УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“
ГРАДЕЖЕН ФАКУЛТЕТ, СКОПЈЕ

Даниел Велинов
Ѓорѓи Маркоски
Силвана Петрушева

МАТЕМАТИКА, II ДЕЛ

(Низи, Функции, Диференцијално и интегрално сметање)

Скопје, 2017

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
Даниел Велинов, Ѓорѓи Маркоски и Силвана Петрушева , Градежен факултет

Рецензенти
1.**проф. д-р Никита Шекутковки**
редовен професор на ПМФ, УКИМ, Скопје
2. **проф. д-р Валентина Миовска**
вонреден професор на ПМФ, УКИМ, Скопје
3.**проф. д-р Лилјана Денковска**
редовен професор на Градежниот факултет, УКИМ, Скопје

Техничка обработка
Даниел Велинов, Ѓорѓи Маркоски, Силвана Петрушева и Ана Иванова

Лектура на македонски јазик: Виолета Јовановска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.1/.5(075.8)

ВЕЛИНОВ, Даниел
Математика, II дел : (низи, функции, диференцијално и интегрално сметање) / Даниел Велинов, Ѓорѓи Маркоски, Силвана Петрушева. - Скопје : Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Градежен факултет, 2018. - 461 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 460-461

ISBN 978-9989-43-419-8
1. Маркоски, Ѓорѓи [автор] 2. Петрушева, Силвана [автор]
а) Математичка анализа - Теорија на функции - Диференцијално сметање - Интегрално сметање - Високошколски учебници COBISS.MK-ID 109043722

ПРЕДГОВОР

Учебников „Математика, II дел“ е наменет првенствено за студентите на Градежниот факултет како учебник по предметите математика 1 и математика, а можат да го користат и студентите од другите технички факултети, кои, во наставната програма по математика, ги изучуваат областите изнесени во учебников.

Материјалот во книгава е распределен во 7 глави: множества, низи, функции, изводи, неопределен интеграл, определен интеграл и апликации. Теориското излагање во книгава е дополнето со голем број решени задачи. На крајот се дадени задачи, кои се давани на испити и на колоквиуми.

Во првата глава „Множества“ се изложени некои основни поими од теоријата на множества, како и дефинициите на основните множества на природните, целите, рационалните, ирационалните, реалните и комплексните броеви, кои понатаму се користат во излагањето.

Во втората глава „Низи“ се дадени основни дефиниции, својства и теореми за реалните низи, гранични вредности на низи, дивергенција и конвергенција на низи. Разгледани се и некои специјални низи кои понатаму се користат во понатамошните излагања на материјалот во овој учебник.

Третата глава „Функции“ ги содржи основните дефиниции, својства и теореми за функции со една реална променлива, потоа гранична вредност и непрекинатост на функциите со една реална променлива, како и функции зададени во параметарски облик и во поларни координати.

Во четвртата глава „Изводи“ се дадени основните дефиниции, својства и теореми на диференцијалното сметање и нивната примена за испитување на тек и график функциите како и нивната примена во праксата.

Во петтата глава „Неопределен интеграл“ се разгледуваат основните дефиниции, својства и методи за решавање разни класи на неопределени интеграли.

Шестата глава „Определен интеграл“ дава преглед на основните дефиниции, својства и теореми за определен интеграл, потоа Њутн-Лајбницовата формула за врската меѓу неопределен и определен интеграл и примената на определениот интеграл за пресметување плоштина на рамнински лик, должина на лак на крива, волумен и плоштина на површина на ротационо тело.

Во седмата глава „Апликации“ се изложени голем број решени примери од техниката и праксата меѓу кои и голем број задачи од градежништвото со примена на диференцијалното и интегралното сметање.

Сакаме да изразиме специјална благодарност на рецензентите за нивните забелешки и сугестии кои многу придонесоа за подобрување на квалитетот на учебников.

Изразуваме голема благодарност на проф. д-р Слободанка Георгиевска, редовен професор во пензија на Катедрата по математика на Градежниот факултет во Скопје за сугестиите за подобрување на оваа книга.

На м-р Ана Иванова, дипломиран архитект, изразуваме благодарност за идејното решение на корицата.

Ќе им бидеме благодарни на читателите, кои со свои забелешки ќе придонесат за подобрување на квалитетот на учебников.

Скопје, декември 2017

Авторите

1. МНОЖЕСТВА

1.1. Множества

Множество е основен поим во математиката и не се дефинира. Обично се опишува како целина од објекти кои имаат некоја заедничка карактеристика, но тоа не мора да биде случај секогаш. Пример за множество е множество од сите денови во неделата. Друг пример е множество од сите непарни броеви. Пример за множество е и множеството од сите точки од кружницата. Да забележиме дека едно множество е добро зададено ако точно се знаат кои се неговите елементи. На пример, множество од студенти во прва година. Бидејќи не е означено дека станува збор за сите суденти од прва година, кое било множество од студенти од прва година ќе биде разгледуваното множество. Тоа значи дека множеството не е добро зададено, односно не е еднозначно определено.

Најчесто множествата ќе ги означуваме со големи латински букви: $A, B, C, \ldots$. Објектите од кои се состои едно множество се нарекуваат елементи на тоа множество и нив ќе ги означуваме со мали букви од латиницата: $x, y, z, \ldots$.

Ако елементот a се содржи во множеството A, (уште велиме дека елементот a припаѓа на множеството A), означуваме $a \in A$. Во спротивно, ако a не припаѓа на множеството A, означуваме $a \notin A$.

Множеството кое не содржи ниту еден елемент се нарекува празно множество и се означува со $\varnothing$. Празното множество е единствено такво множество. Единственоста ќе биде покажана подолу.

Во однос на бројот на елементи множествата се делат на два типа: конечни и бесконечни множества. Ако постои природен број p, кој е еднаков на бројот на елементи на множеството, тогаш за тоа множество велиме дека е конечно множество. Во спротивно, велиме дека множеството е бесконечно. Бесконечните множества се делат на бесконечни преброиви и бесконечни непреброиви множества.

Множество може да биде зададено:

а) **Табеларно**, односно со запишување на сите негови елементи помеѓу две големи загради;

б) **Описно**, преку посочување на карактеристичното својство кое го имаат сите елементи на тоа множество;

в) **Графички,** со помош на Венов дијаграм.

Пример 1. Нека A е множество од сите едноцифрени броеви. Тогаш согласно претходната дискусија множеството A можеме да го запишеме како

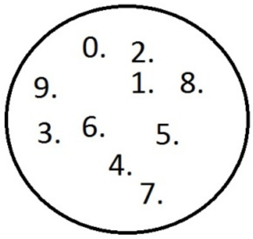
а) $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

б) $A = \left\{x \middle| x \text{ е цифра}\right\}$.

Понекогаш се користи и ознаката

$A = \left\{x : x \text{ е цифра}\right\}$

в)



Очигледно кога множеството е бесконечно не може прецизно да се запише со набројување или со Венов дијаграм.

Се вели дека множеството A е *подмножество* од множеството B ако секој елемент од A се содржи и во B. Се означува со $A \subseteq B$.

Значи, $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$.

Ако $A \subseteq B$ и постои елемент од B што не се содржи во A, се вели дека A е *вистинско подмножество* од B, и се запишува со $A \subset B$.

Две множества A и B се еднакви ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Партитивно множество на множеството A, означуваме со $P(A)$, е множество чии елементи се сите подмножества од множеството A, односно

$$P(A) = \left\{ X \middle| X \subseteq A \right\}.$$

Пример 2. Партитивното множество на множеството $A = \{1,2,3\}$ е

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Универзално множество е множество кое ги содржи сите множества кои во даден момент се разгледуваат. Ознаката U, најчесто ќе ја користиме за универзално множество. Универзалното множество зависи од задачата или проблемот што се разгледува.

Во продолжение ќе дадеме дефиниција и ќе ги наведеме некои од основните својства на операциите со множества.

Пресек на две множества A и B е множеството кое ги содржи сите оние елементи кои припаѓаат и на множеството A и на множеството B. Пресекот на множествата A и B го означуваме со $A \cap B$. Всушност,

$$A \cap B = \{x : x \in A \land x \in B\}.$$

Унија на множествата A и B е множеството кое се состои од сите елементи кои припаѓаат на A или припаѓаат на B, а ја означуваме со $A \cup B$, односно $A \cup B = \{x : x \in A \lor x \in B\}$.

Пример 3. Нека се дадени множествата

$$A = \{a,b,c,d,1,2,3,4\} \text{ и } B = \{e,f,a,c,4\}.$$

Тогаш пресекот и унијата на множествата A и B се

$$A \cap B = \{a,c,4\} \text{ и } A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,1,2,3,4\}.$$

Својство 1. Нека A, B и C се произволни множества. Тогаш

а) (Идемпотентност) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;

б) (Комутативност) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;
в) (Асоцијативност) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
г) (Дистрибутивни закони)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Пресекот на две множества или унијата на две множества може да се обопшти на пресек или унија на конечен број на множества. Дефинираме пресек, односно унија на множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ со

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x : \ x \in A_i \text{ за секој } i = 1,2,\ldots,n\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : \text{ постои } i \text{ така што } x \in A_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}.$$

За множествата A и B велиме дека се *дисјунктни* ако нивниот пресек е празно множество, т.е. $A \cap B = \varnothing$. За множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ велиме дека се попарно дисјунктни, ако за секои i, j, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, каде $i, j = 1,2,\ldots,n$

Нека множествата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се подмножества од множеството P, такви што $A_i \cap A_j = \varnothing$, за секои i, j, $i \neq j$, каде $i, j = 1,2,\ldots,n$ и дополнително $P = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Велиме дека множеството P е запишано како *разбивање од множествата* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Разлика на множествата A и B, означуваме со $A \setminus B$, се состои од сите елементи кои припаѓаат на A, а не припаѓаат B, т.е. $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$.

Во општ случај, $A \setminus B$ не се совпаѓа со $B \setminus A$.

Комплемент на множеството A во однос на множеството U (универзално множество) е множеството од сите x кои не припаѓаат на A.

Запишуваме, $A_U^c = \{x : x \notin A\} = U \setminus A$, или ако е познато во однос на кое U работиме, запишуваме само $A^c = \{x : x \notin A\} = U \setminus A$.

Својство 2. Нека A и B се произволни множества и U е универзално множество. Тогаш

а) $A \cup A^c = U$;
б) $A \cap A^c = \varnothing$;
в) $U^c = \varnothing$, $\varnothing^c = U$;
г) $(A^c)^c = A$;
д) $A \setminus B = A \cap B^c$;
ѓ) (Де Морганови закони) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Дефинираме *симетрична разлика* на множествата A и B со

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c).$$

Важи и следново својство:

Својство 3. Нека $A_1,A_2,\dots,A_n$, B се произволни множества. Важи:

а) $B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$;

б) $B\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(B\cup A_i)$;

в) $\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{\,c}$;

г) $\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{n}A_i^{\,c}$.

Декартов производ (директен производ) на непразните множества A и B се состои од сите подредени парови (x,y), каде што $x\in A$ и $x\in B$, т.е.

$$A\times B=\{(x,y):x\in A,\ y\in B\}.$$

Пример 4. Нека се дадени множествата $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{a,b\}$. Декартовиот производ на множествата A и B е

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\},$$

додека Декартовиот производ на множествата B и A е

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

Јасно, можеме да забележиме дека во општ случај $A\times B\neq B\times A$.

Дефинираме множество $A^2=A\times A$, кое ќе го нарекуваме *Декартов квадрат* на A.

Декартовиот производ на две множества може да се обопшти на Декартов производ од n множества.

Нека $A_1,A_2,\dots,A_n$ се произволни непразни множества. Декартовиот производ на множествата $A_1,A_2,\dots,A_n$ се дефинира со

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):x_i\in A_i, i=1,2,\dots,n\}.$$

Ако важи $A=A_1=A_2=\ldots=A_n$, тогаш за Декартовиот производ $A\times A\times\ldots\times A$ велиме дека е n - *ти степен* на множеството A.

Својство 4. Нека множествата A,B и C се произволни. Следниве тврдења се точни:

а) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

б) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

в) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$;

$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

Последново својство може да се да се обопшти кога во Декартовиот производ влегуваат n множества.

Понатаму, Декартовиот производ на A и B ќе го нарекуваме производ на A и B.

Празното множество е подмножество од секое множество. Овде ќе докажеме дека празното множество е единствено множество со вакво својство. Нека постојат две празни подмножества и нека ги означиме со $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$. Имајќи предвид дека празното множество е подмножество од секое множество, имаме $\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$ и $\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$. Оттука, $\varnothing_1=\varnothing_2=\varnothing$, што значи дека празното множество е единствено такво множество.

1.2. Пресликувања

Дефиниција. Нека X и Y се непразни множества. Секое подмножество f од производот $X\times Y$ се нарекува *кореспонденција* (*придружување*) од X во Y.

Ако $(x,y)\in X\times Y$, ќе велиме дека y му кореспондира на x или на x му е придружен елементот y. Притоа, f ќе го нарекуваме и правило на придружувањето.

Ако имаме кореспонденција (придружување) од X во Y, ќе пишуваме $f:X\to Y$.

Дефиниција. За кореспонденцијата $f:X\to Y$ се вели дека е *пресликување* ако

$$\forall x\in X,\exists y\in Y,\big((x,y)\in f\big) \text{ и } \big((x,y),(x,z)\in f\big)\Rightarrow y=z .$$

Значи, ако X и Y се две непразни множества и ако на секој елемент $x\in X$ (по некое правило f) му е придружен (или му соодветствува) единствен елемент $y\in Y$, велиме дека е дефинирано пресликување од X во Y со правило f.

Пишуваме $f:X\to Y$ или $X\xrightarrow{f}Y$.

Множеството X се вика *домен*, Y *кодомен* на пресликувањето $f:X\to Y$, а f *правило на пресликувањето*.

Вообичаено запишуваме $y=f(x)$, или $f:x\to y$, и елементот y се вика *слика* на елементот x при пресликувањето f, или уште велиме дека y му е *придружен* на x при пресликувањето f.

Да заклучиме, кај секое пресликување $f:X\to Y$, за правилото f важи

$$\forall x,y\in X,\big(x=y\Rightarrow f(x)=f(y)\big)\Leftrightarrow\forall x,y\in X,\big(f(x)\neq f(y)\Rightarrow x\neq y\big).$$

Две пресликувања се еднакви ако имаат ист домен, кодомен и исто правило.

Нека $A\subseteq X, B\subseteq Y$. Множеството

$$f(A)=\{y\in Y \mid \text{постои } x\in A \text{ така што } y=f(x)\}=\{f(x)\,|\,x\in A\}$$

се вика *слика* на A при пресликувањето f, а множеството

$$f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$$

се нарекува *инверзна слика* на множеството B при пресликувањето f.

Јасно $f(A)\subseteq Y, f^{-1}(B)\subseteq X$.

Множеството $\{(x,f(x)):x\in X\}$, кое е подмножество од $X\times Y$, ќе го нарекуваме график на пресликувањето $y=f(x)$.

Пример 1. Нека $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$.

Ако имаме придружување f дефинирано со $1\to a$, $2\to b$, тогаш f не е пресликување, бидејќи $3\in X$, но не постои елемент од Y кој му е придружен на 3.

Пример 2. Нека $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c,d\}$ и придружувањето g е дефинирано со $g:1\to a, 2\to b, 3\to c, 3\to d$, тогаш g не е пресликување од X во Y бидејќи на 3 му се придружени два елементи, $c\neq d$, од Y.

Пример 3. Нека $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c,d\}$ и $h:1\to a, 2\to b, 3\to c$. Тогаш h е пресликување од X во Y.

Притоа, $f\big(\{1,2\}\big)=\{a,b\}$, а $f^{-1}\big(\{b,c,d\}\big)=\{2,3\}$.

Дефиниција. Пресликувањето $f:X\to Y$ е *инјекција* ако различни елементи од X имаат различни слики во Y.

Значи, пресликувањето $f:X\to Y$ е инјекција ако и само ако

$((x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, за сите $x_1,x_2\in X\big)\Leftrightarrow(f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, за сите $x_1,x_2\in X$).

Да забележиме дека еквивалентноста на двете дефиниции за инјекција следува од математичката логика, т.е од еквивалентноста на $p\Rightarrow q$ и $\neg q\Rightarrow\neg p$, за кои било искази p и q.

Дефиниција. Пресликувањето $f:X\to Y$ е *сурјекција* ако за секој $y\in Y$ постои $x\in X$ така што $y=f(x)$.

Јасно, тогаш важи $f(X)=Y$.

Значи, $f:X\to Y$ е сурјекција ако и само ако $(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\ y=f(x)$.

Дефиниција. Ако $f: X \rightarrow Y$ е инјекција и сурјекција, тогаш f се нарекува *биекција*.

Пример 4. Нека $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b\}$ и $f: 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow b$. Тогаш f е пресликување од X во Y кое е сурјекција (секој елемент од Y е слика на некој елемент од X), но не е инјекција бидејќи елементите 2 и 3 од A имаат иста слика.

Пример 5. Нека $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c,d\}$ и $g: 1 \rightarrow a, 2 \rightarrow b, 3 \rightarrow c$. Тогаш g е пресликување од X во Y кое е инјекција, но не е сурјекција бидејќи елементот $d \in Y$ не е слика на ниту еден елемент од X при g.

Пример 6. Нека $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{a,b,c,d\}$. Пресликувањето $f: A \rightarrow B$, дефинирано со $f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c, f(4)=d$ е биекција од A во B. Ако дефинираме $g: B \rightarrow A$ со $g(a)=1, g(b)=2, g(c)=3, g(d)=4$, јасно е дека g е пресликување од B во A. Уште повеќе g е и биекција.

Ова што го направивме во претходниот пример, на конкретните множества A и B и пресликувањето f, важи и поопшто т.е. за кои било множества X и Y и која било биекција од X во Y.

Нека X и Y се кои било множества и нека f е биекција од X во Y. Дефинираме $g: Y \rightarrow X$ на следниот начин:

$$g(y)=x \Leftrightarrow y=f(x), \text{ за секои } x \in X, y \in Y. \qquad (*)$$

Својство. Вака дефинираното придружување е биекција од Y во X.

Доказ. 1) g е пресликување од Y во X.

Нека $y \in Y$ е произволен елемент од Y. Бидејќи $f: X \rightarrow Y$ е сурјекција, постои елемент $x \in X$ таков што $f(x)=y$ од каде, заради $(*)$, имаме $x=g(y)$. Значи, на секој елемент $y \in Y$ со g му е придружен елемент $x \in X$.

Нека $y \in Y$ и нека $x_1, x_2 \in X$ така што $x_1=g(y)$ и $x_2=g(y)$. Заради $(*)$, имаме дека $f(x_1)=y$ и $f(x_2)=y$, т.е. $f(x_1)=y=f(x_2)$. Но, $f: X \rightarrow Y$ е инјекција, следува $x_1=x_2$. Докажавме дека придружувањето на секој елемент $y \in Y$ е единствено.

2) g е инјекција.

Нека $y_1, y_2 \in Y$ и нека $g(y_1)=g(y_2)(=x \in X)$. Тогаш, заради $(*)$, имаме дека $y_1=f(x)$ и $y_2=f(x)$ т.е. $(x, y_1),(x, y_2) \in f$, а бидејќи f е пресликување од X во Y, мора $y_1=y_2$. Значи, од $g(y_1)=g(y_2)$ следува $y_1=y_2$ за кои било $y_1, y_2 \in Y$, што значи дека g е инјекција од Y во X.

3) g е сурјекција.

Нека $x \in X$ е произволен и нека $y = f(x)$ (y постои затоа што f е пресликување). Од (*) следува дека $g(y) = x$. Докажавме дека секој $x \in X$ е слика на некој $y \in Y$, па g е сурјекција. □

Дефиниција. Нека f е биекција од X во Y. Биекцијата g од Y во X, дефинирано со $(*)$, се нарекува *инверзно пресликување* на f и се означува со f^{-1}.

Забелешка. Ако постои биективно пресликување f, од множество X во множество Y, тогаш на секој елемент од X му е придружен единствен елемент од Y (со f) и обратно т.е. на секој елемент од Y му е придружен единствен елемент од X (со f^{-1}). Велиме воспоставено е *заемно еднозначно придружување меѓу елементите* од X и Y. Во овој случај, можествата X и Y имаат исто „количество“ на елементи и се нарекуваат *еквивалентни множества*.

Дефиниција. Нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ се две пресликувања така што доменот на g е исто множество со кодоменот на пресликувањето f.
Состав (композиција) на пресликувањата f и g се дефинира на следниот начин:
$g \circ f = \{(x,z) \in X \times Z : \exists y \in Y, (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g\}$.
Значи, за составот $g \circ f$ важи:
За секој $x \in X$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.
Честопати композиција на пресликувања f и g наместо $g \circ f$ се бележи поедноставно со gf, и се дефинира како пресликување $gf : X \to Z$ со правило $\left(gf\right)(x) = g\left(f(x)\right)$ за секој $x \in X$.
Понекогаш gf се нарекува сложена функција од функциите f и g.

Дефиниција. За две множества X и Y велиме дека се *еквивалентни* ако постои биекција од X во Y.

Пишуваме $X \sim Y$.

Множествата A и B од Пример 6 се еквивалентни множества.

Точно е и следното својство:

Својство. 1) $X \sim X$, за секое множество X.
2) Ако $X \sim Y$ тогаш и $Y \sim X$
3) Ако $X \sim Y$ и $Y \sim Z$ тогаш $X \sim Z$.

1.3. Конечни и бесконечни множества

Дефиниција. Едно множество се нарекува конечно ако не е еквивалентно со ниедно негово вистинско подмножество.

Дефиниција. Едно множество се нарекува бесконечно ако не е конечно.

Множествата од сите примери во овој дел се конечни множества. Ако конечните множества X и Y се еквивалентни, тогаш уште ги нарекуваме и истобројни, т.е. X и Y се множества со еднаков број на елементи и пишуваме $|X| = |Y|$.

За еквивалентните бесконечни множества, уште се вели дека имаат ист кардинален број.

1.4. Природни броеви

Истобројните множества формираат класи. Така на пример, сите множества што се еквивалентни со множеството раце кај еден човек, формираат една класа. Во таа класа, ќе се најдат и множествата: $A = \{\triangle, \bigcirc\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{|, ||\}$ и уште многу други.

Понатаму, сите множества еквивалентни со множеството прсти од едната рака кај некој човек, образуваат друга класа. Во оваа друга класа, ќе се најдат множествата $D = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{|, ||, n, a, u\}$ и уште многу други множества.

Така, уште во раниот развој на човештвото, се јавила потребата за разликување на бројноста на множествата од разни класи и секој народ си создавал свои ознаки (знаци) и тоа различни за различни класи.

Изразувањето на бројноста на множествата од првата класа се карактеризира со зборот „два“ (во нашиот јазик) и симболот 2, а на множествата од втората класа со зборот „пет“ (во нашиот јазик) и симболот 5.

Така се дошло до поимот природен број. Секој природен број всушност е карактеристика на некоја класа од непразни, истобројни, конечни множества.

Ова покажува дека поимот природен број произлегува од многу поширокиот поим - множество.

Едно од најважните множества на броеви е *множеството на природни броеви*. Него ќе го означуваме со $\mathbb{N}$. Множеството природни броеви е дефинирано со Пеановите аксиоми:

1. Секој природен број n има следбеник $n^+ = n + 1$;
2. Ако $m^+ = n^+$, тогаш $m = n$;
3. Бројот 1 е природен број;
4. Бројот 1 не е следбеник на ниту еден природен број;
5. Принцип на математичка индукција. Нека S е непразно множество такво што $S \subseteq \mathbb{N}$ со следниве својства:
   - $1 \in S$;
   - За секој $n \in \mathbb{N}$ важи: Ако $n \in S$, тогаш $n^+ \in S$.

Тогаш $S = \mathbb{N}$.

Множеството на природни броеви е бесконечно множество.

Парни броеви се броевите кои се деливи со 2, а непарни броеви се броевите кои при делење со 2 даваат остаток 1. Природните броеви кои имаат само два делитела се нарекуваат *прости броеви*. Тоа се броевите: $2,3,5,7,11,13,17,\dots$.

Броевите кои имаат повеќе од два делитела ги нарекуваме *сложени броеви*. Бројот 1 е ниту прост ниту сложен. Една од основните теореми во аритметиката е дека секој природен број поголем од 1 може да се запише како производ од прости броеви. За природните броеви a и b велиме дека се заемно прости ако единствен заеднички делител им е 1. Тоа значи дека дека броевите a и b се заемно прости ако немаат заеднички прости делители. Обично, запишуваме $(a,b)=1$, кога a и b се заемно прости броеви, при што (a,b) е ознака за *најголем заеднички делител* на броевите a и b. Една од основните теореми во аритметиката е $n=mq+r$, за $0\le r<m$, каде што q е количникот при делењето на n со m, а остатокот е r. Важи и дека $a\cdot b=(a,b)\cdot[a,b]$, каде $[a,b]$ е *најмал заеднички содржател* на броевите a и b.

Да забележиме дека збирот на два природни броја е секогаш природен број. Тоа значи дека операцијата собирање е затворена операција. Истото можеме да го кажеме и за операцијата множење на природни броеви. Кога имаме одземање на два природни броја, не секогаш разликата на два природни броја е природен број. Истиот заклучок можеме да го изведеме и за делењето на два природни броја. Поконкретно,

$n-m\in\mathbb{N}$, кога $n>m$ и

$\frac{n}{m}\in\mathbb{N}$, кога $m\,|\,n$, т.е. m е делител на n.

1.5. Цели броеви

Множеството од цели броеви ќе го означуваме со $\mathbb{Z}$. Нека со $\mathbb{N}^-$ го дефинираме множеството од спротивни броеви на природните броеви, т.е.

$$\mathbb{N}^-=\{-n : n\in\mathbb{N}\}.$$

Множеството на цели бреови го дефинираме како

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}^-=\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\cup\mathbb{Z}^-.$$

Со $\mathbb{Z}^+$ се означуваат позитивните цели броеви, а со $\mathbb{Z}^-$ негативните цели броеви. Во множеството на цели броеви операциите собирање, одземање и множење се затворени операции.

На крај, да забележиме дека во множеството на цели броеви, за секој број постои следбеник. Од основните множества на броеви, множеството на цели броеви е најголемото множество во кое секој број има следбеник.

1.6. Рационални броеви

Множеството од рационални броеви ќе го означуваме со $\mathbb{Q}$, а го дефинираме како

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}: p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}, (p,q)=1\right\}.$$

Целите броеви се содржани во рационалните броеви. Навистина за секој цел број $z\in\mathbb{Z}$, имаме $z=\frac{z}{1}\in\mathbb{Q}$. Уште повеќе, во ова множество од броеви операциите собирање, одземање, множење и делење со број различен од нула се затворени, односно збир од два рационални броја е рационален број, разлика од два рационални броја е рационален број, производ од два рационални броја е рационален број и количник од два рационални броја, при што делителот е различен од нула, е рационален број.

Множеството од рационални броеви е *густо множество*. Тоа значи дека помеѓу кои било два рационални броја постои друг рационален број кој се наоѓа помеѓу нив. Множествата кои беа дефинирани претходно ја немаат оваа особина.

Навистина, нека a и b се два рационални броја, такви што $a<b$. Ако на двете страни од неравенството додадеме a, имаме

$$a+a<b+a,$$

односно,

$$2a<a+b\text{, т.е. } a<\frac{a+b}{2}.$$

Ако на двете страни на неравенството додадеме b, тогаш

$$a+b<b+b,$$

од каде

$$a+b<2b\text{, т.е. } \frac{a+b}{2}<b.$$

Конечно, добивме

$$a<\frac{a+b}{2}<b,$$

Каде што јасно $\frac{a+b}{2}$ е рационален број.

Значи, помеѓу два произволни рационални броеви ние најдовме рационален број кој се наоѓа помеѓу нив. Нека тој рационален број го означиме со $x_1=\frac{a+b}{2}$. Па, имаме

$$a<x_1<b.$$

Со истата постапка, можеме да добиеме уште два рационални броја кои се наоѓаат помеѓу a и b, односно

$$a<x_2<x_1<x_3<b.$$

Продолжувајќи ја оваа постапка, ние можеме да најдеме бесконечно многу рационални броеви меѓу рационалните броеви a и b.

Познато е дека секој рационален број може да се запише на следниов начин

$$r=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10+a_0+a_{-1}\frac{1}{10}+a_{-2}\frac{1}{10^2}+\ldots ,$$

каде што a_i, $i \in \mathbb{Z}$ се цифри.

Во декаден броен систем, горното равенство најчесто го запишуваме како

$$r = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n} \cdots .$$

За бројот r велиме дека е уште и децимален број. За еден децимален број велиме дека е конечен децимален број ако после некој p сите $a_p = 0$, за $p \in \mathbb{Z}$.

Периодичен децимален број е децимален број кој не е конечен (бесконечен децимален број) и за кој важи за $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{-1} \cdots a_{-k} = a_{-(k+1)} \cdots a_{-2k} = a_{-(2k+1)} \cdots a_{-3k} = \ldots = a_{-(nk+1)} \cdots a_{-(n+1)k} = \cdots ,$$

за некој $k \in \mathbb{N}$, кој ќе го нарекуваме големина на периодата.

Бесконечните децимални броеви за кои не важи ова ќе ги нарекуваме бесконечни непериодични децимални броеви.

Лесно може да се докаже дека сите рационални броеви се или конечни децимални броеви или бесконечни периодични децимални броеви.

1.7. Математичка индукција

Доказот на вистинитоста на многу математички тврдења кои зависат од природниот број n честопати е макотрпна. Најчесто, точноста на едно тврдење може лесно да се провери за мали вредности на n. Нека со S го означиме множеството од сите природни броеви за кои тврдењето е точно. Ако сакаме да покажеме дека S ги содржи сите природни броеви, т.е $S = \mathbb{N}$ можеме да го користиме *принципот на математичка индукција*.

Тој се состои во следново.

Прво испитуваме дали $1 \in S$, односно дали тврдењето важи за $n = 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето е докажано за $n = 1$.

Понатаму, претпоставуваме точност за кое било n, $n \in S$ и сите броеви помали од n кои се содржат во S.

Користејќи ја оваа претпоставка, докажуваме дека тврдењето е точно за $n+1$. Оттука следува дека $n+1 \in S$.

Според петтата аксиома од дефиницијата на природните броеви, следува дека $S = \mathbb{N}$, односно тврдењето е точно за секој природен број n.

Да споменеме дека принципот на математичка индукција може да се користи и кога имаме тврдење кое се однесува на целите броеви или рационалните броеви, но тоа овде нема да биде предмет на дискусија. Во продолжение ќе бидат дадени примери кои го илустрираат принципот на математичка индукција.

Пример 1. а) Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 .$$

Решение. За $n = 1$ се добива $1 = 1^2$ што е точно тврдење.

Претпоставуваме дека равенството е точно за $n = k$, т.е.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2$$

За $n=k+1$ се добива

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме дека тврдењето е точно за секој природен број n.

б) Со помош на принципот на математичка индукција да се докаже дека

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Решение. За $n=1$ имаме $1\cdot 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$ што е точно тврдење.

Претпоставуваме дека равенството важи за $n=k$, односно

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

За $n=k+1$ добиваме

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)\cdot(k+2)=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

од каде што согласно принципот на матматичка индукција добиваме дека равенството важи за секој природен број n.

в) Користејќи го принципот на математичка индукција докажи дека

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Решение. За $n=1$ имаме $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$, што е точно.

Претпоставуваме дека равенството е точно за $n=k$, односно

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

За $n=k+1$ имаме дека

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{2(k+\frac{1}{2})(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

од каде што согласно принципот на математичка индукција добиваме дека равенството важи за секој природен број n.

г) Со помош на принципот на математикчка индукција да се докаже неравенството на Бернули $(1+x)^n\geq 1+nx$, каде $x>-1$, n природен број.

Доказ. За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1+x\geq 1+x$

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k$, односно

$$(1+x)^k \geq 1+kx\,.$$

За $n=k+1$ добиваме

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\geq(1+kx)(1+x)=1+kx+x+kx^2=$$
$$=1+(k+1)x+kx^2\geq 1+(k+1)x$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме точност на тврдењето за секој природен број n.

д) Да се докаже неравенството $(n+2)!>3^n$ со помош на принципот на математичка индукција.

Доказ. За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи

$$(1+2)!>3\text{, т.е. } 3!=6>3\,.$$

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k$, односно

$$(k+2)!>3^k$$

За $n=k+1$ имаме

$$((k+1)+2)!=(k+3)!=(k+3)(k+2)!>(k+3)3^k=k3^k+3\cdot3^k>3^{k+1}\,,$$

бидејќи k е природен број. Согласно принципот на математичка индукција неравенството е точно за секој природен број n.

ѓ) Да се докаже дека $6^{2n}+3^{n+2}+3^n$ е делив со 11.

Доказ. За $n=1$ тврдењето е точно, $6^2+3^3+3=66=6\cdot11$

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k$, односно

$$11\,|\,6^{2k}+3^{k+2}+3^k\text{ , т.е. } 6^{2k}+3^{k+2}+3^k=11q$$

За $n=k+1$, добиваме

$$6^{2k+2}+3^{k+3}+3^{k+1}=36\cdot6^{2k}+3\cdot3^{k+2}+3\cdot3^k=$$
$$=36(6^{2k}+3^{k+2}+3^k)-36\cdot3^{k+2}-36\cdot3^k+3\cdot3^{k+2}+3\cdot3^k=$$
$$=36\cdot11q-33\cdot3^{k+2}-33\cdot3^k=$$
$$=11(36q-3^{k+3}-3^{k+1})\,.$$

Според принципот на математичка индукција заклучуваме дека тврдењето е точно за секој природен број n.

1.8. Ирационални броеви

Постоењето на ирационалните броеви било разгледувано уште од старогрчките математичари. Тие забележале дека хипотенузата на правоаголен триаголник со должини на катетите 1, не е број за кој досега знаеле. Тие дотогаш ги имале дефинирано и разгледувано природните, целите и рационалните броеви. Еден број е ирационален ако има запис како бесконечен децимален непериодичен број. Множеството на ирационални броеви ќе го означуваме со **I**.

Ќе докажеме дека $\sqrt{2}$ е ирационален број. Ќе претпоставиме спротивно, односно дека $\sqrt{2}$ е рационален број. Тоа, значи дека $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, каде $p,q\in\mathbb{N}$, при што $(p,q)=1$. Ако ги степенуваме двете страни на равенството, тогаш

$$2=\frac{p^2}{q^2},$$

односно

$$p^2=2q^2.$$

Бидејќи p и q се заемно прости, тоа значи дека 2 е делител на p^2, односно 2 е делител на p. Тогаш p можеме да го запишеме $p=2k$, за некој природен број k. Тогаш имаме,

$$4k^2=2q^2,$$

од каде што

$$q^2=2k^2.$$

Сосема исто, користејќи ја погорната дискусија можеме да заклучиме дека q е деливо со 2. Тоа значи дека 2 е заеднички делител на p и q, што е спротивно на претпоставката дека p и q се релативно прости броеви. Тоа значи дека претпоставката дека $\sqrt{2}$ е рационален број не е точна, односно $\sqrt{2}$ е ирационален број.

Други примери за ирационални броеви се $\sqrt{3},\sqrt{5},\pi,e$ итн.

1.9. Реални броеви

Множеството од реални броеви овде ќе биде дефинирано преку 15 аксиоми. Со $\mathbb{R}$ ќе го означуваме множеството од реалните броеви. Поедноставено, но не и прецизно, можеме да кажеме дека множеството од реални броеви е унија на рационалните броеви и ирационалните броеви, односно $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup I$.

Напоменуваме дека постојат уште неколку начини на дефинирање на реалните броеви.

Множеството на реални броеви е непразно множесство на кое се дефинирани операциите собирање “$+$” и множење “$\cdot$” и подредувањето “$\leq$”.

Со првите девет аксиоми се дефинира алгебарската структура на множеството од реални броеви, со наредните пет аксиоми се дефинира подредувањето на реалните броеви и неговите својства. Последната аксиома се однесува на непрекинатоста на множеството реални броеви.

Збирот и производот на два реални броја е реален број.

Ќе ги наведеме првите девет аксиоми кои се однесуваат на множеството на реални броеви.

Нека x,y,z се произволни реални броеви.

(A_1) $(x+y)+z=x+(y+z)$

(A_2) $x+0=0+x=x$

(A_3) $x+(-x)=(-x)+x=0$

$(A_4)\quad x+y=y+x$

$(A_5)\quad (xy)z=x(yz)$

$(A_6)\quad x\cdot 1=1\cdot x=x$

$(A_7)\quad x\neq 0,\ x\cdot x^{-1}=x^{-1}\cdot x=1$

$(A_8)\quad xy=yx$

$(A_9)\quad x(y+z)=xy+xz\,.$

Аксиомите на подредување се:

(A_{10}) $x=y$ или $x\leq y$ или $y\leq x$

(A_{11}) ако $x\leq y$ и $y\leq x$ тогаш $x=y$

(A_{12}) ако $x\leq y$ и $y\leq z$ тогаш $x\leq z$

(A_{13}) ако $x\leq y$ тогаш за секој реален број z важи $x+z\leq y+z$

(A_{14}) ако $0\leq x$ и $0\leq y$ тогаш е $0\leq xy$.

Во множеството на реалните броеви со овие аксиоми се дефинирани две операции, собирање и множење. Одземањето всушност е дадено преку (A_3), односно преку собирање на еден број со спротивниот број на друг број

$$x-y:=x+(-y)\,.$$

Делењето со број различен од нула, е множење со инверзен елемент (A_7)

$$\frac{x}{y}:=x\cdot y^{-1}\,.$$

Имајќи ги предвид аксиомите погоре, можеме да ги дефинираме следниве релации:
Велиме дека x е помал од y, означуваме $x<y$, ако и само ако $x\leq y$ и $x\neq y$.
Велиме дека x е поголем или еднаков на y, означуваме $x\geq y$, ако е $y\leq x$.
Велиме дека x е поголем од y, означуваме $x>y$, ако и само ако $x\geq y$ и $x\neq y$.

За еден реален број x велиме дека е позитивен ако $0<x$. Реалниот број x е негативен ако $x<0$. Од аксиомите (A_{10}) и (A_{11}) следува дека секој $x\neq 0$ може да биде позитивен или негативен, но не може и двете истовремено. Според тоа,

$$\mathbb{R}=\mathbb{R}^{-}\cup\{0\}\cup\mathbb{R}^{+}\,,$$

Каде што $\mathbb{R}^{-}$ е множеството од сите негативни реални броеви и $\mathbb{R}^{+}$ е множеството од сите позитивни реални броеви.

Операциите собирање, множење и преку нив дефинирани одземање и делење, како и подредувањето на реалните броеви имаат многу својства кои ние овде нема да ги разгледуваме, ги оставаме за љубопитните читатели да ги најдат и проверат преку дадените аксиоми.

Едни од најчесто користените подмножества од реалните броеви, се интервалите. Нека a и b се реални броеви. Ги даваме дефинициите на затворен интервал, отворен интервал, полуотворен интервал од лево и полуотворен интервал од десно, соодветно:

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}$$

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\le b\}$$

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\}.$$

Исто така некоја од границите или двете граници можат да бидат бесконечност:

$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\}$$

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a<x\}$$

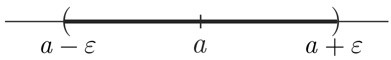
$$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}: x\le b\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$$

$$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}\quad.$$

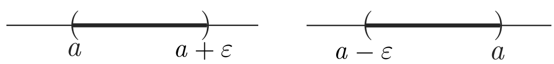
Нека $a\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$.

Отворениот интервал $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ ќе го нарекуваме $\varepsilon-$околина на a.



Притоа, $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\Leftrightarrow|x-a|<\varepsilon$.

Отворениот интервал $(a-\varepsilon,a)$ лева ε-околина на a, а $(a,a+\varepsilon)$ десна ε-околина на a.



десна околина лева околина

Околина на a ќе го нарекуваме секој отворен интервал што го содржи a. Јасно, пресек и унија на две околини на a е повторно околина на a.

Множеството од реални броеви обично го интерпретираме со помош на ориентирана права. На секој реален број му придружуваме една и само една точка од правата и обратно, на секоја точка од ориентираната права одговара само еден број. На бројот 0 ја придружуваме точката O, а потоа десно од неа избираме точка E на која го придружуваме бројот 1, каде што точката E е оддалечена од точката O една должинска единица. На секоја точка T од таа права одговара реален број x, кој го нарекуваме апциса на таа точка, каде што x е оддалеченоста на T од O и се наоѓа на десно од O. На P придружуваме реален број $-x$, каде што точката P е оддалечена x должински единици и се наоѓа на лево од O.

На овој начин е поставен координатен систем на ориентираната права.

За едно подмножество S од множеството на реални броеви велиме дека е ограничено од горе ако постои M, таков што за секој $x \in S$, важи $x \leq M$.

За константата M велиме дека е горна граница. Јасно, таа не е единствена, бидејќи секој реален број поголем од M е исто така горна граница.

Подмножеството S од множеството на реални броеви е ограничено од долу ако постои реален број m таков што за секој $x \in S$ важи $m \leq x$. За бројот m велиме дека е долна граница на множеството S. Долната граница не е единствена, бидејќи секој реален број кој е помал од m е исто така долна граница.

За подмножеството S од реални броеви велиме дека е ограничено ако постојат реални броеви m и M така што за секој $x \in S$ важи $m \leq x \leq M$. Значи множеството S е ограничено ако е ограничено од долу и ограничено до горе.

Со помош на координатниот систем на правата може да се воспостави биективно пресликување помеѓу реалните броеви и точките од правата. Тоа значи дека на секој точка од правата одговара еден и само еден реален број. Последното својство на реалните броеви сакаме да го поврземе интуитивно со непрекинатоста на правата: како било да ја "пресечеме" правата секогаш ќе биде пресечена една точка. Нека множеството од реални броеви го поделиме на два интервали. Тогаш не може истовремено двата интервали да бидат отворени интервали, што со слободен јазик значи дека правата е непрекината, т.е. никаде нема дупка.

Покрај геометрискиот приказ на множеството на реалните броеви, постојат и други начини да се опише непрекинатоста на множеството од реални броеви. Да спомeнеме дека ова својство не може да се докаже со помош на веќе дадените аксиоми, па непрекинатоста на множеството на реалните броеви мора да биде аксиома.

Непрекинатоста на множеството на реалните броеви може да се направи на неколку начина.

Бидејќи едно ограничено множество од горе има повеќе горни граници и едно ограничено множество од долу има повеќе долни граници, од интерес е да ги разгледуваме најмалата горна граница, односно најголемата долна граница.

Ако непразно множество S има најмала горна граница, тогаш таа граница ја нарекуваме *супремум* на тоа множество и ја означуваме со $\sup S$.

Ако непразно множество S има најголема долна граница, таа граница ја нарекуваме *инфимум* на тоа множество и ја означуваме со $\inf S$.

Дали некое множество има супремум или инфимум не е можно да се одговори со помош на веќе дадените аксиоми за реалните броеви.

Следната аксиома за непрекинатост на реалните броеви е позната како Дедекиндова аксиома.

(A_{15}) Ако S е непразно подмножество од множеството на реалните броеви, кое е ограничено од горе, тогаш S има супремум во $\mathbb{R}$.

Пример 1. Нека $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$. Тогаш S е ограничен со $-3 \leq x \leq 2$ за секој $x \in S$. Најмалата горна граница за множеството S е реалниот број $\sqrt{2}$, а најголемата горна граница на ова множество е $-\sqrt{2}$. Според тоа, ова множество S е ограничено множество и има инфимум и супремум во множеството $\mathbb{R}$, т.е. $\inf S = -\sqrt{2}$ и $\sup S = \sqrt{2}$.

Од друга страна, множеството $K = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ нема супремум и инфимум во множеството на рационалните броеви. Па според ова, множеството од рационалните броеви не ја задоволува аксиомата (A_{15}).

Ако $\sup S$ е елемент на множеството S, тогаш велиме дека $\sup S$ е *максимален елемент* или најголем елемент во множеството S, кој обично го означуваме со $\max S$.

Ако $\inf S$ е елемент на множеството S, тогаш велиме дека $\inf S$ е најмал или *минимален елемент* во множеството S. Означуваме $\min S$.

Да забележиме дека секое ограничено подмножество од множеството на реалните броеви секогаш има инфимум и супремум, но не мора да има максимален или минимален елемент.

На пример, за интервалот $S = (2,4]$, важи

$\inf S = 2$, $\sup S = \max S = 4$, додека $\min S$ не постои.

Еквивалентно тврдење на аксиомата (A_{15}) е тврдењето

$(A_{15})'$ Ограничено множество од долу има инфимум.

На крај, ќе спомeнеме две важни теореми кои следуваат од аксиомата на непрекинатост на множеството на реалните броеви. Тоа се Архимедовата теорема и Канторовата теорема. Може да се покаже и дека овие две теореми заедно ја даваат аксиомата (A_{15}), па затоа често овие две теореми се земаат заедно на местото на аксиомата (A_{15}) за непрекинатост на реалните броеви.

Нивната геометриската интерпретација е она што дава предност кај многу автори да ги земат за аксиома за непрекинатост на местото на (A_{15}).
Геометриски, Архимедовата теорема тврди дека ако имаме произволно мала должина, тогаш со таа мала должина можеме да надминеме произволно голема должина со нејзино нанесување голем број на пати.

Теорема (Теорема на Архимед). Ако $x \in \mathbb{R}$ и $x > 0$, тогаш за секој $y \in \mathbb{R}$ постои природен број $n \in \mathbb{N}$, таков што $nx > y$.

Доказ. Ако $y \leq 0$, тогаш нека бројот n е еднаков на 1. Во овој случај $1 \cdot x = x > y$. Нека сега $y > 0$ и нека претпоставиме дека Архимедовата теорема не важи. Тоа значи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, $nx < y$. Според тоа, множеството $S = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ е ограничено од горе и има супремум. Нека $\sup S = L$. Тоа значи дека за секој природен број n важи $(n+1)x < L$. Оттука, $nx < L - x$ за секој природен број n, од каде што добиваме дека L не е супремум на S. Според тоа множеството S не е ограничено од горе, што е контрадикција. Добиваме точност на Архимедовата теорема. □

Теорема (Теорема на Кантор). Нека на секој природен број n му е придружен затворениот интервал од реални броеви $[a_n, b_n]$ и нека за $m \leq n$ важи $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$. Тогаш

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing .$$

Доказ. Нека означиме со $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ и со $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Најпрво ќе покажеме дека на правата со координатен систем множеството A е лево од множеството B, односно за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи $a_m \leq b_n$. Ако $m < n$, тогаш од претпоставкаката дека интервалите се вложени важи $a_m \leq b_m \leq b_n$. Ако $m > n$ тогаш $a_m \leq a_n \leq b_n$. Множеството A е ограничено од горе, па според аксиомата (A_{15}) постои супремум на тоа множество. Нека тој број е a. Аналогно, множеството B е ограничено од долу, па според истата аксиома имаме дека постои инфимум на тоа множество. Нека тој број е b. Бројот b не е помал од ниту еден a_n, $n \in \mathbb{N}$. Ако тоа не е случај, тогаш a_n не е некоја од долните граници на множеството B, а тоа значи дека постои некој b_m помал од a_n што не е точно. Па, за секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b$. Според тоа за секој $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b \leq b_n$, а тоа значи дека бројот b се наоѓа во пресекот на сите интервали $[a_n, b_n]$. Всушност во пресекот на сите интервали е целиот интервал $[a, b]$ кој може да дегенерира во една точка. Па, теоремата е докажана.

Овде заради сложеноста, доказот дека од овие две теореми следува аксиомата за непрекинатост на реалните броеви (A_{15}) ќе биде изоставен. □

1.10. Апсолутна вредност

Апсолутната вредност од реален број x се означува со $|x|$ и се дефинира како

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Од самата дефиниција можеме да заклучиме дека $|x| \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

Некои од својствата кои ќе бидат наведени во продолжение ќе ги докажеме, (поточно Својство 1), а останатите докази ќе бидат изоставени бидејќи се едноставни.

Својство 1. (неравенство на триаголник) За секои $x,y\in\mathbb{R}$, важи

$$|x+y|\leq|x|+|y|.$$

Доказ. Потребно е да разгледаме неколку ситуации кои можат да настанат.

1.1 Нека $x\geq 0, y\geq 0$. Тогаш

$$|x+y|=x+y=|x|+|y|.$$

1.2 Нека $x<0, y<0$. Тогаш

$$|x+y|=-(x+y)=(-x)+(-y)=|x|+|y|.$$

1.3 Нека $x<0, y>0, x+y>0$. Тогаш

$$|x+y|=x+y=-(-x)+y=|y|-|x|<|x|+|y|.$$

1.4 Нека $x<0, y>0, x+y<0$. Па,

$$|x+y|=-(x+y)=-x-y=(-x)-y=|x|-|y|<|x|+|y|,$$

со што својството е докажано.

Својство 2. За секои $x,y\in\mathbb{R}$, важи $|x-y|\geq|x|-|y|$.

Својство 3. За секои $x,y\in\mathbb{R}$, важи $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

Својство 4. За секои $x,y\in\mathbb{R}$, важи $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$, за $y\neq 0$.

Пример 1. Реши ја равенката $|x-1|+|x+2|=3$.

Решение. Бидејќи $x-1=0$, за $x=1$ и $x+2=0$, за $x=-2$, ќе разгледаме три ситуации: $x\in(-\infty,-2]$, $x\in(-2,1]$, $x\in(1,+\infty)$.

Нека $x\in(-\infty,-2]$. Тогаш $|x-1|=-(x-1)$ и $|x+2|=-(x+2)$. Па, почетната равенка добива облик,

$$-(x-1)-(x+2)=3,$$
$$-2x-1=3$$

чие решение е $x=-2$. Бидејќи $-2\in(-\infty,-2]$, ова е решение на равенката $|x-1|+|x+2|=3$.

Нека $x\in(-2,1]$. Имаме, $|x-1|=-(x-1)$, $|x+2|=(x+2)$. Почетната равенка сега е

$$-(x-1)+(x+2)=3,$$

од каде што добиваме дека $3=3$, што значи дека почетната равенка има бесконечно многу решенија, односно сите x кои припаѓаат на интервалот $(-2,1]$.

Сега нека $x\in(1,+\infty)$. Тогаш, $|x-1|=x+1$, $|x+2|=x+2$. Па, почетната равенка добива облик,

$$x-1+x+2=3$$

што е еквивалентно со $2x=2$, т.е. $x=1$. Бидејќи $1\notin(1,+\infty)$, добиваме дека $x=1$ не е решение во овој случај.

Да заклучиме решенијата на почетната равенка е унија од решенијата на равенката во секој од разгледаните случаи. Значи решенија на равенката $|x-1|+|x+2|=3$ се сите $x\in[-2,1]$.

1.11. Пребројливи и непребројливи множества

Секое множество за коешто постои биекција меѓу него и множеството на природни броеви се нарекува *пребројливо множество*. Пребројливите множества имаат ист кардинален број (се еквивалентни) со множеството од природни броеви. Кардиналниот број на множеството на природни броеви се означува со χ_0 (алеф нула). Ако од дадено бесконечно множество не постои биекција во множеството природни броеви, тогаш тоа множество се нарекува *непребројливо множество*. Пример за непребројливо множество е множеството од реални броеви. Кардиналниот број на множеството на реални броеви е c (*континуум*). Притоа, се дефнира $\chi_0 < c$.

Пример 1. Множеството на сите парни природни броеви е пребројливо множество, односно има ист кардинален број како множеството на природни броеви. Нека со $2\mathbb{N}$ го означиме множеството од сите парни природни броеви. Тогаш пресликувањето $\phi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, дефинирано со $\phi(n) = 2n$ е биекција помеѓу $2\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$.

Пример 2. Множеството од сите цели броеви $\mathbb{Z}$ е пребројливо множество. Навистина,

$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, дефинирано со $\varphi(z) = \begin{cases} 1-2z, \, z \le 0 \\ 2z, \, z > 0 \end{cases}$ е биекција од $\mathbb{Z}$ во $\mathbb{N}$.

Пример 3. Множеството од сите рационални броеви $\mathbb{Q}$ е пребројливо множество. □

Пример 4. Интервалот $[0,1]$ е непребројливо множество.

Пример 5. Множеството од сите ирационални броеви е непребројливо множество.

Пример 6. Пресликувањето $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ е биекција од множеството реални броеви на отворениот интервал $(-1,1)$.

1.12. Биномна формула

За да ја формулираме Биномната формула, а потоа и докажеме, претходно ќе воведеме некои поими. Тие поими подоцна ќе бидат искористени за поконцизен запис на Биномната формула и нејзиното докажување. Дефинираме факториел на бројот n , за секој природен број n ,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 .$$

На пример, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Иако 0 не е природен број, сепак по дефиниција земаме $0! = 1$.

Биномен коефициент,

$$\binom{n}{k}, \text{ за } n \in \mathbb{N}, \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \; 0 \le k \le n ,$$

се нарекува бројот

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Да забележиме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1 \quad \text{и} \quad \binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n.$$

На пример,

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 3!}=10.$$

Биномниот коефициент е еднаков на бројот на сите k елементни подмножества од множество со n елементи. Следните две својства на биномните коефициенти се од особена корист кога станува збор за Биномната формула.

Својство 1. За секој $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0\le k\le n$, важи $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Доказ. Од дефиницијата на биномни коефициенти имаме $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ и $\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$, од каде е очигледна горната еднаквост. □

Својство 2. За секој $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0\le k\le n$, важи

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Доказ. Имаме,

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}.\ \square$$

Биномната формула, за $n\in\mathbb{N}$ гласи:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n.$$

Доказ. Доказот ќе биде даден со помош на математичка индукција.

За $n=1$, имаме $(a+b)^1=a+b=\binom{1}{0}a+\binom{1}{1}b$, од каде што добиваме дека важи Биномната формула. Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=s$, односно важи дека

$$(a+b)^s=\binom{s}{0}a^s+\binom{s}{1}a^{s-1}b+\binom{s}{2}a^{s-2}b^2+\ldots+\binom{s}{k}a^{s-k}b^k+\ldots+\binom{s}{s}b^s.$$

Тогаш, за $n=s+1$, имаме

$$(a+b)^{s+1}=(a+b)(a+b)^s=$$

$$=(a+b)\left(\binom{s}{0}a^s+\binom{s}{1}a^{s-1}b+\binom{s}{2}a^{s-2}b^2+\ldots+\binom{s}{k}a^{s-k}b^k+\ldots+\binom{s}{s}b^s\right)=$$

$$=\binom{s}{0}a^{s+1}+\binom{s}{1}a^{s}b+\binom{s}{2}a^{s-1}b^{2}+\ldots+\binom{s}{k}a^{s-k+1}b^{k}+\ldots+\binom{s}{s}ab^{s}+$$

$$+\binom{s}{0}a^{s}b+\binom{s}{1}a^{s-1}b^{2}+\binom{s}{2}a^{s-2}b^{3}+\ldots+\binom{s}{k}a^{s-k}b^{k+1}+\ldots+\binom{s}{s}b^{s+1}=$$

$$=\binom{s+1}{0}a^{s+1}+\left(\binom{s}{0}+\binom{s}{1}\right)a^{s}b+\left(\binom{s}{1}+\binom{s}{2}\right)a^{s-1}b^{2}+\ldots+$$

$$+\left(\binom{s}{k}+\binom{s}{k+1}\right)a^{s-k}b^{k+1}+\ldots+\binom{s+1}{0}b^{s+1}=$$

$$=\binom{s+1}{0}a^{s+1}+\binom{s+1}{1}a^{s}b+\binom{s+1}{2}a^{s-1}b^{2}+\ldots+\binom{s+1}{k+1}a^{s-k}b^{k+1}+\ldots+\binom{s+1}{0}b^{s}.$$

Последниот ред е добиен со примена на својството 2.

Добивме дека тврдењето е точно за $n=k+1$, па согласно принципот на математичка индукција имаме дека Биномната формула е точна за секој природен број. □

Доколку сакаме да го најдеме $k+1$-от член од равојот на биномот $(a+b)^n$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0\le k\le n$, тоа може да го направиме со формулата

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}.$$

Биномните коефициенти во развојот на биномот $(a+b)^n$ може да се определат и со помош на Паскаловиот триаголник:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Секој ред во Паскаловиот триаголник почнува и завршува со 1, а секој член во средина е збир на броевите кои се наоѓаат над него.

Пример 1. Развиј го биномот $(x-2y)^5$.

Решение. Користејќи ја Биномната формула имаме

$$(x-2y)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4(-2y)+\binom{5}{2}x^3(-2y)^2+\binom{5}{3}x^2(-2y)^3+\binom{5}{4}x(-2y)^4+$$
$$+\binom{5}{5}(-2y)^5=x^5-10x^4y+40x^3y^2-80x^2y^3+80xy^4-32y^5.$$

Пример 2. Определи го оној член во развојот на биномот $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^8$ кој не го содржи x.

Решение. За членот во развојот на биномот да не го содржи x, степенот на x треба да биде 0. Тогаш, $k+1$ -иот член од развојот на биномот е

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}=a^{n-k}b^{k}.$$

Биномот $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{8}$ го трансформираме како

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{8}=\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^{8}=\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}\right)^{8},$$

од каде што $a=x^{\frac{1}{2}}$, $b=-x^{-\frac{3}{2}}$, $n=8$. Согласно ова, добиваме

$$T_{k+1}=\binom{8}{k}x^{\frac{1}{2}(8-k)}(-1)^{k}x^{-\frac{3}{2}k}=Cx^{0}.$$

Делејќи ги двете страни со константата C, која да забележиме е таква што $C=\binom{8}{k}(-1)^{k}$, добиваме

$$x^{\frac{1}{2}(8-k)}x^{-\frac{3}{2}k}=x^{0},$$

од каде што

$$x^{\frac{1}{2}(8-k)-\frac{3}{2}k}=x^{0}.$$

Последната еднаквост е можна само ако

$$\frac{1}{2}(8-k)-\frac{3}{2}k=0$$
$$8-k-3k=0,$$

односно $k=2$. Значи, членот кој го бараме е третиот член од развојот на биномот, т.е.

$$T_{3}=\binom{8}{2}x^{\frac{1}{2}\cdot 6}(-1)^{2}x^{-\frac{3}{2}\cdot 2}=28.$$

Пример 3. Збирот на биномните коефициенти од развојот на биномот е 64. Најди го оној член од развојот на биномот $\left(2x\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x}\right)^{n}$ кој го содржи x.

Решение. Збирот на биномните коефициенти е 2^{n}. Тоа следува од

$$2^{n}=(1+1)^{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}.$$

Значи, $2^{n}=64$, па $n=6$.

Трансформирајќи го биномот $\left(2x\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x}\right)^{n}$ имаме

$$\left(2x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}\right)^{n}=\left(2x^{\frac{4}{3}}-x^{-1}\right)^{n}.$$

Тогаш
$$a=2x^{\frac{4}{3}},\ b=-x^{-1},\ n=6\,.$$
Сега,
$$\binom{6}{k}2^{6-k}x^{\frac{4}{3}(6-k)}(-1)^k x^{-k}=Cx^1\,.$$
Делејќи ги двете страни со $C=\binom{6}{k}2^{6-k}(-1)^k$, добиваме
$$x^{\frac{4}{3}(6-k)-k}=x^1\,.$$
Оваа еднаквост е исполнета само ако
$$\frac{4}{3}(6-k)-k=1\,,$$
од каде што
$$24-4k-3k=3\,,$$
па $k=3$. Значи, бараниот член е четвртиот член
$$T_4=\binom{6}{3}2^3x^{\frac{4}{3}\cdot 3}(-1)^3x^{-1\cdot 3}=-8\cdot 20\cdot x=-160x.\ \square$$

1.13. Комплексни броеви

Не секоја равенка во множеството на реални броеви има решение. Најчест пример за таква равенка е равенката $x^2+1=0$. Всушност оваа равенка ја дава идејата за воведување на ново множество од броеви кое е поголемо од множеството на реални бреови, притоа ги содржи сите реални броеви.
Множеството на комплексни броеви се означува со $\mathbb{C}$ и се дефинира како
$$\mathbb{C}=\{x+iy\ :\ x,y\in\mathbb{R}, i^2=-1\}\,.$$

Обликот на комплексниот број $z=x+iy$ го нарекуваме алгебарски облик. Уште, означуваме $\operatorname{Re} z=x$ за *реалниот дел на комплексниот број* z и $\operatorname{Im} z=y$ за *имагинарниот дел* на комплексниот број z.

Ако имагинарниот дел на комплексиниот број z е нула, т.е. $\operatorname{Im} z=0$, тогаш комплексниот број е реален број.

Ако реалниот дел на комплексниот број е нула, т.е. $\operatorname{Re} z=0$ тогаш станува збор за чисто имагинарен број.

Два комплексни броја $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ се еднакви ако и само ако $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Во продолжение ќе бидат дефинирани операциите со комплексни броеви.

Нека $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ се два комплексни броеви. *Збирот* на два комплексни броја z_1 и z_2 е број $z=z_1+z_2$, за кој важи
$$z=x+iy=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\,.$$

Значи, два комплексни броја се собираат на тој начин што посебно се собираат реалните делови и тоа е реален дел на збирот и посебно се собираат имагинарните делови и тоа е имагинарниот дел на збирот.

Комплексниот број $z=0+i0$ е таков што за секој z_1 важи $z+z_1=z_1+z=z_1$.

Разлика на два комплексни броја z_1 и z_2 е комплексен број z, за кој важи $z_1=z_2+z$. Обично комплексниот број z во овој случај го означуваме со $z=z_1-z_2$. Од равенството $z_1=z_2+z$ имаме

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2+x+iy$$

$$x_1+iy_1=(x_2+x)+i(y_2+y)$$

од каде што имајќи ја предвид дефиницијата за еднаквост на комплексни броеви се добива

$$x_1=x_2+x \text{ и } y_1=y_2+y,$$

па јасно

$$x=x_1-x_2,\ y=y_1-y_2.$$

Значи, комплексниот број z кој е разлика на комплексните броеви $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ е еднаков на

$$z=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Производ на два комплексни броја z_1 и z_2 е еднаков на комплексен број $z=z_1z_2$, кој е еднаков на

$$z=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+ix_2y_1+i^2y_1y_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$z=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Да заклучиме, два комплексни броја се множат на тој начин што реалниот дел во производот е разлика од производите на реалните делови и имагинарните делови, додека имагинарниот дел е збир од производите на реалниот дел од првиот и имагинарниот дел од вториот и имагнарниот дел од првиот и реалниот дел од вториот комплксен број.

За комплексниот број z велиме дека е *количник* на комплексните броеви z_1 и z_2, $z_2\neq 0$, ако $z_1=z\cdot z_2$. Нека комплексните броеви z_1 и z_2 се запишани во алгебарски облик, т.е. нека

$$z_1=x_1+iy_1 \text{ и } z_2=x_2+iy_2.$$

Тогаш количникот $z=x+iy$, ќе го определиме од дефиницијата, односно од равенката $z_1=z\cdot z_2$. Заменувајќи во неа добиваме,

$$x_1+iy_1=(x+iy)(x_2+iy_2)$$

$$x_1 + iy_1 = xx_2 - yy_2 + i(xy_2 + x_2 y)\,,$$

од каде што

$$x_1 = xx_2 - yy_2$$

$$y_1 = xy_2 + x_2 y\;.$$

Па го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1 \\ y_2 x + x_2 y = y_1 \end{cases},$$

чиешто решение е

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\;,\; y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\,.$$

Значи,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\,.$$

Истото може да се добие доколку $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ го рационализираме, односно иманителот го трансформираме така што имагинарната единица i ја снема од именителот. Тоа може да го постигнеме ако и броителот и именителот ги помножиме со $x_2 - iy_2$. Тогаш добиваме,

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\cdot\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\,,$$

односно

$$z = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\,.$$

На крај да забележиме дека вториот начин за делење на два комплексни броја е побрз и поедноставен и тој начин (метод) се користи најчесто.

Конјугиран комплексен број на бројот $z = x + iy$ е бројот

$$\bar{z} = x - iy\,.$$

Со директна проверка се докажуваат следниве тврдења

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$
4) $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$
5) $\bar{\bar{z}} = z$
6) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$

8) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2},\ z_2 \neq 0,$

каде што z, z_1, z_2 се комплексни броеви.

Под *модул* на комплексен број $z = x + iy$ ќе го подразбираме бројот

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Некои од поважните својства на модулот на комплексен број $z = x + iy$ се:

1) $|\mathrm{Re}\, z| = |x| \leq |z|$

2) $|\mathrm{Im}\, z| = |y| \leq |z|$

3) $|z| = |\overline{z}|$

4) $|z| = 0$ ако и само ако $z = 0$

5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

6) Неравенство на триаголник. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Доказот на својствата 1) - 4) е едноставен, па само ќе ги дадеме доказите на 5) и 6).

5) Нека $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

Со директна проверка се добива

$$\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = \\
&= x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 = \\
&= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) = \\
&= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 .
\end{aligned}$$

Од овде, јасно е дека $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

6) Нека z_1 и z_2 се произволни комплексни броеви. Тогаш

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = \\
&= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).\ \square
\end{aligned}$$

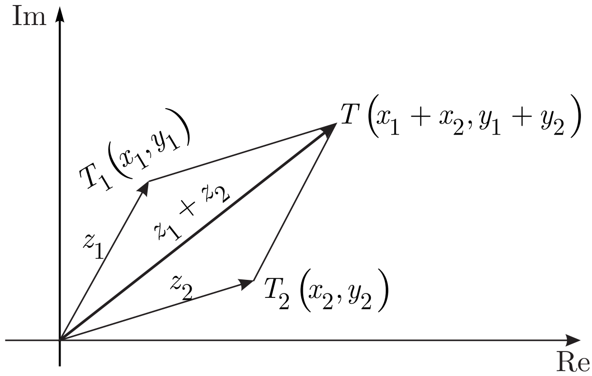
Притоа, беа користени својставата на конјугиран комплексен број 1), 3) и 5). Дополнително, да забележиме дека важи

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2| .$$

Тогаш имаме

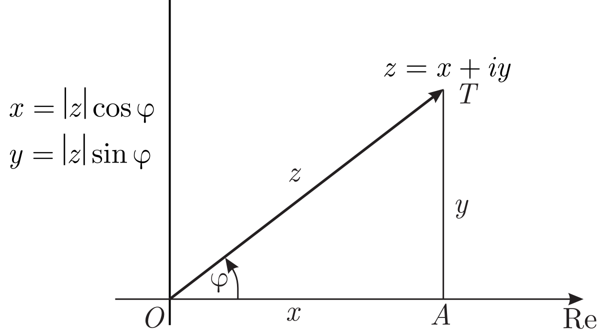
$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$ од каде што јасно важи неравенството на триаголник за комплексни броеви.

Паротот од реални броеви (x,y) можеме да го поистоветиме со комплексниот број $z = x + iy$, па комплексните броеви можеме да ги претставиме како точки во рамнината во која е поставен правоаголен координатен систем. Притоа на $x-$оската се нанесува реалниот дел на z, и таа оска се вика реална. На y-оската се нанесува имагинаниот дел на z и таа оска се нарекува имагинарна. Таквата рамнина ја нарекуваме комплексна рамнина или Гаусова рамнина. На следниот цртеж, графички е илустрирано собирањето на комплексни броеви.



Бидејќи секој комплексен број е еднозначно определен со реалниот и имагинарнот дел, од начинот на кој ги нанесуваме комплексните броеви во комплексната раминина можеме да заклучиме дека секоја точка од рамнината еднозначно определува комплексен број и обратно.

На точката $T(x,y)$ со кој е определен комплексниот број $z = x + iy$, придружуваме *модул* на комплексен број, кој всушност означува оддалеченост на точката T од координатниот почеток и *аргумент*, односно аголот во радијани помеѓу позитивниот дел на x- оската и векторот $\overrightarrow{OT}$. Аргументот на комплексинот број се означува и со $\arg z$ кога ја земаме главната вредност на аголот, односно $0 \le \arg z \le 2\pi$. Овде тој агол е означен со φ.



Од правоаголниот триаголник OAT имаме

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\rho}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\rho},$$

од каде што,

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi .$$

Па, комплексниот број $z = x + iy$, можеме да го запишеме како

$$z = \rho(cso\varphi + \sin\varphi) .$$

Овој запис ќе го нарекуваме тригонометриски облик на комплексниот број

$$z = x + iy .$$

Сега, ќе дадеме одговор на прашањето како се преминува од алгебарски облик на комплексен број во тригонометриски облик.
Да забележиме дека важи

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} .$$

Па, последните две равенки се равенки со кои комплексниот број даден во алгебарски облик се трансформира во комплексен број во тригонометриски облик.

Два комплексни броја

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

запишани во тригонометриски облик се еднакви ако и само ако

$$\rho_1 = \rho_2 \text{ и } \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi ,$$

каде што k е цел број.

Воведувањето на тригонометриски облик на комплексен број има свои предности. Една од тие предности е дефинирањето на множење, степенување, делење и коренување на комплексни бреови. Кога комплексните броеви се запишани во тригонометриски облик овие дефиниции се многу едноставни и својствата поврзани со нив многу полесно се докажуваат.

Нека имаме два комплексни броја запишани во тригонометриски облик,

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) .$$

Множејќи ги овие броеви добиваме,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) .$$

Значи,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

односно, производот на два комплексни броја има модул кој е еднаков на производот на модулите на двата броја и аргумент кој е еднаков на збирот од аргументите на двата комплексни броја.

Со помош на принципот на математичка индукција можеме да покажеме дека

$$z_1z_2\cdots z_n=\rho_1\rho_2\cdots\rho_n(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)).$$

Од овде можеме да го уочиме и начинот на кој ќе степенуваме комплексен број, ставајќи $z_1=z_2=\ldots=z_n=z$.

Па, формулата за степенување на комплексен број , каде што n е цел број е

$$z^n=\rho^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)).$$

Последната формула е позната и како Моаврова формула.

Ќе ја докажеме Моавровата формула. Доказот ќе го изведеме со помош на математичка индукција. За $n=1$, имаме $z^1=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, што е тригонометрискиот облик на комплексниот број z. Претпоставуваме дека формулата е точна за $n=k$, односно важи

$$z^k=\rho^k(\cos(k\varphi)+i\sin(k\varphi)).$$

За $n=k+1$, имаме

$$\begin{aligned}
&z^{k+1}=z\cdot z^k=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot\rho^k(\cos(k\varphi)+i\sin(k\varphi))=\\
&=\rho^{k+1}(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos(k\varphi)+i\sin(k\varphi))=\\
&=\rho^{k+1}(\cos\varphi\cos(k\varphi)-\sin\varphi\sin(k\varphi)+i(\sin\varphi\cos(k\varphi)+\sin(k\varphi)\cos\varphi))=\\
&=\rho^{k+1}(\cos(k\varphi+\varphi)+i\sin(k\varphi+\varphi))=\rho^{k+1}(\cos((k+1)\varphi)+i\sin((k+1)\varphi))
\end{aligned}$$

Согласно принципот на математичка индукција заклучуваме дека тврдењето е точно за секој природен број n.

За $n=-1$ се добива

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}=\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi).$$

Ако $n=-m$ е негативен цел број, се добива

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\left((\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-1}\right)^m=$$

$$\left(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\right)^m=\cos(-m\varphi)+i\sin(-m\varphi).$$

Со ова добивме точност и за било кој n негативен број.

Пример 1. Пресметај $(-1+i\sqrt{3})^6$.

Решение. Прво комплексниот број $z=-1+i\sqrt{3}$ ќе го запишеме во тригонометриски облик.
Имаме,

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2,$$

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = arctg(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Значи, $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Користејќи ја Моавровата формула, добиваме

$$(-1+i\sqrt{3})^6 = \left(2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^6 = 2^6(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 2^6 = 64.$$

Пример 2. Докажи дека

$$(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Овде ќе ја користиме Моавровата формула. Претходно да забележиме дека комплексниот број $z = 1+\cos\alpha + i\sin\alpha$ не е запишан во тригонометриски облик. Заради тоа,

$$z = 1+\cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} + i\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Сега применувајќи ја Моавровата формула имаме

$$z^n = (1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2}),\ n\in\mathbb{N}.$$

Сега нека повторно имаме два комплексни броја во тригонометриски облик, $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ и $z_2 \neq 0$. Тогаш

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\cdot\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

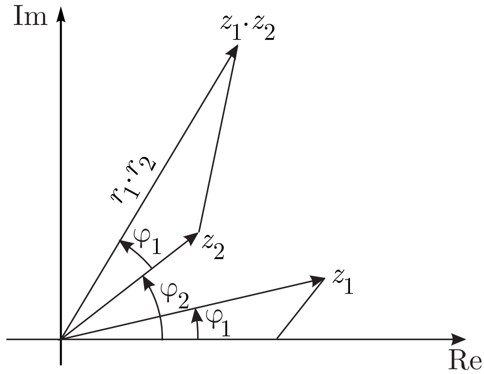
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

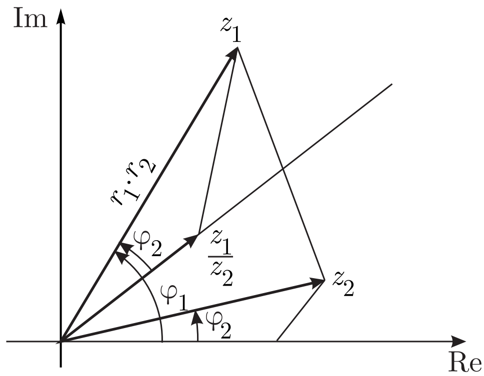
Значи,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Количникот на два комплексни броја има модул кој е количник од модулите на тие два комплексни броја, додека аргументот на количникот е разлика од аргументите на броевите чиј количник се бара.

На следниве цртежи и графички се дадени операциите множење и делење на комплексни броеви.





Нека е даден комплексниот број $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. За комплексниот број $\omega = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$, велиме дека е n- ти корен на комплексниот број z, ако $\omega^n = z$.

Од дефиницијата на n- ти корен на комплексниот број z добиваме

$$\rho^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Оттука,

$$\rho^n = r \;\Rightarrow\; \rho = \sqrt[n]{r},$$

$$\varphi + 2k\pi = n\phi,$$

односно

$$\phi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

каде што k е цел број.

Значи,

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\; k \in \mathbb{Z}$$

Во продолжение, ќе докажеме дека бројот на n- ти корени на комплексниот број z е точно n.

Според основната теорема во аритметиката секој број $k \geq n$ може да се запише како $k = nq + p$, каде што $0 \leq p < n$.

Тогаш имаме дека

$$\varphi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2\pi(nq+p)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi p}{n} + 2\pi q = \varphi_p + 2\pi q\,,$$

односно,

$$\varphi_k - \varphi_p = 2\pi q\,,$$

од каде што добиваме дека комплексните броеви ω_k и ω_p се еднакви. Тоа значи дека имаме најмногу n корени. Сега, ќе докажеме дека сите тие n корени се различни меѓу себе. Нека $\omega_t = \omega_s$, $0 < t < s < n$. Па,

$$\frac{\varphi + 2\pi t}{n} = \frac{\varphi + 2\pi s}{n} + 2k\pi\,,$$

каде што $k \in \mathbb{Z}$. Оттука,

$$t - s = kn\,,\ k = 0\,.$$

Ова е можно само кога $t = s$.

Значи, n-тиот корен има n различни вредности.

Геометриски n-тиот корен на комплексниот број z се темиња на правилен n-аголник впишан во кружница со радиус $\sqrt[n]{r}$. Темињата на тој многуаголник се наоѓаат на аголно растојание $\frac{2\pi}{n}$.

Пример 3. Пресметај ја вредноста на коренот $\sqrt[3]{2i}$.

Решение. Бројот $z = 2i$ го запишуваме во тригонометриски облик. Имаме

$$\rho = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2\,,$$

$$\varphi = arctg\frac{2}{0} = \frac{\pi}{2}\,,$$

па,

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Следува,

$$\omega_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$\omega_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi + 4\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{6}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-\sqrt{3} + i)$$

$$\omega_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi + 8\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 8\pi}{6}) = -i\sqrt[3]{2}\,.$$

Пример 4. Најди ги решенијата на равенката $z^5 + 32 = 0$.

Решение. За да ги најдеме решенијата на оваа равенка потребно е да ги најдеме петтите корени на -32, т.е. $z = \sqrt[5]{-32}$. За да го направиме тоа, мораме комплексниот број $z = -32$ да го запишеме во тригонометриски облик. Па,

$$\rho=\sqrt{(-32)^2+0^2}=32$$

$$\varphi=arctg\frac{0}{-32}=\pi .$$

Значи $z=32(\cos\pi+i\sin\pi)$. Тогаш решенијата на равенката се

$$\omega_0=\sqrt[5]{32}(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})=2(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$$

$$\omega_1=\sqrt[5]{32}(\cos\frac{\pi+2\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{5})=2(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5})$$

$$\omega_2=\sqrt[5]{32}(\cos\frac{\pi+4\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{5})=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2$$

$$\omega_3=\sqrt[5]{32}(\cos\frac{\pi+6\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{5})=2(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5})$$

$$\omega_4=\sqrt[5]{32}(\cos\frac{\pi+8\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+8\pi}{5})=2(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}).$$

На крај да забележиме дека во конкретната ситуација, вредностите $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ се темиња на правилен петоаголник впишан во кружница со радиус 2.

Уште еден начин на запишување на комплексни броеви е во поларен облик (експоненцијален облик, Ојлеров облик),

$$z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi}.$$

Согласно, погорната дискусија важи

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Во теоријата на комплексни функции се дефинира и експоненцијална функција со комплексен аргумент

$$e^z=e^{x\pm iy}=e^x\cdot e^{\pm iy}=e^x(\cos y\pm i\sin y).$$

За оваа функција важи формулата $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.

На пример, $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$.

1.14. Решени задачи

1. Да се решат неравенките:

а) $|x-3|<5$ б) $|x+2|+|x-2|\le 12$ в) $|x-1|<|x+1|$

Решение.

а) $\left|x-3\right|<5 \Leftrightarrow -5<x-3<5 \Leftrightarrow -2<x<8$. Значи , решението на неравенката е интервалот $(-2,8)$, т.е. $x \in (-2,8)$.

б) $\left|x+2\right|+\left|x-2\right| \leq 12$

За да се ослободиме од апсолутните вредности и го решиме неравенството, треба да знаеме во кои интервали функциите $y_1 = x+2$ и $y_2 = x-2$ се позитивни, во кои се негативни. Затоа ќе ги најдеме нулите на функциите y_1 и y_2 и со нив ќе го поделиме множеството реални броеви на интервали во кои ќе ги разгледуваме знаците на функциите y_1 и y_2. Нула на функцијата y_1 е $x=-2$, а на y_2 е $x=2$. Ќе ги разгледуваме знаците на функциите y_1 и y_2 во интервалите $(-\infty,-2]$, $(-2,2)$ и $[2,\infty)$.

Значи имаме 3 случаи:

1. На интервалот $(-\infty,-2]$ $y_1 \leq 0, \quad y_2 < 0$, па неравенката ќе ја решиме ослободувајќи се од апсолутните вредности:

$$-x-2-x+2 \leq 12 \Leftrightarrow -2x \leq 12 \Leftrightarrow x \geq -6$$

2. На интервалот $(-2,2)$ $y_1 \geq 0, \quad y_2 \leq 0$, па неравенката ќе гласи:

$x+2-x+2 \leq 12 \Leftrightarrow 4 \leq 12$, значи решение е секое x од $(-2,2)$.

3.На интервалот $[2,\infty)$ $y_1 > 0, \quad y_2 \geq 0$, па неравенката ќе гласи:

$$x+2+x-2 \leq 12 \Leftrightarrow 2x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 6$$

Решение на неравенката ќе биде интервалот кој е унија од решенијата од сите 3 случаи, т.е. $x \in [-6,6]$.

в) $\left|x-1\right| < \left|x+1\right|$

Решаваме слично како под б). Ги наоѓаме нулите на функциите $y_1 = x-1$ и $y_2 = x+1$. Тоа се $x=1$ и $x=-1$, соодветно. Ги разгледуваме интервалите $(-\infty,-1]$, $(-1,1)$ и $[1,\infty)$ и за секој од нив ја решаваме неравенката:

1.На интервалот $(-\infty,-1]$ $y_1 < 0, \quad y_2 \leq 0$, па неравенката ќе гласи:

$-x+1<-x-1 \Leftrightarrow 1<-1$ што е контрадикторно неравенство, што значи на овој интервал неавенката нема решение.

2. На интервалот $(-1,1)$ $y_1 \leq 0, \quad y_2 \geq 0$, па неравенката ќе гласи:

$-x+1<x+1 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$. Значи, решението на овој интервал е подинтервалот $x>0$.

3. На интервалот $[1,\infty)$ $y_1 \geq 0, \quad y_2 > 0$, па неравенката ќе гласи:

$x-1<x+1 \Leftrightarrow -1<1$. Бидејќи добивме точно неравенство кое не зависи од x, решение за овој интервал се сите вредности на x од од овој интервал, т.е. $x \in [1,\infty)$.

Решението на неравенката е унија од решенијата од случаите 2 и 3, значи $x \in (0,\infty)$.

2. Да се решат равенките:

а) $x^2-5|x|+6=0$ б) $|2x-3|=3-2x$

в) $|(x^2+4x+9)+(2x-3)|=|x^2+4x+9|+|2x-3|$

Решение.

а) $x^2-5|x|+6=0$

За да ја решиме равенката треба да се ослободиме од апсолутната вредност, па ќе ги разгледаме двата случаја кога x е позитивно и негативно:

1. За $x>0$ равенката ќе гласи $x^2-5x+6=0$, па ако ја решиме, ги наоѓаме корените $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}$, значи $x_1=3, \quad x_2=2$ се решенија на равенката.

2. За $x<0$ равенката ќе гласи $x^2+5x+6=0$, па ако ја решиме , ги наоѓаме корените $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{-5\pm1}{2}$, значи $x_1=-3, \quad x_2=-2$ се решенија на равенката.

Решението на равенката ќе биде унија од решенијата од случаите 1 и 2, значи $x \in \{-3,-2,2,3\}$

б) $|2x-3|=3-2x$

Разгледуваме два случаи:

1. За $2x-3\geq 0$, $x\geq \frac{3}{2}$ равенката гласи:

$$2x-3=3-2x \Leftrightarrow 4x=6 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

2. За $2x-3<0$, $x<\frac{3}{2}$ равенката гласи: $-2x+3=3-2x \Leftrightarrow 3=3$, т.е

за секое $x<\frac{3}{2}$ важи равенството, па решение во овој случај е интервалот $x<\frac{3}{2}$.

Конечно, решение на равенката е унија од решенијата во двата случаја, т.е.

$x\leq \frac{3}{2}$.

в) $\left|(x^2+4x+9)+(2x-3)\right|=\left|x^2+4x+9\right|+\left|2x-3\right|$

За да ја решиме равенката мора да се ослободиме од апсолутните вредности и да ги разгледаме случаите кога изразите во апсолутните вредности се позитивни и негативни.

Бидејќи функцијата x^2+4x+9 е позитивна функција за секое x, ќе ги разгледаме случаите само кога функцијата $2x-3$ е позитивна и негативна.

а) кога $2x-3\geq 0$, односно кога $x\geq \frac{3}{2}$, тогаш изразот $(x^2+4x+9)+(2x-3)$ во апсолутната вредност на левата страна од равенката ќе биде исто така позитивен, па равенката ќе гласи:

$$(x^2+4x+9)+(2x-3)=x^2+4x+9+2x-3$$

Бидејќи добивме дека левата и десната страна се еднакви, следи дека решение на равенката во овој случај е интервалот $[\frac{3}{2},+\infty)$, односно равенката важи за секое $x\in[\frac{3}{2},+\infty)$.

б) ако $2x-3<0$, односно $x<\frac{3}{2}$, тогаш бидејќи изразот $(x^2+4x+9)+(2x-3)$ може да биде и позитивен, негативен или 0, тогаш ќе разгледаме два потслучаја:

1. Кога $(x^2+4x+9)+(2x-3)>0$, тогаш равенката гласи:

$$(x^2+4x+9)+(2x-3)=x^2+4x+9-2x+3$$

$4x=6$, односно $x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, но бидејќи $x=\frac{3}{2}$ не спаѓа во условот $x<\frac{3}{2}$ за кој се разгледува равенката, следи дека за овој случај равенката нема решение.

2. Кога $(x^2+4x+9)+(2x-3)\leq 0$, тогаш равенката гласи:

$$-x^2-4x-9-2x+3=x^2+4x+9-2x+3$$
$$2x^2+8x+18=0$$
$$x^2+4x+9=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-36}}{2}$$

и бидејќи се добија комплексни решенија, равенката нема реални корени, значи реални решенија, значи и за овој случај равенката нема решенија во множеството реални броеви.

Значи, остана само интервалот $[\frac{3}{2},+\infty)$ за решение на равенката.

3. Да се реши неравенката $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\leq 1$.

Решение. $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq\frac{x-1}{2x+1}\leq 1$

За да ја решиме двојната неравенка $-1\leq\frac{x-1}{2x+1}\leq 1$, можеме да се ослободиме од именителот, мнжејќи ја неравенката со $2x+1$, но треба да ги разгледаме случаите кога $2x+1$ е позитивно и кога е негативно, бидејќи кога множиме неравенка со негативен број се менува насоката на знакот на неравенката.

Случај 1: нека $2x+1>0$, односно $x>-\frac{1}{2}$, тогаш неравенката постанува:

$-2x-1\leq x-1\leq 2x+1$. Ќе ги решиме двете неравенки $x-1\leq 2x+1$ и $-2x-1\leq x-1$ и решение на овој случај ќе биде пресек од тие две решенија.

$$x-1\leq 2x+1 \Leftrightarrow x\geq -2 \Leftrightarrow x\in[-2,+\infty)$$
$$-2x-1\leq x-1 \Leftrightarrow 3x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty)$$

Пресек од овие две решенија (интервали) е интервалот $[0,+\infty)$.

Случај 2: нека $2x+1<0$, односно $x<-\frac{1}{2}$, тогаш неравенката постанува:

$-2x-1\geq x-1\geq 2x+1$. Ќе ги решиме двете неравенки $x-1\geq 2x+1$ и $-2x-1\geq x-1$ и решението на овој случај ќе биде пресек од тие две решенија.

$$x-1 \geq 2x+1 \Leftrightarrow x \leq -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2]$$
$$-2x-1 \geq x-1 \Leftrightarrow 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0]$$

Решение на овој случај е пресекот од овие две решенија (интервали), т.е. е интервалот $(-\infty,-2]$, бидејќи и двете неравенки треба истовремено да се задоволени.

Бидејќи и двата случаја се можни, решението на неравенката ќе биде унија од решенијата на случаите 1 и 2, односно $x \in (-\infty,-2] \cup [0,+\infty)$.

4. Докажи дека $1^3+2^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ користејќи го принципот на математичка индукција.

Решение. За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Претпоставуваме дека равенството е точно за $n=k$, т.е.

$$1^3+2^3+\ldots+k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

За $n=k+1$ имаме

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 =$$
$$= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Согласно принципот на математичка индукција добиваме дека равенството е точно за секој природен број n.

5. Да се докаже равенството

$$2\cdot 4+4\cdot 6+6\cdot 8+\ldots+2n(2n+2) = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}$$

користејќи го принципот на математичка индукција.

Решение. За $n=1$ се добива дека $2\cdot 4 = \dfrac{4\cdot 2\cdot 3}{3}$, што е точно.

Претпоставуваме дека равенството е точно за $n=k$, односно

$$2\cdot 4+4\cdot 6+6\cdot 8+\ldots+2k(2k+2) = \frac{4k(k+1)(k+2)}{3}$$

За $n=k+1$, добиваме

$$2\cdot 4+4\cdot 6+6\cdot 8+\ldots+2k(2k+2)+(2k+2)(2k+4) =$$
$$= \frac{4k(k+1)(k+2)}{3}+(2k+2)(2k+4) =$$

$$=\frac{4k(k+1)(k+2)+3(2k+2)(2k+4)}{3}=\frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

од каде што согласно принципот на математичка индукција се добива дека равенството е точно за секој природен број n .

6. Со математичка индукција да се докаже идентитетот

$x+x^2+x^3+\ldots+x^n=x\frac{x^n-1}{x-1}$, каде што $x\neq 1$.

Решение. За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $x=x\frac{x^1-1}{x-1}$.

Претпоставуваме дека идентитетот е точен за $n=k$, односно

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^k=x\frac{x^k-1}{x-1}$$

За $n=k+1$, добиваме дека

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=x\frac{x^k-1}{x-1}+x^{k+1}=x\frac{x^k-1}{x-1}+xx^k=$$

$$=x(\frac{x^k-1}{x-1}+x^k)=x\frac{x^k-1+x^{k+1}-x^k}{x-1}=x\frac{x^{k+1}-1}{x-1}$$

од каде што согласно принципот на математичка индукција имаме дека идентитетот е точен за секој природен број n .

7. Со помош на математичка индукција да се докаже идентитетот

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}},$$

за $x\neq -1,1$.

Решение. За $n=1$ имаме

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{-(x-1)(x^2+2x+3)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=$$

$$=\frac{-x^3+x^2-2x^2+2x-3x+3}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=\frac{-x^3-x^2-x-1+4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=$$

$$=\frac{-x^2(x+1)-(x+1)+4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=\frac{-(1+x)(1+x^2)+4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^2}{1-x^{2^2}}$$

Истово тврдење можеме да го покажеме и со директна проверка.

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k$, односно

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$$

За $n=k+1$, добиваме дека

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^k}{1+x^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}+\frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}=$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+1}+2^{k+1}}{(1+x^{2^{k+1}})(1-x^{2^{k+1}})}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}},$$

од каде што согласно принципот на математичка индукција имаме дека идентитетот е точен за секој природн број n .

8. Да се докаже дека $10^n+18n-28$ е делив со 27.

Решение. За $n=1$ имаме $10^1+18\cdot1-28=0=27\cdot0$, што е точно тврдење.

Претпоставуваме дека тврдењето важи за $n=k$, односно $27\,|\,10^k+18k-28$, т.е. $10^k+18k-28=27q$

За $n=k+1$, добиваме

$$10^{k+1}+18(k+1)-28=10\cdot10^k+18k+18-28=$$

$$=10(10^k+18k-28)-10\cdot18k+10\cdot28+18k-10=$$

$$=10\cdot27q-9\cdot18k+270=27(10q-6k+10)$$

Согласно принципот на математичка индукција добиваме дека тврдењето е точно за секој природен број n .

9. Да се докаже дека бројот $5^{2n+1}+3^{n+2}2^{n-1}$ е делив со 19

Решение.

За $n=1$: $5^{2+1}+3^3 2^0=125+27=152=8\cdot19$, па значи бројот е делив со 19, односно $19\,\big|\,5^{2+1}+3^3 2^0$.

За $n=k$ нека важи $19\,\big|\,5^{2k+1}+3^{k+2}2^{k-1}$ односно

$5^{2k+1}+3^{k+2}2^{k-1}=19a$.

Тогаш за $n=k+1$ треба да се докаже дека $19\,\big|\,5^{2k+3}+3^{k+3}2^k$. Навистина:

$$5^{2k+3}+3^{k+3}2^k=25\cdot5^{2k+1}+3\cdot2\cdot3^{k+2}2^{k-1}=25\left(19a-3^{k+2}2^{k-1}\right)+6\cdot3^{k+2}2^{k-1}=$$

$$=19\cdot25a-19\cdot3^{k+2}2^{k-1}=19\left(25a-3^{k+2}2^{k-1}\right)$$

Според принципот на математичка индукција равенството е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

10. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека $n! < (\frac{n+1}{2})^n$, $n > 1$.

Решение. За $n = 2$ добиваме $2! < (\frac{2+1}{2})^2$, односно $2 < \frac{9}{4}$, што важи секогаш.

Претпоставуваме дека неравенството е точно за секој $n = k$,

$$k! < (\frac{k+1}{2})^k .$$

За $n = k+1$ добиваме

$$(k+1)! = (k+1)k! < (k+1)(\frac{k+1}{2})^k = 2(\frac{k+1}{2})^{k+1} =$$

$$= \frac{2\cdot(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}} \cdot \frac{(k+2)^{k+1}}{(k+2)^{k+1}} =$$

$$= 2\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{(\frac{k+2}{k+1})^{k+1}} = 2(\frac{k+2}{2})^{k+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}} \leq$$

$$\leq 2(\frac{k+2}{2})^{k+1} \cdot \frac{1}{2} = (\frac{(k+1)+1}{2})^{k+1}$$

Притоа го искористивме Бернулиевото неравенство (стр.17, пример 1. г) од 1.7) за оценка на изразот $(1+\frac{1}{k+1})^{k+1} \geq 1+(k+1)\frac{1}{k+1} = 2$.

Согласно принципот на математичка индукција заклучуваме точност на неравенството за секој природен број n .

11. Да се определи четвртиот член од развиениот бином $\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{\frac{x^{-2}}{7}}\right)^y$

ако x и y ги задоволуваат релациите:

$$\binom{y}{x+1} : \binom{y}{x} : \binom{y}{x-1} = 1:3:5 .$$

Решение.

$$\frac{\binom{y}{x+1}}{\binom{y}{x}} = \frac{1}{3} \quad \text{односно} \quad \frac{\frac{y!}{(x+1)!(y-x-1)!}}{\frac{y!}{x!(y-x)!}} = \frac{y-x}{x+1} = \frac{1}{3}, \text{ се добива:}$$

$$3y - 3x = x+1 , \qquad \text{значи:} \qquad y = \frac{4x+1}{3} \qquad (1)$$

$$\frac{\binom{y}{x}}{\binom{y}{x-1}}=\frac{3}{5} \quad \text{следи} \quad \frac{\frac{y!}{x!(y-x)!}}{\frac{y!}{(x-1)!(y-x+1)!}}=\frac{y-x+1}{x}=\frac{3}{5} \quad \text{или:}$$

$5y - 5x + 5 = 3x$ од каде за y се добива: $y=\frac{8x-5}{5}$ (2)

од (1) и (2) се добива x : $\frac{4x+1}{3}=\frac{8x-5}{5}$ или :

$20x+5=24x-15,\quad 4x=20$. Значи: $x=5,\quad y=7$.

За четвртиот член од развиениот бином добиваме:

$$T_4=T_{3+1}=\binom{7}{3}\cdot 5^{\frac{1}{4}(7-3)}\cdot\left(5^{\frac{-2}{3}}\cdot 7^{\frac{-1}{3}}\right)^3=$$

$$=\frac{7!}{3!4!}\cdot 5\cdot 5^{-2}\cdot 7^{-1}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{6}\cdot 5^{-1}\cdot 7^{-1}=1$$

12. Биномниот коефициент на третиот член од развиениот бином $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\right)^n$ е 10. Да се најде членот што го содржи $x^{\frac{-5}{3}}$.

Решение. Степенот на биномот n ќе го најдеме од условот дека третиот биномен коефициент е 10:

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}=10, \qquad n^2-n-20=0,$$

$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{1\pm 9}{2}$. Ја земаме позитивната вредност на n, $n=5$.

Секој член од развојот има форма $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$. За $n=5$ добиваме:

$$T_{k+1}=\binom{5}{k}x^{\frac{1}{3}(5-k)}x^{-\frac{4k}{3}}=\binom{5}{k}x^{\frac{5-5k}{3}}.$$

Бидејќи го бараме членот што го содржи $x^{\frac{-5}{3}}$, треба $\frac{5-5k}{3}=\frac{-5}{3}$

$5-5k=-5$, Значи: $k=2$. Добивме дека тоа е третиот член T_3.

$$T_3=\binom{5}{2}x^{\frac{-5}{3}}=\frac{5!}{2!3!}x^{\frac{-5}{3}}=\frac{5\cdot 4}{2}x^{\frac{-5}{3}}=10x^{\frac{-5}{3}}.$$

13. Збирот од биномните коефициенти на првиот и третиот член од биномот $\left(2^{x}+4^{-x}\right)^{n}$ е 29, а четвртиот член е 4 пати поголем од третиот. Да се најде x **.**

Решение. Степенот на биномот n ќе го најдеме од условот дека збирот од првиот и третиот биномен коефициент е 29:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}=29$$
$$1+\frac{n(n-1)}{2}=29$$
$$2+n^{2}-n=58$$
$$n^{2}-n-56=0$$
$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 56}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{1\pm 15}{2}$$
$$n=8$$

Од условот дека четвртиот член е 4 пати поголем од третиот, добиваме:

$$\binom{n}{3}\left(2^{x}\right)^{n-3}\left(4^{-x}\right)^{3}=4\binom{n}{2}\left(2^{x}\right)^{n-2}\left(4^{-x}\right)^{2}.$$

Ако замениме за $n=8$, добиваме:

$$\binom{8}{3}\left(2^{x}\right)^{8-3}\left(4^{-x}\right)^{3}=4\binom{8}{2}\left(2^{x}\right)^{8-2}\left(4^{-x}\right)^{2}$$

$$\frac{8!}{3!5!}\cdot 2^{5x}\cdot 4^{-3x}=4\cdot\frac{8!}{2!6!}\cdot 2^{6x}\cdot 4^{-2x}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 2^{5x}\cdot 2^{2(-3x)}=4\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^{6x}\cdot 2^{2(-2x)}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 2^{5x}\cdot 2^{-6x}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot 2^{6x}\cdot 2^{-4x}$$

$$2^{-x}=2\cdot 2^{2x}=2^{2x+1}$$

$$-x=2x+1 \quad , \quad 3x=-1\,, \quad x=\frac{-1}{3}.$$

14. Биномните коефициенти на четвртиот и шестиот член од развојот на биномот $(\frac{1}{x}+\sqrt{x})^{n}$ се однесуваат како 5:18. Определи го членот во развојот што не го содржи x .

Решение. Бидејќи четвртиот и шестиот биномен коефициент се однесуваат како

како 5:18 добиваме $\binom{n}{3}:\binom{n}{5}=5:18$, т.е. $\dfrac{\dfrac{n!}{3!\cdot(n-3)!}}{\dfrac{n!}{5!\cdot(n-5)!}}=\dfrac{5}{18}$, од каде

$(n-3)(n-4)=72$. Решенијата на оваа квадратна равенка се $n_1=12$, $n_2=-5$. Бидејќи n е природен број решението n_2 го отфрламе. Значи, $n=12$. Имајќи предвид дека

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{12}{k}(\frac{1}{x})^{12-k}(\sqrt{x})^k=$$
$$=\binom{12}{k}x^{k-12}\cdot x^{\frac{k}{2}}=\binom{12}{k}x^{\frac{3k}{2}-12}$$

и од тоа што степенот на x во развојот на биномот трбеа да е 0, се добива $\frac{3k}{2}-12=0$, т.е. $k=8$. Значи бараниот член е деветтиот член и тој изнесува $T_9=\binom{12}{9}=220$.

15. Третиот член од развојот на биномот $(x+x^{\lg x})^5$ е 1 000 000. Најди го x.

Решение. Третиот член во развојот на биномот е

$$T_3=\binom{5}{2}x^3\cdot x^{2\lg x}=10x^{3+2\lg x}.$$

Значи ја добиваме равенката $10x^{3+2\lg x}=10^6$, т.е. $x^{3+2\lg x}=10^5$. Со логаритмирање на двете страни со логаритам со основа 10 се добива равенката $(3+2\lg x)\lg x=5$, која со смената $t=\lg x$, се трансформира во $2t^2+3t-5=0$. Со нејзино решавање се добиваат решенијата $t_1=1$, $t_2=-\frac{5}{2}$, од каде за вредноста на x добиваме две решенија:

$$x_1=10^1=10, \qquad x_2=10^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{100\sqrt{10}}.$$

16. Во развојот на биномот $(a\sqrt[5]{\frac{a}{8}}+\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}})^n$ најди го оној член што содржи a^3 ако збирот на сите биномни коефициенти во развојот на биномот е 4096.

Решение. Бидејќи збирот на сите биномни коефициенти во развојот на биномот $(a+b)^n$ изнесува 2^n, ќе имаме : $2^n = 4096$, $n=12$.

Користејќи ја формулата за општиот член на биномот, добиваме:

$$T_{k+1} = \binom{12}{k}(a\sqrt[5]{\frac{a}{8}})^{12-k}\cdot(\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}})^k = \binom{12}{k}8^{\frac{k-12}{5}}\cdot a^{\frac{6(12-k)}{5}-\frac{3k}{7}}.$$

Од условот $a^{\frac{6(12-k)}{5}-\frac{3k}{7}} = a^3$ добиваме $\dfrac{6(12-k)}{5}-\dfrac{3k}{7}=3$, односно $k=7$. Значи бараниот член е осмиот, и $T_8 = \binom{12}{7}\cdot 8^{-1}\cdot a^3 = 99a^3$.

17. Да се најде комплексниот број z од условот:

$$\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1; \qquad \frac{z}{\bar{z}} = i$$

Решение. $z = x+iy$

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x+iy}{x+iy+1}\right| = 1 \\ \dfrac{x+iy}{x-iy} = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+iy| = |x+iy+1| \\ x+iy = ix - i^2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \\ x+iy = y+ix \end{cases}$$

Од втората равенка се добива дека $x=y$, па ако замениме во првата равенка се добива:

$$\sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{(x+1)^2+x^2}$$

$$2x^2 = x^2+2x+1+x^2$$

$2x+1=0$, $x=\dfrac{-1}{2}=y$. Значи $z=\dfrac{-1}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

18. Да се претставaт во тригонометриски вид следните комплексни броеви:

а) $z=-1+i\sqrt{3}$ б) $z=2i$ в) $z=2+i\sqrt{12}$

Решение.

а)

$$z = -1 + i\sqrt{3}$$

$$x = -1, \quad y = \sqrt{3}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3}$$

Аголот φ може да се најде и од равенките

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

$$-1 = 2\cos\varphi, \quad \sqrt{3} = 2\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{-1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Комплексниот број во тригонометриски вид ќе биде

$$z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

б)

$$z = 2i \Rightarrow x = 0, \quad y = 2$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0 + 2^2} = 2$$

Бидејќи бројот лежи на позитивниот дел од y оската, аголот е $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Па, комплексниот број во тригонометриски вид ќе биде

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

в)

$$z = 2 + i\sqrt{12}$$

$$x = 2, \quad y = \sqrt{12}$$

$$\rho = \sqrt{2^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$x = \rho\cos\varphi \Rightarrow 2 = 4\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$y = \rho\sin\varphi \Rightarrow \sqrt{12} = 4\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Или $\varphi = arctg\,\frac{y}{x} = arctg\,\frac{\sqrt{12}}{2} = arctg\,\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

Тригонометрискиот облик на комплексниот број ќе биде

$$z = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

19. Да се пресмета вредноста на изразот $\left(\frac{3}{1+i}+\frac{1+i}{2i}\right)^{16}$.

Решение.

$$\left(\frac{3}{1+i}+\frac{1+i}{2i}\right)^{16}=\left(\frac{6i+(1+i)^2}{2i(1+i)}\right)^{16}=$$

$$=\left(\frac{6i+1+2i+i^2}{2i+2i^2}\right)^{16}=\left(\frac{8i}{2i-2}\right)^{16}=\left(\frac{4i}{i-1}\right)^{16}\left(\frac{4i(i+1)}{(i-1)(i+1)}\right)^{16}=$$

$$=\left(\frac{4i^2+4i}{i^2-1}\right)^{16}=\left(\frac{-4\ \ +4i}{-1-1}\right)^{16}=\left(\frac{-4\ \ +4i}{-2}\right)^{16}=\left(2-2i\right)^{16}=2^{16}(1-i)^{16}$$

Комплексниот број $1-i$ ќе го претставиме во тригонометриски вид:

$$\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\qquad \phi=arc\,\mathrm{tg}\frac{-1}{1}+2\pi=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})\right).$$

Значи:

$$2^{16}(1-i)^{16}=2^{16}\left[\sqrt{2}\left(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})\right)\right]^{16}=$$

$$=2^{16}\cdot 2^{8}\left(\cos(\frac{-16\pi}{4})+i\sin(\frac{-16\pi}{4})\right)=2^{24}\left(\cos(-4\pi)+i\sin(-4\pi)\right)=2^{24}.$$

20. Да се пресмета изразот $A=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

Решение.

$$z_1=1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4});\qquad z_2=\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$$

$$A=\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}=\frac{z_1^{\ n}}{z_2^{\ n-2}}=\frac{\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right]^n}{\left[\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})\right]^{n-2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})}{(\sqrt{2})^{n-2}(\cos\frac{-\pi(n-2)}{4}+i\sin\frac{-\pi(n-2)}{4})}=$$

$$=(\sqrt{2})^{n-n+2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{(n-2)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{(n-2)\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=2\left[\cos\left(\frac{2n\pi-2\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi-2\pi}{4}\right)\right]=2\left[\cos\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{2}\right)\right]=$$

$$=\begin{cases}\pm 2i, & n=2k\\ \pm 2, & n=2k+1\end{cases}$$

Кога n е парен резултатот е $\pm 2i$, а кога n е непарен, резултатот е ± 2 .

21. Да се реши равенката во множеството комплексни броеви:

а) $z^4+16=0$ б) $iz^3-z^3-1-i=0$

Решение: а)

$z^4+16=0$

$$z=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{-16+0\cdot i}=\begin{pmatrix}x=-16;\, y=0\\ \rho=\sqrt{(-16)^2+0}=16\\ \varphi=\pi\end{pmatrix}=\sqrt[4]{16(\cos\pi+i\sin\pi)}$$

$$z=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\quad k=0,1,2,3$$

$$k=0:\quad z_0=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(1+i)$$

$$k=1:\quad z_1=2(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=2(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(-1+i)$$

$$k=2:\quad z_2=2(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=2(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(-1-i)$$

$$k=3:\quad z_3=2(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=2(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(1-i)$$

б) $iz^3-z^3-1-i=0$

$$z^3(i-1)=1+i$$

$$z^3=\frac{1+i}{i-1}$$

$$z=\sqrt[3]{\frac{1+i}{i-1}}=\left(\begin{array}{l} x_1=1;\, y_1=1;\, \rho_1=\sqrt{2};\, \varphi_1=\frac{\pi}{4} \\ x_2=-1;\, y_1=1;\, \rho_1=\sqrt{2};\, \varphi_1=\frac{3\pi}{4} \end{array}\right)=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}}}=\sqrt[3]{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})}=$$

$$\sqrt[3]{\cos(\frac{-2\pi}{4})+i\sin(\frac{-2\pi}{4})}=\sqrt[3]{\cos(\frac{-\pi}{2})+i\sin(\frac{-\pi}{2})}$$

$$z=\cos(\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{3})+i\sin(\frac{\frac{-\pi}{2}+2k\pi}{3}),\quad k=0,1,2$$

$$k=0:\quad z_0=\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

$$k=1:\quad z_1=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)=i$$

$$k=2:\quad z_2=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

22. Да се најде вредноста на изразот $z=\sqrt{\frac{(1-i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}}$.

Решение.

$$z=\sqrt{\frac{(1-i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}}=\sqrt{\frac{z_1^{\,4}}{z_2^{\,3}}}=\left(\begin{array}{l} x_1=1;\, y_1=-1;\, \rho_1=\sqrt{2};\, \varphi_1=\frac{-\pi}{4} \\ x_2=\sqrt{3};\, y_2=1;\, \rho_2=2;\, \varphi_2=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6} \end{array}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2^4}\left(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4})\right)^4}{2^3\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right)^3}}=\sqrt{\frac{2^2\left(\cos(\frac{-4\pi}{4})+i\sin(\frac{-4\pi}{4})\right)}{2^3\left(\cos(\frac{3\pi}{6})+i\sin(\frac{3\pi}{6})\right)}}=$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right)}{2\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos(-\pi - \frac{\pi}{2}) + i\sin(-\pi - \frac{\pi}{2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos(\frac{-3\pi}{2}) + i\sin(-\frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos\left(\frac{\frac{-3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) +$$

$$+ i\sin\left(\frac{\frac{-3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)], \quad k = 0,1$$

$$k = 0: \quad z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{-3\pi}{4}) + i\sin(\frac{-3\pi}{4})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}(1+i)$$

$$k = 1: \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}(1+i)$$

2. НИЗИ

2.1. Низи од реални броеви

Дефиниција. Секое пресликување $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ се нарекува **низа од реални броеви**.

Значи, на секој природен број n му одговара единствен реален број $a(n)$. Заради поедноставување, наместо $a(n)$ пишуваме a_n. Значи, a_1 е прв член на низата, a_2 е втор член на низата, ..., a_n е n-ти член на низата или **општ член на низата**.

Низата е определена ако се знае кој е општиот член a_n на низата.

Низата кратко се бележи со $\left(a_n \middle| n\in\mathbb{N}\right)$ или само со (a_n). Понатаму често ќе велиме „низата a_n" наместо „низата (a_n) со општ член a_n".

Пример 1. а) Низата од природните броеви $a_n = n$ е низата

$$1,2,3,4,5,\ldots,n,n+1,\ldots.$$

б) Ако $a_n=\frac{1}{n}$ тогаш низата е

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots.$$

Притоа, на пример, 100-тиот член на низата е $a_{100}=\frac{1}{100}$, 2016-тиот член на низата е $a_{2016}=\frac{1}{2016}$.

в) Ако $c\in\mathbb{R}$ и низата е зададена со $a_n=c$, тогаш таа се нарекува **константна низа.** Кај неа сите членови се еднакви на c. □

Понекогаш општиот член на низата не е даден експлицитно, туку дадена е врската меѓу a_n и некои претходни членови. Ваквото задавање на низата се нарекува задавање со **рекурентна формула.** Притоа, треба да се познати и првите неколку члена на низата.

Пример 2. Да најдеме неколку први членови на низата (a_n), зададена со рекурентната формула

$$a_1 = 1,\, a_2 = 1,\, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\text{, за } n > 2\,.$$

Имаме $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$, Значи, првите неколку члена на оваа низа се: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ и притоа, секој член, поцнувајки од третиот, е збир на претходните два. Оваа низа се нарекува низа на Фибоначи. □

Кај вака зададените низи понекогаш може и експлицитно да се определи општиот член.

Пример 3. За низата $a_1 = 2$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$, $n > 1$, имаме

$$a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}},\ a_3 = \sqrt{a_2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}.$$

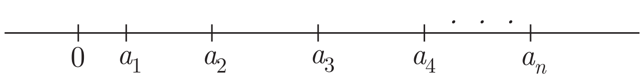
Ќе докажеме дека $a_n = 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

За $n = 1$ тврдењето е точно. Нека е точно за $n = k$, т.е. важи $a_k = 2^{\frac{1}{2^{k-1}}}$. За $n = k + 1$ имаме $a_{k+1} = \sqrt{a_k} = \left(a_k\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2^{k-1}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^k}} = 2^{\frac{1}{2^{k+1-1}}} = 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}$, па тврдењето е точно и за $n = k + 1$. Од принципот на математичка индукција следува дека $a_n = 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. □

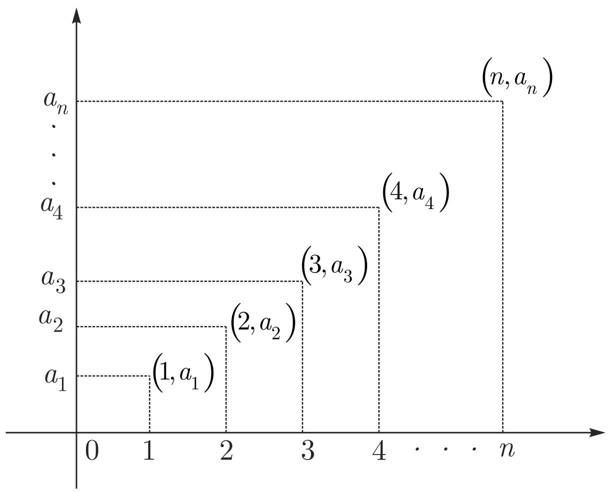
За некои низи не може да се определи аналитички израз (формула) за општиот член, иако се знае правилото според кое се добиваат нејзините членови.

На пример, низата од прости броеви која за членови ги има: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ не може да биде зададена со формула за општиот член a_n, и покрај тоа што ја знаеме постапката за нивно определување.

Геометриски низите може да ги претставиме како множество точки на бројната права т.е.



или како точки од рамнината, при што на x-оската се природните броеви, а на y-оската се членовите од низата.



Дефиниција. Низата (a_n) се нарекува **монотона** ако за секој $n \in \mathbb{N}$, важи едно од неравенствата

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ или } a_n \geq a_{n+1}.$$

Ако важи $a_n < a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, се вели дека низата (a_n) **строго монотоно расте** (или само монотоно расте).

Низата (a_n) **не опаѓа** ако важи $a_n \leq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Ако $a_n > a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, се вели дека низата (a_n) **строго монотоно опаѓа** (или само монотоно опаѓа) и низата (a_n) **не расте** ако важи $a_n \geq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

На пример, за низата $a_n = \begin{cases} n, n < 5 \\ 9, n \geq 5 \end{cases}$, важи $a_n \leq a_{n+1}$, па таа не опаѓа, а низата $b_n = 5$, за секој $n \in \mathbb{N}$, не расте (истовремено и не опаѓа). Притоа, двете низи се монотони.

Проверка на монотоноста се сведува на докажување на неравенства. Притоа, во зависност од аналитичкиот израз со кој е зададен општиот член се оценува знакот на $a_{n+1} - a_n$ или $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1$.

Пример 4. Докажи дека низата (a_n) строго монотоно опаѓа, ако

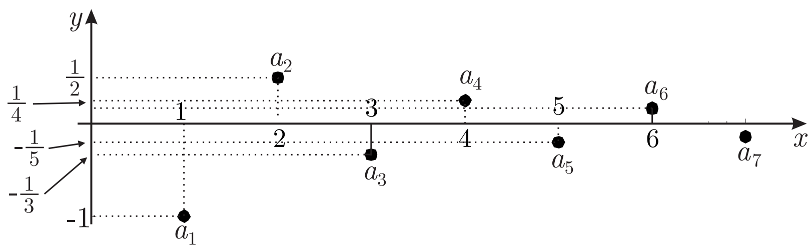
а) $a_n = \frac{1}{n}$

б) $a_n = \frac{1}{2n-1}$

Решение. а) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$, па $a_{n+1} < a_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

б) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n-1} > \frac{2n-1}{2n-1} = 1$, па $a_n > a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. □

Пример 5. Низата $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ не е монотона. Навистина, $a_1 = \frac{-1}{1} = -1$, $a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$, па $a_1 < a_2$ и $a_2 > a_3$.



□

Дефиниција. Низата (a_n) е **ограничена** ако постои позитивен реален број K така што важи $|a_n| \leq K$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Да забележиме дека во тој случај важи $-K \leq a_n \leq K$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Од друга страна ако постојат реални броеви m и M такви што $m \leq a_n \leq M$, за секој $n \in \mathbb{N}$, земајќи $K = \max\{|m|, |M|\}$ добиваме $|a_n| \leq K$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Пример 6. За низата $a_n = \frac{1}{n}$ важи $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Значи, $\left|a_n\right| \leq 1 = K$, па таа е ограничена.

За низата $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ важи $-1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$, па земајќи $K = \max\left\{\left|-1\right|, \frac{1}{2}\right\} = 1$ добиваме дека важи $\left|a_n\right| \leq 1 = K$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Следува дека и (b_n) е ограничена. □

Ако постои $M \in \mathbb{R}$, таков што $a_n \leq M$, за секој $n \in \mathbb{N}$, се вели дека низата (a_n) е **ограничена од горе (десно)**.

Ако постои $m \in \mathbb{R}$, таков што $a_n \geq m$, за секој $n \in \mathbb{N}$, се вели дека низата (a_n) е **ограничена од долу (лево)**.

Значи низата е ограничена ако и само ако е ограничена од горе и ограничена од долу.

Пример 5. За низата $a_n = n + \frac{1}{n}$ важи $a_n = n + \frac{1}{n} \geq 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$, па таа е ограничена од долу.

Од друга страна, ако M е произволно избран реален број, постои природен број n_0, така што $n_0 > M$. Тогаш $a_{n_0} = n_0 + \frac{1}{n_0} > n_0 > M$. Значи, за секој реален број M, постои член a_{n_0} на низата (a_n), таков што $a_{n_0} > M$, т.е. не постои реален број M, таков што $a_n \leq M$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Следува дека (a_n) не е ограничена од горе. □

Дефиниција. Ако (a_n) и (b_n) се низи од реални броеви. За нив дефинираме

- Збир со $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$;
- Разлика со $(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n)$;
- Производ, $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$;

- Множење со реален број λ, $\lambda(a_n)=(\lambda a_n)$;

- Ако $b_n \neq 0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, количник со $\dfrac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

Пример 6. Ако $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=n^2$, тогаш

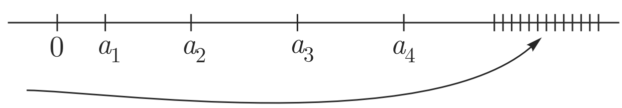
$$(a_n)+(b_n)=\left(a_n+b_n\right)=\left(\frac{1}{n}+n^2\right),\qquad (a_n)-(b_n)=\left(a_n-b_n\right)=\left(\frac{1}{n}-n^2\right),$$

$$(a_n)\cdot(b_n)=\left(a_n\cdot b_n\right)=\left(\frac{1}{n}\cdot n^2\right)=\left(n\right),\qquad 6\cdot(b_n)=\left(6\cdot b_n\right)=\left(6\cdot n^2\right),$$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\left(\frac{\frac{1}{n}}{n^2}\right)=\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

2.2. Точка на натрупување на низи

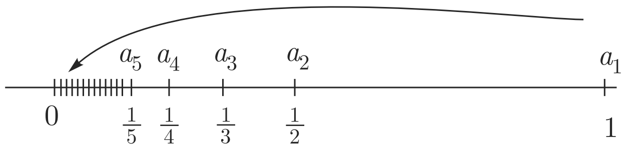
Нека е дадена една низа (a_n). Ако члеовите на низата ги разгледуваме како точки од бројна права, тогаш измената на членовите на низата по ред од првиот, вториот и сите следователни членови може да се разбере како движење на точките по бројната права т.е.



Притоа, може да настане една карактеристична појава при која бесконечно членови од низата се наоѓаат во еден мал интервал.

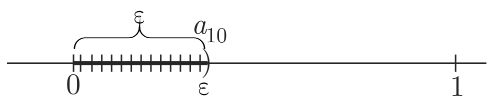
Да разгледаме неколку примера.

Пример 1. Да ја разгледаме низата (a_n), каде $a_n=\dfrac{1}{n}$, и да претставиме на бројна права неколку нејзини почетни членови.



Можеме да забележиме дека точките кои одговараат на овие членови од низата се движат од 1, монотоно опаѓајќи кон нулата, која не е член на низата.

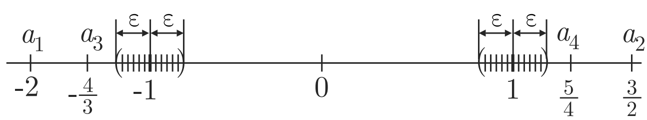
Ако земеме ε, на пример $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, во ε-околината на 0 т.е. интервалот $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ќе се најдат членовите $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$, и нив ги има бесконечно многу.



Надвор од оваа ε-околина има 10 члена. Во овој случај велиме дека низата се натрупува околу точката $a = 0$.

Пример 2. Дадена е низата (a_n), со општ член $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

т.е. низата $-2, \ \dfrac{3}{2}, \ -\dfrac{4}{3}, \ \dfrac{5}{4}, \ \ldots$



Бидејќи $a_{2k} = \dfrac{2k+1}{2k} > 1$ и $a_{2k-1} = -\dfrac{2k}{2k-1} < -1$, за секој $k \in \mathbb{N}$, следува дека членовите со парен индекс се наоѓаат десно од 1, а членовите со непарен индекс лево од -1. Уочуваме дека во двете ε-околини (за какво било $\varepsilon > 0$), $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ на $a = 1$ и $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ на $b = -1$ има бесконечно многу членови на низата, но и надвор од нив има бесконечно многу членови на низата.

Значи, низата се натрупува околу две точки, $a = 1$ и $b = -1$. $\square$

Дефиниција 1. Точката $a \in \mathbb{R}$ вика **точка на натрупување** (или **атхерентна точка**) за низата (a_n) ако во секоја нејзина ε-околина се наоѓаат бесконечно многу членови од низата.

Со други зборови, ако за секое $\varepsilon > 0$, важи $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, за бесконечно многу $n \in \mathbb{N}$ т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$, за бесконечно многу $n \in \mathbb{N}$.

Во примерите 1 и 2, со помош на графичко претставување на низа, уочивме точки на натрупување за дадените низи. Во ниеден од нив немаше математички доказ. Во следниот пример ќе илустрираме, како математички се докажува дека некоја точка е навистина точка на натрупување на дадената низа.

Пример 3. Нека низата (a_n) е зададена со општиот член

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

Ќе докажеме дека $a=1$ и $b=-1$ се точки на натрупување на (a_n).

За членовите на низата со парни индекси важи $a_{2k} = \dfrac{2k}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Имаме $|a_{2k} - 1| = \left|\dfrac{2k}{2k+1} - 1\right| = \left|\dfrac{2k-2k-1}{2k+1}\right| = \left|\dfrac{-1}{2k+1}\right| = \dfrac{1}{2k+1}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен реален број. Сакаме да докажеме дека $\dfrac{1}{2k+1} < \varepsilon$ за бесконечно многу $k \in \mathbb{N}$, од каде што ќе имаме дека $|a_{2k} - 1| < \varepsilon$, за бесконечно многу $k \in \mathbb{N}$.

Имаме $\dfrac{1}{2k+1} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{\varepsilon} < 2k+1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right) < k.$ Постои природен број k_0, таков што $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right) < k_0.$ Тогаш, за сите $k > k_0$, (а нив ги има бесконечно многу) заради погорните еквиваленции, имаме дека

$$|a_{2k}-1|=\frac{1}{2k+1}\overset{k>k_0}{<}\frac{1}{2k_0+1}<\varepsilon .$$

Докажавме дека сите членови на низата (a_n) со парни индекси $n=2k$, за кои $k>k_0$, т.е. членовите:

$$a_{2(k_0+1)},a_{2(k_0+2)},\dots,a_{2(k_0+m)},\dots$$

се такви што $|a_n-1|<\varepsilon$, т.е. бесконечно многу членови од дадената низа се наоѓаат во ε-околина на 1, каде што $\varepsilon>0$ беше произволно избран број. Значи, $a=1$ е точка на натрупување за (a_n).

За членовите на низата со непарни индекси важи

$$a_{2k-1}=-\frac{2k-1}{2k},\ \ k\in\mathbb{N}\ .$$

Го разгледуваме множеството $B=\left\{-\frac{2k-1}{2k}\ \middle|\ k\in\mathbb{N}\right\}$.

Имаме

$$\left|-\frac{2k-1}{2k}-(-1)\right|=\left|\frac{-2k+1}{2k}+1\right|=\left|\frac{-2k+1+2k}{2k}\right|=\left|\frac{1}{2k}\right|=\frac{1}{2k}.$$

Нека сега $\varepsilon>0$ е произволно избран број. Сакаме да докажеме дека $\frac{1}{2k}<\varepsilon$, за бесконечно многу $k\in\mathbb{N}$.

Бројот $\frac{1}{2\varepsilon}$ е реален, па постои природен број k_0, таков што $k_0>\frac{1}{2\varepsilon}$.

Сега, за секој $k>k_0$, имаме

$$\left|-\frac{2k-1}{2k}-(-1)\right|=\frac{1}{2k}\overset{k>k_0}{<}\frac{1}{2k_0}\overset{k_0>\frac{1}{2\varepsilon}}{<}\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2\varepsilon}}=\varepsilon$$

Докажавме дека сите членови од множеството B, за кои $k>k_0$ (значи бесконечно многу од нив) се такви што $\left|-\frac{2k-1}{2k}-(-1)\right|<\varepsilon$. Бидејќи елементите на B се всушност членови на низата (a_n), најдовме бесконечно многу членови од низата (тоа се оние со непарни индекси $n = 2k - 1$, и со услов $k > k_0$) за кои важи $|a_n - (-1)| < \varepsilon$. Од произволноста на $\varepsilon > 0$, следува дека $b = -1$ е точка на натрупување за (a_n). $\square$

2.3. Гранична вредност на низа. Конвергенција. Дивергенција.

Дефиниција 1. Бројот $a \in \mathbb{R}$ се вика **гранична вредност** (граница) на низата (a_n), ако за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0, таков што за сите членови на низата (a_n) за кои $n > n_0$, важи $|a_n - a| < \varepsilon$.

Пишуваме, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$, кога $n \to \infty$.

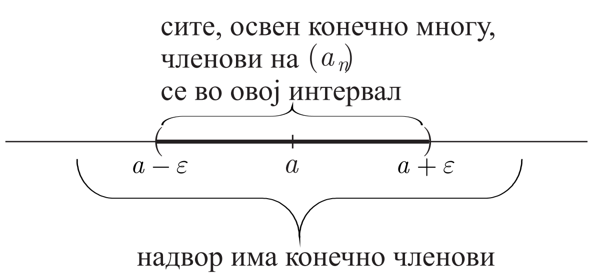
Заради

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

добиваме дека a е граница на низата (a_n) ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што за сите членови на низата (a_n) за кои $n > n_0$, важи $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Тоа значи дека една низа (a_n) има гранична вредност $a \in \mathbb{R}$, ако за секоја ε-околина на a, може да се најде природен број n_0, така што членовите на низата $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_{n_0+m}, \ldots$, се наоѓаат во ε-околината $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ на a.

Со други зборови, сите освен конечен број членови од низата (a_n) се во ε-околината $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ на a.



Низата којашто има гранична вредност реален број се нарекува конвергентна низа. Низа којашто не е конвергентна се нарекува дивергентна низа.

Важат следниве својства на гранична вредност на низа.

1. Граничната вредност на низа, доколку постои, е единствена.

Доказ. Нека претпоставиме дека (a_n) има две гранични вредности $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \neq b$. Тогаш или $a < b$ или $b < a$. Не губиме од општоста ако претпоставиме дека $a < b$.

Избираме $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0$.

Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{3}, \text{ за секој } n > n_0.$$

Од $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, следува дека постои $n_1 \in \mathbb{N}$, таков што

$$|a_n - b| < \frac{b-a}{3}, \text{ за секој } n > n_1.$$

Нека $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, и нека $n > n_2$. Бидејќи $n_2 \geq n_0$ и $n_2 \geq n_1$ следува дека $n > n_0$ и $n > n_1$, па важи

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{3} \text{ и } |a_n - b| < \frac{b-a}{3}.$$

Тогаш, заради $b - a > 0$, имаме

$$b - a = |b - a| = |a_n - a - a_n + b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| <$$

$$< \frac{b-a}{3} + \frac{b-a}{3} = \frac{2}{3}(b-a).$$

Добивме $b - a < \dfrac{2}{3}(b-a) \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}(b-a) < 0 \Leftrightarrow b < a$, што е противречност.

Слично, се добива противречност и ако претпоставиме $b < a$ (Во тој случај, за ε ќе земеме $\dfrac{a-b}{3}$).

Заклучуваме дека граничната вредност на низа, доколку постои, мора да е единствена. □

2. Граничната вредност на низа е и точка на натрупување на низата. Доказот следува директно од дефиницијата.

3. Конвергентните низи имаат само една точка на натрупување. Доказот следува директно од дефиницијата и од 1.

4. Секоја конвергентна низа е ограничена.

Доказ. Нека (a_n) е конвергентна низа т.е. постои $a \in \mathbb{R}$, така што $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(i) Ако $a \neq 0$, тогаш за секое $\varepsilon > 0$, па и за $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2} > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, таков што $|a_n - a| < \dfrac{|a|}{2}$, за сите $n \geq n_0$. Од својствата на апсолутна вредност имаме

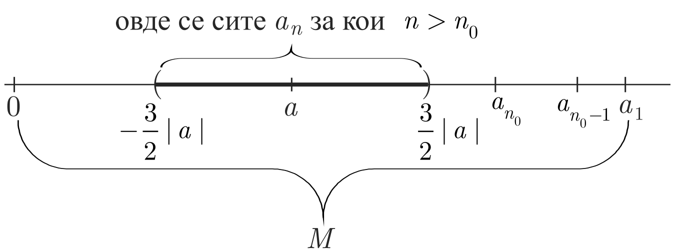
$|a_n| - |a| \leq \big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \dfrac{|a|}{2}$ за секој $n > n_0$, т.е.

$|a_n| < \dfrac{3}{2}|a|$ за секој $n > n_0$.

Ако избереме $M = \max\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, \dfrac{3}{2}|a|\right\}$, тогаш

$|a_n| < M$, за секој $n \in \mathbb{N}$, па (a_n) е ограничена.

Графички



За ситуација како на горниот цртеж $M = a_1$.

(ii) Ако $a = 0$, тогаш за $\varepsilon = \frac{1}{2}$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $|a_n| < \frac{1}{2}$, за сите $n > n_0$.

Тогаш за M избираме, $M = \max\left\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, \frac{1}{2}\right\}$ и добиваме дека $|a_n| < M$, за сите $n \in \mathbb{N}$ т.е. (a_n) е ограничена. □

2.4. Бесконечни граници

Дефиниција. За низата (a_n) се вели дека **се стреми кон** ∞ и пишуваме $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ или $a_n \to \infty$ кога $n \to \infty$, ако за секој $M > 0$, постои природен број n_0, така што за сите членови a_n на низата такви што $n > n_0$, важи $a_n > M$.

Со други зборови, за секој позитивен реален број M, постои природен број n_0, така што членовите на низата $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_{n_0+m}, \ldots$ (т.е. сите членови освен конечно многу) се поголеми од M.

Дефиниција. За низата (a_n) се вели дека **се стреми кон** $-\infty$ и пишуваме $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ или $a_n \to -\infty$ кога $n \to \infty$, ако за секој $M < 0$, постои природен број n_0, така што за сите членови a_n на низата такви што $n > n_0$, важи $a_n < M$.

Со други зборови, за секој негативен реален број M, постои природен број n_0, така што членовите на низата $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_{n_0+m}, \ldots$ (т.е. сите членови освен конечно многу) се помали од M.

Пример. Низата $a_n = n^2 + 1$ се стреми кон ∞, кога $n \to \infty$. Навистина, нека $M > 0$ е произволен. Не губиме од општоста ако претпоставиме дека $M > 1$ (бидејќи ако докажеме за $M > 1$ својството ќе важи и за $0 < M \leq 1$, и во тој случај наместо M може да работиме со $M + 1$, кој повторно е произволен). Постои природен број n_0 така што $n_0 > \sqrt{M-1}$. Нека $n > n_0$. Тогаш

$$a_n = n^2 + 1 > n_0^2 + 1 > M - 1 + 1 = M\,.$$

Следува дека $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Слично се докажува дека на пример, $\lim_{n\to\infty}\left(-n^2 - 1\right) = -\infty$. □

Значи, низите можеме да ги поделиме на

- конвергентни низи
- низи кои се стремат кон ∞ или кон $-\infty$
- низи кои немаат граница.

Понекогаш конвергентните низи и низите кои се стремат кон ∞ или кон $-\infty$ со заедничко име ќе ги нарекуваме низи кои имаат граница.

Пример. Низата $a_n = \left((-1)^n - 1\right)n$ нема граница, и има една точка на натрупување. Навистина, општиот член на низата може да го запишеме и во следнава форма

$$a_n = \begin{cases} 0, n \text{ е парен} \\ -2n,\ n \text{ е непарен} \end{cases}$$

Јасно е дека во секоја околина на 0 има бесконечно членови на низата (тоа се сите членови со парни индекси и тие се еднакви на нула), па 0 е точка на натрупување на низата.

Низата не се стреми кон 0 бидејќи надвор од околината $(-1,1)$ на 0 има бесконечно членови на низата (оние со непарни индекси).

Исто така низата не се стреми кон $-\infty$, бидејќи, на пример, за $M = 1$ има бесконечно членови помали од 1 (оние со парни индекси).

Јасно е дека ниту еден реален број не може да биде граница на низата.

Значи, ова е пример на низа која има една точка на натрупување и не е конвергентна. Оваа низа не е ограничена, а е ограничена од горе (со 0) и не е ограничена од долу. □

Да забележиме дека низите кои се стремат кон ∞ или кон $-\infty$ не се ограничени и немаат точки на натрупување.

2.5. Поднизи

Дефиниција. Нека (a_n) е низа и нека (n_k), се природни броеви такви што $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, т.е. (n_k) е строго растечка низа од природни броеви. Тогаш за низата $\left(a_{n_k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, се вели дека е **подниза од низата** (a_n)**.**

На пример, подниз од низата $a_n = n^2$ се

$a_{2k} = 4k^2$ (притоа $n_k = 2k$, за секој $k \in \mathbb{N}$),

$a_{2k+1} = \left(2k+1\right)^2$, (притоа $n_k = 2k+1$, за секој $k \in \mathbb{N}$),

$a_{3k} = 9k^2$, (притоа $n_k = 3k$, за секој $k \in \mathbb{N}$),

$a_{n_k} = \begin{cases} k^2, k < 10 \\ 16k^2, k \geq 10 \end{cases}$ (притоа $n_k = \begin{cases} k, k < 10 \\ 4k, k \geq 10 \end{cases}$, за секој $k \in \mathbb{N}$), итн.

Да забележиме дека можеме да избереме, според дефиницијата за подниза, бесконечно многу подниз од дадената низа.

Притоа секоја подниза е низа од реални броеви дефинирана со пресликувањето $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, каде $a(k) = a_{n_k}$, и може да се испитува нејзината конвергенција.

Од дефиницијата за подниза следува дека ако низата (a_n) има конвергентна подниза, тогаш границата на таа подниза е точка на натрупување за низата (a_n).

Пример. Нека $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$. Да ги разгледаме поднизите

$$a_{2k} = \frac{1}{2k} + 1, \; k \in \mathbb{N}$$

$$a_{2k-1} = -\frac{1}{2k-1}, \; k \in \mathbb{N} .$$

$$-1,\frac{1}{2}+1,-\frac{1}{3},\frac{1}{4}+1,-\frac{1}{5},\frac{1}{6}+1,\ldots\ ,\quad -\frac{1}{2k-1},\ \frac{1}{2k}+1,\ldots$$

Тогаш $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ (зошто?) и $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$ (зошто?).

Значи две конвергентни подnизи од дадената низа кои имаат различни граници. Следува низата има барем две точки на натрупување па низата нема граница.

Се разбира, овие две подnизи не се единствени конвергентни подnизи од низата (a_n). Такви се, на пример, и подnизите a_{4k}, a_{2k+17}, a_{6k+10}, итн. $\square$

Во претходниот пример најдовме низа којашто не е конвергентна, но содржи барем две конвергентни подnизи со различни граници. Од друга страна, ќе докажеме дека кај конвергентна низа не може да се најде дивергентна подниза.

1. Нека (a_n) е низа која има граница и нека $\left(a_{n_k}\right)$ е произволно избрана подниза од (a_n). Тогаш $\left(a_{n_k}\right)$ има иста граница со низата (a_n).

Доказ.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a \in \mathbb{R}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Заради $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $|\, a_n - a \,| < \varepsilon$.

Низата $\left(n_k\right)$ е строго растечка низа од природни броеви па таа се стреми ∞. Следува дека постои $k_0 \in \mathbb{N}$ така што $n_k > n_0$ за секој $k > k_0$.

Нека $k > k_0$. Бидејќи сите a_{n_k} се членови на низата (a_n) следува дека за секој $n_k > n_0$, важи $\left|a_{n_k} - a\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Нека $M > 0$ е произволен. Бидејќи $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $a_n > M$.

Заради тоа што низата $\left(n_k\right)$ строго расте следува дека постои $k_0 \in \mathbb{N}$ така што $n_k > n_0$ за секој $k > k_0$.

Нека $k > k_0$. Бидејќи сите a_{n_k} се членови на низата (a_n) следува дека за секој $n_k > n_0$, важи $a_{n_k} > M$, т.е. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$.

Слично се докажува и случајот $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. $\square$

Да заклучиме, ако низата има две конвергентни поднизи кои конвергираат кон различни граници тогаш таа е дивергентна низа. Ако низата (a_n) има барем една дивергентна подниза, тогаш и (a_n) е дивергентна низа.

2.6. Операции со граница на низи

Операции со конвергентни низи

1. Збирот на две конвергентни низи (a_n) и (b_n) е конвергентна низа, и притоа граничната вредност од збирот на низите е збир од граничните вредности на низите т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

Доказ. Нека $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Од конвергенција на двете низи следува дека
$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ такви што

$| a_n - a |< \dfrac{\varepsilon}{2}$, за секој $n > n_1$ и

$| b_n - b |< \dfrac{\varepsilon}{2}$, за секој $n > n_2$.

Нека $(c_n) = (a_n + b_n)$, $c = a + b$ и $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

За $n > n_0$, имаме

$$|c_n - c| = |(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq$$
$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Заради произволноста на ε, следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$, $\left(n_0 = \max\{n_1, n_2\}\right)$ така што $|c_n - c| < \varepsilon$ за секој $n > n_0$, т.е. $\lim_{n\to\infty} c_n = c.$

Значи, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$. $\square$

Следново својство се докажува аналогно на претходното.

2. Разликата од две конвергентни низи (a_n) и (b_n) е конвергентна низа, и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3. Производот од две конвергентни низи (a_n) и (b_n) е конвергентна низа, и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказ. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволен.

Низата (b_n) е конвергентна, па таа е и ограничена. Значи, постои $M > 0$, така што $|b_n| < M$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Притоа $\dfrac{\varepsilon}{M + |a|} > 0$, па од конвергенција на (a_n) и (b_n) следува дека постојат природни броеви n_1 и n_2 така што важи

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M + |a|}, \text{ за секој } n > n_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{M + |a|}, \text{ за секој } n > n_2.$$

Нека сега $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш $n_0 \geq n_1$ и $n_0 \geq n_2$, и нека $n > n_0$.
Имаме

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq$$
$$\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{M + |a|} M + |a| \frac{\varepsilon}{M + |a|} = \varepsilon.$$

Докажавме дека за секој $\varepsilon > 0$, постои $n_0 \in \mathbb{N}$, така што за секој $n > n_0$ важи $| a_n b_n - ab |< \varepsilon$ т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n. \ \square$$

Следново својство е очигледно.

4. Ако $a_n = a$ е константна низа, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Од 3 и 4 следува следново својство

5. Ако (a_n) е конвергентна низа, $c \in \mathbb{R}$, тогаш и $(c \cdot a_n)$ е конвергентна низа и важи

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n .$$

6. Нека (a_n) е конвергентна низа таква што $a_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Тогаш постои $m > 0$ така што $| a_n |> m$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. Нека $a > 0$ и нека $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$. Бидејќи низата е конвергентна следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $\left|a_n - a\right| < \dfrac{a}{2}$, т.е. $a_n \in \left(a - \dfrac{a}{2}, a + \dfrac{a}{2}\right) = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$. Нека $m = \dfrac{1}{2}\min\left\{\left|a_1\right|,\dots,\left|a_{n_0}\right|,\dfrac{a}{2}\right\}$. Тогаш $| a_n |> m$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Слично се докажува и ако $a < 0$. $\square$

7. Нека (a_n) е конвергентна низа таква што $a_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Тогаш и низата $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ е конвергентна и важи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$.

Доказ. Од претходното својство следува дека постои $m > 0$ така што $| a_n |> m$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Од конвергенцијата на (a_n) следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $|a_n - a| < \varepsilon m |a|$. Така, за секој $n > n_0$ имаме

$$\left|b_n - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n| \cdot |a|} < \frac{\varepsilon m |a|}{m |a|} = \varepsilon \,. \ \square$$

8. Нека (a_n) и (b_n) се конвергентни низи такви што $b_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $b = \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Тогаш и низата $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ е конвергентна и важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Доказ. Од 7 следува дека (b_n) е конвергентна и дека $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, а од 3 следува дека и низата $\left(a_n \frac{1}{b_n}\right) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ е конвергентна и важи

$$\lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}. \ \square$$

Да забележиме дека претходните својства аналогно се обопштуваат на повеќе од две низи.

2.7. Операции со низи кои имаат граница. Неопределени изрази

Овде ќе разгледаме низи кои имааат граници ∞ или $-\infty$, како и нивни збирови, разлики, производи и количници.

1. Нека (a_n) е низа таква што $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и нека (b_n) е низа таква што $b_n \neq 0$ за секој n, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ и постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $b_n > 0$. Тогаш

1) ако $a > 0$ важи $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

2) ако $a < 0$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$.

Доказ. 1) Нека $M > 0$ е произволен. Од конвергенцијата кон 0 на (b_n) следува дека постои $n_1 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_1$ важи $\left|b_n\right| < \frac{a}{2M}$. Нека $n_2 = \max\left\{n_0, n_1\right\}$, и нека $n > n_2$. Тогаш важи $b_n > 0$ и $\left|b_n\right| = b_n < \frac{a}{2M}$. Оттука добиваме $\frac{1}{b_n} > \frac{2M}{a}$.

Бидејќи $a > 0$, постои $n_3 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_3$ важи $a_n > 0$. Заради конвергенцијата на (a_n) кон $a > 0$ постои $n_4 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_4$ важи $a_n \in \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$, т.е. $a_n > \frac{a}{2}$.

Нека $n' = \max\left\{n_2, n_3, n_4\right\}$ и нека $n > n'$. Тогаш важат сите претходни неравенства, па имаме

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a}{2} \cdot \frac{2M}{a} = M .$$

Значи, докажавме дека за секој $M > 0$ постои $n' \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n'$ важи $\frac{a_n}{b_n} > M$, па следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Слично се докажува и 2). $\square$

Да забележиме дека ако (a_n) е низа како во 1. а (b_n) е низа таква што $b_n \neq 0$ за секој n, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ и постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $b_n < 0$. Тогаш

1) ако $a > 0$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$.

2) ако $a < 0$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

2. Нека (a_n) е низа таква што $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, и нека (b_n) е низа таква што $b_n \neq 0$ за секој n, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, тогаш $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен.

1) $a = 0$.

Од $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ следува дека постои $n_1 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_1$ важи $b_n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $b_n > 0$.

Од $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ следува дека постои $n_2 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_2$ важи $|a_n| < 1$. Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и нека $n > n_0$. Тогаш

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{b_n} < \varepsilon,$$

па тврдењето е докажано.

2) $a > 0$.

Повторно, од $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ следува дека постои $n_1 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_1$ важи $b_n > \frac{a}{2\varepsilon}$ и $b_n > 0$.

Од $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ следува дека постои $n_2 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_2$ важи $a_n > 0$ и $a_n \in \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$, т.е. $a_n > \frac{a}{2} > 0$.

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и нека $n > n_0$. Тогаш $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{a_n}{b_n} < \frac{a}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{a} = \varepsilon$, па тврдењето е докажано.

3) $a < 0$ се докажува слично како 2). $\square$

Да забележиме дека ако во претходното својство важи $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, тогаш повторно $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Без доказ, ќе ги наведеме следниве својства.

3. Нека (a_n) е низа таква што $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, и нека (b_n) е низа таква што $b_n \neq 0$ за секој n, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ и постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $b_n > 0$. Тогаш важи $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Ако $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, тогаш $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$.

Ако (b_n) е низа таква што $b_n \neq 0$ за секој n, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ и постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $b_n < 0$.

Тогаш ако $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ важи $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$, а ако $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ важи $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. $\square$

Ќе воведеме ознаки во кои ќе го користиме симболот ∞ и симболот 0 во именител на дропка. Но тоа не значи дека се дели со 0 или со ∞, туку ознаките ќе бидат во следнава смисла:

Изразот $\frac{0}{\pm\infty}$ ќе означува кон што се стреми количникот на низата $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, ако $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$. Од својството 2 следува дека тој количник се стреми кон 0, па ќе пишуваме $\frac{0}{\pm\infty} = 0$.

Јасно ако $a \neq 0$, $\frac{a}{\infty} = 0$.

Од 3 следува дека $\frac{\infty}{0}$ е или ∞ или $-\infty$ во зависност од низата (b_n).

Аналогни својства важат за $\frac{-\infty}{0}$ и $\frac{a}{-\infty}$.

Од 2 следува дека $\frac{a}{\pm\infty} = 0$.

Слично како претходниве својства може да се докаже дека

$$\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty .$$

Притоа, на пример, под $\infty \cdot \infty$ ја подразбираме границата на низата $\left(a_n b_n\right)$ кога $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Аналогно се докажува дека

- $\pm\infty \cdot a = \pm\infty$, $a > 0$
- $\pm\infty \cdot a = \mp\infty$, $a < 0$
- $\infty + \infty = \infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $a \pm \infty = \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$.

Во сите овие случаи дадените изрази ги сметаме за определени.

Сега да ги разгледаме низите $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $c_n = \dfrac{2}{n}$. Сите низи конвергираат кон 0. Но, $\dfrac{a_n}{b_n} = n \to \infty$ и $\dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$.

Во двата случаја имаме $\dfrac{0}{0}$ но добиваме различни граници на количникот. Затоа изразот $\dfrac{0}{0}$ го сметаме за неопределен.

Нека $a_n = \dfrac{1}{n^3} \to 0$, $b_n = n^2 \to \infty$, $c_n = n^4 \to \infty$. Имаме $a_n b_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, а $a_n c_n = n \to \infty$, па и изразот $0 \cdot \infty$ е неопределен.

Ако $a_n = n^3 \to \infty$, $b_n = n^2 \to \infty$, $c_n = n^4 \to \infty$, имаме $\dfrac{a_n}{b_n} = n \to \infty$, а $\dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$, па и изразот $\dfrac{\infty}{\infty}$ е неопределен.

Слично, неопределени се и $0\left(-\infty\right)$, $\dfrac{-\infty}{\infty}$, $\dfrac{\infty}{-\infty}$ и $\dfrac{-\infty}{-\infty}$.

За низите $a_n = n \to \infty$, $b_n = 2n \to \infty$ и $c_n = n + \dfrac{1}{2} \to \infty$ имаме $a_n - b_n = -n \to -\infty$ и $a_n - c_n = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$.

Следува дека $\infty - \infty$ е неопределен.

Слично, неопределен е и $-\infty + \infty$.

Да ги разгледаме низите $a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $b_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ и $c_n = \frac{1}{3^n} \to 0$.

Тогаш $b_n^{a_n} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ и $c_n^{a_n} = \left(\frac{1}{3^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$, па и 0^0 е неопределен.

За низите $a_n = 2^n \to \infty$, $b_n = \frac{1}{n} \to 0$ и $c_n = 3^n \to \infty$ имаме $a_n^{b_n} = \left(2^n\right)^{\frac{1}{n}} = 2 \to 2$ и $c_n^{b_n} = 3 \to 3$ па и ∞^0 е неопределен.

2.8. Други својства на граница на низа

1. Нека (a_n) и (b_n) се две низи кои имаат граница.

Ако $a_n \le b_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш

- ако $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ следува $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

- ако $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ следува $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

- ако $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, следува $a \le b$, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.

Доказ. а) Нека $a_n \le b_n$.

- Ако $M > 0$ е произволен, тогаш постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $a_n > M$, за секој $n > n_0$. За $n > n_0$ важи $b_n \ge a_n > M$, па и $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

- Слично се докажува како претходното.

- Да претпоставиме спротивно, дека $a > b$ и нека $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$.

Постојат $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ така што $\left|a_n - a\right| < \frac{a-b}{2}$, за секој $n > n_1$ и $\left|b_n - b\right| < \frac{a-b}{2}$ за секој $n > n_2$. Нека $n_0 = \max\left\{n_1, n_2\right\}$ и нека $n > n_0$. Тогаш важи $-\frac{a-b}{2} < a_n - a < \frac{a-b}{2}$ и $-\frac{a-b}{2} < b_n - b < \frac{a-b}{2}$, па имаме

$$a_n - b_n = \underbrace{a_n - a}_{> -\frac{a-b}{2}} + \underbrace{b - b_n}_{> -\frac{a-b}{2}} + \underbrace{a - b}_{>0} > -\frac{a-b}{2} - \frac{a-b}{2} + a - b = 0\,.$$

Добивме дека за $n > n_0$ важи $a_n > b_n$, што е во противречност со претпоставката дека $a_n \le b_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Значи мора $a \le b$. □

Следново својство е наречено „сендвич принцип“.

2. Нека (a_n), (b_n) и (c_n) се низи од реални броеви такви што $a_n \le b_n \le c_n$ и нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Тогаш и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Доказ. 1. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, од претходното својство следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$. Ако, пак $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, повторно следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

2. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ и $a \in \mathbb{R}$. Да претпоставиме дека $\varepsilon > 0$ е произволен. Постојат $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ така што $\left|a_n - a\right| < \varepsilon$, за секој $n > n_1$ и $\left|c_n - a\right| < \varepsilon$ за секој $n > n_2$. Нека $n_0 = \max\left\{n_1, n_2\right\}$ и нека $n > n_0$. Важи $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ и $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$, и од $a_n \le b_n \le c_n$ имаме

$$a_n - a \le b_n - a \le c_n - a\text{, т.е. } -\varepsilon < a_n - a \le b_n - a \le c_n - a < \varepsilon\,.$$

Значи, $\left|b_n - a\right| < \varepsilon$, за секој $n > n_0$. Со тоа тврдењето е докажано. □

Пример. Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, каде

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

Решение. Заради неравенствата

$$n^2+1 \le n^2+1, n^2+1 \le n^2+2,\ n^2+1 \le n^2+3, \ldots, n^2+1 \le n^2+n\,,$$

односно

$$\frac{n}{n^2+1} \ge \frac{n}{n^2+1}, \frac{n}{n^2+1} \ge \frac{n}{n^2+2}, \frac{n}{n^2+1} \ge \frac{n}{n^2+3}, \ldots, \frac{n}{n^2+1} \ge \frac{n}{n^2+n}\,.$$

Со собирање на овие неравенства добиваме

$$n\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = a_n \,.$$

Од друга страна

$$n^2+1 \leq n^2+n,\, n^2+2 \leq n^2+n,\; n^2+3 \leq n^2+n, \ldots, n^2+n \leq n^2+n$$

т.е.

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n}, \frac{n}{n^2+2} \geq \frac{n}{n^2+n}, \frac{n}{n^2+3} \geq \frac{n}{n^2+n}, \ldots, \frac{n}{n^2+n} \geq \frac{n}{n^2+n} \,.$$

Со собирање на овие неравенства се добива $a_n \geq n\dfrac{n}{n^2+n}$.

Значи,

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$ следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. □

3. Ако $m \in \mathbb{R}$ и $a_n \geq m$ за секој $n \in \mathbb{N}$, и постои $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq m$.

Доказ. Следува од 1 земајќи $b_n = m$, за секој $n \in \mathbb{N}$. □

Без доказ ќе го наведеме следново својство.

4. а) Ако (a_n) е монотоно растечка (или неопаѓачка) и ограничена од горе низа, тогаш таа е конвергентна.

б) Ако (a_n) е монотоно опаѓачка (или нерастечка) и ограничена од долу низа, тогаш таа е конвергентна. □

Последново својство може да се искаже и во следнава форма:

Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Пример 1. Докажи дека низата, $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ е конвергентна.

Решение.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\frac{(n+1)n!\,n^n}{(n+1)^n(n+1)n!}=$$

$$=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n<1^n=1$$

добиваме дека $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1, \forall n\in\mathbb{N}$.

Јасно е дека $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, па следува дека $x_{n+1}<x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ т.е. низата монотоно опаѓа.

Заради $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ следува дека низата е ограничена од долу, па таа е конвергентна, т.е. постои реален број x така што $x=\lim_{n\to\infty}x_n$. □

Да забележиме дека својството 4 не дава начин да се определи границата на низата, туку само да се докаже дека таа е конвергентна.

Од посебна важност во математиката е низата $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. За неа важи следново својство.

5. Низата $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е монотоно растечка и ограничена од горе. □

Од 5 следува дека таа низа е конвергентна. Нејзината граница се нарекува Неперов број (или Ојлеров број) и се означува со e. Се докажува дека бројот e е ирационален. Земајќи доволно голем n може да се пресмета приближно бројот e. Првите неколку децимали на e се 2.71828182845904523536028747135 27.

Значи, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Често за побрзо пресметување на приближна вредност на бројот e се користи следново својство.

6. Низата $a_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$ конвергира и $\lim_{n\to\infty}a_n=e$. □

Нека $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = n$ и $c_n = 2n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Тогаш $a_n \to 1$, $b_n \to \infty$ и $c_n \to \infty$, но $a_n^{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$ и

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e^2.$$

Следува дека и 1^∞ е неопределен израз.

7. Ако постои $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ тогаш постои и $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ и

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$$

а) Обратното тврдење не мора да важи;

б) Ако $a = 0$ тогаш важи и обратното тврдење.

Доказ. Прво ќе го докажеме неравенството

$$\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a|, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Навистина, $|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a|$, односно

$$|a_n| - |a| \le |a_n - a|. \tag{2}$$

Од друга страна, $|a| = |a - a_n + a_n| \le |a - a_n| + |a_n|$, односно

$$|a| - |a_n| \le |a - a_n|. \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува $-|a_n - a| \le |a_n| - |a| \le |a_n - a|$ со што (1) е докажано.

Сега нека $\varepsilon > 0$. Заради $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $|a_n - a| < \varepsilon$. Сега за $n > n_0$ имаме $\big||a_n| - |a|\big| \overset{(1)}{\le} |a_n - a| < \varepsilon$, па $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

б) За низата $a_n = (-1)^n$ важи $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, но низата (a_n) дивергира.

в) Нека $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ и $\varepsilon > 0$ е произволно. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за $n > n_0$ важи $\big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$.

Тогаш за $n > n_0$, важи $|a_n - 0| = |a_n| = \big||a_n|\big| = \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$, па $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Без доказ ќе го наведеме следново својство.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$, за секој $b \in \mathbb{R}$.

Да забележиме дека во некои од својствата на низи се бара некое тврдење да важи за секој $n \in \mathbb{N}$. Меѓутоа, доволно е тоа тврдење да важи за секој $n > n_0$. На пример во својството 4 се бара низата да е монотоно растечка. Тоа значи $a_{n+1} > a_n$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Ништо не менува во природата на низата ако се претпостави дека таа монотоно расте почнувајќи од некој n_0. Со други зборови конечно многу членови не влијаат на природата на низата. Така ако $a_n = \frac{n}{n+1}$ е монотоно растечка почнувајќи од првиот член (таа е и ограничена од горе со 1 па е конвергентна), а истиот заклучок може да се изведе и за низата $b_n = \begin{cases} -n, & n < 20 \\ \frac{n}{n+1}, & n \geq 20 \end{cases}$ која опаѓа до 20-тиот член а потоа монотоно расте. Слично, на пример и во сендвич теоремата таа ќе важи и ако претпоставката е постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $a_n \leq b_n \leq c_n$ за секој $n > n_0$.

2.9. Аритметичка прогресија

Нека a и d се реални броеви.

Дефиниција. Аритметичка прогресија (или низа) е низа (a_n) зададена со рекурентната формула $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Значи, за да се знае аритметичката прогресија доволно е да се знае првиот член a_1 и реалниот број d. Бројот d се нарекува **разлика на прогресијата**.

Од дефиницијата следува дека следниот член на прогресијата се добива кога на претходниот ќе се додаде бројот d, т.е. разликата на секои два соседни члена е еднаква на d. Значи, $a_{n+1} - a_n = d$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Ако $d = 0$ сите членови во прогресијата се еднакви. Затоа, обично се претпоставува дека $d \neq 0$. Во продолжение така ќе претпоставуваме.

Така, ако првиот член е a_1, тогаш

$a_2 = a_1 + d$,

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$,

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$, итн.

Насетуваме дека $a_n = a_1 + (n-1)d$. Точна е следнава формула

1. Општиот член a_n на аритметичката прогресија (a_n) со прв член a_1 и разлика d е

$a_n = a_1 + (n-1)d,$ за секој $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. (1)

Доказ. Доказот ќе го изведеме со математичка индукција.

За $n = 2$ (првиот природен број за кој се тврди дека формулата е точна) имаме $a_2 = a_1 + d = a_1 + (2-1)d$, па тврдењето е точно.

Нека $(*)$ важи за $n \in \mathbb{N}$ т.е. нека $a_n = a_1 + (n-1)d$. (*)

Тогаш за a_{n+1} имаме

$$a_{n+1} = a_n + d \underset{(*)}{=} a_1 + (n-1)d + d = a_1 + (n-1+1)d = a_1 + ((n+1)-1)d$$

Според ПМИ важи (1) за секој $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. □

Заради 1, имаме дека секој член на аритметичката прогресија може да го пресметаме ако се познати првиот член a_1 и разликата d .

Примери:

1) Природната низа е аритметичка прогресија со разлика $d = 1$ и прв член $a_1 = 1$.

2) Низата: $1, 4, 7, 10, \ldots, 3n-2, \ldots$ е аритметичка прогресија со разлика $d = 3$ и прв член $a_1 = 1$.

3) Низата $5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots, 6-n, \ldots$ е аритметичка прогресија со разлика $d = -1$ и прв член $a_1 = 5$. □

2. Нека (a_n) е аритметичка прогресија со разлика d .

(i) ако $d > 0$, тогаш (a_n) е строго монотоно растечка низа.

(ii) ако $d < 0$, тогаш (a_n) е строго монотоно опаѓачка низа.

(iii) за секои три последователни членови a_{k-1}, a_k, a_{k+1} на прогресијата (a_n), важи

$$a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$$

т.е. секој член на прогресијата, почнувајќи од вториот, е аритметичка средина на неговите два соседни члена.

Доказ. (i) Ако $d > 0$, тогаш $a_{n+1} - a_n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, што е еквивалентно со $a_{n+1} > a_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Последното значи дека (a_n) е строго монотоно растечка низа.

(ii) Слично, како (i).

(iii) Имаме $a_{k+1} - a_k = d$, $a_k - a_{k-1} = d$.

Ако ги одземеме двете равенства, добиваме

$$a_{k+1} - a_k - a_k + a_{k-1} = 0 \text{, т.е. } \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} = a_k . \square$$

3. Нека (a_n) е аритметичка прогресија. Тогаш, за секој $n \in \mathbb{N}$, и за сите $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ важи

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Доказ. Од формулата за општиот член, добиваме

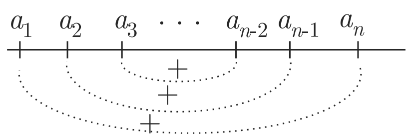
$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k+1-1)d =$$
$$= a_1 + a_1 + (k-1+n-k)d = a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n . \square$$

На пример, за $n = 15$ и

$k = 3$ имаме $a_3 + a_{13} = a_1 + a_{15}$

$k = 5$ имаме $a_5 + a_{11} = a_1 + a_{15}$, итн.

Последново својство значи дека збирот на членовите кои се подеднакво „оддалечени“ од членовите a_1 и a_n е еднаков на збирот на a_1 и a_n.



Да забележиме дека збирот на индексите на левата страна и на десната страна од равенството $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ е еднаков на $n+1$.

4. (Формула за збир на првите $n-$членови од аритметичка прогресија)

Збирот S_n на првите $n-$членови од аритметичката прогресија (a_n) со разлика d е еднаков на $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Доказ. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + a_{n-k+1} + \ldots + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k+1} + \ldots + a_k + \ldots + a_1$

па со собирање на овие равенства добиваме

$$2S_n = (a_1 + a_n) + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{=a_1+a_n} + \ldots + \underbrace{(a_k + a_{n-k+1})}_{=a_1+a_n} + \ldots + (a_n + a_1) =$$

$$= n(a_1 + a_n)$$

па $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. $\square$

Да забележиме дека формулата за збир на првите $n-$членови може да се изрази и на следниов начин:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big).$$

т.е. преку првиот член, a_1, и разликата d.

2.10. Геометриска прогресија

Нека a и q се реални броеви.

Дефиниција. Геометриска прогресија (или низа) е низа (a_n) зададена со рекурентната формула $a_1 = a$, $a_{n+1} = qa_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Значи, за да се знае геометриската прогресија доволно е да се знае првиот член a_1 и реалниот број q Бројот q се нарекува **количник на прогресијата**.

Од дефиницијата следува дека следниот член на прогресијата се добива кога на претходниот ќе се помножи со бројот q, т.е. количникот на секои два соседни члена е еднаква на d. Значи, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = d$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Ако $q = 0$ сите членови (освен можеби првиот) на прогресијата се еднакви на 0, а ако $q = 1$ сите членови на прогресијата се еднакви. Слично, ако $a_1 = 0$, тогаш сите членови на прогресијата се еднакви на нула.Затоа, обично се претпоставува дека $q \neq 0$, $q \neq 1$ и $a_1 \neq 0$. Во продолжение така ќе претпоставуваме.

Така, ако првиот член е a_1, тогаш

$a_2 = qa_1$,

$a_3 = qa_2 = qqa_1 = q^2 a_1$,

$a_4 = qa_3 = qq^2 a_1 = q^3 a_1$, итн.

Насетуваме дека $a_n = q^{n-1} a_1$. Точна е следнава формула.

1. Општиот член a_n на геометриската прогресија (a_n) со прв член a_1 и количник q е

$$a_n = q^{n-1} a_1 \text{ за секој } n \in \mathbb{N},\ n > 1. \qquad (1)$$

Доказ. Доказот ќе го изведеме со математичка индукција.

За $n = 2$ (првиот природен број за кој се тврди дека формулата е точна) имаме $a_2 = qa_1 = q^{2-1} a_1$, па тврдењето е точно.

Нека $(*)$ важи за $n \in \mathbb{N}$ т.е. нека $a_n = q^{n-1} a_1$. (*)

Тогаш за a_{n+1} имаме

$$a_{n+1} = qa_n \underset{(*)}{=} qq^{n-1} a_1 = q^{n-1+1} a_1 = q^n a_1.$$

Според ПМИ важи (1) за секој $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. □

Заради 1, имаме дека секој член на геометриската прогресија може да го пресметаме ако се познати првиот член a_1 и количникот q.

Примери:

1) Низата $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ..., \frac{1}{3^{n-1}}, ...$ е геометриска прогресија со количник $q = \frac{1}{3}$ и прв член $a_1 = 1$.

2) Низата $-2, 4, -8, ..., (-2)^n, ...$ е геометриска прогресија со количник $q = -2$ и прв член $a_1 = -2$. □

2. Нека (a_n) е геометриска прогресија со количник q.

(i) ако $q > 1$, тогаш (a_n) е строго монотоно растечка низа.

(ii) ако $0 < d < 1$, тогаш (a_n) е строго монотоно опаѓачка низа.

(iii) Ако $q > 0, a_1 > 0$, тогаш за секои три последователни членови a_{k-1}, a_k, a_{k+1} на прогресијата (a_n), важи

$$a_k = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$$

т.е. секој член на прогресијата, почнувајќи од вториот, е геометриска средина на неговите два соседни члена.

Доказ. (i) Ако $q > 1$, тогаш $a_{n+1} = qa_n > a_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ па (a_n) е строго монотоно растечка низа.

(ii) Слично, како (i).

(iii) Во овој случај сите членови на прогресијата се позитивни па постои $\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$, за секој k.

Имаме $a_{k+1} = qa_k$, $a_k = qa_{k-1}$, па добиваме

$$a_{k+1}a_{k-1} = qa_k \frac{a_k}{q} = a_k^2, \text{ т.е. } a_k = \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}. \ \square$$

Да забележиме дека ако $a_1 < 0, q > 0$, тогаш важи $a_k^2 = a_{k+1}a_{k-1}$, за секој $k \in \mathbb{N}$.

3. Нека (a_n) е аритметичка прогресија. Тогаш, за секој $n \in \mathbb{N}$, и за сите $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ важи

$$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot a_n.$$

Доказ. Од формулата за општиот член, добиваме

$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 q^{k-1} a_1 q^{n-k+1-1} = a_1 a_1 q^{n-1} = a_1 a_n$ □

На пример, за $n = 15$ и

$k = 3$ имаме $a_3 a_{13} = a_1 a_{15}$

$k = 5$ имаме $a_5 a_{11} = a_1 a_{15}$, итн.

Последново својство значи дека производот на членовите кои се подеднакво „оддалечени“ од членовите a_1 и a_n е еднаков на производот на a_1 и a_n.

Да забележиме дека збирот на индексите на левата страна и на десната страна од равенството $a_k a_{n-k+1} = a_1 a_n$ е еднаков на $n+1$.

4. (Формула за збир на првите $n-$членови од геометриска прогресија)

Збирот S_n на првите $n-$членови од геометриската прогресија (a_n) со количник q е еднаков на $a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Доказ. Според формулата за општиот член имаме

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Множејќи го ова равенство со q добиваме

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n,$$

па оттука $S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n$, т.е. $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$. □

2.11. Решени задачи

1. Да се најдат неколку први членови од низата чиј општ член е:

а) $a_n = \sin(\frac{n\pi}{3})$ б) $a_n = 2^{-n}\cos(n\pi)$ в) $a_n = n\cos(n\pi)$

Дали овие низи се ограничени?

Решение.

а) $a_1 = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_2 = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_3 = \sin(\frac{3\pi}{3}) = 0$,

$a_4 = \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_5 = \sin(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_6 = \sin(2\pi) = 0$,...

Значи низата е: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \ldots$ и таа е ограничена бидејќи

$$\left|\sin(\frac{n\pi}{3})\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

б) $a_1 = 2^{-1}\cos(\pi) = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 2^{-2}\cos(2\pi) = \frac{1}{2^2}$, $a_3 = 2^{-3}\cos(3\pi) = -\frac{1}{2^3}$,

$a_4 = 2^{-4}\cos(4\pi) = \frac{1}{2^4}, \ldots, a_n = (-1)^n 2^{-n} = (-1)^n \frac{1}{2^n}$

Низата е: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{2^n}$,... И оваа низа е ограничена бидејќи $\left|a_n\right| \leq \frac{1}{2}$.

в) $a_1 = \cos(\pi) = -1$, $a_2 = 2\cos(2\pi) = 2$, ... $a_n = n(-1)^n$.

Значи, членовите на низата се: $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n n, \ldots$. Оваа низа не е ограничена бидејќи членовите по апсолутна вредност постојано растат.

2. Знаејќи неколку први членови на низата, да се напише еден од можните изрази за општиот член на низата:

а) $\frac{2}{6}, \frac{5}{11}, \frac{8}{16}, \frac{11}{21}, \ldots$ **решение.** $a_n = \frac{3n-1}{5n+1}$

б) $\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{5}{18}, \frac{6}{27}, \ldots$ **решение.** $a_n = \frac{n+1}{n^2+2}$

в) $\frac{3}{2}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{11}{10}, \quad \frac{18}{17}, \quad \frac{27}{26}, \dots$ **Решение:** $a_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$

г) $1, \quad 5, \quad 7, \quad 17, \quad 31, \quad 65, \dots$ **Решение:** $a_n = 2^n + (-1)^n$

д) $\sqrt{5}, \quad \sqrt{5\sqrt{5}}, \quad \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \quad \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}, \dots,$

Решение.

$$a_1 = 5^{\frac{1}{2}}, \quad a_2 = \sqrt{\sqrt{5^3}} = 5^{\frac{3}{4}}, \quad a_3 = \sqrt{5a_2} = \sqrt{5 \cdot 5^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{5^{\frac{7}{4}}} = 5^{\frac{7}{8}},$$
$$a_4 = \sqrt{5a_3} = \sqrt{5 \cdot 5^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{5^{\frac{15}{8}}} = 5^{\frac{15}{16}}, \dots\dots\dots, a_n = 5^{\frac{2^n-1}{2^n}}$$

3. Да се определи монотоноста на низата, зададена со општиот член a_n :

а) $a_n = \frac{2}{n}$

Решение. $a_{n+1} = \frac{2}{n+1}$, па за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} < a_n$, што значи низата е монотоно опаѓачка

б) $a_n = \frac{n}{2^n}$

Решение. $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}, \quad a_n = \frac{n \cdot 2}{2^n \cdot 2} = \frac{n+n}{2^{n+1}} > \frac{n+1}{2^{n+1}} = a_{n+1}$, па за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} < a_n$, што значи низата е монотоно опаѓачка

в) $a_n = \frac{n}{n!}$

Решение. $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)!}, \quad a_n = \frac{n(n+1)}{(n+1)!} = \frac{\mathrm{n}^2 + n}{(n+1)!} > \frac{n+1}{(n+1)!} = a_{n+1}$, па за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $a_{n+1} < a_n$, што значи низата е монотоно опаѓачка

г) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Решение. $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n+2}$. За да ги споредиме a_n и a_{n+1}, ќе ги сведеме на ист именител:

$$a_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n}{(n+2)(n+1)},\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)}$$

Бидејќи $a_{n+1}>a_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}$ следи низата е монотоно растечка.

д) $a_n=\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

Решение.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{(n^2+2n+1-1)(n^2+1)-(n^2-1)(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+1+1)(n^2+1)}=$$
$$=\frac{(n^2+2n)(n^2+1)-(n^2-1)(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+1+1)(n^2+1)}=$$
$$=\frac{(n^4+2n^3+n^2+2n)-(n^4-n^2+2n^3-2n+2n^2-2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}=$$
$$=\frac{(n^4+2n^3+n^2+2n)-(n^4+n^2+2n^3-2n-2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}=\frac{4n+2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}>0$$

Бидејќи $a_{n+1}-a_n>0$, следи $a_{n+1}>a_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}$ следи низата е монотоно растечка.

ѓ) $a_n=\dfrac{\cos(n\pi)}{n^2}$

Решение: $a_1=\dfrac{\cos(\pi)}{1^2}=-1,\quad a_2=\dfrac{\cos(2\pi)}{2^2}=\dfrac{1}{4},\quad a_3=\dfrac{\cos(3\pi)}{3^2}=\dfrac{-1}{9},\ldots$

Бидејќи $a_2>a_1,\quad a_3<a_2$, ..., и бидејќи не важи $a_{n+1}>a_n,\quad \forall n\in\mathbb{N}$ или $a_{n+1}<a_n,\quad \forall n\in N,$ следи низата не е монотона.

4. Дадена е низата со општ член $a_n=\dfrac{10^n}{n!}$. Да се докаже дека оваа низа е монотоно опаѓачка за $n\geq 10$.

Решение.

$$a_n-a_{n+1}=\frac{10^n}{n!}-\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10^n(n+1)-10^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{10^n(n+1-10)}{(n+1)!}=\frac{10^n(n-9)}{(n+1)!}$$

Бидејќи $a_n-a_{n+1}>0$ за $n\geq 10$, следи за $n\geq 10$ низата е монотоно опаѓачка.

5. Користејќи ја дефиницијата за граница на низа, да се докаже дека:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$.

Почнувајќи од кое n е исполнето неравенството $\left|a_n-1\right|<\dfrac{1}{100}$?

Решение. Од дефиницијата за граница на низа следи дека ако $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$,

тогаш за $\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}$ т.ш. за $n>n_0$, $\left|a_n-1\right|<\varepsilon$.

Нека $\varepsilon>0$ е произволен.

Тогаш $\left|a_n-1\right|=\left|\dfrac{2n-1}{2n+1}-1\right|=\left|\dfrac{2n-1-2n-1}{2n+1}\right|=\left|\dfrac{-2}{2n+1}\right|=\dfrac{2}{2n+1}$, па

$$\frac{2}{2n+1}<\varepsilon\Leftrightarrow(2n+1)\varepsilon>2\Leftrightarrow 2n\varepsilon+\varepsilon>2\Leftrightarrow n>\frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$$

Нека $n_0\in\mathbb{N}$ е број поголем од реалниот број $\dfrac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$ и нека $n>n_0$.

Тогаш $n>n_0>\dfrac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$, па следува дека $\dfrac{2}{2n+1}<\varepsilon$, т.е. $\left|a_n-1\right|<\varepsilon$.

Значи, докажавме дека $\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N}$ т.ш. за $n>n_0$, $\left|a_n-1\right|<\varepsilon$, па следува

дека $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$.

Ако избереме $\varepsilon=0,01=\dfrac{1}{100}$, тогаш:

$\left|a_n-1\right|=\dfrac{2}{2n+1}<\dfrac{1}{100}$

Ако го решиме последното неравенство по n, добиваме:

$2n+1>200,$ односно $n>\dfrac{199}{2}=99,5.$ Ако $n_0=99$, тогаш добиваме дека за

$n>n_0$ важи $\left|a_n-1\right|<\dfrac{1}{100}=\varepsilon$, односно почнувајќи од $n=100$ е исполнето

неравенството.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}=\dfrac{3}{5}$. Почнувајќи од кое n е исполнето неравенството

$$\left|a_n - \frac{3}{5}\right| < 0,01 \ \ ?$$

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Тогаш

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{5(3n^2+1)-3(5n^2-1)}{(5n^2-1)5}\right| = \left|\frac{15n^2+5-15n^2+3)}{(5n^2-1)5}\right| = \frac{8}{(5n^2-1)5}$$

па

$$\frac{8}{(5n^2-1)5} < \varepsilon \Leftrightarrow 5\varepsilon\left(5n^2-1\right) > 8 \Leftrightarrow 25n^2\varepsilon - 5\varepsilon > 8 \Leftrightarrow n^2 > \frac{8+5\varepsilon}{25\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{25\varepsilon}}$$

(бидејќи $n \in \mathbb{N}$).

Нека $n_0 \in \mathbb{N}$ е број поголем од $\sqrt{\dfrac{8+5\varepsilon}{25\varepsilon}}$ и нека $n > n_0$.

Тогаш $n > n_0 > \sqrt{\dfrac{8+5\varepsilon}{25\varepsilon}}$, па $n^2 > \dfrac{8+5\varepsilon}{25\varepsilon}$.

Последново е еквивалентно со $\left|\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} - \dfrac{3}{5}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} = \dfrac{3}{5}$.

Го решаваме неравенството $\left|a_n - \dfrac{3}{5}\right| < 0,01$ по n:

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| < 0,01$$

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{8}{(5n^2-1)5} < 0,01$$

$$8 < \frac{(5n^2-1)5}{100} = \frac{25n^2-5}{100} \Leftrightarrow 25n^2 - 5 > 800 \Leftrightarrow 25n^2 > 805$$

$$n^2 > \frac{805}{25} = 32,2 \Leftrightarrow n > \sqrt{32,2} \Leftrightarrow n > 5$$

Значи, почнувајќи од $n = 6$ е исполнето неравенството $\left|a_n - \dfrac{3}{5}\right| < 0,01$.

6. За низата со општ член a_n велиме дека е *бесконечно мала низа* ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Да се докаже дека $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{n} = 0$.

Решение. Нека $\varepsilon > 0$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\dfrac{2}{n_0} < \varepsilon$ (Зошто?). Нека $n > n_0$.

Тогаш, ако n е парен, важи $\left|a_n - 0\right| = \left|a_n\right| = 0 < \varepsilon$, а ако n е непарен важи $\left|a_n - 0\right| = \left|a_n\right| = \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

Значи, за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n > n_0$ важи $\left|a_n - 0\right| < \varepsilon$, па следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} = 0$.

7. Дадена е низата со општ член $a_n = \frac{3n-5}{9n+4}$. Се знае дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-5}{9n+4} = \frac{1}{3}$. Да се најде бројот на членови на низата што се надвор од интервалот

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{3} + \frac{1}{1000}\right).$$

Решение. Го решаваме неравенството $\left|\frac{3n-5}{9n+4} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$ по n. Ставајќи

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$, добиваме

$$\left|\frac{3n-5}{9n+4} - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow \left|\frac{3(3n-5)-(9n+4)}{3(9n+4)}\right| = \left|\frac{-19}{3(9n+4)}\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\frac{19}{3(9n+4)} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 27n + 12 > 19000 \Leftrightarrow 27n > 18988 \Leftrightarrow n > \frac{18988}{27} = 703,2$$

Значи, почнувајќи од 704 член на низата сите натамошни членови се во интервалот $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{3} + \frac{1}{1000}\right)$, а 703 членови се надвор од овој интервал.

8. Дадена е низата :

$$a_1 = 0,9; \quad a_2 = 0,99; \quad a_3 = 0,999; \ldots; a_n = 0,\underbrace{999\ldots9}_{n}.$$

Да се најде $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Колку членови се надвор од интервалот

$$(a - 0,0001; a + 0,0001)?$$

Решение.

$$a_1 = \frac{9}{10}; \quad a_2 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100}; \quad a_3 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}; \ldots; a_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots + \frac{9}{10^n}$$

Користејќи ја формулата за збир на првите n членови од геометриска прогресија $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$, за a_n кој е збир на n членови од геометриска прогресија, добиваме:

$$a_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{9}{10} \frac{\frac{1-10^n}{10^n}}{\frac{1-10}{10}} = \frac{10^n - 1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

За граничната вредност на a_n се добива:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{10^n}) = 1$$

За да го добиеме бројот на членови на низата кои се надвор од интервалот $(1-0,0001; 1+0,0001)$, ставаме $\varepsilon = \dfrac{1}{10000} = 10^{-4}$ и го решаваме неравенството

$$\left|1 - \frac{1}{10^n} - 1\right| = \left|\frac{1}{10^n}\right| = \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10000} = 10^{-4}$$
$$10^n > 10^4 \Leftrightarrow n > 4 \Leftrightarrow n \geq 5$$

Значи, добивме дека почнувајќи од петтиот член на низата сите натамошни членови се во интервалот $(1-0,0001; 1+0,0001)$, а само 4 члена се надвор од овој интервал.

9. Да се докаже дека 1 не е граница на низата со општ член $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.

Решение.

Нека го претпоставиме обратното дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Тогаш треба за произволно ε да важи

$$\left|\frac{2n+3}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n+3-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{n+2}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1} < \varepsilon$$
$$n+2 < \varepsilon(n+1) = \varepsilon n + \varepsilon \Leftrightarrow n(1-\varepsilon) < \varepsilon - 2 \Leftrightarrow n < \frac{\varepsilon - 2}{1-\varepsilon}$$

Ако $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, од последното неравенство се добива

$$n < \frac{\varepsilon - 2}{1-\varepsilon} = \frac{\frac{1}{10} - 2}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1-20}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{-19}{9}$$

што е контрадикција, бидејќи n е природен број. Значи, претпоставката дека 1 е граница на низата не е точна.

10. Да се докаже дека за $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Решение.

1) за $a = 1$, $\sqrt[n]{1} = 1$

2) за $a > 1$ низата: $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \ldots, \sqrt[n]{a}, \ldots$ е монотона и ограничена бидејќи $a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \ldots. > \sqrt[n]{a} > 1$.

Значи, можеме да запишеме $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, каде $h_n > 0$. Ќе покажеме дека низата h_n е бескрајно мала низа:

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n \Leftrightarrow a = (1+h_n)^n > 1 + nh_n$$

$$0 < h_n < \frac{a-1}{n}$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, следува дека и $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Значи:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}(1 + h_n) = 1 + \lim_{n\to\infty} h_n = 1 + 0 = 1$$

3) за $0 < a < 1, \quad \exists b > 1$, т.ш. $a = \frac{1}{b}$, па

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$$

11. Да се определат граничните вредности на низите со општи членови a_n:

а) $a_n = \frac{2n+3}{3-n}$ б) $a_n = \frac{n^2 - 5n}{2n^2 + 3}$

Решение.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{\dfrac{3}{n}-1}=-2$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n}{2n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{5}{n}}{2+\dfrac{3}{n^2}}=\dfrac{1}{2}$

12. Да се пресметат границите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3+2n+n^4}$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+2)!}$ в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+2}+2n)^2}{\sqrt{n+1}}$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$ д) $\lim\limits_{n\to\infty}n(n-\sqrt{n^2-1})$

ѓ) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$ е) $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}})$

Решение: а)

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3+2n+n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+n+2n+2)(n+3)}{3+2n+n^4}=$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+2)(n+3)}{3+2n+n^4}=$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{n^3+3n^2+2n+3n^2+9n+6}{3+2n+n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{n^3+6n^2+11n+6}{3+2n+n^4}=$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{11}{n^3}+\dfrac{6}{n^4}}{\dfrac{3}{n^4}+\dfrac{2}{n^3}+1}=\frac{0}{1}=0$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+3)!+(n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!(n+3-1)}{(n+2)!(n+3+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{4}{n}}=1$

в)

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2}+2n)^2}{\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2+4n\sqrt{n^2+2}+4n^2}{\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+2+4n\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n+1}}=$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2}{\sqrt{n+1}}+\frac{2}{\sqrt{n+1}}+\frac{4n\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{\dfrac{1}{n^2}\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{16n^2(n^2+2)}}{\sqrt{n+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{\frac{n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}}+\sqrt{\frac{16n^4+32n^2}{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{16+\frac{32}{n^2}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}=\infty+\infty=\infty$$

г)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-n^2}{(\sqrt{n^2+n}+n)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

д)

$$\lim_{n\to\infty}n(n-\sqrt{n^2-1})=\lim_{n\to\infty}n\frac{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})}{n+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}n\frac{n^2-(n^2-1)}{n+\sqrt{n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

ѓ)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+n+1}+\frac{1}{n}\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

е)

$$\lim_{n\to\infty}((n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}})=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}})((n+1)^{\frac{4}{3}}+(n+1)^{\frac{2}{3}}(n-1)^{\frac{2}{3}}+(n-1)^{\frac{4}{3}})}{(n+1)^{\frac{4}{3}}+(n+1)^{\frac{2}{3}}(n-1)^{\frac{2}{3}}+(n-1)^{\frac{4}{3}}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{(n+1)^{\frac{4}{3}}+(n+1)^{\frac{2}{3}}(n-1)^{\frac{2}{3}}+(n-1)^{\frac{4}{3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1-(n^2-2n+1)}{(n+1)^{\frac{4}{3}}+(n^2-1)^{\frac{2}{3}}+(n-1)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{(n+1)^{\frac{4}{3}}+(n^2-1)^{\frac{2}{3}}+(n-1)^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{n}\sqrt[3]{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}+\frac{1}{n}\sqrt[3]{n^4-2n^2+1}+\frac{1}{n}\sqrt[3]{n^4-4n^3+6n^2-4n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{\frac{n^4}{n^3}+4\frac{n^3}{n^3}+6\frac{n^2}{n^3}+4\frac{n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\frac{n^4}{n^3}-2\frac{n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\frac{n^4}{n^3}-4\frac{n^3}{n^3}+6\frac{n^2}{n^3}-4\frac{n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}} =$$

$$= \frac{4}{\infty+\infty+\infty} = 0$$

13. Да се докаже дека низата со општ член

$$a_n = \frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+...+\frac{1}{5^n+1}$$

е конвергентна.

Решение.

$$a_1 = \frac{1}{5+1}, \quad a_2 = \frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1} = a_1+\frac{1}{5^2+1},...,$$

$$a_n = \frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+...+\frac{1}{5^n+1} = a_{n-1}+\frac{1}{5^n+1}$$

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Значи низата е монотоно растечка.

$$a_n = \frac{1}{5+1}+\frac{1}{5^2+1}+\frac{1}{5^3+1}+...+\frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n} = b_n$$

Значи $a_n < b_n$ и при тоа

$$b_n = \frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n} = \frac{1}{5}(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^{n-1}}) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1-(\frac{1}{5})^n}{1-\frac{1}{5}}$$

За граничната вредност на b_n се добива:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{5}\cdot\frac{1-(\frac{1}{5})^n}{1-\frac{1}{5}}) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

Бидејќи $a_n < b_n$ од својствата на низи следи дека и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, па значи

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{4}$, што значи дека низата a_n е ограничена од горе. Бидејќи a_n е моностоно растечка и ограничена од горе следи дека е конвергентна.

14. Да се докаже дека низата со општ член $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$ е конвергентна.

Решение.

$$a_1 = 1 + \frac{1}{1!}, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = a_1 + \frac{1}{2!}, ...,$$
$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = a_{n-1} + \frac{1}{n!}$$

Бидејќи $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, низата a_n е монотоно растечка.

Сега ќе ја споредиме низата a_n со друга низа b_n:

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1\cdot}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = b_n$$

$$b_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-2}}) =$$
$$= 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}) = 2 + 1 = 3$, и бидејќи $a_n < b_n$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, следи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$, што значи дека низата a_n е ограничена од горе, а бидејќи е монотоно растечка, таа е конвергентна.

15. Да се испита конвергенцијата на низата $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2...}}}}}}_{n}$ и

ако е конвергентна да се најде нејзината граница.

Решение.

$$a_1 = \sqrt{2} < 2, \quad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+a_1} < \sqrt{2+2} = 2,$$

$$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+a_2} < \sqrt{2+2} = 2, \dots,$$

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2 \dots}}}}}}_{n} = \sqrt{2+a_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2$$

Значи, добивме дека сите членови на низата се помали од 2, што значи дека низата е ограничена од горе.

Важи $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+a_1} > a_1$.

Нека $a_n > a_{n-1}$. Тогаш

$$a_{n+1} = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2 \dots .}}}}}}_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n$$

па од ПМИ следува дека $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, па низата a_n е монотоно растечка. Бидејќи a_n е ограничена и монотоно растечка, таа е конвергентна.

Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Од горното равенство $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ следува дека $a_n^2 = 2 + a_{n-1}$, и оттука $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + a_{n-1}\right)$, т.е. $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^2 = 2 + \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$.

Значи, $b^2 = 2 + b, \quad b^2 - 2 - b = 0, \quad b_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$,

значи $b_1 = 2, \quad b_2 = -1$. Бидејќи низата е позитивна следи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

3. РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

3.1. Основни поими

Дефиниција. Нека D и K се две подмножества од $\mathbb{R}$. Пресликувањето $f: D \to K$ ќе го нарекуваме **реална функција** од D во K.

За правилото на функцијата треба да важи

за секои $x_1, x_2 \in D$ од $x_1 = x_2$ следува $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$.

Понатаму, наместо реална функција, ќе го користиме терминот функција.

Функциите најчесто ќе ги означуваме со мали латински букви.

Така со $f: D \to K$ ќе означуваме дека е дефинирана функција f од D во K. Притоа, едиствениот елемент од K кој му е придружен на $x \in D$ го означуваме со $f(x)$.

За елементот $x \in D$, кој се менува независно во D, велиме дека е **независно променлива големина** или **аргумент**, а елементот y којшто му е придружен на x, и се менува во зависност од менувањето на елементот x, го нарекуваме **зависно променлива големина** или слика на x при f.

Според тоа, за функцијата да е наполно определена треба да ги знаеме множествата D и K и правилото со кое на $x \in D$ му е придружен единствен елемент $y = f(x) \in K$.

Множеството D се нарекува **домен**, а множеството K се нарекува **кодомен** на функцијата $f: D \to K$.

Пример 1. Плоштината P на квадрат со страна a изнесува a^2. Значи, плоштината на квадратот P зависи од должината на страната на квадратот a според правилото $P(a) = a^2$. На овој начин на позитивниот реален број a му е придружен единствениот реален број a^2. Значи имаме дефинирано функција со домен $\left(0, \infty\right)$, кодомен $\left(0, \infty\right)$ и правило $P(a) = a^2$. □

Пример 2. Периметарот L на кружница со радиус r е еднаков на $2r\pi$. Според тоа, на позитивниот реален број r му е придружен единствениот реален број $2r\pi$, па дефинирана е функција со домен $\left(0, \infty\right)$, кодомен $\left(0, \infty\right)$ и правило $L(r) = 2r\pi$. □

Во претходните примери функциите се зададени конкретно, за позитивните реални броеви, т.е. аргументот е должина на страна на квадрат или радиус на кружница.

Функцијата од пример 1 можеме да ја прошириме на $\mathbb{R}$ земајќи функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинирана со правилото $f(x)=x^2$. Така добиваме функција f која има исто правило со P за позитивните реални броеви, но f и P имаат различни домени и кодомени.

Слично, и L од пример 2 може да се прошири до функција $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинирана со $g(x)=2x\pi$.

Функциите често ќе ги означуваме само со нивното правило. Притоа, за кодомен ќе го сметаме $\mathbb{R}$, а за домен множеството од сите реални броеви за кои изразот со кој е дадено правилото има смисла (е дефиниран).

Во случај кога функцијата е зададена со формула, т.е. израз, велиме дека функцијата е зададена **аналитички** (т.е. со аналитички израз).

На пример, функцијата $f(x)=4x^{12}-2x^3+9$ е зададена аналитички.

Доменот на f уште ќе го нарекуваме и **дефинициона област** на f и ќе го означуваме со D_f.

Така на пример, заради тоа што делењето со 0 не е дефинирано, ќе велиме функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x}$ а ќе подразбираме функција f со $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, кодомен $\mathbb{R}$ и правило $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Функцијата $g(x)=3x^3-2$ има дефинициона област $\mathbb{R}$ и кодомен $\mathbb{R}$, бидејќи операциите со кои е зададена се дефинирани за секој реален број x.

Пример 3. а) За функцијата $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+6}$ изразот со кој е зададена има смисла за сите реални броеви x, за кои важи $x^2-5x+6\neq 0$. Од $x^2-5x+6=0$ ако и само ако $x=2$ или $x=3$, следува дека $D_f=\left(-\infty,2\right)\cup\left(2,3\right)\cup\left(3,\infty\right)$.

б) Ако $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\left|x\right|-1}$, изразот има смисла за сите реални броеви x, за кои важи $\left|x\right|-1\neq 0$. Од $\left|x\right|-1=0$ ако и само ако $x=-1$ или $x=1$, па следува дека $D_f=\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,1\right)\cup\left(1,\infty\right)=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

в) За $f\left(x\right)=\sqrt{2^{x-1}}$, изразот има смисла за секој реален број, бидејќи $2^{x-1}>0$, за секој реален број x, па $D_f=\mathbb{R}$. □

Две функции се еднакви ако имаат иста дефинициона област, ист кодомен и исто правило.

Така на пример функциите P од пример 1 и $f(x)=x^2$ не се еднакви, затоа што немаат ист домен (и кодомен).

Пример 4. а) Функциите $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1}$ и $g(x)=1$ не се еднакви, затоа што $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ а $D_g=\mathbb{R}$. Притоа, онаму каде што се дефинирани двете, правилата им се еднакви.

б) Функциите $f(x)=\sqrt{x^2}$ и $g(x)=x$ не се еднакви, затоа што немаат исто правило. На пример, $f(-1)=1$ а $g(-1)=-1$.

в) Функциите $f(x)=\sqrt{x^2}$ и $g(x)=|\,x\,|$ се еднакви. □

Нека $f:D_f\to K$ е функција и нека $A\subseteq D_f$. Множеството $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ се нарекува слика на множеството A при функцијата f. Јасно, $f(A)\subseteq K$.

Така на пример, ако $f(x)=x^2$ и $A=(2,5)$ имаме $f(x)=x^2>4$ и $f(x)<25$, за секој $x\in A$, па $f(A)=f\left((2,5)\right)=(4,25)$.

Нека $f:D_f\to K$ е функција и нека $B\subseteq K$. Множеството $f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B\}$ се нарекува инверзна слика на множеството B при функцијата f. Јасно, $f^{-1}(B)\subseteq D_f$.

Така на пример, ако $f(x)=x^2$ и $B=(2,5)$ имаме ако и само ако $x^2 \in (2,5)$, т.е. $x \in \left(-\sqrt{5},-\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)$.

Следува $f^{-1}(B)=\left(-\sqrt{5},-\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)$.

Притоа, можно е законот на придружување да биде даден со повеќе од еден аналитички израз. На пример, ако

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$$

тогаш законот е даден со два аналитички изрази и притоа: ако $x \geq 0$, соодветните вредности за y, се пресметуваат по формулата $y=x^2$, а ако $x<0$, соодветните вредности за y, се пресметуваат по формулата $y=x^3$.

Ако правилото на функцијата е дадено описно (со зборови), ќе сметаме дека и овде функцијата е зададена аналитички.

На пример со „на реалниот број x му е придружен реалниот број x^2“ сметаме дека имаме аналитички зададена функција од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$.

Во експерименталните науки, често се сретнуваат функции зададени со табели или шеми. Тогаш во една редица или колона се вредностите на аргументот x, а во друга $f(x)$.

Пример 6. Нека y е температурата на воздухот а x е времето во кое таа температура се мери. При мерење на температурата нека се добиени следниве податоци:

x	7	8	9	10	11	12	13	14
y	18	19	20	17	19	19	18	18

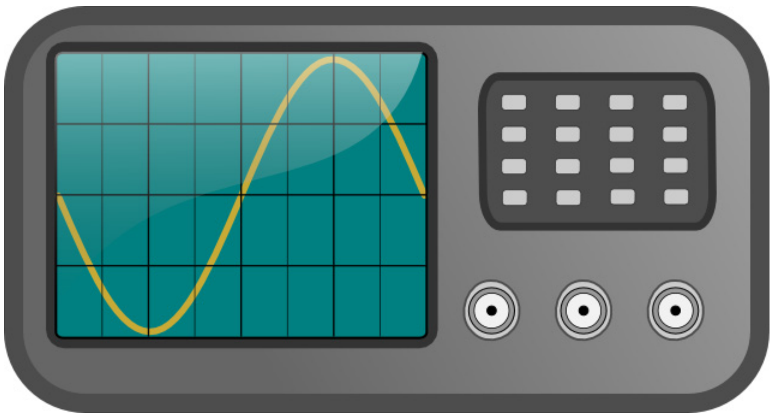
На овој начин е определена функција $y=f(x)$, каде што независно променливата x се менува во множеството $D=\{7,8,9,10,11,12,13,14\}$ и соодветните вредности на y може лесно да се прочитаат од дадената табела.

Овој начин на задавање на функции најчесто се користи кога треба да се претставaт резултатите од некое мерење или експеримент. Притоа, вака зададените функции се дефинирани на конечно подмножество од $\mathbb{R}$.

Нека $f : D_f \to K$ е функција. График на функцијата f е множеството $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.

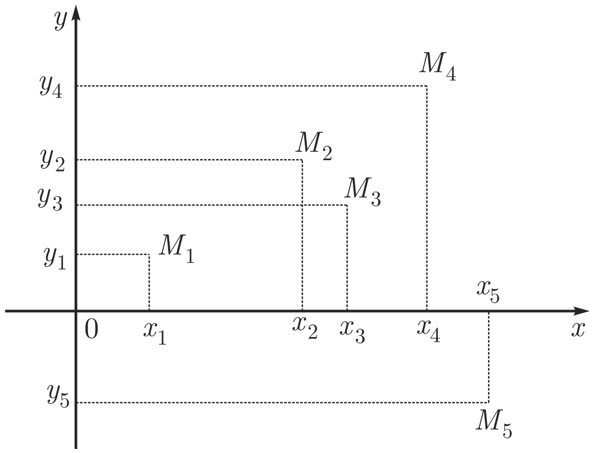
Значи, графикот се состои од сите точки во рамнината (со избран Декартов правоаголен координатен систем) со x −координати вредностите на аргументот x и со y −координати еднакви на $y = f(x)$.

Често како резултат на мерење на некоја зависност со некои уреди, тие го даваат само графикот на функцијата, како на следниов цртеж



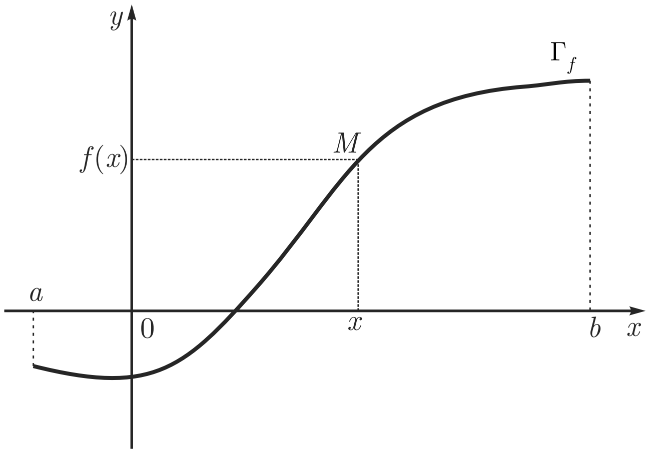
Од него може да се прочита дефиниционата област. Но правилото може да се одреди со мерење на вредностите на $y = f(x)$. Тогаш велиме дека функцијата е зададена графички.

Пример 7. Ако функцијата f е зададена со следниов график кој се состои од точките $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_1, y_2), \ldots, M_5 = (x_5, y_5)$



можеме да прочитаме од него дека $D_f = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, и дека $y_i = f(x_i)$, за $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, се вредностите на функцијата $y = f(x)$ во секоја од точките x_i од D_f. $\square$

Пример 8. На следниов цртеж



кривата линија е график на некоја функција $y = f(x)$ со дефинициона област $D_f = [a, b]$. $\square$

Кај графички зададената функција, потребен е прецизно нацртан график за да се одредат со поголема точност вредностите на x и $f(x)$.

Графикот е добро нагледно средство за претставување на својствата на функцијата. Затоа често функцијата зададена аналитички ќе ја претставуваме и графички.

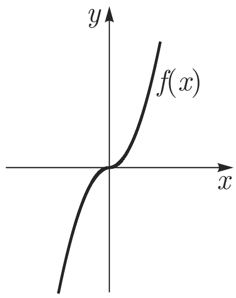
Да забележиме дека при графичкото претставување на низи веќе употребивме график на функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Пример 9. а) Да ја разгледаме функцијата $f(x) = y = x\left|x\right|$.

Од дефиницијата за апсолутната вредност, добиваме дека $D_f = \mathbb{R}$ и

$f\left(x\right) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$, знаејќи ги графиците на x^2 и $-x^2$, добиваме дека графикот

на f е

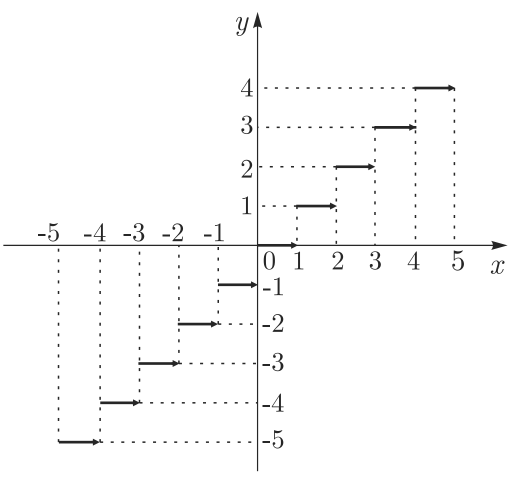


б) Нека $y = \left[x\right]$, каде $\left[x\right]$ го означува целиот дел од x, т.е. најголемиот цел број што не е поголем од x.

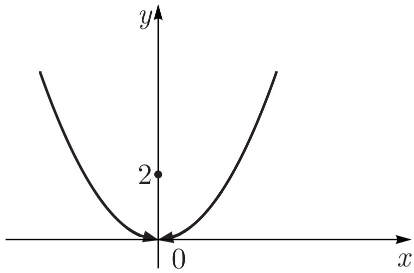
Тогаш дефиниционата област на функцијата е множеството реални броеви и притоа

$$f\left(x\right) = \begin{cases} n, \ \ x \in \left[n, n+1\right) \\ -n-1, \ \ x \in \left[-n-1, -n\right) \end{cases},$$

за секој природен број n, па графикот на дадената функција е



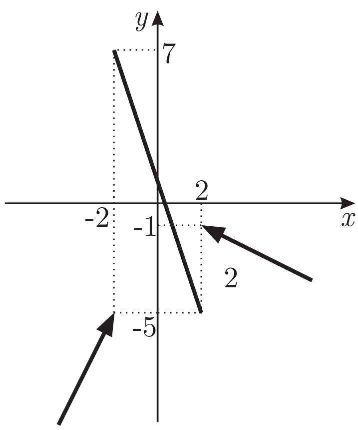
в) Ако $f(x)=\begin{cases} x^2,\ x\neq 0 \\ 2,\ x=0 \end{cases}$ тогаш нејзиниот графикот е ист со графикот на $g(x)=x^2$ во сите точки освен во точката со прва координата $x=0$.



г) Графикот на функцијата

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1,\ x<-2 \\ 1-3x,\ -2\leq x\leq 2 \\ -\dfrac{1}{2}x,\ x>2 \end{cases}$$

изгледа вака.



□

Да забележиме дека при скицирање на графикот на функции, како во б) од претходниот пример, употребуваме стрелка за да се каже дека во таа точка вредноста на функцијата не е во стрелката, туку во другиот дел од кривата. Така, во примерот б), $f(1)=1$ а не $f(1)=0$.

Јасно, ако две функции се еднакви, тогаш еднакви се и нивните графици.

Дефиниција. Бројот $x_0 \in D_f$ за кој важи $f(x_0) = 0$ се нарекува **нула на функцијата** f.

Ако x_0 е нула на функцијата $y = f(x)$, тогаш $(x_0, 0) \in \Gamma_f$. Значи графикот на функцијата ја сече x-оската во точките чии први координати се нулите на функцијата.

Пример 11. Определи ги нулите на функцијата f, ако:

а) $f\left(x\right) = x^2 + x - 2$;

б) $f\left(x\right) = 3^{x+3}$.

Решение. а) Функцијата $f\left(x\right)$ е определена на множеството реални броеви и има нули за оние вредности на x, за кои важи $x^2 + x - 2 = 0$, па нули на функцијата се корените на квадратната равенка $x^2 + x - 2 = 0$, а тоа се $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$;

б) $D_f = \mathbb{R}$, а бидејќи $3^{x+3} > 0$, за секој реален број x, следува дека функцијата нема нули. □

3.2. Операции со функции. Сложена функција

Нека f и g се две функции со иста дефиницона област D. Тогаш можеме да дефинираме функции со дефинициона област D и кодомен $\mathbb{R}$, на следниот начин:

- Збир, $f + g$, е функцијата дефинирана со

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in D$$

- Разлика, $f - g$, на f и g е функцијата дефинирана со

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in D$$

- Производ, $f \cdot g$, на f и g е функција дефинирана со

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$$

- Ако $g(x) \neq 0$, за секој $x \in D$, количник $\dfrac{f}{g}$, на f и g, е функцијата дефинирана со

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D.$$

Функцијата $f: D_f \to \mathbb{R}$ се нарекува константна функција на D_f ако постои $a\in\mathbb{R}$ така што $f(x)=a$ за секој $x\in D_f$.

Ако f е произволна функција на D, а g е константна функција на D т.е. $g(x)=c,\ \forall x\in D$, тогаш производот $f\cdot g$ е производ на функција со реален број т.е.

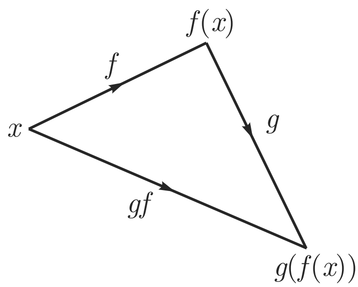
$$(cf)(x)=c\cdot f(x), x\in D.$$

Нека f е функција дефинирана на D_f, а g е функција дефинирана на множество D_g и важи $f(D_f)\subseteq D_g$. Дефинираме функција $g\circ f: D_f\to\mathbb{R}$ со

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Функцијата $g\circ f$ се нарекува **композиција** на f и g или **сложена функција**.

Шематски:



Да забележиме дека кога нема да дојде до недоразбирање на што се мисли, знакот „$\circ$" ќе го изоставуваме од записот. Така ќе пишуваме $(gf)(x)=g(f(x))$ наместо $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. Кога се работи за производ на f и g секогаш ќе пишуваме $f\cdot g$.

Композицијата на две функции не мора секогаш да постои. На пример ако $f(x)=2x-1$ и $g(x)=\sqrt{x}$, имаме дека $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=[0,\infty)$, $f\left(D_f\right)=\mathbb{R}\not\subseteq D_g$. Значи композицијата gf не постои, т.е. не може да се дефинира (на пример, не постои $g\left(f\left(-1\right)\right)$).

Од друга страна, другата композиција fg постои, бидејќи $g\left(D_g\right) = [0,\infty) \subseteq D_f = \mathbb{R}$ и таа е дефинирана со

$$\left(fg\right)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} - 1.$$

Дури и соодветните дефинициони области да одговараат, сепак двете композиции не мора да се еднакви функции.

Пример 1. Нека $f(x) = x^2$ а $g(x) = x + 1$. Тогаш $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, $g\left(D_g\right) = \mathbb{R} \subseteq D_f$ и $f\left(D_f\right) = [0,\infty) \subseteq D_g$, па двете композиции постојат. Но тие не се еднакви функции бидејќи немаат исто правило. Нивните правила се

$(gf)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$, а

$(fg)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

па, на пример, $(gf)(2) = 5$ а $(fg)(2) = 9$. □

3.3. Инверзна функција

Нека f е функција која е инјекција, со дефинициона област D и множество слики $F = f(D)$ (т.е. f е и сурјекција). Ако ставиме

$x = g(y)$ ако и само ако $y = f(x)$,

добиваме нова функција со дефинициона област F и множество слики (т.е. кодомен) D.

Навистина, ако $y_1 = y_2$, т.е. $f(x_1) = f(x_2)$, заради тоа што f е инјекција, добиваме дека $x_1 = x_2$, т.е. $g\left(y_1\right) = g\left(y_2\right)$, па g е функција.

1. Функцијата g е биекција.

Доказ. Нека $g\left(y_1\right) = g\left(y_2\right)$, т.е. $x_1 = x_2$, заради тоа што f е функција добиваме $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$, т.е. $y_1 = f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) = y_2$, па g е инјекција.

Нека $x \in F$ е произволен и нека $y = f\left(x\right)$. Тогаш важи $g\left(y\right) = x$, па од произволноста на x следува дека секој елемент од кодоменот на g е слика на некој елемент од доменот на g, па g е сурјекција.

Значи, g е биекција. □

Функцијата g ја нарекуваме инверзна функција на f и ја означуваме со f^{-1}.

Значи инверзната функција на f може да се дефинира само во случај кога f е биекција.

Нека I е идентичната функција на D, т.е. $I(x)=x$, $x\in D$ и нека f^{-1} е инверзна за f. Тогаш за секој $x\in D$ важи

$$(f^{-1}f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x=I_D(x)$$

и за секој $y\in F$, имаме $\left(ff^{-1}\right)\left(y\right)=f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)=f\left(x\right)=y=I_F\left(y\right)$.

Со тоа го докажавме следново својство.

2. $f^{-1}f=I_D,\;\; ff^{-1}=I_F$. □

Во практиката, ако функцијата f има инверзна функција f^{-1}, тогаш ако $f(x)=y$, ставаме $f^{-1}(y)=x$. Значи, равенката $f(x)=y$ ја решаваме по x и добиваме зависност $x=f^{-1}(y)$, па $f^{-1}: x\to g(x)$ е инверзната функција за функцијата f.

Пример 1. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е дефинирана со правилото $f\left(x\right)=x^3$. Од $x,y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$ се добива $x^3\neq y^3$, т.е. $f(x)\neq f(y)$, па f е инјекција. Бидејќи $f\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ следува дека f е и сурјекција. Значи, f има инверзна функција f^{-1}. Да ја најдеме f^{-1}.

Од $y=x^3 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}=f^{-1}(y)$ добиваме дека $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ е инверзна за $f(x)=x^3$. □

Пример 2. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е дефинирана со правилото $f\left(x\right)=x^2$.

Таа не е инјекција, бидејќи $f\left(-1\right)=f\left(1\right)=1$. Исто така не е ни сурјекција, бидејќи не постои реален број x така што $f\left(x\right)=-2$. Значи f нема инверзна.

Во вакви случаи дефинираме нова функција, со исто правило како и f но со домен и кодомен подмножества од доменот и кодоменот на f, соодветно.

Така, во овој случај, ако дефинираме функција $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ со $g\left(x\right)=x^2=f\left(x\right)$. Таа е биекција (зошто?), па постои инверзна функција $g^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$.

Од $y=x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{y}=g^{-1}(y)$ добиваме дека $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$ е инверзна за $g(x)=x^2$.

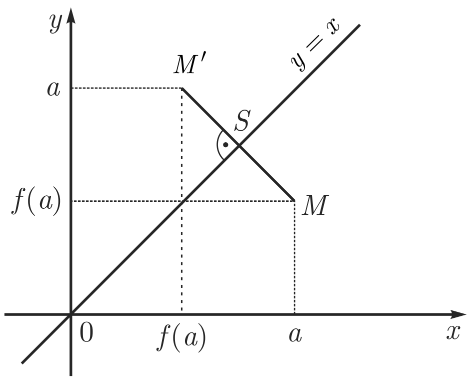
Може и да дефинираме функција $h:(-\infty,0]\to[0,\infty)$ со $h\left(x\right)=x^2=f\left(x\right)$. И h е биекција (зошто?), па постои инверзна функција $h^{-1}:[0,\infty)\to(-\infty,0]$.

Сега $x\le 0$, $y\ge 0$, па од $y=x^2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{y}=h^{-1}(y)$ добиваме дека функцијата дефинирана со $h^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ е инверзна за h. □

Понатаму кога ќе работиме со инверзна функција (како во претходниот пример), нема да користиме нова буква за ознака на инверзната функција, туку и неа ќе ја означуваме со f^{-1}, а ќе претпоставуваме дека доменот и кодоменот на f се соодветно „намалени“.

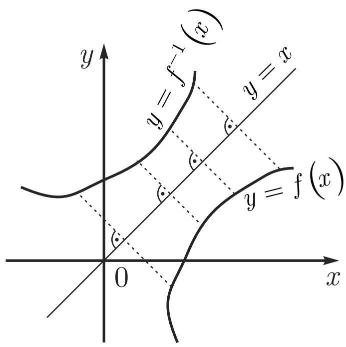
Така, на пример, во претходниот пример ќе велиме „функцијата f има инверзна на $[0,\infty)$“, а ќе подразбираме дека е дефинирана функцијата g.

Се прашуваме каков однос постои меѓу графиците на една функција и нејзината инверзна функција? Ако f е дадена функција и Γ_f е графикот на f, и ако $M(a,f(a))\in\Gamma_f$ тогаш $M'(f(a),a)\in\Gamma_{f^{-1}}$.



Се докажува геометриски дека точките M и M' се симетрични во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант, т.е. отсечката MM' е нормална на правата $y = x$ и притоа, $\overline{M'S} = \overline{MS}$, каде S е пресечната точка на MM' со правата $y = x$.

Значи графикот на инверзната функција е симетричен со графикот на функцијата во однос на симетралата на првиот и третиот квадрант т.е. правата $y = x$.



Ако го скицираме графикот на $f : D \to F$, лесно може да откриеме дали f е биекција.

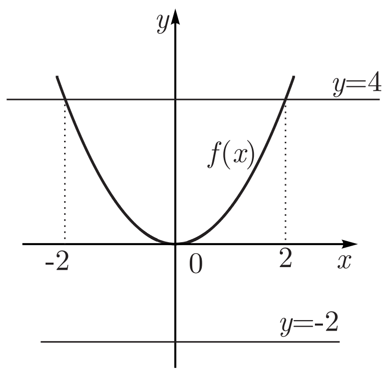
- Ако секоја права од обликот $y = c$, (т.е. права паралелна со $x-$оската), каде $c \in f(D)$, го сече графикот само во една точка, тогаш f е инјекција.

- Ако c е произволен елемент од кодоменот на f и правата $y = c$ го сече графикот на f, тогаш f е сурјекција.

Така на пример, за функцијата f од примерот 2 имаме

- правата $y = 4 \in f(\mathbb{R})$ го сече графикот на f во две точки $(2,4)$ и $(-2,4)$, па f не е инјекција.

- Правата $y = -2 \in E = \mathbb{R}$ не го сече графикот на f, па f не е сурјекција.



За функциите g и h од истиот пример, важи

- Секоја права од обликот $y = c, c \geq 0$, го сече графикот само во една точка.

- Ако c е произволен елемент од кодоменот на g (или h) правата $y = c$ го сече графикот на g (или h).

3.4. Парност на функција

Нека f е функција со дефинициона област D и нека D е симетрично множество во однос на координатниот почеток, т.е. од $x \in D$ следува $-x \in D$, за секој $x \in D$.

За функцијата f велиме дека е парна ако $f(-x) = f(x)$, за секој $x \in D$.

За функцијата f велиме дека е непарна ако $f(-x) = -f(x)$, зе секој $x \in D$.

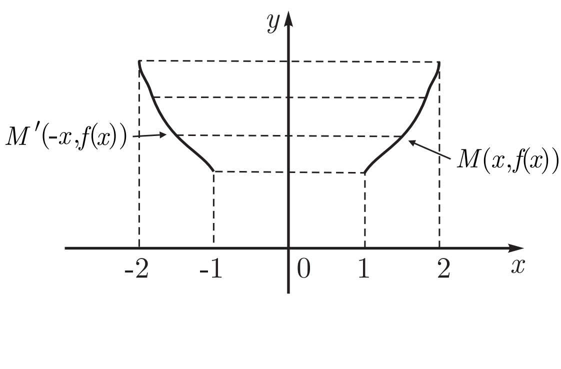
Нека точката $M\left(x, f\left(x\right)\right)$ припаѓа на графикот на парната функција f. Тогаш заради $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$ следува дека и точката $M'\left(-x, f\left(x\right)\right)$ припаѓа на графикот на f.

Од друга страна, M и M' се симетрични (осно) во однос на правата $x = 0$ (т.е. y-оската).

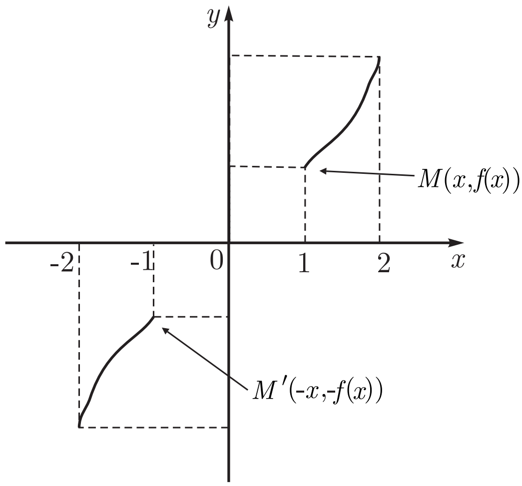
Значи, графикот на парна функција е симетричен во однос на y –оската.

Слично, графикот на непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток, бидејќи, за секое $x \in D_f$, точките $M\left(x, f\left(x\right)\right)$ и $M'\left(-x, -f\left(x\right)\right)$ коишто се симетрични (централно) во однос на координатниот почеток, истовремено припаѓаат на графикот на функцијата.

Пример 1.



Дефиниционата област $D=[-2,-1]\cup[1,2]$ е симетрично множество. Графикот на парна функција е **симетричен во однос на y-оската**.



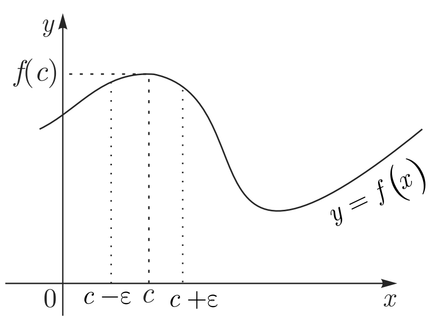
Графикот на непарна функција е симетричен во однос на координатниот почеток.

Пример 3. Функциите $f_1\left(x\right)=x$, $f_2\left(x\right)=x\left(x^2-2\right)$, $f_3\left(x\right)=x^3$ се непарни, функциите $f_4\left(x\right)=x^2$, $f_5\left(x\right)=x^2\left(x^2-2\right)$, $f_6\left(x\right)=x^4$, $f_7\left(x\right)=4$ се парни, а функциите $f_9\left(x\right)=x+1$, $f_2\left(x\right)=x\left(x-2\right)$, $f_3\left(x\right)=x^3+3$ не се ниту парни ниту непарни.

3.5. Локални екстреми на функција

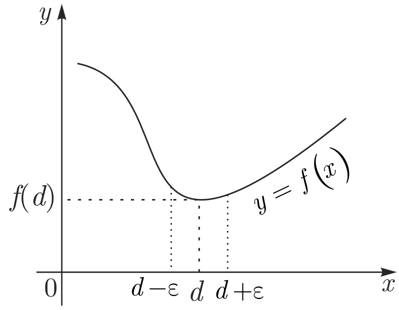
Дефиниција 1. Функцијата $y=f(x)$, $x\in D$, има **локален максимум** во точката $c\in D$, ако постои $\varepsilon-$околина $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ на c, таква што

$$f(x)<f(c) \text{ за сите } x\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap D,\ x\neq c.$$



Дефиниција 2. Функцијата $y = f(x),\ x \in D$ има **локален минимум** во точката $d \in D$, ако постои $\varepsilon -$околина, $(d-\varepsilon, d+\varepsilon)$, на точката d, таква што

$$f(x) > f(d) \text{ за сите } x \in (d-\varepsilon, d+\varepsilon) \cap D, x \neq d.$$



Ако функцијата $y = f(x),\ x \in D$ има локален минимум или локален максимум во точката $x = x_0 \in D$, тогаш велиме дека $x = x_0$ е точка на **локален екстрем**.

Пример 1. Определи ги локалните екстреми (ако постојат) на функцијата $f(x)$, зададена со:

а) $f(x) = -x^2 + 2x - 5;$

б) $f(x) = |x-1|$

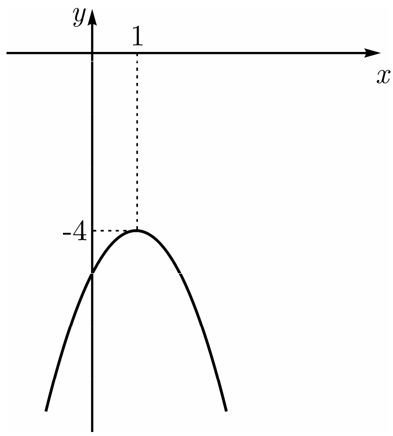
в) $f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \neq 0 \\ 2,\ x = 0 \end{cases}$

г) $f(x) = x$

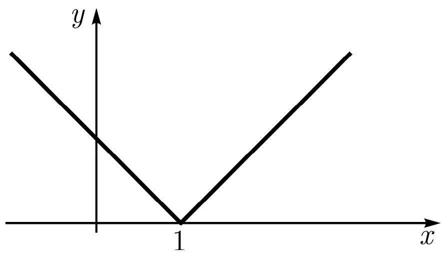
д) $f(x) = \begin{cases} 2x-1,\ x < -2 \\ 1-3x,\ -2 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x,\ x > 2 \end{cases}$

ѓ) $f(x) = \begin{cases} -x^2+1, x < 0 \\ -x^2, x \geq 0 \end{cases}$

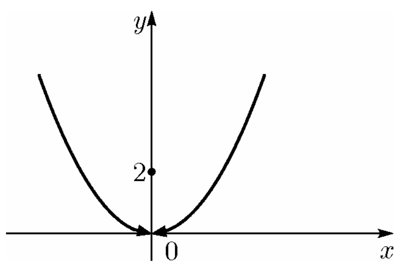
Решение. а) Од $f(x) = -x^2 + 2x - 5 = -(x-1)^2 - 4 \leq -4 = f(1)$, за сите $x \in D_f = \mathbb{R}$, следува дека функцијата $f(x)$ има локален максимум во точката $x = 1$, еднаков на -4.



б) Од $f\left(x\right)=\left|x-1\right|\geq 0=f\left(1\right)$, за сите $x\in D_f=\mathbb{R}$, следува дека функцијата $f\left(x\right)$ има минимум во точката $x=1$, еднаков на 0.

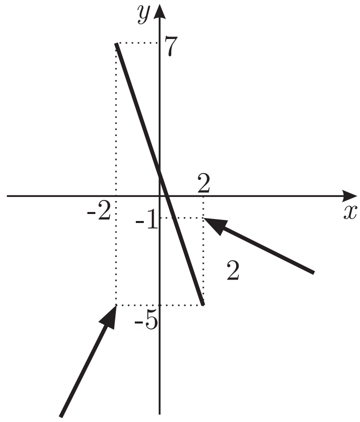


в) За секој $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$ важи $f\left(x\right)=x^2<2=f\left(0\right)$, па $x=0$ е локален екстрем и е еднаков на 2.



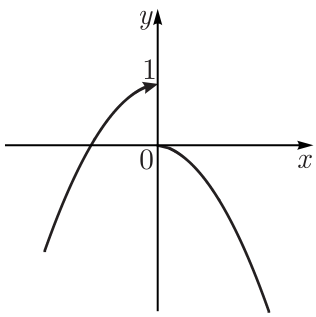
г) Функцијата нема екстреми.

д) Графикот на функцијата изгледа вака.



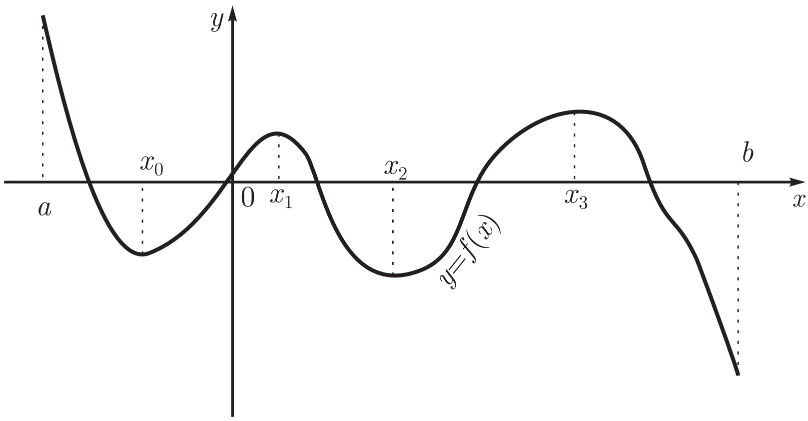
За секој $x \in (-3,-1) \setminus \{-2\}$ важи $f(x) < f(-2) = 7$, па $x = -2$ е локален (а и глобален) максимум (докажи!). Слично, $x = 2$ е локален минимум, кој не е глобален (докажи!).

ѓ) Функцијата $f\left(x\right) = \begin{cases} -x^2+1, x<0 \\ -x^2, x \geq 0 \end{cases}$ нема локални екстреми.



Точката $x_0 = 0$ не е локален максимум бидејќи во секоја околина на x_0 има x така што $f\left(x\right) > f\left(x_0\right) = 0$. $\square$

Забелешка. Зборот локален во термините локален минимум и локален максимум произлегува од потребата да се нагласи дека тоа се најмалата, односно најголемата вредност на функцијата во околина на дадена точка, а не на целата дефинициона област. Така, на следниов цртеж гледаме дека вредноста $f(a)$ е поголема од вредностите на локалните максимуми $f(x_1)$ и $f(x_3)$, а вредноста $f(b)$ е помала од вредноста на локалниот минимум $f(x_2)$.



Една функција може да има локални екстреми а да нема глобални (како на претходниот цртеж). Екстремната вредност на целата дефинициона област ќе ја нарекуваме **глобален екстрем** или само **екстрем**.

Така во а) и б) од претходниот пример екстремите се и глобални, а во в) екстремот не е глобален, затоа што $f\left(5\right) = 25 > f\left(0\right) = 2$. Функцијата под в) нема глобални екстреми.

3.6. Периодичност на функција

За функцијата f зададена на множеството D, велиме дека е **периодична** ако постои позитивен реален број ω, таков што следниве два услова се исполнети:

1) $x \in D \Rightarrow x + \omega \in D$

2) $f(x+\omega) = f(x)$, за секој $x \in D$.

Притоа, ω се нарекува **период** на функцијата f.

1. Нека f е периодична со период ω. Тогаш за секој природен број n и секој $x \in D$ важи

- $f(x + n\omega) = f(x)$,
- $x + n\omega \in D$

Доказ. За $n = 1$ тврдењето важи заради периодичноста на f.

Нека важи за $n = k$, т.е. $f\left(x + k\omega\right) = f\left(x\right)$, за секој $x \in D$ и $x + k\omega \in D$.

За $n = k + 1$ имаме

- бидејќи $x + k\omega \in D$ од 1) следува дека

$$x + k\omega + \omega = x + (k+1)\omega \in D$$

- $f\left(x+(k+1)\omega\right)=f\left(\underbrace{x+k\omega}_{\in D}+\omega\right)=f\left(x+k\omega\right)=f(x).$

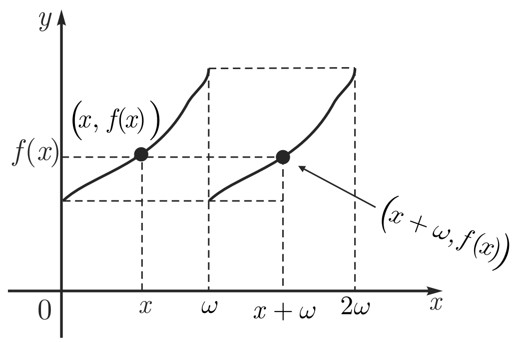
Значи, тврдењето е точно за секој природен број n.

За $n=0$ јасно е дека тврдењето важи. □

Да забележиме дека ако ω е период на f и ако за секој $x \in D$ важи $x-\omega \in D$ тогаш тврдењето од претходната теорема може да се прошири на целите броеви.

Најмалиот позитивен број ω (ако постои) со својството $f(x+\omega)=f(x)$, $x \in D$, се нарекува основен период на функцијата f.

Така, ако f е периодична функција со период ω, од $(x, f(x)) \in \Gamma_f$ следува $(x+\omega, f(x)) \in \Gamma_f$, од каде што се добива дека за да се нацрта график на периодична функција доволно е да се нацрта график во $[0,\omega]$, а потоа со транслација за ω по x-оската се доцртува целиот график.



Пример 1. а) Функцијата $f\left(x\right)=2$ е периодична на $\mathbb{R}$ со период секој позитивен релан број. Таа нема основен период, бидејќи не постои најмал позитивен реален број.

б) За функцијата $f\left(x\right)=x-[x]$ важи

1) ако x не е цел број и се наоѓа меѓу целите броеви n и $n+1$, т.е. важи $n<x<n+1$, тогаш $f\left(x\right)=x-n$. Така на пример

- ако $n=0$, т.е. $0<x<1$ имаме $f\left(x\right)=x$,

- ако $n=1$, т.е. $1<x<2$, имаме $f\left(x\right)=x-1$

- ако $n=-3$, т.е. $-3<x<-2$ имаме $f\left(x\right)=x+3$, итн.

Во овој случај важи $n+1<x+1<n+2$, па имаме

$$f\left(x+1\right)=x+1-[x+1]=x+1-(n+1)=x-n=f(x)$$

2) Ако x е цел број, тогаш $x=[x]$, па имаме $f\left(x\right)=0$. Значи, и овде $f\left(x+1\right)=0=f\left(x\right)$.

Следува дека $\omega=1$ е период на функцијата f.

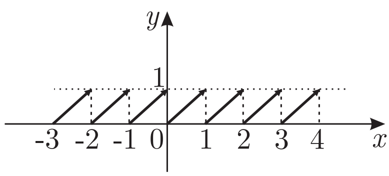
Ако $0<\omega<1$, тогаш постои $m\in\mathbb{N}$ така што $\dfrac{\omega}{m}+\omega<1$ (во улога на m може да се земе секој природен број поголем од $\max\left\{1,\dfrac{\omega}{1-\omega}\right\}$), па имаме $f\left(\dfrac{\omega}{m}+\omega\right)=\dfrac{\omega}{m}+\omega-\underbrace{\left[\dfrac{\omega}{m}+\omega\right]}_{=0}=\dfrac{\omega}{m}+\omega\neq\dfrac{\omega}{m}=f\left(\dfrac{\omega}{m}\right)$. Докажавме дека ниеден број меѓу 0 и 1 не е период на f.

Слично се докажува дека ниту еден број поголем од 1 кој не е природен не е период на f.

Следува основниот период на f е 1.

Јасно, секој цел број е период на f.

Графикот на f е претставен на следниов цртеж.



$\square$

3.7. Монотоност на функција

За функцијата f велиме дека е

- (строго) монотоно растечка на множеството D, ако од $x_1,x_2\in D$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)<f(x_2)$.

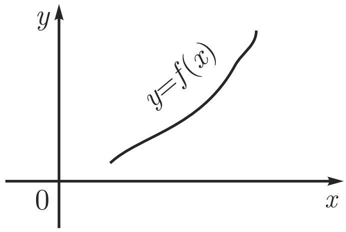
- (строго) монотоно опаѓачка на множеството D, ако од $x_1,x_2\in D$ и $x_1<x_2$ следува $f(x_1)>f(x_2)$.

- **монотоно неопаѓачка** на множеството D, ако од $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) \leq f(x_2)$.

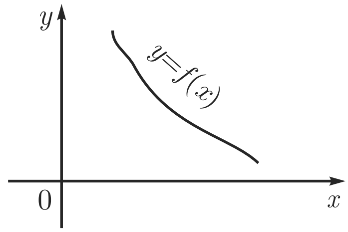
- **монотоно нерастечка** на множеството D, ако од $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функциите кои имаат барем едно од овие својства со заедничко име се викаат **монотони функции**.

Јасно е дека секоја монотно растечка фунција е монотоно неопаѓачка и секоја монотоно опаѓачка функција е монотоно нерастечка.



растечка функција



опаѓачка функција

Да забележиме дека кај монотоно растечка функција од $x_1 > x_2$ следува дека $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$. Аналогно и кај монотоно опаѓачка функција од $x_1 > x_2$ следува $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$.

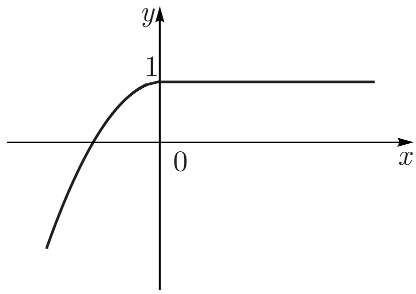
Лесно се докажува и следново својство.

Ако $f : D_f \to f\left(D_f\right)$ е монотоно растечка (монотоно опаѓачка), тогаш f има инверзна (т.е. f е биекција).

Пример 1. а) $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$ е строго монотоно растечка бидејќи од $x_1 < x_2$ следува $x_1^3 < x_2^3$.

б) Функцијата $f\left(x\right) = 1 - x$ е монотоно опаѓачка на $\mathbb{R}$, бидејќи од $x_1 < x_2$ следува $1 - x_1 > 1 - x_2$.

в) Функцијата $f\left(x\right) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ не е монотоно растечка на $\mathbb{R}$. Таа е монотоно неопаѓачка.



г) Секоја константна функција е монотоно неопаѓачка (и монотоно нерастечка) на $\mathbb{R}$. $\square$

Теорема 3. Нека $f: D \to F$ е монотоно растечка функција на D и $F = f(D)$. Тогаш f има инверзна функција f^{-1} која е исто така монотоно растечка функција.

Доказ. Заради $F = f(D)$ следува дека f е сурјекција.

Нека $x_1 \neq x_2$. Тогаш или $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$.

Нека $x_1 < x_2$. Тогаш заради тоа што f е монотоно растечка следува дека $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$, т.е. $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$, па f е инјекција.

Слично се докажува и случајот $x_1 > x_2$.

Значи f е биекција па таа има инверзна $f^{-1}: F \to D$.

Нека $y_1, y_2 \in F$ и нека $y_1 < y_2$. Заради тоа што f е биекција постојат единствени $x_1, x_2 \in D$ така што $y_1 = f\left(x_1\right)$ и $y_2 = f\left(x_2\right)$. Притоа $x_1 < x_2$ (во спротивно, ако $x_1 > x_2$, заради тоа што f е монотоно растечка би следувало $y_1 = f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right) = y_2$). Имаме

$$f^{-1}\left(y_1\right) = f^{-1}\left(f\left(x_1\right)\right) = x_1 < x_2 = f^{-1}\left(f\left(x_2\right)\right) = f^{-1}\left(y_2\right),$$

па f^{-1} е монотоно растечка. $\square$

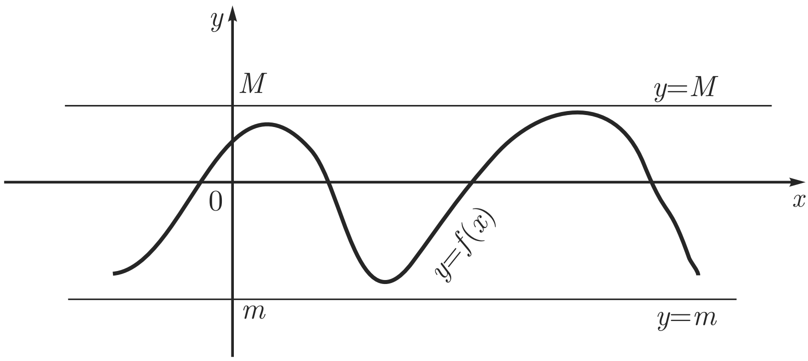
Јасно, слична теорема важи и за монотоно опаѓачка функција на D.

3.8. Ограниченост на функција

За функцијата f дефинирана на множеството D велиме дека е **ограничена** ако е ограничено множеството слики $f(D)$ на D, т.е. ако постојат реални броеви m и M такви што

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ за секој } x \in D.$$

Графикот на ограничена функција се наоѓа меѓу две прави $y = m$ и $y = M$.



Условот за ограниченост на $y = f(x)$ може да се замени со постоење на позитивен број K така што важи:

$$| f(x) | \leq K, \text{ за секој } x \in D.$$

За функцијата f дефинирана на множеството D велиме дека е **ограничена од горе** ако постои реален број M таков што

$$f(x) \leq M, \text{ за секој } x \in D.$$

За функцијата f дефинирана на множеството D велиме дека е **ограничена од долу** ако постои реален број m таков што

$$m \leq f(x), \text{ за секој } x \in D.$$

Така на пример функциите $f\left(x\right) = x^2$ и $g\left(x\right) = -x^2$ не се ограничени на $\mathbb{R}$, а f е ограничена од долу (со 0 и секој негативен број) а g е ограничена од горе (со 0 и секој позитивен број).

3.9. Скицирање на графици на функции со користење на графици на други функции

Нека $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in D\}$ е графикот на функцијата $f : D \to F$. Користејќи го овој график може да се скицираат графици на накои други функции. Ќе наведеме неколку.

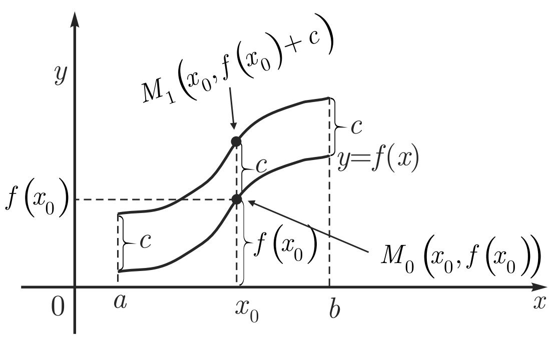
1. Нека $g(x) = f(x) + C$, $x \in D$ и C-даден реален број.

Ако $M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma_f$, тогаш $M_1(x_0, f(x_0) + C) \in \Gamma_g$. Тоа значи дека M_1 има иста $x-$координата со M_0 додека $y-$координатата на M_1 се добива кога на $y-$координатата на M_0 е се додаде реалниот број C, што покажува дека точката M_1 се добива со транслација (поместување) на точката M_0, по права паралелна со $y-$оската, за C единици. Ова важи за секоја точка од графикот на f, па заклучуваме дека графикот Γ_g се добива со транслација (поместување) на графикот Γ_f, по права паралелна со y-оската, за C-единици.

Да заклучиме, графикот, Γ_g, на функцијата

$$y = g(x),\ g(x) = f(x) + b,$$

Каде што b е даден реален број се добива со транслација на графикот Γ_f во правец на $y-$оската за $|b|$ единици и, притоа, ако $b > 0$, поместувањето е во позитивната насока на $y-$оската, а ако $b < 0$, поместувањето е во негативната насока на $y-$оската.



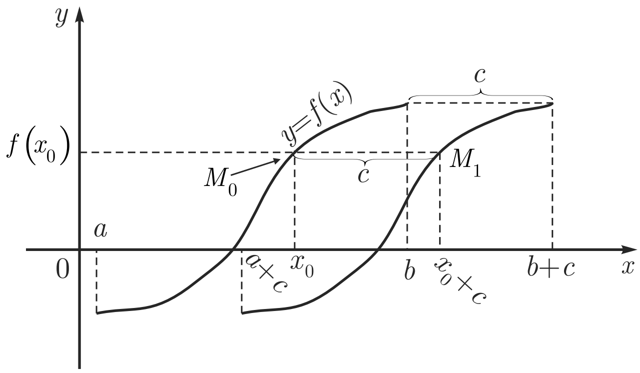
2. $h(x) = f(x - c)$, каде што c-даден реален број.

Прво да ја определиме дефиниционата област на h. Бидејќи $h(x)=f(x-c)$, а дефинициона област на f е D, следува дека $x-c\in D$, т.е. $x\in c+D=\{c+z \mid z\in D\}$ па дефиниционата област на h е

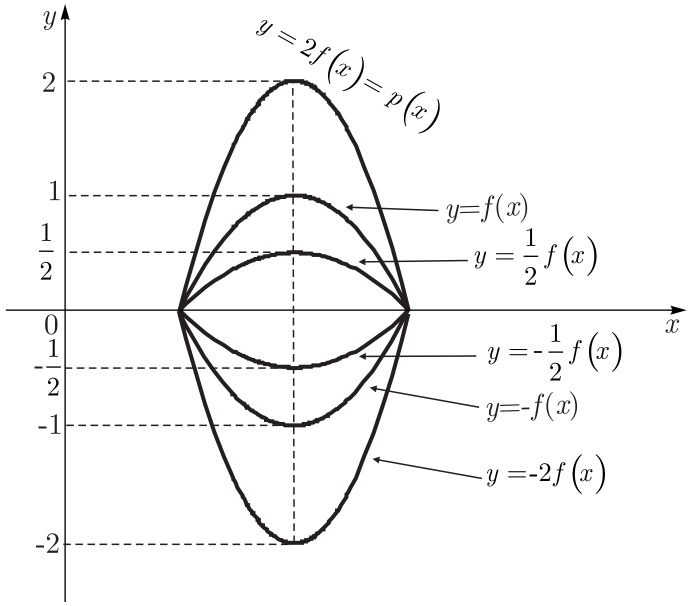
$$c+D=\{c+z \mid z\in D\}.$$

Ако $M_0(x_0,f(x_0))\in\Gamma_f$, тогаш $M_1(x_0+c,h(x_0+c))\in\Gamma_h$ т.е. $M_1(x_0+c,f(x_0))\in\Gamma_h$. Тоа значи M се добива кога точката M_0 е се транслира (помести) за c единици, по права паралелна со x-оската. Заклучуваме: графикот Γ_h се добива кога графикот Γ_f се поместува за c единици, по права паралелна со x-оската.

Конечно, графикот Γ_h, на функцијата $y=h\left(x\right), h\left(x\right)=f\left(x-a\right)$, каде што a е даден реален број се добива со транслација на графикот Γ_f во правец на $x-$оската за $\left|a\right|$- единици и, притоа, ако $a>0$, поместувањето е во позитивната насока на $x-$оската, а ако $a<0$, поместувањето е во негативната насока на $x-$оската.



3. Графикот на $p(x)=c\cdot f(x)$, се добива кога секоја y-координата на точки од Γ_f се помножи со c, бидејќи ако точката $(x,f(x))\in\Gamma_f$, тогаш точката $(x,c\cdot f(x))\in\Gamma_p$.



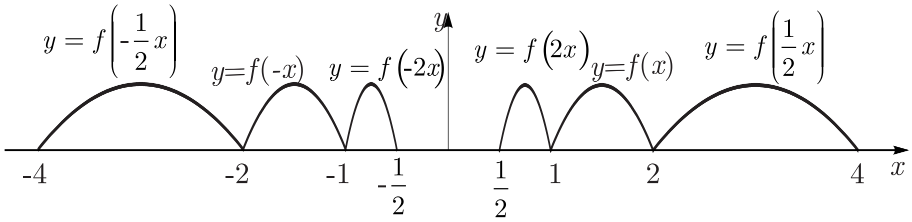
Значи, графикот, Γ_p, на функцијата $y=p(x)$, $p(x)=bf(x)$, каде што b е даден позитивен реален број, се добива со „растегнување" или „стегање" на графикот Γ_f во правец на $y-$оската во зависност од тоа дали $b>1$ или $0<b<1$.

Ако $b<0$, графикот на новата функција е осно симетричен (во однос на $x-$оската) со графикот на $p(x)=|\,b\,|\,f(x)$.

4. Функцијата $r(x)=f\left(\dfrac{x}{c}\right)$ има дефинициона област $c\cdot D=\{cx \mid x\in D\}$ и притоа, ако точката $(x,f(x))\in\Gamma_f$, тогаш точката $(x\cdot c,f(x))\in\Gamma_r$.

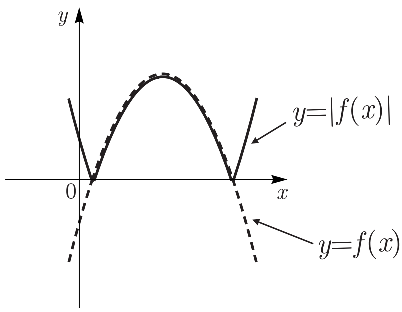
Значи, графикот, Γ_r, на функцијата $y=r(x)$, $r(x)=f\left(\dfrac{x}{a}\right)$, каде што a е даден позитивен реален број, со домен $D_r=aD_f=\left\{at \,\middle|\, t\in D_f\right\}$, се добива со „растегнување" или „стегање" на графикот Γ_f во правец на $x-$оската во зависност од тоа дали $a>1$ или $0<a<1$.

Бидејќи $y=f(-x)$ има график симетричен на графикот $y=f(x)$ во однос на $y-$оската, за $a<0$ важи аналогно тврдење како за $a>0$, само се почнува од графикот на $f(-x)$.



5. Функцијата $m\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ има иста дефинициона област со f. Притоа ако $f\left(x\right)\geq 0$ тогаш $m\left(x\right)=f\left(x\right)$, а ако $f\left(x\right)<0$, тогаш $m\left(x\right)=-f\left(x\right)$.

Значи, графиците на m и f се исти онаму каде што $f\left(x\right)\geq 0$, а се симетрични во однос на $x-$оската онаму каде што $f\left(x\right)<0$.



6. Ако f има инверзна функција f^{-1} на $A\subseteq D_f$, и е познат графикот на f на A тогаш графиците на f и f^{-1} се симетрични во однос на правата $y=x$. Како што опишавме во делот инверзна функција. Ова својство може да се искористи за скицирање на графикот на f^{-1}.

3.10. Елементарни функции

Во овој дел ќе се потсетиме на некои од својствата на елементарните функции кои се изучувани порано.

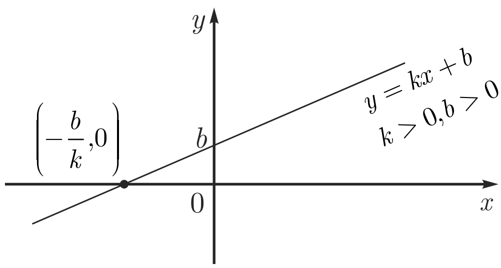
Линеарна функција

Наједноставна функција е линеарната функција, т.е. функцијата $f(x)=kx+b$ или $y=kx+b$, $k\neq 0$. Дефиниционата област е $\mathbb{R}$. Линеарната функција е монотона функција и тоа: строго монотоно растечка ако $k>0$ и строго монотоно опаѓачка ако $k<0$.

Да ја најдеме инверзната на $y=kx+b$ (инверзната постои бидејќи функцијата $y=kx+b$ е биекција на $\mathbb{R}$).

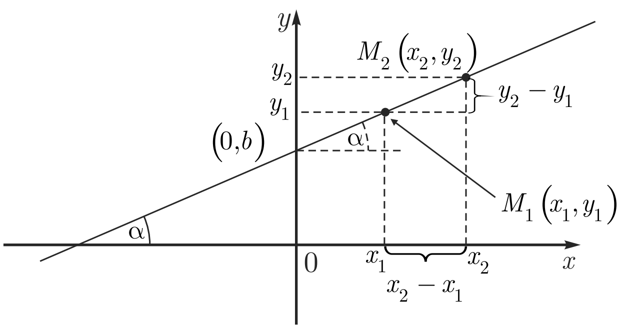
Од $x=\dfrac{y-b}{k}$, добиваме $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{k}x-\dfrac{b}{k}$ која исто така е линеарна функција.

Графикот на линераната функција е права.



Коефициентите $k=\mathrm{tg}\alpha$ и b се параметри кои ја определуваат правата и имаат геометриско значење: $k=\mathrm{tg}\alpha$ е коефициент на правец т.е. ја определува стрмнината на правата, а $(0,b)$ е точката во која правата ја сече y −оската.

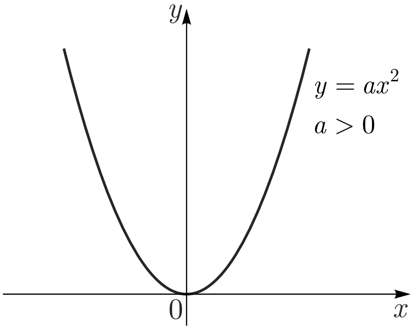
Аголот α е помалиот од аглите што правата ги зафаќа со позитивниот дел на x − оската.

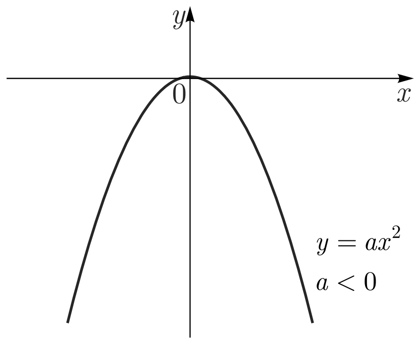


Квадратна функција

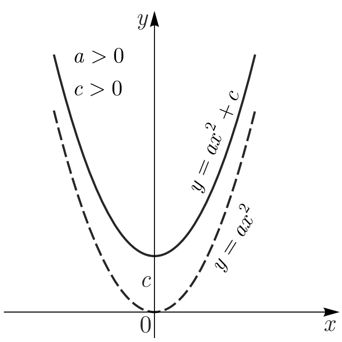
Функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ каде $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq0$ се нарекува квадратна функција. Дефиниционата област на оваа функција е $\mathbb{R}$. Ако некој од коефициентите b или c или и двата се нули, тогаш се добиваат неполни квадратни функции од обликот:

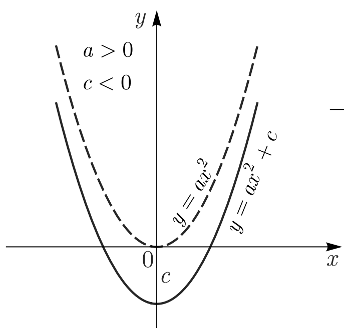
$y = ax^2$ со графици:

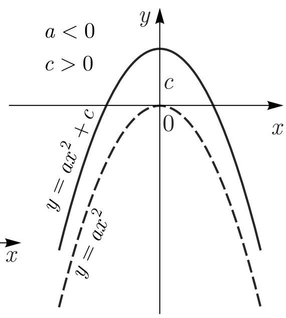




или $y = ax^2 + c$ со графици:



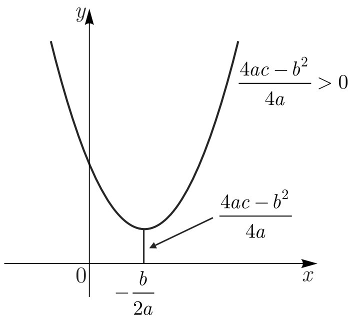


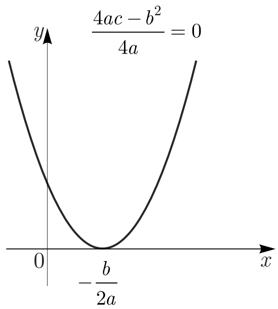


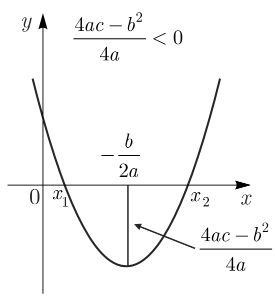
Графикот на квадратна функција е парабола.

Во зависност од знаците на a и $D = b^2 - 4ac$ графиците изгледаат вака.

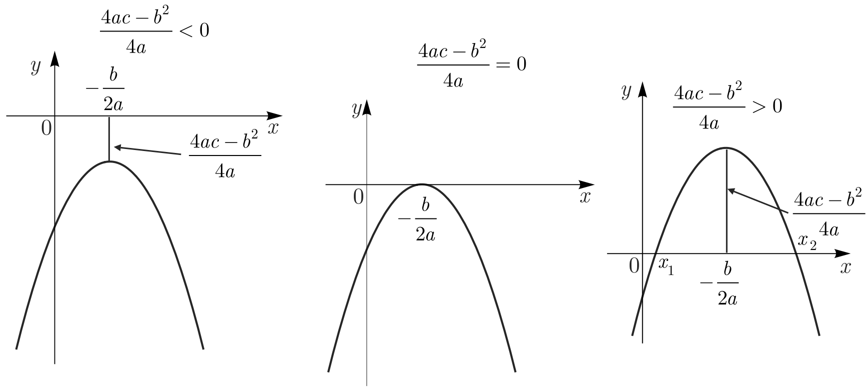
- за $a > 0$







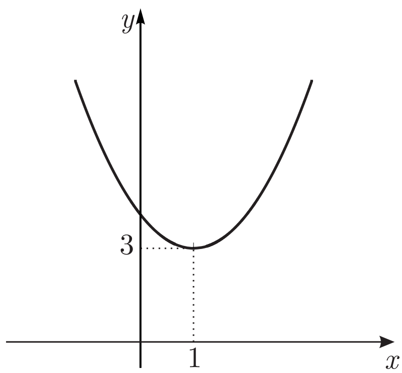
- за $a < 0$



Притоа, интервалите на растење и опаѓање, екстремните вредности, знаците на функцијата, нулите на функцијата, множеството вредности, може да се согледаат од графиците.

Во делот кај инверзна функција опишавме како се „намалуваат“ доменот и кодоменот на квадратна функција, за таа да има инверзна.

Пример. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е дефинирана со $f\left(x\right)=x^2-2x+4$. Јасно е дека таа не е инјекција, (затоа што, на пример, $f\left(0\right)=f\left(2\right)=4$) и не е сурјекција, (на пример, не постои $x\in\mathbb{R}$ таков што $f\left(x\right)=-2$). Значи, f нема инверзна.



Бидејќи првата координата на темето на оваа парабола е $-\dfrac{b}{2a}=1$, а $f\left(1\right)=3$, следува дека $f\left(x\right)\geq 3$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Да ја разгледаме функцијата $f_1:\left[1,\infty\right)\to\left[3,\infty\right)$ дефинирана со $f_1\left(x\right)=x^2-2x+4$. Таа е биекција (зошто?), па има инверзна. Да ја најдеме.

Нека $y = x^2 - 2x + 4$. Оттука $x^2 - 2x + 4 - y = 0$. Дискриминантата на оваа равенка (по x) е $D = 4 - 4\left(4 - y\right) = 4y - 12 = 4\left(y - 3\right)$. Заради $y \geq 3$ следува дека $D \geq 0$, па $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{y-3}}{2} = 1 \pm \sqrt{y-3}$. Бидејќи $x \geq 1$, следува дека $x = 1 + \sqrt{y-3}$. Значи, $f_1^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-3}$ и $f_1^{-1} : \left[3, \infty\right) \to \left[1, \infty\right)$. $\square$

Експоненцијални и логаритамски функции

Функцијата $f(x) = a^x$, каде што a е даден позитивен реален број различен од 1, се нарекува **експоненцијална функција**.

Дефиниционата област на оваа функција е $\mathbb{R}$.

Некои нејзини својства се:

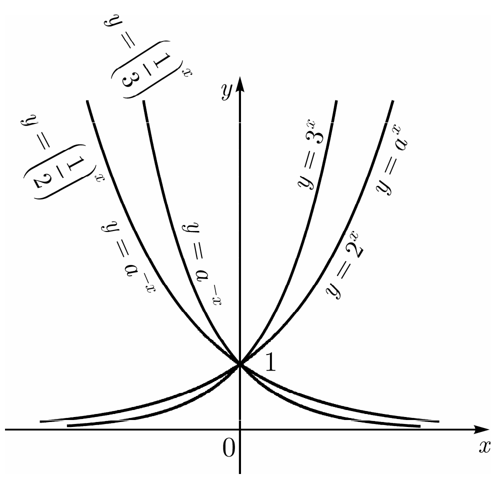
1) За $a > 1$

- монотоно расте на $\mathbb{R}$. Значи нема екстреми.
- множеството вредности е $V_f = \left(0, \infty\right)$, т.е. $f\left(x\right) > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$.
- нема нули

2) За $0 < a < 1$

- монотоно опаѓа на $\mathbb{R}$. Значи нема екстреми.
- множеството вредности е $V_f = \left(0, \infty\right)$, т.е. $f\left(x\right) > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$.
- нема нули

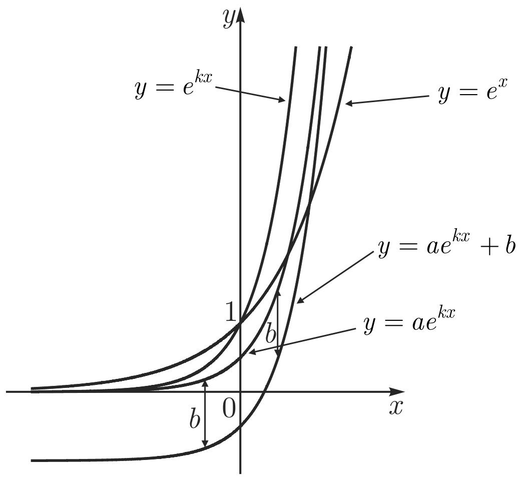
Примери на графици за некои вредности на a се:



Обично, во природните процеси се јавуваат посложени експоненцијални функции од облик: $y = \pm A e^{kx}$, $y = \pm B e^{-kx}$, $k \in \mathbb{R}$ или пак $y = a e^{kx} \pm b$, чии графици се добиваат со поместување на графикот на $y = e^{x}$ и $y = e^{-x}$ по $x-$оската или по $y-$оската.

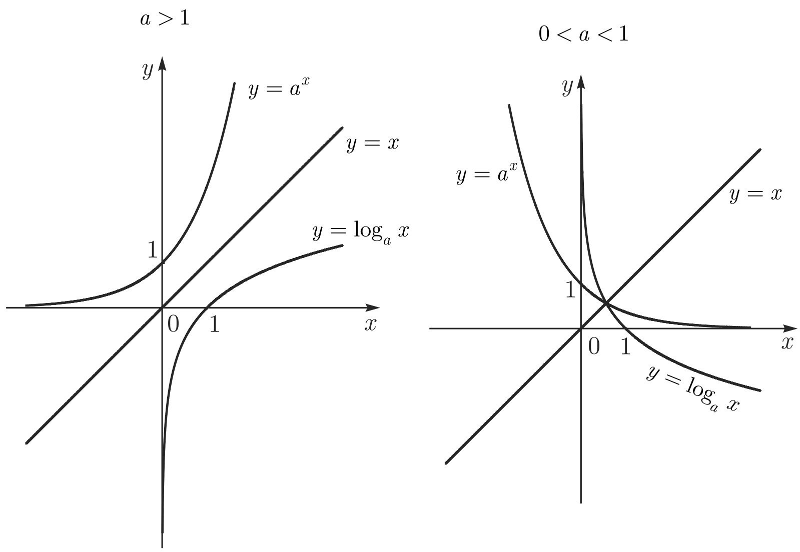
Пример. За $k > 1$, $0 < a < 1$, $b < 0$ ќе ја скицираме функцијата $y = a e^{kx} + b$.

Имаме $e^{kx} = (e^{k})^{x} = A^{x}$, каде $A = e^{k} > e^{1}$, па графикот е



Експоненцијалната функција $a^{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е монотона и тоа монотоно расте за $a > 1$ и монотоно опаѓа за $0 < a < 1$. Значи, таа е инјекција. Но не е сурјекција, бидејќи, на пример, не постои $x \in \mathbb{R}$ така што $f\left(x\right) = -1$. Функцијата $a^{x} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ има инверзна функција. Инверзна функција на $y = a^{x}$ се нарекува логаритамска функција со основа a, и се означува со $\log_a x$. Значи, $\log_a x : \left(0, \infty\right) \to \mathbb{R}$.

Имајќи ја предвид теоремата за графици на инверзна функција, графикот на $y = \log_a x$, за разни вредности на a е:



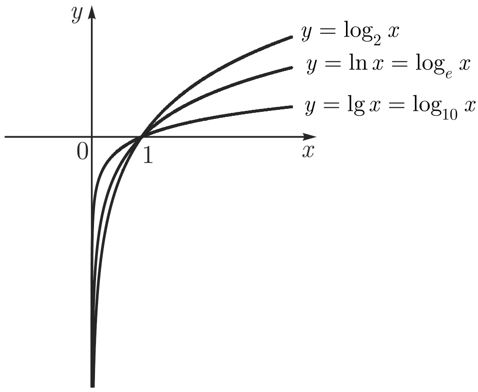
Јасно, ако $a > 1$, функцијата $y = \log_a x$ е монотоно растечка, а за $0 < a < 1$, функцијата $y = \log_a x$ е монотоно опаѓачка. Нула на функцијата е точката $(1,0)$. Нема екстреми и нејзиното множество вредности е $\mathbb{R}$.

Попознати се три вида логаритми:

- логаритми со основа e, и притоа функцијата $y = \log_e x$ е позната како природен логаритам т.е. природна логаритамска функција. Таа, специјално, се означува со $y = \ln x$.

- логаритам со основа 10, и притоа функцијата $y = \log_{10} x$ е позната како декаден (Бригсов) логаритам, т.е. декадна логаритамска функција. Се означува со $\lg x$.

- логаритам со основа 2, и притоа функција $y = \log_2 x$ е позната како бинарен логаритам, т.е. бинарна логаритамска функција.



Да забележиме дека ако треба да се работи со многу големи (или многу мали) броеви, тогаш е позгодно да работиме со нивните логаритми. Така, на пример наместо да работиме со: $12000000000 = 12{\cdot}10^9$ ќе работиме со многу помал број

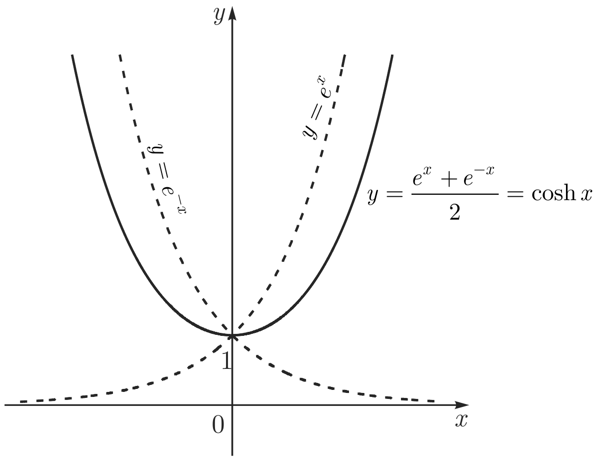
$$\log_{10} 12000000000 = \log_{10}(12 \cdot 10^9) = \log_{10} 12 + \log_{10} \cdot 10^9 =$$
$$= \log_{10} 12 + 9 = 1,20 + 9 \approx 10,20.$$

Хиперболични функции

Функцијата $f\left(x\right) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ се нарекува косинус хиперболикум од x и се означува со $\cosh\left(x\right)$ има дефинициона област $\mathbb{R}$ и

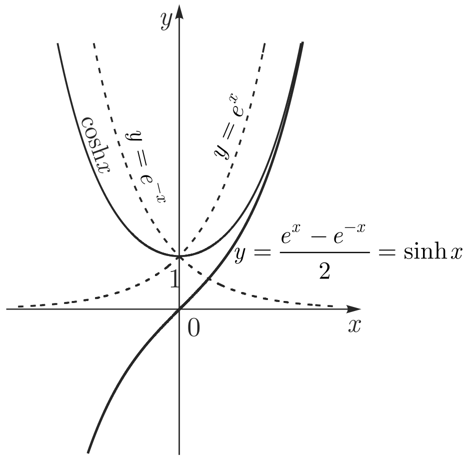
$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\} = [1, \infty).$$

Нејзиниот график се добива со собирање на графиците на функциите e^x и e^{-x} и земање на $\dfrac{1}{2}$ од вредноста на y $-$координатата од овој график т.е.



Друга значајна функција е функцијата $f\left(x\right) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, која се означува со $\sinh x$ (синус хиперболикум од x) со дефинициона област $\mathbb{R}$ и $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Графикот на $y = \sinh x$ е:



Количникот од функциите $y = \sinh x$ и $y = \cosh x$ се нарекува тангенс хиперболикум од x и се бележи со:

$$y = \mathrm{tgh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}.$$

Нејзината дефинициона област е $\mathbb{R}$, и $f\left(\mathbb{R}\right) = \left(-1,1\right)$.

Количникот од функциите $\cosh x$ и $\sinh x$ се вика котангенс хиперболикум од x и се бележи со $\mathrm{ctgh} x$. Значи

$$\mathrm{ctgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Притоа, нејзината дефинициона област е $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $f(D) = \left(-\infty, -1\right) \cup \left(1, \infty\right)$.

Сите наведени функции со заедничко име се нарекуваат **хиперболични функции**.

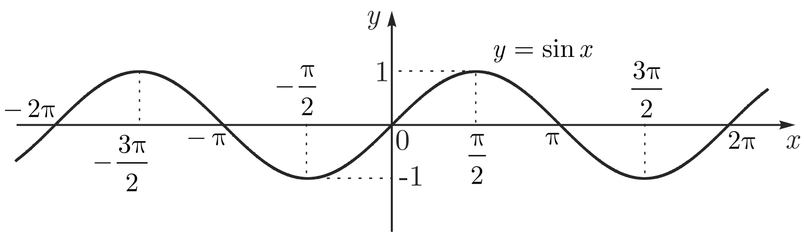
Тригонометриски и инверзни тригонометриски функции

1. Од дефиницијата на $y = \sin x$, јасно е дека $D_f = \mathbb{R}$.

Од $\sin(-x) = -\sin x$, добиваме дека $y = \sin x$ е непарна функција. Нулите на $y = \sin x$, се точките $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Јасно е дека $|\sin x| \leq 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$ и $\sin x = 1$, за $x = (4k+1)\dfrac{\pi}{2}$, а $\sin x = -1$ за $x = (4k-1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Од $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, за секој $x \in \mathbb{R}$, добиваме дека $\omega = 2\pi$ е период за $y = \sin x$.

Нејзиниот график е:

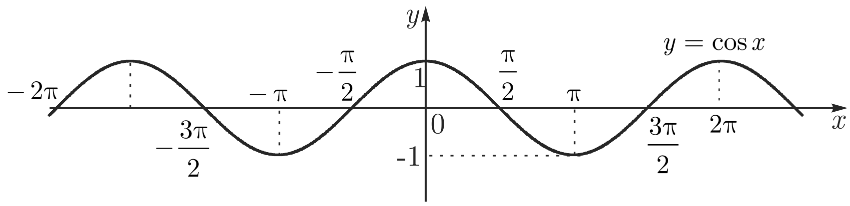


Графикот на $y = \sin x$ се нарекува синусоида.

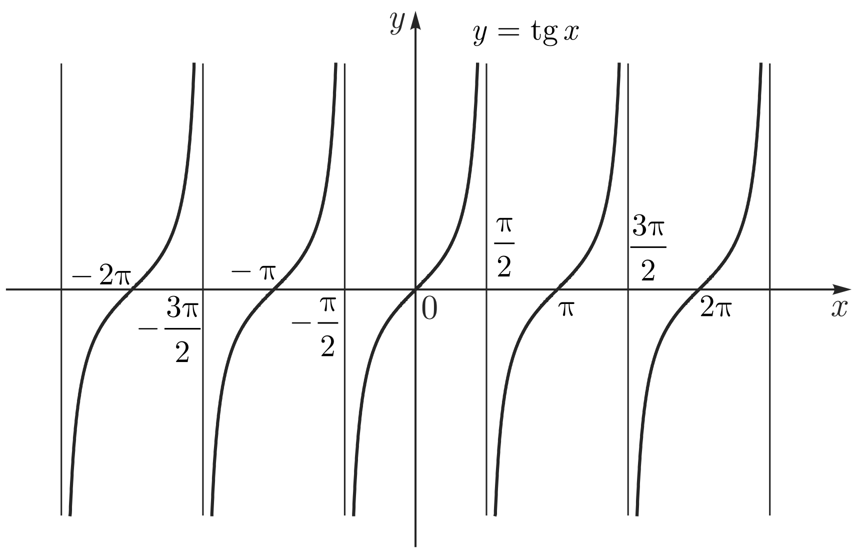
2. За функцијата $y = \cos x$ дефинициoната област е $\mathbb{R}$.

Од $\cos(-x) = \cos x$, за секој $x \in \mathbb{R}$, следува дека $y = \cos x$ е парна функција. Нулите на $y = \cos x$ се добиваат за $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Јасно $|\cos x| \leq 1$ и

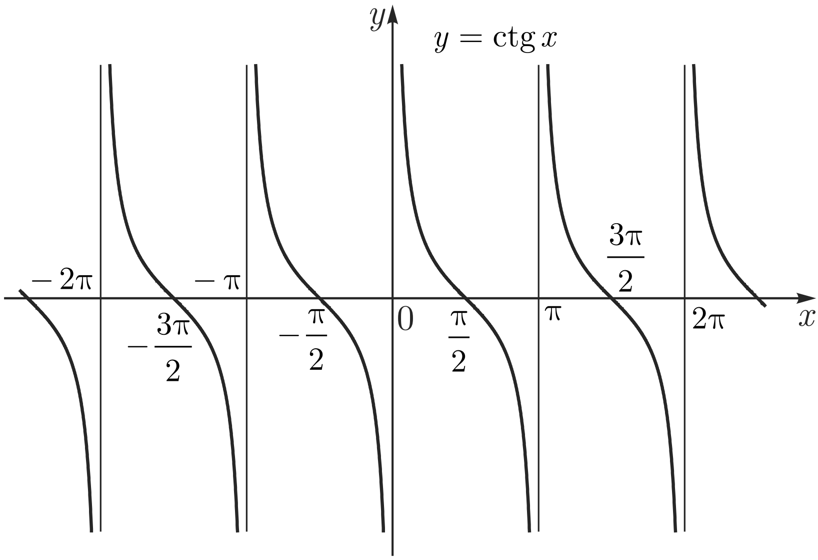
$\cos x = 1$ за $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, а $\cos x = -1$ за $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Функцијата е периодична со период $\omega = 2\pi$. Нејзиниот график е:



3. За функцијата $y = \mathrm{tg}x,\ \ D = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$. Таа е непарна функција, има нули за $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, е периодична со период $\omega = \pi$. Нејзиниот график е



4. За функцијата $y = \mathrm{ctg}x$ имаме $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, таа е непарна периодична функција со период $\omega = \pi$, има нули за $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Нејзиниот график е



Бидејќи тригонометриските функции не се биекции, за да постои инверзна функција треба да се ограничиме на делови од $\mathbb{R}$ на кои функцијата е биекција.

Функциите што се инверзни на тригонометриските функции се викаат циклометриски. Тие се:

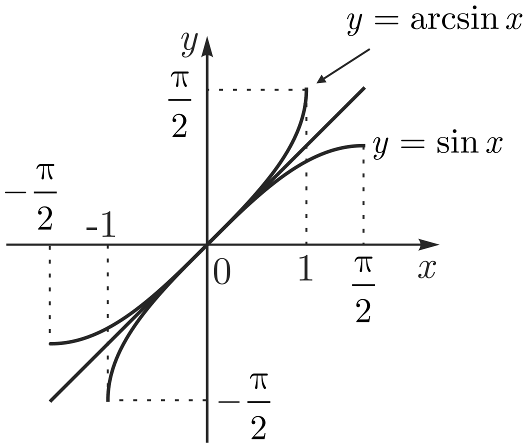
$y = \arcsin x$ (аркус синус од x) $\Leftrightarrow$ $x = \sin y$

$y = \arccos x$ (аркус косинус од x) $\Leftrightarrow$ $x = \cos y$

$y = \operatorname{arctg} x$ (аркус тангенс од x) $\Leftrightarrow$ $x = \operatorname{tg} y$

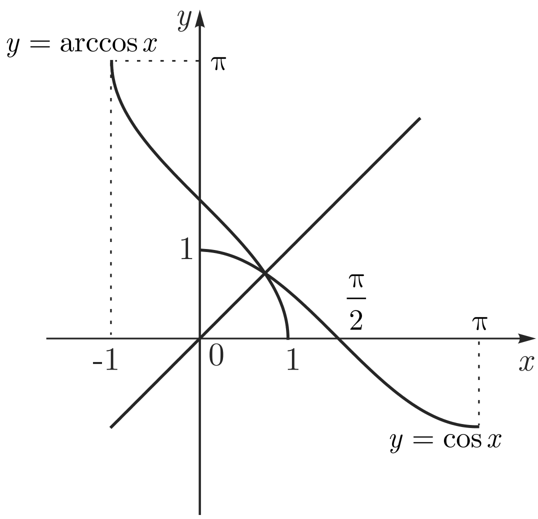
$y = \operatorname{arcctg} x$ (аркус котангенс од x) $\Leftrightarrow$ $x = \operatorname{ctg} y$

Така, $y = \sin x$ е монотоно растечка на $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, па $\sin x : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ е биекција. На овој дел постои инверзна функција $y = \arcsin x$, која се нарекува аркус синус од x. Јасно, $\arcsin x : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Нејзиниот график е:

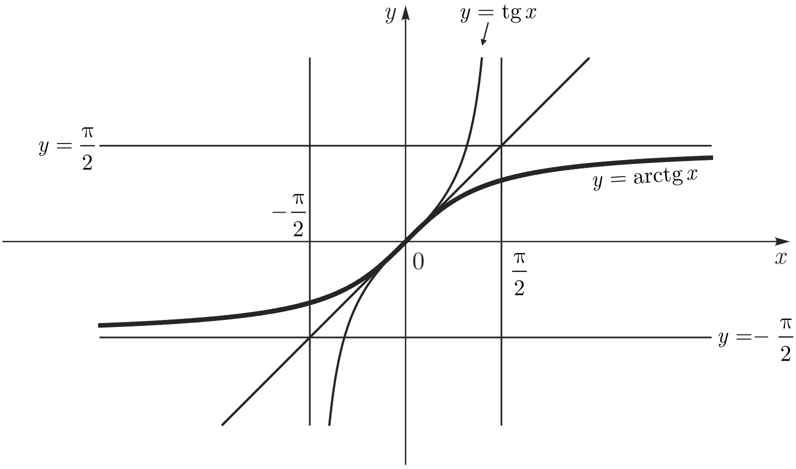


Да забележиме дека функцијата $\sin x$ има инверзна и на други интервали, на пример, на $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Но наједноставно е де се дефинира инверзната функција на $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

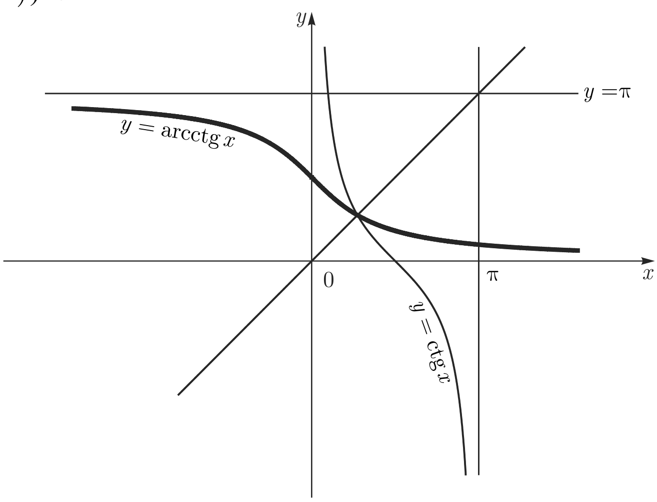
Функцијата $y = \arccos x$ (аркус косинус од x) е дефинирана на $[-1,1]$ и нејзините вредности се во интервалот $[0,\pi]$ (Ја разгледуваме функцијата $y = \cos x$ на $[0,\pi]$).



Функцијата $y = \mathrm{tg} x$ е строго растечка на $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $f\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-\infty, \infty)$. Според тоа, за овој дел од $y = \mathrm{tg} x$ постои инверзна функција $y = \mathrm{arcctg} x$ (аркус тангенс од x) и таа е дефинирана на $(-\infty, \infty)$.



Графикот на $y = \mathrm{arcctg}x$, дефинирана за $x \in (-\infty, +\infty)$, со вредности во интервалот $(0, \pi)$) е



Дефиниција. Функцијата $y = f(x)$ е елементарна функција, ако е:

а) степенска

б) експоненцијална

в) тригонометриска

г) инверзна на некоја од претходните

д) збир, разлика, производ, количник или композиција на функциите а)-г).

Функциите од а) до г) ќе ги нарекуваме **основни елементарни функции**. □

Да забележиме дека сите елементарни функции се непрекинати на својата дефинициона област, т.е. „графикот на функцијата над интервал можеме да го скицираме без да го подигнеме моливот од хартијата“. Поимот непрекинатост подетално ќе го разгледаме понатаму.

3.11. Гранична вредност на функција

Дефиниција. Нека D е дефинициона област на функцијата f и нека $a \in \mathbb{R}$ е таков што во секоја негова ε ($\varepsilon > 0$) околина има точка од D различна од a. Бројот $b \in \mathbb{R}$ се нарекува **гранична вредност (лимес)** на функцијата f кога x тежи кон a ако важи

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\}, | x - a | < \delta \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon).$$

Последниов услов на друг начин можеме да го презапишеме вака

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{a\}, x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon).$$

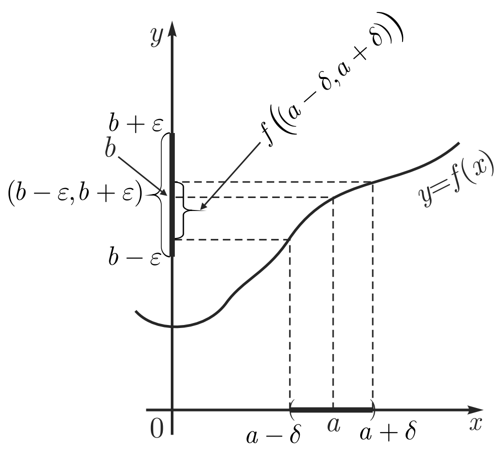
Се запишува:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ или } f\left(x\right) \to b \text{ кога } x \to a.$$

Со други зборови, точките што се блиски до a се пресликуваат во точки што се блиски до b, бидејќи за секоја ε-околина $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ на точката b, постои δ-околина $(a - \delta, a + \delta)$ на точката a, со следново својство: сите точки од D што припаѓаат во $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ се пресликуваат во $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, т.е.

$x \in (D \setminus \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

Значи, $(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0), f\left((a - \delta, a + \delta) \cap D \setminus \{a\}\right) \subseteq (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.



Геометриски гледано, преку график на функција, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ значи за секоја ε-околина на бројот b на y – оската да може да се најде δ – околина на бројот a на x – оската чијашто слика (без a) при f е подмножество од ε-околината на b.

Да забележиме дека дефиницијата на лимес не зависи од вредноста на функцијата во a. Значи, функцијата не мора ниту да е дефинирана во a, т.е. точката a не мора да припаѓа на дефиниционата област на функцијата. Затоа кај лимеси, ќе работиме со дефинициона област $D \setminus \{a\}$ наместо со D.

Исто така ако функцијата е дефинирана, на пример, само на множеството $D = \left(1,2\right) \cup \{3\}$, во точката $a = 3$ не се дефинира лимес, бидејќи $a = 3$ има околина која нема други точки од D. Во секоја точка од $[1,3]$ може да се дефинира лимес и во ниедна друга.

Понатаму, во целава книга, сите дефинициони области D и сите точки a во кои ќе бараме лимес ќе го имаат својството: во секоја ε ($\varepsilon > 0$) околина на a има точка од D различна од a. Тоа својство го исполнуваат, на пример, интервалите (затворени и отворени).

Пример 1. а) Ако $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, тогаш $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Да избереме $\delta = \varepsilon > 0$. Тогаш, за $x \in \mathbb{R}$, и $| x - a |< \delta = \varepsilon$ следува $| f(x) - c |=| c - c |= 0 < \varepsilon$. Значи, $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

б) Ако $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, тогаш $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right) = 1$.

Доказ. Во овој случај дефиниционата област е $D = \left(0,\infty\right)$ и бараме лимес кога x тежи кон десниот крај на интервалот D. Во секоја околина на точката $a = 0$ има елемент од D различен од a.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Доволно е да докажеме за $\varepsilon < 1$, бидејќи за $\varepsilon_1 \geq 1$ важи $\left(b-\varepsilon, b+\varepsilon\right) \subseteq \left(b-\varepsilon_1, b+\varepsilon_1\right)$.

Значи, нека $\varepsilon < 1$, $\delta = \left(\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2$ и нека $x \in D \setminus \{0\}$ е произволен и таков што $| x - 0 |=| x |< \delta$, т.е. $x > 0$ и $x < \delta$.

Тогаш имаме

$$| x |< \delta \Leftrightarrow x < \delta \Leftrightarrow x < \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1-\varepsilon\right) < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < \varepsilon.$$

Конечно, за $| x - 0 |=| x |< \delta$ важи

$$\left|f\left(x\right) - 1\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+1} - 1\right| = \left|\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right| = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < \varepsilon .$$

Докажавме дека за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 > 0$ така што за секој $x \in D \setminus \{0\}$ таков што $|x-0| < \delta$ важи $\left|f(x)-1\right| < \varepsilon$, па следува $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

в) Функцијата $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ нема гранична вредност кога $x \to 0$.

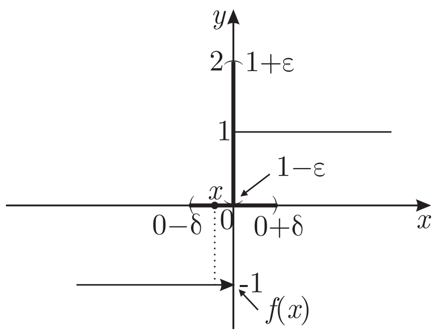
Доказ. Дефиниционата област е $\mathbb{R}$ и 0 припаѓа во дефиниционата област.

Бидејќи $f(A) \subseteq \{-1,1\}$, за секое $A \subseteq \mathbb{R}$, следува дека единствени кандидати за лимесот се -1 и 1.

Нека $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Ќе докажеме дека a не може да е лимес на функцијата кога $x \to 0$.

Постои $\varepsilon > 0$ така што $1 \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $-1 \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Тогаш за секој $\delta > 0$ и $x \in (-\delta, \delta)$ важи $f(x) \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, т.е. $\left|f(x)-a\right| \geq \varepsilon$, па лимесот не е a.

Ќе докажеме дека лимесот не е 1.



Нека $\varepsilon = 1$ и $\delta > 0$ е произволен. Постои $x \in (0-\delta, 0+\delta)$ и $x < 0$. За тој x имаме $f(x) = -1 \notin (0,2) = (1-1, 1+1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Значи, докажавме дека постои $\varepsilon = 1 > 0$ така што за секој $\delta > 0$ постои $x \in (0-\delta, 0+\delta)$ важи $\left|f(x)-1\right| > \varepsilon$ (т.е. $f(x) \notin (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$), па лимесот не е 1.

Слично се докажува дека лимесот не е -1, па функцијата нема лимес во $a = 0$.

г) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$.

Доказ. Овде точката 0 не припаѓа на дефиниционата област на функцијата. Притоа, секоја околина на 0 содржи точки од дефиниционата област на $x\sin\dfrac{1}{x}$, бидејќи $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Да го провериме условот за гранична вредност на функција.

Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран и да избереме $\delta=\varepsilon>0$. Тогаш за $x\in D$ и $|x-0|<\delta$ имаме

$$|f(x)-0|=\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq\left|x\right|\cdot 1=\left|x\right|<\delta=\varepsilon .$$

Следува $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$. □

Без доказ ќе ги наведеме следниве две теореми.

Теорема 1. Ако постои гранична вредност на функцијата кога x тежи кон a тогаш таа е единствена. □

Теорема 2. Нека D е дефинициона област на f. Точката b е лимес на функција $f(x)$ кога x тежи кон a ако и само ако е исполнет условот:

за секоја низа (x_n), $x_n\in D\setminus\{a\}$ која конвергира кон a, низата $(f(x_n))$ да конвергира кон b. □

Да забележиме дека дефиницијата на лимес не дава начин за определување на лимесот. Теорема 2 дава еден таков начин, со користење на низи.

Пример 2. Провери дали постојат границите. Ако постојат, пресметај ги.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+1}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. а) Дефинициона област на $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ е $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ и $2\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Нека (x_n) е произволна низа таква што $x_n\neq -1$, $x_n\neq 2$ за секој $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

Тогаш за низата $(f(x_n))$, имаме $f(x_n)=\dfrac{x_n-1}{x_n+1}$, па користејќи ги правилата за лимес на низа добиваме $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-1}{x_n+1}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n+1}=\dfrac{1}{3}$.

Докажавме дека за произволна низа $\left(x_n\right)$ од дефиниционата област на f, таква што $x_n \to 2$, кога $n \to \infty$, важи $f\left(x_n\right) \to \frac{1}{3}$, кога $n \to \infty$. Од теорема 2 следува дека $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x+1}$ постои и $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$.

б) Нека $f\left(x\right) = \sin\frac{1}{x-1}$. Тогаш $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Избираме две низи $x_n = 1 + \frac{1}{n\pi}$ и $y_n = 1 + \frac{2}{(4n+1)\pi}$. Јасно $x_n > 1, y_n > 1$, па $x_n, y_n \in D_f$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Притоа, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Соодветните низи од вредности на функцијата се

$$f\left(x_n\right) = \sin\frac{1}{1+\frac{1}{n\pi}-1} = \sin(n\pi) = 0 \text{ и}$$

$$f(y_n) = \sin\frac{1}{1+\frac{2}{(4n+1)\pi}-1} = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = 1.$$

Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ додека $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$.

Најдовме две низи $\left(x_n\right)$ и $\left(y_n\right)$ кои конвергираат кон 1 а $f\left(x_n\right) \to 0$, $f\left(y_n\right) \to 1$ кога $n \to \infty$. Значи не е исполнет заклучокот од теорема 2, па следува дека функцијата нема лимес во точката $x = 1$.

в) Избираме две низи $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = -\frac{1}{n}$. Тогаш, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Соодветните низи од вредности на функцијата се $f(x_n) = 2^n$, $f(y_n) = 2^{-n}$. Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ додека $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 0$, од каде што заклучуваме дека функцијата нема лимес во точката $x = 0$. $\square$

Пример 4. Нека $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ и $g\left(x\right)=x+1$. Јасно, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ и $D_g=\mathbb{R}$, па функциите не се еднакви.

При барањето лимес кога $x\to 1$, земаме произволна низа $x_n\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x_n\to 1$, кога $n\to\infty$, и за двете функции. Притоа, ги користиме својствата на лимеси на низи.

Така имаме

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-1}{x_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n-1\right)\left(x_n+1\right)}{x_n-1}.$$

Бидејќи, $x_n\neq 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$, имаме

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n-1\right)\left(x_n+1\right)}{x_n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(x_n+1\right)=2.$$

Од произволноста на $\left(x_n\right)$ следува дека $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=2$.

За g имаме $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(x_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+1\right)=2$, па $\lim\limits_{x\to 1} g\left(x\right)=2$.

Значи, f и g имаат исти лимеси во 1. □

Точна е следнава теорема, која ќе ја наведеме без доказ.

Теорема 3. Нека f и g се две функции за кои постојат гранични вредности b_0 и c_0 кога x тежи кон a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b_0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c_0$.

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=b_0\pm c_0=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=b_0\cdot c_0=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{b_0}{c_0}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, каде што $c_0\neq 0$ и постои околина U на a така што $g\left(x\right)\neq 0$ за секој $x\in U$.

4) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|b_0|$. □

Да забележиме дека од $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0$ следува $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Тоа не мора да важи ако $\lim_{x\to a} | f(x) | \neq 0$. Така на пример, функцијата $f(x)=\begin{cases}1, x\geq 0\\ -1, x<0\end{cases}$ нема лимес кога $x\to 0$, но $|f(x)|=1$, па $\lim_{x\to 0} | f(x) | = 1$.

Својствата 1) и 2) од претходната теорема може да се обопштат на n функции, $n\in\mathbb{N}$.

Ако се дадени n функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ и ако постојат граничните вредности

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = b_i,\quad i=1,2,\dots,n,$$

тогаш важи

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\ldots+\lim_{x\to a} f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Од теорема 3 следуваат и следниве тврдења

$$\lim_{x\to a}(c+f(x)) = \lim_{x\to a} c + \lim_{x\to a} f(x) = c + \lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x)) = \lim_{x\to a} c\cdot\lim_{x\to a} f(x) = c\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{c}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to a} c}{\lim_{x\to a} f(x)} = \frac{c}{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Следниве две теореми ги наведуваме без доказ.

Теорема 4. Нека се дадени три функции f, g и h така што $\lim_{x\to a} f(x) = b_0 = \lim_{x\to a} g(x)$ и нека постои δ_0-околина на точката a за која $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$, за секој $x\in(a-\delta_0, a+\delta_0)$. Тогаш и $\lim_{x\to a} h(x) = b_0$. □

Да забележиме дека во претходната теорема, не мора $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ на целата дефинициона област на функциите, туку е доволно да има околина на a за која важи $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$.

Теорема 5. Нека $h: T\setminus\{t_0\}\to P\setminus\{x_0\}$ и $f: P\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ се реални функции. Ако постојат

$$\lim_{t\to t_0} h(t) = x_0, \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0,$$

тогаш постои $\lim_{t\to t_0} f(h(t))$, и притоа важи

$$\lim_{t\to t_0} f(h(t)) = y_0.\ \square$$

Со теорема 5 е овозможена „замена на променливите“ при барањето гранична вредност. Така изразите при барањето лимес се поедноставуваат.

Пример 3. а) Нека $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. Да ја искористиме теорема 4 за да пресметаме $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Имаме $0 \le \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| \cdot \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

Бидејќи $\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, од теорема 4 следува дека $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$, и оттука $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

б) Нека $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x+1$ и $h(x) = \frac{1}{x}$. Тогаш $f(x) = h(g(x))$. Да побараме $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ со користење на теорема 5.

Ако $x_n \ne -1$, $x_n \ne 3$, за секој $n \in \mathbb{N}$, е произволна низа која конвергира кон 3, тогаш $g(x_n) = x_n + 1 \to 3+1 = 4$. Од теорема 2 следува дека $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 4$.

Слично, користејќи ја теорема 2 добиваме $\lim\limits_{x\to 4} h(x) = \frac{1}{4}$.

Од теорема 5 имаме $t_0 = 3$, $x_0 = 4$, $y_0 = \frac{1}{4}$, па следува дека

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} h(g(x)) = \frac{1}{4}.$$

Во задачи, за да се поедностави барањето гранична вредност, се става $t = x+1$, па со користење на теорема 2 се добива дека $t \to 4$, кога $x \to 3$, и повторно од теорема 2 следува $f(t) = \frac{1}{t} \to \frac{1}{4}$, кога $t \to 4$.

Сепак, треба да се внимава при ставањето смена.

в) Нека $h(t) = t\sin\frac{1}{t}$ и $f(x) = \begin{cases} 1, x \ne 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$. Да побараме $\lim\limits_{t\to 0} f(h(t))$, т.е. $\lim\limits_{t\to 0} f\left(t\sin\frac{1}{t}\right)$.

Притоа, $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 0$, па $t_0 = 0$ и $x_0 = 0$. Уште $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, па $y_0 = 1$. Така би добиле $\lim\limits_{t\to 0} f\left(t\sin\frac{1}{t}\right) = y_0 = 1$. Тоа значи дека за секоја низа (t_n) таква што $t_n \neq 0$ и $t_n \to 0$ кога $n \to \infty$ важи $f\left(t_n \sin \dfrac{1}{t_n}\right) \to 1$ кога $n \to \infty$. Но, за низата $t_n = \dfrac{1}{n\pi}$ важи $t_n \neq 0$ и $t_n \to 0$ кога $n \to \infty$ и имаме $f\left(t_n \sin \dfrac{1}{t_n}\right) = f\left(\dfrac{1}{n\pi} \sin n\pi\right) = f\left(0\right) = 0 \to 0 \neq 1$.

Значи бараниот лимес $\lim\limits_{t\to 0} f\left(t \sin \dfrac{1}{t}\right)$ не е 1, па добивме контрадикција. Според тоа овде не може да примениме смена на променливите.

Проблемот е во тоа каде се дефинирани функциите. Така во нашиот случај, функцијата h има бесконечно нули, а треба да биде $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Да забележиме дека $\lim\limits_{t\to 0} f\left(t \sin \dfrac{1}{t}\right)$ не постои. Ако земеме уште една низа $y_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$, за неа важи $y_n \neq 0$ и $y_n \to 0$ кога $n \to \infty$ и
$f\left(y_n \sin \dfrac{1}{y_n}\right) = f\left(\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right) = f\left(\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = 1 \to 1 \quad$ кога $\quad n \to \infty$.
Од теорема 2 следува дека лимесот не постои. □

Натаму ќе го разгледаме однесувањето на функцијата кога аргументот x се приближува кон x_0 само од лево или само од десно. На тој начин доаѓаме до поимите лева и десна гранична вредност на функцијата.

Нека $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Интервалот $\left(a, a + \varepsilon\right)$ ќе го нарекуваме десна ($\varepsilon -$) околина на a, а интервалот $\left(a - \varepsilon, a\right)$ ќе го нарекуваме лева ($\varepsilon -$) околина на a.

Дефиниција. Нека D е дефинициона област на функцијата f и нека $a \in \mathbb{R}$ е таков што во секоја негова лева околина има точка од D различна од a. Бројот $b \in \mathbb{R}$ се нарекува **лева гранична вредност (лев лимес)** на функцијата f кога x тежи кон a од лево ако важи

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon).$$

Пишуваме:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b\,.$$

Дефиниција. Нека D е дефинициона област на функцијата f и нека $a \in \mathbb{R}$ е таков што во секоја негова десна околина има точка од D различна од a. Бројот $b \in \mathbb{R}$ се нарекува **десна гранична вредност (десен лимес)** на функцијата f кога x тежи кон a од десно ако важи

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, x \in (a, \mathrm{a} + \delta) \Rightarrow | f(x) - b | < \varepsilon).$$

Пишуваме:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b\ .$$

Следнава теорема ја дава врската меѓу лимес и лев и десен лимес. Ја наведуваме без доказ.

Теорема 6. Нека за фунцијата f постојат $\lim\limits_{x \to a^+} f\left(x\right)$ и $\lim\limits_{x \to a^-} f\left(x\right)$. Тогаш

а) Ако постои $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right)$**,** тогаш

$$\lim_{x \to a^-} f\left(x\right) = \lim_{x \to a^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to a} f\left(x\right).$$

б) Ако $\lim\limits_{x \to a^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to a^+} f\left(x\right)$, тогаш постои $\lim\limits_{x \to a} f\left(x\right)$ и важи

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = \lim_{x \to a^-} f\left(x\right) = \lim_{x \to a^+} f\left(x\right).\ \square$$

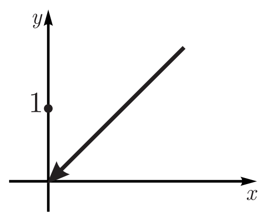
Пример 4. Нека $f\left(x\right) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$. Таа нема лимес кога $x \to 0$, затоа што $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(x\right) = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(x\right) = -1$. Значи левиот и десниот лимес постојат, но тие се различни. $\square$

Да забележиме дека аналогна карактеризација со низи како во теорема 2 важи и за левиот и десниот лимес. Така на пример важи

Теорема $2'$**.** Нека D е дефиниционата област на f. Точката b е лев лимес на функција $f(x)$ кога x тежи кон a од лево ако и само ако е исполнет условот:

за секоја низа $\left(x_n\right)$, $x_n \in D \setminus \{a\}$, $x_n < a$, која конвергира кон a, низата $\left(f(x_n)\right)$ да конвергира кон b. $\square$

Пример 3. Нека $f(x) = \begin{cases} x,\ x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$, дефинирана на $\left[0, 5\right)$.



Тогаш ќе сметаме дека $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. За дефиниционата област исполенти се условите за дефиниционата област од дефиницијата на лимес.

Исто така $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, а за лимесот од лево не се исполенти условите од дефиницијата, т.е. не е исполнета претпоставката од дефиницијата. □

Да заклучиме, ако функцијата е дефинирана на (a,b), тогаш ќе сметаме дека функцијата има лимес од лево во b ако и само ако има лимес во b. Аналогно, функцијата има лимес од десно во a ако и само ако има лимес во a.

Слично, ако функцијата е дефинирана на $[a,b)$, $[a,b]$ или $(a,b]$.

3.12. Бескрајно големи лимеси и лимеси кога x тежи кон бескрајност

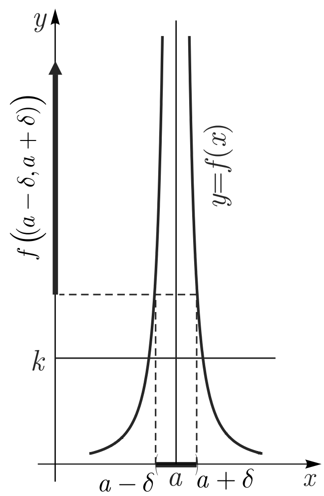
Претходно разгледавме лимеси на функции кога променливата тежи кон реален број и лимесот е реален број или не постои. Овде ќе разгледаме лимеси кога променливата тежи кон реален број а функцијата кон $+\infty$ или $-\infty$, и кога променливата тежи кон $+\infty$ или $-\infty$.

Дефиниција. За функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ велиме дека тежи кон $+\infty$ кога x тежи кон a, и пишуваме $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, ако

за секој позитивен реален број k постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in D$, $x \neq a$, од $0 <| x - a |< \delta,$ следува $f(x) > k$.

Со други зборови,

$$x \in \Big((D \cap (a-\delta, a+\delta)) \setminus \{a\}\Big) \Rightarrow f(x) \in (k, \infty).$$



$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Пример 1. За функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ важи $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Навистина, барањето за дефинициона област е исполнето. Нека $k > 0$ е произволен. Избираме $\delta = \frac{1}{\sqrt{k}} > 0$, и нека $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ и $|x - 0| < \frac{1}{\sqrt{k}}$. Тогаш

$f(x) = \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\frac{1}{\left(\sqrt{k}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{k}} = k$, т.е. $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. □

Дефиниција. За функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ велиме дека тежи кон $-\infty$ кога x тежи кон a и пишуваме $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ ако

за секој негативен реален број T, постои $\delta > 0$ така што од $x \in D, 0 < |x - a| < \delta$ следува $f(x) < T$.

Дефиниција. За функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ велиме дека тежи кон $+\infty$ кога x тежи кон a од лево, и пишуваме $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, ако

за секој позитивен реален број k постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in D$, од $x \in (a - \delta, a)$ следува $f(x) > k$.

Аналогно се дефинираат и

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \ \text{и} \ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

Теорема. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ако и само ако $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$. □

Пример 2. За функцијата $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$ важи

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \ \text{и} \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \ \text{(докажи!).}$$

Значи, овде не постои $\lim_{x \to 0} f\left(x\right)$. □

Граничните вредности $+\infty$ и $-\infty$ се викаат бесконечни лимеси на функцијата f.

Важи следнава

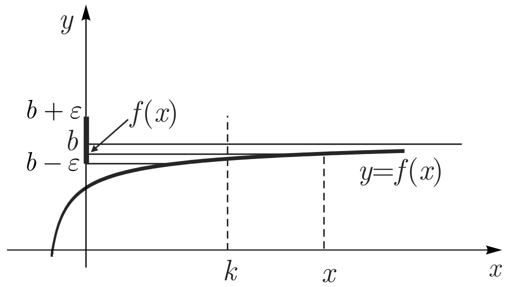
Теорема 1. а) Ако $f(x) \neq 0$, за секој x од некоја околина на a и ако $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ тогаш $\lim_{x \to a} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

б) Ако $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, тогаш $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. □

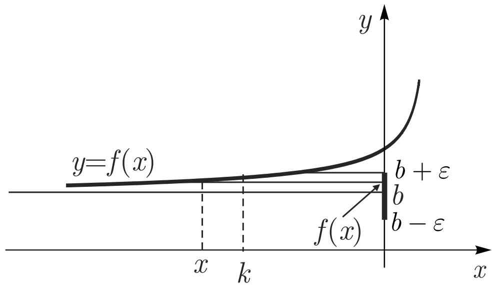
Дефиниција. Нека $y = f(x)$, $x \in D$. Реалниот број b е лимес на функцијата f кога x тежи кон $+\infty$ и пишуваме $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, ако за секој

$\varepsilon > 0$, постои позитивен реален број k така што од $x > k$ следува $| f(x) - b | < \varepsilon$.

Дефиниција. Нека $y = f(x)$, $x \in D$. Реалниот број b е лимес на функцијата f кога x тежи кон $-\infty$ и пишуваме $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои негативен реален број k така што од $x < k$ следува $| f(x) - b | < \varepsilon$.



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Дефиниција. За функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ велиме дека тежи кон $+\infty$ кога x тежи кон $+\infty$, и пишуваме $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ако

за секој позитивен реален број k постои $s > 0$ така што за секој $x \in D$, од $x > s$ следува $f(x) > k$.

Аналогно се дефинираат и

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ \text{и} \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty .$$

За сите наведени лимеси важи и соодветна на теорема 2 од претходниот дел, т.е. постоењето на лимесот преку низи.

Пример 2. Не постои лимес на функцијата $f\left(x\right) = \sin x$ кога x тежи кон ∞.

Навистина, ако $x_n = 2n\pi$ и $y_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш $x_n, y_n \to \infty$, но $f\left(x_n\right) = \sin 2n\pi = 0 \to 0$ и $f\left(y_n\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$, кога $n \to \infty$.

Ако лимесот постои мора за секоја низа $\left(a_n\right)$ што тежи кон ∞ да важи $f\left(a_n\right)$ да тежи кон ист реален број или ∞ или $-\infty$. Овде го докажавме спротивното, па лимесот не постои. $\square$

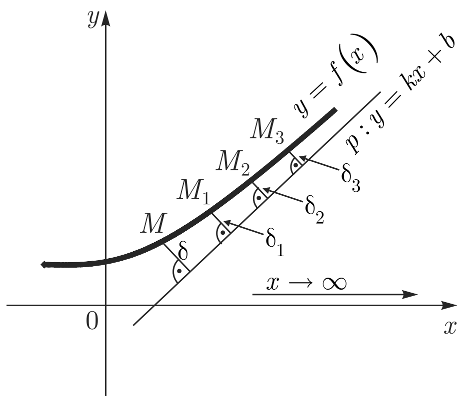
Како кај низи, и овде, на пример, записот $\dfrac{\infty}{\infty}$ ќе значи лимес на функцијата $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ кога $f\left(x\right), g\left(x\right) \to \infty$. Аналогно и за другите неопределени изрази наведени кај низи. Изразите што таму ги сметавме за определени, и овде ќе бидат такви (на пример $\dfrac{0}{\infty} = 0$).

3.13. Асимптоти на функција

Дефиниција. Асимптота на функцијата $y = f(x)$, е правата p, со својството растојанието од точката $M\left(x, f(x)\right)$ од графикот на функцијата, до правата p да тежи кон нула кога x тежи кон a.

Притоа, тежењето може да биде и кон a^- или a^+, а a може да биде и ∞ или $-\infty$.

Коса асимптота се нарекува асимптотата p ако таа има равенка $y = kx + b$ каде што, $k, b \in \mathbb{R}$ и $k \neq 0$.



Се докажува дека k и b, на косата асимптота $y = kx + b$, на дадена функција $y = f(x)$ се

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0\,,\; b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$$

или

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0\,,\; b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx)\,.$$

И обратно, ако постојат лимесите

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \ , b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) ,$$

тогаш правата $y = kx + b$ е коса асимптота на $f\left(x\right)$ (кога $x \to \infty$), и ако постојат лимесите

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \ , \ b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) .$$

тогаш правата $y = kx + b$ е коса асимптота на $f\left(x\right)$ (кога $x \to -\infty$).

Да забележиме дека функцијата може да има коса асимптота само кон ∞ а да нема кон $-\infty$, или обратно.

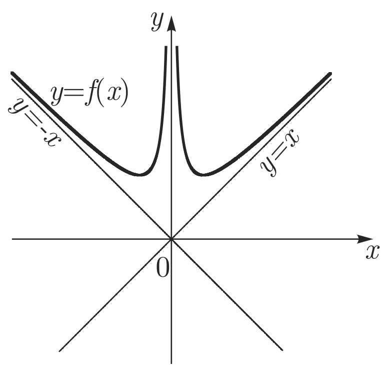
Специјално, ако $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, т.е. $k = 0$, тогаш правата $y = b$ се нарекува **хоризонтална асимптота** за $y = f(x)$ кога $x \to \infty$.

Притоа може да се добијат различни хоризонтални асимптоти, кога $x \to \infty$ и $x \to -\infty$.

Пример 1. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ -\left(x + \dfrac{1}{x}\right), & x < 0 \end{cases}$$

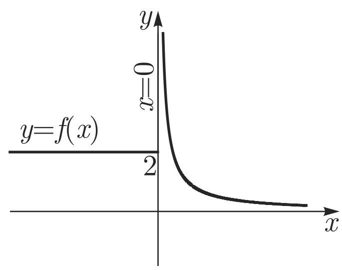
Ако $x \to \infty$ имаме $k = 1$ и $b = 0$, па правата $y = x$ е коса асимптота кога $x \to \infty$. Слично, кога $x \to -\infty$ добиваме $k = -1$ и $b = 0$, па правата $y = -x$ е коса асимптота кога $x \to -\infty$.



Нека $a \in \mathbb{R}$. Ако $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty(-\infty)$, тогаш $x = a$ е **вертикална асимптота** за $y = f(x)$ кога $x \to a^+$, а ако $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty(-\infty)$, тогаш $x = a$ е вертикална асимптота за $y = f(x)$ кога $x \to a^-$.

Пример 2. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ 2, & x \le 0 \end{cases}$$



За неа имаме $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$, па правата $x = 0$ е вертикална асимптота само кога $x \to 0^+$

Исто така, оваа функција има хоризонтална асимптота $y = 0$ само кога $x \to +\infty$. □

3.14. Непрекинатост на функција

Нека f е функција дефинирана на $D \subseteq \mathbb{R}$.

Дефиниција. За функцијата f велиме дека е непрекината во точката $a \in D$ ако важи

за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in D$ таков што $| x - a |< \delta$ да следува $\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$.

Последниов услов на друг начин можеме да го презапишеме вака

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Со други зборови, точките што се блиски до a се пресликуваат во точки што се блиски до $f(a)$, бидејќи за секоја ε-околина $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ на точката b, постои δ-околина $(a - \delta, a + \delta)$ на точката a, со следново својство:

сите точки од D што припаѓаат во $(a-\delta, a+\delta)$ се пресликуваат во $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, т.е.

$$x \in D \cap (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon).$$

Значи, $(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0), f\Big((a-\delta, a+\delta) \cap D\Big) \subseteq (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$.

Оваа дефиниција е многу слична со дефиницијата на лимес во a. Разликата е во тоа што кај лимес f не мора да е дефинирана во a, а кај непрекинатост f е дефинирана во a.

Овде не се бара условот за дефиниционата област кој се бара во дефиницијата за лимес.

На пример, ако функцијата е дефинирана, само на множеството $D = \left(1,2\right) \cup \{3\}$, во точката $a = 3$ не се дефинира лимес, а се дефинира непрекинатост. Јасно, само $x = 3$ припаѓа во околината $\left(3-\dfrac{1}{2}, 3+\dfrac{1}{2}\right)$, па важи $\left|f\left(3\right)-f\left(3\right)\right| = 0 < \varepsilon$, за секој $\varepsilon > 0$. Значи, тривијално, во оваа точка f е непрекината.

Ако f е дефинирана во a и ако D ги исполнува условите од дефиницијата за лимес, дефинициите за лимес и непрекинатост во a се совпаѓаат. Понатаму ќе работиме само со дефинициони области кои го исполнуваат условот од дефиницијата на лимес.

Се вели дека f е непрекината на D ако f е непрекината во секоја точка од D.

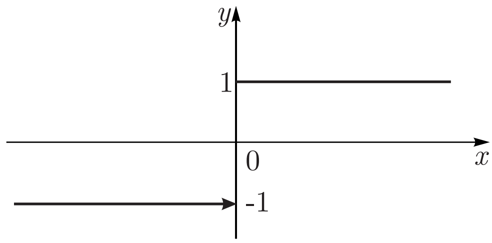
Лесно се докажува следнава теорема.

Теорема. а) Ако $A \subseteq D$ и f е непрекината на D, тогаш функцијата $f_1 : A \to \mathbb{R}$ дефинрана со $f_1\left(x\right) = f\left(x\right)$, за секој $x \in A$ е непрекината.

б) Ако $f : D \to \mathbb{R}$ е функција, $a \in D$ и постои $c > 0$ така што функцијата $f_1 : \left(a-c, a+c\right) \cap D \to \mathbb{R}$, дефинирана со $f_1\left(x\right) = f\left(x\right)$, е непрекината во a, тогаш и функцијата f е непрекината во a. $\square$

Функцијата f **има прекин** (или е **прекината**) **во** $a \in D$ ако таа не е непрекината во a.

Пример 1. а) Функцијата $f\left(x\right) = \begin{cases} -1, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ е прекината во $a = 0$.



Навистина, нека $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и нека $\delta > 0$ е произволен. Постои $x \in \left(0-\delta.0+\delta\right)$, (на пример $x = \dfrac{\delta}{2}$) така што $\left|\dfrac{\delta}{2} - 0\right| < \delta$ но

$$\left|f\left(x\right) - f\left(0\right)\right| = \left|f\left(\frac{\delta}{2}\right) - f\left(0\right)\right| = \left|1-\left(-1\right)\right| = 2 > \frac{1}{2} = \varepsilon\ . \ \Box$$

б) Функцијата $f\left(x\right) = x$ е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R}$.

Навистина, ако $a \in \mathbb{R}$ е произволен, и ако $\varepsilon > 0$ е произволен, тогаш избирајќи $\delta = \varepsilon$ и произволен $x \in \mathbb{R}$ таков што $|\ x - a\ | < \delta$, имаме

$$\left|f\left(x\right) - f\left(a\right)\right| = \left|x - a\right| < \delta = \varepsilon\ . \ \Box$$

Од дефинициите и својствата за лимес и непрекинатост следува точноста на следниве теореми.

Теорема. Функцијата f е непрекината во точката $a \in D$ ако и само ако важи

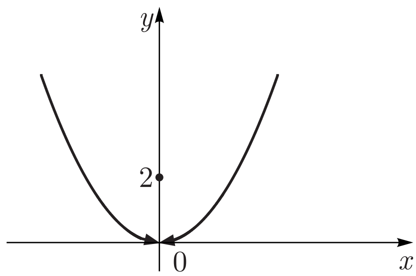
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ . \ \Box$$

Оваа теорема овозможува испитување на непрекинатоста со барање лимес.

Така на пример, за функцијата $f\left(x\right) = \begin{cases} -1,\ x<0 \\ 1,\ x \geq 0 \end{cases}$ имаме $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = -1$, па не постои лимесот во 0. Од претходната теорема следува дека фукцијата има прекин во 0. Притоа, $0 \in D_f$.

Дури и ако постои лимесот во a, но тој е различен од $f\left(a\right)$, повторно заклучуваме дека функцијата има прекин во a .

Така на пример, за $f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \neq 0 \\ 2,\ x = 0 \end{cases}$ важи $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right) = 0$, па и $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right) = 0$. Но $f\left(0\right) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$, па заклучуваме дека f има прекин во 0 .



Значи за непрекинатата функција f во a важи

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right)$$

т.е. кај непрекинати функции со лимес може да се „влезе“ во функцијата.

Интуитивно, графикот на непрекината функција на интервал „може да се скицира без да се подигне моливот од хартијата“ или „изгледа како конец над секој интервал на кој функцијата е непрекината“.

Теорема. Функцијата f е непрекината во $a \in D$ ако и само ако за секоја низа $\left(a_n\right)$ таква што $a_n \in D$, за секој $n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ да следува $\lim_{n\to\infty} f\left(a_n\right) = f\left(a\right)$. □

Оваа теорема може да се искористи за барање на лимес на низи. Така на пример, знаејќи го $\lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x}$, можеме да го пресметаме лимесот $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1+n}{n}}{\frac{1+n}{n}}$, бидејќи $a_n = \frac{1+n}{n}$ е една низа што тежи кон еден. Тогаш

$$\sin 1 = \lim_{x\to 1} \frac{\sin x}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1+n}{n}}{\frac{1+n}{n}}.$$

Теорема 2. Ако f и g се непрекинати во a тогаш и $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ и $\frac{f}{g}$ ($g(x)\neq 0$ во некоја околина на a) се непрекинати функции во a. □

Теорема 3. Ако f е непрекината во a, g е непрекината во $f(a)$, тогаш и gf е непрекината во a. □

Теорема 4. Нека $f: D \to f(D)$ е строго монотона непрекината функција и D е интервал. Тогаш

1) таа има инверзна функција f^{-1}.

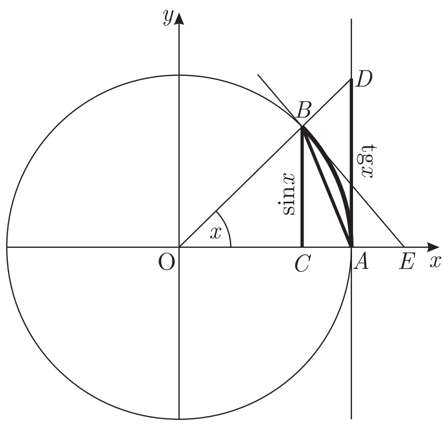
2) f^{-1} е стого монотона, и ако f е растечка, таква е и f^{-1}, ако f е опаѓачка, таква е и f^{-1}.

3) f^{-1} е непрекината. $\square$

Пример 2. Ќе докажеме дека $\left|\sin x\right| \leq \left|x\right|$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

Прво, нека $x > 0$. Можеме да претпоставиме дека $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, бидејќи за $x > \dfrac{\pi}{2}$ важи $\sin x \leq 1 < \dfrac{\pi}{2} < x$.

Да разгледаме тригонометриска кружница. Тогаш $\sin x = \overline{BC}$. Аголот x е во радијани, па од дефиницијата на радијан следува дека $x = \overset{\frown}{AB}$. Бидејќи $\overline{AB}$ е најкраткото растојание меѓу A и B, следува дека $\overline{AB} < \overset{\frown}{AB}$. Слично, $\overline{BC} < \overline{AB}$, бидејќи AB е хипотенуза во правоаголниот триаголник ABC. Значи, $\sin x < x$.



Значи, важи $\sin x < x$ за секој $x > 0$.

Од непарноста на функциите x и $\sin x$ следува $\sin x > x$ тврдењето за $x < 0$. За $x = 0$ важи $\sin 0 = 0$. $\square$

Пример. Функциите $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$ се непрекинати во секој $a \in \mathbb{R}$.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и нека $\delta = \varepsilon$ и $\left|x - a\right| < \delta$. Тогаш

$$\left|f(x) - f(a)\right| = \left|\sin x - \sin a\right| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = \left|x - a\right| < \delta = \varepsilon \cdot$$

Значи, функцијата $f(x) = \sin x$ е непрекината во a.

Слично се докажува дека и функцијата $\cos x$ е непрекината во a. □

Без доказ ја наведуваме следнава теорема.

Теорема. Функциите $f(x) = a^x$ и $g(x) = x^a$ се непрекинати во секоја точка од својата дефинициона област. □

Од претходните 4 теореми и претходниот пример можеме да изведеме заклучок дека е точна следнава теорема.

Теорема 5. Елементарните функции се непрекинати на своите дефинициони области. □

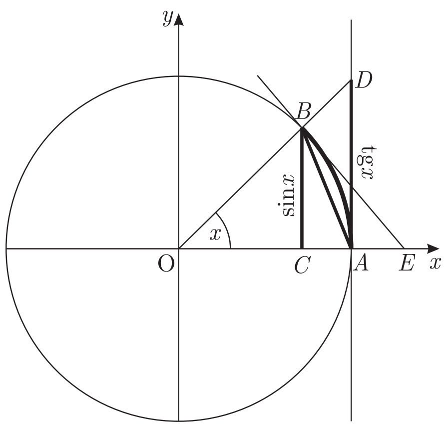
Тоа значи дека, на пример, функциите x^2, $\sin\sqrt{x^2-3}$, $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3-3}}$ итн. се непрекинати во секоја точка од својата дефинициона област.

Пример 2. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Оваа функција е дефинирана на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Прво, нека $x > 0$, т.е. $x \to 0^+$. Можеме да претпоставиме дека $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Да разгледаме тригонометриска кружница. Тогаш $\sin x = \overline{BC}$.

Аголот x е во радијани, па од дефиницијата на радијан следува дека $x = \overset{\frown}{AB}$. Бидејќи $\overline{AB}$ е најмалиот пат меѓу A и B, следува дека $\overline{AB} < \overset{\frown}{AB}$. Слично, $\overline{BC} < \overline{AB}$, бидејќи AB е хипотенуза во правоаголниот триаголник ABC. Значи, $\sin x < x$.



Нека $P_1 = P_{\Delta OAB}$, P_2 е плоштината на кружниот исечок OAB и $P_3 = P_{\Delta OAD}$. Тогаш $P_1 < P_2 < P_3$. Од друга страна имаме, $P_1 = \dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{BC}}{2} = \dfrac{\sin x}{2}$,

$P_2 = \dfrac{x}{2}$ (плоштина на кружен исечок кога аголот е во радијани) и $P_3 = \dfrac{\overline{OA} \cdot \overline{AD}}{2} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$. Значи, имаме $\dfrac{\sin x}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$, т.е. $\sin x < x < \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Оттука, делејќи со $\sin x > 0$ добиваме $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$.

Слично се докажува дека за $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ важи $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$, притоа користејќи дека $\sin x$ и x имаат ист знак на тој интервал.

Бидејќи $\cos x$ е непрекината во секоја точка од $\mathbb{R}$, следува $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, па добиваме дека $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. $\square$

Забележуваме дека функцијата од претходниот пример не е дефинирана во точката 0. Ако дефинираме нова функција $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x), & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

добиваме дека важи $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 1 = f_1(0)$, па f_1 е непрекината во 0. Притоа, f е непрекината во секој $a \neq 0$, затоа што е елементарна функција, и важи $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin a}{a}$.

За лимесите на основните елементарни функции имаме:

- $\lim\limits_{x \to \infty} x^a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$,

- $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a < 1 \\ 0, & a > 1 \end{cases}$

За $a > 1$ правата $y = 0$ е хоризонтална асимптота на функцијата a^x, кога $x \to -\infty$.

За $a < 1$ правата $y = 0$ е хоризонтална асимптота на функцијата a^x, кога $x \to \infty$.

- $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty,\ a > 1$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \infty, \; a < 1$

За $a > 1$ правата $x = 0$ е вертикална асимптота на функцијата $\log_a x$, кога $x \to 0^+$.

За $a < 1$ правата $x = 0$ е вертикална асимптота на функција $\log_a x$, кога $x \to 0^+$.

- Функциите $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ немаат лимес кога $x \to \infty$ ниту кога $x \to -\infty$. Притоа, $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a, \; \lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$, за секој $a \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^-} \operatorname{tg} x = \infty$, $\quad \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$, за секој $k \in \mathbb{Z}$.

Правите $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ се вертикални асимптоти за функцијата $\operatorname{tg} x$.

$\lim\limits_{x \to (k\pi)^-} \operatorname{ctg} x = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to (k\pi)^+} \operatorname{ctg} x = +\infty$, за секој $k \in \mathbb{Z}$.

Правите $x = k\pi$ се вертикални асимптоти за функцијата $\operatorname{ctg} x$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}, \; \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$, па правите $y = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = -\dfrac{\pi}{2}$ се хоризонтални асимптоти за функцијата $\operatorname{arctg} x$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$, $\; \lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arcctg} x = 0$, па правите $y = \pi$ и $y = 0$ се хоризонтални асимптоти за функцијата $\operatorname{arcctg} x$.

Без доказ ќе наведеме некои карактеристични гранични вредности, кои ќе се користат при пресметките:

- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, \; a > 0$.

Природните процеси се опишуваат со некои закони, т.е. функции $y = f(x)$. Се проценува дека 90% од природните процеси се непрекинати, т.е. се опишани со непрекинати функции.

На крајот на овој дел ќе наведеме неколку важни теореми кои се однесуваат на непрекинати функции на интервал.

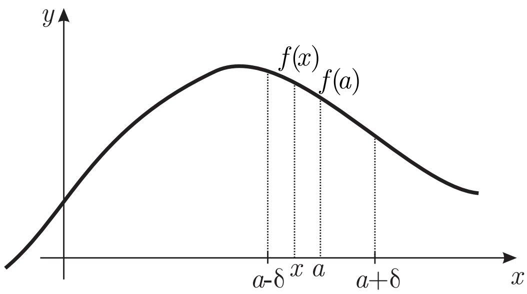
Теорема. Нека f е непрекината функција дефинирана на интервал D и $a \in D$. Тогаш

1) Ако $f(a) > 0$, тогаш постои околина $(a-\delta, a+\delta)$ таква што $f(x) > 0$ за секој $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

2) Ако $f(a) < 0$, тогаш постои околина $(a-\delta, a+\delta)$ таква што $f(x) < 0$ за секој $x \in (a-\delta, a+\delta)$. □

Притоа, ако a е лев (или десен) крај на интервалот тогаш околината ќе биде $(a, a+\delta)$ (или $(a-\delta, a)$).

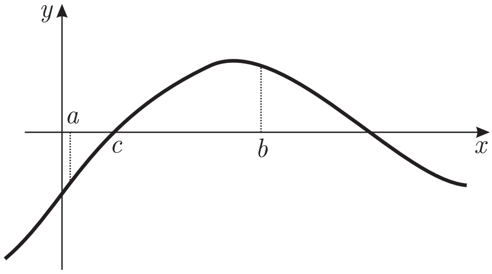
Графички, тоа изгледа вака



Условот за непрекинатост е важен. На пример функцијата $f(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$ има прекин во 0 и важи $f(0) = 1 > 0$, но секоја околина на 0 има x така што $f(x) = -1 < 0$.

Теорема. Нека f е непрекината на $[a,b]$ и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Тогаш постои $c \in \mathbb{R}$ таков што $a < c < b$ и $f(c) = 0$. □

Графички



Истото тврдење важи ако се претпостави дека $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

Оваа теорема може да се искористи за да се докаже дека една непрекината функција има нули на даден интервал, т.е. да се докаже дека равенката $f(x) = 0$ има решение на даден интервал.

Пример. Равенката $x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$ има барем едно решение на интервалот $[-1, 3]$.

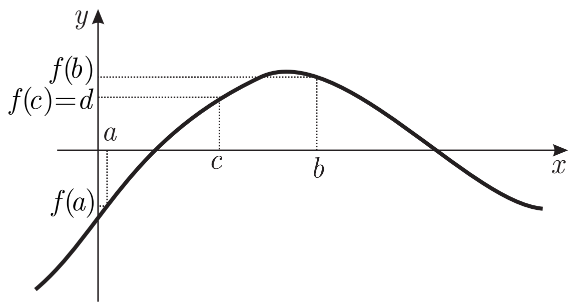
Навистина, функцијата $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ е непрекината на дадениот интервал и $f(-1) = -13 < 0$, $f(3) = 27 - 27 + 12 - 5 = 7 > 0$, па од претходната теорема следува дека постои $c \in (-1, 3)$ така што $f(c) = 0$, т.е. $c^3 - 3c^2 + 4c - 5 = 0$.

□

Притоа, не се знае дали решението е единствено ниту може да се најде тоа решение, користејќи ја оваа теорема.

Последица. Ако f е непрекината на $[a, b]$, тогаш за секој $d \in \mathbb{R}$ таков што $f(a) < d < f(b)$ или $f(a) > d > f(b)$ постои $c \in \mathbb{R}$ таков што $a < c < b$ таков што $f(\mathrm{c}) = d$. □

Графички



Теорема. Ако f е непрекината на интервалот D тогаш $f(D)$ е интервал.

□

Теорема. Непрекината функција определена на интервалот $[a, b]$ е ограничена на $[a, b]$. □

Овде тврдењето не важи ако интервалот е отворен, полуотворен или бесконечен.

На пример функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x}$ е определена и непрекината на $(0, 1]$ но не е ограничена. Функцијата $g(x) = x^2$ е определена на $(0, \infty)$ и непрекината но не е ограничена.

Теорема. Нека f е непрекината на $[a, b]$. Тогаш постојат $c, d \in [a, b]$ така што

$$f(c)=\max\left\{f(x)\middle|x\in[a,b]\right\} \text{ и}$$

$$f(\mathrm{d})=\min\left\{f(x)\middle|x\in[a,b]\right\}. \ \square$$

Ова значи дека непрекината функција на затворен конечен интервал ги достигнува своите најголема и најмала вредност.

3.15. Криви во рамнината. Параметарски равенки

Нека $x,y:I\to\mathbb{R}$, каде што $I\subseteq\mathbb{R}$ е интервал (конечен или бесконечен), се непрекинати функции. Тогаш множеството $\left\{\left(x(t),y(t)\right)\middle|t\in I\right\}$ се нарекува **крива во рамнината**.

Притоа, обично t се нарекува параметар, I е интервал на параметарот (параметарски интервал), $x(t)$, $y(t)$ параметарски равенки а за функцијата $\underline{f}:I\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ дефинирана со $\underline{f}(t)=\left(x(t),y(t)\right)$, $t\in I$ се вели дека е пат во рамнината. Подолу ќе покажеме дека една крива може да има повеќе параметризации.

Да забележиме дека графикот $\left\{\left(t,f\left(t\right)\right)\middle|t\in I\right\}$ на произволна непрекината функција $f:I\to\mathbb{R}$, каде што I е интервал, е крива во рамнината. Притоа $x(t)=t$ и $y(t)=f(t)$, $t\in I$.

Ако $y=y(x)$ е реална непрекината функција определена на интервал I и важи

$$F\left(x,y(x)\right)=0$$

за секој x од интервалот I, се вели дека кривата е имплицитно зададена со равенката $F\left(x,y\right)=0$.

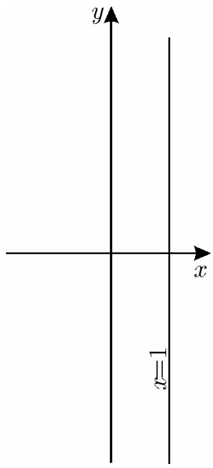
Во тој случај кривата зададена со $y=f(x)$ е подмножество од множеството точки $\left\{\left(x,y\right)\middle|F\left(x,y\right)=0\right\}$. Значи со $F\left(x,y\right)=0$ зададена е врската меѓу координатите x и y на секоја точка од кривата.

Да забележиме дека функцијата $y=y(x)$ не мора да е единствена. Така на пример кај кривата определена со равенката $x=y^2$, за секој $x\geq 0$, важи $F\left(x,y\right)=x-y^2$ и притоа постојат две функции $y_1(x)=\sqrt{x}$ и $y_2(x)=-\sqrt{x}$ за кои важи $F\left(x,y\right)=0$.

Ако кривата е зададена со равенка $y = y(x)$, ќе велиме дека кривата е заедена експлицитно (т.е. втората координата е експлицитно изразена преку првата).

Така на пример, со равенката $y = x^2$ експлицитно е дефинирана кривата $\left\{\left(x, x^2\right) \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$. Но истата крива е имплицитно дефинирана и со изразот $y - x^2 = 0$.

Да забележиме и дека имплицитно зададената крива не секогаш може да се изрази експлицитно во обликот $y = f(x)$. Така на пример со равенката $x - 1 = 0$ е дефинирана кривата во рамнина $\left\{(1, x) \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$, т.е. правата паралелна со y-оската која минува низ точката $\left(1, 0\right)$. Но, нема реална функција $y(x)$ чиј график е множеството точки во рамнината $\left\{(1, x) \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$.



Пример 1. Да ги изведеме параметарските равенки на кривата елипса зададена во како множество точки од рамнината

$$\left\{\left(x, y\right) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.$$

Овде $F\left(x, y\right) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ и $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и доволно е да земеме дека $a, b > 0$.

Погодно е да избереме $x = a\cos t$ и да замениме во равенката на елипсата, добиваме $\dfrac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, а одовде $y^2 = b^2(1 - \cos^2 t) = b^2 \sin^2 t$, па добиваме дека $y = b\sin t$. Значи, ги добивме параметарските равенки на елипсата: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Притоа, заради периодичноста на $\sin t$ и $\cos t$ доволно е да се претпостави дека $0 \le t \le 2\pi$.

(ако параметарот t го толкуваме како време тогаш во време $t=0$ движењето по елипсата со параметарските равенки $x(t), y(t)$ започнува од точката $(a,0)$, се врти во позитивна насока, и во време $t=2\pi$ завршува повторно во точката $(a,0)$.)

Во овој случај нема реална функција $y=y(x)$ чиј график се совпаѓа со кривата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

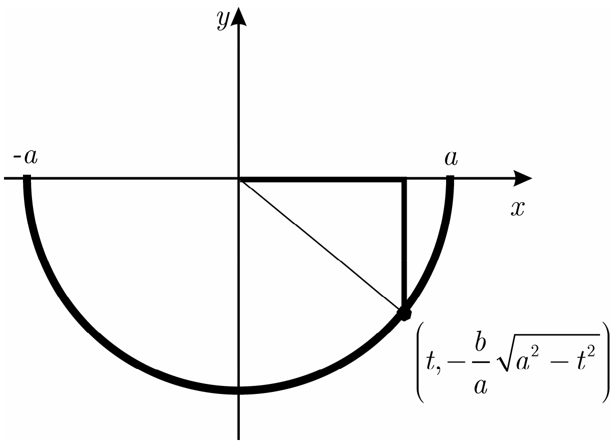
Да забележиме дека y како функција од t можеме на бесконечно многу начини да го изразиме параметарски, зависно од изборот на x како функција од t.

На пример, ако избереме $x=t, -a \le t \le a$, тогаш за y не може да се изрази (параметризира) со една функција $y=y(t)$.

Елипсата ќе ја претставиме како унија на две криви долната и горната половина од елипсата, и овие две криви ќе ги параметризираме поодделно.

Со функцијата $y_1(t)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2},\ -a \le t \le a$ може да се параметризира само „долната половина“ (делот од елипсата под x-оската), т.е. параметарските равенки на „долната половина“ од елипсата се

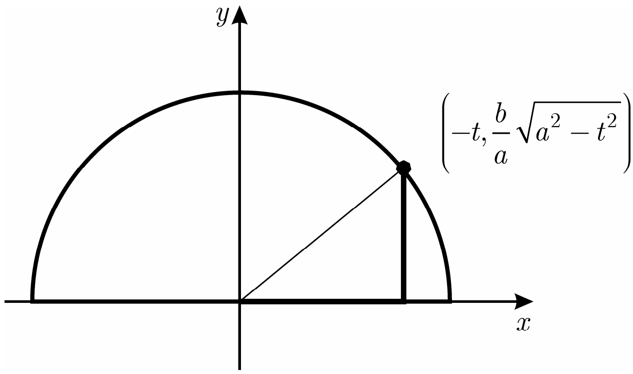
$$x=t, y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2},\ -a \le t \le a\ .$$



($t=-a$ движењето по долниот дел од елипсата со параметарските равенки $x(t), y(t)$ започнува од точката $\left(-a,0\right)$, во време $t=a$ а завршува во точката $\left(a,0\right)$.)

Параметарските равенки на „горната половина“ од елипсата се

$$x=-t, y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2},\ -a \le t \le a\ .$$



($t = -a$ движењето по горниот дел од елипсата со параметарските равенки $x(t), y(t)$ започнува од точката $(a,0)$, во време $t = a$ завршува во точката $(-a,0)$.) $\square$

Значи, за решавање одреден тип задачи, го избираме најпогодниот вид параметарски равенки за зададена функција.

Кога од параметарските равенки на кривата $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ сакаме да ја добиеме равенката на кривата во Декартови координати, со елиминација на параметарот t, може да се случи така добиената равенка да претставува пообемно множество точки од множесвото точки одредени со параметарските равенки. На овој факт треба да се сврти внимание при елиминирањето на параметарот t, што е од особено значење ако се во прашање конкретни интерпретации на кривата во разни технички и други примени.

На пример, со елиминација на параметарот t од параметарски зададената функција: $x = 2\cos t,\quad y = 3\cos t$, $t \in \mathbb{R}$, се добива равенката $y = \dfrac{3x}{2}$ во Декартови координати, која претставува права, додека равенките во параметарскиот облик претставуваат само отсечка $\overline{AB}$ од таа права, каде што $A(-2,-3)$ и $B(2,3)$, бидејќи кога $-\infty < t < +\infty$, тогаш $-1 \le \cos t \le 1$. Значи $F(x,y) = y - \dfrac{3x}{2}$ и кривата зададена параметарски е подмножество од $\left\{(x,y) \middle| F(x,y) = 0\right\}$.

При проучувањето на равенки на криви во рамнината (на пример во механиката или геометријата), честопати е погодно да се воведе параметар t, и апсцисата x и ординатата y да се рагледуваат посебно како функции од t, т.е. кривата која се разгледува да се изрази со равенки од обликот $x = x(t),\ y = y(t)$, т.е. параметарски равенки. Параметарот t припаѓа во некој интервал $I \subseteq \mathbb{R}$.

Ако сакаме множеството точки $\left\{(x,y) \middle| F(x,y) = 0\right\}$ за кое знаеме дека претставува крива, да го претставиме со параметарски равенки

$x = x(t),\ y = y(t)$, погодно го избираме $x = x(t)$, а потоа го пресметуваме $y = f(x(t)) = y(t)$, или $F(x(t), y) = 0$, а потоа $y = y(t)$.

Ако сакаме кривата зададена со параметарските равенки $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ да ја претставиме како множество $\left\{(x, y) \middle| F(x, y) = 0\right\}$, тогаш ќе извршиме елиминација на параметарот t од параметарскиот облик равенки (ако може параметарот t да се елиминира).

Да забележиме дека преминот во обликот $y = y(x)$ секогаш може да се направи ако функцијата $\varphi(t)$ има инверзна функција $\varphi^{-1}(t)$ на разгледуваниот интервал. Тогаш $t = \varphi^{-1}(x)$, па $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$.

Пример 2. Со $x = \varphi(t) = t - 2, \quad y = \psi(t) = t^2 + 2t - 1, \quad t \in \mathbb{R}$, е дефинирана функција $y = f(x)$ каде што $y = (x+2)^2 + 2(x+2) - 1$. Притоа, функцијата $\varphi(t) = t - 2$ има инверзна $\varphi^{-1}(t) = t + 2$. □

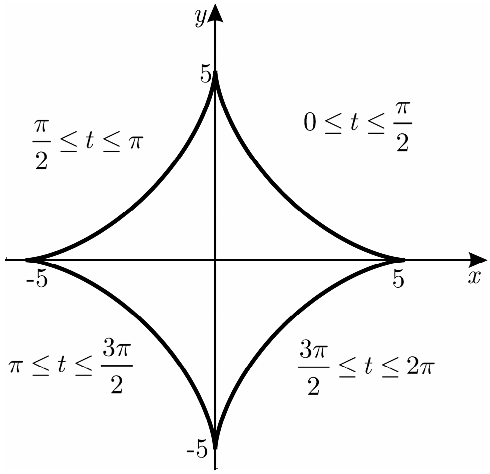
Параметарот t честопати има различни толкувања, зависно од тоа каде се применува. На пример, во механиката улогата на параметарот ја игра времето t, при што апсцисата и ординатата на подвижна точка се изразуваат како функција од времето t и така се добиваат равенките на траекторијата во параметарски облик. Во геометријата параметарот t честопати означува агол. Би требало да нагласиме дека при решавањето на одредени задачи многу е покорисно функцијата да биде изразена со параметарски равенки и честопати некои задачи се решаваат поедноставно кога функцијата е зададена параметарски.

Кривата која е зададена параметарски ја скицираме така што составуваме табела со вредности за параметарот t и ги пресметуваме соодветните вредности за апсцисата x и ординатата y и ги внесуваме во табелата. Кривата ја добиваме така што точките (x, y) со координати x и y ги нанесуваме во координатниот систем и ги поврзуваме.

Пример 3. Кривата наречена *астроида* се изразува со параметарските равенки: $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$. Нејзиниот график ќе го добиеме со помош на следнава табела

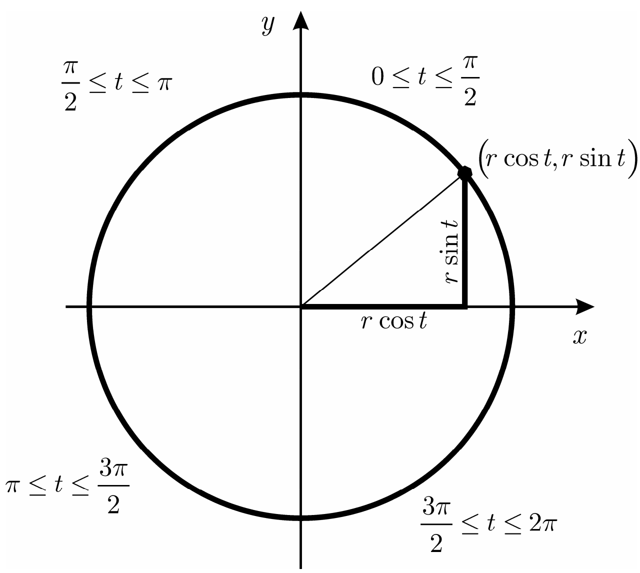
t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	a	$\frac{2a\sqrt{2}}{8}$	0	$-\frac{2a\sqrt{2}}{8}$	$-a$	$-\frac{2a\sqrt{2}}{8}$	0	$\frac{2a\sqrt{2}}{8}$	a
y	0	$\frac{2a\sqrt{2}}{8}$	a	$\frac{2a\sqrt{2}}{8}$	0	$-\frac{2a\sqrt{2}}{8}$	$-a$	$-\frac{2a\sqrt{2}}{8}$	0

каде што за неколку вредности на t од 0 до 2π се пресметани вредностите за x и y и точките (x, y) се внесени во координатниот систем и се поврзани меѓу себе. На цртежот скицирана е астроидата кога $a = 5$.

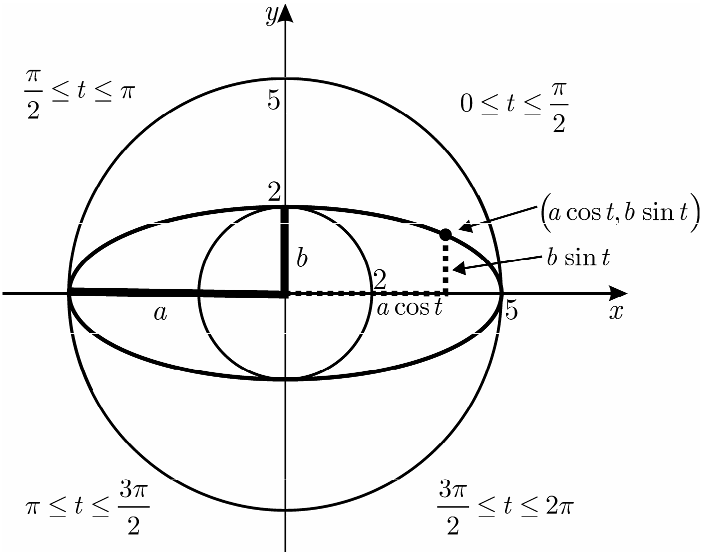


Со елиминација на параметарот t од параметарските равенки на астроидата се добива равенката на астроидата во имплицитен вид: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $\square$

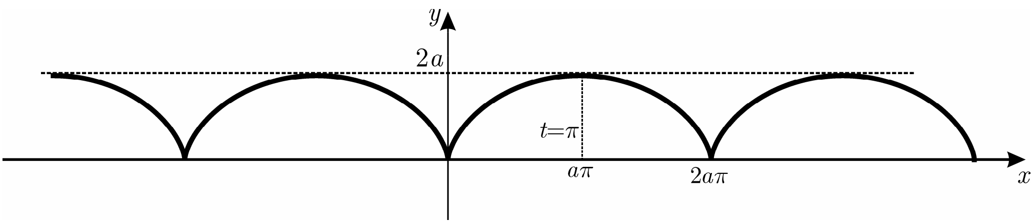
Пример 4. Ако во примерот 1 во параметарските равенки на елипсата ставиме $a = b = r$, ги добиваме параметарските равенки на кружница со радиус r: за некоја вредност на t се добива точка од кружницата, за $0 \le t \le 2\pi$ се добива целата кружница.



На следниов цртеж се прикажани две кружници со радиуси 2 и 5 и една елипса која е добиена од нејзините параметарски равенки за $a = 5, \quad b = 2$.



Пример 5. Кривата наречена *циклоида*, која е зададена со параметарските равенки: $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$, има график прикажан на следниов цртеж

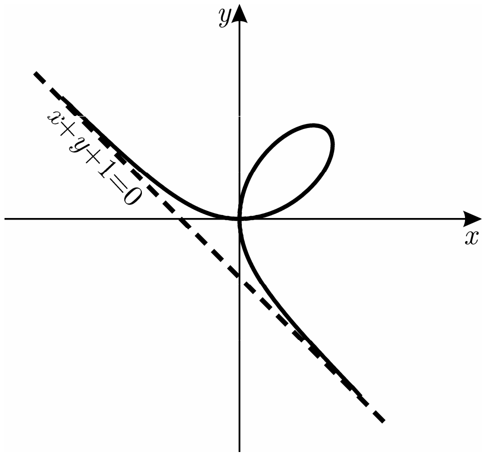


Еден лак од циклоидата се добива за $0 \le t \le 2\pi$.

Пример 6. Ќе ги изведеме параметарските равенки на кривата *Декартов лист*, зададена имплицитно со равенката $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

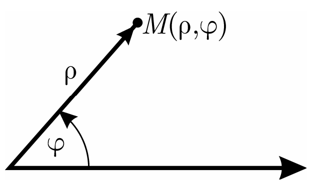
Ако $x, y \ne 0$, тогаш можеме равенката да ја поделиме со y^3, па се добива равенката $\frac{x^3}{y^3} + 1 - 3\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = 0$. Ако ставиме $t = \frac{x}{y}$, се добива $t^3 + 1 - 3t \cdot \frac{1}{y} = 0$.

Од овде ако го изразиме y, добиваме $y = \frac{3t}{t^3 + 1}$. Бидејќи $x = ty$, за x се добива $x = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$. Да забележиме $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\}$. Графикот на кривата е прикажан на следниов цртеж.



3.16. Поларен координатен систем

Освен Декартовиот координатен систем кој до сега го користевме, постојат и други координатни системи од кои најчесто користен е *поларниот координатен систем,* кој се состои од ориентирана права p со почетна (фиксна) точка O на неа. Правата се вика *поларна оска,* а точката O – *пол,* или *координатен почеток.* Положбата на која било точка M која се наоѓа во рамнината определена со точката M и поларната оска, во однос на полот O, се определува со векторот $\overrightarrow{OM}$ кој се вика *радиус вектор* на точката M. Отсечката $\overline{OM} = \rho$ со поларната оска зафаќа агол φ, кој се вика *поларен агол* на точката M кој се мери во позитивна насока (обратна од насоката на часовникот). Положбата на точката M е наполно определена со броевите ρ и φ, кои се викаат *поларни координати на точката* M во поларниот координатен систем.

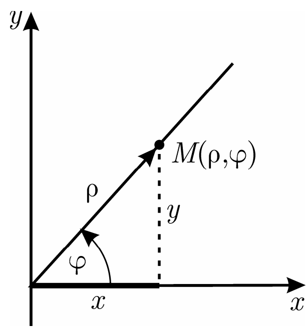


За да се опфатат сите точки од рамнината, аголот φ може да биде кој било агол од 0 до 2π, а може да му се додаде и $2k\pi$, $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \dots)$. Кога се зададени ρ и φ, положбата на точката M во рамнината е потполно одредена. Всушност, потребно е околу точката O да се опише кружница со радиус ρ и низ точката M да се повлече полуправата OM, така што $\varphi = \measuredangle(p, OM)$. Со пресекот на кружницата и полуправата OM наполно е одредена точката M. Опишаната кружница и полуправата OM се викаат *координатни линии* на точката M, така што можеме да сметаме дека секоја точка во таа рамнина е определена со пресекот на една кружница и една полуправа, т.е. со пресекот на две соодветни координатни линии. Да забележиме дека во Декартовиот координатен систем координатните линии се паралелни со OX, OY оските и затоа тој систем се вика и *праволиниски систем,* а во поларниот координатен систем координатните линии се концентрични кружници со заеднички центар во полот (значи криви линии), и полуправи со заеднички почеток во полот и затоа за поларниот координатен систем се вели дека е *криволиниски.*

Постојат случаи кога е потребно координатата ρ на некоја точка M да се земе со негативен знак. Тогаш отсечката $\overline{OM}$ ја пренесуваме во спротивната насока, што значи ако ρ и φ ја одредуваат точката M, тогаш -ρ и φ ќе ја одредуваат точката M', така што $\overline{OM'} = -\overline{OM}$. Всушност, координатите на точката M' ќе бидат ρ и $\varphi + \pi$, т.е. точката со координати -ρ и φ е иста со точката со координати ρ и $\varphi + \pi$.

Врска меѓу Декартовите и поларните координати

Честопати при решавањето на една задача која се разгледува во однос на Декартов координатен систем, се јавува потреба таа да се разгледува и решава во поларен координатен систем бидејќи на тој начин решавањето би било многу поедноставно и побрзо. Затоа ќе укажеме на врските меѓу поларниот и Декартовиот координатен систем. Можно е на различен начин да се избере положбата на едниот во однос на другиот систем, но најчест случај е кога поларната оска p се совпаѓа со позитивната насока на оската OX од Декартовиот координатен систем и полот O се совпаѓа со координатниот почеток O на Декартовиот систем.



Нека се x и y координати на точката M во Декартовиот координатен систем, тогаш важат врските:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

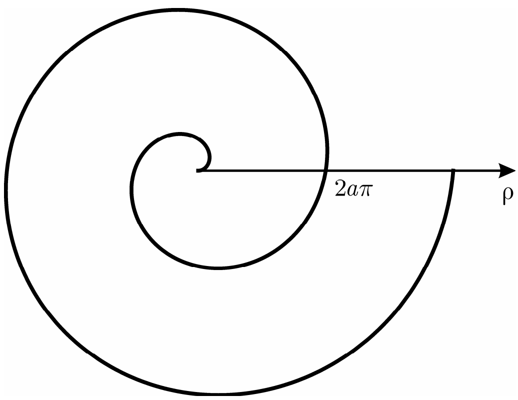
од кои лесно ги определуваме Декартовите координати на една точка ако се познати поларните координати, а од овде лесно се изведуваат и обратните врски:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \varphi = arctg\,\frac{y}{x},$$

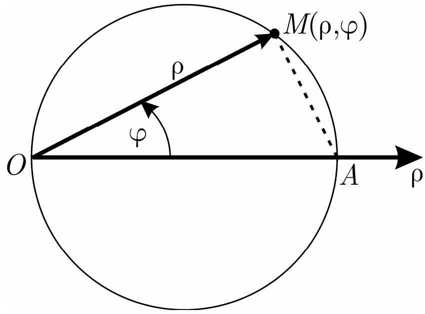
кои ни овозможуваат да ги определиме поларните координати, ако се познати Декартовите координати. Со овие врски една равенка на крива зададена во однос на едниот систем да се трансформира во равенка во однос на другиот систем. Вообичаено се врши трансформација од Декартов во поларен систем, така што функцијата $f(x,y)$ се трансформира во $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \mathrm{F}(\rho,\varphi)$, користејќи ги горните врски. На овој начин, честопати се олеснува цртањето на некои криви кои во Декартов систем имаат многу сложена равенка. Исто така голем број задачи од интегрално сметање многу полесно и побргу се решаваат кога подинтегралните функции ќе се трансформираат од Декартови во поларни координати, што ќе биде покажано во натамошните поглавја.

Ако разгледаме крива C во поларниот координатен систем, положбата на секоја точка од оваа крива може да се одреди со поларните координати ρ и φ и при тоа равенката на кривата C можеме да ја изразиме со равенката $\rho = \rho(\varphi)$, која ја дава врската меѓу тие координати.

Да забележиме дека поради врските меѓу поларните и Декартовите координати, равенка од ист облик помеѓу две променливи во однос на Декартовиот систем има сосема различен облик од оној во поларниот систем. На пример, равенката $\rho = r$ во однос на поларниот координатен систем претставува кружница со радиус r, и со центар во полот, додека равенката од ист облик $y = r$ во Декартовиот систем претсавува права паралелна на x оската, на растојание r од неа. Или, равенката $\rho = a\varphi$ во поларниот координатен систем претставува крива, која е позната под името Архимедова спирала, а соодветната равенка од ист облик $y = ax$ во Декартовиот систем претставува права која минува низ координатниот почеток.



Пример 1. Да ја разгледаме кружницата со радиус R во поларниот координатен систем.



За секоја точка $M(\rho,\varphi)$ на таа кружница важи $\cos\varphi = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}}$, односно $\overline{OM} = \overline{OA}\cdot\cos\varphi$, или $\rho = 2R\cdot\cos\varphi$, што всушност претставува равенка на таа кружница во поларни координати. Да забележиме, соодветната равенка од ист вид но во Декартови координати, $y = 2R\cdot\cos x$, претставува равенка на косинусоида со максимум во $2R$.

Графикот на функција зададена во поларни координати се црта така што се формира табела каде што се внесуваат неколку произволни вредности за φ и соодветно пресметаните вредности за ρ од аналитичкиот израз за кривата зададена со формулата $\rho = \rho(\varphi)$. Соодветните точки со координати (ρ,φ) се цртаат во поларниот координатен систем и се поврзуваат.

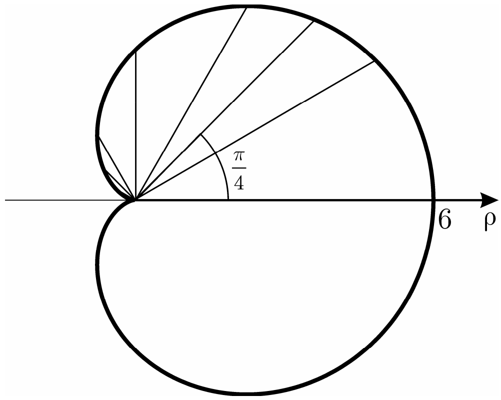
Пример 2. Да се скицира графикот на функцијата

$$\rho = 3(1+\cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi .$$

Формираме табела со неколку вредности за φ и ги пресметуваме соодветните вредности за ρ според формулата.

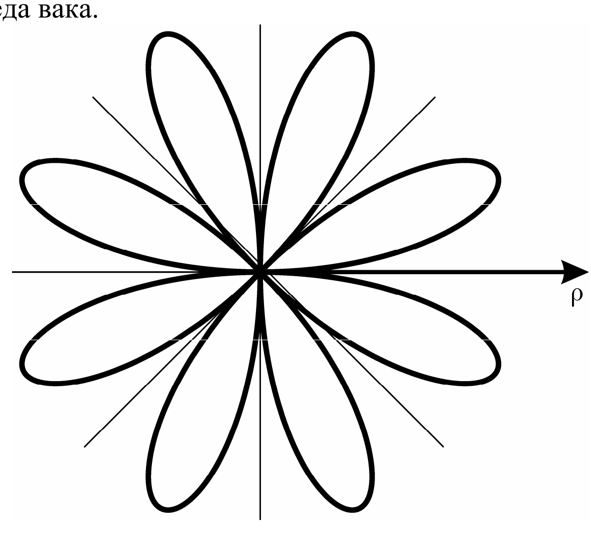
φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	6	$\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$	3	$\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$	3	$\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$	6

Точките со координати (ρ,φ) од горната табела ги внесуваме во поларниот координатен систем и ги поврзуваме. Графикот на функцијата е прикажан на следниот цртеж. Бидејќи личи на срце, функцијата се вика *кардиоида*.



Пример 3. Да се нацрта графикот на функцијата $\rho = 7\sin(4\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Повторно ќе формираме табела со неколку вредности за φ и ги пресметуваме соодветните вредности за ρ според формулата. Овој пат ќе земеме повеќе вредности за φ, бидејќи ако ги земеме само вредностите земени во примерот 2, за сите нив функцијата ќе има вредност нула. Бидејќи функцијата $\sin(4\varphi)$ има максимум во $\frac{\pi}{8}$, ќе ги земеме вредностите на φ да растат за $\frac{\pi}{8}$ во интервалот $[0, 2\pi]$. Вредностите за φ и за ρ се прикажани во табелата долу, а графикот на функцијата изгледа вака.



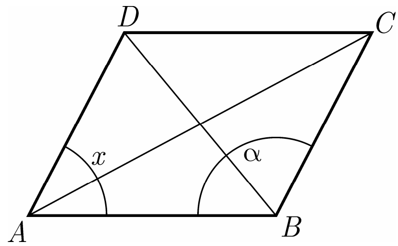
φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
ρ	0	7	0	-7	0	7	0	-7	0	7	0	-7	0	7	0	-7	0

3.17. Решени задачи

Формирање аналитички израз

1. Ромб со константна страна a има променливи агли, од кои едниот е означен со x. Изрази го збирот од дијагоналите како функција од x.

Решение.



Да го означиме аголот кај темето A со x, а аголот кај темето B со α ($\alpha + x = 180°$). Користејќи косинусна теорема за триаголникот ABC добиваме

$$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos\alpha = 2a^2(1-\cos\alpha) = 2a^2 \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4a^2\sin^2(90° - \frac{x}{2}) = 4a^2\cos^2\frac{x}{2}$$

Од овде $\overline{AC} = 2a\cos\frac{x}{2}$.

Применувајќи косинусна теорема за триаголникот ABD имаме

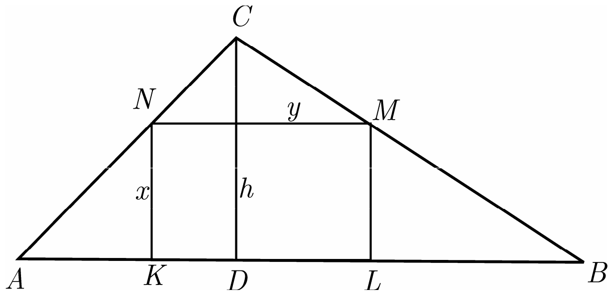
$$\overline{BD}^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos x = 2a^2(1-\cos x) = 2a^2 \cdot 2\sin^2\frac{x}{2} = 4a^2\sin^2\frac{x}{2}$$

од каде што се добива дека $\overline{BD} = 2a\sin\frac{x}{2}$. Притоа во равенството за $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ искористивме дека $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ и уште за наоѓање на $\overline{AC}$ користиме дека $\frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{x}{2}$. Конечно, за функцијата која е збир од дијагоналите на ромбот имаме:

$$y = \overline{AC} + \overline{BD} = 2a\cos\frac{x}{2} + 2a\sin\frac{x}{2} = 2a(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2})$$

2. Во триаголник со основа $\overline{AB} = c$ и висина $\overline{CD} = h$ е впишан правоаголникот $KLMN$, со висина $\overline{LM} = x$, така што страната $\overline{KL}$ лежи на основата. Изрази го периметарот и плоштината на правоаголникот како функција од x.

Решение.



Нека означиме $y = \overline{MN} = \overline{KL}$.

Од сличноста на триаголниците ABC и NMC следува $\frac{c}{y} = \frac{h}{h-x}$, од каде што се добива $y = \frac{c}{h}(h-x)$. Па, оттука за периметарот и плоштината на правоаголникот $KLMN$ имаме : $L = 2x + 2y = 2x + \frac{2c}{h}(h-x)$, $P = x \cdot y = \frac{cx}{h}(h-x)$.

Дефинициона област

3. Да се најде дефиниционата област на следниве функции:

а) $y = \frac{1-x}{x^2 - 5x + 6}$ б) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

в) $y = \sqrt{x-5}$ г) $y = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1}$

д) $y = \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$ ѓ) $y = \arccos\frac{1-2x}{5x}$

Решение:

а) $y = \frac{1-x}{x^2 - 5x + 6}$

Ги наоѓаме корените на квадратниот трином во именителот

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

Бидејќи именителот треба да е различен од нула, дефиниционата област ќе биде $D_f = R \setminus \{2,3\}$.

б) Бидејќи $x^2 + 1 \neq 0$, дефиниционата област е целото множество реални броеви, т.е. $D_f = R$.

в) $x - 5 \geq 0$, значи $x \geq 5$, па дефиниционата област ќе биде $D_f = [5, \infty)$

г) $D_f = R$, бидејќи изразот под третиот корен може да биде и позитивен и негативен и нула.

д) Бидејќи треба $3 - 2x - x^2 > 0$, ќе ги најдеме корените на квдратниот трином, и ќе видиме за кои вредности тој е позитивен:

$3 - 2x - x^2 = 0$, $\quad x^2 + 2x - 3 = 0$, $\quad x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = -3, \quad x_2 = 1.$$

Бидејќи коефициентот пред x^2 е негативен, параболата $y = 3 - 2x - x^2$ е свртена надолу и функцијата е позитивна меѓу нулите $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, па дефиниционата област е $D_f = (-3, 1)$.

ѓ) $-1 \leq \dfrac{1-2x}{5x} \leq 1$ (1)

Именителот $5x \neq 0$

Прв случај: за $5x > 0$, го множиме двојното неравенство со $5x$:

$-5x \leq 1 - 2x \leq 5x$

Прво ќе ја решиме десната неравенка, а потоа левата:

$1 - 2x \leq 5x$, се добива: $7x \geq 1$, односно $x \geq \dfrac{1}{7}$

$-5x \leq 1 - 2x$, се добива: $3x \geq -1$, односно: $x \geq \dfrac{-1}{3}$

Решението на овој случај е пресек од овие две области, а тоа е $x \geq \frac{1}{7}$.

Втор случај: ако $5x < 0$, кога го множиме двојното неравенство (1) со $5x$, ќе се смени насоката на неравенството:
$-5x \geq 1 - 2x \geq 5x$
Го решаваме овој систем од две неравенки:

$1 - 2x \geq 5x$, се добива: $7x \leq 1$, односно $x \leq \frac{1}{7}$

$-5x \geq 1 - 2x$, се добива: $3x \leq -1$, односно: $x \leq \frac{-1}{3}$

Решението на овој случај е пресек од овие две области, значи $x \leq \frac{-1}{3}$.

Бидејќи и двата случаја се можни, решението на задачата е унија од областите од двата случаја: $x \in (-\infty, \frac{-1}{3}] \cup [\frac{1}{7}, \infty)$.

4. Определи ги дефиниционите области на следниве функции:

а) $f(x) = \lg x^2$
б) $f(x) = \lg | x + 1 |$
в) $f(x) = \sqrt{\lg(\frac{5x - x^2}{4})}$
г) $f(x) = \lg[\frac{(x-2)(x-3)}{x^2 - x - 6}] - \sqrt{2x^2 - 3x + 10}$
д) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + \sin x - 2} + \arcsin(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1})$
ѓ) $f(x) = \frac{x+1}{2 | x | - 3}$

Решение:

а) За функцијата $f(x) = \lg x^2$ да биде дефинирана потребно е да $x^2 > 0$, односно $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

б) Функцијата $f(x) = \lg | x + 1 |$ е дефинирана за $| x + 1 | > 0$, а ова е исполнето за секој реален број x.

в) Функцијата $f(x)$ е дефинирана за сите реални броеви за кои важи $\lg(\frac{5x-x^2}{4}) \geq 0$. Последната неравенка е еквивалентна со $\frac{5x-x^2}{4} \geq 1$, чие решение е $x \in [1,4]$.

г) Дефиниционата област на функцијата $f(x)$ е пресек на дефиниционите области на функциите

$$f_1(x) = \lg[\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-x-6}] \text{ и } f_2(x) = \sqrt{2x^2-3x+10}\,.$$

За функцијата $f_1(x)$ да биде дефинирана потребно е $x^2-x-6 \neq 0$ и $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-x-6} > 0$. За функцијата $f_2(x)$ да биде дефинирана потребно е $2x^2-3x+10 \geq 0$. Решенијата на квадратната равенка $2x^2-3x+10=0$ се комплексни броеви, што повлекува дека графикот на функцијата $y=2x^2-3x+10$ нема пресек со x – оската, и имајќи предвид дека за водечкиот коефициент важи 2 > 0, можеме да заклучиме дека за кој било реален број x е задоволена равенката $2x^2-3x+10 \geq 0$. Од друга страна, $x^2-x-6=(x+2)(x-3) \neq 0$, за $x \in R \setminus \{-2,3\}$.

За $x \neq 3$, $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x-2}{x+2}$, од каде следува дека $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-x-6} > 0$ ако $(x-2)(x+2) > 0$, односно $x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$. Конечно, дефиниционата област на функцијата е $x \in (-\infty,-2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$.

д) Функцијата $f(x)$ е дефинирана за сите реални броеви за кои $\sin^2 x + \sin x - 2 \geq 0$ и $-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1$. За да ја решиме првата неравенка ставаме смена $t = \sin x$, па имаме $t^2+t-2 \geq 0$. Решенијата на квадратната равенка $t^2+t-2=0$ се: $t_1=-2$ и $t_2=1$, па од овде решенијата на квадратната неравенка се $t \in (-\infty,-2] \cup [1,+\infty)$, односно $\sin x \in (-\infty,-2] \cup [1,+\infty)$. Но, бидејќи $|\sin x| \leq 1$, тогаш $\sin x = 1$, па $x \in \{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k \in Z\}$. Другата неравенка $-1 \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq 1$ е еквивалентна со $-x^2-1 \leq x^2-1 \leq x^2+1$, која пак неравенка е исполнета за сите реални броеви.

Конечно, дефиниционата област на функцијата $f(x)$ е $x \in \{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k \in Z\}$.

ѓ) Дефиниционата област на функцијата $f(x)=\dfrac{x+1}{2\mid x\mid-3}$ е множеството од реални броеви освен броевите за кои важи

$2\mid x\mid-3\neq 0$, од каде што имаме дека $x\neq-\dfrac{3}{2}$ и $x\neq\dfrac{3}{2}$. Значи дефиниционата област на функцијата $f(x)$ е $x\in(-\infty,-\dfrac{3}{2})\cup(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})\cup(\dfrac{3}{2},+\infty)$, односно $x\in R\setminus\{-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\}$.

5. Ако $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, покажи дека $f(f(x))=x$.

Решение:

$$f(f(x))=f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=\frac{2\dfrac{2x+1}{x-2}+1}{\dfrac{2x+1}{x-2}-2}=\frac{\dfrac{4x+2+x-2}{x-2}}{\dfrac{2x+1-2x+4}{x-2}}=\frac{5x}{5}=x\,.$$

6. Ако важи $f(x+\dfrac{1}{x})=x^3+\dfrac{1}{x^3}$, определи ја функцијата $f(x)$.

Решение:

Ако ставиме смена $t=x+\dfrac{1}{x}$, тогаш $t^3=(x+\dfrac{1}{x})^3$, т.е.

$$t^3=x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\,.$$

Со групирање се добива

$$t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}+3t\,,$$

Односно

$$t^3-3t=x^3+\frac{1}{x^3}\,.$$

Конечно, $f(x)=x^3-3x$.

Парност, непарност, периодичност

7. Да се испита дали функциите се парни, непарни или ниту парни ниту непарни.

а) $y = x^4 - 2x^2 + 4$ б) $y = x^5 - x$

в) $y = 2\cos^3 x - \sin^4 x$ г) $y = 3\sin x - 5\cos x + 1$

д) $y = \sqrt{2x+1}$ ѓ) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Решение:

а) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

$f\left(-x\right) = \left(-x\right)^4 - 2\left(-x\right)^2 + 4 = x^4 - 2x^2 + 4 = f(x)$

Следува функцијата f е парна.

б) $y = f(x) = x^5 - x$

$f\left(-x\right) = (-x)^5 - \left(-x\right) = -x^5 + x = -(x^5 - x) = -f(x)$

што значи дека функцијата f е непарна.

в) $y = f(x) = 2\cos^3 x - \sin^4 x$

$f(-x) = 2\cos^3(-x) - \sin^4(-x) =$

$= 2\cos^3(x) - (-\sin(x))^4 = 2\cos^3(x) - \sin^4 x = f(x)$

Следува функцијата f е парна.

г) $y = f(x) = 3\sin x - 5\cos x + 1$

$f\left(-x\right) = 3\sin\left(-x\right) - 5\cos\left(-x\right) + 1 = -3\sin x - 5\cos x + 1 \neq \pm f\left(x\right)$ што значи функцијата f е ниту парна ниту непарна.

д) $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$

$f(-x) = \sqrt{-2x+1} \neq \pm f(x)$, па функцијата е ниту парна ниту непарна.

ѓ) $y = f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

$f(-x) = \sqrt[3]{(-x+1)^2} + \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = f(x)$

Функцијата f е парна.

8. Да се докаже дека ако функцијата f е периодична со период T, тогаш функцијата F дефинирана со $F(x)=f(ax+b)$, $a>0$ е периодична со период $\frac{T}{a}$.

Решение:

Бидејќи f е периодична функција за неа важи $f(x+T)=f(x)$, за секој $x\in D_f$. Тогаш

$$\begin{aligned} &F(x+\frac{T}{a})=f(a(x+\frac{T}{a})+b)=f(ax+T+b)= \\ &=f((ax+b)+T)=f(ax+b)=F(x) \end{aligned}$$

од каде што се добива дека F е периодична функција со период $\frac{T}{a}$.

9. Да се најде основниот период на функцијата $y=\sin^2 x$**.**

Решение:

Од тоа што $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, функцијата $y=\sin^2 x$ може да се запише како $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$. Функцијата $y=\cos x$ е периодична со основен период $T=2\pi$ и користејќи ја претходната задача добиваме дека основниот период на функцијата $y=\cos 2x$ е $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ (за $a=2$, $b=0$). Според тоа основниот период на функцијата $y=\sin^2 x$ е π.

10. Да се најде функција која е периодична, но нема основен период.

Решение:

Функција со бараното својство е константната функција $f(x)=c$, каде што $c\in R$. За кој било реален број $T\neq 0$ важи $f(x+T)=c=f(x)$, од каде добиваме дека функцијата $f(x)=c$ е периодична функција. Но, бидејќи множеството $\{T\mid f(x+T)=f(x)\}$ не е ограничено од долу во множеството од реални позитивни броеви, не можеме да најдеме најмал таков реален број различен од 0 за кој важи $f(x+T)=f(x)$.

11. Да се докаже дека функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не е периодична функција.

Решение:

Функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ строго монотоно опаѓа на интервалот $(\frac{2}{\pi},+\infty)$ (кога $x>\frac{2}{\pi}$, $\frac{1}{x}\to 0$ кога $x\to+\infty$ и $\sin\frac{1}{x}\to 0$). За фиксно $x_0\in(\frac{2}{\pi},+\infty)$ за секој $T>0$ имаме дека $\sin(x_0+T)<\sin x_0$ па следува дека $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не е периодична.

Нули на функција

12. Да се најдат нулите, ако постојат, на следниве функции:

а) $y=x^2-4x+3$ б) $y=(2x+1)\cos(\frac{x}{2})$

Решение:

а) Функцијата $y=x^2-4x+3$ може да се запише и како $y=\left(x-1\right)\left(x-3\right)$ по наоѓањето на корените на равенката $x^2-4x+3=0$, што значи нули на функцијата се: $x_1=1$; $x_2=3$.

б) $y=(2x+1)\cos(\frac{x}{2})$

$$2x+1=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$
$$\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{(2k+1)\pi}{2},\quad k\in Z$$
$$x=(2k+1)\pi,\quad k\in Z$$

Значи, нули на функцијата се: $x=\frac{-1}{2},\quad x=(2k+1)\pi,\quad k\in Z$

13. Да се најдат нулите на функцијата $f(x)=\frac{|\sin x-1|}{x-2}$**.**

Решение:

Најпрво да забележиме дека дефиниционата област на функцијата $f(x)$ е $x\in R\setminus\{2\}$.

Па нули на функцијата се оние x за кои е задоволено $\frac{|\sin x-1|}{x-2}=0$, т.е. $|\sin x-1|=0$, т.е. $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$, каде што $k\in Z$.

Ограниченост

14. Кои од наведените функции се ограничени, а кои не се ограничени:

а) $y=2x+1$ б) $y=5\cos x$ в) $y=-3\sin x$

Решение:

а) $-\infty<2x+1<\infty$, за $x\in(-\infty,\infty)$, значи функцијата y е неограничена.

б) $-5\leq 5\cos x\leq 5$ за $x\in(-\infty,\infty)$, бидејќи $-1\leq\cos x\leq 1$ за $x\in(-\infty,\infty)$, значи функцијата y е ограничена.

в) бидејќи $-1\leq\sin x\leq 1$, за $x\in(-\infty,\infty)$, следува: $3\geq -3\sin x\geq -3$, односно: $-3\leq -3\sin x\leq 3$, значи y е ограничена.

Монотоност

15. Кои од наведениве функции се монотоно растечки, а кои монотоно опаѓачки:

а) $y=2x-1$ б) $y=2^x$ в) $y=-3x+1$ г) $y=2\log x$

Решение:

а) $$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{2x_1-1-(2x_2-1)}{x_1-x_2}=\frac{2x_1-1-2x_2+1}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=2>0$$

Значи, функцијата $y=f(x)$ е монотоно растечка.

б) $$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{2^{x_1}(1-2^{x_2-x_1})}{x_1-x_2}>0$$

Значи, функцијата $y=f(x)$ е монотоно растечка.

в) $$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-3x_1+1-(-3x_2+1)}{x_1-x_2}=\frac{-3x_1+3x_2}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{-3(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=-3<0$$

Следува функцијата $y=f(x)$ е монотоно опаѓачка.

г) $$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{2\log x_1-2\log x_2}{x_1-x_2}=\frac{2(\log x_1-\log x_2)}{x_1-x_2}=$$

$$=\frac{2\log\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>0$$

Функцијата $y=f(x)$ е монотоно растечка.

Инверзна функција

16. Да се најде инверзна функција на функцијата $f(x)=\cos x-2$.

Решение:

За да можеме да дефинираме инверзна функција, потребно е да направиме рестрикција на интервалот $(0,\pi)$ на кој функцијата е монотона. На овој интервал функцијата има инверзна, па тогаш за инверзната функција на функцијата $f(x)=\cos x-2$ имаме $x=\cos y-2$, од каде што $y=\arccos(x+2)$.

17. За дадените функции да се најде инверзната функција ако постои:

а) $y=\ln\frac{x}{2}$ б) $y=x^6$ в) $y=\frac{tgx}{3}$

Решение:

а) $y=\ln\frac{x}{2}$ е монотона функција во нејзината дефинициона област, па има инверзна. Инверзната функција се добива ако се заменат променливите x и y во равенката $y=\ln\frac{x}{2}$, $x=\ln\frac{y}{2}$. Одовде, ако се изрази y, се добива инверзната $y=2e^x$.

б) На интервалот $(-\infty,\infty)$ оваа функција не е монотона, па нема инверзна, но на подинтервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ таа е монотона, па има инверзна. За $x \in \left(-\infty, 0\right)$ инверзната функција е $y = -\sqrt[6]{x}$, а за $x \in \left(0, \infty\right)$ инверзната функција е $y = \sqrt[6]{x}$.

в) Функцијата $y = \frac{tgx}{3}$ има инверзна функција бидејќи е монотона во интервалите на дефинираност.

$x = \frac{tgy}{3}$
$tgy = 3x$
$y = arctg(3x)$

18. Какви треба да бидат константите a, b, c, d за функцијата $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ да биде инверзна сама со себе?

Решение:

Прво ја наоѓаме инверзната на функцијата $y = \frac{ax+b}{cx+d}$:

$x = \frac{ay+b}{cy+d}$, $x(cy+d) = ay+b$, $xcy + xd = ay + b$, $y(xc-a) = b - xd$

Значи, инверзна на зададената функција е: $y = \frac{b-xd}{xc-a} = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

За функцијата да биде инверзна сама на себе, треба функцијата и нејзината инверзна да се еднакви. Па ако ги изедначиме овие две функции, добиваме:

$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx-a}$, значи треба $a = -d$, односно: $a + d = 0$.

Скицирање графици на функции

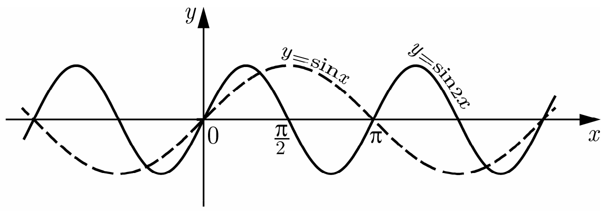
-зададени во Декартов правоаголен координатен систем

19. Да се скицираат графиците на следните функции:

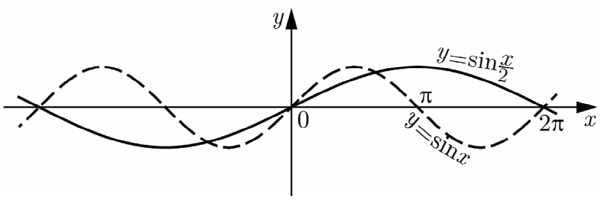
а) $y = \sin(2x)$ б) $y = \sin(\frac{x}{2})$ в) $y = -3^{-x}$ г) $y = \left|x^2 - 3x - 4\right|$

Решение:

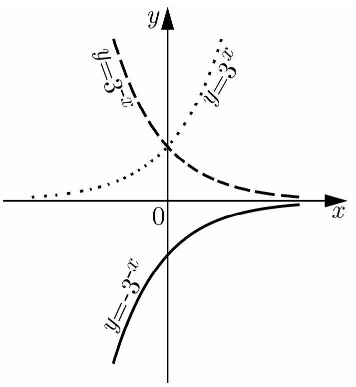
а) Го користиме графикот на елементарната функција $y=\sin x$ (со испрекината линија на цртежот долу). Со смената $2x=x'$, $y=y'$, го добиваме графикот на функцијата $y'=\sin x'$. Бараниот график (со полна линија на цртежот долу) го добиваме така што секоја точка од графикот на $y=\sin x$, ја поместуваме паралелно со x оска во точка со два пати помала апсциса, бидејќи $x=\frac{x'}{2}$, а ординатата на точката не се менува бидејќи $y=y'$.



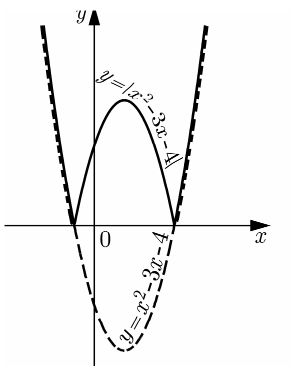
б) Овде повторно го користиме графикот на функцијата $y=\sin x$ (со испрекината линија на цртежот долу), бидејќи со смената $\frac{x}{2}=x'$, $y=y'$ добиваме $y'=\sin x'$. Бидејќи $x=2x'$, $y=y'$, бараниот график го добиваме со транслација на секоја точка од графикот на $y=\sin x$ паралелно со x оската во точка со два пати поголема апсциса а непроменета ордината (графикот со полна линија на цртежот долу).



в) Графикот на функцијата $y=-3^{-x}$ го добиваме со помош на елементарната функција $y=3^{x}$ (со точкеста линија на цртежот долу). Го скицираме помошниот график $y=3^{-x}$ така што секоја точка со апсциса x од графикот на функцијата $y=3^{x}$ ја поместуваме во точка со апсциса $-x$ а со иста ордината. Бараниот график на функцијата $y=-3^{-x}$ го добиваме така што секоја точка со ордината y од графикот на функцијата $y=3^{-x}$ ја поместуваме во точка со ордината $-y$, а со иста апсциса (графикот со полна линија на цртежот долу).



г) Графикот на функцијата $y=\left|x^2-3x-4\right|$ го добиваме од помошниот график на функцијата $y=x^2-3x-4$ (со испрекината линија на цртежот долу), така што сите точки од графикот на оваа функција со позитивни ординати остануваат непроменети, а сите точки од графикот на оваа функција со негативни ординати y (под x оската) се поместуваат во точки со ординати $-y$, а непроменети апсциси, бидејќи функцијата $y=\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ (графикот со полна линија на цртежот долу).



-зададени параметарски

20. Да се скицираат графиците на следните функции:

а) $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ б) $x=a\left(t-\sin t\right)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$

Решение:

а) $x=\cos^3 t$ $y=\sin^3 t$

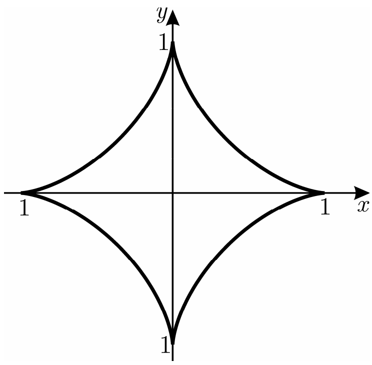
Функциите $x=\cos^3 t$ и $y=\sin^3 t$ имаат заедничка периода $\omega=2\pi$. Затоа за $t\in\left[0,2\pi\right]$, ќе бидат испишани сите точки од кривата $x=\cos^3 t$,

$y=\sin^3 t$. Ако $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ е точка од кривата добиена за некоја вредност на параметарот t, тогаш и

$$\cos^3\left(-t+\pi\right)=[\cos(-t+\pi)]^3=[-\cos(-t)]^3=$$
$$=[-\cos(t)]^3=-\cos^3 t=-x,$$
$$\sin^3\left(-t+\pi\right)=\sin^3 t=y \text{ и } \cos^3\left(-t\right)=x,\ \sin^3\left(-t\right)=-y$$

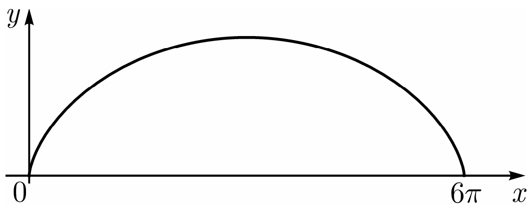
се исто така точки од кривата. Значи кривата е симетрична во однос на x и y оските. Затоа доволно е да се нацрта нејзиниот график на интервалот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, а потоа да се преслика во однос на x и y оските.

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
y	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	1



б) $x=3\left(t-\sin t\right)\quad y=3\left(1-\cos t\right)$

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$3\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$	3π	$3\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)$	6π
y	0	3	6	3	0



Зададени во поларен координатен систем

21. Да се скицираат графиците на следните функции:

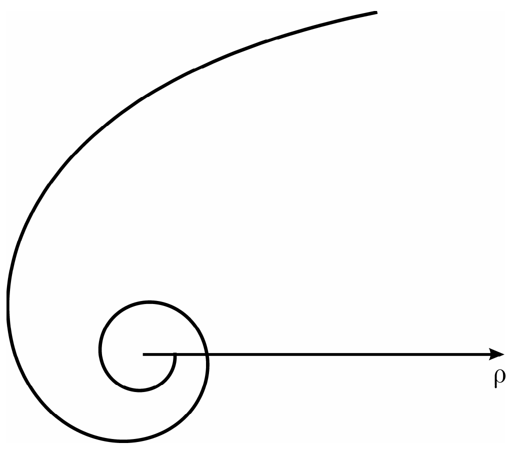
а) $\rho = \dfrac{1}{\phi}$ б) $\rho = 1$

в) $\rho = a\cos 2\phi$ г) $\rho = a\left(1-\cos\phi\right)$

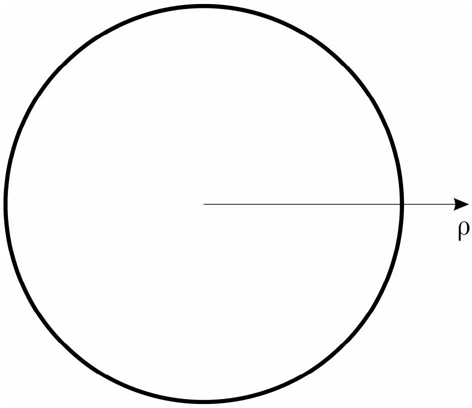
Решение:

а) $\rho = \dfrac{1}{\phi}$

ϕ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
ρ	∞	$\frac{3}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{3\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$



б) $\rho = 1$



в) $\rho = a\cos(2\phi)$

За побрзо цртање на графикот на функцијата, можеме да го нацртаме прво графикот на функцијата $y = a\cos 2x$ во Декартовиот систем, а потоа за дадени вредности на ϕ се нанесуваат соодветните вредности за вредностите за ρ отчитани од Декартовиот систем и се внимава на зависноста прикажана на првиот график.

График на $y = a\cos 2x$

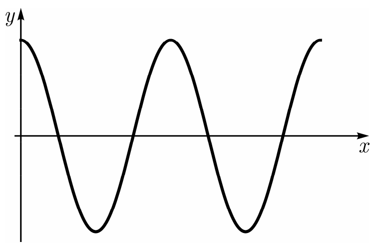
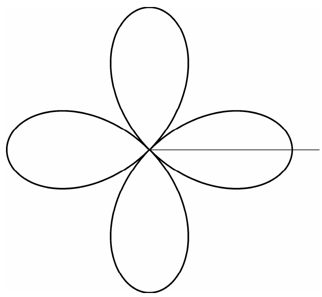


График на $\rho = a\cos(2\phi)$



г) $\rho = a\left(1-\cos\phi\right)$

График на функцијата $y = a(1-\cos x)$

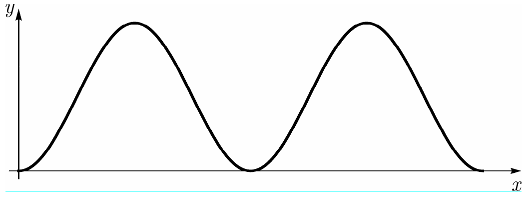
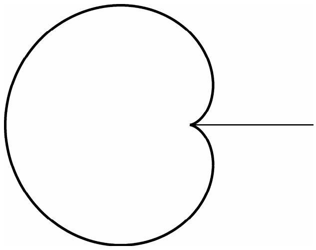


График на функцијата $\rho = a\left(1 - \cos\phi\right)$



22. а) Да се скицираат графиците на функциите:

а) $y = \dfrac{2x-3}{4x+2}$ б) $y = 2^{x+1} - 3$

Решение:

а) Функцијата е дробно-линеарна од облик $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ каде што

$$a = 2,\, b = -3,\, c = 4,\, d = 2.$$

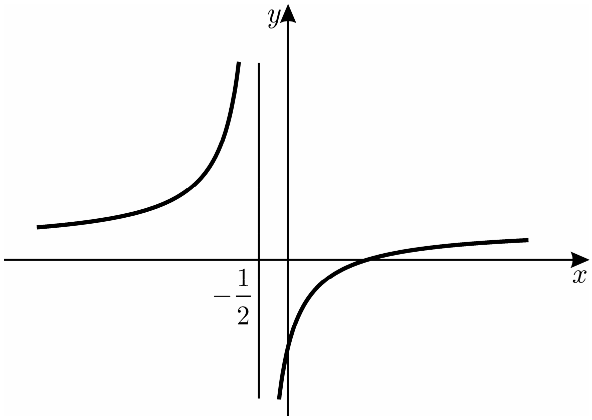
По делењето на броителот со именителот се добива изразот

$$y = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x + \dfrac{d}{c}}.$$

Ако ги ставиме смените: $y - \dfrac{a}{c} = y'$, $x + \dfrac{d}{c} = x'$, $\dfrac{bc-ad}{c^2} = a'$,

добиваме: $y' = \dfrac{a'}{x'}$ што претставува рамнострана хипербола во однос на системот $O'(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c})$. Во овој случај $y' = \dfrac{-1}{x'}$, а $O'(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$.

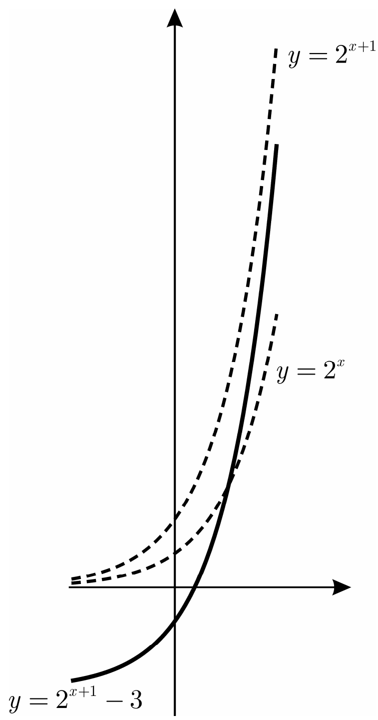
Графикот е прикажан на сликата долу.



б) $y = 2^{x+1} - 3$, $y + 3 = 2^{x+1}$

Со воведување на смените: $y' = y + 3$, $x' = x + 1$ добиваме

$y' = 2^{x'}$. Прво го цртаме графикот на функцијата $y' = 2^{x'}$, потоа се враќаме на координатите x и y со трансформациите $x = x' - 1$ и $y = y' - 3$ (поместувајќи го графикот на лево за единица, а потоа надолу за 3 единици).



23. Да се трансформираат во поларни координати равенките:

а) $x^2 - y^2 = a^2$ б) $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$

в) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ г) $x^2 + y^2 = ax$ д) $y = x$

Решение:

а) $x^2 - y^2 = a^2$

$$\rho^2 \cos^2\phi - \rho^2 \sin^2\phi = a^2$$

$$\rho^2\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) = a^2$$

$$\rho^2 \cos 2\phi = a^2$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\cos^2\phi},\quad \rho = \pm\frac{a}{\sqrt{\cos 2\phi}}$$

б) $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$

$$\left(\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi - a\rho\cos\phi\right)^2 = a^2\left(\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi\right)$$

$$\left(\rho^2 - a\rho\cos\phi\right)^2 = a^2\rho^2$$

$$\rho^2\left(\rho - a\cos\phi\right)^2 = a^2\rho^2$$

$$\left(\rho - a\cos\phi\right)^2 = a^2$$

$$\rho - a\cos\phi = a$$

$$\rho = a\left(1 + \cos\phi\right)$$

в) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

$$(\rho^2)^2 = a^2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$$

$$\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi$$

$$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$$

$$\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

г) $x^2 + y^2 = ax$

$$\rho^2 = a\rho\cos\varphi$$

$$\rho = a\cos\varphi$$

д) $y = x$

$$\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi$$
$$\sin\varphi = \cos\varphi$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \pm k\pi, \quad k \in Z$$

Граница на функција

24. Користејќи дефиниција за гранична вредност докажи дека
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6\,.$$
Решение:

Нека $\varepsilon > 0$. Постои δ, $\delta = \varepsilon$, такво што од $|\,x-3\,| < \delta$ да следува $|\,f(x)-A\,| = \left|\,\frac{x^2-9}{x-3}-6\,\right| = |\,x-3\,| < \delta = \varepsilon$. Тоа значи дека 6 е граница на функцијата $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, т.е. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

25. Тргнувајќи од дефиницијата за граница на функција, да се докаже:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-7) = -2$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+9} = \frac{2}{3}$ в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-7) = -2$

Треба да покажеме дека за произволно избрано позитивно ε $(\forall\varepsilon > 0)$, постои позитивно δ кое зависи од ε ($\exists\delta(\varepsilon) > 0$), така што кога x е во δ - околина на бројот 1, тогаш функцијата $f(x) = 5x-7$ е во
ε околина на бројот -2, т. е. за $\left|x-1\right| < \delta$, $\left|f(x)-(-2)\right| < \varepsilon$.
Ако го решиме неравенството $\left|f(x)-(-2)\right| < \varepsilon$, добиваме:

$$\left|5x-7-(-2)\right| = \left|5x-7+2\right| = \left|5x-5\right| = 5\left|x-1\right| < \varepsilon$$

Добивме дека $\left|x-1\right| < \frac{\varepsilon}{5}$. Избирајќи $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, се добива дека за $\left|x-1\right| < \delta$ следи дека $\left|f(x)-(-2)\right| < \varepsilon$. Односно, покажавме дека за произволно позитивно ε, постои δ кое зависи од ε, ($\delta = \frac{\varepsilon}{5}$), така што кога x е во δ - околина на бројот

1, т.е. за $\left|x-1\right|<\delta$, тогаш функцијата $f(x)=5x-7$ е во ε околина на бројот -2, т. е. $\left|f(x)-(-2)\right|<\varepsilon$, односно $\lim\limits_{x\to 1}(5x-7)=-2$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x+9}=\dfrac{2}{3}$

Треба да покажеме дека за $\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, $(M=M(\varepsilon))$, така што за $\left|x\right|>M$, $\left|\dfrac{2x+1}{3x+9}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$, односно, кога $\left|x\right|>M$, тогаш вредностите на функцијата $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+9}$ се во ε околина на бројот $\dfrac{2}{3}$.

Го решаваме неравенството $\left|f(x)-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{2x+1}{3x+9}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{(2x+1)-2(x+3)}{3(x+3)}\right|=\left|\frac{-5}{3(x+3)}\right|=\frac{5}{3\left|x+3\right|}<\varepsilon$$

Од последното неравенство добиваме:

$\dfrac{5}{3\left|x+3\right|}<\varepsilon$, односно $\dfrac{3\left|x+3\right|}{5}>\dfrac{1}{\varepsilon}$, или $\left|x+3\right|>\dfrac{5}{3\varepsilon}$.

Бидејќи $\left|x+3\right|\le\left|x\right|+3$, следува $\dfrac{5}{3\varepsilon}<\left|x+3\right|\le\left|x\right|+3$, или $\left|x\right|>\dfrac{5}{3\varepsilon}-3=\dfrac{5-9\varepsilon}{3\varepsilon}$.

Бирајќи $M=\dfrac{5-9\varepsilon}{3\varepsilon}$ добиваме дека за $\left|x\right|>M$, $\left|f(x)-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$, што значи дека $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x+9}=\dfrac{2}{3}$.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2}=+\infty$

Треба да покажеме дека за секое $M>0$, постои $\delta>0$ (кое зависи од изборот на M) (т.е. $\delta(M)>0$), така што кога $\left|x-1\right|<\delta$, односно за вредности на x од δ- околина на бројот 1, функцијата прима вредности поголеми од M, т.е $f(x)>M$.

Го решаваме неравенството $\left|\dfrac{1}{(1-x)^2}\right|>M$. Бидејќи $\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$, добиваме

$\left|1-x\right|^2 < \frac{1}{M}$, т.е. $\left|1-x\right| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Бирајќи $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, добиваме дека за

$\left|1-x\right| < \delta$, $\left|\frac{1}{(1-x)^2}\right| > M$, односно $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

26. Да се најдат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$ в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$ д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$ ѓ) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

Решение:

а) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-x+x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)+(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}$$

б) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \left(\begin{matrix}(x^3+3x^2-9x-2):(x-2) = \mathrm{x}^2+5x+1 \\ (x^3-x-6):(x-2) = x^2+2x+3\end{matrix}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11}$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+1)(1+x-1)} = \frac{3}{2}$$

г) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2}{(x-1)^2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2} = \frac{1}{9}$$

д) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}{x-1} = n$$

ѓ) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{(\sqrt{x^2+3x}+x)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+3x}+1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{3}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1}=\dfrac{3}{2}$

27. Да се пресметаат границите:

а) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3}{x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3}{x-2}$ в) $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}$

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3}{x-2}=\lim\limits_{\delta\to 0^+}\dfrac{3}{\delta}=+\infty$ в) $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=2^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}}=2^{+\infty}=+\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3}{x-2}=\lim\limits_{\delta\to 0^-}\dfrac{3}{\delta}=-\infty$ г) $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=2^{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}}=2^{-\infty}=0$

Некои специјални граници

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$

---

28. Да се определат следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x\sin x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{9}{x}\right)^x$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$ ѓ) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln\left(x+1\right)-\ln x\right)$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$

ѕ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(tgx\right)^{tg2x}$

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos^2 x-\sin^2 \text{x})}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x+\sin^2 \text{x}}{x\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\sin^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}=2$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x+2-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin(3x)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{3x}=3\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=\begin{pmatrix} x-\dfrac{\pi}{3}=t \\ x\to\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t\to 0\end{pmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\text{t})}{1-2\cos(\text{t}+\dfrac{\pi}{3})}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\text{t})}{1-2(\text{cost}\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin t\sin\dfrac{\pi}{3})}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\text{t})}{1-2\,\text{cost}\cdot(\dfrac{1}{2})+2\sin t\cdot(\dfrac{\sqrt{3}}{2})}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\text{t})}{1-\text{cost}+\sqrt{3}\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(\text{t})}{t}}{\dfrac{1-\text{cost}}{t}+\sqrt{3}\dfrac{\sin(\text{t})}{t}}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(\text{t})}{t}}{\dfrac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{t}+\sqrt{3}\dfrac{\sin(\text{t})}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(\text{t})}{t}}{\dfrac{2(\frac{t}{2})\sin^2(\frac{t}{2})}{t(\frac{t}{2})\cdot\frac{2}{2}}+\sqrt{3}\dfrac{\sin(\text{t})}{t}}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(\text{t})}{t}}{\dfrac{2(\frac{t}{2})\sin^2(\frac{t}{2})}{2(\frac{t}{2})\cdot(\frac{t}{2})}+\sqrt{3}\dfrac{\sin(\text{t})}{t}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{г) } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{9}}\right)^{\frac{x}{9}\cdot 9} = \left(\begin{matrix} t=\dfrac{x}{9} \\ x\to\infty \Rightarrow t\to\infty \end{matrix}\right) = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{9} = e^{9}$$

$$\text{д) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x+3}{x-2}-1\right)\right)^{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-x+2}{x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{5}}\right)^{\frac{x-2}{5}\cdot\frac{5\cdot x}{x-2}} =$$

$$= \left(\frac{x-2}{5}=t, \quad \begin{matrix} x\to+\infty \\ t\to+\infty \end{matrix}, \quad x=5t+2\right) = \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{5t+2}{t}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t+2} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{5}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2} = e^{5}\cdot 1^{2} = e^{5}$$

$$\text{ѓ) } \lim_{x\to\infty} x\left(\ln\left(x+1\right)-\ln x\right) = \lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right) = \ln e = 1$$

$$\text{е) } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^{2}} = \lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^{2}}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^{2}}}\right) =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x^{2}}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{(\cos x-1)}{x^{2}(\cos x-1)}}\right) =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{(\cos x-1)}\cdot\frac{\cos x-1}{x^{2}}}\right) = \ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^{2}}} =$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^{2}(\cos x+1)}} = \ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^{2}x-1}{x^{2}(\cos x+1)}} = \ln e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin^{2}x}{x^{2}(\cos x+1)}} = \ln e^{\frac{-1}{2}} = \frac{-1}{2}$$

$$ж)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\begin{pmatrix} a^x-1=t\\ a^x=t+1\Rightarrow \log_a a^x=\log_a(t+1)\\ x=\log_a(t+1)\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{pmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}}=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\ln(t+1)}=$$

$$=\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}=\ln a\cdot\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}(\ln(t+1)^{\frac{1}{t}})}=\ln a\cdot\frac{1}{\ln(\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}})}=$$

$$=\ln a\cdot\frac{1}{\ln e}=\ln a$$

$$з)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin x-1\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+(\sin x-1)\right)^{\frac{1}{1-\sin^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+(\sin x-1)\right)^{\frac{1}{(1-\sin x)(1+\text{sinx})}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+(\sin x-1)\right)^{\frac{-1}{(\sin x-1)(1+\text{sinx})}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{(1+\text{sinx})}}=e^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$s)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(tgx\right)^{tg2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+(\frac{\sin x}{\cos x}-1)\right)^{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{2\sin x\cos x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{-2\sin x\cos x}{(\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(1+\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x(-2\sin x)}{(\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin x}{\cos x+\sin x}}=e^{\frac{-2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\frac{\sqrt{2}}{2}}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

29. Да се најде граничната вредност на следниве функции**:**

$$а)\ \lim_{x\to 1}\frac{a^{\ln x}-x}{\ln x}\qquad б)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}\qquad в)\ \lim_{x\to 0}\frac{arc\,\text{tg}\,x}{x}$$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$ ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-1+1-x}{\ln x}=\begin{pmatrix} t=\ln x & x\to 1\\ x=e^t & t\to 0\end{pmatrix}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\begin{pmatrix} a^t-1=k,\ \ t\to 0\Rightarrow k\to 0\\ a^t=k+1\Rightarrow t\ln a=\ln(k+1)\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{k}{\frac{\ln(k+1)}{\ln a}}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\ln a\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(k+1)}{k}}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=$$

$$=\ln a\lim_{k\to 0}\frac{1}{\ln(1+k)^{\frac{1}{k}}}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\ln a\frac{1}{\ln\lim\limits_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=$$

$$=\frac{\ln a}{\ln e}-\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=(\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=\ln a\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\ln e=1\ )=\ln a-1$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 2x}{2x}=\begin{pmatrix} t=\arcsin 2x & x\to 0\\ 2x=\sin t & t\to 0\end{pmatrix}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin t}=2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=2$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arc\operatorname{tg}x}{x}=\begin{pmatrix} t=acr\operatorname{tg}x & x\to 0\\ x=\operatorname{tg}t & t\to 0\end{pmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\operatorname{tg}t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{\sin t}{\cos t}}=$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\cos t=1$$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(\frac{\sin x}{\cos x})}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln(1+\frac{\sin x}{\cos x}-1)}{\cos^2 x(1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\frac{\sin x}{\cos x}-1)}{-\cos^2 x(\frac{\sin x}{\cos x}-1)(1+\frac{\sin x}{\cos x})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}\ln(1+\frac{\sin x}{\cos x}-1)}{-\cos^2 x(1+\frac{\sin x}{\cos x})}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\frac{\sin x}{\cos x}-1)^{\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}}}{-\cos^2 x(1+\frac{\sin x}{\cos x})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{-\cos^2 x(1+\frac{\sin x}{\cos x})}=\frac{1}{-2\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=$$

$$=-\frac{1}{-2\cdot\frac{2}{4}}=-1$$

д) $$\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\begin{pmatrix} t=\frac{1}{x} & x\to\infty \\ x=\frac{1}{t} & t\to 0\end{pmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

ѓ) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cos x}=\frac{1}{2}$$

е) $$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^3+x^3}{(\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(\sqrt[3]{(1-x^3)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2)}=0$$

30. Да се определат точките на прекин на следниве функции:

a) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

Решение.

а) Ако функцијата $f(x)$ е непрекината во точката x_0, тогаш е задоволено $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Во точката $x=1$ имаме дека $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, па $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не постои, од каде што следува дека еднаквоста не е исполнета, од каде пак добиваме дека функцијата $f(x)$ има прекин во точката $x=1$.

б) Функцијата $f(x)$ има прекин во точката $x=0$. Навистина,

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, но $f(0)=0$, па значи не е исполнето равенството $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

4. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

4.1. Дефиниција на извод на функција

Природните процеси математички се опишуваат со функции т.е. функциите претставуваат математички модел на природните процеси. Нека $y = f(x)$ опишува некој природен процес во зависност од времето x т.е. зависност на некоја величина, во процесот од времето x. Значи, процесот го разгледуваме (набљудуваме) меѓу две едноподруги временски положби x и $x + \Delta x$, Δx е изминатото време од почетокот до крајот на разгледувањето на процесот и притоа разгледуваните величини во процесот што одговараат на овие временски положби се $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$, соодветно.

Промена на процесот за изминато време Δx се определува како разлика меѓу двете едноподруги вредносни положби во процесот, т.е.

$$\Delta y \overset{df}{=} f(x + \Delta x) - f(x).$$

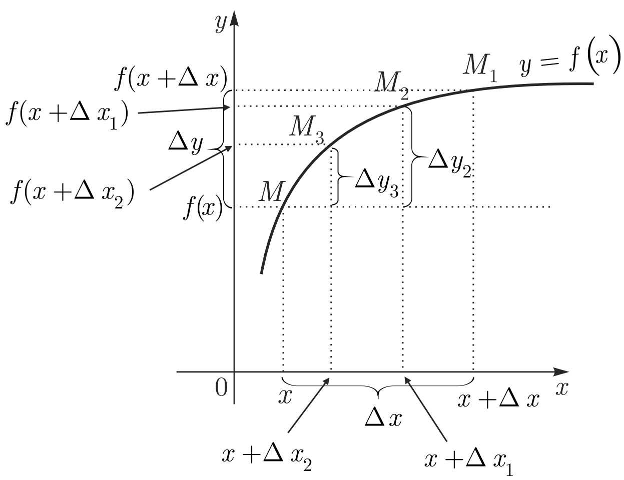
Релативна промена на процесот е количникот од промената на процесот Δy и изминатото време Δx, т.е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \overset{df}{=} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Значи, релативната промена на процесот покажува за колку се има изменето мерената големина Δy со промена на времето Δx.

Релативната промена на процесот уште се нарекува средна брзина на процесот во временски интервал Δx.

Ако во диференцијалниот количник $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ на дадена функција $y = f(x)$, поминеме на гранична вредност, кога Δx тежи кон нула, тогаш точката x - Δx ќе се движи кон x.



Од претходната дискусија доаѓаме до воопштување, т.е. x не мора да е време, туку е променлива, а f функција од x.

Понатаму, D ќе означува интервал.

Дефиниција. Нека $y = f(x)$ е дадена функција со дефинициона област D и $x_0 \in D$. Ако постои граничната вредност, и е конечна,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

таа се нарекува **извод на функцијата f во точката** x_0. □

Се бележи со $f'\left(x_0\right)$.

Тогаш функцијата f се нарекува диференцијабилна во точката x_0. Ако функцијата е диференцијабилна во секоја точка од $A \subseteq D$, таа се нарекува диференцијабилна на A.

Ако $y = f(x)$ опишува некој природен процес тогаш извод во точката x_0, $y'(x_0)$ е всушност моментна брзина на процесот $y = f(x)$ во точката x_0. Ставајќи $x_0 + \Delta x = x$, добиваме $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow x - x_0 \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$ па

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Постоењето на извод ќе овозможи подетално испитување на дадена функција, попрецизно цртање на графикот на функцијата, како што ќе илустрираме подоцна.

Пример 1. Извод од константна функција е нула.
Доказ. Нека $f(x) = c$, каде c е константа. Тогаш $f(x + \Delta x) = c$, па $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$. Оттука добиваме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0, \text{ па } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \Rightarrow (C)' = 0. \quad \square$$

Пример 2. Извод од идентичната функција, $f(x) = x$ е 1.
Доказ. $f(x) = x,\ \ x \in \mathbb{R}$. Тогаш $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$, па

$\Delta y = \Delta f = x + \Delta x - x = \Delta x$. Оттука добиваме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 \Rightarrow (x)' = 1. \ \square$$

Пример 3. Извод од линеарната функција, $f(x) = ax + b$, е константата a.
Доказ. Нека $f(x) = ax + b$ каде $a, b \in \mathbb{R}$. Тогаш

$$f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x) + b = ax + a\Delta x + b,$$

па $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = a\Delta x,\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = a$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} a = a$ па $(ax+b)' = a.$ $\square$

Пример 4. Извод од квадратна функција, $f(x) = x^2$ е $2x$

Доказ. Тогаш $f(x - \Delta x) = (x - \Delta x)^2$, па

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

.

Оттука добиваме $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta \mathrm{x},\quad \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ па $(x^2)' = 2x.$ $\square$

Пример 5. Изводот од степенска функција, $f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$, изнесува nx^{n-1}.

Доказ. Од $f(x) = x^n$, $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$ добиваме

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n =$$

$$= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}\left(\Delta x\right)^k + \ldots + \binom{n}{n}\left(\Delta x\right)^n - x^n =$$

$$= n\cdot x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\left(\Delta x\right)^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}\left(\Delta x\right)^k + \ldots + \left(\Delta x\right)^n .$$

Оттука

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}\left(\Delta x\right)^{k-1} + \ldots + \left(\Delta x\right)^{n-1}, \text{ па}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + 0 + 0 + \ldots + 0 = nx^{n-1}, \text{ т.е. } (x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{R}.\ \square$$

Без доказ ќе ја наведеме следнава теорема.

Теорема 1. Ако f има извод во x, тогаш f е непрекината во x. $\square$

Теорема 2. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функции на D. Ако f и g имаат извод во $x \in D$, тогаш:

а) $f+g$ има извод во $x \in D$ и важи

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

б) $f \cdot g$ има извод во $x \in D$ и важи

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

в) $g(x) \neq 0$, тогаш, $\dfrac{f}{g}$ има извод во $x \in D$ и важи

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}.$$

Доказ. а) Нека $Y = f + g$. Тогаш

$$\begin{aligned} &Y(x) = f(x) + g(x),\ Y(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x), \text{ па} \\ &\Delta Y = Y(x+\Delta x) - Y(x) = f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x)) = \\ &= f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x) \end{aligned}.$$

Следува

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(y).$$

Добивме $Y'(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, т.е.

$$Y' = (f+g)' = f' + g'.$$

б) Нека $Y = f \cdot g$. Тогаш $Y(x) = f(x) \cdot g(x)$,

$Y(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x)$, па

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} = \\ &= \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Следува

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Добивме $Y' = (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Ако наместо g се стави функцијата $-g$ се добива тврдењето за знак „$-$“.

в) Нека $Y = \dfrac{f}{g}$, $g(x) \neq 0$. Бидејќи g е непрекината и $g\left(x\right) \neq 0$ следува дека постои околина на x така што $g\left(y\right) \neq 0$ на таа околина. Значи можеме да претпоставиме дека $x + \Delta x$ е во таа околина, па $g\left(x + \Delta x\right) \neq 0$. Тогаш

$$Y(x+\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}, \text{ па}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x}=\frac{Y(x+\Delta x)-Y(x)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}=$$

$$=\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)-\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g(x)-\dfrac{\Delta g}{\Delta x}\cdot f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}.$$

Следува

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x)-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x)}=$$

$$=\frac{f^{'}(x)g(x)-g^{'}(x)f(x)}{g(x)g(x)}.$$

Значи

$$Y^{'}(x)=\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x)=\frac{f^{'}(x)\cdot g(x)-g^{'}(x)\cdot f(x)}{g^{2}(x)}, \text{ т.е. } \left(\frac{f}{g}\right)^{'}=\frac{f^{'}\cdot g-g^{'}\cdot f}{g^{2}}. \ \square$$

Последица. Ако f и g се дефинирани на D, $c\in\mathbb{R}$ е даден број и f, g имаат извод во $x\in D$, тогаш и функцијата cf има извод во x и важи

$$(c\cdot f)^{'}(x)=c\cdot f^{'}(x). \ \square$$

Теорема 3. Нека постои D така што $g(x)$ е дефинирана и строго монотона на D и $x\in D$. Нека $f(x)$ е дефинирана во околина на $y=g(x)$. Ако $g^{'}(x)$ и $f^{'}(y)$ постојат, тогаш и сложената функција $h(x)=f(g(x))$ има извод во $x\in D$ и важи

$$h^{'}(x)=f^{'}\Big(g(x)\Big)\cdot g^{'}(x).$$

Доказ. Бидејќи g е строго монотона на D и $\Delta x\neq 0$, следува дека

$$g\Big(x+\Delta x\Big)\neq g\Big(x\Big).$$

Имаме $f^{'}(y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}$. Од $y=g(x)$ следува $\Delta y=g(x+\Delta x)-g(x)$, т.е. $g(x+\Delta x)=\Delta y+g(x)=y+\Delta y$. Тогаш

$$h^{'}(x)\overset{df}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f^{'}(y)\cdot g^{'}(x),$$

што требаше да се докаже. □

Теорема 4. Нека $f:D\to f(D)$ е дефинирана и строго монотона на D. Ако функцијата f има извод во $x\in D$ и $f^{'}(x)\neq 0$, тогаш и функцијата f^{-1} има извод во $y=f(x)$ и важи

$$(f^{-1})^{'}(y)=\frac{1}{f^{'}(x)}.\ \square$$

Доказ. Нека $\Delta y\to 0$. Од f има извод во x се добива дека f е непрекината во x, f^{-1} постои заради строгата монотоност и сурјективноста на f па и f^{-1} е непрекината функција. Од непрекинатоста на f^{-1} следува дека $\lim\limits_{\Delta y\to 0}f^{-1}(y+\Delta y)=f^{-1}(y)$. Од друга страна, $f^{-1}(y+\Delta y)=x+\Delta x$, па значи $\lim\limits_{\Delta y\to 0}f^{-1}(y+\Delta y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}(x+\Delta x)=f^{-1}(y)$, т.е. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}(x+\Delta x)=f^{-1}(y)=x$. Следува дека $x+\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta x=x$ па ако $\Delta y\to 0$ тогаш и $\Delta x\to 0$.

Од

$$\frac{1}{f^{'}(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}$$

следува дека

$$(f^{-1})^{'}(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{f(x+\Delta x)-f(x)}=$$

$$\overset{\Delta y\to 0\Rightarrow\Delta x\to 0}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}=\frac{1}{f^{'}(x)}.\ \square$$

Пример 6.

а) $(2x^2-\sqrt{3}\cdot x^3)^{'}=(2x^2)^{'}-(\sqrt{3}\cdot x^3)^{'}=2\cdot(x^2)^{'}-\sqrt{3}\cdot(x^3)^{'}=$

$\qquad=2\cdot 2x-\sqrt{3}\cdot 3x^2=4x-3\sqrt{3}x^2.$

б) $((x+1)(x-1))^{'}=(x+1)^{'}(x-1)+(x+1)(x-1)^{'}=$

$$= (1+0)(x-1) + (x+1)(1-0) = x - 1 + x + 1 = 2x.$$

в) $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} =$

$$= \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

г) $((2x+3)^2)' = f'(2x+3)\cdot g'(x) = 2(2x+3)\cdot 2 = 8x+12$,

$$f(x)=x^2,\ g(x)=2x+3,\ f'(x)=2x,\ g'(x)=2.$$

д) $f(x)=x^2,\ f^{-1}(x)=\sqrt{x},\quad x\in\mathbb{R}^+$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2\cdot x},\quad y=f(x)=x^2 \quad \Leftrightarrow x=\sqrt{y}$$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{2\sqrt{y}},\text{ т.е. } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\ \Box$$

4.2. Изводи од елементарните функции

Ќе ги изведеме изводите на основните елемнтарни функции. Користејќи ги правилата за барање извод од претходно, може да се наоѓаат изводите на сите елементрани функции.

1. $(a^x)' = a^x \ln a$; ($a>0$, $a\in\mathbb{R}$)

Доказ.

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\cdot a^{\Delta x}-a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} a^x\,\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a.\Box$$

Последица. $(e^x)' = e^x$

2. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln a}$; ($a>0,\ a\neq 1,\ a\in\mathbb{R}$)

Доказ. Функцијата $f^{-1}(x)=g(x)=\log_a x$ е инверзна на $f(x)=a^x$, па имаме

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a}.$$

Бидејќи $y=a^x$ добиваме $\left(\log_a y\right)' = \dfrac{1}{y\ln a}.\ \Box$

Последица. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

3. $\left(x^{r}\right)' = rx^{r-1}, r \in \mathbb{R}.$

Доказ.

$$x^{r} = e^{r\ln x} \Rightarrow \left(x^{r}\right)' = \left(e^{r\ln x}\right)' = e^{r\ln x} \cdot (r\ln x)' =$$

$$= e^{r\ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r \cdot x^{r} \cdot \frac{1}{x} = rx^{r-1}.$$

Специјално, $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. □

4. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказ.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\cos\frac{2x+0}{2} = \cos x. \square$$

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказ.

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\sin\frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -2\lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{2}\;\frac{\frac{\sin \Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\;\lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{2x+\Delta x}{2} =$$

$$= (-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right) = -\sin x. \square$$

6. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$.

Доказ.

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\square$$

7. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Доказ. Слично како 6. $\square$

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \;\; x \in (-1,1)$.

Доказ. $f^{-1}(x) = \arcsin x$ е инверзна за $f(x) = \sin x$, па имаме

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}, y = \sin x$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin x^2} = \sqrt{1-y^2}, \;\; y \in (-1,1) \;\; \Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \;\; y \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\square$$

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказ. Слично како 8. $\square$

10. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказ. Слично на 9. $\square$

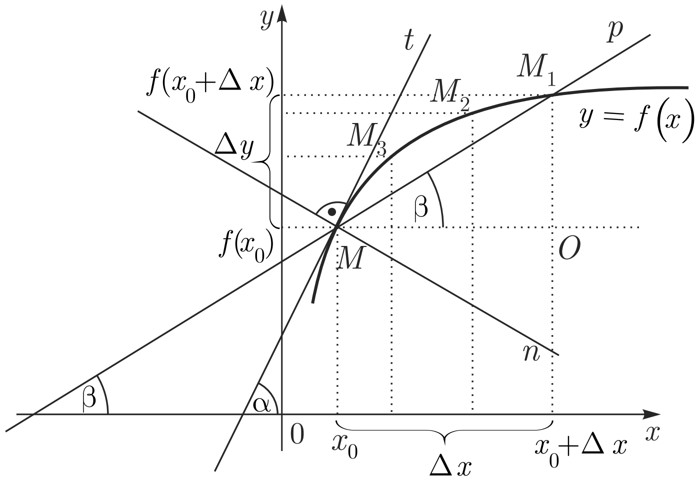
Пример. а) $(\cosh x)' = \sinh x$ б) $(\sinh x)' = \cosh x$.

Доказ. а) $(\cosh x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$.

б) $(\sinh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$. $\square$

4.3. Геометриско значење на изводот

Нека F е график на функцијата $y = f(x)$, со дефинициона област D (D е интервал), која има извод во секоја точка $x \in D$. Ги разгледуваме точките $M(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ од Γ и правата p која минува низ точките M и M_1. Правата p ја нарекуваме секанта. Нека β е аголот што оваа секанта го зафаќа со позитивниот дел на x-оската. Тогаш, од правоаголниот триаголник MOM_1, имаме дека $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Ако $\Delta x \to 0$, тогаш точката M_1 се приближува кон точката M по кривата Γ т.е. $M_1 \to M$ и $\Delta y \to 0$, па правата $MM_1 = p$ во општ случај се приближува кон правата t, која се вика тангента на кривата Γ во точката M.



Нека аголот што t го зафаќа со x-оската е α. Ако во $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ т.е.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

пуштиме $\Delta x \to 0$, имајќи предвид дека тогаш $\beta \to \alpha$, па и $\operatorname{tg}\beta \to \operatorname{tg}\alpha$, се добива

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \overset{df}{=} f'(x_0)$$

т.е. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Значи, $f'(x_0)$ е коефициент на правец на тангентата на $y = f(x)$ во точката x_0.

Равенката на тангентата е

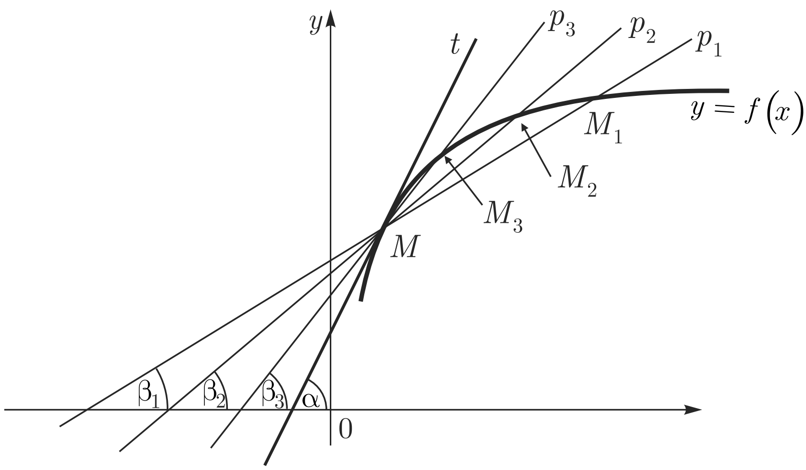
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

(t минува низ $M(x_0, f(x_0))$ и има коефициент на правец $k = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Јасно е дека равенката на нормалата n на Γ во $M(x_0, f(x_0))$ е

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Следниов цртеж го илустрира движењето на секантата MM_1 кога $\Delta x \to 0$ и M_1 се движи по кривата Γ.



Забелешка. Ако функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна во x_0 тогаш постои гранична положба на секантата, т.е. постои тангента t на Γ во x_0.

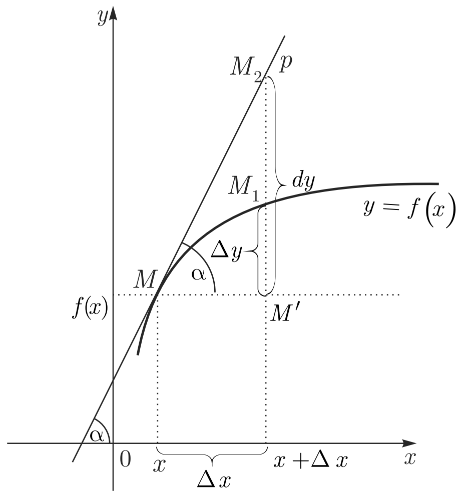
4.4. Диференцијал на функција

Дефиниција. Нека функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x и нека аргументот x има нараснување Δx. **Првиот диференцијал** или само **диференцијал на функцијата** $f(x)$ во точката x, означен со dy или $df(x)$, е производот од изводот на функцијата во точката x и нараснувањето (промената) на независно променливата, Δx, т.е.

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Пример 1. $y = x^2$, $y' = 2x$ па $dy = 2x \cdot \Delta x$. $\square$

Геометриското толкување на диференцијалот е следново:



Нека $M(x,f(x)) \in \Gamma_f$, $M_1(x+\Delta x, f(x+\Delta x) \in \Gamma_f$ и $M'(x+\Delta x, f(x))$.

Нека p е тангентата на $y=f(x)$ во M и α е аголот што го зафаќа p со позитивниот дел од x-оската. Од геометриското толкување на изводот имаме дека $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Нека $M_2 \in p$, и x-координата на M_2 е $x+\Delta x$. Од цртежот имаме:

$$\frac{\overline{M_2M'}}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = f'(x) \text{ т.е. } \overline{M_2M'} = f'(x)\cdot\Delta x = df = dy.$$

Значи, диференцијалот претставува нараснување на ординатата во $x+\Delta x$ по тангентата. Да забележиме дека $\overline{M_2M'} = dy$, $\overline{M_1M'} = \Delta y$, $dy - \Delta y = \overline{M_1M_2}$.

Ако ја разгледаме функцијата $y=x$, имаме $y'_x = 1$, па $dy = dx = 1\cdot\Delta x = \Delta x$, т.е. $dx = \Delta x$. Оттука и од дефиницијата за диференцијал следува

$$dy = df = f'(x)dx, \text{ т.е. } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}.$$

Од дефиницијата на извод, имаме

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

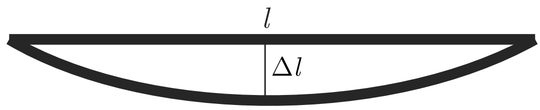
па за мали вредности на Δx, ја добиваме приближната формула

$f'(x) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. $\Delta y \approx f'(x)\Delta x = dy$.

Значи, $\Delta y \approx dy$.

За мали промени на аргументот, т.е. за мали Δx важи $\Delta y \approx f'(x)\cdot\Delta x$.

Пример 1. Издолжување на греда под товар



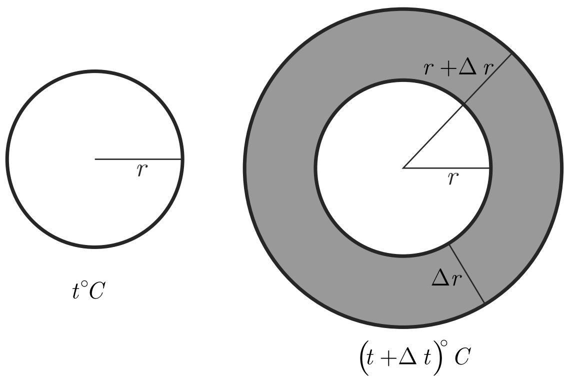
Издолжување на греда под товар оди по законот $l = a\cosh kt$ каде што a и k се константи кои зависат од многу услови (за гредата, нејзина почетна должина, еластичност и други), а t е масата на товарот

$$\Delta l \approx l'(r) \cdot \Delta t = \left(a\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}\right)' \cdot \Delta t = a\left(\frac{ke^{kt}-ke^{-kt}}{2}\right)\Delta t = ak\sinh kt \cdot \Delta t. \ \square$$

Пример 2. Растење на волумен

Нека некое тело е во форма на коцка, со должина на страна l. Волуменот што тоа тело го зафаќа изнесува $V = l^3$. Ако, под некои услови, дојде до зголемување на должината на страната за Δl, промената на волуменот ΔV (неговото зголемување) ќе изнесува $\Delta V \approx 3l^2 \cdot \Delta l$, па новиот волумен е $V_1 \approx V + \Delta V = l^3 + 3l^2 \Delta l$. $\square$

Пример 3. Ширење на кружна плоча при загревање



Нека на $t^\circ C$ кружна плоча има радиус $r = r(t)$, а на температура $(t+\Delta t)^\circ C$ има радиус $r(t+\Delta t) = r + \Delta r$. Плоштината P на плочата се менува во зависност од r, по формулата $P = r^2\pi$. Таа на температура $t^\circ C$ има плоштина $P(t)$ и на $(t+\Delta t)^\circ C$ има плоштина $P(t+\Delta t) = P + \Delta P$ каде што $\Delta P \approx P_r' \cdot \Delta r = 2r\pi \cdot \Delta r$. $\square$

4.5. Изводи од повисок ред

Нека е дадена функција $y=f(x),\ x\in D$ и нека таа е диференцијабилна функција на $A\subseteq D$. Тогаш добиваме нова функција $y=f^{'}(x),\ x\in A$. Ако $y=f^{'}(x), x\in A$ има извод во сите точки $x\in B,\ B\subseteq A$, тогаш тој извод го означуваме со $f^{''}(x)$ и го викаме извод од втор ред или втор извод на f во $x\in B$, т.е. $f^{''}(x)=\left(f^{'}(x)\right)_{x}^{'}$.

Пример 1.

$$f(x)=x^2+2x+5$$
$$f^{'}(x)=2x+2$$
$$f^{''}(x)=2.$$

Ако постои извод и за функцијата $f^{''}(x)$, на некое подмножество од B, тогаш тој извод го викаме извод од трет ред или трет извод на $f(x)$ и го бележиме со $f^{'''}(x)$.

Оваа постапка можеме да ја продолжиме се' додека постои услов за постоење на следниот извод. Така доаѓаме до n-ти извод од f, за $n\in\mathbb{N}$, или извод од n-ти ред што го означуваме со $f^{(n)}(x)$ и $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))^{'}$. Функцијата која има n-ти извод се вика n-пати диференцијабилна.

Пример 2. Функцијата $f(x)=\cos x$ е произволно пати диференцијабилна во секоја точка од $\mathbb{R}$.

Навистина,

$$f(x)=\cos x,\qquad f^{'}(x)=-\sin x,\qquad f^{''}(x)=-\cos x,\qquad f^{'''}(x)=+\sin x,$$
$$f^{(iv)}(x)=\cos x,$$

и општо

$$(\cos x)^{(n)}=\begin{cases}\cos x, n=4k, k\in\mathbb{N}\\ -\sin x, n=4k+1, k\in\mathbb{N}\\ -\cos x, n=4k+2, k\in\mathbb{N}\\ \sin x, n=4k+3, k\in\mathbb{N}\end{cases}\qquad\square$$

4.6. Теореми за средна вредност

Теоремите што ќе ги наведеме се познати со заедничко име теореми за средна вредност.

Теорема на Ферма (Pierre de Fermat, 1601-1665)

Ако функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ има локален екстрем во точката $x = x_0 \in D$ и ако во таа точка функцијата $f(x)$ е диференцијабилна, тогаш $f'(x_0) = 0$.

Доказ. Нека во x_0 функцијата има локален екстрем и нека тоа биде локален максимум. Тогаш постои $\varepsilon -$околина $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ на x_0, така што за сите $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$, важи $f(x) \leq f(x_0)$.

Нека $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Тогаш $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, бидејќи $x - x_0 < 0$ и $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Ако во последниот количник, пуштиме $x \to x_0$, т.е. $x \to x_0^-$, добиваме дека $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Нека $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Тогаш $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, бидејќи $x - x_0 > 0$, $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Ако во последниот количник, пуштиме $x \to x_0$, т.е. $x \to x_0^+$, добиваме дека

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Бидејќи f има извод во x_0 следува дека

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

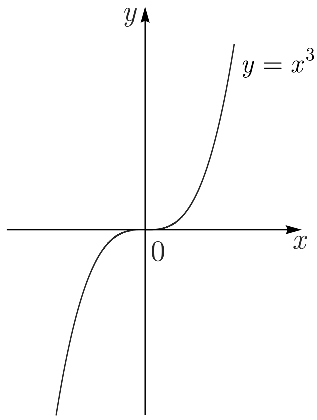
т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

што требаше да се докаже.

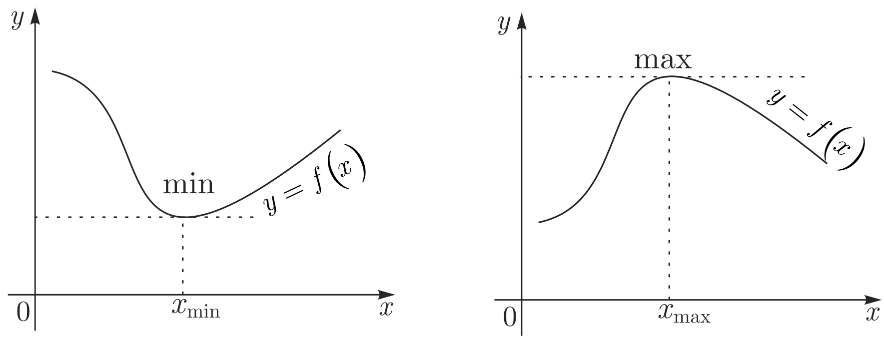
Слично, се разгледува ако во $x = x_0$, функцијата има локален минимум. □

Да забележиме дека обратното тврдење не мора да важи. На пример, функцијата $f(x) = x^3$ е дефинирана на $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ и $f'(0) = 0$, но $x = 0$ не е точка на локален екстрем, ниту минимум, ниту максимум.



Геометриско значење на теоремата на Ферма.

Ако функцијата $y = f(x)$, $x \in D$ е непрекината на $A \subset D$, A е околина на точка $x_0 \in D$, $y = f(x)$ има тангента во секоја точка од A и ако $y = f(x)$ има локален екстрем во x_0, тогаш според Теоремата на Ферма, $f'(x_0) = 0$, а бидејќи $f'(x_0)$ е коефициент на правец на тангентата, тоа значи дека коефициентот на правец на тангентата во x_0, е 0, т.е. $\mathrm{tg}\alpha = 0$, каде што α е аголот што го зафаќа тангентата со позитивниот дел на x-оската. Следува дека $\alpha = 180^\circ$, т.е. тангентата е паралелна со x-оската.



Ако f е диференцијабилна на интервалот $D = [a, b]$, тогаш таа ги достигнува своите најголеми и најмали вредности на $[a, b]$. Ако има екстрем во $x_0 \in (a, b)$, тогаш од теоремата на Ферма следува дека $f'(x_0) = 0$. Значи, своите екстремни вредности на $[a, b]$ функцијата f ги достигнува или во некоја од точките a, b или во точките во кои првиот извод е еднаков на нула. Точките во кои првиот извод е еднаков на нула обично се нарекуваат **стационарни**.

Пример 1. Определи ги најголемата и најмалата вредност на функцијата $f(x)=2x^3-15x^2+36x-14$ на интервалот $[1,5]$.

Решение. Бидејќи

$$f'(x)=6x^2-30x+36=6\left(x-2\right)\left(x-3\right),$$

стационарните точки на функцијата се $x=2$ и $x=3$. Притоа, во $x=2$ функцијата f има локален максимум ($f(2)=14$), а во $x=3$ локален минимум ($f(3)=13$). Значи, најголемата вредност на f на дадениот интервал ќе биде

$$\max\left\{f\left(1\right),f\left(5\right),f\left(2\right),f\left(3\right)\right\}=\max\left\{9,41,14,13\right\}=41$$

и се достигнува во десниот крај на интервалот.

Слично, најмала вредност е

$$\min\left\{f\left(1\right),f\left(5\right),f\left(2\right),f\left(3\right)\right\}=\min\left\{9,41,14,13\right\}=9$$

и се достигнува во левиот крај на интералот. □

Теорема на Рол (Michel Rolle, 1652-1719). Нека функцијата $y=f(x)$, $x\in D$, е непрекината на $[a,b]\subseteq D$, диференцијабилна на (a,b) и нека $f(a)=f(b)$, Тогаш постои точка $x_1\in(a,b)$, таква што $f'(x_1)=0$.

Доказ. Бидејќи f е непрекината на $[a,b]$, таа ги достигнува својот максимум и минимум. Нека

$$M=\max\left\{f\left(x\right)\middle|\, x\in[a,b]\right\} \text{ и } m=\min\left\{f\left(x\right)\middle|\, x\in[a,b]\right\}.$$

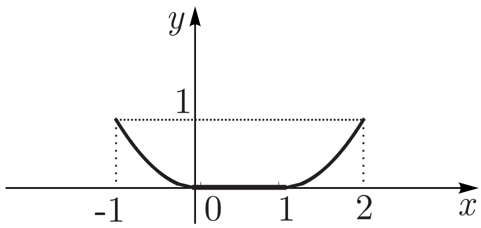
Ако $M=m$, тогаш $f\left(x\right)=a$, за секој $x\in[a,b]$, па $f'\left(x\right)=0$, за секој $x\in[a,b]$.

Нека $m<M$. Притоа, $M>f\left(a\right)=f\left(b\right)$ или $m<f\left(b\right)=f\left(a\right)$.

Нека $M>f\left(a\right)=f\left(b\right)$. Бидејќи максимумот е поголем од $f\left(a\right)$ и тој се достигнува, следува дека постои $x_1\in\left(a,b\right)$ така што $M=f\left(x_1\right)$. Заради $a<x_1<b$ важи $\delta=\min\left\{x_1-a,b-x_1\right\}>0$, па следува дека f има локален екстрем (максимум) на околината $\left(x_1-\delta,x_1+\delta\right)$ или е константна на дел од неа. Од теоремата на Ферма следува дека $f'\left(x_1\right)=0$.

Аналогно, ако $m<f\left(b\right)=f\left(a\right)$. □

Пример. За функцијата $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2,\ x<0\\ 0,\ 0\le x\le 1\\ \left(x-1\right)^2,\ x>1\end{cases}$



важи $f\left(-1\right)=f\left(2\right)=1$ и заради

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-f\left(0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(\Delta x\right)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x}=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(0+\Delta x\right)-f\left(0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

следува дека $f'\left(0\right)=0$ а заради

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(1+\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\left(1+\Delta x-1\right)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x}=0 \text{ и}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(1+\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

следува дека $f'\left(1\right)=0$.

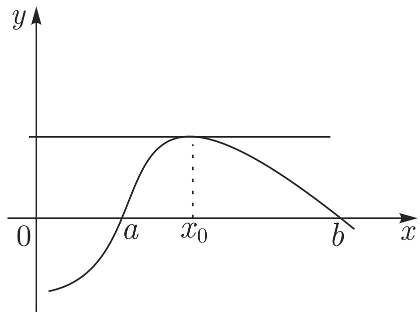
Уште $f'\left(x\right)=\begin{cases}2x,\ x<0\\ 0,\ 0<x<1\\ 2\left(x-1\right),\ x>1\end{cases}$, па функцијата е диференцијабилна на $\left(-1,2\right)$ и непрекината на $[-1,2]$.

Значи, исполнети се условите од теоремата на Рол на интервалот $[-1,2]$.

Притоа, $f'\left(x\right)=0$ за секој $x\in[0,1]$, а f нема локални екстреми. □

Геометриско значење на Теоремата на Рол.

Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на $[a,b]$, ако има тангента во секоја точка од (a,b) и ако $f(a)=f(b)$, од теоремата на Рол следува дека постои точка $x_0\in(a,b)$ во која $f'(x_0)=0$, т.е. тангентата во x_0 е паралелна со x-оската.



Теорема на Лагранж (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813)

Нека функцијата $y=f(x)$, $x\in D$, е непрекината на $[a,b]\subseteq D$, диференцијабилна на (a,b). Тогаш постои точка $x_0\in(a,b)$ така што

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ т.е. } f(b)=f(a)+(b-a)f'(x_0).$$

Доказ. Функцијата $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b), бидејќи $f(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b). Уште важи

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a)-0=f(a)$$

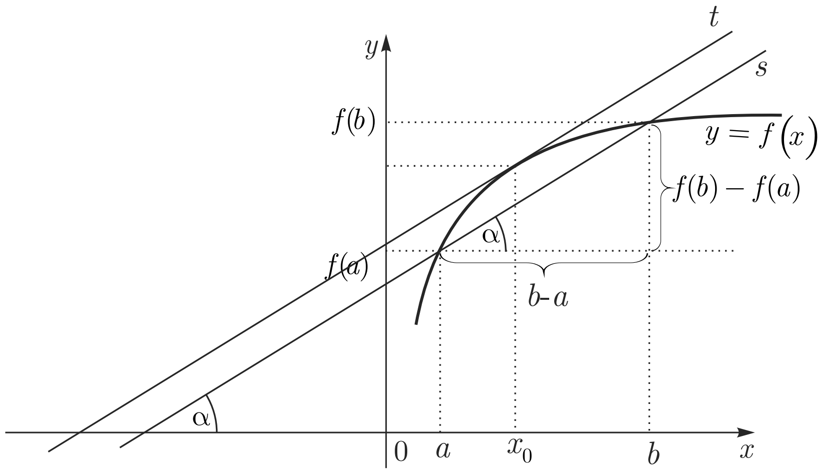
$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(b)-f(b)+f(a)=f(a).$$

Значи, $F(a)=F(b)$.

Според тоа, $F(x)$ ги исполнува условите од теоремата на Рол на $[a,b]$, па значи постои точка $x_0\in(a,b)$ така што $F'(x_0)=0$. Бидејќи $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, следува дека $f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, т.е. $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, за некој $x_0\in(a,b)$, што требаше да се докаже. □

Геометриско значење на теоремата на Лагранж.

Бројот $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\operatorname{tg}\alpha$, каде што α е аголот што правата низ $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$ го зафаќа со $+x$-оската т.е. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ е коефициентот на правец на секантата низ $\big(a,f(a)\big)$ и $\big(b,f(b)\big)$.



Имајќи предвид дека $f'(x_0)$ е коефициентот на правец на тангентата на $y=f(x)$ во $x=x_0$ добиваме дека тангентата во $(x_0, f(x_0))$ и секантата низ $A=\big(a,f(a)\big)$ и $B=\big(b,f(b)\big)$ имаат ист коефициент на правец, т.е. се паралелни прави.

Значи, геометриското значење на теоремата на Лагранж е: Ако функцијата $y=f(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) (т.е. има тангента во секоја точка од (a,b)), тогаш постои точка $x_0 \in (a,b)$ таква што тангентата на $y=f(x)$ во $(x_0, f(x_0))$ е паралелна со секантата низ $A=\big(a,f(a)\big)$ и $B=\big(b,f(b)\big)$.

Последица. Ако f ги исполнува условите од теоремата на Лагранж и $f'(x)=0$ за секој $x\in(a,b)$, тогаш f е константна функција на (a,b). □

Да забележиме дека, на пример функцијата $f(x)=|x-3|$ не ги исполнува условите од теоремите на Рол и Лагранж, на $[0,5]$ затоа што нема прв извод во точката $x=3$.

Теорема на Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857)

Нека функциите f и g се се непрекинати на $[a,b]\subseteq D$, диференцијабилни на (a,b) и нека $g'(x)\neq 0$ за секој $x\in(a,b)$. Тогаш постои $x_0\in(a,b)$ така што

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Доказ. Нека f и g ги исполнуваат условите од теоремата на Коши.

Прво да забележиме дека $g(b)\neq g(a)$. Навистина, ако претпоставиме спротивно, т.е. дека $g(b)=g(a)$, тогаш функцијата g ги исполнува условите од теоремата на Рол, па постои $x_1 \in (a,b)$ така што $g'(x_1)=0$ што не е можно заради условите на теоремата на Коши.

Сега, да ја формираме функцијата

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big(g(x)-g(a)\Big).$$

Лесно се проверува дека $F(x)$ е непрекината на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и $F(a)=F(b)(=f(a))$, па F ги исполнува условите од теоремата на Рол. Следува дека постои $x_0 \in (a,b)$ така што $F'(x_0)=0$. Бидејќи

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g'(x)$$

следува дека $f'(x_0)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g'(x_0)=0$, т.е. $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. $\square$

Ќе наведеме неколку примера со кои ќе ја илустрираме примената на теоремите за средна вредност.

Пример 2. Равенката $3^x+4^x=5^x$ има на $\mathbb{R}$ единствено решение $x=2$. Докажи!

Решение. Јасно е дека $x=2$ е решение. Нека $f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Ако равенката $f(x)=0$ има две решенија x_1 и x_2, имаме $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$. Функцијата f ги исполнува условите од теоремата Рол на интервалот $\left[x_1,x_2\right]$, па постои $c\in\mathbb{R}$ за кое $f'(c)=0$. Но, тоа не е можно, заради

$$f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x\right)\ln\frac{4}{5}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}.\ \square$$

Пример 3. Определи ги функциите со особина $f'\left(x\right)=f\left(x\right)$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Познато ни е дека $\left(e^x\right)'=e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Дали постои друга функција со таа особина? Нека f таква што $f'\left(x\right)=f\left(x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Ја разгледуваме функцијата $g\left(x\right)=\dfrac{f(x)}{e^x}$. Таа е диференцијабилна на $\mathbb{R}$ нејзиниот извод е

$$g'\left(x\right)=\frac{f'(x)e^{x}-f(x)e^{x}}{e^{2x}}=\frac{f(x)-f(x)}{e^{x}}=0\,,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Според последицата g е константна функција, т.е. $\dfrac{f(x)}{e^{x}}=C$. Значи, секоја функција со особина $f'\left(x\right)=f\left(x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ е од облик $f\left(x\right)=Ce^{x}$. □

Пример 4. Докажи дека $\left|\sin x\right|\le\left|x\right|$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Прво ќе докажеме за $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Ако $x=0$ важи равенство, па затоа нека $x>0$.

На $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ важи $\sin x\ge 0$ и $x\ge 0$, па треба да докажеме дека $\sin x\le x$. Да ја разгледаме функцијата $f\left(t\right)=\sin t-t$ на $\left[0,x\right]$. Таа е непрекината на $\mathbb{R}$ па и на $\left[0,x\right]$ и диференцијабилна на $\left(0,x\right)$, па ги исполнува условите од теоремата на Лагранж. Значи постои $c\in\left(0,x\right)$ така што $f\left(x\right)-f\left(0\right)=f'\left(c\right)\left(x-0\right)$. Бидејќи $f\left(0\right)=0$ добиваме добиваме $\sin x-x=x\left(\cos c-1\right)$. Бидејќи $\cos c<1$ (заради $c\in\left(0,x\right)$) и $x>0$ следува дека $\sin x-x=x\left(\cos c-1\right)<0$, т.е. $\sin x<x$.

Натаму

- ако $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, заради непарноста на x и $\sin x$ ќе следува тврдењето.

- ако $x>\dfrac{\pi}{2}$ важи $\sin x\le 1<\dfrac{\pi}{2}<x$, па неравенството е точно.

- ако $x<-\dfrac{\pi}{2}$ важи $x<-\dfrac{\pi}{2}\le -1\le\sin x$, па $\left|\sin x\right|\le\left|x\right|$. □

Пример 5. Докажи дека равенката $\ln x+2=x$ има единствено решение на $[2,4]$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f\left(x\right)=\ln x+2-x$ на дадениот интервал. Таа е непрекината на него и важи $f\left(2\right)=\ln 2+2-2=\ln 2>0$ и

$f(4) = \ln 4 + 2 - 4 = \ln 4 - 2 < 0$ заради тоа што $\ln x$ монотоно расте и $\ln 4 < \ln e^2 = 2$. Од непрекинатоста на f следува дека постои $x_0 \in [2,4]$ за кој $f(x_0) = 0$. Бројот x_0 е решение на дадената равенка. Значи, докажавме дека равенката има барем едно решение на $[2,4]$.

Да претпоставиме спротивно, дека равенката има барем две различни решенија x_1 и x_2. Нека $x_1 < x_2$. Заради тоа што x_1 и x_2 се решенија на равенката важи $f(x_1) = f(x_2) = 0$, па функцијата $f(x) = \ln x + 2 - x$ ги исполнува условите од теоремата на Рол на интервалот $[x_1, x_2]$, па постои $c \in (x_1, x_2)$ така што $f'(c) = 0$. Но, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ и заради $x > 2$ добиваме $1 - x < 1 - 2 = -1$ и оттука $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < \frac{-1}{2} < 0$, за секој $x \in [2,4]$. Добивме контрадикција, па не е можно дадената равенка да има две решенија.

Следува равенката има единствено решение на дадениот интервал. □

4.7. Привидно непределени изрази и Лопиталово правило

Видовме дека изразите $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ се неопределени. Но, во некои случаи, со теоремата што ќе ја наведеме може да се определи лимесот $\frac{f(x)}{g(x)}$ кога $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ или $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$. Правилото определено со таа теорема ќе го нарекуваме Лопиталово правило.

Теорема на Лопитал (Guillaume de L'Hopital, 1661-1704).

Нека функциите f и g се диференцијабилни на (a,b) и (b,c), $g'(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ за секој $x \in (a,b) \cup (b,c)$ и нека

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = 0 \text{ или } \lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = \infty.$$

Тогаш ако постои $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ тогаш постои и $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \square$$

Да забележиме дека претходната теорема важи и во случаите $b=\infty$ и $b=-\infty$. Исто така важи и ако наместо $x\to b$ се земе само лев лимес $x\to b^-$ или само десен лимес $x\to b^+$.

Пример 1. 1) Да ги разгледаме функциите $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$ на $[-1,1]$ и нека $x_0=0$. Функциите се непрекинати на $[-1,1]$, диференцијабилни на $(-1,1)$ и важи $f(x_0)=g(x_0)=0$, $g'(x)=1\neq 0$ за секој $x\neq 0$, и постои

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1,$$

па од Лопиталовото правило следува дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

Значи $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2) Нека $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=x$, $x_0=0$, $[a,b]=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

Тогаш $f(0)=\ln(1+0)=0, g(0)=0, g'(x)=1\neq 0$ за секој $x\neq 0$ и постои

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

Од Лопиталовото правило важи $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$.

Значи $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

3) Ако $f\left(x\right)=\ln x$ и $g\left(x\right)=x$, и $x\to 0^+$ имаме $f\left(x\right)\to -\infty$, $\dfrac{1}{g\left(x\right)}\to\infty$ и $g\left(x\right)\neq 0$ и $\left(\dfrac{1}{g\left(x\right)}\right)'\neq 0$ за $x\neq 0$ и постои

$$-\lim_{x\to 0^+}\frac{f'\left(x\right)}{-\left(\frac{1}{g\left(x\right)}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=0.$$

Од Лопиталовото правило имаме

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{-\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{f'\left(x\right)}{-\left(\frac{1}{g\left(x\right)}\right)'} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0\,. \square$$

Забелешка. Во некои случаи не може да се примени теоремата на Лопитал. На пример, ако $f\left(x\right) = x + \sin x$ и $g\left(x\right) = x$ и $x \to \infty$ тогаш не постои

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}.$$

Сепак, заради $0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x}$ добиваме дека $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$, па

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1.\ \square$$

4.8. Формула на Тејлор

Нека функцијата f е дефинирана на интервал D, $\left(n+1\right)$-пати диференцијабилна на тој интервал и нека $a \in D$.

Полиномот

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

се нарекува полином на Тејлор во точката a.

Важи следнава теорема, која ја наведуваме без доказ.

Теорема 1. Нека f е дефинирана на интервал D, $\left(n+1\right)$-пати диференцијабилна на тој интервал и нека $a, b \in D$ се произволни. Тогаш постои точка $u \in D$ која е меѓу a и b за која важи

$$f\left(b\right) - T_n\left(b\right) = \frac{f^{(n+1)}\left(u\right)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.\ \square$$

Значи, ако $a \in D$ е фиксна точка и $x \in D$ е произволно, тогаш од претходната теорема следува дека постои $u \in D$ меѓу a и x така што

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}\left(u\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}\left(u\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Притоа $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\left(u\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ се нарекува остаток.

Нека $\theta=\dfrac{u-a}{x-a}$. Тогаш ако $a<u<x$ имаме $u-a>0$ и $x-a>0$, па $\theta>0$. Од друга страна, $0<u-a<x-a$, па $\theta<1$. Аналогно, ако $x<u<a$, тогаш $u-a<0$ и $x-a<0$, па $\theta>0$, и $x-a<u-a<0$, па $\theta=\dfrac{u-a}{x-a}<1$.

Од $\theta=\dfrac{u-a}{x-a}$ следува дека $u=a+(x-a)\theta$, каде $0<\theta<1$.

Значи, наместо во формата $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\left(u\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, каде што u е меѓу a и x, остатокот може да се запише во формата

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(a+(x-a)\theta\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

каде $0<\theta<1$.

Оваа е најчесто употребувана форма на остатокот.

Ако $a=0$ (т.е. $0\in D$) тогаш полиномот на Тејлор го добива обликот

$$T_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и се нарекува **полином на Меклорен**, а формулата

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}\left(\theta x\right)}{(n+1)!}x^{n+1}+R_n(x)$$

се нарекува **формула на Меклорен**.

Притоа, остатокот во овој случај е

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(\theta x\right)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Ако $x\in D$ е фиксен, тогаш $\left(T_n(x)\right)$ е низа од реални броеви, па од теоремата следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x)=f(x)$ ако и само ако $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Така може да се случи за некои x низата $\left(R_n(x)\right)$ да тежи кон 0 а за други не.

Во наредните примери ќе докажеме, за некои функции, за кои x важи $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Така формулата на Тејлор (и на Меклорен) може да се користи за приближно пресметување на вредностите на некои функции во точка (на пример $\sin 1$). Притоа, пресметувањето се поедноставува, т.е. се сведува на операциите собирање, одземање, множење и делење. Притоа, ќе ја оцениме и точноста со која пресметките се извршени, а $R_n(x)$ ја дава грешката што се прави при тоа.

Пример 1. Нека $f(x)=e^x$. Таа ги исполнува условите од теоремата на Тејлор на $\mathbb{R}$, дефинирана е во $x=0$ и има изводи од произволен ред. Треба да го најдеме n-тиот извод на f, за $n\in\mathbb{N}$. Јасно, тој е $f^{(n)}(x)=e^x$, за секој $n\in\mathbb{N}$, и $f^{(n)}(0)=e^0=1$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Според формулата на Меклорен, имаме дека за секој $x\in\mathbb{R}$, постои $0<\theta<1$ така што

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

каде

$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Нека $x\in\mathbb{R}$ е фиксен. Тогаш

$$\left|R_n(x)\right|=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1}\to 0, \text{ кога } n\to\infty \text{ (својство 8 кај низи).}$$

Од тоа следува дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}\to e^x, \text{ кога } n\to\infty,$$

т.е. важи приближната формула

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}.$$

Специјално за $x=1$ имаме

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right).$$

Значи, со зголемување на n се повеќе се приближуваме до бројот e^x.

Така, можеме да добиеме приближна вредност за бројот e. Ако на пример $n=4$, имаме

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=2.70833$$

а ако $n=6$ имаме

$$e\approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=2.71806.$$

Да ја оцениме точноста на последново приближување. Обично се оценува апсолутната грешка, т.е. апсолутната вредност од разликата меѓу точната и приближната вредност. Во нашиов случај таа грешка е

$$\left|R_6(1)\right|=\frac{e^{\theta\cdot 1}}{(6+1)!}1^{(6+1)}=\frac{e^{\theta}}{7!}.$$

Бидејќи θ не го знаеме, земаме за кое θ грешката е најголема, имајќи предвид дека $0<\theta<1$. Овде $e^{\theta}<e^1=e$, па имаме

$$\left|R_6(1)\right| = \frac{e^\theta}{7!} < \frac{e}{5040} < \frac{2.72}{5040} \approx 0,00054.$$

Значи разликата (по апсолутна вредност) меѓу точната вредност на e и приближувањето што го добивме е помала од $0,0005$. □

Пример 2. Нека $f(x) = \sin x$. Како и во претходниот пример и оваа функција ги исполнува условите од теоремата на Тејлор и $f(0) = 0$.

За изводите добиваме $f^{(4k)}(x) = \sin x$, $f^{(4k+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$ и $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$, за секој $k \in \mathbb{N}$. Според тоа $f^{(4k)}(0) = 0$, $f^{(4k+1)}(0) = 1$, $f^{(4k+2)}(0) = 0$ и $f^{(4k+3)}(0) = -1$, за секој $k \in \mathbb{N}$.

Значи развојот по формулата на Меклорен ќе биде

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x).$$

Притоа, $R_{2n-1}(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\theta x)}{(2n)!}x^{2n}$ и

$$\left|R_{2n-1}(x)\right| = \left|\frac{f^{(2n)}(\theta x)}{(2n)!}x^{2n}\right| = \frac{\left|\sin\theta x\right|}{(2n)!}\left|x\right|^{2n} < \frac{\left|x\right|^{2n}}{(2n)!} \to 0 \text{ кога } n \to \infty.$$

Последново следува од тоа што низата $\dfrac{\left|x\right|^{2n}}{(2n)!}$ е подниза од низата $\dfrac{\left|x\right|^{n}}{n!}$ која конвергира кон 0 (својство 8 кај низи).

Значи и овде за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right) = \sin x.$$

Да пресметаме приближно $\sin 1$ со точност од 10^{-3}.

Значи, $x = 1$ и треба да откриеме до кој n треба да се земе полиномот, за да се добие бараната точност. Тоа ќе го направиме од условот

$$\left|R_{2n-1}(1)\right| = \frac{\left|\sin\theta\cdot 1\right|}{(2n)!}\left|1\right|^{2n} = \frac{\left|\sin\theta\right|}{(2n)!} < 10^{-3}.$$

Повторно допуштаме најголема грешка во однос на θ, и имајќи предвид дека $\left|\sin\theta\right| \le 1$, n го наоѓаме од условот $\dfrac{1}{(2n)!} < 10^{-3}$, т.е. $(2n)! > 1000$. Со проби добиваме дека $n \ge 4$. Следува дека земајќи $n = 4$ ќе ја добиеме бараната точност на $\sin 1$. Се разбира, ако земеме поголем n точноста ќе се зголеми. Така имаме

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1^{2\cdot2-1}}{3!} + \frac{1^{2\cdot3-1}}{5!} - \frac{1^{2\cdot4-1}}{7!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} \approx 0.84147.$$

□

Пример 3. Да забележиме дека функцијата $\ln x$ не може да се развие по формулата на Меклорен, затоа што не е дефинирана во 0.

Затоа, ќе ја разгледаме функцијата $f(x)=\ln(x+1)$. Таа е диференцијабилна од произволен ред на $\left(-1,\infty\right)$ и $f(0)=0$. За изводите имаме

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3}.$$

Ако претпоставиме дека $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\,\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, тогаш за $n+1$ добиваме

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'=\left((-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\right)'=(-1)(-1)^{n-1}\,\frac{n(n-1)!}{(1+x)^{n+1}}=$$
$$=(-1)^{n+1-1}\,\frac{(n+1-1)!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Значи, со математичка индукција ја докажавме формулата

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ \text{за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Сега $f'(0)=1$, $f''(0)=-1!$, $f'''(0)=2!$,...,$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ па развојот е

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

каде што

$$R_n(x)=(-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Ако $\left|x\right|<1$, тогаш $\left|x\right|^{n+1}\to 0$, кога $n\to\infty$.

Уште $1+\theta x>0$, па

$$(1+\theta x)^{n+1}\to\infty,\ \text{т.е.}\ \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}\to 0,\ \text{кога } n\to\infty.\ \text{Следува}$$

$$\left|R_n(x)\right|=\left|(-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right|=\frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\to 0,\ \text{кога } n\to\infty.$$

Ако $x=1$, слично, се добива дека $R_n(1)\to 0$, кога $n\to\infty$.

Сега, ако $x>1$, заради тоа што не се знае θ, може да се случи $R_n(x)$ да не тежи кон 0. Така на пример, ако $x=3$ и $\theta=\dfrac{1}{3}$ ќе добиеме

$$\lim_{n\to\infty} R_n(2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \infty .$$

Според тоа за оваа функција важи формулата на Меклорен само за $x \in \left(-1,1\right]$.

Да пресметаме $\ln 2$ со точност до 10^{-3}.

Сега $x = 1$, па постапувајќи како и во претходниот пример имаме $1 + \theta > 1$ и добиваме

$$\left|R_n(1)\right| = \left|(-1)^n \frac{1^{n+1}}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}\right| = \frac{1}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}} < \frac{1}{n+1}.$$

Решавајќи ја неравенката $\frac{1}{n+1} < 10^{-3}$ добиваме $n > 999$, т.е. $n \geq 1000$. Значи за да се добие бараната точност мора да се развие до 1000-тиот член, т.е.

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1000}.$$

Забележуваме дека треба да се земат голем број членови за да се добие бараната точност. Затоа да ја разгледаме функцијата $g(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$. Дефиниционата област на оваа функција е $\left(-1,1\right)$ и $g(0) = 0$. Постапувајќи како претходно за $x \in \left(-1,1\right)$ наоѓаме дека

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ... - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R^1_{2n-1}(x),$$

каде што

$$R^1_{2n-1}(x) = -\frac{x^{2n}}{(2n)(1+\theta_1 x)^{2n}}.$$

Веќе докажавме дека

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{2n-2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n-1}(x),$$

па имаме

$$g\left(x\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x) = 2\left(-x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - ... - \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + R^1_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x)$$

.

Користејќи ја последнава формула да пресметаме $\ln 2$ со точност од 10^{-3}.

Решавајќи ја равенката $\frac{1-x}{1+x}=2$ добиваме дека $x=-\frac{1}{3}$ па следува $-\frac{1}{3}\in\left(-1,1\right)$. Притоа заради $0<\theta_1<1$ и $0<\theta<1$ добиваме $\frac{2}{3}<1-\frac{\theta_1}{3}<1$ и $\frac{2}{3}<1-\frac{\theta}{3}<1$, па за остатокот имаме

$$\left|R^1_{2n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)+R_{2n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right|=\left|-\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n}}{(2n)\left(1-\frac{\theta_1}{3}\right)^{2n}}+(-1)^{2n}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n}}{(2n)\left(1-\frac{\theta}{3}\right)^{2n}}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{3^{2n}(2n)}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\theta_1}{3}\right)^{2n}}+\frac{1}{\left(1-\frac{\theta}{3}\right)^{2n}}\right)<\frac{1}{3^{2n}(2n)}\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}(2n)}\to 0.$$

Со проби наоѓаме дека $\frac{1}{2^{2n}(2n)}<10^{-3}$, т.е. $2^{2n}(2n)>1000$ важи за $n\geq 4$. Значи во овој случај за да се добие бараната точност треба да се земе $n=4$ и

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^5-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^7\right)=\frac{22739}{32805}\approx 0.693157.\ \square$$

4.9. Растење и опаѓање на функции. Локални екстреми. Конвексност и конкавност. Превојни точки

Теорема. Нека функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна функција на $(a,b)\subseteq D$. Тогаш таа

1) (строго) расте на (a,b) ако и само ако $f'(x)>0$ за секој $x\in(a,b)$ и

2) (строго) опаѓа на (a,b) ако и само ако $f'(x)<0$ за секој $x\in(a,b)$. $\square$

Пример. 1) За функцијата $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ важи $f'(x)=2x$. Значи f расте ако и само ако $f'(x)=2x>0$, т.е. $x>0$. Слично, f опаѓа ако и само ако $f'(x)=2x<0$, т.е. $x<0$.

Да заклучиме: $f(x)$ расте на $(0,\infty)$ и опаѓа на $(-\infty,0)$.

2) Нека $f(x)=\mathrm{arctg}x$, $x\in\mathbb{R}$. За неа важи $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, па $f'(x)>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Следува дека f расте на $\mathbb{R}$. $\square$

Од теоремата на Ферма следува дека ако функцијата $y = f(x)$ има екстрем во точката x_0 тогаш $f'(x_0) = 0$. Видовме дека обратното тврдење не мора да важи, т.е. може да се случи $f'(x_0) = 0$ во точка x_0 но таа точка да не е локален екстрем за f. Наредното тврдење ги дава условите при кои точката x_0 за која важи $f'(x_0) = 0$, е локален екстрем и од каков вид е тој екстрем.

Теорема. Нека функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 е двапати диференцијабилна и нека $f'(x_0) = 0$. Тогаш важи

1) ако $f''(x_0) < 0$, тогаш функцијата f во x_0 има локален максимум

2) ако $f''(x_0) > 0$, тогаш функцијата f во x_0 има локален минимум. □

Значи, за да ги определиме локалните екстреми на двапати диференцијабилната функција f потребно е:

1) да ги определиме изводите $f'(x)$ и $f''(x)$

2) да ја решиме равенката $f'(x) = 0$

3) да го испитаме знакот на $f''(x)$ во секоја точка x_0 која е решение на равенката $f'(x) = 0$.

Примери. 1) Нека $f(x) = x^2$. Тогаш $f'(x) = 2x$ и $f''(x) = 2$. Имаме

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

па точката за која е можен локален екстрем е $x_0 = 0$. Бидејќи $f''(x) = 2 > 0$ за секој x следува дека точката $(0,0)$ е локален минимум за f.

2) Нека $f(x) = \sin x$. Тогаш $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ и

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Во точките $x_{2k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ важи $f''(x_{2k}) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1 < 0$ па точките $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$ се точки на локален максимум за секој $k \in \mathbb{Z}$.

Слично, во точките $x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ важи

$$f''(x_{2k+1}) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = 1 > 0,$$

па точките $\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -1\right)$ се локални минимуми за f, за секој $k \in \mathbb{Z}$. □

Да забележиме дека функцијата може да има локален екстрем и во точки во кои нема прв извод, а е непрекината во нив. Нека таква точка е c. Проверката за видот на локалниот екстрем (и дали го има) во c се одвива на следниов начин:

Ако постои интервал (c_1, c) така што на тој интервал f расте (т.е. $f'(x) > 0$ за секој $x \in (c_1, c)$) и постои интервал (c, c_2) така што на тој интервал f опаѓа (т.е. $f'(x) < 0$ за секој $x \in (c, c_2)$) тогаш c е локален максимум.

Ако постои интервал (c_1, c) така што на тој интервал f опаѓа (т.е. $f'(x) < 0$ за секој $x \in (c_1, c)$) и постои интервал (c, c_2) така што на тој интервал f расте (т.е. $f'(x) > 0$ за секој $x \in (c, c_2)$) тогаш c е локален минимум.

Притоа, претпоставуваме дека на (c_1, c) и (c, c_2) функцијата има извод.

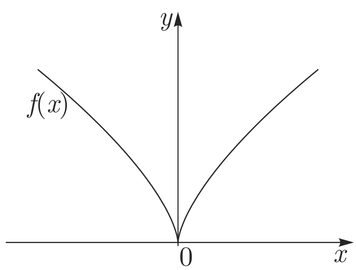
Пример. Нека $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Оваа функција е непрекината во секој $x \in \mathbb{R}$. Уште $f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ постои во секој $x \neq 0$. Но, за $x = 0$ имаме

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} \to \begin{cases} +\infty, & \Delta x \to 0^+ \\ -\infty, & \Delta x \to 0^- \end{cases}$$

Значи, во 0 оваа функција нема извод (а е непрекината во 0).

Сепак, на $(-1, 0)$ првиот извод на функцијата е негативен па f опаѓа, а на $(0,1)$ тој е позитивен па f расте. Следува дека точката 0 е локален минимум.

Оваа ситуација графички изгледа вака



□

Дефиниција. За диференцијабилната функција f велиме дека е

1) **конкавна** („држи вода“) на $(a,b) \subseteq D$ ако коефициентот на правец на тангентата расте на (a,b), т.е. f' расте на (a,b).

2) **конвексна** („не држи вода“) на $(a,b) \subseteq D$ ако коефициентот на правец на тангентата опаѓа на (a,b), т.е. f' опаѓа на (a,b).

Притоа

$$f' \text{ расте на } (a,b) \text{ ако и само ако } f'' > 0 \text{ на } (a,b)$$

и

$$f' \text{ опаѓа на } (a,b) \text{ ако и само ако } f'' < 0 \text{ на } (a,b).$$

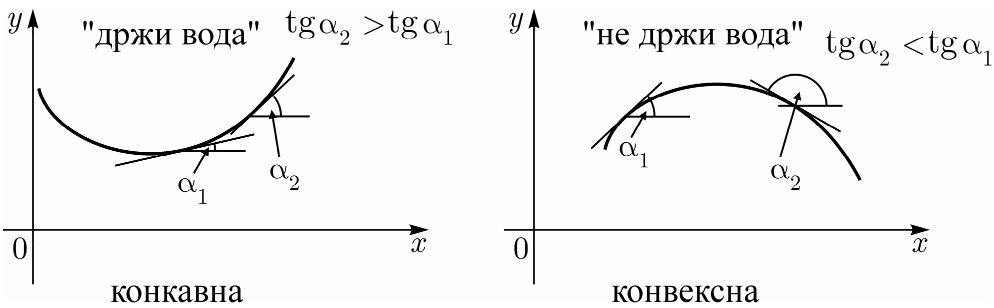
Важи следнава теорема.

Теорема. Нека $y = f(x)$ е двапати диференцијабилна функција на $(a,b) \subseteq D$. Тогаш таа е:

1) конкавна на (a,b) ако и само ако $f''(x) > 0$ за секој $x \in (a,b)$

2) конвексна на (a,b) ако и само ако $f''(x) < 0$ за секој $x \in (a,b)$. $\square$

Геометриски гледано,

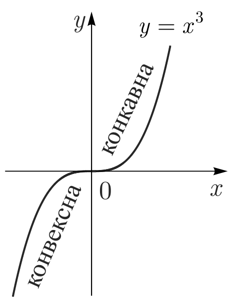


Примери. Нека $f(x) = x^3$. Тогаш $f'(x) = 3x^2 > 0$ за секој $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, па следува дека f расте на $\mathbb{R}$.

За f'' имаме $f''\left(x\right) = 6x$, па

$f''(x) > 0$ ако и само ако $x > 0$, па на $\left(0,\infty\right)$ функцијата е конкавна и

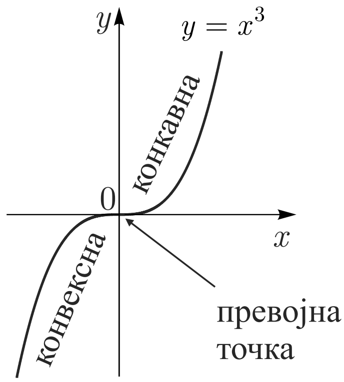
$f''(x) < 0$ ако и само ако $x < 0$, па на $\left(-\infty,9\right)$ функцијата е конвексна.



2) Нека $f(x) = e^x$. Тогаш $f'(x) = e^x > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$ и $f''(x) = e^x > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$, па функцијата е строго конкавна на $\mathbb{R}$. $\square$

Дефиниција. Нека функцијата f е непрекината на $[a,b] \subseteq D$ и диференцијабилна на (a,b). Точката $x_0 \in (a,b)$ се нарекува **превојна точка** на функцијата f ако f е конвексна на (a,x_0) и конкавна на (x_0,b) или конкавна на (a,x_0) и конвексна на (x_0,b).

Пример 1.



Теорема. Нека функцијата f е трипати диференцијабилна во некоја околина на x_0, и нека $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$. Тогаш точката x_0 е превојна. □

Практично, за определување на превојните точки на функцијата $y=f(x)$ треба:

1) да го најдеме $f''(x)$

2) да ја решиме равенката $f''(x)=0$

3) да провериме за кои решенија x_0 на равенката $f''(x)=0$ важи $f'''(x_0)\neq 0$.

Пример 2. Нека $f(x)=x^3$. Тогаш $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$ и $f'''(x)=6$. Равенката $f''(x)=0$, т.е. $6x=0$ има едно решение $x_0=0$. Бидејќи $f'''(0)=6\neq 0$ следува дека точката $(0,0)$ е превојна. □

4.10. Испитување на текот и скицирање на графикот на функција

За да го испитаме текот и да го скицираме графикот на функцијата f зададена со аналитички израз, обично постапуваме по следниов редослед:

1) Ја определуваме дефиниционата област на f

2) Испитуваме специјални својства на функцијата, како парност, периодичност.

3) Ги одредуваме нулите не функцијата (пресечните точки со x-оската) и пресечните точки со y-оската.

4) Го наоѓаме првиот извод на функцијата и ги определуваме интервалите на монотоност (растење и опаѓање).

5) Го наоѓаме вториот извод на функцијата и ги определуваме локалните екстреми.

6) Ги определуваме интервалите на конвексност и конкавност и превојните точки.

7) Ги наоѓаме асимптотите на функцијата.
8) Го скицираме графикот на функцијата.

Пример 1. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

Решение. 1) Функцијата е дефинирана за сите $x\in\mathbb{R}$ за кои $x-1\neq 0$, т.е. $x\neq 1$. Значи $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2) Бидејќи $f(-x)=\dfrac{(-x-3)^2}{4(-x-1)}=-\dfrac{(x+3)^2}{4(x+1)}$ следува дека

$$f(-x)\neq f(x) \text{ и } f(-x)\neq -f(x),$$

па функцијата не е ни парна ни непарна. Јасно е дека таа не е ни периодична.

3) Заради

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

следува дека точката $x=3$ е нула на f, т.е. $(3,0)\in\Gamma_f$ е пресечна точка на графикот со x-оската.

Ако, $x=0$ тогаш $y=-\dfrac{9}{4}$, па точката $\left(0,-\dfrac{9}{4}\right)\in\Gamma_f$ е пресечна точка на графикот со y-оската.

4) Заради $f'(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$ имаме

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$$

па следува дека

$$f \text{ расте на } (-\infty,-1)\cup(3,\infty) \text{ и опаѓа на } (-1,3).$$

Притоа, $x=3$ и $x=-1$ се стационарни точки.

5) Од $f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$ добиваме $f''(3)=\dfrac{1}{4}>0$, па точката $(3,0)$ е локален минимум и $f''(-1)=-\dfrac{1}{4}<0$, па $(-1,-2)$ е локален максимум.

6) Бидејќи

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)^3>0 \Leftrightarrow x>1$$

следува дека f е конкавна на $(1,\infty)$ и е конвексна на $(-\infty,1)$.

Заради $f''(x)\neq 0$ за секој $x\in\mathbb{R}$ следува дека f нема превојни точки.

7) Бидејќи $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}=-\infty$ следува дека функцијата нема хоризонтални асимптоти.

Единствен кандидат за вертикална асимптота е правата $x=1$. Заради

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\infty \text{ и } \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=-\infty$$

следува дека таа права е вертикална асимптота.
Од

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4}=k$$

и

$$b=\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)-kx\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4x-4}=-\frac{5}{4}$$

следува дека правата $y=\dfrac{x-5}{4}$ е коса асимптота кога $x\to\infty$.

Слично, заради

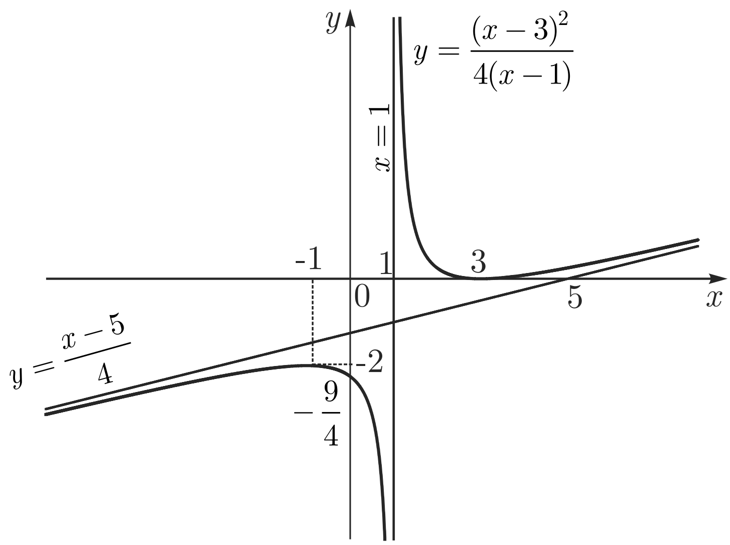
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4}$$

и

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x)-kx\Big)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x+9}{4x-4}=-\frac{5}{4}$$

следува дека таа права е коса асимптота и кога $x\to-\infty$.

8) Од претходното следува дека графикот на f изгледа вака



□

Да забележиме дека треба да се внимава на функциите кои не се диференцијабилни во некоја точка. Може да се случи во таа точка да има локален екстрем, и тој не може да се најде со извод. Еден таков пример е функцијата $f\left(x\right)=x\,|\,x-1\,|$. Таа во точката $\left(1,0\right)$ има локален минимум а нема извод. Кај оваа функција испитувањето на текот треба да се врши посебно на $\left(-\infty,1\right)$ и посебно на $\left(1,\infty\right)$.

Исто така треба да се внимава и на асимптотите. Може да се случи да има вертикална асимптота само од едната страна на некоја точка, а од другата лимесот да е конечен. На пример $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{x},\ x>0\\ 3,\ x\le 0\end{cases}$ кога $x\to 0$.

4.11. Изводи на функции $y=y(x)$ зададени со параметарските равенки, $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, $t\in I$.

Нека функциите $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ се диференцијабилни. За да не дојде до забуна по која променлива се бара изводот, со y' ќе го означуваме изводот на функцијата $y=y(x)$ по x, а со $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ (или со $\dot{x}$ и $\dot{y}$) изводите на φ и ψ по t, соодветно.

Во овој случај функцијата $y=y(x)$ е добиена со елиминација на параметарот t, па φ има инверзна и $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$.

Ако $\dot{\varphi}(t)\neq 0$, добиваме

$$y'=\psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)'=\dot{\psi}(t)\frac{1}{\dot{\varphi}(t)}=\frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}.$$

Значи, ако $x=x(t), y=y(t)$ и $y=y(x)$ ги исполнуваат претходните услови, тогаш кратко ќе пишуваме $y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. На овој начин y' е изразен преку t.

Пример. Со $x=\cos t, y=\sin t, 0\le t\le\pi$ е претставена функцијата $y=\sqrt{1-x^2}$. На интервалот $\left(0,\pi\right)$ важи $\dot{x}=-\sin t\neq 0$, па $\dot{x}=-\sin t, \dot{y}=\cos t$. Следува дека $y'=-\frac{\cos t}{\sin t}$. На овој начин и y' е изразен преку параметарот t.

Од друга страна

$$y'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\cos t}{\sqrt{\sin^2 t}}=-\frac{\cos t}{|\sin t|}=-\frac{\cos t}{\sin t}$$

бидејќи $0<t<\pi$ па $\sin t>0$.

4.12. Извод на имплицитно зададена функција

Кај имплицитно зададената функција $F(x,y)=0$, и $y=y(x)$, каде што y е диференцијабилна, бараме извод по x од двете страни на равенството $F(x,y)=0$, земајќи предвид дека $y=y(x)$.

Пример 1. Нека за функцијата $y=y(x)$ е важи $x^2+y^2=1$, т.е. y е зададена имплицитно. Барајќи извод од двете страни на равенството добиваме $2x+2yy'=0$, т.е. $y'=-\dfrac{x}{y}$.

Да забележиме дека овде има барем две функции за кои важи $x^2+y^2=1$, и тоа $y_1=\sqrt{1-x^2}$ и $y_2=-\sqrt{1-x^2}$. Но и за двете важи $y_1'=-\dfrac{x}{y_1}$ и $y_2'=-\dfrac{x}{y_2}$.

Кога бараме извод од имплицитно зададената функција $y=y(x)$ треба да водиме сметка за дефиниционите области на функцијата и равенката со која се зададени. Така, во претходниот пример од равенката добиваме $1\le y,x\le 1$, а тоа е и дефинициона област на функцијата y.

Но, ако $y=y(x)$ е зададена со $3^x-x^y=0$, дефиниционата област на равенката е $x\in\left(0,\infty\right)$, па и дефиниционата област на функцијата y мора да е подмножество од $\left(0,\infty\right)$. Понатаму, ќе сметаме дека овој услов е исполнет.

4.13. Решени задачи

Извод по дефиниција

1. Да се пресмета по дефиниција изводот на следниве функции:

а) $y=\sqrt{x}$ б) $y=2x+1$ в) $y=x^3-1$ г) $y=1$

Решение :

а) $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

б) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2(x+\Delta x)+1-2x-1}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$

в) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-1-x^3+1}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2) = 3x^2$

г) $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1-1}{\Delta x} = 0$

Извод на сума, разлика, производ, количник

2. Да се пресметаат изводите:

а) $y = \dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^7}$ б) $y = \left(1+3x^3\right)\left(1+2\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x^3}\right)$

в) $y = 2\sqrt{x\sqrt{x}}+\mathrm{arctg}x$ г) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}}+e^x$

д) $y = 3^x+(\arcsin x)\,\mathrm{tgx}$ ѓ) $y = \dfrac{\sin x-\cos x}{\ln x}$

е) $y = \dfrac{\arccos x}{1-x^2}$ ж) $y = \mathrm{th}x+\mathrm{cth}x$

Решение:

а) $y = \dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^7} = \dfrac{x^5}{5}-\dfrac{2x^3}{3}+x^{-1}-x^{-7}$

$y' = \dfrac{5x^4}{5}-\dfrac{2\cdot 3x^2}{3}+(-1)x^{-2}-(-7)x^{-8} = x^4-2x^2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{7}{x^8}$

б) $y = \left(1+3x^3\right)\left(1+2\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x^3}\right)$

$y' = \left(1+3x^3\right)'\left(1+2\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x^3}\right)+\left(1+3x^3\right)\left(1+2\sqrt{x}\right)'\left(1-\sqrt{x^3}\right)+$

$+\left(1+3x^3\right)\left(1+2\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x^3}\right)' = 9x^2\left(1+2\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x^3}\right)+$

$$+\left(1+3x^3\right)\frac{2}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x^3}\right)+\left(1+3x^3\right)\left(1+2\sqrt{x}\right)(-x^{\frac{3}{2}})'=$$

$$=9x^2\left(1+2\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x^3}\right)+\left(1+3x^3\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x^3}\right)+$$

$$+\left(1+3x^3\right)\left(1+2\sqrt{x}\right)(-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})=9x^2\left(1+2\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x^3}\right)+$$

$$+\left(1+3x^3\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x^3}\right)-\frac{3\sqrt{x}}{2}\left(1+3x^3\right)\left(1+2\sqrt{x}\right)$$

в) $y=2\sqrt{x\sqrt{x}}+\operatorname{arctg}x=2\sqrt{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}+\operatorname{arctg}x=2\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}+\operatorname{arctg}x=$

$=2x^{\frac{3}{4}}+\operatorname{arctg}x$

$$y'=2\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{3}{2\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{1+x^2}$$

г) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}+e^x=x^{\frac{-2}{3}}-2x^{\frac{-3}{5}}+e^x$

$$y'=\frac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}}-2\cdot(\frac{-3}{5})x^{\frac{-8}{5}}+e^x=\frac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}}+\frac{6}{5\sqrt[5]{x^8}}+e^x$$

д) $y=3^x+(\arcsin x)\,\mathrm{tgx}$

$$y'=3^x\ln 3+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}tgx+\frac{\arcsin x}{\cos^2 x}$$

ѓ) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\ln x}$

$$y'=(\frac{\sin x-\cos x}{\ln x})'=\frac{(\cos x+\sin x)\ln x-(\sin x-\cos x)\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

е) $y=\frac{\arccos x}{1-x^2}$

$$y' = \left(\frac{\arccos x}{1-x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2) - \arccos x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{1-x^2} - \arccos x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x\cdot\arccos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$$

ж) $y = \mathrm{th}x + \mathrm{cth}x$

$$y' = (\mathrm{th}x + \mathrm{cth}x)' = (\mathrm{th}x)' + (\mathrm{cth}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} - \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x\cdot \mathrm{sh}^2 x} =$$

$$= \frac{-1}{\mathrm{ch}^2 x\cdot\mathrm{sh}^2 x} = \frac{-1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{-1}{\frac{(e^{2x} - e^{-2x})^2}{16}} =$$

$$= \frac{-4}{\frac{(e^{2x} - e^{-2x})^2}{4}} = \frac{-4}{\frac{(e^{2x} - e^{-2x})^2}{2^2}} = \frac{-4}{\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^2} = \frac{-4}{\mathrm{sh}^2(2x)}$$

Извод на сложена функција

3. Да се пресметаат изводите на следниве функции:

а) $y = \left(1 + \frac{3x^5}{2}\right)^7$ б) $y = \sqrt{\frac{2+3x}{2-3x}}$ в) $y = \ln\left(3x^5 + 4\sin x\right)$

г) $y = 3\mathrm{tg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ д) $y = \ln\left(\sin^2(3x)\right)$ ѓ) $y = e^{\cos^2 x}$

е) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{1-x^2}$ ж) $y = \arcsin\frac{1+x}{1-x}$ з) $y = \cos(\cos(\cos x))$

ѕ) $y = \sin^n x\cdot\cos(nx)$

Решение:

а) $y = \left(1 + \frac{3x^5}{2}\right)^7$

$$y' = \left(\left(1 + \frac{3x^5}{2}\right)^7\right)' = 7\left(1 + \frac{3x^5}{2}\right)^6 \left(1 + \frac{3x^5}{2}\right)' = 7\left(1 + \frac{3x^5}{2}\right)^6 \frac{3\cdot 5x^4}{2} =$$

$$= \left(1 + \frac{3x^5}{2}\right)^6 \frac{105x^4}{2}$$

б) $y = \sqrt{\dfrac{2+3x}{2-3x}}$

$$y' = \left(\sqrt{\frac{2+3x}{2-3x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2+3x}{2-3x}}}\left(\frac{2+3x}{2-3x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}} \cdot \frac{3\left(2-3x\right)-\left(2+3x\right)(-3)}{\left(2-3x\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}} \cdot \frac{6-9x+6+9x}{\left(2-3x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}} \cdot \frac{12}{\left(2-3x\right)^2} = \sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}} \cdot \frac{6}{\left(2-3x\right)^2}$$

в) $y = \ln\left(3x^5 + 4\sin x\right)$

$$y' = \left(\ln\left(3x^5 + 4\sin x\right)\right)' = \frac{\left(3x^5 + 4\sin x\right)'}{3x^5 + 4\sin x} = \frac{15x^4 + 4\cos x}{3x^5 + 4\sin x}$$

г) $y = 3\operatorname{tg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

$$y' = \left(3\operatorname{tg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{3(\sqrt{x^2+1})'}{\cos^2(\sqrt{x^2+1})} = \frac{3\,\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\cos^2(\sqrt{x^2+1})} =$$

$$= \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\cos^2(\sqrt{x^2+1})}$$

д) $y = \ln\left(\sin^2(3x)\right)$

$$y' = \left(\ln\left(\sin^2(3x)\right)\right)' = \frac{2\sin(3x)\cos(3x)\cdot 3}{\sin^2(3x)} = \frac{6\sin(3x)\cos(3x)}{\sin^2(3x)} =$$

$$= \frac{6\cos(3x)}{\sin(3x)} = 6\operatorname{ctg}(3x)$$

ѓ) $y = e^{\cos^2 x}$

$$y' = \left(e^{\cos^2 x}\right)' = e^{\cos^2 x}\left(\cos^2 x\right)'$$

$$= e^{\cos^2 x}2\cos x\left(\cos x\right)' = e^{\cos^2 x}2\cos x\left(-\sin x\right) = -\sin(2x)e^{\cos^2 x}$$

е) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}$

$$y'=(\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2})'=\frac{(\sqrt{1-x^2})'}{1+1-x^2}=\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2-x^2}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}$$

ж) $y=\arcsin\dfrac{1+x}{1-x}$

$$y'=\left(\arcsin\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x)^2-(1+x)^2}{(1-x)^2}}}\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{(1-x)}{\sqrt{1-2x+x^2-(1+2x+x^2)}}\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)\sqrt{-4x}}$$

з) $y'=\Big(\cos(\cos(\cos x))\Big)'=-\sin(\cos(\cos x))\Big(\cos(\cos x)\Big)'=$

$$=-\sin(\cos(\cos x))\Big(-\sin(\cos x)(\cos x)'\Big)=$$

$$=\sin(\cos(\cos x))\sin(\cos x)\Big(-\sin x\Big)=$$

$$=-\sin(\cos(\cos x))\sin(\cos x)\Big(\sin x\Big)$$

ѕ) $y'=\Big(\sin^n x\cdot\cos(nx)\Big)'=$

$$=n\sin^{n-1}x\cos x\cdot\cos(nx)+\sin^n x(-\sin(nx)n)=$$

$$=n\sin^{n-1}x(\cos x\cdot\cos(nx)-\sin x\sin(nx))=$$

$$=n\sin^{n-1}x\cdot\cos(x+nx)=n\sin^{n-1}x\cdot\cos\Big[x(1+n)\Big]$$

Изводи на функции зададени во параметарски вид

4. Да се пресметаат изводите:

а) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$

б) $x=a(\ln(\operatorname{tg}\dfrac{t}{2})+\cos t-\sin t)$, $y=a(\sin t+\cos t)$

Решение:

а) $\dot{x} = e^t \cos t - e^t \sin t\,,\ \dot{y} = e^t \sin t + e^t \cos t\,.$

За првиот извод на функцијата y имаме:

$$y\,' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}\quad .$$

б) За првиот извод на функцијата y имаме

$$y\,' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a(\cos t - \sin t)}{a(\frac{1}{\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \sin t - \cos t)} = \frac{a(\cos t - \sin t)}{a(\frac{1}{\sin t} - \sin t - \cos t)} =$$

$$= \frac{\cos t - \sin t}{\frac{1 - \sin^2 t - \sin t\cos t}{\sin t}} = \frac{\cos t - \sin t}{\frac{\cos^2 t - \sin t\cos t}{\sin t}} = \frac{\cos t - \sin t}{\frac{\cos t(\cos t - \sin t)}{\sin t}} =$$

$$= \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t$$

каде што

$$\dot{x} = a(\frac{1}{\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2} - \sin t - \cos t)\,,\quad \dot{y} = a(\cos t - \sin t)\,.$$

Изводи на имплицитно зададени функции

5. Да се најде изводот на функциите зададени во имплицитен вид, т.е. $y = y(x)$:

а) $a^x - e^{x-y} = 0$ б) $a^{x-y} - x^y = 0\,,\ x > 0$ в) $\arcsin\frac{x}{y} - \cos x = 0$

Решение:

а) Диференцирајќи ја левата и десната страна на равенката, добиваме:

$$a^x - e^{x-y} = 0$$
$$a^x \ln a - e^{x-y}(1 - y') = 0$$
$$a^x \ln a - e^{x-y} + y' e^{x-y} = 0$$

Ако го изразиме y' и замениме од првото равенство $a^x = e^{x-y}$, добиваме:

$$y' = \frac{e^{x-y} - a^x \ln a}{e^{x-y}} = \frac{a^x - a^x \ln a}{a^x} = 1 - \ln a$$

б) $a^{x-y} - x^y = 0$

Изводот ќе го најдеме така што прво ќе логаритмираме:

$$a^{x-y} = x^y$$
$$(x-y)\ln a = y \ln x$$

Потоа ја диференцираме левата и десната страна на равенката:

$$(1 - y')\ln a = y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} \quad \text{или} \quad \ln a - y' \ln a = y' \ln x + \frac{y}{x}$$

$$y'(\ln x + \ln a) = \ln a - \frac{y}{x}, \quad \text{значи:} \quad y' = \frac{\ln a - \frac{y}{x}}{\ln x + \ln a} = \frac{x \ln a - y}{x \ln(ax)}$$

в) $\arcsin \dfrac{x}{y} - \cos x = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \left(\frac{x}{y}\right)' + \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = -\sin x$$

$$y - xy' = -y\sqrt{y^2 - x^2}\,\sin x$$

$$y' = \frac{y + y\sqrt{y^2 - x^2}\,\sin x}{x} = \frac{y(1 + \sin x\sqrt{y^2 - x^2})}{x}.$$

6. Да се пресметаат изводите:

а) $x\cos y - \sin x + y\cos x = 0$ **б)** $x^y - y^x = 0$ **в)** $y = x^x$

г) $y = \cos x^{\sin x}$

Решение:

а) $$\cos y - x\sin y \cdot y' - \cos x + y'\cos x - y\sin x = 0$$
$$-x\sin y \cdot y' + y'\cos x = \cos x - \cos y + y\sin x$$
$$y'(\cos x - x\sin y) = \cos x - \cos y + y\sin x$$
$$y' = \frac{\cos x - \cos y + y\sin x}{\cos x - x\sin y}$$

б) Почетната равенка е еквивалентна со $y\ln x = x\ln y$. Со диференцирање на двете страни од равенката добиваме

$$y'\ln x + y\cdot\frac{1}{x} = \ln y + x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'.$$

Одовде,

$$y'(\ln x - \frac{x}{y}) = \ln y - \frac{y}{x}, \text{ т.е. } y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

в) Прв начин:

$$y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$$
$$y' = e^{x\ln x}\cdot(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Друг начин за да се најде овој извод е со логаритмирање на двете страни на функцијата, а потоа бараме извод од имплицитно зададна функција. Па со логаритмирање имаме : $\ln y = x\ln x$, од каде со диференцирање на двете страни на равенката се добива

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + 1, \text{ т.е. } y' = y(\ln x + 1), \text{ па } y' = x^x(\ln x + 1).$$

г) Прв начин:

$$y = \cos x^{\sin x} = e^{\ln\cos x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln\cos x}$$

За изводот на функцијата имаме:

$$y' = e^{\sin x\ln\cos x}(\cos x\cdot\ln\cos x - \sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x) =$$
$$= e^{\sin x\ln\cos x}(\cos x\cdot\ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}) = \cos x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}).$$

Втор начин: со логаритмирање на двете страни на равенката добиваме дека $\ln y = \sin x\ln\cos x$, па со диференцирање на двете страни на равенката добиваме

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x \cdot \ln\cos x - \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x$$

од каде што

$$y' = \cos x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}).$$

Тангента и нормала

7. Да се напише равенка на тангента и нормала на кривата $y = \ln(3x)$ во точката $A\left(1, \ln 3\right)$

Решение.

$y' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$. Равенката на тангентата е

$$y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

Ги заменуваме координатите на допирната точка $A\left(1, \ln 3\right)$ и вредноста на изводот во $x_0 = 1$, $f'\left(1\right) = 1$. За равенката на тангентата се добива:

$$y - \ln 3 = x - 1$$

Равенката на нормалата е

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right)$$

По заменување на координатите на допирната точка и вредноста на изводот во допирната точка, за равенката на нормалата се добива

$$y - \ln 3 = -\left(x - 1\right)$$

8. Во кои точки тангентата на кривата $y = x^3 + x - 2$ е паралелна со правата $y = 4x - 1$.

Решение:

Коефициентот на правецот на тангентата во точката $M(x_0, y_0)$ е $f'(x_0) = 3x_0^{\ 2} + 1$. Од тоа што тангентата е паралелна со правата $y = 4x - 1$, имаме дека нивните коефициенти на правци им се еднакви, т.е. $3x_0^{\ 2} + 1 = 4$, од каде што се добива дека $x_{0_1} = -1$, $x_{0_2} = 1$. Значи бараните точки се A(-1,-4) и B(1,0).

9. Покажи дека тангентата на кривата $y = 2x^5 + x^3 + 2x - 3$ во секоја точка со x – оската зафаќа остар агол**.**

Решение:

Изводот на функцијата y во која било точка е $y' = 10x^4 + 3x^2 + 2$, кој е позитивен за кој било x. Тоа значи дека тангенсот од аголот што го зафаќа тангентата со позитивниот дел од x – оската е поголем од нула, а тоа пак повлекува дека аголот којшто тангентата го зафаќа со позитивниот дел од x – оската е остар.

10. Да се состави равенка на нормала на кривата $y = x\ln x$ која е паралелна со правата $2x - 3y + 3 = 0$.

Решение:

$$y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Коефициентот на правецот на нормалата е

$$k_n = \frac{-1}{y'(x_0)} = \frac{-1}{\ln x_0 + 1}$$

Коефициентот на правецот на правата го наоѓаме од равенката

$$y = \frac{2x+3}{3} = \frac{2}{3}x + 1$$

Значи коефициентот на правецот на правата е $k_p = \dfrac{2}{3}$. Од $k_n = k_p$ добиваме:

$\dfrac{-1}{\ln x_0 + 1} = \dfrac{2}{3}$, односно $2\ln x_0 + 2 = -3$, $2\ln x_0 = -5$,

$x_0 = e^{\frac{-5}{2}}$, $y_0 = x_0 \ln x_0 = e^{\frac{-5}{2}} \ln\left(e^{\frac{-5}{2}}\right) = \dfrac{-5}{2}\cdot e^{\frac{-5}{2}}$. Значи, точката M_0 во која треба да се повлече нормалата е $M_0\left(e^{\frac{-5}{2}}, \dfrac{-5}{2}\cdot e^{\frac{-5}{2}}\right)$. За равенката на нормалата добиваме:

$$y + \frac{5}{2}\cdot e^{\frac{-5}{2}} = \frac{2}{3}\left(x - e^{\frac{-5}{2}}\right)$$

11. Од точката A(4,1) да се повлече тангента на кривата $y=\dfrac{x-1}{x}$.

Решение:

$y'=\dfrac{x-(x-1)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}$

Ако допирната точка ја означиме со M(x_0,y_0), равенката на тангентата ќе биде:

$$y-y_0=\frac{1}{x_0^2}(x-x_0) \quad (1)$$

Бидејќи тангентата треба да минува низ A(4,1), координатите на A треба да ја задоволуваат равенката на тангентата, па ако ги замениме нив во равенката (1) на местото од x и y, добиваме:

$$1-y_0=\frac{1}{x_0^2}(4-x_0) \quad (2)$$

Бидејќи допирната точка M(x_0,y_0) лежи на кривата, важи:

$$y_0=\frac{x_0-1}{x_0} \quad (3)$$

Од равенките (2) и (3) ќе ги најдеме x_0 и y_0:

$$1-\frac{x_0-1}{x_0}=\frac{1}{x_0^2}(4-x_0)$$

$$\frac{x_0-x_0+1}{x_0}=\frac{1}{x_0^2}(4-x_0)$$

$$1=\frac{4-x_0}{x_0}$$

односно $x_0=2$, а $y_0=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Значи допирната точка е M(2, $\dfrac{1}{2}$), па равенката на тангентата ќе биде:

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{x}{4}.$$

12. Тангентата на кривата $y=\frac{2}{x}$ ги сече координатните оски во точки A и B. Да се покаже дека триаголникот Δ OAB има константна плоштина.

Решение:

$y\,'=\frac{-2}{x^2}$**.** Ако M(x_0, y_0) е допирната точка на тангентата и кривата, равенката на тангентата ќе биде:

$$y-y_0=\frac{-2}{x_0^2}(x-x_0) \qquad (1)$$

Сега ќе ги најдеме пресеците на тангентата со координатните оски:
Пресекот со x - оската ќе го најдеме кога во (1) ќе ставиме $y=0$:

$0-y_0=\frac{-2}{x_0^2}(x-x_0)$, односно $y_0=\frac{2}{x_0^2}(x-x_0)$. Од овде ќе го најдеме x:

$\frac{x_0^2 y_0}{2}=x-x_0$, $\frac{x_0^2 y_0}{2}+x_0=x$. Ако ставиме $y_0=\frac{2}{x_0}$, за апсцисата x на пресечната точка добиваме:

$$x=\frac{x_0^2\cdot\frac{2}{x_0}}{2}+x_0=x_0+x_0=2x_0\,.$$

Значи пресечната точка A на тангентата со x-оската е A($2x_0$,0).
Пресекот со y-оската ќе го најдеме кога во (1) ќе ставиме $x=0$:

$y-y_0=\frac{-2}{x_0^2}(0-x_0) \Leftrightarrow \quad y-y_0=\frac{2}{x_0^2}x_0=\frac{2}{x_0}=y_0$. Значи: $y=2y_0$, односно ординатата на пресечната точка B на тангентата со y-оската ќе биде B(0, $2y_0$). Плоштината на триаголникот Δ AOB ќе биде:

$$P=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\frac{2x_0\cdot 2y_0}{2}=2x_0y_0=2x_0\cdot\frac{2}{x_0}=4\,.$$

Значи добивме дека плоштината на триаголникот е константна и не зависи од точката во која се повлекува тангентата.

13. Напиши ја равенката на нормалата на параболата $y = x^2 + 4x + 1$ што е нормална на правата што минува низ координатниот почеток и низ темето на параболата**.**

Решение: Темето на параболата е $T(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, т.е T(-2,-3). Коефициентот на правецот на правата што минува низ координатниот почеток и темето на параболата е $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-0}{-2-0} = \frac{3}{2}$. Имајќи предвид дека нормалата на параболата е нормална на правата што минува низ темето на параболата и координатниот почеток, коефициентот на правец на нормалата ќе биде $k_n = -\frac{2}{3}$. Од друга страна коефициентот на правец на нормалата е $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$, од каде што $-\frac{2}{3} = -\frac{1}{2x_0 + 4}$. Се добива дека $x_0 = \frac{-5}{4}$ што значи дека нормалата ќе биде повлечена во точката $M(-\frac{5}{4}, -\frac{39}{16})$. Од равенката на нормала $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ се добива дека равенката на бараната нормала ќе биде

$$y + \frac{39}{16} = -\frac{2}{3}(x + \frac{5}{4})$$

односно

$$48y + 32x + 157 = 0.$$

Изводи и диференцијали од повисок од повисок ред

$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $\quad d^n y = y^{(n)} dx^n$

Ако функцијата е зададена во параметарски облик $x = x(t), y = y(t)$, тогаш вториот извод се наоѓа со формулата

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}\right)^3}$$

14. Да се покаже дека функцијата $y = e^{2\arcsin x}$ го задоволува равенството $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' - 4y = 0$.

Решение:

$$y' = e^{2\arcsin x}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2e^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = \frac{2\cdot\frac{2e^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - 2e^{2\arcsin x}\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{4e^{2\arcsin x} + \frac{2xe^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{1-x^2}\,e^{2\arcsin x} + 2xe^{2\arcsin x}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Сега проверуваме дали важи равенството: $\left(1-x^2\right)y'' - xy' - 4y = 0$

$$\left(1-x^2\right)\frac{4\sqrt{1-x^2}\,e^{2\arcsin x} + 2xe^{2\arcsin x}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - x\frac{2e^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} - 4e^{2\arcsin x} = 0$$

$$\frac{4\sqrt{1-x^2}\,e^{2\arcsin x} + 2xe^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} - x\frac{2e^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} - 4e^{2\arcsin x} = 0$$

$$4e^{2\arcsin x} + \frac{2xe^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2xe^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} - 4e^{2\arcsin x} = 0$$

$$0 = 0$$

15. Да се покаже дека функцијата $y = f(x)$ зададена во параметарски облик со равенките: $x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t$, ја задоволува диференцијалната равенка

$$y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$$

Решение:

$$\dot{x} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t) \qquad \dot{y} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\ddot{x} = e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t) = e^t(\sin t + \cos t + \cos t - \sin t) =$$

$$= 2e^t \cos t$$

$$\ddot{y} = e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} = \frac{(-2e^t \sin t)e^t(\sin t + \cos t) - e^t(\cos t - \sin t)2e^t \cos t}{e^{3t}(\sin t + \cos t)^3} =$$

$$=\frac{(-2e^{2t})(\sin^2 t+\cos t\cdot\sin t)-2e^{2t}(\cos^2 t-\sin t\cdot\cos t)}{e^{3t}(\sin t+\cos t)^3}=$$

$$=\frac{(-2e^{2t})(\sin^2 t+\cos t\cdot\sin t+\cos^2 t-\sin t\cdot\cos t)}{e^{3t}(\sin t+\cos t)^3}=\frac{-2}{e^{t}(\sin t+\cos t)^3}$$

Ако замениме во диференцијалната равенка $y''(x+y)^2=2(xy'-y)$, добиваме:

$$\frac{-2}{e^{t}(\sin t+\cos t)^3}e^{2t}(\sin t+\cos t)^2=2(e^{t}\sin t\cdot\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}-e^{t}\cos t)$$

$$\frac{-2}{\sin t+\cos t}e^{t}=2e^{t}(\sin t\cdot\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}-\cos t)$$

$$\frac{-1}{\sin t+\cos t}=\frac{\cos t\sin t-\sin^2 t-\cos t\sin t-\cos^2 t}{\sin t+\cos t}$$

$$\frac{-1}{\sin t+\cos t}=\frac{-1}{\sin t+\cos t}.$$

16. Да се покаже дека функцијата

$$y=[1+\ln(\cos x)]\cos x+(1+x)\sin x$$

ја задоволува диференцијалната равенка $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Решение:

$$y'=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)\cos x+[1+\ln(\cos x)](-\sin x)+\sin x+(1+x)\cos x=$$

$$=-\sin x-\sin x-\sin x\ln(\cos x)+\sin x+(1+x)\cos x=$$

$$y'=-\sin x[1+\ln(\cos x)]+(1+x)\cos x$$

$$y''=-\cos x[1+\ln(\cos x)]+\sin^2 x\frac{1}{\cos x}+\cos x+(1+x)(-\sin x)=$$

$$=-\cos x-\cos x\ln(\cos x)+\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\cos x-\sin x-x\sin x=$$

$$=-\cos x\ln(\cos x)+\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\sin x(1+x)$$

Ако сега замениме во диференцијалната равенка, се добива:

$$-\cos x\ln(\cos x)+\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\sin x(1+x)+[1+\ln(\cos x)]\cos x+(1+x)\sin x=$$

$$=\frac{1}{\cos x}$$

$$-\cos x\ln(\cos x)+\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\sin x(1+x)+\cos x+\cos x\ln(\cos x)+\sin x(1+x)=$$

$$=\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\cos x=\frac{1}{\cos x},\quad \text{односно}\quad \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

Значи:

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

17. Да се покаже дека функцијата $y=\operatorname{arctg}(e^x)-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$ ја задоволува равенката: $y'\dfrac{(e^{2x}+1)e^x}{e^x-1}-y''(1+e^{2x})^2=e^{2x}(e^x-2)$.

Решение:

$$y'=\frac{1}{1+e^{2x}}e^x-\frac{1}{\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}}\cdot\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-e^{2x}2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=$$

$$=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x})}{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}(e^{2x}+1)^2}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{e^{2x}}{e^{2x}(e^{2x}+1)}=\frac{e^x-1}{1+e^{2x}}$$

$$y''=\frac{e^x(1+e^{2x})-(e^x-1)2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x+e^{3x}-2e^{3x}+2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x-e^{3x}+2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

Ако сега замениме во равенката, се добива:

$$\frac{e^x-1}{1+e^{2x}}\cdot\frac{(e^{2x}+1)e^x}{e^x-1}-\frac{e^x-e^{3x}+2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}(1+e^{2x})^2=e^{2x}(e^x-2)$$

$$e^x-e^x+e^{3x}-2e^{2x}=e^{2x}(e^x-2)$$

$$e^{2x}(e^x-2)=e^{2x}(e^x-2).$$

18. Да се покаже дека функцијата $y = e^{-x}\sin x$ ја задоволува равенката $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение:

Првиот и вториот извод на функцијата се:

$$y' = -e^{-x}\sin + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$
$$y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) =$$
$$= e^{-x}(\sin x - \cos x - \sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x$$

Со заменување во равенката $y'' + 2y' + 2y = 0$ се добива:

$$-2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x}\sin x = 0$$
$$0 = 0$$

Значи функцијата $y = e^{-x}\sin x$ ја исполнува равенката.

19. Да се провери дали функцијата $y = \sin(e^x) + \cos(e^x)$ ја задоволува диференцијалната равенка $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

Решение:

$$y' = e^x\cos(e^x) - e^x\sin(e^x) = e^x(\cos(e^x) - \sin(e^x))$$
$$y'' = e^x(\cos(e^x) - \sin(e^x)) - e^x(e^x(\cos(e^x) + \sin(e^x))) =$$
$$= e^x(\cos(e^x) - \sin(e^x)) - e^{2x}(\cos(e^x) + \sin(e^x)) \quad .$$

Кога ќе ги замениме вака добиените изводи од прв и втор ред на функцијата y во дадената диференцијална равенка ќе добиеме:

$$e^x(\cos(e^x) - \sin(e^x)) - e^{2x}(\cos(e^x) + \sin(e^x)) - e^x(\cos(e^x) - \sin(e^x)) +$$
$$+e^{2x}(\cos(e^x) + \sin(e^x)) = 0$$
$$0 = 0$$

Од овде очигледно е дека дадената функција ја задоволува диференцијалната равенка $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

20. Да се провери дали функцијата $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ ја задоволува диференцијалната равенка $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Решение:

$$y' = -\frac{a}{x}\sin(\ln x) + \frac{b}{x}\cos(\ln x)$$

$$y'' = \frac{a}{x^2}\sin(\ln x) - \frac{a}{x^2}\cos(\ln x) - \frac{b}{x^2}\cos(\ln x) - \frac{b}{x^2}\sin(\ln x)$$

При заменување на добиените изводи во дадената диференцијална равенка се добива:

$$x^2\left(\frac{a}{x^2}\sin(\ln x) - \frac{a}{x^2}\cos(\ln x) - \frac{b}{x^2}\cos(\ln x) - \frac{b}{x^2}\sin(\ln x)\right) +$$

$$+x\left(-\frac{a}{x}\sin(\ln x) + \frac{b}{x}\cos(\ln x)\right) + a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x) = 0\,.$$

$$0 = 0$$

Значи функцијата $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ ја задоволува диференцијалната равенка $x^2y'' + xy' + y = 0$.

21. Да се провери дали функцијата $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ ја задоволува равенката $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0\,.$

Решение:

За првиот и вториот извод на функцијата се добива:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}})$$

$$y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{-2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + \frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})\,.$$

Со заменување во равенката $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$ добиваме:

$$x\cdot\left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + \frac{1}{4x}(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}})\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) -$$

$$-\frac{1}{4}\cdot(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}})=0$$
$$0=0$$

Значи, функцијата $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ ја исполнува зададената равенка.

22. Да се докаже дека функцијата $y=\arcsin^2 x$ ја исполнува равенката $(1-x^2)y''-xy'=2$.

Решение:

Првиот и вториот извод на функцијата се:

$$y'=2(\arcsin x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$y''=2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(\arcsin x)\cdot\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)=$$
$$=\frac{2}{1-x^2}\left(1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Со заменување на y' и y'' во равенката $(1-x^2)y''-xy'=2$ имаме:

$$(1-x^2)\frac{2}{1-x^2}\left(1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=2$$
$$2+\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=2$$
$$2=2$$

Добивме дека функцијата $y=\arcsin^2 x$ ја исполнува равенката $(1-x^2)y''-xy'=2$.

23. Да се провери дали функцијата

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

ја исполнува равенката $2y=xy'+\ln y'$.

Решение:

Првиот извод на функцијата е

$$y' = x + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}\cdot(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}) =$$

$$= x + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2(x+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= x + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= x + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{x^2+1}{2\sqrt{x^2+1}} = x + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} =$$

$$= x + \sqrt{x^2+1}\,.$$

Со замена на y' во равенката $2y = xy' + \ln y'$ добиваме дека

$$2(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}) = x(x+\sqrt{x^2+1}) + \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

односно

$$x^2 + x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) = x^2 + x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\,.$$

Значи функцијата $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ ја исполнува равенката $2y = xy' + \ln y'$.

Диференцијал. Примена.

24. Да се пресметаат првите и вторите диференцијали на функциите:

а) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ б) $y = \frac{2}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$

Решение:

а) $$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\dfrac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(1-x^2\right)^{\frac{-3}{2}}$$

$$y''=\frac{-3}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{-5}{2}}(-2x)=\frac{3x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$dy=y'dx=\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx \quad , \quad d^2y=y''dx^2=\frac{3x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}dx^2$$

б) $$y=\frac{2}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

$$y'=\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-2}{x^2}+\frac{4}{4+x^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{-2}{x^2}+\frac{2}{4+x^2}=-2x^{-2}+2(4+x^2)^{-1}$$

$$y''=4x^{-3}+2(-1)(4+x^2)^{-2}(2x)=\frac{4}{x^3}-\frac{4x}{\left(4+x^2\right)^2}$$

$$dy=y'dx=\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{2}{4+x^2}\right)dx \ , \quad d^2y=\left(\frac{4}{x^3}-\frac{4x}{\left(4+x^2\right)^2}\right)dx^2$$

25. Да се пресмета приближно:

а) $\operatorname{tg}(45^0 4')$ б) $\operatorname{arctg}(0,97)$ в) $\sin(60^0 3')$

Решение:

Ќе ја користиме формулата $f\left(x+\Delta x\right)\approx f\left(x\right)+f'\left(x\right)\Delta x$

а) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x=4'=\dfrac{\pi}{180}\cdot\dfrac{4}{60}rad$

$$\mathrm{tg}(45^0 4') = \mathrm{tg}(45^0 + 4') = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\cdot\frac{4}{60}) \approx \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + 0,0011) \approx$$

$$\approx \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})}\cdot 0,0011 \approx 1 + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot 0,0011 \approx 1 + 2\cdot 0,0011 \approx 1,0022$$

$$\left[1' = \frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{60}rad, \quad 4' = \frac{\pi}{180}\cdot\frac{4}{60}rad \approx 0,0011rad\right]$$

б) $f(x) = \mathrm{arctg}x$, $x = 1$, $\Delta x = -0,03$

$$\mathrm{arctg}(0,97) = \mathrm{arctg}(1 - 0,03) \approx \mathrm{arctg}1 + \frac{1}{1+1^2}\cdot(-0,03) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{0,03}{2} \approx 0,785 - 0,015 \approx 0,770$$

в) $\sin(60^0 3') = \sin(60^0 + 3') \approx \sin(60^0) + \cos(60^0)\cdot 0,0009 =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0,0009 = \frac{1,7309}{2} \approx 0,865$$

$$[3' = \frac{\pi}{180}\cdot\frac{3}{60}rad \approx 0,0009rad]$$

26. Да се пресмета точното и приближното нараснување на плоштината на кругот со радиус $r = 2m$, кога радиусот ќе се зголеми за $0{,}1\,m$.

Решение:

Плоштината на кругот пред зголемувањето на радиусот е:

$$P = \pi r^2 = \pi\cdot 2^2 = 4\pi m^2 .$$

Кога радиусот ќе се зголеми за $\Delta r = 0{,}1m$ плоштината ќе биде:

$$P(r + \Delta r) = P(2 + 0{,}1) = \pi\cdot 2{,}1^2 = 4,41\pi \ \mathrm{m}^2$$

Точното нараснување на плоштината ќе биде:

$$\Delta P = P(r + \Delta r) - P(r) = 4,41\pi - 4\pi = 0,41\pi \ \mathrm{m}^2$$

Приближното нараснување на плоштината dP ќе биде:

$dP \approx P'dr = 2\pi r dr = 2\pi \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4\pi \ \text{m}^2.$

Лопиталово правило

27. Со помош на Лопиталово правило да се пресметаат граничните вредности**:**

а) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot \mathrm{ctg}x$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \sin\dfrac{a}{x}$, $n>0, a\neq 0$ г) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$

д) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ ѓ) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$ е) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$

Решение:

а) $$\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2} = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{(1-x)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\pi(1-x)^2}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{-2\pi(1-x)}{-2\cdot 2\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{\sin 2\cdot\frac{\pi x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{\sin\pi x} = \lim_{x\to 1}\frac{-2}{\pi\cdot\cos\pi x} = \frac{2}{\pi}$$

б) $$\lim_{x\to 0}\arcsin x\cdot\mathrm{ctg}x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ctg}x}{\frac{1}{\arcsin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{\arcsin^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin^2 x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{2\sin x\cdot\cos x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x\arcsin^2 x}{2\sin 2x\cdot\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-4\arcsin x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}-2\arcsin^2 x-2x\cdot 2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{4\cos 2x\sqrt{1-x^2}+2\sin 2x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}=$$

$$=\frac{4}{4}=1$$

в) $$\lim_{x\to+\infty}x^n\sin\frac{a}{x}=\infty\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\dfrac{a}{x}}{\dfrac{1}{x^n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\dfrac{a}{x}\cdot(-\dfrac{a}{x^2})}{-\dfrac{n}{x^{n+1}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cos\dfrac{a}{x}}{\dfrac{nx^2}{x^{n+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cos\dfrac{a}{x}}{\dfrac{n}{x^{n-1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{n-1}\cos\dfrac{a}{x}}{n}=\begin{cases}\infty, n>1\\ a, n=1\\ 0, n<1\end{cases}$$

г) $$\lim_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\dfrac{1}{x}(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x-\dfrac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

д) $$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=1^\infty=\lim_{x\to 1}e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x}=e^{-1}=\frac{1}{e},$$

при што беше искористено дека

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{-1}=-1$$

ѓ) $$\lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=\infty^0=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{\ln x}\ln(\mathrm{ctg}x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}\ln(\mathrm{ctg}x)}=e^{-1}$$

при што искористивме дека

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} \ln(\text{ctg}x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\text{ctg}x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\text{ctg}x}\cdot(-\frac{1}{\sin^2 x})}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{-\cos x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{-\cos x} = -1$$

e)

$$\lim_{x\to 0}(\text{ctg}x)^{\sin x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\text{ctg}x)^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \ln(\text{ctg}x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln(\text{ctg}x)} =$$

$$= e^0 = 1\,.$$

Беше искористено

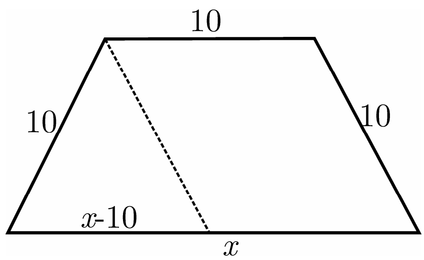
$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln(\text{ctg}x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\text{ctg}x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\text{ctg}x}\cdot(-\frac{1}{\sin^2 x})}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

Екстремни вредности на функција

28. Краците и помалата основа на трапезот имаат по 10 см. Да се одреди неговата поголема основа, така што плоштината на трапезот да биде најголема.

Решение.



Плоштината на трапезот е:

$$P = \frac{x+10}{2}h\,.$$

Висината на трапезот h е:

$$h=\sqrt{100-\left(\frac{x-10}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{100-\frac{x^2-20x+100}{4}}=\sqrt{\frac{400-x^2+20x-100}{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{300-x^2+20x}}{2}$$

За плоштината на трапезот добиваме:

$$P=\frac{x+10}{2}\cdot\frac{\sqrt{300-x^2+20x}}{2}=\frac{\left(x+10\right)\sqrt{300-x^2+20x}}{4}$$

Сега ќе ја најдеме точката во која функцијата P има екстермна вредност:

$$P'=\frac{\sqrt{300-x^2+20x}+(x+10)\cdot\dfrac{-2x+20}{2\sqrt{300-x^2+20x}}}{4}=$$

$$=\frac{300-x^2+20x+(x+10)(10-x)}{4\sqrt{300-x^2+20x}}=\frac{300-x^2+20x+100-x^2}{4\sqrt{300-x^2+20x}}=$$

$$=\frac{400-2x^2+20x}{4\sqrt{300-x^2+20x}}=\frac{200-x^2+10x}{2\cdot\sqrt{300-x^2+20x}}$$

$$P'=0\quad\Rightarrow\quad 200-x^2+10x=0\quad\Rightarrow\quad x^2-10x-200=0\quad\Rightarrow$$

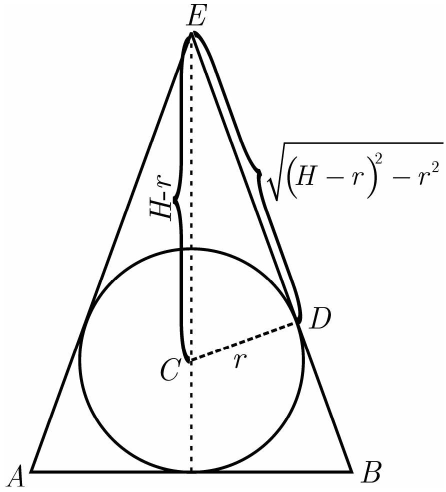
$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100+800}}{2}\qquad\Rightarrow x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{900}}{2}=\frac{10\pm 30}{2}$$

$$\Rightarrow x_1=20,\quad x_2=-10.$$

Бидејќи x е должина на страна, отпаѓа негативното решение, значи другата основа е $x=20$ см.

29. Околу сфера со радиус r да се опише конус со минимален волумен. (Да се најдат димензиите на конусот!)

Решение.



Од сличноста на триаголниците
ΔABE и ΔCDE следува
пропорционалност на нивните страни:

$$\frac{H}{R}=\frac{\sqrt{(H-r)^2-r^2}}{r}$$

$$R=\frac{Hr}{\sqrt{(H-r)^2-r^2}}=$$

$$=\frac{Hr}{\sqrt{H^2-2Hr+r^2-r^2}}=\frac{Hr}{\sqrt{H^2-2Hr}} \qquad (1)$$

Волуменот на конусот е $V=\frac{\pi R^2 H}{3}$. Заменувајќи за R , добиваме:

$$V=\frac{\pi R^2 H}{3}=\frac{\pi H}{3}\cdot\frac{H^2r^2}{H^2-2Hr}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{H^2r^2}{H-2r}=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{H^2}{H-2r}$$

$$V'=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{2H(H-2r)-H^2}{(H-2r)^2}=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{2H^2-4Hr-H^2}{(H-2r)^2}=$$

$$=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{H^2-4Hr}{(H-2r)^2}=0$$

$$H^2-4Hr=0 \quad\Rightarrow\quad H-4r=0 \quad\Rightarrow H=4r \ .$$

Заменувајќи за H во (1) добиваме:

$$R=\frac{Hr}{\sqrt{H^2-2Hr}}=\frac{4r\cdot r}{\sqrt{16r^2-2\cdot 4r\cdot r}}=\frac{4r^2}{\sqrt{8r^2}}=\frac{4r^2}{2r\sqrt{2}}=\frac{2r}{\sqrt{2}}=r\sqrt{2}$$

Значи, димензиите на конусот треба да бидат $H=4r,\quad R=r\sqrt{2}$.

30. Од сите триаголници со една страна a и периметар $2s$, да се одреди оној кој има најголема плоштина.

Решение:

Бидејќи едната страна на триаголникот и периметарот се зададени, ако другите две страни ги обележиме со x и y , тогаш важи:

$x+y+a=2s$ односно $x=2s-y-a$

Плоштината на триаголникот е:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-x)(s-y)}=\sqrt{s(s-a)[s-(2s-y-a)](s-y)}=$$
$$=\sqrt{s(s-a)(y+a-s)(s-y)}=\sqrt{s(s-a)}\cdot\sqrt{(y+a-s)(s-y)}$$

$$P'=\sqrt{s(s-a)}\cdot\frac{(ys+as-s^2-y^2-ay+ys)'}{2\sqrt{(y+a-s)(s-y)}}=$$
$$=\sqrt{s(s-a)}\cdot\frac{(s-2y-a+s)}{2\sqrt{(y+a-s)(s-y)}}=$$
$$=\sqrt{s(s-a)}\cdot\frac{(2s-2y-a)}{2\sqrt{(y+a-s)(s-y)}}$$

$$P'=0\quad\Rightarrow\quad 2s-2y-a=0\quad\Rightarrow\quad y=\frac{2s-a}{2},$$

за другата страна x добиваме:

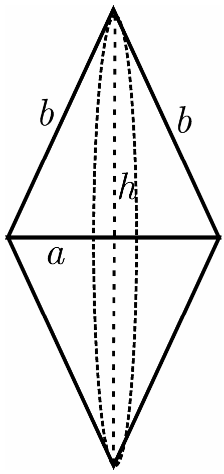
$$x=2s-a-y=2s-a-\frac{2s-a}{2}=\frac{4s-2a-2s+a}{2}=\frac{2s-a}{2}=y$$

Значи, триаголникот треба да биде рамнокрак со краци:

$$x=y=\frac{2s-a}{2}.$$

31. Обиколката на рамнокрак триаголник е $2p$. Колкави треба да бидат неговите страни за да биде најголем волуменот на ротационото тело што се добива со ротација на триаголникот околу неговата основа.

Решение.



$a+2b=2p \;\Rightarrow\; \quad a=2p-2b=2(p-b)$

Волуменот на телото што се добива е всушност волумен на два залепени конуси со основите:

$$V=2\frac{\pi h^2 a}{3\cdot 2}=\frac{\pi h^2 a}{3} \qquad (1)$$

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{b^2-\left(p-b\right)^2}=$$

$$=\sqrt{b^2-p^2+2pb-b^2}=$$

$$=\sqrt{2pb-p^2}=\sqrt{p(2b-p)}$$

Ако замениме за h во (1) , се добива:

$$V=\frac{\pi h^2 a}{3}=\frac{\pi a p(2b-p)}{3}=\frac{\pi 2(p-b)p(2b-p)}{3}=$$

$$=\frac{2\pi p(2pb-2b^2-p^2+bp)}{3}=\frac{2\pi p(3pb-2b^2-p^2)}{3}$$

Кога $V'=\dfrac{2\pi p(3p-4b)}{3}=0$,

тогаш $3p-4b=0$ односно $b=\frac{3p}{4}$.

За страната a се добива

$$a=2(p-b)=2(p-\frac{3p}{4})=2\cdot\frac{p}{4}=\frac{p}{2}.$$

Значи димензиите на триаголникот се: $a=\frac{p}{2}$, $b=\frac{3p}{4}$.

32. Од 64 кибритни дрвца да се направи правоаголник со најголема плоштина.

Решение:

Бидејќи бројот на дрвца кој треба да се употреби е 64, имаме дека периметарот на правоаголникот е 64 дрвца, односно

$L=2(x+y)=64$, т.е. $x+y=32$.

Плоштината на правоаголникот е

$P=xy=x(32-x)=32x-x^2$.

Бројот на дрвца x, кој треба да се употреби за една страна е решение на равенката $P'(x)=32-2x=0$, т.е. тоа е точката во која функцијата P има екстрем, а тоа е $x=16$ дрвца. Од условот на задачата имаме дека и $y=16$ дрвца. Можеме да заклучиме дека за да правоаголникот има најголема плоштина неговите страни треба да бидат составени од по 16 дрвца.

33. Да се определат димензиите на отворен базен со квадратно дно и со вкупна должина на сите рабови на базенот 32m, така што за страните и дното на базенот да се потроши најмалку материјал.

Решение: Збирот на должините на рабовите на базенот е 32 m, односно имајќи предвид дека дното на базенот е квадрат, важи $8x+4y=32$, односно $y=8-2x$. За да се потроши најмалку материјал потребно е збирот од плоштините на ѕидовите на базенот да биде најмала. Тоа значи дека треба да најдеме минимум на функцијата $P=4xy+x^2$,

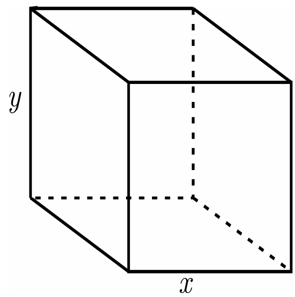
т.е. $P(x)=4x(8-2x)+x^2=32x-7x^2$.

Стационарната точка на функцијата $P(x)$ ја наоѓаме од равенката

$P'(x)=32-14x=0$,

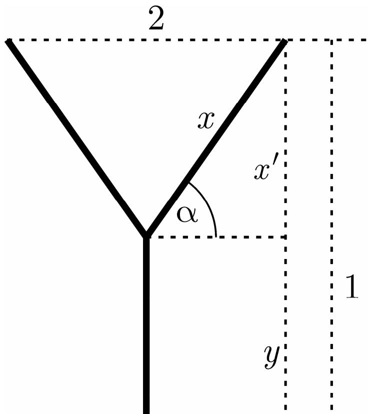
се добива $x=\dfrac{16}{7}$m. Одовде, се добива дека димензиите на базенот се

$x=\dfrac{16}{7}$ m и $y=\dfrac{24}{7}$m.



34. Плафонот на еден магацин се потпира со две греди кои се на растојание 2m. Светилките во просторијата се поставени на синџири во форма на буквата “Y”. Ако светилките висат на еден метар под гредите, која е најмалата должина на сиџирот што треба да се употреби за да ги држи светилките?

Решение:



Од цртежот на проблемот имаме дека $\sin\alpha=\dfrac{x'}{x}$ и $\cos\alpha=\dfrac{1}{x}$. Одовде $x'=x\sin\alpha$. Јасно е дека $x'+y=1$, односно $y=1-x'$. Па имаме $y=1-x'=1-x\sin\alpha=1-\sqrt{x^2-1}$. Притоа беше искористено дека

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

Вкупната должина на синџирот што треба да се употреби за поставување на светилките е

$$L = 2x + y = 2x + 1 - \sqrt{x^2 - 1}\,.$$

Од $$L'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

имаме дека должините x и y се

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad y = 1 - \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

($\sin\alpha = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 30^\circ$),

од каде што минималната должина која треба да се употреби за поставување на светилките е

$$L = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \sqrt{3} \text{ m.}$$

35. Околу топка со радиус R да се опише конус со минимален волумен.

Решение:

Од сличноста на триаголниците BCC_1 и OCO_1 имаме дека важи

$$\frac{r}{R} = \frac{H}{\sqrt{(H-R)^2 - R^2}} = \frac{H}{\sqrt{H^2 - 2HR + R^2 - R^2}} = \frac{H}{\sqrt{H(H-2R)}}\,,$$

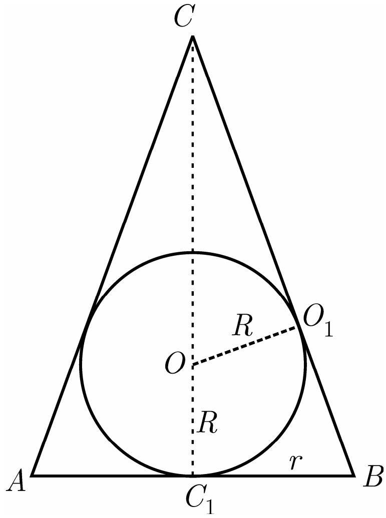
од каде што

$$r^2 = \frac{R^2H^2}{H^2 - 2HR} = \frac{R^2H}{H - 2R} \qquad (1)$$

Волуменот на конусот е

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{r^2\pi H}{3}\text{, односно } V(H) = \frac{R^2H}{H-2R} \cdot \frac{\pi H}{3} = \frac{R^2\pi}{3} \cdot \frac{H^2}{H-2R}$$

Одовде за првиот извод на функцијата $V(H)$ имаме



$$V'(H) = \frac{R^2\pi}{3}\left(1 - \frac{4R^2}{(H-2R)^2}\right).$$

Од равенката $V'(H) = 0$ добиваме $\frac{4R^2}{(H-2R)^2} = 1$, од каде што се

добива $(H-2R)^2 = 4R^2$, односно $H - 2R = 2R$, па потребно е $H = 4R$ за волуменот на опишаниот конус да биде минимален. Ако замениме за H во (1), добиваме:

$$r^2 = \frac{R^2H}{H-2R} = \frac{R^2 \cdot 4R}{4R-2R} = \frac{4R^3}{2R} = 2R^2$$

Па волуменот на така опишаниот конус е

$$V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{2R^2\pi \cdot 4R}{3} = \frac{8R^3\pi}{3}.$$

Испитување тек и цртање график на функција

36. Да се испита текот и нацрта графикот на функцијата

$$y = \frac{2-x^2}{(x-1)^2}.$$

Решение:

1. Дефинициона област

Дефиниционата област на функцијата е $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$

2. Пресеци со оските

Пресеците со x – оската ги добиваме за $y=0$: $\dfrac{2-x^2}{(x-1)^2}=0$, од каде што добиваме дека $A_1(\sqrt{2},0)$ и $A_2(-\sqrt{2},0)$ се пресеци со x – оската.

Пресекот со y – оската го добиваме за $x=0$, т.е. $y=\dfrac{2-0^2}{(0-1)^2}=2$, односно $B(0,2)$ е пресекот на грфикот на функцијата со y – оската.

3. Симетричност
Бидејќи доменот на функцијата не е симетричен имаме дека функцијата y не е ниту парна, ниту непарна функција.

4. Екстреми. Монотоност
Првиот извод на функцијата е

$$f'(x)=\left(\frac{2-x^2}{(x-1)^2}\right)'=\frac{-2x(x-1)^2-(2-x^2)2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{-2x^2+2x-4+2x^2}{(x-1)^3}=\frac{2x-4}{(x-1)^3}$$

а вториот извод е

$$f''(x)=\left(\frac{2x-4}{(x-1)^3}\right)'=\frac{2(x-1)^3-(2x-4)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2x-2-6x+12}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{-4x+10}{(x-1)^4}$$

Стационарната точка ја наоѓаме од $\dfrac{2x-4}{(x-1)^3}=0$ од каде што $2x-4=0$, т.е. $x=2$. Точката $N(2,-2)$ е локален минимум на функцијата y, бидејќи $f''(2)=2>0$. Функцијата y расте за сите x за кои е задоволено $f'(x)>0$, односно $\dfrac{2x-4}{(x-1)^3}>0$, кое е исполнето за $(x-2)(x-1)>0$, односно за $x \in (-\infty,1) \cup (2,+\infty)$, додека пак функцијата y опаѓа за $x \in (1,2)$ (бидејќи параболата $y=(x-2)(x-1)$ е свртена нагоре поради позитивниот знак пред x^2 и нејзините пресеци со x-оска се во $x=1$ и $x=2$, очигледно дека во интервалот (1,2) функцијата е негативна, а надвор од него е позитивна).

5. Превојни точки. Конкавност, конвексност

Функцијата y има превојни точки во оние точки за кои $f''(x)=0$, односно $\frac{-4x+10}{(x-1)^4}=0$, т.е. $x=\frac{5}{2}$. Значи превојна точка за функцијата y е точката $C(\frac{5}{2},-\frac{17}{9})$. Функцијата е конкавна за $f''(x)>0$, од каде $\frac{-4x+10}{(x-1)^4}>0$, т.е. $-4x+10>0$. Значи за $x\in(-\infty,\frac{5}{2})$ функцијата е конкавна, а за $x\in(\frac{5}{2},+\infty)$ функцијата е конвексна.

6. Асимптоти

Вертикална асимптота на функцијата y е $x=1$. Однесувањето на функијата во близина на асимптотата:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2-x^2}{(x-1)^2}=+\infty$$

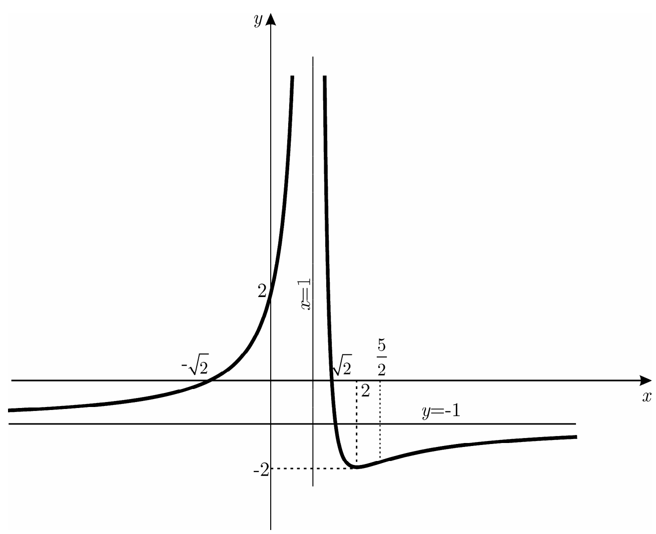
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2-x^2}{(x-1)^2}=+\infty$$

Хоризонтална асимптота на функцијата y е

$$y=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-x^2}{(x-1)^2}=-1.$$

Функцијата нема коси асимптоти.

7. График на функцијата



37. Да се испита текот и нацрта графикот на функцијата

$$y=(x-2)e^x.$$

Решение:

1. Дефинициона област
Дефиниционата област на функцијата е множеството од реални броеви , т.е. $x \in \mathbb{R}$.

2. Пресеци со оските
Пресекот со x – оската го добиваме за $y=0$, односно $(x-2)e^x=0$, т.е. $x=2$, од каде што за пресекот со x - оската ја добиваме точката $A(2,0)$. Пресекот со y – оската го добиваме за $x=0$,односно $y=(0-2)e^0=-2$, па за пресек со y - оската ја имаме точката $B(0,-2)$.

3. Симетричност
Од $f(-x)=(-x-2)e^{-x}=-(x+2)e^{-x}$ добиваме дека функцијата $f(x)$ е ниту парна, ниту непарна функција.

4. Екстреми. Монотоност
Првиот извод на функцијата е

$$f'(x)=[(x-2)e^x]'=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x,$$

а вториот извод на функцијата е

$$f''(x)=\left((x-1)e^x\right)'=e^x+(x-1)e^x=xe^x.$$

Имајќи предвид дека $e^x>0$ за кој било x првиот извод на функцијата се анулира за $x=1$. Во точката $N(1,-e)$ имаме локален минимум бидејќи е исполнето $f''(1)=e>0$. Функцијата y е растечка за оние x за кои е исполнето $f'(x)>0$, односно кога $(x-1)e^x>0$, т.е. за $x\in(1,+\infty)$. Функцијата y опаѓа за $x\in(-\infty,1)$.

5. Превојни точки. Конкавност, конвексност
Функцијата има превојни точки кога е исполнето $f''(x)=0$, т.е. $xe^x=0$. Имајќи предвид дека $e^x>0$ за кој било x, имаме дека $x=0$ е решение на оваа равенка. Па точката $P(0,-2)$ е превојна точка за функцијата y. Функцијата е конкавна за сите x за кои е исполнето $f''(x)>0$, односно $xe^x>0$, од каде што добиваме дека за $x\in(0,+\infty)$ функцијата y е конкавна, а за $x\in(-\infty,0)$ функцијата y е конвексна.

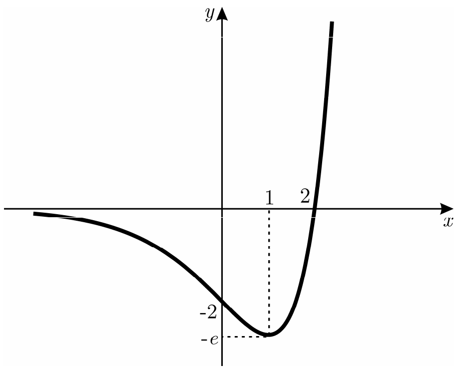
6. Асимптоти

Функцијата нема вертикални асимптоти.
Бидејќи

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-2)e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-2)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

следи дека правата $y=0$ е хоризонтална асимптота за функцијата y само на левата полурамнина.
Функцијата нема коси асимптоти.
7. График на функција



38. Да се испита текот и нацрта графикот на функцијата $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

Решение:

1. Дефинициона област

Дефиниционата област на функцијата се сите x за кои важи $e^x - 1 \neq 0$, односно $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Пресеци со оските

Графикот на функцијата нема пресеци ниту со x – оската, ниту со y – оската.

3. Симетричност

Бидејќи $f(-x) = \dfrac{1}{e^{-x} - 1}$, јасно е дека функцијата y не е парна, ниту непарна.

4. Екстреми. Монотоност

Првиот извод на функцијата y е $y' = -\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$, од каде што се гледа дека оваа функција нема локални екстреми, и бидејќи за секој x важи $y' = -\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2} < 0$ функцијата е опаѓачка за секој x.

5. Превојни точки. Конкавност, конвексност
Вториот извод на функцијата е

$$y'' = \frac{-e^x(e^x-1)^2 + 2e^x(e^x-1)\cdot e^x}{(e^x-1)^4} = \frac{-e^x(e^x-1-2e^x)}{(e^x-1)^3} = \frac{e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3},$$

од каде што бидејќи $e^x(e^x+1) \neq 0$ функцијата нема превојни точки. Бидејќи $\dfrac{e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3} > 0$ за $x \in (0,+\infty)$ функцијата y е конкавна, а за $x \in (-\infty,0)$ функцијата y е конвексна.

6. Асимптоти
Вертикална асимптота на функцијата е $x=0$, а однесувањето на функцијата во близина на асимптотата е:

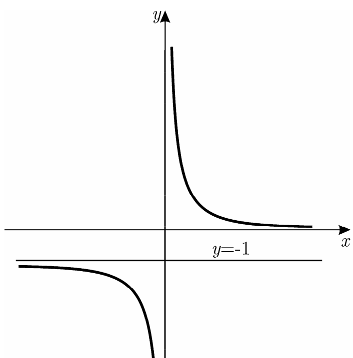
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$$

За хоризонтални асимптоти имаме:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0 \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x-1} = -1$$

Значи правите $y=0$ и $y=-1$ се хоризонтални асимптоти на функцијата $y = \dfrac{1}{e^x-1}$. Функцијата нема коси асимптоти.

7. График на функцијата



39. Да се испита текот и нацрта графикот на функцијата

$$y = \ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Решение:

1. Дефинициона област

Функцијата е дефинирана за сите x за кои важи $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, односно потребно е да $\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}$ или $\begin{cases}1+x<0\\1-x<0\end{cases}$. Решение на првиот систем е интервалот $(-1,1)$, а додека за вториот систем не постои x кој ги задоволува двете неравенки. Значи дефиниционата област на функцијата ќе се состои од сите $x \in (-1,1)$.

2. Пресеци со оските

Пресекот со x – оската го добиваме како решение на системот $\begin{cases} y=0 \\ y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}\end{cases}$, односно тоа е точката $A(0,0)$.

Пресекот со y – оската го добиваме како решение на системот $\begin{cases} x=0 \\ y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}\end{cases}$, односно тоа е точката $B(0,0)$.

3. Симетричност

Од $f(-x) = \ln\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln\dfrac{1-x}{1+x} = \ln(\dfrac{1+x}{1-x})^{-1} = -\ln\dfrac{1+x}{1-x} = -f(x)$ јасно е дека функцијата y е непарна функција, односно таа е централно симетрична во однос на координатниот почеток.

4. Екстреми. Монотоност

Првиот извод на функцијата е

$$y' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Одовде јасно е дека не постои x за кој важи $y'=0$, па оваа функција нема локални екстреми. Бидејќи за секој x од дефиниционата област важи $y'>0$ оваа функција е монотоно растечка за секој x од дефиниционата област.

5. Превојни точки. Конкавност, конвексност

Вториот извод на функцијата е

$$y'' = \frac{-2}{(1-x^2)^2} \cdot (-2x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} .$$

Тогаш за превојна точка на функцијата ја имаме точката $P(0,0)$. За $x \in (-1,0)$ имаме дека $\frac{4x}{(1-x^2)^2} < 0$ односно дека функцијата y е конвексна, а за $x \in (0,1)$ функцијата y е конкавна.

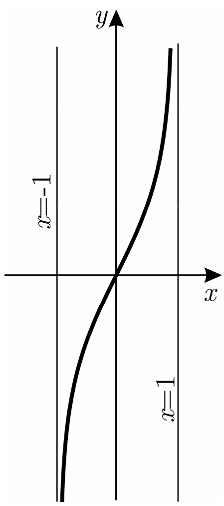
6. Асимптоти

Правите $x=-1$ и $x=1$ се вертикални асимптоти. Однесувањето на функцијата во близина на асимптотите:

$$\lim_{x \to -1^+} \ln \frac{1+x}{1-x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \ln \frac{1+x}{1-x} = +\infty$$

Функцијата нема хоризонатални ниту коси асимптоти, бидејќи функцијата не е дефинирана надвор од интервалот $(-1,1)$.

7. График на функцијата



5. ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Многу проблеми од градежништвото, но и проблеми од физиката, хемијата, машинството, електротехниката и од многу други технички области можат да се решат со помош на интеграли. Уште повеќе, решавањето на тие проблеми со примена на интегралите е поедноставно, а записите на тие решенија се поконцизни.

Некои од методите на интеграција се воведени во почетокот на $XVIII$ век и тие биле користени од многу математичари вклучувајќи ги и Њутн и Лајбниц. Во средината на $XVIII$ век, многу од овие методи, а генерално и целата теорија на интегрално сметање почнала да се појавува во книги и учебници. Од оваа обаласт во тој период, најпознати се книгите напишани од италијанската математичарка Марија Агнеси и на Ојлер, кој овој материјал го поделил на елементарна математика, диференцијално сметање и интегрално сметање. Книгите на Ојлер се одликувале со јасност и прецизност и во нив биле вклучени најголем дел од методите на интеграција кои ќе бидат презентирани.

Во оваа глава ќе бидат дадени основите на интегрирањето преку воведување на неопределен интеграл. Дополнително ќе биде воведен определениот интеграл, ќе биде дадена врската со неопределениот интеграл и ќе бидат дадени бројни примери кои се однесуваат на плоштина на рамнински ликови, должина на крива, волумен на ротационо тело, плоштина на ротациона површина, определување на тежиште, инерцијален момент и многу други кои ја илустрираат моќта на интегралното сметање.

5.1. Примитивна функција. Неопределен интеграл. Таблични интеграли

Процесот кој е обратен од барањето на извод или диференцијал на функција се нарекува барање на интеграл (интегрирање или антиизвод).

Кога бараме извод на диференцијалбилна функција, природно се поставува прашањето: Од која функција кога ќе побараме извод ќе ја добиеме функцијата $y = g(x)$? На пример, од која функција кога ќе побараме извод ќе ја добиеме функцијата $g(x) = 2x^4$? Одговорот на ова прашање е $\frac{2}{5}x^5 + C$, каде што C е произволна константа. Дали постои некоја постапка или некои утврдени методи со чија помош барањето на интеграл на функција (интегрирање) ќе биде полесно и побрзо? Одговорот е позитивен и ние подолу ќе наведеме неколку методи на интегрирање и со помош на нив ќе може да се интегрираат цели класи на функции.

Во овој дел ќе сметаме дека дефинициoната област на секоја од функциите е интервал.

Функцијата $F(x)$ се нарекува *примитивна* функција за функцијата $f(x)$, ако за секој x од дефинициoната област за функциите $F(x)$ и $f(x)$ важи $F'(x) = f(x)$. Да забележиме дека примитивната функција $F(x)$ за дадена функција $f(x)$ не е единствена. Ако $F_1(x)$ и $F_2(x)$ се две примитивни функции за функцијата $f(x)$, тогаш $F_1(x)-F_2(x)=C$, каде што C е константа. Множеството од сите примитивни функции за функцијата $f(x)$, се нарекува *неопределен интеграл* од функцијата $f(x)$ и се означува со $\int f(x)\,dx$. Ознаката dx во $\int f(x)\,dx$ означува дека x е променлива во функцијата која ја интегрираме. Нотацијата $\int f(x)\,dx$ ја има воведено Лајбниц. Зборот *интеграл* како поим во математичката анализа го има воведено Јакоб Бернули, швајцарски математичар, кој многу често професионално комуницирал со Лајбниц.

Ако $F(x)$ е примитивна функција за функцијата $f(x)$, која понатаму ќе ја нарекуваме *подинтегрална функција*, запишуваме

$\int f(x)\,dx = F(x)+C$, каде што C е константа.

Од гореизнесеното, да резимираме дека неопределен интеграл од дадена функција не е само една функција, туку класа на функции кои се разликуваат за константа.

Функциите за кои може да се најде примитивна функција ќе ги нарекуваме интеграбилни функции.

Барањето на извод е обратно од барањето на интеграл, секоја формула во диференцијалното сметање води до нова формула кај интегралното сметање. Како што кај диференцирањето постои таблица на изводи од некои елементарни функции, така и овде ќе наведеме таблица на интеграли од некои покарактеристични функции.

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$

2. $\int dx = x+C$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C$

4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C, a>0, a\neq 1$

5. $\int e^x\,dx = e^x+C$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C,\ \ a\neq 0$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C,\ a\neq 0$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \ a \neq 0$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ \ a \neq 0$

15. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$

16. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$

17. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$

18. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C\,.$

Се разбира, точноста на овие формули може да се лесно да се провери, користејќи ја дефиницијата за неопределен интеграл, со диференцирање на десната страна на равенството се добива подинтегралната функција.

5.2. Својства на неопределен интеграл

Нека сега $f(x)$ и $g(x)$ се две интеграбилни функции и нека k е реален број. Тогаш

$1^\circ \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

Ова е точно бидејќи,

$$\left(\int kf(x)\,dx\right)' = kf(x) \text{ и } \left(k\int f(x)\,dx\right)' = k\left(\int f(x)\,dx\right)' = kf(x).$$

$2^\circ \int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Навистина,

$$\left(\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx\right)' = f(x) \pm g(x) \text{ и уште}$$

$$\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) \pm g(x).$$

Користејќи ги 1° и 2° се добива погенерално тврдење:

Нека $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x)$ се интеграбилни функции и $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ се реални броеви. Тогаш важи

$$\left(\int k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x) \pm k_3 f_3(x) \pm \ldots \pm k_n f_n(x)\right)dx =$$
$$= k_1\int f_1(x)\,dx \pm k_2\int f_2(x)\,dx \pm k_3\int f_3(x)\,dx \pm \ldots \pm k_n\int f_n(x)\,dx.$$

Доказот на ова е тврдење е со користење на доказите на 1° и 2°, а може и да се даде со помош на математичка индукција.

Дополнително, да забележиме дека

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$.

2) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x)+C\right) = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

3) $\int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C$.

4) $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C$.

Пример 1. Најди ги интегралите:

а) $\int 2x^3\,dx$

$$\int 2x^3\,dx = 2\int x^3\,dx = 2\frac{x^{3+1}}{3+1} = 2\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{2} + C.$$

б) $\int \left(\frac{10}{x^6} + 4\right) dx$

$$\int \left(\frac{10}{x^6} + 4\right) dx = \int \frac{10}{x^6}\,dx + \int 4\,dx = \int 10x^{-6}\,dx + 4\int dx =$$

$$= 10\frac{x^{-6+1}}{-6+1} + 4x + C = 10\frac{x^{-5}}{-5} + 4x + C = -\frac{2}{x^5} + 4x + C.$$

в) $\int \frac{x^2-2}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{x^2-2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \int x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C.$$

г) $\int (x^2-3)^2\,dx$

$$\int (x^2-3)^2\,dx = \int \left(x^4 - 6x^2 + 9\right) dx = \int x^4\,dx - 6\int x^2\,dx + 9\int dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} - 6\frac{x^3}{3} + 9x + C = \frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x + C.$$

д) $\int \left(2e^x + 3^x - \frac{5}{x}\right) dx$

$$\int \left(2e^x + 3^x - \frac{5}{x}\right) dx = 2\int e^x\,dx + \int 3^x\,dx - 5\int \frac{1}{x}\,dx = 2e^x + \frac{3^x}{\ln 3} - 5\ln|x| + C.$$

ѓ) $\int\left(x^{2,3}+3\sin x+\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$\int\left(x^{2,3}+3\sin x+\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\int x^{2,3}\,dx+3\int\sin x\,dx+$$
$$+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-4\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{x^{3,3}}{3,3}-3\cos x-\mathrm{ctg}x-4\arcsin x+C.$$

е) $\int\dfrac{x^2}{x^2+4}dx$

$$\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+4}{x^2+4}dx-\int\frac{4}{x^2+4}dx=\int dx-4\int\frac{1}{x^2+4}dx=$$

$$=x-4\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C=x-2\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

ж) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$

$$\int\mathrm{tg}^2x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=$$
$$=\mathrm{tg}x-\int dx=\mathrm{tg}x-x+C.$$

5.3. Интегрирање со метод на замена

Овој метод е еден од почестите методи за интегрирање. Тој е базиран на методот на замена при барањето на извод на функција. Овој метод се состои во следново: Ако $u=\varphi(x)$, тогаш диференцијалот на u, кој го означуваме со du, го пресметуваме како $du=\varphi'(x)\,dx$. Со помош на методот на замена интегралот $\int\varphi(x)\,dx$ може да се упрости или во најдобар случај ќе се доведе до табличен интеграл. Заменувајќи ја променливата x со нова променлива u преку $x=g(u)$, каде што $g(u)$ има непрекинати изводи на дефиниционата област, интегралот $\int f(x)\,dx$ се сведува на

$$\int f(x)\,dx=\int f\Big(g(u)\Big)\cdot g'(u)\,du.$$

Значи добивме нов интеграл кој сега зависи од нова променлива u. Ќе сметаме дека замената на променливи е добра (успешна) ако новиот интеграл е табличен интеграл или е некој интеграл кој лесно се наоѓа. Методот на замена при интегрирање на функции ќе го илустрираме подолу со примери.

Пример 2. Најди ги интегралите

а) $\int (2x+5)^9\, dx$

Подинтегралната функција е степенска функција и таа се разликува од x^n, по основата на степенот. Бидејќи ни е познат интегралот $\int x^n\, dx$, ставаме смена $u = 2x+5$, за да можеме почетниот интеграл да го сведеме на табличниот интеграл $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Тогаш $du = 2\, dx$, односно $dx = \dfrac{du}{2}$. Имаме

$$\int (2x+5)^9\, dx = \int u^9\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^9\, du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{10}}{10} + C = \frac{(2x+5)^{10}}{20} + C\,.$$

Да забележиме дека кога воведуваме нова променлива u, старата променлива x не смее да остане. Доколку старата променлива остане, тоа значи дека лошо сме ја избрале смената или интегралот воопшто не се решава со смена.

б) $\int x^2\sqrt{x^3+5}\, dx$

Овде ќе ставиме смена $u^2 = x^3+5$. Идејата зошто u е на квадрат е да го изгубиме коренот во подинтегралната функција. Инаку, интегралот би можел да се реши и со смената $u = x^3+5$, но сметаме дека првата смена дава поелегантно решение.

Сега, $2u\, du = 3x^2\, dx$, односно имаме дека $dx = \dfrac{2u\, du}{3x^2}$. Па,

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\, dx = \int x^2\sqrt{u^2}\,\frac{2u\, du}{3x^2} = \frac{2}{3}\int u^2\, du = \frac{2}{3}\cdot\frac{u^3}{3} + C\,.$$

Од смената, $u = \sqrt{x^3+5}$ и враќајќи се на старата променлива добиваме,

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^3+5}\right)^3}{3} + C = \frac{2\left(x^3+5\right)\sqrt{x^3+5}}{9} + C\,.$$

в) $\int \sin 4x\, dx$

Воведувајќи смена $u = 4x$, при што $du = 4\, dx$, $dx = \dfrac{du}{4}$ почетниот интеграл се сведува на табличен интеграл,

$$\int \sin 4x\, dx = \int \sin u\cdot\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \sin u\, du = \frac{1}{4}(-\cos u) + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C\,.$$

г) $\int \dfrac{e^{3x}}{1-4e^{3x}}\, dx$

Овде ќе ставиме смена $u = 1-4e^{3x}$. Тогаш $du = -12e^{3x}\, dx$, т.е. $dx = -\dfrac{du}{12e^{3x}}$.

Сега,

$$\int \frac{e^{3x}}{1-4e^{3x}}dx = \int \frac{e^{3x}}{u}\cdot\frac{-du}{12e^{3x}} = -\frac{1}{12}\int\frac{du}{u} = -\frac{1}{12}\ln|\,u\,|+C = -\frac{1}{12}\ln|\,1-4e^{3x}\,|+C$$

д) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

Ставаме смена $u=\ln x$, па $du=\frac{1}{x}dx,\ dx = x\,du$. Да забележиме дека смената $u=\ln^2 x$ е лоша смена бидејќи $du=\frac{2\ln x}{x}dx$, па во новиот интеграл ќе остане $\ln x$, односно ќе остане старата променлива. Имајќи ја предвид смената $u=\ln x$ имаме

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \frac{u^2}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,du = \int u^2 du = \frac{u^3}{3}+C = \frac{\ln^3 x}{3}+C\,.$$

ѓ) $\int \frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx$

Интегралот ќе го решиме со смената $u=\text{arctg}x$, од каде што $du=\frac{dx}{1+x^2}$, т.е. $dx=(1+x^2)\,du$. Па,

$$\int \frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx = \int \frac{u}{1+x^2}\cdot(1+x^2)\,du = \int u\,du = \frac{u^2}{2}+C = \frac{\text{arctg}^2 x}{2}+C.$$

е) $\int \text{ctg}\,x\,dx$

Пред да го бараме интегралот ќе го запишеме како $\int \text{ctg}x\,dx = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx$, па овде смената е $u=\sin x$, $du=\cos x\,dx$, $dx=\frac{du}{\cos x}$. Значи,

$$\int \text{ctg}x\,dx = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int\frac{\cos x}{u}\cdot\frac{du}{\cos x} = \int\frac{du}{u} = \ln|\,u\,|+C = \ln|\,\sin x\,|+C.$$

ж) $\int \frac{dx}{\sin x}$

I начин: Почетниот интеграл ќе го трансформираме во

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{1}{\sin 2\cdot\frac{x}{2}}dx = \int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx\,.$$

Првиот интеграл ќе го решиме со смената $u=\cos\dfrac{x}{2}$, $du=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}\,dx$, $dx=\dfrac{-2du}{\sin\dfrac{x}{2}}$, додека во вториот интеграл воведуваме смена $t=\sin\dfrac{x}{2}$, $dt=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}\,dx$, $dx=\dfrac{2\,dt}{\cos\dfrac{x}{2}}$. Имаме,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{u}\cdot\frac{-2du}{\sin\dfrac{x}{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos\dfrac{x}{2}}{t}\cdot\frac{2dt}{\cos\dfrac{x}{2}}=-\int\frac{du}{u}+\int\frac{dt}{t}=$$
$$=-\ln|\,u\,|+\ln|\,t\,|+C=$$
$$=\ln\left|\frac{t}{u}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\right|+C=\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+C\,.$$

II начин: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$. Ставаме смена $t=\cos x$, од каде што $dt=-\sin x\,dx$, односно $dx=\dfrac{dt}{-\sin x}$. Имаме,

$$\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\int\frac{-dt}{1-t^2}=-\frac{1}{2}\ln|\frac{1+t}{1-t}|+C=\frac{1}{2}\ln|\frac{1-t}{1+t}|+C=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+C\,.$$

з)

Користејќи ја формулата $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, интегралот ќе го трансформираме како $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$.

Вториот интеграл ќе го сведеме на табличен интеграл со смената $u=2x$, при што $du=2\,dx$, $dx=\dfrac{du}{2}$. Конечно,

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos u\cdot\frac{du}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int\cos u\,du=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin u+C=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

Сосема аналогно се решава и интегралот $\int\cos^2 x\,dx$, кој прво со формулата $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ се трансформира во

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$$

и понатаму со истата смена $u = 2x$ се добива $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

Интегралите $\int \sin^2 x\, dx$ и $\int \cos^2 x\, dx$ многу често се среќаваат кога имаме примена на интегралното сметање за пресметување на плоштина на лик, должина на лак, плоштина и волумен на ротационо тело, како и во техниката.

5.4. Метод на парцијална интеграција

Интегрирањето со метод на парцијална интеграција или интегрирање по делови во интегралното сметање е нешто што е аналогно со барањето на извод од производ на две функции во диференцијалното сметање. Со овој метод почетниот ингерал се сведува на друг интеграл кој е поедноставен од претходниот или во најлош случај е од ист тип како почетниот.

Нека u и v се две диференцијалбилни функции. Тогаш
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ односно $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$
од каде $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$. Со интегрирање на двете страни се добива
$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$, односно

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Формулата која ја добивме е формула за парцијална интеграција.
Примената ќе биде илустрирана во наредните примери.

Пример 3. Со помош на методот на парцијална интеграција најди ги интегралите:

а) $\int (2-3x)\cos x\, dx$

Ставаме $u = 2 - 3x$, $dv = \cos x\, dx$. Оттука имаме $du = -3dx$,
$v = \int \cos x\, dx = \sin x$. Па,

$$\int (2-3x)\cos x\, dx = (2-3x)\sin x - \int -3\sin x\, dx = (2-3x)\sin x + 3(-\cos x) + C =$$
$$= (2-3x)\sin x - 3\cos x + C.$$

Да забележиме дека делот од почетниот интеграл кој го избираме со u го диференцираме, а делот што го означуваме со dv го интегрираме (за да можеме да ги определиме du и v). Токму ова и тоа дека новиот интеграл којшто го добиваме треба да не биде посложен од почетниот интеграл ни дава насоки за изборот на u и dv. Во случајов, ако ги избереме обратно деловите u и dv, т.е. $u = \cos x$, $dv = (2-3x)\,dx$, интегралот кој го добиваме со помош на парцијална интеграција е посложен од претходниот. Секогаш кога интегралот $\int v\, du$ е посложен од почетниот $\int u\, dv$, а знаеме дека интегралот се решава со парцијална интеграција, тоа значи дека сме направиле лош избор на u и dv.

б) $\int \ln x\, dx$

Овде немаме друг избор за u, освен $u=\ln x$. Останува $dv=dx$. Тогаш $du=\frac{1}{x}dx$, $v=x$. Па,

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

в) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $|\,x\,|\leq\,|\,a\,|$

Со примена на методот на интеграција, ставајќи $u=\sqrt{a^2-x^2}$, $dv=dx$ и наоѓајќи $du=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $v=\int dx=x$ добиваме

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}xdx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + C.$$

Сега во броителот на последниот интеграл додаваме и одземаме a^2, па имаме

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$= a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \int \sqrt{a^2-x^2}dx + C$. Ако замениме во горното равенство,

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + 2C$. Ако ставиме $I=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, тогаш горното равенство се трансформира во $I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) - I + 2C$, односно

$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + 2C$. Значи,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right) + C.$$

Сосема аналогно може да се најдат $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ и $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$:

$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln|\,x+\sqrt{x^2-a^2}\,|\right) + C$, каде $|\,x\,|>|\,a\,|$,

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln|\,x+\sqrt{x^2+a^2}\,|\right) + C.$$

г) $\int x^2 2^x\,dx$

Ставајќи $u = x^2$ и $dv = 2^x\,dx$, од каде $du = 2x\,dx$, $v = \int 2^x\,dx = \dfrac{2^x}{\ln 2}$, имаме

$$\int x^2 2^x\,dx = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int x 2^x\,dx = \frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x 2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx\right) =$$

$= \dfrac{x^2 2^x}{\ln 2} - \dfrac{2x 2^x}{(\ln 2)^2} + \dfrac{2^x \cdot 2}{(\ln 2)^3} + C$, при што претпоследниот интеграл беше најден повторно со помош на методот на парцијална интеграција, каде беше ставено $u = x$, $dv = 2^x\,dx$, од каде $du = dx$, $v = \dfrac{2^x}{\ln 2}$.

д) $\int \cos(\ln x)\,dx$

Од методот на парцијална интеграција, $u = \cos(\ln x)$ и $dv = dx$, имаме $du = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx$, $v = x$. Па, $\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$. Сега повторно интегралот $\int \sin(\ln x)\,dx$ го решаваме со помош на методот на парцијална интеграција, $u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$, од каде $du = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx$, $v = x$. Конечно, $\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$. Ако интегралот $\int \cos(\ln x)\,dx$ го означиме со I, тогаш имаме $I = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I$, односно $2I = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$, т.е.

$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)\Big) + C.$$

ѓ) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $a, b \neq 0$

Повторно со методот на парцијална интеграција, избирајќи $u = \cos bx$ и $dv = e^{ax}dx$, од каде $du = -b\sin bx\;dx$, $v = \int e^{ax}\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax}$, имаме, $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \dfrac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$. Го применуваме методот на парцијална интеграција уште еднаш, $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}\,dx$, $du = b\cos bx\,dx$, $v = \dfrac{1}{a}e^{ax}$.

За интегралот добиваме,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right) =$$

$= \dfrac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \dfrac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \dfrac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx$. Ставајќи $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$, добиваме

$I=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}I$, од каде

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx$$, т.е.

$$I=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right)+C=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)+C\,.$$

е) $\int(3x^2+1)\mathrm{arctg}x\,dx$

Со помош на методот на парцијална интеграција, $u=\mathrm{arctg}x$ и $dv=(3x^2+1)\,dx$, од каде $du=\frac{1}{1+x^2}dx$,

$$v=\int(3x^2+1)\,dx=3\frac{x^3}{3}+x=x^3+x.$$

Да забележиме дека овде моравме да избереме $u=\mathrm{arctg}x$, бидејќи ако ставиме $dv=\mathrm{arctg}x$ ќе мора да го интегрираме со парцијална интеграција, што веќе претставаува посложена ситуација. Од друга страна, мора $(3x^2+1)\,dx$ да го ставиме dv, иако тоа значи дека ќе го зголемиме степенот на полиномот $3x^2+1$, што во општ случај би значело добивање на посложен интеграл. Овде тоа не е случај, бидејќи како надомест на зголемувањето на степенот на $3x^2+1$ имаме губење на $arctgx$ од подинтегралната функција. Па,

$$\int(3x^2+1)\mathrm{arctg}x\,dx=(x^3+x)\mathrm{arctg}x-$$

$$-\int\frac{x^3+x}{x^2+1}dx=(x^3+x)\mathrm{arctg}x-\int\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}dx=$$

$$=(x^3+x)\mathrm{arctg}x-\int x\,dx=(x^3+x)\mathrm{arctg}x-\frac{x^2}{2}+C\,.\,\square$$

Овде со помош на парцијалната интеграција можеме да дадеме рекурентни формули за некои посложени интеграли. Рекурентни формули се релации кои даваат како зависи секој нареден член од низата преку некои од претходните членови.

Пример 4. Најди ги интегралите

а) $\int\cos^n x\,dx$

Имаме, $\int\cos^n x\,dx=\int\cos^{n-1}x\cos x\,dx$. Сега, со парцијална интеграција, ставајќи $u=\cos^{n-1}x$ и $dv=\cos x\,dx$. Имаме $du=(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)\,dx$ и $v=\int\cos x\,dx=\sin x$. Па,

$\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)\sin x\,dx =$

$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx =$

$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\,dx =$

$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx + (n-1)\int \cos^n x\,dx\,.$

Означувајќи $I_n = \int \cos^n x\,dx$, каде што индексот n го означува степенот на $\cos x$ во подинтегралната функција. Тогаш,

$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,.$

Изразувајќи го I_n од последното равенство,

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\,,$$

односно

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx\,.$$

На сличен начин можеме да го најдеме интегралот $\int \sin^n x\,dx$:

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx\,.$$

Овие формули можат да се користат за полесно наоѓање на интеграли од овој тип за конкретни вредности на n. Конкретно за $n=6$ во $\int \cos^n x\,dx$ имаме:

$$\int \cos^6 x\,dx = \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5}{6}\int \cos^4 x\,dx =$$

$$= \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5}{6}\left(\frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx\right) =$$

$$= \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5\sin x \cos^3 x}{24} + \frac{15}{24}\int \cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5\sin x \cos^3 x}{24} + \frac{15}{24}\left(\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx\right) =$$

$$= \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5\sin x \cos^3 x}{24} + \frac{15\sin x \cos x}{48} + \frac{15}{48}x + C\,.$$

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, каде $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$.

Во броителот додаваме и одземаме x^2, откако претходно броителот го помноживме и поделивме со a^2. Па,

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n}dx - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx\,.$$

Во вториот интеграл на десната страна во последното равенство ќе го примениме методот на працијална интеграција земајќи $u = x,\ dv = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx$, од каде наоѓаме $du = dx$,

$$v = \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{x}{t^n}\cdot\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int t^{-n}\,dt = \frac{t^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{1}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}},$$

при што ставивме смена $t = x^2+a^2$, $dt = 2x\,dx$, $dx = \dfrac{dt}{2x}$. Значи,

$\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$. Ако замениме во првото равенство, добиваме

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right).$$

.

Ако ставиме $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, каде n го означува степенот на $\dfrac{1}{x^2+a^2}$, последното равенство можеме да го презапишеме како

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \frac{x}{2(1-n)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}\right)$$

$$I_n = \frac{1-2n}{2a^2(1-n)}I_{n-1} - \frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a)^{n-1}},$$

односно

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{x}{2a^2(1-n)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{1-2n}{2a^2(1-n)}\int \frac{dx}{(x^2+a)^{n-1}}\,.$$

Да забележиме дека за $n = 1$, го имаме табличниот интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C\,.$$

в) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$

Запишуваме

$$\int tg^n x\,dx = \int \operatorname{tg}^n x\,dx + \int \operatorname{tg}^{n-2}x\,dx - \int \operatorname{tg}^{n-2}x\,dx = \int \operatorname{tg}^{n-2}x(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx - \int \operatorname{tg}^{n-2}x\,dx$$

.

Да забележиме дека $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$. Па ставајќи смена $t = tgx$, $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\, dx = (1+\mathrm{tg}^2 x)\, dx$, односно $dx = \dfrac{dt}{1+\mathrm{tg}^2 x}$. Тогаш,

$$\int \mathrm{tg}^{n-2}x(1+\mathrm{tg}^2 x)\, dx = \int t^{n-2}(1+\mathrm{tg}^2 x)\frac{dt}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \int t^{n-2}\, dt = \frac{t^{n-1}}{n-1} + C =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1} + C$$

Заменувајќи во почетното равенство добиваме

$$\int \mathrm{tg}^n x\, dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1} + \int \mathrm{tg}^{n-2} x\, dx.$$

5.5. Интегрирање на квадратен трином

Во овој дел ќе биде разгледувано интегрирањето на квадратниот трином $ax^2 + bx + c$, кога тој се наоѓа како подинтегрална функција во броител, во именител и кога се наоѓа под квадратен корен. Секоја од ситуациите која може да настане ќе биде во продолжение разгледана подетално. Можни се следните случаи:

1) $\int (ax^2 + bx + c)\, dx = a\int x^2\, dx + b\int x\, dx + c\int dx = a\dfrac{x^3}{3} + b\dfrac{x^2}{2} + cx + C$.

Пример 5. Најди го интегралот $\int (3x^2 + 4x + 7)\, dx$.

$$\int (3x^2 + 4x + 7)\, dx = 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 7x + C = x^3 + 2x^2 + 7x + C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

Дополнувајќи до полн квадрат во именителот имаме три случаи кои можат да настанат:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

при што беше ставена смена $t = x + \dfrac{b}{2a}$, каде $dx = dt$.

2.1) Ако $b^2 - 4ac = 0$, тогаш последниот интеграл е еднаков на

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{t}\right)+C=-\frac{1}{a(x+\frac{b}{2a})}+C\,.$$

2.2) Ако $b^2-4ac<0$, земајќи $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=-s^2$, последниот интеграл е еднаков на

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+s^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{s}\right)+C=\frac{1}{a\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{(x+\frac{b}{2a})}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}\right)+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{(2ax+b)}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+C\,.$$

2.3) Ако $b^2-4ac>0$, тогаш ставајќи $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=s^2$, последниот интеграл е еднаков на

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-s^2}=\frac{1}{2as}\ln\left|\frac{t-s}{t+s}\right|+C=\frac{1}{2as}\ln\left|\frac{(x+\frac{b}{2a})-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}{(x+\frac{b}{2a})+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2as}\ln\left|\frac{(2ax+b)-\sqrt{b^2-4ac}}{(2ax+b)+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C\,.$$

Пример 6. Најди ги интегралите:

а) $\int\frac{dx}{x^2-6x+9}$

Ставајќи смена $t=x-3$, $dt=dx$, добиваме

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+9}=\int\frac{dx}{(x-3)^2}=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{x-3}+C$$

б) $\int\frac{dx}{x^2+4x+7}$

Дополнувајќи до полн квадрат во именител, а потоа ставајќи смена $t=x+2$, $dt=dx$, имаме

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+7}=\int\frac{dx}{(x+2)^2-4+7}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+3}=\int\frac{dt}{t^2+3}=\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+C\,.$$

в) $\int \frac{dx}{2x^2+8x+5}$

Извлекувајќи $\frac{1}{2}$ како константа пред интегралот, дополнувајќи до полн квадрат и потоа ставајќи смена $t = x+2$, $dt = dx$, имаме

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2-4+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{\frac{3}{2}}}{t+\sqrt{\frac{3}{2}}}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-\sqrt{3}}{t\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{(x+2)\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(x+2)\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right| + C\,. \square$$

3) $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$

Идејата за наоѓање на овој интеграл, каде M, N се реални броеви, е да направиме броителот да биде израз кој е извод од именителот (ова го правиме бидејќи намерата ни е целиот именител да го замениме со нова променлива, а тоа не би успеале да го направиме ако броителот не е израз кој е извод од именителот). Правејќи го тоа ќе добиеме во општ случај два интеграла, од кои едниот е во облик каде што броителот е извод од именителот, а другиот интеграл е од облик 2). Бидејќи изводот на именителот е $2ax+b$,

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = M\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} + N\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{2ax\,dx}{ax^2+bx+c} + N\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Ставајќи смена $t = ax^2+bx+c$, $dt = (2ax+b)\,dx$ во првиот интеграл имаме

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{dt}{t} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{M}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Пример 7. Најди го интегралот $\int \frac{4x+6}{x^2+2x+3}dx$.

Бидејќи извод од именителот е $2x+2$, правиме идентична трансформација на броителот така што во него да го добиеме само изразот $2x+2$,

$$\int \frac{4x+6}{x^2+2x+3}dx = 2\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}dx = 2\int \frac{2x+2+1}{x^2+2x+3}dx =$$
$$= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + 2\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

Ставајќи смена во првиот интеграл $t = x^2+2x+3$, $dt = (2x+2)\,dx$, односно $dx = \frac{dt}{2x+2}$, а вториот интеграл го решаваме како во претходниот пример.

$$2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + 2\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = 2\int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{dx}{(x+1)^2-1+3} =$$
$$= 2\ln|\,t\,| + 2\int \frac{ds}{s^2+(\sqrt{2})^2} = 2\ln(x^2+2x+3) + \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + C =$$
$$= 2\ln(x^2+2x+3) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C,$$

при што во вториот интеграл беше воведена смена $s = x+1$, $ds = dx$.

4) Нека a е произволна константа и нека го разгледаме интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Да се потсетиме дека овој интеграл беше претходно разгледан и ставен како табличен интеграл 14. во делот за таблични интеграли. Овде, ќе дадеме постапка како тој се наоѓа. Нека ставиме смена $\sqrt{x^2+a} = t - x$, од каде што со квадрирање добиваме дека $x = \frac{t^2-a}{2t}$, $dx = \frac{t^2+a}{2t^2}dt$, $t - x = \frac{t^2+a}{2t}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{\frac{t^2+a}{2t^2}}{\frac{t^2+a}{2t}}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|\,t\,| + C.$$

Заменувајќи $t = x + \sqrt{x^2+a}$, добиваме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|\,x + \sqrt{x^2+a}\,| + C.$$

Пример 8. Најди го интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

Имајќи ја предвид дискусијата погоре,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \ln|\, x+\sqrt{x^2-2}\,| + C\,.$$

5) $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$, каде што a е произволна константа.

Множејќи ги и броителот и именителот со $\sqrt{x^2+a}$ во подинтегралната функција ги добиваме интегралите

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \int \sqrt{x^2+a}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\,.$$

Првиот интеграл ќе го најдеме со парцијална интеграција, додека вториот интеграл е од тип 4) или 14. од делот за таблични интеграли. Подетално за првиот интеграл ставајќи $u = x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}$, од каде што $du = dx$,

$v = \int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = \sqrt{x^2+a}$, од каде што

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx.$$

Ако означиме со $I = \int \sqrt{x^2+a}\,dx$, и имајќи ја во предвид горната дискусија и 4) можеме да запишеме

$$I = x\sqrt{x^2+a} - I + a\ln|\, x+\sqrt{x^2+a}\,| + C\,,$$

од каде што добиваме дека

$$2I = x\sqrt{x^2+a} + a\ln|\, x+\sqrt{x^2+a}\,| + C$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|\, x+\sqrt{x^2+a}\,| + C\,,$$

односно

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|\, x+\sqrt{x^2+a}\,| + C\,.$$

Пример 9. Најди го интегралот $\int \sqrt{x^2+4}dx$.

Според 5),

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+4} + 2\ln|\, x+\sqrt{x^2+4}\,| + C\,.$$

6) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Во зависност од константата a имаме два случаја кои можат да настанат.

6.1) $a > 0$

Во овој случај, дополнуваме до полн квадрат под коренот, а потоа ставаме смена $t = x + \dfrac{b}{2a}$, $dt = dx$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{b^2-4ac}{4a^2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2-4ac}{4a^2}} \right| + C .$$

6.2) $a < 0$

Бидејќи $a < 0$, со претходна трансформација и со истата смена како и погоре интегралот може да се запише како

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2} - \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2} - t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} \right) + C .$$

Пример 10. Најди ги интегралите

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$

Користејќи го 6.1), притоа ставајќи смена $t = x + 2$, $dt = dx$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 4 + 7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} =$$

$$= \ln \left| t + \sqrt{t^2+3} \right| + C = \ln \left| x + 2 + \sqrt{(x+2)^2+3} \right| + C .$$

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+4x+10}}$

Овде $a = -2 < 0$, па

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+4x-10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2(x^2+2x-5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2[(x+1)^2-1-5]}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-2[(x+1)^2-6]}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-2(t^2-6)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{6}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C,$$

при што беше ставена смена $t = x+1$, $dt = dx$.

7) Да го разгледаме интегралот $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$, каде што како и претходно a, b, c се реални броеви. Дополнувајќи до полн квадрат, почетниот интеграл се сведува на интеграли од облик $\int \sqrt{t^2 \pm a}\, dt$ или $\int \sqrt{a-t^2}\, dt$. Да забележиме дека повторно овде во зависност од тоа дали a е позитивен и негативен се добиваат два случаја.

7.1) Нека $a > 0$. Тогаш

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx = \sqrt{a} \int \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}\, dx = \sqrt{a} \int \sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}\, dx =$$

$$= \sqrt{a} \int \sqrt{t^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}\, dt,$$

при што беше ставена смена $t = x + \frac{b}{2a}$, $dt = dx$. Последниот интеграл се решава како во 5).

7.2) Нека $a < 0$. Со истата смена и слично како во 6.2) добиваме

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx = \sqrt{-a} \int \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2} - \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\, dx = \sqrt{-a} \int \sqrt{m-t^2}\, dt,$$

кој може да се реши како 5).

Пример 11. Најди го интегралот $\int \sqrt{x^2+6x+8}\, dx$.

Ставајќи смена $t = x+3$, $dt = dx$, и потоа користејќи го 5) добиваме

$$\int \sqrt{x^2+6x+8}\, dx = \int \sqrt{(x+3)^2-9+8}\, dx = \int \sqrt{(x+3)^2-1}\, dx = \int \sqrt{t^2-1}\, dt =$$

$$= \frac{t}{2}\sqrt{t^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left| t + \sqrt{t^2-1} \right| + C =$$

$$= \frac{x+3}{2}\sqrt{(x+3)^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left| x+3+\sqrt{(x+3)^2-1} \right| + C.$$

5.6. Интегрирање на дробно рационални функции. Метод на неопределени коефициенти

Под дробно рационална функција ќе подразбираме функција која може да се претстави како количник од две полиномни функции.

Нека е дадена дробно рационалната функција $R(x)$ кој може да се запише како

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

при што x е такво што $Q(x) \neq 0$. Степените на полиномите се $\deg P(x) = m$, $\deg Q(x) = n$. Ако важи $m < n$, тогаш функцијата $R(x)$ ја нарекуваме права дробно рационална функција. Наједноставни прави дробно рационални функции се

$$f_1(x) = \frac{A}{x-b},\ f_2(x) = \frac{A}{(x-b)^n},\ f_3(x) = \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ f_4(x) = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

каде што $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Условот $q - \frac{p^2}{4} > 0$, значи дека равенката $x^2 + px + q = 0$ нема реални решенија. Со методот кој овде ќе биде даден (метод на неопределени коефициенти) права дробно рационална функција ќе ја запишеме како збир од функциите $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$, во зависност од тоа како може да се разложи на множители именителот на правата дробно рационална функција.

Бројот на нули на полиномот $Q(x)$, бидејќи $\deg Q(x) = n$, според основната теорема во алгебрата е n. Бројот на реални нули на полиномот $Q(x)$ е помал или еднаков на n.

Ако степенот на $P(x)$ е поголем или еднаков од степенот на $Q(x)$, тогаш полиномот $P(x)$ го делиме со полиномот $Q(x)$, па добиваме количник $q(x)$ и остаток $r(x)$ за кој важи $\deg r(x) \leq \deg Q(x)$, па запишуваме

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

Сега дробнорационалната функција е права дробно рационална функција. Значи, кога би требало да ја интегрираме дробно рационалната функција $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (која не е права дробно рационална функција) нејзиното интегрирање ќе се сведе на интегрирање на полиномната функција $q(x)$ и правата дробно рационална функција $\frac{r(x)}{Q(x)}$.

Бидејќи интегрирањето на полиномната функција $q(x)$ е прилично едноставно, во продолжение ќе се задржиме на постапката за интегрирање на функцијата $\frac{r(x)}{Q(x)}$.

Полиномната функција $Q(x)$ има коефициенти реални броеви и има најмногу n реални нули, кои не мора да бидат различни. Нека $a_1, a_2, ..., a_s$ се различни реални корени со соодветни кратности $r_1, r_2, ..., r_s$ и нека $x_j = u_j + iv_j$, $j = 1, 2, ..., k$ се конјугирано комплексни нули со соодветни кратности t_j, $j = 1, 2, ..., k$. Во овој случај полиномната функција $Q(x)$, користејќи ја обопштената Виетова теорема, можеме да ја запишеме како

$$Q(x) = (x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2} \cdot ... \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1} \cdot ... \cdot (x^2 + p_k x + q_k)^{t_k}.$$

Да забележиме дека множителите кои се формирани од два конјугирани комплексни броеви ги имаме помножено и имаме добиено квадратни полиноми од облик $x^2 + px + q$.

Ќе докажеме две теореми кои се однесуваат на дробно рационалните функции. Првата теорема се однесува на записот на полиномната функција $Q(x)$ која има нула која е реален број a со кратност k, а втората теорема се однесува на записот на полиномната функција $Q(x)$ кога таа има конјугирано комплексни нули $x_{1,2} = u \pm iv$ со кратност s. Претпоставуваме дека

1° $Q(x) = (x - a)^k \cdot F_1(x)$, $F_1(a) \neq 0$,

2° $Q(x) = (x^2 + px + q)^j \cdot F_2(x)$,

$F_2(x_{1,2}) \neq 0, \quad x_{1,2} = u \pm iv,\ p = -2u,\ q = u^2 + v^2$.

Теорема. Ако $Q(x) = (x - a)^k \cdot F_1(x)$, $F_1(a) \neq 0$, тогаш рационалната функција $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можеме да ја запишеме во облик

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x - a)^{k-i} F_1(x)},\ A = \frac{P(a)}{F_1(a)}.$$

Доказ.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x - a)^k} = \frac{P(x) - AF_1(x)}{(x - a)^k F_1(x)}.$$

Во полиномот $P(x) - AF_1(x)$, ја избираме константата A така што неговата вредност е еднаква на нула за $x = a$. Па, $A = \dfrac{P(a)}{F_1(a)}$. Оттука следи дека a е нула на полиномот $P(x) - AF_1(x)$, па $P(x) - AF_1(x) = (x - a)^i P_1(x)$, каде што $P_1(x)$ е полином за кој важи $P_1(a) \neq 0$. □

Пример 12. Нека е дадена правата дробно рационална функција $R(x) = \dfrac{x + 5}{(x - 1)^2 (x + 2)}$. Со повеќекратна примена на претходната теорема функцијата $R(x)$, може да се запише во следниов облик

$$R(x)=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{P_1(x)}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Сега треба да ги одредиме константите A, B и C (оттука е и името на методот, метод на неопределени коефициенти).

Нив ќе ги определиме врз основа на правилото за еднаквост на две полиномни функции: Две полиномни функции се еднакви ако и само ако коефициентите пред соодветните степени се еднакви. Откога ќе ги помножиме двете страни на равенството со $Q(x)=(x-1)^2(x+2)$. Тогаш,

$$x+5=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$
$$x+5=(B+C)x^2+(A+B-2C)x+2A-2B+C.$$

Па,

$$5=2A-2B+C,$$
$$1=A+B-2C,$$
$$0=B+C.$$

Со решавање на системот добиваме $A=2$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$, па според тоа

$$\frac{x+5}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{x+2}. \square$$

Теорема. Нека $a=u+iv$ и $\bar{a}=u-iv$ се нули на полиномната функција $Q(x)$ со кратност k, тогаш

$Q(x)=[(x-a)(x-\bar{a})]\cdot f(x)=(x^2+px+q)^k\cdot f(x),\;\; f(a)\neq 0, f(\bar{a})\neq 0,$ каде $p=-2u,\;\; q=u^2+v^2$. Дробно рационалната функција $R(x)$ можеме да ја запишеме во облик

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{g(x)}{(x^2+px+q)^{k-j}f(x)}.$$

Константите A и B се изразени со помош на имагинарниот и реалниот дел од

$$\frac{P(x)}{Q(x)},\; A=\frac{1}{v}\operatorname{Im}\left(\frac{P(a)}{f(a)}\right),\; B=\operatorname{Re}\left(\frac{P(a)}{f(a)}\right)-\frac{u}{v}\operatorname{Im}\left(\frac{P(a)}{f(a)}\right),\; g(a)\neq 0, g(\bar{a})\neq 0.$$

Доказ. Ја формираме разликата

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}=\frac{P(x)-(Ax+B)\cdot f(x)}{(x^2+px+q)^k\cdot f(x)}.$$

Нека за полиномот во броителот важи

$$F(x)=P(x)-(Ax+B)\cdot f(x),\;\; F(a)=0,\; a=u+iv.$$
$$P(x)-(Aa+B)f(a)=P(a)-(Au+B+ivA)f(a)=0.$$

Од еднаквоста $Au+B+ivA=\frac{P(a)}{f(a)}$ добиваме

$$A = \frac{1}{v}\operatorname{Im}\left(\frac{P(a)}{f(a)}\right), \quad B = -Au + \operatorname{Re}\left(\frac{P(a)}{f(a)}\right).$$

Бидејќи точката a е нула на полиномната функција $F(x)$, следува дека и $\bar{a}$ е нула на полиномната функција $F(x)$, па можеме да ја запишеме во облик

$$F(x) = (x^2 + px + q)^j \cdot g(x), \quad q(a) \neq 0,$$

од каде што

$$R(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{g(x)}{(x^2 + px + q)^{k-j} f(x)}$$

со што теоремата е докажана. □

Според дискусијата погоре, со повеќекратната примена на претходните теореми, секоја права дробно рационална функција можеме да ја запишеме како збир од повеќе едноставни прави дробно рационални функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$. На овој начин кога ќе имаме задача да најдеме интеграл од дробно рационална функција, наместо да бараме интеграл од неа, барањето ќе го сведеме на барање на интеграл од едноставните прави дробно рационални функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$, кое е далеку поедноставно.

Детален приказ на постапката на интегрирање на дробно рационална функција ќе биде даден во продолжение.

При интегрирање на дробно рационалната функција $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ потребно е да се направат следниве чекори:

1. Треба да ги провериме степените на полиномните функции $P(x)$ и $Q(x)$. Ако $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, тогаш треба да извршиме делење на полиномните функции. Тогаш добиваме, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{Q(x)}$, каде $\deg r(x) \leq \deg Q(x)$. Да забележиме како и погоре, функцијата $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ е права дробно рационална функција.

2. Во овој чекор правата дробна рационална функција $\dfrac{r(x)}{Q(x)}$ ја запишуваме како збир од функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$. За таа цел, потребно е прво да ги најдеме нулите на полиномот $Q(x)$. Некои од нулите се реални, а некои се комплексни. За секоја реална нула a на полиномот $Q(x)$ со кратност j, во записот на дробно рационалната функција треба да предвидиме j прави едноставни дробно рационални функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_j}{(x-a)^j}.$$

За секој пар од конјугирани комплексни нули $a = u + iv$, $\bar{a} = u - iv$ со кратност s, треба да предвидиме s прави едноставни дробно рационални функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$:

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + ... + \frac{A_sx + B_s}{(x^2 + px + q)^s},$$

каде што $(x - a)(x - \bar{a}) = x^2 + px + q$.

3. Интеграција на членовите добиени во третиот чекор.

Пример 13. Најди ги интегралите

а) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$

Степенот на броителот е 3, додека степенот на именителот е 2, па треба да ги поделиме. Тогаш,

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 5}{x^2 - 3x + 2}.$$

Според тоа, функцијата $\frac{7x - 5}{x^2 - 3x + 2}$ е права дробно рационална функција, па за неа ќе го примениме методот на неопределени коефициенти. Следува,

$$\frac{7x - 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{7x - 5}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1}.$$

Кога двете страни ќе ги помножиме со $(x - 2)(x - 1)$, добиваме $7x - 5 = A(x - 1) + B(x - 2)$, од каде што го добиваме системот равенки $7 = A + B$, $-5 = -A - 2B$, чие решение е $A = 9$, $B = -2$. Конечно,

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int (x + 3)\, dx + \int \frac{9}{x - 2} dx + \int \frac{-2}{x - 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 9 \ln | x - 2 | -2 \ln | x - 1 | + C.$$

б) $\int \frac{x + 1}{x^3(x^2 + 1)} dx$

Подинтегралната функција е права дробно рационална функција. Единствена нула на функција која е реална е 0 со кратност 3. Според тоа за неа во развојот на $\frac{x + 1}{x^3(x^2 + 1)}$ ќе имаме три члена. Нулите $\pm i$ имаат кратност 1. Па, можеме да запишеме

$$\frac{x + 1}{x^3(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}.$$

Константите ги определуваме од равенството

$$x + 1 = Ax^2(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + C(x^2 + 1) + (Dx + E)x^3,$$

односно

$$x+1=(A+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C)x^2+Bx+C.$$

Го добиваме системот равенки
$1=C,\ 1=B,\ 0=A+C,\ 0=B+E,\ 0=A+D$, чие решение
$A=-1, B=1, C=1, D=1, E=-1$. За почетниот интеграл имаме

$$\int \frac{x+1}{x^3(x^2+1)}dx=\int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{1}{x^2}dx+\int \frac{1}{x^3}dx+\int \frac{x-1}{x^2+1}dx=$$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-arctgx+C.$$

в) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

Нулите на полиномот x^4+1 се $x_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$, $x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$.

Според тоа,

$$x^4+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

Тогаш,

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}+\frac{Cx+D}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}.$$

Сосема аналогно како во претходните два примера добиваме

$$A=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ B=\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ D=\frac{1}{2}.$$

Оттука,

$$\int \frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)]+C. \ \square$$

5.7. Интегрирање на ирационални функции

Интегрирањето на ирационалите функции најчесто се сведува на интегрирање на рационални функции, со помош на соодветна смена. Еден од начините за интеграција на ирационалните функции се состои во наоѓање соодветна смена, која интегралот од ирационална функција го сведува на интеграл од рационална функција. Нека подинтегралната функција, која претпоставуваме дека е рационална функција, ја означиме со $R(x,y)$, каде што на местото на променливата y е ставен некој алгебарски израз. Ќе наведеме некои интеграли и смената со која подинтегралната функција од ирационална се трансформира во рационална функција.

Интегралот $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$ со помош на смената $ax+b=t^n$ се трансформира во интеграл од рационална функција.

Интегралот $\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \ldots, \sqrt[n_s]{ax+b})\,dx$ се сведува на интеграл од рационална функција со помош на смената $ax+b=t^k$, каде што $k = Н.З.С.(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Уште повеќе, интегралот $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ се сведува на интеграл од рационална функција со помош на смената $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, каде $x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$.

Пример 14. Најди ги интегралите

а) $\int x\sqrt{3-x}\,dx$

Ставајќи смена $t^2 = 3-x$, од каде $x = 3-t^2$ и $dx = -2t\,dt$ добиваме

$$\int x\sqrt{3-x}\,dx = -2\int (3-t^2)t^2\,dt = -2\int (3t^2 - t^4)\,dt = -2\left(t^3 - \frac{1}{5}t^5\right) + C =$$

$$= -\frac{2}{5}(3-x)^{\frac{3}{2}}(x+2) + C\,.$$

б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$

Имајќи предвид дека кореновите показатели на двата корени се 2 и 3, ставаме смена $t^6 = x+1$, од каде што $6t^5\,dt = dx$. Тогаш добиваме,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2}\,dt = 6\int \frac{t^5}{t^2(t+1)}\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt =$$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|\,t+1\,|\right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{3} - \frac{\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2} + \sqrt[6]{x+1} - \ln|\,\sqrt[6]{x+1} + 1\,|\right) + C = .$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{x+1}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} + \sqrt[6]{x+1} - \ln|\,\sqrt[6]{x+1} + 1\,|\right) + C$$

в) $\int \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\,dx$

Бидејќи само изразот $\dfrac{x+1}{x-1}$ се појавува под корен, смената која ја воведуваме е $t^2=\dfrac{x+1}{x-1}$. Оттука, $x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, од каде $dx=-\dfrac{4t}{(t^2-1)^2}dt$. Па, имаме

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx=-4\int\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt=-4\int\frac{t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}\,dt.$$

Со помош на методот на неопределени коефициенти, имаме

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}=\frac{At+D}{t^2+1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1}.$$

Множејќи ги двете страни на равенството добиваме

$$t^2=(At+D)(t^2-1)+B(t^2+1)(t-1)+C(t^2+1)(t+1),$$

од каде $A=0$, $B=-\dfrac{1}{4}$, $C=\dfrac{1}{4}$, $D=\dfrac{1}{2}$.

Па, за почетниот интеграл имаме,

$$-4\int\frac{t^2}{(t^2+1)(t+1)(t-1)}\,dt=-4\left(\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}\right)=$$

$$=-2\left(\operatorname{arctg}t+\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)+C=-2\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\ln\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C.$$

г) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

Пред да ја интегрираме подинтегралната функција ќе ја поедноставиме така што и броителот и именителот ќе ги помножиме со $\sqrt{1+x}-(1+\sqrt{x})$. Па,

$$\int\frac{\sqrt{1+x}-1-\sqrt{x}}{1+x-(1+\sqrt{x})^2}\,dx=\int\frac{\sqrt{1+x}-1-\sqrt{x}}{-2\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx.$$

Последниот интеграл ќе го разгледаме одделно. Ставаме смена $t^2=\dfrac{1+x}{x}$, од каде што $x=\dfrac{1}{t^2-1}$ и $dx=\dfrac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$.

Па, разгледуваниот интеграл се трансформира во

$$-2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt.$$

Подинтегралната функција ја запишуваме како

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{(t-1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{(t+1)^2}\,.$$

Со множење на двете страни на равенството со $(t^2-1)^2$ се добива

$$t^2=(At+B)(t^2+2t+1)+(Ct+D)(t^2-2t+1).$$

Користејќи ја дефиницијата за еднаквост на полиноми го добиваме системот на равенки

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-2C+D=1 \\ A+2B+C-2D=0 \\ B+D=0 \end{cases}.$$

Со решавање на системот добиваме

$$A=\frac{1}{4},\ B=0,\ C=-\frac{1}{4},\ D=0.$$

Според ова имаме,

$$\begin{aligned} &-2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}\,dt=-\frac{1}{2}\int \frac{t}{(t-1)^2}\,dt+\frac{1}{2}\int \frac{t}{(t+1)^2}\,dt= \\ &=-\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t-1}+\int (t-1)^{-2}\,dt\right)+\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t+1}-\int (t+1)^{-2}\,dt\right)= \\ &=-\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t-1}+\int s^{-2}\,ds\right)+\frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t+1}-\int u^{-2}\,du\right)= \\ &=\frac{1}{2}\left(-\ln|\,t-1\,|+\frac{1}{t-1}+\ln|\,t+1\,|+\frac{1}{t+1}\right)+C= \\ &=\frac{1}{2}\ln\left|\,\frac{t+1}{t-1}\,\right|+\frac{t}{t^2-1}+C=\frac{1}{2}\ln|\,\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\,|-\frac{1}{2}\ln|\,\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\,|+ \\ &+\sqrt{x(1+x)}+C \end{aligned}$$

при што за интегрирање на интегралите беше ставено смена $u=t+1,\ du=dt$ и смена $s=t-1,\ ds=dt$.

5.8. Интеграли од биномен диференцијал

Интегралите кои можеме да ги запишеме во облик

$$I=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

каде што $m,n,p\in\mathbb{Q}$ и $a,b\in\mathbb{R}$ ќе ги нарекуваме *интеграли од биномен диференцијал.* Да забележиме дека не сите интеграли од овој тип можат да се претставаат со помош на елементарни функции. Тоа е можно само во следниве случаи:

- $p \in \mathbb{Z}$;
- $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$;
- $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$

Лесно се проверува дека во овие три случаи интегралот е елементарна функција. Но, доказот дека тоа е единствениот случај кога интегралот е елементарна функција не е воопшто едноставен, па затоа ќе биде изоставен.

Нека го разгледаме најпрво случајот кога $p \in \mathbb{Z}$. Ако $p = 0$, тогаш во тој случај имаме

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C\,.$$

Ако $m = -1$, во тој случај интегралот е $\ln|x| + C$. Нека сега p е природен број. Имајќи ја предвид биномната формула, добиваме

$$I = \int x^m \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k (bx^n)^{p-k}\, dx = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \int x^{m+n(p-k)}\, dx\,.$$

Наоѓањето на последниот интеграл е едноставно. Слична се добива и кога p е негативен цел број. Со смената $x = t^j$, каде што $j = Н.З.С.(m,n)$ интегралот

$$I = \int \frac{x^m\, dx}{(a+bx^n)^p}$$

се сведува на рационална функција.

Пример 15. Најди ги интегралите

а) $\int x^{-\frac{1}{2}}(1 - x^{\frac{1}{4}})^2\, dx$

Степенувајќи го биномот во подинтегралната функција добиваме

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{4}})^2\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1 - 2x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}})\, dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{4}} + 1)\, dx =$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} + x + C\,.$$

б) $\int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{4}})^{-2}\, dx$

Запишувајќи го почетниот интеграл како $\int \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}}{(1+x^{\frac{1}{4}})^2}\, dx$, а потоа ставајќи смена $x = t^4$, од каде што $dx = 4t^3\, dt$. Добиваме,

$$\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(1+x^{\frac{1}{4}})^2}\,dx = 4\int \frac{t}{(1+t)^2}\,dt = 4\int \frac{dt}{1+t} - 4\int \frac{dt}{(1+t)^2} = 4\int \frac{du}{u} - 4\int \frac{du}{u^2} =$$

$$= 4\left(\ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\right) + C = 4\left(\ln|1+\sqrt[4]{x}\,| + \frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\right) + C,$$

при што беше ставена смена $u = t+1$, $du = dt$.

Сега нека $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Во почетниот интеграл $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ нека ставиме смена $x^n = t$. Тогаш $x = t^{\frac{1}{n}}$, па $dx = \dfrac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$. Потоа, во добиениот интеграл ставаме смена,

$a + bt = a + bx^n = u^r$, $p = \dfrac{s}{r}$, $t = \dfrac{u^r - a}{b}$, $dt = \dfrac{r}{b}\cdot u^{r-1}\,du$.

Тогаш почетниот интеграл има облик

$$I = \frac{r}{nb^{q+1}} \int u^{s+r-1}(u^r - a)^q\,du,$$

кој веќе го разгледавме како прв случај.

Пример 16. Најди ги интегралите

а) $\int x^2 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

Овде го имаме вториот случај каде што $m=2$, $n=1$ и $p=\dfrac{1}{2}$. Ставаме смена, согласно погорната дискусија $1+x=t^2$, од каде $dx = 2t\,dt$. Па, имаме

$$\int x^2(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int (t^2-1)^2 t\cdot 2t\,dt = 2\int (t^4 - 2t^2 + 1)t^2\,dt = 2\int (t^6 - 2t^4 + t^2)\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right) + C = 2\left(\frac{(\sqrt{1+x})^7}{7} - 2\frac{(\sqrt{1+x})^5}{5} + \frac{(\sqrt{1+x})^3}{3}\right) + C.$$

б) $\int (x^2 + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}\,dx$

Почетниот интеграл го запишуваме како

$$\int (x^2 + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}\,dx = \int \left(x^2(1+x^{-\frac{3}{2}})\right)^{\frac{1}{4}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}\,dx.$$

Овде $m = \dfrac{1}{2}$, $n = -\dfrac{3}{2}$ и $p = \dfrac{1}{4}$. Согласно горната дискусија ставаме смена

$1+x^{-\frac{3}{2}}=t^4$, од каде $x=(t^4-1)^{-\frac{2}{3}}$, па $dx=-\frac{8}{3}(t^4-1)^{-\frac{5}{3}}\cdot t^3\,dt$.

Според тоа добиваме,

$\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}\,dx=\int (t^4-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot t\cdot(-\frac{8}{3})(t^4-1)^{-\frac{5}{3}}\cdot t^3\,dt=-\frac{8}{3}\int\frac{t^4}{(t^4-1)^2}\,dt$.

Последниот интеграл се решава со помош на методот неопределени коефициенти, но бидејќи е чисто техничка работа, ова го оставаме за вежба на читателот.

На крај нека $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$. Нека претпоставиме дека во почетниот интеграл сме ставиле смена $t=x^n$, нека $p=\frac{r}{s}$. Па добиваме,

$I=\frac{1}{n}\int(a+bt)^p\cdot t^q\,dt=\frac{1}{n}\int\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p\cdot t^{p+q}=\frac{1}{n}\int\left(a\cdot\frac{1}{t}+b\right)^p\cdot t^{p+q}\,dt$,

каде што $q=\frac{m+1}{n}-1$.

Сега ставајќи уште една замена

$$a\cdot\frac{1}{t}+b=u^r,\ t=\left(\frac{u^r-b}{a}\right)^{-1},\quad dt=-\left(\frac{u^r-b}{a}\right)^{-2}\cdot\frac{ru^{r-1}}{a}du,$$

почетниот интеграл се трансформира во

$$I=\frac{1}{n}\int u^{rp}\left(\left(\frac{u^r-b}{a}\right)^{-1}\right)^{p+q}\cdot(-1)\left(\frac{u^r-b}{a}\right)^{-2}\cdot r\cdot\frac{u^{r-1}}{a}du,$$

односно

$$I=-\frac{a^{p+q+1}}{n}\int\frac{u^{s+r-1}}{(u^r-b)^{p+q+2}}du,$$

кој всушност е интеграл од рационална функција.

Пример 17. Најди го интегралот $\int x(1+x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}\,dx$.

Овде $m=1$, $n=\frac{3}{2}$, $p=\frac{2}{3}$, па $\frac{m+1}{n}+p=2$. Значи ја имаме последната ситуација, па

$$t=x^{\frac{3}{2}},\ x=t^{\frac{2}{3}},\ dx=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\,dt.$$

Со помош на оваа смена доаѓаме до интегралот,

$$I=\int\left(\frac{1+x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot x^2\,dx=\frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{t}+1\right)^{\frac{2}{3}}\cdot t\,dt.$$

Понатаму ја ставаме смената

$$\frac{1}{t}+1=u^3,\ t=(u^3-1)^{-1},\ dt=-(u^3-1)^{-2}\cdot 3u^2\,du.$$

Тогаш

$$I=\frac{2}{3}\int u^2(u^3-1)^{-1}\cdot(-3u^2)\cdot(u^3-1)^{-2}\,du=-2\int\frac{u^4}{(u^3-1)^3}\,du,$$

кој е интеграл од дробно-рационална функција. Интегралот се решава со стандардна прмена на методот на неопределени коефициенти кај интегрирање на дробно-рационални функции. Бидејќи, за конкретниот интеграл постапката е подолга, а вклучува само технички детали, неговото наоѓање ќе биде прескокнато.

Понатаму, ќе биде разгледна уште една класа на интеграли од ирационални функции, кои се наоѓаат со помош на тригонометриски смени.

а) интегралите од облик $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2}\,)\,dx$ се наоѓаат со помош на смената $x=a\sin t$, од каде што $dx=a\cos t\,dt$. Со смената $x=a\sin t$, всушност коренот $\sqrt{a^2-x^2}$ се губи, т.е.

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t,$$

со што интегралот од ирационална функција се трансформира во интеграл од тригонометриска функција.

Пример 18. Најди го интегралот $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Согласно претходната дискусија ставаме смена $x=2\sin t$, $dx=2\cos t\,dt$. Тогаш

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt=2\int\cos t\sqrt{4(1-\sin^2 t)}\,dt=$$

$$=2\int\cos t\sqrt{4\cos^2 t}\,dt=4\int\cos^2 t\,dt=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=2\left(\int dt+\int\cos 2t\,dt\right)=$$

$$=2t+\sin 2t+C=2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C.$$

б) Интегралот $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2}\,)\,dx$ се решава со смената $x=\dfrac{a}{\cos t}$, од каде $dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt$. Оправданоста на смената следува од

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}(1-\cos^2 t)}=\sqrt{\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^2 t}}=a\,\mathrm{tg}t\,.$$

Пример 19. Најди го интегралот $\int\sqrt{x^2-25}\,dx$.

Овде ставаме смена $x=\dfrac{5}{\cos t}$, па $dx=\dfrac{5\sin t}{\cos^2 t}dt$. Имаме,

$$\int\sqrt{x^2-25}\,dx=\int\sqrt{\frac{25}{\cos^2 t}-25}\cdot\frac{5\sin t}{\cos^2 t}dt=5\int\sqrt{\frac{25}{\cos^2 t}\left(1-\cos^2 t\right)}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=$$

$$=5\int\sqrt{\frac{25\sin^2 t}{\cos^2 t}}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=25\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt.$$

Интегралот што го добивме ќе го најдеме со помош на методот на парцијална интеграција. Ставаме $u=\sin t$, $dv=\dfrac{\sin t}{\cos^3 t}dt$, од каде што $du=\cos t\,dt$ и

$$v=\int\frac{\sin t}{\cos^3 t}dt=-\int\frac{ds}{s^3}=-\int s^{-3}\,ds=\frac{1}{2s^2}=\frac{1}{2\cos^2 t},$$

при што беше ставена смена $s=\cos t$, $ds=-\sin t\,dt$, па $dt=-\dfrac{ds}{\sin t}$.

Имаме,

$$25\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt=\frac{25\sin t}{2\cos^2 t}-\frac{25}{2}\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{25\sin t}{2\cos^2 t}-\frac{25}{2}\int\frac{dt}{\sin(t-\frac{\pi}{2})}=$$

$$=\frac{25\sin t}{2\cos^2 t}-\frac{25}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=$$

$$=\frac{25x^2\sin(\arccos\left(\frac{5}{x}\right))}{50}-\frac{25}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\arccos\left(\frac{5}{x}\right)}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\,,$$

при што беше искористено дека $\int\dfrac{dx}{\sin x}=\ln|\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)|+C$.

в) Интегралот $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx$ се трансформира во интеграл од тригонометриска функција со помош на смената $x=a\,\mathrm{tg}t$, каде $dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt$.

Со оваа смена,

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\mathrm{tg}^2t}=\sqrt{a^2(1+\mathrm{tg}^2t)}=\sqrt{a^2\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)}=$$

$$=\sqrt{a^2\,\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}.$$

Пример 20. Најди го интегралот $\int\sqrt{9+x^2}\,dx$.

Ставајќи смена $x=3\mathrm{tg}t$, од каде $dx=\dfrac{3}{\cos^2 t}dt$, почетниот интеграл се трансформира во

$$\int\sqrt{9+x^2}\,dx=\int\sqrt{9+9\mathrm{tg}^2t}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}dt=3\int\sqrt{9\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=$$

$$=3\int\sqrt{9\left(\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=3\int\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=9\int\frac{dt}{\cos^3 t}=$$

$$=9\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^3 t}dt=9\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt+9\int\frac{dt}{\cos t}=$$

$$=\frac{9\sin t}{2\cos^2 t}-\frac{9}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+9\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=$$

$$=\frac{9\sin t}{2\cos^2 t}+\frac{9}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=$$

$$\frac{9\sin(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right))}{2\cos^2(\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right))}+\frac{9}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C,$$

каде што за решавање на претходните интеграли беше искористен претходниот пример.

На крај да забележиме дека интегралите од облик $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2}\,)\,dx$, $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2}\,)\,dx$ и $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2}\,)\,dx$, кои претходно беа разгледувани и беа дадени смени со кои тие можат да се најдат, можат да се најдат и со смените $x=a\tanh t$, $x=a\cosh t$ и $x=a\sinh t$ соодветно.

5.9. Интегрирање на тригонометриски функции

Овде ќе бидат разгледани некои класи од интеграли од тригонометриски функции.

1) Нека подинтегралната функција е $\sin^n x$ или $\cos^n x$, каде што n е парен број. Тогаш интегралот се наоѓа со помош на формулите

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ и } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Пример 21. Најди го интегралот $\int \cos^2 x\, dx$.

Користејќи ја формулата $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$, добиваме

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \ .$$

2) Интеграл од облик $\int \cos^n x\, dx$ и $\int \sin^n x\, dx$, каде што n е непарен број. Подинтегралините функција ја трансформираме со помош на формулите $\cos^n x = \cos x \cdot \cos^{n-1} x$ и $\sin^n x = \sin x \cdot \sin^{n-1} x$, при што $\cos^{n-1} x$ и $\sin^{n-1} x$ ги трансформираме со помош на формулите $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ и $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$. Потоа ставаме смена $t=\sin x$, односно $t = \cos x$.

Пример 22. Најди го интегралот $\int \sin^3 x\, dx$.

Имаме

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x\, dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\, dx =$$

$$= \int \sin x(1-t^2)\frac{dt}{-\sin x} = -\int (1-t^2)\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C\,,$$

при што беше ставена смена $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$, $dx = \dfrac{dt}{-\sin x}$.

3) Интеграли од облик $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$. Овде ќе разгледаме неколку случаи.

а) n е непарен. Тогаш ставаме смена $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$, $dx = -\dfrac{dt}{\sin x}$.

б) m е непарен. Ставаме смена $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$, $dx = \dfrac{dt}{\cos x}$.

в) m и n се парни. Во овој случај интегралот го трансформираме со помош на формулите

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x\,,\ \sin^2\frac{\alpha x}{2} = \frac{1-\cos\alpha x}{2},\ \cos^2\frac{\alpha x}{2} = \frac{1+\cos\alpha x}{2}.$$

г) m и n се негативни и нивниот збир е парен цел број. Во овој случај ставаме смена $t = \mathrm{tg} x$. Тогаш $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Пример 23. Најди ги интегралите

а) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

Бидејќи степенот на $\sin x$ е непарен овде ќе ставиме смена $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$, $dx = -\dfrac{dt}{\sin x}$. Имаме,

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, dx =$$
$$= \int \sin x (1-t^2)t^2 \frac{dt}{-\sin x} = -\int (t^2 - t^4)\, dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C =$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

б) $\int \sin x \cos^5 x\, dx$

Ставаме смена $t = \sin x$, $dt = \cos x\, dx$, $dx = \dfrac{dt}{\cos x}$. Па,

$$\int \sin x \cos^5 x\, dx = \int \sin x \cos^4 x \cos x\, dx = \int \sin x (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx =$$
$$= \int t(1-t^2)^2 \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t(1-2t^2+t^4)\, dt = \int (t - 2t^3 + t^5)\, dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} - 2\frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

в) $\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx$

Бидејќи степените на $\sin x$ и $\cos x$ се парни,

$$\int \cos^2 x \sin^4 x\, dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin^2 x\, dx = \int (\cos x \sin x)^2 \sin^2 x\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int 4(\sin x \cos x)^2 \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int (2\sin x \cos x)^2 \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \sin^2 x\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)(1-\cos 2x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int (1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 2x \cos 4x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 6x)\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{12}\sin 6x\right) + C.$$

г) $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} dx$

Бидејќи $m=-3$, $n=-1$ и $m+n=-4$, ставаме смена $t=\mathrm{tg}x$, каде што

$dx=\frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Ако замениме,

$$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x} dx=\int \frac{1}{\frac{t^3}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^2}{t^3}dt=\int \frac{dt}{t^3}+\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\int t^{-3}\,dt+\ln|\,t\,|=-\frac{1}{2t^2}+\ln|\,t\,|+C=-\frac{1}{2\mathrm{tg}^2 x}+\ln|\,\mathrm{tg}x\,|+C\,.$$

4) Ако подинтегралната функција зависи само од $\mathrm{tg}x$ или $\mathrm{ctg}x$, тогаш ставаме смена $t=\mathrm{tg}x$ или $t=\mathrm{ctg}x$.

Пример 24. Најди ги интегралите

а) $\int \mathrm{tg}^3 5x\,dx$

Ставаме смена $t=\mathrm{tg}5x$. Тогаш $x=\frac{1}{5}\mathrm{arctg}t$ и $dx=\frac{dt}{5(1+t^2)}$. Тогаш имаме

$$\int \mathrm{tg}^3 5x\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{t^3}{t^2+1}dt=\frac{1}{5}\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{10}t^2-\frac{1}{10}\int\frac{ds}{s}=$$

$$=\frac{1}{10}\left(t^2-\ln(t^2+1)\right)+C=\frac{1}{10}\left(\mathrm{tg}^2 5x-\ln(\mathrm{tg}^2 5x+1)\right)+C\,,$$

каде што беше ставена смена $s=t^2+1$ и притоа $ds=2t\,dt$, $dt=\frac{ds}{2t}$.

б) $\int \frac{\cos x\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\sin x\cos^2 x}dx$

Ако во подинтегралната функција и броителот и именителот ги поделиме со $\cos x$,

$$\int \frac{\cos x\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\sin x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sqrt{\mathrm{tg}x}}{\mathrm{tg}x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sqrt{t}}{t\cos^2 x}\cdot\cos^2 x\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}\cdot t^{-1}\,dt=$$

$\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{\mathrm{tg}x}+C$, каде што претходно беше ставена смена

$t=\mathrm{tg}x$, $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$, $dx=\cos^2 x\,dt$.

5) Ако интегралот е од облик $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ и притоа важи $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тогаш ставаме смена $t = tgx$, од каде што $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Уште повеќе имаме, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Пример 25. Најди го интегралот $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

Бидејќи $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, ставаме смена $t = \mathrm{tg}x$, каде што $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Согласно тоа,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^4 x} = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int (t^2 + t^4)\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x + C\,.$$

6) Во поопшта ситуација интегралот од облик $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ се наоѓа со т.н. универзална тригонометриска смена $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$. Оттука е $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Дополнително,

$$\sin x = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \cos 2 \cdot \frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 26. Најди ги интегралите

а) $\int\frac{dx}{2\cos x+3\sin x+2}$

Ја ставаме универзалната тригонометриска смена $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, при што

$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Тогаш

$$\int\frac{dx}{2\cos x+3\sin x+2}=2\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3\dfrac{2t}{1+t^2}+2}=2\int\frac{dt}{2-2t^2+6t+2+2t^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{3t+2}=\frac{1}{3}\int\frac{ds}{s}=\frac{1}{3}\ln|\,3t+2\,|+C=\frac{1}{3}\ln\left|3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2\right|+C,$$

Каде што беше ставена смена $s=3t+2$, $ds=3\,dt$, $dt=\frac{ds}{3}$.

б) $\int\frac{dx}{\sin^2 x-8\sin x\cos x-\cos^2 x}$

Ако во подинтегралната функција, именителот го поделиме и помножиме со $\cos^2 x$, тогаш добиваме

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-8\sin x\cos x-\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{8\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)}=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(\mathrm{tg}^2x-8\mathrm{tg}x-1\right)}.$$

Сега ставајќи смена $t=\mathrm{tg}x$, при што $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$, $dx=\cos^2 x\,dt$, имаме

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\text{tg}^2 x - 8\text{tg}x - 1\right)} = \int \frac{\cos^2 x\, dt}{\cos^2 x(t^2 - 8t - 1)} = \int \frac{dt}{t^2 - 8t - 1} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t-4)^2 - 17} = \int \frac{ds}{s^2 - (\sqrt{17})^2} = \frac{1}{2\sqrt{17}} \ln\left|\frac{s - \sqrt{17}}{s + \sqrt{17}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{17}} \ln\left|\frac{t - 4 - \sqrt{17}}{t + 4 + \sqrt{17}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{17}} \ln\left|\frac{\text{tg}x - 4 - \sqrt{17}}{\text{tg}x + 4 + \sqrt{17}}\right| + C\,.$$

7) Ако интегралот е од облик

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx,\ \int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx,\ \int \cos \alpha x \cos \beta x\, dx,$$

тогаш нивното наоѓање е со помош на формулите

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x]$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x].$$

Пример 27. Најди ги интегралите

а) $\int \cos 2x \sin 4x\, dx$

Имајќи ја предвид првата формула од наведените формули,

$$\int \cos 2x \sin 4x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(4-2)x + \sin(4+2)x)\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 2x + \sin 6x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cos 6x + C = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C\,.$$

б) $\int \sin x \sin 3x\, dx$

Согласно втората формула,

$$\int \sin x \sin 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos(3-1)x - \cos(3+1)x)\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C\,.$$

в) $\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x\, dx$

Користејќи ги формулите од погоре,

$$\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(4-2)x + \cos(4+2)x]\cos 6x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x \cos 6x + \cos 6x \cos 6x)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \cos 6\, x dx + \frac{1}{2}\int \cos^2 6x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int(\cos(6-2)x+\cos(6+2)x)\,dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 12x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int(\cos 4x+\cos 8x)\,dx+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}\sin 12x =$$
$$= \frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{32}\sin 8x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{48}\sin 12x+C\,.$$

5.10. Интегрирање на трансцедентни функции

Под трансцедентни функции подразбираме елементарни функции кои не се алгебарски. Најчесто, наоѓањето на тие интеграли се сведува на користење на методот на парцијална интеграција или комбинација на методот на замена и методот на парцијална интеграција.

Поконкретно, ќе ги разгледаме следниве случаи:

1.Интеграли од облик $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, каде што $P(x)$ е полином од n-ти степен, се наоѓаат со парцијална интеграција.

2. Интегралите од облик $\int x^n e^{ax}\sin bx\,dx$ и $\int x^n e^{ax}\cos bx\,dx$ можат да се најдат со помош на методот на парцијална интеграција, притоа ставајќи $u=x^n$ и $dv=e^{ax}\sin bx\,dx$, односно $dv=e^{ax}\cos bx\,dx$.

3.Интегралите од облик $\int P(\ln x)x^n\,dx$ и $\int P(\arcsin x)\,dx$, каде $P(x)$ е полином по $\ln x$, односно по $\arcsin x$, со помош на смената $\ln x = t$, односно $\arcsin x = t$ се сведуваат на интегралите $\int P(t)e^{(n+1)t}\,dt$ и $\int P(t)\cos t\,dt$, кои потоа со помош на методот на парцијална интеграција можат да се најдат.

Во продолжение, бидејќи методот на парцијална интеграција и методот на замена веќе беа проучувани, ќе бидат дадени само два примера на неопределени интеграли од трансцедентни функции.

Пример 28. Најди ги интегралите

а) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

Ставајќи $u=\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$, $dv=dx$.

Оттука, $du = 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})\,dx$

$$du=\frac{2\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,,\ v=x\,.$$

Па,

$$\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}\,)\,dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}\,) - 2\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,.$$

Во последниот интеграл, ставаме

$u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)$, $dv=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, од каде што

$du=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})\,dx=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ и $v=\sqrt{1+x^2}$.

Конечно,

$$\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}\,)\,dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}\,) - 2\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}\,) - 2\left(\sqrt{1+x^2}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,) - \int dx\right) =$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}\,) - 2\sqrt{1+x^2}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,) - 2x + C\,.$$

б) $\int xe^x\cos x\,dx$

Овде ќе го примениме методот на парцијална интеграција, ставајќи

$u=xe^x$, $dv=\cos x\,dx$, од каде $du=(1+xe^x)dx$ и $v=\sin x$.

Имаме,

$$I=\int xe^x\cos x\,dx = xe^x\sin x - \int (1+xe^x)\sin x\,dx =$$

$$= xe^x\sin x - \int \sin x\,dx - \int xe^x\sin x\,dx = xe^x\sin x + \cos x - \int xe^x\sin x\,dx\,.$$

Сега во последниот интеграл, ставаме

$u=xe^x$, $dv=\sin x\,dx$, од каде $du=(1+xe^x)\,dx$, $v=-\cos x$.

Оттука,

$$I = xe^x\sin x + \cos x - \left(-xe^x\cos x + \int\cos x\,dx + \int xe^x\cos x\,dx\right) =$$

$$= xe^x\sin x + \cos x + xe^x\cos x - \sin x - \int xe^x\cos x\,dx\,.$$

Следува,

$$2I = xe^x(\sin x+\cos x) + (\cos x - \sin x)$$

$$\int xe^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\Big((\sin x+\cos x)(xe^x+1)\Big) + C\,.$$

Интеграли кои не се елементарни функции

Наоѓање на интеграл од произволна функција воопшто не е едноставна постапка. Понекогаш, дури и многу едноставни подинтегрални функции не се извод од некои елементарни функции. Да забележиме дека кога диференциравме елементарна функција добивавме секогаш елементарна функција. Но, кога станува збор за интегрирање ова не мора да важи. За интегралите за кои интегралот не е елементарна функција, велиме дека не се елементарни. Доказот дека некој интеграл не е едноставен, во општ случај не е воопшто лесен. Примери за некои нееелементарни интеграли се:

$$\int e^{-x^2}\,dx\,,\ \int \sin(x^2)\,dx\,,\ \int \cos(x^2)\ dx\,,\ \int \frac{dx}{\ln x},\ \int \frac{e^x}{x}\ dx\,,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx\,,\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\ dx, k\neq 1\,.$$

Овие интеграли не се елементарни функции. Наједноставен начин за наоѓање на овие интеграли е подинтегралната функција да ја запишеме како степенски ред, а потоа тој степенски ред да го интегрираме член по член. Ваквото интегрирање на член по член е можно само ако редот е конвергенен.

5.11. Решени задачи

1. Да се најдат интегралите:

а) $\int (3x^2-\sin x+3-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^4}-\frac{5}{1+x^2})dx$

б) $\int (\frac{x^4-1}{x^2+1}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+3e^x)dx$

в) $\int a^x(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^5}})dx$

г) $\int (2^x+3^x)^2dx$

д) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{5x^3}}{2\sqrt[3]{x}}dx$

Решение.

а)

$$\int (3x^2-\sin x+3-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^4}-\frac{5}{1+x^2})dx=3\frac{x^3}{3}-(-\cos x)+3x-3\ln x+$$

$$+2\frac{x^{-3}}{-3}-5\mathrm{arctg}x+C=x^3+\cos x+3x-3\ln x-\frac{2}{3x^3}-5\mathrm{arctg}x+C$$

б)

$$\int (\frac{x^4-1}{x^2+1}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+3e^x)dx=\int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}dx+2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+$$

$$+3\int e^x dx=\int (x^2-1)dx+2\,\mathrm{arcsinx}+3\,\mathrm{e}^x+C=\frac{x^3}{3}-x+2\,\mathrm{arcsinx}+3\,\mathrm{e}^x+C$$

в)

$$\int a^x(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^5}})dx=\int (a^x+\frac{1}{\sqrt{x^5}})dx=\int a^x dx+\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\frac{a^x}{\ln a}+$$

$$+\frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1}+C=\frac{a^x}{\ln a}+\frac{x^{\frac{-3}{2}}}{\frac{-3}{2}}+C=\frac{a^x}{\ln a}-\frac{2}{3\sqrt{x^3}}+C$$

г)

$$\int (2^x+3^x)^2dx=\int (2^{2x}+2\cdot 2^x\cdot 3^x+3^{2x})dx=\int (4^x+2\cdot 6^x+9^x)dx=$$

$$=\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$$

д)

$$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt{5x^3}}{2\sqrt[3]{x}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx-\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx+2\int \frac{\sqrt{5x^3}}{\sqrt[3]{x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt[6]{x^2}}dx-\int \sqrt[3]{x}dx+2\int \frac{\sqrt[6]{5^3x^9}}{\sqrt[6]{x^2}}dx=\frac{1}{2}\int \sqrt[6]{x}\,dx-\int x^{\frac{1}{3}}dx+$$

$$+2\sqrt[6]{5^3}\int \sqrt[6]{x^7}\,dx=\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}-\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+2\sqrt[6]{5^3}\,\frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1}+C=\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+$$

$$+2\sqrt[6]{5^3}\,\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}}+C=\frac{3}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{12\sqrt[6]{5^3}}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+C\,.$$

2. Да се најдат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$ б) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-3x^2}$ в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

г) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ д) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ ѓ) $\int \frac{dx}{\sin x}$

Решение.

а) $$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx = \int \sqrt[5]{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^5}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x)^3}} = \begin{pmatrix} 1-x=u \\ dx=-du \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{-du}{u^{\frac{3}{5}}} = -\int u^{\frac{-3}{5}} du = -\frac{u^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = -\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{2}{5}} + C$$

б) $$\int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\frac{3}{2}x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\left(x\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \begin{pmatrix} x\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=u \\ dx=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}du \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{1+x\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}{1-x\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right| + C$$

в) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3(1-\frac{2}{3}x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}} =$$

$$= \begin{pmatrix} x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=u \\ dx=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot du \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin u + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(x\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + C$$

г) $$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} =$$

$$=\begin{pmatrix} e^x = u \\ e^x dx = du \end{pmatrix} = \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arc\,tg} u + C = \operatorname{arc\,tg}(e^x) + C$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \begin{pmatrix} \ln x = u \\ \dfrac{dx}{x} = du \end{pmatrix} = \int \frac{du}{u \ln u} = \begin{pmatrix} \ln u = t \\ \dfrac{du}{u} = dt \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln u| + C = \ln|\ln|\ln x|| + C$$

$$\text{ѓ)} \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} dx =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = t & \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = u \\ -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) dx = dt & \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) dx = du \end{pmatrix} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{du}{u} = -\ln|t| + \ln|u| + C =$$

$$= -\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \ln\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

3. Со помош на парцијална интеграција да се најдат следниве интеграли:

а) $\int \sin(\ln x) dx$ б) $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} dx$ в) $\int \sqrt{9-x^2} dx$

Решение.

$$\text{а)} \int \sin(\ln x) dx = \begin{pmatrix} u = \sin(\ln x), & du = \cos(\ln x) \cdot \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{pmatrix} =$$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln)x \cdot \frac{dx}{x} = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx =$$

$$=\begin{pmatrix} u=\cos(\ln x), & du=-\sin(\ln x)\cdot\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx, & v=x \end{pmatrix}=x\sin(\ln x)-$$

$$-\left[x\cos(\ln x)-\int x(-\sin(\ln x))\cdot\frac{dx}{x}\right]=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)dx$$

Бидејќи го добивме истиот интеграл на десната страна од равенството, само со знак минус, ако го префрлиме на левата страна од равенството, добиваме:

$$\int\sin(\ln x)dx=\frac{x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))}{2}+C$$

б) $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}dx=$

$$=\begin{pmatrix} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{pmatrix}=\int 2t\,\mathrm{arctg}t dt=\begin{pmatrix} u=\mathrm{arctg}t & dv=2tdt \\ du=\dfrac{dt}{1+t^2} & v=\dfrac{2t^2}{2}=t^2 \end{pmatrix}=$$

$$=t^2\mathrm{arctg}t-\int t^2\frac{du}{1+t^2}=t^2\mathrm{arctg}t-\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=$$

$$=t^2\mathrm{arctg}t-\int(1-\frac{1}{1+t^2})dt=t^2\mathrm{arctg}t-t+\mathrm{arctg}t+C=$$

$$=(1+t^2)\mathrm{arctg}t-t+C=(1+x)\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$$

в) $\int\sqrt{9-x^2}dx=\begin{pmatrix} u=\sqrt{9-x^2} & dv=dx \\ du=\dfrac{-2xdx}{2\sqrt{9-x^2}} & v=x \end{pmatrix}=$

$$=x\sqrt{9-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=x\sqrt{9-x^2}+\int\frac{x^2-9+9}{\sqrt{9-x^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{9-x^2}+\int\frac{-(9-x^2-9)}{\sqrt{9-x^2}}dx=x\sqrt{9-x^2}-\int\sqrt{9-x^2}dx+$$

$$+9\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=x\sqrt{9-x^2}-\int\sqrt{9-x^2}dx+9\int\frac{dx}{\sqrt{9\left(1-\left(\dfrac{x}{3}\right)^2\right)}}==\begin{pmatrix} \dfrac{x}{3}=t \\ dx=3dt \end{pmatrix}=$$

$$x\sqrt{9-x^2}-\int\sqrt{9-x^2}dx+\frac{9}{3}\int\frac{3dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$= x\sqrt{9-x^2} - \int \sqrt{9-x^2}\,dx + 9\arcsin\frac{x}{3} + C$$

Од овде следува дека

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{9-x^2} + 9\arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right)}{2} + C\,.$$

4. Да се најде интегралот $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{x\,\mathrm{arctg}x}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \left(\begin{array}{ll} & u = \mathrm{arctg}x \quad du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\,dx & v = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \left(\begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{2t^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}\,.$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \mathrm{arctg}x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \left(\begin{array}{ll} u = x & dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\,dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right) = \mathrm{arctg}x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \mathrm{arctg}x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

Конечно за бараниот интеграл добиваме

$$\int \frac{x\mathrm{arctg}x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\ \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(1+x^2)}\right)+C\,.$$

5. Да се најдат интегралите:

а) $\int\frac{dx}{4-4x+x^2}$ б) $\int\frac{dx}{3-2x-4x^2}$ в) $\int\frac{dx}{3x^2+2x+1}$

Решение.

а)

$$\int\frac{dx}{4-4x+x^2}=\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\begin{pmatrix}x-2=t\\ dx=dt\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{x-2}+C$$

б) $$\int\frac{dx}{3-2x-4x^2}=\int\frac{dx}{-4(x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{4})}=$$

$$=\frac{1}{-4}\int\frac{dx}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{3}{4}}=\frac{1}{-4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1+12}{16}}=$$

$$\frac{1}{-4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{13}{16}}=-\frac{1}{4\cdot\frac{13}{16}}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{13}}{4}}\right)^2-1}=-\frac{4}{13}\int\frac{dx}{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{13}}\right)^2-1}=$$

$$=\left(\frac{4x+1}{\sqrt{13}}=t,\ dx=\frac{\sqrt{13}}{4}dt\right)=-\frac{4}{13}\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$-\frac{\sqrt{13}}{13\cdot 2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{\sqrt{13}}{26}\ln\left|\frac{\frac{4x+1}{\sqrt{13}}-1}{\frac{4x+1}{\sqrt{13}}+1}\right|+C=-\frac{\sqrt{13}}{26}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{13}}{4x+1+\sqrt{13}}\right|+C$$

в)

$$\int \frac{dx}{3x^2+2x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{3})^2+\frac{3-1}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9}} =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\frac{2}{9}}\int \frac{dx}{\left(\frac{\frac{3x+1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^2+1} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \left|\begin{matrix} \frac{3x+1}{\sqrt{2}} = t \\ dx = \frac{\sqrt{2}}{3}dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\sqrt{2}dt}{3(t^2+1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C$$

6. Да се најдат интегралите:

а) $\displaystyle\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}dx$ б) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{2x^2-3x+5}dx$

Решение.

а)

$$\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}dx = \left|\begin{matrix} 2x^2-3x+1=t \\ (4x-3)dx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left|2x^2-3x+1\right| + C$$

б) $$\int \frac{2x-3}{2x^2-3x+5}dx = 2\int \frac{xdx}{2x^2-3x+5} - 3\int \frac{dx}{2x^2-3x+5} =$$

(Првиот интеграл го решаваме со смената

$2x^2-3x+5=t,\ (4x-3)dx = dt$)

$$= \frac{2}{4}\int \frac{(4x-3+3)dx}{2x^2-3x+5} - 3\int \frac{dx}{2x^2-3x+5} =$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(4x-3)dx}{2x^2-3x+5}+(\frac{3}{2}-3)\int\frac{dx}{2x^2-3x+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{2x^2-3x+5}=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{2(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2})}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{3}{4\cdot\frac{31}{16}}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{12}{31}\int\frac{dx}{\left(\frac{4x-3}{\sqrt{31}}\right)^2+1}=\left|\frac{4x-3}{\sqrt{31}}=t,\ dx=\frac{\sqrt{31}}{4}dt\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{12\sqrt{31}}{31\cdot 4}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-3x+5\right|-\frac{3}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4x-3}{\sqrt{31}}\right)+C$$

7. Да се најдат интегралите:

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-10}}$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+12}}$ в) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

Решение.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-10}\right| + C$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+12}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+4}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+3}} = \begin{pmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{\left(x+1\right)^2+3}\right| + C$

в)

$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(-3+2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2x+1-1-3)}} =$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+2x+1-4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(x+1)^2-4\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \begin{pmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{pmatrix} =$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4(1-(\frac{t}{2})^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-(\frac{t}{2})^2}} = \begin{pmatrix} t/2=u \\ dt=2du \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin\frac{t}{2} + C = \arcsin\frac{x+1}{2} + C$

8. Да се најдат интегралите:

а) $\int \sqrt{x^2+5}dx$ б) $\int \sqrt{2x^2+x-3}dx$

Решение.

а)

$\int \sqrt{x^2+5}dx = \int \frac{\sqrt{x^2+5}\cdot\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}}dx = \int \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+5}}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+5}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} =$

Прво ќе го решиме првиот интеграл собирок, а вториот интеграл од собироците е табличен.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+5}} = x\sqrt{x^2+5} - \int \sqrt{x^2+5}dx$$

$$\left(\begin{array}{l} x = u \Rightarrow dx = du \\ \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+5}} = dv \Rightarrow v = \displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}} = \begin{pmatrix} x^2+5=t \\ 2xdx = dt \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+5}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+5} \end{array} \right)$$

Па, ако замениме, добиваме:

$$\int \sqrt{x^2+5}dx = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+5}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = x\sqrt{x^2+5} - \int \sqrt{x^2+5}dx + 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|$$

Бидејќи почетниот интеграл се јавува и на десна страна од равенството само со знак минус, ќе го префрлиме на лево и добиваме:

$$2\int \sqrt{x^2+5}dx = x\sqrt{x^2+5} + 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2+5}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + C$$

б)

$$\int \sqrt{2x^2+x-3} = \int \sqrt{2(x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2})}dx = \sqrt{2}\int \sqrt{x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}dx =$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{3}{2}}dx = \sqrt{2}\int \sqrt{(x+\frac{1}{4})^2-\frac{25}{16}}dx =$$

$$= \left(\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{4} = t \Rightarrow dx = dt \\ -\dfrac{25}{16} = k \end{array} \right) = \sqrt{2}\int \sqrt{t^2+k}dt$$

Бидејќи добивме интеграл како под а), ако го замениме резултатот под а), ќе добиеме

$$\int \sqrt{2x^2+x-3}dx = \sqrt{2}\left(\frac{t\sqrt{t^2+k}}{2} + \frac{k}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+k}\right| \right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{(x+\frac{1}{4})\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2-\frac{25}{16}}}{2} - \frac{25}{32}\ln\left|(x+\frac{1}{4})+\sqrt{(x+\frac{1}{4})^2-\frac{25}{16}}\right| \right) + C$$

9. Да се најде интегралот $\int \cos^4 x dx$.

Решение.
Применувајќи ја рекурентната формула за n=4, добиваме

$$\int \cos^4 x dx = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x dx$$

Применувајќи ја рекурентната формула за n=2, се добива

$$\int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}x + C$$

Значи, за бараниот интеграл добиваме:

$$\int \cos^4 x dx = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}x + C\right) =$$

$$= \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3\sin x \cos x}{8} + \frac{3}{8}x + C$$

10. Да се реши интегралот: $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Решение.

Применувајќи ја рекурентната формула за $n = 2$, добиваме:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$$

11. Да се најдат интегралите:

а) $\int \frac{x^5 dx}{x^3 - a^3}$ б) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ в) $\int \frac{x^5 dx}{(1+x^2)^3}$ г) $\int \frac{xdx}{x^3 - 1}$

Решение. а)

$$\int \frac{x^5 dx}{x^3 - a^3} = \left(\begin{array}{l} x^5 : (x^3 - a^3) = x^2 + \dfrac{a^3 x^2}{x^3 - a^3} \\ \\ x^5 : (x^3 - a^3) = x^2 \\ \underline{-x^5 \mp a^3 x^2} \\ \quad a^3 x^2 \end{array}\right) = \int x^2 dx + a^3 \int \frac{x^2 dx}{x^3 - a^3} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} x^3 - a^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array}\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3}\ln\left|x^3 - a^3\right| + C$$

б) Подинтегралната функција ја разложуваме на прости дропки:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}=$$
$$=\frac{A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$
$$1=A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)$$
$$1=A(x^2+2x+3x+6)+B(x^2+3x-x-3)+C(x^2-x+2x-2)$$
$$1=Ax^2+5Ax+6A+Bx^2+2Bx-3B+Cx^2+Cx-2C$$
$$1=x^2(A+B+C)+x(5A+2B+C)+6A-3B-2C$$
$$A+B+C=0; \qquad 5A+2B+C=0; \qquad 6A-3B-2C=1$$

Ги наоѓаме коефициентите A,B и C од последните три линеарни равенки:

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\5&2&1\\6&-3&-2\end{vmatrix}=-4+6-15-12+3+10=-12$$
$$D_A=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&2&1\\1&-3&-2\end{vmatrix}=1-2=-1 \qquad D_B=\begin{vmatrix}1&0&1\\5&0&1\\6&1&-2\end{vmatrix}=-(1-5)=4$$
$$D_C=\begin{vmatrix}1&1&0\\5&2&0\\6&-3&1\end{vmatrix}=2-5=-3; \quad A=\frac{D_A}{D}=\frac{1}{12}; \quad B=\frac{D_B}{D}=\frac{-1}{3}; \quad C=\frac{D_C}{D}=\frac{1}{4}$$

За интегралот добиваме:

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}=$$
$$=\begin{pmatrix}x-1=t\Rightarrow dx=dt\\x+2=u\Rightarrow dx=du\\x+3=v\Rightarrow dx=dv\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{4}\int\frac{dv}{v}=$$
$$=\frac{1}{12}\ln|t|-\frac{1}{3}\ln|u|+\frac{1}{4}\ln|v|+C=\frac{1}{12}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|x+3|+C$$

в) $\displaystyle\int\frac{x^5dx}{(1+x^2)^3}=\int(\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}+\frac{Ex+F}{(1+x^2)^3})dx$

Ги наоѓаме коефициентите A,B,C,D,E и F од разложувањето на подинтегралната функција:

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3}=\frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}+\frac{Ex+F}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3}=\frac{(Ax+B)(1+x^2)^2+(Cx+D)(1+x^2)+Ex+F}{(1+x^2)^3}$$

$$x^5=(Ax+B)(1+2x^2+x^4)+Cx+D+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$

$$x^5=Ax+B+2Ax^3+2Bx^2+Ax^5+Bx^4+Cx+D+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$

$$x^5=Ax^5+Bx^4+x^3(2A+C)+x^2(2B+D)+x(A+C+E)+B+D+F$$

$$A=1;\quad B=0;\quad 2A+C=0;\quad 2B+D=0;\quad A+C+E=0;\quad B+D+F=0$$

$$2+C=0\Rightarrow C=-2;\quad 0+D=0\Rightarrow D=0;\quad 1+(-2)+E=0\Rightarrow E=1$$

$$0+0+F=0\Rightarrow F=0$$

За интегралот добиваме

$$\int\frac{x^5dx}{(1+x^2)^3}=\int\left(\frac{x+0}{1+x^2}+\frac{-2x+0}{(1+x^2)^2}+\frac{x+0}{(1+x^2)^3}\right)dx=\int\frac{xdx}{1+x^2}-2\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}+$$

$$+\int\frac{xdx}{(1+x^2)^3}=\begin{pmatrix}1+x^2=t\\2xdx=dt\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{2t}-2\int\frac{dt}{2t^2}+\int\frac{dt}{2t^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln t+\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2(-2)}+C=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^2}+C$$

г) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^3-1}=\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right)\mathrm{dx}$

Ги наоѓаме коефициентите A, B и C

$$x=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$$x=Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C$$

$$x=x^2(A+B)+x(A+C-B)+A-C$$

$$A+B=0;\quad A+C-B=1;\quad A-C=0$$

$$B=-A;\quad C=A;\quad A+A+A=1\Rightarrow A=\frac{1}{3}=C;\quad B=-\frac{1}{3}$$

Заменуваме во интегралот

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = \int (\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1})dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{xdx}{x^2+x+1} +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \begin{pmatrix} x^2+x+1=t \\ (2x+1)dx=dt \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{(2x+1-1)dx}{x^2+x+1} +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} + (\frac{1}{6}+\frac{1}{3})\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{3}{6}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{\frac{2x+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \begin{pmatrix} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}=t \\ dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

12. Да се најдат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$ б) $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ в) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x+3}}$

Решение:

а)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}} = \begin{pmatrix} x=t^{12} \\ dx=12t^{11}dt \end{pmatrix} = 12\int \frac{t^{11}dt}{t^4-t^3} = 12\int \frac{t^8dt}{t\ \ -1} =$$

$$= 12\int (t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt = 12(\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+$$

$$+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln\left|t-1\right|)=12(\frac{(\sqrt[12]{x})^8}{8}+\frac{(\sqrt[12]{x})^7}{7}+\frac{(\sqrt[12]{x})^6}{6}+\frac{(\sqrt[12]{x})^5}{5}+$$

$$+\frac{(\sqrt[12]{x})^4}{4}+\frac{(\sqrt[12]{x})^3}{3}+\frac{(\sqrt[12]{x})^2}{2}+\sqrt[12]{x}+\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7}+2\sqrt{x}+$$

$$+\frac{12\sqrt[12]{x^5}}{5}+3\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+12\sqrt[12]{x}+12\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C$$

$$\left(\begin{array}{l}
t^8:(t-1)=t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\dfrac{1}{t-1}\\[2ex]
t^8:(t-1)=t^7+t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\\
\quad\underline{-t^8\mp t^7}\\
\quad\quad t^7\\
\quad\underline{-t^7\mp t^6}\\
\quad\quad t^6\\
\quad\underline{-t^6\mp t^5}\\
\quad\quad t^5\\
\quad\underline{-t^5\mp t^4}\\
\quad\quad t^4\\
\quad\underline{-t^4\mp t^3}\\
\quad\quad t^3\\
\quad\underline{-t^3\mp t^2}\\
\quad\quad t^2\\
\quad\underline{-t^2\mp t}\\
\quad\quad t\\
\quad\underline{-t\mp 1}\\
\quad\quad 1
\end{array}\right)$$

б)

$$\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1}dx=\left(\begin{array}{l}x=t^6\Rightarrow t=\sqrt[6]{x}\\ dx=6t^5dt\end{array}\right)=\int\frac{(1+t^3-t^4)6\,\mathrm{t}^5}{t^2+1}dt=$$

$$=6\int\frac{t^5+t^8-t^9}{1+t^2}dt=6\int(-t^7+t^6+t^5-t^4+t^2-1+\frac{1}{\mathrm{t}^2+1})dt=$$

$$6(-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}t)+C=6[-\frac{(\sqrt[6]{x})^8}{8}+\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7}+$$

$$+\frac{(\sqrt[6]{x})^6}{6}-\frac{(\sqrt[6]{x})^5}{5}+\frac{(\sqrt[6]{x})^3}{3}-\sqrt[6]{x}+\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{x})]+C=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}+$$

$$+x-\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{x})+\mathrm{C}$$

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \left(\begin{matrix} x=t^6 \Rightarrow t=\sqrt[6]{x} \\ dx=6t^5dt \end{matrix} \right) = \int \frac{(1+t^3-t^4)6\,\mathrm{t}^5}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^5+t^8-t^9}{1+t^2}dt = 6\int (-t^7+t^6+t^5-t^4+t^2-1+\frac{1}{\mathrm{t}^2+1})dt =$$

$$6(-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}t)+C = 6[-\frac{(\sqrt[6]{x})^8}{8}+\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7}+$$

$$+\frac{(\sqrt[6]{x})^6}{6}-\frac{(\sqrt[6]{x})^5}{5}+\frac{(\sqrt[6]{x})^3}{3}-\sqrt[6]{x}+\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{x})]+C = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}+$$

$$+x-\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\mathrm{arctg}(\sqrt[6]{x})+\mathrm{C}$$

$$(-t^9+t^8+t^5):(\mathrm{t}^2+1) = -t^7+t^6+t^5-t^4+t^2-1+\frac{1}{\mathrm{t}^2+1}$$

$$(-t^9+t^8+t^5):(\mathrm{t}^2+1) = -t^7+t^6+t^5-t^4+t^2-1$$

$$\begin{array}{c}
\mp t^9 \mp t^7 \\ \hline
t^8+t^7+t^5 \\ \hline
-t^8 \pm t^6 \\ \hline
t^7-t^6+t^5 \\ \hline
-t^7 \pm t^5 \\ \hline
-t^6 \\ \hline
\mp t^6 \mp t^4 \\ \hline
t^4 \\ \hline
-t^4 \pm t^2 \\ \hline
-t^2 \\ \hline
\mp t^2 \mp 1 \\ \hline
1
\end{array}$$

в)

$$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x+3}} = \left(\begin{matrix} x+3=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix} \right) = \int \frac{2tdt}{(t^2-3)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-3} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2-1} =$$

$$= \left(\begin{matrix} \frac{t}{\sqrt{3}}=u \\ dt=\sqrt{3}du \end{matrix} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\frac{t}{\sqrt{3}}-1}{\frac{t}{\sqrt{3}}+1}\right|+C =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\right|+C$$

13. Да се најдат интегралите:

а) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$ в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

Решение.

а) $$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = \begin{vmatrix} x=2\sin t \\ dx = 2\cos dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\ dt = 16\int \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t dt =$$

$$= 16\int \sin^2 t\cdot\cos^2 t dt = 16\int (1-\cos^2 t)\cos^2 t dt = 16\int (\cos^2 t-\cos^4 t)dt =$$

$$16\left(\frac{\cos t\sin t}{2}+\frac{t}{2}\right)-16\left[\frac{\cos^3 t\sin t}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{\cos t\sin t}{2}+\frac{t}{2}\right)\right]+C = 8\cos t\sin t +$$

$$+8t-4\cos^3 t\sin t-6\cos t\sin t-6t+C = 2t+2\cos t\sin t-4\cos^3 t\sin t +$$

$$+C = 2t+2\sqrt{1-\sin^2 t}\sin t-4\sin t(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}+C = 2\arcsin\frac{x}{2}+$$

$$+2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{x}{2}-4\cdot\frac{x}{2}(1-\frac{x^2}{4})\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+C = 2\arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}-$$

$$-2x\frac{4-x^2}{4}\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}+C = 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}-\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}(4-x^2)+$$

$$+\mathrm{C} = 2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\left(2-4+x^2\right)+C = 2\arcsin\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\left(x^2-2\right)+C$$

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}} =$$

$$= \begin{vmatrix} x=2\mathrm{tg}t \\ dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t} \\ 1+\mathrm{tg}^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{vmatrix} = \int\frac{2dt}{\cos^2 t(4+4\mathrm{tg}^2 t)\sqrt{4+4\mathrm{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos^2 t(1+\mathrm{tg}^2 t)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\cos t dt = \frac{1}{4}\sin t+C = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{tg}t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}+C = \frac{1}{4}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}+C =$$

$$=\frac{x}{8}\frac{1}{\frac{\sqrt{4+x^2}}{2}}+C=\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$$

в) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\left(\begin{array}{c}x=\frac{a}{\sin t},\quad \sin t=\frac{a}{x},\quad t=\arcsin\frac{a}{x}\\ dx=\frac{-a}{\sin^2 t}\cdot\cos tdt\end{array}\right)=$$

$$=\int\frac{1}{\frac{a}{\sin t}\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}}\frac{-a}{\sin^2 t}\cdot\cos tdt=$$

$$=\int\frac{1}{\frac{a}{\sin t}\sqrt{\frac{a^2-a^2\sin^2 t}{\sin^2 t}}}\frac{-a}{\sin^2 t}\cdot\cos tdt=-\int\frac{\cos t}{a\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=$$

$$=\frac{-1}{a}\int dt=-\frac{1}{a}t+C=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C$$

14. Да се најдат интегралите:

а) $\int\sin(5x)\cos xdx$ б) $\int\sin(x)\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$

Решение. а)

$$\int\sin(5x)\cos xdx=\begin{pmatrix}a=5\\ b=1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int\{\sin[(5+1)x]+\sin[(5-1)x]\}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int[\sin(6x)+\sin(4x)]dx=\frac{1}{2}\int\sin(6x)dx+\frac{1}{2}\int\sin(4x)dx=$$

$$=\begin{pmatrix}6x=t\\ 6dx=dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4x=u\\ 4dx=du\end{pmatrix}=\frac{1}{2\cdot 6}\int\sin tdt+\frac{1}{2\cdot 4}=\int\sin udu=\frac{1}{12}(-\cos t)+$$

$$+\frac{1}{8}(-\cos u)+C=-\frac{1}{12}\cos(6x)-\frac{1}{8}\cos(4x)+C$$

б) $$\int\sin(x)\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int[\cos(1-\frac{1}{2})x-\cos(1+\frac{1}{2})x]\sin\frac{x}{3}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2})\sin\frac{x}{3}dx=\frac{1}{2}\int(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{3})dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3})dx-\int(\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{3})dx=\frac{1}{2\cdot 2}\int[\sin(\frac{1}{3}+\frac{1}{2})x+\sin(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})x]dx-$$

$$-\frac{1}{4}\int[\sin(\frac{1}{3}+\frac{3}{2})x+\sin(\frac{1}{3}-\frac{3}{2})x]dx=\frac{1}{4}\int[\sin\frac{5x}{6}+\sin(-\frac{x}{6})]dx)-$$

$$-\frac{1}{4}\int(\sin\frac{11x}{6}+\sin\frac{-7x}{6})dx=\begin{pmatrix}\frac{5x}{6}=t\\ dx=\frac{6}{5}dt\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{x}{6}=p\\ dx=-6dp\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{11x}{6}=u\\ dx=\frac{6}{11}du\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{-7x}{6}=v\\ dx=-\frac{6}{7}dv\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{5}\int\sin tdt-\frac{6}{4}\int\sin pdp-\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{11}\int\sin udu-\frac{1}{4}(-\frac{6}{7})\int\sin vdv=$$

$$=\frac{3}{10}(-\cos\frac{5x}{6})-\frac{3}{2}(-\cos(-\frac{x}{6}))-\frac{3}{22}(-\cos\frac{11x}{6})+\frac{3}{14}(-\cos\frac{-7x}{6})+C=$$

$$\frac{3}{10}(-\cos\frac{5x}{6})-\frac{3}{2}(-\cos(-\frac{x}{6}))-\frac{3}{22}(-\cos\frac{11x}{6})+\frac{3}{14}(-\cos\frac{-7x}{6})+C=$$

$$=-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}+\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+C$$

15. Да се најдат интегралите:

а) $\int\sin^5 x\cos^5 xdx$ б) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$ в) $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$

Решение.

а)

$$\int\sin^5 x\cos^5 xdx=\int\sin^5 x\cos^4 x\cos xdx=\int\sin^5 x(1-\sin^2\text{x})^2\cos xdx=$$

$$=\begin{pmatrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{pmatrix}=\int t^5(1-t^2)^2dt=\int t^5(1-2t^2+t^4)dt=\int(t^5-2t^7+t^9)dt=$$

$$=\frac{t^6}{6}-2\cdot\frac{t^8}{8}+\frac{t^{10}}{10}+C=\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{4}+\frac{\sin^{10} x}{10}+C$$

б) $$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos x}=\begin{pmatrix}\text{tg}x=t\\ x=\text{arctg}t\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{pmatrix}=\int\frac{(\sqrt{1+t^2})^3\sqrt{1+t^2}dt}{(1+t^2)t^3}=$$

$$=\int\frac{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+t^2}dt}{(1+t^2)t^3}=\int\frac{1+t^2}{t^3}dt=\int(t^{-3}+\frac{1}{t})dt=\frac{1}{-2t^2}+\ln|t|+C=$$

$$=\frac{-1}{2\text{tg}^2x}+\ln|\text{tg}x|+C$$

в) $$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=\begin{pmatrix}\text{tg}\,x=t\\ x=\text{arc}\,\text{tg}\,t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{pmatrix}=$$

$$=\int\frac{(1+t^2)^2(1+t^2)^2dt}{(1+t^2)t^4}=\int\frac{(1+t^2)^3dt}{t^4}=\int\frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^4}dt=$$

$$=\int t^{-4}dt+3\int t^{-2}dt+3\int dt+\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}-\frac{3}{t}+3t+\frac{t^3}{3}+C=$$

$$=\frac{-1}{3\operatorname{tg}^3 x}-\frac{3}{\operatorname{tg} x}+3\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$$

16. Да се најде интегралот $\int\frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}=\begin{pmatrix}\operatorname{tg} x=t\\ x=\operatorname{arc\,tg} t,\, dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}=$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t)}=\dfrac{A}{1+t}+\dfrac{Bt+C}{1+t^2}\\ 1=A(1+t^2)+(Bt+C)(1+t)=A+At^2+Bt+C+Bt^2+Ct=\\ =t^2(A+B)+t(B+C)+A+C\\ A+B=0,\quad B+C=0,\quad A+C=1\Leftrightarrow A=-B,\quad B=-C,\quad A=1-C\Leftrightarrow\\ A=\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{-1}{2},\, C=\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}-\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=\begin{pmatrix}1+t^2=u\\ 2tdt=du\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|1+t\right|-\frac{1}{4}\ln\left|1+t^2\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+\operatorname{tg} x\right|-\frac{1}{4}\ln\left|1+\operatorname{tg}^2 x\right|+$$
$$+\frac{1}{2}x+C$$

17. Да се најдат интегралите:

а) $\int\frac{dx}{\sin x}$ б) $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$ в) $\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}$

Решение.

а) I начин:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\begin{pmatrix}t=\cos x\\ dt=-\sin x dx\end{pmatrix}=$$

$$=-\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

II начин:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left(\begin{matrix} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt & \end{matrix} \right) = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln |\, t \,| + C = \ln |\, \operatorname{tg}\frac{x}{2} \,| + C$$

б) $$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \left(\begin{matrix} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right) =$$

$$= \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(2 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} - 2\dfrac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(2+2t^2+1-t^2-4t)} =$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}\,dt = \int \frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}\,dt$$

Добивме интеграл од рационална функција кој ќе го решиме со разложување на подинтегралната функција

$$\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3},$$

од каде што со средување го добиваме системот

$$\begin{cases} 1 = A + B + C \\ 0 = -4A - 3B - C \\ 1 = 3A \end{cases}, \text{ чии решенија се } \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = -1 \\ C = \dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Па за горниот интеграл имаме

$$\int \frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} + \frac{5}{3}\int \frac{dt}{t-3} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln |\, t \,| - \ln |\, t-1 \,| + \frac{5}{3}\ln |\, t-3 \,| + C$$

Конечно, за почетниот интеграл имаме

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \frac{1}{3}\ln |\, \operatorname{tg}\frac{x}{2} \,| - \ln |\, \operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 \,| + \frac{5}{3}\ln |\, \operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 \,| + C$$

в) $$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\dfrac{2\sin^2 x + 2\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{1}{2+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}) + C$$

18. Да се најде интегралот

$$\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos^4 x} dx \, .$$

Решение.

Интегралот прво го решаваме со парцијална интеграција, а потоа со тригонометриски смени

$$\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{cc} u = \ln(\operatorname{tg} x) & dv = \dfrac{1}{\cos^4 x} dx \\ du = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} dx & v = \displaystyle\int \dfrac{1}{\cos^4 x} dx \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = \ln(\operatorname{tg} x) & dv = \dfrac{1}{\cos^4 x} dx \\ du = \dfrac{1}{\sin x \cos x} dx & v = \operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} \end{array} \right|$$

Притоа за наоѓање на v го решивме интегралот

$$\int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \int (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} =$$

$$= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} \, .$$

Значи, за бараниот интеграл добиваме

$$\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\cos^4 x} dx = (\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}) \ln(\operatorname{tg} x) - \int (\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}) \frac{1}{\sin x \cos x} dx =$$

$$= (\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}) \ln(\operatorname{tg} x) - \int (\frac{\sin^3 x}{3 \sin x \cos^4 x} + \frac{\sin x}{\sin x \cos^2 x}) dx =$$

$$= (\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}) \ln(\operatorname{tg} x) - \int (\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right| = (\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}) \ln(\operatorname{tg} x) - \int (\frac{1}{3} t^2 + 1) dt =$$

$$= (\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}) \ln(\operatorname{tg} x) - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{9} - \operatorname{tg} x + C \, .$$

19. Да се најдат интегралите:

а) $\int \frac{dx}{e^{3x}-e^{x}}$ б) $\int \frac{e^{2x}-2e^{x}}{e^{2x}+1}dx$ в) $\int \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}dx$ г) $\int \frac{1+\ln x}{x\ln^2 x}dx$

Решение:

а) $$\int \frac{dx}{e^{3x}-e^{x}} = \begin{pmatrix} t=e^{x}, \quad x=\ln t \\ dx=\frac{dt}{t} \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t(t^3-t)} = \int \frac{dt}{t^2(t^2-1)} =$$

$$= \int \frac{(-t^2+1+t^2)dt}{t^2(t^2-1)} = -\int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{e^{x}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right| + C$$

б) $$\int \frac{e^{2x}-2e^{x}}{e^{2x}+1}dx = \left(e^{x}=t, x=\ln t, dx=\frac{dt}{t}\right) = \int \frac{(t^2-2t)dt}{(t^2+1)t} =$$

$$= \int \frac{(t-2)dt}{t^2+1} = \int \frac{tdt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \begin{pmatrix} t^2+1=u \\ 2tdt=du \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - 2\operatorname{arc\,tg} t = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - 2\operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - 2\operatorname{arc\,tg}(e^{x}) + C$$

в) $$\int \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}dx = \begin{pmatrix} t=e^{x} & x=\ln t \\ dt=e^{x}dx & dx=\frac{dt}{t} \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int (t-1)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \int \left(1-\frac{1}{t}-\frac{t+1-2}{t+1}\right)dt =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}\right)dt = -\ln|t| + 2\ln|t+1| + C = \ln\frac{(t+1)^2}{|t|} + C =$$

$$= \ln\frac{(e^{x}+1)^2}{e^{x}} + C$$

г) $$\int \frac{1+\ln x}{x\ln^2 x}dx = \begin{pmatrix} \ln x=t, x=e^{t} \\ dx=e^{t}dt \end{pmatrix} = \int \frac{(1+t)e^{t}}{t^2e^{t}}dt = \int t^{-2}dt + \int \frac{dt}{t}$$

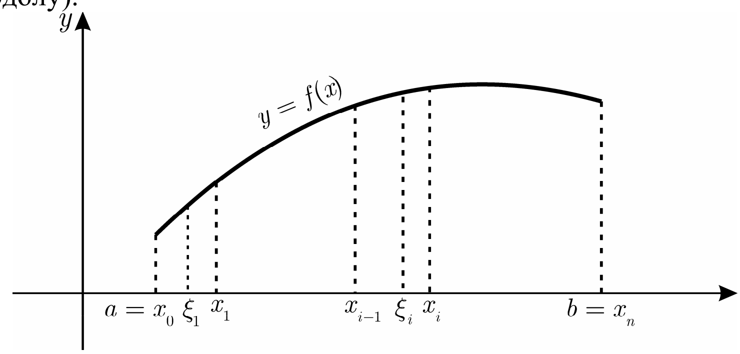
$$= \frac{-1}{t} + \ln|t| + C = \frac{-1}{\ln x} + \ln|\ln x| + C$$

6. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Со развојот на интегралното сметање, многу проблеми кои претходно биле проучувани, а и подоцна, се решени или добиле поедноставни решенија. Особено примената на определениот интеграл е од посебно значење. Тој во геометријата се применува за наоѓање плоштина на рамнински лик, пресметување должина на лак на крива, волумен на ротационо тело и плоштина на ротациона површина. Во механиката една од примените (која ќе биде илустрирана овде) е за определување тежиште и инерцијален момент на тело. Определениот интеграл се применува и во механиката на флуиди. Познат пример којшто бил решен веднаш откако била развиена теоријата на интегралното сметање, е проблемот на францускиот математичар и физичар Паскал за наоѓање на силата која дејствува на ѕидовите на некој сад наполнет со течност, врз која дејствува некој притисок. Бидејќи притисокот се дефинира како количник на силата и плоштината на површината на која дејствува силата, наоѓањето на силата се сведува на наоѓање плоштина на површина. Покрај овие области, определениот интеграл има значајна примена и во електротехниката и природните науки, но ние овде нема да навлегуваме подалеку од веќе споменатите примери.

6.1. Дефиниција на определен интеграл. Својства на определен интеграл

Нека функцијата $y = f(x)$ е определена на отсечката (интервалот) $[a,b]$. Отсечката $[a,b]$ ја разбиваме (вршиме поделба на помали отсечки, така што помалите отсечки се сечат во една точка и унијата на сите тие отсечки е отсечката $[a,b]$) на n отсечки со точките $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (види го цртежот подолу).



Точките x_i, $i = 0,1,...,n$, ги нарекуваме точки на разбивање на отсечката $[a,b]$. Во секоја од отсечките на поделба $[x_{i-1}, x_i]$, за $i = 1,2,...,n$, избираме произволна точка ξ_i и ја формираме сумата

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,,$$

каде што $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ е должината на отсечката $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,...,n$.

Сумата S_n се нарекува интегрална (Риманова) сума на функцијата $y = f(x)$ за разбивањето (поделбата) $\left\{x_i \middle| i = 1,2,\ldots,n\right\}$ на отсечката $[a,b]$. Со d ќе го означиме дијаметарот на поделбата кој се дефинира како $d = \max \Delta x_i$, односно тоа е максималната должина на некоја од отсечките $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$. Уште d се нарекува и чекор на разбивањето.

Дефиниција. Реалниот број $J = \int\limits_a^b f(x)dx$ е **определен интеграл** од функцијата f на интервалот $[a,b]$, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ така што за секое разбивање T со чекор $d(T) < \delta$ и секоја Риманова сума $S(T)$ е исполнето

$$\left|S(T) - J\right| < \varepsilon ,$$

т.е.

$$\left|S(T) - \int\limits_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

Значи, ако постои граничната вредност $\lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ независно од начинот на разбивање на интервалот $[a,b]$ и изборот на точките $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$, тогаш таа вредност се нарекува определен интеграл на функцијата $y = f(x)$ на интервалот $[a,b]$. Ќе го означуваме со $\int_a^b f(x)\,dx$.

Значи

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Без доказ ја наведуваме следнава теорема.

Теорема. Ако функцијата е интеграбилна и $\left(T_k\right)$ е низа од разбивања така што чекорот на разбивањата да тежи кон нула и за секое од тие разбивања земеме една сума на Риман $S\left(T_k\right)$ тогаш

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k) = \int\limits_a^b f(x)dx . \ \square$$

Ако интегралот $\int_a^b f(x)\,dx$ постои, тогаш за функцијата $f(x)$ велиме дека е интеграбилна на интервалот $[a,b]$. Броевите a и b се нарекуваат горна и долна граница, соодветно, а функцијата $f(x)$ исто како и кај неопределен интеграл се нарекува подинтегрална функција.

Следната теорема дава потребни услови за интеграбилност на некоја функција.

Теорема. Ако функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$, тогаш таа е ограничена на тој интервал.

Доказ. Да претпоставиме спротивно, односно нека функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$, но не е ограничена на тој интервал. Да ја разгледаме сумата S_n од дефиницијата на определен интеграл. Од тоа што функцијата $f(x)$ е неограничена на интервалот $[a,b]$, следува дека таа е неограничена на барем еден од интервалите $[x_{i-1}, x_i]$. Нека тоа е интервалот $[x_{k-1}, x_k]$. Избираме $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ за $i \neq k$, а $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ја сметаме како променлива. Ставаме во интергалната сума $f(\xi_k)\Delta x_k$, кое е променлива, додека сумата на останатите $f(\xi_i)\Delta x_i$, $i \neq k, i = 1,2,\dots,n$ е фиксна. Но, тогаш модулот на интегралната сума $|S_n|$ може да се направи произволно голем за избор на соодветни точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ бидејќи $f(x)$ е неограничена на интервалот $[x_{k-1}, x_k]$. Од ова следува дека не постои конечна граница во дефиницијата на определениот интеграл, од каде што добиваме контрадикција, со што е докажана теоремата. □

Да забележиме дека ограниченоста на функцијата $f(x)$ не е доволен услов таа да биде интеграбилна на $[a,b]$. На пример да ја разгледаме функцијата на Дирихле $f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, \ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Очигледно таа е ограничена на кој било интервал, а ќе покажеме дека не е интеграбилна на кој било интервал на реалната оска.

Навистина при секое разбивање на отсечката $[a,b]$, ги избираме ξ_i, така да бидат ирационални за секое $i = 1,2,\dots,n$. Тогаш добиваме дека сумата S_n е еднаква на 0. Ако пак за секое $i = 1,2,\dots,n$, ξ_i ги избереме да бидат рационални броеви ($f(\xi_i) = 1$), тогаш интегралната сума ќе биде еднаква на збирот од разликите на крајните точки на интервалите кои влегуваат во поделбата на $[a,b]$, односно тој збир ќе биде $b-a$. Ова значи дека интегралната сума S_n на функцијата на Дирихле зависи од изборот на точките ξ_i, па гранична вредност кога $d \to 0$ на S_n не постои. Оттука добиваме дека функцијата на Дирихле не е интеграбилна на $[a,b]$. □

Прашањето кое природно се поставува е кои се доволни услови една функција да биде интеграбилна на интервалот $[a,b]$. Одговорот ќе го дадеме во наредната теорема, чиј доказ нема да биде даден бидејќи излегува од рамките на изложеното овде.

Теорема. Нека еден од следиве услови е исполнет:

а) Функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$;

б) Функцијата $f(x)$ е ограничена на интервалот $[a,b]$ и на тој интервал има преброиво множество на точки на прекин;

в) Функцијата $f(x)$ е монотона на интервалот $[a,b]$.

Тогаш функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$, односно постои определниот интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. □

Пример 1. Пресметај ги интегралите

а) $I=\int\limits_0^1 x dx$.

Решение: Подинтегралната функција $f(x)=x$ е непрекината функција на целото множество од реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[0,1]$. Нека $T=\{0=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=1\}$,каде што

$x_i=\frac{i}{n},\ i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$ и нека

$\xi_i=x_{i+1}\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. Тогаш

$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\frac{i+1}{n}-\frac{i}{n}=\frac{1}{n}$, па чекорот на поделбата е

$$d=d(T)=\max\left\{\Delta x_i \middle|\ i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\}=\max\left\{\frac{1}{n}\middle|\ i\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\}=\frac{1}{n}$$

и важи $d\to 0\Leftrightarrow n\to\infty$.

Интегралната сума е

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[0,1]$, имаме дека $I=\int\limits_0^1 x dx=\lim\limits_{d(T)\to 0}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

б) $I=\int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx$.

Решение: Подинтегралната функција $f(x)=\frac{1}{x}$ е непрекината функција во сите реални броеви освен во 0,па и на сегментот $[1,2]$,па, согласно критериумите за интеграбилност,таа е и интеграбилна функција на сегмен-тот сегментот $[1,2]$.Нека $T=\{1=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=2\}$, каде што $x_i=2^{\frac{i}{n}},\ i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ е поделба на сегментот $[1,2]$ и $\xi_i=x_{i+1}\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.Тогаш

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = 2^{\frac{i+1}{n}} - 2^{\frac{i}{n}} = 2^{\frac{i+1}{n}}\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right),$$

$d(T) = \max\left\{2^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right) \middle|\ i \in \{0,1,\ldots,n-1\}\right\} = \left(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)2 \to 0$ при $n \to \infty$, и важи $d \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$.

Интегралната сума е

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^{\frac{i+1}{n}}}2^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}} = n\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}}.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[1,2]$, имаме

дека $I = \int\limits_1^2 \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{d(T)\to 0} S_T = \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} = (\ln 2)\cdot 1 = \ln 2$.

в) $I = \int\limits_0^1 x^2 dx$.

Решение: Подинтегралната функција $f(x) = x^2$ е непрекината функција на целото множество од реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[0,1]$. Нека $T = \{0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 1\}$, каде $x_i = \frac{i}{n},\ i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$ и нека $\xi_i = x_{i+1} \in [x_i, x_{i+1}],\ i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Тогаш $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} = \frac{1}{n}$, $d(T) = \max\left\{\frac{1}{n}\middle|\ i \in \{0,1,\ldots,n-1\}\right\} = \frac{1}{n} \to 0$, при $n \to \infty$, а интегралната сума е

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

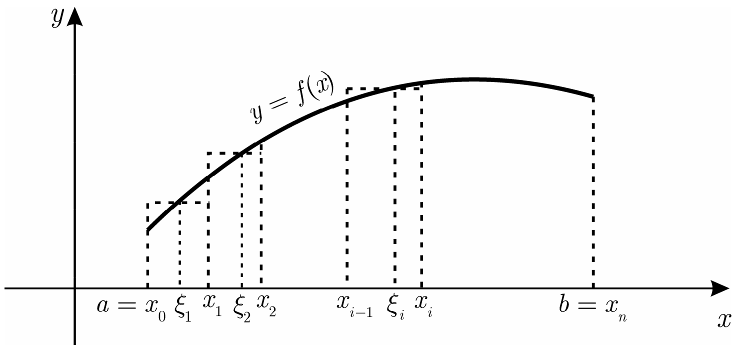
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[0,1]$, имаме дека $I = \int\limits_0^1 x^2 dx = \lim\limits_{d(T)\to 0} S_T = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. □

Да забележиме дека во претходниот пример заради интеграбилноста на подинтегралната функција, доволно е да земеме само една поделба на интервалот и да направиме еден избор на точките ξ_i, за да го пресметаме определениот интеграл.

Во продолжение врз основа на дефиницијата погоре ќе дадеме негово геометриско толкување на определениот интеграл.

Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$. Криволиниски трапез е фигурата која е ограничена со графикот на функцијата $f(x)$, x-оската и вертикалните прави $x=a$ и $x=b$, каде $a<b$ (види цртеж).



Подолу ќе биде даден начин за пресметување на неговата плоштина.

Нека сега интервалот $[a,b]$ го разбиеме на n интервали со точките $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. Во секој од интервалите избираме точка ξ_i и ги разгледуваме производите $f(\xi_i)\Delta x_i$, каде $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ е должината на интервалот $[x_{i-1},x_i]$. Всушност производот $f(\xi_i)\Delta x_i$ е плоштина на правоаголникот со должина $f(\xi_i)$ и ширина Δx_i (види цртеж). Да забележиме дека плоштината на скалестата фигура на цртежот погоре е збир од плоштинаите на правоаголниците во должина (висина) $f(\xi_i)$ и ширина Δx_i , каде $i=1,2,...,n$. Значи таа се пресметува како

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n .$$

Јасно е дека кога Δx_i се многу мали, плоштината на скалестата фигура се разликува за многу малку од плоштината на криволинискиот трапез. Следствено, за точната плоштина P на криволинискиот трапез ја имаме граничната вредност

$$P = \lim_{d\to 0} S_n = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

каде d е дијаметарот на поделбата. Ако ова го споредиме со дефиницијата на определен интеграл, ќе уочиме дека станува збор за истиот израз. Па, определен интеграл од ненегативна функција $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ е плоштината на криволинискиот трапез дефиниран од функцијата $f(x)$ и интервалот $[a,b]$, односно

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

По дефиниција земеме дека:

1° Ако функцијата $f(x)$ е дефинирана во точката a, тогаш $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2° Ако функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Во продолжение ќе бидат наведени некои поважни својства на определениот интеграл, кои ќе бидат користени за негово полесно пресметување или при докажување на теореми поврзани со определениот интеграл.

Доказот на овие две својства следува директно од дефиницијата на определниот интеграл.

3° Нека k е константа и функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$. Тогаш

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказ. За произволно разбивање на интервалот $[a,b]$ имаме

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= k\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,dx. \,\square$$

4° Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се интеграбилни на интервалот $[a,b]$. Тогаш и сумата е интеграбилна на истиот интервал и притоа важи

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказ. Од дефиницијата на определениот интеграл,

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i) \pm g(\xi_i)\right)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{d\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\right) = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \square$$

5° Ако функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и $a < c < b$, тогаш функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалите $[a,c]$ и $[c,b]$ и уште важи дека

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Да забележиме дека важи и обратното: Нека $f(x)$ е функција која е интеграбилна на интервалите $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогаш, $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и притоа важи

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказот на ова својство ќе го изоставиме.

6° Ако функцијата $f(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и $f(x)\geq 0,\ x\in[a,b]$, тогаш $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.

Доказ:

Од дефиницијата на определениот интеграл и имајќи предвид дека $f(\xi_i)\Delta x_i$ се позитивни за секој $i=1,2,...,n$ добиваме

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geq 0.\square$$

7° Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се интеграбилни на интервалот $[a,b]$ и дополнително важи $f(x)\leq g(x)$, за секој $x\in[a,b]$. Тогаш

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказ. Ја дефинираме функцијата $h(x)=g(x)-f(x)\geq 0$, за секој $x\in[a,b]$. Имајќи го предвид претходното својство,

$$\int_a^b h(x)\,dx=\int_a^b \Big(g(x)-f(x)\Big)\,dx\geq 0,$$

од каде што следува дека

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx.\ \square$$

8° Нека $f(x)$ е интеграбилна функција на интервалот $[a,b]$. Тогаш и $|\,f(x)\,|$ е исто така интеграбилна на интервалот и важи

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b |\,f(x)|\,dx.$$

Доказот е директна последица од неравенствата $-|\,f(x)\,|\leq f(x)\leq|\,f(x)\,|$ и претходното својство. $\square$

Теорема. (Теорема за средна вредност на определен интеграл) Нека функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$. Тогаш постои точка $c\in[a,b]$, таква што

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a).$$

Доказ. Бидејќи функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, таа достигнува најмала и најголема вредност на интервалот $[a,b]$. Нека тие вредности ги означиме со m и M соодветно. Тогаш важи $m\leq f(x)\leq M$ за секој $x\in[a,b]$. Од својството 7° имаме

$$\int_a^b m\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b M\,dx,$$

додека од својството 3° имаме дека

$$m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\int_a^b dx\,,$$

односно

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Ако овие неравенства ги поделиме со $b-a>0$ добиваме

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M\,.$$

Бидејќи бројот $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ лежи помеѓу две вредности на функцијата $f(x)$ кои се слики на две вредности од интервалот $[a,b]$ и $f(x)$ е непрекината функција, постои точка $c \in [a,b]$ така што

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a},$$

од каде $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ со што теоремата е докажана.

Во доказот погоре беше искористено дека $\displaystyle\int_a^b dx = b-a$.

Навистина, подинтегралната функција е $f(x)=1$. Нека сега интервалот $[a,b]$ го разбиеме на n интервали со точките $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Во секој од интервалите избираме точка ξ_i и ги разгледуваме производите $f(\xi_i)\Delta x_i$, каде $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ е должината на интервалот $[x_{i-1}, x_i]$. Но, $f(\xi_i)=1$, па за интегралната сума имаме

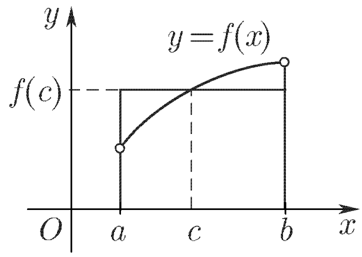
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b-a\,.$$

Конечно,

$$\int_a^b dx = \lim_{d\to 0}\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b-a\,. \quad \square$$

Величината $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ ќе ја нарекуваме интегрална средна вредност на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$.

Формулата $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ има јасно геометриско значење (види цртеж долу) при $f(x)\geq 0$ за $x\in[a,b]$, плоштината на криволинискиот трапез е еднаква со плоштината на правоаголникот со ширина $b-a$ и висина $f(c)$, каде $c\in[a,b]$.



6.2. Њутн-Лајбницова формула

Нека функцијата $f(x)$ е интеграбилна функција на интервалот. За $x\in[a,b]$, $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ е функција која е добро дефинирана (нејзината вредност е еднозначно определена за $x\in[a,b]$).

Наредната теорема е една од основните теореми во интегралното сметање.

Теорема 1. Нека $f(x)$ е интеграбилна функција на интервалот $[a,b]$. Во секоја точка $x_0\in[a,b]$ за која функцијата $f(x)$ е непрекината функција, функцијата $F(x)$ е диференцијабилна во таа точка и важи $F'(x_0)=f(x_0)$.

Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, тогаш

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt=f(x).$$

Доказ. Нека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката $x_0\in[a,b]$. Тогаш дефиницијата за непрекинатост на $f(x)$ во x_0, за $\varepsilon>0$ произволно избран, постои $\delta>0$ така што од $|x-x_0|<\delta$ следува $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Ако $t\in[x,x_0]$, тогаш од $|t-x_0|<\delta$ следува $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$, што е еквивалентно со $f(t)\in[f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon]$, односно $f(x_0)-\varepsilon\le f(t)\le f(x_0)+\varepsilon$. Со интегрирање на последното неравество во граници од x_0 до x имаме

$$\int\limits_{x_0}^x (f(x_0)-\varepsilon)\,dt\le\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt\le\int\limits_{x_0}^x (f(x_0)+\varepsilon)\,dt,$$

од каде што

$$(f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)\le\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt\le(f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0).$$

Па, за $|x-x_0|\le\delta$ имаме,

$$f(x_0)-\varepsilon\le\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt\le f(x_0)+\varepsilon,$$

односно,

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} f(t)\,dt - \int_{a}^{x_0} f(t)\,dt = F(x) - F(x_0) = \Delta F(x)$$

$$\left|\frac{\Delta F(x)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \varepsilon .$$

Бидејќи ε е произволно избран, добиваме

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta F(x)}{x-x_0} = F'(x_0) = f(x_0)\ .\ \square$$

Следнава теорема е позната како фундаментална теорема во интегралното сметање и ја дава врската помеѓу неопределениот интеграл и определениот интеграл).

Теореман 2. (Њутн-Лајбницова теорема) Нека $f(x)$ е непрекината функција во секоја точка $x \in [a,b]$ и нека $F(x)$ е нејзина примитивна функција на $[a,b]$. Тогаш

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\ .$$

Доказ. Нека $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Од претходната теорема имаме $G'(x) = f(x)$. Нека $F(x)$ е некоја друга примитивна функција. Тогаш $F(x) = G(x) + C$, каде C е константа. Имаме,

$$F(b) - F(a) = \big(G(b)+C\big) - \big(G(a)+C\big) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - 0 = \int_a^b f(t)\,dt.\ \square$$

Да забележиме дека кога решаваме определен интеграл со смена на променливи користиме дека $\int_{x_1}^{x_2} f(g(x))\,dx = \int_{g(x_1)}^{g(x_2)} f(u)\cdot\frac{1}{u'}\,du$, каде што смената беше $u = g(x)$.

Формулата за парцијална интеграција кај определен интеграл гласи

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Пример 1. Пресметај ги интегралите

а) $\int_0^2 x^2\,dx$

Користејќи ја Њутн-Лајбицовата формула имаме

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx$

Ставајќи смена $u = 2x$, $du = 2dx$, $dx = \dfrac{du}{2}$ старите граници се менуваат од $x_1 = 0$ во $u_1 = 2\cdot 0 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$ во $u_2 = 2\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$. Па, имаме

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du = \frac{1}{2}(-\cos u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

в) $\int\limits_1^{e} \ln x\, dx$

Користејќи ја формулата за парцијална интеграција кај определен интеграл имаме

$$\int\limits_1^{e} \ln x\, dx = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^{e} \frac{1}{x}\cdot x\, dx = (e\ln e - 1\ln 1) - \int\limits_1^{e} dx = e - x\Big|_1^e = e-(e-1) = 1,$$

при што беше ставено $u = \ln x$, $dv = dx$, од каде $du = \dfrac{1}{x}dx$, $v = x$.

6.3. Несвојствен интеграл

За да постои определен интеграл од некоја функција $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, потребно но не и доволно е да претпоставиме дека функцијата е дефинирана на затворениот интервал $[a,b]$ и таа да биде ограничена на интервалот $[a,b]$.

Наша цел е да дадаме дефиниција на определен интеграл на функцијата $f(x)$ во ситуација кога некој од горните услови не е исполнет. Можни се следниве случаи:

1) Интервалот не е затворен од горе, $[a,b)$;
2) Интервалот не е затворен од долу, $(a,b]$;
3) Интервалот не е ограничен од горе, $[a,+\infty)$;
4) Интервалот не е ограничен од долу, $(-\infty,b]$;
5) Интервалот не е ограничен од двете страни, $(-\infty,+\infty)$;
6) Подинтегралната функција не е ограничена на интервалот $[a,b]$.

За секоја од наведените случаи подолу ќе биде дадена дефиниција на определениот интеграл на функцијата $f(x)$. Овие интеграли ќе ги нарекуваме несвојствени интеграли (неправи интеграли, сингуларни интеграли). Во дефиницијата на несвојствените интеграли ќе бидат користени гранични вредности (лимеси). Ќе велиме дека несвојствениот интеграл постои (конвергира) доколу оваа гранична вредност постои. Во спротивно, несвојствениот интеграл не постои, односно ќе велиме дека *дивергира*.

Нека сега го разгледаме првиот случај. Несвојствениот интеграл на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b)$ се дефинира како

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{M\to b^-}\int_a^M f(x)\,dx\ .$$

Сосема аналогно, несвојствениот интеграл на функцијата $f(x)$ на интервалот $(a,b]$ се дефинира како

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{M\to a^+}\int_M^b f(x)\,dx\,.$$

Овде во првиот случај граничната вредност е лева граница, а во вториот случај граничната вредност е десна граница бидејќи во двете ситуации функцијата $f(x)$ ја разгледуваме само во внатрешноста на интервалот $[a,b]$. Токму затоа, граничната вредност не е обична граница.

Кога несвојствениот интеграл од функцијата $f(x)$ е на интервал кој не е ограничен од горе, т.е. дефинирана на интервалот $[a,+\infty)$, несвојствениот интеграл се дефинира како

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx\,.$$

Во четвртиот случај, несвојствениот интеграл на функцијата $f(x)$, е на интервал кој не е ограничен од долу, односно несвојствениот интеграл на функцијата $f(x)$ на интервалот $(-\infty,b]$ се дефинира како

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)\,dx\,.$$

Во случајот кога несвојствениот интеграл од функцијата $f(x)$ е на интервалот $(-\infty,+\infty)$ избираме точка c во која функцијата $f(x)$ е ограничена. Тогаш несвојственот интеграл во овој случај се дефинира со помош на два несвојствени интеграли разгледувани претходно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to c^-}\int_{-\infty}^M f(x)\,dx + \lim_{M\to c^+}\int_M^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Главна вредност на интегралот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ се дефинира како

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^M f(x)\,dx\,.$$

Во општ случај главната вредност на интегралот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ се разликува од вредноста на несвојствениот интеграл.

Пример 1. Нека го разгледаме интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\,dx$. Ќе покажеме дека главната вредност на интегралот постои, додека несвојствениот интеграл не постои, па со тоа можеме да заклучиме дека во општ случај тие се разликуваат. Навистина, главната вредност на интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ е

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\int_{1+M^2}^{1+M^2}\frac{1}{t}dt=0\,,$$

каде што претходно беше ставена смена

$t=1+x^2$, $dt=2x\,dx$, $dx=\frac{dt}{2x}$, $x_1=-M$, $t_1=1+M^2$, $x_2=M$, $t_2=1+M^2$.

Од друга страна интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ можеме да го запишеме како

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx\,.$$

Интегралот $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ не постои бидејќи

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\int_{0}^{M}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}\int_{1}^{1+M^2}\frac{1}{t}dt=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{M\to\infty}(\ln(1+M^2)-\ln 1)=+\infty.$$

Во последниот случај кога подинтегралната функција $f(x)$ не е ограничена на интервалот $[a,b]$, односно нека таа не е ограничена во точката $c\in[a,b]$. Тогаш несвојствениот интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ се дефинира како

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{M\to c^-}\int\limits_a^M f(x)\,dx+\lim_{M\to c^+}\int\limits_M^b f(x)\,dx\,.$$

Во случајот кога подинтегралната функција не е ограничена на преброиво множество точки $\{c_1,c_2,...,c_n\}$ од интервалот $[a,b]$, интервалот $[a,b]$ го делиме на подинтервали $[a,c_1]$, $[c_1,c_2],...,[c_n,b]$ на кои се дефинираат несвојствените интеграли.

Пример 2. Пресметај го интегралот $\int_{-1}^{3}\frac{dx}{x(x-2)}$.

Интегралот $\int_{-1}^{3}\frac{dx}{x(x-2)}$ го запишуваме како

$$\int_{-1}^{3}\frac{dx}{x(x-2)}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x(x-2)}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x(x-2)}+\int_{1}^{2}\frac{dx}{x(x-2)}+\int_{2}^{3}\frac{dx}{x(x-2)}\ .$$

Важи $\int\frac{dx}{x(x-2)}=\frac{1}{2}\ln|\,x-2\,|-\frac{1}{2}\ln|\,x\,|+C=\frac{1}{2}\ln|\,\frac{x-2}{x}\,|+C$.

Бидејќи ниту еден од интегралите не е конвергентен, интегралот $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x(x-1)}$ е дивергентен.

Пример 3. Испитај ја конвергенцијата на интегралот $\int\limits_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$, $a>0$, во зависност од реалниот број $\alpha>0$.

Решение: 1) Нека $\alpha>0$ и $\alpha\neq 1$. Тогаш имаме

$$\int\limits_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^{b}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^b=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}\right)=$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to\infty}b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}\right)==\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}\infty-a^{1-\alpha}\ , & \alpha<1\\ 0-a^{1-\alpha}\ , & \alpha>1\end{cases}=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}\infty, & \alpha<1\\ -a^{1-\alpha}, & \alpha>1\end{cases}$$

Заклучуваме дека за $0<\alpha<1$, интегралот $\int\limits_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ дивергира, а за $\alpha>1$, интегралот конвергира и важи $\int\limits_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

2) Нека $\alpha=1$. Тогаш имаме

$$\int\limits_a^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^{b}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_a^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln a)=\infty-\ln a=\infty\ ,$$ т.е.

следува дека за $\alpha=1$, интегралот $\int\limits_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ дивергира.

Да забележиме дека и за $\alpha\le 0$ интегралот дивергира. □

Пример 4. Пресметај ги интегралите или утврди ја нивната дивергенција

а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx$ б) $\int\limits_0^{\infty}\cos 2x dx$ в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+x^2}dx$.

Решение:

а) Од

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_2^{b}\frac{1}{x^2-1}dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b-1}{b+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

и при $b\to\infty$, $\frac{b-1}{b+1}\to 1$, па $\lim\limits_{b\to\infty}\ln\frac{b-1}{b+1}=\ln 1=0$, од каде што следува дека интегралот конвергира и

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=+\frac{1}{2}\left(0-\ln\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3,\text{ т.е. }\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{\ln 3}{2}.$$

б) Заради

$$\int_0^{\infty}\cos 2x dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos 2x dx=\lim_{b\to\infty}\frac{\sin 2x}{2}\bigg|_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\sin 2b}{2}-\frac{\sin 2\cdot 0}{2}\right)=\lim_{b\to\infty}\frac{\sin 2b}{2}$$

и заради фактот дека $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не постои, следува дека интегралот $\int\limits_0^{\infty}\cos 2x dx$ дивергира.

в) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{a^2+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}dx=$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{1}{a^2+x^2}dx+\lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{1}{a^2+x^2}dx=$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\bigg|_b^0+\lim_{c\to\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\bigg|_0^c=$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\lim_{b\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}(0)-\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right]+\lim_{c\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{a}\right)-\operatorname{arctg}0\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\left[\frac{\pi}{2}-0\right]\right\}=\frac{1}{a}\cdot 2\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{a}.\ \square$$

6.4. Пресметување плоштина на рамнински лик

Нека $f_1(x)$ и $f_2(x)$ се непрекинати функции на интервалот $[a,b]$ и притоа важи $f_1(x)\le f_2(x)$ за секој $x\in[a,b]$. Нека го разгледаме рамнинскиот лик кој се наоѓа помеѓу вертикалните прави $x=a$, $x=b$, x- оската и помеѓу графиците на функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Наша цел ќе биде да дадеме формула со која ќе се пресметува плоштината на претходно опишаниот интеграл.
Нека интервалот $[a,b]$ го поделиме на n еднакви делови ,

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b,$$

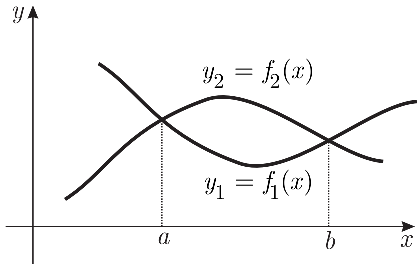
каде што разликата Δx е $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$.

Плоштината на еден од формираните правоаголници со поделбата е $[f_2(x)-f_1(x)]\Delta x$. Па, за плоштината на разгледуваниот рамнински лик имаме

$$P\approx\sum_{i=1}^{n}[f_2(x_i)-f_1(x_i)]\Delta x_i\,.$$

Ако пуштиме $n\to\infty$, ја добиваме точно плоштината на рамнинскиот лик, а од друга страна пуштајќи $n\to\infty$ во $P\approx\sum\limits_{i=1}^{n}[f_2(x_i)-f_1(x_i)]\Delta x_i$, ја

добиваме интегрланата сума на функцијата $f_2(x)-f_1(x)$. Согласно тоа, плоштината на рамнинскиот лик опишан погоре (види цртеж) е
$P=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,dx$.



Доколку рамнинскиот лик е ограничен одоздолу со x - оската, односно $f_1(x)=0$, формулата за пресметување на плоштина на криволиниски трапез формиран од правите $x=a$, $x=b$, x - оската и графикот на функцијата $f(x)$ се пресметува со формулата

$$P=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Нека кривата е зададена со параметарските равенки

$$x=x(t)$$
$$y=y(t)$$

за $t\in[t_1,t_2]$. Плоштината на криволинискиот трапез се пресметува со определениот интеграл

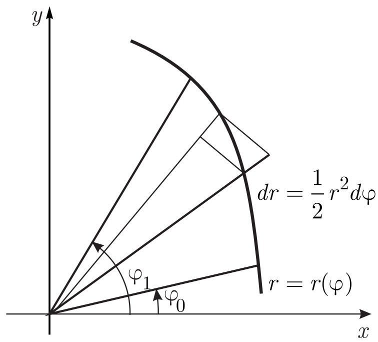
$$P=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\dot{x}(t)\,dt.$$

Формулата следува од претходната формула за плоштина на криволиниски трапез ограничен од горе со графикот на функцијата $y=f(x)$, кога ќе ставиме смена $f(x)=f(x(t))=y(t)$, $dx=\dot{x}(t)\,dt$.

Во случај границите за t да не се дадени, а ги знаеме границите за x, на пример $a\le x\le b$, границите $t_1\le t\le t_2$ ги определуваме со помош на равенката $x=x(t)$, т.е. од равенката $x(t)=a$ го определуваме t_1, додека од равенката $x(t)=b$ го определуваме t_2.

Натаму, ќе дадеме формула за плоштина на рамнински лик кој е ограничен со крива, која е зададедена во поларни координати. Идејата е плоштината да ја претставиме како збир од плоштини на кружни исечоци, наместо како збир од плоштини на правоаголници. Плоштината на еден кружен исечок од тој круг со агол α е

$$P=\frac{r^2\pi}{2\pi}\alpha=\frac{1}{2}r^2\alpha.$$



Ќе ја одредиме плоштината на ликот на цртежот, ликот кој е определен со два зрака определени со аглите $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$ и кривата зададена со равенката во поларни координати $\rho = \rho(\varphi)$. За да ја пресметаме плоштината на овој рамнински лик, ќе извршиме поделба на интервалот $[\varphi_0, \varphi_1]$. За плоштината на рамнинскиот лик ја добиваме приближната вредност

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \rho^2(\varphi_i) \Delta\varphi_i .$$

Ако пуштиме $n \to \infty$, ја добиваме вистинската плоштина на рамнинскиот лик (некаде уште се нарекува и криволиниски сектор). Имајќи ја предвид претходната формула и ставајќи во неа $n \to \infty$, за плоштината на рамнинскиот лик имаме,

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2 \, d\varphi.$$

Пример 1. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите:

а) $y = 1 - x^2$, $y = 0$

Бидејќи ликот е ограничен од долу со x-оската, плоштината ќе ја пресметаме со формулата

$$P = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Границите на интегралот ќе ги добиеме како решение на равенката $1 - x^2 = 0$, односно $x^2 = 1$, т.е $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Тогаш

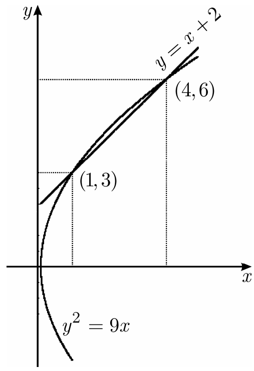
$$P = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \, dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = (1 - (-1)) - \frac{1}{3}(1^3 - (-1)^3) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

б) $y = x + 2$, $y^2 = 9x$

За да ги најдеме границите на определниот интеграл во формулата за пресметување на плоштина на рамнински лик, го решаваме системот

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y^2 = 9x \end{cases}.$$

Ако првата равенка ја замениме во втората равенка добиваме $(x+2)^2=9x$, од каде што ја добиваме квадратната равенка $x^2-5x+4=0$. Решенијата на равенката, а со тоа и границите на определениот интеграл се $x_1=1$, $x_2=4$.



Тогаш

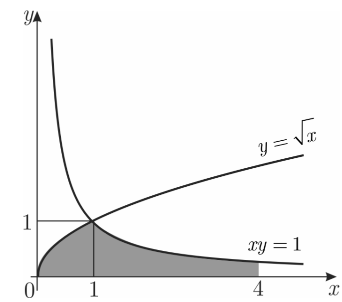
$$P=\int_1^4[\sqrt{9x}-(x+2)]\,dx=3\int_1^4\sqrt{x}\,dx-\int_1^4(x+2)\,dx=\left(3\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^4=2\cdot 8-8-8-2+\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}.$$

в) $xy=1,\ y=\sqrt{x}, x=4, y=0$

Имајќи го предвид цртежот, плоштината на рамнинскиот лик ќе биде збир од плоштините на двата лика кои го сочинуваат. Горната граница на првиот определен интеграл, а истовремено долната граници на вториот определен интеграл ја добиваме како решение на системот $\begin{cases} xy=1 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$.

Добиваме $x=1$.



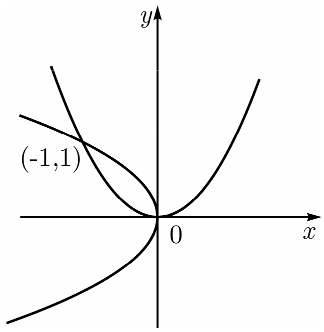
Тогаш,

$$P=\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^4\frac{dx}{x}=\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1+\ln|\,x\,|\Big|_1^4=\frac{2}{3}+\ln 4-\ln 1=\frac{2}{3}+2\ln 2.$$

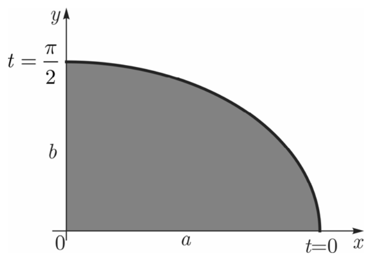
г) $y = x^2, y^2 = -x$

Од цртежот, границите на рамнинскиот лик се решение на системот $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = -x \end{cases}$. Според тоа границите се $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Па плоштината на рамнинскиот лик е

$$P = \int_{-1}^{0} (\sqrt{-x} - x^2)\, dx = \left(-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$



Пример 2. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со:
а) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

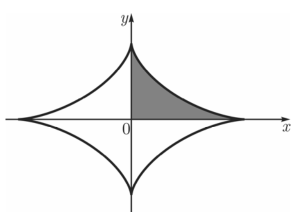


Плоштината е

$$P = 4\int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\, dt = 4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t(-\sin t)\, dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = \frac{4ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi\,.$$

б) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$



Плоштината на ликот ограничен со астроидата е четирипати поголема од шрафираната. Уште $dx = \dot{x}(t)\,dt = -3a\cos^2 t\sin t\,dt$. Сега,

$$P = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)\dot{x}(t)\,dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{12}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t4(\sin t\cos t)^2\,dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sin^2 2t\,dt =$$

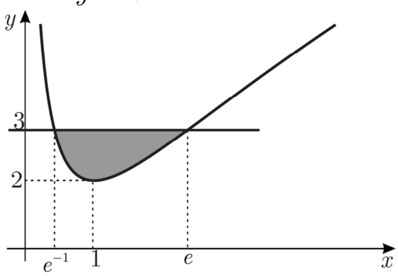
$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t-\cos 4t+\cos 2t\cos 4t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{4}a^2\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\cos 4t\,dt\right) =$$

$$= \frac{3}{4}a^2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos 2t+\cos 6t]\,dt =$$

$$= \frac{3a^2\pi}{8} + \frac{3a^2}{8}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{6}\sin 6t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

в) $x = e^t$, $y = 2 + t^2$ и правата $y = 3$



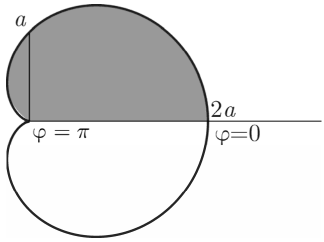
Од еднаквоста $3 = 2 + t^2$ следува дека $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$, од каде што следува дека $x \in [e^{-1}, e]$. Сега функцијата $f(x) = 3 - (2 + \ln^2 x)$ добиена со трансформација од параметарски облик во експлицитен облик ја интегрираме на интервалот $[e^{-1}, e]$ и на тој начин ќе ја определиме плоштината која се бара. Значи,

$$P = \int_{e^{-1}}^{e}(3-(2+\ln^2 x))\,dx = 3\,x\Big|_{e^{-1}}^{e} - \int_{-1}^{1}(2+t^2)e^t\,dx = 4e^{-1}.$$

Пример 3. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривата

а) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$

Плоштината на целата кардиоида ќе ја пресметаме како двапати од плоштината на горниот дел од кариоидата. Имаме,



$$P=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\rho^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\varphi\Big|_0^{\pi}+2\sin\varphi\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right)=$$

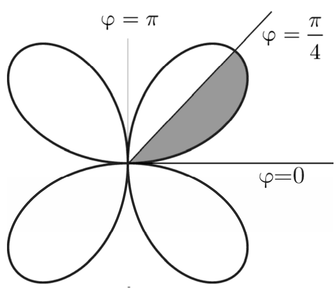
$$=a^2\left(\pi+\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{3a^2\pi}{2}.$$

б) $\rho=a\sin 2\varphi$

Од цртежот, плоштината на ликот ограничен со кривата $\rho=a\sin 2\varphi$ е

$$P=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin^2 2\varphi\,d\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi=$$

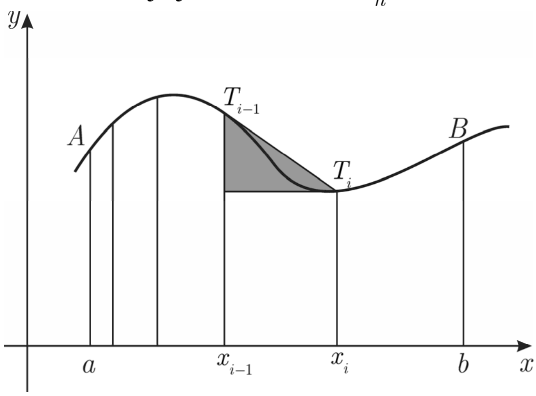
$$=2a^2\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=2a^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{a^2\pi}{2}\ .$$



6.5. Пресметување на должина на лак на крива

Нека кривата чија должина ја бараме е зададена со равенката $y=f(x)$, каде што $f(x)$ е нерекината функција на интервалот $[a,b]$. Овде ќе биде дадена формулата за пресметување на лакот на кривата $\overset{\frown}{AB}$. Нека лакот $\overset{\frown}{AB}$ го разбиеме на помали лаци со избирање на точките $T_i,\ i=0,\dots,n$, каде што $A=T_0$ и $B=T_n$. Апцисите соодветно се $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$. Отсечките

$\overline{T_{i-1}T_i}$, $i = 1,\ldots,n$ формираат искршена линија над лакот $\overset{\frown}{AB}$ на кривата дадена со функцијата $y = f(x)$. Должината на искршената линија е приближна колку и должината на лакот $\overset{\frown}{AB}$ на кривата $y = f(x)$. Колку повеќе точки има искршената линија толку повеќе должината на искршената линија е поблиску по апсолутна вредност до должината на лакот $\overset{\frown}{AB}$ од кривата $y = f(x)$. Нека должината на искршената линија ја означиме со l_n.



Тогаш,

$$l_n = \overline{T_0T_1} + \overline{T_1T_2} + \ldots + \overline{T_{i-1}T_i} + \ldots + \overline{T_{n-1}T_n}.$$

Да забележиме дека $T_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ и $T_i(x_i, f(x_i))$, за $i = 1,2,\ldots,n$. Тогаш должината на отсечката $T_{i-1}T_i$ е

$$\overline{T_{i-1}T_i} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}, \text{ за } i = 1,2,\ldots,n.$$

Оттука должината на искршената линија l_n може да се запише како

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Имајќи предвид дека колку повеќе темиња имаме во искршената линија, толку повеќе l_n е поблиску по апсолутна вредност до должината l на лакот $\overset{\frown}{AB}$ од кривата $y = f(x)$. Токму затоа,

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max T_{i-1}T_i \to 0}} l_n.$$

Користејќи ја Лагранжовата теорема за функцијата $y = f(x)$ на интервалот $[x_{i-1,} x_i]$ имаме

$$f'(\xi_i) = \frac{f(x_i) - f\left(x_{i-1}\right)}{x_i - x_{i-1}},$$

за некое $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Па, имаме

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \left(f'(\xi_i)\right)^2}\ ,$$

од каде што ставајќи $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, добиваме

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\ \Delta x_i\, .$$

Конечно должината l на лакот $\overset{\frown}{AB}$ од кривата $y = f(x)$ е

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max T_{i-1}T_i \to 0}} l_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\,\Delta x_i\, .$$

Границиата на оваа сума е всушност определениот интеграл

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ dx\, ,$$

па должината l на лакот $\overset{\frown}{AB}$ од кривата $y = f(x)$ е

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ dx.$$

Сега нека имаме крива која е зададена со параметарските равенки

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}.$$

Кога во формулата $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ dx$ ќе замениме

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},\ dx = \dot{x}(t)\, dt$$

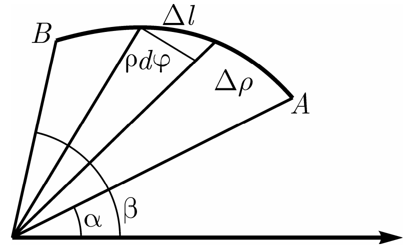
се добива дека формулата за пресметување на должина на лак на крива за која $t \in [t_1, t_2]$ е

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}\ \dot{x}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt\, ,$$

односно

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

Нека имаме зададена крива со равенката $\rho = \rho(\varphi)$ во однос на поларен координатен систем. Формулата за должината на лакот $\overset{\frown}{AB}$, каде што A и B се точки од кривата $\rho = \rho(\varphi)$ ќе биде дадена во продолжение. Нека на точките A и B одговараат аглите α и β во поларниот координатен систем. Така аголот $\varphi \in [\alpha, \beta]$.



Користејќи дека

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = \rho(\varphi)\sin\varphi$$

имаме

$$\dot{x} = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi$$
$$\dot{y} = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi\ .$$

Заменувајќи во формулата за пресметување на должина на лак на крива која е зададена со параметарски равенки, добиваме

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\Big(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi\Big)^2 + \Big(\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi\Big)^2}\, d\varphi,$$

од каде што

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi\,.$$

Согласно горните разгледување, диференцијал на лак на крива кога таа е зададена со

а) равенката $y = f(x)$ се пресметува со

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,.$$

б) со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$ се пресметува со равенката

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt$$

в) со равенката $\rho = \rho(\varphi)$ во поларен координатен систем се пресметува со равенката

$$ds = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\ d\varphi\,.$$

Пример 1. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = \ln\cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$.

Ја користиме формулата $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ dx$ за да ја пресметаме должината која се бара. Изводот на функцијата $y = \ln\cos x$ е $y' = \dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = -\mathrm{tg}x$. Тогаш за должината која треба да ја пресметаме добиваме

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + (\mathrm{tg}x)^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x}.$$

Последниот интеграл е познат интеграл од делот за тригонометриски интеграли, па,

$$l = \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)| - \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)| = \ln|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)| = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$$

Пример 2. Пресметај ја должината на циклоидата зададена параметарски со равенките $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Бидејќи кривата е зададена со параметарски равенки, за пресметување на должината на еден лак од циклоидата ќе ја користиме формулата

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\, dt.$$

Претходно, $\dot{x}(t) = a(1-\cos t)$, $\dot{y}(t) = a\sin t$.
Тогаш

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)}\, dt =$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = 8a.$$

Пример 3. Пресметај ја должината на кривата зададена со равенката $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

Овде функцијата $\rho = a(1-\cos\varphi)$ е во поларен координатен систем и имајќи предвид дека $\rho' = a\sin\varphi$, должината на кардиоидата е

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\left(-2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = -8a(0-1) = 8a.$$

6.6. Пресметување волумен на тело со познат напречен пресек

Овде ќе биде дадена формула за пресметување на волумен на тело кое е ограничено со една површина и две паралелни рамнини. Рамнините кои го ограничуваат телото се нормални на x - оската. Нека претпоставиме дека е можно да се пресметаат плоштините на пресеците на ова тело со рамнини нормални на

x- оската. Повлекуваме рамнини кои се нормални на x- оската кои минуваат низ точките $x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$, за кои важи

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b.$$

Јасно е дека плоштините на пресеците ќе зависат од растојанието на рамнините до координатниот почеток. Плоштината на секој пресек на рамнината со телото ќе го означиме со $P(x)$, каде што x е растојанието од координатниот почеток до рамнината со која го сечеме телото.

Во секој интервал $[x_{i-1}, x_i]$ избираме точка ξ_i, за $i = 1, 2, ..., n$. Секој слој го заменуваме со мал цилиндар, чија основа е пресекот на телото со рамнината што минува низ точката ξ_i, а висината е должината на интервалот $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, за $i = 1, 2, ..., n$. Волуменот на тој мал цилиндар е еднаков на $V_i = P(\xi_i)\Delta x_i$, за $i = 1, 2, ..., n$. Сумата од волумените ќе биде еднаква на $V_n = \sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i)\Delta x_i$. Нека со V го означиме волуменот на телото кој го бараме. Јасно е дека, доколку имаме повеќе точки во поделбата, односно повеќе мали цилиндри, волуменот V_n ќе биде поблиску до волуменот V по апсолутна вредност. Па, оттука

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} V_i = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

Последната сума претствува интегрална сума за функцијата $P(x)$ на интервалот $[a, b]$, од каде што заклучуваме дека волуменот на даденото тело се пресметува со формулата

$$V = \int_a^b P(x)\, dx.$$

Пример 1. Пресметај го волуменот на телото кое е ограничено со два цилиндри со радиус r, а оските на тие цилиндри се сечат под прав агол.
Апсцисната оска е избрана да биде нормална на оските на цилиндрите, додека ординатната оска нормално на неа, во правец на оската на едниот цилиндар.
Повлекуваме рамнина која е нормална на x- оската на растојание x од координатниот почеток. Тогаш плоштината на нормалниот пресек е

$$P(x) = \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = r^2 - x^2.$$

Според формулата за пресметување волумен имаме,

$$V = 8\int_a^b P(x)\, dx = 8\int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = 8\left. \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^r = \frac{16}{3} r^3.$$

6.7. Пресметување волумен на ротационо тело

Нека претпоставиме дека функцијата $y = f(x)$ е непрекината и ненегативна на интервалот $[a,b]$ и нека имаме тело кое е добиено со ротација на криволинискиот трапез, ограничен одозгора со графикот на функцијата $y = f(x)$, x- оската и вертикалните прави $x = a$ и $x = b$ околу x- оската. Вака добиеното тело ќе го нарекуваме ротационо тело. Интервалот $[a,b]$ го разбиваме на следниов начин

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Волуменот на ротационото тело кое се добива е приближно еднакво на збирот од волумените на цилиндрите со радиус $f(\xi_i)$ и висина $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, за $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и за $i = 1,2,...,n$.

Волуменот на еден од малите цилиндри е еднаков на

$$V_i = \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i,$$

за $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и за $i = 1,2,...,n$.

Да забележиме дека колку повеќе имаме точки во поделбата на интервалот $[a,b]$, толку повеќе збирот на волумените на малите цилиндри опишани погоре е поблизок по апслоутна вредност до волуменот на ротационото тело. Нека збирот од волумените на малите цилиндри го означиме со V_n, а волуменот на ротационото тело го означиме со V. Тогаш, јасно важи

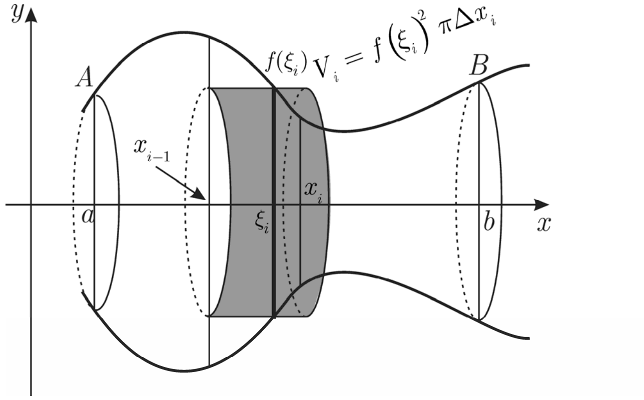
$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} V_n.$$

Од друга страна,

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i,$$

па за волуменот на ротационото тело се добива

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} V_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i .$$



Последната сума е интегрална сума за функцијата $\pi f^2(x)$, од каде што ја добиваме формулата за пресметување на волумен на ротационо тело кое се добива со ротација на криволинискиот трапез ограничен одозгора со графикот на функцијата $y = f(x)$, x- оската и вертикалните прави $x = a$ и $x = b$ околу x-оската:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Ако ротационото тело се добива со ротација околу y- оската на криволинискиот трапез, ограничен со кривата $x = g(y)$, y- оската и правите $y = c$ и $y = d$, каде што $g(y)$ е непрекината и ненегативна функција на отсечката $[c,d]$, тогаш сосема аналогно може да се покаже како погоре, дека волуменот на добиеното ротационо тело се пресметува со формулата

$$V = \pi\int_c^d g^2(y)\,dy.$$

Ако криволинискиот трапез е ограничен со кривата која е зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, каде што $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$, тогаш волуменот на телото што се добива при ротација на криволинискиот трапез околу x- оската се пресметува со формулата

$$V = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)\,dt.$$

Ако имаме ротација околу y- оската волуменот се пресметува со формулата

$$V = \pi\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\dot{y}(t)\,dt,$$

каде што $y(t_1) = c$, $y(t_2) = d$.

Последните две формули се добиваат, ако во формулите за волумен на ротационо тело кое се добива со ротација околу x- оската, соодветно y- оската, ставиме $dx = \dot{x}\,dt$ соодветно $dy = \dot{y}\,dt$.

Пример 1. Пресметај го волуменот на телото кое се добива со

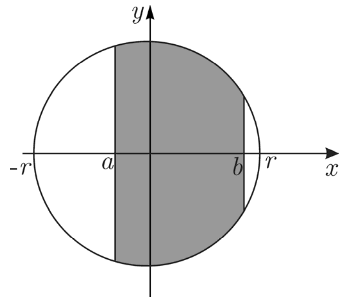
а) ротација на кружницата $x^2 + y^2 = r^2$, $r \geq 0$, околу y- оската

Со ротација на десниот дел од кружницата $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, околу y- оската се добива топка која е ограничена со сферата $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Нејзиниот волумен е

$$V = 2\pi\int_0^r x^2\, dy = 2\pi\int_0^r \left(\sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^r (r^2 - y^2)\, dy = 2\pi\left(r^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^r =$$

$$= 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

б) ротација на делот од кругот $x^2 + y^2 = r^2,\ r \geq 0$, ограничен со вертикалните прави $x = a$, $x = b$, $0 < a < b < r$, околу x- оската



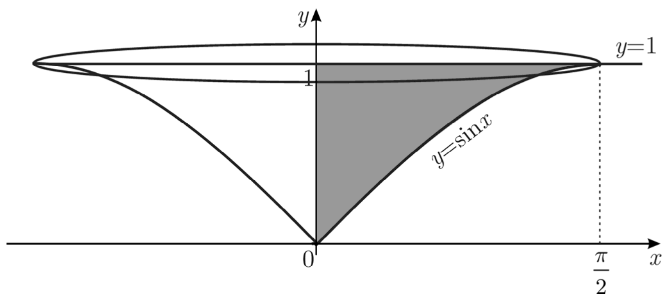
За волуменот на добиеното тело, имаме

$$V = \pi\int_a^b y^2\, dx = \pi\int_a^b (r^2 - x^2)\, dx = \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_a^b = \pi\left(br^2 - \frac{b^3}{3} - ar^2 + \frac{a^3}{3}\right),$$

односно

$$V = \frac{3\pi r^2(b-a) - \pi(b^3 - a^3)}{3}.$$

Пример 2. Пресметај го волуменот на телото кое се добива со ротација на рамнинскиот лик ограничен со $y = \sin x,\ y = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2}$ и y- оската, околу y- оската.



Ако ја најдеме инверзната функција на функцијата $y = \sin x$, над $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ имаме $x = \arcsin y$. Тогаш волуменот на телото е

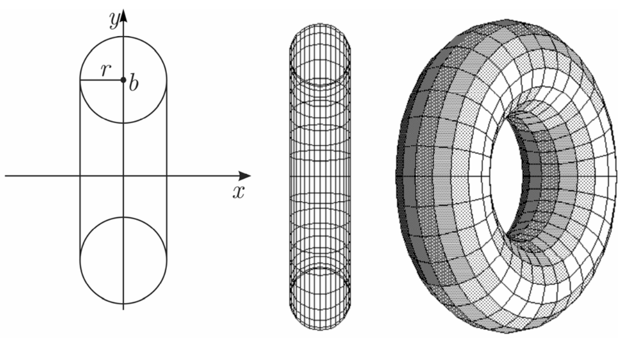
$$V = \pi \int_0^1 x^2\,dy = \pi \int_0^1 \arcsin^2 y\,dy = \pi\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\right).$$

Последниот интеграл беше најден со помош на методот на парцијална интеграција, ставајќи $u = \arcsin^2 y$, $dv = dy$, од каде $du = \frac{2\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}}dy$, $v = y$, па добиваме

$$\int \arcsin^2 y\,dy = y\arcsin^2 y - 2\int \frac{y \arcsin y}{\sqrt{1-y^2}}dy =$$

$$= y\arcsin^2 y + 2\int \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\arcsin y\ dy = y\arcsin^2 y + 2\left(\sqrt{1-y^2}\arcsin y - y\right) + C\ .$$

Пример 3. Пресметај го волуменот на телото кое се добива со ротација на кружницата $x^2 + (y-b)^2 = r^2$, $0 < r < b$, околу x-оската.



Ако кружницата $x^2 + (y-b)^2 = r^2$ ротира околу x-оската, се добива торус. Волуменот ќе го пресметаме како разлика на волуменот на телото што се добива со ротација на ликот под горната полукружница $y = b + \sqrt{r^2 - x^2}$ и волуменот на телото што се добива како ротација на ликот под долната полукружница $y = b - \sqrt{r^2 - x^2}$. Па за волуменот на торусот имаме

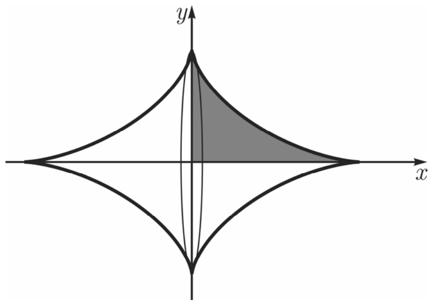
$$V = \pi\int_{-r}^{r} (b + \sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx - \pi\int_{-r}^{r} (b - \sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx =$$

$$= \pi\int_{-r}^{r}\left(b^2 + 2b\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - b^2 + 2b\sqrt{r^2 - x^2} - (r^2 - x^2)\right)dx =$$

$$= 4b\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2br^2\pi^2.$$

Последниот интеграл може да се реши со парцијална интеграција или со помош на тригонометриската смена $x = r\,\mathrm{tg}t$. Но, овој интеграл може да се разгледува како плоштина на половина круг ограничен со кружницата $x^2+y^2=r^2$, која е $\dfrac{r^2\pi}{2}$.

Пример 4. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на ликот ограничен со астроидата $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, околу x-оската.



Волуменот на телото ќе го пресметаме со формулата

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,\dot{x}(t)\,dt.$$

Имајќи предвид дека $\dot{x}(t)=-3a\cos^2 t\sin t$, со заменување во формулата имаме

$$V=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot\sin t\,dt=-6a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\sin t\,dt$$

Ставајќи смена $u=\cos t$, $du=\sin t\,dt$ во последниот интеграл и притоа менувајќи ги границите:

за $t_1=0$, $u_1=1$, за $t_2=\dfrac{\pi}{2}$, $u_2=0$, имаме

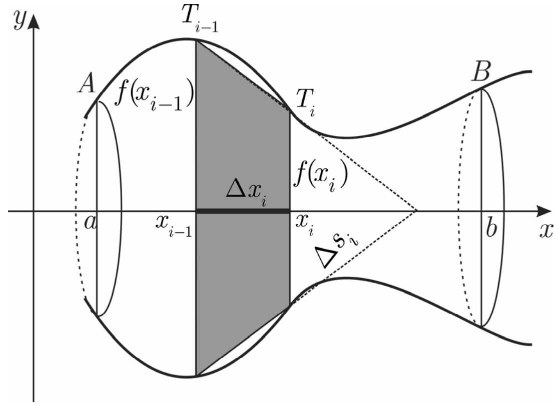
$$V=6a^3\pi\int_1^0(1-u^2)^3u^2\,du=12a^3\pi\int_1^0(u^2-3u^4+3u^6-u^8)\,du=\frac{32}{105}a^3\pi\,.$$

6.8. Пресметување плоштина на ротациона површина

Нека разгледаме површина која се добива со ротација на лакот $\overset{\frown}{AB}$ на кривата $y=f(x)$, каде што $f(x)\ge 0$ и $f(x)$ е непрекинато диференцијабилна функција на интервалот $[a,b]$, каде $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$. Оваа површина ќе ја нарекуваме ротациона површина. Отсечката $[a,b]$ која лежи на апсцисната оска ќе ја поделиме со $n+1$ точки:

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b,$$

на кои одговараат точките $A\equiv T_0,T_1,T_3,...,T_i,...,T_n\equiv B$ од лакот $\overset{\frown}{AB}$.



Со поврзување на точките од лакот добиваме искршена линија. Со ротација на лакот $\overset{\frown}{AB}$ околу x- оската имаме и ротација на искршената линија, која опишува површина која е составена од обвивките на n потсечени конуси. Плоштината на ротационата површина приближно може да ја пресметаме како збир на плоштинте на добиените конусни обвивки. Таа плоштина ќе биде поблиску ако избереме повеќе точки во поделбата на лакот $\overset{\frown}{AB}$. Имено, плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на лакот $\overset{\frown}{AB}$ на кривата $y = f(x)$ околу x- оската ќе ја пресметаме како гранична вредност на плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на претходно опишаната искршена линија околу x- оската, кога бројот на точки во поделбата на лакот $\overset{\frown}{AB}$ тежи кон бесконечност, а должината на секоја од отсечките $\overline{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ тежи кон нула. Нека плоштината на површината што се добива со ротација на искршената линија околу x- оската ја означиме со P_n и плоштинатната површина ја означиме со P. Согласно тоа, имаме

$$P = \lim_{n\to\infty,\, M_{i-1}M_i \to 0} P_n .$$

Со ротација на секоја отсечка $\overline{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ од искршената линија се добива обвивка на потсечен конус која може да ја пресметаме со формулата

$$M = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} s,$$

каде што r_1 и r_2 се радиусите на основите на потсечениот конус, а s е изводницата (генератрисата) на конусот.

Нека сега го разгледаме потсечениот конус кој е формиран со ротација на отсечката $\overline{T_{i-1}T_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ околу x- оската. Неговата висина е $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, радиусите на основите се $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, а генератрисата е

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} .$$

Па, плоштината на обвивката на добиениот потсечен конус е

$$M_i = 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \, .$$

Тогаш плоштината на ротационата површина која се добива со ротација на искршената линија околу x- оската ќе биде збир од сите такви плоштина, т.е.

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \, .$$

Имајќи предвид дека $f(x)$ е непрекината функција, заменувајќи во горната равенка

$$f(\xi_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2},$$

за некое $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и сите $i = 1, 2, \ldots, n$.

Сосема аналогно како кај должина на лак на крива ја користиме Лагранжовата теорема, т.е. постои $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ така што $f(x_{i-1}) - f(x_i) = f'(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$. Последната равенка ја заменуваме во равенката за плоштината P_n. Ставајќи $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а потоа со средување добиваме

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)} \, \Delta x_i \, .$$

Последната сума ја заменуваме со сума која е блиска до неа:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\zeta_i) \sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)} \, \Delta x_i \, .$$

Конечно,

$$P = \lim_{\substack{n \to \infty \\ M_{i-1} M_i \to 0}} P_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ M_{i-1} M_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\zeta_i) \sqrt{1 + f'^2(\zeta_i)} \, \Delta x_i \, .$$

Сумата во последната равенка е интегрална сума за функцијата

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)},$$

па имаме дека плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на лакот $\overset{\frown}{AB}$ од кривата $y = f(x)$, околу x-оската е

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx \, .$$

Нека кривата е зададена со равенката $x = g(y)$ и лакот $\overset{\frown}{CD}$ од кривата ротира околу y- оската, при што ординатите на C и D се соодветно c и d и уште $g(y)$ е непрекината функција со непрекинат извод во сите точки од интервалот $[c, d]$. Тогаш плоштината на ротационата површина што се добива со ротација на лакот $\overset{\frown}{CD}$ од кривата $x = g(y)$ околу y- оската, (сосема аналогно како претходно може да се изведе формулата) се пресметува со формулата

$$P = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + g'^2(y)} \, dy \, .$$

Ако кривата чиј лак $\overset{\frown}{AB}$ која ротира околу x- оската е зададена со параметарски равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, каде $x(t)$ и $y(t)$ се непрекинато диференцијабилни на интервалот $[t_1, t_2]$, каде што $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$, се пресметува со формулата

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt .$$

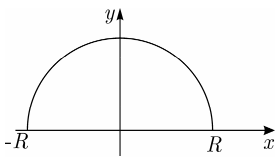
Оваа формула се добива од формулата за ротациона површина добиена со ротација на лакот $\overset{\frown}{AB}$ која ротира околу x- оската, ако замениме

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},\ dx = \dot{x}\, dt .$$

Сосема аналогно, формулата за пресметување на плоштина на ротациона површина добиена со ротација на крива чиј лак $\overset{\frown}{CD}$ ротира околу y- оската, зададена со параметарски равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, каде што $x(t)$ и $y(t)$ се непрекинато диференцијабилни на интервалот $[t_1, t_2]$, каде што $x(t_1) = c$ и $x(t_2) = d$ е

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt .$$

Пример 1. Пресметај ја плоштината на површината што се добива со ротација на кривата $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ околу x- оската.



Ротационата површина која се добива со ротација на ликот ограничен со кривата $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ околу x- оската е сфера со радиус R. Користејќи ја формулата $P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$ каде што границите се $-R \le x \le R$.

Тогаш, имајќи предвид дека $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, имаме

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 2\pi R(R - (-R)) = 4R^2\pi \ .$$

Пример 2. Пресметај ја плоштината на површината што се добива со ротација на кривата

а) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, за $t \in [0, 2\pi]$ околу x -оската.

Бидејќи равенката на кривата е дадена со параметарски равенки, имаме дека плоштината на ротационата површина се пресметува со формулата

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt.$$

Уште, $\dot{x}(t) = -3a\cos^2 t \sin t$, $\dot{y}(t) = 3a\sin^2 t\cos t$. Тогаш,

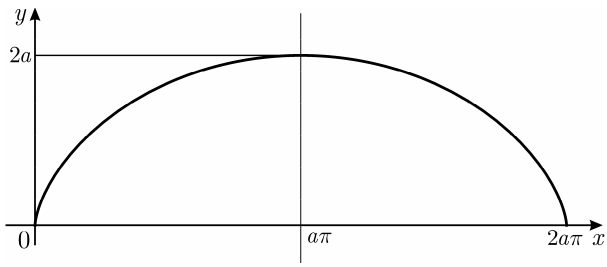
$$P = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt =$$

$$= 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt =$$

$$= 12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\, dt = \frac{12}{5}a^2\pi\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}a^2\pi,$$

при што во последниот интеграл беше ставена смена $u = \sin t$, $du = \cos t\, dt$, при што $t_1 = 0$, $u_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $u_2 = 1$.

б) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, а $t \in [0, 2\pi]$ околу оската на симетрија.



Кога $y = 0$, $\cos t = 1$, $t = 0$ и $t = 2\pi$. Циклоидата кога $t = 2\pi$ има апсциса $x = 2a\pi$. Оттука оската на симетрија минува нормално на x- оската и низ точката со координати $(a\pi, 0)$. Имајќи ја предвид формулата $P = 2\pi\int_a^b R\, dl$,

каде што R е растојанието од произволна точка од кривата до оската на ротација, dl е диференцијал на лакот, a и b се граници на лакот. Тогаш
$R = a\pi - a(t - \sin t) = a(\pi - t + \sin t)$,
Додека

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\, dt,$$

односно, $dl = 2a\sin\frac{t}{2}dt$.

Границите за t се $0 \le t \le \pi$.

Заменувајќи во горната формула, имаме

$$P = 4a^2\pi\int_0^{\pi}(\pi - t + \sin t)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 4a^2\pi\left(\pi\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt - \int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt + 2\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt\right) =$$

$$= 8a^2\pi\left(-\pi\cos\frac{t}{2} + t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= 8a^2\pi\left(\pi - 2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}a^2\pi(3\pi - 4)\,.$$

6.9. Решени задачи

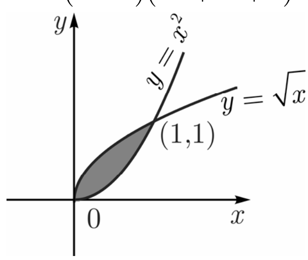
1. Да се пресмета плоштината на ликот кој лежи меѓу кривите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение:

Пресекот на двете криви е во точки кои се решение на системот равенки $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$, односно апцисите на тие точки се решение на равенката

$$x^2 = \sqrt{x}\,,$$

која е еквивалентна со равенката $x(x-1)(x^2+x+1) = 0$, чии реални решенија



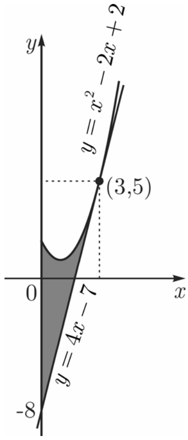
се $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. За плоштината на фигурата ограничена со двете криви добиваме

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Да се пресмета плоштината на фигурата ограничена со параболата $y = x^2 - 2x + 2$, нејзината тангента во точката $M(3,5)$ и y – оската.

Решение:

$$y = x^2 - 2x + 2, \quad y' = 2x - 2, \quad y'(3) = 4$$



Тангената на параболата во точката $M(3,5)$ има равенка $y-y_0=y'_0(x-x_0)$, односно $y-5=4x-12$, т.е. $y=4x-7$. Јасно, апцисите на пресечните точки на параболата со y- оската и со тангентата се $x_1=0$, $x_2=3$. Па, плоштината на фигурата ќе биде

$$P=\int_0^3((x^2-2x+2)-(4x-7))dx=\int_0^3(x^2-6x+9)dx=\int_0^3(x-3)^2dx=$$

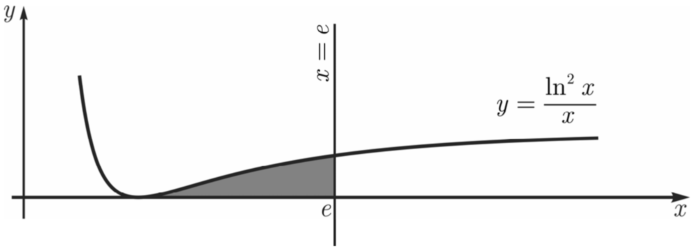
$$=\begin{pmatrix} t=x-3 & t_1=-3 \\ dt=dx & t_2=0 \end{pmatrix}=\int_{-3}^0 t^2dt=\frac{t^3}{3}\bigg|_{-3}^0=-\frac{(-3)^3}{3}=9.$$

3. Да се пресмета плоштината на фигурата ограничена со кривите $y=\frac{\ln^2 x}{x}$, $x=e$, $y=0$.

Решение:

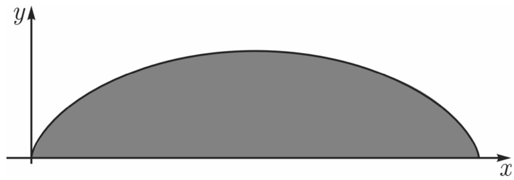
Пресекот на кривата $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ со x – оската е решение на равенката $0=\frac{\ln^2 x}{x}$, т.е. $x=1$. Па, плоштината на фигурата е

$$P=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx=\begin{pmatrix} t=\ln x & t_1=0 \\ dt=\dfrac{dx}{x} & t_2=1 \end{pmatrix}=\int_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$



4. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со еден лак на кривата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (циклоида) и x – оската.

Решение:



Бидејќи еден лак на циклоидата се добива за $0 \le t \le 2\pi$, бараната плоштина ќе биде:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2\int_0^{2\pi} dt - 2a^2\int_0^{2\pi}\cos t dt + a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt =$$

$$= a^2 t\Big|_0^{2\pi} - 2a^2\sin t\Big|_0^{2\pi} + a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} dt + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t dt =$$

$$= 2a^2\pi + \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t dt = \begin{pmatrix} u = 2t & u_1 = 0 \\ du = 2dt & u_2 = 4\pi \end{pmatrix} =$$

$$= 3a^2\pi + \frac{a^2}{4}\sin u\Big|_0^{4\pi} = 3a^2\pi .$$

5. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривата $\rho = a\sin 3\phi$.

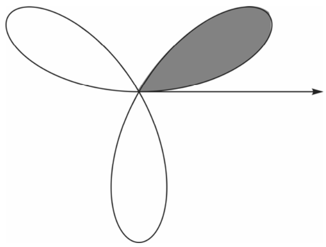
Решение:

Бидејќи засенчениот дел од сликата се добива за $0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{3}$, бараната плоштина е

$$P = 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\rho^2 d\phi = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2\sin^2 3\phi d\phi = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 6\phi}{2}d\phi =$$

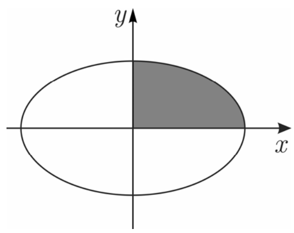
$$= \frac{3a^2}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 6\phi d\phi\right) = \frac{3a^2}{4}\left(\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{\sin(6\phi)}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right) =$$

$$= \frac{3a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = \frac{3a^2\pi}{12} = \frac{a^2\pi}{4}.$$



6. Да се пресмета плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение:



Равенката на елипсата ќе ја запишеме во параметарски облик : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$,

каде $t \in [0, 2\pi]$. Тогаш плоштината на делот од рамнината ограничен со елипсата е

$$P = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)\dot{x}(t)dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot a(-\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{4ab}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt\right) =$$

$$= 2ab\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = ab\pi.$$

7. Да се определи плоштината на ликот ограничена со кривата $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$, $0 \le t \le 1$.

Решение:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt = \int_0^1 (2t^2 - t^3)(2-2t)dt = \int_0^1 (4t^2 - 2t^3 - 4t^3 + 2t^4)dt =$$

$$= \frac{4t^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{t^4}{2}\Big|_0^1 - \frac{4t^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{2t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{30}.$$

8. Да се пресмета должината на лакот на кривата $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ **,** $0 \le t \le 1$**.**

Решение:

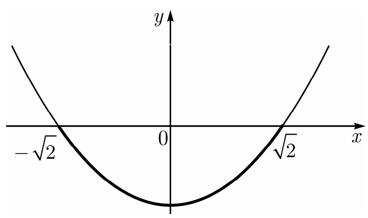
Јасно $\dot{x} = t^5$ и $\dot{y} = -t^3$, па за должината на лакот имаме

$$l = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \int_0^1 \sqrt{t^{10} + t^6}dt = \int_0^1 t^3\sqrt{1+t^4}dt = \begin{pmatrix} 1 + t^4 = u \\ 4t^3 dt = du \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{1}{6}(1+t^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}2\sqrt{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(2\sqrt{2} - 1)$$

9. Да се пресмета должината на лакот на кривата $y = \frac{x^2}{2} - 1$ отсечен со правата $y = 0$.

Решение:



Ќе го најдеме пресекот на кривата со x-оската

$$y = \frac{x^2}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Значи, пресекот на x-оската (правата $y = 0$) со кривата $y = \frac{x^2}{2} - 1$ е во точки со апциси $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$. Па за должината на лакот на кривата помеѓу двете точки добиваме

$$l=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\begin{pmatrix} u=x & dv=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \\ du=dx & v=\sqrt{1+x^2}\end{pmatrix}=$$

$$=\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\ln(\sqrt{3}-\sqrt{2})+x\sqrt{1+x^2}\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}dx=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+2\sqrt{6}-l$$

Од овде следува

$$2l=\ln\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+2\sqrt{6}=\ln\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)+2\sqrt{6}=$$

$$=\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}\,,$$ т.е.

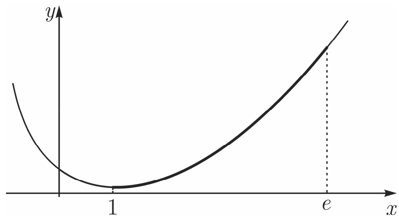
$$l=\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+2\sqrt{6})=\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{6}\,.$$

10. Да се пресмета должината на лакот на кривата $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{\ln x}{2}$ од точката со апциса $x=1$ до точката со апциса $x=e$.

Решение:

Изводот на функцијата y е $y'=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$. За должината на лакот добиваме:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+(\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x}))^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}(x^2-2+\frac{1}{x^2})}dx=$$



$$=\int_1^e \sqrt{\frac{1}{4}(x^2+2+\frac{1}{x^2})}dx=\frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{(x+\frac{1}{x})^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^e (x+\frac{1}{x})dx=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}+\ln|x|)\Bigg|_1^e=\frac{1}{2}(\frac{e^2}{2}+\ln e-\frac{1}{2}-\ln 1)=\frac{1}{2}(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2})=\frac{e^2+1}{4}.$$

11. Да се пресмета должината на лакот на кривата $y=2(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}})$ од $x=0$ до $x=4$.

Решение:

Изводот на функцијата y е

$$y'=2(e^{\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4}+e^{-\frac{x}{4}}\cdot(-\frac{1}{4}))=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}}).$$

Должината на лакот на кривата ќе биде

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{2}}-2+e^{-\frac{x}{2}})}dx=\int_0^4 \sqrt{\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{2}}+2+e^{-\frac{x}{2}})}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}})^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 (e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}})dx=\frac{1}{2}(4e^{\frac{x}{4}}-4e^{-\frac{x}{4}})\Bigg|_0^4=$$

$$=2(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}})\Bigg|_0^4=2(e-1-e^{-1}+1)=2(e-\frac{1}{e}).$$

12. Да се пресмета должината на лакот од кривата $y=\ln(\sin x)$ меѓу точките со апциси $x=\frac{\pi}{3}$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение:

Изводот на функцијата y е $y'=\frac{\cos x}{\sin x}$. Должината на лакот е

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}|-\ln|\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}|=-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=\ln\sqrt{3}\,.$$

(Забелешка: интегралот $\int\frac{1}{\sin x}dx=\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|$ е решен во глава Интегрално сметање, точка 8.5, задача 1а, II начин.)

13. Да се пресмета должината на кривата зададена со равенката $y=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}dt$, каде $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Решение:

Изводот на функцијата y е $y'=\sqrt{\cos x}$. Должината на кривата во зададениот интервал ќе биде

$$l=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+y'^2}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}dx=$$

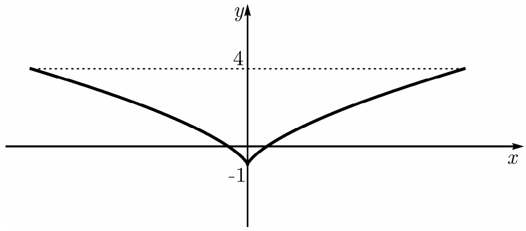
$$=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{x}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4\,.$$

14. Да се пресмета должината на лакот на кривата $x^2=(y+1)^3$ за $y\in[-1,4]$.

Решение:

Од $x^2=(y+1)^3$ имаме дека $x=\pm(y+1)^{\frac{3}{2}}$, од каде што пак $x'=\pm\frac{3}{2}(y+1)^{\frac{1}{2}}$. Од цртежот е јасно дека за должината на лакот ќе имаме дека

$$\frac{l}{2}=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+x'^2}dy=\int\limits_{-1}^{4}\sqrt{1+\frac{9}{4}(y+1)}dy=\int\limits_{-1}^{4}\sqrt{\frac{9}{4}y+\frac{13}{4}}dy=$$

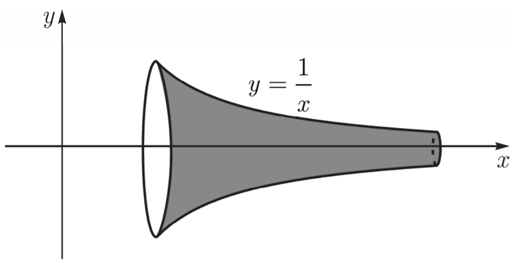


$$=\begin{pmatrix} t^2=\frac{9}{4}y+\frac{13}{4} & 2tdt=\frac{9}{4}dy \\ y_1=-1 & t_1=1 \\ y_2=4 & t_2=\frac{7}{2} \end{pmatrix}=\int_1^{\frac{7}{2}} t\cdot\frac{8t}{9}dt=\frac{8}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{7}{2}}=\frac{8}{27}((\frac{7}{2})^3-1)=\frac{335}{27}$$

Од овде е јасно $l=\frac{670}{27}$.

15. Да се пресмета волуменот на телото добиено со ротација околу x -оската на делот од рамнината ограничен со кривите $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

Решение:



Бараниот волумен е

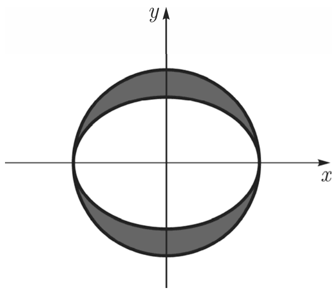
$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_1^4\frac{1}{x^2}dx=\pi(-\frac{1}{x})\Bigg|_1^4=\pi(-\frac{1}{4}+1)=\frac{3\pi}{4}.$$

16. Да се пресмета волуменот на телото добиено со ротација околу x -оската на ликот меѓу кривите $x^2+y^2=1$ и $x^2+2y^2=1$.

Решение:

Пресекот на двете криви $x^2+y^2=1$ и $x^2+2y^2=1$ е во точки со апциси $x_1=-1$ и $x_2=1$.

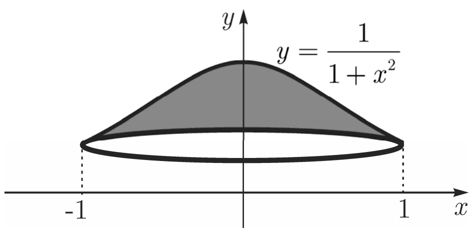
Од цртежот и од равенките имаме дека $y_1^{\,2} = 1 - x^2$ и $y_2^{\,2} = \dfrac{1-x^2}{2}$.
Волуменот на телото добиено со ротација на ликот околу x - оската ќе го пресметаме како разлика од волумените на телото што се добива со ротација на кружницата $y_1^{\,2} = 1 - x^2$ и телото што се добива со ротација на кружницата $y_2^{\,2} = \dfrac{1-x^2}{2}$:



$$V = \pi\int_a^b (y_1^{\,2} - y_2^{\,2})dx = \pi\int_{-1}^{1}(1 - x^2 - \frac{1-x^2}{2})dx = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx =$$
$$= \frac{\pi}{2}(x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3})) = \frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

17. Да се пресмета волуменот на телото добиено со ротација околу y-оската на телото ограничено со кривата $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и правите $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$.

Решение:



Од равенкта на кривата имаме дека $x^2 = \dfrac{1}{y} - 1$.

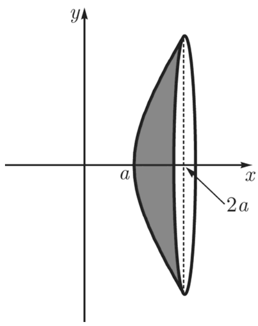
Волуменот на ротационото тело што се бара е збир од волуменот на телото што се добива со ротација околу y-оска на правата $x = 1$ за $0 \le y \le \dfrac{1}{2}$ и волуменот на телото што се добива со ротација околу y-оска на делот од кривата за $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ за $-1\le x\le 1$

$$V=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}dy+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{y}-1)dy=\pi y\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\pi(\ln|y|-y)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\pi(\ln 1+\ln 2-1+\frac{1}{2})=\pi\ln 2\,.$$

18. Да се пресмета волуменот на телото добиено со ротација околу x-оската на фигурата ограничена со хиперболата $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и правата $x=2a$.

Решение:



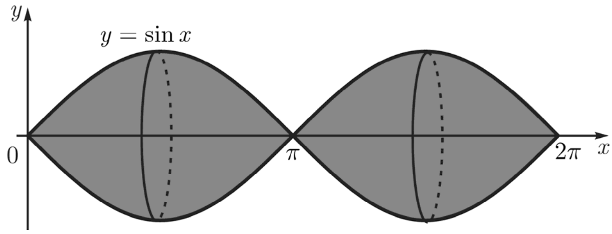
Од равенката на хиперболата имаме дека $y^2=b^2(\dfrac{x^2}{a^2}-1)$. Границите на интегралот ќе бидат од $x_1=a$ до $x_2=2a$. Па за волуменот на ротационото тело имаме

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}y^2dx=\pi\int_a^{2a}b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)dx=b^2\pi(\frac{x^3}{3a^2}-x)\Big|_a^{2a}=$$

$$=b^2\pi(\frac{8a^3}{3a^2}-\frac{a^3}{3a^2}-2a+a)=b^2\pi(\frac{7a^3}{3a^2}-a)=b^2\pi\frac{4a^3}{3a^2}=\frac{4}{3}ab^2\pi\,.$$

19. Да се пресмета волуменот на телото добиено со ротација на кривата $y=\sin x$, каде што $x\in[0,2\pi]$ околу x - оската.

Решение:

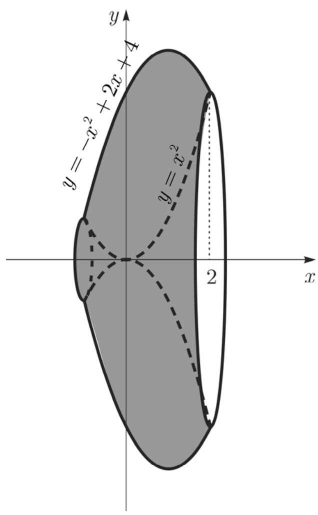


Волуменот на така добиеното ротационо тело ќе биде

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi^2 .$$

20. Да се пресмета волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривите $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x + 4$ околу x - оската.

Решение:



Пресечните точки на кривите се решенија на системот равенки составен од равенките на двете криви $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x + 4$, т.е. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2x + 4 \end{cases}$,

од каде што се добива равенкта $x^2 = -x^2 + 2x + 4$ чии решенија се $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Значи апсцисите на пресечните точки се $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Означуваме $y_1 = -x^2 + 2x + 4$ и $y_2 = x^2$.Од цртежот имаме дека бараниот волумен е

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} ({y_1}^2 - {y_2}^2) dx = \pi \int_{-1}^{2} ((-x^2 + 2x + 4)^2 - (x^2)^2) dx =$$

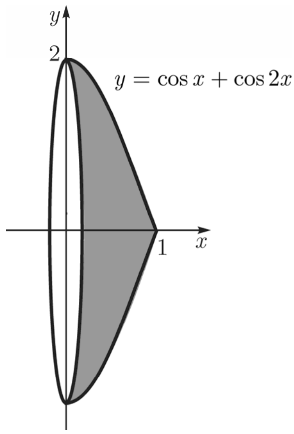
$$= \pi \int_{-1}^{2} (-4x^3 - 4x^2 + 16x + 16)dx = 4\pi \int_{-1}^{2} (-x^3 - x^2 + 4x + 4)dx =$$

$$= 4\pi(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 4x)\Big|_{-1}^{2} = 4\pi(11 + \frac{1}{4}) = 4\pi\frac{45}{4} = 45\pi\,.$$

21. Да се пресмета волуменот на телото добиено со ротација околу x-оската на фигурата ограничена со кривата

$$y = \cos x + \cos 2x\,,\ x = 0\,, x = \frac{\pi}{3}\,, y = 0\,.$$

Решение:



Волуменот на телото е

$$V = \pi \int_{a}^{b} y^2 dx = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\cos x + \cos 2x)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 x + 2\cos x \cos 2x + \cos^2 2x)dx =$$

$$= \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\frac{1 + \cos 2x}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) + \frac{1 + \cos 4x}{2})dx =$$

$$= \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{2} + \cos x + \cos 3x)dx =$$

$$= \pi(x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 4x}{4} + \sin x + \frac{\sin 3x}{3})\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \pi(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 2} + \frac{-\sqrt{3}}{8 \cdot 2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) =$$

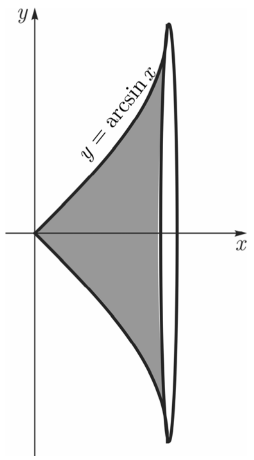
$$=\pi(\frac{\pi}{3}+\frac{9\sqrt{3}}{16})=\pi(\frac{16\pi+27\sqrt{3}}{48}).$$

Притоа овде беше искористена формулата

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

22. Криволиниски трапез ограничен со x - оската, правата $x=1$ и кривата $y=\arcsin x$ ротира околу x - оската. Да се пресмета волуменот на добиеното тело.

Решение:



Бараниот волумен е

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^1 \arcsin^2 x dx=\left(\begin{array}{cc} u=\arcsin^2 x & dv=dx \\ du=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=x\end{array}\right)=$$

$$=\pi(x\arcsin^2 x\Big|_0^1-2\int_0^1 x\arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx)=$$

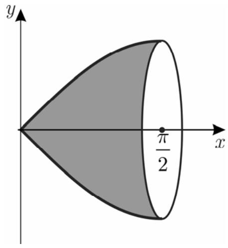
$$=\left(\begin{array}{cc} u=\arcsin x & dv=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v=-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right)=$$

$$=\pi(\frac{\pi^2}{4}-2[-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^1+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}])=$$

$$= \pi(\frac{\pi^2}{4} + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1) = \pi(\frac{\pi^2}{4} - 2).$$

23. Да се пресмета плоштината на ротационото тело што настанува со ротација околу x оска на кривата $y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение:



$$P = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{1+y'^2}dx = \begin{pmatrix} y = \sin x \\ y' = \cos x \end{pmatrix} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 = \cos x_1 = \cos 0 = 1 \\ t_2 = \cos x_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{pmatrix} = -2\pi\int_1^0 \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt$$

Интегралот $\int \sqrt{1+t^2}dt$ е решен во поглавјето за неопределен интеграл и затоа овде нема да го решаваме. Го користиме резултатот

$$\left(\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)$$

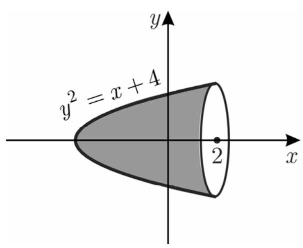
За плоштината на ротационото тело добиваме

$$P = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi\frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right|)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi(\sqrt{1+1^2} + \ln\left|1 + \sqrt{1+1^2}\right| - 0) = \pi(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right))$$

24. Ликот ограничен со кривата $y^2 = 4 + x$ и правата $x = 2$ ротира околу x оската. Да се најде плоштината на добиеното ротационо тело.

Решение:



$$P = 2\pi\int_{-4}^{2} y\sqrt{1+y'^2}dx = \begin{pmatrix} y=\sqrt{4+x} \\ y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4+x}} \end{pmatrix} = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{4+x}}\right)^2}dx =$$

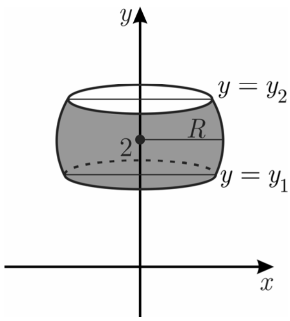
$$= 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{\frac{4(4+x)+1}{4(4+x)}}dx = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{\frac{16+4x+1}{4(4+x)}}dx =$$

$$\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4x+17}dx = \begin{pmatrix} 4x+17=t \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 = 4(-4)+17=1 \\ t_2 = 4\cdot 2+17=25 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{4}\int_{1}^{25}\sqrt{t}dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{1}^{25} = \frac{\pi}{6}(25\sqrt{25}-1) = \frac{\pi}{6}(25\cdot 5-1) = \frac{\pi}{6}(125-1) = \frac{124\pi}{6} = \frac{62\pi}{3}$$

25. Да се пресмета плоштината на телото што настанува со ротација околу y оска на делот од кружницата $x^2+(y-2)^2=R^2$ меѓу точки со ординати y_1 и y_2.

Решение:



$$x = \sqrt{R^2-(y-2)^2}, \quad x' = \frac{-2(y-2)}{2\sqrt{R^2-(y-2)^2}} = \frac{-(y-2)}{\sqrt{R^2-(y-2)^2}}$$

$$(x')^2 = \frac{(y-2)^2}{R^2-(y-2)^2}$$

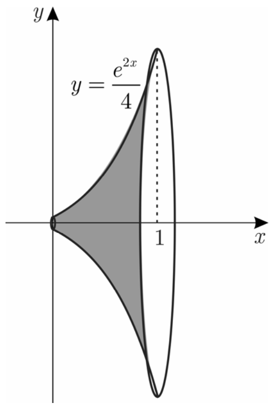
$$P = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+(x')^2}dy = 2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{R^2-(y-2)^2}\sqrt{1+\frac{(y-2)^2}{R^2-(y-2)^2}}dy =$$

$$= 2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{R^2-(y-2)^2}\sqrt{\frac{R^2-(y-2)^2+(y-2)^2}{R^2-(y-2)^2}}dy = 2\pi\int_{y_1}^{y_2}R\,dy =$$

$$= 2\pi Ry\Big|_{y_1}^{y_2} = 2\pi R(y_2-y_1)$$

26. Да се најде плоштината на ротационата површина што настанува со ротација околу x -оската на лакот од кривата $y=\dfrac{e^{2x}}{4}, \quad 0\le x\le 1$.

Решение:



$$P=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}dx=\begin{vmatrix} y=\dfrac{e^{2x}}{4} \\ y\,'=\dfrac{2e^{2x}}{4}=\dfrac{e^{2x}}{2}\end{vmatrix}=2\pi\int_0^1 \frac{e^{2x}}{4}\sqrt{1+\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{2x}\sqrt{4+e^{4x}}dx=\begin{vmatrix} e^{2x}=t \\ 2x=\ln t \\ dx=\dfrac{dt}{2t}\end{vmatrix}\begin{pmatrix} t_1=e^{2\cdot 0}=1 \\ t_1=e^{2\cdot 1}=e^2\end{pmatrix}=\frac{\pi}{4}\int_1^{e^2} t\sqrt{4+t^2}\,\frac{dt}{2t}=$$

$$=\frac{\pi}{8}\int_1^{e^2}\sqrt{4+t^2}dt\,.$$

Интегралот $\int\sqrt{x^2+k}dx$ е решен во поглавјето за неопределен интеграл, па овде нема да го решаваме повторно, го користиме само резултатот:

$$\int\sqrt{x^2+k}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+k}+k\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|)+C$$

За плоштината на ротационата површина добиваме

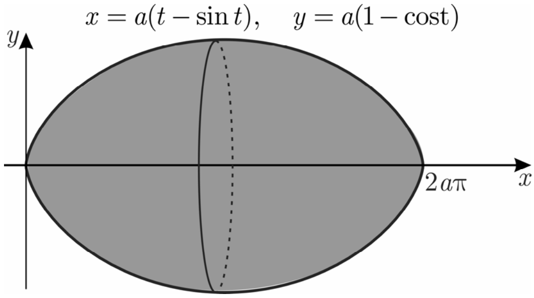
$$P=\frac{\pi}{8}\int_1^{e^2}\sqrt{4+t^2}dt=\frac{\pi}{8}\frac{1}{2}(t\sqrt{4+t^2}+4\ln\left|x+\sqrt{4+t^2}\right|)\Big|_1^{e^2}=$$

$$=\frac{\pi}{16}(e^2\sqrt{4+e^4}+4\ln\left|e^2+\sqrt{4+e^4}\right|-\sqrt{5}-4\ln\left|1+\sqrt{5}\right|)$$

$$=\frac{\pi}{16}\left(e^2\sqrt{4+e^4}-\sqrt{5}+4\ln\frac{\left|e^2+\sqrt{4+e^4}\right|}{\left|1+\sqrt{5}\right|}\right)$$

27. Да се пресмета плоштината на телото што настанува со ротација околу x - оската на лакот од циклоидата $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \mathrm{cost})$ за $0 \leq \mathrm{t} \leq 2\pi$.

Решение.



Ја користиме формулата $P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$ за пресметување плоштина на ротационо тело кога кривата која ротира околу x - оска е зададена параметарски.

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \left(\begin{array}{l}\dot{x} = a(1 - \cos t)\\ \dot{y} = a\sin t\end{array}\right) =$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + (a\sin t)^2}\,dt =$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{1 - 2\cos t + 1}\,dt = 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{1 - \cos t}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{3/2}\,dt = \left(\begin{array}{l}\sin^2(\frac{t}{2}) = \frac{1 - \cos t}{2}\\ 1 - \cos t = 2\sin^2(\frac{t}{2})\end{array}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi} [2\sin^2(\frac{t}{2})]^{3/2}\,dt = 2\sqrt{2}2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi} \sin^3(\frac{t}{2})dt =$$

$$= 8\pi a^2\int_0^{2\pi} \sin^3(\frac{t}{2})dt = \left(\begin{array}{l}\frac{t}{2} = u\\ dt = 2du\end{array}\right) = 8\pi a^2\int_0^{\pi} 2\sin^3 u\,du =$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^2 u\sin u du=16\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 u)\sin u du=$$

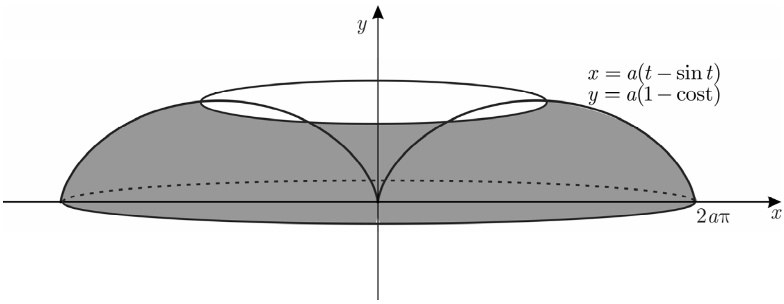
$$=\begin{pmatrix}\cos u=v\\ -\sin u du=dv\end{pmatrix}=-16\pi a^2\int_1^{-1}(1-v^2)dv=16\pi a^2\int_{-1}^{1}(1-v^2)dv=$$

$$=16\pi a^2(v-\frac{v^3}{3})\Big|_{-1}^{1}=16\pi a^2[(1-\frac{1}{3})-(-1-\frac{(-1)^3}{3})]=16\pi a^2(\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3})=$$

$$=\frac{4}{3}16\pi a^2=\frac{64}{3}\pi a^2$$

28. Да се пресмета плоштината на телото што настанува со ротација околу y-оската на лакот од циклоидата $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$ за $0\le t\le 2\pi$.

Решение:



Ја користиме формулата $P=2\pi\int_{t_1}^{t_2}x(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$ за пресметување плоштина на ротационо тело кога кривата која ротира околу y оска е зададена параметарски.

$$P=2\pi\int_{t_1}^{t_2}x(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=2\pi\int_{t_1}^{t_2}a(t-\sin t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=\begin{pmatrix}\dot{x}=a(1-\cos t)\\ \dot{y}=a\sin t\end{pmatrix}=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+(a\sin t)^2}dt=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\sqrt{a^2(1-2\cos t+\cos^2 t)+a^2\sin^2 t}dt=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sqrt{2-2\cos t}dt=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sqrt{1-\cos t}dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\left(\int_0^{2\pi}t\sqrt{1-\cos t}dt-\int_0^{2\pi}\sin t\sqrt{1-\cos t}dt\right)=\left(\sin\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\right)=$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \left(\int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\sin(\frac{t}{2})dt - \int_0^{2\pi} \sin t\sqrt{1-\cos t}dt \right) = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} = m \\ dt = 2dm \end{pmatrix} =$$

$$= 4\pi a^2 \left(\int_0^{\pi} 2m\cdot\sin(m)2dm - \int_0^{2\pi} \sin t\sqrt{1-\cos t}dt \right) = \begin{pmatrix} 1-\cos t = n \\ \sin tdt = dn \end{pmatrix} =$$

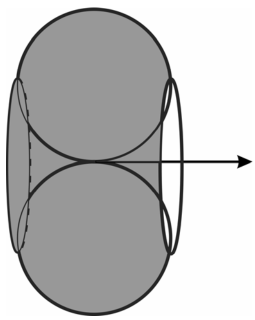
$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} m\cdot\sin(m)dm - 4\pi a^2 \int_0^{0} \sqrt{n}dn = \begin{pmatrix} m = u \\ dm = du \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin mdm = dv \\ v = \int \sin mdm = -\cos m \end{pmatrix} = 16\pi a^2 \left(-m\cos m \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(m)dm \right) =$$

$$= 16\pi a^2 \left(-\pi\cos\pi + 0 + \sin m \Big|_0^{\pi} \right) = 16\pi^2 a^2$$

29. Да се пресмета плоштината на телото што настанува со ротација околу поларната оска на кругот $\rho = 2r\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi$.

Решение:



Ја користиме формулата за ротација на крива зададена во поларни координати

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi = \begin{pmatrix} \rho = 2\,\mathrm{r}\sin\varphi \\ \rho' = 2r\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} 2\,\mathrm{r}\sin\varphi\sin\varphi\sqrt{(2\,\mathrm{r}\sin\varphi)^2 + (2r\cos\varphi)^2}d\varphi =$$

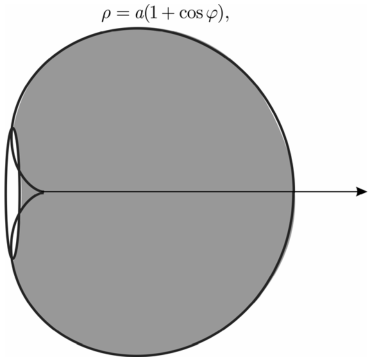
$$= 2\pi \int_0^{\pi} 2\,\mathrm{r}\sin\varphi\sin\varphi\sqrt{4\,\mathrm{r}^2\sin^2\varphi + 4r^2\cos^2\varphi}d\varphi = 8\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 8\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = 8\pi r^2 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 4\pi r^2 \int_0^{\pi} d\varphi - 4\pi r^2 \int_0^{\pi} \cos 2\varphi d\varphi =$$

$$= 4\pi r^2\varphi \Big|_0^{\pi} - 4\pi r^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 4\pi r^2(\pi - 0) - 0 = 4\pi^2 r^2$$

30. Да се пресмета плоштината на телото што се добива со вртење на делот од кардиоидата $\rho = a(1+\cos\varphi)$, за $0 \le \varphi \le \pi$, околу поларната оска.

Решение:



$$P = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = \begin{pmatrix} \rho = a(1+\cos\varphi) \\ \rho' = -a\sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= 2\pi\int_{0}^{\pi} a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\pi\int_{0}^{\pi} (1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\pi\int_{0}^{\pi} (1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}a^2\pi\int_{0}^{\pi} (1+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}a^2\pi\int_{0}^{\pi} (1+\cos\varphi)^{3/2}\sin\varphi\,d\varphi = \begin{pmatrix} 1+\cos\varphi = t \\ -\sin\varphi\,d\varphi = dt \end{pmatrix} =$$

$$= -2\sqrt{2}a^2\pi\int_{2}^{0} (t)^{3/2}\,dt = 2\sqrt{2}a^2\pi\int_{0}^{2} (t)^{3/2}\,dt = 2\sqrt{2}a^2\pi\left.\frac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right|_{0}^{2} =$$

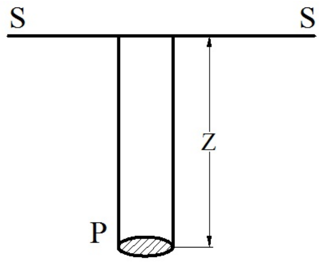
$$= 4\sqrt{2}a^2\pi\frac{2^{5/2}}{5} = \frac{2^2 2^{1/2}a^2\pi 2^{5/2}}{5} = \frac{2^5a^2\pi}{5} = \frac{32a^2\pi}{5}$$

7. АПЛИКАЦИИ

ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО И ИНТЕГРАЛНОТО СМЕТАЊЕ ВО ТЕХНИКАТА

7.1. Центри на притисок

Притисок во точка P, на длабочина z под површината на течноста

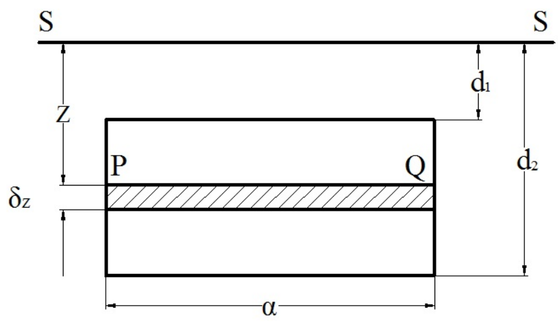


Ако имаме идеална течност, притисокот во точка P, односно потисокот на единица плоштина во P, е резултат на тежината на течноста со висина z над него.

Притисокот во P е $p = wz$, каде што w е тежината на единечниот волумен течност и тој дејствува подеднакво на целата површина.

Да забележиме дека во нашиот случај, ќе биде занемарен атмосферскиот притисок кој исто така дејствува на површината на течноста.

Потисок на вертикална рамна плоча потопена во течност

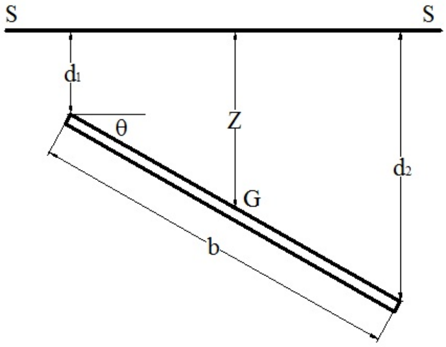


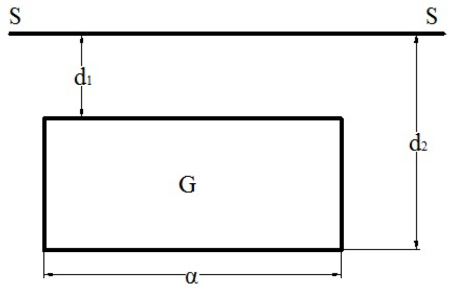
Да разгледаме тенка лента во течноста на длабочина z.

Од претходно потисокот во точка $P = wz$, па потисокот на лентата PQ е еднаков на wz помножен со плоштината на лентата. Оттука, вкупниот потисок на целата плоча е $p = \sum\limits_{z=d_1}^{z=d_2} \alpha wz\delta_z$. Ако пуштиме $\delta_z \to 0$, вкупниот потисок

$$p = \int\limits_{d_1}^{d_2} \alpha wz\, dz = \frac{\alpha w}{2}\left({d_2}^2 - {d_1}^2\right).$$

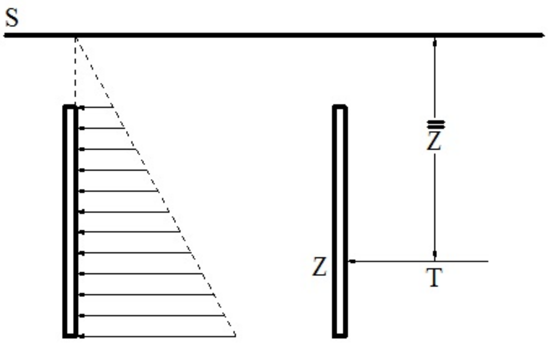
Да забележиме дека формулата за вкупниот потисок може да се примени на вертикална рамна плоча без разлика каков и да е нејзиниот облик.
Ако плочата не е поставена вертикално, туку поставена под агол θ во однос на хоризонтална рамнина паралелна на површината на течноста, ја имаме следнава ситуација:





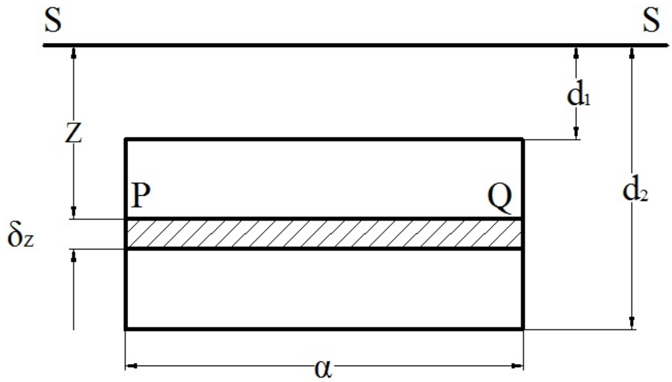
Длабочината на G е $d_1 + \frac{b}{2}\sin\theta$, а притисокот во G е $(d_1 + \frac{b}{2}\sin\theta)w$, па вкупниот потисок е $p = ab(d_1 + \frac{b}{2}\sin\theta)w$. Да забележиме дека оваа формула ни овозможува да го пресметаме вкупниот потисок на која било потопена плоча во кои било услови.

Длабочина на центар на притисок



Јасно е дека притисокот на потопена плоча се зголемува со длабочината и веќе видовме како се наоѓа вкупниот потисок на плочата.
Резултатот од дејството на овие сили е една сила еднаква на вкупниот потисок, T, по интензитет и дејствува во точка Z која се нарекува центар на притисокот на плочата.

Нека со $\overline{\overline{z}}$ ја означиме длабочината на центарот на притисок. За да го најдеме $\overline{\overline{z}}$ ги земаме моментите на силите по оските, каде што рамнината ја сече површината на течноста. Да ја разгледаме истата правоаголна плоча уште еднаш:



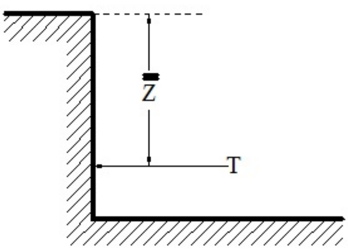
Притисокот на ниво каде што се наоѓа малата лента PQ е zw, потисокот на малата лента е $\alpha\delta_z wz$. Моментот на овој потисок по оската нормална на површината е $\alpha wz\delta_z \cdot z = \alpha wz^2\delta_z$. Па сумата на сите моменти по такви тенки ленти е $\sum_{z=d_1}^{z=d_2} \alpha wz^2\delta_z$. Сега ако пуштиме $\delta_z \to 0$ сумата на моментите на потисоците е $\int_{d_1}^{d_2} \alpha wz^2 dz$.

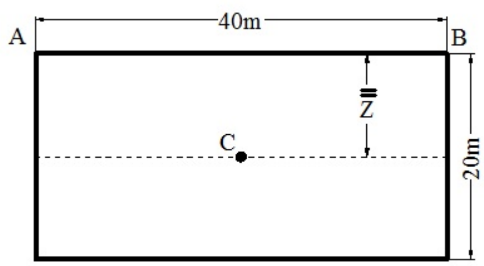
Имајќи предвид дека тоталниот потисок помножен со $\bar{\bar{z}}$ е еднаков на моментите на сите индивидуални потисоци

$$\int_{d_1}^{d_2} \alpha wz\, dz \cdot \bar{\bar{z}} = \int_{d_1}^{d_2} \alpha wz^2\, dz = w\int_{d_1}^{d_2} \alpha z^2\, dz = wI \quad .$$

Па, имаме $\bar{\bar{z}} = \dfrac{wI}{T} = \dfrac{wAk^2}{Aw\bar{z}}$, односно $\bar{\bar{z}} = \dfrac{k^2}{\bar{z}}$, каде $\bar{z}$ е длабочината.

Пример 1. Во вертикална правоаголна брана со димензии $40\,m \times 20\,m$, при што браната е наполнета до горе (максимално). Најди ја длабочината на центарот на притисок.





Во овој случај $\overline{z}=10m$. За да го најдеме k^2 за AB:

$$I_C=\frac{Pd^2}{12}=\frac{40\cdot 20\cdot 400}{12}=\frac{80\,000}{3}\ m^4$$

$$I_{AB}=I_C+Pl^2=\frac{80\,000}{3}+800\cdot 100=\frac{4}{3}80\,000\,m^4.$$

Имајќи предвид дека $I=Pk^2$ и $k^2=\frac{4}{3}\cdot\frac{80\,000}{800}=\frac{400}{3}$.

Конечно, $\overline{\overline{z}}=\frac{k^2}{\overline{z}}=\frac{400}{3\cdot 10}=\frac{40}{3}=13,33\,m$.

Најголема примена на диференцијалното сметање е во механиката и кинематиката. Во еднодимензионален случај во правец на x-оската, поместувањето $x(t)$, на материјална точка е функција од времето, и во кое било време t и нејзината брзина и забрзување се дадени со

$$v=\frac{dx}{dt}=\dot{x},\qquad\qquad a=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}.$$

Пример 2. Најди ја брзината и забрзувањето на материјална точка која се движи во правец на x-оската, со поместување дадено со:

1) $\quad x(t)=\frac{2t-1}{t^2+1}$, во момент $t=1\ s$.

2) $\quad x(t)=e^{2t}\sin t$, во момент $t=\pi\ \ s$.

Во 1) брзината и забрзувањето согласно формулите погоре се

$$v(t)=\dot{x}(t)=\frac{2(t^2+1)-2t(2t-1)}{(t^2+1)^2}=\frac{-2t^2+2t+2}{(t^2+1)^2},$$

$$a(t)=\ddot{x}(t)=\frac{4t^3-6t^2-12t+2}{(t^2+1)^3},$$

па во момент $t=1\ s:\ \ v(1)=0,25\,m\,/\,s$ и $a(1)=-6\,m\,/\,s^2$.

Во 2) за брзината и забрзувањето имаме

$$v(t)=\dot{x}(t)=e^{2t}(2\sin t+\cos t),\qquad\qquad a(t)=\ddot{x}(t)=e^{2t}(3\sin t+4\cos t),$$

односно во момент $t=\pi\ s:v(\pi)=-e^{2\pi}\ m\,/\,s$ и $a(\pi)=-4e^{2\pi}\ m\,/\,s^2$.

Понекогаш брзината на промена на некоја променлива не може да се пресмета директно, туку преку брзина на промена на некои други променливи од кои таа зависи. На пример брзината на промена на плоштината на кругот во однос на брзина на промена на неговиот радиус:

$$P=\pi r^2,\text{ па }\frac{dP}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt},$$

па ние можеме да го пресметаме $\dfrac{dP}{dt}$, знаејќи го $\dfrac{dr}{dt}$.

Пример 3. Нафта истекува од танкер во мирно море. Таа се шири кружно во сите правци, со радиус кој се зголемува константно со брзина $1m\,/\,s$. Колку брзо плоштината на површината (кругот) се зголемува кога радиусот е $300\,m$.

Од дискусијата пред примерот имаме дека $\dfrac{dP}{dt} = 2\pi r\dfrac{dr}{dt}$, па брзината на промена на плоштината на површината е $\dfrac{dP}{dt} = 2\cdot\pi\cdot 300\cdot 1 = 600\,\pi\ m^2\,/\,s$.

Пример 4. Една батерија од $n = 80$ келии е поврзана да дава максимална моќност при константен отпор $R = 0{,}1\Omega$. Секоја батерија има е.м.ф. $e_0 = 2{,}1\ V$и внатрешен отпор $R_0 = 0,02\ \Omega$. Како треба да бидат поврзани келиите (по колку треба да бидат поврзани во група)?

Претпоставуваме дека x-келии се поврзани паралелно, односно во $\dfrac{n}{x}$ серии.

Тогаш внатрешниот отпор на батеријата е $\dfrac{\frac{n}{x}R_0}{x} = \dfrac{nR_0}{x^2}$, па вкупниот отпор во кругот е $\dfrac{n}{x^2}R_0 + R$. Е.м.ф што дејствува на кругот е $\dfrac{n}{x}e_0$, бидејќи $\dfrac{n}{x}$ келии со е.м.ф e_0 се во серија. Па, јачината на струјата од батеријата е

$$I = \frac{\frac{n}{x}e_0}{\frac{n}{x^2}R_0 + R},$$

па моќноста која јачината на струјата ја произведува при отпор R е

$$P = RI^2 = \frac{Rn^2{e_0}^2}{x^2(\frac{n}{x^2}R_0 + R)^2}.$$

За да најдеме екстремна вредност на оваа фунцкија доволно е да најдеме екстремна вредност на функцијата $y = \dfrac{nR_0}{x} + Rx$. Согласно тоа имаме

$y' = -\dfrac{nR_0}{x^2} + R = 0$, па $x = \sqrt{\dfrac{nR_0}{R}} = 4$ келии се поврзани во група од по $\dfrac{n}{x} = 20$ серии.

Пример 5. Брзината на кола, која забрзува со константно забрзување a, помеѓу две точки, е дадено со $v = u + at$, каде што u е брзината на колата кога таа поминува низ првата точка и t е времето. Ако $v = 21\ m/s$ кога $t = 3{,}5\ s$ и $v = 33\ m/s$ кога $t = 6{,}1\ s$. Најди ги брзината на колата во почетната точка u и забрзувањето a.

Заменувајќи ги дадените вредности во $v = u + at$ го добиваме системот:

$$\begin{cases} u + 3,5a = 21 \\ u + 6,1a = 33 \end{cases}.$$

Детерминантите на системот се

$$D_u = \begin{vmatrix} 21 & 3,5 \\ 33 & 6,1 \end{vmatrix} = 12,6 \ , \qquad D_a = \begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 1 & 33 \end{vmatrix} = 12,$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3,5 \\ 1 & 6,1 \end{vmatrix} = 2,6.$$

Па,

$$u = \frac{D_u}{D} = \frac{12,6}{2,6}\ m/s,\ a = \frac{D_a}{D} = \frac{12}{2,6} = 4,615\ m/s^2 \ .$$

7.2. Статички моменти. Координати на тежиште. Инерцијални моменти.

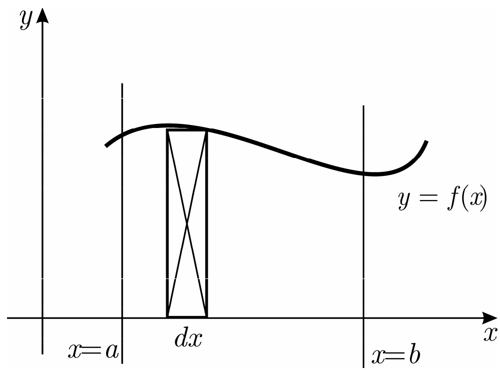
Една од практичните примени на математичката анализа е за решавање на проблеми од механиката. Таа е многу значајна за разбирањето и развојот на механиката. Во овој дел ќе илустрираме како определениот интеграл се користи за пресметка на статички моменти, а потоа и за наоѓање на координатите на тежиште на рамнински лик, тежиште на лак и тежиште на ротационо тело. Притоа, овде ќе биде претпоставено дека ликот, лакот и телото имаат хомогена структура.

7.2.1. Статички моменти и тежиште на хомоген лик

Најпрво да разгледаме систем од n точкести маси со координати $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, ... , $M_n(x_n, y_n)$, со маси m_1, m_2, m_3,..., m_n. Бројот $\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ е статички момент на системот од точкестите маси во однос на y-оската, и ќе го означуваме со M_y, а бројот $\sum_{i=1}^{n} y_i m_i$ е статички момент на системот од точкестите маси во однос на x-оската и ќе го означуваме со M_x. Масата на системот од точкестите маси ќе ја означуваме со $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Тежиштето $T(\overline{x}, \overline{y})$, на системот од n точкести маси, даден погоре, има координати

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{M_x}{M}.$$

Во продолжение ќе разгледаме лик, ограничен со кривата $y = f(x)$, со правите $x = a$, $x = b$ и x-оската. Овде плоштината на овој хомоген лик има суштинско значење за неговата маса бидејќи масата на ликот е производот на плошината и густината μ(константа).



Со цел да го определиме статичкиот момент на ликот во однос на y-оската, ликот го делиме на правоаголници паралелни со y-оската со дебелина dx и приближно со должина y. Претпоставуваме дека масата на правоаголникот е сконцентрирана во пресекот на дијагоналите на правоаголникот (центар на правоаголникот). Јасно, масата на правоаголникот е $\mu y dx$. Растојанието од центарот на правоаголникот до y-оската е $x + \frac{1}{2}dx$, но бидејќи $\frac{1}{2}dx$ е многу мало, ќе сметаме дека растојанието од центарот на правоаголникот до y-оската е x. За статичкиот момент на правоаголникот во однос на y-оската имаме

$$dM_y = \mu y dx \cdot x = \mu x y dx.$$

Плоштината на ликот можеме да ја запишеме како бесконечна сума од плоштините на бесконечно мали правоаголници, па статичкиот момент на ликот во однос на y-оската, ќе биде бесконечна сума од статичките моменти на правоаголниците во однос на y-оската:

$$M_y = \mu \int_a^b x y dx.$$

Всушност, претпоставувајќи погоре дека масата на правоаголникот е сконцентрирана во неговиот центар, ние имаме систем од бесконечно многу точкести маси, па горниот момент е бесконечна сума на моментите на тие точкести маси.

Растојанието од центарот на правоаголникот од x-оската е $\frac{y}{2}$, па статичкиот момент на правоаголникот во однос на x-оската е

$$dM_x = \mu y dx \cdot \frac{y}{2} = \mu \frac{y^2}{2} dx .$$

Статичкиот момент на ликот во однос на x-оската, врз основа на претходната дискусија за статичкиот момент во однос на y-оската е

$$M_x = \frac{\mu}{2} \int_a^b y^2 dx .$$

Овде беше претпоставено дека $y > 0$, односно дека ликот лежи во првиот или вториот квадрант. Доколку ова не е исполнето, формулите за статичките моменти на фигурата во однос на y-оската и x-оската соодветно се

$$M_y = \mu \int_a^b x |y| dx$$

$$M_x = \frac{\mu}{2} \int_a^b y |y| dx .$$

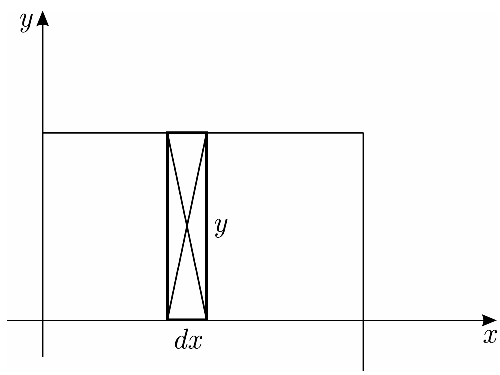
Масата на ликот е

$$M = \mu P = \mu \int_a^b y dx .$$

Координатите на тежиштето $T(\bar{x}, \bar{y})$ на рамнинскиот лик се

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b \frac{y^2}{2} dx}{\int_a^b y dx} .$$

Пример 1. Најди ги статичките моменти на правоаголник со страни a и b во однос на неговите страни.



Координатниот систем го поставуваме така што две страни на правоаголникот да лежат на оските. Статичките моменти на малиот правоаголник, паралелен на y-оската, кој има страни dx и y, во однос на y-оската и x-оската, соодветно се

$$dM_y = \mu y dx \cdot x = \mu x y dx$$

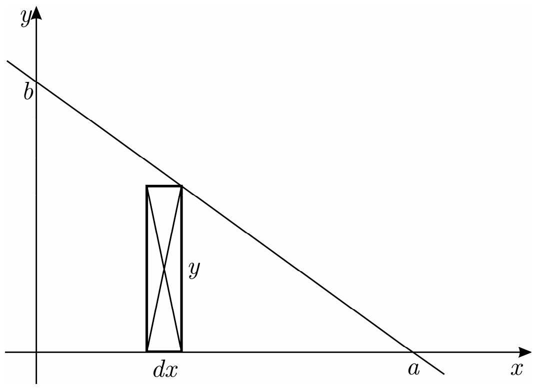
$$dM_x = \mu y dx \cdot \frac{y}{2} = \mu \frac{y^2}{2} dx .$$

Бидејќи правоаголникот се состои од бесконечно такви мали правоаголници за статичките моменти на правоаголникот со страни a и b имаме

$$M_y = \mu \int_0^a x y dx = \mu b \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \mu \frac{a^2 b}{2}$$

$$M_y = \frac{\mu}{2} \int_0^a y^2 dx = \mu b^2 x \Big|_0^a = \mu \frac{a b^2}{2} .$$

Пример 2. Најди ги статичките моменти во однос на x-оската и y-оската и координатите на тежиштето на триаголникот заграден со правите: $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$.



Поставуваме бесконечно мал правоаголник во фигурата паралелен со y-оската со должини на страните dx и y. Моментите на малиот правоаголник во однос на y-оската и x-оската се

$$dM_y = \mu y dx \cdot x = \mu x y dx$$

$$dM_x = \mu y dx \cdot \frac{y}{2} = \mu \frac{y^2}{2} dx .$$

Бидејќи плоштината на триаголникот може да ја претставиме како бесконечна сума од плоштините на малите правоаголници, можеме да запишеме

$$M_y = \mu \int_0^a x y dx = \mu \int_0^a x(a - x) dx = \mu \int_0^a (ax - x^2) dx = \mu \left. \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right|_0^a =$$

$$= \mu\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \mu\frac{a^3}{6}.$$

$$M_x = \mu\int_0^a \frac{y^2}{2}dx = \frac{\mu}{2}\int_0^a (a-x)^2 dx = \frac{\mu}{2}\int_0^a (a^2 - 2ax + x^2)dx =$$

$$= \frac{\mu}{2}\left(a^2x - 2a\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\mu}{2}\left(a^3 - a^3 + \frac{a^3}{3}\right) = \mu\frac{a^3}{6}.$$

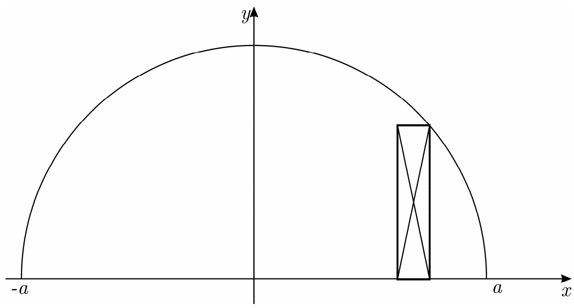
Масата на триаголникот е

$$M = \mu P = \mu\int_0^a ydx = \mu\int_0^a (a-x)dx = \mu\frac{a^2}{2}.$$

Координатите на тежиштето $T(\bar{x}, \bar{y})$ се

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{a}{3}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{a}{3}.$$

Пример 3. Најди ги координатите на тежиштето на полукругот $x^2 + y^2 = a^2$ над x- оската.



Статичките моменти на малиот правоаголник во однос на x-оската и y-оската се

$$dM_y = \mu ydx \cdot x = \mu xydx$$

$$dM_x = \mu ydx \cdot \frac{y}{2} = \mu\frac{y^2}{2}dx.$$

Статичките моменти на полукругот во однос на x-оската и y-оската се

$$M_y = \mu\int_{-a}^{a} xydx = \mu\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}dx = 0$$

$$M_x = \frac{\mu}{2}\int_{-a}^{a} y^2 dx = \frac{\mu}{2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{\mu}{2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{2}{3}a^3\mu.$$

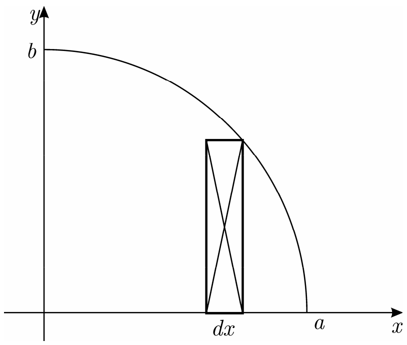
Масата на ликот е

$$M = \mu P = \mu\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \mu\frac{a^2\pi}{2}.$$

Конечно, координатите на тежиштето $T(\bar{x}, \bar{y})$ се

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = 0, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Пример 4. Најди ги координатите на тежиштето на ликот заграден со дел од елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ во првиот квадрант и координатните оски.



Статичките моменти на малиот правоаголник на цртежот во однос на y-оската и x-оската соодветно, се

$$dM_y = \mu y dx \cdot x = \mu x y dx$$

$$dM_x = \mu y dx \cdot \frac{y}{2} = \mu \frac{y^2}{2} dx.$$

Бидејќи плоштината на ликот е бесконечна сума од плоштините на правоаголниците, па

$$M_y = \mu \frac{b}{a} \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx = \mu \frac{b}{a} \int_0^a t \cdot t dt = \mu \frac{b}{a} \frac{t^3}{3} \Bigg|_0^a = \mu \frac{a^2 b}{3},$$

при што во горниот интеграл беше ставена смена $t^2 = a^2 - x^2$, каде што $2tdt = -2xdx$, $t_1 = 0$, $t_2 = a$.

$$M_x = \frac{\mu}{2} \int_0^a y^2 dx = \frac{\mu}{2} \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{\mu}{2} \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^a = \mu \frac{ab^2}{3}.$$

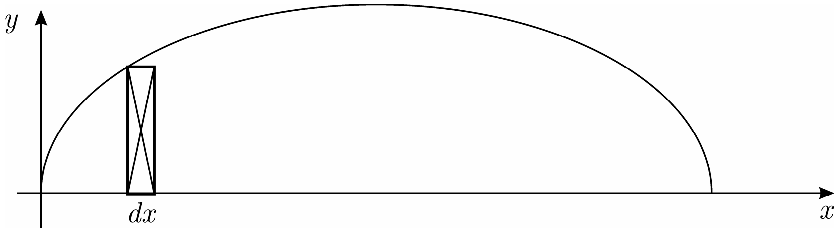
Масата на ликот е

$$M = \mu P = \mu \int_0^a y dx = \frac{1}{4} \mu a b \pi.$$

Координатите на тежиштето се

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{4a}{3\pi}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Пример 5. Најди ги координатите на тежиштето на ликот ограничен со еден лак на циклоидата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и x-оската.



Статичките моменти на малиот правоаголник на цртежот со страни dx и приближно y во однос на y- оската и x- оската се

$$dM_y = \mu y dx \cdot x = \mu x y dx$$

$$dM_x = \mu y dx \cdot \frac{y}{2} = \mu \frac{y^2}{2} dx.$$

Плоштината на ликот ограничен со еден лак на циклоидата и x- оската е бесконечна сума од плоштините на малите правоаголници, па

$$M_y = \mu \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)\dot{x}(t)dt = \mu \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt =$$

$$= \mu a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt = \mu a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-2\cos t+\cos^2 t)dt =$$

$$= \mu a^3 \int_0^{2\pi} (t - 2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t + 2\sin t\cos t - \sin t\cos^2 t)dt =$$

$$= \mu a^3 \left(\int_0^{2\pi} tdt - 2\int_0^{2\pi} t\cos tdt + \int_0^{2\pi} t\cos^2 tdt - \int_0^{2\pi} \sin tdt + \int_0^{2\pi} \sin 2tdt + \int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 tdt \right) =$$

$$= \mu a^3 \left(\frac{t^2}{2} - t\sin t - \cos t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{4} t\sin 2t - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 3\mu a^3 \pi^2,$$

при што вториот и третиот интеграл се пресметани со помош на парцијална интеграција, петтиот интеграл со помош на смената $u = 2t$, а шестиот интеграл со помош на смената $u = \cos t$.

$$M_x = \frac{\mu}{2} \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\dot{x}(t)dt = \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt = \frac{\mu}{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \mu \frac{a^3}{2} \left(\int_0^{2\pi} dt - 3\int_0^{2\pi} \cos tdt + 3\int_0^{2\pi} \cos^2 tdt - \int_0^{2\pi} \cos^3 tdt \right) =$$

$$= \mu \frac{a^3}{2} \left(\int_0^{2\pi} dt - 3\int_0^{2\pi} \cos tdt + 3\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt - \int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\cos tdt \right) =$$

$$= \mu \frac{a^3}{2}\left(t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \mu \frac{5a^3\pi}{2}.$$

Овде последниот интеграл е нула, па беше изоставен во горната пресметка.
Масата на ликот е

$$M = \mu P = \mu \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt = \mu \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt =$$

$$= \mu a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2\mu\left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt\right) = a^2\mu\left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

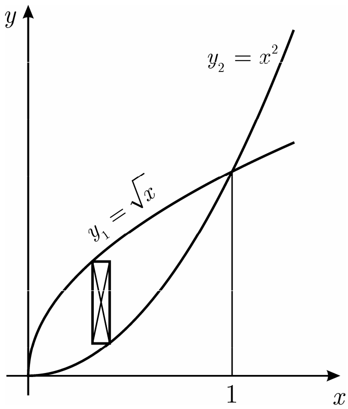
$$= 3a^2\pi\mu.$$

Координатите на тежиштето $T(\bar{x}, \bar{y})$ се

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = a\pi, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{5}{6}a.$$

Значи, $T(a\pi, \frac{5}{6}a)$.

Пример 6. Најди ги координатите на тежиштето на ликот ограничен со кривите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.



Означуваме $y_1 = \sqrt{x}$ и $y_2 = x^2$. Врз основа на цртежот за статичките моменти на малиот правоаголник во однос на y-оската и x-оската, соодветно се

$$dM_y = \mu(y_1 - y_2)dx \cdot x = \mu(y_1 - y_2)xdx$$

$$dM_x = \mu(y_1 - y_2)dx \cdot \left(\frac{y_1 - y_2}{2} + y_2\right) = \mu \frac{y_1^2 - y_2^2}{2}dx.$$

Бидејќи плоштината на ликот чии моменти се бараат е бесконечна сума од плоштините на малите правоаголници на сликата имаме

$$M_y = \mu\int_0^1 (y_1 - y_2)x dx = \mu\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2)dx = \mu\int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^3)dx =$$

$$= \mu\left.\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{20}\mu$$

$$M_x = \frac{\mu}{2}\int (y_1^{\,2} - y_2^{\,2})dx = \mu\int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{\mu}{2}\left(\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^4 dx\right) =$$

$$= \frac{\mu}{2}\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{3}{20}\mu.$$

Масата на ликот е

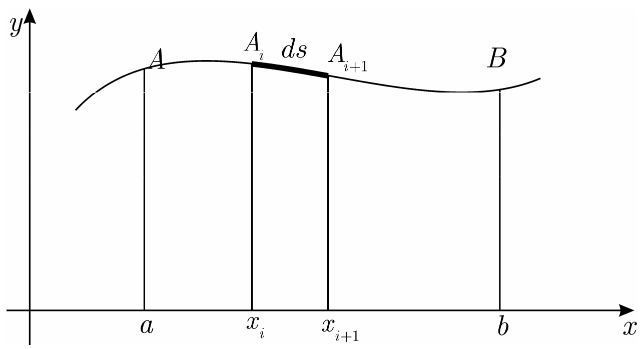
$$M = \mu P = \mu\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \mu\left.\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3}\mu.$$

За координатите на тежиштето $T(\bar{x},\bar{y})$ на ликот добиваме

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{9}{20}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{9}{20}.$$

Значи тежиштето се $T(\frac{9}{20},\frac{9}{20})$.

7.2.2. Статички моменти и тежиште на хомоген лак



Нека е даден лакот AB кој е дел од кривата $y = f(x)$ на интервалот $[a,b]$, кој има маса која е распоредена рамномерно (колку еден сегмент од лакот е поголем, толку и неговата маса е поголема). Лакот AB ќе го поделиме на nделови: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nB. Масата на еден сегмент од лакот ќе биде еднаква на производот на должината на лакот ds со густината μ, односно μds.

Претпоставуваме дека масата на сегментот е концентрирана во која било точка од тој сегмент, па за статичкиот момент на сегментот во однос на y- оската и x-оската, соодветно, имаме:

$$dM_y = \mu ds \cdot x = \mu x ds$$

$$dM_x = \mu ds \cdot y = \mu y ds.$$

Статичките моменти на лакот во однос на y-оската и x-оската, соодветно, ќе бидат еднакви на сумата од статичките сегменти во однос на y-оската и x-оската, соодветно:

$$M_y = \mu \int_a^b x ds = \mu \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx$$

$$M_x = \mu \int_a^b y ds = \mu \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx\,.$$

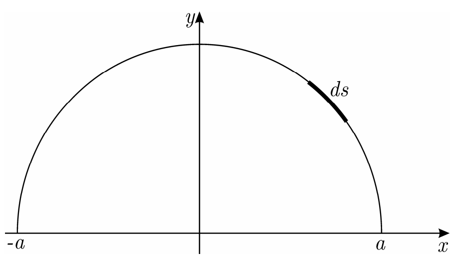
Масата на разгледуваниот лак е

$$M = \mu l = \mu \int_a^b ds = \mu \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx\,.$$

Согласно ова, координатите на тежиштето $T(\bar{x},\bar{y})$ на хомогениот лак се

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}.$$

Пример 1. Најди ги координатите на тежиштето на полукружницата $x^2+y^2=a^2$, $y \geq 0$.



Статичките моменти на малиот сегмент ds во однос на y-оската и x-оската, соодветно се

$$dM_y = \mu ds \cdot x = \mu x ds$$

$$dM_x = \mu ds \cdot y = \mu y ds.$$

Должината на полукружницата е бесконечна сума од сите должини на малите сегменти, па статичките моменти на полукружницата во однос на y-оската и x-оската, соодветно се

$$M_y = \mu \int_{-a}^{a} x\sqrt{1+y'^2}dx = \mu \int_{-a}^{a} x\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}dx = \mu \int_{-a}^{a} \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = 0$$

$$M_x = \mu \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}dx = \mu \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}dx = \mu \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= \mu a \int_{-a}^{a} dx = \mu a x\Big|_{-a}^{a} = 2a^2\mu,$$

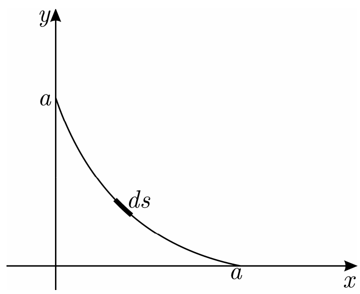
додека масата на полукружницата е

$$M = \mu \int_{a}^{b} ds = \mu \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\, dx = \mu \pi a\,.$$

За координатите на тежиштето имаме

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = 0, \qquad \bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{2a}{\pi}.$$

Пример 2. Најди ги статичките моменти во однос на x-оската и y-оската и координатите на тежиштето на лакот на астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ кој лежи во првиот квадрант.



Равенката на астроидата ја запишуваме во параметарски облик

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t$$

Првите изводи на x и y по t се

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t \sin t$$
$$\dot{y} = 3a\sin^2 t \cos t\,.$$

Статичките моменти на сегментот ds во однос на y-оската и x-оската се

$$dM_y = \mu ds \cdot x = \mu x ds$$
$$dM_x = \mu ds \cdot y = \mu y ds.$$

Имајќи предвид дека должината на лакот на астроидата е бесконечна сума од должините на малите сегменти ds, запишуваме

$$M_y = \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt = \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt =$$

$$= \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt = 3a^2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t dt.$$

Ставајќи смена во горниот интеграл $u=\cos t$, $du=-\sin t dt$ и нови граници $u_1=1$, $u_2=0$, горниот интеграл е еднаков на

$$3a^2\mu\int_0^1 u^4 du = 3a^2\mu\frac{u^5}{5}\Big|_0^1 = \mu\frac{3a^2}{5}.$$

$$M_x = \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt = \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt =$$

$$= \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt = 3a^2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t dt.$$

Ставајќи смена $u=\sin t$, $du=\cos t dt$, $u_1=0$, $u_2=1$, добиваме

$$3a^2\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t dt = 3a^2\mu\int_0^1 u^4 du = 3a^2\mu\frac{u^5}{5}\Big|_0^1 = \mu\frac{3a^2}{5}.$$

Масата на лакот на астроидата што лежи во првиот квадрант е

$$M = \mu l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt = \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^4 t\cos^2 t + 9a^2\sin^2 t\cos^4 t}dt =$$

$$= \mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt = 3a\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt = \frac{3a\mu}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos t dt =$$

$$= \frac{3a\mu}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt = \frac{3a\mu}{2}\int_0^{\pi}\sin u\frac{du}{2} = -\frac{3a\mu}{2\cdot 2}\cos u\Big|_0^{\pi} = \mu\frac{3a}{2}.$$

Погоре во решавањето на интегралот беше ставена смена $u=2t$, $du=2dt$, $u_1=0$, $u_2=\pi$. Конечно координатите на тежиштето се

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt} = \frac{2}{5}a$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt} = \frac{2}{5}a\,.$$

Пример 3. Најди го статичкиот момент на кружницата $\rho = 2a\sin\phi$ во однос на поларната оска.

Моментот на кружницата во однос на поларната оска ќе биде

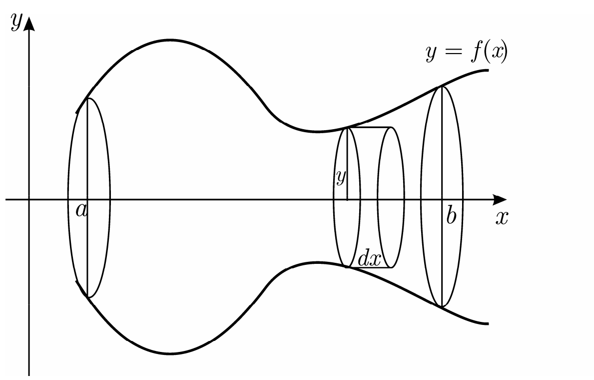
$$M_p = \mu\int\limits_{\phi_1}^{\phi_2} \rho\sin\phi\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\phi = \mu\int\limits_0^{\pi} 2a\sin^2\phi\sqrt{4a^2\cos^2\phi + 4a^2\sin^2\phi}\,d\phi =$$

$$= \mu\int\limits_0^{\pi} 4a^2\sin^2\phi\,d\phi = 4a^2\mu\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\phi}{2}\,d\phi = 2a^2\mu\left(\int\limits_0^{\pi} d\phi - \int\limits_0^{\pi}\cos 2\phi\,d\phi\right) =$$

$$= 2a^2\mu\left(\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi\right)\Bigg|_0^{\pi} = 2a^2\mu\pi\,.$$

7.2.3. Статички моменти и тежиште на хомогено тело

Овде ќе бидат разгледувани ротациони тела, т.е. тела кои се добиени со ротација на ликот $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, околу x-оската.



Бидејќи имаме ротација на ликот околу x-оската, ординатата на тежиштето ќе биде $\bar{y} = 0$. За да ја најдеме апсцисата на тежиштето T, мора да го најдеме статичкиот момент во однос на y-оската. Добиеното ротационо тело ќе го поделиме на цилиндри со многу мала висина dx и радиус y. Па, масата на тој елемент ќе биде $\mu y^2\pi dx$. Ако претпоставиме дека масата на цилиндарот е концентрирана во неговото тежиште (средината на цилиндарот), тогаш статичкиот момент на цилиндарот во однос на y- оската ќе биде

$dM_y = \mu y^2\pi dx \cdot x = \mu y^2 x\pi dx.$

Статичкиот момент на целото тело во однос на y-оската ќе биде бесконечна сума од статичките моменти на сите цилиндри во однос на y-оската, односно

$$M_y = \mu\pi\int_a^b y^2 x dx.$$

Масата на ротационото тело е

$$M = \mu V = \mu\pi\int_a^b y^2 dx.$$

Координатите на тежиштето $T(\bar{x}, \bar{y})$ се

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\mu\pi\int_a^b y^2 x\,dx}{\mu\pi\int_a^b y^2\,dx}, \qquad \bar{y} = 0.$$

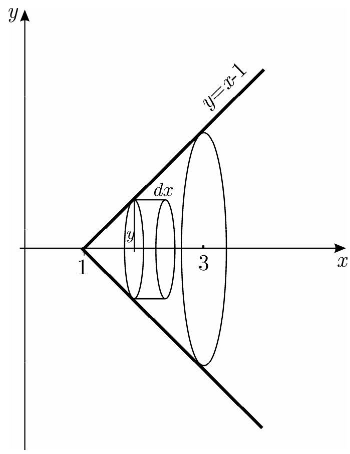
Сосема аналогно може да се изведат формулите за координатите на тежиштето $T(\bar{x}, \bar{y})$, кога ликот е ограничен со $x = f(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$, ротира околу x-оската:

$$\bar{x} = 0, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_c^d x^2 y dy}{\int_c^d x^2 dy}.$$

Пример 1. Определи ги координатите на тежиштето на телото што се добива со ротација на ликот ограничен со $y = x - 1$, $x = 3$, $y = 0$, околу x-оската.

Телото кое се добива со ротација на ликот во условот на задачата е конус, чиј волумен може да се пресмета како бесконечна сума на волумените на бесконечно многу мали цилиндри (еден од нив е даден на цртежот, со висина dx и приближно радиус y). Статичкиот момент на бесконечно малиот цилиндар во однос на y- оската ќе биде

$$dM_y = \mu y^2\pi dx \cdot x = \mu y^2 x\pi dx.$$



Согласно претходниот коментар,

$$M_y = \mu\pi\int_1^3 y^2 x dx = \mu\pi\int_1^3 (x-1)^2 x dx = \mu\pi\int_1^3 (x^3 - 2x^2 + x)dx =$$

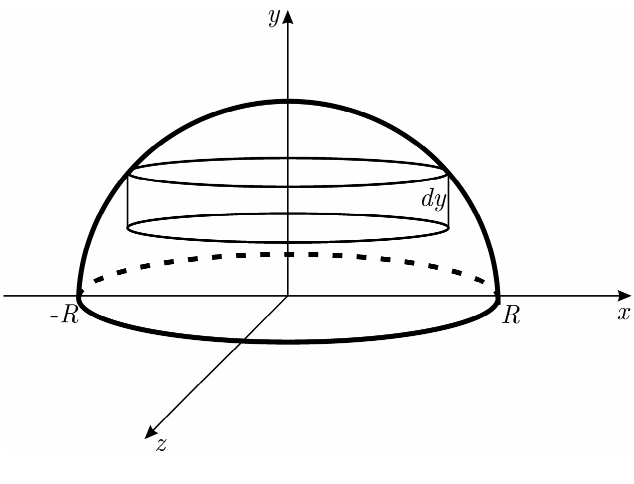
$$= \mu\pi\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{20}{3}\mu\pi\,.$$

Масата на ротационото тело е

$$M = \mu V = \frac{8\pi}{3}\mu.$$

Јасно е дека ординатата на тежиштето е $\bar{y} = 0$. Апсцисата на тежиштето е $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{20}{8}$. Значи координатите на тежиштето се $T(\frac{20}{8}, 0)$.

Пример 2. Најди ги координатите на тежиштето на полутопка со радиус R.



Полутопката со радиус R на цртежот е добиена со ротација на полукругот $x^2+y^2=R^2$, $y \geq 0$, околу y-оската. Апсцисата на тежиштето е $\bar{x}=0$. Статичкиот момент на бесконечно малиот цилиндар во однос на x-оската е $dM_x = \mu x^2 \pi dy \cdot y = \mu\pi x^2 y dy$.

Бидејќи волуменот на полутопката може да се пресмета како бесконечна сума од волумените на бесконечно малите цилиндри,

$$M_x = \mu\pi\int_0^R x^2 y dy = \mu\pi\int_0^R (R^2-y^2) y dy = \mu\pi\left(R^2\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = \mu\pi\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right) = \frac{\mu R^4\pi}{4}$$

.

Масата на телото е

$$M = \mu V = \frac{2}{3}R^3\pi\mu.$$

Координатите на тежиштето $T(\bar{x},\bar{y})$ се

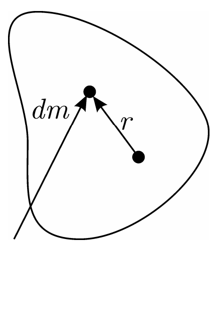
$$\bar{x}=0, \qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{3R}{8}.$$

7.2.4. Инерцијален момент

Инерцијалниот момент се однесува на инерцијата при ротирање. Тој е многу важен параметар во динамиката на ротационо движење. За да го определиме инерцијалниот момент мора да знаеме околу која оска ротира телото.

За точкеста маса инерцијалниот момент е производот на масата m на точката и квадратот на нормалното растојание r од точката до оската околу која ротира телото, т.е. $I = mr^2$.

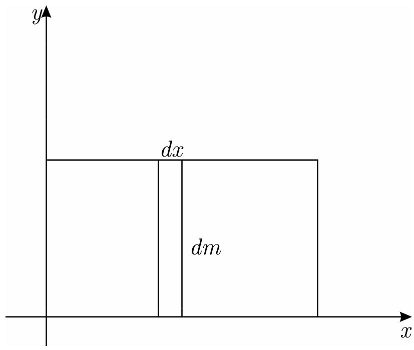
Инерцијалниот момент на точкеста маса е основа за определување на инерцијалните моменти на останатите фигури и тела, бидејќи секое од нив може да се формира од точкести маси. Нека имаме систем од n точкести маси m_1, m_2, ..., m_n кои се на растојание од оската на ротација r_1, r_2, ..., r_n, соодветно. Инерцијалниот момент на тој систем во однос на дадената оска на ротација, ќе биде сума од инерцијалните моменти одделно, т.е. $I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$.



Кога имаме фигура или тело, која ротира околу дадена оска, тогаш горната сума е бесконечна. Бидејќи $dI = r^2 dm$, па интегрирајќи по целата маса, се добива инерцијалниот момент на фигурата, која ротира околу дадената оска,

$$I = \int_0^M r^2 dm\,.$$

Пример 1. Најди ги инерцијалните моменти на правоаголник со страни a и b во однос на неговите страни.



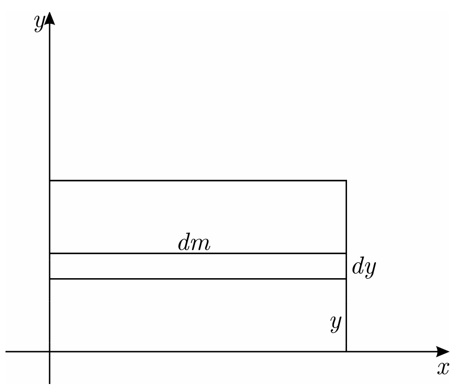
Координатниот систем го поставуваме така што две стани од правоаголникот лежат на x-оската и y-оската. Тогаш, елементарната маса и инерцијалниот момент на бесконечно малиот правоаголник во однос на страната a, односно x -оската е

$$dm = a dy$$

$$dI_x = y^2 dm = a y^2 dy\,.$$

Инерцијалниот момент на правоаголникот во однос на страната a ќе биде бесконечна сума од инерцијалните моменти на бесконечно малите правоаголници во однос на страната a, па

$$I_x = \int_0^b a y^2 dy = a \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^b = \frac{ab^3}{3}.$$



Аналогно за елементарната маса и инерцијалниот момент на бесконечно малиот правоаголник во однос на страната b, односно во однос на y-оската имаме

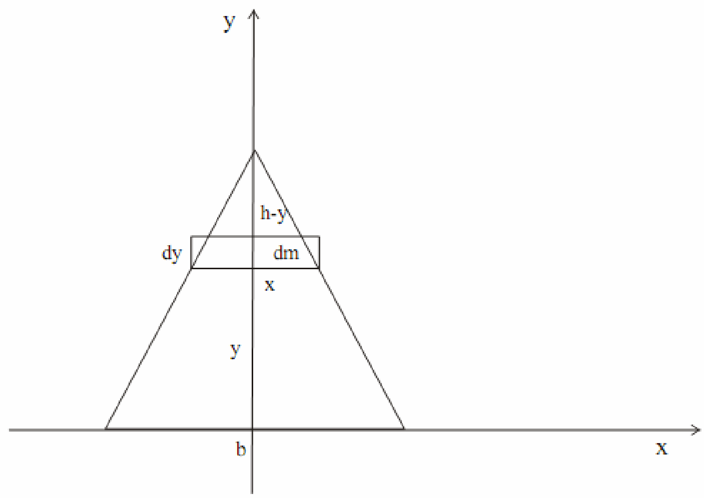
$$dm = bdx$$

$$dI_y = x^2 dm = bx^2 dx\,.$$

Сосема идентично како претходно,

$$I_y = \int_0^a bx^2 dx = b\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{a^3 b}{3}.$$

Пример 2. Најди го инерцијалниот момент на триаголник со основа b и висина h со оска основата на триаголникот.



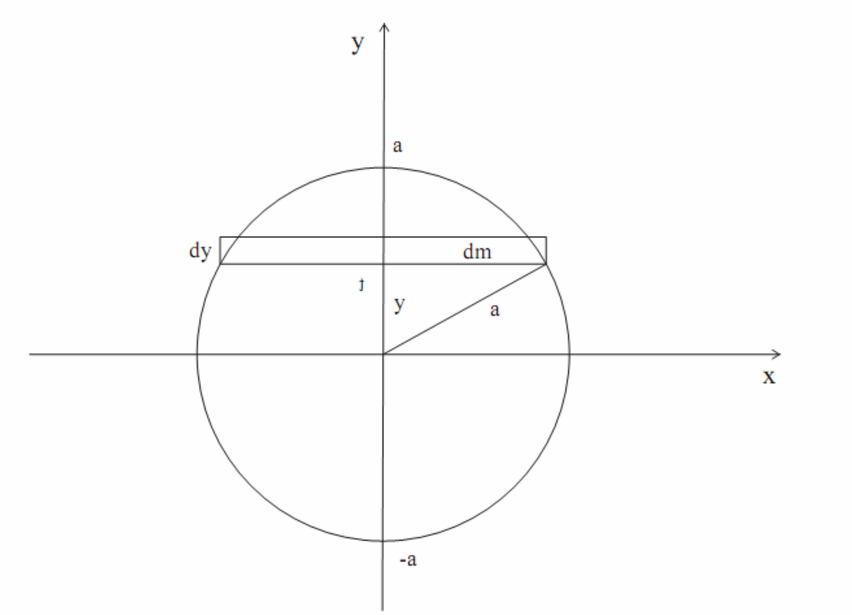
Координатниот систем ќе го поставиме така што основата на триаголникот да лежи на x-оската, а y-оската да минува низ темето кое не лежи на x-оската. Триаголникот ќе го претставиме како унија од бесконечно многу мали правоаголници, паралелни со x-оската, со ширина dy, кои претставуваат елементарна маса dm. Од сличноста на триаголниците имаме
$h:(h-y) = b:x$.

Оттука, $dm = b\dfrac{h-y}{h}dy$, па инерцијалниот момент на малиот правоаголник е

$dI_x = y^2 dm = \dfrac{b}{h}y^2(h-y)dy$. Со овие бесконечно многу мали правоаголници можеме да го покриеме целиот триаголник, па имаме

$$I_x = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)dy = \frac{b}{h}\left.\left(h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\right|_0^h = \frac{1}{12}bh^3.$$

Пример 3. Најди го инерцијалниот момент на круг со радиус a, со оска нејзиниот дијаметар.



Координатниот систем го поставуваме во центарот на кругот. Кругот можеме да го покриеме со бесконечно многу мали правоаголници паралелни со x-оската, со дебелина dy, а должината на правоаголниците ги определуваме со помош на Питагоровата теорема

$\left(\frac{t}{2}\right)^2 = a^2 - y^2$, односно $t = 2\sqrt{a^2 - y^2}$. Елементарната маса dm е

$$dm = tdy = 2\sqrt{a^2 - y^2}dy\,.$$

За инерцијалниот момент на малиот правоаголник имаме

$$dI_x = y^2 dm = 2y^2\sqrt{a^2 - y^2}dy\,.$$

Од тоа што кругот можеме да го покриеме со бесконечно многу мали правоаголници, за инерцијалниот момент на кругот, во однос на дијаметарот кој лежи на x-оската, имаме

$I_x = 2\int\limits_{-a}^{a} y^2\sqrt{a^2 - y^2}dy$, каде што ставајќи смена $y = a\sin t$, $dy = a\cos t dt$,

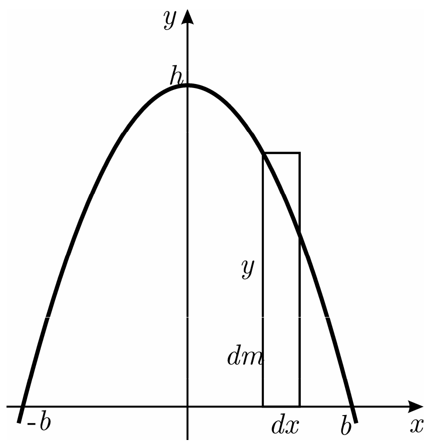
$t_1 = -\frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, горниот интеграл е еднаков на

$$2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}a\cos t dt = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t \cdot a\cos t \cdot a\cos t dt =$$

$$=2a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=2\cdot\frac{a^4}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{a^4}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{a^4}{2\cdot 2}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^4\pi}{4}.$$

Пример 4. Најди го инерцијалниот момент на отсечок на парабола свртен нагоре, со основа $2b$ и висина h, во однос на неговата оска на симетрија.



Координатниот систем го поставуваме на следниов начин: Основата на отсечокот лежи на x-оската, додека y-оската минува низ темето на параболата. Од условот, равенката на параболата е $y=-\frac{h}{b^2}x^2+h$. Тогаш елементарната маса на бесконечно малиот правоаголник од цртежот е

$$dm=ydx=\left(-\frac{h}{b^2}x^2+h\right)dx,$$

а неговиот инерцијален момент во однос на y-оската е

$$dI_y=x^2dm=x^2\left(-\frac{h}{b^2}x^2+h\right)dx.$$

Бидејќи отсечокот од параболата можеме да го покриеме со бесконечно многу бесконечно мали правоаголници, инерцијалниот момент на отсечокот на параболата во однос на y-оската е

$$I_y=\int\limits_{-b}^{b}\left(-\frac{h}{b^2}x^4+hx^2\right)dx=\left(-\frac{h}{b^2}\frac{x^5}{5}+h\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-b}^{b}=-\frac{2b^3h}{5}+\frac{2b^3h}{3}=\frac{4b^3h}{15}.$$

ЗАДАЧИ ОД ИСПИТИ

Броеви и функции

1. Во развојот на биномот $\left(x\sqrt[5]{x}-\frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\right)^{12}$ најди го оној член што го содржи x^3.
2. Определи го оној член од развојот на биномот $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$, кој не го содржи x.
3. Сумата на биномните коефициенти на првите три члена од развојот на биномот $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$ е 16. Најди го оној член од развојот на биномот што не го содржи x.
4. Најди го оној член од развојот на биномот $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{10}$ што го содржи x^7.
5. Збирот на биномните коефициенти на вториот и третиот член во развојот на биномот $\left(x\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right)^n$ изнесува 45. Најди го оној член кој го содржи x^7.
6. Збирот на првите три биномни коефициенти во развојот на биномот $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ е 29. Најди го оној член од развојот на биномот што го содржи x^1.
7. Разликата меѓу третиот и вториот биномен коефициент во развојот на биномот $(x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x\sqrt[5]{x^4}})^n$ е 44. Најди го оној член од развојот на биномот што го содржи x^{-1}.
8. Најди го оној член од развојот на биномот $(2x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x\sqrt[5]{x^4}})^{11}$ што го содржи x^{-1}.
9. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$
10. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека
$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

11. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека $49 \mid 8^n - 7n - 1$.
12. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека
$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{n}{5n+1}.$$
13. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.
14. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{n}{5n+1}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.
15. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека за секој природен број n важи
$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{n}{5n+1}.$$
16. Реши ја равенката $z^3 + i = 0$, а потоа скицирај ги решенијата.
17. Скицирај ја кривата $\rho = a\sin 3\phi$.
18. Скицирај го графикот на кривата $\rho = 2(1+\sin\phi)$ зададена во поларни координати.
19. Скицирај ја кривата зададена со поларни координати $\rho = 2(1+\sin\phi)$.
20. Скицирај го графикот на кривата $\rho = 2(1+\sin\varphi)$ зададена во поларни координати.
21. Скицирај го графикот на функцијата $y = 1-2\cos(x-\pi)$.
22. Скицирај го графикот на функцијата $y=-2\cos(x-\frac{\pi}{2}))$ со помош на графикот на функцијата $y\,' = \cos x\,'$.
23. Скицирај го графикот на функцијата $y=-3\sin(x+\frac{\pi}{2})$ со помош на графикот на функцијата $y\,' = \sin x\,'$
24. Скицирај го графикот на функцијата $y = 1+2e^{x+1}$.
25. Дадена е функцијата $y = 3\sin(2x+\frac{\pi}{2})$.
   а) Најди го основниот период на функцијата
   б) Скицирај го нејзиниот график
26. Најди ја дефиниционата област на функцијата $f(x)=\ln\frac{1}{x^2+x-2}$.
27. Најди ја дефиниционата област на функцијата
$$f(x)=\sqrt{25-x^2}+\arcsin(x-2)\ .$$
28. а) Најди ја дефиниционата област на функцијата

$$y=\frac{x-3}{\sqrt{-x^2+5x-6}}+2\ln(x-2).$$

б) Скицирај ја кривата $\rho=2\sin(3\phi)$, каде што $\rho=\rho(\phi)$.

29. а) Најди ја дефиниционата област на функцијата

$$y=\sqrt{9-x^2}+3\arcsin(x-1).$$

б) Скицирај го графикот на функцијата $y=1+2\cos(2x-\frac{\pi}{2})$.

30. Дадена е функцијата $y=1+\ln(\frac{1}{x+3})$.

а) Најди ја дефиницоната област на функцијата

б) Скицирај го нејзиниот график

31. Скицирај го графикот на функцијата $y=1-2\cos(x-\pi)$.

32. Најди ја дефиниционата област на функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\mathrm{Ln}(x-1)$.

33. Најди ја дефиниционата област на функцијата $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2+x-2}$.

34. Најди ја дефиниционата област на функцијата

$f(x)=\sqrt{25-x^2}+\arcsin(x-2)$.

35. Најди ја границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$.

36. Најди ја границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{\mathrm{tg}\,3x}$.

37. Најди ја граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

38. Најди ја граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\mathrm{tg}\,x}$.

39. Најди ја граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, без примена на Лопиталово правило.

40. Најди ја граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

41. Најди ја граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

42. Најди ги лимесите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\left(x+1\right)}-\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x^2}\right)$

43. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ (без Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$ (без Лопиталово правило)

в) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ (со Лопиталово правило)

44. Најди ги границите (без примена на Лопиталово правило):

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}$ б) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

45. Најди ги следниве лимеси:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$ (без користење на Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ (со Лопиталово правило)

46. Најди ги следниве лимеси:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{4x^2+x+1} - \sqrt{4x^2-3x+2})$ (без користење на Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ (со Лопиталово правило)

47. Најди ги следниве лимеси:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{3x-1}{3x+2})^{x+2}$ (без користење на Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2})$ (со Лопиталово правило)

48. Најди ги следниве лимеси:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x \sin x}$ (без користење на Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x \to 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$ (со Лопиталово правило)

49. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x}{2x - \sin x}$ (без примена на Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ (со примена на Лопиталово правило)

50. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x})$

б) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

51. Најди ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x+1})^x$ без Лопиталово правило

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2})$ со Лопиталово правило

52. Најди ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-10x+8}-(x-3))$

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\dfrac{\pi}{2})\operatorname{tg}x$

53. Најди ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ (без Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ (без Лопиталово правило)

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ (со Лопиталово правило)

54. Најди ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (без Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{x}}$ (со Лопиталово правило)

55. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x}$ (без Лопиталово правило)

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ (со Лопиталово правило)

56. Најди ги границите (без примена на Лопиталово правило):

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+4}-x)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1}$.

57. Најди ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$ б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

58. Најди ја границата: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

59. Најди ја граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$, без користење на Лопиталово правило.

60. Најди ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

61. Најди ја границата: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{(1-2x)^2}$.

62. Најди ја границата: $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$.

63. Најди ги границите (без примена на Лопиталово правило):

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

64. Најди ги границите (без примена на Лопиталово правило):

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+4}-x)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1}$.

65. Со примена на Лопиталово правило најди ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5+4x^2+5}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{1}{x}}$

Изводи

1. Најди прв извод на функцијата зададена параметарски $x=\dfrac{2t}{1+t}$, $y=\dfrac{1-t}{1+t}$.
2. Најди го n-тиот извод на функцијата $y=\ln(1+2x)$.
3. Напиши равенка на тангента на кривата $y=\ln x$, паралелна на правата $y=2x-3$.
4. Повлечи тангента на параболата $y=x^2-2$, паралелна на правата $y=4x+1$.
5. Состави равенка на нормала на кривата $y=x\ln x$ паралелна со правата $2x-2y+3=0$.
6. Напиши ги равенките на тангентата и нормалата на кривата $x=\dfrac{2t}{t+2}$, $y=\dfrac{t}{t-1}$, во точка во која $t=2$.

7. На параболата $y = x^2 - 2x + 5$ повлечи тангента, која е паралелна на правата $y = 2x - 3$.
8. Состави равенка на тангентата на кривата $y = x^3 + x - 2$, паралелна на правата $y = 4x - 1$.
9. Состави равенка на тангента на кривата $y = x^2 + 2$ која е паралелна со правата $y + 2x - 2 = 0$.
10. Состави равенка на тангентата на кривата $y = x - \frac{1}{x}$ во точката која е пресек на кривата со x-оската.
11. Повлечи тангента на кривата $y = \ln x$ паралелна на правата $y = 2x + 1$.
12. Од точката (2,-2) повлечи тангенти на параболата $y = x^2 - 3x + 1$.
13. Од координатниот почеток повлечи тангенти на параболата $y = x^2 + x + 1$.
14. Тетива на параболата $y = x^2 - 2x + 7$ поврзува две точки со апциси $x = -2$ и $x = 2$. Состави ја равенката на тангентата на кривата која е паралелна на тетивата, а потоа напиши ја равенката на нормалата во допирната точка на тангентата и параболата.
15. Докажи дека функцијата зададена параметарски со равенките $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ ја исполнува равенката $y''(x + y)^2 = 2(xy' - y)$.
16. Најди го првиот извод y' ако $xy^2 + 2xe^{x+y} = \ln y$.
17. Покажи дека функцијата y дефинирана со равенката $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ја задоволува равенката $y'(x - y) = x + y$.
18. Провери дали функцијата $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ ја задоволува равенката $2y = xy' + \ln y'$.
19. Провери дали функцијата $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^k$ ја задоволува равенката $(1 + x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0$.
20. Докажи дека функцијата $y = \sqrt{2x - x^2}$ ја исполнува равенката $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.
21. Докажи дека функцијата y, дефинирана со равенката $xy - \ln y = 1$, ја исполнува равенката $y^2 + (xy - 1)y' = 0$.
22. Докажи дека функцијата $y = \sin(n \arcsin x)$ ја исполнува равенката $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.
23. Докажи дека функцијата $y = xe^{-\frac{1}{x}}$ ја исполнува диференцијалната равенка $x^3 y'' - xy' + y = 0$.

24. Провери дали функцијата $y=e^{2x}\sin(5x)$ ја задоволува равенката $y''-4y'+29y=0$.
25. Провери дали функцијата $y=\sin(e^x)\cdot\cos(e^x)$ ја задоволува диференцијалната равенка $y''-y'+4ye^{2x}=0$.
26. Докажи дека функцијата $y=\sqrt{2x-x^2}$ ја исполнува равенката $y^3\cdot y''+1=0$.
27. Да се докаже дека функцијата $y=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)$ ја исполнува равенката $x^2y''+xy'+y=0$.
28. Најди ги асимптотите на функцијата $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$.
29. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=xe^{-x}$.
30. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=x-\ln(x+1)$.
31. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\ln(x^2+4)$.
32. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=(x-1)e^{-x}$.
33. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=x^2e^x$.
34. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=x^2e^{-x}$.
35. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=(x^2-3)e^{-x}$.
36. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=(x-2)e^x$.
37. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.
38. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.
39. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.
40. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.
41. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.
42. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x^4+1}{x^2}$.
43. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{3x^2+2}{x^2-9}$.
44. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

45. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=x^2+\ln(1+x^2)$.
46. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=x^2\ln x$.
47. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=xe^{-x^2}$.
48. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.
49. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$.
50. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{2-x^2}{(x-1)^2}$.
51. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$.
52. Најди ги екстремните вредности и интервалите на растење и опаѓање на функцијата $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.
53. Најди ги локалните екстреми и интервалите на монотоност на функцијата $y=x^2e^{-x^2}$.
54. Најди ги екстремните вредности и интервалите на монотоност на функцијата $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.
55. Најди ги локалните екстреми и интервалите на монотоност на функцијата $y=\ln(x^2-x)$.
56. Најди ги екстремните вредности и интервалите на монотоност на функцијата $y=\dfrac{x}{x^2-4}$.
57. Најди ги локалните екстреми, интервалите на монотоност и асимптотите на функцијата $y=\dfrac{\ln x}{x}$.
58. Најди ги локалните екстреми и интервалите на монотоност на функцијата $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.
59. Најди ги асимптотите, локалните екстреми и интервалите на монотоност на функцијата $y=\dfrac{e^x}{x-1}$.
60. Најди ги асимптотите на функцијата $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$.

61. Најди ги локалните екстреми, интервалите на монотоност и асимптотите на функцијата $y = \frac{e^x}{x}$.
62. Најди ги екстремните вредности и интервалите на растење и опаѓање на функцијата $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.
63. Најди ги локалните екстреми, интервалите на монотоност и асимптотите на функцијата $y = 2e^{x^2 - 4x}$.
64. Најди ја граничната вредност $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$.
65. Со примена на Лопиталово правило најди ги границите:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^5 + 4x^2 + 5}$ б) $\lim\limits_{x \to 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$

66. Најди ги екстремните вредности и интервалите на растење и опаѓање на функцијата $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.
67. Докажи дека функцијата $y = \sin(2\arcsin x)$ ја исполнува равенката $(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0$.
68. Повлечи тангента на параболата $y = x^2 - 2x + 5$, која е нормална на правата $y = x - 5$.
69. Најди ја дефиниционата област и асимптотите на функцијата $y = \frac{e^{x+1}}{x+2}$.
70. Најди ги локалните екстреми и интервалите на монотоност на функцијата $y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$.
71. Пресекот на еден тунел има форма на правоаголник со полукруг. Обиколката на пресекот е 18 m. Колкав треба да биде радиусот на полукругот за да биде површината на пресекот најголема ?
72. Определи го оној правоаголник впишан во триаголник со страна aи висина hкој има максимална плоштина. Да се определи плоштината на триаголникот.
73. Во елипсата $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ да се впише правоаголник со максимална плоштина. Најди ги должините на страните на тој правоаголник.
74. Од сите правоаголни триаголници со хипотенуза со должина 6, најди го оној кој има максимална плоштина.
75. Нека е дадена права p и две точки A и B кои лежат на иста страна од правата p. Најди точка Mод правата p така што збирот од растојанијата $\overline{AM} + \overline{MB}$ да биде минимален. (Ако A'и B' се ортогонални проекции

соодветно на точките A и B, познато е дека $\overline{AA'} = a$, $\overline{BB'} = b$, $\overline{A'B'} = c$.)

Интеграли

1. Најди го интегралот $\int \operatorname{arctg} x dx$.
2. Најди го интегралот $\int x \ln^2 x dx$.
3. Најди го интегралот $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$.
4. Најди го интегралот $\int \frac{x^2}{x-2} dx$.
5. Најди го интегралот $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$.
6. Најди го интегралот $\int \frac{1+\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{x+4}} dx$.
7. Најди го интегралот $\int \frac{\sqrt{x}}{x-2} dx$.
8. Најди го интегралот $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.
9. Најди го интегралот $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$.
10. Најди го интегралот $\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$.
11. Најди го интегралот $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$.
12. Најди го интегралот $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.
13. Најди го интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-4x^2}}$.
14. Најди ги интегралите:

    а) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$ б) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$
15. Најди ги интегралите:

    а) $\int \frac{2x-2}{x^2-4x+5} dx$ б) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$
16. Најди ги интегралите:

а) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$ б) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

17. Најди ги интегралите:

а) $\int \cos^3 x \sin^4 x$ б) $\int \frac{1+\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt{2x+1}}dx$.

18. Најди ги интегралите:

а) $\int \sin(\ln x)dx$ б) $\int \frac{3x+4}{x^2+4x+3}dx$.

19. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$ б) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$

20. Најди ги интегралите:

а) $\int x^3 e^{-x^2}dx$ б) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

21. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{2x-5}{x^2-4x+5}dx$ б) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

22. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$ б) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

23. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ б) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx$

24. Најди ги интегралите:

а) $\int e^x \sin 3x dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$

25. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ б) $\int \sqrt{4+x^2}dx$

26. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$ б) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$

27. Најди ги интегралите:

а) $\int x \operatorname{arctg} x dx$ б) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

28. Најди го интегралот $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

29. Најди ги интегралите:

а) $\int e^x \sin 3x dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$.

30. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{x}{x^2+2x+3}dx$ б) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

31. Најди го интегралот $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$.
32. Најди го интегралот $\int \frac{1+\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{x+4}}dx$.
33. Најди го интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.
34. Најди го интегралот $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$.
35. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со $y=3-2x-x^2$ и $y=0$.
36. Пресметај ја плоштината на површината ограничена со кривата $y=\frac{1}{1+x^2}$ и параболата $y=\frac{1}{2}x^2$.
37. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата $y=2x-x^2$ и правата $y=-x$.
38. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со параболите $y=x^2-5$ и $y=3-x^2$.
39. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со параболите $y=\frac{x^2}{3}$ и $y=4-\frac{2}{3}x^2$.
40. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривите
$$y=x^2 \text{ и } y^2=x.$$
41. Пресметај ја плоштината на кардиоидата $\rho=(1+\cos\varphi)$.
42. Пресметај ја полоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривата $\rho=\sin 2\phi$.
43. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривата $\rho^2=4\cos 2\phi$.
44. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата $\rho^2=a^2\sin 2\phi$. Задолжително да се скицира плоштината.
45. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата $\rho=2\sin 2\phi$. Да се направи скица.
46. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со еден лак на циклоидата $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и x - оската.

47. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.
48. Пресметај ја должината на лакот на кривата $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$, $0 \le t \le 1$.
49. Пресметај ја должината на кривата зададена параметарски $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, од $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.
50. Пресметај ја должината на лакот на кривата $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, каде што $0 \le t \le 2\pi$.
51. Пресметај ја должината на кривата $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$.
52. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = \ln\frac{1}{\cos x}$ помеѓу $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{3}$.
53. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = \ln(x^2 - 1)$од точката со апциса $x = 2$ до точката со апциса $x = e$.
54. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = \ln(\sin x)$ од $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = a$, $a < \frac{\pi}{2}$.
55. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = 4(e^{\frac{x}{8}} + e^{-\frac{x}{8}})$, кој се наоѓа помеѓу правите $x = -8$ и $x = 8$.
56. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, кој се наоѓа помеѓу точките со апциси $x_1 = -a$ и $x_2 = a$.
57. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, од $x = 1$ до $x = e$.
58. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = 3 + \ln(\sin x)$ од $x = \frac{\pi}{4}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.
59. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = 3 + \frac{1}{2}\ln(\sin^2 x)$од $x = \frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.
60. Пресметај ја должината на кривата $\rho = a(1 + \cos\phi)$.

61. Ликот ограничен со кривата $y = \sin 2x$, $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ и правата $y = 0$ ротира околу x-оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.
62. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на кривата $y = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ околу x- оската од $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$.
63. Пресметај го волуменот на ротационото тело , што се добива со ротација на ликот ограничен со кривата $y = 3\sin\frac{x}{3}$, x - оската и две соседни нули, околу x - оската.
64. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x -оската на фигурата ограничена со кривите $y = \cos x + \cos 2x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$.
65. Ликот ограничен со кривата $y = \sin 2x$, $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ и правата $y = 0$ ротира околу x-оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.
66. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација на кружницата $x^2 + (y-3)^2 = 4$ околу x-оската.
67. Ликот ограничен со циклоидата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ и x-оската ротира околу x-оската. Пресметај го волуменот на добиеното тело.
68. Пресметај ја плоштината на телото добиено со ротација на кружницата $x^2 + y^2 = 4$ околу x-оската.
69. Пресметај ја плоштината на ротационото тело , што се добива со ротација на ликот ограничен со кривата $x = R(\cos t + t\sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0,\pi]$, и x- оската, околу x- оската.
70. Пресметај ја плоштината на површината што се добива со ротација на кривата $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ околу x- оската од $x = 1$ до $x = e$.
71. Докажи дека вредноста на $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$ се наоѓа во интервалот $(\frac{2}{\sqrt[4]{e}}, 2e^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Атанасова Е., Георгиевска С. Математика I, трето издание, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 2004

[2] Blanusa D., *Visa matematika*, t. I, sv. 1, Zagreb, 1965.

[3] B.P.Demidovic i grupa autora: *Zadaci i rijeseni primjeri iz vise matematike s primjenom na tehnicke nauke*, Tehnicka knjiga, Zagreb, 1978.

[4] Георгиевска С. , Атанасова Е., Математика, „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 2002.

[5] Miličić M. P., Uscumlic M., *Zbirka zadataka iz vise matematike 1*, Gradzevinska knjiga, Beograd, 1969.

[6] Miličić M. P., *Matematika I*, Beograd, 1979.

[7] Mitrinović S. D., Mihajlović D., Vasić P. M., *Linearna algebra, Analitička geometrija, Polinomi*, Beograd, 1968.

[8] Stipanić E., *Visa matematika I i II deo*, Beograd, 1985.

[9] Чупона Ѓ., Трпеновски Б, Целакоски Н, Предавања по виша математика, книга *I, II*, Скопје, 1976.

[10] Шапкарев И., Кржовски П., *Линеарна алгебра со аналитичка геометрија во простор*, Скопје, 1975.

[11] Шапкарев И.,*Задачи за вежбање по математика 1 за студентите на техничките факултети*, Скопје, 1989.

[12] Шапкарев И.,*Задачи за вежбање по математика 2 за студентите на техничките факултети*, Скопје, 1987.

[13] Улчар Ј., *Аналитичка геометрија со векторска алгебра*, Библиотека Нумерус, Скопје 1995.

[14] Самарџиски А., *Векторска алгебра низ задачи*, Универзитет “Св. Кирил и Методиј“, Скопје 1991.

[15] Bird J., *Engineering Mathematics*, Elsevier Science, 2003

[16] Cox B., *Understanding Engineering Mathematics*, Butterworth-Heinemann, 2001

[17] Foley J. D. , Van Dam A. , Feiner S. K. , Hughes J. F., *Computer graphics: Principles and Practice, 2nd edition*, Addison-Wesley, 1990 .

[18] http:// commons.bcit.ca/math/examples/civil/index.html

[19] Lay D. C., *Linear Algebra and its applications*, Addison-Wesley Publishing company, 2006.

[20] Pytel A., Kiusalaas J. , *Engineering Mathemtatics: Statics, 2nd edition*, 1999.

[21] Stroud K. A. , Booth D. J. , *Engineering Mathematics*, Industrial Press, Inc, New York, 2001.

[22] Steinmetz C.P., *Engineering Mathematics*, McGraw-Hill Book company, 1911.

[23] Димитровски Д, Манова-Ераковиќ В., Маркоски Ѓ., *Математика I, за студентите по биологија,* УКИМ, Скопје, 2015.

[24] Javor P., Matematička analiza I, Element , Zagreb, 2003.

[25] Pašić M., Matematika I, s više od 800 riješenih primjera i zadataka, Merkur A.B. D., Zagreb, 2005.

[26] Anton H., Calculus-A new horizon, sixth edition, John Wiley&Sons, Inc. New York, 1999.

[27] Шекутковски Н., *Математичка анализа 1*, Просветно дело, Скопје, 2008.

[28] Shekutkovski H., Definition of definite integral, The Teaching of Mathematics (2013), Vol. XVI, 1, pp. 29–34.
[29] Оровчанец М., Крстеска Б., Манова-Ераковиќ В., Маркоски Ѓ., Збирка решени задачи по математичка анализа I (прв дел), УКИМ, Скопје, 2015.
[30] Оровчанец М., Крстеска Б., Манова-Ераковиќ В., Маркоски Ѓ., Збирка решени задачи по математичка анализа I (втор дел), УКИМ, Скопје, 2015.

СОДРЖИНА

Е-издание:
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41