Марија Оровчанец **Билјана Крстеска**

МАТЕМАТИКА

Скопје, 2017

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
д-р Марија Оровчанец и д-р Билјана Крстеска
Природно – математички факултет, Скопје

Рецензенти
1. Проф. д-р Живорад Томовски,
редовен професор на ПМФ, Скопје
2. Проф. д-р Љупчо Настовски,
редовен професор на ПМФ, Скопје
3. Проф. д-р Ѓорѓи Маркоски,
вонреден професор на ПМФ, Скопје

Техничка обработка
д-р Марија Оровчанец и д-р Билјана Крстеска

Лектура на македонски јазик:
Виолета Јовановска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.8)

ОРОВЧАНЕЦ, Марија
Математика / Марија Оровчанец, Билјана Крстеска. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2018. - 477 стр. : илустр. ; 25 см

Регистар. - Библиографија: стр. 475-477

ISBN 978-9989-43-404-4
1. Крстеска, Билјана [автор]
а) Математика - Високошколски учебници
COBISS.MK-ID 106109194

Во сеќавање на Панта

Предговор

Оваа книга е наменета за студентите од прва година на Природно математичкиот факултет во Скопје, на насоката математика физика, за студентите од прва година на Архитектонскиот факултет и за студентите од прва година на факултетот за дизајн и технологии на мебел и интериер.

Книгата е поделена на девет поглавја. На почетокот, после предговорот е даден преглед на сите симболи кои се користат при изложување на материјалот. Во првата глава е даден краток вовед во теоријата на множества, а во втората глава аксиоматски се воведени множеството реални броеви, како и вообичаените подмножества од природни, цели, рационални и ирационални броеви. Понатаму, се запознаваме со елементарните функции и обработуваме основни поими од математичката анализа во врска со функции како што се: лимес, непрекинатост, извод и интеграл. На крајот е поместен додаток кој се состои од два дела: трансформација на рационални дропки во збир од прости дропки и неравенства, како и азбучник на сите користени поими.

Студентите често имаат потешкотии при совладување на материјалот по предметот Математика, поради недоволните предзнаења од средно училиште, но и поради објективната тежина на овој предмет. Поради тоа се определивме за илустрирање на материјалот со голем број примери кои со посебна леснотија ги водат студентите кон усвојување на целите и барањата утврдени со студиската програма по наведените предмети. Тоа ни дава за право кажеме дека презентираниот материјал во книгата им овозможува на студентите лесно да ги совладаат целите определени со студиската програма. За таа цел на студентите им советуваме прво да го совладаат теоретскиот дел од соодветното поглавје, што значи треба да ги усвојат поважните дефиниции, теореми и примери што го илустрираат материјалот. Потоа да ги изработат задачите за вежбање кои се поместени непосредно после секое поглавје.

На крајот, им се заблагодаруваме на сите коишто помогна во подготовката на овој ракопис, особено на рецензентите, проф. д-р Живорад Томовски, проф. д-р Љупчо Настовски и проф. д-р Ѓорѓи Маркоски. Тие го прочитаа ракописот внимателно и со корисните забелешки и сугестии дадоа значаен допринос за негово подобрување.

Скопје, март 2017 година　　　Авторите

Преглед на симболи

1) Значење на некои симболи

Симбол	**Употреба**	**Значење**
$\in$	$x \in A$	x е елемент на множеството A
$\notin$	$x \notin A$	x не е елемент на множеството A
$\subseteq$	$A \subseteq B$	A е подмножество од B
$\varnothing$	$\varnothing$	празно множество
$\cup$	$A \cup B$	унија на множествата A и B
$\cap$	$A \cap B$	пресек на множествата A и B
$\backslash$	$A \backslash B$	разлика на множествата A и B
$\times$	$A \times B$	Декартов производ на множествата A и B
$\leq$	$a \leq b$	a е помало или еднакво на b
$<$	$a < b$	a е помало од b
$[\,,]$	$[a,b]$	множество на сите реални броеви поголеми или еднакви на a и помали или еднакви на b
$(\,,)$	(a,b)	множество на сите реални броеви меѓу a и b
$\Rightarrow$	$P \Rightarrow Q$	од исказот P следува исказот Q
$\Leftrightarrow$	$P \Leftrightarrow Q$	исказите P и Q се еквивалентни
$\forall$	$(\forall a)(\forall a \in A)$	за секое a од A
$\exists$	$(\exists a)(\exists a \in A)$	постои a од A
$\vert\ \vert$	$\vert x \vert$	апсолутна вредност од x
$\rightarrow$	$f : E \rightarrow F$	f е функција од E во F
$\mapsto$	$x \mapsto f(x)$	функција која на елементот x му придружува $f(x)$
D_f		дефинициона област на функцијата f
R_f		множество вредности на функцијата f

Симбол	**Употреба**	**Значење**
$\lim$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	граница (лимес) на низата $\{a_n\}$ кога n се стреми кон ∞; и
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	граница (лимес) на функцијата f кога x се стреми кон x_0
$\int$	$\int f(x)dx$	неопределен интеграл на функцијата f
$\int\limits_a^b$	$\int\limits_a^b f(x)dx$	определен интеграл на функцијата f на интервалот (a,b)

2) Значење на некои букви

$\mathbf{N}$	множеството на сите природни броеви $1,2,3,\ldots$
$\mathbf{Z}$	множеството на сите цели броеви $0,1,-1,2,-2,\ldots$
$\mathbf{Q}$	множеството на сите рационални броеви
$\mathbf{R}$	множеството на сите реални броеви

3) Грчки алфабет

Α	α	алфа	Ν	ν	ни
Β	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гама	Ο	ο	омикрон
Δ	δ	делта	Π	π	пи
Ε	ε	епсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	цета	Σ	σ	сигма
Η	η	ета	Τ	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	јота	χ	φ	фи
Κ	κ	капа	Χ	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	ми	Ω	ω	омега

Содржина

1. ВОВЕД 11
1.1. Квантификатори 11
1.2. Поим за множество, операции со множества 12
1.3. Релации 20
1.4. Операции 22
1.5. Задачи за вежбање 23

2. РЕАЛНИ БРОЕВИ 28
2.1. Дефиниција на множество реални броеви 28
2.2. Некои поважни подмножества од множеството реални броеви 36
2.2.1. Множество природни броеви 36
2.2.2. Множество цели броеви 47
2.2.3. Множество рационални броеви 49
2.3. Ограничени подмножества на реалните броеви 52
2.4. Геометриска интерпретација на множеството реални броеви 55
2.5. Задачи за вежбање 58

3. ФУНКЦИИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА 63
3.1. Дефиниција и основни поими 63

3.2. Аритметички операции со функции 72
3.3. Монотоност на функција 73
3.4. Ограничени функции 76
3.5. Локални екстреми 78
3.6. Сложени функции 79
3.7. Инверзни функции 82
3.8. Парни и непарни функции 87
3.9. Периодични функции 90
3.10. Нули на функција 93
3.11. Основни елементарни функции 94
3.11.1. Константна функција 95
3.11.2. Степенска функција 95
3.11.3. Експоненцијални и логаритамски функции 100
3.11.4. Тригонометриски функции 103
3.11.5. Инверзни на тригонометриските функции 106
3.12. Посредна конструкцуја на графици 109
3.13. Задачи за вежбање 119

4. НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ 127
4.1. Дефиниција на низа и примери 127
4.2. Аритметички операции со низи 133
4.3. Монотони низи 134
4.4. Ограничени низи 135
4.5. Гранична вредност на низа. Конвергентни и дивергентни низи 137
4.6. Својства на конвергентни низи 143
4.7. Бројот „*e*“ 154
4.8. Геометриски ред 157
4.9. Задачи за вежбање 161

5. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА. НЕПРЕКИНАТОСТ 168
5.1. Дефиниција на гранична вредност и примери 168
5.2. Аритметички операции со гранични вредности 188
5.3. Асимптоти 190
5.3.1. Асимптоти паралелни со $y-$ оската 191
5.3.2. Асимптоти паралелни со $x-$оската 194
5.3.3. Коси асимптоти 196
5.4. Непрекинати функции 198
5.5. Гранична вредност на некои функции – специјални граници 211
5.6. Задачи за вежбање 219

6. ИЗВОДИ НА ФУНКЦИИ 227
6.1. Дефиниција и примери 227
6.2. Геометриска и механичка интерпретација на извод 233
6.3. Правила за пресметување на извод 237
6.3.1. Извод на збир и разлика на функции 238
6.3.2. Извод на производ на две функции 239
6.3.3. Извод на количник на две функции 241
6.3.4. Извод на сложена функција 242
6.3.5. Извод на инверзна функција 245
6.3.6. Извод од имплицитно зададена функција 247
6.4. Изводи од повисок ред 248
6.5. Диференцијал на функција 250
6.6. Основни теореми во диференцијалното сметање 254
6.7. Лопиталово правило 264
6.8. Испитување на функции 271
6.8.1. Растење и опаѓање на функција. Интервали на монотоност 271
6.8.2. Локални екстреми 273

6.8.3. Конвексност и конкавност 276
6.8.4. Превојни точки 279
6.8.5. Графичко прикажување на функции 281
6.9. Задачи за вежбање 284

7. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ 291
7.1. Примитивна функција и неопределен интеграл 291
7.2. Таблица на некои основни интеграли 297
7.3. Интегрирање со метод на замена 300
7.4. Интегрирање со метод на парцијална интеграција 305
7.5. Пресметување на некои важни типови интеграли 311
7.5.1. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ 311
7.5.2. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ 312
7.5.3. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ 313
7.5.4. Интеграли од видот $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$ 315
7.5.5. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$ 318
7.5.6. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ 320
7.5.7. Интеграли од видот $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ 323
7.5.8. Интеграли од видот $\int \sqrt{x^2 \pm k^2} dx$ и $\int \sqrt{k^2 - x^2} dx$ 325
7.5.9. Интеграли од видот $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$ 331
7.6. Интегрирање на дробно рационални функции 333
7.7. Интеграли на некои ирационални функции 341

7.7.1. Интеграли од видот $\int R(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, ..., x^{m_s/n_s})dx$ 341

7.7.2. Интеграли од видот
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s}\right)dx$ 342

7.7.3. Интеграли од видот $\int R(x, \sqrt{x^2 \pm k^2})dx$ и $\int R(x, \sqrt{k^2 - x^2})dx$ 344

7.8. Интеграли на тригонометриски функции 347

7.8.1. Интеграл на функциите $\cos \alpha x \cos \beta x$, $\sin \alpha x \sin \beta x$ и
$\sin \alpha x \cos \beta x$ 347

7.8.2. Интеграл на функциите $\sin^n x$ и $\cos^n x$ ($n \in \mathbf{N}$) 349

7.8.3. Интеграл на функциите $\sin^m x \cdot \cos^n x$ ($m, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$) 350

7.8.4. Интеграли на рационални функции од $\sin x$ и $\cos x$ 353

7.9. Задачи за вежбање 354

8. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ 360

8.1. Определен интеграл како нараснување на
примитивната функција 360

8.2. Определен интеграл како гранична вредност на збир 362

8.3. Својства на определениот интеграл 368

8.4. Геометриско и механичко толкување
на определен интеграл 375

8.5. Примени на определен интеграл во математика 380

8.5.1. Пресметување на плоштини 380

8.5.2. Пресметување на волумен на вртливи тела 387

8.5.3. Пресметување на должина на лак на крива 396

8.6. Примена на определен интеграл во физика 399

8.6.1. Брзина и пат при рамномерно забрзано
(успорено) движење 399

8.6.2. Работа на променлива сила 402

8.6.3. Кинетичка енергија. Потенцијална енергија 406

8.6.4. Статички моменти и тежиште на хомоген лак на крива 412
8.7. Задачи за вежбање 415

ДОДАТОК 424

1. **ТРАНСФОРМАЦИЈА НА РАЦИОНАЛНИ ДРОПКИ ВО ЗБИР ОД ПРОСТИ ДРОПКИ** 425
1.1. Метод на неопределени коефициенти 425
1.2. Трансформација на неправилни рационални дропки во збир од полином и правилна дропка 428
1.3. Трансформација на правилни рационални дропки во збир од прости дропки 430
1.4. Задачи за вежбање 446

2. **НЕРАВЕНСТВА** 450
2.1. Средни величини 450
2.2. Некои поважни неравенства 454
2.3. Задачи за вежбање 461

3. **ТАБЛИЦИ ЗА ИЗВОДИ И ИНТЕГРАЛИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ** 465

3.1. Изводи и интеграли на елементарни функции 465
3.2. Таблица на изводи на елементарни функции 466
3.3. Таблица на интеграли на елементарни функции 467
3.4. Таблица на интеграли добиена со методите на замена и парцијална интеграција 468

ИНДЕКС 472
ЛИТЕРАТУРА 475

1. Вовед

1.1. Квантификатори

Во математиката се важни речениците во кои се изнесуваат соодветни тврдења. Таквите реченици ги нарекуваме *искази*. Попрецизно, за една реченица велиме дека е исказ ако таа е или вистинита или невистинита, односно не е истовремено вистинита и невистинита. На пример, реченицата:

1) *Февруари има 28 дена,*

не е исказ, додека речениците:

2) *Јануари има 31 ден*,

3) *Париз е главен град на Македонија*

се искази, и тоа првиот е вистинит, а вториот е невистинит исказ.

Нека P и Q се два математички исказа.

Велиме дека исказот P го *имплицира* исказот Q ако Q е вистинит исказ кога и P е вистинит. Тогаш симболички бележиме $P \Rightarrow Q$.

Ако $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, тогаш велиме дека исказите P и Q се *еквивалентни* и пишуваме симболички $P \Leftrightarrow Q$. Ако $P \Leftrightarrow Q$, тогаш велиме дека Q е потребен и доволен услов за да биде вистинит исказот P или исказот P е вистинит ако и само ако е вистинит исказот Q.

Во математиката често се користи изразот: „за секој". Таков израз симболички го означуваме со знакот $\forall$. На пример, ако напишеме $\forall x$, читаме „за секое x". Исто така, често се користи и изразот „постои". Таков израз симболички го означуваме со знакот $\exists$. На пример, ако напишеме $\exists x$, читаме „постои x". Симболите $\forall$ и $\exists$ се викаат *квантификатори*; првиот *универзален квантификатор*, додека вториот *егзистенцијален квантификатор*.

1.2. Поим за множество, операции со множества

Секој човек со здрав разум смета дека учениците од еден клас сочинуваат одредена целина. Тие ученици образувааат множество и секој ученик од соодветниот клас е член, припадник, односно елемент на тој клас, на тој колектив.

Аналогно, сите жители на Скопје образуваат одредена целина, односно одредено множество, а секој жител на Скопје е член, односно елемент на тоа множество.

Исто така сите точки на рамнината кои се еднакво одалечени од некоја фиксна точка образуваат целина која се вика кружница. За точката P да лежи на споменатата кружница, потребно и доволно е нејзината оддалеченост од онаа фиксна точка, која се нарекува центар на кружницата, да го задоволува бараниот услов на одалеченост.

Овие примери, како и многу други за кои во овој момент стануваме свесни, секако, не потценувајќи ги едноставните примери како на пример сите куќи на некоја улица, сите реки во некоја област, сите играчи на некоја екипа итн... покажуваат дека во тоа изобилство на многу различни примери се провлекува нешто заедничко, а тоа е дека секогаш се работи за целина, за множина, за множество и за неговите делови.

Понекогаш, јазичните термини множество и елемент, кои сме ги употребувале, се покажуваат неадекватни. Така, не е добро ако кажеме дека пратеникот тој и тој е елемент на собранието на таа и таа општина. Но, ништо не смета да се каже на пример дека точката P е елемент на рамнината. Во овој случај точката P е некако безлична, додека пратеникот не е, бидејќи со него се поврзуваат многу особини на живиот човек. Но, во овој момент, кога не не интересира дека некој е член на општинското собрание, туку само фактот, дека пратениците прават целина, дека жителите на Скопје прават целина, дека сите точки прават целина итн., односно кога воочуваме некои заеднички особини на повеќе објекти, тие нелагодности исчезнуваат.

Множество е основен поим во математиката и го усвојуваме без дефиниција. На пример, страниците на оваа книга формираат множество, книгите во една библиотека формираат множество, сите жители на Скопје формираат множество, итн.

Од наведените примери гледаме дека секое множество се состои од одредени објекти кои имаат заедничко карактеристично својство. Објектите што го формираат множеството се нарекуваат *елементи на множеството.* Најчесто, множествата ќе ги означуваме со големите латински букви, на пример A, B, C, X итн., а елементите со малите латински букви a, b, c, x, y итн. На пример, $A = \{a, b, c, d\}$ значи дека множеството A се состои од елементите a, b, c и d. Притоа, распоредот на елементите не го сметаме за битен и не допуштаме еден ист елемент да се јавува повеќе пати.

Ако a е елемент на множеството $A,$ тогаш пишуваме $a \in A$ и читаме „елементот a му припаѓа на множеството A“ или „a е елемент на A“. Ако a не е елемент на множеството $A,$ пишуваме $a \notin A.$ Во оваа смисла имаме $a \in \{a,b,c\},$ $d \notin \{a,b,c\}.$

За едно множество велиме дека е зададено ако:

а) се наведени сите негови елементи, односно е запишано на табеларен начин. На пример, $A = \{1,4,5\},$ или

б) е истакнато карактеристичното својство $P(x)$ кое што го задоволуваат неговите елементи (и само неговите елементи), односно е запишано описно

$$A = \{x : P(x)\}$$

На пример, $A = \{ x : x$ е самогласка во македонската азбука$\}.$

1.2.1. Примери.

1) Табеларното задавање на множеството $A = \{ x : x$ е буква во зборот баба$\}$ ќе гласи $A = \{\text{а},\text{б}\}$, додека описното задавање на множеството $A = \{$понеделник, вторник, среда, четврток, петок, сабота, недела$\}$ ќе гласи $A = \{ x : x$ е ден во седмицата$\}.$ ●

Велиме дека множеството A е *подмножество* од множеството $B,$ и пишуваме $A \subseteq B,$ ако и само ако секој елемент на множеството A е елемент и на множеството $B,$ односно $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$

За две множества A и B велиме дека се *еднакви*, и запишуваме $A=B,$ ако и само ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq A,$ односно $A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B$ и $B\subseteq A).$ Во спротивно, множествата се *различни* и пишуваме $A\neq B.$

На пример, множествата $A=\{a,b,c\},$ $B=\{c,a,b\}$ и $C=\{a,b,b,c,c\},$ се еднакви, бидејќи тие се состојат од едни исти елементи a,b и $c.$

Ако $A\subseteq B$ и ако постои елемент во B што не е елемент во $A,$ односно $A\neq B,$ тогаш велиме дека множеството A е *вистинско подмножество* од множеството $B.$ Во тој случај запишуваме $A\subset B.$ Симболички, $A\subset B\Leftrightarrow(A\subseteq B$ и $A\neq B).$

Ако множеството A не е подмножество од множеството $B,$ односно ако постои елемент од A што не припаѓа на $B,$ тогаш запишуваме $A\not\subset B.$ На пример, за множествата $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,c,d,e,g\}$ и $C=\{b,d,h\}$ важи $A\subset B$ и $C\not\subset B.$

1.2.2. Примери.

1) За множествата $A=\{x:x$ е четириаголник со еднакви дијагонали$\}$, $B=\{x:x$ е правоаголник$\}$, $C=\{x:x$ е квадрат$\}$, $D=\{x:x$ е ромб$\}$ и $E=\{x:x$ е рамнокрак трапез$\}$,исказите $B\subseteq A,$ $C\subseteq D$ и $C\subset B$ се вистинити, додека исказите $D\subset A$ и $E\subset B$ се невистинити. ●

Посебно ќе го издвоиме *празното множество*. Тоа е множество кое не содржи ниту еден елемент. Празното множество го означуваме со $\varnothing.$ Ќе сметаме дека постои само едно такво множество и дека тоа е подмножество од секое множество, односно за секое множество A важи $\varnothing\subseteq A,$ и $\varnothing\subset B$ за секое непразно подмножество $B.$

Исто така, ако во даден проблем сите множества со кои работиме се подмножества од некое фиксно множество, тоа множество го викаме *универзално множество* и најчесто го означуваме со U.

Ќе дадеме дефиниции на некои основни операции со множества.

1.2.3. Дефиниција. *Унија* на множествата A и B, означуваме $A \cup B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A или во множеството B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$$

Ако $x \in A \cup B$, тоа значи дека $x \in A$ или $x \in B$; додека $x \notin A \cup B$ значи дека $x \notin A$ и $x \notin B$.

1.2.4. Дефиниција. *Пресек* на множества A и B, означуваме $A \cap B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A и во множеството B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Ако $x \in A \cap B$, тоа значи дека $x \in A$ и $x \in B$; додека $x \notin A \cap B$ значи дека $x \notin A$ или $x \notin B$.

1.2.5. Дефиниција. *Разлика* на множеството A со множеството B, означуваме $A \setminus B$, е множеството што се состои од сите елементи што припаѓаат во множеството A а не припаѓаат во множеството B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

Ако $x \in A \setminus B$, тоа значи дека $x \in A$ и $x \notin B$; а $x \notin A \setminus B$ значи дека $x \notin A$ или $x \in B$.

1.2.6. Дефиниција. *Комплемент* на множеството A (во однос на универзалното множество U), означуваме со A^c, е множеството што се состои од сите елементи од множеството U што не припаѓаат во множеството A.

$$A^c = U \setminus A = \{x : x \in U \quad \text{и} \quad x \notin A\}$$

Ако $x \in A^c$, тоа значи дека $x \notin A$; додека $x \notin A^c$ значи дека $x \in A$.

1.2.7. Примери.

1) Нека $U = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ и $A = \{a,c,e,g\}$, $B = \{a,b,c,d\}$. Имаме $A^c = \{b,d,f\}$; $B^c = \{e,f,g\}$; $A \cup B = \{a,b,c,d,e,g\}$; $A \cap B = \{a,c\}$; $A \setminus B = \{e,g\}$; $B \setminus A = \{b,d\}$.

2) За секое множество A важи $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$ и $A \setminus \emptyset = A$. ●

За две множества A и B велиме дека се *дисјунктни* ако $A \cap B = \emptyset$.

Од погорните дефиниции непосредно е јасно дека се точни следните својства:

1.	$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$	Закони за идемпотентност
2.	$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$	Закони за комутативност
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Закони за асоцијативност
4.	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	Закони за дистрибутивност

5. $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$ Закони за апсорпција

6. $A \cup \varnothing = A, \quad A \cup U = U,$

$A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap U = A$

7. $A \cup A^c = U, \quad A \cap A^c = \varnothing$

8. $\varnothing^c = U, \quad U^c = \varnothing, \quad A^{cc} = A$

9. Ако $A \subseteq B,$ тогаш $B^c \subseteq A^c$

10. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ Де Морганови правила

Би било корисно студентот сам да ги докаже горните тврдења. За илустрација ќе ги докажеме Де Моргановите правила:

10. $\forall x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ и $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$. Добивме дека $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

За обратното, нека $x \in A^c \cap B^c$. Тогаш, $x \in A^c$ и $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^c$. Значи, $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$.

Од $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ и $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$ следува дека $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Слично, $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c$ или $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$. ■

1.2.8. Дефиниција. Нека A и B се две произволни множества. *Декартовиот производ* $A\times B$ е множеството што се состои од сите подредени двојки (a,b) каде што $a\in A$ и $b\in B.$ Симболички

$$A\times B=\{(x,y): x\in A \text{ и } y\in B\}.$$

Притоа важи дека $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c,b=d.$

Ако $A=B,$ тогаш $A\times A$ се нарекува *Декартов производ на множеството* $A,$ и се означува со $A^2.$

Декартовиот производ се дефинира и во случај кога едно од множествата е празното множество. Тогаш се зема

$$A\times\varnothing=\varnothing,\ \varnothing\times B=\varnothing,\ \varnothing\times\varnothing=\varnothing,$$

за сите множества A и $B.$

Непосредно од дефиницијата за Декартов производ следува дека за три произволни множества $A,B,C,$ важи дистрибутивниот закон за множењето во однос на унијата, пресекот и разликата, односно

$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C) \text{ и } A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C) \text{ и } A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C) \text{ и } A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$$

За илустрација ќе ги докажеме дистрибутивниот закон за множењето во однос на унијата. Јасно е дека доволно е да го докажеме равенството во случај кога ниту едно од множествата A,B,C не е празното множество. Ќе докажеме само

$$(A\cup B)\times C\subseteq(A\times C)\cup(B\times C),$$

затоа што аналогно се докажува дека $(A\cup B)\times C\supseteq(A\times C)\cup(B\times C).$

Нека $(a,c)\in(A\cup B)\times C.$ Ова значи дека $a\in A\cup B$ и $c\in C.$ Од условот $a\in A\cup B$ имаме дека $a\in A$ или $a\in B.$ Ако $a\in A$ тогаш $(a,c)\in A\times C,$

односно $(a,c)\in(A\times C)\cup(B\times C)$. Ако $a\in B$ имаме $(a,c)\in B\times C$, од каде повторно важи дека $(a,c)\in(A\times C)\cup(B\times C)$. Значи, секој елемент од множеството $(A\cup B)\times C$ истовремено е и елемент на множеството $(A\times C)\cup(B\times C)$, со што докаваме дека $(A\cup B)\times C\subseteq(A\times C)\cup(B\times C)$.

1.2.9. Примери.

1) Нека се дадени множествата $A=\{a,b\}$ и $B=\{c,d,e\}$. Декартовиот производ $A\times B=\{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$.

2) Нека е дадено множеството $A=\{m,k\}$. Декартовиот производ на множеството A е $A^2=A\times A=\{(m,m),(m,k),(k,k),(k,m)\}$.

3) Да забележиме дека за Декартовиот производ не важи комутативниот закон, односно $A\times B\neq B\times A$. Имено, ако $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{2,3\}$, тогаш $A\times B=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3)\}$, но $B\times A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(1,4)\}$. ●

1.3. Релации

1.3.1. Дефиниција. Нека A е множество. Секое подмножество ρ од Декартовиот производ $A\times A$ се вика *релација* во A.

Наместо $(x,y)\in\rho$ користиме ознака $x\rho y$ и читаме „x е во релација ρ со y“.

1.3.2. Примери.

1) Нека $A=\{a,b,c\}$. $\rho=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$ е релација во A.

2) Дадено е множеството A чии елементи се имињата на студенти:

$A=\{$ Ана, Ева, Адам, Марко, Обрен, Ивана, Никола, Мери$\}$.

Во ова множество е дефинирана релацијата α така што $x\alpha y$ ако и само ако почетната буква на името на x е крајна буква на името на y, за секои $x,y\in A$. Од условот имаме дека дадената релација е:

$\alpha=\{$ (Ана, Ана), (Ана, Ева), (Ана, Ивана), (Ана,Никола), (Адам, Ана), (Адам, Ева), (Адам, Ивана), (Адам, Никола), (Марко, Адам), (Мери, Адам), (Обрен, Марко), (Ивана, Мери), (Никола, Обрен)$\}$. ●

За релацијата ρ велиме дека е:

1. *Рефлексивна* ако $\forall x\in A,\quad x\rho x$
2. *Симетрична* ако $x\rho y\Rightarrow y\rho x$
3. *Транзитивна* ако $x\rho y$ и $y\rho z\Rightarrow x\rho z$
4. *Антисиметрична* ако $x\rho y$ и $y\rho x\Rightarrow x=y$.

1.3.3. Примери.

1) Во множеството $A=\{a,b,c,d\}$ е зададена релацијата

$$\rho=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),(c,d),(a,c),(a,d),(b,d)\}.$$

Релацијата е рефлексивна бидејќи $\Delta=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}\subset\rho$; релацијата не е симетрична бидејќи, на пример, $(b,a)\notin\rho$; релацијата е антисиметрична; релацијата е транзитивна.

2) Во $A=\{m,k,p\}$ е дадена релација $\rho=\{(m,k),(k,p),(k,m)\}$. Релацијата не е рефлексивна, бидејќи, на пример, $(m,m)\notin\rho$, односно $\Delta=\{(m,m),(k,k),(p,p)\}\not\subset\rho$; релацијата не е симетрична бидејќи, на пример, $(p,k)\notin\rho$; релацијата не е антисиметрична бидејќи, на

пример, од $(m,k)\in\rho$ и $(k,p)\in\rho$ не следува $k=p$; и не е транзитивна бидејќи $(m,p)\notin\rho$. ●

Велиме дека релацијата ρ е релација за *еквивалентност* ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Подредување на A е секоја релација што е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Ако уште важи: $\forall x,y: x\rho y$ или $y\rho x$, тогаш подредувањето ρ велиме дека е *потполно подредување.*

Ако во едно множество A е зададено подредување $\rho,$ тогаш за A велиме дека е *подредено множество*. Притоа, наместо $x\rho y$ ја користиме ознаката $x\le y.$

1.3.4. Примери.

1. Во секое множество A, релациите $\rho=A\times A$ и $\Delta_A=\{(x,x):x\in A\}$ се еквиваленти.

2. Нека $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ и $\rho=\{(a,b),(a,c),(b,a),(c,a)\}$. Релацијата е само симетрична, според тоа не е еквивалентност.

3) Релацијата $\rho=\{(a,a),(b,b),(c,c),\,(a,b),(b,c),(a,c)\}$ зададена на множеството $A=\{a,b,c\}$ е релација за подредување бидејќи е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. ●

1.4. Операции

1.4.1. Дефиниција. Ако по некое правило, на секој елемент на Декартовиот производ $A\times A$ е придружен еднозначно определен елемент од множеството $A,$ велиме дека е дефинирана *операција* во A.

Според тоа, ако на секоја двојка $(x,y)\in A\times A$ и придружуваме единствен елемент $z\in A,$ тогаш сме дефинирале *операција* во множеството $A.$ Користиме ознака $x*y=z$ или $x+y=z$ или $x\bullet y=z$ итн.

1.4.2. Примери.

1) Нека A е дадено множество и нека S е множеството што се состои од сите подмножества од $A.$ Тогаш со

$$X*Y=X\cap Y \quad \text{за секои } X,Y\in S$$

е дефинирана операција во $S,$ бидејќи од $X,Y\in S,$ т.е. $X,Y\subseteq A$ од каде што следува $X\cap Y\subseteq A$ што значи $X\cap Y\in S.$ ●

Нека во множеството A е дефинирана операција „$*$“ и нека $B\subseteq A$. Ако со дефинираната операција на A, односно со дефинираното придружување е определено придружување кое на секој подреден пар $(x,y)\in B\times B$ му придружува елемент $z\in B,$ тогаш велиме дека B е затворено во однос на операцијата „$*$“ наследена од операција на A. Со други зборови, $B\subseteq A$ е затворено во однос на операција „$*$“ дефинирана во A ако за секои $x,y\in B$ имаме дека $x*y\in B.$

1.5. Задачи за вежбање

1. Кои од следниве реченици се искази:

1) $3+2=5$ 2) Сините очи се најубави.

3) Да живее слободата! 4) Водата е неопходна за животот на луѓето.

5) Мислам дека утре ќе биде сончево.

2. Дали се еднакви множествата:

1) $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{2,1,4,3\}$ 2) $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{1,1,1,2,3,3\}$

3. Најди ги множествата $\varnothing \cup \{1,2,3\}$ и $\varnothing \cap \{1,2,3\}$.

4. Нека $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{2,4,1,3\}$ и $C=\{5,8,9\}$ се дадени множества. и нека $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ е универзално множество. Најди ги множествата

1) $(A\cup B)\cup C$ и $A\cup(B\cup C)$ и провери дали се еднакви

2) $(A\cap B)\cap C$ и $A\cap(B\cap C)$ и провери дали се еднакви

3) $(A\cup B)\cap C^c$ и $(A^c\cup B)\cup C^c$

5. Докажи дека за секое множество $A\subseteq U$ важи $(A^c)^c=A$.

6. Најди непразни множества A,B и C такви, што

1) $A\cup B=A\cup C$, но $B\neq C$ 2) $A\cap B=A\cap C$, но $B\neq C$

7. Дадено е универзално множество U и произволни подмножества A и B од U. Докажи дека

1) $A\cap B^c$ и B се дисјунктни множества

2) $A\cup B=(A\cap B^c)\cup B$

3) $A\cap B$ и $A\cap B^c$ се дисјунктни множества.

8. Симетрична разлика на множествата A и B е множеството

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Докажи ја точноста на равенствата:

1) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$ 2) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

3) $A\cap B=(A\Delta B)\Delta(A\cup B)$ 4) $A\setminus B=(A\Delta B)\cap A$

9. Докажи дека од

1) $A\subseteq B$ и $A\subseteq C$ следува $A\subseteq B\cap C$

2) $A, B \subset C$ следува $A \cup B \subseteq C$

3) $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$ следува $A \times C \subseteq B \times D$.

10. Најди го множеството $A \times B$ и $B \times A$, ако $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,4,5\}$. Дали $A \times B = B \times A$?

11. Докажи дека за три произволни множества A, B, C важи:

1) $\left(A \cup B\right) \times C = \left(A \times C\right) \cup \left(B \times C\right)$ и $A \times \left(B \cup C\right) = \left(A \times B\right) \cup \left(A \times C\right)$

2) $\left(A \cap B\right) \times C = \left(A \times C\right) \cap \left(B \times C\right)$ и $A \times \left(B \cap C\right) = \left(A \times B\right) \cap \left(A \times C\right)$

3) $\left(A \setminus B\right) \times C = \left(A \times C\right) \setminus \left(B \times C\right)$ и $A \times \left(B \setminus C\right) = \left(A \times B\right) \setminus \left(A \times C\right)$

12. Нека е дадено множеството $A = \{a,b,c,d,e\}$ и во него релациите

1) $\alpha = \{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,a)\}$

2) $\beta = \{(a,b),(b,a),(b,c),(b,d),(e,e),(d,e),(c,b)\}$

3) $\gamma = \{(a,b),(a,a),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a)\}$

4) $\delta = \{(a,b),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(d,d),(a,c),(c,a)\}$

Кои од релациите се рефлексивким кои се симетрични, кои се транзитивни, а кои се антисиметрични?

13. Нека е дадено множеството $A = \{a,b,c,d,e\}$.

1) Најди релација на множеството A која е рефлексивна, но не е ниту симетрична, ниту транзитивна.

2) Најди релација на множеството A која е симетрична и транзитивна, но не е рефлексивна.

3) Најдете релација на множеството A која е симетрична, но не е ниту рефлесивна, ниту транзитивна.

4) Најди релација на множеството A која е транзитивна, но не е ниту рефлексивна, ниту симетрична.

14. Нека A е множеството прави во рамнината. Испитај ги својствата на релацијата α во множеството A дефинирана со:

а) $a\alpha b$ ако и само ако $a \| b$

б) $a\alpha b$ ако и само ако $a \perp b$

15. Докажи дека релацијата

$$\alpha=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b)\}$$

дефинирана во множеството $A=\{a,b,c,d\}$ е еквивалентност.

16. Нека A е множеството зборови составени од кириличното писмо и нека на множеството A е дефинирана релација α на следниов начин: $u\alpha v$ ако и само ако во двата збора u и v првата и последната буква се еднакви. Дали α е еквивалентност?

17. Нека A е множеството низи кои се состојат од броевите 0 и 1 и нека на множеството A е дефинирана релација α на следниов начин: $u\alpha v$ ако и само ако низите u и v содржат ист број нули. Дали α е еквивалентност?

18. Дадено е множеството $A=\{a,b,c,d,e\}$ и во него релацијата

$$\alpha=\{(a,a),(b,b),(c,b),(d,e),(e,e),(d,d),(c,c),(b,e),(d,b),(c,e)\}.$$

Докажи дека α е релација на подредување во множеството A.

19. Нека A е дадено множество и нека S е множеството што се состои од сите подмножества од A. Дали со

1) $X*Y=X\cup Y$ за секои $X,Y\in S$

2) $X*Y=X\setminus Y$ за секои $X,Y\in S$

се дефинирани операции во S?

20. Нека A е множество со повеќе од еден елемент и нека S е множеството што се состои од сите непразни вистински подмножества од A. Дали со

1) $X * Y = X \cap Y$ за секои $X, Y \in S$

2) $X * Y = X \setminus Y$ за секои $X, Y \in S$

се дефинирани операции во S?

2. Реални броеви

2.1. Дефиниција на множество реални броеви

2.1.1. Дефиниција. Под *множество реални броеви* подразбираме множество $\mathbf{R}$ во кое се дефинирани две операции: собирање „+“ и множење „$\bullet$“, и релација „$\leq$“ (што ќе ја читаме „е помало или еднакво со“) така што се исполнети следните својства:

(1) Својства на собирањето:

1.1. $(\forall x, y \in \mathbf{R})\ x + y = y + x$

1.2. $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$

1.3. постои точно еден елемент $0 \in \mathbf{R}$ таков што

$x + 0 = x, \forall x \in \mathbf{R}$

1.4. за секој елемент $x \in \mathbf{R}$ постои точно еден елемент $-x \in \mathbf{R}$, така што $x + (-x) = 0$.

(2) Својства на множењето:

2.1. $(\forall x, y \in \mathbf{R}) x \bullet y = y \bullet x$

2.2. $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\ (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

2.3. постои точно еден елемент $1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ таков што $x \bullet 1 = x, \forall x \in \mathbf{R}$

2.4. за секој елемент $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ постои точно еден елемент $x^{-1} \in \mathbf{R}$, така што $x \bullet x^{-1} = 1$.

2.5. $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\ (x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$

(3) Својства на релацијата „$\leq$“

3.1. $(\forall x \in \mathbf{R})\ x \leq x$

3.2. $(\forall x, y \in \mathbf{R})\ x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

3.3. $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\ x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

3.4. $(\forall x, y \in \mathbf{R})\ x \leq y$ или $y \leq x$

3.5. ако $x \leq y$ и z е произволен елемент во $\mathbf{R}$, тогаш важи $x + z \leq y + z$

3.6. Ако $0 \leq x$ и $0 \leq y$, тогаш $0 \leq x \bullet y$

(4) ако A и B се непразни подмножества од $\mathbf{R}$, такви што $x \leq y$, $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$, тогаш постои елемент $z \in \mathbf{R}$ таков што $x \leq z \leq y$ за сите $x \in A, y \in B$.

Понатаму наместо $x \bullet y$ Ќе пишуваме xy. Покрај знакот $\leq$ ќе ги користиме и ознаките $<, \geq$ и > кои што се воведуваат на следниот начин:

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y, x \neq y$$

$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$$

$$x > y \Leftrightarrow y < x$$

Елементите од множеството $\mathbf{R}$ ќе ги викаме *реални броеви*.

Својствата 1.1., 1.2., 1.3., 1.4. кажуваат дека за операцијата собирање важат: комутативниот закон, асоцијативниот закон, постои неутрален елемент што ќе го викаме *нула* и дека за секој елемент од $\mathbf{R}$ постои спротивен.

Својствата 2.1., 2.2., 2.3., 2.4. кажуваат дека за операцијата множење важат: комутативниот закон, асоцијативниот закон, постои неутрален елемент што ќе го викаме *еден* и дека секој ненулти елемент од $\mathbf{R}$ е инверзибилен.

Својството 2.5. ни кажува дека важи дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето.

Својствата 3.1., 3.2., и 3.3., ни кажуваат дека релацијата е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна, што значи дека е релација за подредување. Бидејќи важи 3.4., релацијата е потполно подредување. На основа на 3.5., и 3.6. подредувањето се согласува со операциите собирање и множење.

Од дефиницијата за множеството реални броеви може да се изведат следните тврдења:

2.1.2. Теорема.

1. За секој реален број a важи $a0 = 0$.
2. За секои два реални броја a, b равенството $a + x = b$ има единствено решение.
3. За секои два реални броја a, b $(a \neq 0)$ равенството $ax = b$ има

единствено решение.

4. Ако $ab=0$, тогаш $a=0$ или $b=0$.

5. За секој реален број a важи $-a=(-1)a$.

6. (-1)(-1)=1

7. За секои два реални броја a,b, $(-a)(-b)=ab$

8. Ако $a\leq 0$, тогаш $-a\geq 0$

9. Ако $a\leq 0$ и $b\leq 0$, тогаш $ab\geq 0$

10. Ако $a\leq 0$ и $b\geq 0$, тогаш $ab\leq 0$

11. 0<1

12. Ако $a>0$, тогаш $a^{-1}>0$.

Доказ. 1. Имаме дека $a+a0=a1+a0=a(1+0)=a1=a$. Бидејќи неутралниот елемент при собирањето е еднозначно определен (1.4.), следува дека $a0=0$.

2. Нека $a,b\in\mathbf{R}$ се произволни и $-a$ е спротивниот на a во однос на операцијата собирање. Ако постои решение x на равенката, тогаш имаме дека $x=0+x=((-a)+a)+x=(-a)+(a+x)=(-a)+b$. Ако ставиме $-a+b$ наместо x во равенката, добиваме дека $-a+b$ е навистина решение на равенката $a+((-a)+b)=(a+(-a))+b=0+b=b$.

3. Нека $a,b\in\mathbf{R}$ се произволни и a^{-1} е инверзниот на a во однос на операцијата множење. Ако постои решение x на равенката, тогаш имаме дека $x=1x=(a^{-1}a)x=a^{-1}(ax)=a^{-1}b$. Ако ставиме $a^{-1}b$ наместо x во равенката, добиваме дека $a(a^{-1}b)=(aa^{-1})b=1b=b$, односно дека $a^{-1}b$ е навистина решение на равенката.

4. Ако $b\neq 0$, тогаш $\exists\, b^{-1}$ и имаме $a=a1=a(bb^{-1})=(ab)b^{-1}=0b^{-1}=0$.

5. Од $a+(-1)a=(1+(-1))a=0a=0$ следува дека $(-1)a=-a$

6. Од $(-1)(-1)-1=(-1)(-1)+(-1)1=(-1)((-1)+1)=(-1)0=0$ следува дека $(-1)(-1)=1$

7. Ги користиме резултатите од условите 5. и 4.

8. Имаме дека $0=a-a<0-a=-a$.

9. Според условот 8. наоѓаме дека $(-a)\geq 0,(-b)\geq 0$. Тогаш имаме дека $0\leq(-a)(-b)=ab$.

10. Слично како во условот 9. имаме дека $(-a)\geq 0,\quad b\geq 0$. Тогаш имаме дека $-ab\geq 0$ па имаме $0=-ab+ab\geq 0+ab=ab$.

11. Нека $x\in\mathbf{R}$ е произволно дадено. Тогаш имаме дека $xx\geq 0$. Специјално, ако $x\neq 0$, $xx>0$. Затоа добиваме дека $1=1\bullet 1>0$.

12. Ако $a>0$, заради условот $aa^{-1}=1>0$, мора да биде $a^{-1}>0$. ■

Во множеството $\mathbf{R}$ воведуваме операции *одземање* и *делење* на следниот начин:

$$x-y=x+(-y)$$

$$\frac{x}{y}=xy^{-1} \text{ за } y\neq 0$$

За бројот x велиме дека е *позитивен* ако важи $x>0$, *ненегативен* ако важи $x\geq 0$, *негативен* ако важи $x<0$ и *непозитивен* ако важи $x\leq 0$. Множеството од сите негативни реални броеви ќе го означуваме со $\mathbf{R}^{-}$, додека множеството од сите позитивни реални броеви ќе го означуваме со $\mathbf{R}^{+}$. Во таа смисла можеме да запишеме дека

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}^{-}\cup\{0\}\cup\mathbf{R}^{+}.$$

Исто така воведуваме поим за *апсолутна вредност* на реален број со:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ако} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{ако} \quad x < 0 \end{cases}.$$

2.1.3. Примери.

1) Од дефиницијата непосредно следува дека $|x| \geq 0$.

2) Со помош на дефиницијата за апсолутна вредност на реален број, можеме да го упростиме изразот $\dfrac{x+y+|y-x|}{2}$. Имаме дека

$$|y-x| = \begin{cases} y-x, & x \leq y \\ -(y-x), & x > y \end{cases}$$

Според тоа,

$$\frac{x+y+|y-x|}{2} = \begin{cases} \dfrac{x+y+(y-x)}{2}, & x \leq y \\ \dfrac{x+y-(y-x)}{2} & x > y \end{cases} = \begin{cases} y, & x \leq y \\ x & x > y \end{cases}. \bullet$$

2.1.4. Теорема. За секој реален број x важи:

1. $|x| = |-x|$
2. $x \leq |x|$
3. $-x \leq |x|$

Доказ. 1. Ако имаме $x = 0$, тогаш $|x| = 0 = |-x|$. Ако имаме дека $x > 0$, тогаш $|x| = x$ и $|-x| = -(-x) = (-1)(-1)x = x$. Притоа ги искористивме особините 5. и 6. од теоремата 2.1.2. Ако важи $x < 0$, тогаш $-x > 0$ па имаме дека $|x| = -x = |-x|$.

2. Ако важи $x=0$, тогаш $|x|=0\geq 0=x$. Ако важи $x>0$, тогаш $|x|=x\geq x$. Ако важи $x<0$, тогаш имаме дека $|x|=-x>0>x$.

3. Ако важи $x=0$, тогаш имаме дека $|x|=0\geq 0=-x$. Ако важи $x>0$, тогаш имаме дека $|x|=x>0>-x$. Ако, пак $x<0$, тогаш $|x|=-x\geq -x$. ■

2.1.5. Теорема. За секое $\varepsilon>0$ важат следниве тврдења:

1. $|x|<\varepsilon$ ако и само ако $-\varepsilon<x<\varepsilon$.
2. $|x-a|<\varepsilon$ ако и само ако $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.
3. $|x|>\varepsilon$ ако и само ако $x<-\varepsilon$ или $x>\varepsilon$.
4. $|x-a|>\varepsilon$ ако и само ако $x<a-\varepsilon$ или $x>a+\varepsilon$.

Доказ. 1. Нека $|x|<\varepsilon$. Ако $x\geq 0$, тогаш $x=|x|<\varepsilon$, а ако $x<0$, тогаш имаме $-x=|x|<\varepsilon$, односно $x>-\varepsilon$. Значи, $x<\varepsilon$ и $x>-\varepsilon$ односно добиваме дека $-\varepsilon<x<\varepsilon$.

Нека $-\varepsilon<x<\varepsilon$. Ако $x\geq 0$, тогаш $|x|=x<\varepsilon$, а ако $x<0$, тогаш имаме $|x|=-x<\varepsilon$. Според тоа, во секој случај $|x|<\varepsilon$.

2. Имаме дека неравенството $|x-a|<\varepsilon$ е еквивалентно со неравенствата $-\varepsilon<x-a<\varepsilon$, што е еквивалентно со $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$.

3. Нека $|x|>\varepsilon$. Ако $x\geq 0$, тогаш имаме дека $x=|x|>\varepsilon$, а ако $x<0$, тогаш $-x=|x|>\varepsilon$, односно $x<-\varepsilon$. Според тоа, $x<-\varepsilon$ или $x>\varepsilon$.

Обратно, нека $x<-\varepsilon$ или $x>\varepsilon$. Ако $x\geq 0$, тогаш имаме $|x|=x>\varepsilon$, а ако $x<0$, тогаш $x=|x|>\varepsilon$. Според тоа, во секој случај $|x|>\varepsilon$.

4. Имаме дека $|x-a|>\varepsilon$ ако и само $-\varepsilon<x-a$ или $x-a>\varepsilon$, односно ако и само ако $a-\varepsilon<x$ или $x>a+\varepsilon$. ■

Тврдењата од претходната теорема важат и во случај кога знаците за неравенства $<$ и $>$ ќе се заменат со знаците за неравенства $\leq$ и $\geq$.

2.1.6. Примери.

1) Да ги најдеме сите реални броеви x за кои што важи $|x-1|<4$. Имаме дека неравенството $|x-1|<4$ е еквивалентно со неравенствата $1-4<x<1+4$, односно $-3<x<5$.

2) Неравенството $|x|<9$ е еквивалентно со неравенствата $-9<x<9$.●

Во следнава теорема ќе дадеме некои својства на апсолутната вредност на реален број.

2.1.7. Теорема. За секои два реални броја x, y важи:

1. $|x+y| \leq |x|+|y|$
2. $||x|-|y|| \leq |x-y|$
3. $|xy|=|x||y|$
4. $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$, ако $y \neq 0$

Доказ. 1. Бидејќи за секои $x, y \in \mathbf{R}$ важат условите $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, $-x \leq |x|$ и $-y \leq |y|$ имаме дека $x+y \leq |x|+|y|$ и $-(x+y) \leq |x|+|y|$. Ако важи условот $x+y \geq 0$, тогаш имаме дека $|x+y|=x+y \leq |x|+|y|$, а ако важи условот $x+y<0$, тогаш наоѓаме дека $|x+y|=-(x+y) \leq |x|+|y|$.

2. Имаме дека $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$ и $|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x|$ од каде што следува дека $|x| - |y| \leq |x-y|$ и $-(|x| - |y|) \leq |x-y|$. Како и во доказот под 1. заклучуваме дека важи $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

3. Можни се следните четири случаи:

$x \geq 0, \quad y \geq 0$, тогаш $xy \geq 0$ па имаме $|xy| = xy = |x||y|$

$x \geq 0, \quad y < 0$, тогаш $xy < 0$ па имаме $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$

$x < 0, \quad y \geq 0$, тогаш $xy < 0$ па имаме $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$

$x < 0, \quad y < 0$, тогаш $xy > 0$ па имаме $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

4. Бидејќи y и $\frac{1}{y}$ се истовремено позитивни и негативни и $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$, исто како во доказот под 3. заклучуваме дека важи $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$. ■

2.2. Некои поважни подмножества од множеството реални броеви

Во овој дел ги определуваме множествата од природни, цели, рационални и ирационални броеви. Во делот каде што се изложени природните броеви поместени се принципот на математичка индукција и биномната формула.

2.2.1. Природни броеви

2.2.1.1. Дефиниција. Подмножество $\mathbf{N}$ од множеството реални броеви $\mathbf{R}$ со следните својства:

1. $1 \in \mathbf{N}$
2. ако $x \in \mathbf{N}$, тогаш $x+1 \in \mathbf{N}$
3. ако $A \subseteq \mathbf{N}$ за кое важи $1 \in A$ и $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$, тогаш $A = \mathbf{N}$.

го викаме *множество природни броеви*.

Елементите на $\mathbf{N}$ ги викаме *природни броеви*.

Операциите собирање, одземање, множење и делење, како и релацијата за подредување дефинирани во множеството реални броеви може да ги разгледуваме во множеството природни броеви. Го поставуваме прашањето дали множеството природни броеви е затворено во однос на наведените операции. Во таа смисла, следната теорема кажува дека множеството природни броеви е затворено во однос на операциите собирање и множење дефинирани во множеството реални броеви.

2.2.1.2. Теорема. Множеството природни броеви ги има следните особини:

1. $m, n \in \mathbf{N} \Rightarrow m+n \in \mathbf{N}, mn \in \mathbf{N}$
2. $m, n \in \mathbf{N}$ и $m > n \Rightarrow m-n \in \mathbf{N}$
3. $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$
4. $m, n \in \mathbf{N}$ и $m > n \Rightarrow m \geq n+1$

Доказ. 1. Нека го фиксираме $m \in \mathbf{N}$ и нека $A = \{n \in \mathbf{N} : m+n \in \mathbf{N}\}$. Бројот $1 \in A$ бидејќи $m+1 \in \mathbf{N}$ (својство 2. од дефиниција). Нека $n \in A$. Тогаш $m+n \in \mathbf{N}$, па имаме дека $m+(n+1) = (m+n)+1 \in \mathbf{N}$ од каде што следува дека $n+1 \in A$. Така, наоѓаме дека $A = \mathbf{N}$ (својство 3. од дефиниција).

За фиксно $m \in \mathbf{N}$, нека имаме $B = \{n \in \mathbf{N} : mn \in \mathbf{N}\}$. Јасно е дека $1 \in B$. Нека $n \in B$. Тогаш $mn \in B$, па имаме $m(n+1) = mn + m1 = mn + m \in \mathbf{N}$ (бидејќи збир на два природни броја е природен број). Добивме дека $n + 1 \in B$. Според тоа, имаме дека $B = \mathbf{N}$.

2. Нека n е фиксен природен број . Да означиме $A = \{m - n : m \in \mathbf{N}\}$. Доказот ќе биде завршен ако покажеме дека $A = \mathbf{N}$.

Навистина, $1 \in A$ бидејќи имаме $1 = (n+1) - n$. Ако $k \in A$, имаме дека $k = m - n$ за некое $m \in \mathbf{N}$. Тогаш добиваме дека $k + 1 = (m+1) - n \in A$.

3. Ако $A = \{n \in \mathbf{N} : 1 \leq n\}$, тогаш имаме дека $1 \in A$ бидејќи $1 \leq 1$. Исто така, ако $n \in A$, тогаш од $1 \leq n$ и $0 < 1$ следува дека $1 \leq n + 1$ и $n + 1 \in A$. Одовде добиваме дека $A = \mathbf{N}$.

4. Нека $m > n$. Тогаш од условот 2. имаме дека $m - n \in \mathbf{N}$, па од условот 3. наоѓаме дека $m - n \geq 1$, односно $m \geq n + 1$. ■

Во понатамошното изложување на материјалот ќе ги користиме вообичаените ознаки 2=1+1, 3=2+1, 4=3+1,… итн.

Броевите $1,2,3,\cdots$ се *природни броеви*. Значи,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots\}.$$

Множеството природни броеви не е затворено во однос на операциите одземање и делење „наследени“ од множеството реални броеви. На пример, 2 и 3 се природни броеви, но $2 - 3$ и $\frac{2}{3}$ не се природни броеви. Според тоа, согласно теоремата можеме да сметаме дека во множеството природни броеви добро се дефинирани само операциите собирање и множење на природни броеви.

Забележуваме дека бројот 1 е најмал во ова множество, односно за секое $n \in \mathbf{N},\ \ n \geq 1$ и дека за секој природен број n постои поголем од него, на пример $n+1$ кој го нарекуваме *следбеник* на n. Притоа, бројот n велиме дека е *претходник* на $n+1$.

Со теорема 2.2.1.2 под 4. покажавме дека меѓу двата природни броја n и $n+p$ постојат точно $p-1$ природни броја. Ако $p=1$, тогаш $p-1=0$, односно меѓу броевите n и $n+1$ нема природни броеви.

Велиме дека природниот број n е *делив* со $m \in \mathbf{N}$, означуваме $m \mid n$, ако постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $n = mk$. Притоа ќе велиме дека m е *делител* на n, односно дека n е *содржател* на m. Ќе велиме дека m е *вистински делител* на n ако $m \mid n$ и $m \neq n$.

2.2.1.3. Примери.

1) Бидејќи $12 = 4 \cdot 3$ имаме дека $3 \mid 12$ и $4 \mid 12$. Според тоа, броевите 1, 3 и 4 се вистински делители на 12.

2) За броевите 13 и 3 имаме $13 = 4 \cdot 3 + 1$ и бидејќи

$$3 \cdot 3 < 4 \cdot 3 + 1 < 5 \cdot 3,$$

заклучуваме дека не постои природен број m таков што $13 = 3m$ што значи дека бројот 3 не е делител на 13. ●

2.2.1.4. Теорема. Во множеството природни броеви точни се следниве тврдења:

1. Нека $m,n \in \mathbf{N}$. Ако $m \mid n$ и $n \mid m$, тогаш $m = n$.
2. Нека $m,n,k \in \mathbf{N}$. Ако $m \mid n$ и $n \mid k$, тогаш $m \mid k$.
3. Ако $m \mid a$ и $n \mid b$, тогаш $mn \mid (ab)$.

Доказ. 1. Нека $m,n \in \mathbf{N}$, $m \mid n$ и $n \mid m$. Од условот $m \mid n$ следува дека постои $q \in \mathbf{N}$ таков што $n = mq$. Од условот $n \mid m$ следува дека постои $p \in \mathbf{N}$ таков што $m = np$. Понатаму, од равенствата $n = mq$ и $m = np$ наоѓаме дека $n = mq = (np)q = n(pq)$, односно $n = n(pq)$. Ако последното равенството го поделиме со $n \neq 0$ го добиваме равенството $pq = 1$. Но, $p, q \in \mathbf{N}$ па затоа од последното равенство следува $p = q = 1$. Според тоа, добиваме дека $m = np = n \cdot 1 = n$.

2. Нека $m, n, k \in \mathbf{N}$, $m \mid n$ и $n \mid k$. Од условот $m \mid n$ следува дека постои $q \in \mathbf{N}$ таков што $n = mq$, а од условот $n \mid k$ следува дека постои $p \in \mathbf{N}$ таков што $k = np$. Понатаму, од равенствата $k = np$ и $n = mq$ следува дека $k = np = (mq)p = m(qp)$, што значи дека $m \mid k$.

3. Од $m \mid a$ и $n \mid b$ следува дека постојат p и q такви што $a = mp$ и $b = nq$. Според тоа, имаме дека $ab = (mp)(nq) = (mn)(pq)$, што значи дека $mn \mid (ab)$. ■

Во однос на тоа дали се деливи со 2 или не, природните броеви можат да бидат *парни* и *непарни.* Парните броеви ќе ги обележуваме со $2k, k \in \mathbf{N}$, а непарните со $2k - 1, k \in \mathbf{N}$.

2.2.1.5. Примери.

1) Може да се покаже дека збирот на два парни броја е парен број. Навистина, ако претпоставиме дека m и n се два произволни парни броја, тогаш постојат $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2$. Тогаш имаме $m + n = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2)$ е парен број бидејќи $k_1 + k_2 \in \mathbf{N}$.

2) Ќе покажеме дека производот на парен со непарен број е парен број. Навистина, ако претпоставиме дека m е произволен парен и n е произволен непарен број, тогаш постојат $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ такви што $m = 2k_1$ и $n = 2k_2 - 1$. Тогаш $m \cdot n = 2k_1(2k_2 - 1) = 2(k_1(2k_2 - 1))$ е парен број бидејќи $k_1(2k_2 - 1) \in \mathbf{N}$. ●

Да забележиме дека од равенството $n = n \cdot 1$ следува дека секој природен број е делив со бројот 1 и со самиот себе, односно $1 \mid n$ и $n \mid n$.

Природен број е *прост* ако е делив само со 1 и со самиот себе. Во спротивно е *сложен*. Прости броеви се: $2,3,5,7,11,13,\cdots$, а сложени се броевите: $4,6,8,9,10,12,15,16,\cdots$.

За два природни броја ќе велиме дека се *взаемно прости* ако заеднички делител им е само единицата. Користиме ознака $(m,n)=1$ за „m и n се взаемно прости“. На пример, броевите 4 и 9 се заемно прости, додека 4 и 6 не се взаемно прости.

За природниот број n велиме дека е *најмал заеднички содржател* (НЗС) за броевите m и p ако е најмалиот природен број за кој важи $m|n$ и $p|n$.

За природниот број n велиме дека е *најголемиот заеднички делител* (НЗД) на броевите m и p ако е најголемиот природен број за кој важи $n|m$ и $n|p$.

2.2.1.6. Примери.

1) Делители на бројот 8 се 1,2,4 и 8. Делители на бројот 12 се 1,2,3,4,6

и 12. Делители на бројот 20 се 1,2,4,5,10 и 20. Заеднички делители на броевите 8,12 и 20 се 1,2 и 4. Според тоа најголем заеднички делител за броевите 8, 12 и 20 е бројот 4, односно НЗД(8,12,20)=4.

2) Содржатели на бројот 5 се броевите 5,10,15,20,25,.... Содржатели на бројот 15 се броевите 15,30,45,60,75,.... Заеднички содржатели на броевите 5 и 15 се броевите 15,30,45,60,.... Најмал заеднички содржател на броевите 5 и 15 е бројот 15, односно НЗС(5,15)=15. ●

2.2.1.7. Принцип на математичка индукција

Нека $I(n)$ е некое својство на природните броеви или со него се формулира некоја математичка вистина која зависи од природните броеви. Вистинитоста на такви тврдења се покажува со помош на *принципот на математичка индукција.*

Да го формулираме принципот на математичка индукција:

1) Тврдењето $I(n)$ е точно за $n = p$ каде што p е фиксен природен број.

2) Ако тврдењето $I(n)$ важи за природен број $n = k \geq p$, тогаш важи и за $n = k+1$.

3) Заклучок: Тврдењето $I(n)$ е вистинито за секој природен број $n \geq p$.

Да забележиме дека за да важи заклучокот 3) потребно е да бидат исполнети условите 1) и 2). Заклучокот тече вака: Ако тврдењето $I(n)$ е вистинито за $n = p \geq 1$, тогаш е точно за $n = p+1$. Ако е вистинито за $n = p+1$, тогаш е вистинито за $n = p+2$ итн.

2.2.1.8. Примери.

1) Со помош на принципот на математичка индукција може да се покаже дека $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbf{N}$.

За $n = 1$ тврдењето е точно бидејќи $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k \geq 1$ односно

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Тогаш за $n = k+1$ добиваме

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

од каде според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n.

2) Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека неравенството $(n+2)!>3^n$ е точно за секој природен број n.

За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $(1+2)!>3^1$.

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$, односно

$$(k+2)!>3^k.$$

Тогаш за $n=k+1$ добиваме

$$((k+1)+2)!=(k+3)!=(k+3)(k+2)!>(k+3)3^k=k3^k+3\cdot 3^k>3^{k+1}.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n.

3) Со помош на принципот на математичка индукција ќе докажеме дека $19\,|\,5^{2n+1}+3^{n+2}2^{n-1}$ за секое $n\in\mathbf{N}$.

За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $19\,|\,5^3+3^3 2^0$, односно $19\,|\,252$.

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k\geq 1$ односно

$$19\,|\,5^{2k+1}+3^{k+2}2^{k-1}.$$

Тогаш постои $m\in\mathbf{N}$ таков што $5^{2k+1}+3^{k+2}2^{k-1}=19m$.

Тогаш за $n=k+1$ добиваме дека

$$\begin{aligned}&5^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}2^{(k+1)-1}=25\cdot 5^{2k+1}+6\cdot 3^{k+2}2^{k-1}=\\&19\cdot 5^{2k+1}+6\cdot 5^{2k+1}+6\cdot 3^{k+2}2^{k-1}=19\cdot 5^{2k+1}+6(5^{2k+1}+3^{k+2}2^{k-1})\\&=19\cdot 5^{2k+1}+6\cdot 19m=19(5^{2k+1}+6m)\end{aligned}$$

од каде што според принципот на математичка индукција следува дека тврдењето е точно за секој природен број. ●

Со помош принципот на математичка индукција може да ја покажеме точноста на Бернулиевото неравенство и биномната формула.

1) *Бернулиево неравенство*. За секој природен број n и за секој реален број $a > -1$ важи:

$$(1+a)^n \geq 1 + an \tag{1.1}$$

Навистина, за $n = 1$ тврдењето $I(n): (1+a)^n \geq 1 + an$ очигледно е точно. Со множење на двете страни од (1.1) со $(1+a) > 0$ добиваме:

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + a + an + a^2 n = 1 + (1+n)a + na^2$$

Бидејќи $na^2 \geq 0$ следува дека $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (1+n)a$ а тоа е тврдењето $I(n+1)$. Според принципот на математичка индукција имаме дека формулата (1.1) важи за секој природен број.

2) *Биномна теорема.* За $a, b \in \mathbf{R}$ и $n \in \mathbf{N}$ важи формулата:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{1.2}$$

Притоа $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (k = 0,1,2,\cdots n)$, каде што $k! = 1 \cdot 2 \cdots \cdot k$ (читаме "ка факториел") за $k \in \mathbf{N}$ и $0! = 1$. Коефициентот $\binom{n}{k}$ го викаме *биномен коефициент.*

Навистина, за $n = 1$ имаме $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$.

Претпоставуваме дека формулата е точна за $n = k$, односно

$$(a+b)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

За $n=k+1$ имаме:

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)=\left(\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\cdots+\binom{k}{k-1}ab^{k-1}+\binom{k}{k}b^k\right)(a+b)=$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\left(\binom{k}{0}+\binom{k}{1}\right)a^kb+\left(\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\right)a^{k-1}b^2+\cdots+\left(\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right)ab^k+\binom{k}{k}b^{k+1}=$$

$$=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\cdots+\binom{k+1}{k}ab^k+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Притоа ги искористивме следните својства на биномните коефициенти:

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}=1,\quad \binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}=1,\quad \binom{k}{i}+\binom{k}{i+1}=\binom{k+1}{i+1},\quad (i=0,1,\cdots k)$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме дека формулата е точна за секое $n\in\mathbf{N}$.

2.2.1.9. Примери.

1) Според биномната формула за развојот на биномот $(3+2x)^5$ имаме

$$(3+2x)^5=\binom{5}{0}3^5(2x)^0+\binom{5}{1}3^4(2x)^1+\binom{5}{2}3^3(2x)^2+$$

$$+\binom{5}{3}3^2(2x)^3+\binom{5}{4}3^1(2x)^4+\binom{5}{5}3^0(2x)^5=$$

$$=243+810x+1080x^2+720x^3+240x^4+32x^5\,.\ \bullet$$

Првите неколку степени на биномот $a+b$ се :

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Забелешка. Биномните коефициени можат да бидат претставени во шемата позната под името „Паскалов триаголник“. Таа е:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Од шемата забележуваме дека биномните коефициенти се симетрични, односно имаме дека

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Симетријата на биномните коефициенти може да се докаже со принципот на математичка индукција, и му го препуштаме на студентот за важба.

По првиот ред во секој следен ред елементите се добиваат со собирање на двата елемента непосредно над него, односно имаме дека важи равенството

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

наречено *Паскалово правило за биномните коефициенти*. Доказот може да се спроведе со принципот на математичка индукција, и му го препуштаме на студентот за вежба.

Општиот член од развојот на биномот $(a+b)^n$ е определен со изразот

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad k = 0,1,\cdots,n \,.$$

2.2.1.10. Примери.

1) Седмиот член од развојот на биномот $(x-a)^{12}$ е

$$T_{6+1} = \binom{12}{6} x^{12-6} (-a)^6 = 924 x^6 a^6 \,.$$

2) Да го најдеме оној член од развојот на биномот $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right)^{11}$ што го содржи x^5. Според формулата за општиот член на биномниот развој имаме дека

$$T_{k+1} = \binom{11}{k} \left(x^{1/3}\right)^{11-k} \left(x^{1/2}\right)^k = \binom{11}{k} x^{\frac{22+k}{6}} \,.$$

Од $\dfrac{22+k}{6} = 5$ следува дека $k = 8$ од каде заклучуваме дека деветтиот член од развојот го содржи x^5, односно $T_{8+1} = 165 x^5$. ●

2.2.2. Множество цели броеви

2.2.2.1. Дефиниција. Под *множество цели броеви* го подразбираме множеството $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup \mathbf{N}^-$, каде што со $\mathbf{N}^-$ го означиме множеството $\{-n : n \in \mathbf{N}\}$.

Значи,

$$\mathbf{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots,n,-n,n+1,-(n+1),\cdots\}$$

Елементите на множеството $\mathbf{Z}$ ги викаме *цели броеви.* Јасно е дека важи $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. Притоа, множеството $\mathbf{Z}^{+} = \{1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ ќе го нарекуваме множество позитивни цели броеви, додека множеството $\mathbf{Z}^{-} = \{-1, -2, -3, \cdots, -n, -(n+1), \cdots\}$ ќе го нарекуваме множество негативни цели броеви,. Да забележиме дека множеството позитивни цели броеви е еднакво на множеството природни броеви, односно $\mathbf{Z}^{-} = \mathbf{N}^{-}$ и $\mathbf{Z}^{+} = \mathbf{N}$. Во таа смисла можеме да запишеме дека

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}^{-}.$$

Операциите собирање, одземање, множење и делење, како и релацијата за подредување дефинирани во множеството реални броеви може да ги разгледуваме во множеството цели броеви. Го поставуваме прашањето дали множеството цели броеви е затворено во однос на наведените операции.

За множеството цели броеви важат следните особини:

1) $\mathbf{Z}$ нема ниту најмал ниту најголем елемент.

2) Ако $m, n \in \mathbf{Z}$, тогаш секогаш $m+n \in \mathbf{Z}$, $m-n \in \mathbf{Z}$ и $m \cdot n \in \mathbf{Z}$, односно множеството цели броеви е затворено во однос на операциите собирање, одземање и множење. Според тоа, можеме да сметаме дека во множеството цели броеви добро се дефинирани операциите собирање, одземање и множење на цели броеви.

3) Секој цел број има спротивен во однос на операцијата собирање, односно за секој $m \in \mathbf{Z}$ постои $(-m) \in \mathbf{Z}$ таков што $m + (-m) = 0$.

4) Множеството природни броеви не е затворено во однос на операцијата делење „наследена“ од множеството реални броеви. На пример, 5 и 9 се цели природни броеви, но $\frac{5}{9}$ не е цел број.

5) Освен елементите 1 и -1, ниеден еден друг елемент од $\mathbf{Z}$ нема инверзен во однос на операцијата множење во $\mathbf{Z}$.

Ова ни дава за право да зборуваме за поимот деливост и во множеството цели броеви. Имено, велиме дека цел број n е *делив* со $m \in \mathbf{Z}$, означуваме $m \mid n$, ако постои $k \in \mathbf{N}$ таков што $n = mk$. Притоа ќе велиме дека m е *делител* на n, односно дека n е *содржател* на m. Ќе велиме дека n е *вистински делител* на m ако $m \mid n$ и $m \neq n$.

Слично, како и кај природните броеви, да забележиме дека од равенството $m = m \cdot 1$ непосредно следува дека секој цел број различен од 0 е делив со бројот 1 и со самиот себе, односно $1 \mid m$ и $m \mid m$ ако $m \neq 0$. Исто така, од равенството

$$0 = 0 \cdot q \text{, за секој } q \in \mathbf{N}$$

следува дека бројот 0 има бесконечно многу делители, односно $m \mid 0$ ако $m \neq 0$. Да забележиме дека бројот 0 е единствен цел број кој има бесконечно многу делители. Навистина, ако $m \neq 0$ и $k \mid m$, тогаш имаме дека $m = kq$, $q \in \mathbf{N}$, па затоа

$$|m| = |k| q \geq |k| \cdot 1 = |k| ,$$

што значи дека сите делители на бројот m се помали или еднакви на m по апсолутна вредност и такви броеви има конечно многу.

2.2.3. Множество рационални броеви

Рационален број е секој број што може да се претстави како $\dfrac{m}{n}$ каде што $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ и $(m,n) = 1$. Множеството рационални броеви ќе го означуваме со $\mathbf{Q}$. Значи,

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z},\, n \in \mathbf{N} \right\}$$

Јасно е дека важи $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Множеството $\mathbf{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}^+, n \in \mathbf{N} \right\}$ се нарекува множество позитивни рационални броеви, додека множеството $\mathbf{Q}^- = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}^-, n \in \mathbf{N} \right\}$ се нарекува множество негативни рационални броеви. Во таа смисла можеме да запишеме дека

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+.$$

Операциите собирање, одземање, множење и делење дефинирани, како и релацијата за подредување дефинирани во множеството реални броеви може да ги разгледуваме во множеството рационални броеви. Множеството рационални броеви е затворено во однос на вака дефинираните операции собирање, одземање и множење и делење. Имено, секој рационален број, освен нулата, има инверзен во однос на операцијата множење, односно имаме дека за секој $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, $(m \neq 0)$ постои $\frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$ таков што $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$.

Исто така, меѓу било кои два рационални броја постои барем еден рационален број. Навистина, нека $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}, \left(\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \right)$ се два рационални броја. Тогаш, на пример, и бројот $\frac{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}{2} = \frac{mq + np}{2nq} \in \mathbf{Q}$. Исто така, важи $\frac{m}{n} < \frac{mq + np}{2nq} < \frac{p}{q}$. Зошто?

Постојат реални броеви што не се рационални. На пример, решение на равенката $x^2 = 2$ е реален но не е рационален број.

Навистина, нека $A = \{x \in \mathbf{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$ и $B = \{x \in \mathbf{Q} : x > 0, x^2 > 2\}$. Тогаш A и B се непразни подмножества од $\mathbf{R}$ такви што $x \leq y,$ за секое $x \in A$ и за секое $y \in B$. Според (4) од дефиниција 1.1., постои $z \in \mathbf{R}$ таков што $x \leq z \leq y,$ за секое $x \in A$ и за секое $y \in B$. Да покажеме дека $z \notin \mathbf{Q}$. За таа цел ќе го претпоставиме спротивното, дека $z \in \mathbf{Q}$. Можни се следните случаи: $z^2 = 2$, $z^2 < 2$ и $z^2 > 2$.

Ако $z^2 = 2$ и $z = \frac{m}{n},\ m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$ и $(m,n) = 1$, тогаш би имале $m^2 = 2n^2$, од каде што добиваме дека $2 \mid m^2$, а тоа значи дека $2 \mid m$, односно $m = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$. Така, наоѓаме дека $2k^2 = n^2$ од каде што следува дека $2 \mid n$. Според тоа, добивме дека 2 е делител на m и на n, што противречи со претпоставката дека $(m,n) = 1$.

Ако $z^2 < 2$, тогаш $\left(z + \frac{1}{n}\right)^2 = z^2 + \frac{2z}{n} + \frac{1}{n^2} \leq z^2 + \frac{2z+1}{n} < z^2 + \left(2 - z^2\right) = 2$

при што бројот n го избравме таков што $n > \frac{2z+1}{2 - z^2}$. Значи и бројот $z + \frac{1}{n}$, кој што е очигледно поголем од z, има квадрат помал од 2, а тоа е спротивно од изборот на бројот z.

На ист начин покажуваме дека не може $z^2 > 2$.

Со ова покажавме дека $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, односно постојат реални броеви што не се рационални. Таквите броеви ги викаме *ирационални*. Множеството ирационални броеви го означуваме со $\mathbf{I}$. Согласно погорната дискусија имаме дека $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

2.3. Ограничени подмножества на реалните броеви

2.3.1. Дефиниција. Нека A е непразно подмножество од $\mathbf{R}$. За елементот $a \in A$ велиме дека е *долна граница* на A ако $a \leq x,$ за секое $x \in A$. За елементот $b \in A$ велиме дека е *горна граница* на A ако $b \geq x,$ за секое $x \in A$.

Во тој случај велиме дека множеството е *ограничено од долу* (од лево), *односно од горе* (од десно). Множеството кое што е ограничено и од долу и од горе се нарекува *ограничено множество*.

Ако множеството A има горна граница b, тогаш има бесконечно многу, бидејќи секој реален број што е поголем од b е горна граница за множеството A.

Слично, ако множеството A има долна граница a, тогаш има бесконечно многу, бидејќи секој реален број што е помал од a е долна граница за множеството A.

2.3.2. Дефиниција. Ако x е долна граница за множеството A и ако за секоја друга долна граница a на A важи $a \leq x$, тогаш велиме дека x е најголема долна граница на множеството A или *инфимум* на A и пишуваме $x = \inf A$.

2.3.3. Дефиниција. Ако y е горна граница за множеството A и ако за секоја друга горна граница b на A важи $y \leq b$, тогаш велиме дека y е најмала горна граница на множеството A или *супремум* на A и пишуваме $y = \sup A$.

2.3.4. Примери.

1) Множеството $M = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$ е ограничено бидејќи е ограничено од долу со бројот 0 и од горе со бројот 1.

2) Може да се покаже дека $\sup A = 1$ и $\inf A = 0.$ ●

Дали за едно ограничено множество секогаш постои инфимум, односно супремум? Ќе ја докажеме следната теорема:

2.3.5. Теорема. Секое непразно подмножество од $\mathbf{R}$ кое е ограничено од десно има супремум во $\mathbf{R}$. Секое непразно подмножество од $\mathbf{R}$ кое е ограничено од лево има инфимум во $\mathbf{R}$.

Доказ. Нека множеството $A \subset \mathbf{R}$ е непразно и ограничено од десно и нека B е множеството на сите горни граници на множеството A, односно $B = \{y \in \mathbf{R} : x \leq y, \forall x \in A\}$. Тогаш A и B се непразни и важи $x \leq y$ за сите $x \in A,\ \ y \in B$. Според својството (4) од дефиницијата 1.1., постои реален број z таков што $x \leq z \leq y$, за сите $x \in A,\ \ y \in B$. Бројот z е значи најмала горна граница на множеството A, односно $z = \sup A$.

Аналогно, нека множеството $A \subset \mathbf{R}$ е непразно и ограничено од лево и нека B е множеството на сите долни граници на множеството A, односно $B = \{y \in \mathbf{R} : x \geq y, \forall x \in A\}$. Тогаш A и B се непразни и важи $x \geq y$ за сите $x \in A,\ \ y \in B$. Според својството (4) од дефиницијата 1.1., постои реален број z таков што $x \geq z \geq y$, за сите $x \in A,\ \ y \in B$. Бројот z е значи најголема долна граница на множеството A, односно $z = \inf A$. ■

Важна последица на теорема 2.3.4. е теоремата на Архимед.

2.3.6. Последица. (Теорема на Архимед). Ако $x \in \mathbf{R}$ и $x > 0$, тогаш за секој $y \in \mathbf{R}$ постои природен број n таков што $nx > y$.

Доказ. Ако $y < 0$, тогаш $1x > y$. Затоа можеме да претпоставиме дека $y > 0$. Да претпоставиме дека за секој природен број n, важи $nx \leq y$. Множеството $A = \{nx : n \in \mathbf{N}\}$ е ограничено од десно па според теоремата постои $\sup A = b$. Во тој случај важи и $(n+1)x \leq b$, односно

$nx=(n+1)x-x\leq b-x$ за секој $n\in\mathbf{N}$. Добивме дека $b-x<b$ е горна граница за множеството A, што не е можно. Според тоа, множеството A не е ограничено од десно, па следува дека постои природен број n таков што $nx>y$. ■

Во следната теорема ќе истакнеме едно важно својство на бројот $b=\sup A$, како и на бројот $a=\inf A$.

2.3.7. Теорема. Бројот $b=\sup A$ ако и само ако за секое $x\in A$ важи $x\leq b$ и за произволно $\varepsilon>0$, постои $x\in A$ таков што важи условот $b-\varepsilon<x\leq b$.

Доказ. Нека $b=\sup A$. Ако постои $\varepsilon>0$ такво што за секое $x\in A$ важи $x\leq b-\varepsilon$, добиваме противречност со претпоставката дека b е најмалата горна граница на множеството A.

За обратното, нека за секое $x\in A$ важи условот $x\leq b$ и за произволно $\varepsilon>0$, постои $x\in A$ таков што важи условот $b-\varepsilon<x\leq b$. Значи, b е горна граница на множеството A, додека за произволен позитивен реален број ε, $b-\varepsilon$ не е горна граница за A. Тоа значи дека b е најмала горна граница на множеството A, односно $b=\sup A$. ■

2.3.8. Теорема. Бројот $a=\inf A$ ако и само ако за секое $x\in A$ важи условот $x\geq a$ и за произволно $\varepsilon>0$, постои $x\in A$ таков што важи условот $a\leq x<a+\varepsilon$.

Доказ. Нека $a=\inf A$. Ако постои $\varepsilon>0$ такво што за секое $x\in A$ важи усвот $x\geq a+\varepsilon$, добиваме противречност со претпоставката дека a е најголемата долна граница на множеството A.

За обратното, нека за секое $x\in A$ важи дека $x\geq a$ и за произволно $\varepsilon>0$, постои $x\in A$ таков што важи условот $a\leq x<a+\varepsilon$. Значи, a е долна граница на множеството A, додека за произволен позитивен

реален број ε, $a+\varepsilon$ не е долна граница за A. Тоа значи дека a е најголема долна граница на множеството A, односно $a=\inf A$. ■

2.3.9. Примери.

1) За множествата $A=\{x : x\in \mathbf{Q}, x^2 \le 5\}$ и $B=\{a : a\in \mathbf{Q}, a^2 < 5\}$ имаме дека $\sup A=\sup B=\sqrt{5}$ и $\inf A=\inf B=-\sqrt{5}$.

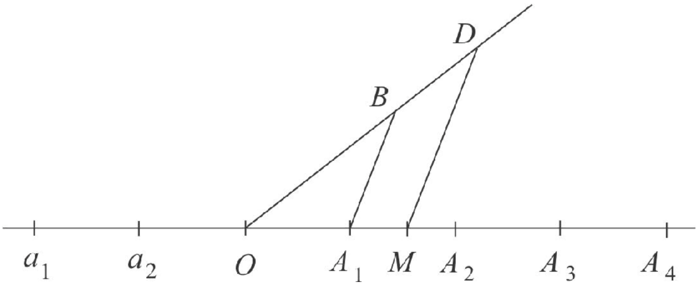
2) За множеството $C=\{c : c\in \mathbf{Q},\ c<2\}$ имаме дека $\sup C=2,$ додека $\inf C$ не постои, бидејќи множеството C не е ограничено оддолу. ●

2.4. Геометриска интерпретација на множеството реални броеви

Нека на права избереме точка O како почетна точка и отсечка OA_1 како единична мерка за должина. (слика 1). Ја нанесуваме отсечката OA_1 надесно долж правата почнувајќи од точката O произволен број пати. Ги добиваме отсечките: OA_1, OA_2, $OA_3,\cdots,OA_n,\cdots$. Потоа на точката O и го придружуваме бројот 0, на точката A_1 бројот 1, на точката A_2 бројот 2, итн. на точката A_n и го придружуваме бројот n (како мерка на должината на отсечката OA_n). Ја нанесуваме, исто така, отсечката OA_1 налево долж правата започнувајќи од точката O ($Oa_1=OA_1$, $Oa_2=OA_2$, $Oa_3=OA_3,\cdots,Oa_n=OA_n,\cdots$.). На така добиение точки $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ ги придружуваме броевите $-1, -2, -3,\cdots -n,\cdots$ соодветно. Така, на множеството цели броеви $\mathbf{Z}$ соодвествува множество точки од правата.

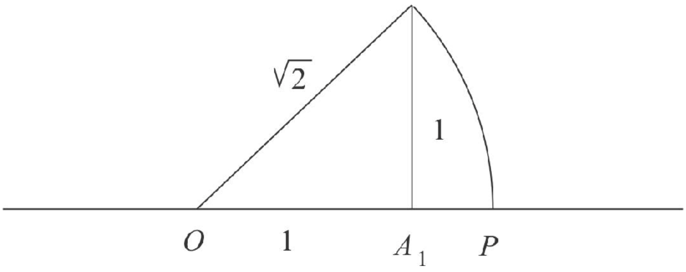
Исто така, на секој рационален број соодвествува точка од правата. Имено, нека $x\in \mathbf{Q}$, односно $x=\dfrac{m}{n}$. Тогаш имаме дека $x:1=m:n$. Низ точката O повлекуваме произволна права и започнувајќи од точката

O ги пренесуваме отсечките $OD = mOA_1$ и $OB = nOA_1$, $m, n > 0$. Триаголниците OMD и OA_1B се слични, па затоа имаме пропорционалност на должините на соодветните страни, односно $\overline{OM} : \overline{OA1} = \overline{OD} : \overline{OB}$. Тогаш $\overline{OM} : 1 = m : n$ односно $\overline{OM} = \frac{m}{n}$, каде што со $\overline{OM}$ ја означивме должината на отсечката OM (слика 1.). Значи, ако $\frac{m}{n} > 0$ на рационалниот број x ја придружуваме точката M , додека ако $\frac{m}{n} < 0$ придружуваме точка на правата која е симетрична со M во однос на точката O. На овој начин на секој рационален број еднозначно придружуваме точка од правата.



Слика 1.

За овие точки велиме дека се *рационални*. Со множеството рационални точки не се исцрпени сите точки од правата. На пример, на ирационалниот број $\sqrt{2}$ можеме еднозначно да му придружиме точка P (како што е дадено на слика 2.). Оваа точка не припаѓа во множеството рационални точки, бидејќи $\sqrt{2}$ не е рационален број. На секој реален број придружуваме само една точка од правата и обратно, на секој точка од правата само еден реален број.



Слика 2.

Правата на која сме избрале почетна точка, со нанесена единица мерка за должина, и на која на секоја точка сме придружиле реален број, се вика *бројна оска* или $x-$*оска*.

2.4.1. Дефиниција. *Затворен интервал* или *сегмент* со краеви a и b е множеството $[a,b]=\{x:a\leq x\leq b\}$.

Множеството $(a,b)=\{x:a<x<b\}$ е *отворен интервал* со краеви a и b.

Множествата $[a,b)=\{x:a\leq x<b\}$ и $(a,b]=\{x:a<x\leq b\}$ се *полуотворени интервали* со краеви a и b.

Под околина на точката x подразбираме отворен интервал што ја содржи точката x. Специјално, за произволно $\varepsilon>0$, под $\varepsilon-$ околина на точката x го подразбираме множеството

$$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\{y:|y-x|<\varepsilon\}.$$

Множеството $\mathbf{R}$ го прошируваме со уште два елементи: $-\propto,\propto$. Добиеното множество го нарекуваме проширено множество реални броеви и го означуваме со $\mathbf{R}^*$. Можеме да запишеме $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Множествата $(-\propto,b),(a,\propto),(-\propto,b]$, $[a,\propto),(-\propto,\propto)$ исто така ќе ги викаме интервали.

2.4.2. Примери.

1) $\left[3,4\right]$, $\left[-3,0\right]$ и $\left[-5,-2\right]$ се затворени интервали; $\left(0,7\right)$, $(-2,6)$ и $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ се отворени интервали; $\left[-3,8\right)$ и $\left(0,1\right]$ се полуотворени интервали. ●

2.5. Задачи за вежбање

1. Пресметај ја вредноста на изразот $4|x|+7|y|+9$ ако:

1) $x=\frac{3}{5},\ y=-\frac{1}{2}$ 2) $x=-\frac{\sqrt{3}}{4},\ y=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

2. Пресметај вредноста на изразот $x\cdot|y|+y\cdot|z|+z\cdot|x|$ ако:

1) $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{4}$ 2) $x=-\sqrt{3},\ y=2\sqrt{3},\ z=\sqrt{12}$

3. Пресметај вредноста на изразот $|4|x-2|-5|y+3|+|z-3||$ ако:

1) $x=-3,\ y=4,\ z=-7$ 2) $x=\frac{1}{4},\ y=-\frac{1}{4},\ z=\frac{1}{4}$

4. За кои реални броеви се исполнети неравенствата:

1) $|x|<5$ 2) $|x|\geq 9$ 3) $|x-2|\geq 8$ 4) $|x-7|\leq 2$

5. Докажи дека за секои $a,b\in\mathbf{R}$ такви што $ab>0$ важи $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

6. Докажи дека за секои $a,b,c\in\mathbf{R}$ важи $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$.

7. Нека се дадени множествата $A=\left\{x: x\in\mathbf{N}, x\leq 5\right\}$, $B=\left\{x: x=4\right\}$ и $C=\left\{x: x\in\mathbf{N}, 1<x<6\right\}$. Определи ги множествата:

1) $(A \cap C) \cup B$ 2) $A \cup (C \setminus B)$

8. За кои природни броеви n вредноста на дропката $\frac{24}{3n-4}$ е природен број?

9. Докажи дека за секое $n \in \mathbf{N}$,

1) $(5n+3)^2 - 4$ е делив со 5 2) $(4n+5)^2 - 9$ е делив со 8

10. Докажи дека производот на два последователни природни броеви е број делив со 2.

11. Докажи дека квадратот на непарен природен број може да се запише во облик $8p+1, p \in \mathbf{N}$.

12. Докажи дека збирот на кубовите на три последователни природни броеви е број делив делив со 9.

13. Најди НЗД за броевите:

1) 135 и 180 2) 63, 135 и 315

14. Дали броевите

1) $21n+4$ и $14n+3$ 2) $9n+31$ и $2n+7$

се заемно прости броеви за секој природен број n?

15. Збирот на два природни броја е 150, а нивниот најголем заеднички делител е 30. Кои се тие броеви?

16. Производот на два природни броја е 8400, и нивниот најголем заеднички делител е 20. Кои се тие броеви?

17. За кои природни броеви p, броевите p и $3p^2+1$ се прости?

18. Докажи дека ако p и $8p^2+1$ се прости броеви, тогаш $8p^2-1$ е прост.

19. Докажи, дека за секој $n \in \mathbf{N}$ се точни равенствата:

1) $1+3+...+(2n-3)+(2n-1)=n^2$

2) $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $1^3+2^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4) $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n=\dfrac{n(n^2-1)}{3}$

5) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

20. Докажи дека $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{3n+1}>1$, за секој $n \in \mathbf{N}$.

21. Докажи дека за секој природен број $n>1$ важи:

1) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot...\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n-1}}$ 2) $\dfrac{n}{2}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2^n-1}<n$

22. Докажи дека за секој природен број $n>3$ важи $n!>2^n$.

23. Докажи дека за секој природен број n важи:

1) $12\,|\,(3^n+3^{n+1})$ 2) $7\,|\,(8^n-14n-1)$ 3) $19\,|\,(7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n)$

24. Развиј ги биномите:

1) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\sqrt{y^3}\right)^4$ 2) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^5$

25. Со помош на биномната формула, пресметај со точност до пет децимални места:

1) $0{,}98^4$ 2) $3{,}1^6$ 3) $1{,}05^5$

26. Најди го седмиот член од развојот на биномот $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^9$.

27. Најди го тринаесеттиот член во развојот на биномот $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, ако биномниот коефициент на третиот член е еднаков на 105.

28. Во развојот на биномот $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)^{12}$ определи го членот кој содржи x^7.

29. Најди го членот од развојот на биномот $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{17}$ што не го содржи x.

30. Најди го членот од развојот на биномот $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y}\right)^{14}$ што ги содржи x и y на еднакви степени.

31. Најди ги сите цели вредности на бројот a за кои изразот $\frac{2a-5}{a+2}$ е цел број.

32. За кои вредности на n, изразот $\frac{n^2+1}{n+2}$ е цел број?

33. Нека a,b,c и d се рационални броеви, $c\neq 0$ или $d\neq 0$ и нека x е ирационален број. Кој услов треба да го задоволуваат броевите a,b,c и d за да $\frac{ax+b}{cx+d}$ биде рационален број?

34. Дали множеството $A=\{3^n+2^{-n}\mid n=1,2,...\}$ е ограничено:

1) од долу   2) од горе?

35. Најди $\inf A$ и $\sup A$, ако:

1) $A=(-1,2]\cup[3,4)$ 2) $A=\{(-1)^n+\frac{1}{n}\mid n=1,2,3,...\}$

36. Најди $\inf A$ и $\sup A$, ако:

1) $A=\{x\mid(x-1)^2<\sqrt{2},\, x\in\mathbf{R}\}$ 2) $A=\{x\mid(x+2)^2\leq\sqrt{3},\, x\in\mathbf{R}\}$

3. Функции со една променлива

3.1. Дефиниција и основни поими

Многу величини кои се појавуваат во техниката, науката и секојдневниот живот често зависат една од друга и се менуваат со менувањето на некоја друга величина.

3.1.1. Примери.

1) Од геометрија е познато дека плоштината на квадрат со страна a се пресметува по формулата $P = a^2$. Забележуваме дека плоштината се менува со менување на должината на страната. Имено со зголемување на должината на страната се зголемува и плоштината, а со намалување на должината на страната се намалува и плоштината. Според тоа, плоштината се менува во завиност од промената на должината на страната.

2) Од физика е познато дека должината на патот S при слободно паѓање се пресметува со формулата $S = \frac{gt^2}{2}$, каде што g е Земјиното

забрзување. Според тоа, должината на изминатиот пат зависи од времето t за кое што телото паѓа надолу. ●

Од наведените примери може да заклучиме дека се работи за две множества од променливи величини, различни по нивната природа, и правило (закон) за придружување според кој што со менувањето на величините во едното множество се менуваат величините во другото множество.

3.1.2. Дефиниција. Нека E и F се две непразни подмножества од множеството реални броеви. Ако по некое правило на секој $x \in E$ е придружен единствен елемент $y \in F$, велиме дека е зададена *реална функција* f на множеството E со вредности во множството F.

Функциите ќе ги означуваме со мали букви, на пример $f, g, h, \ldots$.

На елементот $x \in E$ функцијата f му придружува елемент $f(x) \in F$. Велиме дека $f(x)$ е *вредност на функцијата* f во точката x. Елементот $x \in E$ го нарекуваме *независно променлива вредност* или *аргумент* за функцијата f, а елементот $f(x)$ го нарекуваме *зависно променлива.*

Симболички, со $f: E \to F$ ќе означуваме дека f *е функција на* E *со вредности во* F. Исто така, ќе ја користиме ознаката $f: x \mapsto f(x),$ $x \in E$ или $y = f(x),\ \ x \in E$, кога сакаме да го истакнеме дејството на функцијата. Ако не нагласиме поинаку, понатаму под ознаката f ќе подразбираме функција $f: E \to F$.

Велиме дека E е *домен* или *дефинициона област* (означуваме и со D_f), и F е кодомен на функцијата $f: E \to F$.

Подмножеството $\{f(x): x \in E\}$ од кодоменот F е *слика на функцијата или множество вредности на* f и го означуваме со R_f.

Велиме дека функцијата е зададена ако се дадени *дефиниционата област* D_f*, кодоменот* F *и правилото со кое за дадени вредности на* x *се добиваат вредностите* $f(x)$*.*

Често, но не секогаш, правилото за придружување е зададено аналитички, односно со формула.

3.1.3. Примери.

1) Функцијата $f(x)=x^2-x+1$, $x\in[-2,2]$ е функција од $[-2,2]$ во $\mathbf{R}$. Имаме $0 \mapsto f(0)=0^2-0+1=1$, $-1 \mapsto f(-1)=(-1)^2-(-1)+1=3$.

2) Со $f(x)=x^2-2x+1$ е дефинирана функција за секое $x\in\mathbf{R}$. Значи, имаме дека дефиниционата област е $D_f=\mathbf{R}$, и множеството вредности е $R_f=\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.

3) Со $f(x)=\frac{1}{x}$ е дефинирана функција за секое $x\in\mathbf{R}$ освен за $x=0$. Во овој случај дефиниционата област на функцијата f е множеството од сите реални броеви $x\neq 0$. Значи, имаме дека дефиниционата област е $D_f=\mathbf{R}\backslash\{0\}$ и множеството вредности е $R_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

4) Функцијата $g(x)=\sqrt{x}$ е дефинирана само за оние $x\in\mathbf{R}$ за кои е $x\geq 0$. Значи, дефиниционата област е $D_g=\{x\in\mathbf{R}: x\geq 0\}=[0,\infty)$ и множеството вредности е $R_g=[0,\infty)$.

5) Да ја најдеме дефинициoната област на функцијата $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}+x}$.

Бидејќи делење со нулата во $\mathbf{R}$ не е дозволено, тогаш имаме дека $\frac{1}{2}+x\neq 0$, односно $x\neq-\frac{1}{2}$ што значи дека $-\frac{1}{2}\notin D_f$. Од друга страна, имаме дека $\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}$ ако и само ако $1-x^2\geq 0$, односно $x^2\leq 1$, што е еквивалентно со $-1\leq x\leq 1$.

Значи, функцијата f е дефинирана за сите реални броеви x коишто ги задоволуваат двата услова: 1) $x\neq-\frac{1}{2}$ и 2) $-1\leq x\leq 1$. Можеме да запишеме дека $D_f=[-1,1]\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\left[-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right]$. Понатаму, имаме дека $f(0)=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+0}=2$, $f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, но, на пример, записите $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(5)$, $f(-20)$ нема смисла, бидејќи броевите $-\frac{1}{2}$, 5, -20 не припаѓаат во дефинициoната област на f . ●

Ако функцијата f е зададена со формула и дефинициoната област не е специфицирана, тогаш сметаме дека дефинициoната област D_f се состои од сите реални броеви $x\in\mathbf{R}$ за кои формулата има смисла. Исто така, земаме $F=R_f$.

Ако функцијата f е зададена со формула, тогаш најпрво ја одредуваме дефинициoната област.

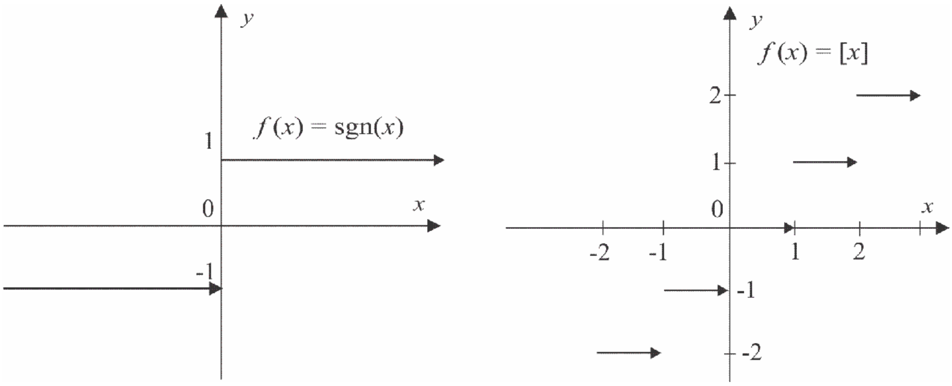
Една функција може да биде дадена и со повеќе формули. Во тој случај доменот треба да се обележи за секоја формула што на тоа подрачје ја определува функцијата.

3.1.4. Примери.

1) Функцијата

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

ја викаме *сигнум* и ја означуваме со $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$. За дадената функција имаме дека дефиниционата област е $D_f=\mathbf{R}$, а множеството вредности е $R_f=\{-1,0,1\}$ (слика 3а.)



а) б)

Слика 3.

2) За функцијата $f(x)=\left[x\right]$, каде што $\left[x\right]$ го означува најголемиот цел број што не е поголем од x, се нарекува *цел дел*. Имаме

$$f(x)=\begin{cases} n, & x\in[n,n+1) \\ -(n+1), & x\in[-(n+1),-n) \end{cases}$$

каде што $n \in \mathbf{N}$, и е цел дел од x. За дадената функција имаме дека дефиниционата област е $D_f = \mathbf{R}$, додека множеството вредности е $R_f = \{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$ (слика 3б). ●

Понекогаш со различни формули може да биде дефинирана иста функција. Во врска со тоа ја имаме следната дефиниција:

3.1.5. Дефиниција. За функциите f и g велиме дека се *еднакви,* и пишуваме $f = g$, ако и само ако се исполнети следните услови:

1. f и g се дефинирани на исто множество E, односно имаат исти домени;
2. f и g примаат вредности во исто множество F, односно имаат исти кодомени;
3. $f(x) = g(x)$ за секое $x \in E$, односно f и g имаат исто дејство.

Ако барем еден од условите 1., 2. или 3. не е исполнет, тогаш функциите f и g не се *еднакви* и пишуваме $f \neq g$.

3.1.6. Примери.

1) Нека $\mathbf{R}$ е множеството реални броеви и функциите $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ се дефинирани на следниот начин:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}, \text{ за секое } x \in \mathbf{R}$$

$$g(x) = x + 1, \text{ за секое } x \in \mathbf{R}.$$

Тогаш имаме дека $f = g$. Навистина, наоѓаме дека $D_f = D_g = \mathbf{R}$, бидејќи $x^2 + 1 \neq 0$, за секое $x \in \mathbf{R}$. Непосредно заклучуваме дека нивните кодомени се еднакви. Исто така, за секое $x \in \mathbf{R}$ имаме дека

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1}=x+1=g(x)\,.$$

2) Функциите $f(x)=\frac{x}{x}$, $x\in\mathbf{R}$ и $g(x)=1$, $x\in\mathbf{R}$ не се еднакви, бидејќи имаат различни дефинициони области $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, а $D_g=\mathbf{R}$. ●

Исто така, функцијата може да биде зададена со таблица, на пример логаритамската таблица, или може да биде зададена со график.

3.1.7. Дефиниција. *График* на функција е множеството од подредени двојки

$$G_f=\{(x,f(x)):x\in D_f\}.$$

Точката $M(x,f(x))$ е елемент на графикот на функцијата, x е прва координата, а $f(x)$ - втора координата на графикот на функцијата.

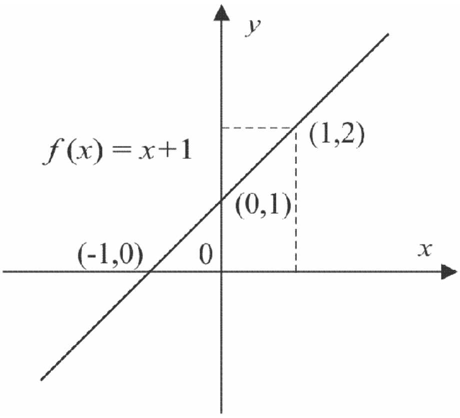
Значи, графикот на функцијата е подмножество од $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ и се состои од сите точки со координати $(x,f(x))$, $x\in D_f$.

3.1.8. Примери.

1) Да го скицираме графикот G_f на функцијата $f(x)=x+1,\ x\in\mathbf{R}$, во рамнината во која е даден правоаголен координатен систем $x\mathrm{O}y$.

На апсцисната оска ја нанесуваме координатата x, а на ординатната оска ја нанесуваме вредноста на функцијата $f(x)$. Така, ја добиваме точката со координати $(x,f(x))=(x,x+1)$. На пример, на множеството G_f му припаѓаат точките (0,1), (1,2), (-1,0) (слика 4). ●

Да забележиме дека две функции се еднакви ако графиците им се еднакви. Навистина, нека $\{(x,f(x)):x\in D_f\}=\{(x,g(x)):x\in D_g\}$. Тогаш



Слика 4.

имаме $D_f = D_g$ и $f(x) = g(x)$ за секое $x \in D_f$.

Кога го цртаме графикот на функцијата f, понекогаш е од полза да ја доведеме во врска со функција g чијшто график лесно можеме да го нацртаме. На пример, ако е нацртан графикот G_g на функцијата определена со $x \mapsto g(x)$, тогаш графикот на функцијата определена со $x \mapsto -g(x)$ е симетричен со графикот G_g во однос на $x-$оската, додека графикот на фунцијата определена со $x \mapsto g(-x)$ е симетричен со графикот G_g во однос на $y-$оската. Или, графикот на функцијата определена со $x \mapsto \lambda g(x),\ \ \lambda > 0$, се добива од G_g со растегнување $\lambda-$пати по $y-$ оската ако $\lambda > 1$, односно со стегање $\lambda-$пати ако $0 < \lambda < 1$. Тоа значи дека апсцисите на точките од графикот G_g остануваат исти, додека ординатите ги продолжуваме или ги скратуваме $\lambda-$пати, односно $G_{\lambda g} = \{(x, \lambda y) : (x, y) \in G_g\}$. Ако $a \in \mathbf{R}$, тогаш графикот на функцијата определена со $x \mapsto a + g(x)$ се добива со транслација (поместување) на графикот G_g за a долж $y-$оската, додека графикот на функцијата $x \mapsto g(x+a)$ се добива со транслација (поместување) на графикот G_g за a долж $x-$оската. Во врска со примената на споменатите заклучоци подетално ќе зборуваме подоцна, во делот за елементарните функции.

3.1.9. Дефиниција. Велиме дека функцијата $f:E\to F$ е *сурјекција* ако за секое $y\in F$ постои барем едно $x\in E$ такво, што $y=f(x)$, односно ако сликата на функцијата f е множеството F, односно $R_f=F$. Симболички, запишуваме

$$(\forall y\in F)(\exists x\in E)\ y=f(x).$$

Велиме дека функцијата $f:E\to F$ е *инјекција* ако различни елементи од доменот имаат различни вредности во кодоменот. Симболички, запишуваме

$$x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y),\quad x,y\in E.$$

Функцијата $f:E\to F$ е *биекција* ако истовремено е инјекција и сурјекција.

3.1.10. Примери.

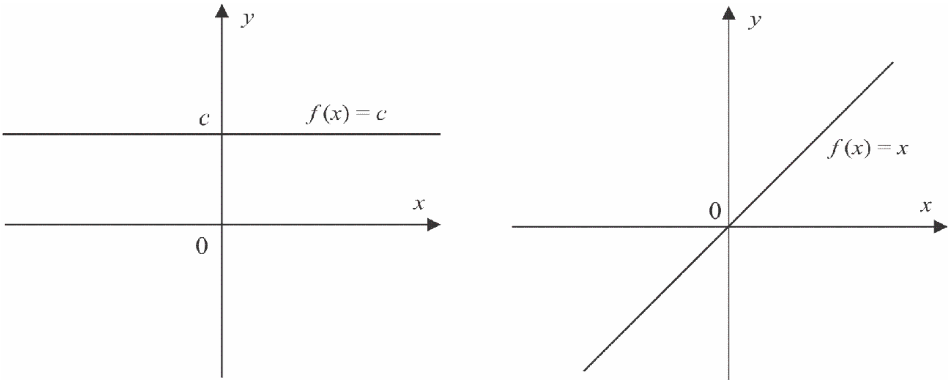
1) Нека $\mathbf{N}$ е множеството природни броеви. Со $f(n)=2n$ е дефинирана функција од $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$. Така, имаме дека $f(3)=6, f(19)=38$ итн. Функцијата f не е сурјекција.

2) Нека $\mathbf{Z}$ е множеството цели броеви и $F=\{0,1\}$. На бројот $x\in\mathbf{Z}$ му придружуваме нула, ако x е делив со 2 и еден, ако x не е делив со 2. Со тоа добиваме функција $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{F}$. Така, имаме дека $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=0$, $f(-4)=0$ итн. Функцијата е сурјекција.

3) Нека $f:E\to F$ и $c\in F$ е фиксно. Ако $f(x)=c$, за секое $x\in E$,

велиме дека функцијата f е *константа*. Со други зборови, функцијата f е константа ако и само ако $f(x) = f(y)$ за секои $x, y \in E$ (слика 5а.).

4) Нека $f\left(x\right) = x$, за секое $x \in E$. Тогаш функцијата $f : E \to E$ ја викаме *идентично пресликување.* Притоа да забележиме дека f е биекција (слика 5б.). ●



а) б)

Слика 5.

3.2. Аритметички операции со функции

Нека се дадени функциите $f : E \to \mathbf{R}$ и $g : E \to \mathbf{R}$

1. *Збир* на функциите f и g е функцијата $\left(f + g\right): E \to \mathbf{R}$ определена со

$$\left(f + g\right)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in E .$$

2. *Производ* на функциите f и g е функцијата $\left(fg\right): E \to \mathbf{R}$ определена со

$$\left(fg\right)(x)=f(x)g(x),\quad x\in E\,.$$

3. *Производ* на реалниот број λ со функцијата f е функцијата определена со $\left(\lambda f\right):E\to\mathbf{R}$ таква што

$$\left(\lambda f\right)(x)=\lambda f(x),\quad x\in E$$

4. Количник на функциите f и g каде што $g\left(x\right)\neq 0,$ за секое $x\in E$ е функцијата $\left(\dfrac{f}{g}\right):E\to\mathbf{R}$ определена со

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g\left(x\right)},\quad x\in E\,.$$

3.2.1. Примери.

1) Нека се дадени функциите $f(x)=x^2+1$, $g(x)=2x$ и $\lambda=2$. Имаме дека $D_f=D_g=\mathbf{R}$, $R_f=\left[1,\infty\right)$, $R_g=\mathbf{R}$. Нивниот збир, производ, количник и производот со реалниот број $\lambda=2$, се функциите

$$\left(f+g\right)(x)=x^2+2x+1=\left(x+1\right)^2,\qquad \left(fg\right)\left(x\right)=2x\left(x^2+1\right),$$

$$\left(2f\right)\left(x\right)=2(x^2+1)=2x^2+2,\qquad \left(\frac{f}{g}\right)\left(x\right)=\frac{x^2+1}{2x}\,.\ \bullet$$

3.3. Монотоност на функција

Нека E_1 е подмножество од доменот на функцијата $f:E\to F$.

3.3.1. Дефиниција. Велиме дека функцијата $f:E\to F$

- *монотоно расте на множеството* E_1 ако

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 : \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

- *строго монотоно расте* на множеството E_1 ако

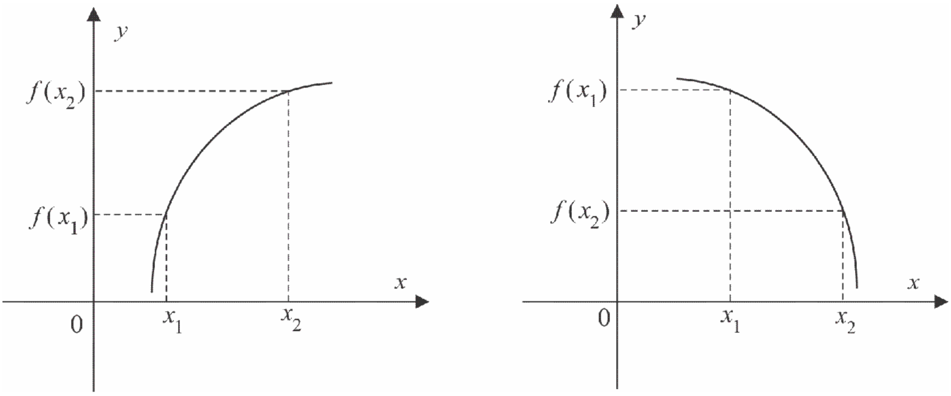
$$\forall x_1, x_2 \in E_1 : \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$ (слика 6а.)

- *монотоно опаѓа* на множеството E_1 ако

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 : \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

- *строго монотоно опаѓа* на множеството E_1 ако

$$\forall x_1, x_2 \in E_1,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$ (слика 6б.)



а) б)

Слика 6.

Секоја функција која расте или опаѓа се вика *монотона функција*. Функцијата е *строго монотона* на множеството E_1 ако е строго растечка или строго опаѓачка.

3.3.2. Примери.

1) Да ја испитаме монотоноста на функцијата $f(x) = 2x - 1$, дефинирана за секое $x \in (-\infty, +\infty)$. Нека $x_1, x_2 \in D_f = \mathbf{R}$ и нека $x_1 < x_2$. Имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=2x_1-1-\left(2x_2-1\right)=2\left(x_1-x_2\right)<0$$

односно $f(x_1)<f(x_2)$. Според тоа, функцијата строго монотоно расте на целата дефинициона област, односно на целата реална права.

2) Да ја испитаме монотоноста на функцијата $f(x)=1-x^3$, дефинирана за секое $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$. Нека $x_1,x_2\in D_f=\mathbf{R}$ и нека $x_1<x_2$. Имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=1-x_1^3-\left(1-x_2^3\right)=-x_1^3+x_2^3=\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=$$

$$=\left(x_2-x_1\right)\left(\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}\right)>0$$

односно $f(x_1)>f(x_2)$. Според тоа, функцијата строго монотоно опаѓа на целата дефинициона област, односно на целата реална права.

3) Да ја испитаме монотоноста на функцијата $f(x)=x^2$, дефинирана за секое $x\in\left(-\infty,+\infty\right)$.

Нека $x_1,x_2\in\left(-\infty,0\right]$ и нека $x_1<x_2$. Имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)>0$$

односно $f(x_1)>f(x_2)$, што значи функцијата строго монотоно опаѓа на интервалот $\left(-\infty,0\right]$.

Нека $x_1,x_2\in\left[0,+\infty\right)$ и нека $x_1<x_2$. Имаме

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)<0$$

односно $f(x_1)<f(x_2)$, што значи функцијата строго монотоно расте на интервалот $\left[0,+\infty\right)$.

4) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=1-x-|x|$, дефинирана за секое $x\in(-\infty,+\infty)$. Од дефиницијата за апсолутна вредност на реален број непосредно следува дека функцијата може да ја запишеме во облик

$$f:x\mapsto f(x)=\begin{cases}1-2x, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}.$$

од каде наоѓаме дека функцијата строго монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty,0)$, и монотоно опаѓа на интервалот $[0,+\infty)$. Според тоа, функцијата монотоно опаѓа на целата реална права. ●

3.4. Ограничени функции

3.4.1. Дефиниција. Велиме дека функцијата f е *ограничена од горе* ако постои реален број M таков што $f(x)\leq M,$ за секое $x\in D_f$.

Ако постои реален број m таков што $f(x)\geq m,$ за секое $x\in D_f$, тогаш велиме дека функцијата f е *ограничена од долу*.

Накусо, велиме дека функцијата е *ограничена* ако е ограничена и од горе и од долу, односно ако постојат реални броеви m и M такви што

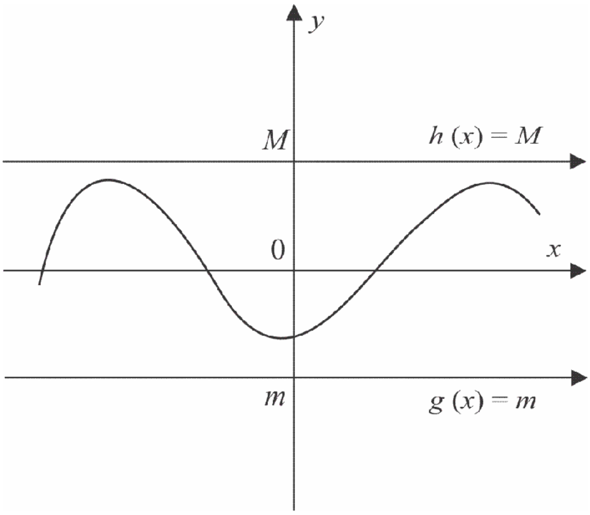
$$m\leq f(x)\leq M, \text{ за секое } x\in D_f.$$

Графикот на ограничена функција се наоѓа меѓу двете прави чии равенки се $g(x)=m$ и $h(x)=M$ (слика 7.).

Ако ставиме $K=\max\{|m|,|M|\}$, погорната дефиниција може да ја искажеме во нејзиниот еквивалентен облик.

3.4.2. Дефиниција. Велиме дека функцијата f е *ограничена* ако постои позитивен реален број K таков што $|f(x)|\leq K,$ за секое $x\in D_f$.

Функцијата е *неограничена* ако не е ограничена, односно ако за секој позитивен реален број a постои $x \in D_f$ таков, што $|f(x)| > a$.



Слика 7.

3.4.2. Примери.

1) Функцијата $f(x) = x,$ за секое $x \in (a,b),$ $a,b \in \mathbf{R}$ е ограничена. Навистина, за секое $x \in (a,b)$ имаме дека

$$a < f(x) = x < b .$$

Функцијата $f(x) = x,$ за секое $x \in (-\infty, +\infty)$ е неограничена. Навистина, ако K е произволен позитивен реален број, тогаш за $x = K + 1 \in \mathbf{R}$ важи

$$|f(x)| = |x| = K + 1 > K .$$

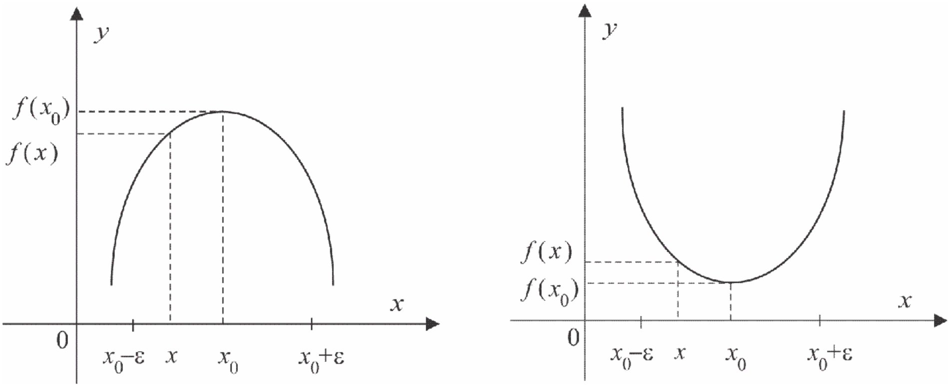
2) Функцијата $f(x) = \frac{1}{x},$ за секое $x \in (0, +\infty),$ е неограничена. Нека K

е произволен позитивен број. За $x=\dfrac{1}{K+1}$ имаме дека

$$\left|f\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}=\frac{1}{\left|\dfrac{1}{K+1}\right|}=\left|K+1\right|=K+1>K\ .\ \bullet$$

3.5. Локални екстреми

3.5.1. Дефиниција. Функцијата f има *локален максимум* во точката $x_0\in D_f$ ако постои $\varepsilon>0$ такаво што за секое $x\in\left(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\right)\cap D_f$, $x\neq x_0$, имаме $f(x)<f(x_0)$ (слика 8а.).



а) б)

Слика 8.

3.5.2. Дефиниција. Функцијата f има *локален минимум* во точката $x_0\in D_f$ ако постои $\varepsilon>0$ такво што за секое $x\in\left(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\right)\cap D_f$, $x\neq x_0$, $f(x)>f(x_0)$ (слика 8б.).

Ако во точката $x_0 \in D_f$ функцијата има локален максимум или локален минимум, велиме со еден збор дека во таа точка функцијата има *локален екстрем*.

3.4.2. Примери.

1) Да ги најдеме локалните екстреми (доколку постојот) на функцијата $f(x) = -x^2 + 2x - 3$. За секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ имаме дека

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3 = -(x-1)^2 - 2 \le -2 = f(1)$$

од каде што следува дека функцијата има локален максимум во точката $x = 1$ еднаков на -2.

2) Да ги најдеме локалните екстреми (доколку постојот) на функцијата $f(x) = |x-1|$. За секое $x \in D_f = \mathbf{R}$ имаме дека

$$f(x) = |x-1| \ge 0 = f(1)$$

од каде што следува дека функцијата има локален минимум во точката $x = 1$ еднаков на 0.

3) Функцијата $f(x) = \ln x$ е строго монотоно растечка на целата дефинициона област $(0, +\infty)$, па нема локални екстреми. ●

3.6. Сложени функции

3.6.1. Дефиниција. За две функции $f : E \to F$ и $g : F \to G$, функцијата $g \circ f : E \to G$ зададена со:

$$(g \circ f)(x) \overset{\text{деф.}}{=} g(f(x)), \quad x \in E$$

ја викаме *сложена функција* или *композиција на функциите* f и g.

Да забележиме дека E е домен и G е кодомен на композицијата на функциите f и g.

Во општ случај за композицијата на функции не важи комутативниот закон, односно $f \circ g \neq g \circ f$.

Уште повеќе, дефиниционите области на функциите $f \circ g$ и $g \circ f$ може да се различни. Композицијата $g \circ f$ може да биде дефинирана, додека композицијата $f \circ g$ да нема смисла.

Освен тоа, да забележиме дека сложената функција $g \circ f$ е определена само ако множеството вредности на функцијата f е подмножество од дефиниционата област на функцијата g, односно ако важи условот $R_f \subset D_g$.

3.6.2. Примери.

1) Нека $f(x)=x^3$, за секое $x \in \mathbf{R}$, и $g(x)=\sqrt[3]{x}$, за секое $x \in \mathbf{R}$. Имаме дека

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3} = x, \text{ и}$$

$$f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) = \left(g(x)\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

Забележуваме дека $g \circ f = f \circ g.$

2) Нека $f(x)=x^2+1$, за секое $x \in \mathbf{R}$, и $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, за секое $x \in \mathbf{R}$.

Забележуваме дека $D_f = R_f = \mathbf{R}$ и $D_g = \mathbf{R}$. За композициите имаме

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(f(x))^2+1} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2+1}, \text{ и}$$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=(g(x))^2+1=\frac{1}{(x^2+1)^2}+1.$$

Со непосредна проверка може да се закучи дека добиените композиции се различни. Имено, имаме дека $g\circ f(1)=\frac{1}{\left(1^2+1\right)^2+1}=\frac{1}{5}$, додека

$$f\circ g(1)=\frac{1}{(1^2+1)^2}+1=\frac{5}{4}.$$

3) Нека $f(x)=x+1$, за секое $x\in\mathbf{R}$, и $g(x)=\sqrt{x}$, за секое $x\in[0,+\infty)$. Забележуваме дека $D_f=R_f=\mathbf{R}$ и $D_g=\mathbf{R}^+\cup\{0\}$. Имаме дека

$$f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=g(x)+1=\sqrt{x}+1.$$

Композицијата $g\circ f$ не е определена бидејќи множеството вредности на функцијата f не е подмножество од дефиниционата област на функцијата g, односно не важи условот $R_f\subset D_g$. ●

Аналогно, може да дефинираме композиција на конечно многу функции под определени услови. Нека се дадени функциите $f_i:E_i\to E_{i+1}$, $i=1,2,\cdots n$. Функцијата $f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots f_2\circ f_1:E_1\to E_{n+1}$ зададена со:

$$\left(f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots f_2\circ f_1\right)(x)\overset{\text{деф.}}{=}f_n\left(f_{n-1}\left(\cdots\left(f_2\left(\left(f_1(x)\right)\right)\right)\right)\right),\quad x\in E_1$$

се нарекува *сложена функција* или *композиција на дадените функции* $f_n,f_{n-1},\dots f_2,f_1$.

Да забележиме дека E_i е домен и E_{i+1} е кодомен на композицијата на функциите $f_n,f_{n-1},\dots f_2,f_1$. И во овој случај сложената функција $f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots f_2\circ f_1$ е определена само ако множеството вредности на функцијата f_i е подмножество од дефиниционата област на функцијата f_{i+1}, за секое $i=1,2,\ldots,n-1$, односно ако важи $R_{f_i} \subset D_{f_{i+1}}$, за секое $i=1,2,\ldots,n-1$.

3.6.3. Примери.

1) Нека се дадени функциите $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ и $h(x)=x^3$, дефинирани на интервалот $(0,+\infty)$. За композицијата имаме

$$f\circ g\circ h(x)=f\left(g\left(h(x)\right)\right)=f\left(g\left(x^3\right)\right)=f\left(\frac{1}{x^3}\right)=\sqrt{\frac{1}{x^3}}=\frac{\sqrt{x}}{x^2},\quad x\in\left(0,+\infty\right).\ \bullet$$

Понекогаш е потребно дадена функција да се претстави како композиција од две или повеќе функции, односно да се направи *декомпозиција* на две или повеќе функции.

3.6.3. Примери.

1) Нека е дадена фукцијата $h(x)=(x+1)^2$. За да ја најдеме вредноста на функцијата $h(x)$ за секој реален број x, прво треба да ја најдеме вредноста $x+1$ и потоа да го квадрираме резултатот. Овие две операции може да се извршат со функциите $g(x)=x+1$ и $f(x)=x^2$, определени на множеството реални броеви. Можеме да запишеме

$$h(x)=(x+1)^2=f(x+1)=f(g(x)),\ \text{за секое}\ x\in\mathbf{R}$$

односно да ја изразиме функцијата h преку композицијата $h=f\circ g$. ●

3.7. Инверзни функции

3.7.1. Дефиниција. Нека функцијата $f:E\to F$ е инјекција. Тогаш за секој елемент од множеството вредности на функцијата $y\in R_f$ постои единствен елемент $x \in E$ таков што $f(x) = y$. Дефинираме функција $f^{-1}: R_f \to D_f$ така што на елементот y му го придружуваме единствениот елемент $x \in D_f = E$ кој што со f се пресликува во y, односно $x = f^{-1}(y)$. Вака дефинираната функција $f^{-1}: R_f \to D_f = E$ се вика *инверзна* на функцијата f.

Да забележиме дека непосредно од дефиницијата следува дека важат условите $D_{f^{-1}} = R_f$ и $R_{f^{-1}} = D_f$, односно доменот на функцијата f^{-1} е кодоменот на функцијата f и кодоменот на фукцијата f^{-1} е доменот на функцијата f.

Исто така, за секое $x \in D_f$ важи $f^{-1} \circ f(x) = x$, како и за секое $y \in R_f$ важи $f \circ f^{-1}(y) = y$.

3.7.2. Примери.

1) Инверзна функција на функцијата $f(x) = x^3$, за секое $x \in \mathbf{R}$, е функцијата $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, за секое $x \in \mathbf{R}$. Навистина, имаме дека

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3} = x, \text{ и}$$

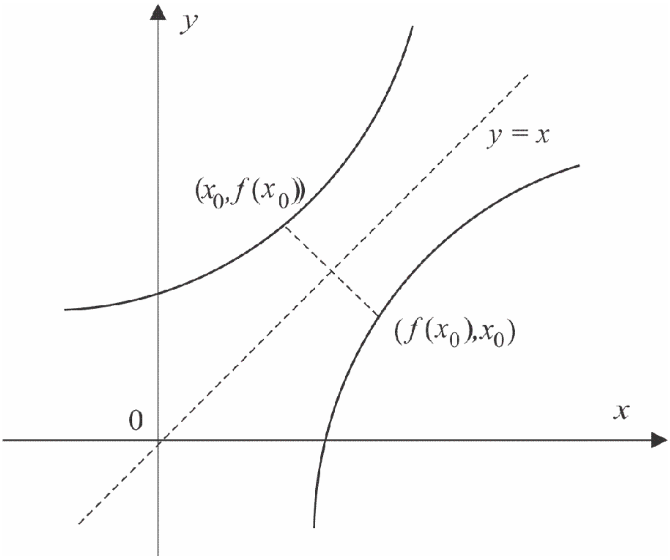
$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = (f^{-1}(y))^3 = (\sqrt[3]{y})^3 = y. \bullet$$

Непосредно од дефиницијата за инверзна функција можеме да заклучиме дека графикот на функцијата f^{-1} е множеството

$$G_{f^{-1}} = \{(f(x), x) : x \in E = D_f\}.$$

Ќе покажеме дека графиците G_f и $G_{f^{-1}}$ се симетрични во однос на правата $y = x$. Нека $(x_0, f(x_0)) \in G_f$, тогаш $(f(x_0), x_0) \in G_{f^{-1}}$. Правата која минува низ точките $\left(x_0, f(x_0)\right)$ и $\left(f(x_0), x_0\right)$ е зададена со равенката $y - x_0 = \dfrac{x_0 - f(x_0)}{f(x_0) - x_0}\left(x - f(x_0)\right)$, односно

$$y = -x + (f(x_0) + x_0) \tag{1}$$



Слика 9.

Исто така, правата која е нормална на (1) и минува низ точката

$\left(\dfrac{f(x_0) + x_0}{2}, \dfrac{x_0 + f(x_0)}{2}\right)$ е $y = x$. (слика 9.)

Во понатамошното излагање често ќе ја користиме следната теорема:

3.7.3. Теорема. Нека функцијата $f : E \to F$ е строго монотона на множеството E. Тогаш f има инверзна функција f^{-1}, и притоа ако

- f строго расте на E, тогаш и f^{-1} строго расте на R_f,
- f строго опаѓа на E, тогаш и f^{-1} строго опаѓа на R_f.

Доказ. Ќе претпоставиме прво дека функцијата f строго расте на E, односно ако $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in E$, тогаш $f(x_1) < f(x_2)$. Значи функцијата f е инјекција, па постои f^{-1}. Ќе покажеме сега дека f^{-1} строго монотоно расте на R_f, односно ако $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in R_f$, тогаш важи условот $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

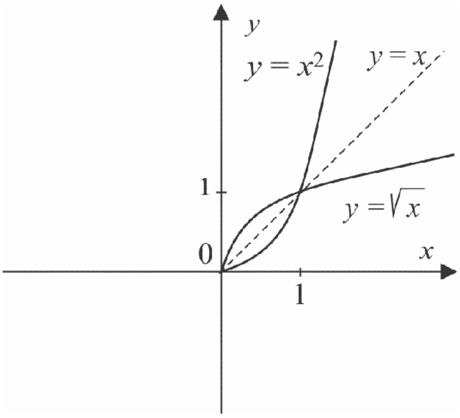
Ако претпоставиме дека е точно спротивното, односно дека важи условот $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, тогаш, бидејќи функцијата f строго монотоно расте, би имале дека и $y_1 = f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) = y_2$, што е во спротивност на претпоставката дека $y_1 < y_2$. Значи, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Аналогно се докажува ако функцијата е строго монотоно опаѓачка. ■

3.7.4. Примери.

1) Нека $f(x) = x^2$, за секое $x \in [0, \propto)$. Функцијата строго монотоно расте на множеството $[0, \propto)$ и $R_f = [0, \propto)$. Според теоремата 3.7.3., заклучуваме дека f има инверзна функција која што ја наоѓаме така што равенката $y = x^2$ ја решаваме по x, односно $x = \sqrt{y}$, и потоа со замена на улогата на x и y, добиваме дека инверзната функција на дадената е $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Таа строго монотоно расте на $R_f = [0, \propto)$. Графикот на инверзната функција е прикажан на слика 10. ●

2) Нека $f(x) = \sqrt{x}$, за секое $x \in [0, \propto)$. Функцијата строго монотоно расте на множеството $[0, \propto)$ и $R_f = [0, \propto)$. Според теоремата 3.7.3.



Слика 10.

наоѓаме дека f има инверзна функција $f^{-1}(x) = x^2$ која строго монотоно расте на $R_f = [0, \infty)$. Графикот на инверзната функција е прикажан на слика 10.

3) Множеството на вредности R_f на функцијата $f(x) = \dfrac{1}{1-2^{-x}}$ може да го најдеме со помош на нејзината инверзна функција. Бидејќи имаме дека $R_f = D_{f^{-1}}$, множеството на вредности може да го определиме ако го најдеме дефиниционата област на инверзната функција на $f(x)$. Дадената функција е дефинирана на $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и има инверзна функција заради теоремата 3.7.3. Ако равенката $y = \dfrac{1}{1-2^{-x}}$ ја решиме по x добиваме дека $x = \log_2\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$, па инверзната функција е определена со $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. Бидејќи $D_{f^{-1}} = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \dfrac{x}{x-1} > 0\right\}$ следува $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, од каде што имаме дека $R_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. ●

3.8. Парни и непарни функции

3.8.1. Дефиниција. Велиме дека функцијата $f: E \to F$ е *парна* ако:

1. $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ и

2. $f(-x) = f(x),$ за секое $x \in D_f$

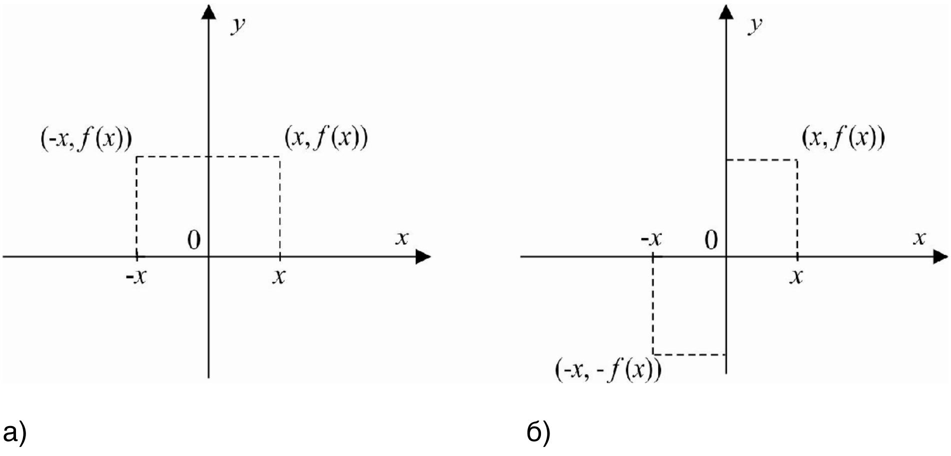
Да забележиме дека графикот на парна функција е симетричен во однос на y-оската. Навистина, ако f е парна функција, тогаш за секое $x \in D_f$ точките $\left(x, f(x)\right)$ и $\left(-x, f(x)\right)$ кои се симетрични во однос на y-оската, истовремено припаѓаат на графикот на функцијата (слика 11а.).

3.8.2. Дефиниција. Велиме дека функцијата $f: E \to F$ е *непарна* ако:

1. $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ и

2. $f(-x) = -f(x),$ за секое $x \in D_f$

Графикот на непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток. Навистина, ако f е непарна функција, тогаш за секое



а) б)

Слика 11.

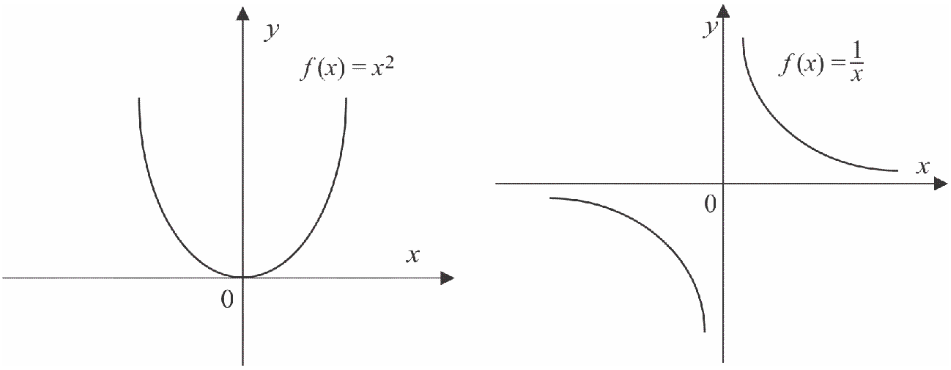
$x \in D_f$ точките $(x, f(x))$ и $(-x, -f(x))$ кои се симетрични во однос на координатниот почеток, истовремено припаѓаат на графикот на функцијата (слика 11б.).

Својството 1. од двете горни дефиниции значи дека дефиниционата област на функцијата f е *симетрично множество* (во однос на y-оската, односно во однос на координатниот почеток). Од досега кажаното следува дека ако функцијата е парна (непарна), доволно е да го нацртаме нејзиниот график само за позитивните вредности на x, а за негативните вредности на x да ја користиме симетричноста на графикот во однос на y-оската (во однос на координатниот почеток).

3.8.3. Примери.

1) Функцијата $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbf{R}$ (слика 12а.) е парна. Навистина, имаме дека $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, за секое $x \in \mathbf{R}$.

2) Функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (слика 12б.) е непарна, бидејќи имаме $f(-x) = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$, за секое $x \in \mathbf{R}$.



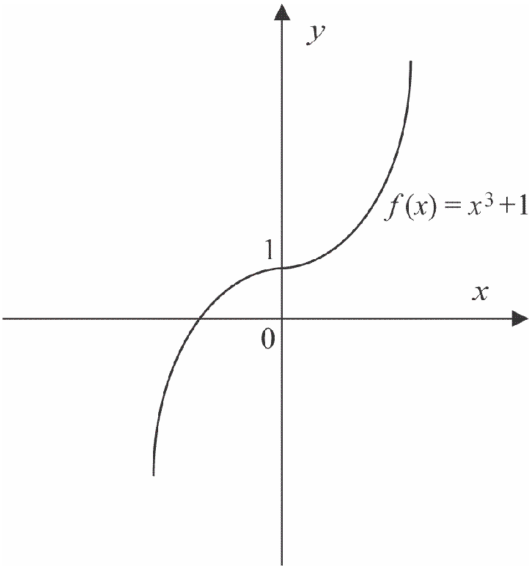
а) б)

Слика 12.

3) Да забележиме дека не е задолжително секоја функција да биде парна или непарна. Така, функцијата $f(x)=x^3+1$, $D_f=\mathbf{R}$ не е ниту парна ниту непарна (слика 13). ●

3.8.4. Теорема. 1. Збир на две парни (непарни) функции е парна (непарна) функција.

2. Производ (количник) на две функции со иста парност е парна функција, а производ (количник) на две функции со различна парност е непарна функција.



Слика 13.

Доказ. 1. Нека f и g се парни функции. Тогаш имаме дека

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$$

од каде што заклучувме дека $f+g$ е парна функција.

Нека f и g се непарни функции. Тогаш имаме дека

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f(x)+g(x))=-(f+g)(x)$$

од каде што заклучувме дека $f+g$ е непарна функција.

2. Нека f и g се парни функции. Тогаш имаме дека

$$\left(fg\right)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=\left(fg\right)(x) \text{ и}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

односно, производот и количникот се парни функции.

Нека f и g се непарни функции. Тогаш имаме дека

$$\left(fg\right)(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)(-g(x))=f(x)g(x)=\left(fg\right)(x) \text{ и}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}=\frac{-f(x)}{-g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

односно, производот и количникот се парни функции.

Сега, нека f е парна функција и нека g е непарна функција. Тогаш имаме дека

$$\left(fg\right)(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)(-g(x))=-f(x)g(x)=-\left(fg\right)(x) \text{ и}$$

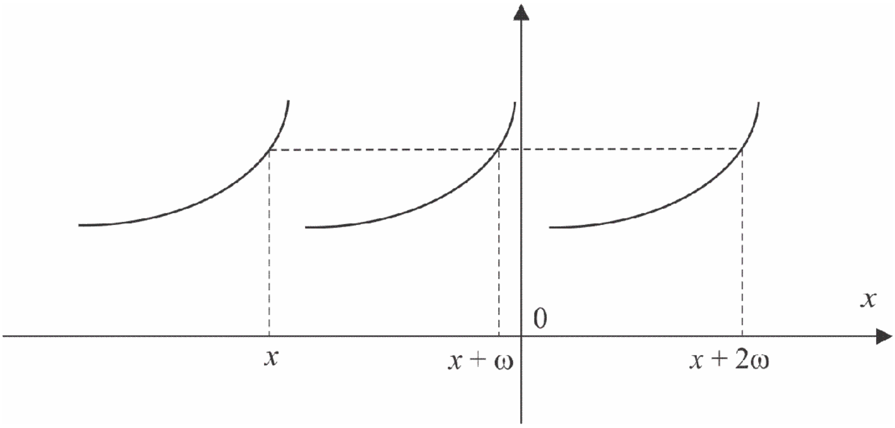
$$\left(\frac{f}{g}\right)(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}=\frac{f(x)}{-g(x)}=-\frac{f(x)}{g(x)}=-\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

односно, производот и количникот се непарни функции. ■

3.9. Периодични функции

3.9.1. Дефиниција. За функцијата $f:E\to F$ велиме дека е *периодична* ако постои реален број $\omega\neq 0$ таков, што за секое $x\in D_f$, важи $x+\omega\in D_f$ и $f\left(x+\omega\right)=f\left(x\right)$.

Најмалиот позитивен број (ако постои) ω со ова својство се вика *период* на функцијата.



Слика 14.

Непосредно од дефиницијата 3.9.1. следува дека ако f е периодична функција со период $\omega,$ тогаш точките $(x, f(x))$ и $(x+\omega, f(x))$ припаѓаат на графикот на функцијата. Оттука следува дека за да се нацрта графикот на периодична функција f на D_f, доволно е да се нацрта графикот на функцијата на интервалот $[0,\omega]$ и потоа истиот да се помести за ω единици во правец на x-оската (слика 14).

3.9.2. Примери.

1) Константната функција $f(x)=c,$ за секое $x\in D_f$ е периодична функција. Но, таа нема период.

2) Функцијата $f(x)=x-[x]$ е периодична функција со период $\omega=1.$ Навистина, имаме дека

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x)\,. \bullet$$

3.9.3. Теорема. Нека $f\,,g:E\to\mathbf{R}$ се периодични функции со периоди ω_1 и ω_2, соодветно. Тогаш важат следните тврдења:

1. $f(x+k\omega_1)=f(x),$ за секое $k\in\mathbf{Z}$;
2. функцијата $\lambda f+\mu g:E\to\mathbf{R}$ дефинирана со

   $(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda f(x)+\mu g(x)$

   е периодична со период НЗС(ω_1,ω_2);
3. ако $h(x)=ax+b$, $a\neq 0$, тогаш и функцијата $f\circ h$ е периодична со период $\dfrac{\omega_1}{a}$.

Доказ. 1. Доказот ќе го спроведеме со индукција.

За $n=1$ тврдењето важи бидејќи $f(x+\omega)=f(x)$ согласно дефиницијата 3.9.1.

Нека тврдењето е точно за $n=k$, односно $f(x+k\omega_1)=f(x)$.

Тогаш за $n=k+1$ имаме дека

$$f(x+(k+1)\omega_1)=f((x+k\omega_1)+\omega_1)=f(x+k\omega_1)=f(x),$$

од каде што според принципот на математичка индукција следува

$$f(x+n\omega_1)=f(x)\text{, за секој природен број } n. \tag{1}$$

Понатаму, од $f(x)=f((x-\omega_1)+\omega_1)=f(x-\omega_1)$ следува точност на тврдењето за $k=-1,$ и повторно според принципот на математичка следува дека

$$f(x-n\omega_1)=f(x)\text{, за секој природен број } n. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува дека $f(x+k\omega_1)=f(x),$ за секое $k\in\mathbf{Z}$.

2. Нека $\omega =$ НЗС(ω_1, ω_2) и нека $\omega = k_1\omega_1$ и $\omega = k_2\omega_2$. Тогаш имаме

$$(\lambda f + \mu g)(x+\omega) = \lambda f(x+\omega) + \mu g(x+\omega) =$$

$$= \lambda f(x + k_1\omega_1) + \mu g(x + k_2\omega_2) =$$

$$= \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$

Јасно е дека ω е најмал со таа особина.

3. Имаме дека

$$f \circ h\left(x + \frac{\omega}{a}\right) = f\left(a\left(x + \frac{\omega}{a}\right) + b\right) = f(ax + b + \omega) =$$

$$= f(ax + b + k_1\omega_1) = f(ax + b) = f \circ h(x). \blacksquare$$

3.10. Нули на функција

3.10.1. Дефиниција. *Нули на функција* $f : E \to F$ се елементите на множеството $N_f = \{x \in E : (x,0) \in G_f\}$.

Од дефиницијата непосредно следува дека графикот на функцијата ја сече $x-$оската во точките чии што апсциси се нулите на функцијата f. Да проследиме неколку примери.

3.10.2. Примери.

1) Да ги определиме нулите на функцијата $f(x) = x^2 + x - 2$. Функцијата е дефинирана на множеството реални броеви и има нули за оние вредности на x, за кои што важи $x^2 + x - 2 = 0$. Според тоа, нулите на функцијата се корените на квадратната равенка $x^2 + x - 2 = 0$, односно $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.

2) Да ги определиме пресечните точки на графикот на функцијата определена со $f(x)=x^3-x$ со $x-$оската. Од равенката $x^3-x=0$, која што е еквивалентна со равенката $x(x^2-1)=0$ ги определуваме нулите на функцијата $x_1=-1$, $x_2=0$ и $x_3=1$, од каде што заклучуваме дека пресечни точки на графикот на функцијата со $x-$оската се $(-1,0)$, $(0,0)$ и $(1,0)$. ●

3.11. Основни елементарни функции

Функциите:

- Константната функција $f(x)=c$, $c-$константа;
- Степенската функција $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$;
- Експоненцијалната функција $f(x)=a^x, a>0$;
- Логаритамската функција $f(x)=\log_a x,\ \ a>0, a\neq 1$;
- Тригонометриските функции

  $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=tgx$, $f(x)=ctgx$; и
- Инверзните на тригонометриските функции

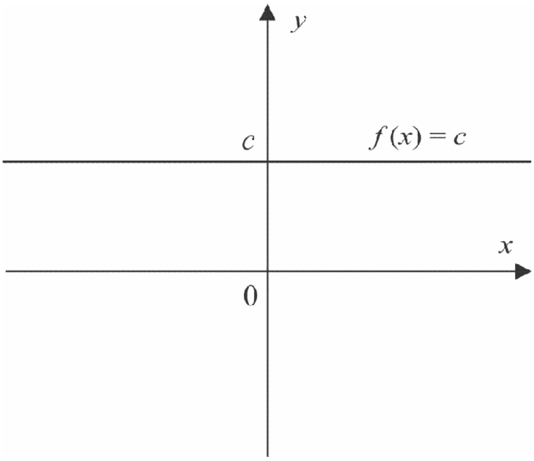
  $f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=arctgx$, $f(x)=arcctgx$

ги викаме *основни елементарни функции*.

Функција што се добива од основните елементарни функции со конечен број аритметички операции и композиции се нарекува *елементарна функција.* Во ова поглавје ќе се задржиме на некои основни елементарни функции.

3.11.1. Константна функција

3.11.1.1. Дефиниција. Функцијата $f(x)=c,\ x\in\mathbf{R}$ каде што $c\in\mathbf{R}$ е константа се вика *константна функција*.



Слика 15.

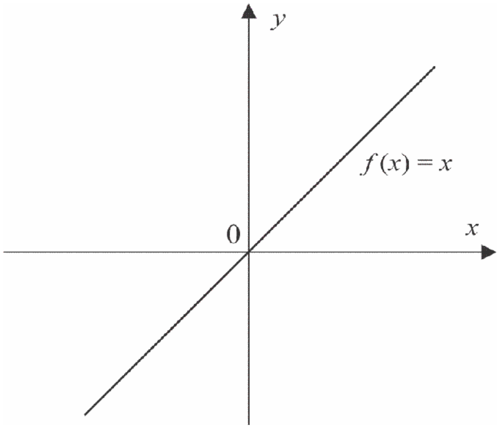
Дефиниционата област на оваа функција е множеството реални броеви $\mathbf{R}$, додека сликата е едноелементното множество $\{c\}$. Функцијата е парна и ограничена. Исто така, таа е периодична, Имено, за секое $\omega\in\mathbf{R}$, важи дека $f(x+\omega)=f(x)=c$. Но, оваа функција нема период, бидејќи не постои најмал позитивен број ω со тоа својство. Графикот на оваа функција е права паралелна со $x-$оската и минува низ точката $(0,c)$ (слика 15.).

3.11.1. Степенска функција

3.11.2.1. Дефиниција. Функцијата $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $x>0$ се нарекува *степенска функција*.

Ние ќе се задржиме на неколку случаи:

1) $f(x)=x$

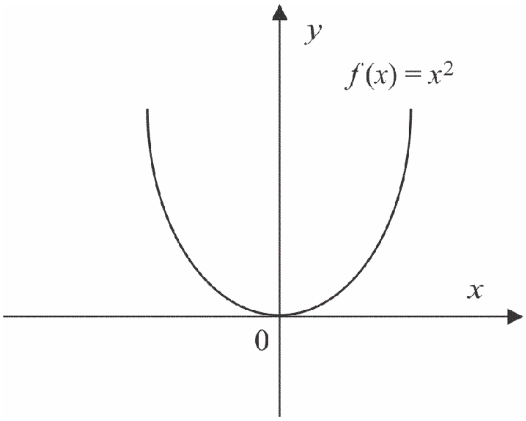


Слика 16.

Дефиниционата област и сликата на оваа функција е множеството $\mathbf{R}$. Функцијата е непарна, неограничена и строго монотоно растечка на целата дефинициона област. Графикот на оваа функција е *права* што минува низ координатниот почеток (слика 16.).

2) $f(x)=x^2$

Дефиниционата област на оваа функција е множеството $\mathbf{R}$, додека сликата е множеството ненегативни реални броеви. Функцијата е парна, па затоа нејзиниот график е симетричен во однос на $y-$ оската.



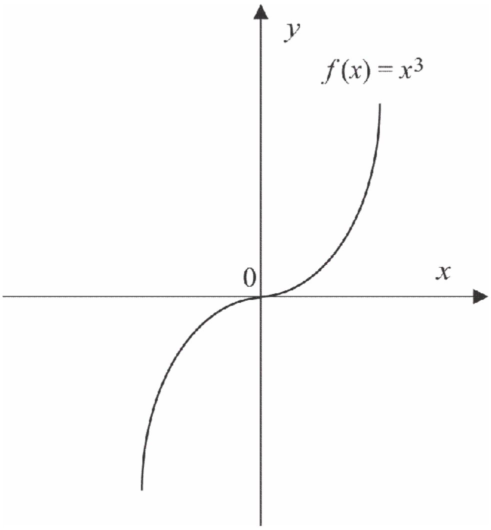
Слика 17.

Функцијата строго монотоно опаѓа на интервалот $\left(-\infty,0\right)$, и строго монотоно расте на интервалот $\left(0,\infty\right)$. Навистина, за $x_1, x_2 \in \left(-\infty,0\right)$ и нека $x_1 < x_2$, имаме дека $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_2+x_1)>0$, функцијата строго монотоно опаѓа. Ако $x_1,x_2 \in \left(0,\infty\right)$, и $x_1 < x_2$, тогаш $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_2+x_1)<0$, па функцијата строго монотоно расте. Во точката $x=0$ функцијата има локален минимум. Функцијата е ограничена од долу и неограничена од горе (слика 17.). Графикот на оваа функција се вика *парабола*.

3) $f(x)=x^3$

Дефиниционата област како и сликата на оваа функција е множеството $\mathbf{R}$. Функцијата е непарна, затоа нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

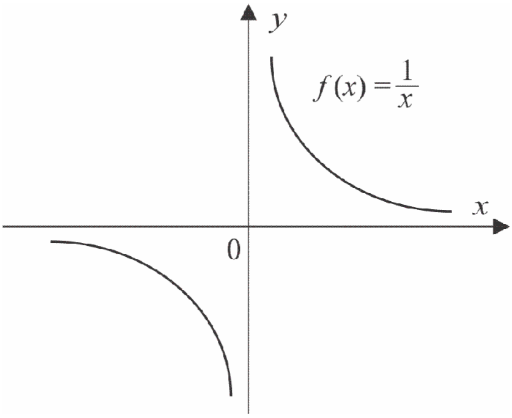
Таа е неограничена и од горе и од долу, строго монотоно расте на $\mathbf{R}$ и нема екстремни вредности. Графикот на функцијата $f(x)=x^3$ се нарекува *кубна парабола* (слика 18.) .



Слика 18.

4) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

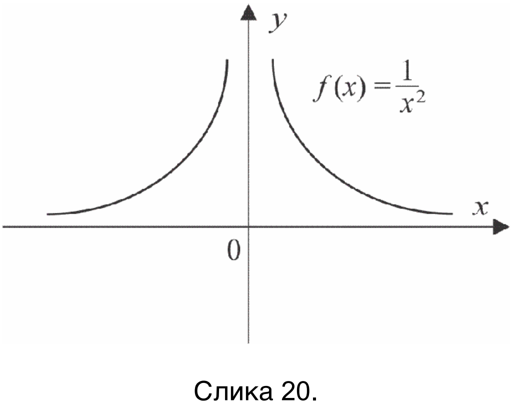
Дефиниционата област и сликата на оваа функција е множеството $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Функцијата е неограничена, непарна и нема екстремни вредности. Нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток. Графикот на функцијата се состои од два дела.



Слика 19.

Функцијата опаѓа на интервалот $(-\infty,0)$ и повторно опаѓа на $(0,\infty)$. Графикот на оваа функција се вика *хипербола* (слика 19).

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

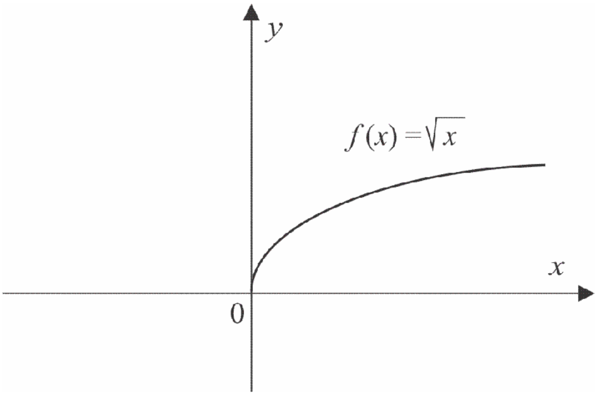


Слика 20.

Дефинициoната област и на оваа функција е множеството $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Сликата на функцијата е множеството $(0, \propto)$. Функцијата е неограничена од горе и ограничена од долу. Таа е парна и нема екстремни вредности. Монотоно расте на интервалот $(-\propto, 0)$ и монотоно опаѓа на интервалот $(0, \propto)$ (слика 20).

6) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

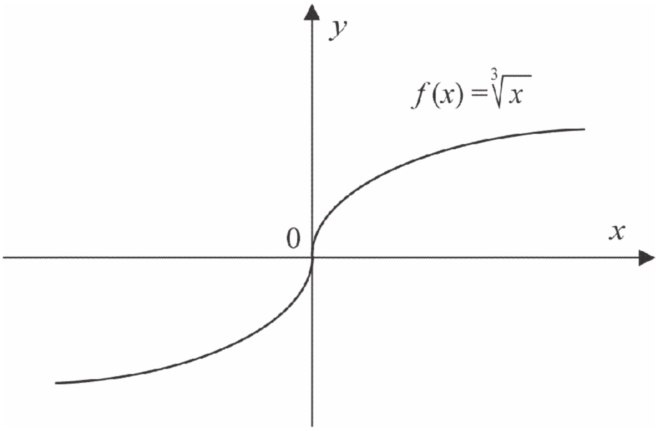
Дефинициoната област и сликата на оваа функција е множеството $[0, \propto)$. Таа е инверзна на функцијата $x \mapsto x^2$ на множеството $[0, \propto)$. Функцијата не е ограничена од горе, а е ограничена од долу. Таа е растечка на целата дефинициoната област. Графикот на функцијата $x \mapsto \sqrt{x}$ е даден на слика 21.



Слика 21.

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Дефинициoната област и сликата на оваа функција е множеството $\mathbf{R}$. Таа е неограничена и од долу и од горе, таа е непарна и нема екстремни вредности. Нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток (слика 22.). Функцијата монотоно расте на целата дефинициона област. Таа е инверзна на функцијата $x \mapsto x^3$ на $\mathbf{R}$.



Слика 22.

3.11.3. Експоненцијални и логаритамски функции

3.11.3.1. Дефиниција. Нека a е позитивен реален број. Функцијата определена со $f(x)=a^x$ се вика *општа експоненцијална функција* со основа a.

Во дефиницијата претпоставуваме дека $a>0$, бидејќи за $a<0$ таа не е дефинирана кога x се менува во множеството реални броеви. На пример, ако $a=-4$ и $x=\frac{1}{2}$, тогаш $a^x=\sqrt{-4}\notin \mathbf{R}$.

Општата експоненцијална функција е дефинирана на целото множество реални броеви $\mathbf{R}$, а нејзината слика е множеството $(0,\infty)$. Оваа функција ги има следните својства:

1. $a^x>0,\quad \forall x\in \mathbf{R}$;
2. $a^{x+y}=a^x a^y,\quad \forall x,y\in \mathbf{R}$;
3. $x<y\Rightarrow a^x<a^y$, ако $a>1$;

односно функцијата строго монотоно расте и

4. $x < y \Rightarrow a^x > a^y$, ако $0 < a < 1$;

односно функцијата строго монотоно опаѓа.

На слика 22. прикажани се графиците на функциите $f(x) = a^x$, кога $a > 1$, односно кога $0 < a < 1$.

Специјално, за $a = e \approx 2.71828182$, функцијата $f(x) = e^x$ се вика *експоненцијална функција*. Често, наместо e^x се користи ознаката $\exp x$. Бројот e подетално ќе го проучиме во поглавјето 4.

3.11.3.2. Дефиниција. Инверзната функција на општата експоненцијална функција $f(x) = a^x$ се вика *логаритамска функција* со основа a и се означува со $f^{-1}(y) = \log_a y$.

Да напоменеме дека, бидејќи општата експоненцијална функција е строго монотона (освен за $a = 1$), според теоремата 3.7.2., има инверзна функција.

Дефинициoната област на логаритамската функција е множеството $(0, \propto)$, додека сликата на функцијата е целото множество реални броеви $\mathbf{R}$. Функцијата $\log_a : (0, \propto) \to \mathbf{R}$ ги има следните својства:

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, за секои $x, y > 0$;

2. $x < y \Rightarrow \log_a(x) < \log_a(y)$, ако $a > 1$;

односно, функцијата е строго монотоно растечка за $a > 1$, и

3. $x < y \Rightarrow \log_a(x) > \log_a(y)$, ако $0 < a < 1$;

строго монотоно опаѓачка за $0 < a < 1$;

4. $\log_a(a) = 1$.

За $x \in (0, \propto)$, бројот $\log_a x$ се вика *логаритам* од x со основа a .

За произволно $a > 0$, $a \neq 1$ е точно $\log_a 1 = 0$. Навистина, од 1. имаме дека $\log_a(x) = \log_a(x \cdot 1) = \log_a(x) + \log_a(1)$, од каде што следува дека $\log_a 1 = 0$. Тоа значи дека графикот на секоја логаритамска функција минува низ точката (1,0).

3.11.3.3. Примери.

1) Ако $n \in \mathbf{N}$, имаме:

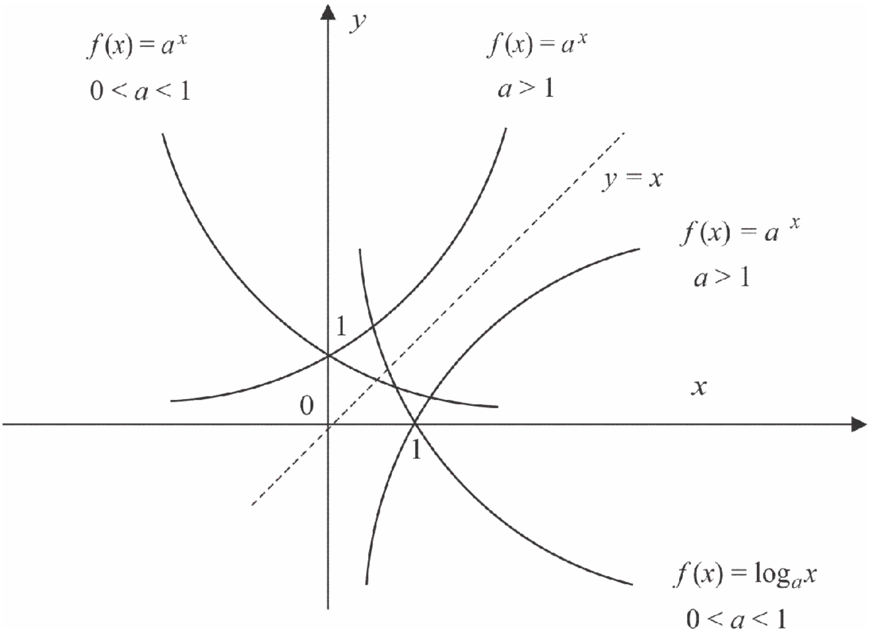
$$\log_a\left(a^n\right) = \log_a \underbrace{(a \cdots a)}_{n-\text{пати}} = n \log_a a = n\,. \bullet$$

Од посебен интерес се две логаритамски функции:

(i) Бригсов (или декаден) логаритам, што одговара на $a = 10$ и

(ii) природен логаритам, што одговара на основа $a = e \approx 2.71828182$.

Логаритамската функција $\log_{10}$ ќе ја означуваме со $\log$ (значи основа 10 се подразбира), додека $\log_e$ ќе ја означуваме со $\ln$.



Слика 23.

Графикот на логаритамската функција се добива врз основа на графикот на функцијата $y = a^x$, користејќи го фактот дека графиците на инверзни функции се симетрични во однос на правата $y = x$ (слика 23.).

Врската меѓу општата експоненцијална функција $x \mapsto a^x$ и експоненцијалната функција $x \mapsto e^x$ е дадена со:

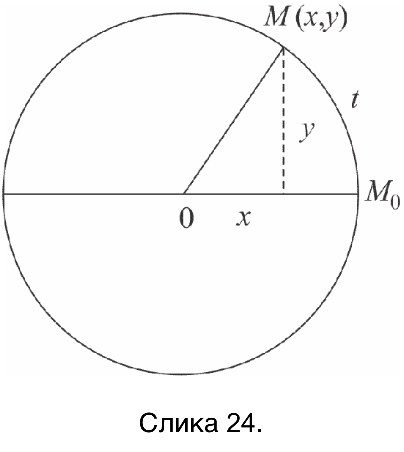
$$a^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a), \text{ за секое } x \in \mathbf{R}.$$

Врската меѓу логаритамската функција $x \mapsto \log_a x$ и логаритамската функција $x \mapsto \ln x$ е дадена со:

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x, \text{ за секое } x > 0.$$

3.11.4 Тригонометриски функции

Нека земеме Декартов координатен систем и кружница со центар во координатниот почеток и радиус единица. Нека точката $M_0(1,0)$ се движи по кружната линија во насока спротивна на насоката на движењето на стрелките на часовникот (слика 24).



Слика 24.

Кога изминала пат t, се нашла во точката $M(x, y)$. За $t = 0$, точката M е точката M_0, односно $x = 1,\ \ y = 0$.

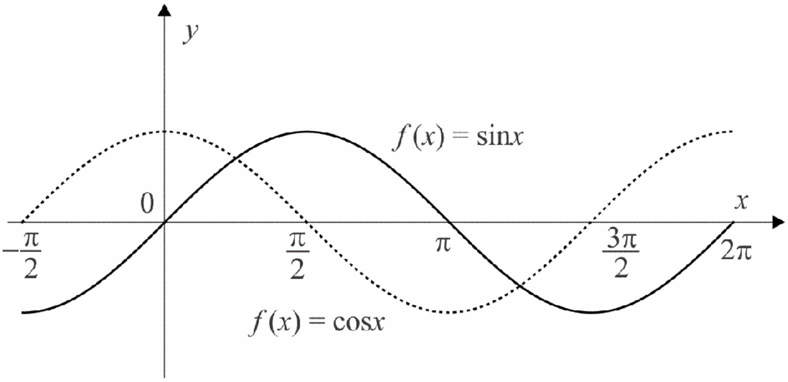
За $t = \frac{\pi}{2}$, точката M има координати $x = 0,\ y = 1$. Ако $t = \pi$, точката M има координати $x = -1,\ \ y = 0$ итн. Така, за изминат пат t и за изминат пат $t + 2\pi$ добиваме иста точка од кружницата.

Дефинираме функции $\sin : \mathbf{R} \to [-1{,}1]$ и $\cos : \mathbf{R} \to [-1{,}1]$ со:

$$\sin t = y \quad \text{и} \quad \cos t = x$$

Вака дефинираните функции се викаат *синусна* односно *косинусна* функција (слика 25.). Од дефиницијата непосредно следуваат својствата:

1. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; за секое $t \in \mathbf{R}$;
2. $-1 \le \sin t \le 1$, $-1 \le \cos t \le 1$, за секое $x \in \mathbf{R}$;
3. $\sin(-t) = -\sin t$, $\cos(-t) = \cos t$, за секое $x \in \mathbf{R}$;
4. $\sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, за секое $x \in \mathbf{R}$;
5. $\sin(t + \pi) = -\sin t$, $\cos(t + \pi) = -\cos t$, за секое $x \in \mathbf{R}$.



Слика 25.

Двете функции се дефинирани на целото множество реални броеви $\mathbf{R}$. Исто така, за сликите имаме $R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$.

Од својството 2. гледаме дека двете функции се ограничени. Синусната функција е непарна, додека косинусната е парна. (својство 3). Нули на функцијата $t \mapsto \sin t$ се точките од множеството $\{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, додека множеството нули на функцијата $t \mapsto \cos t$ е $\left\{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$.

И двете функции се периодични со период 2π. Графиците на овие функции се дадени на слика 25.

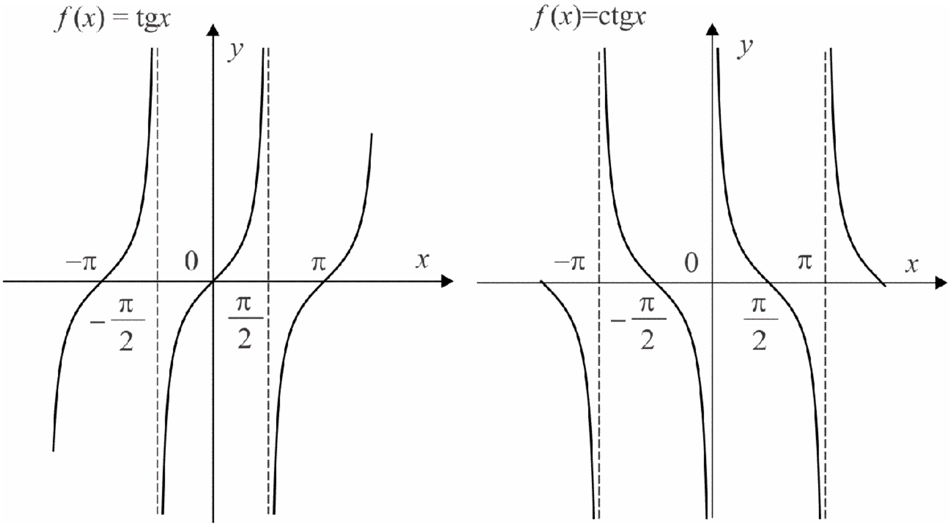
Со помош на синусната и косинусната функција ги дефинираме функциите:

$$tgt = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{и} \quad ctgt = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{tgt}$$

кои што ги викаме „тангенс од те“ односно „котангенс од те“.

Функцијата $f(t) = tgt$ е дефинирана на $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$. Множеството вредности $R_{tg} = \mathbf{R}$. Заради особината 5., $tg(t+\pi) = tgt$, добиваме дека $f(t) = tgt$ е периодична функција со период π. Исто така, имаме дека $tg(-t) = -tgt$, односно функцијата е непарна. За $k \in \mathbf{Z}$, на интервалот $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$ функцијата строго монотоно расте.

Слично, функцијата $f(t) = ctgt$ е дефинирана на $\mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$. Множеството вредности $R_{ctg} = \mathbf{R}$. Заради особината 5., $ctg(t+\pi) = ctgt$, добиваме дека и $f(t) = ctgt$ е периодична функција со период π. И оваа функција е непарна. За $k \in \mathbf{Z}$, на интервалот $(k\pi, (k+1)\pi)$ функцијата строго монотоно опаѓа. Графиците се дадени на слика 26.



Слика 26.

Функциите $\sin, \cos, tg, ctg$ се викаат *тригонометриски функции*.

3.11.5. Инверзни на тригонометриските функции

Поради својата периодичност, тригонометриските функции

$$f(x)=\sin x,\ \ f(x)=\cos x,\ \ f(x)=\text{tg}\, x \text{ и } f(x)=\text{ctg}\, x$$

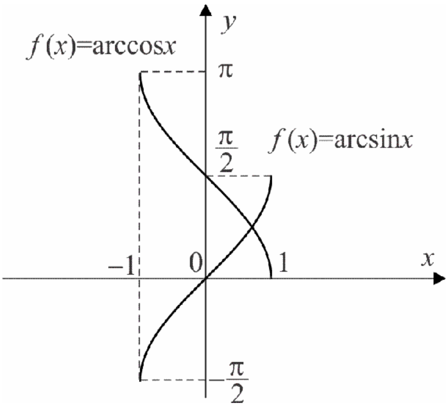
не се биективни, па кога се поставува прашањето за наоѓање на инверзни функции треба да се размислува за стеснување на нивната дефиниционата област.

1. Функцијата $f(x)=\sin x,$ за $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, е строго монотоно растечка, и $R_f=[-1,1]$. Според теоремата 3.7.2., постои инверзна функција $f^{-1}:[-1,1]\to x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ која се означува со $f^{-1}(x)=\arcsin x$. Функцијата $f(x)=\arcsin x$ е непарна и строго монотоно растечка на интерва-

лот $[-1,1]$. Нејзиниот график е симетричен со графикот на $f(x)=\sin x,$ за $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, во однос на правата $y=x.$

2. Функцијата $f(x)=\cos x,$ за $x\in[0,\pi]$ е строго монотоно опаѓачка, и $R_f=[-1,1]$. Според тоа, постои инверзна функција $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ која што е строго монотоно опаѓачка на интервалот $[-1,1]$ и се означува со $f^{-1}(x)=\arccos x$. Нејзиниот график е симетричен на графикот на функцијата $y=\cos x,$ за $0\le x\le\pi,$ во однос на правата $y=x.$

На слика 27. дадени се графиците на функциите $\arcsin x$ и $\arccos x$.



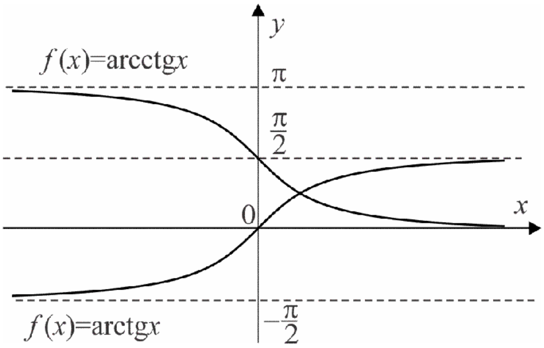
Слика 27.

3. Функцијата $f(x)=tgx,$ за $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ е строго монотоно растечка и $R_f=(-\infty,\infty)$. Според тоа, за оваа функција постои инверзна функција $f^{-1}:(-\infty,\infty)\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ која се означува со $f^{-1}(x)=arctgx$. Функцијата $arctgx$ е непарна и строго монотоно растечка на $(-\infty,\infty)$.

4. Функцијата $f(x)=ctgx,$ за $x\in[0,\pi]$ е строго монотоно опаѓачка, и

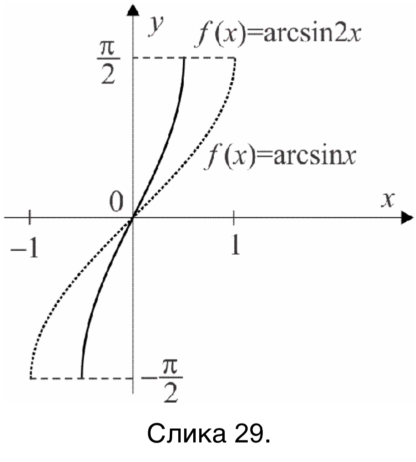
нејзиното множеството вредности $R_f = (-\infty,\infty)$. Според тоа, постои инверзна функција $f^{-1}:(-\infty,\infty)\to[0,\pi]$ која е строго монотоно опаѓачка на интервалот $(-\infty,\infty)$ и се означува со $f^{-1}(x)=\operatorname{arcc}\operatorname{tg}x$.

На слика 28. дадени се графиците на функциите $arctgx$ и $arcctgx$.



Слика 28.

3.11.5.1. Примери. 1) Да го нацртаме графикот на функцијата $f(x)=\arcsin 2x$. Дадената функцијата е дефинирана за $-1\le 2x\le 1,$ односно за $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2},$ а прима вредности во интервалот $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Графикот на функција е биде „постегнат“ во однос на графикот на функцијата $y=\arcsin x$ во правец на x- оската (слика 29.). ●

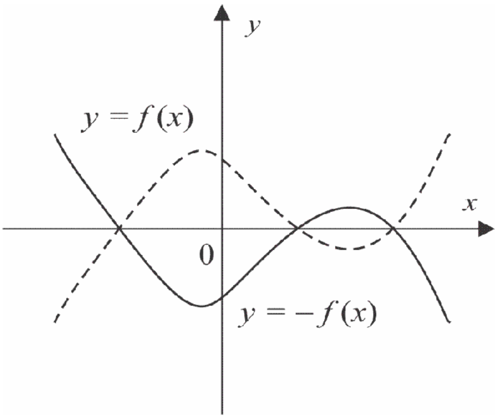


Слика 29.

3.12. Посредна конструкција на графици

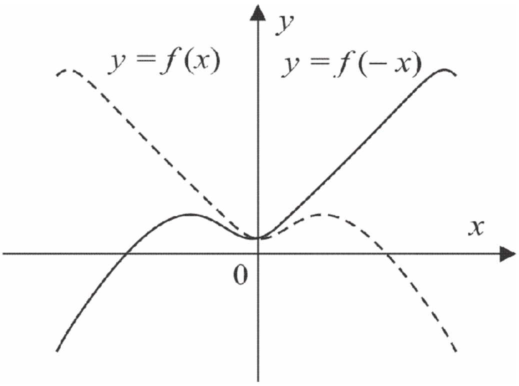
Методот за посредна (индиректна) конструкција на график на функција $y = f(x)$, се состои во изнаоѓање на врска на дадената функција и функција чијшто график ни е веќе познат. Ќе сметаме дека се познати графиците на елементарните функции $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$ и $y = arcctgx$.

1) Графикот на функцијата $y = -f(x)$, ако ни е познат графикот на функцијата $y = f(x)$, го добиваме ако го промениме знакот на втората координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Тоа значи конструкција на симетрична крива во однос на x – оската на познатата крива определена со функцијата $y = f(x)$ (слика 30).



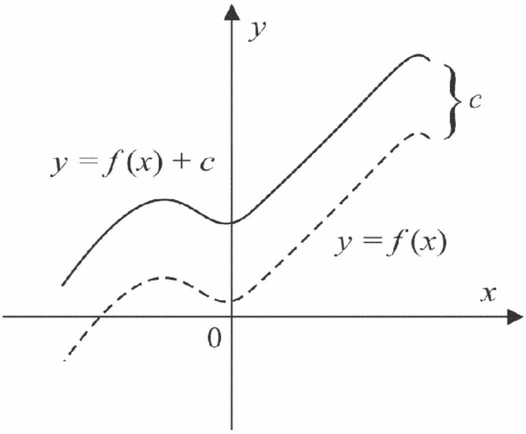
Слика 30.

2) Графикот на функцијата $y = f(-x)$, ако ни е познат графикот на функцијата $y = f(x)$, го добиваме ако го промениме знакот на првата координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Тоа значи



Слика 31.

конструкција на симетрична крива во однос на $y-$оската на позната крива определена со функцијата $y = f(x)$ (слика 31).

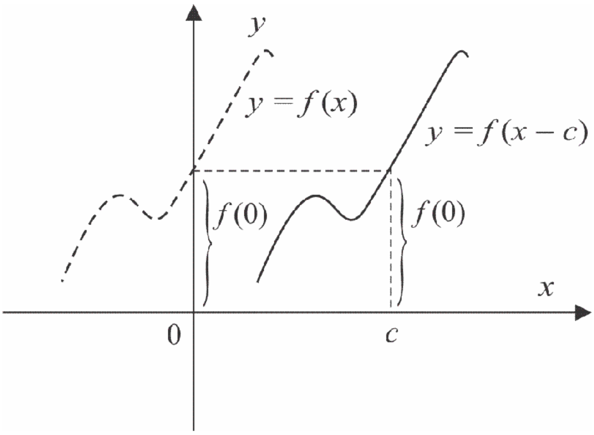


Слика 32.

3) Графикот на функцијата $y = f(x) + c, c \in \mathbf{R}$, ако ни е познат графикот на функцијата $y = f(x)$, го добиваме ако ја наголемиме за c втората координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Тоа значи конструкција на крива поместена за c во правец на $y-$оската на позната крива определена со функцијата $y = f(x)$. Притоа, ако $c > 0$ по-

местувањето е во позитивна насока на $y-$оската, а ако $c<0$ поместувањето е во негативната насока на $y-$оската (слика 32.).

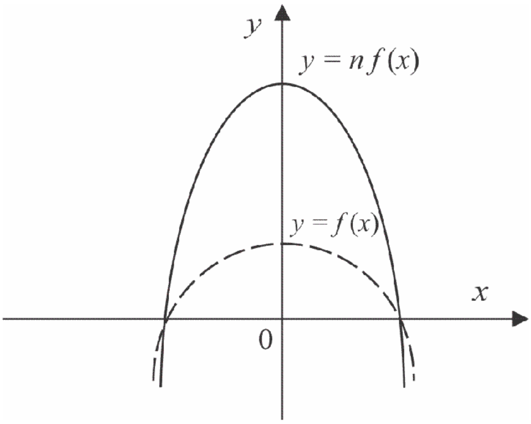
4) Графикот на функцијата $y=f(x+c), c\in \mathbf{R}$, ако ни е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, го добиваме ако ја наголемиме за c првата координата на графикот на функцијата $y=f(x)$. Тоа значи конструкција на крива поместена за c во правец на $x-$оската на познатa крива определена со функцијата $y=f(x)$. При тоа, ако $c>0$ поместувањето е во негативната насока на $x-$оската, а ако $c<0$ поместувањето е во позитивната насока на $x-$оската (слика 33.).



Слика 33.

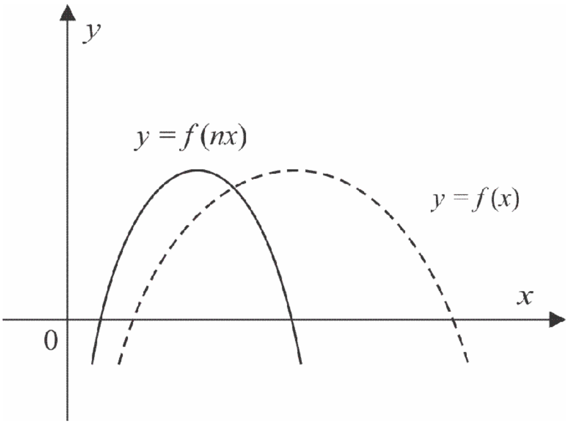
5) Графикот на функцијата $y=cf(x),\ \ c>0$, ако ни е познат графикот на функцијата $y=f(x)$, го добиваме ако ја помножиме со c втората

координата на графикот на функцијата $y=f(x)$. Тоа значи „растегнување“ или „стегање“ на познатата крива определена со функцијата $y=f(x)$ во правец на $y-$оската во зависност дали $c>1$ или $0<c<1$. Притоа, да напоменеме дека нулите на двете функции се еднакви (слика 34.).



Слика 34.

6) Графикот на функцијата $y = f(cx),\ \ c > 0$, ако ни е познат графикот на функцијата $y = f(x)$, го добиваме ако ја помножиме со c првата координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Тоа значи „растегнување“ или „стегање“ на познатата крива определена со функцијата $y = f(x)$ во правец на $x-$оската во зависност дали имаме дека $c > 1$ или $0 < c < 1$ (слика 35.)



Слика 35.

7) Графикот на функцијата $y = f(x) + g(x)$, ако ни се познати графиците на функциите $y = f(x)$ и $y = g(x)$, го добиваме ако ги собереме вторите компоненти на графиците на функциите $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

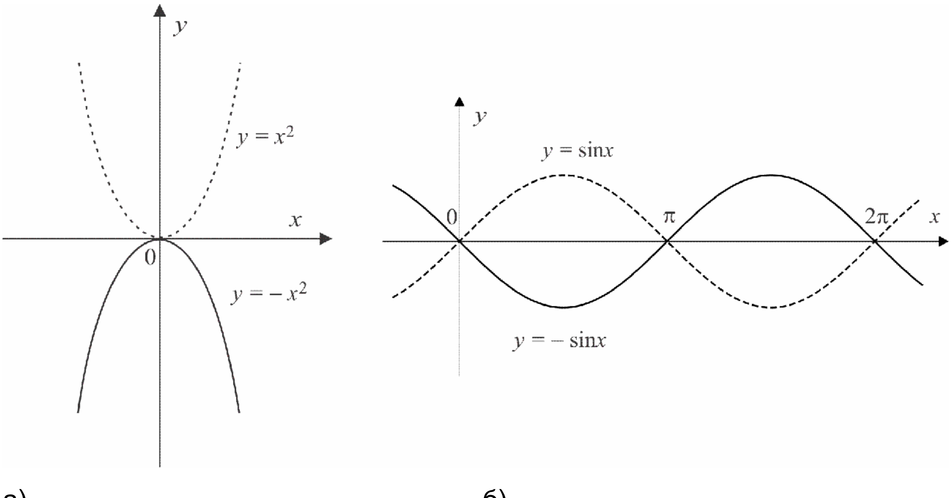
3.12.1. Примери.

1) Да ги скицираме графиците на следните функции:

а) $y = -x^2$ б) $y = -\sin x$

а) Графикот на функцијата $y = -x^2$ го добиваме со конструкција на симетрична крива во однос на $x-$оската на кривата определена со функцијата $y = x^2$ (слика 36а.).

б) Слично, графикот на функцијата $y = -\sin x$ го добиваме со конструкција на симетрична крива во однос на $x-$оската на кривата определена со функцијата $y = \sin x$ (слика 36б.).

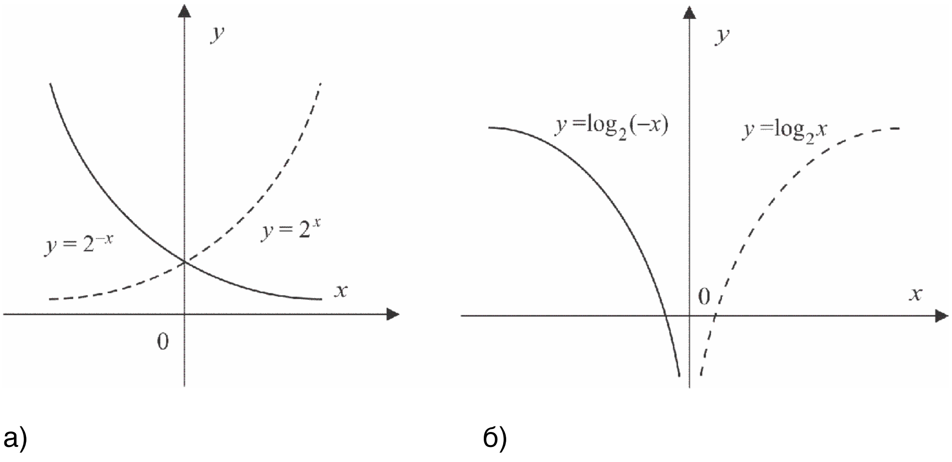


а) б)

Слика 36.

2) Да ги скицираме графиците на следните функции:

а) $y = 2^{-x}$ б) $y = \log_2(-x)$



Слика 37.

а) Графикот на функцијата $y = 2^{-x}$ го добиваме со конструкција на симетрична крива во однос на y – оската на кривата определена со функцијата $y = 2^x$ (слика 37а.).

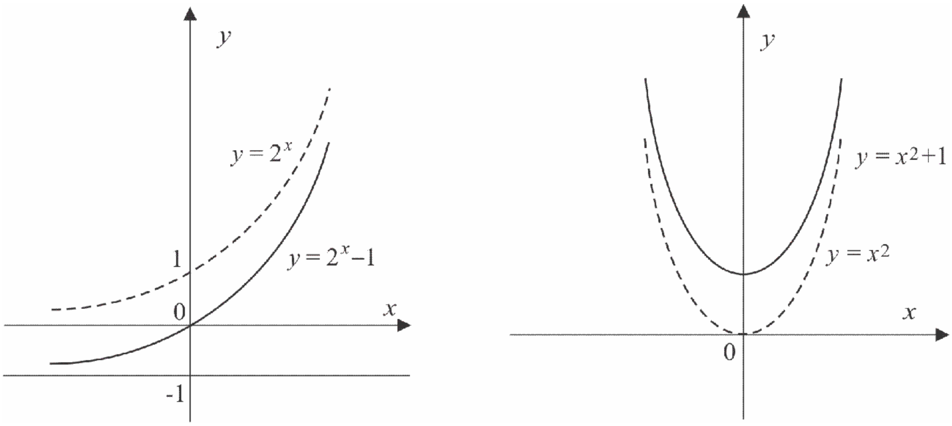
б) Слично, графикот на функцијата $y = \log_2(-x)$ го добиваме со конструкција на симетрична крива во однос на y – оската на кривата определена со функцијата $y = \log_2 x$ (слика 37б.).

3) Да ги скицираме графиците на следните функции:

а) $y = 2^x - 1$ б) $y = x^2 + 1$

а) Графикот на функцијата $y = 2^x - 1$ го добиваме со конструкција на кривата определена со функцијата $y = 2^x$ поместена за 1 единица во негативната насока на y – оската на (слика 38а.).

б) Слично, графикот на функцијата $y = x^2 + 1$ го добиваме со конструкција на кривата определена со функцијата $y = x^2$ поместена за 1 единица во позитивната насока на y – оската на (слика 38б.).



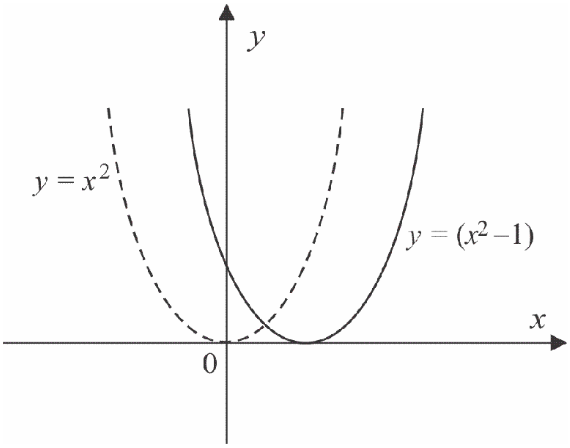
а) б)

Слика 38.

4) Да ги скицираме графиците на следните функции:

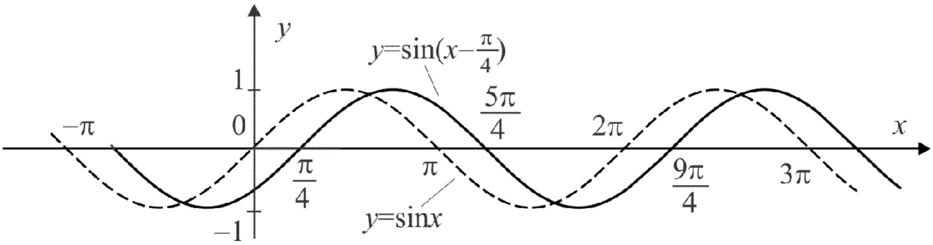
а) $y=(x-1)^2$ б) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

а) Графикот на функцијата $y=(x-1)^2$ го добиваме со конструкција на кривата определена со функцијата $y=x^2$, поместена за 1 единица во позитивната насока на $x-$оската (слика 39.).



Слика 39.

б) Графикот на функцијата $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ го добиваме со конструкција на кривата определена со функцијата $y=\sin x$, поместена за $\frac{\pi}{4}$ во позитивната насока на $x-$оската (слика 40.).



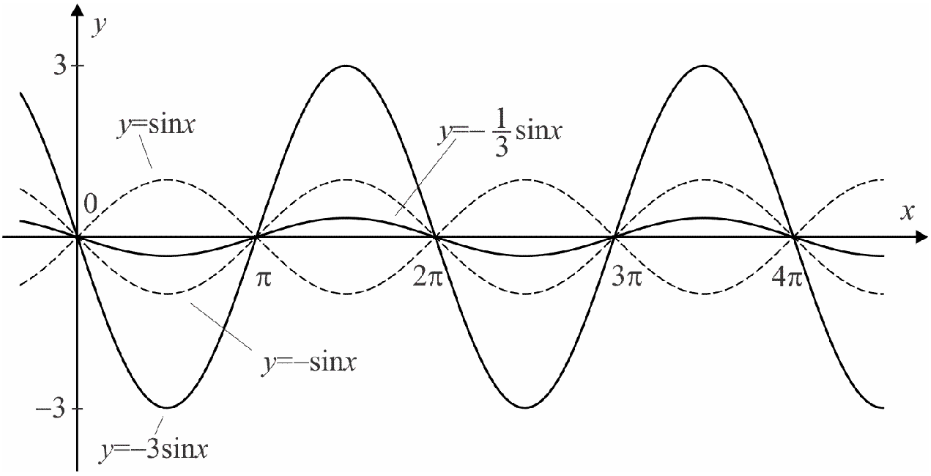
Слика 40.

5) Да ги скицираме графиците на следните функции:

а) $y=-3\sin x$ б) $y=-\frac{1}{3}\sin x$

а) Графикот на функцијата $y=-3\sin x$ го добиваме ако ја помножиме со 3 втората координата на графикот на функцијата $y=\sin x$. Тоа значи „растстегање“ на кривата $y=\sin x$ во правец на $y-$оската, а потоа цртање на симетрична крива во однос на $x-$оската. Притоа, нулите на двете функции се еднакви (слика 41.).

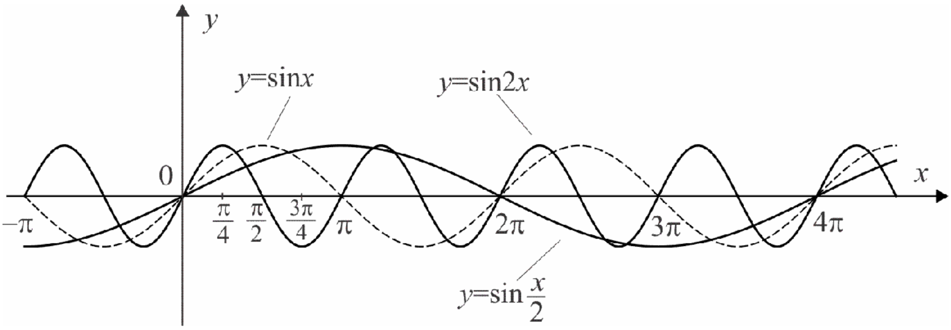
б) Графикот на функцијата $y=-\frac{1}{3}\sin x$ го добиваме ако ја помножиме со $\frac{1}{3}$ втората координата на графикот на функцијата $y=\sin x$. Тоа значи „стегање“ на кривата определена со на функцијата $y=\sin x$ во правец на $y-$оската, а потоа цртање на симетрична крива во однос на $x-$оската. Притоа, нулите на двете функции се еднакви (слика 41.).



Слика 41.

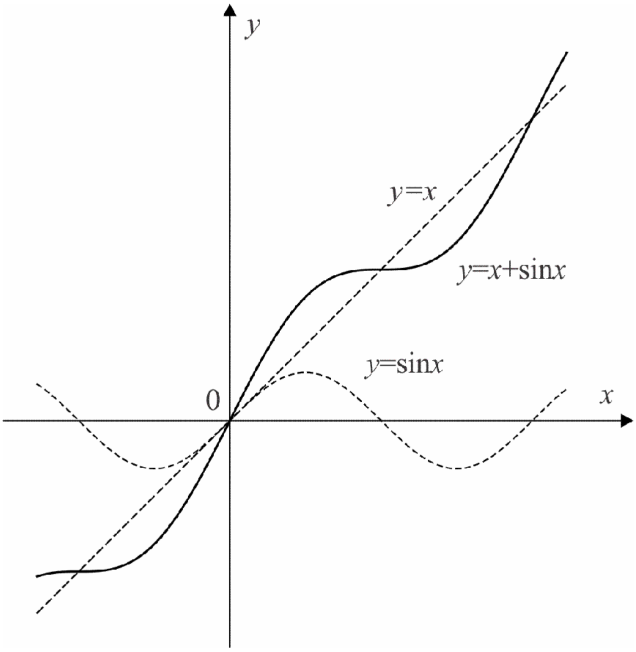
6) Да ги скицираме графиците на следните функции:

а) $y=\sin 2x$ б) $y=\sin\frac{x}{2}$



Слика 42.

а) Графикот на функцијата $y=\sin 2x$ го добиваме ако ја помножиме со 2 првата координата на графикот на функцијата $y=\sin x$. Тоа значи „растегнување“ на познатата крива определена со функцијата $y=\sin x$ во правец на x – оската (слика 42.)



Слика 43.

б) Слично, графикот на функцијата $y=\sin\frac{x}{2}$ го добиваме ако ја помножиме со $\frac{1}{2}$ првата координата на графикот на функцијата $y=\sin x$. Тоа значи „стегање“ на познатата крива определена со функцијата $y=\sin x$ во правец на $x-$оската (слика 42.)

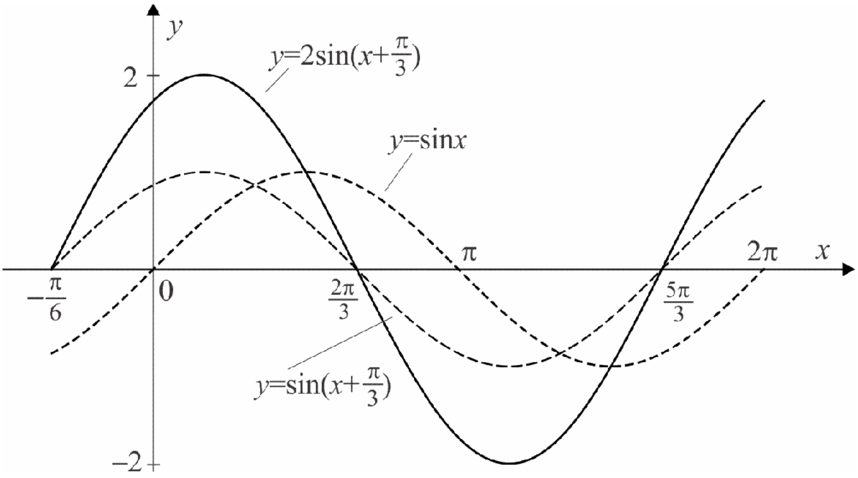
7) Графикот на функцијата $y=x+\sin x$ го добиваме ако ги собереме вторите компоненти на графиците на функциите $y=x$ и $y=\sin x$ (слика 43.).

За скицирање не график на дадена функција, понекогаш е потребна повеќекратна примена на погорните правила.

3.12.2. Примери.

1) Да го скицираме графикот на функцијата $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Најнапред го скицираме графикот на функцијата $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, со конструкција на кривата определена со функцијата $y = \sin x$, поместена за $\frac{\pi}{3}$ во негативната насока на $x-$оската (слика 44.). Потоа, бараниот график на функција $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ го добиваме ако ја помножиме со 2 втората координата на графикот на добиената функција $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Тоа значи „растегнување“ на кривата определена со на функцијата $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ во правец на $y-$оската (слика 44.).



Слика 44.

3.13. Задачи за вежбање

1. Дали се еднакви функциите $f: E \to F$ и $g: G \to H$ ако

1) $f(x)=\dfrac{x}{3x},\quad E=F=\mathbf{R}\setminus\{0\},\qquad g(x)=\dfrac{1}{3},\quad G=H=\mathbf{R}$.

2) $f(x)=\dfrac{x}{3x},\quad E=F=\mathbf{R}\setminus\{0\},\qquad g(x)=\dfrac{1}{3},\quad G=H=\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

3) $f(x)=\dfrac{x}{3x},\quad E=F=\mathbf{R}\setminus\{0\},\qquad g(x)=\dfrac{1}{3},\quad G=\mathbf{R}\setminus\{0\},\quad H=\mathbf{R}$.

4) $f(x)=\log x^4,\ E=(0,\infty),\ F=\mathbf{R}$, $\quad g(x)=2\log x^2,\ G=\mathbf{R}\setminus\{0\},\ H=\mathbf{R}$.

2. Определи ги дефиниционите области на функциите:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+4}$ 3) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-6x+8}$

4) $f(x)=\dfrac{x^4}{|x|-5}$ 5) $f(x)=\sqrt{x-7}$ 6) $f(x)=\sqrt[3]{x+5}$

7) $f(x)=\sqrt[4]{16-x}$ 8) $f(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{x-4}$ 9) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

3. Најди ја дефиниционата област на следните функции:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{e^{x+1}}$ 2) $f(x)=\dfrac{x-4}{2^{1/x}}$ 3) $f(x)=\sqrt[4]{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+1}{4}}$

4) $f(x)=\log(3x+4)$ 5) $f(x)=\log|x+1|$

6) $y=\sqrt{\log\dfrac{5x-x^2}{6}}$ 7) $y=\log(16-x^2)+\dfrac{1}{1+\cos x}$

4. Најди ја функцијата $f(x)=ax+b$ ако:

1) $f(2)=3,\ f(-1)=2$ 2) $f(-2)=1,\ f(1)=\dfrac{2}{3}$

5. Најди ја функцијата $f(x)=ax+b$ ако:

1) $f(x-1)=4-x$ 2) $f(3x+4)=3x-1$

6. За која вредност на параметарот m функцијата:

1) $f(x)=(2m-3)x^2+mx$ 2) $f(x)=(4m-\frac{3}{5})x^2+x-5$

е квадратна.

7. Одреди ја функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ ако:

1) $f(0)=1, f(1)=3, f(2)=0$ 2) $f(-1)=1, f(1)=2, f(2)=0$

8. Која од следниве функции монотоно расте, а која монотоно опаѓа:

1) $f(x)=4x-3$ 2) $f(x)=6x-\ln 2$ 3) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}$

9. Дадена е функцијата $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leq 0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$. Најди ги вредностите:

1) $f(-2)$ 2) $f(0)$ 3) $f(2)$

10. Дадена е функцијата $f(x)=x^3+1$. Најди:

1) $f(a)$ 2) $f(a^2)$ 3) $\left(f(a)\right)^2$

11. Дадена е функцијата $f(x)=x^2$. Најди $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

12. Докажи дека $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ако $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

13. Испитај ја монотоноста на следните функции:

1) $f(x)=\dfrac{-2x+3}{5}$ 2) $f(x)=2-x^2$ 3) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-16}$

4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}$ 5) $f(x)=x^2-2x+3$ 6) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$

14. Најди ги интервалите на кои функцијата $f(x)$ е монотона (строго монотона):

1) $f(x)=|x|$ 2) $f(x)=|x|-x$ 3) $f(x)=2+x-|x|$

4) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-3\right)$ 5) $f(x)=\log_2\left(x-3\right)$ 6) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

15. Покажи дека функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ е ограничена на интервалот $[1,+\infty)$, но е неограничена на интервалот $(0,1)$.

16. Испитај дали функциите:

1) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ 2) $f(x)=\sin^4+\cos^4 x$ 3) $f(x)=3^{\cos x}$

4) $f(x)=2^{-x+1}$ 5) $f(x)=3\sin^2\frac{2x+1}{3}$ 6) $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)$

се ограничени.

17. Покажи дека функциите:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ 2) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ 3) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$

4) $f(x)=\frac{x^{3/2}+5}{x+1}$, за $x\geq 0$ 5) $f(x)=x\log(x+5)$ 6) $f(x)=x+\cos x$

се неограничени.

18. Најди ги екстремните вредности на функциите:

1) $f(x)=2-x^2$ 2) $f(x)=x^2-x-2$ 3) $f(x)=\frac{x}{x^2+5}$

4) $f(x)=\frac{1}{2x^2-x+3}$ 5) $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ 4) $f(x)=\left|x+2\right|$

5) $f(x)=\left|\log_2(x-1)\right|$ 6) $f(x)=\left|\ln(x+2)\right|$ 7) $f(x)=2^{x^2-1}$

19. Најди ги сложените функции $g\circ f(x)=g(f(x))$ и $f\circ g(x)=f(g(x))$ ако:

1) $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2-5$ 2) $f(x)=\dfrac{2}{1-x}$, $g(x)=x^2-1$

3) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=5x-1$ 4) $f(x)=\log(x-2)$, $g(x)=\sqrt{x}$

5) $f(x)=\log x$, $g(x)=10^{x+3}$ 6) $f(x)=\cos x$, $g(x)=2x-1$

20. Од кои функции се образувани сложените функции:

1) $f(x)=\sqrt{\log x}$ 2) $f(x)=(2x+1)^3$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

21. Најди ја инверзната функција на секоја од следниве функции:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ 2) $f(x)=\sqrt{x+1}$ 3) $f(x)=\log_2(1-x)$

22. Дали дадените фунции:

1) $f(x)=x^3+3$ 2) $f(x)=\sqrt[5]{x^3+1}$ 3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

има инверзна функција. Во случај на потврден одговор најди ја инверзната функција на f.

23. Најди го множеството вредности на функциите:

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ 3) $f(x)=\sqrt{9-x^2+3x}$

4) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ 5) $f(x)=e^{x+1}$ 6) $f(x)=\ln(x-1)$

24. Покажи дека следниве функции се парни:

1) $f(x) = |x|$ 2) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ 3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

25. Покажи дека следниве функции се непарни:

1) $f(x) = x^3 |x|$ 2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$ 3) $f(x) = \dfrac{tgx}{1 + \cos x}$

26. Испитај ја парноста на следниве функции:

1) $f(x) = -x^4 - 3x^3 + x$ 2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{(x-1)^2}$ 3) $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2 + x^4}$

4) $f(x) = 3\log_2 \dfrac{x^2 - 1}{2}$ 5) $f(x) = 2^x - 5^x$ 6) $f(x) = x^2 - \dfrac{\sin x}{x}$

27. Испитај ја периодичноста на функциите:

1) $f(x) = [x] - x$ 2) $f(x) = |\sin 2x|$

3) $f(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ 4) $f(x) = \cos x + 2\sin 2x + 3\cos 3x$

5) $f(x) = \cos\sqrt{3x}$ 6) $f(x) = 2\sin\dfrac{x}{2} + 2$

28. Најди ги нулите на следните функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 4x - 8}$ 2) $f(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{3x + 4}$ 3) $f(x) = \ln(x - 4)$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x + 5}$ 5) $f(x) = 1 - 3^{x+1}$ 6) $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

29. Најди ги пресечните точки со $x-$ оската на графиците на следните функции:

1) $f(x) = 2 - x^2$ 2) $f(x) = |x - 2|$ 3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5}$

4) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ 5) $f(x)=\log_2(x-5)$ 6) $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

30. Дадена е функцијата $y=\log_{\sqrt{5}}(3x^2-2x)$. Определи ги нулите и дефинициoната област на функцијата. За кои вредности на x вредноста на функцијата е 2?

31. Нацртај го графикот на функцијата:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x-2$

2) $f(x)=-3x+4$

3) $f(x)=x^2-4x+5$

4) $f(x)=-x^2+6x-5$

32. Нацртај го графикот на функцијата:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}$

2) $f(x)=-2\sqrt{x+4}$

3) $f(x)=\sqrt{x+5}-2$

4) $f(x)=\sqrt[3]{x-5}+1$

33. Нацртај го графикот на функцијата:

1) $f(x)=3^x+4$

2) $f(x)=-2^{x+2}+\sqrt{2}$

3) $f(x)=2e^x-4$

4) $f(x)=e^{-x}+2$

34. Нацртај го графикот на функцијата:

1) $y=\log(x+5)$

2) $y=\ln(x-2)+4$

3) $f(x)=-2\log x$

4) $f(x)=\ln(-x)-1$

35. Нацртај го графикот и испитај го текот на следниве функции:

1) $f(x)=3\sin 2x$

2) $f(x)=2\sin\frac{x}{2}$

3) $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 4) $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

5) $f(x)=\mathrm{c}tg\left(x+\pi\right)$ 6) $f(x)=\mathrm{c}tg\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

7) $f(x)=2\sin\left(\frac{4x}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ 8) $f(x)=\frac{1}{3}\sin\left(2x-1\right)$

9) $f(x)=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+1$ 10) $f(x)=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{x}{2}-2\right)-2$

11) $f(x)=-\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$ 11) $f(x)=2tg\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$

36. Нацртај ги графиците на следните функции:

1) $y=\arcsin\frac{x}{2}$ 2) $y=\arccos 3x$

3) $y=\mathrm{arctg}\,2x$ 4) $y=\mathrm{arc}\,c\,\mathrm{tg}\,4x$

37. Нацртај ги графиците на следните функции:

1) $y=\arcsin\frac{x}{2}+2$ 2) $y=\arccos 3x-1$

3) $y=2+\mathrm{arctg}\,2x$ 4) $y=\mathrm{arc}\,ctg\,4x-1$

38. Нацртај ги графиците на следните функции:

1) $y=2\arcsin(x+1)$ 2) $y=3\arccos(x-1)$

3) $y=\mathrm{arctg}\,(x+3)$ 4) $y=\mathrm{arc\,c\,tg}\,(2-x)$

4. Низи од реални броеви

4.1. Дефиниција на низа и примери

Ќе продолжиме со проучувањето на реалните функции, но ќе претпоставиме дека тие се дефинирани на множеството природни броеви. Ваквите функции се нарекуваат низи од реални броеви.

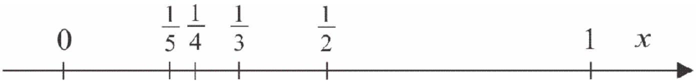
4.1.1. Дефиниција. Секоја функција $a : n \mapsto a_n$ од множеството природни броеви во множество реални броеви ја викаме *низа од реални броеви.*

Вообичаено е низите да ги означуваме пократко со $\{a_n\},\ n \in \mathbf{N}$, само со $\{a_n\}$ ако доменот се подразбира од контекстот и не постои недоразбирање, или пак, со $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$.

Членот a_n се вика $n-$ти член или *општ* член на низата, додека n е *индекс* на членот a_n. Една низа е наполно определена со нејзиниот општ член a_n.

4.1.2. Примери.

1) Низата $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ има членови: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$.



Слика 45.

2) Членови на низата $a_n = n^2$, $n \in \mathbf{N}$ се: $1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad \cdots$.

3) Низата $a_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$ има членови: $1, 1, 1, \cdots$.●

Многу често членовите на една низа се дадени со *рекурентна формула* од видот $a_{n+1} = f(a_n)$, каде што a_1 е даден непосредно, а сите други членови се наоѓаат со горната формула. Така, имаме $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, итн.

4.1.3. Примери.

1) Нека низа е зададена рекурентно со:

$$a_1 = 1, \ a_{k+1} = a_k + k^2.$$

Тогаш, првите пет члена на низата се:

$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + 1^2 = 2, \quad a_3 = 2 + 2^2 = 6, \quad a_4 = 6 + 3^2 = 15, \quad a_5 = 15 + 4^2 = 31.$ ●

Понекогаш е можно да го најдеме општиот член на низата ако се дадени првите неколку члена на низата.

4.1.4. Примери.

1) Да го најдеме општиот член на низата 4, 9, 16, 25,… Забележуваме дека членовите на низата се квадрати на природни броеви. Имаме дека општиот член на низата е $a_n = (n+1)^2$.

2) Да го најдеме општиот член на низата $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}...$ Да забележиме дека знакот на членовите на низата алтернативно се менува. Освен тоа, членовите се реципрочните броеви на природните броеви. Според тоа, општиот член на низата е $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

3) Да го најдеме општиот член на низата 2, 4, 8, … Забележуваме дека можни одговори се $a_n = 2^n$ и $a_n = n^2 - n + 2$. Според тоа, низата не е секогаш еднозначно определена со задавање на првите неколку членови.

4) Општиот член на низата од прости броеви 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,... не можеме да го запишеме со формула, што значи дека постојат низи за кои што не може да најдеме формула за општиот член. ●

Аритметичка прогресија

4.1.5. Дефиниција. *Аритметичка прогресија* е низа зададена со рекурентната формула: $a_{n+1} = a_n + d,\ \ n \in \mathbf{N}$, каде што d е константа.

Со методот на математичка индукција ќе покажеме дека секој член на аритметичката прогресија се добива со формулата

$$a_{n+1} = a_1 + nd\,. \tag{4.1.1}$$

Формулата (4.1.1) важи за $n = 1$, бидејќи $a_2 = a_1 + d$.

Да претпоставиме точност за $n = k$, односно $a_{k+1} = a_1 + kd$.

За $n = k + 1$ имаме дека

$$a_{(k+1)+1} = a_{k+1} + d = a_1 + kd + d = a_1 + (k+1)d\,.$$

Според принципот на математичка индукција, формулата (4.1.1) важи за секој природен број.

Друга важна формула за аритметичката прогресија е формулата за збир на аритметичка прогресија. Нека со S_n го означиме збирот на првите n членови од една аритметичка прогресија. Збирот на прогресијата ќе го напишеме на два начина, почнувајќи од првиот и последниот член. Имаме дека

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n = a_1 + a_1 + d + \cdots + a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots a_1 = a_n + a_n - d + \cdots + a_n - (n-1)d \, .$$

Ако ги собереме двете горни равенства, добиваме:

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

односно,

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \; . \qquad (4.1.2.)$$

Во формулите (4.1.1) и (4.1.2) имаме пет големини: a_1, a_n, d, n и S_n. Ако се познати три од нив, може да се определат и другите две.

4.1.6. Примери.

1) Да го определиме десеттиот член од аритметичката прогресија 2, 8, 14,... Имаме дека $a_1 = 2$, $d = 6$, $n = 10$, $a_{10} = a_1 + 9d = 56$.

2) Да определиме кој член од аритметичката прогресија 3, 9, 15,... изнесува 117. Тука имаме дека $a_1 = 3$, $d = 6$ и $a_n = 117$. Од формулата (4.1.1.) имаме дека $117 = 3 + (n-1) \cdot 6$ или $n = 20$.

3) Да го најдеме збирот на првите 20 члена на аритметичката прогресија 2, 4, 6,… Имаме дека $a_1 = 2$, $d = 2$ и $n = 20$. Според формулите (4.1.2) и (4.1.1) наоѓаме дека

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left(2 + 2 + 19 \cdot 2\right) = 420 .$$

4) Да го најдеме збирот од првите n природни броеви. Имаме дека

$a_1 = 1$, $d = 1$ и $S_n = \frac{n}{2}\left(1 + n\right)$. Според тоа, наоѓаме дека

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\left(n+1\right)}{2} . \bullet$$

Геометриска прогресија

4.1.7. Дефиниција*.* *Геометриска прогресија* е низа зададена со рекурентната формула $a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n \in \mathbf{N}$, каде што q е константа.

Со методот на математичка индукција се покажува дека секој член на геометриската прогресија се добива со формулата

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n . \tag{4.1.3}$$

Навистина, формулата (4.1.3) важи за $n = 1$ бидејќи $a_2 = a_1 \cdot q$.

Да претпоставиме точност за $n = k$, односно $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$.

За $n = k + 1$ имаме дека

$$a_{(k+1)+1} = a_{k+1} \cdot q = (a_1 \cdot q^k) \cdot q = a_1 \cdot q^{k+1}.$$

Според принципот на математичка индукција, формулата (4.1.3) важи за секој природен број.

Нека со s_n го означиме збирот на првите n членови од една геометриска прогресија. За да ја добиеме формулата за збир на геометриска прогресија, запишуваме

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1},$$

$$qs_n = a_1q + a_2q + \cdots + a_nq = a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^n.$$

Со одземање на горните равенства, имаме дека

$$qs_n - s_n = a_1q^n - a_1$$

од каде што добиваме дека

$$s_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}. \tag{4.1.4}$$

И во формулите (4.1.3) и (4.1.4) имаме пет големини a_1, a_n, q, n и s_n. Ако се познати три од нив, може да се определат и другите две.

4.1.8.Примери.

1) Првите два члена на геометриска прогресија се 16 и 8. Да го определиме петтиот член на низата. Имаме дека $a_1 = 16$ и $a_2 = 8$. Од $a_2 = 16 \cdot q$ следува дека $16 \cdot q = 8,$ односно $q = \frac{1}{2}$. Петтиот член на прогресијата е

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = 1.$$

2) Третиот член на една геометриска прогресија е 4, а десеттиот член е $32\sqrt{2}$. Да ги најдеме првите два члена на прогресијата. Имаме дека

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 4$ и $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 32\sqrt{2}$, од каде што следува дека

$q^7 = \frac{32\sqrt{2}}{4} = 8\sqrt{2}$. Оттука добиваме дека $q = \sqrt{2}$, што значи

$$a_1 = 2 \text{ и } a_2 = 2\sqrt{2}. \bullet$$

3) Меѓу броевите 5 и 160 да се вметнеме четири броја кои што со дадените образуваат геометриска прогресија. Имаме дека

$$a_1 = 5, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad a_6 = 160$$

Користејќи ја формулата (4.1.3), добиваме дека $q^5 = \frac{160}{5} = 32$, односно $q = 2$. Добиената низа е

$$5, \quad 10, \quad 20, \quad 40, \quad 80, \quad 160.$$

4) Да го пресметаме збирот на првите седум члена на геометриската прогресија 3, 6, 12, … Имаме дека $a_1 = 3$ и $q = 2$. Според формулата (4.1.4), имаме дека

$$s_7 = \frac{3\left(2^7 - 1\right)}{2-1} = 381. \bullet$$

4.2. Аритметички операции со низи

Нека се дадени низите од реални броеви $a : n \mapsto a_n$ и $b : n \mapsto b_n$. Ќе дефинираме збир, производ и количник на две низи, како и производ на низа со реален број.

1. Збир на низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ е низата $n \mapsto a_n + b_n$ со општ член $\{a_n + b_n\}$.

2. Производ на низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ е низата со општ член $\{a_n b_n\}$.

3. Производ на реалниот број λ со низата $\{a_n\}$ е низата со општ член $\{\lambda a_n\}$.

4. Количник на низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ каде што $b_n \neq 0$, за секое $n \in \mathbf{N}$, е низата со општ член $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$.

4.3. Монотони низи

4.3.1. Дефиниција. За низа $\{a_n\}$ велиме дека *монотоно расте* ако $a_{n+1} \geq a_n$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

Низата $\{a_n\}$ *строго монотоно раст*е ако $a_{n+1} > a_n$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

Низата $\{a_n\}$ *монотоно опаѓа* ако $a_{n+1} \leq a_n$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

Низата $\{a_n\}$ *строго монотоно опаѓа* ако $a_{n+1} < a_n$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

Низите што растат или опаѓаат се викаат *монотони низи.*

4.3.2. Примери.

1) Низата природни броеви $a_n = n,$ за секое $n \in \mathbf{N}$ е строго монотоно растечка. Навистина, од

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) - n = 1 > 0 \text{, за секое } n \in \mathbf{N}$$

следува дека $a_{n+1} > a_n$ за секој природен број n.

2) Низата $n \mapsto \frac{1}{n}$ строго монотоно опаѓа, бидејќи од

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \text{ за секој природен број } n,$$

следува дека $a_{n+1} < a_n$ за секој природен број n.

3) Аритметичка прогресија е строго монотоно растечка ако $d > 0$, и строго монотоно опаѓачка ако $d < 0$. Ако $d = 0$, низата е константна.

4) Геометриска прогресија е строго монотона ако $q > 0$. Таа е монотоно растечка ако $a_1 > 0$ и $q > 1$ или ако $a_1 < 0$ и $0 < q < 1$. Ако $a_1 > 0$ и $0 < q < 1$ или ако $a_1 < 0$ и $q > 1$, тогаш геометриската прогресија строго монотоно опаѓа. Ако $q = 1$, низата е константна. ●

Постојат низи кои ниту опаѓаат ниту растат.

4.3.3. Примери.

1) Низата $: n \mapsto (-1)^n n$ ниту расте ниту опаѓа.

2) Геометриска прогресија со $q < 0$ ниту расте ниту опаѓа. ●

4.4. Ограничени низи

Низата $\{a_n\}$ е *ограничена* ако е ограничено множеството вредности на функцијата $n \mapsto a_n$. Значи, ја имаме следната дефиниција.

4.4.1. Дефиниција. Низа $\{a_n\}$ е *ограничена од горе* ако постои реален број M таков што $a_n \leq M$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

Ако постои реален број m таков што $a_n \geq m$, за секое $n \in \mathbf{N}$, тогаш велиме дека низата $\{a_n\}$ е *ограничена од долу*.

Накусо велиме дека низата е *ограничена* ако е ограничена и од горе и од долу, односно ако постојат реални броеви m и M такви што важи дека $m \leq a_n \leq M$, за секое $n \in \mathbf{N}$.

Со други зборови, велиме дека низата $\{a_n\}$ е ограничена ако сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[m, M]$, за некои реални броеви m и M .

Низа што не е ограничена се вика *неограничена.* Со други зборови, низата е неограничена ако за секој позитивен реален број $K,$ постои $n \in \mathbf{N}$ таков што $|a_n| > K$.

4.4.2. Примери.

1) Низата со општ член $a_n = n^2 - 2$ е ограничена од долу, бидејќи важи дека $n^2 - 2 \geq -1,$ за секој природен број $n,$ односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $[-1, +\infty).$

2) Низата со општ член $a_n = 3 - n$ е ограничена од горе, бидејќи важи дека $3 - n \leq 2,$ за секој природен број $n,$ односно сите членови на низата се наоѓаат во интервалот $(-\infty, 2].$

3) Низата со општ член $a_n = \frac{1}{n}$ е ограничена, бидејќи за секое $n \in \mathbf{N}$ имаме дека $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, односно секој член на низата се наоѓа во интервалот $(0,1]$.

4) Низата со општ член $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ е ограничена, бидејќи имаме дека $\left|1 + \frac{(-1)^n}{n}\right| \leq 2,$ за секој природен број $n,$ односно сите членови на

низата се наоѓаат во сегментот $[-2, 2]$.

5) Низата од природни броеви, $a_n = n,$ за секое $n \in \mathbf{N},$ е неограничена. Навистина, нека K е произволен позитивен реален број. Според аксиомата на Архимед, постои природен број n таков што $n > K$.

6) Низата $a_n = (-1)^n n$ е неограничена бидејќи за секој реален број K за $n = [K] + 1,$ имаме дека $| a_n | = n > K.$

7) Аритметичка прогресија е неограничена низа, освен ако $d = 0$.

8) Геометриска прогресија е ограничена низа ако $|q| \leq 1$, а е неограничена ако $|q| > 1$. ●

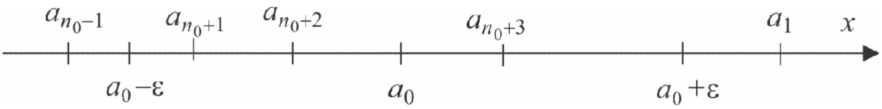
4.5. Гранична вредност на низа.

Конвергентни и дивергентни низи

4.5.1. Дефиниција: Велиме дека бројот a_0 е *гранична вредност (лимес) на низата* $\{a_n\}$ *кога* n *тежи кон бесконечност* ако на секој произволно мал позитивен број ε можеме да му придружиме природен број n_0 таков, што сите членови на низата со индекс поголем или еднаков на n_0, припаѓаат во интервалот $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$.

Користиме ознака $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a_0$ и велиме дека „бројот a_0 е лимес (гранична вредност) на низата $\{a_n\}$, кога n се стреми кон бесконечност“ или „низата $\{a_n\}$ *конвергира* кон бројот a_0 кога n се стреми кон бесконечност“ (слика 46.).

Можеме да забележиме дека во интервалот $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, колку и



Слика 46.

да е мал, се наоѓаат сите членови на низата освен конечно многу.

Очигледно е дека можеме да кажеме и вака: Бројот a_0 е лимес (гранична вредност) на низата $\{a_n\}$, кога n се стреми кон бесконечност, ако важи дека

$$a_0 - \varepsilon < a_n < a_0 + \varepsilon$$

односно,

$$-\varepsilon < a_n - a_0 < \varepsilon$$

што е еквивалентно со

$$|a_n - a_0| < \varepsilon \text{, за секое } n \geq n_0(\varepsilon)$$

каде што $\varepsilon > 0$ е произволно мало.

Накратко може да запишеме:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}: \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_0| < \varepsilon .$$

Со следниот пример ќе ја илустрираме верификацијата на конвергенција на низа според дефиниција.

4.5.2. Примери.

1) Низата со општ член $a_n = c$, каде што c е реален број, конвергира кон бројот c. Навистина, за произволно $\varepsilon > 0$ и за било кое $n \in \mathbf{N}$ имаме дека $|a_n - a_0| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

2) За низата со општ член $a_n = \frac{1}{n}$ имаме дека $\left|a_n - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ за секое $n > \frac{1}{\varepsilon}$, што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Тука за n_0 го избираме најмалиот природен број поголем од $\frac{1}{\varepsilon}$. На пример, ако $\varepsilon = 10^{-3}$, имаме дека $n_0 = 1001$; ако $\varepsilon = 3\cdot 10^{-3}$, тогаш $n_0 = 334$.

Во првиот случај, релацијата $\left|a_n\right| < \varepsilon$ е точна за секое $n \geq 1001$, односно сите членови на низата $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, почнувајќи од членот $\frac{1}{1001}$, припаѓаат на интервалот $\left(-10^{-3}, 10^{-3}\right)$, а надвор од овој интервал се наоѓаат првите 1000 члена на низата.

Во вториот случај, неравенството $\left|a_n\right| < \varepsilon$ е точно за секое $n > 333$, односно сите членови на низата, почнувајќи од членот $\frac{1}{334}$, се наоѓаат во интервалот $\left(-3\cdot 10^{-3}, 3\cdot 10^{-3}\right)$, а надвор од овој интервал се наоѓаат првите 333 члена на низата.

3) Ќе докажеме дека ако $|a| > 1$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0.$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ставаме $|a| = 1 + x$, каде што $x = |a| - 1 > 0$. Според Бернулиевото неравенството имаме $\left|a\right|^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > nx,$ за $n \geq 1$, од каде што следува дека $\frac{1}{\left|a\right|^n} < \frac{1}{nx}$. Избираме $n_0 = \left[\frac{1}{x\varepsilon}\right] + 1$.

Тогаш $\left|\frac{1}{a^n}-0\right|=\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{nx}<\varepsilon$, за секое $n>n_0$, од каде што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0.$

4) Ќе покажеме $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1.$ Заради Архимедовата аксиома, за секој позитивен број ε постои природен број n_0, така што $0<\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$

Тогаш имаме дека

$$\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon,\text{ за секој природен број } n\geq n_0.$$

5) Ќе покажеме дека ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и $a_n\geq 0,$ за секој природен број $n,$ тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}.$ Избираме произволно $\varepsilon>0.$ Од $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ имаме дека за $\varepsilon\sqrt{a}$ постои природен број n_0 така што $|a_n-a|<\varepsilon\sqrt{a},$ за секој природен број $n\geq n_0.$ Оттука следува дека

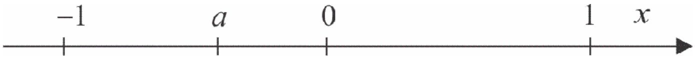
$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}\right|=\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}<\frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varepsilon,\text{ за секој природен број } n\geq n_0$$

од каде што заклучуваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}.$

6) Ќе покажеме дека ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избрано. Од $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ следува дека постои $n_0\in\mathbf{N}$ таков што за секое $n\geq n_0$ важи $|a_n-a|<\varepsilon$. Од друга страна, заради својствата на апсолутна вредност добиваме дека за $n \geq n_0$ важи $||a_n|-|a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Да забележиме дека обратното тврдење не важи. Навистина, за низата $a_n = (-1)^n,\ n \in \mathbf{N}$ имаме дека $|a_n| = 1,\ n \in \mathbf{N}$, од што добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$. Од друга страна, низата $a_n = (-1)^n,\ n \in \mathbf{N}$ не конвергира бидејќи на пример за секое $\varepsilon < 1$, надвор од секој од интервалите $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ има бесконечно многу точки од низата, што не е можно доколку дадената низа конвергира. Исто така, за произволно $a \in \mathbf{R},\ a \neq -1,1,$ во интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ нема ниту еден член од низата, односно надвор од интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ се наоѓаат сите членови на низата. Притоа земавме $\varepsilon = \min\{|a-1|,|a+1|\}$ (слика 47). ●



Слика 47.

Во пример 2) јасно се гледа дека со намалување на ε се зголемува n_0, и обратно, n_0 се намалува ако ε се зголемува.

Да се навратиме на дефиницијата за гранична вредност на низа. Ако за низата реални броеви $\{a_n\}$ не постои граница или ако границата е $a = \pm\infty,$ тогаш велиме дека низата *дивергира*. Значи, низата $\{a_n\}$ диверира ако:

- за кој било реален број a постои $\varepsilon -$околина на бројот a таква што бесконечно многу членови на низата се надвор од околината, (тогаш низата нема граница)

- за секое $K > 0$ постои природен број n_0, така што

$a_n > K$, за секој природен број $n \geq n_0$,

и тогаш ја усвојуваме ознаката $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Значи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}: \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n > K$$

- за секое $K < 0$ постои природен број n_0, така што

$a_n < K$, за секој природен број $n \geq n_0$,

и тогаш ја усвојуваме ознаката $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Значи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall K < 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}: \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n < K$$

4.5.3. Примери.

1) Ќе покажеме дека низата $a_n = q^n$ конвергира ако $-1 < q \leq 1$ и дивергира ако $|q| > 1$ и $q = -1$, односно важи дека

а) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, за $|q| < 1$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$, за $q = 1$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, за $q > 1$

г) низата нема граница, за $q = -1$

а) Нека $0 < q < 1$. Тогаш $q = \dfrac{1}{1+h}$ за некое $h > 0$. Заради Архимедовата аксиома, за секој позитивен број ε постои природен број n_0, така што важи $0 < \dfrac{1}{hn_0} < \varepsilon$. Тогаш со примена на Бернулиевото неравенство добиваме дека

$$\left|q^n - 0\right| = q^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+hn} < \frac{1}{hn} < \varepsilon,$$ за секој природен број $n \geq n_0$,

од каде што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Слично, се дискутира и случајот кога $-1 < q < 0.$

Очигледно, за $q = 0,$ имаме дека $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0^n = 0.$

б) Ако $q = 1,$ тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1.$

в) Ако $q > 1,$ тогаш важи $0 < \frac{1}{q} < 1.$ Нека K е произволен позитивен број. Заради тврдењето докажано под а) имаме дека $0 < \frac{1}{q^n} < \frac{1}{K},$ за доволно големо $n,$ од каде што следува дека $q^n > K,$ за доволно големо $n.$

г) Ако $q < -1,$ тогаш за сите парни броеви n имаме $q^n > K,$ а за сите непарни броеви n имаме дека $q^n < -K,$ каде што $K > 0$ е произволно избрано, а n доволно големо. Според тоа, постојат бесконечно многу членови на низата надвор од секоја околина на кој било реален број $a,$ од каде што заклучуваме дека низата нема граница. ●

4.6. Својства на конвергентни низи

Во продолжение ќе дадеме некои својства на конвергентните низи.

4.6.1. Теорема. Конвергентна низа има само една гранична вредност.

Доказ. Ако a_0 и b_0 се две различни гранични вредности на низата $\{a_n\}$, тогаш за секое $\varepsilon > 0$ постојат природни броеви n_0' и n_0'' такви, што

$$|a_n - a_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ за секое } n \geq n_0' \text{ и}$$

$$|a_n - b_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ за секое } n \geq n_0''.$$

Ако со n_0 го означиме поголемиот од броевите n_0' и n_0'', односно $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, тогаш имаме дека

$$|a_0 - b_0| = |(a_0 - a_n) + (a_n - b_0)| \leq$$

$$\leq |a_n - a_0| + |a_n - b_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ за секое } n \geq n_0.$$

Поради произволноста на ε, ова ќе важи и за $\varepsilon = |a_0 - b_0|$. Добивме дека $|a_0 - b_0| < |a_0 - b_0|$, што претставува контрадикција, од каде што заклучуваме дека $a_0 = b_0$. ■

4.6.2. Теорема. Конвергентна низа е ограничена.

Доказ. Нека $\{a_n\}$ е дадена конвергентна низа со граница a, односно $\lim\limits_{n \to a} a_n = a_0$. Тогаш за $\varepsilon = 1$ постои природен број n_0, таков што

$$|a_n - a_0| < 1, \text{ за секое } n \geq n_0.$$

Значи, имаме дека

$$|a_n| = |a_n - a_0 + a_0| \leq |a_n - a_0| + |a_0| < 1 + |a_0|, \text{ за секое } n \geq n_0.$$

Така, добиваме дека $|a_n| \leq M$, за секој природен број n, ако избереме $M = \max\left\{|a_1|,\cdots,|a_{n_0-1}|,1+|a_0|\right\}$. Со тоа покажавме дека дадената низа $\{a_n\}$ е ограничена. ■

Да забележиме дека обратното тврдење од тврдењето искажано во теоремата не важи, односно не секоја ограничена низа е конвергентна.

4.6.3. Последица. Секоја неограничена низа е дивергентна.

Доказ. Следува непосредно од теоремата со примена на контрапозиција. ■

4.6.3. Примери.

1) Низата со општ член $a_n = (-1)^n$ е ограничена, но не е конвергентна.

2) Низата со општ член $a_n = 1 + 2(n-1)$ е дивергентна бидејќи е неограничена. ●

Во продолжение ќе искажеме две својства на конвергентните низи кои се во врска со релацијата подредување во множеството реални броеви.

4.6.4. Теорема. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни низи реални броеви. Ако $a_n \leq b_n$, за секој природен број n, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Претпоставуваме спротивно, дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Избираме $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2}$. Тогаш постојат природни броеви n_1 и n_2 така што

$|a_n - a| < \varepsilon,$ за секој природен број $n \geq n_1$, и

$|b_n - b| < \varepsilon,$ за секој природен број $n \geq n_2,$

од каде што следува дека

$a - \varepsilon < a_n,$ за секој природен број $n \geq n_1,$ и

$b_n < b + \varepsilon,$ за секој природен број $n \geq n_2.$

Ако со n_0 го означиме поголемиот од броевите n_1 и n_2, тогаш имаме

$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n,$ за секој природен број $n \geq n_0,$

што е во контрадикција заради претпоставката дека $a_n \leq b_n,$ за секој природен број $n.$ ■

4.6.5. Теорема. (Сендвич теорема) Ако низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни со иста граница a_0, тогаш и низата $\{c_n\}$ со својство $a_n \leq c_n \leq b_n$, за секое $n \in \mathbf{N},$ е конвергентна и притоа важи $\lim_{n \to \infty} c_n = a_0$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Постојат природни броеви n_1 и n_2 такви што

$|a_n - a_0| < \varepsilon,$ за секој природен број $n \geq n_1,$ и

$|b_n - a_0| < \varepsilon,$ за секој природен број $n \geq n_2.$

Оттука добиваме дека

$-\varepsilon < a_n - a_0 < \varepsilon$, за секој природен број $n \geq n_1,$ и

$-\varepsilon < b_n - a_0 < \varepsilon$, за секој природен број $n \geq n_2,$

Ако со n_0 го означиме поголемиот од броевите n_1 и n_2, тогаш имаме

$-\varepsilon < a_n - a_0 \leq c_n - a_0 \leq b_n - a_0 < \varepsilon$, за секој природен број $n \geq n_0$

од каде што следува дека

$|c_n - a_0| < \varepsilon,$ за секој природен број $n \geq n_0,$

што значи дека $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a_0$. ■

4.6.6. Примери.

1) Да ја најдеме границата на низата со општ член $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}.$

Дефинираме низа со општ член $b_n = 0,$ и низа со општ член $c_n = \dfrac{1}{n}.$ Од неравенството

$$0 < \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n},\ \text{за секој природен број } n,$$

имајќи во вид дека $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0,$ заради сендвич теоремата следува дека

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

4.6.7. Теорема. Нека низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни со гранични вредности a_0 и b_0 соодветно.

1. Тогаш и низата со општ член $\{a_n + b_n\}$ е конвергентна и важи:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

2. Тогаш и низата со општ член $\{a_n \cdot b_n\}$ е конвергентна и важи:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n).$$

3. Нека $b_0 \neq 0$ и $b_n \neq 0,$ за секое $n \in \mathbf{N}$, тогаш и низата $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ е конвергентна и важи дека

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}.$$

Доказ. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$.

1. За секој $\varepsilon > 0$ постојат природни броеви n_0' и n_0'' такви што

$|a_n - a_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, за секое $n \geq n_0'$, и

$|b_n - b_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, за секое $n \geq n_0''$.

Ако со n_0 го означиме поголемиот од броевите n_0' и n_0'', односно $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, тогаш имаме дека

$$\left|(a_n + b_n) - (a_0 + b_0)\right| = \left|(a_n - a_0) + (b_n - b_0)\right| \leq$$

$$\leq |a_n - a_0| + |b_n - b_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

за секое $n \geq n_0$, односно, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a_0 + b_0$.

2. Бидејќи низата $\{a_n\}$ е ограничена (теорема 4.6.2.), постои $M \in \mathbf{R}$ таков што $|a_n| \leq M$ за секое $n \in \mathbf{N}$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Тогаш, постојат природни броеви n_0' и n_0'' такви што

$|a_n - a_0| < \frac{\varepsilon}{2|b_0|}$, за секое $n \geq n_0'$, и

$|b_n - b_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$, за секое $n \geq n_0$ ".

Ако $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, тогаш имаме дека

$$|(a_n \cdot b_n) - (a_0 \cdot b_0)| = |b_0 \cdot (a_n - a_0) + a_n \cdot (b_n - b_0)| \leq$$

$$\leq |b_0||a_n - a_0| + |a_n||b_n - b_0| < |b_0| \frac{\varepsilon}{2|b_0|} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

за секое $n \geq n_0$, односно, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a_0 \cdot b_0$.

3. Бидејќи $b_0 \neq 0$, имаме дека постои реален број m таков, што ниту едно b_n не припаѓа во интервалот $(-m, m)$, односно $|b_n| > m$, за секој природен број n. Оттука имаме дека $\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{m}$, за за секој природен број n. Низите се ограничени, па постои $M \in \mathbf{R}$ таков што

$|a_n| \leq M$ и $|b_n| \leq M$, за секој природен број n.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Постојат природни броеви n_0' и n_0'' такви што важи дека

$|a_n - a_0| < \frac{\varepsilon}{2M} m |b_0|$, за секое $n \geq n_0'$, и

$|b_n - b_0| < \frac{\varepsilon}{2M} m |b_0|$, за секое $n \geq n_0$ ".

Ако $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, тогаш за $n \geq n_0$ имаме дека

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_0}{b_0}\right| = \left|\frac{b_n \cdot (a_n - a_0) + a_n \cdot (b_0 - b_n)}{b_n b_0}\right| < \frac{|b_n||a_n - a_0| + |a_n||b_n - b_0|}{m|b_0|} <$$

$$< \frac{M\,\frac{\varepsilon}{2M}\,m|b_0| + M\,\frac{\varepsilon}{2M}\,m|b_0|}{m|b_0|} = \varepsilon \ ,$$

односно $\lim\limits_{n\to\propto}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a_0}{b_0}$. ■

Користејќи ги претходните резултати, ќе ги најдеме границите на некои низи од реални броеви.

4.6.8. Примери.

1) Да ги определиме границите:

а) $\lim\limits_{n\to\propto}\frac{n+1}{2n+1}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n+1}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+1)!+(n+1)!}{(n+3)(n+2)\cdot(n+1)!}$ г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$

Според теоремата 4.6.7. имаме дека

а) $\lim\limits_{n\to\propto}\frac{n+1}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\propto}\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\propto}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\propto}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\propto}\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{2n^2-n+1}}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{2n^2-n+1}{n^2}}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot(n+1)!+(n+1)!}{(n+3)(n+2)\cdot(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2+1)\cdot(n+1)!}{(n+3)(n+2)\cdot(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$

2) Да ја определиме граничната вредност на низата $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right\}$.

Низата $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right\}$ ја споредуваме со низите $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$ и $\left\{\frac{n+1}{n-1}\right\}$.

Имаме дека

$$\frac{n-1}{n+1}\le\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\le\frac{n+1}{n-1}, \text{ за секој природен број } n,$$

од каде што следува дека

$$\lim_{n\to\propto}\frac{n-1}{n+1}\le\lim_{n\to\propto}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\le\lim_{n\to\propto}\frac{n+1}{n-1}$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\propto}\frac{n-1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\propto}\frac{n+1}{n-1}=1$, според сендвич теоремата добиваме

$$\lim_{n\to\propto}\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}=1.$$

3) Нека $a>0$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

За $a=1$ јасно е дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Ако $a>1$, тогаш $\sqrt[n]{a}>1$, па според Бернулиевото неравенството имаме дека

$$a=[1+(\sqrt[n]{a}-1)]^n>1+n(\sqrt[n]{a}-1)>n(\sqrt[n]{a}-1).$$

Според тоа, имаме дека

$$0<\sqrt[n]{a}-1<\tfrac{a}{n},\text{ за секое } n\in\mathbf{N}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$, според сендвич теоремата добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}-1=0,\text{ односно }\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

Ако $1>a>0$, тогаш $\frac{1}{a}>1$ и затоа $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1$, од каде што следува

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.$$

4) Да докажеме дека ако $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k=a^k,\ k\in\mathbf{N}$.

Според теорема 4.6.7. имаме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\right)^k=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^k=a^k$. ●

4.6.9. Теорема. Секоја ограничена и монотона низа е конвергентна.

Доказ. Нека низата (a_n) е монотоно растечка и ограничена и нека $a=\sup\{a_n,n\in\mathbf{N}\}$. Тогаш $a_n\le a$, за секој природен број n. За произволно $\varepsilon>0$ постои $p\in\mathbf{N}$ таков што $a-\varepsilon<a_p\le a$. Поради монотоноста на низата (a_n) имаме дека $a_p<a_n,$ за секое $n>p$. Тогаш имаме дека $a-\varepsilon<a_n\le a<a+\varepsilon$, за секое $n>p$. Ова значи дека сите, освен конечно многу членови на низата се наоѓаат во интервалот $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, односно $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\sup\{a_n,n\in\mathbf{N}\}$.

Слично се покажува дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n, n\in \mathbf{N}\}$ во случај кога низата е монотоно опаѓачка и ограничена. ■

4.6.10. Примери.

1) Ќе докажеме дека низата со општ член $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1}$ е конвергентна како монотоно растечка и ограничена низа.

Имеме дека

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1} = \frac{1}{3^{n+1}+1} > 0$$

следува дека низата $\{a_n\}$ строго монотоно расте.

Ако го искористиме неравенствата

$$\frac{1}{3^k+1} < \frac{1}{3^k}, \text{ за } \quad k = 1,2,...,n$$

добиваме дека

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} < \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2},$$

што значи дека низата $\{a_n\}$ е ограничена од горе.

Според тоа, низата $\{a_n\}$ е монотона и ограничена, од каде што заради теорема 4.6.9. следува дека таа е конвергентна.

2) Ќе докажеме дека низата со општ член $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ е конвергентна. Имаме дека

$$a_{n+1}-a_n=\left(1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}>0$$

што значи дека дадената низа е строго монотоно растечка. Понатаму, за секој $n>1$ важи

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=\\&=1+\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+...+\frac{n-(n-1)}{(n-1)n}=\\&=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2,\end{aligned}$$

што значи дека дадената низа е ограничена. Според тоа, од теорема 4.6.9. следува дека низата е конвергентна. ●

4.7. Бројот „e“

Да ја разгледаме низата со општ член

$$a_n=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

Ќе покажеме дека таа е строго монотоно растечка и ограничена.

Според Бернулиевото неравенство, имаме дека

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n^2}n=1-\frac{1}{n},\ \text{за секое } n>1,$$

од каде што следува дека

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>1-\frac{1}{n},\ \text{за секое } n>1,$$

односно,

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}\text{, за секое } n>1.$$

Значи, низата монотоно расте.

За да покажеме дека низата е ограничена, ќе ја искористиме биномната формула. Имаме дека

$$a_n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<$$

$$<2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+1-\frac{1}{2^n}<3,$$

за секое $n\in\mathbf{N}$. Во последното равенство е искористена формулата (4.1.4) за $a_1=\frac{1}{2}$ и $q=\frac{1}{2}$. Значи, низата е ограничена и $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3,$ за секое $n\in\mathbf{N}$.

Според теоремата 4.6.9. имаме дека низата е конвергентна. Нејзината гранична вредност ја обележуваме со *e* во чест на математичарот Ојлер (Euler). Имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Се покажува дека *e* е ирационален број. Со точност од пет децимали, тоа е бројот

$$e=2,71821...$$

Овој број има значајна улога во математиката. Се ползува како основа за пресметување логаритми, коишто се викаат природни логаритми (логаритми со основа e).

4.7.1. Примери.

1) Ќе покажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=e.$ Имаме дека

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

2) Да покажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$ за $n\in\mathbf{N}$. Имаме

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

3) Да ја најдеме границата на низата $a_n=\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$, за $n\in\mathbf{N}$. Имаме

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n+3}-1\right)^n =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-n-3}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+3}\right)^n =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{-3}}\right)^{\frac{n+3}{-3}\cdot\frac{-3n}{n+3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{-3}}\right)^{\frac{n+3}{-3}}\right]^{\frac{-3n}{n+3}} = e^{-3}=\frac{1}{e^3}.\ \bullet$$

Забелешка. При решавањето на претходните два примери го користевме фактот дека ако a_n е низа таква, што $a_n \to +\infty$, $n \to \infty$ или $a^n \to -\infty$, $n \to \infty$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, чија што оправданост ќе ја дадеме во следното поглавје.

4.8. Геометриски ред

4.8.1. Дефиниција. Нека a и q се дадени реални броеви. Изразот

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + ... + aq^n + ... \qquad (4.8.1)$$

се вика *геометриски ред* со коефициент q и прв член a.

Збировите

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

се нарекуваат *парцијални суми* на геометрискиот ред (4.8.1).

Низата $\{S_n\}$ од парцијални суми на геометрискиот ред (4.8.1) се нарекува *низа од парцијални суми* на геометрискиот ред.

4.8.2. Дефиниција. Ако низата од парцијални суми $\{S_n\}$ на редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ конвергира, односно ако постои границата

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \ -\infty < S < +\infty ,$$

тогаш велиме дека редот *конвергира*, а бројот S се нарекува *збир* или *сума* на геометрискиот ред и запишуваме $S = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$. Во спротивно велиме дека редот *дивергира.*

Однесувањето на геометрискиот ред зависи од вредноста на коефициентот q. Од тие причини за да ја испитаме конвергенцијата на геометрискиот ред во зависност од вредноста на коефициентот q.

За низата парцијални суми којашто, всушност, преставува збир од првите $\mathrm{n}-$члена на геометриска прогресија имаме дека

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \text{ за } q \neq 1 .$$

1. Ако $|q| < 1$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,$ па добиваме дека

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty}\left[1-q^n\right] = \frac{a}{1-q} .$$

Според тоа, во овој случај геометрискиот ред конвергира и неговата сума изнесува

$$S = \frac{a}{1-q} .$$

2. Ако $|q| > 1$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, па

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty}\left[1-q^n\right] = \infty .$$

Според тоа, во овој случај геометрискиот ред дивергира.

3. Ако $q = 1,$ тогаш имаме дека

$$S_n = \underbrace{a + a + ... + a}_{n} = na,$$

од каде што добиваме дека

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \infty,$$

што значи дека во овој случај геометрискиот ред дивергира.

4. Ако $q = -1,$ тогаш имаме дека

$$S_n = a - a + ... + (-1)^{n-1} a = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ a, & n = 2k - 1 \end{cases},$$

од каде што забележуваме дека низата парцијални суми нема граница, што значи дека во овој случај геометрискиот ред дивергира.

Погорната дискусија ја докажува следнава теорема.

4.8.3. Теорема. Геометрискиот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ конвергира за $|q| < 1,$ а дивергира за $|q| \geq 1.$ ■

4.8.4. Примери.

1) Геометрискиот ред $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} + ...$ дивергира, бидејќи неговиот коефициент е $q = 2.$

2) Геометрискиот ред $1 - 1 + 1 - 1 + ...$ дивергира, бидејќи во овој случај $q = -1.$

3) Коефициентот на геометрискиот ред $1 + 1 + ...$ е $q = 1,$, па според тоа дивергира.

4) Геометриски ред $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{n-1}}+...$ конвергира, бидејќи неговиот коефициент е $q=\frac{1}{3}$. ●

4.8.5. Примери.

1) Да ги најдеме низата од парцијални суми $\{S_n\}$ и сумата S на геометрискиот ред $\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+...+\frac{2}{5^n}+....$

За низата од парцијални суми на разгледуваниот ред имаме дека

$$S_n=\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+...+\frac{2}{5^n}=\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^{n-1}}\right)=\frac{2}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

од каде што следува дека

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{2}.$$

2) Да ги најдеме низата парцијални суми $\{S_n\}$ и сумата S на геометрискиот ред $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$, за $|x|<1$.

За низата парцијални суми $\{S_n\}$ на дадениот ред имаме

$$S_n=1+x^2+x^4+...+x^{2n}=1+x^2+(x^2)^2+...+(x^2)^{n-1}=\frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}.$$

Тогаш, за сумата на разгледуваниот ред добиваме

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^2}\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}.$$

3) Во кружница со радиус r впишан е рамностран триаголник, потоа во триаголникот е впишана кружница, во кружницата триаголник итн. Да го пресметаме збирот на периметрите на сите кружници.

За периметрите на кружниците имаме дека

$$L_0 = 2\pi r,\ L_1 = \frac{2\pi r}{2},\ L_2 = \frac{2\pi r}{2^2}, \ldots, L_{n-1} = \frac{2\pi r}{2^{n-1}}.$$

Забележуваме дека добиените вредности за периметрите на кружниците се членови на геометриски ред со коефициент $q = \frac{1}{2}$. Низата парцијални суми на добиениот геометриски ред е

$$S_n = 2\pi r + \frac{2\pi r}{2} + \frac{2\pi r}{2^2} + .. + \frac{2\pi r}{2^{n-1}} = 2\pi r\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + .. + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= 2\pi r \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 4\pi r\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Тогаш збирот на геометрискиот ред, односно збирот на периметрите на сите кружници е

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 4\pi r\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 4\pi r. \ \bullet$$

4.9. Задачи за вежбање

1. Најди барем една формула за општиот член a_n на следниве низи:

1) $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14, \ldots$

2) $4,\ \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \ldots$

3) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5},...$ 4) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9},...$

2. Запиши ги првите десет члена на низата зададена со рекурентната формула

1) $a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$

3. Најди ги n и S_n во аритметичката прогресија ако $a_1 = 4$, $d = 5$, $a_n = 49$.

4. Најди аритметичка прогресија чијшто прв член е 11, а разликата е 5. Потоа пресметај го a_{15}.

5. Најди аритметичка прогресија чијшто збир на третиот и шестиот член е 20, а разликата на деветтиот член и на вториот член е 17.

6. Во аритметичка прогресија 18, 15, 12,… најди го членот што е еднаков на петтина од збирот на сите претходни членови.

7. Колку членови на аритметичка прогресија треба да се соберат за да се добие збир 54 ако четвртиот член е еднаков на 9 а деветтиот член е еднаков на –6?

8. Пресметај ги n и q во геометриска прогресија ако $a_1 = 3, \quad a_n = 1875$ и $S_n = 2343.$

9. Најди го количникот на геометриската прогресија, ако првиот член е 2058 и четвртиот член е 6.

10. Напиши неколку члена на геометриска прогресија ако:

1) $a_6 + a_4 = -80, \quad a_7 + a_5 = 160$ 2) $a_4 - a_2 = 18, \quad a_5 - a_3 = 36$

11. Страните на еден триаголник образуваат геометриска прогресија. Најди ги страните на триаголникот ако неговиот периметар е $152cm$ а

разликата помеѓу најголемата страна и најмалата страна на триаголникот е $40cm$.

12. Три броја формираат геометриска прогресија. Ако вториот член се наголеми за 2 се добива аритметичка прогресија, а ако третиот член на аритметичката прогресија се наголеми за 16, се добива геометриска прогресија. Кои се тие броеви?

13. Испитај ја монотоноста на дадените низи:

1) $a_n = \frac{n}{2n+1}$ 2) $a_n = \frac{n+1}{n!}$ 3) $a_n = \frac{10^n}{n!}$

4) $a_n = \frac{n}{2^n}$ 5) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 6) $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$

14. Покажи дека низата со општ член a_n е ограничена одгоре, ако:

1) $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ 2) $a_n = \frac{n^3+2}{n^3}$ 3) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\log n}$

15. Покажи дека низата со општ член a_n е ограничена оддолу, ако:

1) $a_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ 2) $a_n = (-1)^n$ 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$

16. Докажи дека низата со општ член a_n е ограничена:

1) $a_n = \frac{n^2-n+1}{n^2-2n+5}$ 2) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ 3) $a_n = \frac{n+1}{n!}$

17. Покажи дека низата со општ член a_n е неограничена, ако:

1) $a_n = n+1$ 2) $a_n = \frac{n^2+3}{n}$ 3) $a_n = 3^n$

18. Со помош на дефиницијата за граница на низа докажи дека:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+6}=3$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-3}{5n+5}=\frac{4}{5}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-9}=2$

19. Пресметај ги следните граници:

1) $a_n=\frac{n^3-n^2+1}{4n^3+1000n^2+n+1}$ 2) $a_n=\frac{5n-2}{\sqrt{n^2+n+1}}$

3) $a_n=\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ 4) $a_n=\frac{1+2+3+...+n}{n+2}-\frac{n}{2}$

20. Спореди ги границите на низата со општ член:

1) $a_n=\frac{1}{n^2}$ и $b_n=1+\frac{1}{n^2}$ 2) $a_n=\frac{1}{2^n}$ и $b_n=1-\frac{1}{2^n}$

21. Со примена на сендвич теоремата докажи дека:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9n^2+1}}=0$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+4}=0$

22. Со примена на сендвич теоремата најди ги следниве граници:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2+1}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+2n}$

23. Докажи дека $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1,$ ако $y_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$

Најди ги следниве граници (задача 24 до задача 49):

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-1}{5n^2+3n+6}$ 25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-2n^2+4n-1}{7n^4+3n^2-4n+2}$ 27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n+2)(5n-7)}{n^3}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^{10}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+2}-\dfrac{n^2}{n-1}\right)$

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^2}{3n-5}-2n\right)$

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+2)^2-(n-2)^2}$

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

36. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}\right)$

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{1+2^n}$

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3^{n+1}}{2+3^n}$

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-4}{1+2^n}$

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}$

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+7^{n+2}}{5^n+7^{n+1}}$

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+9^{n+1}}{2^n+3^{n+2}}$

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{4^n}}{1+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots+\dfrac{1}{7^n}}$

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

50. Докажи дека низата $\{a_n\}$ зададена со

1) $a_1 = \sqrt{6},\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ 2) $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

е конвергентна.

51. Најди ги следниве граници:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n,\ k \in \mathbf{N}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^n$

52. Испитај ја конвергенцијата на следниве геометриски редови:

1) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}+...$ 2) $1+3+3^2+...+3^n+...$

53. Испитај ја конвергенцијата и најди ја сумата на следниве геометриски редови:

1) $1+2m+(2m)^2+...+(2m)^{n-1}+...,$ за $|m|<\frac{1}{2}$

2) $1+\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}+...+\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+...,$, за $|a|<|b|$

54. Реши ги равенките:

1) $\log_9 x + \log_9^2 x + \log_9^3 x + ... + \log_9^n + ... = 1,\quad x<9$

2) $\sqrt[x]{2}\cdot\sqrt[2x]{2}\cdot\sqrt[4x]{2}\cdot .... = 4$

55. Најди ја вредноста на следниве изрази:

1) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5...}}}$ 2) $\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7....}}}$ 3) $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5...}}}}$

56. Во кружница со радиус R вписан е рамностран триаголник, во триаголникот е вписана кружница, во кружницата е вписан триаголник, итн. Пресметај го збирот на плоштините на:

1) сите кругови 2) сите триаголници

5. Гранична вредност на функција. Непрекинатост

5.1. Дефиниција на гранична вредност и примери

Ако реалната функција $f:E\to F$ е дефинирана во точката $x=a$, односно ако $a\in D_f$, тогаш $f(a)$ претставува вредност на функцијата f во точката a. Но, ако функцијата $f:E\to F$ не е дефинирана во точката $x=a$, односно ако $a\notin D_f$, тогаш симболот $f(a)$ нема смисла, бидејќи во тој случај вредноста на функцијата е неопределена или не постои или пак не постои во множеството реални броеви.

5.1.1. Примери.

1) Вредноста на функцијата $f_1(x)=2x^2-1$ во точката $x=2$ изнесува $f_1(2)=7$.

2) Вредноста на функцијата $f_2(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$ во точката $x=2$ е неопределена, бидејќи делиме нула со нула.

3) Вредноста на функцијата $f_3(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ во точката $x=2$ не постои бидејќи нема смисла број различен од нулата да се дели со нула .

4) Вредноста на функцијата $f_4(x)=\sqrt{1-x^2}$ во точката $x=2$ не припаѓа на множеството реални броеви, бидејќи $\sqrt{-3}$ е имагинарен број. ●

Погорната дискусија е мотивација за воведување на поимот гранична вредност на функција во точка.

Нека е зададена реална функција $f:E\to F$ и нека $a,b\in\mathbf{R}$.

5.1.2. Дефиниција. Велиме дека бројот b е *гранична вредност* (лимес) на функцијата f кога x се стреми кон a ако се исполнети следните два услови:

1. $(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)\cap D_f\neq\varnothing$, за секое $\varepsilon>0,$

2. за секое $\varepsilon>0,$ постои $\delta>0$ така што ако $x\in(a-\delta,\, a+\delta)\cap D_f$ тогаш $f(x)\in(b-\varepsilon,\, b+\varepsilon)$, освен можеби за $x=a$, (бидејќи тука функцијата не мора да е дефинирана, или ако е дефинирана, нејзината вредност во точката a не мора да се совпадне со бројот b).

Ќе ја користиме ознака $b=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ за *„бројот b е гранична вредност (лимес) на функцијата f кога x се стреми кон a"*.

Очигледно е дека дефиницијата можеме да ја искажеме и на следниов начин, со помош на таканаречената „$\varepsilon-\delta$" терминологијата:

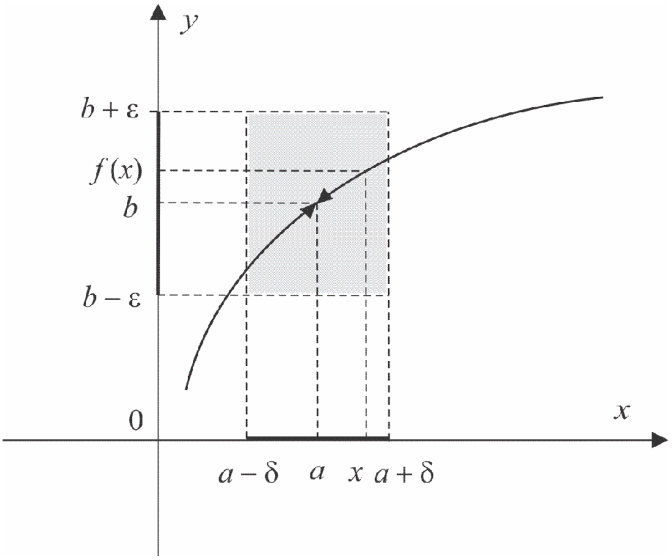
Бројот b е гранична вредност на функцијата f кога x се стреми кон a ако за секое $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ такво што $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$, односно,

$$|f(x)-b| < \varepsilon$$

кога $a-\delta < x < a+\delta$, односно,

$$|x-a| < \delta$$

освен можеби во точката $x=a$ (слика 48). Стрелките на графикот предочуваат дека функцијата f не мора да биде дефинирана во точката a, за да има граница во таа точка.



Слика 48.

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, \quad |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b| < \varepsilon .$$

Да забележиме дека вредноста на δ во дефиницијата 5.1.2. не е единствена. Кога ќе најдеме вредност δ која што го задоволува барањето од дефиницијата, тогаш било кој *помал* позитивен број δ_1, исто така ќе го задоволи барањето. Поточно, ако

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

тогаш, исто така, ќе биде точно дека

$$|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

бидејќи $\{x : |x-a|<\delta_1\}$ е подмножество од $\{x : |x-a|<\delta\}$, што значи дека ако $|f(x)-b|<\varepsilon$ е задоволено за секое x во множеството, тогаш ќе биде задоволено и за секое x во подмножеството.

5.1.3. Примери.

1) Нека $f(x)=c,$ за секое $x \in \mathbf{R}$, и нека $a \in \mathbf{R}$. Ако за секое $\varepsilon>0$ избереме $\delta=\varepsilon$, тогаш за $x \in (a-\delta, a+\delta)$ имаме $f(x) \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon),$ од каде што заклучуваме дека

$$\lim_{x \to a} f(x)=c\ .$$

2) Нека $f(x)=2x^2$, за секое $x \in \mathbf{R},$ и нека $a=2.$ Тогаш за секое $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ имаме дека

$$|f(x)-8|=|2x^2-8|=2\cdot|x+2|\cdot|x-2|$$

односно,

$$|f(x)-8|<2\cdot(4+\delta)\cdot|x-2|<2\cdot(4+\delta)\cdot\delta$$

Ако ставиме $\varepsilon=2\delta^2+8\delta$ добиваме дека

$$\delta=\frac{1}{2}\left(\sqrt{16+2\varepsilon}-4\right) \quad \text{и} \quad \delta=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{16+2\varepsilon}-4\right)$$

Бидејќи втората вредност за δ е негативна, ја земаме само првата. Така, имаме дека $\left|f\left(x\right)-8\right|<\varepsilon$ кога $\left|x-2\right|<\frac{1}{2}\left(\sqrt{16+2\varepsilon}-4\right)$, од каде што следува дека

$$\lim_{x\to 2} f\left(x\right)=8 .$$

Да забележиме, дека во овој случај граничната вредност на функцијата во точката $a=2$ се совпаѓа со вредноста на функцијата во таа точка.

3) Нека е дадена функцијата $f(x)=a^x,\ \ a>1$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно дадено. Избираме $\delta=\min\left\{\log_a\left(1+\varepsilon\right), -\log_a\left(1-\varepsilon\right)\right\}>0$. Ако $\left|x\right|<\delta$, тогаш имаме дека $1-\varepsilon=a^{\log_a(1-\varepsilon)}<a^{-\delta}<a^x<a^{\delta}<a^{\log_a(1+\varepsilon)}=1+\varepsilon,$ од каде што следува дека $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon,$ односно $-\varepsilon<a^x-1<\varepsilon.$ Тоа значи дека $\left|a^x-1\right|<\varepsilon.$ Според дефиницијата за граница на функција имаме дека

$$\lim_{x\to 0} a^x=1 .$$

4) Функцијата $f\left(x\right)=x\sin\frac{1}{x}$ не е дефинирана во точката $a=0$, но е дефинирана на секое множество кое не ја содржи оваа точка. Нека $\varepsilon>0$ е произволно. За $\delta=\varepsilon>0$ добиваме дека

$$\left|f(x)-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le\left|x\right|\cdot 1=\left|x\right|<\varepsilon \text{, кога } |\,x-0\,|<\delta=\varepsilon ,$$

од каде што следува дека $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

5) Да ја разгледаме функцијата

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, & x>2\\ 1 & x=2\\ 2x^2, & x<2\end{cases}.$$

Да забележиме дека во овој случај $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=8$, додека $f(2)=1$, односно вредноста на функцијата во точката $a=2$ не се совпаѓа со граничната вредност на функцијата во таа точка. ●

Од последните два примери е јасно зошто во дефиницијата за гранична вредност стои „освен можеби во точката $x=a$“, (бидејки тука функцијата не мора да биде дефинирана, или ако е дефинирана, нејзината вредност во точката a не мора да се совпадне со бројот b).

5.1.4. Забелешка. Променливата x се стреми кон бројот a на произволен начин, односно за произволна бројна низа $\{x_n\}\subset D_f$, $x_n\neq a$, која конвергира кон a, соодветната низа од вредности на функцијата $\{f(x_n)\}$ конвергира кон истиот број b. Во спротивно, ако постојат барем две низи кои што конвергираат кон бројот a, додека соодветните низи од вредностите на функцијата немаат иста граница, тогаш велиме дека функцијата $f(x)$ нема гранична вредност во точката a.

5.1.5. Примери.

1) Нека е дадена функцијата

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1+x & x\geq 0\end{cases}.$$

Ги разгледуваме низите $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$. Двете низи конвергираат кон нулата. Но, забележуваме дека

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f\left(-\frac{1}{n}\right)=0.$$

Според тоа, заклучуваме дека функцијата $f(x)$ нема гранична вредност во точката $a=0$.

2) Функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ нема граница во точката $a=0$. Навистина, низите $\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}$ и $\left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}$ конвергираат кон нулата, но, забележуваме дека

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{(4n+1)\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=1.$$

Според тоа, заклучуваме дека функцијата $f(x)$ нема граница во точката $a=0$. ●

Ќе разгледаме уште неколку случаи од граница на функција.

1. Ако за секое $\varepsilon>0$ постои $M>0$ така што важи $|f(x)-b|<\varepsilon$, за секое $x\in D_f$ такво што $x>M$, тогаш велиме дека „*бројот b е гранична вредост на функијата $f(x)$ кога x се стреми кон $+\propto$*“ и запишуваме (слика 49.)

$$\lim_{x\to\propto} f(x)=b.$$

Накратко, симболички запишуваме

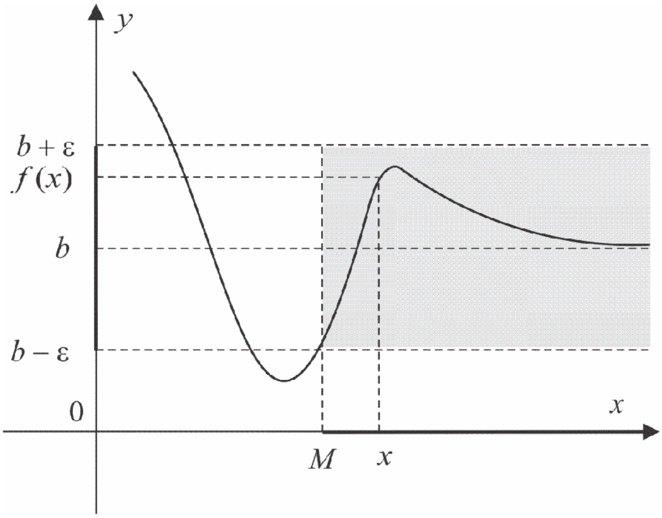
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists M>0:\forall x\in D_f,\quad x>M \quad\Rightarrow\quad |f(x)-b|<\varepsilon$$

5.1.6. Примери.

1) Нека $f(x)=\frac{1}{x}$ и нека $\varepsilon>0$ е произволно. Ставаме $M=\frac{1}{\varepsilon}$. Тогаш,

за $x > M$ имаме $\left| f(x) - 0 \right| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \frac{1}{M} = \varepsilon$, од каде што следува дека

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. ●



Слика 49.

2. Ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $M < 0$ така што $\left| f(x) - b \right| < \varepsilon$, за секое $x \in D_f$ такво што $x < M$, тогаш велиме дека „*бројот* b *е гранична вредност на функцијата* $f(x)$ *кога* x *се стреми кон* $-\infty$“ и запишуваме (слика 50.)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Накратко, симболички запишуваме

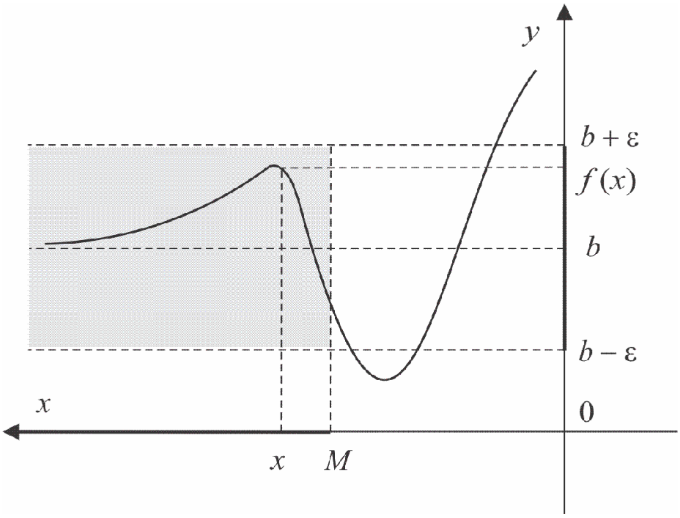
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M < 0 : \forall x \in D_f, \quad x < M \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - b \right| < \varepsilon$$

5.1.7. Примери.

1) Нека $f(x) = \frac{1}{x}$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ставаме $M = -\frac{1}{\varepsilon}$. Тогаш,

за $x < M$ имаме дека $\left|f\left(x\right)-0\right| = \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{x} < -\frac{1}{M} = \varepsilon,$ од каде што следува дека

$$\lim_{x\to-\propto}\frac{1}{x} = 0\ .\ \bullet$$



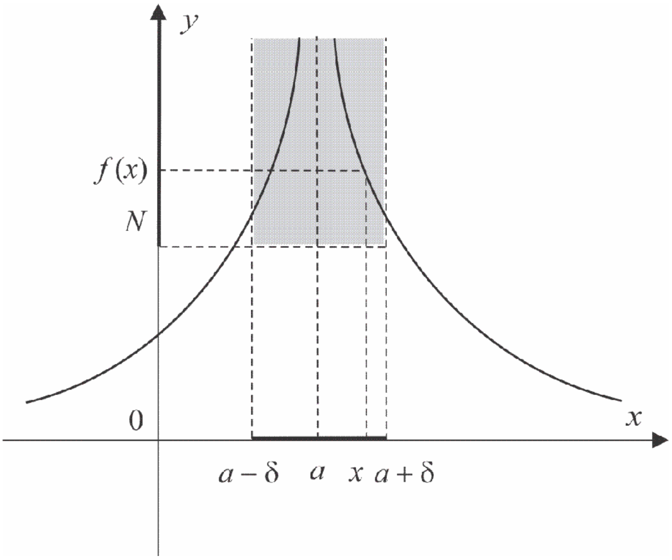
Слика 50.

3. Ако за секое $N > 0$ постои $\delta > 0$ така што $f\left(x\right) > N,$ за секое $x \in D_f$ такво што $\left|x-a\right| < \delta$, освен можеби за точката $x = a,$ тогаш велиме дека $f\left(x\right)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* a и запишуваме (слика 51.)

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = +\propto .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N > 0,\quad \exists\delta > 0 : \forall x \in D_f,\quad \left|x-a\right| < \delta \quad\Rightarrow\quad f\left(x\right) > N$$



Слика 51.

5.1.8. Примери.

1) Нека $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$ и нека N е произволен позитивен број. Избираме $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{N}}$. Тогаш за $\left|x-1\right|<\delta$ имаме дека $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{1}{\left|x-1\right|^2}>$ $>\dfrac{1}{\delta^2}=N$, што значи дека

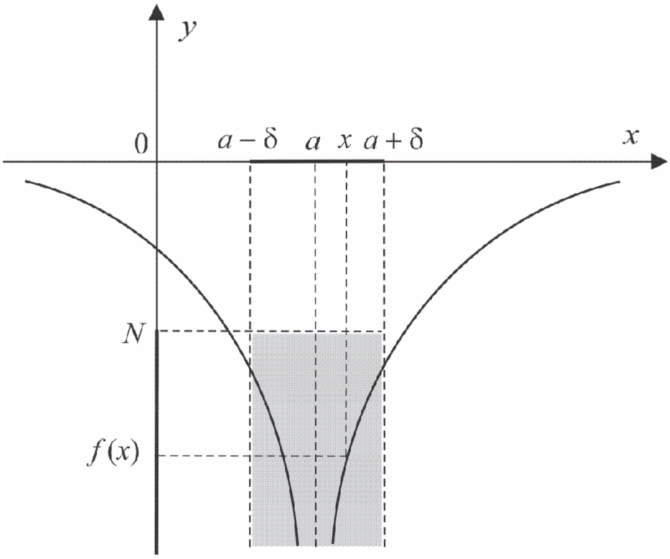
$$\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(x-1\right)^2}=\propto .$$

4. Ако за секое $N<0$ постои $\delta>0$ така што $f\left(x\right)<N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $\left|x-a\right|<\delta$, освен можеби за точката $x=a,$ тогаш велиме дека $f\left(x\right)$ *се стреми кон* $-\propto$ *кога* x *се стреми кон* a и запишуваме (слика 52.)

$$\lim_{x\to a}f\left(x\right)=-\propto .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N < 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, \quad |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < N$$



Слика 52.

5.1.9. Примери.

1) Нека $f(x) = \ln x$ и нека $N < 0$ е произволно. Избираме $\delta = e^N$. Тогаш за $x \in (0, \delta)$ имаме дека $f(x) = \ln x < \ln \delta = N$, што значи дека

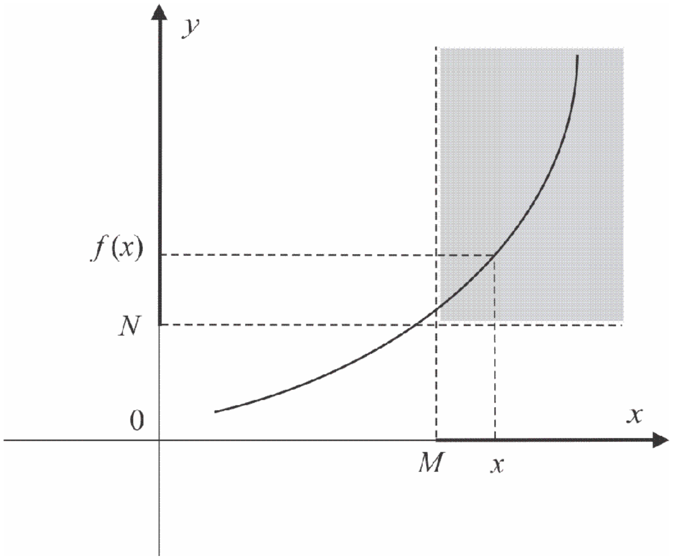
$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\propto . \;\bullet$$

5. Ако за секое $N > 0$ постои $M > 0$ така што $f(x) > N$, за секое $x \in D_f$ такво што $x > M$, тогаш велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* $\propto$ и запишуваме (слика 53.)

$$\lim_{x \to \propto} f(x) = +\propto .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N > 0, \quad \exists M > 0 : \forall x \in D_f, \quad x > M \quad \Rightarrow \quad f(x) > N$$



Слика 53.

5.1.10. Примери.

1) Нека $f\left(x\right)=2x^2$ и нека $N>0$ е произволно. Избираме $M=\sqrt{\dfrac{N}{2}}$. Тогаш за $x>M$ имаме дека $f\left(x\right)=2x^2>2M^2=N,$ што значи дека

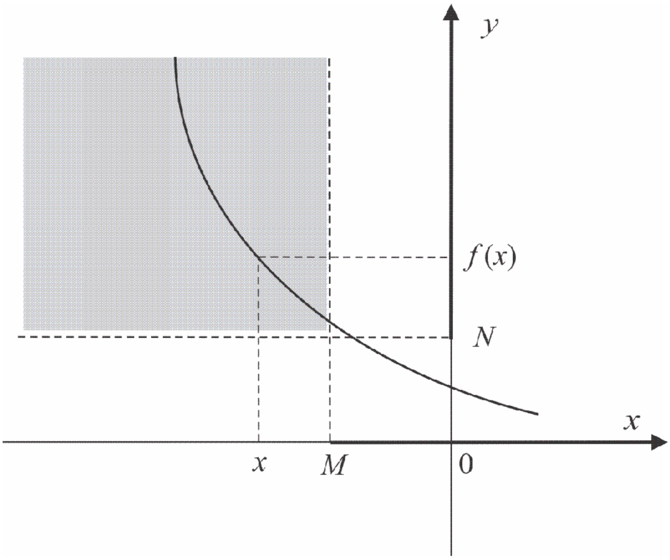
$$\lim_{x\to\propto} f(x)=\propto . \quad \bullet$$

6. Ако за секое $N>0$ постои $M<0$ така што $f\left(x\right)>N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $x<M$, тогаш *велиме дека* $f\left(x\right)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* $-\propto$ и запишуваме (слика 54.)

$$\lim_{x\to-\propto} f(x)=\propto .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N>0,\quad \exists M<0:\forall x\in D_f,\quad x<M \quad\Rightarrow\quad f\left(x\right)>N$$



Слика 54.

5.1.11. Примери.

1) Нека $f(x)=2^{-x}$. За произволно $N>1$ избираме $M=-\log_2 N<0$. Ако $x<M$, тогаш имаме $f(x)=\frac{1}{2^x}>\frac{1}{2^M}=2^{\log_2 N}=N,$ односно

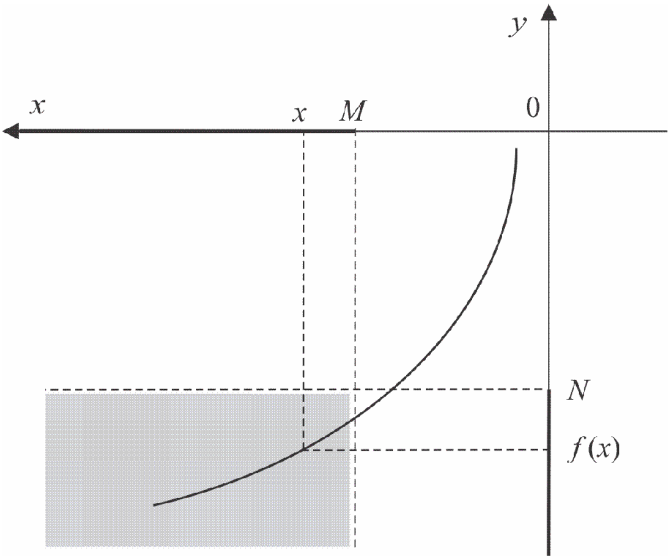
$$\lim_{x\to-\propto} 2^{-x}=\propto. \quad \bullet$$

7. Ако за секое $N<0$ постои $M<0$ така што $f(x)<N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $x<M$, тогаш *велиме дека* $f(x)$ *се стреми кон* $-\propto$ *кога* x *се стреми кон* $-\propto$ и запишуваме (слика 55.)

$$\lim_{x\to-\propto} f(x)=-\propto.$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N<0,\quad \exists M<0:\forall x\in D_f,\quad x<M \quad\Rightarrow\quad f(x)<N$$



Слика 55.

5.1.12. Примери.

1) Нека $f\left(x\right)=x^3$. За произволно $N<0$ ставаме $M=\sqrt[3]{N}$. Ако $x<M$, тогаш имаме дека $f\left(x\right)=x^3<M^3=N$, односно

$$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty . \quad \bullet$$

8. Ако за секое $N<0$ постои $M>0$ така што $f\left(x\right)<N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $x>M$, тогаш *велиме дека* $f\left(x\right)$ *се стреми кон* $-\infty$ *кога* x *се стреми кон* ∞ и запишуваме (слика 56.)

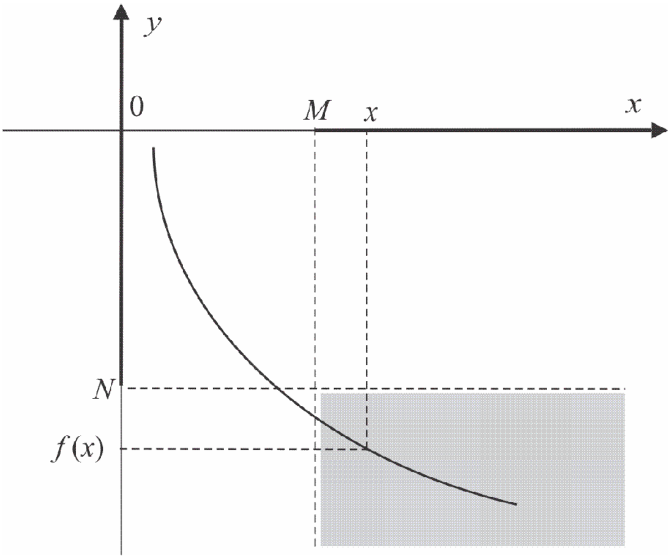
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N<0, \quad \exists M>0:\forall x\in D_f, \quad x>M \quad \Rightarrow \quad f\left(x\right)<N$$

5.1.13. Примери.

1) Нека е дадена функцијата $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$. Нека $N<0$ е произволно.



Слика 56.

Избираме $M = 2^{-N} > 0$. Ако $x > M$, тогаш $f\left(x\right) = \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 2^{-N} = N$

што значи дека

$$\lim_{x \to \propto} \log_{\frac{1}{2}} x = -\propto . \bullet$$

9. Ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што $\left|f\left(x\right) - b\right| < \varepsilon,$ за секое $x \in D_f$ такво што $0 < x - a < \delta,$ тогаш велиме дека b *е гранична вредност на функцијата* f *кога* x *се стреми кон* a *од десно* и запишуваме (слика 57.)

$$\lim_{x \to a+} f\left(x\right) = b.$$

Накратко, симболички запишуваме

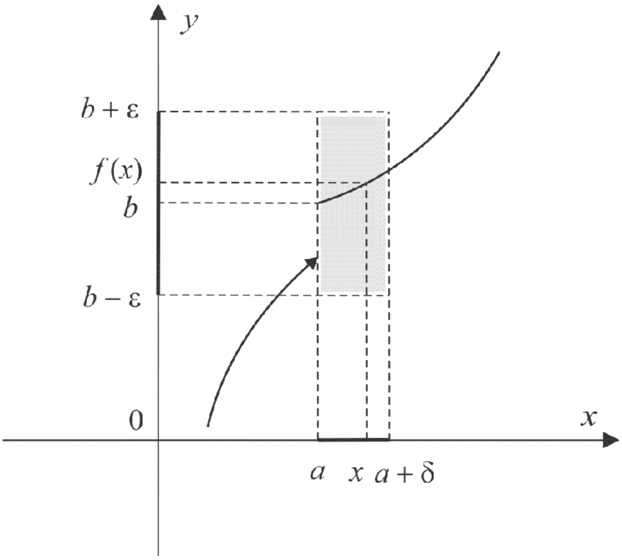
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, \quad 0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(x\right) - b\right| < \varepsilon$$

5.1.14. Примери.

1) Нека е дадена функцијата $f\left(x\right) = \sqrt{x}.$

и нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Избираме $\delta = \varepsilon^2$. Тогаш, ако $0 < x - 0 < \delta$ имаме дека $\left|f(x) - 0\right| = \left|f(x)\right| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$, односно

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0. \quad \bullet$$



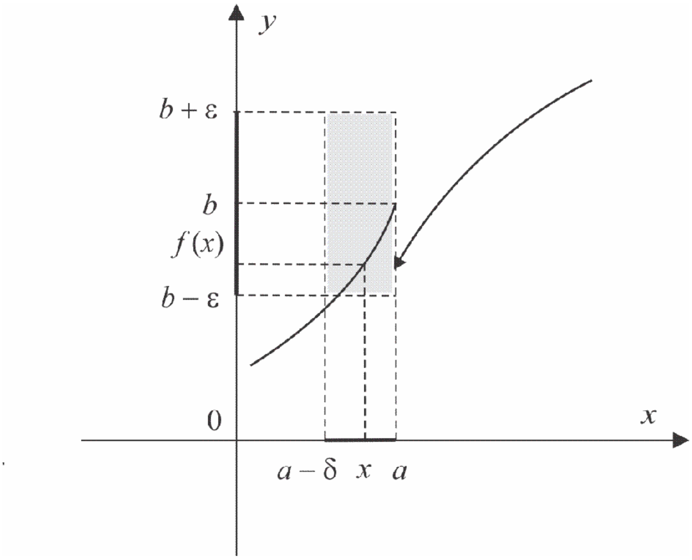
Слика 57.

10. Ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што $\left|f(x) - b\right| < \varepsilon,$ за секое $x \in D_f$ такво што $-\delta < x - a < 0,$ тогаш велиме дека b *е гранична вредност на функцијата* f *кога* x *се стреми кон* a *од лево* и запишуваме (слика 58.)

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b.$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, \quad -\delta < x - a < 0 \quad \Rightarrow \quad \left|f(x) - b\right| < \varepsilon$$



Слика 58.

5.1.15. Примери.

1) Нека е дадена функцијата

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$$

и нека $\varepsilon>0$ е произволно. Избираме $\delta=\varepsilon.$ Тогаш, ако $-\delta<x-0<0$ имаме дека $|f(x)-1|=0<\delta=\varepsilon$, односно

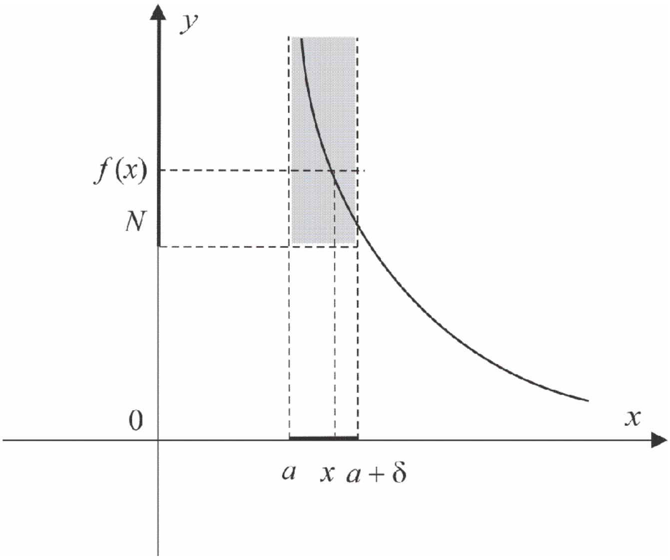
$$\lim_{x\to 0-} f(x)=1. \bullet$$

11. Ако за секое $N>0$ постои $\delta>0$ така што $f(x)>N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $0<x-a<\delta,$ тогаш велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* a *од десно* и запишуваме (слика 59.)

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\propto .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N>0,\quad \exists\delta>0:\forall x\in D_f,\quad 0<x-a<\delta \quad\Rightarrow\quad f(x)>N$$



Слика 59.

5.1.16. Примери.

1) Нека е дадена функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ и нека $N>0$ е произволно. Избираме $\delta=\frac{1}{N}$. Тогаш за $0<x-0<\delta$ имаме $f(x)=\frac{1}{x}>\frac{1}{\delta}=N$, што значи дека

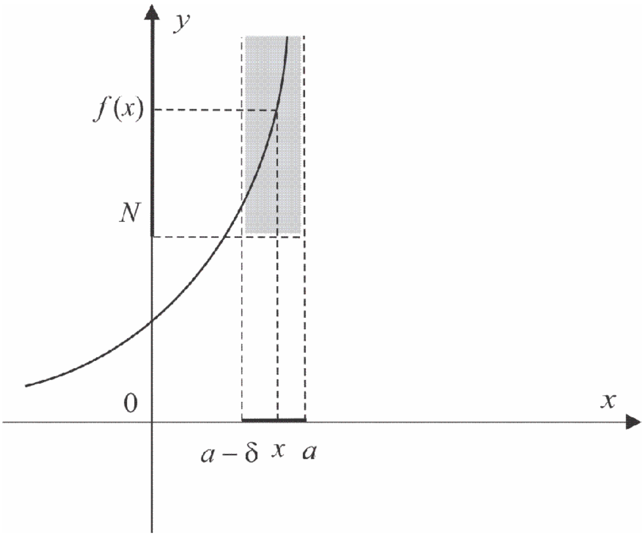
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\propto . \ \bullet$$

12. Ако за секое $N>0$ постои $\delta>0$ така што $f(x)>N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $-\delta<x-a<0,$ тогаш велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $+\propto$ *кога* x *се стреми кон* a *од лево* и запишуваме (слика 60.)

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\propto .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N>0, \quad \exists\delta>0:\forall x\in D_f, \quad -\delta<x-a<0 \quad\Rightarrow\quad f(x)>N$$



Слика 60.

5.1.17. Примери.

1) Нека е дадена функцијата $f(x)=tgx$ и нека N е произволен позитивен број. Избираме $\delta=arcctgN.$ Тогаш за секое $\frac{\pi}{2}-\delta<x<\frac{\pi}{2}$ имаме дека $\cos\delta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)<\sin x<1$ и $\sin\delta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)>\cos x>0$, од каде што следува дека $f(x)=tgx>ctg\delta=N$. Според тоа, имаме дека

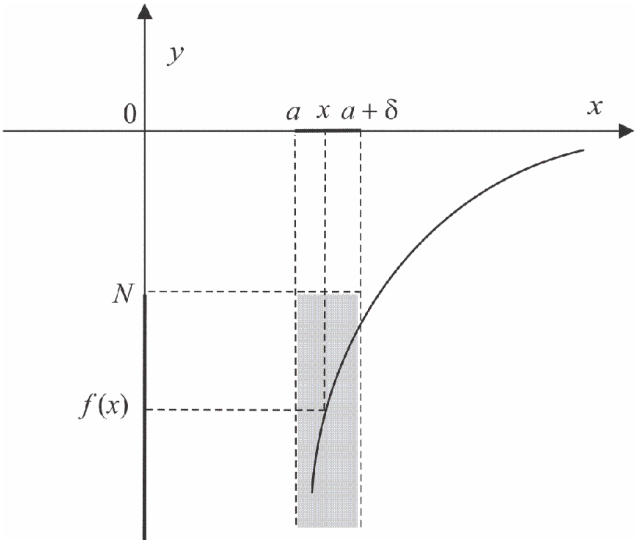
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tgx=\infty\ .$$ ●

13. Ако за секое $N<0$ постои $\delta>0$ така што $f(x)<N,$ за секое $x\in D_f$ такво што $0<x-0<\delta,$ тогаш велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $-\infty$ *кога* x *се стреми кон* a *од десно* и запишуваме (слика 61.)

$$\lim_{x\to a+} f(x)=-\infty\ .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N>0,\quad \exists\delta>0:\forall x\in D_f,\quad 0<x-a<\delta\quad\Rightarrow\quad f(x)<N$$



Слика 61.

5.1.18. Примери.

1) Ќе покажеме дека $f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} -\dfrac{1}{(x-3)^2} = -\propto$. Нека $N<0$ е произволно. Избираме $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{-N}}$. Тогаш, за $0<x-3<\delta$ важи $(x-3)^2<\delta^2$.

Оттука следува дека $f(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2} < -\dfrac{1}{\delta^2} = -\dfrac{1}{\dfrac{1}{-N}} = N$ што значи

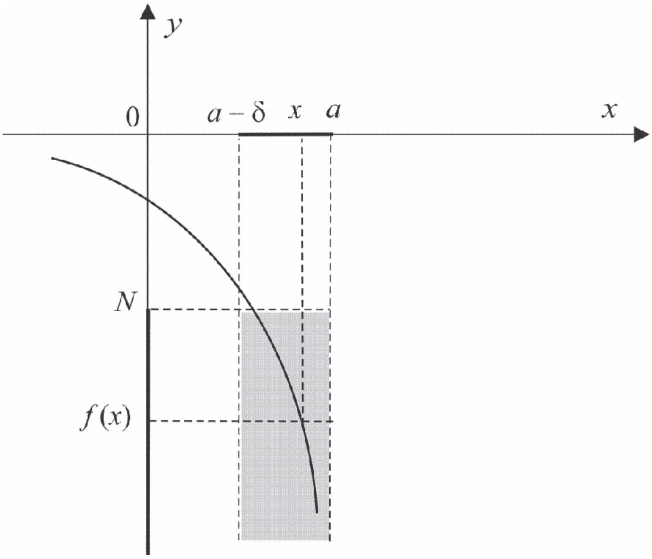
$$\lim_{x\to 3^+} -\frac{1}{(x-3)^2} = -\propto .$$ ●

14. Ако за секое $N<0$ постои $\delta>0$ така што $f(x)<N$, за $x\in D_f$ такво што $-\delta<x-a<0$, тогаш велиме дека $f(x)$ *се стреми кон* $-\propto$ *кога* x *се стреми кон* a *од лево* и запишуваме (слика 62.)

$$\lim_{x\to a-} f(x) = -\propto .$$

Накратко, симболички запишуваме

$$\forall N<0,\quad \exists\delta>0 : \forall x\in D_f,\quad -\delta<x-a<0 \quad\Rightarrow\quad f(x)<N$$



Слика 62.

5.1.19. Примери.

1) Нека $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ и нека $N<0$ е произволно. Избираме $\delta=-\dfrac{3}{N}$.

Тогаш, за $-\delta<x-2<0$ имаме дека $f(x)=\dfrac{3}{x-2}<-\dfrac{3}{\delta}=N$, од каде што следува дека

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\frac{3}{x-2}=-\infty\,. \bullet$$

Да забележиме дека функцијата f има гранична вредност во точката a ако и само ако постојат левата и десната граница, и тие се еднакви, односно

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x).$$

5.2. Аритметички операции со гранични вредности

Слично како кај гранична вредност на низа се докажува следната теорема.

5.2.1. Теорема. Нека f и g се реални функции и нека $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B.$ Тогаш важат следниве тврдења:

1. Граничната вредност на збирот $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ е еднаква на збирот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B$$

2. Граничната вредност на производот $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ е еднаква на производот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B$$

3. Со претпоставка дека $B\neq 0$, граничната вредност на количникот $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ е еднаква на количникот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{B},\ g(x)\neq 0$$

4. Ако постои $\varepsilon>0$ така што важи $f(x)\le h(x)\le g(x)$ за секое $x\in(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$, тогаш

$$A\le \lim_{x\to a} h(x)\le B\,.$$

Да напоменеме дека истите правила важат и ако $x\to\pm\propto$.

Забелешка. Последното тврдење е познато како *сендвич теорема за граница на функција*. Како последица, ако $A=B=L$, тогаш имаме дека $\lim\limits_{x\to a} h(x)=L.$

5.2.2. Примери.

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x+1}{3x^2+4x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+4x\right)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}x+1}{3\lim\limits_{x\to 2}x^2+4\lim\limits_{x\to 2}x}=\frac{2\cdot 4-2+1}{3\cdot 4+4\cdot 2}=\frac{7}{20}$$

2) $$\lim_{x\to\propto}\frac{2x^2-x+1}{3x^2+4x}=\lim_{x\to\propto}\frac{2x^2-x+1}{3x^2+4x}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\propto}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\propto}\left(3+\frac{4}{x}\right)}=$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{x\to\propto}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\propto}\frac{1}{x^2}}{3+4\lim\limits_{x\to\propto}\frac{1}{x}}=\frac{2-0+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

3) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)}=1$$

4) $$\lim_{x\to\propto}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\right)=\lim_{x\to\propto}\frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}\right)\cdot\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\propto}\frac{x+4-(x+3)}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to\propto}\frac{1}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)}=0\,.\,\bullet$$

5.3. Асимптоти

За испитувањето на текот на функција, особено за цртање на нејзиниот график корисно е да се најдат асимптотите. Асимптоти на графикот на функцијата се прави во рамнината, кон кои што дел од графикот на функцијата, односно некое подмножество на точки $(x, f(x))$, се стреми кон некоја права p, кога точката $(x, f(x))$ бескрајно се оддалечува од координатниот почеток. Овде под терминот „се стреми“ се подразбира дека граничната вредност на растојанието од точките со координати $(x, f(x))$ до дадената права p е еднакво на нула.

5.3.1. Дефиниција. *Асимптота* на графикот на функцијата f е секоја права p за која што важи:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-p\right)=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-p\right)=0 .$$

Во зависнот од тоа каква е заемната положба на правата со координатните оски, разликуваме три вида на асимптоти:

- хоризонтална асимптота, ако правата p е паралелна со $x-$оската,

- вертикална асимптота, ако правата p е паралелна со $y-$оската,

- коса асимптота, ако правата p не е паралелна ниту со $x-$оската ниту со $y-$оската. Притоа, дозволено е графикот да ја сече правата p во конечно многу или во бесконечно многу точки. Исто така, график на функција може да има и повеќе асимптоти.

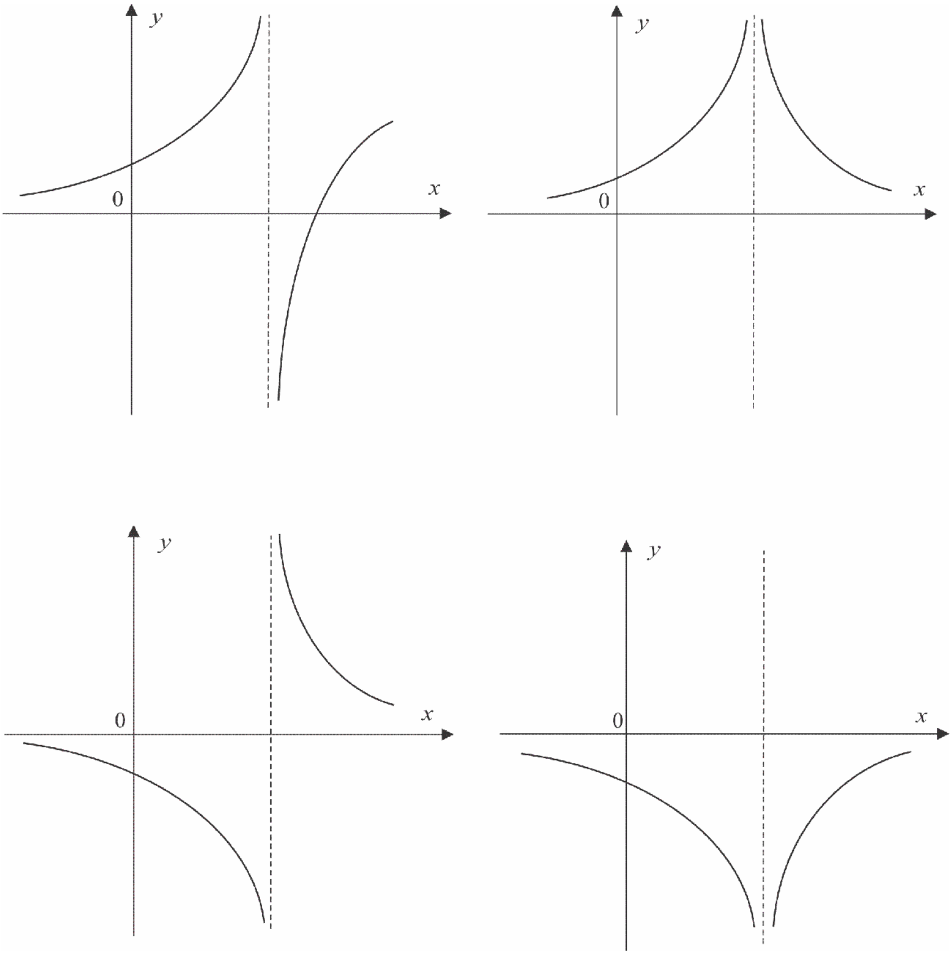
5.3.1. Асимптоти паралелни со $y-$ оската

Ако асимптотата е паралелна со $y-$ оската, тогаш нејзината равенка е од облик $x=a,\ \ a\in\mathbf{R}$. Тогаш $\left|f(x)\right|\to\infty$ кога $x\to a$, односно важи барем еден од четирите услови:

$$\lim_{x\to a-} f(x)=+\infty,\ \ \lim_{x\to a-} f(x)=-\infty,\ \ \lim_{x\to a+} f(x)=+\infty \text{ или } \lim_{x\to a+} f(x)=-\infty.$$

Значи, функцијата тежи кон бескрај, кога $x \to a$, па графикот G_f се приближува до правата $x = a$ без да ја допре некогаш.

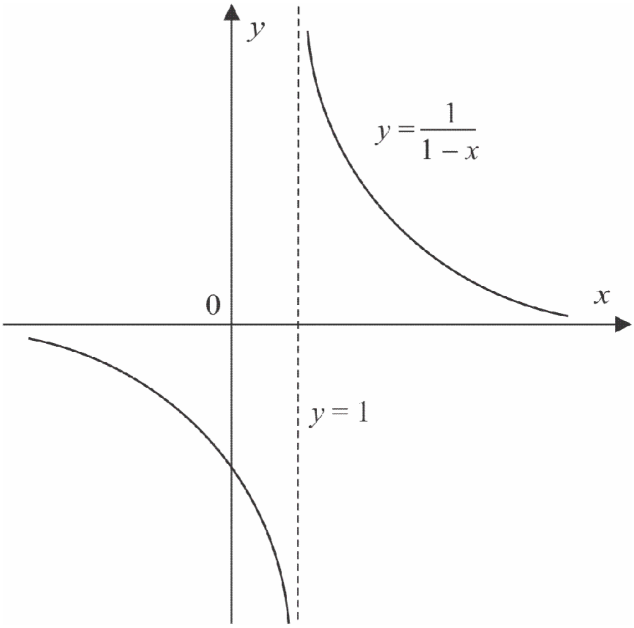
Асимптотата $x = a$ ја викаме *вертикална асимптота*.



Слика 63.

На слика 63. се прикажани можните случаи за асимптотата $x = a$.

За функција од облик $f\left(x\right) = \frac{r\left(x\right)}{q\left(x\right)}$ можни вертикални асимптоти се наоѓаат со анулирање на именителот $q(x)$ и решавање на равенката $q(x)=0.$ Секое реално решение $x=a$ на таа равенка е можна вертикална асимптота.



Слика 64.

5.3.1.1. Примери.

1) Нека е дадена функцијата $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Имаме дека $D_f=\mathbf{R}\setminus\{1\}$. Да ја разгледаме правата $x=1.$ Таа е паралелна со $y-$оската. За функцијата f бараме граница кога $x\to 1-$ (од лево) и кога $x\to 1+$ (од десно). Имаме

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x-1}=-\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1+}\frac{1}{x-1}=\infty . \ \bullet$$

Забележуваме дека кога $x\to 1$ функцијата се оддалечува во бесконечност и графикот G_f се приближува до правата $x=1$ без да ја допре некогаш (слика 64.).

5.3.2. Асимптоти паралелни со $x-$ оската

Ако асимптотата е паралелна со $x-$ оската, тогаш нејзината равенка е од облик $y=b,\ \ b\in\mathbf{R}$. Тогаш имаме дека $\left|f\left(x\right)-b\right|\to 0$ кога $x\to\propto$ (или $x\to-\propto$), односно важи барем еден од двата услови:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b\,.$$

Значи, кога $x\to\propto$ (или $x\to-\propto$) функцијата се приближува до правата $y=b$ без да ја допре некогаш.

Асимптотата $y=b$ ја викаме *хоризонтална асимптота.*

Ако важи првиот услов, тогаш „десната страна“ на графикот се стреми кон правата $y=b$, а ако важи вториот услов, тогаш „левата страна“ на графикот се страми кон правата $y=b$. Но можно е левата страна на графикот да се стреми кон една хоризонтална асимптота, а десната страна се стреми кон друга хоризонтална асимптота.

5.3.2.1. Примери.

1) Нека е дадена функцијата $f\left(x\right)=arctgx.$ Имаме дека $D_f=\mathbf{R}.$ За функцијата f бараме граница кога $x\to\propto$ и кога $x\to-\propto$. Добиваме

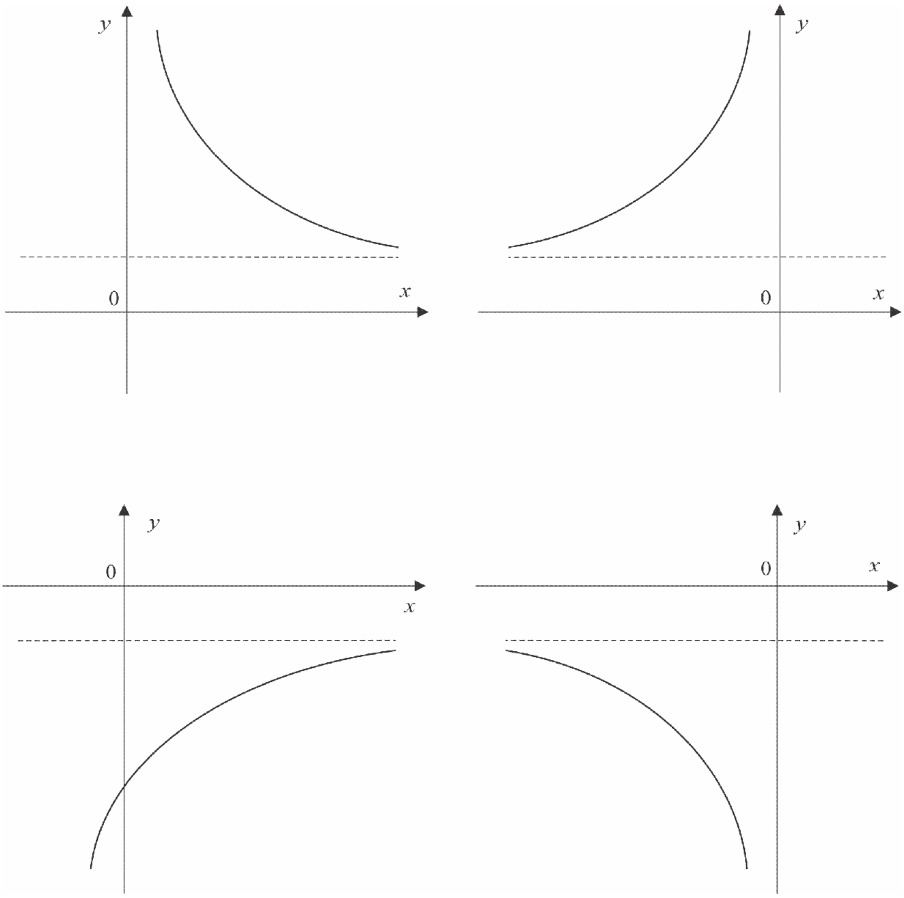
$$\lim_{x\to\propto} arctgx=\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\propto} arctgx=-\frac{\pi}{2}$$

што значи дека десната страна на графикот на функцијата се стреми кон правата $y=\frac{\pi}{2}$, а левата страна се стреми кон правата $y=-\frac{\pi}{2}$, односно правите $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=-\frac{\pi}{2}$ се хоризонтални асимптоти.

2) Графиците на функциите

$$f(x)=1+\frac{x}{x^2+1}, \quad f(x)=1-\frac{x}{x^2+2} \quad \text{и} \quad f(x)=1+\frac{\sin x}{x}$$

имаат иста хоризонтална асимптота $y=1,$ бидејќи за сите нив важи $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$. Но тие се разликуваат по тоа што првиот график се наоѓа над асимптотата за големи вредности на x, вториот график се наоѓа под асимптотата, а третиот график бесконечно многу пати ја сече асимптотата. Исто така, за доволно мали (негативни) вредности на аргументот првиот график се наоѓа под асимптотата, вториот е над асимптотата, а третиот график повторно ја сече асимптотата во бесконечно многу точки. ●



Слика 65.

Затоа пред исцртувањето на графикот потребно е да видиме каков е знакот (+ или -) на разликата $f(x)-b$ за доволно големи вредности на x и доволно мали вредности на x. Притоа ако $f(x)-b>0$ за секое $x>M$, тогаш графикот е над асимптотата, а ако $f(x)-b<0$ за секое $x>M$, тогаш графикот е под асимптотата.

На слика 65. се прикажани можните случаи за асимптотата $y=b$.

5.3.3. Коси асимптоти

Коса асимптота за функцијата f е правата $y=mx+n$ ако постои и е еднаква на нула барем една од границите:

$$\lim_{x\to\propto}\left(f\left(x\right)-\left(mx+n\right)\right) \text{ или } \lim_{x\to-\propto}\left(f\left(x\right)-\left(mx+n\right)\right).$$

За функцијата f коса асимптота се наоѓа со определување на вредностите на m и n од равенството $\lim\left(f\left(x\right)-\left(mx+n\right)\right)=0$. Со делење на ова равенство со x добиваме дека

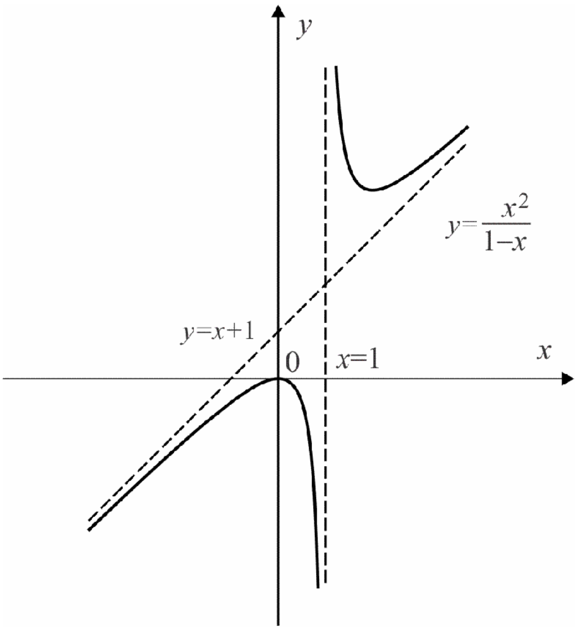
$$\lim_{x\to\propto}\frac{f\left(x\right)}{x}=m \tag{5.3.1}$$

Бројот n го определуваме со границата

$$\lim_{x\to\propto}\left(f\left(x\right)-mx\right)=n \tag{5.3.2}$$

Аналогно се одредува и асимптотата на кривта за $x\to-\propto$.

Да напоменеме дека посебно ги разгледуваме случаите кога $x\to\propto$ и $x\to-\propto$. Исто како и кај хоризонталните асимптоти и овде е пожелно да видиме каков е знакот на разликата $f(x)-mx-n$. Ако тој е позитивен, графикот на функцијата е над асимптотата, а аке е негативен, графикот на функцијата е под асимптотата.



Слика 66.

Значи, кривата f има коса асимптота $y = mx + n$ ако и само ако постојат истовремено двата лимеси (5.3.1.) и (5.3.2.). Ако барем еден од нив не постои, тогаш кривата нема коси асимптоти.

5.3.3.1. Примери.

1) Нека е дадена функцијата $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Имаме дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Имаме дека

$$m = \lim_{x\to\propto} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \text{ и } n = \lim_{x\to\propto} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x\to\propto} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = 1$$

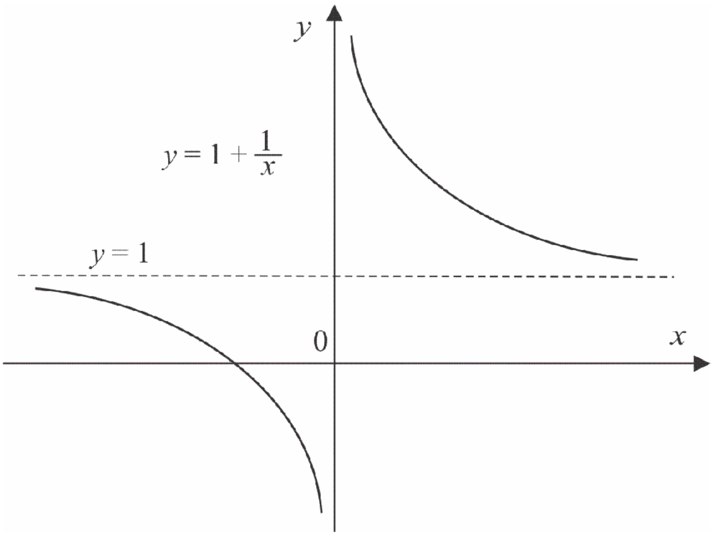
Асимптотата има равенка $y = x + 1$. Покрај тоа, правата $x = 1$ е вертикална асимптота (слика 66.).

2) Нека е дадена функцијата $f(x)=1+\frac{1}{x}$. Имаме дека $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Правата $x=0$ е вертикална асимптота. Се поставува прашањето дали функцијата има други асимптоти?

Бидејќи

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0 \quad \text{и} \quad n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

добиваме дека правата $y=1$ е хоризонтална асимптота (слика 67). ●



Слика 67.

5.4. Непрекинати функции

При изучувањето на поимот на граница на реална функција разгледувавме граница на функција f во точка a во два случаи, кога $a\in D_f$ и $a\notin D_f$. Случајот $a\in D_f$ е од посебен интерес, бидејќи не доведува до поимот непрекинатост на функција, кој е еден од основните поими во математичка анализа. Пред да дадеме строга математичка формулација, ќе го воведеме интуитивно поимот за непрекинатост.

Да забележиме дека графикот на функцијата $f\left(x\right)=x^2$ може да се нацрта со еден потег, без да се одвои моливот од хартијата, за сите вредности од реалната права.

При цртањето на графикот на функцијата $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ откако ќе го нацртаме графикот за вредностите од интервалот $\left(-\infty,0\right)$ моливот мора да го одвоиме од хартијата за да го нацртаме графикот за вредностите од интервалот $\left(0,+\infty\right)$. Забележуваме дека графикот на функцијата не може да се нацрта со еден потег, без да се одвои моливот од хартијата.

Погорната дискусија ни дава за право да кажеме дека разгледуваните функции битно се разликуваат во својата природа.

Прецизна дефиниција за поимот непрекинатост на функција би била следната.

5.4.1. Дефиниција. За функцијата $f:E\to F$ велиме дека е *непрекината* во точката $a\in D_f$, ако е исполнето

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right)=f\left(a\right).$$

Симболички,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\ \forall x\in D_f,\quad \left|x-a\right|<\delta\quad\Rightarrow\quad \left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon .$$

Функцијата f е *прекината* (*има прекин*) во точката a ако таа не е непрекината во a, односно ако важи

$$\exists\varepsilon>0,\quad \forall\delta>0:\ \left|x-a\right|<\delta\quad\Rightarrow\quad \left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|\geq\varepsilon .$$

5.4.2. Примери.

1) Да покажеме дека функцијата $f(x)=3x+1$ е непрекината во точката $a=1$. Нека $\varepsilon>0$ е дадено. Избираме $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. Тогаш за секој реален број x таков што $|x-1|<\delta$, имаме дека

$$\left|f(x)-f(1)\right|=|3x+1-4|=3\,|x-1|<3\cdot\delta=3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

2) Да покажеме дека функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ е непрекината во точката $a=2$. За произволно $\varepsilon>0$ избираме $\delta=\sqrt{2}\varepsilon$. Тогаш за секој ненегативен реален број x таков што $|x-2|<\delta$, имаме

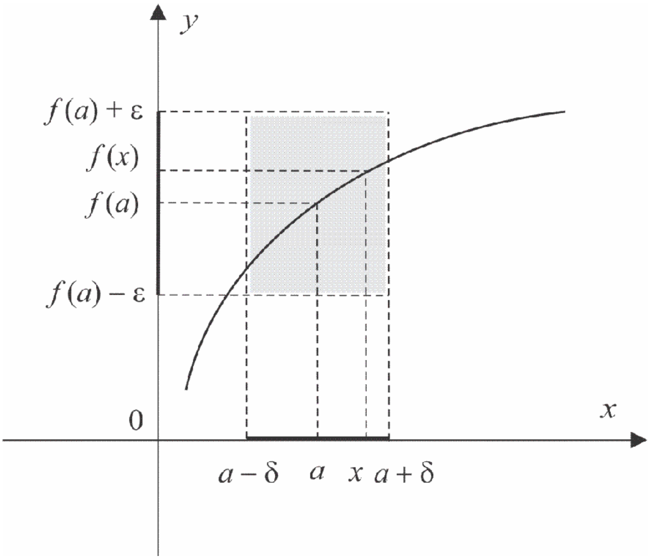
$$\left|f(x)-f(2)\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right|=\frac{|x-2|}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\leq$$

$$\leq\frac{|x-2|}{\sqrt{2}}<\frac{\delta}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}}=\varepsilon\,. \bullet$$

Ќе дадеме геометриско толкување на поимот за непрекинатост на функција. Нека $G_f=\left\{\left(x,f(x)\right):x\in D_f\right\}$ е графикот на функцијата f. Да нацртаме правоаголник со центар во точката $\left(a,\,f(a)\right)$ таков што едната страна му е интервалот $(a-\delta,\,a+\delta)$, а другата страна му е интервалот $\left(f(a)-\varepsilon,f(a)+\varepsilon\right)$.

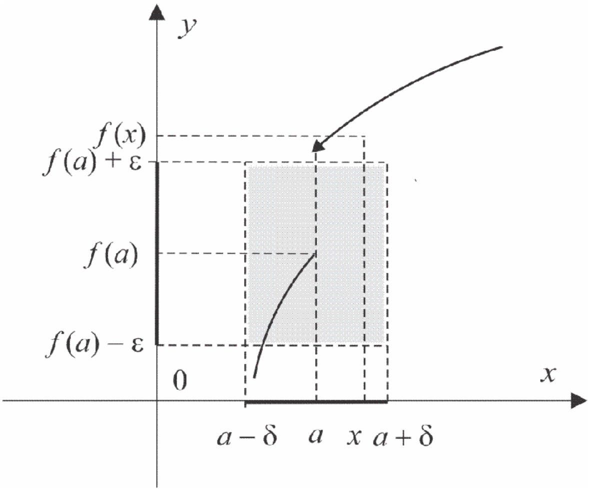
Разгледуваме два случаи:

1. функцијата е непрекината во точката a и
2. функцијата има прекин во точката a .



Слика 68а.

Во првиот случај, (слика 68а), кога x се менува меѓу $a-\delta$ и $a+\delta$, точката $(x, f(x))$ се движи по графикот на функцијата останувајќи во наведениот правоаголник. Додека во вториот случај (слика 68б), точката $(x, f(x))$ излегува од наведениот правоаголник.



Слика 68б.

За функцијата f велиме дека е *непрекината на множеството* E ако е непрекината во секоја точка од множеството.

5.4.2. Примери.

1) Функцијата $f(x)=|x|$ е непрекината на $\mathbf{R}$. Навистина, нека $a\in\mathbf{R}$ и $\varepsilon>0$ е произволно. Избираме $\delta=\varepsilon$. Ако $|x-a|<\delta$, тогаш од теоремата 2.1.7. имаме дека $\big||x|-|a|\big|\le|x-a|<\delta=\varepsilon$, што значи дека

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}|x|=|a|=f(a). \;\bullet$$

Можеме да класифицираме точно три вида прекини на функција.

1. Ако постои граница на функцијата кога $x\to a$, но таа е различна од $f(a)$, односно ако важи

$$\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$$

или ако $a\notin D_f$, тогаш функцијата има *отклонлив прекин* во точката a.

2. Ако левата и десната граница постојат но се различни меѓу себе, односно

$$\lim_{x\to a^-} f(x)\neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

тогаш функцијата има *прекин од прв вид во точката* a.

3. Ако барем една од границите $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ не постои, тогаш функцијата има *прекин од втор вид во точката* a.

5.4.3. Примери.

1) Да ја испитаме непрекинатоста на функцијата

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}.$$

Дефиниционата област на функцијата е множеството $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, па затоа $a = 0$ е точка на прекин за функцијата. Понатаму, од фактот дека $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (види 5.5.1.) следува дека $a = 0$ е точка на отклонлив прекин на функцијата $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Тоа подразбира дека функцијата $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ може да ја додефинираме во точката $a = 0,$ така што таа да биде непрекината на целата реална права. Со други зборови, ако ставиме

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

тогаш функцијата $f(x)$ ќе биде непрекината во точката $a = 0$, што значи и на целата реална права.

2) Да го разгледаме однесувањето на функцијата $f(x) = [x]$, читаме „цел дел од икс“, каде што $[x]$ е најголемиот цел број помал од x, во точките $a = n,\ \ n \in \mathbf{Z}$. Во наведените точки левата и десната граница постојат но се различни меѓу себе, односно

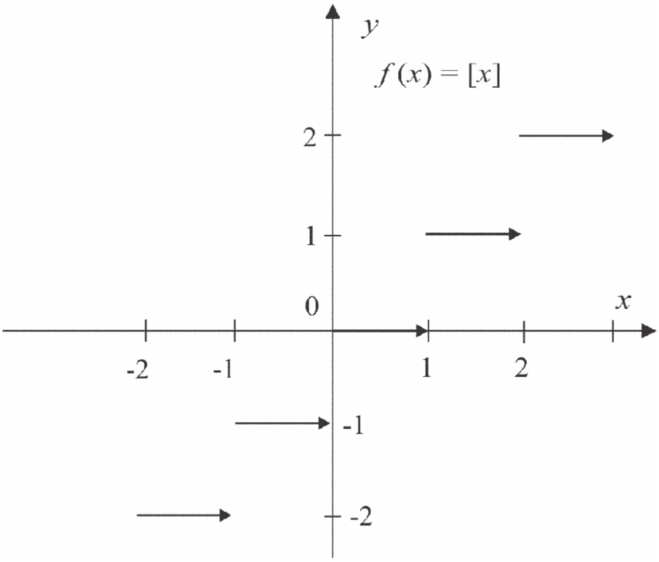
$$\lim_{x\to n^-} f(x) = n - 1 \text{ и } \lim_{x\to n^+} f(x) = n$$

што значи дека функцијата има прекин од прв вид во секоја од точките $a = n,\ \ n \in \mathbf{Z}$ (слика 69).

3) Да го разгледаме однесувањето на функцијата

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \in (-\infty, 2] \\ x, & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

во точката $a = 2$. Имаме



Слика 69.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{4} = 1 \text{ и } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2 .$$

Бидејќи $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ заклучуваме дека функција има прекин од прв вид во точката $a = 2$.

4) Да ја испитаме непрекинатоста на функцијата

$$f(x) = \frac{1}{x-1} .$$

Дефиниционата област на функцијата е множеството $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, што значи $a = 1$ е точка на прекин на $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Понатаму, имаме дека

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

што значи дека точката $a = 1$ е точка на прекин од втор ред на функцијата $f(x) = \frac{1}{x-1}$. ●

Користејќи ја теорема 5.2.1. го добивме следното тврдење.

5.4.4. Теорема: Ако функциите f и g се непрекинати во точка $a \in D_f \cap D_g$, тогаш во точката a се непрекинати и функциите $f+g$, λf, (за $\lambda \neq 0$), fg и $\dfrac{f}{g}$ (при услов $g(a) \neq 0$). ■

Ќе покажеме дека композиција на две непрекинати функции е непрекината функција.

5.4.5. Теорема. Ако f е непрекината функција во точката a и g е непрекината функција во точката $b = f(a)$, тогаш $g \circ f$ е непрекината функција во точката a.

Доказ. Имаме дека

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{x \to a} g\left(f(x)\right) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g\left(f(a)\right) = g \circ f(a). \ ■$$

5.4.6. Последица. Нека $A \subset \mathbf{R}$ и $\{a_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, е низа во A која конвергира кон $a_0 \in A$. Ако $f : A \to B$ е непрекината функција во точката a_0, тогаш и низата $\{f(a_n)\}$, $n \in \mathbf{N}$, конвергира и важи

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a_0). ■$$

5.4.7. Примери.

1) Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$

Таа е непрекината во точката $a = 1$, бидејќи имаме дека

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \text{ и } f(1)=2.$$

Нека $\{a_n\}$ е произволна низа со општ член $a_n \neq 1$ и таква што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. За низата $\{f(a_n)\}$ имаме

$$f(a_n) = \frac{a_n^2-1}{a_n-1} = \frac{(a_n-1)(a_n+1)}{a_n-1} = a_n+1,$$

па затоа добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n+1) = 2 \text{ и } f(1)=2.$$

2) Функцијата $f(x)=|x|$ е непрекината во секоја точка $a \in \mathbf{R}$ бидејќи

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}|x| = |a|$$

Заради последица 5.4.6., ако низата $\{a_n\}$ конвергира кон a, тогаш конвергира и низата $\{|a_n|\}$ и важи

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| = |a|. \; ●$$

Исто така, инверзната функција на непрекината функција е непрекината функција.

5.4.8. Теорема: Нека f е строго монотона, непрекината функција дефинирана на сегментот $[a,b]$. Тогаш инверзната функција е непрекината на сегментот $[f(a), f(b)]$. ■

5.4.9. Дефиниција. Велиме дека функцијата $f: E \to F$ е непрекината на множеството $E_1 \subset E$ ако е непрекината во секоја точка од E_1.

Во продолжение, без доказ ќе дадеме некои својства на непрекинатите функции.

5.4.10. Теорема. Нека функцијата f е дефинирана и непрекината на (a,b) и нека $f(x_0)>0$ за некое $x_0 \in (a,b)$. Тогаш постои $\delta>0$ такво што за секое $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$ важи $f(x)>0$. ■

Да забележиме дека теоремата важи ако наместо $f(x_0)>0$ и $f(x)>0$ ставиме $f(x_0)<0$ и $f(x)<0$.

5.4.11. Теорема. Нека функцијата f е дефинирана и непрекината на сегментот $[a,b]$. Тогаш важат следниве тврдења:

1) таа е ограничена на $[a,b]$ и

2) постојат точки од сегментот во кои таа ги достигнува својот максимум и минимум. ■

Со помош на дефиницијата за непрекинатост и погорните теореми може да покажеме дека сите основни елементарни функции се непрекинати на својата област на дефинираност. Во продолжение ќе испитаме непрекинатост на некои класи на функции кои често ги срекаваме.

1. Константната функција $f(x)=c,\ c\in\mathbf{R}$ е непрекинатата на својата област на дефинираност, односно на целата реална права.

2. Идентичната функција $f(x)=x$ е непрекинатата на својата област на дефинираност, односно на целата реална права.

3) Користејќи ја теоремата 5.4.4. заклучуваме дека се непрекинати на својата област на дефинираност, односно на целата реална права и функциите:

$$f(x)=x+a\,,\ f(x)=ax\,,\ f(x)=x^n,\ n\in\mathbf{N}\,,\ x\in\mathbf{R}\,.$$

Според тоа, секој полином *од* $n-$ти степен

$$f_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n\text{ , } a_i\in\mathbf{R}\text{ и } a_n\neq 0\text{ ,}$$

е непрекината на целата реална права.

4) Понатаму, може да заклучиме дека секоја рационална функција

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)},$$

каде што $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми, е непрекината функција на секое множество точки $a\in\mathbf{R}$ во кои што $q(a)\neq 0$.

5.4.12. Примери.

1) Функцијата $f(x)=0$ е непрекинатата на целата реална права.

2) Функцијата $f(x)=2x^3+4x-1$ е непрекинатата на реалната права.

3) На $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ се непрекинати функциите $f(x)=\dfrac{1}{x}$ и $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. ●

4) Тригонометриските функции се непрекинати во својата област на дефинираност.

- Синусната функција е непрекината на целата реална права. Имаме дека $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, за секое $a\in\mathbf{R}$, бидејќи важи

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right|=|x-a|\text{ .}$$

- Косинусната функција е непрекината на целата реална права. Имаме дека $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$ бидејќи важи

$$|\cos x-\cos a|=2\left|-\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}\right|\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right|=|x-a|\text{ .}$$

Непрекинатоста на косинусната функцијата следува и од фактот дека $\cos$ е композицијата $\sin\circ f$ каде што $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$. Според тоа, косинусната функција е непрекината на целата реална права, како композиција на две функции кои се непрекинати на целата реална права.

- Тангенсната функција е непрекината на својата дефинициона област. Имаме дека $\lim\limits_{x\to a} tgx = tga$, $a\neq\frac{2k+1}{2}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, бидејќи

$$\lim_{x\to a} tgx = \frac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = tga \text{ .}$$

- На ист начин се покажува дека

$$\lim_{x\to a} ctgx = ctga \text{ ,} \quad a\neq k\pi,\, k\in\mathbf{Z}$$

што значи дека котангенсната функција е непрекината на својата дефинициона област.

5.4.13. Примери.

1) Функцијата $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ е непрекината на целата реална права.

2) Функцијата $f(x)=\frac{ctgx(2x)}{2tg(3x)}$ е непрекината на својата област на дефинираност, односно во сите точки $a\neq\frac{2k+1}{6}\pi$. ●

5) Функцијата $f(x)=\sqrt[n]{x}$ е инверзна на функцијата $f(x)=x^n$, па е непрекината на својата дефинициона област како инверзна функција на непрекината функција.

5.4.14. Примери.

1) Функцијата $f\left(x\right)=\sqrt[3]{2x-1}$ е непрекината на целата реална права. ●

6) Инверзните на тригонометриските функции

$$f\left(x\right)=\arcsin x\,,\ f\left(x\right)=\arccos x\,,\ f\left(x\right)=arctgx \text{ и } f\left(x\right)=arcctgx$$

се непрекинати на својата област на дефинираност како инверзни функции на непрекинати функции.

5.4.15. Примери.

1) Функцијата $f\left(x\right)=\arcsin(2x+3)$ е непрекината на својата област на дефинираност.

2) Функцијата $f\left(x\right)=arctg\left(\sqrt{2x}\right)$ е непрекината на својата област на дефинираност. ●

7) Експоненцијалната функција е непрекината на целата реална права. Навистина, имаме дека

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0+x_0} = \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x_0} = a^{x_0}\,.$$

Притоа, искористивме дека $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ (види пример 5.1.3.).

8) Логаритамската функција е непрекината на својата област на дефинираност како инверзна на експоненцијалната, односно како инверзна функција на непрекината функција.

5.4.15. Примери.

1) Функцијата $f\left(x\right)=xe^{\frac{1}{x-4}}$ е непрекината на својата област на дефинираност.

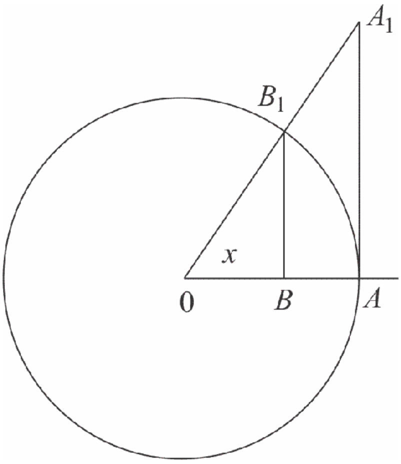
2) Функцијата $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{3x-4}+2\right)$ е непрекината на својата област на дефинираност. ●

5.5. Гранична вредност на некои функции – специјални граници

Ќе наведеме неколку гранични вредности кои не се очигледни, но се јавуваат при решавањето на различни типови на задачи. Некои нивни примени кај пресметувањето на други гранични вредности ќе бидат прикажани во примерите што следуваат.

1. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

Доказ. Бидејќи функцијата $\frac{\sin x}{x}$ е парна, доволно е да се разгледа случајот кога $x>0$ (слика 70.). За плоштините на триаголникот OA_1A, кружниот исечок B_1OA и триаголникот OB_1B важат неравенствата $\cos x\sin x<x<tgx$. Бидејќи $\sin x>0$, делејќи со $\sin x$ добиваме дека $\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$.



Слика 70.

Бидејќи $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=1$, применувајќи ја теоремата 5.2.1. добиваме дека $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, од каде што следува дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

5.5.1. Примери.

1) Да ја најдеме границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$. Имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3}{2}\,\frac{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}}{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}}=\frac{3}{2}$$

бидејќи со смените $y=3x$ и $z=2x$ имаме дека $y\to 0$ и $z\to 0$ кога $x\to 0$.

2) За наоѓање на границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ ја користиме тригонометриската трансформација

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2.$$

Потоа со смената $y=\dfrac{x}{2}$ имаме дека $y\to 0$ кога $x\to 0$, од каде што добиваме дека $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

3) За наоѓање на границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$ воведуваме смена $y=\arcsin x.$ Тогаш $x=\sin y,$ за $-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ и $x\to 0\Leftrightarrow y\to 0.$ Сега имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1.\ \bullet$$

2. $\boxed{\lim\limits_{x\to\propto}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$

Доказ. Нека x е произволен реален број и нека $[x]$ е цел дел од x (види пример 5.4.3.). Тогаш имаме дека $[x]\le x<[x]+1$. Ако запишеме дека $[x]=k$, добиваме дека $1+\frac{1}{k+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{k}$ од каде следува

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\le\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x+1}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+2}.$$

Бидејќи за $x\to\propto$ следува $k\to\propto$ и $k+1\to\propto$, применувајќи ја теорема 5.2.1. добиваме дека

$$\lim_{x\to\propto}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\propto}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}}{\lim\limits_{x\to\propto}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

Забелешка. При определување на граници кои се сведуваат на наведената специјална граница често ќе го користиме правилото:

Ако $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ (A и B конечни броеви), тогаш

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=A^{B}$$

што се должи на трансформацијата $\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ и непрекинатоста на функциите e^{x} и $\ln x$.

5.5.2. Примери.

1) Да ја најдеме границата $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{4x}{x-1}}=e^{4}$$

при што користевме дека $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$ (со смената $y=\frac{x-1}{2}$ имаме дека $y\to\propto$ кога $x\to\propto$) и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-1}=4$. ●

3. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\propto}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$

Доказ. Со смената $y=-x$, добиваме дека $y\to\propto$ кога $x\to-\propto$.

$$\lim_{x\to-\propto}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to\propto}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to\propto}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to\propto}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}$$

$$=\lim_{z\to\propto}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e$$

бидејќи со смената $z=y-1$ имаме дека $z\to\propto$ кога $y\to\propto$.

5.5.3. Примери.

1) Да ја најдеме границата $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}$, $k\in\mathbf{Z}$. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{k}=e^{k}$$

при што користевме дека $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$ (со помош на смената $y=\frac{x}{k}$ имаме дека $y\to\pm\propto$ кога $x\to\propto$.) и $\lim\limits_{x\to\infty} k=k$.

2) Да ја најдеме границата $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$. Имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{-3}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{-3}{x}\right)^x}=\frac{e^2}{e^{-3}}=e^5$$

бидејќи $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x=e^{-3}$, заради претходниот пример. ●

4. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$

Доказ. Со смената $y=\frac{1}{x}$ имаме дека $y\to\propto$ кога $x\to 0$. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\propto}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

5.5.4. Примери.

1) За да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$, $k\in\mathbf{Z}$ ја користиме смената $y=\frac{1}{kx}$. Тогаш имаме дека $y\to\pm\propto$ кога $x\to 0$, па добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\propto}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky}=\lim_{y\to\propto}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k=e^k.$$

2) За да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$, $k\in\mathbf{Z}$, го користиме резултатот од претходниот пример. Имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e^k=k\,.●$$

5. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$

Доказ. Бидејќи логаритамската функција е непрекината на својата дефинициона област, имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1\,.$$

5.5.5. Примери.

1) За да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$, $k\in\mathbf{Z}$, го користиме резултатот од пример 5.5.4. Имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{kx}=k\cdot 1=k.$$

2) Да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$. Имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a+x}{a}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{\frac{x}{a}}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$$

каде што воведовме смена $y=\frac{x}{a}$ за која важи $y\to 0$ кога $x\to 0$. ●

6. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}}$

Доказ. Врската меѓу логаритамските функции $\log_a$ и $\ln$ е дадена со

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},\text{ за секое } x > 0.$$

Заради 5. добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln a}\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \frac{1}{\ln a}.$$

5.5.6. Примери.

1) Да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_3(1+kx)}{x}$, $k\in\mathbf{Z}$. Имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1+kx)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\log_3(1+t)}{\frac{t}{k}} = k\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(1+t)}{t} = \frac{k}{\ln 3}$$

при што ја воведуваме смената $y = kx$ за која што важи $y\to 0$ кога $x\to 0$. ●

7. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1}$

Доказ. Ако во 5. ставиме смена $y = \ln(1+x)$, имаме дека $y\to 0$ кога $x\to 0$. Тогаш $1 = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}$ од каде што добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1.$$

5.5.7. Примери.

1) Да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$, $\alpha\neq\beta$. Имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}e^{\beta x}\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{x}=$$

$$=(\alpha-\beta)\lim_{x\to 0}e^{\beta x}\lim_{x\to 0}\frac{e^{(\alpha-\beta)x}-1}{(\alpha-\beta)x}=(\alpha-\beta)\cdot 1\cdot 1=\alpha-\beta$$

при што ја воведовме смената $(\alpha-\beta)x=y$, за која важи дека $y\to 0$ кога $x\to 0.$

8. $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$

Доказ. Ако во 6. ставиме смена $y=\log_a(1+x),$ имаме дека $y\to 0$ кога $x\to 0.$ Тогаш $\frac{1}{\ln a}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{a^y-1}$ од каде што добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\,.$$

5.5.8. Примери.

1) Да ја најдеме границата $\lim_{x\to 0}\frac{a^{kx}-1}{mx}$, $k,m\in\mathbf{Z}.$ Со помош на смената $y=kx$ за која важи $y\to 0$ кога $x\to 0$, добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{kx}-1}{mx}=\frac{k}{m}\lim_{t\to 0}\frac{\left(a^t-1\right)}{t}=\frac{k}{m}\ln a\,.\ \bullet$$

За наоѓање на граница на функција често пати е потребно комбинирање на употребата на специјалните граници.

5.5.9. Примери.

1) Да ја определиме границата $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Изразот $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ можеме да го трансформираме на следниот начин:

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)} = e^{\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}} = e^{\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

Ако ставиме $\cos x - 1 = y$, тогаш $y \to 0$ кога $x \to 0$, па добиваме дека

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1} = \lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

при што ја користевме специјалната граница 5. Освен тоа, со примена на специјалната граница 1. добиваме дека

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Од споменатото следува дека

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}}.$$ ●

5.6. Задачи за вежбање

1. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim_{x\to1}(x+2)=3$ 2) $\lim_{x\to2}(3x-1)=5$ 3) $\lim_{x\to-1}(5x-3)=-8$

4) $\lim_{x\to\frac{1}{3}}9x=3$ 5) $\lim_{x\to3}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$ 6) $\lim_{x\to4}\sqrt{x-4}=0$

2. Докажи дека $\lim_{x\to2}(3x+2)=8$. Колкаво треба да биде δ за $\varepsilon=\frac{1}{1000}$?

3. Пресметај ги следните граници:

1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{4}$ 2) $\lim_{x\to0,1}-5$ 3) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\log_2 3$

4. Најди ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}(6x-1)$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}(x+4)^2$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3-2x^2+4)$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+2}$ 5) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x}{2+x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^3+x^2+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$ 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^7-3x^5+x^2}{x^7-4x^2}$

5. Пресметај ги следните гранични вредности:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x-2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+2x-x^2}{2x^2-x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{1+x^4}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+3x^3}{1-x-2x^3}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x^3}{1-x^2}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{2x^4-3x^2+1}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$ 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{x^2+2}\right)$

6. Најди ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-x+6}{x+3}$

7. Пресметај ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-2x+1}$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+2}{x^2-6x+8}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-5x+3}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-7x+6}$ 8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{2x^2-12x+16}$ 9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-9x+6}$

8. Пресметај ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x(x-1)}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ 5) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$ 8) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ 9) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

9. Најди ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{3x^3+2x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{3-4x+x^4}$ 5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-13x^2+36}{x^3-27}$ 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2-x+16}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-1}{x^4-1}$

10. Пресметај ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to 6^-}\dfrac{x}{x-6}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+1}{x-2}$ 3) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x+4}{4-x}$

11. Најди ги следните гранични вредности:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{1-\sqrt{x-1}}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x-4}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2}$

12. Пресметај ги следните гранични вредности:

1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{a-1}}$, $a>1$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

13. Најди ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}$ 5) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{a+x}-a}{\sqrt[3]{a+x}-a}$

14. Пресметај ги границите:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4+x}-\sqrt{x})$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x+x^2}-x)$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$ 9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$.

15. Пресметај ги следните гранични вредности:

1) $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{2x-3}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{2x-3}{x+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$

16. Докажи дека $\lim\limits_{x\to +\infty} q^x = +\infty$ кога $q > 1$.

17. Најди ги асимптотите на следните функции:

1) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$ 2) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 3) $f(x)=\frac{x^4+1}{x^5+1}$

4) $f(x)=e^x$ 5) $f(x)=e^x+e^{-x}$ 6) $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$

7) $f(x)=tgx$ 8) $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ 9) $f(x)=\frac{\cos x}{x}$

18. Најди ја вредноста на параметарот k, за која што функцијата $f(x)=\frac{2x^k+x+1}{x+2}$ има коса асимптота, а потоа најди ги сите нејзините асимптоти.

19. Со помош на дефицијата за непрекинатост покажи дека функцијата $f(x)=x^2$ е непрекината во точката $a=3$.

20. Најди ги точките на прекин на следните функции:

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x^2-4}$ 2) $f(x)=\frac{e^x-2e^{-2x}}{x^2(x-4)}$ 3) $f(x)=\frac{\sqrt{tg(x+1)}}{\ln(x^2-16)}$

21. Најди ги точките на прекин и определи ги интервалите на непрекинатост на следните функции:

1) $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ 2) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$ 3) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

22. Објасни зошто следните функции се непрекинати за назначените вредности на x:

1) $f(x)=\sqrt{\sin x},\ 0\le x\le \pi$ 2) $f(x)=\operatorname{tg} x\ (x\ne k\pi,\ k\in \mathbf{Z})$

3) $f(x)=\sin(\ln x),\ x>0$ 4) $f(x)=e^x\cos x\ ,\ x\in \mathbf{R}$

5) $f(x)=x^x,\ x>0$ 6) $f(x)=\sin x+\cos x\ ,\ x\in \mathbf{R}$

23. Објасни зошто следните функции се непрекинати на својата област на дефинираност:

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{x-5}$ 2) $f(x)=x^4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2x}\right)$

3) $f(x)=tg\left(\dfrac{1}{4}\cos(\ln x)\right)$ 4) $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\sin\left(e^{-x}\right)\right)$

24. Испитај ја непрекинатоста на следниве функции:

1) $f(x)=\dfrac{x}{3x-4}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x-16}$ 3) $f(x)=x^3\sin\dfrac{1}{x}$

4) $f(x)=e^{\frac{2x}{x-3}}$ 5) $f(x)=x^2e^{\frac{2x-1}{\sqrt{3x+6}}}$ 6) $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{x-1}\right)$

25. Испитај ја непрекинатоста на функцијата

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in(-\infty,0]\\ x^2+1, & x\in(0,\infty).\end{cases}$$

26. За кои вредности на параметарот k функцијата

$$f(x)=\begin{cases}7x-2, & x\le 1\\ kx^2, & x>1\end{cases}$$

е непрекината на целата реална права?

27. Докажи дека $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ ако и само ако $\lim\limits_{x\to a} |\,f(x)|=0$.

28. Пресметај ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{\sin 5x}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{tgx}$ 5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x+t\,g\,x}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\left(1-x^2\right)}{1-x}$ 8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{\sin x}}$ 9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$

29. Пресметај ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$ 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$ 8) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}$ 9) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x}$

30. Пресметај ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{2x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5}{x^2+2}\right)^{3x^2-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{3x^2}$ 9) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}$

31. Пресметај ги следните граници:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1-tg\, x)}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos x)}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$

32. Пресметај ги следните гранични вредности:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

33. Пресметај ги границите:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2+6x+16}-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{\sin 3x-\sin x}$

6. Изводи на функции

6.1. Дефиниција и примери

Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана на интервалот (a,b) и нека x и $x + \Delta x$ се точки во интервалот (a,b), при што Δx може да биде позитивно или негативно. Разликата $\Delta x = (x + \Delta x) - x$ ја викаме *нараснување на аргументот* x, а разликата $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ја викаме *нараснување на функцијата*. Од количникот

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

дознаваме колку „брзо“, односно колку „споро“, се менува вредноста на функцијата $f(x)$ кога аргументот се менува од x до $x + \Delta x$.

6.1.1. Дефиниција. Велиме дека функцијата $y = f(x)$ е *диференцијабилна* во точка $x \in (a,b)$ ако постои граничната вредност

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Границата (ако постои) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ се вика *прв извод* на функцијата $y=f(x)$ во точката x и се означува со y' или со $f'(x)$.

Ако граничната вредност не постои, тогаш велиме дека функцијата не е диференцијабилна во точката x.

Забелешка. Да забележиме дека првиот извод на функцијата може да биде и бесконечен, односно дека не се исклучени случаите

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=+\infty \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\infty .$$

Во натамошните разгледувања под изразот *функцијата има извод* ќе ги подразбираме само конечните изводи.

6.1.2. Теорема. Ако функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точка x, тогаш таа е непрекината во таа точка.

Доказ. Нека $y=f(x)$ е диференцијабилна функција во точка x, односно нека постои границата

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Тогаш, имаме дека

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{\Delta x}\right]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x)\cdot 0=0$$

од каде што следува дека

$$\lim_{\Delta x\to 0} f\left(x+\Delta x\right)=f\left(x\right)$$

што значи дека функцијата f е непрекината во точката x. ■

6.1.3. Примери.

1) Нека $f\left(x\right)=c,\ c$ е реална константа. Тогаш имаме дека

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

2) За функцијата $f\left(x\right)=x$ имаме дека

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)-x}{\Delta x}=1.$$

3) Ако $f\left(x\right)=x^n,\ \ n\in\mathbf{N},$ тогаш имаме дека

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x-x\right)\left(\left(x+\Delta x\right)^{n-1}+\left(x+\Delta x\right)^{n-2}x+\cdots+\left(x+\Delta x\right)x^{n-2}+x^{n-1}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(x+\Delta x\right)^{n-1}+\left(x+\Delta x\right)^{n-2}x+\cdots+\left(x+\Delta x\right)x^{n-2}+x^{n-1}\right)=nx^{n-1}.$$

4) Ако $f\left(x\right)=\cos x,$, тогаш имаме дека

$$f'\left(x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\Delta x\right)-\cos x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

5) Ако $f\left(x\right)=\sin x,$ тогаш добиваме дека

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

6) За функцијата $f(x)=e^x$ имаме дека

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=$$

$$=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x$$

7) Нека $f(x)=a^x,\ a>0,\ x\in\mathbf{R}$. Имаме дека

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=$$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

8) Нека $f(x)=\ln x,\ x>0$. Имаме дека

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}.$$

9) Нека $f(x)=\log_a x,\ \ a>0,\ a\neq 1,\ x>0.$ Имаме дека

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x\ln a}.$$

10) За функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ имаме дека

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

11) За функцијата $f(x)=|x|$ имаме дека

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0\end{cases}$$

односно, граничната вредност која што го определува изводот не постои, што значи функцијата не е диференцијабилна во точката $x=0.$ Ова е пример на непрекината функција која не е диференцијабилна во некоја точка. Оттука, заклучуваме дека не важи обратното тврдење на теоремата 6.1.2, односно секоја непрекината функција не е диференцијабилна. ●

Аналогно, како и за гранична вредност на функција, и овде може да воведеме поим за лев и десен извод на функција. За таа цел претпоставуваме дека функцијата $y=f(x)$ е определена на интервалот (a,b) и $x\in(a,b)$.

6.1.4. Дефиниција. *Лев извод на функција* f во точка x се нарекува левата гранична вредност (ако постои)

$$f'_{-}(x)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Аналогно, *десен извод на функција* f во точка x се нарекува граничната вредност (ако постои)

$$f'_{+}(x)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Функција f има извод во точката x ако и само ако постојат левиот и десниот извод на функцијата во точката x и тие се еднакви, односно важи условот $f'_{-}(x)=f'_{+}(x)$. Тогаш, имаме дека

$$f'(x)=f'_{-}(x)=f'_{+}(x).$$

6.1.5. Примери.

1) За левиот извод и десниот извод на функцијата $f(x)=|x|$ во точката $x=0$ наоѓаме дека

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

односно, $f'_{-}(0)=-1$, додека $f'_{+}(0)=1$. Бидејќи левиот и десниот извод во точката $x=0$ се различни, можеме да заклучуваме дека $f'(0)$ не постои.

2) Да провериме дали функцијата

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geq 1\\ x^2+2, & x<1\end{cases}$$

е диференцијабилна во точката $x=1$. За левиот и десниот извод на дадената функција во точката $x=1$ наоѓаме дека

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\left[(1+\Delta x)^2+2\right]-3}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x(\Delta x+2)}{\Delta x}=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\left[2(1+\Delta x)+1\right]-3}{\Delta x}=$$

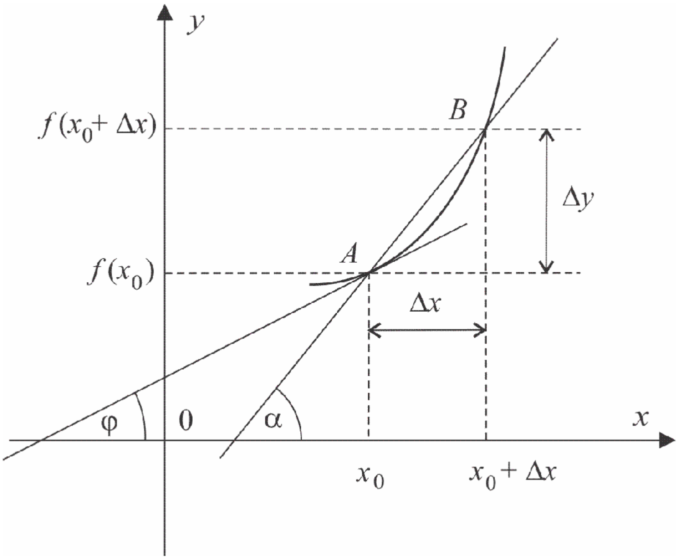
$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2+2\Delta x+1-3}{\Delta x}=2$$

од каде што забележуваме дека $f'_-(1)=f'_+(1)=2,$ што значи дека функцијата е диференцијабилна во точката $x=1,$ и притоа $f'(1)=2.$ ●

6.2. Геометриска и механичка интерпретација на извод

Тангента на крива

Да го разгледаме графикот на непрекината функција $y=f(x)$ дефинирана на интервалот (a,b) (слика 71.). Правата $AB,$ каде што точките $A(x_0,f(x_0))$ и $B(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ се од графикот, се вика *секанта* на кривата $y=f(x)$, определена со точките A и $B.$ Знаеме дека коефициентот на правецот на правата AB е еднаков на количникот



Слика 71.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$, кој што е еднаков на тангенс од аголот α, за $0 \le \alpha \le \pi$, односно од аголот меѓу секантата и позитивниот дел од $x-$ оската. Така имаме дека

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Нека пуштиме точката B да се движи по кривата и да се стреми да се совпадне со точката A. Притоа, во општ случај, секантата ја менува својата положба. Доколку постои гранична положба на секантата кога точката B се стреми кон точката A, тогаш правата што ја зазема таа гранична положба се вика *тангента* на кривата $y = f(x)$ во точката A. Нејзиниот коефициент на правец е даден со изразот

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Според тоа, равенката на тангентата на кривата $y = f(x)$ во точката

$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ е дадена со

$$f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Според тоа, изводот на функцијата $y = f\left(x\right)$ во точка x_0 претставува коефициент на правец на тангентата на графикот на таа функција во точка од графикот со апсциса x_0, што претставува *геометриско толкување на поимот за извод.*

6.2.1. Примери.

1) Коефициентот на правецот на тангентата на кривата $f\left(x\right) = x^3$ во точката $A\left(1,1\right)$ е $f'\left(1\right) = 3.$ Равенката на тангентата е $y = 1 + 3\left(x - 1\right),$ односно $y = 3x - 2.$

2) Да ги најдеме точките (ако постојат) во кои што графикот на функцијата $f\left(x\right) = x^3 + 2$ има тангента паралелна со $x-$оската. За таа цел треба да ги најдеме точките во кои коефициентот на правецот на тангентата на кривата $f\left(x\right) = x^3 + 2$ е нула, односно $f'\left(x\right) = 0.$ Имаме дека $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, од каде што следува дека $f\left(0\right) = 2.$ Значи, во точката $\left(0,2\right)$ од графикот, тангентата е паралелна со $x-$оската.

3) Функцијата $f\left(x\right) = \sqrt{x}$ е дефинирана за $x \geq 0.$ Оттаму, можеме да зборуваме само за десен извод во точката $x_0 = 0.$ Бидејќи

$$f'_+\left(0\right) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$$

имаме дека правата $x = 0$ ($y-$оската) е тангента на графикот на функцијата $f\left(x\right) = \sqrt{x}$ во координатниот почеток. Геометриски толкувано, тоа значи дека графикот на функцијата $f\left(x\right) = \sqrt{x}$ се приближува до $x-$оската под агол од $\alpha = 90^{\text{o}}$ кога $x \to 0^{+}$, односно се приближува кон $y-$оската. ●

Средна и моментна брзина кај праволиниско движење

Да разгледаме најпрво тело кое се движи праволиниски. Нека $s = s(t)$ е функцијата која ја дава зависноста на изминатиот пат од времето. Под нараснување на патот во временски интервал $[t_0, t_0 + \Delta t]$, во ознака Δs, ја подразбираме разликата $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, односно изминатиот пат во тој временски интервал. Значи, за нараснување на патот имаме дека

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Средна брзина на движење на тело во временски интервал $[t_0, t_0 + \Delta t]$ се нарекува количникот од изминатиот пат Δs и изминатото време Δt, односно

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Меѓутоа, вредноста на средната брзина на движење на телото во интервалот $[t_0, t_0 + \Delta t]$ не дава доволно информации за карактерот на движењето во споменатиот интервал. Колку временскиот интервал е поголем, толку претходниот заклучок е појасен. Заради тоа позначајно е да се разгледува вредноста на средната брзина за мали промени на времето Δt. Ако допуштиме интервалот $[t_0, t_0 + \Delta t]$ да се стеснува за фиксно t_0, односно ако $\Delta t \to 0$, тогаш можеме да ја разгледуваме граничната вредност

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s\left(t_0+\Delta t\right)-s\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

Доколку таа постои, се нарекува *моментна брзина* на телото во моментот t_0. Значи,

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Според тоа, изводот на функцијата $s=s\left(t\right)$ во точката t_0 претставува моментната брзина (во момент од времето t_0) на телото кое се движи праволиниски по законот $s=s\left(t\right)$, што претставува *механичко толкување на поимот за извод.*

6.2.2. Примери.

1) Тело при движење поминува пат $s\left(t\right)=t^3m.$ Изминатиот пат по третата секунда ќе биде $s\left(3\right)=3^3=27m$. Бидејќи $s'\left(t\right)=3t^2$, за моментната брзина по третата секунда имаме $v(3)=s'\left(3\right)=3\cdot 3^2 m/s=27m/s.$

2) Движењето на тело при слободно паѓање е дадено со равенката $s\left(t\right)=\frac{1}{2}gt^2.$ Неговата брзина во моментот t_0 е

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s\left(t_0+\Delta t\right)-s\left(t_0\right)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g\left(t_0+\Delta t\right)-\frac{1}{2}gt_0}{\Delta t}=$$

$$=\frac{g}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\left(2t_0+\Delta t\right)=gt_0\;\bullet$$

6.3. Правила за пресметување на извод

Барањето на извод по дефиниција може да има огромни аналитички потешкотии, бидејќи дадената функција може да има сложена аналитичка структура. Заради тоа изведени се правила со кои може да се најде извод на сите диференцијабилни функции. Операцијата со која што од функцијата $f(x)$ ја добиваме функцијата $f'(x)$ се вика *диференцирање.*

Во продолжение ќе изложиме неколку правила за диференцирање. Нека се дадени функциите $f(x)$ и $g(x)$ кои што се диференцијабилни во точка x од интервалот (a,b).

6.3.1. Извод на збир и разлика на функции

Ќе побараме извод на функцијата $y=(f+g)(x)$ во точката x од интервалот (a,b). Имаме дека

$$y'(x)=(f+g)'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

Добивме дека извод од збир на две функции е едаков на збирот од изводите на функциите. Накусо, запишуваме

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x). \tag{6.1}$$

На ист начин добиваме дека

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x). \tag{6.2}$$

6.3.1.1. Примери.

1) Да го најдеме изводот на функцијата $y = x^n - x$. Користејќи го погорното правило добиваме дека $y' = \left(x^n\right)' - \left(x\right)' = n \cdot x^{n-1} - 1$. ●

6.3.2. Извод на производ на две функции

Ќе побараме извод на функцијата $y = (f \cdot g)(x)$ во точка x од интервалот (a,b). Имаме дека

$$y'(x) = (f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+\Delta x) - (f \cdot g)(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right] \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Според тоа, добивме дека

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \tag{6.3}$$

Како последица, го добиваме правилото за извод на производ на функција со константа, односно на функцијата $y = cf(x)$, $c \in \mathbf{R}$, во точката x од интервалот (a,b). Имаме дека

$$y'(x) = (cf)'(x) = (c)' f(x) + cf'(x) = 0 \cdot f(x) + cf'(x) = cf'(x).$$

Според тоа, правилото за извод на производ на функција со константа гласи:

$$(cf)'(x) = cf'(x) \tag{6.4}$$

6.3.2.1. Примери.

1) Да го најдеме изводот на функцијата $y = 2\sin x \cdot \cos x$. Според погорното правило, добиваме дека

$$y' = (2\sin x)' \cdot \cos x + 2\sin x \cdot (\cos x)' =$$

$$= \left(2 \cdot (\sin x)'\right) \cdot \cos x + 2\sin x \cdot (-\sin x) =$$

$$= 2 \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 2\cos 2x \,.$$

2) За изводот на функцијата $y = 2x^3 + 5\sin x - e^x$ имаме

$$y' = \left(2x^5 + 5\sin x - e^x\right)' = \left(2x^5\right)' + (5\sin x)' - \left(e^x\right)' =$$

$$= 2 \cdot 5x^{5-1} + 5 \cdot \cos x - e^x = 10x^4 + 5\cos x - e^x.$$

3) За функцијата $y = e^x \cos x - 5x^3 \sin x$ имаме

$$y' = \left(e^x \cos x - 5x^3 \sin x\right)' = \left(e^x \cos x\right)' - \left(5x^3 \sin x\right)' =$$

$$= \left[\left(e^x\right)' \cos x + e^x (\cos x)']\right] - \left[[5\left(x^3\right)' \sin x + 5x^3 (\sin x)' \right] =$$

$$= \left[e^x \cos x - e^x \sin x\right] - \left[15x^2 \sin x + 5x^3 \cos x\right] =$$

$$= \left(e^x - 5x^3\right)\cos x - \left(e^x + 15x^2\right)\sin x \,. \; \bullet$$

6.3.3. Извод на количник на две функции

Нека $g(x) \neq 0,$ за секое $x \in (a,b).$ Ќе побараме извод на функцијата $y = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ во точката x од интервалот $(a,b).$ Имаме дека

$$y'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot g(x)}.$$

Заради теоремата 6.1.2 имаме дека $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$, од каде што добивме дека

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot (x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}. \qquad (6.5)$$

6.3.3.1. Примери.

1) Да го најдеме изводот на функцијата $y = tgx,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Имаме дека

$$y' = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Слично, ако $y = ctgx,\ x \neq \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ добиваме дека

$$y' = (ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2) За функцијата $y = \frac{x+4}{x^2+1}$ имаме

$$y' = \left(\frac{x+4}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+4)'(x^2+1) - \left(x^2+1\right)'(x+4)}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{(1+0)\left(x^2+1\right) - (2x+0)(x+4)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2-8x}{\left(x^2+1\right)^2}. \bullet$$

6.3.4. Извод на сложена функција

6.3.4.1. Теорема. Нека $y = f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 и $z = g(y)$ е диференцијабилна во точката $y_0 = f(x_0)$. Тогаш композицијата $z = (g \circ f)(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 и важи

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0). \qquad (6.6)$$

Доказ. Имаме дека $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, односно

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y = y_0 + \Delta y.$$

Бидејќи f е непрекината имаме $\Delta y \to 0$ кога $\Delta x \to 0$. Тогаш имаме

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{y_0+\Delta y} \cdot \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{y_0+\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= g'(y_0)f'(x_0)$$

што значи дека изводот на функцијата $g \circ f$ постои и притоа важи равенството (6.6). ■

6.3.4.2. Примери.

1) Во примерот 6.1.3. најдовме извод на функцијата $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$. Со помош на теорема 6.3.4.1. ќе најдеме извод на функцијата $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x > 0$. Користејќи го равенството $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, добиваме дека

$$y' = \left(x^\alpha\right)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Специјално, за $y = \frac{1}{x}$ наоѓаме дека

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

додека за $y = \sqrt{x}$ имаме

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Да забележиме дека во случај кога функцијата $y = x^\alpha$ е определена при $x < 0$, тогаш $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$.

2) Да најдеме извод на функцијата $y=\sqrt{tgx}$. Наоѓаме дека

$$y'=\left(\sqrt{tgx}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{tgx}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{tgx}\cdot\cos x}. \; ●$$

Нека $y=f(x)$ е позитивна функција на интервалот (a,b) и диференцијабилна во точката x од интервал (a,b). Тогаш, според теорема 6.3.4.1. изводот на функцијата $z(x)=\ln y=\ln f(x)$ во точката x,

$$z'(x)=\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}, \tag{6.7}$$

се вика *логаритамски извод* на функцијата $y=f(x)$ во точката x, а постапка е позната како *логаритамско диференцирање.*

Уште повеќе, ако $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни во точката x, и $f(x)$ е позитивна функција на интервалот (a,b), тогаш за функцијата $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$ важи $\ln y=g(x)\ln f(x)$, па заради 6.7. имаме дека

$$\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)},$$

односно

$$y'=\left(f(x)\right)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\right]. \tag{6.8}$$

6.3.4.3. Примери.

1) Да ја разгледаме функцијата $y=x^x$, $x>0$. Имаме $\ln y=x\ln x$, од каде што заради 6.8. добиваме дека $y'=x^x(\ln x+1)$.

2) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=(x^2+1)^{\sin x}$. Бидејќи $x^2+1>0$, за секое $x\in\mathbf{R}$, може да логаритмираме. Тогаш $\ln f(x)=\sin x\ln(x^2+1)$, од каде што следува дека $\frac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}$, односно,

$$f'(x)=(x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right].\ \bullet$$

6.3.5. Извод на инверзна функција

6.5.3.1. Теорема. Ако функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точката x и ако постои инверзна функција $x=f^{-1}(y)$ која е диференцијабилна во точката x_0 и $f'(x)\neq 0$, тогаш функцијата $f^{-1}(x)$ е диференцијабилна во точката $y_0=f(x_0)$ и притоа важи

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{6.9}$$

Доказ. Можеме да запишеме

$$\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y}=\frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}=\frac{1}{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Заради непрекинатоста на функцијата $y=f(x)$, како и непрекинатоста на инверзната функција $x=f^{-1}(y)$, имаме дека $\Delta x\to 0$ ако и само ако $\Delta y\to 0$. Со граничен премин добиваме дека

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \ ■$$

6.3.5.1. Примери.

1) Функцијата $y=\log_a x,\ a\neq 1,\ a>0$ и $x>0$ е инверзна на функцијата $x=a^y$. Затоа, со примена на формулата 6.9. добиваме дека

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\left(a^y\right)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x\ln a}, \text{ односно}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, \text{ за } a\neq 1,\ a>0,\ x>0.$$

Специјално, за $a=e$ добиваме дека

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ за } x>0.$$

2) Да ја разгледаме функцијата $y=\arcsin x,\ -1\leq x\leq 1$. Таа е инверзна на функцијата $x=\sin y,\ -\frac{\pi}{2}\leq y\leq \frac{\pi}{2}$. Изводот на инверзната функција ќе биде $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, од каде што следува дека

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) Дадена е функцијата $y=\arccos x,\ -1\leq x\leq 1$. Таа е инверзна на функцијата $x=\cos y,\ 0\leq y\leq \pi$. Тогаш, изводот на инверзната функција ќе биде $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, од каде што следува дека

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4) Да ја разгледаме функцијата $y = arctgx,\ x \in \mathbf{R}$. Таа е инверзна на функцијата $x = tgy,\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Изводот на инверзната функција ќе биде $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$, од каде што следува

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

5) Да ја разгледаме функцијата $y = arcctgx,\ x \in \mathbf{R}$. Таа е инверзна на функцијата $x = ctgy$, $0 \le y \le \pi$. Тогаш, изводот на инверзната функција ќе биде $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{1}{1+x^2}$, од каде што следува дека

$$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}. \bullet$$

6.3.6. Извод од имплицитно зададена функција

6.3.6.1. Дефиниција. Ако функцијата $y = f(x)$ дефинирана на интервалот (a,b) е зададена со равенката

$$F(x,y) = 0$$

тогаш велиме дека функцијата е *имплицитно* зададена.

Нека со равенката $F(x,y) = 0$ имплицитно е зададена диференцијабилна функција $y = y(x)$. Ако во равенката $F(x,y) = 0$ замениме $y = y(x)$ добиваме дека $F(x, y(x)) = 0$, за секој $x \in (a,b)$. Ако последното равенство го диференцираме по x, при што сметаме дека y е функција од x, добиваме нова равенка по x, y и y'. Со решавање на равенката по y' го наоѓаме изводот на функција $y = f(x)$.

6.3.6.2. Примери.

1) Да го најдеме изводот на имплицитно зададената функцијата со равенката $x^2 + y^2 - a^2 = 0.$ Со диференцирање по x, при што сметаме дека y е функција од $x,$ добиваме дека $\left(x^2 + y^2 - a^2\right)' = 0',$ односно, $2x + 2yy' = 0$ од каде што следува дека $y' = -\frac{x}{y}.$ ●

6.4. Изводи од повисок ред

Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна во интервалот (a,b). Нејзиниот извод $f'(x)$ е функција од променливата $x,$ дефинирана на тој интервал. Ако таа функција е диференцијабилна во некоја точка x од интервалот (a,b), тогаш изводот на $\left(f'(x)\right)'$, го нарекуваме *извод од втор ред* на функцијата $f(x)$ во точката x и го означуваме со $y'' = f''(x)$ или со $y^{(2)} = f^{(2)}(x).$ Значи

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x).$$

6.4.1. Примери.

1) За $y = x^2 + 2x + 2$ имаме дека $y' = 2x + 2$ и $y'' = 2$. ●

Ако постои изводот за функцијата $f''(x)$ во точката x, тогаш тој е извод од трет ред за функцијата и го означуваме со $y'' = f'''(x)$ или со

$y^{(3)} = f^{(3)}(x)$. Претпоставуваме дека е дефиниран $(n-1)$-виот извод $f^{(n-1)}(x)$ на функцијата $f(x)$ за некое $n \in \mathbf{N}$. Тогаш $n-$тиот извод на функцијата $f(x)$ се дефинира како извод на функцијата $f^{(n-1)}(x)$, односно

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x)$$

и се означува со $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Притоа имаме дека $y^{(0)} = f^{(0)}(x) = f(x)$ и $y^{(1)} = f^{(1)}(x) = f'(x)$.

Функцијата која има $n-$ти извод се вика n *пати диференцијабилна*.

6.4.2. Примери.

1) Функцијата $y = \sin x$ е произволно пати диференцијабилна. За нејзините изводи имаме

$$y' = \cos x,\ \ y'' = -\sin x,\ \ y''' = -\cos x,\ \ y^{iv} = \sin x \text{ итн.}$$

Во општ случај, важи дека

$$y^{(n)}(x) = y^{(n+4)}(x).$$

2) За функцијата $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, имаме

$$y' = nx^{n-1},\ \ y'' = \left(nx^{n-1}\right)' = n(n-1)x^{n-2}, ...,\ \ y^{(n)} = n!, \text{ и}$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = ... = 0\,,\ \ n \in \mathbf{N}$$

3) За функцијата $y = a^x$, $a > 0$, имаме дека

$$y' = a^x \ln a,\ \ y'' = \left(a^x \ln a\right)' = a^x \ln^2 a, ...,\ \ y^{(n)} = a^x \ln^n a,\ n \in \mathbf{N}$$

Јасно, ако $a=e$, тогаш

$$\left(e^x\right)^{(n)}=e^x,\ n\in\mathbf{N}.\ \bullet$$

6.5. Диференцијал на функција

Нека функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна во точката x, односно нека постои границата

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (6.10)$$

Ако ставиме

$$\alpha(\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x),$$

наоѓаме дека

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,\quad \text{кога } \Delta x\to 0.$$

Сега, ако $f'(x)\neq 0,$ имаме дека

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)}\right)=1$$

бидејќи $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$ Според тоа, важи приближното равенство

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x,\ \text{кога}\ \ \Delta x\to 0.$$

Производот $f'(x)\Delta x$ го нарекуваме *прв диференцијал* на функцијата $f(x)$ во точката x и означуваме

$dy(\Delta x)=f'(x)\Delta x$, или $df(x)(\Delta x)=f'(x)\Delta x$ или накусо $df(x)=f'(x)\Delta x$.

Бидејќи диференцијалот на функцијата $f\left(x\right)=x$ е $df\left(x\right)=1\cdot\Delta x,$ или накусо $d\left(x\right)=\Delta x$ имаме дека нараснувањето на независно променливата Δx е еднаков на првиот диференцијал на независно променливата $dx.$ Затоа може да запишеме

$$dy=f'\left(x\right)dx. \qquad (6.11)$$

Од равенството 6.11. добиваме дека

$$f'\left(x\right)=\frac{dy}{dx} \text{ или } f'\left(x\right)=\frac{df\left(x\right)}{dx}.$$

Според тоа, заклучуваме дека изводот на функцијата е еднаков на количникот од диференцијалот на зависно променливата со независно променливата.

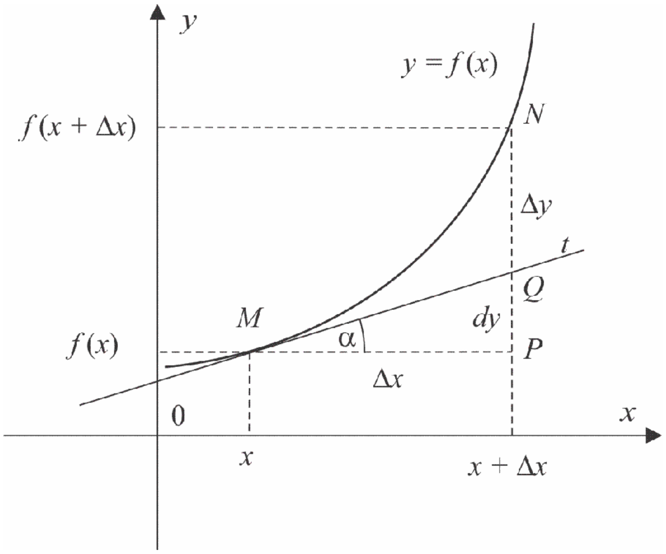
6.5.1. Примери.

1) Диференцијал на функцијата $f(x)=x^5$ е $dy=f'\left(x\right)dx=5x^4dx$.

2) Диференцијалот на функцијата $f\left(x\right)=e^x$ е $dy=f'\left(x\right)dx=e^xdx.$ ●

Диференцијалот на функција има едноставно геометриско толкување (слика 72.). Точките M и N од графикот на функцијата имаат координати $\left(x,f\left(x\right)\right)$ и $\left(x+\Delta x,f\left(x+\Delta x\right)\right).$ Нараснувањето Δy е еднакво на должината на отесечката $PN.$ Бидејќи $\overline{PQ}=\text{tg}\,\alpha\cdot\Delta x$ и $tg\alpha=f'(x),$ имаме дека $\overline{PQ}=dy=f'\left(x\right)dx.$, па диференцијалот на функцијата е еднаков на должината на отсечката $PQ.$

Забележуваме дека функцијата $y=f\left(x\right)$ за вредности на независно променливата кои се блиски на вредноста $x,$ се однесува како линеарна функција.



Слика 72.

Од равенство 6.11. и од правилата за барање на извод на збир, производ и количник на две функции, ги имаме следните правила за наоѓање на диференцијал на збирот, производот и количникот на две функции. Имено, ако $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни во точката x, тоаш важи:

- $d\left(f(x)+g(x)\right)=df(x)+dg(x)$,
- $d\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f(x)dg(x)+g(x)df(x)$,
- $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}$, $v(x)\neq 0.$

Доказот на погорните својства му го препуштаме на читателот.

6.5.2. Примери.

1) Да го определиме диференцијалот на функцијата $f(x)=x+\ln x$. Имаме дека $dy=f'(x)dx=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx$. До истиот резултат доаѓаме со

примена на правилата за наоѓање на диференцијал на збир. Имаме

$$d\left(x+\ln x\right)=dx+\left(\ln x\right)dx=dx+\frac{1}{x}dx=\left(1+\frac{1}{x}\right)dx.$$

Диференцијалот на функција може да се искористи за приближно пресметување на вредности на функција. Така, од приближното равенство $\Delta y\approx\Delta x$, кога $\Delta x\to 0$ го добиваме приближното равенство

$$f\left(x+\Delta x\right)\approx f\left(x\right)+f'\left(x\right)dx\,. \tag{6.12}$$

6.5.3. Примери.

1) Да пресметаме приближно $\sqrt{4{,}03}$. За таа цел ќе ја разгледуваме функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ во точката $x+\Delta x,$ каде што $x=4$ и $\Delta x=0{,}03$. Бидејќи $f'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}},$ според 6.12 имаме дека

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Ставајќи во последната формула $x=4$ и $\Delta x=0{,}03$, го добиваме приближното равенство

$$\sqrt{4{,}03}\approx\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}0{,}03=2{,}0075.$$

Во општ случај, ако разгледуваме $n-$ ти корен, го добиваме приближното равенство

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x_0}}{x_0}\Delta x,\ \text{кога}\ \Delta x\to 0\,.$$

Според погорната формула за $\sqrt[3]{25}$ имаме

$$\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{27-2}=3\sqrt[3]{1-\frac{2}{27}}\approx 3\left(\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{1}}{1}\left(-\frac{2}{27}\right)\right)=2{,}9259\ldots\ \bullet$$

6.6. Основни теореми во диференцијалното сметање

Една од основните теореми во диференцијалното сметање, теоремата на Ферма, го дава потребниот услов за егзистенција на локален екстрем на дадена функција.

6.6.1. Теорема на Ферма. Ако функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ има локален максимум во точката $x_0\in(a,b)$ и ако функцијата е диференцијабилна во таа точка, тогаш $f'(x_0)=0$.

Аналогното тврдење важи и за локален минимум.

Доказ. Нека во точката $x_0\in(a,b)$ функцијата има локален максимум. Тогаш постои $\delta>0$ така што за секое $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$, $x\neq x_0$, имаме дека $f(x)<f(x_0)$ (види теорема 4.4.10.). Ако $x\in(x_0-\delta,x_0)$, тогаш имаме дека $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$. Кога $x\to x_0$ имаме дека $f'(x_0)\geq 0$.

Слично, ако $x\in(x_0,x_0+\delta)$, тогаш добиваме дека $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$. Во граничен случај, кога $x\to x_0$ имаме дека $f'(x_0)\leq 0$. Оттука следува дека $f'(x_0)=0$.

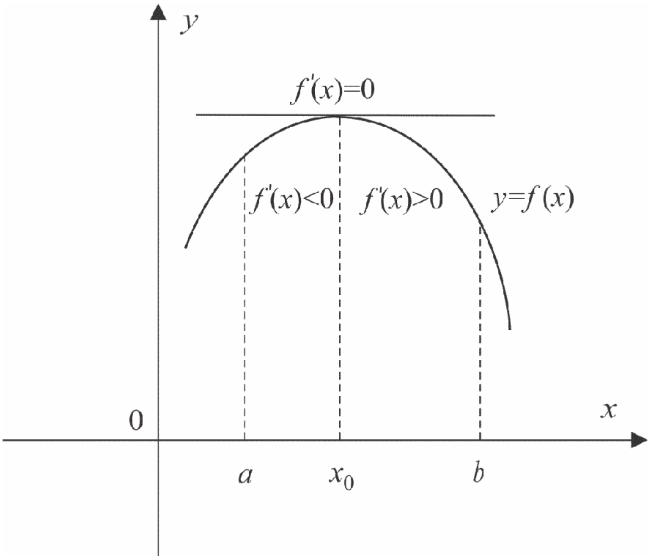
Случајот кога во точката $x_0\in(a,b)$ функцијата има локален минимум се докажува аналогно. ■

Геометриско значење на теоремата на Ферма

Ако кривата $y=f(x)$ е непрекината, има тангента во секоја точка и има локален екстрем (минимум или максимум) во точката x_0, тогаш тангентата на кривата $y=f(x)$ во точката x_0 е паралелна со $x-$оската (слика 73.).

6.6.2. Примери.

1) Да провериме дали функцијата $f(x)=3x^2-1$ ги исполнува условите од теоремата на Ферма на сегментот $[1,2]$. Функцијата е монотоно растечка на сегментот $[1,2]$. Тогаш, таа ја достигнува својата најмала,



Слика 73.

односно најголема вредност во точките $x_0=1$ и $x_0=2$. Според тоа, функцијата нема екстрем во внатрешна точка од сегментот $[1,2]$, па затоа не ги исполнува условите од теоремата на Ферма. Да забележиме дека $f'(1)=6\neq 0$ и $f'(2)=12\neq 0$.

2) Функцијата $f(x)=x^3$ ги исполнува условите од теоремата на Ферма на целата реална права и $f'(0)=0$, но фукцијата нема локален екстрем во точката $x_0=0$. ●

Со последниот пример покажавме дека теоремата на Ферма дава потребен, но не и доволен услов за егзистенција на локален екстрем на една функција.

Теоремата на Рол го дава доволниот услов за егзистенција на точки во кои изводот на функцијата е еднаков на нула.

6.6.3. Теорема на Рол. Ако функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна во интервалот (a,b) и $f(a)=f(b)$, тогаш постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што $f'(x_0)=0$.

Доказ. Ако го претпоставиме спротивното, дека за секое $x\in(a,b)$, $f'(x)\neq 0,$ тогаш според теоремата на Ферма, функцијата не ги достигнува своите екстремни вредности во ниту една точка од интервалот (a,b). Од друга страна, бидејќи функцијата е непрекината на интервалот $[a,b]$, според теорема 4.4.11., постојат точки од сегментот во кои таа ги достигнува својот максимум и минимум. Значи, функцијата има екстреми во точките a и b. Од условот $f(a)=f(b)$ следува дека f е константа на сегментот $[a,b]$, односно $f'(x)=0,$ за секое $x\in[a,b]$. Добивме контрадикција со претпоставката. Според тоа, постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што $f'(x_0)=0$. ■

Забелешка. Со следниот пример ќе покажеме дека теоремата не мора да важи ако функцијата не е непрекината во точката a или во b, или ако не е диференцијабилна во интервалот (a,b).

6.6.4. Примери.

1) Нека е дадена функцијата

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x}, & 0<x<1\\ 0, & x=0,\ x=1\end{cases}$$

Функцијата е непрекината на (0,1), но има прекин во точките $x=0$ и $x=1.$ Исто така, $f(0)=f(1)=0.$ Бидејќи

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{x^2}>0 \text{ за секое } x\in(0,1),$$

следува дека не постои точка $x_0\in(0,1)$ таква што важи $f'(x_0)=0$, односно не важи теоремата на Рол.

2) Нека дадена функцијата

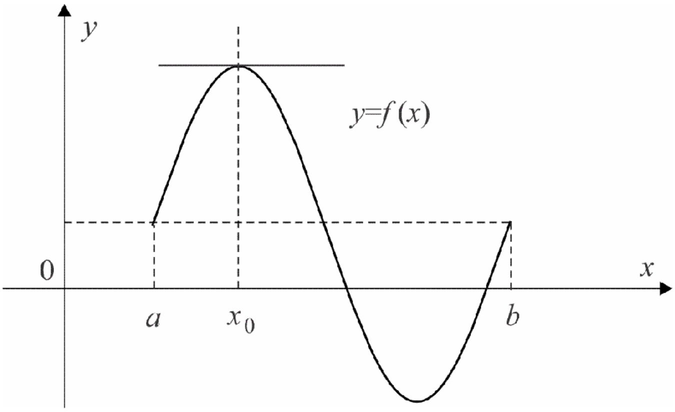
$$f(x)=|x|, \text{ за секое } x\in[-1,1].$$

Функцијата не е диференцијабилна во точката $x=0.$ За $x\in(-1,0)$ имаме дека $f'(x)=-1<0,$ додека за $x\in(0,1)$ имаме дека $f'(x)=1>0.$ Значи, и во овој пример не важи Роловата теорема.

3) Функцијата $f(x)=x^3+4x^2+x-1$ е непрекината на сегментот $[-3,1]$ и има извод во интервалот $(-3,1)$. Од теоремата на Рол следува дека постои точка $x_0\in(-3,1)$ таква што $f'(x_0)=0$. Понатаму, имаме дека $f'(x)=3x^2+8x+1,$ па од $f'(x)=0$ наоѓаме дека $x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{13}}{3}$, што значи дека постојат две точки кои за разгледуваната функција ја задоволуваат теоремата на Рол, што е можно бидејќи теоремата на Рол не тврди единственост на точка x_0 со наведеното својство. ●

Геометриско значење на теоремата на Рол

Ако кривата $y=f(x)$ е непрекината на $[a,b]$, има тангента во секоја точка $x\in(a,b)$ и важи условот $f(a)=f(b)$, тогаш тангентата на кривата $y=f(x)$ во некоја точка $x_0\in(a,b)$ е паралелна со $x-$оската (слика 74.).



Слика 74.

6.6.5. Теорема на Лагранж (Теорема за средна вредност) Ако функцијата $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна во интервалот (a,b), тогаш постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Доказ. Доказот на оваа теорема се изведува лесно со примена на Роловата теорема на функцијата

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Таа е непрекината на интервалот $[a,b]$, диференцијабилна во (a,b) и важи $F(a)=F(b)$. Според теоремата на Рол, постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што $F'(x_0)=0$, односно $f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$ што требаше да се докаже. ■

Забелешка. Теоремата на Лагранж е уште позната под името *теорема за средна вредност* или *теорема за конечни нараснувања*. Таа е обопштување на теоремата на Рол, бидејќи од $f(b)=f(a)$, за $a<b$, следува дека

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

6.6.6. Примери.

1) Да провериме дали функцијата $f(x)=3x^2-5$ ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на сегментот $[-2,0]$. Дадената функција е непрекината на сегментот $[-2,0]$ и диференцијабилна во интерваллот $(-2,0)$, од каде што следува дека таа ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на разгледуваниот интервал. За точката x_0 од теоремата на Лагранж имаме

$$f'(x_0)=6x_0 \text{ и } f'(x_0)=\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=-6$$

од каде што добиваме дека $-6x_0=-6$, односно $x_0=-1$.

2) Со помош на теоремата на Лагранж може да го докажеме неравенството

$$|\sin a-\sin b|\leq|a-b|,\ \ a,b\in\mathbf{R}$$

Функцијата $f(x)=\sin x$ е непрекината на сегментот $[a,b]$ и диференцијабилна во интервалот (a,b). Тогаш, заради теоремата на Лагранж, постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што

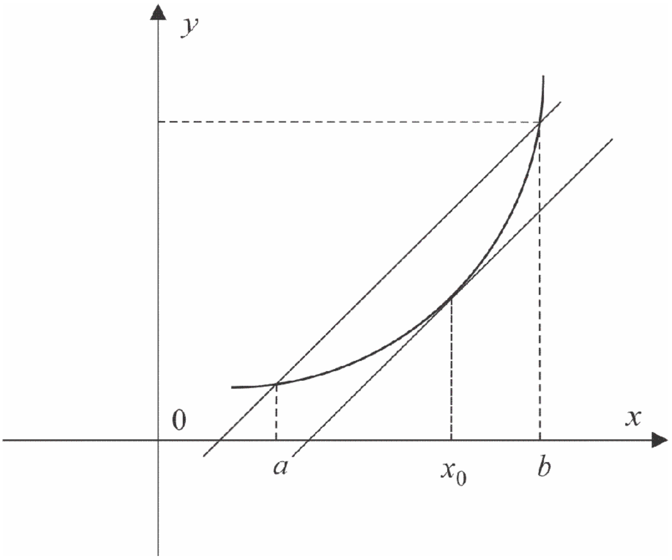
$$\sin b-\sin a=\cos x_0(b-a).$$

Оттука следува дека

$$|\sin a-\sin b|\leq|\cos x_0|(b-a)\leq 1\cdot|a-b|.$$ ●

Геометриско значење на теоремата на Лагранж

Ако кривата $y = f(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и има тангента во секоја точка од интервалот (a,b), тогаш постои точка $x_0 \in (a,b)$ таква што тангентата во точката $(x_0, f(x_0))$ е паралелна со секантата низ точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (слика 75.).



Слика 75.

Теоремата за средна вредност има голема теоретска и практична примена. Ќе изведеме неколку последици од теоремата за средна вредност и добиените резултати ќе ги илустрираме со примери.

6.6.7. Последица. Ако f е диференцијабилна функција во интервалот (a,b) и $f'(x) = 0,$ за секое $x \in (a,b),$ тогаш таа е константна функција, односно $f(x) = C,$ за секое $x \in (a,b)$..

Доказ. Нека $x_1 \in (a,b)$ е фиксирана точка и x произволна точка од интервалот (a,b). Функцијата f ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на интервалот $[x_1, x]$ (или на интервалот $[x, x_1]$.). Според тоа, постои точка $x_0 \in (x_1, x)$ за која важи

$$f(x) - f(x_1) = f'(x_0)(x - x_1).$$

Бидејќи $f'(x_0) = 0$, добиваме дека $f(x) = f(x_1)$. ■

6.6.8. Примери.

1) Да го докажеме равенството

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ за секое } x \in [-1,1].$$

За функцијата $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, $x \in [-1,1]$, имаме дека

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \text{ за секое } x \in (-1,1).$$

Според последица 6.6.7. имаме дека $f(x) = C,$ за секое $x \in (-1,1)$. Бидејќи $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$ добиваме дека $C = \frac{\pi}{2}$. Имајќи во вид дека $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2},$ добиваме дека

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{ за секое } x \in [-1,1]. \; \bullet$$

6.6.9. Последица. Ако функциите f и g се диференцијабилни во интервалот (a,b) и $f'(x) = g'(x)$, за секое $x \in (a,b)$, тогаш тие се разликуваат за константа, односно

$$f(x) = g(x) + C, \text{ за секое } x \in (a,b).$$

Доказ. Од диференцијабилноста на функциите f и g во интервалот (a,b) и условот $f'(x) = g'(x)$, за секое $x \in (a,b)$, имаме дека функцијата $f-g$ е диференцијабилна во интервалот (a,b). Заради последица 6.6.7., од $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0,$ за секое $x\in(a,b)$, следува дека $f(x)=g(x)+C,$ за секое $x\in(a,b)$. ■

6.6.10. Примери.

1) Да го докажеме идентитетот $\sin^2 x-\frac{1}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$

Функциите $f(x)=\sin^2 x-\frac{1}{4}$ и $g(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ се диференцијабилни во интервалот $(-\infty,+\infty)$. Нивните изводи се

$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x \text{ и}$$

$$g'(x)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)(-1)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin 2x.$$

Од $f'(x)=g'(x),$ за секое $x\in\mathbf{R},$ следува дека $f(x)=g(x)+C,\ x\in\mathbf{R}.$ Притоа, за $x=0$ имаме $f(0)=-\frac{1}{4},$ и $g(0)=-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{4},$ од каде што следува дека $C=0.$ Според тоа $f(x)=g(x),$ за секое $x\in\mathbf{R},$ што требаше да се докаже. ●

6.6.11. Теорема на Коши. Ако функциите $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ се непрекинати на $[a,b]$, диференцијабилни во интервалот (a,b) и $g'(x)\neq 0$ за секое $x\in(a,b)$, тогаш постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Доказ. Да забележиме дека $g(a)\neq g(b)$. Навистина, ако $g(a)=g(b)$, тогаш функцијата g ги задоволува условите на теоремата на Рол, па следува дека за некое $x\in(a,b)$ важи $g'(x)=0,$ што е во спротивност на претпоставката.

Доказот ќе го изведеме со примена на Роловата теорема на функцијата

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big).$$

Таа е непрекината на интервалот $[a,b]$, диференцијабилна во (a,b) и го исполнува условот $F(a)=F(b)$. Според теоремата на Рол следува дека постои точка $x_0\in(a,b)$ таква што $F'(x_0)=0$, односно

$$f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0,$$

што требаше да се докаже. ■

Забелешка. Теоремата на Коши е позната под името теорема за *односот на нараснувањата на две функции.* Да забележиме дека таа е обопштување на теоремата на Лагранж. Имено, за $g(x)=x$ од теоремата на Коши ја добиваме теоремата на Лагранж.

6.6.12. Примери.

1) За функците $f(x)=x^2-2x+3$ и $g(x)=x^3-7x^2+20x-5$ ќе покажеме дека ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на интервалот $[1,4]$, а потоа да ќе најдеме соодветната точка x_0. Навистина, функциите f и g се непрекинати на интервал $[1,4]$. Нивните изводи, $f'(x)=2x-2$ и $g'(x)=3x^2-14x+20,$ се конечни во секоја точка од ин-

тервалот $[1,4]$. Освен тоа, имаме дека $g'(x) \neq 0,$ за секое $x \in [1,4].$ Според тоа, дадените функции ги исполнуваат условите од теоремата на Коши, па постои точка $x_0 \in (1,4)$ така што

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Тоа значи дека $\frac{11-2}{27-9} = \frac{2x_0 - 2}{3x_0^2 - 14x_0 + 20},$ од каде што добиваме две вредности за $x_0,$ односно $x_0 = 2$ и $x_0 = 4,$ од кои само точката $x_0 = 2$ е внатрешна, па според тоа таа е бараната точка. ●

6.7. Лопиталово правило

6.7.1. Теорема на Лопитал. Нека функциите $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ се непрекинати на $[a,b]$, диференцијабилни во интервалот (a,b) и за некое $x_0 \in (a,b)$ важи $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Исто така, нека $g'(x) \neq 0,$ за секое $x \neq x_0$. Ако постои $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тогаш постои и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Доказ. Нека $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = x_0$. На почеток ќе претпоставиме дека x_0 е конечен број. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогаш постои $\delta > 0$ такво што за секое $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ важи условот $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - x_0 \right| < \varepsilon$. Да избереме $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Функциите f и g ги задоволуваат условите на теоремата на Коши на интервалот $[x_{0,} x]$, па затоа постои $x' \in (x_0, x)$ за кое што важи $\frac{f'(x')}{g'(x')}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}$. Да напоменеме дека истото важи и кога $x\in(x_0-\delta,x_0)$, само тогаш го разгледуваме сегментот $[x,x_0]$. Така, имаме $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-x_0\right|<\varepsilon$ за секое $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, односно $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=x_0$.

Ако x_0 не е конечен број, тогаш доказот ќе биде сличен на наведениот со тоа што за секое $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ ќе важи $\frac{f'(x)}{g'(x)}>\varepsilon$ (или $\frac{f'(x)}{g'(x)}<-\varepsilon$). ■

Забелешка. Практичната вредност на Лопиталовата теорема е во тоа што во многу случаи полесно е да се најде граничната вредност на количник од изводите отколку гранична вредност на количник од самите функции. Лопиталовата теорема е позната под името *Лопиталово правило.*

6.7.2. Примери.

1) Нека $f(x)=tgx-x$ и $g(x)=x-\sin x$. Според Лопиталовото правило имаме дека

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2\,.$$

2) Нека $f(x)=\sin x$ и $g(x)=x$. Заради Лопиталовото правило доби-

ваме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1 .$$

3) Нека $f(x)=\ln(1+x)$ и $g(x)=x$. Со примена на Лопиталовото правило имаме дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1 .$$

4) Нека $f(x)=a^x-1$ и $g(x)=x$. Тогаш,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a}{1}=\log a\ .$$ ●

Во продолжение ќе наведеме уште неколку случаи, кои што ќе ги илустрираме со примери, во кои што може да се примени Лопиталовото правило.

- Лопиталовото правило важи и за случаите кога

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}g(x)=0\ . \qquad (6.13)$$

Имено, ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни за доволно големи (по апсолутна вредност) вредности на x и ако $g'(x)\neq 0$, тогаш од $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=x_0$ следува дека $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=x_0$. Во ова ќе се увериме ако воведеме смена $x=\frac{1}{u}$, па наместо количникот $\frac{f(x)}{g(x)}$ го разгледуваме количникот $\frac{f(1/u)}{g(1/u)}$.

6.7.3. Примери.

1) За функциите $f\left(x\right)=\dfrac{\pi}{2}-arctgax$ и $g\left(x\right)=\dfrac{1}{ax}, a>0,$ наоѓаме дека $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\infty} g\left(x\right)=0$. Тогаш, со примена на Лопиталовото правило добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctgax}{\frac{1}{ax}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{a}{1+a^2x^2}}{-\frac{a}{a^2x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^2x^2}{1+a^2x^2}=1\,. \bullet$$

• Лопиталовото правило важи и за случаите кога

$$\lim_{x\to x_0}\left|f\left(x\right)\right|=\lim_{x\to x_0}\left|g\left(x\right)\right|=\infty\,.$$

Навистина, бидејќи имаме дека $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{\frac{1}{g\left(x\right)}}{\frac{1}{f\left(x\right)}}$ и $\dfrac{1}{f\left(x\right)}\to 0, \dfrac{1}{g\left(x\right)}\to 0$ кога $x\to x_0$, исполнети се условите на теоремата на Лопитал. Според тоа, имаме дека

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g\left(x\right)}}{\frac{1}{f\left(x\right)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{-g'\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}}{\frac{-f'\left(x\right)}{f^2\left(x\right)}}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)^2\lim_{x\to x_0}\frac{g'\left(x\right)}{f'\left(x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g'\left(x\right)}{f'\left(x\right)},$$

од каде што следува дека $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g'\left(x\right)}{f'\left(x\right)}=1,$ односно

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогно, до истиот заклучок доаѓаме и во случај кога $x\to\infty$.

6.7.4. Примери.

1) Нека се дадени функциите $f(x)=x^{\alpha}$ и $g(x)=a^{x}$, каде што $\alpha>0$ и $a>1$. Да ја најдеме границата $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}$. Имаме $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\log a}$.

Ако $\alpha\le 1$, тогаш $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\log a}=0$, додека ако $\alpha>1$, заради $\alpha x^{\alpha-1}\to\infty$, со повторна примена на Лопиталовото правило добиваме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{x}\log a}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{a^{x}\log^{2}a}.$$

Ако $\alpha\le 2$, тогаш имаме дека $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{a^{x}\log^{2}a}=0$, додека ако $\alpha>2$, бидејќи $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\to\infty$, повторно го применуваме Лопиталовото правило. Всушност, Лопиталовото правило може да се применува $k-$пати, се додека не се добие $\alpha-k\le 0$. Тогаш, имаме дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{a^{x}\log^{k}a}=0,$$

што значи дека

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{a^{x}}=0.\ \bullet$$

• Лопиталовото правило може корисно да се примени и случај кога

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0 \text{ и } \lim_{x\to x_0}|g(x)|=\infty. \tag{6.14}$$

За да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)$ запишуваме

$f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, што значи дека се исполнети условите 6.13.

6.7.5. Примери.

1) Да ја најдеме границата $\lim\limits_{x\to 0}(x\log x)$. Имаме дека

$$\lim_{x\to 0}(x\log x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}x=0\,.\ \bullet$$

• Во случај кога

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0 \qquad (6.15)$$

за да ја најдеме границата $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$ ставаме $\varphi(x)=(f(x))^{g(x)}$. Со логаритмирање на двете страни добиваме $\log\phi(x)=g(x)\log f(x)$, односно $\log\varphi(x)=\dfrac{g(x)}{1/\log f(x)}=\dfrac{\log f(x)}{1/g(x)}$, што значи дека се исполнети условите 6.13. Притоа, ако $\lim\limits_{x\to x_0}\log\varphi(x)=a$, тогаш со анитилогаритмирање добиваме дека $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=e^a$.

6.7.6. Примери.

1) Да ја најдеме границата $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\sin x}\right)$. Ставаме $\varphi(x)=x^{\sin x}$. Со логаритмираме добиваме дека $\log\varphi(x)=\sin x\log x=\dfrac{\log x}{1/\sin x}$. Тогаш, наоѓаме

дека $\lim\limits_{x\to 0}\log\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log x}{1/\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x}=-\lim\limits_{x\to 0}tgx\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1 \text{ . } \bullet$$

- Во случај кога

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \text{ и } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

за да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}$ забележуваме дека се исполнети се условите 6.15.

6.7.7. Примери.

1) Да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$. Ако ставиме $\phi(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$, со логаритмирање добиваме дека $\log\varphi(x) = tgx\log\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\log\frac{1}{x}}{1/tgx}$. Тогаш наоѓаме дека

$$\lim_{x\to 0}\log\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-\log x}{1/tgx} = -\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\sin x\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0 \text{ .}$$

Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = e^0 = 1 \text{ . } \bullet$$

- Нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Да најдеме границата

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)).$$

Имаме дека $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)$. Сега, ако

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0$ исполети се условите од 6.14. Во спротивно, ако $\frac{f(x)}{g(x)}$ не тежи кон 1 кога $x\to x_0$, тогаш $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)-g(x)\right|=\infty$.

6.7.8. Примери.

1) Да ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$. Имаме

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=$$

$$=\frac{-\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\cos x-x\sin x\right)}=\frac{0}{2}=0.\ \bullet$$

6.8. Испитување на функции

6.8.1. Растење и опаѓање на функција. Интервали на монотоност

6.8.1.1. Теорема. Нека $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ е диференцијабилна функција во интервалот (a,b). Тогаш, функцијата

- расте во интервалот (a,b) ако и само ако $f'(x)\geq 0,$ за $x\in(a,b)$
- опаѓа во интервалот (a,b) ако и само ако $f'(x)\leq 0,$ за $x\in(a,b)$.

Доказ. Нека функцијата $f(x)$ расте во интервалот (a,b) и $x\in(a,b)$. Тогаш, за $x+\Delta x\in(a,b)$ имаме $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{h}\geq 0$, од каде што следува дека $f'(x)\geq 0$.

Слично се покажува дека $f'(x)\leq 0$ ако функцијата опаѓа во интервалот (a,b).

Обратно, нека $f'(x)\geq 0,$ за секое $x\in(a,b),$ и нека $x_1,x_2\in(a,b)$ се произволно избрани. Заради теоремата на Лагранж, постои $x_0\in(x_1,x_2)$ такво што $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(x_0)$. Од $x_2-x_1>0$ и $f'(x_0)\geq 0$, имаме дека $f(x_2)\geq f(x_1)$. Ова значи дека функцијата $f(x)$ во интервалот (a,b) монотоно расте.

Слично се покажува дека функцијата монотоно опаѓа во интервалот (a,b) ако $f'(x)\leq 0$. ■

6.8.1.2. Примери.

1) Функцијата $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $x>0$, за позитивни вредности на α расте, додека за негативни вредности на α опаѓа.

2) За функцијата $f(x)=\arcsin x, -1\leq x\leq 1$ имаме $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>0$, па таа расте на целата дефиниционата област.

3) За функцијата $f(x)=\arccos x, -1\leq x\leq 1$ имаме $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}<0$, па таа опаѓа на целата дефиниционата област.

4) Функцијата $f(x)=arctgx,\ x\in\mathbf{R}$, расте на целата реална права бидејќи $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$, за секое $x\in\mathbf{R}$.

5) Функцијата $f(x)=arcctgx,\ x\in\mathbf{R}$ опаѓа на целата реална права бидејќи $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}<0$, за секое $x\in\mathbf{R}$.

6) Функцијата $f(x)=\ln x,\ x>0$ расте на дефиниционата област бидејќи $f'(x)=\frac{1}{x}>0,$ за секое $x\in(0,\propto)$. ●

Во следниот пример ќе видиме како се определуваат интервалите на монотоност на дадена функција со помош на изводи.

6.8.1.3. Примери.

1) Да ги најдеме интервалите на монотоност на функцијата $f(x)=\frac{e^x}{x},$ $x\neq 0.$ Нејзиниот прв извод е $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$. Бидејќи $e^x>0$ и $x^2>0$, за секое $x\neq 0,$ имаме дека знакот на изводот зависи само од множителот $x-1.$ Притоа, $f'(x)>0$ ако и само ако $x-1>0$, односно $x>1,$ и $f'(x)<0$ ако и само ако $x-1<0$ и $x\neq 0,$ односно $x<1$ и $x\neq 0.$ Според тоа, функцијата $f(x)=\frac{e^x}{x}$ расте во интервалот $(1,+\infty)$ и опаѓа во интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,1)$. ●

6.8.2. Локални екстреми

Од теоремата на Ферма е познато дека: *ако една диференцијабилна функција има екстрем во точката* x_0*, тогаш* $f'(x_0)=0$. Но, обратното тврдење не мора да важи. Изводот на функција во некоја точка може да биде нула, а таа да нема екстрем во неа. На пример, функцијата $f(x)=x^3$ во точката $x_0=0$ има извод $f'(0)=0$. Но, од $f'(x)=3x^2$ забележуваме дека таа расте за сите вредности на x, што значи дека нема екстрем во ниедна точка, па ниту во $x_0=0$.

Условот $f'(x_0)=0$ *е потребен, но не и доволен за постоење на екстрем.*

Да видиме сега како ќе дознаеме дали во точката x_0, за која што $f'(x_0)=0$*,* функцијата има екстремна вредност и, ако има, дали тоа е минимум или максимум.

Нека функцијата f во точката x_0 е два пати диференцијабилна и нека $f'(x_0)=0$. Од теорема 6.1.2. следува дека функцијата f' е непрекината во x_0, па постои $\varepsilon>0$ така што важи еден од следните три случаи:

1. Ако $f'(x)>0,$ за секое $x\in(x_0-\varepsilon,x_0)$ и ако $f'(x)<0,$ за секое $x\in(x_0,x_0+\varepsilon)$, односно, ако функцијата расте до $f(x_0)$ и потоа опаѓа кога аргументот x расте, тогаш во точката x_0 функцијата добива најголема вредност $f(x_0)$.
2. Ако $f'(x)<0,$ за секое $x\in(x_0-\varepsilon,x_0)$ и ако $f'(x)>0,$ за секое $x\in(x_0,x_0+\varepsilon),$ односно, ако функцијата опаѓа до $f(x_0)$ и потоа расте кога аргументот x расте, тогаш во точката x_0 функцијата добива најмала вредност $f(x_0)$.
3. Ако $f'(x)\le 0,$ за секое $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ или ако $f'(x)\ge 0,$ за секое $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon),$ односно, ако изводот $f'(x)$ не го менува знакот кога x е во некоја околина на точката x_0, тогаш функцијата нема екстрем во точката x_0.

Да забележиме, во првиот случај изводот на функцијата $f'(x)$ опаѓа од позитивни кон негативни вредности, додека x расте во некоја околина на x_0. Тогаш нејзиниот извод од втор ред е негативен, односно $f''(x) < 0$.

Во вториот случај изводот на функцијата $f'(x)$ расте од негативни кон позитивни вредности, додека x расте во некоја околина на x_0. Тогаш нејзиниот извод од втор ред е позитивен, односно $f''(x) > 0$.

Така доаѓаме до следното правило искажано во теоремата.

6.8.2.1. Теорема. Нека $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ е два пати диференцијабилна функција во точката x_0 и $f'(x_0) = 0$

- Ако $f''(x_0) > 0$, тогаш функцијата во таа точка има минимум.
- Ако $f''(x_0) < 0$, тогаш функцијата во таа точка има максимум. ■

Практично, екстремните вредности на функцијата $f(x)$ ги наоѓаме по следниот редослед:

1. Најнапред го определуваме првиот извод на функцијата $f'(x)$.
2. Потоа ја решаваме равенката $f'(x) = 0$.
3. За реалните корени на равенката го испитуваме знакот на вториот извод на функцијата $f''(x)$, за секој корен поодделно.

6.8.2.2. Примери.

1) Да ги определиме екстремните вредности на функцијата $f(x) = x^2$.

Го наоѓаме најнапред првиот изводот $f'(x) = 2x$ и го изедначуваме со нула. Ја добиваме равенката $2x = 0$ чие што решение е $x = 0$. Вториот извод е $f''(x) = 2$. Го испитуваме знакот на вториот извод во точката

$x=0$, односно наоѓаме $f''(0)$. Бидејќи имаме дека $f''(0)=2>0$, дадената функција во точката $x=0$ има минимум чија вредност е $f(0)=0$.

2) Да се определат екстремните вредности на функцијата $f(x)=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$. Првиот извод на функцијата $f'(x)=\cos x$ го изедначуваме со нула и ја решаваме тригонометриската равенка $\cos x=0$. Таа има бесконечно многу решенија, $x_k=\dfrac{2k+1}{2}\pi,\ k\in\mathbf{Z}$. За да видиме во кои од овие точки таа има минимум, а во кои максимум, го наоѓаме вториот извод на функцијата $f''(x)=-\sin x$.

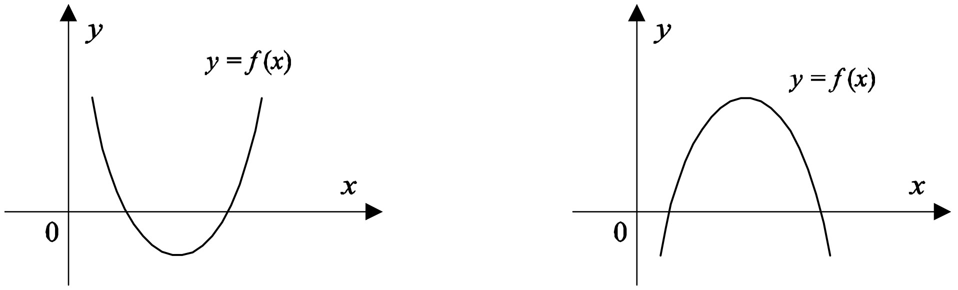
Во точките $x_{2k}=\dfrac{4k+1}{2}\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}$, имаме дека $f''(x_{2k})=-1<0$, што значи дека во тие точки функцијата има максимум. Функцијата има минимум во точките $x_{2k-1}=\dfrac{4k-1}{2}\pi,\ \ k\in\mathbf{Z}$, бидејќи во тие точки имаме дека $f''(x_{2k-1})=1>0$. ●

6.8.3. Конвексност и конкавност

6.8.3.1. Дефиниција. Нека $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е диференцијабилна во интервалот (a,b). Велиме дека е

- *конвексна во интервалот* (a,b) („држи вода“) ако коефициентот на правецот на тангентата во (a,b) расте.
- *конкавна во интервалот* (a,b) („не држи вода“) ако коефициентот на правецот на тангентата во (a,b) опаѓа.
- *строго конвексна во интервалот* (a,b) ако коефициентот на правецот на тангентата во (a,b) строго расте.

- *строго конкавна на интервалот* (a,b) ако коефициентот на правецот на тангентата во (a,b) строго опаѓа (слика 76.).



конвексна конкавна

Слика 76.

Непосредно од дефиницијата следува следната теорема.

6.8.3.2. Теорема. Нека $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е диференцијабилна во интервалот (a,b). Тогаш таа е

- конвексна во интервалот (a,b) ако и само ако $f'(x)$ расте во интервалот (a,b).
- конкавна во интервалот (a,b) ако и само ако $f'(x)$ опаѓа во интервалот (a,b).
- строго конвексна на интервалот (a,b) ако и само ако $f'(x)$ строго расте во интервалот (a,b).
- строго конкавна во интервалот (a,b) ако и само ако $f'(x)$ строго опаѓа во интервалот (a,b). ■

6.8.3.3. Последица. Нека $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е два пати диференцијабилна во интервалот (a,b). Тогаш таа е

- конвексна во интервалот (a,b) ако и само ако $f''(x)\geq 0$, за секое $x\in(a,b)$.
- конкавна во интервалот (a,b) ако и само ако $f''(x)\leq 0$, за секое $x\in(a,b)$.
- строго конвексна во интервалот (a,b) ако и само ако $f''(x)>0$, за секое $x\in(a,b)$.
- строго конкавна во интервалот (a,b) ако и само ако $f''(x)<0$, за секое $x\in(a,b)$.

Доказ. Бидејќи имаме дека $f''(x)=(f'(x))'$, доказот следува директно од претходната теорема. ■

6.8.3.4. Примери.

1) Функцијата $f(x)=x^n,\ n\in\mathbf{Z}$ е

- конвексна на $\mathbf{R}$ ако n е парен број, и строго конвексна ако $n=2$.
- конвексна на $(0,\propto)$ и конкавна на $(-\propto,0)$ ако n е непарен број, и
- конвексна и конкавна на реалната права ако $n=1$.

2) Функцијата $f(x)=e^x$ е строго конвексна на $\mathbf{R}$.

3) Функцијата $f(x)=\ln x$ е строго конкавна во интервалот $(0,\propto)$.

4) Функцијата $f(x)=\sin x$ е строго конвексна во $((2k-1)\pi,2k\pi),\ k\in\mathbf{Z}$ и строго конкавна во $(2k\pi,(2k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z}$.

5) Функцијата $f(x)=arctgx$ е строго конвексна во интервалот $(-\propto,0)$ и строго конкавна во интервалот $(0,\propto)$. ●

6.8.4. Превојни точки

6.8.4.1. Дефиниција. Нека $f:(a,b)\to \mathbf{R}$ е диференцијабилна во интервалот (a,b). Велиме дека функцијата има *превој* во точката $x_0 \in (a,b)$ ако е

- строго конвексна во интервалот (a,x_0) и строго конкавна во интервалот (x_0,b), или
- строго конкавна во интервалот (a,x_0) и строго конвексна во интервалот (x_0,b).

Потребните услови за превој се дадени во следната теорема.

6.8.4.2. Теорема. Ако функцијата $f(x)$ има превој во точката x_0, и има непрекинат втор извод во истата точка, тогаш $f''(x_0)=0$.

Доказ. Ќе претпоставиме дека $f''(x_0)\neq 0$. Ако $f''(x_0)>0$, тогаш заради непрекинатоста на вториот извод имаме дека постои $\varepsilon>0$ такво што $f''(x)>0,$ за секое $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon),$ односно функцијата е строго конвексна во интервалот $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon),$ што значи дека точката x_0 не е превојна. Слично се покажува и ако $f''(x_0)<0$. ■

Обратното тврдење не е точно. На пример, ако $f(x)=x^4$, имаме дека $f''(0)=0$, иако во точката $x_0=0$ функцијата нема превој, туку има минимум.

Доволните услови за превој се дадени во следната:

6.8.4.3. Теорема. Нека $f(x)$ е три пати диференцијабилна функција во некоја околина на точката x_0 и нека $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$. Тогаш точката x_0 е превојна.

Доказ. Да претпоставиме дека $f'''(x_0)<0$. Од условот $f''(x_0)=0$ имаме дека $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}<0$. Тогаш, постои $\varepsilon>0$ така што важи $f''(x)>0$, за секое $x\in(x_0-\varepsilon,x_0)$, и $f''(x)<0$, за секое $x\in(x_0,x_0+\varepsilon)$. Тоа значи дека точката x_0 е превојна.

Доказот во случајот кога $f'''(x_0)>0$ се спроведува аналогно. ■

Практично, превојните точки на функцијата $f(x)$ ги наоѓаме по следниот редослед:

1. Најнапред го определуваме вториот извод $f''(x)$.
2. Потоа ја решаваме равенката $f''(x)=0$.
3. За реалните корени на равенката испитуваме дали $f'''(x)$ е различно од нула, за секој корен поодделно.

6.8.4.4. Примери.

1) За функцијата $f(x)=x^3$, точката $x_0=0$ е превојна точка. Функцијата е конвексна во интервалот $(-\infty,0)$ и конкавна во интервалот $(0,+\infty)$.

2) Да ги најдеме превојните точки на функцијата $f(x)=xe^{-x}$. Нејзините изводи се

$$f'(x)=(1-x)e^{-x},\ f''(x)=(x-2)e^{-x} \text{ и } f'''(x)=(3-x)e^{-x}.$$

Вториот извод на функцијата $f''(x)=(x-2)e^{-x}$ се анулира за $x=2$, и заради $f'''(2)\neq 0$ утврдуваме дека $x=2$ е превојна точка. Притоа, бидејќи $f''(x)<0$ за секое $x\in(-\infty,2)$, заклучуваме дека функцијата е конвексна во интервалот $(-\infty, 2)$. Слично, заради $f''(x) > 0,$ за секое $x \in (2, +\infty)$, заклучуваме дека функцијата е конкавна во интервалот $x \in (2, +\infty)$. ●

6.8.5. Графичко прикажување на функции

Графикот на дадена функција нагледно ни ги дава карактеристичните својства на функцијата. За да го скицираме графикот на функцијата дадена со аналитички израз обично ја користиме следнава шема:

1. Ја одредуваме дефиниционата област на функцијата.
2. Испитуваме специјални својства на функцијата:
    - парност, непарност
    - периодичност
3. Ги одредуваме пресечните точки на графикот на функцијата со координатните оски.
4. Го испитуваме однесувањето на функцијата во „крајните точки“ на дефиниционата област и ги наоѓаме асимптотите.
5. Го пресметуваме првиот извод на функцијата и ги определуваме вредностите на аргументот за кои тој се анулира.
6. Ги определуваме интервалите на монотоност и екстремните вредности на функцијата.
7. Го пресметуваме вториот извод на функцијата и ги определуваме вредностите на аргументот за кои тој се анулира.
8. Испитуваме конвексност и ги одредуваме превојните точки.
9. Го скицираме графикот на функцијата.

6.8.5.1. Примери.

1) Да го испитаме текот и да го скицираме графикот на функцијата

$$f\left(x\right)=\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

1. Функцијата е определена за сите вредности на x, освен за $x=1$, што значи $D_f=\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,\infty\right)$.

2. Функцијата не е ниту парна ниту непарна. Не е периодична.

3. За $x=0$ имаме $f\left(x\right)=-1$. Исто така, $f\left(x\right)=0$ ако $x=\frac{1}{2}$. Значи, точката $\left(\frac{1}{2},0\right)$ е пресечна точка на графикот со $x-$оската и точката $\left(0,-1\right)$ е пресечна точка на графикот со $y-$оската.

4. За однесувањето на функцијата на краиштата од дефиниционата област имаме

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{x-2+\frac{1}{x}}=0^-$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{x-2+\frac{1}{x}}=0^+$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty,\qquad\lim_{x\to-1^+}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty$$

Хоризонтална асимптота е правата $y=0$.

Вертикална асимптота е правата $x=1$.

Коси асимптоти нема.

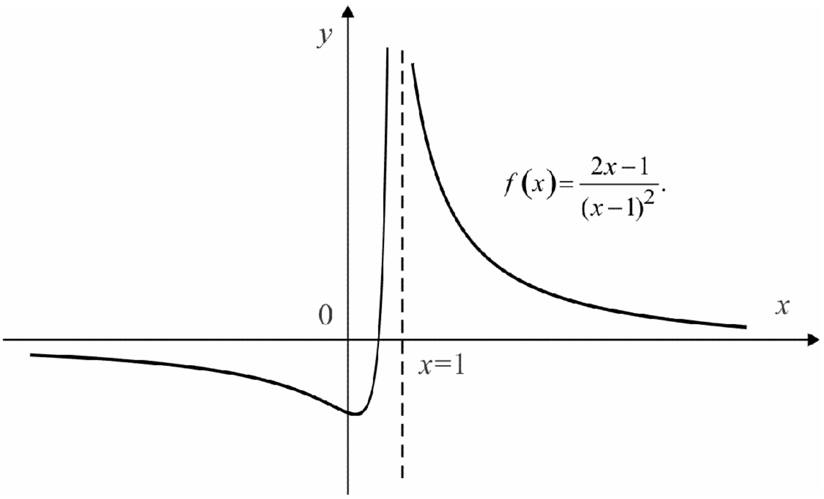
5. Првиот извод на функцијата е $f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^3}$. $f'(x)=0$ за $x=0$.

6. За $x\in(-\propto,0)\cup(1,\infty)$ имаме $f'(x)<0,$ што значи функцијата опаѓа во интервалите $(-\infty,0)$ и $(1,\propto)$. Функцијата расте во интервалот $(0,1)$, бидејќи тука имаме дека $f'(x)>0$.

7. Вториот извод е $f''(x)=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$. Имаме $f''(0)=2>0$ што значи дека во точката $x=0$ функцијата има минимум.

8. Во точката $x=-\frac{1}{2}$ кривата има превој, бидејќи $f''\left(-\frac{1}{2}\right)=0$. Кривата е конкавна во интервалот $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, додека е конвексна во интервалите $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ и $(1,\infty)$.

9. Графикот е прикажан на слика 77.



Слика 77.

6.9. Задачи за вежбање

1. Дадена е функцијата $f\left(x\right)=\frac{1}{x}.$ Најди го нараснувањето $\Delta y,$ ако:

1) $x=3,\ \Delta x=0{,}1$ 2) $x=0{,}2,\ \Delta x=0{,}1$ 3) $x=-1,\ \Delta x=0{,}01$

2. Спореди го нараснувањето на функциите $f\left(x\right)=x^2$ и $g\left(x\right)=x^3,$ ако:

1) $x=-2,\ \Delta x=0{,}1$ 2) $x=1,\ \Delta x=0{,}1$

3. Дадена е функцијата $f\left(x\right)=\frac{1}{x}.$ Пресметај ги изводите:

1) $f'\left(1\right)$ 2) $f'\left(-1\right)$ 3) $f'\left(2\right)$

4. Најди ги по дефиниција изводите на следните функции:

1) $f\left(x\right)=3-2x$ 2) $f\left(x\right)=x^3$ 3) $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$

4) $f\left(x\right)=7x-8$ 5) $f\left(x\right)=3+7x^2$ 6) $f\left(x\right)=6\sqrt{x}-5$

5. Испитај дали функцијата

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x-1, & x\geq 0 \\ x^2-1, & x<0 \end{cases}$$

е диференцијабилна во точката $x=0.$

6. Дали постои извод на функцијата $f\left(x\right)=2^{|x|}$ во точката $x=0?$

7. Најди ги левиот и десниот извод на следните функции во назначените точки:

1) $f\left(x\right)=2x-1,\ x=3$ 2) $f\left(x\right)=\left|x-4\right|,\ x=4$

8. Дадена е функцијата $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 1\\ x, & x<1\end{cases}$. Пресметај $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Дали постои $f'(1)$?

9. Дали следниве функции имаат извод во назначените точки:

1) $f(x)=x,$ во $x=2$ 2) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, во $x=0$

3) $f(x)=2\sin x,$ во $x=0$

10. Најди го агловиот коефициент на тангентата на графикот на функцијата $f(x)=6x^2-7x-5$ во точката M со апсциса $x=-\frac{1}{2}.$

11. Определи ја равенката на тангентата на графикот на функцијата во точка $M(1,y)$ од графикот, ако:

1) $f(x)=x^2-x$ 2) $f(x)=\sqrt{x}$ 3) $f(x)=-x^2$

12. Од точката $M(2,1)$ конструирај тангента на параболата $f(x)=x^2$.

13. Најди го левиот и десниот извод на следните функции во назначените точки:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x=0$ 2) $f(x)=|\sin x|,\ x=0$

а потоа интерпретирај го геометриски добиениот резултат.

14. Една честичка се движи во позитивна насока по права линија, така што после t минути нејзината оддалеченост од координатниот почеток е $s(t)=6t^2m.$

1) Најди ја средната брзина на честичката на интервалот $[2,4]$.

2) Најди ја моментната брзина во $t_0=3.$

15. Со помош на правилата за наоѓање на извод, најди ги изводите на следните функции:

1) $y=x^4+3x^2$ 2) $y=x^2+\frac{1}{x}$ 3) $y=\frac{x^2+1}{x-1}$

4) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ 5) $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$ 6) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$

7) $y=xe^x+3$ 8) $y=e^x\sin x$ 9) $y=\frac{x}{e^x+1}$

10) $y=x^2\ln x$ 11) $y=\frac{x^5}{\ln x+x}$ 12) $y=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$

13) $y=\sin x+x\cos x$ 14) $y=\frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}$ 15) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$

16) $y=x\operatorname{arctg} x$ 17) $y=\arcsin x+\arccos x$

16. Најди ги изводите на сложените функции:

1) $y=(2x+1)^{25}$ 2) $y=\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)^5$ 3) $y=\left(x^2+x-1\right)^{20}$

4) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 5) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 6) $y=\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

7) $y=\sqrt{1+e^x}$ 8) $y=e^{x^2+2x}$ 9) $y=e^{\sqrt{x+1}}$

10) $y=\ln\left(x^2-4x\right)$ 11) $y=\ln(1-2x)$ 12) $y=\sqrt{\ln x}$

13) $y=\sin^2 x$ 14) $y=\sin(\sin x)$ 15) $y=\sin e^x$

16) $y=\ln tgx$ 17) $y=\ln^2(\sin x)$ 18) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

19) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ 20) $y=\arcsin\left(x^2\right)$ 21) $y=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x}\right)$

22) $y=e^{\operatorname{tg}x}$ 23) $y=e^{\sin x}$ 24) $y=\ln\left(\ln x\right)$

25) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 26) $y=\ln\left(\sin x\right)$ 27) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

17. Со помош на логаритамско диференцирање најди ги изводите на следните функции:

1) $y=x^{\ln x}$ 2) $y^x=x^y$ 3) $y=x^{\frac{1}{x}}$

4) $y=x^{\sin x}$ 5) $y=\left(\sin x\right)^x$ 6) $y=10^{xtgx}$

18. Користејќи го правилото за извод на инверзна функција, најди ги изводите на следните функции:

1) $y=x$ 2) $y=\log_2 x$ 3) $y=\sqrt[3]{x}$

19. Најди ги изводите на имплицитно зададените функции:

1) $x^2+y^2=5$ 2) $y^4-2y^2x-1=0$ 3) $x^2y-xy^2=1$

4) $x\ln y-2xy+y^2=4$ 5) $y=e^{x^2+y^2}$ 6) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

20. Најди ги изводите од втор ред на следниве функции:

1) $y=(x^2+1)^3$ 2) $y=\frac{1-x}{1+x^2}$ 3) $y=\sqrt{2x-x^2}$

4) $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ 5) $y=x^2\ln x$ 6) $y=\frac{1-\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$

22. Користејќи го диференцијалот на функција пресметај ги приближно вредностите на следните изрази:

1) $(3{,}05)^2$ 2) $\sqrt{48{,}99}$ 3) $e^{0{,}25}$

4) $\ln 1,02$ 5) $\sin 29°$ 6) $\operatorname{arctg} 0,98$

23. 1) За функцијата $y=-\frac{1}{x}$ во точката $x=3$ имаме $dy=0,01$. Пресметај го dx.

2) Пресметај го првиот диференцијал на функцијата $y=x^2-x-2$ при промена на независно променливата од 3 на 3,1.

24. Најди dy ако:

1) $y=x^2-5x+6$ 2) $y=e^x+\ln(x+1)$ 3) $y=\frac{x+1}{x^3-1}$

25. Испитај кои од следниве функции ги исполнуваат условите од теоремата на Ферма:

1) $f(x)=2x^2+4,\quad x\in[1,4]$ 2) $f(x)=e^x+3,\quad x\in[0,3]$

26. Покажи дека следниве функции ги исполнуваат условите од теоремата на Рол:

1) $f(x)=\sin x,\quad x\in[0,\pi]$ 2) $f(x)=x^2-4,\quad x\in[-1,1]$

27. Испитај кои од следниве функции ги исполнуваат условите од теоремата на Рол:

1) $f(x)=\ln(\sin x),\quad x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 2) $f(x)=1-|x|,\quad x\in[-1,1]$

28. Испитај кои од следниве функции ги исполнуваат условите од теоремата на Лагранж:

1) $f(x)=x^2,\ x\in[3,4]$ 2) $f(x)=4x^3-5x^2+x-2,\ x\in[0,1]$

Во случај на потврден одговор најди ја соодветната точка x_0 од теоремата на Лагранж.

29. На кривата $y = x^3$ најди точка во која тангентата е паралелна на тетивата што ги сврзува точките $A(-1,-1)$ и $B(2,8)$.

30. Докажи ги следниве неравенства:

1) $e^x > 1 + x,\ \ x > 1$ 2) $\ln(1+x) < x,\ \ x > 0$

31. Докажи ги следните идентитети:

1) $\arcsin\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \frac{\pi}{2},\ x \in [0,1]$ 2) $arctgx + arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\ \ x > 0$

32. Во кој интервал функциите $f(x) = \cos(\arcsin x)$ и $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, се еднакви меѓу себе?

33. Дали функциите $f(x) = e^x$ и $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на сегментот $[-3,3]$?

34. Најди ја точката x_0 од теоремата на Коши за функциите $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$ на сегментот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

35. Со примена на Лопиталовото правило, пресметај ги границите:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2} + 1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$ 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$

36. Најди ги интервалите на монотоност на следниве функции:

1) $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1,\ x \in \mathbf{R}$ 2) $f(x) = \frac{1}{x-2},\ \ x \neq 2$

3) $f(x) = (x-1)\sqrt{x},\ \ x \geq 0$ 4) $f(x) = 4{,}3^{\frac{x}{x-1}},\ x \neq 1$

37. Најди ги екстремните вредности на функциите:

1) $y = 3x - x^3$ 2) $y = x^3 + x^4$ 3) $y = \frac{1-x}{2x-1}$

4) $y = \frac{4x}{x^2+1}$ 5) $y = (x+1)e^x$ 6) $y = x\ln x$

38. Најди ги интервалите на конвексност на функциите:

1) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x - 4$ 2) $y = \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ 3) $y = \frac{1}{x^2}$

4) $y = \ln x$ 5) $y = \sqrt{x+2}$ 6) $y = x\ln x$

37. Најди ги превојните точки на функциите:

1) $y = x^2 + 2x - 3$ 2) $y = \frac{x}{x+1}$ 3) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

4) $y = \frac{e^x}{x}$ 5) $y = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$ 6) $y = \sin x,\ \ x \in (0,2)$

38. Испитај го текот и скицирај го графикот на следните функции:

1) $y = 2x^2 - x^4$ 2) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 3) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$

7. Неопределен интеграл

7.1. Примитивна функција и неопределен интеграл

Видовме како од функцијата $f(x)$, кога таа задоволува одрдени услови, ја добиваме изводната функција $f'(x)$. Операцијата со која доаѓавме до функцијата $f'(x)$ се вика диференцирање. Значи, ако е зададена функцијата $f(x)$, научивме како, без големи тешкотии, да ја најдеме изводната функција $f'(x)$, се разбира ако постои.

Да ја поставиме сега и обратната задача. Имено, ако е зададена изводна функција $f: E \to F$, да се најде функцијата φ дефинирана на истото множество E, за која важи $\varphi'(x) = f(x)$, $x \in E$.

7.1.1. Дефиниција. Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на интервалот (a,b). Велиме дека функцијата $\varphi(x)$ дефинирана на истиот интервал (a,b) е *примитивна функција на функцијата* $f(x)$ ако е диференцијабилна во (a,b) и ако важи $\varphi'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.

7.1.2. Примери.

1) Може да провериме дека функцијата $\varphi(x) = \sin x$ е примитивна функција на функцијата $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbf{R},$ бидејќи $\varphi'(x) = f(x),\ \ x \in \mathbf{R}.$

2) Функцијата $\varphi(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1,$ е примитивна функција на функцијата $f(x) = x^{\alpha}$ бидејќи $\varphi'(x) = f(x)$.

3) Може да провериме дека функцијата $\varphi(x) = e^{x}$ е примитивна функција на функцијата $f(x) = e^{x}$. ●

Да забележиме дека ако $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$, тогаш и функцијата $\varphi(x) + C,$ каде што C е произволен реален број, е исто така примитивна функција на функцијата $f(x)$. Ќе покажеме дека сите примитивни функции на дадена функција се од обликот $\varphi(x) + C.$

7.1.3. Теорема. Ако $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x),$ тогаш и функцијата $\varphi(x) + C$ е исто така примитивна функција на функцијата $f(x).$ Уште повеќе, ако функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дефинирани во интервалот (a,b) се примитивни функцији на функцијата $f(x),$ тогаш $\phi(x) - \psi(x) = C,$ за секое $x \in (a,b).$

Доказ. Нека $\varphi'(x) = \psi'(x) = f(x)$ и нека $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. Тогаш имаме $F'(x) = 0,$ за секое $x \in (a,b)$. За да покажеме дека $F(x) = C,$ за секое $x \in (a,b),$ ќе ја користиме теоремата на Лагранж за средна вредност Нека $x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$ се произволно избрани. Функцијата $F(x)$ ги задоволува условите на теоремата на Лагранж на $[x_1, x_2]$, па постои точка $x_0 \in (x_1, x_2)$ за која што важи $F(x_2) - F(x_1) = F'(x_0)(x_2 - x_1)$. Бидејќи $F'(x_0) = 0$, имаме дека $F(x_2) = F(x_1)$, за секои $x_1, x_2 \in (a,b)$, односно $F(x) = C$, за секое $x \in (a,b)$. ■

7.1.4. Дефиниција. Множеството на сите примитивни функции на функција $f(x)$ се нарекува *неопределен интеграл* на функцијата и се означува со

$$\int f(x)dx$$

Значи, ако $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$, тогаш според теорема 7.1.3., сите други примитивни функции на $f(x)$ се од обликот $\varphi(x) + C$. Тоа значи дека

$$\int f(x)dx = \{\varphi(x) + C : C \in \mathbf{R}\},$$

за што понатаму ќе пишуваме пократко

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C .$$

Во дефиницијата, $f(x)$ се нарекува *подинтегрална функција*, $f(x)dx$ се нарекува *подинтегрален израз*, и C се нарекува *интеграциона константа* или *константа на интегрирање.* Симболот $\int$ ќе го викаме *интегрален знак.*

Операцијата со која доаѓаме до примитивната функција, односно до неопределениот интеграл, се вика *интегрирање.*

Природно прашање што се наметнува е дали секоја функција има примитивна функција. Во теоријата на функции се утврдуваат услови врз основа на кои со сигурност може да се каже дали некоја класа на функции има примитивна функција. Понатаму ќе се среќаваме само со функции кои имаат примитивни функции.

Кривите дефинирани со равенката $y=\varphi(x)+C$ се викаат *интегрални криви* за кривата дефинирана со равенката $y=f(x)$. Забележуваме дека, кога ќе кажеме дека функциите $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ се примитивни функции на функцијата $f(x)$, имаме дека $\varphi_1'(x)=\varphi_2'(x)=f(x)$, а тоа значи дека коефициентот на правецот на тангентата на кривата $y=\varphi_1(x)$ за секоја вредност на x е ист со коефициентот на правец на тангентата на кривата $y=\varphi_2(x)$ во x. Со други зборови, графикот на $y=\varphi_2(x)$ се добива со транслација долж $y-$оската на графикот на функцијата $y=\varphi_1(x)$. За да ја најдеме интегралната крива која што минува низ дадена точка $M(x_0,y_0)$, од равенството $y_0=\varphi(x_0)+C$ ја наоѓаме интеграционата константа $C=y_0-\varphi(x_0)$. Тогаш, кривата определена со равенката $y=\varphi(x)+y_0-\varphi(x_0)$ е интегралната крива која што минува низ точката $M(x_0,y_0)$.

7.1.5. Примери.

1) Да ја најдеме примитивната функција $\varphi(x)$ на функцијата $f(x)=2x$ чијшто график минува низ точката $M_0(0,2)$. Знаеме дека функцијата $y=\varphi(x)+C=x^2+C$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$. Од равенството $y_0=\varphi(x_0)+C=x_0{}^2+C$, за $x_0=0$ и $y_0=2$ ја наоѓаме интеграционата константа $C=2-0^2=2$. Така, кривата $y=x^2+2$ е интегралната крива која што минува низ точката $M_0(0,2)$.

2) Да ја најдеме функцијата $f(x)$ чија тангента има коефициент на правец $3x^2+1$ за секоја вредност на x и чијшто график минува низ

точката (2,8). Коефициентот на правец на тангентата во секоја точка $\left(x, f\left(x\right)\right)$ е изводот $f'\left(x\right)$. Така, имаме дека

$$f'\left(x\right)=3x^2+1$$

и $f\left(x\right)$ е нејзиниот интеграл, односно

$$f\left(x\right)=\int f'\left(x\right)dx=\int(3x^2+1)\,dx=x^3+x+C\ ,$$

бидејќи $\left(x^3+x+C\right)'=3x^2+1$. За да го најдеме $C,$ го користиме фактот дека графикот на функцијата $f\left(x\right)$ минува низ точката (2,8). Затоа, заменуваме $x=2$ и $f\left(2\right)=8$ во равенката за $f\left(x\right)$ и ја добиваме C

$$8=2^3+2+C \text{ или } C=-2.$$

Бараната функција е $f\left(x\right)=x^3+x-2.$ ●

7.1.6. Примери.

1) Во примерот 7.1.2. се определени примитивни функции на некои основни елементарни функции. Така, имаме дека

1. $\int \cos x dx=\sin x+C$

2. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq-1$

3. $\int e^x dx=e^x+C$

Да го земеме во предвид случајот $\alpha=-1,$ за интегралот 2., односно да го пресметаме интегралот $\int\frac{1}{x}dx.$ Ако $x>0$ имаме дека

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C\ \ (=\ln|x|+C \text{ бидејќи } |x|=x),$$

додека за $x<0$ имаме дека

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln(-x)+C \quad (=\ln|x|+C \text{ бидејќи } |x|=-x).$$

Да забележиме дека првото равенство следува од $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$ за $x>0,$ додека второто, од равенството $\left(\ln(-x)\right)'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$ за $x<0.$ Така, имаме дека $\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$, за $x\neq 0,$ па добиваме дека

4. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

Да забележиме дека со интегралот во 4. се „пополнува дупката“ од интегралот 2., односно за случајот кога $\alpha=-1,$ па интегралите 2. и 4. може да се комбинираат во следниот облик

5. $\int x^{\alpha}dx=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, & \alpha\neq-1\\ \ln|x|+C, & \alpha=-1\end{cases}$. ●

Во следната теорема ќе дадеме неколку основни правила за интегрирање на функции.

7.1.7. Теорема. Ако $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$ на интервалот (a,b), тогаш важат следните тврдења

1. $\int\varphi'(x)dx=\varphi(x)+C$
2. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$, $k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$
3. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

Доказ. 1. Бидејќи $\varphi'(x)=f(x)$, тогаш

$$\int \varphi'(x)dx = \int f(x)dx = \varphi(x) + C .$$

2. Ако $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$ во интервалот (a,b), тогаш следува дека $(k\varphi)(x)$ е примитивна функција на функцијата $(kf)(x)$ во истиот интервал, каде што $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Затоа,

$$\int kf(x)dx = k\varphi(x) + C = k\left(\varphi(x) + \frac{C}{k}\right) = k\int f(x)dx .$$

3. Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ се примитивни функции на функциите $f(x)$ и $g(x)$ соодвено во интервалот (a,b). Од својства на изводите, имаме

$$(\varphi + \psi)'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x),$$

односно $(\phi + \psi)(x)$ е примитивна функција на функцијата $(f + g)(x)$. Така, добиваме дека

$$\int (f(x) + g(x))dx = (\varphi(x) + \psi(x)) + C = \int f(x)dx + \int g(x)dx . \ \blacksquare$$

7.2. Таблица на некои основни интеграли

Имајќи ги предвид изводите на основните елементарни функции (пример 6.1.3.), и својството $\int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$ може да изведеме таблица на неопределени интеграли на некои елементарни функции. Имаме

1. $\int 0\, dx = C$
2. $\int 1\, dx = x + C$
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \quad \alpha \neq -1$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq -1$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in Z$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \quad x \neq \pi + n\pi,\ n \in Z$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

14. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

Користејќи ја погорната таблица и теоремата 7.1.7., ќе ги пресметаме следните интеграли.

7.2.1. Примери.

1) $\int \left(3x^2 + 4x - 6\right) dx = 3\int x^2 dx + 4\int x dx - 6\int dx = 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 6x + C =$

$$= x^3 + 2x^2 - 6x + C$$

2) $$\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^2}{x}\,dx = \int \frac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1}{x}\,dx = \int\left(x^{-\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \int x^{-\frac{1}{3}}dx + 2\int x^{-\frac{2}{3}}dx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 2\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + \ln|x| + C =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} + \ln|x| + C$$

3) $$\int \frac{8^x+1}{2^x+1}\,dx = \int \frac{(2^x+1)\,[(2^x)^2-2^x+1]}{2^x+1}dx = \int (4^x-2^x+1)\,dx =$$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + C = \frac{2^{2x-1}-2^x}{\ln 2} + x + C$$

4) $$\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \int \frac{x^2-1+1}{1-x^2}\,dx = \int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

5) $$\int tg^2x\,dx = \int((1+tg^2x)-1)dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = tgx - x + C$$

6) $$\int \frac{2x+3}{3x+2}dx = \int \frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{6}}{\left(x+\frac{2}{3}\right)}dx = \frac{2}{3}x + \frac{5}{9}\ln\left|x+\frac{2}{3}\right| + C$$

7) $$\int\left(x^2-3\sin 2x\right)dx = \int x^2dx - 3\int \sin 2x\,dx = \frac{x^3}{3} - 3\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\cos 2x + C \text{ (бидејќи } (-\cos 2x)' = 2\sin 2x\text{)}$$

8) $$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{\left(\sin x - \cos x\right)^2}\,dx = \int \left|\cos x - \sin x\right| dx =$$

$$= (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C$$

9) Да ја определиме функцијата $y = f(x)$ чиј што коефициент на правец на тангентата е $4x+1$ за секоја вредност на $x,$ и нејзиниот график минува низ точката $(1,2)$.

Знаеме дека коефициентот на правецот на тангентата во секоја точка $(x, f(x))$ е изводот $f'(x)$. Бидејќи $f'(x) = 4x+1,$ добиваме дека

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x+1)dx = 2x^2 + x + C.$$

За да ја најдеме интеграционата константа $C,$ го користиме фактот дека графикот на функцијата минува низ точката (1,2). Понатаму, имаме дека $2 = 2 \cdot 1^2 + 1 + C,$ односно $C = -1.$ Според тоа, бараната функција е $f(x) = 2x^2 + x - 1$. ●

Да нагласиме дека пресметувањето на интегралите во голем број случаи, не се сведува на основните правила на интегрирање. Ќе изложиме две методи кои во некои случаи ни помагаат пресметувањето на интегралите да го сведеме на основните правила на интегрирање.

7.3. Интегрирање со метод на замена

7.3.1. Теорема. Нека функцијата $\varphi(x)$ дефинирана во интервалот (a,b) е примитивна на функцијата $f(t), t \in (a,b)$ и нека $g(x) = \varphi(x),$ $x \in (c,d)$ е диференцијабилна во интервалот (c,d). Тогаш постои примитивна функција на функцијата $f(g(x))g'(x),$ $x \in (c,d),$ и важи

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \varphi(g(x)) + C \tag{7.1}$$

Доказ. Ќе покажеме дека функцијата $\varphi \circ g(x)$ е примитивна функција за функцијата $f(g(x))g'(x),\ x \in (c,d)$. Навистина, имаме дека

$$(\varphi \circ g)'(x) = [\varphi(g(x))]' = \varphi'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x). \ \blacksquare$$

Врз основа на погорната теорема, наместо да интегрираме по променливата x може да преминеме на интегрирање по новата променлива t, така што во интегралот $\int f(x)\,dx$ наместо x ќе пишуваме $g(t)$. Притоа dx е диференцијал на функцијата $x = g(t)$, односно, важи $dx = g'(t)dt.$ Изборот на функцијата $x = g(t)$ е интуитивен, во смисла дека не постои универзален метод за наоѓање на споменатата функција. Целта на замената на променливата x со функцијата $x = g(t)$ е добивање на поедноставен интеграл од зададениот. Изложениот метод за пресметување интеграли се вика *метод на замена* или *метод на супституција.* За илустрација на методот на замена, во продолжение ќе дадеме неколку примери.

7.3.2. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int 6(x^2+5x+7)^5(2x+5)\,dx.$ Забележуваме дека подинтегралната функција е производ на две функции, од кои едниот множител $2x+5$ е извод од другиот множител $x^2+5x+7.$ Ова ни ја сугерира смената $u(x) = x^2+5x+7.$ Тогаш $du = (2x+5)dx,$ па добиваме

$$\int 6(x^2+5x+7)^5(2x+5)\,dx = \int 6u^5 du = u^6 + C = (x^2+5x+7)^6 + C. \ \bullet$$

Ако $\int f(x)dx = \varphi(x) + C,$ тогаш за $a,b \in \mathbf{R},\ a \neq 0,$ имаме дека

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\varphi(ax+b) + C.$$

Навистина, ако ставиме $g(x) = ax + b,$ тогаш $g'(x) = a.$ Според теорема 7.3.1. имаме $a\int f(ax+b)\,dx = \varphi(ax+b) + C,$ од каде што следува дека

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\varphi(ax+b) + C\ .$$

Специјално, со користење на оваа линеарна смена добиваме, на пример, дека

- $\int (ax+b)^{\alpha}\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad a \neq 0,\ \alpha \neq -1$
- $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

Ако $f : E \to F$ е диференцијабилна функција на E и $f(x) \neq 0,$ за секое $x \in E,$ тогаш според теорема 7.3.1. имаме дека

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

7.3.3. Примери.

1) За да најдеме $\int tgx dx$ воведуваме смена $f(x) = \cos x.$ Тогаш, имаме дека $f'(x) = -\sin x,$ па наоѓаме дека $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C.$

2) За да најдеме $\int \frac{\ln x}{x}dx,$ воведуваме смена $x = e^t$. Тогаш $dx = e^t dt,$ односно $dt = \frac{dx}{x}.$ Оттука добиваме дека

$$\int \frac{\ln x}{x} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \ \ x > 0.$$

3) За да го пресметаме неопределениот интеграл $\int x^2 e^{x^3} dx,$ воведуваме смена $x^3 = t.$ Тогаш имаме дека $x = t^{1/3},$ $dx = \frac{1}{3} t^{-2/3}\, dt.$ За разгледуваниот интеграл добиваме

$$\int x^2\, e^{x^3} dx = \int t^{2/3} e^t\, \frac{1}{3} t^{-2/3}\, dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

4) Да го пресметаме интегралот $\int x \cos x^2\, dx.$ Со презапишување на подинтегралната функција

$$\int x \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos x^2\, dx$$

забележуваме дека дадениот интеграл може да се пресмета со смената $x^2 = t.$ Тогаш $2xdx = dt,$ па добиваме дека

$$\int x \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos t\, dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C.$$

5) За да го најдеме интегралот $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx,$ воведуваме смена $\sin x = t.$ Тогаш, имаме дека $\cos x\, dx = dt,$ па за разгледуваниот интеграл добиваме дека

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cos x\, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x\, dx = \int \frac{1 - t^2}{t^4} dt =$$

$$= \int (t^{-4} - t^{-2})\, dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

6) Да го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{x \ln x}.$ Воведуваме смена $\ln x = t,$ од

каде што добиваме дека $\frac{1}{x}dx = dt.$ Тогаш, дадениот интеграл се сведува на основен интеграл, односно

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

7) За да го пресметаме неопределениот интеграл $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx,$ воведуваме смена $x^2 = t.$ Тогаш, имаме дека $xdx = \frac{dt}{2},$ па за разгледуваниот интеграл добиваме дека

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{2}arctgx^2 + C.$$

8) Да го пресметаме интегралот $\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx.$ Со воведување на смената $e^x = t,$ имаме дека $e^x dx = dt,$ па за дадениот интеграл добиваме дека

$$\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{1+e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}e^x\,dx = \int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t - \int \frac{-2tdt}{2\sqrt{1-t^2}}.$$

За интегралот од десната страна на последното равенство воведуваме смена $1-t^2 = s,$ од каде што следува дека $-2t\,dt = ds.$ Тогаш, за дадениот интеграл имаме дека

$$\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \arcsin t - \int \frac{ds}{2\sqrt{s}} = \arcsin t - \sqrt{s} + C =$$

$$= \arcsin t - \sqrt{1-t^2} + C = \arcsin(e^x) - \sqrt{1-e^{2x}} + C. \quad \bullet$$

7.4. Интегрирање со метод на парцијална интеграција

Нека $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни функции во некој интервал. Поаѓајќи од равенството $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, со интегрирање наоѓаме дека

$$u(x)v(x)=\int\left(u(x)v(x)\right)' dx=\int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx,$$

од каде што добиваме дека

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx \qquad (7.4.1)$$

Со погорната дискусија ја докажавме следната теорема.

7.4.1. Теорема. Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни во некој интервал. Ако во тој интервал постои примитивна функција за функцијата $u'(x)v(x)$, тогаш постои примитивна функција за функцијата $u(x)v'(x)$, и притоа важи

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx\,. \blacksquare$$

Равенството (7.4.1) дава можност да го најдеме интегралот $\int uv'dx$ ако може да го најдеме интегралот $\int vu'dx$. Оваа метода се нарекува *парцијална (делумна) интеграција, или интеграција по делови.*

7.4.2. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int x\cos x\,dx.$ Со цел да ја примениме формулата (7.4.1.) ставаме $u(x)=x$ и $dv=\cos x\ dx$. Понатаму, треба да ја најдеме функцијата $v(x)$, односно да го најдеме интегралот $\int\cos x\,dx,$ поточно, да најдеме една примитивна функција на функцијата $\cos x$. Имаме дека $v(x)=\int\cos x\ dx=\sin x.$ Овде нема да ја запишеме констан-

тата на интеграција, затоа што ни е доволна само една примитивна функција. Бидејќи $du = dx,$ имаме дека

$$\int x\cos x\ dx = x\sin x - \int \sin x\ dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Се разбира дека при определување на функцијата $v(x)$ наместо $\sin x$ можевме да избереме која било примитивна функција на функцијата $\cos x,$ односно која било функција од облик $\sin x + C_1,$ каде што C_1 е некоја константа. Меѓутоа, на крајот од пресметувањето би го добиле истиот резултат. Имено, имаме дека

$$\int x\cos x\ dx = x(\sin x + C_1) - \int (\sin x + C_1)\ dx =$$

$$= x\sin x + C_1 x - \int \sin x dx - C_1 \int dx =$$

$$= x\sin x + C_1 x + \cos x - C_1 x + C = x\sin x + \cos x + C.$$ ●

Како што можеме да забележиме од последниот пример, интегриравме два пати, најпрво го најдовме интегралот $\int \cos x dx$ ($\int dv$), а потоа интегралот $\int \sin x\ dx$ ($\int vdu.$). И во општ случај, со примена на овој метод, наоѓањето на интегралот $\int udv$ се сведува на наоѓање најпрво на интегралот $\int dv,$ а потоа на интегралот $\int vdu.$ Оттука и доаѓа името на овој метод, метод на парцијална интеграција или интегрирање по делови.

7.4.3. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int \ln x dx.$ Ставаме $u(x) = \ln x$ и $v'(x) = 1.$ Тогаш имаме дека $u'(x) = \frac{1}{x}$ и $v(x) = \int 1 dx = x,$ па добиваме дека

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

2) Со методот на парцијална интеграција може да го пресметаме интегралот $\int x^2 \ln x \, dx.$ Ако ставиме $u=\ln x,\ \ dv = x^2 \, dx,$ тогаш наоѓаме дека $du=\frac{1}{x}dx,\ \ v=\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$ Сега, имаме дека

$$\int x^2 \ \ln x \ dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\ dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 \ dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

3) За пресметување на интегралот $\int x^2 e^x \, dx,$ ставаме $u=x^2,\ \ dv=e^x \ dx.$ Тогаш, имаме дека $du = 2x\,dx,\ \ \ v=\int e^x dx = e^x.$ Со замена во формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int x^2 e^x \ dx = x^2 e^x - \int e^x 2x \ dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \ dx =$$

$$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C. \ \bullet$$

Понекогаш е потребно истиот метод да го примениме на интегралот $\int vu'dx.$ Може да се случи при повторната примена на парцијална интеграција да се добие почетниот интеграл. Во такви случаи, се добива линеарна алгебарска равенка за бараниот интеграл, од каде што тој се добива. Ќе го илустрираме тоа на следните примери.

7.4.4. Примери.

1) За да го најдеме интегралот $\int e^x \cos x dx$ со методот на парцијална интеграција ставаме $u(x)=e^x$ и $v'(x)=\cos x.$ Тогаш, добиваме дека $u'(x)=e^x$ и $v(x)=\sin x,$ па наоѓаме дека

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Да ставиме сега $u(x)=e^x$ и $v'(x)=\sin x.$ Тогаш, имаме дека $u'(x)=e^x$ и $v(x)=-\cos x,$ па за интегралот на десната страна добиваме дека

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Конечно, имаме дека

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx,$$

па со решавање на равенката по непонатиот интеграл добиваме дека

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x + \cos x\right) + C.$$

2) Да го определиме интегралот $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n = 1,2,3,...,$ $a \neq 0.$ Ако изберемe $u\left(x\right) = (x^2+a^2)^{-n}$ и $v'\left(x\right) = 1,$ тогаш, со интегрирање и диференцирање наоѓаме дека $u'\left(x\right) = -\frac{2nx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$ и $v\left(x\right) = x,$ па со методот на парцијална интеграција добиваме дека

$$I_n = u(x)v(x) - \int u'v dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx\ .$$

Оттука имаме дека

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx =$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = I_n - a^2 I_{n+1}.$$

Според тоа, $I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$, од каде што следува дека

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n.$$

Последното равенство е, всушност, рекурентна формула за одредување на функцијата I_n. Бидејќи имаме дека $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,$ со добиената рекурентната формула го добиваме следниот интеграл, односно $I_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} arctg \frac{x}{a} + C,$ итн.●

Да забележиме дека при пресметување интеграли, многу често се комбинираат методите на замена и парцијална интеграција.

7.4.5. Примери.

1) Интегралот $\int arctg\, x\, dx$ ќе го пресметаме со комбинирана примена на методот на интегрирање по делови и методот на замена. Ако ставиме $u = arctgx,\ dv = dx,$ тогаш имаме дека $du = \frac{1}{1+x^2} dx,\ \ v = x,$ па добиваме дека

$$\int arctg\, x\ dx = x\, arctg\, x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = x\, arctg\, x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt =$$

$$= x\, arctg\, x - \frac{1}{2} \ln |t| + C = x\, arctg\, x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

Во последниот интеграл ја воведовме смената $1 + x^2 = t,\ \ x\, dx = \frac{1}{2} dt.$

2) За да го најдеме интегралот $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$ слично како и во претходниот случај, ќе ги користиме методот на парцијална интеграција и методот на замена. Прво, ја воведуваме смената $\sqrt{x} = t,\ \ \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dt,$ а потоа го применуваме методот на парцијална интеграција. Ставаме $u = \arcsin t,\ \ dv = dt,\ \ du = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt,\ \ v = t,$ при што добиваме дека

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \arcsin t\, dt = 2t\arcsin t - 2\int t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= 2t\arcsin t - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}2t\,dt =$$

(воведуваме смена $1-t^2 = s,\ -2t\,dt = ds$)

$$= 2t\arcsin t + \int \frac{1}{\sqrt{s}}ds = 2t\arcsin t + 2\sqrt{s} + C =$$

$$= 2t\arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} + C = 2\sqrt{x}\ \arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C. \bullet$$

Да забележиме дека е згодно методот на парцијална интеграција да го користиме во случаи кога:

1) Подинтегралната функција содржи една од функциите

$$\ln x,\ \ln\varphi(x),\ \arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx,$$

како множител. Ако една од овие функции е $u(x)$, тогаш елементот на интеграција vdu од новиот интеграл обично е многу поедноставен од почетниот интеграл.

2) Подинтегралната функција е од облик

$$P(x)e^{ax},\ P(x)\sin ax,\quad P(x)\cos ax,$$

при што $P(x)$ е полином од x. Ако избереме $P(x)$ како $u(x)$, тогаш во новиот интеграл подинтегралната функција е од ист тип, само степенот на полиномот е помал. Со избирање на овој полином како $u(x)$, повторно го намалуваме степенот на полиномот, итн.

3) Подинтегралната функција е од облик

$e^{ax}\sin bx,\ e^{ax}\cos bx,\ \sin(\ln x),\ \cos(\ln x),$ итн.

Со применување два пати парцијална интеграција, добиваме линеарна алгебарска равенка во однос на почетниот интеграл.

7.5. Пресметување на некои важни типови интеграли

Практиката покажува дека методот на замена, како и методот на интегрирање по делови, и покрај својата универзалност, не секогаш брзо и ефикасно го наоѓаат интегралот во конечен вид. Од тие причини развиени се специјални комбинирани техники и методи, за одделни класи подинтегрални функции, кои почиваат на нивните специфични својства. Во продолжение, до самиот крај на оваа глава ќе се задржиме на методите за интегрирање на неколку класи од функции.

7.5.1. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

Да го пресметаме интегралот од видот

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} \tag{7.1}$$

Ако ставиме

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}=\frac{A(x+a)+B(x-a)}{x^2-a^2},$$

идентификирајќи го полиномот $(A+B)x+a(A-B)$ со 1, добиваме дека $A+B=0$ и $a(A-B)=1,$ од каде што следува $A=\frac{1}{2a}$ и $B=-\frac{1}{2a}$. Според тоа, имаме дека

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

Овој метод се нарекува *метод на неопределени коефициенти.* Да напомeнеме дека овој метод е подетално изложен во материјалот за трансформација на рационални дропки во збир од прости дропки, поместен во додатокот на учебникот.

7.5.1.1. Примери.

1) Интегралот $\int \frac{dx}{x^2-1}$ ќе го пресметаме со примена на методот на неопределени коефициенти на подинтегралната функција. Го добиваме разложувањето

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Со примена на методот на замена за разгледуваниот интеграл, добиваме дека

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int\frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|s| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{s}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

при што ја воведовме смената $x-1=t,\ dx=dt,\ x+1=s,\ dx=ds.$ ●

7.5.2. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

Со цел да го пресметаме интегралот од видот

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} \tag{7.2}$$

најнапред ќе ја трансформираме подинтегралната функција, односно ќе запишеме

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}.$$

Тогаш, со воведување на смената

$$\frac{x}{a}=t,\ \ \frac{1}{a}dx=dt,$$

дадениот интеграл се сведува на табличен интеграл, при што добиваме дека

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{a}arctgt+C=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$$

7.5.2.1. Примери.

1) За интегралот $\int\frac{dx}{x^2+9}$, со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{3}arctgt+C=\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C.$$

(воведовме смена $\frac{x}{3}=t,\ \frac{1}{3}dx=dt.$) ●

7.5.3. Интеграли од видот $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

За да го пресметаме неопределениот интеграл

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}. \tag{7.3}$$

квадратниот трином, што се наоѓа во именителот, ќе го запишеме како збир или разлика на квадрати. Имаме дека

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]$$

каде што $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$. Притоа избираме знак плус или минус во зависност од тоа дали корените на квадратниот трином се комплексни броеви или реални броеви. По извршената трансформација на квадратниот трином, разгледуваниот интеграл може да го запишеме во следниот облик

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}.$$

Со воведување на смената

$$x+\frac{b}{2a}=t,\ \ dx=dt,$$

за дадениот интеграл наоѓаме дека

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Според тоа, со погорните трансформации и воведената смена, проблемот на пресметување на интегралите од видот 7.3. се сведува на проблемот на пресметување на интеграли од видот 7.1. или 7.2.

7.5.3.1. Примери.

1) За интегралот $\int\frac{dx}{x^2-4x-5}$ имаме дека корените на квадратниот трином се реални, па трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена добиваме дека

$$\int\frac{dx}{x^2-4x-5}=\int\frac{dx}{(x-2)^2-9}=\int\frac{dx}{t^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C.$$

(воведовме смена $x-2=t,\ \ dx=dt.$)

2) Квадратниот трином кај интегралот $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$ е полн квадрат. Со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена, добиваме

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 4} = \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x-2} + C.$$

(воведовме смена $x - 2 = t,\ dx = dt.$)

3) Подинтегралната функција на интегралот $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$ содржи квадратен трином чиишто корени се комплексни броеви, па со трансформација на подинтегралната функција и примена на методот на замена, добиваме дека

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

(воведовме смена $x + 1 = t,\ dx = dt.$) ●

7.5.4. Интеграли од видот $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$

За наоѓање на интегралите од видот

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx \tag{7.4}$$

ќе ја трансформираме подинтегралната функција на следниов начин:

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax + b) + \left(N - \frac{Mb}{2a} \right)}{ax^2 + bx + c} dx =$$

$$=\frac{M}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

На тој начин, разгледуваниот интеграл е претставен како збир од два интеграли. За наоѓање на првиот од двата интеграли ја воведуваме смената

$$t=ax^2+bx+c,\quad dt=(2ax+b)dx.$$

Тогаш, добиваме дека

$$\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|ax^2+bx+c|+C.$$

Вториот интеграл е од видот 7.3. и за него веќе презентиравме метод за решавање.

7.5.4.1. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int\frac{x-1}{x^2-x-1}dx.$ Корените на квадратниот трином во именителот се реални броеви, па за дадениот интеграл имаме дека

$$\int\frac{x-1}{x^2-x-1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C.$$

(за првиот интеграл воведовме смена $t=x^2-x-1,\ dt=(2x-1)dx.$)

2) Подинтегралната функција кај интегралот $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+4}dx$ има квадратен трином во именителот кој е полн квадрат. Во овој случај дадениот интеграл може да го претставиме во конечен вид на начинот како што следува

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+4}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-5}{x^2+4x+4}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+4}dx - 5\int \frac{dx}{x^2+4x+4} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} - 5\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \frac{3}{2}\ln|t| - 5\int \frac{dx}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+4| + \frac{5}{x+2} + C.$$

(смената за првиот интеграл гласи $t = x^2+4x+4,\ dt = (2x+4)dx.$)

3) Кај интегралот $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+8}dx$ корените на квадратниот трином во именителот се комплексни броеви. Со погорниот метод, дадениот интеграл може да го изразиме преку следниве елементарни функции

$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+8}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+8}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+8} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \frac{3}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+8| - \frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2} + C. \ \bullet$$

(смената за првиот интеграл е $t = x^2+4x+8,\ dt = (2x+4)dx.$)

7.5.5. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$

За наоѓање на интегралите од видот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} \tag{7.5}$$

со смената

$$\sqrt{x^2 \pm k^2} = t - x$$

добиваме дека $x^2 \pm k^2 = t^2 - 2tx + x^2$, односно $t^2 - 2tx = \pm k^2$. Со диференцирање на последното равенство добиваме $tdt - xdt - tdx = 0$, од каде што следува дека $\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t}$, односно, имаме дека

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} = \frac{dt}{t}.$$

Тогаш, за бараниот интеграл добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm k^2}| + C.$$

7.5.5.1. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$. Со воведување на смена разгледуваниот интеграл се сведува на табличен интеграл, односно добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+4}| + C.$$

(воведовме смена $\sqrt{x^2+4} = t - x$, $\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{dt}{t}$)

2) За да го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$ со презентираната смена добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2-5}| + C,$$

при што воведовме смена $\sqrt{x^2-5} = t - x,\ \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \frac{dt}{t}$. ●

Методот на наоѓање на интеграли од видот

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} \tag{7.6}$$

се состои во негово сведување до табличен интеграл со помош на методот на замена. За таа цел ќе ја трансформираме подинтегралната функција, на следниов начин

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \frac{1}{k}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{k}\right)^2}}.$$

Воведуваме смена

$$\frac{x}{k} = t,\ \frac{1}{k}dx = dt.$$

Тогаш за дадениот интеграл добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{k} + C.$$

7.5.5.2. Примери.

1) Да го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. Откако ќе ја трансформи-

раме подинтегралната функција, воведуваме смена

$$\frac{x}{3} = t, \ \frac{1}{3}dx = dt.$$

Тогаш за дадениот интеграл добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{3} + C. \ \bullet$$

7.5.6. Интеграли од видот $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

За да го пресметаме неопределениот интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{7.7}$$

квадратниот трином, што се наоѓа во именителот, ќе го запишеме како збир или разлика на квадрати. Имаме дека

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right].$$

каде што $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$. Притоа избираме знак плус или минус во зависност од тоа дали корените на квадратниот трином се комплексни или реални броеви. Можни се следниве два случаја:

I) Ако $a > 0$, тогаш по извршената трансформација на квадратниот трином добиваме дека

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2},$$

од каде што следува дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}}.$$

Со воведување на смената

$$x+\frac{b}{2a}=t,\quad dx=dt,$$

за дадениот интеграл наоѓаме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{t^2\pm k^2}}.$$

Според тоа, со погорните трансформации и воведената смена, проблемот на пресметување на интегралите од видот 7.7. се сведува на проблем на пресметување на интеграли од видот 7.5.

7.5.6.1. Примери.

1) Да го разгледаме интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4}}$. Во овој случај квадратниот трином е полн квадрат, па имаме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\int\frac{dx}{|x-2|}=\begin{cases}\ln|x-2|+C,\ x>2\\-\ln|x-2|+C,\ x<2\end{cases}.$$

2) Интегралот $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-5}}$, со помош на трансформација на подинтегралната функција и со примена на методот на замена се сведува на табличен интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{t^2-6}} =$$

$$= \ln|t+\sqrt{t^2-6}|+C = \ln|x-1+\sqrt{(x-1)^2-6}|+C$$

при што ја воведовме смената $x-1=t,\ dx=dt$. ●

II) Ако $a<0,$ тогаш имаме дека

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\sqrt{\pm\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

од каде што добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}.$$

Со воведување на смената

$$x+\frac{b}{2a}=t,\ dx=dt,$$

за разгледуваниот интеграл, добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{k^2-t^2}}.$$

Слично како и во претходниот случај, проблемот на пресметување на интегралите од видот 7.7. се сведува на проблемот на пресметување на интеграли од видот 7.6.

7.5.6.2. Примери.

1) За интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ имаме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{16} - t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{4t}{5} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{4x-3}{5} + C,$$

при што ја воведовме смената $x - \frac{3}{4} = t,\ dx = dt.$ ●

7.5.7. Интеграли од видот $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

За пресметување на интегралите од видот

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx \tag{7.8}$$

ќе ја трансформираме подинтегралната функција на следниов начин:

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b) + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$$

$$= \frac{M}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Со погорната трансформација разгледуваниот интеграл го претставивме како збир од два интеграли. За наоѓање на првиот од двата интеграли ја воведуваме смената

$$ax^2 + bx + c = t,\ (2ax+b)dx = dt.$$

Тогаш, добиваме дека

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

Да забележиме дека вториот интеграл е од видот 7.7. и за него веќе презентиравме метод за решавање.

7.5.7.1. Примери.

1) Да го разгледаме интегралот $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}dx.$ Во овој случај $a=1>0,$

а корените на квадратниот трином што го содржи подинтегралната функција се реални броеви. За бараниот интеграл, со претставување на подинтегралната функција како збир од две функции, добиваме дека

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x-1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-x-1}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}} = \sqrt{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}} =$$

$$= \sqrt{x^2-x-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-1}\right| + C.$$

(за првиот интеграл воведовме смена $x^2-x-1=t,\ (2x+1)dx=dt.$)

2) Кај интегралот $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$ имаме $a=1>0,$ а корените на квадратниот трином што го содржи подинтегралната функција се комплексни броеви. За бараниот интеграл, со претставување на подинтегралната функција како збир од две функции, добиваме дека

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-7}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx =$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=5\sqrt{t}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}|+C.$$

(за првиот интеграл заменивме $x^2+4x+10=t,\ (2x+4)dx=dt.$)

3) Кај интегралот $\int\frac{2x-7}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$ имаме дека $a=-1<0,$ па според споменатата постапка добиваме дека

$$\int\frac{2x-7}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-\int\frac{-(2x+1)+8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx=-\int\frac{-(2x+1)}{\sqrt{1-x-x^2}}dx-8\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{t}}dx-8\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}=-2\sqrt{t}-8\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}=$$

$$=-2\sqrt{1-x-x^2}-8\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C,$$

каде што во првиот интеграл заменивме $1-x-x^2=t,\ (-1-2x)dx=dt.$ ●

7.5.8. Интеграли од видот $\int\sqrt{x^2\pm k^2}dx$ и $\int\sqrt{k^2-x^2}dx$

Интегралот од видот

$$\int\sqrt{x^2\pm k^2}dx \tag{7.9}$$

може да го запишеме како збир од два интеграли со помош на рационализација на подинтегралната функција на следниот начин:

$$\int\sqrt{x^2\pm k^2}dx=\int\frac{x^2\pm k^2}{\sqrt{x^2\pm k^2}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm k^2}}dx\pm k^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k^2}}.$$

На првиот од двата интеграли се применува методот на парцијална интеграција. Ако избереме

$$u=x,\quad dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2\pm k^2}},$$

тогаш имаме дека

$$du=dx,\quad v=\int\frac{x}{\sqrt{x^2\pm k^2}}dx=\sqrt{x^2\pm k^2}+C.$$

Според тоа, за разгледуваниот интеграл добиваме дека

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm k^2}}dx=x\sqrt{x^2\pm k^2}-\int\sqrt{x^2\pm k^2}dx.$$

Вториот од двата интеграли е интеграл од видот 7.5., и за него покажавме дека се добива

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm k^2}|+C.$$

Конечно, имаме дека

$$\int\sqrt{x^2\pm k^2}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm k^2}}dx\pm k^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm k^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2\pm k^2}-\int\sqrt{x^2\pm k^2}\pm k^2\ln|x+\sqrt{x^2\pm k^2}|+C,$$

од каде што следува дека

$$\int\sqrt{x^2\pm k^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm k^2}\pm\frac{k^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm k^2}|+C.$$

Споменатиот метод ќе го илустрираме со неколку примери.

7.5.8.1. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int\sqrt{x^2+4}\,dx.$ Имаме дека

$$\int\sqrt{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx+4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Првиот од двата интеграли може да се реши со примена на методот на парцијална интеграција. Ако ставиме

$$u=x,\ \ dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}},$$

тогаш добиваме дека

$$du=dx,\ \ v=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{x^2+4}+C,$$

од каде што следува дека

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx=x\sqrt{x^2+4}-\int\sqrt{x^2+4}dx.$$

За второт интеграл наоѓаме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+C.$$

Така, имаме дека

$$\int\sqrt{x^2+4}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx+4\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+4}-\int\sqrt{x^2+4}\,dx+4\ln|x+\sqrt{x^2+4}|,$$

од каде што за бараниот интеграл добиваме дека

$$\int\sqrt{x^2+4}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+C.$$

2) За интегралот $\int\sqrt{x^2-3}\,dx$ имаме дека

$$\int\sqrt{x^2-3}dx=\int\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-3}}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}.$$

Со примена на методот на интегрирање по делови на првиот интеграл избираме

$$u=x,\;\; dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2-3}},$$

од каде што наоѓаме дека

$$du=dx,\;\; v=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}dx=\sqrt{x^2-3}+C.$$

Според формулата за парцијална интеграција добиваме дека

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}dx=x\sqrt{x^2-3}-\int\sqrt{x^2-3}dx.$$

За вториот интеграл имаме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}=\ln|\,x+\sqrt{x^2-3}\,|+C.$$

Конечно, за разгледуваниот интеграл добиваме дека

$$\int\sqrt{x^2-3}dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-3}-\int\sqrt{x^2-3}-3\ln|\,x+\sqrt{x^2-3}\,|,$$

од каде што следува дека

$$\int\sqrt{x^2-3}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-3}-\frac{3}{2}\ln|\,x+\sqrt{x^2-3}\,|+C.\;\bullet$$

За решавање на интегралите од видот

$$\int\sqrt{k^2-x^2}dx \tag{7.10}$$

може да запишеме

$$\int\sqrt{k^2-x^2}dx=\int\frac{k^2-x^2}{\sqrt{k^2-x^2}}dx=k^2\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{k^2-x^2}}dx.$$

Првиот од двата интеграли е интеграл од видот 7.6. и за него покажавме дека

$$\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{k}+C.$$

На вториот интеграл се применува методот на интегрирање по делови, при што избираме

$$u=x,\quad du=dx.$$

Тогаш, имаме дека

$$dv=\frac{xdx}{\sqrt{k^2-x^2}},\quad v=-\int\frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}}dx=\sqrt{k^2-x^2}+C,$$

од каде што следува дека

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{k^2-x^2}}dx=-x\sqrt{k^2-x^2}+\int\sqrt{k^2-x^2}dx.$$

Сега, заради

$$\int\sqrt{k^2-x^2}dx=k^2\int\frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{k^2-x^2}}=$$

$$=k^2\arcsin\frac{x}{k}+x\sqrt{k^2-x^2}-\int\sqrt{k^2-x^2}\,dx$$

добиваме дека

$$\int \sqrt{k^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{k^2 - x^2} + \frac{k^2}{2}\arcsin\frac{x}{k} + C.$$

7.5.8.2. Примери.

1) Да го пресметаме интегралот $\int \sqrt{4-x^2}\,dx.$ Имаме дека

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 4\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

За првиот од двата интеграли добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

На вториот интеграл се применува методот на интегрирање по делови. Ако избереме

$$u = x,\ \ dv = \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}},$$

добиваме дека

$$du = dx,\ \ v = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\sqrt{4-x^2} + C,$$

од каде што следува дека

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -x\sqrt{4-x^2} + \int \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Конечно, за бараниот интеграл имаме дека

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= 4\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2}\,dx,$$

од каде што следува дека

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C.$$ ●

7.5.9. Интеграли од видот $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

За да развиеме алгоритам за пресметување на интегралите од видот

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \tag{7.11}$$

ќе ги разгледаме следниве два случаја:

I. Ако $a>0,$ тогаш имаме дека

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}$$

од каде што добиваме дека

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{a}\int\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2}\,dx$$

каде што $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$. Со смената

$$x+\frac{b}{2a}=t,\ dx=dt,$$

добиваме дека

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{a}\int\sqrt{t^2\pm k^2}\,dt.$$

Оттука може да заклучиме дека со погорната смена разгледуваниот интеграл се сведува на интеграл од видот 7.9. и за него веќе утврдивме метод за доведување во конечен вид.

7.5.9.1. Примери.

1) За интегралот $\int\sqrt{x^2-2x-5}\,dx$ имаме дека

$$\int\sqrt{x^2-2x-5}\,dx=\int\sqrt{(x-1)^2-6}\,dx=\int\sqrt{t^2-6}dt=$$

$$=\frac{t}{2}\sqrt{t^2-6}+3\ln|t+\sqrt{t^2-6}|+C=$$

$$=\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-5}+3\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-5}|+C,$$

при што воведовме смена $x+1=t,\ dx=dt,$ ●

II. Ако $a<0,$ тогаш имаме дека

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\sqrt{k^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

од каде што добиваме дека

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{-a}\int\sqrt{k^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,dx.$$

Воведуваме смена

$$x+\frac{b}{2a}=t,\quad dx=dt.$$

Тогаш, имаме дека

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{-a}\int\sqrt{k^2-t^2}\,dt.$$

Добиениот интеграл е од видот 7.9. и за него веќе изложивме алгоритам за решавање.

7.5.9.2. Примери.

1) За интегралот $\int\sqrt{2+3x-2x^2}\,dx$ наоѓаме

$$\int\sqrt{2+3x-2x^2}\,dx=\sqrt{2}\int\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}\,dx=\sqrt{2}\int\sqrt{\frac{25}{16}-t^2}\,dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}t}{2}\sqrt{\frac{25}{16}-t^2}+\frac{25\sqrt{2}}{32}\arcsin\frac{t}{\frac{5}{4}}+C=$$

$$=\frac{(4x-3)}{8}\sqrt{2+3x-2x^2}+\frac{25\sqrt{2}}{32}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C,$$

при што воведовме смена $x-\frac{3}{4}=t,\ \ dx=dt.$ ●

7.6. Интегрирање на дробно рационални функции

Наша натамошна главна цел ќе биде изнаоѓање на метод за интегрирање на класата дробно рационални функции, односно пресметување на интеграли од видот

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

каде што $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми од променливата x.

Ако подинтегралната функција $\frac{P(x)}{Q(x)}$ е неправилна дробно рационална функција, односно ако степенот на полиномот во броителот е поголем или еднаков на степенот на полиномот во именителот, тогаш делејќи го полиномот $P(x)$ со полиномот $Q(x)$, дробно рациналната функција може да се претстави во облик на збир од полином и правилна дробно рационална функција. На тој начин интегрирањето на неправилна дробно рационална функција се сведува на интегрирање на полином и правилна дробно рационална функција. Понатаму, бидејќи секоја правилна дробно рационална функција е збир на прости дропки од облик

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^r},\quad \frac{Mx+N}{x^2+ax+b},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^r},$$

можеме да заклучиме дека проблемот на интегрирање на правилна дробно рационална функција се сведува на проблемот на пресметување на интеграли од видот

$$\int\frac{A}{x-a}dx,\quad \int\frac{A}{(x-a)^r}dx,\quad \int\frac{Mx+N}{x^2+ax+b},\quad \int\frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^r}.$$

Ќе ги разгледаме наведените четири случаи поодделно.

I. Очигледно е дека

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|t|+C = A\ln|x-a|+C.$$

II. Со воведување на смената

$$x-a=t,\ dx=dt,$$

добиваме дека

$$\int\frac{A}{(x-a)^r}dx = A\int(x-a)^{-r}dx = A\int t^{-r}dt = A\frac{t^{-r+1}}{-r+1}+C=$$

$$=A\frac{(x-a)^{-r+1}}{-r+1}+C=\frac{A}{(1-r)(x-a)^{r-1}}+C.$$

III. Во овој случај корените на триномот x^2+ax+b се комплексни броеви, а коефициентот пред x^2 е еднаков на единица, односно е позитивен. Според тоа, овој интеграл е специјален случај на интеграл од видот 7.4., па имаме дека

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+ax+b}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+a)+\left(N-\frac{Ma}{2}\right)}{x^2+ax+b}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}dx + \left(N-\frac{Ma}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+ax+b} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+ax+b| + \left(N-\frac{Ma}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+ax+b| + \frac{(2N-Ma)}{\sqrt{4b-a^2}} arctg \frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} + C.$$

7.6.1. Примери.

1) Да го пресметаме интегралот $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx.$ Подинтегралната функција е неправилна дробно рационална функција. Постапката за интегрирање започнува со сведување на неправилната дробно рационална функција на правилна дробно рационална функција. По делењето на полиномот во броителот со полиномот во именителот го добиваме равенството

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} = x-2+\frac{-7x-2}{x(x^2-x-2)},$$

од каде што по интегрирањето добиваме дека

$$\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x(x^2-x-2)}dx.$$

Подинтегралната функција на левата страна од последното равенство, со примена на методот на неопределени коефициенти, ќе ја запишеме како збир од прости дробно рационални функции. Од равенството

$$\frac{7x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

следува дека $A=-1,\ B=\frac{8}{3}$ и $C=-\frac{5}{3}$. Тогаш имаме дека

$$\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int(x-2)dx+\int\frac{dx}{x}-\frac{8}{3}\int\frac{dx}{(x-2)}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|-\frac{8}{3}\ln|x-2|+\frac{5}{3}\ln|x+1|+C=$$

$$=\frac{x^2-4x}{2}+\ln\left|\frac{x(x+1)\sqrt[3]{(x+1)^2}}{(x-2)^2\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right|+C. \ \bullet$$

IV. Трансформирајќи ја подинтегралната функција, добиваме дека

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^r}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+a)+\left(N-\frac{Ma}{2}\right)}{(x^2+ax+b)^r}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^r}dx+\left(N-\frac{Ma}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+ax+b)^r}.$$

За пресметување на првиот интеграл ја воведуваме смената

$$x^2+ax+b=t,\ (2x+a)dx=dt.$$

Тогаш, имаме дека

$$\int\frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^r}dx=\int\frac{dt}{t^r}=\int t^{-r}dt=\frac{t^{-r+1}}{-r+1}+C=$$

$$=\frac{1}{(1-r)(x^2+ax+b)^{r-1}}+C$$

Вториот интеграл ќе го означиме со I_r и ќе го запишеме во обликот

$$I_r = \int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^r} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{a^2}{4}\right)\right]^r} = \int \frac{dt}{\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + k^2\right]^r}.$$

каде што $k^2 = b - \frac{a^2}{4}$. Притоа да воочиме дека корените на квадратниот трином се комплексни броеви, па според тоа $b - \frac{a^2}{4} > 0$. Воведуваме смена

$$x + \frac{a}{2} = t,\ \ dx = dt.$$

Тогаш имаме дека

$$I_r = \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^r} = \frac{1}{k^2}\int \frac{(t^2+k^2)-t^2}{(t^2+k^2)^r}dt =$$

$$= \frac{1}{k^2}\int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{r-1}} - \frac{1}{k^2}\int \frac{t^2}{(t^2+k^2)^r}dt.$$

Со методот на интегрирање по делови, за

$$u = t,\ \ dv = \frac{tdt}{(t^2+k^2)^r},$$

добиваме дека

$$du = dt,\ \ v = -\frac{1}{2(r-1)(t^2+k^2)^{r-1}}.$$

Оттука, за вториот интеграл во погорното равенство имаме дека

$$\int \frac{t^2}{(t^2+k^2)^r}dt = \int t\frac{t}{(t^2+k^2)^r}dt = -\frac{1}{2(r-1)}\left[\frac{t}{(t^2+k^2)^{r-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+k^2)^{r-1}}\right].$$

Конечно, добиваме дека

$$I_r=\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^r}=\frac{1}{k^2}\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{r-1}}+\frac{1}{2k^2(r-1)}\left[\frac{t}{(t^2+k^2)^{r-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{r-1}}\right]=$$

$$=\frac{t}{2k^2(r-1)(t^2+k^2)^{r-1}}+\frac{2r-3}{2k^2(r-1)}\int\frac{dt}{(t^2+k^2)^{r-1}}.$$

На десната страна од последното равенство имаме интеграл од типот на интегралот I_r со таа разлика што степенот на именителот на подинтегралната фунција е $r-1,$ односно за единица понизок од степенот на подинтегралната функција на интегралот $I_r.$ На тој начин пресметувањето на интегралот I_r се сведува на пресметување на интегралот $I_{r-1},$ односно

$$I_r=\frac{t}{2k^2(r-1)(t^2+k^2)^{r-1}}+\frac{2r-3}{2k^2(r-1)}I_{r-1}.$$

Со аналогна постапка пресметувањето на интегралот I_{r-1} се сведува на пресметување на интегралот $I_{r-2},$ итн., се додека не се дојде до интегралот

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+k^2}=\frac{1}{k}arctg\frac{t}{k}+C.$$

Со погорната дискусија покажавме дека секоја дробно рационална функција може да се интегрира. Уште повеќе, интегралот на дробно рационална функција може да се претстави преку елементарни функции во конечен вид.

7.6.2. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}dx.$ Подинтегралната функција е правилна дробно рационална функција чијшто именител има еден реален корен и два пара конјугирано комплексни коре-

ни. Со примена на методот на неопределени коефициенти, подинтегралната функција ќе ја запишеме како збир од прости дробно рационални функции. Од равенството

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2},$$

следува дека $A=1,\ B=0,\ C=0,\ D=1$ и $E=-1$. Тогаш, имаме дека

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}dx=\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=$$

$$=\ln|x+1|+\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx.$$

За интегралот од десната страна на последното равенство имаме

$$\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx-2\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

За првиот интеграл во последното равенство воведуваме смена

$$x^2+2x+3=t,\ (2x+2)dx=dt.$$

Тогаш, имаме дека

$$\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{x^2+2x+3}+C.$$

Вториот интеграл ќе го запишеме во облик

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2},$$

а потоа ќе воведеме смена

$$x+1=t,\ dx=dt.$$

Оттука добиваме дека

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\int\frac{dt}{(t^2+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt.$$

Според методот на интегрирање по делови, за $u=t,\ dv=\frac{tdt}{(t^2+2)^2}$, добиваме дека

$$du=dt,\ v=-\frac{1}{2(t^2+2)},$$

од каде што за вториот интеграл во погорното равенство добиваме

$$\int\frac{t^2}{(t^2+2)^2}dt=\int t\frac{t}{(t^2+2)^2}dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+2}-\int\frac{dt}{t^2+2}\right]$$

Тогаш, имаме дека

$$\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+2}-\int\frac{dt}{t^2+2}\right]=$$

$$=\frac{t}{4(t^2+2)}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{t}{4(t^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Конечно, за разгледуваниот интеграл добиваме дека

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}dx=\ln|x+1|+\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx=$$

$$=\ln|x+1|-\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$ ●

7.7. Интеграли на некои ирационални функции

На почеток да нагласиме дека не постои универзален метод за интегрирање на ирационалните функции, за разлика од дробно рационалните функции. Поточно, интегралот на секоја ирационална фунција не може да се претстави преку елементарните функции во конечен вид. Ќе разгледаме некои класи ирационални функции, чиишто интеграли со помош на соодветно избрана смена се сведуваат на интеграли на дробно рационални функции, што подразбира и нивно претставување преку елементарните функции во конечен вид.

7.7.1. Интеграли од видот $\int R(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, ..., x^{m_s/n_s})dx$

Најнапред ќе ја изложиме постапката за решавање на интеграли од видот

$$\int R(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, ..., x^{m_s/n_s})dx,$$

каде што $R(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, ..., x^{m_2/n_2})$ е рационална функција од своите аргументи. Нека k е најмал заеднички содржател на имenителите на дропките $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, ..., \frac{m_s}{n_s}$, односно $k = \text{НЗС}(n_1, n_2, ..., n_s)$.

Воведуваме смена

$$x = t^k, \ \ dx = kt^{k-1}dt.$$

Тогаш, имаме дека

$$\int R(x, x^{m_1/n_1}, x^{m_2/n_2}, ..., x^{m_s/n_s})dx = \int R(t^k, t^{(k\cdot m_1)/n_1}, t^{(k\cdot m_2)/n_2}, ..., t^{(k\cdot m_s)/n_s})kt^{k-1}dt.$$

Да забележуваме дека со воведената смена дробните степени на независно променливата x се заменија со целобројни степени на променливата t. Според тоа, подинтегралната ирационална фунција е трансформирана во дробно рационална фунција од промеливата t чиешто интегрирање е секогаш можно.

7.7.1.1. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx.$ Најмал заеднички содржател за именителите на дропките $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ е бројот $4,$ односно НЗС$(2,4)=4.$

Воведуваме смена

$$x=t^4,\ \ dx=4t^3dt,$$

според која што добиваме дека

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx=4\int \frac{t^2}{t^3+1}t^3dt=4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt=$$

$$=4\int t^2dt-4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt=4\frac{t^3}{3}-\frac{4}{3}\ln|t^3+1|+C=$$

$$=\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln|\sqrt[4]{x^3}+1|\right]+C.$$ ●

7.7.2. Интеграли од видот $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s}\right)dx$

Во продолжение ќе се задржиме на утврдување на метод за решавање на интеграли од видот

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s}\right)dx,$$

каде што $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s}\right)$ е рационална функција од своите аргументи.

Нека k е најмал заеднички содржател на именителите на дропките $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2},\dots,\frac{m_s}{n_s}$, односно $k=\text{НЗС}\,(n_1,n_2,\dots,n_s)$. Воведуваме смена

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k,\ \ x=\frac{dt^k-b}{a-ct^k},\ \ dx=\frac{k(ad-bc)t^{k-1}}{(a-ct^k)^2}dt.$$

Тогаш, имаме дека

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_s/n_s}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{dt^k-b}{a-ct^k},t^{(k\cdot m_1)/n_1},t^{(k\cdot m_2)/n_2},\dots.,t^{(k\cdot m_s)/n_s}\right)\frac{k(ad-bc)t^{k-1}}{(a-ct^k)^2}dt.$$

Да воочиме дека со воведената смена подинтегралната ирационална функција се трансформира во дробно рационална функција од променливата t чие што интегрирање е секогаш можно.

7.7.2.1. Примери.

1) Да го пресметаме интегралот $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx.$ Најмалиот заеднички содржател за именителите на дропките $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ е бројот $6,$ односно $\text{НЗС}\,(2,3)=6.$ Со воведување на смената

$$x+1=t^6,\quad x=t^6-1,\ dx=6t^5dt,$$

добиваме дека

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx = 6\int \frac{t^3-1}{t^2+1}t^5 dt = 6\int\left(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1-\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 6\int t^6 dt - 6\int t^4 dt - 6\int t^3 dt + 6\int t^2 dt + 6\int t dt - 6\int dt - 6\int \frac{t-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+arctgt\right)+C =$$

$$= \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{(x+1)^4} + 2\sqrt[6]{(x+1)^3} + 3\sqrt[6]{(x+1)^2} -$$

$$-6\sqrt[6]{x+1} - 3\ln(\sqrt[6]{(x+1)^2}+1) + 6rctg\sqrt[6]{x+1} + C. \; \bullet$$

7.7.3. Интеграли од видот $\int R(x,\sqrt{x^2 \pm k^2})dx$ и $\int R(x,\sqrt{k^2 - x^2})dx$

Интегралите од видот

$$\int R(x,\sqrt{x^2 \pm k^2})dx$$

каде што $R(x,\sqrt{x^2 \pm k^2})$ е дробно рационална функција од своите аргументи со соодветно избрана смена на променливите преминува во интеграл од дробно рационална функција. Една можност за реализација на идејата е воведување на смената

$$\sqrt{x^2 \pm k^2} = t - x.$$

Со квадрирање на двете страни од равенството добиваме

$$x^2 \pm k^2 = t^2 - 2tx + x^2,$$

од каде што следува

$$x = \frac{t^2 \mp k^2}{2t}.$$

Тогаш, имаме дека

$$\sqrt{x^2 \pm k^2} = \frac{t^2 \pm k^2}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 \pm k^2}{2t^2} dt.$$

Со погорната смена подинтегралната функција $R(x, \sqrt{x^2 \pm k^2})$ се трансформира во дробно рационална функција чиешто интегрирање е секогаш можно, односно

$$\int R(x, \sqrt{x^2 \pm k^2}) dx = \int R\left(\frac{t^2 \mp k^2}{2t}, \frac{t^2 \pm k^2}{2t} \right) \frac{t^2 \pm k^2}{2t^2} dt.$$

7.7.3.1. Примери.

1) Да го најдеме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Воведуваме смена

$$\sqrt{x^2+1} = t - x.$$

Со квадрирање на двете страни добиваме

$$x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2,$$

од каде што следува дека

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}.$$

Тогаш, заради

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt,$$

добиваме дека

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\frac{t^2+1}{2t^2}}{\frac{t^2+1}{2t}} dt = \int \frac{dt}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C. \; \bullet$$

Во продолжение ќе се задржиме на пресметување на интегралите од видот

$$\int R(x,\sqrt{k^2-x^2})dx$$

каде што $R(x,\sqrt{k^2-x^2})$ е дробно рационална функција од своите аргументи. Ќе покажеме дека со соодветно избрана смена на променливите погорниот интеграл може да се трансформира во интеграл од дробно рационална функција. Воведуваме смена

$$\sqrt{k^2-x^2}=(x-k)t.$$

Со квадрирање на двете страни од равенството добиваме дека

$$(k-x)(k+x)=(x-k)^2t^2,$$

од каде што следува дека

$$x=\frac{k(t^2-1)}{t^2+1}.$$

Тогаш, имаме дека

$$\sqrt{k^2-x^2}=\frac{-2kt}{t^2+1},\ \ dx=\frac{4kt}{(t^2+1)^2}dt.$$

Со погорната смена подинтегралната функција $R(x,\sqrt{k^2-x^2})$ се трансформира во дробно рационална функција чие интегрирање е секогаш можно, односно

$$\int R(x,\sqrt{k^2-x^2})dx=\int R\left(\frac{k(t^2-1)}{1+t^2},\frac{-2kt}{1+t^2}\right)\frac{4kt}{(1+t^2)^2}dt.$$

7.7.3.2. Примери.

1) Да го пресметаме интегралот $\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$. Воведуваме смена

$$\sqrt{4-x^2}=(x-2)t.$$

Со квадрирање на двете страни од равенството добиваме дека

$$4-x^2=x^2t^2-4xt^2+4t^2,$$

од каде што следува дека

$$x=\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}.$$

Тогаш, заради

$$\sqrt{4-x^2}=\frac{-4t}{t^2+1},\quad dx=\frac{8t}{(t^2+1)^2}dt,$$

добиваме дека

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x}}=\int\frac{\frac{8t}{(t^2+1)^2}}{\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}\cdot\frac{-4t}{t^2+1}}dt=-\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{\sqrt{4-x^2}-x+2}\right|+C. \;●$$

7.8. Интеграли на тригонометриски функции

7.8.1. Интеграл на функциите $\cos\alpha x\cos\beta x,\ \sin\alpha x\sin\beta x$ и $\sin\alpha x\cos\beta x$

При интегрирањето на некои функции се користат следните тригонометриски равенства

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)x+\cos(\alpha+\beta)\big)x$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)\big)x$$

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)x+\sin(\alpha+\beta)\big)x.$$

Ако $\alpha+\beta\neq 0$ и $\alpha-\beta\neq 0$ имаме дека

$$\int\cos\alpha x\cos\beta xdx=\frac{1}{2}\int\cos(\alpha+\beta)xdx+\frac{1}{2}\int\cos(\alpha-\beta)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}+\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right]+C$$

$$\int\sin\alpha x\sin\beta xdx=\frac{1}{2}\int\cos(\alpha-\beta)xdx-\frac{1}{2}\int\cos(\alpha+\beta)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}\right]+C$$

$$\int\sin\alpha x\cos\beta xdx=\frac{1}{2}\int\sin(\alpha+\beta)xdx+\frac{1}{2}\int\sin(\alpha-\beta)xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\right]+C.$$

7.8.1.1. Примери.

1) Да го најдеме интегралите

а) $\int\cos 2x\cos 3xdx$ б) $\int\sin 5x\sin 2xdx$ в) $\int\sin 3x\cos xdx$

Според погорната постапка добиваме дека

а) $\int\cos 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int\cos 5xdx+\frac{1}{2}\int\cos xdx=\frac{1}{2}\left[\sin x+\frac{\sin 5x}{5}\right]+C$

б) $\int\sin 5x\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 3xdx-\frac{1}{2}\int\cos 7xdx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 7x}{7}\right]+C$

в) $\int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2}\right] + C$

7.8.2. Интеграл на функциите $\sin^n x$ и $\cos^n x$ ($n \in \mathbf{N}$)

Бидејќи имаме дека

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx,$$

тогаш со примена на методот на парцијална интеграција добиваме дека

$$\int \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx,$$

при што ставивме

$$u = \cos^{n-2} x \text{ и } dv = \cos x dx.$$

Понатаму, имаме дека

$$\int \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx - (n-1)\int \cos^n x dx.$$

Конечно, добиваме дека

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx + C.$$

На сличен начин се покажува дека

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx + C.$$

Да воведеме ознака $I_n = \int \sin^n x dx$. Земајќи $u(x) = \sin^{n-1} x,\ \ v'(x) = \sin x$, со метод на парцијална интеграција добиваме дека

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx =$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx=$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

од каде што следува дека

$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Со оваа рекурентна формула можеме да пресметаме неопределен интеграл на функцијата $\sin^n x$ за $n\in\mathbf{N}$, бидејќи ни се познати $I_0=x+C$ и $I_1=-\cos x+x.$

7.8.2.1. Примери.

1) Имаме $\int\sin^2 xdx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$

2) Ако во 7.5.10. ставиме $\alpha=\beta$ добиваме дека

$$\int\cos^2\alpha xdx=\int\frac{1+\cos 2\alpha x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2\alpha x}{2\alpha}\right)+C. \quad \bullet$$

7.8.3. Интеграл на функциите $\sin^m x\cdot\cos^n x$ ($m,n\in\mathbf{Z}^+\cup\{0\}$)

Да започнеме со интеграли од обликот

$$\int\sin^m x\cos^n xdx$$

каде што m и n се ненегативни цели броеви. Ќе ги разгледаме следните три случаи:

I. Ако m е непарен број, односно $m=2k+1,\ k\in\mathbf{Z}^+\cup\{0\}$, со помош на идентитетот $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ добиваме дека

$$\int\sin^m x\cos^n xdx=\int\sin^{2k+1}x\cos^n xdx=\int(\sin^2 x)^k\sin x\cos^n xdx=$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^k \sin x \cos^n x dx$$

Со воведување на смената

$$u = \cos x,\ du = -\sin x dx,$$

добиваме дека

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\int (1-u^2)^k u^n du,$$

што всушност претставува интеграл од полиномна функција.

II. Ако n е непарен број, односно $n = 2k+1,\ k \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\},$ со помош на идентитетот $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ добиваме дека

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \cos x\, dx,$$

Сега, воведуваме смена

$$u = \sin x,\ du = \cos x dx,$$

па добиваме дека

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\int (1-u^2)^k u^m du,$$

што всушност претставува интеграл од полиномна функција.

III. Ако m и n се парни броеви, тогаш во интегралот

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

со помош на идентитетите

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ и } \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

ги намалуваме степените на $\sin x$ и $\cos x$ за единица, при што добиваме подинтегралната функција по степени од $\cos 2x.$

7.8.3.1. Примери.

1) За да го најдеме интегралот $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$ издвојуваме множител $\sin x$ и го применуваме идентитетот $\sin^2 x = 1-\cos^2 x.$ Добиваме дека

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\cos^2 x dx =$$

$$= -\int (1-u^2)u^2 dt = -\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}-+C,$$

при што воведовме смена $u=\cos x,\ du=-\sin x\, dx.$

2) За пресметување на интегралот $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ издвојуваме множител $\cos x$ и го применуваме идентитетот $\sin^2 x = 1-\cos^2 x.$ Добиваме

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx =$$

$$= \int u^2(1-u^2)\, du = \frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+C=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C,$$

при што воведовме смена $u=\sin x,\ du=\cos x\, dx.$

3) Да го пресметаме интегралот $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$ Со помош на идентитетите $\sin\ x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ и $\cos\ x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ ги намалуваме степените на $\sin x$ и $\cos x$ за единица, односно добиваме

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos^2 2x}{4}dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{(1-\cos 4x)}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx = \frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C. \ \bullet$$

7.8.4. Интеграли на рационални функции од $\sin x$ и $\cos x$

Со смената $z = tg\frac{x}{2},\ -\pi < x < \pi,$ интегралите од облик

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

се сведуваат на интеграли од рационални функции. Навистина, од тригонометрија е познато дека сите тригонометриски функции може да се изразат преку $tg\frac{x}{2}.$ Имено, важат следниве равенства

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{t^2+1},$$

Со смената

$$x = 2arctgt,\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

добиваме дека

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}, \right)\frac{2dt}{t^2+1},$$

што претставува интеграл од рационална функција.

7.8.4.1. Примери.

1) Имаме дека

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C,$$

при што воведовме смена $x = 2arctgt,\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$

2) Да го пресметаме интегралот $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$. Со помош на погорната смена добиваме дека

$$\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}dx = \int \frac{1}{5-4\frac{2t}{t^2+1}+3\frac{1-t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{2dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\int \frac{1}{2t^2-8t+8}dt = \int \frac{1}{t^2-4t+4}dt = \int \frac{1}{(t-2)^2}dt =$$

$$= -\frac{1}{t-2}+C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2}+C. \; \bullet$$

7.9. Задачи за вежбање

1. Покажи дека функцијата $F(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ е примитивна функција на функцијата $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\quad x \neq 0.$

2. Најди барем една примитивна функција $F(x)$ на функцијата $f(x)$, дефинирана на множеството реални броеви, ако

1) $f(x) = \cos x$ 2) $f(x) = \sin x$ 3) $f(x) = e^x$

3. Најди функција $f(x)$ за која што важи $f'(x) = 1+e^x$, за секое $x \in \mathbf{R}$.

4. Дали се точни следниве равенства:

1) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1)+C,\quad x \in \mathbf{R}$

2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C, \quad x \in [-1,1].$

3) $\int |x|\, dx = \frac{1}{2} x|x| + C, \quad x \in \mathbf{R}$

4) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C^2, \quad x \in \mathbf{R}$

5. Најди ја онаа примитивна функција $F(x)$ на функцијата $f(x)$ чиј-што график минува низ точката $M_0(0,2)$, ако

1) $f(x) = 2x$ 2) $f(x) = \sin x$ 3) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

6. Најди ја онаа примитивна функција $F(x)$ на функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, која ги задоволува $F(-2) = 3$ и $F(1) = -2$.

Со примена на таблицата на основните интеграли и правилата за интегрирање да се пресметаат следните интеграли

7. $\int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx$ 8. $\int (2^x + 3^x)^2 dx$ 9. $\int \frac{2^x - 3^x}{9^x \cdot 4^x} dx$

10. $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1} dx$ 11. $\int tg^2 x\, dx$ 12. $\int ctg^2 x\, dx$

13. $\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$ 14. $\int \frac{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 3x^2}}$

16. $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$ 17. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$ 18. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^4 + 2}}{x^4} dx$

19. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$ 20. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ 21. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$

22. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$ 23. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$ 24. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$

Пресметај ги следните неопределени интеграли:

1. $\int \ln x\,dx$ 2. $\int x e^{2x}\,dx$ 3. $\int x\ln(x-1)\,dx$

4. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$ 5. $\int \frac{x}{e^x}\,dx$ 6. $\int \arcsin x\,dx$

7. $\int \arccos x\,dx$ 8. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ 9. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$

10. $\int x^2 \cos x\,dx$ 11. $\int x^2 \sin x\,dx$ 12. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

13. $\int (x\sin x)^2\,dx$ 14. $\int (x\cos x)^2\,dx$ 15. $\int \ln^2 x\,dx$

16. $\int e^x \sin x\,dx$ 17. $\int e^x \cos 2x\,dx$ 18. $\int e^x \sin^2 x\,dx$

19. $\int x e^x \sin x\,dx$ 20. $\int (\arcsin x)^2\,dx$ 21. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$

22. $\int x\, arctg\, x\,dx$ 23. $\int x^2 \arccos x\,dx$ 24. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

25. $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$ 26. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ 27. $\int \sin(\ln x)\,dx$

28. $\int (e^x-\cos x)^2\,dx$ 29. $\int \ln x(x^2+1)\,dx$ 30. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

Пресметај ги следниве неопределени интеграли:

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$ 2. $\int \frac{dx}{x^2-3}$ 3. $\int \frac{dx}{x^2-4m^2}$

4. $\int \frac{dx}{x^2+4}$ 5. $\int \frac{dx}{x^2+8}$ 6. $\int \frac{dx}{x^2+4m^2}$

7. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

8. $\int \frac{dx}{x^2+x}$

9. $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}$

10. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+8}$

11. $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$

12. $\int \frac{dx}{x^2+ax+a^2}$

13. $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

14. $\int \frac{x-1}{x^2+3x+2}dx$

15. $\int \frac{2x-13}{x^2-10x+25}dx$

16. $\int \frac{2-3x}{x^2+8x+16}dx$

17. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$

18. $\int \frac{2x+4}{x^2-6x+25}dx$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3a^2}}$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-11}}$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

24. $\int \frac{(2m+1)dx}{\sqrt{2-x^2}}$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-9}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}dx$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$

31. $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2-4}}dx$

32. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

33. $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx$

34. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$

35. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx$

36.$\int \frac{x}{\sqrt{5+x-x^2}}dx$

37. $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

38. $\int \sqrt{x^2+7}\,dx$

39. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$

40. $\int \sqrt{x^2-9m^2}\,dx$

41. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

42. $\int \sqrt{7-x^2}\,dx$

43. $\int \sqrt{x^2+x+2}\,dx$

44. $\int \sqrt{4x^2-2x+1}\,dx$

45. $\int \sqrt{4x^2-4x+3}\,dx$

46. $\int\sqrt{x-x^2}\,dx$ 47. $\int\sqrt{2-x-x^2}\,dx$ 48. $\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx$

Пресметај ги следниве неопределени интеграли:

1. $\int\frac{x^2+1}{x^3-x}dx$ 2. $\int\frac{2x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$ 3. $\int\frac{x^2+2x-1}{x(x^2-1)}dx$

4. $\int\frac{x-1}{x^3+x^2}dx$ 5. $\int\frac{dx}{x^4-x^3}dx$ 6. $\int\frac{2x^2-2x+1}{x^3(x-1)}dx$

7. $\int\frac{dx}{x^3+1}$ 8. $\int\frac{x^2+2x-2}{x^3+1}dx$ 9. $\int\frac{dx}{x^4-1}$

10. $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$ 11. $\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$ 12. $\int\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)^2}dx$

13. $\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$ 14. $\int\frac{(x^3+3)}{(x+1)(x^2+1)}dx$

15. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

Пресметај ги следниве неопределени интеграли:

1. $\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$ 2. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ 3. $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 5. $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$ 6. $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$

7. $\int\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx.$ 8. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ 9. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+5}}$

10. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ 11. $\int\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$ 12. $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

14. $\int \frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}}dx$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-x^2}}$

17. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

18. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-3})\sqrt{x^2-3}}$

Пресметај ги следниве неопределени интеграли:

1. $\int \cos 7x \cos 5x \, dx$

2. $\int \sin 3x \sin 9x \, dx$

3. $\int \sin 4x \cos 8 \, dx$

4. $\int \cos 8x \cos 6x \, dx$

5. $\int \sin 7x \sin 3x \, dx$

6. $\int \sin x \cos 5 \, dx$

7. $\int \sin^4 x dx$

8. $\int \cos^4 x dx$

9. $\int \sin^2 4x \, dx$

10. $\int \sin^3 x dx$

11. $\int \cos^5 x dx$

12. $\int \cos^2 6x \, dx$

13. $\int \frac{1}{3-\cos + 2\sin x}dx$

14. $\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$

15. $\int \frac{1}{\sin x}dx$

16. $\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx$

17. $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$

18. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

19. $\int \frac{1}{5-3\cos x}dx$

20. $\int \frac{1}{2-5\sin x}dx$

21. $\int \frac{1}{3+2\sin^2 x}dx$

8. Определен интеграл

8.1. Определен интеграл како нараснување на примитивната функција

Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ се две произволни примитивни функции на функцијата $f(x)$ во интервалот $[a,b]$. Според теоремата 7.1.3. тие се разликуваат за реална константа $C,$ односно $\phi(x)-\psi(x)=C,$ за секое $x\in[a,b]$. Така, имаме дека $\varphi(a)-\psi(a)=C$ и $\varphi(b)-\psi(b)=C.$ Ако првото равенство го извадиме од второто, добиваме дека

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\psi(b)-\psi(a)$$

Значи, нараснувањето на двете примитивни функции, кога аргументот се менува од $x=a$ до $x=b,$ е еднакво.

8.1.1. Дефиниција. Нараснувањето на било која примитивна функција на функцијата $f(x)$ кога аргументот се менува од $x=a$ до $x=b$ се нарекува *определен интеграл на функцијата.* Користиме ознака

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

и читаме „интеграл од a до b еф од икс де икс“.

Непосредно од дефиницијата ја добиваме следната формула за пресметување на определен интеграл на функција $f\left(x\right)$ на која се знае една примитивна функција $\varphi\left(x\right)$. Имено

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi\left(b\right) - \varphi\left(a\right) \tag{8.1}$$

каде што a и b се викаат *граници на определениот интеграл* и тоа a е *долна граница*, додека b е *горна граница*. Функцијата $f\left(x\right)$ се вика *подинтегрална функција* или *интегранд.*

За бројот $\varphi\left(b\right) - \varphi\left(a\right)$ ќе ја користиме ознаката $\varphi\left(x\right)\Big|_a^b$.

Значи, за да се пресмета определениот интеграл од дадена функција во границите од a од b, потребно е да се најде една нејзина примитивна функција, во неа да се заменат на местото на x вредностите на горната и долната граница и добиените резултати да се извадат еден од друг.

8.1.2. Примери.

1) Да го пресметаме определениот интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Имаме дека

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^2 = 2x^{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{1} = 2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

2) Да го пресметаме определениот интегралот $\int\limits_a^b x^{\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad a,b > 0.$

Ќе ги разгледаме следниве два случаи, $\alpha \neq -1$ и $\alpha = -1.$

Ако $\alpha \neq -1$, тогаш $\varphi(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ е една примитивна функција за подинтегралната функција $f(x) = x^{\alpha}$, па добиваме дека

$$\int\limits_a^b x^{\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{1}{\alpha+1} b^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} a^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

Ако $\alpha = -1$, тогаш $\varphi(x) = \ln x$ е една примитивна функција за подинтегралната функцијата $f(x) = x^{\alpha}$, па добиваме дека

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Да покажеме дека $\int\limits_a^b dx = b - a.$ Во овој случај подинтегралната функција $f(x) = 1,$ за секое $x \in [a,b]$. Една нејзина примитивна функција е $\varphi(x) = x,$ за секое $x \in [a,b]$, па имаме дека

$$\int\limits_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a. \bullet$$

8.2. Определен интеграл како гранична вредност на збир

8.2.1. Дефиниција. Нека е даден интервалот $[a,b]$, $a,b \in \mathbf{R}$. Множеството точки $\pi = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, такво што $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, се нарекува *поделба* на интервалот $[a,b]$.

Броевите $x_i,\ i=0,1,...,n,$ ги нарекуваме *делбени точки за поделбата* π, интервалите $\left[x_{i-1},x_i\right]$, $i=1,...,n$ ги нарекуваме *подинтервали на поделбата* $\pi,$ а нивните должини ги означуваме со $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,...,n.$

Најголемиот од позитивните броеви $\Delta x_i,\ i=1,...,n,$ го нарекуваме *дијаметар* на поделбата π и го означуваме со $d(\pi)$. Накусо, запишуваме

$$d(\pi)=\max_{i=1,...,n}\Delta x_i .$$

8.2.2. Дефиниција. Нека $f:\left[a,b\right]\to \mathbf{R}$ е ограничена функција. Збирот

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$$

го нарекуваме *Риманов интегрален збир,* каде што $\pi=\left\{x_0,x_1,\cdots .x_n\right\}$ е некоја поделба на сегментот $\left[a,b\right]$ и $\xi_i \in\left[x_{i-1},x_i\right], i=1,2,\cdots,n$.

Очигледно е дека интегралниот збир за дадена функција зависи од поделбата $\pi=\left\{x_0,x_1,\cdots,x_n\right\}$ на интервалот $\left[a,b\right]$, поточно од бројот на подинтервали определен со поделбата, односно од бројот $n,$ како и од избраните точки $\xi_i,\ i=1,2,\cdots,n,$ во секој од подинтервалите.

8.2.3. Дефиниција. Ако постои границата

$$\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i ,$$

за секоја поделба $\pi=\left\{x_0,x_1,\cdots .x_n\right\}$ на интервалот $\left[a,b\right]$ и за секој избор на точките $\xi_i \in\left[x_{i-1},x_i\right], i=1,2,\cdots,n,$ тогаш, таа гранична вредност се вика *определен интеграл* на функцијата $f\left(x\right)$ на интервалот $\left[a,b\right]$.

За функција која има определен интеграл на интервалот $\left[a,b\right]$, велиме дека е *интеграбилна* на тој интервал.

8.2.4. Теорема. Дефинициите 8.1.1. и 8.2.3. се еквивалентни.

Доказ. Нека $\varphi(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, односно нека $\varphi'(x)=f(x)$, за секое $x\in[a,b]$. Нека $\pi=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ е произволна поделба на интервалот $[a,b]$ со подинтервали $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\cdots,n.$ Бидејќи функцијата $\varphi(x)$ е диференцијабилна на интервалот $[a,b]$, тогаш таа е диференцијабилна и на секој од подинтервалите $[x_{i-1},x_i]$. Ако ја примениме Лагранжовата теорема за средна вредност во секој подинтервал, добиваме дека

$$\varphi(x_1)-\varphi(x_0)=\varphi'(\xi_1)(x_1-x_0)=f(\xi_1)(x_1-x_0),\quad \xi_1\in[x_0,x_1]$$

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(\xi_2)(x_2-x_1)=f(\xi_2)(x_2-x_1),\quad \xi_2\in[x_1,x_2]$$

$$\vdots$$

$$\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1})=\varphi'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}),\quad \xi_n\in[x_{n-1},x_n].$$

Ако ги собираме левите и десните страни на погорните равенства, добиваме дека

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,\ \ \xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\cdots,n.$$

Левата страна на последното равенство не зависи од бројот на подинтервали, односно од бројот на делбени точки n на избраната поделба $\pi=\{x_0,x_1,\cdots x_n\}$, како и од избраните точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i], i=1,2,\cdots,n,$ што значи дека имаме

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\,.\ ■$$

Во досегашното изложувања го дефиниравме определениот интеграл од функцијата f на интервалот $[a,b]$, односно во случај кога $a<b.$ Оваа дефиниција ја дополнуваме со следните усогласувања.

1. Ако функцијата f е определена во точката $x=a,$ тогаш по дефиниција земаме дека

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

2. Ако функцијата f е интеграбилна на $[a,b]$, тогаш по дефиниција ставаме дека

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

Се наметнува прашањето кои функции на даден интервал се интеграбилни. Без доказ, ќе усвоиме дека

1. Секоја непрекината функција на интервалот $[a,b]$ е интеграбилна на тој интервал.
2. Секоја монотона функција на интервалот $[a,b]$ е интеграбилна на тој интервал.
3. Секоја ограничена функција со конечен број прекини на интервалот $[a,b]$ е интеграбилна на тој интервал.

8.2.5. Примери.

1) Да го пресметаме интегралот $\int_0^1 x^2dx.$ Функцијата $f(x)=x^2$ е непрекината на интервалот $[0,1]$, од каде што следува дека таа е интегра-

билна на споменатиот интервал, односно $\int_0^1 x^2 dx$ постои.

За да го пресметаме дадениот интеграл доволно е да избереме произволна поделба π на сегментот $[0,1]$ за која што должината на подинтервалите со најголема должина $d(\pi)\to 0,$ кога $n\to\infty,$ и да ја најдеме граничната вредност на соодветните интегрални збирови, за кој било избор на точките $\xi_i \in [x_{i-1,}x_i],$ $i=1,\dots,n.$ Дефинираме поделба

$$\pi=\left\{x_i=\frac{i}{n}\,|\,i=0,1,\dots,n\right\}.$$

Тогаш $d(\pi)\to 0,$ кога $n\to\infty.$ Во секој од подинтервалите за точка ξ_i го избираме десниот крај на подинтервалот, $\xi_i=x_i=\frac{i}{n},$ за $i=1,2,...,n.$ За соодветниот интегрален збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Тогаш, границата на инегралниот збир, односно за определениот интеграл имаме дека

$$\int_0^1 x^2 dx=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}.$$

2) Да го пресметаме интегралот $\int_a^b e^x dx.$ Функцијата $f(x)=e^x$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, од каде што следува дека таа е интегра-

билна на споменатиот интервал, односно $\int\limits_a^b e^x dx$ постои.

За да го пресметаме дадениот интеграл доволно е да избереме произволна поделба π на сегментот $\left[a,b\right]$ за која што должината на подинтервалите со најголема должина $d(\pi)\to 0,$ кога $n\to\infty,$ и да ја најдеме граничната вредност на соодветните интегрални збирови, за кој било избор на точките $\xi_i \in\left[x_{i-1,}x_i\right],$ $i=1,\dots,n.$ Дефинираме поделба

$$\pi=\left\{x_i=a+i\frac{b-a}{n}\,|\,i=0,1,\dots,n\right\}.$$

Тогаш $d(\pi)\to 0,$ кога $n\to\infty.$ Во секој од подинтервалите за точка ξ_i го избираме десниот крај на подинтервалот, $\xi_i=x_i=a+i\dfrac{b-a}{n},$ за $i=1,\,2,...,n.$ За соодветниот интегрален збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} e^{a+i\frac{b-a}{n}}\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}e^{a+\frac{b-a}{n}}\frac{(e^{\frac{b-a}{n}})^n-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}.$$

За границата на инегралниот збир, односно за определениот интеграл наоѓаме дека

$$\int\limits_a^b e^x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}e^{a+\frac{b-a}{n}}\frac{(e^{\frac{b-a}{n}})^n-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\frac{1}{(e^{\frac{b-a}{n}}-1)}e^{a+\frac{b-a}{n}}(e^{b-a}-1)=e^b-e^a.$$

3) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=c,$ за секое $x\in\left[a,b\right].$

Нека $\pi=\left\{x_0,x_1,\dots,x_n\right\}$ е произволна поделба на интервалот $\left[a,b\right].$ Тогаш за секое $\xi_i\in\left[x_{i-1},x_i\right],$ $i=1,2,\dots,n,$ имаме $f(\xi_i)=c,$ $i=1,2,...,n,$ па за интегралниот збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c(b-a),$$

од што за определениот интеграл наоѓаме дека

$$\int_a^b c dx = \lim_{n\to\infty} c(b-a) = c(b-a).$$

4) Како последица од претходниот пример, имаме дека ако $f(x)=0,$ за секое $x\in[a,b]$, тогаш $\int_a^b f(x)dx = 0\cdot(b-a)=0.$ ●

8.3. Својства на определениот интеграл

Познавањето на својствата на определениот интеграл е многу важно при неговото изучување и неговата примена. Непосредно од дефиницијата, произлегуваат следните својства на определениот интеграл.

1. Ако функцијата f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и $\lambda\in\mathbf{R}$, тогаш и функцијата λf е интеграбилна на истиот интервал, и притоа важи равенството

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx\,.$$

Доказ. Секој интегрален збир на функцијата λf соодветен на дадена поделба π е еднаква на производот на реалната константа λ и интегралниот збир на функцијата f соодветна на поделбата π, односно, имаме дека

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda f(\xi_i)\right]\Delta x_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Бидејќи граничната вредност на производ на конвергентна низа со реална константа е еднаква на производот од константата и граничната вредност на низата, имаме

$$\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda f(\xi_i)\right]\Delta x_i=\lambda\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

од каде што следува дека

$$\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx.\ \blacksquare$$

Искажаното својство вообичаено се нарекува правило за определен интеграл за производ на функција со константа.

2. Ако функциите f и g се интеграбилни на интервалот $[a,b]$, тогаш и функцијата $f+g$ е интеграбилна на истиот интервал и притоа важи равенството

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\,.$$

Доказ. Секој интегрален збир на функцијата $f+g$, соодветен на дадена поделба π, е еднаков на збирот на интегралните збирови на функциите f и g, соодветни на поделбата π, односно имаме дека

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)+g(\xi_i)\right]\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Бидејќи граничната вредност на збир на две конвергентни низи е еднаква на збирот на граничните вредности на низите, имаме дека

$$\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)+g(\xi_i)\right]\Delta x_i=\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\,\Delta x_i+\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

од каде што следува дека

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx\ . \ \blacksquare$$

Ова е таканареченото правило за определен интеграл за збир од функции, и неговата скратена формулација гласи: определен интеграл на збир на две функции, е еднаков на збирот на определените интеграли на функциите.

3. Ако функцијата f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и $c \in (a,b)$, тогаш важи

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ .$$

Доказ. Бидејќи вредноста на $\int_a^b f(x)dx$ не зависи од начинот на поделбата на интервалот $[a,b]$, ќе избереме поделба за која што точката c е една од делбените точки, односно

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{k-1} < x_k = c < x_{k+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Тогаш, за интегралниот збир добиваме дека

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

од каде што следува дека

$$\lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=k-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

односно, добиваме дека

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ . \ \blacksquare$$

4. Ако f е интеграбилна на интервалот $\left[a,b\right]$ и ако $f(x)\geq 0,$ за секое $x\in\left[a,b\right],$ тогаш важи дека

$$\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0.$$

Доказ. Ако $f(x)\geq 0,$ за секое $x\in\left[a,b\right],$ тогаш имаме дека за секоја поделба $\pi=\left\{x_0,x_1,\cdots,x_n\right\}$ на $\left[a,b\right]$ и за секој избор на точки $\xi_i\in\left[x_{i-1},x_i\right],$ $i=1,2,\cdots,n,$ важи дека

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_{i-1}\geq 0,$$

Ако во последното неравенство преминеме кон граница кога $d(\pi)\to 0,$ заради својството на монотоност на конвергентна низа добиваме дека

$$\lim_{d(\pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geq \lim_{d(\pi)\to 0} 0=0,$$

од каде што следува дека

$$\int\limits_a^b f(x)dx\geq 0. \ \blacksquare$$

5. Ако f и g се интеграбилни на интервалот $\left[a,b\right]$ и $f(x)\geq g(x),$ за секое $x\in\left[a,b\right],$ тогаш важи дека

$$\int\limits_a^b f(x)dx\geq\int\limits_a^b g(x)dx\,.$$

Доказ. Од $f(x)\geq g(x),$ за секое $x\in\left[a,b\right]$ следува дека $f(x)-g(x)\geq 0,$ за секое $x\in\left[a,b\right].$ Тогаш заради својстовото 4. заклучуваме дека

$$\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx \geq 0.$$

Понатаму, заради својството 2. добиваме дека

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0,$$

од каде што следува дека

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \ \blacksquare$$

6. Ако функциите f и $|f|$ се интеграбилни на интервалот $\left[a,b\right]$, тогаш важи неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Доказ. Заради својството 5. од неравенството

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \text{ за секое } x \in \left[a,b\right],$$

се добива неравенството

$$-\int_a^b |f(x)|\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx. \ \blacksquare$$

7. Ако f е интеграбилна на интервалот $\left[a,b\right]$ и ако $m \leq f(x) \leq M$, за секое $x \in \left[a,b\right]$, тогаш важи дека

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доказ. Заради својството 5. од неравенството

$m \le f(x) \le M$, за секое $x \in [a,b]$,

со интегрирање се добива неравенството

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \ ■$$

8.3.1. Примери.

1) Знаејќи дека $\int_0^{\pi/2} \cos x\ dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\ dx = 1$ ќе најдеме $\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx.$

Бидејќи имаме дека

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x,$$

со примена на својствата 1. и 2. добиваме дека

$$\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2} \cos x\ dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\ dx = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

2) Ќе покажеме дека

$$\int_a^{b+h} f(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx = \int_b^{b+h} f(x)\ dx,$$

за кои било три реални броја a, b и h за коишто постојат интегралите во дадениот израз. Впрочем, со непосредна примена на својството 3. добиваме дека

$$\int_a^{b+h} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^{b+h} f(x)\,dx = \int_b^{b+h} f(x)\,dx.$$

3) Да го докажеме двојното неравенство $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} \le 1.$

Најнапред да ја најдеме најмалата и најголемата вредност на подинтегралната функција $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$ на интервалот $[0,1]$. Функцијата x^4 е растечка, па и функцијата x^4+1, е, исто така, растечка, што значи дека функцијата $f(x)$ е опаѓачка функција на разгледуваниот интервал. Затоа најмалата вредност на функцијата на интервалот $[0,1]$ е еднаква на $f(1) = \frac{1}{2}$, а најголемата е еднаква на $f(0) = 1$. Според тоа, важи двојното неравенство

$$\frac{1}{2} \le f(x) \le 1, \quad \text{за секое } x \in [0,1].$$

Оттука, заради својството 7. следува дека

$$\frac{1}{2}(1-0) \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 1(1-0),$$

од каде што наоѓаме дека

$$\frac{1}{2} \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 1.$$

4) За да го пресметаме интегралот $\int_0^{2\pi} x|\sin x|\,dx$, најнапред да се осло-

бодиме од знакот за апсолутната вредност. Бидејќи $\sin x \geq 0,$ за секое $x \in [0,\pi]$ и $\sin x \leq 0,$ за секое $x \in [\pi, 2\pi],$ интегралот на интервалот $[0,2\pi]$ со помош на својсвтото 3. ќе го запишеме како збир од интеграли на интервалите $[0,\pi]$ и $[\pi,2\pi],$ а потоа ќе земеме предвид дека $|\sin x| = \sin x,$ ако $\sin x \geq 0$ и $|\sin x| = -\sin x,$ ако $\sin x \leq 0.$ Имаме дека

$$\int_0^{2\pi} x\,|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} x\,|\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} x\,|\sin x|\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi} x\,\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\,\sin x\,dx.$$

Со методот на интегрирање по делови наоѓаме една примитивна функција на подинтегралната функција, односно добиваме дека

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x$$

Оттука, за определениот интеграл добиваме дека

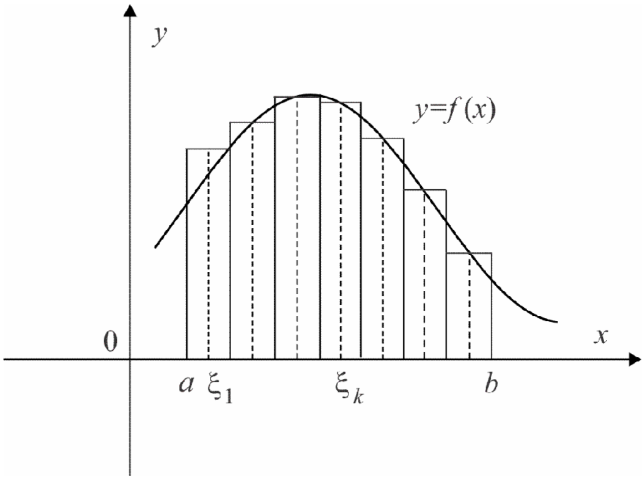
$$\int_0^{2\pi} x\,|\sin x|\,dx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} - (-x\cos x + \sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4\pi. \; \bullet$$

8.4. Геометриско и механичко толкување на определен интеграл

Плоштина на криволиниски трапез

Криволиниски трапез се нарекува секоја фигура во $x\mathrm{O}y$ рамнината која е ограничена со дадена крива $y = f(x),\ x \in [a,b],$ правите $x = a$ и $x = b,$ и делот на апсцисната оска што одговара на интервалот $[a,b]$ (слика 78.). Притоа се претпоставува дека функцијата $f(x)$ е непрекината и ненегативна на интервалот $[a,b].$

Да ја пресметаме плоштината на дадениот криволиниски трапез.



Слика 78.

За таа цел, нека $\pi=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ е произволна поделба на интервалот $[a,b]$ и нека $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n,$ се произволно избрани. Производот $f(\xi_i)\Delta x_i$ ја претставува плоштината на правоаголникот со основа Δx_i и висина $f(\xi_i)$, $i=1,2,\cdots,n.$ Збирот на плоштините на сите така формирани правоаголници, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, е приближно еднаков на плоштината P на криволинискиот трапез, односно имаме дека

$$P\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Забележуваме дека колку е поголем бројот на подинтервали на интервалот $[a,b]$, толку збирот на плоштините на правоаголниците е поблиску до вредноста на плоштината на криволинискиот трапез. Интуитивно се наметнува заклучокот дека збирот на плоштините на правоаголниците тежи кон плоштината на криволинискиот трапез ако должината на подинтервалот со најголема должина $d(\pi)$ тежи кон нула, кога бројот на подинтервали неограничено се зголемува, односно за плоштината на криволинискиот трапез имаме дека

$$P = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Од друга страна, знаеме дека интегралниот збир на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, во однос на дефинираната поделба π и делбените точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, изнесува $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Нејзината граница, кога должината на подинтервалот со најголема должина $d(\pi) \to 0$, кога $n \to \infty$, е еднаква на определениот интеграл на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, односно имаме дека

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Значи, плоштината на криволинискиот трапез е еднаква на определениот интеграл на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, односно важи

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

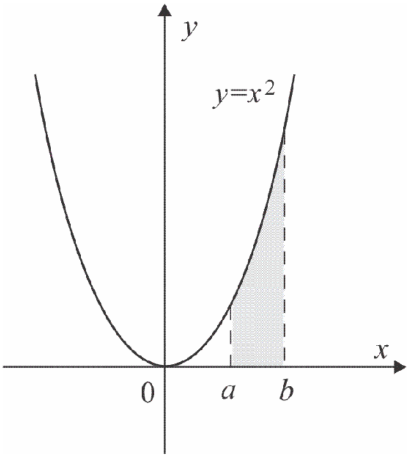
Според тоа, интегралот на функцијата $y = f(x)$ на интервалот $[a,b]$, претставува плоштината на криволинискиот трапез ограничена со кривата $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, правите $x = a$ и $x = b$, и делот на апсцисната оска којшто одговара на интервалот $[a,b]$, што претставува *геометриско толкување на поимот за определениот интеграл.*

8.4.1. Примери.

1) Да ја пресметаме плоштината на криволинискиот трапез ограничен со параболата $y = x^2$, правите $x = a$ и $x = b$, и $x-$оската (слика 79.).

Според погорната дискусија, плоштината на криволинискиот трапез, ќе биде

$$P=\int_a^b x^2\ dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{1}{3}(b^3-a^3).$$



Слика 79.

Пат кај праволиниско движење

Да разгледаме тело кое се движи праволиниски со променлива брзина. Нека $v=v(t)$ е функцијата која што ја дава зависноста на брзината од времето. Ќе ја пресметаме должината на патот s што го минува телото од моментот $t=a$ до моментот $t=b.$ За таа цел, избираме произволна поделба $\pi=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ на интервалот $[a,b]$ и произволни точки $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\cdots,n.$ Нека брзината е приближно константна на секој од избраните подинтервали. Имено, нека на $i-$тиот интервал $[t_{i-1},t_i]$ брзината е приближно еднаква, на пример, на брзината во моментот $t=t_i,$ односно $v\approx v(t_i),\ i=1,2,...,n.$ Тогаш патот поминат во текот на $i-$тиот временски интервал е приближно еднаков на

$v(t_i)\Delta t_i$, каде што $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n,$ а целиот пат s е приближно еднаков на збирот на дефинираните производи, односно

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\ \Delta t_i\ .$$

Како и при пресметување на плоштина на криволиниски трапез, точната вредност на бараната величина, односно должината на патот се добива како гранична вредност на горната сума, ако должината на подинтервалот со најголема должина тежи кон нула, кога бројот на подинтервали неограничено се зголемува,односно

$$s = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\ \Delta t_i\ .$$

Од друга страна, знаеме дека интегралниот збир на функцијата $v(t)$ на интервалот $[a,b]$, во однос на дефинираната поделба π и делбените точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n,$ изнесува $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta x_i.$ Нејзината граница, кога должината на подинтервалот со најголема должина $d(\pi)$ тежи кон нула, кога бројот на подинтервали неограничено расте, е еднаква на определениот интеграл на функцијата $v(t)$ на интервалот $[a,b]$, односно имаме дека

$$\int_a^b v(t)dt = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

Значи, должината на патот $s,$ што го минува телото од моментот $t = a$ до моментот $t = b,$ е еднаква на определениот интеграл на функцијата $v(t)$ на интервалот $[a,b]$, односно важи

$$s=\int_a^b v(t)\,dt.$$

Според тоа, интегралот на функцијата $v=v(t)$ на интервалот $[a,b]$, претставува должината на патот што го минува телото од моментот $t=a$ до моментот $t=b$, што претставува *механичко толкување на поимот за определениот интеграл.*

8.5. Примени на определен интеграл во математика

8.5.1. Пресметување на плоштини

Геометриското толкување на определениот интеграл дава можност плоштината на криволиниски трапез да се пресметува со помош на определен интеграл. Имено, ако функцијата $y=f(x)$ е непрекината и ненегативна на интервалот $[a,b]$, односно $f(x)\geq 0$, за секое $x\in[a,b]$, тогаш плоштината на криволинискиот трапез

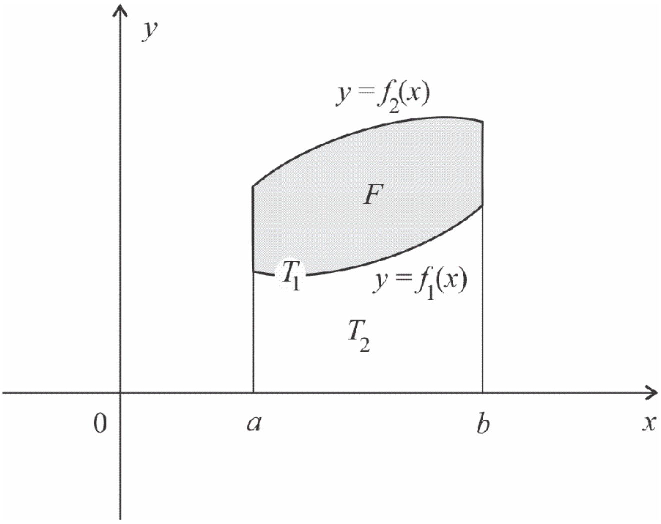
$$T=\{(x,y): a\leq x\leq b, 0\leq y\leq f(x)\}$$

е еднаква на определениот интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Ова претставува основа за пресметување на плоштина на рамнински фигури од поопшт вид со помош на определен интеграл.

Нека дадена фигурата F во рамнината $x\mathrm{O}y$ е ограничена со кривите $y=f_1(x)$, за секое $x\in[a,b]$, и $y=f_2(x)$, за секое $x\in[a,b]$, и правите $x=a$ и $x=b$ (слика 80.). Функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ се непрекинати и ненегативни на интервалот $[a,b]$, и важи $f_1(x)\geq f_2(x)\geq 0$, за $x\in[a,b]$.



Слика 80.

Ако T_1 е криволинискиот трапез под кривата $y=f_1(x)$, и T_2 е криволинискиот трапез под кривата под кривата $y=f_2(x)$, и притоа двата се определени на интервалот $\left[a,b\right]$, тогаш фигурата F може да се претстави како разлика на криволинискиот трапез T_1 со криволинискиот трапез T_2, односно $F=T_1\setminus T_2$. Плоштината на фигурата F е еднаква на разликата на плоштината на криволинискиот трапез T_1 со криволинискиот трапез T_2, а тие плоштини непосредно се пресметуваат со помош на определен интеграл, така што добиваме дека

$$P(F)=P(T_1)-P(T_2)=\int_a^b f_1(x)\;dx-\int_a^b f_2(x)\;dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\;dx.$$

Од погорната дискусија, за плоштината на фигура F добиваме

$$P(F)=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\;dx. \qquad (8.2)$$

8.5.1.1. Примери.

1) Да ја пресметаме плоштината на фигура F ограничена со кривите

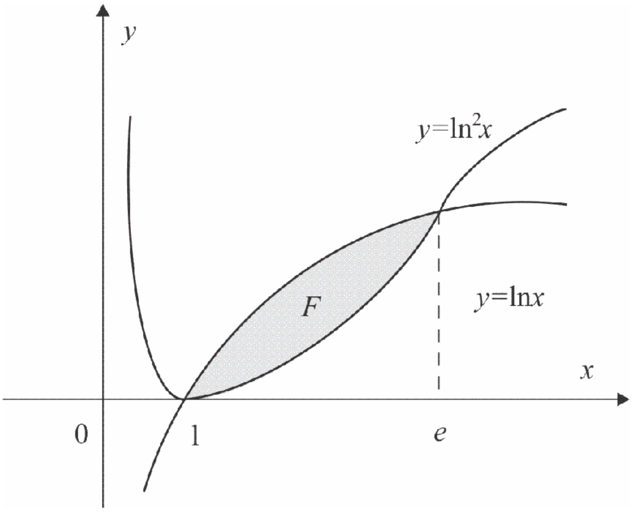
$y=\ln x$ и $y=\ln^2 x.$ Кривите кои што ја заградуваат фигурата F се прикажани на слика 81.

Апсцисите на нивните пресечни точки ќе ги најдеме со решавање на системот од равенки

$y=\ln x$ и $y=\ln^2 x,$

што се сведува на решавање на равенката $\ln x-\ln^2 x=0.$

Бидејќи решенијата на последната равенка се $x=1$ и $x=e,$ апсциситe на пресечните точки се еднакви на 1 и $e.$



Слика 81.

Дадената фигура F е разлика на криволинискиот трапез под кривата $y=\ln x,$ на интервалот $[1,e]$ со криволинискиот трапез под кривата $y=\ln^2 x$ на интервалот $[1,e].$ Според тоа, за плоштината на фигурата F добиваме дека

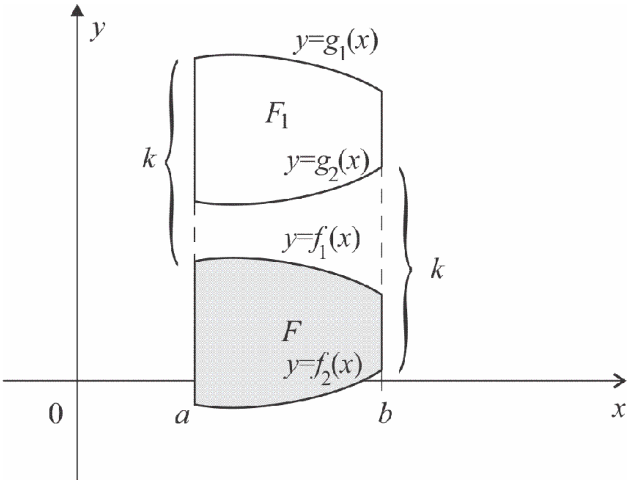
$$P(F)=\int_1^e(\ln x-\ln^2 x)\,dx=\Big[-x\ln^2 x+3x\ln x-3x\Big]\Big|_1^e=3-e. \;\bullet$$

Да забележиме дека равенството 8.2. важи и во случајот кога фигурата F не лежи над $x-$оската, односно кога функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не се ненегативни на интервалот $\left[a,b\right]$ (слика 82.). Поточно, ако функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ се непрекинати на интервалот $\left[a,\, b\right]$, и важи $f_1(x) \geq f_2(x)$, за секое $x \in \left[a,b\right]$, тогаш функциите

$$g_1(x) = f_1(x) + k \text{ и } g_2(x) = f_2(x) + k, \quad k \geq \left| \min_{x \in [a,b]} \left\{ f_1(x), f_2(x) \right\} \right|$$

се непрекинати и ненегативни на интервалот $\left[a,\, b\right]$, и важи

$$g_1(x) = f_1(x) + k \geq f_2(x) + k = g_2(x), \text{ за секое } x \in \left[a,b\right].$$



Слика 82.

Според тоа, на функциите $g_1(x)$ и $g_2(x)$ може да се примени равенството 8.2., односно за плоштоната на фигурата F_1 заградена со кривите $y = g_1(x)$ и $y = g_2(x)$, и правите $x = a$ и $x = b$, имаме дека

$$P(F_1) = \int_a^b [g_1(x) - g_2(x)]\, dx.$$

Освен тоа, фигурата F_1 е складна со фигурата $F,$ па според тоа нивните плоштини се еднакви, односно $P(F)=P(F_1).$ Така, имаме дека

$$P(F)=P(F_1)=\int_a^b [g_1(x)-g_2(x)]\,dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx,$$

од каде што следува дека

$$P(F)=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx.$$

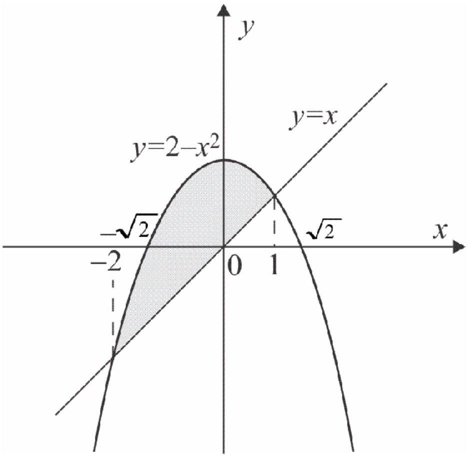
8.5.1.2. Примери.

1) Да ја пресметаме плоштината на фигура заградена со параболата $y=2-x^2$ и правата $y=x$ (слика 83.).

Апсцисите на пресечните точки на правата и параболата ги наоѓаме со решавање на системот равенки

$$y=2-x^2,\ \ y=x.$$

Добиените решенија, $x_1=-2$ и $x_2=1,$ се границите на интеграцијата.



Слика 83.

Бараната плоштина е

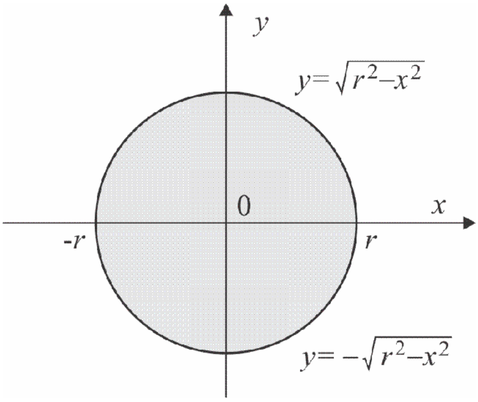
$$P=\int_{-2}^{1}[(2-x^2)-x]dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}. \bullet$$

Да напомeнеме дека со помош на определен интеграл може да дојдеме до формулите за пресметување на плоштини на рамнински фигури.

8.5.1.3. Примери.

1) Да ја пресметаме плоштината на круг со радиус r (слика 8.4.).

Знаеме дека равенка на круг со радиус r и центар во координатиот почеток е $x^2+y^2=r^2$. Според тоа, може да сметаме дека ја бараме плоштината на фигурата заградена со кривите $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, на интервалот $[-r,r]$, каде што $f_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ и $f_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.



Слика 84.

Според равенството 8.2. за плоштината имаме дека

$$P=\int_{-r}^{r}\left[\sqrt{r^2-x^2}-\left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right]dx=2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=$$

(воведуваме смена $x=r\sin t,\ dx=r\cos t\,dt$)

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}r\cos tdt=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}r^2\cos^2 tdt=2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 tdt.$$

Последниот интегралот $\int \cos^2 tdt$ ќе го пресметаме со парцијална интеграција. Ако избереме $u(t) = \cos t,\ dv = \cos tdt,$ имаме $du = -\sin tdt,$ $v = \int \cos tdt = \sin t.$ Тогаш

$$\int \cos^2 tdt = \cos t \sin t + \int \sin^2 tdt = \int (1 - \cos^2 t)dt = \int dt - \int \cos^2 tdt,$$

од каде што добиваме дека $\int \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int dt.$ Оттука следува дека

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Конечно, добиваме дека плоштината на круг со радиус r изнесува $P = 2r^2 \frac{\pi}{2} = r^2 \pi$. ●

Понекогаш за поедноставно пресметување на плоштина на дадена фигура може да се заменат улогите на променливите x и y. Притоа, формулата 8.3. добива облик

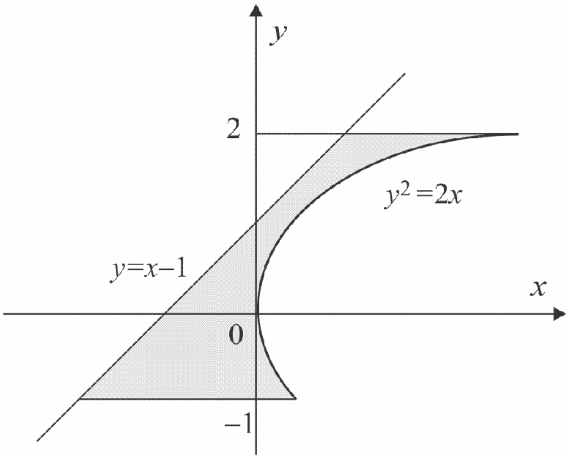
$$P = \int\limits_c^d [h_1(y) - h_2(y)]dy,$$

каде што $h_1(y)$ и $h_2(y)$ се непрекинати и ненегативни на интервалот $[c,d]$, и важи $h_1(y) \geq h_2(y),$ за секое $x \in [c,d]$.

8.5.1.4. Примери.

1) Да ја пресметаме плоштината на фигурата ограничена со кривата $y^2 = 2x$ и правите $y = -1,\ y = 2$ и $y - x = 1$ (слика 85.). Согласно погорната дискусија имаме дека

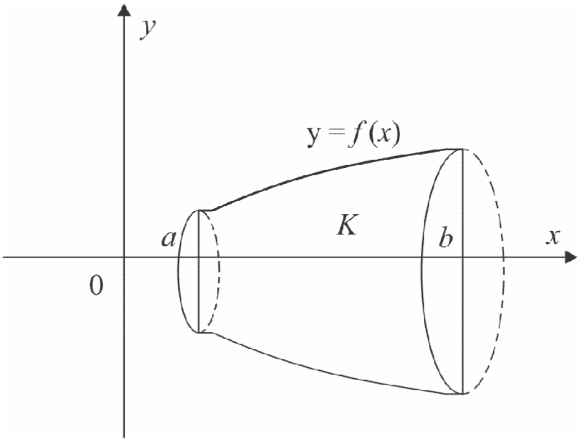
$$S = \int\limits_{-1}^{2}\left(\frac{y^2}{2} - y + 1\right)dy = \left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 3. \ ●$$



Слика 85.

8.5.2. Пресметување на волумен на вртливи тела

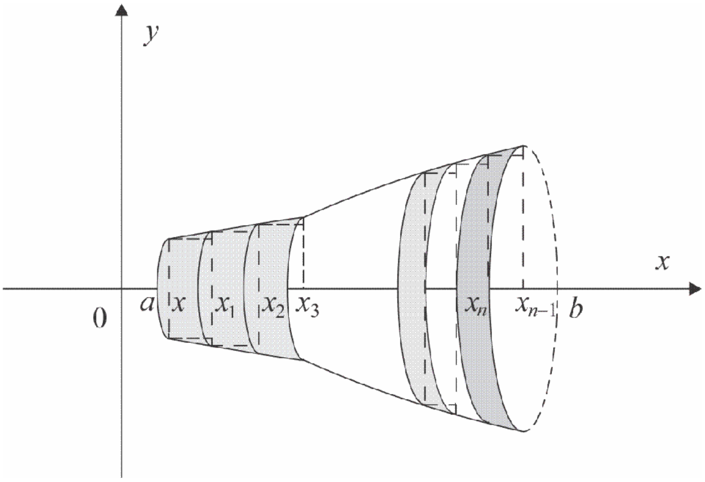
Нека $f(x)$ е непрекината и ненегативна функција на интервал $[a,b]$. Ако криволинискиот трапез ограничен со кривата $y=f(x),\;\; x\in[a,b]$, правите $x=a$ и $x=b$, и делот на апсцисната оска што одговара на интервалот $[a,b]$, се заврти околу $x-$оската, се добива вртливо тело K. (слика 86.).



Слика 86.

Да го определиме волуменот на добиеното вртливо тело. За таа цел нека $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ е произволна поделба на интервалот $[a,b]$ и нека $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots n$, се произволно избрани. Со вртење околу $x-$оската на правоаголниците со основи $[x_{i-1}, x_i]$ и висини $f(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, се добиваат цилиндри (слика 87.). Волуменот на добиеното ротационо тело K е приближно еднаков на збирот од волумените на сите такви цилиндри, односно имаме

$$V(K) \approx \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \, \Delta x_i = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)]^2 \, \Delta x_i .$$



Слика 87.

Колку е поголем бројот на делбените сегменти на дадената поделба на интервалот $[a,b]$, толку повеќе збирот на волумените на цилиндрите се приближува кон вредноста на волуменот на ротационото тело. Попрецизно кажано, ако должината на делбениот сегмент со најголема должина $d(\pi)$ на поделбата π тежи кон нула, кога бројот на подинтервали неограничено расте, тогаш збирот на волумените на цилиндрите тежи кон волуменот на телото K, односно имаме дека

$$V(K)=\pi \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]^2 \Delta x_i .$$

Бидејќи функцијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, следува дека и функцијата πf^2 е непрекината на интервалот $[a,b]$. Оттука следува дека функцијата πf^2 е интеграбилна на интервалот $[a,b]$. Збирот на волумените на цилиндрите, кои се придружени на дадената поделба на интервалот $[a,b]$, како приближна вредност на волуменот $V(K)$, односно збирот

$$\pi \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]^2 \Delta x_i$$

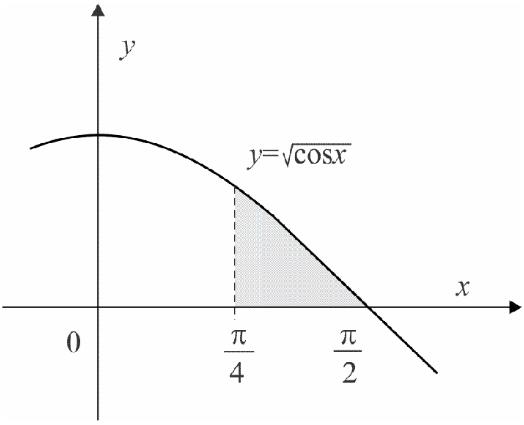
претставува истовремено и една интегрална сума за функцијата πf^2 на интервалот $[a,b]$, придружена на дадената поделба на сегментот. Сега, од интеграбилноста на функцијата πf^2 следува дека интегралната сума тежи кон интегралот $\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$, кога $d(\pi)$ тежи кон нула. Значи, волуменот на ротационото тело K изнесува

$$V=\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx . \qquad (8.3)$$

8.5.2.1. Примери.

1) Волумент на тело добиено со ротација околу $x-$оската на фигурата ограничена со кривата $y=\sqrt{\cos x}$, правите $x=\frac{\pi}{4}$ и $x=\frac{\pi}{2}$, и $x-$оската (слика 88.) изнесува

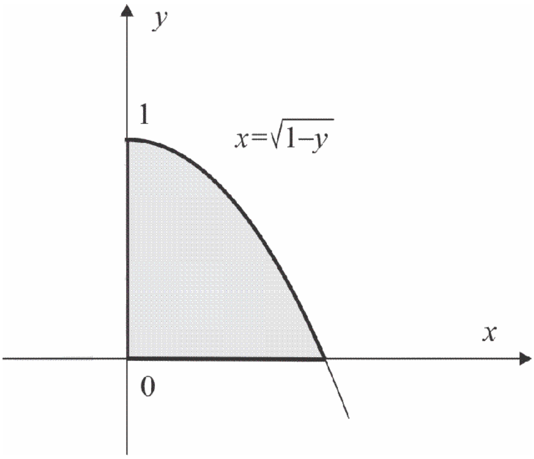
$$V=\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\, dx=\pi \sin x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$



Слика 88.

Аналогно, заклучуваме дека ако криволинискиот трапез ограничен со кривата $x=f(y),$ за секое $y\in[c,d],$ правите $y=c$ и $y=d,$ и делот на ординатната оска што одговара на интервалот $[c,d],$ ротира околу $y-$оската, тогаш волуменот на добиеното ротационото тело изнесува

$$V=\pi\int_{c}^{d}\left[h(y)\right]^{2}dy. \tag{8.4}$$



Слика 89.

2) Волумент на тело добиено со ротација околу $y-$оската на фигура-

та ограничена со кривата $y=1-x^2$ и координатните оски (слика 89.) изнесува

$$V=\pi\int_c^d\left[h(y)\right]^2 dy=\int_0^1\left(y-1\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}-y\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$ ●

Формулата 8.3. за пресметување на волумен на ротациони тела со помош на определен интеграл содржи формули за пресметување на волумен на прав цилиндар, прав конус, кос конус, топка и делови на топка, познати од порано.

8.5.2.2. Примери. Да го пресметаме волуменот на топка со радиус r.

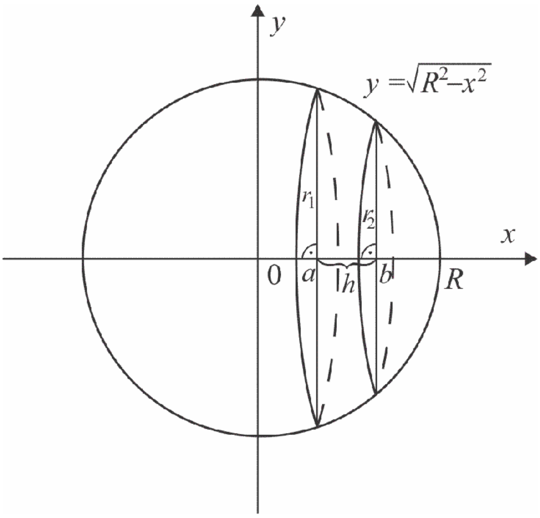
1) Топката се добива со вртење на кривата $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in\left[-r,r\right]$, околу $x-$оската. За волуменот на топката добиваме дека

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}r^3\pi.$$

2) Да покажеме дека волуменот на топкин слој, со висина h и радиуси на основите r_1 и r_2, изнесува

$$V=\frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2+3r_2^2+h^2\right).$$

Да го обележиме со R радиусот на топката од која е исечен топкиниот слој чиј волумен го бараме. Топка со радиус R може да се добие со ротирање околу $x-$оската на кругот $x^2+y^2\leq R^2$. Да ги воочиме точките a и b, на интервалот $\left[0,R\right]$ на $x-$оската, за кои што важи $b-a=h$, $R^2-a^2=r_1^2$ и $R^2-b^2=r_2^2$ (слика 90.). Рамнините низ точките a и b, што се нормални на $x-$оската од сферата отсекуваат слој со висина h и радиуси на основите r_1 и r_2. Јасно е дека овој слој се



Слика 90.

добива со ротирање на криволинискиот трапез определен со кривата $y=\sqrt{R^2-x^2}$ на интервалот $[a,b]$. Според формулата 8.3. за пресметување на волумен на ротационо тело со определен интеграл имаме

$$V=\pi\int_a^b(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b=\pi\left(R^2b-R^2a-\frac{b^3-a^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{3}[3R^2(b-a)-(b-a)(a^2+ab+b^2)]=\frac{\pi(b-a)}{3}(3R^2-a^2-ab-b^2)=$$

$$=\frac{\pi(b-a)}{3}\left[3R^2-\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}b^2+\frac{1}{2}(b-a)^2\right]=\frac{\pi(b-a)}{6}\left[6R^2-3a^2-3b^2+(b-a)^2\right]=$$

$$=\frac{\pi(b-a)}{6}\left[3(R^2-a^2)+3(R^2-b^2)+(b-a)^2\right]=\frac{\pi h}{6}\left(3r_1^2+3r_2^2+h^2\right),$$

што требаше да се докаже. ●

Ако околу $x-$оската ротира рамнинска фигура која може да се претстави како разлика на два криволиниски трапези на ист интервал на $x-$оската, тогаш волуменот на така добиеното ротационо тело е еднаков на разликата на волумените на телата добиени со ротирање на секој од тие криволиниски трапез, подделно. Попрецизно, нека дадена фигура F е ограничена со кривите $y = f_1(x),$ за секое $x \in [a, b],$ и $y = f_2(x),$ за секое $x \in [a, b],$ и правите $x = a$ и $x = b,$ каде што функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ се непрекинати и ненегативни на интервал $[a, b],$ и важи $f_1(x) \geq f_2(x) \geq 0,$ за секое $x \in [a,b].$ Ако T_1 е криволинискиот трапез под кривата $y = f_1(x),$ и T_2 е криволинискиот трапез под кривата под кривата $y = f_2(x),$ и притоа двата се определени на интервалот $[a, b],$ тогаш фигурата F може да се претстави како разлика на криволинискиот трапез T_1 со криволинискиот трапез $T_2,$ односно $F = T_1 \setminus T_2.$ Тогаш волуменот на телото $K,$ добиеното со ротација на фигурата F околу $x-$оската е еднаков на разликата на волуменот на телото $K_1,$ добиено со ротација на криволинискиот трапез на $T_1,$ со волуменот на телото $K_2,$ добиено со ротација на криволинискиот трапез $T_2,$ односно имаме дека

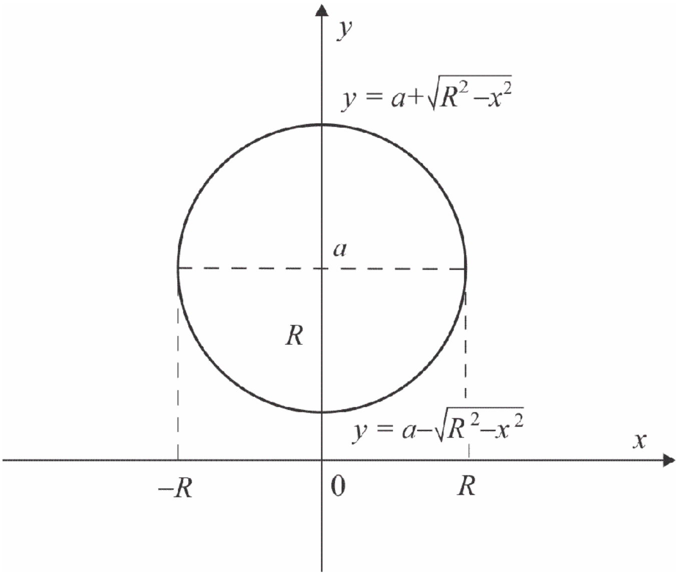
$$V(K) = V(T_1) - V(T_2) = \pi \int_a^b f_1^{\,2}(x)\,dx - \pi \int_a^b f_2^{\,2}(x)\,dx = \pi \int_a^b [f_1^{\,2}(x) - f_2^{\,2}(x)]\,dx.$$

Според погорната дискусија, волуменот на телото K добиено со ротација на фигурата F околу $x-$оската изнесува

$$V(K) = \pi \int_a^b [f_1^{\,2}(x) - f_2^{\,2}(x)]\,dx. \tag{8.5}$$

8.5.2.3. Примери.

1) Да ја пресметаме плоштината на телото добиено со ротација околу $x-$оската на кругот $x^2 + (y-a)^2 \leq R^2,\ 0 < R < a$ (слика 91.).



Слика 91.

Кружната површина, за која станува збор во текстот на задачата, е разлика на криволинискиот трапез под кривата $y = a + \sqrt{R^2 - x^2}$ со криволинискиот трапез под кривата $y = a - \sqrt{R^2 - x^2}$, и двата на интервалот $[-R, R]$ на $x-$оската. Волуменот V, на телото кое се добива со ротација на површината околу $x-$оската е еднаква на разликата на волумените на телата добиени со ротирање на овие криволиниски трапези, и изнесува

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-R}^{R} (a + \sqrt{R^2 - x^2})^2 \, dx - \pi \int_{-R}^{R} (a - \sqrt{R^2 - x^2})^2 \, dx =$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} [(a + \sqrt{R^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{R^2 - x^2})^2] \, dx =$$

$$= \pi \, 4a \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = 4a\pi \frac{R^2\pi}{2} = 2aR^2\pi^2,$$

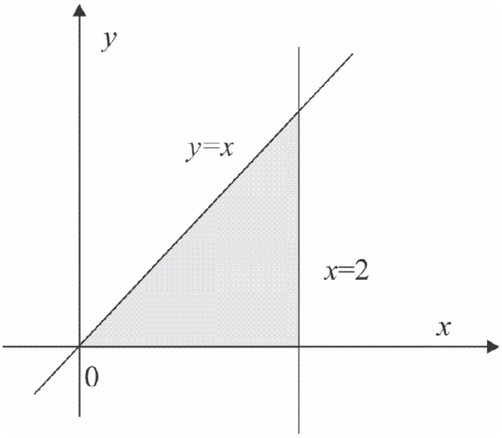
бидејќи интегралот $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$ е еднаков на половината од плоштината на кружната површина $x^2+y^2\le R,$ што изнесува $\frac{1}{2}R^2\pi.$ ●

Со аналогна дискусија заклучуваме дека ако дадена фигура F е ограничена со кривите $x=h_1(y),$ за секое $x\in[c,d],$ и $x=h_2(y),$ за секое $y\in[c,d],$ и правите $y=c$ и $y=d,$ каде што функциите $h_1(y)$ и $h_2(y)$ се непрекинати и ненегативни на интервалот $[c,d],$ и важи $h_1(y)\ge h_2(y)\ge 0,$ за секое $y\in[c,d],$ тогаш волуменот на телото $K,$ добиеното со ротација на фигурата F околу $y-$оската се пресметува по формулата

$$V(K)=\pi\int_{c}^{d}[h_1{}^2(y)-h_2{}^2(y)]\,dy. \tag{8.6}$$

8.5.2.4. Примери.

1) Да го определиме волуменот на телото добиено со ротација околу $y-$оската, на фигурата заградена со правите $y=x,$ $x=2$ и $x-$оската (слика 92.).



Слика 92.

Според условите во задачата границите на интеграција се 0 и 2.

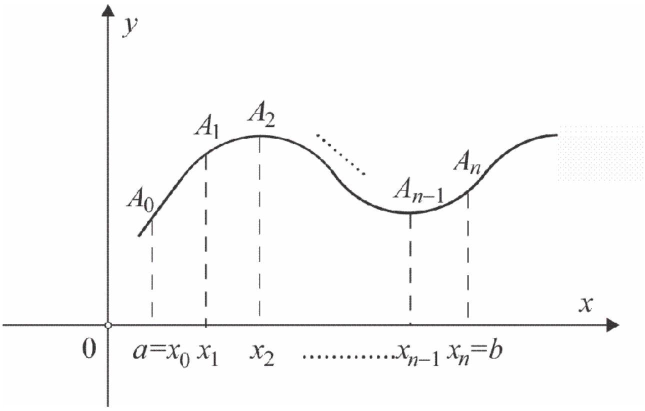
Заради формулата 8.6. имаме

$$V=\pi\int_c^d[h_1{}^2(y)-h_2{}^2(y)]\,dy=\pi\int_0^2(2^2-y^2)\,dy=4\pi\int_0^2 dy-\pi\int_0^2 y^2dy=\frac{16\pi}{3}.\ \bullet$$

8.5.3. Пресметување на должина на лак на крива

Ќе разгледаме како со помош на определен интеграл може да се пресмета должината на лак на крива линија во рамнина.

Нека во рамнината $x\mathrm{O}y$ е зададена кривата $y=f(x),$ каде што $f(x)$ е непрекината функција со непрекинат извод на интервалот $[a,b]$. Да разгледаме лак на дадената крива од точката со апсциса $x=a$ до точка со апсциса $x=b$ (слика 93.).



Слика 93.

За да ја пресметаме приближно должината на дадениот лак, интервалот $[a,b]$ ќе го поделиме на n делови со поделбата $\pi=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ и низ делбените точки ќе повлечеме прави паралелни со $y-$оската. На тој начин разгледуваниот лак на кривата ќе го поделиме на n помали делови.

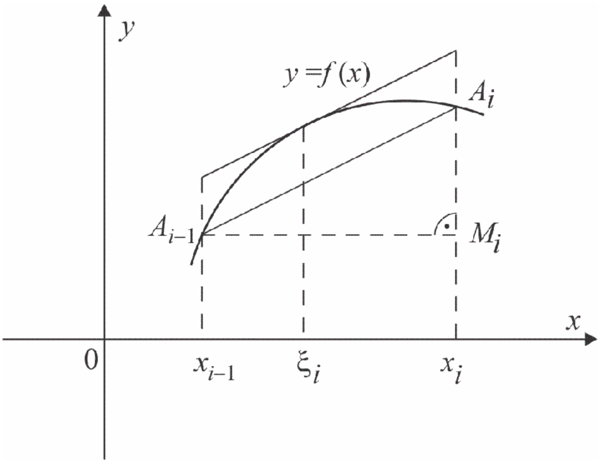
Секој од овие делови може да се замени со тетивата која што ги поврзува неговите крајни точки, а неговата должина со должината на таа тетива како приближна вредност. Да ја пресметаме должината на која било ($i-$та) од овие тетиви (слика 94.). Да ги обележиме со A_{i-1} и A_i, $i=1,2,\ldots,n,$ крајните точки со апциси x_{i-1} и x_i. Од правоаголниот триаголник $A_{i-1}\,A_i\,M_i$ непосредно се добива дека

$$\overline{A_{i-1}\,A_i}=\sqrt{\overline{A_{i-1}M_i}^2+\overline{A_iM_i}^2}=\sqrt{\Delta x_i^2+k_i^2\Delta x_i^2}=\sqrt{1+k_i^2}\,\Delta x_i,$$

каде k_i е коефициент на правец на тетивата $A_{i-1}A_i$ и $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},$ $i=1,2,\ldots,n.$ Според теоремата на Лагранж коефициентот k_i е еднаков на коефициентот на правецот на тангентата на кривата $y=f(x)$ во некоја точка со апсциса $\xi_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$, $i=1,2,\ldots,n,$ односно $k_i=f'(\xi_i).$ Тогаш имаме дека

$$\overline{A_{i-1}\,A_i}=\sqrt{1+\left[f'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i,\ \ i=1,2,\ldots,n.$$

Бидејќи должината на $i-$тиот од $n-$те помали лаци е приближно еднаква на должината на тетивата $A_{i-1}A_i$, должината на лакот на



Слика 94.

кривата $y = f(x)$ е приближно еднаква на збирот на должините на тетивите $A_{i-1}A_i,\ i = 1,2,\ldots,n,$ односно, имаме дека

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'(\xi_i)\right]^2}\ \Delta x_i.$$

Кога должината на делбениот сегмент со најголема должина $d(\pi)$ на дадената поделба на интервалот $\left[a,b\right]$ тежи кон нула, кога бројот на делбени точки неограничено се зголемува, јасно е дека горниот збир, од една страна, ќе тежи кон бараната должина на лакот на дадената крива, а од друга страна, кон определениот интеграл

$$\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\ dx.$$

Да забележиме дека од претпоставката за непрекинатост на изводот $f'(x)$ на функцијата f на интервалот $\left[a,b\right]$ следува дека функцијата $\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}$ е исто така непрекината на интервалот $\left[a,b\right],$ па според тоа е и интеграбилна на интервалот $\left[a,b\right].$ Инаку, јасно е дека горниот збир претставува и една интегрална сума на оваа функција, соодветна на дадената поделба на интервалот $\left[a,b\right].$ Според тоа, важи

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\ dx. \qquad (8.7)$$

8.5.3.1. Примери.

1) Должината на лакот на кривата $y = x\sqrt{x}$ од $x = 1$ до $x = 2$ според формулата 8.7. изнесува

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\ dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx = \frac{22\sqrt{22}-13\sqrt{13}}{27}.$$ ●

8.6. Примена на определен интеграл во физика

8.6.1. Брзина и пат при рамномерно забрзано (успорено) движење

Ако едно тело има почетна брзина $\overrightarrow{v_0}$ и на него дејствува константна сила во ист правец, но спротивна насока на почетната брзина, тогаш неговата брзина рамномерно ќе опаѓа во секоја секунда. Заради тоа ваквото движење се нарекува рамномерно забавено движење. Ова движење се состои од рамномерно движење со почетна брзина $\overrightarrow{v_0}$ и рамномерно забрзано движење во спротивна насока. Резултантната брзина и резултантниот пат можеме да ги добиеме со интергрално и диференцијално сметање. Знаеме дека кај рамномерно забавеното движење забрзувањето е константно, но негативно $(-a)$. Бидејќи забрзувањето е прв извод на брзината по времето, може да ставиме

$$\frac{dv}{dt}=-a, \text{ односно } dv=-adt.$$

Интегрирајќи (со неопределен интеграл) на двете страни на равенството, добиваме дека

$$\int dv=\int(-adt)+C=-a\int dt+C=-at+C,$$

од каде што добиваме дека

$$v=-at+C.$$

Константата на интегрирање C ја добиваме од почетните услови земајќи предвид дека во моментот $t=0,$ брзината v е еднаква на почетната брзина v_0, односно $v=v_0$. Според тоа, добиваме дека

$$v_0=-a\cdot 0+C, \text{ односно } v_0=C.$$

Заменувајќи ја оваа вредност за C во равенката $v=-at+C,$ добиваме дека

$$v = v_0 - at. \tag{8.8}$$

Патот кај рамномерно забавеното движење го добиваме ако во последната равенка $v = v_0 - at$ ставиме $v = \frac{ds}{dt}$, а потоа интегрираме од 0 до t. Така добиваме дека

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - at, \text{ односно } ds = v_0 dt - at\, dt.$$

Со интегрирање на последната равенка, во која v_0 и a се константи, во граници од 0 до t, добиваме дека

$$s = \int_0^t (v_0 dt - at\, dt) = v_0 \int_0^t dt - a\int_0^t t\ dt = v_0 t\Big|_0^t - a\frac{t^2}{2}\Big|_0^t,$$

од каде што следува дека

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}. \tag{8.9}$$

Равенките 8.8. и 8.9. лесно се добиваат со диференцијално и интегрално сметање. Телото се движеше рамномерно со некоја почетна брзина и во еден момент под дејство на константна сила добива константно забрзување a. Да го определиме интензитетот на брзината и должината на изминатиот пат сметајќи од момент $t = 0$, кога силата почнала да дејствува. Бидејќи забрзувањето е прв извод на брзината по времето, имаме дека $\frac{dv}{dt} = a$, односно $dv = a\, dt$.

Со интегрирање добиваме дека

$$\int dv = \int a\, dt + C = a\int dt + C,$$

од каде што следува дека

$$v = at + C. \tag{8.10}$$

Константата на интегрирање C можеме да ја определиме од почетните услови, имајќи предвид дека телото во почетниот момент на разгледувањето $t=0,$ веќе се движело со некоја почетна брзина $v=v_0.$ Според тоа се добива дека

$$v_0 = a\cdot 0 + C, \text{ односно } C = v_0.$$

Ако ја замениме добиената вредност за C во равенката 8.10., добиваме дека

$$v = v_0 + at,$$

што всушност претставува равенката 8.8.

Моментната брзина е прв извод на патот по времето, односно $v=\dfrac{ds}{dt}.$

Ако ова го замениме во равенката 8.8., и ако ја изразиме променливата s како функција од $t,$ добиваме дека

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + at, \text{ односно } ds = v_0dt + at\,dt.$$

Со интегрирање на последното равенство наоѓаме дека

$$\int_0^t ds = \int_0^t (v_0dt + atdt) = \int_0^t v_0dt + \int_0^t atdt = v_0\int_0^t dt + a\int_0^t tdt =$$

$$= v_0t\Big|_0^t + at^2\Big|_0^t = v_0t + \frac{at^2}{2},$$

од каде што за патот добиваме дека

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}.$$

8.6.1.1. Примери.

1) Тело се движи со брзина дадена со формулата $v=\sqrt{1+t}\ m/s,$ каде

што t е времето во секунди. Да го најдеме патот што телото го изминало по 10 секунди од почетокот на движењето. За таа цел, да се потсетиме дека

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

Оттука имаме дека $\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+t}$, односно $ds=\sqrt{1+t}\cdot dt$. Според дадените услови, за патот наоѓаме дека

$$s=\int_0^{10}\sqrt{1+t}\ dt.$$

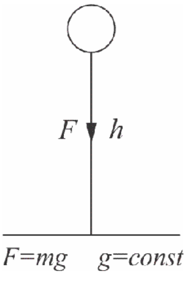
Со замената $\sqrt{1+t}=z$ за патот добиваме дека

$$s=\frac{2}{3}\sqrt{(1+t)^3}\Big|_0^{10}=\frac{2}{3}(\sqrt{11^3}-1)=23{,}6\ m.\ \bullet$$

8.6.2. Работа на променлива сила

Нека тело (материјална точка) се движи во правецот на $x-$оската (на пример во позитивна насока) под дејство на сила F, која има правец и насока на $x-$оската. Ако при тоа движење и интензитетот на силата е константен долж целиот пат, тогаш нејзината работа A по изминатиот пат s изнесува

$$A=F\cdot s.$$



Слика 95.

8.6.2.1. Примери.

1) Ако телото под дејство на Земјината тежа F, паѓа на Земјата од висина $s=h$, тогаш Земјината тежа (која на кратки растојанија можеме да ја сметаме за константна) извршува работа (слика 95.)

$$A=F\cdot h. \; \bullet$$

Ако, пак, телото се движи по истиот пат (на пример, по $x-$оската) под дејство на променлива сила, на пример силата F која од точка до точка го менува само интензитетот, тогаш силата $F=F(x)$ е функција од аргумент x, односно точката (местото) x во кое се наоѓа телото.

Ако телото под дејство на таква сила $F(x)$ се поместило од точка a во точка b на $x-$оската, се поставува прашањето колкава работа извршила таа сила при тоа поместување. За да можеме да одговориме на тоа прашање, мораме претходно да ја дефинираме работата на променлива сила на една отсечка и да најдеме математички апарат кој ќе ни овозможи да ја пресметаме работата на таа променлива сила. За таа цел да го поделиме интервалот $[a,b]$ со произволна поделба π за која важи

$$\pi : a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Долж секоја отсечка $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$, интензитетот на силата незначително се менува ако соодветниот интервал е доволно мал, па оттука можеме да сметаме дека на доволно мал интервал Δx_i силата е константна, односно е еднаква на $F(\xi_i)$ ако ξ_i е точка од интервалот Δx_i, така што на тој интервал силата извршува работа

$$A=F(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})=F(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Затоа извршената работа A на целиот интервал $\left[a,b\right]$ приближно е еднаква на

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\ \Delta x_i.$$

а работата на променливата сила на тој интервал е

$$A = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\ \Delta x_i = \int_a^b F(x)\ dx.$$

На тој начин работата на променлива сила на интервалот $\left[a,b\right]$ се дефинира како гранична вредност, а истовремено со тоа ни е даден математички апарат кој ни овозможува да ја пресметаме таа работа користејќи се со определениот интеграл.

8.6.2.2. Примери.

1) Да ја пресметаме силата со која што хомогена прачка со густина ρ, напречен пресек q и должина s привлекува материјална точка со маса m, која што се наоѓа во продолжената оска на прачката на растојание a од еден негов крај.

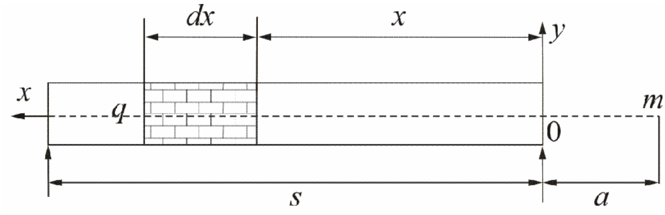
Поаѓајќи од Њутновиот закон на заемно дејство меѓу две маси, имаме

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

каде што $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$ е константата на гравитација. Да ја пресметаме силата на привлекување dF меѓу материјалната точка со маса m и дел од прачката со должина dx (слика 96). Тогаш, елементарниот волумен изнесува

$$dV = q \cdot dx.$$

Елементарната маса изнесува



Слика 96.

$$dM = \rho \cdot dV = \rho \cdot q \cdot dx.$$

Според Њутновиот закон имаме дека

$$dF = \gamma \frac{\rho \cdot q \; dx \cdot m}{(x+a)^2}.$$

Оттука, за силата добиваме дека

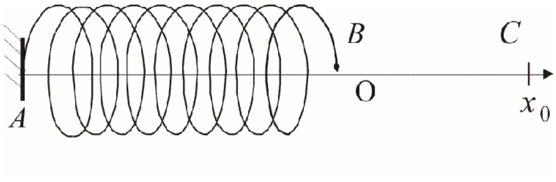
$$F = \gamma \cdot \rho q m \int_0^s \frac{dx}{(x+a)^2} = -\gamma \cdot \rho q m \frac{1}{x+a}\Bigg|_0^s = -\gamma \rho q m \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{a} \right) =$$

$$= \gamma \rho q m \cdot \frac{s}{a(s+a)} = \gamma \cdot \frac{\rho \cdot q \cdot s \cdot m}{a(a+s)}.$$

Бидејќи масата на прачката е $M = \rho \cdot q \cdot s,$ добиваме дека

$$F = \gamma \frac{M \cdot m}{a(a+s)}.$$

2) Нека пружината AB е зацврстена на едниот крај $A.$ Да ја пресметаме механичка работа која што треба да се изврши за да се истегне пружината до точка C (слика 97.).



Слика 97.

Да ја поставиме $x-$оската така што точките A и B да лежат на $x-$оската и координатниот почеток да биде во точката $B.$ Според тоа, во точката B имаме дека $x=0.$ Нека во точката C имаме $x=x_0.$

Додека не се премине границата на еластичност, силата на истегнување е пропорционална со истегнувањето $x,$ односно важи

$$F(x)=px,$$

каде што p е коефициент на истегнувањето. Тогаш, имаме дека механичката работа која што силата ја извршува на патот BC (од точката $x=0$ до точката $x=x_0$) е еднаква на

$$A=\int_0^{x_0} p\,x\,dx=\frac{1}{2}p\,x_0{}^2. \quad \bullet$$

8.6.3. Кинетичка енергија. Потенцијална енергија.

Како што е познато, кинетичка енергија на материјална точка која ротира, се нарекува производот

$$K=\frac{1}{2}mr^2\omega^2,$$

каде што m е маса на таа точка, r е нејзиното растојание од оската на ротација, а ω е аголната брзина.

Ако едно тврдо тело го замислиме поделено на произволно мали делови со волумени $\Delta V_1,\Delta V_2,...,\Delta V_n,$ такви што да можеме да сметаме дека масата $\Delta m_1,\Delta m_2,\ldots,\Delta m_n$ на секој од нив е концентрирана во по една нивна точка, на растојание $r_1, r_2,\ldots,r_n$ од оската на ротација, тогаш кинетичката енергија на телото е приближно еднаква на збирот

$$K_1+K_2+\ldots+K_n=\frac{1}{2}\omega^2 r_1{}^2\Delta m_1+\frac{1}{2}\omega^2 r_2{}^2\Delta m_2+\ldots+\frac{1}{2}\omega^2 r_n{}^2\Delta m_n=$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2\sum_{k=1}^{n} r_k{}^2\Delta m_k.$$

Кога бројот n на составни делови на разгледуваното тело неограничено расте, односно кога $n\to\infty$, а масата на најголемиот дел од тие делови тежи кон нула, па тогаш кинетичката енергија на целото тело изнесува

$$K=\frac{1}{2}\omega^2\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} r_i{}^2\Delta m_i,$$

односно, добваме дека

$$K=\frac{1}{2}\omega^2\int_{r_0}^{R} r^2 dm,$$

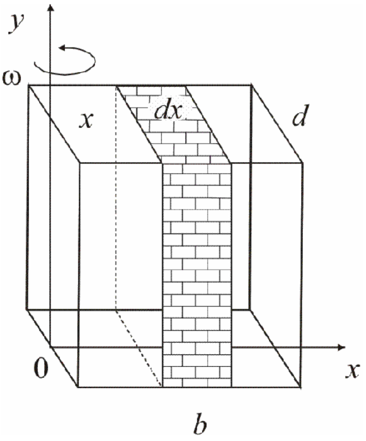
каде што dm е диференцијалот на масата како функција од растојанието r.

8.6.3.1. Примери.

1) Хомогена правоаголна плочка со густина $\rho=8g/cm^3$, дебелина $d=0{,}3cm$, и страни $a=50cm$ и $b=40cm$, ротира околу страната a со аголна брзина $\omega=3\pi\,\frac{1}{s}$. Да ја пресметаме кинетичката енергија при ротацијата на плочката.

Кинетичката енергија E_k на материјална точка со маса m е еднаква на $\frac{mv^2}{2}$, односно $\frac{mr^2\omega^2}{2}$, бидејќи линиската брзина е $v=r\cdot\omega$, каде што r е радиус на ротација, а ω е аголна брзина. Кинетичката енергија за дел од плочката со дебелина dx на растојание x од оската на ротација y е (слика 98.)

$$dE_k = \frac{dm \cdot x^2 \omega^2}{2}.$$



Слика 98.

Елементарната масата $dm =$ густина · волумен $= \rho \cdot a \cdot d \cdot dx,$ па затоа

$$E_k = \frac{\rho \cdot a \cdot d \cdot \omega^2}{2} \int_0^b x^2 dx = \frac{\rho \cdot a \cdot d \cdot \omega^2}{2} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{\rho \cdot a \cdot b^3 d \cdot \omega^2}{6}.$$

Сега, заради $\rho \cdot a \cdot b \cdot d = m =$ маса на плочката, добиваме дека

$$E_k = \frac{m\, b^2 \omega^2}{6}. \qquad (8.11)$$

Да ги замениме во 8.11. дадените вредности изразени во kg и $m,$ добиваме дека

$$\rho = 8\, g / cm^3 = \frac{8 \cdot 10^{-3}}{(10^{-2})^3} kg / m^3 = 8000\, kg / m^3; \; d = 0{,}3 cm = 0{,}003 m$$

$$a = 50 cm = 0{,}5 m; \;\; b = 40 cm = 0{,}4 m.$$

Според тоа, кинетичката енергија изнесува

$$E_k = \frac{8000 \cdot 0,5 \cdot 0,4^3 \cdot 0,003 \cdot 9\pi^2}{6} = 11,32\,kg\frac{m^2}{s^2}. \bullet$$

Нека силата $\mathrm{F} = \mathrm{F}(\mathrm{x})$ зависи само од положбата на телото. На пример, таква сила со која пружина на слика 92 дејствува на тело M прицврстено на нејзиниот слободен крај. Работата на таа сила кога телото се поместува од точка x_1 до точка x_2 изнесува

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx.$$

Потенцијалната енергија на телото се дефинира како способност на тоа тело да изврши работа. Потенцијалната енергија U на пружина која што е прицврстена на едниот крај, зависи од положбата на тоа тело M, па оттука имаме дека U е функција од положбата на телото M, односно $U = U(x)$. На пример, ако во почетната положба x_2 на тело M потенцијалната енергија е еднаква на $U(x_2)$, после поместувањето на телото до точка x, за $x < x_2$ пружината извршува работа која што изнесува

$$A = \int_{x_2}^{x} F(x)\,dx,$$

па и преостанала потенцијална енергија $U(x) = U(x_2) - A$, односно

$$U(x) = U(x_2) - \int_{x_2}^{x} F(x)\,dx, \tag{8.12}$$

од каде што, во случај кога е позната силата $F(x)$, може да се пресмета потенцијалната енергија.

Ако ги диференцираме двете страни на равенката 8.12. ќе добиеме

$$\frac{dU}{dx} = -F(x), \tag{8.13}$$

бидејќи $[U(x_2)]' = [U(const)]' = 0.$

И од овој израз непосредно гледаме дека потенцијалната енергија во секоја точка се менува со брзина која што е пропорционална на силата во таа точка, и дека силата е секогаш насочена на онаа страна на која што потенцијалната енергија опаѓа.

8.6.3.2. Примери.

1) Ако тело M на $x-$оската се извади од рамнотежната положба $x_0 = 0$ во положба $x,$ тогаш силата F има насока спротивна на насоката на $x-$оската, па имаме дека

$$F = -kx, \quad x > 0,$$

каде што k е коефициент на пропорционалност. Нека во точката $x_0 = 0,$ имаме дека $U(x_0) = U_0 = 0.$ Тогаш, според формулата 8.13. добиваме дека

$$U(x) = U(0) - \int_0^x F(x)\, dx = -\int_0^x kx\, dx = -\frac{kx^2}{2}.$$

Оттука добиваме дека $\frac{dU}{dx} = -kx.$

2) Да го разгледаме сега дејството на силата на тежата на некое тело $M,$ на вертикално поставената $x-$оска која сега е насочена нагоре. Тежата $F = -mg$ е константна. Нека на Земјата $x = 0.$ Тогаш потенцијалната енергија на тело на Земјата е $U(0) = U_0 = 0,$ а потенцијалната енергија на тело кое се наоѓа на висина x и на кое дејствува привлечната сила на Земјата за мали висини, односно за висини мали во однос на Земјиниот радиус изнесува

$$U(x) = -\int_0^x F(x)\, dx = -\int_0^x (-mg)\, dx = mgx.$$

А кога се работи за големи висини, тогаш, по Њутновиот закон, на телото кое се наоѓа на висина $x = r$ над Земјата дејствува сила обратно пропорционална на квадратот на тоа растојание r, односно

$$F(r) = -\frac{c}{r^2},$$

каде што c е позитивна константа, и таа е насочена кон центарот на Земјата. Константата c се одредува врз основа на тоа дека на Земјата, одбосно за $r = r_0$, каде што $r_0 \approx 6400\, km$ е Земјиниот радиус, имаме

$$F(r_0) = -mg = -\frac{c}{r_0{}^2},$$

од каде што добиваме дека $c = m\, g\, r_0{}^2$, за $g = 9{,}81\ m/s^2$. Според тоа, имаме дека

$$F(r) = -m\, g\, r_0{}^2 \frac{1}{r^2}.$$

Сега е лесно да се најде потенцијлната енергија $U(x)$ на тело на растојание r од средината на Земјата. Имајќи предвид дека на Земјата $U(r_0) = 0$, добиваме дека

$$U(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r)\, dr = m\, g\, r_0{}^2 \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r^2} dr = m\, g\, r_0{}^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right), \tag{8.14}$$

или, во друг облик

$$U(r) = m\, g \frac{r_0}{r} \left(r - r_0 \right).$$

Ако висината на телото над Земјата е многу мала, тогаш $\frac{r_0}{r} \approx 1,$ и, ако ставиме $r - r_0 = x,$ повторно ќе ја добиеме формулата за потенцијална енергија на тело за мали висини

$$U(x) = m\,g\,x.$$

Ако, пак, растојанието r неограничено се зголемува, тогаш во формулата 8.14. имаме дека $\frac{1}{r} \to 0,$ па добиваме дека

$$\lim_{r\to\infty} U(r) = m\,g\,r_0.$$

Со телата на големи растојанија од центарот на Земјата се среќаваме при разгледување на движење на ракети и вселенски бродови на нивниот пат кон Месечината, Марс, Венера или други вселенски тела. Работата потребна за ракетата да измине растојание R од Земјата изнесува

$$A = m\,g\,{r_0}^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right). \bullet$$

8.6.4. Статички моменти и тежиште на хомоген лак на крива

Нека е дадена функцијата $y = y(x)$ дефинирана и неприкината на интервалот $[a,b]$ и нека лакот на оваа крива е обложен со хомогена материја без дебелина.

Со цел да ги определиме статичките моменти на лакот во однос на апсисата и ординатната оска, ќе го разделиме интервалот $[a,b]$ на n подинтервали со должини $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n.$ На секој од овие подинтервали му припаѓа по еден правоаголен триаголник чија хипотенуза е

ΔS_i, а катетите се Δx_i и Δy_i. Ако се искористи теоремата на Лагранж во формулата за должина на лак, добиваме дека

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2} = \sqrt{1 + y'^2(x_i')}\ \Delta x_i,$$

каде што x_i' е точка од $i-$тиот подинтервал. Масата на секој од овие лаци изнесува

$$\Delta m_i = \mu \Delta S_i = \mu \sqrt{1 + y'^2(x_i')}\ \Delta x_i.$$

Ако претпоставиме дека масата е концентрирана во која било точка на лакот ΔS_i, на пример во точката чија апсциса е x_i', а ордината е $y(x_i')$, следува статичкиот момент на соодветниот лак во однос на $x-$оската изнесува

$$y(x_i')\Delta m_i = \mu\, y(x_i')\sqrt{1 + y'^2(x_i')}\ \Delta x_i,$$

додека во однос на $y-$оската изнесува

$$x_i'\Delta m_i = \mu\, x_i'\sqrt{1 + y'^2(x_i')}\ \Delta x_i.$$

За целиот систем на лаци, односно за целиот лак AB, добиваме дека

$$M_x = \mu \sum_{i=1}^{n} y(x_i')\ \sqrt{1 + y'^2(x_i')}\ \Delta x_i, \text{ и}$$

$$M_y = \mu \sum_{i=1}^{n} x_i'\ \sqrt{1 + y'^2(x_i')}\ \Delta x_i.$$

Ако допуштиме бројот n на подинтервалите да тежи кон бескрајност, горните збирови тежат кон границите

$$M_x = \mu \int_a^b y(x)\ \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx, \text{ и}$$

$$M_y = \mu \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Масата $M,$ на целиот систем, односно на целиот лак, изнесува

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \mu \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + y'^2(x_i')}\, \Delta x_i,$$

и овој збир, кога $n \to \infty,$ се стреми кон границата

$$M = \mu \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Согласно ова, тежиштето на лакот $AB,$ во однос на координатниот систем $x\mathrm{O}y$ има координати

$$p = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx}, \qquad q = \frac{\int_a^b y^2\sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx}.$$

8.6.4.1. Примери.

1) Да го најдеме тежиштето на лакот на полукружницата $x^2 + y^2 = a^2,$ $y \ge 0.$ Имаме дека

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},\ \ y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ и } ds = \sqrt{1 + (y')^2},\ dx = \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

од каде што следува дека

$$M_y = \int_{-a}^{a} x\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{a\, x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = 0, \text{ и}$$

$$M_x = \int_{-a}^{a} y\, ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, \frac{a\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a^2,$$

$$M = \int_{-a}^{a} \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi\, a.$$

Според тоа, за координатите на тежиштето добиваме дека $p = 0$ и $q = \frac{2}{\pi} a.$ ●

8.7. Задачи за вежбање

1. Со помош на Римановата дефиниција на определен интеграл пресметај ги следниве определени интеграли:

1) $\int_0^1 x\,dx$ 2) $\int_0^1 x^3 dx$ 3) $\int_0^{10} (1+x)\,dx$

4) $\int_0^a x^2 dx$ 5) $\int_a^b dx,\ a,b \in \mathbf{R},\ a < b$ 6) $\int_a^b e^x dx,\ a,b \in \mathbf{R},\ a < b$

2. Со примена на Римановата дефиницијата на определен интеграл докажи ги следниве равенства:

1) $\int_{-2}^{1} x^2 dx = 3$ 2) $\int_1^5 x^3 dx = \frac{15}{4}$ 3) $\int_0^{10} 2^x\,dx = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}$

3. Делејќи го интервалот на интеграција така што апсцисите на делбените точки образуваат геометриска прогресија, покажи дека:

1) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ 2) $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$

4. Пресметај го интегралот $\int_a^b \frac{dx}{x^2},\ a,b \in \mathbf{R},\ 0 < a < b,$ делејќи го интервалот на интеграција на произволен начин и избирајќи ги за точки ξ_i

геометриските средини на апсцисите на краиштата на подинтервалите, односно $\xi_i = \sqrt{x_i\, x_{i+1}}$.

5. Со помош на Риманов збир, покажи дека се точни равенствата:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right] = \frac{7}{3}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$

6. Нека функцијата f е интеграбилна функција на интервалот $[0{,}5]$ и нека $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 6,$ $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = 4$ и $\int\limits_2^5 f(x)\,dx = 6.$ Пресметај ја вредноста на определениот интеграл $\int\limits_1^5 f(x)\,dx.$

7. Утврди кој од определените интеграли:

1) $\int\limits_0^1 xdx$ или $\int\limits_0^1 x^2dx$ 2) $\int\limits_0^1 dx$ или $\int\limits_0^1 xdx$ 3) $\int\limits_0^1 xdx$ или $\int\limits_0^1 e^x dx$

4) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ или $\int\limits_0^1 xdx$ 5) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx$ или $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx$

има поголема вредност, без тие да се пресметуваат.

8. Докажи дека $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} \le \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$

9. Докажи ги следниве двојни неравенства:

1) $\frac{1}{2} \le \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \le 1$ 2) $\frac{1}{2} \le \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \le 1$

10. Оцени ја вредноста на следните определени интеграли:

1) $\int_0^1 \sqrt{4+x^2}dx$ 2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}$ 3) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$ 4) $\int_0^2 \frac{dx}{x+10}$

11. Користејќи ги својствата на определениот интеграл докажи дека низата интеграли

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

е монотоно опаѓачка низа.

Пресметај ги следните определени интеграли:

12. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x\,dx$

13. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,dx$

14. $\int_0^2 x e^{-x^2} dx$

15. $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2}\, dx$

16. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

17. $\int_0^{\pi/4} tg\,x\,dx$

18. $\int_{\pi/2}^{\pi/4} ctg\,x\,dx$

19. $\int_0^1 \frac{4x\,dx}{x^2+1}$

20. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

21. $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

22. $\int_0^1 arctg\,x\,dx$

23. $\int_0^1 x\ln x\,dx$

24. $\int_{1/2}^1 \arcsin x\,dx$

25. $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x\,dx$

26. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx$

27. $\int_0^2 x e^{-x}\, dx$

28. $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$

29. $\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$

30. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\, dx$

31. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

32. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$

27. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

28. $\int\limits_{4}^{9} \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$

29. $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

30. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

31. $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

32. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{x^3dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$

33. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2dx}{(x-2)(x-4)}$

34. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$

35. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$

36. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x+x^3}$

37. $\int\limits_{-0{,}5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

38. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$

39. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$

40. $\int\limits_{0}^{\pi} x^3 \sin x\,dx$

41. $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)\,dx$

42. $\int\limits_{0}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

43. $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

44. $\int\limits_{0}^{-\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$

45. $\int\limits_{1}^{e} \ln^3 x\,dx$

46. $\int\limits_{0}^{2} \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$

47. $\int\limits_{1}^{2} x\log_2 x\,dx$

48. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

49. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$

50. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

51. $\int\limits_{3}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$

52. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$

53. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$

54. $\int\limits_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$

55. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{4x-6}{x^2-3x+2}dx$

56. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

57. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$ 58. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ 59. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

60. $\int\limits_{0}^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}dx}{(1+x^3)^{2/5}}$ 61. $\int\limits_{0}^{1} \frac{(x+2)}{(x^2+4x+1)^{5/2}}dx$ 62. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$

63. Пресметај ја плоштината на криволинискиот трапез T_1 ограничен со кривата $y=x^3$, правите $x=0$ и $x=1$, и $x-$оската, а потоа пресметај ја плоштината на криволинискиот трапез T_2 ограничен со кривата $y=x^3$, правите $x=1$ и $x=2$, и $x-$оската. Најди го збирот на добиените плоштини на криволиниските трапези, а потоа пресметај ја плоштината на криволинискиот трапез T ограничен со кривата $y=x^3$, правите $x=0$ и $x=2$, и $x-$оската. Најди ја врската меѓу добиените плоштини на криволиниските трапези T_1, T_2 и T, соодветно. Образложи го одговорот.

64. Пресметај го определениот интеграл на функцијата

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\le \frac{3\pi}{2}\\ 1, & \frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi\end{cases}$$

на интервалот $[0,2\pi]$. Направи цртеж.

65. Пресметај ја плоштината на фигура ограничена со кривата $y=\ln x$, и правите $y=0$, $x=e$.

66. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината заграден со кривата $y=x^3-6x^2+9x$ и $x-$оската.

67. Пресметај ја плоштината на фигура ограничена со кривата $y=\dfrac{1}{x^2}$ и правите $x=1,\ x=a,\ a>1$ и $y=0.$

68. Пресметај ја плоштината на фигура заградена со параболата $y=-x^2+4x-3$ и нејзините тангенти во точките $M_1(0,-3)$ и $M_2(3,0).$

69. Пресметај ја плоштината делот од рамнината заградена со кривата $(y-x)^2=x^3$ и правата $x=1.$

70. Пресметај ја плоштината на фигура заградена со јазелот на кривата $x^3+x^2-y^2=8.$

71. Докажи дека ако f е непрекината и непарна функција на интервалот $[-a,a]$, тогаш $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0.$

72. Докажи дека се точни следниве равенства:

1) $\int\limits_{-\pi/8}^{\pi/8} x^6 \sin^7 x\,dx=0$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} e^{\cos x}dx=2\int\limits_{0}^{1} e^{\cos x}dx$

3) $\int\limits_{-a}^{a} \dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^4 x}\,dx=0,\ a\in\mathbf{R}$ 5) $\int\limits_{-a}^{a} \dfrac{\cos x}{1+x^4}\,dx=2\int\limits_{0}^{a} \dfrac{\cos x}{1+x^4}\,dx,\ a\in\mathbf{R}$

73. Во точката $M(3,\ y_0),\ \ y_0>0,$ на параболата $y^2=2(x-1)$ е повлечена тангента. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу $x-$оската на фигурата ограничена со тангентата, параболата и $x-$оската.

74. Фигурата заградена со елипсата $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1,$ сегментот на $x-$оската меѓу фокусите на елипсата и ординатите на фокусите ротира околу $x-$оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

75. Најди го волуменот на тело кое се добива со ротација околу $y-$ оската на фигурата ограничена со параболата $y=2x-x^2$ и $x-$оската.

76. Фигура во првиот квадрант на координатната рамнина xOy заградена со хиперболата $x^2-y^2=1,$ нејзината асимптота, $x-$оската и правата $x=2$ ротира околу $x-$оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

77. Криволиниски трапез ограничен со $x-$оската, кривата $y=\arcsin x$ и правата $x=1,$ ротира околу $x-$оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

78. Пресметај го волуменот на тело добиено со ротација околу $x-$оската на фигурата ограничена со кривата $y=\cos x+\cos 2x$ и правите $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{3}$ и $y=0.$

79. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y^2=x^3$ којшто лежи меѓу точките $(0,0)$ и $(4,8).$

80. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=\ln(\cos x)$ којшто лежи меѓу точките со апсциси $x=0$ и $x=\dfrac{\pi}{4}.$

81. Најди ја должината на кривата $y=\int\limits_{-\pi/2}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$, ако $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}.$

82. Брзината на течењето на реката по нејзината ширина се менува по законот $v=-4t^2+4t+0,5$, каде што $t=\dfrac{a}{b}$ ($a-$растојание од брегот, $b-$ширина на реката). Кога ќе стигне чамецот кој ја преминува реката, ако неговата брзина во однос на водата е $v_0=2m/s$ и е насочена право кон спротивниот брег. Ширината на реката е $b=420m.$

83. На тело со маса m дејствува сила пропорционално со времето. Да се најде равенката на движењето на телото ако во моментот $t=0$ тоа се движи со почетна брзина v_0.

84. Материјална точка со маса $m=6kg$ се движи долж $x-$ оската без триење. Во секој од долните случаи таа го започнува движењето од $x=0$ и $t=0$.

1) Точката поминува растојание $s=3m$ под дејство на сила $F=3+4x$ њутни (x е во метри).

а) Колкава брзина ќе добие таа притоа?

б) Колкаво е забрзувањето на крајот од патот?

2. Точката се движи за време $t_1=3s$ под дејство на сила $F=3+4t$ њутни (t е во секунди).

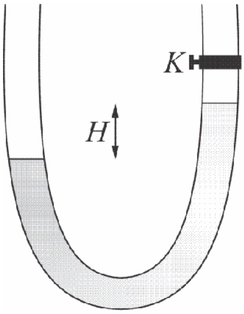
Да се одговори на прашањата под а) и б).

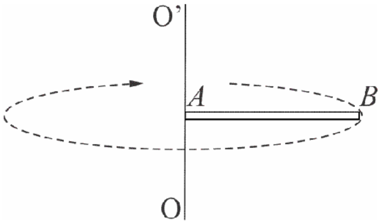
85. Плоча од мраз со основата $S=1m^2$ и дебелина $d=0,4m$ плива во вода. Колкава работа треба да се изврши за плочата да се потопи во водата, ако густината на мразот инзнесува $\rho=900kg/m^3$?

86. Во цевка се наоѓа жива, како што е прикажано на слика 99. Плоштината на напречниот пресек на цевката е S, разликите на висините на нивоата на живата е H и нејзината густина ρ. Колкаво количество на топлина ќе се ослободи ако се отвори славината K и нивоата на живата во двата крака се изедначат?

87. Прачката AB (слика 100.) се ротира околу оската OO' со аглова брзина $\omega=10\pi\, s^{-1}$, плоштината на напречниот пресек на прачката е $P=4cm^2$, должината му е $l=20cm$, а густината на материјалот од кој

што е направена изнесува $\rho = 7{,}8\ g/cm^3$. Најди ја кинетичката енергија на прачката.





Слика 99.

Слика 100.

88. Правоаголна плоча чии што страни се $a = 40cm$ и $b = 30cm$, ротира со константна аглова брзина $\omega = 3\pi\ s^{-1}$ околу страната a. Најди ја кинетичката енергија на плочата ако нејзината дебелина $d = 0{,}2cm$, а густината на материјалот од кој што е направена плочата изнесува $\rho = 8g/cm^3$.

89. Најди ги координатите на тежиштето на половина кружна линија $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

90. Најди го тежиштето на кружниот лак со радиус R, кој одговара на централниот агол α.

Додаток

Додатокот се состои од два дела: трансформација на рационални дропки во збир од прости дропки и неравенства. Содржините поместени во додатокот имаат за цел да ги надополнат содржините кои се изложени во учебникот. Тоа се пред се содржини кои примарно не се изучуваат во математичката анализа, но потребно е добро да се познаваат заради нивната честа примена во математичката анализа. Поточно материјалот од делот за трансформација на рационални дропки во збир од прости дропки се применува како пред се метода во интегрирање на дробнорационалните функции, а материјалот од делот за неравенства е присутен како алатка низ целиот материјал.

1. Трансформација на рационални дропки во збир од прости дропки

1.1. Метод на неопределени коефициенти

При операциите со полиноми и трансформациите со полиноми од еден во друг вид, многупати се служиме со таканаречениот **метод на неопределени коефициенти**. Обично го применуваме во случаите кога сакаме даден израз да трансформираме во друг идентичен израз од определен вид, со коефициенти што треба да се определат.

Бараните бројни коефициенти ги означуваме со букви и ги третираме како непознати. Потоа, користејќи го условот дека дадениот и трансформираниот израз треба да се идентични, даваме произволно избрани вредности на аргументот (променливата) и добиените вредности на двата изрази ги споредуваме. Така добиваме одреден број равенки за наоѓање на непознатите коефициенти. Ако се работи за полиноми, тогаш равенките за наоѓање на бараните непознати коефициенти ги добиваме со споредување на соодветните коефициенти на дадениот и трансформираниот полином. Како тоа го остваруваме во практиката ќе покажеме на следниве неколку примери.

1.1.1. Примери.

1) Да го трансформираме производот $(x+3)(x-2)(x+4)$ во вид на полином. Очигледно е дека дадениот производ е полином од трет степен, чијшто коефициент пред водечкиот член е еднаков на 1, а слободниот член е еднаков на $-24.$ Значи, треба да важи идентитетот

$$(x+3)(x-2)(x+4)=x^3+ax^2+bx-24$$

За одредување на коефициентите a и b, на аргументот x згодно е да му дадеме вредности $x=-3$ и $x=2$. Притоа ги добиваме равенките

$$9a-3b-51=0 \text{ и } 4a+2b-16=0$$

во кои непознати се бараните коефициенти a и b. Кога ќе го решиме добиениот систем равенки

$$\begin{cases} 3a-b=17 \\ 2a+b=8 \end{cases}$$

наоѓаме дека $a=5$ и $b=-2$. Според тоа

$$(x+3)(x-2)(x+4)=x^3+5x^2-2x-24.$$

2) Да го поделиме го полиномот $f(x)=2x^4-3x^3+3x^2-8x-1$ со полиномот $g(x)=2x^2+x-1.$

Во нашиот случај бараниот количник $q(x)$ ќе биде полином од втор степен, што со помош на неопределени коефициенти го запишуваме во облик $q(x)=ax^2+bx+c$. Остатокот од делењето $r(x)$ ќе биде полином од прв степен, па според тоа ќе има облик $r(x)=dx+e$ Тогаш од идентитетот:

$$2x^4-3x^3+3x^2+8x-1=(2x^2+x-1)(ax^2+bx+c)+dx+e$$

следува дека

$$2x^4-3x^3+3x^2+8x-1=$$

$$=2ax^4+(a+2b)x^3+(2c+b-a)x^2+(d+c-b)x+e-c\,.$$

Имајќи го во вид фактот дека два полиноми се идентични ако и само ако тие имаат еднакви степени и коефициентите пред еднаквите степени на променливата x се соодветно еднакви, го добиваме системот

$$\begin{cases}2a=2\\a+2b=-3\\2c+b-a=3\\d+c-b=8\\e-c=-1\end{cases}\quad\text{којшто е еквивалентен на системот}\quad\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=3\\d=3\\e=2\end{cases}$$

Според тоа $q(x)=x^2-2x+3$ и $r(x)=3x+2$.

3) Со методот на неопределени коефициенти ќе определиме полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви што да важи $f(x)\cdot A(x)+g(x)\cdot B(x)=1$, каде што $f(x)=x^3$, $g(x)=(x-1)^2$, и степенот на полиномот $A(x)$ е најмногу 1.

Ако полиномот $A(x)$ има степен најмногу 1, тогаш полиномот $B(x)$ има степен најмногу 2. Нека $A(x)=ax+b$ и $B(x)=cx^2+dx+e$. Од равенството

$$x^3(ax+b)+(x-1)^2(cx^2+dx+e)=1$$

кое по ослободување од заградите и подредување на левата страна по степените на x добива облик

$$(a+c)x^4+(b-2c+d)x^3+(c-2d+e)x^2+(d-2e)x+e=1,$$

доаѓаме до системот

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b-2c+d=0 \\ c-2d+e=0 \\ d-2e=0 \\ e=1 \end{cases} \quad \text{којшто е еквивалентен на системот} \quad \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \\ c=3 \\ d=2 \\ e=1 \end{cases}$$

Според тоа, $A(x)=-3x+4$ и $B(x)=3x^2+2x+1$. ●

1.2. Трансформација на неправилни рационални дропки во збир од полином и правилна дропка

Рационална дропка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ се нарекува *правилна*, ако степенот на броителот $f(x)$ е помал од степенот на именителот $g(x)$. Ако степенот на броителот $f(x)$ е поголем или еднаков од степенот на именителот, тогаш дропката се нарекува *неправилна*.

Нека $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е неправилна дропка. Со делење на броителот $f(x)$ со именителот $g(x)$ го добиваме равенството

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$$

односно

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}, \tag{1}$$

каде што остатокот $r(x)$ има помал степен од степенот на именителот $g(x)$. Според тоа постои барем едно претставување на дадената неправилна дропка во вид на збир од полином и правилна дропка.

Ќе покажеме дека добиеното претставување е единствено. Да претпоставиме дека постојат полином $q_1(x)$ и правилна дропка $\frac{h(x)}{p(x)}$ така што да важи равенството

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q_1(x) + \frac{h(x)}{p(x)} \tag{2}$$

Тогаш од равенствата (1) и (2) следува равенството:

$$q(x) - q_1(x) = \frac{h(x)}{p(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{h(x)g(x) - p(x)\cdot r(x)}{p(x)\cdot g(x)}$$

чија што лева страна е полином, а десната страна е правилна дропка. Последното равенство е возможно само во случај кога

$$q(x) - q_1(x) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{h(x)}{p(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = 0$$

од каде што следува дека

$$q(x) = q_1(x) \quad \text{и} \quad \frac{h(x)}{p(x)} = \frac{r(x)}{g(x)}$$

Погорната дискусија може да ја резимираме во вид на теорема.

1.2.1. Теорема. Неправилна рационална дропка може да се претстави на единствен начин како збир од полином и правилна дропка.

1.2.1. Примери.

1) Ќе ја трансформираме неправилната рационална дропка

$$\frac{x^3+2x+5}{x^2-x+3}.$$

во вид на збир од полином и правилна дропка. Со делење на броителот x^3+2x+5 со именителот x^2-x+3 го добиваме равенството

$$\frac{x^3+2x+5}{x^2-x+3}=x+1+\frac{2}{x^2-x+3}.$$

Значи, дадената неправилна дропка ја претставивме како збир на полиномот $x+1$ и правилната дропка $\frac{2}{x^2-x+3}$. ●

1.3. Трансформација на правилни рационални дропки во збир од прости дропки

На почеток, да се потсетиме дека во множеството на реалните броеви неразложливи се само полиномите од прв степен $x-a$ и полиномите од втор степен x^2+px+q, каде што p и q се реални броеви, за кои што $p^2-4q<0$.

Сега ќе воведеме посебен назив за еден специјален вид рационални дропки. Правилната дропка од видот $\frac{A}{(x-a)^k}$ се вика *проста дропка од прв вид*, при што A и a се дадени реални броеви, а k е даден природен број. *Проста дропка од втор вид*, пак, се вика секоја правилна дропка од видот $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, каде што A, B, p и q се дадени реални броеви за кои $p^2-4q<0$, k е даден природен број.

Нека $\frac{f(x)}{g(x)}$ е нескратлива рационална дропка со реални коефициенти, при што степенот на $f(x)$ е помал од степенот на $g(x)$. По однос на нулите на полиномот во именителот $g(x)$ постојат следниве три можности:

- сите нули на полиномот $g(x)$ се реални и различни;
- некои од реалните нули на полиномот $g(x)$ се повеќекратни;
- полиномот $g(x)$ има еднократни или повеќекратни комплексни нули.

Секоја од наведените три можности ќе ја разгледаме одделно.

I. Нулите на полиномот g(*x*) се реални и различни

Ако $x = a$ е една проста нула на именителот $g(x)$ тогаш

$g(x) = (x - a) \cdot g_1(x)$, при што $g_1(a) \neq 0$.

Ќе покажеме дека постојат реален број A и полином $f_1(x)$ чијшто степен е помал од степенот на $g_1(x)$, за кој важи равенството:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \qquad (1)$$

Со множење на двете страни на равенството (1) со $g(x) = (x - a) \cdot g_1(x)$ добиваме

$$f(x) = A \cdot g_1(x) + (x - a) f_1(x) . \qquad (2)$$

Ставајќи $x = a$ имаме дека $f(a) = A g_1(a)$, а оттука следува дека

$$A = \frac{f(a)}{g_1(a)}, \qquad (3)$$

од каде што следува дека константата A е еднозначно определена.

Кога константата A е определена, од равенството $f(a)=A\cdot g_1(a)$, односно од $f(a)-A\cdot g_1(a)=0$ заклучуваме дека $x=a$ е нула на полиномот $f(x)-A\cdot g_1(x)$. Тоа значи дека тој е делив со полиномот $x-a$, односно дека $\dfrac{f(x)-A\cdot g_1(x)}{x-a}$ е, исто така, полином, а согласно (2) тој е токму бараниот полином

$$f_1(x)=\frac{f(x)-A\cdot g_1(x)}{x-a} \tag{4}$$

Очигледно е дека степенот на $f_1(x)$ е за единица помал од степенот на броителот $f(x)-A\cdot g_1(x)$. Меѓутоа, степенот на $f(x)$ е помал од степенот на $g(x)$. Тоа својство го има и полиномот $A\cdot g_1(x)$. Значи, степенот на полиномот во броителот $f(x)-A\cdot g_1(x)$ е понизок од степенот на полиномот $g(x)$ па според тоа, степенот на полиномот $f(x)$ е понизок од степенот на полиномот $g(x)$ најмалку за две единици.

Според тоа, полиномот $f_1(x)$ има степен помал од полиномот $g(x)$, а тоа значи дека $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ е правилна дропка. Со тоа го докажавме равенството (1).

Ако именителот $g_1(x)$ на правилната дропка $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ има една проста нула $x=b$, тогаш $g_1(x)=(x-b)\cdot g_2(x)$, па и врз неа можеме да го примениме истиот метод, и ќе добиеме

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{B}{x-b}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}. \tag{5}$$

каде што константата B и полиномот $f_2(x)$ ги определуваме на ист начин како A и $f_1(x)$.

Ако дропката $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ од равенството (5) ја замениме во (1), добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\,. \tag{6}$$

Продолжувајќи натаму, конечно добиваме дека

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+...+\frac{S}{x-s} \tag{7}$$

каде што $a,b,c,...,s$ се сите нули на именителот $g(x)$.

На секоја реална нула на именителот $\mathrm{g(x)}$ одговара по еден собирок од видот $\dfrac{A}{x-a}$ и со тоа правилната рационална дропка ја претставуваме како збир од прости дропки. Непознатите реални коефициенти во равенката (7) во практика ги одредуваме со помош на познатиот метод на неопределени коефициенти.

1.3.1. Примери.

1) Да ја разложиме во вид на збир од прости дропки од прв вид правилната рационална дропка $\dfrac{10x^3-3x^2-19x+6}{x^4-5x^2+4}$.

Прво именителот на дропката го разложуваме на неразложливи множители. За таа цел ги одредуваме рационалните нули на полиномот x^4-5x^2+4. Тие се: $x_1=1,\ \ x_2=-1,\ \ x_3=2,\ \ x_4=-2$. Според тоа, разложувањето на дадената дропка во збир од прости дропки ќе има облик:

$$\frac{10x^3-3x^2-19x+6}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}. \qquad (8)$$

Оттука следува равенството

$$10x^3-3x^2-19x+6=A(x+1)(x-2)(x+2)+B(x-1)(x-2)(x+2)+$$

$$+C(x-1)(x+1)(x+2)+D(x-1)(x+1)(x-2),$$

односно,

$$10x^3-3x^2-19x+6=A(x^3+x^2-4x-4)+B(x^3-x^2-4x+4)+$$

$$+C(x^3+2x^2-x-2)+D(x^3-2x^2-x+2). \qquad (9)$$

Според методот на неопределени коефициенти, броевите A, B, C и D од равенството (9), ги одредуваме кога неговата десна страна прво ја подредуваме по опаднувачките степени на x:

$$10x^3-3x^2-19x+6=(A+B+C+D)x^3+(A-B+2C-2D)x^2+$$

$$+(-4A-4B-C-D)x-4A+4B-2C+2D \qquad (10)$$

а потоа ги изедначуваме соодветните коефициенти при еднаквите степени на x во двете страни на равенството (10).

Така добиваме систем од линеарни равенки во кои како непознати се јавуваат константите A, B, C и D:

$$\begin{cases} A+B+C+D=10 \\ A-B+2C-2D=-3 \\ -4A-4B-C-D=-19 \\ -4A+4B-2C+2D=6 \end{cases} \qquad (11)$$

Системот на линеарни равенки (11) има единствено решение: $A=1$, $B=2$, $C=3$ и $D=4$. Со замена на овие вредности во (8), добиваме

$$\frac{10x^3-3x^2-19x+6}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}.$$

Во случај кога именителот $g(x)$ на правилната рационална дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ има само реални различни нули, определувањето на непознатите константи $A, B, C, ..., S$ во разложувањето (7) секогаш го вршиме со помош на таканаречениот *метод на посебни вредности*, кој се состои во следново:

Равенството (9) сакаме да биде идентитет, што значи дека треба да важи за секој реален број x. Оттука следува дека тоа мора да важи и за некои посебно избрани вредности на x. Во овој пример тоа се вредностите $x=1,-1,2$ и -2. Така заменувајќи во равенството (9) $x=1$ доаѓаме до равенството $-6=A(-6)$, од каде што следува дека $A=1$. Потоа, заменувајќи во (9) едно по друго: $x=-1$, $x=2$, $x=-2$, добиваме дека $B=2$, $C=3$ и $D=4$. ●

II. Некои од реалните нули на именителот $g(x)$ се повеќекратни

Ако $x=a$ е $k-$кратна $(k\geq 1)$ реална нула на именителот $g(x)$, тогаш

$$g(x)=(x-a)^k g_1(x), \text{ при што } g_1(a)\neq 0.$$

Ќе покажеме дека правилната дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ може да се претстави во вид на збир од една проста и друга правилна дропка, односно

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}g_1(x)}. \tag{12}$$

Константата A_k и полиномот $f_1(x)$ ги одредуваме од условот равенството (12) да биде идентитет.

Ако идентитетот (12) го помножиме со $g(x)=(x-a)^k\cdot g_1(x),$ тој преминува во обликот

$$f(x)=A_k g_1(x)+(x-a)f_1(x). \tag{13}$$

Ставајќи во идентитетот (13) $x=a$ добиваме дека $f(a)=A_k g_1(a),$ а оттука следува дека

$$A_k=\frac{f(a)}{g_1(a)}. \tag{14}$$

Заклучуваме дека полиномот $f(x)-A_k g_1(x)$ (или нему еднаквиот $(x-a)f_1(x)$) очигледно има помал степен од $g(x)$ како разлика на два полиноми, од кои секој има помал степен од $g(x)$ и тоа $f(x)$ по услов, а $A_k g_1(x)$ затоа што $g_1(x)=\dfrac{g(x)}{(x-a)^k},$ каде што $k\geq 1.$ Значи, дропката $\dfrac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)},$ која што е еднаква со дропката $\dfrac{f(x)-A_k g_1(x)}{g(x)}$ е, исто така, правилна дропка. Тогаш (сметајќи дека $k>1$) и врз дропката $\dfrac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)},$ можеме да ја повториме истата постапка, како и со дропката $\dfrac{f(x)}{g(x)},$ па ќе добиеме дека

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)}=\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}\cdot g_1(x)}, \tag{15}$$

каде што $A_{k-1}=\dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}$ (може да биде $A_{k-1}=0$) и $f_2(x)$ е некој полином. Со замена од равенството (15) во равенството (12), добиваме

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2} \cdot g_1(x)}, \qquad (16)$$

Продолжувајќи така, на крајот ќе добиеме дека

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + ... + \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_k(x)}{g_1(x)}. \qquad (17)$$

Според тоа, ако именителот $\mathrm{g(x)}$ на правилната рационална дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$, има повеќекратна реална нула $x = a$ со кратност k, тогаш ќе важи равенството (17), каде што $A_k \neq 0,\ A_{k-1},\ A_{k-2},...,A_1$ се реални константи и $f_k(x)$ е некој полином.

Понатаму, ако $g(x)$ има уште и повеќекратна нула (реална) $x = b$ со кратност s, имаме дека $g(x) = (x-a)^k (x-b)^s g_2(x)$, каде што $g_2(b) \neq 0$ и $g_1(x) = (x-b)^s g_2(x)$.

Повторувајќи ја истата постапка и за правилната дропка $\frac{f_k(x)}{g_1(x)}$ по однос на $s-$ кратната реална нула $x = b$, добиваме дека

$$\frac{f_k(x)}{g_1(x)} = \frac{B_s}{(x-b)^s} + \frac{B_{s-1}}{(x-b)^{s-1}} + \frac{B_{s-2}}{(x-b)^{s-2}} + ... + \frac{B_1}{x-a} + \frac{f_s(x)}{g_2(x)} \qquad (18)$$

каде што $B_s \neq 0,\ B_{s-1},\ B_{s-2},...,B_1$ се, исто така, реални константи и $f_s(x)$ е некој полином, а дропката $\frac{f_s(x)}{g_2(x)}$ е, исто така, нескратлива правилна, доколку е $f_s(x) \neq 0$.

Со замена од равенството (18) во равенството (17), добиваме дека

$$\frac{f_k(x)}{g_1(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_s}{(x-b)^s} +$$

$$+\frac{B_{s-1}}{(x-b)^{s-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-a} + \frac{f_s(x)}{g_2(x)} \qquad (19)$$

Ако $\frac{f_s(x)}{g_2(x)} \neq 0,$ тогаш процесот продолжува и со другите повеќекратни реални нули, а доколку е $\frac{f_s(x)}{g_2(x)} = 0,$ тогаш процесот на разложување на дропката $\frac{f(x)}{g(x)}$ е завршен.

Слично, како и во претходниот случај, непознатите реални коефициенти во равенката (18) во практика ги одредуваме со помош на познатиот метод на неопределени коефициенти.

1.3.2. Примери.

1) Да ја разложиме правилната рационална дропка $\frac{x^3-2x-1}{(x+2)^3(x-1)^2}$ во збир од прости дропки од прв вид. Согласно равенството (19), имаме

$$\frac{x^3-2x-1}{(x+2)^3(x-1)^2} = \frac{A_3}{(x+2)^3} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1}. \quad (20)$$

Од равенството (20) следува равенството

$$x^3-2x-1 = A_3(x-1)^2 + A_2(x+2)(x-1)^2 + A_1(x+2)^2(x-1)^2 +$$

$$+B_2(x+2)^3 + B_1(x+2)^3(x-1). \qquad (21)$$

Методот на посебни вредности можеме да го примениме во овој случај само за одредување на некои константи. Така, заменувајќи во

(21) $x=1,$ добиваме дека $B_2=-\frac{2}{27}.$ Понатаму, за $x=-2,$ добиваме дека $A_3=-\frac{5}{9}.$

За определување на константите A_2, A_1 и $B_1,$ кога ги знаеме A_3 и $B_2,$ заменувајќи во (21) едно по друго, на пример, $x=0,$ $x=-1,$ $x=2$ и $A_3=-\frac{5}{9},$ $B_2=-\frac{2}{27}$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} -1=-\frac{5}{9}+2A_2+4A_1-\frac{16}{27}-8B_1 \\ 0=-\frac{20}{9}+4A_2+4A_1-\frac{2}{27}-2B_1 \\ 3=-\frac{5}{9}+4A_2+16A_1-\frac{128}{27}-64B_1 \end{cases} \tag{22}$$

односно,

$$\begin{cases} A_2+2A_1-4B_1=\frac{2}{27} \\ 2A_2+2A_1-B_1=\frac{31}{27} \\ A_2+4A_1+16B_1=\frac{56}{27} \end{cases} . \tag{23}$$

По решавањето на системот равенки (23) ги одредуваме и вредностите на константите $A_1=-\frac{1}{9},$ $A_2=\frac{20}{27}$ и $B_1=\frac{1}{9}.$

Според тоа, бараното разложување на дадената дропка на прости дропки гласи

$$\frac{x^3-2x-1}{(x+2)^3(x-1)^2}=\frac{-5}{9(x+2)^3}+\frac{20}{27(x+2)^2}-\frac{1}{9(x+2)}-\frac{2}{27(x-1)^2}+\frac{1}{9(x-1)}. \bullet$$

III. Именителот g(x) има еднократни или повеќекратни комплексни нули

Да претпоставиме дека $\alpha = a + ib$ е комплексна нула на именителот $g(x)$ на нескратливата правилна дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$, чии што коефициенти се реални броеви. Тогаш, знаеме дека нула на полиномот $g(x)$ ќе биде и конјугирано комплексниот број $\overline{\alpha} = a - ib$, при што нивната кратност е иста. Нека секоја од нулите α и $\overline{\alpha}$ е со кратност s. Тогаш, именителот $g(x)$ е делив со полиномот

$$[(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})]^s = [x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}]^s = [x^2 - 2ax + a^2 + b^2]^s =$$

$$= (x^2 + px + q)^s$$

односно важи равенството

$$g(x) = (x^2 + px + q)^s \cdot g_1(x) \tag{24}$$

при што $g_1(\alpha) \neq 0$ и $g_1(\overline{\alpha}) \neq 0.$

Ќе покажеме дека постојат реални броеви B и C и полином $f_1(x)$, чиј што степен е помал од степенот на полиномот $(x^2 + px + q)^{s-1} \cdot g_1(x)$, такви што да важи равенството

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{f_1(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} g_1(x)}. \tag{25}$$

Со множење на двете страни на равенството (25) со $g(x)$, тоа го добива обликот

$$f(x) = (Bx + C) \cdot g_1(x) + (x^2 + px + q) f_1(x) \tag{26}$$

За одредување на броевите B и $C,$ ставаме $x=\alpha$ и $x=\overline{\alpha},$ па добиваме дека

$$f(\alpha)=(B\alpha+C)g_1(\alpha), \quad f(\overline{\alpha})=(B\overline{\alpha}+C)g_1(\overline{\alpha}).$$

Оттука добиваме дека

$$B\alpha+C=\frac{f(\alpha)}{g_1(\alpha)} \text{ и } B\overline{\alpha}+C=\frac{f(\overline{\alpha})}{g_1(\overline{\alpha})}. \tag{27}$$

Бидејќи полиномите $f(x)$ и $g_1(x)$ се со реални коефициенти, броевите $\frac{f(\alpha)}{g_1(\alpha)}$ и $\frac{f(\overline{\alpha})}{g_1(\overline{\alpha})}$ се конјугирано комплексни, односно $\frac{f(\alpha)}{g_1(\alpha)}=M+Ni$ и $\frac{f(\overline{\alpha})}{g_1(\overline{\alpha})}=M-Ni.$

Значи, равенствата (27) може да ги запишеме и во облик

$$B\alpha+C=M+Ni \text{ и } B\overline{\alpha}+C=M-Ni. \tag{28}$$

Со одземање и собирање на соодветните страни на (28) добиваме дека $B(\alpha-\overline{\alpha})=2Ni$ или $2bBi=2Ni,$ односно $B=\frac{N}{b}$ и $B(\alpha+\overline{\alpha})+2C=2M$ или $aB+C=M$, односно $C=M-aB=M-\frac{aN}{b}.$

Според тоа, броевите B и $C,$ се реални. Потоа, откако се одредени броевите B и $C,$ од (25) го определуваме и полиномот

$$f_1(x)=\frac{f(x)-(Bx+C)\cdot g_1(x)}{x^2+px+q}. \tag{29}$$

Доказот дека степенот на полиномот $f_1(x)$ е помал од степенот на полиномот $(x^2+px+q)^{s-1}\cdot g_1(x),$ што значи дека дропката добиена во (25) која гласи $\dfrac{f_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}\cdot g_1(x)}$ е правилна, го вршиме исто како и за дропката $\dfrac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)}$ во (12).

Тогаш (ако е $s>1$) и врз дропката $\dfrac{f_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}\cdot g_1(x)}$ можеме да ја повториме истата постапка како и за дропката $\dfrac{f(x)}{g(x)},$ па ќе добиеме

$$\frac{f_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}\cdot g_1(x)}=\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\frac{f_2(x)}{(x^2+px+q)^{s-2}\cdot g_1(x)} \quad (30)$$

Со замена од равенството (30) во равенството (25), добиваме дека

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}+\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\frac{f_2(x)}{(x^2+px+q)^{s-2}g_1(x)}.$$

Продолжувајќи така на крајот ќе добиеме дека

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}+\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^{s-1}}+...+\frac{Rx+T}{x^2+px+q}+\frac{f_s(x)}{g_1(x)}. \quad (31)$$

Ако $\dfrac{f_s(x)}{g_1(x)}\neq 0,$ тогаш процесот на разложување продолжува и со другите еднократни или повеќекратни комплексни нули на $g(x).$ А доколку е $\dfrac{f_s(x)}{g_1(x)}=0,$ тогаш процесот на разложување на правилната дропка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ во збир на прости дропки е завршен.

И во овој случај непознатите реални коефициенти во равенката (31) во практика ги одредуваме со помош на познатиот метод на неопределени коефициенти.

1.3.3. Примери.

1) Да ја разложиме правилната рационална дропка $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ во збир од прости дропки од втор вид. Прво во полето на реалните броеви го разложуваме именителот на неразложливи множители

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

Според тоа, разложувањето е од облик

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2-x+1)}. \qquad (32)$$

каде што A, B, C и D се реални константи што треба да ги определиме така што равенството (32) да претставува идентитет.

Идентитетот (32) без именители ќе гласи

$$1=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$$

односно,

$$1=(A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2+(A-B+C+D)x+(B+D). \qquad (33)$$

Со примена на методот на неопределени коефициенти од идентитетот (33) го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+C+D=0 \\ A-B+C+D=0 \\ B+D=1 \end{cases}$$

чиешто решение е $A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$ и $D=\frac{1}{2}.$

Според тоа, бараното разложување на дадената правилна рационална дропка на прости дропки од втор вид, гласи

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^4+x^2+1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^4-x^2+1}. \ \bullet$$

Погорната дискусија во врска со сите наведени можни случаи за природата на нулите полиномот - именител може да ја резимираме во вид на

1.3.4. Теорема. Секоја правилна рационална дропка може да се претстави како збир од прости дропки.

Во практиката често се среќаваме со правилни дропки чиишто полиноми во именителот истовремено имаат и реални и комплексни корени. При претставувањето на овие дропки во вид на збир од прости дропки како собироци се појавуваат прости дропки од прв и втор вид.

1.3.5. Примери.

1) Да ја разложиме правилната дропка $\frac{\mathrm{x}^3-2\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+4}{(\mathrm{x}^3-\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-1)^2}$ во збир од прости дропки од прв и втор вид. Именителот на дропката го разложуваме на множители

$$x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1).$$

Потоа дадената дропка ја претставуваме во вид на збир од прости дропки

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}. \qquad (34)$$

Равенството (34) го запишуваме без именител

$$x^3-2x^2+x+4=A(x^2+1)^2+B(x-1)(x^2+1)^2+(Cx+D)(x-1)^2+$$

$$+(Ex+F)(x-1)^2(x^2+1)$$

односно,

$$x^3-2x^2+x+4=(B+E)x^5+(A-B-2E+F)x^4+$$

$$+(2B+C+2E-2F)x^3+(2A-2B-2C+D-2E+2F)x^2+$$

$$+(B+C+E-2F)x+(A-B+D+F). \qquad (35)$$

Според методот на неопределени коефициенти од (35), имаме дека

$$\begin{cases} B+E=0 \\ A-B-2E+F=0 \\ 2B+C+2E-2F=1 \\ 2A-2B-2C+D-2E+2F=-2 \\ B+E+C-2F=1 \\ A-B+D+F=4 \end{cases}.$$

Добиениот систем е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} B+E=0 \\ A-B+F=2E \\ 2(B+E)+C-2F=1 \\ 2(A-B+F)-2E-2C+D=-2 \\ (B+E)+C-2F=1 \\ (A-B+F)+D=4 \end{cases}. \qquad (36)$$

чиешто решение е $A=1,\ B=-2, C=3,\ D=0,\ E=2$ и $F=1.$

Според тоа, имаме дека

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{(x^3-x^2+x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{3x}{(x^2+1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}. \ \bullet$$

Да забележеме дека претставувањето на правилните рационални дропки во полето на реалните броеви во збир од прости дропки има широка примена во математиката, посебно при интегрирањето на дробно рационалните функции.

1.4. Задачи за вежбање

1. Определи ги коефициентите m и n така што полиномот $x^4-3x^3+3x^2+mx+n$ да биде делив со полиномот $q(x)=x^2-3x+2.$

2. Најди ги коефициентите a и b на полиномот $x^3-2x^2+ax+b,$ така што тој да биде делив со $x-1,$ а при делење со $x-2$ да се добие остаток $4.$

3. Најди ги коефициентите p и k така што полиномот $2x^5-px^4+kx^2-7$ поделен со полиномот $x-2$ да даде остаток $61,$ а поделен со $x-1$ да даде остаток $2.$

4. За кои вредности на коефициентите a и b полиномот x^3+8x^2+5x+a е делив со полиномот x^2+3x+b?

5. Најди ги коефициентите a и b така што триномот ax^4+bx^3+1 да биде делив со полиномот $(x-1)^2$.

6. За кои вредности на коефициентите a и b полиномот x^6+ax^2+bx+1 е делив со полиномот x^2-1?

7. Најди ги параметрите p и k така што полиномот x^4+px^2+k да биде делив со полиномот x^2+px+k.

8. При кои услови полиномот x^2+ax+b ќе биде делив со полиномот x^2+cx-1?

9. Избери полиноми $A(x)$ и $B(x)$ од најнизок степен, кои ќе го задоволуваат равенството

$$(x^4-2x^3-4x^2+6x+1)\cdot A(x)+(x^3-5x-3)\cdot B(x)=x^4.$$

10. Кои од следниве рационални дропки се неправилни, а кои се правилни:

1) $\frac{2x^4+x^2+5}{x^2+2x-1}$ 2) $\frac{x^3+5x^2+7x+2}{3x^3-x+3}$ 3) $\frac{5}{x-1}$

4) $\frac{1}{3x^3-4}$ 5) $\frac{2x+1}{3x-2}$ 6) $\frac{x^2+3x+8}{2x-3}$

11. Трансформирај ги следниве неправилни рационални дропки во збир од полином и правилна дропка:

1) $\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}$ 2) $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

3) $\frac{4x-3}{5-7x}$ 4) $\frac{2x^4-x^3+10x^2-6x}{x^3-x^2+4x-4}$

5) $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ 6) $\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}$

7) $\frac{x^3+3x^2+2x+6}{x^2+2}$ 8) $\frac{x^4+x^3+2x^2+2x+3}{x^3+x+1}$

9) $\frac{2x^4+4x^3+5x^2+3x+4}{2x^2+1}$

12. Разложи ги рационалните дропки во збир на прости дропки од прв вид:

1) $\frac{x}{x^3-3x+2}$ 2) $\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$ 3) $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$

4) $\frac{x^2-3x-8}{x^3-7x-6}$ 5) $\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}$ 6) $\frac{2x^2-2x+1}{x^4-x^3}$

13. Разложи ги рационалните дропки во збир на прости дропки од втор вид:

1) $\frac{1}{x^4+1}$ 2) $\frac{-5x^2-4}{x^4+5x^2+4}$ 3) $\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}$

14. Разложи ги рационалните дропки во збир на прости дропки од прв и втор вид:

1) $\frac{1}{(x^3-3x^2+5x-3)^2}$ 2) $\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}$

3) $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. Разложи ги рационалните дропки во збир од прости дропки:

1) $\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}$ 2) $\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ 3) $\dfrac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4}$

16. Претстави ги како збир од прости дропки следниве рационални дропки:

1) $\dfrac{x^3+2x^2+3x+1}{x^4+x^3+x^2}$ 2) $\dfrac{1}{x^3-1}$ 3) $\dfrac{1}{x^4+4}$

4) $\dfrac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}$ 5) $\dfrac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}$

6) $\dfrac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)}$

17. За кои природни броеви n, и следниве дропки се природни броеви:

1) $\dfrac{n^2-n+2}{n+1}$ 2) $\dfrac{2n^2+3n-3}{n-2}$ 3) $\dfrac{2n^3+3n^2-8n+9}{n+3}$

2. Неравенства

2.1. Средни величини

Ќе разгледамуваме неравенствата во бројните множества кои се воведени во глава 2, во кои ги дефиниравме релациите за подредување: „„е поголем од“, „е помал од“, „е еднаков со“’.

Нека се дадени n позитивни реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$. Броевите

$$\sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}{n}}, \qquad \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \text{ и } \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

се нарекуваат соодветно и *квадратна*, *аритметичка*, *геометриска и хармониска средина* на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$.

Следниот пример ја покажува врската која што постои помеѓу овие средини:

2.1.1. Примери.

1) Нека $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}^+$. Може да се докаже дека

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

и освен тоа равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$, тогаш очигледно е дека важи равенство.

Да претпоставиме дека броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ се менуваат, но притоа збирот $a_1 + a_2 + ... + a_n$ да биде константен. Да го побараме минимумот што притоа може да го постигне квадратната средина, односно изразот

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

Ќе докажеме дека овој израз, односно изразот $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ ќе го достигне својот минимум во случај кога $a_1 = a_2 = ... = a_n$ и со тоа доказот ќе биде завршен.

Навистина, нека за броевите $b_1, b_2, ..., b_n$ изразот $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ го достигнува својот минимум, но притоа $b_i \neq b_j$ за некои индекси $i \neq j$. Нека $b_1 \neq b_2$. Да ги разгледаме сега броевите $b_1', b_2', ..., b_n'$ дефинирани на следниот начин:

$$b_1' = b_2' = \frac{b_1 + b_2}{2} \text{ и } b_k' = b_k \text{ за } k \neq 1, 2.$$

Тогаш имаме дека $b_1' + b_2' + ... + b_n' = b_1 + b_2 + ... + b_n$, но притоа имаме дека $b_1'^2 + b_2'^2 + ... + b_n'^2 < b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2$, бидејќи

$$(b_1')^2 + (b_2')^2 < b_1^2 + b_2^2 \Leftrightarrow 2\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 < b_1^2 + b_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < (b_1 - b_2)^2 \Leftrightarrow b_1 \neq b_2.$$

Со тоа добиваме контрадикција, бидејќи изразот $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ не го постигнува својот минимум за броевите $b_1, b_2, ..., b_n$. Според тоа, имаме дека изразот $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ го достигнува својот минимум за $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2) Нека $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}^+$. Може да се докаже дека

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

и освен тоа равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$, тогаш очигледно е дека важи равенство.

Да претпоставиме дека броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ се менуваат и притоа збирот $a_1 + a_2 + ... + a_n$ останува константен. Да го побараме максимумот што притоа може да го постигне геометриската средина, односно изразот

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Ќе докажеме дека овој израз, односно изразот $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ го достигнува својот максимум во случај кога $a_1 = a_2 = ... = a_n$ и со тоа доказот ќе биде завршен.

Навистина нека $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ го достигнува својот максимум за броевите $b_1, b_2, ..., b_n$, при што $b_i \neq b_j$ за некои индекси $i \neq j$. Без губење на општоста може да претпоставиме дека $b_1 \neq b_2$. Да ги разгледаме броевите $b_1', b_2', ..., b_n'$ дефинирани со

$$b_1' = b_2' = \frac{b_1 + b_2}{2} \text{ и } b_k' = b_k \text{ за } k \neq 1, 2.$$

Тогаш имаме дека $b_1' + b_2' + ... + b_n' = b_1 + b_2 + ... + b_n$, но притоа имаме дека $b_1' \cdot b_2' \cdot ... \cdot b_n' > b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n$ бидејќи

$$b_1' \cdot b_2' > b_1 \cdot b_2 \Leftrightarrow \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 > b_1 \cdot b_2 \Leftrightarrow (b_1 - b_2) > 0 \Leftrightarrow b_1 \neq b_2.$$

Со тоа добиваме контрадикција, што значи дека изразот $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ го достигнува својот максимум за $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

3) Нека $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}^+$. Може да се докаже дека

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

и освен тоа равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Ако на броевите $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$ го примениме неравенството кое ја одредува врската меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right),$$

од каде што следува дека

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... a_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right),$$

односно,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Освен тоа равенството важи ако и само ако $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_2}=...=\frac{1}{a_n}$, односно $a_1 = a_2 = ... = a_n$. ●

2.2. Некои поважни неравенства

Кошиево неравенство. Нека $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ се произволно дадени реални броеви. За секоја реална вредност на променливата x изразот

$$(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+...+(a_nx+b_n)^2 \qquad (1)$$

добива ненегативна вредност како збир на квадрати. По степенувањето и средувањето изразот (1) се сведува на квадратниот трином

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \qquad (2)$$

Бидејќи коефициентот пред x^2 во (2) е позитивен (барем едно $a_i \ne 0$) дискриминантата на квадратниот трином (2) мора да е негативен број или нула, што значи дека

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \ge 0 \quad (3)$$

односно,

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2-(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \le 0 \quad (4)$$

Вообичаено неравенството (4), наречено Кошиево неравенство накратко се запишува во обликот

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

Неравенство на Коши-Шварц-Буњаковски. Нека се дадени $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ за $i = 1,2,..,n.$ Ќе го докажеме неравенството

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + ... + a_n^{\ 2}} \cdot \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + ... + b_n^{\ 2}} \qquad (5)$$

Освен тоа равенство важи ако и само ако $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n}.$

Од Кошиевото неравенство имаме дека

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq (a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + ... + a_n^{\ 2}) \cdot (b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + ... + b_n^{\ 2})$$

од каде што непосредно следува дека

$$\left| a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \right| \leq \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + ... + a_n^{\ 2}} \cdot \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + ... + b_n^{\ 2}}$$

и оттука следува бараното неравенство. Освен тоа забележуваме дека равенство важи ако и само ако дискриминантата на квадратниот трином е еднаква на нула, а ова важи ако и само ако $a_i x + b_i = 0,$ за $i = 1,2,....,n,$ односно $x = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2} = ... = -\frac{b_n}{a_n}$ од каде што следува дека $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n}.$

Неравенството (5), наречено неравенство на Коши-Шварц-Буњаковски кратко се запишува во обликот

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} .$$

Бернулиево неравенство. Ќе докажеме дека

$(1+h)^r \geq 1+rh,$ за $1+h>0$ и $r \in \mathbf{Q}$.

Нека $r=\dfrac{p}{q},\ \ p>q,\ \ (p,q)=1$, и нека

$$a_1=a_2=...=a_q=1+rh \text{ , и } a_{q+1}=a_{q+2}=...=a_p=1 \tag{6}$$

Тогаш од неравенството

$$\frac{a_1+a_2+...+a_q+a_{q+1}+a_{q+2}+...+a_p}{p} \geq \sqrt[p]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_q a_{q+1}\cdot ...\cdot a_p} \tag{7}$$

чија што десна страна според (7) е

$$\sqrt[p]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_q\cdot a_{q+1}\cdot ...\cdot a_p}=\sqrt[p]{(1+rh)^q}=(1+rh)^{\frac{q}{p}} \tag{8}$$

и чија што лева страна, исто така, според (7) е:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_q+a_{q+1}+a_{q+2}+...+a_p}{p}=\frac{q(1+rh)+(p-q)}{p}=$$

$$=\frac{q+qrh+p-q}{p}=\frac{ph+p}{p}=1+h \tag{9}$$

следува дека ако (8) и (9) ги замениме во (7), добиваме

$(1+h)\geq(1+rh)^{\frac{1}{r}},$ односно $(1+h)^r \geq (1+rh).$

Неравенството $(1+h)^r \geq 1+rh,$ за $1+h>0$ и $r \in \mathbf{Q}$ се вика Бернулиево неравенство.

Јенсеново неравенство. За функцијата $f(x)$ која е дефинирана на сегментот $[\alpha,\beta]$ велиме дека е **конвексна**, ако за секои $a,b \in [\alpha,\beta]$ важи условот

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}. \tag{10}$$

Нека $f(x)$ е конвексна функција на сегментот $[\alpha,\beta]$. Ќе докажеме дека за секој природен број $n>1,$ и за секои $a_i\in[\alpha,\beta],\ \ i=1,2,...,n,$ важи неравенството

$$f\left(\frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\right)\le\frac{1}{n}\left(f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\right), \tag{11}$$

Притоа релациите (10) и (11) преминуваат во равенства ако и само ако се исполнети условите $a=b,$ односно $a_1=a_2=\ldots=a_n.$

Најпрво ќе докажеме дека неравенството (11) важи за секој $n=2^k$ (k е природен број). Доказот ќе го изведеме со методот на математичка индукција.

Да претпоставиме дека неравенството (11) важи за некој природен број $k,$ односно дека важи неравенството

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)<\frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)}{n},\ n=2^k \tag{12}$$

каде што $a_1,a_2,...,a_n$ не се сите меѓусебно еднакви.

За вредноста на конвексната функција

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_\nu}{\nu}\right),\ \nu=2^{k+1}=2^k\cdot 2=2n,\text{ односно}$$

$$f\left(\frac{\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}+\dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2}\right),$$

заради својството (10) и претпоставката искажана во релацијата (12) добиваме дека

$$f\left(\frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}+\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n}}{2}\right)<$$

$$<\frac{f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)+f\left(\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}}{n}\right)}{2}<$$

$$<\frac{\left(f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\right)+\left(f(a_{n+1})+f(a_{n+2})+...+f(a_{2n})\right)}{2n}=$$

$$=\frac{f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{2n})}{2n}.$$

Бидејќи неравенството (11) е точно за $n=2^{k+1}$, ако е точно за $n=2^k$ и тоа е точно уште и за $n=2$, заклучуваме дека тоа е точно за секое $k\in\{1,2,3,...\}$. Според тоа неравенството (10) е точно за бесконечно многу броеви $n\in\{2,2^2,2^3,...\}$.

Сега ќе докажеме дека од точноста на неравенството (11) за n може да се извлече заклучок дека тоа е точно и за $n-1$.

Претпоставуваме дека неравенството (11) важи за некој природен број n и за секое $a_\nu\in[\alpha,\beta]$. Ако во (11) го замениме a_n со изразот $\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}$ се добива дека

$$f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}+\dfrac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}}{n}\right)<$$

$$<\frac{f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{n-1})+f\left(\dfrac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}\right)}{n} \qquad (13)$$

По средување изразот на левата страна на неравенството (13) го добива обликот

$$f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}\right)<\frac{1}{n}\{f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{n-1})\}+$$

$$+\frac{1}{n}f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}\right)$$

од каде што следува дека

$$f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}\right)<\frac{f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{n-1})}{n-1}.$$

Според тоа, ако релацијата (11) е точна за $n,$ тогаш е точна и за $n-1.$ Со ова го докажавме неравенството (11) под услови кои се однапред прецизирани. Овој метод на докажување се вика *метод на регресивна индукција*. Вистинитоста на исказот $P(n)$ по методот на регресивна индукција следува од:

1) $P(n)$ го повлекува $P(n-1);$

2) $P(n)$ важи за бесконечно многу вредности $n.$

2.2.1. Примери.

1) Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x^k$, $k\in\mathbf{N}.$ Најпрво ќе покажеме дека таа е конвексна за $x>0.$ За $k=2$ имаме дека

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4},\ x_1,x_2\in(0,+\infty),\ x_1\neq x_2\ .$$

Бидејќи $2x_1x_2<x_1^2+x_2^2$, од последната релација добиваме дека

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{x_1^2+x_2^2}{2}$, односно,

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2<\frac{x_1^2+x_2^2}{2}. \tag{14}$$

Тоа значи дека функцијата $f(x)=x^k$ е конвексна за $x>0$ и за $k=2,$ односно $f(x)=x^2$ е конвексна за $x>0.$

За да докажеме дека функцијата $f(x)=x^k$ е конвексна за $x>0$ и во случај кога $k=3,4,5,...$ ќе го примениме методот на математичка индукција.

Да претпоставиме дека функцијата $f(x)=x^k$ е конвексна за $k=r$ каде што r е некој природен број, односно

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^r<\frac{x_1^r+x_2^r}{2}. \tag{15}$$

По множењето со позитивниот број $\frac{x_1+x_2}{2}$ неравенството (15) го добива обликот

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{r+1}<\frac{x_1^{r+1}+x_2^{r+1}+x_2x_1^r+x_1x_2^r}{4}. \tag{16}$$

Поаѓајќи од идентитетот

$$x_2x_1^r+x_1x_2^r+(x_1-x_2)(x_1^r-x_2^r)=x_1^{r+1}+x_2^{r+1},$$

заклучуваме дека

$$x_2 x_1{}^r + x_1 x_2{}^r < x_1{}^{r+1} + x_2{}^{r+1},$$

бидејќи двата множители $x_1 - x_2$ и $x_1{}^r - x_2{}^r$ се истовремено или позитивни или негативни. Оттука и од (16) се добива дека

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{r+1} < \frac{x_1{}^{r+1} + x_2{}^{r+1}}{2}$$

со што докажавме дека функцијата $f(x) = x^k$ е конвексна за $x > 0$ и во случај кога k е природен број.

Како последица од тврдењето дека функцијата $f(x) = x^k$ е конвексна за $x > 0$ и во случај кога k е природен број го добиваме неравенството

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^k \leq \frac{x_1{}^k + x_2{}^k + ... + x_n{}^k}{n}$$

за секои позитивни реални броеви $x_i,\ i = 1, 2, ..., n.$

За $x_1 = x_2 = ... = x_n$ неравенството преминува во равенство. ●

2.3. Задачи за вежбање

1. Нека $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ и $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Докажи ги неравенствата:

1) $Sn \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$

2) $\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + ... + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq n\left(\frac{S_n}{n} + \frac{n}{S_n}\right)^2$

2. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви чијшто производ е еднаков на 1. Докажи дека $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot ... \cdot(1+a_n) \geq 2^n.$

3. Докажи дека за секој природен број n важи $n! \leq \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$.

4. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се n позитивни броеви и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ е една нивна пермутација. Докажи дека

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+...+\frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

5. *Абелово неравенство.* Докажи дека ако $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ ($b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq 0$) се две множества на реални броеви и ако M и m се соодветно најголемиот и најмалиот меѓу броевите

$$a_1, a_1+a_2, ..., a_1+a_2+...+a_n$$

тогаш

$$mb_1 \leq a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \leq Mb_1.$$

6. Нека a_i и b_i, $i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}+\sqrt{(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2}+\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2}+\ldots+\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}.$$

Во кој случај важи равенство?

7. Докажи дека за произволни природни броеви a, b и c важи неравенството

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

8. Користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина докажи ги неравенствата:

1) $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$ 2) $(a+b+c)\cdot(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$

3) $2a^3+11>9a$ 4) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

9. Докажи дека ако $2x+4y=1,$ тогаш $x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}.$

10. Докажи дека за позитивните броеви a и b важи неравенството:

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ 2) $a+\frac{1}{a} \geq 2$

Во кој случај важи равенство?

11. Докажи дека ако $a+b \geq 1,$ тогаш $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}.$

12. Ако $a,$ b и c се природни броеви, докажи дека $ab+bc+ca \leq 3abc.$

13. Докажи дека $(a-x)\cdot(a-y)\cdot(a-z)>8xyz,$ ако $x,$ y и z се позитивни броеви и $x+y+z=a.$

13. Докажи дека ако $x+y+z=1,$ тогаш $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}.$

14. Ако $a>1$ и $b<1,$ докажи дека $ab+1<a+b.$

15. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството

$$n! \geq n^{\frac{n}{2}}.$$

16. За функцијата $f(x)$ која е дефинирана на сегментот $[\alpha,\beta]$ велиме дека е *конкавна*, ако за секои $\mathrm{a},\mathrm{b}\in[\alpha,\beta]$ важи

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}.$$

Докажи дека $f(x)=\sin x,\ \ x\in(0,\pi)$ е *конкавна функција.*

3. Таблици за изводи и интеграли на елементарни функции

3.1. Изводи и интеграли на елементарни функции

Во примерите наведени во поглавје 6 ги определивме изводите на многу функции. Притоа ја користевме или самата дефиниција за извод на функција или правила и теореми кои се однесуваат на посложени функции добиени од една или повеќе функции со примена на аритметички операции, композиција на функции, или инверзни функции на некои функции. Користејќи ги добиените резултати, а имајќи ја во вид нивната употреба, ќе формираме таблица на изводи на некои елементарни функции.

Слично, основата за наоѓање на неопределени интеграли на широка класа на функции ја дава таблицата на интеграли на елементарните функции. Таа се заснова непосредно на таблицата на изводи. Имено, секоја формула од диференцијалното сметање продуцира соодветна формула во интегралното сметање.

Во продолжение ќе ги дадеме таблицата изводи и таблицата на интеграли на елементарните функции.

3.2. Таблица на изводи на елементарни функции

Функција	Извод на функцијата
$y = C = \text{const}.$	$y' = 0$
$y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y = \sqrt{x},\ x > 0$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x},\ x \neq 0$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = a^x,\ a \neq 1, a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x,\ a \neq 1, a > 0,\ x > 0$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x, x > 0$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x,\ x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x,\ -1 < x < 1$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x,\ -1 < x < 1$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

3.3. Таблица на интеграли на елементарни функции

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,\ x > 0$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,\quad x \neq 0$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\quad a \neq 1,\ a > 0$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,\quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, & -1 < x < 1 \\ -\arccos x + C, & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$$

3.4 Таблица добиена со методите на замена и парцијална интеграција

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C,$$

$$\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C,$$

$$\int \frac{x^2}{ax+b}dx = \frac{(ax+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln|ax+b| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(ax-2b)\sqrt{ax+b}}{3a^2} + C,$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)\sqrt{ax+b}}{15a^3} + C,$$

$$\int \frac{A}{a-x}dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{B}{(a-x)^\alpha}dx = \frac{B}{1-\alpha}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}} + C, \quad \alpha > 1$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C,$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+a^2}dx = x - a \cdot arctg\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+a^2}dx = \frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C,$$

$$\int \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{-1}{2\left(x^2+a^2\right)} + C,$$

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{-x}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a} arctg\,\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{a^2}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2} + C,$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C,$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + C,$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C,$$

$$\int \frac{1}{x\cdot\left(x^n+a^n\right)}dx = \frac{1}{na^n}\ln\left(\frac{x^n}{x^n+a^n}\right) + C,$$

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n+a^n}dx = \frac{1}{n}\ln\left(x^n+a^n\right) + C,$$

$$\int \frac{x^m}{\left(x^n + a^n\right)^r} dx = \int \frac{x^{m=n}}{\left(x^n + a^n\right)^{r-1}} dx - a^n \int \frac{x^{m-n}}{\left(x^n + a^n\right)^r} dx + C,$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\alpha} dx = \frac{M}{2(1-\alpha)} \frac{1}{(t^2+a^2)^{\alpha-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) K_\alpha, \quad \alpha > 1$$

каде што $K_\alpha = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^\alpha}, \quad t = x + \frac{p}{2}, a^2 = q - \frac{p^2}{4}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int (a^2 - x^2) dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{k} + C.$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C, \quad a \neq 0$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C, \quad a \neq 0$$

$$\int x^2 e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx = \frac{e^{-ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}\left(a\cos bx - b\sin bx\right)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\int e^{ax} \ln xdx = \frac{e^{ax} \ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx + C$$

$$\int \cos\alpha x \cos\beta xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\alpha+\beta\right)x}{\alpha+\beta} + \frac{\sin\left(\alpha-\beta\right)x}{\alpha-\beta}\right] + C$$

$$\int \sin\alpha x \sin\beta xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\alpha-\beta\right)x}{\alpha-\beta} - \frac{\sin\left(\alpha+\beta\right)x}{\alpha+\beta}\right] + C$$

$$\int \sin\alpha x \cos\beta xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\left(\alpha+\beta\right)x}{\alpha+\beta} + \frac{\cos\left(\alpha-\beta\right)x}{\alpha-\beta}\right] + C.$$

$$\int \cos^n xdx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} xdx + C$$

$$\int \sin^n xdx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} xdx + C$$

Индекс

А

Апсолутна вредност 32
Архимед 53
Аритметичка прогресија 129
Асимптоти 191
    Вертикална 192
    Коса 196
    Хоризонтална 194

Б

Бернулиево неравенство 44
Биекција 71
Биномна формула 44
Бројот *e* 155

Г

Геометриска прогресија 131
График на функција 69

Д

Де Моргановi правила 18
Декартов производ 19
Дефинициона област 64

Е

Еквивалентност 22

З

Закони за
    апсорпција 18
    асоцијативност 17
    дистрибутивност 17
    идемпотентност 17
    комутативност 17

И

Извод 228
    Од повисок ред 249
Инјекција 71
Инфимум 52
Интервал 57
Интегрирање 293

К

Квантификатори 11
Комплемент 17
Конвексност 276
Конкавност 276

Л

Лимес
  Низа 137
  Функција 169
Локален екстрем 79
Локален максимум 79
Локален минумум 78

М

Математичка индукција 41
Метод на замена 301
Множество 13

Н

Најголем заеднички делител 41
Најмал заеднички содржател 41
Неопределен интеграл 293
Непрекинатост 199
Низа 127
  Дивергентна 141
  Конвергентна 137
  Монотона 134
  Ограничена 135
Нули на функција 93

О

Операции 22
Определен интеграл 351

П

Парцијална интеграција 305
Подредување 22
Празно множество 15
Пресек 16
Превојна точка 279
Примитивна функција 291
Природни броеви 37
  Деливост 39
  Непарни 40
  Парни 40
  Претходник 39
  Прости 41
  Следбеник 39

Р

Рационални броеви 49
Реални броеви 28
Рекурентна формула 128
Релација 20
  Антисиметрична 21
  Рефлексивна 21
  Симетрична 21
  Транзитивна 21

С

Сегмент 57
Слика на функција 65
Супремум 52
Сурјекција 71

Т

Теорема на
  Лагранж 258
  Лопитал 264
  Коши 262
  Рол 256
  Ферма 254

У

Унија 16
Универзално множество 17

Ф

Функција 64
  Диференцијабилна 227
  Експоненцијална 100
  Инверзна 83
  Константна 95
  Логаритамска 100
  Монотона 73
  Непарна 87
  Ограничена 76
  Парна 87
  Периодична 90
  Сложена 79
  Степенска 95
  Тригонометриска 103
    инверзна на 106

Ц

Цел дел од реален број 67

Цели броеви 47

ЛИТЕРАТУРА

[1] Adnađević D., Kadelburg Z., *Matematička analiza I*, Nauka, Krug, Beograd, 1998

[2] Aigner M., Ziegler M., *Proofs from THE BOOK*, Springer - Verlag, 2009

[3] Aljančić S., *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1979

[4] Apostol T. M., *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Springer - Verlag, 1990

[5] Bogoslavov V., *Zbirka rešenih zadataka iz matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1980

[6] Зорич А., *Математический анализ*, Наука, Москва, 1984

[7] Ивановски Н., *Математичка анализа I*, Универзитет „Кирил и Методиј“, Скопје, 1981

[8] Јанев И., *Збирка задачи за IV година*, Просветно дело, Скопје, 1988

[9] Kadelburg Z., Miličić M., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 3*, Krug, Beograd, 2003

[10] Kadelburg Z., Miličić M., Ognjanović S., *Analiza sa algebrom 4*, Krug, Beograd, 2003

[11] Кудрявцев Д., *Курс математического анализа*, Высшяа школа, Москва, 1981

[12] Kurepa S., *Matematička analiza*, *Diferenciranje i integriranje*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971

[13] Kurepa S., *Matematička analiza*, *Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971

[14] Ljaško I., Boljarčuk K., Gaj, G., Golovač P., *Zbirka zadataka iz matematičke analize 1*, Naša knjiga, Beograd, 2007

[15] Малчески Ристо, *Калкулус,* Европски универзитет, Скопје, 2007

[16] Малчески Ристо, *Алгебарски структури,* Европски универзитет, Скопје, 2007

[17] Mamuzić Z., Gerasimović G., *Osnovi matematičke analize, Naučna knjiga*, Beograd, 1970

[18] Marjanović M., *Matematička analiza I,* Naučna knjiga, Beograd, 1979

[19] Miličić M., Kadelburg Z., Dukić, D., *Uvod u teoriju brojeva*, Društvo matematičara Srbije, 1990, Beograd

[20] Miličević P., *Matematička analiza za srednjoškolce*, Zavod za uđbenike i nastavna sredstva Beograd, 1996

[21] Митевска Ј., Грибовска – Поповиќ Л., Манова Ераковиќ В., Митрушева Ф., *Математика за IV година на реформираното гимназиско образование*, Просветно дело, Скопје, 2004

[22] Митевска Ј., Грибовска – Поповиќ Л., Младеновска Д., *Математика за матуранти,* Просветно дело, Скопје, 2006

[23] Никольский М., *Курс математического анализа*, Наука, Москва, 1975

[24] Попов Б., *Математичка анализа за IV година на математичко – информатичка струка*, Просветно дело, Скопје, 1987

[25] Rudin W.,, *Principle of mathematical analysis*, Me Graw – Hill Co., New York, 1964

[26] Takači Đ., Takači A., *Zbirka zadataka iz analize I*, *prvi deo*, Prirodno - matematički fakultet, Novi Sad, 1997

[27] Тренчевски К., *Елементарна алгебра*, Просветно дело, Скопје, 2001

[28] Тренчевски К., Тренчевски Г., Крстеска Б., Здравеска С., *Математичка анализа за IV година на реформираното гимназиско образование*, Просветно дело, Скопје, 2009

[29] Тренчевски К., Тренчевски Г., Крстеска Б., Здравеска С., *Алгебра за III година на реформираното гимназиско образование*, Просветно дело, Скопје, 2009

[30] Тренчевски К., Димовски Д., Тренчевски Г., Крстеска Б., Кондинска Л., *Математика за I година на реформираното гимназиско образование*, Просветно дело, Скопје, 2002

[31] Ćirić D., *Uvod u matematičku analizu*, Prirodno – matematički fakultet, Niš, 2008

[32] Uščumlić M., Miličić M., *Zbirka zadataka iz više matematike*, Nauka, Beograd, 1994

[33] Фихтенгольц М., *Курс дифференциального и интегрального исљислениь*, Наука, Москва, 1966

[34] Hardy H., Wright M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1960

[35] Шилов Р., *Математиљеский анализ. Функции одного переменного,* Наука, Москва, 1969

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41