор.■

Пример. Во векторскиот простор $V=\mathbb{R}^4$ множествата вектори

$$U=\{(s,y,0,0)|s,y\in\mathbb{R}\} \text{ и } W=\{(t,0,z,0)|t,z\in\mathbb{R}\}$$

се потпростори од V. Тогаш

$$U+W=\{(x,y,z,0)|x,y,z\in\mathbb{R}\} \text{ и } U\cap W=\{(x,0,0,0)|x\in\mathbb{R}\}.$$

Навистина, $v\in U\cap W$ значи дека $v=(s,y,0,0)=(t,0,z,0)$ за некои $s,y,t,z\in\mathbb{R}$. Оттука добиваме дека $s=t$, $y=0$, $z=0$, односно $v=(s,0,0,0)\in\{(x,0,0,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. Од произволноста на v следува дека $U\cap W\subseteq\{(x,0,0,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$.

Обратно, $\{(x,0,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq U \cap W$ бидејќи $(x,0,0,0) \in U$ за $s = x$ и $y = 0$, и $(x,0,0,0) \in W$, за $t = x$ и $z = 0$.

Понатаму, $v \in U + W$ значи дека $v = (s,y,0,0) + (t,0,z,0)$ за некои $s,y,t,z \in \mathbb{R}$ од каде што следува дека

$$v = (s+t,y,z,0) \in \{(x,y,z,0) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\},$$

односно

$$U + W \subseteq \{(x,y,z,0) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

За обратната инклузија имаме дека

$$v = (x,y,z,0) = (x,y,0,0) + (0,0,z,0) \in U + W$$

за $s = x$, $t = 0$.

Дефинитивно, добиваме дека

$$U + W = \{(x,y,z,0) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}. \blacklozenge$$

Пример. Нека V е векторскиот простор од сите 2x2 матрици над полето $\mathbb{R}$. Нека U е векторскиот простор од сите матрици чија што втора редица е нула и W е потпросторот од сите матрици чија што втора колона е нула.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in R \right\} \text{ и } W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a,c \in R \right\}$$

Може да се провери дека U и W се потпростори од V. Имаме дека

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in R \right\} \text{ и } U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in R \right\}$$

Може да се заклучи дека $U+W$ се состои од сите матрици кај кои што елементот во пресекот на втората редица и втората колона е нула, додека $U\cap W$ се состои од сите матрици со втората редица и втората колона нула. ♦

Векторскиот простор V се нарекува **директен збир** на потпросторите U и W, и се означува со $V=U\oplus W$, ако секој вектор v на единствен начин може да се запише во облик $v=u+w$, каде $u\in U$ и $w\in W$.

За проверка на директниот збир често се користи следнава теорема:

Теорема 4.9. Векторскиот простор V е директен збир од потпросторите U и W ако и само ако се исполнети условите:

(i) $V=U+W$, и (ii) $U\cap W=\{0\}$.

Доказ. Нека $V=U\oplus W$. Тогаш секој вектор $v\in V$ може на единствен начин да се претстави во облик $v=u+w$ за некој $u\in U$ и некој $w\in W$. Од овде слдува дека $V\subseteq U+W\subseteq V$, што значи дека $V=U+W$.

Потоа, нека $v\in U\cap W$. Тогаш имаме дека

$$v=v+0 \ (v\in U \text{ и } 0\in w) \text{ и } v=0+v \ (0\in U \text{ и } v\in W)$$

се две претставувања на v и согласно со единственоста, мора да е $v=0$. Значи, $U\cap W=\{0\}$.

Обратно, нека $V=U+W$ и $U\cap W=\{0\}$. Бидејќи $V=U+W$, за секое $v\in V$ постои барем едно претставување $v=u+w$, $u\in U$, $w\in W$. Нека $v=u'+w'$ каде $u'\in U$ и $w'\in W$ е друго претставување. Тогаш имаме дека $u+w=u'+w'$, од каде што следува дека $u-u'=w'-w$. Меѓутоа, $v'=u-u'\in U$ и истовремено $v'=w'-w\in W$ од каде што следува дека $v'\in U\cap V$. Но, $U\cap W=\{0\}$, па затоа $v'=0$, што значи дека $u'=u, w'=w$, односно претставувањето е единствено. Според тоа, имаме дека $V=U\oplus W$. ■

Пример. Нека

$$U=\{(a,b,0)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\} \text{ и } W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0,a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

се дадени потпростори од $\mathbb{R}^3$. Од равенството

$$(x,y,z)=(x,y+z,0)+(0,-z,z)\in U+W$$

следува дека $\mathbb{R}^3=U+W$. Заради $U\cap V=\{(a,-a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\}\neq\{0\}$, добиваме дека $\mathbb{R}^3\neq U\oplus V$. ♦

Пример. Нека

$$U=\{(a,b,0)\,|\,a,b\in\mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad W=\{(0,0,c)\,|\,c\in\mathbb{R}\}$$

се дадени потпростори од $\mathbb{R}^3$. Тогаш $\mathbb{R}^3=U+V$ и $U\cap V=\{0\}$, па според тоа $\mathbb{R}^3=U\oplus W$. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Дали множеството од сите пресликувања $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ од облик

а) $f(x,y,z)=ax+by+cz$, б) $f(x,y,z)=ax+by+cz+d$,

за некои $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, е векторски простор во однос на вообичаената операција собирање на функции и множење на функција со реален број?

2. Дали множеството на сите вектори во $\mathbb{R}^3$ кои се колинеарни со векторот $(1,-2,3)$ е векторски простор во однос на вообичаената операција собирање во $\mathbb{R}^3$ и множење на вектор од $\mathbb{R}^3$ со реален број?

3. Дали множеството на сите вектори од облик

$$x(2,0,3)+y(-1,4,-2)$$

каде што $x,y\in\mathbb{R}$ претставува векторски простор во однос на операциите во $\mathbb{R}^3$ над $\mathbb{R}$?

4. Дали множеството на сите вектори $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ такви што

а) $2x+3y-z=0$ б) $2x+3y-z+3=0$

во однос на вообичаените операции со вектори во $\mathbb{R}^3$ претставува векторски простор?

5. Дали множеството на

а) реални броеви $\mathbb{R}$ б) комплексни броеви $\mathbb{C}$

претставува векторски простор над реалните броеви во однос на обичното собирање и множење?

6. Дали множеството на вектори од облик (x,y,z), каде што $x,y,z\in\mathbb{C}$, во однос на вообичаените операции со вектори претставува векторски простор над $\mathbb{R}$?

7. Дали множеството од нултиот вектор на V над поле $\mathbb{K}$, $\{0\}$, е векторски простор во однос на операциите дефинирани во V?

8. Нека $V=\mathbb{R}^3$. Дали се потпростори од V следните подмножества:

а) $\{(0,0,0)\}$ б) $\mathbb{R}^3$ в) $\{(a,b,0) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

г) $\{(a,b,0) \mid a^2+b^2=1, a,b\in\mathbb{R}\}$ д) $\{(a,b,0) \mid a+b+1=0,\ a,b\in\mathbb{R}\}$

ѓ) $\{(a,b,0) \mid 2a+3b=0,\ a,b\in\mathbb{R}\}$?

9. Нека се дадени потпросторите

$$U_1=\{(x,y,z,t) \mid a_1x+a_2y+a_3z+a_4t=0\} \text{ и}$$

$$U_2=\{(x,y,z,t) \mid b_1x+b_2y+b_3z+b_4t=0\}.$$

Запиши го пресекот $U_1\cap U_2$ описно.

10. Ако U и W се потпростори од V, дали и $U\cup W$ е потпростор на V?

11. Ако U, W и $U\cup W$ се потпростори од V, тогаш $U\subseteq V$ или $V\subseteq U$. Докажи!

12. Нека V е векторскиот простор од сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Кои од следните подмножества се потпростори од V:

$$U_1=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(5)=1\}$$

$$U_2=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(4)=f(8)\}$$

$$U_3=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(5)+f(7)=2\}$$

$$U_4=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(-x)=-f(x),\ \text{за секое } x\in\mathbb{R}\}$$

$$U_5 = \{f \mid f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(-x) = f(x), \text{ за секое } x \in \mathbb{R}\}$$

$$U_6 = \{f \mid f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \text{ за секое } x \in \mathbb{R}\}?$$

13. Нека V е векторски простор од сите полиноми, а W е множеството од полиноми чиј степен е еднаков на n. Дали W е потпростор од V?

14. Дали векторот $v = (-5,3,2)$ може да се запише како линеарна комбинација на векторите

$$v_1 = (-3,2,1), \; v_2 = (-4,-1,2) \text{ и } v_3 = (-5,7,1)?$$

15. Запиши го векторот $v = (5,0,1,-2)$ како линеарна комбинација на векторите

$$v_1 = (1,0,11), \; v_2 = (3,0,1,2), \; v_3 = (1,0,2,-1).$$

16. За која вредност на параметарот k векторот $v = (1,k,-2)$ може да се запише како линеарна комбинација од векторите

$$v_1 = (3,-2,0) \text{ и } v_2 = (-2,5,1)?$$

17. Нека V е векторски простор од функции $f:\{5,7\} \to \mathbb{R}$. Опиши го потпросторот од V кој што е генериран од следните подмножества:

а) $U_1 = \{f \mid f:\{5,7\} \to \mathbb{R}, f(5) = 1\}$

б) $U_2 = \{f \mid f:\{5,7\} \to \mathbb{R}, f(5) = 2f(7)\}$.

18. Напиши го полиномот $P(t) = t^2 + 4t - 3$ како линеарна комбинација од полиномите:

$$P_1(t) = t + 3,\ \ P_2(t) = 2t^2 - 3t \text{ и } P_3(t) = t^2 - 2t + 5.$$

19. Ако u е линеарна комбинација од векторите $v_1, v_2, ..., v_n$, а v_i е линеарна комбинација од векторите $w_1, w_2, ..., w_m$, за секое $i \in \{1, 2, ..., n\}$, докажи дека и u е линеарна комбинација од векторите $w_1, w_2, ..., w_m$.

20. Провери дали во $\mathbb{R}^6$ над $\mathbb{R}$ потпросторите генерирани соодветно со векторите

$$(1,0,-2,3,4,1), (-2,0,1,3,5,6),\ (0,0,1,1,2,0) \quad \text{и}$$

$$(-2,0,1,1,4,2),\ \ (0,0,4,2,1,-1), (-1,-2,3,1,0,1)$$

се еднакви.

21. Провери дали во $\mathbb{R}^5$ над $\mathbb{R}$ потпросторите генерирани соодветно со векторите

$$(0,2,3,-1,1), (0,1,1,0,-2), (0,-1,1,2,0) \quad \text{и}$$

$$(0,1,1,4,2), (0,4,2,1,-1),\ (0,4,2,1,-1)$$

се еднакви.

22. Провери дали во $\mathbb{R}^4$ над $\mathbb{R}$ потпросторите генерирани соодветно со векторите

$$(2,3,-1,1), (1,1,0,-2), (1,2,-1,3) \ \text{ и}$$

$$(0,1,-1,5), (4,5,-1,-3))$$

се еднакви.

23. Аналогно на елементарните редични трансформации постојат и елементарни колонични трансформации, кои всушност се елементарни редични трансформации применети на транспонираната матрица. Со нивна помош секоја матрица може да се доведе до колонично редуцирана скалеста форма. Со помош на елементарни колонични трансформации, следната матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

доведи ја до колонично редуцирана скалеста форма (колонична канонична форма).

24. Дали за потпросторите

$$U = \{(x,y,0,0) \mid x + 2y = 0\} \text{ и } W = \{(0,0,z,t) \mid z + t = 0\}$$

од $\mathbb{R}^4$ важи $U + W = \mathbb{R}^4$?

25. Нека U и W се потпростори од векторскиот простор $\mathbb{R}^3$, зададени како што следува

$$U = \{(x,y,z) \mid x + 2y + 3z = 0\} \text{ и } W = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}.$$

Докажи дека $U + W = \mathbb{R}^3$. Дали важи $U \oplus W = \mathbb{R}^3$?

26. Нека U и W се потпростори од векторски простор $\mathbb{R}^3$, зададени со

$$U = \{(x,y,z) \mid x = y = z\} \text{ и } W = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}.$$

Докажи дека $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

27. Нека U и W се потпростори од векторски простор V. Докажи дека $U+W$ е најмалиот потпростор од V кој како подмножество ги содржи потпросторите U и W.

28. Ако $X=\{u_1,u_2,\dots,u_p\}$ го генерира потпросторот U, а $Y=\{v_1,v_2,\dots,v_q\}$ го генерира потпросторот W, тогаш $X\cup Y$ го генерира потпросторот $U+W$. Докажи!

29. Докажи дека просторот од сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е директен збир на потпросторите

$$U=\{g \mid g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ и } g(-x)=-g(x)\} \text{ и}$$

$$W=\{h \mid h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ и } h(-x)=h(x)\}.$$

5. БАЗА И ДИМЕНЗИЈА

5.1 Линеарна зависност

Дефиниција. Нека V е векторски простор. Векторите $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ се нарекуваат **линеарно зависни**, ако постојат скалари $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, не сите еднакви на нула, така што

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = 0.$$

Векторите коишто не се линеарно зависни се нарекуваат **линеарно независни**.

Забележуваме дека векторите $v_1, v_2, \ldots, v_m$ се линеарно независни ако и само ако

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = 0 \text{ повлекува } a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0.$$

Пример. Векторите $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$ и $w = (5, 3, -2)$ се линеарно зависни бидејќи $3u + 2v + (-1)w = 0$, односно

$$3(1, -1, 0) + 2(1, 3, -1) + (-1) \cdot (5, 3, -2) = (0, 0, 0). \ \blacklozenge$$

Пример. Множеството вектори

$$X = \{(6,2,3,4),\ (0,5,-3,1),\ (0,0,7,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

е линеарно независно бидејќи од

$$x(6,2,3,4) + y(0,5,-3,1) + z(0,0,7,-2) = (0,0,0,0)$$

имаме дека

$$(6x, 2x+5y, 3x-3y+7z, 4x+y-2z) = (0,0,0,0)$$

од каде што го добиваме системот

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ 2x + 5y = 0 \\ 3x - 3y + 7z = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

чиешто решение е $x = y = z = 0$, што значи дека даденото множество вектори X е линеарно независно.♦

Да забележиме дека векторите во претходниот пример определуваат матрица во ешалонски облик

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Покажавме дека ненултите редици од погорната матрица се линеарно независни. Овој резултат важи и во општ случај и ќе го формулираме во теорема.

Лема 5.1. Ненултите вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$ се линеарно зависни ако и само ако некој од нив, на пример, v_i е линеарна комбинација од претходните вектори

$$v_i = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1}$$

Доказ. Нека $v_i = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1}$. Тогаш имаме дека

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i = 0$$

и $(-1) \neq 0$, што значи векторите се линеарно зависни.

Обратно, нека векторите $v_1, v_2, \ldots, v_m$ се линеарно зависни. Тогаш, постојат скалари $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не сите 0 такви што

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m = 0$$

Нека k е најголемиот број таков што $a_k \neq 0$. Тогаш имаме дека

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k + 0 \cdot v_{k+1} + \cdots + 0 \cdot v_m = 0$$

Ако $k = 1$ тогаш $a_1v_1 = 0$, па добиваме дека $a_1 = 0$ или $v_1 = 0$, што е контрадикција. Значи $k > 1$. Тогаш

$$v_k = \frac{-a_1v_1}{a_k} - \frac{a_2v_2}{a_k} - \ldots - \frac{a_{k-1}v_{k-1}}{a_k}. \blacksquare$$

Теорема 5.2. Ненултите редици на една матрица во скалеста форма се линеарно независни.

Доказ. Да претпоставиме дека ненултите редици

$$R_n, R_{n-1}, \ldots, R_1$$

на една матрица во скалеста форма се линеарно зависни. Тогаш некоја од нив на пример R_i е линеарна комбинација од претходните, односно

$$R_i = a_{i+1}R_{i+1} + a_{i+2}R_{i+2} + \cdots + a_nR_n$$

Да претпоставиме дека $k-$тата компонента на R_i е првиот ненулти елемент. Тогаш, бидејќи матрицата е во скалеста форма $k-$тата компонента на $R_{i+1}, R_{i+2}, \dots, R_n$ се сите еднакви на 0, па затоа $k-$тата на десната страна на погорното равенство е 0, што не доведува до заклучок дека $1=0,$ што претставува контрадикција. Затоа, заклучуваме дека векторите

$$R_n, R_{n-1}, \dots, R_1$$

се линеарно независни вектори. ■

Ќе предочиме некои факти во врска со линеарно зависните (независните) множества вектори:

Забелешка. Множеството $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ се нарекува **зависно (независно) множество** ако векторите $v_1, v_2, \dots, v_m$ се зависни (независни). По договор, празното множество $\varnothing$ $(m=0)$ е независно.

Забелешка. Ако два од векторите $v_1, v_2, \dots, v_m$ се еднакви, на пример, $v_1 = v_2,$ тогаш векторите се линеарно зависни. Навистина, имаме дека

$$v_1 - v_2 + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_m = 0$$

и коефициентиот пред v_1 не е нула.

Забелешка. Два вектори v_1 и v_2 се линеарно зависни ако и само ако едниот е мултипл од другиот, односно

$$v_1 = kv_2 \text{ или } v_2 = kv_1.$$

Забелешка. Секое множество вектори што содржи линеарно зависно подмножество е линеарно зависно.

Навистина, ако $\{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_m\}$ е множество вектори чиешто подмножество $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ е линаерно зависно, тогаш постојат скалари $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{K}$, од кои барем еден е различен од нула, така што важи $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k = 0$. Тогаш

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k + 0v_{k+1} + ... + 0v_m = 0.$$

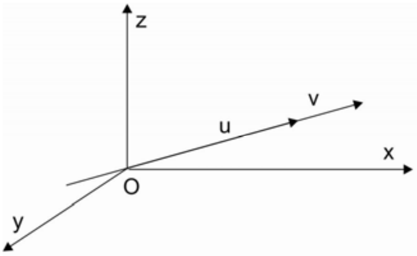
Забелешка. Секое подмножество од линеарно независно множество е линеарно независно, што е директна последица од претходната забелешка.

Забелешка. Множество што се состои од ненулти вектор, $X = \{v\}$, $(v \neq 0)$ е линеарно независно, бидејќи од $av = 0$, за $v \neq 0$ следува дека $a = 0$.

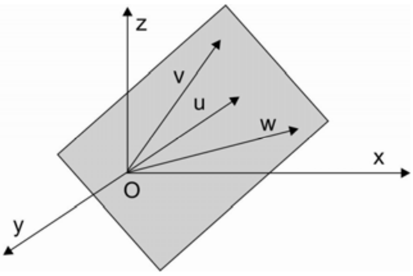
Забелешка. Секое множество вектори што го содржи нултиот вектор $\{0, v_1, v_2, ..., v_m\}$ е линеарно зависно, бидејќи

$$1 \cdot 0 + 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_m = 0$$

за произволно дадени вектори $v_1, v_2, ..., v_m$.



Цртеж 1



Цртеж 2

Забелешка. Во $\mathbb{R}^n$ условот за линеарна незвисност ја има следнава геометриска интерпретација:

Два вектора u и v се линерно зависни ако лежат на права што минува низ координатниот почеток (цртеж 1).

Три вектори u, v и w се линеарно зависни ако тие лежат на рамнина што минува низ координатниот почеток (цртеж 2).

5.2. База и димензија

Дефиниција. За векторскиот простор V велиме дека има конечна димензија n, или дека е $n-$**димензионален** и пишуваме $\dim V = n$, ако постојат линеарно независни вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ така што $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ го генерира V. Множеството B се нарекува **база** на векторскиот простор V.

За да биде добро дефиниран поимот димензија е неопходно да докажеме дека бројот n не зависи од изборот на базата. Претходно ќе ја докажеме следнава лема.

Лема 5.3. Нека $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ го генерира векторскиот простор V. Ако $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ е линеарно независно множество од V, тогаш $m \le n$ и V е генерирано со множество од облик $\{w_1, w_2, \ldots, w_m, v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{n-m}}\}$..

Специјално, секое множество што содржи повеќе од n вектори од V е линеарно зависно.

Забелешка. Теоремата тврди дека секое линеарно независно множество од вектори во векторскиот простор V може да се дополни до база на V со внесување на нови вектори.

Доказ. Бидејќи множеството вектори

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

го генерира V, векторот w_1 може да се претстави како линеарна комбинација од векторите $v_1, v_2, \ldots, v_n$, од каде што следува дека множеството

$$\{w_1, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

е линерано зависно и исто така го генерира V. Тогаш барем еден вектор од множеството

$$\{w_1, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

е линеарна комбинација од претходните. Притоа да забележиме дека тоа не може да биде векторот w_1, туку некој вектор v_i е линеарна комбинација од векторите $w_1, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$. Тогаш множеството

$$\{w_1, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$$

исто така го генерира V.

Слично, заклучуваме дека множеството

$$\{w_1, w_2, v_1, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$$

е зависно и го генерира V. Тогаш барем еден вектор од множеството

$$\{w_1,w_2,v_1,v_2,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_n\}$$

е линеарна комбинација од претходните. Повторно забележуваме дека тоа не може да бидат векторите w_1 и w_2 бидејќи $\{w_1,w_2\}$ е линеарно независно множество. Значи, некој вектор v_k $(k \neq i)$ е линеарна кобинација од векторите $w_1,w_2,v_1,v_2,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_{k-1}$ Тогаш множеството

$$\{w_1,w_2,v_1,v_2,...,v_{i-1},v_{i+1},...,v_{k-1},v_{k+1},...,v_n\}$$

исто така го генерира V.

Оваа постапка може да се повтори m пати, се додека множеството $\{w_1,w_2,...,w_m\}$ не се исцрпи. Во секој чекор отфрламе по еден вектор од множеството $\{v_1,v_2,...,v_n\}$, што значи дека по $m-$тиот чекор генераторното множество на V има барем m елементи, односно $m \leq n$. Множеството $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ не може да се исцрпи пред да бидат внесени сите вектори $w_1,w_2,...,w_m$ бидејќи тоа ќе биде противречно на линеарната независност на векторите $w_1,w_2,...,w_m$.

Останува уште да докажеме дека $m > n$ не е можно. Навистина, ако $m > n$ тогаш после n чекори го добиваме генераторното множество $\{w_1,w_2,...,w_n\}$ што повлекува дека w_{n+1} е линеарна комбинација од $w_1,w_2,...,w_m$ што противречи на претпоставката дека $\{w_1,w_2,...,w_m\}$ е независно множество. ■

Пример. Векторите

$$(3,1,1) \text{ и } (-3,7,2)$$

се линеарно независни. Кон овие вектори го допишуваме нивниот векторскиот производ $(3,1,1)\times(-3,7,2)=(-5,-9,24)$. Овие три вектори формираат база во $\mathbb{R}^3$. Наместо векторот $(-5,-9,24)$ може да избереме и многу други, на пример векторот $(1,0,0)$ за да добиеме база. Но, ако кон овие три вектори допишеме четврт вектор, тој е сигурно линеарна комбинација од трите вектори, па според тоа ќе добиеме линеарно зависно множество вектори.♦

Како последица од претходната лема ја добиваме следната важна теорема:

Теорема 5.4. Нека V е векторски простор со конечна димензија. Тогаш секоја база на V има ист број елементи.

Доказ. Нека $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ е база на V и нека $\{e'_1,e'_2,...,e'_m\}$ е друга база на V. Бидејќи имаме дека $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ го генерира V, а $\{e'_1,e'_2,...,e'_m\}$ е независно множество, според претходната лема мора да важи $m\le n$. Од друга страна пак, бидејќи имаме дека $\{e'_1,e'_2,...,e'_m\}$ го генерира V, а $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ е независно множество, според претходната лема мора да важи $n\le m$. Според тоа, имаме дека $m=n$. ■

Векторскиот простор $\{0\}$ се смета дека има димензија нула бидејќи $\varnothing$ е единствено негово линеарно независно множество. Еден векторски простор којшто нема конечна димензија, односно не е конечно димензионален се нарекува **бесконечно димензионален** векторски простор.

Пример. Да го разгледаме векторскиот простор $\mathbb{K}^n$ што се состои од подредени $n-$торки реални броеви. Векторите

$$e_1 = (1,0,0,...,0,0),$$

$$e_2 = (0,1,0,...,0,0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_n = (0,0,0,...,0,1)$$

формираат база на $\mathbb{K}^n$, наречена **стандардна база**, па тој е $n-$димензионален векторски простор.♦

Пример. Нека U е векторскиот простор од сите $2x3$ матрици над поле $\mathbb{K}$. Тогаш матриците

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

формираат база за векторскиот простор U. Според тоа, имаме дека $\dim U = 6$.

Поопшто, ако U е векторскиот простор од сите mxn матрици над поле $\mathbb{K}$, тогаш матриците $E_{ij} = \left(e_{pq}\right)$ каде што

$$e_{pq} = \begin{cases}1, & \text{ако } p = i \text{ и } q = j\\ 0, & \text{во спротивно}\end{cases}$$

формираат база за векторскиот простор U наречена **стандардна база**. Според тоа, имаме дека $\dim U = mn$. ♦

Пример. Нека W е множеството од полиноми по t со степен помал или еднаков од n. Множеството

$$\{1, t, t^2, ..., t^n\}$$

е линеарно независно и го генерира W. Затоа тоа е база за W и $\dim W = n+1$.

Множеството од сите полиноми е бесконечно димензионален векторски простор. Навистина, ако има конечна димензија r, тогаш произволни $r+1$ полиноми, на пример $1, t, ..., t^r$ би требало да се линеарно зависни вектори. Меѓутоа, овие полиноми се линеарно независни. Навистина, ако за некои коефициенти $a_0, a_1, ..., a_r$ полиномот $a_0 + a_1 t + ... + a_r t^r$ е нулти полином, тој добива вредност 0 за секоја вредност на t, па тогаш коефициентите $a_0, a_1, ..., a_r$ мора да се еднакви на нула. Значи заклучокот дека $1, t, ..., t^r$ се линеарно зависни е погрешен, па погрешна е и претпоставката, дека тој векторски простор има конечна димензија. ♦

Нека S е подмножество од векторски простор V. За множеството $\{v_1, v_2, \dots v_m\}$ велиме дека е **максимално линеарно независно** подмножество од S ако

(i) тоа е независно подмножество од S, и

(ii) $\{v_1, v_2, \dots v_m, w\}$ е линеарно зависно за произволно $w \in V$.

Теорема 5.5. Нека S го генерира векторскиот простор V и нека $\{v_1, v_2, \dots v_m\}$ е максимално линеарно независно подмножество од S. Тогаш $\{v_1, v_2, \dots v_m\}$ е база на V.

Доказ. Нека $w \in S$. Бидејќи $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ е максимално линеарно независно подмножество од V, имаме $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, w\}$ е линеарно зависно подмножество од V. Затоа векторот w е линеарна комбинација од векторите $v_1, v_2, \ldots v_m$, односно, имаме дека $w \in L(\{v_1, v_2, \ldots, v_m\})$. Според тоа, $S \subseteq L(\{v_1, v_2, \ldots, v_m\})$, од каде што наоѓаме дека $V \subseteq L(S) \subseteq L(\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}) \subseteq V$. Оттука заклучуваме дека подмножеството $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ го генерира V. Бидејќи $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ е линеарно независно подмножество од V, претставува база за V. ■

Главната врска меѓу димензијата на векторски простор и негово линеарно независно подмножество е искажана со следната теорема:

Теорема 5.6. Нека V е векторски простор со конечна димензија n. Тогаш важат следниве тврдења:

(i) секое множество од $n+1$ или повеќе вектори е зависно;

(ii) секое независно множество може да се прошири до база;

(iii) секое линеарно независно множество од n елементи претставува база.

Доказ. Нека $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ е база за V.

(i) Ако постои некое множество од $n+1$ вектори што е линеарно независно, тогаш димензијата на V е поголема или еднаква на $n+1$. Тоа противречи на фактот дека димензијата на V е n.

(ii) Нека $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ е независно множество од вектори. Тогаш V е генерирано од множество од облик

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_r, e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Ако некој од векторите e_i е линеарна комбинација од останатите вектори, добиваме подмножество што го генерира V. Со отфрлање на сите такви вектори e_i, се добива линеарно независно множество што го генерира V. Добиеното множество е база на V и го содржи даденото множество $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ од линеарно независни вектори.

(iii) Според (ii) едно независно множество T со n елементи е дел од база. Но секоја база на V содржи n елементи. Затоа T претставува база. ■

Пример. Лесно се проверува дека четирите вектори во $\mathbb{R}^4$:

$$(1,1,1,1), \ (0,1,1,1), \ (0,0,1,1) \text{ и } (0,0,0,1)$$

со линеарно независни. Бидејќи $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, тие формираат база за $\mathbb{R}^4$. ♦

Пример. Четирите вектори во $\mathbb{R}^3$:

$$(127,-132,58), \ (43,0,-17), \ (521,-317,94), \ (328,512,731)$$

се линеарно зависни, бидејќи се елементи на векторски простор со димензија 3. ♦

5.3. Димензија на потпростори

Следнава теорема ја дава врската помеѓу димензијата на векторски простор и димензијата на негов потпростор.

Теорема 5.7. Нека W е потпростор од $n-$димензионален векторскиот простор V. Тогаш $\dim W \leq n$.

Специјално, ако $\dim W = n$, тогаш $W = V$.

Доказ. Бидејќи димензијата на V е еднаква на n, произволно избрани $n+1$ или повеќе вектори се линеарно зависни. Затоа, секоја база на W може да има најмногу n вектори, па според тоа може да заклучиме дека $\dim W \leq n$.

Нека $\dim W = n$. Тогаш постои база $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ на W која што содржи n вектори. Бидејќи $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ е линеарно независно множество во V како база за W, и содржи n вектори, заклучуваме дека $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ е база и за V. Оттука добиваме дека $W = V$. ■

Пример. Нека W е потпростор од реалниот векторски простор $\mathbb{R}^3$. Знаеме дека $\dim \mathbb{R}^3=3$, па заради претходната теорема димензијата на било кој негов потпростор може да биде 0, 1, 2 или 3. Можни се следниве случаи:

(i) ако $\dim W = 0$, тогаш $W = \{0\}$, и W е координатниот почеток

(ii) $\dim W = 1$, тогаш W е права низ координатниот почеток

(iii) $\dim W = 2$, тогаш W е рамнина низ координатниот почеток

(iv) $\dim W = 3$, тогаш W е целиот простор $\mathbb{R}^3$. ♦

Теорема 5.8. Нека U и W се конечно димензионални потпростори од векторскиот простор V. Тогаш $U+W$ е конечно димензионален векторски простор и

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Во специјален случај ако $V = U \oplus W$, тогаш

$$\dim V = \dim U + \dim W.$$

Доказ. Нека $\dim U = m$, $\dim W = n$ и $\dim(U \cap W) = r$. Бидејќи $U \cap W$ е потпростор од U и од W, имаме дека $r \leq m$ и $r \leq n$. Нека $\{v_1,...,v_r\}$ е база за $U \cap W$. Според Теорема 5.6 (ii) оваа база може да се прошири до база на U и до база на W, на пример,

$$\{v_1,...,v_r,u_1,\ldots,u_{m-r}\} \text{ и } \{v_1,...,v_r,w_1,\ldots,w_{n-r}\}$$

се бази на U на W, соодветно. Нека

$$B = \{v_1,...,v_r,u_1,\ldots,u_{m-r},w_1,\ldots,w_{n-r}\}$$

Бидејќи B има $r+(m-r)+(n-r) = m+n-r$ вектори, доволно е да докажеме дека B е база на $U+W$.

Бидејќи имаме дека

$\{v_1,...,v_r,u_1,\ldots,u_{m-r}\}$ е база на U, и

$\{v_1,...,v_r,w_1,\ldots,w_{n-r}\}$ е база на W,

следува дека

$$B = \{v_1,...,v_r,u_1,\ldots,u_{m-r},w_1,\ldots,w_{n-r}\}$$

го генерира потпросторот $U+W$.

Нека

$$a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_1u_1+\cdots+b_{m-r}u_{m-r}+c_1w_1+\cdots+c_{n-r}w_{n-r}=0$$

и нека

$$v=a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_1u_1+\cdots+b_{m-r}u_{m-r}.$$

Тогаш имаме дека

$$v=-c_1w_1-\cdots-c_{n-r}w_{n-r}.$$

Бидејќи $\{v_1,...,v_r,u_1,\dots,u_{m-r}\}\subseteq U$ следува дека $v\in U$, и бидејќи $\{v_1,...,v_r,w_1,\dots,w_{n-r}\}\subseteq W$, следува дека $v\in W$. Оттука добиваме дека $v\in U\cap W$, па постојат скалари $d_1,\dots,d_r$, такви што

$$v=d_1v_1+\cdots+d_rv_r.$$

Според тоа, имаме дека

$$d_1v_1+\cdots+d_rv_r=-c_1w_1-\cdots-c_{n-r}w_{n-r}$$

односно

$$d_1v_1+\cdots+d_rv_r+c_1w_1+\cdots+c_{n-r}w_{n-r}=0.$$

Бидејќи $\{v_1,...,v_r,w_1,\dots,w_{n-r}\}$ е база на W следува дека

$$d_1=\cdots=d_r=c_1=\cdots c_{n-r}=0.$$

Оттука следува дека $v=0$, што повлекува дека

$$a_1v_1+\cdots+a_rv_r+b_1u_1+\cdots+b_{m-r}u_{m-r}=0.$$

Бидејќи $\{v_1,...,v_r,u_1,\dots,u_{m-r}\}$ е база на U следува дека

$$a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_{m-r} = 0.$$

Според тоа, може да заклучиме дека B е база за потпросторот $U + W$. ■

Пример. Нека U и W се $xy-$рамнината и $yz-$рамнината, соодветно, во $\mathbb{R}^3$, односно

$$U = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \text{ и } W = \{(0,b,c) \mid b,c \in \mathbb{R}\}.$$

Бидејќи $\mathbb{R}^3 = U + W$ имаме дека $\dim(U+W) = 3$. Исто така, имаме дека $\dim U = 2$ и $\dim W = 2$. Заради претходната теорема добиваме дека

$$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap W), \text{ односно } \dim(U \cap W) = 1$$

Да забележиме дека добиениот резултат се совпаѓа со фактот дека $U \cap W$ е $y-$оската, односно $U \cap W = \{(0,b,0) \mid b \in \mathbb{R}\}$, па неговата димензија е 1. ♦

5.4. Ранг на матрица

Нека A е произволна $m \times n$ матрица над поле $\mathbb{K}$. Димензијата на редичниот простор, односно на потпросторот од $\mathbb{K}^n$ генериран од редичните вектори на A, се нарекува **редичен ранг** на матрицата A. Аналогно и колоничните вектори генерираат потпростор на $\mathbb{K}^n$ наречен колоничен простор, а неговата димензија се нарекува **колоничен ранг** на матрицата A.

Теорема 5.9. Колоничниот и редичниот ранг на една матрица се еднакви.

Доказ. Нека е дадена матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нејзините вектор-редици да ги означиме со

$$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$R_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$

…………………………

$$R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

Нека редичниот ранг на матрицата е r и нека следните r вектори

$$C_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}),$$

$$C_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}),$$

…………………………

$$C_r = (c_{r1}, c_{r2}, \dots, c_{rn}),$$

формираат база за редичниот простор на матрицата A. Тогаш важи

$$R_1 = k_{11}C_1 + k_{12}C_2 + \dots + k_{1r}C_r$$

$$R_2 = k_{21}C_1 + k_{22}C_2 + \dots + k_{2r}C_r$$

………………………………......

$$R_m = k_{m1}C_1 + k_{m2}C_2 + \dots + k_{mr}C_r$$

за некои скалари k_{ij}. Во координатна форма овие равенства гласат

$$a_{1i} = k_{11}c_{1i} + k_{12}c_{2i} + \dots + k_{1r}c_{ri} \qquad (1 \le i \le r)$$

$$a_{2i} = k_{21}c_{1i} + k_{22}c_{2i} + \dots + k_{2r}c_{ri} \qquad (1 \le i \le r)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{mi} = k_{m1}c_{1i} + k_{m2}c_{2i} + \dots + k_{mr}c_{ri} \qquad (1 \le i \le r).$$

Затоа, за секој $i \in \{1,2,\dots,n\}$ важи

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = c_{1i}\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + c_{2i}\begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \dots + c_{ri}\begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

Значи, секоја од колоните на A е линеарна комбинација од векторите

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

а нив ги има r.

Затоа колоничниот простор има димензија најмногу r, односно колоничниот ранг на матрицата е најмногу r. Значи, колоничниот ранг е помал или еднаков на редичниот ранг.

Поради симетрија, ако ја разгледаме транспонираната матрица A^t добиваме дека редичниот ранг е помал или е еднаков на колоничниот ранг. Според тоа, редичниот и колоничниот ранг на матриците се еднакви. Од произволноста на матрицата A следува дека ова важи за секоја матрица. ■

Дефиниција. Ранг на матрицата A е редичниот, односноколоничниот ранг на A и се означува со ранг (A).

Значи рангот на A е максималниот број на линеарно независните вектор-редици на A, а во исто време и максималниот број на линеарно независните вектор-колони.

Пример. Нека е дадена матрицата

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 6 & -3 & -3\\ 3 & 10 & -6 & -5\end{pmatrix}$$

Ќе ја редуцираме до ешалонски облик со помош на елементарни редични трансформации:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 6 & -3 & -3\\ 3 & 10 & -6 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3 & -1\\ 0 & 4 & -6 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Значи ранг (A) = 2.♦

Аналогно на елементарните редични трансформации постојат и елементарни колонични трансформации и скалеста колонична форма на матрица. На тој начин и со помош на колони може да определуваме ранг. Всушност, колоничните трансформации се редични трансформации на A^t. При наоѓањето на рангот на некоја матрица, можеме паралелно со редичните да користиме и колонични трансформации. Освен тоа, при користење на двата типа трансформации матрицата, можеме да ја доведеме до максимално редуцирана форма, како што тоа може да се види од следниов пример.

Пример. Нека е дадена матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ќе ја редуцираме до ешалонски облик со помош на елементарни редични и колонични трансформации:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значи $\text{ранг}(A) = 2$. ♦

Ако е даден систем вектори $v_1, v_2, \ldots, v_m$, во $\mathbb{K}^n$ тогаш под ранг на овој систем вектори се подразбира димензијата на потпросторот генериран со овие вектори, односно рангот на матрицата чии што редици или колони се дадените вектори.

5.5. Важност на рангот на матрица за систем линеарни равенки

Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или во матрична форма

$$AX = B,$$

каде $A = \left(a_{ij}\right)$ е матрицата од коефициенти, $X = (x_i)$ и $B = (b_i)$ се вектор-колоните од променливите и слободните членови на системот, соодветно. Матрицата

$$\left(A \vdots B\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

се нарекува **проширена матрица** на системот.

Забелешка. Равенките во дадениот систем се нарекуваат зависни или независни во зависност од тоа дали вектор-редиците на проширената матрица се зависни или се независни.

Забелешка. Два система од линеарни равенки се нарекуваат еквивалентни, ако и само ако нивните проширени матрици имаат ист редичен простор.

Забелешка. Секогаш можеме да замениме еден систем од равенки со еквивалентен систем од независни равенки во скалеста форма. Бројот на независните равенки секогаш ќе биде еднаков на рангот на проширената матрица на почетниот систем.

Забележуваме дека разгледуваниот систем е еквивалентен со следната векторска равенка

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Затоа, системот $Ax = B$ има решение, ако и само ако векторколоната B е линеарна комбинација од колоните на A, односно ако припаѓа на колоничниот простор на A. Затоа, системот линеарни равенки $Ax = B$ има решение, ако и само ако колоничниот ранг на матрицата A е еднаков на колоничниот ранг на проширената матрица $\left(A \vdots B\right)$. Затоа, има место следнава важна теорема:

Теорема 5.10. (Кроникер-Капели) Системот од линеарни равенки $Ax = B$ има барем едно решение, ако и само ако матрицата A и проширената матрица $\left(A \vdots B\right)$ имаат ист ранг.

Пример. За да се испита дали системот равенки

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

има решение, ја формираме проширената матрица и над неа применуваме елементарни редични трансформации, за да ја доведеме во скалеста форма. Потоа веднаш ќе се види колку е рангот и на основната матрица и на проширената матрица. Од

$$\left(A\vdots B\right)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

заклучуваме дека рангот на основната матрица (првите две колони) е 2, а рангот на проширената матрица е 3. Затоа системот е противречен, односно нема решение.♦

Пример. Постапувајќи како во претходниот пример, за системот равенки

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ x+y+2z=4 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

добиваме дека

$$\left(A\vdots B\right)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Забележуваме дека рангот на основната матрица и рангот на проширената матрица се еднакви на 3; значи системот има барем едно решение. ♦

Да забележиме дека теоремата на Кроникер-Капели дава потребен и доволен услов за еден систем од линеарни равенки да има решение, но не ни кажува дали решението е единствено ако системот има решение. Во случај на хомоген систем, одговор на тоа прашање ни дава следнава теорема:

Теорема 5.11. Димензијата на просторот од решенија W на хомогениот систем $Ax=0$ е $n-r$ каде n е бројот на непознати, а r е рангот на матрицата A.

Доказ. Со помош на елементарните трансформации дадениот систем се трансформира во еквивалентен систем $A'x=0$, каде A' е во скалеста форма. Освен тоа, A и A' имаат ист ранг r. Всушност, r е бројот на ненултите редици на A'. Тогаш точно $n-r$ непознати можат да примат произволни вредности, а останатите r непознати се определуваат еднозначно. Нека слободните параметри се $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$.

Нека v_j е решението на системот $A'x=0$ добиено за $x_{i_j}=1$, а $x_{i_k}=0$ за $k \neq j$. Тогаш $v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}$ се линеарно независни вектори кои го генерираат просторот на решенија на $Ax=0$. ■

Пример. За да се најде димензија и база на просторот W од решенија на системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x+2y-4z+3r-s=0 \\ x+2y-2z+2r+s=0 \\ 2x+4y-2z+3r+4s=0 \end{cases}$$

се извршува редукција на системот во скалеста форма:

$$\begin{cases} x+2y-4z+3r-s=0 \\ \qquad 2z-r+2s=0 \\ \qquad 6z-3r+6s=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+2y-4z+3r-s=0 \\ \qquad 2z-r+2s=0 \end{cases}.$$

Бројот на непознати е 5, а рангот е 2 и оттука просторот на решенија има димензија 3. Во скалестата форма земајќи

(i) $y=1,\ r=0,\ s=0,$

(ii) $y=0,\ r=1,\ s=0,$

(iii) $y=0,\ r=0,\ s=1$

ги добиваме соодветните решенија:

$$v_1=(-2,1,0,0,0),\quad v_2=(-1,0,\tfrac{1}{2},1,0),\quad v_3=(-3,0,-1,0,1).$$

Множеството $\{v_1,v_2,v_3\}$ е база за просторот од решенија W. ♦

5.6. Координати на вектор

Нека множеството $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ е база на $n-$димензионалниот векторски простор V и нека $v\in V$. Бидејќи множеството $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ го генерира просторот V, векторот v е линеарна комбинација од векторите $e_1,e_2,...,e_n$, односно постојат скалари $a_1,a_2,..,a_n\in\mathbb{K}$ така што

$$v=a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n.$$

Освен тоа, претставувањето е единствено, бидејќи ако постои и друго претставување

$$v = b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ne_n,$$

тогаш од равенството на левите страни, следува равенство и на десните страни и оттука

$$(b_1 - a_1)e_1 + (b_2 - a_2)e_2 + ... + (b_n - a_n)e_n = 0.$$

Бидејќи векторите $e_1, e_2, ..., e_n$ формираат база тие се линеарно независни, и затоа имаме дека

$$b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = ... = b_n - a_n = 0,$$

односно

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n.$$

Значи векторот v може да се претстави на единствен начин како линеарна комбинација од базните вектори. Со други зборови скаларите $a_1, a_2, ..., a_n$ се еднозначно определени со векторот v во однос на базата $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и се нарекуваат **координати** на векторот v во однос на базата $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, а подредената $n-$торка $(a_1, a_2, ..., a_n)$ се нарекува **координатен вектор** на v во однос на базата $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и пишуваме

$$[v]_e = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

или само $[v] = (a_1, a_2, ..., a_n)$, ако базата се подразбира.

Пример. Нека се дадени векторите $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,1,1)$ и $e_3 = (0,0,1)$, и $v = (3,1,-4)$. Множеството $\{e_1, e_2, e_3\}$ е база во $\mathbb{R}^3$, па постојат единствени реални броеви x, y, z така што

$$(3,1,-4)=x(1,1,1)+y(0,1,1)+z(0,0,1)=(x,x+y,x+y+z)$$

Тогаш координатите на векторот v во однос на базата $\{e_1,e_2,e_3\}$ се решенијата на системот

$$\begin{cases} x=3 \\ x+y=1 \\ x+y+z=-4 \end{cases},$$

односно $[v]_e=(3,-2,-5)$ е координатниот вектор на v во однос на дадената база.♦

Пример. Нека $V=\{at^2+bt+c \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ е векторскиот простор од полиноми со степен најмногу 2. Полиномите

$$e_1=1,\; e_2=t-1 \text{ и } e_3=(t-1)^2$$

формираат база за векторскиот простор V. Тогаш за полиномот $v=2t^2-5t+6$ постојат единствени реални броеви x,y,z така што

$$\begin{aligned} 2t^2-5t+6 &= x1+y(t-1)+z(t^2-2t+1)= \\ &= zt^2+(y-2z)t+(x-y+z). \end{aligned}$$

Координатите на векторот v во однос на базата $\{e_1,e_2,e_3\}$ се решенијата на системот

$$\begin{cases} x-y+z=6 \\ y-2z=-5 \\ z=2 \end{cases},$$

односно $[v]_e=(3,-1,2)$ е координатниот вектор на v во однос на дадената база. ♦

Пример. Во реалниот векторски простор $\mathbb{R}^3$ да ги најдеме координатите на векторот $v=(3,1,-4)$ во однос на базата

$$f_1=(1,1,1),\quad f_2=(0,1,1)\ \text{ и }\ f_3=(0,0,1).$$

Да го претставиме векторот v како линеарна комбинација од векторите f_1, f_2 и f_3, преку непознатите x, y и z

$$v=xf_1+yf_2+zf_3$$

Оттука имаме дека

$$\begin{aligned}(3,1,-4)&=x(1,1,1)+y(0,1,1)+z(0,0,1)=\\&=(x,x,x)+(0,y,y)+(0,0,z)=\\&=(x,x+y,x+y+z)\end{aligned}$$

Со изедначување на соодветните компоненти го добиваме системот линеарни равенки

$$\begin{cases}x=3\\x+y=1\\x+y+z=-4\end{cases}$$

чие што решение е $x=3$, $y=-2$ и $z=-5$. Според тоа, имаме дека

$$[v]_f=(3,-2,-5).$$

Да забележиме дека координатите на векторот v во однос на стандардната база

$$e_1=(1,0,0),\quad e_2=(0,1,0)\ \text{ и }\ e_3=(0,0,1)$$

се идентични со неговите координати, односно

$$[v]_e=(3,1,-4).\ \blacklozenge$$

Покажавме дека на секој вектор v кореспондира, при фиксирана база $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, $n-$торка $[v]_e$ во $\mathbb{K}^n$. Од друга страна, ако $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$, тогаш постои вектор $v=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$. Според тоа, базата $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ детерминира биекција помеѓу векторите во векторскиот простор V и подредените $n-$торки во $\mathbb{K}^n$. Уште повеќе, ако

$v=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$ кореспондира на $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, и

$w=b_1e_1+b_2e_2+\cdots+b_ne_n$ кореспондира на $(b_1,b_2,\dots,b_n)$

тогаш имаме дека

$$v+w=(a_1+b_1)e_1+(a_2+b_2)e_2+\cdots+(a_n+b_n)e_n$$

кореспондира на

$(a_1,a_2,\dots,a_n)+(b_1,b_2,\dots,b_n)$, и

$$kv=(ka_1)e_1+(ka_2)e_2+\cdots+(ka_n)e_n$$

кореспондира на

$k(a_1,a_2,\dots,a_n)$.

Според тоа, имаме дека

$$\left[v+w\right]_e=\left[v\right]_e+\left[w\right]_e \text{ и } \left[kv\right]_e=k\left[v\right]_e$$

што значи дека биекцијата помеѓу V и $\mathbb{K}^n$ ги запазува операциите во векторскиот простор на собирање на вектори и множење на вектори со скалар. Во тој случај велиме дека V и $\mathbb{K}^n$ се изоморфни и запишуваме $V\cong\mathbb{K}^n$. Со тоа ја докажавме следната теорема:

Теорема 5.12. Нека V е $n-$димензионален векторски простор над поле $\mathbb{K}$. Тогаш V и $\mathbb{K}^n$ се изоморфни. ■

Како последица од теоремата непосредно добиваме дека векторскиот простор од $m x n$ матрици над $\mathbb{K}$ е изоморфен со $\mathbb{K}^{mn}$, што значи дека матриците може да се сметаат за вектори.

Пример. Да провериме дали матриците

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3 & 8 & -11\\ 16 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

се линеарно независни.

Соодветните координатни вектори на матриците во однос на стандардната база во $\mathbb{R}^6$ се

$$\left[A\right]=(1,2,-3,4,0,1),\ \left[B\right]=(1,3,-4,6,5,4)\ \text{и}$$

$$\left[C\right]=(3,8,-11,16,10,9)$$

Сега проблемот се сведува на проверка на линеарната независност на погорните вектори во $\mathbb{R}^6$. За таа цел ја формираме матрицата

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -4 & 6 & 5 & 4\\ 3 & 8 & -11 & 16 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

и го наоѓаме нејзиниот ешалонски облик

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -4 & 6 & 5 & 4\\ 3 & 8 & -11 & 16 & 10 & 9\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Бидејќи ешалонската матрица има само две ненулти редици, нејзиниот ранг е 2, па според тоа векторите $[A]$, $[B]$ и $[C]$ генерираат потпростор со димензија 2 и се линеарно зависни. Согласно добиениот резултат дадените матрици A, B и C се линеарно зависни. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Испитај дали се линеарно зависни или независни векторите:

а) $(1,0,1,0),\ (0,1,0,1),\ (1,1,1,0)$

б) $(1,1,-2,1),\ (2,0,1,-3),\ (1,1,-2,-1),\ (4,2,-3,-3)$

в) $(0,a,b),\ (-a,0,c),\ (-b,-c,0)$

г) $(0,1,2,1,1),\ (0,0,1,1,0),\ (1,0,0,2,-2),\ (0,0,0,0,3)$

2. Испитај дали е линеарно зависно или независно, во векторскиот простор од сите полиноми, множеството полиноми:

а) $1+2t-3t^2,\ 3t+4t^2,\ 2+5t^2$

б) $2-2t-3t^2,\ 1+2t-3t^2,\ 3t+2t^2-3t^3,\ 1-4t-3t^2+3t^3$

3. Најди го параметарот λ за кој што векторите

$(2,0,3),\ (3,1,1)$ и $(-\lambda,7,\lambda-1)$

се линеарно зависни.

4. Докажи дека, ако два од векторите $v_1,v_2,...,v_m$ се еднакви, тогаш векторите се линеарно зависни.

5. Докажи дека, два вектора u и v се линеарно зависни, ако еден од нив е скаларен мултипл на другиот.

6. Докажи дека, ако множеството $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ е линеарно независно, тогаш при произволно пренумерирање на неговите вектори, $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_m}$, тоа е пак линеарно независно.

7. Докажи дека условот за линеарна зависност во просторот $\mathbb{R}^3$, гласи:

а) Два вектора u и v се линеарно зависни, ако постои права која е паралелна на секој од нив.

б) Три вектори u, v и w се линеарно зависни, ако постои рамнина паралелна на секој од нив.

8. Провери дали формираат база на $\mathbb{R}^3$ следните вектори

а) $(1,2,-3),\ (2,2,5)$ б) $(1,2,3),\ (-1,0,1),\ (3,-1,0)$

в) $(1,1,1),\ (1,2,3),\ (2,-1,1)$ г) $(1,1,2),\ (5,3,4),\ (1,2,5)$

9. Најди ја димензијата на векторскиот потпростор $V \subseteq \mathbb{R}^4$ генериран од векторите:

а) $(2,2,-3,0),\ (-2,2,-3,0)$

б) $(-3,6,-3,9),\ (-2,4,-2,6),\ (1,1,1,0),\ (0,1,1,1)$

10. Најди база и утврди ја димензијата на векторскиот потпростор V, од векторскиот простор на полиноми, генериран со полиномите:

$$P_1(t) = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \qquad P_2(t) = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5,$$

$$P_3(t) = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \qquad P_4(t) = t^3 + 6t - 5$$

11. Докажи дека полиномите

$$1,\ 1+t,\ (1+t)^2,\ (1+t)^3$$

формираат база за векторскиот простор на полиноми од степен помал или еднаков на три.

12. Докажи дека ако векторите v_1, v_2, v_3 и v_4 претставуваат база на некој векторски простор, тогаш и векторите

а) kv_1, kv_2, kv_3 и kv_4 $(k \neq 0)$,

б) $v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3 - v_4$ и $v_3 + v_4$,

формираат исто така база за тој векторски простор.

13. Нека U е потпростор од $\mathbb{R}^4$ генериран со векторите

$$(2,3,1,-4),\ (-3,-8,3,5),\ (1,-2,5,-3)$$

а) Најди база и димензија на U,

б) Прошири ја базата на U до база на целиот простор $\mathbb{R}^4$.

14. Нека W е потпростор од $n-$димензионален векторски простор V. Докажи дека $\dim W \leq n$ и освен тоа, ако $\dim W = n$ тогаш $W = V$.

15. Најди го рангот на матрицата:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Најди го рангот на матрицата:

а) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 10 & 16 \\ 7 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. Најди го рангот на системот вектори:

$(-1,5,0,3,8),\ (7,-3,7,3,-4),\ (2,1,3,4,2),$

$(2,1,3,4,2),\ (4,1,4,2,2)$

18. Докажи дека системот вектори $v_1, v_2, ..., v_n$ е линеарно независен ако и само ако рангот на тој систем вектори е еднаков на n.

19. Докажи, дека рангот на една $n \times m$ матрица е помал или е еднаков на помалиот од броевите n и m.

20. За колку ќе се промени рангот на една матрица ако од неа отфрлиме една редица (колона)?

Провери дали следните системи имаат решенија (задача 1-2).

21. а) $\begin{cases} 2x - y + 2z - 2t = -2 \\ -x + 2y - z + t = 4 \\ -x + y - z + t = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + z - 2t = -1 \\ 2x - 2y + 2z - 3t = 0 \\ x - y + z - t = -2 \end{cases}$

22. а) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 4t = 5 \\ 6x - 3y + z - 4t = 7 \\ 4x - 2y + 14z - 31t = 18 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y + 2z - 2t = -2 \\ x + 2y - z + t = 4 \\ -x - y + 4z - 4t = -4 \end{cases}$

Определи ја димензијата на просторот на решенија на системите (задача 3-5).

23. $\begin{cases} -y+2z=0 \\ x-2z=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x-y+2z-t+5u+v=0 \\ -x+2y+z-t+u-v=0 \end{cases}$

26. Најди ги координатите на векторот $v=(4,2,1)$ од $\mathbb{R}^3$ во однос на базата $\{(1,1,0),(0,1,-2),(2,1,-1)\}$.

27. Најди ги координатите на векторот $v=(a,b,c,d)$ од $\mathbb{R}^4$ во однос на базата $\{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$.

28. Нека V е векторскиот простор од сите полиноми со степен најмногу 3. Најди ги координатите на полиномот

$$P(t)=-t^2+t+1$$

во однос на базата определена со полиномите

$$P_1(t)=2t^3-t^2+t-2,\quad P_2(t)=t^3+t^2+t,\quad P_3(t)=t^3-1.$$

29. Најди ги координатите на векторот v во однос на базата

$\{(1,1,1), (1,1,0), (1,00)\}$, ако

а) $v=(1,-2,3)$ б) $v=(a,b,c)$

30. Нека секој вектор во векторскиот простор V може да се изрази како линеарна комбинација од векторите $a, b, c,$ а векторот v само на еден начин. Покажи дека секој вектор од V може да се изрази само на еден начин како линеарна комбинација од векторите $a, b, c.$

6. ЛИНЕАРНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

6.1. Поим за пресликување

Нека A и B се дадени непразни множества. Ако по некое правило на секој елемент $a \in A$ му придружиме единствен елемент $b \in B$, велиме дека е зададено **пресликување** f од множеството A во множеството B и пишуваме

$$f : A \to B.$$

Притоа, ако на елементот a од множеството A му соодветствува елементот b од множеството B, велиме дека b е вредност на a при f или **слика** на a при f и пишуваме

$$b = f(a) \text{ или } a \mapsto b.$$

Множеството A се нарекува **домен** на пресликувањето f, а множеството B **кодомен** на пресликувањето f. Пресликувањата вообичаено ги означуваме со мали латински букви, на пример, $f, g, h, \ldots$..

За две пресликувања $f:A \to B$ и $g:C \to D$ велиме дека се **еднакви** ако $C = A$, $D = B$ и $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$ и пишуваме $f = g$. Со други зборови, две пресликувања се еднакви ако имаат ист домен, ист кодомен и ,,исто дејство'' односно двете слики на секој елемент од A се еднакви.

Нека $f:A \to B$. Ако $A' \subseteq A$ тогаш множеството

$$f(A') = \{f(a) | a \in A'\}$$

се вика **слика** на подмножеството A' при пресликувањето f. Да забележиме дека $f(A') \subseteq B$, односно сликата на произволно подмножество од доменот е подмножество од кодоменот на пресликувањето.

Ако $B' \subseteq B$ тогаш множеството

$$f^{-1}(B') = \{a \in A | f(a) \in B'\}$$

се вика **инверзна слика** на множеството B' при пресликувањето f. Да забележиме дека $f^{-1}(B') \subseteq A$, односно инверзната слика на произволно подмножество од кодоменот е подмножество од доменот на пресликувањето.

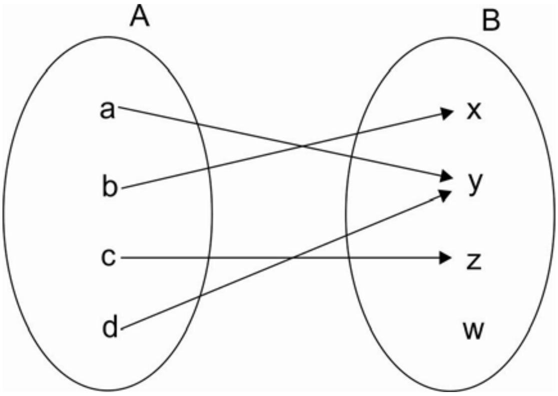
Пример. Нека $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{x,y,z,w\}$. Дијаграмот на цртеж 8 определува пресликување f од A во B.

Имаме дека $f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = z$ и $f(d) = y$. Тогаш

$$f(\{a,b,d\}) = \{f(a),f(b),f(d)\} = \{x,y\},$$

и сликата на множеството A со f е множеството $\{x,y,z\}$, односно

$$f(A) = \{x, y, z\}.$$



Цртеж 8

За инверзната слика при f имаме

$$f^{-1}(\{y\}) = \{a, d\}, \qquad f^{-1}(\{z, w\}) = \{c\}$$

и инверзната слика при f на множеството B е множеството A,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{x, y, z, w\}) = A \ \blacklozenge$$

Пример. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е пресликувањето коешто на секој реален број x му го придружува неговиот квадрат x^2, односно

$$x \mapsto x^2 \quad \text{или} \quad f(x) = x^2$$

Сликата на -3 е 9, па може да запишеме $f(-3) = 9$. ♦

Ја користиме стрелката $\mapsto$ за да ја означиме сликата на произволен елемент $x \in A$ со пресликувањето $f : A \to B$ запишувајќи

$$x \mapsto f(x)$$

како во претходниот пример.

Пример. Да ја разгледаме $2x3$ матрицата

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

Ако ги запишеме векторите во $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$ како вектор-колони, тогаш матрицата A определува пресликување $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ дефинирано со

$$v\mapsto Av,\text{ односно } T(v)=Av,\text{ за секое } v\in\mathbb{R}^3.$$

Тоа значи дека ако

$$v=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\end{pmatrix},\text{ тогаш } T(v)=Av=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\ 12\end{pmatrix}. \blacklozenge$$

Забелешка. Секоја mxn матрица A над поле $\mathbb{K}$ определува пресликување такво што

$$v\mapsto Av,$$

каде што векторите во $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^m$ се запишани како вектор-колони. Вообичаено ова пресликување го означуваме со A, односно со истата ознака како и матрицата што го определува.

Пример. Нека V е векторскиот простор од сите полиноми со променлива t над полето $\mathbb{R}$. Тогаш изводот дефинира пресликување $D:V\to V$ определено со $D(f)=\frac{df}{dt}$. На пример, имаме дека

$$D(3t^2-5t+2)=6t-5 \quad \blacklozenge$$

Пример. Нека V е векторскиот простор од сите полиноми со променлива t над полето $\mathbb{R}$. Тогаш определениот интеграл, на пример од 0 до 1, дефинира пресликување $I : V \to \mathbb{R}$ определено со $I(f) = \int_0^1 f(t)dt.$ На пример, имаме дека

$$I(f) = \int_0^1 (3t^2 - 5t + 2) = \frac{1}{2} \blacklozenge$$

Пример. Нека $f : A \to B$ и $g : B \to C$ (цртеж 9).

$$\begin{tikzcd}\boxed{A} \arrow[r, "f"] & \boxed{B} \arrow[r, "g"] & \boxed{C}\end{tikzcd}$$

Цртеж 9

Нека $a \in A.$ Тогаш $f(a) \in B,$ односно $f(a)$ припаѓа во доменот на $g,$ па ја добиваме сликата на $f(a)$ при $g,$ односно $g(f(a)).$ Пресликувањето $h : A \to C$ дефинирано со

$$h(a) = g(f(a)), \text{ за секое } a \in A,$$

се вика **композиција** или **состав** на пресликувањата f и $g,$ и се означува со $g \circ f.$

Теорема 6.1. Ако $f : A \to B,$ $g : B \to C$ и $h : C \to D,$ тогаш важи

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Доказ. За произволно $a \in A$ имаме дека

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(a) = h\big((g \circ f)(a)\big) = h\Big(g\big(f(a)\big)\Big) \text{ и}$$

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(a) = (h \circ g)\big(f(a)\big) = h\Big(g\big(f(a)\big)\Big)$$

од каде што следува дека $(h\circ(g\circ f))(a)=((h\circ g)\circ f)(a)$, односно

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.\ \blacksquare$$

Ќе воведеме некои специјални видови на пресликувања.

Дефиниција. Пресликувањето $f:A\to B$ се нарекува **инјекција**, ако различни елементи од A имаат различни слики, односно, ако за секои $x_1,x_2\in A$ важи

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

или еквивалентно,

$$f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2$$

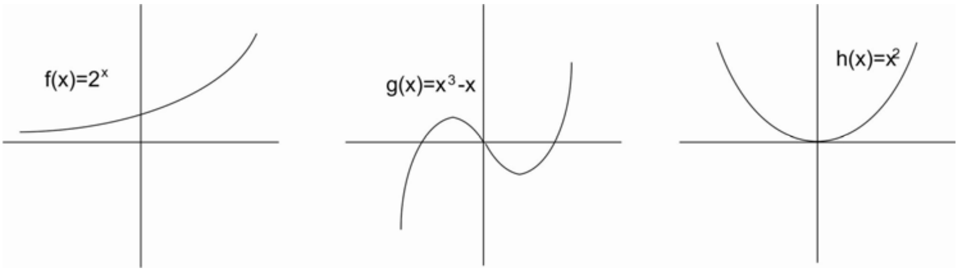
Дефиниција. Пресликувањето $f:A\to B$ се нарекува **сурјекција**, ако секој елемент $y\in B$ е слика на барем еден елемент $a\in A$.

Дефиниција. Пресликувањето $f:A\to B$ се нарекува **биекција**, ако истовремено е инјекција и сурјекција.

Пример. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ се дефинирани со

$$f(x)=2^x,\ g(x)=x^3 \text{ и } h(x)=x^2$$

Нивните графици се прикажани на цртеж 10.



Цртеж 10

Пресликувањето f е инјекција. Геометриски, тоа значи дека секоја хоризонтална права го сече графикот во единствена точка.

Пресликувањето g е сурјекција. Геометриски, тоа значи дека секоја хоризонтална права го сече графикот барем во една точка.

Пресликувањето h не е ниту инјекција ниту сурјекција. Геометриски, тоа значи дека постои хоризонтална права која што не го сече графикот и постои хоризонтална права која што го сече графикот во повеќе од една точка. Навистина, -2 и 2 имаат иста слика 4, додека -4 не е слика на ниту еден елемент. ♦

Пример. Пресликувањето $f: A \to A$ дефинирано со

$$f(a) = a, \text{ за секое } a \in A$$

се нарекува **идентично пресликување** на множеството A и се означува со 1_A. ♦

Нека $f: A \to B$ е биекција. Пресликување $g: B \to A$ дефинирано со

$$g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

се нарекува **инверзно пресликување** на пресликувањето f. Ќе предочиме некои својства на инверзното пресликување.

1. Ако $a \in A$ е произволно избран, тогаш имаме

$$(g \circ f(a)) = g(f(a)) = g(b) = a = 1_A(a), \text{ за секое } a \in A$$

од каде што следува дека $g \circ f = 1_A$. Слично се покажува дека важи $f \circ g = 1_B$.

2. Пресликувањето $g: B \to A$ е единствено.

Навистина, ако претпоставиме дека $g_1, g_2 : B \to A$ се инверзни пресликувања на пресликувањето f, тогаш од

$$g_1(b) = g_1(f(a)) = g_1 \circ f(a) = 1_A(a) =$$

$$= g_2 \circ f(a) = g_2(f(a)) = g_2(b), \text{ за секој } b \in B,$$

следува дека $g_1 = g_2$. Инверзното пресликување на пресликувањето f се означува со f^{-1}.

3. Ако $f : A \to B$ е биекција, тогаш $(f^{-1})^{-1} = f$.

Навистина, ако $a \in A$ е произволно избран и ако $f(a) = b$, тогаш $f^{-1}(b) = a$ од каде што следува $(f^{-1})^{-1}(a) = b$. Според тоа, имаме

$$(f^{-1})^{-1}(a) = f(a), \text{ за секое } a \in A,$$

односно $(f^{-1})^{-1} = f$.

4. Ако $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се биекции, тогаш $g \circ f$ е исто така биекција како композиција од биекции.

Навистина, ако $c \in C$ е произволно избран, бидејќи g е биекција постои единствен $b \in B$, така што $g^{-1}(c) = b$. Слично, бидејќи f е биекција постои единствено $a \in A$, така што важи $f^{-1}(b) = a$. Тогаш имаме дека

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(c) = f^{-1}(b) = a, \text{ за секое } c \in C$$

Од друга страна, од $g \circ f(a) = g(b) = c$ добиваме $(g \circ f)^{-1}(c) = a$. Според тоа, имаме дека

$(g \circ f)^{-1}(c) = f^{-1} \circ g^{-1}(c),$ за секој $c \in C$

од каде што следува дека $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

6.2. Линеарни пресликувања

Нека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$. Пресликувањето $F : V \to U$ се нарекува **линеарно пресликување** (или **хомоморфизам** на векторски простори), ако се исполнети следниве два услови:

$$(1)\ (\forall v, w \in V) \qquad F(v + w) = F(v) + F(w)\,,$$

$$(2)\ (\forall k \in \mathbb{K})\ (\forall v \in V) \qquad F(kv) = kF(v)\,.$$

Со други зборови, пресликувањето $F : V \to U$ е линеарно, ако сликата на збирот од два вектора е еднаква на збирот од сликите на векторите, а сликата на производот на вектор со скалар е еднаква на производот од скаларот со сликата на векторот. Тоа значи дека пресликувањето ги запазува операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар.

Нека $F : V \to U$ е линеарно пресликување. Тогаш F го пресликува нултиот вектор на V во нултиот вектор на U, односно имаме дека $F(0) = 0$. Навистина од

$$F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$$

следува дека $F(0) = 0$.

Кога треба да испитаме дали едно пресликување е линеарно, се покажува практична примената на следнава теорема.

Теорема 6.1. Нека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$. Пресликувањето $F:V\to U$ е линеарно пресликување, ако и само ако важи следниот услов:

$$(\forall v,w\in V)(\forall a,b\in\mathbb{K})\quad F(av+bw)=aF(v)+bF(w). \qquad (3)$$

Доказ. Нека $F:V\to U$ е линеарно пресликување над поле $\mathbb{K}$. Тогаш за произволни вектори $v,w\in V$ и произволни скалари $a,b\in\mathbb{K}$, со последователна примена на (1) и (2) добиваме

$$F(av+bw)=F(av)+F(bw)=aF(v)+bF(w).$$

Обратно, условите (1) и (2) се последица од условот (3) за $k_1=k_2=1$ и $k_2=0$, соодветно. ■

Нека V е векторски простор над поле $\mathbb{K}$. Специјално, линеарното пресликување $F:V\to V$ се нарекува **линеарна трансформација** на векторскиот простор V.

Следнава теорема е обопштување на претходната теорема.

Теорема 6.2. Нека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$. Ако пресликувањето $F:V\to U$ е линеарно, тогаш за секој природен број $m\geq 1$, за произволни скалари $a_i\in\mathbb{K}$ и произволни вектори $v_i\in V$, $i=1,2,...,m$, важи следниот услов:

$$F(a_1v_1+a_2v_2+...+a_mv_m)=a_1F(v_1)+a_2F(v_2)+...+a_mF(v_m).$$

Доказ. Тврдењето се докажува со последователна примена на (1) и (2). ■

Пример. Нека A е произволна mxn матрица над поле $\mathbb{K}$. Како што забележавме претходно, матрицата A определува линеарно пресликување $T:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ дефинирано со

$$v \mapsto Av, \text{ за секое } v \in \mathbb{K}^n$$

Навистина, имаме дека

$$T(v+w) = A(v+w) = Av + Aw = T(v) + T(w), \text{ и}$$

$$T(kv) = A(kv) = kAv = kT(v),$$

за секои $v, w \in \mathbb{K}^n$ и за секое $k \in \mathbb{K}$, од каде што следува дека T е линеарно пресликување. ♦

Пример. Нека $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е ортогоналната проекција на просторот врз xy рамнина, односно

$$F(x,y,z) = (x,y,0), \text{ за секој } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Тогаш имаме дека

$$F(v+w) = F(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) =$$
$$= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = F(v) + F(w),$$

$$F(kv) = F(kx_1, yk_1, kz_1)) = (kx_1, ky_1, 0) =$$
$$= k(x_1, y_1, 0) = kF(v),$$

за секои $v = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ и за секое $k \in \mathbb{R}$, од каде што следува дека проекцијата F е линеарна трансформација. ♦

Пример. Нека $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е транслација во реалната рамнина дефинирана со

$$F(x,y) = (x+1, y+3), \text{ за секое } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Забележуваме дека

$$F(0,0)=(2,3)\neq(0,0),$$

односно нултиот вектор не се пресликува во нултиот вектор, од каде што заклучуваме дека транслацијата F не е линеарно пресликување. ♦

Пример. Нека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$ и нека $F:V\to U$ е пресликувањето определено со

$$F(v)=0,\ \text{за секој } v\in V.$$

Со непосредна проверка на условот (3) може да забележиме дека

$$F(v+w)=0=0+0=F(u)+F(w),\ \text{и}$$

$$F(kv)=0=k0=kF(v),$$

за секои $v,w\in V$ и за секое $k\in\mathbb{K}$, од каде што следува дека F е линеарно пресликување. Ова пресликување F се нарекува **нулто пресликување** и вообичаено се означува со O. Значи,

$$O(v)=0,\ \text{за секое } v\in V.$$ ♦

Пример. Нека V е векторски простор над поле $\mathbb{K}$. Идентичното пресликување $I:V\to V$ дефинирано со

$$I(v)=v,\ \text{за секое } v\in V$$

е линеарно пресликување, бидејќи имаме дека

$$I(av+bw)=av+bw=aI(v)+bI(w),$$

за секои $v,w\in V$ и за секое $k\in\mathbb{K}$. ♦

Пример. Нека V е векторскиот простор од сите полиноми со променлива t над полето $\mathbb{R}$. Тогаш изводот $D: V \to V$ и интегралот $I: V \to \mathbb{R}$, дефинирани во претходните примери се линеарни пресликувања.

Навистина, според факти коишто ќе ги преземеме од калкулус имаме дека

$$\frac{d(u(t)+v(t))}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{и}$$

$$\frac{d(ku(t))}{dt} = k\frac{du(t)}{dt}$$

што повлекува дека

$$D(v(t)+w(t)) = D(v(t)) + D(w(t)), \text{ и}$$

$$D(kv(t)) = kD(v(t)),$$

за секои полиноми $u(t)$ и $v(t)$ и за секој скалар $k \in \mathbb{R}$.

Слично, од

$$\int_0^1 \left[u(t)+v(t)\right]dt = \int_0^1 u(t)dt + \int_0^1 v(t)dt, \text{ и}$$

$$\int_0^1 ku(t)dt = k\int_0^1 u(t)dt$$

следува дека

$$I(v(t)+w(t)) = I(v(t)) + I(w(t)), \text{ и}$$

$$I(kv(t)) = kI(v(t)),$$

за секои полиноми $u(t)$ и $v(t)$ и за секој скалар $k \in \mathbb{R}$. ♦

Пример. Нека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$ и нека $F: V \to U$ е биекција. Тогаш постои инверзното пресликување $F^{-1}: U \to V$ и тоа е исто така линеарно пресликување.

Навистина, за произволни $u, u' \in U$, постојат $v, v' \in V$, така што $F(v) = u$ и $F(v') = u'$. Бидејќи F е линеарно пресликување, за произволни скалари $a, b \in \mathbb{K}$ имаме:

$$F(av + bv') = aF(v) + bF(v') = au + bu'$$

од каде што следува дека

$$F^{-1}(au + bu') = av + bv' = aF^{-1}(u) + bF^{-1}(u').$$

Според тоа $F^{-1}: U \to V$ е исто така линеарно пресликување. ♦

Кога зборувавме за координати на векторите во однос на дадена база, го воведовме поимот за **изоморфизам** меѓу два векторски простори. Сега ќе ја дадеме формалната дефиниција.

Дефиниција. Нека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$. Линеарно пресликување $F: V \to U$ коешто е биекција се нарекува **изоморфизам.**

Векторски простори V и U се нарекуваат **изоморфни** ако постои изоморфизам од V во U.

Пример. Нека V е векторски простор над поле $\mathbb{K}$. Идентичното пресликување $I: V \to V$ е изоморфизам. ♦

Да забележиме дека ако $F: V \to U$ е изоморфизам, тогаш инверзното пресликување $F^{-1}: U \to V$ е исто така изоморфизам.

Навистина, знаеме дека инверзното пресликување $F^{-1}:U\to V$ е исто така линеарно пресликување. Бидејќи F^{-1} е биекција, може да заклучиме дека F^{-1} е изоморфизам.

Пример. Нека V е $n-$димензионален векторски простор над поле $\mathbb{K}$ и нека $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ е база на V. За секој вектор $v\in V$ постојат единствени скалари $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{K}$ така што

$$v=a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n.$$

Тогаш координатниот вектор во однос на стандардната база на $\mathbb{K}^n$ $[v]_e=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathbb{K}^n$ е еднозначно одреден за векторот v. Пресликувањето

$$v\mapsto[v]_e$$

е биективно пресликување $F:V\to\mathbb{K}^n$ бидејќи различни вектори од V имаат различни слики во $\mathbb{K}^n$ и секој вектор во $\mathbb{K}^n$ е слика на некој вектор во V.

Ќе покажеме дека F е линеарно пресликување. Претпоставуваме дека $v,w\in V$ и $k\in\mathbb{K}$ се произволно избрани. Ако

$$v=a_1e_1+a_2e_2+...+a_ne_n \text{ и } w=b_1e_1+b_2e_2+...+b_ne_n,$$

тогаш од

$$\begin{aligned}F(v+w)&=F((a_1+b_1)e_1+(a_2+b_2)e_2+...+(a_n+b_n)e_n)=\\&=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)=\\&=(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n)=\\&=F(v)+F(w),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(kv) &= F((ka_1)e_1 + (ka_2)e_2 + ... + (ka_n)e_n) = \\ &= (ka_1, ka_2, ..., ka_n) = \\ &= k(a_1, a_2, ..., a_n) = \\ &= kF(v) \end{aligned}$$

следува дека F е линеарно пресликување. Според тоа F е изоморфизам, што повлекува дека векторските простори V и $\mathbb{K}^n$ се изоморфни. ♦

Поимот за изоморфизам е често користен во математиката, не само за линеарни пресликувања туку и во други случаи кога имаме биективни пресликувања.

Какви и да се елементите на еден векторски простор, нивните индивидуални својства не играат улога кога се изучуваат нивните својства сврзани со операциите собирање на вектори и множење на вектор со скалар. Тие својства кај изоморфните простори се исти, па според тоа изоморфните простори од алгебарска гледна точка не ги разликуваме.

Како последица од теоремата, за да ги проучиме својствата на кој било $n-$димензионален вектрски простор доволно е да го проучиме векторскиот простор $\mathbb{K}^n$, за произволно поле $\mathbb{K}$.

Пример. Векторскиот простор од $m \times n$ матрици над полето $\mathbb{R}$ е изоморфен со $\mathbb{R}^{mn}$, што значи дека матриците може да се третираат како координатни вектори во $\mathbb{R}^{mn}$, (подредени $mn-$торки реални броеви) и обратно.

Специјално, векторскиот простор од $n \times 1$ матрици (вектор колони) е изоморфен со $\mathbb{R}^n$, што значи дека вектор–колоните може да се третираат како координатни вектори во $\mathbb{R}^n$ (подредени $n-$торки реални броеви) и обратно. ♦

Пример. Матриците

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix} \text{ и } C=\begin{pmatrix}3 & 8 & -11\\ 16 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

се линеарно зависни, бидејќи координатните вектори

$$[A]=(1,2,-3,4,0,1),\ [B]=(1,3,-4,6,5,4) \text{ и}$$

$$[C]=(3,8,-11,16,10,9)$$

се линеарно зависни. Имено, имаме дека $1\cdot[A]+2\cdot[B]+(-1)[C]=[O]$. Притоа, $1\cdot A+2\cdot B+(-1)C=O$. ♦

Следната теорема покажува дека секое линеарно пресликување е еднозначно определено со сликите на векторите од дадена база на векторскиот простор.

Теорема 6.3. Нека U и V се векторски простори над поле $\mathbb{K}$. Нека $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ е база на векторскиот простор V и нека $u_1,u_2,...,u_n$ се произволно избрани вектори во векторскиот простор U. Тогаш постои единствено линеарно пресликување $F:V\to U$ такво што

$$F(v_1)=u_1,\ F(v_2)=u_2,...,F(v_n)=u_n.$$

Доказ. Нека v е произволен вектор од векторскиот простор V. Бидејќи $\{v_1,v_2,..,v_n\}$ е база на V, постојат единствени скалари $a_1,a_2,..,a_n\in\mathbb{K}$, такви што

$$v=a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n.$$

Ќе покажеме дека пресликувањето $F:V\to U$ дефинирано со

$$F(v)=a_1u_1+a_2u_2+....+a_nu_n$$

е линеарно пресликување кое што ги исполнува условите од теоремата.

За $i=1,2,...,n,$ ако $v=v_i$, тогаш со изборот

$$a_1=....=a_{i-1}=a_{i+1}=....a_n=0, \text{ и } a_i=1,$$

се добива

$$F(v_i)=0u_1+0u_2+...+0u_{i-1}+1u_i+0u_{i+1}+...+0u_n=u_i.$$

Нека

$$v=a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n \text{ и } w=b_1v_1+b_2v_2+...+b_nv_n$$

се произволни вектори во V. Тогаш имаме дека

$$v+w=(a_1+b_1)v_1+(a_2+b_2)v_2+...+(a_n+b_n)v_n,$$

така што

$$\begin{aligned}F(v+w)&=(a_1+b_1)u_1+(a_2+b_2)u_2+...+(a_n+b_n)u_n=\\&=(a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n)+(b_1u_1+b_2u_2+...+b_nu_n)=\\&=F(v)+F(w).\end{aligned}$$

Освен тоа, ако $k\in\mathbb{K}$, тогаш

$$\begin{aligned}F(kv)&=F\big(k(a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n)\big)=\\&=F(ka_1v_1+ka_2v_2+...+ka_nv_n)=\\&=(ka_1)u_1+(ka_2)u_2+...+(ka_n)u_n=\\&=k(a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n)=kF(v).\end{aligned}$$

Преостанува да докажеме дека F е единствено линеарно пресликување со тоа својство. Навистина, ако $G: V \to U$ е друго линеарно пресликување такво што $G(v_i) = u_i$, $i = 1, 2, ..., n$, тогаш за произволен вектор $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$, имаме

$$\begin{aligned} G(v) &= G(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) = \\ &= a_1G(v_1) + a_2G(v_2) + ... + a_nG(v_n) = \\ &= a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = \\ &= F(v). \end{aligned}$$

Значи $G(v) = F(v)$, за секој $v \in V$, па според тоа $G = F$. ■

6.3. Јадро и слика на линеарно пресликување

Ќе започнеме со дефинирање на два нови поими.

Дефиниција. Нека U и V се векторски простори над поле $\mathbb{K}$ и нека $F: V \to U$ е линеарно пресликување. Множеството од слики на векторите од V се нарекува **слика** на просторот V со пресликувањето F и се означува со $\operatorname{Im} F$, односно

$$\operatorname{Im} F = \{f(v) \mid v \in V\}$$

Множество од сите вектори во V кои се пресликуваат во нултиот вектор $0 \in U$, се нарекува **јадро** (**кернел**) на пресликувањето F и се означува со $\ker F$, односно

$$\ker F = \left\{ v \in V \mid F(v) = 0 \right\}$$

Теорема 6.4. Нека U и V се векторски простори над поле $\mathbb{K}$ и нека $F:V\to U$ е линеарно пресликување. Тогаш множеството $\mathrm{Im}F$ е потпростор од U, а множеството $\ker F$ е потпростор од V.

Доказ. Од $F(0)=0$ следува дека $0\in \mathrm{Im}F$.

Нека $u,u'\in \mathrm{Im}F$ и $a,b\in\mathbb{K}$. Постојат вектори $v,v'\in V$ така што $F(v)=u$ и $F(v')=u'$. Тогаш

$$au+bu'=aF(v)+bF(v')=F(av+bv')\in \mathrm{Im}F,$$

од каде што следува дека $\mathrm{Im}F$ е потпростор од U.

Бидејќи $F(0)=0$, следува дека $0\in\ker F$

Нека $v,w\in\ker F$ и $a,b\in\mathbb{K}$. Тогаш $F(v)=F(w)=0$, па затоа

$$F(av+bw)=aF(v)+bF(w)=a0+b0=0,$$

од каде што следува $av+bw\in\ker F$. Значи, $\ker F$ е потпростор од V. ■

Пример. Нека $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ е ортогоналната проекција врз xy рамнината, односно

$$F(x,y,z)=(x,y,0),\ \text{за секое}\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

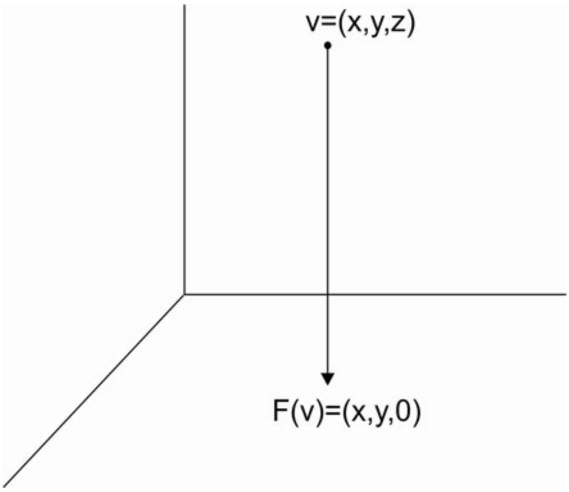
Тогаш имаме дека сликата на F

$$\mathrm{Im}F=\{(x,y,0)\mid\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

е $xy-$рамнината, додека јадрото на F

$$\ker F=\{(x,y,z)\mid\ (x,y,0)=(0,0,0)\}=\{(0,0,z)\mid\ z\in\mathbb{R}\}$$

е $z-$оската бидејќи тие точки и само тие се пресликуваат во нултиот вектор $0=(0,0,0)$ (цртеж 11).♦



Цртеж 11

Нека векторите $v_1,...,v_n$ го генерираат просторот V и нека $F:V\to U$ е линеарно пресликување. Тогаш имаме дека векторите $F(v_1),F(v_2),...,F(v_n)$ го генерираат потпросторот $\mathrm{Im}F$. Навистина, ако $u\in \mathrm{Im}F$, тогаш $F(v)=u$ за некој вектор $v\in V$. Бидејќи векторите $v_1,v_2,...,v_n$ го генерираат просторот V, постојат скалари $a_1,a_2,...,a_n$ такви што $v=a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n$. Според тоа, имаме дека

$$\begin{aligned}u=F(v)&=F(a_1v_1+a_2v_2+...+a_nv_n)=\\&=a_1F(v_1)+a_2F(v_2)+...+a_nF(v_n)\end{aligned}$$

од каде што следува дека векторите $F(v_1),F(v_2),...,F(v_n)$ го генерираат потпросторот $\mathrm{Im}F$.

Пример. Нека A е произволна $4x3$ матрица над поле $\mathbb{K}$

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

која ја сметаме за линеарна трансформација $A:\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$. Сега стандардната база $\{e_1,e_2,e_3\}$ на $\mathbb{K}^3$ го генерира $\mathbb{K}^3$, па затоа нејзините вредности A_{e_1}, A_{e_2} и A_{e_3} при A ја генерира сликата на A. Но векторите A_{e_1}, A_{e_2} и A_{e_3} се колоните на A

$$A_{e_1}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix},$$

$$A_{e_2}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$A_{e_3}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

па заклучуваме дека сликата на A е токму колоничниот простор на матрицата A. ♦

Да обопштиме дека ако A е произволна mxn матрица над поле $\mathbb{K}$, која ја сметаме за линеарно пресликување $A:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, тогаш сликата на A е токму колоничниот простор на матрицата A.

До овој момент не сме ги довеле во релација поимите димензија и линеарно пресликување. Ако V е конечнодимензионален векторски простор над поле $\mathbb{K}$, важи следнава теорема:

Теорема 6.5. Нека V е конечнодимензионален векторски простор над поле $\mathbb{K}$ и нека $F: V \to U$ е линеарно пресликување. Тогаш имаме дека

$$\dim V = \dim(\ker F) + \dim(\operatorname{Im} F)$$

Доказ. Нека $\dim V = n$, $W = \ker F$ и $\operatorname{Im} F = U'$. Бидејќи имаме дека $W \subseteq V$ следува дека $\dim W = r \leq n$. Преостанува да се докаже дека $\dim U' = n - r$.

Нека $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$ е база на W. Оваа база ја прошируваме до база на V

$$\{w_1, w_2, ..., w_r, v_1, v_2, ..., v_{n-r}\}.$$

Нека $B = \{F(v_1), F(v_2), ..., F(v_{n-r})\}$. За да ја докажеме теоремата треба да покажеме дека B е база на потпросторот $U' = \operatorname{Im} F$.

Нека $u \in U'$. Тогаш постои $v \in V$, така што $F(v) = u$. Векторот v може на единствен начин да го запишеме како линеарна комбинација на базните вектори, односно

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + ... + a_r w_r + b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_{n-r} v_{n-r},$$

каде што $a_i, b_i \in \mathbb{K}$. Бидејќи $F(w_i) = 0$ добиваме дека

$$u = F(v) = F(a_1w_1 + \ldots + a_rw_r + b_1v_1 + \ldots + b_{n-r}v_{n-r}) =$$

$$= a_1F(w_1) + \ldots + a_rF(w_r) + b_1F(v_1) + + \ldots + b_{n-r}F(v_{n-r}) =$$

$$= b_1F(v_1) + \ldots + b_{n-r}F(v_{n-r}),$$

што значи множеството B го генерира потпросторот U'.

Преостанува да покажеме дека B е линеарно независно множество. Претпоставуваме дека важи равенството

$$a_1F(v_1) + a_2F(v_2) + \ldots + a_{n-r}F(v_{n-r}) = 0$$

Оттука следува дека важи равенството

$$F(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{n-r}v_{n-r}) = 0$$

од каде што добиваме дека

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{n-r}v_{n-r} \in \ker F = W.$$

Тогаш постојат скалари $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathbb{K}$ така што

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{n-r}v_{n-r} = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_rw_r,$$

односно

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_{n-r}v_{n-r} - b_1w_1 - b_2w_2 - \ldots - b_rw_r = 0.$$

Бидејќи множеството $\{w_1, w_2, \ldots, w_r, v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}\}$ е база за V, добиваме дека

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-r} = 0 \text{ и } b_1 = b_2 = \ldots = b_r = 0.$$

Според тоа B е линеарно независно множество вектори. ■

6.4. Сингуларни и несингуларни пресликувања

Нека U и V се векторски простори над поле $\mathbb{K}$. За линеарно пресликување $F: V \rightarrow U$ велиме дека е **сингуларно**, ако постои ненулти вектор во V којшто со F се пресликува во нултиот вектор на U, односно ако постои $v \in V$ таков што $v \neq 0$ и $F(v) = 0$.

Во спротивен случај, ако не постои ненулти вектор во V којшто се пресликува во нултиот вектор во U, велиме дека пресликувањето F е **несингуларно**. Значи F е несингуларно ако и само ако важи равенството

$$\ker F = \{0\}.$$

Пример. Нека $F:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ е линеарно пресликување дефинирано со

$$F(x,y,z) = (x+y, x-y, z), \text{ за секое } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Тогаш од $F(x,y,z) = 0$ следува дека

$$x+y=0, \ x-y=0 \text{ и } z=0, \text{ односно } x=y=z=0.$$

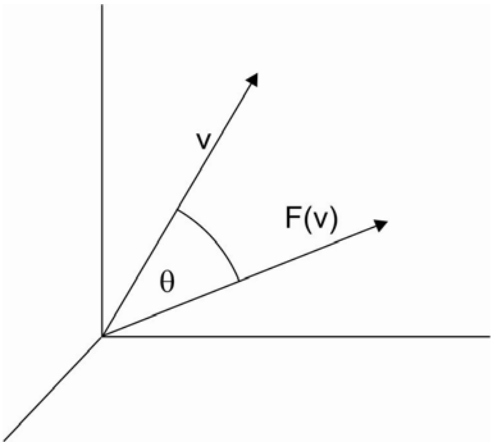
Значи F е несингуларно пресликување.♦

Пример. Нека $F:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ е линеарно пресликување кое што го ротира вектор околу z оската за агол θ

$$F(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z), \text{ за секое } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Може да се покаже дека само нултиот вектор се пресликува во нултиот вектор, од каде што следува дека F е несингуларно пресликување (цртеж 12).♦

Сега, ако линеарното пресликување $F: V \to U$ е инјекција, тогаш само $0 \in V$ може да се преслика во $0 \in U$, па F е несингуларно пресликување.



Цртеж 12

Обратното е исто така точно, бидејќи ако F е несингуларно пресликување и $F(v) = F(w)$, тогаш $F(v-w) = F(v) - F(w) = 0$, од каде што следува дека $v - w = 0$, односно $v = w$. Со тоа покажавме дека

$$F(v) = F(w) \text{ повлекува } v = w$$

што значи дека F е инјекција. Со тоа докажавме дека:

Теорема 6.6. Линеарното пресликување $F: V \to U$ е инјекција ако и само ако е несингуларно. ■

6.5. Линеарни пресликувања и системи линеарни равенки

Да го разгледаме системот од m линеарни равенки со n непознати

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

којшто е еквивалентен со матричната равенка

$$Ax = b,$$

каде $A = \left(a_{ij}\right)$ е матрицата од коефициенти, $x = (x_i)$ и $b = (b_i)$ се вектор-колоните од непознатите и слободните членови на системот, соодветно. Матрицата A може да ја сметаме за линеарно пресликување

$$A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

Според тоа, решението на матричната равенка $Ax = b$ може да се смета за инверзна слика на $b \in \mathbb{K}^m$ со линеарното пресликување $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Уште повеќе, решението на асоцираната хомогена равенка $Ax = 0$ може да се смета за јадро на линеарното пресликување $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Според Теорема 6.4 имаме дека

$$\dim(\mathrm{Ker}A) = \dim \mathbb{K}^n - \dim(\mathrm{Im}\,A) = n - \text{ранг}(A)$$

каде што n е бројот на непознати во системот $Ax = 0$. Така дојдовме до заклучокот искажан во Теорема 5.11 од поглавје 5.

Теорема 5.11. Димензијата на просторот од решенија W на хомогениот систем $Ax=0$ е $n-r$ каде n е бројот на непознати, а r е рангот на матрицата A. ■

6.6. Операции со линеарни пресликувања

Може да комбинираме линеарни пресликувања со цел да добиеме нови пресликувања. Операциите со линеарни пресликувања се од особена важност и ќе ги користиме до крајот на изложувањето на градивото.

Нека $F:V\to U$ и $G:V\to U$ се линеарни пресликувања помеѓу векторски простори над поле $\mathbb{K}$. Дефинираме пресликување **збир** $F+G$ од V во U со равенството

$$(F+G)(v)=F(v)+G(v),\ \text{ за секој вектор } v\in V$$

Исто така, за произволен скалар $k\in\mathbb{K}$ дефинираме пресликување **множење со скалар** на F, $kF:V\to U$ со равенството

$$(kF)(v)=kF(v),\ \text{ за секој вектор } v\in V$$

Ќе покажеме дека $F+G$ и kF се линеарни пресликувања, ако F и G се линеарни пресликувања. За $v,w\in V$ и $a,b\in\mathbb{K}$ имаме

$$\begin{aligned}(F+G)(av+bw)&=F(av+bw)+G(av+bw)=\\&=aF(v)+bF(w)+aG(v)+bG(w)=\\&=a\big(F(v)+G(v)\big)+b\big(F(w)+G(w)\big)=\\&=a(F+G)(v)+b(F+G)(w),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(kF)(av+bw) &= kF(av+bw) = \\ &= k\left(aF(v)+bF(w)\right) = \\ &= akF(v)+bkF(w) = \\ &= a(kF)(v)+b(kF)(w)\end{aligned}$$

Значи, $F+G$ и kF се линеарни пресликувања.

Од особено значење е следниот резултат.

Теорема 6.7. Нека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$. Множеството од сите линеарни пресликувања од V во U со операциите собирање и множење со скалар е векторски простор.

Доказ. C_1 : Ако $F,G,H:V\to U$ се линеарни пресликувања, тогаш имаме дека

$$\begin{aligned}((F+G)+H)(v) &= \left(F+G\right)(v)+H(v) = \\ &= \left(F(v)+G(v)\right)+H(v) = \\ &= F(v)+\left(G(v)+H(v)\right) = \\ &= F(v)+\left(G+H\right)(v) = \\ &= \left(F+(G+H)\right)(v), \text{ за секој вектор } v\in V,\end{aligned}$$

од каде што следува дека

$$\left(F+G\right)+H=F+\left(G+H\right).$$

C_2 : Да го означиме со $O:V\to U$ нултото пресликување. Тогаш имаме дека

$$\left(F+O\right)(v)=F(v)+O(v)=F(v), \quad \text{за секој вектор } v\in V,$$

односно

$$F+O=F.$$

C_3 : За дадено линеарно пресликување $F:V\to U$ дефинираме пресликување $G:V\to U$ со $G(v)=-F(v)$. Тогаш G е линеарно пресликување и освен тоа важи

$$\begin{aligned}(F+G)(v)&=F(v)+G(v)=\\&=F(v)+(-F(v))=\\&=O(v),\ \text{за секој вектор } v\in V,\end{aligned}$$

од каде што следува дека

$$F+G=O.$$

C_4 : За линеарните пресликувања $F,G:V\to U$ важи

$$\begin{aligned}(F+G)(v)&=F(v)+G(v)=\\&=G(v)+F(v)=\\&=(G+F)(v),\ \text{за секој вектор } v\in V,\end{aligned}$$

од каде што следува дека

$$F+G=G+F.$$

M_1 : Ако $F,G:V\to U$ се линеарни пресликувања и $k\in\mathbb{K}$, тогаш имаме дека

$$\begin{aligned}(k(F+G))(v)&=k(F+G)(v)=\\&=k(F(v)+G(v))=\\&=k(F(v))+k(G(v))=\\&=(kF)(v)+(kG)(v)=\end{aligned}$$

$= \left(kF + kG\right)(v),$ за секој вектор $v \in V,$

па според тоа добиваме дека

$$k\left(F + G\right) = kF + kG.$$

M_2 : Ако $a, b \in \mathbb{K}$ и $F : V \to U$ е линеарно пресликување, тогаш

$$\left((a + b)F\right)(v) = \left(a + b\right)F(v) =$$
$$= a\left(F(v)\right) + b\left(F(v)\right) =$$
$$= \left(aF\right)(v) + \left(bF\right)(v) =$$

$= \left(aF + bF\right)(v),$ за секој вектор $v \in V,$

од каде што следува дека

$$(a + b)F = aF + bF.$$

M_3 : Ако $a, b \in \mathbb{K}$ и $F : V \to U$ е линеарно пресликување, тогаш

$$\left((ab)F\right)(v) = \left(ab\right)\left(F(v)\right) =$$
$$= a\left(bF(v)\right) =$$
$$= a\left((bF)(v)\right) =$$

$= \left(a(bF)\right)(v),$ за секој вектор $v \in V,$

па според тоа имаме дека

$$(ab)F = a(bF).$$

M_4 : Ако $F : V \to U$ е линеарно пресликување, тогаш

$\left(1F\right)(v) = 1F(v) = F(v),$ за секој вектор $v \in V,$

од каде што следува дека

$1F = F$. ■

Векторскиот простор од сите линеарни пресликувања $F : V \to U$ ќе го означуваме со $L(V,U)$. Ако V и U имаат конечни димензии, тогаш важи следнава теорема.

Теорема 6.8. Нека U и V се векторски простори над поле $\mathbb{K}$. Ако $\dim V = m$ и $\dim U = n$, тогаш

$$\dim L(V,U) = mn.$$

Доказ. Нека $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ е база на векторскиот простор V и $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ е база на векторскиот простор U. Едно линеарно пресликување во $L(V,U)$ е еднозначно определено со сликите на базните вектори $v_1, v_2, ..., v_m$ во V. Дефинираме пресликувања

$$F_{ij} \in L(V,U),\ i = 1,...,m,\ \ j = 1,...,n$$

со равенствата

$$F_{ij}(v_i) = u_j \text{ и } F_{ij}(v_k) = 0 \text{ за } k \neq i.$$

Множеството $\{F_{ij}\}$ се состои од mn елементи.

Ќе покажеме дека множествот $\{F_{ij}\}$ е база на векторскиот простор $L(V,U)$. Најнапред ќе докажеме дека множеството $\{F_{ij}\}$ го генерира просторот $L(V,U)$. Нека $F \in L(V,U)$, и нека сликите на базните вектори од V се

$$F(v_1) = w_1,\ F(v_2) = w_2, ...,\ F(v_m) = w_m.$$

За $k=1,2,...,m$, бидејќи $w_k \in U$, тој е линеарна комбинација од базните вектори $u_1,u_2,...,u_n$, односно, постојат еднозначно определени скалари a_{kj}, $j=1,2,...,n$ такви што

$$w_k = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + ... + a_{kn}u_n\,,\ \ k=1,2,...,m.$$

За да покажеме дека $F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_{ij}$, доволно е да се провери дали двете страни од равенството на ист начин ги пресликуваат векторите $v_1,v_2,...,v_m$. Бидејќи имаме дека за $k=1,2,...,m$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_{ij}\right)(v_k)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_{ij}(v_k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}u_j = w_k = F(v_k),$$

заклучуваме дека

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_{ij}.$$

Од произволноста на F од $L(U,V)$ следува дека множеството вектори $\{F_{ij}\}$ го генерира просторот $L(V,U)$.

За да ја докажеме теоремата преостанува да покажеме уште дека множеството $\{F_{ij}\}$ е линеарно независно. За таа цел претпоставуваме дека

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}F_{ij}=O.$$

Тогаш, за $k = 1,2,..,m$ се добива дека

$$O(v_k) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} F_{ij} \right)(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} u_j .$$

Имајќи во вид дека $O(v_k) = 0,$ за секој $k = 1,2,...,m,$ добиваме дека $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} u_j = 0.$ Бидејќи $u_1, u_2, ..., u_n$ се базни вектори, следува дека

$$a_{kj} = 0 \text{ за } j = 1,2,...,n \text{ и } k = 1,2,...,m.$$

Според тоа, множеството $\{F_{ij}\}$ е линеарно независно. ■

Нека V, U и W се векторски простори над поле $\mathbb{K}$ и нека $F: V \to U$ и $G: U \to W$ се линеарни пресликувања (цртеж 13).

$$\begin{tikzcd} \boxed{V} \arrow[r, "F"] & \boxed{U} \arrow[r, "G"] & \boxed{W} \end{tikzcd}$$

Цртеж 13

Да се потсетиме дека композицијата $G \circ F$ е пресликување од V во W дефинирано со

$$(G \circ F)(v) = G(F(v)), \text{ за секое } v \in V.$$

Ќе покажеме дека $G \circ F$ е линеарно пресликување кога G и F се линеарни пресликувања. За секои $v, w \in V$ и за секое $k \in \mathbb{K}$ имаме дека

$$\begin{aligned}(G\circ F)(v+w) &= G(F(v+w)) = G(F(v)+F(w)) = \\ &= G(F(v))+G(F(w)) = \\ &= (G\circ F)(v)+(G\circ F)(w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(G\circ F)(kv) &= G(F(kv)) = G(kF(v)) = \\ &= kG(F(v)) = k(G\circ F)(v)\end{aligned}$$

од каде што следува дека $G\circ F$ е линеарно пресликување.

Ако $F:V\to U$ и $G:U\to W$ се изоморфизми, тогаш $G\circ F$ е исто така изоморфизам и притоа важи $(G\circ F)^{-1}=F^{-1}\circ G^{-1}$.

Навистина, знаеме дека $G\circ F$ е линеарно пресликување. Освен тоа $G\circ F$ е биективно пресликување како композиција од биективни пресликувања и при тоа важи $(G\circ F)^{-1}=F^{-1}\circ G^{-1}$.

Композицијата на пресликувања и операциите собирање и множење со скалар се поврзани со следнава теорема

Теорема 6.9. Нека V, U и W се векторски простори над поле $\mathbb{K}$ и нека $F,F':V\to U$ и $G,G':U\to W$ се линеарни пресликувања. Тогаш точни се следниве тврдења:

(i) $G\circ\left(F+F'\right)=G\circ F+G\circ F'$

(ii) $\left(G+G'\right)\circ F=G\circ F+G'\circ F$

(iii) $k(G\circ F)=(kG)\circ F=G\circ(kF)$, за произволно $k\in\mathbb{K}$.

Доказ. (i) Тврдењето е точно бидејќи

$$\begin{aligned}(G\circ(F+F'))(v) &= G((F+F')(v)) = \\ &= G(F(v)+F'(v)) = \\ &= G(F(v))+G(F'(v)) = \\ &= (G\circ F)(v)+(G\circ F')(v) = \\ &= (G\circ F+G\circ F')(v),\ \text{за секој вектор } v\in V.\end{aligned}$$

Според тоа важи

$$G\circ\left(F+F'\right)=G\circ F+G\circ F'$$

(ii) За секој вектор $v\in V$ имаме дека

$$\begin{aligned}((G+G')\circ F)(v) &= (G+G')(F(v)) = \\ &= G(F(v))+G'(F(v)) = \\ &= (G\circ F)(v)+(G'\circ F)(v) = \\ &= (G\circ F+G'\circ F)(v),\end{aligned}$$

па според тоа важи

$$\left(G+G'\right)\circ F=G\circ F+G'\circ F$$

(iii) За секој вектор $v\in V$ имаме дека

$$\begin{aligned}(k(G\circ F))(v) &= k((G\circ F)(v)) = \\ &= k(G(F(v))) = \\ &= (kG)(F(v)) = \\ &= ((kG)\circ F)(v),\end{aligned}$$

па според тоа важи

$$k(G\circ F)=(kG)\circ F.$$

Понатаму, од

$$
\begin{aligned}
(k(G\circ F))(v) &= k(G(F(v))) = \\
&= G(kF(v)) = \\
&= (G\circ (kF))(v), \text{ за секој вектор } v\in V,
\end{aligned}
$$

следува дека $k(G\circ F)=G\circ (kF)$. ■

6.7. Алгебра од линеарни оператори

Нека V е векторски простор над поле $\mathbb{K}$. Го разгледуваме специјалниот случај од линеарни пресликувања $T:V\to V$, од V во себе. Тие се нарекуваат **линеарни оператори** или **линеарни трансформации** на V. Ќе пишуваме $L(V)$ наместо $L(V,V)$ за просторот од сите вакви пресликувања.

Заради Теорема 6.8 имаме дека $L(V)$ е векторски простор со димензија n^2, ако V има димензија n. Освен тоа ако $T,S\in L(V)$ тогаш $S\circ T$ постои и е линеарно пресликување од V во себе, односно $S\circ T\in L(V)$. Така имаме дефинирано „множење" $L(V)$ и се договараме во просторот $L(V)$ да пишуваме ST наместо $S\circ T$.

Да забележиме дека **алгебра** A над поле $\mathbb{K}$ се дефинира како векторски простор над $\mathbb{K}$ во којшто е дефинирана операција множење за која што важат условите:

(i) $F(G+H)=FG+FH$

(ii) $(G+H)F=GF+HF$

(iii) $k(GF)=(kG)F+G(kF)$

за секои $F, G, H \in L(V)$ и за секое $k \in \mathbb{K}$.

Ако важи асоцијативниот закон на множењето, односно ако

$$\text{(iv)} \quad (FG)H = F(GH)$$

тогаш алгебрата A се нарекува асоцијативна. Според тоа, согласно со Теорема 6.1 и Теорема 6.9 $L(V)$ е асоцијативна алгебра над K во однос на композицијата на пресликувања. Затоа, честопати оваа алгебра се нарекува **алгебра од линеарни оператори** над V.

Забележуваме дека $I: V \to V$ припаѓа на $L(V)$. Исто така, за било кое $T \in L(V)$ имаме дека

$$I\,T = T\,I = I.$$

Да забележиме дека се дефинирани „степените" од T, односно

$$T^2 = T \circ T, \;\; T^3 = T \circ T \circ, \ldots$$

Уште повеќе, за произволен полином

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

можеме да дефинираме оператор $p(T)$ со

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n.$$

Во специјален случај ако $p(T) = 0$, тогаш T се нарекува нула на полиномот $p(x)$. Често пати операторот kI се означува едноставно со k.

Пример. Нека $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е дефинирано со

$$T(x, y, z) = (0, x, y), \text{ за секое } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Сега, ако (a,b,c) е произволен елемент од $\mathbb{R}^3$, тогаш имаме дека

$$(T+I)(a,b,c)=(0,a,b)+(a,b,c)=(a,a+b,b+c), \text{ и}$$

$$T^3(a,b,c)=T^2(0,a,b)=T(0,0,a)=(0,0,0)$$

Значи, имаме дека $T^3=O,$ нултото пресликување од V во себе. Со други зборови, T е нула на полиномот $p(x)=x^3$. ♦

6.8 Инверзибилни оператори

Линеарен оператор $T:V\to V$ се нарекува **инверзибилен** ако тој има инверзен, односно ако постои $T^{-1}\in L(V)$ така што

$$TT^{-1}=T^{-1}T=I.$$

Забалежуваме дека T^{-1} постои ако и само ако T е биективно пресликување. Затоа, ако T е инверзибилен тогаш само $0\in V$ може да се преслика во $0\in V.$ Затоа T е несингуларен оператор, односно важи $\operatorname{Ker}T=\{0\}$.

Обратно, да претпоставиме дека T е несингуларен оператор, односно $\operatorname{Ker}T=\{0\}.$ Тогаш T е инјективен оператор. Уште повеќе, ако V е конечнодимензионален векторски простор, според Теорема 6.5 имаме дека

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim(\operatorname{Im}T)+\dim(\operatorname{Ker}T)=\\ &=\dim(\operatorname{Im}F)+\dim(\{0\})=\\ &=\dim(\operatorname{Im}F)+0=\\ &=\dim(\operatorname{Im}F)\end{aligned}$$

Тогаш $\operatorname{Im} T = V$, па T е сурјективен оператор. Според тоа, T е биективен оператор, па може да заклучиме дека T и инверзибилен оператор. Со тоа ја докажавме следната теорема:

Теорема 6.10. Еден линеарен оператор $T: V \to V$ каде што V е конечнодимензионален векторски простор е инверзибилен ако и само ако тој е несингуларен. ■

Пример. Нека T е оператор на $\mathbb{R}^2$ дефиниран со

$$T(x, y) = (y, 2x - y), \text{ за секои } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Оттука имаме дека $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Значи T е несингуларен оператор па според претходната теорема тој е и инверзибилен. Да го најдеме аналитичкиот израз за T^{-1}. Нека $T(x, y) = (s, t)$. Тогаш имаме дека $T^{-1}(s, t) = (x, y)$. Затоа имаме дека

$$T(x, y) = (y, 2x - y) = (s, t), \text{ па затоа } y = s,\ 2x - y = t.$$

Изразувајќи ги x и y преку s и t добиваме дека $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t$ и $y = s$. Затоа аналитичкиот израз гласи $T^{-1}(s, t) = \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t, s\right)$. ♦

Забелешка. Условот за димензионалност на векторскиот простор V е битен, како што може да заклучиме од следниот пример.

Пример. Нека V е векторскиот простор од полиноми над поле $\mathbb{K}$ и нека T е оператор на V дефиниран со

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n) = a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \cdots + a_n t^{n+1}$$

односно T го зголемува степенот на t во секој член за 1. Тогаш T е линеарен несингуларен оператор, меѓутоа T не е инверзабилен. ♦

Сега ќе дадеме важна примена на погорната теорема на системи од линеарни равенки над поле $\mathbb{K}$.

Да го разгледаме на пример системот од n равенки со n непознати. Овој систем може да го изразиме со матричната равенка

$$Ax = b$$

каде што A е несингуларна $n x n$ матрица над поле $\mathbb{K}$, која што можеме да ја сметаме за линеарен оператор на $\mathbb{K}^n$. Да претпоставиме дека матрицата A е несингуларна, односно дека матричната равенка $Ax = 0$ има само тривијално решение. Тогаш според Теорема 6.10 линеарното пресликување $A:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е биективно. Ова покажува дека системот равенки $Ax = b$ има единствено решение за било кое $b \in \mathbb{K}^n$.

Од друга страна, да претпоставиме дека матрицата A е сингуларно пресликување (матрица), односно дека матричната равенка $Ax = 0$ има ненулто решение. Тогаш линеарното пресликување A не е сурјективно. Ова значи дека постои $b \in \mathbb{K}^n$ за кое што системот $Ax = b$ нема решение. Освен тоа, ако решение постои, тое не е единствено. Со тоа го докажавме следниот фундаментален резултат:

Теорема 6.11. Да го разгледаме системот од линеарни равенки:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

(i) Ако соодветниот хомоген систем има само нулто решение, тогаш погорниот систем има единствено решение за произволни вредности на b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Ако соодветниот хомоген систем има ненулто решение, тогаш можни се два случаи:

- ✓ Постојат вредности b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, за коишто погорниот систем нема решение
- ✓ Ако постои решение на погорниот систем, тоа не е единствено.

Задачи за самостојна работа

1. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е пресликувањето зададено со $f(x) = -3x + 5$. Најди:

а) $f(4)$ б) $f([0,2])$ в) $f^{-1}([-1,3])$

2. Докажи дека едно пресликување $f : A \to B$ е сурјекција, ако и само ако $f(A) = B$.

3. Докажи дека ако $f : A \to B$ и $g : B \to C$ се инјекции, тогаш и $g \circ f$ е инјекција.

4. Докажи дека ако $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се сурјекции, тогаш и $g \circ f$ е сурјекција.

5. Докажи дека ако $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се биекции, тогаш и $g \circ f$ е биекција.

6. Провери дали е линеарно пресликувањето $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, дефинирано со

а) $f(x,y,z) = (2x + y, -3x + 4z)$

б) $f(x,y,z) = (3x + z + 1, -3x + 2y + 4z)$

в) $f(x,y,z) = (x + y + z, x + y + z)$

г) $f(x,y,z) = (0, 2 - 3x + 4z)$

7. Нека v е произволно избран вектор во $\mathbb{R}^3$. Дали пресликувањето $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинирано со

$$f(u) = v \times u, \text{ за секој } u \in \mathbb{R}^3,$$

е линеарно? ($\times$ означува векторски производ).

8. Нека v е произволно избран вектор во $\mathbb{R}^3$. Дали пресликувањето $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ дефинирано со

$$f(u) = v \cdot u, \text{ за секој } u \in \mathbb{R}^3,$$

е линеарно? ($\cdot$ означува скаларен производ)

9. Покажи дека следните пресликувања не се линеарни:

а) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ дефинирано со

$$f(x,y,z) = xyz, \text{ за секој } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

б) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ дефинирано со

$$f(x,y,z)=\left(x,|x|\right),\ \text{ за секој } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

в) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ дефинирано со

$$f(x,y,z)=(x+1,y+1,z+1),\ \text{ за секој } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

10. Нека V е векторскиот простор на сите $n\times n$ матрици и нека M е произволна $n\times n$ матрица. Покажи дека пресликувањето $f:V\to V$ дефинирано со

$$f(A)=AM+MA\text{, за секоја } A\in V$$

е линеарна трансформација?

11. Најди ја сликата $f(x,y,z)$, ако $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ е зададено со

$$f(1,1,0)=(2,1),\ f(0,1,1)=(0,-1)\ \text{ и }\ f(1,0,1)=(1,1).$$

12. Што може да се каже за јадрото на едно линеарно пресликување $F:V\to U$, ако $\dim V=\dim \operatorname{Im} F$?

13. Што може да се каже за множеството слики на едно линеарно пресликување $F:V\to U$, ако $\dim V=\dim \ker F$?

14. Најди по една база на множеството слики и на јадрото, на линеарните пресликувања:

а) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \ f(x,y,z)=(x-2y,x-2y)$

б) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \ f(x,y,z)=(x-2y,x-3y,x+y-z)$

в) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \ f(x,y,z)=(x-y,x+2y+3z,2x-2y)$

г) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \ f(x,y,z)=(x+2y-z,y+z,x+y-2z)$

15. Најди линеарно пресликување $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, за коешто $\operatorname{Im}F$ е генерирано со векторите $(1,0,-2,1)$ и $(2,1,1,-1)$.

16. Најди го јадрото и множеството слики на **хомотетијата** $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, со центар во координатниот почеток, дефинирана со

$$f(x,y,z)=(kx,ky,kz), \text{ за } k\neq 0.$$

17. Докажи дека линеарно пресликување $F: V \to U$ е инјективно ако и само ако е несингуларно.

18. Нека $f: V \to U$ и $g: U \to W$ се несингуларни линеарни пресликувања. Докажи дека $g \circ f: V \to W$ е исто така несингуларно пресликување.

19. Покажи дека ако $f_1, f_2, ..., f_n \in L(V,U)$, и $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ се произволно избрани, тогаш

$$(a_1f_1 + a_2f_2 + ... + a_nf_n)(u) = a_1f_1(u) + a_2f_2(u) + ... + a_nf_n(u)$$

20. Нека $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ и $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ се линеарните пресликувања дефинирани со

$$f(x,y,z)=(2x,y+z) \text{ и } f(x,y,z)=(y,x).$$

Најди го составот $g \circ f$. Дали постои композицијата $f \circ g$?

21. Како дејствува линеарното пресликување $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дефинирано со

$$f(x,y)=(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta),$$

на векторите во рамнината чијшто почеток е во координатниот почеток?

22. Опиши ги сите линеарни пресликувања $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

23. Докажи дека за произволен векторски простор V, множеството од сите изоморфизми на V во однос на операцијата композиција на пресликувања претставува група.

24. Дали линеарната трансформацијата $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дефинирана со

$$f(x,y)=(x+y,y), \text{ за секои } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

е изоморфизам? Во случај на потврден одговор, најди ја линеарната трансформација f^{-1}.

25. Докажи дека пресликувањето $f:P_n\left[t\right]\to P_n\left[t\right]$ дефинирано со

$$f(a_0+a_1t+.......+a_nt^n)=a_n+a_{n-1}t+a_{n-2}t^2+.....+a_0t^n$$

е изоморфизам.

26. Нека a,b,c и d се дадени реални броеви. Покажи дека пресликувањето $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дефинирано со

$$f(x,y)=(ax+by,cx+dy), \text{ за секои } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

е линеарно. Кој услов треба да го задоволуваат реалните броеви a,b,c и d за да биде изоморфизам за даденото линеарно пресликување?

27. Нека V е векторскиот простор на 2×2 матрици. Најди ги координатите на матрицата $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ во однос на базата

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

28. Дали матриците

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\ \text{и}\ C=\begin{pmatrix}9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}$$

се линеарно зависни?

29. Дали пресликувањето $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинирано со $f(x)=x^3$ е биекција?

30. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, се пресликувања зададени со

$$f(x)=x^2+3x+1\ \text{и}\ g(x)=2x-3.$$

Најди ги пресликувањата:

а) $g\circ g$ б) $g\circ f$ в) $f\circ g$ г) $f\circ f$

31. Нека $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, и $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, се линеарни пресликувања дефинирани со

$$f(x,y,z)=(y,x+z),\ g(x,y,z)=(2z,x-y)\ \text{и}\ h(x,y)=(y,2x).$$

Најди ги линеарните пресликувања:

а) $f\circ h$ и $g\circ h$ б) $h\circ f$ и $h\circ g$

в) $h\circ(f+g)$ и $h\circ f+h\circ g$

32. Најди го линеарното пресликување $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, зададено со $f(1,2)=(2,1,0)$ и $f(2,1)=(0,1,2)$.

7. МАТРИЦИ И ЛИНЕАРНИ ОПЕРАТОРИ

7.1 Вовед

Нека $\{e_1,\ldots,e_n\}$ е база за векторски простор V над поле $\mathbb{K}$ и нека за $v \in V$ претпоставиме дека

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n.$$

Тогаш координатите на векторот v во однос на базата $\{e_1,\ldots,e_n\}$ може да ги запишеме како вектор колона

$$[v]_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Да напоменеме дека пресликувањето $v \mapsto [v]_e$ определено со базата $\{e_1,\ldots,e_n\}$ е изоморфизам меѓу векторските простори V и $\mathbb{K}^n$. Ќе покажеме дека постои, исто така, изоморфизам определен со базата $\{e_1,\ldots,e_n\}$ од алгебрата $A(V)$ од сите линеарни оператори над V во алгебрата од сите квадратни матрици од ред n над полето $\mathbb{K}$.

Аналогно важи за линеарните пресликувања $F: V \to U$, од еден векторски простор во друг.

7.2 Матрична репрезентација на линеарни оператори

Нека T е линеарен оператор на векторскиот простор V над поле $\mathbb{K}$ и нека $\{e_1, \ldots, e_n\}$ е база за V. Нека $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ се вектори во V и нека секој е претставен како линеарна комбинација во однос на базата $\{e_1, \ldots, e_n\}$

$$T(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n$$

$$T(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T(e_n) = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n$$

каде што a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, се скалари од полето $\mathbb{K}$. Тие формираат квадратна матрица од ред n.

Дефиниција. Транспонираната на горната матрица од коефициенти означена со $[T]_e$ или $[T]$ се нарекува **матрична репрезентација** на T во однос на базата $\{e_1, \ldots, e_n\}$, односно **матрица** на T во однос на базата $\{e_1, \ldots, e_n\}$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример. Нека V е векторскиот простор од полиноми по t над полето $\mathbb{R}$ со степен најмногу 3, и нека $D: V \to V$ е диференцијалниот оператор дефиниран со

$$D(p(t)) = \frac{d(p(t))}{dt}.$$

Да ја пресметаме матрицата D во однос на базата $\{1, t, t^2, t^3\}$. Имаме дека

$$D(1) = 0 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t) = 1 = 1 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t^2) = 2t = 0 + 2t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t^3) = 3t^2 = 0 + 0t + 3t^2 + 0t^3$$

Според тоа, добиваме дека

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacklozenge$$

Пример. Нека Т е линеарен оператор на $\mathbb{R}^2$ дефиниран со

$$T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$$

Да ја пресметаме матрицата на T во однос на базата

$$\{f_1 = (1,1), f_2 = (-1,0)\}$$

Имаме дека

$$T(f_1) = T(1,1) = (2,3) = 3(1,1) + (-1,0) = 3f_1 + f_2$$

$$T(f_2) = T(-1,0) = (-4,-2) = -2(1,1) + 2(-1,0) = -2f_1 + 2f_2$$

Според тоа, добиваме дека $T(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. ♦

Забелешка. Да се потсетиме дека секоја квадратна матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ од ред n над поле $\mathbb{K}$ определува линеарен оператор T над $\mathbb{K}^n$ со пресликувањето $T(v) = Av$, каде што v е запишан како вектор колона.

Ќе покажеме дека матричната репрезентација на линеарниот оператор T во однос на стандардната база $\{e_1, \dots, e_n\}$ на $\mathbb{K}^n$ е матрицата A, односно $[T]_e = A$. Имаме дека

$$T(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n$$

$$T(e_2) = Ae_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n$$

....

$$T(e_n) = Ae_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n$$

Според тоа, заклучуваме дека

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A\,. \blacklozenge$$

Нашата прва теорема кажува дека дејството на оператор T на вектор v се запазува со неговата матрична репрезенатација.

Теорема 7.1. Нека $\{e_1,\dots,e_n\}$ е база на V и нека T е произволен линеарен оператор во V. Тогаш за произволен вектор $v \in V$ важи

$$[T]_e[v]_e = [T(v)]_e.$$

Доказ. Нека $\{e_1,\dots,e_n\}$ е база на V и нека T е линеарен оператор во V. Претпоставуваме дека за $i = 1,\dots,n$, имаме

$$T(e_i) = a_{in}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{in}e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$$

Тогаш $[T]_e$ е квадратна матрица од ред n чија што $j-$та редица е

$$(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) \qquad (1)$$

Сега, претпоставуваме дека

$$v = k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = \sum_{i=1}^{n} k_ie_i\,.$$

Со запишување на вектор колона како транспонирана вектор редица добиваме

$$[v]_e = (k_1, k_2 \dots, k_n)^t \tag{2}$$

Уште повеќе, заради линеарноста на операторот T наоѓаме дека

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} k_i\right) e_j = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{nj}k_n) e_j$$

Тогаш $[T(v)]_e$ е вектор колоната чијшто $j-$ти елемент е

$$a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \cdots + a_{nj}k_n \tag{3}$$

Од друга страна, j-тиот елемент на $[T]_e[v]_e$ се добива со множење на $j-$тата редица на $[T]_e$ со $[v]_e$, односно со множење на (1) со (2). Но производот на (1) и (2) е токму скаларот (3). Според тоа, $[T]_e[v]_e$ и $[T(v)]_e$ имаат исти елементи, од каде што следува доказот на тврдењето. ■

Теорема 7.1 всушност покажува дека ако се помножи координатниот вектор v со матричната репрезентација на T се добива координатниот вектор $T(v)$.

Пример. Нека $D : V \to V$ е диференцијалниот оператор. Ако

$$p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \text{ тогаш } D(p(t)) = b + 2ct + 3dt^2$$

Според тоа, во однос на базата $\{1, t, t^2, t^3\}$ имаме дека

$$[p(t)]=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [D(p(t)]=\begin{pmatrix}b\\2c\\3d\\0\end{pmatrix}$$

Овде се потврдува теорема 7.1, односно имаме дека

$$[D][p(t)]=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\2c\\3d\\0\end{pmatrix}=[D(p(t)] \ ♦$$

Пример. Да го разгледаме линеарниот оператор $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ определен претходно со

$$T(x,y)=(4x-2y,2x+y)$$

Нека $v=(5,7)$. Тогаш имаме дека

$$v=(5,7)=7(1,1)+2(-1,0)=7f_1+2f_2$$

$$T(v)=(6,17)=17(1,1)+11(-1,0)=17f_1+11f_2$$

каде што $f_1(1,1)$ и $f_2(-1,0)$. Затоа во однос на базата $\{f_1,f_2\}$ имаме дека

$$[v]_f=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} \ \text{и} \ [T(v)]_f=\begin{pmatrix}17\\11\end{pmatrix}$$

Овде се потврдува теорема 7.1, односно имаме дека

$$[T]_f[v]_f=\begin{pmatrix}3&-2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}=[T(v)]_f \ ♦$$

Сега треба да придружиме матрица $[T]_e$ на секое T од $A(v)$, алгебрата од линеарни оператори на V. Според нашата прва теорема со оваа репрезентација се запазува дејството на секој оператор T. Следните две теореми покажуваат дека трите основни операции

(i) собирање (ii) множење со скалар (iii) композиција

исто така се запазуваат.

Теорема 7.2. Нека $\{e_1,\dots,e_n\}$ е база на V над поле $\mathbb{K}$ и нека $\mathbb{A}$ е алгебрата од квадратни матрици од ред n над $\mathbb{K}$. Тогаш пресликувањето $T \mapsto [T]_e$ е изоморфизам на векторски простор од $A(v)$ над $\mathbb{A}$. Всушност тоа е биекција таква што за произволни $S, T \in A(V)$ и произволно $k \in \mathbb{K}$

$$[T+S]_e = [T]_e + [S]_e \quad \text{и} \quad [kT]_e = k[T]_e$$

Доказ. Видовме дека $[T] \mapsto [T]_e$ е биекција. Да претпоставиме дека за $i = 1,\dots,n$,

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \quad \text{и} \quad S(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} e_j$$

Нека A и B се матриците $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$. Тогаш имаме дека

$$[T]_e = A^t \text{ и } [S]_e = B^t$$

Оттука добиваме дека

$$\left(T+S\right)(e_i) = T(e_i) + S(e_i) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) e_j$$

Да забележиме дека $A+B$ е матрица $(a_{ij}+b_{ij})$. Согласно тоа, имаме дека

$$[T+S]_e = (A+B)^t = A^t + B^t = [T]_e + [S]_e$$

Исто така, имаме за $i=1,\dots,n$,

$$(kT)(e_i) = kT(e_i) = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j = \sum_{j=1}^{n}(ka_{ij})e_j$$

Да забележиме дека kA е матрица со елементи ka_{ij}. Според тоа, имаме дека

$$[kT]_e = (kA)^t = kA^t = k[T]_e \ ■$$

Теорема 7.3. Нека $\{e_1,\dots,e_n\}$ е база на V. Тогаш за произволни линеарни оператори $S,T\in A(V)$ важи

$$[ST]_e = [S]_e[T]_e$$

Доказ. Да претпоставиме дека

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j \quad и \quad S(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}e_j.$$

Нека A и B се матриците $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$. Тогаш имаме дека

$$[T]_e = A^t \text{ и } [S]_e = B^t$$

Оттука добиваме дека

$$(ST)(e_i) = S(T(e_i)) = S\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}S(e_j) =$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)e_k$$

Да забележиме дека AB е матрица $AB=\left(c_{ik}\right)$ каде $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$.

Според тоа, имаме дека

$$[ST]_e=(AB)^t=B^tA^t=[S]_e[T]_e \ \blacksquare$$

Пример. Ќе ги илустрираме овие две теореми во случај кога $\dim V=2$. Нека $\{e_1,e_2\}$ е база на V, и нека S,T се линеарни оператори на V за кои што важи

$$T(e_1)=a_1e_1+a_2e_2, \quad T(e_2)=b_1e_1+b_2e_2, \text{ и}$$

$$S(e_1)=c_1e_1+c_2e_2, \quad S(e_2)=d_1e_1+d_2e_2$$

Тогаш имаме дека

$$[T]_e=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ и } [S]_e=\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

од каде што наоѓаме дека

$$(T+S)(e_1)=T(e_1)+S(e_1)=(a_1e_1+a_2e_2)+(c_1e_1+c_2e_2)=$$

$$=(a_1+c_1)e_1+(a_2+c_2)e_2$$

$$(T+S)(e_2)=T(e_2)+S(e_2)=(b_1e_1+b_2e_2)+(d_1e_1+d_2e_2)=$$

$$=(b_1+d_1)e_1+(b_2+d_2)e_2$$

Конечно, добиваме дека

$$[T+S]_e = \begin{pmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = [T]_e + [S]_e$$

Исто така за $k \in \mathbb{K}$ имаме дека

$$(kT)(e_1) = kT(e_1) = k(a_1e_1 + a_2e_2) = ka_1e_1 + ka_2e_2$$

$$(kT)(e_2) = kT(e_2) = k(b_1e_1 + b_2e_2) = kb_1e_1 + kb_2e_2$$

Конечно, добиваме дека

$$[kT]_e = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = k[T]_e$$

За производот имаме дека

$$(ST)(e_1) = S(T(e_1)) = S(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1S(e_1) + a_2S(e_2)$$

$$= a_1(c_1e_1 + c_2e_2) + a_2(d_1e_1 + d_2e_2) =$$

$$= (a_1c_1 + a_2d_1)e_1 + (a_1c_2 + a_2d_2)e_2, \quad \text{и}$$

$$(ST)(e_2) = S(T(e_2)) = S(b_1e_1 + b_2e_2) = b_1S(e_1) + b_2S(e_2)$$

$$= b_1(c_1e_1 + c_2e_2) + b_2(d_1e_1 + d_2e_2) =$$

$$= (b_1c_1 + b_2d_1)e_1 + (b_1c_2 + b_2d_2)e_2$$

од каде што заклучуваме дека

$$[ST]_e = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2d_1 & b_1c_1 + b_2d_1 \\ a_1c_2 + a_2d_2 & b_1c_2 + b_2d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = [S]_e \cdot [T]_e \quad \blacklozenge$$

7.3 Промена на базата

Со избор на база во векторски простор може да претставиме вектор со $n-$торка (вектор колона) и линеарно пресликување со матрица. Се поставува следното прашање - како ќе се промени репрезентацијата на векторите или репрезентацијата на линеарниот оператор ако избереме нова база? Претходно треба да ја воведеме следната дефиниција.

Дефиниција. Нека $\{e_1,\dots,e_n\}$ е база на векторски простор V и нека $\{f_1,\dots,f_n\}$ е друга база. Да претпоставиме дека

$$f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \ldots + a_{1n}e_n$$

$$f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{2n}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n$$

Транспонираната матрица P на матрицата од коефициенти

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се нарекува **матрица на премин (транзициона матрица)** од „старата" база $\{e_1,\dots,e_n\}$ кон „новата" база $\{f_1,\dots,f_n\}$.

Матрицата P е инверзибилна, бидејќи векторите $f_1,\dots,f_n$ се линеарно независни. Всушност инверзната матрица P^{-1} е матрицата на премин од базата $\{f_1,\dots,f_n\}$ кон базата $\{e_1,\dots,e_n\}$.

Пример. Да ги разгледаме следните две бази во $\mathbb{R}^2$

$$\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\} \quad и \quad \{f_1=(1,1),f_2=(-1,0)\}$$

Тогаш имаме дека

$$f_1=(1,1)=(1,0)+(0,1)=e_1+e_2, \text{ и}$$

$$f_2=(-1,0)=-(1,0)+0(0,1)=-e_1+0e_2$$

Оттука следува дека матрицата на премин P од базата $\{e_1,e_2\}$ во базата $\{f_1,f_2\}$ гласи

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Исто така, имаме дека

$$e_1=(1,0)=0(1,1)-(-1,0)=0f_1-f_2, \text{ и}$$

$$e_2=(0,1)=(1,1)+(-1,0)=f_1+f_2$$

Оттука следува дека матрицата на премин Q од базата $\{f_1,f_2\}$ во базата $\{e_1,e_2\}$ гласи

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Забележуваме дека матриците P и Q се инверзни една на друга, односно имаме дека

$$PQ=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I \quad \blacklozenge$$

Сега ќе покажеме што се случува со координатните вектори при промена на базата.

Теорема 7.4. Нека P е матрица на премин од база $\{e_1,\dots,e_n\}$ во база $\{f_1,\dots,f_n\}$ во векторски простор V. Тогаш, за произволен вектор $v \in V$ важи $P[v]_f = [v]_e$, од каде што следува дека

$$[v]_f = P^{-1}[v]_e$$

Доказ. Да претпоставиме дека за $i = 1,\dots,n$,

$$f_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \dots + a_{in}e_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j.$$

Тогаш P е квадратна матрица од ред n чија што $j-$та редица е

$$\left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\right) \tag{1}$$

Исто така, да претпоставиме дека

$$v = k_1f_1 + k_2f_2 + \dots + k_nf_n = \sum_{i=1}^{n} k_if_i.$$

Тогаш со запишување на вектор колона како транспонирана вектор редица добиваме дека

$$[v]_f = (k_1, k_2, \dots, k_n)^t \tag{2}$$

Со замена на f_i во равенството за v добиваме дека

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_if_i = \sum_{i=1}^{n} k_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}k_i\right)e_j =$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left(a_{1j}k_1+a_{2j}k_2+\ldots+a_{nj}k_n\right)e_j$$

Според тоа, добиваме дека $[v]_e$ е вектор колонона со j- ти елемент

$$a_{1j}k_1+a_{2j}k_2+...+a_{nj}k_n \qquad (3)$$

Од друга страна пак, j-тиот елемент на $P[v]_f$ се добива со множење на j-тата редица на P со $[v]_f$, односно на (1) и (2). Но производот на (1) и (2) е даден со (3), па според тоа, добиваме дека $P[v]_f$ и $[v]_e$ имаат исти елементи, од каде што следува дека $P[v]_f=[v]_e$. Уште повеќе, ако последното равенство го помножиме со P^{-1} добиваме

$$P^{-1}[v]_e=P^{-1}P[v]_f=[v]_f$$

што требаше да се докаже. ■

Да забележиме дека иако P се нарекува матрица на премин од старата база $\{e_1,\ldots,e_n\}$ во новата база $\{f_1,\ldots,f_n\}$, со нејзиното дејство таа ги трансформира координатите на вектор v во однос на новата база $\{f_1,\ldots,f_n\}$ во неговите координати во однос на старата база $\{e_1,\ldots,e_n\}$.

Ќе ја илустрираме теоремата за $\dim V=3$. Нека P е матрицата на премин од базата $\{e_1,e_2,e_3\}$ на V во базата $\{f_1,f_2,f_3\}$ на V. Тогаш имаме дека

$$f_1=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$$

$$f_2=b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$$

$$f_3=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$$

од каде што наоѓаме дека

$$P=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Сега да претпоставиме дека $v \in V$ и дека

$$v=k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3.$$

Тогаш со замена за векторите f_1,f_2,f_3 наоѓаме дека

$$\begin{aligned} v &= k_1(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)+k_2(b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3)+ \\ &\quad +k_3(c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3)= \\ &= (a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3)e_1+(a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3)e_2+ \\ &\quad +(a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3)e_3 \end{aligned}$$

Според тоа, добиваме дека

$$[v]_f=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [v]_e=\begin{pmatrix} a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3 \\ a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3 \\ a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3 \end{pmatrix}$$

од каде што следува дека

$$P[v]_f=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3 \\ a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3 \\ a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3 \end{pmatrix}=[v]_e$$

Со множење на погорното равенство со P^{-1} добиваме дека

$$P^{-1}[v]_e=P^{-1}P[v]_f=I[v]_f=[v]_f$$

Пример. Нека $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. За следните две бази во $\mathbb{R}^2$

$$\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\} \quad \text{и} \quad \{f_1=(1,1),f_2=(-1,0)\}$$

разгледани во претходниот пример имаме дека

$$v=(a,b)=a(1,0)+b(0,1)=ae_1+be_2,\ \text{и}$$

$$v=(a,b)=b(1,1)+(b-a)(-1,0)=bf_1+(b-a)f_2$$

Оттука следува дека

$$[v]_e=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad [v]_f=\begin{pmatrix}b\\b-a\end{pmatrix}$$

Според претходниот пример матрицата на премин P од базата $\{e_1,e_2\}$ во базата $\{f_1,f_2\}$ и нејзината инверзна P^{-1} се дадено со

$$P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

Да го верифицираме резултатот од Теорема 7.4

$$P[v]_f=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\b-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=[v]_e$$

$$P^{-1}[v]_e=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\b-a\end{pmatrix}=[v]_f \ ♦$$

Следната теорема покажува дека матричната репрезентација на линеарен оператор зависи од базата, односно се менува со промена на базата.

Теорема 7.5. Нека P е матрица на премин од база $\{e_1,\dots,e_n\}$ во база $\{f_1,\dots,f_n\}$ во векторски простор V. Тогаш за произволен линеарен оператор T на V важи

$$[T]_f = P^{-1}[T]_e P$$

Доказ. За произволен вектор $v \in V$ имаме дека

$$P^{-1}[T]_e P[v]_f = P^{-1}[T_e][v_e] = P^{-1}[T(v)]_e = [T(v)]_f$$

Бидејќи важи равенството

$$[T]_f [v]_f = [T(v)]_f$$

наоѓаме дека

$$P^{-1}[T]_e P[v]_f = [T]_f [v]_f$$

Бидејќи пресликувањето $v \mapsto [v]_f$ е сурјективно на $\mathbb{K}^n$ следува дека

$$P^{-1}[T]_e PX = [T]_f X, \quad \text{за секое } X \in \mathbb{K}^n$$

Според тоа, може да заклучиме дека

$$P^{-1}[T]_e P = [T]_f$$

што требаше да се докаже. ■

Пример. Нека T е линеарен оператор на $\mathbb{R}^2$ определен со

$$T(x,y) = (4x - 2y, 2x + y).$$

Тогаш за стандардната база на $\mathbb{R}^2$ имаме дека

$$T(e_1) = T(1,0) = (4,2) = 4(1,0) + 2(0,1) = 4e_1 + 2e_2$$

$$T(e_2) = T(0,1) = (-2,1) = -2(1,0) + (0,1) = -2e_1 + e_2$$

Според тоа, наоѓаме дека

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Со помош на теорема 7.5 може да се пресмета $[T]_f$

$$[T]_f = P^{-1}[T]_e P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Да забележиме дека ова се совпаѓа со изведувањето на $[T]_f$ во вториот пример од претходното поглавје. ♦

Забелешка. Нека $P = (a_{ij})$ е произволна квадратна матрица од ред n над поле $\mathbb{K}$. Ако $\{e_1,\dots,e_n\}$ е база во векторски простор V над поле $\mathbb{K}$, тогаш $n-$те векторите

$$f_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{ni}e_n, \quad i = 1,\dots,n$$

се линеарно независни и формираат база на V. Уште повеќе, P е матрица на премин од базата $\{e_1,\dots,e_n\}$ во базата $\{f_1,\dots,f_n\}$. Според тоа, ако A е било која матрична репрезентација на линеарен оператор T на V, тогаш матрицата $B = P^{-1}AP$ е исто така матрична репрезентација на T.

7.4 Сличност на матрици

Нека A и B се квадратни матрици за кои постои инверзибилна матрица P таква што

$$B = P^{-1}AP$$

Тогаш B се нарекува **слична матрица** на матрицата A, односно се добива од A со **трансформација на сличност**.

Лема. Релацијата сличност е релација на еквиваленција, односно

(i) матрицата A е слична на матрицата A

(ii) ако матрицата A е слична на матрицата B, тогаш матрицата B е слична на матрицата A

(iii) ако матрицата A е слична на матрицата B, и матрицата B е слична на матрицата C, тогаш матрицата A е слична на матрицата C.

Доказ. (i) Единичната матрица I е инверзибилна и $I = I^{-1}$. Бидејќи

$$A = I^{-1}AI$$

следува дека матрицата A е слична на себе.

(ii) Бидејќи матрицата A е слична на матрицата B постои инверзибилна матрица P така што $A = P^{-1}BP$. Тогаш имаме дека

$$B = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1}AP^{-1}$$

и P е инверзибилна матрица. Според тоа, матрицата B е слична на матрицата A.

(iii) Бидејќи матрицата A е слична на матрицата B постои инверзибилна матрица P така што $A = P^{-1}BP$, и бидејќи матрицата B е слична на матрицата C постои инверзибилна матрица Q така што $B = Q^{-1}CQ$. Тогаш имаме дека

$$A = P^{-1}BP = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = (QP)^{-1}C(QP)$$

и QP е инверзибилна матрица. Според тоа, матрицата A е слична на матрицата C. ■

Од погорната лема и од теоремата 7.5 добиваме дека

Теорема 7.6. Две матрици A и B претставуваат ист линеарен оператор T ако и само ако тие се слични една на друга.

Според тоа, сите матрични репрезентации на еден линеарен оператор T формираат класа на еквиваленција од слични матрици.

Линеарен оператор велиме дека може да се **дијагонализира** ако постои база $\{e_1,\ldots,e_n\}$ во однос на која што неговата матрична репрезентација е дијагонална матрица. Во тој случај за базата $\{e_1,\ldots,e_n\}$ велиме дека го **дијагонализира** операторот T.

Теорема 7.7. Нека A е матрична репрезентација на линеарен оператор T. Тогаш T се дијагонализира ако и само ако постои инверзибилна матрица P таква што $P^{-1}AP$ е дијагонална матрица.

Доказ. Доказот е последица од дефиницијата за сличност на матрици и дефиницијата за дијагонализирање. ■

Според теорема 7.7 операторот T може да се дијагонализира ако и само ако неговата матрична репрезентација може да се дијагонализира со слична трансформација.

Да забележиме дека не секој линеарен оператор може да се дијагонализира. Подоцна ќе покажеме (поглавје 10) дека секој оператор T може да се претстави со „стандардни" матрици наречени **нормални** или **канонични** форми. Доказот вклучува предзнаење од теорија на полиња, полиноми и детерминанти.

Сега, да претпоставиме дека f е функција од множеството на квадратни матрици во $\mathbb{R}$, која што придружува иста вредност на слични матрици, односно $f(A)=f(B)$ ако A и B се слични матрици. Тогаш f индуцира функција, означена исто така со f, на линеарни оператори T на следниот природен начин $f(T)=f([T]_e)$, каде што $\{e_1,\dots,e_n\}$ е било која база. Функцијата е добро дефинирана заради претходната теорема. Најважниот пример на таква функција е **детерминантата**. Друг важен пример на таква функција е даден во следниот пример.

Пример. Трага на квадратна матрица $A=(a_{ij})$, означена со $tr(A)$, се дефинира како збир на дијагоналните елементи на матрицата, односно

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

Ќе покажеме дека слични матрици имаат иста трага. Имено нека A и B се слични матрици, односно $B=P^{-1}AP$. Тогаш имаме дека

$$tr(B)=tr(P^{-1}AP)=\sum_{i=1}^{n}(P^{-1}AP)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(P_{ij}^{-1}A_{jk}P_{ki})=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}P_{ki}P_{ij}^{-1}\right)A_{jk}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{kj}\right)A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}A_{kk}=tr(A)$$

Значи, сличните матрици имаат иста трага. Затоа може да се зборува за трага на линеарен оператор T, како трага на било која негова матрична репрезентација

$$Tr(T)=tr([T]_e)$$

7.5 Матрици и линеарни пресликувања

Да го разгледаме општиот случај на линеарно пресликување од еден векторски простор во друг. Нека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$ и нека $\dim V = m$ и $\dim U = n$. Нека $\{e_1, \dots, e_m\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$ се произволни, но фиксирани бази на V и U соодветно.

Да претпоставиме дека $F : V \to U$ е линеарен оператор. Тогаш векторите $F(e_1), \dots, F(e_m)$ припаѓаат на U и затоа секој од нив е линеарна комбинација од векторите $f_1, \dots, f_n$

$$F(e_1) = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + ... + a_{1n}f_n$$

$$F(e_2) = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{2n}f_n$$

....

$$F(e_m) = a_{m1}f_1 + a_{m2}f_2 + ... + a_{mn}f_n$$

Транспонираната матрица на погорната матрица од коефицинети, означена со $[F]_e^f$ се нарекува **матрична репрезентација** на F во однос на базите $\{e_1, \dots, e_m\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$

$$[F]_e^f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Важи следната теорема.

Теорема 7.8. За произволен вектор $v \in V$ важи

$$[F]_e^f [v]_e = [F(v)]_f$$

Имено, според оваа теорема, множејќи го координатниот вектор на v во однос на базата $\{e_1,\ldots,e_m\}$ со матрицата $[F]_e^f$ го добиваме координатниот вектор на $F(v)$ во однос на базата $\{f_1,\ldots,f_n\}$.

Теорема 7.9. Пресликувањето $F \mapsto [F]_e^f$ е изоморфизам од $\mathrm{Hom}(V,U)$ во векторскиот простор од $n x m$ матрици над поле $\mathbb{K}$. Имено, пресликувањето е биекција таква што за произволни $F,G \in \mathrm{Hom}(V,U)$ и произволно $k \in \mathbb{K}$

$$[F+G]_e^f = [F]_e^f + [G]_e^f \quad \text{и} \quad [kF]_e^f = k[F]_e^f$$

Забелешка. Да се потсетиме дека произволна $n x m$ матрица A над $\mathbb{K}$ ја идентификувавме порано со линеарно пресликување од $\mathbb{K}^m$ во $\mathbb{K}^n$ дадено со $v \mapsto A(v)$. Сега да претпоставиме дека V и U се векторски простори над поле $\mathbb{K}$ со димензии m и n соодветно, и нека $\{e_1,\ldots,e_m\}$ е база на V и $\{f_1,\ldots,f_n\}$ е база на U. Тогаш според теорема 7.9 исто така ќе го идентифицираме A со линеарно пресликување $F: V \to U$ дадено со

$$[F(v)]_f = A[v]_e$$

Ако избереме други бази на V и U, тогаш A ќе се идентифицира со друго линеарно пресликување од V во U.

Теорема 7.10. Нека $\{e_1,\ldots,e_m\}$, $\{f_1,\ldots,f_n\}$ и $\{g_1,\ldots,g_k\}$ се бази на V, U и W соодветно. Нека $F: V \to U$ и $G: U \to W$ се линеарни пресликувања, тогаш важи

$$[G \circ F]_e^g = [G]_f^g [F]_e^f$$

Според оваа теорема, во однос на фиксирани бази, матричната репрезентација на композицијата на две линеарни пресликувања е еднаква со производот на матричните репрезентации на соодветните пресликувања.

Следната теорема покажува како матричнита репрезентација на линеарното пресликување $F : V \to U$ се менува кога ќе избереме нова база.

Теорема 7.11. Нека P е матрица на премин од базата $\{e_1,\ldots,e_m\}$, во база $\{e_1',\ldots,e_m'\}$ во V, и нека Q е матрица на премин од базата $\{f_1,\ldots,f_n\}$ во база $\{f_1',\ldots,f_n'\}$ во U. Тогаш за произволно пресликување $F : V \to U$ важи равенството

$$[F]_{e'}^{f'} = Q^{-1}[F]_e^f P$$

Во специјален случај важи равенството

$$[F]_e^{f'} = Q^{-1}[F]_e^f$$

кога имаме промена на базата само во U и

$$[F]_{e'}^{f} = [F]_e^f P$$

кога имаме промена на базата само во V.

Следната теорема покажува дека секое линеарно пресликување од еден простор во друг може да биде претставено со многу едноставна матрица.

Теорема 7.12. Нека $F : V \to U$ е линеарно пресликување и нека $\operatorname{rank} F = r$. Тогаш постои база на V и база на U така што матричната репрезентација на F има облик

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

каде што I е идентичната квадратна матрица. Матрицата A ја нарекуваме **нормална** или **канонична форма** на F.

Доказ. Нека $\dim V = m$ и $\dim U = n$. Нека W е јадрото на F и U' е сликата на F. Бидејќи $\operatorname{rank} F = r$ имаме дека димензијата на јадрото на F е $m-r$. Нека $\{w_1,\dots,w_{m-r}\}$ е база на јадрото на F која што ја прошируваме до база на V

$$\{v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_{m-r}\}$$

Ставаме

$$u_1 = F(v_1),\ u_2 = F(v_2),\ \dots,\ u_r = F(v_r)$$

Да забележиме дека $\{u_1,\dots,u_r\}$ е база на U', сликата на F. Да ја прошириме до база на U

$$\{u_1,\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_n\}$$

Забележуваме дека во однос на така избраната база имаме

$$F(v_1) = u_1 = 1u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n$$

$$F(v_2) = u_2 = 0u_1 + 1u_2 + \cdots + 0u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n$$

....

$$F(v_r) = u_r = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 1u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n$$

$$F(w_1) = 0 = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n$$

……………………………………………………………

$$F(w_{m-r}) = 0 = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_r + 0u_{r+1} + \cdots + 0u_n$$

Затоа матрицата F во однос на погорните бази го има тој облик.

Задачи за самостојна работа

1. Најди ја матрицата на секој од следниве линеарни оператори T на $\mathbb{R}^2$ во однос на стандардната база

а) $T(x,y) = (2x - 3y, x + y)$ б) $T(x,y) = (5x + y, 3x - 2y)$

2. Најди ја матрицата на секој оператор T од претходната задача во однос на базата $\{f_1 = (1,2), f_2 = (2,3)\}$. Покажи дека во секој од случаите важи $[T]_f[v]_f = [T(v)]_f$ за било кој вектор $v \in \mathbb{R}^2$.

3. Најди ја матричната репрезентација на секој од следниве линеарни оператори T на $\mathbb{R}^2$ во однос на стандардната база

а) $T(x,y,z) = (x,y,0)$

б) $T(x,y,z) = (2x - 7y - 4z, 3x + y + 4z, 6x - 8y + z)$

в) $T(x,y,z) = (x, y + z, x + y + z)$

4. Нека D е операторот диференцирање, $d(f) = df/dt$. Секое од следниве множества е база на векторски простор V на функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Најди ја матрицата на D во однос на секоја од следниве бази:

а) $\{e^t, e^{2t}, te^{2t}\}$ б) $\{\sin t, \cos t\}$

в) $\{e^{5t}, te^{5t}, t^2e^{5t}\}$ г) $\{1, t, \sin 3t, \cos 3t\}$

5. Разгледај го полето комплексни броеви $\mathbb{C}$ како векторски простор над полето реални броеви $\mathbb{R}$. Нека Т е линеарниот оператор конјугација на $\mathbb{C}$, односно $T(z)=\overline{z}$. Најди ја матрицата на Т во однос на секоја од следниве бази:

а) $\{1,i\}$ б) $\{1+i,1+2i\}$

6. Нека V е векторскиот простор од сите $2x2$ матрици и нека $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Најди ја матрицата на следниве линеарни оператори Т на V во однос на стандардната база на V

а) $T(A)=MA$ б) $T(A)=AM$ в) $T(A)=MA-AM$

7. Нека 1_V и 0_V се идентичниот и нултиот оператор, соодветно, на векторски простор V. Покажи дека за било која база $\{e_i\}$ на V,

а) $[1_V]_e = I$, единичната матрица

б) $[0_V]_e = 0$, нултата матрица

8. Нека $\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ и $\{f_1=(1,2),f_2=(2,3)\}$ се бази во $\mathbb{R}^2$.

а) Најди ги матриците на премин P и Q од $\{e_i\}$ во $\{f_i\}$, соодветно. Потврди дека $Q=P^{-1}$.

б) Покажи дека $[v]_e=P[v]_f$, за било кој вектор $v\in\mathbb{R}^2$

9. Нека $\{f_1=(1,2),f_2=(2,3)\}$ и $\{g_1=(1,3),g_2=(1,4)\}$ се бази во $\mathbb{R}^2$.

а) Најди ги матриците на премин P и Q од $\{f_i\}$ во $\{g_i\}$, соодветно. Потврди дека $Q = P^{-1}$.

б) Покажи дека $[v]_f = P[v]_g$, за било кој вектор $v \in \mathbb{R}^2$

10. Нека $\{e_1, e_2\}$ е база на V и нека $T: V \to V$ е линеарен оператор таков што $T(e_1) = 3e_1 - 2e_2$ и $T(e_2) = e_1 + 4e_2$. Нека $\{f_1, f_2\}$ е база на V за која што $f_1 = e_1 + e_2$ и $f_2 = 2e_1 + 3e_2$. Најди ја матрицата на T во однос на базата $\{f_1, f_2\}$.

11. Разгледај ги базите $B = \{1, i\}$ и $B' = \{1+i, 1+2i\}$ на полето комплексни броеви $\mathbb{C}$ над полето реални броеви $\mathbb{R}$.

а) Најди ги матриците на премин P и Q од B во B' и од B' во B, соодветно. Потврди дека $Q = P^{-1}$

б) Покажи дека $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ за конјугацијата T на $\mathbb{C}$

12. Нека $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$ се бази на V, и нека P и Q се матриците на премин од $\{e_i\}$ во $\{f_i\}$ и од $\{f_i\}$ во $\{g_i\}$. Покажи дека PQ е матрица на премин од $\{e_i\}$ во $\{g_i\}$.

13. Нека A е квадратна матрица од ред 2 којашто е слична на себе. Покажи дека A е од облик

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Генерализирај го заклучокот за квадратна матрица од ред n којашто е слична на себе.

14. Покажи дека секоја матрица слична на инверзибилна матрица е инверзибилна. Поопшто, покажи дека слични матрици имаат ист ранг.

15. Најди ја матричната репрезентација на линеарните пресликувања во однос на соодветните стандардни бази на $\mathbb{R}^n$

а) $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ дефинирано со $F(x,y,z)=(2x-4y+9z,5x+3y-2z)$

б) $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ дефинирано со $F(x,y)=(3x+4y,5x-2y,x+7y,4x)$

в) $F:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ дефинирано со $F(x,y,z,t)=2x+3y-7z-1$

г) $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ дефинирано со $F(x)=(3x,5x)$

16. Нека линеарното пресликување $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ е дефинирано со $F(x,y,z)=(2x+y-z,3x-2y+4z)$.

а) Најди ја матрицата на F во однос на базите

$$\{f_1=(1,1,1),f_2=(1,1,0),f_3=(1,0,0)\} \text{ и } \{g_1=(1,3),g_2=(1,4)\}$$

на $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$:

б) Потврди дека $[F]_f^g[v]_f=[F(v)]_g$

17. Нека $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ се бази на V, и нека 1_V е идентичното пресликување на V. Покажи дека матрицата на премин на 1_V од базата $\{e_i\}$ во базата $\{f_i\}$ е инверзната матрица на транспонираната матрица на премин P од $\{e_i\}$ во $\{f_i\}$, односно $[1_V]_e^g=P^{-1}$.

18. Нека T е линеарен оператор на V и нека W е потпростор од V инваријантен при T, односно $T(W)\subset W$. Претпостави дека

$\dim W = m$. Покажи дека T има матрична репрезентација од облик $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, каде што A е mxm подматрица.

19. Нека $V = U \oplus W$, и нека U и W се инваријантни потпростори при линеарен оператор $T : V \to V$. Претпостави дека $\dim U = m$ и $\dim V = n$. Покажи дека F има матрична репрезентација од облик $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, каде што A е mxm подматрица и B е nxn подматрица.

20. Велиме дека две линеарни оператори F и G на V се слични ако постои инверзен линеарен оператор T на V така што $G = T^{-1}FT$. Докажи дека

(а) F и G се слични ако и само ако, за која било база $\{e_i\}$ на V, матричните репрезентации $[F]_e$ и $[G]_e$ се слични матрици.

(б) Ако операторот F може да се дијагонализира, тогаш секој сличен оператор G исто така може да се дијагонализира.

21. За две mxn матрици A и B над поле $\mathbb{K}$ велиме дека се **еквивалентни** ако постојат инверзибилна квадратна матрица Q од ред m и инверзибилна квадратна матрица P од ред n така што $B = QAP$.

а) Покажи дека еквиваленцијата на матрици е релација за еквиваленција.

б) Покажи дека A и B може да бидат матрични репрезентации на ист линеарен оператор $F : V \to U$ ако и само ако A и B се еквивалентни матрици.

22. Две алгебри **A** и **B** над поле $\mathbb{K}$ се **изоморфни** како алгебри ако постои биекција $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ така што за $u,v\in\mathbf{A}$ и $k\in\mathbb{K}$ важи

$$\text{(i)}\ \ f(u+v)=f(u)+f(v)\qquad \text{(ii)}\ \ f(ku)=kf(u)\qquad \text{(iii)}\ \ f(uv)=f(u)f(v)$$

односно, ако f ги запазува операциите на алгебрата: собирање на вектори, множење со скалар и множење на вектори. Во тој случај пресликувањето f се нарекува изоморфизам од **A** во **B**. Покажи дека релацијата изоморфизам меѓу алгебри е релација за еквиваленција.

23. Нека **A** е алгебрата од сите квадратни матрици од ред n над поле $\mathbb{K}$ и нека P е инверзибилна матрица во **A**. Покажи дека кореспонденцијата $A\mapsto P^{-1}AP$, каде што $A\in\mathbf{A}$ е изоморфизам на алгебрата А во себе.

8. ДЕТЕРМИНАНТИ

8.1 Вовед

На секоја квадратна матрица A над поле $\mathbb{K}$ придружуваме скалар наречен детерминанта на A кој што ќе го означуваме со

$$\det A \text{ или } |A|$$

Поимот за детерминанта е еден од фундаменталните поими во линеарната алгебра. Тој за првпат се воведува при решавање на системи линеарни равенки.

Самата дефиниција за детерминанта како и нејзините особини бара претходна подготовка. Затоа започнуваме со воведување на поимот за **пермутација**.

8.2 Пермутации

Секое биективно пресликување од множеството $\{1,\dots,n\}$ во себе се нарекува **пермутација**. Пермутацијата ќе ја означуваме со

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \sigma = j_1 j_2 \dots j_n \quad \text{каде што} \quad j_i = \sigma(i)$$

Забележуваме дека бидејќи σ е биекција, низата $j_1 j_2 \dots j_n$ претставува прередување на елементите $1, 2, \dots, n$. Бројот на сите такви пермутации е еднаков на $n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$. Множеството од сите пермутации најчесто се означува со S_n. Ако $\sigma \in S_n$ тогаш инверзното пресликување $\sigma^{-1} \in S_n$, и ако $\sigma, \tau \in S_n$ тогаш нивната композиција $\sigma \circ \tau \in S_n$. Специјално, идентичното пресликување, $\varepsilon = 12\dots n$, припаѓа во S_n и важи

$$\varepsilon = \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma$$

Според тоа , може да заклучиме дека $(S_n, \circ)$ е група. Ако $n = 2$ оваа група е комутативна, но за $n > 2$ може да се покаже дека е некомутативна.

Пример. Постојат $2! = 2 \cdot 1 = 2$ пермутации во S_2 : 12 и 21. ♦

Пример. Постојат $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ пермутации во S_3 : 123, 132, 213, 231, 312 и 321. ♦

Да разгледаме произволна пермутација $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$ во S_n. Велиме дека σ е **парна** или **непарна** пермутација во зависност од тоа дали бројот на парови (i, k) за кои што

$$i > k \text{ но } i \text{ му претходи на } k \text{ во } \sigma \qquad (*)$$

е парен или непарен.

Дефинираме **знак** на σ или **парност** на σ со

$$\mathrm{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & \text{ако } \sigma \text{ е парна} \\ -1 & \text{ако } \sigma \text{ е непарна} \end{cases}$$

Пример. Да ја разгледаме пермутацијата $\sigma = 35142$ во S_5.

Броевите 3 и 5 претходат и се поголеми од 1, па затоа паровите $(3,1)$ и $(5,1)$ ја задоволуваат (*),

Броевите 3, 5 и 4 претходат и се поголеми од 2, па затоа паровите $(3,2)$, $(5,2)$ и $(4,2)$ ја задоволуваат (*), и

Бројот 5 претходи и е поголем од 4, па затоа парот $(5,4)$ ја задоволува (*)

Според тоа, точно 6 парови ја задоволуваат (*), од каде што заклучуваме дека пермутацијата $\sigma = 35142$ е парна и $\mathrm{sgn}\sigma = 1$. ♦

Пример. Идентичната пермутација $\varepsilon = 12\ldots n$ е парна бидејќи ниту еден пар не ја задоволува (*). ♦

Пример. Во S_2 пермутацијата 12 е парна пермутација, а пермутацијата 21 е непарна пермутација.

Во S_3 пермутациите 123, 231 и 312 се парни пермутации, додека пермутациите 132, 321 и 213 се непарни пермутации. ♦

Пример. Нека τ е пермутација која заменува два броја i и j, а другите броеви ги остава фиксни. Имено

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \tau(k) = k, \quad k \neq i, \; k \neq j$$

Пермутацијата τ ја нарекуваме **транспозиција**. Ако $i < j$ тогаш

$$\tau = 12\ldots(i-1)j(i+1)\ldots(j-1)i(j+1)\ldots n$$

па постојат $2(j-i-1)+1$ парови кои што ја задоволуваат (*). Имено тоа се паровите од облик

$$(j,i), \quad (j,x), \quad (x,i) \quad \text{каде што } x=i+1,\dots,j-1$$

Според тоа, транспозицијата τ е непарна пермутација. ♦

8.3 Детерминанти

Нека A е квадратна матрица од ред n над поле $\mathbb{K}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Да разгледаме производ од n елементи на матрицата A така што во тој производ влегува по точно еден елемент од секоја редица и по точно еден елемент од секоја колона. Таков еден производ може да се запише во облик

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

каде множителите се запишани по редослед на редиците. Бидејќи елементите се земени од различни колони, низата од вторите индекси формира пермутација $\sigma=j_1j_2\dots j_n$ во S_n. И обратно, секоја пермутација во S_n определува производ од горниот облик. Затоа, за матрицата A постојат $n!$ такви производи.

Дефиниција. Детерминанта на квадратна матрица $A=(a_{ij})$ од ред n е збир формиран по сите $\sigma=j_1j_2\dots j_n$ во S_n и се означува со $\det A$ или $|A|$

$$\det A = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$$

односно

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Детерминантата на квадратна матрица A од ред n се нарекува детерминанта од $n -$ ти ред и се запишува како

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Да напоменеме дека детерминанта на една матрица е број, поточно скалар од полето $\mathbb{K}$.

Пример. Детерминанта на 1x1 матрица $A = (a_{11})$ е самиот скалар a_{11}, односно $|A| = a_{11}$. Да забележиме дека единствената пермутација во S_1 е парна. ♦

Пример. Во S_2 пермутацијата 12 е парна и пермутацијата 21 е непарна. Според тоа, имаме дека

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Така, на пример,

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4(-2) - (-5)(-1) = -13$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$ ♦

Пример. Во S_3 пермутациите 123, 231 и 312 се парни и пермутациите 321, 213 и 132 се непарни. Според тоа, имаме дека

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ова може да го запишеме во облик

$$a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

или

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

што претставува линеарна комбинација од три детерминанти од ред два, со алтернативни знаци, со коефициенти од првата редица на дадената матрица. Да забележиме дека секоја 2x2 матрица може да се добие со бришење на редицата и колоната, на појдовната матрица, кои што го содржи нејзиниот коефициент. ♦

Пример. Согласно претходниот пример за пресметување на детерминанта од ред 3 имаме

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(6-63) - 3(5-56) + 4(45-48) = 27$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-20+2) - 3(0-2) - 4(0+4) = -46 \ \blacklozenge$$

Со зголемување на бројот n, бројот на собироци во детерминанта од $n-$ти ред ($n!$) нагло се зголемува. Во такви случаи не е практично да се пресметуваат детерминантите по дефиниција, но затоа се користат индиректни методи. Имено ќе докажеме некои од особините на детерминантите со чија што помош се скратува нумеричката постапка за пресметување на детерминантите. Специјално ќе покажеме дека детерминанта од ред n е еднаква на линеарна комбинација од детерминанти од ред $n-1$ како во случајот за $n=3$ изложен во погорните примери.

8.4 Својства на детерминантите

Овде ќе ги изнесеме основните својства на детерминантите.

Теорема 8.1. Детерминантите на матрица A и нејзината транспонирана матрица A^T се еднакви, односно важи

$$\det A = \det A^T$$

Доказ. Нека $A = (a_{ij})$. Тогаш $A^T = (b_{ij})$ каде што $a_{ji} = b_{ij}$. Сега имаме дека

$$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Нека $\tau = \sigma^{-1}$. Тогаш $\sigma \circ \tau = \varepsilon$, па бидејќи ε е парна пермутација добиваме дека σ и $\tau = \sigma^{-1}$ се истовремено парни или истовремено непарни пермутации, односно $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. Имено, композиција од две парни пермутации е парна пермутација, композија од две непарни пермутации е парна пермутација и композиција од парна и непарна пермутација, земена по било кој редослед е непарна пермутација.

Сега, нека

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

Тогаш низата $k_1, k_2, \ldots, k_n$ е таква што

$$\sigma(k_1) = 1,\ \sigma(k_2) = 2,\ \ldots\ \sigma(k_n) = n$$

па затоа имаме дека $k_1k_2\ldots k_n$ е пермутацијата $\tau = \sigma^{-1}$. Според тоа, добиваме дека

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\tau) a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)}$$

Збирот по сите $\sigma \in S_n$ е еднаков со збирот по сите $\tau \in S_n$ и освен тоа $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\tau$ па

$$\det A^T = \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sgn}\tau) a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)} \quad \blacksquare$$

Според ова теорема произволна теорема за детерминанти што третира редици има и своја аналогна теорема за детерминанти што третира колони. На тој начин редиците и колоните стануваат „рамноправни”.

Следната теорема презентира некои случаи во кои што детерминантата може да се пресмета непосредно.

Теорема 8.2. Нека A е квадратна матрица.

(i) Ако A има нулта редица (колона), односно редица (колона) со сите елементи еднакви нула, тогаш $\det A = 0$.

(ii) Ако A има две исти редици (колони) тогаш $\det A = 0$.

(iii) Ако A е триаголна, односно ако има нули над главната дијагонала или под главната дијагонала, тогаш $\det A$ е еднаква на производот од дијагоналните елементи. Во специјален случај имаме дека $\det I = 1$, каде што I е единечна матрица.

Доказ. (i) Секој собирок во $\det A$ содржи множител од секоја редица, па според тоа и од нултата редица. Оттука следува дека секој собирок во $\det A$ е нула, па според тоа имаме дека $\det A = 0$.

(ii) Пред да го докажиме ова својство ќе докажеме дека ако матрицата B се добива од квадратната матрица A со промена на местата на две редици (колони) на A, тогаш

$$\det B = -\det A.$$

Ова својство ќе го докажеме за промена на колони. Според теорема 8.1 тоа ќе важи и за редици.

Нека τ е транспозиција која преместува два броја, поточно редните броеви на колоните во A кои се сменети. Ако $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, тогаш $b_{ij} = a_{i\tau(j)}$. Според тоа, за произволна пермутација σ важи

$$b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)} = a_{1\tau\sigma(1)}a_{2\tau\sigma(2)}\cdots a_{n\tau\sigma(n)}$$

Така добиваме дека

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{1\tau\sigma(1)} a_{2\tau\sigma(2)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}$$

Бидејки τ е непарна пермутација имаме дека

$$\operatorname{sgn} \tau\sigma = \operatorname{sgn} \tau \cdot \operatorname{sgn} \sigma = -\operatorname{sgn} \sigma$$

од каде што следува дека

$$\operatorname{sgn} \sigma = -\operatorname{sgn} \tau\sigma$$

Според тоа, наоѓаме дека

$$\det B = -\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \tau\sigma) a_{1\tau\sigma(1)} a_{2\tau\sigma(2)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}$$

Бидејќи σ се менува во S_n добиваме дека $\tau\sigma$ се менува во S_n, од каде што следува дека

$$\det B = -\det A.$$

Сега да се вратиме на доказот на тврдењето (ii).

Нека $1+1 \neq 0$ во $\mathbb{K}$. Ако две редици на A си ги заменат местата се добива истата матрица A. Според тоа, од погорното својство следува дека $\det A = -\det A$, од каде што добоваме дека $\det A = 0$.

Да претпоставиме дека $1+1 = 0$ во $\mathbb{K}$. Тогаш $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ за секое $\sigma \in S_n$. Бидејќи A има две исти редици можеме да ги групираме собироците во $\det A$ во парови собирци еднакви меѓу себе. Бидејќи секој пар е еднаков на 0 во $\mathbb{K}$, добиваме дека $\det A = 0$.

(iii) Нека $A=(a_{ij})$ е долнотриаголна матрица, односно $a_{ij}=0$ за $i<j$. Да го разгледаме собирокот во детерминантата на A

$$t=(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \text{ каде што } \sigma=i_1i_2\ldots i_n$$

Да претпоставиме дека $i_1\neq 1$. Тогаш $i_1>1$ и затоа $a_{1i_1}=0$, па според тоа $t=0$. Оттука заклучуваме дека секој член за кој што $i_1\neq 1$ е нула.

Сега, да претпоставиме дека $i_1=1$ но $i_2\neq 2$. Тогаш $i_2>2$ и затоа $a_{2i_2}=0$, па според тоа $t=0$. Оттука заклучуваме дека секој член за кој што $i_1\neq 1$ или $i_2\neq 2$ е нула.

Слично, добиваме дека секој член за кој што $i_1\neq 1$ или $i_2\neq 2$ или $\ldots$ $i_n\neq 2$ е нула. Според тоа, имаме дека

$$\det A=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

односно детерминантата на A е еднаква на производот од дијагоналните елементи. Ако A е горнотриаголна матрица, тогаш A^t е долнотриаголна матрица, па имаме дека

$$\det A=\det A^t=a_{11}{}^t+a_{22}{}^t+\cdots+a_{nn}{}^t. \ \blacksquare$$

Следното својство покажува како се менува детерминантата на матрица A, ако кон матрицата A се примени некоја елементарна редична трансформација.

Теорема 8.3. Ако B е матрица што се добива од матрицата A со

(i) множење на една редица (колона) со скалар k, тогаш

$$\det B=k\det A$$

(ii) замена на местата на две редици (колони), тогаш

$$\det B = -\det A$$

(iii) додавање на некоја редица (колона) помножена со скалар кон друга редица (колона), тогаш

$$\det B = \det A$$

Доказ. (i) Ако $j-$тата редица на A се множи со скалар k, тогаш секој член на детерминантата на A е помножен со k па затоа $\det B = k\det A$. Поточно, имаме дека

$$\det B = \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(ka_{ji_j})\cdots a_{ni_n} =$$

$$= k\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = k\det A$$

(ii) Докажано во теорема 8.2 (ii).

(iii) Да претпоставиме дека c пати $k-$тата редица е дадена кон $j-$тата редица на A $(k \neq j)$. Тогаш

$$\det B = \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots(ca_{ki_k} + a_{ji_j})\cdots a_{ni_n} =$$

$$= c\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ki_k}\cdots a_{ni_n} + \sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ji_j}\cdots a_{ni_n}$$

Првиот собирок е детерминанта на матрица чија што $j-$та и $k-$та редица се еднакви, па според теорема 8.2 (ii) тој е еднаков на нула. Вториот собирок е $\det A$, па според тоа имаме дека

$$\det B = c\cdot 0 + \det A = \det A \ ■$$

Лема 8.4. Нека E е елементарна матрица. Тогаш за произволна матрица A важи

$$\det(EA) = \det E \cdot \det A$$

Доказ. Да ги разгледаме елементарните редични трансформации (i) множење на редица со скалар $k \neq 0$, (ii) замена на две редици, (iii) додавање на редица (колона) помножена со скалар кон друга редица (колона). Нека E_1, E_2 и E_3 се соодветните елементарни матрици. Тогаш E_1, E_2 и E_3 се добиени со примена на погорните трансформации од единичната матрица I. Заради теорема 8.3 имаме дека

$$\det E_1 = k \det I = k,$$

$$\det E_2 = -\det I = -1,$$

$$\det E_3 = \det I = 1$$

Да се потсетиме дека E_iA е идентична со матрицата добиена со примена на соодветните трансформации на A. Според тоа, заради претходната теорема имаме дека

$$\det(E_1A) = k \det A = \det E_1 \cdot \det A,$$

$$\det E_2 = -\det A = \det E_2 \cdot \det A,$$

$$\det E_3 = \det A = 1A = \det E_3 \cdot \det A$$

што ја докажува лемата. ■

Лема 8.4 ќе ја користиме во доказот на следните две теореми кои се користат при пресметување на детерминантите.

Теорема 8.5. Нека A е квадратна матрица од ред n. Следните услови се еквивалентни

(i) A е инверзибилна, односно A^{-1} постои.

(ii) A е несингуларна, односно $Ax = 0$ има единствено решение $x = 0$.

(iii) Детерминантата на матрицата A е различна од нула, односно $\det A \neq 0$.

Доказ. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Знаеме дека A е инверзибилна ако и само ако A е редично еквивалентна со I. Понатаму, матрицата A е редично еквивалентна со I ако и само ако равенките $Ax = 0$ и $Ix = 0$ имаат ист редичен простор. Ова е задоволено ако и само ако равенката $Ax = 0$ има единствено решение $x = 0$, односно A е несингуларна матрица.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Нека A е инверзибилна матрица. Тогаш A е редично еквивалентна со единичната матрица I. Затоа постојат елементарни матрици $E_1, E_2, \ldots, E_n$ така што

$$A = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 I$$

од каде што следува дека

$$\det A = \det\left(E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 I\right) =$$

$$= \det E_n \cdot \det E_{n-1} \cdots \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det I \neq 0$$

Ако пак A не е инверзибилна, тогаш A е редично еквивалентна со матрица која има барем една нулта редица. Имено

$$A = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 B$$

каде што B има нулта редица, па $\det B = 0$. Оттука следува дека

$$\det A = \det\left(E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 B\right) =$$

$$= \det E_n \cdot \det E_{n-1} \cdots \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det B = 0 \ \blacksquare$$

Теорема 8.6. Детерминантата е мултипликативна функција, имено ако A и B се квадратни матрици од ред n, тогаш

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Доказ. Ако A е сингуларна, тогаш и AB е сингуларна па имаме дека

$$\det A \cdot \det B = 0 \cdot \det B = 0 = \det(AB)$$

Да претпоставиме дека A е несингуларна матрица. Тогаш имаме дека

$A = E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 I$, каде што E_i се елементарни матрици

па добиваме дека

$$\det A = \det\left(E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 I\right) =$$

$$= \det E_n \cdot \det E_{n-1} \cdots \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det I =$$

$$= \det E_n \cdot \det E_{n-1} \cdots \det E_2 \cdot \det E_1$$

Оттука следува дека

$$\det(AB) = \det\left(E_n E_{n-1} \cdots E_2 E_1 B\right) =$$

$$= \det E_n \cdot \det E_{n-1} \cdots \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det B =$$

$$= \det A \cdot \det B$$

8.5 Минори и кофактори

Да разгледаме квадратна мартица од ред n $A=(a_{ij})$. Нека M_{ij} ја означува квадратната матрица од ред $n-1$ добиена од A со отфрлање на $i-$та редица и $j-$та колона. Детерминантата $\det M_{ij}$ се вика **минор** на елементот a_{ij} на матрицата A. Дефинираме **кофактор** од a_{ij} и ќе го означиме со A_{ij} со

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$$

Знаците $(-1)^{i+j}$ придружени на минорите се распоредени во облик на шаховска табла во која знакот + е распореден по главната дијагонала

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Да забележиме дека M_{ij} е матрица од ред $n-1$ додека A_{ij} е скалар.

Пример. Нека $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. Тогаш

$$M_{23}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ и } A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=-(18-24)=6 \ \blacklozenge$$

Теорема 8.7. Детерминантата на матрица $A=(a_{ij})$ е еднаква на збирот од производите на елементите од една редица (колона) со соодветните кофактори, односно

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Доказ. Секој собирок од $\det A$ има точно еден елемент од $i-$та редица $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ од A. Оттука добиваме дека

$$\det A = a_{i1}A_{i1}^{*} + a_{i2}A_{i2}^{*} + \cdots + a_{in}A_{in}^{*}$$

каде што A_{ij}^{*} се збирови од производи кои не ги вклучуваат елементите од $i-$та редица. Треба да покажеме дека $A_{ij}^{*} = A_{ij}$, односно

$$A_{ij}^{*} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

каде што детерминантата $\det M_{ij}$ е **минорот** на елементот a_{ij} на матрицата A. Да претпоставиме најпрво дека $i = n$, $j = n$. Тогаш збирот на членовите во $\det A$ што го содржат a_{nn} е

$$a_{nn}A_{nn}^{*} = a_{nn}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n-1\sigma(n-1)}$$

каде сумираме по сите пермутации $\sigma \in S_n$ за кои што $\sigma(n) = n$. Ова е всушност еквивалентно со сумирањето по сите пермутации $\sigma \in S_{n-1}$ на множеството $\{1,2,\ldots,n\}$. Според тоа, имаме дека

$$A_{nn}^{*} = \det M_{nn} = (-1)^{n+n} \det M_{nn}$$

Нека сега i и j се произволно избрани. Ја пермутираме $i-$тата редица со секоја наредна редица се додека $i-$тата редица не стане $n-$та редица. Потоа ја пермутираме $j-$тата колона со секоја наредна колона додека не стане $n-$та колона. Забележуваме дека $\det M_{ij}$ не се менува со секоја од тие трансформации, додека при секоја таква трансформација, од вкупно $(n-i)+(n-j)$, знакот на $\det A$ се менува. Значи тој се менува $(n-i)+(n-j)$ пати. Според тоа, имаме дека

$$A_{ij}^{*}=(-1)^{(n-i)+(n-j)}\det M_{ij}=(-1)^{2n}(-1)^{i+j}\det M_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij} \;\blacksquare$$

Разложувањето на $\det A$ во однос на $i-$та редица или $j-$та колона од теорема 8.7 се вика **Лапласово разложување** или **Лапласово развивање**. Комбинирајќи ги наведените својства на детерминантите, нивното пресметување битно се упростува.

Пример. Да се пресмета детерминантата на матрицата

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Да забележиме дека 1 се појавува во втората редица и во третата колона. Да ги примениме следните трансформации на A

(i) додавање на $-2R_2$ на R_1

(ii) додавање на $3R_2$ на R_3

(ii) додавање на $1R_2$ на R_4

каде што R_i ја означува $i-$тата редица. Според претходната теорема вредноста на детерминантата нема да се промени со наведените трансформации, односно

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Сега со развивање по третата колона, може да ги занемариме сите производи кои содржат 0. Така имаме дека

$$\det A = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left\{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right\} = 38 \quad \blacklozenge$$

8.6 Адјунгирана матрица

Да разгледаме квадратна матрица $A = (a_{ij})$ од ред n над поле $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Транспонираната матрица од матрицата составена од кофакторите се означува со $\mathrm{adj}A$ и се нарекува **адјунгирана матрица** на A.

Значи, имаме дека

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Пример. Да се најде адјунгираната матрица на матрицата

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

Кофакторите на деветте елементи на A се

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-18 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=2$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}0 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=4 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -4\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-11$$

$$A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=14 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}3 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-10 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix}=-8$$

Ја транспонираме матрицата од кофактори за да ја добиеме адјунгираната матрица на A

$$\mathrm{adj}A=\begin{pmatrix}-18 & -11 & -10\\ 2 & 14 & -4\\ 4 & 5 & -8\end{pmatrix} \quad \blacklozenge$$

Теорема 8.8. За произволна квадратна матрица A важи

$$A\cdot(\mathrm{adj}A)=(\mathrm{adj}A)\cdot A=\det A\cdot I$$

каде што I е единичната матрица. Тогаш, ако $\det A\neq 0$ важи

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{adj}A)$$

Доказ. Нека $A=(a_{ij})$ и нека $A\cdot(\mathrm{adj}A)=(b_{ij})$. $i-$тата редица на A е $(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$. Бидејќи $\mathrm{adj}A$ е транспонирана матрица од кофактори имаме дека $j-$тата колона на $\mathrm{adj}A$ е

$$(A_{j1},A_{jn},\ldots,A_{jn})^{T}.$$

Затоа b_{ij}, односно $ij-$тиот елемент на $A\cdot(\mathrm{adj}A)$, е еднаков на

$$b_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

Ако $i=j$, според теорема 8.7 имаме дека $b_{ij}=\det A$.

Ако $i\neq j$, ќе покажеме дека $b_{ij}=0$. Навистина ако $i\neq j$ тогаш збирот

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

е еднаков на детерминантата на матрицата што се добива кога $j-$тата редица на A ќе се замени со $i-$тата редица на A. Таа детерминанта е еднаква на 0 бидејќи соодветната матрица има две еднакви редици, $i-$тата и $j-$тата редица. Според тоа, имаме дека $b_{ij}=0$. Така добивме дека

$$b_{ij} = \begin{cases} \det A, & \text{ако } i=j \\ 0, & \text{ако } i\neq j \end{cases}$$

односно

$$A\cdot(\mathrm{adj}A) = \det A\cdot I$$

Аналогно се докажува дека $(\mathrm{adj}A)\cdot A = \det A\cdot I$ ■

Забелешка. Претходната теорема ни дава важен метод за наоѓање на инверзна матрица на дадена матрица.

Пример. Да ја разгледаме матрицата A од претходниот пример за која што $\det A = -46$. Имаме

$$A\cdot(\mathrm{adj}A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -46 & 0 & 0 \\ 0 & -46 & 0 \\ 0 & 0 & -46 \end{pmatrix} = -46\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -46I = \det A\cdot I$$

Исто така, според теорема 8.8 имаме дека

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A = -\frac{1}{46}\begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9/23 & 11/46 & 5/23 \\ -1/23 & -7/23 & 2/23 \\ -2/23 & -5/46 & 4/23 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

8.7 Примена кај системи линеарни равенки

Да разгледаме систем од n линеарни равенки со n непознати

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Да ја означиме со Δ детерминантата на матрицата $A = (a_{ij})$.

Со Δ_i да ја означиме детерминантата на матрицата што се добива од A со заменување на $i -$ та колона со вектор колоната од константните членови $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$. Тогаш важи Крамеровото правило искажано во следната теорема.

Теорема 8.9. Претходниот систем има единствено решение ако и само ако $\Delta \neq 0$. Во тој случај единственото решение е определено со

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots\ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Доказ. Видовме дека $Ax = b$ има единствено решение ако и само ако A е инверзибилна матрица. Од друга страна матрицата A е инверзибилна ако и само ако $\Delta = \det A \neq 0$.

Да претпоставиме дека $\Delta \neq 0$. Тогаш имаме дека

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \mathrm{adj} A.$$

Множејќи го системот $Ax = b$ со A^{-1} добиваме дека

$$x = A^{-1}Ax = \left(\frac{1}{\Delta} \mathrm{adj} A \right) b \qquad (1)$$

Да забележиме дека $i-$тата редица на матрицата $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\mathrm{adj}A$ е $\frac{1}{\Delta}\left(A_{1i},A_{21},\ldots,A_{ni}\right)$. Тогаш, ако $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$ од (1) следува дека

$$x_i=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{1i}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{ni})$$

Но $b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\ldots+b_nA_{ni}$ е детерминанта, разложена по $i-$тата колона, од матрицата што се добива од матрицата А кога $i-$та колона се замени со $(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$. Значи, имаме дека

$$b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\ldots+b_nA_{ni}=\Delta_i$$

Според тоа, добиваме дека

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\ i=1,2,\ldots,n$$

што требаше да се докаже. ■

Да нагласиме дека оваа теорема важи само ако бројот на равенки е ист со бројот на непознати, и дава решение само во случај кога $\Delta\neq 0$. Во случај кога $\Delta=0$ теоремата не ни кажува дали системот има решение. Имено, во случај на хомоген систем важи

Теорема 8.10. Хомогениот систем $Ax=b$ има ненулто решение ако и само ако $\Delta=\det A=0$.

Доказ. Знаеме дека системот $Ax=0$ има ненулто решение ако и само ако А е сингуларна матрица, и матрицата А е сингуларна ако и само ако $\Delta=0$. ■

Пример. Со помош на детерминанти да се реши системот

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$

Прво да ја пресметаме детерминантата на системот

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9 = 19$$

Бидејќи $\Delta \neq 0$ системот има единствено решение. Исто така имаме

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 38 \quad \text{и} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

Согласно погорната теорема решението на системот гласи

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2 \text{ и } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-19}{19} = -1 \; ♦$$

8.8 Детерминанта на линеарен оператор

Со помош на мултипликативното својство на детерминатите искажано во теорема 8.5 добиваме

Теорема 8.11. Нека A и B се слични матрици. Тогаш

$$\det A = \det B.$$

Доказ. Бидејќи A и B се слични постои несингуларна матрица P така што $B = P^{-1}AP$. Тогаш имаме дека

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P.$$

Заради $\det P^{-1} \cdot \det P = \det(P^{-1}P) = \det I = 1$ следува дека

$$\det A = \det B. \ \blacksquare$$

Нека T е произволен линеарен оператор во векторскиот простор V. Дефинираме детерминанта од T со

$$\det T = \det[T]_e$$

каде што $[T]_e$ е матрицата на операторот T во однос на некоја база $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Според теорема 8.11 $\det T$ е добро дефинирано бидејќи не зависи од изборот на базата $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Следната теорема е аналогија како во случај на матрици.

Теорема 8.12. Нека S и T се линеарни оператори на векторскиот простор V. Тогаш важи

(i) $\det(S \circ T) = \det S \cdot \det T$

(ii) T е инверзибилен оператор ако $\det T \neq 0$

Доказ. (i) Имаме дека

$$\det(S \circ T) = \det[S \circ T]_e = \det([S]_e[T]_e) =$$

$$= \det[S]_e \det[T]_e = \det S \cdot \det T$$

(ii) T е инверзибилен оператор акко $[T]_e$ е инверзибилна матрица акко $\det[T]_e \neq 0$ ако и само ако $\det T \neq 0$. $\blacksquare$

Забележуваме дека $\det(1_V) = 1$ каде што 1_V е идентичниот оператор и $\det(T^{-1}) = (\det T)^{-1}$, ако T е инверзибилен оператор.

Пример. Нека T е линеарен оператот во $\mathbb{R}^3$ дефиниран со

$$T(x, y, z) = (2x - 4y + z, x - 2y + 3z, 5x + y - z)$$

Матрицата T во однос на стандардната база на $\mathbb{R}^3$ е

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогаш имаме дека

$$\det T = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(2-3) + 4(-1-15) + 1(1+10) = -55 \quad \blacklozenge$$

8.9 Полилинеарност на детерминанти

Нека $\mathbb{A}$ е множеството од сите квадратни матрици A од ред n над поле $\mathbb{K}$. Матрицата A може да ја сметаме за $n-$торка која што се состои од нејзините вектор редици, односно

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

Според тоа $\mathbb{A}$ може да се смета за множество од сите $n-$торки од $n-$торки во $\mathbb{K}$, односно

$$\mathbb{A} = (\mathbb{K}^n)^n$$

Дефиниција. Функција $D:\mathbb{A} \to \mathbb{K}$ се нарекува **полилинеарна** ако таа е линеарна по секоја од компонентите, односно ако важи

(i) Ако редицата $A_i = B + C$, тогаш важи

$$D(A) = D(\dots, B+C, \dots) = D(\dots, B, \dots) + D(\dots, C, \dots)$$

(ii) Ако редицата $A_i = kB$, каде што $k \in \mathbb{K}$, тогаш важи

$$D(A) = D(\dots, kB, \dots) = kD(\dots, B, \dots)$$

Дефиниција. Функција $D : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ се нарекува **алтернирачка** ако $D(A) = 0$ во случај кога матрицата A има две еднакви редици, односно важи

$$D(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0 \quad \text{ако} \quad A_i = A_j, \text{ за } i \neq j$$

Ќе ја докажеме следната базична теорема.

Теорема 8.13. Постои единствена функција $D : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ таква што важи

(i) D е полилинеарна

(ii) D е алтернирачка

(iii) $D(I) = 1$

Оваа функција D е всушност функцијата „детерминанта”, имено за произволна матрица $A \in \mathbb{A}$, $D(a) = \det A$.

Доказ. Ќе покажеме дека функцијата $D(A) = \det A$ ги задоволува условите (i), (ii) и (iii) и дека D е единствената функција која што ги задоволува условите (i), (ii) и (iii).

Знаеме дека за D ги задоволува условите (ii) и (iii), па преостанува да докажеме дека D е полилинеарна функција. Претпоставуваме дека $A = (a_{ij}) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ каде што A_k е $k-$тата редица на A. Уште повеќе нека за фиксирано i

$$A_i = B_i + C_i, \text{ каде } B_i = (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ и } C_i = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Според тоа, имаме дека

$$a_{i1} = b_1 + c_1, \; a_{i2} = b_2 + c_2, \dots, \; a_{n1} = b_n + c_n$$

Разложувајќи ја $D(A) = \det A$ по $i-$та редица, добиваме дека

$$D(A) = D(A_1 \dots, B_i + C_i, \dots, A_n) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= (b_1 + c_1)A_{i1} + (b_2 + c_2)A_{i2} + \dots + (b_n + c_n)A_{in} =$$

$$= (b_1A_{i1} + b_2A_{i2} + \dots + b_nA_{in}) + (c_1A_{i1} + c_2A_{i2} + \dots + c_nA_{in})$$

Двата добиени собироци се детерминантите на матриците добиени од матрицата A со замена на $i-$тата редица со B_i и C_i соодветно. Поточно имаме дека

$$D(A) = D(A_1 \dots, B_i + C_i, \dots, A_n) =$$

$$= D(A_1 \dots, B_i, \dots, A_n) + D(A_1 \dots, C_i, \dots, A_n)$$

Понатаму, заради теорема 8.3 (i) имаме дека

$$D(A_1 \dots, kA_i, \dots, A_n) = kD(A_1 \dots, A_i, \dots, A_n)$$

Според тоа, покажавме дека D е полилинеарна функција.

На крај треба да се докаже единственоста на функцијата D што ги задоволува условите (i), (ii) и (iii). За таа цел претпоставуваме дека D ги задоволува условите (i), (ii) и (iii). Ако $\{e_1, \dots, e_n\}$ е стандардната база на $\mathbb{K}^n$, тогаш според (iii) имаме дека

$$D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = D(I) = 1.$$

Врз основа на (ii) може да се покаже дека

$$D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \operatorname{sgn}\sigma \quad \text{каде што } \sigma = i_1 i_2 \dots i_n \in S_n \qquad (1)$$

Нека сега $A=(a_{ij})$ е дадена квадратна матрица од ред n. Да забележиме дека $k-$тата редица A_k на A е

$$A_k=(a_{k1},a_{k2},\dots,a_{kn})=a_{k1}e_1+a_{k2}e_2+\cdots+a_{kn}e_n$$

Според тоа, имаме дека

$$D(A)=D(a_{11}e_1+\cdots+a_{1n}e_n,a_{21}e_1+\cdots+a_{2n}e_n,\dots,a_{n1}e_1+\cdots+a_{nn}e_n)$$

Заради полилинеарноста на D, имаме дека $D(A)$ може да ја запишеме како збир на членови од облик

$$D(A)=\sum D(a_{1i_1}e_{i_1},a_{2i_2}e_{i_2},\dots,a_{n_{in}}e_{in})=$$

$$=\sum(a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n_{in}})D(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{in}) \qquad (2)$$

каде што сумирањето се врши по сите низи $\sigma=i_1,i_2,\dots,i_n$ каде што $i_k\in\{1,\dots,n\}$. Ако два од овие индекси се еднакви, на пример, $i_j=i_k$ но $j\neq k,$, тогаш од (ii) имаме дека

$$D(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{in})=0\,.$$

Затоа сумирањето во (2) треба да се изврши само по сите пермутации $\sigma=i_1i_2\dots i_n$. На крај, од (1) следува дека

$$D(A)=\sum_{\sigma}(a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n_{in}})D(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{in})=$$

$$=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)(a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{n_{in}})\text{ каде што }\sigma=i_1,i_2,\dots,i_n$$

Според тоа, D е функцијата која што на секоја матрица и ја придружува нејзината детерминанта, со што теоремата е докажана. ■

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги детерминантите на следниве матрици:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Пресметај ги детерминантите на следниве матрици:

а) $\begin{pmatrix} t-2 & -3 \\ -4 & t-1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{pmatrix}$

3. Најди ги вредностите на x за кои што следниве детерминанти се еднакви на 0:

а) $\begin{pmatrix} x-1 & x-2 \\ x+2 & x+2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} x+4 & 0 \\ x^2-1 & x-4 \end{pmatrix}$

4. Пресметај ги детерминантите на следниве матрици:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Пресметај ги детерминантите на следниве матрици:

а) $\begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}$

6. Најди ги вредностите на x за кои што следниве детерминанти се еднакви на 0:

а) $\begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}$

7. Пресметај ги детерминантите на следниве матрици:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Користејќи ги својствата на детерминанта, пресметај:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b).$

9. Користејќи ги својствата на детерминанта, докажи ги идентитетите:

а) $\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos 2x & \cos^2 x \\ \sin^2 y & \cos 2y & \cos^2 y \\ \sin^2 z & \cos 2z & \cos^2 z \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+az' \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}$

д) $\begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i-b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ѓ) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \end{vmatrix}$

10. За матрицата $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ најди го кофакторот на:

а) елементот 4 б) елементот 5 в) елементот 7

11. Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Најди ги матриците:

а) $\mathrm{adj}A$ б) A^{-1}

12. Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Најди ги матриците:

а) $\mathrm{adj}A$ б) A^{-1}

13. Најди општ облик на матрица A од ред 2 за која што $A = \mathrm{adj}A$.

14. Нека A е дијагонална матрица и B е триаголна матрица, на пример,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & b_2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

а) Покажи дека A е дијагонална и B е триаголна матрица

б) Покажи дека B е инверзибилна ако и само ако $b_i \neq 0$, за секое $i = 1,\dots,n$. Според тоа A е е инверзибилна ако и само ако

$a_i \neq 0,$ за секое $i = 1, \dots, n.$

в) Покажи дека инверзните матрици на A и B, ако постојат, се од облик

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1^{-1} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & b_2^{-1} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Поточно, дијагоналните елементи на A^{-1} и B^{-1} се инверзните елементи на соодветните дијагонални елементи на A и B.

15. Нека T е линеарен оператор на $\mathbb{R}^3$ дефиниран со

$$T(x, y, z) = (3x - 2y, 5y + 7z, x + y + z).$$

Најди $\det T$.

16. Нека $D : V \to V$ е операторот диференцирање, односно $D(v) = dv / dt.$ Најди $\det D$ ако V е просторот генериран со

а) $\{1, t, \dots, t^n\}$ б) $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ в) $\{\sin t, \cos t\}$

17. Покажи дека

а) $\det(1_V) = 1,$ каде што 1_V е идентичниот оператор

б) $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$ ако T е инверзибилен оператор

18. Реши ги следниве системи линеарни равенки со помош на детерминанти:

а) $\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 7y = -1 \end{cases}$

19. Реши ги следниве системи линеарни равенки со помош на детерминанти:

а) $\begin{cases} 2x-5y+2z=7 \\ x+2y-4z=3 \\ 3x-4y-6z=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2z+3=y+x \\ x-3z=2y+1 \\ 3y+z=2-2x \end{cases}$

20. Определи ја парноста на следниве пермутации во S_5 :

а) $\sigma=32154$ б) $\tau=13524$ в) $\pi=42531$

21. Нека $\sigma=35124$, $\tau=43152$ и $\pi=42531$ се дадени пермутации. Најди ги пермутациите

а) $\tau\circ\sigma$ б) $\pi\circ\sigma$ в) σ^{-1} г) τ^{-1}

22. Нека $V=(\mathbb{K}^m)^m$, односно V е векторскиот простор од сите квадратни матрици од ред m сметани за $m-$торки од вектор редици. Нека $D:V\to\mathbb{K}$.

а) Покажи дека следниот послаб услов е еквивалентен на условот D е алтернирачка функција

$$D(A_1,A_2,\dots,A_n)=0 \text{ ако } A_i=A_{i+1}, \text{ за некое } i$$

б) Нека D е $m-$линеарна и алтернирачка функција. Покажи дека ако $A_1,A_2,\dots,A_n$ се линеарно независни тогаш

$$D(A_1,A_2,\dots,A_n)=0$$

23. Нека V е векторскиот простор од сите квадратни матрици $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ од ред 2 над полето реални броеви $\mathbb{R}$. Определи дали $D:V\to\mathbb{K}$ е $2-$линеарна во однос на редиците, ако а) $D(M) = ac - bd$ б) $D(M) = ab - cd$

в) $D(M) = 0$ г) $D(M) = 1$

24. Нека V е векторскиот простор на сите квадратни матрици од ред m над поле $\mathbb{K}$. Претпоставуваме дека $B \in V$ е инвертибилна, односно $\det B \neq 0$. Дефинираме $D : V \to \mathbb{K}$ со $D(A) = \det(AB) / \det(B)$, каде што $A \in V$. Оттука имаме дека

$$D(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \det(A_1B, A_2B, \ldots, A_nB) / \det(B)$$

каде што A_i е i-тиот ред на A, и A_iB е i-тиот ред на AB. Покажи дека D е полилинеарна и алтернирачка функција, и дека $D(I) = 1$.

25. Нека A е квадратна матрица од ред n. Покажи дека

$$\det(kA) = k^n \det A$$

26. Докажи дека

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \prod_{i<j} (x_i < x_j)$$

Погорната детерминанта се нарекува **Вандермондова детерминанта** од ред n.

27. Разгледај ја блок матрицата $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ каде што A и C се квадратни матрици. Докажи дека $\det M = \det A \det C$. Поопшто, докажи дека ако M е триаголна блок матрица со квадратни матрици $A_1, A_2, \ldots, A_m$ по дијагонала, тогаш $\det M = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_m$.

28. Нека A, B, C и D се квадратни матрици коишто заемно комутираат. За квадратната блок матрица $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ од ред $2n$ покажи дека $\det M = \det A \det D - \det B \det C$.

29. Нека A е отогонална матрица, односно $A^t A = I$. Покажи дека $\det A = \pm 1$.

29. Разгледај ја пермутацијата $\sigma = j_1 j_2 \ldots j_n$. Нека $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ е стандардната база на $\mathbb{K}^n$, и нека A е матрицата чија што $i-$та редица е e_{j_i}, односно $A = (e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jn})$. Покажи дека $\det A = \operatorname{sgn} \sigma$.

30. Нека A е квадратна матрица од ред n. **Детерминантниот ранг** на A е редот на најголемата квадратна подматрица од A, добиени со бришење на редиците и колоните на A, чија што детерминанта не е нула. Покажи дека детерминантиот ранг на A е еднаков на нејзиниот ранг, односно на максималниот број на линеарно независни редици или колони.

9. СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ И СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ

9.1 Вовед

Во оваа глава ќе испитуваме линеарен оператор T над векторски простор V со конечна димензија. Специјално, ќе бараме услови под кои T може да се дијагонализира. Како што видовме во поглавје 7 ова е во тесна врска со изучувањето на теоријата на слични трансформации кај матрици.

На секој оператор T ќе му придружиме карактеристичен полином како и минимален полином. Овие полиноми и нивните корени имаат основна улога во изучување на операторот T. Да забележиме дека во ова поглавје полето $\mathbb{K}$ има важна улога бидејќи егзистенцијата на корените на полиномот зависат од полето $\mathbb{K}$.

9.2 Полиноми од матрици и линеарни оператори

Нека $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ е полином со коефициенти во $\mathbb{K}$. Ако A е квадратна матрица над полето $\mathbb{K}$, тогаш дефинираме

$$f(A)=a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0I$$

каде што I е единичната матрица. Притоа веиме дека A е **корен** или **нула** на полиномот $f(t)$, ако $f(A)=0$.

Пример. Нека $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и нека f и g се полиноми над $\mathbb{R}$

$$f(t)=2t^2-3t+7,\text{ и } g(t)=t^2-5t-2$$

Тогаш имаме дека

$$f(A)=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 14\\ 21 & 39\end{pmatrix},\text{ и}$$

$$g(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Заклучуваме дека A е нула на полиномот $g(t)$. ♦

Теорема 9.1. Нека f и g се полиноми над $\mathbb{K}$ и нека A е квадратна матрица од ред n над $\mathbb{K}$. Тогаш важи

(i) $(f+g)(A)=f(A)+g(A)$

(ii) $(fg)(A)=f(A)g(A)$

и за произволен скалар $k\in\mathbb{K}$,

(iii) $(kf)(A)=kf(A)$

Освен тоа бидејќи $f(t)g(t)=g(t)f(t)$ за било кои полиноми $f(t)$ и $g(t)$ добиваме дека

$$f(A)g(A)=g(A)f(A)$$

односно секои два полинома по матрицата A комутираат меѓусебе.

Доказ. Нека $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ и $g(t) = b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$. Тогаш според дефиницијa имаме дека

$$f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I \text{ и } g(A) = b_m A^m + \cdots + b_1 A + b_0 I.$$

(i) Нека $m \leq n$ и нека $b_i = 0$ за $i > m$. Тогаш имаме дека

$$(f+g)(t) = (a_n + b_n)t^n + \cdots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)$$

од каде што следува дека

$$\begin{aligned}(f+g)(A) &= (a_n + b_n)A^n + \cdots + (a_1 + b_1)A + (a_0 + b_0)I = \\ &= (a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I) + (b_n A^n + \cdots + b_1 A + b_0 I = \\ &= f(A) + g(A)\end{aligned}$$

(ii) Според дефиницијa имаме дека

$$(fg)(t) = c_{n+m} t^{m+n} + \cdots + c_1 t + c_0 = \sum_{k=0}^{n+m} c_k t^k$$

каде што $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. Затоа имаме дека

$(fg)(A) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k A^k$. Сега, имаме дека

$$\begin{aligned}f(A)g(A) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j A^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j A^{i+j} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} c_k A^k = (fg)(A)\end{aligned}$$

(iii) Според дефиницијa имаме дека $kf(t) = ka_n t^n + \cdots + ka_1 t + ka_0$ па затоа имаме дека

$$\begin{aligned}(kf)(A) &= ka_n A^n + \cdots + ka_1 A + ka_0 I = \\ &= k(a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I) = kf(A) \;\blacksquare\end{aligned}$$

Сега, да претпоставиме дека $T : V \to V$ е линеарен оператор на векторскиот простор V над поле $\mathbb{K}$. Ако $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ е полином над $\mathbb{K}$ тогаш дефинираме $f(T)$ со

$$f(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 I$$

каде што I е идентичното пресликување. Линеарниот оператор T се нарекува **нула** или **корен** на $f(T)$ ако $f(T) = 0$. Притоа важи теорема 9.1 во случај кога наместо матрица A земаме линеарен оператор T, како и својството дека два произволни полиноми по T комутираат.

Освен тоа, ако A е матрична репрезентација на T, тогаш $f(A)$ е матрична репрезентација на $f(T)$. Специјално, имаме дека $f(T) = 0$ ако и само ако $f(A) = 0$.

9.3 Сопствени вредности и сопствени вектори

Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор на векторскиот простор V над поле $\mathbb{K}$. Скаларот $\lambda \in \mathbb{K}$ се нарекува **сопствена вредност** или **карактеристична вредност** на T ако постои ненулти вектор $v \in V$ така што

$$T(v) = \lambda v$$

Секој вектор v што го задоволува ова равенство се нарекува **сопствен вектор** или **карактеристичен вектор** на T што соодветствува на сопствената вредност λ. Да забележуваме дека ако v е сопствен вектор тогаш секој скаларен мултипл kv е исто така сопствен вектор, односно

$$T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv)$$

Множеството од сите вектори V_λ за кои важи $T(v) = \lambda v$ е векторски потпростор наречен **сопствен потпростор** за λ. Навистина, за произволни $v, w \in V_\lambda$ и произволни скалари $a, b \in \mathbb{K}$, имаме дека

$$T(v) = \lambda v \text{ и } T(w) = \lambda w$$

од каде што следува дека

$$T(av + bw) = aT(v) + bT(w) = a(\lambda v) + b(\lambda w) = \lambda(av + bw)$$

Пример. Нека $I : V \to V$ е идентичното пресликување на векторски простор V. Тогаш $I(v) = v = 1v$ за секое $v \in V$. Затоа единствена сопствена вредност е $\lambda = 1$, а соодветниот сопствен потпростор е целиот простор V. ♦

Пример. Нека $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е линеарен оператор кој што секој вектор го ротира за $\varphi = 90^0$. Во овој случај нема сопствена вредност па според тоа нема и сопствен вектор. ♦

Пример. Нека D е операторот диференцирање на векторскиот простор

$$V = \{a_0 + a_1e^x + a_2e^{2x} + \cdots + a_Me^{Mx} \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_M \in \mathbb{R}\}.$$

Имаме дека $D(e^{5x}) = 5e^{5x}$, од каде што следува дека 5 е сопствена вредност на D со сопствен вектор e^{5x}. ♦

Ако A е квадратна матрица од ред n над $\mathbb{K}$ тогаш сопствена вредност на A подразбира сопствен вектор на A каде што A се разгледува како оператор во $\mathbb{K}^n$. Имено $\lambda \in \mathbb{K}$ е сопствена вредност на A ако за некој ненулти колоничен вектор $v \in \mathbb{K}^n$ важи

$$Av = \lambda v.$$

Во тој случај v се нарекува сопствен вектор што одговара на сопствената вредност λ.

Пример. Да ги најдеме сопствените вредности и соодветните сопствени вектори на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Бараме скалар t и ненулти вектор $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ таков што

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Погорното матрично равенство е еквивалентно со хомогениот систем

$$\begin{cases} x + 2y = tx \\ 3x + 2y = ty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)x - 2y = 0 \\ -3x + (t-2)y = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Да се потсетиме дека овој хомоген систем има ненулто решение ако и само ако детерминантата на системот е 0, односно

$$\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1) = 0$$

Според тоа t е сопствена вредност на A ако и само ако $t = 4$ или $t = -1$. Ставаме $t = 4$ во (1)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y = 0$$

Според тоа, имаме дека $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ е ненулти сопствен вектор соодветен на сопствената вредност $t = 4,$ и секој друг сопствен вектор соодветен на сопствената вредност $t = 4$ е мултипл на v.

Ставаме $t = -1$ во (1)

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0$$

Според тоа, имаме дека $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ е ненулти сопствен вектор соодветен на сопствената вредност $t = -1,$ и секој друг сопствен вектор соодветен на сопствената вредност $t = -1$ е мултипл на v. ♦

Следната теорема дава важна карактеризација на сопствените вредности.

Теорема 9.2. Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор на векторскиот простор над поле $\mathbb{K}$. Тогаш $\lambda \in \mathbb{K}$ е сопствена вредност на T ако и само ако операторот $\lambda I - T$ е сингуларен. Сопствениот потпростор на λ е јадрото на $\lambda I - T$.

Доказ. Нека λ е сопствена вредност на T. Тогаш постои ненулти вектор v така што $Tv = \lambda v$ од каде што следува дека хомогениот систем

$$(\lambda I - T)v = 0$$

има ненулто решение v ($v \neq 0$), што повлекува дека $\lambda I - T$ е сингуларен оператор.

Обратно, нека $\lambda I - T$ е сингуларен оператор. Тоа значи дека постои ненулти вектор v таков што $(\lambda I - T)v = 0$, односно $\lambda v = T(v)$. Оттука следува дека λ е сопствена вредност. Притоа сопствениот потпростор на λ е множеството вектори v такви што $(\lambda I - T)v = 0$, а тоа е всушност јадрото на $\lambda I - T$. ■

Следнава теорема е многу корисна и ќе ја докажеме со индукција.

Теорема 9.3. Ненултите сопствени вектори што одговараат на различни сопствени вредности се линеарно независни.

Доказ. Нека $v_1, v_2, \dots, v_n$ се ненулти сопствени вектори на оператор $T: V \to V$ што одговараат на различни сопствени вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, соодветено. Доказот дека $v_1, v_2, \dots, v_n$ се линеарно независни е со индукција по n.

Ако $n = 1$ тогаш v_1 е линеарно независен бидејќи $v_1 \neq 0$.

Да претпоставиме дека $n > 1$, и дека

$$a_1 v_1 + a v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \qquad (1)$$

каде што $a_1, a_2, \dots, a_n$ се скалари. Оттука имаме дека

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = 0$$

од каде што заради линеарноста следува дека

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n) = 0$$

Заради претпоставката дека

$$T(v_1)=\lambda_1 v_1,\ \ T(v_2)=\lambda_2 v_2,\ \ \ldots,\ T(v_n)=\lambda_n v_n,$$

имаме дека

$$a_1(\lambda_1 v_1)+a_2(\lambda_2 v_2)+\ldots+a_n(\lambda_n v_n)=0 \qquad (2)$$

Сега, ако (1) се множи со λ_n и се одземе од (2) се добива

$$a_1(\lambda_1-\lambda_n)v_1+a_2(\lambda_2-\lambda_n)v_2+\ldots+a_{n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_n)v_{n-1}=0$$

Според индуктивната претпоставка $v_1 v_2,\ldots,v_{n-1}$ се линеарно независни вектори па имаме дека сите коефициенти се еднакви на 0, односно

$$a_1(\lambda_1-\lambda_n)=a_2(\lambda_2-\lambda_n)=\ldots=a_n(\lambda_{n-1}-\lambda_n)=0$$

Бидејќи сите сопствени вредности $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, се различни имаме дека

$$\lambda_1-\lambda_n\neq 0,\ \ \lambda_2-\lambda_n\neq 0,\ \ \ldots,\ \lambda_{n-1}-\lambda_n\neq 0$$

од каде што следува дека

$$a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=0$$

Заменувајќи во (1) добиваме дека $a_n v_n=0$ односно $a_n=0$ бидејќи $v_n\neq 0.$ Според тоа, може да заклучиме дека

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=0$$

што значи дека векторите $v_1,v_2,\ldots,v_n$ се линеарно независни вектори. ■

Пример. Нека V векторскиот простор од функциите од облик

$$a_0+a_1e^x+a_2e^{2x}+\cdots+a_Me^{Mx}$$

каде што $a_0,a_1,a_2,\dots,a_M\in\mathbb{R}\}$ и M е даден природен број. Да ги разгледаме функциите $e^{p_1x},e^{p_2x},\dots,e^{p_nx}$, каде што $p_1,p_2,\dots,p_n$ се различни природни броеви коишто се помали или еднакви на М. Ако D е операторот диференцирање во V, тогаш

$$D(e^{p_1x})=p_1e^{p_1x},\ D(e^{p_2x})=p_2e^{p_2x},\ \dots,D(e^{p_nx})=p_ne^{p_nx}$$

Оттука, заради теорема 9.3 следува дека сопствените вектори на D соодветни на различните сопствени вредности $p_1,p_2,\dots,p_n$ се линеарно независни. ♦

9.4 Дијагонализација на линеарни оператори и сопствени вектори

Нека $T:V\to V$ е линеарен оператор на векторски простор V со конечна димензија. Забележуваме дека T може да се претстави со дијагонална матрица

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & k_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

ако и само ако постои база $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ во V за која што важи

$$T(v_1)=k_1v_1$$

$$T(v_2) = k_2 v_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(v_n) = k_n v_n$$

односно ако $v_1, v_2, \ldots, v_n$ се сопствени вектори на T за сопствените вредности $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Обратно, ако V има база $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ од сопствени вектори за T, тогаш во однос на тоа база T се дијагонализира. Значи, важи следната теорема.

Теорема 9.4. Линеарен оператор $T : V \to V$ може да се претстави како дијагонална матрица B ако и само ако V има база што се состои од сопствени вектори на T. Во овој случај дијагоналните елементи на B се сопствени вредности.

Друга формулација на теорема 9.4 е следната

Теорема 9.4*. Квадратна матрица A од ред n е слична со дијагонална матрица B ако и само ако A има n линеарно независни сопствени вектори. Во овој случај дијагоналните елементи на B се соодветните сопствени вредности.

Во претходната теорема ако P е матрица чии што колони се n независни сопствени вектори на A, тогаш $B = P^{-1}AP$.

Пример. Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

има два сопствени вектори $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ставаме $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Тогаш $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$. Матрицата A е слична со дијагоналната матрица

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \blacklozenge$$

9.5 Карактеристичен полином.
Теорема на Хамилтон-Кели

Да разгледаме квадратна матрица A од ред n над поле $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n_2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицата $tI_n - A$ каде I_n е единичната матрица од ред n се нарекува **карактеристична матрица** на A

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n_2} & \dots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нејзината детерминанта

$$\Delta_A(t) = \det(tI_n - A)$$

која што е полином по t се нарекува **карактеристичен полином** на матрицата A, и

$$\Delta_A(t) = \det(tI_n - A) = 0$$

се нарекува **карактеристична равенка** на матрицата A.

Сега, секој член на детерминантата содржи еден и само еден елемент од секоја редица и од секоја колона, па заради особините на детерминантите погорниот карактеристичен полином е од обликот

$$\Delta_A(t) = (t - a_{11})(t - a_{22})\cdots(t - a_{nn}) +$$

$$+ \text{ изрази со најмногу } n-2 \text{ множители од облик } t - a_{ii}$$

Според тоа, имаме дека

$$\Delta_A(t) = t^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})t^{n-1} + \text{изрази од понизок степен}$$

Да се потсетиме дека трагата на A е збирот на нејзините дијагонални елементи. Затоа, карактеристичниот полином $\Delta_A(t) = \det(tI_n - A)$ е моничен полином (коефициентот пред највисокиот степен е 1) од $n -$ ти ред и коефициентот пред t^{n-1} е негативната вредност на трагата на матрицата A.

Освен тоа, ако ставиме $t = 0$ тогаш имаме дека

$$\Delta_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

Но, $\Delta_A(0)$ е константниот член на полиномот $\Delta_A(t)$. Значи, константниот член на карактеристичниот полином на матрицата A изнесува $(-1)^n \det A$ каде што n е редот на A.

Пример. Карактеристичниот полином на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

гласи

$$\Delta_A(t) = \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 3 & 0 \\ 2 & t-2 & 1 \\ -4 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = t^3 - t^2 + 2t + 28$$

Како што се очекуваше $\Delta_A(t)$ е моничен полином со степен 3. Освен тоа, може да заклучиме дека $\mathrm{tr}A = 1$ и $\det A = -28.$ ♦

Сега ќе ја покажеме една од најважните теореми во линеарната алгебра.

Теорема 9.5 (Хамилтон – Кели)

Секоја матрица е нула на нејзиниот карактеристичен полином.

Доказ. Нека A е квадратна матрица од ред n и нека $\Delta(t)$ е карактеристичниот полином

$$\Delta_A(t) = \det(tI - A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

Сега, нека $B(t)$ ја означува адјунгираната матрица на $tI - A.$ Елементите на $B(t)$ се кофактори на матрицата $tI - A,$ па според тоа тие се полиноми од најмногу $n-1$ степен. Затоа, имаме дека

$$B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

каде што $B_{n-1},\ldots,B_1,B_0$ се квадратни матрици од ред n над $\mathbb{K}$ кои што не зависат од $t.$ Според теорема 8.8 имаме дека

$$(tI - A)B(t) = \det(tI - A)I$$

или

$$(tI - A)(B_{n-1}t^{n-1} + \cdots + B_1 t + B_0) = (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0)I$$

Ослободувајќи се од заградите добиваме дека важи

$$B_{n-1} = I$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = a_{n-1}I$$

$$B_{n-3} - AB_{n-2} = a_{n-2}I$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_0 - AB_1 = a_1 I$$

$$-AB_0 = a_0 I$$

Множејќи ги овие матрични равенства со $A^n, A^{n-1}, \ldots, A, I,$ соодветено добиваме дека

$$A^n B_{n-1} = A^n$$

$$A^{n-1}B_{n-2} - A^n B_{n-1} = a_{n-1}A^{n-1}$$

$$A^{n-2}B_{n-3} - A^{n-1}B_{n-2} = a_{n-2}A^{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$AB_0 - A^2 B_1 = a_1 A$$

$$-AB_0 = a_0 I$$

Со собирање на погорните матрични равенства добиваме дека

$$0 = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$$

Со други зборови, $\Delta(A)=0,$ односно матрицата A е корен на својот карактеристичен полином. ■

Пример. Карактеристичниот полином за матрицата

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

гласи

$$\Delta(t)=\det(tI-A)=\begin{vmatrix}t-1 & -2\\ -3 & t-2\end{vmatrix}=t^2-3t-4$$

Во согласност со теоремата на Хамилтон-Кели имаме дека A е корен на својот карактеристичен полином, односно

$$\Delta(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ \blacklozenge$$

Следнава теорема ја дава врската меѓу карактеристичните полиноми и сопствените вредности.

Теорема 9.6. Нека A е квадратна матрица од ред n над поле $\mathbb{K}$. Скалар $\lambda\in\mathbb{K}$ е сопствена вредност на A ако и само ако λ е корен на карактеристичниот полином $\Delta(t)$ на матрицата A.

Доказ. Според теорема 9.2 имаме дека λ е сопствена вредност на A ако и само ако $\lambda I-A$ е сингуларна матрица. Уште повеќе, според теорема 8.4 имаме дека $\lambda I-A$ е сингуларна матрица ако и само ако $\det(\lambda I-A)=0,$ односно ако и само ако λ е корен на полиномот $\Delta(t)$ на матрицата A. ■

Користејќи ги теоремите 9.3, 9.4 и 9.6 добиваме дека важи

Последица 9.7. Ако карактеристичниот полином на квадратна матрица од ред n е производ од линеарни множители

$$\Delta(t) = (t - a_1)(t - a_2)\cdots(t - a_n)$$

односно ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ се n различни корени на $\Delta(t)$ тогаш А е слична со дијагонална матрица чии што дијагонални елементи се $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Уште повеќе, користејќи ја основната теорема на алгебрата, дека секој полином над $\mathbb{C}$ има барем еден корен, добиваме дека

Последица 9.8. Нека А е квадратна матрица од ред n на полето од комплексни броеви $\mathbb{C}$. Тогаш А има барем една сопствена вредност.

Пример. Нека

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Нејзиниот карактеристичен полином гласи

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 5 \\ 0 & -1 & t+2 \end{vmatrix} = (t-3)(t^2+1)$$

Ќе ги разгледаме следниве два случаја:

(i) А е матрица над полето реални броеви $\mathbb{R}$. Тогаш А има само една сопствена вредност еднаква на 3. Бидејќи 3 има само еден сопствен вектор, А не се дијагонализира.

(ii) A е матрица над полето комплексни броеви $\mathbb{C}$. Тогаш A има 3 различни сопствени вредности 3, i и $-i$. Затоа постои инверзибилна матрица P со комплексни елементи така што

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

од каде што заклучуваме дека A може да се дијагонализира. ♦

Теорема 9.9. Слични матрици имаат еднакви карактеристични полиноми.

Доказ. Нека A и B се слични матрици, односно нека постои матрица P така што $B = P^{-1}AP$. Користејќи дека

$$tI = tP^{-1}IP = P^{-1}(tI)P$$

добиваме дека

$$\det(tI - B) = \det(tI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(tI)P - P^{-1}AP) =$$

$$= \det(P^{-1}(tI - A)P) = \det P^{-1} \det(IP - A) \det P =$$

$$= \det(tI - A)$$

Го користевме фактот дека детерминантите се скалари и комутираат, и дека важи $\det P^{-1} \det P = 1$. ■

Забелешка. Теоремата на Хамилтон-Кели може да се искористи за наоѓање на инверзна матрица.

Пример. За матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ќе ја најдеме инверзната матрица A^{-1}. Според теоремата на Хамилтон-Кели важи

$$\Delta(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2-\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

Ако последното равенство се помножи со $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}$ добиваме дека

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}. \blacklozenge$$

Во општ случај A^{-1} е полином од степен $n-1$ по А.

9.6 Минимален полином

Нека А е квадратна матрица од ред n над поле $\mathbb{K}$. Видовме дека постојат ненулти полиноми $f(t)$ за кои $f(A)=0$. На пример, еден таков ненулти полином е карактеристичниот полином на матрицата А. Тогаш, за произволен полином p имаме дека

$$(p\Delta)(A)=p(A)\Delta(A)=0$$

Меѓу сите полиноми $f(t)$ такви што $f(A)=0$ ги разгледуваме оние со најмал степен и меѓу нив го бараме оној кој е моничен (коефициентот пред највисокиот степен е 1). Таков полином постои и тој е единствен. Него го нарекуваме **минимален полином** на A.

Имено од Теорема на Хамилтон-Кели јасно е постоењето на таков полином (со најнизок степен). Да покажеме дека тој моничен полином е и единствен. Навистина ако $f(t)$ и $q(t)$ се два минимални монични полиноми од ист степен, на пример r, тогаш $p(t)-q(t)$ е од степен најмногу $r-1$ и

$$(p-q)(A)=p(A)-q(A)=0-0=0$$

што е контрадикција. Значи, тој полином е единствен.

Теорема 9.10. Минималниот полином $m(t)$ на A го дели секој полином за којшто A е негова нула. Специјално, $m(t)$ го дели карактеристичниот полином.

Доказ. Нека $f(t)$ е полином за кој што важи $f(A)=0$. Според теоремата за делење на полиноми постојат полиноми $q(t)$ и $r(t)$ така што важи

$$f(t)=q(t)m(t)+r(t)$$

каде што $r(t)=0$ или $\deg r(t)<\deg m(t)$. Со смената $t=A$ во погорната равенка, користејќи дека $f(A)=0$ и $m(A)=0$, добиваме дека

$$r(A)=f(A)-m(A)q(A)=0$$

Ако $r(t)\neq 0$, тогаш $r(t)$ е полином со степен помал од $m(t)$ за којшто A е нула, што претставува противречност со дефиницијата на минимален полином. Затоа $r(t)=0$ и $f(t)=q(t)m(t)$, од каде што следува дека $m(t)\,|\,f(t)$. ■

Постои подлабока врска помеѓу $m(t)$ и $\Delta(t)$ која што ќе ја предочиме во следнава теорема.

Теорема 9.11. Карактеристичниот и минималниот полином на една матрица A имаат исти иредуцибилни множители.

Доказ. Нека $f(t)$ е иредуцибилен полином. Ако $f(t)$ го дели $m(t)$, тогаш бидејќи $m(t)$ го дели $\Delta(t)$, следува дека $f(t)$ го дели $\Delta(t)$.

Обратно нека $f(t)$ го дели $\Delta(t)$. Ќе покажеме дека $\Delta(t)$ го дели $(m(t))^n$. Бидејќи $f(t)$ е иредуцибилен ќе следува дека $f(t)$ го дели $m(t)$. Значи $m(t)$ и $\Delta(t)$ имаат исти иредуцибилни множители.

За да го комплетираме доказот преостанува да се покаже дека $\Delta(t)$ го дели $(m(t))^n$. Нека

$$m(t) = t^r + c_1 t^{r-1} + \cdots + c_{r-1} t + c_r$$

Да ги разгледаме следните матрици

$$B_0 = I$$

$$B_1 = A + c_1 I$$

$$B_2 = A^2 + c_1 A + c_2 I$$

....

$$B_{r-1} = A^{r-1} + c_1 A^{r-2} + \cdots + c_{r-1} I$$

Тогаш имаме дека

$$B_0 = I$$

$$B_1 - AB_0 = c_1 I$$

$$B_2 - AB_1 = c_2 I$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{r-1} - AB_{r-2} = c_{r-1} I$$

Исто така, имаме дека

$$-AB_{r-1} = c_r I - (A^r + c_1 A^{r-1} + \cdots + c_{r-1} A + c_r I) =$$

$$= c_r I - m(A) = c_r I$$

Ставаме

$$B(t) = t^{r-1} B_0 + t^{r-2} B_1 + \cdots + tB_{r-2} + B_{r-1}$$

Тогаш, добиваме дека

$$(tI - A)B(t)) = (t^r B_0 + t^{r-1} B_1 + \cdots + tB_{r-1}) - (t^{r-1} AB_0 + t^{r-2} AB_1 + \cdots + AB_{r-1}) =$$

$$= t^r B_0 + t^{r-1}(B_1 - AB_0) + t^{r-2}(B_2 - AB_1) + \cdots + t(B_{r-1} - AB_{r-2}) - AB_{r-1} =$$

$$= t^r I + c_1 t^{r-1} I + c_2 t^{r-2} I + \cdots + c_{r-1} tI + c_r I =$$

$$= m(t)I$$

Ако пресметаме детерминанта од двете страни на ова равенство добиваме дека

$$\det(tI - A)\det B(t) = (m(t))^n.$$

Бидејќи $\det B(t)$ е полином имаме дека $\det(tI - A)$ го дели $(m(t))^n$, односно карактеристичниот полином на А го дели $(m(t))^n$. ■

Според оваа теорема $m(t)$ и $\Delta(t)$ имаат исти иредуцибилни фактори, односно секој иредуцибилен фактор од едниот полином го дели другиот и обратно. Бидејќи линеарните фактори (множители) се ирредуцибилни, добиваме дека $m(t)$ и $\Delta(t)$ имаат исти линеарни множители. Според тоа, може да заклучиме дека $m(t)$ и $\Delta(t)$ имаат исти нули. Затоа од теорема 9.6 добиваме дека

Теорема 9.12. Скалар λ е сопствена вредност на матрица A ако и само ако λ е корен на минималниот полином на матрицата.

Пример. Да се најде минималниот полином на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Карактеристичниот полином на матрицата A е

$$\Delta(t) = \det(tI - A) = (t-2)^3(t-5)$$

Според теорема 9.11 имаме дека $t-2$ и $t-5$ мора да се фактори на $m(t)$. Но, според теорема 9.10 имаме дека $m(t)$ го дели $\Delta(t)$, па можни случаи за $m(t)$ се следните

- $m_1(t) = (t-2)(t-5)$
- $m_2(t) = (t-2)^2(t-5)$
- $m_3(t) = (t-2)^3(t-5)$

Според теорема на Хамилтон-Кели имаме дека $m_3(A) = \Delta(A) = 0.$ Со непосредна проверка се добива дека $m_1(A) \neq 0$ и $m_2(A) = 0.$ Значи $m_2(t) = (t-2)^2(t-5)$ е минимален полином за матрицата A. ♦

Пример. Нека A е 3x3 матрица над полето $\mathbb{R}$. Ќе покажеме дека A не може да биде нула на полиномот $f(t)=t^2+1$. Според теоремата на Хамилтон-Кели A е нула на својот карактеристичен полином $\Delta(t)$. Бидејќи $\Delta(t)$ е полином од степен 3, тој има барем еден реален корен.

Сега да претпоставиме дека A е нула на полиномот $f(t)=t^2+1$. Бидејќи $f(t)$ е иредуцибилен над $\mathbb{R}$, $f(t)$ мора да биде минимален полином на матрицата A. Но $f(t)$ нема реален корен. Ова е во контрадикција со фактот дека карактеристичниот и минималниот полином имаат заеднички корени. Затоа, A не е нула на полиномот $f(t)$.

Ако наместо $\mathbb{R}$ го разгледуваме полето $\mathbb{C}$, тогаш може да се провери дека следната матрица

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i\end{pmatrix}$$

е нула на полиномот $f(t)=t^2+1$. ♦

9.7 Карактеристични и минимални полиноми на линеарни оператори

Нека $T:V\to V$ е линеарен оператор на векторски простор V со конечна димензија. Дефинираме **карактеристичен полином** $\Delta(t)$ на T да биде карактеристичниот полином на било која матрична репрезентазија на T. Според теорема 9.9 имаме дека $\Delta(t)$ не зависи од изборот на базата во однос на која што се пресметува матричната репрезентација. Да забележиме дека степенот на полиномот $\Delta(t)$ е еднаков на димензијата на V. Притоа важат аналогни теореми за карактеристичен полином на линеарни оператор како што важат за карактеристичен полином на матрица.

Теорема 9.5′. T е нула на својот карактеристичен полином.

Теорема 9.6′. Скаларот $\lambda \in \mathbb{K}$ е сопствена вредност на T ако и само ако λ е корен на карактеристичниот полином на T.

Алгебарска кратност на сопствената вредност $\lambda \in \mathbb{K}$ на T се дефинира како кратност на λ како корен на карактеристичниот полином на T.

Геометриска кратност на сопствената вредност λ се дефинира како димензија на нејзиниот сопствен простор.

Теорема 9.13. Геометриската кратност на сопствена вредност λ не ја надминува алгебарската кратност.

Доказ. Нека геометриската кратност на сопствената вредност λ на операторот T е r. Тогаш постојат r линеарно независни вектори $v_1,\dots,v_r$ така што $T(v_i)=\lambda v_i$ за $i=1,\dots,r$. Множеството од вектори $\{v_1,\dots,v_r\}$ го прошируваме до база

$$\{v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_s\}$$

на V. Во однос на таа база добиваме дека

$$T(v_1)=\lambda v_1$$

$$T(v_2)= \qquad \lambda v_2$$

....

$$T(v_r) = \qquad\qquad \lambda v_r$$

$$T(w_1) = a_{11}v_1 + \cdots + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + \cdots + b_{1s}w_s$$

$$T(w_2) = a_{21}v_1 + \cdots + a_{2r}v_r + b_{21}w_1 + \cdots + b_{2s}w_s$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(w_s) = a_{s1}v_1 + \cdots + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + \cdots + b_{ss}w_s$$

Матрицата на T во однос на наведената база гласи

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & | & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{s1} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & | & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{s2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & | & a_{1r} & a_{2r} & \dots & a_{sr} \\ - & - & - & - & | & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{r1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_{1s} & b_{2s} & \dots & b_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_r & | & A \\ - & | & - \\ 0 & | & B \end{pmatrix}$$

каде што $A = (a_{ij})^t$ и $B = (b_{ij})^t$. За карактеристичниот полином добиваме дека

$$\begin{pmatrix} t-\lambda & 0 & \dots & 0 & | & -a_{11} & -a_{21} & \dots & -a_{s1} \\ 0 & t-\lambda & \dots & 0 & | & -a_{12} & -a_{22} & \dots & -a_{s2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & t-\lambda & | & -a_{1r} & -a_{2r} & \dots & -a_{sr} \\ - & - & - & - & | & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & & Q(t) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & & & & \end{pmatrix} = (t-\lambda)^r Q(t)$$

Според тоа, кратноста на коренот λ е барем r, односно алгебарската кратност на λ е поголема или еднаква од геометриската кратност r. ■

Пример. Нека V е векторскиот простор од функции за кои што $\{\sin\theta, \cos\theta\}$ е база, и нека D е операторот диференцирање на V. Тогаш

$$D(\sin\theta) = \cos\theta = 0\sin\theta + 1\cos\theta$$

$$D(\cos\theta) = -\sin\theta = -1\sin\theta + 0\cos\theta$$

Матрицата А на D во однос на погорната база е

$$A = [D] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

од каде што следува дека

$$\det(tI - A) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1$$

Според тоа, карактеристичниот полином на D е

$$\Delta(t) = t^2 + 1 \quad \blacklozenge$$

Минималниот полином $m(t)$ на операторот Т се дефинира независно од теоријата на матрици како моничен полином со најмал степен за кој што $f(T)$ е нула. Притоа за секој полином $f(T)$ важи

$$f(T) = 0 \text{ ако и само ако } f(A) = 0$$

каде што А е произволна матрична репрезентација на Т. Според тоа, Т и А имаат исти минимални полиноми. Притоа, да забележиме дека сите теореми за минимален полином на матрица што ги докажавме, важат исто така за минимален полином на оператор T.

Задачи за самостојна работа

1. Нека $f(t)=2t^2-5t+6$ и $g(t)=t^3-2t^2+t+3$. Најди $f(A)$, $g(A)$, $f(B)$ и $g(B)$, ако $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

2. Нека $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ е дефинирано со $T(x,y)=(x+y,2x)$. Нека $f(t)=t^2-2t+3$. Најди $f(T)(x,y)$.

3. Нека V е векторски простор од полиноми $v(x)=ax^2+bx+c$. Нека $D:V\to V$ е операторот диференцирање. Нека $f(t)=t^2+2t-5$. Најди $f(D)(v(x))$.

4. Нека $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Најди A^2, A^3, A^n.

5. Нека $B=\begin{pmatrix}8 & 12 & 0\\ 0 & 8 & 12\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$. Најди реална матрица A така што важи $B=A^3$.

6. Разгледај дијагонална матрица M и триаголна матрица N

$$M=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_n\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad N=\begin{pmatrix}a_1 & b & \dots & c\\ 0 & a_2 & \dots & d\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_n\end{pmatrix}$$

Покажи дека за било кој полином $f(t)$, $f(M)$ и $f(N)$ се од облик

$$f(M)=\begin{pmatrix} f(a_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(a_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(a_n) \end{pmatrix} \text{ и } f(N)=\begin{pmatrix} f(a_1) & x & \dots & y \\ 0 & f(a_2) & \dots & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

7. Разгледај блок дијагонална матрица M и блок триаголна матрица N

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad N=\begin{pmatrix} A_1 & B & \dots & C \\ 0 & A_2 & \dots & D \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

каде што A_i се квадратни матрици. Покажи дека за било кој полином $f(t)$, $f(M)$ и $f(N)$ се од облик

$$f(M)=\begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(A_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(A_n) \end{pmatrix} \text{ и } f(N)=\begin{pmatrix} f(A_1) & X & \dots & Y \\ 0 & f(A_2) & \dots & Z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(A_n) \end{pmatrix}$$

8. Докажи дека за било која квадратна матрица A важи $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ каде што P е инверзибилна. Поопшто, докажи дека $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ за било кој полином $f(t)$.

9. Нека $f(t)$ е било кој полином. Докажи дека

а) $f(A^t)=(f(A))^t$

б) Ако A е симетрична, односно ако $A^t = A$, тогаш $f(A)$ е симетрична.

10. За секоја од следните матрици, најди ги сите сопствени вредности и соодветните линеарно независни сопствени вектори:

$$а)\ A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\qquad б)\ B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\qquad в)\ C=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

Најди инверзибилни матрици P_1, P_2 и P_3 така што $P_1^{-1}AP_1$, $P_2^{-1}BP_2$ и $P_3^{-1}CP_3$ се дијагонални.

11. За секоја од следните матрици, најди ги сите сопствени вредности и базите на соодветните сопствени простори:

$$а)\ A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\qquad б)\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}\qquad в)\ C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Кога е возможно, најди инверзибилни матрици P_1, P_2 и P_3 така што $P_1^{-1}AP_1$, $P_2^{-1}BP_2$ и $P_3^{-1}CP_3$ се дијагонални.

12. Разгледај ги матриците $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 13 & -3\end{pmatrix}$ над полето реални броеви $\mathbb{R}$. Најди ги сите сопствени вредности и соодветните линеарно независни сопствени вектори.

13. Разгледај ги матриците од претходната задача над полето комплексни броеви $\mathbb{C}$. Најди ги сите сопствени вредности и соодветните линеарно независни сопствени вектори.

14. За секој од следниве оператори $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, најди ги сите сопствени вредности и базите на соодветните сопствени простори:

$$а)\ T(x,y)=(3x+3y,x+5y)\qquad б)\ T(x,y)=(y,x)$$

в) $T(x,y)=(y,-x)$

15. За секој од следниве оператори $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, најди ги сите сопствени вредности и базите на соодветните сопствени простори:

а) $T(x,y,z)=(x+y+z,2y+z,2y+3z)$

б) $T(x,y,z)=(x+y,y+z,-2y-z)$

в) $T(x,y,z)=(x-y,2x+3y+2z,x+y+2z)$

16. За секоја од следните матрици над полето комплексни броеви $\mathbb{C}$, најди ги сите сопствени вредности и соодветните линеарно независни сопствени вектори:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & i\end{pmatrix}$ б) $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ в) $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

17. Нека v е сопствен вектор на линеарните оператори S и T. Покажи дека v е исто така сопствен вектор на линеарниот оператор $aS+bT$, каде што a и b се произволни скалари.

18. Нека v е сопствен вектор на линеарен оператор T соодветен на сопствената вредност λ. Покажи дека v е исто така сопствен вектор на линеарниот оператор T^n соодветен на сопствената вредност λ^n, за $n>0$.

19. Нека λ е сопствена вредност на линеарен оператор T. Покажи дека $f(\lambda)$ е сопствена вредност на $f(T)$.

20. Покажи дека слични матрици имаат исти сопствени вредности.

21. Покажи дека матриците A и A^t имаат исти сопствени вредности. Најди пример така што матриците A и A^t имаат различни сопствени вектори.

22. Нека S и T се линеарни оператори така што $ST = TS$. Нека λ е сопствена вредност на T и нека W е соодветниот сопствен потпростор. Покажи дека W е инваријанте при S, односно $S(W) \subset W$.

23. Нека V е векторски простор со конечна димензија над полето комплексни броеви $\mathbb{C}$. Нека $W \neq \{0\}$ е потпростор на V инваријантен при линеарен оператор $T: V \to V$. Покажи дека W содржи ненулти сопствен вектор при T.

24. Нека A е квадратна матрица од ред n над поле $\mathbb{K}$. Нека $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ се линеарно независни сопствени вектори на A соодветни на сопствените вредности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, соодветно. Нека P е матрица чиишто колони се векторите $v_1, \dots, v_n$. Покажи дека $P^{-1}AP$ е дијагонална матрица чии дијагонални елементи се сопствените вредности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

25. Најди полином за којшто матрицата е корен

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ б) $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ в) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

26. Разгледај ја квадратната матрица од ред n

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Покажи дека $f(t)=(t-\lambda)^n$ е карактеристичен и минимален полином на матрицата A.

27. Најди ги карактеристичниот полином и минималниот полином на секоја од следниве матрици:

$$\text{а)}\ A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{б)}\ B=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

28. Докажи дека $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ имаат различни карактеристични полиноми, но имаат ист минимален полином.

29. Нека A е квадратна матрица од ред n за која што $A^k=0$ за некое $k>n$. Покажи дека $A^n=0$.

30. Покажи дека матрицата A и нејзината транспонирана матрица A^t имаат ист минимален полином.

31. Нека $f(t)$ е моничен иредуцибилен полином за кој $f(T)=0$ каде што $T:V\to V$ е линеарен оператор. Покажи дека $f(t)$ е минимален полином на T.

32. Разгледај ја блок матрицата $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Покажи дека

$$tI-M=\begin{pmatrix} tI-A & -B \\ -C & tI-D \end{pmatrix}$$

е карактеристичната матрица на M.

33. Нека T е линеарен оператор на векторски простор V со конечна димензија. Нека W е потпростор од V којшто е инваријантен при T, односно $T(W)\subset W$. Нека $T_W : W \to W$ е рестрикција на T на W.

а) Покажи дека карактеристичниот полином на T_W го дели карактеристичниот полином на T.

б) Покажи дека минималниот полином на T_W го дели минималниот полином на T.

34. Нека $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ е матрица над полето реални броеви $\mathbb{R}$. Најди потребен и доволен услов по којшто матрицата A може да се дијагонализира, односно има два линеарно независни сопствени вектори.

35. Нека $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ е матрица над полето комплексни броеви $\mathbb{C}$. Најди потребен и доволен услов по којшто матрицата A може да се дијагонализира, односно има два линеарно независни сопствени вектори.

10. КАНОНИЧНИ ФОРМИ

10.1 Вовед

Нека T е линеарен оператор на векторски простор со конечна димензија. Како што може да се види во поглавје 6, T може да нема дијагонална матрична репрезентација. Сепак, сеуште е можно да се поедностави матричната репрезентација на T на повеќе начини. Ова е главната тема на ова поглавје. Специјално, ќе ја добиеме **основната теорема за декомпозиција**, како и триаголната форма, Жордановата канонична форма и рационалната канонична форма.

Ќе покажеме дека триаголната форма и Жордановата канонична форма за T постојат ако и само ако карактеристичниот полином $\Delta(t)$ на T ги има сите свои корени во $\mathbb{K}$. Ова секогаш важи ако $\mathbb{K}$ е полето комплексни броеви $\mathbb{C}$, но не мора да важи ако $\mathbb{K}$ е полето реални броеви $\mathbb{R}$.

Исто така, ќе ја воведеме идејата за фактор простор. Ова е многу моќна алатка, и таа ќе се користи во доказ за постоење на триаголната форма и рационалната канонична форма.

10.2. Триаголна форма

Нека T е линеарен оператор на n-димензионален векторски простор V. Да претпоставиме дека T може да се претстави со триаголната матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тогаш карактеристичниот полином на T е производ на линеарни фактори, односно

$$\Delta(t) = \det(tI - A) = (t - a_{11})(t - a_{22})\cdots(t - a_{nn})$$

Важи и обратното, што е искажано во следната важна теорема чијшто доказ ќе го изложиме подоцна.

Теорема 10.1. Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор чијшто карактеристичен полином се разложува на линеарни полиноми. Тогаш, постои база на V во однос која што T се претставува со триаголна матрица.

Теорема 10.1. (**Алтернативен облик**) Нека A е квадратна матрица чијшто карактеристичен полином се разложува на линеарни полиноми. Тогаш A е слична на триаголна матрица, односно постои инверзибилна матрица P така што $P^{-1}AP$ е триаголна матрица.

Велиме дека операторот T може да се доведе во **триаголна форма**, ако може да се претстави со триаголна матрица. Да забележиме дека во овој случај, сопствените вредности на T се токму елементите кои што се појавуваат на главната дијагонална. Ќе дадеме примена на оваа забелешка.

Пример. Нека A е квадратна матрица над полето комплексни броеви $\mathbb{C}$. Да претпоставиме дека λ е сопствена вредност на матрицата A^2. Ќе покажеме дека $\sqrt{\lambda}$ или $\sqrt{-\lambda}$ е сопствена вредност на матрицата A. Заради теорема 10.1 знаеме дека матрицата A е слична со триаголна матрица

$$B = \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \dots & * \\ & \mu_2 & \dots & * \\ & & \dots & \dots \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Тогаш матрицата A^2 е слична на матрицата

$$B^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & * & \dots & * \\ & \mu_2^2 & \dots & * \\ & & \dots & \dots \\ & & & \mu_n^2 \end{pmatrix}$$

Бидејќи слични матрици имаат исти сопствени вредности, имаме дека $\lambda = \mu_i^2$ за некое $i = 1, \dots, n$. Оттука наоѓаме дека $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ или $\mu_i = \sqrt{-\lambda}$, односно $\sqrt{\lambda}$ или $\sqrt{-\lambda}$ е сопствена вредност на A. ♦

10.3 Инваријантност

Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор. Потпросторот W од V се вика **инваријантен** при T или T-**инваријантен** ако T го пресликува W во себе, односно ако $v \in W$ тогаш $T(v) \in W$. Во овој случај, рестрикцијата на T на W дефинира линеарен оператор на W, односно T индуцира линеарен оператор $\hat{T}: W \to W$ дефиниран со

$$\hat{T}(w) = T(w), \text{ за секое } w \in W$$

Пример. Нека $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е линеарниот оператор, којшто го ротира секој вектор v околу z-оската за агол θ, односно

$$T(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)$$

Да забележете дека секој вектор $w = (a,b,0)$ во xy-рамнината, односно во потпросторот

$$W = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

останува во W при пресликувањето T. Оттука заклучуваме дека W е T-инваријантен потпростор.

Да забележиме исто така дека z-оската, односно потпросторот

$$U = \{(0,0,c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

е инваријантен потпростор при T. Уште повеќе, рестрикцијата на T во потпросторот W го ротира секој вектор околу координатниот почеток O, и рестрикцијата на T на потпросторот U е идентичното пресликување на U. ♦

Пример. Ненултите сопствени вектори на линеарен оператор $T: V \to V$ може да се карактеризираат како генератори на T-инваријантите еднодимензионални потпростори. За таа цел да претпоставиме дека

$$T(v) = \lambda v, \ v \neq 0$$

Тогаш потпросторот

$$W = \{kv \mid k \in K\}$$

е еднодимензионален потпростор генериран со v, и е инваријантен при T, бидејќи

$$T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = (k\lambda)v \in W$$

Обратно, да претпоставиме дека $\dim U = 1$ и $u \neq 0$ го генерира U, каде што U е инваријантен потпростор при T. Тогаш $T(u) \in U$ па според тоа $T(u)$ е мултипл на u, односно $T(u) = \mu u$. Оттука заклучуваме дека u е сопствен вектор на T. ♦

Следната теорема ни дава една важна класа на инваријантни потпростори.

Теорема 10.2. Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор, а нека $f(t)$ е полином. Тогаш јадрото на $f(T)$ е инваријантен потпростор при T.

Доказ. Да претпоставиме дека $v \in \operatorname{Ker} f(T)$, односно дека важи $f(T)(v) = 0$. Треба да покажеме дека $T(v)$ исто така припаѓа на јадрото на $f(T)$, односно дека важи $f(T)(T(v)) = 0$. Бидејќи $f(t)t = tf(t)$ имаме дека $f(T)T = Tf(T)$. Така, наоѓаме дека

$$f(T)T(v) = Tf(T)(v) = T(0) = 0$$

што требаше да се докаже. ■

Поимот инваријантност е поврзан со матрична репрезентација како што следува.

Теорема 10.3. Да претпоставиме дека W е инваријантен потпростор на $T : V \to V$. Тогаш T има блок матрична репрезентација

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

каде што A е матричната репрезентација на рестрикцијата на T на W.

Доказ. Избираме база $\{w_1, \dots, w_r\}$ на W и ја прошируваме до база $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}$ на V. Имаме дека

$$\hat{T}(w_1) = T(w_1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{1r}w_r$$

$$\hat{T}(w_2) = T(w_2) = a_{21}w_1 + \cdots + a_{2r}w_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{T}(w_r) = T(w_r) = a_{r1}w_1 + \cdots + a_{rr}w_r$$

$$T(v_1) = b_{11}w_1 + \cdots + b_{1r}w_r + c_{11}v_1 + \cdots + c_{1s}v_s$$

$$T(v_2) = b_{21}w_1 + \cdots + b_{2r}w_r + c_{21}v_1 + \cdots + c_{2s}v_s$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(v_s) = b_{s1}w_1 + \cdots + b_{sr}w_r + c_{s1}v_1 + \cdots + c_{ss}v_s$$

Но матрицата на T во однос на оваа база е транспонираната матрица на матрицата на коефициенти во погорниот систем на равенки. Затоа, таа има облик

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

каде што A е транспонираната матрица на матрицата на коефициенти за очигледниот потсистем. Од исти причини A е матрица на $\hat{T}$ во однос на базата $\{w_1, \dots, w_r\}$ на W. ■

10.4. Инваријантна декомпозиција во облик на директни збирови

Векторски простор V се нарекува **директен збир** од неговите потпростори $W_1, W_2, \dots, W_r$ и запишуваме

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$$

ако секој вектор $v \in V$ може да се запише на единствен начин во обликот

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_r$$

каде што $w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2, \ldots, w_r \in W_r$.

Се применува следнава теорема.

Теорема 10.4. Нека $W_1, W_2, \ldots, W_r$ се потпростори на V и нека

$$\{w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n_1}\},\ \{w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n_2}\},\ \ldots,\ \{w_{r1}, w_{r2}, \ldots, w_{rn_r}\}$$

се бази на $W_1, W_2, \ldots, W_r$, соодветно. Тогаш V е директен збир на потпросторите $W_1, W_2, \ldots, W_r$ ако и само ако унијата

$$B = \{w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n_1}, w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n_2}, \ldots, w_{r1}, w_{r2}, \ldots, w_{rn_r}\}$$

е база на V.

Доказ. Да претпоставиме дека B е база на V. Тогаш, за произволно $v \in V$ имаме дека

$$v = a_{11}w_{11} + \cdots + a_{1n_1}w_{1n_1} + \cdots + a_{r1}w_{r1} + \cdots + a_{rn_r}w_{rn_r} =$$
$$= w_1 + w_2 + \cdots + w_r$$

каде што $w_i = a_{i1}w_{i1} + \cdots + a_{in_i}w_{in_i} \in W_i$.

Следно ќе покажеме дека претставувањето е единствено. За таа цел да претпоставиме

$$v = w_1' + w_2' + \cdots + w_r'$$

каде што $w_i' \in W_i$. Бидејќи имаме дека $\{w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in_i}\}$ е база на W_i имаме дека $w_i' = b_{i1}w_{i1} + b_{i2}w_{i2} + \ldots b_{in_i}w_{in_i}$, и според тоа добиваме дека

$$v = b_{11}w_{11} + \cdots + b_{1n_1}w_{1n_1} + \cdots + b_{r1}w_{r1} + \cdots + b_{rn_r}w_{rn_r}$$

Бидејќи B е база на V имаме дека $a_{ij} = b_{ij}$, за секое i и за секое j. Оттука наоѓаме дека $w_i = w_i'$, па затоа претставувањето на v е единствено. Според тоа, V е директен збир на потпросторите W_i.

Обратно, да претпоставиме дека V е директна сума на W_i. Тогаш за било кое $v \in V$ имаме дека

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_r$$

каде што $w_i \in W_i$. Бидејќи $\{w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in_i}\}$ е база на W_i имаме дека секое w_i е линеарна комбинација на w_{ij_i} и затоа v е линеарна комбинација на елементите на B. Според тоа, заклучуваме дека B го генерира V. Сега ќе покажеме дека B е линеарно независно множество. Да претпоставиме дека

$$a_{11}w_{11} + \cdots + a_{1n_1}w_{1n_1} + \cdots + a_{r1}w_{r1} + \cdots + a_{rn_r}w_{rn_r} = 0$$

Да забележиме дека $a_{i1}w_{i1} + \cdots + a_{in_i}w_{in_i} \in W_i$. Исто така, имаме дека $0 = 0 + 0 + \cdots + 0$, каде што $0 \in W_i$. Бидејќи такво претставување за 0 е единствено имаме дека

$$a_{i1}w_{i1} + \cdots + a_{in_i}w_{in_i} = 0, \text{ за } i = 1, \ldots, r$$

Линеарната независност на базите $\{w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in_i}\}$ повлекува дека сите коефициенти во погорната линеарна комбинација се еднакви на 0, односно

$$a_{i1} = \cdots = a_{in_i} = 0, \text{ за секое } i = 1, \ldots, r$$

Според тоа, B е линеарно независно множество од каде што следува дека B е база на просторот V. ■

Сега претпоставувме дека $T : V \to V$ е линеарен оператор и V е директен збир на ненулти T-инваријантни потпростори $W_1, W_2, \ldots, W_r$, односно

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r \quad \text{и} \quad T(W_i) \subseteq W_i, \text{ за секое } i = 1, \ldots, r$$

Нека T_i е рестрикцијата на T на W_i. Тогаш велиме дека T е **декомпониран** на операторите T_i или T е **директен збир** на рестрикциите T_i, и запишуваме $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r$. Исто така, за потпросторите $W_1,\dots,W_r$ велиме дека го **редуцираат** T или дека формираат T-инваријантна **декомпозиција на директни збирови** на V.

Да разгледаме специјален случај каде што два потпростори U и W го редуцираат операторот $T: V \to V$. Да претпоставиме, на пример, дека $\dim U = 2$ и $\dim V = 3$, и дека $\{u_1, u_2\}$ и $\{w_1, w_2, w_3\}$ се бази на U и W, соодветно. Ако со T_1 и T_2 ги означиме рестрикциите на T на U и W, соодветно тогаш имаме дека

$$T_1(u_1) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \text{ и } T_1(u_2) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2,$$

$$T_2(w_1) = b_{11}w_1 + b_{12}w_2 + b_{13}w_3$$

$$T_2(w_2) = b_{21}w_1 + b_{22}w_2 + b_{23}w_3$$

$$T_2(w_3) = b_{31}w_1 + b_{32}w_2 + b_{33}w_3$$

Соодветно, наоѓаме дека матриците

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

се матрични претстави на T_1 и T_2, соодветно. Според погорната теорема наоѓаме дека $\{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ е база на просторот V. Бидејќи имаме дека $T(u_i) = T_1(u_i)$ и $T(w_j) = T_2(w_j)$, може да заклучиме дека матрицата на T во однос на споменатата база на V е блок дијагоналната матрица

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Со генерализација на горенаведените аргументи доаѓаме до следната теорема.

Теорема 10.5. Нека $T: V \to V$ е линеарен оператор и нека V е директен збир на T-инваријантни потпростори $W_1,\dots,W_r$. Ако A_i е матрична репрезентација на рестрикцијата на T на W$_i$, тогаш T може да се претстави со блок дијагоналната матрица

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_r \end{pmatrix}$$

За блок дијагоналната матрица M со дијагонални матрици $A_1,\dots,A_r$ понекогаш велиме дека е **директен збир** од матриците $A_1,\dots,A_r$ и запишуваме $M=A_1\oplus\cdots\oplus A_r$.

10.5 Основна декомпозиција

Следната теорема покажува дека секој линеарен оператор $T:V\to V$ се декомпонира на оператори чии што минимални полиноми се степени од иредуцибилни полиноми. Ова е првиот чекор за добивање на канонична форма за T.

Теорема 10.6 (**Основна декомпозиција**) Нека $T:V\to V$ е линеарен оператор со минимален полином

$$m(t)=f_1(t)^{n_1}f_2(t)^{n_2}\cdots f_r(t)^{n_r}$$

каде што $f_1(t),f_2(t),\dots,f_r(t)$ се различни монични иредуцибилни полиноми. Тогаш V е директен збира на T-инваријантните потпростори $W_1,\dots,W_r$, каде што W$_i$ е јадрото на $f_i(T)^{n_i}$. Уште повеќе, $f_i(T)^{n_i}$ е минималниот полином на рестрикцијата на T на W$_i$.

Доказот на теоремата е последица од следниве две теореми.

Теорема 10.7. Нека $T:V\to V$ е линеарен оператор и нека $f(t)=g(t)h(t)$ се полиноми такви што $f(T)=0$ и $g(t)$ и $h(t)$ се заемно прости. Тогаш V е директен збир на T-инваријантните потпростори U и W, каде што $U = \operatorname{Ker} g(T)$ и $W = \operatorname{Ker} h(T)$.

Доказ. Најнапред да забележиме дека U и W се T-инваријантни потпростори заради теорема 10.2. Понатаму, бидејќи $g(t)$ и $h(t)$ се заемно прости полиноми, постојат полиноми $r(t)$ и $s(t)$ така што важи

$$r(t)g(t) + s(t)h(t) = 1$$

Оттука за операторот T имаме дека

$$r(T)g(T) + s(T)h(T) = I \qquad (1)$$

Нека $v \in V$. Тогаш заради (1) имаме дека

$$v = r(T)g(T)v + s(T)h(T)v$$

Но, првиот собирок во овој збир припаѓа на $W = \operatorname{Ker} h(T)$, бидејќи

$$h(T)r(T)g(T)v = r(T)g(T)h(T) = r(T)f(T)v = r(T)0v = 0$$

Слично, вториот собирок припаѓа на U. Оттука добиваме дека V е збир на потпросторите U и W.

За да докажеме дека $V = U \oplus W$, мора да докажеме дека збирот $v = u + w$ каде што $u \in U$ и $w \in W$, е еднозначно определен со v. Со примена на операторот $r(T)g(T)$ на $v = u + w$ и со примена на фактот дека $g(T)u = 0$, добиваме дека

$$r(T)g(T)v = r(T)g(T)u + r(T)g(T)w = r(T)g(T)w$$

Исто така, со примена на (1) на w и со примена на фактот дека $h(T)w = 0$, добиваме дека

$$w = r(T)g(T)w + s(T)h(T)w = r(T)g(T)w$$

Од двете од горенаведени формули заклучуваме дека

$$w = r(T)g(T)v$$

па според тоа w е еднозначно определен со v. Слично, u е еднозначно определен со v. Оттука следува дека $V = U \oplus W$, што требаше да се докаже. ■

Теорема 10.8. Ако во теорема 10.7 $f(t)$ е минималниот полином на T и $g(t)$ и $h(t)$ се моници, тогаш $g(t)$ е минималниот полином на рестрикцијата T_1 на T на U, и $h(t)$ е минималниот полином на рестрикцијата T_2 на T на W.

Доказ. Нека $m_1(t)$ и $m_2(t)$ се минималните полиноми на T_1 и T_2, соодветно. Да забележиме дека $g(T_1) = 0$ и $h(T_2) = 0$, бидејќи $U = \mathrm{Ker} g(T)$ и $W = \mathrm{Ker} h(T)$. Според тоа, имаме дека

$$m_1(t) \text{ го дели } g(t) \quad \text{и} \quad m_2(t) \text{ го дели } h(t) \qquad (2)$$

Затоа $f(t)$ е најмалиот полином кој што е делив со $m_1(t)$ и $m_2(t)$. Но, $m_1(t)$ и $m_2(t)$ се заемно прости бидејќи $g(t)$ и $h(t)$ се заемно прости. Според тоа, имаме дека $f(t) = m_1(t)m_2(t)$. Исто така, имаме дека $f(t) = g(t)h(t)$. Од овие две равенки, заедно со (2), и фактот дека $g(t)$ и $h(t)$ се монични полиноми следува дека

$$g(t) = m_1(t) \text{ и } h(t) = m_2(t)$$

што требаше да се докаже. ■

Доказ на теорема 10.6. Доказот ќе го спроведеме со индукција по r. Случајот $r = 1$ е тривијален. Да претпоставиме дека теоремата е докажана за $r - 1$. Според теорема 10.7, V може да се запише како директен збор на T-инваријантните потпростори W_1 и V_1, каде што W_1 е јадрото на $f_1(T)^{n_1}$ и каде што V_1 е јадрото на

$f_2(T)^{n_2}\cdots f_r(T)^{n_r}$. Заради теорема 10.8, минималниот полином на рестрикциите на T на W₁ и V₁ се $f_1(t)^{n_1}$ и $f_2(t)^{n_2}\cdots f_r(t)^{n_r}$, соодветно.

Да ја означиме со T_1 рестрикцијата на T на V_1. Според индуктивната претпоставка имаме дека V_1 е директен збир на потпросторите $W_2,\dots,W_r$, така што W_i е јадрото на $f_i(T_1)^{n_i}$ и така што $f_i(T)^{n_i}$ е минималниот полином за рестрикцијата на T_1 на W_i. Но, јадрото на $f_i(T)^{n_i}$, за $i=2,\dots,r$, се содржи во V_1, односно

$$\mathrm{Ker} f_i(T)^{n_i}\subseteq V_1,\text{ за } i=2,\dots,r,$$

бидејќи $f_i(t)^{n_i}$ го дели $f_2(t)^{n_2}\cdots f_r(t)^{n_r}$. Така, јадрото на $f_i(T)^{n_i}$ е еднакво на јадрото на $f_i(T_1)^{n_i}$ што е W_i, односно

$$\mathrm{Ker} f_i(T)^{n_i}=\mathrm{Ker} f_i(T_1)^{n_i}=W_i$$

Исто така, рестрикцијата на T на W_i е еднаква со рестрикцијата T_1 на W_i, за $i=2,\dots,r$. Оттука имаме дека $f_i(t)^{n_i}$ е минималниот полином за рестрикцијата на T на W_i. Така, добиваме дека $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_r$ што е бараната декомпозиција на T. ■

Исто така, ќе ја користиме основната теорема за декомпозиција за да ја докажеме следната корисна карактеризација на оператори кои што имаат дијагонална матрична репрезентација.

Теорема 10.9. Линеарен оператор $T:V\to V$ има дијагонална матрична репрезентација ако и само ако неговиот минимален полином $m(t)$ е производ од различни линеарни полиноми.

Доказ. Да претпоставиме дека $m(t)$ е производ на различни линеарни полиноми, на пример, нека

$$m(t)=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r)$$

каде што $\lambda_i \neq \lambda_j$, за $i \neq j$. Според основната теорија за декомпозиција имаме дека V е директен збир на потпростори

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r, \text{ каде што } W_i = \mathrm{Ker}(T - \lambda_i I).$$

Затоа, ако $v \in W_i$, тогаш имаме дека $(T - \lambda_i I)(v) = 0$ од каде што следува дека $T(v) = \lambda_i v$. Со други зборови, секој вектор во W_i е сопствен вектор што соодветствува на сопствената вредност λ_i. Според теорема 10.4, унијата на базите на потпросторите $W_1,...,W_r$ е база за просторот V. Оваа база се состои од сопствени вектори, па според тоа заклучуваме дека операторот T има дијагонална матрична репрезентација.

Обратно, да претпоставиме дека T има дијагонална матрична репрезентација, односно дека просторот V има база која се состои од сопствени вектори на T. Нека $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ се соодветните различни сопствени вредности на T. Тогаш операторот

$$f(T) = (T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)\cdots(T - \lambda_s I)$$

го пресликува секој базен вектор во 0. Според тоа, добиваме дека $f(T) = 0$. Затоа минималниот полином $m(t)$ на T го дели полиномот

$$f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\cdots(t - \lambda_s)$$

од каде што заклучуваме дека минималниот полином $m(t)$ на T е производ на различни линеарни полиноми. ■

Теорема 10.9. (**Алтернативен облик**) Матрица A е слична на дијагонална матрица ако и само ако е нејзиниот минималниот полином е производ на различни линеарни полиноми.

Пример. Да претпоставиме дека $A \neq I$ е квадратна матрица за која што важи $A^3 = I$. Да определиме дали A е слична на дијагонална матрица ако A е матрица над:

(i) полето реални броеви $\mathbb{R}$, (ii) полето комплексни броеви $\mathbb{C}$.

Бидејќи $A^3 = I$ имаме дека A е нула на полиномот

$$f(t) = t^3 - 1 = (t-1)(t^2 + t + 1)$$

Минималниот полином $m(t)$ на матрицата A не може да биде $t-1$ бидејќи $A \neq I$. Оттука, наоѓаме дека

$$m(t) = t^2 + t + 1 \text{ или } m(t) = t^3 - 1$$

Бидејќи ниту еден од полиномите не е производ на линеарни полиноми над полето реални броеви $\mathbb{R}$, заклучуваме дека матрицата A не може да се дијагонализира над $\mathbb{R}$. Од друга страна, секој од полиномите е производ со различни линеарни полиноми над $\mathbb{C}$. Оттука, заклучуваме дека матрицата A може да се дијагонализира над полето комплексни броеви $\mathbb{C}$. ♦

10.6. Нилпотентни оператори

Линеарен оператор $T : V \to V$ се нарекува **нилпотентен** ако $T^n = 0$ за некој позитивен цел број n. Индексот к се нарекува **индекс на нилпотентност** на T ако $T^k = 0$ но $T^{k-1} \neq 0$.

Аналогно, квадратната матрица A се нарекува **нилпотентна** ако $A^n = 0$ за некој позитивен цел број n, и к се **нарекува индекс на нилпотентност** на матрицата A ако $A^k = 0$ но $A^{k-1} \neq 0$.

Јасно е дека минималниот полином на нилпотентен оператор (матрица) со индекс k е $m(t) = t^k$. Оттука заклучуваме дека неговата единствена сопствена вредност е 0.

Теорема 10.10. Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор. Ако за $v \in V$, $T^k(v) = 0$ но $T^{k-1}(v) \neq 0$, тогаш важат следниве тврдења:

(i) Множеството $S = \{v, T(v), \ldots, T^{k-1}(v)\}$ е линеарно независно.

(ii) Потпросторот W генериран од S е T-инваријантен.

(iii) Рестрикцијата $\hat{T}$ на T на W е нилпотентна со индекс k.

(iv) Во однос на базата $S = \{T^{k-1}(v), \dots, T(v), v\}$ на W, матрицата на T е квадратна матрица од ред k со индекс k од облик

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказ. (i) Да претпоставиме дека

$$av + a_1 T(v) + a_2 T^2(v) + \dots + a_{k-1} T^{k-1}(v) = 0 \qquad (1)$$

Применувајќи го T^{k-1} на (1) и користејќи дека $T^k(v) = 0,$ добиваме дека $aT^{k-1}(v) = 0.$ Бидејќи $T^{k-1}(v) \neq 0$ заклучуваме дека $a = 0.$ Сега, со примена на T^{k-2} на (1) и користејќи дека $T^k(v) = 0$ и $a = 0,$ добиваме дека $a_1 T^{k-1}(v) = 0.$ Бидејќи $T^{k-1}(v) \neq 0$ заклучуваме дека $a_1 = 0.$ Понатаму, со примена на T^{k-3} на (1) и користејќи дека $T^k(v) = 0$ и $a = a_1 = 0,$ добиваме дека $a_2 T^{k-1}(v) = 0.$ Бидејќи $T^{k-1}(v) \neq 0$ заклучуваме дека $a_2 = 0.$ Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека

$$a = a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$$

од каде што следува дека S е линеарно независно множество.

(ii) Нека $v \in W.$ Тогаш имаме дека

$$v = bv + b_1 T(v) + b_2 T^2(v) + \dots + b_{k-1} T^{k-1}(v)$$

Користејќи го фактот дека $T^k(v) = 0$ наоѓаме дека

$$T(v) = bT(v) + b_1 T^2(v) + \dots + b_{k-2} T^{k-1}(v) \in W$$

Според тоа, заклучуваме дека W е T-инваријантен потпростор.

(iii) Според претпоставката имаме дека $T^k(v)=0$. Тогаш

$$\hat{T}^k(T^i(v)) = T^{k+1}(v) = 0, \text{ за } i = 0,1,\dots,k-1$$

Така, со примена на $\hat{T}^k$ на секој генератор на W, добиваме дека $\hat{T}^k = 0$, па според тоа $\hat{T}^k$ е нилпотентен оператор со индекс најмногу k. Од друга страна, имаме дека

$$\hat{T}^{k-1}(v) = T^{k-1}(v) \neq 0,$$

што значи дека $\hat{T}^k$ е нилпотентен оператор со индекс точно k.

(iv) За базата $\{T^{k-1}(v),\dots,T(v),v\}$ на W, имаме дека

$$\begin{aligned}
&\hat{T}(T^{k-1}(v)) = T^k(v) = 0\\
&\hat{T}(T^{k-2}(v)) = \qquad\quad T^{k-1}(v)\\
&\hat{T}(T^{k-3}(v)) = \qquad\qquad\quad T^{k-2}(v)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\hat{T}(T(v)) = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad T^2(v)\\
&\hat{T}(v) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad T(v)
\end{aligned}$$

Оттука заклучуваме дека матрицата на T во однос на разгледуваната база е

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

што требаше да се докаже. ■

Теорема 10.11. Нека $T:V\to V$ е линеарен оператор и нека $U = \mathrm{Ker}T^i$ и $W = \mathrm{Ker}T^{i+1}$. Тогаш точни се следниве тврдења:

(i) $U \subset W$ (ii) $T(W) \subset U$

Доказ. (i) Да претпоставиме дека $u \in U = \mathrm{Ker}T^i$. Тогаш имаме дека $T^i(u) = 0$, од каде што следува дека $T^{i+1}(u) = T(T^i(u)) = T(0) = 0$.

Оттука заклучуваме дека $u \in \mathrm{Ker}T^{i+1} = W$. Но, ова е точно за секое $u \in U$, па според тоа наоѓаме дека $U \subset W$.

(ii) Слично, ако $w \in W = \mathrm{Ker}T^{i+1}$ имаме дека $T^{i+1}(w) = 0$. Тогаш $T^{i+1}(w) = T^i(T(w)) = T^i(0) = 0$, од каде што следува дека $T(W) \subset U$. ■

Теорема 10.12. Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор и нека $X = \mathrm{Ker}T^{i-2}$, $Y = \mathrm{Ker}T^{i-1}$ и $Z = \mathrm{Ker}T^i$. Ако

$$\{u_1,\dots,u_r\},\ \{u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_s\},\ \{u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_s,w_1,\dots,w_t\}$$

се бази на X, Y и Z, соодветно, тогаш множеството

$$S = \{u_1,\dots,u_r,T(w_1),\dots,T(w_t)\}$$

се содржи во Y и е линеарно независно.

Доказ. Да забележиме дека заради претходната теорема имаме дека $X \subset Y \subset Z$. Исто така, заради претходната теорема имаме дека $T(Z) \subset Y$, па според тоа $S \subset Y$. Сега, да претпоставиме дека S е линеарно зависно. Тогаш постои линеарна комбинација

$$a_1u_1 + \dots + a_ru_r + b_1T(w_1) + \dots + b_tT(w_t) = 0$$

каде што барем еден коефициент е различен од нула. Понатаму, бидејќи множеството $\{u_1,\dots,u_r\}$ е независно, барем еден од коефициентите $b_1,\dots,b_t$ мора да биде различен од нула. Од последното равенство наоѓаме дека

$$b_1T(w_1) + \dots + b_tT(w_t) = -a_1u_1 - \dots - a_ru_r \in X = \mathrm{Ker}T^{i-2}$$

Оттука следува дека

$$T^{i-2}(b_1T(w_1) + \dots + b_tT(w_t)) = 0$$

што значи дека

$$T^{i-1}(b_1w_1 + \cdots + b_tw_t) = 0$$

Од последното равенство наоѓаме дека

$$b_1w_1 + \cdots + b_tw_t \in Y = \operatorname{Ker} T^{i-1}$$

Бидејќи множеството $\{u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s\}$ го генерира Y, постои линеарна комбинација од векторите $\{u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s,w_1,\ldots,w_t\}$ каде што барем еден од коефициентите, поточно барем еден од коефициентите $b_1,\ldots,b_t$ не е нула. Ова е во спротивност со фактот дека множеството $\{u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_s,w_1,\ldots,w_t\}$ е линеарно независно. Оттука следува дека S е линеарно независно множество. ■

Теорема 10.13. Нека $T : V \to V$ е нилпотентен оператор со индекс k. Тогаш T има блок дијагонална матрична репрезентација во која секој дијагонален елемент е од обликот

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

односно, сите елементи на N се нули, освен елементите над главната дијагонала кои што се единици. Постои барем еден елемент N од ред k, а сите други елементи N се со ред помал или еднаков на k. Бројот на елементи N од секој можен ред е еднозначно одреден со T. Вкупниот број на елементи N од сите можни редови е еднаков на нуларноста на T.

Доказ. Нека $\dim V = n$ и нека

$$W_1 = \operatorname{Ker} T,\ W_2 = \operatorname{Ker} T^2, \ldots,\ W_k = \operatorname{Ker} T^k$$

Ставаме $m_i = \dim W_i$, за $i = 1,\dots,k$. Бидејќи Т има индекс k, имаме дека $W_k = V$ и $W_{k-1} \neq V$ од каде што заклучуваме дека $m_{k-1} < m_k = n$. Заради теорема 10.11, имаме дека

$$W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_k = V$$

Затоа, со индукција, може да се избереме база $\{u_1,\dots,u_n\}$ на V така што $\{u_1,\dots,u_{i_m}\}$ е база на W_i.

Сега, избираме нова база на V во однос на која Т ја го има бараниот облик. Згодно е да ги означиме членовите на оваа нова база со подреден пар од индекси. За таа цел ставаме

$$v(1,k) = u_{m_{k-1}+1},\ v(2,k) = u_{m_{k-1}+2},\ \dots,\ v(m_k - m_{k-1},k) = u_{m_k}$$

и ставаме

$$v(1,k-1) = Tv(1,k),\ v(2,k-1) = Tv(2,k),\ \dots,$$

$$v(m_k - m_{k-1},k-1) = Tv(m_k - m_{k-1},k)$$

Според претходната теорема имаме дека

$$S_1 = \{u_1,\dots,u_{m_{k-2}},v(1,k-1),\dots,v(m_k - m_{k-1},k-1)\}$$

е линеарно независно подмножество на W_{k-1}. Го прошируваме S_1 до база на W_{k-1} со додавање на нови елементи, ако е потребно, и ги означуваме со

$$v(m_k - m_{k-1} + 1,k-1),\ \ v(m_k - m_{k-1} + 2,k-1),\ \dots,\ v(m_{k-1} - m_{k-2},k-1)$$

Понатаму, ставаме

$$v(1,k-2) = Tv(1,k-1),\ v(2,k-2) = Tv(2,k-1),\ \dots,$$

$$v(m_{k-1} - m_{k-2},k-2) = Tv(m_{k-1} - m_{k-2},k-1)$$

Повторно, според претходната теорема имаме дека

$$S_2 = \{u_1,\dots,u_{m_{k-3}},v(1,k-2),\dots,v(m_{k-1} - m_{k-2},k-2)\}$$

е линеарно независно подмножество на W_{k-2}. Го прошируваме S_2 до база на W_{k-2} со додавање на нови елементи, ако е потребно, и ги означуваме со

$$v(m_{k-1}-m_{k-2}+1,k-2),\ v(m_{k-1}-m_{k-2}+2,k-2),\ \dots,\ v(m_{k-2}-m_{k-3},k-2)$$

Продолжувајќи на овој начин добиваме база за V, која што е згодно да ја индексираме како што следува

$v(1,k),\dots\dots,v(m_k-m_{k-1},k)$

$v(1,k-1),\dots,v(m_k-m_{k-1},k-1),\dots,v(m_{k-1}-m_{k-2},k-1)$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$v(1,2),\dots,v(m_k-m_{k-1},2),\dots,v(m_{k-1}-m_{k-2},2),\dots,v(m_2-m_1,2)$

$v(1,1),\dots,\ v(m_k-m_{k-1},1),\dots,v(m_{k-1}-m_{k-2},1),\dots,\ v(m_2-m_1,1),\dots,v(m_1,1)$

Долниот ред е база на W_1, нему претходниот е база на W_2 и така натаму. Но, за нас е важно дека T го пресликува секој вектор во векторот веднаш под него во табелата или во 0 доколку векторот е во долниот ред. Поточно, имаме дека

$$Tv(i,j)=\begin{cases} v(i,j-1), \text{ за } j>1 \\ 0, \text{ за } j=1 \end{cases}$$

Сега, според теорема 10.10 (iv) имеме дека T го има бараниот облик ако $v(i,j)$ се подредени лексикографски: започнувајќи со $v(1,1)$ и поместување по првата колона до $v(1,k)$, а потоа прескокнување до $v(2,k)$ и поместување по втората колона што е можно повеќе, и така натаму.

Покрај тоа, ќе имаме точно

m_k-m_{k-1} дијагонални елементи од ред k

$(m_{k-1}-m_{k-2})-(m_k-m_{k-1})=2m_{k-1}-m_k-m_{k-2}$ дијагонални елементи од ред $k-1$

....

$2m_2-m_1-m_3$ дијагонални елементи од ред 2

$2m_1-m_2$ дијагонални елементи од ред 1

како што може да се прочита директно од табелата. Специјално, бидејќи броевите $m_1,\dots,m_k$ се еднозначно определени со T, бројот на дијагонални елементи од секој ред е еднозначно определен со T. На крај, идентитетот

$$m_1=(m_k-m_{k-1})+(2m_{k-1}-m_k-m_{k-2})+\cdots+(2m_2-m_1-m_3)+(2m_1-m_2)$$

покажува дека нуларноста m_1 на T е вкупниот број на дијагонални елементи на T. ■

10.7 Жорданова канонична декомпозиција

Оператор T може да се доведе во Жорданова канонична форма, ако карактеристичниот полином и минималниот полином може да се разложат на линеарни полиноми. Ова е секогаш возможно ако $\mathbb{K}$ е полето комплексни броеви $\mathbb{C}$. Во општ случај, ако $\mathbb{K}$ не е алгебарски затворено поле, секогаш може да го прошириме до алгебарски затворено поле, односно до поле во кое што карактеристичниот полином и минималниот полином може да се разложат на линеарни полиноми. Според тоа, во поширока смисла, секој оператор има Жорданова канонична форма. Аналогно, секоја квадратна матрица може да се доведе во Жорданова канонична форма.

Следната теорема ја опишува Жордановата канонска форма J на линеарен оператор T.

Теорема 10.14. Нека $T:V\to V$ е линеарен оператор чиишто карактеристичен полином и минимален полином се, соодветно,

$$\Delta(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r}, \text{ и}$$

$$m(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r}$$

каде што $\lambda_i\neq\lambda_j$, за $i\neq j$. Тогаш T има блок дијагонална матрична репрезентација J во која секој дијагонален елемент е од облик

$$J_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}$$

За секое λ_i соодветните блокови J_{ij} ги имаат следниве својства:

(i) Има барем еден блок J_{ij} од ред m_i, и сите други блокови J_{ij} се од ред помал или еднаков на m_i.

(ii) Збирот на редовите на блоковите J_{ij} е n_i.

(iii) Бројот на блокови J_{ij} е еднаков на геометриската кратност на λ_i.

(iv) Бројот на блокови J_{ij} од секој можен ред е еднозначно определен со T.

Доказ. Со примарната на теоремата за основна декомпозиција имаме дека T се декомпонира во облик

$$T=T_1\oplus T_2\oplus\cdots\oplus T_r$$

каде што $(t-\lambda_i)^{m_i}$ е минималниот полином на T_i. Затоа имаме дека

$$(T_1-\lambda_1 I)^{m_1}=0,\ (T_2-\lambda_2 I)^{m_2}=0,\dots,(T_r-\lambda_r I)^{m_1}=0,$$

Ставаме $N_i=T_i-\lambda_i I.$ Тогаш, за $i=1,2\dots,r$ имаме дека

$$T_i = N_i + \lambda_i I, \text{ каде што } N_i^{m_i} = 0$$

Според тоа, T_i е збир на скаларниот оператор $\lambda_i I$ и нилпотентниот оператор N_i, којшто има индекс m_i бидејќи $(t - \lambda_i)^{m_i}$ е минималниот полином на T_i.

Сега, според теорема 10.13 за нилпотентни оператори, може да се избереме база така што N_i е во канонична форма. Во оваа база, $T_i = N_i + \lambda_i I$, е претставен со блок дијагонална матрица M_i чиишто дијагонални елементи се матриците J_{ij}. Директниот збир J на матриците M_i е во Жорданова канонична форма и, според теорема 10.5, е матрична репрезентација на T.

На крај, мора да покажеме дека блоковите J_{ij} ги задоволуваат потребните својства.

Својството (i) следува од фактот дека N_i има индекс m_i.

Својството (ii) е точно бидејќи T и J имаат ист карактеристичен полином.

Својството (iii) е точно бидејќи нуларноста на $N_i = T_i - \lambda_i I$ е еднаква на геометриската кратност на сопствената вредност λ_i.

Сопственост (iv) следува од фактот дека T_i и оттаму N_i се единствено определени со T. ■

Матрицата J од погорната теорема се нарекува Жорданова канонична форма на операторот T. Дијагонална блок матрица J_{ij} се нарекува Жорданов блок соодветен на сопствената вредност λ_i. Да забележиме дека

$$\left(J_{ij}\right) = \lambda_i I + N,$$

каде што N е нилпотентна блок матрица од погорната теорема. Погорното равенство се должи на матричното равенство

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример. Да претпоставиме дека карактеристичниот полином и минималниот полином на оператор T се, соодветно,

$$\Delta(t) = (t-2)^4(t-5)^3 \quad \text{и} \quad m(t) = (t-2)^2(t-5)^3$$

Тогаш Жордановата канонична форма на T е една од следните блок дијагонални матрици:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right) \quad \text{и}$$

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, (2), (2), \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

Првата матрица се појавува ако T има два независни сопствени вектори соодветни на сопствената вредност 2. Втората матрица се појавува ако T има три независни сопствени вектори соодветни на сопствената вредност 2. ♦

10.8 Циклични потпростори

Нека T е линеарен оператор на векторски простор V со конечна димензија над поле $\mathbb{K}$. Да претпоставиме дека $v \in V$ и $v \neq 0$. Множество на сите вектори од облик $f(T)(v)$, каде што $f(t)$ е произволен полиноми над K, и T-инваријантен потпростор на V кој што се нарекува T-**цикличен потпростор** од V генериран со v и се означува со $Z(v,T)$. Рестрикцијата на T на $Z(v,T)$ се означува со T_v. Можеме еквивалентно да го дефинираме $Z(v,T)$ како пресек на сите T-инваријантни потпростори од V кои што го содржат v.

Сега да ја разгледаме низата

$$v,\ T(v),\ T^2(v),\ T^3(v),\ldots\ldots$$

на степени на T кои дејствуваат на v. Нека k е најмалиот позитивен цел број така што $T^k(v)$ е линеарна комбинација од векторите коишто претходат во низата, на пример,

$$T^k(v) = -a_{k-1}T^{k-1}(v) - \cdots - a_1T(v) - a_0v$$

Тогаш имаме дека

$$m_v(t) = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \cdots + a_1t + a_0$$

е единствениот моничен полином со најнизок степен, за којшто важи $m_v(T)(v) = 0$. Полиномот $m_v(t)$ го нарекуваме T-анихилатор на v и $Z(v,T)$.

Следната теорема има важна примена.

Теоерма 10.15. Нека $Z(v,T)$, T_v и $m_v(t)$ се дефинирани како погоре. Тогаш важат следниве тврдења:

(i) Множеството $\{v,T(v),\ldots,T^{k-1}(v)\}$ е база на $Z(v,T)$, па според тоа $\dim Z(v,T) = k$.

(ii) Минималниот полином на T_v е $m_v(t)$.

(iii) Матричната репрезентација на T_v во однос на горенаведената база е

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Доказ. (i) По дефиниција на $m_v(t)$, имаме дека $T^k(v)$ е првиот вектор во низата v, $T(v)$, $T^2(v)$, $T^3(v),\dots$ којшто е линеарна комбинација на сите вектори што претходат во низата. Оттука може да заклучиме дека множеството $B=\{v,T(v),\dots,T^{k-1}(v)\}$ е линеарно независно. Сега треба само да покажеме дека $Z(v,T)=L(B)$, линеарната обвивка на B. Според погорната дискусија $T^{k-1}(v)\in L(B)$. Со индукција ќе докажеме дека $T^n(v)\in L(B)$, за секое n. Да претпоставиме дека $n>k$ и дека $T^{n-1}(v)\in L(B)$, односно $T^{n-1}(v)$ е линеарна комбинација на векторите $v,T(v),\dots,T^{k-1}(v)$. Тогаш $T^n(v)=T(T^{n-1}(v))$ е линеарна комбинација на векторите $T(v),T^2(v),\dots,T^k(v)$. Заради $T^k(v)\in L(B)$, имаме дека $T^n(v)\in L(B)$, за секое n. Како последица имаме дека $f(T)(v)\in L(B)$, за секој полином $f(t)$. Оттука заклучуваме дека $Z(v,T)=L(B)$, па B е база, што требаше да се докаже.

(ii) Да претпоставиме дека $m(t)=t^s+b_{s-1}t^{s-1}+\dots+b_1t+b_0$ е минималниот полином на T_v. Тогаш, бидејќи $v\in Z(v,T)$ имаме дека

$$0=m(T_v)(v)=m(T)(v)=T^s(v)+b_{s-1}T^{s-1}(v)+\dots+b_1T(v)+b_0$$

Според тоа, имаме дека $T^s(v)$ е линеарна комбинација на векторите $v,T(v),\dots,T^{s-1}(v)$, па затоа s е помало или еднакво на k. Меѓутоа,

$m_v(T)=0$ и $m_v(T_v)=0$. Тогаш $m(t)$ го дели $m_v(t)$ и s е помало или еднакво на k. Според тоа, добиваме дека $k=s$ од каде што следува дека $m_v(t)=m(t)$.

(iii) Имаме дека

$$T_v(v)=T(v)$$

$$T_v(T(v))=T^2(v)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T_v(T^{k-2}(v))=T^{k-1}(v)$$

$$T_v(T^{k-1}(v))=T^k(v)=-a_0v-a_1T(v)-a_2T^2(v)-\cdots-a_{k-1}T^{k-1}(v)$$

По дефиниција, матрицата на T_v во однос на оваа база е транспонирана на матрицата на коефициентите на погорниот систем на равенки, односно таа е матрицата C, како што се бараше. ■

Матрицата C се нарекува **придружена матрица** на полиномот $m_v(t)$.

10.9 Рационална канонична форма

Во овој дел ќе ја изложиме рационалната канонична форма за линеарен оператор $T:V\to V$. Нагласуваме дека оваа форма постои дури и кога минималниот полином не може да се разложи на линеарни полиноми. Да се потсетиме дека ова не е случај кај Жордановата канонична форма.

Лема 10.16. Нека $T:V\to V$ е линеарен оператор чијшто минимален полином е $f(t)^n$ каде што $f(t)$ е моничен иредуцибилен полином. Тогаш V е директна сума

$$V=Z(v_1,T)\oplus Z(v_2,T)\oplus\cdots\oplus Z(v_r,T)$$

на Т-циклични потпростори $Z(v_i, T)$ со соодветни Т-анихилатори

$$f(t)^{n_1},\ f(t)^{n_2},\ \ldots,\ f(t)^{n_r},\ \text{каде што}\ n = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$$

Секоја друга декомпозиција на V во Т-циклични потпростори има ист број на компоненти и исто множество на Т-анихилатори.

Да нагласиме дека горенаведената лема не кажува дека векторите v_i или Т-цикличните потпростори $Z(v, T)$ се еднозначно определени со Т, но кажува дека множеството на Т-анихилатори е еднозначно определено со Т. Според тоа, Т има еднозначна блок-дијагонална матрична репрезентација

$$\operatorname{diag}\left(C_1, C_2, \ldots, C_r\right)$$

каде што C_i се придружни матрици. Всушност, C_i се придружните матрици на полиномите $f(t)^{n_i}$.

Користејќи ја теоремата за основна декомпозиција и лемма 10.16, го добиваме следниов резултат.

Теорема 10.17. Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор со минимален полином

$$m(t) = f_1(t)^{m_1} f_2(t)^{m_2} \cdots f_s(t)^{m_s}$$

каде што $f_i(t)$ се различни монични иредуцибилни полиноми. Тогаш Т има еднозначна блок-дијагонална матрична репрезентација

$$\operatorname{diag}\left(C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1r_1}, \ldots, C_{s1}, C_{s2}, \ldots, C_{sr_s}\right)$$

каде што C_{ij} се придружни матрици. Специјално, C_{ij} се придружни матрици на полиномите $f_i(t)^{n_{ij}}$, каде што

$$m_1 = n_{11} \geq n_{12} \geq \cdots \geq n_{1r_1}, \ldots, m_s = n_{s1} \geq n_{s2} \geq \cdots \geq n_{sr_s}$$

Горенаведената матрична репрезентација на T се нарекува **рационална канонична форма**. Полиномите $f_i(t)^{n_{ij}}$ се нарекуваат **елементарни делители** на T.

Пример. Нека V е векторски простор со димензија 6 над полето рационални броеви $\mathbb{Q}$, и нека T е линеарен оператор на V чијшто минимален полином е

$$m(t) = (t^2 - t + 3)(t - 2)^2.$$

Тогаш рационалната канонична форма на T е една од следниве директни збирови на придружните матрици:

(i) $C(t^2 - t + 3) \oplus C(t^2 - t + 3) \oplus C((t-2)^2)$

(ii) $C(t^2 - t + 3) \oplus C((t-2)^2) \oplus C((t-2)^2)$

(iii) $C(t^2 - t + 3) \oplus C((t-2)^2) \oplus C(t-2) \oplus C(t-2)$

каде што $C(f(t))$ е придружената матрица на $f(t)$, односно

(i) $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right)$

(ii) $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right)$

(iii) $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} (2) \ (2)\right)$ ♦

10.10 Фактор простори

Нека V е векторски простор над поле $\mathbb{K}$ и нека W е потпростор на V. Ако v е било кој вектор во V, запишуваме $v + W$ за множеството на збирови $v + w$, каде што $w \in W$:

$$v + W = \{v + w \mid w \in W\}$$

Овие множества се нарекуваат комплекси на W во V. Ќе покажеме дека тие индуцираат партиција на V.

Теорема 10.18. Нека W е потпростор на векторски простор V. Тогаш следниве тврдења се еквивалентни:

(i) $u \in v + W$

(ii) $u - v \in W$

(iii) $v \in u + W$

Доказ. Нека $u \in v + W$. Тогаш постои $w_0 \in W$ така што важи $u = v + w_0$. Оттука следува дека $u - v = w_0 \in W$.

Обратно, да претпоставиме дека $u - v \in W$. Тогаш $u - v = w_0$ каде што $w_0 \in W$. Оттука следува дека $u = v + w_0 \in v + W$. Според тоа, условите (i) и (ii) се еквивалентни.

Имаме дека $u - v \in W$ ако и само ако $-(u - v) = v - u \in W$ ако и само ако $v \in u + W$. Според тоа, добиваме дека условите (ii) и (iii) се еквивалентни. ∎

Теорема 10.19. Комплексите на потпростор W во простор V индуцираат партиција на V, односно

(i) било кои два комплекси $u + W$ и $v + W$ се или еднакви или дисјунктни

(ii) секое $v \in V$ припаѓа во некој комплекс, односно $v \in v + W$.

Уште повеќе, $u + W = v + W$ ако и само ако $u - v \in W$, па според тоа $(v + w) + W = v + W$, за било кое $w \in W$.

Доказ. Нека $u \in V$. Бидејќи $0 \in W$, имаме $v = v + 0 \in v + W$, што го докажува (ii).

Сега да претпоставиме дека $u+W$ и $v+W$ не се дисјунктни, постои вектор x што припаѓа на двата комплекси. Тогаш $u-x\in W$ и $x-v\in W$. Доказот на (i) ќе биде комплетиран ако покажеме дека $u+W=v+W$. Нека $u+w_0$ е произволен елемент од комплексот $u+W$. Бидејќи постои $u-x$, $x-v$ и w_0 припаѓаат во W имаме дека

$$(u+w_0)-v=(u-v)+(x-v)+w_0\in W$$

Оттука следува дека $u+w_0\in v+W$, од каде што заклучуваме дека комплексот $u+W$ се содржи во комплексот $v+W$. Слично се покажува дека комплексот $v+W$ се содржи во комплексот $u+W$. Според тоа, добиваме дека $u+W=v+W$.

Последното тврдење следува од фактот дека $u+W=v+W$ ако и само ако $u\in v+W$, што е еквивалентно со $u-v\in W$ заради претходната теорема. ■

Пример. Нека W е потпростор на $\mathbb{R}^2$ дефиниран со

$$W=\{(a,b)\,|\,a=b\}$$

Да забележиме дека W е правата дадена со равенката $x-y=0$. Можеме да го сметаме $v+W$ како транслација на правата добиена со додавање на векторот v на секоја точка во W. Притоа, да забележиме дека $v+W$ е права паралелна на W. Според тоа, комплекси на W се сите прави паралелни со W. ♦

Во следнава теорема, ги користиме комплексите на потпростор W на векторскиот простор V за да дефинираме нов векторски простор, наречен **фактор простор** на V во однос на W којшто ќе го означуваме со V/W.

Теорема 10.20. Нека W е потпростор на векторски простор V над поле $\mathbb{K}$. Тогаш комплексите на W во V формираат векторски простор над $\mathbb{K}$ со операциите собирање и множење со скалар дефинирани на следниот начин:

(i) $(u+W)+(v+W)=(u+v)+W$

(ii) $k(u+W)=ku+W$, каде што $k\in\mathbb{K}$

Доказ. Потребно е да покажеме дека операциите се добро дефинирани, односно ако $u+W=u'+W$ и $v+W=v'+W$ тогаш

$$(u+v)+W=(u'+v')+W \quad \text{и} \quad ku+W=ku'+W, \text{ за } k\in\mathbb{K}$$

Бидејќи $u+W=u'+W$ и $v+W=v'+W$ имаме дека $u-u'$ и $v-v'$ припаѓаат во W. Тогаш $(u+v)-(u'+v')=(u-u')+(v-v')\in W$, од каде што следува дека $(u+v)+W=(u'+v')+W$.

Бидејќи $u-u'\in W$ имаме дека $k(u-u')\in W$ од каде што следува дека $ku-ku'=k(u-u')\in W$. Според тоа, $ku+W=ku'+W$.

Верификацијата на аксиомите за векторски простор е непосредна и му ја препуштаме на читателот. ■

Во случај на инваријантен потпростор, го имаме следниот корисен резултат.

Теоерма 10.21. Нека W е потпростор инваријантен при линеарен оператор $T:V\to V$. Тогаш T индуцира линеарен оператор $\bar{T}:V/W\to V/W$ дефиниран со $\bar{T}(v+W)=T(v)+W$. Уште повеќе, ако T е нула на некој полином, тогаш и $\bar{T}$ е нула на тој полином. Затоа, минималниот полином на $\bar{T}$ го дели минималниот полином на T.

Доказ. Прво ќе покажеме дека $\bar{T}$ е добро дефинирано, односно ако $u+W=v+W$ тогаш $\bar{T}(u+W)=\bar{T}(v+W)$. Ако $u+W=v+W$

тогаш $u-v \in W$, и бидејќи W е T-инваријантен потпростор имаме дека $T(u-v) = T(u) - T(v) \in W$. Согласно, имаме дека

$$\overline{T}(u+W) = T(u) + W = T(v) + W = \overline{T}(v+W)$$

што требаше да се докаже.

Ќе покажеме дека $\overline{T}$ е линеарен оператор. Имаме дека

$$\begin{aligned}\overline{T}((u+W)+(v+W)) &= \overline{T}((u+v)+W) = \\ &= T(u+v)+W = T(u)+T(v)+W = \\ &= T(u)+W+T(v)+W = \\ &= \overline{T}(u+W)+\overline{T}(v+W)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\overline{T}(k(u+W)) &= \overline{T}(ku+W) = T(ku)+W = \\ &= kT(u)+W = k(T(u)+W) = \\ &= k\overline{T}(u+W)\end{aligned}$$

од каде што следува дека $\overline{T}$ е линеарен оператор.

Сега, за произволен комплекс $u+W$ во V/W имаме дека

$$\begin{aligned}\overline{T^2}(u+W) &= T^2(u+W) = T(T(u))+W = \overline{T}(T(u)+W) = \\ &= \overline{T}(\overline{T}(u+W)) = \overline{T}^2(u+W)\end{aligned}$$

од каде што следува дека $\overline{T^2} = \overline{T}^2$. Слично се покажува дека $\overline{T^n} = \overline{T}^n$ за било кое n. Според тоа, за произволен полином

$$f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0 = \sum a_i t^i$$

имаме дека

$$\begin{aligned}\overline{f(T)}(u+W) &= f(T)(u)+W = \sum a_i T^i(u)+W = \\ &= \sum a_i (T^i(u)+W) = \sum a_i \overline{T^i}(u+W) = \\ &= \sum a_i \overline{T}^i(u+W) = \left(\sum a_i \overline{T}^i\right)(u+W) =\end{aligned}$$

$$= f(\overline{T})(u + W)$$

Според тоа, имаме дека $\overline{f(T)} = f(\overline{T})$. Согласно направената дискусија заклучуваме дека ако T е корен на $f(t)$, тогаш $\overline{f(T)} = \overline{0} = W = f(\overline{T})$, односно $\overline{T}$ е корен на $f(t)$. Со тоа теоремата е докажана. ■

Теоерма 10.22. Нека W е потпростор од векторски простор V. Нека $\{w_1, \ldots, w_r\}$ е база на W и нека множеството на комплекси $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_s\}$, каде што $\overline{v}_j = v_j + W$, е база на фактор просторот. Тогаш множеството на вектори $B = \{v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_r\}$ е база на V, и

$$\dim V = \dim W + \dim(V / W).$$

Доказ. Да претпоставиме дека $u \in V$. Бидејќи $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_s\}$ е база на V / W имаме дека

$$\overline{a} = u + W = a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + \cdots + a_s\overline{v}_s$$

Оттука добиваме дека

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_sv_s + w, \text{ за некое } w \in W.$$

Бидејќи $\{w_1, \ldots, w_r\}$ е база на W имаме дека

$$u = a_1v_1 + \cdots + a_sv_s + b_1w_1 + \ldots + b_rw_r$$

Според тоа множеството B го генерира V.

Сега покажуваме дека B е линеарно независно множество. Да претпоставиме дека

$$c_1v_1 + \cdots + c_sv_s + d_1w_1 + \ldots + d_rw_r = 0 \tag{1}$$

Тогаш имаме дека

$$c_1\overline{v}_1 + \cdots + c_s\overline{v}_s = \overline{0} = W$$

Бидејќи множеството $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_s\}$ е линеарно независно следува дека $c_1 = \ldots = c_s = 0$. Заменувајќи во (1), наоѓаме дека

$$d_1w_1 + \ldots + d_rw_r = 0$$

Бидејќи множеството $\{w_1, \ldots, w_r\}$ е линеарно независно следува дека $d_1 = \ldots = d_r = 0$. Според тоа, заклучуваме дека множеството B е линеарно независно, па затоа преставува база на V. ■

Да го проследиме доказот на теорема 10.1 формулирана во првиот дел.

Доказ на теорема 10.1. Доказот ќе го спроведеме со индукција по димензијата на V. Ако $\dim V = 1$, тогаш секоја матрична репрезентација на T е матрица од ред 1 која што е триаголна.

Сега претпоставуваме дека $\dim V = n > 1$ и дека теоремата важи за простори со димензија помала од n. Бидејќи карактеристичниот полином на T се разложува на линеарни полиноми, T има барем една сопствена вредност, па според тоа има барем еден ненулти сопствен вектор v, за којшто важи $T(v) = a_{11}v$. Нека W е еднодимензионалниот потпростор генериран со v. Ставаме $\overline{V} = V / W$. Тогаш заради претходната теорема $\dim \overline{V} = \dim V - \dim W = n - 1$. Да забележиме дека W е инваријантен потпростор при T. Според теорема 10.21, T индуцира линеарен оператор $\overline{T}$ на $\overline{V}$ чијшто минимален полином го дели минималн полином на T. Бидејќи карактеристичниот полином од T е производ на линеарни полиноми, таков е и неговиот минимален полином, па според тоа такви се и минималниот полином и карактеристичниот полиноми на T. Така, $\overline{V}$ и $\overline{T}$ ја задоволуваат претпоставката во теоремата. Оттука, по индукција, постои база $\{\overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ на $\overline{V}$ така што

$$\overline{T}(\overline{v}_2) = a_{22}\overline{v}_2$$

$$\bar{T}(\bar{v}_3) = a_{32}\bar{v}_2 + a_{33}\bar{v}_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\bar{T}(\bar{v}_n) = a_{n2}\bar{v}_2 + a_{n3}\bar{v}_3 + \cdots + a_{nn}\bar{v}_n$$

Сега, нека $v_2,\dots,v_n$ се вектори во V кои што припаѓаат во комплексите $\bar{v}_2,\dots,\bar{v}_n$, соодветно. Тогаш заради теорема 10.21 $\{v, v_2,\dots,v_n\}$ е база на V. Бидејќи $\bar{T}(\bar{v}_2) = a_{22}\bar{v}_2$ имаме дека

$$\bar{T}(\bar{v}_2) - a_{22}\bar{v}_2 = 0 \text{ па затоа } T(v_2) - a_{22}v_2 \in W$$

Но, W е генерирано со v, па затоа $T(v_2) - a_{22}v_2$ е мултипл од v, односно,

$$T(v_2) - a_{22}v_2 = a_{21}v, \text{ па затоа } T(v_2) = a_{21}v + a_{22}v_2$$

Слично, за $i = 3,\dots,n$, имаме дека

$$T(v_i) - a_{i2}v_2 - a_{i3}v_3 - \cdots - a_{ii}v_i \in W$$

па затоа

$$T(v_i) = a_{i1}v + a_{i2}v_2 + a_{i3}v_3 + \cdots + a_{ii}v_i$$

Тогаш

$$T(v) = a_{11}v$$

$$T(v_2) = a_{21}v + a_{22}v_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T(v_n) = a_{n1}v + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$$

и оттука следува дека матрицата на T во оваа база е триаголна. ■

Задачи за самостојна работа

1. Нека W е инваријантен потпростор при $T: V \to V$. Покажи дека W е инваријантен при $f(T)$ за било кој полином $f(t)$.

2. Покажи дека секој потпросторот на V е инваријантен при идентичното пресликување I и нултото пресликување 0.

3. Нека W е инваријантен потпростор при $T : V \to V$. Докажи дека W е инваријантен потпростор при $S + T$ и ST.

4. Нека $T : V \to V$ е линеарен оператор и W е сопствен потпростор соодветен на сопствената вредност λ на T. Докажи дека W е T-инваријантен.

5. Нека V е векторски простор со непарна димензија (поголема од 1) над полето реални броеви $\mathbb{R}$. Покажи дека било кој линеарен операторот на V има инваријантен потпростор, различен од V и $\{0\}$.

6. Определи инваријантен потпростор на

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

разгледуван како линеарен оператор на

а) $\mathbb{R}^2$ б) $\mathbb{C}^2$

7. Нека $\dim V = n$. Покажи дека $T : V \to V$ има триаголна матрична репрезентација ако и само ако постојат T-инваријантни потпростори $W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_n = V$ така што $\dim W_k = k,\ k = 1,\ldots,n$.

8. За потпросторите $W_1,\ldots,W_r$ велиме дека се **независни** ако $w_1 + \cdots + w_r = 0$ повлекува дека секое $w_i = 0$. Покажи дека

$$L(W_i) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

ако и само ако W_i се независни.

9. Покажи дека $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ ако и само ако

а) $V = L(W_i),\ i = 1,\ldots,r$, и

б) $W_k \cap L(W_1,\ldots,W_{k-1},W_{k+1},\ldots,W_r) = \{0\}$, за $k = 1,\ldots,r$.

10. Покажи дека $L(W_i) = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ ако и само ако

$$\dim W_i = \dim W_1 + \cdots + \dim W_r.$$

11. Нека карактеристичниот полином на линеарен оператор $T : V \to V$ е $\Delta(t) = f_1(t)^{n_1} f_2(t)^{n_2} \cdots f_r(t)^{n_r}$ каде што $f_i(t)$ се различни монични иредуцибилни полиноми. Нека $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ е декомпозиција на V во T-инваријантни потпростори. Покажи дека $f_i(t)^{n_i}$ е карактеристичниот полином на рестрикцијата на T на W_i.

12. Нека T_1 и T_2 се нилпотентни оператори коишто комутираат, односно $T_1T_2 = T_2T_1$. Покажи дека $T_1 + T_2$ и T_1T_2 се исто така нилпотентни.

13. Нека A е горнотриаголна матрица таква што сите елементи на и под главната дијагонала се 0. Покажи дека A е нилпотентна матрица.

14. Нека V е векторски простор на полиноми со степен најмногу n. Покажи дека операторот диференцирање на V е нилпотентен со индекс $n+1$.

15. Покажи дека следниве нилпотентни матрици од ред n се слични

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Покажи дека две нилпотентни матрици од ред 3 се слични ако и само ако го имаат ист индекс на нилпотентност. Покажи дека тврдењето не важи за нилпотентни матрици од ред 4.

17. Најди ги сите можни Жорданови канонски форми за оние матрици чијшто карактеристичен полином $\Delta(t)$ и минимален полином $m(t)$ е

а) $\Delta(t)=(t-2)^4(t-3)^2,\ m(t)=(t-2)^2(t-3)^2$

б) $\Delta(t)=(t-7)^5,\ m(t)=(t-7)^2$

в) $\Delta(t)=(t-2)^7,\ m(t)=(t-7)^3$

г) $\Delta(t)=(t-3)^4(t-5)^4,\ m(t)=(t-3)^2(t-5)^2$

18. Покажи дека секоја комплексна матрица е слична на нејзината транспонирана.

19. Покажи дека сите комплексни матрици A од ред n за коишто важи $A^n = I$ се слични.

20. Нека A е комплексна матрица чиишто сопствени вредности се реални броеви. Покажи дека A е слична на матрица чиишто елементи се реални броеви.

21. Нека $T:V\to V$ е линеарен оператор. Докажи дека $Z(v,T)$ е пресек на сите T-инваријантни потпростори кои што го содржат v.

22. Нека $f(t)$ и $g(t)$ се T-анигилхторите на u и v, соодветно. Покажи дека ако $f(t)$ и $g(t)$ се заемно прости, тогаш $f(t)g(t)$ е T-анихилатор на $u+v$.

23. Докажи дека $Z(u,T)=Z(v,T)$ ако и само ако $g(T)(u)=v$ каде што $g(t)$ е заемно прост со T-анихилаторот на u.

24. Нека $W=Z(v,T)$ и нека T-анихилаторот на v е $f(t)^n$ каде што $f(t)$ е моничен иредуцибилен полином од степен d. Покажи дека $f(T)^s(W)$ е цикличен потпростор генерирано од $f(T)^s(v)$ и дека има димензија $d(n-s)$ ако $n>s$ и димензија 0 ако $n\le s$.

25. Најди ги сите можни рационални форми за

а) $6x6$ матрица со минимален полином $m(t) = (t^2 + 3)^2(t + 1)^2$

б) $6x6$ матрица со минимален полином $m(t) = (t + 1)^3$

в) $6x6$ матрица со минимален полином $m(t) = (t^2 + 2)^2(t + 3)^2$

г) $6x6$ матрица со минимален полином $m(t) = (t^2 + 3)^2(t + 1)^2$

26. Нека A е $4x4$ матрица со минимален полином

$$m(t) = (t^2 + 1)(t^2 - 3)$$

Најди ја рационалната канонска форма за A ако A е матрица над

а) полето рационални броеви $\mathbb{Q}$

б) полето реални броеви $\mathbb{R}$

в) полето комплексни броеви $\mathbb{C}$

27. Најди ја рационалната канонична форма за Жордановата блок матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

28. Докажи дека карактеристичниот полином на линеарен оператор $T : V \to V$ е производ на неговите прости делители.

29. Докажи дека две $3x3$ матрици со исти минимални и карактеристични полиноми се слични.

30. Нека $C(f(t))$ ја означува придружената матрица на произволен полином $f(t)$. Покажи дека $f(t)$ е карактеристичен полином на $C(f(t))$.

31. Нека $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$. Нека E_i ја означува проекцијата на V на W_i. Докажи дека а) $E_iE_j = 0$, за $i \neq j$ б) $I = E_1 + \cdots + E_r$

32. Нека $E_1,\ldots,E_r$ се линеарни оператори на V, така што

(i) $E_i^2 = E_i$, односно E_i се проекции; (ii) $E_iE_j = 0$, за $i \neq j$;

(iii) $I = E_1 + \cdots + E_r$

Докажи дека $V = \operatorname{Im}E_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}E_r$.

33. Нека $E : V \to V$ е проекција, односно $E_i^2 = E_i$. Докажи дека E има матрична репрезентација од облик $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ каде што r е рангот на E и I_r е единечната квадратна матрицата од ред r.

34. Докажи дека секои две проекции од ист ранг се слични.

35. Нека $E : V \to V$ е проекција. Докажи дека

а) $I - E$ е проекција и $V = \operatorname{Im}E \oplus \operatorname{Im}(I - E)$

б) $I + E$ е инверзибилна ако $1 + 1 \neq 0$

36. Нека W е потпростор на V. Нека множеството на комплекси $\{v_1 + W, v_2 + W, \ldots, v_n + W\}$ во V/W е линеарно независно. Покажи дека множеството на вектори $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ во V исто така е линеарно независно.

37. Нека W е потпростор на V. Нека множеството на вектори $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ во V е линеарно независно, и нека тоа $L(u_i) \cap W = \{0\}$. Покажи дека множеството на комплекси $\{u_1 + W, u_2 + W, \ldots, u_n + W\}$ во V/W е исто така линеарно независно.

38. Нека $V = U \oplus W$ и нека $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ е база на U. Покажи дека $\{u_1 + W, u_2 + W, \ldots, u_n + W\}$ е база на фактор просторот V/W.

39. Нека W е просторот од решенија на линеарна равенка

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, каде што $a_i \in \mathbb{K}$

и нека $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^n$. Докажи дека комплексот $v+W$ на W во $\mathbb{K}^n$ е множеството решенија на линеарната равенка

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b,\ \text{каде}\ b=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

40. Нека V е векторскиот простор на полиноми над $\mathbb{R}$ и W е потпросторот на полиноми деливи со t^4, односно полиноми од облик $a_0t^4+a_1t^5+\cdots+a_{n-4}t^n$. Покажи дека фактор просторот V/W има димензија 4.

41. Нека U и W се потпростори од V, така што $W\subset U\subset V$. Забележи дека било кој комплекс $u+W$ на W во U може исто така се смета за комплекс на W во V бидејќи $u\in U$ повлекува $u\in V$, па според тоа U/W е подмножество од V/W. Докажи дека

а) U/W е потпростор од V/W

б) $\dim(V/W)-\dim(U/W)=\dim(V/U)$

42. Нека U и W се потпростори од V. Покажи дека копмлекситe на $U\cap W$ во V може да се добијат како пресек на секој од комплексите на U во V со секој од комплексите на W во V

$$V/(U\cap W)=\{(v+U)\cap(v'+W)\mid v,v'\in V\}$$

11. ЛИНЕАРНИ ФУНКЦИОНАЛИ И ДУАЛНИ ПРОСТОРИ

11.1 Вовед

Во ова поглавје ќе ги проучуваме линеарните пресликувања од векторски простор V во неговото поле $\mathbb{K}$ од скалари. Освен ако не е поинаку наведено, полето $\mathbb{K}$ ќе го сметаме за векторски простор над себе. Секако сите теореми и резултати за произволни пресликувања на V важат и во овој специјален случај. Сепак, овие пресликувања ќе ги разгледуваме одделно поради нивната фундаментална важност и поради тоа што специјалната врска на V и K доведува до нови поими и резултати кои не важат во општиот случај.

11.2 Линеарни функционали и дуални простори

Нека V е векторски простор над поле $\mathbb{K}$. Пресликувањето $f : V \to \mathbb{K}$ се нарекува **линеарен функционал** или **линеарна форма**, ако важи

$\phi(au + bv) = a\phi(u) + b\phi(v)$, за секои $u, v \in V$, и секои $a, b \in \mathbb{K}$

Со други зборови, линеарен функционал на V е линеарно пресликување од V во $\mathbb{K}$.

Пример. Нека $\pi_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ е i-тата проекција дефинирана со

$$\pi_i(x_1,\dots,x_n) = x_i, \text{ за секое } (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Тогаш π_i е линеарно бидејќи за секои $(x_1,\dots x_n)$, $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n$, и за секој скалар $k \in \mathbb{K}$ имаме дека

$$\pi_i((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)) = \pi_i((x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)) =$$

$$= x_i + y_i = \pi_i(x_1,\dots,x_n) + \pi_i(y_1,\dots,y_n),$$

$$\pi_i(k(x_1,\dots,x_n)) = \pi_i(kx_1,\dots,kx_n) = kx_i = k\pi_i(x_1,\dots,x_n)$$

и затоа е линеарен функционал на $\mathbb{K}^n$. ♦

Пример. Нека V е векторскиот простор на полиноми по t над полето реални броеви $\mathbb{R}$. Нека $F : V \to \mathbb{R}$ е интегралниот оператор дефиниран со

$$F(p(t)) = \int_0^1 p(t)dt$$

Да се потсетиме дека F е линеарно пресликување и затоа е линеарен функционал на V. ♦

Пример. Нека V е векторскиот простор на квадратните матрици од ред n над поле $\mathbb{K}$. Нека Нека $T : V \to \mathbb{R}$ е трагата, односно пресликувањето

$$T(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}, \text{ каде што } A = \left(a_{ij}\right)$$

кое што му го придружува на секоја матрица A над $\mathbb{K}$ збирот на нејзините дијагонални елементи. Ова пресликување е линеарно бидејќи за секои матрици $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ над $\mathbb{K}$ и за секој скалар $k \in \mathbb{K}$ имаме дека

$$\begin{aligned} T(A+B) &= (a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})+\cdots+(a_{nn}+b_{nn}) = \\ &= (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})+(b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn}) = \\ &= T(A)+T(B), \\ T(kA) &= (ka_{11}+ka_{22}+\cdots+ka_{nn}) = \\ &= k(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) = kT(A) \end{aligned}$$

и затоа е линеарен функционал на V. ♦

Заради теорема 5.10, множеството на линеарни функционали на векторски простор V над поле $\mathbb{K}$ е исто така векторски простор над полето $\mathbb{K}$, со операциите собирање и множење со скалар дефинирани со

$$(\phi+\sigma)(v)=\phi(v)+\sigma(v) \quad \text{и} \quad (k\phi)(v)=k\phi(v)$$

каде што ϕ и σ се линеарни функционали на V и $k\in\mathbb{K}$. Овој простор се нарекува **дуален простор** на V и се означува со V*.

Пример. Нека $V=\mathbb{K}^n$ векторскиот простор на подредени n-торки запишани како вектор колони. Тогаш дуалниот простор V* може да се идентификува со просторот на вектор редици. Специјално, секој линеарен функционален $\phi=(a_1,\ldots,a_n)$ во V* има репрезентација

$$\phi(x_1,\ldots,x_n)=(a_1,\ldots,a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

односно

$$\phi(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

Историски гледано, формалниот израз на десната страна се нарекува **линеарна форма**.

11.3 Дуални бази

Да претпоставиме дека V е векторски простор со димензија n над поле $\mathbb{K}$. Според теорема 6.7, димензијата на векторскиот простор од сите линеарни пресликувања од n-димензионален простор во m-димензионален простор е mn. Во овој случај димензијата на дуалниот простор V* е n и димензијата на векторскиот простор $\mathbb{K}$ над полето $\mathbb{K}$ е 1, па имаме дека $\dim V^* = \dim V = n$. Всушност, секоја база на V определува база на V* како следува.

Теорема 11.1. Нека $\{v_1, \dots, v_n\}$ е база на векторски простор V над поле $\mathbb{K}$. Нека $\phi_1, \dots, \phi_n \in V^*$ се линеарни функционали дефинирани со

$$\phi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако } i = j \\ 0 & \text{ако } i \neq j \end{cases}$$

Тогаш $\phi_1, \dots, \phi_n$ формираат база на V *.

Доказ. Прво да покажеме дека $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ го генерира V*. Нека ϕ е произволен елемент од V*, и нека

$$\phi(v_1) = k_1,\ \phi(v_2) = k_2, \dots,\ \phi(v_n) = k_n$$

Ставаме $\sigma = k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \cdots + k_n\phi_n$. Тогаш имаме дека

$$\begin{aligned} \sigma(v_1) &= (k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \cdots + k_n\phi_n)(v_1) = \\ &= k_1\phi_1(v_1) + k_2\phi_2(v_1) + \cdots + k_n\phi_n(v_1) = \\ &= k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 + \cdots + k_n \cdot 0 = k_1 \end{aligned}$$

Слично, за $i = 2, \dots, n$, имаме дека

$$\begin{aligned} \sigma(v_i) &= (k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + \cdots + k_n\phi_n)(v_i) = \\ &= k_1\phi_1(v_i) + k_2\phi_2(v_i) + \cdots + k_n\phi_n(v_i) = k_i \end{aligned}$$

Според тоа, имаме дека $\phi(v_i)=\sigma(v_i)$, за $i=1,\dots,n$. Бидејќи ϕ и σ имаат исто дејство на базните вектори добиваме дека

$$\phi=\sigma=k_1\phi_1+k_2\phi_2+\dots+k_n\phi_n.$$

Согласно направената дискусија заклучуваме дека $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ го генерира V*.

Преостанува да се покаже дека $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ е линеарно независно множество. Да претпоставиме дека

$$a_1\phi_1+a_2\phi_2+\dots+a_n\phi_n=0$$

Тогаш имаме дека

$$\begin{aligned}0=0(v_1)&=(a_1\phi_1+a_2\phi_2+\dots+a_n\phi_n)(v_1)=\\&=a_1\phi_1(v_1)+a_2\phi_2(v_1)+\dots+a_n\phi_n(v_1)=\\&=a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+\dots+a_n\cdot 0=a_1\end{aligned}$$

Значи $a_1=0$. Слично, за $i=2,\dots,n$, имаме дека

$$\begin{aligned}0=0(v_i)&=(a_1\phi_1+a_2\phi_2+\dots+a_n\phi_n)(v_i)=\\&=a_1\phi_1(v_i)+a_2\phi_2(v_i)+\dots+a_n\phi_n(v_i)=a_i\end{aligned}$$

Според тоа, заклучуваме дека множеството $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ е линеарно независно, и заради тоа претставува база на V*. ■

Базата $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ се нарекува база дуална на $\{v_1,\dots,v_n\}$ или **дуална база**. Погорната формула, која ја користи Кронекеровото делта δ_{ij} е скратен начин на запишување на следново

$$\phi_1(v_1)=1,\ \phi_1(v_2)=0,\ \dots,\ \phi_1(v_n)=0$$

$$\phi_2(v_1)=0,\ \phi_2(v_2)=1,\ \dots,\ \phi_2(v_n)=0$$

....

$$\phi_n(v_1)=0,\ \phi_n(v_2)=0,\ \dots,\ \phi_n(v_n)=1$$

Според теорема 6.2, линеарните пресликувањата $\phi_1,\dots,\phi_n$ се единствени и добро дефинирани.

Пример. Да ја разгледаме базата $\{v_1=(2,1),\ v_2=(3,1)\}$ во $\mathbb{R}^2$, и да ја најдеме дуалната база $\{\phi_1,\phi_2\}$.

Бараме линеарни функционални

$$\phi_1(x,y)=ax+by \text{ и } \phi_2(x,y)=cx+dy$$

така што

$$\phi_1(v_1)=1,\ \ \phi_1(v_2)=0,\ \ \phi_2(v_1)=0,\ \ \phi_2(v_2)=1$$

Овие четири услови доведуваат до следниве два системи на линеарни равенки

$$\begin{cases}\phi_1(v_1)=\phi_1(2,1)=2a+b=1\\ \phi_1(v_2)=\phi_1(3,1)=3a+b=0\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}\phi_2(v_1)=\phi_2(2,1)=2c+d=0\\ \phi_2(v_2)=\phi_2(3,1)=3c+d=1\end{cases}$$

Решенијата се $a=-1,\ b=3$ и $c=1,\ d=-2.$ Оттука, имаме дека

$$\{\phi_1(x,y)=-x+3y,\ \phi_2(x,y)=x-2y\}$$

ја формираат дуалната база. ♦

Следните две теореми ја даваат врската помеѓу базите и нивните дуални бази.

Теорема 11.2. Нека $\{v_1,\dots,v_n\}$ е база на векторски простор V над поле $\mathbb{K}$ и нека $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ е дуалната база во V*. Тогаш за секој вектор $v\in V$ важи

$$u=\phi_1(u)v_1+\phi_2(u)v_2+\cdots+\phi_n(u)v_n \tag{1}$$

и за секој линеарен функционал $\sigma\in V^*$ важи

$$\sigma = \sigma(v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \cdots + \sigma(v_n)\phi_n \qquad (2)$$

Доказ. Да претпоставиме дека

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \qquad (3)$$

Тогаш имаме дека

$$\begin{aligned}\phi_1(u) &= \phi_1(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) = \\ &= a_1\phi_1(v_1) + a_2\phi_1(v_2) + \cdots + a_n\phi_1(v_n) = \\ &= a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = a_1\end{aligned}$$

Слично, за $i = 2,\dots,n$, имаме дека

$$\begin{aligned}\phi_i(u) &= \phi_i(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) = \\ &= a_1\phi_i(v_1) + a_2\phi_i(v_2) + \cdots + a_n\phi_i(v_n) = a_i\end{aligned}$$

Според тоа, имаме дека

$$\phi_1(u) = a_1,\ \phi_2(u) = a_2,\ \dots,\ \phi_n(u) = a_n$$

Заменувајќи ги овие резултати во (3), го добиваме (1).

Во следниот чекор ќе го докажеме (2). Со примена на линеарниот функционал σ на двете страни од (1) добиваме дека

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= \phi_1(u)\sigma(v_1) + \phi_2(u)\sigma(v_2) + \cdots + \phi_n(u)\sigma(v_n) = \\ &= \sigma(v_1)\phi_1(u) + \sigma(v_2)\phi_2(u) + \cdots + \sigma(v_n)\phi_n(u) = \\ &= (\sigma(v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \cdots + \sigma(v_n)\phi_n)(u)\end{aligned}$$

Бидејќи погорното равенство важи за секое $v \in V$, може да заклучиме дека

$$\sigma = \sigma(v_1)\phi_1 + \sigma(v_2)\phi_2 + \cdots + \sigma(v_n)\phi_n$$

што требаше да се докаже. ■

Теорема 11.3. Нека $\{v_1,\dots,v_n\}$ и $\{w_1,\dots,w_n\}$ се бази на V. Нека $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ и $\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$ се базите во V* дуални на базите $\{v_1,\dots,v_n\}$ и $\{w_1,\dots,w_n\}$, соодветно. Ако P е матрицата за премин од базата $\{v_1,\ldots,v_n\}$ во базата $\{w_1,\ldots,w_n\}$, Тогаш $(P^{-1})^t$ е матрицата за премин од базата $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ во базата $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$.

Доказ. Да претпоставиме дека

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n$$

$$w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n$$

....

$$w_n = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$$

како и дека

$$\sigma_1 = b_{11}\phi_1 + b_{12}\phi_2 + \cdots + b_{1n}\phi_n$$

$$\sigma_2 = b_{21}\phi_1 + b_{22}\phi_2 + \cdots + b_{2n}\phi_n$$

....

$$\sigma_n = b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + \cdots + b_{nn}v_n$$

каде што $P = \left(p_{ij}\right)$ и $Q = \left(q_{ij}\right)$. Сакаме да докажеме дека $Q = (P^{-1})^t$.

Нека R_i ја означува i-тата редица на Q^t и нека C_j ја означува j-тата колоната на P. Тогаш имаме дека

$$R_i = (q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in}) \quad \text{и} \quad C_j = (p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{jn})^t$$

Според дефиницијa за дуална база имаме дека

$$\begin{aligned}\sigma_i(w_j) &= (q_{i1}\phi_1 + q_{i2}\phi_2 + \cdots + q_{in}\phi_n)(p_{j1}v_1 + p_{j2}v_2 + \cdots + p_{jn}v_n) = \\ &= q_{i1}p_{j1} + q_{i2}p_{j2} + \cdots + q_{in}p_{jn} = R_iC_j = \delta_{ij}\end{aligned}$$

каде што d_{ij} е Кронекеровото делта. Така добиваме дека важат матричните равенства

$$Q^tP = \begin{pmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \ldots & R_nC_n \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \ldots & R_2C_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_nC_1 & R_2C_2 & \ldots & R_nC_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = I$$

Според тоа $Q^tP = I$ од каде што следува дека $Q = (P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$, што требаше да се докаже. ■

11.4 Втор дуален простор

Да се потсетиме дека секој векторски простор V има дуален простор V*, којшто се состои од сите линеарни функционали на V. Самиот векторски простор V * има дуален простор V**, наречен **втор дуален простор** на V, којшто се состои од сите линеарни функционали на V*.

Сега ќе покажеме дека секое $v \in V$ определува одреден елемент $\hat{v} \in V^{**}$. Прво, за било кое $\phi \in V^*$ дефинираме

$$\hat{v}(\phi) = \phi(v)$$

Преостанува да покажеме дека вака дефинираното пресликување $\hat{v} : V^* \to \mathbb{K}$ е линеарно. За било кои скалари $a, b \in \mathbb{K}$ и за било кои линеарни функционали $\phi, \sigma \in V^*$, имаме дека

$$\hat{v}(a\phi + b\sigma) = (a\phi + b\sigma)(v) = a\phi(v) + b\sigma(v) = a\hat{v}(\phi) + b\hat{v}(\sigma)$$

Според тоа, имаме дека $\hat{v}$ е линеарен функционал на V^*, односно $\hat{v} \in V^{**}$.

Теорема 11.4. Ако V има конечна димензија, тогаш пресликувањето $v \mapsto \hat{v}$ е изоморфизам од V на V**.

Доказ. Прво ќе докажеме дека пресликувањето $v \mapsto \hat{v}$ е линеарно, односно дека за било кои вектори $v, w \in V$, и за било кои скалари $a, b \in \mathbb{K}$, имаме дека $\widehat{av + bw} = a\hat{v} + b\hat{w}$. За било кој линеарен функционал $\phi \in V^*$, имаме дека

$$\begin{aligned} \widehat{(av + bw)}\,\phi &= \phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w) = \\ &= a\hat{v}(\phi) + b\hat{w}(\phi) = (a\hat{v} + b\hat{w})(\phi) \end{aligned}$$

Бидејќи $\widehat{(av + bw)}(\phi) = (a\hat{v} + b\hat{w})(\phi)$ за било кое $\phi \in V^*$, имаме дека

$$\widehat{av + bw} = a\hat{v} + b\hat{w}$$

од каде што следува дека $v \mapsto \hat{v}$ е линеарно пресликување.

Сега да претпоставуваме дека $\hat{v}$ е нултото пресликување во V^{**}. Тоа значи дека за се секое $\phi \in V^*$ имаме дека $\hat{v}(\phi) = 0$. Избираме несингуларно пресликување ϕ. Тогаш, ако $\phi(v) = 0$ имаме дека $v = 0$. Со тоа покажавме дека ако $\hat{v} = 0$ следува дека $v = 0$. Според тоа, пресликувањето $v \mapsto \hat{v}$ е несингуларно и заради теорема 6.5 е изоморфизам.

Сега имаме дека $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$ бидејќи V има конечна димензија. Според тоа, пресликувањето $v \mapsto \hat{v}$ е изоморфизам од V на V **. ■

Горенаведеното пресликување $v \mapsto \hat{v}$ се нарекува **природно пресликување** од V во V**. Нагласуваме дека пресликувањето не е сурјективно ако V не е конечно-димензионален простор. Сепак, секогаш е линеарно и секогаш е инјективно.

Сега да претпоставиме дека V има конечна димензија. Според теорема 11.4, природното пресликување определува изоморфизам помеѓу V и V**. Освен ако не е поинаку наведено, со ова пресликување ќе го идентификуваме V со V**. Соодветно на тоа, ќе го сметаме V како простор на линеарни функционали на V* и ќе запишеме $V = V^{**}$. Да забележиме дека ако $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ е база на V* која што дуална на $\{v_1,\dots,v_n\}$ на V, тогаш $\{v_1,\dots,v_n\}$ е базата на $V = V^{**}$ која што е дуална на $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$.

11.5 Анихилатори

Нека W е подмножество од векторскиот простор V. За линеарен функционал $\phi \in V^*$ велиме дека е **анихилатор** на W ако

$$\phi(w) = 0, \text{ за секое } w \in W$$

Со други зборови, ϕ е анихилатор ако важи $\phi(W) = \{0\}$. Ќе покажеме дека множество W^0 на сите вакви пресликувања, наречено анихилатор на W, е потпростор од V*. Јасно, имаме дека $0 \in W^0$. Понатаму, да претпоставиме дека $\phi, \sigma \in W^0$. Тогаш, за било кои скалари $a, b \in \mathbb{K}$, и за било кое $w \in W$, имаме дека

$$(a\phi + b\sigma)(w) = a\phi(w) + b\sigma(w) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

Според тоа, добиваме $a\phi + b\sigma \in W^0$, од каде што следува дека W^0 е потпростор на V*.

Во случај кога W е потпросторот од V, ја имаме следнава врска помеѓу W и неговиот анихилатор W^0.

Теорема 11.5. Нека V има конечна димензија и W е потпростор на V. Тогаш важат следниве услови:

(i) $\dim W + \dim W^0 = \dim V$

(ii) $W^{00} = W$

Доказ. Пред да преминеме на доказот на теоремата да напоменеме дека $W^0 = \{v \in V \mid \phi(v) = 0$ за секое $\phi \in W^0\}$, или еквивалентно $(W^0)^0 = W^{00}$, каде што W^{00} се смета за потпростор од V при идентификацијата на V и V^{**}.

(i) Да претпоставиме дека $\dim V = n$ и $\dim W = r \leq n$. Сакаме да покажеме дека $\dim W^0 = n - r$. Избираме база $\{w_1, \ldots, w_r\}$ на W и ја прошируваме до база на V, $\{w_1, \ldots, w_r, v_1, \ldots, v_{n-r}\}$. Да ја разгледаме дуалната база

$$\{\phi_1, \ldots, \phi_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-r}\}$$

Според дефиницијата за дуална база ова значи дека $\sigma_i(w_j) = 0$, за $i = 1, \ldots, n - r$. Оттука заклучуваме дека $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-r} \in W^0$. Тврдиме дека $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-r}\}$ е база на W^0. Знаеме дека $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-r}\}$ е дел од базата на V *, па како такво е линеарно независно множество.

Ќе покажеме дека $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-r}\}$ го генерира W^0. Нека $\sigma \in W^0$. Според теорема 11.2, имаме дека

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma(w_1)\phi_1 + \cdots + \sigma(w_r)\phi_r + \sigma(v_1)\sigma_1 + \cdots + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r} = \\ &= 0 \cdot \phi_1 + \cdots + 0 \cdot \phi_r + \sigma(v_1)\sigma_1 + \cdots + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r} = \\ &= \sigma(v_1)\sigma_1 + \cdots + \sigma(v_{n-r})\sigma_{n-r} \end{aligned}$$

Според тоа, добиваме дека $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-r}\}$ го генерира W^0, од каде што следува дека е база на W^0. Конечно, имаме дека

$$\dim W^0 = n - r = \dim V - \dim W$$

од каде што следува заклучокот во теоремата.

(ii) Да претпоставиме дека $\dim V = n$ и $\dim W = r \leq n.$ Тогаш имаме дека $\dim V^* = n$ и заради (i) заклучуваме дека $\dim W^0 = n - r.$ Затоа, според (i) имаме дека $\dim W^{00} = n - \dim W^0 = n - (n - r) = r,$ односно $\dim W^{00} = r.$ Оттука заклучуваме дека $\dim W^{00} = \dim W.$

Ќе покажеме дека $W \subset W^0.$ За таа цел избираме произволно $v \in W.$ Тогаш, за секој линеарен функционал $\phi \in W^*$ имаме дека $\hat{v}(\phi) = \phi(v) = 0.$ Оттука заклучуваме дека $\hat{v} \in (W^0)^0 = W^{00}.$ Затоа, при идентификацијата на V со V^{**} добиваме дека ако $v \in W$ тогаш имаме дека $\hat{v} \in W^{00}$, што повлекува дека $W \subset W^{00}.$ Оттука, и од фактот дека $\dim W^{00} = \dim W$ заклучуваме дека $W^{00} = W,$ што требаше да се докаже. ■

Концептот на анихилатор ни дава можност за друга интерпретација на хомоген систем од линеарни равенки

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Овде секоја редица на матрицата од коефициенти $A = \left(a_{ij}\right)$ може да се смета за елемент од $\mathbb{K}^n$ и секое решение запишано во облик на вектор $\phi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ може да се смета за елемент од дуалниот простор. Во овој контекст, просторот од решенија S на дадениот систем е анихилаторот на редиците на A и според тоа и на редичниот простор на A. Како последица од ова, со помош на теорема 11.5 доаѓаме до следниот фундаментален резултат за димензијата на просторот од решенија на хомоген систем од линеарни равенки

$$\dim S = \dim \mathbb{K}^n - \dim(\text{редичен простор на A}) = n - \operatorname{rang}(A)$$

11.6 Транспонирање на линеарно пресликување

Нека $T: V \to U$ е произволно линеарно пресликување од векторски простор V во векторски простор U. Сега за било кој линеарен функционал $\phi \in U^*$, композицијата $\phi \circ T$ е линеарно пресликување од V во $\mathbb{K}$, односно $\phi \circ T \in V^*$. Така, кореспонденцијата

$$\phi \mapsto \phi \circ T$$

е пресликување од U* во V*, кое што го означуваме со T^t и го нарекуваме **транспонирање** на T. Со други зборови, пресликувањето $T^t : U^* \to V^*$ е дефинирано со

$$T^t(\phi) = \phi \circ T$$

Имаме дека $(T^t(\phi))(v) = \phi(T(v))$, за секое $v \in V$.

Теорема 11.6. Пресликувањето T^t дефинирано погоре е линеарно.

Доказ. За било кои скалари $a, b \in \mathbb{K}$ и за било кои линеарни функционали $\phi, \sigma \in U^*$, имаме дека

$$T^t(a\phi + b\sigma) = (a\phi + b\sigma) \circ T = a(\phi \circ T) + b(\sigma \circ T) = aT^t(\phi) + bT^t(\sigma)$$

Според тоа, пресликувањето T^t е линеарно, што требаше да се докаже. ■

Да нагласиме дека ако T е линеарно пресликување од V во U, тогаш T^t е линеарно пресликување од U* во V*

$$V \overset{T}{\rightarrow} U \qquad U^* \overset{T^t}{\rightarrow} V^*$$

Името „транспонирано" за пресликувањето T^t произлегува од следната теорема.

Теорема 11.7. Нека $T : V \rightarrow U$ е линеарно пресликување и нека A е матричната репрезентација на T во однос на базата $\{v_1,\dots,v_m\}$ на V и базата $\{u_1,\dots,u_n\}$ на U. Тогаш транспонираната матрица A^t е матрична репрезентација на $T^t : U^* \rightarrow V^*$ во однос на базите дуални на $\{u_1,\dots,u_n\}$ и $\{v_1,\dots,v_m\}$.

Доказ. Да претпоставиме дека

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n \\ T(v_2) &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T(v_m) &= a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n \end{aligned} \tag{1}$$

Сакаме да докажеме дека

$$\begin{aligned} T^t(\sigma_1) &= a_{11}\phi_1 + a_{21}\phi_2 + \dots + a_{m1}\phi_m \\ T^t(\sigma_2) &= a_{12}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + \dots + a_{m2}\phi_m \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T^t(\sigma_n) &= a_{1n}\phi_1 + a_{2n}\phi_2 + \dots + a_{mn}\phi_m \end{aligned} \tag{2}$$

каде што $\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$ и $\{\phi_1,\dots,\phi_m\}$ се базите дуални на $\{u_1,\dots,u_n\}$ и $\{v_1,\dots,v_m\}$, соодветно.

Нека $v \in V$ и нека $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_m v_m$. Тогаш заради (1) имаме дека

$$\begin{aligned}
T(v) &= k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2) + \cdots + k_m T(v_m) = \\
T(v) &= k_1(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n) + \\
&\quad + k_2(a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n) + \cdots \\
&\quad + k_m(a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n) = \\
&= (k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \ldots + k_m a_{m1})u_1 + \\
&\quad + (k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \ldots + k_m a_{m2})u_2 + \cdots \\
&\quad + (k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \ldots + k_m a_{mn})u_n = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} + \ldots + k_m a_{mi})u_i
\end{aligned}$$

Оттука, за $j = 1, \ldots, n$ добиваме дека

$$\begin{aligned}
(T^t(\sigma_j)(v)) = \sigma_j(T(v)) = \sigma_j\left(\sum_{i=1}^{n} (k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} + \ldots + k_m a_{mi})u_i \right) = \\
= k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \ldots + k_m a_{mj} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Од друга страна, за $j = 1, \ldots, n$ добиваме дека

$$\begin{aligned}
&(a_{1j}\phi_1 + a_{2j}\phi_2 + \ldots + a_{mj}\phi_m)(v) = \\
&(a_{1j}\phi_1 + a_{2j}\phi_2 + \ldots + a_{mj}\phi_m)(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_m v_m) = \\
&= k_1 a_{1j} + k_2 a_{2j} + \cdots + k_m a_{mj} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Бидејќи $v \in V$ е произволно, (3) и (4) повлекуваат

$$T^t(\sigma_j) = a_{1j}\phi_1 + a_{2j}\phi_2 + \cdots + a_{mj}\phi_m, \quad j = 1, \ldots, n$$

што е токму (2). Со тоа теорема е докажана. ■

Задачи за самостојна работа

1. Нека $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ и $\sigma:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ се линеарни функционали дефинирани со $\phi(x,y,z)=2x-3y+z$ и $\sigma(x,y,z)=4x-2y+3z.$ Најди

а) $\phi+\sigma$ б) 3ϕ в) $2\phi-5\sigma$

2. Нека е $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ линеарен функционал така што $\phi(2,1)=15$ и $\phi(1,-2)=-10.$ Најди го аналитичкиот израз на $\phi(x,y)$ и потоа најди $\phi(-2,7).$

3. Најди ја дуалната база за секоја од следните бази на $\mathbb{R}^3$

а) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

б) $\{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,-4,7)\}$

4. Нека V е векторскиот простор на полиноми над $\mathbb{R}$ со степен најмногу 2. Нека ϕ_1, ϕ_2 и ϕ_3 се линеарни функционали на V дефинирани со

$$\phi_1(f(t))=\int_0^1 f(t)dt \quad \phi_2(f(t))=f'(1), \quad \phi_3(f(t))=f(0),$$

каде што $f(t)=a+bt+ct^2\in V$ и $f'(t)$ го означува изводот на $f(t).$ Најди ја базата $\{f_1(t),f_2(t),f_3(t)\}$ на V дуална на $\{\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t)\}.$

5. Нека $u,v\in V$ и нека $\phi(u)=0$ повлекува $\phi(v)=0$ за секое $\phi\in V^*.$ Покажи дека $v=ku,$ за некој скалар k.

6. Нека $\phi,\sigma\in V^*$ и нека $\phi(v)=0$ повлекува $\sigma(v)=0$ за секое $v\in V.$ Покажи дека $\sigma=k\phi,$ за некој скалар k.

7. Нека V е векторскиот простор на полиноми над поле $\mathbb{K}.$ За $a\in\mathbb{K}$ дефинираме $\phi_a:V\to\mathbb{K}$ со $\phi_a(f(t))=f(a).$ Покажи дека

а) ϕ_a е линеарно б) ако $a\neq b$ тогаш $\phi_a\neq\phi_b$

8. Нека V е векторскиот простор на полиноми од степен најмногу 2. Нека $a,b,c \in \mathbb{K}$ се различни скалари. Нека ϕ_a, ϕ_b и ϕ_c се линеарни функционали дефинирани со

$$\phi_a(f(t)) = f(a), \quad \phi_b(f(t)) = f(b) \quad \text{и} \quad \phi_c(f(t)) = f(c)$$

Покажи дека $\{\phi_a, \phi_b, \phi_c\}$ е линеарно независно множество и најди ја базата $\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ на V која што е нејзина дуална база.

9. Нека V е векторскиот простор на квадратните матрици со ред n. Нека $T : V \to \mathbb{K}$ е трагата, односно

$$T(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

каде што $A = \left(a_{ij}\right)$. Покажи дека T е линеарен оператор.

10. Нека W е потпростор на V. Покажи дека за било кој линеарен функционал ϕ на W, постои линеарен функционал σ на V така што $\sigma(w) = \phi(w)$, за било кое $w \in W$, односно ϕ е рестрикција на σ на W.

11. Нека $\{e_1, \dots, e_n\}$ е стандардната база на $\mathbb{K}^n$. Покажи дека дуалната база е $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ каде што π_i е i-тата проекција, односно $\pi_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$.

12. Нека V е векторски простор над $\mathbb{R}$. Нека $\phi_1, \phi_2 \in V^*$ и нека $\sigma : V \to \mathbb{R}$ дефинирано со $\sigma(v) = \phi_1(v)\phi_2(v)$ исто така припаѓа на V*. Покажи дека или $\phi_1 = 0$ или $\phi_2 = 0$.

13. Нека W е потпросторот на $\mathbb{R}^4$ генериран со $(1,2,-3,4)$, $(1,3,-2,6)$ и $(1,4,-1,8)$. Најди база на анихилаторот на W.

14. Нека W е потпросторот од $\mathbb{R}^3$ генериран со $(1,1,0)$ и $(0,1,1)$. Најди база на анихилаторот на W.

15. Покажи дека за секое подмножество S од V важи дека $L(S)=S^{00}$, каде што $L(S)$ е линеарната обвивка на S.

16. Нека U и W се потпростори од векторски простор V со конечна димензија. Докажи дека $(U\cap W)^0=U^0+W^0$.

17. Нека $V=U\oplus W$. Докажи дека $V^*=U^0\oplus W^0$.

18. Нека ϕ е линеарен функционал на $\mathbb{R}^2$ дефиниран со

$$\phi(x,y)=3x-2y.$$

За линеарно пресликување $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ најди $(T^t(\phi))(x,y,z)$, ако

а) $T(x,y,z)=(x+y,y+z)$

б) $T(x,y,z)=(x+y+z,2x-y)$

19. Нека $S:U\to V$ и $T:V\to W$ се линеарни оператори. Докажи дека $(T\circ S)^t=S^t\circ T^t$.

20. Нека $T:V\to U$ е линеарен оператор и нека V има конечна димензија. Докажи дека $\operatorname{Im}T^t=(\operatorname{Ker}T)^0$.

21. Нека $T:V\to U$ е линеарен оператор и нека $u\in U$. Докажи дека $u\in\operatorname{Im}T$ или постои $\phi\in V^*$ така што $T^t(\phi)=0$ и $\phi(u)=1$.

22. Нека V е векторски простор со конечна димензијаи нека T е линеарен оператор на V. Покажи дека пресликувањето $T\mapsto T^t$ е изоморфизам од $\operatorname{Hom}(V,V)$ во $\operatorname{Hom}(V^*,V^*)$.

23. Нека V е векторски простор над $\mathbb{R}$. Отсечка $\overline{uv}$ која што ги поврзува точките $u,v\in V$ се дефинира со

$$\overline{uv}=\{tu+(1-t)v\mid 0\le t\le 1\}.$$

Подмножество S од V е **конвексно** ако $u,v\in S$ повлекува $\overline{uv}\in S$. Нека $\phi\in V^*$ и нека

$$W^+=\{v\in V\mid \phi(v)>0\}$$

$$W = \{v \in V \mid \phi(v) = 0\}$$

$$W^{-} = \{v \in V \mid \phi(v) < 0\}$$

Докажи дека W^{+}, W и W^{-} се конвексни подмножества од V.

24. Нека V е векторски простор со конечна димензија. **Хиперрамнина** H во V може да се дефинира како јадро на ненулти линеарен функционал ϕ на V. Покажи дека секој потпростор од V е пресек на конечен број на хиперрамнини.

МНОЖЕСТВА И ПРЕСЛИКУВАЊА

Множества и елементи

Поимот за множество не се дефинира како основен, но множество се задава со набројување на неговите елементи или со искажување на својствата кои што ги карактеризираат елементите во множеството. Објектите во множеството се нарекуваат елементи. Запишуваме

$p \in A$ ако p е е лемент на множеството A

На пример,

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

значи дека A ги содржи броевите 1, 3, 5, 7 и 9, и

$$B = \{x \mid x \text{ е прост број}, x < 15\}$$

значи дека B ги содржи сите прости броеви помали од 15. За означување на бројните множества користиме специјални ознаки

$\mathbb{N}$ = множеството природни броеви

$\mathbb{Z}$ = множеството цели броеви

$\mathbb{Q}$ = множеството рационални броеви

$\mathbb{R}$ = множеството реални броеви

$\mathbb{C}$ = множеството комплексни броеви

Ако А и В се две множества и ако секој елемент од множеството А припаѓа во множеството В, односно ако $x \in A$ повлекува $x \in B$, тогаш А се нарекува подмножество од В. Во тој случај велиме множеството А се содржи во множеството В или множеството В го содржи множеството А и запишуваме

$$A \subset B \quad \text{или} \quad B \supset A$$

За две множества А и В велиме дека се еднакви ако содржат исти елементи, односно

$$A = B \quad \text{ако и само ако} \quad A \subset B \quad \text{и} \quad B \subset A$$

Негацијата на исказите $p \in A$, $A \subset B$ и $A = B$ се запишува со $p \notin A$, $A \not\subset B$ и $A \neq B$, соодветно.

Ќе го користиме симболот $\varnothing$ за да го означиме **празното множество**, односно множеството кое што не содржи ниту еден елемент.

Многу често елементи на множество се множества. На пример, секоја права во множеството прави е множество од точки. За да биде појасна оваа ситуација ваквите множества ги нарекуваме **фамилии** или **колекции**. Поимите потфамилија и потколекција имаат аналогно значење на подмножество.

Пример. Множествата А и В разгледани погоре може да ги запишеме со

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ е непарен број, } x < 10\}, \text{ и}$$

$$B = \{2,3,5,7,11,13\}$$

Да забележиме дека $9 \in A$ но $9 \notin B$, и $11 \in B$ но $11 \in A$, додека $3 \in A$ и $3 \in B$, и $6 \notin A$ и $6 \notin B$. ♦

Пример. Бројните множества ги задоволуваат инклузиите

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad ♦$$

Пример. Нека $C = \{x \mid x^2 = 9, x$ е парен број $\}$. Тогаш $C = \emptyset$, односно С е празно множество. ♦

Пример. Елементи во фамилијата $\{\{2,3\},\{2\},\{5,6\}\}$ се множествата $\{2,3\},\{2\}$ и $\{5,6\}$. ♦

Теорема А.1. Нека А, В и С се множества. Тогаш важат следниве тврдења

(i) $A \subset A$

(ii) Ако $A \subset B$ и $B \subset A$, тогаш $A = B$

(iii) Ако $A \subset B$ и $B \subset C$, тогаш $A \subset C$

Забелешка. Да нагласиме дека $A \subset B$ не ја исклучува можноста дека $A = B$. Во случај кога $A \subset B$ и $A \neq B$ велиме дека А е вистинско подмножество од В.

Под **индексирано множество** $\{a_i \mid i \in I\}$ или едноставно $\{a_i\}$, подразбираме дека постои пресликување ϕ од множеството I во множество А и дека сликата $\phi(i)$ за $i \in I$ е означена со a_i.

Множеството I се нарекува **индексно множество** и за елементите a_i (рангот на ϕ) велиме дека се индексирани со I. Множеството $\{a_1, a_2, \ldots\}$ индексирано со природните броеви $\mathbb{N}$ се нарекува **низа.** **Индексирана фамилија** од множества $\{A_i \mid i \in I\}$ или едноставно $\{A_i\}$, има аналогно значење освен што сега пресликувањето ϕ на секое $i \in I$ му придружува множество A_i наместо елемент a_i.

Операции со множества

Нека A и B се произволни множества.

Унија на множествата A и B е множеството од сите елементи кои припаѓаат во A или во B

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Пресек на множествата A и B е множеството од сите елементи кои припаѓаат во A и во B

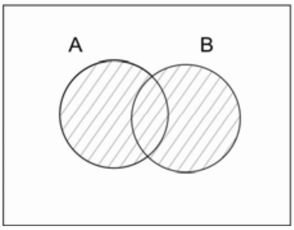
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Ако $A \cap B = \varnothing$, односно ако A и B немаат заеднички елементи велиме дека A и B се **дисјунктни множества**.

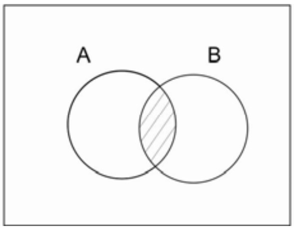
Да претпоставиме дека сите множества се подмножества од фиксирано универзално множество U. Тогаш **комплемент** на множеството A е множеството кое што се состои од сите елементи кои што не припаѓаат на A

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}$$

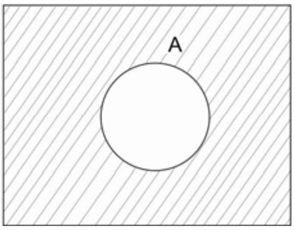
Пример. Следните дијаграми, наречени **Венови дијаграми**, ги илустрираат погорните операции со множества. Множествата се претставени со области во рамнината, додека универзалното множество U е претставено со областа на правоаголникот.



$A \cup B$



$A \cap B$



A^c

Теорема А.2. За операциите над множествата важат следните закони

Закони за идемпотетност

1а. $A \cup A = A$

1б. $A \cap A = A$

Асоцијативни закони

2а. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2б. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Комутативни закони

3а. $A \cup B = B \cup A$

3б. $A \cap B = B \cap A$

Дистрибутивни закони

4а. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

4б. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Закони за идентитет

5а. $A \cup \emptyset = A$

5б. $A \cap U = A$

6а. $A \cup U = U$

6б. $A \cap \emptyset = \emptyset$

Закони за комплемент

7а. $A \cup A^c = U$

7б. $A \cap A^c = \varnothing$

8а. $(A^c)^c = A$

8б. $U^c = \varnothing,\ \varnothing^c = U$

Деморганови закони

9а. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

9б. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Забелешка. Погорните закони за операции со множества се аналогни на логичките закони. На пример,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ и } x \in A\} = B \cap A$$

го користи фактот дека сложениот исказ „p и q", односно $p \wedge q$ е логички еквивалентен на сложениот исказ „q и p ", односно $q \wedge p$.

Теорема А.3. Секој од следниве искази е еквивалентен на $A \subset B$

(i) $A \cap B = A$

(ii) $A \cup B = B$

(iii) $B^c \subset A$

(iv) $A \cap B^c = \varnothing$

(v) $B \cup A^c = U$

Погорните операции со множества може да ги генерализираме. Нека $\{A_i \mid i \in I\}$ е фамилија од множества.

Унија на множествата $\{A_i \mid i \in I\}$ е множеството од сите елементи кои припаѓаат барем во едно од множествата A_i

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ за некое } i \in I\}$$

Пресек на множествата $\{A_i \mid i \in I\}$ е множеството од сите елементи кои припаѓаат во секое множество A_i

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ за секое } i \in I\}$$

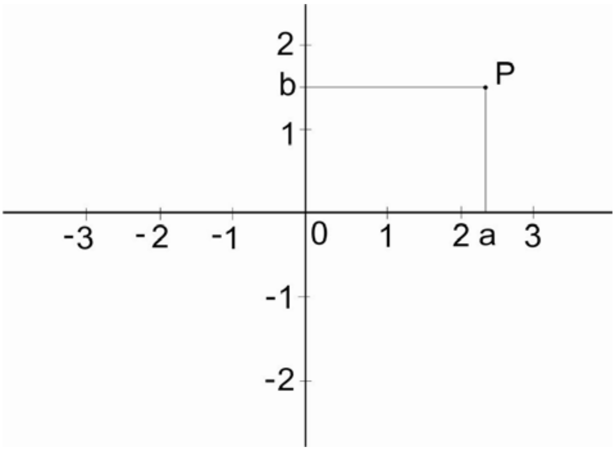
Производ на множества

Нека A и B се произволни множества. **Производ** на A и B е множеството кое што се состои од сите подредени парови (a,b) такви што $a \in A$ и $b \in B$

$$AxB = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Производот на множеството A со себе, односно AxA се означува со A^2.

Пример. Во Декартовата рамнина $\mathbb{R}^2$=$\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}$ секоја точка се претставува со подреден пар (a,b) од реални броеви, и обратно на секој подреден пар (a,b) од реални броеви може да се претстави со точка во Декартовата рамнина $\mathbb{R}^2$=$\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}$. ♦



Пример. Нека $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{a,b\}$. Тогаш

$$AxB = \{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$$ ♦

Забелешка. Подредени парови се еднакви (a,b) и (c,d) ако и само ако им се еднакви соодветните компоненти, односно

$(a,b) = (c,d)$ ако и само $a = c$ и $b = d$.

Концептот на производ на две множества може да се прошири на конечно многу множества на природен начин. **Производ** на множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е множеството кое што се состои од сите подредени $n-$торки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ каде што $a_i \in A_i$ за $i = 1,2,\ldots,n$

$$A_1xA_2x\cdots xA_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

Релации

Бинарна релација или **релација** R од множество A во множество B придружува на секој подреден пар $(a,b) \in AxB$ точно еден од овие два искази

(i) a е во релација со b, односно aRb

(ii) a не е во релација со b, односно $a\not{R}b$

Релација од множество A во множество A се нарекува **релација** во A.

Пример. Инклузијата кај множества е релација во било која фамилија од множества. На пример, за било кои две множества A и B имаме дека $A \subset B$ или $A \not\subset B$.

Да забележиме дека било која релација R од множество A во множество B дефинира единствено подмножество $\hat{R}$ од AxB на следниот начин

$$\hat{R} = \{(a,b) \mid aRb\}$$

Од аспект на погорната кореспонденција помеѓу релации од множество А во множество В и подмножество од АхВ, може да го редефинираме поимот за релација на следниот начин.

Дефиниција. Релација R од множество А во множество В е подмножество од АхВ.

Релација за еквиваленција

Релација во множество А се нарекува **релација за еквиваленција** ако ги задоволува следните аксиоми

$[E_1]$ Секое $a \in A$ е во релација со себе

$[E_2]$ Ако a е во релација со b, тогаш b е во релација со a.

$[E_3]$ Ако a е во релација со b и b е во релација со c, тогаш a е во релација со c.

Во општ случај, за релација велиме дека е **рефлексивна** ако ја задоволува $[E_1]$, **симетрична** ако ја задоволува $[E_2]$, и **транзитивна** ако ја задоволува $[E_3]$. Со други зборови, релација е релација за еквиваленција ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Пример. Да ја разгледаме релацијата инклузија $\subset$. Според теорема А.1 имаме дека $A \subset A$ за секое множество А. Ако $A \subset B$ и $B \subset C$, тогаш $A \subset C$. Според тоа, релацијата инклузија $\subset$ е рефлексивна и транзитивна. Од друга страна, релацијата не е симетрична бидејќи $A \subset B$ и $A \neq B$ не повлекува $B \subset A$. ♦

Пример. Во Евклидова геометрија, сличноста на триаголници е релација за еквиваленција. За било кои триаголници α, β и γ имаме дека

(i) α е сличен на себе

(ii) ако α е сличен на β, тогаш β е сличен на α

(iii) ако α е сличен на β и β е сличен на γ, тогаш α е сличен на γ. ♦

Ако R е релција за еквиваленција во A, тогаш **класа на еквивеланција** за било кој елемент $a \in A$ е множеството од сите елементи со кои што a е во релација

$$[a] = \{x \mid aRx\}$$

Фамилијата од сите класи на еквиваленција се нарекува **фактор множество** на A во однос на R

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

Во следната теорема е искажано фундаменталното својство на една релација за еквиваленција.

Теорема А.4. Нека R е релација за еквиваленција во A. Тогаш фактор множеството A/R е **партиција** на A, односно секое $a \in A$ припаѓа во член од A/R, и члeновите во A/R се попарно дисјунктни.

Пример. Нека R_5 е релација во множесството од цели броеви $\mathbb{Z}$, дефинирана со

$$x \equiv y \pmod{5} \text{ ако и само ако } 5 \mid x - y$$

односно, x е конгруентно со y по модул 5 ако и само 5 е делител на разликата на x со y. Лесно се проверува дека R_5 е релација за еквиваленција во $\mathbb{Z}$. Постојат точно 5 различни класи на еквиваленција во $\mathbb{Z}/R_5$

$$A_0 = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$

$$A_1 = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$

$$A_2 = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$$

$$A_3 = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$$

$$A_4 = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$$

Сега секој цел број може да се запише на единствен начин како

$$x = 5q + r \quad \text{каде што} \quad 0 \le r < 5$$

Да забележиме дека класите на еквиваленција се попарно дисјунктни и нивната унија е множеството цели броеви

$$\mathbb{Z} = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \quad \blacklozenge$$

АЛГЕБАРСКИ СТРУКТУРИ

Вовед

Ќе ги дефинираме алгебарските структури кои се јавуваат во речиси сите гранки на математиката. Специјално, ќе ја дефинираме алгебарската структура **поле** која што се појавува во дефиницијата за векторски простор. Започнуваме со дефинирање на група, што е релативно едноставна алгебарска структура со само една операција и се користи како конструкција на многу други алгебарски системи.

Групи

Непразно множество G со бинарна операција која што на секој пар на елементи $(a,b) \in G^2$ му придружува елемент $ab \in G$ се нарекува **група**, ако се задоволени следните аксиоми:

$[G_1]$ За секои $a,b,c \in G$ важи

$(ab)c = a(bc)$ (**асоцијативен закон**)

$[G_2]$ Постои елемент $e \in G$, наречен **единица**, така што

$$ae = ea = a \text{ за секое } a \in G$$

$[G_3]$ За секое $a \in G$ постои елемент $a^{-1} \in G$, наречен **инверзен** на а, така што

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e$$

Групата G велиме дека е **Абелова** или **комутативна**, ако важи комутативниот закон, односно ако за секои $a, b \in G$ важи

$$ab = ba$$

Кога бинарната операција е означена со „$\cdot$“ за групата G велиме дека е **мултипликативна**, додека кога групата G е Абелева и бинарната операција е означена со „$+$“ велиме дека е **адитивна**. Во таков случај, единицата на G се означува со 0 и се нарекува **нулти** елемент, и инверзниот елемент на а се означува со $-a$ и се нарекува **спротивен** на а.

Ако A и B се подмножества од група G, тогаш запишуваме

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\} \text{ или } A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

Исто така пишуваме а наместо $\{a\}$.

Подмножество H на групата G се нарекува **подгрупа** од G ако H е група во однос на операцијата наследена од G. Ако H е подгрупа од G и $a \in G$, тогаш множеството Ha се нарекува **десен комплекс** на H и множеството aH се нарекува лев комплекс на H.

Дефиниција. Подгрупата H од G се нарекува **нормална** подгрупа ако $a^{-1}Ha \subset H$ за секое $a \in G$. Еквивалентно, H е нормална подгрупа ако $aH = Ha$ за секое $a \in G$, односно ако десните и левите комплекси на H се совпаѓаат.

Да забележиме дека секоја подгрупа од Абелова група е нормална.

Теорема Б.1. Нека H е нормална подгрупа на G. Тогаш комплексите на H во G формираат група со операцијата множење на комплекси. Оваа група се нарекува **фактор група** и се означува со G/H.

Пример. Множеството $\mathbb{Z}$ од цели броеви формира Абелова група со операцијата собирање. Забележуваме дека парните цели броеви формираат подгрупа од Z, но непарните цели броеви не формираат подгрупа. Нека H го означува множеството на множители од 5, односно

$$H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$

Тогаш H е нормална подгрупа од $\mathbb{Z}$. Комплексите на H во $\mathbb{Z}$ се

$$\overline{0} = 0 + H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$$

$$\overline{1} = 1 + H = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$$

$$\overline{2} = 2 + H = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$$

$$\overline{3} = 3 + H = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$$

$$\overline{4} = 4 + H = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$$

За било кој друг цел број $n \in \mathbb{Z}$, комплексот $\overline{n} = n + H$ е еднаков на еден од погорните копмлекси. Тогаш заради претходната теорема заклучуваме дека $\mathbb{Z}/H = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ е група во однос на операцијата собирање на комплекси дадена со следнава шема

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Во шемата елементот од a-тиот ред и b-тата колона е ab.

Фактор групата $\mathbb{Z}/H$ се нарекува група на цели броеви модуло 5 и вообичаено се означуваме со $\mathbb{Z}_5$. Слично, за било кој позитивен цел број n може да се конструира група на цели броеви модуло n која се означува со $\mathbb{Z}_n$. ♦

Пример. Пермутациите на n симболи формираат група во однос на операцијата композиција на пресликувања, наречена група на симетрии со степен n и се означува со S_n. На пример, елементите на групата S_3 се пермутациите

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Овде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ е пермутацијата која што $1 \mapsto i$, $2 \mapsto j$, $3 \mapsto k$.

Непосредно се проверува дека мултипликативната шема за S_3 е

$\circ$	ε	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
ε	ε	σ_1	σ_2	σ_3	ϕ_1	ϕ_2
σ_1	σ_1	ε	ϕ_1	ϕ_2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	ϕ_2	ε	ϕ_1	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	ϕ_1	ϕ_2	ε	σ_1	σ_2
ϕ_1	ϕ_1	σ_3	σ_1	σ_2	ϕ_2	ε
ϕ_2	ϕ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ε	ϕ_1

Множеството $H = \{\varepsilon, \sigma_1\}$ е подгрупа на S3; неговите десни и леви комплекси се

Десни комплекси	Леви комплекси
$H = \{\varepsilon, \sigma_1\}$	$H = \{\varepsilon, \sigma_1\}$
$H\phi_1 = \{\phi_1, \sigma_2\}$	$\phi_1 H = \{\phi_1, \sigma_3\}$
$H\phi_2 = \{\phi_2, \sigma_3\}$	$\phi_2 H = \{\phi_2, \sigma_2\}$

Да забележиме дека десните комплекси и левите комплекси се различни. Оттука следува дека H не е нормална подгрупа на S_3. ♦

Пресликување f од групата G во група G' се нарекува **хомоморфизам** ако

$$f(ab) = f(a)f(b), \text{ за секои } a, b \in G$$

Ако хомоморфизамот f е биекција, тогаш f се нарекува **изоморфизам** од групата G во група G', а за групите G и G' велиме дека се **изоморфни**.

Ако $f : G \to G'$ е хомоморфизам, тогаш **јадро** на f е множеството на сите елементи од G кои што се пресликуват во единицата на G, односно

$$\ker f = \{a \in G \mid f(a) = e'\}$$

Ако $f : G \to G'$ е хомоморфизам, тогаш **слика** на групата G со f е множеството

$$f(G) = \{f(a) \mid a \in G\}$$

Важи следната теорема.

Теорема Б.2. Нека $f : G \to G'$ е хомоморфизам со јадро K. Тогаш K е нормална подгрупа на G, и фактор групата G/K е изоморфна на сликата на f.

Пример. Нека G е групата на реални броеви со операцијата собирање, и нека G' е групата на позитивни реални броеви со операцијата множење. Пресликувањето $f : G \to G'$ дефинирано со $f(a) = 2^a$ е хомоморфизам затоа што

$$f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a 2^b = f(a)f(b)$$

Освен тоа, да забележиме дека f е биекција, па оттука следува дека G и G' се изоморфни. ♦

Пример. Нека G е групата на ненулти комплексни броеви со операцијата множење и G' е групата ненутли реални броеви со операцијата множење. Пресликувањето $f : G \to G'$ дефинирано со $f(z) = |z|$ е хомоморфизам затоа што

$$f(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = f(z_1)f(z_2)$$

Јадрото K на f се состои од сите комплексни броеви z на единичната кружница, односно сите комплексни броеви z такви што $|z| = 1$. Затоа, G/K е изоморфна со сликата на f, односно со групата на позитивните реални броеви со операцијата множење. ♦

Прстени, интегрални домени и полиња

Нека R е непразно множество со две бинарни операции, операција собирање и операција множење. Тогаш R се нарекува **прстен**, ако се задоволени следните аксиоми:

$[R_1]$ За секои $a, b, c \in R$, имаме $(a+b)+c = a+(b+c)$

$[R_2]$ Постои елемент $0 \in R$, наречен **нулти** елемент, така што $a+0 = 0+a = a$ за секое $a \in R$

$[R_3]$ За секое $a \in R$ постои елемент $-a \in R$, наречен **спротивен** на a, така што $a+(-a) = (-a)+a = 0$

$[R_4]$ За секои $a, b \in R$, имаме $a+b = b+a$

$[R_5]$ За секои $a, b, c \in R$, имаме $(ab)c = a(bc)$

$[R_6]$ За секои $a, b, c \in R$, имаме $a(b+c) = ab+bc$

Да забележиме дека заради аксиомите $[R_1]-[R_4]$ имаме дека R е Абелева група во однос на собирањето.

Одземањето во R е дефинирано со $a-b=a+(-b)$, за секои $a,b\in R$.

Може да се покаже дека $a0=0a=0$, за секое $a\in R$. Навистина, имаме дека

$$a0=a(0+0)=a0+a0, \text{ и}$$

$$0a=(0+0)a=0a+0a$$

од каде што следува заклучокот.

R се нарекува **комутативен прстен** ако $ab=ba$, важи за секои $a,b\in R$. Исто така, R се нарекува прстен со единица ако постои ненулен елемент $1\in R$ така што $a1=1a=a$, за секое $a\in R$.

Непразно подмножество S од R се нарекува **потпрстен** на R ако S е прстен во однос на операциите наследени од R. Да забележиме дека S е потпрстен на R ако и само ако $a,b\in R$ повлекува $a-b\in S$ и $ab\in S$.

Непразно подмножество I од R се нарекува **лев идеал** во R ако

(i) $a-b\in I$, за секои $a,b\in I$, и

(ii) $ra\in I$, за секое $r\in R$ и за секое $a\in I$.

Да забележиме дека лев идеал I во R е исто така потпрстен на R. Слично, можеме да дефинираме **десен идеал** и **двостран идеал**. Јасно е дека сите идеали во комутативните прстени се двострани. Под идеал ќе подразбираме двостран идеал, ако поинаку не е назначено.

Теорема Б.3. Нека I е двостран идеал во прстен R. Тогаш комплексите

$$\{a+I\,|\,a\in R\}$$

формираат прстен со операцијата собирање на комплекси и множење на комплекси. Овој прстен се означува со R / I и се нарекува **фактор прстен**.

Сега, нека R е комутативен прстен со единица. За било кое $a \in R$, множеството

$$(a) = \{ra \mid r \in R\}$$

е идеал којшто се нарекува **главен идеал** генериран од a. Ако секој идеал во R е главен идеал тогаш R се нарекува **прстен на главни идеали**.

Дефиниција. Комутативен прстен R со единица се нарекува **интегрален домен** ако за секои $a, b \in R$, $ab = 0$ повлекува $a = 0$ или $b = 0$.

Дефиниција. Комутативниот прстен R со единица се нарекува **поле** ако секој ненулти елемент $a \in R$ има инверзен во R, односно ако постои елемент $a^{-1} \in R$ така што $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Секое поле е интегрален домен бидејќи ако $ab = 0$ и $a \neq 0$, тогаш

$$b = 1 \cdot b = a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Забележуваме дека полето исто така може да се смета за комутативен прстен во којшто ненултите елементи формираат група во однос на операцијата множење.

Пример. Множеството $\mathbb{Z}$ од цели броеви со вообичаените операции на собирање и множење е класичен пример на интегрален домен со единица. Секој идеал I во Z е главен идеал, односно

$$I = (n), \text{ за некој цел број } n.$$

Фактор прстенот $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$ се нарекува **прстен од цели броеви модул по n**. Ако n е прост број, тогаш $\mathbb{Z}_n$ е поле. Од друга страна, ако n не е прост број, тогаш $\mathbb{Z}_n$ има нулти делители. На пример, во прстенот $\mathbb{Z}_6$ имаме дека $\overline{2}\overline{3} = \overline{0}$ и $\overline{2} \neq \overline{0}$ и $\overline{2} \neq \overline{0}$. ♦

Пример. Рационалните броеви $\mathbb{Q}$ и реалните броеви $\mathbb{R}$ формираат поле во однос на вообичаените операции на собирање и множење. ♦

Пример. Нека $\mathbb{C}$ го означува множеството од сите подредени парови на реални броеви со собирање и множење дефинирани со

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b)\bullet(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Тогаш $\mathbb{C}$ ги задоволува сите потребни својства за поле. Всушност, $\mathbb{C}$ е токму полето на комплексните броеви. ♦

Пример. Множеството

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \text{ се рационални броеви}\}$$

е поле, додека множеството

$$D = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \text{ се цели броеви}\}$$

е интегрален домен, но не е поле. ♦

Пример. Множеството M од сите 2x2 матрици со реални елементи формира некомутативен прстен со нулти делители со операциите собирање на матрици и множење на матрици. ♦

Пример. Нека R е било кој прстен. Тогаш множеството R[x] од сите полиноми над R формира прстен во однос на вообичаените операции на собирање и множење на полиноми. Покрај тоа, ако R е интегрален домен тогаш R[x] е исто така интегрален домен. ♦

Сега, нека D е интегрален домен.

Велиме дека b **го дели** a во D ако $a = bc$ за некое $c \in D$.

Елемент $u \in D$ се нарекува **единица** ако u го дели 1, односно ако u има инверзен во однос на множењето.

Елемент $b \in D$ се нарекува **асоциран** на $a \in D$ ако $b = ua$ за некоја единица $u \in D$.

Елемент којшто не е единица $p \in D$ се вели дека е **иредуцибилен** ако $p = ab$ повлекува a е единица или b е единица.

Интегралниот домен D се нарекува **домен со еднозначна факторизација** ако секој елемент различен од единица може да се запише на единствен начин како производ на иредуцибилни елементи.

Пример. Прстенот $\mathbb{Z}$ од цели броеви е класичен пример за домен со еднозначна факторизација. Единиците на $\mathbb{Z}$ се 1 и -1. Единствените асоцирани на $n \in \mathbb{Z}$ се n и $-n$. Иредуцибилните елементи на $\mathbb{Z}$ се простите броеви. ♦

Пример. Множеството

$$D = \{a + b\sqrt{13} \mid a, b \text{ се цели броеви}\}$$

е интегрален домен. Единиците на D се ± 1, $18 \pm 5\sqrt{13}$ и $-18 \pm 5\sqrt{13}$. Елементите 2, $3 - \sqrt{13}$ и $-3 - \sqrt{13}$ се иредуцибилни во D. Да забележиме дека $4 = 2 \cdot 2 = (3 - \sqrt{13})(-3 - \sqrt{13})$. Според тоа, D не е домен со единствена факторизација. ♦

Нека R и R' се прстени. Пресликување $f : R \to R'$ се нарекува **хомоморфизам** или **хомоморфизам на прстени**, ако се задоволени следниве услови

(i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$, за секои $a, b \in R$

(ii) $f(ab) = f(a)f(b)$, за секои $a, b \in R$

Може да се докаже дека ако $f : R \to R'$ е хомоморфизам, тогаш множеството

$$K = \{r \in R \mid f(r) = 0\}$$

е идеал во R. Множеството K се нарекува **јадро на хомоморфизмот** f.

Модули

Нека M е адитивна Абелова група и нека R е прстен со единица. Тогаш M се нарекува (лев) **R-модул** ако постои пресликување $RxM \to M$ што ги задоволува следните аксиоми:

$[M_1]$ $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, за секои $r \in R$ и $m_1 + m_2 \in M$

$[M_2]$ $(r + s)m = rm + sm$, за секои $r, s \in R$ и $m \in M$

$[M_3]$ $(rs)m = r(sm)$, за секои $r, s \in R$ и $m \in M$

$[M_4]$ $1 \cdot m = m$, за секое $m \in M$

Да забележиме дека поимот R-модул е генерализација на поимот векторски простор каде што скаларите се менуваат во прстен наместо во поле.

Пример. Нека G е адитивна Абелова група. Можеме да го сметаме G за модул над прстенот $\mathbb{Z}$ од цели броеви ако дефинираме

$$ng = \overbrace{g + g + \cdots + g}^{n-\text{пати}}, \quad 0g = 0, \quad (-n)g = -ng$$

каде што n е било кој позитивен цел број. ♦

Пример. Нека R е прстен и нека I е идеал во R. Тогаш I може да се смета за модул над прстенот R. ♦

Пример. Нека V е векторски простор над поле K и нека $T : V \to V$ е линеарно пресликување. Можеме да го сметаме V за модул над прстенот $K[x]$ на полиноми над K ако дефинираме

$$f(x)v = f(T)(v)$$

Може да се провери дека множењето со скалар е добро дефинирано. ♦

Нека M е модул над прстен R. Адитивна подгрупа N од M се нарекува **подмодул** од M ако $u \in N$ и $k \in R$ повлекува $ku \in N$. Да забележиме дека во тој случај N е модул над прстенот R.

Нека M и M' се R-модули. Пресликување $T : M \to M'$ се нарекува **хомоморфизам** или **R-хомоморфизам** или **R-линеарно**, ако се задоволени следниве услови

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, за секои $u, v \in M$

(ii) $T(ku) = kT(u)$, за секои $u \in M$ и $k \in R$.

Може да се докаже дека ако $f : R \to R'$ е хомоморфизам, тогаш множеството

$$K = \{u \in M \mid f(u) = 0\}$$

е подмодул од R. Множеството K се нарекува **јадро на хомоморфизмот** f.

Ако M е R-модул со подмодул N, тогаш може да се покаже дека комплексите $\{u + N \mid u \in M\}$ формираат R-модул со операциите собирање и множење со скалар дефинирани со

$$(u_1 + N) + (u_2 + N) = (u_1 + u_2) + N \quad \text{и} \quad r(u + N) = ru + N$$

Вака дефинираниот модул се означува со M / N и се нарекува **фактор модул**.

ПОЛИНОМИ НАД ПОЛЕ

Вовед

Во ова поглавје ќе ги испитаме полиномите над поле K и ќе покажеме дека тие имаат многу својства што се аналогни на својствата на целите броеви. Овие резултати играат важна улога во добивањето на канонските форми на линеарен оператор T на векторски простор V над поле K.

Прстен на полиноми

Нека K е поле. Формално, полиномот на f над K е бесконечна низа на елементи од K во која сите освен конечен број од нив се 0

$$f = (\ldots, 0, a_n, \ldots, a_1, a_0)$$

Низата ја запишуваме така што да се протега налево наместо надесно. Членот a_k се нарекува $k -$ти коефициент на f. Ако n е најголемиот број за којшто $a_n \neq 0$, тогаш велиме дека **степенот** на f е n, и запишуваме

$$\deg f = n$$

Исто така, a_n го нарекуваме **водечки коефициент** на f, и ако $a_n = 1$ полиномот го нарекуваме **моничен полином**. Од друга страна, ако секој коефициент на f е 0 тогаш f се нарекува **нулти полином** и запишуваме $f = 0$. Степенот на нултиот полином не е дефиниран.

Сега, ако g е друг полином над K, на пример,

$$g = (\ldots, 0, b_m, \ldots, b_1, b_0)$$

тогаш **збирот** $f + g$ е полиномот добиен со собирање на соодветните коефициенти. Поточно, ако $m \le n$ тогаш

$$f + g = (\ldots, 0, a_n, \ldots, a_1, a_0) + (\ldots, 0, b_m, \ldots, b_1, b_0) =$$

$$= (\ldots, 0, a_n, \ldots, a_m + b_m, \ldots, a_1 + b_1, a_0 + b_0)$$

Понатаму, **производот** fg е полиномот

$$fg = (\ldots, 0, a_n, \ldots, a_1, a_0)(\ldots, 0, b_m, \ldots, b_1, b_0) =$$

$$= (\ldots, 0, a_n b_m, \ldots, a_1 b_0 + a_0 b_1, a_0 b_0)$$

односно, $k -$тиот коефициентот на производот fg е

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

Се применува следнава теорема.

Теорема. Множеството P на полиноми над поле K со горенаведените операции на собирање и множење претставува комутативен прстен со единица и без нулти делители, односно претставува интегрален домен. Ако f и g се ненулти полиноми во P, тогаш

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g).$$

Нотација

Ќе го идентификуваме скаларот $a_0 \in K$ со полиномот

$$a_0 = (\dots, 0, a_0)$$

Исто така, ќе избереме симбол, на пример t, за да го означиме полиномот

$$t = (\dots, 0, t, 0)$$

Симболот t ќе го нарекуваме **променлива**. Множејќи го t со себе, добиваме

$$t^2 = (\dots, 0, 1, 0, 0), \ \ t^3 = (\dots, 0, 1, 0, 0, 0), \dots$$

Така, горенаведениот полином може да се запише на единствен начин во вообичаениот облик

$$f = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$$

Кога симболот t е избран како променлива, прстенот на полиноми над K се означува со

$$K[t]$$

а полиномот f често се означува со $f(t)$.

Исто така, полето K го сметаме за подмножество од $K[t]$ со горенаведената идентификација. Ова е можно затоа што операциите на собирање и множење на елементи од K се зачувани при оваа идентификација:

$$(\ldots,0,a_0)+(\ldots,0,b_0)=(\ldots,0,a_0+b_0),\ \text{и}$$

$$(\ldots,0,a_0)\cdot(\ldots,0,b_0)=(\ldots,0,a_0b_0),$$

Забележуваме дека ненултите елементи на K се единиците на прстенот K[t].

Исто така, забележуваме дека секој ненулти полином е асоциран на единствен моничен полином. Затоа, ако d и d' се монични полиноми за кои што важи дека d го дели d' и d' го дели d, тогаш $d=d'$. Да напоменеме дека полином g дели полином f ако постои полином h така што $f=hg$.

Деливост

Следната теорема го формализира алгоритамот за делење на полиноми.

Теорема. (**Алгоритам за делење**) Нека f и g се полиноми над поле K така што $g\neq 0$. Тогаш постојат полиноми q и r, така што

$$f=qg+r$$

каде што или $r=0$ или $\deg r<\deg g$.

Доказ. Ако $f=0$ или ако $\deg r<\deg g$, тогаш ја имаме бараната репрезентација

$$f=0g+r$$

Сега да претпоставиме дека $\deg f\geq \deg g$, на пример,

$$f=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0\ \text{и}\ g=b_mt^m+\cdots+b_1t+b_0$$

каде што $a_n, b_m \neq 0$ и $n \geq m$. Тогаш го формираме полиномот

$$f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} g \qquad (1)$$

Тогаш $\deg f_1 < \deg f$. Со индукција, постојат полиноми q_1 и r, така што

$$f_1 = q_1 g + r$$

каде што или $r = 0$ или $\deg r < \deg g$. Заменувајќи го ова во (1) и решавајќи го добиениот израз по f, наоѓаме дека

$$f = \left(q_1 + \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} \right) g + r$$

што ја претставува бараната репрезентација. ■

Теорема. Прстенот $K[t]$ на полиноми над поле K е прстен со главни идеали. Ако I е идеал во $K[t]$, тогаш постои единствен моничен полином d којшто го генерира I, односно таков што d го дели секој полином $f \in I$.

Доказ. Нека d е полином со најмал степен во I. Бидејќи можеме да го помножиме d со ненулти скалар и производот повторно да биде полином во I, без губење на општоста можеме да претпоставиме дека d е миничен полином. Понатаму, претпоставуваме дека $f \in I$. Според претходната теорема постојат полиноми q и r така што

$$f = qd + r, \text{ каде што или } r = 0 \text{ или } \deg r < \deg$$

Сега имаме дека $f, d \in I$ што повлекува дека $qd \in I$. Оттука заклучуваме дека $r = f - qd \in I$. Но d е полином со најмал степен во I. Според тоа, $r = 0$ и $f = qd$, односно полиномот d го дели полиномот f.

Преостанува да покажеме дека полиномот d е единствен. Ако d' е друг моничен полином којшто го генерира идеалот I, тогаш d го дели d' и d' го дели d. Ова имплицира дека $d = d'$, бидејќи d и d' се монични. Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата. ■

Теорема. Нека f и g се ненулти полиноми во $K[t]$. Тогаш постои единствен моничен полином d така што

(i) d ги дели f и g, и

(ii) ако d' ги дели f и g, тогаш d' го дели d.

Дефиниција. Горенаведениот полином d се нарекува **најголем заеднички делител** на f и g.

Ако $d = 1$ тогаш за полиномите f и g велиме дека се заемно прости.

Доказ за теоремата. Множеството

$$I = \{mf + ng \mid m, n \in K[t]\}$$

е идеал. Нека d е моничен полином којшто го генерира идеалот I. Да забележиме дека $f, g \in I$, што значи дека d ги дели f и g. Сега да претпоставиме дека d' ги дели f и g. Нека J е идеалот генериран од d'. Тогаш $f, g \in J$ па имаме дека $I \subset J$. Според тоа, d' го дели d како што тврдевме.

Преостанува да покажеме дека полиномот d е единствен. Ако d_1 е друг моничен најголем заеднички делител на f и g, тогаш d го дели d_1 и d_1 го дели d. Ова имплицира дека $d = d_1$ бидејќи d и d_1 се монични полиноми. Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата. ■

Последица. Нека d е најголемиот заеднички делител на полиномите f и g. Тогаш постојат полиноми m и n така што

$$d = mf + ng$$

Специјално, ако f и g се заемно прости, тогаш постојат полиноми m и n, така што $mf + ng = 1$.

Последицата следува директно од фактот дека полиномот d го генерира идеалот.

$$I = \{mf + ng \mid m, n \in K[t]\}$$

Факторизација

За полином $p \in K[t]$ велиме дека е иредуцибилен ако $p = fg$ имплицира f е скалар или g е скалар.

Лема. Нека полином $p \in K[t]$ е иредуцибилен. Ако p го дели производот fg на полиномите $f, g \in K[t]$, тогаш p го дели f или p го дели g. Поопшто, ако полиномот p го дели производот на полиномите $f_1, f_2, \dots, f_n$, тогаш p дели еден од нив.

Доказ. Да претпоставиме дека p го дели производот fg, но не го дели полиномот f. Бидејќи p е иредуцибилен, полиномите f и p мора да бидат заемно прости. Според тоа, постојат полиноми $m, n \in K[t]$ така што $mf + np = 1$. Со множење на оваа равенка со g, добиваме дека $mfg + npg = g$. Но, полиномот p го дели производот fg па според тоа и производот mfg. Освен тоа, p го дели производот npg. Оттука следува дека p го дели збирот $g = mfg + npg$.

Сега да претпоставиме дека p го дели производот $f_1 f_2 \cdots f_n$. Ако p го дели f_1, тогаш лемата е докажана. Ако p не го дели f_1, тогаш го дели производот $f_2 \cdots f_n$. Со индукција по n заклучуваме дека p дели еден од полиномите $f_1, f_2, \dots, f_n$. Со тоа лемата е докажана. ■

Теорема. (**Теорема за единственост на факторизација**) Нека f е ненулти полином во $K[t]$. Тогаш f може да се запише на единствен начин како производ од облик

$$f = kp_1p_2\cdots p_n$$

каде што $k \in K$ и p_i се монични иредуцибилни полиноми во $K[t]$.

Доказ. Прво го докажуваме постоењето на таков производ. Ако f е иредуцибилен полином или ако $f \in K,$ тогаш јасно е дека таков производ постои. Од друга страна, претпоставуваме дека $f = gh,$ каде што f и g не се скалари. Тогаш g и h имаат степени помали од степенот на f. Со индукција, можеме да претпоставиме дека

$$g = k_1g_1g_2\cdots g_r \text{ и } h = k_2h_1h_2\cdots h_s$$

каде што $k_1, k_2 \in K$ и g_i и h_i се монечни иредуцибилни полиноми. Според тоа, имаме дека

$$f = (k_1k_2)g_1g_2\cdots g_rh_1h_2\cdots h_s$$

е бараната репрезентација.

Сега да докажеме единственост на таквиот производ за полиномот f. Да претпоставиме дека

$$f = kp_1p_2\cdots p_n = k'q_1q_2\cdots q_m$$

каде што $k, k' \in K$ и $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m$ се монични иредуцибилни полиноми. Сега p_1 го дели производот $k'q_1q_2\cdots q_m$. Бидејќи p_1 е иредуцибилен, тој мора да дели еден од полиномите q_i заради горенаведената лема. Без губење на општоста може да претпоставиме дека p_1 го дели q_1. Бидејќи p_1 и q_1 се монични иредуцибилни полиноми добиваме дека $p_1 = q_1$. Според тоа, добиваме дека

$$kp_2 \cdots p_n = k'q_2 \cdots q_m$$

Според индукција, имаме дека $n = m$ и $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_m$ за некои преуредување на q_i. Исто така имаме дека $k = k'$. Со тоа го комплетиравме доказот на теоремата. ■

Ако полето K е полето комплексни броеви $\mathbb{C}$, тогаш го имаме следниот резултат којшто е познат како основна теорема на алгебра. Неговиот доказ е надвор од доменот на овој учебник.

Теорема. (**Фундаментална теорема на алгебрата**) Нека $f(t)$ е ненулти полином над полето комплексни броеви поле $\mathbb{C}$. Тогаш $f(t)$ може да се запише на единствен начин, со занемарување на редоследот на множителите, како производ од облик

$$f(t) = k(t - r_1)(t - r_2)\cdots(t - r_n), \quad \text{каде што } k, r_i \in \mathbb{C},$$

односно како производ на линеарни полиноми.

Во случај кога $f(t)$ е полином над полето реални броеви $\mathbb{R}$ го имаме следниов резултат.

Теорема. Нека $f(t)$ е ненулти полином над полето реални броеви $\mathbb{R}$. Тогаш $f(t)$ може да се запише на единствен начин како производ од облик

$$f(t) = kp_1(t)p_2(t)\cdots p_m(t)$$

каде што $k \in \mathbb{R}$ и $p_i(t)$ се монични иредуцибилни полиноми со степен еден или два.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Axler S., *Linear Algebra Done Right*, Springer, New York, 1977

[2] Воеводин, В.В. *Линейная алгебра*, Наука, Москва, 1974

[3] Целакоски Н., *Задачи по линеарна алгебра*, Просветно дело, Скопје, 1996

[4] Halmos P., *Finite - Dimensional Vector Spaces*, Springer, New York, 1987

[5] Карчицка Д., *Конечно димензионални векторски простори,* Униниверзитет Св. Кирил и Методиј, Скопје, 1985

[6] Kurepa S., *Uvod u Linearnu algebru*, školska knjiga, Zagrab, 1987

[7] Kurepa S., *Konačno dimenzionalni vektorski prostori,* Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1976

[8] Lipschutz S., *Linear Algebra*, McGraw-Hill Companies, New York, 2009

[9] Mitrinović D.S., Mihailović D., Vasić P.M., *Linearna algebra, Polonomi, Analitička geometrija,* Građevinska knjiga, Beograd, 1975

[10] Постников, *Линейная алгебра*, Наука, Москва, 1979

[11] Proskuryakov I. V., *Problems in Linear Algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1978

[12] Radenovic S., Radenovic D., *Linearna algebra*, *zbirka reshenih zadataka*, Beograd, 1996

[13] Strang G., *Introduction to Linear Algebra,* Springer, New York, 2016

[14] Strang G., *Linear Algebra and its Applications,* MIT, Academic Pres, 1976

[15] Тышкевич Р. И., Феденко А. С.: *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*, Вышэйшая школа, Минск, 1968

[16] Тренчевски К., Димовски Д., Тренчевски Г., Крстеска Б., Кондинска Л., *Линеарна лгебра и аналитичка геометрија* за III година на реформираното гимназиско образование, Просветно дело, Скопје, 2002

[17] Шилов Г. Е., *Конечномерные линейные пространства,* Наука, Москва, 1964

Е-издание:
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41