УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ - СКОПЈЕ
Природно-математички факултет

Драган Димитровски
Весна Манова-Ераковиќ
Ѓорѓи Маркоски

МАТЕМАТИКА II
(ЗА СТУДЕНТИТЕ ПО БИОЛОГИЈА)

Скопје, 2017

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk
Уредник за издавачката дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор
Уредник на публикацијата:
Драган Димитровски, Весна Манова-Ераковиќ, Ѓорѓи Маркоски,
Природно-Математички факултет, Скопје
Рецензенти:
1. Проф. д-р Никита Шекутковски, Редовен професор на ПМФ, Скопје
2. Проф. д-р Валентина Миовска, Вонреден професор на ПМФ, Скопје
3. Проф. д-р Дана Прелиќ, Редовен професор на ПМФ, Скопје
Техничка обработка: Авторите
Лектура на македонски јазик: Виолета Јовановска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

517.3(075.8)
519.9(075.8)
519.2(075.8)

ДИМИТРОВСКИ, Драган

Математика II: (за студентите по биологија) / Драган Димитровски, Весна Манова-Ераковиќ, Ѓорѓи Маркоски. - Скопје: Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Природно-математички факултет, 2018. - 364 стр.: илустр.; 25 cм

Библиографија: стр. 358-359

ISBN 978-9989-43-407-5

1. Манова-Ераковиќ, Весна [автор] 2. Маркоски, Ѓорѓи [автор]
а) Интегрално сметање - Високошколски учебници б) Диференцијални равенки - Високошколски учебници в) Веројатност и статистика - Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 106748682

ПРЕДГОВОР

Оваа книга, пред сè е наменета за предметот математика за студентите по биологија. Меѓутоа, може да ја користат и студентите од техничките факултети, и сите оние кои го изучуваат материјалот опфатен во оваа книга.

Книгава е резултат на повеќегодишните предавања и вежби кои ги одржувале авторите на студентите по биологија и студиите каде се предава овој материјал.

Опфатени се темите интегрално сметање, диференцијални равенки, веројатност и статистика.

Притоа, теоретските содржини се илустрирани со голем број примери.

Низ целата книга, посебно внимание е посветено на задачи кои се сретнуваат во природата, особено во биологијата.

Особено им се заблагодаруваме на рецензентите на оваа книга, кои со своите коментари и забелешки многу придонесоа за нејзино подобрување.

Ќе бидеме благодарни на сите читатели кои со своите сугестии ќе придонесат за идни подобрувања на оваа книга.

На сите читатели им посакуваме успешно навлегување во тајните на математиката, преку оваа книга и успешно совладување на нејзините содржини.

Скопје, 2017 Авторите

1

ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ

1.1 Неопределен интеграл

1.1.1 Примитивна функција и неопределен интеграл

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = x^3$. Таа е непрекината и диференцијабилна функција, за секој $x \in \mathbb{R}$. Изводот од $f(x) = x^3$ е $f'(x) = 3x^2$. Лесно се проверува дека и функциите $x^3 + 3, x^3 - \sqrt{2}$, $x^3 + e$ исто така имаат извод еднаков на $3x^2$.Проблемот на наоѓање на функциите, чиј извод е еднаков на $3x^2$ има бесконечно многу решенија. Сите тие решенија ги нарекуваме **примитивни** функции на функцијата $3x^2$. Општо, ако е дадена некоја функција $g(x)$, и ако постои функција $f(x)$ таква што $f'(x) = g(x)$, тогаш постојат бесконечно многу функции т.е. сите функции $h_c(x) = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, такви што $h'_c(x) = g(x)$.

Сите овие функции се нарекуваат **примитивни функции на** $f(x)$**.**

Дефиниција. Нека функцијата $y = g(x)$, $x \in D$ е непрекината на интервалот $(a, b) \subseteq D$. Велиме дека функцијата $f(x)$ дефинирана на (a, b) е **примитивна функција на функцијата** $g(x)$ ако е диференцијабилна на (a, b) и ако важи

$$f'(x) = g(x),\ \forall x \in (a, b).$$

Пример 1. Функцијата $f(x) = \sin x$ е примитивна функција на функцијата $g(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ бидејќи

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Но, и за секој $c \in\mathbb{R}$, $f_c(x) = \sin x + c$, $x \in \mathbb{R}$, се примитивни функции за $g(x)$.

Пример 2. Функцијата $f(x) = e^x$ е примитивна функција на $g(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ бидејќи $f'(x) = (e^x)' = e^x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Но, и за секој $c \in\mathbb{R}$, и функциите $f_c(x) = e^x + c$, $c \in \mathbb{R}$, се примитивни функции за $g(x)$.

Пример 3. Функцијата $f(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1}$, $r \neq -1$ е примитивна функција на $g(x) = x^r$, $\forall x \in \mathbb{R}$ бидејќи

$$f'(x) = \left(\tfrac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = \tfrac{(r+1)x^{r+1-1}}{r+1} = x^r = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Но, и овде, за секој $c \in\mathbb{R}$, функциите $f_c(x) = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$, $c \in\mathbb{R}$ се примитивни функции за $g(x)$.

Забележуваме, ако $f(x)$ е примитивна функција за $g(x)$, за $x \in D$, тогаш и $f(x) + c$, каде $c \in \mathbb{R}$ е произволно избран, се примитивни функции за $g(x)$, (на D), т.е. важи следната теорема.

Теорема 1. Ако $f(x)$ е примитивна функција на функцијата $g(x)$, $x \in D$, тогаш и $f(x) + c$ е примитивна функција на $g(x)$, $x \in D$, за секој произволно избран реален број c. Ако функциите $f(x)$ и $h(x)$, $x \in D$ се примитивни функции на $g(x)$, тогаш постои реален број c така што важи

$$f(x) - h(x) = c,\ \forall x \in D.$$

Дефиниција. Множеството од сите примитивни функции на функцијата $g(x)$ се нарекува **неопределен интеграл** на функцијата $g(x)$ и се означува со

$$\int g(x)dx.$$

Функцијата $g(x)$ се нарекува подинтегрална функција, а $g(x)dx$ се нарекува подинтегрален израз.

Имајќи ја предвид дефиницијата за неопределен интеграл и теоремата се добива дека $\int g(x)dx = \{f(x)+c \mid c \in \mathbb{R}\}$, каде $f(x)$ е примитивна функција за $g(x)$ т.е. $f'(x) = g(x), x \in D$. Пократко ќе запишуваме: $\int g(x)dx = f(x)+c,\ c \in \mathbb{R}$, каде

$$f'(x) = g(x),\ x \in D.$$

Операцијата со која доаѓаме до примитивна функција, односно до неопределен интеграл се вика **интегрирање.**

Теорема 2. (а) $\displaystyle\int g'(x)dx = g(x)+c,\ x \in D.$

(б) Интеграл од збир на две функции еднаков на збирот од интегралите на тие функции т.е.

$$\int [f(x)+g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,\ x \in D.$$

(в) $\displaystyle\int [\alpha f(x)dx]\, dx = \alpha \int f(x)dx,\ \alpha \in\mathbb{R},\ \ x \in D.$

Забелешка. Во горната теорема се претпоставува дека неопределените интеграли постојат.

Доказ. (а) Твдењето следува директно од дефиницијата на неопределн интеграл.

(б) Нека $F(x)$ и $G(x)$ се примитивни функции за $f(x)$ и $g(x)$, соодветно на D, т.е. $F'(x) = f(x),\ x \in D$ и $G'(x) = g(x),\ x \in D$. Тогаш, $(F+G)(x) = F(x)+G(x)$ е примитивна функција на $(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ x \in D$, бидејќи: $(F+G)'(x) = (F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) =$
$= f(x)+g(x) = (f+g)(x),\ x \in D.$

Од дефиницијата на неопределен интеграл имаме

$$\int [f(x)+g(x)]dx = (F(x)+G(x)) + c = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

(в) Нека $F(x)$ е примитивна функција на $f(x)$ за $x \in D$ т.е. $F'(x) = f(x),\ x \in D$. Тогаш за $\alpha \in \mathbb{R}$, имаме:

$$(\alpha F)'(x) = (\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$$

т.е. $(\alpha F)(x) = \alpha F(x)$ е примитивна функција за $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in D$.

Од дефиницијата за неопределен интеграл, имаме

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha F(x) + c = \alpha \left(F(x) + \frac{c}{\alpha}\right) =$$

$$= \alpha(F(x) + c_1) = \alpha \int f(x)dx.$$

Значи, за функциите од примерите 1,2 и 3 имаме:
$\int \cos x dx = \sin x + c,\ x \in$$\mathbb{R}$ бидејќи

$$(\sin x)' = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\int e^x dx = e^x + c,\ x \in \mathbb{R}$ бидејќи $(e^x)' = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c,\ x \in \mathbb{R}\ \ (r \neq -1)$ бидејќи $\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right)' = \frac{(r+1)x^{z+1-1}}{r+1} = x^r,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Пример 4. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctg}x + c,\ x \in \mathbb{R}$ бидејќи

$$(\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2},\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Пример 5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$
$\displaystyle= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \overset{T.2}{=} \int 1 \cdot dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int x^0 dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx =$
$\displaystyle= \left(\frac{x^{0+1}}{0+1} - \text{arctg}x\right) + c = x - \text{arctg}x + c.$

1.1.2 Таблица на некои основни интеграли

Имајќи ги предвид изводите на основните елементарни функции и дефиницијата за неопределен интеграл се добива следната таблица на неопределени интеграли.

1^0. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c,\ (r \neq -1)$

2^0. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

3^0. $\int e^x = e^x + c$

4^0. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

5^0. $\int \cos x dx = \sin x + c$

6^0. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + c$

7^0. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + c$

8^0. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + c$

9^0. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arcsin} x + c$

10^0. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, (a > 0, a \neq 1)$

11^0. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$

12^0. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

13^0. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = -\tanh x + c$

14^0. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = \coth x + c$

$$15^0.\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2})+c$$

$$16^0.\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-1})+c$$

$$17^0.\ \int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+c,\ |x|<1$$

$$18^0.\ \int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}+c,\ |x|>1$$

Забелешка. Во таблицата 1^0-18^0, c е произволен реален број, и истите важат во дефиниционата област на функцијата каде подинтегралната функција е непрекината, а примитивната функција е диференцијабилна.

Точноста на формулите 1^0-18^0 непосредно се проверува. За илустрација ќе ја докажеме 17^0.

Навистина, за $|x|<1$, $\frac{1+x}{1-x}>0$ бидејќи $\frac{1+x}{1-x}>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1$.

Понатаму имаме

$$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{1-x^2}.$$

1.1.3 Интегрирање со метод на замена

Теорема 1. Нека функцијата $\varphi(t)$ дефинирана на (a,b) е примитивна на функцијата $f(t), t\in(a,b)$ и нека $g: x\mapsto g(x)$, $x\in(c,d)\subseteq(a,b)$ е диференцијабилна функција, $\forall x\in(c,d)$. Тогаш постои примитивна функција на $f(g(x))g'(x)$, $\forall x\in(c,d)$ и притоа важи

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \varphi(g(x)) + c$$

т.е.

$$\int f(g(x))dg(x) = \varphi(g(x)) + c.$$

Забелешка. Ставајќи: $g(x) = t$, добиваме $\displaystyle\int f(t)dt = \varphi(t) + c$.

Доказ. $(\varphi \circ g)(x) = \varphi(g(x))$

Од $(\varphi \circ g)'(x) = (\varphi(g(x))' = \varphi'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ следува точноста на теоремата.

Пример 1. $\int (x+2)^5 dx$.

Решение. Овде $f(x) = x^5$ и $\varphi(x) = x + 2$. Значи воведуваме смена $x + 2 = t$. Тогаш $x = t - 2$. Диференцирајќи ги левата страна по x а десната по t, добиваме $dx = dt$. Заменувајќи во интегралот имаме:

$\int (x+2)^5 dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(x+2)^6}{6} + C$.

Пример 2. $\int \frac{dx}{2x+7}$.

Решение. Воведуваме смена $2x+7 = t$. Тогаш $x = \frac{t-7}{2}$ и $dx = \frac{1}{2}dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме:

$\int \frac{dx}{2x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+7| + C$.

Пример 3. $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$.

Решение. Воведуваме смена $1 + x^2 = t$. Тогаш $2xdx = dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме:

$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(1+x^2) + C$.

Пример 4. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3+4x)^3}}$.

Решение. Воведуваме смена $\sqrt[4]{(3+4x)^3} = t$. Тогаш $x = \frac{t^{\frac{4}{3}}-3}{4}$ и $dx = \frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}}dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме:

$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3+4x)^3}} = \int \frac{\frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}}dt}{t} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = t^{\frac{1}{3}} + C = \sqrt[4]{3+4x} + C$.

Пример 5. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

Решение. Воведуваме смена $e^x = t$. Тогаш $e^x dx = dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме

$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C.$

Пример 6. $\int a^{x^4} x^3 dx,\ a > 0, a \neq 1.$

Решение. Воведуваме смена $x^4 = t$. Тогаш $4x^3 dx = dt$, односно $x^3 dx = \frac{1}{4} dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме:

$\int a^{x^4} x^3 dx = \frac{1}{4} \int a^t dt = \frac{1}{4 \ln a} a^t + C = \frac{1}{4 \ln a} a^{x^4} + C.$

Пример 7. $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin x}.$

Решение. Воведуваме смена $4 + \sin x = t$. Тогаш $\cos x dx = dt$. Заменуваме во интегралот и добиваме

$\int \frac{\cos x}{4+\sin x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln (4 + \sin x) + C.$

Пример 8. $\int \sin^2 x dx.$

Решение. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C$. Притоа во последниот интеграл ставивме смена $t = 2x$, од што добиваме $dx = \frac{1}{2} dt$.

Пример 9. $\int \cos^3 x dx.$

Решение. $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$. Воведуваме смена $\sin x = t$. Тогаш $\cos x dx = dt$. Заменувајќи во последниот интеграл добиваме:

$\int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - t^2) dt =$
$= \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$

Пример 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}},\ a, b > 0.$

Решение. Интегралот ќе го доведеме во обликот $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 \left(1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2\right)}} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2}}.$

Воведуваме смена $\frac{ax}{b} = t$. Тогаш $dx = \frac{b}{a} dt$. Заменувајќи во интегралот, добиваме:

$\frac{1}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{a} \arcsin t + C = \frac{1}{a} \arcsin \frac{ax}{b} + C.$

Пример 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 \pm b^2}},\ a, b > 0.$

Решение. Интегралот ќе го доведеме во обликот $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm 1}}$. Имаме $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 \pm b^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 \left(\left(\frac{ax}{b}\right)^2 \pm 1\right)}} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{ax}{b}\right)^2 \pm 1}}$. Воведуваме смена $\frac{ax}{b} = t$. Тогаш $dx = \frac{b}{a} dt$. Заменувајќи во интегралот, добиваме:

$\frac{1}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{ax}{b}\right)^2 \pm 1}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm 1}} =$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm 1}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{ax}{b}+\sqrt{\left(\frac{ax}{b}\right)^2\pm 1}\right| + C.$$

Пример 12. $\int \frac{dx}{b^2+a^2x^2}$, $a, b > 0$.

Решение. Интегралот ќе го доведеме во обликот $\int \frac{dt}{t^2+1}$. Имаме $\int \frac{dx}{b^2+a^2x^2} = \int \frac{dx}{b^2\left(1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2\right)} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2}$. Воведуваме смена $\frac{ax}{b} = t$, па $dx = \frac{b}{a}dt$. Заменувајќи во последниот интеграл добиваме:

$$\frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{ax}{b} + C.$$

Пример 13. $\int \frac{1}{x^2-1}dx$.

Решение.

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Пример 14. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}$, $a, b > 0$.

Решение. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \int \frac{dx}{b^2\left(\left(\frac{ax}{b}\right)^2-1\right)} = \frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{ax}{b}\right)^2-1}$. Ќе воведеме смена $\frac{ax}{b} = t$, па $dx = \frac{b}{a}dt$. Оттука имаме

$$\frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{ax}{b}\right)^2-1} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{dx}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{\frac{ax}{b}-1}{\frac{ax}{b}+1}\right| + C = \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C$$

Пример 15. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $a > 0$

а) ако $b^2-4ac > 0$,

б) ако $b^2-4ac < 0$.

Решение. Интегралот ќе го доведеме во еден од облиците $\int\frac{dt}{t^2+1}$ или $\int\frac{dt}{t^2-1}$.

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int\frac{dx}{\left(\sqrt{a}x\right)^2+2\frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}x+\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c} = \int\frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

а) $\int\frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}} = \frac{1}{\frac{b^2-4ac}{4a}}\cdot\int\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}\right)^2-1}$. Воведуваме смена $t = \frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}$, па $dx = \frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}}dt$ и последниот интеграл го добива обликот

$$\frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}-1}{\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}+1}\right|+C=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}\right|+C.$$

б) $\int\frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}=\frac{1}{\frac{4ac-b^2}{4a}}\cdot\int\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}\right)^2+1}.$

Воведуваме смена $t=\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}$. Тогаш $dx=\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}dt$, па добиваме

$\frac{1}{\frac{4ac-b^2}{4a}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\frac{4ac-b^2}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\operatorname{arctg}t+C=$

$=\frac{4a}{4ac-b^2}\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}+C.$

Пример 16. $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{(x+1)'dx}{(x+1)^2-\frac{2^2-4\cdot 2}{4}}=\int\frac{(x+1)'dx}{(x+1)^2+1}=$

$=\int\frac{(x+1)'dx}{(x+1)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

Пример 17. $\int\frac{dx}{x^2+2x+1}$.

Решение. $\int\frac{dx}{x^2+2x+1}=\int\frac{(x+1)'dx}{(x+1)^2-\frac{2^2-4\cdot 1}{4}}=\int\frac{(x+1)'dx}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)}+C.$

Пример 18. $\int\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx,\ a,a_1\neq 0.$

Решение. $\int\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx=a_1\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b+\frac{2ab_1}{a_1}-b}{ax^2+bx+c}dx=$

$=\frac{a_1}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\frac{a_1}{2a}\left(\frac{2ab_1}{a_1}-b\right)\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{a_1}{2a}I_1+\frac{a_1}{2a}\left(\frac{2ab_1}{a_1}-b\right)I_2.$

Во I_1 воведуваме смена $t=ax^2+bx+c$ и се сведува на интеграл од обликот $\int\frac{dt}{t}$, а I_2 е од обликот $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$.

Пример 19. $\int\frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c}dx$, каде $P_n(x)$ е полином со реални коефициенти и степен $n\geq 2$ и $a\neq 0$.

Решение. Полиномот $P_n(x)$ го делиме со ax^2+bx+c и добиваме количник $Q_{n-2}(x)$ и остаток $R(x)$. Притоа количникот е полином со степен $n-2$, а остатокот е полином со степен 0 или 1. Значи

$$P_n(x) = Q_{n-2}(x)\left(ax^2+bx+c\right)+R(x).$$

Тогаш

$$\int \frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c}dx = \int Q_{n-2}(x)\,dx + \int \frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx,$$

па $\int Q_{n-2}(x)\,dx$ е збир од таблични интеграли, а $\int \frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx$ е или од обликот $\int \frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx$, $a_1, a \neq 0$ или од обликот $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$.

Пример 20. $\int \frac{5x^6+7x^5+2x^4+3x+9}{2x^2+4x+6}dx$.

Решение. По делењето на полиномите добиваме $5x^6+7x^5+2x^4+3x+9 = \left(\frac{5}{2}x^4-\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{25}{2}\right)\left(2x^2+4x+6\right)-16x+84$ па $\int \frac{5x^6+7x^5+2x^4+3x+9}{2x^2+4x+6}dx = \int\left(\frac{5}{2}x^4-\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{25}{2}\right)dx + \int \frac{-16x+84}{2x^2+4x+6}dx = = \frac{1}{2}x^5-\frac{3}{8}x^4-\frac{7}{6}x^3+\frac{23}{4}x^2-\frac{25}{2}x+I_1$.

Натаму, имаме

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{-16x+84}{2x^2+4x+6}dx = \\
&= -4\int \frac{4x+4-4-21}{2x^2+4x+6}dx = -4\int \frac{4x+4}{2x^2+4x+6}dx + 100\int \frac{dx}{2x^2+4x+6} = \\
&= -4\ln\left|2x^2+4x+6\right| + 100\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x\right)^2+2\frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}x+\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2-2+6} = \\
&= -4\ln\left|2x^2+4x+6\right| + 100\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x+\sqrt{2}\right)^2+4} = -4\ln\left|2x^2+4x+6\right| + \\
&+ \frac{100}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{2}\right)^2+1} = \\
&= -4\ln\left|2x^2+4x+6\right| + \frac{100}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{2}+C.
\end{aligned}$$

Според тоа

$\int \frac{5x^6+7x^5+2x^4+3x+9}{2x^2+4x+6}dx = \frac{1}{2}x^5-\frac{3}{8}x^4-\frac{7}{6}x^3+\frac{23}{4}x^2-\frac{25}{2}x-4\ln\left|2x^2+4x+6\right|+ +\frac{50}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{2}+C$.

Пример 21. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{\left(\frac{x}{2}\right)' dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C.$

Пример 22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)' dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

Пример 23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{\left(\frac{x}{5}\right)' dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+25}\right| + C.$

Пример 24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} = \int \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)' dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + C.$

Пример 25. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

а) ако $a > 0$;

б) ако $a < 0$.

Решение. Овој интеграл се сведува на интеграли од обликот $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm1}}$, $\int \frac{dt}{\sqrt{1\pm t^2}}$, во зависност од знакот на a и b^2-4ac.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{a}x\right)^2+2\frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}x+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+c}} = = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}}$

i) Ако $b^2-4ac>0$, тогаш $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}\right)^2-1}}$,

па со воведување на смената $t = \frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}$ се сведува на интеграл од типот $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$.

ii) Ако $b^2-4ac<0$, тогаш $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}\right)^2+1}}$,

па со воведување на смената $t = \frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}$ се сведува на интеграл од типот $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

б) Во овој случај подинтегралната функција е дефинирана само за $b^2-4ac>0$ и нејзината дефинициона област е $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$. Притоа $b^2-4ac = b^2+4\left|a\right|c$. Според тоа имаме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-|a|x^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(|a|x^2-bx-c)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(\sqrt{|a|}x\right)^2-2\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\sqrt{|a|}x+\frac{b^2}{4|a|}-\frac{b^2}{4|a|}-c\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2-\frac{b^2+4|a|c}{4|a|}\right)}} =$$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2+4|a|c}{4|a|}}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}}{\sqrt{\frac{b^2+4|a|c}{4|a|}}}\right)^2}}$

Со воведување на смената $t = \frac{\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}}{\sqrt{\frac{b^2+4|a|c}{4|a|}}}$ се сведува на обликот $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Пример 26. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+2}} = \int \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)'dx}{\sqrt{\frac{3^2+4\cdot 2}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} = = \int \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)'dx}{\sqrt{\frac{17}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} + C = \arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{17.}} + C.$

Пример 27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} = \int \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)'dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3^2-4\cdot 2}{4}}} = \int \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)'dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} =$

$= \ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right| + C = \ln\left|x+\frac{3}{2}+2\sqrt{x^2+3x+2}\right| + C.$

Пример 28. $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\ a \neq 0, p \neq 0.$

Решение. Дадениот интеграл ќе го претставиме како збир на интегралите од облик $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ и $\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}}$. Имаме

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = p\int \frac{x+\frac{q}{p}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = p\frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b+2a\frac{q}{p}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$\begin{aligned} &= p\frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + p\frac{1}{2a}\int \frac{-b+2a\frac{q}{p}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \\ &= p\frac{1}{2a}I_1 + p\frac{1}{2a}\left(-b+2a\frac{q}{p}\right)I_2 \end{aligned}$$

Во I_1 воведуваме смена $t = ax^2+bx+c$. Оттука $dt = (2ax+b)\,dx$, па $I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C$. Интегралот I_2 е од обликот $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, кој е пресметан претходно.

Пример 29. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{-4x^2+2x+5}}dx.$

Решение. $I = \int \frac{3x+5}{\sqrt{-4x^2+2x+5}}dx = 3\frac{1}{2(-4)}\int \frac{-8x+2-2+\frac{5\cdot(-8)}{3}}{\sqrt{-4x^2+2x+5}}dx =$

$= -\frac{3}{8}\int \frac{-8x+2}{\sqrt{-4x^2+2x+5}}dx + \left(-\frac{3}{8}\right)\left(-2-\frac{40}{3}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+5}} = -\frac{3}{8}I_1 + \frac{23}{4}I_2.$

Во I_1 воведуваме смена $t = -4x^2+2x+5$, па $dt = -8x+2$. Според тоа $I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{-4x^2+2x+5} + C$. За I_2 имаме

$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}2x-(2x)^2+5-\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}-2x\right)^2+\frac{19}{4}}} =$

$= \sqrt{\frac{4}{19}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}-2x}{\sqrt{\frac{19}{4}}}\right)^2+1}} = \sqrt{\frac{4}{19}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{19}}-\frac{4}{\sqrt{19}}x\right)^2+1}}$

Воведуваме смена $y = \frac{1}{\sqrt{19}} - \frac{4}{\sqrt{19}}x$. Тогаш $dy = -\frac{4}{\sqrt{19}}dx$, па

$$I_2 = -\sqrt{\frac{4}{19}}\frac{\sqrt{19}}{4}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = -\frac{1}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right| + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{19}} - \frac{4}{\sqrt{19}}x + \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{19}} - \frac{4}{\sqrt{19}}x\right)^2+1}\right) + C_1$$

Конечно,

$I = 2\sqrt{-4x^2+2x+5} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{19}} - \frac{4}{\sqrt{19}}x + \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{19}} - \frac{4}{\sqrt{19}}x\right)^2+1}\right) + C_2.$

Пример 30. $\int \sin ax \cos bx dx,\ a,b \neq 0,\ a+b, a-b \neq 0.$

Решение. $\int \sin ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin\left(a+b\right)x + \sin\left(a-b\right)x\right)dx =$
$= \frac{1}{2}\int \sin\left(a+b\right)xdx - \frac{1}{2}\int \sin\left(a-b\right)xdx =$
$= -\frac{1}{2(a+b)}\cos\left(a+b\right)x + \frac{1}{2(a-b)}\cos\left(a-b\right)x + C.$

Пример 31. $\int \cos ax \cos bx dx,\ a,b \neq 0,\ a+b, a-b \neq 0.$

Решение. $\int \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\int \cos\left(a+b\right)xdx + \frac{1}{2}\int \cos\left(a-b\right)xdx =$
$= \frac{1}{2(a+b)}\sin\left(a+b\right)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin\left(a-b\right)x + C.$

Пример 32. $\int \cos 3x \cos 5x dx.$

Решение. $\int \cos 3x \cos 5nx dx = \frac{1}{2}\int [\cos 2x + \cos 8x] dx =$
$= \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 8x}{16} + C.$

Пример 33. $\int \sin 2x \cos 3x dx.$

Решение.$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin\left(-x\right) + \sin 5x\right)dx = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + C.$

Пример 34. $\int \sin 4x \sin 7x dx.$

Решение. $\int \sin 4x \sin 7x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 3x - \cos 11x\right)dx = \frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 11x}{22} + C.$

Пример 35. $\int \sin^2 3x dx.$

Решение. $\int \sin^2 3xdx = \frac{1}{2}\int [1-\cos 6x]dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C.$

Пример 36. $\int \cos^2 4xdx.$

Решение. $\int \cos^2 4xdx = \frac{1}{2}\int [1+\cos 8x]dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{16} + C.$

Пример 37. $\int \frac{\ln^a x}{x}dx,\ a \neq 0.$

Решение. Воведуваме смена $t = \ln x$. Тогаш $dt = \frac{dx}{x}$, па

$$\int \frac{\ln^a x}{x}dx = \int t^a dt = \begin{cases} \frac{t^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1 \\ \ln|t| + C, a = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C, a \neq -1 \\ \ln|\ln x| + C, a = -1 \end{cases}.$$

Пример 38. $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$

Решение. $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2-2+\frac{1}{x^2}+2}dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx.$

Воведуваме смена $t = x - \frac{1}{x}$. Оттука $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx$, па последниот интеграл се трансформира во $\int \frac{dt}{t^2+2}$. Натаму имаме

$\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right) + C.$

Пример 39. $\int \frac{x^2-1}{1+x^4}dx.$

Решение. $\int \frac{x^2-1}{1+x^4}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+2+\frac{1}{x^2}-2}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx.$
Воведуваме смена $t = x + \frac{1}{x}$, па $dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$. Натаму,

$$\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx = \int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{\frac{t}{\sqrt{2}}-1} - \int \frac{dt}{\frac{t}{\sqrt{2}}+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} + C.$$

Пример 40. $\int \frac{1+x^2}{x^4+3x^3+3x^2-3x+1}dx.$

Решение. $\int \frac{1+x^2}{x^4+3x^3+3x^2-3x+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+3x+3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}dx =$

$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+3+2}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+5}dx.$

Од смената $t = x - \frac{1}{x}$ добиваме $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx$, па

$\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+5}dx = \int \frac{dt}{t^2+3t+5} = \int \frac{dt}{t^2+2t\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+5} =$

$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \frac{4}{11}\int \frac{dt}{\left(\frac{t+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}}}\right)^2+1} = \frac{4}{11}\sqrt{\frac{11}{4}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}}} + C =$

$= \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x-\frac{1}{x}\right)+3}{\sqrt{11}} + C.$

Пример 41. $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}dx,\ a, b > 0.$

Решение. $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}dx = b\int \sqrt{1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2}dx$. Прво ќе воведеме смена $t = \frac{ax}{b}$, од каде што добиваме $dx = \frac{b}{a}dt$, па $b\int \sqrt{1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2}dx = \frac{b^2}{a}\int \sqrt{1 - t^2}dt$. Сега воведуваме смена $t = \sin u$. Оттука $dt = \cos u du$, па $\int \sqrt{1 - t^2}dt = \int \sqrt{1 - \sin^2 u}\cos u du = \int |\cos u| \cos u du$. Бидејќи $-1 \leq u = \arcsin t \leq 1$ следува дека $\cos u > 0$, па $|\cos u| = \cos u$. Според тоа

$\int |\cos u| \cos u du = \int \cos^2 u du = \frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2} + C =$

$= \frac{2\sin(\arcsin t)\cos(\arcsin t)}{4} + \frac{\arcsin t}{2} + C =$

$= \frac{t\sqrt{1-\sin^2(\arcsin t)}}{2} + \frac{\arcsin t}{2} + C = \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} + \frac{\arcsin t}{2} + C =$

$= \frac{\frac{ax}{b}\sqrt{1-\left(\frac{ax}{b}\right)^2}}{2} + \frac{\arcsin \frac{ax}{b}}{2} + C.$

1.1.4 Интегрирање со метод на парцијална интеграција

Теорема 1. Нека функциите $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни и нека постои примитивна функција за функцијата $u'(x)v(x)$. Тогаш постои примитивна функција и на функцијата $u(x)v'(x)$ и важи: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Доказ. Од $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, имаме

$$\int [u(x)v(x)]'dx = \int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx.$$

Користејќи ги својствата на неопределениот интеграл, од последното се добива

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

од каде следува тврдењето на теоремата.

Пример 1. $\int x \ln x dx$.

Решение. Ставаме $u = \ln x$ и $dv = xdx$. Тогаш $du = \frac{dx}{x}$ и $v = \frac{x^2}{2}$, од каде добиваме дека

$\int x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$

Пример 2. $\int xe^x dx$.

Решение. Ставаме $u = x$ и $dv = e^x dx$. Тогаш $du = dx$и $v = e^x$, од каде добиваме дека

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$

Пример 3. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

Решение. Ставаме $u = \operatorname{arctg} x$ и $dv = xdx$. Тогаш $du = \frac{dx}{1+x^2}$и $v = \frac{x}{2}^2$, од каде што добиваме дека

$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$
$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C =$
$= \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$

Пример 4 $\int x \sin x dx.$

Решение. Ставаме $u = x$ и $dv = \sin x dx$. Тогаш

$du = dx$ и $v = -\cos x$, од каде добиваме дека

$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$

Пример 5. $\int x^2 \cos x dx.$

Решение. Ставаме $u = x^2$ и $dv = \cos x dx$. Тогаш

$du = 2xdx$ и $v = \sin x$, од каде добиваме дека

$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx.$

На интегралот од десната страна на равенството применуваме парцијална интеграција и заради примерот 4, добиваме

$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.$

Според тоа,

$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C =(x^2-2) \sin x+2x \cos x+ C.$

Пример 6. $\int x \sin 3x dx.$

Решение. Ставаме $u = x$ и $dv = \sin 3x dx$. Тогаш $du = dx$и $v = -\frac{\cos 3x}{3}$, од каде добиваме дека

$\int x \sin 3x dx = -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$

Пример 7. $\int e^x \sin x dx.$

Решение. Ставаме $u = e^x$ и $dv = \sin x dx$. Тогаш

$du = e^x dx$ и $v = -\cos x,$

од каде добиваме дека $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

На интегралот од десната страна на равенството применуваме парцијална интеграција $u_1 = e^x$ и $dv_1 = \cos x dx$ и добиваме

$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x + C.$

Според тоа, $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$, од каде што следува дека

$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$

Пример 8. $\int (x^2 + 2x + 3)e^{5x} dx.$

Решение. Дадениот интеграл ќе го запишеме во обликот

$\int (x^2 + 2x + 3)e^{5x} dx = \int x^2 e^{5x} dx + 2\int x e^{5x} dx + 3\int e^{5x} dx.$

Ставаме $I_1 = \int x^2 e^{5x} dx$, $I_2 = \int x e^{5x} dx$ $I_3 = \int e^{5x} dx$. Ако на секој од интегралите I_1 и I_2 одделно примениме парцијална интеграција добиваме

$I_1 = \int x^2 e^{5x} dx = \frac{25x^2 - 10x + 2}{125} e^{5x} + C \quad I_2 = \int x e^{5x} dx = \frac{5x-1}{25} e^{5x} + C.$

Бидејќи, $I_3 = \int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + C$, за дадениот интеграл конечно добиваме

$\int (x^2 + 2x + 3)e^{5x} dx = I_1 + 2I_2 + 3I_3 = \left(\frac{x^2}{25} + \frac{3}{25}x + \frac{22}{125}\right) e^{5x} + C.$

Пример 9. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$

Решение. Воведуваме парцијална интеграција $u = x, dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx$. Оттука $du = dx, v = -\operatorname{ctg} x$, па

$\int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x dx = -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$

Пример 10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение. Нека $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогаш $I = \int x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Ставаме $u = x$ и $dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Оттука $du = dx$и $v = -\sqrt{1-x^2}$, од каде што добиваме дека

$I = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{(1-x^2) dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - I.$

Според тоа $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C.$

Пример 11. $\int \sqrt{b^2 - a^2 x^2} dx,\ a, b > 0.$

Решение. Имаме $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2} dx = b\int \sqrt{1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2} dx$, па ставаме смена $t = \frac{ax}{b}$. Оттука $dx = \frac{b}{a} dt$. Според тоа $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2} dx = \frac{b^2}{a}\int \sqrt{1-t^2} dt$. Да означиме $I = \int \sqrt{1-t^2} dt$. Тогаш

$I = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t - \frac{1}{2}\left(-t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right) + C = \frac{1}{2} t\sqrt{1-t^2} + \frac{\arcsin t}{2} + C.$

Конечно $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2} dx = \frac{b^2}{a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ax}{b}\sqrt{1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2} + \frac{\arcsin \frac{ax}{b}}{2}\right) + C.$

Пример 12. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Решение. Воведуваме парцијална интеграција на следниов начин $u = x, dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Тогаш $du = dx, v = \sqrt{1+x^2}$, па

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx &= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx = \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \\
&= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx
\end{aligned}$$

Оттука $2\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$, т.е.
$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} - \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\right) + C$.

Пример 13. $\int \sqrt{a^2x^2 \pm b^2}dx,\ a, b > 0$.

Решение. На сличен начин како претходно ставаме смена $t = \frac{ax}{b}$ и $dx = \frac{b}{a}dt$, па $\int \sqrt{a^2x^2 \pm b^2}dx = \frac{b^2}{a}\int \sqrt{t^2 \pm 1}dt$.

Натаму

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{t^2 \pm 1}dt = \int \frac{t^2 \pm 1}{\sqrt{t^2 \pm 1}}dt = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2 \pm 1}}dt \pm \int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm 1}}dt = \\
&= \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm 1}\right| + \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2 \pm 1} - \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm 1}\right|\right) + C = \\
&= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2 \pm 1} + \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm 1}\right|\right) + C
\end{aligned}$$

Конечно,
$\int \sqrt{b^2 + a^2x^2}dx = \frac{b^2}{a}\frac{1}{2}\left(\frac{ax}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2} + \ln\left|\frac{ax}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2}\right|\right) + C$.

Пример 14 $\int \sqrt{4 - x^2}dx$.

Решение. $\int \sqrt{4 - x^2}dx = \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = 4\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} =$
$= 4\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2} - \int \sqrt{4 - x^2}dx$, т.е.
$\int \sqrt{4 - x^2}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$.

Пример 15. $\int \sqrt{3 - x^2}dx$.

Решение. $\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt =$

$= 3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + x\sqrt{3-x^2} - \int\sqrt{3-x^2}dx,$

т.е.$\int\sqrt{3-x^2}dx = \frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{3-x^2}}{2} + C.$

Пример 16.. $\int\sqrt{x^2+16}dx.$

Решение. $\int\sqrt{x^2+16}dx = \int\frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+16}} + 16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} =.$
$= x\sqrt{x^2+16} - \int\sqrt{x^2+16}dx + 16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$, откаде следува дека
$\int\sqrt{x^2+16}dx = \frac{x\sqrt{x^2+16}}{2} + 8\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right| + C,$

притоа за решавање на интегралот $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+16}}$се применува парцијална интеграција $u = x$ и $dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+16}}$.

Пример 17. $\int\sqrt{x^2-3}dx.$

Решение. Од $\int\sqrt{x^2-3}dx = \int\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-3}}dx = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-3}} - 3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} =$
$= x\sqrt{x^2-3} - \int\sqrt{x^2-3}dx - 3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$, следува дека
$\int\sqrt{x^2-3}dx = \frac{x\sqrt{x^2-3}}{2} - \frac{3\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|}{2} + C.$

Пример 18. $\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx,\ a \neq 0.$

Решение. 1) Нека $a > 0$. Тогаш имаме

$$\begin{aligned}&ax^2+bx+c = \left(\sqrt{a}x\right)^2 + 2\frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}x + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =\\ &= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a},\end{aligned}$$

па

$$\begin{aligned}&\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int\sqrt{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}}dx =\\ &= \sqrt{\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|}\int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|}}\right)^2 \pm 1}\ dx.\end{aligned}$$

Со смената $t = \frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|}}$ последниот интеграл се сведува на обликот $\int \sqrt{t^2 \pm 1}dt$.

2) Нека $a < 0$. Тогаш

$$ax^2 + bx + c = -\left|a\right|x^2 + bx + c =$$

$$= -\left(\left(\sqrt{|a|}x\right)^2 - 2\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\sqrt{|a|}x + \left(\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2\right) + \frac{b^2}{4\left|a\right|} + c =$$

$$= -\left(\sqrt{|a|}x - \frac{b\sqrt{a}}{2}\right)^2 + \frac{4\left|a\right|c + b^2}{4\left|a\right|} = \frac{4\left|a\right|c + b^2}{4\left|a\right|} \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{|a|}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}}}\right)^2\right)$$

па $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}dx = \sqrt{\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}} \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{|a|}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}}}\right)^2}\, dx.$

Со смената $t = \frac{\sqrt{|a|}x - \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}}}$ дадениот интеграл се сведува на обликот $\int \sqrt{1 - t^2}dt$.

Пример 19. $\int \sqrt{-x^2 - 5x + 3}dx$.

Решение. $\int \sqrt{-x^2 - 5x + 3}dx =$

$= \int \sqrt{\frac{(-5)^2+4\cdot 3}{4} - \left(x - \frac{(-5)}{2}\right)^2}\left(x - \frac{(-5)}{2}\right)' dx = \int \sqrt{\frac{37}{4} - \left(x + \frac{5}{2}\right)^2}dx =$

$= \frac{37}{8}\arcsin\frac{2x+5}{\sqrt{37}} + \frac{1}{4}\left(2x + 5\right)\sqrt{3 - 5x - x^2} + C.$

Пример 20. $\int \sqrt{x^2 + 4x + 3}dx$..

Решение. $\int \sqrt{x^2 + 4x + 3}dx = \int \sqrt{\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \frac{4^2-4\cdot 3}{4}}\left(x + \frac{4}{2}\right)' dx =$

$= \int \sqrt{\left(x + 2\right)^2 - 1}\, dx = \frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}\right| + C.$

Пример 21. $I_n = \int \frac{dx}{\left(ax^2+b\right)^n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a, b \neq 0$.

Решение. Со парцијална интеграција ќе го намалиме степенот на именителот за еден. Имаме

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(ax^2+b\right)^n} = \frac{1}{b}\int \frac{ax^2+b-ax^2}{\left(ax^2+b\right)^n}dx =$$
$$= \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}} - \frac{a}{b}\int \frac{x^2}{\left(ax^2+b\right)^n} = \frac{1}{b}I_{n-1} - \frac{a}{b}J.$$

Натаму во $J = \int \frac{x^2}{\left(ax^2+b\right)^n}$ воведуваме парцијална интеграција $u = x$, $dv = \frac{x}{\left(ax^2+b\right)^n}dx$.

Оттука $du = dx, v = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}}$, па

$$J = x\cdot\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}} - \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{1-n}\int\frac{1}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}}dx =$$
$$= \frac{1}{2a\left(1-n\right)}\cdot\frac{x}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}} - \frac{1}{2a\left(1-n\right)}I_{n-1}.$$

Конечно,
$I_n = \frac{1}{b}I_{n-1} - \frac{a}{b}J = \frac{1}{b}I_{n-1} - \frac{a}{b}\left(\frac{1}{2a(1-n)}\cdot\frac{x}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}} - \frac{1}{2a(1-n)}I_{n-1}\right) =$
$= \frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{2(1-n)}\right)I_{n-1} - \frac{1}{2b(1-n)}\cdot\frac{x}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}}$. Оваа постапка се применува на I_{n-1}, понатаму на I_{n-2}, итн. се додека не се добие интеграл од обликот $\int\frac{dx}{ax^2+b}$.

Пример 22. $I_n = \int\frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$; $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{1\right\}$, $a\neq 0$.

Решение. 1) $a>0$
$I_n = \int\frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx = \int\frac{1}{\left(\left(\sqrt{a}x\right)^2+2\frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}x+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+c\right)^n}dx =$
$= \int\frac{1}{\left(\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\right)^n}dx = \int\frac{1}{\left(\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)^n}dx.$

Ако $\frac{b^2-4ac}{4a}>0$, тогаш со смената $t = \frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}$ се сведува на обликот $\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)^n}$.

Ако, пак, $\frac{b^2-4ac}{4a}<0$ со смената $t = \frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\left|\frac{b^2-4ac}{4a}\right|}}$ се сведува на обликот $\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^n}$. За $\frac{b^2-4ac}{4a}=0$ се добива обликот $\int\frac{dt}{\left(st+k\right)^{2n}}$.

2) $a<0$. На сличен начин интегралот се трансформира во

обликот $\int \frac{dt}{(at^2+b)^n}$.

Пример 23. $I_n = \int \frac{a_1x+b_1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$,$a_1, a \neq 0$.

Решение.

$I_n = \int \frac{a_1x+b_1}{(ax^2+bx+c)^n}dx = a_1\frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b+\frac{2ab_1}{a_1}-b}{(ax^2+bx+c)^n}dx =$

$$= \frac{a_1}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx + \frac{a_1}{2a}\left(\frac{2ab_1}{a_1} - b\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} =$$
$$= \frac{a_1}{2a}J_1 + \frac{a_1}{2a}\left(\frac{2ab_1}{a_1} - b\right)J_2.$$

Во J_1 ставаме смена $t = ax^2 + bx + c$. Оттука $dt = (2ax + b)\,dx$, па интегралот добива облик $\int \frac{dt}{t^n}$.

Интегралот J_2 е од облик кој претходно го пресметавме.

Пример 24. $\int \frac{3x+5}{(4x^2+7x-3)^3}dx$.

Решение.

$\int \frac{3x+5}{(4x^2+7x-3)^3}dx = 3\int \frac{8x+7+8\frac{5}{3}-7}{(4x^2+7x-3)^3}dx =$

$$\begin{aligned}
&=3\int\frac{8x+7}{\left(4x^2+7x-3\right)^3}dx+3\left(\frac{40}{3}-7\right)\int\frac{1}{\left(4x^2+7x-3\right)^3}dx=\\
&=3J_1+19\int\frac{1}{\left(\left(2x\right)^2+2\frac{7}{4}2x+\left(\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{16}-3\right)^3}dx=\\
&=3J_1+19\int\frac{1}{\left(\left(2x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{97}{16}\right)^3}dx=\\
&=3J_1+19\frac{1}{\left(\frac{97}{16}\right)^3}\int\frac{1}{\left(\left(\frac{2x+\frac{7}{4}}{\sqrt{\frac{97}{16}}}\right)^2-1\right)^3}dx=\\
&=3J_1+19\left(\frac{16}{97}\right)^3\int\frac{1}{\left(\left(\frac{8x+7}{\sqrt{97}}\right)^2-1\right)^3}dx=\\
&=3J_1+19\left(\frac{16}{97}\right)^3 I.
\end{aligned}$$

Во J_1 ќе ставиме смена $t=4x^2+7x-3$. Оттука $dt=(8x+7)\,dx$, па

$J_1=\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{2t^2}+C=-\frac{1}{2\left(4x^2+7x-3\right)^2}+C.$

Во I ставаме смена $y=\frac{8x+7}{\sqrt{97}}$, па $dx=\frac{\sqrt{97}}{8}dx$ и $I=\frac{\sqrt{97}}{8}\int\frac{dy}{\left(y^2-1\right)^3}=\frac{\sqrt{97}}{8}I_3$.

За I_3 имаме

$I_3=\int\frac{dy}{\left(y^2-1\right)^3}=-\int\frac{y^2-1-y^2}{\left(y^2-1\right)^3}dy=-\int\frac{y^2-1}{\left(y^2-1\right)^3}dy+\int\frac{y^2}{\left(y^2-1\right)^3}dy=$

$=-\int\frac{1}{\left(y^2-1\right)^2}dy+\int\frac{y^2}{\left(y^2-1\right)^3}dy.$

Во последниот интеграл воведуваме парцијална интеграција

$u=y, dv=\frac{y}{\left(y^2-1\right)^3}dy$. Оттука

$du=dy, v=-\frac{1}{4\left(y^2-1\right)^2}$, па $\int\frac{y^2}{\left(y^2-1\right)^3}dy=-\frac{y}{4\left(y^2-1\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\left(y^2-1\right)^2}$.

Според тоа

$I_3=-\int\frac{dy}{\left(y^2-1\right)^2}-\frac{y}{4\left(y^2-1\right)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\left(y^2-1\right)^2}=-\frac{y}{4\left(y^2-1\right)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{dy}{\left(y^2-1\right)^2}=$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{y}{4(y^2-1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{y^2-1-y^2}{(y^2-1)^2}dy = \\
&= -\frac{y}{4(y^2-1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{y^2-1}{(y^2-1)^2}dy - \frac{3}{4}\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy = \\
&= -\frac{y}{4(y^2-1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2-1}dy - \frac{3}{4}\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy = \\
&= -\frac{y}{4(y^2-1)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{3}{4}\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy.
\end{aligned}
$$

Во интегралот $\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy$ воведуваме парцијална интеграција $u = y, dv = \frac{y}{(y^2-1)^2}dy$.

Оттука $du = dy, v = -\frac{1}{2(y^2-1)}$, па

$\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy = -\frac{y}{2(y^2-1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2-1} = -\frac{y}{2(y^2-1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.$

Сега,

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{y}{4(y^2-1)^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{3}{4}\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy = \\
&= -\frac{y}{4(y^2-1)^2} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{3}{4}\left(-\frac{y}{2\,(y^2-1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) = \\
&= -\frac{y}{4(y^2-1)^2} + \frac{3y}{8\,(y^2-1)} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.
\end{aligned}
$$

Конечно,

$$\int \frac{3x+5}{\left(4x^2+7x-3\right)^3}dx = 3J_1 + 19\left(\frac{16}{97}\right)^3 I =$$
$$= -\frac{3}{2\left(4x^2+7x-3\right)^2} +$$
$$+ 19\left(\frac{16}{97}\right)^3 \frac{\sqrt{97}}{8}\left(-\frac{y}{4\left(y^2-1\right)^2} + \frac{3y}{8\left(y^2-1\right)} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right) + C =$$
$$= -\frac{3}{2\left(4x^2+7x-3\right)^2} -$$
$$-\frac{19\cdot 8^3\sqrt{97}}{97^3}\left(\frac{\frac{8x+7}{\sqrt{97}}}{4\left(\left(\frac{8x+7}{\sqrt{97}}\right)^2-1\right)^2} - \frac{3\frac{8x+7}{\sqrt{97}}}{8\left(\left(\frac{8x+7}{\sqrt{97}}\right)^2-1\right)} - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{\frac{8x+7}{\sqrt{97}}-1}{\frac{8x+7}{\sqrt{97}}+1}\right|\right) + C.$$

Пример 25. $I_n = \int \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Во $I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$ воведуваме парцијална интеграција $u = \sin^{n-1} x, dv = \sin x dx$. Оттука

$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, v = -\cos x$, па

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \left(1-\sin^2 x\right) dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx =$$
$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n.$$

Според тоа, $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Значи почетниот интеграл е сведен на интеграл со степен на $\sin x$ понизок за два. Продолжувајќи ја оваа постапка натаму, степенот се намалува уште за два, итн. Така, ако n е парен број постапката ќе заврши со $\int dx$, а ако n е непарен ќе заврши со $\int \sin x dx$.

Пример 26 $\int x^n \ln x dx$, $n \in \mathbb{R}$.

Решение. 1) Нека $n \neq -1$. Ставаме парцијална интеграција $u = \ln x, dv = x^n dx$. Оттука $du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, па

$$\begin{aligned}\int x^n \ln x dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} + C.\end{aligned}$$

2) $n=-1$. Повторно со парцијалната интеграција $u=\ln x, dv=\frac{1}{x}dx$ добиваме $du=\frac{dx}{x}, v=\ln|x|$, па $\int\frac{\ln x}{x}dx=\ln x\ln|x|-\int\frac{\ln|x|}{x}dx$. Но $x>0$ (само за тие x функцијата $\ln x$ е дефинирана) имаме $\ln|x|=\ln x$, па $2\int\frac{\ln x}{x}dx=\ln^2 x+2C$, т.е. $\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

1.1.5 Пресметување на некои важни типови интеграли

I. Ако $\displaystyle\int f(x)dx=\varphi(x)+c$, тогаш за $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, важи

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\varphi(ax+b)+c.$$

Пример 1. $\displaystyle\int(ax+b)^r dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{r+1}}{r+1}+c,\ a\neq 0,\ r\neq -1.$

Пример 2. $\displaystyle\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c.$

Пример 3. $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{1}{x^2+2x+1+1}dx=$

$\displaystyle=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=\operatorname{arctg}(x+1)+c.$

II. Ако $f:D\to F$ е диференцијабилна функција на D, $f(x)\neq 0$, за секој $x\in D$, тогаш

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c.$$

Пример 4. $\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx =$
$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c.$

III. При интегрирање на некои тригонометриски функции, често се користат следниве равенства:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

Пример 5. $\int \sin^2 x dx =$

$$= \int \sin x \sin x dx = \int \frac{1}{2}[\cos(x-x)-\cos(x+x)]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\cos 0 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos 2x dx\right] = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right] + c.$$

Пример 6. $\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cos x dx =$

$$= \int \frac{1}{2}\cos(x-x)+\cos(x+x)]dx = \int \frac{1}{2}(\cos 0 + \cos 2x)dx =$$

$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right).$ (Претходно веќе го имаме решено).

Пример 7. $\int \sin 3x \cos 2x dx =$

$$= \int \frac{1}{2}[\sin(3x-2x)+\sin(3x+2x)]dx = \frac{1}{2}\int(\sin x + \sin 5x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin x dx + \frac{1}{2}\int \sin 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(-\cos 5x) + c = \frac{-\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + c.$$

IV. При интегрирање на тригонометриските функции честа смена е и $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Во тој случај, во подинтегралната функција $\sin x$ и $\cos x$ се изразуваат преку $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ и се користи смена $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.
Користејќи дека: $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$ и $\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, добиваме

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} \text{ т.е. } \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \text{ и}$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} \text{ т.е. } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Уште, $\operatorname{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\dfrac{2t}{t^2+1}}{\dfrac{1-t^2}{t^2+1}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$ т.е. $\operatorname{tg}x = \dfrac{2t}{1-t^2}$
и $\operatorname{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ т.е. $\operatorname{ctg}x = \dfrac{1-t^2}{2t}$

Од $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ имаме $\dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$ па $dx = 2\dfrac{1}{1+t^2}dt$.

Пример 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot 2\frac{1}{1+t^2}dt =$

$\displaystyle = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$

1.2 Определен интеграл

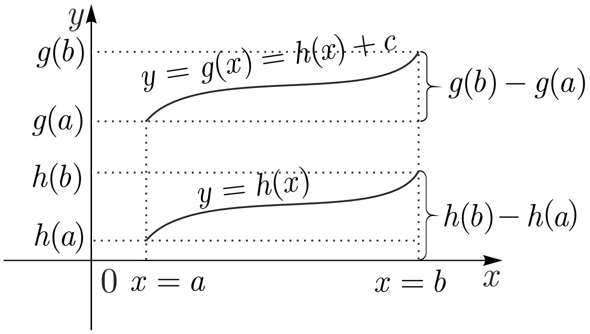
1.2.1 Определен интеграл како нараснување на примитивна функција

Нека $g(x)$ и $h(x)$ се две произволни примитивни функции на дадена функција $f(x)$, на $[a, b]$. Тогаш заради теоремата, имаме дека $g(x) - h(x) = c, \forall x \in [a, b]$, каде c е константа. Тоа значи дека и $g(a) - h(a) = c$ и $g(b) - h(b) = c$, од каде, одземајќи ги двете равенства, се добива:

$$\begin{aligned} & g(b) - h(b) - (g(a) - h(a)) = 0 \\ & g(b) - h(b) - g(a) + h(a) = 0, \ \text{т.е.} \\ & g(b) - g(a) = h(b) - h(a) \end{aligned}$$

Последното значи дека **нараснувањето на кои било две примитивни функции, кога аргументот се менува од $x = a$ до $x = b$, е еднакво.**

Геометриски гледано:



Заради погорната дискусија, сега може да ја дадеме следната дефиниција.

Дефиниција. Нараснувањето на која било примитивна функција на функцијата $f(x)$, кога аргументот се менува од $x = a$ до $x = b$, се вика **определен интеграл**. Се користи следната ознака:

$$\int_a^b f(x)dx$$

и читаме "интеграл од a до b, еф од икс де икс".

Од дефиницијата на определен интеграл следува формула за пресметување на определен интеграл т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a),$$

каде $g(x)$ е примитивна функција за $f(x)$, a е долна граница на интегрирање, а b е горна граница на интегрирање.

Често, пишуваме

$$g(b) - g(a) = g(x)\Big|_a^b.$$

Значи, за да пресметаме $\int_a^b f(x)dx$, потребно е:

1) да се најде примитивна функција $g(x)$ за $f(x)$

2) во примитивната функција наместо x, да се заменат вредностите на горните и долните граници т.е. $g(b)$ и $g(a)$

3) да се одземат добиените резултати т.е. да се пресмета $g(b) - g(a)$.

Пример 1. $\int\limits_1^2 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

1.2.2 Определен интеграл како гранична вредност на збир

Дефиниција. За $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ множеството точки

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

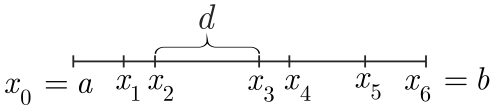
такви што

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

се нарекува **поделба на сегментот** $[a, b]$.

Најголемиот од позитивните броеви $x_i - x_{i-1}$ се нарекува **дијаметар на поделбата** и го означуваме со d.

Геометриски:



Дефиниција. Нека $f : x \mapsto f(x)$, $x \in [a, b]$ е ограничена функција. Збирот

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

каде што $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ е некоја поделба на сегментот $[a, b]$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ се произволно избрани точки, се нарекува **Риманов интегрален збир**.

Јасно е дека, Римановиот интегрален збир зависи од бројот на подинтервали т.е. од n, на поделбата $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ и од броевите ξ_i.

Теорема 1. Ако постои

$$\lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

за секоја поделба $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ на сегментот $[a, b]$ за секој избор на броеви $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, тогаш таа гранична вредност е определен интеграл на функција $f(x)$ на $[a, b]$ т.е.

$$g(b) - g(a) = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

каде $g(x)$ е примитивна функција за $f(x)$, и формулата важи за секоја поделба P на $[a, b]$ и секој избор на точки ξ_i од $[x_{i-1}, x_i]$.

Функцијата која има определен интеграл на $[a, b]$ се нарекува **интеграбилна на** $[a, b]$.

Интеграбилни функции на $[a, b]$ се:

1) непрекинати функции на $[a, b]$

2) монотони функции на $[a, b]$

3) ограничени функции со конечен број прекини на $[a, b]$.

1.2.3 Својства на определен интеграл

Својство 1. Нека $f(x)$ е интеграбилна на $[a, b]$, $\lambda \in\mathbb{R}$. Тогаш λf е интеграбилна на $[a, b]$, и важи

$$\int\limits_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Својство 2. Нека $f(x), g(x)$ се интеграбилни на $[a, b]$. Тогаш и $f+g$ е интеграбилна на $[a, b]$ и важи

$$\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Својство 3. $$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Својство 4. $$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

Својство 5. Нека $f(x)$ е интеграбилна на $[a, b]$ и нека $c \in (a, b)$. Тогаш

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

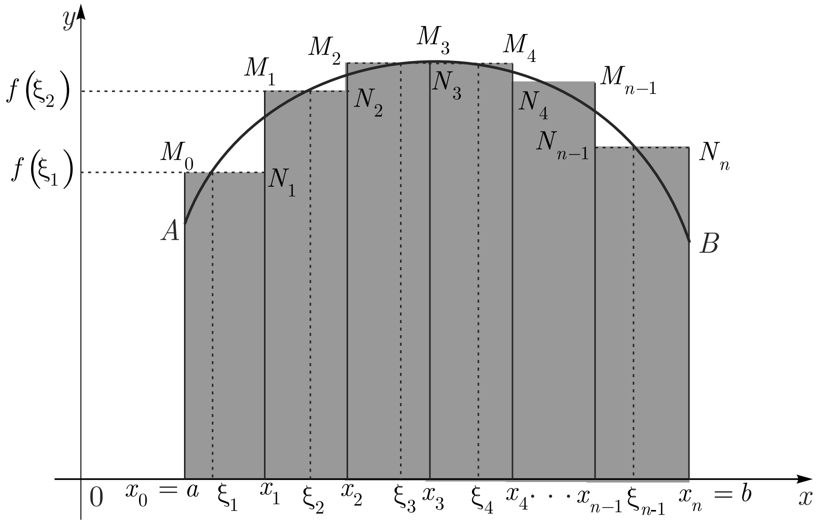
Својство 6. $$\int\limits_a^b dx = b - a.$$

Својство 7. Нека $f(x)$, $g(x)$ се интеграбилни на $[a, b]$ и нека $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Тогаш

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

1.2.4 Геометриско значење на определениот интеграл

Нека $\Gamma_f = \{(x, f(x) \mid x \in [a, b]\}$ е график на функцијата $y = f(x)$ и $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.



Задача. Да се пресмета плоштината на делот од рамнината што е ограничен со делот од функцијата помеѓу A и B, правата $x = a$, $x = b$ и $x-$оската.

Решение. Нека $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ е поделба на $[a, b]$ и нека $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогаш $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ претставува плоштина на правоаголник со висина $f(\xi_i)$ и основа $(x_i - x_{i-1})$, а збирот $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ претставува плоштината на фигурата, добиена од сите вака формирани правоаголници. На сликата тоа е шрафираниот дел. Значи, **интегралниот збир на $f(x)$ на $[a, b]$ е плоштината на дел од рамнината ограничен со полигоналната линија $M_0N_1M_1N_2M_2N_3M_3 \ldots N_{n-1}M_{n-1}N_n$, правата $x = a$, $x = b$ и $x-$оската.** Ако бројот на точките од поделбата $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ т.е. бројот n се зголемува, тогаш дијаметарот d се намалува и од цртежот е видливо дека полигоналната линија се помалку се разликува од делот на функцијата меѓу A и B т.е. ако пуштиме $n \to \infty$ т.е. $d \to 0$, добиваме

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \text{ бараната плоштина},$$

$$\text{т.е.} \quad \int_a^b f(x)dx = \text{ барана плоштина.}$$

1.2.5 Примена на определен интеграл

I. Пресметување плоштина

Нека $y = f(x), x \in [a, b]$ е интеграбилна и позитивна т.е. $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. Тогаш

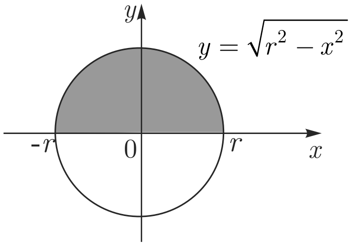
$$P_G = \int_a^b f(x)dx,$$

каде

$$G = \{\ (x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Пример 1. Да се пресмета плоштина на круг со радиус r.

Решение. Равенката на кружница со радиус r и центар во $(0, 0)$ е $x^2 + y^2 = r^2$, т.е. $y^2 = r^2 - x^2$, па $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.



Според формулата, бараната плоштина е $P = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$.

Со методот на замена добиваме $x = r\sin t,\ dx = r\cos t dt$ и за

$x = -r, t = \arcsin\left(\dfrac{-r}{r}\right) = \arcsin(-1) = \dfrac{-\pi}{2}$

а за

$x = r, t = \arcsin\left(\dfrac{r}{r}\right) = \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Значи, бараната плоштина е

$P = 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\, r\cos t dt$

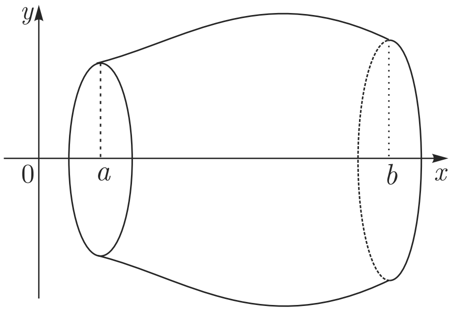
$$= 2r^2 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t dt = 2r^2 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = = \frac{2r^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= r^2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) - \left[\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(2\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)\right]\right] =$$

$$= r^2 \left[\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} - 0\right] = r^2 2 \cdot \frac{\pi}{2} = r^2\pi.$$

II. Пресметување на волумен на вртливо тело

Нека $y = f(x), x \in [a, b]$ е непрекината и позитивна функција. Ако криволинискиот трапез, чии страни се сегментот $[a, b]$, делови од правите $x = a$ и $x = b$ и кривата $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, се врти околу $x-$оската се добива вртливо тело.



Неговиот волумен е

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример 1. Да се пресмета волумен на топка со радиус r.

Решение. Топката се добива со вртење на $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ околу

$x-$оската и тоа на делот $[-r, r]$. Па,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_{-r}^{r} f^2(x)dx = \pi \int\limits_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \\ &= \pi \left(\int\limits_{-r}^{r} r^2 dx - \int\limits_{-r}^{r} x^2 dx \right) = \pi \left[r^2 x \Big|_{-r}^{r} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^{r} \right] = \\ &= \pi \left[r^2 \cdot r - r^2(-r) - \left(\frac{r^3}{3} - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right] = \\ &= \pi \left[r^3 + r^3 - \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} \right) \right] = \pi \left[2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right] = \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

1.3 Несвојствен интеграл

Нека функцијата $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ е интеграбилна на секој затворен интервал $[a, b]$. Тогаш функцијата

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$$

е непрекината на $[a, \infty)$.

Дефиниција. Ако границата $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ постои и е конечен број, велиме дека функцијата $f(x)$ е **интеграбилна на** $[a, \infty)$ **во несвојствена (неправа) смисла**, а реалниот број $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ се нарекува **несвојствен интеграл на** $f(x)$ **на** $[a, \infty)$**.**

Значи,

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$$

Ако $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ е интеграбилна на секој интервал $[a, b]$, тогаш функцијата $F(x) = \int\limits_{x}^{b} f(t)dt$ е непрекината на $(-\infty, b]$.

Дефиниција. Ако границата $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ постои и е конечен број, велиме дека функцијата $f(x)$ е **интеграбилна на** $(-\infty, b]$ **во несвојствена (неправа) смисла**, а реалниот број $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ се нарекува **несвојствен (неправ) интеграл на** $f(x)$ **на** $(-\infty, b]$. Значи,

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \int\limits_{x}^{b} f(t)dt.$$

Дефиниција. Ако функцијата $f(x)$ е определена на $(-\infty, \infty)$ и интеграбилна на интервалите $(-\infty, a]$ и $[a, \infty)$ за некој реален број a, тогаш

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Пример 1. $I = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{0}^{x} e^{-t}dt =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} (-e^{-t}) \Big|_{0}^{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (-e^{-x} + e^{0}) = \lim\limits_{x\to\infty} (1 - e^{-x}) = 1 - 0 = 1.$

Несвојствениот интеграл на $(-\infty, \infty)$ на функцијата $f(x)$ се разликува од таканаречената **главна вредност** $(V.P.)$, која се определува на следниот начин:

$$(V.P.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int\limits_{-x}^{+x} f(t)dt.$$

Пример 2. Нека $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

$$
\begin{aligned}
&(V.P.)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{x\to\infty}\int\limits_{-x}^{+x}\frac{t}{1+t^2}dt=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{+x}\frac{2t}{1+t^2}dt=\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)\Big|_{-x}^{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}[\ln(1+x^2)-\ln(1+(-x)^2)]=\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\frac{1+x^2}{1+x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln 1=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}0=\frac{1}{2}\cdot 0=0.
\end{aligned}
$$

Несвојствениот интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ не постои, бидејќи $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ не постои. Навистина:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{x\to\infty}\int\limits_{0}^{x}\frac{t}{1+t^2}dt=\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}(\ln(1+t^2))\Big|_{0}^{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}[\ln(1+x^2)-\ln 1]=\\
&=\frac{1}{2}\cdot\infty=\infty.
\end{aligned}
$$

Дефиниција. Ако функцијата $f(x)$ е определена на полуотворениот интервал $[a,b)$, интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $[a,b)$ и ако постои конечна граница $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$, тогаш овој реален број се нарекува **несвојствен (неправ) интеграл на** $f(x)$ **на** $[a,b)$ и се означува со $\int\limits_{a}^{b^-}f(x)dx$. Значи,

$$
\int\limits_{a}^{b^-}f(x)dx=\lim_{x\to b^-}\int\limits_{a}^{x}f(t)dt.
$$

Дефиниција. Ако функцијата $f(x)$ е определена на полуотворениот интервал $(a,b]$, интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $(a,b]$ и ако постои конечна граница $\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$, тогаш овој реален број се нарекува **несвојствен (неправ) интеграл на** $f(x)$ **на** $(a, b]$ и се означува со $\int\limits_{a^+}^{b} f(x)dx$. Значи,

$$\int\limits_{a^+}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int\limits_{x}^{b} f(t)dt.$$

Дефиниција. За функцијата $f(x)$ определена на (a, b) и интеграбилна на $(a, c]$ и $[c, b)$

$$\int\limits_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \int\limits_{a^+}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b^-} f(x)dx.$$

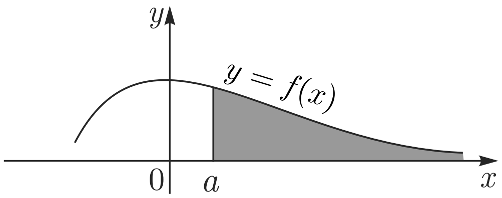
Пример 3. $\int\limits_{0^+}^{1} \ln x dx = \lim\limits_{x\to 0^+} \int\limits_{x}^{1} \ln t dt =$

$$= \lim_{x\to 0^+} (t\ln t - t)\Big|_x^1 = \lim_{x\to 0^+} [1\ln 1 - 1 - (x\ln x - x)] =$$

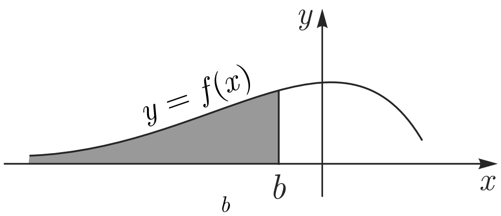
$$= \lim_{x\to 0^+} (-1 - x\ln x + x) = -1 - \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} + 0 =$$

$$= -1 - \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = -1 + \lim_{x\to 0^+} x = -1 + 0 = -1.$$

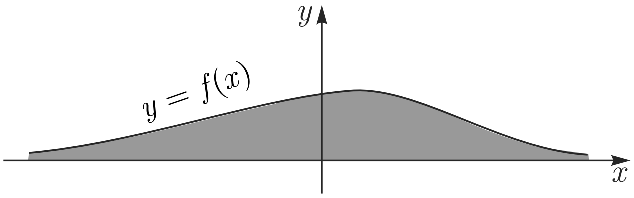
Не е тешко да се воочи и геометриското толкување на несвојствените интеграли, доколку постојат. На цртежот, плоштините на шрафираните делови се всушност посочените несвојствени интеграли.



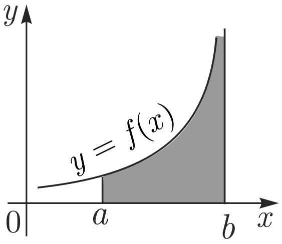
$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$



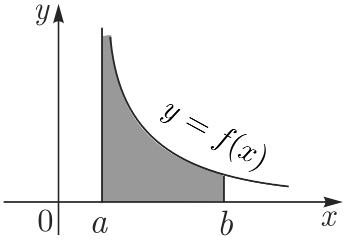
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$



$$\int_{a}^{b^-} f(x)dx$$



$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx$$

2

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

2.1 Општи поими на обични диференцијални равенки

2.1.1 Дефиниција на обични диференцијални равенки

Нека y е непозната функција од независна променлива x, а

$$y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$$

се нејзините изводи по x. Равенката

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1'}$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1''}$$

се нарекува **обична диференцијална равенка**.

Секоја функција $y = f(x)$ која ја задоволува диференцијалната равенка (1) се нарекува **решение** или **интеграл** на равенката (1).

Графикот на функцијата $y = f(x)$ се нарекува **интегрална крива**.

Да се реши равенката (1) значи да се најдат сите функции y кои идентички ја задоволуваат равенката (1).

Највисокиот извод кој се појавува во диференцијалната равенка се нарекува **ред** на равенката. Така, равенката (1) е од $n-$ти ред.

Забелешка. Можно е во една диференцијална равенка од $n-$ти ред, да не се појавуваат независно променливата x, функцијата y или некои од нејзините изводи освен $n-$тиот извод.

Пример 1. Равенката $y^{(4)} = \sqrt{y'''}$ претставува една диференцијална равенка од 4−ти ред. Да се реши оваа равенка, значи да се најдат сите функции $y = f(x)$ такви што квадратниот корен од нивниот 3−ти извод е еднаков на нивниот 4−ти извод.

Да провериме дека

$$y = \frac{8}{60}\frac{x^5}{2^5} + \frac{x^2}{2} + x \tag{$*$}$$

е едно решение на дадената равенка.

Навистина,
$$y' = \frac{x^4}{48} + x + 1,\ y'' = \frac{x^3}{12} + 1, \quad y''' = \frac{x^2}{4}, \quad y^{(4)} = \frac{x}{2}, \quad \sqrt{y'''} = \frac{x}{2}$$

т.е. $(*)$ ја задоволува $y^{(4)} = \sqrt{y'''}$.

Слично се проверува дека функциите:

$$y = \frac{8}{60}\left(\frac{x}{2} + c_1\right)^5 + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4 \tag{$\triangle$}$$

каде c_1, c_2, c_3, c_4 се произволни реални броеви ја задоволуваат равенката $y^{IV} = \sqrt{y'''}$ т.е. бесконечно многу функции, сите зададени со $(\triangle)$, се решенија на дадената равенка.

Многу проблеми од природните науки се сведуваат на решавање на диференцијални равенки.

Пример 2. Во делот диференцијално сметање, (од книга 1), разгледавме еден пример на размножување на колонија микроорганизми. Притоа, ако почнувајќи од време x до време $x + \Delta x$ (изминатото време на набљудување на процесот е Δx) бројноста на микроорганизмите од $m_0 = m(x)$ (бројност во моментот на времето x) се зголеми на $m_1 = m(x + \Delta x)$ (бројност во момент на времето $x + \Delta x$), средната брзина на размножување на микроорганизмите е количник од промените на бројноста на микроорганизмите и времето на набљудување на процесот Δx т.е.

$$\overline{V}_{\text{размножување}} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Видовме дека брзината на размножување во моментот на времето x, при бројност $m(x)$, се добива со математичкиот процес на гранична вредност кога $\Delta x \to 0$ и е

$$V_{\text{момент}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'(x) = \frac{dm}{dx}.$$

Така, ако го знаеме законот на размножување $m(x)$, ќе ја пресметаме и моментната брзина на размножувањето.

Но, во вакви случаи, најчесто е позната почетната бројност на микроорганизмите т.е. $m_0 = m(x)$ и од интерес е пресметувањето на бројноста $m_1 = m(x + \Delta x)$ по некое изминато време Δx, т.е. се бара да се определи функцијата $m(x)$ која ја дава зависноста на бројноста на микроорганизмите од изминато време x.

Бидејќи разгледуваме една колонија микроорганизми која живее во идеални услови, бројот

$$m(x + \Delta x) - m(x) = M - N,$$

каде N е број на новородени, а M е број на умрени микроорганизми во период од Δx време.

Бројот N на новородените зависи од времето Δx и од бројот на родителите $m(x)$ и во општ случај е некоја функција F од тие величини т.е. $N = F(\Delta x, m(x))$. Но, од искуство, е познато дека е најчест линеарниот случај т.е. N да е правопропорционално со времето и бројноста т.е. $N = k_1 \cdot \Delta x \cdot m(x)$, каде k_1 е коефициент на размножување и тој е посебна карактеристика за секој вид. Аналогно, $M = k_2 \cdot \Delta x \cdot m(x)$, каде k_2 е коефициент на изумирањето за тој вид и обично $k_2 < k_1$. Така, добиваме

$$\begin{aligned}&\Delta m = N - M = k_1 \cdot \Delta x \cdot m(x) - k_2 \cdot \Delta x \cdot m(x) = \\ &= (k_1 - k_2)\Delta x \cdot m(x).\end{aligned}$$

Разликата $k_1 - k_2 = k$ се нарекува **коефициент на прираснувањето на видот**. или **коефициент на природно растење на видот**. Добиваме, $\dfrac{\Delta m}{\Delta x} = k \cdot m(x)$, од каде заради дискусијата на почетокот имаме:

$$\begin{aligned}&\overline{V}_{\text{размножување}} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = k \cdot m(x) \text{ и} \\ &V_{\text{момент}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k \cdot m(x) \text{ т.е.} \\ &V_{\text{момент}} = m'(x) = \frac{dm}{dx} = k \cdot m(x) \text{ т.е.} \\ &m'(x) = k \cdot m(x) \text{ или кратко } m' = k \cdot m,\end{aligned}$$

ако независно променливата x ја испуштиме во запишувањето.

Добиената равенка $m' = k \cdot m$ или $\left(\dfrac{dm}{dx} = k \cdot m\right)$ претставува една диференцијална равенка, по непозната функција $m(x)$, и таа го опишува процесот на идеално растење. Равенката е од прв ред и се проверува дека нејзиното решение е $m(x) = m_0 e^{kx}$, каде m_0 е почетната бројност на микроорганизмите т.е. во $x = 0$, а $m(x)$ е бројност по изминато време $\Delta x = x$.

Навистина, за $m(x) = m_0 e^{kx}$, $m'(x) = m_0 \cdot k e^{kx} = k \cdot m_0 e^{kx} = km(x)$ т.е. $m'(x) = k \cdot m(x)$, $\quad (m' = k \cdot m)$.

Забелешка. Решението на добиените равенки е познато под името Малтусов закон и веќе го сретнавме во некои претходни примери т.е. до него дојдовме на друг начин (види бројот e).

Пример 3. Да се најде законот за поминат пат s, во зависност од времето x, на некое тело кое се движи праволиниски и нерамномерно, и за кое се знае дека брзината е дадена функција од времето, т.е. брзината на движењето на телото во зависност од времето x е позната функција $f(x)$.

Од она што досега сме го научиле ([7])
$\overline{V} = \dfrac{\Delta s}{\Delta x}$ т.е. $V_{\text{момент}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta x} = s'(x) = \dfrac{dx}{dx}$.

Во нашиот пример законот за $V_{\text{момент}}$ е даден т.е. $V_{\text{момент}} = f(x)$ па добиваме $s'(x) = f(x)$ т.е. $\dfrac{ds}{dx} = f(x)$ е равенката која го опишува процесот на едно праволиниско и нерамномерно движење. Со решавање на равенката се добива дека:

$$s(x) = s_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

каде s_0 е почетната положба на телото, која одговара на почетното време x_0.

Постојат уште многу примери од природните науки, но исто толку и од економските или некои други општествени науки. Воопшто, секаде каде што има некои зависности на една од друга величина, т.е. функција која го опишува некој процес и ако таа функција е непозната, најчесто нејзиното наоѓање е со помош на решавање на диференцијални равенки кои го опишуваат тој процес.

2.1.2 Интеграли на диференцијални равенки

Нека е дадена диференцијалната равенка од $n-$ти ред,

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

Се покажува дека постои една фамилија на криви линии во рамнината дефинирани со равенката

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \tag{2}$$

или во облик

$$\Psi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \tag{3}$$

која содржи n произволни константи $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такви што идентички ја задоволуваат равенката (1) за произволни вредности на константите $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Равенките (2) и (3) претставуваат **општ интеграл** на диференцијална равенка (1), односно **интегрална крива** која зависи од $n-$параметри $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Ако во (2) или (3) една или повеќе од произволните константи $c_1, c_2, \ldots, c_n$ добијат одредени (конкретни) вредности, тогаш равенката (2) или (3) претставува **партикуларен интеграл** на равенката (1).

Значи, партикуларните интеграли на некои диференцијални равенки се добиваат од општиот интеграл со давање на конкретни вредности на константите $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Константите $c_1, c_2, \ldots, c_n$ се нарекуваат **интеграциони константи**.

Произволните константи $c_1, c_2, \ldots, c_n$ во (2) или (3) може да се одредат од условот функцијата y и нејзините изводи $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ да добијат одредени вредности $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ за $x = x_0$. Овие вредности $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ за $x = x_0$, се нарекуваат **почетни вредности** или **почетни услови**.

2.1.3 Формирање на диференцијална равенка

Нека е дадена фамилијата криви линии во рамнината, дефинирани со равенките:

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \tag{1}$$

која зависи од $n-$произволни константи, параметри $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Ако во (1) земаме извод по x $n-$пати, сметајќи дека y е функција од x, ќе добиеме $n-$равенки. Со елиминација на $c_1, c_2, \ldots, c_n$ од $n-$те добиени равенки и од (1) ќе добиеме равенка од облик:

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

Притоа, од начинот на добивање, јасно е дека (1) ќе претставува решение на диференцијална равенка (2).

Пример 1. Сите прави кои минуваат низ точката (a, b), се дадени со равенката $y - b = k(x - a), k \in\mathbb{R}$.

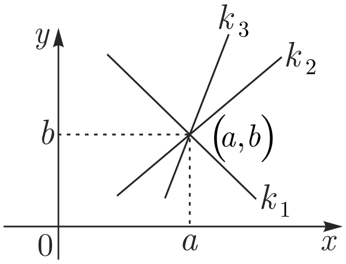
Ако побараме извод во горната равенка по x, добиваме

$$y' - 0 = k(1 - 0) \quad \text{т.е.} \quad y' = k.$$

Од системот равенки

$$\begin{cases} y - b = k(x - a) \\ y' = k \end{cases}$$

со елиминација на k, се добива, $y - b = y'(x - a)$, т.е. диференцијална равенка од прв ред, која ги опишува сите прави што минуваат низ една точка (a, b) и чиј општ интеграл (решение) е $y - b = k(x - a)$.



Пример 2. Фамилијата на кружници дефинирани со равенката

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{$*$}$$

зависи од три параметри a, b, r.

Затоа, во равенката $(*)$ ќе пресметаме извод по x, (сметајќи дека y е функција што зависи од x) до 3−ти ред. На тој начин ги добиваме следните три равенки:

$$2(x - a) + 2(y - b)y' = 0 \text{ т.е. } (x - a) + (y - b)y' = 0 \tag{$1'$}$$

$$1 + y' \cdot y' + (y - b)y'' = 0 \text{ т.е } 1 + y'^2 + (y - b)y'' = 0 \tag{$2'$}$$

$$2y' \cdot y'' + y'y'' + (y - b)y''' = 0 \text{ т.е. } 3y'y'' + (y - b)y''' = 0. \tag{$3'$}$$

Со елиминација на b од $(3')$ и замена во $(2')$, добиваме диференцијална равенка $y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$, чие решение се сите кружници зададени со $(*)$.

2.2 Обични диференцијални равенки од прв ред

Во овој дел ќе наведеме некои важни видови на диференцијални равенки кои може да се решат со помош на обични интеграции, без да се впуштиме во егзистенција на решение на диференцијална равенка.

2.2.1 Метод на раздвојување на променливите

За да може една дифернцијална равенка да се интегрира (реши) на овој начин, прво мора да се раздвојат променливите, т.е. равенката се запишува така што на едната страна на равенката се наоѓа едната променлива и нејзиниот дифернцијал, а на другата страна другите променливи и нејзиниот диференцијал.

I. Диференцијалната равенка

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

може да се напише во обликот

$$dy=f(x)dx.$$

Ако последната равенка ја интегрираме, добиваме

$$\int dy=\int f(x)dx+c, \quad \text{т.е.} \quad y=\int f(x)dx+c$$

е решението на дадената диференцијална равенка.

Пример 1. Да се реши $y'=2x^2+3$.

Решение. $y' = 2x^3 + 3 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + 3 \Leftrightarrow dy = (2x^3 + 3)dx$. Па, $y = \displaystyle\int (2x^2+3)dx = 2\frac{x^3}{3}+3x+c$ е решение на дадената диференцијална равенка.

II. Диференцијалната равенка

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

може да се напише во обликот

$$\frac{dy}{f(y)} = dx.$$

Нејзиниот општ интеграл се добива од

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx + c \ \text{ т.е. е } \ \textstyle\int \displaystyle\frac{dy}{f(y)} = x + c.$$

Пример 2. Да се реши $y' - y = 0$.

Решение. $y' - y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = dx$. Па, $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int dx$, т.е. $\ln y = x + c$ т.е. $y = e^{x+c} = e^x \cdot e^c$, од каде со замена $e^c = c_1$, добиваме $y = c_1 e^x$ е решение на дадената диференцијална равенка.

III. Диференцијалната равенка

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

може да се напише во обликот

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

од каде се добива нејзиниот општ интеграл
$\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$

Пример 3. Да се реши $(1 + x^2)y' - y^2 - 1 = 0$.

Решение. $(1+x^2)y'-y^2-1=0 \Leftrightarrow (1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=1+y^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{1+y^2}=\dfrac{dx}{1+x^2}$.

Со интеграција на последната равенка, добиваме
$\int \dfrac{dy}{1+y^2}=\displaystyle\int \dfrac{dx}{1+x^2}$ т.е. $\mathrm{arctg}y=\mathrm{arctg}x+c$ т.е. $y=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x+c)$
е решение на дадената диференцијална равенка.

IV. Ако е дадена диференцијална равенка од обликот

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c) \text{ каде } a,b,c\in\mathbb{R}$$

тогаш воведуваме смена $u=ax+by+c$, каде u е нова непозната функција. Со диференцирање на $u=ax+by+c$ по x, добиваме

$$u'=a+b\cdot y', \text{ т.е. } y'=\frac{1}{b}(u'-a),$$

па дадената диференцијална равенка го добива обликот $\frac{1}{b}(u'-a)=f(u)$, т.е.

$$u'=b\cdot f(u)+a \Leftrightarrow \frac{du}{dx}=b\cdot f(u)+a.$$

Во последната равенка може да се раздвојат променливите, па таа е еквивалентна со

$$\frac{du}{b\cdot f(u)+a}=dx,$$

а нејзиниот интеграл е

$$\int\frac{du}{b\cdot f(u)+a}=x+c,$$

од каде после интегрирање со смена $u=ax+by+c$, треба да се вратиме на првобитната функција y.

Пример 4. Да се реши равенката $y'=(x+y)^2$.

Решение. Ставаме смена $u=x+y$, од каде со диференцирање се добива $u'=1+y'$, па

$y' = (x+y)^2 \Leftrightarrow u' - 1 = u^2 \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx} = u^2 + 1 \Leftrightarrow \dfrac{du}{u^2+1} = dx.$

Следува $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = \int dx$, т.е. $\text{arctg} u = x + c$ или $u = \text{tg}(x+c)$.

Конечно, $y = u - x = \text{tg}(x+c) - x$ е решение на дадената диференцијална равенка.

2.2.2 Хомогена диференцијална равенка од прв ред

Диференцијалната равенка

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

се нарекува **хомогена** диференцијална равенка од прв ред.

Забелешка. Дадената диференцијална равенка не се менува ако во неа x се замени со kx, а y со ky.

За да се реши оваа равенка, се врши смена:

$$\frac{y}{x} = u \Leftrightarrow y = u \cdot x,$$

каде u е нова непозната функција од x.

Со диференцирање на $y = u \cdot x$ по x добиваме

$$y' = u'x + u.$$

Со замена на $y' = u'x + u$ и $\dfrac{y}{x} = u$ во дадената диференцијална равенка се добива

$$u'x + u = f(u) \quad \text{т.е.} \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Со раздвојување на променливите во последната равенка, се добива

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \quad \text{па} \quad \int \frac{du}{f(u)-u} = \ln x + \ln c.$$

По решавање на интегралот, со смената $\dfrac{y}{x} = u$, треба да се вратиме на првобитната функција y.

Пример 1. Да се реши диференцијална равенка

$$x(y-x)y' - y^2 = 0.$$

Решение. $x(y-x)y' - y^2 = 0 \Leftrightarrow y' = \dfrac{y^2}{x(y-x)} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x} - 1}.$

Ставаме смена $u = \dfrac{y}{x}$, па $y' = u'x + u$, од каде се добива

$$\frac{du}{dx} = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x} - 1} \Leftrightarrow u'x + u = \frac{u^2}{u-1} \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1} - u \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1} \Leftrightarrow \frac{u-1}{u}du = \frac{1}{x}dx.$$

Со интегрирање, добиваме:

$$\int \left(\frac{u-1}{u}\right) du = \int \frac{1}{x}dx, \text{ т.е. } \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du =$$
$$= \ln x + \ln c \;\text{ т.е. }\; u - \ln u = \ln x + \ln c = \ln(cx)$$
$$u = \ln u + \ln cx = \ln(ucx), \;\text{ т.е. }\; cux = e^u.$$

Ако во последната равенка, ставиме $xu = y$, се враќаме на првобитната функција y и го добиваме решението

$$c \cdot y = e^{\frac{y}{x}}.$$

2.2.3 Линеарна диференцијална равенка од прв ред

Диференцијалната равенка од облик

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + g(x) = 0 \tag{1}$$

каде $f(x)$ и $g(x)$ се функции од независно променлива x, се нарекува **линеарна диференцијална равенка од прв ред**.

За да се реши оваа равенка, прво ја запишуваме во обликот

$$\frac{y'}{y} + f(x) + \frac{g(x)}{y} = 0 \tag{2}$$

и ставаме

$$\frac{y'}{y} + f(x) = \frac{z'}{z}, \tag{3}$$

каде z е нова непозната функција.

Ако последната диференцијална равенка ја интегрираме по x, добиваме

$$\int \frac{y'}{y}dx + \int f(x)dx = \int \frac{z'}{z}dx \quad \text{т.е.}$$

$$\ln y + \int f(x)dx = \ln z \quad \text{т.е.} \quad \ln y - \ln z = -\int f(x)dx$$

т.е.

$$\ln\left(\frac{y}{z}\right) = -\int f(x)dx,$$

па

$$y = ze^{-\int f(x)dx}. \tag{4}$$

Со замена на (4) и (3) во (2), се добива

$$\frac{z'}{z} + \frac{g(x)}{ze^{-\int f(x)dx}} = 0, \quad \text{т.е.} \ \frac{dz}{dx} + g(x)e^{\int f(x)dx} = 0,$$

од каде со раздвојување на променливите и интегрирање, добиваме:

$$z = c - \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx \tag{5}$$

Од (4) и (5), конечно добиваме решение на (1) т.е.

$$y = \left(c - \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx\right)e^{-\int f(x)dx} \tag{6}$$

Пример 1. Да се реши равенката

$$y' + y\cos x - \sin x \cos x = 0.$$

Решение. Ова е линеарна равенка, каде $f(x)=\cos x$, а $g(x)=-\sin x\cos x$. Ставајќи $\dfrac{y'}{y}+\cos x=\dfrac{z'}{z}$, чие решение, заради (4) е $y=ze^{-\int\cos x dx}=ze^{-\sin x dx}$, дадената равенка го добива обликот

$$\begin{aligned}&\frac{dz}{dx}+(-\sin x\cos x)e^{\int\cos x dx}=0 \quad \text{т.е.}\\&\frac{dz}{dx}-\sin x\cos x e^{\sin x}=0.\end{aligned}$$

Со раздвојување на променливите, во последната равенка, и интегрирање, се добива

$$z+c=\int\sin x\cos x e^{\sin x}dx.$$

Последниот интеграл, со смената $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$ го добива обликот

$$\int\sin x\cos x e^{\sin x}dx=\int te^t dt.$$

Со парцијалната интеграција

$$\begin{aligned}u=t,\ \ dv=e^t dt\\du=dt,\ \ v=e^t\end{aligned}$$

добиваме

$$\int\sin x\cos x e^{\sin x}dx=\int te^t dt=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t=\sin x e^{\sin x}-e^{\sin x}.$$

Следува $z=-c+\sin x e^{\sin x}-e^{\sin x}$, а бидејќи $y=ze^{-\sin x}$, добиваме дека решението на дадената равенка е

$$y=-ce^{-\sin x}+\sin x-1.$$

2.2.4 Бернулиева диференцијална равенка

Равенката

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y+g(x)y^n=0, \tag{1}$$

каде $f(x)$ и $g(x)$ се функции од x, а n е константа различна од 0 и 1, се нарекува **Бернулиева равенка**. За да се реши равенката (1), прво ја запишуваме во обликот

$$\frac{y'}{y} + f(x) + \frac{g(x)y^n}{y} = 0, \tag{2}$$

и ставаме

$$\frac{y'}{y} + f(x) = \frac{z'}{z}, \tag{3}$$

каде z е нова непозната функција. После интеграција, како во делот 2.2.3, добиваме

$$y = ze^{-\int f(x)dx}. \tag{4}$$

Со замена на (3) и (4) во (2) се добива

$$\begin{aligned}
&\frac{z'}{z} + g(x)\left(ze^{-\int f(x)dx}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{т.е.}\\
&\frac{z'}{z} + z^{n-1}g(x)e^{(1-n)\int f(x)dx} = 0 \quad \text{т.е.}\\
&\frac{dz}{dx} + z^n g(x)e^{(1-n)\int f(x)dx} = 0.
\end{aligned}$$

Во последната равенка, по раздвојување на променливите и интегрирање го добиваме решението z. Со замена на решението z во (4) се добива решението y.

Пример 1. Да се реши равенката $xy' + y - y^2 \log x = 0$.

Решение. $xy' + y - y^2 \ln x = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y - \frac{\ln x}{x}y^2 = 0$.

Станува збор за Бернулиева равенка во која $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{\ln x}{x}$ и $n = 2$.

Со смената $\frac{y'}{y} + \frac{1}{x} = \frac{z'}{z}$, добиваме $y = ze^{-\int \frac{1}{x}dx} = ze^{-\ln x} = \frac{z}{x}$, па дадената равенка го добива обликот

$$\begin{aligned}
&\frac{z'}{z} = \frac{\ln x}{x}y \quad \text{т.е.} \quad \frac{z'}{z} = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{z}{x} \quad \text{т.е.}\\
&\frac{dz}{dx} = z^2 \frac{\ln x}{x^2}
\end{aligned}$$

Од овде со раздвојување на променливите и интегрирање, имаме

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx \quad \text{т.е.} \quad \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

т.е.

$$-\frac{1}{z} + c = \int \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Последниот интеграл го решаваме со парцијална интеграција, ставајќи $u = \ln x$, $dv = \frac{1}{x^2}dx$ и $du = \frac{1}{x}dx$, $v = -\frac{1}{x}$.

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}.$$

Следува

$$-\frac{1}{z} + c = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}$$

т.е.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + c = \frac{\ln x + 1 + cx}{x}$$

па

$$z = \frac{x}{\ln x + cx + 1}.$$

Заради $y = \frac{z}{x}$, добиваме

$$y = \frac{1}{\ln x + cx + 1}$$

е бараното решение.

3

ЕЛЕМЕНТАРНА КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЈАТНОСТ

3.1 Елементарна комбинаторика

3.1.1 Вовед

Комбинаториката изучува **распоредување на елементи** во некое дадено множество. Во комбинаториката се проучуваат **дискретни множества** т.е. множества составени од одвоени, изолирани елементи. Во најголем број на случаи, тие множества се конечни, но се проучуваат и бесконечни множества. Во овој дел ќе разгледаме две комбинаторни задачи. Првата задача е да се испита дали постои или не постои замислен распоред на елементите од даденото множество. Проблеми од овој вид се нарекуваат **проблеми на постоење - егзистенција**. Другата задача подразбира дека постоењето на одреден распоред е познат или очигледен факт и се бара да се пресмета бројот на таквите распореди или нивно класифицирање според некое својство. Проблемите од овој вид се нарекуваат **проблеми на пребројување.**

3.1.2 Два основни принципа во комбинаториката

При изведување на докази во комбинаториката често се применуваат двата основни принципа (или само еден од нив) на пребројување. Првиот од тие принципи е сугериран од следниот пример.

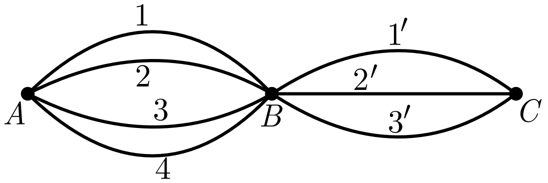
Пример 1. Две коцки се фрлаат истовремено. На колку начини може да се добие збир 9 или збир 11.

Решение. Збирот 9 се добива на еден од следните начини: $(6,3)$, $(5,4)$, $(4,5)$ и $(3,6)$, каде првиот број во малата заграда означува колку точки се добиени на првата коцка, а вториот број означува колку точки се добиени на втората коцка. Од друга страна, збирот 11 се добива на еден од следните начини: $(6,5),(5,6)$. Бројот на бараните начини се добива со собирање на бројот на начини на кои може да се добие 9 (нив ги има 4) и бројот на начини на кои може да се добие 11 (нив ги има 2). Заклучуваме дека 9 или 11 може да се добие на вкупно 6 начини.

Принцип на збир. Ако објектот P може да се избере на m начини, а опјектот Q на n начини, тогаш изборот на било објектот P било објектот Q може да се изврши на $m+n$ начини. Другиот принцип е сугериран од следниот пример.

Пример 2. Од местото A до местото B водат 4 различни пата, а од местото B до местото C водат 3 различни пата. Колку различни пата водат од местото A до местото C?

Решение. Ќе се послужиме со следниот цртеж.



Ако сакаме да стигнеме од A до B може да избереме еден од 4-те пата, обележани со $1,2,3$ или 4. Ако на пример сме го избрале патот 1 и стигнеме во B, имаме 3 можности за продолжување на патот (со цел да стигнеме до C). Ако продолжиме по патот означен со $1'$, тогаш патот од A до C го обележуваме со $1,1'$.

Забележуваме дека ако сме го избрале патот 1 од A до B, сега имаме 3 можности да стигнеме до C и тоа: $1,1'$; $1,2'$; $1,3'$. Слично, ако сме го избрале патот 2 од A до B, имаме нови три можности: $2, 1'$; $2, 2'$; $2, 3'$. Слично, ако сме го избрале патот 3, имаме можности: $3, 1'$; $3, 2'$; $3, 3'$, а при изборот 4 од A до B, имаме можности: $4, 1'$; $4, 2'$; $4, 3'$. Значи, вкупен број на можности е $4 \cdot 3 = 12$, т.е. има 12 можни начини да се стигне од A до C.

Принцип на производ. Ако објектот P може да се избере на m начини и ако, после секој таков избор, објектот Q може да се избере на n начини, тогаш изборот на паротот (P, Q), во назначениот редослед, може да се изврши на $m \cdot n$ начини.

Овие два принципа, заради појаснување, ќе ги искажеме и на друг начин. Притоа, претпоставуваме дека зборот "настан" има доволно одредено значење кај читателот. Покасно, ќе се задржиме малку повеќе кај овој поим.

Принцип на збир. Ако P и Q се два настана кои не може да се појават (случат) истовремено и ако настанот P може да се случи на m начини, а настанот Q може да се случи на n начини, тогаш, има $m + n$ начини да се случи било настанот P било настанот Q.

Принцип на производ. Ако настанот P може да се случи на m начини и откако настанот P се случил, настанот Q може да се случи на n начини, тогаш двата настана, P и Q (земени во тој редослед) може да се случат на $m \cdot n$ начини.

Двата принципа може да се обопштат. Ќе го искажеме само обопштениот принцип на производ.

Обопштен принцип на производ. Ако настанот A_1 може да се случи на m_1 различни начини, и откако A_1 се случил, настанот A_2 може да се случи на m_2 различни начини, итн., и најпосле, откако сите настани $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ се случиле, ако настанот A_k може да се случи на m_k различни начини, тогаш настаните $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (земени во тој редослед) може да се случат на $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ ралични начини.

3.1.3 Воведување на двата основни поими во комбинаториката: пермутација и комбинација

Со помош на следните два примера ќе ги воведеме двата основни поими во комбинаторика т.е **пермутација** и **комбинација**. За таа цел, нека под "збор" ја подразбираме секоја конечна низа од букви во некоја азбука на пример, македонската, напишани една позади друга, како што пишуваме во нашата азбука. Така, АКТ е збор формиран од буквите А, К и Т, но согласно нашата дефиниција и КТА е збор, иако нема значење во нашиот јазик. Јасно, АКТ и КТА се разликуваат меѓу себе.

Пример 1. Колку зборови од три букви може да се формираат од буквите А, К, М и Т, земајќи дека ниедна буква не смее да се појавува во зборот повеќе од еднаш?

Пример 2. Во рамнината се дадени четири точки А, К, М и Т такви што никои три од нив не лежат на иста права. Колку различни триаголници формираат овие точки?

На прв поглед се чини дека одговорите на овие две прашања се исти, т.е. дека формираме конечни низи од 3 од дадените 4 букви. Но, тоа не е точно. Така, зборовите КАМ и МАК се два различни збора, додека $\triangle KAM$ е ист со $\triangle MAK$ т.е. во првиот пример меѓусебниот распоред на елементи е важен додека во вториот пример меѓусебниот распоред на елементи не е важен, т.е. $\triangle KAM$ и $\triangle MAK$ се всушност еден ист триаголник. Велиме, во првиот пример имаме **подреден** избор на три објекти (букви) од 4, а во вториот пример имаме **неподреден** избор на 3 објекти (букви) од 4 т.е. избираме подмножество со 3 елементи од дадено множество од 4 елементи. Така, одговорот на Пример 1 е:

АКМ	АКТ	АТМ	ТКМ
АМК	АТК	АМТ	ТМК
КМА	ТКА	МТА	КМТ

КАМ	ТАК	МАТ	КТМ
МАК	КАТ	ТАМ	МТК
МКА	КТА	ТМА	МКТ

т.е. вкупно 24 зборови.

Што се однесува на прашањето од вториот пример, забележуваме дека сите триаголници од првата колона се еден ист триаголник, сите од втората се еден ист триаголник, и слично заклучуваме за триаголниците од третата и четвртата колона.

Значи, одговорот на второто прашање е 4 триаголници.

Објектите од првиот пример се **пермутации**, а од вториот пример се **комбинации**.

Кај пермутации е **важен меѓусебниот распоред на елементите во низата**. Ако $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k} =$ е директен производ на множеството A земено k пати, т.е.

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_i \in A\}$$

и ако означиме

$$(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_k) \equiv a_1 a_2 a_3 \ldots a_k,$$

тогаш **пермутацијата** $a_1, a_1, ..., a_k$ **е елемент на директниот производ** $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k}$.

Кај комбинациите **не е важен меѓусебниот распоред**. Ако за $a_i \in A$, означиме

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \equiv a_1 a_2 \ldots a_k,$$

тогаш комбинацијата $a_1, a_1, ..., a_k$ е подмножество од множеството A.

3.1.4 Варијации и пресметување на број на сите варијации на дадено множество

Нека A е множество со n **различни** елементи. Секој елемент на директниот производ $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k}$ (A земено k пати) се нарекува k **пермутација со повторување од** n **елементи** или **варијација со повторување од класа** k **од** n **елементи.**

Така, ако во првиот пример, допуштавме да се формираат и зборови во кои буквите се појавуваат и повеќе од еднаш, т.е. зборови од обликот ААК, АКА, ААА, итн ..., ќе добиеме **множество од варијации со повторување од класа** 3 **од** 4 **елементи**.

Со $\overline{V}_n^k$ го означуваме бројот на варијации со повторување од класа k од n елементи.

Теорема 1. $\overline{V}_n^k = n^k$.

Така, новиот Пример 1. (со допуштање на повеќе од едно појавување на букви во збор), ќе содржи $4^3 = 64$ зборови.

Секоја варијација од класа k од n елементи, во која сите елементи се различни, се вика **варијација без повторување од класа k од n елементи**.

Пример 1 е пример на варијација без повторување од класа 3 од 4 елементи.

Со V_n^k го означуваме бројот на варијации без повторување од класа k од n елементи.

Теорема 2. $V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \quad k \leq n.$

Во Пример 1, $V_4^3 = 4(4-1)(4-2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, $(n-k+1 = 4-3+1 = 4-2)$.

3.1.5 Пермутации и пресметување број на сите пермутации на дадено множество

Секоја варијација без повторување од класа k од k елементи се нарелува **пермутација без повторување од k елементи**.

Пример 1. Да се формираат сите зборови од 4 букви, А, К, М и Т и притоа секоја буква се јавува, точно еднаш во зборот.

Пример 2. Да се формираат сите четирицифрени броеви од цифрите $1, 2, 3$ и 4 при што цифрите не се повторуваат.

Имаме:

АКМТ
АМКТ
КМАТ
КАМТ
МАКТ
МКАТ
АКТМ
АТКМ
ТКАМ
ТАКМ
КАТМ
КТАМ
АТМК
АМТК
МТАК
МАТК
ТАМК
ТМАК
ТКМА
ТМКА
КМТА
КТМА
МТКА
МТКА

т.е. вкупно 24.

Пример 3. Да се формираат сите пермутации без повторување од DNA секвенцата AGTC.

AGTC
AGCT
ACGT
ACTG
ATCG
ATGC
GTCA
GTAC
GACT
GATC
GCAT
GCTA
TCAG
TCGA
TAGC
TACG
TGAC
TGCA
CAGT
CATG
CTAG
CTGA
CGAT
CGTA

Бројот на пермутации без повторување е еднаков на

$$P_4 = 4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 4! = 24$$

Пример 4. Да се формираат сите пермутации од RNA секвенцата AUCG.

Со P_k - го означуваме бројот на пермутации без повторување од k елементи.

Теорема 1. $P_k = k! = k(k-1)(k-2)\ldots 2\cdot 1.$

Доказ.

$$V_k^k = P_k = k(k-1)(k-2)\ldots(k-k+1) = k(k-1)(k-2)\ldots 1 = k!.$$

Во пермутациите без повторување сите елементи во пермутацијата се различни. Може да се случи некои од елементите да се еднакви. Така добиваме **пермутација со повторување.** На пример, нека се дадени елементите a, a, a, b. Ако тие беа различни меѓу себе, ќе имавме $4! = 24$ пермутации. Но во овој случај ги имаме само 4-те пермутации

$$aaab, aaba, abaa, baaa$$

бидејќи $3! = 6$ пермутации на 4 различни елементи a, b, c, d се сведуваат на една пермутација на a, a, a, b. (бидејќи елементите a, b, c се пермутираат на $3! = 6$ различни начини коишто не се различни за a, a, a). Така, бројот се добива кога бројот $4!$ на пермутации, кога тие се различни се подели со $3!$ т.е. $\dfrac{4!}{3!} = 4$ е број на пермутации со повторување од нашиот пример.

Во општ случај важи следнава теорема.

Теорема 2. Нека A е множество коешто има k елементи од кои k_1 се еднакви меѓу себе, k_2 се еднакви меѓу себе,..., k_p се еднакви меѓу себе и $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = k$. Тогаш **бројот на пермутации со повторување** е

$$P_k(k_1, k_2, \ldots, k_p) = \frac{k!}{k_1!k_2!\cdot k_p!}.$$

Пример 5. Колку пермутации може да се формираат од буквите на зборовите:

а) КИКИРИКИ

б) РОЗОВО?

Решение. а) $k = 8,\ k_1 = 3,\ k_2 = 4,\ k_3 = 1$

$$3 + 4 + 1 = 8$$

$$P_8(3,4,1) = \frac{8!}{3!4!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 8 \cdot 35 = 280$$

б) $k = 6,\ k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 1,\ k_4 = 1$

$$1 + 3 + 1 + 1 = 6$$

$$P_6(1,3,1,1) = \frac{6!}{1!3!1!1!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Пример 6. Колку пермутации можат да се формираат од

а) повторувачката секвенца ТАТААТАТАТ

б) ПЛАЗМА

Решение. а) $k = 10, k_1 = 5,\ k_2 = 5$

$$P_{10}\,(5,5) = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

б) $k = 6, k_1 = 2, k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1,$

$$P_6\,(2) = \frac{6!}{2!} = 360$$

Пример 7. Колку пермутации можат да се формираат од

а) АДРЕНАЛИН

б) ЕРИТРОЦИТИ

3.1.6 Комбинации и пресметување број на сите комбинации на дадено множество

Секој избор на k елементи од множество од n различни елементи, без оглед на нивниот меѓусебен редослед, се вика **комбинација без повторување од класа k од n елементи**.

Или, секое подмножество што се состои од k елементи, од дадено множество од n различни елементи, е **комбинација без повторување од класа k од n елементи**.

Теорема 1. Бројот на комбинации без повторување од класа k од n-елементи е еднаков на

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 1. На еден турнир учествувале 6 клуба. Секој од нив треба да одигра со другите по еден натпревар. Колку вкупно натпревари ќе се одиграат?

Решение. $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 3 \cdot 5 = 15.$

3.2 Теорија на веројатност

3.2.1 Случаен експеримент. Случаен настан

Многу појави во природата и општеството се случуваат по точно определени закони и секогаш кога определено множество услови е исполнето. Законите од овој вид се нарекуваат **детерминирани**. Такви се, на пример, Малтусов закон во биологија, Њутнови закони во физика и многу други закони кои се откриени со набљудување на појавите.

Меѓутоа, во природата и општеството постојат појави за кои не важат закони од овој тип, т.е. постојат појави кај кои при исполнување на одредени услови, некој настан некогаш се реализира, а некогаш не се реализира. Ваквите **недетерминирани** појави се предмет на изучување на **теоријата ва веројатност**.

Чест поим во теоријата на веројатност е поимот **експеримент**. За да го објасниме овој поим ќе наведеме неколку примери.

Пример 1. Ако фрламе монета на тврда, хоризонтална и мазна подлога, на горната страна од монетата ќе се појави или „грб“ или

„писмо“. Со фрлањето на монетата сме извршиле еден експеримент чиј што резултат (исход) може да биде еден од настаните:

а) На горната страна на монетата се појавил „грб“,

б) На горната страна на монетата се појавило „писмо“.

Пример 2. Нека експериментот се состои во истовремено фрлање на бела и црвена коцка за играње на тврда, хоризонтална и мазна површина. Еден од начините за опишување на резултатот од овој експеримент е резултатот да се претстави како подреден пар (x, y), каде x е бројот на точките што се појавиле на белата коцка, а y е бројот на точките што се појавиле на црвената коцка. Да забележиме дека $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пример 3. Фелинговата проба се користи за докажување на јаглехидрати (моносахариди). Ако во раствор со непозната содржина дадеме Фелингов реагенс можни се два настани:

а) растворот да не ја промени бојата;

б) растворот да се обои црвено.

Пример 4. Бензидинската проба се користи за детекција на мало количество на крв, најчесто се користи во судската медицина. Добиениот примерок се третира со бензидин, можни се два настани:

а) да се обои примерокот сино зелено;

б) примерокот да не ја промени бојата;

Секоја реализација на определено множество услови ја нарекуваме **експеримент**, E. Секој резултат од експериментот E го нарекуваме **настан** што е во врска со експериментот E.

Настаните, вообичаено, ги означуваме со големите букви од латинската азбука.

Нека E е експеримент и нека A е произволен настан во врска со експериментот E. Ќе претпоставиме дека:

1) Експериментот E може да се повтори при еднакви услови неограничен број пати.

Нека бројот на повторувања на експериментот е n, и нека, притоа, настанот A се појавил (настапил) k пати. Бројот k се нарекува **честота (фреквенција)** на настанот A, а количникот $\frac{k}{n}$ се нарекува

релативна честота (фреквенција) на настанот A.

2) При кои било серии од по n_1, односно n_2 изведувања (повторувања) на експериментот E, при доволно големи вредности на n_1 и n_2, релативните честоти $\frac{k_1}{n_1}$ и $\frac{k_2}{n_2}$, соодветно, незначително се разликуваат една од друга.

За експериментот E за кој се исполнети условите 1) и 2) ќе велиме дека е **случаен експеримент**, а за секој настан што е во врска со ваков експеримент ќе велиме дка е **случаен настан**.

Во продолжение ќе се задржиме на релации и операции во множеството на случајните настани што се во врска со ист експеримент.

Ако при секое настапување на настанот A, настапува и настанот B, велиме дека **настанот** A **го повлекува настанот** B и означуваме $A \subset B$.

Настаните A и B се **еквивалентни** ако $A \subset B$ и $B \subset A$.

Збир на настаните A **и** B е настан кој настапува кога настапува барем еден од настаните A или B, и него го означуваме со $A + B$ или $A \cup B$.

Производ на настаните A **и** B е настан кој настапува кога истовремено настапува секој од настаните A и B, и него го означуваме со $A \cdot B$, AB или $A \cap B$.

За настаните A и B велиме дека **заемно се исклучуваат** (т.е. **се дисјунктни**) ако настапувањето на едниот настан ја исклучува можноста за настапување на другиот настан. Значи, дисјунктните настани A и B не можат да настапат во исто време.

Разлика на настание A **и** B е настан кој настапува кога истовремено настапува настанот A, а не настапува настанот B, и него го означуваме со $A \setminus B$.

Спротивен настан на настанот A настапува секогаш кога настанот A нема да настапи. Спротивниот настан на настанот A го означуваме со $\bar{A}$.

Во случајот на дисјунктни настани A и B, имајќи ја предвид дефиницијата за производ на настани, лесно воочуваме дека нивниот производ AB не постои. Оваа незгодна ситуација се над-минува со воведување на таканаречен невозможен настан.

Невозможен настан е настан кој никогаш не може да настапи, и него го означуваме со $\emptyset$.

Дуално на невозможен настан е т.н. сигурен настан.

Сигурен настан е настан кој настапува секогаш кога ќе се реализира еден експеримент, и него го означуваме со Ω.

Така, во експериментот од пример 2, ако ги разгледуваме настаните A и B, каде

A : Збирот на точки што се појавиле на двете коцки е поголем од 12

B : Збирот на точки што се појавиле на двете коцки е најмногу 12

лесно се воочува дека $A = \emptyset$ и $B = \Omega$.

Пример 5. Четири стрелци гаѓаат во една мета. Нека, за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$,

A_i: $i-$тиот стрелец ја погодил целта,

B: точно два стрелци ја погодиле целта,

C: барем еден стрелец ја погодил целта,

D: само еден стрелец ја погодил целта,

Да ги претставиме настаните B, C и D со помош на настаните A_1, A_2, A_3 и A_4.

Решение. Настанот B настапува кога два од четирите стрелци ја погодиле целта, а два не ја погодиле. Така, на пример, една можност е првиот и вториот стрелец да ја погодат целта, а третиот и четвртиот да не ја погодат, т.е. истовремено да настапат настаните A_1, A_2, $\overline{A_3}$ и $\overline{A_4}$. Значи, да настапи производот на овие настани $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$. Ако ги земеме предвид сите можности, добиваме дека

$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 +$
$\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot A_4.$

Настанот $C = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ бидејќи C настапува ако настапи барем еден од настаните A_1, A_2, A_3 или A_4.

Слично се добива дека

$D = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 \cdot \overline{A_4} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4.$

Пример 6. На пациент во една лабораторија му е утврдена серумска глукоза од 6,32 mM. Пациентот го извршил истото тестирање и во две други лаборатории кои му издале резултат за истиот параметар од 4,56 mM. Причини заради кои настанала грешката се:

1. Присуство на хемоглобин во серумот
2. Присуство на протеини во серумот
3. Пациентот претходно консумирал глукоза
4. Присуство на масти во серумот

Можни настани:

A_i: Грешката се случила заради една од споменатите причини

B: Точно две причини можат да доведат до погрешен резултат

C: Барем една од причините води до погрешен резултат

D: Грешката настанала заради само една причина

Да се претстават настаните B, C и D со помош на настаните A_1, A_2, A_3, A_4.

$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_4 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4 +$
$+ \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 \cdot A_4$

$$C = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$D = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4$$

Пример 7. Кај пациент на 40 годишна возраст му е дијагностицирана цироза на црн дроб. Можни причини за болеста се:

1. Генетска предиспозиција
2. Вирусна инфекција
3. Алкохолизам
4. Континуирана изложеност на ксенобиотици или пестициди

Можни настани:

A_i: Болеста е предизвикана од еден споменат причинител

B: Има два причинители

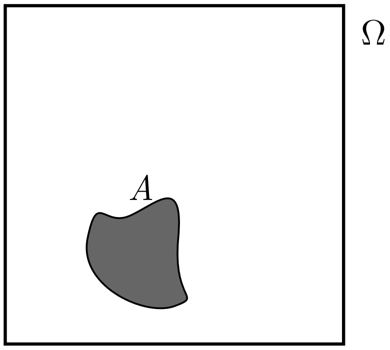
C: Болеста е предизвикана само од еден причинител.

D: Болеста е предизвикана барем од еден причинител

Да се претставaт настаните B, C и D со помош на настаните A_1, A_2, A_3, A_4.

Во продолжение ќе дадеме геометриско-множествена интерпретација на настаните.

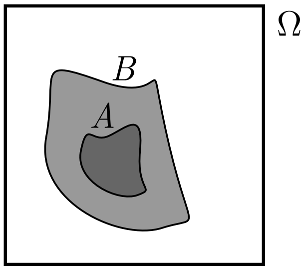
Нека севкупноста на условите е внатрешноста на некоја геометриска фигура, на пример квадрат, Ω. Експериментот е произволно избирање на една точка од Ω. На следниов цртеж



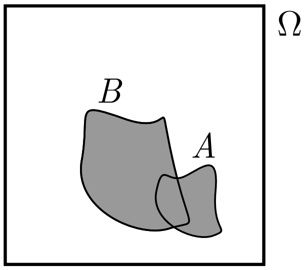
затемнетиот дел го означува настанот

A: избраната точка се наоѓа во геометриската фигура A.

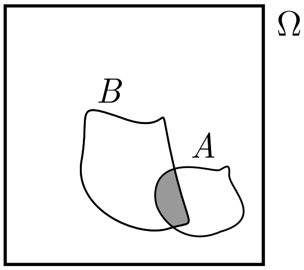
Имајќи ги предвид дефинициите на $A \subset B$, $A+B$, $A\cdot B$, $A\backslash B$, $\bar{A}$, $\emptyset$, и Ω за настани во врска со еден експеримент, за нив ја имаме следнава геометриско-множествена интерпретација



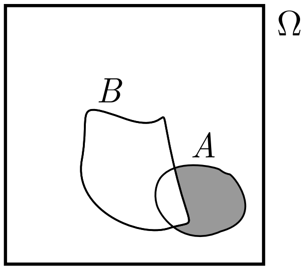
$A\subset B$



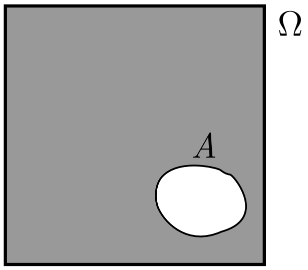
$A+B$



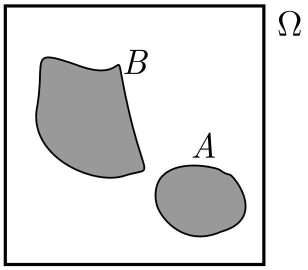
$A\cdot B$



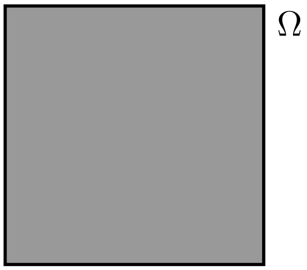
$A \setminus B$



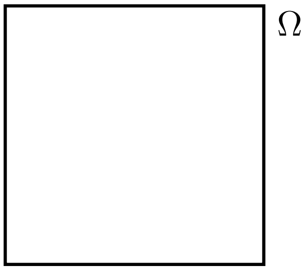
$\overline{A}$



$A \cap B = \varnothing$
т.е. A и B се
дисјунктни настани



Ω



$\varnothing$

3.2.2 Статистичка веројатност

Во претходниот дел дефиниравме честота и релативна честота на случаен настан A во серија од n повторувања на даден експеримент E при исти услови. Така, ако настанот A се појавил k пати во оваа серија од n повторувања на експериментот E, бројот k го нарековме честота, а бројот $\frac{k}{n}$ го нарековме релативна честота на настанот A.

Нека експериментот се состои од извлекување едно топче од непровидна кутија во која се наоѓаат едно бело и девет црвени топчиња. Со A ќе го означиме настанот

A: Извлечено е бело топче.

Ако направиме повеќе серии од 10 повторувања на експериментот, во некои серии може да се случи да нема ниту едно бело топче, односно настанот A да не се појави ниту еднаш, во некоја серија пак може настанот A да се појави еднаш, во друга можно е A да се појави 2 или повеќе пати.

Но, ако направиме серии со голем број на повторувања на експериментот, ќе забележиме дека приближно во 10% од тие повторувања на експериментот се појавил настанот A. Во следнава табела, во првата колона е наведен бројот на повторувања на експериментот, n, во серијата, во втората колона е бројот на појавувања на настанот A во таа серија, т.е. честотата k, во третата колона е релативната честота $\frac{k}{n}$ и во четвртата колона е дадено приближното децимално заокружување (на една децимала) на релативната честота.

n	k	$\frac{k}{n}$	приближна вредност
100	9	$0,09$	0,1
200	22	$0,11$	0,1
1000	108	$0,108$	0,1
4080	426	$0,104$	0,1
12000	1240	$0,103$	0,1
24000	2452	$0,102$	0,1

Забележуваме дека релативната честота, освен што зависи од настанот A, зависи и од серијата односно таа е различна за различна серија. Но, бидејќи A е случаен настан (за него важи претпоставката 2 од претходниот параграф) со зголемување на бројот на повторувања n на експериментот, соодветните релативни честоти сѐ помалку се разликуваат од серија до серија, и се приближно еднакви на бројот 0,1 т.е. се натрупуваат околу реалниот број 0,1.

Статистичка веројатност на настанот A е реалниот број околу кој се натрупуваат релативните честоти на случајниоит настан A, и се означува со $P(A)$.

Статистичката веројатност е „мера“ за можноста за настапување на настанот A. Имено, ако A и B се два случајни настани во врска со еден експеримент и ако $P(A) < P(B)$, тогаш при реализирањето на експериментот, во серии со голем број на повторувања на експериментот, почесто ќе настапува настанот B од настанот A.

Да забележиме неколку основни својства на статистичката веројатност.

P.1. За кој било случаен настан A, $P(A) \geq 0$.

P.2. $P(\Omega) = 1$.

P.3. За два дисјунктни случајни настани A и B, важи $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

P.1. и P.2. лесно може да се воочат од самата дефиниција. Да го објасниме P.3. Нека A и B се настани во врска со експериментот кој е повторен n пати и нека притоа, A се појавил k_1 пати, а B се појавил k_2 пати. Бидејќи настаните A и B се дисјунктни, настанот $A+B$ во серијата од n повторувања на експериментот ќе се појави $k_1 + k_2$ пати, па релативната честота ќе биде збир од релативните честоти на A и B, од каде следува P.3.

Со помош на P.1.-P.3. може да се докаже следнава теорема

Теорема 1. (i) $P(\emptyset) = 0$.

(ii) $P(A) = 1 - P\left(\bar{A}\right)$, за секој случаен настан A.

(iii) Ако $A \subseteq B$ тогаш $P(A) \leq P(B)$.

(iv) За секој случаен настан A важи $0 \leq P(A) \leq 1$.

(v) За кои било два случајни настани A и B важи $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

3.2.3 Простор од елементарни настани

Да го разгледаме уште еднаш примерот 2 од делот 3.2.1. Можните резултати од експериментот во овој пример, ги опишавме со множеството $\Omega = \{(x, y)\,|x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Притоа,

настанот: на белата коцка се појавиле x, точки а на црвената коцка се појавиле y точки

го идентификуваме со елементот $(x, y) \in \Omega$.

Забележуваме дека при секое изведување на експериментот:

а) Мора да настапи некој од настаните (x, y) кој се содржи во Ω.

б) Никои два од настаните од Ω не може да настапат истовремено.

Ова множество Ω што го опишува експериментот од пример 2 и ги задоволува а) и б) се нарекува простор од елементарни настани.

Множеството Ω од поединечни настани кое опишува даден експеримент, и притоа, при секое изведување на експериментот настапува еден и само еден од тие настани се нарекува **простор (множество) од елементарни настани**.

За елементарните настани, вообичаено, се користи ознаката w, или w_i во случај множеството да содржи повеќе од еден елемент.

Забелешка. За даден експеримент, можно е да одговараат повеќе простори од елементарни настани. Така во примерот 2, и множеството

$$\Omega_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

е множество од елементарни настани за експериментот од овој пример, каде
w_j: Збирот на точките што се појавиле на двете коцки е j
за секој $j \in \Omega_1$.

Кој простор ќе го избереме зависи од задачата што треба да се реши и од тоа кој од нив е поинформативен т.е. кој од нив подобро го опишува дадениот експеримент.

Секој случаен настан што е во врска со даден експеримент е определен со некое подмножество од множеството не елементарните настани Ω за тој експеримент. Значи, случајните настани ги идентификуваме со некои подмножества од Ω. Притоа, ќе велиме настанот A настапил ако се појавил некој од елементарните настани со кои тој е определен, односно ако се реализирал елементарен настан w за кој важи $w \in A$, и притоа уште велиме дека w е **поволен за случајниот настан** A.

Имајќи го предвид горенаведеното и делот 3.2.1 заклучуваме дека релациите и операциите меѓу случајните настани всушност се сведуваат на релации и операции со множества.

$A \subset B$	A е подмножество од B
$A + B$	$A + B = A \cup B = \{w \,\vert w \in A \vee w \in B\}$
$A \cdot B$	$A \cdot B = A \cap B = \{w \,\vert w \in A \wedge w \in B\}$
$A \backslash B$	$A \backslash B = A \backslash B = \{w \,\vert w \in A \wedge w \notin B\}$
$\bar{A}$	$\bar{A} = \Omega \backslash A = \{w \,\vert w \notin A\}$

Во следниве експерименти ќе го најдеме просторот од елементарни настани и некои настани во врска со дадениот експеримент.

Пример 1. Во примерот 1 од делот 3.2.1 во кој фрламе монета, просторот од елементарни настани е $\Omega = \{G, P\}$ каде

G: на горната страна од монетата се појавил „грб“

P: на горната страна од монетата се појавило „писмо“

Пример 2. Ако фрламе една коцка за играње и, притоа го набљудуваме бројот на точки што се појавуваат на горната страна од коцката, тогаш $\Omega = \{k \,|k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, каде за $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

k: на горната страна од коцката се појавиле k точки.

Нека

A: на горната страна од коцката се појавил парен број точки

B: на горната страна од коцката се појавил непарен број точки

C: бројот на точки на горната страна од коцката е прост.

Тогаш $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ и $C = \{2, 3, 5\}$.

Забележуваме дека A и B се дисјунктни настани. Ако сакаме да го запишеме, на пример, настанот

D: се појавил непарен и прост број точки

тогаш $D = B \cdot C = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 3, 5\} = \{3, 5\}$.

Пример 3. Ако фрламе монета трипати едноподруго и ја набљудуваме низата од „грб“-„писмо“ што се појавува, тогаш

$$\Omega = \{GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP\}.$$

Нека

A: „грб“ се појавил најмалку 2 пати

B: Во трите едноподруги фрлања се појавил само „грб“ или само „писмо“.

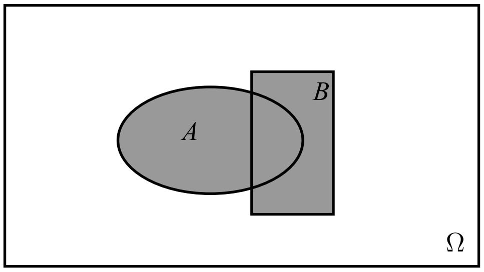
Тогаш $A = \{GGG, GGP, GPG, PGG\}$ а $B = \{GGG, PPP\}$.

Во секој од примерите што досега ги разгледувавме, просторот од елементарни настани е конечен.

Пример 4. Да фрламе монета сѐ додека не се појави „грб“ и притоа броиме колку пати монетата била фрлена до првото појавување на „грб“. Тогаш $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots \infty\}$. Симболот ∞ се однесува на случајот кога „грб“ нема да се појави никогаш, односно кога монетата се фрла безброј пати.

Ова е пример на простор од елементарни настани којшто не е конечен, туку бесконечен, но преброив.

Пример 5. Пуштаме пенкало да паѓа вертикално во кутија и ја забележуваме точката на дното на кутијата каде пенкалото прв пат допрело. Тогаш Ω се состои од сите точки на дното на кутијата. Нека правоаголникот од следниот цртеж ги претставува тие точки и нека A и B се случајни настани кои означуваат дека пенкалото паднало на засенчените површини, соодветно означен.



Ова е пример на простор од елементарни настани којшто е бесконечен, но не е преброив, т.е. е непреброив.

Забелешка 1. Ако просторот од елементарни настани Ω е конечен или бесконечен но преброив, тогаш секое подмножество од Ω е случаен настан.

Со Φ ќе ја означуваме фамилијата од сите случајни настани, вклучувајќи ги и невозможниот $\emptyset$, и сигурниот настан Ω. Значи, во случај кога просторот на елементарни настани Ω е конечен или бесконечен но преброив, фамилијата Φ од случајни настани се состои од сите подмножества на Ω вклучувајќи ги $\emptyset$ и Ω.

3.2.4 Аксиоми на веројатност

Нека Ω е простор од елементарни настани за даден експеримент, а Φ е фамилијата случајни настани. Функцијата $P : \Phi \to \mathbb{R}$ за која важи

P.1. За секој $A \in \Phi$, $P(A) \geq 0$;

P.2. $P(\Omega) = 1$;

P.3. Ако $A, B \in \Phi$ и $A \cdot B = \emptyset$, тогаш $P(A + B) = P(A) + P(B)$;

P.4. Ако $A_1, A_2, \dots A_n, A_{n+1}, \dots \in \Phi$ и $A_i \cdot A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, тогаш

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + A_{n+1} + \dots) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}) + \dots$$

се нарекува **веројатностна функција**, а бројот $P(A)$ се нарекува **веројатност на настанот** $A \in \Phi$.

Забелешка. Користејќи го P.3. и ПМИ се докажува дека за $A_1, A_2, \dots A_n \in \Phi$ и за $A_i \cdot A_j = \emptyset$ за $i \neq j$ важи

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \qquad (*)$$

Иако (*) важи за секој $n \in \mathbb{N}$, P.4. не следува од P.3. Доколку просторот Ω е конечен, тогаш P.4. може да се отфрли.

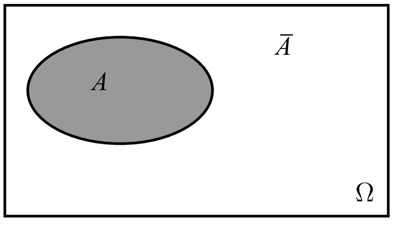
Во продолжение, ќе дадеме некои основни својства на веројатноста.

Теорема 1. $P(\emptyset) = 0$.

Доказ. За случаен настан $A \in \Phi$, различен од невозможниот важи $A = A + \emptyset$ и $A \cdot \emptyset = \emptyset$, па користејќи го P.3. добиваме дека $P(A) = P(A + \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$, т.е. $P(\emptyset) = 0$. $\square$

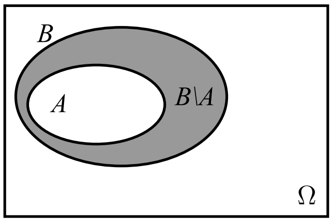
Теорема 2. За секој $A \in \Phi$ важи $P(A) = 1 - P\left(\bar{A}\right)$.

Доказ. Од $\Omega = A + \bar{A}$, $A \cdot \bar{A} = \emptyset$, P.2. и P.3. добиваме $1 = P(\Omega) = P\left(A + \bar{A}\right) = P(A) + P\left(\bar{A}\right)$, т.е. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.



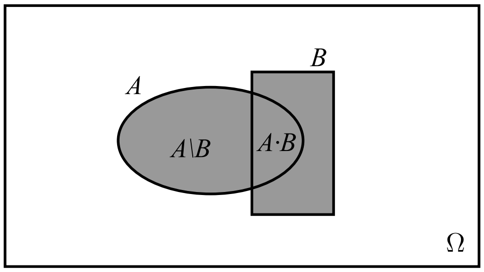
Теорема 3. Ако $A \subseteq B$ тогаш $P(A) \leq P(B)$.

Доказ. Од $A \subseteq B$, $B = A + B \backslash A$, $A \cdot (B \backslash A) = \emptyset$ и P.3. добиваме $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$. Заради P.1., $P(B \backslash A) \geq 0$, па мора $P(A) \leq P(B)$.



Теорема 4. За $A, B \in \Phi$, $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cdot B)$.

Доказ. Од $A = (A \backslash B) + (A \cdot B)$, $(A \backslash B) \cdot (A \cdot B) = \emptyset$ и P.3. добиваме дека $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cdot B)$ т.е. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cdot B)$.



Теорема 5. За произволни $A, B \in \Phi$, важи

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Доказ. Од $A + B = (A \backslash B) + B$, $(A \backslash B) \cdot B = \emptyset$, P.3. и теорема 4 добиваме дека $P(A + B) = P(A \backslash B) + P(B) = P(A) - P(A \cdot B) + P(B)$, т.е. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Последица. За произволни $A, B, C \in \Phi$ важи

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cdot B)-P(A \cdot C)-P(B \cdot C)+P(A \cdot B \cdot C)$$

Теорема 6. За $A \in \Phi$, $P(A) \leq 1$.

Доказ. Од $A \subseteq \Omega$, T.3. и P.2. добиваме дека $P(A) \leq P(\Omega) = 1$, т.е. $P(A) \leq 1$.

3.2.5 Класична дефиниција на веројатност

Нека даден експеримент има конечно многу исходи, т.е.

$$\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}.$$

Тогаш фамилијата Φ е множеството од сите подмножества на Ω, т.е.

$$\Phi = \{\emptyset, w_1, w_2, ..., w_n, w_1 + w_2, ..., w_1 + w_2 + ... + w_n\}$$

и нив ги има вкупно 2^n. Во многу случаи може да се претпостави дека сите одделни исходи се „еднакловеројатни“, т.е.

$$P(w_1) = P(w_2) = ... = P(w_k) = ... = P(w_n).$$

Бидејќи $P(\Omega) = 1$ и $w_1 + w_2 + ... + w_n = \Omega$ заради (*), добиваме дека

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(w_1 + w_2 + ... + w_n) = \\ &= P(w_1) + P(w_2) + ... + P(w_k) + ... + P(w_n) = \\ &\underbrace{= P(w_k) + P(w_k) + ... + P(w_k) + ... + P(w_k)}_{n \text{ пати}} = nP(w_k) \end{aligned}$$

т.е. $P(w_k) = \frac{1}{n}$ за секој $w_k \in \Omega$. (Δ)

Нека $A \in \Phi$ е произволен случаен настан и нека

$$w_{k_1}, w_{k_2}, ..., w_{k_m}$$

се елементарни настани кои се поволни за A. Тогаш

$$A = w_{k_1} + w_{k_2} + ... + w_{k_m}.$$

Од дисјунктоста на елементарните настани, (*) и (Δ) добиваме дека

$$P(A) = P\left(w_{k_1} + w_{k_1} + ... + w_{k_m}\right) \overset{(*)}{=} P\left(w_{k_1}\right) + P\left(w_{k_2}\right) + ... + P\left(w_{k_m}\right) = \\ \overset{(\Delta)}{=} \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{m\,\text{пати}} = \frac{m}{n}$$

т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Добивме дека веројатноста на настан A е еднаква на количникот на бројот на поволни настани за A и бројот на сите настани, т.е.

$$P(A) = \frac{\text{број на поволни настани за } A}{\text{број на елементарни настани}}.$$

Пример 1. Во непровидна кутија има 5 бели, 3 црвени и 2 жолти топчиња. Знаеме дека топчињата се со исти својства, а се разликуваат само по бојата. Експериментот се состои во извлекување топче без гледање. Која е веројатноста на настанот

A: извлечено е црвено топче?

Решение. Бројот на елементарни настани е $5+3+2=10$, т.е. $n = 10$. Бидејќи има 3 црвени топчиња, извлекувањето на кое било од нив е поволен настан за настанот A, па бројот на поволни настани за A е $m = 3$. Оттука, $P(A) = \frac{3}{10}$.

Пример 2. Во експериментот истовремено фрлање на црвена и бела коцка за играње, одреди ја веројатноста на настанот

A: збирот на точки кои се појавиле на двете коцки изнесува 5.

Решение. Во овој пример, видовме дека

$$\Omega = \{(x, y)\,|x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,\}.$$

Ако Ω го запишеме табеларно добиваме

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1)\,,(1,2)\,,(1,3)\,,(1,4)\,,(1,5)\,,(1,6)\,,\\ &(2,1)\,,(2,2)\,,(2,3)\,,(2,4)\,,(2,5)\,,(2,6)\,,\\ &(3,1)\,,(3,2)\,,(3,3)\,,(3,4)\,,(3,5)\,,(3,6)\,,\\ &(4,1)\,,(4,2)\,,(4,3)\,,(4,4)\,,(4,5)\,,(4,6)\,,\\ &(5,1)\,,(5,2)\,,(5,3)\,,(5,4)\,,(5,5)\,,(5,6)\,,\\ &(6,1)\,,(6,2)\,,(6,3)\,,(6,4)\,,(6,5)\,,(6,6)\}\end{aligned}$$

т.е. Ω содржи 36 настани т.е. $n = 36$. Да забележиме дека $36 = 6^2$ т.е. бројот на елементи во Ω е број на варијации со повторување од 6 елементи од класа 2, т.е. $\bar{V}_6^2$.

Од сите елементарни настани, поволни настани за A се: $(1, 4)$,

$(2,3),(3,2)$ и $(4,1)$, т.е. вкупно 4. Значи $m=4$ и оттука

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Пример 3. Од група од 9 ученици од кои 5 се момчиња, а 4 се девојчиња, треба да се изберат 3 ученици. Колкава е веројатноста на настанот

A: избраните ученици да бидат момчиња?

Решение. Бидејќи редоследот на избраните ученици не е битен, бројот на сите можни елементарни настани е $n=C_9^3=84$, а бројот на поволните настани за настанот A, според принципот на производ е $m=C_5^3\cdot C_4^0=10\cdot 1=10$. Значи, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{84}$.

Пример 4. (Класичен роденденски проблем) Најди ја веројатноста p, k луѓе да имаат различни родендени. При решавање на проблемот не разгледуваме престапни години и претпоставуваме дека сите денови во годината се еднакввоверојатни да бидат родендени.

Решение. Бидејќи има k луѓе и 365 различни денови во годината, постојат 365^k начини на кои k луѓе може да имаат родендени. Значи, $n=365^k$. Од друга страна, за да k-те луѓе имаат различни родендени, првиот може да биде роден во кој било од 365-те дена во годината, вториот да биде роден во кој било од останатите 364 дена, третиот да биде роден во некој од останатите 363 дена итн. Значи, согласно принципот на производ постојат $365\cdot 364\cdot 363\cdots(365-k+1)$ начини на кои k луѓе ќе бидат родени во различни денови, т.е. $m=365\cdot 364\cdot 363\cdots(365-k+1)$. Според тоа,

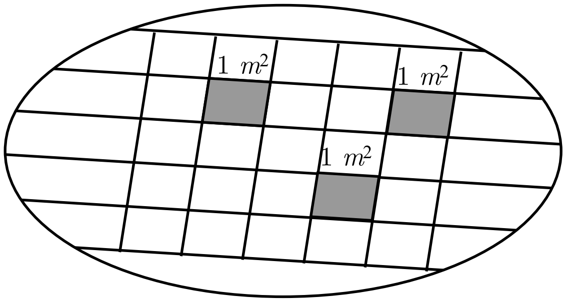
$$p=\frac{m}{n}=\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdots(365-k+1)}{365^k}.$$

3.2.6 Геометриска веројатност

Пример 1. Нека задачата е да се предвиди приносот на пченица од една нива. Треба да се измери густината на распоредот на корените пченица на $1m^2$, бројот на зрната во класот, како и нивната тежина, а и други биометриски податоци: висината и тежината на растението. За таа цел нивата се дели на експериментални квадрати, и се избираат 3 до 5 места вдолж нивата како експеримантални места, кои потполно се обработуваат (и со тоа се уништуваат). Се наоѓа дека среден принос по квадратен метар изнесува на пример $a\,kg$, средна бројност на зрната во класот n единки. Сега треба истото да се направи за целата нива. Не би било можно да се брои и мери целата нива, клас по клас, зрно по зрно. Затоа широко се користи прогнозата, аналогијата, веројатноста. Се користи масовноста на појавата, еквивалентоста меѓу мал и голем дел од нивата, т.е. и секој дел од нивата е нива со исти особини на родот: густина, распоред, тежина, квалитет, што доведува до следнава пропорционалност:

Ако на $p\,m^2$ има тежина на родот од $g\,kg$
тогаш на $P\,m^2$ ќе има тежина на родот од $G\,kg$

или $$p : g = P : G$$
од каде наоѓаме
$$G = \tfrac{P}{p} \cdot g$$
и притоа на овој начин сме извршиле **прогноза** на приносот.



Ако оваа пропорција ја напишеме во обликот $\frac{g}{G} = \frac{p}{P}$ читаме дека односот меѓу тежината на родот на експерименталниот терен и целиот род се однесуваат како плоштината на експерименталниот дел со целата плоштина на нивата. Ако нивата би била засеана со други култури: пченка, шеќерна репка, би имале други вредности за g, G, но односот $\frac{p}{P}$ останува како геометриски постојан за целата нива. Затоа односот на плоштините се вика **веројатност** на родот на пченица по $1\,m^2$ на даден терен или геометриска веројатност.

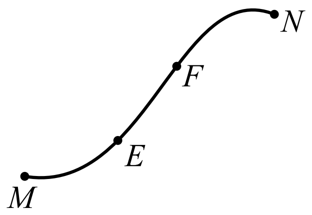
Единствените бесконечни, непреброиви простори на елементарни настани Ω кои ќе ги разгледуваме во оваа книга се оние кои имаат некоја конечна геометриска „мера“, како што се должина, плоштина или волумен, и во кои случајно се избира точка. Значи, Ω може да се претстави со некоја крива со конечна должина, фигура со конечна плоштина или тело со конечен волумен.

i) Нека Ω е претставен со некоја крива MN (постои биекција меѓу точките од кривата MN и Ω). Ако A е некој случаен настан (подмножество од Ω), тој може да се преттави со дел EF од кривата MN. Тогаш веројатноста $P(A)$ на настанот A е

$$P(A) = \frac{m(EF)}{m(MN)}$$

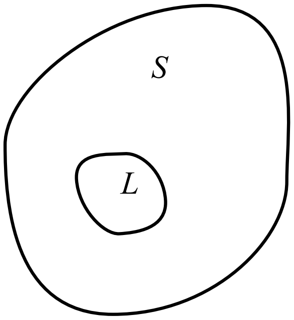
каде $m(EF)$ е должината на EF, а $m(MN)$ е должината на MN. Значи,

$$P(A) = \frac{\text{должина на } EF}{\text{должина на } MN}.$$



ii) Слично, ако Ω може да се претстави со некоја рамнинска фигура S, тогаш кој било случаен настан A е друга рамнинска фигура L содржана во S, па

$$P(A) = \frac{\text{плоштина на } L}{\text{плоштина на } S}.$$

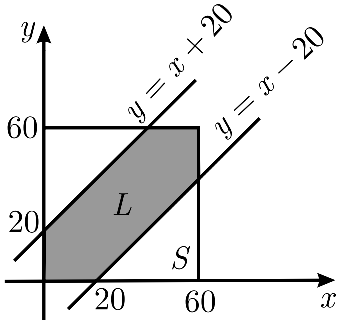


iii) Во случај Ω да е претставен со просторно тело T, случајниот настан A со друго тело K, тогаш

$$P(A) = \frac{\text{волумен на } K}{\text{волумен на } T}.$$

Пример 2. (Средба) Двајца пријатели се договориле да се сретнат на определено место во времето од 8 до 9 часот. Секој од нив, откако ќе дојде на договореното место, треба да го почека пријателот точно 20 минути, а ако не дојде до средба, по 20 минути треба да си оди. Колку е веројатноста да дојде до средба, ако времето на пристигнување на секој од пријателите е случајно?

Решение. Нека x е времето на пристигнување на едниот од пријателите, а y на другиот. Ако за единица мерка земеме 1 минута, имајќи предвид дека меѓу 8 и 9 часот има 60 минути, елементарните настани можеме да ги опишеме со подредени парови (x, y), каде $x, y \in [0, 60]$, т.е. $\Omega = \{(x, y)\,|x, y \in [0, 60]\}$. Во однос на избран правоаголен Декартов координатен систем, Ω може да се претстави со квадрат S. Со A го означуваме настанот да дојде до средба. Настанот A ќе настапи ако е задоволено неравенството $|y - x| \leq 20$, т.е. $-20 \leq y - x \leq 20$, односно $y \leq x + 20$ и $y \geq x - 20$. Така, на настанот A му одговара шрафираниот дел L од квадратот S.



Добиваме $P(A)=\frac{\text{плоштина на } L}{\text{плоштина на } S}=\frac{60^2-2\cdot\frac{40\cdot 40}{2}}{60^2}=\frac{5}{9}$.

3.2.7 Условна веројатност и независност на настани

При изучување на појавите, често пати се јавува потреба да се има сознанија за односите меѓу разни настани поврзани со таа појава. Така, природно се јавува задача за пресметување на можноста на настапување на даден настан B ако е познато дека веќе настапил друг настан A.

Веројатноста на случајниот настан B при претпоставка дека настапил настанот A, којшто не е невозможен ($P(A)>0$) се нарекува **условна веројатност** и се означува со $P_A(B)$.

Пример 1. Во непровидна кутија се наоѓаат 5 бели и 7 црвени топчиња кои се разликуваат само по бојата. Експериментот се состои во две влечења на топче од кутијата, при што по првото влечење, извлеченото топче не се враќа назад во кутијата. Нека со A и B ги означиме настаните

A: извлечено е бело топче во прво влечење

B: извлечено е бело топче во второ влечење.

Најди ја $P(B)$ ако

i) Настанот A настапил

ii) Настанот A не настапил.

Решение. *i*) Ако настанот A настапил, т.е. во првото влечење е извлечено бело топче, тогаш во кутијата останале 4 бели и 7 црвени топчиња, т.е. вкупно 11 топчиња од кои 4 бели, па $P_A(B)=\frac{4}{11}$.

$ii)$ Ако настанот A не настапил, т.е настапил $\bar{A}$, па во првото влечење е извлечено црвено топче, тогаш во кутијата останале 5 бели и 6 црвени топчиња, или вкупно 11 топчиња од кои 5 бели па имаме $P(B) = P_{\bar{A}}(B) = \frac{5}{11}$.

Забелешка. Во овој експеримент, очигледно е дека веројатноста на настанот B зависи од тоа дали настанот A настапил или не $\left(\frac{4}{11} \neq \frac{5}{11}\right)$.

Нека (Ω, Φ, P) е конечен простор на веројатност, при што елементарните настани се еднаквоверојатни. Нека A и B се два случајни настани при што настанот A не е невозможен, т.е. $P(A) > 0$. Ако претпоставиме дека настапил настанот A, значи дека настапил некој од елементарните настани поволни за настанот A. Настанот B ќе настапи ако настапи некој од елементарните настани поволни за настанот B, а бидејќи A веќе настапил, залкучуваме дека B ќе настапи ако настапи некој од елементарните настани што се заеднички за A и B, т.е. поволни за $A \cdot B$. Според класичната дефиниција на веројатноста, добиваме дека $P_A(B) = \frac{n_{A \cdot B}}{n_A}$, каде $n_{A \cdot B}$ е број на поволни настани за $A \cdot B$, а n_A е број на поволни настани за A. Ако n е бројот на сите елементарни настани, имајќи предвид дека $P(A) = \frac{n_A}{n}$ и $P(A \cdot B) = \frac{n_{A \cdot B}}{n}$ добиваме дека

$$P_A(B) = \frac{n_{A \cdot B}}{n_A} = \frac{\frac{n_{A \cdot B}}{n}}{\frac{n_A}{n}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)},$$

т.е. $P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$.

Формулата

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} \qquad (*)$$

што ја докажавме во случај кога може да се примени класичната дефиниција на веројатност може да се земе за дефиниција на условна веројатност во сите случаи, т.е. важи следнава теорема.

Теорема 1. Нека (Ω, Φ, P) е простор на веројатност и нека $A \in \Phi$ е таков што $P(A) > 0$. Тогаш пресликувањето $P_1 : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ определено со $P_1(B) = P_A(B)$, за секој $B \in \Phi$, каде $P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$ претставува веројатност на Φ таква што $P_1(A) = 1$.

Пример 2. Во поголема група на татковци и синови е утврдено дека

а) татковци со темни очи и синови со темни очи имало 5%;

б) татковци со темни очи и синови со светли очи имало 7,9%;

в) татковци со светли очи и синови со темни очи имало 8,9%;

г) татковци со светли очи и синови со светли очи имало 78,2%.

Сметајќи дека постои статистичка стабилност во однос на врската меѓу бојата на очите на татковците и нивните синови, пресметај ги веројатностите:

i) При случаен избор на еден од синовите, избраниот да има темни очи знаејќи дека неговиот татко има темни очи.

ii) При случаен избор на еден од синовите, избраниот да има темни очи ако се знае дека неговиот татко има светли очи.

Решение. Нека со A и B ги означиме настаните

A: таткото има темни очи,

B: синот има темни очи.

Тогаш

$\bar{A}$: таткото има светли очи,

$\bar{B}$: синот има светли очи.

Треба да ги пресметаме условните веројатности:

i) $P_A(B)$ и *ii*) $P_{\bar{A}}(B)$.

Од наведените податоци имаме дека $P\left(A \cdot B\right) = 0,05$, $P\left(A \cdot \bar{B}\right) = 0,079$, $P\left(\bar{A} \cdot B\right) = 0,089$ и $P\left(\bar{A} \cdot \bar{B}\right) = 0,782$.

Од $A \subseteq \Omega$ имаме $A = A \cdot \Omega$, а пак од друга страна $\Omega = B + \bar{B}$, па $A = A \cdot B + A \cdot \bar{B}$, и $P(A) = P(A \cdot B) + P(A \cdot \bar{B}) = 0,05 + 0,079 = 0,129$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,129 = 0,871$.

Конечно, користејќи ја формулата за условна веројатност, добиваме дека:

i) $P_A\left(B\right) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{0{,}05}{0{,}129} = 0,39$;

ii) $P_{\bar{A}}\left(B\right) = \frac{P(\bar{A} \cdot B)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}089}{0{,}871} = 0,10$.

За да се пресмета условна веројатност потребно е да се знае веројатноста на производот на настаните A и B, т.е. $P(A \cdot B)$. Но, во многу случаи, полесно е да се пресмета условната веројатност отколку веројатноста на производот на настаните. Затоа, формулата за условна веројатност, всушност често се користи за пресметување на веројатност на производ на настани. Директно од формулата за условна веројатност следува следнава теорема.

Теорема 2. За настаните A и B што се во врска со ист експеримент, важи:

$i)$ $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$, при $P(A) > 0$;

$ii)$ $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$, при $P(B) > 0$.

За настанот B ќе велиме дека е **независен** од настанот A ако на веројатноста за настапување на настанот B не влијае фактот дали настанот A се појавил или не се појавил. Со други зборови, веројатноста на настанот B е еднаква на условната веројатност на B при услов A, т.е. $P(B) = P_A(B)$. Заменувајќи во $i)$ во теорема 2, добиваме дека $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Од $ii)$ и последното следува дека $P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P(B)$, при $P(B) > 0$, т.е. дека $P(A) = P_B(A)$, што значи дека и настанот A е независен од настанот B. Поради тоа, во продолжение ќе зборуваме за заемно независни настани.

Теорема 3. Случајните настани A и B, за кои $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, се независни ако и само ако $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Со помош на принципот на математичка индукција може да се обопшти теорема 2, т.е. важи следнава теорема.

Теорема 4. За настаните $A_1, A_2, \ldots A_n$ што се во врска со ист експеримент, такви што $P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, важи

$$P(A_1{\cdot}A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P\left(A_1\right) \cdot P_{A_1}\left(A_2\right) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}\left(A_3\right) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}\left(A_n\right).$$

Пример 3. Студент дошол да полага испит знаејќи 40 од 50 прашања од предвидената програма од предметот. Студентот добива прашање откако ќе одговори на претходното прашање. Најди ја веројатноста p студентот да одговори на 3 прашања.

Решение. Нека A, B и C се настаните

A: студентот одговорил на првото прашање

B: студентот одговорил на второто прашање

C: студентот одговорил на третото прашање.

Се бара да се пресмета $p = P(A \cdot B \cdot C)$. Од теорема 4,

$$p = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cdot B}(C).$$

Јасно е дека $P(A) = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$. Настанот B зависи од настанот A, и откако настапил настанот A, остануваат 49 прашања, а од нив студентот знае 39, па $P_A(B) = \frac{39}{49}$. Слично, $P_{A \cdot B}(C) = \frac{38}{48} = \frac{19}{24}$, бидејќи откако настапил $A \cdot B$, т.е. A и B истовремено, останале 48 прашања, а од нив студентот знае да одговори на 38.

Конечно, $p = P\left(A \cdot B \cdot C\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{39}{49} \cdot \frac{19}{24} \approx 0,5$.

Во продолжение ќе ја обопштиме дефиницијата за независност од два на произволен конечен број случајни настани. За случајните настани $A_1, A_2, ..., A_n$ велиме дека **се независни во целина** ако се задоволени следниве услови:

$$\begin{aligned}
&A_i \neq A_j, \text{ за } i \neq j \\
&P\left(A_i \cdot A_j\right) = P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_j\right), \text{ за } i \neq j,\ i, j \in \{1, 2, ..., n\} \\
&P\left(A_i \cdot A_j \cdot A_s\right) = P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_j\right) \cdot P\left(A_s\right), \\
&\qquad \text{за } i \neq j \neq s \neq i,\ i, j, s \in \{1, 2, ..., n\} \\
&. \\
&. \\
&. \\
&P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot ... \cdot P\left(A_n\right)
\end{aligned}$$

3.2.8 Тотална веројатност. Формула на Бајес

Теорема 1. (Формула за тотална веројатност) Нека Ω е множеството на елементарни настани за даден експеримент и нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се случајни настани такви што:

i) $A_i \cdot A_j = \emptyset$, за $i \neq j$, т.е. кои било два различни настани не може да настапат истовремено;

ii) $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$.

Тогаш, за произволен случаен настан B кој може да настапи под услов да настапи некој од настаните $A_1, A_2, ..., A_n$, важи

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B).$$

Доказ. Од $B \subseteq \Omega$ и $ii)$, добиваме дека

$$B = B \cdot \Omega = B \cdot (A_1 + A_2 + ... + A_n) = B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + ... + B \cdot A_n,$$

т.е.

$$B = B \cdot A_1 + B \cdot A_2 + ... + B \cdot A_n = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B + ... + A_n \cdot B.$$

Од $i)$ добиваме дека за $i \neq j$ и $(A_i \cdot B) \cdot (A_j \cdot B) = \emptyset$. Користејќи теоремите од претходните делови, имаме

$$\begin{aligned} &P(B) = P(A_1 \cdot B + A_2 \cdot B + ... + A_n \cdot B) = \\ &= P(A_1 \cdot B) + P(A_2 \cdot B) + ... + P(A_n \cdot B) = \\ &= P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \cdot P_{A_n}(B) \end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

Пример 1. Во една кутија има 4 бели и 2 црни топчиња, а во друга кутија има 3 бели и 5 црни топчиња. Топчињата во двете кутии се исти во се, освен во бојата, така што на допир со рака не се разликуваат. Од првата кутија случајно се бираат 2 топчиња и без да се погледнат се префрлаат во втората кутија. Потоа од втората кутија случајно се бира едно топче. Најди ја веројатноста последното извлечено топче да биде бело.

Решение. Нека е

B: последното извлечено топче е бело

A_1: двете префрлени топчиња се бели

A_2: едното префрлено топче е бело а другото црно

A_3: двете префрлени топчиња се црни.

Да забележиме дека при влечењето на две топчиња од првата кутија, нема друга можност освен еден од A_1, A_2 или A_3, и дека $A_1 \cdot A_2 = \emptyset$, $A_1 \cdot A_3 = \emptyset$ и $A_2 \cdot A_3 = \emptyset$, т.е. кои било два од A_1, A_2 и

A_3 не може да настапат истовремено. Со примена на формулата за тотална веројатност, добиваме

$$\begin{aligned}&P\left(B\right)=P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}\left(B\right)+P\left(A_2\right)\cdot P_{A_2}\left(B\right)+P\left(A_3\right)\cdot P_{A_3}\left(B\right)=\\&=\tfrac{C_4^2\cdot C_2^0}{C_6^2}\cdot\tfrac{2+3}{2+8}+\tfrac{C_4^1\cdot C_2^1}{C_6^2}\cdot\tfrac{1+3}{2+8}+\tfrac{C_4^0\cdot C_2^2}{C_6^2}\cdot\tfrac{0+3}{2+8}=\tfrac{13}{30}.\end{aligned}$$

Пример 2. Познато е дека од две вреќи семенски материјал, 90% од зрната од првата вреќа и 70% од зрната од втората вреќа се плодни. Најди ја веројатноста при случаен избор на вреќа (без гледање) да биде избрано плодно зрно.

Решение. Нека е

B: избраното зрно е плодно

A_1: влечењето на зрно е од првата вреќа

A_2: влечењето на зрно е од втората вреќа.

Тогаш, од формулата за тотална веројатност, добиваме

$$P\left(B\right)=P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}\left(B\right)+P\left(A_2\right)\cdot P_{A_2}\left(B\right)=\frac{1}{2}\cdot 0,9+\frac{1}{2}\cdot 0,7=0,8.$$

Случајните настани $A_1, A_2, ..., A_n$ во формулата за тотална веројатност се викаат хипотези. Нивните веројатности ги пресметуваме директно. Понекогаш, при спроведувањето на некој експеримент во кој настапил настанот B, може да има потреба да се пресметаат веројатностите $P_B(A_j)$, за $j \in \{1, 2, ..., n\}$, кои во општ случај се разликуваат од $P(A_j)$. За нивно пресметување се користи следнава теорема.

Теорема 2. (Формула на Бајес) Нека Ω е множество на елементарни настани за даден експеримент, B е случаен настан со позитивна веројатност, а $A_1, A_2, ..., A_n$ се случајни настани такви што $A_i \neq A_j$, за $i \neq j$ и $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$. Тогаш важи

$$P_B\left(A_j\right)=\frac{P\left(A_j\right)\cdot P_{A_j}\left(B\right)}{P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}\left(B\right)+P\left(A_2\right)\cdot P_{A_2}\left(B\right)+...+P\left(A_n\right)\cdot P_{A_n}\left(B\right)},$$

за $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Доказ. За $j \in \{1, 2, ..., n\}$ имаме

$$\begin{aligned}&P_B\left(A_j\right) \overset{df}{=} \tfrac{P(A_j\cdot B)}{P(B)} \overset{df}{=} \tfrac{P(A_j)\cdot P_{A_j}(B)}{P(B)} \overset{T.1.}{=} \\ &= \tfrac{P(A_j)\cdot P_{A_j}(B)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(B)+...+P(A_n)\cdot P_{A_n}(B)},\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

Пример 3. Три машини A_1,A_2 и A_3 произведуваат 50%, 30% и 20 %, соодветно, од вкупниот број производи во фабриката. Познато е дека процентите на дефектни производи на машините се 3%, 4% и 5%, соодветно.

а) При случаен избор на производ, пресметај ја веројатноста избраниот производ да е дефектен.

б) Најди ја веројатноста дека случајно избран производ, за кој потоа е утврдено дека е дефектен, е произведен од машината A_1.

Решение. Нека

B: избраниот производ е дефектен

A_j: избраниот производ е произведен од машината A_j, за $j \in \{1, 2, 3\}$.

Јасно е дека се исполнети условите од теорема 1 и теорема 2, т.е. $A_i \cdot A_j = \emptyset$, за $i \neq j$ и $A_1 + A_2 + A_3 = \Omega$.

а)

$$\begin{aligned}&P\left(B\right) = P\left(A_1\right)\cdot P_{A_1}\left(B\right) + P\left(A_2\right)\cdot P_{A_2}\left(B\right) + P\left(A_3\right)\cdot P_{A_3}\left(B\right) = \\ &= 0,5\cdot 0,03 + 0,3\cdot 0,04 + 0,2\cdot 0,05 = 0,037.\end{aligned}$$

б) Во овој случај случајно се бира производ и потоа е утврдено дека е дефектен. Се бара да се пресмета веројатноста дека овој производ е произведен од машината A_1, т.е. се бара да се пресмета $P_B(A_1)$. Од теорема 2 имаме

$$\begin{aligned}&P_B\left(A_1\right) = \tfrac{P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)}{P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(B)+P(A_3)\cdot P_{A_3}(B)} = \\ &= \tfrac{0,5\cdot 0,03}{0,5\cdot 0,03+0,3\cdot 0,04+0,2\cdot 0,05} = \tfrac{15}{37}.\end{aligned}$$

3.2.9 Серии од независни експерименти

3.2.9.1 Шема на Бернули

Нека E е даден експеримент и A е случаен настан што е во врска со E. За серијата од повторувања на експериментот E, при исти услови, велиме дека е **шема на Бернули** ако:

i) Бројот на повторувања на експериментот е конечен, и нека го означиме со n;

ii) При секое повторување на експериментот имаме само два резултати:

а) Се појавил настанот A

б) Не се појавил настанот A, т.е. се појавил спротивниот настан $\bar{A}$;

iii) Сите повторувања на експериментот се независни еден од друг, т.е. веројатноста да настапи настанот A во дадено повторување не зависи од резултатите во претходните или следните повторувања на експериментот;

iv) Веројатноста за настапување на настанот A, во секое од повторувањата на експериментот, е иста и да ја означиме со p, т.е. $p = P(A)$ и $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

Со $P_{j,n}(A) = P_n(j)$ ја означуваме веројатноста во целата серија од n независни повторувања на експериментот, настанот A да настапил $j-$пати.

Теорема 1. $P_n\left(j\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) p^j q^{n-j}, \;\; j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

Пример 1. Најди ја веројатноста при 8 фрлања на монета, грб да се појави 4 пати.

Решение. Ова е пример на шема на Бернули, во која имаме:

A: појава на грб на горната страна од монетата,

$n = 8$, $j = 4$, $p = P(A) = \frac{1}{2}$ и $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Значи,

$$P_8\left(4\right) = \left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-4} = 0,27.$$

Пример 2. Статистички е утврдено дека од 1000 новородени деца, 512 се машки а 488 се женски деца. Најди ја веројатноста, во фамилија од 3 деца, да има едно машко дете.

Решение. Нека е

A: во фамилијата се родило машко дете.

Од формулата за статистичка веројатност имаме

$$p = P(A) = \frac{512}{1000} = 0,512,$$

па $q = 1 - p = 1 - 0,512 = 0,488$. При претпоставка дека веројатноста за раѓање на машко дете во фамилија не зависи од тоа какви деца се родиле претходно во фамилијата, ниту пак од тоа какви деца ќе се родат во иднина, и дека станува збор за стабилен систем (p е исто), може да се искористи формулата од шемата на Бернули, во која $n = 3$, $j = 1$, па добиваме

$$P_3(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (0,512)^1 (0,488)^{3-1} = 0,366.$$

Пример 3. Во една фабрика, веројатноста да се произведе артикл со грешка е 0,005. Најди ја веројатноста во една серија од 10000 производи:

i) 40 од нив да се со грешка

ii) не повеќе од 75 од нив да бидат со грешка.

Решение. Во примеров, $p = 0,005$, $q = 0,995$ и $n = 10000$.

i) Овде $j = 40$, па

$$P_{10000}(40) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 40 \end{pmatrix} (0,005)^{40} (0,995)^{10000-40}.$$

ii) Нека е

A_k: k од 10000-те производи се со грешка, за $k \in \{0, 1, 2, ..., 10000\}$

B: Не повеќе од 75 од 10000 производи се со грешка.

Тогаш $B = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_{75}$, па

$$\begin{aligned}&P\left(B\right)=P\left(A_0\right)+P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+...+P\left(A_{75}\right)=\\&=P_{10000}\left(0\right)+P_{10000}\left(1\right)+P_{10000}\left(2\right)+...+P_{10000}\left(75\right)=\\&=\sum_{j=0}^{75}P_{10000}\left(j\right)=\sum_{j=0}^{75}\left(\begin{array}{c}10000\\j\end{array}\right)\left(0,005\right)^j\left(0,995\right)^{10000-j}.\end{aligned}$$

Користејќи ја теорема 1 и Њутновата формула за развој на биномот $(q+px)^n$ за $x=1$ се добива следнава теорема.

Теорема 2. $P_n\left(0\right)+P_n\left(1\right)+P_n\left(2\right)+...+P_n\left(n\right)=1.$

3.2.9.2 Највероjатен броj (мода)

Нека е дадена шема на Бернули и нека n е фиксен броj. Ако постои j таков што $P_n(j)$ е наjголема меѓу сите вероjатности од тоj вид, тогаш j се нарекува **наjвероjатен броj** или **мода**. Следнава теорема дава начин за пресметување на модата.

Теорема 1. Нека p е вероjатноста на случаjниот настан A во шемата на Бернули со n независни повторувања на даден експеримент, и нека $q=1-p$. Тогаш:

i) ако $np-q=k_0$ е цел броj, k_0 и k_0+1 ќе бидат наjвероjатни броеви (моди) за настапување на настанот A во целата сериjа од n повторувања на дадениот експеримент.

ii) ако $np-q$ не е цел броj, наjвероjатниот броj за настапување на настанот A во сериjата од n повторувања на експериментот ќе биде наjмалиот природен броj k_0 што е поголем од $np-q$.

Пример 1. Во една фабрика технолошкиот процес е таков што обезбедува 30% од изработените производи да бидат со подобар квалитет од стандардниот. Наjди го наjвероjатниот броj на предмети со подобар квалитет во една случаjно избрана сериjа од 75 изработени предмети.

Решение. Jасно, станува збор за шема на Бернули, каде вероjатноста предметот да биде со подобар квалитет е $p=0,3$ и $n=75$. Тогаш $q=1-p=0,7$, па $np-q=21,8$. Според теорема 1, *ii*) наjвероjатниот броj е $k_0=22$, што значи дека наjвероjатно во случаjната сериjа од 75 избрани производи, 22 ќе бидат со подобар квалитет од стандардниот.

3.2.9.3 Последици од теоремите на Лаплас

При пресметувањето на веројатностите $P_n(j)$ во шемата на Бернули, често настапуваат технички потешкотии заради долгите пресметки. Ќе дадеме, без доказ, две последици (од локалната и интегралната теорема на Лаплас) за приближно пресметување на веројатностите $P_n(j)$ што се јавуваат во шемата на Бернули.

Теорема 1. Ако веројатноста p за настапување на случајниот настан A во секој од $n-$те независни повторувања на даден експеримент е различна од 0 и 1, тогаш за доволно големи вредности на n важи приближното равенство

$$P_n\left(j\right) \approx \frac{\phi\left(x\right)}{\sqrt{npq}}$$

каде $\phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ x = \frac{j-np}{\sqrt{npq}}$.

Забелешка 1. Приближните вредности за $P_n(j)$ од теорема 1 се подобри за поголеми вредности на p блиску до $\frac{1}{2}$.

Забелешка 2. Иако приближната формула за $P_n(j)$ од теорема 1, на прв поглед изгледа сложено, пресметувањата се олеснети бидејќи се изработени таблици (дадени во прилог на учебников) за пресметување на вредности на $\phi(x)$.

Теорема 2. Ако $p \neq 0$ и $p \neq 1$ во шемата на Бернули со n независни повторувања и ако $k_1 = np+a\sqrt{npq},\ k_2 = np+b\sqrt{npq},\ a < b$, тогаш за доволно големи вредности на n важи

$$P\left(k_1 < j < k_2\right) \approx \frac{\varphi\left(b\right) - \varphi\left(a\right)}{2}$$

каде $\varphi\left(x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Забелешките 1 и 2 важат и во овој случај.

3.2.9.4 Последица од теоремата на Пуасон

Теорема 1. Нека p е веројатноста на случаен настан A во шемата на Бернули од n независни повторувања на даден експеримент. Ако p има вредност блиска до 0, тогаш за доволно големи вредности на n важи

$$P_n\left(k\right) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

каде $a = np$.

Забелешка. Се проверува дека приближната формула во теорема 1 важи и за вредности на p блиски до 1.

3.2.10 Случајна променлива

Во разни појави и процеси од секојдневниот живот се среќаваме со величини чии вредности се менуваат од случај до случај, т.е. величини кои во даден момент на процесот може да примат една вредност (број) а однапред не е познато која вредност ќе ја примат. Нив ги нарекуваме **случајни променливи** и истите се тесно поврзани со случајни настани.

Случајна променлива ξ на простор од елемнтарни настани Ω е функција f од Ω во $\mathbb{R}$ таква што инверзната слика на секој интервал од $\mathbb{R}$ е настан од Ω.

За подобро разбирање на случајната променлива не е доволно да се знаат само нејзините вредности (вредностите кои ги прима) туку е потребно да се знае и со кои веројатности величината ги прима одделните вредности.

Настанот: ξ да прими вредност x, е случаен настан и со $P(\xi = x)$ ќе ја означуваме веројатноста на овој настан.

Во зависност од тоа какво е множеството на вредности (преброиво или непреброиво) кои случајната променлива ги прима, разликуваме два типа: дискретни и непрекинати, и во продолжение одделно ќе ги разгледаме.

3.2.10.1 Поим за дискретни случајни променливи

Да разгледаме неколку примери.

Пример 1. Нека фрламе две метални монети, истовремено. Со G да означиме појавување на грб, со P појавување на писмо, а со GP појавување на грб на првата монета и писмо на втората, при едно истовремено фрлање на монетите. Со ξ да го означиме бројот на појавување на писма при едно фрлање на монетите. Тогаш, можни се четири случаи, т.е. $\Omega = \{GG, GP, PG, PP\}$. Од овде, заклучуваме дека бројот на појавување на писма при едно фрлање може да биде една од вредностите 0,1,2, т.е. $\xi = 0$, $\xi = 1$ или $\xi = 2$. Да ги пресметаме веројатностите со кои величината ξ ги прима овие вредности.

$p_0 = P(\xi = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$p_1 = P(\xi = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$p_2 = P(\xi = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Забележуваме дека

$$p_0 + p_1 + p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

Пример 2. Нека фрламе две коцки за играње, истовремено, и нека со ξ го означиме збирот на точките што се појавуваат на двете коцки. Лесно може да се види дека ξ може да прими една од вредностите: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, со веројатности,

$$\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36},$$

соодветно.

Забележуваме дека и овде

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = 1$$

т.е. збирот на веројатностите со кои што ξ ги прима сите вредности, е еднаков на 1.

Пример 3. Нека извршиме серија од n независни повторувања на даден експеримент во секој од кои настанот A настапува со веројатност p (шема на Бернули). Со ξ да го означиме бројот на настапување на настанот A во целата серија од n повторувања на експериментот. Веќе видовме дека ξ може да прима една од вредностите $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n$, при што веројатноста $\xi = k$ (настанот A настапил k пати) е еднаква на $C_n^k p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$, т.е.

$$p_k = P\left(\xi = k\right) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Бидејќи $p + q = 1$, користејќи ја биномната формула добиваме дека

$$1 = 1^n = \left(p + q\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P\left(\xi = k\right)$$

т.е. збирот на веројатностите со коишто ξ ги прима сите вредности е еднаков на 1.

Во секој од горните примери сретнуваме по една величина ξ која што може да прими вредности од некое (во нашите примери, конечно) множество. Додатно, за величината ξ да биде добро опишана, беа дадени (пресметани) и веројатностите со кои величината ξ ги прима вредностите. Во секој од примерите, забележавме дека збирот од веројатностите со коишто ξ ги прима сите вредности е еднаков на 1. Исто така, се забележува дека настанот ξ да прими некоја определена вредност, е случаен, и поради тоа самата величина ξ ја нарекуваме случајна.

Да резимираме, за една случајна променлива ξ ќе сметаме дека е **потполно определена**, ако се дадени сите вредности што таа може да ги прими, заедно со соодветните им веројатности, и притоа збирот на сите тие веројатности е еднаков на 1.

Покрај случајните променливи со коишто се сретнавме во примерите 1, 2 и 3, често се сретнуваат и такви случајни променливи коишто примаат вредности од некое бескрајно множество. Ќе разгледаме еден пример.

Пример 4. Нека ξ е случајна променлива што ги прима вредностите: $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ со веројатности

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

каде $a > 0$ е некоја константа. Притоа, користејќи дека

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$$

се добива дека

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^a \cdot e^{-a} = 1.$$

Разликата меѓу случајните променливи од овој пример и случајните променливи од претходните примери е во тоа што, досега имавме случајни променливи коишто примаат вредности од едно конечно множество, додека во пример 4 случајната променлива ги прима сите вредности од целото проширено множество од природни броеви $\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, т.е. од бесконечно преброиво множество.

Заедничко на сите случајни променливи, досега разгледани, е тоа што збирот од веројатностите со кои што случајната променлива ги прима сите вредности, е еднаков на 1.

Досега разгледаните случајни променливи се нарекуваат **дискретни** случајни променливи. Значи, една случајна променлива ξ која што прима вредност од некое конечно множество, бесконечно преброиво множество (множество чии што елементи може да бидат запишани во облик на една бесконечна низа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$) со веројатности p_k, соодветно, и притоа $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, се нарекува **дискретна случајна променлива**.

Ако ξ е дискретна случајна величина, која прима вредности: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, со веројатности $p_1, p_2, \ldots, p_n$, соодветно, пишуваме

$$\xi = \left\{ x_i, p_i, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}.$$

Ако ξ е дискретна случајна величина, која прима вредности: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ со веројатности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, соодветно, пишуваме

$$\xi = \left\{ x_i, p_i, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \right\}.$$

Во двата случаи, x_i се нарекуваат **тековни вредности** а $p_i = P\left(x_i\right) = p\left(\xi = x_i\right)$ се нарекуваат **закон на распределба на случајната променлива** ξ.

Ако случајната променлива ξ може да ја прими која било вредност од некој интервал од реалните броеви, се нарекува **непрекината случајна променлива**.

Пример 5. Ако ја ξ означува случајната променлива: температурата на воздухот во текот на еден ден, тогаш ξ е пример на непрекината случајна променлива.

Пример 6. Случајната променлива ξ: тежина на зрно пченица во случајно избран клас од една нива, е исто така непрекината случајна променлива.

Непрекинатите случајни променливи посебно ќе ги разгледаме после изучувањето на дискретните случајни променливи.

3.2.10.2 Графичко претставување на законот на распределба на веројатностите на дискретна случајна променлива

Нека

$$\xi = \left\{ x_i, p_i, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \right\}$$

е дискретна случајна променлива. Често пати законот на распределба на веројатностите на ξ го задаваме во вид на табела:

x_1	x_2	...	x_n	...
p_1	p_2	...	p_n	...

Графички, законот за распределба на веројатностите на ξ може да се прикаже во облик на **крива, полигон** или **хистограм** на веројатностите.

Ако во координатен систем xOy, на апсцисната оска (x-оската) го нанесеме множеството на тековните вредности x_i а на ординатната оска (y-оската) го нанесеме множеството вредности p_i, добиваме множество точки $A_i(x_i, p_i)$. Вака добиеното множество точки A_i се нарекува **пунктуелен график (график точка по точка) на веројатностите**.

Ако точките (x_i, p_i) се спојат со една крива линија, се добива **крива на веројатностите**.

Ако точките (x_i, p_i) и (x_{i+1}, p_{i+1}) се спојат со отсечки, се нарекува **полигон на веројатностите**.

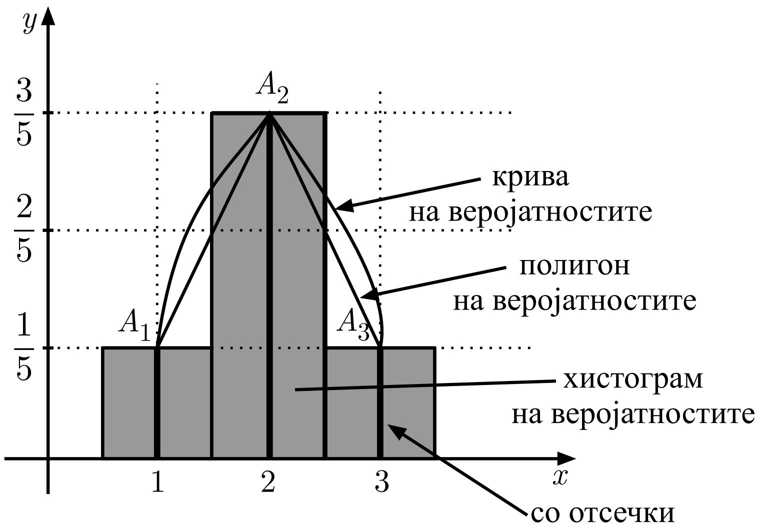
Ако нацртаме правоаголници со висини p_i и основи еднакви на единичните интервали во чии среднини се наоѓаат тековните вредности x_i, добиваме **хистограм на веројатностите**.

Корисен приказ на законот на распределба на веројатностите е и со нанесување на отсечки од секоја точка x_i во позитивната насока на ординатната оска со должини еднакви на вредостите на соодветните веројатности p_i.

Пример 1. Нека ξ е случајна променлива, чијшто закон на распределба на веројатностите е зададен со следнава табела:

1	2	3
$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Графички, ξ може да се претстави на следниов начин:



3.2.10.3 Функција на распределба на веројатностите на дискретна случајна променлива

Често пати случајната променлива се задава преку нејзината **функција на распределба на веројатностите**, наместо досегашниот начин на задавање преку законот на распределба на веројатностите. Во продолжение ќе ја дефинираме оваа функција и ќе дадеме неколку примери.

Веројатноста на настанот, случајната величина ξ да прими вредност помала од реалниот број x, е функција $F(x)$ од x, и ја нарекуваме **функција на распределба на веројатностите на случајната променлива** ξ. Значи,

$$F(x) = P(\xi < x) = P(-\infty < \xi < x)$$

каде x е произволен релен број.

Забелешка. Заради пократко искажување, во продолжение ќе велиме закон на веројатностите и функција на распределба наместо закон на распределба на веројатностите и функција на распределба на веројатностите, соодветно.

Пример 1. Да ја разгледаме случајната променлива ξ од примерот 1 во 3.2.10.1.

ξ:	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Да ја најдеме нејзината функција на распределба.

$F(0) = P(\xi < 0) = 0$, бидејќи настанот

A: ξ прима вредности помали од 0

е невозможен.

$F(1) = P(\xi < 1) = P(\xi = 0) = \frac{1}{4}$

$F(2) = P(\xi < 2) = P(\text{или } \xi = 0 \text{ или } \xi = 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Значи, $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{1}{4}$ и $F(2) = \frac{3}{4}$.

Општо,

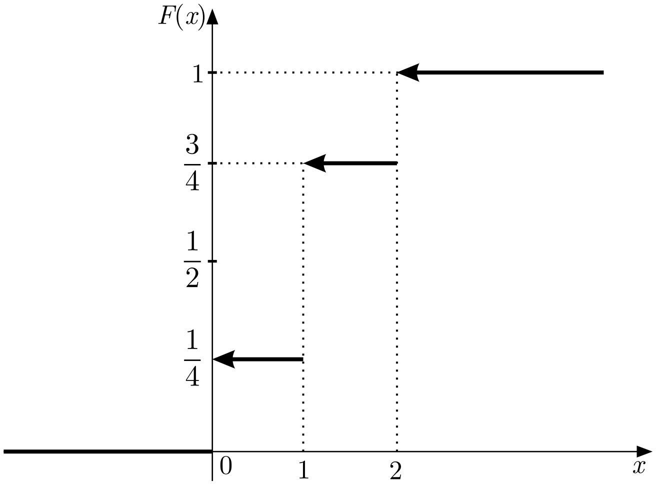
1° За $x \leq 0$, $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 0) = 0$.

2° За $0 < x \leq 1$, $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 1) = \frac{1}{4}$.

3° За $1 < x \leq 2$, $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < 2) = \frac{3}{4}$.

4°, За $x > 2$, $F(x) = P(\xi < x) = P(\text{или } \xi = 0 \text{ или } \xi = 1 \text{ или } \xi = 2) = = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

Графички, функцијата на распределба на ξ е:



Во продолжение, ќе наведеме некои својства на функцијата на распределба.

1° Функцијата на распределба е ограничена функција, и притоа важи

$$0 \leq F(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Својството 1° следува од фактот што функцијата на распределба претставува веројатност, а тоа значи број меѓу 0 и 1.

2° Веројатноста на настанот: ξ да прими вредност меѓу x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, е еднаква на нараснувањето на функцијата на распределба $F(x)$ во интервалот (x_1, x_2), т.е.

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Доказ. Да ги разгледаме следниве три настани:

A: ξ прима вредност помала од x_2

B: ξ прима вредност помала од x_1

C: ξ прима вредност поголема или еднаква на x_1 и помала од x_2.

Тогаш е $A = B \cup C$ и $B \cap C = \emptyset$, па $P(A) = P(B) + P(C)$, односно $P(C) = P(A) - P(B)$. Бидејќи

$$P(C) = P(x_1 \leq \xi < x_2),$$

$$P(A) = P(\xi < x_2) = F(x_2),$$

$$P(B) = P(\xi < x_1) = F(x_1),$$

добиваме дека $P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

3° Функцијата на рапределба е монотоно неопаѓачка функција на $(-\infty, \infty)$.

Доказ. Нека $x_1 < x_2$. Заради 2° имаме дека

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Бидејќи веројатноста е ненегативен број следува дека

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) \geq 0.$$

Оттука добиваме дека $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$, т.е. функцијата $F(x)$ е монотоно неопаѓачка функција.

4° а) $F\left(-\infty\right)=P\left(\xi<-\infty\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}F\left(x\right)=0$

б) $F\left(\infty\right)=P\left(\xi<\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}F\left(x\right)=1$

Доказ. а) важи бидејќи настанот $\xi<-\infty$ е невозможен, а б) важи бидејќи настанот $\xi<\infty$ е сигурен (тоа е настан кој се состои во тоа случајната величина, при реализација на разгледуваниот експеримент, да прими произволна вредност).

Забелешка. Граничните вредности $\lim\limits_{x\to-\infty}F\left(x\right)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}F\left(x\right)$ постојат заради монотоноста и ограниченоста на $F(x)$.

5°

$$P\left(\xi=x_1\right)=\lim_{x_2\to x_1}P\left(x_1\leq\xi<x_2\right)=\lim_{x_2\to x_1}\left(F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)\right)=$$

$$=\lim_{x_2\to x_1}F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)$$

Како последица од 5° ги добиваме својствата:

5.1° Ако функцијата на распределба е непрекината во точката $x=x_1$ (тоа се сите точки од $\mathbb{R}$ кои што не се тековни вредности на дискретната случајна величина), тогаш веројатноста случајната величина да биде x_1 е еднаква на 0.

Доказ. Заради 5° важи

$$P\left(\xi=x_1\right)=\lim_{x_2\to x_1}\left(F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)\right),$$

па од непрекинатоста на F во x_1 добиваме

$$P\left(\xi=x_1\right)=\lim_{x_2\to x_1}\left(F\left(x_2\right)-F\left(x_1\right)\right)=F\left(x_1\right)-F\left(x_1\right)=0.$$

5.2° Во точките x_i, коишто се тековни вредности на дискретната случајна величина ξ, функцијата $F(x)$ има скок, чија должина е еднаква на веројатноста со која ξ ја прима таа вредност x_i.

6° За дискретната случајна величина

$$\xi = \left\{ x_i, p_i, \sum_i p_i = 1 \right\}$$

важи:

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

7° За дискретната случајна величина

$$\xi = \left\{ x_i, p_i, \sum_i p_i = 1 \right\}$$

важи:

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \sum_{x_1 \leq x_i < x_2} p_i.$$

Конечно, од се што погоре кажавме околу функцијата на распределба, може да се заклучи дека, графички, функцијата на распределба на дискретната случајна величина изгледа како на следниов цртеж:

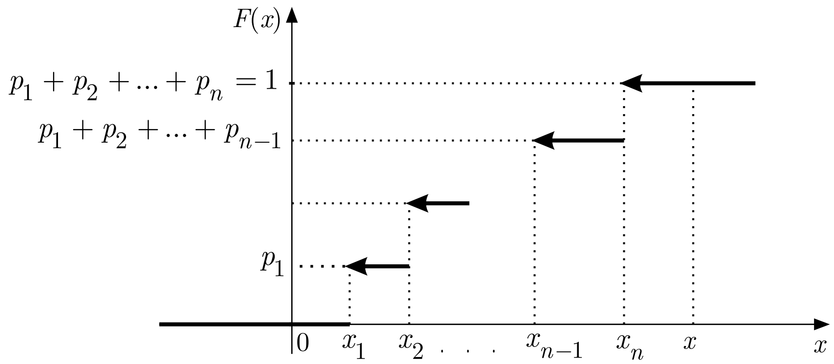


график на $F\left(x\right)$ за $\xi = \left\{ x_i, p_i, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$

3.2.10.4 Повеќедимензионални дискретни случајни променливи

Дводимензионална дискретна случајна променлива (случаен вектор) го нарекуваме подредениот пар (X, Y), каде X и Y се дискретни случајни променливи над ист простор на веројатност (Ω, Φ, P) кои примаат вредности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ и $y_1, y_2, ..., y_n, ...$, соодветно, при што подредениот пар (X, Y) прима вредности

$$(x_i, y_j), \;\; i, j \in \mathbb{N} \tag{1}$$

со веројатности

$$p_{ij} = P\left(x_i, y_j\right) = P\left(X = x_i, Y = y_j\right), \;\; i, j \in \mathbb{N} \tag{2}$$

соодветно, и притоа важи

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1. \tag{3}$$

Врската меѓу вредностите на дводимензионалните случајни променливи и нивните веројатности го нарекуваме **закон на распределба на дводимензионална случајна променлива.**

Законот на распределба на дводимензионална случајна променлива може да се претстави со следнава табела

$Y \diagdown X$	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	p_{n1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	p_{n2}	$\cdots$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_j	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{nj}	$\cdots$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
y_m	p_{1m}	p_{2m}	p_{3m}	$\cdots$	p_{im}	$\cdots$	p_{nm}	$\cdots$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Пример 1. Монета се фрла два пати, при што секој од еле-

ментарните настани PP, PG, GP, GG има веројатност $\frac{1}{4}$. Со X да го означиме бројот на паднатите писма, а со Y бројот на паднатите грбови. Заедничкиот закон на распределба на (X, Y) е даден во следнава табела:

$Y \backslash X$	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	0	0	$\frac{1}{4}$
$Y = 1$	0	$\frac{2}{4}$	0
$Y = 2$	$\frac{1}{4}$	0	0

Пример 2. Се вкрстуваат две единки со хетерозиготна форма (Aa) на генот X, во F1 генерација. Со A е означен доминантниот алел, додека со a е означен рецесивниот алел.

Одреди ја веројатноста да се добие хомозигот по двата доминантни или рецесивни алели, и веројатноста да се добие хетерозигот по вкрстувањето.

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Пример 3. Се вкрстуваат две единки со хетерозиготна форма на генот X (Aa) и хомозиготна рецесивна форма на генот Y (bb), во F1 генерација. Со A и B се означени доминантните алели, додека со a и b се означени рецесивните алели. Одреди ја веројатноста по вкрстувањето да се добие рецесивен хомозигот за двете алели.

Пример 4. Се вкрстуваат две единки со хетерозиготна форма на генот X (Aa) и Y (Bb), во F1 генерација. Со A и B се означени доминантните алели, додека со a и b се означени рецесивните алели.

Одреди ја веројатноста по вкрстувањето, да се добие доминантен или рецесивен хомозигот за двете алели.

Нека (X, Y) е дводимензионална случајна променлива, која прима вредности (1) со веројатности (2). Функцијата

$$F(x_0, y_0) = \sum_{x_i \leq x_0} \sum_{y_j \leq y_0} P(x_i, y_j) \tag{4}$$

се нарекува **функција на распределба на** (X, Y).

Според (4), $F(x_0, y_0) = P(x \leq x_0, y \leq y_0)$.

Аналогно може да се дефинира **n-димензионална дискретна случајна променлива (n-димензионален вектор)** $(X_1, X_2, ..., X_n)$, каде X_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ се дискретни случајни променливи дефинирани над ист простор на веројатност (Ω, Φ, p) кои примаат вредности $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik_i}, ...$ за $i \in \{1, 2, ..., n\}$, соодветно.

Притоа, подредената n-торка $(X_1, X_2, ..., X_n)$ прима вредности

$$(x_{1j_1}, x_{2j_2}, ..., x_{nj_n}), \ \ j_i \in \{1, 2, ..., k_i, ...\}, \ \ i \in \{1, 2, ..., n\} \tag{5}$$

со веројатности

$$P(X_i = x_{ij_i}, i \in \{1, 2, ..., n\}) = p_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_n}, \quad j_i = 1, 2, ..., k_i ..., \ \ i \in \{1, 2, ..., n\} \tag{6}$$

и $p_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_n} \geq 0$ и

$$\sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n} p_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_n} = 1. \tag{7}$$

Нека (X, Y) е дводимензионална случајна променлива која прима вредности (1) со веројатности (2). Бидејќи за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$ настаните $(X = x_i, Y = y_j)$ и $(X = x_i, Y = y_k)$ за $j \neq k$ се дисјунктни, заради својствата на веројатноста, добиваме дека веројатноста $P(x_i)$ случајната променлива X да ја прими вредноста x_i, без разлика која вредност истовремено ќе ја прими Y, се пресметува на следниов начин:

$$P(x_i) = P(x_i, y_1) + P(x_i, y_2) + ... + P(x_i, y_m) + ... = p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{im} + ...$$

т.е.

$$P\left(x_i\right) = \sum_j p_{ij}. \tag{8}$$

Забелешка. $P(x_i)$ претставува збир на броевите (веројатностите) во i-тата колона.

Слично, за $j \in \{1, 2, ..., m, ...\}$, веројатноста $P(y_j)$ случајната променлива Y да прими вредност y_j, без разлика која вредност ќе ја прими X, се пресметува според формулата

$$Q\left(y_j\right) = \sum_i P\left(x_i, y_j\right) = \sum_i p_{ij} \tag{9}$$

Забелешка. $Q(y_j)$ претставува збир на броеви (веројатности) во j-тата редица.

Распределбата на случајната променлива X која прима вредности $x_1, x_2, ..., x_n$ со веројатности (8) се нарекува **маргинална распределба на случајната променлива** X.

Распределбата на случајната променлива Y која прима вредности $y_1, y_2, ..., y_m, ...$ со веројатности (9) се нарекува **маргинална распределба на случајната променлива** Y.

Ако не интересира закон на распределба на случајната променлива X, под претпоставка дека случајната променлива Y прима некоја вредност y_j, тогаш од својството на условна веројатност имаме:

$$P\left(x_i\left|y_j\right.\right) = P\left(X = x_i\left|Y = y_j\right.\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(Y = y_j\right)} = \frac{P\left(x_i, y_j\right)}{Q\left(y_j\right)}. \tag{10}$$

За секој $j \in \{1, 2, ..., m, ...\}$, распеределбата на X која прима вредности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ со $P\left(x_i\left|y_j\right.\right)$ дадени со (10) се нарекува **условна распределба на** X **при услов** $Y = y_j$.

Слично, за секој $i \in \{1, 2, ..., n, ...\}$ распределбата на Y која прима вредности $y_1, y_2, ..., y_m, ...$ со

$$P\left(y_j\left|x_i\right.\right) = P\left(Y = y_j\left|X = x_i\right.\right) = \frac{P\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{P\left(X = x_i\right)} = \frac{P\left(x_i, y_j\right)}{P\left(x_i\right)} \tag{11}$$

се нарекува **условна распределба на Y при услов $X = x_i$.**

3.2.10.5 Функции од дискретни случајни променливи

Нека $X\,(X : \Omega \to \mathbb{R})$ е дискретна случајна променлива, зададена со нејзината функција на распределба или со нејзиниот закон на распределба, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дадена реална функција. Тогаш функцијата $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ определена со

$$Y(w) = g(X(w)),\ w \in \Omega \tag{1}$$

е дискретна случајна променлива.

Нека X е зададена со законот на распределба:

X	x_1	x_2	...	x_{k-1}	x_k	...
P	p_1	p_2	...	p_{k-1}	p_k	...

а) Нека $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е строго монотона. Тогаш g има инверзна функција $x = g^{-1}(y)$, па на секоја вредност $y_i = g(x_i)$, $i = 1, 2, ...$ и соодветствува единствена вредност $x_i = g^{-1}(y_i)$, $i = 1, 2, ...$, и законот на распределба на случајната променлива Y е даден со

Y	$g\big(x_1\big)$	$g\big(x_2\big)$	...	$g\big(x_{k-1}\big)$	$g\big(x_k\big)$	...
P	p_1	p_2	...	p_{k-1}	p_k	...

б) Нека $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не е монотона. Ако, на пример, постојат точно две вредности x_i и x_j, $x_i \neq x_j$ за кои $g(x_i) = g(x_j)$, тогаш настанот $(Y = g(x_i))$ е еквивалентен со настанот $(X = x_i \vee X = x_j)$, а бидејќи настаните $(X = x_i)$ и $(X = x_j)$ се дисјунктни, добиваме

$$P\left(Y = g\left(x_i\right)\right) = P\left(X = x_i \vee X = x_j\right) = P\left(X = x_i\right) + P\left(X = x_j\right) = p_i + p_j.$$

Пример 1. Случајната променлива X е зададена со законот на распределба:

X	0	1	2	3	4
P	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,2$	$0,2$

Да го најдеме законот на распределба на случајната променлива $Y = 2X - 1$.

Решение. Функцијата $g(x) = 2x - 1$ е строго монотоно растечка. Бидејќи $g(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $g(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $g(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ и $g(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ добиваме дека множеството вредности на случајната променлива Y е $\{-1, 1, 3, 5, 7\}$. Законот на распределба на Y е:

Y	-1	1	3	5	7
P	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}2$

Пример 2. Случајната променлива X е зададена со законот на распределба:

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Да го најдеме законот на распределба на случајната променлива $Y = X^2$.

Решение. Функцијата $g(x) = x^2$ не е монотона на сегментот $[-1, 1]$, и притоа $g(-1) = 1 = g(1)$. Множеството вредности на случајната променлива Y е $\{0, 1\}$ бидејќи $g(-1) = g(1) = 1$ и $g(0) = 0$. Тогаш $P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$, а

$$P(Y = 1) = P(X = -1 \vee X = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$

па законот на распределба на Y е:

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

3.2.10.6 Математичко очекување на дискретна случајна променлива

Нека X е дискретна случајна променлива која прима вредности $x_1, x_2, ..., x_n$ со веројатности $p_1, p_2, ..., p_n$, соодветно. **Математичко очекување на случајната променлива** X, со ознака $E(X)$, е збирот од производите на тековните вредности на X и соодветните веројатности, т.е.

$$E\left(X\right) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

Ако множеството вредности кои случајната променлива X ги прима е бесконечно, т.е. ако X прима вредности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ со веројатности $p_1, p_2, ..., p_n, ...$, соодветно, тогаш

$$E\left(X\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k,$$

при претпоставка дека $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ апсолутно конвергира.

Пример 1. Да го најдеме математичкото очекување на случајната променлива од пример 1 од 3.2.10.1, т.е. на

X:	0	1	2
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Решение. $E\left(X\right) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$

Во продолжение ќе наведеме, без доказ, некои својства на математичкото очекување.

1° Математичкото очекување од константа C е C, т.е. $E(C) = C$, при што константата се разгледува како дискретна случајна променлива која прима само една вредност C со веројатност 1.

2° Нека X е дискретна случајна променлива со математичко очекување $E(X)$ и нека g е реална функција чиј домен ги содржи вредностите на X. Тогаш математичкото очекување на случајната променлива $Y=g(X)$ е дадено со формулата

$$E\left(Y\right)=\sum_{i}g\left(x_{i}\right)p_{i},$$

при претпоставка дека редот апсолутно конвергира.

Како последица на својството 2° го добиваме следново својство:

3° Нека X е дискретна случајна променлива со математичко очекување $E(X)$ и нека $a,b\in\mathbb{R}$. Тогаш

$$E(aX+b)=aE(X)+b.$$

4° Нека X и Y се дискретни случајни променливи дефинирани над ист простор од елементарни настани. Тогаш

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

Со помош на принципот на математичка индукција се добива следново својство:

5° Нека $X_1,X_2,...,X_n$ се дискретни случајни променливи дефинирани над ист простор од елементарни настани. Тогаш

$$E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n).$$

Мода на случајната променлива X се нарекува вредноста, moX, на X со најголема веројатност.

Медијана на случајната променлива X се нарекува вредноста, meX, на X за која важи

$$P(X\leq meX)\geq 0,5 \text{ и } P(X\geq meX)\geq 0,5$$

Пример 2. Да ги најдеме moX и meX, за

X	10	20	30	40
P	$0,20$	$0,15$	$0,25$	$0,40$

Решение. Од табелата со која е зададен X, забележуваме дека најголема веројатност е 0,40 и тоа е веројатноста со која X ја прима вредноста 40, па $moX = 40$.

За $X = 30$, од табелата имаме: $P(X \leq 30) = 0,20 + 0,15 + 0,25 = 0,60 > 0,5$ и $P(X \geq 30) = 0,25 + 0,40 = 0,65 > 0,5$, па, согласно дефиницијата за медијана, заклучуваме дека $meX = 30$.

Нека X е n-димензионална случајна променлива

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n).$$

Подредената n-торка

$$E(X) = (E(X_1), E(X_2), ..., E(X_n)$$

ја нарекуваме **математичко очекување на случајната променлива** X.

3.2.10.7 Моменти од повисок ред. Дисперзија и стандардна девијација

Нека е дадена дискретна случајна променлива X која прима вредности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ со веројатности $p_1, p_2, ..., p_n, ...$, соодветно. Математичкото очекување на случајната променлива X^n,

$$E\left(X^n\right) = \sum_k x_k^n p_k$$

го нарекуваме **n-ти момент на случајната променлива** X.

Апсолутен n-ти момент на X е математичкото очекување на случајната променлива $|X|^n$, т.е.

$$E\left(|X|^n\right) = \sum_k |x_k|^n p_k.$$

Централен n-ти момент на X е математичкото очекување

$$E\left((X-E\left(X\right))^n\right)=\sum_k\left(x_k-E\left(X\right)\right)^n p_k.$$

Апсолутен n-ти момент на X е

$$E\left(\left|X-E\left(X\right)\right|^n\right)=\sum_k\left|x_k-E\left(X\right)\right|^n p_k.$$

Централниот втор момент на X се нарекува **дисперзија на случајната променлива** X и се означува со $D(X)$.

Значи,

$$D\left(X\right)=E\left(\left(X-E\left(X\right)\right)^2\right).$$

Квадратниот корен од дисперзијата $\sqrt{D\left(X\right)}$ се означува со σ или σ_x и се нарекува **средно квадратно отстапување на случајната променлива** X или **стандардна девијација на** X.

Математичкото очекување $E(X)$, на X, во некоја смисла ја мери „средната вредност“ на X, а стандардната девијација σ е мерка за отстапување на случајната променлива од нејзиното математичко очекување.

Користејќи ги тековните вредности и соодветните веројатности на X, $D(X)$ може да се запише и во обликот

$$D\left(X\right)=\sum_k\left(x_k-E\left(X\right)\right)^2 p_k \tag{$*$}$$

каде десната страна во (*) е конечен збир ако множеството вредности на X е конечно или е бесконечен збир (ред) ако множеството вредности на X е бесконечно.

Пример 1. Да ги најдеме $D(X)$ и σ за случајната променлива од примерот 1 во 3.2.10.1, т.е. на

X:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Решение. Веќе најдовме дека $E(X)=1$. Случајната променлива $X-E(X)=X-1$ е

$\big(X - E\big(X\big)\big)$:

$X-1$	$0-1=-1$	$1-1=0$	$2-1=1$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

па случајната променлива $(X - E(X))^2 = (X-1)^2$ прима вредности $0^2 = 0$ и $(-1)^2 = 1 = 1^2$ со веројатности $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, т.е.

$\big(X - E\big(X\big)\big)^2$:

$\big(X-1\big)^2$	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

и

$$D\left(X\right) = E\left(\left(X - E\left(X\right)\right)^2\right) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Поедноставно, користејќи ја (*), имаме

$$D\left(X\right) = \sum_{k=1}^{3} \left(x_k - 1\right)^2 p_k = \left(0-1\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(1-1\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(2-1\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Во продолжение ќе наведеме, без доказ, некои својства на дисперзијата.

1° $D\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2 = \sum\limits_k x_k^2 p_k - \left(E\left(X\right)\right)^2$

Својството 1° дава алтернативна, и понекогаш покорисна формула за пресметување на дисперзијата на случајната променлива.

2° Нека X е дискретна случајна променлива со дисперзија $D(X)$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Тогаш важи

$$D(aX + b) = a^2 D(X).$$

Како последица од својството 2°, го добиваме следново тврдење.

3° Нека X е дискретна случајна променлива со математичко очекување $E(X)$ и дисперзија $D(X)$. Тогаш за случајната променлива

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D\left(X\right)}} = \frac{X - E\left(X\right)}{\sigma_X}$$

важи

$$E\left(X^{*}\right)=0 \text{ и } D\left(X^{*}\right)=1.$$

Забелешка. Случајната променлива X^{*} се нарекува **нормирана (стандардизирана) случајна променлива за случајната променлива X (која соодветствува на X)**.

3.2.10.8 Независност на случајни променливи

Нека (X, Y) е дводимензионална дискретна случајна променлива која прима вредности

$$(x_i, y_j),\ \ i, j \in \mathbb{N}$$

со веројатности

$$p_{ij}=P(x_i, y_j),\ \ i, j \in \mathbb{N},$$

соодветно.

За случајните променливи X и Y се вели дека се **независно распределени (независни)** ако за секои $i, j \in \mathbb{N}$ важи

$$P(x_i, y_j)=P(x_i) Q(y_j) \tag{$*$}$$

каде

$$P\left(x_i\right)=\sum_j P\left(x_i, y_j\right), \quad Q\left(y_j\right)=\sum_i P\left(x_i, y_j\right)$$

се маргиналните распределби на случајните променливи X и Y, соодветно.

Пример 1. Со табелата

X Y	1	1	2	$Q\left(y_j\right)$
0	$0,25$	$0,125$	$0,125$	$0,5$
1	$0,25$	$0,125$	$0,125$	$0,5$
$P\left(x_i\right)$	$0,5$	$0,25$	$0,25$	

е зададена дводиманзионална случајна променлива (X, Y) и се пресметани маргиналните распределби на X и Y. Лесно се проверува дека за секои x_i и y_j важи (*), што значи дека X и Y се независни случајни променливи.

Пример 2. Со табелата

$Y \diagdown X$	1	2	3	4	$Q(y_j)$
1	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{11}{40}$
2	$\frac{7}{40}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{13}{40}$
3	0	$\frac{2}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$
$P(x_i)$	$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{14}{40}=\frac{7}{20}$	$\frac{9}{40}$	

е зададена дводимензионална случајна променлива (X, Y) и, исто така, се пресметани маргиналните распределби на X и Y. Забележуваме дека

$$P(1)\,Q(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{40} = \frac{11}{160} \neq \frac{3}{40} = P(1,1),$$

што значи дека (*) не важи за x_1 и y_1, па, според тоа, X и Y не се независни случајни променливи.

Во продолжение ќе наведеме, без доказ, неколку тврдења.

1° Случајните променливи X и Y се независни ако и само ако за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x)\,F_Y(y)$$

каде $F_{(X,Y)}(x, y)$, $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ се функциите на распределба на (X, Y), X и Y, соодветно.

Нека е дадена непразна фамилија од дискретни случајни променливи. Се вели дека случајните променливи од фамилијата се **независни во целина**, ако за секој $k \geq 2$ и за секој избор на случајни променливи $X_1, X_2, ..., X_k$ од дадената фамилија важи

$$\begin{aligned}
&P(x_1, x_2, ..., x_k) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k) = \\
&= P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot ... \cdot P(X_k = x_k) = \\
&= P(x_1)\,P(x_2) \cdot ... \cdot P(x_k)
\end{aligned}$$

каде $x_i \in V_i$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, а V_i, $i \in \{1, 2, ..., k\}$ се множествата вредности на случајните променливи X_i, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, соодветно.

2° Случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни ако и само ако

$$F(x_1, x_2, ..., x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot ... \cdot F_{X_k}(x_k)$$

каде $F(x_1, x_2, ..., x_k)$, $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$,..., $F_{X_k}(x_k)$ се функциите на распределба на $(X_1, X_2, ..., X_k)$, X_1, X_2,...,X_k, соодветно.

3° Дискретните случајни променливи X и Y се независни ако и само ако за секои функции f и g за кои

$$|E(f(X))| < \infty \text{ и } |E(g(Y))| < \infty$$

важи

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y)).$$

4° Случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_k$ се независни во целина ако и само ако за секои функции $f_1, f_2, ..., f_k$ за кои

$$|E(f_i(X_i))| < \infty, \ i \in \{1, 2, ..., k\}$$

важи

$$E(f_1(X_1)f_2(X_2) \dots f_k(X_k)) = E(f_1(X_1))E(f_2(X_2)) \dots E(f_k(X_k)).$$

Како последица на 4° се добива следново тврдење.

5° Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Тврдењето 5° може да се обопшти, и се добива

6° Ако случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_k$ се независни во целина, тогаш

$$E(X_1X_2 \dots X_k) = E(X_1)E(X_2) \dots E(X_k).$$

7° Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

8° Ако случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_k$ се независни во целина, тогаш

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_k).$$

3.2.10.9 Примери на корисни дискретни случајни променливи

3.2.10.9.1 Биномна распределба

Нека E е даден експеримент и A е еден случаен настан во врска со експериментот.

i) Експериментот E го повторуваме n пати при исти услови и притоа, резултатот при која било реализација на експериментот не зависи од резултатите во другите реализации на E.

ii) При секоја реализација на E настанот A настапува со иста веројатност p (заради *i*)) и таа се нарекува веројатност на успех. Тогаш $q = 1 - p$ е веројатноста на $\bar{A}$, т.е. веројатноста да при реализација на E не настапи настанот A и таа се нарекува веројатност на неуспех.

Ова е пример на спроведување на една серија од n независни повторувања на даден експеримент, позната и како **шема на Бернули**.

За шемата на Бернули важи следново тврдење.

1° Веројатноста настанот A да се појави (настапи) точно k пати во серија од n независни повторувања на даден експеримент, т.е. веројатноста на точно k успеси во n повторувања е означена и дадена со

$$P_{n,p}\left(k\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k q^{n-k}$$

каде $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = C_n^k$ е биномниот коефициент.

За дадена шема на Бернули, n и p се константи, па функцијата $P_{n,p}(k)$ ја дава следнава дискретна случајна променлива $B(n, p)$.

$B\left(n,p\right)$:

k	0	1	…	k	…	n
$P_{n,p}(k)$	q^n	$\binom{n}{1}pq^{n-1}$	…	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	…	p^n

Се нарекува **Биномна распределба** бидејќи за $k = 0, 1, 2, ..., n$, веројатностите со кои $B(n,p)$ ги прима тековните вредности се последователни членови во развојот на

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1}p + ... + \binom{n}{k} q^{n-k}p^k + ... + p^n.$$

Уште се нарекува и **Бернулиева дистрибуција**.

Особините на оваа дистрибуција ги дава следново својство.

2° Ако случајната променлива X има биномна дистрибуција $B(n,p)$, тогаш

i) $E(X) = np$,

ii) $D(X) = npq$.

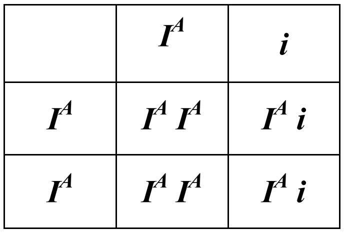
Пример 1. Познато е дека една машина произведува 6% дефектни производи. Колкава е веројатноста во случајно избрани 5 производи да има 2 дефектни?

Решение. Бројот на дефектните производи во 5 избрани производи е случајна променлива со биномна распределба $B(n,p)$, каде $n = 5$, а $p = \frac{6}{100} = 0,06$. Според тоа,

$$P_{5;0,06}(2) = \binom{5}{2} 0,06^2(1-0,06)^{5-2} = 0,0318096.$$

Забелешка. Ако добиените производи од оваа машина ги пакуваме во кутии кои содржат по 5 производи, без притоа да ги одделуваме дефектните од исправните производи, тогаш приближно во 3,2% од кутиите ќе имаме по точно 2 дефектни производи.

Пример 2. При вкрстување на две единки од машки и женски пол, со генотип за крвни групи I^AI^A и I^Ai, соодветно, која е веројатноста да 2 од 6 потомци имаат генотип I^Ai.



	I^A	i
I^A	$I^A I^A$	$I^A i$
I^A	$I^A I^A$	$I^A i$

Веројатноста да се добие хетерозигот во F1 генерација изнесува 50%, односно

$n = 6; p = \frac{50}{100} = 0,5; k = 2?$

$P_{6;0,5}\left(2\right) = \left(\begin{array}{c} 6 \\ 2 \end{array}\right) 0,5^2(1-0,5)^{6-2} = 15 \cdot 0,25 \cdot 0,5^4 = 0,2344.$

Пример 3. При вкрстување на две единки од машки и женски пол, со генотип за крвни групи $I^A I^B$ и $I^A i$, соодветно, која е веројатноста 2 од 3 потомци да имаат А крвна група?

3.2.10.9.2 Поасонова распределба

Нека $a > 0$. Функцијата X која прима вредности $k = 0, 1, 2, 3, ...$ со веројатности

$$P\left(k\right) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...$$

и за кои важи

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left(k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^{a} = 1$$

е дискретна случајна променлива, за која се вели дека има **Поасонова распределба со параметар** a и се означува со $P(a)$.

Точно е следново својство.

1° Ако случајната променлива X има Поасонова распределба $P(a)$, тогаш

i) $E(X) = a$,

ii) $D(X) = a$.

Забелешка. Се докажува дека следниов математички модел, кој е доста чест во различни примени, е тесно поврзан со Поасоновата расперделба.

Да претпоставиме дека во време $[0, \infty)$ регистрираме определени моменти, како на пример, звонење на телефон, доаѓање на клиенти на шалтер во некоја институција, поминување на автомобили покрај определен објект и слично. Значи, имаме еден „проток на настани“. Притоа, зборот „настан“ не е во смисла на случаен настан, туку означува една случајна точка на временска полуоска. Со $X[a, b]$ ја означуваме случајната променлива која го дава бројот на „настаните“ во временскиот интервал $[a, b]$. Ова е дискретна случајна променлива која прима вредности од множеството $\{0, 1, 2, 3, ...\}$. Голем број случаи во практиката може да се опишат со следниве претпоставки.

- хомогеност: распределба на веројатностите на случајната променлива $X[a, b]$ не зависи од положбата на интервалот $[a, b]$, туку само од неговата должина $b - a$.

- независност: ако интервалите $[a, b]$ и $[c, d]$ се дисјунктни, тогаш настаните $(X[a, b] = k_1)$ и $(X[c, d] = k_2)$ се независни за секои $k_1, k_2 = 0, 1, 2, 3, ...$

- сепарабилност:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(X\left[t, t + \Delta t\right] > 1\right)}{\Delta t} = 0$$

што практично значи дека не е можно во кој било момент t да се „реализира“ повеќе од еден „настан“.

Се докажува дека при вакви претпоставки случајната променлива $X[0, t] = X(t)$ има $P(at)$ распределба, каде $a > 0$ е фиксиран параметар кој го карактеризира интензитетот на „протокот на настани“, т.е. a е број на „настани“ во единица време.

Пример 1. Според податоците од една банка, во просек 5 клиенти на час поднесуваат барање за краткорочен кредит. Ако претпоставиме дека клиентите доаѓаат во банката независно и со иста веројатност во текот на секој час, колкава е веројатноста банката да има

а) 3 клиенти

б) повеќе од 7 клиенти?

Решение. Бројот на клиенти кои секој ден во текот на еден час од работното време доаѓаат во банката е дискретна случајна променлива која има Поасонова распределба со параметар $a = 5$, т.е.

$$P(k) = \frac{5^k}{k!}e^{-5}, \ \ k = 0, 1, 2, ...$$

па бараните веројатности се:

а) $P(3) = \frac{5^3}{3!}e^{-5} \approx 0,14037$

б) $P(X > 7) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{7} P(k) \approx 1 - 0,8666 = 0,1334.$

3.2.10.9.3 Хипергеометриска распределба

Распределба на белите топчиња X при избор на k топчиња одеднаш од кутија во која има m бели и $n - m$ црни топчиња е дадена со

$$P(j) = \frac{\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-m \\ k-j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}, \ \ j = 0, 1, 2, ..., s,$$

каде $s = \min\{m, k\}$, се нарекува **хипергеометриска распределба** и се означува со $H(n, m, k)$.

Важи следново својство.

1° Ако случајната променлива X има хипергеометриска распределба $H(n, m, k)$, тогаш

i) $E(X) = \frac{mk}{n}$

ii) $D(X) = \frac{mk(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}$.

3.2.10.9.4 Рамномерна распределба

Нека N е даден природен број. За функцијата X која прима вредности $m = 1, 2, ..., N$ со веројатности

$$P(X = m) = \frac{1}{N},\ \ m = 1, 2, ..., N$$

важи

$$\sum_{m=1}^{n} P\left(X = m\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{N} = N \cdot \frac{1}{N} = 1$$

па X претставува дискретна случајна променлива, за која се вели дека е **рамномерна распределба на множеството** $\{1, 2, ..., N\}$.

1° Ако случајната променлива X има рамномерна распределба, тогаш

i) $E(X) = \frac{N+1}{2}$

ii) $D(X) = \frac{N^2-1}{12}$.

3.2.10.9.5 Геометриска распределба

Нека p е реален број таков што $0 < p < 1$. За функацијата X која прима вредности $0, 1, 2, 3, ...$ со веројатности

$$P(k) = p(1-p)^k,\ k = 0, 1, 2, ...$$

важи

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left(k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1,$$

па X претставува дискретна случајна променлива за која се вели дека има **геометриска распределба со параметар** p.

1° Ако случајната променлива X има геометриска распределба, тогаш

i) $E(X) = \frac{q}{p}$

ii) $D(X) = \frac{q}{p^2}$,

каде $q = 1 - p$.

Пример 1. Во една фабрика, секој производ подлежи на тестирање веднаш по изработувањето. Веројатноста тестираниот производ да е исправен, т.е. тестот да е позитивен е $\frac{4}{5}$, а да е неисправен, т.е. тестот да е негативен е $\frac{1}{5}$. Нека X е бројот на тестирањата заклучно со првиот позитивен тест. Најди ја распределбата на веројатностите на случајната променлива X и веројатноста на настанот

A: тестирањето завршува после парен број тестови.

Решение. Случајната променлива X прима вредности $1, 2, 3, \ldots$. Настанот $(X = n)$ се реализира ако и само ако првите $n-1$ тестирања се негативни, а n-тото е позитивно, па според тоа

$$P\left(X=n\right)=\underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{5}}_{n-1\text{ пати}}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1},\ n=1,2,3,\ldots.$$

Значи, X има геометриска распределба со параметар $p = \frac{4}{5}$.

Настанот A се реализира ако и само ако вредноста на случајната променлива X е парен број, т.е. множеството $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Според тоа,

$$P\left(A\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(2k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{4}{5}\left(1-\tfrac{4}{5}\right)^{2k-1}=\tfrac{4}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{2k-1}=$$
$$=\tfrac{4}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{2k}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{-1}=\tfrac{4}{5}\cdot5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{5}\right)^{2k}=4\cdot\tfrac{1}{25}\cdot\tfrac{1}{1-\frac{1}{25}}=\tfrac{1}{6}.$$

3.2.10.9.6 Паскалова распределба

Веројатноста да се појави настан A во даден експеримент е $p \neq 0$ и е иста при секое повторување на експериментот. Притоа, резултатите при повторување на експериментот се независни. Експериментот го повторуваме се додека настанот A се реализира k пати. Со X го означуваме бројот на повторувања на експериментот за да настанот A се реализира k пати. Јасно е дека X може да прими вредност кој било од броевите $k, k+1, k+2, \ldots$.

Ако X прима вредност n, т.е. ако експериментот треба да се повтори n пати, тоа значи дека во претходните $n-1$ повторувања, настанот A се реализирал $k-1$ пати и дека A се реализира и во n-тиот експеримент. Според биномната распределба, веројатноста A да се реализира $k-1$ пати во $n-1$ повторувања на експериментот е дадена со

$$\binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k},$$

каде $q = 1-p$, па веројатноста X да прими вредност n, т.е. $P(n)$ е дадена со

$$P\left(n\right) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} p,$$

т.е.

$$P\left(n\right) = \binom{n-1}{k-1} p^{k} q^{n-k}.$$

Имајќи предвид дека

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-1-(k-1)} = \binom{n-1}{n-k}$$

добиваме дека

$$P\left(n\right) = \binom{n-1}{n-k} p^{k} q^{n-k}, \ \ n = k, k+1, k+2, ...$$

Се докажува дека $\sum\limits_{n=k}^{\infty} P\left(n\right) = 1$, од каде следува дека случајната променлива X која прима вредности $k, k+1, k+2, ...$ со веројатности

$$P\left(n\right) = \binom{n-1}{n-k} p^{k} q^{n-k},$$

соодветно, е дискретна случајна променлива, и за неа се вели дека има **Паскалова распределба со параметри** k **и** p.

1° Ако случајната променлива X има Паскалова распределба со параметри k и p, тогаш

$$E(X) = \frac{k}{p}.$$

3.2.10.10 Непрекинати случајни променливи

За разлика од дискретната случајна променлива, непрекинатата случајна променлива ξ може да ги прими сите вредности од некој интервал (a, b) а функцијата на распределба $F(x)$ да биде непрекината функција на тој интервал. Во тој случај, за некој $x \in (a, b)$ имаме $P(\xi = x) = 0$. Поради тоа, непрекинатата случајна променлива не може да се окарактеризира со веројатностите (сите тие се еднакви на нула, но ниеден од случајните настани $\xi = x$, $x \in (a, b)$ не е невозможен, а за различни $x_1, x_2 \in (a, b)$, ξ може едниот од двата броја да го прими почесто од другиот). Затоа, во случај на непрекината случајна променлива се бара друг начин на задавање на случајната променлива, кој ги задржува аналогиите со веројатностите во дискретниот случај.

Нека ξ е непрекината случајна променлива со функција на распределба $F(x)$, за која претпоставуваме дека е непрекината и диференцијабилна функција. Како и кај дискретната случајна променлива, и овде

$$P\left(x < \xi < x + \Delta x\right) = F\left(x + \Delta x\right) - F\left(x\right)$$

т.е. веројатноста ξ да прима вредности од интервалот $(x, x + \Delta x)$ е еднаква на нараснувањето на функцијата на распределба на тој интервал.

Изразот

$$\frac{P\left(x < \xi < x + \Delta x\right)}{\Delta x} = \frac{F\left(x + \Delta x\right) - F\left(x\right)}{\Delta x}$$

се нарекува **средна густина на веројатностите на ξ на Δx**.

Граничната вредност на средната густина на веројатностите, при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left(x<\xi<x+\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F\left(x+\Delta x\right)-F\left(x\right)}{\Delta x}$$

постои заради претпоставката за диференцијабилност на функцијата $F(x)$ и е еднаков на $F'(x)$.

Граничната вредност

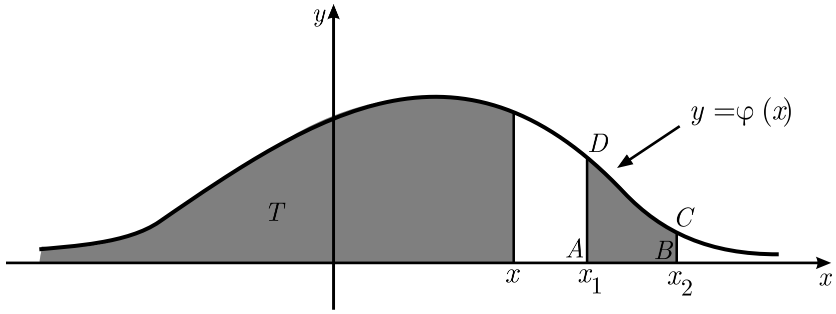
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left(x<\xi<x+\Delta x\right)}{\Delta x}$$

ја означуваме со $\varphi\left(x\right)$ и ја нарекуваме **густина на веројатностите** или **закон на веројатностите на случајната променлива** ξ.

Значи,

$$\varphi\left(x\right)=F'\left(x\right).$$

Графикот на $\varphi(x)$ се нарекува **крива на распределба на веројатностите**.



Да наведеме некои својства на $\varphi(x)$.

1° $\varphi(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Доказ. $\varphi(x)=F'(x)\geq 0$ бидејќи $F(x)$ е монотоно неопаѓачка функција.

2° $\varphi(x)$ е непрекината, освен можеби во конечен број на изолирани точки на прекин во секој произволно земен конечен интервал.

3°

$$P\left(x_1<\xi<x_2\right)=\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx$$

Доказ.

$$P\left(x_1 < \xi < x_2\right) = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right) = \int\limits_{x_1}^{x_2} F'(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx.$$

Геометриски, веројатноста ξ да прими вредности од интервалот (x_1, x_2) е еднаква на плоштината на криволинискиот трапез $ABCD$.

4°

$$\begin{aligned} &F\left(-\infty\right) = \lim_{x\to-\infty} F\left(x\right) = 0 \\ &F\left(\infty\right) = \lim_{x\to\infty} F\left(x\right) = 1 \\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1 \end{aligned}$$

Доказ.

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_{-b}^{0} \varphi(x)dx + \lim_{a\to\infty} \int\limits_{0}^{a} \varphi(x)dx = \\ &= \lim_{b\to-\infty} \int\limits_{b}^{0} F'(x)dx + \lim_{a\to\infty} \int\limits_{0}^{a} F'(x)dx = \\ &= \lim_{b\to-\infty} \left(F\left(0\right) - F\left(b\right)\right) + \lim_{a\to\infty} \left(F\left(a\right) - F\left(0\right)\right) = \\ &= F\left(0\right) - F\left(-\infty\right) + F\left(\infty\right) - F\left(0\right) = -F\left(-\infty\right) + F\left(\infty\right) = -0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

5°

$$F(x) = P\left(x < \xi\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi\left(t\right) dt$$

Доказ. 5° непосредно следува од релацијата којашто ја изразува густината на веројатностите на ξ преку функцијата на распределба.

Забелешка. 1) 5° ја изразува функцијата на распределба на ξ преку густината на распределба на ξ.

2) Геометриски, $F(x)$ е плоштина на затемнетиот дел од цртежот, означен со T.

6° Ако $\varphi(x) = 0,\ x < a,\ x > b$, тогаш

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(t\right) dt = \int_{a}^{b} \varphi\left(t\right) dt.$$

7° Од се погоре кажано, непрекинатата случајна променлива, ξ, може да ја запишуваме на следниов начин

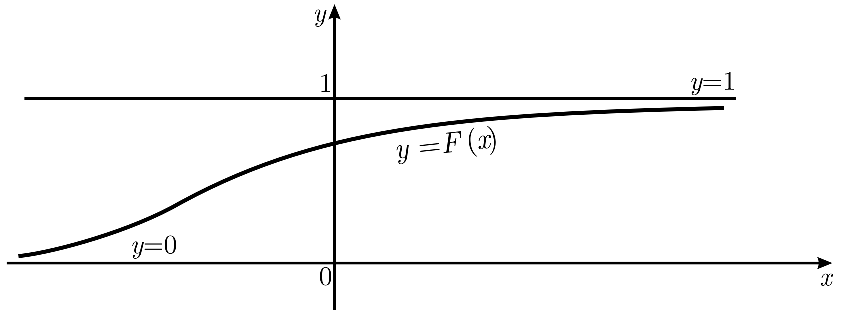
$$\xi = \left\{ x, \varphi\left(x\right), \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x\right) dx = 1, F\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} \varphi\left(t\right) dt \right\}.$$

Заради 4° функцијата на распределба, $F(x)$, има две хоризонтални асимптоти:

$y = 0$, при $x \to -\infty$ и

$y = 1$, при $x \to \infty$.

Знаеме и дека $F(x)$ е монотоно неопаѓачка функција, па конечно, графикот на $F(x)$ на непрекинатата случајна променлива ξ, изгледа како на следниов цртеж



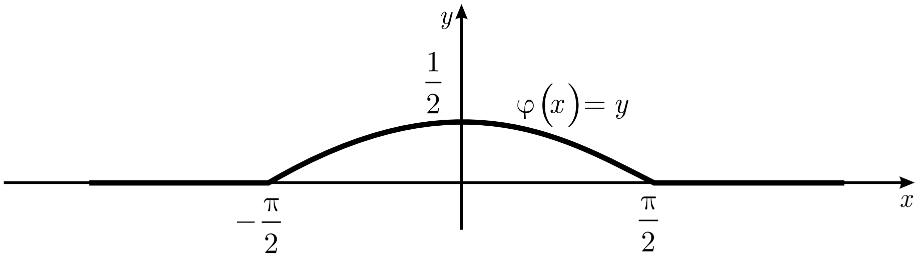
Пример 1. Случајната величина ξ има закон на веројатностите

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} a\cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}, x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Определи го a, нацртај го графикот на $\varphi(x)$ и на $F(x)$. Пресметај ја веројатноста ξ да прими вредности од интервалот $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Од $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x\right)dx=1$, добиваме дека

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos xdx=1\Leftrightarrow a\sin x\left|\begin{array}{c}\frac{\pi}{2}\\-\frac{\pi}{2}\end{array}\right.=1\Leftrightarrow a\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\left(1-\left(-1\right)\right)=1\Leftrightarrow 2a=1\Leftrightarrow a=\tfrac{1}{2}.$$



Да ја определиме $F(x)$.

1) Нека $x\in\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right]$. Тогаш

$$F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi\left(t\right)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0.$$

2) Нека $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогаш

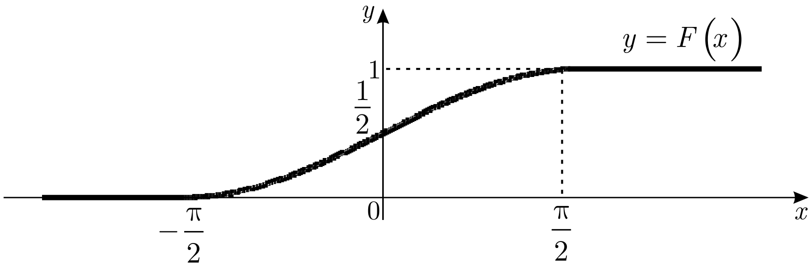
$$\begin{aligned}F\left(x\right)&=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi\left(t\right)dt=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}\varphi\left(t\right)dt+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\varphi\left(t\right)dt=\\&=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\cdot dt+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\tfrac{1}{2}\mathrm{cost}dt=0+\tfrac{1}{2}\sin t\left|\begin{array}{c}x\\-\frac{\pi}{2}\end{array}\right.=\quad.\\&=\tfrac{1}{2}\left(\sin x-\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)=\tfrac{1}{2}\left(\sin x+1.\right)\end{aligned}$$

3) Нека $x\in\left[\frac{\pi}{2},\infty\right)$. Тогаш

$$\begin{aligned}F\left(x\right)&=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi\left(t\right)dt=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}\varphi\left(t\right)dt+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi\left(t\right)dt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}\varphi\left(t\right)dt=\\&=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\cdot dt+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{2}\cos tdt+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}0\cdot dt=\\&=0+1+0=1.\end{aligned}$$

Значи,

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0,\ x\in\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right]\\ \frac{1}{2}\left(\sin x+1\right),\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ 1,\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\infty\right)\end{cases}$$



$$P\left(0<\xi<\frac{\pi}{4}\right)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\varphi\left(x\right)dx=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F\left(0\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\sin 0+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(0+1\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3.2.10.11 Функции од непрекинати случајни променливи *

Без доказ ќе ја наведеме следнава теорема.

Теорема. Нека X е непрекината случајна променлива која прима вредности од интервалот (a,b) и нека $\varphi_X\left(x\right)$ е густина на X и е непрекината функција. Ако $g(x)$ е строго монотона функција на (a,b) со непрекинат извод на (a,b), тогаш густината на случајната променлива $Y=g(X)$ е дадена со

$$\varphi_Y\left(x\right)=\varphi_X\left(g^{-1}\left(x\right)\right)\left|\left(g^{-1}\left(x\right)\right)'\right|.$$

3.2.10.12 Бројни карактеристики на непрекинати случајни променливи *

Нека X е непрекината случајна променлива со густина $\varphi(x)$. Ако интегралот $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi\left(x\right)dx$ конвергира, тогаш бројот

$$E\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi\left(x\right)dx$$

е **математичко очекување на случајната променлива** X.

Користејќи ја теоремата од претходниот дел, се докажува следнава теорема.

Теорема. Нека X е непрекината случајна променлива со конечно математичко очекување $E(X)$ и непрекината густина $\varphi(x)$ и нека $g(x)$ е непрекината функција со домен што ги содржи вредностите на X. Тогаш математичкото очекување на случајната променлива $Y=g(X)$ е дадено со

$$E\left(Y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx.$$

Директно од последнава теорема следува следнава последица.

Последица. Нека X е непрекината случајна променлива со конечно математичко очекување, $E(X)$, и нека $a, b \in\mathbb{R}$. Тогаш

i) $E(X-E(X))=0$

ii) $E(aX+b)=aE(X)+b$.

Пример 1. За случајната променлива X од пример 1 од делот 3.2.10.10, т.е. X со

$$\varphi\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ 0, x\notin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

математичкото очекување $E(X)$ е

$$E\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\varphi\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{2}\cos xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cos xdx=0.$$

Точни се следниве својства.

1° Ако X и Y се непрекинати случајни променливи над ист простор од елементарни настани и за кои постојат математички очекувања $E(X)$ и $E(Y)$, соодветно, тогаш

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

Нека X е непрекината случајна променлива со густина $\varphi(x)$. Математичкото очекување

$$E\left(\left(X-E\left(X\right)\right)^{2}\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-E\left(X\right)\right)^{2}\varphi\left(x\right)dx$$

е **дисперзија на случајната променлива** X, и, како и во случајот на дискретната случајна променлива, се означува со $D(X)$, а $\sigma=\sqrt{D\left(X\right)}$ е **средно квадратно отстапување на случајната променлива** X или **стандардна девијација на** X.

Нека X е непрекината случајна променлива со конечно математичко очекување $E(X)$ и конечна дисперзија $D(X)$. Тогаш

1° $D(X)\geq 0$, и $D(X)=0$ ако и само ако постои константа C таква што $D(X=C)=1$.

2° За $a,b\in\mathbb{R}$, $D(aX+b)=a^{2}D(X)$

3° $D(X)=E(X^{2})-(E(X))^{2}$

4° $D\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)=1$.

3.2.10.13 Примери на непрекинати случајни променливи

3.2.10.13.1 Рамномерна распределба

Дефиниција. За случајната променлива X ќе велиме дека има **рамномерна распределба** на интервалот $[a,b]$ ако нејзината густина е

$$\varphi(x) = \begin{cases} c,\, a \le x \le b \\ 0,\, x \notin [a,b] \end{cases}$$

Ќе означуваме $\mathcal{U}([a,b])$.

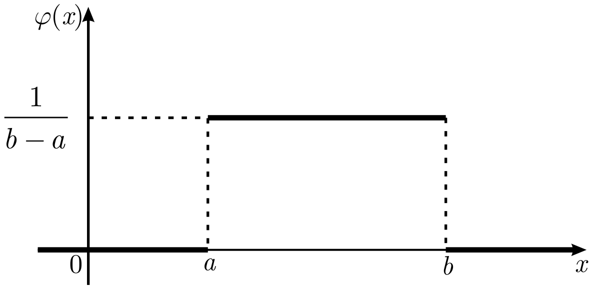
Од

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = c\int\limits_{a}^{b} dx = c\,(b-a)$$

следува $c = \frac{1}{b-a}$.

Значи, густината на распределба на случајната променлива X е

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\, a \le x \le b \\ 0,\, x \notin [a,b] \end{cases} \tag{1}$$



За функцијата на распределба на случајнта променлива X добиваме

$$F(x) = P(X \le x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \begin{cases} 0,\ x \le a \\ \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{x} dt,\ a < x < b \\ 1,\ x \ge b \end{cases}$$

па

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\leq a\\ \frac{x-a}{b-a},\ a<x<b\\ 1,\ x\geq b\end{cases}.$$

Од (1) и дефинициите за математичко очекување и дисперзија добиваме

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}xdx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2},$$

$$E\left(X^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\varphi(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ba+a^2}{3}$$

и

$$D(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

3.2.10.13.2 Нормална распределба

Нека $a\in\mathbb{R}$ и $\sigma>0$. За функцијата

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},\ x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

важи дека $\varphi(x)\geqslant 0$, за секој $x\in\mathbb{R}$ и се докажува дека

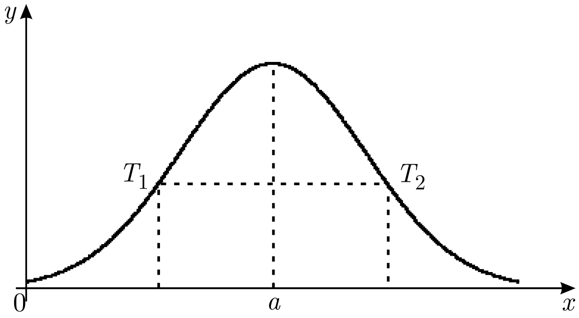
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx=1.$$

Дефиниција. За случајната променлива X велиме дека има **нормална (Гаусова) распределба** со параметри a и σ^2 ако таа има густина (1).

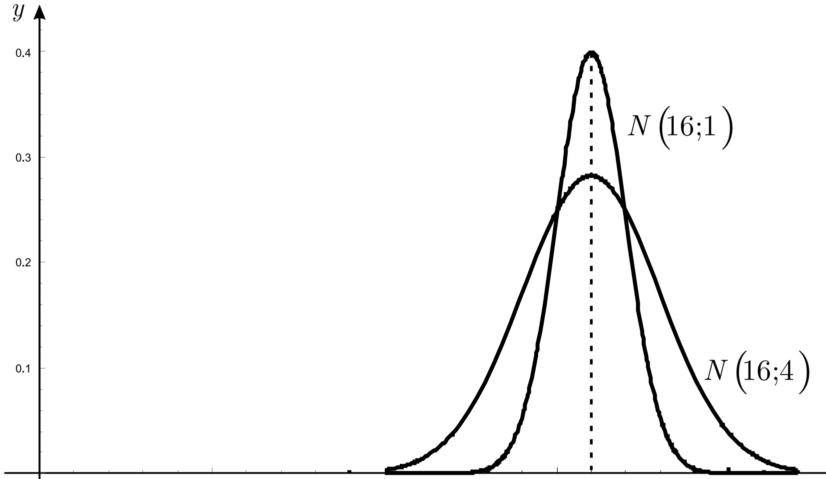
Забелешка. Нормалната распределба е еднозначно определена со параметрите a и σ^2, па затоа во натамошните разгледувања истата ќе ја означуваме со $N(a;\sigma^2)$. Нормалната распределба со параметри $a=0$ и $\sigma^2=1$ ја нарекуваме **стандардна** и нејзината густина на распределба е

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Од (1) следува дека кривата на густината на нормалната распределба е симетрична во однос на правата $x = a$ и таа има облик како на следниов цртеж.



На слединов цртеж се прикажани две нормални распределби $N(16;4)$ и $N(16;1)$.



Забелешка. Нормалната распределба има големо значење во теоријата на веројатноста и статистиката, па затоа овде ќе наведеме уште неколку нејзини својства. За стандардната нормална распределба, функцијата на распределба е дадена со

$$F_0\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

и ја нарекуваме **нормална функција на распределба**. Таа е непрекината, строго монотоно растечка и важи

$$\lim_{x\to-\infty} F_0\left(x\right) = 0,\ \lim_{x\to\infty} F_0\left(x\right) = 1.$$

Од парноста на функцијата $\varphi(x)$ следува дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$F_0\left(-x\right) = 1 - F_0\left(x\right).$$

Теорема. Ако случајната променлива X има нормална распределба $N(a;\sigma^2)$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E(X) = a$$

а дисперзијата е

$$D(X) = \sigma^2.$$

Забелешка. а) За $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$ ја добиваме стандардната нормална распределба $N(0;1)$, за која имаме $E(X) = 0$ и $D(X) = 1$.

б) Нека Xе случајна променлива со нормална распределба $N(a;\sigma^2)$. Веројатноста $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ случајната променлива X да прими вредности од интервалот $[x_1, x_2]$ ја изразуваме со формулата

$$P\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} dx.$$

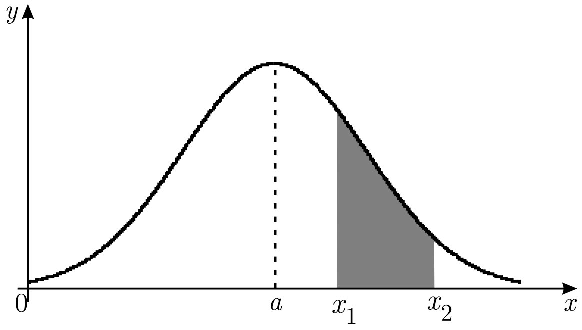
Ако во интегралот од десната страна ја воведеме смената $u = \frac{x-a}{\sigma}$ добиваме

$$P\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{x_1-a}{\sigma}}^{\frac{x_2-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Од последното равенство и од својствата на интегралот на Лаплас следува:

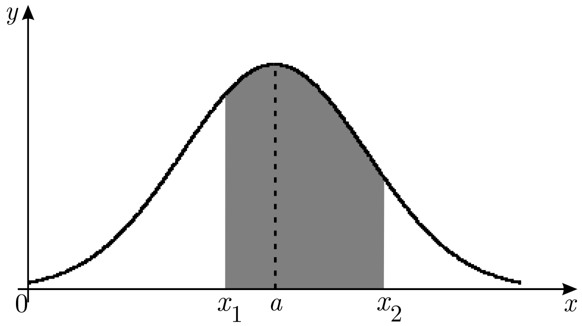
- Ако $x_1, x_2 > a$, тогаш

$$P\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) = F_0\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$



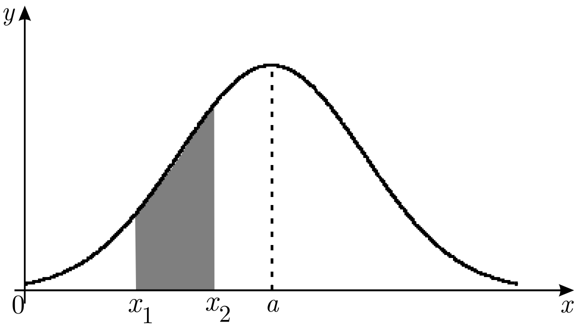
- Ако $x_1 < a < x_2$, тогаш

$$\begin{aligned} &P\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) = F_0\left(\tfrac{x_2-a}{\sigma}\right) - F_0\left(\tfrac{x_1-a}{\sigma}\right) = \\ &= F_0\left(\tfrac{x_2-a}{\sigma}\right) - F_0\left(-\tfrac{a-x_1}{\sigma}\right) = F_0\left(\tfrac{x_2-a}{\sigma}\right) + F_0\left(\tfrac{a-x_1}{\sigma}\right) \end{aligned}$$



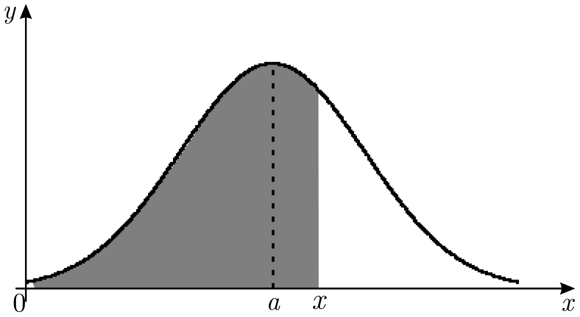
- За $x_1, x_2 < a$ имаме

$$\begin{aligned} &P\left(x_1 \leq X \leq x_2\right) = F_0\left(\tfrac{x_2-a}{\sigma}\right) - F_0\left(\tfrac{x_1-a}{\sigma}\right) = \\ &= F_0\left(-\tfrac{a-x_2}{\sigma}\right) - F_0\left(-\tfrac{a-x_1}{\sigma}\right) = F_0\left(\tfrac{a-x_1}{\sigma}\right) - F_0\left(\tfrac{a-x_2}{\sigma}\right) \end{aligned}$$



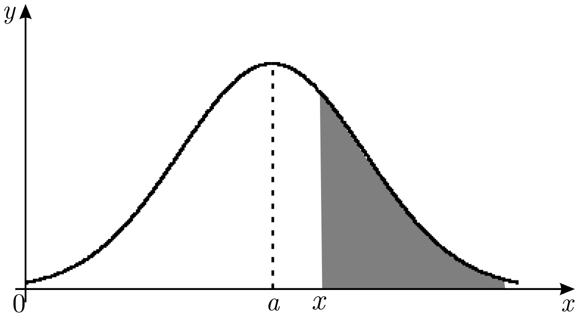
- Ако $x > a$, тогаш

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(X \leq a\right) + P\left(a \leq X \leq x\right) = \frac{1}{2} + F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$



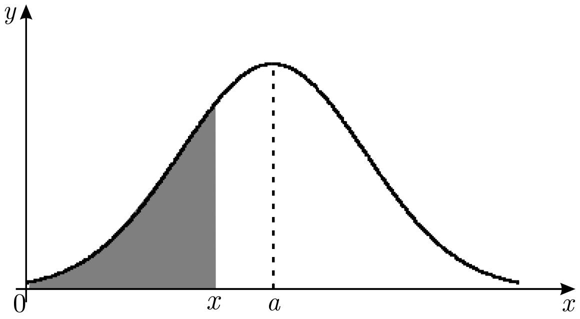
- За $x > a$ имаме

$$P\left(X \geq x\right) = 1 - P\left(X \leq x\right) = \frac{1}{2} - F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$



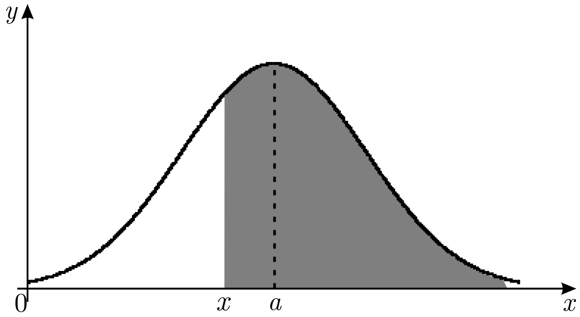
- Ако $x < a$, тогаш

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(X \leq a\right) - P\left(x \leq X \leq a\right) = \frac{1}{2} - F_0\left(\frac{a-x}{\sigma}\right)$$



- Ако $x < a$ тогаш

$$P\left(x \leq X\right) = 1 - P\left(X \leq x\right) = \frac{1}{2} + F_0\left(\frac{a-x}{\sigma}\right)$$



3.2.10.13.3 Гама распределба

Нека $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$. Да ја разгледаме функцијата

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, \ x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

каде $\Gamma\left(\alpha\right)$ е гама функцијата зададена со

$$\Gamma\left(\alpha\right) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx.$$

Дефиниција. За случајната променлива X ќе велиме дека има

гама распределба со парамерти $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$ ако таа има густина на распеделба $\varphi(x)$, дадена со (1).

Означуваме со $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

Теорема. Ако случајната променлива X има гама распределба $\Gamma(\alpha, \lambda)$, тогаш нејзиното математичко очекување е

$$E\left(X\right) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

а дисперзијата е

$$D\left(X\right) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Забелешка. Ако во (1) ставиме $\alpha = 1$ од гама распределбата ја добиваме експоненцијалната распределба со параметар λ. Сега, од претходната теорема добиваме дека за случајна променлива со експоненцијална распределба важи

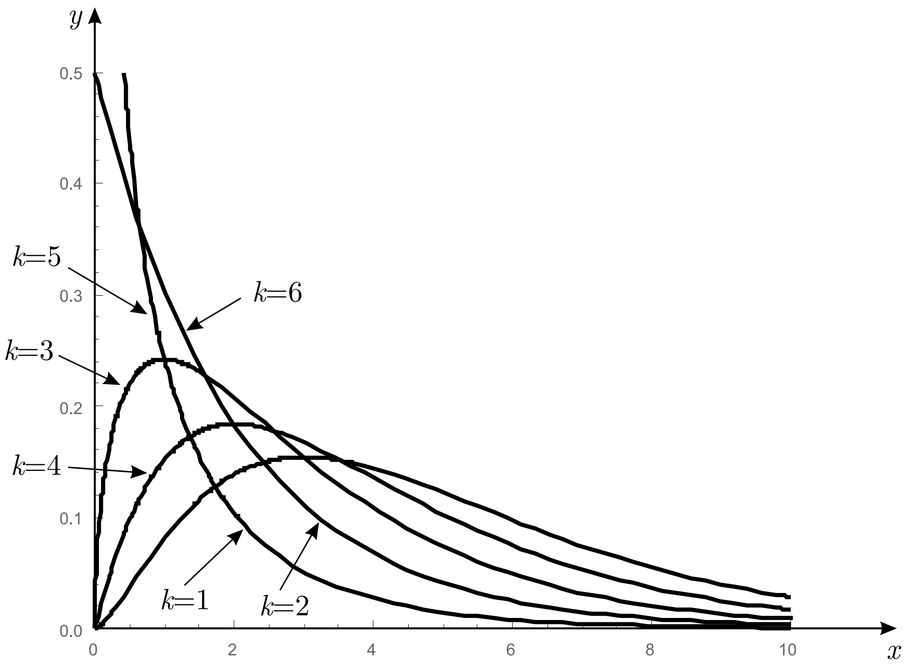
$$E\left(X\right) = \frac{1}{\lambda},\ D\left(X\right) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Забелешка. Ако во густината (1) ставиме $\lambda = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{k}{2},\ k \in\mathbb{N}$, тогаш ја добиваме густината $\Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$ на таканаречената χ^2**-распределба со k степени на слобода** која ја означуваме со χ_k^2 и која има важна улога во статистиката. Математичкото очекување и дисперзијата на χ_k^2-распределбата се:

$$E\left(\chi_k^2\right) = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}} = k,\ D\left(\chi_k^2\right) = \frac{\frac{k}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2k.$$

Како што рековме χ^2-распределбата е една од позначајните распределби во статистиката, за што ќе стане збор подоцна. Ова се должи на нејзината поврзаност со нормалната распределба, која зазема централно место во теоријата и примените на статистиката.

На следниов цртеж дадени се графиците на густините на χ_k^2-распределба за различни вредности на k.



3.2.10.13.4 Студентова t-распределба

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{1}$$

Дефиниција. За случајната променлива X се вели дека има **Студентова t-распределба со параметар** n, ако таа има густина на распределба $\varphi(x)$, дадена со (1).

Забелешка. Од (1) следува дека студентовата t-распределба е еднозначно определена со параметарот n, кој го нарекуваме степени на слобода.

Математичкото очекување на случајна променлива X која има студентова t-распределба со n степени на слобода е

$$E\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\varphi\left(x\right)dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx=0$$

бидејќи подинтегралната функција е непарна.

За $n>2$ може да се докаже дека дисперзијата на случајната променлива X постои и

$$D\left(X\right)=\frac{n}{n-2}.$$

4

СТАТИСТИКА

4.1 Односот на теоријата на веројатноста и математичката статистика

Теоријата на веројатност се занимава со законите на распределбата и бројните карактеристики на случајните големини.

Математичката статистика се занимава со приближните методи на откривање на законите на распределбата и на бројни карактеристики според резултатите од некои експерименти.

Математичката статистика е дел од применетата математика која непосредно се потпира врз теоријата на веројатноста. Сепак, меѓу нив постои голема разлика. Додека во теоријата на веројатноста работиме со веројатноста а приори, во статистиката овие веројатности однапред не ги знаеме, а нив можеме да ги согледаме, и тоа само приближно, а постериори, во некои експерименти.

Разработката на методите на регистрација, опис и анализа на експерименталните податоци, добиени во текот на посматрањето на масовните случајни појави е предмет на математичката статистика. Во процесите на проучувањето на овие појави статистиката се служи со определени методи. По однапред поставен план таа собира податоци за овие појави (по пат на попис, анкета, констатации, забележување, мерење, експериментирање, итн.) па потоа истите ги обработува и врз основа на оваа обработка од нив извлекува определени заклучоци, значајни за теоријата и примената.

Но, во практиката секогаш имаме работа само со ограничено количество експериментални податоци. Бидејќи експериментот е скап, трае долго време, а и бесмислено е тој да трае предолго, и затоа мора да биде ограничен. Затоа резултатите од експериментите и нивната обработка содржат поголем или помал елемент на случајност. При тоа е неопходно да се определи, какви карактеристики на разгледуваната појава се постојани и навистина се врзани за неа, а какви се случајни и се јавуваат во дадена серија експерименти само поради ограничениот обем на експериментот и малиот број на податоците.

Теоријата на веројатноста и математичката статистика заемно се испреплетуваат. Во теоријата на веројатноста според дадените веројатности и функции на распределба се наоѓаат други, нови веројатности и функции на распределба. Се прашуваме, што е сосема природно, од каде се земени почетните вредности на веројатностите и почетните функции на распределбата? Ако, да речеме, ни треба под дадени услови распределбата на продолжувања на сигурната работа на некои машини, како можеме истата да ја определиме? Или друг пример сакаме да ја најдеме веројатноста на раѓањето на машко дете при определени општествени услови. Како да се направи ова? Само априорните расудувања не се доволни.

Неопходни се експеримети и специјални иследувања. При ова се претпоставува дека експериментите се независни еден од друг.

Математичката статистика располага со методи, кои дозволуваат од резултатите на некои експерименти да направиме соодветни заклучоци.

4.2 За разновидноста на задачите на математичката статистика

Во својата основна задача испитување на законитостите во масовните појави, статистиката има огромен број конкретни и многу важни задачи.

I. Настанот има веројатност p, чија вредност не ја знаеме. Се бара од експерименталните резултати да се оцени вредноста p. Вршиме ред независни експерименти, во секој од кои настанот може да настапи. Како да ја провериме хипотезата, дека веројатноста на настанот била подеднаква за сите опити.

II. Вршиме две низи од независни експерименти, при секој од кои настанот може да се појави со веројатности P_1 или P_2. Се прашуваме како да ја провериме хипотезата дека овие веројатности се еднакви меѓу себе?

III. Вршиме низа опити. Како да провериме дека овие опити се независни?

Да ги илустрираме овие три основни прашања со еден прост пример. Нека настанот се состои од раѓањето на машко дете. Ние не ја знаеме веројатноста и сакаме да ја оцениме низ набљудувања. Дали таа веројатност е непроменлива? Дали пак истата се менува во текот на едно деноноќие? Дали раѓањата на машки деца од една мајка се независни, или пак, откако се родиле неколку машки деца по ред, веројатноста на ново раѓање на машко дете се зголемува? И на крајот, сакаме да разјасниме зависи ли веројатноста за ново раѓање на машко дете од условите во кои се наоѓа мајката. На пример, зависи ли таа веројатнот од климата, исхраната, географската ширина, карактерот на професијата на мајката и таткото, итн. Јасно е дека овој пример е илустративен и дека бројот на слични илустрации е огромен.

Да нагласиме дека овде секаде станува збор не за определување на веројатноста на A, туку за нејзината оценка. Ова не е точен израз а е најправилен израз, бидејќи експеримент не може да даде апсолутно точна вредност на разгледуваната променлива.

Уште повеќе, резултатите на опитот се случајни, затоа и оценката, која што ќе ја добиеме со нивната помош, е исто така случајна. Со помош на статистиката и нејзините правила ние добиваме приближна вредност на непознатиот параметар во некоја обопштена смисла: постојаната променлива приближно ја определуваме низ случајната променлива, конструирана со помош на дадено правило по резултатите од експериментот.

По оваа важна констатација, го продолжуваме описот на основните задачи на Статистиката:

IV. Многу е важен и интересен проблемот за бројот на експериментите кои треба да се извршат, за оценката на веројатноста на настанот кој не интересира да биде доволно блиска до вистинската вредност. Ова прашање може да произлезе и при други статистички задачи. Задачите врзани со оценка на веројатноста се важни и разнообразни, но се само дел од прашањата кои се поставуваат пред математичката статистика.

V. Друга широка класа проблеми е поврзана со оценката на непознатата функција на распределба. Има случаи кога ние ништо не знаеме за функцијата на распределбата која не интересира. Како таа да ја оцениме? Може да се случи од некои причини да составиме хипотеза, дека бараната функција на распределбата е точно $\Phi(x)$. Како да провериме дали оваа хипотеза е точна?

VI. Може да се случи да ни е познат видот на функција на распределбата $\Phi\left(x;\alpha,\beta,\gamma\right)$, но не ни се познати параметрите α,β,γ од кои зависи оваа функција. Оваа задача се сведува на составување на правилата за оценка на непознатите параметри од експерименталните резултати.

VII. Честопати произлегува и следната задача: Направени се две или неколку серии независини експерименти, чии резултати се $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ и $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Се прашуваме дали сме разгледувале случајни големини со една иста функција на распределба. Ова прашање е од големо значење за многуте практични задачи.

VIII. Во врска со проверката на квалитетот на изработката на продуктите, или нивната употребливост и долготрајност, настануваат други типови проблеми. Обично ние можеме да ги разгледуваме само оние вредности на дадената случајна променлива, кои се наоѓаат на некој интервал од a до b ($a < b$). На пример, ако експериментите се вршат во текот на време T, можеме да гарантираме за долготрајноста само на оние производи, за кои истата била помала или рамна на T. Како да ги оцениме непознатите параметри во овие случаи?

IX. Важна група задачи е поврзана во поставувањето на статистички зависности меѓу настаните и големините. Познато е дека во медицинската дијагностика симптомите на заболувањето обично не се апсолутни. Со други зборови, може симптомот карактеристичен за една болест да биде присутен, а пациентот да боледува од друга болест, чии симптоми не се појавиле и која според тоа останала непозната. Или може да се случи болеста да е јасна и видлива, без да се јавиле карактеристичните за неа симптоми. Може да стане збор само за веројатноста на симптомот при дадено заболување, или за веројатноста на заболувањето при даден момент. Практично е многу важно да можеме да ја определиме силата на врска меѓу симптомот и заболувањето.

X. Слични се задачите од агрокомплексот, во врска со зголемувањето на приносот во зависност од обработката на почвата, или во врска со чување на добиток. Во овие случаи обично не можеме да добиеме сосема еднозначен одговор. Се случува дури и при мерки, преземени како полезни, приносот да се намали или да остане ист, поради редица други околности, кои не се земени предвид. При голем број опити сепак може да се констатира тенденција кон зголемувањето на приносите.

XI. Една голема и важна група проблеми е поврзана со управувањето на процесите. Да ја разгледаме следната конкретна задача. Даден е некој определен технолошки процес, на пример, обработка на металите. Стругот е добро наштелуван и подготвен во почетокот, но во текот на времето се расштелува, а заедно со тоа опаѓа и квалитетот на работата. Резниот инструмент, ножот, се затапува, и веројатноста на шкартот расте. Задачата се состои во тоа да го определиме оној момент, во кој треба да запре стругот, да се репрограмира инструментот и да се смени ножот. При оваа ситуација имаме само еден единствен начин да донесеме решение – да извршиме разгледување на квалитетот на добиените продукти. Ако почнеме да го штелуваме и менуваме ножот многу често, значително ќе го намалиме работното време на стругот и ќе го зголемиме бројот на истрошените алати. Ако пак, почнеме намерно да доцниме со прекин на работата на стругот поради престројување, веројатноста за производство на шкартот ќе нарасне.

Така произлегува множество прашања за кои во статистиката се јавуваат посебни области, кои се посветени на нивното решавање.

Овој оддалеку потполн и исцрпен опис на задачите на статистиката служи само да ни ја долови важноста и широчината на оваа дисциплина.

4.3 Статистичка маса. Егземплар

Карактеристика на природните појави е нивната масовност. Во секоја природна појава учествуваат неброено многу учесници, поаѓајки од јони или молекули во хемиската реакција, атоми во кристалната решетка, па се до живи суштества членови на биолошки или социолошки заедници.

Статистичкото множество на сите елементи (членови, единки, посебности, објекти) на некоја масовна појава се вика статистичка маса или општо (генерално, основно) статистичко множество. За генералното множество често пати се користи изразот популација. Теоретски, тоа е безбројно множество или пак множество чија бројност се ближи кон бескрајност. Да замислиме, на пример, дека една статистичка маса е множеството на сите жители на град Њујорк, или една популација риби која живее во разгледуваниот залив, или множество на сите болни од иста дијагноза, или сите зрна пченица со иста тежина во mg од една проучувана регија.

Статистичката маса значи е составена од голем број изолирани елементи. Сепак, постои нешто што нив ги обединува, една заедничка особина, нешто што ги одделува од некоја друга статистичка маса. Оваа особина се вика **обележје** или **карактеристика**. Велиме дека елементите се од ист вид.

Во биолошката и медицинската статистика, статистичката маса е најчесто едно множество одделни објекти кои еден од друг се разликуваат како посебни индивидуи, но во исто време имаат некои блиски суштински особености. На пример, статистичката маса се сите деца кои се раѓаат во една популација во тек на месецот или годината.

Одделните елементи, кои влегуваат во статистичката маса, се викаат членови на статистичката маса, а бројот на сите членови (ако постои) е нејзина димензија.

Елементите на статистичката маса не се идентични еден на друг туку само имаат едно (или повеќе) заеднички особини, кои ги поврзуваат во една целина. Бидејќи ако елементите на статистичката маса би биле идентични, би било доволно да се разгледува само еден елемент како претставник на целото генерално множество, и никаква статистика тука не би била потребна. Случаи кога само еден претставник е доволен се извонредно ретки. (на пример ако сакаме да утврдиме естетски квалитети на решението на обликувањето на монетата од 1 денар, доволно е да земеме од куп пари само еден нов примерок монета). Во бескрајната маса биолошки и статистички суштества меѓу секои два елементи има некоја разлика, па дури и во она основното обележје кое ги обединува. Причините за појава на неидентичноста на два променеливи елементи од истата статистичка маса не се предмет на статистиката, тие битно зависат од природата на разгледуваните елементи, и се определуваат со методите на другите, соодветни науки (физика, хемија, биологија, патологија, итн.) Дури потоа математичката статистика го проучува кај овие елементи нивното барано квалитативно или квантитативо обележје (на пример стандардноста на димензиите е квантитативна особина (обележје) на еден производ (алат, конфекција, машина); а стандардноста на материјалот (боја, тврдина, издржливост, постојаност) е квалитативна особина.

Елементите на статистичката маса не се идентични во однос на карактеристиката која се испитува при овие елементи, туку таа особеност се искажува во разни варијанти, или, како што се вели, во модалитети. Ако во даденото статистичко множество се проучува некоја особина, која се менува при преминот од еден член на множеството кон друг, таа промена на оваа особина се вика варијација, а бројната вредност x на дадениот член на статистичката маса се вика неговата варијанта x.

Пример 1. При новородените деца, тежината x е варијанта, која се менува од дете на дете. Таа е толку важен индикатор, што е еден од првите податоци кои се земаат за новороденчето. При ова, генералната статистичка маса, т.е. бројот на сите деца во светот родени во определен временски период, не може да се утврди.

Пример 2. При мерење на висината ($h =$ обележје, карактеристика, која не интересира) на множеството 7 160 војници (статистичка маса), утврдени се следните податоци:

Висина h cm	162	164	166	168	170	172	174	176	178	180	182	184
Број f војници	12	14	28	144	1134	1229	1302	1920	990	612	215	160

Во вториот ред се дадени броеви-елементи во секое од подмножествата на дадената статистичка маса од 7 160 војници: секое од овие подмножества одговара на една варијанта на висината h - карактеристиката која во овај случај нас не интересира.

И овде не располагаме со генералната статистичка маса - тоа би биле сите војници од оваа армија. Констатираме дека тешко може да се оперира со генералната статистичка маса во најопшт случај.

На таков начин, испитувачот на појавата, особено биолошкиот медицинар, скоро никогаш нема да има можност да располага со генералното множество, бидејќи:

1. Генералното множество е толку огромно бројно (или безбројно), скоро никогаш да не може да биде концентрирано, дофатено, подредено, пребројано.

2. Објектите на генералното множество честопати се тешко пристапни.

3. Бројот на можните повторувања на повеќето експерименти честопати не е ограничен.

Затоа обично се прочува само некој дел од елементите на генералното статистичко множество X, т. е. со цел да се најде законот на распределбата или експериментално да се провери хипотезата за тоа, дали променливата X е подложна на овој или оној закон, и да се најдат бројните карактеристики на случајната променлива. За таа цел се избира дел Y од општата статистичка маса X, и над случајната променлива Y се вршат последователни независни обиди, по кои истата прима определени вредности. Множеството на добиени вредности на случајната променлива Y претставува првостепен статистички материјал кој е подложен на анализа, обработка и осмислување. Обично избраниот дел е

$$Y \subset X.$$

Ова подмножество се вика примерок или егземплар. Множеството Y е формирано со метод на случајно одбирање, одделувајќи од X еден, што е можно поброен негов дел (за да можат да се запазат и искажат сите битни особини на неговата карактеристика). Бројот на елементите на N на статистичката маса X се вика димензија на масата, а бројот на елементите n на примерокот Y, подмножеството Y, се вика димензија на егземпларот. Обично е

$$N >> n$$

На пример, во демографијата N се мери со милиони или десетици милиони, а не од 500 до 10 000.

На пример при биолошки испитувања на водите од езерото се земаат примероци поставени на различни длабочини, и на разни места, и сите тие примероци се статистички примероци на водата. Се испитува бактериолошкиот или органскиот или планктонскиот состав на тој примерок, и врз основа на тоа се носат заклучоци за надежноста на можното рибно производство.

И така целата статистичка минува во знакот на соодносот од две множества: генералната маса X и избраниот егземплар Y : $Y \subset X$. Ова дава тон на целата оваа наука.

4.4 Некои начини на формирање на егземплари

На кој начин треба да се одбере подмножеството Y за истото да може да ја претставува целата огромна статистичка маса X; како оваа маса X се проучува само врз основа на особините на одбраниот примерок Y, и како се проценува точноста на добиените резултати - тоа се основните прашања со кои се занимава математичката статистика. Од овие три прашања се развиле сите статистички методи.

Бидејќи одбирањето елементи Y на примерокот $Y \subset X$ е случаен настан, следува дека заклучоците добиени со испитување на некоја статистичка маса низ метод на примероци се само веројатни. Затоа потребата за се поширокaта примена на статистиката во разни области на научната и практичната дејнот многу влијаеше врз развивањето на теоријата на веројатност и на формирање на сиот математички апарат на статистиката.

Очигледно е дека централно прашање е успешениот избор на примерокот, за да може врз проучувањето на примерокот да извлечеме доволно сигурни заклучоци за карактеристиките на целата статистичка маса, ако сите членови имаат еднаква веројатност да бидат избрани. Освен тоа, примерокот мора да има и доволна димензија, т. е. доволен број n на елементи.

Примерокот се формира со избирање на неговите елементи. При ова има две основни можности: генералната статистичка маса да не се разложува на делови, и истата да се раложува на делови.

Ако избирање се врши без масата претходно да се разделува, а сите елементи се бираат од статистичката маса на ист начин добиваме прост примерок. Тука се можни:

а) Прост примерок без повторување;

б) Прост примерок со повторување.

Ако секој извлечен и разгледан примерок-елемент се враќа во масата X и според тоа може повторно да учествува во формирањето на Y примерокот, се вика прост примерок со повторување. Ако еднаш избраниот $y \in X$ не се враќа повторно во X туку останува како $y \in Y$ само еднаш, имаме работа со прост примерок без повторување.

Ќе разгледаме еден од општо прифатените начини на организација на формирањето на прост примерок.

1) За секој елемент $x \in X$ на генералната маса се воведува картичка со определен реден број. Вкупно, има N картички. Сите картички со совршено ист изглед од надворешната страна, се мешаат.

2) Случајно се влече една картичка, и по регулирањето на незјиниот број таа се врећа во масата итн. Влечењата се вршат n пати. Така имаме примерок Y, едно продмножество од n елементи. Ова е примерок со повторување.

3) Ако секое од $n-$те извлечени картички се става на страна, таков примерок се вика без повторување.

Но, ако бројот N на елементите во X е многу голем, или бескраен, тогаш овој метод не доаѓа предвид, бидејќи испишувањето на ливчињата нема никогаш да заврши. Затоа се користат табели на случајни броеви, кои содржат природни броеви подредени во некој случаен поредок. Ако сакаме, на пример, примерок од $n = 100$ елементи, тогаш на срећа се отвора оваа таблица и така се бира страна, а од неа по ред се препишуваат првите 100 броеви, а потоа од елементите на X кои се означени со тие броеви се формира Y, ако веќе сме означиле претходно доволен број членови од X.

Но, не е секогаш неопходно да се применува оваа постапка на формирање на примерокот. На пример, ако се испитуваат мали предмети (зрна, таблетки и сл.), доволно е на среќа да се земат 50-тина зрна (таблети) за да судиме за карактеристиките на однос на целата маса. Во практика обично се користи примерок без повторување. При големи вредности N на генералната маса и при мали вредности n на примерокот разликите во формулите кои ги опишуваат двата примероци според техниката на избирање се мали.

Ако пред да се врши избор на примерокот, статистичката маса од некои причини се дели на делови, тогаш разликуваме:

а) типичен примерок;

б) механички примерок;

в) сериски примерок.

Примерокот се вика типичен, ако неговите елементи се земени од секој типичен составен дел на основната статистичка маса. На пример, ако испитуваме пченица од повеќе парцели со различен квалитет на земјиштето, тогаш замаме ист број зрна од секоја парцела. Или ако треба да испитаме статистички доволно голем број артикли произведени на неколку машини од ист тип а различен квалитет, тогаш изборот на елементите се врши така што се земаат елементи од продукцијата на секоја машина одделно, а не од целата статистичка маса. Продукција на секоја машина е еден типичен дел на таа маса.

Ако статистичката маса се раздели механички на онолку делови колку елементи треба да бидат во примерокот, и од секој дел од масата произволно се бира по еден елемент, тогаш така добиен примерок се вика механички. Така, на пример, за да формираме примерок од 2% елементи на целата продукција, со одделување на секој педесетти елемент се добива механички примерок.

Ако од сите делови на дадената статистичка маса се земе по една серија елементи, и од сите тие серии се формира егземплар, таков егземплар се вика сериски. На пример, ако некој артикл се призведува во една фабрика на повеќе машини од ист тип и приближен квалитет, тогаш сите примероци произведени на сите машини за определено време (прв работен час во ист ден) формираат сериски примерок. Сериски примероци се бираат од статистичката маса обично ако разликите во варијантите на карактеристиките кои се испитуваат во разни серии се занемарливо мали.

Во практиката честопати примерокот на статистичката маса се формира со комбинирањето на два или повеќе претходно опишани начини. На пример, понекогаш статистичката маса се разделува на повеќе делови со иста димензија, и од тие делови со просто случајно одбирање се земааат неколку серии, од овие серии произволно се бираат поединени елементи на егземпларот.

4.5 Биометрија - статистика на биотехничките науки

Првата задача на биометријата е воведување на математичките мерни методи во биологијата, и математичкото формулирање на биолошките законитости. Тоа е можно бидејќи појавите во биологијата се масовни. Затоа, секаде каде што во биологијата има мерење, има и статистика. Статистиката применета во биологијата општо, и во сите нејзини гранки- биотехничките науки, се вика биометрија.

Самото име биометрија значи: мерење на живата материја, и има само традиционално-историско значење. Денес биометријата не е само мерење, туку е многу повеќе од тоа. Слично како што и геометријата денес не е мерење и премерување на земјата, туку е една наука со универзално значење и многу примени во сите науки, така и биометријата ги надмина своите почетни задачи. биометријата не е само наука која констатира и регистрира и мери некои состојби, тоа не е само статистика во онаа најстатична смисла само да собира податоци, таа не е наука пост фестум, туку таа има многу пошироко значење, врз основа на статистичките закони да предвидува биолошки настани.

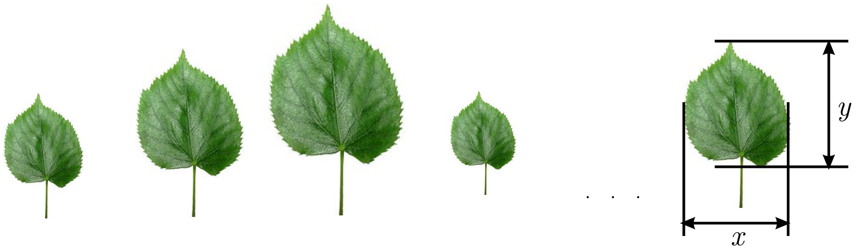
Биометријата не е само проста регистраторка на биолошките факти, исто како што биологијата не значи инвентарисување на природата, туку е орудие за анализа на живите појави, со цел истите да служат на општото добро на човештвото. Биологијата е само во својот помал дел записничка, регистраторка и систематизаторка на живиот свет, а нејзиниот поголем дел служи на посложената цел - одржување и подобрување на сите манифестации на животот како најголема вредност на Вселената.

Биологијата започнува со систематиките, и тоа е прв нејзин неопходен материјал кој служи како материјална основа за нејзините повисоки делови: генетиката, еволуцијата, биохемијата, физиологијата, итн., врз основа на кои денес се развиени многуте специјални дисциплини кои непосредно помагаат во многуте подобрувања на животот. Да ја спомнеме само селекцијата, генетскиот инженеринг, космичката биологија и медицината, итн. Паралелно со тоа и потполно аналогно на тоа, и биометријата започнува со собирање на нумеричкиот материјал од биолошкиот експеримент, кој служи како основа за примените на нејзините статистички методи. А крајна цел на биометријата е да даде математичка прогноза за живиот настан, да моделира, прво математички, а потоа непосредно и ефективно, некој биолошки процес, да помогне во совладувањето на тајните на животот, да изврши некое соодветно подобрување на животниот процес. На пример, биометријата интервенира во анализата и селекцијата на лековитите растенија, потоа помага во нивната префабрикација во лекови, и на крај преку медицинската статистика помага во констатирањето на нивната ефикасност. Или, на пример, сите подобрувања на квалитетот на пченката (и други приноси) се врз основа на типични биометриско-статистички методи. Во светлината на ова, биометријата има основна и универзална улога на сите биолошки, биотехнички и биомедицински науки.

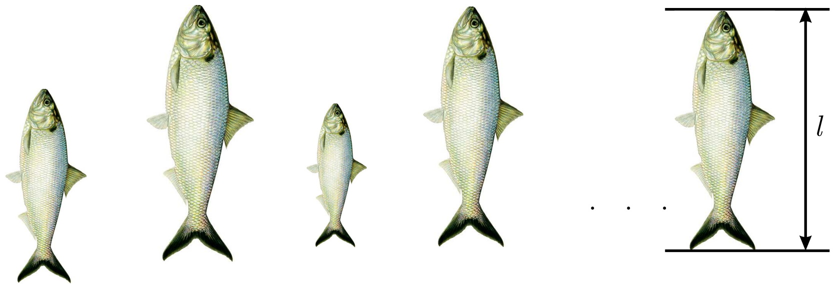
4.6 Биометриски податоци, основен третман

Биометријата може да дојде до израз само ако има бројни податоци од некое мерење, некој експеримент. Основа на биометријата е некоја генерална статистичка маса, од која се собира еден примерок.

Пример 1. Нека статистичка маса бидат сите лисја од некое дрво. За некои растително-физиолошки истражувања ни требаат податоци за димензиите на листовите. Избираме еден статистички примерок од гранки на разна висина. Мерни објекти се една серија разни листови.



Пример 2. Се проучува приносот на перкијата (кострешот) од Дојранското Езеро. Генерална статистичка маса се сите перкии на Езерото. Ловиме со мрежа определен број пати, го разделуваме уловот според возрасната структура. Случајно одбрани риби вака формираат годишен одбран примерок. Се мери нивната должина за да се спореди едногодишното растење.



Пример 3. Мериме фосилни коски од некое палеонтолошко наоѓалиште. Познато е дека од една коска може да се изврши

реконструкција на целото животно. Најдени се голем број коски (os femur). Нивната должина е предмет на биометриско истражување. Имаме еден случаен примерок составен од должини.

Пример 4. Се определува зголемување на масата кај лабораториски животни (глувци). Пред почеток на експериментот животните се на иста возраст од 8 недели и се бираат единки од различни легла. По администрација на високо-масна храна, која е со времетраење од 18 недели се забележува порастот на масата на животните.

m (g) пред третман	**m (g) по третман**
34,404	51,730
29,854	49,673
39,333	60,232
37,518	54,784
34,725	57,901
39,647	63,146
28,985	53,587
33,812	49,116

Заокружување на две децимали:

m (g) пред третман	**m (g) по третман**
34,40	51,73
29,85	49,67
39,33	60,23
37,52	54,78
34,73	57,90
39,65	63,15
28,99	53,59
33,81	49,12

Определување на бројноста и димензијата на експериментот:

$x_{\min} = 49,12g$

$x_{\max} = 63,15g$

Се пресметува варијабилата:

$\Delta x = x_{\max} - x_{\min} = 63,15 - 49,12 = 14,03$

Подредување по големина:

m (g) пред третман	**m (g) по третман**
28,99	49,12
29,85	49,67
33,81	51,73
34,4	53,59
34,73	54,78
37,52	57,9
39,33	60,23
39,65	63,15

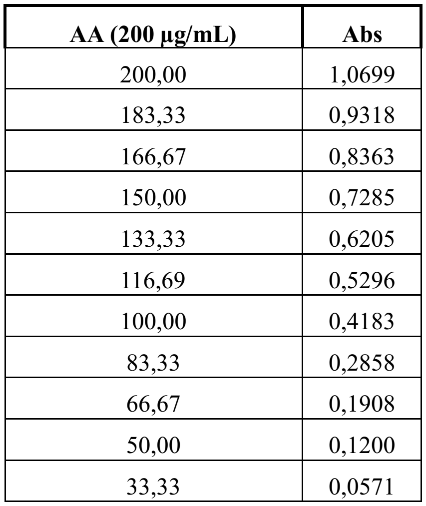
Определување на класи:

Класа	49-53	54-58	59-63
Бројност	3	3	2

Ако N е бројот на животни, а n е бројот на класи имаме широчина на секоја класа x_k да е:

$$\text{чекор} = \Delta x_k = \tfrac{x_{\min} - x_{\max}}{n} = \tfrac{\Delta x}{n}.$$

Пример 5. Се определува намалување на апсорбанцата по сериско разредување на стандард на витамин C (аскорбинска киселина). Во табелата се дадени вредностите за концетрацијата и апсорбанцата за различните разредувања.



AA (200 µg/mL)	Abs
200,00	1,0699
183,33	0,9318
166,67	0,8363
150,00	0,7285
133,33	0,6205
116,69	0,5296
100,00	0,4183
83,33	0,2858
66,67	0,1908
50,00	0,1200
33,33	0,0571

Се пресметува средна вредност за апсорбанците и концентрациите, се заокружуваат резултатите соодветно и се изготвува график за да се покаже линеарната зависност на концентрацијата vs. апсорбанцата.

Какво и да е мерењето, директно или индиректно, неговиот резултат е една проста статистичка низа, дадена во вид на низа од реални броеви, која математички го опишува статистичкиот примерок:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n.$$

По завршувањето на лабораториската работа, потребно е да извршиме неколку претходни операции со добиениот нумерички материјал.

I-ва операција. Заокружување на децималите.

Во зависност од мерната техника и од степенот на непосредноста на мерењето, добиените резултати не се сите со иста точност и со ист број децимали. Потребно е нумеричкиот материјал да се унифицира.

На пример, добиени се следните вредности:

$$5,29986; 5,1241; 5,12; 5,3894; ...$$

Нив ги заокружуваме на две децимали, бидејќи се толкави потребите на точноста на експериментот, по принцип на наизменично поништување на грешката, т. е. еднаш земаме поголема приближна вредност, а веднаш потоа помала приближна вредност.

Заокружуваме:

$$5,30^+; 5,12^-; 5,12; 5,39^+, ...$$

За заокружувањето се користи најблиската поголема или помала вредност, воведени како апроксимации по недостиг или по додаток ([2]). Добиваме така множество од податоци или низа експериментални податоци или сет

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_N,$$

каде што резултатите се запишуваат по оној редослед по кој се мерени. Или симболички

$$\{x_N\}.$$

II-ра операција. Определување на бројноста и димензијата на експериментот.

Меѓу елементите x_k има еден најголем

$$x_{\max}$$

и еден најмал

$$x_{\min}.$$

Разликата

$$x_{\max} - x_{\min} = \Delta x$$

се вика интервал на промена на податоците (варијабилата) или димензија.

Бројот на сите податоци N се вика бројност, или бројност на низата, или бројност на примерокот.

III-та операција. Подредување по големина.

Многу често е потребно резултатите на мерењето да бидат подредени по големина, заради поделба на подмножества - класи, подгрупи со слични особини, биометриски пресметки и табели. Резултатите добиени во експерименталната низа

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

се подредуваат по големина, така што $x_{\min}$ е прв, а $x_{\max}$ е последен. Вака подредени по големина резултатите сега можеме да ги пренумерираме (преозначиме) по растечки редослед на индексите, т.е.

$$y_1 = x_{\min}, y_2, y_3, y_4, ..., y_N = x_{\max}.$$

Оваа операција се вика пренумерација, или преиндексација. Предноста и е во тоа што помали по големина елементи имаат помал индекс, а поголемите - повисоко место во ова бројна хиерархија.

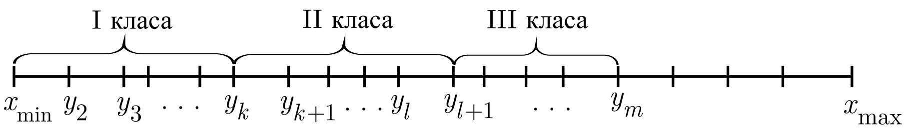
IV-та операција. Определување на класи.

При низата подредена по големина, многу често можат со обично разгледување да се воочат некои групирања на големините h, и тоа многу често во правилни еднакви интервали. Така се забележува дека резултатите

$$x_{\min}, y_2, y_3, ..., y_k$$

се блиски меѓу себе и се наоѓаат во интервалот $[y_1, y_k]$ кој е некој дел од $[x_{\min}, x_{\max}]$.

$y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_l$ се блиски меѓу себе и се во интервалот $[y_{k+1}, y_l]$ со иста должина како и првиот, итн. Така ја добиваме ситуацијата како на сликата подолу



Првото подмножество $[y_1, y_k]$ се вика I класа, второто $[y_{k+1}, y_l]$ втора класа, итн., па целиот примерок е поделен на класи. Пожелно е класите да бидат сите со иста должина (и со различна бројност).

Ако е N бројноста на популацијата, а n е бројот на класите, тогаш широчината (димензијата) на секоја класа x_k е

$$\text{чекор} = \Delta x_k = \tfrac{x_{\max} - x_{\min}}{n} = \tfrac{\Delta x}{n}$$

а нејзината бројна вредност изнесува n_k, при што важи

$$N = \sum_{k=1}^{n} n_k,$$

каде n_k е бројот на елементи од примерокот кои се наоѓаат во $k-$тата класа.

Пример. Вршени се мерења на висината на 150 студенти. Резултатите се запишани во табелата, онака како се добиени. Да се подредат по големина, да се определи $x_{\min}, x_{\max}, N, \Delta x$. Да се предложи една поделба на класи со чекор $\Delta x_1 = 2$, или 3, или 5. Да се определи кој број на класи n е најдобар, да се определи бројноста на секоја класа. Која класа ќе биде најбројна?

168 169 156 171 175 159 167 170 156 157 168 164 164 172 171 174
176 173 171 163 169 155 174 176 160 172 172 163 187 172 161 176
164 166 168 162 172 175 156 165 164 167 177 183 163 172 173 181
163 166 171 163 166 178 169 167 172 171 175 171 179 186 165 164
163 173 173 177 156 173 160 176 171 169 163 163 163 163 169 164
164 170 176 163 179 176 169 159 163 179 178 183 169 169 166 167
173 170 170 169 164 177 173 166 162 190 160 165 156 157 174 168
176 173 168 164 164 172 170 164 173 165 173 184 163 179 161 162

158 171 177 166 171 175 174 170 174 169 161 170 174 164 170 182 174 167 173 171 164 178

4.7 Фреквенција. Статистичка распределба на фреквенциите

Во последниот пример забележуваме дека многу од мерените висини се повторуваат. Така висината од 166 см се јавува 5 пати, а уште повеќе се повторуваат висините од 170, 172, 174 см итн. Всушност, строго гледано, ниедна од висините не се повторува, бидејќи висините се заокружувани и така се направени исти. На пример, висината од 166 см значи во неа да се ставени сите висини од 165, 5 см до 166, 5 см. Обично техниката на мерењето не принудува на вакви компромиси и заокружувања.

Така, во општ случај имаме ситуација:

Вредноста x_1 се јавува f_1 пати
Вредноста x_2 се јавува f_2 пати
$\vdots$
Вредноста x_n се јавува f_n пати.

Броевите f_k се викаат фреквенции (зачестености) на соодветните карактеристики x_k или уште апсолутни фреквенции (за разлика од релативните фреквенции), и играат важна улога во биометријата, односно во целата Статистика. Табелата

Карактеристика x_k	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Апсолутна фрекв. f_k	f_1	f_2	f_3	...	f_n

дава статистичка распределба на карактеристиката Q.

Меѓу овие броеви f_k има еден најголем број, $\max f_k = F$, при што F е фреквенција на некој x_k, т.е. x_k се јавува

$F =$ најголем број пати$= \max f_k$,
а притоа, има и еден најмал $f = \min f_k$.

Ако е N бројноста на сите x_k, тогаш е очигледно дека важи

$$N = f_1 + f_2 + ... + f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

т. е. бројноста е збир од фреквенциите.

Зборувајќи во главата Веројатност за статистичката веројатност (а постериори), ние нагласивме дека веројатноста на сретнувањето со некоја карактеристика x_i е дотолку поголема, доколку е поголема бројноста на целата популација.

Статистичка веројатност карактеристиката x_i да се јави во едно множество од N елементи изнесува

$$P(x_i) = \frac{f_i}{N}$$

или

$$P(x_i) = \frac{f_i}{f_1 + f_2 + ... + f_n}.$$

Во општ случај, ако бројот на експериментите е доволно голем, со други зборови ако димензиите на егземпиларот се доволно големи, тогаш, како што порано е покажано, релативната фреквенција на некоја варијанта x_k на случајната променлива X малку се разликува од веројатноста x_k да се јави n_k пати во N експерименти; така што релативната фреквенција може да се земе како приближна вредност на веројатноста. Со тоа се оправдува името статистичка или емпирска веројатност за релативната фреквенција.

Значи термините веројатност (а постериори), статистичка веројатност, и релативна фреквенција се идентични. Така, секоја од карактеристиките

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$$

се јавува со својата релативна фреквенција

$$\frac{f_1}{N}, \frac{f_2}{N}, \frac{f_3}{N}, \ldots, \frac{f_n}{N}$$

која се изедначува со веројатноста на нејзината појава во експериментот

$$P(x_1), P(x_2), P(x_3), \ldots, P(x_n).$$

Тогаш најголемата веројатност изнесува

$$P_{\max} = \frac{F}{N} < 1$$

и најмалата веројатност изнесува

$$P_{\min} = \frac{f}{N} \geq 0.$$

Ако карактеристиката x_n се јавува само еднаш, тогаш нејзината веројатност изнесува

$$P_n = \frac{1}{N}.$$

Од структурата на формулата за $P(x_k)$ гледаме дека сите релативни фреквенции се такви што

$$0 \leq P(x_k) < 1.$$

Со воведениот термин на статистичката веројатност можеме сега да формираме со помош на истите податоци уште една табела

карактеристика X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
релативна фрекв.= $\frac{f_i}{N}$ = стат. фрекв. = N = веројатност $P\left(x_k\right)$	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	$\frac{f_3}{N}$	$\cdots$	$\frac{f_n}{N}$

која се вика статистичка распределба на веројатностите.

Пример 1. Од некоја статистичка маса со обележје X е земен еден егземплар од $N = 21$ елементи, при што бројот f_i на јавувањата на секој елемент x_k е даден во табелата

обележје X	2	6	8	10	12	14
апсолутна фреквенција	1	2	5	4	6	3

Ги наоѓаме релативните фреквенции по формулата, т.е.

$$N = \sum f_i = 21$$

$$P_1 = \tfrac{1}{21},\ P_2 = \tfrac{2}{21},\ P_3 = \tfrac{5}{21},\ P_4 = \tfrac{4}{21},\ P_5 = \tfrac{6}{21},\ P_6 = \tfrac{3}{21}$$

и така ја конструираме и втората табела

обележје	2	6	8	10	12	14
релативна фреквенција	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{21}$

Пример 2. Проучувајќи ја брзината на молекулите во $1cm^3$ од некој гас, физичарот Максвел ја открил статистичката распределба на брзините на овие молекули, т. е. статистичката распределба на еден егземплар земен од масата молекули содржани во $1cm^3$:

брзина на молекули	0,5	0,15	0,25	0,85	0,95	1,05	1,15	1,95
релативни фреквенции	$8 \cdot 10^{-5}$	$51{\cdot}10^{-5}$	$133{\cdot}10^{-5}$	$790{\cdot}10^{-5}$	$825{\cdot}10^{-5}$	$825{\cdot}10^{-5}$	$794{\cdot}10^{-5}$	$292{\cdot}10^{-5}$

Бидејќи во овој случај станува збор за голем број молекули, тогаш врз основа на законот на големите броеви релативната фреквенција на брзините x_k може да се земе како веројатност во N реализации на експериментот брзината на молекулот да има n_k пати вредност x_k.

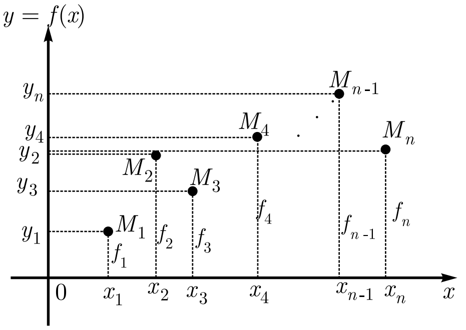
4.8 Графици на распределба

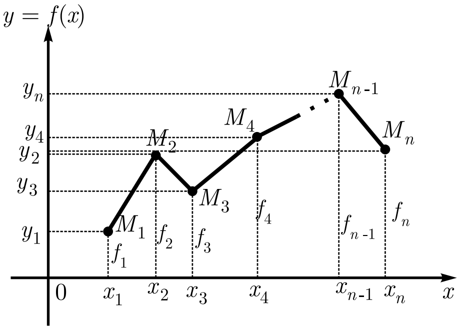
4.8.1 Емпириска функција на распределба

Констатираме дека секоја вредност x_k на карактеристиката е придружена со својата апсолутна фреквенција f_k. Така имаме n двојки подредени вредности:

$$(x_1,\ f_1),\ (x_2,\ f_2),\ \dots\ ,\ (x_n,\ f_n)\,.$$

Ако овие двојки ги претставиме како точки во Декартов правоаголен координатен систем, добиваме една конечна низа од n одделни (дискретни) точки, која формира еден вид график на оваа статистичка појава. Овој график се вика пунктуелен график (или график точка по точка) на распределбата на фреквенциите.





Обично овие точки се поврзуваат со отсечките $M_{k-1}\,M_k$ и така ја добиваме полигоналната линија

$$M_1\,M_2\,M_3\ldots M_{n-1}\,M_n,$$

која се вика полигонален график на распределбата на фреквенциите.

Ако пак на секоја вредност на карактеристиката x_k и ја придружиме нејзината релативна фреквенција $P\,(x_k)$, т. е. ако секоја фреквенција f ја поделиме со N, добиваме серија од нови точки

$$\left(x_1,\,\tfrac{f_1}{N}\right),\ \left(x_2,\,\tfrac{f_2}{N}\right),\ \left(x_3,\,\tfrac{f_3}{N}\right),\ldots,\left(x_n,\,\tfrac{f_n}{N}\right)$$

кои формираат нов график, сличен на првиот.

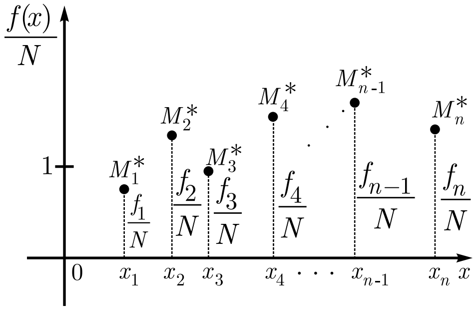
Овој график се вика пунктуелен график на статистичката распределба на фреквенциите. Точките со координати

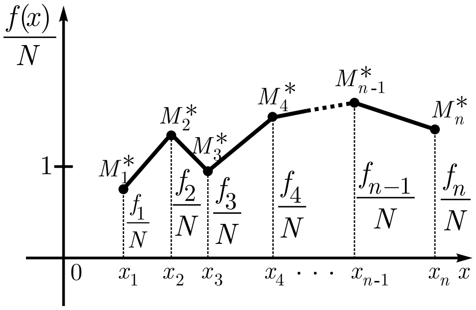
$$M_k\left(x_{k,} P_k\right) = M_k\left(x_{k,} \frac{f_k}{N}\right)$$

се поврзуваат со отсечки $M_k^* M_{k+1}^*$, и така се добива аналогна полигонална линија

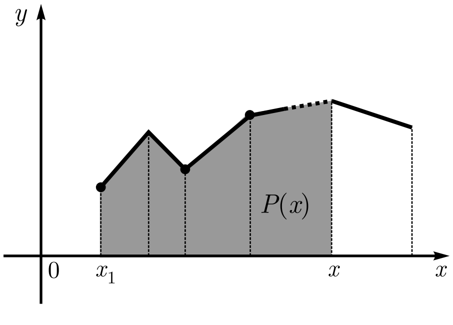
$$M_1^* M_2^* M_3^*, ..., M_{n-1}^* M_n^*$$

која се вика полигонален график (или кратко полигон) на статистичката распределба на фреквенциите. Поврзувањето на овие точки се врши според познатата во математиката конвенција, вредноста на непрекинатата функција меѓу две блиски вредности, да не се оддалечува многу од правата која ги поврзува блиските вредности (линеарна интерполација).





При полигонален график важна улога игра и плоштината $P(x)$ на полигонот од почетната вредност на карактеристиката до некоја вредност x. Таа плоштина може да се пресмета со елементарни геометриски методи и формули за површина на трапез.



Со помош на статистичката распределба на карактеристиката X можеме да конструираме таканаречена емпириска (или статистичка) функција на распределба, која на секоја вредност x_k на променливата X и кореспондира соодветна емпириски утврдена вредност P_k на релативната фреквенција. Нека димензијата на егземпларот биде N.

Ако во некои N експерименти

вредноста на променливата X помала од x_1 се јавува n_1 пати

вредноста на променливата X помала од x_2 се јавува n_2 пати

и општо

вредноста на променливата X помала од x_s се јавува n_s пати тогаш релативната фреквенција $F^*(x)$ на настапувањето на онаа

вредност на променливата X која е помала од x гласи

$$F^*(x) = \frac{n_s}{N}$$

и оваа функција е емпириска функција на распределбата.

Пример. Нека статистичката распределба на некоја променлива X е дадена со следнава табела

X	1	5	9
апсолутна фреквенција	12	16	32

Димензијата на егземпларот изнесува $N = 12 + 16 + 32 = 60$ и $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = 9$. Бидејќи нема ниту едно x помало од 1, важи

$$F^*(1) = 0.$$

Вредноста $X < 5$ се јавува 12 пати, па

$$F^*(5) = \frac{12}{60} = 0,2.$$

Вредноста $X < 9$ се јавува $12 + 16 = 28$ пати, па

$$F^*(9) = \frac{28}{60} \approx 0,47.$$

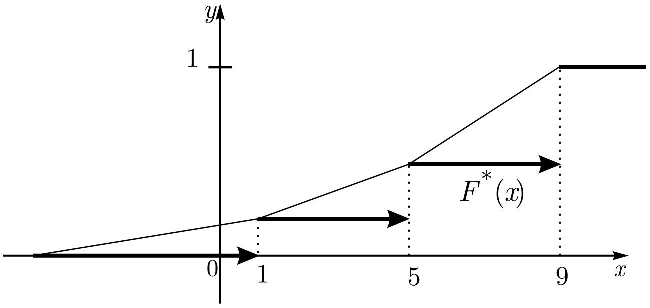
Вредноста $X < 10$ се јавува $12 + 16 + 32 = 60$ пати, па

$$F^*(10) = \frac{60}{60} = 1.$$

Со други зборови, дефинираме една прекината функција со аналитички израз

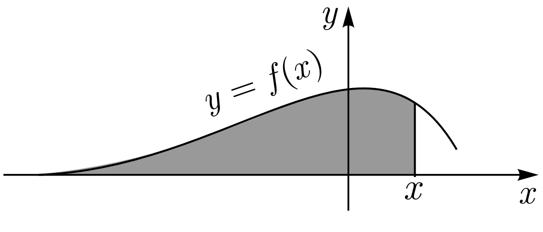
$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \ x < 1 \\ 0,2, \ 1 \leq x < 5 \\ 0,47, \ 5 \leq x < 9 \\ 1, \ 9 \leq x \end{cases}$$

Графикот на оваа функција е даден на следниов цртеж.



Констатираме дека графикот на функцијата $F^*(x)$ е прекината степенеста линија со конечни скокови во секоја точка x_k, каде функцијата скока за $P_k = \frac{n_k}{N}$. Ако точките од графикот со апсциси x_k ги споиме со полигонална линија добиваме приближен график на емпириската функција на распределбата.

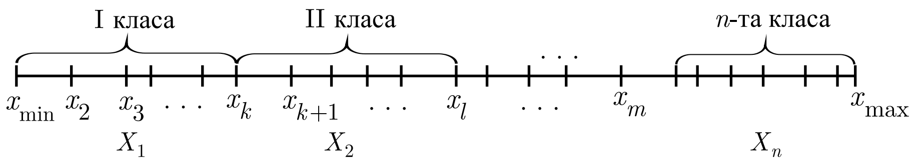
Подоцна ќе докажеме дека постои точен аналитички израз за секоја емпириска функција на определени најважни распределби и посебно за таканаречената Гаусова крива. И овде од голем интерес е површината заградена со кривата и делот од x-оската до некоја вредност на карактеристиката x, т.е. интегралот од функцијата $f(x)$.



4.9 Статистички низи. Хистограм

Ако бројот на експериментите е многу голем, на пример повеќе стотици експерименти, и ако нема многу буквални повторувања, т.е. нема многу идентичности во мерењето $x_j = x_k,\ j \neq k$, туку има само блиски резултати $x_j \approx x_k \approx x_m$, што е обично случај, тогаш формирањето на сите двојки вредности (x_j, f_j) не само што е долготрајно, непрактично и одзема повеќе време отколку сите подготовки и мерења, туку и не придонесува многу кон квалитетот на статистичката обработка на проблемот, бидејќи од оваа табела не можеме непосредно да забележиме како се менуваат варијантите x_j на оваа карактеристика X и нивните релативни фреквенции.

За добивање подобра прегледност и за поефикасна обработка, во таквите случаи целиот интервал $[x_{\min}, x_{\max}]$ во кој се наоѓаат вредностите $x_1, x_2, \ldots, x_N$ на случајната променлива X се дели на класи (подинтервали) така што секоја класа да содржи доволно блиски вредности x_k.



Нека првата класа содржи f_1 различни но блиски вредности x_k. Од нив ќе избереме еден конкретен елемент $\bar{x}_1$ (на пример со метод на средина) и со него ќе ги замениме сите блиски x_k. Така имаме ситуација $\bar{x}_1$ да е претставник на цела класа. Тогаш имаме еден елемент $\bar{x}_1$ со една фреквенција f_1 (т.е. фреквенција на целата класа). Ако ова го направиме во сите n согледани класи, имаме n интервали

$$\begin{array}{ccccc} I & II & III & \ldots & n \\ [x_{\min}, x_k]\,, & [x_k, x_l]\,, & [x_l, x_m]\,, & \ldots & [x_p, x_n] \end{array}$$

со по еден претставник

$$\bar{x}_1, \quad \bar{x}_2, \quad \bar{x}_3, \quad ... \quad \bar{x}_n$$

и со по една фреквенција

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3, \quad ... \quad f_n$$

(овде имаме гранични елементи $x_k, x_j, ...$ меѓу двете класи, и за да биде точно определено во која од класите припаѓаат, го поставуваме следниов договор: за соседните елементи x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ако растојанието $x_k - x_{k-1}$ е помало од растојанието $x_{k+1} - x_k$, x_k го ставаме во класата I, а во спротивно во класата II).

Овие фреквенции f_i се апсолутни фреквенции на секоја од класите. Ако ги пресметаме релативните фреквенции

$$P_k = P\left(\bar{x}_k\right) = \frac{f_k}{N}$$

за нив важи, како што веќе рековме, дека при голем број експерименти тие се изедначуваат со веројатностите на појавата на елементот $\bar{x}_k$ со дадената фреквенција f_i. Бидејќи

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = N$$

тоа е збирот на сите веројатности по интервалите

$$P_1 + P_2 + ... + P_n = \frac{f_1 + f_1 + ... + f_n}{N} = 1.$$

Ако Δx_{im} е должина на $i-$тиот интервал $[x_i, x_m]$, т.е.

$$\Delta x_{im} = x_m - x_i = \Delta x_i$$

тогаш односот

$$\delta_{im} = \delta_i = \frac{P_i}{\Delta x_i} = \frac{f_i}{N \cdot \Delta x_i},$$

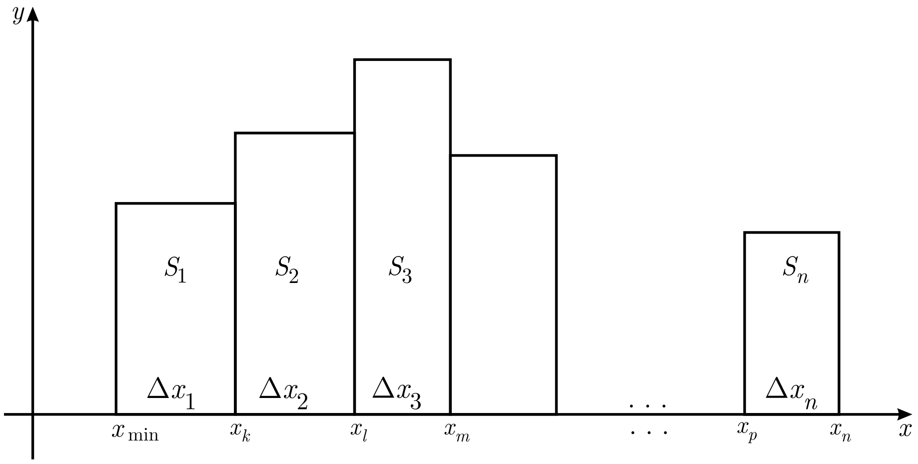
којшто е релативна фреквенција пресметана на единица должина, се вика густина на релативната фреквенција f_i.

Ако формираме табела со сите класи на дадениот основен интервал $[x_{\min}, x_{\max}]$, нивните претставници и нивните фреквенции, имаме

класа	$\left[x_{\min}, x_k\right]$	$\left[x_k, x_l\right]$	$\left[x_l, x_m\right]$	...	$\left[x_p, x_n\right]$
претставник	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	...	$\overline{x}_n$
релативна фреквенција на класата	$V_1 = \dfrac{f_1}{N}$	$V_2 = \dfrac{f_2}{N}$	$V_3 = \dfrac{f_3}{N}$	...	$V_n = \dfrac{f_n}{N}$

Оваа табела се вика статистичка низа (или серија).

Густината на релативната фреквенција геометриски се претставува со фигура која се вика хистограм на релативната фреквенција. Тој се состои од низа правоаголници со основа еднаква на ширината Δx_i на класата $[x_i, x_m]$ и висина еднаква на густината δ_i на релативната фреквенција P_i.



Плоштината на секој од правоаголниците што го составуваат хистограмот изнесува

$$p_i = \delta_i \Delta x_i = \frac{P_i}{\Delta x_i} \Delta x_i = P_i, \quad i = 1, 2, ..., n$$

а плоштината на целиот хистограм изнесува

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i = P_1 + P_2 + ... + P_n = 1$$

т.е. плоштината на хистограмот на густината на релативната фреквенција е еднаква на еден.

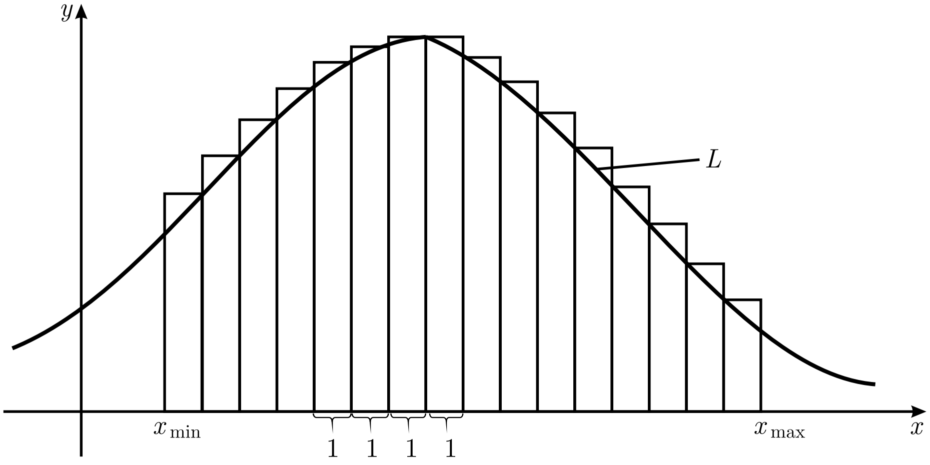
Ако должините на сите подинтервали се еднакви меѓу себе, т.е. ако

$$\Delta x_{im} = \Delta x_i = l = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n}$$

тогаш висините δ_i на правоаголниците се пропорционални со соодветните релативни фрекванции

$$\delta_i = \frac{P_i}{\Delta x_i} = \frac{n}{N\left(x_{\max} - x_{\min}\right)} f_i.$$

Поради ова многу практично својство, дури и без оглед на блискоста на соодветните x_k интервалот $[x_{\min}, x_{\max}]$ често го делиме на еднакви подинтервали. Честопати се земаат овие интервали да имаат широчина 1, т. е чекорот е $\Delta x_i = 1$. Висините се тогаш пропорционални со релативните фреквенции. И во овој случај добиваме фигура која е геометриска слика на статистичка низа, и која се вика **хистограм**.



Ако бројот на експериментите е многу голем, се земаат потесни класи. Затоа степенеста фигура на хистограмот се повеќе и повеќе се доближува кон некоја крива L, која заедно со почетната и крајната ордината и дел од x-оската меѓу крајните точки формира една површина, која за хистограмот на густината на релативната фреквенција има вредност 1.

4.10 Средини

4.10.1 Потреба за воведување средини

Во биотехничките науки има два основни методолошки проблеми. Тоа се проблемот на идентификација и проблемот на мерењето. За нивното решавање постојат два начини: разгледување и експеримент. Додека разгледувањето е основен биотехнички метод во сите гранки на биолошките и природните науки, биолошкиот експеримент е поспецифичен. Секој биотехнички експеримент е пред се метрички, т. е. најчести биотехнички експерименти се оние во кои нешто се мери, се определува квантитивно.

Притоа големините кои се мерат се најчесто случајни т. е. тие се последица на дејствување на голем број разнородни влијанија. Затоа мерењата на иста големина, во иста мерна точка, но во различно време, во секој повторуван обид даваат различни резултати.

Пример 1. Телесната температура е варијабилна на едно исто место на телото и зависи од биолошкиот вид, метаболизмот, телесното напрегање, емоционалната состојба, надворешната температура, итн. Ако се мери температурата во делот од телото на некое експериментално животно, каде таа е најстабилна, сепак во текот на денот и таа покажува некои осцилации. Разни мерења покажуваат разни вредности. Еве неколку мерења во интервал од 1 час

$$36,7°C; 36,9°C; 36,0°C; 35,9°C; 36,4°C; 36,6°C; 36,4°C; 36,8°C$$

Се прашуваме која температура е карактеристична за тоа животно на тоа место низ целиот ден? Тоа е средната температура. Тоа е збирот на сите температури поделен со бројот на мерењата

$$\bar{t} = t = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8}{8} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{8} t_i}{8} = \frac{291,70}{8} = 36,48°C.$$

Пример 2. За идентификација на животно се користат карактеристични коски за проценка на големината и тежината на животните. Обично големината се определува според најголемите коски. Така, во една група фосили најдени се извесен број бутни коски-фемори, од една група животни од ист вид. Тие имаат различна должина-резултат на возраста на единките, нивната ухранетост, полот. Ние обично формираме претстава за една средна единка, со метод на реконструкција. Со мерење ги наоѓаме следните должини на феморите:

$$l_1 = 58cm, l_2 = 62cm, l_3 = 73cm, l_4 = 81cm, l_5 = 59cm, l_6 = 67cm.$$

Така средниот фемор има должина

$$\bar{l} = l = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6}{6} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{6} l_i}{6} = \frac{400}{6} = 66,6cm$$

и од оваа средна вредност заклучуваме за големината и тежината на просечната единка од овој изолиран вид.

Во работата и практиката ретки се големините кои се неизменливи. Постојат и непроменливи големини кои се обично од мртва природа. А додека имаме работа со жива материја, што е основно во биотехничките науки, мораме да сметаме со постојана изменливост, бидејќи динамиката на животните процеси носи постојани промени, низ кои всушност се одвива животот. Бидејќи карактеристиката H во биотехничките науки е променлива, не е можно со едно мерење да се констатира нејзиниот квалитет, бидејќи веќе во следниот момент таа иста големина при ново мерење ќе даде друга вредност, поради многуте случајни влијанија. Затоа се неопходни повеќе мерења (во текот на денот, годината, ако флуктуира, итн.). Така обично се собираат маса податоци за една иста случајна променлива. Бидејќи оперирањето со маса податоци е тешко, некогаш неопределено, се поставува прашањето за просечна вредност. За случајните променливи се бара претставник (репрезент), т. е. елемент кој најдобро ќе ја претставува променливата величина, и за која ќе бидеме сигурни дека нема многу да отстапува од случајната вредност на вредноста x во тој момент.

Така се доаѓа до потребата за средина, средна вредност, просек.

4.10.2 Аритметичка средина. Просек

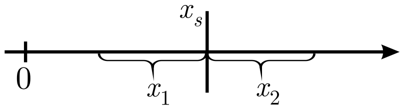
Пример. Во множеството единки изброени се старости на 5 единки:18, 19, 21, 23, 20 години. Просечната старост е

$$\frac{18+19+21+23+20}{5}=\frac{101}{5}=20,2.$$

Ова се вика аритметичка средина.

Овој поим е можен и при најмал број мерења. Ако имаме две мерења на променливата x, чии мерени вредности се најдени и се x_1 и x_2, средната вредност е

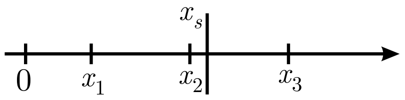
$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2}{2}=x_{sr}=x_s$$



Геометриски x_s е средната точка на отсечката чии крајни точки се x_1 и x_2.

Ако имаме три мерења: x_1, x_2, x_3, тогаш средната вредност на мерењето се определува како

$$\overline{x}=x_{sr}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$



Дефиниција. Ако имаме разни вредности на некоја карактеристика X

$$x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$$

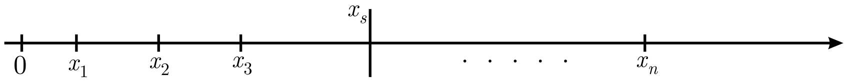
нивна средна вредност е бројот

$$\overline{x}=x_s=\frac{x_1+x_2+x_3+....+x_n}{n}$$

или

$$\overline{x} = x_s = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

Аритметичката средина е еден многу важен поим бидејќи цело едно множество карактеристики $\{x_i\}$ на цела случајна променлива H се заменува со еден претставник x. На сликата



множествата

$$\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, ..., \{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$$

се заменети со еден број x_i. Во првиот случај тоа е точно средишната точка на отсечката x_1x_2. Во вториот тоа е точка меѓу крајните точки x_1, x_3, но со отклон и стремеж кон поголемите x_2, x_3. Во општ случај x се наоѓа внатре во масата на броевите x_k, но е ретко во самата средина на отсечката, туку е повлечена кон поголемите вредности.

4.10.3 Моменти. Маса на експериментот. Општа формула за аритметчката средина

Множеството мерени вредности x_k, е ретко, случајно и неправилно во биотехничките науки. Обично при мерењата се случува едно природно групирање на резултатите. Ретко резултатите се стриктно одделени, т.е. обично се групирани во класи со многу блиски вредности.

Пример 1. Собрани се извесен број единки-црви, со цел да се мери нивната тежина. Најдено е дека

7 единки имаат тежина од 5 грама

16 единки имаат тежина од 4 грама

13 единки имаат тежина од 3 грама

5 единки имаат тежина од 2 грама

6 единки имаат тежина од 1 грам

Се поставува прашањето, колкава е тогаш нивната просечна тежина? Вкупно единки има $7+16+13+5+6=47$. Тие формираат 5 групации по тежини и секоја групација на свој начин придонесува кон општата тежина:

I групација ; $7 \cdot 5 = 35$ грама
II групација ; $16 \cdot 4 = 64$ грамови
III групација ; $13 \cdot 3 = 39$ грама
IV групација ; $5 \cdot 2 = 10$ грама
V групација ; $6 \cdot 1 = 6$ грама

Најмалку придонесува во општата тежина последната, петтата групација само со 6 грама, а најмногу втората групација, со 64 грама. Оној придонес зависи како од вредноста (големината) на карактеристиката x_l, така и од соодветната фреквенција f_l, значи зависи од независни големини.

Дефиниција. Производ од карактеристиката x_l и соодветната фреквенција f_l се вика **момент**, и се бележи со

$$m_l = x_l \cdot f_l$$

Ако x_1 се јавува f_1 пати, моментот изнесува $m_1 = x_1 f_1$
Ако x_2 се јавува f_2 пати, моментот изнесува $m_2 = x_2 f_2$
.
.
.
Ако x_k се јавува f_k пати, моментот изнесува $m_k = x_k f_k$.

Дефиниција. Збирот од моментите

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_k =$$

$$= \sum_{1}^{k} m_k = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \ldots + f_k x_k = G$$

се вика **вкупна маса на експериментот**, и тој го покажува квантитативниот обем на експериментот.

Ако се x_l тежини, G е вкупна тежина, ако се x_l трошоци, G е вкупниот трошок. Се разбира дека G е многу важен поим. Тоа е вкупната маса од она што работиме. Моментот $m_l = x_l f_l$ е дел од G и покажува колку секој дел карактеристиката x_l учествува во вкупната маса. Бројот

$$N = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = \sum_{t=1}^{k} f_t$$

се вика **маса на единките**, и ја покажува бројноста на множеството единки, без оглед на нивните карактеристики. Така имаме две маси во секој експеримент: G и N.

Во горниот пример е $G = 154g$ и тоа е вкупната тежина на сите црви. Нивниот број е $N = 47$. Ако сакаме да ја добиеме просечната тежина на црв, тогаш

$$x_{sr} = x = \frac{7 \cdot 5 + 16 \cdot 4 + 13 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{47} = \frac{154}{47} = 3,28g$$

т. е. споредуваме две маси: G со N. Маса во грама, со маса единки

$$\bar{x} = \frac{G}{N}.$$

Овде очигледно имаме работа со видоизменета аритметичка средина, во споредба со таа од точката 4.10.2. Овде имаме групирање на резултати со иста вредност кои се повторуваат извесен број пати, т. е. групирање по класи. Така аритметичката средина е средина од моменти. Всушност, тоа може да се изведе и од основната дефиниција на средината

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

па ако се одделат повторувањата по фреквенциите

$$\overline{x}=\frac{\overbrace{x_1+x_1+\ldots+x_1}^{f_1}+\overbrace{x_2+x_2+\ldots x_2}^{f_2}+\ldots+\overbrace{x_k+\ldots+x_k}^{f_k}}{f_1+f_2+\ldots+f_k}$$

па добиваме

$$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+...+x_kf_k}{f_1+f_2+...+f_k}=\frac{G}{N}.$$

Дефиниција. Аритметичка средина на каракетиристиките x_i кои се јавуваат со поединечни фреквенции f_i се определува како однос меѓу вкупната маса на експериментот со масата на бројноста

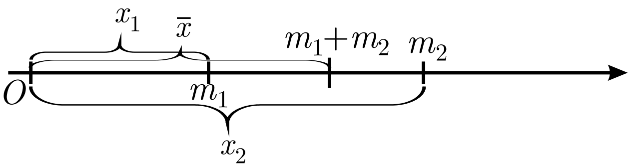
$$\overline{x}=x_{sr}=\frac{G}{H}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}f_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}f_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}f_ix_i}{N}$$

Поради ова масена (тежинска) карактеристика на средината, истата се вика многу често тежиште. Името очигледно доаѓа од физиката и геометријата.

Пример 2. Ако имаме две маси m_1 и m_2 на растојание x_1 и x_2 од некоја точка O на истата права, тие можат да бидат заменети со една маса m_1+m_2 но на растојание од O

$$\overline{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

Точката $\overline{x}$ се наоѓа меѓу двете маси, и претставува нападна точка на резултантата на силата на земјината тежа (тежиште на две маси, или тежиште на прачка). При тоа $\overline{x}$ е поблиску кон поголемата маса.

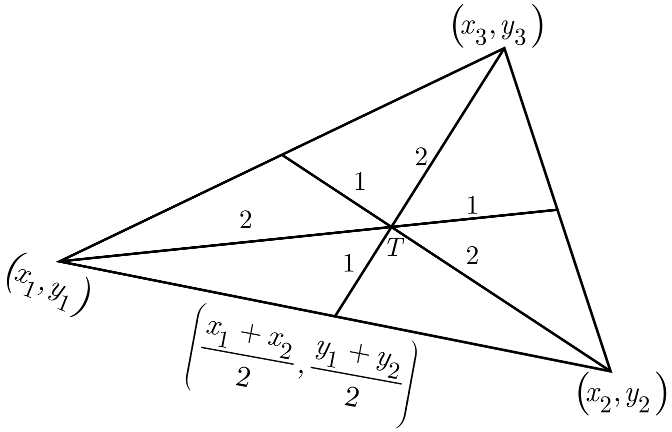


Пример 3. Геометриското тежиште T на триаголникот во ра-

мнина, ако неговите темиња се дадени со своите кординати: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) се пресметува, како што е познато, со помош на теоремата за тежишните линии, кои тежиштето T ги дели во однос 2:1, со формулата

$$x_T = \frac{2 \cdot \frac{x_1+x_2}{2} + 1 \cdot x_3}{2+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \overline{x}$$

$$y_T = \frac{2 \cdot \frac{y_1+y_2}{2} + 1 \cdot y_3}{2+1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \overline{y}$$



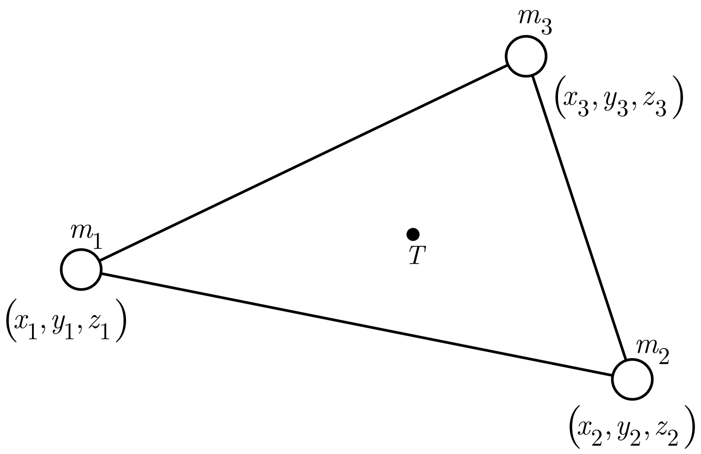
И според ова координатите на тежиштето се аритметички средини од координатите на темињата.

Пример 4. Физичкото тежиште на три маси во просторот се дефинира како

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_T = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$z_T = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



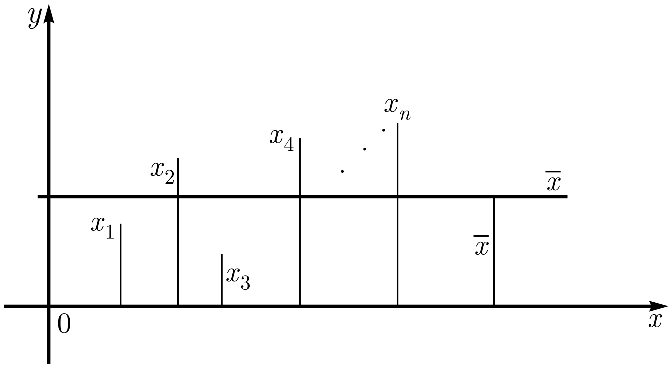
т. е. со аритметичките средини каде геометриски елементи-координати x_k, y_k, z_k се каректеристики, а нивните маси m_l играат улога на фреквенции.

4.10.4 Добри и лоши страни на аритметичката средина

Аритметичката средина е најчесто употребуваниот претставник во биометријата. Нејзината добра страна е што заменува цело едно множество, и тоа го прави успешно, ако резултатите се распоредени хомогено по интервалот на мерењето, или ако постои таканаречената нормална распределба. Но, аритметичката средина може да има слабости и недостатоци.

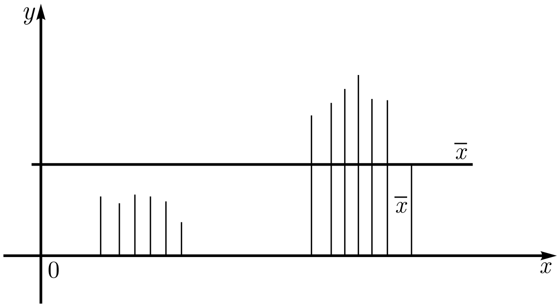
I Средина што не постои може да претставува примерок

Нека мериме некои должини на конкретни објекти (риби, стебла, итн.), и бараме нивна средина. Таа може да биде број $\overline{x}$ кој не е еднаков ниту на еден од x_k. Па каков е тој претставник, ако тој не постои во самото множество? Велиме дека е апстрактен претставник на множеството $x_1, x_2, \ldots, x_n$.



II Нереална средина

Ако бараме средини од множеството карактеристики кои сами се групирани во две класи, една со мали вредности, а друга со големи, средината ќе биде точно меѓу класите, и нема да одговара ниту на едната, ниту на другата класа. Во овој случај подобро е да бараме средина само за малата класа, и само за големата класа.



III Средина при недоволно репрезентативен примерок

Ако примерокот не е доволно добро избран можни се големи грешки ако не се внимава со средината.

Пример. Мерена е бројноста на фамилијата мидии (вид школки) на 10 мерни места во Црното Море. Најдени се следните резултати:

мерно место	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
бројност на мидци	1	4	8	14	24	30	48	143	5291	57235

Средна големина на јатото мидии на едно мерно место (од околу $1000m^2$) е

$$A=\frac{1+4+8+14+24+30+48+143+5291+57235}{10}=6780 \text{ примероци.}$$

Од искуство се знае дека просечно нема повеќе од стотина мидии на едно место. Резултатот е очигледно неточен, бидејќи многу големата бројност на последното, десетто мерно место, влијае "тежински" врз аритметичката средина и многу ја зголемува средната вредност. Таа бројност доаѓа така што случајно едно големо јато се нашло на десеттото мерно место, што е извонредно ретко. Затоа средината е зголемена стотина пати. Примерокот очигледно не е репрезентативен. Затоа наместо A, се воведува еден друг вид средина-геометриска средина.

IV Средина при хетерогени карактеристики

При обопштените усреднувања каде што карактеристиките се многу општи, аритметичката средина може да биде многу нереална. Како на пример, во економијата при пресметување на разни општи индекси. На пример, велат: луксузната стока поскапе за 90%, бензинот за 40%, лебот за 30%, локомотивите за 5%, а за производите на металната и обоената индустрија, сосема многубројни, само за 3%. Средно, аритметички пресметано, поскапувањето изнесува 20%. Средината очигледно не е реална бидејќи обичниот човек не го интересира ниту луксузот ниту пак големата индустрија. Овде е неверодостојно лошо да се зборува за средината- или е тоа неточно, или е шпекулација. Вакви општи средини всушност ништо не значат. Затоа, во принцип се бараат средини само од што е можно по воедначени карактеристики по квалитет.

4.11 Геометриска средина

Слабостите на аритметичката средина довеле до потреба за воведување на нови средини.

Пример 1. Во биологијата и воопшто во биотехничките науки многу често работиме со броеви од екпоненцијален тип. Тие се карактеристични за живите процеси. Нека, на пример, при пресметувањето на состојбата на растење на популација по формулата

$$m_n = m_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

се пресметуваат две вредности за време од $n = 8$ години, на две разни мерни места. Со мерење се добиени податоци, па

$$m_1 = 16 \cdot (1,07)^8;\ m_2 = 25 \cdot (1,12)^8$$

како и нивната средина

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{16 \cdot (1,07)^8 + 25 \cdot (1,12)^8}{2}.$$

Овие збирови тешко се пресметуваат без логаритам или помошни средства.

Воведуваме геометриска средина

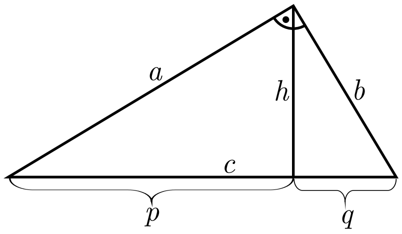
$$g = g_{m_1,m_2} = \sqrt{m_1 \cdot m_2}.$$

Имаме

$$g = \sqrt{16(1,07)^8 \cdot 25(1,12)^8} = 4 \cdot 5(1,07)^4(1,12)^4 = 20(1,07 \cdot 1,12)^4$$

што е веќе многу полесно за пресметување.

Во геометријата е одамна позната геометриската средина како отсечка која се конструира со помош на две отсечки и лак од половина кружница над збирот од овие отсечки. Позната е Евклидовата теорема која вели дека во правоаголен триаголник производот од отсечките на хипотенузата, формирани од подножјето на висината е еднаков на квадратот на висината, т.е. висината на правоаголниот триаголник е геометриска средина од отсечките на хипотенузата, т.е. $h = \sqrt{p \cdot q}$.



Дефиниција. Ако се x_1, x_2 некои две мерни вредности, под **геометриска средина** го подразбираме бројот g кој е квадратен корен од нивниот производ

$$g \overset{def}{=} \sqrt{x_1 x_2}.$$

Аналогно, ако се x_1, x_2, x_3 некои три мерни вредности на иста карактеристика X, под геометриска средина подразбираме кубен корен од нивниот производ

$$g \overset{def}{=} \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

итн, ако имаме n мерења, важи:

Дефиниција. Геометриска средина од n мерни вредности од некое мерење се определува како n-ти корен од нивниот производ

$$g \overset{def}{=} \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Ако имаме присутни фреквенции, така што

карактеристиката x_1 да се повторува f_1 пати
карактеристиката x_2 да се повторува f_2 пати
.
.
.
карактеристиката x_n да се повторува f_n пати

тогаш, според горната дефиниција добиваме

$$G = \sqrt[N]{\underbrace{x_1 x_1 ... x_1}_{f_1\,\text{пати}} \cdot \underbrace{x_2 x_2 ... x_2}_{f_2\,\text{пати}} \cdot ... \cdot \underbrace{x_n x_n ... x_n}_{f_n\,\text{пати}}} = \sqrt[N]{x_1^{f_1} x_2^{f_2} \cdot ... \cdot x_n^{f_n}}$$

каде

$$N = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

или

$$G = \sqrt[\sum\limits_{k=1}^{n} f_k]{\prod_{k=1}^{n} x_k^{f_k}}.$$

Пример 2. Со податоците од примерот 1 во 4.10.3 ја добивме нивната геометриска средина

$$G = \sqrt[47]{5^7 \cdot 4^{16} \cdot 3^{13} \cdot 2^5 \cdot 1^6} =$$

$$= \sqrt[47]{(78125)(4294967296)(1594323)(32)(1)} = 2,97.$$

Бидејќи A изнесуваше $3,28$ гледаме дека е $G < A$. Забележуваме дека пресметувањето на G на ваков начин е многу тешко.

Пресметување на геометриската средина

Тоа ретко се врши директно, а најчесто со логаритмирање.

Имаме

$$\log_b G = \frac{1}{N} \log_b \prod_{k=1}^{n} x_k^{f_k} = \frac{1}{N} \left(f_1 \log_b x_1 + f_2 \log_b x_2 + ... + f_n \log_b x_n\right)$$

или

$$\log_b G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i \log_b x_i = M$$

па

$$G = b^M.$$

Пример 3. Во примерот со бројноста на мидии во Црното Море, наоѓаме

број на мерно место	бројност f_i	$\lg f_i$
I	1	0,0000
II	4	0,6021
III	8	0,9031
IV	14	1,1461
V	24	1,3802
VI	30	1,4771
VII	48	1,6812
VIII	143	2,1553
IX	5 291	3,7236
X	57 235	4,7576

и

$$G = \sqrt[10]{1 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 24 \cdot 30 \cdot 48 \cdot 143 \cdot 5291 \cdot 57235}$$

па

$$\begin{aligned}\lg G &= \tfrac{1}{10}\left(\lg 1 + \lg 4 + \lg 8 + \lg 14 + \lg 24 + \lg 30 + \ldots + \lg 57235\right) = \\ &= \tfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} \lg x_k \approx \tfrac{17,8263}{10} = 1,78263.\end{aligned} \qquad .$$

Следува дека

$$G \approx 10^{1,78263} \approx 60,62.$$

Споредбата $G \approx 60,62 << A = 6780$ покажува огромна разлика меѓу A и G. Меѓутоа, од практика знаеме дека G е пореална вредност, и рековме зошто.

Овде причините за нееднаквоста $G << A$ не се статистички. Важи следната

Теорема. Геометриската средина е секогаш помала од аритметичката за истите мерни резултати x_k

$$G < A.$$

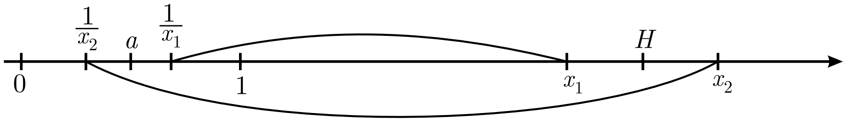
Во биологијата геометриската средина се користи особено во оние случаи каде што имаме геометриски прогресии, операции со експоненти, а тоа е доста често. На пример, сите проблеми на растење на популацијата или комбинирани проблеми во генетиката, итн.

4.11.1 Хармониска средина

Ако имаме две бројни карактеристики x_1, x_2, на пример, поголеми од 1, со реципрочните вредности

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$$

големините x_1, x_2 ги пренесуваме во интервалот $[0, 1]$, бидејќи $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ се меѓу 0 и 1.



Ако од некои причини работиме само во интервалот $[0, 1]$, на пример ако се x_1, x_2 големи или работиме само со веројатности, релативни фреквенции, тогаш го заменуваме интервалот $[x_1, x_2]$ со $\left[\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right]$.

Во интервалот $[0, 1]$ наоѓаме аритметичка средина од нивните слики, и таа изнесува

$$a = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}.$$

Ако сега сакаме да се вратиме на вистинските вредности, вршиме обратно пресликување со истата инверзија, и добиваме нов број

$$H \overset{def}{=} \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}.$$

Дефиниција. Нека се x_1, x_2 две мерни вредности. Хармониска средина од две мерења е реципрочна вредност од аритметичката средина од реципрочните вредности на мерењата.

На ист начин, хармониската средина од три мерења x_1, x_2, x_3 гласи

$$H \overset{def}{=} \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}.$$

Дефиниција. За n мерни вредности $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$

$$H \overset{def}{=} \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

и во најопшт случај, ако x_k се јавуваат со фреквенција f_k, имаме

$$H = \frac{1}{\frac{f_1 \cdot \frac{1}{\chi_1}+f_2 \cdot \frac{1}{\chi_2}+....+f_n \cdot \frac{1}{\chi_n}}{f_1+f_2+....+f_n}}$$

т. е.

$$H \overset{def}{=} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f_i}{x_i}} = \frac{N}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f_i}{x_i}}.$$

Пример. Да споредиме со примерот 1 од 4.10.3. Добиваме

$$H = \frac{1}{\frac{7 \cdot \frac{1}{5}+16 \cdot \frac{1}{4}+13 \cdot \frac{1}{3}+5 \cdot \frac{1}{2}+6 \cdot \frac{1}{1}}{47}} = 2,56$$

гледаме дека важи $H = 2,56 < G = 2,97 < A = 3,28$.

Но, и во општ случај важи споредбата.

Теорема. За исти мерни вредности важи

$$H < G < A.$$

4.11.2 Други важни поими во врска со средини

Средина од средини. Ако некое множество податоци

$$x_1,\ x_2,\ .\ .\ .\ ,\ x_k,\ .\ .\ .\ ,\ x_t,\ .\ .\ .\ ,\ x_N$$

заради некои причини го прередиме во n групации

$$\{x_1,\ x_2,\ .\ .\ .\ ,\ x_k\},\ \{y_1,\ y_2,\ .\ .\ .\ ,\ y_l\},\ ...,\{z_1,\ z_2,\ .\ .\ .\ ,\ z_s\}$$

чиишто аритметички средини, соодветно, се

$$\overline{x},\ \overline{y},\ .\ .\ .\ ,\ \overline{z},$$

тогаш средина од средини се определува како

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\overline{x} + \overline{y} + ... + \overline{z}}{n}$$

или

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k} + \frac{y_1+y_2+...+y_l}{l} + ... + \frac{z_1+z_2+...+z_s}{s}}{n}$$

Средина од средини е различна од обичната аритметичка средина, бидејќи аритметички гледано следните суми се нееднакви

$$\frac{\sum\limits_{k_t=1}^{n} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k_t} x_i}{k_t}}{n} \neq \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

Средина од срединитe x се користи често во биометријата, при временско групирање на резултатите (на пример $x =$ резултати собрани во еден месец, $y =$ резултати собрани во друг месец, итн.)

Медијана (средна вредност на карактеристиката), $\hat{x} = Me\,(x)$ е онаа вредност меѓу сите податоци $\{x_t\}$, така што лево и десно од нејзе да има ист број податоци x_t, т.е.

$$\underbrace{x_1, x_2, ..., x_m}_{\text{ист број}}, \hat{x}, \underbrace{x_{m+1}, |^{\bar{x}} ..., x_n}_{\hat{x}\neq\bar{x} \quad \text{ист број}}.$$

Медијаната $\hat{x}$ е најчесто различна од аритметичката средина $\bar{x}$, бидејќи средината се стреми и се доближува кон поголемата и поефективната карактеристика (кон потешката), додека медијана е геометриска бројна средина која бара лево и десно од неа да има еднаков број елементи, но тоа не значи дека секогаш е задолжително $\hat{x} \leq x$.

Мода е најфреквентниот податок, $\breve{x} = Mo(x)$, и се вика уште и типична вредност, а се означува и со $\breve{x} = x_f, f_t = f\,(x_t) = Max f_t$.

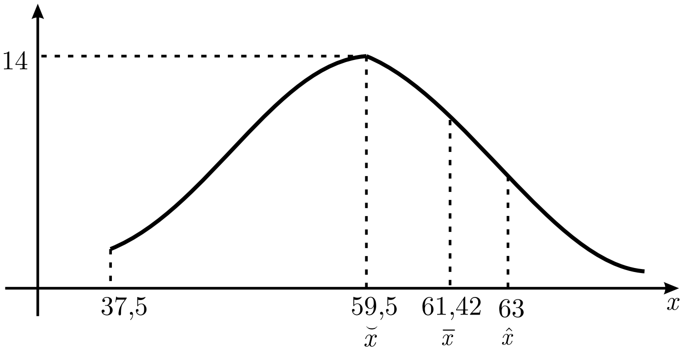
Пример. Должината на листовите на едно растение во mm дадена во класи изнесува

x	38,5	45,5	52,5	59,5			66,5	73,5	80,5	87,5
$f(x)$	2	8	11	14			13	8	3	3
				$\breve{x}$	$\bar{x}$	$\hat{x}$				

Лесно наоѓаме:

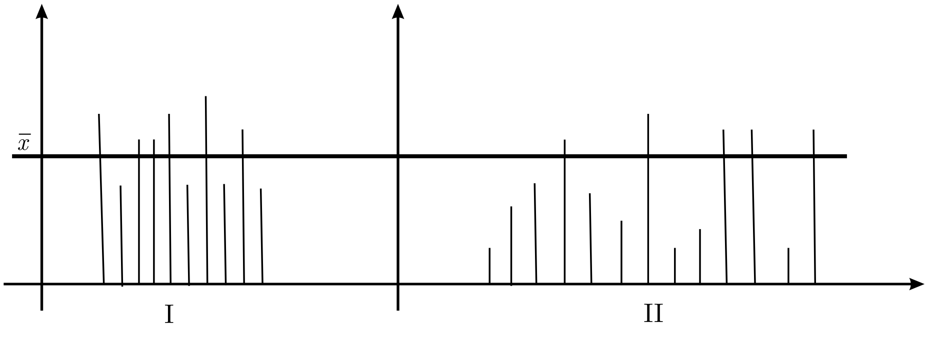
$$\bar{x} \ = \ 61.42 \ Me(x) = \hat{x} = 63, \ Mo\,(x) = \breve{x} = 59.5$$

Ако формираме график на фреквенциите, гледаме дека $Mo\,(x)$ е врвот на графикот $y \ = \ f\,(x)$:



4.11.3 Отстапување од аритметичка средина

Нека имаме две множества со иста аритметичка средина но со различна структура на податоците.



Очигледно е дека првото множество е покомпактно, со мали внатрешни разлики; додека второто содржи елементи кои повеќе се разликуваат и дивергираат од средината. Очигледно е дека првото е статистички порепрезентативно, поубедливо се заменува со својата средина $\overline{x}$, отколку што второто се заменува со истата таа средина x. Бидејќи вакви примери има многу, се прашуваме што ќе биде критериум за репрезентативноста на средината, т. е. дали таа е доволно достоен претставител на множеството. Со таа цел воведуваме:

Отстапување на елементот x_i од аритметичката средина $\overline{x}$ е разликата

$$\Delta x_i \;=\; \Delta_i \;=\; x_i - \overline{x}$$

Геометриски, тоа е отсечка меѓу точките x_i и $\overline{x}$. Таа може да биде и позитивна и негативна. Важи $\Delta x_i \; > 0$ ако е x_i десно (или над) средината $\overline{x}$; и важи $\Delta x_i < 0$, ако е x_i лево (или под) средината $\overline{x}$.

На овој начин, на низата податоци

$$x_1 \; , \; x_2 \; , \; x_3 \; , \; . \; . \; . \; , \; x_k \; , \; . \; . \; . \; , \; x_n$$

и одговара една низа отстапувања

$$x_1 \; - \; x \; , \; x_2 \; - \; x \; , \; x_3 \; - \; x \; , \; . \; . \; . \; . \; , \; x_k \; - \; x \; , \; . \; . \; . \; , \; x_n - x$$

или

$$\Delta x_1 \; , \; \Delta x_2 \; , \; \Delta x_3 \; , \; . \; . \; . \; , \; \Delta x_k \; , \; . \; . \; ., \Delta x_n$$

Средината $\overline{x}$ е дотолку подобар претставник на множеството податоци $\{x_i\}$, доколку секое отстапување е помало по апсолутна вредност, т. е. пожелно е големините

$$|\Delta x_i| \;=\; |x_i - x|$$

да се мали. Но поради случајната природа на податоците, меѓу Δx_i природно има и поголеми и помали. Затоа е важно сумата на отстапувањата да е што помала, т. е. севкупно отстапувањата да бидат што помали. Но збирот на сите отстапувања изнесува

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = (x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x}) + ... + (x_n - \overline{x})$$

$$= x_1 + x_2 + ... + x_n - (\overline{x} + \overline{x} + ... + \overline{x})$$

$$= x_1 + x_2 + ... + x_n - n\overline{x} = n\overline{x} - n\overline{x} = 0.$$

Теорема. Збирот од сите отстапувања на податоците од нивната аритметичка средина е еднаков на нула

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i) = 0.$$

Ова значи дека не можеме вкупното отстапување да го оценуваме со обичен збир на поедини отстапувања, бидејки тој збир е секогаш еднаков на нула, без оглед на големините на поедините отстапувања. Теоремата кажува дека во однос на средината $\overline{x}$ има подеднаков квантум позитивни и негативни отстапувања кои така се поништуваат.

Останува прашањето на определувањето на показател за успешноста на средината $\bar{x}$ како претставник на множеството. Истовремено, бараме критериум за статистички квалитет на множеството $\{x_i\}$ бидејќи е очигледно дека множеството е статистички покомпактно доколку вкупното отстапување е што помало. Па што може да биде тоа вкупно отстапување? Ако земеме збир од апсолутни вредности

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| = \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|.$$

Оваа вредност нема да биде еднаква на нула, но бидејќи операцијата апсолутна вредност негативните броеви ги претвора во позитивни, бројот $\sum\limits_{i=1}^{n} |\Delta x_i|$ може да биде поголем. Затоа се воведува

Средно апсолутно остапување е бројот

$$|\overline{\Delta}| = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\Delta x_i|}{n}$$

кој покажува колку средно некој елемент x_i отстапува од средината на множество.

4.12 Стандардна девијација. Дефиниција и формула

Разгледуваме две множества $\{9, 11\}$ и $\{1, 19\}$ составени од по 2 елементи. Тие имаат иста средина $\overline{x} = 10$. Но, отстапувањата на првото множество се само $\{-1, 1\}$, а во второто се $\{-9, 9\}$. Очигледно, средината $\overline{x} = 10$ нема еднакво место во двете множества. Збирот од отстапувањата и во двете множества е рамен на нула, а средното апсолутно отстапување при првото множество е $\frac{|-1|+1}{2} = 1$, а при второто $\frac{|-9|+9}{2} = 9$.

Се прашуваме што ќе биде мерка за отстапување од аритметичката средина на целото множество, како целина, од сопствената аритметичка средина. Или, што ќе биде мерка за статистичката вредност на средината како репрезент во рамките на множеството. Докажавме дека не може да биде тоа обичниот збир на отстапувањата, бидејќи тој е секогаш рамен на нула за кои било податоци. Поништување на оваа сума доаѓа поради рамномерен распоред на знаците " + " и " − ", во пресметаните разлики. Знакот " − " може да се одбегне со квадрирањето на секое отстапување $(x_i - \overline{x})^2 > 0$. Така сега, ако ги собереме сите $(x_i - \overline{x})^2$, нема да има поништување. Но со квадрирањето можеме многу да се оддалечиме од мерните вредности и разлики, односно квадрирањето многу ја менува сликата на отстапувањата.

Затоа, вообичаено е да се постапува вака: секое отстапување се квадрира, тие квадрати се собираат, и се делат со бројот на отстапувањата. Потоа од сето тоа се вади квадратен корен. Така пресметано просечното отстапување се вика стандардна девијација.

Зборот значи средно отстапување на избраниот примерок $\{x_i\}$. Постапката, со која е пресметано ова отстапување, е сосема оправдана. За да избегнеме позитивни и негативни отстапувања да се поништуваат меѓусебно, ние нив ги квадрираме, и на тој начин добиваме позитивни броеви. Ако нив ги собереме, добиваме вкупна маса од квадратни отстапувања. За да добиеме средно отстапување на квадрат, делиме со бројот на отстапувањата n, и добиваме просек од тој збир на квадрати. Но овој просек може да биде многу голем, поради квадратите. Вадејќи квадратен корен, се сведуваме на првата димензија, и на таков начин имаме позитивно линеарно отстапување.

Вака пресметана девијација ни покажува особено добро колку е силно растурањето на поедини елементи, и затоа вака формираниот реален број го нарекуваме мерка на дисперзија на мерните вредности од нивната средна вредност. Оваа постапка, објаснета вербално-логички, можеме сега лесно математички да ја формулираме.

Нека се $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ експериментални податоци на примерокот, и нека е x нивната аритметичка средина. Тогаш отстапувањата од x се

$$x_1 - \overline{x}, x_2 - \overline{x}, x_3 - \overline{x}, ..., x_n - \overline{x}$$

и меѓу нив има и позитивни и негативни. Нивните квадрати

$$(x_1 - \overline{x})^2, (x_2 - \overline{x})^2, ..., (x_n - \overline{x})^2$$

се сите позитивни но и оддалечени. Збирот од овие квадрати гласи:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = (x_1 - \overline{x}) + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2$$

и тој се вика квадратна маса од сите отстапувања. Средно квадратно отстапување се определува како

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+...+(x_n-\overline{x})^2}{n}$$

и стандардната девијација се определува со реалниот број

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+.......+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

Случај на фреквенции. Ако податоците x_i се јавуваат со некои фреквенции f_i, соодветно, тогаш со истите тие зачестености се јавуваат и отстапувањата на секој елемент од средината, па и нивните квадрати. Затоа, збирот на квадратите изнесува

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^2=f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+......f_n(x_n-\overline{x})^2$$

Бидејќи $N=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i$, за квадратот на средното отстапување имаме

$$\sigma^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}f_i}=\frac{f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+........+(x_n-\overline{x})^2}{f_1+f_2+f_3+.....+f_n}$$

така што стандардната девијација сега гласи

$$\sigma=\sqrt{\frac{f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+.....+f_n(x_n-\overline{x})^2}{f_1+f_2+f_3+......f_n}}$$

или кратко

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^2}{N}}.$$

Стандардната девијација е основен критериум во биометријата и нејзиното пресметување мора да се вежба и врши со сигурност. За почеток, да го земеме познатиот пример:

x	5	4	3	2	1
$f\big(x\big)$	7	16	13	5	6

за кои средината е $\bar{x} = 3,27$.

Отстапувањата од средината гласат:

$$5 - 3,28 = 1,72;\; 4 - 3,28 = 0,72;\; 3 - 3,28 = -0,28;\; 2 - 3,28 = -1,28;$$
$$1 - 3,28 = -2,28$$

Стандардната девијација гласи:

$$\sigma = \sqrt{\frac{7 \cdot 7234^2 + 16 \cdot 0,7234^2 + 13 \cdot 0,2766^2 + 5 \cdot 1,2766^2 + 6 \cdot 2,2766^2}{47}}$$
$$= \sqrt{\frac{7 \cdot 2,9701 + 16 \cdot 0,5233 + 13 \cdot 0,0765 + 5 \cdot 1,6297 + 6 \cdot 5,1829}{47}} = 1,4767$$

т.е.

$$\sigma = \sqrt{1,4767} = 1,215$$

а ова значи дека толку во просек изнесуваат остапувањата од аритметичката средина, и во една, и во друга страна.

Пример. Во уводниот пример со две множества од по два елемента, стандардните девијации изнесуваат:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1^2 + 1^2}{2}} = 1,\; \sigma_2 = \sqrt{\frac{81 + 81}{2}} = 9$$

што е и природно. Второто има деветпати поголемо средно отстапување од првото.

Друг облик на формулата за стандардна девијација

За да се избегне мачното пресметување на разликите $x_i - \overline{x}$ кое ги преповторува операциите со децималите од мерењето на x_i, а може и да ги зголеми грешките. Горната формула за стандардна девијација честопати се дава во видоизменет облик, каде нема квадрати од разлики, туку само една разлика од квадрати.

Во многу учебници по Биометрија се дава токму оваа формула која се смета за практична, додека првата се смета за дефинициона. Затоа ние треба и неа паралелно да ја знаеме.

Дефиниционата формула

$$\sigma \overset{def}{=} \sqrt{\frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\ldots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{\mathrm{N}}}$$

ќе ја квадрираме и ја пишуваме во обликот

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\left[f_1(x_1-\overline{x})^2+f_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+f_n(x_n-\overline{x})^2\right].$$

Ако секоја внатрешна заграда ја квадрираме, добиваме триноми кои ги подредуваме:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \frac{1}{N}\big[&f_1x_1^2 - 2f_1x_1\overline{x} + f_1\overline{x}^2 +\\ &+f_2x_2^2 - 2f_2x_2\overline{x} + f_2\overline{x}^2 +\\ &+f_3x_3^2 - 2f_3x_3\overline{x} + f_3\overline{x}^2 +\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+f_nx_n^2 - 2f_nx_n\overline{x} + f_n\overline{x}^2\big]\end{aligned}$$

Ако сега ги собереме вертикалните колони и ги групираме, имаме

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \tfrac{1}{\mathrm{N}}\,&((f_1x_1^2+f_2x_2^2+\ldots+f_nx_n^2) - 2\overline{x}\,(f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n)+\\ &+\overline{x}^2\,(f_1+f_2+\ldots+f_n)).\end{aligned}$$

Бидејќи е

$$f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n = N\overline{x};\;\; f_1+f_2+\ldots+f_n = N$$

добиваме

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_ix_i^2 - \frac{1}{N}2\overline{x}N\overline{x} + \frac{1}{N}\overline{x}^2\cdot N$$

или

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_ix_i^2\right) - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2$$

или

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 \right) - \overline{x}^2$$

т. е. добиваме нова формула за стандардната девијација

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 \right) - \overline{x}^2}$$

каде немаме работа со $(\Delta x_i)^2$, но само со x_i^2. Значи, Δx_i се исклучени од сметките, па за толку ваквото пресметување на δ е поефикасно.

Пример. Формулата ќе ја примениме на ист нумерички пример, за да изведеме компарација, како во поглед на брзината на пресметувањето, така и во поглед на точноста. Низ практика се покажува дека и едната и другата формула имаат свои вредности. Имаме за петте тежини со нивните фреквенции:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{7 \cdot 5^2 + 16 \cdot 4^2 + 13 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 1^2}{47} - 3,2766^2 = \\ &= \frac{7 \cdot 25 + 16 \cdot 16 + 13 \cdot 9 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 1}{47} - 10,7361 = \\ &= \frac{547}{47} - 10,736 = 12,2128 - 10,7361 = 1,4767\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{1,4767} = 1,215.$$

Добиваме ист резултат како и со првата формула, но овде пресметувањето беше полесно, бидејќи квадрираме цели броеви 5, 4, 3, 2, 1; а не дропки: 1,2734;0,7234 итн.

Беселова поправка

Бидејќи формулата за стандардната девијација е една артиметичко-логичка конструкција, формулирана да прикаже едно средно отстапување за целото множество, таа е чувствителна на бројноста на егземпларот, впрочем како и секој статистички елемент. Бидејќи ако бројноста е мала, или недоволна, законите изведени од неа можат да бидат несигурни.

Ние ја изведовме формулата за σ користејќи само еден мал егземплар, една релативно мала популација $\{x_i\}$ со бројот N, која е многу помала од бројноста на целата статистичка маса, честопати непреброива.

Во случајов ние ја изедначивме средината на егземпларот со средината на целата маса, а тие се ретко идентични. Тие само прикажуваат тенденција на изедначување. Може теориски да се покаже, ако формулата за σ се изведе на погорниот начин, делејќи во именителот со бројноста N на егземпларот дека се добива најмала можна вредност за стандардната девијација, и тоа онаа вредност која би се добила ако средината $\overline{x}$ на егземпларот и $\overline{\chi}$ на статистичката маса би биле исти, т.е. ако $\overline{x} = \overline{\chi}$. Но иако е скоро секогаш $\overline{x} \neq \overline{\chi}$, со тенденција на изедначување според законот на големите броеви ако $N \to \infty$, σ треба да се земе во практика поголема од најмалата. Затоа треба да се изврши поправка на формулата за σ, и да се земе едно σ поправено.

Тоа ново σ поправено се добива ако изведеното σ се помножи со некој коефициент на поправка:

$$\sigma_{\text{поправено}} = \sigma \cdot \lambda$$

Познатиот математичар Бесел докажал дека поточна вредност на отстапувањето ќе се добие ако стандардната девијација добиена со горната формула се помножи со коефициентот λ,

$$\lambda = \sqrt{\frac{N}{N-1}}$$

т. е.

$$\sigma_{\text{поправено}} = \sigma\sqrt{\frac{N}{N-1}}.$$

Ако го замениме теориското σ добиваме

$$\sigma_{\text{поправено}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}}$$

или

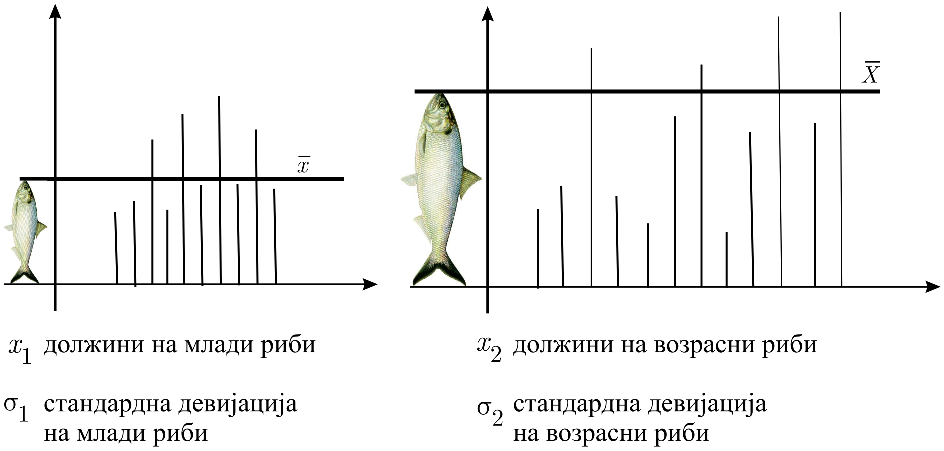
$$\sigma_{\text{поправено}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^2}{\mathrm{N} - 1}}$$

Гледаме дека поправената формула се разликува од изведената по нашата теорија по тоа што именителот наместо бројноста N, содржи бројност намалена за единица: $N-1$. Како при помал именител дропката е поголема, следува дека последната Беселова формула дава поголеми вредности за стандардната девијација отколку нашата формула со N. Ова е особено важно при мал број експерименти N. Ако е $N \leq 30$ задолжително се користи σ поправено. Ако е N многу големо, сеедно е која формула се користи. Тогаш во рамноправна употреба се и едната и другата, со таа забелешка што ако се користи едната во некој проблем, таа треба да се користи до крај во истиот проблем, и тие не треба да се мешаат.

4.13 Коефициент на варијација

Ако ја набљудуваме формулата за стандардната девијација, констатираме дека σ е пропорционална со податоците x_i. Тоа значи ако имаме задача да мериме во едно биолошко множество, во кое елементите се определени со големи броеви, тогаш и стандардната девијација ќе биде голем број. Ако наспроти тоа имаме биолошко множество со елементи изразени со мали вредности, и нивната стандардна девијација ќе биде мала. Според тоа, има тешкотии при споредбата на една популација со друга, со оглед на стандардната девијација, бидејќи таа ја дефинираме како апсолутна мерка.

Пример 1. Мериме две возрасни структури на риби, од ист вид, во ист екосистем (рибник), со цел да го пресметаме приносот. Природно, тие ќе се разликуваат по нивната должина и тежина.



$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{N}}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{N}}$$

Бидејќи за растот на рибите во експериментот важи

$$X_i > x_i$$

при исто N, тогаш и за средините ќе важи

$$\overline{X} > \overline{x}$$

па може да се очекува дека и за соодветните отстапувања (барем во поголемиот број) ќе важи

$$\left(X_i-\overline{X}\right)^2 > (x_i-\overline{x})^2$$

како и

$$f_i\left(X_i-\overline{X}\right)^2 > f_i(x_i-\overline{x})^2$$

од каде, делејќи со N, и квадрирајќи, ќе добиеме

$$\sigma_2 > \sigma_1.$$

Гледаме, бидејќи втората групација риби е поголема, дека и соодветната стандардна девијација е поголема. Но ние работиме со риби од ист вид, на исто место, само во различни времиња, и затоа ни треба некој математички инструмент кој нема да зависи од големините x_i и X_i на мерените објекти, туку од нивната биолошка густина. Поради особината $\sigma_2 > \sigma_1$ стандардната девијација σ нема компаративна вредност, туку само внатрешна, локална вредност, во едно исто множество и во еден експеримент. Разликите меѓу x_i и X_i кои влијаат врз соодветните σ_1, σ_2 можат да се ублажат, ако овие последниве се поделат со соодветните средини $\overline{x}$ и $\overline{X}$:

Поголемата σ_2 поделена со поголема средина $\overline{X}$ се намалува, а помалата σ_1 поделена со помалата средина $\overline{x}$ се наголемува.

Така количникот $\frac{\sigma_1}{\overline{x}}$ расте, а $\frac{\sigma_2}{\overline{\mathrm{X}}}$ опаѓа, па во општ случај имаме тенденција да

$$\frac{\sigma_1}{\overline{x}} \approx \frac{\sigma_2}{\overline{\mathrm{X}}}.$$

Дефиниција. Коефициент на варијација е однос меѓу стандардната девијација и соодветната аритметичка средина на мереното множество

$$C.V. = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

и тој покажува колку е средното отстапување во однос на просекот.

Така стандардната девијација е направена независна од самата големина на објектите и може да се користи во горната форма на коефициентот $C.V.$ во биолошките експерименти, каде живите објекти се променливи со тек на времето.

Многу е корисно, и вообичаено, $C.V.$ да се изразува во проценти, значи споредбено со основното множество од 100 единки.

Дефиниција. Коефициент на варијација во проценти е бројот

$$C.V.\% = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

и во експлицитна форма овој показател гласи

$$C.V. = \frac{\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}} = \sqrt{n\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}}$$

или со оглед на фреквенциите

$$C.V.\% = \frac{\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^2}{N}}}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f_ix_i}{N}}\cdot 100\%.$$

Пример 2. При податоците од примерот 1 од 4.10.3 добиваме

$$C.V. = \frac{1,215}{3,2766} = 0,37$$

и

$$C.V.\% = 37\%.$$

Ова значи дека просечното отстапување од средината изнесува 37%, т.е. од 100 мерени единки 37 отстапуваат од нивната просечна вредност а 63 се во рамките на просекот.

Пример 3. Нека средната вредност на холестерол кај хиперхолестеролемични пациенти изнесува 7,3 mM, а просечното отстапување изнесува 0,8. Да се определи коефициентот на варијација CV во %.

$$CV\,(\%) = \frac{\sigma}{\bar{x}}\cdot 100 = \frac{0,8}{7,3}\cdot 100 = 10,95.$$

Значи, 10,95% од испитаниците отстапуваат од просечната вредност, а 89,05% се во рамките на средната вредност.

Пример 4. Нека средната вредност на креатинин во серум кај здрави испитаници изнесува 86 μM, а просечното отстапување изнесува ±20. Да се определи коефициентот на варијација во %.

Биометриска табела

За едно дадено статистичко множество x_i со фреквенции f_i показателите

$$\bar{x},\ \sum_{i=1}^{n} f_i = N,\ \ \Delta x_i,\ (\Delta x_i)^2,\ \ f_i(\Delta x_i)^2,\ \ \sigma,\ C.V.,\ \ C.V.\%$$

најдобро се прикажуваат и се пресметуваат преку следнава табела

податоци x_i по класи	фреквенции f_i	моменти $x_i f_i$	отстапувања $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$	нивни квадрати $(\Delta x_i)^2$	$f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	σ $C.V.$ $C.V.\%$
x_1	f_1	$x_1 f_1$	Δx_1	$(\Delta x_1)^2$	$f_1(\Delta x_1)^2$	$\sigma^2 = \frac{Q}{N-1}$ $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ $C.V.\% = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$.
x_2	f_2	$x_2 f_2$	Δx_2	$(\Delta x_2)^2$	$f_2(\Delta x_2)^2$	
x_3	f_3	$x_3 f_3$	Δx_3	$(\Delta x_3)^2$	$f_3(\Delta x_3)^2$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
x_k	f_k	$x_k f_k$	Δx_k	$(\Delta x_k)^2$	$f_k(\Delta x_k)^2$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
x_n	f_n	$x_n f_n$	Δx_n	$(\Delta x_n)^2$	$f_n(\Delta x_n)^2$	
број на класи n	$\sum_{i=1}^{n} f_i = N$	$M = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ $\bar{x} = \frac{M}{N}$	проверка $\Delta x_i \approx 0$		$Q = \sum_{i=1}^{n} f_i(\Delta x_i)^2$	

Оваа табела се формира скоро при секоја биометриска задача, бидејќи таа содржи параметри неопходни за секоја статистика. На еден броен пример ќе ја прикажеме оваа табела.

Пример 1. Дадени се средни должини на петгодишна пастрмка, со соодветни фреквенции по класи

x	29,5	33,5	37,5	41,5	45,5	49,5	53,5	57,5	61,5	65,5
$f(x)$	1	14	56	172	245	263	156	67	23	3

Определи ги N, x, Δx_i, σ, $C.V.$

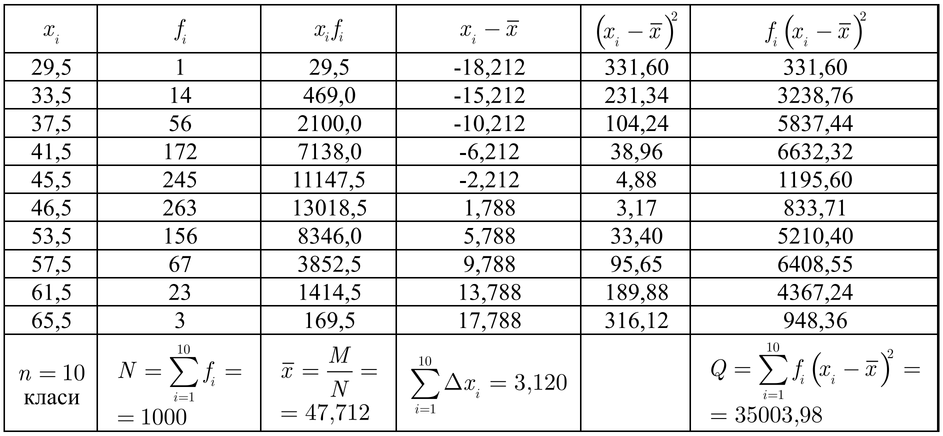
Решение. Имаме

$$\bar{x} = \frac{29,5\cdot 1 + 33,5\cdot 14 + 37,5\cdot 56 + 41,5\cdot 172 + 45,5\cdot 245 + 49,5\cdot 263 + 53,5\cdot 156 + 57,5\cdot 67 + 61,5\cdot 23 + +65,5\cdot 3}{1 + 14 + 56 + 172 + 245 + 263 + 156 + 67 + 23 + 3}$$

Бидејќи е $N = \sum_{i=1}^{10} f_i = 1000$ наоѓаме

$$\overline{x} = \frac{47712}{1000} = 47,712\ cm$$

што претставува средна должина на петгодишна пастрмка. Ја формираме табелата, чии први две колони се составени од податоците, а другите четири ги пополнуваме со едноставни аритметички операции (со калкулатор).



x_i	f_i	x_if_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
29,5	1	29,5	-18,212	331,60	331,60
33,5	14	469,0	-15,212	231,34	3238,76
37,5	56	2100,0	-10,212	104,24	5837,44
41,5	172	7138,0	-6,212	38,96	6632,32
45,5	245	11147,5	-2,212	4,88	1195,60
46,5	263	13018,5	1,788	3,17	833,71
53,5	156	8346,0	5,788	33,40	5210,40
57,5	67	3852,5	9,788	95,65	6408,55
61,5	23	1414,5	13,788	189,88	4367,24
65,5	3	169,5	17,788	316,12	948,36
$n = 10$ класи	$N = \sum_{i=1}^{10} f_i =$ $= 1000$	$\overline{x} = \frac{M}{N} =$ $= 47{,}712$	$\sum_{i=1}^{10} \Delta x_i = 3{,}120$		$Q = \sum_{i=1}^{10} f_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2 =$ $= 35003{,}98$

Пресметуваме

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q}{N}} = \sqrt{\frac{350039}{100000}} = \frac{591,64}{100} = 5,91 \approx 6.$$

Значи, секоја риба отстапува просечно од средната должина само за $6cm$, што е прилично добро статистичко однесување, а и од гледна точка на експлоатацијата. Натаму, варијацијата е

$$C.V. = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{5,91}{47,712} = 0,12 \text{ и } C.V.\% = 12\%.$$

Ова значи: на 100 пастрмки од 5 години од нив 12 просечно отстапуваат од нивната средна должина а 88 се во рамките на просекот. Експериментот со 1000 проби дава толку.

Пример 2. Табеларно се прикажани средни вредности на концентрација на глукоза во плазма кај 100 машки индивидуи на возраст од 30 години со соодветните фреквенции по класи.

x (mM)	4,25	4,7	4,9	5,2	5,35	5,5
$f(x)$	2	15	35	31	11	6

Пресметај ги $\bar{x}$, σ и $C.V.$

Пример 3. Табеларно се прикажани средни вредности на концентрација на вкупен билирубин во серум кај 100 машки индивидуи на возраст од 30 години со соодветните фреквенции по класи.

x (μM)	4,2	5,4	6,3	8,1	9,3	11,7
$f(x)$	2	15	35	31	11	6

Пресметај ги $\bar{x}$, σ и $C.V.$

4.14 Нормална распределба во практиката

Во биологијата, исто како и во целата статистика воопшто, основна улога игра врската

карактеристика ↔ зачестеноста на нејзината појава

или

врската меѓу бројната вредност на некое обележје, со фреквенцијата на јавувањето на тоа обележје, кое го бележиме, како што веќе знаеме

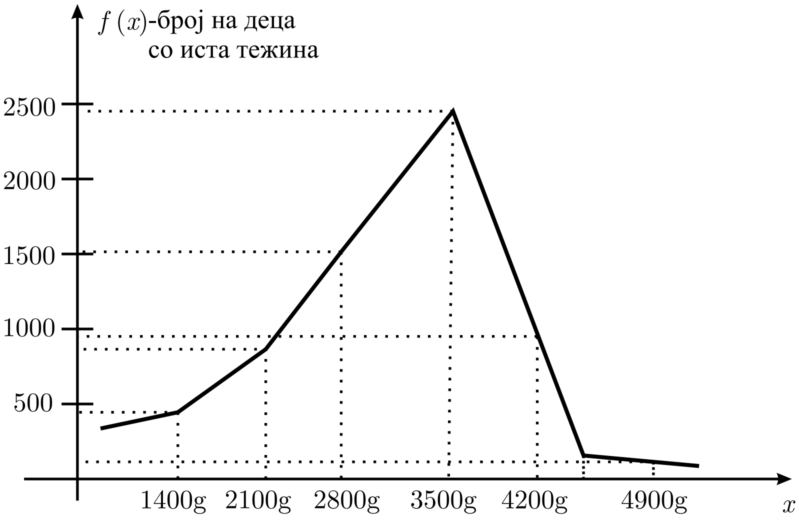
$$x \leftrightarrow f(x).$$

Ова врска се вика распределба на фреквенциите и е база на секоја статистика. Од неа директно зависи веројатноста на некоја појава x.

Графички, ако броевите x и $y = f(x)$ ги сметаме за координати на точки во еден Декартов координатен систем, добиваме геометриска слика или график на оваа распределба.

Низ практиката се покажува дека вакви типови распределби нема многу во природата, и дека меѓу нив има една најважна и најчеста.

Демографски пример. Мерена е тежината при раѓањето на 9465 машки деца. Добиените вредности на тежините со соодветните фреквенции нанесени се како точки во координатниот систем. Тие точки се поврзани и се добива еден полигонален график.

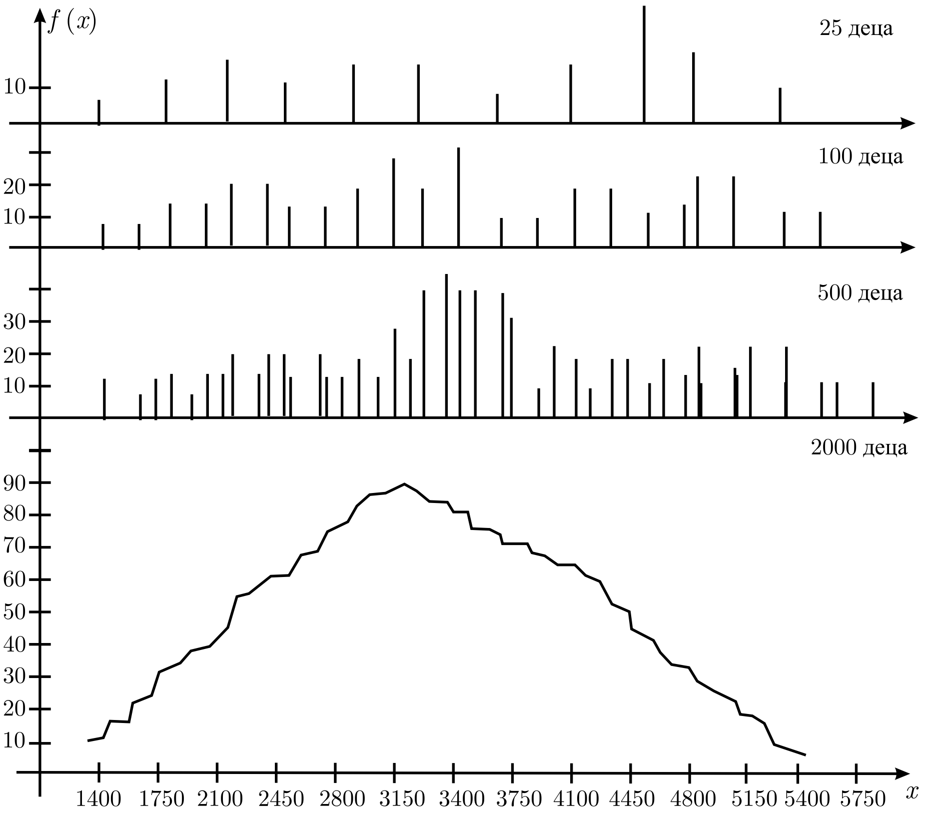


Ако соодветните точки ги спoиме со отсечки, добиваме линија со карактеристични својства: многу голем број деца се раѓаат со некоја средна тежина, од $3500g$, и доколку се оддалечуваме од таа тежина од, десно или лево, бројот на децата со многу поголеми или многу помали тежини од просечната драстично се намалува.

Имаме таканаречена една типична нормална распределба на фреквенциите. Најчеста е една средна појава, а оддалечените од средната појава се се поретки и поретки. Горниот цртеж прикажува карактристики - тежини во скокови од $700g$ и претставува прилично груба полигонална линија.

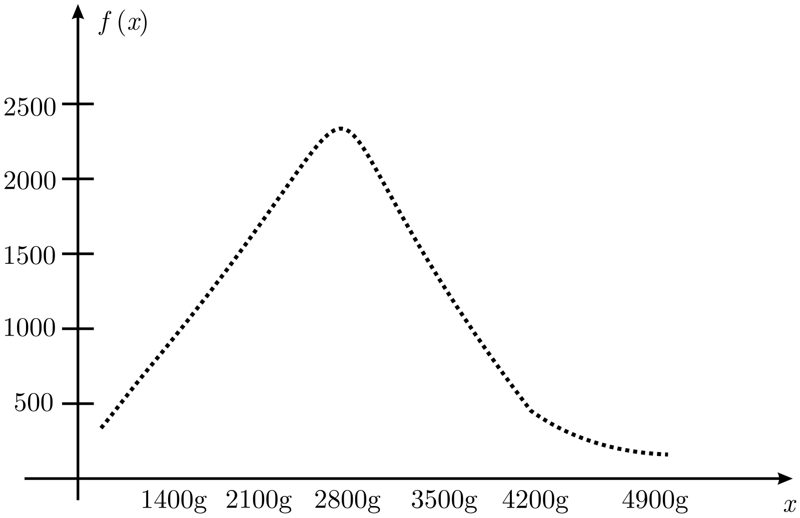
Доколку би броеле уште повеќе деца, во поголем број години, би имале уште поточни податоци, и поголем број точки на цртежот. Тие точки би биле распоредени погусто, по најкратки растојанија, и би се доближувале до една непрекината крива. Нив би ги добиле со намалување на интервалот од $700g$ на $350g$, па на $100g$, на $50g$, на 10 грама, и така би имале една серија од се поситно искршени полигонални линии, кои би се слиле во една непрекината крива, која е слична за сите вакви појави, таканаречената крива на нормалната распределба, толку карактеристична, за живиот свет и во биологијата.

На истиот овој пример, со проширување на податоците, ќе го прикажеме значењето на бројноста на експериментите за определување на законот за распределбата. Ќе се види дека биологијата честопати бара голем број експерименти. На ординатната оска се нанесувани фреквенциите од истиот пример погоре: Тежината на децата при раѓањето, еднаш при бројноста од само 25 деца, вторпат од 100 деца, третпат од 500 деца, и четвртипат од 2000 деца.



Интервали на тежината се $\Delta x = 350g$. Ќе видиме дека природната нормална распределба на фреквенциите може да се насети почнувајќи од $N = 500$ мерења, а веќе сосема јасен график на нормална распределба добиваме при $N = 2000$ мерења. Мал број експерименти $N = 25$ и $N = 100$ дава нејасна слика. За добра дистрибуција на фреквенции треба поголем број елементи, т. е. еден поброен примерок.

Зголемувајќи ја уште повеќе бројноста на експериментот ќе добиеме една густо распоредена серија на точки блиска до непрекината крива.



Слично однесување на дисперзија на мерни вредности имаат и биолошките множества ако ги разгледуваме по една, за нив карактеристична особина. Многу често притоа се согледува многу голема правилност, која се согледува во концентрацијата на голем број индивидуи f околу некоја средна карактеристика x, а мал број индивидуи со фреквенции f околу вредности x кои се оддалечуваат од средната вредност. Ова претставено графички, преку кооординати на точки, дава една правилна слика која се карактеризира со изразена симетричност, и истакнат дел на најфреквентниот дел. Од искуство и сами знаеме повеќе нормални распределби. Практиката покажува дека вакви распределби се среќаваат на секој чекор.

Пример 1.

- Лисја од едно стебло мерени по нивната должина се групираат по оваа распределба.

- Зрна грав по нивната тежина.

- Колектив луѓе по нивната висина.

- Зрна пченица по нивната содржина на скроб.

- Фосилен скелет според должината на черепите.

Во практиката, до нормална распределба, доаѓаме најчесто ако се разгледуваат некои особини на поединечни колективи во кои има извесно природно растурање (отклонување, отстранување, отстапување) од некои случајни причини. Тоа се колективи со голема бројност, и каде голем број единки се однесува слично на својот просек, а еден помал дел отстапува повеќе или помалку од просекот.

Типично вакви се биолошките популации.

Искуството не учи дека важи следниот закон:

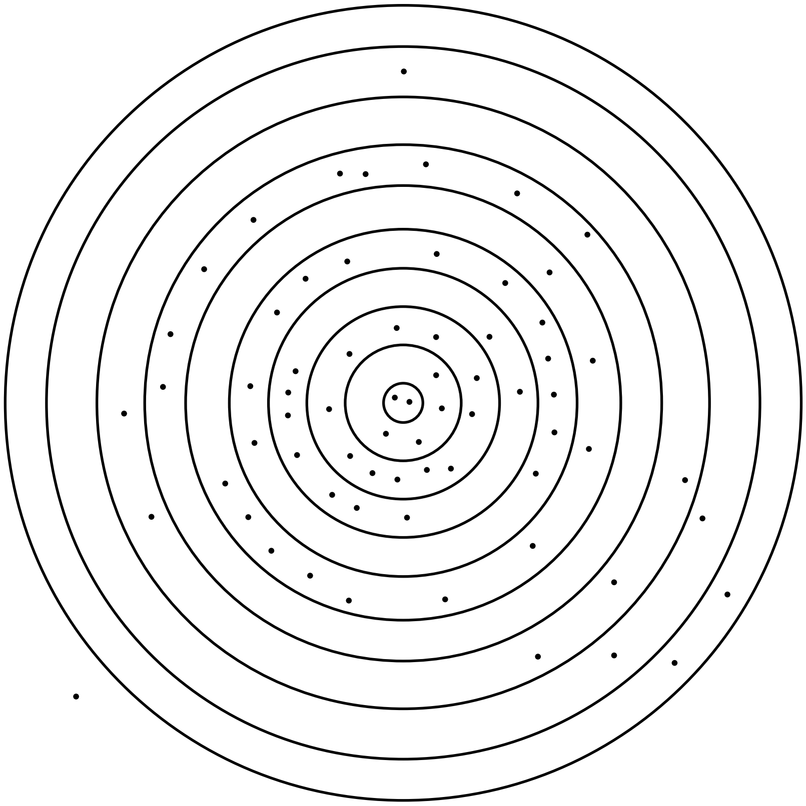
Во 80% појави во биологијата важи нормалната распределба, а само во 20% од преостанатите појави важат сите други распределби заедно.

Тоа значи дека нормалната распределба е врзана со самиот живот.

Дека постојат и други распределби, можеме да се увериме со еден ист пример:

Пример 2. Во мета, стрела просечен стрелец.

Настанува едно природно растурање на зрното. Најмногу погодоци се во околината $5-6-7$. Малку нив ги има во 8 и 9; како и $4-3$. Сосема малку во центарот 10, како и во $2-1$.

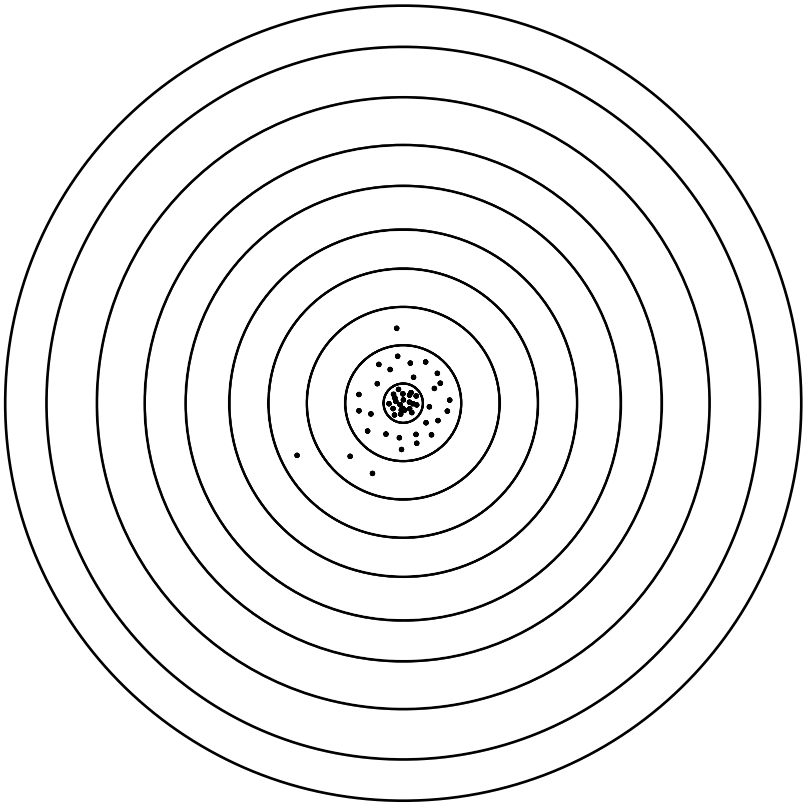


Една табела

круг	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
број на погодоци	1	2	3	5	9	10	12	9	11	4	2

дава типична нормална распределба.

Во мета, стрела еден мајстор. Негова специјалност се десетки и деветки, по некоја осумка, друго скоро и да нема.



Регистрираме погодоци.

круг	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
број на погодоци	0	0	0	0	0	0	0	1	3	24	45

Оваа распределба значително се разликува од нормалната, и многу е помалку случајна. Мајсторството на стрелецот овде елиминира голем број случајности.

За појавата на нормалната распределба е разработен математички апарат кој овзможува многу математички предвидувања во овој вид појави, веројатности и сигурности на настани, како и на формулирање на стриктни биолошки закони.

Математичка формула за нормалната распределба

Ако се обидеме да најдеме формула за функцијата $y = f(x)$ по која се распоредени фреквенциите од претходната точка, како и формулата за сите други слични случаи, се исправаме пред сериозен теориски проблем. Тој проблем е успешно решен од германскиот математичар Карл Фридрих Гаус, кој открил дека нормалната распределба се врши по еден прост експериментален закон од вид

$$y = f(x) = Ae^{-k(x-x_0)^2}$$

каде

$$A = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}},\ k = \tfrac{1}{2\sigma^2},\ x_0 = \bar{x}$$

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

кој се вика Гаусов закон за густина на распределбата на веројатностите при нормална распределба.

Во оваа формула е

$x-$ бројна вредност на карактеристиката

$\bar{x}-$ аритметичка средина на карактеристиката x

$\sigma-$ стандардна девијација

$e,\ \pi-$ познати основни математички константи.

Графикот на горната функција се вика теориска крива на густината на распределбата на веројатностите при нормална распределба.

Тоа значи дека секој сет податоци $\{x_i\}$ има своја теориска крива на распределба, која може малку да се разликува од екперименталната крива. Ова ќе го прикажеме уште на еден пример, што ќе го обработиме нумерички и теориски.

Пример. За потребите на индустријата (конфекција на облека и чевли, димензии на кревети, моделирање на мебел, лично вооружување, итн.) потребни се сигурни статистички податоци базирани врз голем број индивидуални мерења. Во САД по Првата светска војна мерени се височините на 28 595 луѓе, тие се подредени по класи интервали од $\Delta x = 2cm$, и тоа од $x_{\min} = 153cm$ до $x_{\max} = 193cm$. (Резултат од $x = 174cm$, значи дека се опфатени сите висини x за кои важи $173cm \leq x \leq 175cm$).

Добиена е следната табела:

(Првите две колони се експериментални резултати):

висини во cm	број на луѓето емпириска фреквенција	теориска фреквенција
153	124	176
155	222	211
157	406	409
159	697	711
161	1251	1136
163	1815	1687
165	2401	2271
167	2826	2811
169	3143	3208
171	3439	3345
173	3129	3208
175	2771	2811
177	2196	2271
179	1596	1687
181	1027	1136
183	680	711
185	395	409
187	236	211
189	137	103
191	55	46
193	49	27

$N = 21$ класа

$x_{\min} = 153$

$x_{\max} = 193$

$n_{\text{емпириска}} = 28595$

$n_{\text{теориска}} = 28595$

Ако претставиме графички точки чиишто координати се броевите од првите две колони на горната табела:

$$(153, 124), (155, 222), (157, 405), ...$$

нив вкупно 21, добиваме точкаста крива L_1, таканаречена емпириска крива на нормална распределба на фреквенциите.

Ако од емпириските податоци формираме биометриска табела и со нејзина помош пресметаме

$$\bar{x} = 171cm,\ \ \sigma = 6,82cm$$

можеме да формираме конкретна Гаусова функција на густина на нормалната распределба на веројатностите за овој случај

$$f(x) = \frac{1}{6,82\sqrt{6,28}}e^{-\frac{(x-171)^2}{2\cdot(6,82)^2}}$$

Оваа функција $f(x)$ е густина на распределбата на веројатноститe, и не ја дава релативната фреквенција, ниту пак $n \cdot f(x)$.

Значење на фреквенција има интегралот во мал интервал

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} nf(x)dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{28595}{6,82\sqrt{6,28}}e^{-\frac{(x-171)^2}{2\cdot(6,82)^2}}dx$$

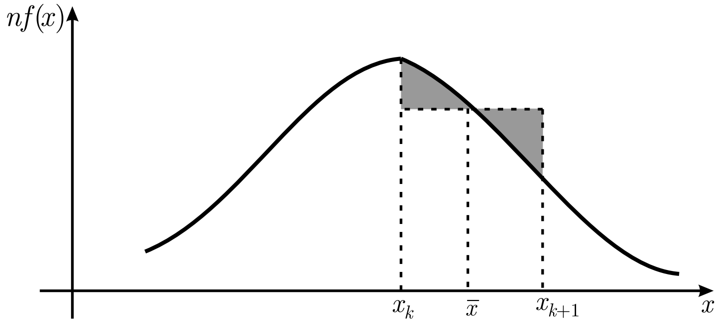
и за вакви мали интервали важи приближно

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} nf(x)dx = \Delta_k \cdot nf(\bar{x})$$

каде

$$\bar{x} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

На цртежот, фреквенцијата е пресметана со помош на плоштината



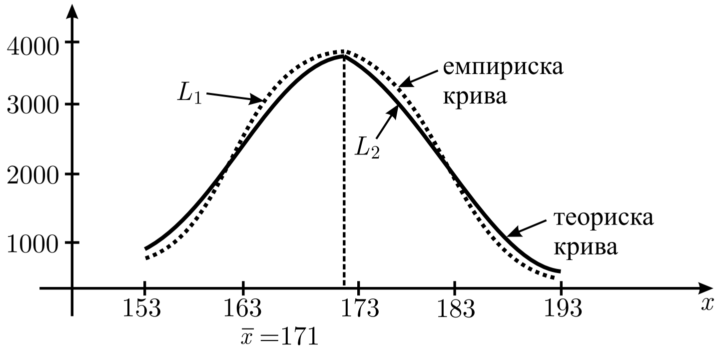
На пример, за $x = 171$ ќе земеме интервал $[x_k, x_{k+1}] = [170, 172]$ и така имаме фреквенција

$f^*(171)$: $f^*(171) = \Delta_{x_k} \cdot f(171) \cdot n = 2 \cdot \frac{28595}{6,82\sqrt{6,28}}e^{-\frac{(171-171)^2}{2(6,82)^2}} = 3346,22$ каде $x = 171$ е средина на интервалот $[170, 172]$; $x = 173$ е средина на интервалот $[172, 174]$, итн.

Ако сега на истиот координатен систем на кој е скицирана кривата L_1 нанесеме нови точки

$$(x, f^*(x))$$

каде $f^*(x)$ се добива на начин погоре опишан, и каде x е број од интервалот $153 \leq x \leq 193$, земен во рамномерни средни точки до подинтервалите, добиваме втора крива L_2, која се вика теориска крива на нормална распределба на фреквенциите. Констатираме дека кривата L_2, добиена по постапка на интегрирање на $nf(x)$ како во горниот пример, е многу блиска до кривата L_1.

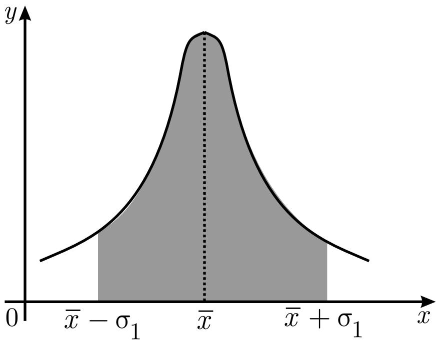


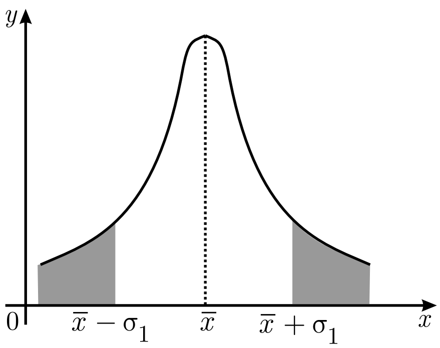
Може да се покаже дека теориската крива $y = f^*(x)$ нацртана со интеграл од Гаусовата функција е најдобра приближна непрекината крива до низата точки $M_n(x_n, y_n)$ добиена од експериментални резултати.

Исто како и во овој пример, и секоја друга нормална распределба има своја математичка формула во вид на експоненцијална функција, која зависи од основните статистички параметри на егземпларот $n, \bar{x}, \sigma$. Да избереме две множества со иста бројност n и исти средини $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ но со разни стандардни девијации $\sigma_1 = \sigma_2$. Формулата битно зависи од σ.

Мала стандардна девијација настанува ако повеќето од резултатите се групираат околу средината, а само мал број од нив бега лево или десно. Отстапувањата $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ се мали, и така е σ_1 мала. Графички, Гаусовата крива е тесна, стрмна и висока.

Бидејќи σ_1 е мало, и интервалот $(\bar{x}-\sigma_1, \bar{x}+\sigma_1)$ околу средината е мал, но сепак во него се скоро сите големи фреквенции, а надвор од него се мал број фреквенции и мали по големина. Експериментот е успешен и статистичката слика е добра. Можни се сигурни заклучоци.





Голема стандардна девијација на станува ако се отстапувањата $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$ големи. Тогаш нема толку изразити фреквенции околу $\overline{x}$, туку се тие деконцентрирани по целиот интервал по x. Интервалот $(\overline{x}-\sigma_{2,}\ \overline{x}+\sigma_2)$ е широк и зафаќа доста фреквенции, но затоа има и доста фреквенции надвор од овој интервал. Статистичка слика на појавата е дисперзирана, и не е најповолна за донесување заклучоци.

Веројатноста на појавата на фреквенцијата при нормалната распределба

Ако појдеме од Гаусовата функција на густина на распределба на веројатностите

$$f\,(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}$$

видовме дека фреквенцијата за точката x може да се пресмета со интеграл во едел мал интервал околу таа точка x:

$$\text{фреквенција} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} nf\,(x)dx.$$

Под веројатност на појавата на некоја фреквенција ја подразбираме нејзината релативна фреквенција

$$P\,(x,\ \text{со фреквенција } f) = \frac{\text{фреквенција}}{\text{бројност}} = \frac{n\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,(x)\,dx}{n} =$$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ако сакаме веројатност на појава на определени фреквенции во сите точки x на еден интервал $[A, B]$, така истиот интервал ќе го разделиме на многу последователни мали интервали такви што $U\,[x_k, x_{k+1}] = [A, B]$ и тогаш вкупната веројатност
$P\,(\text{сите } x \in [A, B]) =$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx + ... + \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx + ... + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx \right\} =$$

$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_A^B e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx.$

За пресметување на овие интеграли се врши трансформација на координати која ги упростува пресметувањата. Ако наместо x воведеме нова независна променлива t со замената:

$$\frac{x - \overline{x}}{\sigma} = t$$

добиваме

$$f(\overline{x} + \sigma t) = f_1\,(t) = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

каде густината на веројатноста е сега изразена само преку стандардната девијација, и една функција од t која посебно се нагласува:

$$\varphi\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

и се вика **Гаусова крива на веројатност**. Со нејзината помош густината на распределбата на веројатностите при нормалната распределба при дадена карактеристика x изнесува

$$f_1\left(t\right)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(t\right)$$

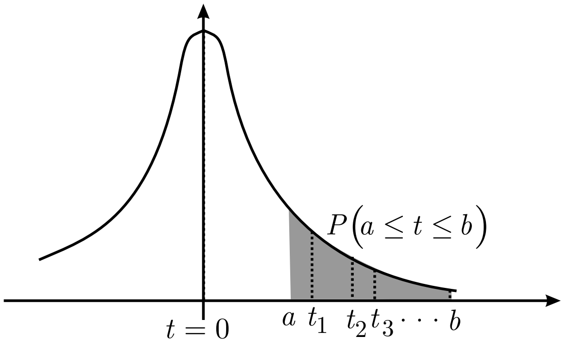
каде $t=\frac{x-\overline{x}}{\sigma}$.

Со смената $\frac{x-\overline{x}}{\sigma}=t$ интервалот по $x,[A,B]$, се трансформира во интервал $[a,b]$ по t. Во него веројатноста на појавата на фреквенцијата $f_1\left(t\right)$ во една точка t ќе ја определиме со интервал од t_k до t_{k+1} околу точката t како средна точка

$$P\left(t\right)=\int_{t_k}^{t_{k+1}}f_1\left(t\right)dx$$

каде малиот интервал dx треба да се замени со соодветен мал dt.

Ако сакаме веројатност на појавата на фреквенции не во една точка, туку во цел еден интервал: $a\le t\le b$, треба очигледно да ги пресметаме сите веројатности во точките $t_1,t_2,t_3,...,t_k$ од тој интервал т. е. за сите ординати меѓу a и b. Заклучуваме дека овие ординати формираат една површина заградена со Гаусовата крива на веројатноста, дел од t- оската меѓу точките a и b и ординатите во крајните точки.



Оваа плоштина е мерка на веројатноста на појавата на сите фреквенции за карактеристични t меѓу a и b, и како што претходно знаеме е интеграл. Значи,

$$P_{\text{тотална}}=\sum_{k-1}^{n}P_k=\sum_{k-1}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}}f_1\left(t\right)dx=\int_a^b f_1\left(t\right)dx.$$

Ако крајната точка $b = t$ е променлива, а почетната точка $a = 0$, тогаш е и веројатноста променлива, па имаме

$$\frac{x-\overline{x}}{\sigma} = t, x = \overline{x} + \sigma, dx = \sigma dt$$

и така е

$$P\left(t\right) = \int_0^t \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_0^t \varphi\left(t\right)dt.$$

Функцијата што се добива на овој начин се бележи со

$$\Phi\left(t\right) = \int_0^t \varphi\left(t\right)dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

и се вика интервал на веројатноста. За оперирање со него не треба познавање на вишата математика, бидејќи истата е табелирана, и табелата може да ја користи секој што е малку упатен. Табелата е едноставна

t	$\varphi\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$	$\Phi\left(t\right) = \int_0^t \varphi\left(t\right)dt$
0,0	0,39894	0,00 000
0,1	0,39695	0,03 983
0,2	0,39104	0,07 926
0,3	0,38139	0,11 791
0,4	0,36827	0,15542
0,5	0,35207	0,19146
0,6	0,33322	0,22575
1,0	0,24197	0,34134
2,0	0,05399	0,47725
3,0	0,00443	0,49865

Таа се користи во прогнози на веројатностите.

Интервал на доверба

Формираната функција на нормалната распределба може да служи да пресметаме фреквенции за овие карактеристики x кои не се мерени, а кои се наоѓаат меѓу две мерени карактеристики x_k и x_{k+1} (таканаречената интерполација), или да откриеме фреквенции за оние x кои се надвор од интервалот на разгледуваното множество (екстраполација); потоа да определиме веројатност на појавата на некоја фреквенција, во точка или во интервал; но тоа е само дел од примената на нормалната распределба. Едно друго прашање, многу суштествено во теоријата на експериментот, се наложува.

За практиката честопати е важно прашањето која е веројатноста некое отстапување да се наоѓа во определени граници. Ако мерената големината е x, средината $\overline{x}$, тогаш отстапувањето е $x-\overline{x}.$ Важно е ова отстапување да не е ниту преголемо, ниту премало, т. е. да се наоѓа во определени граници, меѓу $-l$ и $+l$:

$$-l \leq x-\overline{x} \leq +l.$$

Ако во функцијата на нормалната распределба извршиме трансформација на координатниот систем ставајќи

$$t = \frac{x-\overline{x}}{\sigma}$$

добиваме

$$f_1(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ако неравенката која го ограничува отстапувањето ја поделиме со σ, добиваме

$$\frac{-l}{\sigma} \leq \frac{x-\overline{x}}{\sigma} \leq \frac{+\,l}{\sigma}$$

или

$$\frac{-l}{\sigma} \leq t \leq \frac{+\,l}{\sigma}$$

Веројатноста отстанувањето $x-\overline{x}$ да е меѓу $-l$ и $+l$, што се пишува симболички

$$P\left(x,\ \left|x-\overline{x}\right| < l\right)$$

е дадена со интегралот:

$$P(x,\ |x-\bar{x}|) < l) = P(-l < x-\bar{x} < +l) = P(\bar{x}-l < x < \bar{x}+l) =$$
$$= \int_{\bar{x}-l}^{\bar{x}+l} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Ако во него ја извршиме спомнатата смена $\frac{x-\overline{x}}{\sigma} = t$, добиваме

$$P(t,|t| < \frac{l}{\sigma}) = \int\limits_{-\frac{l}{\sigma}}^{+\frac{l}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \sigma dt = \int\limits_{-\frac{l}{\sigma}}^{+\frac{l}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

или

$$P(t,|t| < \frac{l}{\sigma}) = \int\limits_{-\frac{l}{\sigma}}^{+\frac{l}{\sigma}} \varphi(t) dt = \Phi(t)\Big|_{-\frac{l}{\sigma}}^{+\frac{l}{\sigma}}$$

каде $\varphi(t)$ е веќе спомнатата Гаусова функција, а $\Phi(t)$ е закон на веројатноста. Поради парноста на функцијата $\varphi(t)$ важи

$$\int\limits_{-\frac{l}{\sigma}}^{+\frac{l}{\sigma}} \varphi\left(t\right) dt = 2\int\limits_{0}^{\frac{l}{\sigma}} \varphi\left(t\right) dt = 2\Phi\left(t\right)\Bigg| \begin{matrix} \frac{l}{\sigma} \\ 0 \end{matrix}$$

т. е.

$$P(t,|t| < \frac{l}{\sigma}) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - 2\Phi(0),$$

каде соодветните вредности на функцијата $\Phi(t)$ ги наоѓаме од таблицата дадена во претходната лекција.

Практички е најважно прашањето: која е веројатноста некое отстапување да е само во рамките на една стандардна девијација, т. е.

$$-\sigma \leq x - \overline{x} \leq +\sigma$$

Овде $-l = -\sigma$, $+l = +\sigma$, па важи $-l/\sigma = -1$ и $l/\sigma = +1$.

Тоа значи дека треба да ги пресметаме интервалите

$$P(t, |t| \leq 1) = 2\Phi(1) - 2\Phi(0).$$

Од таблицата наоѓаме

$$\Phi(1) = 0.34234 \text{ и } \Phi(0) = 0$$

и добиваме одговор

$$P(x, |x - \overline{x}| < 1 \cdot \sigma) = 0.68268$$

Така имаме важно тврдење:

Веројатноста отстапувањето $x - \overline{x}$ да се наоѓа меѓу $-\sigma$ и $+\sigma$, т. е. во рамките на една стандардна девијација изнесува

$$P(x, |x - \bar{x}| < 1 \cdot \sigma) = 68\%.$$

Значи, ако имаме нормална распределба, и ако сакаме резултатите на мерењата да бидат густо распоредени во еден мал интервал на отстапувања, веројатноста за голем број фреквенции е се уште незадоволителна.

Овој резултат значи, ако се мерните карактеристики во интервал со широчина σ околу $\overline{x}$

$$\bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma,$$

само 68% од фреквенциите ќе ги придружуваат овие x, а другите фреквенции, нив 32%, ќе придружуваат вредности надвор од овој интервал.

Ако го зголемиме овој интервал од една стандардна девијација, на широчина од две стандардни девијации, со желба во него да вклучиме што повеќе фреквенции, поставуваме прашање која е веројатноста отстапувањето $|x - \overline{x}|$ да е во границите на две стандардни девијации:

$$|x - \overline{x}| \leq 2\sigma$$

$$-2\sigma \leq x - \bar{x} \leq +2\sigma.$$

Очигледно треба да се пресмета интегралот

$$P(x, |x-\overline{x}| < 2\sigma) = 2\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,47725 = 0.95450$$

или ако заокружиме во проценти:

$$P(x, |x-\overline{x}| < 2\sigma) = 95\%.$$

На оној начин ја добиваме следната важна:

Теорема. При нормалната распределба веројатноста P отстапувањето $|x-\overline{x}|$ да се наоѓа меѓу две стандардни девијации околу средината $\overline{x}$, изнесува

$$P(x, |x-\overline{x}| < 2\sigma) = 95\%$$

што значи дека 95% од фреквенциите припаѓаат на овој интервал околу средината, само 5% од фреквенциите се надвор од овој интервал.

Гледаме, ако го прошириме интервалот на наоѓањето на карактеристиката двојно, веројатноста на наоѓњето на фреквенциите на овој интервал многу се зголемува.

Чекор повеќе, ако сакаме да ја пресметаме веројатноста отстапувањето да биде во трипати поголем интервал од една стандардна девијација, т.е. $-3\sigma \leq x-\overline{x} \leq +3\sigma$, треба да пресметаме $P(x, |x-\overline{x}| < 3 \cdot \sigma)$ и тоа се прави на ист начин како претходно, т.е.

$$P(x, |x-x| < 3\sigma) = 2\int\limits_{0}^{3} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(3) = 0.9973 = 99.7\%.$$

Значи, скоро сите фреквенции, 99,7% се во овој интервал, а само 0,3% од нив се надвор од него, што може да се занемари и отфрли.

Овој резутат е многу интересен и важен и за теориска и за практична интерпретација и на стандардната девијација и дава истакната улога при статистичките методи.

Да го разгледаме примерот од претходната точка: биолошки колектив се луѓе мерени по нивната висина x. Има луѓе со висина поголема од просечната, и има луѓе со висина помала од просечната. Што повеќе се оддалечуваме од просекот, ќе биде помал бројот на луѓе со мала висина, а исто така ќе биде помал бројот на високи луѓе. Соодносот меѓу $\overline{x}$, стандардната девијација σ и процентот на веројатноста на наоѓањето на таа висина е даден со претходните теореми.

Конвенција. Вообичаено е да се уважуваат само отстапувањата кои се во границите меѓу -2σ и $+2\sigma$, бидејќи нив ги има највеќе, 95%, а оние отстапувања кои ги надминуваат овие граници, не се сметаат за важни (нив ги имаме многу малку, и бидејќи веројатноста на овие случаи е се на се највеќе 5%).

Значи, за да биде

$$-2\sigma \leq x - \overline{x} \leq 2\sigma$$

т. е. за

$$\overline{x} - 2\sigma \leq x \leq \overline{x} + 2\sigma$$

важи

$$P(x, |x - \overline{x}| \leq 2\sigma) = 95\%$$

и

$$\overline{P}(x, |x - \overline{x}| \leq 2\sigma) = P(x, |x - \overline{x}| \geq 2\sigma) = 5\%.$$

Пример. Да го завршиме примерот со $n = 28595$ регрути.

Наоѓаме на познат начин

$$\overline{x} = 171cm \ \sigma = 6,82$$

Во интервалот

$$\bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma$$

т. е. меѓу

$$171 - 6,82 \leq x \leq 171 + 6,82$$

$$164,18cm \leq x \leq 177,82cm$$

се наоѓаат 68% од регрутите, т. е.

$$\tfrac{68}{100} \cdot 28595 = 19444 \text{ регрути.}$$

Во интервалот

$$\bar{x} - 2\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma$$

т. е.

$$171 - 2 \cdot 6,82 \leq x \leq 171 + 2 \cdot 6,82$$

т. е.

$$157,36cm \leq x \leq 184,64cm$$

се наоѓаат 95% од регрутите т. е.

$$\tfrac{95}{100} \cdot 18595 = 27165 \text{ регрути.}$$

Сите висини x помали од 157,36 и поголеми од 184,64 се помалку од 5%. И навистина, од табелата гледаме дека такви случаи има 1218 што е помало од 5%.

Во интервалот

$$\bar{x} - 3\sigma \leq x \leq \bar{x} + 3\sigma$$

т. е. во

$$171 - 3 \cdot 6,82 \leq x \leq 171 + 3 \cdot 6,82$$

т. е. меѓу

$$150,54cm \leq x \leq 191,46cm$$

се скоро сите фреквенции.

Дефиниција. Интервалот мерни вредности на x:

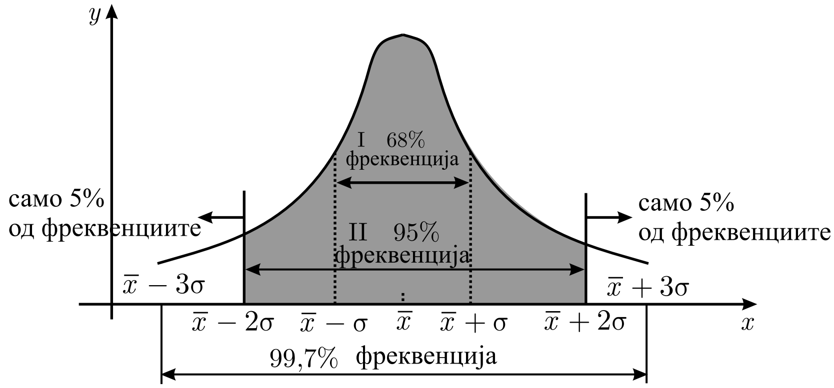
$$-2\sigma \le x - \overline{x} \le 2\sigma$$

т. е.

$$\overline{x} - 2\sigma \le x \le \bar{x} + 2\sigma$$

се вика интервал на доверба (или интервал на сигурност) бидејќи 95% од фреквенциите се однесуваат до вредностите на карактеристиките од овој интервал, а само 5% од фреквенциите се надвор од овој интервал.

Графички, тоа изгледа вака



За важноста на интервалот на довербата при толерантноста на грешката.

Значењето на стандардната девијација при мерењата било откриено и докажано од големиот математичар Карл Фридрих Гаус (1777-1885). Тоа било пронајдено при проучување на грешките при мерењето. Поточно, целата теорија што погоре ја објаснивме била откриена на следниот начин.

Ако вршиме некои мерења, при тие мерења редовно ќе има некои грешки. Причината за нив е од субјективна природа, бидејќи оној кој врши мерење не може истото да го спроведува сосема точно, поради неточноста на инструментот, како и поради неточноста на отчитувањето. Затоа задолжително при секое мерење ќе има грешки. При тоа забележано е дека малите грешки $|x - \bar{x}|$ се и најчести, а големите грешки $|x - \overline{x}|$ се релативно ретки и според тоа имаат мала веројатност.

Се покажува дека за веројатноста на грешката при мерењата важи истата оваа веројатност добиена при нормалната распределба. Ако при некое мерење знаеме просек, тогаш можеме да процениме дали некои грешки при мерењата се важни или не се. Ако за некое мерење најдеме дека грешката се наоѓа внатре во границите $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$ на двојната стандардна девијација околу $\overline{x}$, тогаш таа грешка може да се толерира. Наспроти тоа, ако при некое мерење некоја грешка е поголема од 2σ или евентуално од 3σ, тоа мерење не се уважува, сметајќи дека таква појава е многу малку веројатна и се работи за отстапување кое многу ретко настанува.

Мерењата при кои грешките се наоѓаат внатре во границите од две стандардни девијации околу средината ги сметаме за добри, бидејќи за такви мерења со такви мали грешки имаме веројатност од 95%. Само 5% од грешките се поголеми и се непожелни.

Така, истите термини на доверливноста од теоријата на нормалната распределба на фреквенциите во биолошките проблеми важат и во теоријата на грешките на мерењата.

Ова е една верификација на универзалноста на математичките постапки и закони.

4.15 Стандардна грешка и метод на одбрани примероци

Множествата во биологијата се многубројни, но сепак конечни. На пример:

- број на сите клетки во едно ткиво

- број на сите лисја на едно дрво

- број на сите микроорганизми во една популација на единица волумен.

Обично е

$$N >> 10^3$$

што е голема бројност за манипулативна и техничка обработка.

Затоа ние не сме во можност да го обработиме целото тоа множество елементи, па сме принудени да обработиме еден одбран примерок, еден мал избор од големиот број N, една мостра, еден егземплар, избирајќи ги елементите на еден случаен начин. Мораме да се служиме со метод на примероци (одбрани примероци).

Освен проблемот со големата бројност, ние не можеме и од други причини да работиме со целото множество $\{X_N\}$-статистичката маса, бидејќи тоа честопати мора да се уништи, на пример, цела резерва експериментални животни само за еден експеримент.

Така, се соочуваме со самата суштина на статистиката.

Пример 1. При пописот, 22 милиони Романци се попишуваат само за основни податоци, искажани со усмена изјава. Би било многу скапо во пописот да се земаат и други егзактни податоци, на пример антрополошки мери: висината, тежината и други детали и тие да се обработуваат. Затоа од тие 22 милиони Романци се избираат 10 000 од разни места во сите региони од годишни возрасти во интервал 2-3 години, и тие се мерат. Значи, одбран примерок се тие 10000.

Така сега се поставува следното:

Основно прашање. Дали од помалото множество егземплари може де се заклучи дека и поголемата статистичка маса се однесува на ист начин. Дали просекот на помалото множество е ист со просекот на целата маса, и дали правилностите во распределбата во малото множество се исти и се запазуваат како правилности и закони во целата статистичка маса.

Ова е централен проблем на биометријата и на статистиката.

Одговорот на ова прашање, ако е позитивен, дава право на експеримент, на донесување заклучоци од експеримент, на сигурност. Тоа дава право на индукција, на премин од малото множество кон поголемото.

Одговор на ова прашање, дава биометријата (т. е. статистиката) и тој е негативен. При тоа, основна улога игра видот на распределбата и стандардната девијација.

Одговорот се добива на следниот начин:

Нека статистичката маса биде составена од голем број примероци:

$$\{X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}, ..., X_p, ..., X_N\}$$

Практично, за нас е

$$N = \infty$$

бидејќи никогаш сите X_k не ќе можеме да ги "допреме", подредиме, измериме. На некој случаен начин избираме од оваа маса некое подмножество

$$\{X_2, X_5, ..., X_k, ..., X_m\}$$

кое содржи n елементи во некој редослед. Ако пренумерираме, го добиваме следниот егземплар:

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ со бројност } n << N.$$

Така имаме две множества

$$\{x_n\} \subset \{X_N\}.$$

кои имаат свои аритметички средини и стандардни девијации,

$$\overline{x}, \sigma_x \text{ и соодветно } \overline{X}, \Sigma_x.$$

Ние можеме лесно да ја пресметаме средината $\overline{x}$ и стандардната девијација σ_x на избраниот примерок, бидејќи n е конечен; но не можеме да ги најдеме $\overline{X}$ и Σ_X, бидејќи N е огромен или не е конечен, па аритметичките операции во сумите на $\overline{X}$ и Σ_X не можат да се извршат. Затоа се прашуваме може ли $(\overline{x}, \sigma_x)$ да се употребуват за прогноза на $\left(\overline{X}, \Sigma_X\right)$ и има ли врска меѓу овие основни параметри. Дали на пример важи

$$\overline{X} = \overline{x}? \text{ и } \Sigma_X = \sigma_x?$$

Одговорот на ова прашање го дава статистиката, со следната

Теорема. При статистички соодноси кога од една статистичка маса се одделува подмножеството

$$\{x_n\} \subset \{X_N\}$$

каде владее нормална распределба и каде $n << N$ може да се земе приближно

$$\overline{X} = \overline{x} \text{ и } \Sigma_X = \sigma_x.$$

Дефиниција. Бројот

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

каде σ_x е стандардна девијација на примерокот, а n е бројноста на примерокот, се вика стандардна грешка на проценката, и истиот ја претставува најголемата грешка на приближното равенство

$$\overline{X} \approx \overline{x}$$

т. е. σ_n е една горна граница за разликата меѓу двете аритметички средини

$$\left|\overline{X} - \overline{x}\right| \leq \sigma_n.$$

Со овие параметри $\overline{x}$ и σ_x може да се изврши и проценка на интервалот на сигнификантноста на големата статистичка маса со нормална распределба, имено

$$\overline{X} - 2\Sigma_X \leq X \leq \overline{X} + 2\Sigma_X$$

Ако замениме $\overline{X} = \overline{x}$, $\Sigma_x = \sigma_x$, имаме

$$\overline{x} - 2\sigma_x < X < \overline{x} + 2\sigma_x$$

и ја добиваме прогнозата:

95% од статистичката маса X се во интервалот

$$(\overline{x}-2\sigma_x, \overline{x}+2\sigma_x)$$

и само 5% елементи се надвор од овој интервал.

Средината $\overline{X}$ (која што не може да ја пресметаме) на целото статистичко множество се добива со помош на добиената средина на примерокот $\overline{x}$ со грешка $2\sigma_n$ и таа се наоѓа на интервалот

$$\overline{x}-2\sigma_n \leq \overline{X} \leq \overline{x}+2\sigma_n$$

т. е.

$$\overline{x}-\frac{2\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq \overline{x}+\frac{2\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

т. е.

$$\overline{X} \in \left[\overline{x}-\frac{2\sigma_x}{\sqrt{n}}, \overline{x}+\frac{2\sigma_x}{\sqrt{n}}\right].$$

Пример 2. Прогноза на староста на популацијата. Избрани се случајно 130 родилки кои раѓаат за првпат, и нивната старост е броена во моментот на раѓањето на првото дете. Најдена е средната старост на родилкитте $\overline{x}=21,8$ години. Стандардната девијација на тие 130 родилки е пресметана и изнесува 4,8 години. Колкава е просечната старост на сите жени родилки од таа популација, од која е избран примерокот, во момент на раѓањето на првото дете?

Решение. Имаме

$$n=130,\ \overline{x}=21,8;\ \sigma_x=4,8.$$

Оттука наоѓаме

$$\sigma_n=\tfrac{4,8}{\sqrt{130}}=0,42;\ 2\sigma_n=0,84.$$

Па интервалот на просекот на прводилките е

$$21,8-2\sigma_n \leq \overline{X} \leq 21,8+2\sigma_n$$
$$20,96\text{год.} \leq \overline{X} \leq 22,64 \text{ год.}$$

Значи, ако во целата популација X има на пример 100 000 родилки, нивната просечна старост при раѓањето на првото дете ќе биде меѓу 20,9 и 22,6 години.

Пример 3. Проблем на инсекти кои тешко се ловат. Се проучува множество од голем број инсекти, но кои многу тешко се ловат. Уловени се само 25 од тие инсекти со цел да се мери нивната должина. Така се извршени 25 мерења. Должините се групирани по класи со определени фреквенции, со чекор од $0,3mm$. Така е добиена следната табела:

x_i	f_t	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
3,4 mm	2	- 0,6	0,36	0,72
3,7	8	- 0,3	0,09	0,72
4,0	5	0,0	0,00	0,00
4,3	8	+ 0,3	0,09	0,72
4,6 mm	2	+ 0,6	0,36	0,72
$\bar{x} = 4$	$n = 25$	$\sum \Delta x_i = 0$	/	$\sum f_i \left(\Delta x_i\right)^2 =$ $= 2{,}88$

Се поставува основното прашање, може ли овој егземплар од 25 единки да биде сигнификатен и да ја заменува целата оваа огромна популација инсекти?

Ова би можело да биде суштинско прашање при испитување на тие видови.

Наоѓаме: $\bar{x} = 4,0$; $\sigma_x = 0,3394$; $C.V. = 0,085$; $C.V.\% = 8,5\%$ и стандардната грешка на проценката изнесува

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{0,34}{\sqrt{25}} = \frac{0,34}{5} = 0,07$$

Интервалот на просечната должина е

$$\overline{x} - 2\sigma_n \leq \overline{X} \leq \overline{x} + 2\sigma_n$$

$$4,0 - 0,14 \leq \overline{X} \leq 4,0 + 0,14$$

$$3,86\ mm \ \leq \overline{X} \leq \ 4,14\ mm$$

т. е. може да се очекува 95% од сите инсекти од овој вид да имаат средни должини кои се во овој интервал, а само 5% можат да бидат со средни должини надвор од овој интервал.

Пример 4. Проценка на квалитетот на стоката. Претпријатие нарачува волнени влакна со дебелина од 28 микрони, во големо количество. Кога стоката е дојдена во бали, треба да се провери дали таа е со тој баран квалитет, т. е. со дебелина од 28 микрони. Тоа може да се констатира само со методот на случајно одбрани примероци.

Вршени се 110 мерења на дебелината на влакната случајно извлечени од секоја бала, на разни места од балата, случајно избрани (штих-проби). Така е најдена аритметичката средина на егземпларот $\overline{x} = 27,6$ микрони, и е пресметана стандардната девијација која изнесува 3 микрони. Дали може да се претпостави дека отстапувањето од 27,6 микрони до 28 микрони е случајно т. е. во рамките на дозволеното; или отстапувањето не може да се дозволи, и стоката не е квалитетна ?

Одговор. $n = 110, \quad \overline{X} = 28\mu; \quad \sigma_x = 3\mu, \quad \overline{x} = 27,6\mu$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{110}} = 0,286\,\mu$$

Интервалот на средината на популацијата е

$$\overline{X} - 2\sigma_n \leq \ \overline{x} \ \leq \overline{X} + 2\sigma_n$$

$$28 - 0,572 \leq \ \overline{x} \ \leq 28 + 0,572$$

$$27,428 \;\leq\; \overline{x} \;\leq\; 28,572$$

Бидејќи е измерена средна дебелина $\overline{x} = 27,60$ и таа е меѓу овие вредности, т.е.

$$27,428 \;<\; 27,60 \;<\; 28,572$$

и бидејќи разликата меѓу двете средини $\overline{X}$ и $\overline{x}$

$$\left|\overline{X} - \overline{x}\right| = 28 - 27,6 = 0,4 < 2\sigma_n = 0,572$$

е помала од двојна стандардна грешка на проценката тоа значи дека средното влакно е во интервалот на доверливоста, што значи дека стоката е исправна, и може да се прими. Отстапувањата се случајни и се дозволени.

4.16 Поим за корелација

Во биологијата ништо не се случува независно едно од друго. Секоја појава има свој причинител, и свои последици. Нема издвоени, изолирани, независни појави. Ако се разгледува и мери некоја карактеристика X, тогаш секогаш постои барем уште една карактеристика Y, на некој начин поврзана со X. А ги има обично повеќе, кои се во поголема или помала мерка поврзани со X. Вакви врски и зависности меѓу X и Y во математиката ги викаме функции. Во биологијата ги има толку многу, што не можат да бидат сите опишани. Ние во книгава веќе имавме многу работа токму со функциите.

Пример. При секое мерење карактеристиката е придружена од својата фреквенција. Така ја имаме следната добро позната табела:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$

Таа определува табеларно една функција $y = f(x)$ т. е. зависности меѓу карактеристики и нивните фреквенции. Видовме дека оваа функција во случај на нормалната распределба може многу точно да се прикаже и аналитички, со формула, преку Гаусовата нормална функција на распределбата:

$$y = f(x) = \frac{n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Така имаме два облика за една иста фунцкија. Првиот облик-табеларен, е добиен од мерењето, од експериментот, на најнепосреден и најприроден пат. Но, честопати тој не ја покажува доволно јасно зависноста, т.е. таа треба да се открива со анализа. Вториот облик - формулата, е добиен со математичка генерализација, низ разгледување на голем број вакви појави.

Една од задачите на математиката и статистиката е да открива законитости ако се располага со податоци добиени од некој експеримент. По можност, пожелно е тој закон да биде даден во кратка форма, какви што се обично големите физички и хемиски закони.

Но тоа не е секогаш можно, бидејќи за биологијата се карактеристични врските меѓу повеќе големини, кои се тешки за математичко опишување. Притоа, една големина зависи од повеќе од нив, или од сите, и истовремено и сите зависат меѓу себе. Така имаме секогаш всушност функции од повеќе променливи.

Пример. Во точката за нормална распределба имавме табела во која висините на луѓето се во врска со нивната фреквенција $f(x)$, и тоа беше една типична функција од една независна променлива од горниот облик (табеларен и аналитички). Но, истите луѓе имаат и тежина, а од искуство знаеме дека повисоките луѓе имаат поголема тежина т. е. тежината е правопропорционална со висината. Овде терминот пропорционалност не е во буквална смисла, но треба да се сфати само начелно, во маса појави и податоци. Токму овој вид порпорционалност во општа смисла е најважен вид на функционална зависност во биологијата, која се вика корелација. Таа може математички да се формулира на следниот начин:

Нека е x висината на луѓето во cm, и нека е $f(x)$ фреквенцијата на луѓето според висините x. Нека е y тежината на луѓето и нека е $F(y)$ фреквенција на луѓето според нивната тежина, при што f и F, во општ случај, се сосема различни функции. Се поставува сега основно прашање, каква врска постои меѓу висината x, тежината y, фреквенциите $f(x)$ и $F(y)$, и има ли една заедничка фреквенција и по висина и по тежина т. е. функција од две независни променливи (x, y). На сличен начин можат во биологијата да се отворат прашања во врска во функциите од повеќе променливи: $x, y, z, ..., t$:

$$W = W(x, y, z, ..., t)$$

Ние на почетокот ќе се задржиме само на функции од две независни променливи, т. е. ќе разгледаме заеднички фреквенции $f(x, y)$ од две мерени карактеристики, кои не се сосема независни во математичка смисла.

Со некои мерења на висините и тежините констатирани се следниве податоци:

y=тежина во kg	x \ y	x=Висина во cm									cm
		157,5	161,5	165,5	169,5	173,5	177,5	181,5	185,5	$f_j(y)$	$\overline{x_i}$
	54 kg	9	23	13	4	1				50	162,70
	59	10	31	51	40	7	1			140	165,67
	64	3	12	51	72	44	9	3		194	169,23
	69		3	17	42	55	37	11	3	168	173,0
	74		2	4	10	21	18	12	1	68	174,74
	79				1	8	5	3	2	19	176,87
	84					3	1	2	2	8	179,00
	89							1		1	181,50
	$f_i(x)$	22	71	136	169	139	71	32	8	648	
kg	$\overline{y_j}$	57,64	59,07	62,09	64,50	68,46	70,41	72,91	75,88		

Ако ја разгледаме табелата, можеме да го констатираме следното:

Прво, карактеристиките x и y се однесуваат до класи резултати. На пример, височината $x = 157,5cm$ значи во таа класа сите висини x се меѓу 155, 5 cm и $159,5cm$;

Слично, $x = 161,5$ значи ова x да ги опфаќа и ги заменува сите висини меѓу 159, 5 и 163,5:

$$x = 161,5 \Leftrightarrow 159,5 \leq x \leq 163,5cm$$

Слично, $y = 54kg$ значи:

$$51,5kg \leq y \leq 56,5kg \text{ итн.}$$

Второ, нормалната дистрибуција на фреквенциите, на која сме свикнале, има само по хоризонтала, т. е. за една тежина y има нормална дистрибуција на x. Но за една висина x има различни тежини y чија распределба на фреквенциите не е од проучениот тип. Ако формираме двојки:

$$(\text{висина, тежина}) = (x, y)$$

и бараме фреквенција во однос на пар податоци, ќе добиеме трет одговор. Гледаме дека прашањето сега не е така едноставно: и има и нема нормална дистрибуција. Освен тоа, можеме да бараме посредно, преку фреквенциите, и врска меѓу x и y. Се прашуваме, може ли од табелата да се заклучи која правилност постои меѓу x и y, бидејќи ние од просто искуство знаеме дека таква мора да постои. Но, да се одговори на тоа не е така едноставно: на една висина и одговара не една тежина, туку повеќе, и обратно. Затоа ние немаме избор туку на секоја висина да и определиме просечна тежина, со помош на аритметичка средина. На пример, ако на височината $x = 157,5cm$ и одговараат

тежини $y \in \{54, 59, 64\}$

со фреквенции $f(y) \in \{9, 10, 3\}$

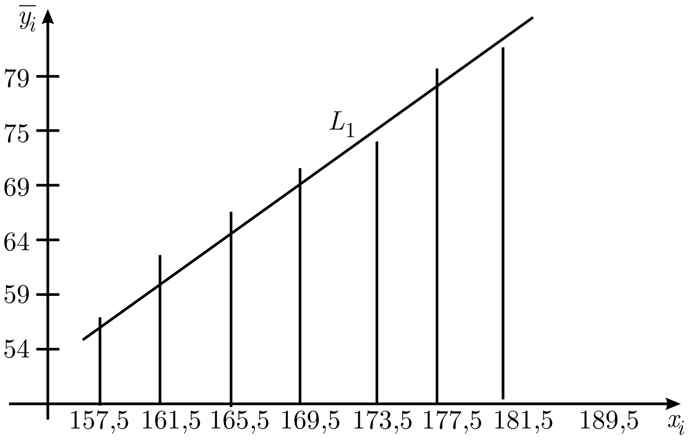
од нив ја добиваме просечната тежина

$$\overline{y} = \frac{9 \cdot 54 + 10 \cdot 59 + 3 \cdot 64}{22} = 57,64.$$

На ваков начин, на секоја поединечна висина x определуваме просечна тежина

$x_1 = 157{,}5cm$	$\overline{y_1} = 57{,}64$
$x_2 = 161{,}5$	$\overline{y_2} = 59{,}07$
$x_3 = 165{,}5$	$\overline{y_3} = 63{,}08$
$x_4 = 169{,}5$	$\overline{y_4} = 64{,}50$
$x_5 = 173{,}5$	$\overline{y_5} = 68{,}48$
$x_6 = 177{,}5$	$\overline{y_6} = 70{,}41$
$x_7 = 181{,}5$	$\overline{y_7} = 72{,}91$
$x_8 = 189{,}5$	$\overline{y_8} = 75{,}88$

Ако формираме точки со координати $(x, \overline{y})$ и ги претставиме графички добиваме еден распоред на точки кој е скоро линеарен, т. е. точките се распоредени скоро по една права.



Забележуваме дека врската меѓу висините и соодветните просечни тежини за секоја висина е скоро линеарна што од табелата не можеме веднаш да увидиме. Овој график значи дека сепак постои правилност меѓу големините x и y и надвор од нормалната распределба.

На ист начин можеме да бараме врска, обратно меѓу тежината y и висината x. За една тежина y имаме повеќе висини. На пример за тежината $y = 54kg$ имаме соодветни

висини $x \in \{157,5; 161,5; 165,5; 169,5; 173,5\}$

со фреквенции $f(x) \in \{9; 23; 13; 4; 1\}$

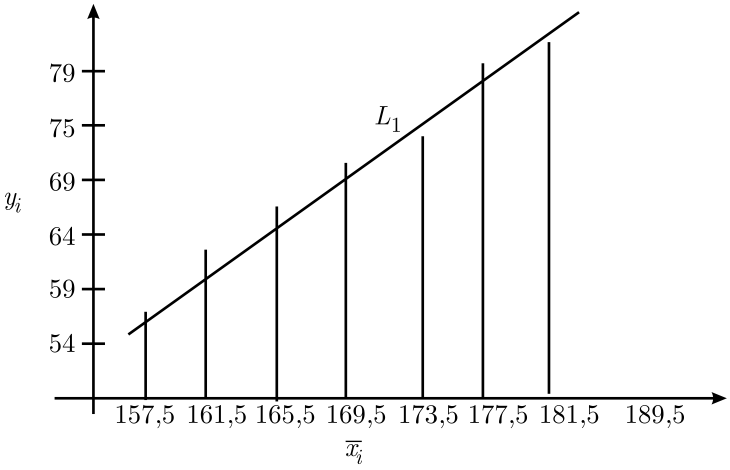
па нивната аритметичка средина е просечната висина:

$$\bar{x}_1 = \frac{9 \cdot 157,5 + 23 \cdot 161,5 + 13 \cdot 165,5 + 4 \cdot 169,5 + 1 \cdot 173,5}{9 + 23 + 13 + 4 + 1} = 162,70.$$

Ако на овој начин за секоја една тежина пресметаме средни просеци на висините, имаме двојни вредности:

$y_1 = 54kg$	$\overline{x_1} = 162{,}70cm$
$y_2 = 59$	$\overline{x_2} = 165{,}67$
$y_3 = 64$	$\overline{x_3} = 169{,}23$
$y_4 = 69$	$\overline{x_4} = 173{,}0$
$y_5 = 74$	$\overline{x_5} = 174{,}74$
$y_6 = 79$	$\overline{x_6} = 176{,}87$
$y_7 = 84$	$\overline{x_7} = 179{,}00$
$y_8 = 89$	$\overline{x_8} = 181{,}50$

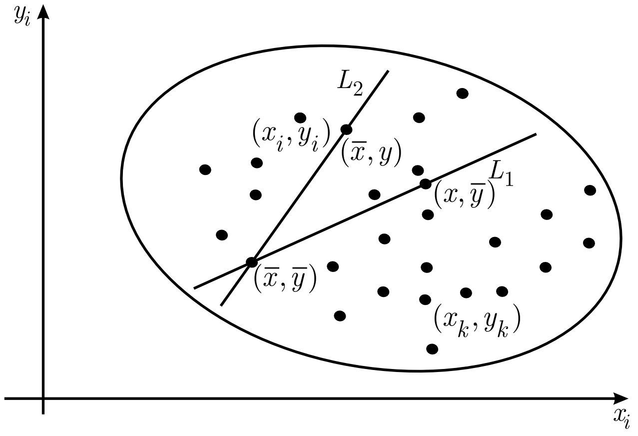
Ако формираме точки со координати $(\overline{x}, y)$, и ги претставиме графички добиваме еден распоред на точки кој е скоро линеарен, т. е. точките се распоредени скоро по една права.



Ако сега посебно претставиме секој пар мерени вредности:

$$(\text{висина, тежина}) = (xkg, ycm)$$

како една точка, и тоа го направиме со секоја двојка, без да бараме средини, ќе добиеме еден облак точки, ограничен со димензиите на табелата.



Ако на овој ист координатен систем ги нанесеме истите добиени прави, заради споредба тие ќе бидат различни. Тоа значи дека врската меѓу x_i и соодветни средини $\bar{y}_i$ и не е иста со врската меѓу $\bar{x}_i$ и y_i. Значи, едно нешто е функцијата меѓу тежината на телото и соодветните висини, а друго нешто е врската меѓу висината на телото и соодветните тежини. Оваа појава е карактеристична за таканаречените стохастички процеси. Во нив врските $x_i \leftrightarrow y_i$ се викаат корелации, или корелациони врски, и се основни математички типови функции во биологијата. Тие заслужуваат поподробно да ги објасниме.

4.17 Стохастички процеси. Линеарна корелација

Во егзактната математика, при функциите определи со строгиот знак $=$, со строгата формула $y = f(x)$ е определено едно геометриско место на точки (x, y), во кое x е прва координата, а y е втората. Тоа е некоја линија (крива или права L) на која точно лежат сите точки (x, y). Ако се искористи инверзната функција, која се добива кога равенството $y = f(x)$ ќе се реши по $x : x = x(y)$

и вака сега се формираат парови точки со координати $(y, x(y))$, нивното геометриско место ќе биде истата таа крива линија L. На пример, ако функцијата е парабола $y = x^2$, инверзната функција ќе биде $x = \sqrt{y}$ а тоа е истата таа парабола, само сега првата координата нека е y, а втората $x(y)$, така што параболата има друга положба. Во овој случај имаме директна функција $y(x)$ и инверзна функција $x(y)$, кои не ги сметаме за различни, бидејќи се зададени со истата формула.

Ако во биолошките прочувања мериме некои зависности, најчесто добиваме табели со фреквенции како во горниот пример. Ако секој мерен пар вредности (x_i, y_j) го нанесеме како точка во координатниот систем, ќе го добиеме веќе спомнатиот облак од точки во XOY рамнината. Тоа е едно конечно, ограничено и дискретно множество. Тоа множество прикажува (табеларно и графички) една "функција", исто како функциите од строгата математика определени со строгото равенство. Овие "функции" се очигледно еден сосема нов вид функции, едни нестрого математички определени функции со множество дискретни (одделни) податоци, кои ги викаме стохастички функции. Јасно е дека постои биолошка врска меѓу вредностите x и y, но тоа не може така просто математички да се искаже. Биолошки процес кој доведува до појава, врска и промена на заемно поврзаните величини, математички носи име стохастички процес, а самата врска $x \leftrightarrow y$ стохастичка функција. (Зборот "стохастички" доаѓа од еден грчки збор кој значи насетувам). Во горното множество од точки (x_i, y_j) (облак, маса) се одделуваат како посебни функции врските меѓу x_i и соодветни средини $\overline{y_i}$ и врските меѓу средините $\overline{x}_i$ и соодветни y_i. Тоа се правите $L_1(x_i, \overline{y}_i)$ и $L_2(\overline{x_i}, y_i)$. Тие со својата различност означуваат дека една е врската меѓу точките $(x_i, \overline{y}_i)$, а друга меѓу точките $(\overline{x}_i, y_i)$. Гледаме дека при стохастичките процеси директната и инверзната функција битно се различни, и познавањето на едната не значи познавање и на втората; туку и двете можат да се осознаат само ако се знае целиот стохастички процес. Гледаме дека стохастичка врска не е исто што и функционален однос од егзактната математика, но сепак тоа е јасно одбележана врска, во овој случај со помош на две прави. Оваа стохастичка врска се вика уште и корелација (тоа е латински збор што значи врска, поврзување). Во нашиот пример имаме корелација меѓу висини x и соодветни тежини y, и друга корелација меѓу тежини y и соодветни висини x. Ако таа корелација се определува со две прави

$$L_1 : (x_i, \overline{y_i}) \leftrightarrow (\overline{x_i}, y_i) : L_2$$

таа се вика **линеарна корелација**. Но не секогаш групирањето по средини дава задолжително линеарни врски. Можни се и чести се и нелинеарните врски. Тогаш велиме дека имаме работа со нелинеарна или криволиниска корелација. Во биологијата најчеста е линеарна корелација, и затоа ние овде ќе разгледуваме само линеарна корелација.

Примерот со тежини и висини ќе го формулираме математички во општ случај:

Нека имаме колектив во кој мериме две разни обележја x и y, меѓусебно зависни. На едно одбрано x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ му припаѓаат повеќе разни y_{i_j}:

$$x_i \leftrightarrow y_{i_j},\ i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, l$$

или

$$y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}, \cdots, y_{i_l}$$

при што секој y_{i_j} се јавува со некоја своја фреквенција f_{i_j}, соодветно, т.е.

$$f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}, \ldots f_{i_l}.$$

Ако сега пресметаме аритметичка средина на сите овие y_{i_j} кои соодветуваат на едно избрано x_i имаме

$$\overline{y}_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} y_{i_j} \cdot f_{i_j}}{l_i} = Y_i, l_i = \sum_{j=1}^{l} f_{i_j}$$

и ставиме еднозначна кореспонденција

$$x_i \text{ со соодветно } Y_i.$$

Добиваме геометриско место на точки кое го нарековме крива на корелација, но кое се вика и крива на регресија, определена со точките

$$M_i(x_i, Y_i), i = 1, 2, ..., k$$

(во општ случај тоа е нелинеарна регресија). Во нашиот пример тоа е правата L_1. Слично, нека на едно одбрано y_j, $j = 1, 2, 3, \ldots, l$ му припаѓаат повеќе разни x_{j_i}

$$y_j \leftrightarrow x_{j_i},\ j = 1, 2, \ldots, l,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

или

$$x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_k}$$

при што секој x_{j_i} се јавува со некоја своја фреквенција f_{j_i}, соодветно, т.е.

$$f_{j_1}, f_{j_2}, f_{j_3}, \ldots, f_{j_k}.$$

Ако пак сега пресметаме аритметичка средина на овие x_{j_i}, имаме

$$\overline{x}_j = \frac{\sum\limits_{s=1}^{k} f_{j_s} \cdot x_{j_s}}{k_j} = X_j,\ k_j = \sum_{s=1}^{k} f_{i_s}$$

и добиената средина X_j ја ставиме во кореспонденција со y_j, па имаме еднозначна врска

$$X_j \leftrightarrow y_j$$

што ја нарековме корелација, а геометриското место опредлено со новите точки

$$N_j(X_j, y_j),\ j = 1, 2, ..., l$$

го нарекуваме крива на регресија. Во нашиот пример тоа е втората права L_2. Видовме и практично дека геометриските места определени со M_i и N_j не се исти, и дека е комплицирано да се бара нивната причинска врска.

Истражувањето на корелационите врски е едно од основните математички прашања во биометријата.

Пример. Забележана е врската меѓу појавата на туморни клетки на едно растение, и каракеристични црвени флеки на стеблото од дрвото на истото растение. Нека x биде забележување на симптомите на канцер на еден примерок растение, а y појава на цијанизирани флеки врз стеблото (0−значи отсуство на симптомите, 1−појава на симптомите во основата на стеблото, 2−појава на симптомите подолу од половината на стеблото, 3−појава на симптомите над половината или по целото стебло). Добиени се следните податоци од случајно избрани $n = 100$ стебла:

$$\begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} x & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc} 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

Ако ги подредиме овие резултати по фреквенции на отсуство на појавата, со слаби или силни симптоми, добиваме:

x y	0	1	2	3	$\sum f(x)$
0	19	9	11	3	42
1	3	4	3	1	11
2	5	3	4	6	18
3	3	9	11	6	29
$\sum f(y)$	30	25	29	16	$n=100$

Да се најдат правите L_1 и L_2 на оваа корелација.

Задача. Измерена е должината на најголемиот лист на стеблото, која што е во корелација со висината на растението.

y x	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	$\sum f(x)$
35-41		1			1					2
42-48		2		2	3	1				8
49-55		1	1	3	4	2				11
56-62	1		1	5	1	4	2			14
63-69			1	1	5	3		2	1	13
70-76		1		2		4	1			8
77-83						2	1			3
84-90				1		1		1		3
$\sum f(y)$	1	5	3	14	14	17	4	3	1	$n = 62$

Да се определат корелационите закони $(x, \overline{y}) = L_1$ и $(\overline{x}, y) = L_2$.

4.18 Моменти

Стохастичките процеси и кривите на регресија во биометријата се проучуваат со помош на моменти. Како што знаеме, моменти се видови суми од производи кои се формираат на следниот начин:

Ако имаме некои обележја (бројни карактеристики):

$$x_i \qquad\qquad y_j$$

и нивни средини

$$\bar{x} \qquad\qquad \bar{y},$$

тогаш отстапувања од средината се

$$x_i - \bar{x} \qquad\qquad y_j - \bar{y}.$$

Ако овие равенки ги степенуваме соодветно со r, s добиваме

$$(x_i - \bar{x})^r, \qquad\qquad (y_j - \bar{y})^s \qquad\qquad r,\ s\text{-природни броеви}$$

и ако формираме двојки $(x_i\ ,\ y_j)$, фреквенцијата на овие двојки е

$$f_{ij} = f_{ij}\left(x_i\ , y_j\right).$$

Дефиниција. Момент од ред r, s е збир од производи од степени на отстапувањата помножен со соодветни фреквенции, и поделен со вкупната бројност:

$$\mu_{r,s} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} f_{ij}(x_i - \bar{x})^r (y_j - \bar{y})^s$$

Момент е според тоа еден вид просечно отстапување од средината од ред r, s.

(Името му е дадено по аналогија со механиката, каде момент на силата е производ меѓу силата и растојанието). Овие моменти $\mu_{r,s}$ се многу важни поими во биометријата и статистиката, и ќе видиме дека скоро сите досегашни биометриски показатели се еден вид моменти.

Но пред се треба да го објасниме симболот за операција двојна сума.

Симболот

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} x_i y_j$$

значи дека треба да земеме едно i, на пример $i = 1$, и x_1 да го множиме со сите можни $y_{j,}$ $j = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ l$, и да ги собереме овие производи, т.е.

$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + ... + x_1y_l = x_1(y_1 + ... + y_l).$$

Потоа да земеме $i = 2$ и x_2 да го помножиме со сите y_j, т.е.

$$x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + ... + x_2y_l = x_2(y_1 + y_2 + ... + y_l)$$

итн, се до крај, па за $i = k$, x_k го множиме со сите y_j, т.е.

$$x_ky_1 + x_ky_2 + x_ky_3 + ... + x_ky_l = x_k(y_1 + y_2 + ... + y_l)$$

и на крај сите овие суми ги собираме. Така добиваме

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} x_iy_j = x_1\sum_{j=1}^{l} y_j + x_2\sum_{j=1}^{l} y_j + ... + x_k\sum_{j=1}^{l} y_j =\\&= (x_1 + x_2 + ... + x_k)\sum_{j=1}^{l} y_j =\\&= x_1y_1 + ... + x_1y_l + ... + x_2y_l + ... + x_ky_1 + x_ky_2 + ... + x_ky_l\end{aligned}$$

што значи дека двојната сума го содржи збирот од семожните производи x_iy_j.

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{5} 3^n(5-n) = 3^1\,(5-1) + 3^2(5-2) + 3^3(5-3) + 3^4(5-4) + 3^5(5-5) =$$

$$= 3\cdot 4 + 9\cdot 3 + 27\cdot 2 + 81\cdot 1 + 243\cdot 0 = 12 + 27 + 54 + 81 = 174.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} 2^i3^j = 2^1(3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 2^2(3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) +\\&+ 2^3(3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = (2 + 4 + 8)(3 + 9 + 27 + 81) = 14\cdot 120 = 1680.\end{aligned}$$

Во овие примери двојната сума се распаѓа на производ од обични суми. Во општ случај, кога имаме коефициенти кои зависат од i и j без да се вид на независни производи, како во случајот на погорните фреквенции, момент во вид на двојна сума се развива на следниот начин:

Земаме едно $i : i = 1$ и така имаме прв множител:

$$(x_1-\bar{x})^r \text{ при постојано } r$$

и ова го множиме со сите

$$(y_1-\bar{y})^s,\ (y_2-\bar{y})^s,\ ...,(y_l-\bar{y})^s$$

со соодветни фреквенции

$$f_{11}\ f_{12},\ ...,f_{1l}$$

и овие производи ги собираме. Така добиваме сума

$$(x_1-\bar{x})^r\left[f_{11}(y_1-\bar{y})^s+f_{12}(y_2-\bar{y})^s+...+f_{1l}(y_l-\bar{y})^s\right]$$

Потоа земаме второ $i : i = 2$, и член

$$(x_2-\bar{x})^r$$

и множиме соодветно со сите

$$(y_1-\bar{y})^s,\ (y_2-\bar{y})^s,\ ...,(y_l-\bar{y})^s$$

чии фреквенции се

$$f_{21},\ f_{22},\ ...,\ f_{2l}.$$

Така добиваме втора сума

$$(x_2-\bar{x})^r\left[f_{21}(y_1-\bar{y})^s+f_{22}(y_2-\bar{y})^s+...+f_{2l}(y_l-\bar{y})^s\right]$$

итн.

Вака одиме до крај: последното $i = k$ дава член

$$(x_k-\bar{x})^r$$

кој го множиме по ред со сите

$$(y_1-\bar{y})^s,\ (y_2-\bar{y})^s,\ ....,\ (y_l-\bar{y})^s$$

така што фреквенциите на овие производи се

$$f_{k1},\ f_{k3}\ ...,\ f_{kl}$$

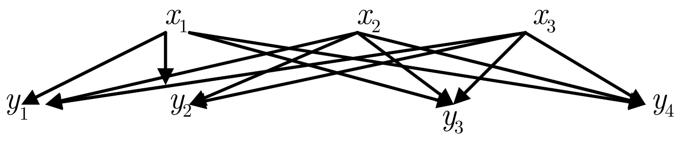
и добиваме и k-та по ред сума

$$(x_k-\bar{x})^r\left[f_{k1}(y_1-\bar{y})^s+f_{k2}(y_2-\bar{y})^s+....+f_{kl}(y_l-\bar{y})^s\right].$$

Така моментот гласи

$$\begin{aligned}\mu_{r,s}=\frac{1}{N}\Bigg\{&(x_1-\bar{x})^r\cdot\sum_{j=1}^{l}f_{1j}(y_j-\bar{y})^s+\\&+(x_2-\bar{x})^r\cdot\sum_{j=1}^{l}f_{2j}(y_j-\bar{y})^s+\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&+(x_k-\bar{x})^r\cdot\sum_{j=1}^{l}f_{kj}(y_j-\bar{y})^s\Bigg\}\end{aligned}$$

Пример 4. Ако имаме корелација



каде секој x_i е во релација со секој y_j, $i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4;$ имаме појава на парови со соодветни фреквенции:

$$\begin{array}{cccc}(x_1,\ y_1), & (x_1,\ y_2), & (x_1,\ y_3), & (x_1,\ y_4)\\ f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14}\\ (x_2,\ y_1), & (x_2,\ y_2), & (x_2,\ y_3), & (x_2,\ y_4)\\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24}\\ (x_3,\ y_1), & (x_3,\ y_2), & (x_3,\ y_3), & (x_3,y_4)\\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34}\end{array}$$

Ако се $\bar{x}$ и $\bar{y}$ аритметички средини од податоците x_i и y_j моментот, при $N=\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{3}f_{ij}$, е

$$\mu_{r,s} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} f_{ij}(x_i-\bar{x})^r(y_j-\bar{y})^s =$$

$$\begin{aligned}&= \tfrac{1}{N}\left\{(x_1-\bar{x})^r[f_{11}(y_1-\bar{y})^s + f_{12}(y_2-\bar{y})^s + f_{13}(y_3-\bar{y})^s + f_{14}(y_4-\bar{y})^s]+\right.\\ &+(x_2-\bar{x})^r[f_{21}(y_1-\bar{y})^s + f_{22}(y_2-\bar{y})^s + f_{23}(y_3-\bar{y})^s + f_{24}(y_4-\bar{y})^s]+\\ &\left.+(x_3-\bar{x})^r[f_{31}(y_1-\bar{y})^s + f_{32}(y_2-\bar{y})^s + f_{33}(y_3-\bar{y})^s + f_{34}(y_4-\bar{y})^s]\right\}.\end{aligned}$$

Во прво време во биометријата се работи само со најобични моменти. Тоа се таканаречените (за мали вредности на r,s)

Основни моменти:

1. Нека е $r = 1$,$s = 0$. Добиваме

$$\begin{aligned}\mu_{1,0} &= \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(x_i-\bar{x})^1(y_j-\bar{y})^0 =\\ &= \tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{x})^1 = \tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(\Delta x_i) = 0\end{aligned}$$

т. е. моментот $\mu_{1,0}$ е збир на сите отстапувања на податоците x од нивната средина

2. Нека е $r = 0$,$s = 1$. Добиваме

$$\begin{aligned}\mu_{0,1} &= \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(x_i-\bar{x})^0(y_j-\bar{y})^1 =\\ &= \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{l} f_j(y_j-\bar{y})^1 = \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}(\Delta y_j) = 0\end{aligned}$$

т. е. моментот $\mu_{0,1}$ е збир на сите отстапувања на y од својата средина $\bar{y}$, којшто теоретски е рамен на нула.

3. Нека $r = 2$,$s = 0$. Добиваме

$$\mu_{2,0} = \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(x_i-\bar{x})^2(y_j-\bar{y})^0 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\bar{x})^2 = \sigma_x^2$$

т. е. моментот $\mu_{2,0}$ е стандардна девијација на податоците на x дигната на квадрат.

4. Нека е $r=0,\ s=2$. Добиваме

$$\mu_{0,2}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}f_{ij}(x_i-\overline{x})^0\,(y_j-\overline{y})^2=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}f_j(y_j-\overline{y})^2={\sigma_y}^2$$

т. е. моментот $\mu_{0,2}$ стандардна девијација на податоците по y, дигната на квадрат.

5. Нека е $r=1,\ s=1$. Имаме

$$\mu_{1,1}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}f_{ij}(x_i-\overline{x})^1(y_j-\overline{y})^1$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}f_{ij}\,(\Delta x_i)\,(\Delta y_j)$$

т. е. моментот $\mu_{1,1}$ е збир од производи од отстапувањата $\Delta x_i\cdot\Delta y_j$.

Така имаме

$$\mu_{2,0}={\sigma_x}^2\ ;\ \mu_{0,2}={\sigma_y}^2\ ;\ \mu_{1,1}=\tfrac{1}{N}\sum_{i,j}(\Delta x_i)\,(\Delta y_j)\,.$$

4.19 Метод на најмали квадрати

Определување на корелацијата

Нека множеството карактеристики X и Y се во корелација:

$$X\leftrightarrow Y$$

Тоа значи дека секој x_i е во корелација со некои големини

$$y_{ij};i=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,l.$$

Така имаме едно множество точки;

$$M_i\left(x_i, y_{ij}\right), \ i = 1, 2, \ldots, k; \ j = 1, 2, \ldots, l$$

кое формира облак точки во рамнината, и кој графички ја претставува горната корелација. Со цел да ја математизираме оваа стохастичка функција, на секое едно x_i му придружуваме средина Y_i од сите соодветни y_{ij}

$$x_i \leftrightarrow Y_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l} f_{ij} y_{ij}$$

и така добиваме геометриско место на точки, L_1 (крива на регресија) определена со точките

$$M_i\left(x_i, \, Y_i\right)$$

кое е најчесто права.

Наша задача ќе биде да ја определиме оваа права L_1. Равенката на секоја права е

$$y = ax + b$$

каде параметрите a и b треба да ги определиме така што точките (x_i, Y_i) да лежат или на правата, или што е можно поблиску до правата. Практично сакаме да важи

$$Y_i = ax_i + b$$

каде Y_i е средина. Но, на едно x_i му кореспондираат повеќе соодветни вредности y_{ij} (корелациони вредности), ги има l на број

$$y_{i1}, \, y_{i2}, \, y_{i3}, \ldots, y_{il}.$$

Овие вредности се наоѓаат во околината на правата L_1, имаат иста апсциса x_i, но отстапуваат од L_1 повеќе или помалку во + или − насока. Обично збирот на отстапувањата е

$$\sum_{j=1}^{l}(y_{ij}-Y_i)=0$$

т.е. би бил еднаков на нула, како што знаеме, бидејќи позитивните би се поништиле со негативните отстапувања. Затоа со него не можеме да работиме (т. е. со моментот $\mu_{1,0}$). Бараме таква права L_1, од која сите отстапувања

$$y_{ij}-Y_i$$

ќе бидат што е можно помали. Затоа отстапувањата ќе бидат најмали, ако е збирот од квадратите на тие отстапувања најмал. Математичка постапка која утврдува услови збирот на квадратите на отстапувањата да биде најмал се вика метод на најмали квадрати и е основен метод на минимализација и оптимизација во биометријата.

Збирот на квадратите на отстапувањата по y се определува како позитивна функција

$$S_y^2=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}f_{ij}(y_{ij}-Y_i)^2$$

и според тоа е еден вид момент. Но, бидејќи $Y_i=ax_i+b$, со замена во S_y^2 добиваме

$$S_y^2=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}f_{ij}\left(y_{ij}-ax_i-b\right)^2.$$

Во оваа сума ќе земеме параметарот a привремено да е фиксиран. Бидејќи се x_i, y_{ij}, f_{ij} дадени постојани вредности, S_y^2 е функција само од една променлива b. Од математичката анализа е позната теоремата (Принцип на Ферма на екстреми), па за да ги добиеме можните екстреми (минимум или максимум), треба да ги најдеме вредностите во кои нејзиниот извод е еднаков на нула, т. е. да ја решиме равенката

$$\left(S_y^2\right)'_b = 0$$

за едно фиксно a. Ако побараме извод од S_y^2 по b, добиваме

$$\left(S_y^2\right)'_b = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} 2f_{ij}(y_{ij} - ax_i - b)^1 \cdot (-1) = 0$$

од каде, ако скратиме со (-2), добиваме равенка

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\left(y_{ij} - ax_i - b\right) = 0.$$

Ако помножиме со f_{ij} и разложиме на три суми, добиваме

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}y_{ij} - a\cdot\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}x_i - b\cdot\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij} = 0.$$

Бидејќи, според претходните дефиниции

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}y_{ij} = \overline{y};\ \ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}x_i = \overline{x};\ \ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij} = \frac{1}{N}\cdot N = 1$$

добиваме

$$\overline{y} - a\overline{x} - b\cdot 1 = 0$$

од каде го определуваме непознатиот параметар

$$b = \overline{y} - a\cdot\bar{x}$$

а ова значи дека е $\overline{y} = a\overline{x} + b$ т. е. на правата $y = ax + b$ лежи точката $(\overline{x},\ \overline{y})$. Ако сега вака определеното b го замениме повторно во сумата од квадратни отстапувања по $y : S_y^2$, добиваме

$$S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(y_{ij} - ax_i - \overline{y} + a\overline{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}[(y_{ij} - \overline{y}) - a\,(x_i - \overline{x})]^2.$$

Така сега S_y^2 е функција само од a : $S_y^2 = S_y^2\,(a)$, при дадени x_i, y_{ij}, $\overline{x}$, $\overline{y}$, f_{ij}. Непознатото a ќе го определиме по ист принцип, сумата на квадратите S_y^2 на отстапувањата по y да е најмала. Според истиот Ферма-ов принцип, изводот, сега по a, мора да е рамен на нула:

$$\left(S_y^2\right)'_a = 0$$

од каде

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\cdot 2\,[(y_{ij} - \overline{y}) - a\,(x_i - \bar{x})]^1\,(-1)\,(x_i - \overline{x}) = 0.$$

Ако скратиме со (-2) измножиме со $(x_i - \overline{x})$, и разликата ја разложиме на две суми, добиваме

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\,(y_{ij} - \overline{y})\,(x_i - \overline{x}) - a\cdot\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(x_i - \overline{x})^2 = 0.$$

Според дефиницијата на моментите

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\,(\Delta y_j)\,(\Delta x_i) = \mu_{1,1};\quad \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\,(x_i - x)^2 = {\sigma_x}^2$$

добиваме

$$\mu_{1,1} - a \cdot {\sigma_x}^2 = 0$$

од каде го определуваме и a, т.е.

$$a = \frac{\mu_{1,1}}{{\sigma_x}^2}.$$

Заменувајќи ги вака определените a и b во равенката на правата, добиваме права на регресија L_1:

$$Y - \overline{y} = \frac{\mu_{1,1}}{{\sigma_x}^2} \left(x - \overline{x} \right).$$

Од сите можни прави во областа на резултатите на мерењето, оваа права е најблиска кон точките со средините (x_i, y_i) во еден стохастички процес. Според тоа, таа ја определува корелацијата

$$x_i \leftrightarrow y_{ij}$$

во која на едно x_i му кореспондираат повеќе y_{ij}.

Така L_1 е проста математичка функција која во вид на строга формула приближно изразува една сложена статистичка зависност на биолошките големини x и y, итн.

Но, ако сега бараме обратна стохастичка врска, т. е. за едно y_i законот на кој му кореспондираат повеќе x_{ij}, видовме на пример дека тоа нема да биде функцијата L_1. Затоа мораме работата за нејзиното определување да ја изведеме посебно.

Нека се y_j некои мерни карактеристики, на кои им одговараат сетови други корелационо врзани големини x_{ij} кои имаат средини $\bar{x}_j = X_j$. Геометриското место на точки $(\bar{x}_i, y_j)$ нека биде нова права L_2 со нови параметри A и B:

$$y = AX + B$$

На неа или блиску до неа лежи точката (X_j, y_j) и затоа важи, точно или приближно

$$y_j = AX_j + B.$$

Соодветните корелациони вредности x_{ij} отстапуват од правата L_2 и тие отстапувања изнесуваат

$$x_{ij} - X_j.$$

Ако на ист начин формираме збир од квадратите на отстапувањата

$$S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} f_{ij} (x_{ij} - X_j)^2$$

и во него замениме X_j од равенката на правата

$$X_j = \frac{1}{A} y_j - \frac{B}{A}$$

добиваме

$$S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} f_{ij} \left(x_{ij} + \frac{B}{A} - \frac{1}{A} y_j \right)^2.$$

Сметајќи дека A е привремено константно, од условот за екстрем

$$\left(S_x^2 \right)_B{}' = 0$$

наоѓаме

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} f_{ij} \left(x_{ij} + \frac{B}{A} - \frac{1}{A} y_j \right) \frac{2}{A} = 0$$

или

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} f_{ij} x_{ij} + \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} f_{ij} - \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} f_{ij} y_j = 0$$

или

$$\overline{x} + \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{N} \cdot N - \frac{1}{A} \cdot \bar{y} = 0$$

од каде го наоѓаме B

$$B = \bar{y} - A\bar{x}.$$

Заменувајќи го ова B во S_x^2, имаме функција само од A, при други елементи константни:

$$S_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\left(x_{ij} + \frac{\bar{y} - A\bar{x} - y_j}{A}\right)^2$$

или

$$S_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\left((x_{ij} - \bar{x}) - \frac{1}{A}(y_j - \bar{y})\right)^2.$$

По истиот принцип на Ферма, изводот е рамен на нула:

$$\left(S_x^2\right)_A' = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} 2f_{ij}\left((x_{ij} - \bar{x}) - \frac{1}{A}(y_j - \bar{y})\right)'\left(\frac{1}{A^2}\right)(y_j - \bar{y}) = 0.$$

Кратејќи со $2 \cdot \frac{1}{A^2}$, множејќи со $(y_j - \bar{y})$, и разделувајќи на две суми, добиваме равенка

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(x_{ij} - \bar{x})(y_j - \bar{y}) - \frac{1}{A}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(y_j - \bar{y})^2 = 0$$

во која фигурираат познатите моменти. Добиваме

$$\mu_{1,1} - \frac{1}{A}\sigma_y^2 = 0$$

од каде наоѓаме и A:

$$A = \frac{\sigma_y^2}{\mu_{1,1}}$$

Така добиваме равенка на правата L_2

$$y = AX + B = \frac{\sigma_y^2}{\mu_{1,1}} X + \bar{y} - A\bar{x}$$

или

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_y^2}{\mu_{1,1}} (X - \bar{x})$$

т.е. равенката на втора (инверзна) корелација.

Така, со парот прави L_1, L_2 е наполно математизирана линеарната корелација:

$$x \leftrightarrow y$$

Овие прави служат за многубројни статистички намени.

4.20 Коефициент на корелација

Правите на корелацијата

$$Y - \bar{y} = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}) \qquad ...L_1$$

и

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_y^2}{\mu_{1,1}} (X - \bar{x}) \qquad ...L_2$$

и двете минуваат низ точката $(\bar{x}, \bar{y})$ со координати кои се средини од податоците по x и y. Коефициентите на правци на овие прави изнесуваат

$$K_1 = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_x^2}, \quad K_2 = \frac{\sigma_y^2}{\mu_{1,1}}.$$

Количникот

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{\mu_{1,1}}{\sigma_x^2}}{\frac{\sigma_y^2}{\mu_{1,1}}} = \frac{\mu_{1,1}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = r^2$$

определува која е брзината на растењето на една линеарна функција во однос на другата.

Дефиниција. Бројот

$$r = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_x \sigma_y}$$

се вика коефициент на корелацијата и тој игра важна улога во оценката на корелационата врска.

За да ја видиме неговата важност, средното квадратно отстапување по y ќе го напишеме вака:

$$\begin{aligned} S_y^2 &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\left((y_{ij} - \bar{y}) - a\left(x_i - \overline{x}\right)\right)^2 = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(y_{ij} - \bar{y})^2 - \frac{2a}{N}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)\left(x_i - \overline{x}\right) + \\ &+ a^2\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} f_{ij}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma_y^2 - 2a\mu_{1,1} + a^2\sigma_x^2. \end{aligned}$$

Но бидејќи е

$$a = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_x^2}$$

добиваме

$$\begin{aligned} S_y^2 &= \sigma_y^2 - 2a\mu_{1,1} + a^2\sigma_x^2 = \sigma_y^2 - 2\frac{\mu_{1,1}^2}{\sigma_x^2} + \frac{\mu_{1,1}^2}{\sigma_x^4}\sigma_x^2 = \\ &= \sigma_y^2 - \frac{\mu_{1,1}^2}{\sigma_x^2} = \sigma_y^2 - \frac{\mu_{1,1}^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} = \sigma_y^2\left(1 - \frac{\mu_{1,1}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\right) \end{aligned}$$

или

$$S_y^2 = \sigma_y^2\left(1 - r^2\right),\ r = 1 - \frac{\mu_{1,1}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}$$

и за да биде $S_y^2 \geq 0$, треба да е $1 - r^2 \geq 0$, т.е.

$$0 \leq r \leq 1$$

т.е. коефициент на корелација игра улога на веројатност.

Дискусија. 1. Ако е $r = 1$, $S_y^2 = 0$, т.е.

$$S_y = 0.$$

Тоа значи дека нема отстапување по y. За едно x_i, y_{ij} се исти, еднакви на средината y_i. Така имаме еднозначна врска $x_i \leftrightarrow y_i$, за едно x_i едно y_i и велиме дека имаме **многу силна корелација**, која е и функција.

Во овој случај поради $r = 1$, $K_1 = K_2$ и така немаме две прави, туку само една $L_1 = L_2$, која ја викаме линеарна функција. Услов за силна корелација е

$$\mu_{1,1} = \sigma_x\sigma_y$$

2. Ако е $r = 0$, имаме

$$S_y = \sigma_y$$

А ова значи дека S_y е функција само од y_{ij}, и не зависи од x_i. Ова значи дека нема никаква корелација меѓу групните податоци $\{x_{ij}\}$ и $\{y_{ij}\}$. Корелација е еднаква на нула. Тоа значи дека податоците се независни и услов за тоа е

$$\mu_{1,1} = 0$$

3. Најчест случај е

$$0 < r < 1$$

и корелацијата ја нарекуваме слаба или силна според тоа дали е поблиску до 0 или до 1, соодветно.

Конвенција. Добри корелации $x \leftrightarrow y$ се оние за кои е

$$r = 0,60, \qquad 0,70, \qquad 0,80, \qquad 0,90.$$

Слаби корелации се

$$r = 0,30, \qquad 0,20, \qquad 0,10.$$

Според тоа r е мерка за квалитет на врската.

Пример. Да определиме r во примерот со висини и тежини. Наоѓаме средини по x и y:

$$\bar{x} = 169,90\,\mathrm{cm} \quad \bar{y} = 65,22kg$$

и потоа ги правиме сите потребни пресметувања и трите моменти, т.е.

$$\begin{aligned}
&\mu_{1,1} = 25,03\\
&\mu_{2,0} = \sigma_x^2 = 36,23; \quad \sigma_x = 6,0191\\
&\mu_{0,2} = \sigma_y^2 = 40,99; \quad \sigma_y = 6,4023.
\end{aligned}$$

Со помош на теориските формули ги добиваме и двете прави линии на корелацијата:

$$\begin{aligned}
L_1 &: \; y - 65,22 = 0,69(x - 169,90)\\
L_2 &: \; y - 65,22 = 1,64(x - 169,90)
\end{aligned}$$

кои можат да се сметаат за математички закони изведени од табелата.

Коефициентот на корелацијата тогаш може да се пресмета

$$r = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{25,03}{38,54} = 0,65$$

и тој кажува дека постои доста добра корелација меѓу висините и тежините.

4.21 Проверка на статистички хипотези

На почеток ќе спомнеме некои поими што често ќе ги користиме во понатамошната работа. Досега си се запознал со поимите: популација (основно множество), обележје на популацијата, примерок земен од популацијата и обем (број на елементи) на популацијата и примерокот.

Едно разгледувано обележје на дадена популација може да се јави во различни видови, коишто се нарекуваат **модалитети на обележјето**.

Така, на пример, модалитети на обележјето пол се: машки и женски, модалитети на обележјето успех на ученици се: недоволен, доволен, добар, многу добар, одличен, коишто може да бидат искажани и со бројни оцени: 1,2,3,4,5, итн.

Обележјата се променливи величини и за одреден елемент на популацијата, вредноста на едно обележје не може однапред точно да се определи. Затоа, во математичката статистика се смета дека секое обележје е случајна променлива.

Да нагласиме дека:

(i) при земање примерок со обем n, од популација со обем N, секој можен примерок со обем n има иста веројатност да биде избран.

(ii) во постапката на изборот на примерокот, елементот којшто сме го избрале во примерокот го враќаме во популацијата пред изборот на следниот елемент во примерокот.

Важни показатели за обележјата на популацијата се аритметичката средина (просечната вредност), стандардната девијација, како и релативната честота на елементите од популацијата коишто имаат некоја барана особина. Тие се константи за дадената популација и ги нарекуваме **параметри на популацијата** или само **параметри**, и притоа аритметичката средина на популацијата ја означуваме со μ, стандардната девијација со σ, а релативната честота со π. Аритметичката средина на примерокот ја означуваме со $\bar{X}$, стандардната девијација со S, релативната честота со P_r и ги нарекуваме **статистики на примерокот** или само **статистики**. Бидејќи примероци со ист обем меѓусебно се разликуваат, вредностите на иста статистика на примерокот ќе се разликуваат од примерок до примерок.

Да ја разгледаме статистиката $\bar{X}$. Нека $(X_1, X_2, ..., X_n)$ е еден примерок од n елементи, земен од популацијата. Пред извлекувањето на првиот елемент од примерокот не можеме со сигурност да одредиме кој елемент од популацијата ќе биде избран, па поради тоа првиот елемент, X_1, од примерокот претставува случајна променлива. Истото важи и за останатите елементи на примерокот, т. е. секој елемент на примерокот претставува една случајна променлива. Според тоа, аритметичхката средина на примерокот, како функција од n случајни променливи, е

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

и самата е една случајна променлива.

За математичкото очекување и дисперзијата на аритметичката средина на примерокот важи:

1. $E\left(\bar{X}\right) = E\left(X\right)$
2. $D\left(\bar{X}\right) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Значи, статистиката на примерокот, $\bar{X}$, е случајна променлива, а нејзината реализирана вредност, $\bar{x}$, е константа. На ист начин се покажува дека и стандардната девијација, S, и релативната честота, P_r, се случајни променливи, а нивните реализирани вредности се константи и ги означуваме со s и p, соодветно.

Заклучуваме дека параметрите на популацијата се константи, а статистиките на примерокот се случајни променливи.

Да претпоставиме дека сме избрале еден примерок од популацијата. Елементите на избраниот примерок претставуваат реализирана вредност на случајните променливи $X_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ во дадениот експеримент и нека нивните бројни вредности се $x_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$, соодветно. Аритметичката средина на избраниот примерок е

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

и таа е константа. Ако реализираните вредности на примерокот се повторуваат, т. е. ако вредноста x_1 се јавува f_1 пати, x_2 се јавува f_2 пати, ..., x_k се јавува f_k пати, тогаш

$$f_1 + f_2 + ... + f_k = n$$

и релизираната вредност на аритметичката средина на примерокот е

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{f_1 + f_2 + ... + f_k} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{n}$$

а за стандардната девијација ја користиме формулата за поправената стандардна девијација

$$s = \sqrt{\frac{f_1 {x_1}^2 + f_2 {x_2}^2 + ... + f_k {x_k}^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}}.$$

Предметот на интересирање се секогаш параметрите на популацијата, а не статистиките на примерокот. Но, во пракса, заради големината на популацијата, непристапност до сите елементи на популацијата или некои други причини, не сме во можност да ја пресметаме точната вредност на одреден параметар, туку само можеме да ја оцениме врз основа на статистиките на примерокот.

4.22 Методи на статистичко заклучување

Како што веќе спомнавме, во практиката располагаме со примероци земени од дадена популација, а не со целата популација. Притоа, донесуваме заклучок за популацијата (некој нејзин параметар, распределба на веројатности на обележје или веројатност на настани, поврзани со неа) врз основа на податоците што ги имаме од примерокот, земен од таа популација. Постапката на донесување на ваков заклучок се нарекува метод на статистичко заклучување. Под методи на статистичко заклучување се подразбираат методот на статистичко оценување и методот на проверка на статистичка хипотеза. Кој од овие два метода ќе го примениме зависи од расположивите информации за популацијата, пред изборот на примерокот.

-Ако немаме податоци врз основа на кои можеме да ја претпоставиме вредноста на некој параметар на популацијата, таа вредност ја оценуваме со методот на статистичко оценување. Притоа, вредноста на параметарот ја оценуваме врз основа на податоците од примерокот, па заради тоа, направениот заклучок не е потполно сигурен, туку е со одредена веројатност, помала од 1.

-Ако некоја карактеристика (вредноста на некој параметар или распределбата на веројатности) на популацијата ни е позната или ја претпоставуваме, применуваме метод на проверка на статистичка хипотеза. Притоа, врз основа на податоците од примерокот испитуваме дали дошло до промена на вредноста на параметарот или распределбата, т. е. дали нашата почетна претпоставка за карактеристиката (што ја испитуваме) на популацијата е прифатлива или не. И во овој случај, донесениот заклучок е врз основа на податоците од примерокот, па не можеме да бидеме потполно сигурни во исправноста на донесениот заклучок, т. е. почетната претпоставка за карактеристиката на популацијата ја прифаќаме или отфрламе со одреден ризик дека сме погрешиле.

Во продолжение ќе ја илустрираме разликата помеѓу методот на статистичко оценување и методот на проверка на статистичка хипотеза.

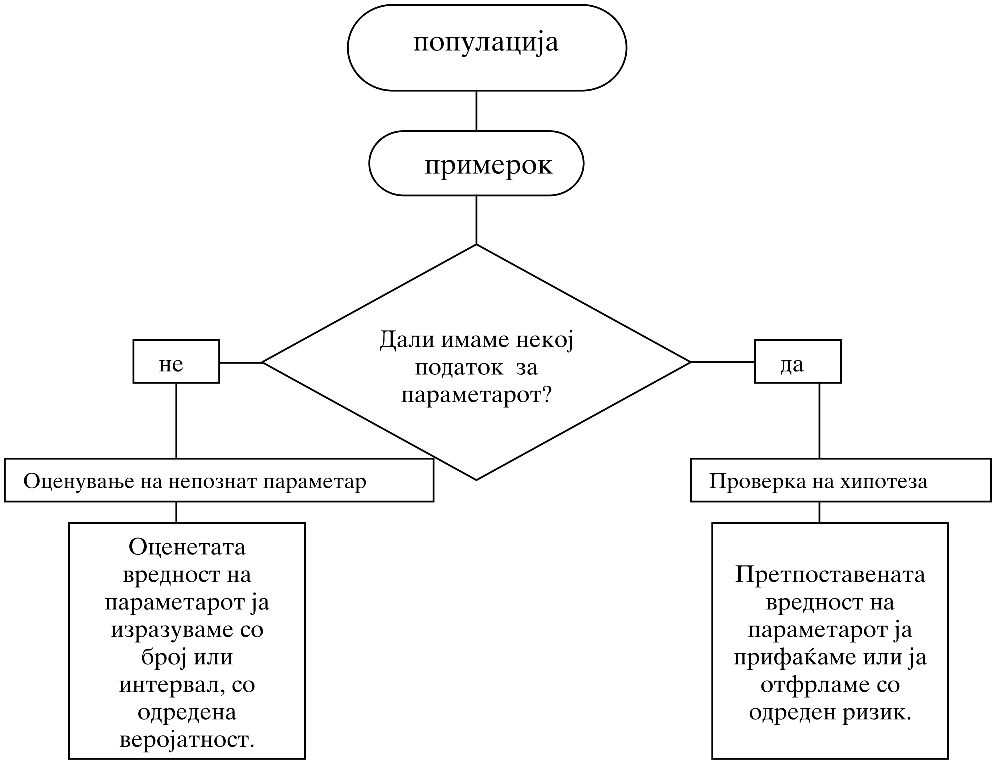
На пример, да претпоставиме дека го анализираме успехот на приемниот испит по предметот математика на Економскиот факултет во Скопје.

Не интересира просечниот број на бодови од приемниот испит.

Наместо попис на популацијата (утврдување на бодови на секој кандидат кој што го полагал приемниот испит), заради големината на популацијата, ќе примениме метод на статистичко оценување: ќе избереме еден примерок од популацијата, потоа ќе го пресметаме просечниот број на бодови во овој примерок и врз основа на оваа информација ќе го оцениме просечниот број на бодови во целата популација. Ако, на пример, просечниот број на бодови во примерокот е $\bar{x} = 78,5$, можеме грубо да прифатиме дека просечниот број на бодови во популацијата е $\mu = 78,5$. Но, бидејќи $\bar{x}$ по правило се разликува од μ, наместо со еден број, параметарот μ го оценуваме со интервална вредност околу вредноста $\bar{x}$, т. е. велиме, на пример, дека бараната вредност на параметарот μ, со одредена веројатност, се наоѓа во интервалот $(76, 81)$. Значи, резултатот од статистичкото оценување е оценета вредност на непознатиот параметар на популацијата, во вид на еден број или еден интервал, и притоа, заклучокот е со одредена веројатност.

Од друга страна, да претпоставиме дека имаме ваков случај: имаме податок за успехот од положувањето на приемниот испит од претходните години, и нека, на пример, 87% од пријавените кандидати го положуваат приемниот испит. Притоа, се сомневаме дека дошло до промена во успехот од положувањето на приемниот испит. Дали нашето сомневање е оправдано или не, се проверува со методот на проверка на статистичка хипотеза. Од популацијата земаме примерок и за овој примерок го пресметуваме процентот на кандидатите кои го положиле приемниот испит. Нека, на пример, тој процент изнесува 85. Постои разлика помеѓу дотогашната вредност, 87%, и вредноста на сегашниот примерок, 85%. Оваа разлика може да се должи на две причини: случајниот избор на елементите од примерокот или пак можеби на фактот дека процентот на положување на приемниот испит не е веќе 87. Ако разликата од 2% не можеме да ја оправдаме со случајниот избор на елементите од примерокот, тогаш прифаќаме хипотеза дека процентот на положувањето на приемниот испит се променил, т.е. ја нема претпоставената вредност. Резултатот од методот на проверка на статистичка хипотеза е заклучок за прифаќање или отфрлање на хипотезата за претпоставена вредност на некој параметар на популацијата, но со одреден ризик дека сме погрешиле.

Забелешка. Следната шема покажува како постапуваме при одредување на кој метод на статистичко заклучување ќе го примениме.



4.23 Хипотеза: Нулта и алтернативна, проста и сложена. Грешки.

При испитувањето на обележјето на некоја популација честопати, врз основа на добиените податоци од примерок земен од популацијата, се прават различни претпоставки за обележјето.

На пример, во медицината за испитување на дејството на нов лек за некое заболување, лекот се применува на една група од n пациенти. Ако, притоа, е констатирано подобрување кај k пациенти и ако релативната честота $\frac{k}{n}$ е поголема отколку при лекувањето со стариот лек за ова заболување, природно се поставува прашањето: дали новиот лек може да се прогласи за значајно подобар? Во овој пример, елементите на популацијата се заболените луѓе од конкретната болест, а сакаме да провериме дали настанот пациентот е излекуван со новиот лек има поголема веројатност од настанот "пациентот е излекуван со стариот лек".

Слично, во земјоделието се испитува, на пример, дали примената на една комбинација на повеќе вештачки ѓубрива на парцели засадени со некоја земјоделска култура дава подобри резултати од примената на друга комбинација на вештачки ѓубрива. Во овој случај, популацијата ја сочинуваат сите парцели засадени со конкретната земјоделска култура, обележјето е приносот на земјоделската култура, а сакаме да провериме дали просечната вредност (математичкото очекување) на приносот при употреба на една комбинација на вештачки ѓубрива е поголема отколку при употреба на друга комбинација на вештачки ѓубрива.

Слични прашања се поставуваат и во индустријата, кога треба да се провери дали одредена нова технологија дава производи со подобар квалитет, дали производството на некоја машина ги задоволува стандардите итн.

Во сите овие, а и други, примери се разгледува обележје на дадена популација, коешто е случајна променлива, и се поставуваат тврдења или претпоставки за обележјето.

Статистичка хипотеза е прецизно формулирано тврдење или претпоставка за некое обележје на популацијата (за вредноста на некој негов параметар, законот на распределба на веројатности на обележјата или веројатности на настани поврзани со него).

Постапката со којашто, врз основа на податоците од примерокот, ја проверуваме прифатливоста на хипотезата се нарекува метод на проверка на статистичка хипотеза.

Ние, во овој дел, ќе зборуваме за методи на проверка на статистичка хипотеза, кога хипотезата се однесува за вредноста на некој параметар на обележјето на популацијата, па од тие причини сите понатамошни дефиниции и примери ќе се однесуваат само на ваков вид на хипотези.

Нулта хипотеза е хипотеза за вредноста на некој параметар α на обележјето на популацијата, којашто со постапката на тестирање настојуваме да ја оспориме.

Во практика за нулта хипотеза обично се избира онаа претпоставка за вредноста на параметарот, којашто ја одразува состојбата до изведувањето на последното испитување или одговара на постојните стандарди.

Нултата хипотеза ја означуваме со H_0. Таа може да биде проста и сложена.

Нултата хипотеза е проста ако, со неа, се тврди дека параметарот θ е еднаков на една, однапред зададена нумеричка вредност, таканаречена хипотетична вредност, θ_0. Во тој случај пишуваме $H_0 : \theta = \theta_0$ и читаме "нултата хипотеза гласи дека параметарот θ е еднаков на θ_0".

Нултата хипотеза е сложена ако, со неа, за параметарот θ се тврдат повеќе од една можна вредност. Така, на пример, хипотезата $H_0 : \theta \leq \theta_0$, со која што за параметарот θ се претпоставуваат сите вредности помали или еднакви на θ_0 (а таквите да ги има повеќе од една), е сложена хипотеза.

Алтернативна хипотеза е спротивната хипотеза на нултата хипотеза, т. е. таа ги содржи сите вредности кои параметарот θ може да ги има, а коишто не се опфатени со нултата хипотеза. Алтернативната хипотеза ја означуваме со H_1 и таа може да биде проста и сложена. Како и нултата, алтернативната хипотеза е проста ако со неа за параметарот θ се тврди само една нумеричка вредност, а сложена ако со неа за параметарот θ се опфатени повеќе од една вредност.

Најчесто, но не секогаш, ако нултата хипотеза е проста, алтернативната е сложена и обратно.

Алтернативната хипотеза е хипотезата којашто со постапката на проверка настојуваме да ја потврдиме.

Заклучок. Нултата и алтернативната хипотеза претставуваат две прецизни тврдења или претпоставки за вредноста на некој параметар на популацијата, коишто меѓусебно се исклучуваат.

Најчесто ќе ги разгледуваме случаите, кога нултата и алтернативната хипотеза се од видовите:

(I) $H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$

(II) $H_0 : \theta \leq \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$

(III) $H_0 : \theta \geq \theta_0$ $H_1 : \theta < \theta_0$

Пример 1. Една фирма, којашто се занимава со трговија на производи, купила одредена количина од еден производ. Пропишаната тежина на пакувањето на тој производ е $500g$.

а) Сопственикот на трговската фирма се посомневал дека просечната тежина на пакувањето на тој производ отстапува од пропишаната тежина од $500g$.

б) Производителот на производот тврди дека просечна тежина на производот изнесува најмалку $498g$.

Постави ги нултата и алтернативната хипотеза и утврди која е проста, а која е сложена хипотеза?

Решение. Во овој пример, обележјето X е тежината на пакувањето на разгледуваниот производ, и е случајна променлива.

а) Основаноста на сомневањето на сопственикот на трговската фирма се проверува со поставување и проверка на хипотеза од видот (I):

$H_0 : E(X) = 500g$ $H_1 : E(X) \neq 500g$,

бидејќи сакаме да провериме дали математичкото очекување на случајната променлива X е $500g$, како што е пропишано со стандардите на тој производ.

Овде H_0 е проста, а H_1 е сложена хипотеза.

Ако, со постапката за проверка на статистичка хипотеза, заклучиме дека H_0 треба да ја отфрлиме, прифаќаме дека просечната тежина на разгледуваниот производ е различна од $500g$, т. е. ја прифаќаме алтернативната хипотеза, но со неа не е одредена насоката на отстапување на просечната тежина од пропишаната, односно прифаќаме дека просечната тежина на производот може да биде поголема или помала од пропишаната. Ваквата алтернативна хипотеза се нарекува двонасочна или двострана.

Алтернативната хипотеза со којашто можните отстапувања на параметарот θ од хипотетичната вредност θ_0 ги следиме во двете насоки се нарекува двонасочна или двострана хипотеза.

Проверката на хипотези од видот (I) се нарекува двонасочна или двострана проверка.

б) Во овој случај ќе поставиме хипотези од видот (III):

$$H_0 : E\left(X\right) \geq 498g \quad H_1 : E\left(X\right) < 498g.$$

Овде и H_0 и H_1 се сложени хипотези.

Ако анализата покаже дека H_0 треба да ја отфрлиме, тогаш прифаќаме дека просечната тежина на производот е помала од $498g$. Во овој пример, со прифаќање на алтернативната хипотеза, одредена е насоката на отстапувањата на просечната тежина од пропишаната, односно претпоставената тежина. Ваквата алтернативна хипотеза се нарекува еднонасочна или еднострана.

Пример 2. Фабрика за производство на автомобили, марка A, сака да ја провери својата технологија на производство, преку просечната потрошувачка на бензин на произведениот автомобил.

а) Производителот, според своите претпоставки за технологијата на производство, смета дека просечната потрошувачка на бензин на $100km$ треба да изнесува 8,4 литри, но сепак, врз основа на некои информации, почнува да се сомнева во тоа и сака да провери дали навистина е така.

б) Производителот повторно според своите претпоставки за технологијата на производство, смета дека просечната потрошувачка на бензин на $100km$ треба да биде помала од 8,5 литри, но врз основа на некои информации, почнува да се сомнева во тоа и сака да провери дали навистина е така.

Постави ги нултата и алтернативната хипотеза и утврди која е проста, а која е сложена хипотеза.

Решение. Во овој пример обележјето Xе потрошувачка на бензин на $100km$ кај автомобилите, марка A.

а) Поставуваме хипотези од видот (I):

$H_0 : E(X) = 8,4l$ $H_1 : E(X) \neq 8,4l$.

Овде H_0 е проста, а H_1 е сложена хипотеза и станува збор за двонасочна (двострана) алтернативна хипотеза.

б) Поставуваме хипотези од видот (II):

$H_0 : E(X) \leq 8,5l$ $H_1 : E(X) > 8,5l$

Овде H_0 и H_1 се сложени хипотези.

Ако анализата покаже дека H_0 треба да ја отфрлиме, тогаш прифаќаме дека просечната потрошувачка на бензин, кај овој вид на автомобили и со оваа технологија на производство, е поголема од 8,5 литри на $100km$. Во овој пример, со прифаќање на алтернативната хипотеза, одредена е насоката на отстапувањата на просечната потрошувачка од претпоставената просечна потрошувачка. Значи, и оваа алтернативна хипотеза е еднонасочна или еднострана.

Пример 3. Концентрацијата на стандарден раствор на BSA (bovine serum albumin), изнесува 100 mg/ml. По изведување на Биуретна проба на стандардот, измерена е апсорбанца од 0,4421 на 550 nm. Прописно, во упатството дадено од комерцијалниот производител апсорбанцата изнесува 0,45.

H апсорбанца

$N_0 : E(H) = 0,45$

$N_1 : E(H) \neq 0,45$

Доколку N_0 се отфрли, вредноста на не стандардот изнесува 0,45, односно ја прифаќаме алтернативната хипотеза.

$N_0 : E(H) \geq 0,45$ $N_1 : E(H) < 0,45$

Пример 4. Концетрацијата на витамин B_{12} во контролен серум со нормални вредности дадена од производителот изнесува 110 pmol/L. Со друг ензимски сет измерена е концентрација на витамин B_{12} од 116 pmol/L во истиот серум.

Постави ги нултата и алтернативната хипотеза.

Забелешка. Алтернативните хипотези од видот (I) се нарекуваат двонасочни или двострани хипотези, а тестовите со коишто ги проверуваме овој вид хипотези се нарекуваат двонасочни или двострани тестови. Хипотезите од видовите (II) и (III) се нарекуваат еднонасочни или еднострани хипотези, а тестовите со коишто ги проверуваме овој вид хипотези се нарекуваат еднонасочни или еднострани тестови.

Во постапката за проверка на хипотеза, нултата хипотеза ќе ја отфрлиме ако податоците од примерокот противречат на тврдењето кое е содржано во нултата хипотеза. Тогаш, како што веќе видовме во примерите, без проверка ја прифаќаме алтернативната хипотеза. Во спротивно, ако податоците од примерокот ја поддржуваат нултата хипотеза, т. е. се согласни со тврдењето содржано во нултата хипотеза, тогаш нултата хипотеза не ја отфрламе.

Нултата хипотеза може да биде точна или неточна, податоците од примерокот може да бидат согласни со нултата хипотеза или да и противречат. Оттука, можни се следните случаи:

а) податоците од примерокот ја поддржуваат точната нулта хипотеза;

б) податоците од примерокот противречат на неточна нулта хипотеза;

в) податоците од примерокот противречат на точната нулта хипотеза;

г) податоците од примерокот ја поддржуваат неточната нулта хипотеза.

Во случаите а) и б) донесуваме правилен заклучок. Во случаите в) и г) донесуваме погрешен заклучок, т. е. правиме грешка. Но, и овие случаи се можни, бидејќи заклучоците што ги донесуваме во постапката на проверка на хипотеза се врз основа на податоците од еден избран случаен примерок.

Грешката што ја правиме во случајот в), т. е. отфрлањето на нултата хипотеза кога таа е точна, се нарекува грешка од прв тип, а грешката што ја правиме во случајот г), т. е. неотфрлањето на нултата хипотеза кога таа е неточна, се нарекува грешка од втор тип.

Јасно е дека во донесувањето на заклучокот можеме да направиме само една грешка, а не истовремено и двете, и, притоа, ако сме заклучиле дека нултата хипотеза не ја отфрламе постои можност да правиме грешка од втор тип, а ако сме заклучиле дека нултата хипотеза ја отфрламе тогаш постои можност дека правиме грешка од прв тип. Бидејќи решението за прифаќање на една од хипотезите го донесуваме врз основа на реализација на примерок за обележјето на популацијата, што всушност определува случаен настан, следува дека со секое решение е поврзана одредена веројатност. Во постапката на проверка на хипотеза, настојуваме да ги одредиме веројатностите на појавување на наведените грешки, и, ако е можно, да ги намалиме.

Веројатноста да ја отфрлиме нултата хипотеза кога таа е точна се нарекува веројатност на грешка од прв тип или ризик за грешка од прв тип, и се означува со α.

Веројатноста да не ја отфрлиме нултата хипотеза кога таа е неточна се нарекува веројатност на грешка од втор тип или ризик за грешка од втор тип, и се означува со β.

Како што веќе кажавме, природно е да настојуваме и двата типови на грешки да бидат што поретки, т. е. веројатностите α и β да бидат што помали. Меѓутоа, намалувајќи ја α, ја намалуваме можноста за отфрлање на нултата хипотеза, а со тоа се зголемува можноста таа да биде прифатена за точна кога е неточна, т. е. се зголемува β. Во класичната постапка за проверка за хипотеза однапред се определува најголемата дозволена вредност на α, а потоа се избира критериум, којшто ја задоволува избраната вредност на α и обезбедува најмала можна вредност на β.

Најголемата дозволена вредност на α се нарекува ниво на значајност на тестот, и се означува исто така со α. За неа, обично, се земаат вредностите $0,05$, $0,01$, $0,005$ или $0,001$.

Ако, на пример, нивото на значајност на тестот е $\alpha = 0,05$, тоа значи дека во најмногу 5 од 100 случаи, при утврдена постапка, може да се случи да ја отфрлиме нултата хипотеза кога таа е точна, т. е. прифаќаме дека податоците од најмногу 5% од примероците погрешно ќе ги протолкуваме како докази против нултата хипотеза.

Веројатноста на правилно отфрлање на нултата хипотеза, т. е. отфрлање на нултата хипотеза кога таа е неточна и прифаќање на алтернативната хипотеза кога таа е точна се нарекува моќта тестот, а се означува со p. Кога нултата хипотеза е неточна, може да се донесат два заклучоци: нултата хипотеза да не се отфрли (со веројатност β) и нултата хипотеза да се отфрли (со веројатност p), па затоа за p и β, важи $\beta + p = 1$.

Во табелата дадени се веројатностите на заклучоците во зависност од точноста на хипотезите.

H_0 е Заклучок	H_0 се отфрла	H_0 не се отфрла
точна	грешка од прв тип (α)	правилна одлука $(1-\alpha)$
неточна	правилна одлука $(1-\beta=p)$	грешка од втор тип (β)

4.24 Избор на тест величина (тест статистика). Критичен домен.

Проверката на статистичките хипотези за параметрите на популацијата, како што веќе кажавме, се извршува со помош на статистиките на примерокот.

Статистиката којашто се користи за спроведување на определен тест се нарекува тест-величина или тест-статистика.

Така, на пример, ако проверуваме хипотеза за просечната вредност (аритметичката средина) на популацијата, како тест-величина ќе ја користиме аритметичката средина на примерокот, $\bar{X}$, или некоја друга статистика формирана со $\bar{X}$. Ако пак, проверуваме хипотеза за стандардната девијација на популацијата, како тест-величина ќе ја користиме стандардната девијација на примерокот, S или некоја друга статистика формирана со S. Проверката на хипотеза за веројатност на настани се извршува со статистика, којашто ја содржи релативната честота на соодветниот настан итн.

Прв чекор при проверката на нултата наспроти алтернативната хипотеза, со ниво на значајност α, е изборот на тест-величината.

Нека избраната тест-велична ја означиме со Z. Видовме дека таа претставува случајна променлива, па како таква прима вредности од множеството на реални броеви. Врз основа на земениот примерок од популацијата се пресметува реалниот број z, којшто претставува реализирана вредност на тест-величината.

Втор чекор при проверката на нултата наспроти алтернативната хипотеза, со ниво на значајност α, е пресметување на реализираната вредност на тест-величината, врз основа на податоците од примерокот.

Потоа се определуваат множества $B \subset \mathbb{R}$, така што, кога Z ќе прими вредност од тоа множество (реализираната вредност на тест-величината е елемент на B) се донесува заклучок да се отфрли нултата хипотеза, со веројатност на грешка од прв тип не поголема од α. Овој услов за множествата B се запишува на следниот начин

$$P\left(Z \in B/H_0\right) \leq \alpha \qquad (*)$$

Множествто $B \subset \mathbb{R}$, за кое е исполнет условот (*) се нарекува област на отфрлање на нултата хипотеза, или критичен домен за нултата хипотеза при ниво на значајност α.

Множеството $\mathbb{R} \backslash B$ се нарекува област на прифаќање на нултата хипотеза.

Реалните броеви коишто ја раздвојуваат областа на прифаќање од областа на отфрлање на нултата хипотеза се нарекуваат критични вредности или прагови на значајноста.

Ако меѓу критичните домени, за дадено ниво на значајност α, постои критичен домен B^*, кој има најмала веројатност β на грешка од втор тип, а тоа значи најголема моќ на тестот, тогаш тој се нарекува оптимален критичен домен, или најмоќен критичен домен за нултата хипотеза при ниво на значајност α.

Трет чекор при проверката на нултата наспроти алтернативната хипотеза, со ниво на значајност α, е определување на критичниот домен B, или, доколку постои, најмоќниот критичен домен B^*.

На крајот на проверката се прави следниот заклучок.

Заклучок. Ако реализираната вредност $z \in B$ $(z \in B^*)$, тогаш нултата хипотеза се отфрла, со веројатност на грешка од прв тип не поголема од α. Во спротивен случај, ако $z \notin B$ $(z \notin B^*)$ тогаш нултата хипотеза не се отфрла и се вели дека, врз основа на направените испитувања, нема причини нултата хипотеза да се отфрли при даденото ниво на значајност α.

Пример 1. Направена е статистичка обработка на сите одиграни кола во една година во играта лото. Констатирано е дека релативната честота на секој од броевите 1,2,3,5 е $0,10$, релативната честота на секој од броевите 4,6,7,8,9 е $0,06$, а релативната честота на секој од броевите 10,11,12,13,...,38,39 е $0,01$. Извлекувањето во играта лото се смета за регуларно ако веројатноста на извлекување на секој од броевите 1,2,3,...,39 е еднаква на $\frac{1}{39}$. Се проверува хипотезата за нерегуларност на извлекувањето, при ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,10$.

а) Дали $B = \{1, 2, 3\}$ е критичен домен?

б) Да се определи максималниот број на елементи во критичните домени.

в) Кои критични домени се оптимални?

Решение. Во примерот станува збор за случајна променлива X: број извлечен во играта лото, а можните вредности на X се броевите 1,2,3,...,39. Бидејќи се сомневаме во регуларноста на извлекувањето, а регуларноста е определена со законот на распределба на веројатности на случајната променлива X,

$$P(X = x) = \frac{1}{39}, \quad x \in \{1, 2, ..., 39\}$$

поставуваме нулта и алтернативна хипотеза од видот:

$$H_0 : P(X = x) = \frac{1}{39}, \quad x \in \{1, 2, ..., 39\}$$

и

$$H_1 : P(X = x) = \begin{cases} 0,10 & x \in \{1, 2, 3, 5\} \\ 0,06 & x \in \{4, 6, 7, 8, 9\} \\ 0,01 & x \in \{10, 11, 12, ..., 39\} \end{cases}$$

Да забележиме дека и нултата и алтернативната хипотеза се прости хипотези.

а) Бидејќи

$$P\left(X \in \{1,2,3\}/H_0\right) =$$

$$= P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)=\frac{1}{39}+\frac{1}{39}+\frac{1}{39}=\frac{3}{39}=0,077<\alpha$$

заклучуваме дека множеството $B=\{1,2,3\}$ е критичен домен.

б) -Ако претпоставиме дека $B_1=\{a\}, a\in\{1,2,...,39\}$, тогаш

$$P\left(X\in B_1/H_0\right)=P\left(X=a\right)=\frac{1}{39}<\alpha;$$

-Ако претпоставиме дека $B_2=\{a,b\}, a,b\in\{1,2,...,39\}$, тогаш

$$P\left(X\in B_2/H_0\right)=P\left(X=a\right)+P\left(X=b\right)=\frac{1}{39}+\frac{1}{39}=\frac{2}{39}<\alpha;$$

-Ако претпоставиме дека $B_3=\{a,b,c\}, a,b,c\in\{1,2,...,39\}$, тогаш

$$P\left(X\in B_3/H_0\right)=P\left(X=a\right)+P\left(X=b\right)+P\left(X=c\right)=$$

$$=\frac{1}{39}+\frac{1}{39}+\frac{1}{39}=\frac{3}{39}<\alpha;$$

-Ако претпоставиме дека $B_4=\{a,b,c,d\}, a,b,c,d\in\{1,2,...,39\}$, тогаш

$$P\left(X\in B_4/H_0\right)=P\left(X=a\right)+P\left(X=b\right)+P\left(X=c\right)+P\left(X=d\right)=\frac{4}{39}>\alpha.$$

Заклучуваме дека критичните домени можат да содржат најмногу 3 елементи.

в) Ако алтернативната хипотеза е точна, тогаш елементите 1, 2, 3 и 5 имаат најголема веројатност, па значи учеството на тие елементи во критичниот домен обезбедува најголема моќ на тестот. Бидејќи критичниот домен може да содржи најмногу 3 елементи, заклучуваме дека секое триелементно подмножество од множеството $B=\{1,2,3,5\}$ е оптимален критичен домен. Значи, има 4 оптимални критични домени: $\{1,2,3\},\{1,2,5\},\{1,3,5\},\{2,3,5\}$.

Моќта на секој од нив изнесува $0,30$, бидејќи, на пример, за $\{1,2,3\}$, имаме

$$P\left(X \in \{1,2,3\}/H_1\right) = P_1\left(X=1\right) + P_1\left(X=2\right) + P_1\left(X=3\right) =$$
$$= 0,10 + 0,10 + 0,10 = 0,30.$$

4.25 Тестови за просечна вредност

Најчест вид на задачи што се јавуваат во практиката се задачите поврзани со проверување на претпоставената или пропишаната просечна вредност на некое обележје на дадена популација. Бидејќи обележјето е случајна променлива со своја распределба, а просечната вредност е математичкото очекување на распределбата на случајната променлива, тестовите за проверка на хипотези за просечната вредност се всушност тестови за проверка на хипотези за математичкото очекување на испитуваното обележје. Постојат неколку видови на овие тестови. Во продолжение ќе ја објасниме постапката на проверка на секој од овие тестови, погодноста на изборот на секој тест, како и конкретно спроведување на тестот низ соодветно избрани примери.

4.25.1 Тест за математичкото очекување при позната дисперзија (Z -тест)

Нека се разгледува обележје X на дадена популација. Со $E\left(X\right)$ го означуваме математичкото очекување на X, а со $D\left(X\right) = \sigma^2$ ја означуваме дисперзијата на X. Нека заклучоците за обележјето се донесуваат врз основа на примерок од дадената популација чиј обем (број на елементи во примерокот) е n. Аритметичката средина на примерокот е случајна променлива, ја означивме со $\bar{X}$, и за неа важи:

1. $E\left(\bar{X}\right) = E\left(X\right)$
2. $D\left(\bar{X}\right) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Да се потсетиме: ако реализираните вредности на примерокот се повторуваат, т. е. ако вредноста x_1 се јавува f_1 пати, x_2 се јавува f_2 пати, …, x_k се јавува f_k пати, тогаш $f_1+f_2+...+f_k=n$ и релизираната вредност на аритметичката средина на примерокот е

$$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+...+x_kf_k}{f_1+f_2+...+f_k}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+...+x_kf_k}{n}$$

а на стандардната девијација е

$$s=\sqrt{\frac{f_1{x_1}^2+f_2{x_2}^2+...+f_k{x_k}^2-n\bar{x}^2}{n-1}}.$$

Ќе разгледуваме нулта и алтернативна хипотеза од следните три вида:

(I) $H_0:E\left(X\right)=\mu_0$ $H_1:E\left(X\right)\neq\mu_0$

(II) $H_0:E\left(X\right)\leq\mu_0$ $H_1:E\left(X\right)>\mu_0$

(III) $H_0:E\left(X\right)\geq\mu_0$ $H_1:E\left(X\right)<\mu_0$

каде што μ_0 е претпоставената или пропишаната просечна вредност на обележјето X, т. е. таа е зададена бројна вредност.

Пред да пристапиме на објаснување на постапката на проверка на видот на хипотези коишто ќе ги разгледуваме, ќе ги дадеме условите коишто треба да бидат исполнети за примена на овој тест.

Услови за примена на тестот:

1. Дисперзијата на случајната променлива X, $D\left(X\right)$, е позната, т. е. $D\left(X\right)=\sigma^2$ е зададена вредност.

2. Обемот на примерокот е доволно голем, т. е. $n\geq30$.

Прво треба да избереме тест-величина. Да го објасниме изборот на тест-величината. Нека, на пример, ги имаме хипотезите од видот (I). Реализираната вредност на аритметичката средина на избраниот примерок, $\bar{x}$, во најголем број на примери ќе се разликува од μ_0, дури и ако нултата хипотеза е точна, односно, ако вистинската вредност на математичкото очекување на X е μ_0. Тогаш апсолутната грешка на оценката на математичкото очекување, добиена врз основа на конкретниот примерок е $|\bar{x}-\mu_0|$. Оваа грешка ја споредуваме со очекуваната грешка на $\bar{X}$, а тоа е стандардната девијација на $\bar{X}$, којашто ја означуваме со $\sigma_{\bar{X}}$ и споменавме дека изнесува $\sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Така го добиваме бројот

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Оттука, заклучуваме дека како тест-величина ќе го користиме трансформираниот облик на аритметичката средина $\bar{X}$, т. е.

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

При точна нулта хипотеза очекуваме $\bar{x}$ малку да се разликува од μ_0. Во спротивен случај, кога нултата хипотеза не е точна, очекуваме отстапувањата на $\bar{x}$ од μ_0 да бидат поголеми.

До кога ќе сметаме дека апсолутната грешка се должи на случајниот избор на елементите во примерокот зависи од очекуваната грешка на $\bar{X}$ и нивото на значајност на тестот, α, коешто е однапред избрано. Со секое избрано ниво на значајност на тестот, α, се определува критичниот домен и критичните вредности на Z. И во овој дел, потребно е да направиме разграничување за видот на хипотезите:

а) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (I), т. е. $H_0 : E(X) = \mu_0$, $H_1 : E(X) \neq \mu_0$, тогаш станува збор за двостран тест. Кај овој вид на тестови, имаме две критични вредности, и ако едната ја означиме со $z_{\alpha/2}$, другата е $-z_{\alpha/2}$, а критичниот домен е множеството $B = \left(-\infty, -z_{\alpha/2}\right) \cup \left(z_{\alpha/2}, \infty\right)$. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од двете страни на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот z, каде

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

припаѓа на множеството

$$B = \left(-\infty, -z_{\alpha/2}\right) \cup \left(z_{\alpha/2}, \infty\right),$$

односно ако $z > z_{\alpha/2}$ или ако $z < -z_{\alpha/2}$.

Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното отстапување на $\bar{x}$ од μ_0 не е статистички значајно.

Во следната табела, ќе ги дадеме критичните вредности на Z за најчесто користени вредности за α.

Ниво на значајност, α	0,10	0,05	0,01	0,005	0,002
Критични вредности, $-z_{\alpha/2}$ и $z_{\alpha/2}$	-1,645 и 1,645	-1,96 и 1,96	-2,58 и 2,58	-2,81 и 2,81	-3,08 и 3,08

Табела 1

Да го решиме сега конкретно примерот 1. а), од делот 4.24.

Пример 1. Една фирма, којашто се занимава со трговија на производи, купила одредена количина од еден производ. Пропишаната тежина на тој производ е $500g$. Дозволеното отстапување (стандардната девијација) изнесува $3g$. Сопственикот на трговската фирма, како што рековме, се посомневал дека просечната тежина на пакувањето на тој производ отстапува од пропишаната тежина од $500g$. Затоа, со цел да ја провери тежината, сопственикот на трговската фирма, од купените производи, зел случаен примерок од 200 производи. Притоа, по мерењето на нивните тежини, ги добил следните резултати:

Тежина во g, x_i	496	497	498	499	500	501	502	503
Број на производи со таа тежина, f_i	5	12	23	50	60	26	14	10

При ниво на значајност $0,01$ да се провери дали може да се прифати претпоставката дека просечната тежина на овој вид на производ не е $500g$, односно дека е различна од пропишаната вредност.

Решение. Основаноста на ова сомневање се проверува со поставување и проверка на хипотеза од видот (I):

$H_0 : E\left(X\right) = 500g$ $H_1 : E\left(X\right) \neq 500g$,

каде што обележјето X е тежината на испитуваниот вид на производ.

Прво да ги провериме условите за примена на тестот:

1. Дисперзијата на случајната променлива X, $D(X)$, е позната, т. е. $D(X) = 3^2 = 9$.

2. Обемот на примерокот е доволно голем, т. е. $n = 200 > 30$.

Условите се задоволени, па може да пристапиме кон тестот.

Овде $\mu_0 = 500$, а $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{200}} = 0,21$.

Потоа ја пресметуваме вредноста $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_8f_8}{f_1 + f_2 + ... + f_8} = \frac{496 \cdot 5 + 497 \cdot 12 + ... + 503 \cdot 10}{200} = 499,66.$$

Сега можеме да ја пресметаме и вредноста на Z за овој примерок. Таа е

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{499,66 - 500}{0,21} = -1,62.$$

Едната критичната вредност при ова ниво на значајност, 0,01, прочитано во табелата 1, е 2,58. Бидејќи $z = -1,62 > -2,58$ хипотезата не ја отфрламе, т. е. донесуваме заклучок дека, врз основа на земениот примерок, нема причини да сметаме дека нултата хипотеза не е точна. Дали ќе заклучиш дека производителот е чесен?

б) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (II), т. е.

$H_0 : E(X) \leq \mu_0$, $H_1 : E(X) > \mu_0$,

тогаш станува збор за еднострaн тест. Кај овој вид на тестови, имаме една критична вредност, ја означуваме со z_α, а критичниот домен е множеството $B = (z_\alpha, \infty)$. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од десната страна на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот z, каде $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, припаѓа на множеството $B = (z_\alpha, \infty)$, односно ако $z > z_\alpha$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно, нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното отстапување на $\bar{x}$ од μ_0 не е статистички значајно.

Во следната табела, ќе ги дадеме критичните вредности на Z за најчесто користени вредности за α.

Ниво на значајност, α	0,10	0,05	0,01	0,005	0,002
Критични вредности, z_α	1,28	1,645	2,33	2,58	2,88

Табела 2

Да го решиме сега конкретно примерот 2, од делот 4.26.

Пример 2. Фабрика за производство на автомобил, марка A, сака да ја провери својата технологија на производство, преку просечната потрошувачка на бензин на произведениот автомобил. Случајно се избрани 100 автомобили од таа марка и тестирана е потрошувачката на бензин на $100km$, кај секој од нив. Притоа, добиени се следните резултати:

Потрошувачка на бензин, изразена во литри, на 100km	До 6	6-8	8-10	10-12	Над 12
Број на автомобили со таа потрошувачка	8	22	35	25	10

Познато е дека дозволеното отстапување изнесува $\sqrt{122,1}l$. При ниво на значајност на тестот $0,05$ оцени дали може да се прифати:

а) хипотезата дека просечната потрошувачка на бензин на $100km$ не е 8,4 литри;

б) хипотезата дека просечната потрошувачка на бензин на $100km$ е поголема од 8,5 литри.

Решение. Во овој тест обележјето X е потрошувачката на бензин на $100km$ кај испитуваната марка на автомобили.

Прво да ги провериме условите за примена на тестот:

1. Дисперзијата на случајната променлива X, $D(X)$, е позната, т. е. $D(X) = \left(\sqrt{122,1}\right)^2 = 122,1$.

2. Обемот на примерокот е доволно голем, т. е. $n = 100 > 30$.

Условите се задоволени, па може да пристапиме кон тестот.

а) Овде, производителот, според своите претпоставки за технологијата на производство, смета дека просечната потрошувачка на бензин на $100km$ треба да изнесува 8,4 литри, но сепак, врз основа на некои информации, почнува да се сомнева во тоа и сака да провери дали навистина е така. За проверка во овој случај, ќе поставиме хипотези од видот

(I):$H_0 : E(X) = 8,4l$, $H_1 : E(X) \neq 8,4l$.

Овде $\mu_0 = 8,4$, а

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{122,1}}{\sqrt{100}} = 1,11.$$

Потоа, за да ја пресметаме вредноста $\bar{x}$, ја правиме следната табела:

x_i	5	7	9	11	13
f_i	8	22	35	25	10

Оттука

$$\bar{x} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_5f_5}{f_1 + f_2 + ... + f_5} = \frac{5 \cdot 8 + 7 \cdot 22 + ... + 13 \cdot 10}{100} = 8,24.$$

Сега можеме да ја пресметаме и вредноста на Z за овој примерок. Таа е

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{8,24 - 8,4}{1,11} = -0,144.$$

Едната критична вредност при ова ниво на значајност, $0,05$, прочитано во табелата 1, е 1,96. Бидејќи $z = -0,144 > -1,96$ нултата хипотеза не ја отфрламе, т. е. донесуваме заклучок дека, врз основа на земениот примерок, не ја прифаќаме хипотезата дека просечната потрошувачка на бензин на $100km$ не е 8,4 литри.

б) Ако производителот повторно според своите претпоставки за технологијата на производство, смета дека просечната потрошувачка на бензин на $100km$ треба да биде помала од 8,5 литри, но врз основа на некои информации, почнува да се сомнева во тоа и сака да провери дали навистина е така, тогаш ќе поставиме хипотези од видот

(II):$H_0 : E(X) \leq 8,5l$, $H_1 : E(X) > 8,5l$.

Значи, станува збор за едностран тест.

И овде

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{122,1}}{\sqrt{100}} = 1,11,$$

$\bar{x} = 8,24$, а $\mu_0 = 8,5$. Сега можеме да ја пресметаме и вредноста на Z за овој примерок. Таа е

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{8,24 - 8,5}{1,11} = -0,23.$$

Критична вредност, z_α, ја читаме од табелата 2, и таа е $z_\alpha = 1,645$. Бидејќи $z = -0,23 < 1,645$, хипотезата не ја отфрламе, т. е. донесуваме заклучок дека, врз основа на земениот примерок, не ја прифаќаме хипотезата дека просечната потрошувачка на бензин на $100km$ е поголема од 8,5 литри.

в) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (III), т. е. $H_0 : E\left(X\right) \geq \mu_0$, $H_1 : E\left(X\right) < \mu_0$, тогаш повторно станува збор за еднострàн тест. И кај овој вид на тестови, имаме една критична вредност, ја означуваме со $-z_\alpha$, а критичниот домен е множеството $B = (-\infty, -z_\alpha)$. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од левата страна на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот z, каде $z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, припаѓа на множеството $B = (-\infty, -z_\alpha)$, односно ако $z < -z_\alpha$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното отстапување на $\bar{x}$ од μ_0 не е статистички значајно.

Во следната табела, ќе ги дадеме критичните вредности на Z за најчесто користени вредности за α.

Ниво на значајност, α	0,10	0,05	0,01	0,005	0,002
Критични вредности, - z_α	-1,28	-1,645	-2,33	-2,58	-2,88

Табела 3

Пример 3. Со мерење на тежината на 100 случајно избрани пакувања на еден вид на производ, добиени се следните резултати:

Тежина во g, x_i	780	790	795	800	805	810	820
Број на производи со таа тежина, f_i	5	7	14	40	12	10	14

Ако дозволенето отстапување изнесува $20g$, при ниво на значајност на тестот 0,05 оцени дали може да се прифати хипотезата дека просечната тежина на пакувањето на овој производ е помала од $800g$.

Решение. Во овој тест обележјето X е тежината на пакувањето на дадениот производ.

Прво да ги провериме условите за примена на тестот:

1. Дисперзијата на случајната променлива X, $D(X)$, е позната, т. е. $D(X) = 20^2 = 400$.

2. Обемот на примерокот е доволно голем, т. е. $n = 100 > 30$.

Условите се задоволени, па може да пристапиме кон тестот.

Овде поставуваме хипотези од видот

(III):$H_0 : E(X) \geq 800g$, $H_1 : E(X) < 800g$.

Повторно, станува збор за еднострaн тест, но сега од типот в).

Овде $\mu_0 = 800$,

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = 2,$$

а аритметичката средина на примерокот е

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_7 f_7}{f_1 + f_2 + ... + f_7} = \frac{780 \cdot 5 + 790 \cdot 7 + ... + 820 \cdot 14}{100} = 801,6.$$

Сега можеме да ја пресметаме и вредноста на Z за овој примерок. Таа е

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{801,6 - 800}{2} = 0,8.$$

Критична вредност, z_α, ја читаме од табелата 3, и таа е $-z_\alpha = -1,645$. Бидејќи $z = 0,8 > -1,645$, хипотезата не ја отфрламе, т. е. донесуваме заклучок дека, врз основа на земениот примерок, не ја прифаќаме хипотезата дека просечната тежина на пакувањето на овој производ е помала од $800g$.

Тестот за проверка на хипотези за математичкото очекување на некое обележје, во случај кога е исполнет условот 1, т. е. кога е позната дисперзијата на обележјето се нарекува z-тест.

Пример 4. Референтна вредност за Na$^+$ во серум кај хумана популација е 140 mM со прифатливо отстапување (стандардна девијација) ±4. Кај 100 здрави испитаници утврдено е нивото на Na$^+$. Добиените вредности се прикажани во следната табела:

Na$^+$ mM, x_i	132	136	137	139	140	142	144	145
Број на испитаници, f_i	4	8	14	28	23	15	6	2

При ниво на значајност на тестот 0,01 оцени дали може да се прифати хипотезата дека просечната вредност за Na$^+$ во серум кај хумана популација е 140 mM.

Решение.

$N_0 : E(H) = 140$

$N_1 : E(H) \neq 140$

1. Дисперзијата на случајната променлива H, $D(X)$, е позната, т.е. $D(X) = 4^2 = 16$.

2. Бројот на испитаници е доволно голем, т.е. $n = 100 > 30$. Условите се задоволени, па може да се пристапи по тестот.

$\mu_0 = 140$

$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0,4$

$\bar{x} = \frac{132\cdot4+136\cdot8+137\cdot14+139\cdot28+140\cdot23+142\cdot15+144\cdot6+145\cdot2}{4+8+13+27+23+15+6+4} = \frac{13930}{100} = 139,3mM$

Сега може да ја пресметаме вредноста на z

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_x} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{139,3-140}{0,4} = -1,75$$

Ниво на значајност, α	0,1	0,05	0,01	0,005	0,002
Критични вредности, ± $z_{\alpha/2}$	± 1,645	± 1,96	± 2,58	± 2,81	± 3,08

При ниво на значајност од 0,01, соодветно од табелата (±2,58), со критичен домен $B\left(z_\alpha, \infty\right)$, ако $z = -1,75 > -2,58$, хипотезата не ја отфрламе, односно може да заклучиме дека врз основа на примероците за анализа, ја потврдуваме нултата хипотеза, поконкретно добиената отстапка на од μ_0 нема статистичка сигнификантност.

Пример 5. Референтните вредности за триацилглицероли (TAG) кај хумана популација е 1,7 mM, со прифатливо отстапување (стандардна девијација) ±0,5. Кај 100 здрави испитаници утврдено е нивото на TAG. Добиените вредности се прикажани во следната табела:

Na^+ mM, $\boldsymbol{x_i}$	1,26	1,38	1,56	1,8	1,85	1,92	2,12	2,38
Број на испитаници , $\boldsymbol{f_i}$	4	8	14	28	23	15	6	2

При ниво на значајност на тестот 0,05 оцени дали може да се прифати хипотезата дека просечната вредност за триацилглицероли (TAG) кај хумана популација е 1,7 mM.

4.25.2 Тест за математичко очекување при непозната дисперзија (t - тест)

Во практиката, во задачите за проверка на хипотези за вредноста на математичкото очекување, $E(X)$, на обележјето X кое се испитува, многу е почест случајот дисперзијата, $D(X) = \sigma^2$, да не е позната. Тоа значи дека првиот услов за примена на тестот 1, којшто ни овозможува да ја пресметаме стандардната грешка $\sigma_{\bar{X}}$, не е исполнет. Бидејќи $\sigma_{\bar{X}}$ не може да го пресметаме, не можеме да ја пресметаме ниту тест-величината Z. Во овој случај, стандардната девијација σ ќе ја оцениме врз основа на стандардната девијација s на примерокот $\bar{X}$.

И овде, посебно ќе ги разгледаме трите вида на нултата и алтернативната хипотеза:

(I) $H_0 : E(X) = \mu_0$ $\qquad H_1 : E(X) \neq \mu_0$

(II) $H_0 : E(X) \leq \mu_0$ $\qquad H_1 : E(X) > \mu_0$

(III) $H_0 : E(X) \geq \mu_0$ $\qquad H_1 : E(X) < \mu_0$

каде што μ_0 е претпоставената или пропишаната просечна вредност на обележјето X, т. е. таа е зададена бројна вредност.

Пред да пристапиме на објаснување на постапката на проверка на видот на хипотези коишто ќе ги разгледуваме, ќе ги дадеме условите коишто треба да бидат исполнети за примена на овој тест.

Услови за примена на тестот:

1. Дисперзијата на случајната променлива X, $D(X)$, не е позната.

2. Распределбата на обележјето X е симетрична (релативните честоти на вредностите на обележјето рамномерно опаѓаат или растат почнувајќи од аритметичката средина) и унимодална (само една вредност на обележјето е со најголема релативна честота).

3. Обемот на примерокот е $n \geq 8$.

Да пристапиме кон изборот на тест-величината. Како што на почетокот спомнавме, стандардната девијација σ ќе ја оцениме врз основа на стандардната девијација s на примерокот $\bar{X}$, т. е. наместо $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ќе ја користиме $s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$, каде

$$s = \sqrt{\frac{f_1{x_1}^2 + f_2{x_2}^2 + ... + f_k{x_k}^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}$$

па ја добиваме тест-величината

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Реализираната вредност од примерокот е бројот

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

Повторно ќе направиме разграничување за видот на хипотезите:

а) Нултата и алтернативната се од видот (I);

б) Нултата и алтернативната се од видот (II);

в) Нултата и алтернативната се од видот (III).

а) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (I), т. е. $H_0 : E(X) = \mu_0$, $H_1 : E(X) \neq \mu_0$, тогаш станува збор за двостран тест. Кај овој вид на тестови, имаме две критични вредности, и ако едната ја означиме со $t_{n-1;\alpha/2}$, другата е $-t_{n-1;\alpha/2}$, а критичниот домен е множеството

$$B = \left(-\infty, -t_{n-1;\alpha/2}\right) \cup \left(t_{n-1;\alpha/2}\,, \infty\right).$$

Критичните вредности се читаат од табела I, дадена на крајот на учебникот. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од двете страни на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот t, каде

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

припаѓа на множеството

$$B = \left(-\infty, -t_{n-1;\alpha/2}\right) \cup \left(t_{n-1;\alpha/2}\,, \infty\right)$$

односно ако $t > t_{n-1;\alpha/2}$ или ако $t < -t_{n-1;\alpha/2}$.

Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното отстапување на $\bar{x}$ од μ_0 не е статистички значајно.

Пример 1. Постои сомнеж дека машината којашто пакува одреден производ, чијашто пропишана тежина е $1kg$, не е веќе прецизна па би требало да се изврши нејзин ремонт. За да се донесе одлука за ремонт, избиран е примерок од 16 пакувања на тој производ и добиени се следните резултати:
1,020; 1,010; 1,050; 1,015; 1,002; 1,008; 1,025; 0,998;
1,012; 1,033; 1,017; 1,001; 1,008; 1,011; 1,024; 1,006.

При ниво на значајност 0,05, провери дали на основа на податоците добиени од примерокот, сомнежот за прецизноста на машината е оправдан.

Од искуство е познато дека тежината на пакувањата на еден производ го задоволуваат вториот услов за примена на тестот.

Решение. Бидејќи отстапувањето од пропишаната тежина ($\mu_0 = 1$) не е дозволено во ниту една насока, ќе поставиме хипотези од видот

(I) $H_0 : E(X) = 1 \qquad H_1 : E(X) \neq 1.$

Да ја пресметаме вредноста

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

за конкретниот примерок:

Со замена на

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1,020 + 1,010 + ... + 1,006}{16} = 1,015$$

и

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+...+{x_n}^2-n\bar{x}^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1,020^2+1,010^2+...+1,006^2-16 \cdot 1,015^2}{16 \cdot 15}} = 0,0032,$$

во t, добиваме

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{1,015 - 1}{0,0032} = 4,6875.$$

За $n = 16, \alpha = 0,05$, критичната вредност $t_{n-1;\alpha/2}$, прочитана од табелата I, е

$$t_{n-1;\alpha/2} = t_{15;0,025} = 2,1315.$$

Бидејќи

$$t = 4,6875 > 2,1315 = t_{15;0,025}$$

заклучуваме дека нултата хипотеза треба да ја отфрлиме, па значи ја прифаќаме алтернативната хипотеза, т. е. прифаќаме дека просечната тежина на пакувањата на овој производ се разликува од пропишаната тежина од $1kg$. Притоа, постои ризик од 0,05 дека сме отфрлиле точна нулта хипотеза.

б) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (II), т. е. $H_0 : E(X) \leq \mu_0$, $H_1 : E(X) > \mu_0$, тогаш станува збор за едностран тест. Кај овој вид на тестови, имаме една критична вредност, ја означуваме со $t_{n-1;\alpha}$, а критичниот домен е множеството $B = (t_{n-1;\alpha}, \infty)$. И овде критичните вредности се читаат од табелата I, дадена на крајот на учебникот. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од десната страна на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот t, каде

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

припаѓа на множеството $B = (t_{n-1;\alpha}, \infty)$, односно ако $t > t_{n-1;\alpha}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното отстапување на $\bar{x}$ од μ_0 не е статистички значајно.

Пример 2. Ако во претходниот пример постои сомневање дека пакувањата на производот, во просек, се потешки од $1kg$, при ниво на значајност 0,05, провери дали на основа на податоците добиени од примерокот, сомнежот е оправдан.

Решение. Оправданоста на ова сомневање ќе ја провериме со примена на едностраниот тест, т. е. ќе поставиме хипотези од видот (II), т. е. $H_0 : E(X) \leq 1$, $H_1 : E(X) > 1$. Бидејќи станува збор за истиот пример, вредноста t веќе е пресметана и $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{1{,}015-1}{0{,}0032} = 4,6875$. За $n = 16, \alpha = 0,05$, критичната вредност $t_{n-1;\alpha}$, прочитана од табелата I, е $t_{n-1;\alpha} = t_{15;0{,}05} = 1,7531$. Бидејќи $t = 4,6875 > 1,7531 = t_{15;0{,}05}$, заклучуваме дека нултата хипотеза треба да ја отфрлиме, па значи ја прифаќаме алтернативната хипотеза, т. е. прифаќаме дека просечната тежина на пакувањата на овој производ е поголема од пропишаната тежина од $1kg$. Притоа, постои ризик од 0,05 дека сме отфрлиле точна нулта хипотеза.

в) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (III), т. е. $H_0 : E(X) \geq \mu_0$, $H_1 : E(X) < \mu_0$, тогаш повторно станува збор за еднастран тест. И кај овој вид на тестови, имаме една критична вредност, тоа е бројот $-t_{n-1;\alpha}$, каде $t_{n-1;\alpha}$ го читаме од табелата I, а критичниот домен е множеството $B = (-\infty, -t_{n-1;\alpha})$. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од левата страна на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот t, каде

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

припаѓа на множеството $B = (-\infty, -t_{n-1;\alpha})$, односно ако $t < -t_{n-1;\alpha}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното отстапување на $\bar{x}$ од μ_0 не е статистички значајно.

4.25.3 Тест за еднаквост на математички очекувања при познати дисперзии

Покрај проверката на хипотези за вредноста на обележјето, во практиката честопати е потребно да се споредат вредностите на повеќе обележја, или пак вредностите на едно обележје во повеќе серии на набљудувања. Така, на пример, може да се споредуваат: вредностите на одредена карактеристика на производи произведени на различни машини, вредноста на некое обележје пред и по извршување на некои промени во процесот во кој се набљудува, ефектот од примена на два препарати во земјоделието, квалитетот на домашни во однос на увезени производи, учеството на домашни во однос на странски туристи и др. Гледаме дека предметот на проверка не се вредностите на еден параметар во две обележја, туку споредбата помеѓу овие две вредности. Ние ќе ја дадеме постапката за проверка за еднаквост на просечните вредности на две обележја.

Нека X и Y се две обележја. Со $E(X)$ и $E(Y)$ ги означуваме математичките очекувања на X и Y, соодветно, а со $D(X) = {\sigma_X}^2$ и $D(Y) = {\sigma_Y}^2$ ги означуваме дисперзиите на X и Y, соодветно. Бидејќи проверуваме еднаквост на просечните вредности на двете обележја, постапката за проверка се врши врз основа на аритметичките средини на примероците за обележјата X и Y, коишто ги означуваме со $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, соодветно. Нека обемот на примерокот за обележјето X е n_X, а на примерокот за обележјето Y е n_Y и нека реализираните вредности на аритметичхките средини на избраните примероци се $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Ќе ги разгледаме трите најчести случаи, т.е. кога нултата и алтернативната хипотеза се од видовите:

(I) $H_0 : E(X) = E(Y)$ $H_1 : E(X) \neq E(Y)$

(II) $H_0 : E(X) \leq E(Y)$ $H_1 : E(X) > E(Y)$

(III) $H_0 : E(X) \geq E(Y)$ $H_1 : E(X) < E(Y)$

Пред да пристапиме на објаснување на постапката на проверка на видот на хипотези коишто ќе ги разгледуваме, ќе ги дадеме условите коишто треба да бидат исполнети за примена на овој тест.

Услови за примена на тестот:

1. Избраните примероци се меѓусебно независни, односно изборот на елементите во едниот примерок нема влијание на изборот на елементите во другиот примерок. Тоа значи, случајнате променливи X и Y се независно распределени.

2. Дисперзиите на случајнате променливи X и Y, $D(X)$ и $D(Y)$, се познати, т. е. $D(X) = {\sigma_X}^2$ и $D(Y) = {\sigma_Y}^2$ се зададени бројни вредности.

3. Обемите на примероците се доволно големи, т. е. $n_X \geq 30$ и $n_Y \geq 30$.

Прво треба да избереме тест-величина. Ако, на пример, ја имаме хипотезата од видот (I), тогаш нултата хипотеза се сведува на хипотеза дека разликата на математичките очекувања на X и Y е еднаква на 0. За независно распределените случајни променливи X и Y важи:

1. $E\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) = E\left(\bar{X}\right) - E\left(\bar{Y}\right) = E(X) - E(Y)$;

2. $D\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) = D\left(\bar{X}\right) + D\left(\bar{Y}\right) = {\sigma_{\bar{X}}}^2 + {\sigma_{\bar{Y}}}^2 = \frac{{\sigma_X}^2}{n_X} + \frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}$.

Оттука, слично како во тестот 5.4.1., се добива дека тест-величината е

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - 0}{\sqrt{D\left(\bar{X} - \bar{Y}\right)}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X} + \frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}}}.$$

а) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (I), т. е. $H_0 : E(X) = E(Y)$, $H_1 : E(X) \neq E(Y)$, тогаш станува збор за двостран тест. Кај овој вид на тестови, при ниво на znачајност α, имаме две критични вредности, и ако едната ја означиме со $z_{\alpha/2}$, другата е $-z_{\alpha/2}$, а критичниот домен е множеството $B = \left(-\infty, -z_{\alpha/2}\right) \cup \left(z_{\alpha/2}, \infty\right)$. Критичните вредности ги читаме во табела 1, дадена во тестот 5.4.1.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот z, каде

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X} + \frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}}}$$

припаѓа на множеството

$$B = \left(-\infty, -z_{\alpha/2}\right) \cup \left(z_{\alpha/2}, \infty\right)$$

односно ако $z > z_{\alpha/2}$ или ако $z < -z_{\alpha/2}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиената разлика меѓу аритметичките средини, $\bar{x}$ и $\bar{y}$, на примероците не е статистички значајна.

б) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (II), т. е. $H_0 : E(X) \leq E(Y)$, $H_1 : E(X) > E(Y)$ тогаш станува збор за едностран тест. Кај овој вид на тестови, при избрано ниво на значајност α, имаме една критична вредност, ја означуваме со z_α, а критичниот домен е множеството $B = (z_\alpha, \infty)$. Критичните вредности ги читаме во табела 2, дадена во тестот 5.4.1.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот z, каде

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X} + \frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}}}$$

припаѓа на множеството $B = (z_\alpha, \infty)$, односно ако $z > z_\alpha$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиената разлика меѓу аритметичките средини, $\bar{x}$ и $\bar{y}$, на примероците не е статистички значајна.

в) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (III), т. е. $H_0 : E(X) \geq E(Y)$, $H_1 : E(X) < E(Y)$, тогаш повторно станува збор за едностран тест. И кај овој вид на тестови, при избрано ниво на значајност α, имаме една критична вредност, ја означуваме со $-z_\alpha$, а критичниот домен е множеството $B = (-\infty, -z_\alpha)$. Критичните вредности ги читаме во табелата 3, дадена во тестот 5.4.1.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот z, каде

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X} + \frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}}}$$

припаѓа на множеството $B = (-\infty, -z_\alpha)$, односно ако $z < -z_\alpha$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиената разлика меѓу аритметичките средини, $\bar{x}$ и $\bar{y}$, на примероците не е статистички значајна.

Пример 1. Нека еден ист вид на батерии ги произведуваат два различни производители A и B. Се сомневаме дека батериите произведени од A и B не се со ист квалитет. Затоа, на секоја од батериите во земените примероци од 35 батерии од производителот A и 30 батерии од производителот B, мерено е времетраењето на батериите. Според познатиот принцип на пресметување на просечната вредност, пресметано е дека просечното времетраење на батериите од производителот A изнесува 9,7 часа, додека на батериите од производителот B изнесува 10 часа. Стандардните девијации се познати и изнесуваат 1 час за батериите од производителот A и 1,1 часа за батериите од производителот B. При ниво на значајност 0,05 провери дали може да се прифати претпоставката дека батериите од двата производители не се со ист квалитет.

Решение. Ќе поставиме хипотези од видот

(II) $H_0 : E(X) = E(Y), \qquad H_1 : E(X) \neq E(Y),$

каде обележјето X е времетраењето на батериите од производителот А, а обележјето Y е времетраењето на батериите од производителот Б.

Очигледно е дека условите за примена на тестот се исполнети. Во условите на задачата е дадено дека реализираната вредност на аритметичката средина $\bar{X}$ е $\bar{x} = 9,7$, а реализираната вредност на аритметичката средина $\bar{Y}$ е $\bar{y} = 10$. Стандардните девијации на X и Y се познати и $\sigma_X = 1$, а $\sigma_Y = 1,1$. Обемите на примероците се $n_X = 35$ и $n_Y = 30$. Тогаш бројот

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X} + \frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}}} = \frac{9,7 - 10}{\sqrt{\frac{1^2}{35} + \frac{1,1^2}{30}}} = \frac{-0,3}{0,26} = -1,15.$$

Овој е двостран тест, па за $\alpha = 0,05$, критичнате вредности се $-z_{\alpha/2} = -1,96$ и $z_{\alpha/2} = 1,96$, и бидејќи $z = -1,15 > -1,96 = -z_{\alpha/2}$ нултата хипотеза не ја отфрламе при ова ниво на значајност, т. е не можеме да прифатиме дека производителите A и B произведуваат батерии со различен квалитет.

Пример 2. Нека случајно се избрани по 50 момчиња од четврта година во училиштата A и B. Мерејќи ги нивните тежини, утврдено е дека просечната тежина на момчињата од четврта година во училиштето A е $68,2kg$, а пак просечната тежина на момчињата од четврта година во училиштето B е $67,5kg$. Познато е дека стандардната девијација во случајот кај училиштето A изнесува $2,5kg$, а кај B изнесува $2,8kg$. При ниво на значајност на тестот, 0,05, провери ја хипотезата дека просечната тежина на момчињата од четврта година од училиштето A е поголема на оние од училиштето B.

Решение. Ќе поставиме хипотези од видот

(II) $H_0 : E(X) \leq E(Y) \quad H_1 : E(X) > E(Y)$,

каде обележјето X е тежината на учениците од училиштето A, а обележјето Y е тежината на учениците од училиштето B.

Очигледно е дека условите за примена на тестот се исполнети. Во условите на задачата е дадено дека реализираната вредност на аритметичката средина $\bar{X}$ е $\bar{x} = 68,2$, а реализираната вредност на аритметичката средина $\bar{Y}$ е $\bar{y} = 67,5$. Стандардните девијации на X и Y се познати и $\sigma_X = 2,5$, а $\sigma_Y = 2,8$. Тогаш бројот

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X} + \frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}}} = \frac{68,2 - 67,5}{\sqrt{\frac{2,5^2}{50} + \frac{2,8^2}{50}}} = \frac{0,7}{0,53} = 1,32.$$

За $\alpha = 0,05$, критичната вредност е $z_\alpha = 1,645$, па бидејќи $z = 1,32 < 1,645 = z_\alpha$ нултата хипотеза не ја отфрламе при ова ниво на значајност.

4.25.4 Тест за еднаквост на математички очекувања при непознати дисперзии

Во практиката, во задачите за проверка на хипотези за еднаквоста на математичките очекувања, $E(X)$ и $E(Y)$, на обележјета Xи Y кои се испитуваат, многу е почест случајот дисперзиите, $D(X) = {\sigma_X}^2$ и $D(Y) = {\sigma_Y}^2$, да не се познати. Тоа значи дека вториот услов за примена на тестот 3, којшто ни овозможува да ги пресметаме стандардните грешки $\sigma_{\bar{X}}$ и $\sigma_{\bar{Y}}$, не е исполнет. Во овој случај, ќе претпоставиме дека стандардните девијации σ_X и σ_Y се еднакви и нивната единствена вредност ќе ја оцениме врз основа на стандардните девијации s_X и s_Y на примероците $\bar{X}$и $\bar{Y}$. Нека обемот на примерокот за обележјето X е n_X, а на примерокот за обележјето Y е n_Y и нека реализираните вредности на аритметичките средини на избраните примероци се $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Нултата и алтернативната хипотеза се јавуваат во следните три вида:

(I) $H_0 : E(X) = E(Y) \qquad H_1 : E(X) \neq E(Y)$

(II) $H_0 : E(X) \leq E(Y) \qquad H_1 : E(X) > E(Y)$

(III) $H_0 : E(X) \geq E(Y) \qquad H_1 : E(X) < E(Y)$.

Пред да пристапиме на објаснување на постапката на проверка на видот на хипотези коишто ќе ги разгледуваме, ќе ги дадеме условите коишто треба да бидат исполнети за примена на овој тест.

Услови за примена на тестот:

1. Избраните примероци се меѓусебно независни, односно изборот на елементите во едниот примерок нема влијание на изборот на елементите во другиот примерок. Тоа значи, случајнате променливи X и Yсе независно распределени.

2. Дисперзиите на случајнате променливи X и Y, $D(X)$ и $D(Y)$,

не се познати, но се знае дека тие се еднакви, т. е. $D\left(X\right)={\sigma_X}^2={\sigma_Y}^2=D\left(Y\right)=\sigma^2$.

3. Распределбата на обележјата X и Y се симетрични и унимодални.

4. Обемите на примероците се $n_X\geq 8, n_Y\geq 8$.

Да пристапиме кон изборот на тест-величината. Стандардната девијација σ ќе ја оцениме врз основа на стандардните девијации s_X и s_Y на примероците $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ т. е. за σ ќе ја користиме вредноста

$${\sigma_p}^2=\frac{\left(n_X-1\right){s_X}^2+\left(n_Y-1\right){s_Y}^2}{n_X+n_Y-2}$$

каде

$$s_X=\sqrt{\frac{f_1{x_1}^2+f_2{x_2}^2+...+f_k{x_k}^2-n_X\bar{x}^2}{n_X-1}}$$

$$s_Y=\sqrt{\frac{{f_1}'{x_1}^2+{f_2}'{x_2}^2+...+{f_m}'{x_m}^2-n_Y\bar{y}^2}{n_Y-1}}.$$

Со замена на оваа вредност ${\sigma_p}^2$ на местото на ${\sigma_X}^2$ и ${\sigma_Y}^2$, во статистиката

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-0}{\sqrt{D\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_X}^2}{n_X}+\frac{{\sigma_Y}^2}{n_Y}}}$$

добиваме нова тест-величина, а тоа е величината

$$t=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{{\sigma_p}^2}{n_X}+\frac{{\sigma_p}^2}{n_Y}}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sigma_p\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}}$$

.

Реализираната вредност од примерокот е бројот

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sigma_p\sqrt{\frac{1}{n_X}+\frac{1}{n_Y}}}.$$

Повторно ќе направиме разграничување за видот на хипотезите:

а) Нултата и алтернативната се од видот (I);

б) Нултата и алтернативната се од видот (II);

в) Нултата и алтернативната се од видот (III).

а) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (I), т. е. $H_0 : E(X) = E(Y)$, $H_1 : E(X) \neq E(Y)$, тогаш станува збор за двостран тест. Кај овој вид на тестови, имаме две критични вредности, и ако едната ја означиме со $t_{n_X+n_Y-2;\alpha/2}$, другата е $-t_{n_X+n_Y-2;\alpha/2}$, а критичниот домен е множеството

$$B = \left(-\infty, -t_{n_X+n_Y-2;\alpha/2}\right) \cup \left(t_{n_X+n_Y-2;\alpha/2}\, , \infty\right).$$

Критичните вредности се читаат од табелата I, дадена на крајот на учебникот. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од двете страни на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот t, каде

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$$

припаѓа на множеството

$$B = \left(-\infty, -t_{n_X+n_Y-2;\alpha/2}\right) \cup \left(t_{n_X+n_Y-2;\alpha/2}\, , \infty\right)$$

односно ако $t > t_{n_X+n_Y-2;\alpha/2}$ или ако $t < -t_{n_X+n_Y-2;\alpha/2}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли. и добиената разлика меѓу аритметичките средини, $\bar{x}$ и $\bar{y}$, на примероците не е статистички значајна.

б) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (II), т. е. $H_0 : E(X) \leq E(Y)$, $H_1 : E(X) > E(Y)$, тогаш станува збор за едностран тест. Кај овој вид на тестови, имаме една критична вредност, ја означуваме со $t_{n_X+n_Y-2;\alpha}$, а критичниот домен е множеството $B = (t_{n_X+n_Y-2;\alpha}, \infty)$. И овде критичните вредности се читаат од табелата I, дадена на крајот на учебникот. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од десната страна на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот t, каде

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$$

припаѓа на множеството $B = (t_{n_X+n_Y-2;\alpha}, \infty)$, односно ако

$$t > t_{n_X+n_Y-2;\alpha}.$$

Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиената разлика меѓу аритметичките средини, $\bar{x}$ и $\bar{y}$, на примероците не е статистички значајна.

в) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (III), т. е. $H_0 : E(X) \geq E(Y)$, $H_1 : E(X) < E(Y)$, тогаш повторно станува збор за едностран тест. И кај овој вид на тестови, имаме една критична вредност, тоа е бројот $-t_{n_X+n_Y-2;\alpha}$, каде $t_{n_X+n_Y-2;\alpha}$ го читаме од табелата I, а критичниот домен е множеството $B = (-\infty, -t_{n_X+n_Y-2;\alpha})$. Гледано на бројната оска, критичниот домен се наоѓа од левата страна на нулата.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот t, каде

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$$

припаѓа на множеството $B = (-\infty, -t_{n_X+n_Y-2;\alpha})$, односно ако $t < -t_{n_X+n_Y-2;\alpha}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиената разлика меѓу аритметичките средини, $\bar{x}$ и $\bar{y}$, на примероците не е статистички значајна.

Пример 1. Во една фабрика еден производ се изработува на две машини A и B. Мерени се едночасовните производства на тој производ на машината A и на машината B. Притоа, на машината A добиени се следните резултати: 42, 42, 41, 42, 43, 42, 41, 43, а на машината B следните: 43, 40, 41, 42, 40, 42, 41, 39, 41, 41. Да се провери, при ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,05$, дали машините A и B работат со различна брзина (при претпоставка за еднаквост на дисперзиите на набљудуваните обележја).

Решение. Овде обележјето X е бројот на производи, произведени на машината A во текот на еден час, а обележјето Y е бројот на производи, произведени на машината B во текот на еден час. Ќе поставиме хипотези од видот

(I) $H_0 : E(X) = E(Y) \qquad H_1 : E(X) \neq E(Y)$.

Пред да поминеме на пресметување на потребните вредности за примена на тестот, податоците од примероците ќе ги групираме:

За машината A:

Број на производи за 1 час, x_i	41	42	43
Честота, f_i	2	4	2

За машината B:

Број на производи за 1 час, x_i'	39	40	41	42	43
Честота, f_i'	1	2	4	2	1

Во нашиот пример $n_X = 8,\ n_Y = 10$, а

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{n_X} = \frac{41 \cdot 2 + 42 \cdot 4 + 43 \cdot 2}{8} = 42$$

$$\bar{y} = \frac{x'_1 f'_1 + x'_2 f'_2 + ... + x'_5 f'_5}{n_Y} = \frac{39 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 41 \cdot 4 + 42 \cdot 2 + 43 \cdot 1}{10} = 41$$

и

$$s_X = \sqrt{\frac{f_1 {x_1}^2 + f_2 {x_2}^2 + f_3 {x_3}^2 - n_X \bar{x}^2}{n_X - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 41^2 + 4 \cdot 42^2 + 2 \cdot 43^2 - 8 \cdot 42^2}{8 - 1}} = \sqrt{0,57} = 0,76$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{{f_1}' {x_1}^2 + {f_2}' {x_2}^2 + ... + {f_5}' {x_5}^2 - n_Y \bar{y}^2}{n_Y - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 \cdot 39^2 + 2 \cdot 40^2 + 4 \cdot 41^2 + 2 \cdot 42^2 + 1 \cdot 43^2 - 10 \cdot 41^2}{10 - 1}} = \sqrt{1,33} = 1,15.$$

Сега

$${\sigma_p}^2 = \frac{(n_X - 1)\, {s_X}^2 + (n_Y - 1)\, {s_Y}^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{(8-1)\, 0,57 + (10-1)\, 1,33}{8 + 10 - 2} = 0,998$$

а

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} = \frac{42 - 41}{\sqrt{0,998}\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}} = 2,11.$$

При ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,05$,

$$t_{n_X + n_Y - 2;\alpha/2} = t_{16;0,025} = 2,12.$$

Бидејќи

$$2,11 = t < 2,12 = t_{n_X + n_Y - 2;\alpha/2}\ ,$$

заклучуваме дека нултата хипотеза не треба да се отфрли, т. е. прифаќаме дека машините A и B не работат со различна брзина.

4.26 Тестови за дисперзија

Како што знаеме дисперзијата претставува мерка за отстапување на вредностите на една случајна променлива од нејзиното математичко очекување. Така, дисперзијата ја одразува точноста на мерењата, точноста на изработката, општо, стабилноста на еден процес или хомогеноста на популацијата која што ја набљудуваме преку дадено нејзино обележје. Затоа, во статистичките испитувања важни се проверките на хипотезите за вредноста на дисперзијата и проверките на хипотезите за еднаквост на дисперзиите. Во продолжение ќе ја објасниме постапката на спроведување на овие тестови, погодноста на изборот на секој тест, како и конкретно спроведување на тестот низ соодветно избрани примери.

4.26.1 Тест за вредноста на дисперзијата

Нека се разгледува обележје X на дадена популација. Како и досега со $E(X)$ го означуваме математичкото очекување на X, а со $D(X) = \sigma^2$ ја означуваме дисперзијата на X. Нека заклучоците за обележјето се донесуваат врз основа на примерок од дадената популација чиј обем (број на елементи во примерокот) е n. И овде, ако реализираните вредности на примерокот се повторуваат, т. е. ако вредноста x_1 се јавува f_1 пати, x_2 се јавува f_2 пати, $\ldots$, x_k се јавува f_k пати, тогаш

$$f_1 + f_2 + ... + f_k = n$$

и релизираната вредност на аритметичката средина на примерокот е

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{f_1 + f_2 + ... + f_k} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{n}$$

а за стандардната девијација ја користиме формулата за поправената стандардна девијација

$$s = \sqrt{\frac{f_1 {x_1}^2 + f_2 {x_2}^2 + ... + f_k {x_k}^2 - n\bar{x}^2}{n-1}}.$$

Ако врз основа на податоците од примерокот за обележјето X е добиена оценка на дисперзијата, на пример, поголема од вообичаената (претпоставената) или пропишаната со соодветни стандарди вредност, ${\sigma_0}^2$, се поставува прашањето дали во процесот или популацијата чиешто обележје се набљудува, настанале промени. Најчесто, се јавува потреба од задача за проверка на нултата во однос на алтернативната хипотеза, каде $H_0 : D(X) = {\sigma_0}^2$, а $H_1 : D(X) > {\sigma_0}^2$. Ние, ќе ги разгледаме трите случаи на проверка на хипотези, т. е.:

(I) $H_0 : D(X) = {\sigma_0}^2 \qquad H_1 : D(X) \neq {\sigma_0}^2$

(II) $H_0 : D(X) = {\sigma_0}^2 \qquad H_1 : D(X) > {\sigma_0}^2$

(III) $H_0 : D(X) = {\sigma_0}^2 \qquad H_1 : D(X) < {\sigma_0}^2$

Во сите случаи, тест-величината е

$$(n-1)\,\frac{S^2}{{\sigma_0}^2}$$

којашто претставува случајна променлива. Реализираната вредност од примерокот е бројот

$$\chi^2=(n-1)\,\frac{s^2}{{\sigma_0}^2}$$

(χ^2 го читаме хи квадрат). Со секое избрано ниво на значајност на тестот, α, се определува критичниот домен и критичните вредности на χ^2. Ќе направиме разграничување за видот на хипотезите:

а) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот (I), т. е. $H_0 : D\,(X) = {\sigma_0}^2,\ H_1 : D\,(X) \neq {\sigma_0}^2$, тогаш станува збор за двостран тест. Кај овој вид на тестови, имаме две критични вредности, едната е $\chi^2_{n-1;\alpha/2}$, другата е $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$, а критичниот домен е множеството

$$B=\left(-\infty,\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right)\cup\left(\chi^2_{n-1;\alpha/2}\,,\infty\right).$$

Притоа, вредностите $\chi^2_{n-1;\alpha/2}$ и $\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ се определуваат од таблицата II , дадена на крајот на учебникот.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот χ^2, каде $\chi^2=(n-1)\,\frac{s^2}{{\sigma_0}^2}$, припаѓа на множеството

$$B=\left(-\infty,\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}\right)\cup\left(\chi^2_{n-1;\alpha/2}\,,\infty\right)$$

односно ако $\chi^2>\chi^2_{n-1;\alpha/2}$ или ако $\chi^2<\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрл и добиеното отстапување на дисперзијата од ${\sigma_0}^2$ не е статистички значајно.

б) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот

(II):$H_0 : D\,(X) = {\sigma_0}^2,\ H_1 : D\,(X) > {\sigma_0}^2$,

тогаш станува збор за едностран тест. Во овој случај, повторно, од податоците од примерокот се определува вредноста

$$\chi^2 = (n-1)\,\frac{s^2}{{\sigma_0}^2}.$$

При ниво на значајност на тестот, α, имаме една критична вредност, ја означуваме со $\chi^2_{n-1;\alpha}$, а критичниот домен е множеството $B = (\chi^2_{n-1;\alpha}, \infty)$. И овде, вредноста $\chi^2_{n-1;\alpha}$ се определува од таблицата II, дадена на крајот на учебникот.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот χ^2, каде $\chi^2 = (n-1)\,\frac{s^2}{{\sigma_0}^2}$, припаѓа на множеството $B = (\chi^2_{n-1;\alpha}, \infty)$, односно ако $\chi^2 > \chi^2_{n-1;\alpha}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното зголемување на дисперзијата не е статистички значајно и е резултат на случајни фактори.

в) Ако нултата и алтернативната хипотеза се од видот

(III):$H_0 : D\,(X) = {\sigma_0}^2,\ H_1 : D\,(X) < {\sigma_0}^2$,

и тогаш станува збор за едностран тест. Повторно, од податоците од примерокот се определува вредноста $\chi^2 = (n-1)\,\frac{s^2}{{\sigma_0}^2}$. При ниво на значајност на тестот, α, имаме една критична вредност, ја означуваме со $\chi^2_{n-1;1-\alpha}$, а критичниот домен е множеството $B = (-\infty, \chi^2_{n-1;1-\alpha})$. И овде, вредноста $\chi^2_{n-1;1-\alpha}$ се определува од таблицата II, дадена на крајот на учебникот.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот χ^2, каде

$$\chi^2 = (n-1)\,\frac{s^2}{{\sigma_0}^2}$$

припаѓа на множеството $B = (-\infty, \chi^2_{n-1;1-\alpha})$, односно ако

$$\chi^2 < \chi^2_{n-1;1-\alpha}.$$

Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното намалување на дисперзијата не е статистички значајно и е резултат на случајни фактори.

Пример 1. Точноста на работа на една машина, според стандардите, е $\sigma_0{}^2 = 0,1$. Направена е контролна проверка со мерења на тежината на 25 случајно избрани производи, изработени на таа машина. Притоа, добиени се следните резултати:

Измерена тежина	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
Честота	2	6	9	7	1

При ниво на значајност на тестот, $\alpha = 0,05$, провери ја хипотезата дека машината не ја обезбедува бараната точност и има потреба од нејзин ремонт.

Решение. Нека обележјето X е тежината на производите произведени на дадената машина. Треба да се спроведе постапка за проверка на хипотезите од видот:

$H_0 : D\,(X) = 0,1 \qquad H_1 : D\,(X) > 0,1.$

Според податоците од примерокот, имаме дека $n = 25$ и

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_5 f_5}{f_1 + f_2 + ... + f_5} =$$

$$= \frac{3,0 \cdot 2 + 3,5 \cdot 6 + 3,8 \cdot 9 + 4,4 \cdot 7 + 4,5 \cdot 1}{2 + 6 + 9 + 7 + 1} = \frac{96,5}{25} = 3,86$$

$$s = \sqrt{\frac{f_1 x_1{}^2 + f_2 x_2{}^2 + ... + f_5 x_5{}^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 3,0^2 + 6 \cdot 3,5^2 + 9 \cdot 3,8^2 + 7 \cdot 4,4^2 + 1 \cdot 4,5^2 - 25 \cdot 3,86^2}{25-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4,74}{24}} = \sqrt{0,1975} = 0,444.$$

Сега бројот

$$\chi^2 = (n-1)\,\frac{s^2}{\sigma_0{}^2} = (25-1)\,\frac{0,1975}{0,1} = 47,4.$$

При ниво на значајност на тестот, $\alpha = 0,05$, вредноста на $\chi^2_{n-1;\alpha} =$

$\chi^2_{24;0,05}$, прочитана во таблицата II изнесува 36,415. Бидејќи

$$47,4 = \chi^2 > \chi^2_{24;0,05} = 36,415$$

заклучуваме дека нултата хипотеза треба да се отфрли, т. е. прифаќаме дека машината не ја обезбедува бараната точност и има потрба од нејзин ремонт.

Опишаниот тест за проверка на хипотеза за вредноста на дисперзијата се нарекува хи-квадрат-тест.

4.26.2 Тест за еднаквост на дисперзии

Како што видовме, еден од условите за примена на t-тестот за еднаквост на математичките очекувања на две обележја беше еднаквоста на нивните дисперзии. Освен овде, потребата од проверка на еднаквоста на дисперзиите на две обележја, се јавува и во многу други важни задачи од практиката. Имајќи предвид дека дисперзијата ја одразува точноста на мерењата, точноста на изработката, стабилноста на еден процес или хомогеноста на популацијата која што ја набљудуваме преку дадено нејзино обележје, станува јасно дека потребата од проверка на еднаквост на дисперзиите на две обележја ќе се јави во задачите каде што имаме: споредување на точноста на два апарати за мерење, споредување на точноста на две методи за анализа, споредување на стабилноста на два процеса, споредување на хомогеноста на две популации итн.

Нека се разгледуваат две обележја X и Y. Како и досега со $E(X)$ и $E(Y)$ ги означуваме математичките очекувања на X и Y, а со $D(X) = {\sigma_X}^2$ и $D(Y) = {\sigma_Y}^2$ ги означуваме дисперзиите на X и Y, соодветно. Нека заклучоците за обележјето се донесуваат врз основа на примероци за двете обележја, чии обеми (број на елементи во примероците) се n_X и n_Y, соодветно. И овде, ако реализираните вредности на примероците се повторуваат, т. е. ако, во примерокот за X, вредноста x_1 се јавува f_1 пати, x_2 се јавува f_2 пати, $\ldots$, x_k се јавува f_k пати, тогаш

$$f_1 + f_2 + ... + f_k = n_X$$

и, ако, во примерокот за Y, вредноста x'_1 се јавува f'_1 пати, x'_2 се јавува f'_2 пати, $\ldots$, x'_l се јавува f'_l пати, тогаш

$$f'_1 + f'_2 + ... + f'_l = n_Y.$$

Притоа, реализираните вредности на аритметичхките средини на примероците за X и Y се

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{n_X}$$

и

$$\bar{y} = \frac{x'_1 f'_1 + x'_2 f'_2 + ... + x'_l f'_l}{n_Y}$$

а за стандардните девијации ги користиме формулите за поправените стандардни девијациии, т. е.

$$s_X = \sqrt{\frac{f_1 {x_1}^2 + f_2 {x_2}^2 + ... + f_k {x_k}^2 - n_X \bar{x}^2}{n_X - 1}}$$

и

$$s_Y = \sqrt{\frac{f'_1 {x'_1}^2 + f'_2 {x'_2}^2 + ... + f'_l {x'_l}^2 - n_Y \bar{y}^2}{n_Y - 1}}.$$

Ако врз основа на податоците од примероците за обележјетата X и Y се пресметани поправените оценки на дисперзиите ${s_X}^2$ и ${s_Y}^2$, соодветно и ако притоа, едната од нив е поголема, на пример, ${s_X}^2$»${s_Y}^2$, тогаш се поставува задачата за проверка на нултата во однос на алтернативната хипотеза, каде $H_0 : D(X) = D(Y)$, а $H_1 : D(X) > D(Y)$. Овде станува збор за едностран тест. Бидејќи во практиката, најчесто се јавуваат задачи од овој тип, ние ќе ја разгледаме само постапката на проверка на овој вид на хипотези. Природно е проверката да се изведува со бројот $\frac{{s_X}^2}{{s_Y}^2}$, пришто, нагласуваме дека во броителот се става поголемата од пресметаните дисперзии. Јасно, ако нултата хипотеза е точна очекуваме вредностите ${s_X}^2$ и ${s_Y}^2$ да бидат приближно еднакви. Значи, во овој случај, количникот $\frac{{s_X}^2}{{s_Y}^2}$ има помала вредност. Критичниот домен, како и секогаш досега, зависи од нивото на значајност на тестот, α, но и од обемите на примероците.

Во овој случај, од податоците од примерокот се определува вредноста $F = \frac{{s_X}^2}{{s_Y}^2}$. При ниво на значајност на тестот, α, имаме една критична вредност, ја означуваме со $F_{n_X-1,n_Y-1;\alpha}$, а критичниот домен е множеството $B = (F_{n_X-1,n_Y-1;\alpha}, \infty)$.

Вредноста $F_{n_X-1,n_Y-1;\alpha}$ се определува од таблицата III, дадена на крајот на учебникот.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот, F каде $F = \frac{{s_X}^2}{{s_Y}^2}$, припаѓа на множеството $B = (F_{n_X-1,n_Y-1;\alpha}, \infty)$, односно ако $F > F_{n_X-1,n_Y-1;\alpha}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и разликата на дисперзиите на обележјата не е статистички значајна и е резултат на случајни фактори.

Пример 1. Две машини, A и B, од ист тип, изработуваат еден производ со одредена димензија. Да претпоставиме дека аритметичката средина на разгледуваните димензии зависи само од подесеноста на машините, а отстапувањата на димензиите од средната вредност зависи од работникот кој работи со машината. Земени се два примерока, едниот од производи изработени на машината A, а другиот од производи изработени на машината B и измерена е разгледуваната димензија на секој од нив. Добиени се следните резултати:

За работникот на машината A: 2,09; 2,06; 2,09; 2,04; 2,11; 2,07; 2,08; 2,10; 2,08; 2,10; 2,08; 2,09; 2,05; 2,12; 2,10; 2,05; 2,08; 2,06; 2,12; 2,09; 2,11.

За работникот на машината B: 2,01; 2,09; 2,04; 2,03; 2,05; 2,04; 2,02; 2,08; 2,06; 2,04; 2,07; 2,05; 2,05; 2,06; 2,04; 2,07; 2,03; 2,06; 2,05; 2,02; 2,06.

Дали врз основа на податоците од примероците, при ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,05$, може да се заклучи дека едниот работник е попрецизен од другиот работник?

Решение. Бидејќи некои од податоците се повторуваат, прво ќе ги групираме:

За работникот на машината A:

x_i	2,04	2,05	2,06	2,07	2,08	2,09	2,10	2,11	2,12
f_i	1	2	2	1	4	4	3	2	2

За работникот на машината B:

x'_i	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05	2,06	2,07	2,08	2,09
f'_i	1	2	2	4	4	4	2	1	1

Во примерот $n_X = 21$ и $n_Y = 21$,

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_9 f_9}{n_X} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2,04 + 2 \cdot 2,05 + ... + 2 \cdot 2,11 + 2 \cdot 2,12}{21} = \frac{43,77}{21} = 2,0843$$

$$\bar{y} = \frac{x_1^{'} f_1^{'} + x_2^{'} f_2^{'} + ... + x_9^{'} f_9^{'}}{n_Y} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2,01 + 2 \cdot 2,02 + ... + 1 \cdot 2,08 + 1 \cdot 2,09}{21} = \frac{43,02}{21} = 2,0486$$

$$s_X = \sqrt{\frac{f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + ... + f_9 x_9^2 - n_X \bar{x}^2}{n_X - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 \cdot 2,04^2 + 2 \cdot 2,05^2 + ... + 2 \cdot 2,12^2 - 21 \cdot 2,0843^2}{21 - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,009266}{20}} = \sqrt{0,0004633} = 0,0215$$

$$s_Y = \sqrt{\frac{f_1^{'} x_1'^2 + f_2^{'} x_2'^2 + ... + f_9^{'} x_9'^2 - n_Y \bar{y}^2}{n_Y - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 \cdot 2,01^2 + 2 \cdot 2,02^2 + ... + 1 \cdot 2,09^2 - 21 \cdot 2,0486^2}{21 - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0,005801}{20}} = \sqrt{0,00029} = 0,0170$$

Бидејќи ${s_X}^2 > {s_Y}^2$, поставуваме хипотези од видот

$H_0 : D\left(X\right) = D\left(Y\right),\ H_1 : D\left(X\right) > D\left(Y\right).$

Бројот

$$F = \frac{{s_X}^2}{{s_Y}^2} = \frac{0,0004633}{0,00029} = 1,5976$$

а при ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,05$, критичната вредност е

$$F_{n_X - 1, n_Y - 1; \alpha} = F_{20,20;0,05} = 2,12.$$

Бидејќи

$$F = 1,5976 < 2,12 = F_{n_X - 1, n_Y - 1; \alpha}$$

следува дека нултата хипотеза не ја отфрламе, т. е. врз основа на податоците од примероците заклучуваме дека двата работника се подеднакво прецизни.

Опишаниот тест за проверка на хипотеза за еднаквост на дисперзии се нарекува F-тест.

Пример 2. Да се констатира дали инсулинска терапија кај пациенти со дијабет тип 1 влијае на пациентите, според вредностите за серумска глукоза пред и по администрирање на терапијата дадени во табелата:

mM Глукоза пред администрирање	mM глукоза по администрирање
9,6	4,3
9,2	4,0
10,5	5,6
9,8	4,7
11,3	5,2
7,6	3,8
12,1	5,8
8,3	4,6
8,5	4,9
10,2	5,4

Решение. Нултата хипотеза претставува дека нема сигнификантна разлика пред и по третман со инсулин кај пациенти со дијабет тип 1. Се поставува и алтернативна хипотеза дека постои можност за значајна разлика по третманот со инсулин кај пациенти со дијабет тип 1.

$N_0 : E(H) = E(Y)$

$N_1 : E(H) \neq E(Y)$.

Условите за изведување на статистички тест се исполнети (доволен број примероци $n > 8$; позната дисперзија на случајната променлива и рамномерна распределба на релативните честоти на вредностите). Потребно е да се направи дополнителен тест за еднаквост на дисперзиите.

Се пресметуваат средната вредност и стандардната девијација на нивото на глукоза во двата случаи.

$\bar{x} = \frac{9{,}6+9{,}2+10{,}5+9{,}8+11{,}3+7{,}6+12{,}1+8{,}3+8{,}5+10{,}2}{10} = 9,71$

$\bar{y} = \frac{4{,}3+4{,}0+5{,}6+4{,}7+5{,}2+3{,}8+5{,}8+4{,}6+4{,}9+5{,}4}{10} = 4,83$

Се пресметуваат дисперзиите на променливите.

$D_x = s_x^2 = 1,39^2 = 1,9321$

$D_y = s_y^2 = 0,67^2 = 0,4489$.

Критична вредност за F за ниво на значајност од $\alpha = 0,05$ во овој случај е 3,18 по што следува дека $4,30 > 3,18$, односно дека постои значајна разлика помеѓу двете дисперзии и се прифаќа алтернативната хипотеза.

Се изведува $t-$тест за независни променливи со нееднакви дисперзии:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}} = 10,01$$

Критична вредност за двостран $t-$тест при ниво на значајност $\alpha = 0,05$ е 2,16 па бидејќи $10,01 > 2,16$ се отфрла нултата хипотеза, односно се констатира дека инсулинската терапија влијае на нивото на серумска глукоза кај пациенти со дијабет тип 1.

Пример 3. Да се констатира дали има значајна разлика во активноста на каталазата во серум кај хиперхолестеролемицни vs. контролни пациенти според вредностите за серумска дадени во табелата:

U/mL Cat (контролни)	U/mL Cat (хиперхолест.)
49,3	27,3
49,5	42,7
51,6	78,6
52,4	80,5
53,7	55,4
51,9	105,9
53,5	95,3
50,8	36,4
55,2	72,8
53,6	111,7

Да се оцени дали при ниво на значајност 0,05 има пораст на каталазата како протективен ензим при воспалителни процеси предизвикани од зголеменото ниво на холестерол во циркулација.

Решение.

$$\bar{x} = 52,15 \;\; \bar{y} = 70,66$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} = 1,91; \;\; \sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}} = 29,32$$

Се пресметуваат дисперзиите на променливите.

$$D_x = s_x^2 = 1,91^2 = 3,67; \;\; D_y = s_y^2 = 29,32^2 = 862,91$$

Се изведува и тест за еднаквост на дисперзиите со нулта хипотеза

$H_0:\ D(H) = D(Y)$

и алтернативна хипотеза

$H_1:\ E(H) > E(Y)$.

$$F = \frac{s_y^2}{s_x^2} = \frac{862,91}{3,67} = 235,12.$$

Критична вредност за F за ниво на значајност од $\alpha = 0,05$ во овој случај е 3,18 по што следува дека $235,12 > 3,18$ односно дека постои значајна разлика помеѓу двете дисперзии и се прифаќа алтернативната хипотеза.

Се изведува tтест за независни променливи со нееднакви дисперзии

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}} = 1,98.$$

Критична вредност за двостран $t-$тест при ниво на значајност $\alpha = 0,05$ е 2,16 па бидејќи $1,98 < 2,16$ не се отфрла нултата хипотеза односно се констатира дека кај хиперхолестеролемицни пациенти нема значајно покачување на активноста на серумската каталаза.

Пример 4. Се следи нивото на *alanin aminotransferaza* (ALT) како биомаркер за оштетувањето на црн дроб кај лабораториски стаорци по интраперитонеална администрација на различна доза на ксенобиотик (10 и 15 mg/kg).

U/L ALT (доза 10 mg/kg)	U/L ALT (доза 15 mg/kg)
72,4	78,3
70,5	80,7
71,3	81,6
74,6	79,5
75,1	82,4
69,4	77,9
70,3	80,3
73,5	79,4
72,8	81,8
68,6	79,7

Да се оцени дали при ниво на значајност 0,05 дозата на ксенобиотикот значајно го менува серумското нивото на аланин аминотранферазата

Решение. Се пресметуваат дисперзиите на променливите.

$D_x = s_x^2 = 2,19^2 = 4,79$

$D_y = s_y^2 = 1,49^2 = 2,22$

$F = \frac{s_x^2}{s_y^2} = \frac{4{,}79}{2{,}22} = 2,17$

Критична вредност за F за ниво на значајност од $\alpha = 0,05$ во овој случај е 3,18 по што следува дека $2,17 < 3,18$, односно дека не постои значајна разлика помеѓу двете дисперзии и не се отфрла нултата хипотеза. За определување статистичка разлика се користи $t-$тест за еднакви дисперзии.

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = -9,93$$

Критична вредност за двостран $t-$тест при ниво на значајност $\alpha = 0,05$ е 2,1 па бидејќи $9,93 > 2,1$ се отфрла нултата хипотеза, односно се констатира дека дозата на ксенобиотикот значајно го менува серумското нивото на аланин аминотранферазата.

Пример 5. Се следи нивото на *кисела фосфатаза* (AP) како тумор маркер за кај лабораториски стаорци по интрагастрална администрација на различна доза на канцерогена супстанца (10 и 20 mg/kg).

AP (доза 10 mg/kg)	AP (доза 20 mg/kg)
3,45	8,65
3,87	7,65
4,12	10,12
5,65	12,43
4,38	11,25
6,16	9,95
6,89	9,29
2,43	10,78
2,96	10,56
4,69	11,83

Да се оцени дали при ниво на значајност 0,05, зголемувањето на активноста на AP е пропорционално со зголемување на дозата на канцерогената супстанца.

Решение.

$$\bar{x} = 4,46 \;\; \bar{y} = 10,25$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 1,42; \;\; \sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = 1,45$$

Се пресметуваат дисперзиите на променливите.

$$D_x = s_x^2 = 1,42^2 = 2,02; \;\; D_y = s_y^2 = 1,45^2 = 2,11$$

Критична вредност за F за ниво на значајност од $\alpha = 0,05$ во овој случај е 3,18 по што следува дека $0,957 < 3,18$, односно дека не постои значајна разлика помеѓу двете дисперзии и не се отфрла нултата хипотеза. За определување на статистицка разлика се користи tтест за еднакви дисперзии.

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = -9,02$$

Критична вредност за двостран $t-$тест при ниво на значајност

$\alpha = 0,05$ е 2,1 па бидејќи $9,02 > 2,1$ се отфрла нултата хипотеза, односно се констатира дека зголемувањето на дозата на канцерогенот значајно влијае на порастот на серумската кисела фосфатаза.

4.27 Тест за независност на обележја

4.27.1 Тест за согласноста на емпириските со очекуваните честоти

Многупати резултатите добиени врз основа на примерок не се идентички еднакви со теоретските резултати што се очекуваат според правилата на веројатноста. На пример, при 100 фрлања на метална пара, претпоставувајќи дека парата е хомогена, според правилата на веројатноста, треба да се појават 50 грба и 50 писма. Но, во реалноста, ако експериментот со 100 фрлања на метална пара го повториме неколкупати, можно е да се добијат 48 грба и 52 писма, или пак 53 грба и 47 писма, итн. т. е. ретко ќе се постигнат точно очекуваните теориски резултати.

Разгледуваме обележје X на некоја популација и нека

$$E_1, E_2, ..., E_r$$

се можните модалитети на обележјето. Земен е случаен примерок и нека во тој примерок модалитетот E_1 се појавил f_1 пати, модалитетот E_2 се појавил f_2 пати,…, модалитетот E_r се појавил f_r пати, т. е. емпириските честоти на модалитетите $E_1, E_2, ..., E_r$, во дадениот примерок, се $f_1, f_2, ..., f_r$, соодветно. Нултата хипотеза се однесува на очекуваната распределба на модалитетите на разгледуваното обележје, а тестот треба да покаже дали емпириската распределба на примерокот значајно се разликува од претпоставената (очекуваната) распределба. По претпоставка дека нултата хипотеза е точна, очекуваните (теориските) честоти на модалитетите

$$E_1, E_2, ..., E_r$$

според правилата на веројатноста, се

$$f'_1, f'_2, ..., f'_r,$$

соодветно. Добиваме табела од следниот вид:

Модалитети	Емпириски честоти	Очекувани честоти
E_1	f_1	f_1'
E_2	f_2	f_2'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_r	f_r	f_r'

Табела 1

Честопати се поставува прашањето дали емпириските честоти значајно се разликуваат од очекуваните.

Ние ќе го разгледаме тестот за проверка на хипотезите за рамномерна распределба на обележјето, т. е. ја разгледуваме нултата хипотеза

H_0: Модалитетите $E_1, E_2, ..., E_r$ имаат еднаква релативна честота $\pi_0 = \frac{1}{r}$

наспроти алтернативната

H_1: Модалитетите $E_1, E_2, ..., E_r$ имаат различни релативни честоти.

Во овие случаи, проверката се врши врз основа на отстапувањата на емпириските од очекуваните честоти, т. е. на тест-величината

$$\chi^2 = \frac{(f_1 - f'_1)^2}{f'_1} + \frac{(f_2 - f'_2)^2}{f'_2} + ... + \frac{(f_r - f'_r)}{f'_r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i}.$$

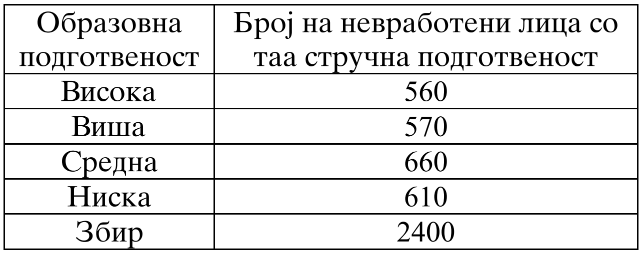
Вредноста на χ^2 е 0 само во случај на идентичност на емпириските со очекуваните честоти. Но, во пракса, поради случајни фактори не можеме да очекуваме ваква идентичност, дури ни кога поставената нулта хипотеза е точна. Ако нултата хипотеза е точна разликата мегу емпириските и очекуваните честоти ќе биде мала, но до кога ќе сметаме дека добиената разлика мегу емпириските и очекуваните честоти не е статистички значајна зависи од нивото на значајност на тестот, α, кое однапред сме го избрале. Како и досега се определуваат критични точки и критичен домен. Во случајот критичната точка е $\chi^2_{r-1;\alpha}$, што ја читаме во табелата II, а критичниот домен е множеството $B = (\chi^2_{r-1;\alpha}, \infty)$.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот χ^2, каде

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i},$$

припаѓа на множеството $B = (\chi^2_{n-1;\alpha}, \infty)$, односно ако $\chi^2 > \chi^2_{r-1;\alpha}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното отстапување на емпириските од теориските (очекуваните) честоти не е статистички значајно и е резултат на случајни фактори.

Пример. Во агенцијата за вработување на Р. Македонија, евидентирани се сите лица кои се невработени и нивната образовна подготвеност. Образовната подготвеност е поделена во 4 категории: ниска, средна, виша и висока. Земен е примерок од 2400 невработени лица и испитана е нивната образовна подготвеност. Добиени се следните резултати:



Образовна подготвеност	Број на невработени лица со таа стручна подготвеност
Висока	560
Виша	570
Средна	660
Ниска	610
Збир	2400

Испитај, врз основа на податоците од примерокот и при ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,05$, дали учеството на лица со ниска, средна, виша и висока подготвеност во множеството на невработени лица е различно.

Решение. Во овој случај задачата е да се испита дали распределбата на невработените лица според образовната подготвеност се разликува од очекуваната, рамномерна распределба само во границите на случајните фактори. Овде популацијата ја сочинуваат невработените лица во Р. Македонија, обележјето е X: образовната подготвеност на невработените лица. Ова обележје има 4 модалитети: E_1-висока образовна подготвеност, E_2-виша образовна подготвеност, E_3-средна образовна подготвеност, E_4-ниска образовна подготвеност. Нултата и алтернативната хипотеза се:

H_0: Модалитетите E_1, E_2, E_3, E_4 имаат еднаква релативна честота $\pi_0 = \frac{1}{4}$;

H_1: Модалитетите E_1, E_2, E_3, E_4 имаат различни релативни честоти.

Ако нултата хипотеза е точна, очекуваните честоти се меѓусебно еднакви и изнесуваат $\frac{2400}{4} = 600$. Сега ја поставуваме табелата на емпириски и очекувани честоти:

Модалитети, E_i	Емпириски честоти, f_i	Очекувани честоти f_i'	Разликата $f_i - f_i'$
Висока	560	600	-40
Виша	570	600	-30
Средна	660	600	60
Ниска	610	600	10
Збир	2400	2400	

Тогаш

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i} = \frac{(-40)^2}{600} + \frac{(-30)^2}{600} + \frac{60^2}{600} + \frac{10^2}{600} = 10,33.$$

Критичната вредност, при ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,05$, е $\chi^2_{4-1;0,05} = 7,815$. Бидејќи $\chi^2 = 10,33 > 7,815 = \chi^2_{4-1;0,05}$, заклучуваме дека нултата хипотеза треба да се отфрли, т. е. прифаќаме дека учеството на лица со ниска, средна, виша и висока подготвеност во множеството на невработени лица не е еднакво. Притоа, веројатноста за грешката од прв тип не е поголема од α.

4.27.2 Табели на контингенција

Честопати во практика се јавуваат задачи за испитување на зависноста на модалитетите на две обележја на некоја популација, од која се зема примерок. Така, може да се постави задача да се испита дали успехот на учениците на приемните испити за упис на факултет зависи од нивниот успех во средно училиште, потоа дали бројот на деца во семејството во некоја држава зависи од просечните примања во семејството, дали сообраќајните незгоди зависат од староста на возачите итн. Тестовите со кои се проверува независноста на модалитетите на две обележја на некоја популација, во основа се слични со тестовите за согласност на емпириските и очекуваните честоти. Во продолжение ќе ја објасниме постапката на проверка на ваков вид на хипотези.

Разгледуваме две обележја X и Y на некоја популација и нека $E_1, E_2, ..., E_r$ се можните модалитети на обележјето X, а $E_1^{'}, E_2^{'}, ..., E_k^{'}$ се можните модалитети на обележјето Y. Со E_{ij} ја означуваме ij-та комбинација на модалитетите на двете обележја, т. е. модалитетот E_i на обележјето X и модалитетот $E_j^{'}$ на обележјето Y. Земен е случаен примерок и нека во тој примерок E_{ij} се појавил f_{ij} пати т. е. емпириската честотита на E_{ij} во дадениот примерок, е f_{ij}, за сите $i \in \{1, 2, ..., r\}, j \in \{1, 2, ..., k\}$. Ја добиваме следната табела:

	Модалитети на обележјето Y				
Модалитети на обележјето X	E_1'	E_2'	$\dots$	E_k'	Збир на сите членови од редицата
E_1	f_{11}	f_{12}	$\dots$	f_{1k}	$f_{1*} = \sum\limits_{j=1}^{k} f_{1j}$
E_2	f_{21}	f_{22}	$\dots$	f_{2k}	$f_{2*} = \sum\limits_{j=1}^{k} f_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
E_r	f_{r1}	f_{r2}	$\dots$	f_{rk}	$f_{r*} = \sum\limits_{j=1}^{k} f_{rj}$
Збир на сите членови од колоната	$f_{*1} = \sum\limits_{i=1}^{r} f_{i1}$	$f_{*2} = \sum\limits_{i=1}^{r} f_{i2}$	$\dots$	$f_{*k} = \sum\limits_{i=1}^{r} f_{ik}$	$\sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{k} f_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{i=1}^{r} f_{ij} = N$

Табела 2

Во табелата 2 дадени се емпириските честоти на E_{ij}. Нека поставиме нулта хипотеза

H_0: Модалитетите на обележјата X и Yсе меѓусебно независни;

наспроти алтернативната хипотеза

H_1: Модалитетите на обележјата X и Y се меѓусебно зависни.

При точна нулта хипотеза, треба да се пресметаат очекуваните честоти на E_{ij}, а потоа да се направи табела слична на табела 1. Понатаму, постапката е како и кај претходниот тест.

Очекуваните честоти се пресметуваат на следниот начин:

$$f^{'}_{11} = \frac{f_{1*}f_{*1}}{N}, f^{'}_{12} = \frac{f_{1*}f_{*2}}{N}, ..., f^{'}_{1k} = \frac{f_{1*}f_{*k}}{N};$$

$$f^{'}_{21} = \frac{f_{2*}f_{*1}}{N}, f^{'}_{22} = \frac{f_{2*}f_{*2}}{N}, ..., f^{'}_{2k} = \frac{f_{2*}f_{*k}}{N}$$

$$\vdots$$

$$f^{'}_{r1} = \frac{f_{r*}f_{*1}}{N}, f^{'}_{r2} = \frac{f_{r*}f_{*2}}{N}, ..., f^{'}_{rk} = \frac{f_{r*}f_{*k}}{N}.$$

Општо:

$$f^{'}_{ij} = \frac{f_{i*}f_{*j}}{N}$$

за сите $i \in \{1, 2, ..., r\}, j \in \{1, 2, ..., k\}$, т. е. очекуваните честоти се пресметуваат преку збировите во табела 2.

Откако ќе се пресметаат

$$f'_{ij} = \frac{f_{i*}f_{*j}}{N}$$

за сите $i \in \{1, 2, ..., r\}, j \in \{1, 2, ..., k\}$, се прави следната табела:

	Модалитети на обележјето Y							
Модалитети на обележјето X	E'_1		E'_2		$\ldots$		E'_k	
E_1	f_{11}	f'_{11}	f_{12}	f'_{12}	$\ldots$	$\ldots$	f_{1k}	f'_{1k}
E_2	f_{21}	f'_{21}	f_{22}	f'_{22}	$\ldots$	$\ldots$	f_{2k}	f'_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
E_r	f_{r1}	f'_{r1}	f_{r2}	f'_{r2}	$\ldots$	$\ldots$	f_{rk}	f'_{rk}
Збир	f_{*1}	f_{*1}	f_{*2}	f_{*2}	$\ldots$	$\ldots$	f_{*k}	f_{*k}

Табела 3

Табелите од видот 3, во коишто се дадени емпириските и очекуваните честоти на E_{ij}, за сите $i \in \{1, 2, ..., r\}, j \in \{1, 2, ..., k\}$ се нарекуваат табели на контингенција.

Во следниот чекор се пресметува збирот на сите броеви од обликот

$$\frac{(f_{ij} - f'_{ij})^2}{f'_{ij}}$$

т. е. се пресметува бројот

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{(f_{ij} - f'_{ij})^2}{f'_{ij}}.$$

При одбрано ниво на значајност на тестот α, постои една критична вредност, тоа е бројот $\chi^2_{N;\alpha}$, каде $N = (r-1)(k-1)$, којшто се чита од таблицата II, дадена на крајот на учебникот. Конечно, критичниот домен е множеството $B = (\chi^2_{N;\alpha}, \infty)$.

Заклучок. Нултата хипотеза треба да се отфрли ако бројот χ^2, каде

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{(f_{ij} - f'_{ij})^2}{f'_{ij}}$$

припаѓа на множеството $B = (\chi^2_{N;\alpha}, \infty)$, каде $N = (r-1)(k-1)$, односно ако $\chi^2 > \chi^2_{N-1;\alpha}$. Притоа, веројатноста на грешката од прв тип не е поголема од α. Во спротивно нултата хипотеза не треба да се отфрли и добиеното отстапување на емпириските од теориските (очекуваните) честоти не е статистички значајно и е резултат на случајни фактори.

Пример. Со цел да испитаме дали успехот на учениците на приемен испит на факултет е зависен од нивниот успех во средно училиште, земен е случаен примерок на 500 кандидати коишто го положиле приемниот испит на разни факултети. Успехот на учениците во средно училиште, а и на приемниот испит, е поделен во три категории: одличен, многу добар и добар, според одредени принципи. По утврдувањето на успехот во средното училиште и успехот на приемниот испит на секој од кандидатите во примерокот, добиени се следните резултати:

	Успех на приемниот испит			
Успех во средно училиште	Одличен	Многу добар	Добар	Збир
Одличен	150	30	20	$f_{1*}=200$
Многу добар	50	80	70	$f_{2*}=200$
Добар	20	20	60	$f_{3*}=100$
Збир	$f_{*1}=220$	$f_{*2}=130$	$f_{*3}=150$	$N=500$

При ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,05$, провери ја хипотезата дека успехот на учениците на приемен испит зависи од нивниот успех во средно училиште.

Решение. Во нашиот пример, популацијата ја сочинуваат кандидатите кои што полагале приемен испит на сите факултети. Обележјето X е успехот на учениците во средно училиште и има три модалитети: одличен, многу добар и добар, а обележјето Y е успехот на кандидатите на приемниот испит, и тоа има три модалитети: одличен, многу добар и добар.

Поставуваме нулта хипотеза

H_0: Модалитетите на обележјата X и Y се меѓусебно независни;

наспроти алтернативната хипотеза

H_1: Модалитетите на обележјата X и Yсе меѓусебно зависни.

Во следниот чекор ги пресметуваме очекуваните честоти:

$$f'_{11}=\frac{f_{1*}f_{*1}}{N}=\frac{200\cdot 220}{500}=88, f'_{12}=\frac{f_{1*}f_{*2}}{N}=\frac{200\cdot 130}{500}=52,$$

$$f_{13}^{'} = \frac{f_{1*}f_{*3}}{N} = \frac{200 \cdot 150}{500} = 60$$

$$f_{21}^{'} = \frac{f_{2*}f_{*1}}{N} = \frac{200 \cdot 220}{500} = 88, f_{22}^{'} = \frac{f_{2*}f_{*2}}{N} = \frac{200 \cdot 130}{500} = 52,$$

$$f_{23}^{'} = \frac{f_{2*}f_{*3}}{N} = \frac{200 \cdot 150}{500} = 60$$

$$f_{31}^{'} = \frac{f_{3*}f_{*1}}{N} = \frac{100 \cdot 220}{500} = 44, f_{32}^{'} = \frac{f_{3*}f_{*2}}{N} = \frac{100 \cdot 130}{500} = 26,$$

$$f_{33}^{'} = \frac{f_{3*}f_{*3}}{N} = \frac{100 \cdot 150}{500} = 30.$$

Сега ја пополнуваме табелата на контингенција:

	Успех на приемен испит					
Успех во средно училиште	Одличен		Многу добар		Добар	
	f_{ij}	$f_{ij}^{'}$	f_{ij}	$f_{ij}^{'}$	f_{ij}	$f_{ij}^{'}$
Одличен	150	88	30	52	20	60
Многу добар	50	88	80	52	70	60
Добар	20	44	20	26	60	30
Збир	220	220	130	130	150	150

Во следниот чекор го пресметуваме збирот на сите броеви од обликот $\frac{(f_{ij}-f'_{ij})^2}{f'_{ij}}$, па бројот

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} \frac{\left(f_{ij}-f_{ij}^{'}\right)^2}{f_{ij}^{'}} = \frac{(150-88)^2}{88} + \frac{(50-88)^2}{88} + \frac{(20-44)^2}{44} +$$
$$+\frac{(30-52)^2}{52} + \frac{(80-52)^2}{52} + \frac{(20-26)^2}{26} + \frac{(20-60)^2}{60} + \frac{(70-60)^2}{60} + \frac{(60-30)^2}{30} = 185,16.$$

При одбраното ниво на значајност на тестот $\alpha = 0,05$, постои една критична вредност, тоа е бројот $\chi^2_{N;\alpha}$, каде

$$N = (r-1)(k-1) = (3-1)(3-1) = 4$$

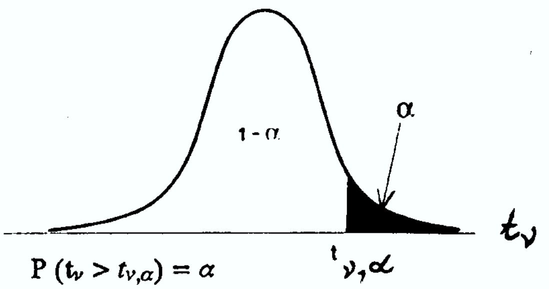
па $\chi^2_{N;\alpha} = \chi^2_{4;0,05} = 9,488$. Бидејќи

$$\chi^2 = 185,16 > 9,488 = \chi^2_{N-1;\alpha}$$

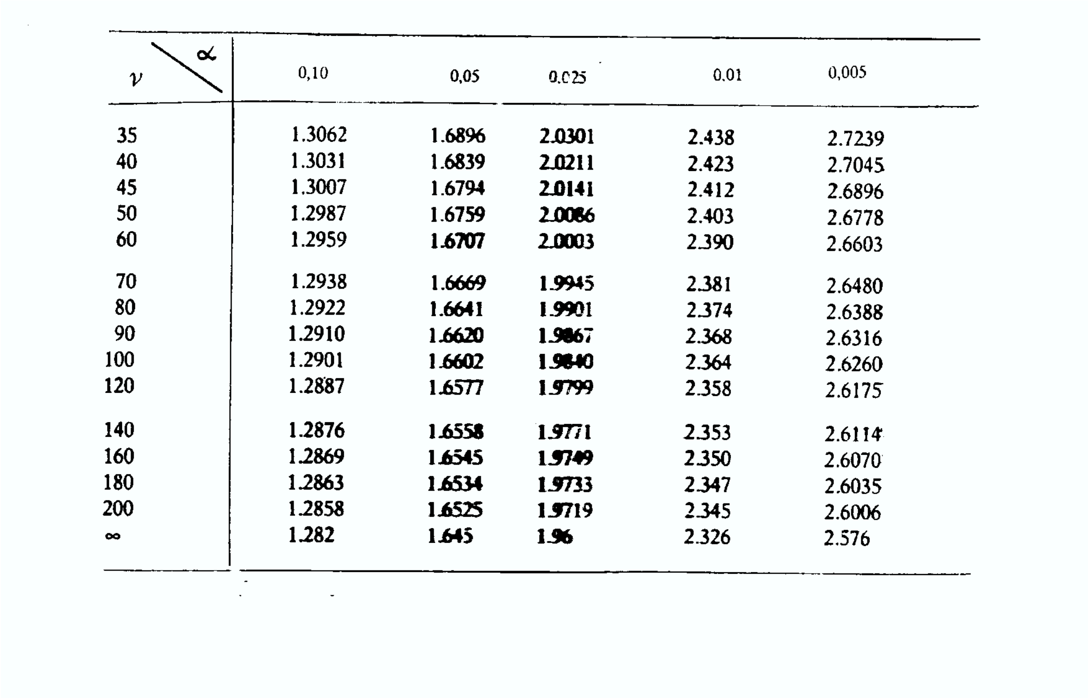
заклучуваме дека нултата хипотеза треба да се отфрли, т. е. прифаќаме дека успехот на учениците на приемен испит на факултет е зависен од нивниот успех во средно училиште.

4.28 Статистички таблици

Табела I: Критични вредности за $t_{\nu;\alpha}$

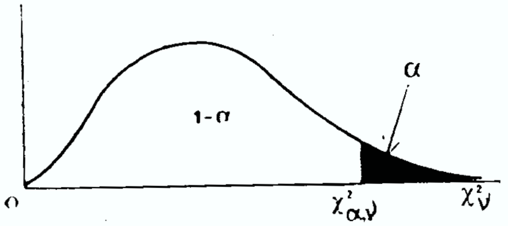


ν \ α	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3.078	6.3138	2.706	31.821	63.657
2	1.886	2.9200	4.3027	6.965	9.9248
3	1.638	2.3534	3.1825	4.541	5.8409
4	1.533	2.1318	2.7764	3.747	4.6041
5	1.476	2.0150	2.5706	3.365	4.0321
6	1.440	1.9432	2.4469	3.143	3.7074
7	1.415	1.8946	2.3646	2.998	3.4995
8	1.397	1.8595	2.3060	2.896	3.3554
9	1.383	1.8331	2.2622	2.821	3.2498
10	1.372	1.8125	2.2281	2.764	3.1693
11	1.363	1.7959	2.2010	2.718	3.1058
12	1.356	1.7823	2.1788	2.681	3.0545
13	1.350	1.7709	2.1604	2.650	3.0123
14	1.345	1.7613	2.1448	2.624	2.9768
15	1.341	1.7531	2.1315	2.602	2.9467
16	1.337	1.7459	2.1199	2.583	2.9208
17	1.333	1.7396	2.1098	2.567	2.8982
18	1.330	1.7341	2.1009	2.552	2.8784
19	1.328	1.7291	2.0930	2.539	2.8609
20	1.325	1.7247	2.0860	2.528	2.8453
21	1.323	1.7207	2.0796	2.518	2.8314
22	1.321	1.7171	2.0739	2.508	2.8188
23	1.319	1.7139	2.0687	2.500	2.8073
24	1.318	1.7109	2.0639	2.492	2.7969
25	1.316	1.7081	2.0595	2.485	2.7874
26	1.315	1.7056	2.0555	2.479	2.7787
27	1.314	1.7033	2.0518	2.473	2.7707
28	1.313	1.7011	2.0484	2.467	2.7633
29	1.311	1.6991	2.0452	2.462	2.7564
30	1.310	1.6973	2.0423	2.457	2.7500



ν \ α	0,10	0,05	0.025	0.01	0,005
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.438	2.7239
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.423	2.7045
45	1.3007	1.6794	2.0141	2.412	2.6896
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.403	2.6778
60	1.2959	1.6707	2.0003	2.390	2.6603
70	1.2938	1.6669	1.9945	2.381	2.6480
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.374	2.6388
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.368	2.6316
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.364	2.6260
120	1.2887	1.6577	1.9799	2.358	2.6175
140	1.2876	1.6558	1.9771	2.353	2.6114
160	1.2869	1.6545	1.9749	2.350	2.6070
180	1.2863	1.6534	1.9733	2.347	2.6035
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.345	2.6006
∞	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576

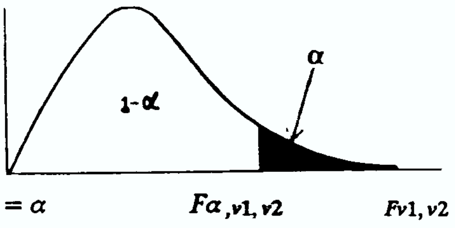
Табела II: Критични вредности за $\chi^2_{\nu;\alpha}$



$P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\alpha,\nu}) = \alpha$

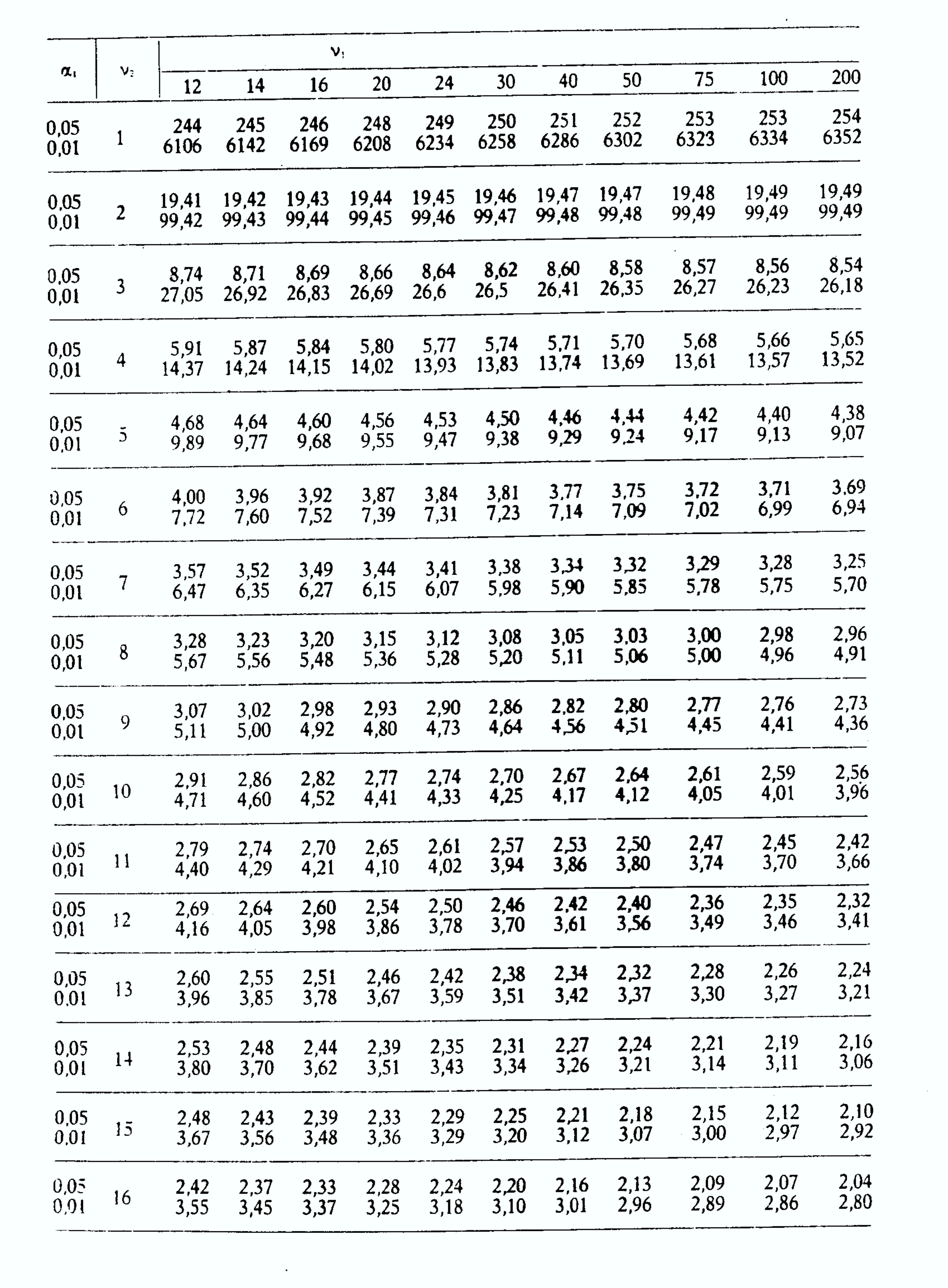
α ν	0,995	0,975	0,95	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	0.0000393	0.000982	0.00393	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0506	0.103	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.0717	0.216	0.352	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.484	0.711	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.831	1.145	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	1.237	1.635	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.690	2.167	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	2.180	2.733	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.700	3.325	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	3.247	3.940	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.816	4.575	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	4.404	5.226	18.549	21.026	23.336	26.217	28.300
13	3.565	5.009	5.892	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	5.629	6.571	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	6.262	7.261	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	6.908	7.962	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	7.564	8.672	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	8.231	9.390	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	8.907	10.117	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	9.591	10.851	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	10.283	11.591	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	10.982	12.338	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	11.688	13.091	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	12.401	13.848	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	14.573	16.151	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	16.047	17.708	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	24.433	26.509	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	24.311	28.366	30.612	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
50	27.991	32.357	34.764	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	40.482	43.188	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	48.758	51.739	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	57.153	60.391	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	65.647	69.126	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	74.222	77.929	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Табела III: Критични вредности за $F_{\nu_1,\nu_2;\alpha}$

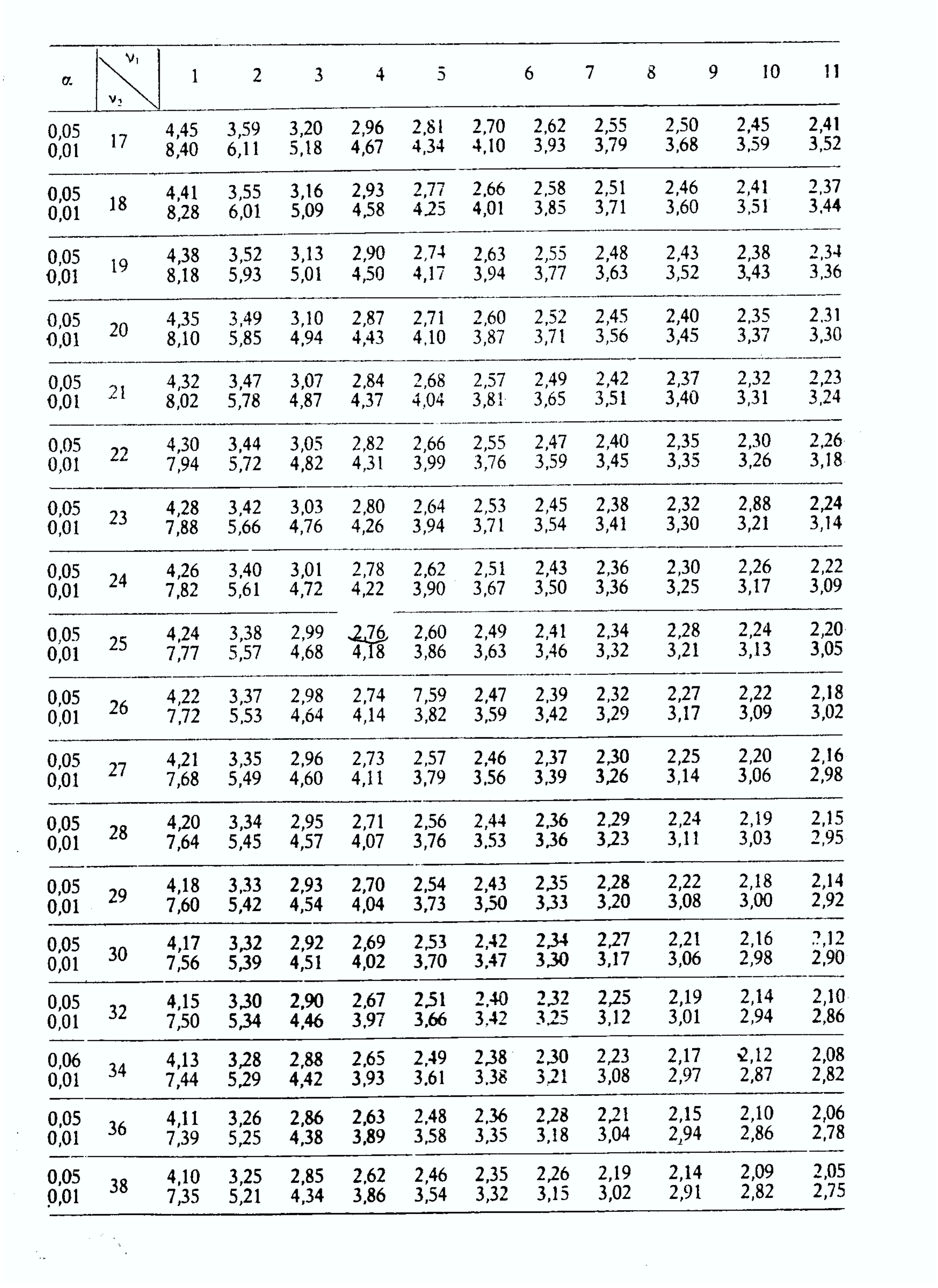


$P(F_{\nu 1,\nu 2} > F_{\alpha,\nu 1,\nu 2}) = \alpha$

α	ν₂	ν₁										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,05	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243
0,01		4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082
0,05	2	18,51	19,0	19,16	19,25	19,3	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40
0,01		98,5	99,0	99,17	99,25	99,3	99,33	99,34	99,36	99,38	99,4	99,41
0,05	3	10,13	9,55	9,28	9,12	9.01	8,94	8.88	8,84	8,81	8,78	8,76
0,01		34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27.67	27,49	27,34	27,23	27,13
0,05	4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93
0,01		21,2	18,0	16,7	15,98	15,52	15,21	14.98	14,8	14,66	14,54	14,45
0,05	5	6,61	5,79	5,41	5.19	5,06	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70
0,01		16,26	13,27	12,06	11.4	10,97	10,67	10.45	10,27	10,15	10,05	9,96
0,05	6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03
0,01		13,74	10,92	9,78	9.15	8.75	8,47	8,26	8.10	7,98	7,87	7,79
0,05	7	5,59	4,74	4,35	4.12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60
0,01		12,25	9,55	8,45	7,85	7.46	7.19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54
0,05	8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31
0,01		11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6.19	6,03	5,91	5,82	5,74
0,05	9	5,12	4,26	3,86	3,63	3.48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10
0,01		10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18
0,05	10	4,96	4,10	3,71	3.48	3,33	3,22	3.14	3,07	3,02	2,97	2,94
0,01		10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78
0,05	11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82
0,01		9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46
0,05	12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72
0,01		9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22
0,05	13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63
0,01		9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02
0,05	14	4,60	3,74	3,34	3.11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56
0,01		8,86	6,51	5,56	5.03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86
0,05	15	4,54	3,68	3,29	3.06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51
0,01		8,68	6,36	5,42	4.89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73
0,05	16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45
0,01		8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61

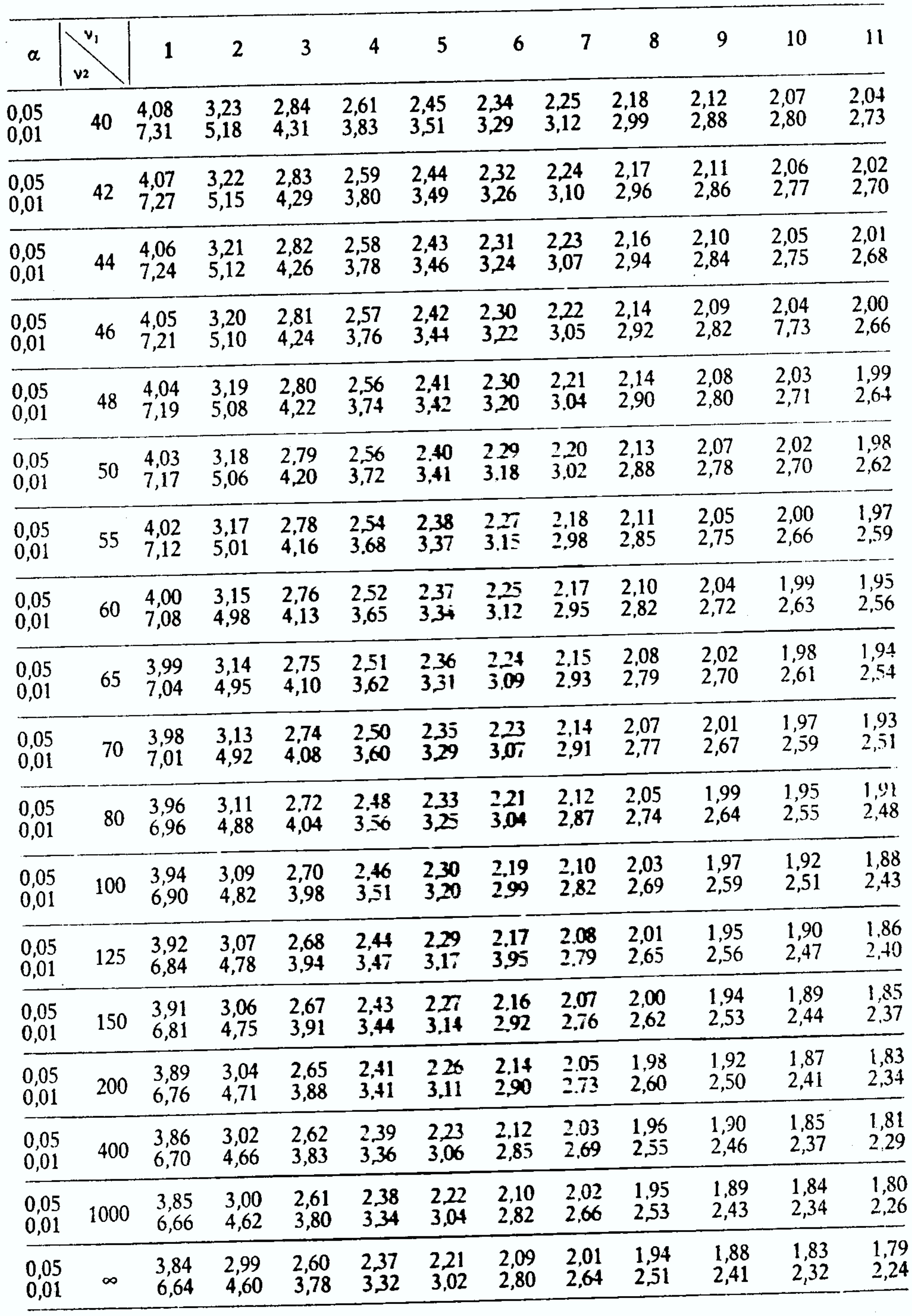


α_1	ν_2	ν_1										
		12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200
0,05 0,01	1	244 6106	245 6142	246 6169	248 6208	249 6234	250 6258	251 6286	252 6302	253 6323	253 6334	254 6352
0,05 0,01	2	19,41 99,42	19,42 99,43	19,43 99,44	19,44 99,45	19,45 99,46	19,46 99,47	19,47 99,48	19,47 99,48	19,48 99,49	19,49 99,49	19,49 99,49
0,05 0,01	3	8,74 27,05	8,71 26,92	8,69 26,83	8,66 26,69	8,64 26,6	8,62 26,5	8,60 26,41	8,58 26,35	8,57 26,27	8,56 26,23	8,54 26,18
0,05 0,01	4	5,91 14,37	5,87 14,24	5,84 14,15	5,80 14,02	5,77 13,93	5,74 13,83	5,71 13,74	5,70 13,69	5,68 13,61	5,66 13,57	5,65 13,52
0,05 0,01	5	4,68 9,89	4,64 9,77	4,60 9,68	4,56 9,55	4,53 9,47	4,50 9,38	4,46 9,29	4,44 9,24	4,42 9,17	4,40 9,13	4,38 9,07
0,05 0,01	6	4,00 7,72	3,96 7,60	3,92 7,52	3,87 7,39	3,84 7,31	3,81 7,23	3,77 7,14	3,75 7,09	3,72 7,02	3,71 6,99	3,69 6,94
0,05 0,01	7	3,57 6,47	3,52 6,35	3,49 6,27	3,44 6,15	3,41 6,07	3,38 5,98	3,34 5,90	3,32 5,85	3,29 5,78	3,28 5,75	3,25 5,70
0,05 0,01	8	3,28 5,67	3,23 5,56	3,20 5,48	3,15 5,36	3,12 5,28	3,08 5,20	3,05 5,11	3,03 5,06	3,00 5,00	2,98 4,96	2,96 4,91
0,05 0,01	9	3,07 5,11	3,02 5,00	2,98 4,92	2,93 4,80	2,90 4,73	2,86 4,64	2,82 4,56	2,80 4,51	2,77 4,45	2,76 4,41	2,73 4,36
0,05 0,01	10	2,91 4,71	2,86 4,60	2,82 4,52	2,77 4,41	2,74 4,33	2,70 4,25	2,67 4,17	2,64 4,12	2,61 4,05	2,59 4,01	2,56 3,96
0,05 0,01	11	2,79 4,40	2,74 4,29	2,70 4,21	2,65 4,10	2,61 4,02	2,57 3,94	2,53 3,86	2,50 3,80	2,47 3,74	2,45 3,70	2,42 3,66
0,05 0,01	12	2,69 4,16	2,64 4,05	2,60 3,98	2,54 3,86	2,50 3,78	2,46 3,70	2,42 3,61	2,40 3,56	2,36 3,49	2,35 3,46	2,32 3,41
0,05 0,01	13	2,60 3,96	2,55 3,85	2,51 3,78	2,46 3,67	2,42 3,59	2,38 3,51	2,34 3,42	2,32 3,37	2,28 3,30	2,26 3,27	2,24 3,21
0,05 0,01	14	2,53 3,80	2,48 3,70	2,44 3,62	2,39 3,51	2,35 3,43	2,31 3,34	2,27 3,26	2,24 3,21	2,21 3,14	2,19 3,11	2,16 3,06
0,05 0,01	15	2,48 3,67	2,43 3,56	2,39 3,48	2,33 3,36	2,29 3,29	2,25 3,20	2,21 3,12	2,18 3,07	2,15 3,00	2,12 2,97	2,10 2,92
0,05 0,01	16	2,42 3,55	2,37 3,45	2,33 3,37	2,28 3,25	2,24 3,18	2,20 3,10	2,16 3,01	2,13 2,96	2,09 2,89	2,07 2,86	2,04 2,80



α	ν_1 ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,05	17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41
0,01		8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52
0,05	18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37
0,01		8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,85	3,71	3,60	3,51	3,44
0,05	19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,34
0,01		8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36
0,05	20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31
0,01		8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45	3,37	3,30
0,05	21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,23
0,01		8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,65	3,51	3,40	3,31	3,24
0,05	22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,26
0,01		7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18
0,05	23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,88	2,24
0,01		7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14
0,05	24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22
0,01		7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,25	3,17	3,09
0,05	25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24	2,20
0,01		7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,46	3,32	3,21	3,13	3,05
0,05	26	4,22	3,37	2,98	2,74	7,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18
0,01		7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,17	3,09	3,02
0,05	27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20	2,16
0,01		7,68	5,49	4,60	4,11	3,79	3,56	3,39	3,26	3,14	3,06	2,98
0,05	28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15
0,01		7,64	5,45	4,57	4,07	3,76	3,53	3,36	3,23	3,11	3,03	2,95
0,05	29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14
0,01		7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,08	3,00	2,92
0,05	30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12
0,01		7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06	2,98	2,90
0,05	32	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14	2,10
0,01		7,50	5,34	4,46	3,97	3,66	3,42	3,25	3,12	3,01	2,94	2,86
0,06	34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,30	2,23	2,17	2,12	2,08
0,01		7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,38	3,21	3,08	2,97	2,87	2,82
0,05	36	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10	2,06
0,01		7,39	5,25	4,38	3,89	3,58	3,35	3,18	3,04	2,94	2,86	2,78
0,05	38	4,10	3,25	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05
0,01		7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,91	2,82	2,75

α	ν_1 ν_2	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200
0,05 0,01	17	2,38 3,45	2,33 3,35	2,29 3,27	2,23 3,16	2,19 3,08	2,15 3,00	2,11 2,92	2,08 2,86	2,04 2,97	2,02 2,76	1,99 2,70
0,05 0,01	18	2,34 3,37	2,29 3,27	2,25 3,19	2,19 3,07	2,15 3,00	2,11 2,91	2,07 2,83	2,04 2,78	2,00 2,71	1,98 2,68	1,95 2,62
0,05 0,01	19	2,31 3,30	2,26 3,19	2,21 3,12	2,15 3,00	2,11 2,92	2,07 2,84	2,02 2,76	2,00 2,70	1,96 2,63	1,94 2,60	1,91 2,54
0,05 0,01	20	2,28 3,23	2,23 3,13	2,18 3,05	2,12 2,94	2,08 2,86	2,04 2,77	1,99 2,69	1,96 2,63	1,92 2,56	1,90 2,53	1,87 2,47
0,05 0,01	21	2,25 3,17	2,20 3,07	2,15 2,99	2,09 2,88	2,05 2,80	2,00 2,72	1,96 2,63	1,93 2,58	1,89 2,51	1,87 2,47	1,84 2,42
0,05 0,01	22	2,23 3,12	2,18 3,02	2,13 2,94	2,07 2,83	2,03 2,75	1,98 2,67	1,93 2,58	1,91 2,53	1,87 2,46	1,84 2,42	1,81 2,37
0,05 0,01	23	2,20 3,07	2,14 2,97	2,10 2,89	2,04 2,78	2,06 2,70	1,96 2,62	1,91 2,53	1,88 2,48	1,84 2,41	1,82 2,37	1,79 2,32
0,05 0,01	24	2,18 3,03	2,13 2,93	2,09 2,85	2,02 2,74	1,98 2,66	1,94 2,58	1,89 2,49	1,86 2,44	1,82 2,36	1,80 2,33	1,76 2,27
0,05 0,01	25	2,16 2,99	2,11 2,89	2,06 2,81	2,00 2,70	1,96 2,62	1,92 2,54	1,87 2,45	1,84 2,40	1,80 2,32	1,77 2,29	1,74 2,23
0,05 0,01	26	2,15 2,96	2,10 2,86	2,05 2,77	1,99 2,66	1,95 2,58	1,90 2,50	1,85 2,41	1,82 2,36	1,78 2,28	1,76 2,25	1,72 2,19
0,05 0,01	27	2,13 2,93	2,08 2,83	2,03 2,74	1,97 2,63	1,93 2,55	1,88 2,47	1,84 2,38	1,80 2,33	1,76 2,25	1,74 2,21	1,71 2,16
0,05 0,01	28	2,12 2,90	2,06 2,80	2,02 2,71	1,96 2,60	1,91 2,52	1,87 2,44	1,81 2,35	1,78 2,30	1,75 2,22	1,72 2,18	1,69 2,13
0,05 0,01	29	2,10 2,87	2,05 2,77	2,00 2,68	1,94 2,57	1,90 2,49	1,85 2,41	1,80 2,32	1,77 2,27	1,73 2,19	1,71 2,15	1,68 2,10
0,05 0,01	30	2,09 2,84	2,04 2,74	1,99 2,66	1,93 2,55	1,89 2,47	1,84 2,38	1,79 2,29	1,76 2,24	1,72 2,16	1,69 2,13	1,66 2,07
0,05 0,01	32	2,07 2,80	2,02 2,70	1,97 2,62	1,91 2,51	1,86 2,42	1,82 2,34	1,76 2,25	1,74 2,20	1,69 2,12	1,67 2,08	1,64 2,02
0,05 0,01	34	2,05 2,76	2,00 2,66	1,95 2,58	1,89 2,47	1,84 2,38	1,80 2,30	1,74 2,21	1,71 2,15	1,67 2,08	1,64 2,04	1,61 1,98
0,05 0,01	36	2,03 2,72	1,98 2,62	1,93 2,54	1,87 2,43	1,82 2,35	1,78 2,26	1,72 2,17	1,69 2,12	1,65 2,04	1,62 2,00	1,59 1,94
0,05 0,01	38	2,02 2,69	1,96 2,59	1,92 2,51	1,85 2,40	1,80 2,32	1,76 2,22	1,71 2,14	1,67 2,08	1,63 2,00	1,60 1,97	1,57 1,90



α	ν_1 ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,05 0,01	40	4,08 7,31	3,23 5,18	2,84 4,31	2,61 3,83	2,45 3,51	2,34 3,29	2,25 3,12	2,18 2,99	2,12 2,88	2,07 2,80	2,04 2,73
0,05 0,01	42	4,07 7,27	3,22 5,15	2,83 4,29	2,59 3,80	2,44 3,49	2,32 3,26	2,24 3,10	2,17 2,96	2,11 2,86	2,06 2,77	2,02 2,70
0,05 0,01	44	4,06 7,24	3,21 5,12	2,82 4,26	2,58 3,78	2,43 3,46	2,31 3,24	2,23 3,07	2,16 2,94	2,10 2,84	2,05 2,75	2,01 2,68
0,05 0,01	46	4,05 7,21	3,20 5,10	2,81 4,24	2,57 3,76	2,42 3,44	2,30 3,22	2,22 3,05	2,14 2,92	2,09 2,82	2,04 7,73	2,00 2,66
0,05 0,01	48	4,04 7,19	3,19 5,08	2,80 4,22	2,56 3,74	2,41 3,42	2,30 3,20	2,21 3.04	2,14 2,90	2,08 2,80	2,03 2,71	1,99 2,64
0,05 0,01	50	4,03 7,17	3,18 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2.40 3,41	2 29 3.18	2,20 3,02	2,13 2,88	2,07 2,78	2,02 2,70	1,98 2,62
0,05 0,01	55	4,02 7,12	3,17 5,01	2,78 4,16	2,54 3.68	2,38 3,37	2,27 3.15	2,18 2,98	2,11 2,85	2,05 2,75	2,00 2,66	1,97 2,59
0,05 0,01	60	4,00 7,08	3,15 4,98	2,76 4,13	2,52 3,65	2,37 3,34	2,25 3.12	2.17 2,95	2,10 2,82	2,04 2,72	1,99 2,63	1,95 2,56
0,05 0,01	65	3,99 7,04	3,14 4,95	2,75 4,10	2,51 3,62	2,36 3,31	2,24 3,09	2,15 2,93	2,08 2,79	2,02 2,70	1,98 2,61	1,94 2,54
0,05 0,01	70	3,98 7,01	3,13 4,92	2,74 4,08	2,50 3,60	2,35 3,29	2,23 3,07	2,14 2,91	2,07 2,77	2,01 2,67	1,97 2,59	1,93 2,51
0,05 0,01	80	3,96 6,96	3,11 4,88	2,72 4,04	2,48 3,56	2,33 3,25	2,21 3,04	2.12 2,87	2,05 2,74	1,99 2,64	1,95 2,55	1,91 2,48
0,05 0,01	100	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,98	2,46 3,51	2,30 3,20	2.19 2,99	2.10 2,82	2,03 2,69	1,97 2,59	1,92 2,51	1,88 2,43
0,05 0,01	125	3,92 6,84	3,07 4,78	2,68 3,94	2,44 3,47	2,29 3,17	2.17 3,95	2.08 2.79	2,01 2,65	1,95 2,56	1,90 2,47	1,86 2,40
0,05 0,01	150	3,91 6,81	3,06 4,75	2,67 3,91	2,43 3,44	2,27 3,14	2.16 2,92	2,07 2,76	2,00 2,62	1,94 2,53	1,89 2,44	1,85 2,37
0,05 0,01	200	3,89 6,76	3,04 4,71	2,65 3,88	2,41 3,41	2 26 3,11	2.14 2,90	2.05 2.73	1,98 2,60	1,92 2,50	1,87 2,41	1,83 2,34
0,05 0,01	400	3,86 6,70	3,02 4,66	2,62 3,83	2,39 3,36	2,23 3,06	2.12 2,85	2.03 2,69	1,96 2,55	1,90 2,46	1,85 2,37	1,81 2,29
0,05 0,01	1000	3,85 6,66	3,00 4,62	2,61 3,80	2,38 3,34	2,22 3,04	2,10 2,82	2,02 2,66	1,95 2,53	1,89 2,43	1,84 2,34	1,80 2,26
0,05 0,01	∞	3,84 6,64	2,99 4,60	2,60 3,78	2,37 3,32	2,21 3,02	2,09 2,80	2,01 2,64	1,94 2,51	1,88 2,41	1,83 2,32	1,79 2,24

α	ν_1 ν_2	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200
0,05	40	2,00	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55
0,01		2,66	2,56	2,49	2,37	2,29	2,20	2,11	2,05	1,97	1,94	1,88
0,05	42	1,99	1,94	1,89	1,82	1,78	1,73	1,68	1,64	1,60	1,57	1,54
0,01		2,64	2,54	2,46	2,35	2,26	2,17	2,08	2,02	1,94	1,91	1,85
0,05	44	1,98	1,92	1,88	1,81	1,76	1,72	1,66	1,63	1,58	1,56	1,52
0,01		2,62	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,06	2,00	1,92	1,88	1,82
0,05	46	1,97	1,91	1,87	1,80	1,75	1,71	1,65	1,62	1,57	1,54	1,51
0,01		2,60	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,98	1,90	1,86	1,80
0,05	48	1,96	1,90	1,86	1,79	1,74	1,70	1,64	1,61	1,56	1,53	1,50
0,01		2,58	2,48	2,40	2,28	2,20	2,11	2,02	1,96	1,88	1,84	1,78
0,05	50	1,95	1,90	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48
0,01		2,56	2,46	2,39	2,26	2,18	2,10	2,00	1,94	1,86	1,82	1,76
0,05	55	1,93	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,52	1,50	1,46
0,01		2,53	2,43	2,35	2,23	2,15	2,06	1,96	1,90	1,82	1,78	1,71
0,05	60	1,92	1,86	1,81	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,50	1,48	1,44
0,01		2,50	2,40	2,32	2,20	2,12	2,03	1,93	1,87	1,79	1,74	1,68
0,05	65	1,90	1,85	1,80	1,73	1,68	1,63	1,57	1,54	1,49	1,46	1,42
0,01		2,47	2,37	2,30	2,18	2,09	2,00	1,90	1,84	1,76	1,71	1,64
0,05	70	1,89	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,56	1,53	1,47	1,45	1,40
0,01		2,45	2,35	2,28	2,15	2,07	1,98	1,88	1,82	1,74	1,69	1,62
0,05	80	1,88	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,42	1,38
0,01		2,41	2,32	2,24	2,11	2,03	1,94	1,84	1,78	1,70	1,65	1,57
0,05	100	1,85	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39	1,34
0,01		2,36	2,26	2,19	2,06	1,98	1,89	1,79	1,73	1,64	1,59	1,51
0,05	125	1,83	1,77	1,72	1,65	1,60	1,55	1,49	1,45	1,39	1,36	1,31
0,01		2,33	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,75	1,68	1,59	1,54	1,46
0,05	150	1,82	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,47	1,44	1,37	1,34	1,29
0,01		2,30	2,20	2,12	2,00	1,91	1,83	1,72	1,66	1,56	1,51	1,43
0,05	200	1,80	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32	1,26
0,01		2,28	2,17	2,09	1,97	1,88	1,79	1,69	1,62	1,53	1,48	1,39
0,05	400	1,78	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22
0,01		2,23	2,12	2,04	1,92	1,84	1,74	1,64	1,57	1,47	1,42	1,32
0,05	1000	1,76	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19
0,01		2,20	2,09	2,01	1,89	1,81	1,71	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28
0,05	∞	1,75	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24	1,17
0,01		2,18	2,07	1,99	1,87	1,79	1,69	1,59	1,52	1,41	1,36	1,52

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Димитровски, Математика (учебник за 4 година на биотехничка струка), Просветно дело, Скопје, 1987.

[2] Д. Димитровски, В. Манова-Ераковиќ, Ѓ. Маркоски, Математика I (за студентите по биологија), УКИМ, Скопје, 2015.

[3] V. Djolevic, Primenjena statistika, IDP Naucna Knjiga, Beograd, 1993.

[4] M. Goldman, Introduction to probability and statistics, Harcourt, Brace & World, inc. 1970, New York.

[5] Н. Ивановски, Математичка анализа I, Скопје, 1981

[6] Z. Lipschutz, Schaum's outline series of theory and problems of probability, McGraw-Hill int. book company,1974, New York.

[7] Р. Малчески, С. Малчески, Статистика за бизнис и економија, ФОН, 2010.

[8] Ј. Митевска, В. Манова-Ераковиќ, Л. Грибовска-Поповиќ, Ф. Митрушева, Математика за IV година на реформирано гимназиско образование, Просветно дело, Скопје, 2004.

[9] М. Оровчанец, Математика, Скопје, 2002

[10] М. Оровчанец, Б. Крстеска, В. Манова-Ераковиќ, Ѓ. Маркоски, Збирка решени задачи по математичка анализа I, УКИМ, Скопје, 2015

[11] М. Оровчанец, Б. Крстеска, В. Манова-Ераковиќ, Ѓ. Маркоски, Збирка решени задачи по математичка анализа II, УКИМ, Скопје, 2015

[12] Н. Пандески, Математичка анализа I, Скопје, 2000.

[13] Н. Шекутковски, Математичка анализа I, Скопје, 2008

[14] M. R. Spiegel, Schaum's outline series of theory and problems of statistics, McGraw-Hill int. book company, 1972, New York.

[15] Б. Трпеновски, Елементарен увод во теоријата на веројатноста, НИО Студентски збор, Скопје, 1982.

[16] Б. Трпеновски, Елементарен увод во теоријата на веројатноста, Математички институт со нумерички центар при УКИМ, Скопје, 1969.

[17] M. Zizic, M. Lovric, D. Pavlicic, Matodi statisticke analize, univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakulet, Beograd, 1995.

СОДРЖИНА

Со одлука број 02-374/6 од 10.5.2017 година на Наставно-научниот совет на Природно-математичкиот факултет во Скопје се одобрува користењето на оваа книга како универзитетски учебник.

Е-издание:

http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41