

Нумерички методи

Катерина Хаџи - Велкова Санева
Елена Хаџиева
Соња Геговска - Зајкова
Билјана Начевска - Настовска



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“

Факултет за електротехника
и информациски технологии



Катерина Хаџи - Велкова Санева, Елена Хаџиева,
Соња Геговска - Зајкова, Билјана Начевска - Настовска

Нумерички методи

Скопје, 2019 година

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:

Катерина Хаџи-Велкова Санева, Елена Хаџиева, Соња Геговска-Зајкова,
Билјана Начевска-Настовска, Факултет за електротехника и информациски
технологии во Скопје

Рецензенти:

1. Д-р Марија Кујумџиева-Николоска, професор во пензија, Факултет за електротехника и информациски технологии, Скопје
2. Д-р Весна Димитријевска Ристовска, вонреден професор, Факултет за Информатички науки и компјутерско инженерство, Скопје

Техничка обработка:

авторите

Лектура на македонски јазик:

Ленка Панчевска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје
519.6:519.85(075.8)

НУМЕРИЧКИ методи / Катерина Хаџи-Велкова Санева ... [и др.]. -
Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј" - Скопје, 2019

Начин на пристап (URL):

http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41. - Текст во PDF
формат, содржи 278 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на
изворот на ден 18.12.2019. - Други
автори: Елена Хаџиева, Соња Геговска-Зајкова, Билјана Начевска-Настовска. -
Регистар. - Библиографија: стр. 277

ISBN 978-9989-43-437-2

1. Хаџи-Велкова Санева, Катерина [автор]
 2. Хаџиева, Елена [автор]
 3. Геговска-Зајкова, Соња [автор]
 4. Начевска-Настовска, Билјана [автор]
- а) Нумеричка анализа - Математичко програмирање - Високошколски
учебници COBISS.MK-ID 111894282

Предговор

Учебникот „Нумерички методи“, во основа произлезе како резултат од предавањата и вежбите од предметите: Математички методи во техниката, Нумерички методи, Елементи од нумеричка математика, Математички методи за инженери, Нумерички методи во ЕЕ, кои се држеле последниве 30-тина години на Факултетот за електротехника и информациски технологии (ФЕИТ) при Универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје. Може да го користат не само студентите од ФЕИТ, туку и студентите од други технички и природно – математички факултети, како и инженери и средношколци кои имаат потреба и интерес од изучување на овој материјал. Учебникот може да го користи и секој индивидуалец – вљубеник во математиката, кој има желба самостојно да ги изучува нумеричките методи, а има основни познавања од математичка анализа.

Се потрудивме да ја задржиме добрата теоретска подлога по која ФЕИТ е препознатлив, но и да внесеме новости кои неминовно се наметнуваат заради поголемата достапност на литература од водечките светски универзитети, како и заради развојот на голем број софтверски пакети, кои ги поддржуваат нумеричките методи. Во оваа смисла, нумеричките методи опфатени во овој учебник, главно содржат: теоретска основа на методот, изразена низ дефиниции и теореми, изведени формули за методот и неговата грешка, услови за конвергенција, геометриска интерпретација на методот, како и голем број решени примери („рачно“ или со помош на пакетот Mathematica). Покрај ова, теоријата и решенијата на задачите се илустрирани преку голем број слики, а анализирани се и различни ситуации кои можат да се јават во одреден тип проблем, на пример, различен избор на функција или параметар, различна почетна итерација, и сл.

Им благодариме на рецензентите, проф. д-р Марија Кујумчиева - Николоска и вонр. проф. д-р Весна Димитријевска Ристовска, кои со своите сугестии и забелешки помогнаа во подобрувањето на овој учебник.

Свесни сме дека и покрај вложениот труд во подготовката на овој учебник, можно е сè уште да има грешки. Поради тоа, ќе им бидеме благодарни на читателите кои ќе ни укажат на евентуалните грешки или ќе ни дадат насоки за подобрување на учебников.

Скопје, декември 2019. год.

Од авторите

Содржина

1. Вовед	1
1.1. Теоретски основи	5
1.1.1. Теореме од диференцијалното сметање	5
1.1.2. Метрички простори. Теорема за фиксна точка.....	11
1.2. Елементи од теоријата на грешки	13
1.2.1. Извори на грешки. Видови грешки	13
1.2.2. Приближни броеви. Апсолутна и релативна грешка	19
1.2.3. Запишување на приближните броеви	22
1.2.4. Заокружување на броевите	26
1.2.5. Грешки при операции со приближните броеви	28
1.3. Програмскиот пакет Wolfram Mathematica.....	41
2. Решавање равенки	45
2.1. Локализација на решението	46
2.2. Интервални методи.....	50
2.2.1. Метод на преполовување (бисекција).....	50
2.2.2. Метод на лажна положба (regula falsi).....	55
2.3. Метод на прости итерации.....	60
2.4. Метод на Њутн - Рафсон (метод на тангенти)	72
2.5. Метод на тетиви (метод на секанти)	83
2.6. Метод на Њутн за повеќекратни корени	92

3. Решавање системи линеарни равенки.....	99
3.1. Основни поими.....	99
3.2. Директни методи.....	100
3.2.1. Крамерово правило.....	101
3.2.2. Матричен метод.....	104
3.2.3. Сведување на системот на еквивалентен систем.....	106
Основен Гаусов метод.....	108
Гаусов метод со избор на водечки елемент.....	114
Гаус - Жорданов метод.....	123
3.2.4. Декомпозиција на матрицата на системот.....	126
3.3. Индиректни методи. Методи на Јакоби и Гаус - Зајдел.....	135
4. Решавање нелинеарни системи.....	151
4.1. Метод на прости итерации.....	151
4.2. Метод на Њутн - Рафсон.....	167
5. Интерполација и обратна интерполација.....	173
5.1. Интерполација и екстраполација.....	173
5.2. Грешка при интерполација.....	176
5.3. Лагранжов интерполациски полином.....	177
5.4. Конечни разлики.....	183
5.4.1. Врска меѓу конечните разлики и изводите на функцијата.....	186
5.5. Њутнов интерполациски полином.....	187
5.5.1. Прв Њутнов интерполациски полином.....	188
5.5.2. Втор Њутнов интерполациски полином.....	191
5.6. Обратна (инверзна) интерполација.....	196
5.6.1. Лагранжова обратна интерполација.....	197
5.6.2. Прва Њутнова обратна интерполација.....	197

5.6.3. Втора Њутнова обратна интерполација.....	198
5.7. Примена на интерполација и обратна интерполација за решавање равенки	201
5.8. Интерполација со сплајнови	204
5.9. Метод на најмали квадрати.....	213
5.9.1. Фитување со полином	214
6. Нумеричко диференцирање.....	223
6.1. Формули за приближно диференцирање изведени од Тејлоровата формула.....	223
6.1.1. Централни приближни формули	224
6.1.2. Нецентрални приближни формули	226
6.2. Формула на Ричардсон	231
6.3. Диференцирање со интерполациски полином	233
7. Нумеричка интеграција	241
7.1. Методи за нумеричка интеграција	241
7.1.1. Правило на правоаголници	242
7.1.2. Правило на трапези.....	244
7.1.3. Правило на параболи (Симпсоново правило)	246
7.2. Оценка на грешката при нумеричка интеграција	248
7.2.1. Оценка на грешката кај правилото на правоаголници	249
7.2.1. Оценка на грешката кај правилото на трапези.....	250
7.2.3. Оценка на грешката кај правилото на параболи	251
8. Нумеричко решавање обични диференцијални равенки	261
8.1. Метод на Ојлер.....	261
8.2. Подобрени методи на Ојлер.....	267
8.2.1. Прв подобрен метод на Ојлер (метод на Ојлер - Коши)	267

8.2.2. Втор подобрен метод на Ојлер	268
8.3. Метод на Рунге - Кута	272
Индекс	277
Литература	283

1. Вовед

Кога некој ќе се соочи со реален проблем поврзан со некој физички процес или систем, првиот чекор во решавањето на проблемот е набљудувањето, со цел да се даде опис или формулација на проблемот. Во инженерството тоа е најчесто проследено со низа експерименти, кои можат да бидат долготрајни и скапи. Затоа, многу често се применува математичко моделирање, односно креирање математички модел со кој се симулира разгледуваната појава или процес.

Математичкото моделирање има за цел да ги формулира физичките закони на кои е подложен процесот, да определи кои се зависните, а кои независните променливи, како и параметрите кои се од значење за процесот, и на крај да ја формулира меѓусебната зависност помеѓу променливите и параметрите. Резултатот од математичкото моделирање најчесто е множество равенки или неравенки со кои треба да се опишат сите важни појави или процеси значајни за поставениот проблем. Карактеристиките на средината или објектите се изразени преку коефициентите што фигурираат во равенките, односно неравенките.

Откако ќе се формулира математичкиот модел, прецизен или груб, се бара негово решение со примена на математички методи кои можат да бидат:

- 1) **Аналитички (директни) методи** со кои се добива точно решение, кое се нарекува **аналитичко решение**. Заради конечната прецизност со која може да пресметуваме и заради заокружувањата на меѓурекултатите, најчесто и во овој случај се добива приближно решение. Аналитичкото решение постои најчесто во случај на едноставни и многу груби модели.
- 2) **Нумерички (индиректни) методи** со кои се добива **приближно или нумеричко решение**.

Нумеричките методи се користат во случај кога за даден проблем не постои аналитичко решение или кога аналитичката постапка за решавање на проблемот е многу сложена.

Нумеричките методи се применуваат за наоѓање:

- решение на равенка или систем од линеарни, нелинеарни, диференцијални или диференцни равенки,
- извод во точка и определен интеграл на функција,
- екстремни вредности на функција зададена табеларно,
- аналитички израз со кој се апроксимира функцијата која е зададена табеларно, чијшто график минува низ однапред зададени точки,
- аналитички израз за функција која најдобро ја апроксимира функцијата зададена табеларно, итн.

Да напоменеме дека во овој учебник нема да биде посветено внимание на математичкото моделирање на реалните проблеми, туку теоретски ќе бидат опишани нумеричките методи потребни за решавање на погоре спомнатите типови проблеми. Методите ќе бидат поткрепени и илустрирани со примери во кои е користен програмскиот пакет Wolfram Mathematica.

Нумеричките методи биле проучувани од познати математичари како што се: Њутн, Гаус, Ојлер, Ермит, Лагранж, Чеплигин и многу други. Привлекувале големо внимание бидејќи овозможувале приближно решавање различни математички проблеми само со користење основни аритметички операции. Но, од друга страна, нумеричките методи долго време се сметале за непрактични. Сè до пошироката употреба на компјутерите, во седумдесеттите години на минатиот век, пресметките најчесто траеле долго, бидејќи се извршувале рачно или со помош на калкулатор. За тоа било потребно време, но и огромно внимание за да се избегнат грешки во пресметките. Со примена на компјутерите, времето неопходно за овие пресметки е сведено на делови од секундата, а можноста за грешка е сведена на минимум. Така, развојот на компјутерските технологии овозможи нумеричките методи да го добијат заслуженото место во науката како едни од најмоќните алатки за решавање математички проблеми.

Покрај директната примена при решавање различни проблеми, нумеричките методи се значајни бидејќи:

- ги доловуваат ограничените можности на вештачката интелигенција во однос на човечката,
- им овозможуваат на студентите по инженерство конечно да ја откријат практичната корист на повеќето теоретски математички концепти, кои понекогаш им изгледале непотребни и неприменливи,
- им овозможуваат на студентите да ги усовршат своите вештини во програмирање.

Додека основната цел на класичната математика е да утврди под кои услови постои решение на некоја задача и кои се неговите особини, задачата на нумеричките методи е ефективно наоѓање на решението со зададена точност, при дадени услови, што ќе го илустрираме на следниов пример:

Пример 1.1. Да се најде позитивниот корен на равенката

$$x^2 - 6 = 0.$$

Решение. Бараното позитивно решение на дадената равенка е $x = \sqrt{6}$. Но, симболот за коренување не ја дава постапката за пресметување на бараната вредност. Затоа, ќе конструираме постапка за наоѓање нумеричко решение на дадената равенка.

Формираме една од можните рекурентни низи $\{x_n\}$, која ќе покаже дека конвергира кон позитивниот корен на равенката, на следниов начин:

$$x_0 = 6, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{6}{x_n} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Оваа низа е монотono опаѓачка и ограничена оддолу, па од теоремата за монотони и ограничени низи следува дека таа е конвергентна, т.е. постои реален број A таков што

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = A.$$

Оттука се добива равенката

$$A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{6}{A} \right),$$

чишто решенија се $A = \pm\sqrt{6}$. Сите членови на низата $\{x_n\}$ се позитивни и таа е монотono опаѓачка, па заклучуваме дека низата $\{x_n\}$ конвергира кон позитивниот корен на дадената равенка, т.е. $A = \sqrt{6}$.

За бараното нумеричко решение на дадената равенка важи $x \approx x_n$, за некоја конечна вредност на n . Првите 6 члена на низата, заокружени на пет децимали, се дадени во табелата 1.1.

n	x_n
0	6,00000
1	3,50000
2	2,60714
3	2,45426
4	2,44949
5	2,44949

Табела 1.1

Тоа се нумеричките решенија на дадената равенка, а точната вредност $\sqrt{6}$ е ирационален број, кој претставен со неговите први 15 децимали е 2,449489742783178. Понатаму ќе биде дискутирано колку членови од рекурентната низа се потребни за да се дојде до решение со задоволителна точност. ▲

За најголем дел од алгебарските и трансцедентните равенки не постои аналитичко решение, па единствен начин за нивно решавање се нумеричките методи. Така на пример, равенката $x^x - 2 = 0$ иако изгледа едноставно, сепак не може да се реши аналитички.

При решавање даден проблем, може да се применат различни нумерички методи. Не постои одговор на прашањето кој нумерички метод е најдобар. При решавање конкретен проблем, за да се избере соодветен нумерички метод, треба да се имаат предвид некои негови карактеристики, како што се:

- брзината на конвергенција на методот, т.е. колку пресметувања треба да се извршат за да се дојде до решението,

- степенот на точност на методот, т.е. колку добиеното приближно решение е блиску до точното решение, ако процесот се запре по одреден број чекори,
- стабилноста на методот, т.е. колку методот е „имун“ на нумеричките грешки кои се генерираат при решавањето на проблемот и дали доаѓа до нивно мултиплицирање, итн.

За сите методи опишани во овој учебник се дадени формулите за оценка на грешката на методот, а само кај одредени нумерички методи за решавање равенки ќе биде спомната брзината на конвергенција.

1.1. Теоретски основи

Во следниве поглавја изложени поими и резултати од математичка анализа кои се користат при изучување на нумеричките методи во:

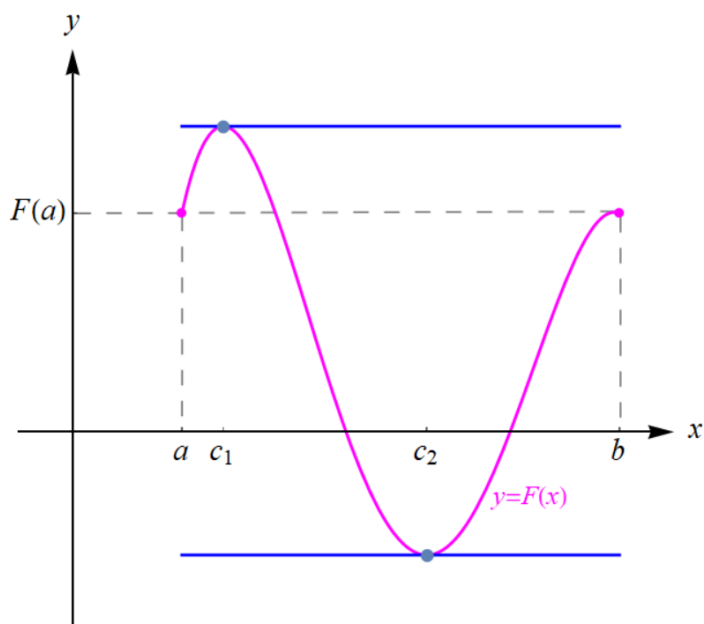
1.1.1. Теорема од диференцијалното сметање

Теорема 1.1 (на Рол). Нека функцијата $F(x)$ ги задоволува следниве услови:

- $F(x)$ е непрекината на сегментот $[a, b]$,
- $F(x)$ е диференцијабилна на интервалот (a, b) ,
- $F(a) = F(b)$.

Тогаш постои барем една точка $c \in (a, b)$ во која $F'(c) = 0$.

Геометриското значење на теоремата на Рол е дека меѓу точките $(a, F(a))$ и $(b, F(b))$ од графикот на една непрекината и диференцијабилна функција F , кои се со исти ординати (т.е. $F(a) = F(b)$), постои барем една точка $(c, F(c))$, $c \in (a, b)$, во која тангентата на кривата е паралелна со x -оската (слика 1.1).



Слика 1.1

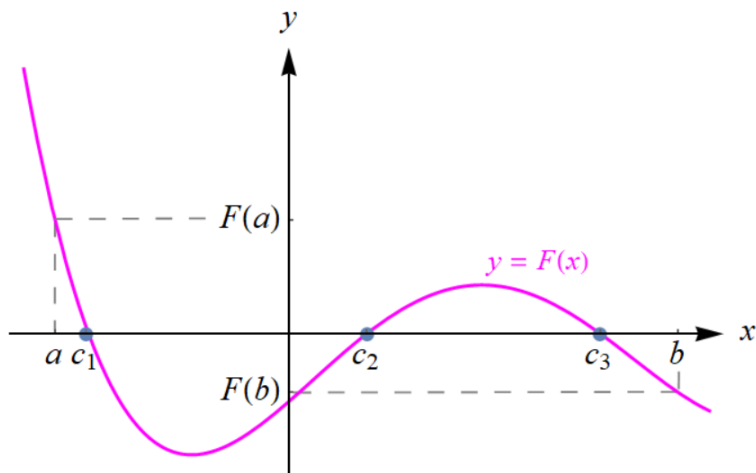
Теорема 1.2 (за меѓувредности). Нека функцијата $F(x)$ ги задоволува следниве услови:

- $F(x)$ е непрекината на сегментот $[a, b]$,
- $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Тогаш таа има барем една нула во интервалот (a, b) , т.е. равенката $F(x) = 0$ има барем едно решение во интервалот (a, b) .

Геометриски, тоа значи дека ако функцијата е непрекината на сегментот $[a, b]$ и има различен знак во неговите крајни точки, тогаш во барем една точка од интервалот (a, b) графикот на функцијата ќе ја пресече x -оската (види слика 1.2).

Следнава теорема е последица од теоремата на Рол.



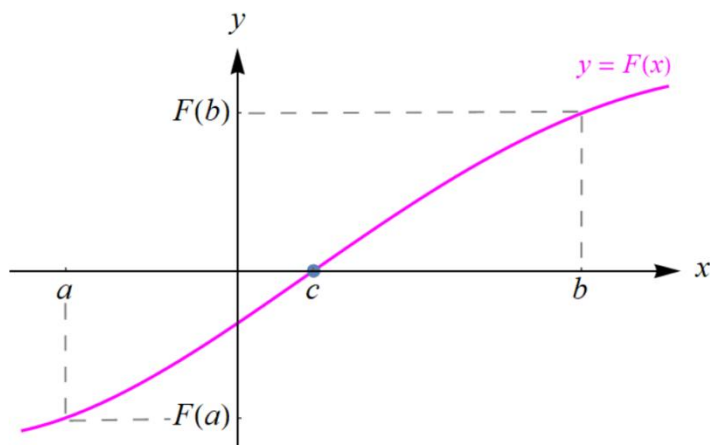
Слика 1.2

Теорема 1.3. Нека функцијата $F(x)$ ги задоволува следниве услови:

- $F(x)$ е непрекината на сегментот $[a, b]$,
- $F(x)$ е диференцијабилна на интервалот (a, b) ,
- $F(a) \cdot F(b) < 0$,
- $F(x)$ е монотона на (a, b) , односно $F'(x)$ не го менува знакот на (a, b) .

Тогаш таа има единствена нула во интервалот (a, b) , т.е. равенката $F(x) = 0$ има точно едно решение во интервалот (a, b) .

Геометриски, тоа значи дека ако функцијата $F(x)$ е непрекината на сегментот $[a, b]$, има различен знак во неговите крајни точки и е монотono растечка или опаѓачка на целиот интервал, тогаш графикот на функцијата ќе ја пресече x -оската во точно една точка од интервалот (a, b) (слика 1.3).



Слика 1.3

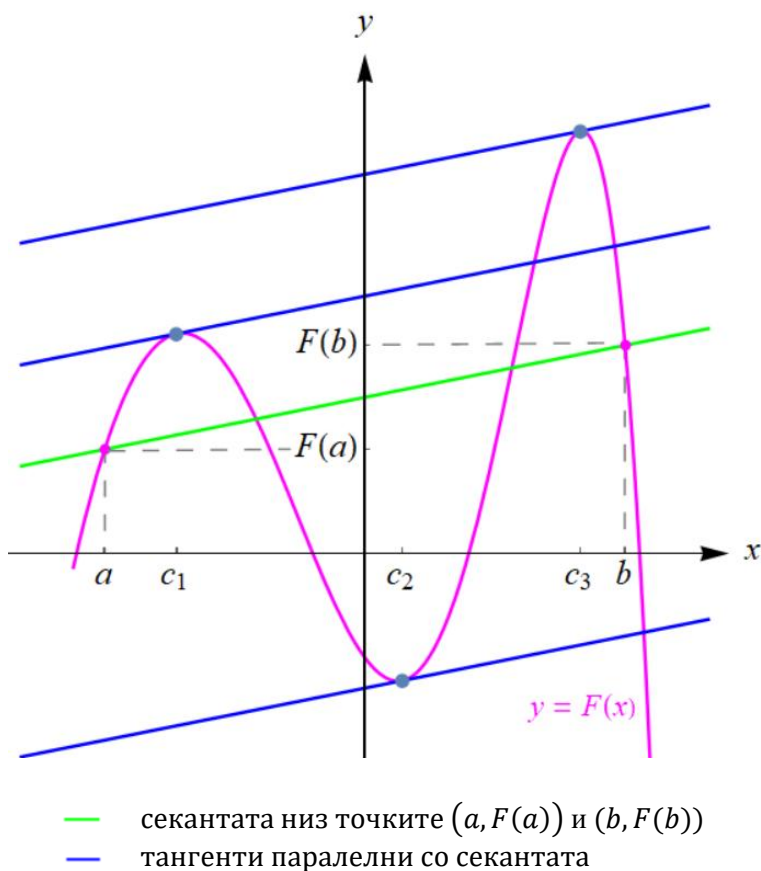
Теорема 1.4 (на Лагранж). Нека функцијата $F(x)$ ги задоволува следниве услови:

- $F(x)$ е непрекината на $[a, b]$,
- $F(x)$ е диференцијабилна на (a, b) .

Тогаш постои барем една точка $c \in (a, b)$ во која

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

Теоремата на Лагранж е позната како теорема за средна вредност. Нејзиното геометриско значење е дека ако функцијата $F(x)$ ги задоволува условите од теоремата на Лагранж, тогаш постои барем една точка $c \in (a, b)$, така што тангентата на кривата повлечена во точката $(c, F(c))$ е паралелна со секантата која минува низ точките $A(a, F(a))$ и $B(b, F(b))$, како што е прикажано на сликата 1.4.



Слика 1.4

Теорема 1.5 (на Тејлор за функција од една променлива).

Нека функцијата $F(x)$ има непрекинати изводи до n -ти ред и конечен извод од ред $n + 1$ во некоја околина на точката x_0 . Тогаш за секој x од таа околина важи Тејлоровата формула

$$F(x) = F(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} F^{(n)}(x_0) + R_n(x),$$

каде што

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)), \quad \text{за некој } \theta \in (0,1).$$

Според оваа теорема, секоја функција што ги задоволува дадените услови, може да се апроксимира со полином од степен n , при што грешката на апроксимацијата е членот $R_n(x)$.

Теорема 1.6 (на Тејлор за функција од две променливи).

Нека функцијата $z = f(x, y)$ има непрекинати изводи до n -ти ред и постои конечен извод од ред $n+1$ во околина на точката (x_0, y_0) . Тогаш за секоја точка (x, y) од таа околина важи Тејлоровата формула

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right] + \\
 & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] + \dots + \\
 & + \frac{1}{n!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_n(x, y),
 \end{aligned}$$

каде што

$$\begin{aligned}
 R_n(x, y) = & \frac{1}{(n+1)!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} \cdot \\
 & \cdot f(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)), \quad 0 < \theta < 1.
 \end{aligned}$$

1.1.2. Метрички простори. Теорема за фиксна точка

Нека M е непразно множество и $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ е пресликување такво што за кои било $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$ се исполнети следниве услови:

- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (аксиома за идентичност),
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (аксиома за симетрија),
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (аксиома на триаголник).

Тогаш, за пресликувањето d велиме дека е **метрика (растојание)** во множеството M , парот (M, d) го нарекуваме **метрички простор**, неговите елементи ги нарекуваме **точки**, а позитивниот број $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ го нарекуваме **растојание** меѓу точките \mathbf{x} и \mathbf{y} .

Двете најпознати метрики во множеството

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}, n \in \mathbb{N},$$

се:

1) **Евклидска метрика**, дефинирана со:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

и

2) **Менхетен метрика**, дефинирана со:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|,$$

каде што $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Евклидската метрика е важна затоа што е најприродна и еквивалентна на поимот праволиниско растојание помеѓу објектите во природата, а Менхетен метриката е важна заради својата едноставна дефиниција, односно едноставните аритметички операции вклучени во неа. Множеството \mathbb{R}^n заедно со Евклидската метрика е познато како **Евклидски простор**.

За низата точки $\{\mathbf{x}_n\}$ од метричкиот простор (M, d) велиме дека е **конвергентна** ако постои точка $\mathbf{x} \in M$ така што:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) < \varepsilon, \quad \text{за } n > n_0.$$

Точката \mathbf{x} се нарекува **лимес** или **граница** на низата $\{\mathbf{x}_n\}$ и пишуваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}.$$

Низата точки $\{\mathbf{x}_n\}$ од метричкиот простор (M, d) ја нарекуваме **Кошиева** или **фундаментална**, ако е исполнет следниов услов:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \quad d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_n) < \varepsilon, \quad \text{за } k > n > n_0.$$

Познато е дека секоја конвергентна низа во (M, d) е Кошиева. Обратното тврдење не важи.

Метричкиот простор (M, d) го нарекуваме **комплетен**, ако секоја негова Кошиева низа е конвергентна. На пример, множеството \mathbb{R}^n , заедно со Евклидската метрика, како и со Метхетен метриката, е комплетен метрички простор.

Нека (M, d) е метрички простор и нека $f: M \rightarrow M$ е дадено пресликување. Ако постои точка $\mathbf{x} \in M$, таква што $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, тогаш таа се нарекува **фиксна** или **неподвижна точка** за пресликувањето f . Ако $M \subseteq \mathbb{R}$, тогаш геометриски фиксната точка може да се определи како пресек на графикот на функцијата $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ и $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Секое пресликување може да има една, повеќе или да нема фиксна точка.

Ако за даденото пресликување f е исполнет условот:

$$(\exists q \in (0,1)) (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M) \quad d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq qd(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

тогаш тоа пресликување се нарекува **контракција** на метричкиот простор (M, d) , а бројот q се нарекува **фактор на контракција**. Всушност, при контрактивното пресликување, две произволни точки на одредено меѓусебно растојание, се пресликуваат во точки кои се на помало меѓусебно растојание.

Теорема 1.7 (на Банах за фиксна точка). Секоја контракција f дефинирана на комплетен метрички простор има единствена фиксна точка.

Познато е дека, ако \mathbf{x}_0 е произволна точка од комплетниот метрички простор (M, d) и f е негова контракција, тогаш низата $\{\mathbf{x}_n\}$, формирана на следниов начин:

$$\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

конвергира кон единствената фиксна точка \mathbf{x} на контракцијата f . Низата $\{\mathbf{x}_n\}$ определена со (1.1) се нарекува **итеративна низа (низа од приближувања)** на контракцијата f . Притоа, за растојанието помеѓу фиксната точка \mathbf{x} и произволен член \mathbf{x}_n од низата (1.1), важат формулите:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0), \quad (1.2)$$

и

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq \frac{q}{1-q} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}), \quad (1.3)$$

каде што q е факторот на контракција на f .

Во случај кога $0 < q \leq \frac{1}{2}$ имаме $\frac{q}{1-q} \leq 1$, па неравенството (1.3) го добива обликот

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}).$$

1.2. Елементи од теоријата на грешки

1.2.1. Извори на грешки. Видови грешки

Како што веќе спомнавме, процесот на решавање на практичните проблеми можеме да го поделиме во неколку етапи:

- 1) Формулација на проблемот,
- 2) Математичко моделирање,
- 3) Решавање на математичкиот модел,
- 4) Тестирање на добиеното решение.

Притоа, секоја од овие етапи во себе носи одредена непрецизност. Формулацијата на проблемот ја правиме врз основа на податоците кои сме ги собрале на различни начини, на пример преку мерења со

користење мерни инструменти кои имаат ограничена прецизност. Во втората етапа постојат два карактеристични извори на грешки. Од една страна, невозможно е реалните процеси да се опишат потполно и математички точно, па поради тоа се вршат разни упростувања, со што се добиваат помалку или повеќе поедноставени модели. Од друга страна, параметрите најчесто се добиваат експериментално, па веќе имаме грешка во влезната информација. Во третата етапа, при нумеричко решавање на задачата, се врши заокружување на почетните податоци, меѓурезултатите и конечните резултати, поради што добиеното решение помалку или повеќе отстапува од точното (вистинското) решение. Исто така, самите нумерички методи се приближни, а не егзактни, што повлекува одредена непрецизност во резултатот.

Според погоре кажаното, ги издвојуваме следниве видови грешки:

1) Почетни (неотстранливи) грешки.

Овие грешки се јавуваат заради грешките во влезните податоци кои се резултат на претходни пресметувања, мерења и експерименти.

2) Грешки на методот.

Треба внимателно да се избере нумерички метод за добиеното решение да биде што поточно и што побрзо да се дојде до истото. Покрај тоа, треба да се избере добро условен метод, кај кој мали промени на влезните податоци, не доведуваат до големи промени на излезните величини.

3) Грешки на заокружување.

Овие грешки се јавуваат поради заокружување на почетните податоци, меѓурезултатите, конечните резултати, како и заокружување на некои константи кои се бесконечни децимални броеви (на пример, 1,2(34); π ; e ; $\sqrt{2}$ итн.).

На вкупната грешка што се јавува во крајниот резултат влијаат сите три вида грешки. При решавањето на одреден проблем, наша цел е овие грешки да ги направиме што помали, да ги контролираме и ограничиме со однапред зададена точност. Следниве примери ги илу-

стрираат проблемите со различните видови грешки со кои може да се сретнеме во овој процес.

Пример 1.2. Дадено е математичко нишало кое почнува да се движи во моментот t_0 . Да се определи неговата положба во моментот t_1 .

Решение. Осцилациите на нишалото се опишуваат со диференцијалната равенка

$$l \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \mu \frac{d\alpha}{dt} + g \sin \alpha = 0,$$

со почетен услов

$$\alpha(t_0) = \alpha_0, v(t_0) = v_0,$$

каде што l е должината на нишалото, g е земјиното забрзување, μ е коефициентот на триење, α_0 е почетната положба, а v_0 почетната брзина на нишалото.

Оваа математичка формулација на проблемот содржи неотстранлива грешка, бидејќи во реалноста, триењето не зависи линеарно од брзината. Вториот извор на неотстранлива грешка е неможността да се определи точната вредност на параметрите на моделот: l , g , μ , α_0 и v_0 . Поимот неотстранлива соодветствува на суштината на грешката. Таа не може да се контролира во текот на нумеричкото решавање на задачата, а може да се намали само ако се употреби поточен математички модел и ако попрецизно се определат параметрите на моделот.

Грешката на методот е последица од примената на некој нумерички метод за решавање на диференцијалната равенка, имајќи предвид дека таа не може да се реши аналитички. Грешката на заокружување се јавува бидејќи изведуваме аритметички операции со броеви кои содржат конечен број цифри, иако во моделот може да се јават броеви со бесконечен број децимали, како што е случај во овој пример.

Во конкретниот случај, за да ги опишеме овие грешки, ги воведуваме следниве ознаки: α е точната вредност на бараниот агол во моментот t_1 , $\bar{\alpha}$ е вредноста на аголот што се добива како аналитичко решение на предложениот математички модел, $\bar{\alpha}_h$ е решението на проблемот добиено со примена на некој нумерички метод, под претпоставка дека не се врши заокружување на броевите, а $\bar{\alpha}_h^*$ е

решението добиено со примена на некој нумерички метод, при што се врши заокружување на броевите. Тогаш:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \bar{\alpha} - \alpha && \text{е неотстранлива грешка,} \\ \varepsilon_2 &= \bar{\alpha}_h - \bar{\alpha} && \text{е грешка на методот,} \\ \varepsilon_3 &= \bar{\alpha}_h^* - \bar{\alpha}_h && \text{е грешка на заокружување.}\end{aligned}$$

Вкупната грешка е $\varepsilon_0 = \bar{\alpha}_h^* - \alpha$, односно $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Често пати, препорачливо е да се земат апсолутните вредности од овие разлики, при што $|\varepsilon_0| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3|$ (што ќе биде подетално разгледано во следното поглавје). ▲

Пример 1.3. Да се пресмета вредноста на изразот

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{11} - \frac{1}{6} \right).$$

Решение. Точната вредност на изразот е:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{11} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{12 - 11}{66} \right) = \frac{1}{198}.$$

Вредноста на дробката $\frac{1}{198}$ претворена во децимален број со 10 децимали добиени со отсекување е 0,0050505050, т.е.

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{11} - \frac{1}{6} \right) \approx 0,0050505050 = 0,50505050 \cdot 10^{-2}.$$

Ако наместо со дробки, резултатот го добиеме работејќи со децимални броеви со 2 децимали добиени со отсекување, имаме:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{11} - \frac{1}{6} \right) = 0,33(0,18 - 0,16) = 0,33 \cdot 0,02 = 0,0066 = 0,66 \cdot 10^{-2}.$$

Ако пак, работиме со децимални броеви заокружени на две децимали, добиваме:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{11} - \frac{1}{6} \right) = 0,33(0,18 - 0,17) = 0,33 \cdot 0,01 = 0,0033 = 0,33 \cdot 10^{-2}.$$

Може да се забележи дека цифрите на последниве два добиени броја, $0,66 \cdot 10^{-2}$ и $0,33 \cdot 10^{-2}$, не се совпаѓаат со соодветните цифри

на бројот $0,50505050 \cdot 10^{-2}$. Овој проблем се јавува дури и при работа со поголема прецизност. ▲

Пример 1.4. Да се определи збирот на броевите 3522 и 0,00002.

Решение. Треба да пресметаме збир на два, многу различни по големина, броеви. Случајот може да се обопшти и за кои било други броеви кои многу се разликуваат. Збирот на дадените два броја е 3522,00002. Ако заокружуваме на 4 или помалку децимали, ќе го добиеме еден од броевите: 3522,0; 3522,00; 3522,000 или 352,0000. Во сите наведени случаи добиваме резултат кој наведува на заклучок дека операцијата собирање воопшто не се извршила. Проблемов ќе се избегне ако се работи со поголем број децимали.

Овој тип грешка може да се јави и при сумирање голем број членови од броен ред. Нека првите членови се релативно големи, а по нивното сумирање треба да се додаваат членови чијашто вредност е многу мала. Проблемот може да се избегне ако се почне со собирање конечен број членови од редот следниов начин: на последниот, најмалиот член што влегува во сумата, се додаваат останатите членови, еден по еден одејќи наназад кон првиот член. На ваков начин се додаваат блиски по големина членови од редот. ▲

Пример 1.5. Даден е квадрат со страна $a = 100$ cm. Да се најде страната на квадрат што има два пати помала плоштина од дадениот.

Решение. Плоштина на дадениот квадрат е $P = 10000$ cm². Сакаме да ја најдеме страната на квадратот кој има два пати помала плоштина од дадениот. Ако x е страната на бараниот квадрат, тогаш треба да важи $a^2 = 2x^2$, од каде што следува дека

$$x = a \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бројот $\sqrt{2}$ е ирационален, па при пресметки со него принудени сме да користиме негова приближна вредност.

Ако земеме дека $\sqrt{2} \approx 1,41$ добиваме дека страната на бараниот квадрат ќе биде $x = 70,5$ cm, а неговата плоштина

$$P = 4970,25 \text{ cm}^2.$$

Ако пак, земеме дека $\sqrt{2} \approx 1,41421$, тогаш страната на бараниот квадрат ќе биде $x = 70,7105 \text{ cm}$, а соодветната плоштина

$$P = 4999,97481 \text{ cm}^2.$$

Која вредност за $\sqrt{2}$ ќе ја земеме зависи од тоа со колкава точност сакаме да биде резултатот. ▲

Отстапување од точното решение може да биде предизвикано и од други причини, а не само од различните видови грешки, што може да се види во следниов пример.

Пример 1.6. Да се најде решението на системот равенки

$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x + 6,00001y = 8,00001 \end{cases} \quad (1.4)$$

Решение. Точното решение на овој систем е $x = 1, y = 1$. Иако линеарен систем од две равенки со две непознати е релативно лесна задача за решавање, при решавањето на дадениот систем се добиваат решенија кои при мала промена на коефициентите на системот се разликуваат многу од претходно добиените. Имено, ако сметаме дека коефициентите се добиени експериментално и не сме сигурни во нивната апсолутна точност, нормално е да бидеме загрижени што ќе се случи ако при повторено мерење добиеме малку поинакви коефициенти. На пример, точното решение на системот равенки, чии коефициенти се многу блиску до коефициентите на системот (1.4),

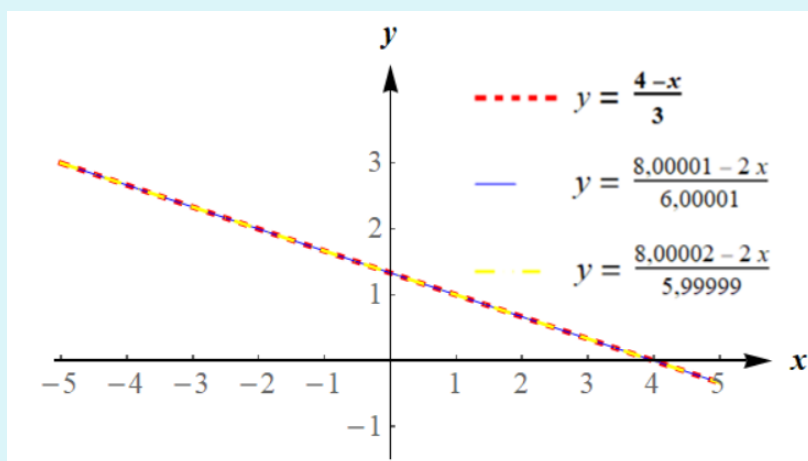
$$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ 2x + 5,99999y = 8,00002 \end{cases} \quad (1.5)$$

е $x = 10, y = -2$.

На што се должи ова? Најлесно е да се објасни оваа разлика во решенијата на двата „блиски“ системи преку нивната геометриска интерпретација. Во двата системи линеарни равенки фигурираат три различни равенки кои геометриски претставуваат речиси совпаѓачки прави. Доколку правите од системот (1.4) се сечат во една точка, и кај втората права има многу мала промена во коефициентите, како во сис-

темот (1.5), тогаш нивниот пресек може многу да се оддалечи од првичниот.

На сликата 1.5 се обидуваме да ја доловиме ситуацијата на цртеж, но иако скицирани во различни бои и форми, трите прави речиси не се разликуваат. Овој систем спаѓа во групата таканаречени **лошо условени системи**. Поточно, се работи за систем линеарни равенки, чија детерминанта има вредност блиска до 0. Ваквите системи покажуваат нестабилност во смисла дека мала промена на коефициентите доведува до големи промени во решенијата.



Слика 1.5

1.2.2. Приближни броеви. Апсолутна и релативна грешка

Нека x^* е приближна вредност на точниот реален број x . Означуваме $x^* \approx x$. Бројот

$$\Gamma = x - x^*$$

се нарекува **грешка** на приближниот број x^* .

Јасно е дека $\Gamma > 0$ или $\Gamma < 0$. Бидејќи не ни е важно дали грешката Γ е поголема или помала од 0, воведуваме таканаречена **апсолутна грешка** на x^* ,

$$\Delta = |x - x^*|.$$

Најчесто точниот број x не е познат, па Γ и Δ не можат да се определат. Во ваков случај, сакаме да најдеме број Δ_{x^*} кој е горна граница на Δ , односно $\Delta \leq \Delta_{x^*}$. Тој број се нарекува **граница на апсолутната грешка** на x^* . Јасно е дека овој број не е единствен, т.е. може да се најдат повеќе такви броеви, но најпрактично е Δ_{x^*} да се избере да биде што помал.

Од неравенството $\Delta \leq \Delta_{x^*}$ добиваме

$$|x - x^*| \leq \Delta_{x^*},$$

од каде што

$$-\Delta_{x^*} \leq x - x^* \leq \Delta_{x^*}.$$

Значи,

$$x^* - \Delta_{x^*} \leq x \leq x^* + \Delta_{x^*}, \text{ т.е. } x \in [x^* - \Delta_{x^*}, x^* + \Delta_{x^*}].$$

Понекогаш запишуваме

$$x = x^* \pm \Delta_{x^*},$$

а читаме: приближниот број x^* е даден со **точност** Δ_{x^*} .

Пример 1.7. Измерени се две отсечки чии должини се:

$$l_1 = 123,5 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}, \quad l_2 = 1,5 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}.$$

Во кој сегмент се наоѓаат точните вредности на должините?

Решение. Од тоа што $l_1^* = 123,5 \text{ m}$, $l_2^* = 1,5 \text{ m}$, $\Delta_{l_1^*} = \Delta_{l_2^*} = 0,01 \text{ m}$, следува:

$$l_1 \in [123,49 \text{ m}; 123,51 \text{ m}] \text{ и } l_2 \in [1,49 \text{ m}; 1,51 \text{ m}]. \quad \blacktriangle$$

Забележуваме дека апсолутната грешка на l_1^* и l_2^* е иста, но сепак должината l_1 е попрецизно измерена од l_2 . За да го објасниме ова, воведуваме таканаречена **релативна грешка** на x^* :

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|}, x \neq 0.$$

Бидејќи точниот број x најчесто не е познат, релативната грешка δ се определува со формулата:

$$\delta = \frac{\Delta}{|x^*|}, \quad x^* \neq 0.$$

Јасно е дека важи

$$\delta = \frac{\Delta}{|x^*|} \leq \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}.$$

Бројот

$$\delta_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}, \quad x^* \neq 0,$$

се нарекува **граница на релативната грешка** на x^* .

Релативната грешка, која најчесто се изразува во проценти со изразот

$$p = (\delta \cdot 100)\%,$$

се нарекува **процентна грешка** на x^* , а

$$p_{x^*} = (\delta_{x^*} \cdot 100)\%$$

е **граница на процентната грешка** на x^* .

Во примерот 1.7 за границите на релативните грешки добиваме

$$\delta_{l_1^*} = \frac{0,01}{123,5} \approx 0,00008 \quad \text{и} \quad \delta_{l_2^*} = \frac{0,01}{1,5} \approx 0,00667.$$

Заклучуваме дека $\delta_{l_1^*} < \delta_{l_2^*}$. Границите на процентните грешки се:

$$p_{l_1^*} = 0,008\%, \quad p_{l_2^*} = 0,667\%,$$

па важи $p_{l_1^*} < p_{l_2^*}$.

Се разбира, помала граница на релативната, односно граница на процентната грешка значи попрецизно мерење. Според тоа, мерењето на l_1 е попрецизно.

Понатаму, кога ќе ги користиме термините: апсолутна, релативна и процентна грешка, ќе ги подразбираме границата на апсолутната, границата на релативната и границата на процентната грешка, соодветно, освен ако поинаку не е нагласено.

Пример 1.8. Да се определи апсолутната грешка Δ_{x^*} и интервалот во кој се наоѓа точниот број x ако $x^* = 7,123$, а процентната грешка е $p_{x^*} = 0,1\%$.

Решение. За грешките имаме:

$$\delta_{x^*} = \frac{p_{x^*}}{100\%} = \frac{0,1}{100} = 0,001, \Delta_{x^*} = \delta_{x^*} |x^*| = 0,001 \cdot 7,123 = 0,007123,$$

па следува $x = 7,123 \pm 0,007123$, т.е.

$$x \in [7,123 - 0,007123; 7,123 + 0,007123].$$

Значи, $x \in [7,115877; 7,130123]$. ▲

Пример 1.9. Да се определат апсолутната, релативната и процентната грешка Δ_{x^*} , δ_{x^*} и p_{x^*} , соодветно, ако $x^* = 1,41$ и $x = \sqrt{2}$.

Решение. Бидејќи $x = \sqrt{2} \in [1,41; 1,42]$ следува $|\sqrt{2} - x^*| \leq 0,01$, се добива

$$\Delta_{x^*} = 0,01.$$

Тогаш,

$$\delta_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} = \frac{0,01}{1,41} = 0,00709$$

и

$$p_{x^*} = 0,709\%. \quad \blacktriangle$$

1.2.3. Запишување на приближните броеви

Во нумеричката математика броевите се запишуваат на начин кој овозможува директно да се добие информација за нивната точност, без тоа да се нагласува. За таа цел ќе воведеме неколку поими за цифрите на приближните броеви.

Познато е дека секој реален број x може да се запише во облик

$$x = \pm(a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_m \cdot 10^{n-m+1} + \dots),$$

каде што $a_i \in \{0,1, \dots, 9\}$, $a_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, познат како **десетичен запис** на бројот x .

Пример 1.10. Да се определи десетичниот запис на бројот:

а) 15,23;

б) 0,02305.

Решение. За десетичниот запис на броевите важи:

а) $15,23 = 10 + 5 + 0,2 + 0,003 = 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$

б) $0,02305 = 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5}$. ▲

Дефиниција 1.1. Ако

$$x^* = \pm(a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_m \cdot 10^{n-m+1}),$$

каде што $a_i \in \{0,1, \dots, 9\}$, $a_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, тогаш цифрите a_1, a_2, \dots, a_m се нарекуваат **значајни цифри** на бројот x^* .

Забележуваме дека за приближниот број x^* значајни се сите негови цифри, освен нулите што стојат пред првата ненулта цифра. Притоа, n е класата на првата значајна цифра a_1 .

Пример 1.11. Да се определат значајните цифри на бројот

$$x^* = 0,002350100.$$

Решение. Цифрите: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 0$, $a_5 = 1$, $a_6 = 0$ и $a_7 = 0$ се значајни цифри на дадениот број, бидејќи

$$x^* = 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 10^{-7} + 0 \cdot 10^{-8} + 0 \cdot 10^{-9}. \quad \blacktriangle$$

Посебно треба да се внимава при запишувањето на целите броеви. Имено, ако сакаме да бидат значајни само три цифри на бројот 500 000, тогаш три облици во кои може да го запишеме бројот се: $500 \cdot 10^3$; $50,0 \cdot 10^4$ и $0,500 \cdot 10^6$. Последниов облик се нарекува **нормали-**

зиран облик и најмногу се препорачува за претставување на броевите. Нормализираниот облик на бројот x^* во општ случај е

$$x^* = \pm 0, a_1 a_2 \dots a_k \cdot 10^n, \quad a_1 \neq 0,$$

при што $0, a_1 a_2 \dots a_k$ се нарекува **мантиса**, а $n \in \mathbb{Z}$ **ред на бројот**.

Дефиниција 1.2. За значајната цифра a_k , $k \in \mathbb{N}$, на бројот x^* велиме дека е **сигурна цифра** ако

$$\Delta_{x^*} \leq 0,5 \cdot 10^{n-k+1}, \quad (1.6)$$

каде што n е класата на првата ненулта цифра.

Се покажува дека ако a_k е сигурна цифра на еден број, тогаш и цифрите a_1, a_2, \dots, a_{k-1} се сигурни цифри.

Пример 1.12. Да се определат значајните и сигурните цифри на бројот $x = 0,01928 \pm 0,0075$.

Решение. Значајни цифри на бројот $x^* = 0,01928$ се: $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $a_3 = 2$ и $a_4 = 8$.

Од тоа што

$$\Delta_{x^*} = 0,0075 \leq 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1},$$

следува дека $n - k + 1 = -1$. Бидејќи класата на првата значајна цифра е $n = -2$, добиваме $-2 - k + 1 = -1$. Значи, $k = 0$, т.е. дадениот број нема сигурни цифри. ▲

Забелешка 1.1. Ако n е класата на првата сигурна цифра, а k е вкупниот број сигурни цифри, тогаш $k - (n + 1) = -(n - k + 1)$ е бројот на **сигурни децимални цифри**. Може да резимираме дека, бројот x^* е даден со j сигурни децимални цифри ако и само ако

$$\Delta_{x^*} \leq 0,5 \cdot 10^{-j}.$$

Пример 1.13. Да се определат значајните и сигурни цифри на бројот

$$x = 1,928 \pm 0,0003.$$

Решение. Јасно е дека сите цифри на дадениот број $x^* = 1,928$ се значајни. Заради забелешката 1.1, може директно да го определиме и бројот на сигурни децимални цифри. Од тоа што

$$\Delta_{x^*} = 0,0003 \leq 0,0005 = 0,5 \cdot 10^{-3},$$

заклучуваме дека бројот има три сигурни децимални цифри.

До решението може да се дојде и со користење на формулата $n - k + 1 = -3$, при што $n = 0$. Според тоа, $k = 4$. Заклучуваме дека сите 4 цифри на дадениот број се сигурни. ▲

Пример 1.14. Нека $a^* = 25,3246$ и $\Delta_{a^*} = 0,01$. Колку сигурни цифри има дадениот број?

Решение. $\Delta_{a^*} = 0,01 \leq 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1}$, па заклучуваме дека бројот има една сигурна децимална цифра, т.е. сигурни цифри на бројот a^* се: $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ и $a_3 = 3$. ▲

Како што нагласивме на почетокот, често пати приближните броеви се запишуваат на начин кој овозможува да се определи грешката иако таа експлицитно не е зададена. Притоа, се смета дека сите значајни цифри на даден приближен број се сигурни. Тогаш од неговиот запис можеме да добиеме информација за неговата апсолутна грешка. Така на пример, нека сите цифри на приближниот број $x^* = 1,2343$ се сигурни. Од тоа што $k = 5$ и $n = 0$ следува:

$$\Delta_{x^*} \leq 0,5 \cdot 10^{n-k+1} = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

До истиот заклучок може да се дојде и со користење на забелешката 1.1.

Пример 1.15. Нека сите цифри на приближниот број a^* се сигурни. Да се определи Δ_{a^*} ако:

а) $a^* = 31,4$; б) $a^* = 3,1415$; в) $a^* = 3,14150$.

Решение. Согласно забелешката 1.1, имајќи предвид дека броевите се дадени со една, четири и пет децимали, соодветно, добиваме:

а) $\Delta_{a^*} \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$, б) $\Delta_{a^*} \leq 0,5 \cdot 10^{-4}$, в) $\Delta_{a^*} \leq 0,5 \cdot 10^{-5}$. ▲

Од примерот 1.15 забележуваме дека во нумеричката математика, нулите на крајот од записот на приближните броеви не треба да се изоставуваат бидејќи даваат информација за апсолутната грешка.

Забелешка 1.2. Нека сите значајни цифри на приближниот број $x^* = 0,123$ се сигурни. Тогаш не е правилно да запишеме

$$x = 0,123 \pm 0,00005,$$

бидејќи во тој случај $x^* = 0,123$, а од $\Delta_{x^*} = 0,00005 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ се добива дека бројот x^* има четири сигурни децимални цифри, т.е. се добива противречност. Значи, треба да се запише $x = 0,1230 \pm 0,00005$, или пак, $x = 0,123 \pm 0,0005$. Двата записа даваат различна информација за апсолутната грешка на бројот.

1.2.4. Заокружување на броевите

Во практични пресметки, често пати е потребно броевите да се заокружуваат, т.е. еден број да се замени со друг број кој има помалку значајни цифри, на пример t значајни цифри. Притоа, се користи следново правило на заокружување, наречено **правило на парна цифра**:

- 1) Ако првата отфрлена цифра $a_{m+1} < 5$, тогаш последната задржана цифра a_m останува непроменета.
- 2) Ако $a_{m+1} > 5$, тогаш последната задржана цифра a_m се зголемува за 1.
- 3) Ако $a_{m+1} = 5$ и барем една цифра после неа е различна од 0, тогаш a_m се зголемува за 1.
- 4) Ако $a_{m+1} = 5$ и сите цифри после неа се нули, тогаш:
 - цифрата a_m останува непроменета во случај кога е парна,
 - цифрата a_m се зголемува за 1 во случај кога е непарна.

Примената на правилото на парна цифра, како и неговата оправданост, ќе ги објасниме во следниве примери:

Пример 1.16. Да се заокружи бројот $x = 1,23$ на една децимала.

Решение. Ако бројот $x = 1,23$ го заокружиме на една децимала согласно горното правило на заокружување, го добиваме бројот $x^* = 1,2$. Тогаш,

$$\Delta_{x^*} = |x - x^*| = 0,03 \leq 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1},$$

од каде заклучуваме дека двете цифри на бројот $x^* = 1,2$ се сигурни цифри.

Ако пак, спротивно на правилото, земеме $x^* = 1,3$, тогаш

$$\Delta_{x^*} = |x - x^*| = 0,07 \leq 0,5 \cdot 10^0.$$

Заклучуваме дека во овој случај, во добиениот број $x^* = 1,3$ сигурна е само цифрата 1. ▲

Пример 1.17. Да се заокружи бројот $x = 1,27$ на една децимала.

Решение. Ако бројот $x = 1,27$ го заокружиме на една децимала, согласно правилото на парна цифра, добиваме $x = 1,3$.

$$\Delta_{x^*} = 0,03 \leq 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1}$$

па, заклучуваме дека двете цифри на бројот $x^* = 1,3$ се сигурни. ▲

Пример 1.18. Да се заокружи бројот $x = 1,253$ на една децимала.

Решение. Согласно правилото на заокружување $x^* = 1,3$, па

$$\Delta_{x^*} = 0,017 \leq 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1},$$

од каде што следува дека двете цифри на добиениот број $x^* = 1,3$ се сигурни. ▲

Пример 1.19. Да се заокружи бројот $x = 1,25$ на една децимала.

Решение. Ако $x^* = 1,2$, тогаш

$$\Delta_{x^*} \leq 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1},$$

т.е. двете цифри на бројот $x^* = 1,2$ се сигурни.

Ако не го примениме правилото на парна цифра и $x^* = 1,3$, добиваме:

$$\Delta_{x^*} = 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1},$$

т.е. двете цифри и на бројот $x^* = 1,3$ се сигурни.

Значи, во овој случај, сеедно е како ќе го заокружине бројот. Во општ случај, ако цифрата 0 ја сметаме за парна цифра, тогаш постојат ист број парни и непарни цифри. За вкупната грешка при поголем број пресметки да биде што е можно помала, пожелно е да се примени правилото на парна цифра.

Според тоа, $x^* = 1,2$. ▲

Од горните примери заклучуваме дека со користење на даденото правило се обезбедува сите значајни цифри на бројот добиен со заокружување да бидат сигурни.

Пример 1.20. Нека $x = 99,998$. Колку сигурни цифри има бројот

$$x^* = 100,00?$$

Решение. Од тоа што

$$\Delta = |x - x^*| = 0,002 \leq 0,005 = 0,5 \cdot 10^{-2},$$

заклучуваме дека бројот $x^* = 100,00$ има 5 сигурни цифри. ▲

Од последниов пример заклучуваме дека, иако сите цифри на приближниот број $x^* = 100,00$ се сигурни, ни една негова цифра не се совпаѓа со соодветната цифра на точниот број $x = 99,998$.

1.2.5. Грешки при операции со приближните броеви

Пресметките во кои фигурираат приближни броеви влијаат на грешката на конечниот резултат. Ако грешките на заокружување и изведување на аритметичките операции не се акумулираат, тогаш велиме дека алгоритмот, односно методот, е **нумерички стабилен**. Конструкцијата на нумерички стабилни алгоритми е една од основните задачи на нумеричката математика.

Пример 1.21. Да се пресмета

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение. Алгоритам 1. Имајќи предвид дека

$$I_n + 10I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 10x^{n-1}}{x+10} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+10)}{x+10} dx = \frac{1}{n},$$

ја добиваме рекурентната формула

$$I_n = \frac{1}{n} - 10I_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

при што

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+10} = \ln(x+10)|_0^1 = \ln 11 - \ln 10 \approx 0,0953.$$

Применувајќи ја оваа формула, добиваме:

$$I_1 = 1 - 10I_0 \approx 0,0470,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} - 10I_1 \approx 0,0300,$$

$$I_3 = \frac{1}{3} - 10I_2 \approx 0,0333,$$

$$I_4 = \frac{1}{4} - 10I_3 \approx -0,083,$$

што е апсурд, имајќи предвид дека $I_n > 0$, за секое n .

Зошто оваа постапка нè доведе до апсурд?

Апсолутната грешка на заокружување ε , при пресметување на вредноста на I_0 , е $5 \cdot 10^{-5}$. Оваа грешка, при пресметување на I_1 се множи со -10 и станува -10ε , при пресметување на I_2 станува 100ε , итн. Кога пресметувањата би се изведувале со повеќе децимали, апсурдниот резултат би се појавил повторно, ново некој подоцнежн чекор.

Нумеричката нестабилност може да се избегне со избор на подобар алгоритам.

Алгоритам 2. Рекурентната формула (1.7) може да се претстави во облик:

$$I_{n-1} = \frac{1}{10n} - \frac{1}{10}I_n.$$

Во овој случај, грешката во секој чекор ќе се дели со -10 . Од формулата (1.7) воочуваме дека $I_n < I_{n-1}$ што значи, вредноста на интегралот опаѓа со зголемувањето на n . Опаѓањето е побавно за големи вредности на n , па може да земеме дека $I_{10} = I_9$. Така за почетната вредност I_9 од (1.7) добиваме:

$$I_9 + 10I_9 = \frac{1}{10}, \quad \text{односно } I_9 = \frac{1}{110} \approx 0,0091.$$

За останатите членови од низата добиваме:

$$I_8 = \frac{1}{10 \cdot 9} - \frac{1}{10}I_9 = \frac{1}{90} - \frac{1}{10}0,0091 \approx 0,0102,$$

$$I_7 = \frac{1}{10 \cdot 8} - \frac{1}{10}I_8 = \frac{1}{80} - \frac{1}{10}0,0115, \text{ итн.}$$

Алгоритам 3. Ќе го искористиме развојот на подинтегралната функција во степенски ред:

$$\frac{x^n}{x+10} = \frac{x^n}{10\left(1 + \frac{x}{10}\right)} = 0,1 \left(x^n - \frac{x^{n+1}}{10} + \frac{x^{n+2}}{10^2} - \dots \right),$$

па имаме

$$I_n = \frac{0,1}{n+1} - \frac{0,01}{n+2} + \frac{0,001}{n+3} - \dots, \quad n = 0, 1, \dots$$

Редот брзо конвергира, па со неколку собироци се добива задоволителна точност. Така, за $n = 2$, користејќи само три собироци во горниот израз, се добива

$$I_2 = \frac{0,1}{3} - \frac{0,01}{4} + \frac{0,001}{5} \approx 0,0310,$$

а за $n = 10$, $I_{10} \approx 0,0083$.

Третиот алгоритам е нумерички стабилен, што се должи на конвергентноста на редот. ▲

Грешки при собирање

Нека $x = x^* \pm \Delta_{x^*}$ и $y = y^* \pm \Delta_{y^*}$. Ако $s^* = x^* + y^*$ и $s = x + y$, тогаш

$$\begin{aligned} |s - s^*| &= |x + y - (x^* + y^*)| = |(x - x^*) + (y - y^*)| \leq \\ &\leq |x - x^*| + |y - y^*| \leq \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*}. \end{aligned}$$

Во горното неравенство го користиме неравенството на триаголник:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Ако Δ_{s^*} е границата на апсолутна грешка на s^* , може да земеме

$$\Delta_{s^*} = \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*}.$$

Тогаш,

$$\delta_{s^*} = \frac{\Delta_{s^*}}{|s^*|} = \frac{\Delta_{x^*} + \Delta_{y^*}}{|x^* + y^*|} = \frac{\delta_{x^*}|x^*| + \delta_{y^*}|y^*|}{|x^* + y^*|}.$$

Нека $M = \max\{\delta_{x^*}, \delta_{y^*}\}$ и $m = \min\{\delta_{x^*}, \delta_{y^*}\}$. Тогаш,

$$\delta_{s^*} = \frac{\delta_{x^*}|x^*| + \delta_{y^*}|y^*|}{|x^* + y^*|} \leq \frac{M|x^*| + M|y^*|}{|x^* + y^*|} = M \frac{|x^*| + |y^*|}{|x^* + y^*|}.$$

Аналогно се добива дека

$$m \frac{|x^*| + |y^*|}{|x^* + y^*|} \leq \delta_{s^*}.$$

Значи важат неравенствата:

$$m \frac{|x^*| + |y^*|}{|x^* + y^*|} \leq \delta_{s^*} \leq M \frac{|x^*| + |y^*|}{|x^* + y^*|}.$$

Забелешка 1.3. Јасно е дека ако $x^* > 0$ и $y^* > 0$, тогаш $m \leq \delta_{s^*} \leq M$, т.е. релативната грешка на збирот се наоѓа меѓу најмалата и најголемата релативна грешка на собироците.

Горната дискусија може да се обопшти и за поголем број собироци.

Грешки при одземање

Нека $x = x^* \pm \Delta_{x^*}$ и $y = y^* \pm \Delta_{y^*}$. Ако $r^* = x^* - y^*$ и $r = x - y$, тогаш

$$\begin{aligned} |r - r^*| &= |(x - y) - (x^* - y^*)| = |(x - x^*) + (-(y - y^*))| \leq \\ &\leq |x - x^*| + |y - y^*| \leq \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*}. \end{aligned}$$

Нека со Δ_{r^*} ја означиме границата на апсолутна грешка на r^* . Може да земеме

$$\Delta_{r^*} = \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*}.$$

Тогаш,

$$m \frac{|x^*| + |y^*|}{|x^* - y^*|} \leq \delta_{r^*} \leq M \frac{|x^*| + |y^*|}{|x^* - y^*|},$$

каде што $M = \max\{\delta_{x^*}, \delta_{y^*}\}$ и $m = \min\{\delta_{x^*}, \delta_{y^*}\}$.

Забелешка 1.4. Збирот s^* и разликата r^* не можат да имаат поголем број сигурни цифри од секој од собироците, односно намаленикот и намалителот, бидејќи од

$$\Delta_{s^*} = \Delta_{r^*} = \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*}$$

следува дека:

$$\Delta_{s^*} = \Delta_{r^*} \geq \Delta_{x^*} \text{ и } \Delta_{s^*} = \Delta_{r^*} \geq \Delta_{y^*}.$$

Овој заклучок е илустриран во следниов пример.

Пример 1.22. Да се определат s^* и r^* и нивните грешки: Δ_{s^*} , δ_{s^*} , p_{s^*} , Δ_{r^*} , δ_{r^*} и p_{r^*} , ако $x = 4,874 \pm 0,0004$ и $y = 4,276 \pm 0,0006$.

Решение. За збирот s^* и неговите грешки имаме:

$$s^* = x^* + y^* = 4,874 + 4,276 = 9,15,$$

$$\Delta_{s^*} = \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*} = 0,0004 + 0,0006 = 0,001,$$

$$\delta_{s^*} = \frac{\Delta_{s^*}}{|s^*|} = \frac{0,001}{9,15} \approx 0,0001,$$

$$p_{s^*} \approx (0,0001 \cdot 100)\% = 0,01\%.$$

Од друга страна, за грешките на собироците добиваме:

$$\delta_{x^*} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} = \frac{0,0004}{4,874} \approx 0,00008 \text{ и } p_{x^*} = 0,008\%,$$

$$\delta_{y^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{|y^*|} = \frac{0,0006}{4,276} \approx 0,0001 \text{ и } p_{y^*} = 0,01\%.$$

Јасно е дека важи $p_{x^*} \leq p_{s^*} = p_{y^*}$.

Аналогно добиваме: $r^* = x^* - y^* = 0,598$,

$$\Delta_{r^*} = \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*} = 0,001, \delta_{r^*} = \frac{\Delta_{r^*}}{|r^*|} \approx 0,0017 \text{ и } p_{r^*} \approx 0,17\%.$$

Од тоа што,

$$\Delta_{x^*} = 0,0004 \leq 0,0005 = 0,5 \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta_{y^*} = 0,0006 \leq 0,005 = 0,5 \cdot 10^{-2},$$

$$\Delta_{s^*} = \Delta_{r^*} = 0,001 \leq 0,005 = 0,5 \cdot 10^{-2},$$

заклучуваме дека x^* има три сигурни децимални цифри, а y^* , s^* и r^* имаат по две сигурни децимални цифри, што е во согласност со забелешката 1.4. ▲

Директен проблем

За да може да добиеме оценка на апсолутната грешка и при други операции, како што се: степенување, множење со константа, логаритмирање и слично, ќе го разгледаме следниов општ проблем.

Нека $x = x^* \pm \Delta_{x^*}$ и $y = f(x)$, каде што f е реална диференцијабилна функција во околина на точката x . Ќе ја определеме границата на апсолутната грешка Δ_{y^*} за $y^* = f(x^*)$. Овој проблем е познат како **директен проблем**.

Апсолутната грешка на y^* е

$$\Delta = |y - y^*| = |f(x) - f(x^*)|.$$

Од теоремата 1.4 (на Лагранж) имаме:

$$|f(x) - f(x^*)| = |f'(c)| \cdot |x - x^*| \leq |f'(c)| \Delta_{x^*},$$

каде што $c \in (x, x^*)$ или $c \in (x^*, x)$. Заклучуваме дека $\Delta_{y^*} = |f'(c)| \Delta_{x^*}$. Најчесто ја користиме формулата

$$\Delta_{y^*} = |f'(x^*)| \Delta_{x^*}. \quad (1.8)$$

Пример 1.23. Да се определи y^* и Δ_{y^*} , ако $y = \ln x$ и $x = 21,5 \pm 0,4$.

Решение. Бидејќи $y = f(x) = \ln x$, за првиот извод имаме

$$y' = f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Значи,

$$\Delta_{y^*} = |f'(x^*)| \Delta_{x^*} = \left| \frac{1}{x^*} \right| \Delta_{x^*} = \delta_{x^*} = \frac{0,4}{21,5} \approx 0,0186.$$

Од тоа што

$$\Delta_{y^*} \approx 0,0186 \leq 0,05 = 0,5 \cdot 10^{-1},$$

заклучуваме дека $y^* = \ln x^* \approx 3,0681$ има две сигурни цифри 3 и 0. ▲

Нека во директниот проблем $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, каде што $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцијабилна функција во околина на точката

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и } x_i = x_i^* \pm \Delta_{x_i^*}, i = 1, 2, \dots, n.$$

За апсолутната грешка на $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ добиваме:

$$\begin{aligned} \Delta_{y^*} = |y - y^*| &= |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)| \approx \\ &\approx |df(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)|. \end{aligned}$$

Во последниов израз користевме дека за нарусувањето на функцијата $\Delta y(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$ во дадена точка \mathbf{x} , важи $\Delta y(\mathbf{x}) \approx dy(\mathbf{x})$.
Тогаш,

$$\begin{aligned} \Delta_{y^*} &\approx \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)(x_i - x_i^*) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| |x_i - x_i^*| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta_{x_i^*}. \end{aligned}$$

Според тоа, за границата на апсолутна грешка на y^* може да се земе

$$\Delta_{y^*} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta_{x_i^*}.$$

Специјално, ако $z = f(x, y)$ тогаш за границата на апсолутната грешка на $z^* = f(x^*, y^*)$ добиваме:

$$\Delta_{z^*} = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \right| \Delta_{x^*} + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \right| \Delta_{y^*}.$$

Забелешка 1.5. Користејќи ја последнава формула, лесно може да се добијат формулите за границите на апсолутните грешки на збирот и разликата на два броја, т.е.

$$\Delta_{s^*} = \Delta_{r^*} = \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*}.$$

Пример 1.24. Да се определи z^* и Δ_{z^*} , ако $z = x^2 + y$, $x = 2,53 \pm 0,02$ и $y = 3,021 \pm 0,003$.

Решение. $z^* = (x^*)^2 + y^* = 2,53^2 + 3,021 = 9,4219$.

Бидејќи $z = f(x, y) = x^2 + y$ следува

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

Тогаш за Δ_{z^*} добиваме:

$$\Delta_{z^*} = 2x^* \Delta_{x^*} + \Delta_{y^*} = 2 \cdot 2,53 \cdot 0,02 + 0,003 = 0,1042 \leq 0,5 = 0,5 \cdot 10^0,$$

од каде заклучуваме дека бројот $z^* = 9,4219$ има само една сигурна цифра, а тоа е цифрата 9. ▲

Грешки при степенување

Нека $x = x^* \pm \Delta_{x^*}$ и

$$y = f(x) = x^a, \quad x > 0, a > 0.$$

За определување на границата на апсолутната и границата на релативната грешка на $y^* = (x^*)^a$, ја користиме формулата (1.8). Бидејќи

$$f'(x) = ax^{a-1},$$

следува

$$\Delta_{y^*} = a|(x^*)^{a-1}| \Delta_{x^*}.$$

Тогаш,

$$\delta_{y^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{|y^*|} = \frac{a|(x^*)^{a-1}| \Delta_{x^*}}{|(x^*)^a|} = a \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} = a\delta_{x^*}.$$

Значи,

$$\delta_{y^*} = a\delta_{x^*},$$

па за процентната грешка се добива

$$p_{y^*} = ap_{x^*}.$$

Специјално, ако $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, тогаш за релативната и процентната грешка при коренувањето $y = \sqrt[n]{x}$ добиваме:

$$\delta_{y^*} = \frac{\delta_{x^*}}{n} \text{ и } p_{y^*} = \frac{p_{x^*}}{n},$$

соодветно.

Грешки при множење со константа

Нека

$$x = x^* \pm \Delta_{x^*} \text{ и } y = f(x) = cx,$$

каде што $c \neq 0$ е константа. Слично како погоре, за определување на границите на апсолутната и релативната грешка на $y^* = cx^*$, ја користиме формулата (1.8).

Бидејќи $f'(x) = c$, следува

$$\Delta_{y^*} = |c| \Delta_{x^*},$$

а

$$\delta_{y^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{|y^*|} = \frac{|c| \Delta_{x^*}}{|c| x^*} = \delta_{x^*}.$$

Значи,

$$\delta_{y^*} = \delta_{x^*}, \quad p_{y^*} = p_{x^*}.$$

Грешки при множење и делење

Нека $x = x^* \pm \Delta_{x^*}$ и $y = y^* \pm \Delta_{y^*}$. Ќе ги определиме границите на апсолутната и релативната грешка на производот $v^* = x^* y^*$.

Од тоа што $v = f(x, y) = xy$, добиваме

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

па следува дека

$$\Delta_{v^*} = |y^*| \Delta_{x^*} + |x^*| \Delta_{y^*},$$

$$\delta_{v^*} = \frac{\Delta_{v^*}}{|v^*|} = \frac{|y^*|\Delta_{x^*} + |x^*|\Delta_{y^*}}{|x^*||y^*|} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} + \frac{\Delta_{y^*}}{|y^*|} = \delta_{x^*} + \delta_{y^*}.$$

Значи,

$$\delta_{v^*} = \delta_{x^*} + \delta_{y^*},$$

па и за процентната грешка важи:

$$p_{v^*} = p_{x^*} + p_{y^*}.$$

Нека $q = f(x, y) = \frac{x}{y}$. Бидејќи

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2},$$

за границатата на апсолутната грешка на количникот $q^* = \frac{x^*}{y^*}$ доби-
ваме:

$$\Delta_{q^*} = \left| \frac{1}{y^*} \right| \Delta_{x^*} + \left| \frac{x^*}{(y^*)^2} \right| \Delta_{y^*}.$$

За границата на релативната грешка имаме:

$$\delta_{q^*} = \frac{\Delta_{q^*}}{|q^*|} = \frac{\left| \frac{1}{y^*} \right| \Delta_{x^*} + \left| \frac{x^*}{(y^*)^2} \right| \Delta_{y^*}}{\left| \frac{x^*}{y^*} \right|} = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} + \frac{\Delta_{y^*}}{|y^*|} = \delta_{x^*} + \delta_{y^*}.$$

Значи,

$$\delta_{q^*} = \delta_{x^*} + \delta_{y^*},$$

од каде што следува

$$p_{q^*} = p_{x^*} + p_{y^*}.$$

Пример 1.25. Да се определи p_w^* ако,

$$p_{x^*} = 0,6\%, \quad p_{y^*} = 2\%, \quad p_{z^*} = p_{u^*} = 1\% \text{ и } w = -\frac{3xy^2\sqrt{z}}{u^2}.$$

Решение. Користејќи ги формулите за процентни грешки при операциите: множење, делење, степенување и множење со константа, добиваме

$$p_w^* = p_x^* + 2p_{y^*} + \frac{p_z^*}{2} + 2p_{u^*} = 7,1\%. \quad \blacktriangle$$

Обратен проблем

Во практичните мерења е многу важно да се одреди точноста со која треба да се земе приближната вредност на аргументот, за грешката на функцијата да биде помала или приближно еднаква на однапред зададена точност.

Нека $x = x^* \pm \Delta_{x^*}$ и $y = f(x)$, каде што f е диференцијабилна функција во околина на точката x . Ќе го определиме Δ_{x^*} , ако е познато Δ_{y^*} . Од формулата (1.8), се добива

$$\Delta_{x^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{|f'(x^*)|}, \quad f'(x^*) \neq 0.$$

Пример 1.26. Да се определи апсолутната грешка Δ_{x^*} , ако $y = \sqrt{x}$, $x^* = 0,32$ и $\Delta_{y^*} = 0,5 \cdot 10^{-2}$.

Решение. Нека $y = f(x) = \sqrt{x}$. За изводот на функцијата имаме

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Тогаш,

$$\Delta_{x^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{|f'(x^*)|} = 2\sqrt{x^*}\Delta_{y^*}.$$

Значи,

$$\Delta_{x^*} = 2 \cdot 0,5657 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,5657 \cdot 10^{-2} \leq 0,5 \cdot 10^{-1}.$$

Заклучуваме дека x^* треба да се земе со најмалку една сигурна децимална цифра, за $y^* = \sqrt{x^*}$ да има две сигурни децимални цифри. ▲

Нека $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, каде што $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцијабилна функција во околина на точката $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и нека важи следново равенство, наречено **принцип за еднакво влијание**:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta_{x_1^*} &= \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta_{x_2^*} = \\ &= \dots = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta_{x_n^*}. \end{aligned}$$

Од тоа што

$$\Delta_{y^*} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta_{x_i^*} = n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta_{x_i^*},$$

следува

$$\Delta_{x_i^*} = \frac{\Delta_{y^*}}{n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right|}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Јасно е дека во горнава формула треба да важи:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0, \text{ за секој } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Пример 1.27. Нека $z = x + y$. Да се определат Δ_{x^*} и Δ_{y^*} ако $\Delta_{x^*} = \Delta_{y^*}$ и $\Delta_{z^*} = 0,5 \cdot 10^{-3}$.

Решение. Од тоа што $z = f(x, y) = x + y$ следува

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Бидејќи

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \right| \Delta_{x^*} = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \right| \Delta_{y^*},$$

заклучуваме дека важи принципот за еднакво влијание. Поради тоа, добиваме:

$$\Delta_{x^*} = \Delta_{y^*} = \frac{\Delta_{z^*}}{2 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) \right|} = 0,25 \cdot 10^{-3} \leq 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Значи x^* и y^* треба да се земат со најмалку три сигурни децимални цифри, за $z^* = x^* + y^*$ да има три сигурни децимални цифри. ▲

1.3. Програмскиот пакет Wolfram Mathematica

Поголем број од задачите во овој учебник се решени со примена на програмскиот пакет Wolfram Mathematica. Почетната веб страница, на која може да се најдат повеќе информации за пакетот е:

<https://www.wolfram.com/mathematica/>

Wolfram Mathematica е софтвер кој има огромни можности за примена во математиката, како и во многу други научни области. Овој програмски софтвер е посебно погоден за:

- нумерички пресметки,
- симболички пресметки,
- графички приказ на функциите со кои се моделираат проблемите,
- графички приказ на податоците и резултатите добиени при разни пресметки.

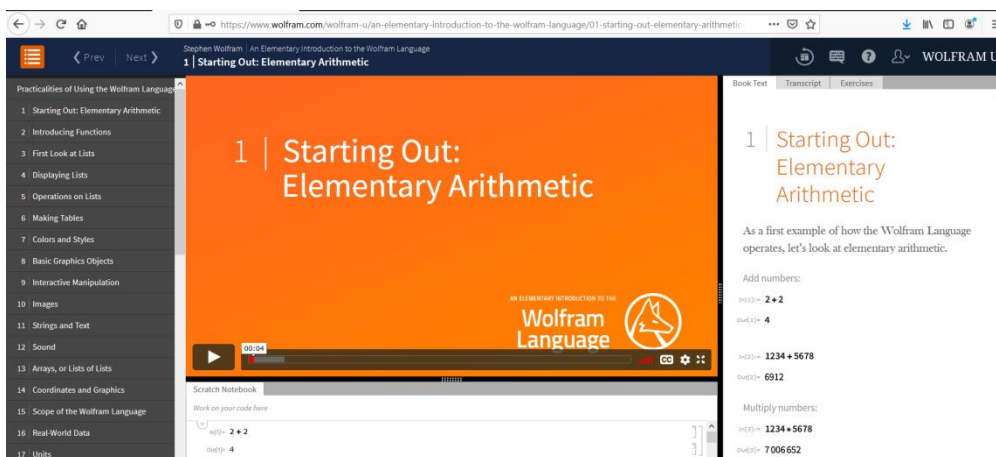
Неговата исклучителност ја оправдува податокот дека тој во себе веќе има вградено илјадници математички операции и наредби за различни цели, како и можноста да се користи независно, како програмски јазик. Во 60-тите години, со неговата појава и настанокот на првите пакети за нумерички, графички и алгебарски пресметки и нивно обединување во една огромна целина, Mathematica всушност го најавува почетокот на модерното научно истражување.

Целта на овој учебник не е да ги презентира сите капацитети на пакетот, туку да прикаже како тој може да се искористи за решавање на поставените задачи, со напомена дека тоа е еден многу мал дел од можностите на пакетот. Ќе бидат прикажани некои готови наредби содржани во пакетот, како и креирани модули кои се користат во нумеричките и симболичките пресметки, графичката репрезентација на податоците и резултатите, со цел подобро совладување на материјалот.

Ги охрабруваме читателите да ја посетат веб страницата со отворен пристап:

<https://www.wolfram.com/wolfram-u/an-elementary-introduction-to-the-wolfram-language/01-starting-out-elementary-arithmetic.html>

Таа овозможува запознавање со основите на програмирањето во Mathematica, преку добро осмислен онлајн интерфејс, со можност самите посетители да тестираат наредби во Mathematica, со претходна регистрација и најавување на истата. Почетната страница на овој елементарен вовед во Mathematica е прикажана на сликата 1.6.

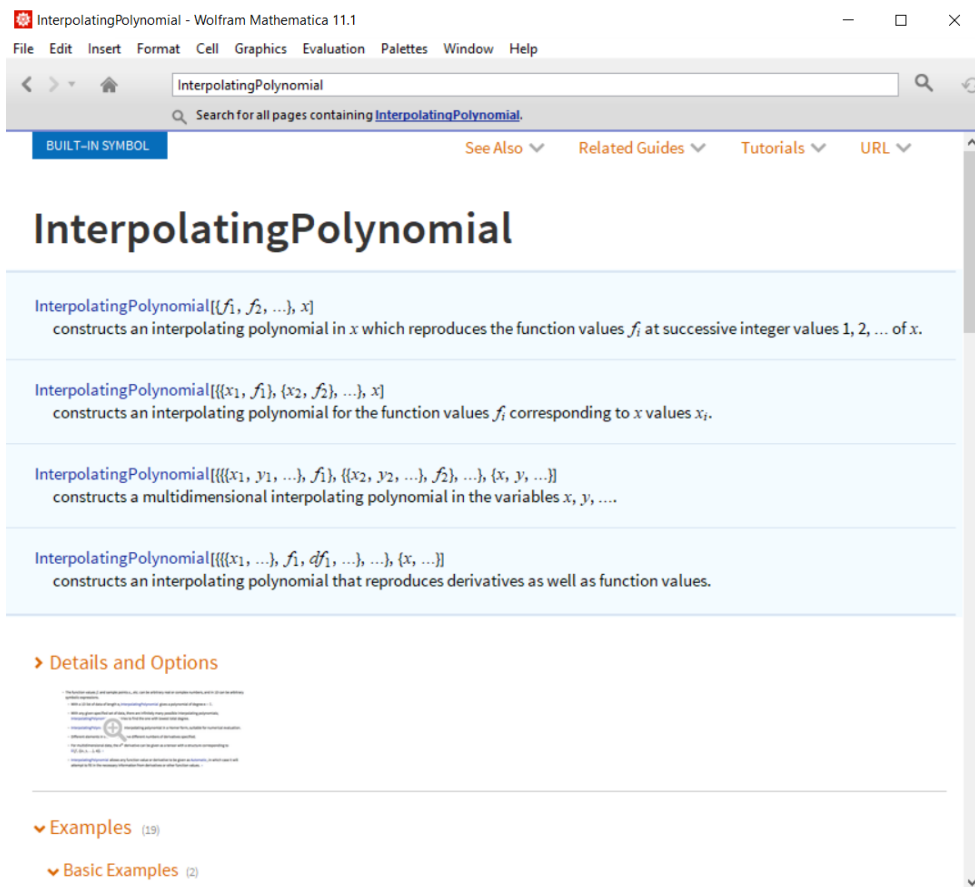


Слика 1.6

На почетокот, неопходно е да се научи како се внесуваат податоците и наредбите и како истите се извршуваат. Mathematica во својот интерфејс нуди голем број готови примери, кои може да бидат добра основа врз која ќе се експериментира со нови примери, притоа внимателно менувајќи ги параметрите и набљудувајќи го резултатот. Да нагласиме дека софтверот е чувствителен на голема и мала буква. Секоја вградена наредба се пишува со голема буква. Исто така, средните загради се користат за аргументите на функциите, додека големите загради служат за формирање листи.

За секоја наредба што ќе ја користиме во задачите, препорачуваме да се погледне нејзиното објаснување и синтакса во Help - менито на Mathematica. На сликата 1.7 е прикажан излезот што се добива кога

во Help - менито ќе се внесе наредбата **InterpolatingPolynomial**. Забележуваме дека, покрај сите варијанти и можни параметри на наредбата, наведени се и доста илустративни примери во кои параметрите може да се менуваат за да се добие посакуваниот излез.



Слика 1.7

Сите цртежи и табели со резултати во оваа книга се добиени со пакетот Mathematica, при што е користена верзијата 11.1. Сите наредби и модули функционираат во која било друга понова верзија на пакетот.

Дел од модулите кои се дадени во учебникот се адаптирани од веќе постоечки модули подготвени за слична намена и можат да се најдат на веб страницата:

<http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/n2003/NumericalUndergradMod.html>

2. Решавање равенки

Нека е дадена равенката со една непозната

$$F(x) = 0, \quad (2.1)$$

каде што $F(x)$ е реална функција од една реална променлива. Претпоставуваме дека равенката има едно или повеќе реални решенија.

Определување на точните решенија е можно само за некои специјални типови равенки, како на пример, линеарните, квадратните, кубните, биквадратните равенки, некои специјални класи алгебарски равенки од повисок степен, некои класи трансцедентни равенки и сл. Поради тоа, многу често има потреба од наоѓање приближна вредност на некое реално решение на дадената равенка, користејќи притоа нумерички методи.

Нумеричките методи за решавање равенки се итеративни. Тоа значи дека почнувајќи од некое почетно приближување x_0 (**почетна** или **нулта итерација**), се генерира низа приближувања $\{x_n\}$ која е наречена **итеративна низа**. Под одредени услови итеративната низа $\{x_n\}$ конвергира кон точното решение x на равенката (2.1), т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Ако за приближно решение x^* се земе **n -тото приближување (n -тата итерација)** x_n , тогаш

$$|x_n - x| = \varepsilon_n$$

е **апсолутната грешка на n -тата итерација**. Понатаму под грешка ќе ја подразбираме апсолутната грешка, која може да се ограничи одгоре, $\varepsilon_n \leq \varepsilon$ (види поглавје 1.2.2) и ќе велиме дека приближувањето x_n е со точност ε .

Ќе воведеме уште еден поим со кој се опишува брзината на конвергенција на итеративната низа.

Дефиниција 2.1. Нека итеративната низа $\{x_n\}$ конвергира кон точното решение на равенката (2.1). Ако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\varepsilon_n)^p} = c \neq 0,$$

за некој реален број $p \geq 1$, тогаш бројот p се нарекува **ред на конвергенција** на итеративната низа $\{x_n\}$.

Специјално, ако $p = 1$ тогаш конвергенцијата е линеарна, ако $p = 2$ станува збор за квадратна конвергенција, а за $p = 3$ имаме кубна конвергенција. Колку вредноста на p е поголема, толку итеративната низа $\{x_n\}$ побрзо конвергира кон точното решение x на равенката (2.1).

Проблемот за решавање на равенката (2.1), каде што $F(x)$ е непрекината функција во некоја околина на бараното реално решение, се состои од следниве две фази:

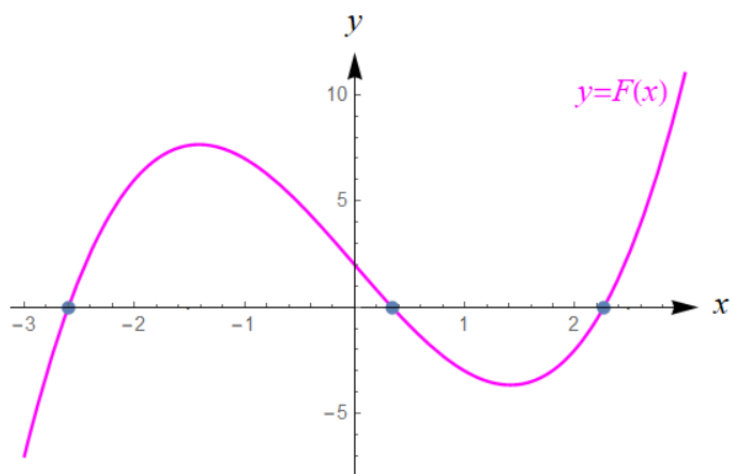
- 1) локализирање на решението, т.е. одредување интервал во кој равенката има единствено реално решение,
- 2) уточнување на приближното решение со однапред зададена точност, со користење некој нумерички метод.

2.1. Локализација на решението

Ќе наведеме два начина за локализација на решението.

Графичка локализација на решението

Го скицираме графикот на функцијата $y = F(x)$. Решенијата на равенката $F(x) = 0$ се апсцисите на пресечните точки на кривата $y = F(x)$ со x -оската, т.е. нулите на функцијата $F(x)$. На сликата 2.1 нулите на функцијата се прикажани како точки во сина боја, па локализирањето на корените на равенката се сведува на определување на интервалите во кои се наоѓаат овие точки.

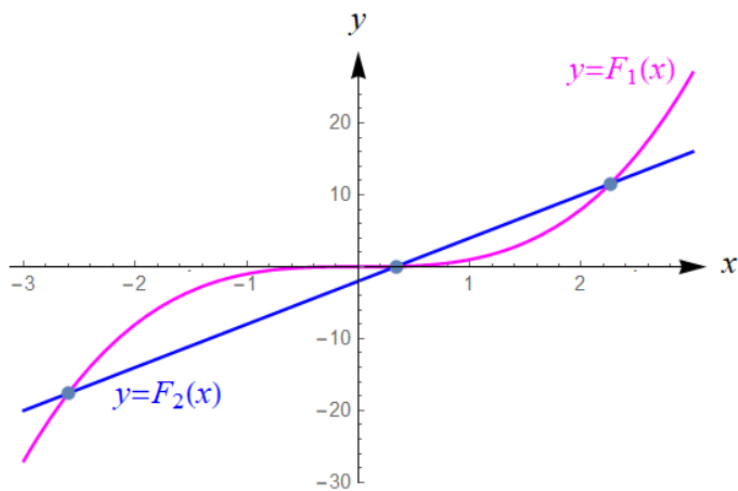


Слика 2.1

Ако пак, графикот на функцијата $y = F(x)$ е сложен, равенката $F(x) = 0$ се запишува во еквивалентен облик

$$F_1(x) = F_2(x).$$

Тогаш решенија на равенката $F(x) = 0$ се апсцисите на пресечните точки на кривите $y = F_1(x)$ и $y = F_2(x)$ (види слика 2.2 и пример 2.1).



Слика 2.2

Аналитичка локализација на решението

При аналитичкото локализирање на решението на равенката $F(x) = 0$, најчесто ги користиме теоремите 1.1, 1.2 и 1.3.

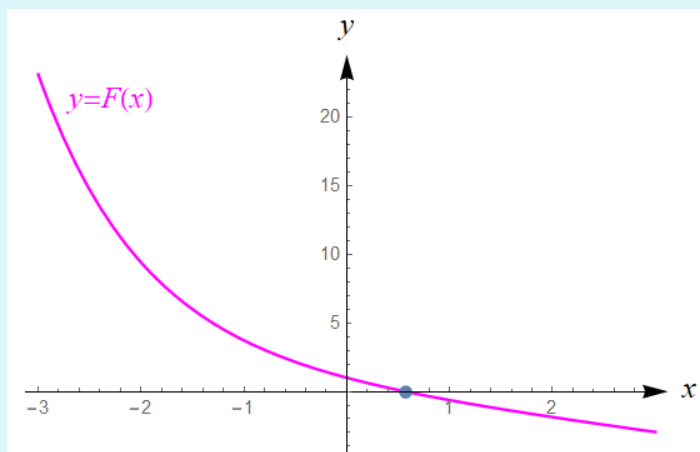
Пример 2.1. Да се локализираат сите реални решенија на равенката

$$e^{-x} - x = 0.$$

Решение. Решенијата ќе ги локализираме применувајќи ги двата начина за локализација.

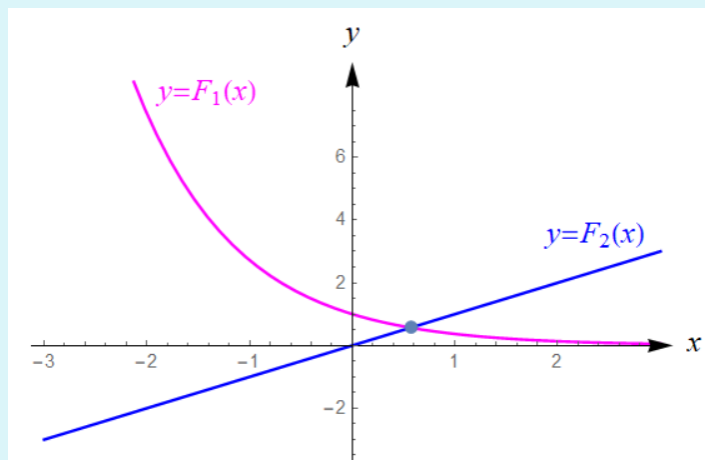
1) Графичка локализација

Го скицираме графикот на функцијата $y = e^{-x} - x$. Како што може да се види на сликата 2.3, графикот на функцијата ја сече x -оската само во една точка чија апсциса припаѓа на интервалот $(0,1)$.



Слика 2.3

До истиот заклучок може да дојдеме тргнувајќи од еквивалентниот облик $e^{-x} = x$, ако ги скицираме графиците на функциите $y = F_1(x) = e^{-x}$ и $y = F_2(x) = x$ (слика 2.4). Забележуваме дека тие се сечат само во една точка, чија апсциса припаѓа на интервалот $(0,1)$. Според тоа, заклучуваме дека равенката има едно реално позитивно решение $x \in (0,1)$.



Слика 2.4

Во програмскиот пакет Mathematica скицирањето на графиците се врши со користење на наредбата `Plot`. Во продолжение е дадена наредбата со која се добиени графиците на сликата 2.4 (види го објаснувањето, синтаксата и можните опции за оваа наредба во Help менито во Mathematica).

```
Plot[{E^-x, x}, {x, -3, 3}, Axes -> True, AxesStyle -> Arrowheads[{0, 0.04}],
  Ticks -> True, AxesLabel -> {Style["x", Bold, Italic, Black],
  Style["y", Bold, Italic, Black]}, PlotStyle -> {Magenta, Blue}]
```

2) Аналитичка локализација

За секој реален број x , функцијата $F(x) = e^{-x} - x$ е непрекината и $F'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, што значи дека таа е монотono опаѓачка на \mathbb{R} .

x	Знак на $F(x)$
-1	+
0	+
1	-

Табела 2.1

Во табелата 2.1 е даден знакот на функцијата $F(x)$ за неколку вредности на аргументот x од нејзината област на дефинираност. Забележуваме дека функцијата е позитивна за $x = 0$, а негативна за

$x = 1$, па $F(0)F(1) < 0$. Согласно теоремата 1.3, заклучуваме дека равенката има единствено решение кое се наоѓа во интервалот $(0,1)$. ▲

Забелешка 2.1. Често пати, истовремено треба да се користат двата начина за локализација. Од графичкиот начин се утврдува бројот на реални решенија на дадената равенка $F(x) = 0$, а од табелата со знакот на функцијата $F(x)$ попрецизно се одредуваат интервалите во кои се наоѓаат решенијата. Да забележиме дека, и покрај тоа што во Mathematica едноставно може да се скицира графикот на функцијата, потребно е однапред да се зададе интервалот во којшто таа треба да биде разгледувана. Тоа значи дека е неопходно прво да се направи аналитичка локализација на коренот на дадената равенка.

2.2. Интервални методи

Методите со кои единствениот корен на равенката $F(x) = 0$, кој припаѓа на интервалот $[a, b]$ ($F(a)$ и $F(b)$ имаат спротивен знак), се определува така што се дели почетниот интервал на два подинтервали, од кои едниот го содржи бараниот корен, се нарекуваат **интервални методи** или **методи на затворен домен**. Откако ќе го определеме интервалот што го содржи коренот, постапката се повторува. По доволен број итерации, секогаш може да го добиеме приближното решение со дадена точност, независно од големината на почетниот интервал. Затоа овие методи ги нарекуваме **глобално конвергентни**. Во оваа група методи се методот на преполовување и методот на лажна положба.

2.2.1. Метод на преполовување (бисекција)

Нека е дадена равенката $F(x) = 0$ која има единствено решение x во сегментот $[a, b]$. Со точката

$$x_0 = \frac{a + b}{2}$$

го делиме сегментот $[a, b]$ на два сегменти со еднаква должина (т.е. го преполовуваме). Така добиваме два потсегменти $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$. Можни се три случаи:

- Ако $F(x_0) = 0$, тогаш $x = x_0$ е точното решение на равенката.
- Ако $F(a) \cdot F(x_0) < 0$, тогаш $x \in [a, x_0]$, па продолжуваме да работиме со сегментот $[a, x_0]$ преполовувајќи го со точката

$$x_1 = \frac{a + x_0}{2}.$$

- Ако важи $F(x_0) \cdot F(b) < 0$, тогаш $x \in [x_0, b]$ и продолжуваме да работиме со сегментот $[x_0, b]$ преполовувајќи го со точката

$$x_1 = \frac{x_0 + b}{2}.$$

Јасно е дека при оваа постапка важат следниве оценки на грешката на приближувањата x_0, x_1, \dots, x_n :

$$|x - x_0| \leq \frac{b - a}{2} \quad (\text{апсолутна грешка на нултото приближување } x_0),$$

$$|x - x_1| \leq \frac{b - a}{2^2} \quad (\text{апсолутна грешка на првото приближување } x_1),$$

⋮

$$|x - x_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} \quad (\text{апсолутна грешка на } n - \text{тото приближување } x_n).$$

Заклучуваме дека, ако за приближно решение x^* се земе n – тото приближување x_n , т.е. $x^* = x_n$, тогаш за неговата грешка важи следнава оценка:

$$\varepsilon_n = |x - x_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Последнава формула укажува дека, бројот на итерации n , при однапред зададена точност ε , може да се определи од неравенството:

$$\frac{b - a}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

За наоѓање на приближното решение на равенката $F(x) = 0$, во пакетот Mathematica може да се искористи модулот **Prepolovuvanje**, даден во продолжение. Влезни податоци се: границите на интервалот и бројот на итерации.

```
Prepolovuvanje[a0_, b0_, n_] :=
Module[{},
  a = N[a0];
  b = N[b0];
  c =  $\frac{a + b}{2}$ ;
  k = 0;
  output = {{k, a, c, b, F[c]}};
  While[k < n,
    If[Sign[F[b]] == Sign[F[c]],
      b = c, a = c;];
    c =  $\frac{a + b}{2}$ ;
    k = k + 1;
    output = Append[output, {k, a, c, b, F[c]}]; ];
  Print[NumberForm[TableForm[output,
    TableHeadings -> {None, {"n", "a_n", "x_n", "b_n", "F(x_n)"}}], 16]];
  Print[" x* = ", NumberForm[c, 16]] ]
```

Пример 2.2. Да се пресмета приближно позитивниот корен на равенката $x^3 + x^2 - 3 = 0$, со точност 10^{-1} .

Решение. Нека $F(x) = x^3 + x^2 - 3$. Испитувајќи го знакот на првиот извод на функцијата $F'(x) = 3x^2 + 2x$, може да се заклучи дека функцијата е растечка на интервалот $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$, при што важи:

$$F\left(-\frac{2}{3}\right) < 0, \quad F(0) < 0, \quad F(1) < 0 \quad \text{и} \quad F(2) > 0.$$

Значи, $F(1) \cdot F(2) < 0$. Функцијата $F(x)$ не го менува знакот на интервалот $(-\frac{2}{3}, 0)$, каде што е монотono опаѓачка, па оттука се заклучу-

чува дека постои единствено решение на равенката кое припаѓа на интервалот (1,2).

Имајќи го предвид еквивалентниот облик на равенката

$$x^3 = 3 - x^2,$$

ги скицираме граfiците на функциите $F_1(x) = x^3$ и $F_2(x) = 3 - x^2$ во ист координатен систем, во интервал што го содржи решението на равенката (види слика 2.5).

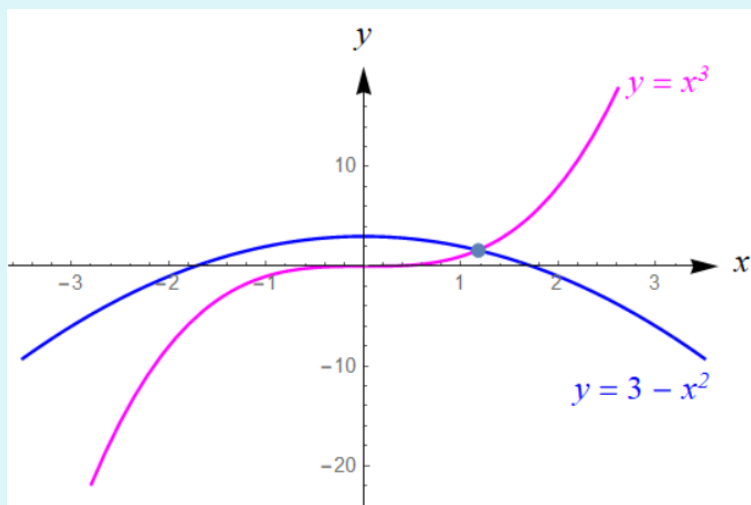
За уточнување на решението го применуваме методот на преполовување. Од тоа што за грешката на n -тото приближување x_n , треба да важи

$$|x - x_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} = \frac{2 - 1}{2^{n+1}} < 10^{-1},$$

се добива дека

$$\frac{2 - 1}{2^{n+1}} < \frac{1}{10},$$

односно $2^{n+1} > 10$.



Слика 2.5

Тоа е точно за $n \geq 3$, па заклучуваме дека за да се добие приближно решение со точност 10^{-1} , потребни се барем 4 преполовувања, односно x_0, x_1, x_2 и x_3 .

1) Го преполовуваме сегментот $[1,2]$ со точката

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

и ги добиваме потсегментите: $[1; 1,5]$ и $[1,5; 2]$. Бидејќи

$$F(1) \cdot F(1,5) < 0,$$

следува дека $x \in [1; 1,5]$.

2) Го преполовуваме сегментот $[1; 1,5]$ со точката

$$x_1 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$$

и ги добиваме потсегментите: $[1; 1,25]$ и $[1,25; 1,5]$. Бидејќи

$$F(1) \cdot F(1,25) < 0,$$

следува дека $x \in [1; 1,25]$.

3) Го преполовуваме сегментот $[1; 1,25]$ со точката

$$x_2 = \frac{1+1,25}{2} = 1,125$$

и ги добиваме потсегментите: $[1; 1,125]$ и $[1,125; 1,25]$. Бидејќи

$$F(1) \cdot F(1,125) > 0,$$

следува дека $x \in [1,125; 1,25]$.

4) Го преполовуваме сегментот $[1,125; 1,25]$ со точката

$$x_3 = \frac{1,125+1,25}{2} = 1,1875$$

и ги добиваме потсегментите: $[1,125; 1,1875]$ и $[1,1875; 1,25]$.

Од тоа што грешката е

$$\varepsilon < 0,1 < 0,5 = 0,5 \cdot 10^0,$$

следува дека приближното решение $x_3 = 1,1875$ нема ниту една сигурна децимална цифра, односно бараното приближно решение е $x^* = 1$.

Во Mathematica, задачата може да се реши со користење на модулот **Prepolovuvanje**, откако прво ќе се внесе соодветната функ-

ција $F(x)$, во случајов $F(x) = x^3 + x^2 - 3$. Излезот е претставен на сликата 2.6.

```
F[x_] := x^3 + x^2 - 3;
Prepolovuvanje[1, 2, 3]
```

n	a_n	x_n	b_n	$F(x_n)$
0	1.	1.5	2.	2.625
1	1.	1.25	1.5	0.515625
2	1.	1.125	1.25	-0.310546875
3	1.125	1.1875	1.25	0.084716796875

$x^* = 1.1875$

Слика 2.6

Забелешка 2.2. Методот на преполовување секогаш конвергира кон точното решение, но конвергенцијата е бавна, како што може да се забележи од примерот 2.2. Поради тоа, овој метод се користи првенствено за подобра локализација на бараното решение (наоѓање интервал со помала должина во кој се наоѓа решението), а не за негово уточнување.

2.2.2. Метод на лажна положба (regula falsi)

Претпоставуваме дека равенката $F(x) = 0$ има единствено решение x во сегментот $[a, b]$. Методот на лажна положба, познат и како метод *regula falsi*, е сличен на методот на преполовување, но е побрз од него. Кај методот на преполовување, во секој чекор коренот на равенката $F(x) = 0$ се апроксимира со средната точка на интервалот што го содржи тој корен. Кај методот на лажна положба, функцијата $F(x)$ се апроксимира со правата која минува низ точките $(a_0, F(a_0))$ и $(b_0, F(b_0))$, чија равенка е:

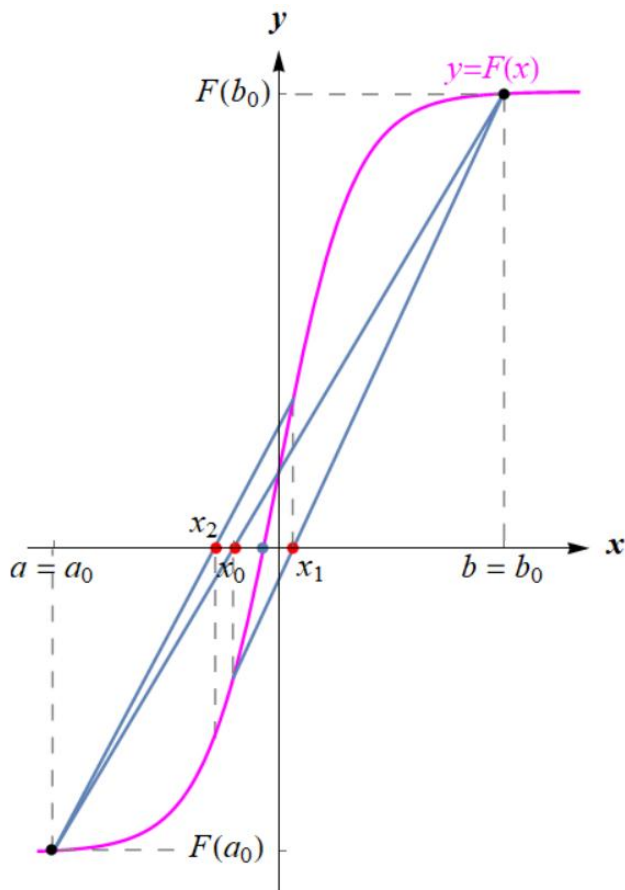
$$y - F(a_0) = \frac{F(b_0) - F(a_0)}{b_0 - a_0} (x - a_0),$$

каде што $a = a_0$, $b = b_0$.

Пресечната точка на оваа права со x -оската има апсциса

$$x_0 = a_0 - \frac{b_0 - a_0}{F(b_0) - F(a_0)} F(a_0),$$

и го дели почетниот сегмент $[a_0, b_0]$ на два сегменти: $[a_0, x_0]$ и $[x_0, b_0]$.



Слика 2.7

Можни се три случаи (види слика 2.7):

- Ако $F(x_0) = 0$, тогаш $x = x_0$ е точното решение на равенката.
- Ако $F(a_0) \cdot F(x_0) < 0$, тогаш $x \in [a_0, x_0]$, па повлекуваме права низ точките $(a_0, F(a_0))$ и $(x_0, F(x_0))$ и ја повторуваме горната постапка.
- Ако важи $F(x_0) \cdot F(b_0) < 0$, тогаш $x \in [x_0, b_0]$, па повлекуваме права низ точките $(x_0, F(x_0))$ и $(b_0, F(b_0))$ и ја повторуваме горната постапка.

Значи, низата приближувања $\{x_n\}$ може да се генерира на следниов начин:

$$x_n = \frac{a_n F(b_n) - b_n F(a_n)}{F(b_n) - F(a_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Притоа:

- Ако $F(x_n) = 0$, тогаш $x = x_n$.
- Ако $F(a_n)F(x_n) < 0$, тогаш $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_n$.
- Ако $F(x_n)F(b_n) < 0$, тогаш $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$.

Процесот се прекинува кога ќе се постигне бараната точност ε , т.е. кога ќе биде исполнето неравенството

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

За наоѓање на приближното решение на равенката $F(x) = 0$ со примена на методот на лажна положба, во пакетот Mathematica може да се искористи модулот **RegulaFalsi**, даден во продолжение. Влезни податоци се: границите на интервалот и бројот на итерации.

```
RegulaFalsi[a0_, b0_, n_] :=
Module[{},
  a = N[a0];
  b = N[b0];
  c =  $\frac{a * F[b] - b * F[a]}{F[b] - F[a]}$ ;
  k = 0;
  output = {{k, a, c, b, F[c]}};
  While[k < n,
    If[Sign[F[b]] == Sign[F[c]],
      b = c, a = c];
    c =  $\frac{a * F[b] - b * F[a]}{F[b] - F[a]}$ ;
    k = k + 1;
    output = Append[output, {k, a, c, b, F[c]}];
  ]
  Print[NumberForm[TableForm[output,
    TableHeadings -> {None, {"n", "a_n", "x_n", "b_n", "F(x_n)"}}], 16]];
  Print[" x* = ", NumberForm[c, 16]] ]
```

Пример 2.3. Со примена на методот на лажна положба, да се најде реалниот корен на равенката $x^3 + x^2 - 3 = 0$, со точност 10^{-3} .

Решение. Нека $F(x) = x^3 + x^2 - 3$. Во примерот 2.2 го локализиравме коренот на оваа равенка и утврдивме дека $x \in (1,2)$. Ја генерираме низата приближувања кон точното решение користејќи го изразот (2.2):

- 1) Ставаме $a_0 = 1$, $b_0 = 2$. Вредностите на функцијата во овие точки се: $F(a_0) = -1$, $F(b_0) = 9$. За точката x_0 имаме:

$$x_0 = \frac{a_0 F(b_0) - b_0 F(a_0)}{F(b_0) - F(a_0)} = \frac{1 \cdot 9 - 2 \cdot (-1)}{9 - (-1)} = 1,1,$$

$$F(x_0) = F(1,1) = 1,1^3 + 1,1^2 - 3 = -0,459.$$

Ги добивме потсегментите: $[1; 1,1]$ и $[1,1; 2]$. Бидејќи

$$F(1,1) \cdot F(2) < 0,$$

следува дека $x \in [1,1; 2]$.

- 2) Ставаме $a_1 = x_0 = 1,1$; $b_1 = b_0 = 2$. Вредностите на функцијата во овие точки се: $F(a_1) = -0,459$, $F(b_1) = 9$. За точката x_1 добиваме:

$$x_1 = \frac{a_1 F(b_1) - b_1 F(a_1)}{F(b_1) - F(a_1)} = \frac{1,1 \cdot 9 - 2 \cdot (-0,459)}{9 - (-0,459)} = 1,14367.$$

Бидејќи

$$|x_1 - x_0| = 0,04367 > 10^{-2},$$

продолжуваме со генерирање на следниот член од низата.

Ги добивме потсегментите: $[1,1; 1,14367]$ и $[1,14367; 2]$.

Вредноста на функцијата во точката x_1 е

$$F(x_1) = F(1,14367) = -0,196103 \text{ и важи}$$

$$F(1,14367) \cdot F(2) < 0,$$

па следува дека $x \in [1,14367; 2]$.

- 3) Ставаме $a_2 = x_1 = 1,14367$; $b_2 = b_1 = 2$. Тогаш,

$F(a_2) = -0,196103$, $F(b_2) = 9$, па за точката x_2 добиваме:

$$x_2 = \frac{a_2 F(b_2) - b_2 F(a_2)}{F(b_2) - F(a_2)} = 1,16193.$$

Грешката на ова приближување е

$$|x_2 - x_1| = 0,01826 > 10^{-2},$$

па продолжуваме со генерирање на следниот член од низата.

Вредноста на функцијата во точката x_2 е

$$F(x_2) = F(1,16193) = -0,081203$$

и важи

$$F(1,16193)F(2) < 0,$$

па следува дека $x \in [1,16193; 2]$.

4) Ставаме $a_3 = x_2 = 1,16193$; $b_3 = b_2 = 2$, па

$$F(a_3) = -0,0812031, \quad F(b_3) = 9.$$

За точката x_3 добиваме:

$$x_3 = \frac{a_3 F(b_3) - b_3 F(a_3)}{F(b_3) - F(a_3)} = 1,16943.$$

Бидејќи

$$|x_3 - x_2| = 0,0075 < 10^{-2},$$

заклучуваме дека $x^* = 1,16943$.

Во Mathematica, задачата може да се реши со користење на модулот **RegulaFalsi**. Прво се внесува функцијата $F(x) = x^3 + x^2 - 3$. Излезот е претставен на сликата 2.8.

```
F[x_] := x^3 + x^2 - 3;
RegulaFalsi[1, 2, 3]
```

n	a_n	x_n	b_n	$F(x_n)$
0	1.	1.1	2.	-0.45899999999999996
1	1.1	1.143672692673644	2.	-0.1961034970404238
2	1.143672692673644	1.161933554965152	2.	-0.0811960214847494
3	1.161933554965152	1.169426803752614	2.	-0.03318074265808946

$x^* = 1.169426803752614$

Слика 2.8

Забелешка 2.3. За решавање на равенката во примерот 2.2, со примена на методот на преполовување беа потребни барем 4 итерации за да се добие точност 10^{-1} . Во примерот 2.3, за решавање на истата равенка, со примена на методот на лажна положба оваа точност беше постигната веќе во втората итерација, што потврдува дека овој метод најчесто конвергира побргу од методот на преполовување.

2.3. Метод на прости итерации

Дадена е равенката $F(x) = 0$, која има единствено решение x во сегментот $[a, b]$ и нека ја трансформиме во еквивалентниот облик

$$x = f(x), \quad (2.4)$$

каде што $f(x)$ е диференцијабилна функција на интервалот (a, b) . Нека $x_0 \in [a, b]$ е нулто приближување (нулта итерација). Ја формираме итеративната низа $\{x_n\}$ на следниов начин:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Просторот \mathbb{R} со Евклидската метрика

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

е комплетен метрички простор и за него важи теоремата на Банах (теорема 1.7). Тогаш и сегментот $[a, b]$ е комплетен метрички простор со истата метрика, па од теоремата 1.7 се добива:

Теорема 2.1. Нека пресликувањето $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е контракција на $[a, b]$, т.е. го задоволува условот:

$$(\exists q \in (0, 1)) (\forall x, y \in [a, b]) |f(x) - f(y)| \leq q|x - y|. \quad (2.6)$$

Тогаш во сегментот $[a, b]$ постои единствено решение x на равенката (2.1), односно (2.4), кое се добива како граница на итеративната низа (2.5), при произволен избор на почетна итерација $x_0 \in [a, b]$. Притоа, за грешката ε_n на n -тото приближување x_n , $n = 1, 2, \dots$, важат следниве оценки:

$$\varepsilon_n = |x - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \quad (2.7)$$

и

$$\varepsilon_n = |x - x_n| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (2.8)$$

Во следнава теорема се дадени услови за конвергенција на итеративната низа (2.5) кон точното решение на дадената равенка, кои се поедноставни за примена отколку условот (2.6) од теоремата 2.1.

Теорема 2.2. Ако $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ е диференцијабилна функција на интервалот $[a, b]$ и

$$|f'(x)| \leq q < 1 \text{ за секој } x \in [a, b],$$

тогаш за произволно избран $x_0 \in [a, b]$, итеративната низа (2.5) конвергира кон точното решение x на равенката (2.1), односно (2.4). Притоа, за грешката на n -тото приближување x_n важат оценките (2.7) и (2.8).

Доказ. Нека $x, y \in [a, b]$. Согласно теоремата на Лагранж (теорема 1.4), постои точка $c \in (x, y)$ така што

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y| \leq q |x - y|.$$

Заклучокот следува од теоремата 2.1. ■

Методот за определување приближно решение на дадена равенка со конструкција на итеративната низа (2.5) се нарекува **метод на прости итерации** или **итерации со фиксна точка** и тој е еден од најважните методи за нумеричкото решавање равенки.

Забелешка 2.4. Конвергенцијата на овој метод е линеарна бидејќи постои граничната вредност

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \neq 0.$$

Навистина, ако ја примениме теоремата на Лагранж за функцијата f на сегментот $[x_n, x]$ или $[x, x_n]$ добиваме:

$$\varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - x| = |f(x_n) - f(x)| = |f'(c)||x_n - x| = |f'(c)|\varepsilon_n,$$

каде што $c \in (x_n, x)$ или $c \in (x, x_n)$. Значи, $\varepsilon_{n+1} = |f'(c)|\varepsilon_n$, т.е.

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = |f'(c)|.$$

Според тоа,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = |f'(c)| \neq 0,$$

бидејќи ако $|f'(c)| = 0$, тогаш $\varepsilon_{n+1} = 0$ и $x_{n+1} = x$.

Нека $f'(c) = \alpha$, за некој реален број α , $-1 < \alpha < 1$. Тогаш од горната дискусија добиваме $\varepsilon_{n+1} = |\alpha|\varepsilon_n$, т.е. грешката во секој следен чекор се намалува. Поточно, низата од грешки $\{\varepsilon_n\}$ е геометриска прогресија со количник α , каде што $-1 < \alpha < 1$.

Забелешка 2.5. Ако $q = 0,5$, со замена во (2.7) се добива

$$\varepsilon_n = |x - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

што значи дека итеративната постапка запира во оној момент кога разликата помеѓу две последователни приближувања е помала од зададената грешка.

Овој заклучок може да се обопшти на следниов начин:

Ако однапред зададената точност е од облик $c \cdot 10^{-l}$, $c \in (0,1)$, тогаш проверка на грешката, наместо по секоја итерација, се прави по итерацијата x_n , која се совпаѓа со x_{n-1} во l децимали.

За наоѓање на приближното решение на равенката $F(x) = 0$ со примена на методот на прости итерации, во пакетот Mathematica може да се искористи модулот **ProstiIteracii**, даден подолу. Влезни податоци се: почетното приближување x_0 и бројот на итерации n .

```

ProstiIteracii[x0_, n_] :=
Module[{},
  p0 = N[x0];
  k = 0; e = 0;
  output = {{k, p0, e}};
  While[k < n,
    Module[{},
      p1 = f[p0];
      k = k + 1;
      e = Abs[p1 - p0];
      p0 = p1; ];
    output = Append[output, {k, p0, e}];];
  Print[NumberForm[TableForm[output,
    TableHeadings -> {None, {"n", "x_n", "|x_n - x_{n-1}|"}}, 16]]];];

```

Геометриска интерпретација на методот

Од условот за конвергенција на итеративната низа (2.5) даден во теоремата 2.2 имаме $-1 < f'(x) < 1$ за секој $x \in (a, b)$. Ќе ги разгледаме следниве случаи:

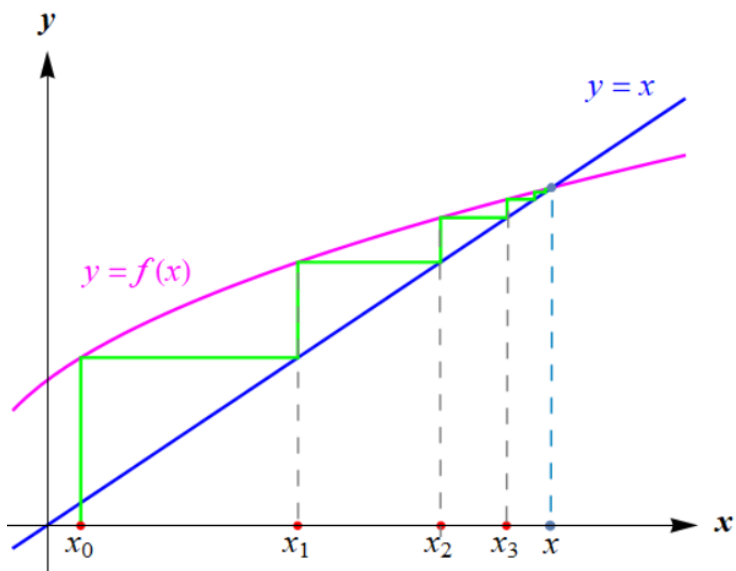
$$1) 0 < f'(x) < 1, \forall x \in (a, b).$$

Во овој случај функцијата $f(x)$ е строго монотono растечка на сегментот $[a, b]$. Познато е дека $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, каде што α е аголот што го зафаќа тангентата на кривата $y = f(x)$ во точката $x \in (a, b)$ со позитивниот дел на x -оската. Според тоа, $0 < \operatorname{tg} \alpha < 1$, па $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Точното решение x на равенката $x = f(x)$ е пресек на кривата $y = f(x)$ со правата $y = x$. Приближните решенија, т.е. членовите на итеративната низа $\{x_n\}$:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

се претставени со црвени точки на сликата 2.9.

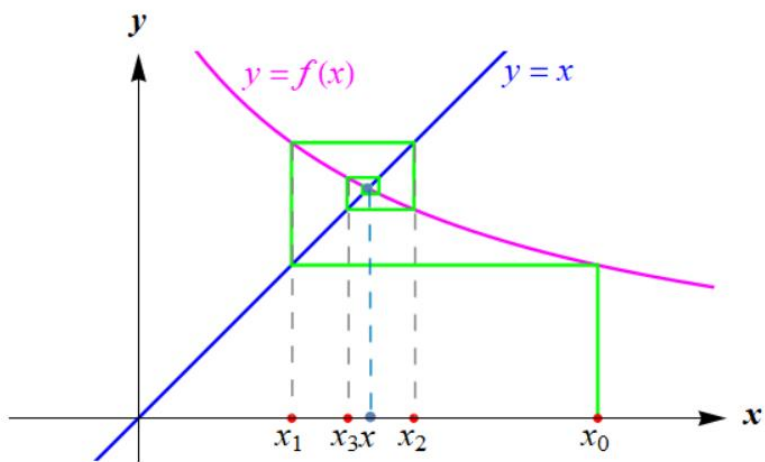


Слика 2.9

Заклучуваме дека со зголемување на вредноста на n , приближните решенија $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, се доближуваат кон точното решение x само од една страна, т.е. или сите се помали, или сите се поголеми од x .

2) $-1 < f'(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$.

Во овој случај функцијата $f(x)$ е монотono опаѓачка на интервалот (a, b) и $-1 < \text{tg } \alpha \leq 0$, па $\frac{3\pi}{4} < \alpha \leq \pi$.

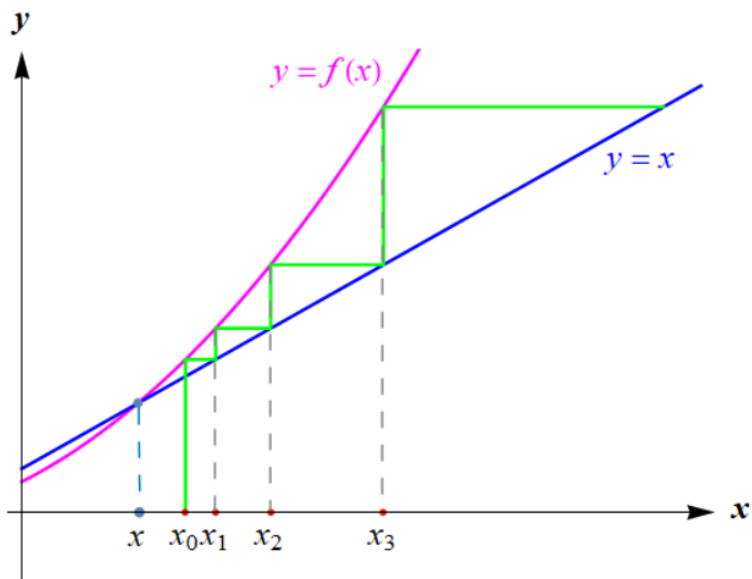


Слика 2.10

Од сликата 2.10 заклучуваме дека со зголемување на вредноста на n , приближните решенија $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, се доближуваат кон точното решение x , при што тие се наизменично помали, односно поголеми од x (велиме дека осцилираат околу x).

3) $f'(x) \geq 1, \forall x \in [a, b]$.

Нека претпоставиме дека условот за конвергенција не е задоволен. Ако $f'(x) \geq 1, \forall x \in [a, b]$, тогаш $f(x)$ е монотono растечка на (a, b) и $\text{tg } \alpha \geq 1$. Значи $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$, а итеративната низа $\{x_n\}$ дивергира, како што е илустрирано на сликата 2.11.



Слика 2.11

4) $f'(x) \leq -1, \forall x \in [a, b]$.

Аналогно на случајот 3), се добива дека итеративната низа $\{x_n\}$ дивергира и новите приближувања осцилаторно се оддалечуваат од точното решение.

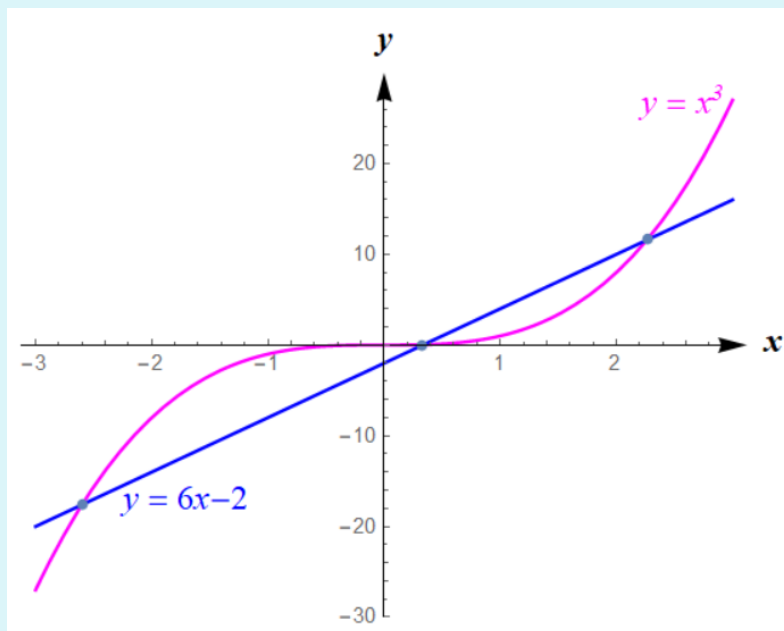
Пример 2.4. Со методот на прости итерации да се најде помалиот позитивен корен на равенката $x^3 - 6x + 2 = 0$ со точност $0,5 \cdot 10^{-5}$.

Решение. Прво ќе направиме локализација на позитивното решение на дадената равенка. Равенката ја запишуваме во еквивалентниот облик

$x^3 = 6x - 2$. Од графикот даден на сликата 2.12 заклучуваме дека дадената равенка има три решенија: $x_1 \in (-3, -2)$, $x_2 \in (0, 1)$, $x_3 \in (2, 3)$. Тоа го потврдува и табелата 2.2 со знакот на функцијата.

x	Знак на $F(x)$
-3	-
-2	+
-1	+
0	+
1	-
2	-
3	+

Табела 2.2



Слика 2.12

За уточнување на бараното решение $x \in (0, 1)$ го применуваме методот на прости итерации. Ставаме

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{6},$$

бидејќи почетната равенка можеме да ја запишеме во облик $x = f(x)$, односно

$$x = \frac{x^3 + 2}{6}.$$

Ја формираме итеративната низа $\{x_n\}$ на следниов начин:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 2}{6}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Прво треба да провериме дали оваа низа конвергира, односно дали се задоволени условите од теоремата 2.2.

За првиот извод на функцијата $f(x)$ добиваме

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Тој е позитивен за секоја реална вредност на x , па заклучуваме дека функцијата е монотонно растечка. Оттука заклучуваме дека најмалата и најголемата вредност на функцијата на сегментот $[0,1]$ се: $f(0) = \frac{1}{3}$ и $f(1) = \frac{1}{2}$, соодветно. Според тоа, за $x \in [0,1]$, важи

$$f(x) \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subseteq [0,1],$$

односно условот $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ е исполнет.

Првиот извод е полиномна функција, што значи дека е непрекината на целата реална права, па затоа функцијата $f(x)$ е диференцијабилна функција на $[0,1]$.

Бидејќи важи

$$|f'(x)| = \frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{2} = q < 1, \quad \forall x \in [0,1],$$

следува дека итеративната низа $\{x_n\}$ конвергира.

За почетната итерација избираме $x_0 = 0$ и ја пресметуваме следнава итерација:

$$x_1 = \frac{0^3 + 2}{6} = 0,333333.$$

Согласно бараната точност $0,5 \cdot 10^{-5}$ и забелешката 2.5 постапката ја продолжуваме сè додека не добиеме две последователни приближувања кои се совпаѓаат во 5 децимали:

$$x_2 = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2}{6} = 0,339506,$$

$$x_3 = 0,339855,$$

$$x_4 = 0,339876,$$

$$x_5 = 0,339877.$$

Од тоа што

$$\varepsilon_5 = |x_5 - x_4| \approx 0,1 \cdot 10^{-5} < 0,5 \cdot 10^{-5},$$

следува дека x_5 има 5 сигурни децимални цифри, па $x^* = 0,33987$.

Во Mathematica, задачата може да се реши со користење на модулот **ProstiIteracii**, откако прво ќе се внесе соодветната функција $f(x)$, во случајов $f(x) = \frac{x^3+2}{6}$. За почетното приближување е избрана вредноста $x_0 = 0$, а бројот на итерации е $n = 10$. Излезот е претставен на сликата 2.13.

```
f[x_] =  $\frac{x^3 + 2}{6}$  ;
ProstiIteracii[0, 10];
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $
0	0.	0
1	0.3333333333333333	0.3333333333333333
2	0.3395061728395062	0.006172839506172867
3	0.3398554982271472	0.0003493253876409863
4	0.3398756513467558	0.00002015311960862354
5	0.3398768152761619	$1.163929406078346 \times 10^{-6}$
6	0.3398768825023116	$6.722614970255947 \times 10^{-8}$
7	0.3398768863851687	$3.882857091408454 \times 10^{-9}$
8	0.3398768866094353	$2.242666607976673 \times 10^{-10}$
9	0.3398768866223885	$1.295319407290663 \times 10^{-11}$
10	0.3398768866231366	$7.481237851436617 \times 10^{-13}$

Слика 2.13

Забелешка 2.6. Кога се проверува ограниченоста на $|f'(x)|$, наместо да се проверува ограниченост на целиот интервал (a, b) , од практични

причини се прави проверка во една точка од интервалот, најчесто во точката што се избира за почетна итерација.

Забелешка 2.7. Функцијата $f(x)$ може да се избере на повеќе начини, но при изборот треба да се внимава да бидат исполнети условите за конвергенција на итеративната низа. Така на пример, ако во примерот 2.3 избереме

$$f(x) = \sqrt[3]{6x - 2},$$

тогаш

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(6x - 2)^2}}.$$

Вредноста $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ не е реален број, т.е. не се исполнети условите од теоремата 2.2 за конвергенција на итеративната низа.

За да се обезбеди сигурна конвергенција на итеративниот процес за уточнување на коренот што се наоѓа во сегментот $[a, b]$, почетната равенка $F(x) = 0$ може да се трансформира на следниов начин. Двете страни од равенката ги множиме со коефициент α

$$\alpha F(x) = 0, \alpha = \text{const.} \neq 0$$

и додаваме x , со што се добива:

$$\alpha F(x) + x = x.$$

Ставаме

$$\varphi(x) = \alpha F(x) + x,$$

при што параметарот α го избираме така што да биде исполнет условот за конвергенција, односно

$$|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in [a, b].$$

Напоменуваме дека α може да биде и функција, наместо параметар.

Пример 2.5. Со методот на прости итерации да се најде коренот на равенката $x^3 - x - 2 = 0$ со точност 10^{-4} .

Решение. Нека $F(x) = x^3 - x - 2$. Равенката $F(x) = 0$ ја запишуваме во еквивалентниот облик $x^3 = x + 2$.

Од графикот даден на сликата 2.14 заклучуваме дека дадената равенка има само еден реален корен $x \in (1,2)$.

Избираме почетно приближување $x_0 = 1,5$ и за конструкција на итеративната низа ја применуваме постапката опишана во забелешката 2.7, така што

$$\varphi(x) = \alpha(x^3 - x - 2) + x,$$

а

$$\varphi'(x) = \alpha(3x^2 - 1) + 1.$$

Вредноста на параметарот α ја определуваме со помош на неравенството

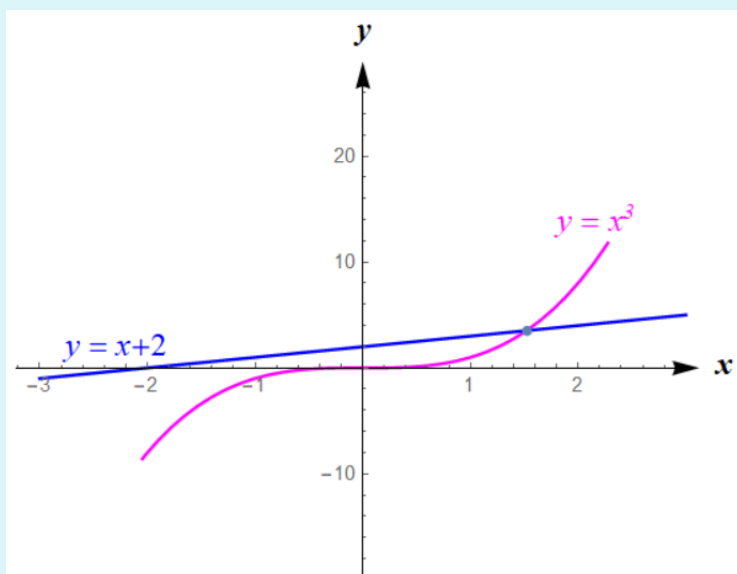
$$|\alpha(3 \cdot 1,5^2 - 1) + 1| < 1.$$

Оттука $-2 < 5,75\alpha < 0$, односно

$$\alpha > -\frac{2}{5,75} \approx -0,3478,$$

па може да избереме, на пример $\alpha = -0,1$. Така, итеративната низа $\{x_n\}$ може да ја формираме на следниов начин:

$$x_{n+1} = 0,1(x_n^3 - x_n - 2) + x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Слика 2.14

Со примена на модулот **ProstiIteracii**, за првите 10 приближувања се добиваат вредностите прикажани на сликата 2.15.

```
f[x_] = -0.1 (x^3 - x - 2) + x;
ProstiIteracii[1.5, 10];
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $
0	1.5	0
1	1.5125	0.012499999999999996
2	1.5177419921875	0.0052419921874999989
3	1.519898137971246	0.002156145783745567
4	1.520777749646448	0.000879611675202563
5	1.521135374897203	0.0003576252507553335
6	1.521280573373088	0.000145198475884456
7	1.521339491704162	0.00005891833107418698
8	1.521363393971713	0.00002390226755100144
9	1.521373089853313	$9.69588160026902 \times 10^{-6}$
10	1.521377022809297	$3.932955983998454 \times 10^{-6}$

Слика 2.15

Забележуваме дека

$$|x_7 - x_6| = 0,0000589 < 10^{-4}. \quad \blacktriangle$$

Забелешка 2.8. Во случај кога се исполнети условите за конвергенција за различен избор на функцијата $f(x)$, за да се обезбеди побрза конвергенција на итеративната постапка, треба да се избере онаа функција $f(x)$ за која $|f'(x)|$ има најмала вредност.

Пример 2.6. За равенката $x^3 + x = 1000$, чие решение се наоѓа во интервалот $(9,10)$ можни се некои од следниве избори за $f(x)$:

- 1) $f(x) = 1000 - x^3$, што не е добар избор, бидејќи $f'(x) = -3x^2$, па $|f'(9)| = 3 \cdot 9^2 > 1$.
- 2) Ако равенката се подели со x^2 се добива

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1000}{x^2},$$

од каде што

$$x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

Функцијата

$$f(x) = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}$$

повторно не е добар избор, бидејќи

$$f'(x) = -\frac{2000}{x^3} + \frac{1}{x^2} \text{ и } |f'(9)| = \frac{2000}{9^3} + \frac{1}{9^2} > 1.$$

- 3) За функцијата $f(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$ се исполнети сите услови за конвергенција од теоремата 2.2, односно $f: [9,10] \rightarrow [9,10]$, функцијата е диференцијабилна на овој сегмент и важи

$$|f'(9)| = \frac{1}{3^3 \sqrt{(1000 - 9)^2}} \approx 0,003 < 1. \quad \blacktriangle$$

Забелешка 2.9. Методот на прости итерации е самоисправувачки: дури и да се направи грешка при пресметките, погрешно пресметаното приближување ќе се земе како почетно и новата итеративна низа повторно ќе конвергира кон точното решение. Оваа особина ја имаат сите нумерички методи кај кои почетното приближување е произволно.

2.4. Метод на Њутн - Рафсон (метод на тангенти)

Еден од најчесто применуваните методи за уточнување на изолираниот корен на равенката $F(x) = 0$ е методот на Њутн - Рафсон. Претпоставуваме дека равенката има единствен еднократен корен x во интервалот (a, b) . Во следнава теорема е дадена итеративната низа и условите за нејзина конвергенција кон точното решение $x \in (a, b)$, како и формула за оценка на грешката.

Теорема 2.3. Нека за функцијата $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ важат следниве услови:

- 1) $F(a) \cdot F(b) < 0$,

- 2) $F(x)$ е диференцијабилна и има непрекинат втор извод на $[a, b]$,
 3) $F'(x)$ и $F''(x)$ имаат постојан знак и не се анулираат на $[a, b]$.

Ако x_0 е оној од краевите на интервалот $[a, b]$, за кој

$$F(x_0) \cdot F''(x_0) > 0,$$

тогаш итеративната низа $\{x_n\}$ определена со

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

конвергира кон единственото решение $x \in (a, b)$ на равенката $F(x) = 0$.

Доказ. Нека x_0 е почетното приближување на коренот x на равенката $F(x) = 0$. Со h ја означуваме вредноста за која треба да се коригира почетното приближување, за да се добие коренот на равенката, т.е.

$$x = x_0 + h.$$

Значи $F(x_0 + h) = 0$. За Тејлоровиот развој на функцијата $F(x)$ во околина на точката x_0 важи:

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(c)}{2!} (x - x_0)^2,$$

за некоја точка c која лежи меѓу x_0 и x (види теорема 1.5). Бидејќи x е нула на функцијата $F(x)$, се добива

$$F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(c)}{2!} (x - x_0)^2 = 0.$$

Имајќи предвид дека $(x - x_0)^2 \approx 0$, земаме дека

$$F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) \approx 0,$$

односно

$$x \approx x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

Нека $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$. Оваа функција има фиксна точка која е еднаква со нулата на функцијата $F(x)$, бидејќи важи $f(x) = x$. Исто така, $f'(x_0) = 0$, па од непрекинатоста на $f'(x)$ во точката x_0 , следува дека постои $\delta > 0$, така што

$$|f'(x)| < 1 \text{ за секој } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Од теоремата за фиксна точка следува дека итеративната низа $x_n = f(x_{n-1})$ конвергира кон фиксната точка на функцијата $f(x)$, односно нулата на функцијата $F(x)$. ■

Нека $x \in [a, b]$ е точното, а x_n е приближно решение на равенката $F(x) = 0$. Ако постои $m > 0$, така што

$$\min_{x \in [a, b]} |F'(x)| \geq m,$$

тогаш за апсолутната грешка на приближното решение x_n важи оценката:

$$\varepsilon_n = |x - x_n| \leq \frac{|F(x_n)|}{m}. \quad (2.10)$$

Навистина, според теоремата на Лагранж, на сегментот $[x, x_n]$, односно $[x_n, x]$ важи:

$$F(x_n) - F(x) = F'(c)(x_n - x), \text{ каде што } c \in (x, x_n), \quad (2.11)$$

т.е.

$$F(x) - F(x_n) = F'(c)(x - x_n), \text{ каде што } c \in (x, x_n), \quad (2.12)$$

соодветно ($F'(c) \neq 0$).

Од равенствата (2.11) и (2.12) следува дека

$$|x_n - x| = \frac{|F(x_n) - F(x)|}{|F'(c)|}.$$

Имајќи предвид дека $F(x) = 0$, добиваме:

$$|x_n - x| = \frac{|F(x_n)|}{|F'(c)|}.$$

Од тоа што $c \in (a, b)$ следува $F'(c) \geq m$, па

$$|x_n - x| = \frac{|F(x_n)|}{|F'(c)|} \leq \frac{|F(x_n)|}{m}.$$

Значи апсолутната грешка на приближното решение x_n може да се оцени согласно (2.10), при што најчесто се избира $m = \min_{x \in [a, b]} |F'(x)|$.

За оценка на грешката на n -тото приближување на методот може да се користи поточната оценка

$$\varepsilon_n = |x - x_n| \leq \frac{M(x_n - x_{n-1})}{2m}, \quad M = \max_{x \in [a, b]} |F''(x)|. \quad (2.13)$$

Забелешка 2.10. Методот на Њутн - Рафсон има квадратна конвергенција. Навистина, од Тејлоровиот полином во околина на точката x_n се добива:

$$0 = F(x) = F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) + \frac{F''(c)}{2} (x - x_n)^2,$$

односно

$$-F(x_n) - F'(x_n)(x - x_n) = \frac{F''(c)}{2} (x - x_n)^2,$$

каде што $c \in (x, x_n)$ или $c \in (x_n, x)$. Ги делиме двете страни на последово равенство со $F'(x_n) \neq 0$:

$$x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} - x = \frac{F''(c)}{2F'(x_n)} (x - x_n)^2.$$

Имајќи ја предвид итеративната низа $\{x_n\}$ определена со (2.9), добиваме дека

$$x_{n+1} - x = \frac{F''(c)}{2F'(x_n)} (x - x_n)^2,$$

т.е.

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{|F''(c)|}{2|F'(x_n)|} \neq 0,$$

па оттука, поради непрекинатоста на првиот и вториот извод на функцијата $F(x)$, следува дека постои граничната вредност

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\varepsilon_n)^2} = \frac{|F''(c)|}{2|F'(x)|} \neq 0.$$

Според дефиницијата 2.1 следува дека методот има квадратна конвергенција.

Забелешка 2.11. Иако до решението се доаѓа преку повеќе пресметки, меѓу кои е и пресметувањето на вредноста на првиот извод за секоја итерација x_n , сепак методот на Њутн - Рафсон е побрз од методот на прости итерации чија конвергенција е линеарна.

Забелешка 2.12. Понекогаш, за да се избегне пресметувањето на вредноста на првиот извод за секоја итерација x_n , а со тоа да се намали времето за пресметување, се користи **модифициран метод на Њутн - Рафсон**, според кој итеративната низа се дефинира на следниов начин:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Геометриска интерпретација на методот

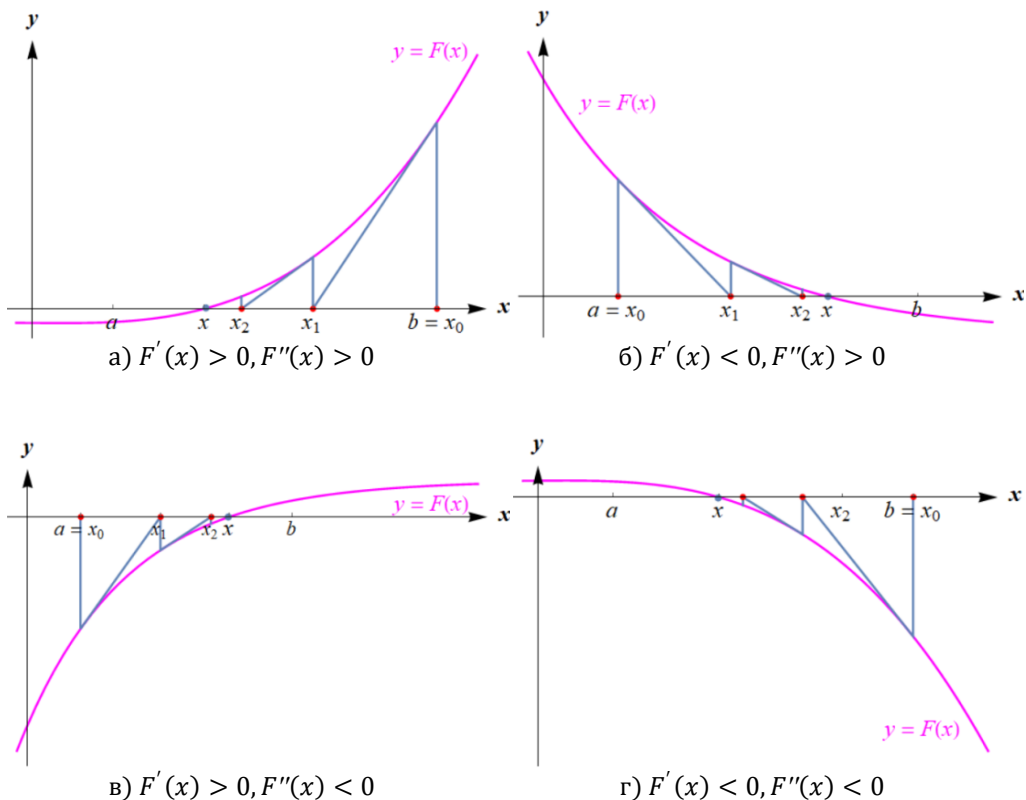
Нека равенката $F(x) = 0$ има единствено решение во интервалот (a, b) , под претпоставка дека за функцијата $F(x)$ се задоволени условите на теоремата 2.3. Геометриски, тоа значи дека функцијата $F(x)$ нема екстреми, ниту превојни точки во разгледуваниот сегмент и во секоја точка од кривата $y = F(x)$ може да се повлече тангента на кривата.

На сликата 2.16 а) е прикажан графикот на функцијата $y = F(x)$ во случај кога, $F'(x) > 0$, $F''(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, т.е. $F(x)$ е неопаѓачка и конвексна функција на сегментот $[a, b]$, при што $F(a) < 0$ и $F(b) > 0$. Значи, равенката има единствено решение во разгледуваниот интервал.

Согласно теоремата 2.3, почетното приближување x_0 треба да го задоволува условот $F(x_0) \cdot F''(x_0) > 0$, па бидејќи

$$F(b) \cdot F''(b) > 0,$$

избираме $x_0 = b$.



Слика 2.16

Останатите три можни случаи за знакот на првиот, односно вториот извод на функцијата $F(x)$ на интервалот $[a, b]$ се прикажани на сликата 2.16 б), в) и г), при што почетното приближување во случаите б) и в) е $x_0 = a$, а во случајот б) е $x_0 = b$.

Равенката на тангентата t_1 на кривата $y = F(x)$ во точката $(x_0, F(x_0))$ е:

$$t_1: y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0).$$

Пресекот на тангентата t_1 со x -оската е точка чија ордината е 0, т.е.

$$0 - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0),$$

од каде што за апсцисата на пресечната точка се добива

$$x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

Апсцисата на пресечната точка е првото приближување

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)},$$

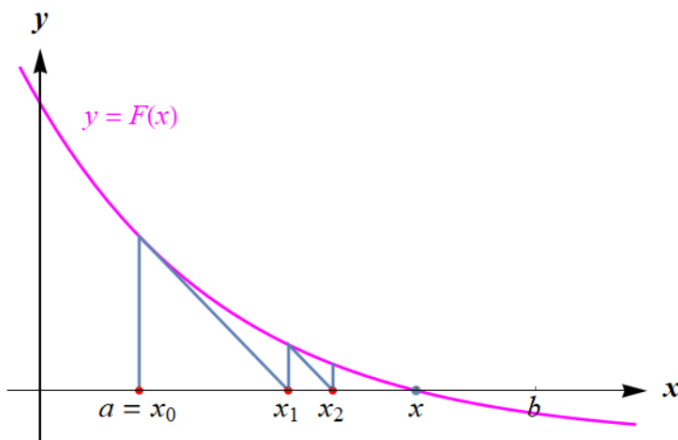
Понатаму, се повлекува тангентата t_2 на кривата $y = F(x)$ во точката $(x_1, F(x_1))$ и се наоѓа апсцисата на пресечната точка на t_2 со x -оската,

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)},$$

која го дава второто приближување x_2 . Постапката продолжува на истиот начин, со што за $(n + 1)$ -вото приближување се добива формулата (2.9).

Поради геометриската интерпретација, овој метод е познат како **метод на тангенти**.

Геометриската интерпретација на модифицираниот метод на Њутн - Рафсон, во кој итеративната низа е дадена со (2.14), е прикажан на сликата 2.17. Може да се забележи дека сите прави повлечени во точките $(x_n, F(x_n))$, $n = 1, 2, \dots$, имаат ист коефициент на правец со тангентата на кривата во точката $(x_0, F(x_0))$, односно се паралелни.



Слика 2.17

Забелешка 2.13. Методот на Њутн - Рафсон не се препорачува во случај кога за изводот на функцијата во близина на точното решение важи $F'(x) \approx 0$. Тоа значи дека тангентата на кривата повлечена во точката $(x, F(x))$ е речиси хоризонтална. Ова се случува кога коренот на равенката е повеќекратен. Тогаш, при користење на методот на Њутн

- Рафсон грешката е многу голема и пресметувањата може да траат долго, па дури и да не дадат резултат. За наоѓање повеќекратни корени со методот на Њутн види во поглавјето 2.6.

Во Mathematica постои готова наредба за решавање равенки која го користи методот на Њутн - Рафсон. Нејзината основна синтакса е

$$\mathbf{FindRoot}[F, \{x, x_0\}],$$

каде што F е функција од аргументот x , чија нула ја бараме, а x_0 е почетното приближување.

За наоѓање на приближното решение на равенката $F(x) = 0$ со примена на методот на Њутн - Рафсон, во пакетот Mathematica може да се искористи и модулот **NewtonRaphson**, даден во продолжение. Влезни податоци се: почетното приближување x_0 и бројот на итерации n .

```
NewtonRaphson[x0_, n_] :=
Module[{ },
  k = 0;
  p0 = N[x0];
  p1 = p0;
  e = p1 - p0;
  output = {{k, p0, e, f[p0]}};
  While[k < n,
    p0 = p1;
    p1 = p0 -  $\frac{f[p0]}{f'[p0]}$ ;
    k = k + 1;
    e = Abs[p1 - p0];
    output = Append[output, {k, p1, e, f[p0]}];
  ];
  Print[NumberForm[TableForm[output,
    TableHeadings -> {None, {"n", "x_n", "|x_n - x_{n-1}|", "F(x_n)"}}, 16]]];
```

Пример 2.7. Со метод на тангенти да се реши равенката

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x = 0,$$

во две итерации и да се оцени грешката. Заокружувањето на меѓуре­зултатите да се врши на 7 децимали.

Решение. Равенката може да се запише во поедноставен облик,

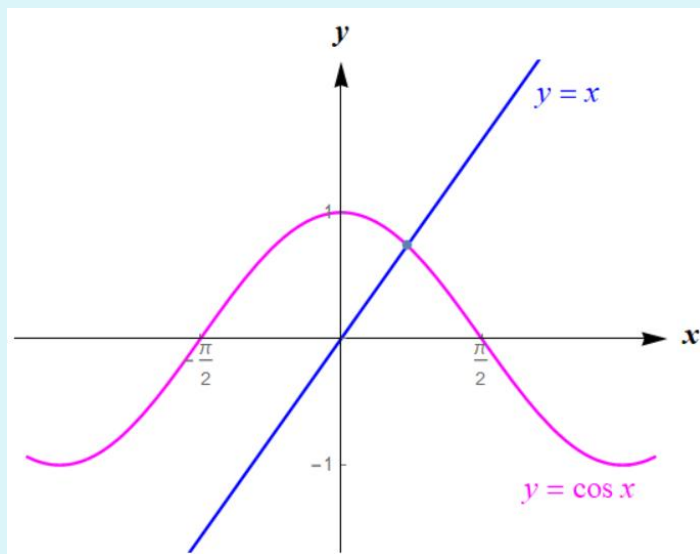
$$\cos x - x = 0,$$

па земаме $F(x) = \cos x - x$.

Решението на равенката го локализираме графички. Ги скицира­ме графичите на функциите $y = \cos x$ и $y = x$ (слика 2.18) и забележу­ваме дека тие се сечат само во една точка. Според тоа, заклучуваме дека равенката има едно реално решение $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

За да најдеме интервал со помала должина, што го содржи точното решение, го користиме методот на преполовување. Преполо­вувајќи го сегментот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ со точката $x_1 = \frac{\pi}{4}$, ги добиваме потсегментите: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Бидејќи $F(0) \cdot F\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, заклучуваме дека $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.



Слика 2.18

Понатаму го уточнуваме решението применувајќи го метод на тангенти. Проверуваме дали важат и условите за конвергенција 2) и 3) од теоремата 2.3 за функцијата $F(x) = \cos x - x$ на интервалот $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Од тоа што

$$F'(x) = -\sin x - 1 \text{ и } F''(x) = -\cos x,$$

заклучуваме дека $F(x)$ е диференцијабилна и има непрекинат втор извод на сегментот $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Покрај тоа,

$$F'(x) < 0, \quad F''(x) < 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

т.е. $F'(x)$ и $F''(x)$ имаат постојан знак и не се анулираат на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Бидејќи

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) F''\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

за почетно приближување избираме

$$x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Останатите приближувања ќе ги пресметаме по формулата:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Во табелата 2.3 се дадени првите три приближувања кон точното решение на равенката.

n	x_n
0	0,7853981
1	0,7395361
2	0,7390851

Табела 2.3

За да ја оцениме грешката на втората итерација, ја определуваме вредноста

$$m = \min_{x \in [a, b]} |F'(x)|.$$

Бидејќи

$$|F'(x)| = \sin x + 1 \geq 1, \quad \text{за } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

може да земеме $m = 1$. Од тоа што $F(x_2) \approx 0,56 \cdot 10^{-7}$, за грешката на втората итерација добиваме:

$$\varepsilon_2 = \frac{|F(x_2)|}{m} < 0,5 \cdot 10^{-6}.$$

Заклучуваме дека приближното решение има шест сигурни децимални цифри, т.е.

$$x^* = 0,739085.$$

На сликата 2.19 е прикажан излезот што се добива во Mathematica со примена на наредбата **FindRoot**. Вообичаено, во Mathematica резултатот се прикажува со 6 децимали добиени со отсекување.

```
FindRoot[Cos[x] - x == 0, {x,  $\frac{\pi}{4}$ }]
{x -> 0.739085}
```

Слика 2.19

Опцијата **WorkingPrecision** во наредбата **FindRoot** овозможува резултатот да се прикаже со точно зададена прецизност. На пример, на сликата 2.20 е прикажано приближното решение на равенката со 10 децимали.

```
FindRoot[Cos[x] - x == 0, {x,  $\frac{\pi}{4}$ }, WorkingPrecision -> 10]
{x -> 0.7390851332}
```

Слика 2.20

Со користење на модулот **NewtonRaphson**, се добива излезот претставен на сликата 2.21.

```
f[x_] := Sin[x +  $\frac{\pi}{2}$ ] - x;
NewtonRaphson[ $\frac{\pi}{4}$ , 5]
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $	$F(x_n)$
0	0.7853981633974483	0.	-0.07829138221090071
1	0.7395361335152383	0.04586202988221	-0.07829138221090071
2	0.7390851781060102	0.0004509554092280155	-0.000754874682502571
3	0.7390851332151611	$4.489084914904851 \times 10^{-8}$	$-7.512986655022758 \times 10^{-8}$
4	0.7390851332151607	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$	$-6.661338147750939 \times 10^{-16}$
5	0.7390851332151605	$1.110223024625157 \times 10^{-16}$	$-2.220446049250313 \times 10^{-16}$

Слика 2.21

2.5. Метод на тетиви (метод на секанти)

Нека равенката $F(x) = 0$ има единствено решение x во интервалот (a, b) . За да се избегне пресметувањето на вредноста на првиот извод за секоја итерација x_n кај Њутн - Рафсоновиот метод, во формулата за итеративната низа (2.9), наместо $F'(x_n)$, ја користиме познатата приближна релација

$$F'(x_n) \approx \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

со што ја добиваме следнава итеративна низа:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} F(x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

За почетните приближувања обично избираме $x_0 = a$ и $x_1 = b$.

Нагласуваме дека условите за конвергенција на итеративната низа (2.15) и формулите за оценка на грешката се исти како кај методот на Њутн - Рафсон дадени во теоремата 2.3, односно изразите (2.10) и (2.13).

Се покажува дека брзината на конвергенција на овој метод е 1,62. Значи, овој метод побргу конвергира од методот на прости итерации, но е малку поспор од методот на Њутн - Рафсон.

Геометриска интерпретација на методот

Идејата на овој метод е при решавање на равенката $F(x) = 0$, функцијата $F(x)$ локално да се апроксимира со линеарна функција $G(x)$. Нулата на функцијата $G(x)$, односно коренот на равенката $G(x) = 0$, се користи како нова апроксимација на коренот на равенката $F(x) = 0$. Графикот на линеарната функција $G(x)$ претставува тетива, или секанта на графикот на функцијата $F(x)$. Имајќи предвид дека секантата минува низ две точки од графикот на кривата $F(x)$, потребни

се две почетни приближувања x_0 и x_1 . Коренот на равенката $F(x) = 0$ може, но не мора да се наоѓа меѓу овие две точки.

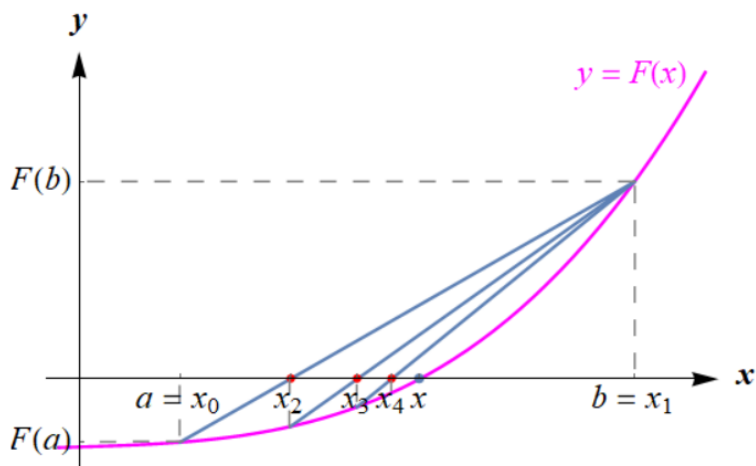
Равенката на правата низ точките $(x_0, F(x_0))$ и $(x_1, F(x_1))$, односно секантата на графикот на функцијата $F(x)$, е:

$$y - F(x_1) = \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1).$$

Услов секантата да ја сече x -оската е двете почетни итерации x_0 и x_1 да бидат од различна страна на точното решение x . Како што веќе нагласивме, најчесто избираме $x_0 = a$ и $x_1 = b$.

Новото приближување ќе биде апсцисата на пресечната точка на горната тетива со x -оската (види слика 2.22), т.е.

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F(x_1) - F(x_0)}(x_1 - x_0).$$



Слика 2.22

Потоа се повлекува тетива низ точките $(x_1, F(x_1))$ и $(x_2, F(x_2))$. Апсцисата на пресечната точка на оваа тетива и x -оската ќе го даде приближувањето x_3 . Постапката продолжува на ист начин, апсцисата на пресечната точка на тетивата низ точките $(x_2, F(x_2))$ и $(x_3, F(x_3))$ и x -оската ќе го даде приближувањето x_4 , итн.

Поради геометриската интерпретација, овој метод е познат и како **метод на тетиви** или **метод на секанти**.

Забелешка 2.14. Додека кај методот на Њутн - Рафсон во секој чекор е потребно да се пресметаат вредностите $F(x_n)$ и $F'(x_n)$, кај методот на секанти се пресметува само вредноста на функцијата $F(x)$, но во две точки, $F(x_n)$ и $F(x_{n+1})$. Бидејќи времето потребно за пресметување на вредноста на првиот извод на функцијата во една точка е подолго од времето потребно за пресметување на вредноста на функцијата во таа точка, од аспект на заштеда на компјутерско време, методот на секанти е поефикасен од методот на Њутн - Рафсон.

За наоѓање на приближното решение на равенката $F(x) = 0$ со примена на методот на секанти, во пакетот Mathematica може да се искористи модулот **Sekanti**, даден во продолжение. Влезни податоци се: почетните приближувања x_0 , x_1 и бројот на итерации n .

```

Sekanti[x0_, x1_, n_] :=
Module[ {},
  k = 1;
  p0 = N[x0];
  p1 = N[x1];
  e = Abs[p0 - p1];
  output = {{k, p1, e}};
  p2 = p1;
  p1 = p0;
  While[k < n,
    p0 = p1;
    p1 = p2;
    p2 = p1 -  $\frac{f[p_1] (p_1 - p_0)}{f[p_1] - f[p_0]}$ ;
    k = k + 1;
    e = Abs[p2 - p1];
    output = Append[output, {k, p2, e}];
  ];
  Print[NumberForm[TableForm[output,
    TableHeadings -> {None, {"n", "x_n", "|x_n - x_{n-1}|"}}, 16]]; ];

```

Пример 2.8. Со методот на тетиви да се најде реалниот корен на равенката $16x^4 - x - 1 = 0$ кој припаѓа во интервалот $(0,5; 0,6)$ со точност $0,5 \cdot 10^{-2}$.

Решение. Нека $F(x) = 16x^4 - x - 1$. Проверуваме дали се исполнети условите од теоремата 2.3 за конвергенција на итеративната низа на дадениот интервал.

1) $F(0,5) \cdot F(0,6) < 0$.

2) За првиот и вториот извод на функцијата $F(x)$ имаме:

$$F'(x) = 64x^3 - 1, F''(x) = 192x^2.$$

Значи $F(x)$ е диференцијабилна и има непрекинат втор извод на сегментот $[0,5; 0,6]$.

3) Првиот и вториот извод се со постојан знак и не се анулираат на разгледуваниот интервал, т.е.

$$F'(x) = 64x^3 - 1 > 0 \text{ за } x \in [0,5; 0,6];$$

$$F''(x) = 192x^2 > 0 \text{ за } x \in [0,5; 0,6].$$

Земаме $x_0 = 0,5$ и $x_1 = 0,6$, а останатите членови на итеративната низа ги наоѓаме по формулата (2.15). Така, за приближувањето x_2 се добива:

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{F(x_1) - F(x_0)} F(x_1) = 0,55136.$$

Бидејќи $F'(x) > 0$ за $x \in [0,5; 0,6]$ следува дека функцијата $F(x)$ е монотонно растечка на разгледуваниот сегмент $[0,5; 0,6]$, па најмалата вредност ја достигнува во точката $x = 0,5$. Според тоа,

$$|F'(x)| = F'(x) \geq F'(0,5) = 7 = m.$$

За грешката по втората итерација добиваме

$$\varepsilon_2 = \frac{|F(x_2)|}{m} \approx 0,0104 > 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Бидејќи не е постигната бараната точност, постапката ја продолжуваме и го пресметуваме третото приближување:

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{F(x_2) - F(x_1)} F(x_2) = 0,55783.$$

Грешката по третата итерација е

$$\varepsilon_3 = \frac{|F(x_3)|}{m} \approx 0,12 \cdot 10^{-2} < 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Бидејќи е постигната бараната точност, ја прекинуваме постапката, па бараното решение со две сигурни децимални цифри е $x^* = 0,55$.

Со примена на модулот **Sekanti**, за првите 5 приближувања се добиваат вредностите прикажани на сликата 2.23.

```
f[x_] = 16 x^4 - x - 1;
Sekanti[0.5, 0.6, 5]
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $
1	0.6	0.1
2	0.551355792933443	0.04864420706655704
3	0.5578343030977768	0.006478510164333873
4	0.5586929166234764	0.000858613525699603
5	0.5586744726401301	0.0000184439833462724

Слика 2.23

Пример 2.9. Нека е дадена функцијата $F(x) = e^{-x} - x$. Користејќи ги досега спомнатите методи, да се реши равенката $F(x) = 0$.

Решение. Графикот на функцијата $F(x) = e^{-x} - x$ е претставен на сликата 2.3. Како што видовме во примерот 2.1, решението на равенката се наоѓа во интервалот $[0,1]$.

Резултатите добиени со примена на претходно наведените модули во Mathematica се прикажани на сликите: 2.24–2.27.

```
F[x_] := e^-x - x;
Prepolovuvanje[0, 1, 10]
```

n	a_n	x_n	b_n	$F(x_n)$
0	0.	0.5	1.	0.1065306597126334
1	0.5	0.75	1.	-0.2776334472589853
2	0.5	0.625	0.75	-0.0897385714810097
3	0.5	0.5625	0.625	0.00728282473092301
4	0.5625	0.59375	0.625	-0.04149754983697962
5	0.5625	0.578125	0.59375	-0.01717583918552923
6	0.5625	0.5703125	0.578125	-0.004963760389385841
7	0.5625	0.56640625	0.5703125	0.001155202015024392
8	0.56640625	0.568359375	0.5703125	-0.001905359612816016
9	0.56640625	0.5673828125	0.568359375	-0.0003753491691448341
10	0.56640625	0.56689453125	0.5673828125	0.0003898587973693024

$x^* = 0.56689453125$

Слика 2.24

Забележуваме дека сите добиени итеративни низи конвергираат кон решението, но со различна брзина.

Методот на преполовување е очекувано поспор и во 10 итерации дава само две сигурни децимални цифри, за разлика од методот на лажна положба кој дава резултат со 9 сигурни децимали.

```
F[x_] := e-x - x;
RegulaFalsi[0, 1, 10]
```

n	a_n	x_n	b_n	$F(x_n)$
0	0.	0.6126998367802821	1.	-0.07081394787317096
1	0.	0.5721814120905075	0.6126998367802821	-0.007888272855299805
2	0.	0.567703214235785	0.5721814120905075	-0.000877391979772324
3	0.	0.5672055526330225	0.567703214235785	-0.0000975727261278703
4	0.	0.567150214240495	0.5672055526330225	-0.00001085062124872582
5	0.	0.5671440603751026	0.567150214240495	-1.206645814932905 × 10 ⁻⁶
6	0.	0.5671433760339214	0.5671440603751026	-1.34185290545652 × 10 ⁻⁷
7	0.	0.567143299931633	0.5671433760339214	-1.492210177644893 × 10 ⁻⁸
8	0.	0.5671432914686631	0.567143299931633	-1.659415382881946 × 10 ⁻⁹
9	0.	0.5671432905275368	0.5671432914686631	-1.845356090157679 × 10 ⁻¹⁰
10	0.	0.5671432904228787	0.5671432905275368	-2.052147340947386 × 10 ⁻¹¹

$x^* = 0.5671432904228787$

Слика 2.25

За да ја решиме равенката со методот на прости итерации, ја претставуваме во нејзиниот еквивалентен облик $x = e^{-x}$ и ги добиваме итерациите дадени на сликата 2.26. Оваа постапка исто така конвергира, но многу поспоро од претходно.

```
f[x_] := e-x;
ProstiIteracii[1, 10]
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $
0	1.	0
1	0.3678794411714423	0.6321205588285577
2	0.6922006275553464	0.3243211863839041
3	0.5004735005636368	0.1917271269917096
4	0.6062435350855973	0.1057700345219605
5	0.545395785975027	0.06084774911057034
6	0.5796123355033789	0.03421654952835185
7	0.5601154613610891	0.01949687414228973
8	0.571143115080177	0.01102765371908787
9	0.5648793473910495	0.006263767689127508
10	0.5684287250290607	0.00354937763801122

Слика 2.26

Може да забележиме дека секоја следна итерација е со апсолутна грешка околу 50% помала отколку во претходниот чекор, што е очеку-

вано, имајќи предвид дека методот има линеарна конвергенција, при што две последователни апсолутни грешки конвергираат кон вредноста α , еднаква на изводот на функцијата во нејзината нула.

Доколку го примениме методот на Њутн - Рафсон, со различно почетно приближување, ги добиваме резултатите прикажани на сликата 2.27. Можеме да забележиме дека постапката побрзо конвергира, ако за почетно приближување се избере $x_0 = 1$, отколку ако се избере $x_0 = 0$.

```
F[x_] := e-x - x;
NewtonRaphson[1, 5]
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $	$F(x_n)$
0	1.	0.	-0.6321205588285577
1	0.5378828427399903	0.4621171572600097	-0.6321205588285577
2	0.5669869914054133	0.0291041486654231	0.04610048629168972
3	0.567143285989123	0.000156294583709693	0.0002449498638371628
4	0.5671432904097839	$4.420660837389789 \times 10^{-9}$	$6.927808993140161 \times 10^{-9}$
5	0.5671432904097839	0.	0.

```
F[x_] := e-x - x;
NewtonRaphson[0, 5]
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $	$F(x_n)$
0	0.	0.	1.
1	0.5	0.5	1.
2	0.5663110031972182	0.06631100319721817	0.1065306597126334
3	0.5671431650348621	0.000832161837644008	0.001304509806020038
4	0.5671432904097811	$1.253749188911968 \times 10^{-7}$	$1.964804717813351 \times 10^{-7}$
5	0.567143290409784	$2.886579864025407 \times 10^{-15}$	$4.440892098500626 \times 10^{-15}$

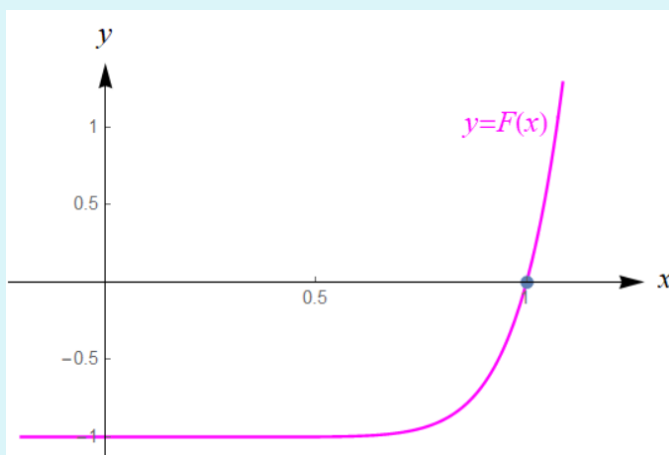
Слика 2.27

Поради неговата квадратна конвергенција, најдобар резултат дава методот на Њутн. ▲

Пример 2.10. Нека е дадена функцијата $F(x) = x^{10} - 1$. Со користење на методите на бисекција и лажна положба, да се најде позитивниот корен на равенката $F(x) = 0$.

Решение. Графикот на функцијата $y = F(x)$ е претставен на сликата 2.28. Јасно е дека $x = 1$ е точната вредност на бараниот корен.

Доколку за оваа функција ги примениме модулите **Prepolovuvanje** и **Regula Falsi**, се добиваат итеративните низи прикажани на сликите 2.29 и 2.30, соодветно.



Слика 2.28

Може да се забележи дека методот на преполовување, во овој случај, е побрз од методот на лажна положба.

Тоа може да го предвидиме набљудувајќи го графикот на функцијата. Имено, функцијата многу брзо расте десно од коренот $x = 1$. Како последица на тоа, десната страна на новодобиениот подинтервал, што се добива со примена на методот на лажна положба, во секоја итерација останува иста.

Бидејќи функцијата е речиси вертикална десно од коренот, за вредности на аргументот блиски, но поголеми од 1, вредноста на функцијата е далеку од нула.

```
F[x_] := x10 - 1;
Prepolovuvanje[0, 1.25, 10]
```

n	a _n	x _n	b _n	F[x _n]
0	0.	0.625	1.25	-0.990905052982271
1	0.625	0.9375	1.25	-0.475539524951273
2	0.9375	1.09375	1.25	1.45008222911347
3	0.9375	1.015625	1.09375	0.1677068465489142
4	0.9375	0.9765625	1.015625	-0.2111390947789882
5	0.9765625	0.99609375	1.015625	-0.03838295838357364
6	0.99609375	1.005859375	1.015625	0.06016309155074873
7	0.99609375	1.0009765625	1.005859375	0.00980865229416517
8	0.99609375	0.99853515625	1.0009765625	-0.01455225419589767
9	0.99853515625	0.999755859375	1.0009765625	-0.002438725786469087
10	0.999755859375	1.0003662109375	1.0009765625	0.003668150242587709

$x^* = 1.0003662109375$

Слика 2.29

```
F[x_] := x10 - 1;
RegulaFalsi[0, 1.25, 10]
```

n	a _n	x _n	b _n	F[x _n]
0	0.	0.134217728	1.25	-0.999999998102862
1	0.134217728	0.2540239369895306	1.25	-0.999998881215537
2	0.2540239369895306	0.3609659456468636	1.25	-0.999962445471389
3	0.3609659456468636	0.4564220503455357	1.25	-0.999607656758491
4	0.4564220503455357	0.5416019907985835	1.25	-0.997828286553188
5	0.5416019907985835	0.617518161968472	1.25	-0.991936987138692
6	0.617518161968472	0.6849411772148567	1.25	-0.977273489463218
7	0.6849411772148567	0.7443800720998722	1.25	-0.947766710105377
8	0.7443800720998722	0.7961250376522077	1.25	-0.897714793959063
9	0.7961250376522077	0.840360505955664	1.25	-0.824346689721111
10	0.840360505955664	0.877316159469136	1.25	-0.7298771719429404

x* = 0.877316159469136

Слика 2.30

Според тоа, членовите на итеративната низа се приближуваат кон точното решение само од левата страна, што доведува до поспора конвергенција отколку кај итеративната низа добиена со методот на преполовување.

Значи, постојат исклучоци кога методот на лажна положба побавно конвергира од методот на преполовување. ▲

Како што видовме во сите претходни примери, локализацијата на решението на равенката $F(x) = 0$ е од огромно значење за добар почеток на итеративната постапка. Графички, локализацијата треба да се прави внимателно и постепено. Ако се избере мал почетен интервал за скицирање на графикот на функцијата $y = F(x)$, без никаква претходна анализа, може да се случи во него функцијата да нема нула. Тогаш, постапката за избирање на интервал што го содржи решението на равенката продолжува, сè додека не се добие бараниот интервал, што може да трае премногу долго. Од друга страна, доколку функцијата е скицирана на интервал со поголема должина, можно е во него да постојат повеќе блиски една до друга нули, кои нема да успееме добро да ги локализираме. Проблемот се продлабочува во случај на повеќекратни нули.

Затоа, паралелно со графичката локализација на нулите на функцијата со користење на пакетот Mathematica, се препорачува и аналитичка локализација на истите, со утврдување дали е исполнет условот

за единственост на нулата во одреден интервал. Исто така, треба да се има предвид дека секој компјутерски пакет, па и Mathematica, цртањето на графикот на функцијата $y = F(x)$ го прави со ограничена прецизност. Најчесто, скицирањето на графикот се врши на следниов начин: се нанесуваат точки од графикот на функцијата земени во однапред зададени јазли од доменот, а потоа помеѓу нив приближно се скицира кривата, користејќи разни компјутерски техники, како што се фитовање криви и слично. Така, може да се случи нулите на функцијата $y = F(x)$, да бидат изоставени во компјутерски генерираниот график, што ќе доведе до погрешна почетна информација.

2.6. Метод на Њутн за повеќекратни корени

Нека равенката $F(x) = 0$ има корен c со кратност m , т.е. важи

$$F(c) = F'(c) = \dots = F^{(m-1)}(c) = 0, \text{ а } F^{(m)}(c) \neq 0.$$

Користејќи го Тејлоровиот развој на функцијата $F(x)$ во околина на коренот c , добиваме дека

$$F(x) = (x - c)^m H(x), \quad (2.16)$$

каде што

$$H(x) = \frac{F^{(m)}(c)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x - c) + \dots$$

Диференцирајќи ги двете страни од равенката (2.16), добиваме:

$$\begin{aligned} F'(x) &= m(x - c)^{m-1}H(x) + (x - c)^m H'(x) \\ &= (x - c)^{m-1} [mH(x) + (x - c)H'(x)]. \end{aligned}$$

Дефинираме нова функција

$$G(x) = \frac{F(x)}{F'(x)}. \quad (2.17)$$

Тогаш,

$$G(x) = \frac{(x - c)^m H(x)}{(x - c)^{m-1} [mH(x) + (x - c)H'(x)]}$$

$$= \frac{(x - c)H(x)}{mH(x) + (x - c)H'(x)} = (x - c)\varphi(x),$$

каде што

$$\varphi(x) = \frac{H(x)}{mH(x) + (x - c)H'(x)}.$$

Бидејќи

$$H(c) = \frac{F^{(m)}(c)}{m!} \neq 0, \text{ важи } \lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = \frac{1}{m},$$

а

$$\lim_{x \rightarrow c} G'(x) = \lim_{x \rightarrow c} [(x - c)\varphi(x)]' = \lim_{x \rightarrow c} [\varphi(x) + (x - c)\varphi'(x)] = \frac{1}{m}. \quad (2.18)$$

Оттука заклучуваме дека функцијата $G(x)$ има прост корен во точката c , па го применуваме методот на Њутн - Рафсон за решавање на равенката $G(x) = 0$, при што го користиме изразот (2.18):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{G(x_n)}{G'(x_n)} = x_n - mG(x_n) = x_n - m \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}.$$

Според тоа, низата приближувања $\{x_n\}$ за определување на приближната вредност на m -кратниот корен c е

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad (2.19)$$

Нека $F(x) = 0$, каде што $F(x)$ има непрекинат прв и втор извод на сегментот $[a, b]$ и $c \in [a, b]$ е повеќекратен корен на равенката со непозната кратност.

Ако c е корен на равенката $F(x) = 0$ со кратност m , тогаш c е корен со кратност $m - 1$ за равенката $F'(x) = 0$. Тогаш, за функцијата $G(x)$ дефинирана со (2.17), важи:

$$G(c) = 0, \quad G'(c) \neq 0.$$

Применувајќи го методот на Њутн - Рафсон за решавање на равенката $G(x) = 0$, ја добиваме низата приближувања:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{G(x_n)}{G'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}}{\frac{[F'(x_n)]^2 - F(x_n)F''(x_n)}{[F'(x_n)]^2}},$$

односно

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)F'(x_n)}{[F'(x_n)]^2 - F(x_n)F''(x_n)}. \quad (2.20)$$

Според тоа, низата приближувања $\{x_n\}$ за определување на приближната вредност на повеќекратниот корен s чија кратност e е непозната, е дадена со изразот (2.20).

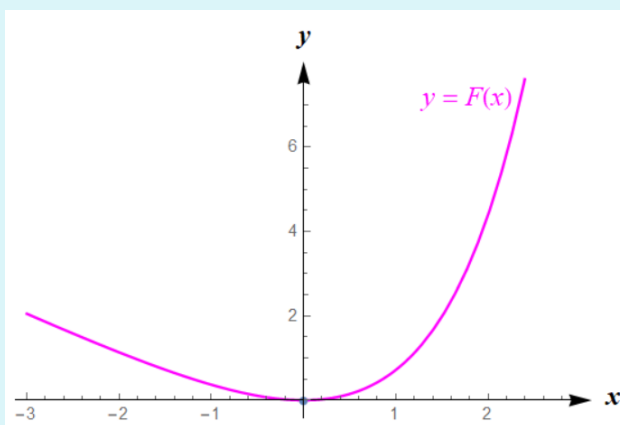
За наоѓање на приближната вредност на повеќекратниот корен на равенката $F(x) = 0$, може да се искористи модулот **Newton2**, даден во продолжение, базиран на методот на Њутн за повеќекратни корени. Влезни податоци се: почетното приближување и бројот на итерации.

```
Newton2[x0_, n_] :=
Module[{},
k = 0;
p0 = N[x0];
p1 = p0;
e = p1 - p0;
output = {{k, p0, e, f[p0]}};
While[k < n,
p0 = p1;
p1 = p0 -  $\frac{f[p0] f'[p0]}{(f'[p0])^2 - f[p0] f''[p0]}$ ;
k = k + 1;
e = Abs[p1 - p0];
output = Append[output, {k, p1, e, f[p0]}];
Print[NumberForm[TableForm[output,
TableHeadings -> {None, {"n", "xn", "|xn-xn-1|", "F(xn)"}}, 16]]];
```

Пример 2.11. Нека е дадена функцијата $F(x) = e^x - x - 1$.

- а) Докажи дека оваа функција има двократна нула $x = 0$.
- б) Користејќи го Њутновиот метод, да се најдат 10 итерации на таа нула, со почетно приближување $x_0 = 1$.
- в) Покажи дека, со релацијата (2.20), се добива повеќекратниот корен со побрза конвергенција отколку со основниот Њутнов метод.

Решение. Нека $F(x) = e^x - x - 1$. Графикот на функцијата е претставен на сликата 2.31.



Слика 2.31

а) $F'(x) = e^x - 1$ и $F''(x) = e^x$. Притоа важи $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$, но $F''(0) \neq 0$. Тоа покажува дека $x = 0$ е двократна нула за функцијата $F(x)$.

```
f[x_] := e^x - x - 1;
NewtonRaphson[1, 10]
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $	$f(x_n)$
0	1.	0.	0.7182818284590451
1	0.5819767068693265	0.4180232931306735	0.7182818284590451
2	0.3190550409108184	0.262921665958508	0.2075956899725071
3	0.1679961728857705	0.151058868025048	0.05677200868516241
4	0.0863488737477814	0.0816472991379891	0.01493591053716825
5	0.04379570367371408	0.04255317007406728	0.003837725704912254
6	0.02205768536576824	0.02173801830794585	0.00097318696431592
7	0.0110693874777393	0.01098829788802894	0.000245069312124313
8	0.005544904662931228	0.005524482814808072	0.00006149235434604883
9	0.002775014494137258	0.002769890168793971	0.00001540143720224485
10	0.001388148972389267	0.001386865521747991	$3.853916788587597 \times 10^{-6}$

Слика 2.32

б) На сликата 2.32 се прикажани 10 итерации добиени со примена на модулот **NewtonRaphson**.

Заклучуваме дека постапката конвергира кон двократната нула на функцијата. Но, дури и по десетте итерации, нулата се добива со мала точност.

в) Со примена на модулот **Newton2**, за првите 5 приближувања се добива нулата со многу поголема точност, како што може да се види на сликата 2.33.

Забележуваме дека двете добиени низи конвергираат кон нулата на функцијата, но брзината на вториот е многу поголема.

```
f[x_] := e^x - x - 1;
Newton2[1, 5]
```

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $	$F(x_n)$
0	1.	0.	0.7182818284590451
1	-0.2342106135535142	1.234210613553514	0.7182818284590451
2	-0.00845827991076112	0.2257523336427531	0.02540577547534584
3	-0.00001189018370375584	0.00844638972705736	0.00003567060801423771
4	-4.176665900104909 × 10 ⁻¹¹	0.00001189014193709684	7.068789997788372 × 10 ⁻¹¹
5	-4.176665900104909 × 10 ⁻¹¹	0.	0.

Слика 2.33

При решавање на равенката $F(x) = 0$ со готовите компјутерски модули во Mathematica, како и во кој било друг компјутерски систем, се бара итеративна низа чијшто n -ти член ќе даде задоволителна вредност за нулата на функцијата $F(x)$. Во некои случаи тоа ќе биде онаа итерација која се разликува од вистинското решение за помалку од однапред зададената точност. Но најчесто точната вредност на бараното решение е непозната, па овој критериум за завршување на постапката не може да се примени.

Посебно треба да се внимава во случај кога графикот на функцијата $y = F(x)$ е речиси вертикален, па и покрај тоа што n -тата итерација е блиску до нулата на функцијата, вредноста $F(x_n) \gg 0$.

Во одредени случаи ќе се задоволиме со решението добиено во n -тата итерација, за кое важи условот $F(x_n) \approx 0$. Но, треба да се внима-

ва и во овој случај, особено ако графикот на функцијата е речиси паралелен со x -оската. Во ваков случај, иако $F(x_n) \approx 0$, можно е добиената итерација да биде многу далеку од точното решение.

3. Решавање системи линеарни равенки

3.1. Основни поими

Во многу области од техничките науки се среќаваат проблеми чии математички модели се системи од линеарни равенки со две или повеќе непознати. Систем линеарни равенки може да има едно, бесконечно многу решенија или да нема решение. Во случај кога има барем едно решение, велиме дека системот е согласен, а во спротивно системот е противречен.

Постојат различни методи за решавање на овие системи. За да се применат некои од методите, потребно е системот да се запише во матричен облик.

Нека е даден системот од m линеарни равенки со n непознати x_1, x_2, \dots, x_n , во општ облик:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (3.1)$$

каде што $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Матрицата составена од коефициентите пред непознатите

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

се нарекува **матрица на системот**, матриците:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]^T \text{ и } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

се нарекуваат **матрица - колона (вектор) од слободните членови** и **матрица – колона (вектор) од непознатите**, соодветно, а

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

се нарекува **проширена матрица на системот**.

Имајќи ги предвид сите погоре наведени ознаки, системот (3.1) може да го запишеме во следниов еквивалентен матричен облик:

$$A \cdot x = b. \tag{3.2}$$

Покрај најпознатите класични методи за решавање линеарни системи (методот на замена, методот на спротивни коефициенти, Крамеровото правило, Гаусовиот метод), постојат и уште многу други директни методи. На пример, таков е матричниот метод, објаснет во поглавјето 3.2.2. Исто така, матрицата на системот **A** може да се декомпонира, односно да се запише како производ на други матрици. Најчесто користени декомпозиции се: **LU** декомпозиција (на Дулитл (Doolittle) или Чолески (Cholesky)), **QR** декомпозиција, **LDU** декомпозиција, како и декомпозиција со сингуларни вредности. Од индиректните методи, посебно значајни се следниве итеративни методи: Јакобиевиот (Jacobi) и Гаус - Зајделовиот (Gaus - Seidel) метод. Овие методи ќе бидат подетално изложени во следните поглавја.

3.2. Директни методи

Разгледуваме систем од n линеарни равенки со n непознати. Ако за квадратната матрица на системот важи

$$D = \det A \neq 0,$$

тогаш системот има единствено решение. Во ваквите случаи може да се применат два директни методи: Крамеровото правило и матричниот метод.

3.2.1. Крамерово правило

Решението на системот се наоѓа според формулите:

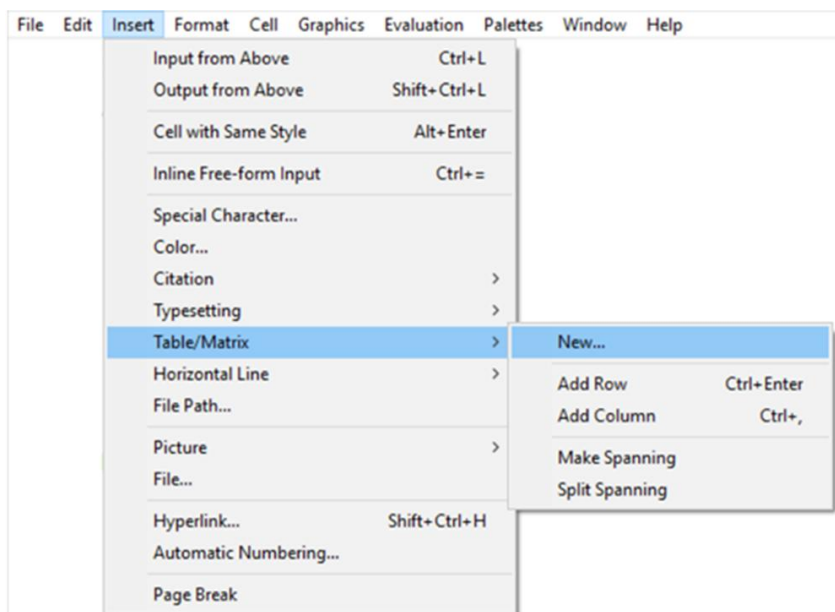
$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}, i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

каде што $D = \det \mathbf{A} \neq 0$ е детерминантата на системот, а D_{x_i} се така наречени **детерминанти по непознатите** $x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Притоа, D_{x_i} се добива кога i -тата колона во детерминантата D ќе се замени со колоната од слободните членови.

Во пакетот Mathematica постојат вградени наредби кои се користат при решавање системи линеарни равенки. Пред сè, треба да се има предвид дека елементите на матрицата се внесуваат како листи, на пример:

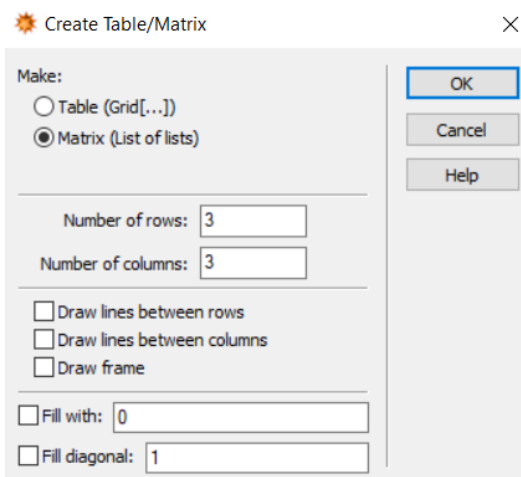
$$\mathbf{A} = \{\{4, -2, 1\}, \{-2, 4, -2\}, \{1, -2, 4\}\};$$

или преку паѓачкото мени **Insert**, со избор на **Table/Matrix** → **New** (слика 3.1).



Слика 3.1

Се внесува бројот на редици и колони на матрицата (слика 3.2), а потоа директно може да се внесат нејзините елементи.



Слика 3.2

Наредбата `MatrixForm[list]` ја трансформира конкретната матрица од листа во матричен облик:

```
MatrixForm[{{4, -2, 1}, {-2, 4, -2}, {1, -2, 4}}]
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

или

```
A = {{4, -2, 1}, {-2, 4, -2}, {1, -2, 4}};
```

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Наредбата `Det[m]` ја пресметува вредноста на детерминантата на квадратната матрица m , на пример,

```
Det[A]
```

```
36
```

Со користење на оваа наредба, значително се олеснува решавањето на системот равенки со примена на Крамеровото правило.

Но при решавање системи во кои n има голема вредност, пресметувањето поголем број детерминанти од повисок ред значително го зголемува компјутерското време потребно за решавање на системот. Затоа, Крамеровото правило не се препорачува за решавање системи линеарни равенки од повисок ред.

Пример 3.1. Реши го системот

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 11 \\ -2x + 4y - 2z = -16 \\ x - 2y + 4z = 17 \end{cases}$$

со примена на Крамеровото правило.

Решение. Детерминантата на системот и детерминантите по непознатите x , y и z , се:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 36, \quad D_x = \begin{vmatrix} 11 & -2 & 1 \\ -16 & 4 & -2 \\ 17 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 36,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 11 & 1 \\ -2 & -16 & -2 \\ 1 & 17 & 4 \end{vmatrix} = -72, \quad D_z = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 11 \\ -2 & 4 & -16 \\ 1 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 108.$$

За непознатите добиваме:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{36}{36} = 1,$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-72}{36} = -2,$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{108}{36} = 3.$$

Решението добиено во Mathematica е прикажано на сликата 3.3.


```

A = {{4, -2, 1}, {-2, 4, -2}, {1, -2, 4}};
b = {11, -16, 17};
DA = Det[A];
Dx = Det[{b, {-2, 4, -2}, {1, -2, 4}}];
Dy = Det[{{4, -2, 1}, b, {1, -2, 4}}];
Dz = Det[{{4, -2, 1}, {-2, 4, -2}, b}];
x = Dx / DA;
y = Dy / DA;
z = Dz / DA;
Print["x=", x, ", y=", y, ", z=", z]
x=1, y=-2, z=3

```

Слика 3.3

3.2.2. Матричен метод

Условот $D = \det \mathbf{A} \neq 0$ значи дека матрицата \mathbf{A} е несингуларна и обезбедува постоење инверзна матрица на матрицата \mathbf{A} , која ќе ја означиме со \mathbf{A}^{-1} . Единственото решение на системот (3.2) се наоѓа според формулата

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad (3.3)$$

што се добива кога равенството (3.2) ќе го помножиме од лево со \mathbf{A}^{-1} . Инверзната матрица \mathbf{A}^{-1} може да се добие на различни начини, на пример, со помош на минори, или пак со примена на теоремата на Хамилтон - Кели.

Да забележиме дека овој метод е непрактичен во случај кога се работи за големи системи заради натрупувањето на грешките при заокружување, што е резултат на изведувањето голем број операции.

Во Mathematica, наредбите за наоѓање инверзна матрица на дадена матрица \mathbf{A} и нејзиниот матричен облик се:

Inverse[A]

Inverse[A] // MatrixForm

соодветно. За определување на транспонираната матрица на матрицата A и единична матрица од ред n се користат наредбите:

Transpose [A]

односно

IdentityMatrix [n]

а производ на две матрици A и B се пресметува со

A.B

Притоа, ако сакаме елементите на матрицата да бидат претставени приближно како децимални броеви, тогаш доволно е барем еден од елементите на матрицата да го внесеме со децимална точка.

Пример 3.2. Решете го системот од примерот 3.1. со примена на матричниот метод.

Решение. Во примерот 3.1. видовме дека матрицата на системот е не-сингуларна, бидејќи $D = \det A = 36 \neq 0$. Ова значи дека системот има единствено решение, кое може да се добие со формулата (3.3). Имајќи предвид дека

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -16 \\ 17 \end{bmatrix},$$

добиваме

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ -16 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Решението добиено во Mathematica е прикажано на сликата 3.4.

```
A = {{4, -2, 1}, {-2, 4, -2}, {1, -2, 4}};
b = {11, -16, 17};
Ainv = Inverse[A];
Ainv.b
{1, -2, 3}
```

Слика 3.4



Гореспомнатите директни методи се обработуваат во елементарните курсеви од линеарна алгебра.

3.2.3. Сведување на системот на еквивалентен систем

Некои од директните методи за решавање системи линеарни равенки се базираат на трансформација на почетниот систем $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, каде што \mathbf{A} е квадратна матрица од ред n , а \mathbf{x} и \mathbf{b} се матрици од ред $n \times 1$, на еквивалентен систем од кој може поедноставно да се определи решението на системот. За два система велíme дека се еквивалентни ако имаат исто решение.

Најчесто, заведување на почетниот систем на еквивалентен систем се применуваат елементарни трансформации.

Следниве трансформации се нарекуваат **елементарни трансформации** на даден систем, односно матрица:

- 1) Промена на местата на две равенки R_i и R_j на системот (односно, две редици на матрицата на системот). Ја користиме ознаката $R_i \leftrightarrow R_j$.
- 2) Множење на некоја равенка R_i на системот (односно, редица на матрицата на системот) со број $k \neq 0$. Ја користиме ознаката kR_i .
- 3) Додавање на една равенка R_j (односно, редица на матрицата на системот) претходно помножена со број $k \neq 0$, на друга равенка R_i (односно, редица на матрицата). Ја користиме ознаката $R_i + kR_j$.

Најчесто, наместо системот, ја трансформираме проширената матрица на системот. За матрицата \mathbf{B} добиена од матрицата \mathbf{A} со примена на елементарни трансформации, велíme дека е еквивалентна на матрицата \mathbf{A} и пишуваме $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. Таа има ист ист ранг со матрицата \mathbf{A} .

Покрај горните елементарни трансформации по редици, дозволена е и следнава елементарна трансформација по колони: промена на местата на две колони од матрицата на системот (овде не смее да учествува колоната од слободни членови). Ја користиме ознаката $K_i \leftrightarrow K_j$,

$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Притоа треба да се води сметка соодветно да се пре-
нумерираат непознатите.

Нека почетниот систем $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, со елементарни трансформации
се сведува на еквивалентниот систем линеарни равенки

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

каде што $\mathbf{U} = [u_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, е горнотриаголна квадратна матри-
ца од ред n . Еквивалентниот систем се решава со постапката **решава-
ње наназад**:

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \right), \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Слично, ако почетниот систем се сведе на еквивалентниот систем
линеарни равенки

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

каде што $\mathbf{L} = [l_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, е долнотриаголна квадратна матри-
ца од ред n , тогаш еквивалентниот систем се решава со постапката **ре-
шавање нанапред**:

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \quad x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} x_k \right), \quad i = 2, \dots, n.$$

Забелешка 3.1. Овие методи се применливи и за систем од m линеарни
равенки со n непознати, $m \leq n$. Ако системот е согласен и $m > n$, то-
гаш равенките од системот се линеарно зависни помеѓу себе. Во тој
случај, зависните равенки или се отстрануваат пред отпочнување со
елементарните трансформации, или пак со самото трансформирање,
зависните равенки се елиминираат и остануваат само линеарно независ-
ните равенки. Ако n е бројот на непознатите, тогаш бројот на линеарно
независни равенки е најмногу n . Со други зборови, почетниот систем ќе
се сведе на систем во кој $m \leq n$.

Во групата методи за решавање на системот $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ со сведува-
ње на еквивалентен систем, најпознати се: Гаусовиот метод на елими-
нација и неговите модификации, како и методот на декомпозиција на
матрицата на системот.

Гаусовиот метод е познат и како **метод на исклучување** или **метод на елиминација**.

Основен Гаусов метод

Идејата на основниот Гаусов метод е да се трансформира системот $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ во еквивалентен систем

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{d},$$

каде што \mathbf{U} е горнотриаголна матрица.

Ги воведуваме ознаките $a_{11} = a_{11}^{(1)} \neq 0$ и ставаме:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}, \quad b_i^{(1)} = b_i, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Променливата x_1 ја елиминираме од останатите равенки, така што ја множиме првата равенка со множител од облик:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad i = \overline{2, n}$$

и ја одземаме од i -тата равенка, односно ги применуваме елементарните трансформации $R_i - m_{i1}R_1$, $i = \overline{2, n}$, добивајќи:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, \quad i, j = \overline{2, n}.$$

На тој начин, системот го трансформираме во еквивалентен систем

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}.$$

Ја применуваме истата постапка, на горниот систем од ред $n - 1$, односно од втората до n -тата равенка. Претпоставуваме дека $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Втората равенка ја множиме со

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

и ја одземаме од i -тата равенка, односно ги применуваме елементарните трансформации $R_i - m_{i2}R_2$, $i = \overline{3, n}$, добивајќи:

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)}, \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)}, \quad i, j = \overline{3, n}.$$

Понатаму, множителите m_{ij} ќе ги нарекуваме **мултипликатори**.

На тој начин, системот се трансформира во еквивалентен систем

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \vdots \\ a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)} \end{array} \right.$$

Со повторувања на горната постапка се добива системот:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

Последниов систем е горнотриаголен и неговото решение се добива со примена на постапката решавање наназад. Ова решение е истовремено решение на почетниот систем.

Пример 3.3. Со примена на основниот Гаусов метод на елиминација, да се реши системот линеарни равенки, заокружувајќи ги меѓурезултатите на четири децимали:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Решение. Проширената матрица на системот е:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right]$$

Гледаме дека $a_{11} = a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$. Ставаме:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}, \quad b_i^{(1)} = b_i, \quad i, j = \overline{1,4}.$$

Во првиот чекор ја елиминираме непознатата x_1 од втората, третата и четвртата равенка. Ги определуваме мултипликаторите:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{2} = 0,5; \quad m_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{4}{2} = 2; \quad m_{41} = \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Потоа ја множиме првата равенка со m_{i1} и ја одземаме од i -тата равенка, односно ги применуваме елементарните трансформации $R_i - m_{i1}R_1, i = 2,3,4$. На тој начин, го добиваме еквивалентниот систем претставен преку проширената матрица

$$[\mathbf{A}^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3,5 & 2 & -2 & 1,5 \\ 0 & -3 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -8,5 & -4 & 1 & 3,5 \end{array} \right]$$

Во следниот чекор, ја елиминираме непознатата x_2 од третата и четвртата равенка. Новите мултипликатори се:

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-3,0}{-3,5} = \frac{6}{7}, \quad m_{42} = \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{-8,5}{-3,5} = \frac{17}{7}.$$

Ја множиме втората равенка со мултипликаторот m_{i2} и ја одземаме од i -тата равенка, односно ги применуваме елементарните трансформации

$R_i - m_{i2}R_2, i = 3,4$, со што го добиваме еквивалентниот систем претставен преку проширената матрица

$$[\mathbf{A}^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3,5 & 2 & -2 & 1,5 \\ 0 & 0 & -10,7143 & 6,7143 & -1,2857 \\ 0 & 0 & -8,8571 & 5,8571 & -0,1429 \end{array} \right].$$

Во последниот чекор, мултипликаторот е

$$m_{43} = \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{-8,8571}{-10,7143} = \frac{8,8571}{10,7143}.$$

Ја елиминираме непознатата x_3 од четвртата равенка со елементарната трансформација $R_4 - m_{43}R_3$, со што добиваме:

$$[\mathbf{A}^{(4)}|\mathbf{b}^{(4)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3,5 & 2 & -2 & 1,5 \\ 0 & 0 & -10,7143 & 6,7143 & -1,2857 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3067 & 0,9199 \end{array} \right].$$

Трансформацијата на почетниот систем во еквивалентен горнотриаголен систем може да ја претставиме на следниов начин, означувајќи ги само елементарните трансформации кои ги применуваме на проширената матрица на системот.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - \frac{3}{2}R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3,5 & 2 & -2 & 1,5 \\ 0 & -3 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -8,5 & -4 & 1 & 3,5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 - \frac{6}{7}R_2 \\ R_4 - \frac{17}{7}R_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3,5 & 2 & -2 & 1,5 \\ 0 & 0 & -10,7143 & 6,7143 & -1,2857 \\ 0 & 0 & -8,8571 & 5,8571 & -0,1429 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_4 - \frac{-8,8571}{-10,7143}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3,5 & 2 & -2 & 1,5 \\ 0 & 0 & -10,7143 & 6,7143 & -1,2857 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3067 & 0,9199 \end{array} \right].$$

Решението на еквивалентниот систем го добиваме со решавање наназад:

$$x_4 = \frac{0,9199}{0,3067} = 2,9993;$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{-10,7143} (-1,2857 - 6,7143x_4) = \\ &= \frac{1}{-10,7143} (-1,2857 - 6,7143 \cdot 2,9993) = 1,9996; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{-3,5} (1,5 - 2x_3 + 2x_4) = \\ &= \frac{1}{-3,5} (1,5 - 2 \cdot 1,9996 + 2 \cdot 2,9993) = -0,9998; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - 3 \cdot (-0,9998) - 4 \cdot 1,9996 + 2 \cdot 2,9993) = 0,9998. \end{aligned}$$

Ако направиме проверка ќе видиме дека ова решение е различно од точното решение на дадениот систем,

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 3. \quad \blacktriangle$$

Последниот пример нè наведува на заклучок дека поради тоа што во Гаусовиот метод се извршуваат голем број аритметички операции, а компјутерите и луѓето работат со конечна прецизност, може да се очекува во секоја пресметка да има грешка, која може да се натрупува и понекогаш да доведе до сериозни отстапувања од точното решение. Поради тоа, со Гаусовиот метод често пати се добива приближно, а не точното решение на системот.

Пример 3.4. Со помош на основниот Гаусов метод, да се реши системот

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases} .$$

Решение. Условот $a_{11} = a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0$ е исполнет, па ја елиминираме променливата x_1 од втората и третата равенка:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3+3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \end{array} \right].$$

Забележуваме дека, во трансформираната матрица, елементот $a_{22}^{(2)} = 0$, па при определување на вредноста на мултипликаторот $m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ ќе добиеме делење со 0.

За да го сведеме овој систем на горнотриаголен, ќе направиме промена на местата на втората и третата равенка, односно ќе ја примениме елементарната трансформација $R_2 \leftrightarrow R_3$:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -7 \end{array} \right].$$

Со решавање наназад го добиваме решението на системот:

$$x_3 = \frac{-7}{-5} = 1,4;$$

$$x_2 = \frac{1}{7}(7 - 14 \cdot 1,4) = -1,8;$$

$$x_1 = 3 - 2 \cdot (-1,8) - 3 \cdot 1,4 = 2,4. \quad \blacktriangle$$

Применувајќи го основниот Гаусов метод, може да се случи елементот на главната дијагонала на трансформираната матрица да биде еднаков на нула. Во примерот 3.4 видовме дека, за да може да се продолжи со примената на основниот Гаусов метод, доволно е две равенки да си ги заменат местата во системот. Но, и покрај тоа, ако во некој од мултипликаторите $m_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}$, дијагоналниот елемент што се јавува во именителот е многу помал од елементот во броителот, тоа може да доведе до големи грешки во пресметките. Ваквите ситуации може да се

избегнат со примена на модификациите на Гаусовиот метод, кои во основа се сведуваат на **делумен** или **целосен избор на водечки елемент** (**главен елемент** или **пивот**).

Гаусов метод со избор на водечки елемент

Условот за примена на основниот Гаусов метод е

$$a_{ii}^{(i)} \neq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

но тој не е секогаш исполнет.

Квадратната матрица $A = [a_{ij}]$ од ред n е **дијагонално доминантна** ако е исполнет условот

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Во случај на стриктно неравенство, матрицата е **строго дијагонално доминантна**.

При решавање систем линеарни равенки, ако матрицата на системот е строго дијагонално доминантна, тогаш сите елементи од нејзината главна дијагонала се ненулти, па може да се примени основниот Гаусов метод.

Да претпоставиме дека после $k - 1$ чекори, почетниот систем е сведен на систем од $n - k + 1$ равенки со $n - k + 1$ непознати.

а) Целосен избор на водечки елемент

Стратегијата на **целосен избор на водечки елемент** во k -тиот чекор подразбира дека од сите елементи на матрицата од ред $n - k + 1$, водечкиот елемент $a_{rs}^{(k)}$ се избира меѓу коефициентите од k -тата до n -тата равенка, така што

$$|a_{rs}^{(k)}| = \max_{i,j=k,k+1,\dots,n} |a_{ij}^{(k)}|,$$

а потоа во матрицата се заменуваат k -тата и r -тата редица и k -тата и s -тата колона. Во овој метод се врши замена и на редиците и на колоните, за да се донесе соодветниот елемент на водечката позиција. Тоа е поврзано со голем број операции на споредување и замена на редиците и колоните. Така, во првиот чекор се потребни $n^2 - 1$ споредувања, во вториот $(n - 1)^2 - 1$ споредувања итн. За завршување на постапката ќе биде потребно да се направат вкупно

$$\sum_{i=1}^n (i^2 - 1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

споредувања. Ова значително го зголемува времето потребно да се дојде до решението на системот, па затоа овој метод не е препорачлив, освен во случаите кога е потребно да се добие решение со многу голема прецизност. Исто така, ако се менуваат местата на две колони при изборот на водечки елемент, таа промена се внесува во векторот чија почетна вредност е $p = [1 \ 2 \ \dots \ n]^T$. На крајот, овој вектор се користи за да се утврди по кој редослед треба да се земат вредностите во векторот кој го содржи решението на системот, како што е илустрирано во следниов пример.

Пример 3.5. Со примена на Гаусовиот метод со целосен избор на водечки елемент, да се реши системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 5 \\ 6x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение. Проширената матрица на системот е:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 10 & 5 \end{array} \right],$$

а векторот $p = [1 \ 2 \ 3]^T$. Бидејќи

$$\max_{i=1,2,3, j=1,2,3} |a_{ij}| = 10,$$

а овој елемент се наоѓа во третата редица и третата колона, ги менуваме местата на првата и третата редица, и на првата и третата колона, т.е. ги применуваме елементарните трансформации $R_1 \leftrightarrow R_3$ и $K_1 \leftrightarrow K_3$:

$$[\mathbf{A}'|\mathbf{b}'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 6 & 5 \\ 8 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right].$$

Векторот p е $[3 \ 2 \ 1]^T$, а мултипликаторите со кои ја множиме првата редица се:

$$m_{21} = \frac{a'_{21}}{a'_{11}} = \frac{8}{10}; \quad m_{31} = \frac{a'_{31}}{a'_{11}} = \frac{3}{10}.$$

Потоа ги применуваме елементарните трансформации $R_i - m_{i1}R_1$, $i \in \{2, 3\}$, со што го добиваме еквивалентниот систем:

$$[\mathbf{A}^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0,4 & -0,8 & 1 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & -0,5 \end{array} \right].$$

Ја повторуваме постапката за системот од двете последни равенки. Водечкиот елемент за кој важи

$$\max_{i=2,3, j=2,3} |a_{ij}^{(2)}| = 0,8,$$

е $a_{23}^{(2)} = -0,8$, па ги заменуваме местата на втората и третата колона, т.е. $K_2 \leftrightarrow K_3$:

$$[\mathbf{A}'^{(2)}|\mathbf{b}'^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -0,8 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & -0,5 \end{array} \right].$$

Векторот p е $[3 \ 1 \ 2]^T$. За да го анулираме елементот од втората колона во третата редица, ја применуваме елементарната трансформација $R_3 - m_{32}R_2$, каде што

$$m_{32} = \frac{a'_{32}^{(2)}}{a'_{22}^{(2)}} = \frac{0,2}{-0,8} = -0,25$$

и добиваме:

$$[\mathbf{A}^{(3)}|\mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & -0,8 & 0,4 & 1 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,25 \end{array} \right].$$

Решението на еквивалентниот систем го добиваме со решавање наназад:

$$x_3^* = \frac{-0,25}{0,5} = -0,5;$$

$$x_2^* = \frac{1}{-0,8} (1 + 0,4 \cdot 0,5) = -1,5;$$

$$x_1^* = \frac{1}{10} (5 + 6 \cdot 1,5 + 2 \cdot 0,5) = 1,5.$$

Имајќи ги предвид трансформациите по колони $K_1 \leftrightarrow K_3$ и $K_2 \leftrightarrow K_3$, односно векторот $p = [3 \ 1 \ 2]^T$, добиваме дека: $x_1^* = x_3$, $x_2^* = x_1$, а $x_3^* = x_2$, па решението на системот е $x = [-1,5 \ -0,5 \ 1,5]^T$. ▲

б) Делумен избор на водечки елемент

Најчесто е доволно да се примени методот на **делумен избор на водечки елемент**, при што водечкиот елемент се бара само помеѓу елементите од k -тата колона. Со тоа се избегнува замена на местата на колоните, а се применува само замена на редиците. Водечкиот елемент $a_{rs}^{(k)}$ треба да го задоволува условот

$$|a_{rs}^{(k)}| = \max_{i=k, k+1, \dots, n} |a_{ik}^{(k)}|.$$

Треба да се има предвид дека од една редица може да се избере водечки елемент само еднаш, а редицата од која е избран водечкиот елемент во понатамошната постапка не се трансформира.

Пример 3.6. Со примена на Гаусовиот метод со делумен избор на водечки елемент, да се реши системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}.$$

Решение. Проширената матрица на системот е:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -6 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & -3 & 4 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 3 & 9 \end{array} \right].$$

Бидејќи

$$\max_{i=1,2,3,4} |a_{i1}| = 4,$$

а овој елемент се наоѓа во третата редица, ги менуваме местата на првата и третата редица, т.е. ја применуваме елементарната трансформација $R_1 \leftrightarrow R_3$:

$$[\mathbf{A}'|\mathbf{b}'] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & -6 & 4 & -2 & 8 \\ 1 & -4 & 3 & 3 & 9 \end{array} \right].$$

Првата редица, во која сега се наоѓа водечкиот елемент, не се менува, а сите останати се трансформираат така што елементите во првата колона треба да бидат еднакви на 0. Мултипликаторите со кои ја множиме првата редица се:

$$m_{21} = \frac{a'_{21}}{a'_{11}} = \frac{1}{4}; \quad m_{31} = \frac{a'_{31}}{a'_{11}} = \frac{1}{2}; \quad m_{41} = \frac{a'_{41}}{a'_{11}} = \frac{1}{4}.$$

Потоа ги применуваме елементарните трансформации $R_i - m_{i1}R_1$, $i \in \{2, 3, 4\}$, со што го добиваме еквивалентниот систем:

$$[\mathbf{A}^{(2)}|\mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -3,75 & 4,5 & 2,25 & 5,25 \\ 0 & -7,5 & 5 & -3,5 & 6,5 \\ 0 & -4,75 & 3,5 & 2,25 & 8,25 \end{array} \right].$$

Ја повторуваме постапката за системот од трите последни равенки. Бираме водечки елемент меѓу елементите од втората колона, а тоа е елементот $a_{32}^{(2)} = -7,5$. Ги заменуваме местата на втората и третата редица, т.е. $R_2 \leftrightarrow R_3$:

$$[\mathbf{A}'^{(2)}|\mathbf{b}'^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -7,5 & 5 & -3,5 & 6,5 \\ 0 & -3,75 & 4,5 & 2,25 & 5,25 \\ 0 & -4,75 & 3,5 & 2,25 & 8,25 \end{array} \right].$$

За да ги анулираме елементите од втората колона кои се во третата и четвртата редица, ги применуваме елементарните трансформации $R_i - m_{i2}R_2, i \in \{3,4\}$, каде што:

$$m_{32} = \frac{a'_{32}{}^{(2)}}{a'_{22}{}^{(2)}} = \frac{-3,75}{-7,5} = \frac{1}{2}; \quad m_{42} = \frac{a'_{42}{}^{(2)}}{a'_{22}{}^{(2)}} = \frac{-4,75}{-7,5} = \frac{19}{30}$$

и добиваме:

$$[\mathbf{A}^{(3)} | \mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -7,5 & 5 & -3,5 & 6,5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 67/15 & 62/15 \end{array} \right].$$

Водечкиот елемент меѓу елементите од третата колона во третата и четвртата редица е $a_{33}^{(3)} = 2$, па нема потреба од замена на редиците. Третата редица, во која се наоѓа водечкиот елемент, останува непроменета, а четвртата редица ја трансформираме така што го елиминираме елементот во третата колона со трансформацијата $R_4 - m_{43}R_3$, каде што

$$m_{43} = \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{1}{6}.$$

Трансформираниот систем има облик:

$$[\mathbf{A}^{(4)} | \mathbf{b}^{(4)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -7,5 & 5 & -3,5 & 6,5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 19/5 & 19/5 \end{array} \right].$$

Решението на еквивалентниот систем го добиваме со решавање наназад:

$$x_4 = \frac{\frac{19}{5}}{\frac{19}{5}} = 1;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(2 - 4 \cdot 1) = -1;$$

$$x_2 = \frac{1}{-7,5}(6,5 + 3,5 \cdot 1 - 5 \cdot (-1)) = -2;$$

$$x_1 = \frac{1}{4}(3 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2)) = 1,$$

т.е. $\mathbf{x} = [1 \quad -2 \quad -1 \quad 1]^T$. ▲

в) Избор на водечки елемент со скалирање

Случајот кога водечкиот елемент е помал од останатите коефициенти во редицата на која тој припаѓа, може да резултира со појава на значителна грешка на заокружување, како што е прикажано во следниов пример.

Пример 3.7. Со примена на Гаусовиот метод со делумен избор на водечки елемент да се реши системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 105x_3 = 104 \\ 2x_1 - 3x_2 + 103x_3 = 98. \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение. Проширената матрица на системот е:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 105 & 104 \\ 2 & -3 & 103 & 98 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right].$$

Водечкиот елемент во првата колона е елементот a_{11} , бидејќи

$$\max_{i=1,2,3} |a_{ij}| = 3,$$

па нема потреба од замена на редиците. Мултипликаторите со кои ја множиме првата редица се:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{3}, m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{3},$$

а соодветните елементарни трансформации $R_i - m_{i1}R_1, i \in \{2, 3\}$, со што го добиваме еквивалентниот систем:

$$[\mathbf{A}^{(2)} | \mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 105 & 104 \\ 0 & -4,33 & 33 & 28,6 \\ 0 & 0,333 & -32 & -31,6 \end{array} \right].$$

Водечкиот елемент во следниот чекор е $a_{22}^{(2)}$, за кој важи $\max_{i=2,3} |a_{ij}^{(2)}| = 4,33$, па ја применуваме елементарната трансформација $R_3 - m_{32}R_2$, каде што

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \frac{0,333}{-4,33},$$

со што го добиваме системот

$$[\mathbf{A}^{(3)} | \mathbf{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 105 & 104 \\ 0 & -4,33 & 33 & 28,6 \\ 0 & 0 & -29,5 & -29,4 \end{array} \right].$$

Со решавање наназад се добива приближното решение на системот:

$$x_1 = -0,890; \quad x_2 = 0,993; \quad x_3 = 0,997.$$

Точното решение на системот е: $x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$ ▲

За да се намали грешката во примерот 3.7, може да се примени стратегијата на **избор на водечки елемент со скалирање**.

Во првиот чекор на оваа постапка се дефинираат факторите на скалирање за секоја редица

$$s_i = \max_{j=1, \dots, n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

односно s_i е елементот со најголема апсолутна вредност во i -тата редица.

Ако $s_i = 0$ за некоја вредност на i , тогаш сите елементи во i -тата редица се нули. Во тој случај, ако дадениот систем е нехомоген, тој нема единствено решение. Во спротивно, се избира најмалиот цел број p така што

$$\frac{|a_{p1}|}{s_p} = \max_{k=1, \dots, n} \frac{|a_{k1}|}{s_k},$$

се заменуваат првата и p -тата редица, т.е. се применува елементарната трансформација $R_1 \leftrightarrow R_p$. Потоа, со примена на елементарни трансфор-

мации, се врши анулирање на елементите $a_{i1}, i = 2, \dots, n$, односно се елиминира променливата x_1 во сите редици, почнувајќи од втората редица. Слично, пред да се елиминира променливата x_i , се избира најмалиот цел број $p \geq i$, така што

$$\frac{|a_{pi}|}{s_p} = \max_{k=i, \dots, n} \frac{|a_{ki}|}{s_k},$$

а потоа се врши замена на редиците $R_i \leftrightarrow R_p$.

Пример 3.8. Со примена на Гаусовиот метод со избор на водечки елемент со скалирање да се реши системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 105x_3 = 104 \\ 2x_1 - 3x_2 + 103x_3 = 98. \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение. Проширената матрица на системот е:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 105 & 104 \\ 2 & -3 & 103 & 98 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right].$$

Факторите на скалирање за секоја редица се:

$$s_1 = \max_{j=1,2,3} |a_{1j}| = 105, s_2 = \max_{j=1,2,3} |a_{2j}| = 103, s_3 = \max_{j=1,2,3} |a_{3j}| = 3.$$

Ги скалираме елементите од првата колона со факторот на скалирање за соодветната редица. За да ја определеме вредноста на p , бараме

$$\max_{k=1,2,3} \frac{|a_{k1}|}{s_k} = \max \left\{ \frac{|a_{11}|}{s_1}, \frac{|a_{21}|}{s_2}, \frac{|a_{31}|}{s_3} \right\} = \max \left\{ \frac{3}{105}, \frac{2}{103}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3},$$

што значи $p = 3$, па ги заменуваме првата и третата редица ($R_1 \leftrightarrow R_3$):

$$[\mathbf{A}'|\mathbf{b}'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 103 & 98 \\ 3 & 2 & 105 & 104 \end{array} \right].$$

Потоа се елиминира променливата x_1 од втората и третата равенка, со примена на елементарните трансформации $R_2 - \frac{2}{1}R_1$ и $R_3 - \frac{3}{1}R_1$:

$$[\mathbf{A}^{(2)} | \mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 97 & 92 \\ 0 & -1 & 96 & 95 \end{array} \right].$$

Факторите на скалирање во следниот чекор за секоја редица се:

$$s_2 = \max_{j=2,3} |a_{2j}| = 97, \quad s_3 = \max_{j=2,3} |a_{3j}| = 96.$$

Ги скалираме елементите од втората колона со факторот на скалирање за соодветната редица. За да ја определеме вредноста на p во вториот чекор, бараме

$$\max_{k=2,3} \frac{|a_{k2}|}{s_k} = \max \left\{ \frac{|a_{22}|}{s_2}, \frac{|a_{32}|}{s_3} \right\} = \max \left\{ \frac{5}{97}, \frac{1}{96} \right\} = \frac{5}{97},$$

што значи $p = 2$, па не е потребна замена на редиците.

Ја елиминираме променливата x_2 со трансформацијата $R_3 - \frac{1}{5}R_2$:

$$[\mathbf{A}^{(2)} | \mathbf{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & 97 & 92 \\ 0 & 0 & 76,6 & 76,6 \end{array} \right].$$

Со решавање наназад се добива решението на системот:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1,$$

што се совпаѓа со точното решение на системот. ▲


Гаус - Жорданов метод

Овој метод се состои во тоа што почетниот систем, односно матрицата на системот \mathbf{A} , се трансформира во дијагонален облик. Во самата постапка, се користат елементарни трансформации за да се добијат единични дијагонални елементи, па на тој начин матрицата \mathbf{A} се трансформира во единична матрица. Во тој случај, трансформиранiot вектор \mathbf{b} станува вектор на решението \mathbf{x} . За трансформација на матрицата се користат истите трансформации како кај Гаусовиот метод, додека не се добие горнотриаголната матрица, а потоа се продолжува со анулирање на елементите над главната дијагонала.

Во пакетот Mathematica, за решавање системи линеарни равенки може да се користат вградените наредби **RowReduce** и **LinearSolve**.

Применувајќи елементарни трансформации, наредбата **RowReduce[A]**, ја сведува дадената матрица **A** во трапезен или триаголен облик со единици на првите ненулта позиции во секоја од редиците. За решавање систем линеарни равенки, прво треба да се внесе проширената матрица на системот. Потоа се извршува наредбата **RowReduce**, при што ако излезот се прикаже во матричен облик, решенијата на системот се елементите во последната колона од излезната матрица.

Наредбата **LinearSolve[A,b]** го дава решението **x** на системот **Ax=b** во облик на вектор - колона. Притоа, ако системот има бесконечно многу решенија, тогаш наредбата **LinearSolve** дава само едно од решенијата. Ако пак системот нема решенија, тогаш се добива коментар од облик:

 **LinearSolve:** Linear equation encountered that has no solution.

Пример 3.9. Со помош на Гаус - Жордановиот метод, да се реши системот

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = \frac{7}{2} \\ 2x_1 + x_2 = -1 \\ -x_1 - x_2 + \frac{7}{4}x_3 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Решение. Со елементарни трансформации на проширената матрица на системот, добиваме:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0,5 & 1 & 3,5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1,75 & 3,5 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & -1 & -3,5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1,75 & 3,5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_2-2R_1 \\ R_3+R_1 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & -1 & -3,5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1,5 & 0,75 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & -1 & -3,5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1,5 & 0,75 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3+1,5R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & -1 & -3,5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2,25 & 4,5 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2,25}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & -1 & -3,5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1+R_3 \\ R_2-R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & 0 & -1,5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1+0,5R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Според тоа, решение на дадениот систем е: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Со примена на наредбата **RowReduce** во пакетот Mathematica, по внесување на проширената матрица на системот, решението на системот се отчитува од последната колона на излезната матрица, како што може да се види на сликата 3.5.

```
A = {{-1, 1/2, 1}, {2, 1, 0}, {-1, -1, 7/4}};
b = {7/2, -1, 7/2};
MatrixForm[Ab = Transpose[Join[Transpose[A], {b}]]];
RowReduce[Ab] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Слика 3.5

Ако се користи наредбата **LinearSolve**, се внесуваат матрицата **A** и векторот **b**, а решението се добива како излезен вектор (слика 3.6).

```
A = {{-1, 1/2, 1}, {2, 1, 0}, {-1, -1, 7/4}};
b = {7/2, -1, 7/2};
LinearSolve[A, b]
```

$$\{-1, 1, 2\}$$

Слика 3.6



3.2.4. Декомпозиција на матрицата на системот

Неколку познати декомпозиции, врз кои се засновани соодветните методи за директно решавање системи линеарни равенки, се:

- 1) **LU декомпозиција**: матрицата \mathbf{A} се претставува како производ

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U},$$

каде што \mathbf{L} е долнотриаголна, а \mathbf{U} е горнотриаголна матрица.

- 2) **LDU декомпозиција**: матрицата \mathbf{A} се претставува како производ

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U},$$

каде што \mathbf{L} е долнотриаголна матрица, \mathbf{D} е дијагонална матрица, а \mathbf{U} е горнотриаголна матрица.

- 3) **QR декомпозиција**: матрицата \mathbf{A} се претставува како производ

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R},$$

каде што \mathbf{Q} е ортогонална матрица, а \mathbf{R} е горнотриаголна матрица.

- 4) **Декомпозиција со сингуларни вредности**: матрицата \mathbf{A} се претставува како производ

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*,$$

каде што \mathbf{U} е квадратна реална или комплексна унитарна матрица, $\mathbf{\Sigma}$ е правоаголна дијагонална матрица со ненегативни реални броеви на дијагоналата (сингуларни вредности), а \mathbf{V}^* е конјугирано транспонирана матрица на квадратната реална или комплексна матрица \mathbf{V} .

Подетално ќе ја објасниме **LU** декомпозицијата. Да забележиме дека декомпозицијата не е еднозначна, бидејќи матриците \mathbf{L} и \mathbf{U} може да се разликуваат во своите елементи. Наједноставната **LU** декомпозиција е декомпозицијата на Дулитл (Doolittle), при која бараме дијагоналните елементи во долнотриаголната матрица да бидат единици, т.е.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Декомпозицијата овозможува почетниот систем $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ да се трансформира во еквивалентен систем, кој е поедноставен за решавање поради обликот на матриците \mathbf{L} и \mathbf{U} ,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \end{cases}.$$

Понатаму, од системот равенки

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b},$$

со решавање напред се определува помошното решение

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T,$$

а потоа од системот равенки

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

со решавање наназад се добива решението на почетниот систем,

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T.$$

За \mathbf{LU} декомпозиција на Дулитл на матрицата \mathbf{A} , во пакетот Mathematica, може да се искористи модулот \mathbf{LU} , даден во продолжение. Влезни податоци се: матрицата и нејзиниот ред n .

```

LU[A0_, n_] :=
Module[{A = A0, i, p},
  U = A0;
  L = IdentityMatrix[n];
  For[p = 1, p <= n - 1, p++,
    For[i = p + 1, i <= n, i++,
      m =  $\frac{A_{[i,p]}}{A_{[p,p]}}$ ;
      L_{[i,p]} = m;
      A_{[i]} = A_{[i]} - m A_{[p]};
      U = A; ]; ]
  Print["L=", MatrixForm[L], " U=", MatrixForm[U]];
  Print["A=", MatrixForm[A0], "=", MatrixForm[L], MatrixForm[U]]; ]

```


Пример 3.10. Најди **LU** декомпозиција на матрицата $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 41 & 5 & 6 \\ 70 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Решение. Нека

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ d & e & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & p & q \\ 0 & b & r \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Од тоа што

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 41 & 5 & 6 \\ 70 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & p & q \\ ka & kp + b & kq + r \\ da & dp + be & dq + er + c \end{bmatrix},$$

добиваме:

$$k = 41; \quad d = 70; \quad e = \frac{12}{7};$$

$$a = 1; \quad p = 2; \quad q = 3; \quad b = -77; \quad r = -117; \quad c = -\frac{3}{17},$$

т.е.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 41 & 1 & 0 \\ 70 & \frac{12}{7} & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -77 & -117 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{17} \end{bmatrix}.$$

Со примена на модулот **LU**, се добива излезот прикажан на сликата 3.7.

```
LU[{{1, 2, 3}, {41, 5, 6}, {70, 8, 9}}, 3]
L=
  ( 1  0  0 )
  (41  1  0 )
  (70 12/7 1 )
U=
  ( 1  2  3 )
  ( 0 -77 -117 )
  ( 0  0  -3/17 )
A=
  ( 1  2  3 )
  (41  5  6 )
  (70  8  9 )
=
  ( 1  0  0 )
  (41  1  0 )
  (70 12/7 1 )
  ( 1  2  3 )
  ( 0 -77 -117 )
  ( 0  0  -3/17 )
```

Слика 3.7

Ако во горната матрица се внесе еден нејзин елемент со децимална точка, вредностите на елементите на матриците L и U ќе бидат децимални броеви, како што може да се види на сликата 3.8.

$$\begin{aligned}
 & \text{LU}[\{\{1., 2, 3\}, \{41, 5, 6\}, \{70, 8, 9\}\}, 3] \\
 L = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 41. & 1 & 0 \\ 70. & 1.71429 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1. & 2 & 3 \\ 0. & -77. & -117. \\ 0. & 0. & -0.428571 \end{pmatrix} \\
 A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 41 & 5 & 6 \\ 70 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 41. & 1 & 0 \\ 70. & 1.71429 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1. & 2 & 3 \\ 0. & -77. & -117. \\ 0. & 0. & -0.428571 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Слика 3.8

Забелешка 3.2. Несингуларната матрица A има LU декомпозиција, доколку водечките главни минори од кој било ред се ненулти. Сингуларната матрица со ранг k има LU декомпозиција, доколку првите k минори на елементите од главната дијагонала се ненулти.

Пример 3.11. Најди LU декомпозиција на матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Решение. Матрицата A е несингуларна ($\det A = 175 \neq 0$), но еден од водечките главни минори е $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$. Согласно забелешката 3.2. не може да се најде нејзината LU декомпозиција без да се направи промена на редиците.

Ако се примени модулот LU , се добива излезот прикажан на сликата 3.9.

```

A = {{1, 2, 6}, {4, 8, -1}, {-2, 3, 5}};
LU[A, 3]

Power::infy : Infinite expression - encountered. >>
0
Infinity::indet : Indeterminate expression 0ComplexInfinity encountered. >>
Infinity::indet : Indeterminate expression 0ComplexInfinity encountered. >>
L =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & \text{ComplexInfinity} & 1 \end{pmatrix}$  U =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -25 \\ \text{Indeterminate} & \text{Indeterminate} & \text{ComplexInfinity} \end{pmatrix}$ 
A =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & \text{ComplexInfinity} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -25 \\ \text{Indeterminate} & \text{Indeterminate} & \text{ComplexInfinity} \end{pmatrix}$ 

```

Слика 3.9

Забележуваме дека се јавува грешка при делење со нула, што покажува дека не е можна таква декомпозиција за матрицата. ▲

Пример 3.12. Користејќи **LU** декомпозиција на матрицата на системот, реши го системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 & = 2. \\ x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Решение. Нека

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ d & e & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & p & q \\ 0 & b & r \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Од тоа што

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} a & p & q \\ ka & kp + b & kq + r \\ da & dp + be & dq + er + c \end{bmatrix},$$

добиваме:

$$k = -2; d = 1; e = -\frac{2}{5}; a = 1; p = 2; q = 0; b = 5; r = 3; c = \frac{1}{5},$$

т.е.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Со ова, почетниот систем се трансформира на следниов начин:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \end{cases},$$

каде што

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Од втората равенка на добиениот матричен систем, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$, имаме

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{cases} y_1 & = 3 \\ -2y_1 + y_2 & = 2 \\ y_1 - \frac{2}{5}y_2 + y_3 & = 0 \end{cases}.$$

Решението на последниов систем добиено со решавање нанапред е

$$\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 8 \\ y_3 = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Потоа, од равенката $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ се добива системот

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 3 \\ 5x_2 + 3x_3 & = 8 \\ \frac{1}{5}x_3 & = \frac{1}{5} \end{cases},$$

чие решение добиено со решавање наназад е $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Решението добиено во Mathematica, со примена на модулот **LU**, е прикажано на сликата 3.10.

```

A = {{1, 2, 0}, {-2, 1, 3}, {1, 0, -1}};
b = {3, 2, 0};
LU[A, 3]

L =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$  U =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 

A =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  =  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 

y = Inverse[L] . b;
x = Inverse[U] . y;
Print["x=", x]
x={1, 1, 1}
    
```

Слика 3.10



Забелешка 3.3. Слична на **LU** декомпозицијата на Дулитл, е декомпозицијата во која

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Со примена на **LDU** декомпозиција на матрицата **A**, каде што

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

почетниот систем се сведува на еквивалентен систем, кој е поедноставен за решавање:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z} \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{b} \end{cases}.$$

Прво се решава третата равенка. Добиената вредност на **z** се заменува во втората равенка, од каде се добива вредноста на **y**. Со замена на оваа вредност во првата равенка, се добива решението на почетниот систем $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$.

Пример 3.13. Користејќи **LDU** декомпозиција на матрицата на системот, реши го системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 & = 2. \\ x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

Решение. Нека

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Од тоа што

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} =$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_1 u_1 & d_1 u_2 \\ d_1 l_1 & d_2 + d_1 l_1 u_1 & d_1 l_1 u_2 + d_2 u_3 \\ d_1 l_2 & d_2 l_3 + d_1 l_2 u_1 & d_3 + d_1 l_2 u_2 + d_2 l_3 u_3 \end{bmatrix},$$

добиваме:

$$\begin{aligned} l_1 &= -2, & l_2 &= 1, & l_3 &= -\frac{2}{5}; \\ d_1 &= 1, & d_2 &= 5, & d_3 &= \frac{1}{5}; \\ u_1 &= 2, & u_2 &= 0, & u_3 &= \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Со ова, почетниот систем се трансформира на следниов начин:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathbf{D} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z} \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{b} \end{cases},$$

каде што

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Од третата равенка на добиениот матричен систем, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{b}$, имаме

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{cases} z_1 & = 3 \\ -2z_1 + z_2 & = 2 \\ z_1 - \frac{2}{5}z_2 + z_3 & = 0 \end{cases}.$$

Решението на овој систем се добива со решавање напред:

$$\begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 8 \\ z_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Од втората равенка на добиениот матричен систем, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{z}$, имаме

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{cases} y_1 = 3 \\ 5y_2 = 8 \\ \frac{1}{5}y_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Решението на последниов систем е

$$\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = \frac{8}{5} \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

Од првата равенка $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ се добива:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{8}{5} \\ 1 \end{bmatrix},$$

т.е. системот

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = 3 \\ x_2 + \frac{3}{5}x_3 & = \frac{8}{5}, \\ x_3 & = 1 \end{cases}$$

чие решение добиено со решавање наназад е $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. ▲

3.3. Индиректни методи. Методи на Јакоби и Гаус-Зајдел

При работа со големи системи, индиректните, односно итеративните методи се поефикасни во споредба со директните. Особено се погодни кога поголем дел од елементите на матрицата на системот се нули. Ваквите матрици се нарекуваат **слабо пополнети** или **ретки матрици**. Тие се јавуваат во анализа на струјни кола, почетно - гранични проблеми и парцијални диференцијални равенки.

Нека е даден согласен систем од n линеарни равенки со n непознати,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad (3.4)$$

каде што $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, кој може да се претстави во матричен облик

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Решението на системот

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

го бараме како гранична вредност на **итеративната низа** $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ од приближни решенија, каде што

$$\mathbf{x}^{(k)} = [x_1^{(k)} \quad x_2^{(k)} \quad \dots \quad x_n^{(k)}]^T$$

е **k -та итерација**, или **k -то приближување**. Оттука овие методи го добиле името **итеративни**. Начинот на кој се формира итеративната низа го дефинира итеративниот метод.

Најпознати итеративни методи за решавање системи линеарни равенки се методите на Јакоби и Гаус - Зајдел. Овие методи се состојат од следниве фази:

- 1) Формирање на итеративната низа $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$,
- 2) Докажување дека формираната итеративна низа конвергира кон точното решение,
- 3) Оценка на направената грешка, кога некој член од оваа низа ќе се земе како приближно решение.

За да ја формираме итеративната низа $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ ќе го трансформираме системот (3.4) во еквивалентен облик, а тоа е најчесто следниов облик:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \dots - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}}x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}, \quad (3.5)$$

каде што $a_{ii} \neq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Еквивалентниот матричен облик на системот (3.5) е:

$$\mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad (3.6)$$

каде што

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1(n-1)}}{a_{11}} & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2(n-1)}}{a_{22}} & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Друг начин за да се трансформира системот (3.4) е следниов:

$$\begin{cases} x_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \dots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (1 - a_{nn})x_n + b_n \end{cases}, \quad (3.7)$$

чиј матричен облик е како (3.6), при што

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Нека $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ и $\mathbf{c} = [c_i]$. Кај **методот на Јакоби** или **методот на прости итерации**, итеративната низа $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ се формира на следниов начин, во согласност со (3.6):

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad (3.8)$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = m_{11}x_1^{(k)} + m_{12}x_2^{(k)} + \cdots + m_{1(n-1)}x_{n-1}^{(k)} + m_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = m_{21}x_1^{(k)} + m_{22}x_2^{(k)} + \cdots + m_{2(n-1)}x_{n-1}^{(k)} + m_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = m_{n1}x_1^{(k)} + m_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + m_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)} + m_{nn}x_n^{(k)} + c_n \end{cases},$$

и најчесто за почетна (нулта) итерација се зема

$$\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \dots \quad x_n^{(0)}]^T = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]^T.$$

Ако пак, итеративната низа $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ се формира на следниов начин:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = m_{11}x_1^{(k)} + m_{12}x_2^{(k)} + \cdots + m_{1(n-1)}x_{n-1}^{(k)} + m_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = m_{21}x_1^{(k+1)} + m_{22}x_2^{(k)} + \cdots + m_{2(n-1)}x_{n-1}^{(k)} + m_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = m_{n1}x_1^{(k+1)} + m_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + m_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)} + m_{nn}x_n^{(k)} + c_n \end{cases},$$

се добива **методот на Гаус - Зајдел**. И кај овој метод за почетна (нулта) итерација се зема

$$\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \dots \quad x_n^{(0)}]^T = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]^T.$$

Основната разлика помеѓу овие два метода е тоа што кај методот на Јакоби, во изразот со кој се пресметуваат $x_i^{(k+1)}$ учествуваат само вредности добиени во претходната итерација, т.е. $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$. Во методот на Гаус - Зајдел, во изразот со кој се пресметуваат $x_i^{(k+1)}$ учествуваат вредностите: $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$, кои се добиени во истата итерација, како и $x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ добиени во претходната итерација. Од овие причини, методот на Гаус - Зајдел претставува подобрување на методот на Јакоби.

Во следнава теорема се дадени доволните услови за конвергенција на итеративната низа (3.8).

Теорема 3.1. Итеративната низа $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ дефинирана во методите на Јакоби и Гаус - Зајдел, при произволно избрана почетна итерација $\mathbf{x}^{(0)} = [x_1^{(0)} \ x_2^{(0)} \ \dots \ x_n^{(0)}]^T$, конвергира кон единственото решение $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ на системот (3.4), ако елементите на матрицата $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ задоволуваат барем еден од следниве услови:

$$1) \sum_{j=1}^n |m_{ij}| < 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$2) \sum_{i=1}^n |m_{ij}| < 1, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$3) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}|^2 < 1.$$

Забелешка 3.4. Покрај доволните услови за конвергенција на итеративната низа дадени во теоремата 3.1, постојат и други облици на доволниот услов кои овде не се наведени. Нагласуваме дека, во пракса, полесно се применуваат условите 1) и 2) од теоремата 3.1. Во тој случај, ако k -тата итерација е $\mathbf{x}^{(k)} = [x_1^{(k)} \ x_2^{(k)} \ \dots \ x_n^{(k)}]^T$, тогаш важи:

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

ШТО Е ЕКВИВАЛЕНТНО СО НЕРАВЕНСТВОТО:

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|, \quad (3.9)$$

КАДЕ ШТО

$$\alpha = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \left(\sum_{j=1}^n |m_{ij}| \right), \text{ ако се користи условот 1),}$$

ОДНОСНО

$$\alpha = \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \left(\sum_{i=1}^n |m_{ij}| \right), \text{ ако се користи условот 2).}$$

Забелешка 3.5. Ако системот (3.4) се трансформира во еквивалентниот систем (3.5), т.е. во матричниот облик

$$\mathbf{x} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{M} = [m_{ij}],$$

КАДЕ ШТО

$$m_{ii} = 0, \text{ а } m_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ за } i \neq j,$$

ТОГАШ ПРВИОТ УСЛОВ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА 1) ГО ДОБИВА ОБЛИКОТ:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

ОТГУКА,

$$\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < 1$$

ИЛИ АКО НЕРАВЕНСТВОТО ГО ПОМНОЖИМЕ СО $|a_{ii}| > 0$ ДОБИВАМЕ

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.10)$$

ЗНАЧИ, КОГА СИТЕМОТ (3.4) СЕ ТРАНСФОРМИРА ВО ОБЛИК (3.5), ПРВИОТ УСЛОВ

за конвергенција кај методот на Јакоби и Гаус - Зајдел е еквивалентен со условот матрицата **A** да биде строго дијагонално доминантна. Кога матрицата не е дијагонално доминантна, треба да се провери дали со промена на местата на редиците може да стане дијагонално доминантна, со што би се обезбедила конвергенцијата на итеративниот метод.

Забелешка 3.6. Системот (3.4) кај кој дијагоналните коефициенти пред непознатите се вредности од интервалот $(-1,1)$, препорачливо е да се трансформираат според формулата (3.7) за да не делиме со броеви од интервалот $(-1,1)$, бидејќи во тој случај грешката на заокружување ќе биде поголема.

Во пакетот Mathematica за наоѓање на приближното решение на системот линеарни равенки, чија матрица на системот е дијагонално доминантна, може да се искористи модулот **Jacobi**, односно модулот **GausSeidel**, дадени во продолжение. Влезни податоци се: матрицата на системот, вектор колоната од слободните членови, почетното приближување и бројот на итерации.

```
Jacobi[A0_, B0_, P0_, max_] :=
Module[{A = N[A0], B = N[B0], i, j, k = 0, n = Length[P0], P = P0, Pold = P0},
Print["x"0, " = ", P];
While[k < max,
For[i = 1, i ≤ n, i++,
P[i] =  $\frac{1}{A_{[i,i]}} \left( B_{[i]} + A_{[i,j]} Pold_{[j]} - \sum_{j=1}^n A_{[i,j]} Pold_{[j]} \right)$ ];
Print["x"k+1, " = ", P];
Pold = P;
k = k + 1; ];
Return[P]; ];
```

```

GaussSeidel[A0_, B0_, P0_, max_] :=
Module[{A = N[A0], B = N[B0], i, j, k = 0, n = Length[P0], P = P0},
Print["x"0, " = ", P];
While[k < max,
For[i = 1, i ≤ n, i++,
P[i] =  $\frac{1}{A[i,i]} \left( B[i] + A[i,i] P[i] - \sum_{j=1}^n A[i,j] P[j] \right)$ ;
Print["x"i, " = ", P];
k = k + 1; ];
Return[P]; ]

```

Пример 3.14. Со примена на методот на Јакоби да се реши дадениот систем со три итерации и да се оцени грешката.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 15x_3 = 50 \\ 13x_1 + 2x_2 + x_3 = 20. \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 29 \end{cases}$$

Закружувањето на меѓурезултатите да се врши на три децимали.

Решение. Дадениот систем ќе го трансформираме според формулата (3.5). За да биде задоволен условот за конвергенција (3.10), т.е. матрицата на системот да биде дијагонално доминантна, прво ќе ги промениме местата на равенките на системот.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 15x_3 = 50 \\ 13x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 29 \end{cases} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{cases} 13x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 15x_3 = 50 \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 29 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{cases} 13x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 29 \\ x_1 + 2x_2 + 15x_3 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{13}x_2 - \frac{1}{13}x_3 + \frac{20}{13} \\ x_2 = -\frac{1}{11}x_1 - \frac{2}{11}x_3 + \frac{29}{11} \\ x_3 = -\frac{1}{15}x_1 - \frac{2}{15}x_2 + \frac{50}{15} \end{cases}$$

Според тоа,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -0,154 & -0,077 \\ -0,091 & 0 & -0,182 \\ -0,067 & -0,133 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1,538 \\ 2,636 \\ 3,333 \end{bmatrix},$$

па итеративната низа ја формираме на следниов начин:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0,154x_2^{(k)} - 0,077x_3^{(k)} + 1,538 \\ x_2^{(k+1)} = -0,091x_1^{(k)} - 0,182x_3^{(k)} + 2,636. \\ x_3^{(k+1)} = -0,067x_1^{(k)} - 0,133x_2^{(k)} + 3,333 \end{cases}$$

За збирите на елементите по редиците на матрицата \mathbf{M} важат неравенствата:

$$|-0,154| + |-0,077| = 0,231 < 1,$$

$$|-0,091| + |-0,182| = 0,273 < 1,$$

$$|-0,067| + |-0,133| = 0,200 < 1.$$

Тогаш $\alpha = \max\{0,231; 0,273; 0,200\} = 0,273$.

Од матрицата \mathbf{c} ја добиваме почетната итерација:

$$x_1^{(0)} = 1,538, x_2^{(0)} = 2,636, x_3^{(0)} = 3,333.$$

Користејќи ја итеративната низа, ќе ги определиме следните три итерации. За првата итерација имаме:

$$x_1^{(1)} = -0,154x_2^{(0)} - 0,077x_3^{(0)} + 1,538 = 0,875,$$

$$x_2^{(1)} = -0,091x_1^{(0)} - 0,182x_3^{(0)} + 2,636 = 1,889,$$

$$x_3^{(1)} = -0,067x_1^{(0)} - 0,133x_2^{(0)} + 3,333 = 2,879.$$

Слично, за втората итерација добиваме:

$$x_1^{(2)} = 1,025, x_2^{(2)} = 2,032, x_3^{(2)} = 3,023,$$

а за третата итерација:

$$x_1^{(3)} = 0,992, x_2^{(3)} = 1,992, x_3^{(3)} = 2,994.$$

Ќе ја оцениме направената грешка ε_3 , при примената на овој метод после третата итерација, според формулата (3.9):

$$\varepsilon_k = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} |x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \max_{j \in \{1,2,3\}} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|.$$

Од тоа што

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,033, |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0,04, |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0,029,$$

следува дека

$$\max_{j \in \{1,2,3\}} |x_j^{(3)} - x_j^{(2)}| = 0,04.$$

Според тоа,

$$\varepsilon_3 \leq \frac{0,273}{1 - 0,273} \cdot 0,04 = 0,015 < 0,5 \cdot 10^{-1},$$

од каде што следува дека добиеното приближно решение има една сигурна децимална цифра, т.е. бараното приближното решение на системот е:

$$x_1^* = 0,9, x_2^* = 1,9, x_3^* = 2,9.$$

Доколку за дадениот систем, чијашто матрица не е дијагонално доминантна, го примениме модулот **Jacobi**, по 10 итерации се добива низата приближувања прикажана на сликата 3.11.

Забележуваме дека добиената низа е дивергентна. Но ако равенките во системот ги распределиме така што новодобиената матрица на системот да биде дијагонално доминантна, како што е направено погоре при решавањето на системот, како излез при решавањето на овој систем со примена на модулот **Jacobi**, се добиваат итерациите прикажани на сликата 3.12. Да забележиме дека во последната итерација, со примена на модулот се добива точното решение на системот.


```

A = {{1, 2, 15}, {13, 2, 1}, {1, 11, 2}};
b = Transpose[{{50, 20, 29}}];
P = Transpose[{{0, 0, 0}}];

Jacobi[A, b, P, 10]
x0 = {{0}, {0}, {0}}
x1 = {{50.}, {10.}, {14.5}}
x2 = {{-187.5}, {-322.25}, {-65.5}}
x3 = {{1677.}, {1261.5}, {1880.63}}
x4 = {{-30682.4}, {-11830.8}, {-7762.25}}
x5 = {{140145.}, {203327.}, {80425.2}}
x6 = {{-1.61298×106}, {-951148.}, {-1.18835×106}}
x7 = {{1.97277×107}, {1.10786×107}, {6.03782×106}}
x8 = {{-1.12724×108}, {-1.31249×108}, {-7.07959×107}}
x9 = {{1.32444×109}, {7.68106×108}, {7.7823×108}}
x10 = {{-1.32097×1010}, {-8.99795×109}, {-4.8868×109}}
{{-1.32097×1010}, {-8.99795×109}, {-4.8868×109}}

```

Слика 3.11

```

A = {{13, 2, 1}, {1, 11, 2}, {1, 2, 15}};
b = Transpose[{{20, 29, 50}}];
P = Transpose[{{0, 0, 0}}];
Jacobi[A, b, P, 10]
x0 = {{0}, {0}, {0}}
x1 = {{1.53846}, {2.63636}, {3.33333}}
x2 = {{0.876457}, {1.89044}, {2.87925}}
x3 = {{1.02614}, {2.03318}, {3.02284}}
x4 = {{0.993137}, {1.99347}, {2.99383}}
x5 = {{1.00148}, {2.00175}, {3.00133}}
x6 = {{0.999629}, {1.99962}, {2.99967}}
x7 = {{1.00008}, {2.00009}, {3.00007}}
x8 = {{0.99998}, {1.99998}, {2.99998}}
x9 = {{1.}, {2.00001}, {3.}}
x10 = {{0.999999}, {2.}, {3.}}

```

Слика 3.12



Пример 3.15. Со помош на методот на Јакоби да се определи приближното решение на дадениот систем со точност $0,5 \cdot 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 0,88x_1 + 0,18x_2 - 0,08x_3 = -0,64 \\ -0,15x_1 + 0,94x_2 + 0,11x_3 = 0,26 \\ -0,04x_1 + 0,10x_2 + 1,09x_3 = 1,34 \end{cases}$$

Решение. Бидејќи дијагоналните коефициенти на системот се вредности од интервалот $(-1,1)$, согласно забелешката 3.6, дадениот систем ќе го трансформираме според формулата (3.7).

$$\begin{cases} 0,88x_1 + 0,18x_2 - 0,08x_3 = -0,64 & /+0,12x_1 \\ -0,15x_1 + 0,94x_2 + 0,11x_3 = 0,26 & /+0,06x_2 \\ -0,04x_1 + 0,10x_2 + 1,09x_3 = 1,34 & /-0,09x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,12x_1 - 0,18x_2 + 0,08x_3 - 0,64 \\ x_2 = 0,15x_1 + 0,06x_2 - 0,11x_3 + 0,26 \\ x_3 = 0,04x_1 - 0,10x_2 - 0,09x_3 + 1,34 \end{cases}$$

Според тоа,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0,12 & -0,18 & 0,08 \\ 0,15 & 0,06 & -0,11 \\ 0,04 & -0,10 & -0,09 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -0,64 \\ 0,26 \\ 1,34 \end{bmatrix},$$

па итеративната низа ја формираме на следниов начин:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0,12x_1^{(k)} - 0,18x_2^{(k)} + 0,08x_3^{(k)} - 0,64 \\ x_2^{(k+1)} = 0,15x_1^{(k)} + 0,06x_2^{(k)} - 0,11x_3^{(k)} + 0,26 \\ x_3^{(k+1)} = 0,04x_1^{(k)} - 0,10x_2^{(k)} - 0,09x_3^{(k)} + 1,34 \end{cases}$$

Исполнет е првиот услов за конвергенција од теоремата 3.1, бидејќи за збирот на елементите во секоја редица на матрицата \mathbf{M} важи:

$$|0,12| + |-0,18| + |0,08| = 0,38 < 1,$$

$$|0,15| + |0,06| + |-0,11| = 0,32 < 1,$$

$$|0,04| + |-0,10| + |-0,09| = 0,23 < 1.$$

Оттука

$$\alpha = \max\{0,38; 0,32; 0,23\} = 0,38.$$

Почетната итерација е $x_1^{(0)} = -0,64$, $x_2^{(0)} = 0,26$, $x_3^{(0)} = 1,34$, па за првата итерација добиваме:

$$x_1^{(1)} = -0,6564, \quad x_2^{(1)} = 0,0332, \quad x_3^{(1)} = 1,1678.$$

Имајќи предвид дека бараната точност на приближното решение е $0,5 \cdot 10^{-2}$, доволно е заокружувањето на резултатите да се врши на четири децимали. За грешката на првата итерација важи

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\leq \frac{0,38}{1 - 0,38} \max\left\{\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right|, \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right|\right\} = \\ &= \frac{0,38}{0,62} \max\{0,0164; 0,2268; 0,1722\} = \frac{0,38}{0,62} \cdot 0,2268 = 0,139. \end{aligned}$$

Бидејќи бараната точност $0,5 \cdot 10^{-2}$ не е задоволена, постапката ја продолжуваме и за втората итерација имаме:

$$x_1^{(2)} = -0,6311, \quad x_2^{(2)} = 0,0350, \quad x_3^{(2)} = 1,2054.$$

За грешката на втората итерација важи

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &\leq \frac{0,38}{1 - 0,38} \max\left\{\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right|, \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right|, \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right|\right\} = \\ &= \frac{0,38}{0,62} \max\{0,0253; 0,0018; 0,0376\} = \frac{0,38}{0,62} \cdot 0,0376 = 0,023, \end{aligned}$$

па повторно бараната точност $0,5 \cdot 10^{-2}$ не е задоволена и постапката ја продолжуваме. Трета итерација е:

$$x_1^{(3)} = -0,6256, \quad x_2^{(3)} = 0,0348, \quad x_3^{(3)} = 1,2028.$$

Од тоа што

$$\varepsilon_3 \leq 0,0034 < 0,005 = 0,5 \cdot 10^{-2}$$

заклучуваме дека е постигната бараната точност. Според тоа, приближното решение на дадениот систем е:

$$x_1^* = -0,62, \quad x_2^* = 0,03, \quad x_3^* = 1,20. \quad \blacktriangle$$

Забелешка 3.7. Од практични причини, проверката за големината на грешката не мора да се прави по секоја итерација. Ако решенијата добиени од две последователни итерации не се совпааат до потребниот број сигурни цифри, тогаш многу веројатно е дека бараната точност нема да биде задоволена, па се продолжува со наредната итерација. Така, во претходниот пример, не мора да се проверуваат ε_1 и ε_2 бидејќи $x_i^{(1)}$ не се совпаѓа со $x_i^{(0)}$, $i \in \{1,2,3\}$ во првите две децимали, односно $x_i^{(2)}$ не се совпаѓа со $x_i^{(1)}$, $i \in \{1,3\}$ во првите две децимали. Математичкото објаснување на оваа дискусија е дека во случај кога

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \text{ важи } \frac{\alpha}{1-\alpha} \leq 1,$$

па за грешката ќе важи

$$\varepsilon_k = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} |x_i - x_i^{(k)}| \leq \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|.$$

Пример 3.16. Со примена на методот на Гаус - Зајдел да се реши дадениот систем со три итерации и да се оцени направената грешка.

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,30x_2 = 7 \\ -0,4x_1 + 0,85x_2 = 6,5 \end{cases}.$$

Закружувањето на меѓурезултатите да се врши на три децимали.

Решение. Забележуваме дека и кај овој систем дијагоналните коефициенти се вредности од интервалот $(-1,1)$, па системот ќе го трансформираме според формулата (3.7).

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,30x_2 = 7 & / +0,20x_1 \\ -0,4x_1 + 0,85x_2 = 6,5 & / +0,15x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,2x_1 - 0,3x_2 + 7 \\ x_2 = 0,4x_1 + 0,15x_2 + 6,5 \end{cases}.$$

Според тоа, итеративната низа ја формираме на следниов начин:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0,2x_1^{(k)} - 0,3x_2^{(k)} + 7 \\ x_2^{(k+1)} = 0,4x_1^{(k+1)} + 0,15x_2^{(k)} + 6,5 \end{cases}.$$

Го проверуваме првиот услов за конвергенција од теоремата 3.1:

$$|0,2| + |-0,3| = 0,5 < 1,$$

$$|0,4| + |0,15| = 0,55 < 1,$$

од каде

$$\alpha = \max\{0,5; 0,55\} = 0,55.$$

Преминуваме кон наоѓање на приближното решение. За нулта итерација избираме

$$x_1^{(0)} = 7, x_2^{(0)} = 6,5.$$

За првите три итерации добиваме:

$$x_1^{(1)} = 0,2x_1^{(0)} - 0,3x_2^{(0)} + 7 = 6,45,$$

$$x_2^{(1)} = 0,4x_1^{(1)} + 0,15x_2^{(0)} + 6,5 = 10,055.$$

$$x_1^{(2)} = 0,2x_1^{(1)} - 0,3x_2^{(1)} + 7 = 5,274,$$

$$x_2^{(2)} = 0,4x_1^{(2)} + 0,15x_2^{(1)} + 6,5 = 10,118.$$

$$x_1^{(3)} = 0,2x_1^{(2)} - 0,3x_2^{(2)} + 7 = 5,019,$$

$$x_2^{(3)} = 0,4x_1^{(3)} + 0,15x_2^{(2)} + 6,5 = 10,025.$$

За да ја оцениме грешката на третата итерација, прво пресметуваме:

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,255, \quad |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0,093,$$

$$\alpha = \max\{0,255; 0,093\} = 0,255.$$

Тогаш,

$$\varepsilon_3 \leq \frac{0,55}{1 - 0,55} \cdot 0,255 = 0,31167 < 0,5 \cdot 10^0.$$

Според најдената грешка, добиеното приближно решение е:

$$x_1^* = 5, x_2^* = 10,$$

што се совпаѓа со точното решение најдено според некој од точните методи.

Со примена на модулот **GausSeidel**, по 10 итерации се добива низата приближувања прикажана на сликата 3.13.

```

A = {{.8, .3}, {-0.4, .85}};
b = Transpose[{{7, 6.5}}];
P = Transpose[{{0, 0}}];
GaussSeidel[A, b, P, 10]

x0 = {{0}, {0}}
x1 = {{8.75}, {11.7647}}
x2 = {{4.33824}, {9.68858}}
x3 = {{5.11678}, {10.055}}
x4 = {{4.97939}, {9.9903}}
x5 = {{5.00364}, {10.0017}}
x6 = {{4.99936}, {9.9997}}
x7 = {{5.00011}, {10.0001}}
x8 = {{4.99998}, {9.99999}}
x9 = {{5.}, {10.}}
x10 = {{5.}, {10.}}
{{5.}, {10.}}

```

Слика 3.13

Забелешка 3.8. Многу значајна особина на методите на Јакоби и Гаус - Зајдел е нивната способност за самокорекција, што се состои во следново: ако се направи грешка во пресметките, самиот метод ја исправва грешката во следните итерации, бидејќи итеративниот процес конвергира за произволно почетно приближување.

Нагласуваме дека покрај методите на Јакоби и Гаус - Зајдел, постојат и други итеративни методи за решавање системи линеарни равенки кои не се обработуваат во оваа книга.

4. Решавање нелинеарни системи

4.1. Метод на прости итерации

Системот

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases},$$

во кој F_1, F_2, \dots, F_m се реални функции од n реални променливи, од кои барем една функција е нелинеарна, се нарекува **нелинеарен систем од m равенки со n непознати**. Нумеричките методи кои ќе ги користиме, ќе бидат објаснети на наједноставниот нелинеарен систем од две равенки со две непознати,

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}. \quad (4.1)$$

Да претпоставиме дека овој систем има **изолирано решение** (x, y) , т.е. постои затворена област $D \subseteq \mathbb{R}^2$ во која ова решение е единствено. Секој систем од обликот (4.1) може да се трансформира во следниов облик:

$$\begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases}' \quad (4.2)$$

каде што f и g се исто така реални функции од две реални променливи дефинирани на D . Притоа, претставувањето на системот (4.1) во облик (4.2) не е единствено.

Ја формираме итеративната низа $\{(x_n, y_n)\}$ на следниов начин:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Почетната, односно нултата итерација (x_0, y_0) , се определува графички или врз основа на природата на проблемот. За да се определи графички почетната итерација, потребно е да се локализираат пресеците на кривите $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$.

Во пакетот Mathematica, наједноставен начин да се локализираат пресеците на двете криви, посебно во случај кога е невозможно или непрактично нивното експлицитно изразување, е со користење на наредбата

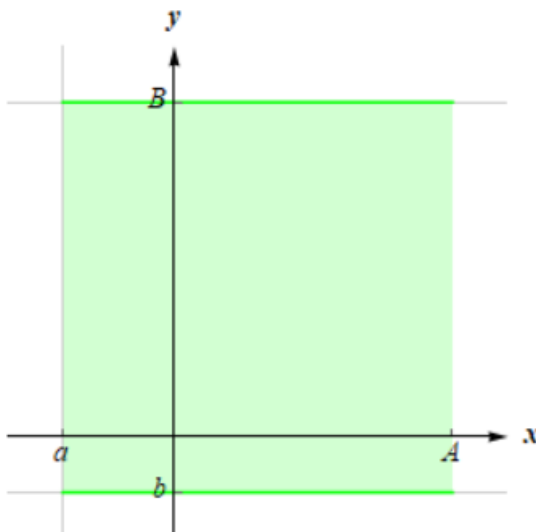
`ContourPlot[{f1==g1,f2==g2},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]`,

каде што f_1, g_1, f_2, g_2 се функции од две променливи x и y .

Понатаму, заради едноставност, ќе сметаме дека затворената област $D \subseteq \mathbb{R}^2$ е правоаголникот

$$D = \{x = (x, y) \mid a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\},$$

претставен на сликата 4.1.



Слика 4.1

Нека d е метрика со која \mathbb{R}^2 е комплетен метрички простор. Тогаш со истата метрика d , и правоаголната област D е комплетен метрички простор, па од теоремата 1.7 на Банах за фиксна точка, се добива следново тврдење:

Теорема 4.1. Нека пресликувањето

$$T: D \rightarrow \mathbb{R}^2, T(\mathbf{x}) = (f(x, y), g(x, y)),$$

е контракција на D , т.е. го задоволува условот:

$$(\exists q \in (0,1)) (\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D)$$

$$d(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq qd(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.4)$$

Тогаш постои единствено решение $\mathbf{x} = (x, y)$ на системот (4.2) во D , кое се добива како граница на итеративната низа (4.3) за произволен избор на почетната итерација $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$. Притоа за $n = 1, 2, \dots$ важат следниве неравенства:

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \leq \frac{q}{1-q} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1}), \quad (4.5)$$

и

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0). \quad (4.6)$$

Во случај кога d е Евклидската метрика во \mathbb{R}^2 , како последица од теоремата 4.1 ја добиваме следнава теорема во која се дадени услови за конвергенција на итеративната низа (4.3) кон точното решение на системот, кои се поедноставни за примена отколку условот (4.4) од теоремата 4.1.

Теорема 4.2. Нека системот (4.1), односно (4.2) има единствено решение (x, y) во затворената област

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

и нека важат следниве услови:

- 1) Функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ се дефинирани и имаат непрекинати парцијални изводи на D ,
- 2) $(x_i, y_i) \in D$, за $i = 0, 1, 2, \dots$,
- 3) $\exists q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$, така што $\forall (x, y) \in D$ важи

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right|^2 \leq q^2 < 1.$$

Тогаш итеративната низа (4.3) конвергира кон решението $\mathbf{x} = (x, y)$ на системот (4.2), за произволен избор на почетната итерација $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$.

Доказ. Ќе покажеме дека пресликувањето

$$T(\mathbf{x}) = (f(x, y), g(x, y))$$

е контракција на областа D , односно $\exists q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, така што за секои $(x', y') \in D$ и $(x'', y'') \in D$ важи условот (4.4), т.е. неравенството:

$$\begin{aligned} d\left((f(x', y'), g(x', y')), (f(x'', y''), g(x'', y''))\right) &\leq \\ &\leq qd((x', y'), (x'', y'')). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Притоа d е Евклидското растојание за точки од \mathbb{R}^2 , па

$$\begin{aligned} d\left((f(x', y'), g(x', y')), (f(x'', y''), g(x'', y''))\right) &= \\ = \sqrt{(f(x', y') - f(x'', y''))^2 + (g(x', y') - g(x'', y''))^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Од теоремата 1.6, следува дека постои точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, така што

$$\begin{aligned} |f(x', y') - f(x'', y'')| &= \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x' - x'') + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y' - y'') \right| = \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right| |x' - x''| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right| |y' - y''|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ако го искористиме неравенството на Коши - Буњаковски,

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2), \text{ за } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

добиваме:

$$\left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right| |x' - x''| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right| |y' - y''| \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 \right) (|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2). \quad (4.10)$$

Од неравенствата (4.9) и (4.10) се добива:

$$\begin{aligned} & (f(x', y') - f(x'', y''))^2 \leq \\ & \leq \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 \right) (|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогно се добива и неравенството:

$$\begin{aligned} & (g(x', y') - g(x'', y''))^2 \leq \\ & \leq \left(\left| \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 \right) (|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

каде што (\bar{x}, \bar{y}) е некоја точка од областа D .

Од релациите (4.8), (4.11) и (4.12), како и од третиот услов од теоремата 4.2, се добива:

$$\begin{aligned} & d\left((f(x', y'), g(x', y')), (f(x'', y''), g(x'', y''))\right) \leq \\ & \leq \sqrt{\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \right|^2} \cdot \\ & \quad \cdot \sqrt{|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2} \leq \\ & \leq \sqrt{q^2(|x' - x''|^2 + |y' - y''|^2)} = \\ & = qd((x', y'), (x'', y'')), \end{aligned}$$

со што всушност го покажавме неравенството (4.7). Следува дека пресликувањето T е контракција, па според теоремата 4.1, итеративната низа (4.3) конвергира кон точното решение (x, y) . ■

Методот со кој се конструира итеративната низа (4.3) е познат како **метод на прости итерации** за решавање нелинеарни системи од две равенки со две непознати. Овој метод претставува обопштување на методот на прости итерации за решавање равенка со една непозната

(види поглавје 2.3). При трансформација на нелинеарниот систем од обликот (4.1) во облик (4.2) треба да се води сметка за исполнување на условите за конвергенција на итеративната низа (4.3).

Забелешка 4.1. Условот 3) во теоремата 4.2 може да се замени со некој од следниве услови:

$$3') \exists q_1, q_2 \in (0,1), \forall (x, y) \in D,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right| \leq q_1 < 1,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right| \leq q_2 < 1,$$

$$3'') \exists q_1, q_2 \in (0,1), \forall (x, y) \in D,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq q_1 < 1,$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right| \leq q_2 < 1.$$

При проценувањето на грешката со примена на формулите (4.5) и (4.6), се зема $q = \max\{q_1, q_2\}$. При решавањето задачи најчесто ќе го користиме условот 3').

Забелешка 4.2. Формулите (4.5) и (4.6) всушност се користат за оценување на точноста ε_n на n -тото приближување на решението на даден систем. За систем од две равенки со две непознати x и y , кога се користи Менхетен метриката, која е еквивалентна на Евклидската метрика, формулите (4.5) и (4.6) го добиваат следниов облик, соодветно:

$$\varepsilon_n = |x - x_n| + |y - y_n| \leq \frac{q}{1 - q} (|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|),$$

односно

$$\varepsilon_n = |x - x_n| + |y - y_n| \leq \frac{q^n}{1 - q} (|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|),$$

каде што $\mathbf{x} = (x, y)$ е точното решение,

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \text{ и } \mathbf{x}_1 = (f(\mathbf{x}_0), g(\mathbf{x}_0)) = (x_1, y_1)$$

се соодветно нултата и првата итерација, а

$$\mathbf{x}_n = (x_n, y_n) \text{ и } \mathbf{x}_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$$

се последните две добиени итерации.

Забелешка 4.3. Итеративната низа $\{(x_n, y_n)\}$ може да се формира и на следниов начин:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_{n+1}, y_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Во овој случај методот е познат како **модифициран метод на прости итерации** или **метод на Зајдел**.

Забелешка 4.4. Во случаи кога проверката на ограниченоста на сумите

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \text{ и } \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|$$

на целата област D е отежната или невозможна, таа се прави само за почетното приближување. Се разбира, ова е понепрецизен пристап отколку проверка на ограниченоста на целата област, но сепак многу попрактичен.

Со наредбата

`NSolve[expr, vars],`

каде што $expr$ е систем равенки, а $vars$ се непознатите, во Mathematica може нумерички да се реши систем линеарни, полиномни и некои поедноставни трансцедентни равенки. Притоа се добиваат сите можни решенија на дадениот систем.

За разлика од неа, наредбата

`FindRoot[{eqn1, eqn2}, {x, x0}, {y, y0}]`

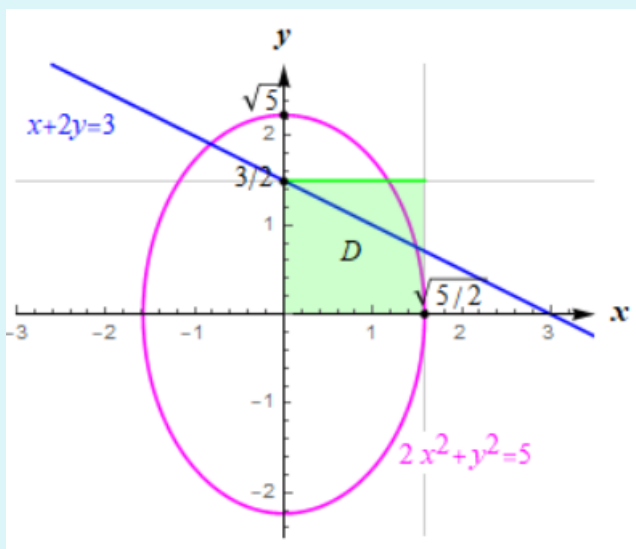
ги бара решенијата локално, со однапред зададена почетна апроксимација (x_0, y_0) .

Пример 4.1. Даден е системот

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Графички да се определи нултата итерација, а потоа со методот на прости итерации да се најде решението на системот за кое $x > 0$, со точност $0,5 \cdot 10^{-1}$.

Решение. Графикот на втората крива од системот е правата $y = \frac{-x+3}{2}$, а на првата крива е елипсата $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{5} = 1$ (слика 4.2).



Слика 4.2

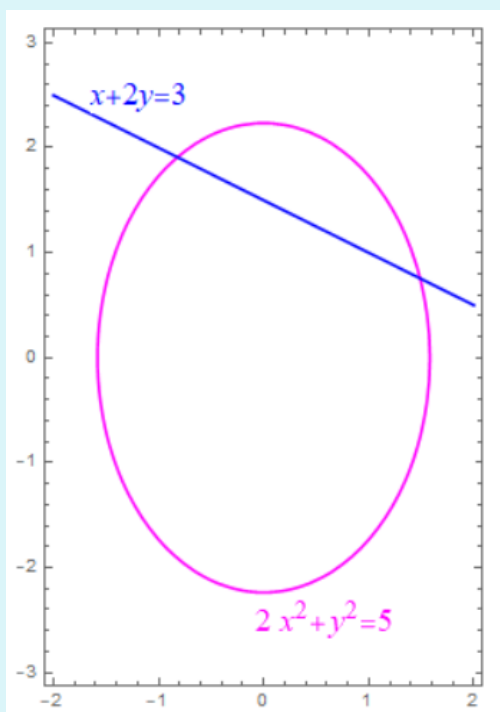
Пресеците на правата и елипсата се точните решенија на дадениот систем. Потребно е приближно да го определиме решението (x, y) кое се наоѓа во првиот квадрант. Избираме затворена област во која се наоѓа бараното решение (x, y) на следниов начин:

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{2}}, 0 \leq y \leq \frac{3}{2} \right\}.$$

За локализација на решението и определување на нултата итерација, може да се искористи следнава наредба во Mathematica:

```
ContourPlot[{2 x^2 + y^2 == 5, x + 2 y == 3}, {x, -2, 2}, {y, -3, 3}]
```

со чие извршување се добива излез прикажан на сликата 4.3.



Слика 4.3

За почетна итерација избираме $(x_0, y_0) = (1, 1) \in D$. Системот го трансформираме на следниов начин:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{5 - y^2}{2}} = f(x, y) \\ y = \frac{3 - x}{2} = g(x, y) \end{cases}.$$

Проверуваме дали се исполнети условите за конвергенција дадени во теоремата 4.2:

1) Првите парцијални изводи на функцијата $f(x, y)$ се:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5-y^2}{2}}} \cdot \left(-\frac{y}{2}\right).$$

Забележуваме дека $\frac{\partial f}{\partial y}$ има прекин во точките од облик $(x, \pm\sqrt{5})$, $x \in \mathbb{R}$, но овие точки не припаѓаат во областа D . Првите парцијални изводи на функцијата $g(x, y)$ се:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Според тоа, сите први изводи на функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ постојат и се непрекинати на областа D .

2) Почетната итерација ја избравме така што важи $(x_0, y_0) \in D$. По секоја итерација, се проверува дали $(x_i, y_i) \in D$, $i = 1, 2, \dots$

3) Важат и следниве неравенства:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = 0 + \frac{1}{2} < 1, \forall (x, y) \in D,$$

$$\left(\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|\right)\Bigg|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{|y|}{2\sqrt{\frac{5-y^2}{2}}}\Bigg|_{\substack{x=1 \\ y=1}} + 0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} < 1.$$

Заклучуваме дека $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, па $q = \max\{q_1, q_2\} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right\} = \frac{1}{2}$.

Формираме итеративна низа $\{(x_n, y_n)\}$ на следниов начин:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{\frac{5-y_n^2}{2}} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \frac{3-x_n}{2} = g(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Бидејќи решението треба да го пресметаме со точност $0,5 \cdot 10^{-1}$, во текот на пресметките треба да заокружуваме на најмалку 2 децимали. Заокружувањето се врши на 4 децимали, за да не се акумулира грешката на заокружување. За првата итерација добиваме:

$$x_1 = \sqrt{\frac{5 - 1^2}{2}} = \sqrt{2} = 1,4142, \quad y_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

Втората итерација е:

$$x_2 = \sqrt{\frac{5 - 1^2}{2}} = 1,4142, \quad y_2 = \frac{3 - 1,4142}{2} = 0,7929,$$

и таа припаѓа во D , па за грешката добиваме:

$$\varepsilon_2 = \frac{1/2}{1 - 1/2} (|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) = 0,2071 > 0,05.$$

Добиената грешка е поголема од бараната точност, па поради тоа постапката ја продолжуваме.

За третата итерација имаме:

$$x_3 = \sqrt{\frac{5 - 0,7929^2}{2}} = 1,4784, \quad y_3 = \frac{3 - 1,4784}{2} = 0,7608.$$

Таа исто така припаѓа во D , па

$$\varepsilon_3 = |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| = 0,0963 > 0,05.$$

Постапката ја продолжуваме и ја определуваме четвртата итерација:

$$x_4 = 1,4868, \quad y_4 = 0,7566.$$

Притоа $(x_4, y_4) \in D$, а за грешката добиваме

$$\varepsilon_4 = 0,0126 < 0,05,$$

од каде заклучуваме дека бараното приближно решение со една сигурна децимална цифра е:

$$x^* = 1,4, \quad y^* = 0,7.$$

Со примена на наредбата **NSolve** во Mathematica се добиваат двете решенија на системот, како што може да се види на сликата 4.4.

```
NSolve[2 x^2 + y^2 == 5 && x + 2 y == 3, {x, y}]
{{x -> -0.821367, y -> 1.91068}, {x -> 1.48803, y -> 0.755983}}
```

Слика 4.4

Ако пак се примени наредбата **FindRoot** (види слика 4.5), избирајќи почетно приближување $x_0 = 0, y_0 = 2$, се добива решението:

$$x^* = -0,821367, \quad y^* = 1,91068.$$

Со избор на почетно приближување $x_0 = 1, y_0 = 1$ се добива решението:

$$x^* = 1,48803, \quad y^* = 0,755983.$$

```
FindRoot[2 x^2 + y^2 == 5 && x + 2 y == 3, {{x, 0}, {y, 2}}]
{x -> -0.821367, y -> 1.91068}

FindRoot[2 x^2 + y^2 == 5 && x + 2 y == 3, {{x, 1}, {y, 1}}]
{x -> 1.48803, y -> 0.755983}
```

Слика 4.5 ▲

Пример 4.2. Со примена на методот на Зајдел, да се реши системот

$$\begin{cases} 2x = \sin \frac{1}{2}(x - y) \\ 2y = \cos \frac{1}{2}(x - y) \end{cases},$$

со точност $0,5 \cdot 10^{-3}$, ако за почетната итерација се земат аглиите $x_0 = -0,16 \text{ rad}, y_0 = 0,49 \text{ rad}$.

Решение. Системот го трансформираме на следниов начин:

$$\begin{cases} 2x = \sin \frac{1}{2}(x - y) \\ 2y = \cos \frac{1}{2}(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2}(x - y) \right) = f(x, y) \\ y = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{1}{2}(x - y) \right) = g(x, y) \end{cases}.$$

Ќе ги провериме условите за конвергенција на произволна затворена околина D на точката (x_0, y_0) . Изборот за произволна околина е оправдан заради добрите особини на функциите синус и косинус, во смисла на нивна непрекинатост и ограниченост, како и непрекинатост и ограниченост на нивните парцијални изводи на целата реална рамнина.

1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{4} \cos \left(\frac{1}{2}(x - y) \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{4} \cos \left(\frac{1}{2}(x - y) \right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{4} \sin \left(\frac{1}{2}(x - y) \right), \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{4} \sin \left(\frac{1}{2}(x - y) \right).$$

Заклучуваме дека сите први парцијални изводи на $f(x, y)$ и $g(x, y)$ постојат и се непрекинати на \mathbb{R}^2 .

2) За секоја итерација треба да важи $(x_i, y_i) \in D$, но бидејќи D е произволна затворена околина на точката (x_0, y_0) , после секоја итерација само се проверува дали (x_i, y_i) е доволно блиску до (x_0, y_0) .

3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ важи:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1.$$

Тогаш

$$q = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Ќе го користиме методот на Зајдел, што значи итеративната низа ќе биде од облик:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}(x_n - y_n) = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}(x_{n+1} - y_n) = g(x_{n+1}, y_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Добиените итерации се дадени во табелата 4.1.

Совпаѓањето на првите три децимали во третите и вторите приближувања нè наведува на запирање на пресметувањата после третата итерација, но ако ја пресметаме грешката во тој чекор, таа изнесува:

$$\varepsilon_3 = \frac{1/2}{1 - 1/2} (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) = 0,000635 > 0,0005 = 0,5 \cdot 10^{-3},$$

заради што продолжуваме со уште една итерација.

n	x_n	y_n
0	-0,160000	0,490000
1	-0,159654	0,473853
2	-0,155742	0,475430
3	-0,155187	0,475350
4	-0,155036	0,475368

Табела 4.1

По четвртата итерација, ја добиваме бараната точност:

$$\varepsilon_4 = |x_4 - x_3| + |y_4 - y_3| = 0,000169 < 0,0005 = 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Според тоа, приближното решение на системот со три сигурни децимални цифри е:

$$x^* = -0,155, \quad y^* = 0,475.$$

Да забележиме дека наредбата **NSolve** во Mathematica не дава решение на овој систем, за разлика од наредбата **FindRoot** со чија примена се добива излезот претставен на сликата 4.6.

```
FindRoot[2 x == Sin[.5 (x - y)] && 2 y == Cos[.5 (x - y)],
  {{x, -.16}, {y, .49}}]
{x -> -0.154995, y -> 0.47537}
```

Слика 4.6 ▲

Пример 4.3. Даден е системот

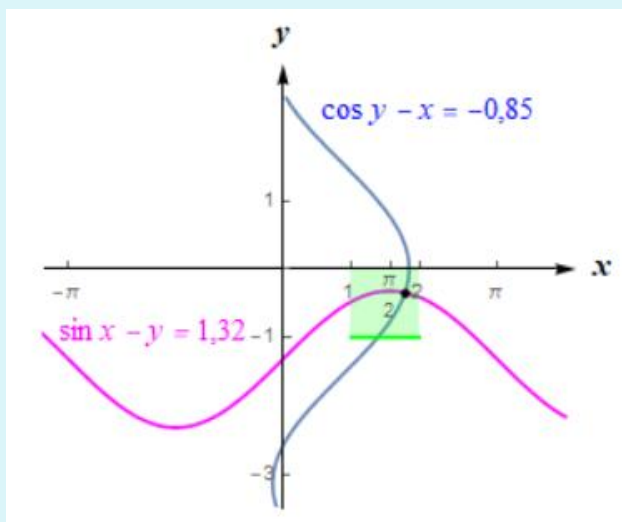
$$\begin{cases} \sin x - y = 1,32 \\ \cos y - x = -0,85 \end{cases}$$

Да се определи графички почетната итерација, а потоа со методот на Зајдел да се определи решението на системот со четири сигурни децимали, т.е. со точност $0,5 \cdot 10^{-4}$.

Решение. За да ја определиме почетната итерација, во ист координатен систем ги скицираме графиците на функциите $y = \sin x - 1,32$ и $y = \arccos(x - 0,85)$ (слика 4.7).

Од графичкиот приказ на системот, може да забележиме дека неговото решение се наоѓа во близина на точката $(\pi/2, -0,32)$. Оваа точка ја земаме за почетна итерација, а правоаголникот во кој го бараме решението го избираме на следниов начин:

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0\}.$$



Слика 4.7

За да ги избереме функциите f и g , ќе го трансформираме дадениот систем на следниов начин:

$$\begin{cases} \cos y - x = -0,85 \\ \sin x - y = 1,32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y + 0,85 = f(x, y) \\ y = \sin x - 1,32 = g(x, y) \end{cases}$$

Проверуваме дали за вака избраните функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ се исполнети условите за конвергенција:

$$1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Сите први парцијални изводи на $f(x, y)$ и $g(x, y)$ постојат и се непрекинати на целата реална рамнина, па според тоа и на областа D .

2) $(x_0, y_0) \in D$ (по секоја итерација, треба да се проверува дали $(x_i, y_i) \in D$).

3) Ограниченоста на сумите

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \text{ и } \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|$$

на областа D ќе ја провериме само во почетната итерација.

$$\left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \right) \Big|_{\substack{x=\pi/2 \\ y=-0,32}} = |\cos x| \Big|_{\substack{x=\pi/2 \\ y=-0,32}} = 0 < 1,$$

$$\left(\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \right) \Big|_{\substack{x=\pi/2 \\ y=-0,32}} = |\sin y| \Big|_{\substack{x=\pi/2 \\ y=-0,32}} = 0,3146 < 1.$$

Тогаш $q = \max\{0; 0,3146\} = 0,3146$.

Користејќи го модифицираниот метод на прости итерации, ја формираме итеративната низа:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos y_n + 0,85 = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \sin x_{n+1} - 1,32 = g(x_{n+1}, y_n) \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots$$

За почетна итерација избираме:

$$x_0 = \frac{\pi}{2} = 1,5707963, \quad y_0 = -0,32.$$

Во табелата 4.2 се дадени пет члена на итеративната низа.

n	x_n	y_n
0	1,5707963	-0,3200000
1	1,7992354	-0,3459789
2	1,7907439	-0,3440911
3	1,7913824	-0,3442036
4	1,7913354	-0,3442203

Табела 4.2

Бидејќи во последните две приближувања се совпаѓаат четири децимали, овде запираме со пресметките. Грешката ја пресметуваме според формулата

$$\varepsilon_4 = \frac{q}{1-q} (|x_4 - x_3| + |y_4 - y_3|) = 0,29 \cdot 10^{-4} < 0,5 \cdot 10^{-4},$$

што значи дека x_4 и y_4 имаат четири сигурни децимали, т.е. бараното приближно решение е:

$$x^* = 1,7913, \quad y^* = -0,3442.$$

И за овој систем, во Mathematica, наредбата **NSolve** не дава решение, за разлика од наредбата **FindRoot** со чија примена се добива излезот претставен на сликата 4.8.

```
FindRoot[Cos[y] - x == -.85 && Sin[x] - y == 1.32, {x, Pi/2}, {y, -.32}]
{x -> 1.79134, y -> -0.344221}
```

Слика 4.8 ▲

4.2. Метод на Њутн - Рафсон

И овој метод ќе го примениме на нелинеарен систем од две равенки со две непознати

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

кој има изолирано решение (x, y) . Нека функциите F и G се дефинирани и имаат непрекинати први парцијални изводи во околина на точното изолирано решение (x, y) и нека почетното приближување (x_0, y_0) се наоѓа во околина на (x, y) . Од теоремата на Тејлор 1.6 следува:

$$0 = F(x, y) \approx F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$0 = G(x, y) \approx G(x_0, y_0) + \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

од каде што го добиваме следниов систем од две линеарни равенки со две непознати $x - x_0$ и $y - y_0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \approx -F(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \approx -G(x_0, y_0) \end{cases}. \quad (4.13)$$

Детерминантата на системот (4.13) е

$$J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Доколку $J(x_0, y_0) \neq 0$, тогаш системот има единствено решение. Детерминантата по непознатата $x - x_0$ е

$$\begin{vmatrix} -F(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -G(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} F(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ G(x_0, y_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\Delta_x(x_0, y_0),$$

а детерминантата по непознатата $y - y_0$ е

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & -F(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & -G(x_0, y_0) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & F(x_0, y_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0, y_0) & G(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\Delta_y(x_0, y_0).$$

Според Крамеровите формули, за решението на системот (4.13) добиваме:

$$x - x_0 \approx -\frac{\Delta_x(x_0, y_0)}{J(x_0, y_0)} \quad \text{од каде што следува } x \approx x_0 - \frac{\Delta_x(x_0, y_0)}{J(x_0, y_0)},$$

$$y - y_0 \approx -\frac{\Delta_y(x_0, y_0)}{J(x_0, y_0)} \quad \text{од каде што следува } y \approx y_0 - \frac{\Delta_y(x_0, y_0)}{J(x_0, y_0)}.$$

Ја формираме итеративната низа на следниов начин:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{\Delta_x(x_n, y_n)}{J(x_n, y_n)} \\ y_{n+1} = y_n - \frac{\Delta_y(x_n, y_n)}{J(x_n, y_n)} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

со почетна итерација (x_0, y_0) .

Се покажува дека, ако се исполнети следниве услови:

- 1) функциите F и G се дефинирани и имаат непрекинати први парцијални изводи во околина на изолираното решение (x, y) ,
- 2) $J(x_n, y_n) \neq 0, \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,
- 3) (x_0, y_0) е доволно блиску до (x, y) , т.е. во околина на (x, y) ,

тогаш итеративната низа (4.14) конвергира кон точното решение (x, y) на дадениот систем.

Грешката ε_n на n -тата итерација (x_n, y_n) се оценува според следнава формула:

$$\varepsilon_n = |x - x_n| + |y - y_n| \leq |x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|. \quad (4.15)$$

Низата (4.14), условите за нејзина конвергенција, како и формулата за грешка (4.15), го опишуваат **методот на Њутн - Рафсон** за нелинеарни системи две равенки со две непознати.

Забелешка 4.5. Понекогаш, за да се избегне пресметувањето на вредноста $J(x_n, y_n)$ во секоја итерација, а со тоа да се намали времето за пресметување, се користи модифициран метод, според кој итеративната низа се дефинира на следниов начин:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{\Delta_x(x_n, y_n)}{J(x_0, y_0)} \\ y_{n+1} = y_n - \frac{\Delta_y(x_n, y_n)}{J(x_0, y_0)} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Итеративната низа $\{(x_n, y_n)\}$ може да се формира и на следниов начин, што претставува подобрување на методот на Њутн - Рафсон:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{\Delta_x(x_n, y_n)}{J(x_n, y_n)} \\ y_{n+1} = y_n - \frac{\Delta_y(x_{n+1}, y_n)}{J(x_{n+1}, y_n)} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пример 4.4. Со методот на Њутн - Рафсон да се реши системот од примерот 4.3, т.е.

$$\begin{cases} \sin x - y = 1,32 \\ \cos y - x = -0,85 \end{cases}$$

со три итерации и да се оцени грешката. За почетната итерација да се земе $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = -0,32$. Закружувањето на меѓурезултатите да се врши на шест децимали.

Решение. Системот го трансформираме на следниов начин:

$$\begin{cases} \sin x - y = 1,32 \\ \cos y - x = -0,85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x, y) = \sin x - y - 1,32 = 0 \\ G(x, y) = \cos y - x + 0,85 = 0 \end{cases}$$

Почетната итерација е $x_0 = \frac{\pi}{2} = 1,570796$, $y_0 = -0,32$.

Го проверуваме првиот услов за конвергенција. Првите парцијални изводи на функциите F и G се:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -\sin x,$$

па заклучуваме дека тие постојат и се непрекинати за секој пар реални броеви (x, y) .

Користејќи ја релацијата (4.14) ја формираме итеративната низа $\{(x_n, y_n)\}$, каде што

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \cos x & -1 \\ -1 & -\sin y \end{vmatrix}, \quad \Delta_x(x, y) = \begin{vmatrix} \sin x - y - 1,32 & -1 \\ \cos y - x + 0,85 & -\sin y \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y(x, y) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x - y - 1,32 \\ -1 & \cos y - x + 0,85 \end{vmatrix}.$$

Од тоа што

$$J(x_0, y_0) = -\sin y_0 \cos x_0 - 1 = -1 \neq 0,$$

следува дека е задоволен и вториот услов за конвергенција за почетната итерација (x_0, y_0) . За $\Delta_x(x_0, y_0)$ и $\Delta_y(x_0, y_0)$ добиваме:

$$\begin{aligned} \Delta_x(x_0, y_0) &= (\sin x_0 - y_0 - 1,32)(-\sin x_0) + \\ &+ \cos y_0 - x_0 + 0,85 = 0,228439 \end{aligned}$$

и

$$\Delta_y(x_0, y_0) = \cos x_0 (\cos y_0 - x_0 + 0,85) + (\sin x_0 - y_0 - 1,32) = 0,$$

па за првата итерација имаме:

$$x_1 = x_0 - \frac{\Delta_x(x_0, y_0)}{J(x_0, y_0)} = 1,799235$$

и

$$y_1 = y_0 - \frac{\Delta_y(x_0, y_0)}{J(x_0, y_0)} = -0,32.$$

Ова решение е доволно блиску до (x_0, y_0) .

За втората итерација имаме:

$$\begin{aligned} J(x_1, y_1) &= -1,071236 \neq 0, \quad \Delta_x(x_1, y_1) = -8,177 \cdot 10^{-3}, \\ \Delta_y(x_1, y_1) &= -0,025979, \end{aligned}$$

па следува $x_2 = 1,791602, y_2 = -0,344251$.

Постапувајќи на ист начин, ја определуваме третата итерација:

$$x_3 = 1,791340, \quad y_3 = -0,344221.$$

За грешката се добива:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| = 0,000262 + 0,000030 = \\ &= 0,000292 \leq 0,0005 = 0,5 \cdot 10^{-3}, \end{aligned}$$

од каде заклучуваме дека бараното приближно решение е со три сигурни децимали, т.е. $x^* = 1,791, y^* = -0,344$. ▲

Забелешка 4.6. Методот на прости итерации, методот на Зајдел, како и Њутн - Рафсоновиот метод аналогно важат и за нелинеарен систем од n равенки со n непознати.

5. Интерполација и обратна интерполација

5.1. Интерполација и екстраполација

При решавање практични проблеми често се среќаваме со функции чии аналитички изрази се многу сложени. Понекогаш, аналитичкиот израз за функцијата не е познат, туку функцијата е дадена само со нејзините вредности во конечен број точки, односно табеларно. Поради тоа, потребно е таквата функција $f(x)$ да се замени со поедноставна функција $F(x)$ која е доволно блиска до $f(x)$ на некое подмножество од областа на дефинираност D_f на функцијата $f(x)$. Оваа постапка се нарекува **апроксимација** на функцијата $f(x)$ со функција $F(x)$. Функцијата $F(x)$ се нарекува **апроксимациска функција** на функцијата $f(x)$.

Во зависност од тоа како е зададена $f(x)$ и колку бараната функција $F(x)$ е блиску до $f(x)$ на сегментот $[a, b] \subseteq D_f$, разликуваме повеќе видови апроксимации:

- 1) Ако $F(x)$ се избере така што бројот

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - F(x)|$$

да е минимален, тогаш станува збор за **рамномерна апроксимација**.

- 2) Ако $F(x)$ се избере така што вредноста на интегралот

$$\int_a^b |f(x) - F(x)|^2 dx,$$

односно сумата

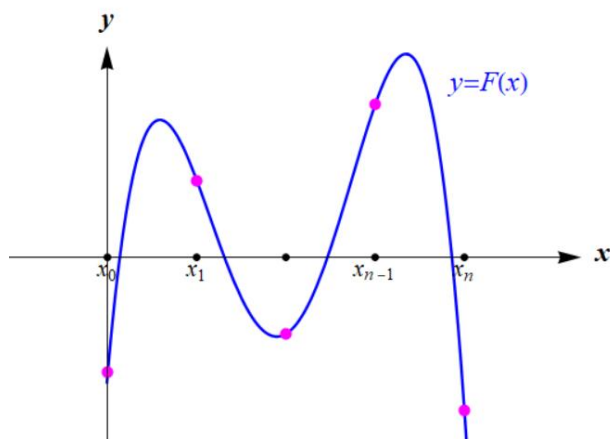
$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - F(x_i)|^2, \quad x_i \in [a, b],$$

да е минимална, тогаш станува збор за **апроксимација во средно**, односно **апроксимација со метод на најмали квадрати**.

- 3) Ако пак, $F(x)$ се избере така што да се совпаѓа со $f(x)$ во $n+1$ точки од сегментот $[a, b]$, т.е. да важи:

$$F(x_i) = f(x_i), \quad x_i \in [a, b], \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

тогаш апроксимацијата се вика **интерполација**, функцијата $F(x)$ се нарекува **интерполациска функција** на функцијата $f(x)$, а точките $M_i(x_i, f(x_i))$, каде што $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, се викаат **точки** или **јазли на интерполацијата**. Да забележиме дека интерполациската функција не е единствена.



Слика 5.1

Геометриски, интерполацијата е претставена на сликата 5.1. Графикот на интерполациската функција $y = F(x)$ минува низ точките:

$$M_i(x_i, f(x_i)), \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Од сите видови апроксимационски функции, најчесто се користат алгебарските полиноми. Причината за тоа се содржи во следново тврдење.

Теорема 5.1 (на Ваерштрас). Ако функцијата $f(x)$ е непрекината на сегментот $[a, b]$, тогаш за секој $\varepsilon > 0$, постои $n \in \mathbb{N}$ и полином $P_n(x)$, така што за секој x од $[a, b]$ важи:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Теоремата 5.1 укажува на тоа дека за секоја непрекината функција може да се најде полином кој е произволно близок до неа. Таа има само егзистенцијален карактер, бидејќи не дава метод за конструкција на ваквиот полином.

Ако интерполациската функција $F(x)$ е полином, тогаш тој се нарекува **интерполациски полином**. Ќе покажеме дека за секој $n \in \mathbb{N}$,

интерполацискиот полином од n -ти степен е единствен. Навистина, нека

$$F(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

е интерполациски полином од n -ти степен за функцијата $f(x)$. Тогаш од условот

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

добиваме

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) = y_0 \\ P_n(x_1) = f(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ P_n(x_n) = f(x_n) = y_n \end{cases},$$

т.е. систем од $n + 1$ линеарни равенки со $n + 1$ непознати a_0, a_1, \dots, a_n :

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}.$$

Детерминантата на овој систем е познатата Вандермондова детерминанта

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Од тоа што $x_i \neq x_j$, за $i \neq j$, следува дека детерминантата на системот е различна од нула, па системот има единствено решение, т.е. постои единствен интерполациски полином од n -ти степен.

Забелешка 5.1. Проблемот на интерполација може да се обопшти ако во точките x_0, x_1, \dots, x_n , покрај вредностите на функцијата $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, се дадени и вредностите на изводите до m -ти ред, т.е. дадени се:

$$\begin{aligned}
 & f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), \\
 & f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n), \\
 & \quad \vdots \\
 & f^{(m)}(x_0), f^{(m)}(x_1), \dots, f^{(m)}(x_n).
 \end{aligned}$$

Специјално, ако е дадена вредноста на функцијата $f(x)$ во една точка x_0 и изводите на функцијата $f(x)$ во таа точка, тогаш интерполациониот полином е Тејлоровиот полином (види теорема на Тејлор 1.5).

Забелешка 5.2. Интерполациониот полином $F(x)$ најчесто се користи за приближно пресметување на вредноста на функцијата $f(x)$ во точката $x \in [x_0, x_n]$. Во случај кога ја пресметуваме вредноста на функцијата во некоја точка, која е надвор од сегментот $[x_0, x_n]$, постапката се нарекува **екстраполација**. Нагласуваме дека при екстраполацијата се добиваат задоволителни резултати само ако x е блиску до некоја од крајните точки на сегментот $[x_0, x_n]$.

Во Mathematica наредбата која го дава интерполациониот полином е:

`InterpolatingPolynomial[{{x1, f1}, {x2, f2}, ..., {xn, fn}}, x]`

каде што $\{x_1, f_1\}, \{x_2, f_2\}, \dots, \{x_n, f_n\}$ се дадените јазли, а полиномот е функција од x .

5.2. Грешка при интерполација

Ако $f(x)$ се интерполира со интерполациони полином од n -ти степен, $P_n(x)$, на сегментот $[x_0, x_n]$, тогаш разликата

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

се нарекува **грешка на интерполацијата**.

Нека $f(x)$ е $(n + 1)$ -пати диференцијабилна функција на сегментот $[x_0, x_n]$, т.е. постојат конечни изводи: $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$, за секој $x \in [x_0, x_n]$. Тогаш, со помош на теоремата на Рол (теорема 1.1), се покажува дека за секој $x \in (x_0, x_n)$ важи:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

за некоја точка $c \in (x_0, x_n)$. Според тоа,

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|, \quad (5.1)$$

каде што $c \in (x_0, x_n)$.

Нека

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Имајќи предвид дека M_{n+1} секогаш постои и дека

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq M_{n+1}, \quad c \in (x_0, x_n),$$

најчесто грешката при интерполација се оценува со формулата:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|, \quad x \in [x_0, x_n]. \quad (5.2)$$

Јасно е дека формулата (5.2) може да се користи само ако функцијата $f(x)$ е дадена аналитички. Покрај за интерполација, формулата (5.2) може да се користи и за оценка на грешката при екстраполација.

5.3. Лагранжов интерполациски полином

Нека на $[a, b]$ се дадени $n+1$ точка $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ и вредностите на функцијата $f(x)$ во тие точки:

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Велиме дека функцијата е зададена табеларно со табелата 5.1.

x	x_0	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	\dots	y_n

Табела 5.1

Се бара интерполациски полином $L_n(x)$ што минува низ точките $M_i(x_i, y_i), i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Полиномот $L_n(x)$ го бараме во следниов облик:

$$\begin{aligned}
 L_n(x) = & A_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) + \\
 & + A_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + \\
 & + A_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n) + \\
 & + \dots + A_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),
 \end{aligned}$$

каде што коефициентите $A_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$, треба да се определат.

За овој полином треба да важи:

$$L_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

За $x = x_0$ добиваме

$$L_n(x_0) = A_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n),$$

па

$$y_0 = L_n(x_0) = A_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n).$$

Според тоа, за коефициентот A_0 имаме

$$A_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}.$$

За $x = x_1$ добиваме

$$y_1 = L_n(x_1) = A_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n),$$

од каде што

$$A_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}.$$

Ако ја продолжиме постапката за $x = x_i$, добиваме:

$$A_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Со замена на добиените коефициенти $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ во полиномот $L_n(x)$ се добива:

$$\begin{aligned}
 L_n(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} y_0 + \\
 & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} y_1 + \dots +
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} y_i + \\
 &+ \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \cdots (x_n-x_{n-1})} y_n.
 \end{aligned}$$

Со тоа е докажана и егзистенцијата на интерполацискиот полином $L_n(x)$, познат како **Лагранжов интерполациски полином**.

Нека $n = 1$, т.е. дадени се само два јазли: $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Тогаш Лагранжовиот полином е линеарен,

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1,$$

па интерполацијата се нарекува **линеарна**. Оваа формула е во согласност со формулата за равенка на права која минува низ двете точки M_0 и M_1 . Последново лесно се покажува, со преуредување на линеарниот Лагранжов полином:

$$\begin{aligned}
 y &= L_1(x) = \frac{x_1-x_0-x+x_0}{x_1-x_0} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1 = \\
 &= y_0 - \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} y_1,
 \end{aligned}$$

односно

$$y - y_0 = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} (y_1 - y_0).$$

Нека $n = 2$, т.е. нека се дадени три јазли: $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тогаш Лагранжовиот полином е квадратен и има облик:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \\
 &+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.
 \end{aligned}$$

Во овој случај велиме дека интерполацијата е **квадратна**. Јасно е дека параболата минува низ трите дадени јазли.

Интерполацијата низ четири точки се нарекува **кубна интерполација** (интерполацискиот полином е од трет степен), итн.

Грешката при Лагранжовата интерполација се оценува според формулата (5.2).

Пример 5.1. Функцијата $f(x)$ е дадена со табелата 5.2. Да се состави Лагранжов интерполациски полином и потоа приближно да се пресмета $f(1,5)$ и $f(3,2)$.

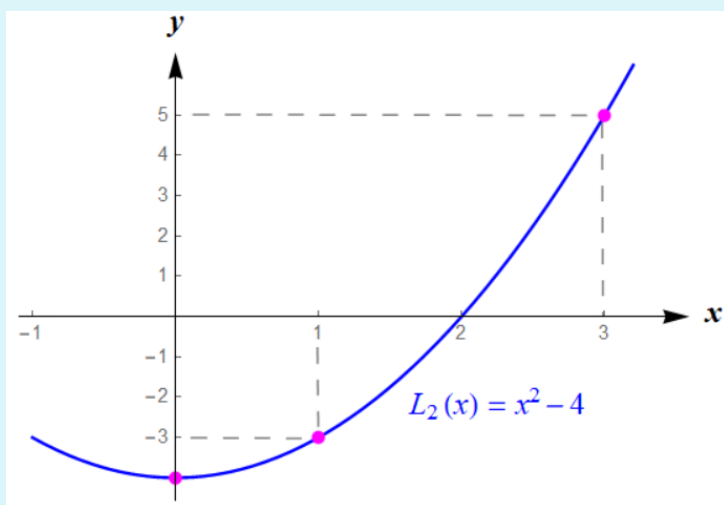
x	0	1	3
$f(x)$	-4	-3	5

Табела 5.2

Решение. Бидејќи се дадени три јазли, го добиваме следниов квадратен Лагранжов интерполациски полином:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \\
 &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2 = \\
 &= \frac{(x - 1)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 3)}(-4) + \frac{(x - 0)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 3)}(-3) + \frac{(x - 0)(x - 1)}{(3 - 0)(3 - 1)} \cdot 5 \\
 &= x^2 - 4.
 \end{aligned}$$

Неговиот график, прикажан на сликата 5.2, минува низ дадените јазли.



Слика 5.2

Според тоа,

$$f(1,5) \approx L_2(1,5) = 1,5^2 - 4 = -1,75$$

и

$$f(3,2) \approx L_2(3,2) = 3,2^2 - 4 = -1,75.$$

Излезот што се добива во Mathematica со примена на наредбата **InterpolatingPolynomial** за дадените јазли е прикажан на сликата 5.3.

```
InterpolatingPolynomial[{{0, -4}, {1, -3}, {3, 5}}, x]
-4 + x^2
```

Слика 5.3

Грешката на интерполација не може да се пресмета, бидејќи функцијата $f(x)$ не е зададена аналитички. Да забележиме дека вредноста $f(3,2)$ е добиена со екстраполација, бидејќи точката $x = 3,2$ е надвор од интервалот $[0,3]$ опфатен во табелата. ▲

Пример 5.2. Користејќи ги вредностите на функцијата $f(x) = \ln x$ дадени во табелата 5.3 и Лагранжовата интерполација, приближно да се пресмета $\ln 0,6$ и да се оцени направената грешка.

x	0,4	0,5	0,7	0,8
$f(x)$	-0,9629	-0,693147	-0,356675	-0,223144

Табела 5.3

Решение. Лагранжовиот интерполациски полином е:

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3.$$

Заменувајќи ги вредностите од табелата 5.3 и ставајќи $x = 0,6$ добиваме:

$$\ln 0,6 = f(0,6) \approx L_3(0,6) = -0,509975.$$

Од тоа што $f(x) = \ln x$ имаме:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f'''(x) = \frac{2}{x^3}, f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4},$$

па $|f^{(4)}(x)| = \frac{6}{x^4}$. Од неравенството $0,4 \leq x \leq 0,8$ следува

$$\frac{6}{0,4^4} \geq \frac{6}{x^4} \geq \frac{6}{0,8^4},$$

па заклучуваме дека

$$M_4 = \max_{x \in [0,4; 0,8]} |f^{(4)}(x)| = \frac{6}{0,4^4}.$$

Според тоа, од формулата (5.2),

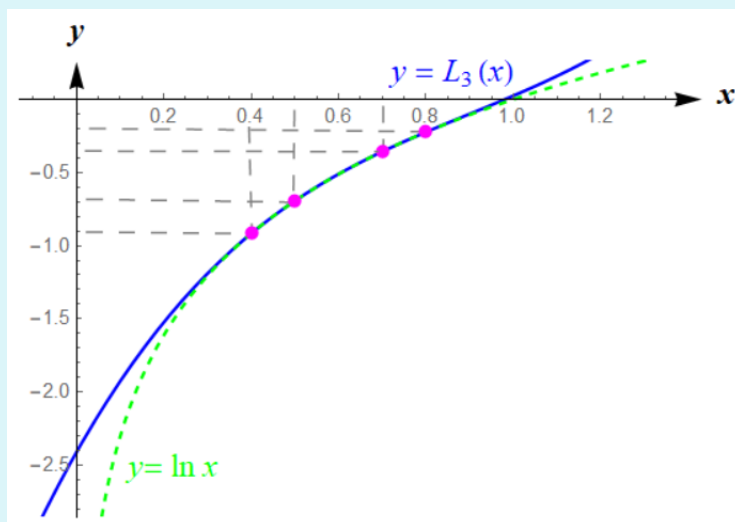
$$|R_4(x)| \leq \frac{M_4}{4!} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)|,$$

за $x = 0,6$ добиваме:

$$|R_4(0,6)| \leq \frac{6}{4! \cdot 0,4^4} |(0,6 - 0,4)(0,6 - 0,5)(0,6 - 0,7)(0,6 - 0,8)|,$$

т.е. $|R_4(0,6)| \leq 3,9 \cdot 10^{-3}$.

На сликата 5.4 се прикажани графикот на добиениот интерполяциски полином $L_3(x)$ и графикот на функцијата $f(x) = \ln x$.



Слика 5.4

Може да се види дека интерполацискиот полином добро ја апроксимира функцијата во границите на интервалот во кој се наоѓаат јазлите на интерполација, но не и надвор од овој интервал.

Имајќи предвид дека точната вредност е

$$\ln 0,6 = -0,51082562 \dots,$$

разликата до приближно пресметаната вредност е во границите на пресметаната грешка $R_4(0,6)$. ▲

5.4. Конечни разлики

Нека во еквидистантните јазли (јазли што се наоѓаат на еднакво растојание) x_0, x_1, \dots, x_n , се дадени вредностите на функцијата $f(x)$:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Разликата

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

се нарекува **чекор на интерполација**.

Броевите:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \dots, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1},$$

се викаат **конечни разлики од прв ред (први конечни разлики)**.

Броевите:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \dots, \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \dots, \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2},$$

се викаат **конечни разлики од втор ред (втори конечни разлики)**.

За секој $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, вторите конечни разлики можеме да ги изразиме преку првите конечни разлики на следниов начин:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i &= \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i = \\ &= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Аналогно се дефинираат **конечни разлики од k -ти ред**,

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i \in \{0, 1, \dots, n-k\}.$$

Конечните разлики од нулти ред (нулти конечни разлики) се:

$$\Delta^0 y_i = y_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Обично конечните разлики се претставуваат во табела од трапезен или триаголен облик, какви што се табелите 5.4 и 5.5, соодветно.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$...
0	x_0	y_0				
1	x_1	y_1	Δy_0			
2	x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
3	x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	\vdots	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$\Delta^3 y_{n-4}$	
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	
n	x_n	y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$		

Табела 5.4. Трапезна табела со конечни разлики

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$...
0	x_0	y_0				
1	x_1	y_1	Δy_0			
2	x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$		
3	x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...
$n-1$	x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-4}$	
n	x_n	y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-3}$	

Табела 5.5. Триаголна табела со конечни разлики

Лесно се докажуваат следниве тврдења:

Теорема 5.2. Ако $f(x)$ е полином од степен k , тогаш конечните разлики од k -ти ред се меѓусебе еднакви, а конечните разлики од ред поголем од k се нули.

Теоремата 5.2 важи само ако вредностите на функцијата и вредностите на сите конечни разлики се дадени и пресметани без заокружување. Во случај кога се врши заокружување, конечните разлики од k -ти ред се приближно еднакви, а конечните разлики од ред поголем од k се броеви блиски до нулата. Важи и обратното тврдење на тврдењето 5.2.

Теорема 5.3. Ако конечните разлики од k -ти ред се меѓусебе еднакви, тогаш $f(x)$ е полином од степен k .

Врз основа на последното тврдење се добива критериум за избор на степенот на интерполацискиот полином: неговиот степен треба да е еднаков со редот на конечните разлики коишто се меѓусебе еднакви, односно со редот на приближно еднаквите конечни разлики.

Пример 5.3. Точките $(x, f(x))$ од табелата 5.6 се точки од графикот на полиномна функција. Да се определи степенот на полиномот.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	10	10	26	64	130	230

Табела 5.6

Решение. Ќе ја формираме табелата 5.7 со конечни разлики. Степенот на полиномот се совпаѓа со редот на меѓусебе еднаквите разлики.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	0	10					
1	1	10	0				
2	2	26	16	16			
3	3	64	38	22	6		
4	4	130	66	28	6	0	
5	5	230	100	34	6	0	0

Табела 5.7

Бидејќи редот на меѓусебе еднаквите разлики е 3, заклучуваме дека степенот на полиномот е 3. Со методот на Лагранж може да се добие точниот облик на полиномот, $P_3(x) = x^3 + 5x^2 - 6x + 10$. ▲

5.4.1. Врска меѓу конечните разлики и изводите на функцијата

Позната е дефиницијата за прв извод на функцијата $y = f(x)$ во точката x ,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

од каде се добива приближната формула

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

која важи кога h е многу мало. Понатаму, од формулата (5.4), со примена на Лопиталовото правило, добиваме:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2 y}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(x+2h) - 2f'(x+h)}{2h} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4f''(x+2h) - 2f''(x+h)}{2} = \\ &= 2f''(x) - f''(x) = f''(x). \end{aligned}$$

Оттука следува приближната формула

$$f''(x) \approx \frac{\Delta^2 y}{h^2},$$

која важи за многу мало h . Со примена на принципот на математичка индукција се покажува дека важи приближната формула:

$$f^{(k)}(x) \approx \frac{\Delta^k y}{h^k}, \forall k \in \{0, 1, \dots\}. \quad (5.5)$$

Забелешка 5.3. Формулата (5.5) може да се користи за приближно пресметување на изводите на функцијата $y = f(x)$ во точката $x \in (x_0, x_n)$, но нејзината точност не е доволно добра, како што ќе биде илустрирано во продолжение. Затоа во пракса таа се користи само за груби пресметки.

Така на пример, земајќи предвид дека

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

за првиот извод на функцијата $f(x) = e^x$ во точката $x = 1$, со намалување на вредноста на h се добиваат приближните вредности прикажани во табелата 5.8. Забележуваме дека, со намалување на вредноста на h не се добива поточна вредност за изводот, бидејќи се натрупуваат грешки кои се резултат на делење со број кој е блиску до 0.

h	$f'(1) \approx \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$	h	$f'(1) \approx \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$
$1 \cdot 10^{-1}$	2,85884	$1 \cdot 10^{-9}$	2,71828
$1 \cdot 10^{-2}$	2,73191	$1 \cdot 10^{-10}$	2,71828
$1 \cdot 10^{-3}$	2,71964	$1 \cdot 10^{-11}$	2,71831
$1 \cdot 10^{-4}$	2,71841	$1 \cdot 10^{-12}$	2,71871
$1 \cdot 10^{-5}$	2,71829	$1 \cdot 10^{-13}$	2,71782
$1 \cdot 10^{-6}$	2,71828	$1 \cdot 10^{-14}$	2,70894
$1 \cdot 10^{-7}$	2,71828	$1 \cdot 10^{-15}$	3,10862
$1 \cdot 10^{-8}$	2,71828	$1 \cdot 10^{-16}$	0

Табела 5.8

Затоа, проблемот на нумеричко диференцирање заслужува посеопфатен и темелен пристап, кој ќе биде обработен во главата 6.

5.5. Њутнов интерполациски полином

Нека во еквидистантните јазли x_0, x_1, \dots, x_n се дадени вредностите на функцијата $f(x)$:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n).$$

Чекорот на интерполација h е константен,

$$h = x_{i+1} - x_i = \text{const.}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

5.5.1. Прв Њутнов интерполациски полином

Бараме интерполациски полином $N_n(x)$ во облик:

$$N_n(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + B_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ + B_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Непознатите коефициенти B_0, B_1, \dots, B_n се наоѓаат од условот

$$N_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

За $x = x_0$ добиваме

$$y_0 = N_n(x_0) = B_0,$$

од каде што

$$B_0 = y_0.$$

Ако ставиме $x = x_1$, имаме

$$y_1 = N_n(x_1) = y_0 + B_1(x_1 - x_0),$$

од каде

$$B_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Слично, за $x = x_2$ добиваме

$$y_2 = N_n(x_2) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + B_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

од каде што

$$B_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}.$$

Според (5.4) се добива

$$B_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Со примена на принципот на математичка индукција се покажува дека

$$B_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Според тоа, за полиномот $N_n(x)$, важи:

$$N_n(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \frac{\Delta y_0}{1!} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{h^n} \frac{\Delta^n y_0}{n!}. \quad (5.6)$$

Ако воведеме замена

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \quad \text{т.е.} \quad x - x_0 = qh,$$

тогаш:

$$x - x_1 = x - x_0 + x_0 - x_1 = hq - h = (q - 1)h.$$

Аналогно се добиваат и следниве равенства:

$$\begin{aligned} x - x_2 &= (q - 2)h, \\ &\vdots \\ x - x_{n-1} &= (q - n + 1)h. \end{aligned}$$

Така, полиномот $N_n(x)$ од равенството (5.6) го добива обликот:

$$N_n(x) = y_0 + q \frac{\Delta y_0}{1!} + q(q - 1) \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + q(q - 1)(q - 2) \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \dots + q(q - 1)(q - 2) \dots (q - n + 1) \frac{\Delta^n y_0}{n!}. \quad (5.7)$$

Полиномот (5.7) се нарекува **прв Њутнов интерполациски полином**.

Забележуваме дека во првиот Њутнов интерполациски полином (5.7) се користат следниве конечни разлики: $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots$, т.е. разликите кои се најгоре во секоја колона на трапезна или триаголна табела со конечни разлики (види ги сликите 5.5 и 5.6). Од друга страна, јасно е дека со зголемување на бројот на конечни разлики во првиот Њутнов интерполациски полином (5.7), се добива подобар резултат при интерполацијата. Во случај точката x да е подалеку од почетната точка на сегментот $[x_0, x_n]$, бројот на познати конечни разлики потребни во формулата (5.7) ќе биде помал, а со тоа и резултатот понепрецизен. Поради тоа, овој полином се користи кога точката x е поблиску до почетната точка на сегментот $[x_0, x_n]$ отколку до неговата крајна точка.

Од овие причини оваа интерполација е позната како **интерполација напред**.

Ако $x_0 < x < x_1$, тогаш важи

$$0 < q = \frac{x - x_0}{h} < 1.$$

За почетен јазол може да се земе најблискиот јазол што се наоѓа пред x .

За грешката при интерполација важи формулата (5.2). Имајќи предвид дека

$$\begin{aligned} x - x_0 &= qh, \\ x - x_1 &= (q - 1)h, \\ &\vdots \\ x - x_n &= (q - n)h, \end{aligned}$$

за грешката добиваме:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |q(q-1) \dots (q-n)| h^{n+1}, \quad (5.8)$$

каде што $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Јасно е дека формулата (5.8) ја користиме само ако функцијата $f(x)$ е зададена аналитички.

Ќе ја изведеме формулата за грешката во случај кога функцијата $f(x)$ е зададена табеларно. Од (5.5) знаеме дека

$$f^{(n+1)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1}y}{h^{n+1}},$$

па формулата за грешката (5.8) го добива обликот:

$$|R_n(x)| \approx \frac{|\Delta^{n+1}y_0|}{h^{n+1}(n+1)!} |q(q-1) \dots (q-n)| h^{n+1},$$

т.е.

$$|R_n(x)| \approx \frac{|\Delta^{n+1}y_0|}{(n+1)!} |q(q-1) \dots (q-n)|. \quad (5.9)$$

5.5.2. Втор Њутнов интерполациски полином

За интерполација во близина на крајната точка на сегментот $[x_0, x_n]$, се користи таканаречениот **втор Њутнов интерполациски полином**, кој го бараме во облик:

$$N_n(x) = B_0 + B_1(x - x_n) + B_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + B_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

На сличен начин како при добивање на првиот Њутнов интерполациски полином, ако $s = \frac{x-x_n}{h}$, добиваме:

$$N_n(x) = y_n + s\Delta y_{n-1} + \frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (5.10)$$

Бидејќи овој полином се користи кога x е блиску до крајната точка на сегментот $[x_0, x_n]$, интерполацијата се нарекува **интерполација на-назад**. При тоа, за краен јазол се избира најблискиот јазол што следи по x . Ако $x_{n-1} < x < x_n$, тогаш

$$-1 < s = \frac{x - x_n}{h} < 0.$$

Слично како кај првиот Њутнов интерполациски полином, ако функцијата $f(x)$ е дадена аналитички, тогаш грешката се оценува според формулата

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |s(s+1)\dots(s+n)| h^{n+1}, \quad (5.11)$$

каде што $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Ако пак, функцијата $f(x)$ е дадена табеларно ја користиме формулата

$$|R_n(x)| \approx \frac{|\Delta^{n+1} y_n|}{(n+1)!} |s(s+1)\dots(s+n)|. \quad (5.12)$$

Забелешка 5.4. Њутновите интерполациски полиноми се користат само во случај кога јазлите се еквидистантни. Ова е нивен недостаток во однос на Лагранжовиот интерполациски полином. Поради единственоста на интерполацискиот полином, овде станува збор само за поинаков облик на запишување на Лагранжовиот интерполациски полином. Предноста на Њутновите интерполациски полиноми е во едноставноста при додавање нов јазол, доколку имаме потреба од тоа, без притоа да се прават сите пресметки повторно, што би било неопходно во случај на Лагранжовиот интерполациски полином. Поточно, ако сакаме да ја подобриме апроксимацијата, го зголемуваме бројот на јазли, па во Њутновите интерполациски полиноми само се додаваат собироци, додека при Лагранжовата интерполација полиномот се конструира од почеток.

Пример 5.4. Функцијата $f(x)$ е зададена со табелата 5.9. Да се пресмета $f(2,31)$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	10	29	66	127	218

Табела 5.9

Решение. Јазлите се еквидистантни ($h = 1$), точката $x = 2,31$ е поблиску до почетниот јазол $x_0 = 0$ отколку до крајниот јазол $x_n = 6$, па користиме прв Њутнов интерполациски полином. Ќе составиме трапезна табела за конечните разлики на дадената функција (види табела 5.10).

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	2			
1	3	1		
2	10	7	6	
3	29	19	12	6
4	66	37	18	6
5	127	61	24	6
6	218	91	30	

Табела 5.10

Од табелата 5.10 забележуваме дека конечните разлики од трети ред се меѓусебе еднакви, па според теоремата 5.3 следува дека функцијата $f(x)$ е полином од трет степен, т.е.

$$f(x) = N_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0.$$

За почетен јазол избираме $x_0 = 2$ и добиваме

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2,31 - 2}{1} = 0,31.$$

Притоа, $y_0 = 10$, а конечните разлики кои ги користиме се подвлечени во табелата 5.10:

$$\Delta y_0 = 19, \Delta^2 y_0 = 18, \Delta^3 y_0 = 6.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} f(2,31) = N_3(2,31) &= 10 + 0,31 \cdot 19 + \frac{0,31(0,31-1)}{2!} \cdot 18 + \\ &+ \frac{0,31(0,31-1)(0,31-2)}{3!} \cdot 6 \approx 14,326391. \end{aligned}$$

Од тоа што $\Delta^4 y_0 = 0$, следува дека $|R_3(x)| \approx 0$. ▲

Пример 5.5. Во табелата 5.11 се дадени вредности за функцијата $f(x)$. Користејќи квадратна интерполација, да се пресметаат: $f(1,23)$, $f(1,46)$, $f(0,9)$ и $f(1,53)$ и да се оцени грешката.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$f(x)$	0,8415	0,8912	0,9320	0,9636	0,9855	0,9975

Табела 5.11

Решение. Јазлите се еквилистантни ($h = 0,1$), па ќе ги користиме Њутновите полиноми. Во табелата 5.12 се дадени конечните разлики на дадената функција.

Точката $x = 1,23$ е поблиску до почетниот јазол, па го користиме првиот Њутнов интерполациски полином.

За почетен јазол земаме $x_0 = 1,2$. Конечните разлики кои ги користиме се подвлечени со една црта во табелата 5.12. За првиот Њутнов интерполациски полином, земаме

$$N_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0,$$

каде што

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1,23 - 1,2}{0,1} = 0,3.$$

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,0	0,8415			
1,1	0,8912	0,0497		
<u>1,2</u>	<u>0,9320</u>	0,0408	-0,0089	-0,0003
1,3	0,9636	<u>0,0316</u>	-0,0092	-0,0005
1,4	0,9855	0,0219	<u>-0,0097</u>	<u>-0,0002</u>
<u>1,5</u>	<u>0,9975</u>	<u>0,0120</u>	<u>-0,0099</u>	

Табела 5.12

За бараната вредност добиваме

$$f(1,23) \approx N_2(1,23) \approx 0,942498.$$

За грешката важи

$$|R_2(1,23)| \approx \frac{|q(q-1)(q-2)|}{3!} |\Delta^3 y_0| = 1,19 \cdot 10^{-5}.$$

Точката $x = 1,46$ е поблиску до крајниот јазол, па го користиме вториот Њутнов интерполациски полином. Притоа, земаме $x_n = 1,5$. Конечните разлики кои ги користиме при оваа интерполација се подвлечени со две црти во табелата 5.12. Вториот Њутнов интерполациски полином од втор степен е

$$N_2(x) = y_n + s\Delta y_{n-1} + \frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2},$$

каде што

$$s = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1,46 - 1,5}{0,1} = -0,4.$$

За бараната вредност и соодветната грешка добиваме:

$$f(1,46) \approx N_2(1,46) \approx 0,993888,$$

$$|R_2(1,46)| \approx \frac{|s(s+1)(s+2)|}{3!} |\Delta^3 y_{n-1}| = 1,28 \cdot 10^{-5}.$$

Останатите вредности, $x = 0,9$ и $x = 1,53$, се надвор од интервалот кој е опфатен во табелата 5.12, што значи дека сега Њутновите полиноми (првиот и вториот, соодветно) ќе ги користиме за екстраполација. При приближното пресметување на $f(0,9)$, за почетен јазол ќе го земеме $x_0 = 1$. Првиот Њутнов полином од втор степен, како што видовме претходно, има облик:

$$N_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0.$$

Ќе ги користиме конечните разлики кои се најгоре, во секоја колона, во табелата 5.12 и

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0,9 - 1}{0,1} = -1.$$

Добиваме

$$f(0,9) \approx N_2(0,9) \approx 0,7829,$$

а за грешката важи

$$|R_2(0,9)| \approx \frac{|(-1)(-2)(-3)|}{3!} |\Delta^3 y_0| = 3 \cdot 10^{-4}.$$

Останува уште приближно да ја пресметаме вредноста $f(1,53)$. Оваа вредност е надвор од интервалот, но блиску до неговата крајна точка, па затоа ќе го користиме вториот Њутнов квадратен интерполациони полином. Притоа,

$$x_n = 1,5 \text{ и } s = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1,53 - 1,5}{0,1} = 0,3.$$

Добиваме

$$f(1,53) \approx N_2(1,53) \approx 0,999170,$$

при што

$$|R_2(1,53)| \approx 2,99 \cdot 10^{-5}.$$

Пример 5.6. Користејќи го првиот Њутнов интерполациони полином, да се упрости сумата

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2, n \in \mathbb{N}.$$

Решение. За функцијата $y = f(x) = 1^2 + 2^2 + \dots + x^2, x \in \mathbb{N}$, ја составуваме табелата 5.13 од вредности и конечни разлики.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	1			
2	5	4		
3	14	9	5	
4	30	16	7	2
5	55	25	9	2

Табела 5.13

Бидејќи третите конечни разлики се меѓусебе еднакви, следува дека $f(x)$ е полином од трет степен и важи

$$f(x) = N_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0,$$

каде што

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 1}{1} = x - 1.$$

Според тоа, добиваме

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + (x-1) \cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \cdot 5 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} \cdot 2 = \\ &= \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}. \end{aligned}$$

На овој начин, со помош на интерполација, ја добиваме познатата формула за збир на квадратите од првите n природни броеви. ▲

5.6. Обратна (инверзна) интерполација

Нека се дадени вредностите на функцијата $f(x)$ во точките x_0, x_1, \dots, x_n :

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n,$$

и нека за дадено $y \neq y_k, k = 0, 1, \dots, n$, се бара x за кое $f(x) = y$. Ако $f(x)$ е строго монотона функција на разгледуваниот сегмент $[x_0, x_n]$,

тогаш таа има инверзна функција f^{-1} , па $x = f^{-1}(y)$. Поради тоа, при решавање на овој проблем, таканаречен проблем на **обратна интерполација**, наместо да се определува интерполацискиот полином за функцијата $f(x)$, се определува интерполацискиот полином $P_n(y)$ за функцијата $f^{-1}(y)$.

5.6.1. Лагранжова обратна интерполација

Ако ги замениме улогите на x и y во Лагранжовиот интерполациски полином (5.3) го добиваме полиномот:

$$\begin{aligned}
 L_n(y) = & \frac{(y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_n)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2) \cdots (y_0 - y_n)} x_0 + \\
 & + \frac{(y - y_0)(y - y_2)(y - y_3) \cdots (y - y_n)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2) \cdots (y_1 - y_n)} x_1 + \cdots \\
 & + \frac{(y - y_0)(y - y_1) \cdots (y - y_{i-1})(y - y_{i+1}) \cdots (y - y_{n-1})}{(y_i - y_0)(y_i - y_1) \cdots (y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1}) \cdots (y_i - y_{n-1})} x_i \\
 & + \cdots + \frac{(y - y_0)(y - y_1) \cdots (y - y_{n-1})}{(y_n - y_0)(y_n - y_1) \cdots (y_n - y_{n-1})} x_n,
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

кој се нарекува **Лагранжов обратен интерполациски полином**.

5.6.2. Прва Њутнова обратна интерполација

Освен со директна замена на улогите на променливите x и y , кога се работи за Њутновите интерполациски полиноми, обратната интерполација може да се изведе и на друг начин.

Нека дадената вредност y се наоѓа помеѓу y_0 и y_1 . Се бара вредност x за која $f(x) = y$. Заменувајќи ја функцијата $f(x)$ со првиот Њутнов интерполациски полином добиваме:

$$y = f(x) \approx N_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 +$$

$$+ \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

Од собирокот $q\Delta y_0$ во збирот од десната страна го изразуваме q и добиваме:

$$q = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{q(q-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \dots - \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n+1)}{n!} \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}. \quad (5.14)$$

Десната страна на равенството (5.14) ја означуваме со $\varphi(q)$, т.е.

$$\begin{aligned} \varphi(q) = & \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{q(q-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \dots - \\ & - \frac{q(q-1)(q-2) \dots (q-n+1)}{n!} \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}. \end{aligned}$$

Ја формираме рекурентната низа $\{q_m\}$ на следниов начин:

$$q_{m+1} = \varphi(q_m), m = 0, 1, \dots,$$

каде што

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}.$$

Се покажува дека низата $\{q_m\}$ конвергира кон q кога $m \rightarrow \infty$, каде што q е решение на равенката (5.14), $q = \varphi(q)$.

Од условот $|q_k - q_{k-1}| < \varepsilon$, каде што ε е однапред зададена точност, се определува q_k , па бараното x се пресметува според формулата

$$x \approx x_0 + hq_k.$$

5.6.3. Втора Њутнова обратна интерполација

Ако дадената вредност y се наоѓа меѓу y_{n-1} и y_n , тогаш бараната вредност x ја добивме на сличен начин, преку формирање на рекурентната низа $\{s_m\}$:

$$s_0 = \frac{y - y_n}{\Delta y_{n-1}}, \quad s_{m+1} = \varphi(s_m), \quad m = 0, 1, \dots,$$

каде што функцијата φ е дефинирана со:

$$\varphi(s) = s_0 - \frac{s(s+1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{\Delta y_{n-1}} - \dots - \frac{s(s+1)(s+2) \dots (s+n-1)}{n!} \frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_{n-1}}.$$

Од условот $|s_k - s_{k-1}| < \varepsilon$, каде што ε е однапред зададена точност, се определува s_k , па x се пресметува според формулата

$$x \approx x_n + h s_k.$$

Пример 5.7. Функцијата $f(x)$ е зададена со табелата 5.14. За која вредност на x важи $f(x) = 6$?

x	0	1	3	4
$f(x)$	-4	1	13	24

Табела 5.14

Решение. Јазлите не се еквилистантни, па користиме обратна Лагранжова интерполација. Вредностите од табелата 5.14 ги заменуваме со Лагранжовиот обратен интерполациски полином од трет степен:

$$\begin{aligned} L_3(y) &= \frac{(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)} x_0 + \frac{(y - y_0)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)} x_1 \\ &+ \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_3)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)} x_2 + \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_0)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)} x_3 = \\ &= \frac{(y - 1)(y - 13)(y - 24)}{(-4 - 1)(-4 - 13)(-4 - 24)} \cdot 0 + \frac{(y + 4)(y - 13)(y - 24)}{(1 + 4)(1 - 13)(1 - 24)} \cdot 1 + \\ &+ \frac{(y + 4)(y - 1)(y - 24)}{(13 + 4)(13 - 1)(13 - 24)} \cdot 3 + \frac{(y + 4)(y - 1)(y - 13)}{(24 + 4)(24 - 1)(24 - 13)} \cdot 4. \end{aligned}$$

За бараното x за кое $y = f(x) = 6$ добиваме:

$$x \approx L_3(6) \approx 1,918633.$$

Грешката не може да се пресмета бидејќи функцијата $f(x)$ не е зададена аналитички. ▲

Пример 5.8. Функцијата $f(x)$ е зададена со следнава табела:

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$	0,47882	0,48341	0,48713	0,49010	0,49245	0,49430

Табела 5.15

За која вредност на x , $f(x) = 0,48499$ со точност 10^{-2} ?

Решение. Јазлите се еквилистантни, па може да користиме Њутнова интерполација. Бидејќи $y = f(x) = 0,48499$ е поблиску до $y_0 = 0,47882$, користиме прва Њутнова обратна интерполација. За почетен јазол го избираме $x_0 = 2,1$. Составуваме табела од конечните разлики (види табела 5.16). Конечните разлики кои се користат во пресметките се подвлечени. Избираме да ги користиме конечните разлики до четврти ред, бидејќи влијанието на членот со петтата разлика во крајниот резултат би било многу мало.

За q_0 добиваме

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} = 0,42473.$$

Од

$$q_1 = \varphi(q_0) = q_0 - \frac{q_0(q_0 - 1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{q_0(q_0 - 1)(q_0 - 2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} - \frac{q_0(q_0 - 1)(q_0 - 2)(q_0 - 3)}{4!} \frac{\Delta^4 y_0}{\Delta y_0},$$

добиваме $q_1 = 0,39775$.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
2,0	0,47881	$4,59 \cdot 10^{-3}$			
<u>2,1</u>	<u>0,48341</u>	<u>$3,72 \cdot 10^{-3}$</u>	$-8,7 \cdot 10^{-4}$		
2,2	0,48713	$2,97 \cdot 10^{-3}$	<u>$-7,5 \cdot 10^{-4}$</u>	$1,2 \cdot 10^{-4}$	
2,3	0,49010	$2,35 \cdot 10^{-3}$	$-6,2 \cdot 10^{-4}$	<u>$1,3 \cdot 10^{-4}$</u>	$1 \cdot 10^{-5}$
2,4	0,49245	$1,85 \cdot 10^{-3}$	$-5,0 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	<u>$-1 \cdot 10^{-5}$</u>
2,5	0,49430				

Табела 5.16

Бидејќи

$$|q_1 - q_0| = 0,02698 > 10^{-2}$$

ја продолжуваме постапката. Од формулата

$$q_2 = \varphi(q_1) = q_1 - \frac{q_1(q_1 - 1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \frac{q_1(q_1 - 1)(q_1 - 2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta y_0} -$$

$$-\frac{q_1(q_1 - 1)(q_1 - 2)(q_1 - 3)}{4!} \frac{\Delta^4 y_0}{\Delta y_0},$$

имаме $q_2 = 0,40271$. Постапката ја прекинуваме бидејќи

$$|q_2 - q_1| < 4,96 \cdot 10^{-3} < 10^{-2},$$

и за x ја добиваме приближната вредност

$$x \approx x_0 + q_2 h = 2,14027. \quad \blacktriangle$$

5.7. Примена на интерполација и обратна интерполација за решавање равенки

Нека е дадена равенката $f(x) = 0$. Во главата 2, изнесовме неколку нумерички методи за приближно наоѓање некое нејзино реално решение. Овие равенки можат да се решат и со примена на:

1) Интерполација

Ако се определи интерполациски полином $P_n(x)$ за функцијата $f(x)$ на сегментот кој е добиен со локализација на бараното решение, тогаш решавањето на равенката $f(x) = 0$ се сведува на решавање поедноставна полиномна равенка $P_n(x) = 0$. Добиената полиномна равенка понатаму може да се реши со користење директни методи, или пак некои нумерички методи.

2) Обратна интерполација

Решавањето на равенката $f(x) = 0$ се сведува на задачата за обратна интерполација, односно, да се определи x за коешто $y = f(x) = 0$.

За разлика од нумеричките методи изложени во главата 2, нагласуваме дека интерполацијата и обратната интерполација можат да се користат за решавање на равенката $f(x) = 0$ и во случај кога функцијата $f(x)$ е зададена табеларно. Овие постапки ќе ги илустрираме преку примери.

Пример 5.9. Да се најде решението на равенката $f(x) = 0,9$, каде што строго монотоната функција $f(x)$ е зададена со табелата 5.17, користејќи:

а) обратна интерполација,

б) квадратна интерполација.

x	2,0	3,5	4,0	5,0
$f(x)$	0,7	1,3	1,4	1,9

Табела 5.17

Решение. Јазлите не се еквилистантни, па користиме Лагранжова интерполација и обратна Лагранжова интерполација.

а) Се бара x за кое $y = f(x) = 0,9$. Лагранжовиот обратен интерполациски полином од трет степен е:

$$L_3(y) = \frac{(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)(y_0 - y_3)}x_0 + \frac{(y - y_0)(y - y_2)(y - y_3)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)}x_1 + \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_3)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)(y_2 - y_3)}x_2 + \frac{(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)}{(y_3 - y_0)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}x_3.$$

Заменувајќи ги вредностите од табелата 5.17 во овој полином добиваме:

$$\begin{aligned} x \approx L_3(0,9) &= \frac{(0,9 - 1,3)(0,9 - 1,4)(0,9 - 1,9)}{(0,7 - 1,3)(0,7 - 1,4)(0,7 - 1,9)} \cdot 2 + \\ &+ \frac{(0,9 - 0,7)(0,9 - 1,4)(0,9 - 1,9)}{(1,3 - 0,7)(1,3 - 1,4)(1,3 - 1,9)} \cdot 3,5 + \\ &+ \frac{(0,9 - 0,7)(0,9 - 1,3)(0,9 - 1,9)}{(1,4 - 0,7)(1,4 - 1,3)(1,4 - 1,9)} \cdot 4 + \\ &+ \frac{(0,9 - 0,7)(0,9 - 1,3)(0,9 - 1,4)}{(1,9 - 0,7)(1,9 - 1,3)(1,9 - 1,4)} \cdot 5 = 1,92857. \end{aligned}$$

б) Бидејќи треба да користиме квадратна интерполација, ќе земеме само три јазли околу $y = 0,9$. Нека се тоа првите три јазли. За Лагранжовиот квадратен интерполациски полином добиваме:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2 = -0,1x^2 + 0,95x - 0,8. \end{aligned}$$

На овој начин дадената равенка се сведува на

$$L_2(x) = 0,9,$$

т.е.

$$-0,1x^2 + 0,95x - 0,8 = 0,9.$$

Решенија на оваа равенка се: 2,3915 и 7,1085. Од условот за монотоност на функцијата $f(x)$ може да се заклучи дека бараната вредност е $x = 2,3915$. ▲

Пример 5.10. Користејќи обратна интерполација и константен чекор $h = 0,1$, да се најде приближното решение на равенката

$$x^2 + \ln x - 4 = 0,$$

кое се наоѓа во сегментот $[1,5; 2]$ со точност 10^{-3} .

Решение. Наоѓањето на решението x на дадената равенка се сведува на определување x за кое

$$y = f(x) = x^2 + \ln x - 4 = 0,$$

или пак, определување x за кое $y = g(x) = x^2 + \ln x = 4$.

Ќе составиме таблица на вредностите и конечните разлики за функцијата $g(x) = x^2 + \ln x$ на сегментот $[1,5; 2]$ со чекор $h = 0,1$ (види табела 5.18).

Јазлите се еквилистантни, па користиме обратна Њутнова интерполација. Бидејќи $y = 4$ е поблиску до крајниот јазол, користиме втора Њутнова обратна интерполација и избираме $x_n = 1,9$.

За s_0 добиваме

$$s_0 = \frac{y - y_n}{\Delta y_{n-1}} = \frac{4 - 4,25185}{0,42406} = -0,59390.$$

Ги користиме конечните разлики до четврти ред, бидејќи влијанието на членот со петтата разлика во крајниот резултат би било многу мало.

Од формулата

$$s_1 = \varphi(s_0) = s_0 - \frac{s_0(s_0 + 1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{\Delta y_{n-1}} - \frac{s_0(s_0 + 1)(s_0 + 2)}{n!} \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{\Delta y_{n-1}} - \frac{s_0(s_0 + 1)(s_0 + 2)(s_0 + 3)}{n!} \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{\Delta y_{n-1}},$$

добиваме $s_1 = -0,58905$.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
1,5	2,65546				
1,6	3,03000	0,37454	0,01609		
1,7	3,42063	0,39063	0,01653	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$-7 \cdot 10^{-5}$
1,8	3,82779	0,40716	<u>0,01690</u>	<u>$3,7 \cdot 10^{-4}$</u>	$-3 \cdot 10^{-5}$
<u>1,9</u>	<u>4,25185</u>	<u>0,42406</u>	0,01724	$3,4 \cdot 10^{-4}$	
2,0	4,69315	0,44130			

Табела 5.18

Бидејќи

$$|s_1 - s_0| = 0,00485 > 10^{-3},$$

ја продолжуваме постапката. Од тоа што

$$s_2 = \varphi(s_1) = s_0 - \frac{s_1(s_1 + 1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{\Delta y_{n-1}} - \frac{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 2)}{n!} \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{\Delta y_{n-1}} - \frac{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 2)(s_1 + 3)}{n!} \frac{\Delta^4 y_{n-4}}{\Delta y_{n-1}},$$

за s_2 имаме $s_2 = -0,58903$. Постапката ја прекинуваме бидејќи,

$$|s_2 - s_1| < 2 \cdot 10^{-5} < 10^{-3},$$

па за x ја добиваме приближната вредност

$$x \approx x_n + s_2 h = 1,841097. \quad \blacktriangle$$

5.8. Интерполација со сплајнови

Полиномната интерполација подразбира конструирање единствен полином од n -ти степен, чијшто график минува низ дадените $n + 1$ точки. Еден од проблемите што се јавува при интерполацијата со полином од повисок степен е нивната осцилаторна природа, што доведува до „бранувања“ на функцијата во целиот ранг. Овој проблем може да се реши ако интервалот се подели на множество подинтервали и на секој

подинтервал се конструира полином со понизок степен. Овој вид интерполација е познат како **по делови глатка полиномна интерполација**. Најпознат вид ваква интерполација е интерполацијата со сплајнови. Тие наоѓаат широка примена во решавањето гранични проблеми за диференцијални равенки, како и во примената на методот на конечни елементи за решавање парцијални диференцијални равенки.

Нека $f(x)$ е реална функција дефинирана на сегментот $[a, b]$, за која е познато множеството точки, односно јазли:

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_{n+1}, f(x_{n+1})).$$

Претпоставуваме дека $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$.

Функцијата $S(x)$ се нарекува **сплајн** од степен k , ако таа ги задоволува следниве услови:

- 1) дефинирана е на сегментот $[a, b]$,
- 2) изводот на функцијата од ред r , $S^{(r)}(x)$, е непрекината функција на $[a, b]$, за $0 \leq r \leq k - 1$,
- 3) на секој потсегмент $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, функцијата $S(x)$ е полином од степен помал или еднаков на k .

За разлика од интерполациониот полином, забележуваме дека степенот на сплајнот не се зголемува со зголемување на бројот на јазли.

Линеарен сплајн

Наједноставен вид по делови глатка полиномна интерполација е по делови глатката линеарна интерполација, односно линеарниот сплајн. Поаѓајќи од равенката на права низ двете точки: (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) , на секој потсегмент $[x_i, x_{i+1}]$ дефинираме функција $S_i(x)$ на следниов начин:

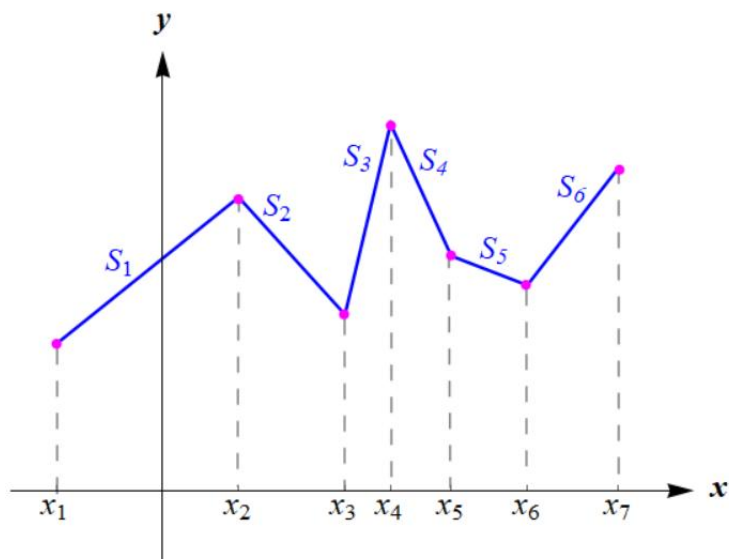
$$S_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i),$$

каде што $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (види слика 5.5).

Надвор од сегментот $[a, b]$, функцијата $S(x)$ обично се дефинира со:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x < a \\ S_n(x), & x > b \end{cases}$$

Притоа, $S(x)$ е непрекината функција и се нарекува **сплајн од прв степен**.



Слика 5.5

Пример 5.11. Да се апроксимира вредноста $f(2,2)$, користејќи линеарна сплајн интерполација на множеството точки дадено со табелата 5.19.

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3
$f(x)$	1	3	7	10	15

Табела 5.19

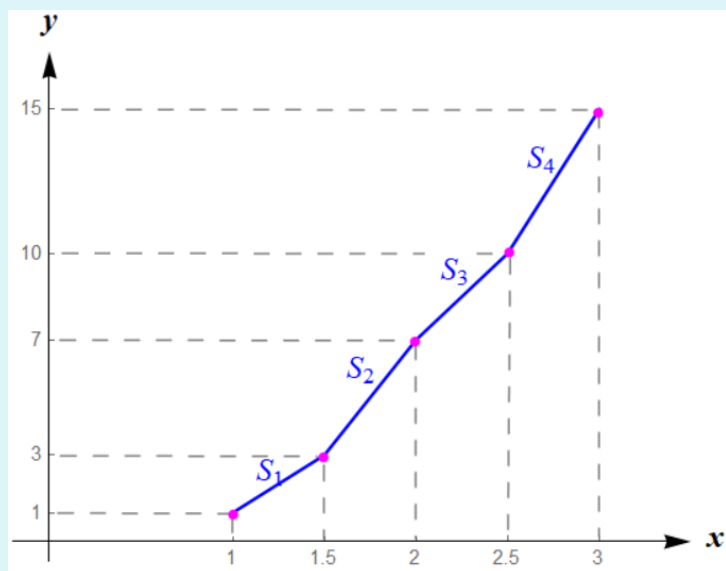
Решение. Конструираме линеарен сплајн на следниов начин:

$$S_1(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) = 1 + \frac{3 - 1}{1,5 - 1} (x - 1) = 4x - 3,$$

$$S_2(x) = y_2 + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} (x - x_2) = 3 + \frac{7 - 3}{2 - 1,5} (x - 1,5) = 8x - 9,$$

$$S_3(x) = y_3 + \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} (x - x_3) = 7 + \frac{10 - 7}{2,5 - 2} (x - 2) = 6x - 5,$$

$$S_4(x) = y_4 + \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} (x - x_4) = 10 + \frac{15 - 10}{3 - 2,5} (x - 2,5) = 10x - 15.$$



Слика 5.6

Значи,

$$S(x) = \begin{cases} 4x - 3, & x \in [1; 1,5] \\ 8x - 9, & x \in [1,5; 2] \\ 6x - 5, & x \in [2; 2,5] \\ 10x - 15, & x \in [2,5; 3] \end{cases}$$

Добиената функција е дефинирана и непрекината на интервалот $[1, 3]$, а на секој подинтервал, таа е линеарна функција, односно полином од прв степен. Бидејќи $2,2 \in [2; 2,5]$, вредноста на функцијата во таа точка ќе биде:

$$f(2,2) \approx S(2,2) = 6 \cdot 2,2 - 5 = 8,2.$$

Графикот на добиениот линеарен сплајн е прикажан на сликата 5.6. ▲

Квадратен сплајн

Кај линеарната интерполација со сплајнови избравме две точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) и конструиравме отсечка меѓу нив. Наместо отсечка, низ овие две точки може да поставиме полином од втор степен, односно парабола дефинирана на подинтервалот $[x_i, x_{i+1}]$.

За да конструираме квадратен сплајн $Q(x)$, прво дефинираме квадратна функција во секој подинтервал $[x_i, x_{i+1}]$, на следниов начин:

$$q_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2,$$

каде што a_i, b_i, c_i се константи што треба да се определат (види слика 5.7).

Јасно е дека $a_i = y_i$, бидејќи $q_i(x_i) = a_i$. Значи,

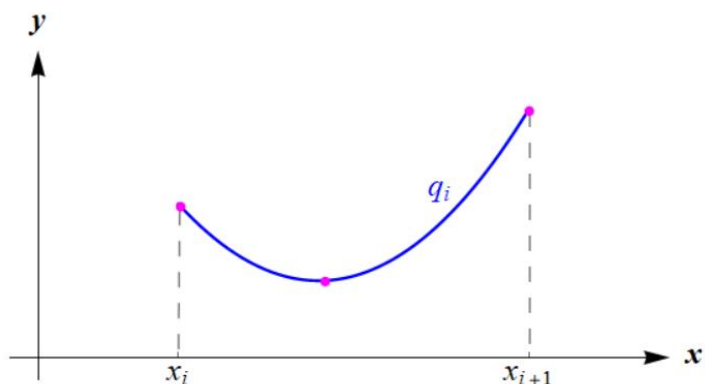
$$Q(x) = q_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Од непрекинатоста на $Q(x)$ следува дека

$$q_i(x_{i+1}) = q_{i+1}(x_{i+1}),$$

а од непрекинатоста на $Q'(x)$ имаме:

$$q_i'(x_{i+1}) = q_{i+1}'(x_{i+1}).$$



Слика 5.7

Користејќи ги горните услови, може да се покаже дека $q_i(x)$ е еднозначно определен на $[x_i, x_{i+1}]$ со:

$$q_i(x) = y_i + d_i(x - x_i) + \frac{d_{i+1} - d_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2,$$

каде што

$$d_{i+1} = 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad d_1 \text{ е произволно.} \quad (5.15)$$

Пример 5.12. Да се апроксимира вредноста $f(1)$, користејќи квадратна сплајн интерполација на множеството точки дадено со табелата 5.20.

x	-2,0	-1,5	0	1,5
$f(x)$	5	3	1	2

Табела 5.20

Решение. Избираме $d_1 = 0$ и ги определуваме d_2, d_3 и d_4 користејќи го изразот (5.15):

$$d_2 = 2 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - d_1 = 2 \frac{3 - 5}{-1,5 + 2} - 0 = -8,$$

$$d_3 = 2 \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - d_2 = 2 \frac{1 - 3}{0 + 1,5} + 8 = \frac{16}{3},$$

$$d_4 = 2 \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - d_3 = 2 \frac{2 - 1}{1,5 - 0} - \frac{16}{3} = -4.$$

Тогаш,

$$\begin{aligned} q_1(x) &= y_1 + d_1(x - x_1) + \frac{d_2 - d_1}{2(x_2 - x_1)}(x - x_1)^2 = \\ &= 5 + 0 \cdot (x + 2) + \frac{-8 - 0}{2(-1,5 + 2)}(x + 2)^2 = \\ &= -8x^2 - 32x - 27, \quad x \in [-2; -1,5], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(x) &= y_2 + d_2(x - x_2) + \frac{d_3 - d_2}{2(x_3 - x_2)}(x - x_2)^2 = \\ &= 3 - 8 \cdot (x + 1,5) + \frac{\frac{16}{3} + 8}{2(0 + 1,5)}(x + 1,5)^2 = \\ &= \frac{40}{9}x^2 + \frac{16}{3}x + 1, \quad x \in [-1,5; 0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_3(x) &= y_3 + d_3(x - x_3) + \frac{d_4 - d_3}{2(x_4 - x_3)}(x - x_3)^2 = \\ &= 1 + \frac{16}{3}(x - 0) + \frac{-4 - \frac{16}{3}}{2(1,5 - 0)}(x - 0)^2 = \end{aligned}$$

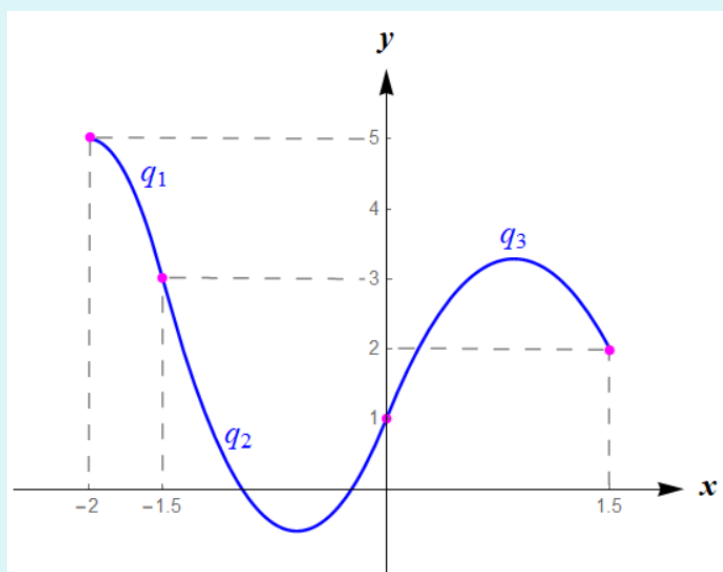
$$= -\frac{28}{9}x^2 + \frac{16}{3}x + 1, \quad x \in [0; 1,5].$$

Според тоа,

$$Q(x) = \begin{cases} -8x^2 - 32x - 27, & x \in [-2; -1,5] \\ \frac{40}{9}x^2 + \frac{16}{3}x + 1, & x \in [-1,5; 0] \\ -\frac{28}{9}x^2 + \frac{16}{3}x + 1, & x \in [0; 1,5] \end{cases}.$$

Добиениот квадратен сплајн е прикажан на сликата 5.8. Бидејќи $1 \in [0; 1,5]$, вредноста на функцијата во таа точка ќе биде:

$$f(1) \approx Q(1) = -\frac{28}{9} + \frac{16}{3} + 1 = \frac{29}{9}.$$



Слика 5.8

Кубен сплајн

Нека се дадени $n + 1$ точки $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. За да се определи сплајн $S(x)$ од степен k , потребни се $n(k + 1)$ параметри. Од јазлите се добиваат $2n$ равенки:

$$q_i(x_i) = f(x_i), \quad q_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Користејќи ја непрекинатоста на изводните функции $S', S'', \dots, S^{(k-1)}$ во $n - 1$ јазли, се добиваат $(k - 1)(n - 1)$ равенки, или вкупно $n(k + 1) - (k - 1)$ равенки. Според тоа, бројот на непознати е за $k - 1$ поголем од бројот на добиените равенки. За да може еднозначно да се дефинира сплајнот со кој ќе се апроксимира функцијата, треба да се додадат уште $k - 1$ ограничувања.

Во пракса, најчесто се избира $k = 3$, што како резултат дава **кубен сплајн**. Значи, треба да се додадат уште две ограничувања. Тие најчесто се:

- а) $S'(x_0) = S'(x_n), S''(x_0) = S''(x_n),$
- б) $S'(x_0) = m_1, S'(x_n) = m_2, m_1, m_2 \in \mathbb{R},$
- в) $S''(x_0) = m_1, S''(x_n) = m_2, m_1, m_2 \in \mathbb{R}.$

Условите а) дефинираат периодичен сплајн. Тој се користи ако функцијата f што се интерполира е периодична. Ако функцијата f е диференцијабилна и се познати вредностите на првите изводи во крајните точки, тогаш се користат условите б), при што

$$m_1 = f'(x_0), \quad m_2 = f'(x_n),$$

или условите в), при што

$$m_1 = f''(x_0), \quad m_2 = f''(x_n).$$

Ако $m_1 = m_2 = 0$ во условите в), што многу често се користи во моделите од механика, тогаш се добива таканаречен **природен кубен сплајн**. Значи, кај природниот кубен сплајн важи:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0.$$

Пример 5.13. Да се конструира природен кубен сплајн со кој ќе се апроксимира функцијата зададена со табелата 5.21.

x	-1	0	2
$F(x)$	3	-1	3

Табела 5.21

Решение. Бараме функција од облик:

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx + d, & x \in [-1,0] \\ ex^3 + fx^2 + gx + h, & x \in [0,2] \end{cases}.$$

Имајќи предвид дека за $x = 0$, $F(0) = -1$, па и $S(0) = -1$, добиваме дека

$$d = -1 \text{ и } h = -1.$$

За $x = -1$, $F(-1) = 3 = S(-1)$, па оттука

$$-a + b - c - 1 = 3,$$

а за $x = 2$, $F(2) = 3 = S(2)$, па добиваме

$$8e + 4f + 2g - 1 = 3.$$

Првиот и вториот извод на функцијата $S(x)$ се:

$$S'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2bx + c, & x \in [-1,0] \\ 3ex^2 + 2fx + g, & x \in [0,2] \end{cases}$$

и

$$S''(x) = \begin{cases} 6ax + 2b, & x \in [-1,0] \\ 6ex + 2f, & x \in [0,2] \end{cases},$$

соодветно.

Од непрекинатооста на изводите во точката $x = 0$, добиваме $c = g$, односно $b = f$.

Користејќи го дополнителниот услов

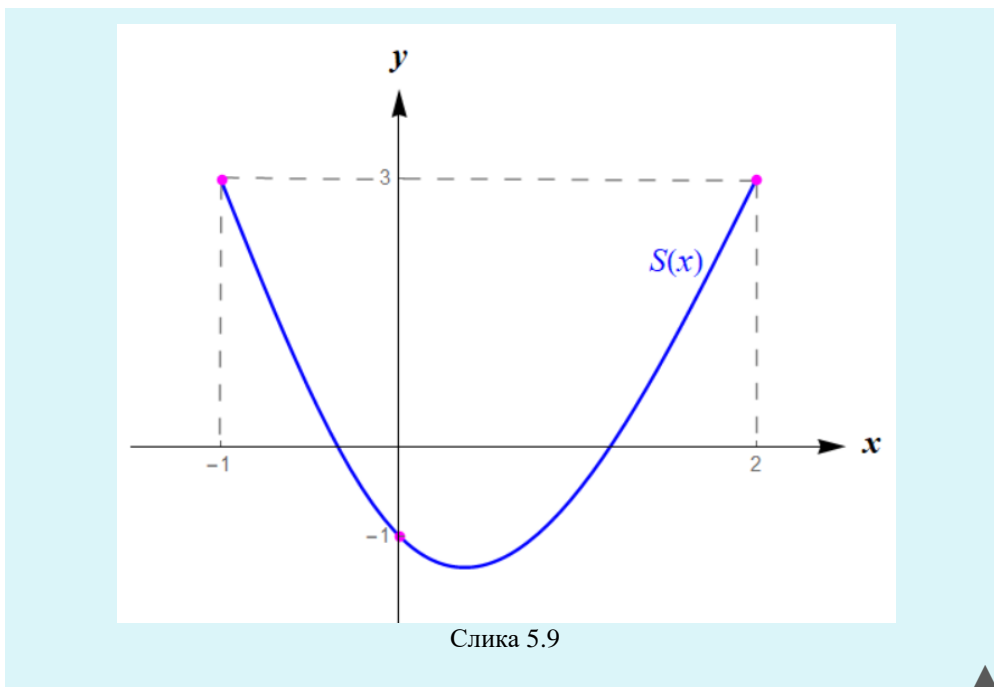
$$S''(x_0) = S''(-1) = S''(x_n) = S''(2) = 0,$$

добиваме

$$-6a + 2b = 0 \text{ и } 12e + 2f = 0.$$

Од горните осум равенки, се добиваат непознатите коефициенти. Според тоа, бараниот кубен сплајн, прикажан на сликата 5.9, е

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2x - 1, & x \in [-1,0] \\ -\frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x - 1, & x \in [0,2] \end{cases}.$$



Слика 5.9

Оценките на грешката на интерполација со сплајнови може да се изведат користејќи ја теоремата на Тејлор.

5.9. Метод на најмали квадрати

Во теоријата на апроксимациите, како што беше спомнато на почетокот од оваа глава, постојат два генерални типа проблеми.

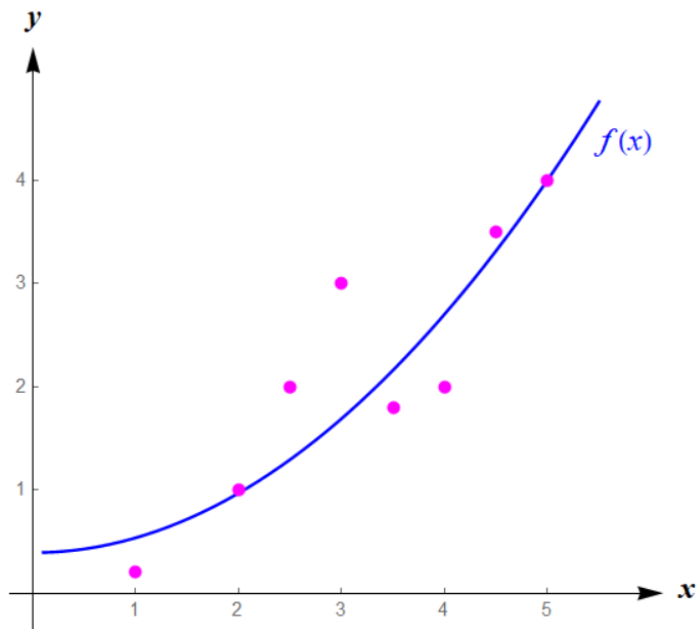
Првиот тип проблеми се состои во определување функција што минува низ секоја точка од дадено множество точки, односно интерполациска функција, што беше разгледано во претходните поглавја. Интерполациските полиноми се користат за апроксимација на функцијата чии вредности се дадени со голема точност.

Меѓутоа, честопати табелираните вредности на функцијата се приближни. Обично податоците, дадени како множество точки, се добиени како резултат на мерења кои во себе содржат експериментални грешки. Во ваквите случаи, обично се бара функција со која најдобро може да се апроксимира даденото множество точки, при што таа не мора да мину-

ва низ дадените точки. Оваа постапка уште е позната и како **фитување** (од англискиот термин fitting), а функцијата се нарекува **фитувачка функција**. Најчесто користени техники за решавање проблеми од овој вид се претходно спомнатите **метод на најмали квадрати** и **метод на рамномерна апроксимација**. Во продолжение подетално ќе го разгледаме методот на најмали квадрати.

5.9.1. Фитување со полином

Нека е дадено множеството од n точки (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$. Овие точки може да се претстават во координатен систем, како што е прикажано на сликата 5.10. Истовремено, на графикот е прикажана и фитувачката функција $f(x)$ која најдобро го опишува ова множество точки, односно $y_i \approx f(x_i)$. Забележуваме дека точките може, но не мора да лежат на кривата $f(x)$.



Слика 5.10

Еден од можните избори на фитувачката функција е таа да биде полином, при што станува збор за фитовање со полином.

Основната идеја во изборот на фитувачката функција се базира на минимизирање на отстапувањата на дадените точки од апроксимационската функција. Притоа, ако x_i се вредностите на независната, а y_i на зависната променлива, тогаш отстапувањата e_i се определуваат како разлика помеѓу $f(x_i)$ и y_i :

$$e_i = f(x_i) - y_i.$$

Постојат повеќе начини на кои може да се минимизираат овие отстапувања.

Методот на најмали квадрати се базира на минимизирање на функцијата

$$S = \sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2, \quad (5.16)$$

наречена **функција на грешка**.

Нека даденото множество точки (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, го апроксимираме со полином од степен n :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Тогаш, збирот на квадратите на отстапувањата (5.16) е:

$$S(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n (e_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n - y_i)^2. \quad (5.17)$$

Оваа функција од $n + 1$ променливи може да достигне локален екстрем во оние точки, во кои сите нејзини парцијални изводи од прв ред се еднакви на нула:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n 2(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n - y_i)x_i^k = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Оттука се добива систем од $n + 1$ линеарни равенки со $n + 1$ непознати, што може да се претстави во облик:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + \dots + a_n \sum_{i=1}^n x_i^n = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{n+1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^n x_i^{2n} = \sum_{i=1}^n x_i^n y_i \end{cases} \quad (5.18)$$

Овој систем може да се реши со некој од методите кои беа разгледувани во поглавјето 3.

Во пракса, најчесто за апроксимациската функција се избира полином од прв степен, односно линеарна функција $f(x) = a + bx$. Во тој случај, системот (5.18) се трансформира во систем од облик:

$$\begin{cases} an + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}, \quad (5.19)$$

што лесно може да се реши. Равенките во овој систем се нарекуваат **нормални равенки**.

Во Mathematica постои готова наредба

`Fit[data, funs, vars]`

со која фитувачката функција за множеството податоци *data*, се определува како линеарна комбинација на функциите *funs* и променливите *vars*.

Пример 5.14. Користејќи го методот на најмали квадрати, да се определи полиномот од прв степен со кој може да се апроксимира множеството точки зададено со табелата 5.22.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	1	2	2	4

Табела 5.22

Решение. Бараме функција од облик $f(x) = a + bx$, така што ќе се минимизира функцијата на грешка

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^5 (e_i)^2 = \sum_{i=1}^5 (a + bx_i - y_i)^2.$$

Потребниот услов оваа функција да достигне екстрем во една точка е

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Оттука се добива системот

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 2(a + bx_i - y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^5 2(a + bx_i - y_i)x_i = 0 \end{cases},$$

односно

$$\begin{cases} a + b - 1 + a + 2b - 1 + a + 3b - 2 + a + 4b - 2 + a + 5b - 4 = 0 \\ a + b - 1 + (a + 2b - 1) \cdot 2 + (a + 3b - 2) \cdot 3 + (a + 4b - 2) \cdot 4 + \\ + (a + 5b - 4) \cdot 5 = 0 \end{cases}$$

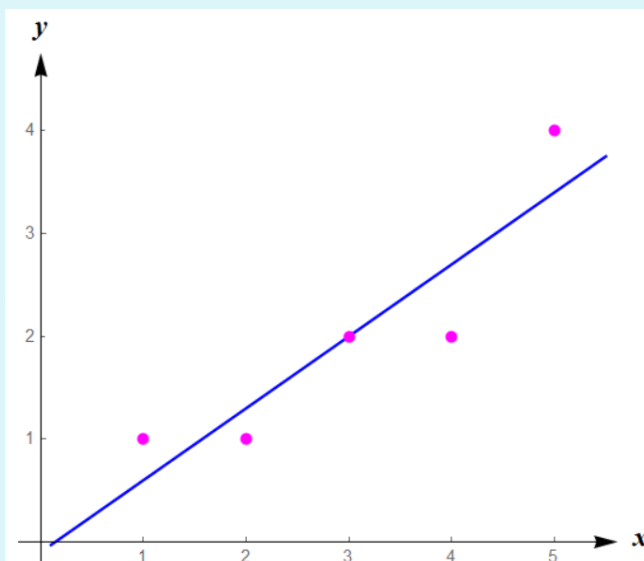
Овие равенки се упростуваат до нормалните равенки на системот:

$$\begin{cases} 5a + 15b = 10 \\ 15a + 55b = 37 \end{cases}'$$

чиешто решение е: $a = -0,1$, $b = 0,7$.

Според тоа, даденото множество точки може да се апроксимира со правата

$$y = 0,7x - 0,1.$$



Слика 5.11

Множеството точки, заедно со апроксимирачката права е прикажано на сликата 5.11.

Решението добиено во Mathematica со примена на наредбата `Fit` е прикажано на сликата 5.12.

```
data = {{1, 1}, {2, 1}, {3, 2}, {4, 2}, {5, 4}};
y = Fit[data, {1, x}, x]
-0.1 + 0.7 x
```

Слика 5.12

Пример 5.15. Користејќи го методот на најмали квадрати, да се определат полиномот од прв, втор, трет, четврти и петти степен со кој може да се апроксимира множеството точки зададено со табелата 5.23.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0,04	-8,66	5,98	3,31
0,93	-6,44	7,05	4,63
1,95	-4,36	8,21	6,19
2,90	-3,27	9,08	7,40
3,83	-0,88	10,09	8,85
5,00	0,87		

Табела 5.23

Решение. Применувајќи ја во Mathematica наредбата **Fit** за полиномите со бараниот степен се добиваат решенијата прикажани на сликата 5.13.

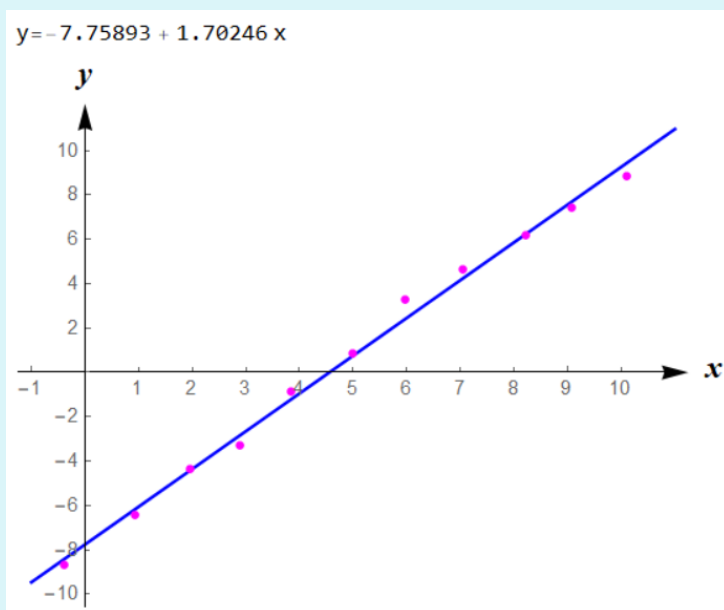
```

data = {{-0.4, -8.66}, {0.93, -6.44}, {1.95, -4.36}, {2.90, -3.27}, {3.83, -0.88}, {5.00, 0.87},
        {(5.98, 3.31), {7.05, 4.63}, {8.21, 6.19}, {9.08, 7.40}, {10.09, 8.85}};
y5 = Fit[data, {1, x, x^2, x^3, x^4, x^5}, x];
y4 = Fit[data, {1, x, x^2, x^3, x^4}, x];
y3 = Fit[data, {1, x, x^2, x^3}, x];
y2 = Fit[data, {1, x, x^2}, x];
y1 = Fit[data, {1, x}, x];
Print["y1=", y1]; Print["y2=", y2]; Print["y3=", y3]; Print["y4=", y4]; Print["y5=", y5]

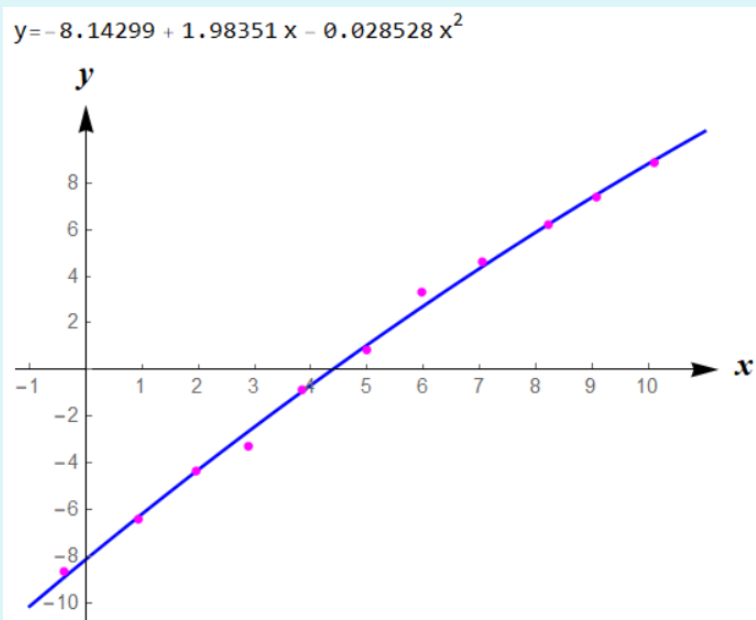
y1=-7.75893 + 1.70246 x
y2=-8.14299 + 1.98351 x - 0.028528 x^2
y3=-8.01726 + 1.66374 x + 0.0630283 x^2 - 0.00631637 x^3
y4=-8.02966 + 1.50554 x + 0.159843 x^2 - 0.0229452 x^3 + 0.00085994 x^4
y5=-7.90268 + 1.82612 x - 0.21835 x^2 + 0.0954226 x^3 - 0.0133397 x^4 + 0.000581513 x^5
    
```

Слика 5.13

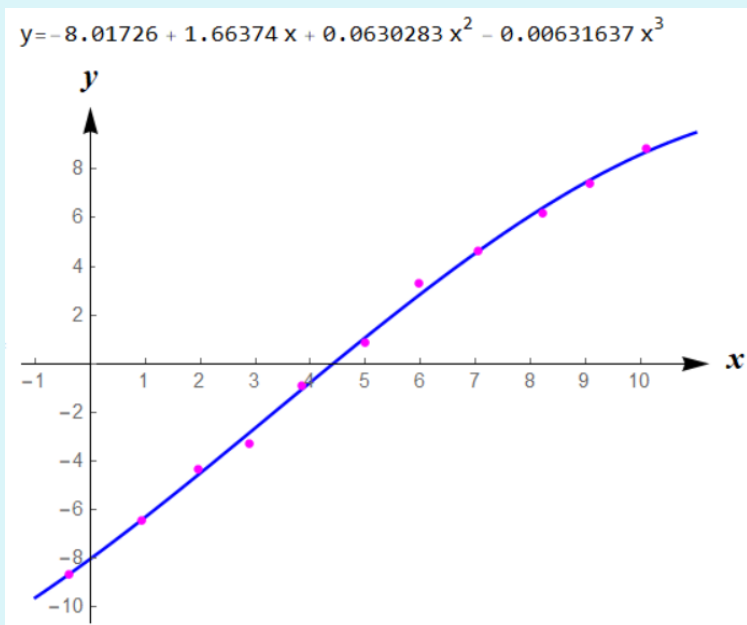
Даденото множество точки и соодветниот фитувачки полином се прикажани на сликите 5.14 - 5.18.



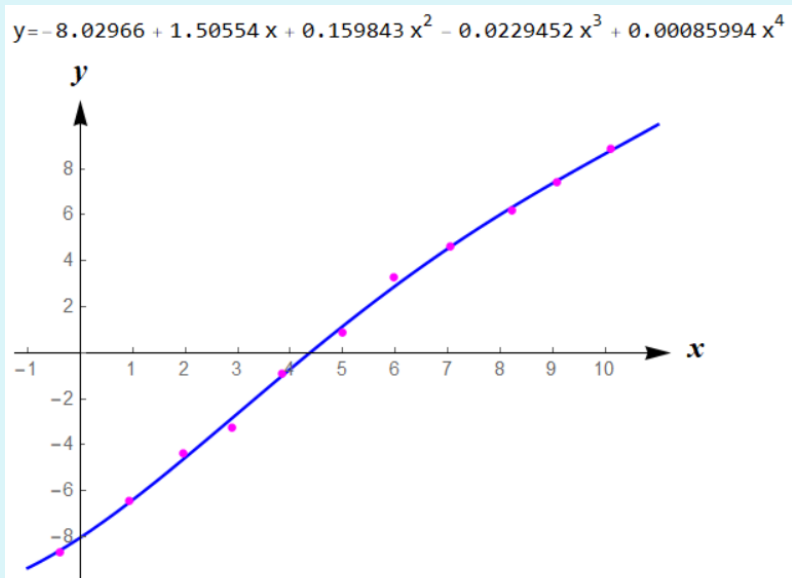
Слика 5.14



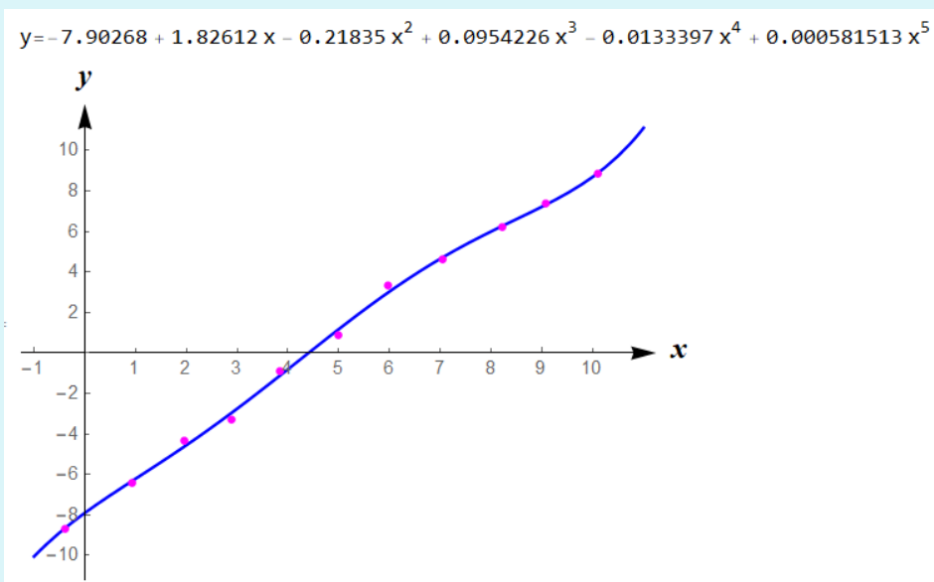
Слика 5.15



Слика 5.16



Слика 5.17



Слика 5.18

Ако се пресмета грешката за секој од добиените фитувачки полиноми од прв, втор, трет, четврти и петти ред, согласно формулата (5.16), се добива: 1,82007; 0,990429; 0,655696; 0,610466; 0,478403, соод-

ветно. Заклучуваме дека најдобра апроксимација на даденото множество точки дава полиномот од петти степен. ▲

6. Нумеричко диференцирање

Нека $f(x)$ е k -пати диференцијабилна функција на сегментот $[x_0, x_n]$ и нека се дадени вредностите на функцијата $f(x)$ во точките x_0, x_1, \dots, x_n :

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Проблемот за нумеричко диференцирање се состои во наоѓање приближна вредност на изводите $f'(x), f''(x), \dots, f^{(k)}(x)$, во точките x_0, x_1, \dots, x_n или во произволна точка од сегментот $[x_0, x_n]$. Во поглавјата 6.1 и 6.3 се наведени два начина за нумеричко диференцирање.

6.1. Формули за приближно диференцирање изведени од Тејлоровата формула

Формулите за приближно диференцирање се изведуваат од следниве облици на Тејлоровата формула, при што x е точката во која се определува приближната вредност на изводот, а h е мала вредност:

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \\ + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots, \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \\ + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) - \dots, \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{2^2h^2}{2!}f''(x) + \frac{2^3h^3}{3!}f'''(x) + \\ + \frac{2^4h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \dots, \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$f(x - 2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{2^2h^2}{2!}f''(x) - \frac{2^3h^3}{3!}f'''(x) + \frac{2^4h^4}{4!}f^{(4)}(x) - \dots \quad (6.4)$$

Ќе ги определиме збирот и разликата на изразите (6.1) и (6.2), како и збирот и разликата на изразите (6.3) и (6.4):

$$f(x + h) + f(x - h) = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x) + \dots, \quad (6.5)$$

$$f(x + h) - f(x - h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \dots, \quad (6.6)$$

$$f(x + 2h) + f(x - 2h) = 2f(x) + 4h^2f''(x) + \frac{4h^4}{3}f^{(4)}(x) + \dots, \quad (6.7)$$

$$f(x + 2h) - f(x - 2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3}f'''(x) + \dots. \quad (6.8)$$

6.1.1. Централни приближни формули

Нека $f(x)$ и $g(x)$ се две реални функции со иста област на дефинираност.

Дефиниција 6.1. Велиме дека $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, $x \rightarrow x_0$, ако постои $C > 0$, така што

$$|f(x)| \leq C|g(x)|,$$

за секој x блиску до x_0 и читаме $f(x)$ е **големо \mathcal{O}** од $g(x)$.

Ознаката „големо \mathcal{O} “, или поинаку наречена симбол на Ландау, се користи во компјутерските науки и математиката за да го опише асимптотското однесување на функциите во околина на точката x_0 . Едноставно кажано, ако $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, $x \rightarrow x_0$, тогаш во близина на x_0 , функцијата $f(x)$ се однесува како функцијата $Cg(x)$. Ознаката

$\mathcal{O}(g(x))$ овде ќе ја користиме за да ја опишеме грешката на апроксимација на дадена функција.

За апроксимација на $f'(x)$, користејќи го изразот (6.6), се добива:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \dots,$$

односно

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.9)$$

Формулата (6.9) се нарекува **централна приближна формула за $f'(x)$ со точност $\mathcal{O}(h^2)$** . Придавката централна доаѓа оттаму што точката x во која се пресметува изводот е централно поставена во однос на точките $x-h$ и $x+h$ кои се користат за пресметување на тој извод.

На сличен начин, од (6.5) се добива **централната приближна формула за $f''(x)$ со точност $\mathcal{O}(h^2)$** :

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \dots,$$

односно

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.10)$$

Централната приближна формула за $f'''(x)$ и $f^{(4)}(x)$ се добива од (6.8) и (6.9), односно (6.7) и (6.10), соодветно.

$$f'''(x) = \frac{-f(x-2h) + 2f(x-h) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{2h^3} + \mathcal{O}(h^2), \quad (6.11)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.12)$$

За полесно користење на формулите (6.9) – (6.12), коефициентите што се среќаваат во броителите ќе ги организираме во табелата 6.1.

	$f(x - 2h)$	$f(x - h)$	$f(x)$	$f(x + h)$	$f(x + 2h)$
$2hf'(x)$		-1	0	1	
$h^2 f''(x)$		1	-2	1	
$2h^3 f'''(x)$	-1	2	0	-2	1
$h^4 f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Табела 6.1. Коефициенти во централните приближни формули со точност $\mathcal{O}(h^2)$

На сличен начин може да се изведат формулите за изводите од повисок ред.

Забелешка 6.1. Аргументите на функциите од формулите (6.9) – (6.12), $x - 2h, x - h, x, x + h, x + 2h$, се еднакво оддалечени, што укажува на тоа дека овие формули се применливи само за еквилистантни јазли, со константен чекор h .

6.1.2. Нецентрални приближни формули

Јасно е дека формулите (6.9) – (6.12) може да се користат само за пресметување изводи во јазлите кои се блиску до средината на сегментот $[x_0, x_n]$. За приближно пресметување изводи во јазлите кои се блиску до почетниот или крајниот јазол од сегментот, се користат нецентрални приближни формули. Овие формули се нарекуваат нецентрални, бидејќи точката во која се пресметува изводот е поставена лево или десно од точките што се користат за пресметување на тој извод.

За првиот извод, од (6.1) се добива:

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x) - \frac{h^2}{3!} f'''(x) - \frac{h^3}{4!} f^{(4)}(x) - \dots,$$

односно

$$f'(x) = \frac{-f(x) + f(x + h)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (6.13)$$

Последнава формула се нарекува **нецентрална приближна формула напред** за $f'(x)$ со точност $\mathcal{O}(h)$.

На сличен начин, од (6.2), се добива **нецентралната приближна формула назад** за $f'(x)$ со точност $\mathcal{O}(h)$:

$$f'(x) = \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (6.14)$$

Од (6.3) и (6.13) се добива **приближната формула напред** за $f''(x)$ со точност $\mathcal{O}(h)$:

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \quad (6.15)$$

Од (6.4) и (6.14) се добива **приближната формула назад** за $f''(x)$ со точност $\mathcal{O}(h)$:

$$f''(x) = \frac{f(x-2h) - 2f(x-h) + f(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h). \quad (6.16)$$

Коефициентите во останатите нецентрални формули се дадени во табелите 6.2. и 6.3.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$
$hf'(x)$	-1	1			
$h^2f''(x)$	1	-2	1		
$h^3f'''(x)$	-1	3	-3	1	
$h^4f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Табела 6.2. Коефициенти во нецентралните приближни формули напред со точност $\mathcal{O}(h)$

Може да се постигне и поголема точност во нецентралните формули, ако се направат разни трансформации на изразите (6.1) – (6.8). Ке ја изведеме комплетно само формулата напред за $f'(x)$ со точност $\mathcal{O}(h^2)$.

	$f(x - 4h)$	$f(x - 3h)$	$f(x - 2h)$	$f(x - h)$	$f(x)$
$hf'(x)$				-1	1
$h^2 f''(x)$			1	-2	1
$h^3 f'''(x)$		-1	3	-3	1
$h^4 f^{(4)}(x)$	1	-4	6	-4	1

Табела 6.3. Коефициенти во нецентралните приближни формули наназад со точност $\mathcal{O}(h)$

За таа цел се потребни изразот (6.1), помножен со 4,

$$4f(x + h) = 4f(x) + 4hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{2h^3}{3} f'''(x) + \frac{h^4}{6} f^{(4)}(x) + \dots, \quad (6.17)$$

и изразот (6.3),

$$f(x + 2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4h^3}{3} f'''(x) + \frac{2h^4}{3} f^{(4)}(x) + \dots. \quad (6.18)$$

Со одземање на формулата (6.17) од (6.18) се добива:

$$\begin{aligned} f(x + 2h) - 4f(x + h) &= \\ &= -3f(x) - 2hf'(x) - \frac{2h^3}{3} f'''(x) - \frac{h^4}{2} f^{(4)}(x) + \dots, \end{aligned}$$

од каде што произлегува бараната формула

$$f'(x) = \frac{-f(x + 2h) + 4f(x + h) - 3f(x)}{2h} - \frac{h^2}{3} f'''(x) - \frac{h^3}{4} f^{(4)}(x) + \dots,$$

односно

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x + h) - f(x + 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.19)$$

Останатите формули, нанапред и наназад, за изводите до четврти ред со точност $\mathcal{O}(h^2)$, се дадени во табелите 6.4 и 6.5.

	$f(x)$	$f(x+h)$	$f(x+2h)$	$f(x+3h)$	$f(x+4h)$	$f(x+5h)$
$2hf'(x)$	-3	4	-1			
$h^2f''(x)$	2	-5	4	-1		
$2h^3f'''(x)$	-5	18	-24	14	-3	
$h^4f^{(4)}(x)$	3	-14	26	-24	11	-2

Табела 6.4. Коefициенти во нецентралните приближни формули напред со точност $\mathcal{O}(h^2)$

	$f(x-5h)$	$f(x-4h)$	$f(x-3h)$	$f(x-2h)$	$f(x-h)$	$f(x)$
$2hf'(x)$				1	-4	3
$h^2f''(x)$			-1	4	-5	2
$2h^3f'''(x)$		3	-14	24	-18	5
$h^4f^{(4)}(x)$	-2	11	-24	26	-14	3

Табела 6.5. Коefициенти во нецентралните приближни формули назад со точност $\mathcal{O}(h^2)$

Забелешка 6.2. Табелите 6.2 и 6.3 ги содржат елементите од Паскаловиот триаголник, односно биномните коefициенти, но со наизменични знаци. Табелите 6.4 и 6.5 ги содржат истите коefициенти по редици, но со обратен редослед, и дополнително, редиците за непарните изводи се со спротивни знаци. Кај сите наведени табели, сумата на редичните елементи е 0.

Пример 6.1. Функцијата $f(x)$ е зададена со табелата 6.6.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	0,0000	0,0819	0,1341	0,1646	0,1797

Табела 6.6

Да се пресметаат првиот и вториот извод во точките: 0; 0,2 и 0,4, користејќи формули со точност $\mathcal{O}(h^2)$.

Решение. Од табелите 6.1, 6.4 и 6.5 може да ги прочитаеме централните формули, нецентралните напред и нецентралните назад, со кои ќе ги пресметаме првиот и вториот извод во точките: 0,2; 0 и 0,4, соодветно. Чекорот е $h = 0,1$.

За точката $x = 0,2$ ги користиме централните формули,

$$f'(x) \approx \frac{-f(x-h) + f(x+h)}{2h},$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2},$$

и добиваме:

$$f'(0,2) \approx \frac{-f(0,1) + f(0,3)}{2 \cdot 0,1} = \frac{-0,0819 + 0,1646}{0,2} = 0,4135,$$

$$\begin{aligned} f''(0,2) &\approx \frac{f(0,1) - 2f(0,2) + f(0,3)}{0,1^2} = \\ &= \frac{0,0819 - 2 \cdot 0,1341 + 0,1646}{0,01} = -2,1700. \end{aligned}$$

За точката $x = 0$ ги користиме нецентралните формули напред,

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h},$$

$$f''(x) \approx \frac{2f(x) - 5f(x+h) + 4f(x+2h) - f(x+3h)}{h^2},$$

при што добиваме:

$$\begin{aligned} f'(0) &\approx \frac{-3f(0) + 4f(0,1) - f(0,2)}{2 \cdot 0,1} = \\ &= \frac{-3 \cdot 0 + 4 \cdot 0,0819 - 0,1341}{0,2} = 0,9675, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0) &\approx \frac{2f(0) - 5f(0,1) + 4f(0,2) - f(0,3)}{0,1^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 0 - 5 \cdot 0,0819 + 4 \cdot 0,1341 - 0,1646}{0,01} = -3,7700. \end{aligned}$$

За точката $x = 0,4$ ги користиме нецентралните формули наназад,

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h},$$

$$f''(x) \approx \frac{-f(x-3h) + 4f(x-2h) - 5f(x-h) + 2f(x)}{h^2}.$$

Добиваме:

$$\begin{aligned} f'(0,4) &\approx \frac{f(0,2) - 4f(0,3) + 3f(0,4)}{2 \cdot 0,1} = \\ &= \frac{0,1341 - 4 \cdot 0,1646 + 3 \cdot 0,1797}{0,2} = \frac{0,0148}{0,2} = 0,0074; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(0,4) &\approx \frac{-f(0,1) + 4f(0,2) - 5f(0,3) + 2f(0,4)}{0,1^2} = \\ &= \frac{-0,0819 + 4 \cdot 0,1341 - 5 \cdot 0,1646 + 2 \cdot 0,1797}{0,01} = \\ &= \frac{-0,0091}{0,01} = -0,9100. \end{aligned}$$

6.2. Формула на Ричардсон

Формулата на Ричардсон овозможува зголемување на точноста на одреден нумерички резултат. Во литературата може да се сретне и како екстраполација на Ричардсон или екстраполациска формула на Ричардсон.

Да претпоставиме дека со помош на одредена нумеричка постапка, која користи чекор h , сме ја добиле приближната вредност $X(h)$ на точниот реален број x , односно

$$x = X(h) + E(h),$$

каде што $E(h)$ е направената грешка. Нека грешката е од облик

$$E(h) = ch^p,$$

каде што c и p се константи. Користењето два различни чекори h_1 и h_2 , ќе доведе до две различни приближни вредности, $X(h_1)$ и $X(h_2)$. При тоа може да се запише,

$$x = X(h_1) + c(h_1)^p,$$

$$x = X(h_2) + c(h_2)^p.$$

Го изразуваме c од првата равенка и изразот го заменуваме во втората равенка. Се добива:

$$c = \frac{x - X(h_1)}{h_1^p},$$

$$x = X(h_2) + \frac{x - X(h_1)}{(h_1)^p} (h_2)^p.$$

Со упростување на последниот израз, за x се добива

$$x = \frac{X(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p - X(h_1)}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p - 1}. \quad (6.20)$$

Последнава формула е позната како **формула на Ричардсон**. Многу често во пракса се користи

$$h_2 = \frac{h_1}{2}, \text{ односно } \frac{h_1}{h_2} = 2.$$

Тогаш формулата (6.20) го добива следниов упростен облик:

$$x = \frac{X\left(\frac{h_1}{2}\right) \cdot 2^p - X(h_1)}{2^p - 1}. \quad (6.21)$$

Може да се покаже дека ако приближните резултати $X(h_1)$ и $X(h_2)$ се со точност $\mathcal{O}(h^2)$, тогаш точноста на новиот резултат, добиен со формулите (6.20) или (6.21), е $\mathcal{O}(h^4)$.

Формулата на Ричардсон се користи за подобрување на точноста на нумерички добиен резултат во методи во кои јазлите се еквидистантни и во кои грешката може да се изрази како $E(h) = ch^p$. Покрај наведените формули за нумеричко диференцирање, во оваа група спаѓаат и формулите за нумеричко интегрирање и определување приближни решенија на диференцијални равенки.

Пример 6.2. Користејќи ја функцијата $f(x)$ зададена во примерот 6.1, пресметај ја вредноста на $f'(0)$ најточно што можеш.

Решение. Од примерот 6.1 веќе имаме една приближна вредност за $f''(0)$, пресметана со чекор $h_1 = 0,1$ и точност $\mathcal{O}(h^2)$. Да го означиме овој резултат со $X(0,1)$. Истата табела ни овозможува да добиеме приближна вредност на $f'(0)$, со иста точност, но со чекор

$$h_2 = 0,2 = 2h_1.$$

Ќе ја означиме оваа приближна вредност со $X(0,2)$. Според тоа,

$$X(0,1) = 0,9675;$$

$$\begin{aligned} X(0,2) &\approx \frac{-3f(0) + 4f(0,2) - f(0,4)}{2 \cdot 0,2} = \\ &= \frac{-3 \cdot 0 + 4 \cdot 0,1341 - 0,1797}{0,4} = \frac{0,3567}{0,4} = 0,8918. \end{aligned}$$

Сега ќе ја користиме формулата на Ричардсон (6.21) (при што ги имаме предвид вредностите на h_1 , h_2 , како и $p = 2$), која дава можност да се добие резултат со точност $\mathcal{O}(h^4)$,

$$f'(0) \approx \frac{X(0,1) \cdot 2^2 - X(0,2)}{2^2 - 1} = \frac{4 \cdot 0,9675 - 0,8918}{3} = 0,9927. \quad \blacktriangle$$

6.3. Диференцирање со интерполациски полином

Нека k -пати диференцијабилната функција $f(x)$ на сегментот $[x_0, x_n]$ е зададена со своите вредности во точките x_0, x_1, \dots, x_n ,

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Нека $L_n(x)$ е Лагранжовиот интерполациски полином за функцијата $f(x)$. Тогаш важи приближната формула $f(x) \approx L_n(x)$, па за изводите може да се користат приближните формули:

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx L'_n(x), \\ f''(x) &\approx L''_n(x), \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &\approx L_n^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Ако пак, $N_n(x)$ е првиот Њутнов интерполациски полином за функцијата $f(x)$, тогаш важи приближната формула

$$f(x) \approx N_n(x) = y_0 + q \frac{\Delta y_0}{1!} + q(q-1) \frac{\Delta^2 y_0}{2!} + \\ + q(q-1)(q-2) \frac{\Delta^3 y_0}{3!} + q(q-1)(q-2)(q-3) \frac{\Delta^4 y_0}{4!} + \\ + \dots + q(q-1)(q-2) \dots (q-n+1) \frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

каде што

$$q = \frac{x - x_0}{h}.$$

Од формулата за извод на сложена функција, за првиот извод на $f(x)$ добиваме:

$$f'(x) \approx \frac{dN_n}{dx} = \frac{dN_n}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dx} \left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{3q^2 - 6q + 2}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{4q^3 - 18q^2 + 22q - 6}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots \right). \quad (6.22)$$

Од $q = \frac{x-x_0}{h}$ се добива дека

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}.$$

Според тоа, (6.22) го добива обликот:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{3!} \Delta^3 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{4q^3 - 18q^2 + 22q - 6}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots \right). \quad (6.23)$$

Аналогно се добива приближната формула и за вториот извод,

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 + \frac{6q-6}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{12q^2 - 36q + 22}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots \right), \quad (6.24)$$

како и за изводите од повисок ред.

Ако пак, го користиме вториот Њутнов интерполациски полином, тогаш на сличен начин се добиваат следниве приближни релации:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{2s+1}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3s^2+6s+2}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \right. \\ \left. + \frac{4s^3+18s^2+22s+6}{4!} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right), \quad (6.25)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + \frac{6s+6}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \right. \\ \left. + \frac{12s^2+36s+22}{4!} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right), \quad (6.26)$$

каде што

$$s = \frac{x - x_n}{h}.$$

Аналогно се добиваат формули за изводите од повисок ред.

Ако x се совпаѓа со некој од јазлите блиску до почетниот јазол, тогаш тој јазол го земаме за почетен. Од тоа што $x = x_0$ следува дека $q = \frac{x-x_0}{h} = 0$. Во тој случај, формулите (6.23) и (6.24) за прв и втор извод добиени од првиот Њутнов интерполациски полином добиваат поедноставен облик:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \dots \right), \quad (6.27)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 + \dots \right). \quad (6.28)$$

Ако пак, x е некој од јазлите поблиску до крајниот јазол, тогаш тој јазол го земаме за краен. Од тоа што $x = x_n$ следува дека $s = \frac{x-x_n}{h} = 0$. На овој начин, формулите (6.25) и (6.26) за првиот и вториот извод,

добиеени од вториот Њутнов интерполациски полином, повторно се упростуваат:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{1}{4} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right), \quad (6.29)$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \dots \right). \quad (6.30)$$

Забелешка 6.3. Во главата 5 видовме дека интерполациските полиноми можат да се користат и за екстраполација, па поради тоа формулите (6.23) – (6.30) за нумеричко диференцирање можат да се користат и во случај кога x е надвор од сегментот $[x_0, x_n]$.

Пример 6.3. Нека функцијата $f(x)$ е зададена со табелата 6.7.

x	2	3,5	4
$f(x)$	0,7	1,3	1,4

Табела 6.7

Приближно да се пресметаат $f'(2,1)$ и $f'(4,2)$.

Решение. Јазлите не се еквидистантни, па затоа ќе го користиме Лагранжовиот интерполациски полином, даден со формулата (5.13). Бидејќи се дадени три јазли, го добиваме квадратниот полином

$$L_2(x) = -0,1x^2 + 0,95x - 0,86,$$

чија изводна функција е

$$L_2'(x) = -0,2x + 0,95.$$

Според тоа,

$$f'(2,1) \approx L_2'(2,1) = 0,53$$

и

$$f'(4,2) \approx L_2'(4,2) = 0,11.$$

Забележуваме дека $x = 4,2$ е надвор од сегментот $[2, 4]$, па овде всушност се прави екстраполација. ▲

Пример 6.4. Функцијата $y = f(x)$ е дадена со табелата 6.8.

x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$	0,7419	0,7884	0,8329	0,8755	0,9163

Табела 6.8

Да се пресметаат приближно:

- а) $y'(2,1)$, $y''(2,1)$, б) $y'(2,5)$, $y''(2,5)$, в) $y'(2,25)$,
 г) $y'(2,45)$, д) $y'(2,6)$.

Решение. Бидејќи јазлите се еквидистантни, користиме Њутнови интерполациски полиноми. Ги определуваме конечните разлики и ја составуваме табелата 6.9.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
2,1	0,7419	$4,65 \cdot 10^{-2}$		
2,2	0,7884	$4,45 \cdot 10^{-2}$	$-0,20 \cdot 10^{-2}$	
2,3	0,8329	$4,26 \cdot 10^{-2}$	$-0,19 \cdot 10^{-2}$	10^{-4}
2,4	0,8755	$4,08 \cdot 10^{-2}$	$-0,18 \cdot 10^{-2}$	10^{-4}
2,5	0,9163			

Табела 6.9

а) За приближно пресметување на $y'(2,1)$ и $y''(2,1)$ го користиме првиот Њутнов интерполациски полином. Бидејќи $x = x_0 = 2,1$ следува дека $q = \frac{x-x_0}{h} = 0$. Од формулите (6.27) и (6.28) добиваме:

$$y'(2,1) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 \right) = 0,47533,$$

$$y''(2,1) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0) = -0,21000.$$

б) За приближно пресметување на $y'(2,5)$ и $y''(2,5)$ го користиме вториот Њутнов интерполациски полином. Од тоа што $x = x_n = 2,5$ следува $s = \frac{x-x_n}{h} = 0$, па ги користиме формулите (6.29) и (6.30), и добиваме:

$$y'(2,5) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_3 + \frac{1}{2} \Delta^2 y_2 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_1 \right) = 0,39933,$$

$$y''(2,5) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_2 + \Delta^3 y_1) = -0,17000.$$

в) Бидејќи $x = 2,25$ е поблиску до почетниот јазол на сегментот $[2,1; 2,5]$, ќе работиме со првиот Њутнов интерполациски полином. Земаме $x_0 = 2,2$. Тогаш,

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2,25 - 2,2}{0,1} = 0,5.$$

Од формулата (6.23), за бараната вредност добиваме:

$$y'(2,25) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 + \frac{2q - 1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{3!} \Delta^3 y_0 \right) = 0,44496.$$

г) Бидејќи $x = 2,45$ е поблиску до крајниот јазол $x_n = 2,5$, ќе работиме со вториот Њутнов интерполациски полином. За s добиваме:

$$s = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2,45 - 2,5}{0,1} = -0,5,$$

па од формулата (6.25) имаме:

$$y'(2,45) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_3 + \frac{2s + 1}{2!} \Delta^2 y_2 + \frac{3s^2 + 6s + 2}{3!} \Delta^3 y_1 \right) = 0,40796.$$

д) Бидејќи $x = 2,6$ е поблиску до крајниот јазол $x_n = 2,5$ ќе го користиме вториот Њутнов интерполациски полином, правејќи екстраполација. Тогаш,

$$s = \frac{x - x_n}{h} = \frac{2,6 - 2,5}{0,1} = 1$$

и

$$y'(2,6) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_3 + \frac{2s + 1}{2!} \Delta^2 y_2 + \frac{3s^2 + 6s + 2}{3!} \Delta^3 y_1 \right) = 0,38283. \blacktriangle$$

Забелешка 6.4. Диференцирањето преку интерполациските полиноми, од една страна нуди доста поволности, како што се: приближно наоѓање извод во точка што не се совпаѓа со табеларните вредности на независната променлива x ; приближно наоѓање извод во точка надвор од интервалот опфатен со табелата; а исто така, со Лагранжовиот полином, е

можно приближно диференцирање во случај кога јазлите не се екви-
дистантни. Нумеричкото диференцирање со помош на централните и не-
централните приближни формули ги нема овие особини. Од друга
страна, при диференцирањето со помош на интерполациските поли-
номи, немаме информација за направената грешка при диференцира-
њето. На пример, може да се случи оригиналната функција $f(x)$ да има
екстрем во дадена точка од табелата, $(x_i, f(x_i))$, што би значело дека
изводот во таа точка има вредност нула, $f'(x_i) = 0$. Од самата дефи-
ниција на интерполацискиот полином, знаеме дека точката $(x_i, f(x_i))$
припаѓа на неговиот график, но немаме никаква информација дали тоа е
екстремна точка за полиномот, односно изводот на интерполацискиот
полином во таа точка може, помалку или повеќе, да се разликува од ну-
ла.

7. Нумеричка интеграција

7.1. Методи за нумеричка интеграција

Го разгледуваме определениот интеграл

$$\int_a^b f(x)dx, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b,$$

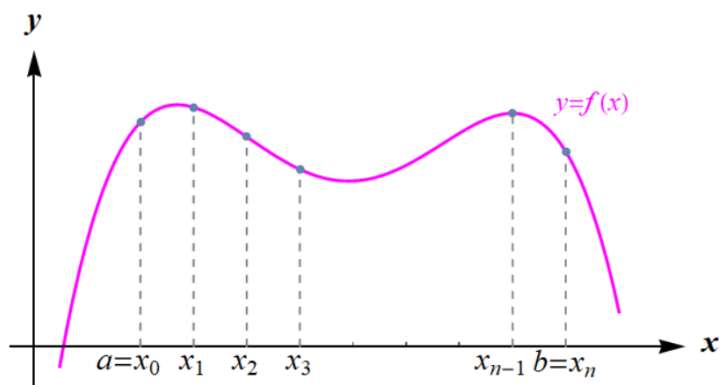
каде што $f(x)$ е дефинирана и ограничена функција на сегментот $[a, b]$. Ако овој интеграл не може да се реши аналитички, или ако подинтегралната функција $f(x)$ е зададена табеларно, тогаш неговата приближна вредност може да се пресмета со некој нумерички метод. Во продолжение ќе бидат изведени формулите за најпознатите методи за нумеричко интегрирање.

Го делиме сегментот $[a, b]$ на n еднакви делови со точките x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, такви што

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Должината на секој од добиените потсегменти $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, е

$$\Delta x_i = \frac{b - a}{n} = h, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Слика 7.1

На секој од сегментите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, функцијата $f(x)$ може да се апроксимира со некој интерполациски полином, на пример

со Лагранжовиот полином од k -ти степен, $L_k(x)$. Ова значи дека интегралот од функцијата $f(x)$ е приближно еднаков со сумата на интегралите од Лагранжовиот полином на секој од потсегментите $[x_{i-1}, x_i]$, т.е. важи

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_k(x)dx. \quad (7.1)$$

Имајќи предвид дека Лагранжовиот интерполациски полином е линеарна комбинација од вредностите $y_i = f(x_i)$ (види (5.3)), од формулата (7.1) добиваме:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n B_i f(x_i), \quad (7.2)$$

каде што B_i се константи.

Формулите од облик (7.2), каде што интегралот е претставен како линеарна комбинација од $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, се нарекуваат **квadrатурни формули**, а B_i , $i = 1, 2, \dots, n$, се **квadrатурни коефициенти** или **тежини**. Во случај кога јазлите се еквидистантни, квадратурните формули се викаат **Њутн - Котесови**.

Во зависност од степенот на користениот Лагранжов, односно Њутнов интерполациски полином, се добиваат различни формули за нумеричко интегрирање.

7.1.1. Правило на правоаголници

Нека функцијата $f(x)$ на секој од потсегментите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, се апроксимира со Лагранжов полином $L_0(x)$ од нулти степен, односно константна функција. Постојат две можности за избор на Лагранжовиот константен полином на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$.

Ако $L_0(x) = y_{i-1}$, тогаш од формулата (7.1) добиваме:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} y_{i-1}dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = h \sum_{i=1}^n y_{i-1},$$

односно

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (7.3)$$

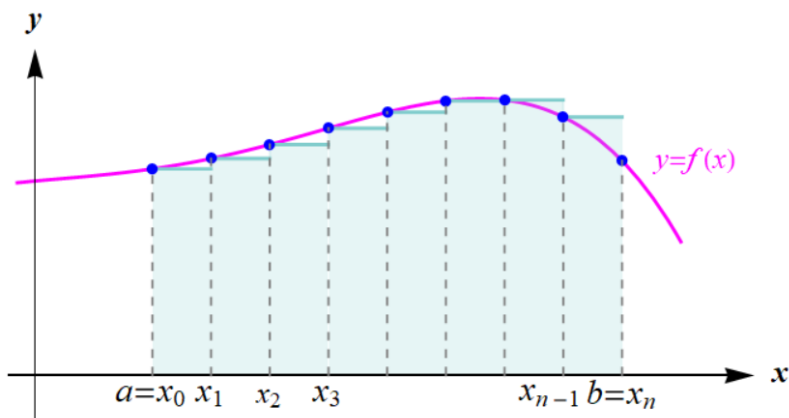
Ако пак, $L_0(x) = y_i$, тогаш се добива:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} y_i dx = \\ &= \sum_{i=1}^n y_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n y_i(x_i - x_{i-1}) = h \sum_{i=1}^n y_i, \end{aligned}$$

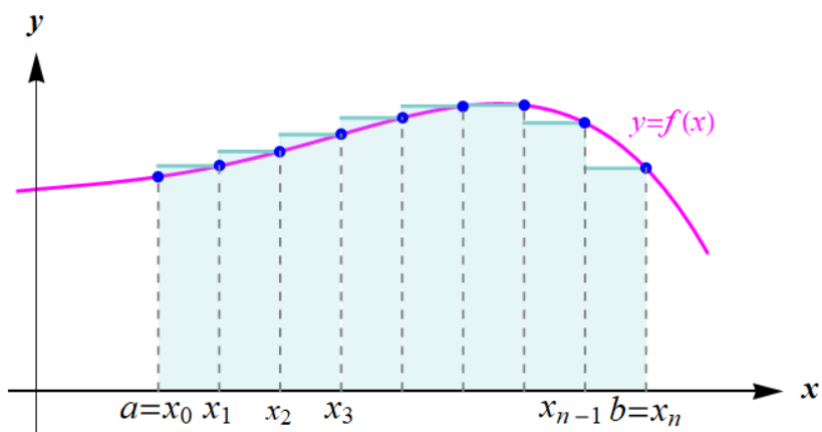
односно

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (7.4)$$

Од дефиницијата на определен интеграл, познато е дека вредноста на интегралот $\int_a^b f(x) dx$ е плоштината на криволинискиот трапез формиран помеѓу графикот на ненегативната функција $y = f(x)$, x -оската и правите $x = a$ и $x = b$ (види слика 7.1).



Слика 7.2



Слика 7.3

Од формулите (7.3) и (7.4) следува дека оваа плоштина приближно е еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците конструирани над сегментите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, со страни $h = x_i - x_{i-1}$ и y_{i-1} (слика 7.2), односно y_i (слика 7.3). Поради тоа, ова правило дадено со формулите (7.3), односно (7.4), е наречено **правило на правоаголници**.

7.1.2. Правило на трапези

Ако функцијата $f(x)$ на секој од потсегментите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, се апроксимира со Лагранжов интерполяциски полином $L_1(x)$ од прв степен, односно линеарната функција

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i,$$

тогаш формулата (7.1) го добива обликот:

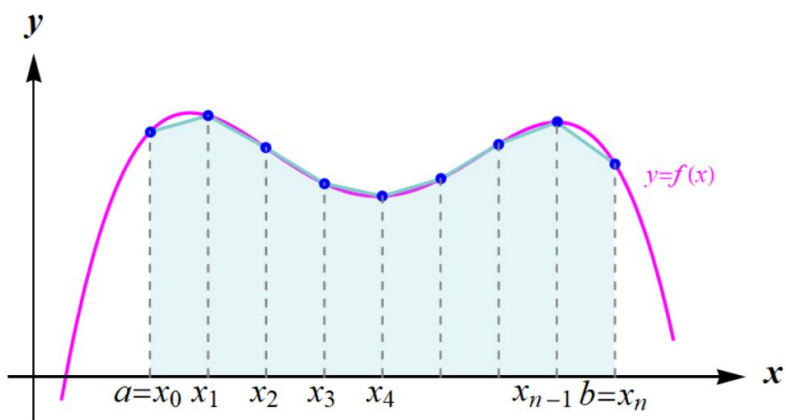
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{i-1}}{x_{i-1} - x_i} \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{y_i}{x_i - x_{i-1}} \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_{i-1}}{-h} \left(-\frac{h^2}{2} \right) + \frac{y_i}{h} \frac{h^2}{2} \right) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i),
 \end{aligned}$$

односно

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n). \quad (7.5)$$

На сликата 7.4 е дадена геометриска интерпретација на формулата (7.5). Над секој од потсегментите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, се формира трапез чии основи се правите, $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$, а краците се делот од x -оската и делот од правата $y = L_1(x)$, која е линеарна апроксимација на функцијата на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$. Од формулата (7.5) следува дека плоштината на криволинискиот трапез приближно е еднаква на збирот од плоштините на трапезите конструирани над сегментите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ (слика 7.4). Поради тоа, ова правило е наречено **правило на трапези**.



Слика 7.4

7.1.3. Правило на параболи (Симпсоново правило)

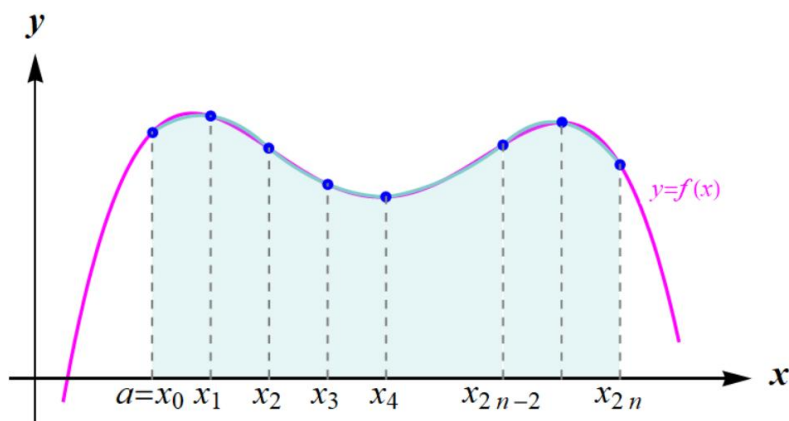
За да се апроксимира функцијата $f(x)$ со Лагранжов интерполациски полином од втор степен, потребни се три јазли на секој од пот-сегментите $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Од овие причини, сегментот $[a, b]$ ќе го поделиме на парен број, $2n$, еднакви делови, т.е.

$$h = \frac{b - a}{2n}.$$

Функцијата $f(x)$ на сегментот $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ ја апроксимираме со квадратен Лагранжов интерполациски полином $L_2(x)$, т.е. парабола што минува низ точките

$$M_{2i-2}(x_{2i-2}, y_{2i-2}), M_{2i-1}(x_{2i-1}, y_{2i-1}) \text{ и } M_{2i}(x_{2i}, y_{2i}):$$

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - x_{2i-1})(x - x_{2i})}{(x_{2i-2} - x_{2i-1})(x_{2i-2} - x_{2i})} y_{2i-2} + \\ & + \frac{(x - x_{2i-2})(x - x_{2i})}{(x_{2i-1} - x_{2i-2})(x_{2i-1} - x_{2i})} y_{2i-1} + \\ & + \frac{(x - x_{2i-2})(x - x_{2i-1})}{(x_{2i} - x_{2i-2})(x_{2i} - x_{2i-1})} y_{2i}. \end{aligned}$$



Слика 7.5

Од формулата (7.1) и слична постапка како при изведувањето на формулата (7.5) се добива:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} L_2(x)dx = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^n (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}),$$

односно

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + y_{2n}). \quad (7.6)$$

Формулата (7.6) го претставува **правилото на параболи**, познато како **Симпсоново правило**. Нејзината геометриска интерпретација е претставена на сликата 7.5.

Забелешка 7.1. Правилата на правоаголници и трапези може лесно да се изведат и со користење на интегралната сума на Дарбу позната од дефиницијата на определен интеграл.

Нека сегментот $[a, b]$ го поделиме на n еднакви делови со точките $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$, такви што

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Должината на секој од добиените потсегменти е

$$\Delta x_i = \frac{b - a}{n} = h, i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогаш определен интеграл на сегментот $[a, b]$ се дефинира со:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

каде што c_i е произволна точка од интервалот $[x_{i-1}, x_i], i = 0, 1, 2, \dots, n$. За големи вредности на n важи

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \quad (7.7)$$

Ако во формулата (7.7) избереме $c_i = x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$, тогаш ја добиваме формулата (7.3), а ако избереме $c_i = x_i, i = 1, 2, \dots, n$, ја добиваме формула (7.4) за правилото на правоаголници.

Ако пак, точките $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, ги избереме така што

$$f(c_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{y_{i-1} + y_i}{2},$$

тогаш

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h = \\ &= \frac{h}{2} (y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n), \end{aligned}$$

т.е. ја добиваме формулата (7.5) за правилото на трапези.

7.2. Оценка на грешката при нумеричка интеграција

Познато е дека ако $f(x)$ се апроксимира на сегментот $[a, b]$ со интерполациски полином од n -ти степен, $P_n(x)$, тогаш грешката на интерполацијата е

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \quad (7.8)$$

Од формулата (7.8) се добива

$$R = \int_a^b R_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P_n(x) dx, \quad (7.9)$$

од каде што заклучуваме дека грешката R што се прави при нумеричката интеграција е интеграл од грешката што се прави при интерполацијата.

Во поглавјето 5 покажавме дека ако $f(x)$ е $(n + 1)$ -пати диференцијабилна функција на сегментот $[x_0, x_n]$, т.е. постојат и се конечни изводите: $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$, за секој $x \in [x_0, x_n]$, тогаш важи следнава формула за грешката на интерполација $R_n(x)$ на сегментот $[x_0, x_n]$,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (7.10)$$

каде што $c \in (x_0, x_n)$.

7.2.1. Оценка на грешката кај правилото на правоаголници

Како што видовме, кај правилото на правоаголници, функцијата $f(x)$ на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, се апроксимира со Лагранжов полином $L_0(x)$ од нулти степен, односно со константна функција.

Нека на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$ важи приближното равенство

$$f(x) \approx L_0(x) = y_{i-1}.$$

Според формулата (7.10), грешката при интерполација на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$ е

$$R_0(x) = f'(c_i)(x - x_{i-1}),$$

каде што $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Од формулата (7.9) добиваме дека грешката која се прави на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$ при нумеричкото интегрирање со правилото на правоаголници е

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} R_0(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(c_i)(x - x_{i-1}) dx = \\ &= f'(c_i) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = f'(c_i) \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Грешката на интеграција на целиот сегмент $[x_0, x_n]$ е

$$R = \int_{x_0}^{x_n} R_0(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} R_0(x) dx = \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^n f'(c_i). \quad (7.11)$$

Познато е дека, во случај кога $f'(x)$ е непрекината функција на $[x_0, x_n]$, важи равенството

$$\sum_{i=1}^n f'(c_i) = n f'(c)$$

за некое $c \in [x_0, x_n]$. Според тоа, од (7.11) за грешката на интеграција кај правилото на правоаголници добиваме

$$R = \frac{h^2 n}{2} f'(c).$$

Бидејќи вредноста $c \in [a, b]$ не е позната, почесто се користи следнава оценка за апсолутната грешка:

$$|R| = \frac{h^2 n}{2} |f'(c)| \leq \frac{h^2 n}{2} M_1, \quad (7.12)$$

каде што

$$M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

Со замената

$$h = \frac{b - a}{n},$$

се добива еквивалентната форма:

$$|R| \leq \frac{b - a}{2} h M_1. \quad (7.13)$$

Имајќи ја предвид самата дефиниција на правилото на правоаголници, може да се каже дека формулите (7.3) и (7.4) со кои е дадено правилото, се точни кога $f(x)$ е константна функција на сегментот $[a, b]$. Тоа се потврдува и преку формулата (7.12), бидејќи во тој случај $f'(x) = 0$ за секој $x \in [a, b]$, па грешката е $R = 0$.

7.2.1. Оценка на грешката кај правилото на трапези

Постапката за добивање на формулата за грешка кај правилото на трапези е иста. Според формулата (7.10), грешката при интерполација со Лагранжовиот полином $L_1(x)$ на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$ е

$$R_1(x) = \frac{f''(c_i)}{2} (x - x_{i-1})(x - x_i),$$

каде што $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, па за грешката при интегрирање на сегментот $[x_{i-1}, x_i]$ се добива

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} R_1(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f''(c_i)}{2} (x - x_{i-1})(x - x_i) dx = -f''(c_i) \frac{h^3}{12}.$$

За грешката на интеграција на целиот сегмент $[x_0, x_n]$ имаме:

$$R = \int_{x_0}^{x_n} R_1(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} R_1(x) dx = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(c_i), \quad (7.14)$$

каде што $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Повторно важи равенството:

$$\sum_{i=1}^n f''(c_i) = n f''(c),$$

за некое $c \in [x_0, x_n]$, во случај кога $f''(x)$ е непрекината функција на $[x_0, x_n]$. Оттука, за грешката на интегрирање кај правилото на трапези добиваме

$$R = -\frac{h^3 n}{12} f''(c).$$

Почесто се користи една од следниве две еквивалентни формули за апсолутната грешка:

$$|R| \leq \frac{h^3 n}{12} M_2, \quad (7.15)$$

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2, \quad (7.16)$$

каде што $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Формулата (7.5) со која е дадено правилото на трапези е точна ако $f(x)$ е линеарна функција на сегментот $[a, b]$. Потврда за тоа дава и формулата за грешката: за линеарната функција $f(x)$ важи $f''(x) = 0$, за секој $x \in [a, b]$, па $R = 0$.

7.2.3. Оценка на грешката кај правилото на параболи

На сличен начин како во поглавјата 7.2.1 и 7.2.2 се добива следнава формула за апсолутната грешка кај правилото на параболи:

$$|R| \leq \frac{h^5 n}{90} M_4 = \frac{b-a}{180} h^4 M_4, \quad (7.17)$$

каде што $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

Формулата (7.6) со која е дадено правилото на параболи е точна ако $f(x)$ е полином од степен најмногу три на сегментот $[a, b]$, бидејќи во тој случај $f^{(4)}(x) = 0$ за секој $x \in [a, b]$, па оттука $R = 0$.

Забележуваме дека формулата за грешка кај правилото на параболи отстапува од очекуваната форма (наместо, како што би се очекувало, во неа да фигурира третиот извод на функцијата $f(x)$, таа го содржи четвртиот извод). Тоа доаѓа од таму што,

$$\int_{x_0}^{x_n} R_2(x) dx = 0,$$

па за грешката се користи формулата

$$R = \int_{x_0}^{x_n} R_3(x) dx.$$

Забелешка 7.2. Формулите (7.13), (7.16) и (7.17) за оценка на грешката при нумеричка интеграција, не може да се применат во случај кога подинтегралната функција $f(x)$ не е зададена аналитички, или пак, изводот $f'(x)$, $f''(x)$ и $f^{(4)}(x)$, соодветно, не постои или не е конечен за некое $x \in [x_0, x_n]$. Овие формули не се соодветни за примена и кога аналитичкиот израз на функцијата $f(x)$ е многу сложен. Во тој случај, грешката кај правилото на правоаголници, трапези и параболи се определува соодветно според следниве формули:

$$|R| \approx (b - a) |\overline{\Delta y}|, \quad (7.18)$$

$$|R| \approx \frac{b - a}{12} |\overline{\Delta^2 y}|, \quad (7.19)$$

$$|R| \approx \frac{b - a}{180} |\overline{\Delta^4 y}|, \quad (7.20)$$

каде што $\overline{\Delta y}$, $\overline{\Delta^2 y}$ и $\overline{\Delta^4 y}$ се аритметичките средини од првите, вторите и четвртите конечни разлики, соодветно.

Ако функцијата $f(x)$ е зададена аналитички, за пресметување на нумеричката апроксимација на определениот интеграл $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx$, може да се искористи готовата наредба вградена во Mathematica:

$$\mathbf{NIntegrate}[f, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}].$$

Пример 7.1. Приближно да се пресмета интегралот

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

и да се оцени направената грешка, користејќи:

- а) правило на правоаголници за $n = 10$,
- б) правило на трапези за $n = 10$,
- в) Симпсоново правило за $n = 5$, односно поделба на 10 подинтервали.

Решение. а) За чекорот добиваме

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{10} = 0,1.$$

Во табелата 7.1 се дадени вредностите на функцијата во точките $x_i = 0 + ih, i = 0, 1, \dots, 10$.

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0,1	0,9900
2	0,2	0,9608
3	0,3	0,9139
4	0,4	0,8521
5	0,5	0,7788
6	0,6	0,6977
7	0,7	0,6126
8	0,8	0,5273
9	0,9	0,4448
10	1	0,3679

Табела 7.1

Користејќи ги вредностите на функцијата $f(x) = e^{-x^2}$ внесени во табелата 7.1 добиваме

$$I \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_9) = 0,7778.$$

Грешката ќе ја оцениме според формулата (7.13). За таа цел, потребно е да ја определиме вредноста

$$M_1 = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

Првиот извод на подинтегралната функција $f(x) = e^{-x^2}$ е

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Нека $g(x) = |f'(x)| = 2xe^{-x^2}$, $x \in [0,1]$. Го бараме апсолутниот максимум на функцијата $g(x)$ на сегментот $[0,1]$. Стационарните точки на функцијата $g(x)$ ги наоѓаме како решение на равенката

$$g'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(2 - 4x^2) = 0.$$

Бидејќи

$$e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in [0,1],$$

бараните стационарни точки се решенија на равенката

$$2 - 4x^2 = 0, \quad \text{т.е.} \quad x_{1/2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ги пресметуваме вредностите на функцијата $g(x)$ во крајните точки на сегментот $[0,1]$ и во стационарната точка $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \in [0,1]$. Потоа со споредба ја определуваме најголемата вредност:

$$g(0) = 0, \quad g(1) = \frac{2}{e} = 0,7353, \quad g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,8577.$$

Заклучуваме дека

$$M_1 = \max_{x \in [0,1]} g(x) = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| = 0,8577.$$

За грешката добиваме:

$$|R| \leq \frac{b-a}{2} h M_1 = \frac{1-0}{2} \cdot 0,1 \cdot 0,8577 = 0,0429.$$

б) Чекорот е ист како под а), односно $h = 0,1$. Користејќи ги вредностите на функцијата $f(x) = e^{-x^2}$ дадени во табелата 7.1 добиваме

$$I \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) + y_{10}) = 0,7462.$$

Грешката ќе ја оцениме според формулата (7.16). За таа цел, потребно е да ја определиме вредноста на $M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|$.

Нека $s(x) = f''(x) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$, $x \in [0,1]$. Го бараме апсолутниот максимум на функцијата $|s(x)|$ на сегментот $[0,1]$. Стационарните точки на функцијата $s(x)$ ги наоѓаме како решенија на равенката

$$s'(x) = 4xe^{-x^2}(3 - 2x^2) = 0.$$

Од тоа што $e^{-x^2} \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$, стационарните точки ги добиваме решавајќи ја равенката $x(3 - 2x^2) = 0$. Тоа се:

$$x_1 = 0 \in [0,1] \text{ и } x_{2/3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \notin [0,1].$$

Ги пресметуваме вредностите на функцијата $|s(x)|$ во крајните точки на сегментот $[0,1]$, а потоа со споредба ја определуваме најголемата вредност:

$$|s(0)| = 2, \quad |s(1)| = \frac{2}{e} = 0,7353.$$

Заклучуваме дека,

$$M_2 = \max_{x \in [0,1]} |s(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = 2.$$

За грешката добиваме:

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2 = \frac{1-0}{12} \cdot 0,1^2 \cdot 2 = 0,0017.$$

в) Чекорот е

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{10} = 0,1,$$

па за интегралот добиваме:

$$I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + y_{10}) = 0,7468.$$

Грешката се оценува според формулата (7.17). На сличен начин како под а) и б) се определува вредноста на

$$M_4 = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)|.$$

Нека

$$r(x) = f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3), x \in [0,1].$$

Го бараме апсолутниот максимум на функцијата $|r(x)|$ на сегментот $[0,1]$. Решавајќи ја равенката

$$r'(x) = 8xe^{-x^2}(-4x^4 + 20x^2 - 15) = 0$$

ги добиваме стационарните точки на функцијата $r(x)$: $x_1 = 0 \in [0,1]$ и решенијата на биквадратната равенка

$$-4x^4 + 20x^2 - 15 = 0.$$

Со замената $x^2 = t$ последната равенка се сведува на квадратната равенка $-4t^2 + 20t - 15 = 0$ чии решенија се:

$$t_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{10}}{-2},$$

т.е. $t_1 = 0,92$ и $t_2 = 4,08$. Од првото решение $t_1 = 0,92$ се добива $x_{2/3} = \pm 0,96$, а од второто $t_2 = 4,08$, па $x_{4/5} = \pm 2,02$.

Од добиените стационарни точки, само $x_2 = 0,96 \in [0,1]$. Ги пресметуваме вредностите на функцијата $|r(x)|$ во крајните точки на сегментот $[0,1]$ и во стационарната точка $x_2 = 0,96$, а потоа со споредба ја определуваме најголемата вредност:

$$|r(0)| = 12, \quad |r(1)| = 7,35, \quad |r(0,96)| = 7,41.$$

Заклучуваме дека,

$$M_4 = \max_{x \in [0,1]} |r(x)| = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| = 12,$$

па за грешката добиваме:

$$|R| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4 = \frac{1-0}{180} \cdot 0,1^4 \cdot 12 = 0,67 \cdot 10^{-5}.$$

Забележуваме дека најдобар резултат при интеграцијата се добива со примена на правилото на параболи.

Решението добиено во Mathematica со примена на наредбата **NIntegrate** е прикажано на сликата 7.6.

```
NIntegrate[e-x2, {x, 0, 1}]
0.746824
```

Слика 7.6

Пример 7.2. Со формулата на трапези приближно да се пресмета интегралот

$$I = \int_0^{1,2} \ln(1 + x^2) dx$$

со точност $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решение. За да го пресметаме дадениот интеграл со точност $\varepsilon = 10^{-2}$, потребно е да важи:

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2 < 10^{-2},$$

каде што

$$M_2 = \max_{x \in [0; 1,2]} |f''(x)|.$$

Првиот извод на подинтегралната функција $f(x) = \ln(1 + x^2)$ е

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Нека

$$g(x) = f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}, \quad x \in [0; 1,2].$$

Го бараме апсолутниот максимум на функцијата $|g(x)|$ на сегментот $[0; 1,2]$. Стационарни точки на функцијата $g(x)$ се решенијата на равенката

$$g'(x) = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} = 0.$$

Тоа се точките:

$$x_1 = 0 \in [0; 1,2], \quad x_2 = \pm\sqrt{3} \notin [0; 1,2].$$

Ги пресметуваме вредностите на функцијата $g(x)$ во крајните точки на сегментот $[0; 1,2]$, а потоа со споредба ја определуваме најголемата вредност:

$$|g(0)| = 2, \quad |g(1,2)| = 0,15.$$

Заклучуваме дека,

$$M_2 = \max_{x \in [0;1,2]} |g(x)| = \max_{x \in [0;1,2]} |f''(x)| = 2.$$

Од неравенството

$$\frac{1,2 - 0}{12} h^2 \cdot 2 < 10^{-2}$$

се добива $h^2 < 0,05$, т.е. $|h| < \sqrt{0,05}$. Значи,

$$0 < h < 0,2236,$$

па избираме $h = 0,2$.

Ги табелираме вредностите на подинтегралната функција $f(x) = \ln(1 + x^2)$ на сегментот $[0; 1,2]$ со чекор $h = 0,2$ (табела 7.2).

За вредноста на дадениот интеграл според правилото на трапези добиваме:

$$I \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_6) = 0,4257.$$

n	x_n	y_n
0	0	0
1	0,2	0,03922
2	0,4	0,14842
3	0,6	0,30748
4	0,8	0,49470
5	1,0	0,69315
6	1,2	0,89120

Табела 7.2

Решението добиено во Mathematica со примена на наредбата **NIntegrate** е прикажано на сликата 7.7.

```
NIntegrate[Log[1 + x^2], {x, 0, 1.2}]
0.422514
```

Слика 7.7

Пример 7.3. Да се пресмета интегралот

$$I = \int_0^{0,8} f(x)dx$$

и да се оцени грешката, ако подинтегралната функција $f(x)$ е дадена со табелата 7.3, користејќи:

- а) правило на правоаголници,
- б) правило на трапези,
- в) Симпсоново правило.

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0,1	0,9950
2	0,2	0,9801
3	0,3	0,9553
4	0,4	0,9211
5	0,5	0,8776
6	0,6	0,8253
7	0,7	0,7648
8	0,8	0,6967

Табела 7.3

Решение. Чекорот е $h = 0,1$.

а) $I \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_7) = 0,80159$.

б) $I \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7) + y_8) = 0,71676$.

в) $I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8) = 0,71735$.

За да ја определиме грешката при интеграцијата, ќе ги искористиме формулите (7.18) – (7.20). За таа цел ќе составиме табела од конечните разлики до четврти ред.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0,0	1				
0,1	0,9950	-0,0050			
0,2	0,9801	-0,0149	-0,0099	0,0000	0,0005
0,3	0,9553	-0,0248	-0,0099	0,0005	-0,0004
0,4	0,9211	-0,0342	-0,0094	0,0001	0,0004
0,5	0,8776	-0,0435	-0,0093	0,0005	0,0001
0,6	0,8253	-0,0523	-0,0088	0,0006	0,0000
0,7	0,7648	-0,0605	-0,0082	0,0006	
0,8	0,6967	-0,0681	-0,0076		

Табела 7.4

За аритметичките средини од првите, вторите и четвртите конечни разлики добиваме:

$$\overline{\Delta y} = -0,03791, \quad \overline{\Delta^2 y} = -0,00901, \quad \overline{\Delta^4 y} = 0,00012,$$

па за грешката при примена на правилото на правоаголници, трапези и параболи се добива соодветно:

$$|R| \approx (b - a) |\overline{\Delta y}| = 0,03033,$$

$$|R| \approx \frac{b - a}{12} |\overline{\Delta^2 y}| = 0,0006,$$

$$|R| \approx \frac{b - a}{180} |\overline{\Delta^4 y}| = 0,53 \cdot 10^{-6}. \quad \blacktriangle$$

8. Нумеричко решавање

обични диференцијални равенки

Голем број обични диференцијални равенки, што се јавуваат при решавање реални проблеми, не може да се решат аналитички. Постојат бројни нумерички методи за приближно определување партикуларно решение на дадена диференцијална равенка.

8.1. Метод на Ојлер

Еден од наједноставните, но најмалку точни методи, е методот на Ојлер. Нека е дадена диференцијалната равенка од прв ред

$$y' = f(x, y), \quad (8.1)$$

$y = y(x)$, со почетен услов

$$y_0 = y(x_0), \quad (8.2)$$

каде што функцијата $f(x, y)$ е непрекината на некоја област $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и нека $y = F(x)$ е бараното партикуларно решение на дадената диференцијална равенка.

Од равенството

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

следува дека за доволно мало h важи:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

т.е.

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x). \quad (8.3)$$

Избираме доволно мал чекор h и ги определуваме точките:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots$$

Ако ставиме $x = x_0$ во релацијата (8.3), и го искористиме условот $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, добиваме:

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hy'(x_0) = y(x_0) + hf(x_0, y_0).$$

Според тоа,

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y_0 + hf(x_0, y_0),$$

што претставува приближна вредност на партикуларното решение $y = F(x)$ во точката $x = x_1$. Продолжувајќи ја постапката се добива:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.4)$$

каде што y_n претставува приближна вредност на партикуларното решение $y = F(x)$ во точката $x = x_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

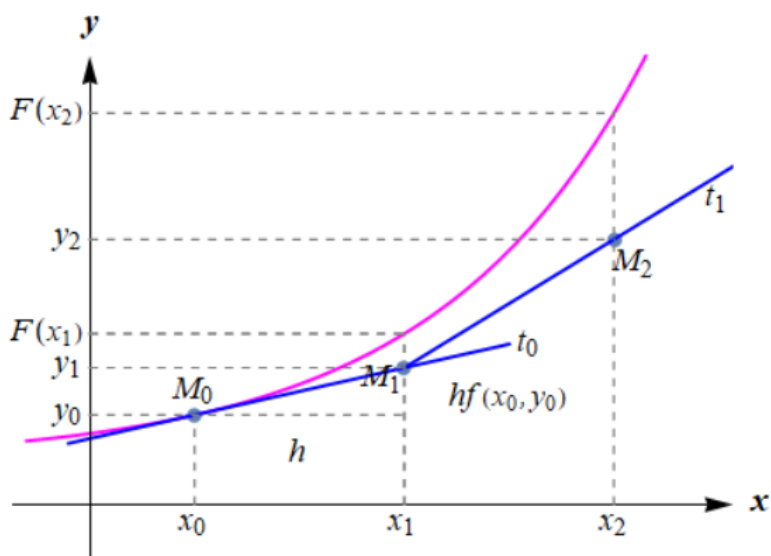
Со други зборови, дадената диференцијална равенка (8.1), со почетен услов (8.2), се сведува на диференцната равенка

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

при услов

$$y_0 = y(x_0).$$

Геометриска интерпретација на методот



Слика 8.1

Нека $y = F(x)$ е бараното партикуларно решение на дадената диференцијална равенка. Тогаш интегралната крива $y = F(x)$ минува низ точката $M_0(x_0, y_0)$. Ако низ точката $M_0(x_0, y_0)$ повлечеме тангентата на кривата $y = F(x)$ ја добиваме равенката:

$$t_0: y - y_0 = F'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Ако ставиме $x = x_1$ во равенката на тангентата t_0 добиваме:

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

а оттука

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

што според (8.4) е приближното решение y_1 . Заклучуваме дека точката $M_1(x_1, y_1)$, $x_1 = x_0 + h$, лежи на тангентата t_0 . Постапката ја продолжуваме на истиот начин, така што во точката $M_1(x_1, y_1)$ повлекуваме права t_1 паралелна со тангентата на кривата $y = F(x)$ во точката со апсциса $x = x_1$:

$$t_1: y - y_1 = F'(x_1)(x - x_1) = f(x_1, y_1)(x - x_1).$$

Ако ставиме $x = x_2$ во равенката на правата t_1 добиваме:

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$

од каде што следува

$$y = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

што го дава приближното решение y_2 . Значи точката $M_2(x_2, y_2)$ лежи на правата t_1 . Постапката продолжува на ист начин.

Забележуваме дека функцијата $y = F(x)$ на секој интервал (x_n, x_{n+1}) , $n = 0, 1, 2, \dots$, се апроксимира со делот од правата повлечена во точката $M_n(x_n, x_{n+1})$, паралелна со тангентата на кривата во точката со апсциса $x = x_n$ (слика 8.1).

Предноста на методот на Ојлер е неговата едноставност, а неговите најважни недостатоци се малата точност и постојаното натрупвање на грешката кога се оддалечуваме од точката $M_0(x_0, y_0)$.

За наоѓање на приближното решение на почетниот проблем (8.1) – (8.2), во пакетот Mathematica може да се искористи модулот **Euler**, даден во продолжение. Влезни податоци се: границите на интервалот, почетниот услов y_0 и бројот на поделби на интервалот.


```
Euler[a0_, b0_, y0_, m0_] :=
Module[{a = a0, b = b0, j, m = m0},
  h =  $\frac{b - a}{m}$ ;
  T = Table[a + (j - 1) h, {j, 1, m + 1}];
  Y = Table[y0, {j, 1, m + 1}];
  For[j = 1, j ≤ m, j++,
    Y[[j+1]] = Y[[j]] + h f[T[[j]], Y[[j]]; ];
  Return[Transpose[{T, Y}]]];
```

Пример 8.1. Користејќи го Ојлеровиот метод, да се состави таблица на вредности за решението на диференцијалната равенка

$$y' = \frac{xy}{2}, y(0) = 1,$$

на сегментот $[0; 0,5]$ со чекор $h = 0,1$. Равенката да се реши аналитички и да се споредат добиените решенија.

Решение. Дадената равенка е равенка кај која променливите може да се раздвојат, па таа може да се реши и аналитички. Равенката $y'(x) = \frac{xy}{2}$ ја запишуваме во облик

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{2},$$

со чие интегрирање добиваме:

$$\ln|y| = \frac{x^2}{4} + \ln c,$$

каде што c е позитивна константа. Со трансформација на последново равенство во облик $\ln \frac{|y|}{c} = \frac{x^2}{4}$ го добиваме општото решение на диференцијалната равенка,

$$y = ce^{\frac{x^2}{4}}, c > 0.$$

Користејќи го почетниот услов $y(0) = 1$, добиваме $1 = ce^0$, од каде $c = 1$. Според тоа, бараното партикуларно решение на дадената равенка е

$$y = e^{\frac{x^2}{4}}.$$

За нумеричко добивање на партикуларното решение ја користиме формулата

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h \frac{x_n y_n}{2}, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

каде што $h = 0,1, x_0 = 0, x_1 = 0,1, y_0 = 1$, и добиваме:

$$y_1 = y_0 + h \frac{x_0 y_0}{2} = 1 + 0,1 \frac{0 \cdot 1}{2} = 1,$$

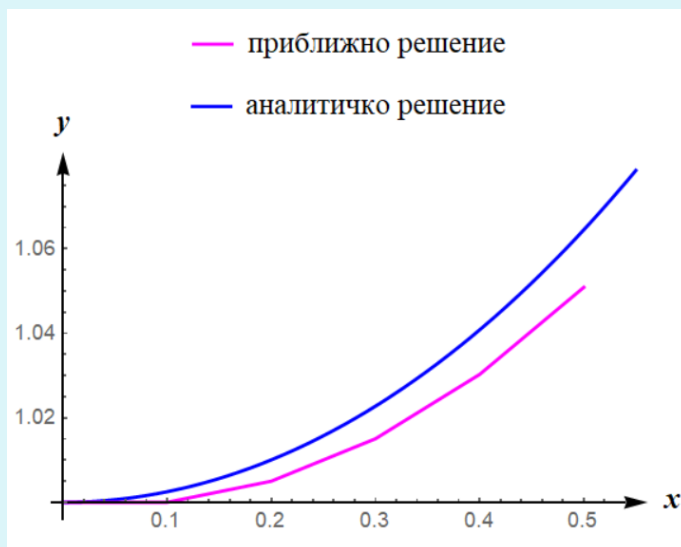
$$y_2 = y_1 + h \frac{x_1 y_1}{2} = 1 + 0,1 \frac{0,1 \cdot 1}{2} = 1,005.$$

Постапката продолжува на ист начин, а добиените вредности се дадени во следнава табела:

n	x_n	y_n	точно решение $y_n^* = e^{\frac{x_n^2}{4}}$	$ y_n - y_n^* $
0	0,0	1	1	0
1	0,1	1	1,00250	0,00250
2	0,2	1,00500	1,01005	0,00505
3	0,3	1,01505	1,02276	0,00771
4	0,4	1,03028	1,04081	0,01053
5	0,5	1,05089	1,06449	0,01360

Табела 8.1

На сликата 8.2 се прикажани: точното решение на почетниот проблем, добиено со примена на аналитички метод и приближното решение, добиено со примена на методот на Ојлер. Забележуваме дека со оддалечување од точката $M_0(0, 1)$, апсолутната грешка на приближното решение се зголемува.



Слика 8.2

Со примена на модулот **Euler**, во пакетот Mathematica, се доби-
ваат вредностите прикажани на сликата 8.3.

```

a = 0.0;
b = 0.5;
y0 = 1.0;
n = 5;

f[x_, y_] =  $\frac{x y}{2}$ ;

output = Euler[a, b, y0, n];
Print[NumberForm[TableForm[output,
    TableHeadings -> {None, {"xn", "yn"}}], 16]];

```

x_n	y_n
0.	1.
0.1	1.
0.2	1.005
0.3	1.01505
0.4	1.03027575
0.5	1.050881265

Слика 8.3

8.2. Подобрени методи на Ојлер

За да се подобри точноста на методот на Ојлер направени се одредени модификации на методот, познати како подобрени методи на Ојлер.

8.2.1. Прв подобрен метод на Ојлер (метод на Ојлер - Коши)

Изразите со кои се дефинира првиот подобрен метод на Ојлер се:

$$\begin{aligned}\bar{x}_n &= x_n + \frac{h}{2}, \\ \bar{y}_n &= y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + hf(\bar{x}_n, \bar{y}_n),\end{aligned}\tag{8.5}$$

за $n = 0, 1, 2, \dots$

Геометриска интерпретација на методот

Нека $y = F(x)$ е бараното партикуларно решение на дадената диференцијална равенка (8.1) – (8.2). Тогаш интегралната крива $y = F(x)$ минува низ точката $M_0(x_0, y_0)$. Ако низ точката $M_0(x_0, y_0)$ повлечеме тангентата на кривата $y = F(x)$, ја добиваме равенката:

$$t_0: y - y_0 = F'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Точката $\bar{M}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, при што $\bar{x}_0 = x_0 + \frac{h}{2}$, ја избираме на тангентата t_0 . Според тоа, ако ставиме $x = \bar{x}_0$ во равенката на тангентата t_0 добиваме:

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(\bar{x}_0 - x_0),$$

од каде

$$\bar{y}_0 = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0).$$

Коефициент на правец на тангентата на кривата $y = F(x)$ во точката $\bar{M}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ е

$$k = F'(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0, \bar{y}_0).$$

Повлекуваме тангента на кривата $y = F(x)$ во точката $M_0(x_0, y_0)$ со коефициент на правецот $k = f(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$:

$$\bar{t}_0: y - y_0 = k(x - x_0) = f(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(x - x_0).$$

Ако ставиме $x = x_1$ во равенката на последната тангентата \bar{t}_0 , добиваме:

$$y - y_0 = f(\bar{x}_0, \bar{y}_0)(x_1 - x_0),$$

од каде имаме

$$y_1 = y_0 + hf(\bar{x}_0, \bar{y}_0).$$

Со тоа се добива приближното решение y_1 . Постапката продолжува на ист начин во точката $M_1(x_1, y_1)$.

8.2.2. Втор подобрен метод на Ојлер

Изразите со кои се дефинира вториот подобрен метод на Ојлер се:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n), \\ \overline{\overline{y}}_{n+1} &= y_n + hf(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}), \\ y_{n+1} &= \frac{\bar{y}_{n+1} + \overline{\overline{y}}_{n+1}}{2}, \end{aligned} \tag{8.6}$$

за $n = 0, 1, 2, \dots$

Геометриска интерпретација на методот

Нека $y = F(x)$ е бараното партикуларно решение на дадената диференцијална равенка. Тогаш интегралната крива $y = F(x)$ минува низ точката $M_0(x_0, y_0)$. Низ точката $M_0(x_0, y_0)$ повлекуваме тангента на кривата $y = F(x)$ чија равенка е

$$t_0: y - y_0 = F'(x_0)(x - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Ако ставиме $x = x_1$ во равенката на тангентата t_0 добиваме:

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

т.е.

$$\bar{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Коефициентот на правец на тангентата на кривата $y = F(x)$ во точката $M_1(x_1, \bar{y}_1)$ е

$$k = F'(x_1) = f(x_1, \bar{y}_1).$$

Повлекуваме тангента на кривата $y = F(x)$ во точката $M_0(x_0, y_0)$ со коефициентот на правец $k = f(x_1, \bar{y}_1)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0) = f(x_1, \bar{y}_1)(x - x_0).$$

Ако ставиме $x = x_1$ во равенката на последната тангента, добиваме:

$$y - y_0 = f(x_1, \bar{y}_1)(x_1 - x_0),$$

од каде

$$\bar{\bar{y}}_1 = y_0 + hf(x_1, \bar{y}_1).$$

Приближното решение е

$$y_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{\bar{y}}_1}{2}.$$

Постапката продолжува во точката $M_1(x_1, y_1)$.

Пример 8.2. Да се состави таблица вредности за решението на диференцијалната равенка со почетен услов

$$y' = x + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0,$$

на сегментот $[1; 1,5]$ со чекор $h = 0,1$, користејќи го:

- а) првиот подобрен метод на Ојлер,
- б) вториот подобрен метод на Ојлер.

Равенката да се реши аналитички и да се споредат добиените решенија.

Решение. Дадената равенка е линеарна диференцијална равенка од прв ред, т.е. од облик:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

и може да се реши аналитички. Нејзиното општо решение се определува според формулата

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right], \quad (8.7)$$

каде што c е константа.

За дадената равенка $p(x) = -\frac{1}{x}$ и $q(x) = x$, па

$$\int p(x)dx = -\ln |x| + c_1.$$

Бидејќи задачата ја решаваме на сегментот $[1; 1,5]$, може да се ослободиме од апсолутната вредност, односно

$$\int p(x)dx = -\ln x + c_1.$$

За општото решение добиваме

$$y(x) = e^{\ln x} \left[c + \int x e^{-\ln x} dx \right] = x \left(c + \int dx \right) = x(c + x).$$

Користејќи го почетниот услов добиваме:

$$0 = y(1) = 1(c + 1),$$

од каде $c = -1$, па бараното партикуларно решение е

$$y = x(x - 1).$$

Го бараме приближното решение на дадената равенка. Да забележиме дека,

$$f(x, y) = x + \frac{y}{x}, \quad x_0 = 1, y_0 = 0.$$

а) Од формулите (8.5) добиваме:

$$\bar{x}_0 = x_0 + \frac{h}{2} = 1 + \frac{0,1}{2} = 1,05,$$

$$\bar{y}_0 = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 0 + \frac{0,1}{2} f(1,0) = 0 + \frac{0,1}{2} \left(1 + \frac{0}{1} \right) = 0,05,$$

$$y_1 = y_0 + hf(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0 + 0,1 f(1,05; 0,05) =$$

$$= 0 + 0,1 \left(1,05 + \frac{0,05}{1,05} \right) = 0,10976.$$

Постапката продолжува понатаму за y_2 . Резултатите се дадени во табелата 8.2.

б) Од формулите (8.6) добиваме:

$$\bar{y}_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 0 + 0,1 f(1,0) = 0 + 0,1 \left(1 + \frac{0}{1}\right) = 0,1,$$

$$\bar{\bar{y}}_1 = y_0 + h f(x_1, \bar{y}_1) = 0 + \frac{0,1}{2} f(1,1; 0,1) =$$

$$= 0 + 0,1 \left(1,1 + \frac{0,1}{1,1}\right) = 0,11909,$$

$$y_1 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{\bar{y}}_1}{2} = \frac{0,1 + 0,11909}{2} = 0,10955.$$

Постапката продолжува понатаму за y_2, y_3, y_4, y_5 . Резултатите се дадени во табелата 8.2.

Забележуваме дека грешката е помала кај вториот подобрен метод на Ојлер.

n	x_n	y_n со прв подобрен метод	y_n со втор подобрен метод	точно решение y_n^*	$ y_n - y_n^* $ за прв подобрен метод	$ y_n - y_n^* $ за втор подобрен метод
0	1,0	0	0	0	0	0
1	1,1	0,10976	0,10955	0,11	0,00250	0,00045
2	1,2	0,23952	0,23909	0,24	0,00505	0,00091
3	1,3	0,38928	0,38862	0,39	0,00771	0,00138
4	1,4	0,55904	0,55816	0,56	0,01053	0,00184
5	1,5	0,74880	0,74770	0,75	0,01360	0,00230

Табела 8.2



8.3. Метод на Рунге - Кута

Нека е дадена диференцијалната равенка од прв ред

$$y'(x) = f(x, y), y = y(x),$$

со почетен услов $y_0 = y(x_0)$. Како што видовме, кај методот на Ојлер се користи приближното равенство

$$y(x + h) \approx y(x) + hf(x, y),$$

па дадената диференцијална равенка се сведува на диференцијалната равенка

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

при услов $y_0 = y(x_0)$.

Во методот на Рунге - Кута, $y(x + h)$ го запишуваме во облик:

$$y(x + h) \approx y(x) + h(A_1k_1 + A_2k_2 + \dots + A_mk_m),$$

каде што $k_i = k_i(x, y, h)$, $A_i \in \mathbb{R}$. На тој начин почетната диференцијална равенка се сведува на диференцијалната равенка:

$$y_{n+1} \approx y_n + h(A_1k_1 + A_2k_2 + \dots + A_mk_m), \quad y_0 = y(x_0).$$

Постојат повеќе варијанти на овој метод, но најчесто користен е т.н. **класичен метод на Рунге - Кута од четврти ред**. Методот е даден преку формулата (8.8), што се изведува од Тејлоровата формула.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \left(k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)} \right),$$

каде што

$$k_1^{(n)} = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2^{(n)} = hf \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2} \right)$$

$$k_3^{(n)} = hf \left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2} \right),$$

$$k_4^{(n)} = hf(x_n + h, y_n + k_3^{(n)}),$$

за $n = 0, 1, 2, \dots$

(8.8)

И покрај својата сложеност, формулата (8.8) има огромна примена во математиката и инженерството, не само заради релативно големата точност, туку и заради тоа што во својот израз не користи изводи, како што е случај со други познати формули со поголема точност.

За наоѓање на приближното решение на почетниот проблем (8.1) – (8.2), во пакетот Mathematica може да се искористи модулот **Runge**, даден во продолжение. Влезни податоци се: границите на интервалот, почетниот услов y_0 и бројот на поделби на интервалот.

```
Runge[a0_, b0_, y0_, m0_] :=
Module[{a = a0, b = b0, j, m = m0},
  h = (b - a) / m;
  Y = T = Table[0, {m + 1}];
  T[[1]] = a;
  Y[[1]] = y0;
  For[j = 1, j <= m, j++,
    k1 = h f[T[[j]], Y[[j]]];
    k2 = h f[T[[j]] + h/2, Y[[j]] + k1/2];
    k3 = h f[T[[j]] + h/2, Y[[j]] + k2/2];
    k4 = h f[T[[j]] + h, Y[[j]] + k3];
    Y[[j+1]] = Y[[j]] + 1/6 (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
    T[[j+1]] = a + h j; ];
Return[Transpose[{T, Y}]] ]
```

Пример 8.3. Со методот на Рунге - Кута да се најде решението на почетниот проблем

$$(x + 1)y' - y + y^2 = 0, \quad y(0) = 2,$$

на сегментот $[0; 0,3]$ со чекор $h = 0,1$. Равенката да се реши аналитички и да се споредат добиените решенија.

Решение. Дадената равенка е Бернулиева равенка, т.е. равенка од облик:

$$y'(x) + p(x)y = q(x)y^n, \quad y = y(x)$$

и може да се реши аналитички.

Ако равенката

$$y' - \frac{y}{x+1} = -\frac{y^2}{x+1}$$

ја поделиме со y^2 добиваме

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x+1} \frac{1}{y} = -\frac{1}{x+1}.$$

Ако во последната равенка воведеме замена

$$\frac{1}{y} = z, \text{ од каде следува } -\frac{1}{y^2} y' = z',$$

ја добиваме линеарната диференцијална равенка од прв ред

$$z' - \frac{1}{x+1} z = \frac{1}{x+1}. \quad (8.9)$$

Користејќи ја формулата (8.7) за општото решение на равенката (8.9) добиваме

$$z(x) = \frac{x+c}{x+1},$$

па за општото решение на почетната диференцијална равенка имаме,

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{x+1}{x+c}.$$

Бараното партикуларно решение го добиваме со користење на почетниот услов $y(0) = 2$, од каде $c = \frac{1}{2}$, па бараното партикуларно решение е:

$$y(x) = \frac{x+1}{x+1/2} = \frac{2(x+1)}{2x+1}.$$

За определување на приближното решение, дадената равенка ја запишуваме во облик:

$$y' = \frac{y-y^2}{x+1},$$

од каде

$$f(x, y) = \frac{y-y^2}{x+1}.$$

Од почетниот услов имаме $x_0 = 0, y_0 = 2$. Од формулите (8.7) за $n = 0$ добиваме:

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0,1f(0,2) = 0,1 \cdot \frac{2 - 2^2}{0 + 1} = -0,2,$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,1f\left(0 + \frac{0,1}{2}, 2 - \frac{0,2}{2}\right) =$$

$$= 0,1f(0,05; 1,9) = -0,16286,$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,1f\left(0 + \frac{0,1}{2}, 2 - \frac{0,16286}{2}\right) =$$

$$= 0,1f(0,05; 1,91857) = -0,16784,$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}\right) = 0,1f(0 + 0,1; 1 - 0,16784) =$$

$$= 0,1f(0,1; 0,83216) = -0,13860,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}\right) = 1,83333.$$

Истата постапка ја повторуваме за $n = 1, 2, 3$, со што ги добиваме резултатите дадени во табелата 8.3.

n	x_n	y_n	точно решение y_n^*
0	0,0	2	2
1	0,1	1,83333	1,83333
2	0,2	1,71428	1,71429
3	0,3	1,62500	1,62500

Табела 8.3

Забележуваме дека разликата меѓу точното и приближното решение е еднаква на нула или блиска до нула.

Со примена на модулот **Runge**, во пакетот Mathematica, се добиваат вредностите прикажани на сликата 8.4.

```

a = 0.0;
b = 0.3;
y0 = 2.0;
n = 3;

f[x_, y_] :=  $\frac{y - y^2}{x + 1}$ ;

output = Runge[a, b, y0, n];
Print[NumberForm[TableForm[output,
    TableHeadings -> {None, {"xn", "yn"}}], 16]];

```

x_n	y_n
0.	2.
0.1	1.833333282942593
0.2	1.71428516984133
0.3	1.624999500171272

Слика 8.4

Забелешка 8.1. Методите на Ојлер и Рунге - Кута може да се применат и за системи диференцијални равенки од прв ред. Бидејќи диференцијалните равенки од n -ти ред се сведуваат на систем од n диференцијални равенки од прв ред, методите се применливи и за овие равенки.

Индекс

А

апроксимација
во средно, 173
линеарна, 245
рамномерна, 214
со метод на најмали квадрати, 173

Б

бисекција, 50

Г

граница
на апсолутна грешка, 20, 22, 31, 32, 34, 35, 37
на итеративна низа, 60, 153
на низа, 12
на процентна грешка, 21, 22
на релативна грешка, 21, 22, 36
грешка
апсолутна, 19, 22, 25, 45, 51
вкупна, 14, 16
на апроксимација, 10, 225
на екстраполација, 177
на интерполација, 176, 177, 180, 190, 213, 248, 249, 250
на заокружување, 14, 16, 104, 120, 140
на метод, 16
на приближен број, 19
неотстранлива, 14, 15, 16
на интеграција, 249, 250

почетна, 14

при екстраполација, 177
процентна, 21, 22, 36, 37, 38
релативна, 19, 20, 21, 22, 32, 37, 38

Д

десетичен запис, 23
детерминанта
Вандермондова, 175
на систем, 101, 168, 175
по непознати, 101, 168
декомпозиција
на Дулитл, 126, 127, 132
на матрица, 126
на Чолески, 100
со сингуларни вредности, 126
LU, 126, 127, 129, 132
LDU, 126, 132
QR, 126

Е

елемент
водечки (главен), 114, 115, 117, 120, 121
елементарни трансформации, 106, 107, 123, 124
екстраполација, 173, 236
на Ричардсон, 231

З

заокружување, 14, 26

И

итерација

почетна, 45, 60, 69, 138, 152, 153, 154, 162

нулта, 45, 60, 137, 152, 157

со фиксна точка, 61

n -та, 45, 97, 135, 138, 169

интерполација, 173, 174, 175, 201

линеарна, 179, 205, 207

квадратна, 179

кубна, 179

напред, 190

назад, 191

обратна, 173, 196, 198, 201

по делови глатка, 205

полиномна, 204, 205

со сплајнови, 204, 205

интерполациски полином, 174, 175, 176, 177, 179, 197, 213, 233, 239, 241, 248

Њутнов, 187, 192, 242

прв Њутнов, 188, 189, 197, 234, 235

втор Њутнов, 191, 235, 236

Лагранжов, 177, 192, 233, 242, 244, 246

Лагранжов обратен, 197

Ј

јазли на интерполација, 174

еквидистантни, 183, 187, 192, 226, 232

К

конечни разлики, 185, 186, 187, 188, 191, 194, 195, 196, 197, 204, 251

контракција, 14, 62, 155, 157

конвергенција, 61

линеарна, 46, 61, 76

квадратна, 46

Л

лимес (граница) на низа, 12
локализација на решение, 46, 48, 50, 55, 91, 201

М

мантиса на број, 24

матрица

горнотриаголна, 107, 108, 123, 126

дијагонално доминантна, 114, 140, 141, 143

долнотриаголна, 107, 126

инверзна, 104

на систем, 99, 100, 140, 143

несингуларна, 104, 105, 129

од непознатите, 100

од слободните членови, 100

проширена, 100, 106, 110, 111, 115, 117, 120, 122, 124, 125

ретка, 135

слабо пополнета, 135

транспонирана, 105, 126

метод

аналитички, 1

втор подобрен метод на Ојлер, 268, 269, 271

глобално конвергентен, 50

директен, 1, 100, 106, 135, 201

индиректен, 1, 100, 135

интервален, 50

итеративен, 45, 100, 135, 140, 149

матричен, 109

модифициран метод на прости итерации, 157, 166

модифициран Њутн - Рафсонов, 76, 78

на Гаус - Зајдел, 100, 135, 137, 138, 140, 147, 149

- на Гаус - Жордан, 123, 124
 - на елиминација, 107, 108, 109
 - на Зајдел, 157, 162, 163, 165, 171
 - на затворен домен, 50
 - на исклучување, 108
 - на итерации со фиксна точка, 61
 - на Јакоби, 100, 135, 137, 138, 140, 141, 145, 149
 - на лажна положба, 55, 57, 58, 60, 88, 90, 91
 - на најмали квадрати, 173, 213, 214, 215, 216, 218
 - на Њутн, 92, 94
 - на Њутн - Рафсон, 72, 75, 76, 78, 79, 83, 85, 89, 93, 167, 169, 170
 - на Ојлер, 261, 263, 265, 267, 272, 276
 - на Ојлер - Коши, 267
 - на преполовување, 50, 53, 55, 60, 80, 88, 90, 91
 - на прости итерации, 60, 61, 62, 65, 66, 69, 72, 76, 83, 88, 137, 151, 155, 158, 171
 - на Рунге - Кута, 272, 273, 276
 - на секанти, 83, 85
 - на тангенти, 72, 78, 79, 80,
 - на тетиви, 83, 85, 86
 - нумерички стабилен, 28, 31
 - основен Гаусов, 108
 - прв подобрен метод на Ојлер, 267, 269
 - regula falsi, 55
 - метрика, 11, 152
 - Евклидска, 11, 12, 60, 153, 156
 - Менхетен, 11, 12, 156
 - мултипликатор, 109, 110, 111, 113, 116, 118, 120
- ### Н
- низа
- итеративна, 13, 45, 46, 60, 61, 63, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 83, 86, 91, 96, 135, 136, 137, 138, 142, 145, 147, 151, 153, 154, 155, 156, 157, 160, 163, 166, 168, 169, 170
 - конвергентна, 3, 11, 12
 - Кошиева, 12
 - монотона, 3, 4
 - ограничена, 3
 - рекурентна, 4, 198
 - фундаментална, 12
 - неподвижна точка, 12
 - неравенство
 - на Коши - Буњаковски, 154
 - на триаголник, 31
 - нормализиран облик, 24
 - нормални равенки, 216, 217
- ### О
- околина, 9, 10, 34, 39, 40, 46, 73, 75, 92, 163, 167, 169, 224
 - оценка на грешка, 51, 72, 74, 75, 83, 136, 177, 248, 249, 250, 251
- ### П
- пивот, 114
- правило
- Крамерово, 100, 101, 102, 103
 - Лопиталово, 186
 - на параболи, 246, 247, 251, 252, 256, 260
 - на парна цифра, 26, 27, 28

- на правоаголници, 242, 244, 247, 249, 250, 252, 253, 259, 260
- на трапези, 244, 245, 248, 250, 251, 253, 258, 259, 260
- Симпсоново, 246, 247, 253, 259
- принцип
 - на еднакво влијание, 40
 - на математичка индукција, 186, 188
- простор
 - Евклидски, 11
 - комплетен, 12, 60, 152
 - метрички, 11, 12, 13
- Р
- растојание, 11, 12, 13, 183
 - Евклидско, 154
- ред на конвергенција, 46
- решение
 - аналитичко, 1, 2, 4, 15
 - изолирано, 151, 167, 169
 - нумеричко, 1, 4
 - општо, 264, 270, 274
 - партикуларно, 261, 262, 263, 264, 265, 267, 268, 270, 274
 - приближно, 1, 5, 45, 46, 50, 51, 52, 53, 54, 57, 61, 62, 74, 75, 79, 82, 85, 121, 136, 140, 143, 145, 146, 148, 161, 164, 167, 171, 203, 263, 265, 268, 269, 270, 273, 274, 276
 - точно, 1, 5, 14, 18, 45, 46, 51, 55, 58, 61, 63, 64, 65, 72, 78, 80, 81, 84, 91, 97, 112, 121, 123, 169, 265, 271, 275
- С
- самокорекција, 149
- секанта, 8, 9, 83, 84
- систем
 - еквивалентен, 106, 107, 108, 109, 111, 127, 132
 - лошо условен, 19
 - нелинеарен, 151, 167, 171
 - противречен, 99
 - согласен, 99
- скалирање, 120, 121, 122
- сплајн, 204, 205, 210, 211, 213
 - квадратен, 207, 208, 210
 - кубен, 210, 211, 212
 - линеарен, 205, 206, 207
 - периодичен, 211
 - природен кубен, 211
- стабилност на метод, 5
- сума на Дарбу, 247
- Т
- тангента, 5, 8, 63, 76, 77, 78, 263, 267, 268, 269
- тетива, 83, 84
- теорема
 - за меѓувредности, 6
 - на Банах за фиксна точка, 12, 60, 152
 - на Ваерштрас, 174
 - на Лагранж, 8, 34, 61, 74
 - на Рол, 5, 6, 176
 - на средна вредност, 8
 - на Тејлор, 9, 10, 75, 92, 167, 223, 272
- точки, 11, 12
- точност, 14, 20, 22, 39, 45, 50, 51, 57, 62, 156, 225, 226, 227, 228, 229, 232

Ф

фактор

- на контракција, 12, 13
- на скалирање, 121

фиксна (неподвижна) точка, 11, 12, 13, 74, 152

фитување, 92, 214,

- со полином, 214, 215

формула

- екстраполациска, 231
- квдратурна, 242
- на Крамер, 168
- на Ричардсон, 231
- на Тејлор, 10, 223, 272
- нецентрална, 226, 227, 228, 229
- Њутн - Котесова, 242
- централна, 224, 225, 226

функција

- апроксимациска, 173, 215, 216
- интерполациска, 174
- на грешка, 215
- фитувачка, 214, 215, 216

Ц

цифра

- значајна, 23
- сигурна, 24, 26, 28, 32, 147
- сигурна децимална, 24, 26

Ч

- чекор, 253, 255, 261
- на интерполација, 183

Литература

- [1] Chapra C. S., Canale P. R., *Numerical Methods for Engineers*, sixth edition, McGraw Hill, 2010.
- [2] Demidovich B. P., Maron I. A., *Computational Mathematics*, Mir, Moscow, 1973.
- [3] Herceg D., Krejić N., *Numerička analiza za informatičare*, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Departman za matematiku i informatiku, 2006.
- [4] Herceg D., Krejić N., *Numerička analiza: zbirka zadataka 1*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 2009.
- [5] Jovanović B., Radunović D., *Numerička analiza*, Matematički fakultet, Beograd, 2003.
- [6] Kiusalaas J., *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*, second edition, Cambridge University Press, 2010.
- [7] Loustau J., *Elements of Numerical Analysis with Mathematica*, World Scientific Publishing Company, 2017.
- [8] Mathews J. H., Fink K. D., *Numerical Methods Using Matlab*, 3rd edition, Prentice Hall College Div, 1998.
- [9] Milovanović G. V., *Numerička analiza*, I deo, Naučna knjiga, Beograd, 1991.
- [10] Pozrikidis C., *Numerical Computation in Science and Engineering*, Oxford University Press, Inc., 1998.
- [11] Трпеновски Б., Целакоски Н., *Елементи од нумеричка̄а математика*, Просветно дело – Скопје, 1992.

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на кој било начин без претходна писмена согласност од авторите

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41