

**УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И
МЕТОДИЈ“ ВО СКОПЈЕ**

АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ



ПРИНЦИПИ НА СТАТИКАТА

Вонр. проф. д-р Ана Тромбева-Гаврилоска

Вонр. проф. д-р Тодорка Самарџиоска

Скопје, 2016 год.

Предговор

Материјалот презентираан во овој учебник е произлезен од структурата на предметната програма принципи на статиката на студиите по архитектура на Архитектонскиот факултет во Скопје. Како по својата логичка систематизираност на материјата, надополнета со јасен и разбирлив стил на објаснување на проблематиката, така и по својот опфат, јасно конципираната содржина и пристап кон третирање на материјата, ракописот претставува корисна литература пред сè за студентите по архитектура.

Ракописот е поделен во девет поглавја, конципирани така да полесно и побрзо се реализира предвидената цел, како и да се совлада предметната програма.

Првото поглавје претставува вовед во којшто се обработени основните концепти и основните принципи на статиката. Второто поглавје се занимава со статика на материјална точка, насочувајќи го акцентот на разгледување на дејство на силите во рамнина. Еквивалентниот систем на сили што дејствува на круто тело се разгледува во третото поглавје, додека проблемот на рамнотежа на круто тело е предмет на разгледување во четвртото поглавје. Петтото поглавје се занимава со определување на тежиште на површини. Во шестото поглавје даден е општ концепт за анализа на рамнински конструкции. Дефинирањето на решеткастите носачи и нивна анализа со примена на метода на јазли и на метода на пресеци се презентирани во седмото поглавје. Во осмото поглавје, коешто опфаќа релативно најголем дел од ракописот, се обработуваат на едноставен и разбирлив начин линиските носачи. Ова поглавје го обработува проблемот којшто се однесува на определување на внатрешните сили што ги поврзуваат во целина различните делови од еден елемент. Базирајќи се на

принципите за појавување на внатрешните сили по должината на еден елемент, во вториот дел од поглавјето даден е преглед на основните типови инженерски конструкции кои се применуваат во областа на архитектурата. Имено, направена е поделба на носачите на прости и сложени носачи. Во делот на простите носачи разгледани се простите греди, конзолите, гредите со препусти, рамките и лаците, кои всушност се најважните типови на инженерски конструкции. Во делот на сложените носачи разгледани се герберовите носачи, рамките и лаците на три зглоба, кои всушност се формираат со комбинација на основните типови на инженерски конструкции. На крајот на ракописот, во деветтото поглавје, е приложена листа на користена референтна литература.

Авторите ќе им бидат благодарни на сите читатели кои со свои забелешки, сугестии, коментари и мислења ќе придонесат за подобрување на текстот при негово преиздавање.

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР	i
СОДРЖИНА	iii
1 ВОВЕД	1
1.1 Поделба на механиката	2
1.2 Основни концепти и основни принципи	3
1.2.1 Основни концепти	3
1.2.2 Основни принципи	4
1.2.3 Аксиоми во статиката	6
1.2.4 Мерни единици	9
2 СТАТИКА НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА	11
2.1 Вектори и векторски операции	12
2.2 Поим за сила и видови сили	17
2.3 Компоненти на сила	18
2.4 Резултанта на конкурентни сили	19
2.5 Разложување на сила во рамнина	23
2.6 Рамнотежа на систем од конкурентни сили	25
2.7 Сили во простор	27
2.7.1 Компоненти на сила во простор	27

2.7.2	Собирање на конкурентни сили во простор	28
2.7.3	Рамнотежа на точка во простор	29
3	ЕКВИВАЛЕНТЕН СИСТЕМ НА СИЛИ КОЈ ДЕЈСТВУВА НА КРУТО ТЕЛО	31
3.1	Крути тела. Внатрешни и надворешни сили	32
3.2	Статички момент	33
3.3	Резултантен статички момент на систем од компланарни сили	36
3.4	Варињонова теорема	37
3.5	Спрег на сили	38
3.6	Еквивалентен систем	40
3.7	Редукција на систем од сили и моменти	42
3.8	Сложување на произволен систем од сили во рамнина	46
4	РАМНОТЕЖА НА КРУТО ТЕЛО	49
4.1	Услови за рамнотежа	50
4.2	Дијаграм на слободно тело	51
4.3	Реакции во потпорите кај дводимензионални конструкции	53
4.4	Рамнотежа на круто тело во две димензии	55

4.5	Статички неопределени носачи. Парцијални ограничувања	58
5	ТЕЖИШТЕ	63
5.1	Центар на гравитација на круто тело	64
5.2	Тежиште на површини и линии	65
5.3	Тежиште на сложени површини	66
5.4	Резултанта на систем од паралелни распределени сили	68
6	АНАЛИЗА НА КОНСТРУКЦИИ	71
6.1	Дводимензионални конструкции	72
7	РЕШЕТКАСТИ НОСАЧИ	75
7.1	Дефинирање на решеткаст носач	76
7.2	Едноставен решеткаст носач	78
7.3	Анализа на решеткаст носач со метод на јазли	81
7.3.1	Постапка за анализа на решеткаст носач по метод на јазли	86
7.4	Анализа на јазли при специјални услови	90
7.5	Анализа на решеткаст носач со примена на метод на пресеци	94
7.5.1	Постапка за анализа на решеткаст носач по метод на пресеци	97
7.6	Просторни решеткасти носачи	100

8	ЛИНИСКИ НОСАЧИ	103
8.1	Општо	104
8.2	Видови на товари	105
8.3	Внатрешни сили во елемент	107
8.4	Трансверзална сила и нападен момент	111
8.5	Дијаграми на трансверзални сили и нападни моменти	114
8.6	Врска помеѓу распределен товар, трансверзални сили и нападни моменти	118
8.7	Прости носачи	120
8.7.1	Проста греда, конзола, греда со препусти	121
8.7.2	Постапка за анализа на проста греда	123
8.7.3	Постапка за анализа на конзола	126
8.7.4	Постапка за анализа на греда со препусти	128
8.7.5	Рамка	132
8.7.6	Постапка за анализа на рамка	135
8.7.7	Лак	141
8.8	Сложени носачи	142
8.8.1	Герберов носач	144
8.8.2	Постапка за анализа на Герберов носач	147
8.8.3	Рамка и лак на три зглоба	152
	ЛИТЕРАТУРА	155

1 Вовед

Механиката е дел од физиката, која ги проучува природните појави, односно ја проучува состојбата на движење и рамнотежа на материјалните тела изложени на дејство на различни сили.

Основна задача на механиката е да ги дефинира основните закони според кои едно материјано тело ја менува својата положба во просторот и времето, односно да дефинира при кои услови едно тело се наоѓа во положба на мирување.

Механиката е наука која ги опишува и предвидува условите на мирување или движење на телата, како и нивното заемно дејство под дејство на сили. Таа е основна и најстара гранка на физиката, се разгледува како инженерски предмет и претставува фундамент на сите технички дисциплини. Нејзината цел е да ги објасни и предвиди физичките феномени и да ги постави нивните основи и закони за примена во инженерството. Нејзините закони и заклучоци широко се применуваат во низа други дисциплини при решавање на најразновидни и најсложени технички задачи.

Во механиката се изучуваат природните појави, што се јавуваат во вид на движење на материјалните тела. Просторната состојба на едно материјално тело е претставена со неговиот облик, обем и положба.

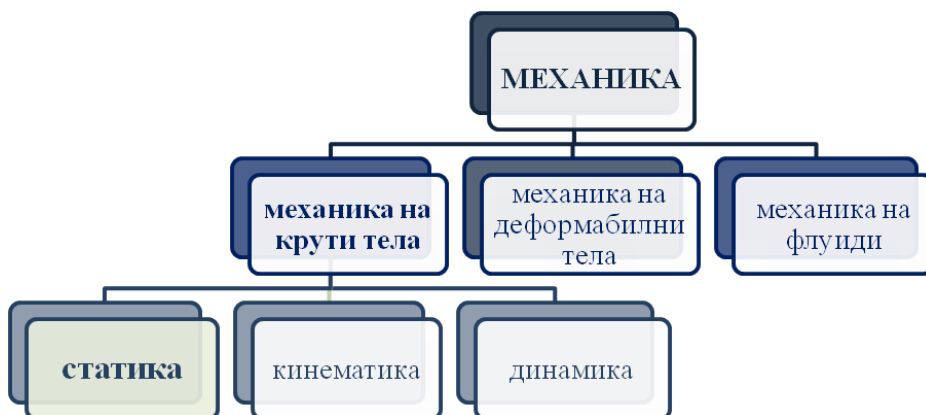
1.1 Поделба на механиката

Техничката механика се класифицира според својствата на телата кои ги проучува на: механика на крути тела, механика на деформабилни тела и механика на флуиди, слика 1.1. Во техниката најголема примена има механиката на крути тела, која претставува основа за проектирање и анализа на различни типови конструкции.

Истата се дели на:

- Статика;
- Кинематика;
- Динамика.

Статиката како дел од механиката на крути тела ги проучува условите за рамнотежа на материјалните тела изложени на дејство на различни сили. Основната претпоставка во статиката е дека материјалните тела изложени на дејство на различни сили се наоѓаат во состојба на мирување, поради што нејзин предмет на изучување е рамнотежа на материјалното тело. Статиката е фокусирана кон определување на внатрешните сили предизвикани од надворешните сили кои дејствуваат на материјалното тело.



Слика 1.1 Поделба на механиката

Кинематиката ги изучува геометриските својства на движењето на телата, не водејќи сметка за причините, односно силите, кои го предизвикуваат движењето и за материјалноста на телото. Затоа во кинематиката се јавуваат две големини: должина и време.

Динамиката е наука која ги проучува законите на движењето на материјалните тела, земајќи ги во предвид и причините за тоа движење, како и материјалноста на телата. Во динамиката се јавуваат следните основни големини: должина, време и сила, односно маса.

1.2 Основни концепти и основни принципи

1.2.1 Основни концепти

Основните концепти во механиката, кои ги поставил Њутн и чија важност останала непредизвикана сè до Ајнштајновата теорија на релативноста, се: *простор*, *време*, *маса* и *сила*, кои не можат да бидат комплетно дефинирани.

- **Простор.** Поимот за простор е поврзан со дефинирање на местоположбата на дадена точка. Местоположбата на која било точка во просторот се дефинира преку нејзините три координати во однос на дадена референтна точка во три заемно нормални правци-координатен систем. Дефинирајќи ја местоположбата на материјалната точка се дефинираат геометриските карактеристики на разгледуваното материјално тело.

- **Време.** Со цел да се дефинира некој настан, не е доволен само просторот, туку треба да биде познато и времето на случувањето. Поимот за време е поврзан со дефинирање на редоследот по којшто се одвиваат настаните. Времето е период за кој се извршува некое дејство или движење. Според тоа, принципите на статиката се временски независни.

- **Маса.** Масата е својство на одредено тело, преку која може да се изврши споредба помеѓу функциите на две различни тела.

Таа е мерка на количината на супстанција. Се однесува на инерцијата на телото и вообичаено се разгледува како константна.

- **Сила.** Силата претставува меѓусебното дејство на две материјални тела помеѓу кои постои директен контакт, што доведува до промена на положбата на мирување или обликот на материјалното тело. Таа предизвикува телото да се придвижи, застане или на кој било начин да ја промени својата брзина или својот правец на движење. Силата е векторска големина која се карактеризира со нападна точка на дејствување, интензитет, правец и насока.

Во механиката трите основни големини простор, време и маса се апсолутни големини и се независни една од друга. Силата, како четврта основна големина не е независна од останатите три основни големини. Силата којашто дејствува на едно материјално тело е поврзана со масата на телото и со промената на неговата брзина во единица време.

1.2.2 Основни принципи

Целата класична механика е создадена врз основните принципи кои не можат математички да се докажат и имаат карактер на аксиоми. Нивната точност е доволно сигурна, бидејќи изведените резултати се согласуваат со извршените експерименти. Тие принципи се формулирани од Њутн, во литературата познати како *Закони на Њутн*, и гласат:

- **I Њутнов закон.** Секое материјално тело останува во состојба на мирување или во состојба на рамномерно праволиниско движење сè додека од некои надворешни влијанија не биде принудено да ја промени својата состојба. Овој прв закон се вика и принцип на инерција.

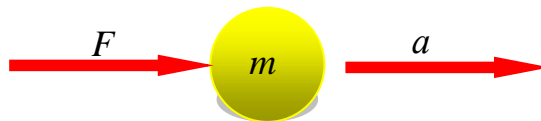


Слика 1.2 Прв Њутнов закон

• **II Њутнов закон.** Секоја материјална точка што се движи добива забрзување што е пропорционално на силата која му дејствува и се поклопува со нејзиниот правец.

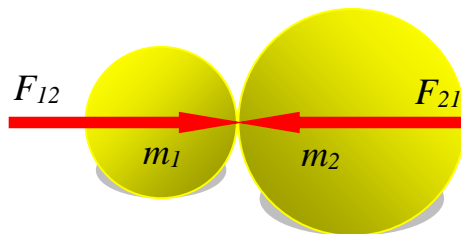
$$F = ma \tag{1.1}$$

каде што: F е сила; m маса; a забрзување.



Слика 1.3 Втор Њутнов закон

• **III Њутнов закон.** Силите со кои две тела дејствуваат заемно едно на друго секогаш имаат иста големина и правец, а спротивна насока. Тие се нарекуваат сили на акција и реакција.



Слика 1.4 Трет Њутнов закон

Сите три закони на Њутн точно ја дефинираат силата. Првиот закон ја покажува можноста за постоење на сила, вториот дава начин

за мерење, а третиот е доказ дека мора да постои извор на сила, т.е. некое друго материјално тело.

- **Њутнов закон за гравитација.** Две тела со маса M и m се привлекуваат со еднакви, но спротивни сили.

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.2)$$

каде што r е растојание помеѓу двете тела, G е гравитациона константа

1.2.3 Аксиоми во статиката

Во статиката при проучувањето на поставените проблеми една од основните претпоставки е дека кое било материјално тело изложено на дејство на различни товари има непроменлив облик, односно дека се однесува како *круто тело*. Исто така се претпоставува дека доколку товарот дејствува на многу мала површина, споредено со големината на материјалното тело, тогаш тој товар дејствува како *концентрирана сила*.

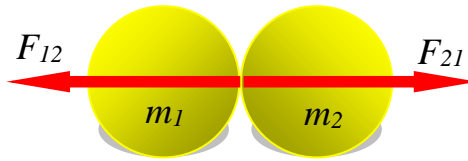
Основните претпоставки на кои се заснова статиката се нарекуваат аксиоми на статиката:

- **Правило на инерција.** Секое тело останува во положба на мирување или рамномерно праволиниско движење, се додека под дејство на некоја сила истото не биде присилено да ја промени својата положба.



Слика 1.5 Правило на инерција

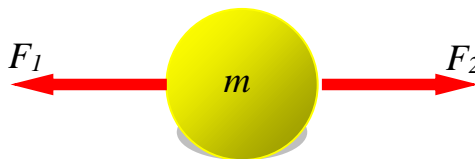
• **Правило на акција и реакција.** Акцијата и реакцијата се сили со еднакви големини, насочени во еден правец, а со спротивни насоки, слика 1.6.



$$F_{12} = -F_{21} \quad (1.3)$$

Слика 1.6 Правило на акција и реакција

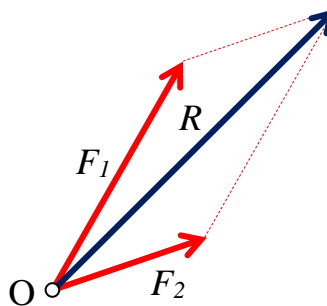
• **Рамнотежа на сили што дејствуваат во ист правец.** Две сили се во рамнотежа само тогаш кога се исти по големина, со ист правец, а со спротивни насоки, слика 1.7.



$$F_1 = -F_2 \quad (1.4)$$

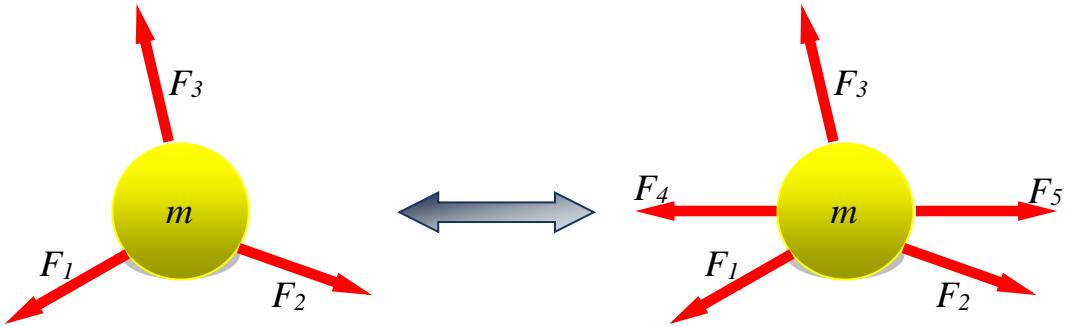
Слика 1.7 Рамнотежа на сили што дејствуваат во ист правец

• **Правило на паралелограм на сили.** Резултантата на две произволни сили кои дејствуваат во една точка е еднаква на големината и правецот на дијагоналата на паралелограмот конструиран над двете сили, слика 1.8.



Слика 1.8 Правило на паралелограм на сили

• **Правило на суперпозиција.** Дејството на еден систем од сили врз некое тело нема да се измени доколку се додаде друг систем од сили кој се наоѓа во рамнотежа, слика 1.9.

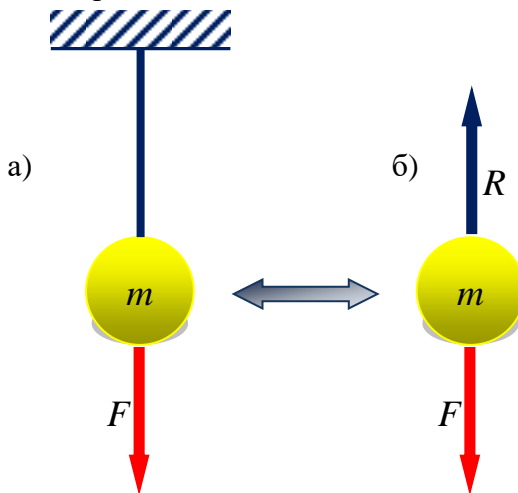


$$F_4 = -F_5$$

$$(F_1, F_2, F_3) \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) \quad (1.5)$$

Слика 1.9 Правило на суперпозиција

• **Слободно тело.** Тело чија слобода на движење во просторот е ограничена со одредени врски се нарекува врзано тело. Секое врзано тело може да се третира како слободно ако ги отстраниме врските и нивното дејство го замениме со сили, кои се нарекуваат сили во врските, односно реакции, слика 1.10.



Слика 1.10 Материјално тело: а) врзано тело; б) слободно тело

При поставувањето на определен проблем во статиката којшто треба да се реши, најпрвин е потребно да се дефинираат и да се прикажат сите влезни податоци, како и прецизно да се дефинира што треба да се определи. Секој разгледуван проблем е потребно да се прикаже преку скица со сите потребни големини, како влезни податоци, така и оние кои треба да се определат. Откако проблемот е дефиниран, потребно е да се дефинираат посебни дијаграми на слободно тело за секое материјално тело од разгледуваниот проблем, со сите сили кои дејствуваат на истото. Применувајќи ги шесте основни принципи за секое слободно тело преку соодветни математички закони се изразува состојбата на рамнотежа или движење на телото. Непознатите големини од разгледуваниот проблем се определуваат со примена на соодветни алгебарски правила.

1.2.4 Мерни единици

Четири базични концепти воведуваат четири базични мерни единици во механиката: должина [метар], време [секунда], маса [килограм] и сила [Њутн], кои не се меѓусебно независни. Тие се поврзани преку $2^{\text{иот}}$ Њутнов закон. При дефинирањето на единиците мерки трите основни кинетички единици може да се дефинираат произволно, додека четвртата единица мерка е изведена и дефинирана според $2^{\text{иот}}$ Њутнов закон. Во овој курс, тие се во согласност со SI системот за мерни единици (SI е кратенка за *Système International d'Unités*). Овој систем на мерни единици е широко распространет и усвоен во светот на техниката. Во него постојат седум основни и две дополнителни единици, табела 1.1. Секоја од тие мерни единици мери квантитет.

Табела 1.1 Основни единици во SI системот

Големина	Единица	Симбол
<i>основни единици</i>		
должина	метар	m
маса	килограм	kg
време	секунда	s
јачина на електрична струја	ампер	A
термодинамичка температура	келвин	K
јачина на светлината	кандела	cd
количество материја	мол	mol
<i>дополнителни единици</i>		
рамнински агол	радијан	rad
просторен агол	стерадијан	sr

Многу често во праксата вредностите за должина, сила, маса и слично или се многу големи или многу мали. Поради тоа истите се запишуваат на скратен начин, користејќи ги општо прифатените префикси, табела 1.2. Единствено килограмот како основна единица мерка е дефинирана со префикс.

Табела 1.2 Префикси

SI Симбол	Префикс	Експоненцијална форма
G	гига	10^9
M	мега	10^6
k	кило	10^3
m	мили	10^{-3}
μ	микро	10^{-6}
n	нано	10^{-9}

2 СТАТИКА НА МАТЕРИЈАЛНА ТОЧКА

Материјална точка е дел од материјално тело, со карактеристики исти како и самото тело и димензии коишто може да се занемарат. Самиот збор “материјална точка” не треба да имплицира дека анализите кои се спроведуваат се однесуваат на мали честички, туку дека големината и обликот на телата кои се разгледуваат не влијаат врз добиените резултати. Претпоставувајќи дека сите сили кои дејствуваат на разгледуваното тело, всушност дејствуваат на една материјална точка може да се решат многу инженерски проблеми.

Две или повеќе сили кои дејствуваат на една материјална точка може да бидат заменети со една единствена еквивалентна сила, односно резултантната сила. Ова е можно само доколку резултантната сила го има истиот ефект како и оригиналните сили кои дејствуваат на материјалната точка.

Од друга страна пак релациите кои постојат помеѓу различните сили кои дејствуваат на материјалната точка во состојба на рамнотежа може да бидат разложени и употребени за да се определат одредени сили кои дејствуваат на материјалната точка.

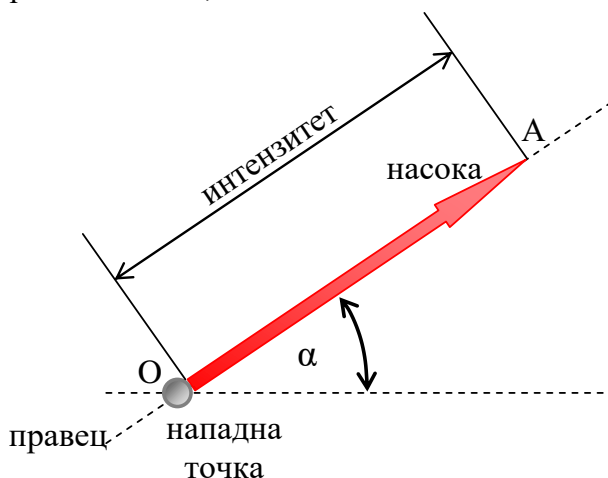
2.1 Вектори и векторски операции

Во статиката физичките големини кои се проучуваат математички се изразуваат како скаларни и векторски големини:

- **Скаларни големини** се големини определени само со бројна вредност. Тие во себе носат информација само за квантитет. Во статиката скаларни големини се должина, плоштина, волумен, итн.

- **Векторски големини**, слика 2.1, се големини кои се определени со нападна точка, правец, насока и интензитет. Во математиката, под вектор се подразбира секоја големина која во себе носи информација за количество (квантитет) и квалитет. Во статиката, пак, векторски големини се сила, момент, итн. За да се прикаже графички векторска големина, потребно е да се дефинира:

- *нападна точка* во која дејствува векторот, определена преку нејзините координати;
- *правец* на векторот дефиниран преку аголот помеѓу линијата по којашто истиот дејствува и соодветната координатна оска;

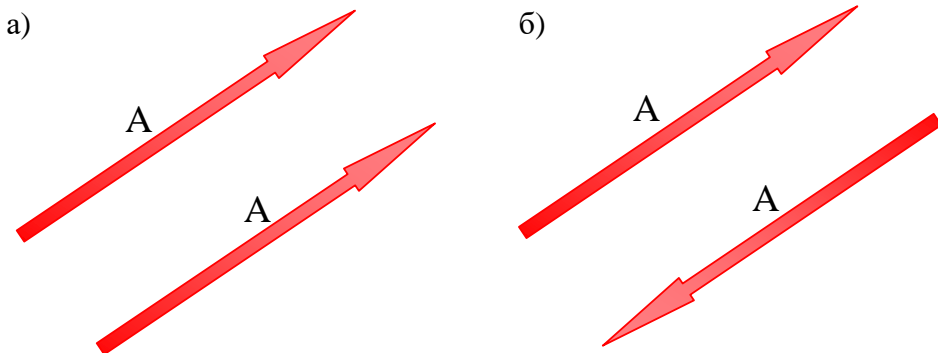


Слика 2.1 Елементи на вектор

- *насока* дефинирана преку стрелката на дејствување на векторската големина; и
- *интензитет* на векторската големина дефиниран со должината на графички прикажаниот вектор.

Пред да почнат да се проучуваат проблемите од статиката, потребно е да се дефинираат некои основни поими и векторски операции. За разлика од скаларите, кај векторите важат поинакви правила за извршување на операциите.

Еднакви вектори се вектори коишто имаат ист правец, иста насока и ист интензитет, (слика 2.2а). *Негативни вектори* се вектори кои имаат ист интензитет, ист правец, но спротивна насока, (слика 2.2б). Доколку еднаквите или негативните вектори лежат на иста нападна линија тогаш тие се нарекуваат *колинеарни вектори*.



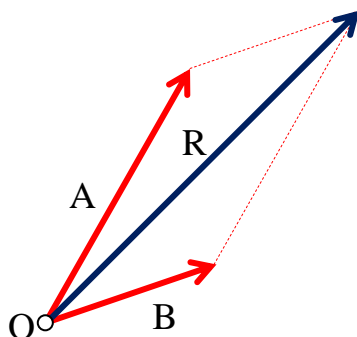
Слика 2.2 Видови вектори:

а) еднакви вектори; б) негативни вектори

Собирање на вектори. Кои било два вектора A и B коишто дејствуваат во различни нападни точки може да се соберат применувајќи го правилото на паралелограм. Најпрвин векторите A и B се поместуваат да дејствуваат во иста нападна точка, по што од краевите на двата вектори се повлекуваат паралелни линии, со

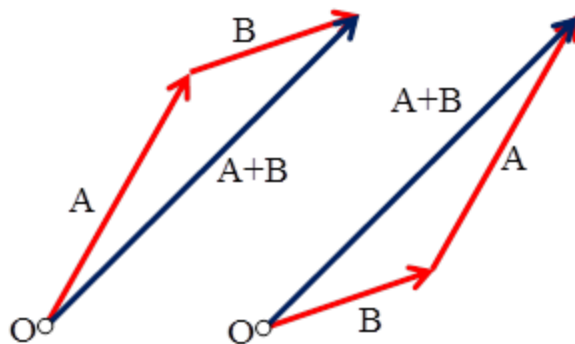
соодветните вектори, сè до нивниот пресек. Резултантата е дијагонала на паралелограмот, која има почеток во нападната точка каде што е почетокот на векторите A и B и крај во пресекот на линиите паралелни со векторите што се собираат, слика 2.3.

$$R = A + B \quad (2.1)$$



Слика 2.3 Собирање на вектори според правило на паралелограм

Собирањето на вектори може да се изведе употребувајќи го и правилото на триаголник, коешто всушност претставува специјален случај на правилото на паралелограм.



Слика 2.4 Собирање на вектори според правило на триаголник

Собирањето на векторите A и B се изведува така што почетокот на векторот B се додава на крајот од векторот A . Резултантата R е

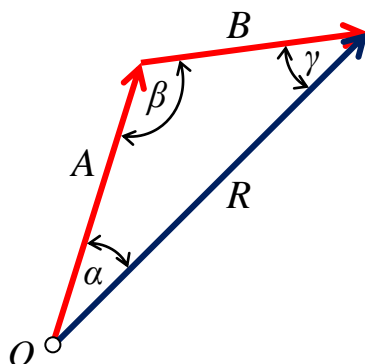
вектор со нападна точка на почетокот од векторот A , точка O , и крајна точка идентична со крајната точка на векторот B . Собирањето на векторите A и B може да се изведе и по обратен редослед, слика 2.4. Разгледувајќи ја сликата може да се констатира дека собирањето вектори е комутативно, равенка (2.2), односно дека векторите може да се собираат по кој било редослед.

$$R = A + B = B + A \quad (2.2)$$

Резултантата е дефинирана со својот интензитет, правец, насока и нападна точка. Интензитетот и правецот на резултантата се определуваат со примена на косинусната и синусната теорема, во зависност од познатите големини, слика 2.5.

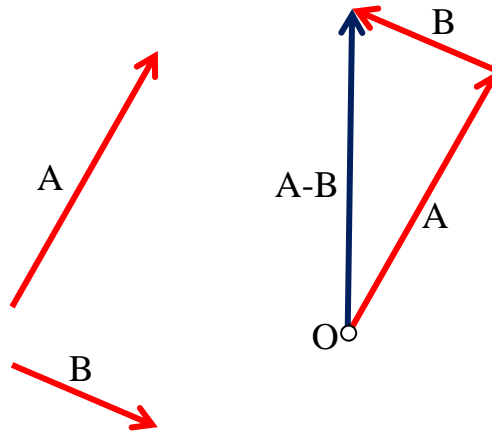
$$R^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos \beta \quad (2.3)$$

$$\frac{A}{\sin \gamma} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} \quad (2.4)$$



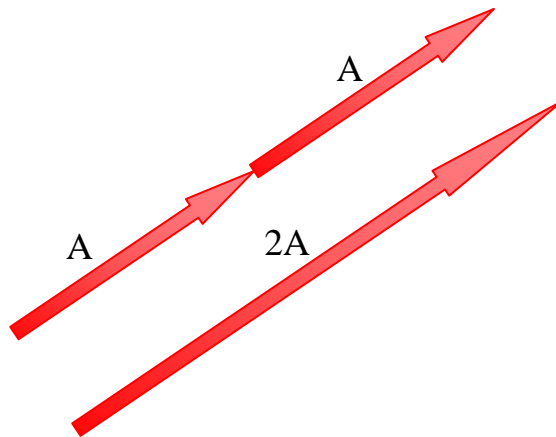
Слика 2.5 Определување на интензитет и правец на резултантен вектор

Одземање на вектори. Се дефинира како специјален случај на собирање вектори, така што разликата на векторите A и B е всушност збир на векторот A и негативниот вектор B , слика 2.6.



Слика 2.6 Одземање на вектори

Множење на вектор со скалар. Производот на векторот A и скалар a се дефинира како вектор со интензитет $|a \cdot A|$. Доколку скаларната големина a е позитивна тогаш новиот вектор $|a \cdot A|$ има иста насока како и векторот A , а спротивна насока доколку скаларот a е негативен број, слика 2.7.

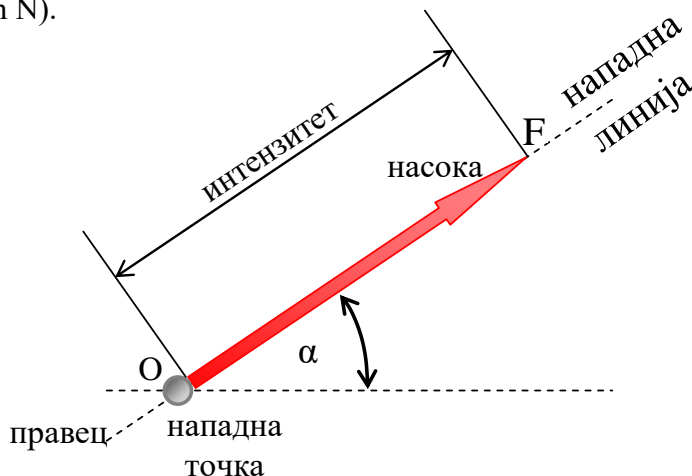


Слика 2.7 Множење на вектор со скалар

2.2 Поим за сила и видови сили

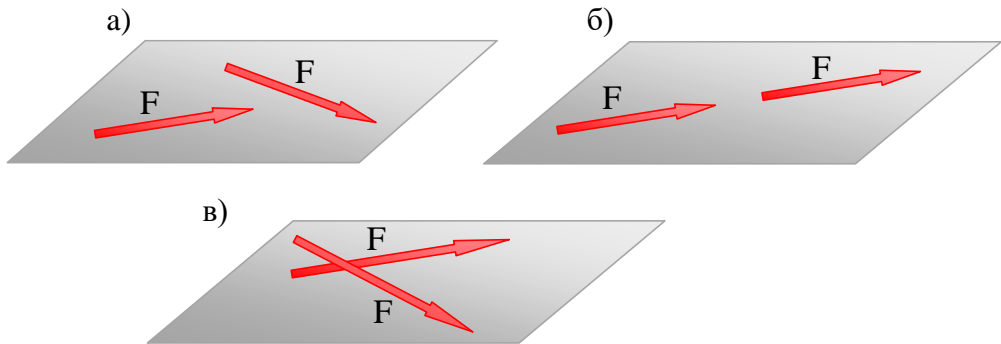
Под поимот сила се подразбира причината за секоја промена на состојбата на мирување или состојбата на движење на едно материјално тело. Во физичка смисла, сила претставува дејство на едно тело врз друго.

Сите сили се вектори. Секоја сила, како векторска големина, може да се опише комплетно со дефинирање на нејзиниот интензитет, правец на дејствување, насока и нападна точка, слика 2.8. Во интернационалниот систем на мерки, основна мерна единица за сила е 1 њутн (newton N).



Слика 2.8 Дефиниција на сила

Сили коишто дејствуваат во иста рамнина се нарекуваат компланарни сили. Ако имаат ист правец на дејствување, тогаш се и колинеарни. И уште повеќе, ако поминуваат низ една точка, се нарекуваат конкурентни, слика 2.9.

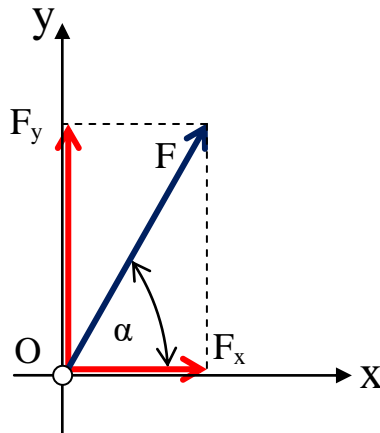


Слика 2.9 Видови на сили:

а) компланарни, б) колинеарни, в) конкурентни

2.3 Компоненти на сила

Една сила може да се замени со две или повеќе компонентални сили, ако истовременото дејство на компонентите го дава потполно истиот ефект како и оригиналната сила. Проблемите во статиката често се упростуваат со замена на силите со нивните заемно нормални компоненти, по правец на избраниот координатен систем. На сликата 2.10 е прикажан векторот на силата F .



Слика 2.10 Разложување на сила на компоненти

Силата F може да се разложи по двете заемно нормални оски x и y . Аголот со кој се дефинира правецот на силата е позитивен доколку се мери во насока спротивна од насоката на движење на часовата стрелка, а во спротивно е негативен. Ако аголот помеѓу силата и оската x е α , тогаш компонентите F_x и F_y можат да се определат како:

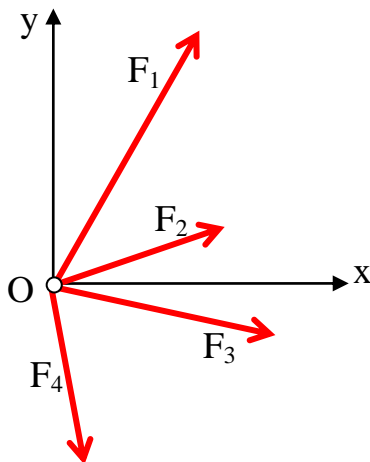
$$F_x = F \cdot \cos \alpha \quad (2.5a)$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha \quad (2.5b)$$

2.4 Резултанта на конкурентни сили

Повеќе сили со различни правци и насоки кои дејствуваат во една точка претставуваат систем од сили. Резултанта на дадениот систем од сили е сила која е еквивалентна со разгледуваниот систем од сили и може да го замени нивното дејство врз материјалната точка.

На материјалната точка O дејствува систем од сили F_1 , F_2 , F_3 и F_4 со различни правци и насоки, слика 2.11.

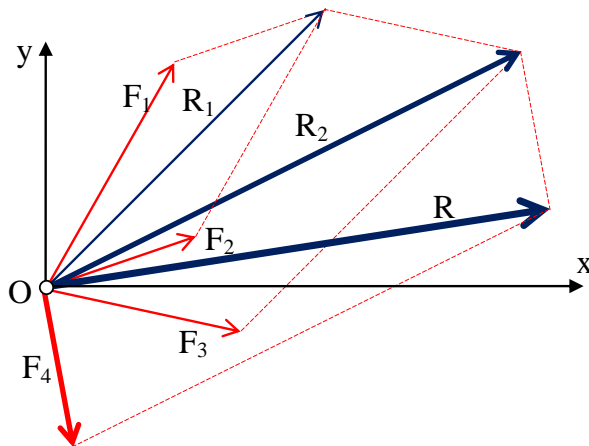


Слика 2.11 Систем од сили кој дејствува на една точка

Сложувањето на овој систем од сили во една резултанта може да се изврши на два начина:

- графички
 - правило на паралелограм;
 - план на сили
- аналитички.

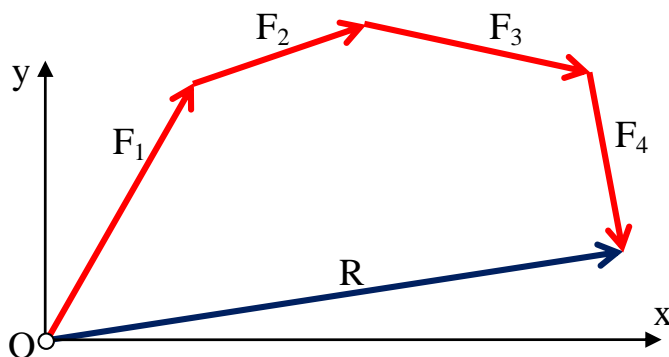
Графичкото сложување на сили применувајќи го правилото на паралелограм подразбира постепено, sukcesивно сложување на силите, слика 2.12. Силите F_1 и F_2 се сложуваат во резултанта R_1 , која всушност претставува дијагонала на паралелограмот конструиран од двете сили. Повторно применувајќи го правилото на паралелограм добиената резултанта R_1 се сложува со третата сила F_3 со што се определува резултантата R_2 , која всушност ги заменува силите F_1 , F_2 и F_3 . Резултантата R_2 се сложува со последната сила F_4 со што се определува резултантата R , дефинирана со нејзината големина, правец и насока.



Слика 2.12 Сложување на сили според правило на паралелограм

Определувањето на резултантата на систем од сили кој дејствува на една точка применувајќи го правилото на паралелограм е доста непрегледно, поради што најчесто при графичкото сложување на

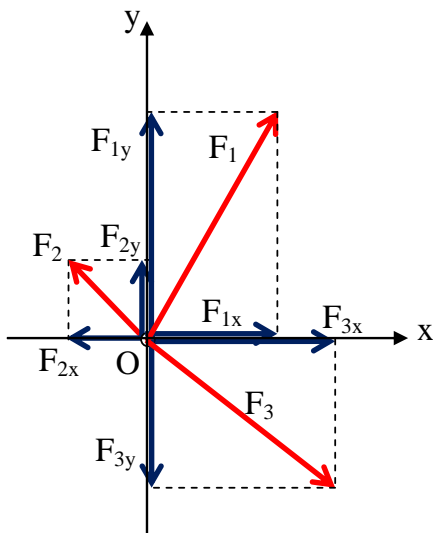
силите се применува план на сили. Планот на сили се формира со sukcesивно надоврзување на силите. На крајот од силата F_1 се додава силата F_2 , па силата F_3 и на крај силата F_4 . Резултантата R се добива со поврзување на првата и последната сила, при што нејзината насока е спротивна од насоката во која се надоврзуваат силите, односно истата е ориентирана од почетната кон завршната точка на полигонот, слика 2.13.



Слика 2.13 План на сили

Аналитичката метода за сложување на сили со различни правци и насоки базира на алгебарско собирање на проекциите на силите по ортогоналните оски x и y .

Положбата на секоја сила во координатниот систем xOy е дефинирана со координатите на нападната точка, правецот, дефиниран преку аголот α што нападната линија на силата го зафаќа со позитивниот правец на x оската, интензитетот и насоката. Сите сили од системот којшто дејствува се проектираат по двете заемно нормални координатни оски x и y , слика 2.14.



Слика 2.14

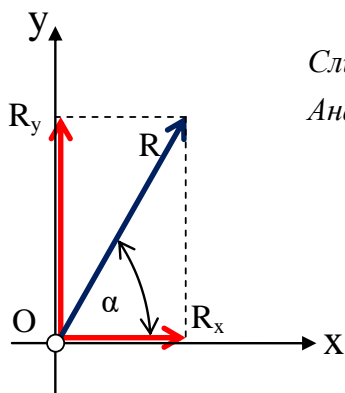
Проекции на систем на сили

Проекциите на силите се определуваат со примена на тригонометриски функции. Проекциите на резултантата по двете координатни оски, R_x и R_y , се еднакви на алгебарскиот збир од проекциите на сите сили по соодветните оски.

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad (2.6a)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (2.6b)$$

Со определувањето на проекции на резултантата по двете координатни оски, R_x и R_y , всушност е дефинирана и резултантата, слика 2.15.



Слика 2.15

Аналитичко определување на резултантата

Интензитетот на резултантата од систем на сили кој дејствува во една точка аналитички се определува со примена на Питагорова теорема:

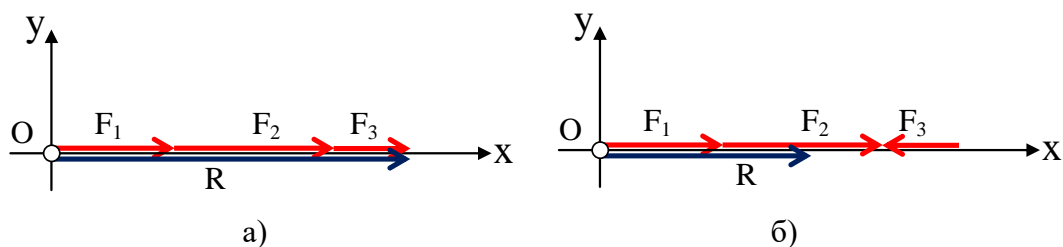
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (2.7)$$

додека нејзиниот правец е дефиниран со изразот:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x} \quad (2.8)$$

Доколку силите коишто дејствуваат на една материјална точка се со ист правец тогаш аналитичкото определување на резултантата се сведува на алгебарско собирање, односно одземање, во зависност од насоката на силите, слика 2.16.

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2.9)$$



Слика 2.16 Аналитичко определување на резултанта на систем од колinearни сили:

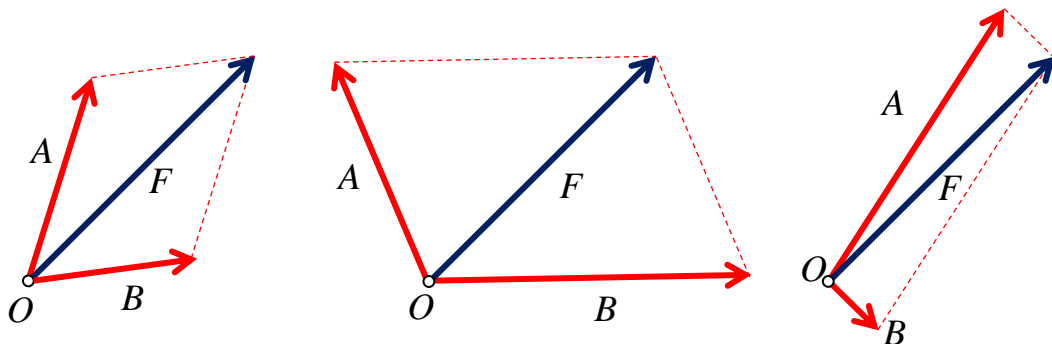
а) со исти насоки; б) со различни насоки

2.5 Разложување на сила во рамнина

Видовме дека две или повеќе сили коишто дејствуваат на материјална точка можат да се заменат со единствена сила која го има истото влијание врз точката. Спротивно на тоа една сила F којашто дејствува на материјална точка може да се замени со две или повеќе сили кои заедно го имаат истиот ефект на точката. Овие сили се викаат

компоненти на оргиналната сила F , а процесот на замената се нарекува разложување на силата на компоненти.

За секоја сила F постои бесконечен број на возможни комбинации на компоненти. Комбинациите од две компоненти A и B се најважни заради примената во практични проблеми.

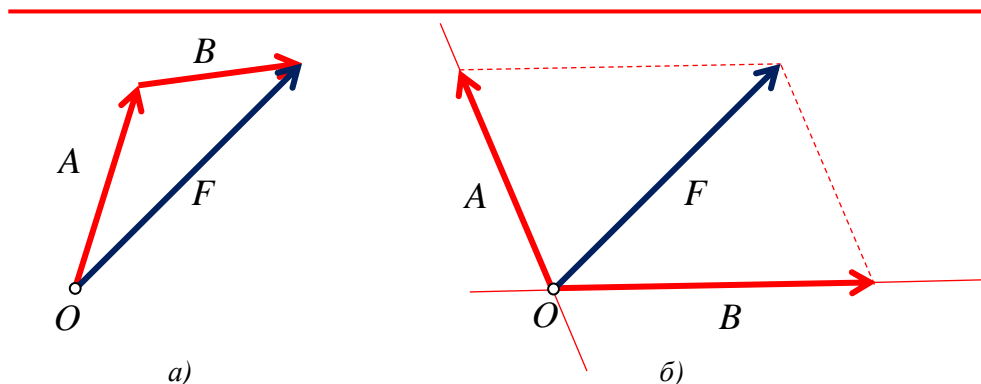


Слика 2.17 Возможни комбинации за разложување на сила F

Но и тогаш постои неограничен број на начини на кои дадена сила F може да биде разложена на две компоненти. Два случаи се од посебен интерес:

1. Позната е една од двете компоненти A . Втората компонента B се добива со примена на правилото на триаголник и со спојување на почетоците на силите A и F . Интензитетот и правецот на B се определуваат графички или тригонометриски, слика 2.18а).

2. Познати се правците на дејствување на секоја од компонентите. Интезитетот на компонентите се определува со примена на правилото на паралелограм, т. е. со цртање на линии низ почетокот на F кои се паралелни со дадените правци на дејствување, слика 2.18б). Овој процес води кон две добро определени компоненти A и B кои може да се определат графички или пресметаат тригонометриски со примена на синусната торема.



Слика 2.18 Графичко разложување на сила F на две компоненти A и B : а) правило на триаголник; б) правило на паралелограм

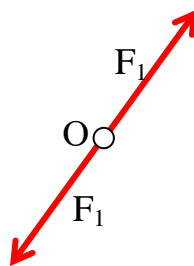
Може да постојат и многу други случаи, на пример може да биде познат правецот на едната компонента, додека интензитетот на другата да биде многу мал. Во сите случаи се црта соодветен триаголник или паралелограм кој ги задоволува дадените услови.

2.6 Рамнотежа на систем од конкурентни сили

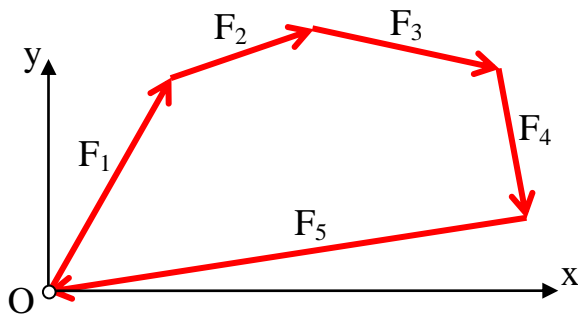
Материјална точка на која дејствува систем од две или повеќе сили, ќе биде во рамнотежа, ако остане во состојба на мирување, т.е. ако не се движи. Со примена на првиот Њутнов закон, оваа дефиниција го добива обликот: материјалната точка се наоѓа во рамнотежа ако резултантата на силите што дејствуваат на неа е еднаква на нула.

Една материјална точка на којашто дејствуваат две сили ќе биде во рамнотежа ако силите имаат ист интензитет, ист правец, но спротивна насока, слика 2.19.

Слика 2.19
Рамнотежа на две сили



Графички состојба на рамнотежа на една материјална точка на којашто дејствува систем од сили со различни правци и насоки се прикажува преку затворен полигон на сили, слика 2.20.



Слика 2.20 Графички услов за рамнотежа на систем на сили

Аналитичкиот услов за рамнотежа на една материјална точка на којашто дејствува систем од сили со различни правци и насоки гласи:

$$R = \sum_{i=1}^n F = 0 \quad (2.10)$$

Со други зборови, една материјална точка на којашто дејствува систем од сили со различни правци и насоки во координатен систем xOy ќе биде во рамнотежа доколку алгебарските зборови од проекциите на силите по двете координатни оски x и y се еднакви на нула:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (2.11a)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (2.11b)$$

Многу често се користи и пократкото обележување на аналитичките услови за рамнотежа:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 \quad (2.12a)$$

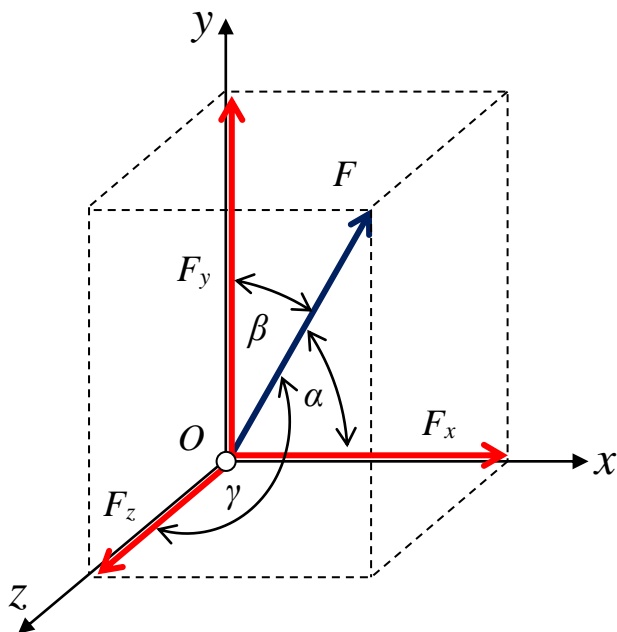
$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0 \quad (2.12b)$$

2.7 Сили во простор

Досегашните разгледувања се однесуваа само на дводимензионални проблеми, кои можат да се решат во една рамнина. Во овој дел се разгледуваат проблемите, сосема накусо, кои вклучуваат три димензионален простор.

2.7.1 Компоненти на сила во простор

Силата F во простор, слика 2.21, се разложува на три заемно нормални компоненти F_x , F_y и F_z кои се насочени вдолж трите координатни оски.



Слика 2.21 Графички приказ на сила во простор

Интензитетот на силата F се определува од следната релација:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.13)$$

Компонентите, пак, на силата по координатните оски се добиваат со равенките:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha \quad (2.14a)$$

$$F_y = F \cdot \cos \beta \quad (2.14б)$$

$$F_z = F \cdot \cos \gamma \quad (2.14в)$$

каде што: α , β и γ се аглиите коишто ги зафаќа силата F со координатните оски, соодветно.

2.7.2 Собирање на конкурентни сили во простор

Резултантата R од две или повеќе сили во простор се определува со сумирање на нивните проекции. Најчесто се применува аналитичкиот метод којшто е сличен со оној за собирање на компланарни сили.

$$R = \sum_{i=1}^n F \quad (2.15)$$

Како и секоја друга сила и резултантата има проекции по трите координатни оски

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad (2.16a)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (2.16б)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (2.16в)$$

Интензитетот на резултантата и аглиите коишто резултантата ги зафаќа со координатните оски се определуваат соодветно на претходно дискутираните начини.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.17)$$

$$\cos \alpha_R = \frac{R_x}{R} \quad (2.18a)$$

$$\cos \beta_R = \frac{R_y}{R} \quad (2.18б)$$

$$\cos \gamma_R = \frac{R_z}{R} \quad (2.18в)$$

2.7.3 *Рамнотежа на точка во простор*

Точка А е во рамнотежа ако резултантата од сите сили коишто дејствуваат на неа е еднаква на нула. Според тоа и проекциите на резултантата по координатните оски треба да се еднакви на нула.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (2.19а)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (2.19б)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (2.19в)$$

Горните равенки претставуваат потребни и доволни услови за рамнотежа на материјална точка во простор. Тие може да се употребат за решавање на проблеми кои се однесуваат на рамнотежа на точка и вклучуваат најмногу три непознати.

3 ЕКВИВАЛЕНТЕН СИСТЕМ НА СИЛИ КОЈ ДЕЈСТВУВА НА КРУТО ТЕЛО

Пристапот секое тело да се разгледува како материјална точка не секогаш евозможен. Секое тело генерално треба да се третира како комбинација од голем број на точки, при што во анализата истото треба да биде разгледувано со сопствената големина и соодветните точки во кои дејствуваат различни сили.

Врз основа на принципот на поместливост, концептите поврзани со влијанието на сила врз круто формирајќи момент на сила околу точка, односно момент од сила околу оска, како и концептот на спрег, влијанието кое одреден систем сили го имаат врз однесувањето на телото, истиот може да биде заменет со соодветен еквивалентен систем.

Имено, кој било систем на сили кој дејствува на круто тело може да биде заменет со еквивалентен систем од сила која дејствува во дадена точка и спрег. Во случај на конкурентни, компланарни или паралелни сили еквивалентниот систем сила-спрег може да биде редуциран на една резултантна сила на системот или на еден резултантен спрег на системот.

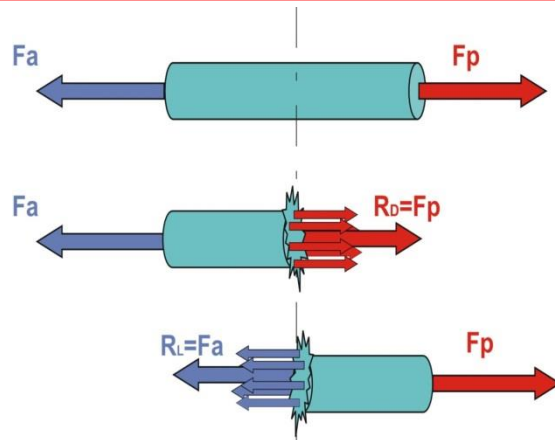
3.1 Крути тела. Внатрешни и надворешни сили

За да се опише однесувањето на едно разгледувано тело, многу често не е доволна само една точка. Телото треба да се третира како комбинација на голем број точки. Големината на телото исто така се зема предвид, како и фактот дека силите дејствуваат во различни точки, што значи и различни точки за нивно аплицирање. Вистинските конструкции никогаш не се апсолутно крути и се деформираат под дејство на товарите на кои се изложени. Но овие деформации се вообичаено мали и немаат значајно влијание на условите на рамнотежа или движење на разгледуваната конструкција. Најголем број од телата се претпоставува дека се крути, т.е. дека не се деформираат.

Во ова поглавие се изучува влијанието на силите приложени на круто тело како и нивната возможна замена со друг поедноставен еквивалентен систем. Оваа анализа се базира на фундаменталната претпоставка дека влијанието на дадена сила врз круто тело останува непроменето, ако таа сила се поместува вдолж нејзиниот правец на дејствување (принцип на поместливост).

Силите коишто дејствуваат на крутите тела, слика 3.1, можат да се поделат во две групи:

- *надворешни (активни) сили, F_a .* Надворешните сили го претставуваат дејството на други тела врз разгледуваното круто тело и предизвикуваат негово придвижување или ја обезбедуваат неговата рамнотежа. Тие се во целост одговорни за надворешното однесување на крутото тело.
- *внатрешни (пасивни) сили, F_p .* Внатрешните сили ги поврзуваат заедно честичките кои го формираат крутото тело, или ако телото е составено од неколку дела, тогаш овие сили ги поврзуваат компоненталните делови во една целина.

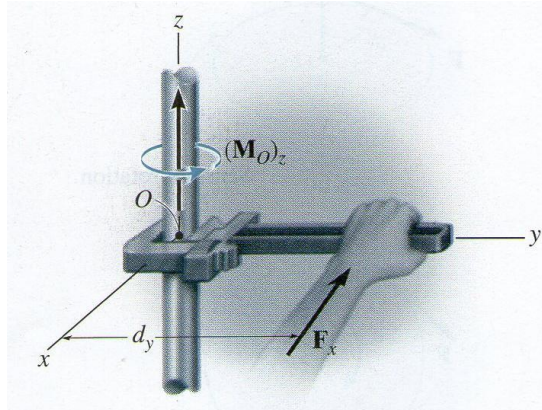


Слика 3.1 Надворешни и внатрешни сили

3.2 Статички момент

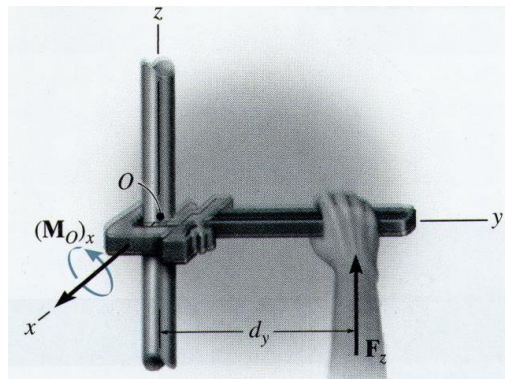
Слободно тело под дејство на определена сила се поместува транслаторно. Доколку материјалното тело на коешто дејствува определена сила е врзано во една точка или фиксирано за неподвижна оска, тогаш е спречено неговото транслаторно движење и истото може само да ротира околу точката, односно оската. Дејството што го врши силата на телото околу неподвижната точка се нарекува статички момент на сила во однос на точка. Статички момент на сила околу точка или оска ја покажува намерата на силата да предизвика ротација на телото околу точката, односно оската.

Хоризонталната сила F_x , слика 3.2, која дејствува нормално на рачката од францускиот клуч, на растојание d_y од точката O , се стреми да ја заротира цевката околу z оската. Колку што е поголема силата F_x или растојанието d_y , толку е поголем ефектот на завртување. Треба да се потенцира дека моментната оска z е нормална на рамнината во која лежат и силата F_x и растојанието d_y и поминува низ точката O .



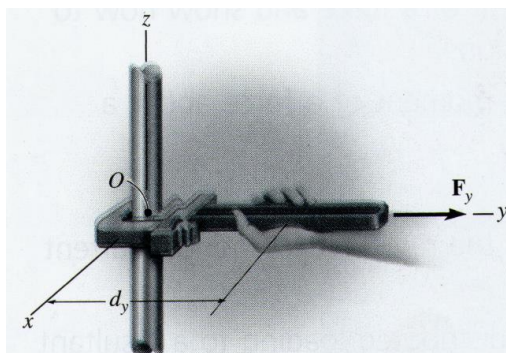
Слика 3.2 Статички момент околу оска z

Ако се разгледа силата F_z , таа не може да ја заротира цевката околу z оска, туку тежнее да ја заротира околу x оската. Иако реално не е возможно цевката да се заротира на овој начин, F_z сепак прави тенденција за ротација од која произлегува статички момент околу x оската, слика 3.3.



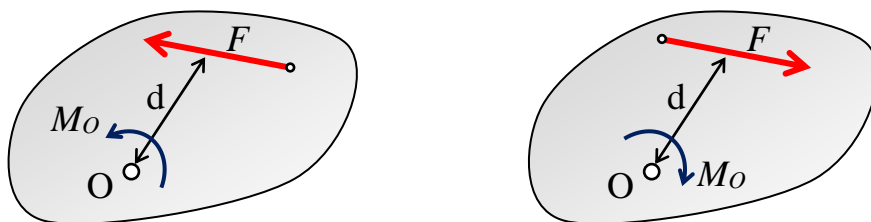
Слика 3.3 Статички момент околу оска x

И на крај, доколку на клучот се приложи сила F_y , слика 3.4, околу точката O не се создава никаков статички момент. Ова се должи на фактот што не постои завртување, бидејќи правецот на дејствување на силата поминува низ точката O и не постои тенденција за ротација.



Слика 3.4 Сила по у оска

Статичкиот момент на сила F околу точка O , слика 3.5, е векторска големина дефинирана со интензитет и насока. Дводимензионално, статичкиот момент е прикажан со стрелка која ротира околу точка, слика 3.5. Иако при решавање на дводимензионалните проблеми се определува статички момент на сила околу точка, статичкиот момент секогаш дејствува околу оска која ја прободува нормално рамнината во која лежат силата F и растојането d во точката O .



Слика 3.5 Статички момент на сила околу точка

Интензитетот на статичкиот момент изнесува:

$$M_o = F \cdot d \tag{3.1}$$

каде што d е нормалното растојание од правецот по којшто дејствува силата F до точката O и се нарекува крак на силата. Единицата со која се мери статичкиот момент е изведена единица мерка согласно

равенката (3.1), сила по растојание, [Nm]. Како што може да се види од равенката (3.1), големината на статичкиот момент е право пропорционална со силата и растојанието помеѓу силата и нападната точка. Тоа значи дека статичкиот момент се менува со промена или на големината на силата или на положбата на моментната точка. Големината на статичкиот момент не се менува доколку силата се поместува по својата нападна линија или ако моментната точка се поместува по линија паралелна со нападната линија на силата.

Правецот на статичкиот момент се определува применувајќи го правилото на десна рака. Прстите од десната рака се поставуваат во насока на ротација на силата F околу точката O . Статичкиот момент е во правец на палецот, нормален на рамнината во која лежат силата F и кракот на силата d до точката O .

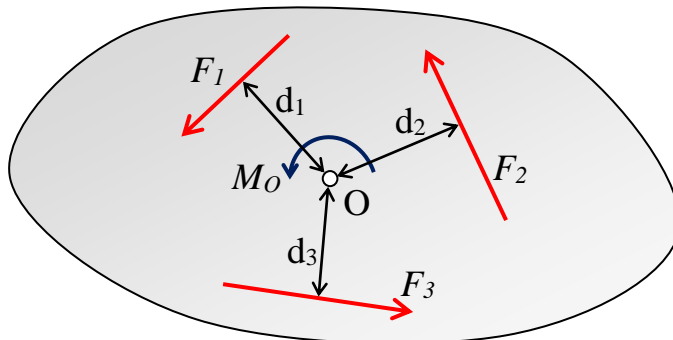
Насока на статичкиот момент. При решавањето на проблемите во статиката, статичкиот момент е позитивен доколку силите ротираат околу моментната точка во насока на двишење на стрелките на часовникот, во спротивно тој е негативен.

3.3 Резултантен статички момент на систем од компланарни сили

Ако систем од сили лежи во xOy рамнина тогаш статичкиот момент од секоја од силите околу точката O ќе биде по правец на оската z . Следува дека резултантниот статички момент на системот од сили може да се определи со едноставно алгебарско собирање на статичките моментите од сите сили, бидејќи сите моментни вектори се колинеарни, слика 3.6.

Со оглед на тоа што моментните вектори од сите сили се компланарни, резултантниот статички момент од системот сили се определува со едноставно алгебарско собирање:

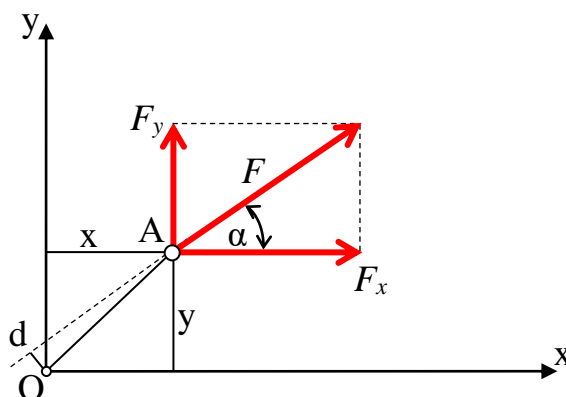
$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i \cdot d_i \tag{3.2}$$



Слика 3.6 Статички момент на систем од сили

3.4 Варињонова теорема

Статичкиот момент на една сила околу точката O може да се определи и без да се определува нормалното растојание од точката до силата, т.е. користејќи ги ортогоналните компоненти на силата паралелни на координатните оски, слика 3.7.



Слика 3.7 Варињонова теорема

Ова е основниот облик на познатата теорема на Вариџон, која се прикажува со равенката:

$$F \cdot d = F_x \cdot y - F_y \cdot x \quad (3.3)$$

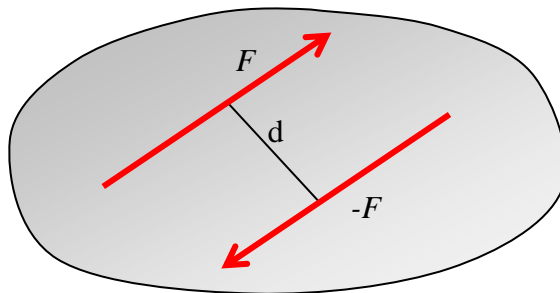
Доколку пак, дејствува еден произволен систем од сили F_1, F_2, \dots, F_n , тогаш и на него може да се примени претходната метода. На тој начин се добива и другиот облик на Вариџоновата теорема: *статичкиот момент од еден произволен рамнински систем од сили, во однос на моментна точка во истата рамнина, е еднаков на алгебарскиот збир на статичките моменти на поодделните сили во однос на истата моментна точка.*

$$M_R = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n \quad (3.4)$$

Вариџоновата теорема е многу корисна за пресметување на статичките моменти од силите, бидејќи со правилен избор на компонентите, возможно е упростување на многу проблеми.

3.5 Спрег на сили

Две сили кои имаат ист интензитет, паралелни правци на дејство, спротивни насоки, а се поставени на меѓусебно нормално растојание d , формираат *спрег*, слика 3.8.



Слика 3.8 Спрег на сили

Како што може да се види од сликата 3.8, резултантата на системот од двете сили е еднаква на нула. Збирот на моментите од двете сили околу дадена точка е различен од нула. Значи дека системот на сили кој дејствува на телото, истото нема да го помести транслаторно, туку ќе го заротира околу дадена точка во одредената насока.

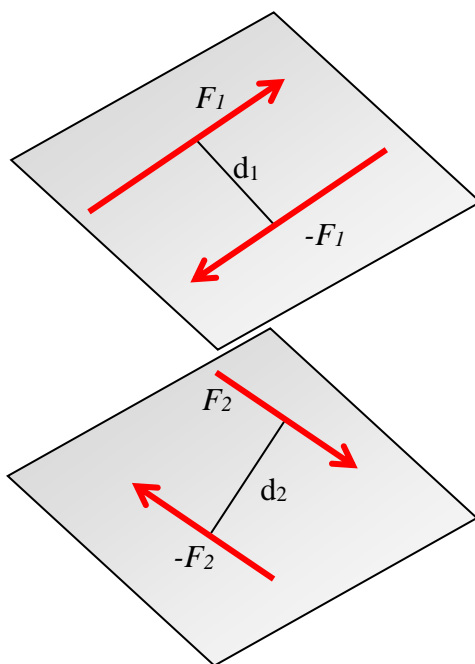
Моментот кој го создава спрегот е слободен вектор, со произволна нападна точка и интензитет дефиниран со равенката:

$$M = F \cdot d \tag{3.5}$$

Два спрега на сили, од кои првиот се состои од систем на сили F_1 и $-F_1$, додека вториот од систем на сили F_2 и $-F_2$, ќе имаат еднаков момент доколку е исполнет условот:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \tag{3.6}$$

и доколку двата спрега лежат во паралелни рамнини (или во иста рамнина) и ако имаат иста насока, слика 3.9.

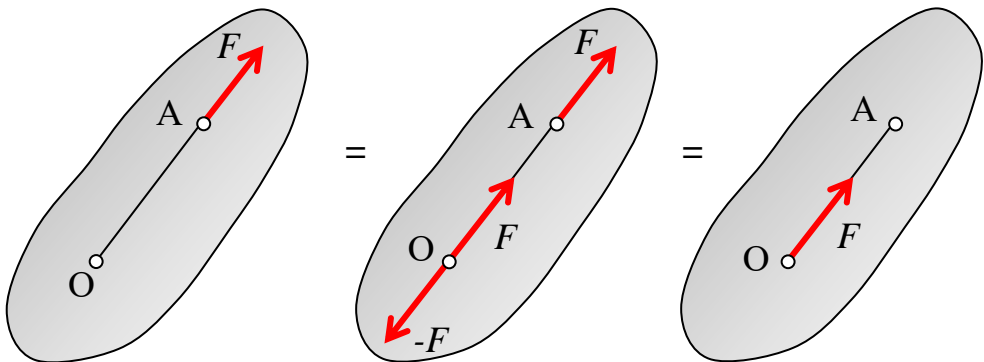


Слика 3.9 Еднакви спрегови на сили.

3.6 Еквивалентен систем

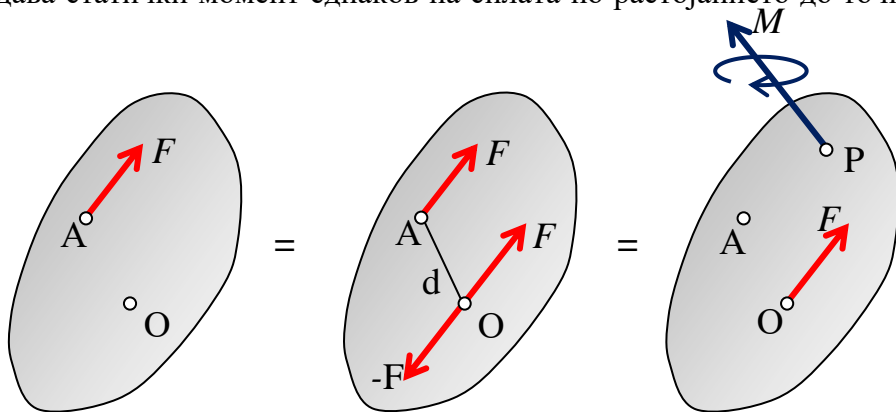
Транслаторното поместување и ротацијата на едно тело под дејство на определена сила зависат од тоа каде и како дејствува силата. Еден систем на сили и спрегови кои дејствуваат на едно тело може да се замени со резултантна сила и резултантен момент во определена точка O , само доколку тој создава иста транслација и ротација на телото. Во тој случај овие два система на товари се еквивалентни.

➤ Сила F која дејствува во точка A треба да се помести во точка O која лежи на нападната линија на силата F , слика 3.10. Со цел поместувањето на силата F од точката A во точката O да не доведе до нарушување на надворешните влијанија врз телото, во точката O се додава систем од еднакви, но спротивни сили F и $-F$. Збирот на силата F во точката A и спротивната сила $-F$ во точката O е еднаков на нула, по што останува само силата F во точката O . Имено, силата F едноставно се поместува по нејзината нападна линија од точката A во точката O .



Слика 3.10 Поместување на сила вдоль нејзината нападна линија

➤ Сила F која дејствува во точка A треба да се помести во точка O која не лежи на нападната линија на силата, слика 3.11. Со цел поместувањето на силата F од точката A во точката O да не доведе до нарушување на надворешните влијанија врз телото, во точката O се додава систем од еднакви, но спротивни сили F и $-F$. Силата F во точката A и силата $-F$ во точката O формираат спрег на сили со статички момент нормален на спрегот со интензитет $d \cdot F$. Моментот од спрегот на сили како слободен вектор може да се помести во која било точка на телото, додека во точката O дејствува силата F . Имено, силата се поместува од точката A во точката O и каде било на телото се додава статички момент еднаков на силата по растојанието до точката O .



Слика 3.11 Редуција на сила

Може да се заклучи дека два системи на сили се еквиваленти само доколку сумата на силите и сумата на моментите од силите околу дадена точка O на двата система се еднакви. Математички, потребните и доволните услови за два системи на сили да бидат еквивалентни се:

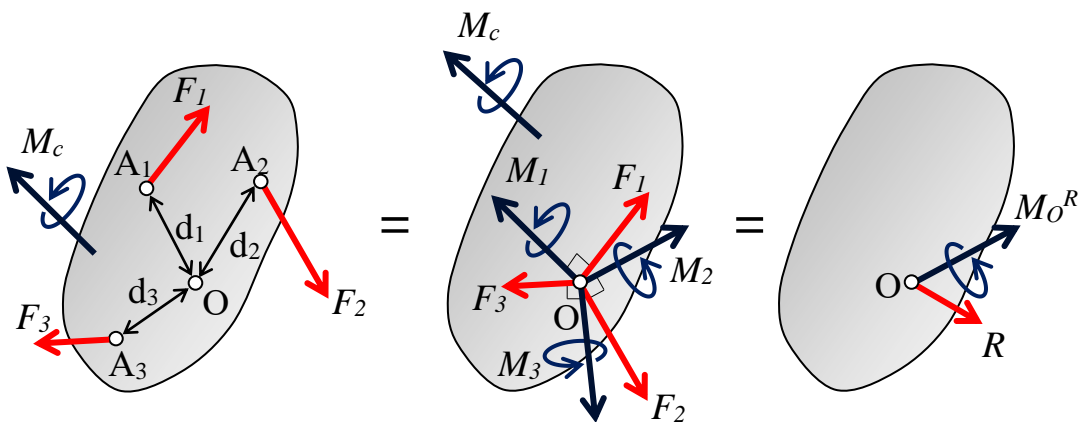
$$\sum_{i=1}^n F = \sum_{i=1}^n F' \tag{3.7a}$$

$$\sum_{i=1}^n M_O = \sum_{i=1}^n M_O' \tag{3.7b}$$

3.7 Редукција на систем од сили и моменти

Ефектите коишто ги предизвикува систем од сили и моменти врз едно тело поедноставно е да се проучат заменувајќи ги истите со еквивалентен систем од резултантна сила и резултантен момент.

На едно тело во три различни нападни точки дејствува систем од сили F_1 , F_2 и F_3 со различни правци и насоки и момент M_c , слика 3.12. Овој систем од сили и моменти може да се редуцира во еквивалентен систем од резултантна сила и резултантен момент во точката O кој ќе предизвика иста транслација и ротација на телото. Силите F_1 , F_2 и F_3 може да се поместат во точката O , согласно равенката (3.7), само ако во точката O ставиме моменти M_1 , M_2 и M_3 од соодветните сили.



Слика 3.12 Редукција на систем од сили и моменти

Ова е редуција на систем од сили во резултантна сила која дејствува во точка O и резултантен момент може да се генерализира преку две равенки во векторска форма:

$$F_R = \sum_{i=1}^3 F \quad (3.8a)$$

$$M_{RO} = \sum M_c + \sum_{i=1}^3 M_O \quad (3.8b)$$

Првата равенка покажува дека резултантната сила на систем од сили со различни правци и насоки е еквивалентна на сума од сите сили, додека втората равенка покажува дека резултантниот момент е еквивалентен на сума од сите моменти и сума од статичките моменти на сите сили околу точката O .

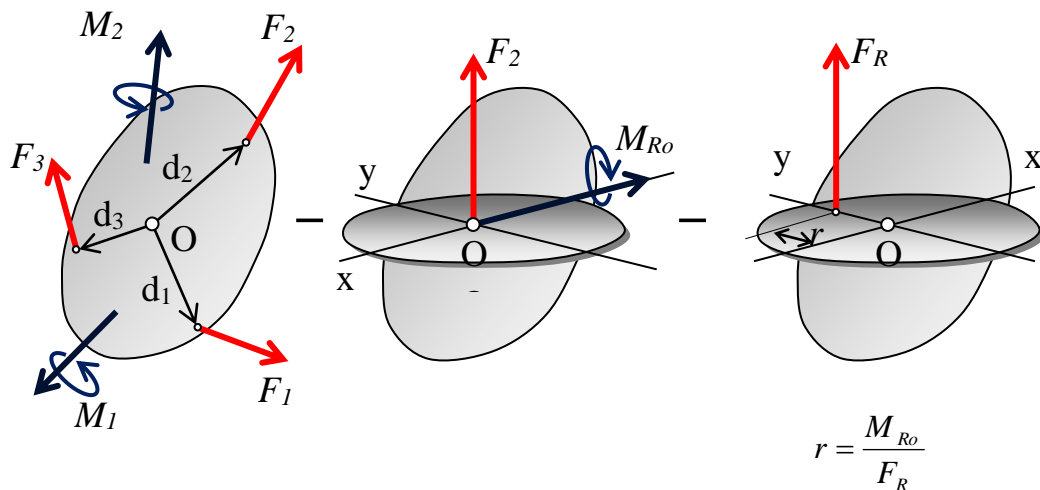
Доколку системот од сили со различни правци и насоки се наоѓа во рамнина xOy , а моментите се нормални на таа рамнина, тогаш равенките (3.8) се редуцираат на следните три скаларни равенки:

$$F_{R_x} = \sum_{i=1}^3 F_x \quad (3.9a)$$

$$F_{R_y} = \sum_{i=1}^3 F_y \quad (3.9b)$$

$$M_{RO} = \sum M_c + \sum_{i=1}^3 M_O \quad (3.9c)$$

Специјален случај е кога систем од сили и моменти во однос на дадена точка O се редуцира на резултантна сила $F_R = \sum F$ и резултантен момент $M_{RO} = \sum M_O$, кои се заемно нормални, слика 3.13.

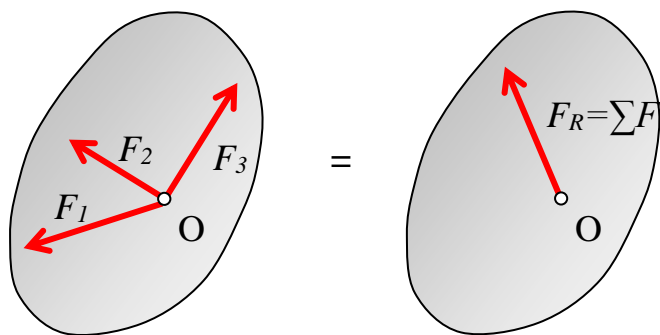


Слика 3.13 Специјален случај на редуција на систем од сили и моменти

Во ваков случај, резултантната сила и резултантниот момент може да се редуцираат на сила која дејствува во точка O која е на телото или надвор од него. Односно, ако системот сили и моменти се редуцираат во однос на точката O , тогаш на телото во точката O ќе дејствува само резултантната сила.

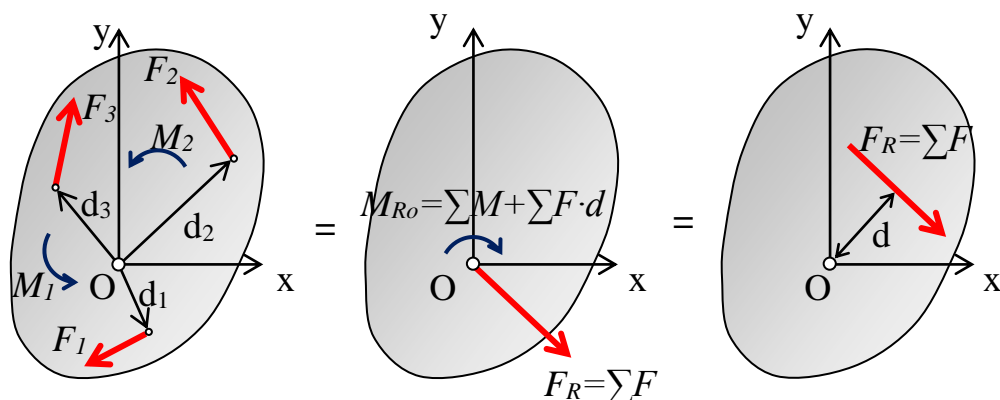
Доколку системот сили е составен од сили кои се пресекуваат во една точка, или се компланарни или се паралелни, тогаш тој може да се редуцира само на резултантна сила, поради тоа што во сите тие случаи F_R и M_{Ro} се нормални една на друга.

Систем од сили кои дејствуваат во една точка. Сите сили се пресекуваат во точката O , така што резултантниот момент е еднаков на нула, слика 3.14.



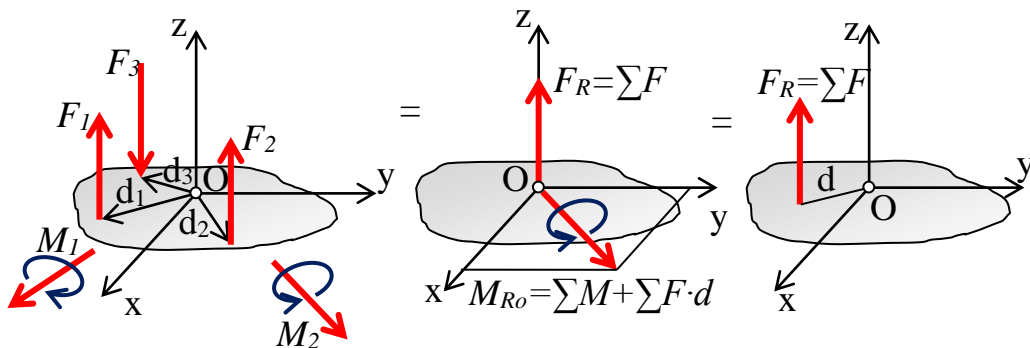
Слика 3.14 Редуција на систем од сили кои дејствуваат на една точка

Систем од компланарни сили. Систем од компланарни сили и моменти нормални на рамнината во којашто се наоѓаат силите може да се редуцира на една резултантна сила. Поместувајќи ја секоја сила во која било точка O во xOy рамнината освен резултантната сила се формира и момент нормален на таа рамнина, што значи дека резултантниот момент M_{Ro} е нормален на резултантната сила F_R , која може да се постави на растојание d од точката O, така што создава момент M_{Ro} околу O, слика 3.15.



Слика 3.15 Редуција на систем од компланарни сили

Систем од паралелни сили. Систем од паралелни сили и моменти нормални на силите може да се редуцира на една резултантна сила. Поместувајќи ја секоја сила во која било точка O во xOy рамнината се формира момент кој има компоненти само околу x и y оските. Резултантниот момент M_{Ro} е нормален на резултантната сила F_R , која може да се постави на растојание d од точката O , создавајќи ист момент околу O , слика 3.16.



Слика 3.16 Редуција на систем од паралелни сили

3.8 Сложување на произволен систем од сили во рамнина

Генерално, при сложување на произволен систем од сили во рамнина може да произлезат неколку карактеристични случаи:

$$(a) \quad R \neq 0 \quad M_R \neq 0 \quad (3.10)$$

Зададениот систем се сведува на редуциона резултанта и редуциона спрег, односно силите се заменуваат со една единствена сила R која е паралелно поместена од точката на редуција за интензитетот на моментот M_R .

$$(б) \quad R \neq 0 \quad M_R = 0 \quad (3.11)$$

Системот на сили се сведува само на една редуциона резултантa тогаш кога редуционата точка лежи на нападната линија на самата резултантa што условува редуциониот спрег да е нула.

$$(в) \quad R = 0 \quad M_R \neq 0 \quad (3.12)$$

Редуционата резултантa е нула, системот се сведува на спрег со момент M_R .

$$(г) \quad R = 0 \quad M_R = 0 \quad (3.13)$$

Ако и редуционата резултантa, и редуциониот спрег се еднакви на нула, системот на сили е во рамнотежа.

Од изнесеното може да се констатира дека: редуционата резултантa не зависи од изборот на редуционата точка, додека изборот на истата има влијание на редуциониот спрег.

Под дејство на произволен систем од сили телото може:

- 1) да се движи транслаторно, ако системот од сили се сведе на една резултантa;
- 2) да ротира, ако системот од сили се сведе на спрег;
- 3) да мирува ако системот од сили биде во рамнотежа.

4 РАМНОТЕЖА НА КРУТО ТЕЛО

Надворешните сили кои дејствуваат на една круто тело може да бидат редуцирани на систем од сила и спрег кој дејствува во дадена точка. Кога резултантната сила и резултантниот спрег се еднакви на нула, односно кога надворешните сили формираат систем еднаков на нула, тогаш крутото тело е во рамнотежа. Може да се констатира дека кај круто тело кое се наоѓа во рамнотежа системот од надворешни сили кој дејствува на истото нема да предизвика ниту трансляција, ниту ротација на разгледуваното тело.

За да се изведат равенките за рамнотежа за едно круто тело на кое дејствува систем од надворешни сили од суштинско значење е да се препознаат сите сили кои дејствуваат на разгледуваното тело и да се исцрта соодветниот дијаграм на слободно тело. Во овој дел ќе биде разгледана рамнотежа на дводимензионални конструкции на кои дејствуваат сили во нивната рамнина. За да се исцрта дијаграмот на слободно тело освен надворешните сили кои дејствуваат на конструкцијата мора да бидат правилно поставени и силите во потпорите на разгледуваното тело, односно неговите реакции. Во зависност од типот на потпората мора да биде претпоставена соодветна реакција.

Во зависност од начинот на потпирање на конструкцијата во овој дел ќе биде презентирани дали конструкцијата е правилно потпрена и дали од равенките за рамнотежа може да се определат сите непознати сили и реакции.

4.1 Услови за рамнотежа

Како што беше претходно елаборирано, еден произволен систем од надворешни сили коишто дејствуваат на круто тело може да се редуцира на систем од резултантна сила и момент кој дејствува во определена точка O . Овој систем нема да врши никакво механичко дејство на крутото тело, ако истовремено резултантната сила и резултантниот статички момент се еднакви на нула во однос на која и да било точка која лежи во истата рамнина. Ако резултантната сила R е еднаква на нула тогаш нема транслација на крутото тело, а ако резултантниот статички момент M_{OR} е еднаков на нула тогаш крутото тело не ротира. Значи, материјалното тело се наоѓа во состојба на мирување, а произволниот систем од сили кој дејствува на него е во рамнотежа.

Потребните и доволните услови за рамнотежа на круто тело може да се определат анализирајќи ги условите R и M_{OR} да бидат еднакви на нула преку следните равенки:

$$\sum F = 0 \quad (4.1a)$$

$$\sum M_O = 0 \quad (4.1b)$$

Проектирајќи ги равенките (4.1) по координатните оски од хуз координатниот систем се добиваат потребните и доволните услови за рамнотежа на круто тело, изразени преку следните шест скаларни равенки:

$$\sum F_x = 0 \quad (4.2a)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (4.2b)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (4.2в)$$

$$\sum M_x = 0 \quad (4.3a)$$

$$\sum M_y = 0 \quad (4.3b)$$

$$\sum M_z = 0 \quad (4.3в)$$

Користејќи ги равенките (4.2) и (4.3) може да се определат непознатите сили кои дејствуваат на круто тело или непознатите реакции кои се појавуваат во лежиштата. Од равенките (4.2) може да се заклучи дека компонентите од надворешните сили по x , y и z правец се во рамнотежа, додека од равенките (4.3) може да се заклучи дека моментите од надворешните сили околу x , y и z оските се во рамнотежа. Значи за круто тело да биде во рамнотежа, системот од надворешни сили којшто дејствува на телото не треба да предизвика ниту translација, ниту ротација.

Со цел да се напишат равенките за рамнотежа на круто тело од суштинско значење е најпрвин да се идентификуваат сите сили коишто дејствуваат на телото, а потоа да се нацрта соодветниот дијаграм на слободното тело. Во ова поглавје се разгледуваат и анализираат дводимензионалните тела изложени на дејство на систем од сили кој дејствува во нивната рамнина.

4.2 Дијаграм на слободно тело

При разгледувањето на проблем поврзан со рамнотежа на круто тело, најважно е да се разгледаат сите сили коишто дејствуваат на телото, при што треба да се исклучат сите сили кои директно не дејствуваат на истото. Успешна апликација на равенките за рамнотежа бара комплетна спецификација на сите познати и непознати надворешни сили кои дејствуваат на телото. Со изоставување на одредена сила или со додавање на непостоечка врз телото, се нарушуваат условите за рамнотежа. Најдобар начин за решавање на проблемот е цртање на дијаграм на слободно тело. Заради важноста на решавањето на проблемите од рамнотежа, потребно е да се сумираат различните чекори кои треба да се следат при цртањето на дијаграм на слободно тело:

1. Треба да се донесе јасна одлука во однос на изборот на слободното тело кое ќе се употреби. Телото треба да се отстрани од подлогата и да се одвои од кое било друго придружно тело. На овој начин се црта контурата на вака разгледуваното изолирано тело.

2. На дијаграмот на слободно тело се цртаат сите надворешни сили кои дејствуваат на телото, дефинирани со својата големина, правец и насока. Дејството врз слободното тело од подлогата и од другите тела кои биле отстранети од него се приложуваат во различните точки каде што телото било потпрено на подлогата или било поврзано со другите тела. Тежината треба исто така да се вклучи помеѓу надворешните сили и да се приложи во центарот на гравитацијата на телото. Кога телото е составено од повеќе поврзани делови, силите со кои тие делови меѓусебно си влијаат не треба да се вклучат како надворешни сили. Тие претставуваат внатрешни сили за разгледуваното слободно тело.

3. На дијаграмот на слободното тело треба јасно да се означи интензитетот и правецот на познатите надворешни сили. Кога станува збор за насоката на надворешните сили, треба да се запомни дека на дијаграмот на слободно тело се прикажуваат силите кои дејствуваат врз телото, а не оние сили со кои телото дејствува врз околината.

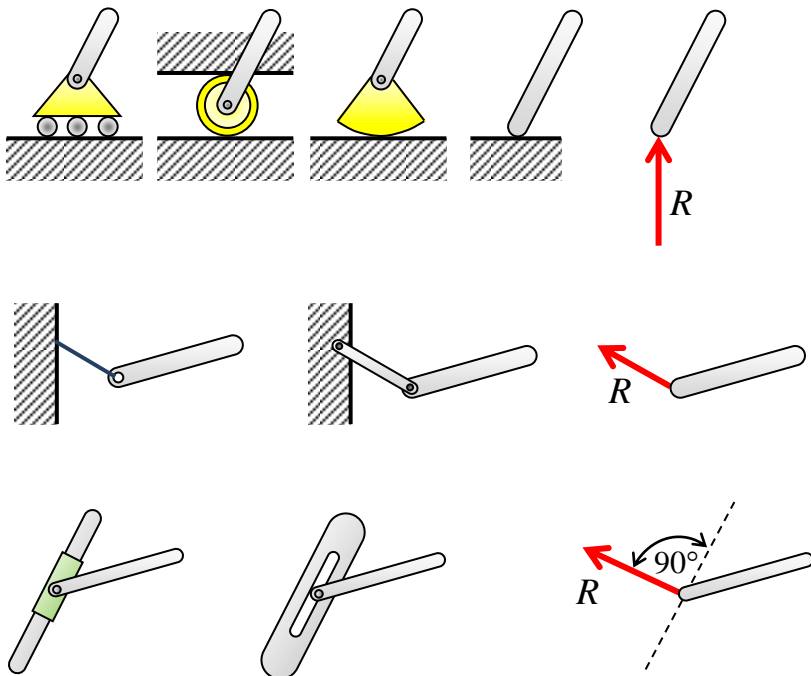
4. Непознатите надворешни сили вообичаено ги вклучуваат реакциите со кои подлогата или другите тела го спречуваат можното движење на слободното тело. Реакциите треба да бидат јасно назначени во дијаграмот на слободно тело во оние точки каде што се потпира телото, односно на местото каде што се наоѓа другото круто тело.

5. Освен надворешните сили, дијаграмот на слободно тело треба да ги содржи и сите димензии потребни за решавање на проблемот, т.е. за пресметување на силите и моментите. Сите други непотребни детали треба да се изостават.

4.3 Реакции во потпорите кај двостепенни конструкции

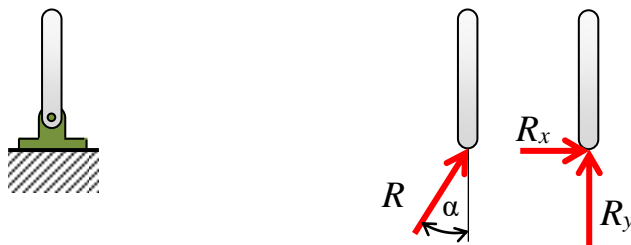
Реакциите со кои се заменува влијанието на лежиштата преку кои крутото тело се поврзува за подлогата, односно за друго круто тело, може да се класифицираат во три групи на потпори, односно лежишта:

- **Реакции еквивалентни на сила со познат правец на дејствување**, слика 4.1. Потпори и врски кои предизвикуваат реакции од овој тип се лежишта кои можат да спречат движење на телото само во еден правец, на пример подвижно лежиште. Кај овој вид на потпори како непозната се појавува една реакција, чиј правец на дејствување е познат и истиот јасно мора да биде прикажан на дијаграмот на слободно тело.



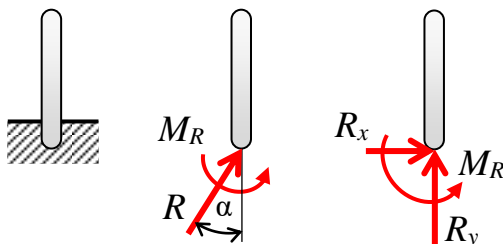
Слика 4.1 Реакции еквивалентни на сила со познат правец на дејствување

• **Реакции еквивалентни на сила со непознат правец и големина**, слика 4.2. Потпори и врски кои предизвикуваат реакции од овој тип се лежишта кои можат да спречат транслаторно движење на телото во сите правци, но не можат да ја спречат ротацијата на телото околу точката на потпирање, на пример неподвижно лежиште. Овие реакции се претставуваат со две непознати големини во x и y правец.



Слика 4.2 Реакции еквивалентни на сила со непознат правец и големина

• **Реакции еквивалентни на сила и момент**, слика 4.3. Потпори и врски кои предизвикуваат реакции од овој тип се лежишта кои го оневозможуваат кое било движење на телото, со што целосно го вкleshтуваат, на пример вкleshтено лежиште. Овие лежишта предизвикуваат сили во целата површина на контактот, формирајќи систем кој може да се редуцира на сила и момент. Реакциите од овој тип се претставуваат со три непознати големини, кои се состојат од две компоненти на силата во x и y правец и момент.



Слика 4.3 Реакции еквивалентни на сила и момент

Без разлика на видот на лежиштето, при поставување на реакциите се препоставува нивната насока. Доколку при определување на реакциите се добие негативен предзнак, значи дека нивната насока е погрешно претпоставена. Во тој случај само се променува претпоставената насока на реакцијата.

4.4 Рамнотежа на круто тело во две димензии

Равенките за рамнотежа на круто тело (4.2) и (4.3) се поедноставуваат кога се применуваат за дводимензионална конструкција.

Поставувајќи го крутото тело во xOy координатен систем следува:

$$F_z = 0 \quad (4.4a)$$

$$M_x = M_y = 0 \quad (4.4б)$$

$$M_z = M_o \quad (4.4в)$$

за секоја од силите кои дејствуваат на конструкцијата. Така шесте скаларни равенки за рамнотежа, во рамнина се редуцираат на само три:

$$\sum F_x = 0 \quad (4.5a)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (4.5б)$$

$$\sum M_o = 0 \quad (4.5в)$$

Бидејќи последниот услов треба да се задоволи во однос на точката O , без разлика на нејзината положба, равенките за рамнотежа за дводимензионално тело може да се напишат во поопшта форма, во однос на која било точка A од конструкцијата:

$$\sum F_x = 0 \quad (4.6a)$$

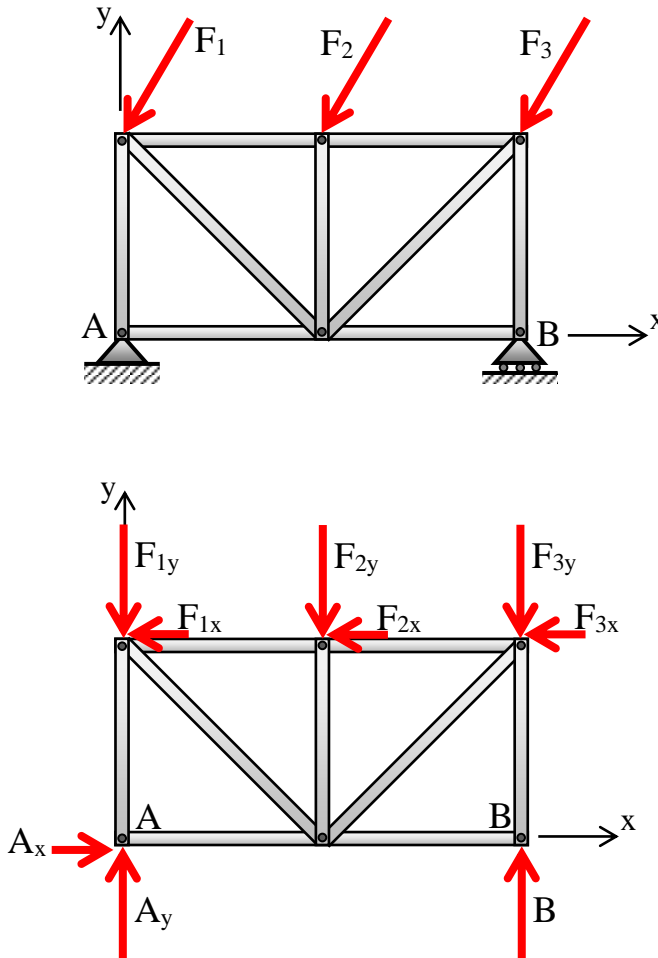
$$\sum F_y = 0 \quad (4.6б)$$

$$\sum M_A = 0 \quad (4.6в)$$

Добиените три равенки за рамнотежа можат да се решат за најмногу три непознати.

Непознатите сили кои ги вклучуваат реакциите и бројот на непознатите кои одговараат на соодветната реакција зависат од типот на потпората или вркката којашто ја предизвикува таа реакција.

Трите равенки за рамнотежа не може да бидат надополнети со дополнителен број на равенки, но секоја од нив може да се замени со друга равенка.



Слика 4.4 Дијаграм на слободно тело

Алтернативен систем на равенки за рамнотежа е:

$$\sum F_x = 0 \quad (4.7a)$$

$$\sum M_A = 0 \quad (4.7b)$$

$$\sum M_B = 0 \quad (4.7c)$$

каде што втората точка В околу која сумата на моменти од надворешните сили треба да е еднаква на нула не може да лежи на линија паралелна на у оската која поминува низ точката А, слика 4.4.

Овие равенки се доволен услов за рамнотежа. Првите две равенки покажуваат дека надворешните сили мора да се редуцираат на една вертикална сила во точката А. Бидејќи третата равенка бара моментот од оваа сила да биде нула околу точката В која не е на нападната линија, силата мора да е нула, со што крутото тело е во рамнотежа.

Третиотвозможен сет на равенки за рамнотежа е:

$$\sum M_A = 0 \quad (4.8a)$$

$$\sum M_B = 0 \quad (4.8b)$$

$$\sum M_C = 0 \quad (4.8c)$$

каде трите точки А, В и С не лежат на права линија. Првата равенка бара надворешните сили да се редуцираат на една сила во точката А; втората равенка бара оваа сила да поминува низ точката В и третата равенка бара силата да поминува низ точката С. Бидејќи трите точки А, В и С не лежат на права линија, силата мора да е еднаква на нула, со што крутото тело е во рамнотежа.

Равенката, која покажува дека сумата на моментите на сите сили околу точката А е нула, има поголемо физичко значење од другите две равенки во системот (4.7). Овие две равенки ја покажуваат идејата за рамнотежа и се доста корисни, така што изборот за равенки за рамнотежа не треба да зависи од нивното физичко значење. Во практиката е пожелно да се избераат равенки за рамнотежа кои содржат само една непозната, со што се елиминира потребата од решавање на

систем равенки. Равенки кои содржат само една непозната може да се добијат со сумирање на моменти околу точка во која се сечат нападните линии на две непознати сили или ако овие две сили се паралелни со сумирање на компоненти во нормален правец.

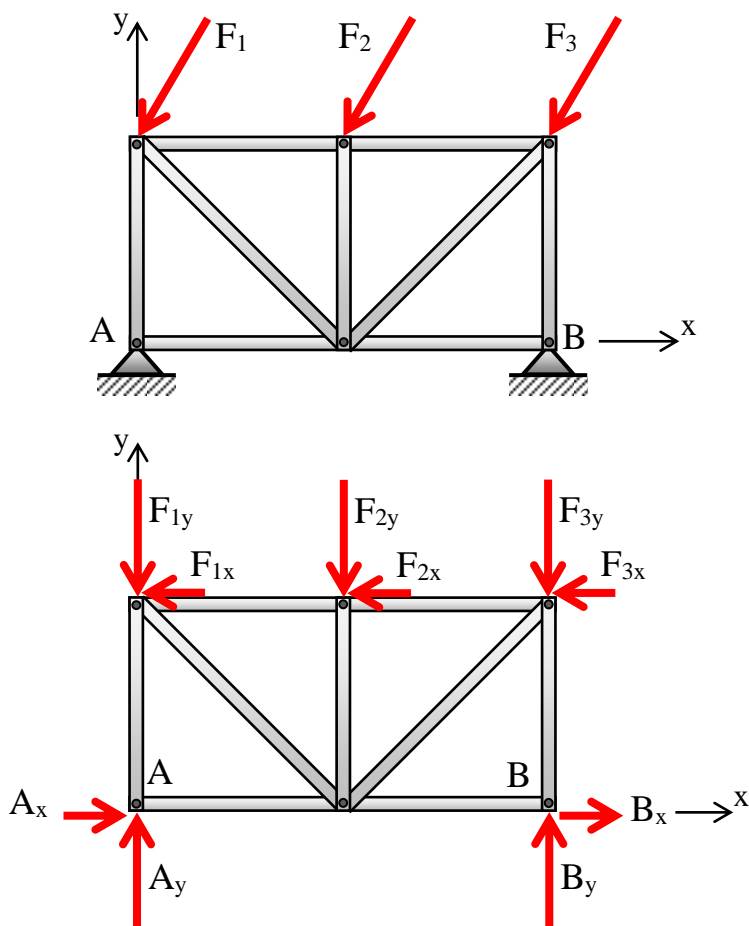
4.5 Статички неопределени носачи. Парцијални ограничувања

Кај претходно разгледуваниот пример, беа употребени лежишта кои не дозволуваат поместување на крутото тело под дејство на дадените товари или под кои било други услови на натоварување. Според типот на употребените лежишта, трите реакции се определуваат преку решавање на трите равенки за рамнотежа. Ваквите носачи се нарекуваат *статички определени носачи*.

Доколку еден носач е потпрен на лежишта кај кои реакциите се повеќе од потребни за да го спречат поместувањето на носачот при дадените товари или при кои било други услови на натоварување, дијаграмот на слободно тело ќе вклучува повеќе од три непознати, слика 4.5.

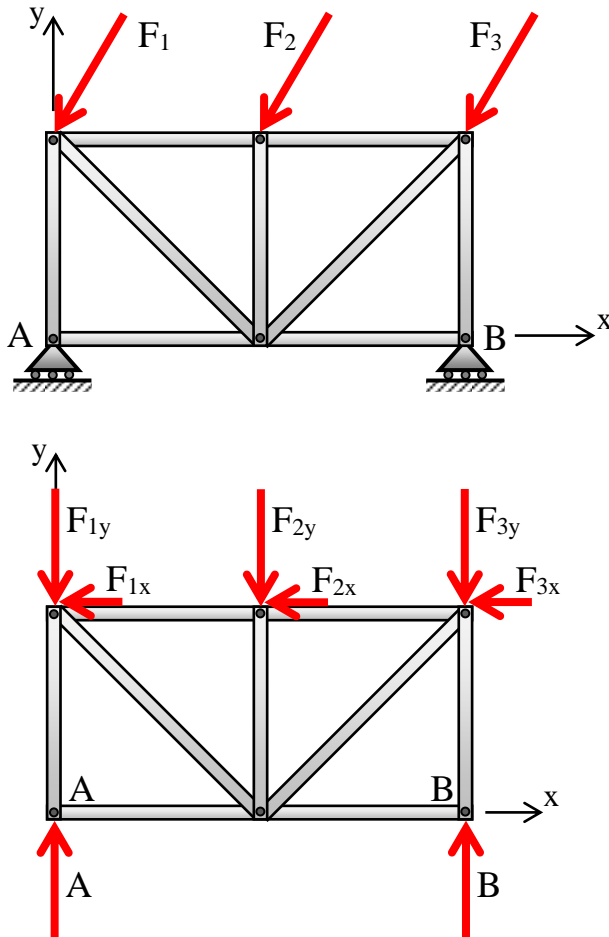
Знаејќи дека состојбата на рамнотежа се опишува со три независни равенки, може да се заклучи дека поради тоа што постојат повеќе од три непознати, сите реакции не може да се определат од равенките (4.7). Од моментните равенки $\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$ соодветно се определуваат вертикалните компоненти V_y и A_y . Равенката $\sum F_x = 0$ ја дефинира состојбата на рамнотежа по хоризонталната x оска. Имено, со оваа равенка се определува сумата, $A_x + V_x$, на хоризонталните компоненти од непознатите реакции A и V . Овие две хоризонтални компоненти се статички неопределени и истите може да се определат разгледувајќи ја деформацијата на носачот при дадените товари. Но ова веќе ги надминува целите и задачите на

статиката и претставува предмет на изучување на јакоста на материјалите.



Слика 4.5 Статички неодреден носач со две неподвижни лежишта

Двете подвижни лежишта на кои е потпрен еден носач, слика 4.6, се заменуваат со реакции кои не се доволни за да го спречат поместувањето на носачот при дадените товари или при кои било други услови на натоварување.



Слика 4.6 Носач со две подвижни лежишта

Кај разгледуваниот носач се спречени вертикалните поместувања, но истиот може да се поместува хоризонтално. Овој носач е парцијално ограничен или нестабилен носач. Бидејќи кај овој носач се појавуваат две непознати реакции A и B, една од трите равенки за рамнотежа нема да биде задоволена. Од моментните равенки $\sum M_A = 0$ и $\sum M_B = 0$ соодветно, правилно може да се определат вертикалните компоненти, додека равенката $\sum F_x = 0$ нема да биде задоволена, освен ако сумата на хоризонталните компоненти

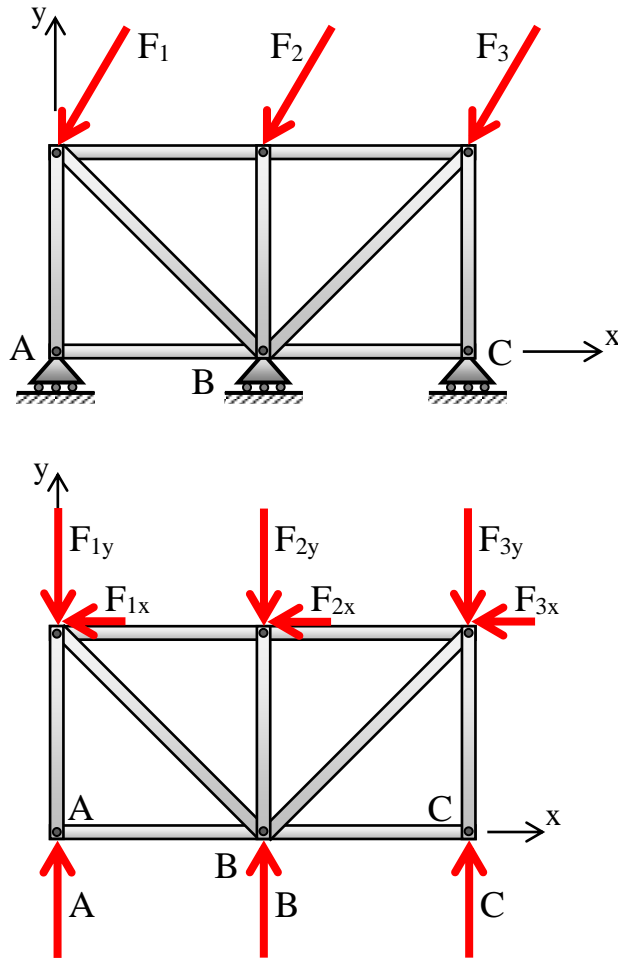
од надворешните сили кои дејствуваат не е еднаква на нула. Може да се заклучи дека при генерални услови на натоварување ваков носач нема да биде во рамнотежа, т.е. ќе се однесува како механизам.

Од претходно кажаното може да се заклучи дека круто тело е стабилно и реакциите во лежиштата се статички определени, доколку има толку непознати колку што има услови за рамнотежа. Доколку овој услов не е задоволен, крутото тело или не е целосно стабилно определено или реакциите во лежиштата не се статички определени.

Иако претходниот услов е неопходен, истиот не е и доволен. Односно, фактот дека бројот на непознатите е еднаков на бројот на равенки за рамнотежа не секогаш е гаранција дека телото е стабилно или дека реакциите во неговите потпори можат статички да се определат.

Иако кај носачот потпрен на три подвижни лежишта, слика 4.7, постојат три непознати реакции, равенката $\sum F_x = 0$ не е задоволена, освен ако сумата на хоризонталните компоненти на надворешните сили не е еднаква на нула.

Иако во овој случај постои доволен број на ограничувања, истите не се правилно распоредени и носачот може да се поместува во хоризонтален правец, односно носачот е нестабилен. Реакциите се статички неопределени бидејќи се останати две равенки за рамнотежа за определување на три непознати. Може да се заклучи дека и неправилното ограничување на круто тело предизвикува негова статичка неопределеност.



Слика 4.7 Носач со три подвижни лежишта

Примерот од слика 4.7 покажува дека круто тело не може да биде стабилен носач доколку лежиштата се поставени на таков начин да реакциите се сечат во една точка или се паралелни, иако можеби обезбедуваат доволен број на реакции. Бидејќи овој проблем се јавува заради неадекватен распоред или геометрија на потпорите, најчесто се нарекува *геометриска нестабилност*.

5 ТЕЖИШТЕ

Резултантната сила од тежината на систем од честички од кои е формирано едно круто тело дејствува во точка која се нарекува центар на гравитација. Резултантната гравитациона земјина сила, G , всушност претставува еквивалентна сила на збир од голем број мали сили распределени низ целото тело.

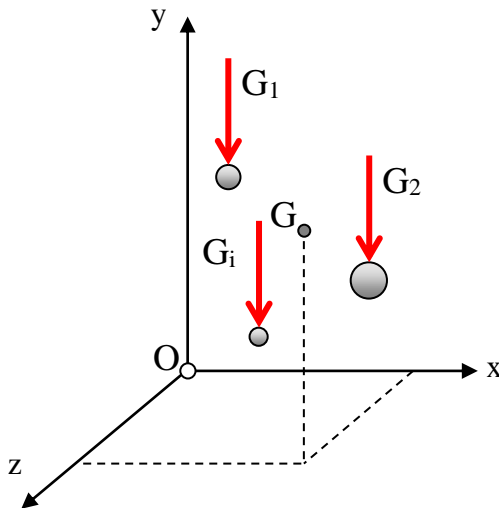
Во овој дел ќе бидат разгледани основните концепти за определување на тежиште на дводимензионални површини и линии во однос на дадена оска. Со цел да се определи тежиштето на една сложена површина ќе биде разгледано определувањето на тежиштето на основните геометриски фигури.

Исто така концептот на тежиште може да биде применет за решавање на низа инженерски проблеми, со што се поедноставува анализата на конструкциите изложени на дејство на распределен товар.

5.1 Центар на гравитација на круто тело

Центар на гравитација на едно круто тело претставува онаа точка од телото каде што може да се постави потпора за тоа да остане во рамнотежа. Тежиштето останува непроменето за која било положба на телото во просторот.

Привлечната сила на Земјата врз едно круто тело може да се претстави со единствена сила G , која се нарекува сила на гравитација или тежина на телото, која се приложува во центарот на гравитацијата. Всушност, Земјата дејствува со поединечна сила на секоја од честичките кои го формираат телото. Заради тоа, дејството на Земјата врз круто тело може да се претстави со голем број на мали сили кои дејствуваат во елементарни волумени распределени по целото тело, кои се во правец кон центарот на Земјата, но од практични причини се претпоставува дека се паралелни, слика 5.1.



Слика 5.1 Центар на гравитација на хомогено круто тело

Резултантната тежина на телото е еднаква на сумата од тежините на сите n честички:

$$G = \sum_{i=1}^n G_i \quad (5.1)$$

Следува дека и сумата на моментите од поединечните тежини на сите честички околу x , y и z оските е еднаква на моментот од резултантната тежина околу соодветните оски. Така, за да се определи координата x на тежината G се сумираат моментите околу y оската.

$$x_c G = x_1 G_1 + x_2 G_2 + \dots + x_n G_n = \sum_{i=1}^n x_i G_i \quad (5.2)$$

Аналогно на претходната равенка се изведуваат и координатите на центарот на гравитација околу другите две оски. Значи координатите на центарот на гравитација на хомогено тело во Декартов координатен систем се:

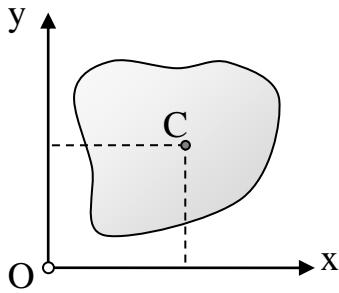
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i \cdot x_i}{G} \quad (5.3a)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i \cdot y_i}{G} \quad (5.3b)$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i \cdot z_i}{G} \quad (5.3в)$$

5.2 Тежиште на површини и линии

Доколку се разгледува рамна хоризонтална плоча, слика 5.2, n елементарните волумени се сведуваат на n елементарни површини, поради што координатите на тежиштето на рамнинска фигура во Декартов координатен систем се:



Слика 5.2

Координати на тежиште
на рамнинска фигура

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta G_i \cdot x_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma' \cdot \Delta A_i \cdot x_i}{\gamma' \cdot A} = \frac{\gamma' \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta A_i}{\gamma' \cdot A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \Delta A_i}{A} \quad (5.4a)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot \Delta A_i}{A} \quad (5.4b)$$

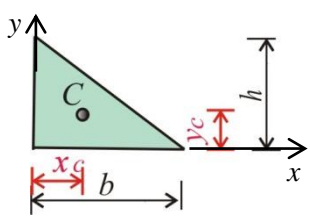
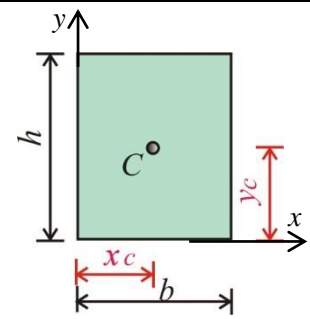
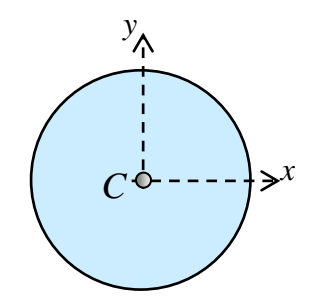
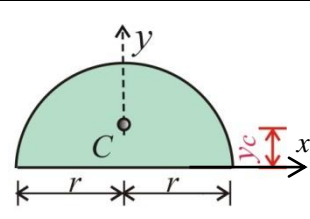
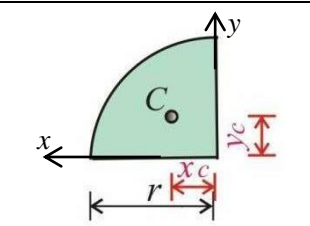
5.3 Тежиште на сложени површини

При решавањето на многубројните проблеми во техничката практика потребно е да се определи тежиштето на зададена сложена површина. Една рамна површина се смета за сложена доколку е формирана од повеќе основни површини, како: правоаголници, триаголници и други вообичаени геометриски фигури. За таа цел треба да се знаат тежиштата на основните фигури, види Табела 5.1.

Постапката за определување на тежиштето на површината може значително да се поедностави ако таа е симетрична, при што може да се користат и следните поедноставувања:

- ако тежиштата на основните фигури се наоѓаат на една права, тогаш тежиштето на површината се наоѓа на истата права, која се нарекува тежишна линија;
- ако површината има две оски на симетрија, тогаш тежиштето се наоѓа во нивната пресечна точка.

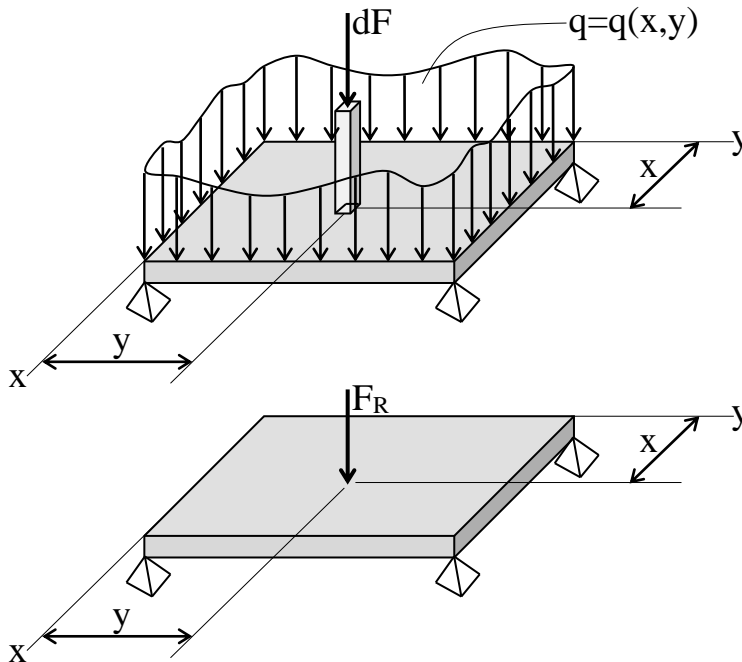
Табела 5.1 Преглед на тежишта за основни геометриски фигури

елементарна фигура		површина A	x_c	y_c
триаголник		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$
правоаголник		bh	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$
круг		$r^2\pi$	0	0
полукруг		$\frac{r^2\pi}{2}$	0	$\frac{4r}{3\pi}$
четвртина круг		$\frac{r^2\pi}{4}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$

5.4 Резултанта на систем од паралелни распределени сили

Освен за определување на тежиште на рамни површини, концептот на тежиште може да се примени за решавање на други инженерски проблеми. Во многу практични ситуации телото може да биде изложено на товари распределени по неговата површина, како ветер или хидростатички притисок. Влијанието на овие товари може да се разгледува на многу поедноставен начин ако тие се заменат со нивните резултанти. Користејќи ги методите од претходните поглавја може да се дефинира интензитетот и правецот на резултантната сила од распределен товар.

- **Површински распределен товар.** Се разгледува хоризонтална плоча, слика 5.4, натоварена со товарна функција $q=q(x,y)$ [Pa], каде што $1[\text{Pa}]=1[\text{N}/\text{m}^2]$.



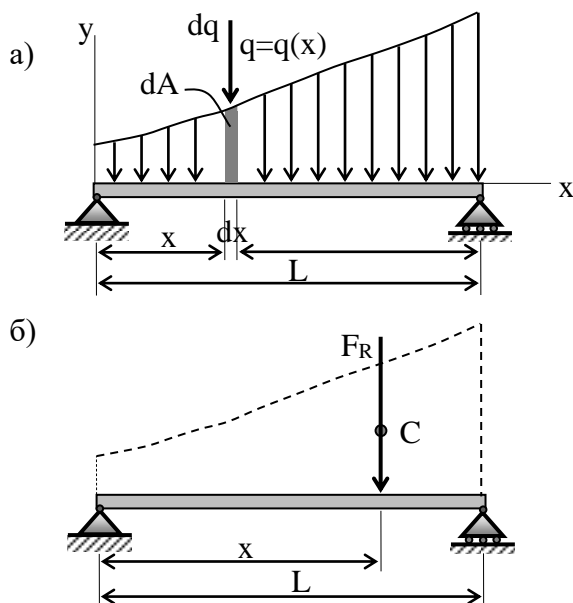
Слика 5.4 Површински распределен товар

Познавајќи ја оваа функција може да се определи елементарна сила dF којашто дејствува во тежиштето на елементарната површина dA . На таков начин целокупниот товар на плочата се претставува како систем од бесконечно многу паралелни сили кои дејствуваат соодветно во поделни елементарни површини dA . Овој систем од сили може да се замени со единствена резултантна сила F_R . За да се определи интензитетот на резултантната сила F_R неопходно е да се сумираат сите елементарни сили dF коишто дејствуваат на целокупната површина A на плочата. Имено, *интензитетот* на резултантната сила F_R математички може да се претстави со равенката:

$$F_R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (5.8)$$

Правецот на дејствување на резултантната сила F_R поминува низ геометрискиот центар, т.е. тежиштето на волуменот под распределениот товар.

• **Линиски распределен товар.** Во многу случаи товарот q е функција само од една променлива, $q=q(x)$ [N/m].



Слика 5.5 Линиски распределен товар
а) товарен дијаграм; б) резултантна сила

Товарниот дијаграм претставува систем од компланарни паралелни сили, слика 5.5а. Распределениот линиски товар може да се замени со една резултантна сила. *Интензитетот* на резултантната сила F_R се определува согласно равенката (5.8), додека нејзиниот правец поминува низ тежиштето на површината на распределениот товар, слика 5.5б.

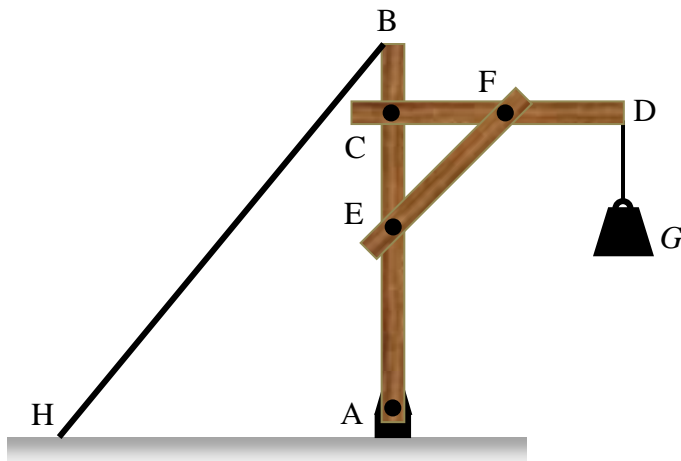
6 АНАЛИЗА НА КОНСТРУКЦИИ

Сите досега обработувани проблеми се однесуваа на рамнотежа на круто тело на кое дејствуваат надворешни сили. Овој дел се однесува на рамнотежа на конструкции составени од повеќе меѓусебно поврзани елементи. Овие проблеми се однесуваат не само на детерминирање на надворешните сили кои дејствуваат на конструкцијата, туку и на определување на силите кои ги поврзуваат во една целина различните делови од конструкцијата.

Применувајќи ги досега разгледуваните правила и принципи за едно круто тело, ќе биде рзгледана конструкција составена од повеќе елементи соодветно прицврстена. Во овој дел ќе биде елабориран општиот пристап за анализа на една конструкција, без разлика на типот на конструкцијата. Ќе биде разгледано кои сили дејствуваат како на конструкцијата, така и на поделните делови од кои истата е составена.

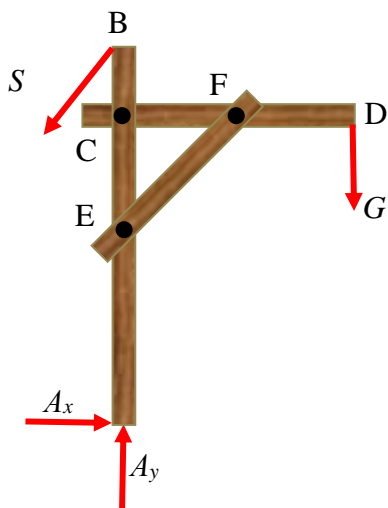
6.1 Дводимензионални конструкции

Разгледувајќи ја конструкцијата како целина силите кои ги поврзуваат во една целина различните делови од конструкцијата претставуваат внатрешни сили. Конструкција прикажана на слика 6.1 е составена од три греди АВ, CD И EF кои помеѓу себе се поврзани со заковки, додека за тлото се зглобно потпрени во точката А и прицврстени преку кабел ВН. Конструкцијата во точката D е натоварена со товар G.



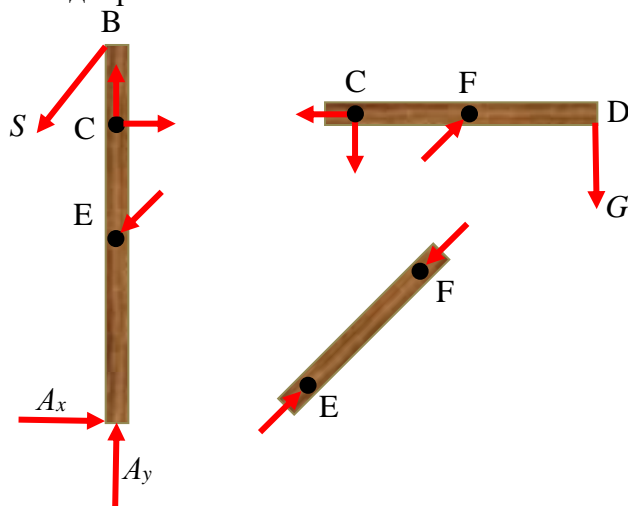
Слика 6.1 Конструкција составена од повеќе елементи

Најпрво конструкцијата која е составена од повеќе елементи се разгледува како едно круто тело и за истата се формира дијаграм на слободно тело, слика 6.2. На дијаграмот на слободно тело се прикажани сите надворешни сили кои што дејствуваат: силата G , реакцијата A , прикажана преку нејзините две компоненти A_x и A_y и силата во кабелот ВН. На овој дијаграм на слободно тело не се појавуваат внатрешните сили кои ги поврзуваат различните елементи од кои е составена конструкцијата во целина.



Слика 6.2 Дијаграм на слободно тело

Конструкцијата може да се разложи на поодделните елементи од кои што е составена и за секој од нив поодделно да се нацрта дијаграм на слободно тело, слика 6.3. Како што може да се види од дијаграмите на слободни тела, за секој елемент се појавуваат силите кои ги поврзуваат поодделните елементи од кои е составена конструкцијата. Овие сили, од гледна точка на секој елемент поодделно, се надворешни сили.



Слика 6.3 Дијаграми на слободни тела на секој поодделен елемент

Силата со која што во точката E дејствува елементот EF на елементот AB ќе биде еднаква, но спротивна на силата со која што во истата точка дејствува елементот AB на елементот EF . Силата со која што во точката F дејствува елементот EF на елементот CD ќе биде еднаква, но спротивна на силата со која што во истата точка дејствува елементот CD на елементот EF . Компонентите од силите во точката C со кои елементот CD дејствува на елементот AB се еднакви и спротивни на компонентите од силите во истата точка со кои елементот AB дејствува на елементот CD . Сето ова е во согласност со третиот Њутнов закон, дека силите на акција и реакција помеѓу две тела во контакт имаат ист интензитет, иста нападна линија и спротивни насоки.

7 РЕШЕТКАСТИ НОСАЧИ

Конструкциите во зависност од намената која ја имаат, генерално мже да се поделат на две главни групи: решеткасти носачи и полни носачи.

Едни од главните типови инженерски конструкции се решеткастите носачи, кои претставуваат практично и економично решение при проектирање на мостовски конструкции и конструкции од високоградбата. Решеткастите конструкции се состојат од прави елементи поврзани во јазли кои се наоѓаат на краевите од секој елемент. Елементите од решетките се витки елементи кои може да носат мали бочни натоварувања, така што сите товари мора да дејствуваат во јазлите на решетката, а не поодделно вдоль секој од елементите.

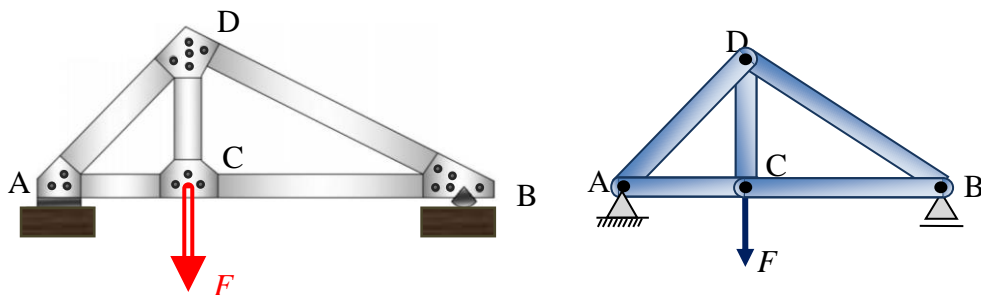
Во праксата најактуелните конструкции се проектирани и изведени од поголем број на решеткасти носачи поврзани во една заедничка целина формирајќи една просторна решеткаста конструкција.

7.1 Дефинирање на решеткаст носач

Решеткастите носачи се едни од основните типови на инженерски конструкции. Се карактеризираат како доста практично и економично решение, особено при проектирање на мостовски конструкции и конструкции од високоградбата. Најчесто, во праксата, решеткастите носачи се проектираат како стабилни, целосно ограничени конструкции. Решетките се состојат од прави елементи поврзани во јазли кои се наоѓаат на краевите од секој елемент. Елементите од решетките се елементи на кои дејствуваат две еднакви и спротивни сили насочени во долж елементот.

Денес најактуелните конструкции се направени од повеќе решеткасти носачи меѓусебно поврзани во една целина формирајќи просторна конструкција. Секој решеткаст носач е проектиран така да ги прифати и да ги носи оние товари кои дејствуваат во рамнината на носачот. Имајќи го ова во предвид, еден решеткаст носач може да се разгледува како дводимензионална конструкција.

Решеткастиот носач се состои од прави елементи кои на нивните краеве се поврзани во јазли, слика 7.1. Ова значи дека ниту еден елемент од кој е составен решеткастиот носач не е континуиран низ јазолот. Имено долниот појас на решеткастиот носач прикажан на слика 7.1 не е составен од еден елемент АВ, туку од два засебни елементи АС и СВ.

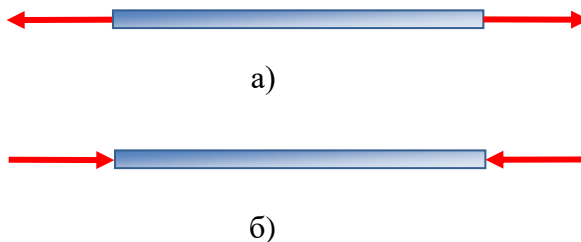


Слика 7.1 Шематски приказ на решеткаст носач

Генерално, елементите од кои е составен решеткастиот носач се тенки и вити, поради што истите може да прифатат мали бочни товари. Кај решеткастите носачи сите товари мора да бидат нанесени во јазлите од носачот, но не и по должина на елементите од кои е формиран самиот носач. Доколку на решеткастиот носач дејствува концентриран товар на некој од елементите помеѓу два јазла или доколку дејствува распределен товар, тогаш тој товар треба да се редуцира во јазлите од носачот.

При пресметување се претпоставува дека тежината на елементите од кои е формиран решеткастиот носач дејствува во јазлите, односно тежината од секој елемент се претпоставува дека дејствува по половина на двата краја во соодветните јазли. И покрај тоа што во праксата елементите кои го формираат решеткастиот носач се меѓусебно поврзани или со завртки или со заварување, во зависност од употребениот материјал, при пресметувањето се претпоставува дека силите коишто дејствуваат на секој крај од елементот се редуцираат само на една сила без момент. Единствени сили кои дејствуваат на елементите од решеткастиот носач се сили на затегнување или сили на притисок на секој крај од елементот.

Со цел да се определат внатрешните сили во елементите од решеткастиот носач се разгледуваат два основни елемента, слика 7.2.

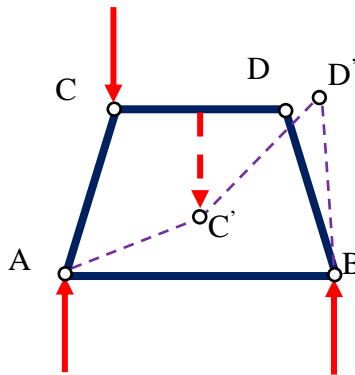


Слика 7.2 Сили во елемент од решетка:
а) затегнување; б) притисок

Имајќи предвид дека елементите кај решеткастите носачи се зглобно поврзани и дека товарите дејствуваат во јазлите, секој елемент од решетката дејствува како елемент со две сили. Заради тоа силите на краевите од елементот мора да бидат насочени вдолж неговата оска. Доколку силата се стреми да го издолжи елементот, тогаш тој елемент е затегнат, и спротивно доколку силата се стреми да го скрати елементот тогаш тој елемент е притиснат.

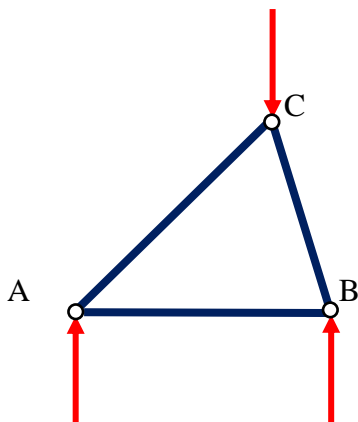
7.2 Едноставен решеткаст носач

Решеткастиот носач прикажан на слика 7.3 е составен од четири елементи поврзани во јазлите А, В, С и D. Доколку во јазолот С се нанесе одреден товар, решеткастиот носач ќе претрпи големи деформации, комплетно губејќи ја оригиналната геометриска форма.



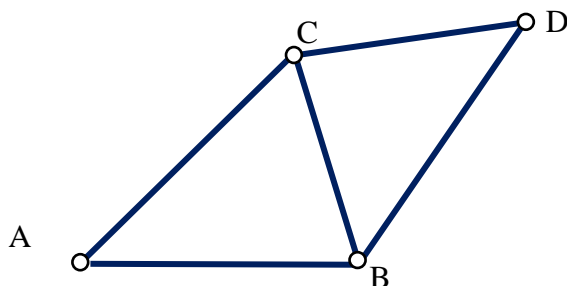
Слика 7.3 Деформација на решеткаст носач

Решеткастиот носач прикажан на слика 7.4 е составен од три елемента поврзани во јазлите А, В и С. Доколку во јазолот С се нанесе одреден товар решеткастиот носач ќе претрпи многу мали незабележителни деформации. Имено, кај овој решеткаст носач при дадениот товар може да дојде само до мали промени во должината на неговите елементи. Ваквите решеткасти носачи, кои при даден товар нема да ја изгубат својата стабилност и нема да претрпат колапс, се нарекуваат крути решеткасти носачи.



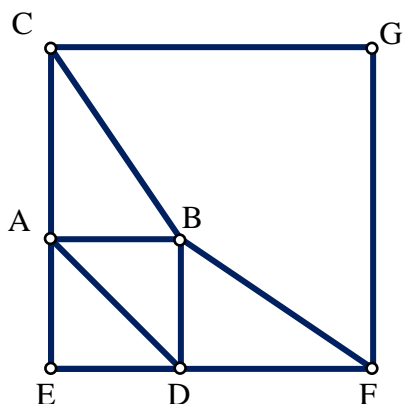
Слика 7.4 Крут решеткаст носач

Со додавање на дополнителни елементи BD и CD на основниот крут решеткаст носач се формира нов поголем крут решеткаст носач, слика 7.5. Ваквиот начин на додавање на дополнителни елементи може да се повторува толку пати колку што е потребно за да се формира решеткаст носач со бараните димензии. Новиот решеткаст носач ќе биде крут ако секој пат се додаваат два нови елементи, кои со едниот крај се поврзуваат на два постоечки јазли, а со другиот крај се поврзани во нов јазол. Решеткастиот носач формиран на овој начин се нарекува едноставен решеткаст носач.



Слика 7.5 Едноставен решеткаст носач

Треба да се истакне дека едноставните решеткасти носачи не секогаш се формираат единствено од елементи кои формираат триаголник. На пример решеткастиот носач прикажан на слика 7.6 е формиран со sukcesивно додавање на јазли DEFG на основниот триаголен решеткаст носач ABC.



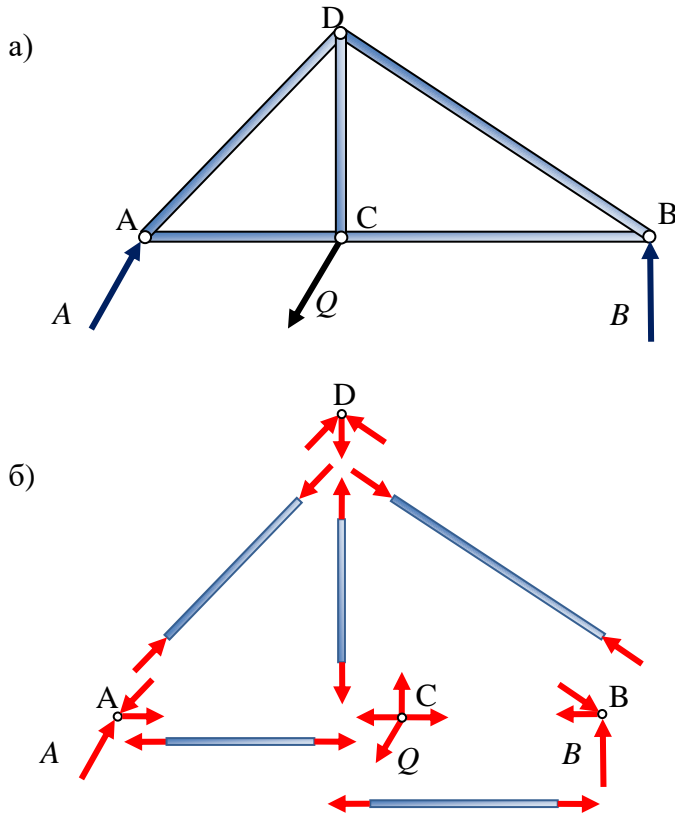
Слика 7.6 Решеткаст носач формиран од поголем број на елементи

Основниот триаголен решеткаст носач се формира од три елементи и три јазли. Следниот решеткаст носач има повеќе два елемента и еден јазол, односно пет елемента и четири јазли. При секое зголемување на решеткастиот носач се додаваат два нови елемента, зголемувајќи го бројот на јазли за еден. Може да се заклучи дека кај едноставните решеткасти носачи вкупниот број на елементи од коишто е составен носачот изнесува $m=2n-3$, каде што n е вкупен број на јазли. Доколку $m < 2n-3$ решеткастиот носач претставува лабилна конструкција, доадека пак, ако $m > 2n-3$ тогаш решеткастиот носач е статички неопределен и за негово решавање се потребни дополнителни услови.

7.3 **Анализа на решеткаст носач со метод на јазли**

Со цел да се анализира или проектира решеткаст носач најпрво мора да се определи силата во секој од неговите елементи. Ако се разгледува дијаграмот на слободното тело на целиот решеткаст носач, тогаш силите во поодделните елементи би биле внатрешни сили и тие не можат да се определат преку анализа на рамнотежната состојба на конструкцијата. Наместо тоа, ако се разгледува рамнотежната состојба на поодделен јазол од решеткастиот носач, тогаш силата во елементот станува надворешна сила на дијаграмот на слободно тело за јазолот, при што поставувајќи ги равенките за рамнотежа може да се определи интензитетот на силата. На овој начин примената на $\sum F_x=0$ и $\sum F_y=0$ води кон две алгебарски равенки за секој јазол кои можат да бидат решени за максимум две непознати внатрешни сили во поодделните елементи од решеткастиот носач. Вистинската насока на внатрешната сила во елементот може да биде претпоставена, а потоа со примена на рамнотежните равенки претпоставената насока може да се потврди преку добиените нумерички резултати. Позитивната вредност покажува дека претпоставената насока е точна, додека негативната вредност покажува дека насоката на внатрешната сила во дијаграмот на слободно тело е погрешно претпоставена и треба да биде обратна.

Решеткастиот носач чиј дијаграм на слободно тело е претставен на слика 7.7 а) може да се разложи на елементите од коишто е формиран и за секој поодделен елемент да се нацрта дијаграм на слободно тело, слика 7.7 б).



Слика 7.7 Дијаграм на слободно тело:
а) на решеткаст носач; б) на елементи

Секој елемент од решеткастиот носач е под дејство на две сили, кои дејствуваат по должина на елементот на неговите краеве. Согласно третиот Њутнов закон овие сили имаат ист интензитет, иста нападна линија и спротивни насоки.

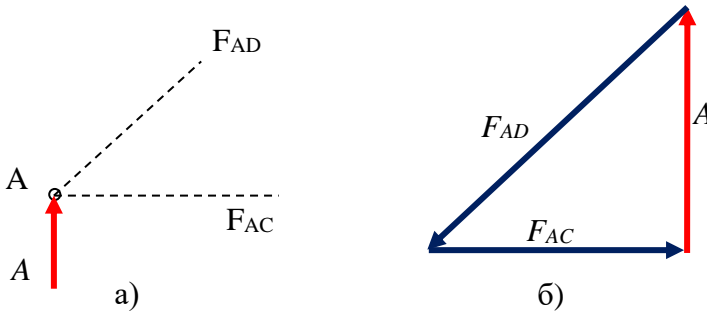
Бидејќи нападните линии на сите внатрешни сили во решеткастите носачи се познати, анализата на истите се состои од пресметување на интензитетот и насоката на силите во поделните елементи, преку што може да се констатира дали поделниот елемент е изложен на затегнување или на притисок.

При анализата поаѓаме од фактот дека целиот решеткаст носач е во рамнотежа, слика 7.7 а), по што следува дека и секој негов јазол мора да биде во рамнотежа, слика 7.7 б). Фактот дека целиот решеткаст носач е круто тело во рамнотежа може да се искористи за да се напишат трите равенки за определување на реакциите во потпорите прикажани на дијаграмот на слободно тело, слика 7.7 а). Овие две равенки за определување на реакциите во потпорите не се независни од равенките за рамнотежа поврзани со дијаграмите на слободно тело на секој јазол, слика 7.7 б). Анализата на решеткастите носачи секогаш започнува од јазол составен од два елемента. Распоредот на јазлите и елементите кај едноставен решеткаст носач е таква да секогаш е возможно да се најде јазол кој е формиран само од два елемента, односно јазол во кој има само две непознати сили. Овие непознати сили се определуваат применувајќи ја методата за рамнотежа на материјална точка во која дејствуваат сили со различни правци и насоки. Решеткастиот носач се анализира преку рамнотежа на секој јазол сукцесивно. Во следниот соседен јазол овие две сили се префрлуваат со спротивна насока, со определениот интензитет и се третираат како познати големини за тој јазол. Оваа процедура се повторува се додека не се определат сите непознати сили во елементите од решеткастиот носач.

Кај разгледуваниот решеткаст носач, слика 7.7, сите јазли се под дејство на три непознати сили. Најпрвин треба да се определат реакциите во потпорите разгледувајќи го решеткастиот носач во целина како слободно тело и применувајќи ги равенките за рамнотежа на круто тело.

Со определувањето на реакциите во потпорите бројот на непознатите сили во јазолот А е редуциран на две. Овие две сили се определуваат разгледувајќи ја рамнотежата на јазолот А, слика 7.8 а). Во јазолот А преку елементите AD и AC дејствуваат силите F_{AD} и F_{AC} ,

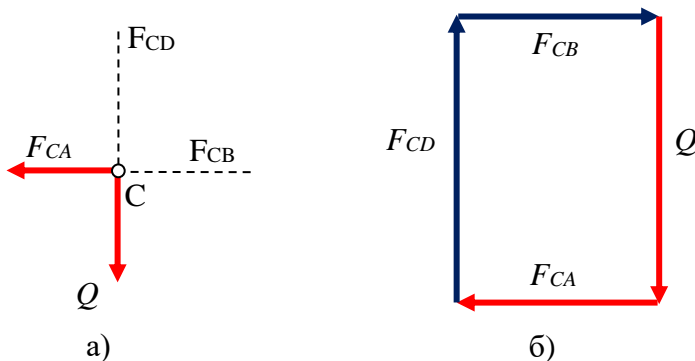
додека преку потпората дејствува реакцијата A . Овие три сили за да бидат во рамнотежа мора да формираат затворен план на сили, слика 7.8 б). Бидејќи се познати интензитетот на реакцијата A и правците на двете сили F_{AC} и F_{AD} , применувајќи го затворениот план на сили се определува интензитетот и насоката на непознатите две сили во елементите.



Слика 7.8 Јазол A од решеткаст носач:

а) дијаграм на слободно тело; б) затворен план на сили

Следен јазол е јазолот C во кој дејствуваат две непознати сили F_{CD} и F_{CB} . Во овој јазол освен двете непознати сили дејствува товарот Q и силата F_{CA} од елементот AC , која е еднаква по интензитет, но спротивна на силата F_{AC} , слика 7.9 а).

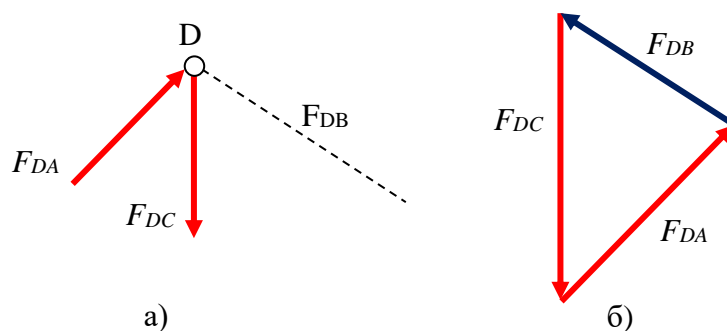


Слика 7.9 Јазол C од решеткаст носач:

а) дијаграм на слободно тело; б) затворен план на сили

За да се определат силите F_{CD} и F_{CB} се црта планот на сили за јазолот С, слика 7.9 б). Доколку во еден јазол дејствуваат повеќе од три сили за да се определат двете непознати сили поедноставно е да се решат равенките за рамнотежа $\sum F_x=0$ и $\sum F_y=0$.

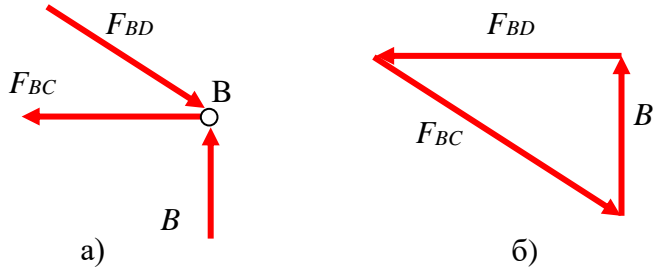
Во следниот јазол D освен двете сили F_{DC} и F_{DA} , кои се познати од анализата на претходните јазли, дејствува непознатата сила F_{DB} , слика 7.10 а). Рамнотежата на секој јазол обезбедува доволни услови за определување на две непознати сили, во овој јазол освен определување на непознатата сила, преку затворениот план на сили ќе се изврши и проверка на спроведената анализа. Преку затворениот план на сили се определува и интензитетот и насоката на непознатата сила F_{DB} , слика 7.10 б). Проверката на спроведената анализа се изведува преку контрола на правецот на силата F_{DB} , кој треба да е паралелен на елементот DB.



Слика 7.10 Јазол D од решеткаст носач:

а) дијаграм на слободно тело; б) затворен план на сили

Во последниот јазол В сите сили коишто дејствуваат се познати, слика 7.11 а). Бидејќи јазолот е во рамнотежа планот на сили мора да биде затворен, слика 7.11 б), што всушност претставува дополнителна контрола на спроведената анализа.



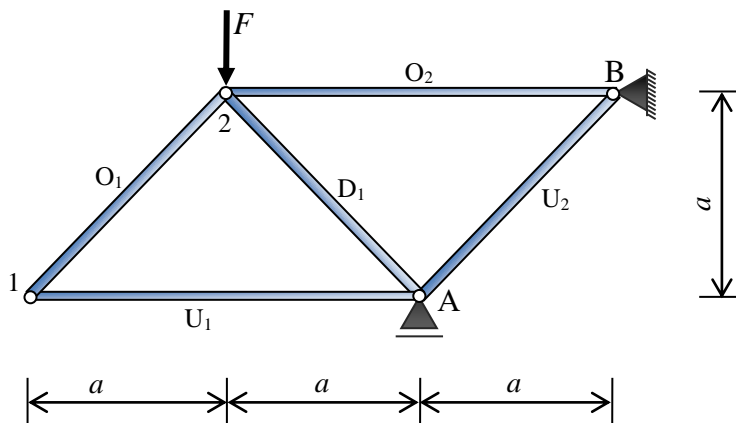
Слика 7.11 Јазол B од решеткаст носач:

а) дијаграм на слободно тело; б) затворен план на сили

Треба да се истакне дека при цртањето на плановите на сили истите може да се нацртаат по друг редослед, но во секој случај анализата мора да започне од јазол во кој има најмалку една позната сила и две непознати сили.

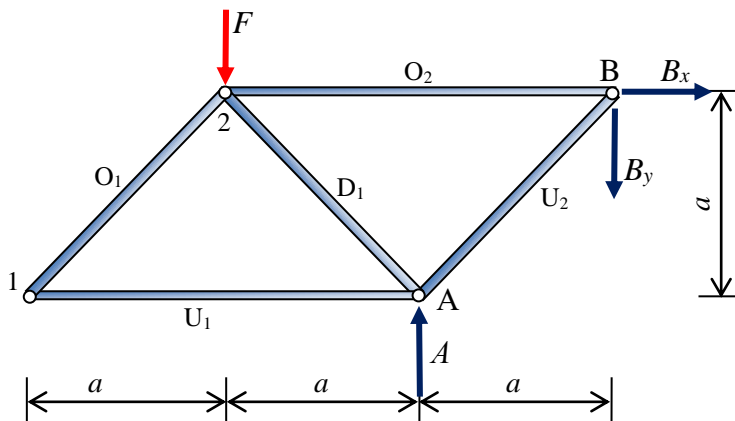
7.3.1 Постапка за анализа на решеткаст носач по метод на јазли

Постапката за анализа на решеткаст носач со примена на методата на јазли, слика 7.12, се состои од неколку чекори.



Слика 7.12 Решеткаст носач

➤ Најпрво за зададениот решеткаст носач се исцртува дијаграм на слободно тело, слика 7.13, од кој се определуваат реакциите во лежиштата.



Слика 7.13 Дијаграм на слободно тело

$$\sum F_x = 0$$

$$B_x = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F \cdot 2a + A \cdot a = 0$$

$$A = 2F$$

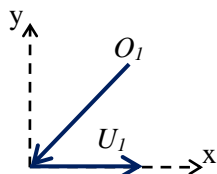
$$\sum M_A = 0$$

$$-F \cdot a + B_y \cdot a = 0$$

$$B_y = F$$

➤ По определувањето на реакциите во лежиштата, за секој поодделен јазол од решеткастиот носач се исцртува дијаграм на слободно тело. Внатрешните сили во елементите, од кои се формирани конкретните јазли, се определуваат поставувајќи ги равенките за рамнотежа на материјална точка. Анализата започнува од јазол составен од најмногу два елемента.

јазол 1



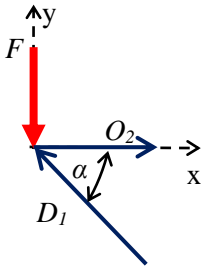
$$\sum F_x = 0$$

$$U_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$O_1 = 0$$

➤ Постапката продолжува со анализа на останатите јазли последователно, избрани така да на материјалната точка дејствуваат максимум две непознати внатрешни сили од елементите.

јазол 2

$$\sum F_y = 0$$

$$-F + D_1 \cdot \sin \alpha = 0$$

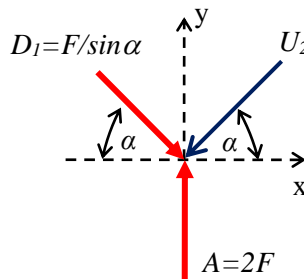
$$D_1 = \frac{F}{\sin \alpha}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$O_2 - D_1 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$O_2 = F \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

➤ При анализата на претпоследниот јазол останува да се определи само една непозната внатрешна сила од условот за рамнотежа, додека преостанатиот услов за рамнотежа се користи за контрола на веќе определените сили.

јазол A

$$\sum F_x = 0$$

$$D_1 \cdot \cos \alpha - U_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

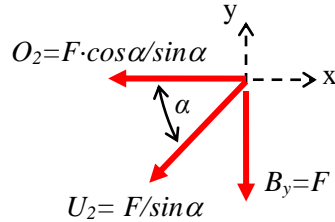
$$U_2 = \frac{F}{\sin \alpha}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-D_1 \cdot \sin \alpha - U_2 \cdot \sin \alpha + A = 0$$

$$0 = 0$$

- Анализата на последниот јазол се користи за контрола на спроведената постапка, при што мора да бидат задоволени двата услова за рамнотежа на материјална точка.

јазол В

$$\sum F_x = 0$$

$$-O_2 + U_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$-F \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + F \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 0$$

$$0 = 0$$

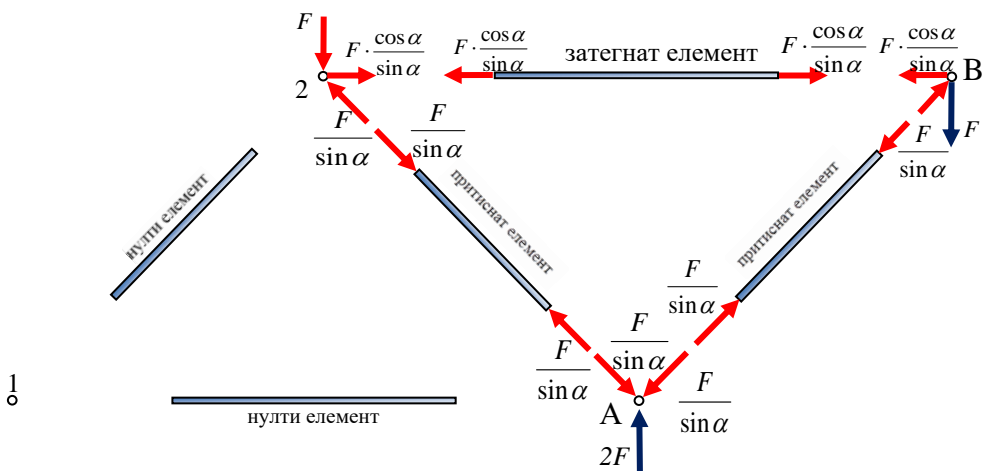
$$\sum F_y = 0$$

$$U_2 \cdot \sin \alpha - F = 0$$

$$\frac{F}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha - F = 0$$

$$0 = 0$$

- Правилниот дијаграм на слободно тело за секој јазол и елемент со дефинирана внатрешна сила, затегнување или притисок, е прикажан на слика 7.14.

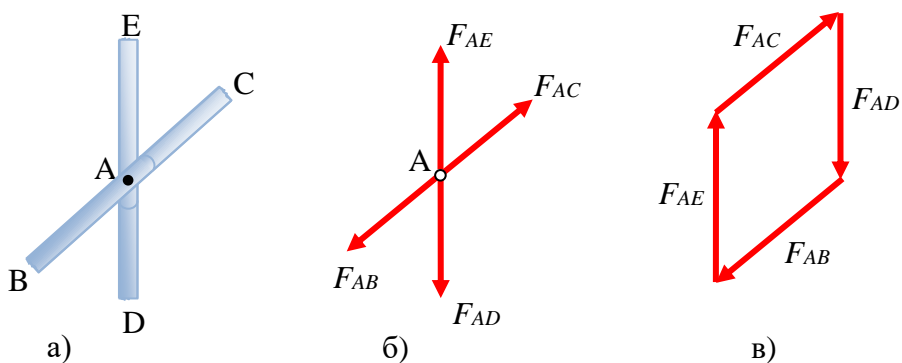


Слика 7.14 Внатрешни сили кај решеткаст носач

7.4 Анализа на јазли при специјални услови

Анализата на решеткаст носач применувајќи ја методата на јазли значајно се поедноставува ако на почеток постои можност да се определат ненатоварените елементи, односно нултите елементи. Овие нулти елементи генерално може да бидат определени само со визуелна проверка на секој од јазлите во зависност од геометријата на решеткастиот носач и приложените товари.

На слика 7.15 а) прикажан е јазол од решеткаст носач во кој се поврзуваат четири елемента. Двата пара на елементи лежат на две прави линии кои се пресекуваат. Од дијаграмот на слободно тело, слика 7.15 б), може да се заклучи дека во јазолот А дејствуваат четири сили, односно два пара од директно спротивни сили. За јазолот А да биде во рамнотежа планот на сили е паралелограм, слика 7.15 в), додека силите во елементите кои лежат во иста линија се еднакви по интензитет, но спротивни по насока.

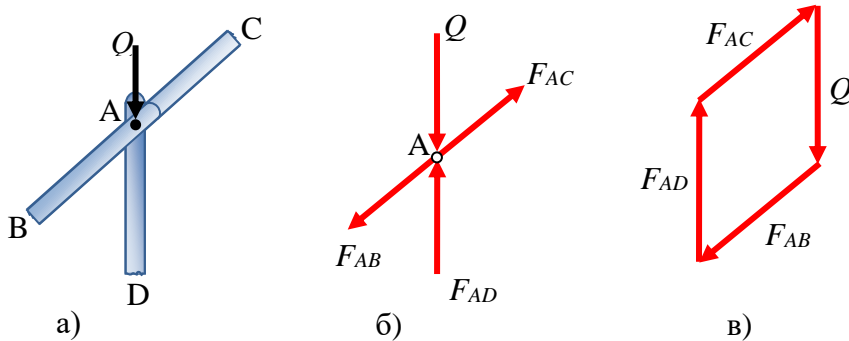


Слика 7.15 Јазол составен од четири елемента:

а) јазол составен од елементи; б) јазол А; в) затворен план на сили

На слика 7.16 а) прикажан е јазол од решеткаст носач формиран од три елемента, во кој дејствува надворешен товар Q . Два елемента од јазолот лежат на иста линија, додека надворешниот товар дејствува во

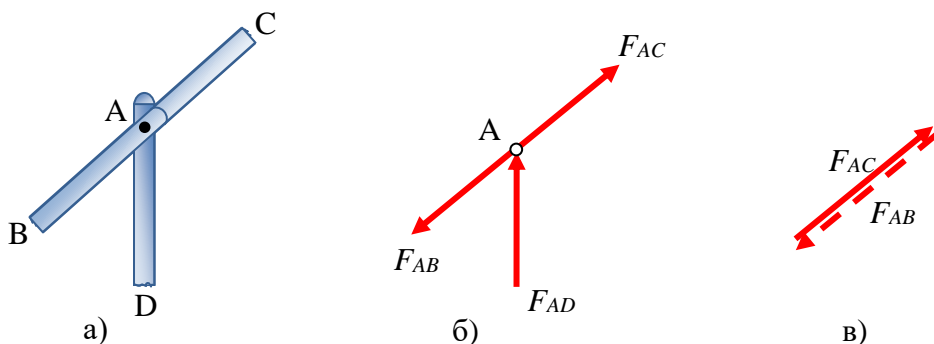
ист правец со третиот елемент. Од дијаграмот на слободно тело на јазолот А, слика 7.16 б), и планот на сили, слика 7.16 в), може да се заклучи дека силите во двата елемента кои лежат на иста линија се еднакви по интензитет и спротивни по насока, додека силата во елементот во чиј правец дејствува товарот е еднаква на надворешниот товар Q .



Слика 7.16 Јазол составен од три елемента:

а) јазол составен од елементи; б) јазол А; в) затворен план на сили

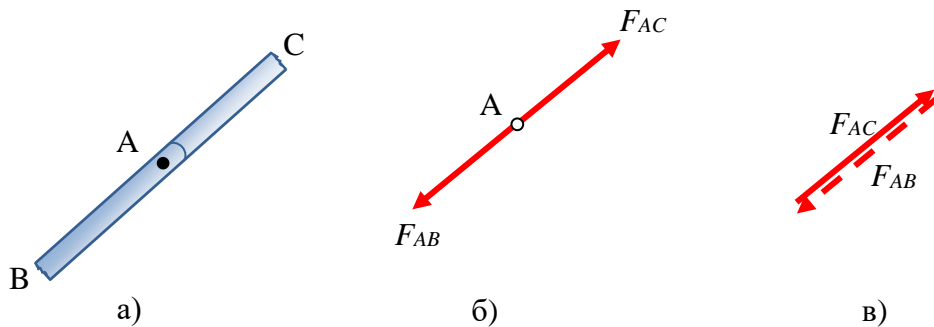
Специјален случај на јазол во којшто се поврзани три елемента е кога во јазолот не дејствува надворешен товар, слика 7.17. Во овој случај силата во елементот АС е еднаква на нула и елементот АС се нарекува нулти елемент.



Слика 7.17 Јазол составен од три елемента во кој не дејствува надворешно натоварување:

а) јазол од елементи; б) јазол А; в) затворен план на сили

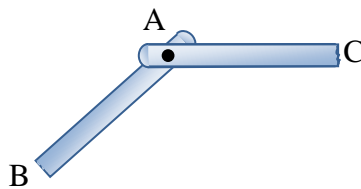
На слика 7.18 прикажан е јазол составен од два елемента. Знаеме дека материјална точка на која дејствуваат две сили ќе биде во рамнотежа ако двете сили имаат ист интензитет, иста нападна линија и спротивна насока. Согласно ова, за да биде јазолот во рамнотежа, силите во двата елемента АВ и АС, кои лежат на иста линија, се еднакви по интензитет и спротивни по насока.



Слика 7.18 Јазол составен од два елемента:

а) јазол од елементи; б) јазол А; в) затворен план на сили

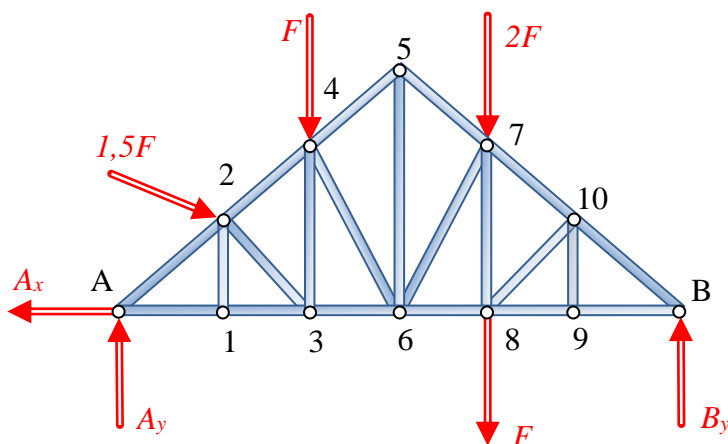
Специјален случај е кога некој јазол е формиран од два елемента кои не лежат на иста линија, без надворешен товар Q , слика 7.19. Во овој случај јазолот ќе биде во рамнотежа само ако силите во двата елемента се еднакви на нула. Имено, јазолот ќе биде во рамнотежа само доколку е формиран од два нулти елемента.



Слика 7.19 Јазол составен од два елемента кои не лежат на иста линија, без надворешен товар

Решеткастиот носач прикажан на слика 7.20 е анализиран имајќи ги во предвид сите карактеристични случаи. Од сликата може да се

види дека јазлите 1 и 9 се формирани од три елемента, од кои два елемента лежат на иста линија. Во јазлите 1 и 9 не дејствува надворешен товар. Согласно претходно кажаното, слика 7.17, елементите 1-2 и 9-10 се нулти елементи, додека соодветно силите во елементите А-1 и 1-3, односно во В-9 и 8-9, се еднакви помеѓу себе.



Слика 7.20 Решеткаст носач

Имајќи во предвид дека елементите 1-2 и 9-10 се нулти елементи, следува дека јазолот 10 е ист како јазлите 1 и 9. Силите во елементите В-10 и 7-10 се еднакви, додека елементот 8-10 е нулти елемент. Јазолот 8 е формиран од четири елемента, од кои два елемента лежат на иста линија, елементот 8-10 е нулти елемент, додека надворешниот товар дејствува во правец на вертикалниот елемент. Силите во елементите 8-9 и 6-8 се еднакви, додека силата во елементот 7-8 е еднаква на надворешниот товар. Од анализата може да се заклучи дека силите во елементите В-9, 8-9 и 6-8 се еднакви.

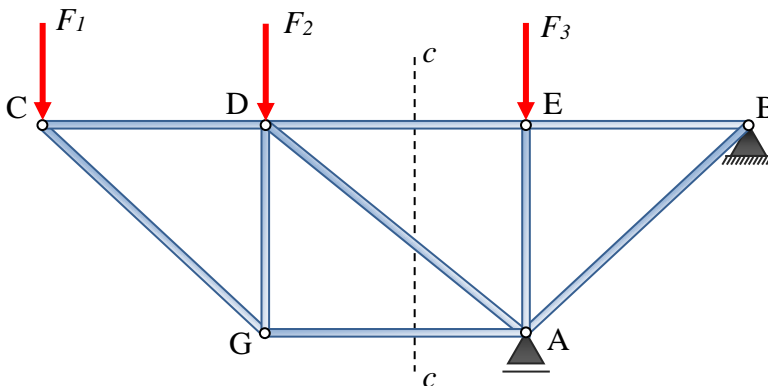
Претходно опишаните услови не може да се применат кај јазлите 2 и 4 и би било погрешно да се претпостави дека силата во елементот 4-3 е еднаква на надворешниот товар кој дејствува во јазолот, односно дека силите во елементите А-2 и 2-4 се еднакви. Силите во овие елементи, како и во сите останати се определуваат со анализа на јазлите А, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и В, поставувајќи ги условите за

рамнотежа на материјална точка на која дејствува систем од сили со различни правци.

Треба да се истакне дека и покрај фактот што кај решеткастите носачи постојат нулти елементи, истите не се бескорисни. Овие елементи се нулти само при дадените услови на натоварување, додека при промена на условите на натоварување може да дојде до поинаква прераспределба на силите во елементите. Во секој случај нултите елементи се потребни за да го задржат бараниот облик на решеткастиот носач.

7.5 Анализа на решеткаст носач со примена на метод на пресеци

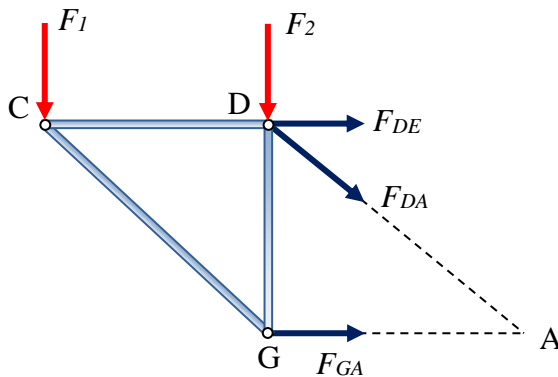
Определувањето на силите во елементите од решеткастиот носач по методата на јазли е најефикасно доколку треба да се определат силите во сите елементи, во спротивно доколку треба да се определи силата во еден или неколку елементи тогаш поефикасно е определување на силите по метод на пресеци. Оваа метода базира на принципот дека ако едно тело е во рамнотежа тогаш кој било дел од тоа тело е во рамнотежа.



Слика 7.21 Решеткаст носач

На слика 7.21 прикажан е решеткаст носач, кај кој треба да се определи силата во елементот DE, односно треба да се определи силата со која елементот дејствува или на јазолот D или на јазолот E.

Применувајќи ја методата на пресеци се поставува пресек кој пресекува три елементи од решеткастиот носач, од кои едниот е елементот во кој треба да се определи силата. На овој начин се формираат две слободни тела на кои освен надворешните сили и реакциите во потпорите дејствуваат и најмногу три сили од елементите кои се пресекуваат. Во анализата избираме едно од двете слободни тела, составено од неколку јазли и елементи, водејќи сметка силата којашто треба да се определи да е една од надворешните сили кои дејствуваат на тој дел од решеткастиот носач, слика 7.22. Бараната сила се определува со решавање на равенките за рамнотежа на разгледуваниот дел од решеткастиот носач.



Слика 7.22 Метод на пресеци

Како што може да се види од слика 7.21 пресекот поминува низ елементите DE, DA и GA. Како слободно тело од решеткастиот носач е избран делот CDG. Од дијаграмот на слободно тело за делот CDG може да се види дека во точката C дејствува надворешен товар F_1 , во точката D дејствуваат надворешен товар F_2 и двете непознати сили F_{DE} и F_{DA} , додека во точката G дејствува непознатата сила F_{GA} . Насоките на

сите три непознати сили со кои се заменуваат отстранетите елементи од решеткастиот носач се претпоставуваат.

Крутото тело CDG мора да биде во рамнотежа, поставувајќи ги трите равенки за рамнотежа се определуваат трите непознати сили во елементите од решеткастиот носач. Доколку треба да се определи само сила во еден елемент, тогаш треба да се напише само една равенка за рамнотежа која не ги содржи останатите две непознати сили.

На пример, ако треба да се определи само силата во елементот F_{DE} тогаш како услов за рамнотежа на крутото тело CDG се поставува равенката $\sum M_A = 0$. Доколку со решавање на равенката за рамнотежа силата во елементот F_{DE} е позитивна, тогаш значи дека претпоставката за насоката на силата е точна и елементот DE е напрегнат на затегнување. Во спротивно, доколку е негативна значи дека претпоставката е неточна и елементот DE е напрегнат на притисок.

Од друга страна, доколку треба да се определи само силата во елементот F_{GA} , тогаш равенката за рамнотежа на крутото тело CDG не треба да ги содржи силите во елементите F_{DE} и F_{DA} , односно треба да биде задоволен условот за рамнотежа $\sum M_D = 0$.

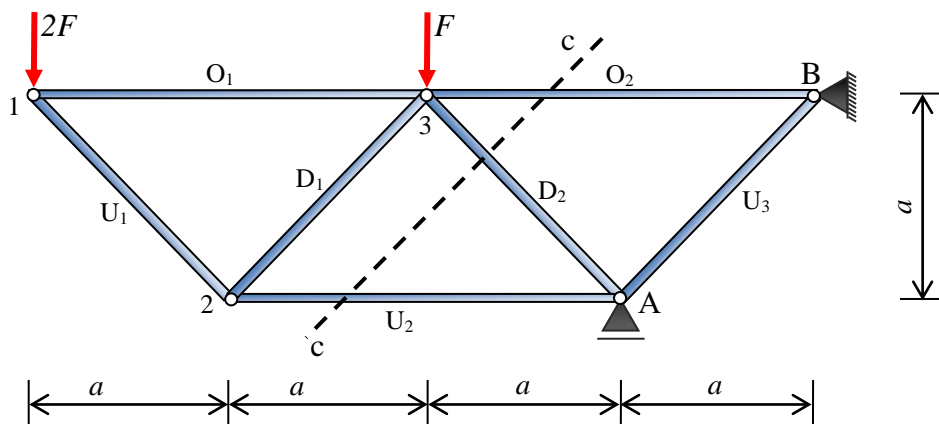
За да се определи силата во елементот F_{DA} соодветна равенка за рамнотежа на крутото тело CDG е равенката $\sum F_y = 0$.

Доколку е определена силата во само еден елемент, тогаш е невозможно да се изврши контрола. Доколку се определат сите непознати сили од елементите кои дејствуваат на слободното тело, тогаш може да се изврши контрола на спроведената анализа преку пишување на дополнителна равенка за рамнотежа.

На пример, доколку се определени силите во сите три елементи F_{DE} , F_{DA} и F_{GA} , кои дејствуваат на крутото тело CDG, контролата на спроведената анализа ќе се изврши преку равенката за рамнотежа $\sum F_x = 0$.

7.5.1 Постапка за анализа на решеткаст носач по метод на пресеци

Постапката за анализа на решеткаст носач со примена на метод на пресеци, слика 7.23, се состои од неколку чекори.



Слика 7.23 Решеткаст носач

➤ Се поставува пресек $c-c$ така да ги пресекува соодветните елементи од решеткастиот носач за кои треба да се определат внатрешните сили. Со поставување на пресекот дефинирани се две слободни тела. Внатрешните сили во елементите може да се определат од кое било слободно тело, најчесто избирајќи го она на кое дајствуваат најмал број на натоварувања.

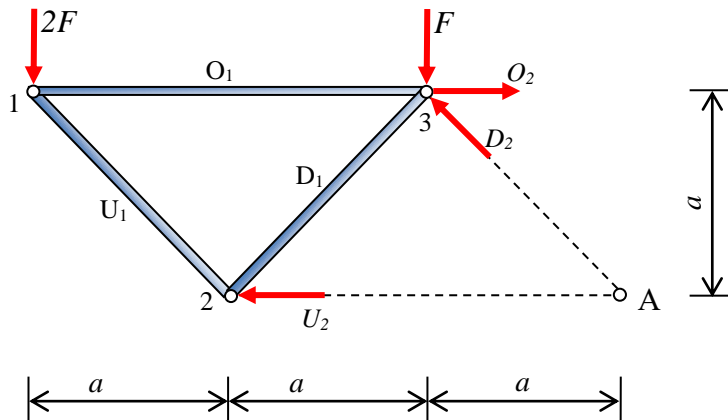
Доколку равенките за рамнотежа на моментите се постават во точките во кои се пресекуваат линиите по кои дејствуваат две непознати внатрешни сили, тогаш третата непозната внатрешна сила се определува директно од поставената моментна равенка.

Ако две од непознатите внатрешни сили се паралелни, тогаш од условот за рамнотежа на сите сили нормално на

правецот на паралелните сили, директно може да се определи третата непозната внатрешна сила.

По определување на сите внатрешни непознати сили во елементите, преку дополнителната четврта равенка за рамнотежа се врши контрола на спроведената анализа.

➤ На слика 7.24 претставен е дијаграм на слободно тело за левиот пресечен дел од решеткастиот носач. Со примена на досега изнесеното определени се внатрешните сили во елементите O_2 , U_2 и D_2 .



Слика 7.24 Дијаграм на слободно тело на лев пресечен дел од решеткаст носач

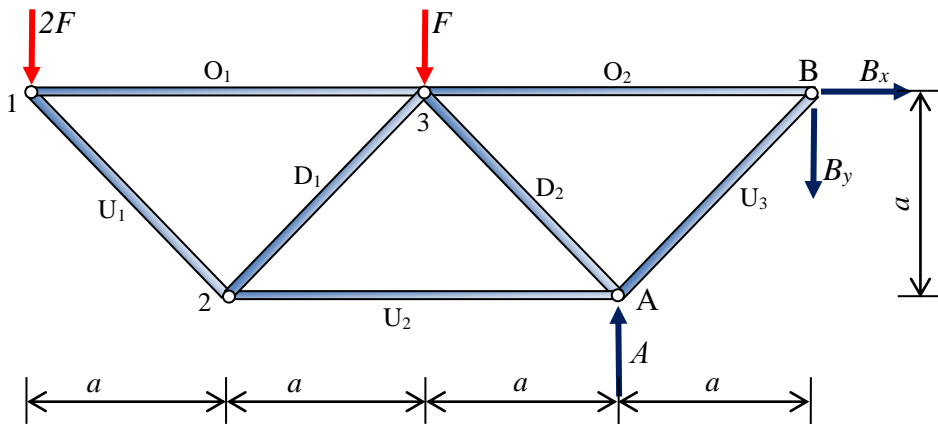
$$\sum M_3 = 0 \quad U_2 \cdot a - 2F \cdot 2a = 0 \quad U_2 = 4F$$

$$\sum M_A = 0 \quad O_2 \cdot a - F \cdot a - 2F \cdot 3a = 0 \quad O_2 = 7F$$

$$\sum F_y = 0 \quad -2F - F + D_2 \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad D_2 = \frac{3}{\cos 45^\circ} F$$

$$\sum F_x = 0 \quad O_2 - U_2 - D_2 \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad 0 = 0$$

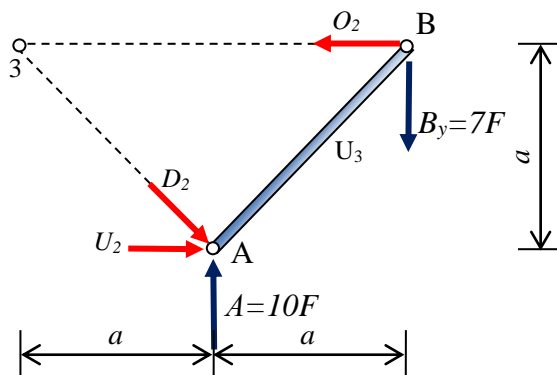
➤ Внатрешните сили O_2 , U_2 и D_2 исто така може да се определат и од десниот пресечен дел на решеткастиот носач. Бидејќи на десниот пресечен дел од решеткастиот носач освен внатрешните сили во елементите дејствуваат и реакциите во лежиштата, истите треба да бидат најпрво определени од дијаграмот на слободно тело на решеткастиот носач, слика 7.25.



Слика 7.25 Дијаграм на слободно тело на решеткаст носач

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & & B_x = 0 \\ \sum M_B = 0 & \quad -2F \cdot 4a - F \cdot 2a + A \cdot a = 0 & \quad A = 10F \\ \sum M_A = 0 & \quad -2F \cdot 3a - F \cdot a + B_y \cdot a = 0 & \quad B_y = 7F \end{aligned}$$

Одредените реакции во лежиштата, за десниот пресечен дел од решеткастиот носач, слика 7.26, всушност претставуваат надворешни натоварувања кои треба да бидат во рамнотежа со внатрешните сили кои дејствуваат во елементите. Применувајќи го досега изнесеното се определуваат внатрешните сили во елементите O_2 , U_2 и D_2 .

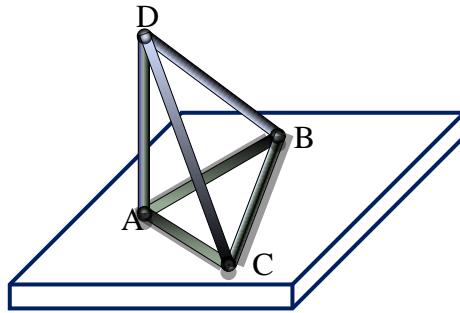


Слика 7.26 Дијаграм на слободно тело на десен пресечен дел од решеткаст носач

$$\begin{aligned} \sum M_3 = 0 & \quad B_y \cdot 2a - A \cdot a - U_2 \cdot a = 0 & \quad U_2 = 4F \\ \sum M_A = 0 & \quad B_y \cdot a - O_2 \cdot a = 0 & \quad O_2 = 7F \\ \sum F_y = 0 & \quad A - D_2 \cdot \cos 45^\circ - B_y = 0 & \quad D_2 = \frac{3}{\cos 45^\circ} F \\ \sum F_x = 0 & \quad U_2 + D_2 \cdot \cos 45^\circ - O_2 = 0 & \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

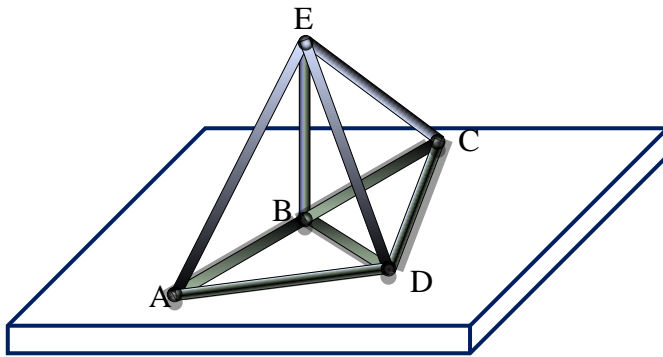
7.6 Просторни решеткасти носачи

Доколку неколку прави елементи се поврзани заедно на нивните краеве формирајќи тродимензионална конфигурација добиената конструкција се нарекува просторен решеткаст носач. Најелементарниот крут просторен решеткаст носач се состои од шест елементи поврзани на нивните краеве, слика 7.27.



Слика 7.27 Просторен решеткаст носач

Со додавање на три нови елементи на основната конфигурација, поставувајќи ги така да започнуваат во три постоечки јазли и поврзувајќи ги заедно во нов јазол се формира нова поголема конструкција, која се нарекува едноставен просторен решеткаст носач, слика 7.28.



Слика 7.28 Просторен решеткаст носач

На базичниот просторен решеткаст носач, кој се состои од шест елементи и четири јазли, секогаш се додаваат по три нови елементи. На тој начин, се зголемува бројот на јазли за еден и се формира просторен решеткаст носач чиј вкупен број на елементи изнесува $m=3n-6$, каде што n е број на јазли.

При анализа на кој било просторен решеткаст носач за определување на непознатите реакции во потпорите се користат шесте равенки за изразување на рамнотежа на три димензионален решеткаст носач. Условите за рамнотежа за секој јазол од просторниот решеткаст носач се изразуваат преку трите равенки за рамнотежа $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ и $\sum F_z = 0$.

8 ЛИНИСКИ НОСАЧИ

Во претходните поглавја беа елаборирани проблемите за определување на надворешните сили кои дејствуваат на конструкциите и определување на силите кои ги поврзуваат во една целина пооделните елементи од кои е формирана конструкцијата.

Ова поглавје го разгледува проблемот кој се однесува на определување на внатрешните сили кои ги поврзуваат во целина различните делови од еден елемент. Истото се однесува на анализа на внатрешните сили кај конструкциите кои се составени од прави линиски елементи. Со цел да се дефинираат внатрешните сили кои се појавуваат под дејство на надворешните натоварувања, во првиот дел од поглавјето детално се елаборирани условите и начинот на нивното појавување во елементот.

Познавајќи ги принципите за појавување на внатрешните сили по должината на еден елемент, во вториот дел од поглавјето даден е преглед на основните типови инженерски конструкции кои се применуваат во областа на архитектурата. Имено, направена е поделба на носачите на прости и сложени носачи. Во делот на простите носачи разгледани се простите греди, конзолите, гредите со препусти, рамките и лаците, кои всушност се и најважните типови на инженерски конструкции. Во делот на сложените носачи разгледани се герберовите носачи, рамките и лаците на три зглоба, кои всушност се формираат со комбинација на основните типови на инженерски конструкции.

8.1 Општо

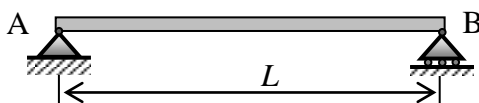
Статиката го проучува определувањето на внатрешните сили во носачите. Според теориските поставки на статиката една крута плоча ќе биде во рамнотежа ако се исполнети условите за рамнотежа:

$$\sum F = 0 \quad (8.1)$$

$$\sum M_o = 0 \quad (8.2)$$

Доколку овие услови не се задоволени крутата плоча ќе се движи транслаторно или ќе ротира околу која било точка во нејзината рамнина. Значи ако крутата плоча е слободна, истата има три степени на слобода. Ако треба крутата плоча да се употреби како носач тогаш таа мора да се направи неподвижна, што се постигнува со нејзино врзување за неподвижни точки или со потпирање во лежишта. Врзувањето на крутата плоча може да биде различно во зависност од тоа дали треба да се спречи нејзината translација или ротација.

Секоја крута плоча или призматичен стап кој носи товари и преку своите лежишта истите ги пренесува врз потпорите, односно врз столбови, сидови или темели, се нарекува носач, слика 8.1.



Слика 8.1 Линиски носач

Растојанието L помеѓу потпорите е распон на носачот. Под оска на еден носач се подразбира линијата која ги поврзува тежиштата на сите напречни пресеци кои се под прав агол со истата. Оската на носачот може да биде права или крива линија.

Како што е претходно кажано силите кои дејствуваат вдоль оската на елементот предизвикаваат само затегнување или притисок во

самиот елемент. Доколку силите кои дејствуваат на еден елемент не дејствуваат само вдолж неговата оска, тогаш освен притисокот или затегнувањето предизвикуваат и смолкнување и свиткување.

Некои инженерски пресметки би биле тешки, ако не и невозможни, ако не се воведат претпоставки за поедноставување. Секое поедноставување на некој проблем подразбира и вклучување на определена грешка. Сумата на овие грешки може да стане значајна, така што резултатите од пресметките може значително да се разликуваат од реалната состојба. На пример во анализата на носачите се усвојуваат следните претпоставки:

- Сите сили лежат во истата рамнина вдолж гредата, а оваа рамнина поминува низ тежиштата на напречните пресеци.
- Напречните пресеци се потполно исти по должина на целата греда.
- Концентрирана сила дејствува во една точка од носачот, додека распределен товар дејствува по линија.
- Носачот е проектиран така што нема да претрпи лом или извиткување.
- Силите се приложуваат без вибрации или удари.

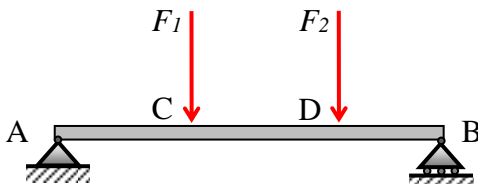
Некои од овие претпоставки може да бидат модифицирани или изоставени во завосност од инженерската анализа. Во секој случај нивното користење значи дека резултатите треба критички да се разгледуваат.

8.2 Видови на товари

Во практиката крутите телата најчесто се изложени на дејство на товари кои дејствуваат на мала површина како концентрирани товари или на товари распределени преку целата или на дел од нивната површина. Ваквите распределени товари се товари од дејство на ветер, снег или хидростатски притисок.

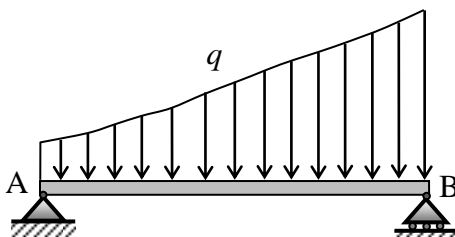
Како што е кажано еден носач може да биде изложен на дејство на:

- концентрирани натоварувања F_1, F_2, \dots изразени во N или kN, слика 8.2;



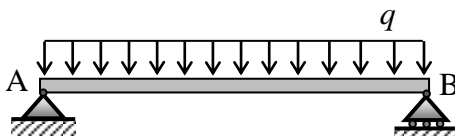
Слика 8.2 Греден носач натоварен со концентрирани товари

- распределен товар q изразено во N/m, kN/m, слика 8.3.



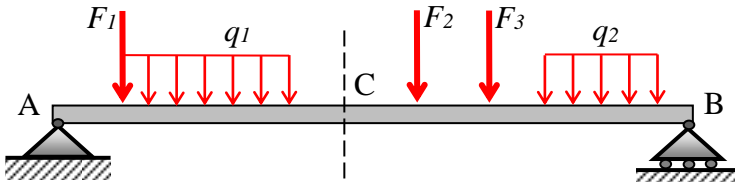
Слика 8.3 Греден носач натоварен со распределен товар

Кога распределениот товар на единица должина од гредниот носач има константна вредност тогаш за товарот се вели дека е рамномерно распределен, слика 8.4. Вкупната тежина од распределениот товар како концентриран товар дејствува во тежиштето.



Слика 8.4 Греден носач натоварен со рамномерно распределен товар

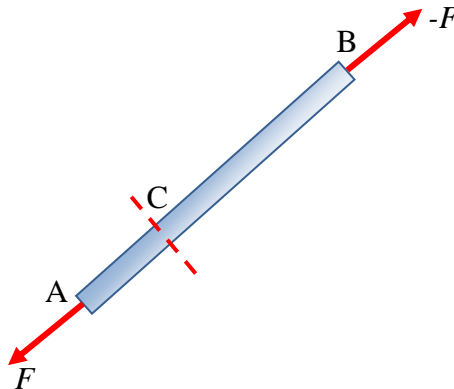
- комбинација од двата вида на товари, слика 8.5.



Слика 8.5 Греден носач натоварен со концентрирани товари и рамномерно распределен товар

8.3 Внатрешни сили во елемент

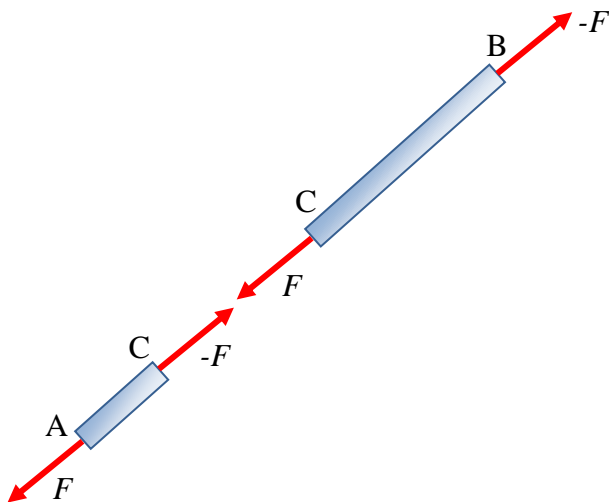
Еден прав елемент е натоварен со две сили, со ист интензитет и спротивна насока, кои дејствуваат по иста нападна линија вдоль оската на елементот, слика 8.6.



Слика 8.6 Елемент аксијално натоварен со две сили

За да се дефинираат внатрешните сили елементот АВ замислено се пресекува во точката С. За да бидат пресечените слободни тела АС и СВ во рамнотежа, на елементот АС мора да се нанесе сила во точката

С со ист интензитет и правец, но спротивна насока на силата F која дејствува во точката А. Додека на елементот СВ во точката С мора да се нанесе сила со ист интензитет и правец, но спротивна насока на силата $-F$ која дејствува во точката В, слика 8.7.

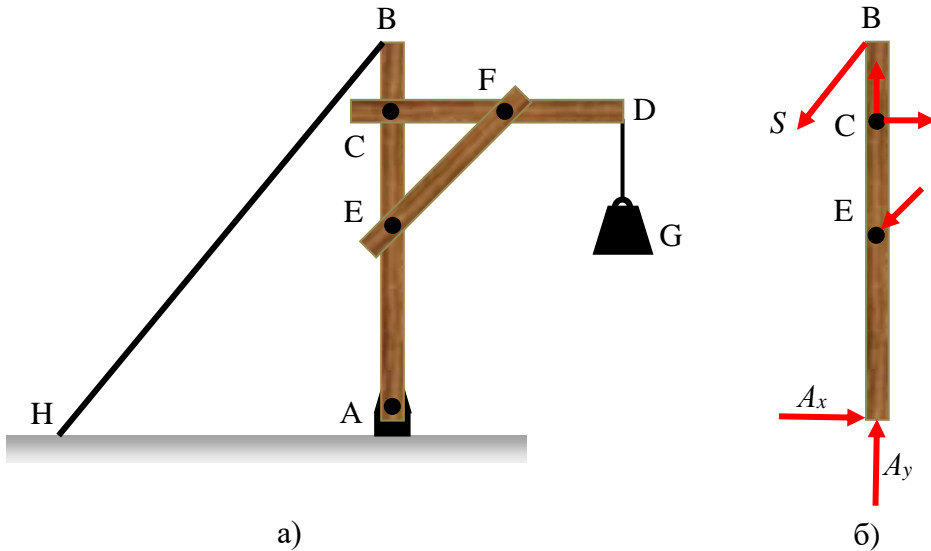


Слика 8.7 Елемент аксијално натоварен со две сили

Овие две нови сили кои дејствуваат вдоль елементот АВ имаат ист интензитет, но спротивна насока. Елементот АВ пред да се пресече е во рамнотежа, така што и по неговото пресекување елементите АС и СВ мора да бидат во рамнотежа. За да бидат во рамнотежа елементите АС и СВ во пресекот С, соодветно на пресечените елементи мора да дејствуваат силите F и $-F$ кои се всушност внатрешни сили. Интензитетот на внатрешните сили не зависи од местоположбата на пресекот С и се реферира како сила во елементот АВ. Всушност, внатрешните сили кои дејствуваат вдоль оската на елементот се нарекуваат аксијални сили. Доколку надворешните сили кои дејствуваат на еден елемент се стремат да го издолжат истиот тогаш разгледуваниот елемент е затегнат, а спротивно, кога силите

дејствуваат да ја намалат должината на разгледуваниот елемент истиот е притиснат.

Еден елемент, генерално е изложен на дејство на повеќе товари, како елементот АВ, кој е составен дел од една конструкција, слика 8.8 а), а чиј дијаграм на слободно тело е прикажан на слика 8.8 б).

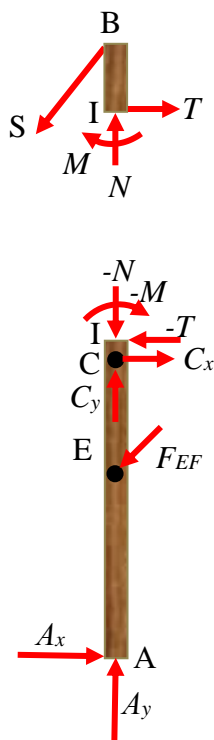


Слика 8.8 Конструкција составена од повеќе елементи:
а) шематски приказ; б) дијаграм на слободно тело на елемент

Елементот АВ замислено се пресекува во точката I и за пресечените елементи IB и AI се цртаат дијаграми на слободно тело, слика 8.9.

Разгледувајќи го елементот IB, може да се заклучи дека истиот ќе остане во рамнотежа доколку во точката I дејствува систем од сили:

- сила N еднаква по интензитет, но со спротивна насока на вертикалната компонента од силата S ;
- сила T еднаква по интензитет, но со спротивна насока на хоризонталната компонента од силата S ;
- момент M со интензитет еднаков на моментот кој го создава силата S околу точката I, но со спротивна насока.



Слика 8.9 Елемент натоварен со сили во различен правец

Може да се заклучи дека внатрешните сили постојат во точката I и пред елементот AB да биде пресечен и се еквивалентни на систем од сила и момент. Во согласност со третиот Њутнов закон внатрешните сили кои дејствуваат на елементот AI мора да бидат еквивалентни на еднаков и спротивен систем од сила и момент.

Внатрешните сили во елементот AB не предизвикуваат само затегнување или притисок како кај елементот прикажан на слика 8.7. Освен притисок, внатрешните сили во елементот AB предизвикуваат и смолкнување и свиткување. Силата N која дејствува по оската на елементот се нарекува *аксијална сила*; силата T која дејствува нормално на оската на елементот се нарекува *трансверзална сила* и моментот M кој предизвикува свиткување на оската на елементот се нарекува *нападен момент*.

8.4 Трансверзална сила и нападен момент

Конструктивен елемент проектиран да ги носи товарите приложени во различни точки се дефинира како греден носач. Гредните носачи се долги призматични стапови. Ако силите се нормални на оската на гредниот носач тие ќе предизвикаат само трансверзална сила и нападен момент. Но ако не се сите сили под прав агол со оската на гредниот носач, тогаш тие ќе предизвикаат и аксијални сили.

Проектирањето на гредни носачи бара детално познавање на внатрешните сили коишто дејствуваат вдолж оската на носачот. По комплетирањето на анализата на внатрешните сили, применувајќи ја јакоста на материјалите може да се определат димензиите и материјалот за соодветниот напречен пресек на гредниот носач.

Промената на трансверзалната сила T и нападниот момент M , како функции од местоположбата x вдолж оската на носачот, може да се определи со користење на методата на пресеци.

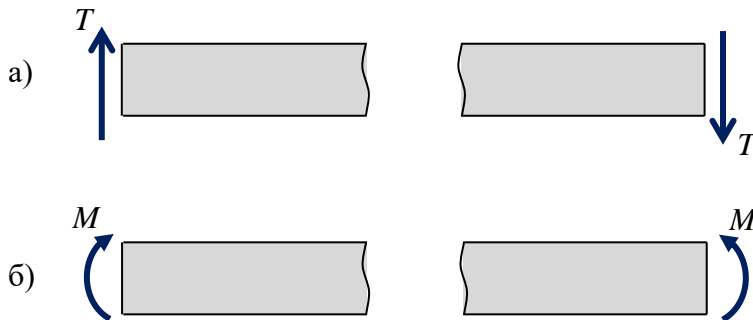
За да се определат внатрешните сили гредниот носач замислено се пресекува во одредени точки, наведувајќи точно кој дел од истиот се разгледува. За пресечените елементи од гредниот носач којшто се разгледува се цртаат дијаграми на слободно тело, со цел да се согледа влијанието на товарите кои дејствуваат.

Пред определувањето на внатрешните сили како функции од x неопходно е да се утврди конвенцијата за знаци за истите да бидат соодветно дефинирани:

- Трансверзалната сила е позитивна доколку товарите кои дејствуваат на кој било пресечен елемент од носачот околу дадениот пресек ротираат во насока на движење на часова стрелка, слика 8.10 а).

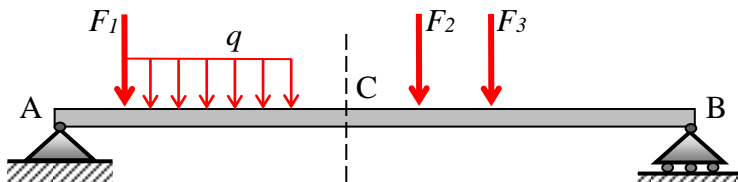
- Нападниот момент е позитивен доколку товарите кои дејствуваат на левиот пресечен елемент од носачот околу дадениот пресек ротираат во насока на движење на часова стрелка, слика 8.10 б).

- Нападниот момент е позитивен доколку товарите кои дејствуваат на десниот пресечен елемент од носачот околу дадениот пресек ротираат спротивно од насоката на движење на часовата стрелка, слика 8.10 б).



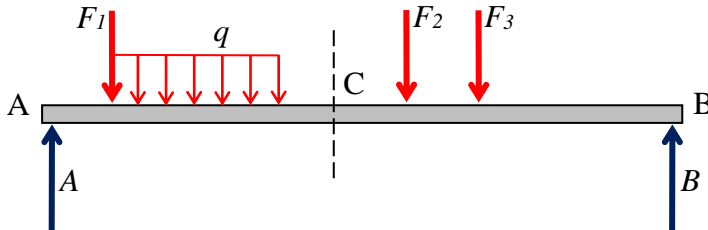
Слика 8.10 Знаци на внатрешни сили:
а) трансверзална сила; б) нападен момент

За гредниот носач АВ, слика 8.11, изложен на дејство на различни концентрирани сили и распределен товар, треба да се определи трансверзалната сила и нападниот момент во која било точка од носачот.



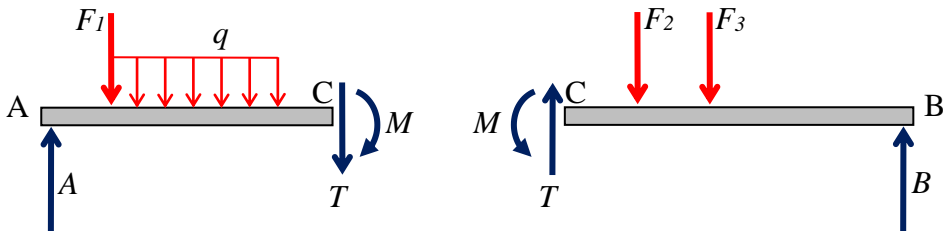
Слика 8.11 Греден носач

Најпрво за дадениот греден носач се црта дијаграм на слободно тело, слика 8.12, од кој се определуваат непознатите реакции A и B во потпорите, третирајќи го целиот греден носач како слободно тело.



Слика 8.12 Дијаграм на слободно тело

Внатрешните сили за гредниот носач прикажан на слика 8.12 се определени за пресек кој поминува во точка C . За пресечените елементи AC и CB се цртаат дијаграми на слободно тело, слика 8.13.



Слика 8.13 Дијаграми на слободно тело на елементи

Бидејќи гредниот носач AB е во рамнотежа и пресечениот елемент AC мора да биде во рамнотежа, од кој услов се определуваат трансверзалната сила T и нападниот момент M кои дејствуваат во пресекот C . Имено:

- Збирот на сите вертикални компоненти од товарите и внатрешните сили кои дејствуваат на елементот AC мора да биде еднаков на нула;

- Збирот на сите статички моменти од надворешните товари и внатрешниот момент околу пресекот C кои дејствуваат на елементот AC мора да биде еднаков на нула.

Алтернативно, за контрола на определената трансверзална сила T и нападниот момент M , може да се искористи пресечениот елемент CB , користејќи го истиот услов, само сега применет на елементот CB .

Без разлика што разгледуваниот пример е просто потпрен греден носач елаборираниот метод за определување на внатрешните сили се применува кај кој било тип на статички определени носачи.

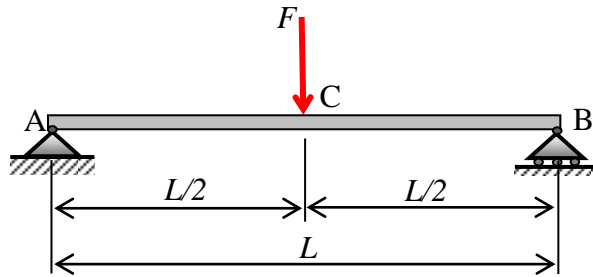
8.5 Дијаграми на трансверзални сили и нападни моменти

Откако се точно дефинирани насоките на внатрешните сили, може да се определи вредноста на трансверзалната сила и нападниот момент во која било точка од гредниот носач.

Графичките презентации на добиените вредности за трансверзалната сила T и нападниот момент M вдоль оската на носачот се нарекуваат дијаграм на трансверзалната сила T и дијаграм на нападниот момент M .

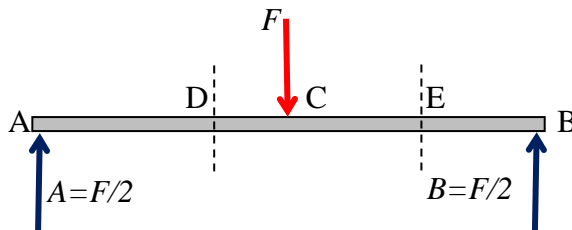
Генерално, функциите на трансверзалната сила и нападниот момент се дисконтинуирани или нивните криви се дисконтинуирани во точки каде што доаѓа до промена на надворешните товари; почеток или крај на распределен товар или места каде што дејствуваат концентрирани сили или концентрирани надворешни моменти. Поради тоа овие функции мора да бидат определени за секој сегмент од носачот помеѓу кои било два товарни дисконтинуитета.

На слика 8.14 е претставен слободно потпрен греден носач AB со распон L на кој дејствува концентриран товар F во точката C , на средина од распонот на носачот.



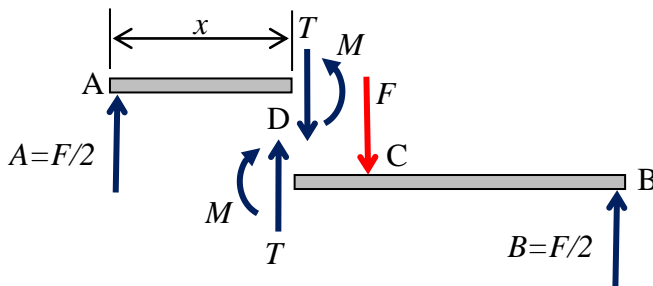
Слика 8.14 Греден носач

Од дијаграмот на слободно тело на гредниот носач, слика 8.15, се определуваат непознатите реакции во потпорите А и В, чиј интензитет изнесува $F/2$ за секоја реакција поодделно.



Слика 8.15 Дијаграм на слободно тело на греден носач

За да се определат внатрешните сили гредниот носач најпрвин се пресекува во D помеѓу точките А и С, во кои точки дејствуваат реакцијата А и надворешниот товар F . За пресечените елементи AD и DB се цртаат дијаграми на слободно тело, слика 8.16.

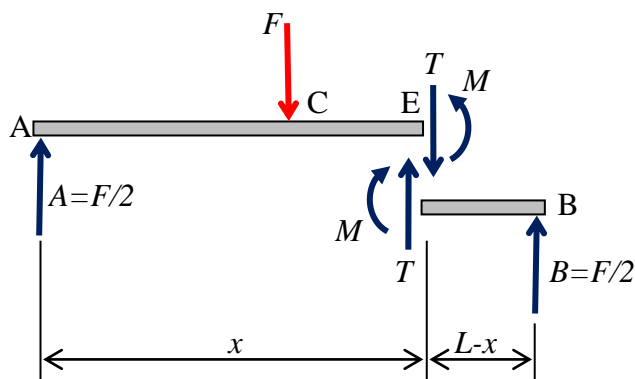


Слика 8.16 Дијаграм на слободно тело на елементи

Разгледувајќи го пресечениот елемент AD, од условот збирот на вертикалните компоненти кои дејствуваат на него да биде еднаков на нула се определува непознатата внатрешна трансверзална сила $T=F/2$. Од условот збирот на сите статички моменти околу пресекот D да биде еднаков на нула се определува непознатиот внатрешен нападен момент во пресекот D, $M=F \cdot x/2$.

Добиените вредности се нанесуваат нормално на оската на гредниот носач за елементот AD. Имено, трансверзалната сила T за целата должина на пресечениот елемент AD има константна вредност $T=+F/2$, додека вредноста за нападниот момент се менува линеарно од $M=0$ за $x=0$ во точка A до $M=F \cdot L/4$ за $x=L/2$ во точка C, слика 8.18.

Потоа гредниот носач се пресекува во E помеѓу точките C и B, со што се определуваат два елемента AE и EB за кои се цртаат дијаграми на слободно тело, слика 8.17.

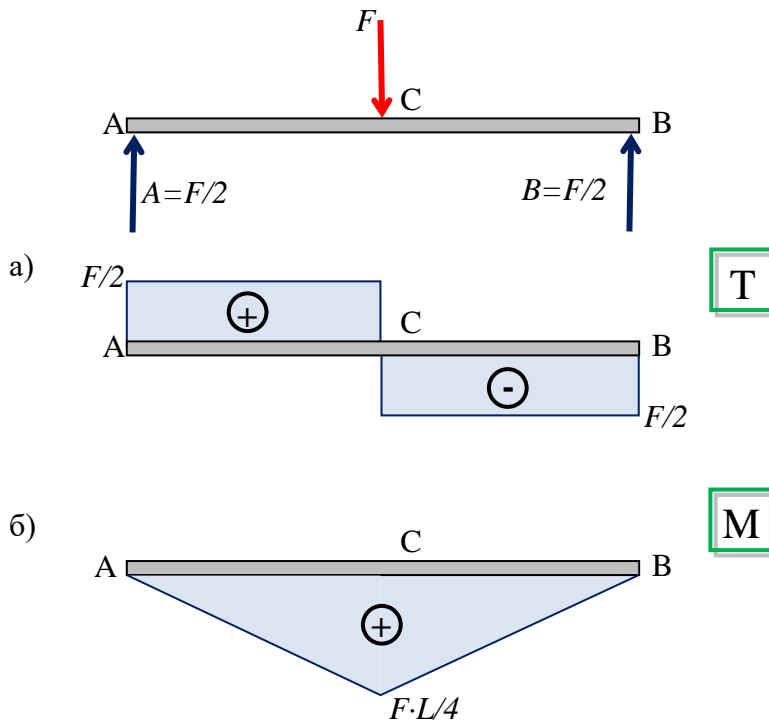


Слика 8.17 Дијаграм на слободно тело на елементи

Со поставување на условите за збирот на вертикалните компоненти и збирот од статичките моменти да бидат еднакви на нула за разгледуваниот пресечен елемент EB се определуваат трансверзалната сила $T=-F/2$ и нападниот момент $M=F \cdot (L-x)/2$.

Добиените вредности се нанесуваат нормално на оската на гредниот носач за елемент СВ. Трансверзалната сила T има константна вредност $T=-F/2$, додека вредноста за нападниот момент се менува линеарно од $M=F\cdot L/4$ за $x=L/2$ во точка С до $M=0$ за $x=L$ во точка В, слика 8.18.

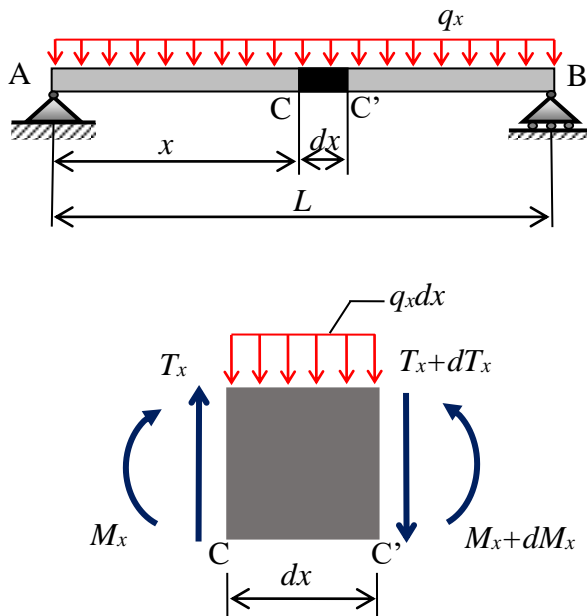
Од изнесеното може да се констатира дека онаму каде што гредниот носач е изложен само на дејство на концентрирани товари, трансверзалните сили имаат константна вредност, додека нападните моменти се менуваат линеарно.



Слика 8.18 Дијаграм на внатрешни големини:
а) трансверзални сили; б) нападни моменти

8.6 Врска помеѓу распределен товар, трансверзални сили и нападни моменти

Кога гредата е товарена со сложен и комбиниран товар (концентрирани сили и распределени товари), конструкцијата на дијаграмите на трансверзалните сили и нападните моменти ќе биде значително олеснета ако се познаваат и земат во предвид извесни постоечки врски помеѓу товарот, трансверзалните сили и нападните моменти.



Слика 8.19 Врска помеѓу распределениот товар, трансверзалните сили и нападните моменти

Со цел да се добие врска помеѓу трансверзалните сили и нападните моменти, наједноставен начин е да се дефинира рамнотежата на еден диференцијален елемент од гредата со должина dx , слика 8.19. Ако целата греда е во рамнотежа, тогаш секој нејзин дел

исто така е во рамнотежа. Ако пресечениот диференцијален елемент се оддели од гредата, сите сили мора да бидат приложени на неговата лева и десна страна, како што е прикажано на слика 8.19.

Пишувајќи ја сумата на вертикалните компоненти на силите коишто дејствуваат на слободниот диференцијален елемент, се добива:

$$\sum F_y = 0; \quad T_x - q_x \cdot dx - (T_x + dT_x) = 0 \quad (8.3)$$

$$\frac{dT_x}{dx} = -q_x \quad (8.4)$$

Од равенката 8.4 произлегува дека првиот извод од трансверзалната сила по оската x е еднаков на интензитетот на континуираниот товар, во пресекот на растојание x , со спротивен знак.

Од рамнотежната равенка за сумата на моментите околу C' , се добива:

$$\sum M_{c'} = 0; \quad M_x + T_x \cdot dx - \frac{q_x \cdot dx \cdot dx}{2} - (M_x + dM_x) = 0 \quad (8.5)$$

$$\frac{dM_x}{dx} = T_x \quad (8.6)$$

Од равенката 8.6 произлегува дека првиот извод од нападниот момент по оската x е еднаков на трансверзалната сила во пресекот на растојание x .

Конечно, врската помеѓу товарот, трансверзалната сила и нападниот момент е дадена со следната формула:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{dT_x}{dx} = -q_x \quad (8.7)$$

Од равенката 8.7 произлегува дека вториот извод од нападниот момент по оската x е еднаков на интензитетот на континуираниот товар, во пресекот на растојание x , со спротивен знак.

Од претходно изведените односи помеѓу товарите, трансверзалните сили и нападните моменти може да се изнесат следните констатации:

- Ако на носачот дејствува рамномерно распределен товар, тогаш дијаграмот на трансверзалната сила е коса права линија, а дијаграмот на нападниот момент е квадратна парабола.
- Ако на носачот дејствуваат само концентрирани сили, тогаш дијаграмот на трансверзалната сила помеѓу концентрираните сили е константна паралелна со x оската, а дијаграмот на нападниот момент е коса права линија.
- На местата каде трансверзалната сила е еднаква на нула нападниот момент има екстремна вредност.

8.7 Прости носачи

Носачите составени од една крута плоча ги нарекуваме прости, додека оние составени од две или повеќе крути плочи меѓусебно поврзани со зглобови ги нарекуваме сложени носачи.

Простите носачи може да бидат различно потпрени за да бидат во рамнотежа. Во практиката од типот на прости носачи најчесто се применуваат проста греда, конзола, греда со еден или два препуста, рамка или лак.

Проектирањето на носачите како најефективни конструктивни елементи за прифаќање на нанесените натоварувања е процес составен од два дела:

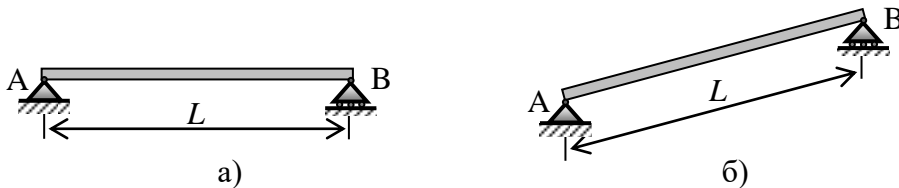
- определување на внатрешните сили предизвикани од оптоварувањата: трансверзалните сили, нападните моменти и аксијалните сили

- определување на напречен пресек избран врз основа на определените внатрешни сили.

8.7.1 Проста греда, конзола, греда со препусти

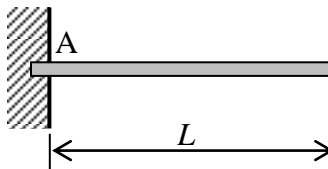
Конструктивен елемент кој е проектиран да прифати натоварувања кои дејствуваат во различни точки вдолж елементот се нарекува греда. Гредите во пракса најчесто се долги прави елементи со призматичен напречен пресек. Во однос на начинот на потпирање гредните носчи може да бидат проектирани како прости греди или како греди со еден или два препуста.

Проста греда е носач со хоризонтална или коса оска, потпрена врз едно подвижно и едно неподвижно лежиште, слика 8.20 а) и слика 8.20 б), соодветно.



Слика 8.20 Проста греда: а) со хоризонтална оска; б) со коса оска

Конзола е носач со хоризонтална или коса оска вклетшена на едниот крај, додека на другиот крај е слободна, слика 8.21.

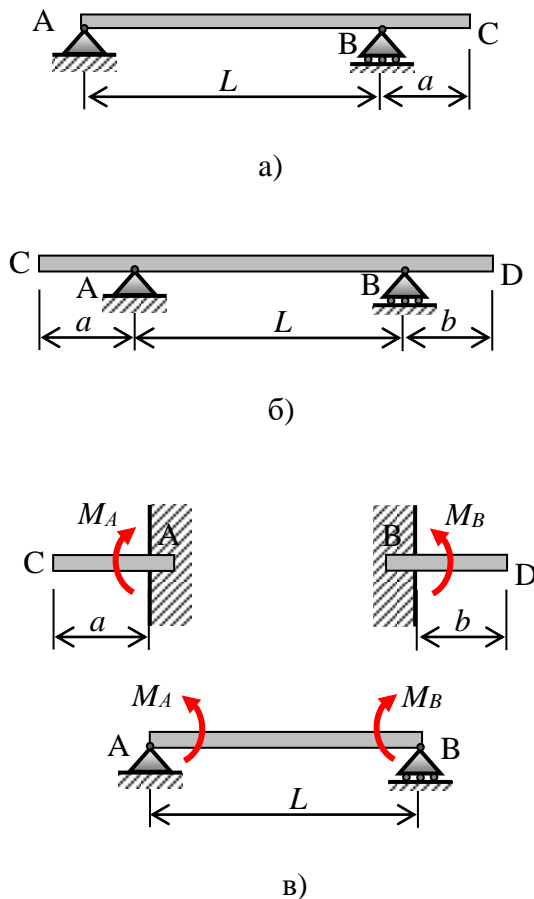


Слика 8.21 Конзола

Греда со еден или два препуста е носач со хоризонтална или коса оска потпрена врз едно подвижно и едно неподвижно лежиште и продолжена преку едното, односно двете лежишта, слика 8.22 а) и б).

Гредата со препусти може да се третира и како комбиниран носач составен од проста греда и една или две конзоли, слика 8.22 в).

Гредата со препусти може да биде товарена со ралични товари. Ако товарите се дадени како коси концентрирани сили, тогаш при аналитичкото определување на реакциите и статичките големини истите се разложуваат на компоненти по двете координатни оски. Рамномерно распределениот товар кој дејствува на целата должина на носотот, за појасно и полесно пресметување, најдобро е да се оддели и тоа како товар во поле и товари на препустите.



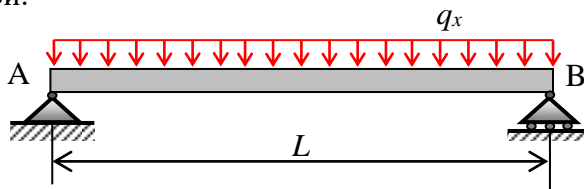
Слика 8.22 Греда со препусти: а) со еден препуст; б) со два препуста; в) со два препуста разложена на составни елементи

Условите за рамнотежа кај греда со препусти се исти како и кај простата греда. Кај гредата со преспусти товарите на препустите предизвикуваат нападни моменти над самите лежишта и имаат влијание врз реакциите во лежиштата, како и врз нападните моменти во полето. Заради ваквото дејство на товарите, кај гредата со еден препуст се јавуваат два, а кај гредата со два препуста три опасни пресеци, во кои нападните моменти можат да бидат максимални. Тоа се пресеците над потпорите и пресекот во поле.

Гредите со препусти имаат свои предности во споредба со проста греда: при ист распон гредите со препусти имаат помал максимален нападен момент во поле, кој се должи на дејството на негативните моменти над лежиштата. Рационалната должина на препустот се наоѓа од условот за изедначување на максималниот нападен момент во поле со негативниот нападен момент над потпора. За греда со еден препуст натоварена со рамномерно распределен товар по целата должина рационалната должина на препустот изнесува $0,414l$, додека за греда со два препуста истата изнесува $0,3535l$.

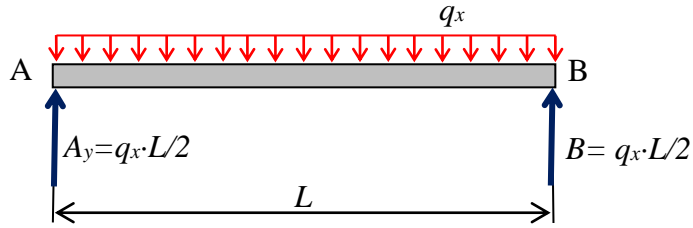
8.7.2 Постапка за анализа на проста греда

Постапката за анализа на проста греда, слика 8.23, се состои од неколку чекори.



Слика 8.23 Проста греда

- Најпрво за зададениот носач се исцртува дијаграм на слободно тело, слика 8.24, од кој се определуваат реакциите во лежиштата.



Слика 8.24 Дијаграм на слободно тело

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$A_x = 0$$

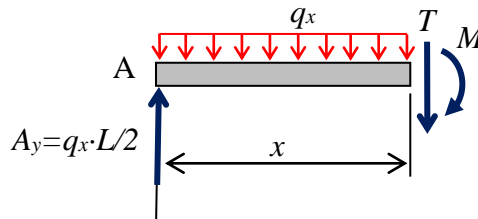
$$-q_x \cdot L \cdot \frac{L}{2} + A_y \cdot L = 0$$

$$q_x \cdot L \cdot \frac{L}{2} - B \cdot L = 0$$

$$A_y = \frac{q_x \cdot L}{2}$$

$$B = \frac{q_x \cdot L}{2}$$

➤ Со цел да се определат внатрешните големини носачот се пресекува на растојание x од лежиштето A и се исцртува дијаграм на слободно тело на пресечениот дел, слика 8.25.



Слика 8.25 Дијаграм на слободно тело на лев пресечен дел

Законите за трансверзалните сили и нападните моменти од лежиштето A до лежиштето B се дефинирани со равенките:

$$T_x = A_y - q_x \cdot x$$

$$M_x = A_y \cdot x - q_x \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

➤ Дијаграмите на внатрешните големини, слика 8.26, се исцртуваат врз основа на определените вредности во карактеристичните точки, пресметани врз основа на претходните равенки.

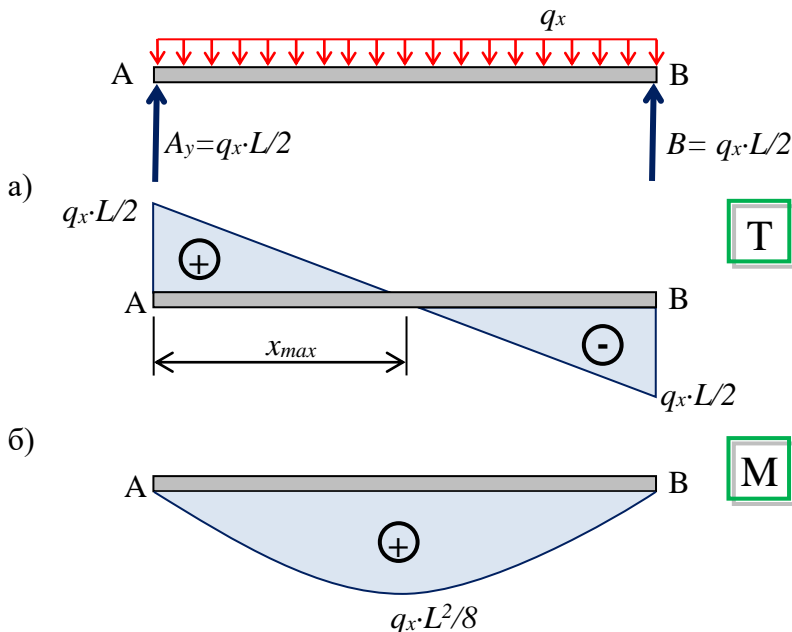
$$x = 0 \quad T_A = \frac{q_x \cdot L}{2} \quad M_A = 0$$

$$x = L \quad T_B = -\frac{q_x \cdot L}{2} \quad M_B = 0$$

Согласно изнесеното во точка 8.6, за да се исцрта дијаграмот на нападните моменти потребно е да се определи максималниот нападнен момент.

$$T_x = 0 \quad A_y - q_x \cdot x = 0 \quad x = \frac{L}{2}$$

$$x_{\max} = \frac{L}{2} \quad M_{\max} = \frac{q_x \cdot L^2}{8}$$

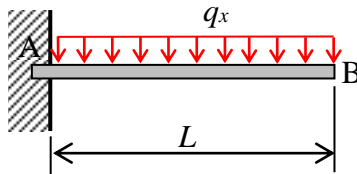


Слика 8.26 Дијаграм на внатрешни големини:

а) трансверзални сили; б) нападни моменти

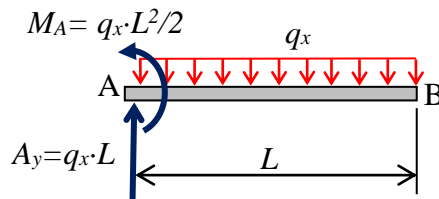
8.7.3 Постапка за анализа на конзола

Постапката за анализа на конзола, слика 8.27, се состои од истите чекори опишани претходно.



Слика 8.27 Конзола

➤ Најпрво за зададениот носач се исцртува дијаграм на слободно тело, слика 8.28, од кој се определуваат реакциите во лежиштето.



Слика 8.28 Дијаграм на слободно тело

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-q_x \cdot L + A_y = 0$$

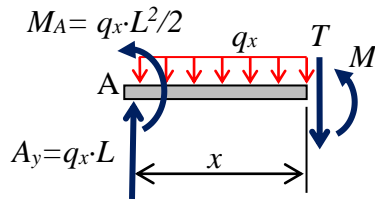
$$A_y = q_x \cdot L$$

$$\sum M_A = 0$$

$$q_x \cdot L \cdot \frac{L}{2} - M_A = 0$$

$$M_A = \frac{q_x \cdot L^2}{2}$$

➤ За пресечениот дел од носачот на растојание x од лежиштето А се исцртува дијаграм на слободно тело, слика 8.29, од кој се определуваат законите за внатрешните големини.



Слика 8.29 Дијаграм на слободно тело на лев пресечен дел

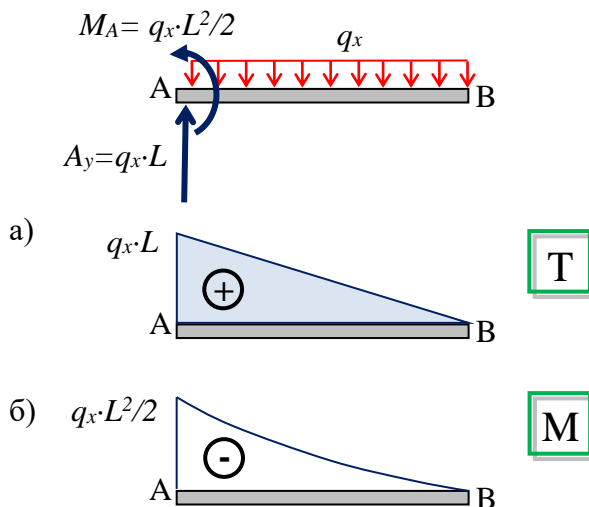
Законите за трансверзалните сили и нападните моменти од А до В се дефинирани со равенките:

$$T_x = A_y - q_x \cdot x$$

$$M_x = A_y \cdot x - M_A - q_x \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

➤ Дијаграмите на внатрешните големини, слика 8.30, се исцртуваат врз основа на определените вредности во карактеристичните точки, пресметани врз основа на претходните равенки.

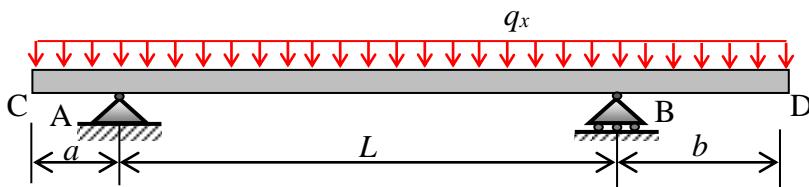
$$\begin{array}{lll} x = 0 & T_A = q_x \cdot L & M_A = -\frac{q_x \cdot L^2}{2} \\ x = L & T_B = 0 & M_B = 0 \end{array}$$



Слика 8.30 Дијаграм на внатрешни големини:
а) трансверзални сили; б) нападни моменти

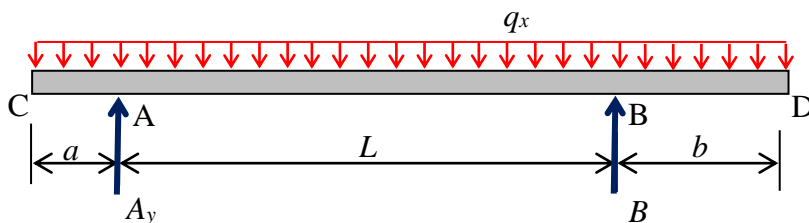
8.7.4 Постапка за анализа на греда со препусти

Постапката за анализа на греда со препусти, слика 8.31, се состои од чекорите опишани претходно.



Слика 8.31 Греда со препусти

➤ Од дијаграмот на слободно тело, слика 8.32, се определуваат реакциите во лежиштето.



Слика 8.32 Дијаграм на слободно тело

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$A_y \cdot L - q_x \cdot (L + a + b) \cdot \left(\frac{L + a + b}{2} - b \right) = 0$$

$$A_y = q_x \cdot \left(\frac{L}{2} + a + \frac{a^2}{2 \cdot L} - \frac{b^2}{2 \cdot L} \right)$$

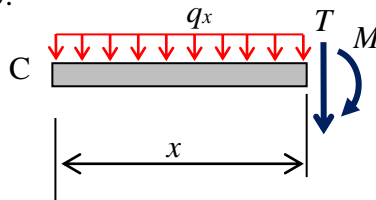
$$\sum M_A = 0$$

$$q_x \cdot (L + a + b) \cdot \left(\frac{L + a + b}{2} - a \right) - B \cdot L = 0$$

$$B = q_x \cdot \left(\frac{L}{2} + b - \frac{a^2}{2 \cdot L} + \frac{b^2}{2 \cdot L} \right)$$

➤ Бидејќи функциите на трансверзалната сила и нападниот момент се дисконтинуирани во точки каде што дејствуваат концентrirани сили и истите мора да бидат определени за секој сегмент поделно, кај гредата со препусти се исцртуваат три дијаграми на слободни тела.

Законите за внатрешните големини за пресечениот дел од носачот од слободниот крај С до лежиштето А, каде $0 \leq x \leq a$, се определуваат од дијаграмот на слободно тело претставен на слика 8.33.



Слика 8.33 Дијаграм на слободно тело од С до А

$$T_x = -q_x \cdot x$$

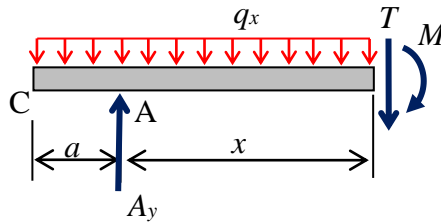
$$M_x = -q_x \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Врз основа на горните равенки се определуваат вредностите во карактеристичните точки:

$$x = 0 \quad T_C = 0 \quad M_C = 0$$

$$x = a \quad T_A^{\text{лево}} = -q_x \cdot a \quad M_A^{\text{лево}} = -\frac{q_x \cdot a^2}{2}$$

Законите за внатрешните големини за пресечениот дел од носачот од лежиштето А до лежиштето В, каде $0 \leq x \leq L$, се определуваат од дијаграмот на слободно тело претставен на слика 8.34.



Слика 8.34 Дијаграм на слободно тело од А до В

Законите за трансверзалните сили и нападните моменти од С до А се дефинирани со равенките:

$$T_x = -q_x \cdot (a + x) + A_y$$

$$T_x = \frac{q_x}{2 \cdot L} \cdot (L^2 - 2 \cdot L \cdot x + a^2 - b^2)$$

$$M_x = -q_x \cdot (a + x) \cdot \frac{(a + x)}{2} + A_y \cdot x$$

$$M_x = \frac{q_x}{2} \cdot \left(-a^2 - x^2 + x \cdot L + \frac{a^2 \cdot x}{L} - \frac{b^2 \cdot x}{L} \right)$$

Вредностите во карактеристичните точки определени врз основа на горните равенки изнесуваат:

$$x = 0 \quad T_A^{\text{десно}} = \frac{q_x}{2 \cdot L} \cdot (L^2 + a^2 - b^2)$$

$$M_A^{\text{десно}} = -\frac{q_x \cdot a^2}{2}$$

$$x = L \quad T_B^{\text{лево}} = \frac{q_x}{2 \cdot L} \cdot (-L^2 + a^2 - b^2)$$

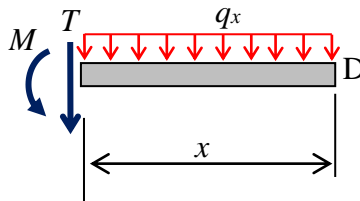
$$M_B^{\text{лево}} = -\frac{q_x \cdot b^2}{2}$$

Максималната вредност на нападниот момент се определува согласно горните равенки на местото каде што трансверзалната сила е еднаква на нула.

$$T_x = 0 \quad \frac{q_x}{2 \cdot L} \cdot (L^2 - 2 \cdot L \cdot x + a^2 - b^2) = 0 \quad x = \frac{L^2 + a^2 + b^2}{2 \cdot L}$$

$$x_{\max} = \frac{L^2 + a^2 + b^2}{2 \cdot L} \quad M_{\max} = -\frac{q_x}{8} \cdot \left[L^2 - 2 \cdot b^2 + \frac{1}{L^2} \cdot (a^2 - b^2)^2 \right]$$

Законите за внатрешните големини за пресечениот дел од носачот од слободниот крај D до лежиштето B, каде $0 \leq x \leq b$, се определуваат од дијаграмот на слободно тело претставен на слика 8.35.



Слика 8.35 Дијаграм на слободно тело од D до B

$$T_x = q_x \cdot x$$

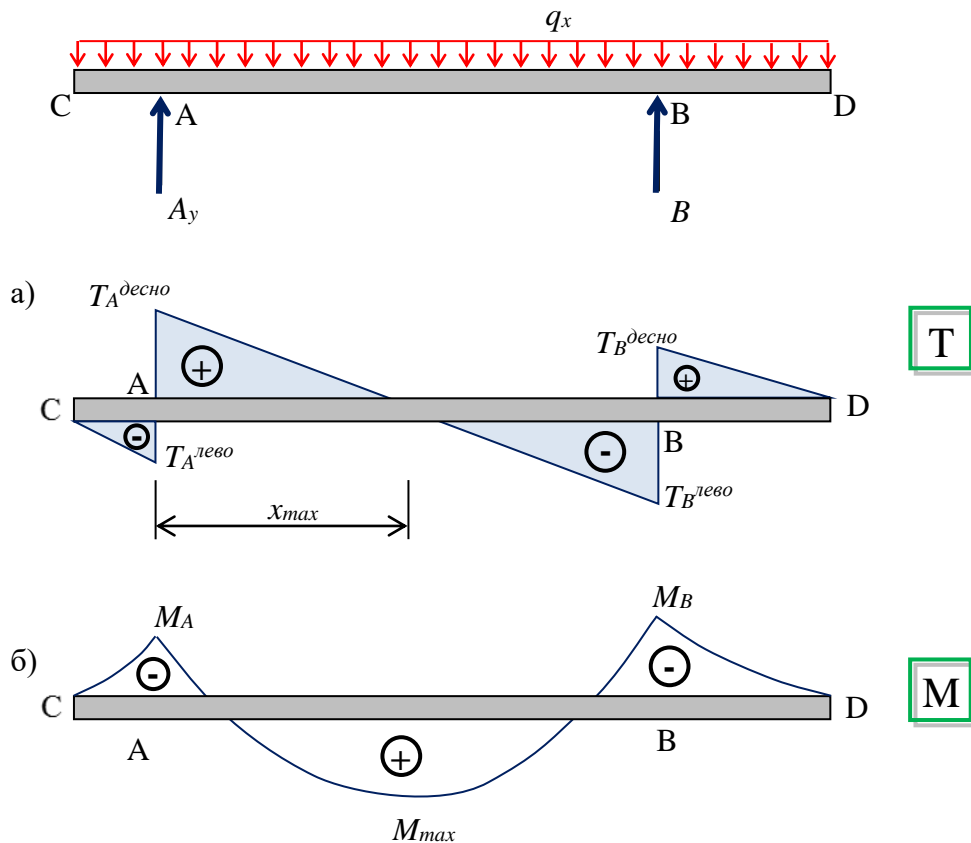
$$M_x = -q_x \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

Врз основа на горните равенки се определуваат вредностите во карактеристичните точки:

$$x = 0 \quad T_D = 0 \quad M_D = 0$$

$$x = b \quad T_B^{\text{десно}} = q_x \cdot b \quad M_B^{\text{десно}} = -\frac{q_x \cdot b^2}{2}$$

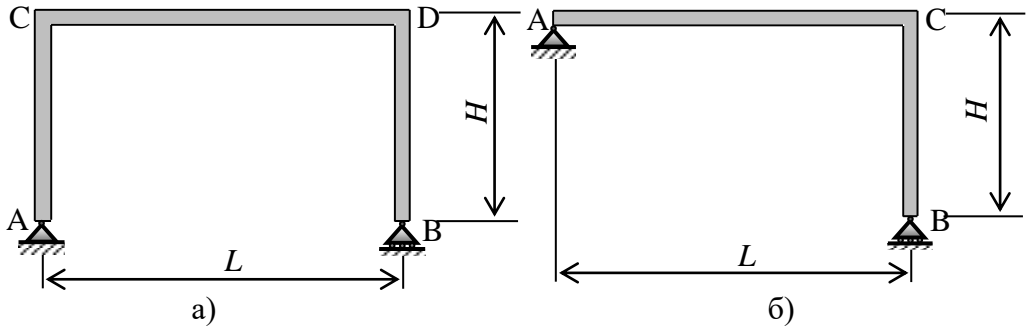
➤ Дијаграмите на внатрешните големини, слика 8.36, се исцртуваат врз основа на определените вредности во карактеристичните точки.



Слика 8.36 Дијаграм на внатрешни големини:
а) трансверзални сили; б) нападни моменти

8.7.5 Рамка

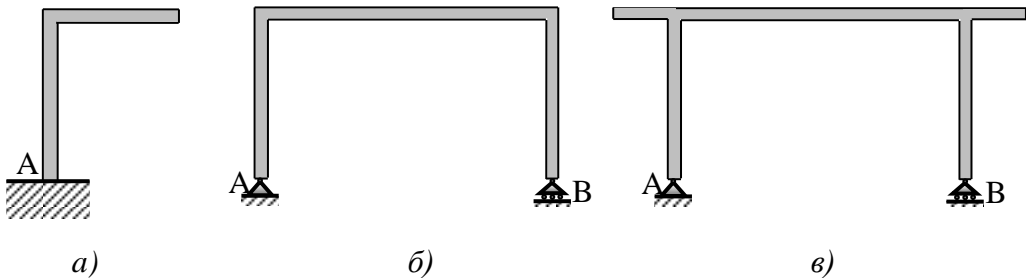
Носач кој е составен од две или повеќе крути прави плочи чии оски не лежат на иста права, а меѓусебно се круто поврзани со крута врска која не овозможува никакво заемно поместување и завртување, потпрени со соодветни лежишта се нарекува рамка или полурамка. Елементите од кои е составена рамката може да бидат поврзани под одреден агол, во зависност од архитектонското решение, слика 8.37.



Слика 8.37 Статички определен носач: а) рамка; б) полурамка

Рамките и полурамките, во зависност од начинот на поврзување и потпирање на крутите плочи може да бидат надворешно статички определени носачи, надворешно статички неопределени носачи и внатрешно статички неопределени.

Зависно од начинот на потпирање надворешно статички определените рамки може да се третираат како: систем конзола, слика 8.38 а), систем проста греда, слика 8.38 б), систем греда со препусти, слика 8.38 в). Кај овие рамки плочите меѓусебно се круто поврзани и се третираат како една плоча.



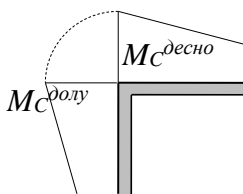
Слика 8.38 Надворешно статички определени рамки: а) систем конзола; б) систем проста греда; в) систем греда со препусти

При определување на реакциите и внатрешните статички големини кај рамките и полурамките важат истите поставки како и за секој линиски носач, применувајќи ги основните услови за рамнотежа:

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0 ; \sum M_A = 0 \quad (8.8)$$

При дефинирање на статичките големина (нападниот момент, трансверзалната и аксијалната сила) на местото каде двете плочи се вклетшени, а нивните оски не лежат на иста права, треба да се внимава на следното:

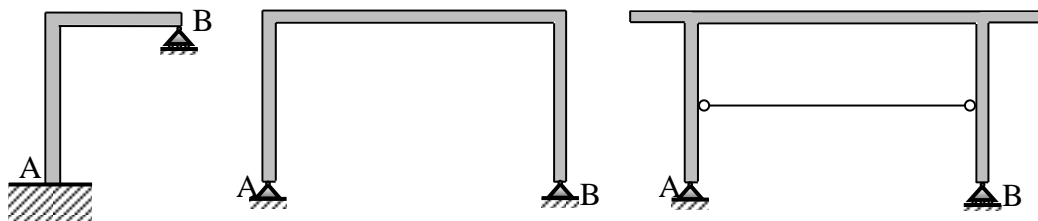
- нападниот момент се пренесува од едната на другата плоча со својата големина и знак, слика 8.39;



Слика 8.39 Нападни моменти во агол од рамка

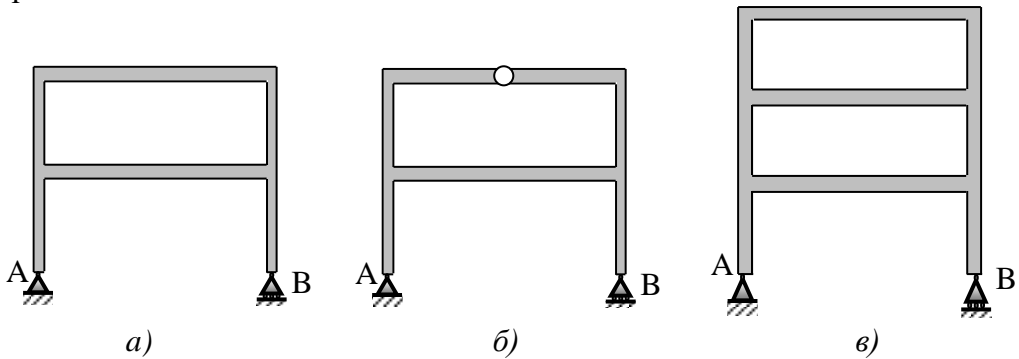
- трансверзалната сила за хоризонталната плоча претставува аксијална сила за вертикалната плоча, и обратно.

Кај надворешно статички неопределените рамки, слика 8.40, бројот на непознати лежишни реакции е поголем од бројот на расположливите аналитички услови за рамнотежа. За колку е поголем нивниот број, толку пати носачот е надворешно статички неопределен, па за определување на реакциите во лежиштата потребно е да се користат и соодветен број дополнителни услови од деформациите на носачот.



Слика 8.40 Надворешно статички неопределени рамки

За разлика од надворешната статичка неопределеност носачот може да биде и внатрешно статички неопределен, слика 8.41, ако истиот е формиран од затворена рамка потпрена така што бројот на лежишните реакции е еднаков на бројот на аналитичките услови за рамнотежа.

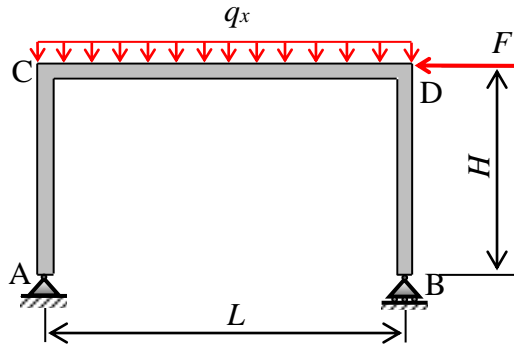


Слика 8.41 Внатрешно статички неопределени рамки

Во таков случај носачот е надворешно статички определен затоа што реакциите во лежиштата може да се определат само од аналитичките услови за рамнотежа, меѓутоа тој е внатрешно статички неопределен затоа што не е можно, користејќи ги законите на статиката, да се определат внатрешните сили во елементите на носачот: нападниот момент, трансверзалната и аксијалната сила. Од тука следи дека затворената рамка е трипати статички неопределена, па носачот на слика 8.41 а) е трипати внатрешно статички неопределен, носачот на слика 8.41 б) е двапати внатрешно статички неопределен (зглобот ја намалува статичката неопределеност за еднаш), а носачот на слика 8.41 в) е шест пати внатрешно статички неопределен.

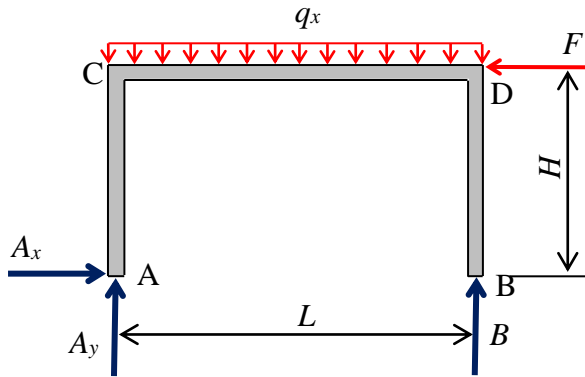
8.7.6 Постапка за анализа на рамка

Постапката за анализа на рамка, слика 8.42, се состои од следните чекори.



Слика 8.42 Рамка

➤ Од дијаграмот на слободно тело, слика 8.43, се определуваат реакциите во лежиштата.



Слика 8.43 Дијаграм на слободно тело

$$\sum F_x = 0 \quad A_x - F = 0 \quad A_x = F$$

$$\sum M_B = 0 \quad A_y \cdot L - q_x \cdot L \cdot \frac{L}{2} - F \cdot H = 0$$

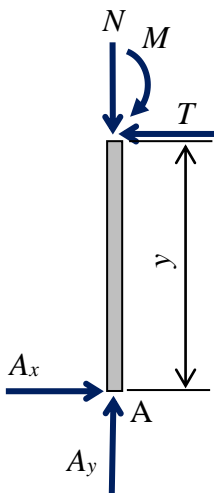
$$A_y = \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

$$\sum M_A = 0 \quad q_x \cdot L \cdot \frac{L}{2} - F \cdot H - B \cdot L = 0$$

$$B = \frac{q_x \cdot L^2 - 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

➤ Бидејќи функциите на трансверзалната сила и нападниот момент се дисконтинуирани во точки каде што доаѓа до промена на геометријата на носачот, истите мора да бидат определени за секој сегмент поодделно.

Законите за внатрешните големини за пресечениот дел од носачот од лежиштето А до точката С долу, каде $0 \leq y \leq H$, се определуваат од дијаграмот на слободно тело претставен на слика 8.44.



$$T_y = -A_x = -F$$

$$M_y = -A_x \cdot y = -F \cdot y$$

$$N_y = -A_y = -\frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

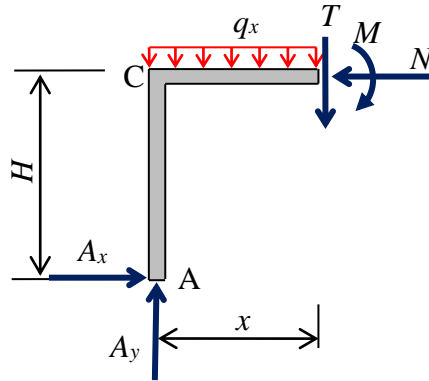
Слика 8.44 Дијаграм на слободно тело од А до С долу

Врз основа на горните равенки може да се заклучи дека дијаграмите на трансверзалните и аксијалните сили се прави паралелни со оската на носачот. За да се определи дијаграмот на нападните моменти мора да се определат вредностите во карактеристичните точки.

$$y = 0 \quad M_A = 0$$

$$y = H \quad M_C^{\text{долу}} = -F \cdot H$$

Законите за внатрешните големини за пресечениот дел од носачот од точката С горе до точката D горе, каде $0 \leq x \leq L$, се определуваат од дијаграмот на слободно тело претставен на слика 8.45.



Слика 8.45 Дијаграм на слободно тело од C горе до D горе

$$T_x = A_y - q_x \cdot x = \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H - 2 \cdot L \cdot q_x \cdot x}{2 \cdot L}$$

$$M_x = A_y \cdot x - q_x \cdot x \cdot \frac{x}{2} - A_x \cdot H = \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L} \cdot x - \frac{q_x \cdot x^2}{2} - F \cdot H$$

$$N_x = -A_x = -F$$

Дијаграмот на аксијалните сили е права паралелна со оската на носачот, додека вредностите за трансверзалните сили и нападните моменти во карактеристичните точки се определуваат врз основа на горните равенки.

$$x = 0 \quad T_C^{\text{горе}} = \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

$$M_C^{\text{горе}} = -F \cdot H$$

$$x = L \quad T_D^{\text{горе}} = -\frac{q_x \cdot L^2 - 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

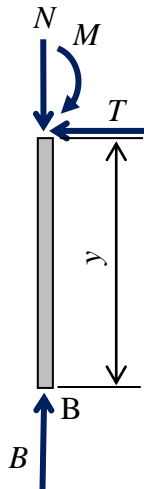
$$M_D^{\text{горе}} = 0$$

Максималната вредност на нападниот момент се определува согласно горните равенки на местото каде што трансверзалната сила е еднаква на нула.

$$T_x = 0 \quad \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H - 2 \cdot L \cdot q_x \cdot x}{2 \cdot L} = 0$$

$$x_{\max} = \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot q_x \cdot L} \quad M_{\max} = \frac{q_x \cdot L^2}{8} - \frac{F \cdot H}{2} + \frac{F^2 \cdot H^2}{2 \cdot q_x \cdot L^2}$$

Законите за внатрешните големини за пресечениот дел од носачот од лежиштето В до точката D долу, каде $0 \leq y \leq H$, се определуваат од дијаграмот на слободно тело претставен на слика 8.46.



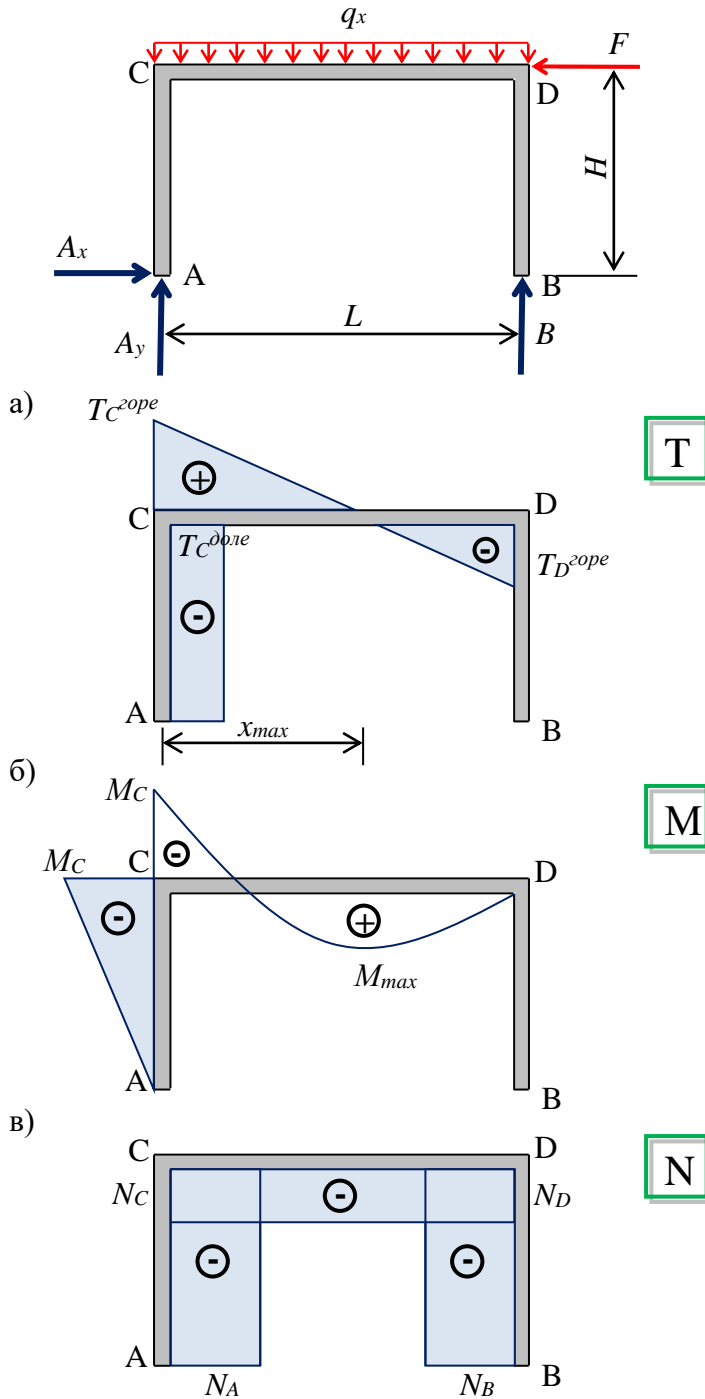
$$T_y = 0$$

$$M_y = 0$$

$$N_y = -B = -\frac{q_x \cdot L^2 - 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

Слика 8.46 Дијаграм на слободно тело од В до D долу

➤ Дијаграмите на внатрешните големини, слика 8.47, се исцртуваат врз основа на определените вредности во карактеристичните точки.

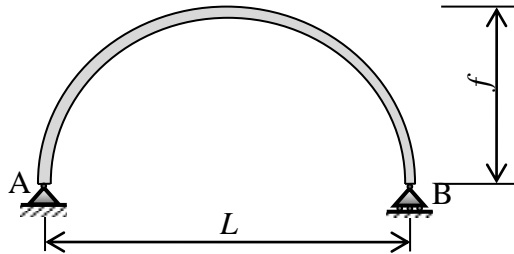


Слика 8.47 Дијаграм на внатрешни големини:

а) трансверзални сили; б) нападни моменти; в) аксијални сили

8.7.7 Лак

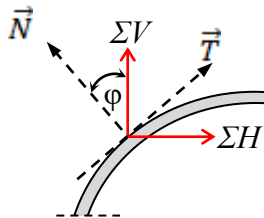
Носачите потпрени на подвижна и неподвижна потпора со крива оска се нарекуваат лачни носачи, слика 8.48.



Слика 8.48 Лачен носач

Определувањето на реакциите и внатрешните статички големини кај лачните носачи е врз основа на истите поставки како и за останатите гредни носачи кои се надворешно статички определени.

Карактеристично кај лачните носачи е што при дејство и само на вертикално оптоварување освен трансверзалните сили се појавуваат и аксијални сили, чии големини зависат од местото на пресекот и аголот на закривување и истите се различни во секој пресек. Трансверзалните и аксијаланите сили во произволен пресек дејствуваат соодветно, нормално на тангентата повлечена во произволната точка и во правец на тангентата, слика 8.49.



Слика 8.49 Внатрешни статички големини кај лачен носач

Општите изрази за определување на трансверзалните и аксијалните сили кај лачен носач се дадени соодветно преку изразите:

$$T = \sum V \cdot \cos \varphi - \sum H \cdot \sin \varphi \quad (8.9)$$

$$N = -\sum V \cdot \sin \varphi - \sum H \cdot \cos \varphi \quad (8.10)$$

Од изразите може да се заклучи дека при ист распон и иста диспозиција на товарите трансверзалните сили се помали во однос на истите кај простите гредни носачи, додека аксијалните сили се поголеми, кои всушност кај простите гредни носачи оптоварени само со вертикални товари и воопшто не се појавуваат.

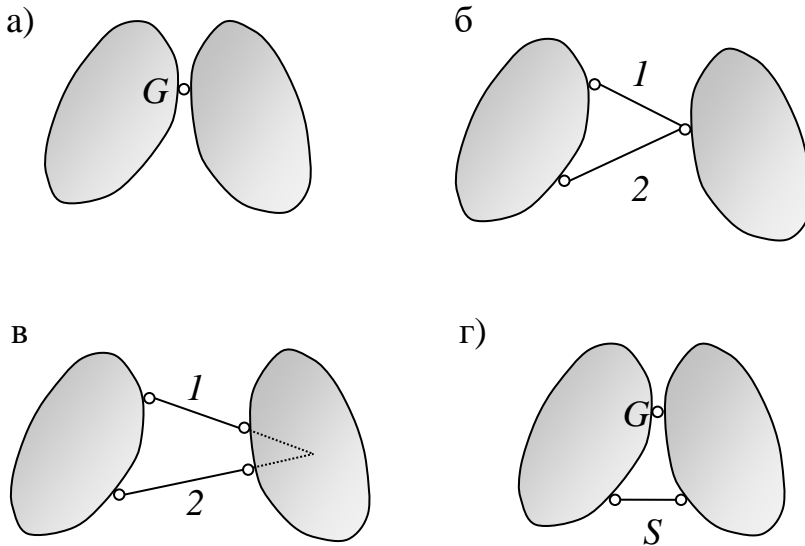
8.8 Сложени носачи

Ако носачот е составен од две или повеќе крути плочи поврзани меѓу себе, тогаш за секоја плоча, разгледувана како посебно тело, важат познатите услови за рамнотежа, што значи дека за n плочи имаме вкупно $3n$ степени на движење. За потполно укинување на сите слободи на движење потребни се најмалку $3n$ реакции, во кои се вклучени не само отпорите во лежиштата, туку и отпорите во врските помеѓу плочите.

Врската помеѓу две плочи обично се изведува со неподвижен зглоб кој спречува два степени на слобода, односно овозможува плочите да имаат исто транслаторно поместување (исти поместувања во правец на двете координатни оски x и y , а ротацијата, односно третиот степен на слобода, останува неспречен (плочите независно ротираат). Во зглобната врска се јавува реактивна сила со која првата плоча дејствува врз втората и обратно (принцип на акција и реакција), и истата има произволен правец (силата G претставена е со две независни компоненти G_x и G_y , слика 8.50 а)).

Неподвижниот зглоб G , со кој се сврзани двете соседни крути плочи, може да биде реален и определен со една точка, слика 8.50 а),

или пак определен со два лежишни стапа кои се сечат во една точка, слика 8.50 б), или имаат имагинарен пресек, слика 8.50 в). Во вториот случај аксијалните сили во стаповите 1 и 2 се компоненти на реакцијата на врската, односно силата G .



Слика 8.50 Врска помеѓу крути плочи кои ги спречуваат можните степени на слобода

Ако сакаме да го спречиме и третиот степен на слобода, односно да ја спречиме можната ротација на плочите околу зглобот G , доволно е врската да ја надополниме со уште еден стап поставен помеѓу двете плочи, но притоа треба да биде обезбедено трите стапа да не се сечат во иста точка, слика 8.50 г).

За да дефинираме дали носачот составен од две или повеќе крути плочи врзани со зглобови е статички определен, статички неопределен или претставува механизам (кинематички лабилен), поаѓаме од критериумот дека секоја крута плоча во рамнина има три степени на слобода (две translации и една ротација) кои треба да бидат спречени со соодветни врски. Реакциите на врските се определуваат од аналитичките услови за рамнотежа.

Во случај кога носачот е формиран од n плочи тој има вкупно $3n$ степени на слобода кои треба да бидат спречени со точно $3n$ врски. Секој зглоб што поврзува две плочи и спречува два степени на слобода, а останатите степени на слобода треба да бидат спречени со лежишта (подвижни, неподвижни или вклетштувања). Лежиштата можат да бидат изведени и со стапови, па изразот со кој се дефинира дали носачот е статички определен гласи:

$$k = 3 \cdot n - 2 \cdot g - s \quad (8.11)$$

каде што: n – број на крути плочи
 g – број на зглобови со кои се поврзани плочите
 s – број на лежишни стапови (број на непознати реакции на врски)

Ако: $k < 0$ - носачот е статички неопределен

$k = 0$ - носачот е статички определен

$k > 0$ - системот е кинематички лабилен и претставува механизам.

Ако носачот е составен и потпрен така што има повеќе од $3n$ реакции во лежиштата и зглобовите ($k < 0$), тогаш тој е толку пати статички неопределен колку што има прекубројни реакции на врски (степенот на статичката неопределеност е еднаква на бројот k). Во тој случај реакциите во лежиштата не можат да се определат само со користење на условите за рамнотежа.

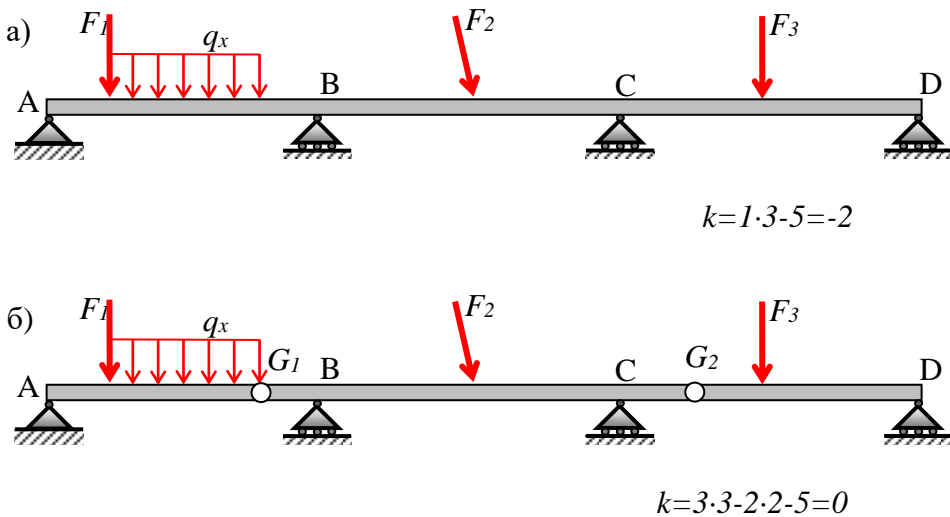
Од статички определените носачи, составени од две или повеќе крути плочи, најголема практична примена наоѓаат Герберовата греда, лакот на три зглоба и рамката на три зглоба.

8.8.1 Герберов носач

Герберовите носачи се статички надворешно определени сложени носачи, составени од прости гредни носачи, гредни носачи со

еден или два препусти, конзоли, полурамки. Носачите помеѓу себе се поврзани со зглобови формирајќи поголем носач од една целина. Овој носач има само едно неподвижно или конзолно лежиште, а останатите се подвижни лежишта. Герберовата греда ги има тие предности што не е толку осетлива на нерамномерните слегнувања на потпорите, што е случај кај континуираните статички неопределени носачи (една крута плоча потпрена на повеќе од две лежишта).

Зглобовите, преку кои се поврзуваат носачите, претставуваат конструктивен елемент околу кој самите носачи може да ротираат. Со вметнување на зглобови континуираниот носач може да се претвори во статички определен, при што секој вметнат зглоб ја намалува статичката неопределеност за еднаш. На слика 8.51 а) прикажан е континуиран носач на три полиња и истиот е два пати статички неопределен. Со вметнување на два зглоба носачот е претворен во статички определен Герберова греда, слика 8.31 б).



Слика 8.51 Претворање на статички неопределен континуиран носач во статички определен

Во овој случај таа има пет непознати лежишни реакции што можат да се определат од петте услови за рамнотежа:

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0 ; \sum M_A = 0 ; \sum M_{G1}^{лево} = 0 ; \sum M_{G2}^{десно} = 0 \quad (8.12)$$

Зглобовите се конструктивни елементи кои не преземаат нападни моменти, но може да ги примат останатите внатрешни сили кои дејствуваат нормално и по оската на носачот, односно трансверзалните и аксијалните сили. Еден систем од произволни сили кој дејствува на сложен Герберов носач ќе биде во рамнотежа само доколку истиот не предизвикува ротација на ниту еден дел од сложениот носач околу зглобот.

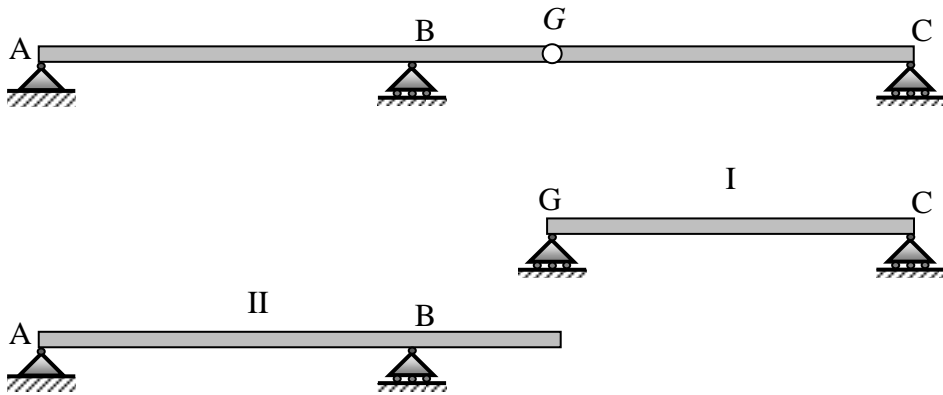
Ова значи дека зглобната врска помеѓу два носачи спречува два степени на слобода, односно овозможува носачите да имаат исто транслаторно поместување (исти поместувања во правец на двете координатни оски x и y), додека ротацијата останува неспречена, со што на носачите им се овозможува независно да ротираат.

Од овој услов за рамнотежа на сложените носачи произлегува потребниот дополнителен услов: алгебарскиот збир на статичките моменти од сите сили во однос на зглобот лево или десно од него мора да биде еднаков на нула.

Со цел Герберовиот носач да биде внатрешно неподвижен посебно внимание треба да се посвети на начинот на потпирање, за да се овозможи правилно прифаќање на хоризонталните сили. Исто така, за да биде Герберовиот носач стабилен и внатрешно неподвижен, не треба во едно поле да има повеќе од два зглоба, слика 8.32. во спротивно истиот ќе премине во механизам. Бидејќи крајните лежишта се сметаат за зглобови, во крајните полиња од континуираната греда може да се вметне само еден зглоб.

Најпрост носач систем Герберова греда имаме во случај кога тој е составен од две крути плочи, меѓу себе врзани со зглоб и потпрени на три лежишта, слика 8.52. Овој носач всушност претставува комбинација од една проста греда (GC) и една греда со препуст (ABG). Простата греда налегнува врз гредата со препуст и претставува

секундарен носач, додека гредата со препуст претставува примарен носач.

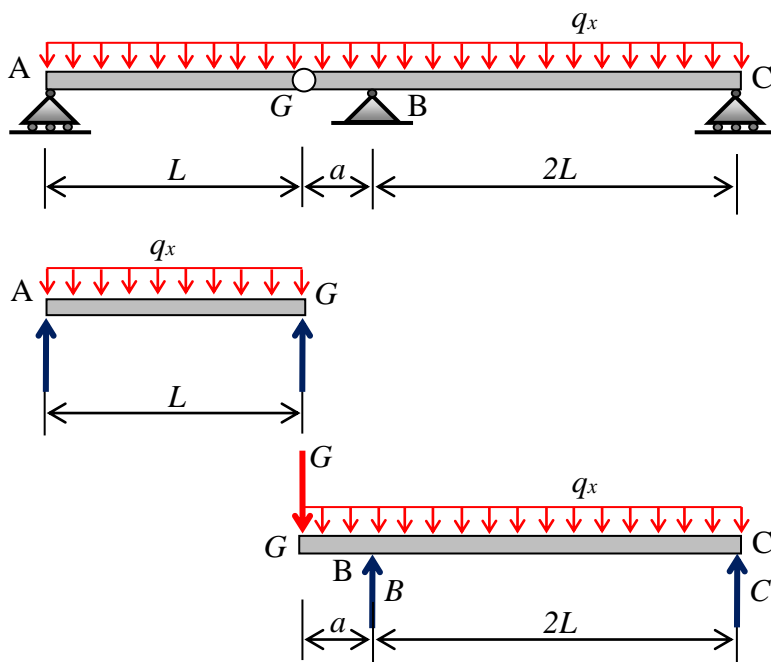


Слика 8.52 Герберов носач составен од прост греден носач и греден носач со еден препуст

Растојанието од лежиштето до зглобот треба да биде избрано така да се овозможи што поцелосно искористување на материјалот од којшто е изведен носачот. Ова растојание треба да биде определено од претпоставката за изедначување на максималните нападни моменти во полето со нападните моменти над лежишта.

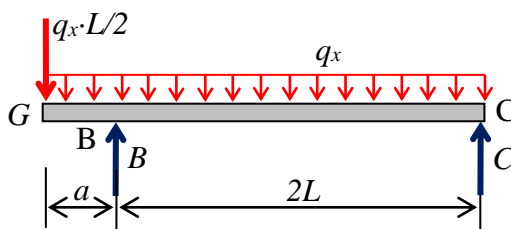
8.8.2 Постапка за анализа на Герберов носач

Првиот чекор при аналитичкото пресметување на Герберовите носачи е разделување на составни носачи на две лежишта, при што најважно е да се определи редоследот на потпирање на составните носачи. Всушност, пресметаните реакции кои се јавуваат во зглобовите претставуваат активни сили на препустите од носачите на кои се потпира првиот греден носач, слика 8.53.



Слика 8.53 Герберова греда

- За определување на реакциите во потпорите и зглобот на разделените носачи доволни се само трите услови за рамнотежа, додека статичките големини се пресметуваат според истите правила како кај гредните носачи.
- Реакциите и внатрешните статички големини на простиот греден носач се определени во точка 8.7.2.
- Анализата на гредата со препуст, слика 8.54, се состои од чекорите опишани претходно.



Слика 8.54 Дијаграм на слободно тело

$$\sum F_x = 0 \quad B_x = 0$$

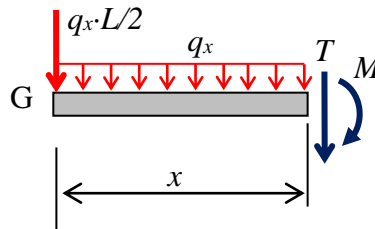
$$\sum M_C = 0 \quad B_y \cdot 2L - \frac{q_x \cdot L}{2} \cdot (a + 2L) - q_x \cdot \frac{(a + 2L)^2}{2} = 0$$

$$B_y = q_x \cdot \left(\frac{a^2}{4L} + \frac{5a}{4} + \frac{3L}{2} \right)$$

$$\sum M_B = 0 \quad -\frac{q_x \cdot L}{2} \cdot a + q_x \cdot (a + 2L) \cdot \left(\frac{a + 2L}{2} - a \right) - C \cdot 2L = 0$$

$$C = q_x \cdot \left(-\frac{a^2}{4 \cdot L} - \frac{a}{4} + L \right)$$

➤ Законите за внатрешните големина за пресечениот дел од носачот од слободниот крај G до лежиштето B, каде $0 \leq x \leq a$, се определуваат од дијаграмот на слободно тело претставен на слика 8.55.



Слика 8.55 Дијаграм на слободно тело од G до B

$$T_x = -q_x \cdot \left(\frac{L}{2} + x \right)$$

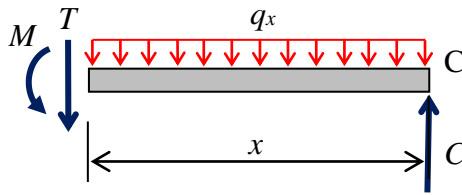
$$M_x = -\frac{q_x \cdot x}{2} \cdot (L + x)$$

Врз основа на горните равенки се определуваат вредностите во карактеристичните точки.

$$x = 0 \quad T_G = -\frac{q_x \cdot L}{2} \quad M_G = 0$$

$$x = a \quad T_B^{\text{лево}} = -q_x \cdot \left(\frac{L}{2} + a \right) \quad M_B = -\frac{q_x \cdot a}{2} \cdot (L + a)$$

Законите за внатрешните големини за пресечениот дел од носачот од лежиштето С до лежиштето В, каде $0 \leq x \leq 2L$, се определуваат од дијаграмот на слободно тело претставен на слика 8.56.



Слика 8.56 Дијаграм на слободно тело од С до В

Законите за трансверзалните сили и нападните моменти од С до В се дефинирани со равенките:

$$T_x = -C + q_x \cdot x$$

$$T_x = q_x \cdot \left(\frac{a^2}{4 \cdot L} + \frac{a}{4} - L + x \right)$$

$$M_x = C \cdot x - q_x \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M_x = q_x \cdot x \cdot \left(-\frac{a^2}{4 \cdot L} - \frac{a}{4} + L - \frac{x}{2} \right)$$

Вредностите во карактеристичните точки определени врз основа на горните равенки изнесуваат:

$$x = 0 \quad T_C = q_x \cdot \left(\frac{a^2}{4 \cdot L} + \frac{a}{4} - L \right) \quad M_C = 0$$

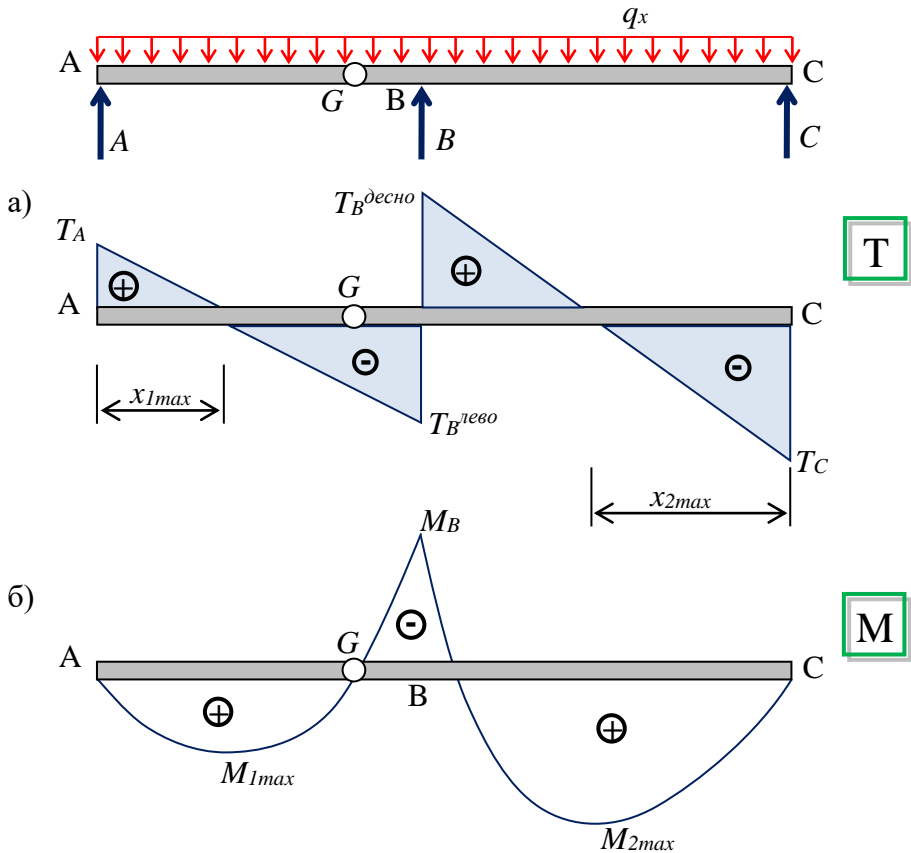
$$x = 2L \quad T_B^{\text{десно}} = q_x \cdot \left(\frac{a^2}{4 \cdot L} + \frac{a}{4} + L \right) \quad M_B = -\frac{q_x \cdot a}{2} \cdot (L + a)$$

Максималната вредност на нападниот момент се определува согласно горните равенки на местото каде што трансверзалната сила е еднаква на нула.

$$T_x = 0 \quad q_x \cdot \left(\frac{a^2}{4 \cdot L} + \frac{a}{4} - L + x \right) = 0 \quad x_{\max} = L - \frac{a^2}{4 \cdot L} - \frac{a}{4}$$

$$M_{\max} = \frac{q_x}{32 \cdot L^2} \cdot (16 \cdot L^4 - 8 \cdot a \cdot L^3 - 7 \cdot a^2 \cdot L^2 + 2 \cdot a^3 \cdot L + a^4)$$

➤ Дијаграмите на внатрешните статички големини, слика 8.57, се исцртуваат врз основа на определените вредности во карактеристичните точки.

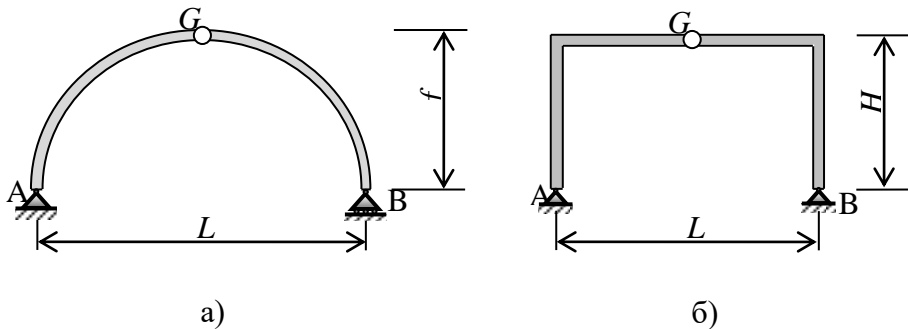


Слика 8.57 Дијаграм на внатрешни големини:

а) трансверзални сили; б) нападни моменти

8.8.3 Рамка и лак на три зглоба

Рамката и лакот на три зглоба се сложени носачи, статички надворешно определени, составени од две крути плочи меѓусебно поврзани и потпрени на неподвижни зглобови кои не лежат на една иста права линија. Оската на лачните носачи може да биде со различен облик, најчесто крива линија-парабола или круг, додека оската на рамката на три зглоба има полигонална форма. Оската на лаците на три зглоба треба да биде проектирана така да истата се доближува колку што е можно до потпорната линија, при што идеално е доколку истата се поклопува со потпорната линија. Во зависност од проектното решение потпорите кај рамките и лаците на три зглоба може да се на иста висина, но може да постои и висинска разлика помеѓу нив. Хоризонталното растојание помеѓу потпорите е распон на носачите, додека вертикалното растојание од зглобот до потпорите се нарекува стрела на лакот, слика 8.58 а), односно висина на рамката, слика 8.58 б).



Слика 8.58 Сложени носачи: а) лак на три зглоба; б) рамка на три зглоба

Главна статичка особина на овој носач, по што истиот се разликува од простата греда, е што и кај вертикални и кај коси товари во лежиштата се јавуваат коси реакции. Кај овој тип на носачи реакциите во потпорите се со произволна насока, односно при нивно

определување истите имаат и вертикална и хоризонтална компонента. Реакциите во потпорите се определуваат применувајќи ги основните три услови за рамнотежа и дополнителниот услов за рамнотежа, кој произлегува од вметнувањето на третиот зглоб-алгебарскиот збир на статичките моменти од сите сили во однос на зглобот лево или десно од него е еднаков на нула.

$$\sum F_x = 0 ; \sum F_y = 0 ; \sum M_A = 0 ; \sum M_G^{лево} = 0 \quad (8.13)$$

Многу често за определување на реакциите се применуваат алтернативните услови за рамнотежа:

$$\sum M_A = 0 ; \sum M_B = 0 ; \sum M_G^{лево} = 0 ; \sum M_G^{десно} = 0 \quad (8.14)$$

додека условите $\sum F_x = 0$ и $\sum F_y = 0$ се применуваат само за контрола на добиените резултати.

Хоризонталната компонента на реакциите се нарекува хоризонтален потисок, кој преку потпорите се пренесува на тлото. Доколку хоризонталниот потисок е голем, а почвата недоволно јака, рамките и лаците на три зглоба се проектираат со хоризонтални затеги поставени или во ниво на потпорите или на одредена висина, при што едната неподвижна потпора се заменува со подвижна, со цел носачот да биде статички надворешно определен. Кај вака проектираните носачи хоризонталната сила ја презема затегата, а носачот во целина дејствува како греден носач на две потпори.

Определувањето на внатрешните статички големини во произволен пресек е исто како и кај просите гредни носачи. Треба да се истакни дека исто како кај лачните носачи така и кај лаците на три зглоба во кој било пресек при дејство на различни оптоварувања се појавуваат нападни моменти, трасверзални сили и аксијални сили.

Нападниот момент на хоризонталната греда кај рамките на три зглоба е помал од соодветниот за проста греда, додека трансверзалните сили имаат иста вредност. Кај проста греда товарена со вертикални

товари не постојат аксијални сили, што не е случај кај носачите на три зглоба. Имено, хоризонталниот потисок секогаш предизвикува појава на аксијална сила во хоризонталната греда.

Кај носачите кај кои оската се прекршува нападниот момент се пренесува од едната на другата плоча со својата големина и знак, додека трансверзалната сила за хоризонталната плоча претставува аксијална сила за вертикалната плоча, и обратно.

Примената на лаците на три зглоба е доста честа бидејќи истите се неосетливи на помали слегнувања на потпорите и температурни промени. Овој тип на носачи има предност во однос на простите гредни носачи бидејќи при исти распони и иста диспозиција на товарите нападните моменти се помали, особено во средината на распонот каде што кај простите гредни носачи се најголеми. Ова се должи на хоризонталните компоненти на реакциите во лежиштата, но кои од друга страна пак, дополнително го оптоваруваат тлото на кое носачот е потпрен.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Киријас, Т., Техничка механика-статика, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“-Скопје, Скопје, 1981.
- [2] Атанасова-Коцева, Л., Симовски, В., Аврамов, А., Збирка решени задачи од техничка механика-статика, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“-Скопје, Скопје, 1989.
- [3] Миладинов, Ј., Техничка механика 1, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“-Скопје, Скопје, 1970.
- [4] Beer, F., Johnston, E., R., Vector mechanics for engineers: Statics, The McGraw-Hill Companies, 1996.
- [5] Hibbeler, R., C., Statics and mechanics of materials, Pearson Prentice Hall, 2004.
- [6] Jackson, H., J., Wirtz, G., H., Schaum's outline theory and problems of elementary statics and strength of materials, McGraw-Hill, 1983.