



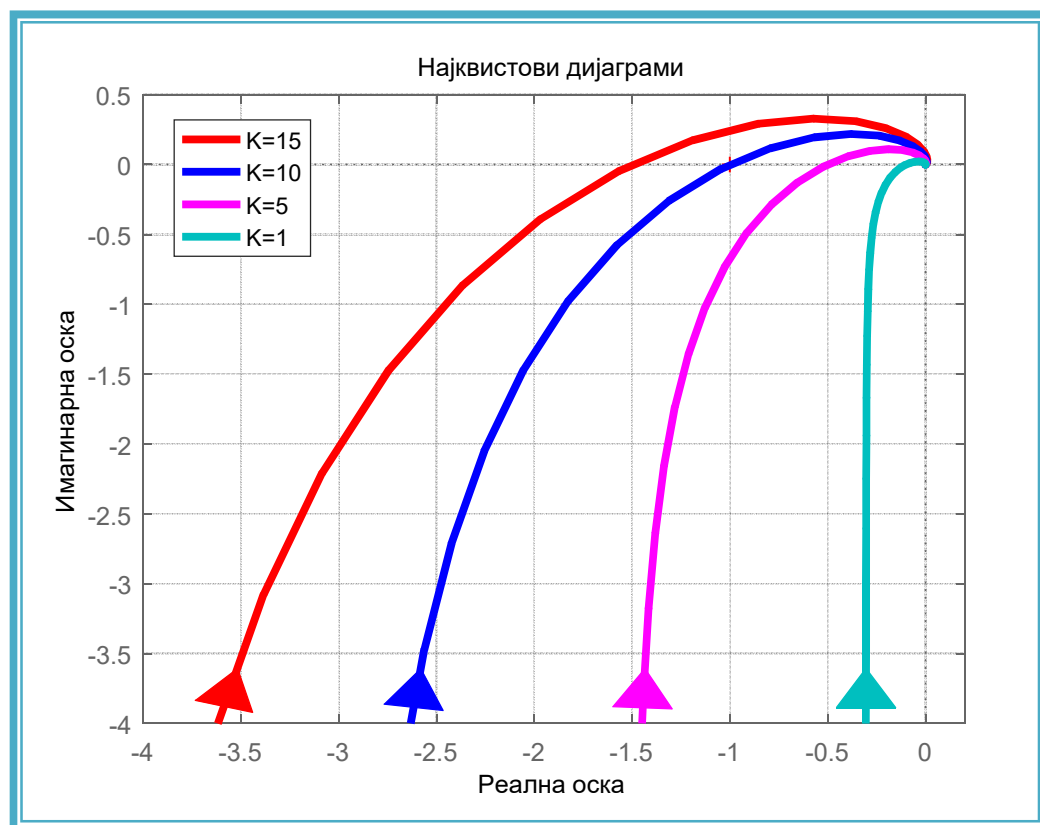
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје

Факултет за електротехника и информациски
технологии - Скопје



ЕЛИЗАБЕТА ЛАЗАРЕВСКА

ПРОЕКТИРАЊЕ НА СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ



Скопје, 2018

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:

д-р Елизабета Лазаревска, редовен професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

Рецензенти

1. д-р Стојче Дескоски, редовен професор на Техничкиот факултет во Битола (во пензија)
2. д-р Весна Ојлеска, доцент на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

Техничка обработка

д-р Елизабета Лазаревска

Лектура на македонски јазик:

Дијана Ристова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

681.51(075.8)

ЛАЗАРЕВСКА, Елизабета

Проектирање на системи на автоматско управување / Елизабета Лазаревска. -
Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2018. - 286 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 285

ISBN 978-9989-43-409-9

а) Системи за автоматско управување - Високошколски учебници
COBISS.MK-ID 107054858

ПРЕДГОВОР

Книгата во прв ред е наменета за студентите од четврта година на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, кои на насоката Компјутерско системско инженерство, автоматика и роботика го слушаат предметот Проектирање на системи на автоматско управување. Меѓутоа, таа успешно ќе им послужи и на сите останати студенти од техничките факултети кои го изучуваат или се сретнуваат со проблеми од широкото подрачје на синтеза на затворени системи на автоматско управување како, на пример, на студентите од машинските, технолошките и металуршките факултети. Несомнено, корисни примери и информации во книгата ќе најдат и сите оние кои веќе работат во областа на синтезата на затворените системи на автоматско управување или само се интересираат за неа.

Системите на автоматско управување имаат многу широка примена во индустријата, техниката и нашето секојдневие, поаѓајќи од авионите и вселенските летала, па преку роботите и индустриските процеси, до апаратите што ги користиме во нашиот секојдневен живот. Знаењето на еден инженер автоматичар нема да биде комплетно, ако покрај анализата, тој не ја владее и синтезата на овие системи. Како што анализата му овозможува да ги разбере системите на автоматско управување и нивните својства, така синтезата му овозможува истите да ги проектира односно направи. Генерално земено, тоа е крајната цел на секој инженер автоматичар.

Извонредно важната и сложена проблематика на синтезата на затворени системи на автоматско управување (САУ) во книгата е поделена на седум поглавја и е изложена преку голем број примери. Во првата глава се дефинирани показателите на квалитет на поведението на еден затворен САУ. Основната цел при проектирањето на секој еден САУ е исполнување на проектните барања кои го опишуваат саканото поведение на проектираниот систем. Тие проектни барања се сведуваат на ограничување на вредностите од параметрите на одделните карактеристики на системот, какви што се: пропусниот опсег, резонантниот врв, времето на смирување на отскочниот одсив, максималниот прескок во отскочниот одсив, резервата на засилување и фаза итн. Општо земено, без оглед дали се искажани преку параметрите на карактеристиките на проектираниот систем во фреквенциски или временски домен, проектните барања ги специфицираат следните три важни својства на еден САУ: брзината на одсив, релативната стабилност и грешката на системот. Во првата глава е покажано како се пресметуваат одделните параметри на проектираните системи и нивното влијание врз особините и поведението на тие системи.

Втората глава е посветена на аналитичката синтеза на затворените САУ. За разлика од многубројните показатели на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во преоден режим, какви што се: времето на прескок, максималниот прескок, времето на пораст и времето на смирување на преодниот одсив, пропусниот опсег, резонантниот врв, резервите на засилување и фаза и др., сигналот на грешка е единствен показател на сите битни динамички карактеристики на еден систем - резервата на стабилност и брзината на одсив на системот. Затоа тој може да се искористи како критериум за

синтеза на еден затворен САУ. Целта на синтезата во овој случај е да се одбере таква структура и такви вредности на променливите параметри на системот (параметри кои можат да се нагодуваат), што грешката во системот, која се дефинира како разлика помеѓу саканиот и стварниот одзив на системот, во секој миг на време да биде минимална. Во втората глава се прикажани различните аналитички критериуми за синтеза на затворените САУ кои го користат сигналот на грешка, и нивната практична примена.

Во третата глава е воведен поимот за синтеза на затворените САУ по пат на компензација и прикажани се различните видови компензации и компензатори. Прикажани се својствата на основните три типа компензатори – диференцијален, интегрален и интегро-диференцијален и нивното влијание врз поведението на некомпензираниот систем.

Во четвртата глава станува збор за фреквенциската синтеза на затворените САУ со помош на Најквистовата крива на соодветниот отворен систем за проектираниот затворен систем. Затоа оваа синтеза многу често популарно се нарекува Најквистова фреквенциска синтеза. Главата ја третира Најквистовата синтеза на еден затворен САУ со компензација на засилувањето, со примена на диференцијален компензатор, со примена на интегрален компензатор и со примена на интегро-диференцијален компензатор.

Петтата глава е посветена на фреквенциската синтеза на затворените САУ со помош на Бодевите дијаграми на соодветниот отворен систем за проектираниот затворен систем. Тоа е веројатно една од најпопуларните постапки за синтеза во праксата, поради фактот дека фреквенциските карактеристики на еден систем се добиваат мошне едноставно и по експериментален пат. Прикажана е Бодевата синтеза со компензација на засилувањето, со примена на диференцијален компензатор, со примена на интегрален компензатор и со примена на интегро-диференцијален компензатор.

Во шестата глава е изложена синтезата на затворените САУ со помош на постапката на геометриско место на корени. За таа цел низ соодветни примери најнапред е опишана самата постапка на добивањето на геометриското место на корени на еден затворен САУ, а потоа е илустрирана и неговата примена во синтезата на затворените САУ по пат на компензација со диференцијален, интегрален и интегро-диференцијален компензатор.

Конечно, во седмата глава е изложена идејата за синтеза на затворените САУ во просторот на состојби. Проблематиката е изложена во најосновна форма, затоа што е предмет на подлабоко изучување во друг предмет.

Од авторот,

Скопје, 2018

СОДРЖИНА

1	ПОКАЗАТЕЛИ НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН САУ	1
1.1	ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН КОНТИНУАЛЕН САУ ВО СТАЦИОНАРЕН РЕЖИМ	3
1.2	ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН КОНТИНУАЛЕН САУ ВО ПРЕОДЕН РЕЖИМ	18
1.3	ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ДИСКРЕТЕН САУ ВО СТАЦИОНАРЕН РЕЖИМ	28
1.4	ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ДИСКРЕТЕН САУ ВО ПРЕОДЕН РЕЖИМ	35
1.5	ИЗБОР НА ПЕРИОДАТА НА ДИСКРЕТИЗАЦИЈА	43
2	АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИТЕ САУ	47
2.1	АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ КОНТИНУАЛНИ САУ	47
2.2	АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ ДИСКРЕТНИ САУ	55
3	СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ	61
3.1	ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	64
3.2	ИНТЕГРАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	76
3.3	ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	85
4	ФРЕКВЕНЦИСКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИТЕ САУ СО ПОМОШ НА НАЈКВИСТОВАТА КРИВА	93
4.1	НАЈКВИСТОВА СИНТЕЗА ПРЕКУ КОМПЕНЗАЦИЈА НА КОЕФИЦИЕНТОТ НА ЗАСИЛУВАЊЕ	95
4.2	КОМПЕНЗАЦИЈА СО ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	99
4.3	КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИНТЕГРАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	107
4.4	КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	118
5	ФРЕКВЕНЦИСКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИТЕ САУ СО ПОМОШ НА БОДЕОВИТЕ ДИЈАГРАМИ	123
5.1	ВРСКА ПОМЕЃУ ВРЕМЕНСКИТЕ И ФРЕКВЕНЦИСКИТЕ ПОКАЗАТЕЛИ НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН СИСТЕМ	140
5.2	БОДЕОВА СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА НА КОЕФИЦИЕНТОТ НА ЗАСИЛУВАЊЕ НА ОТВОРЕНИОТ СИСТЕМ	153

5.3	БОДЕОВА СИНТЕЗА СО ПРИМЕНА НА ИНТЕГРАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	159
5.4	БОДЕОВА СИНТЕЗА СО ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	166
5.5	БОДЕОВА СИНТЕЗА СО ПРИМЕНА НА ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	184
6	СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	191
6.1	ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	191
6.1.1	ЗАВИСНОСТ НА ПОЛОВИТЕ НА ЗАТВОРЕНИОТ СИСТЕМ ОД КОЕФИЦИЕНТОТ НА ЗАСИЛУВАЊЕ НА СООДВЕТНИОТ ОТВОРЕН СИСТЕМ	193
6.1.2	КРИТЕРИУМ НА АРГУМЕНТ И МОДУЛ	195
6.1.3	БРОЈ ГРАНКИ НА ЕДНО ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	196
6.1.4	ГРАНКИ КОИ ЛЕЖАТ НА РЕАЛНАТА ОСКА ВО КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА	197
6.1.5	АСИМПТОТИ НА ГРАНКИТЕ ОД ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	200
6.1.6	ТОЧКИ НА СОСТАВУВАЊЕ ОДНОСНО РАЗДВОЈУВАЊЕ НА ГРАНКИТЕ НА ЕДНО ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	204
6.1.7	АГЛИ НА ОДДАЛЕЧУВАЊЕ ОД КОМПЛЕКСЕН ПОЛ И ПРИБЛИЖУВАЊЕ КОН КОМПЛЕКСНА НУЛА НА ГРАНКИТЕ ОД ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	206
6.1.8	КОНСТРУКЦИЈА НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН СИСТЕМ	209
6.2	ПРИМЕНА НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ ВО АНАЛИЗАТА НА ЗАТВОРЕНИТЕ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ	212
6.2.1	ОДРЕДУВАЊЕ НА ПРЕНОСНАТА ФУНКЦИЈА НА ЗАТВОРЕНИОТ СИСТЕМ И НЕГОВИОТ ОДСИВ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	212
6.2.2	ОДРЕДУВАЊЕ НА РЕЗЕРВИТЕ НА ЗАСИЛУВАЊЕ И ФАЗА НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ	215
6.2.3	ОДРЕДУВАЊЕ НА ФАКТОРОТ НА РЕЛАТИВНО ПРИДУШУВАЊЕ НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН КОНТИНУАЛЕН СИСТЕМ СО ПОМОШ НА НЕГОВОТО ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	219
6.3	СИНТЕЗА ПО ПАТ НА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ПОМОШ НА ПОСТАПКАТА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	221
6.3.1	СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	225
6.3.1.1	СО ПОСТАПКАТА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	225
6.3.1.1	СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИДЕАЛЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	225

6.3.1.2	СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО НЕИДЕАЛЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	235
6.3.2	СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИНТЕГРАЛЕН КОМПЕНЗАТОР СО ПОСТАПКАТА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	245
6.3.2.1	СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИДЕАЛЕН ИНТЕГРИРАЧКИ КОМПЕНЗАТОР	246
6.3.2.2	СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО НЕИДЕАЛЕН ИНТЕГРИРАЧКИ КОМПЕНЗАТОР	252
6.3.3	СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР	257
7	СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	263
7.1	НАГОДУВАЊЕ НА ПОЛОВИ	263
7.2	УПРАВЛИВОСТ	274
7.2.1	ПРОВЕРКА НА УПРАВЛИВОСТА НА ЕДЕН СИСТЕМ ПРЕКУ НЕГОВИОТ МОДЕЛ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	274
7.2.2	МАТЕМАТИЧКИ УСЛОВ ЗА ЦЕЛОСНА УПРАВЛИВОСТ НА ЕДЕН ЛИНЕАРЕН СТАЦИОНАРЕН КОНТИНУАЛЕН ДИНАМИЧКИ СИСТЕМ	276
7.3	НАГОДУВАЊЕ НА ПОЛОВИТЕ ПРЕКУ ТРАНСФОРМАЦИЈА НА МОДЕЛОТ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	277
	ЛИТЕРАТУРА	285

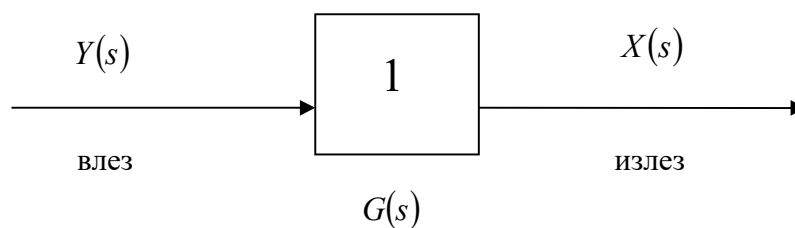
Не велите дека немате време. Имате точно онолку часови на ден колку што имале и Хелен Келер, Микеланџело, Мајка Тереза, Леонардо Да Винчи, Томас Џеферсон и Алберт Ајнштајн.

– Х. Џексон Браун помладиот

Книгата е посветена на моите минати, сегашни и идни студенти.

1. ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН СИСТЕМ ЗА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ И КРИТЕРИУМИ ЗА СИНТЕЗА

Идеален систем на автоматско управување (САУ) треба да има преносна функција еднаква на единица, како што е прикажано на слика 1.1. Тоа значи дека излезот на идеален САУ треба да биде еднаков на влезот или, велеме – треба идеално да го следи доведениот влез, преку кој се задава она што треба да се добие на излезот (саканото поведение на системот).



Слика 1.1. Симболичен приказ на идеален САУ

Врз основа на погоре кажаното следува дека квалитетот на поведението на еден САУ може да се оцени преку разликата помеѓу неговиот влез и излез која, вообичаено, се нарекува **грешка на управувањето** или, едноставно, **грешка** и се означува со $e(t)$:

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad (1.1)$$

Познавањето на грешката $e(t)$ во секој временски миг обезбедува целосна информација за особините односно квалитетот на поведението на набљудуваниот САУ. За жал, ваквиот начин на оценка на квалитетот на поведението на еден САУ преку временската зависност односно функцијата на грешката $e(t)$ во пракса се покажува непогоден. Затоа се користат други начини и постапки.

Вообичаено, за квалитетот на поведението на еден САУ се суди врз основа на неговите карактеристики какви што се, на пример, импулсниот и отскочниот одзив, или фреквенциските карактеристики. Овие карактеристики се добиваат кога на влезот од системот ќе се доведат одредени типични влезни сигнали односно возбуди. Така, по дефиниција, **импулсниот одзив** на еден систем е негов одзив на единичен Дираков импулс доведен како влез:

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \quad (1.2)$$

ОТСКОЧНИОТ ОДСИВ на системот е одзив на единична Хевисајдова функција како влез:

$$x(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (1.3)$$

амплитудно-фазната фреквенциска карактеристика е ходограф на векторот на фреквенциската преносна функција $G(j\omega)$ на набљудуваниот систем, која ја дефинира врската помеѓу стационарниот одзив на системот на периодична влезна возбуда $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_1)h(t)$ и самата таа возбуда:

$$x_{stac}(t) = G(j\omega)Y \sin(\omega t + \varphi_1)h(t) \quad (1.4)$$

амплитудно-фреквенциската карактеристика $G(\omega) = |G(j\omega)|$ го дефинира односот помеѓу амплитудата на стационарниот одзив на системот $x_{stac}(t) = X \sin(\omega t + \varphi_2)h(t)$ на периодична влезна возбуда $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_1)h(t)$ и амплитудата на таа возбуда:

$$X = |G(j\omega)|Y \quad (1.5)$$

додека **фазно-фреквенциската карактеристика** $\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$ е еднаква на фазната разлика $\varphi_2 - \varphi_1$ помеѓу стационарниот одзив на системот $x_{stac}(t) = X \sin(\omega t + \varphi_2)h(t)$ и периодичната влезна возбуда $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_1)h(t)$.

Врз основа на карактеристиките на еден САУ било во временски било во фреквенциски домен се дефинираат одредени параметри, кои се користат како показатели на квалитетот на поведението на набљудуваниот систем.

Сите показатели на квалитетот на поведението на еден САУ можат генерално да се поделат во две групи:

1. Показатели на точноста на работа на системот во стационарен режим
2. Показатели на точноста на работа на системот во преоден режим.

Показателите на точноста на работа на еден САУ во стационарен режим, всушност, служат за оценка на големината на грешката на системот во стационарен режим.

Показателите на точноста на работа на еден САУ во преоден режим можат да се поделат на показатели кои ја одредуваат резервата на стабилност на набљудуваниот систем, показатели на брзината на дејствување на системот и интегрални показатели за квалитетот на преодниот режим.

Показателите на резервата на стабилност на еден САУ служат како мерка за тоа колку набљудуваниот систем се наоѓа далеку од неговата граница на стабилност.

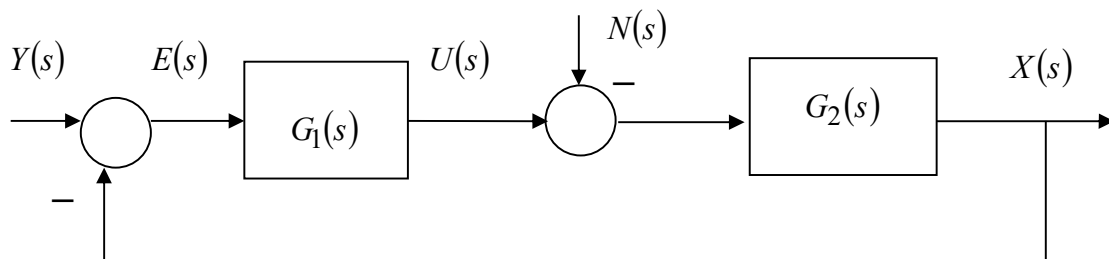
Показатели на брзината на дејствување на системот служат како мерка за оцена на брзината на одзивот на набљудуваниот систем на различни влезни возбуди и пореметувања.

Интегрални показатели кои го карактеризираат преодниот режим на еден САУ вообичаено се во вид на интеграл во кој подинтегралната функција за аргумент го има сигналот на грешката:

$$J = \int_0^{\infty} F[e(t)]dt \quad (1.6)$$

1.1. ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН КОНТИНУАЛЕН САУ ВО СТАЦИОНАРЕН РЕЖИМ

Кога не би постоеле најразличните пречки, шумови, пореметувања и отстапувања во работата на еден систем, отворените САУ во целост би ја извршувале својата задача и би одговориле на очекувањата и поставената цел. Меѓутоа, бидејќи во работата на реалните системи постојано се присутни несакани пречки и пореметувања од најразличен вид, отворените САУ, кои на својот влез не добиваат никаква информација за тоа што се случува на излезот, не можат да одговорат на поставената задача и очекувањата во поглед на нивното поведение. Примери за вакви несакани надворешни влијанија се флукуациите во напонот за напојување на електричните елементи и уреди, промените на параметрите на електричните компоненти предизвикани од нивното загревање, појавата на нелинеарни феномени како зазор кај запчаниците на електромоторите, зона на неосетливост итн. Затоа, по правило, во праксата се користат затворени САУ, каков што е системот од слика 1.2.



Слика 1.2. Структурна блок-шема на затворен САУ со референтен влез и пречки

Како критериум за оцена на квалитетот на поведението на еден САУ во стационарен режим се усвојува големината на неговата стационарна грешка. Нека, за таа цел, се набљудува системот од слика 1.2, кој има еден референтен влез $y(t)$ и шум $n(t)$

суперпониран на сигналот $u(t)$. Вкупниот излез на набљудуваниот систем $x(t)$ има две компоненти:

$$X(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}Y(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}N(s) \quad (1.7)$$

па неговата грешка $E(s) = Y(s) - X(s)$ изнесува:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}Y(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}N(s) \quad (1.8)$$

Грешката $e(t)$ на набљудуваниот систем од слика 1.2 има исто така две компоненти: една – која е резултат од постоењето на референтниот влез $y(t)$ и втора – која е резултат од дејствувањето на шумот во системот $n(t)$.

Одредувањето на стационарната грешка на еден САУ и, следствено, оценката на неговото поведение во стационарен режим има смисла само доколку системот е стабилен, зашто само кај овие системи преодниот и слободниот одзив исчезнуваат со текот на времето. Нестабилните системи се неупотребливи системи од аспект на автоматското управување, зашто кај нив никогаш не може да се постигне излезот да го следи зададениот влез, без оглед дали се работи за отскочен, линеарен, параболичен, периодичен или некој друг влез. Ова се должи на фактот дека преодниот и слободниот одзив кај нестабилните системи никогаш не исчезнуваат. Следствено, под претпоставка дека затворениот систем од слика 1.2 е стабилен, за неговата стационарна грешка $e(\infty)$ се добива:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}Y(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}N(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)}Y(s) \right] + \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}N(s) \right] = e_y(\infty) + e_n(\infty) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Од изразот (1.9) произлегува дека стационарната грешка $e(\infty)$ зависи како од параметрите и структурата на набљудуваниот систем, така и од типот и величината на влезниот сигнал $y(t)$ и пречките $n(t)$.

Нека, најнапред, се набљудува системот од слика 1.2 во отсуство на пречките $n(t)$. Тогаш $e(t) = e_y(t)$ и:

$$e(\infty) = e_y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_0(s)}Y(s) \right] \quad (1.10)$$

каде што $G_0(s) = G_1(s)G_2(s)$ е соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем. Ако на влезот од ваков систем се доведе отскочен референтен влез:

$$y(t) = c_0 h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ c_0, & t \geq 0 \end{cases}; \quad c_0 = \text{const.} \in \mathfrak{R} \quad (1.11)$$

за неговата стационарна грешка $e_y(\infty)$ се добива:

$$\begin{aligned} e_y(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_0(s)} Y(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{c_0}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{c_0}{1 + G_0(s)} = \frac{c_0}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} = \frac{c_0}{1 + K_p} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Граничната вредност:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) \quad (1.13)$$

се нарекува **константа на положба** или **позициона константа**. Имајќи на ум дека преносната функција $G_0(s)$ може да се претстави во облик:

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\ &= \frac{s^p (b_m s^{m-p} + b_{m-1} s^{m-p-1} + \dots + b_{p+1} s + b_p)}{s^q (a_n s^{n-q} + a_{n-1} s^{n-q-1} + \dots + a_{q+1} s + a_q)} = \\ &= K \frac{s^p (B_{m-p} s^{m-p} + B_{m-p-1} s^{m-p-1} + \dots + B_1 s + 1)}{s^q (A_{n-q} s^{n-q} + A_{n-q-1} s^{n-q-1} + \dots + A_1 s + 1)} = \\ &= K \frac{P(s)}{s^r Q(s)}; \quad K = \frac{b_p}{a_q} \end{aligned} \quad (1.14)$$

лесно може да се заклучи дека константата на положба K_p има конечна вредност $\neq 0$ само кога отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од нулти ред; во сите останати случаи таа има вредност ∞ :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{P(s)}{s^r Q(s)} = \begin{cases} K_p, r = 0 \\ \infty, r \geq 1 \end{cases} \quad (1.15)$$

Следствено, стационарната грешка во системот од слика 1.2, со отскочен референтен влез (1.11) и во отсуство на пречки $n(t)$, ќе биде:

$$e_y(\infty) = \frac{c_0}{1 + K_p} = \begin{cases} \frac{c_0}{1 + K_p}, & r = 0 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (1.16)$$

Во заклучок може да се констатира дека $e_y(\infty) = 0$ само доколку отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од произволен ред и ваквите САУ идеално го следат отскочниот влез (1.11) во стационарен режим, додека затворените САУ чиј отворен систем има астатизам од нулти ред, доведениот отскочен влез го следат со одредено конечно отстапување $\frac{c_0}{1 + K_p}$. Отстапувањето $\frac{c_0}{1 + K_p}$ може да се направи произволно мало преку c_0 и K_p , но никогаш не може сосема да се елиминира. Оттука, бројната вредност на константата на положба K_p се употребува како мерка за оценка на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во стационарен режим, кога соодветниот отворен систем има астатизам од нулти ред.

Друг типичен режим на работа на еден САУ е кога на неговиот влез дејствува линеарно растечки референтен сигнал од облик:

$$y(t) = v_0 t h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ v_0 t, & t \geq 0 \end{cases} ; \quad v_0 = \text{const.} \in \mathfrak{R} \quad (1.17)$$

Ваков режим на работа е од посебен интерес, на пример, кај сервосистемите кај кои се врши позиционирање со константна брзина. Во овој случај $Y(s) = \frac{v_0}{s^2}$, па ако на влез од системот од слика 1.2 се доведе возбудата (1.17), за неговата стационарна грешка $e(\infty)$ во отсуство на пречки $n(t)$ се добива:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= e_y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_0(s)} Y(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{v_0}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v_0}{s + s G_0(s)} = \frac{v_0}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s)} = \frac{v_0}{K_v} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Граничната вредност:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) \quad (1.19)$$

се нарекува **брзинска константа** на набљудуваниот САУ и таа има конечна вредност $\neq 0$ само кога отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од прв ред. Имено, од општиот израз (1.14) за $G_0(s)$ непосредно следува:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{P(s)}{s^{r-1}Q(s)} = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ K_v, & r = 1 \\ \infty, & r \geq 2 \end{cases} \quad (1.20)$$

па:

$$e_y(\infty) = \frac{v_0}{K_v} = \begin{cases} \infty, & r = 0 \\ \frac{v_0}{K_v}, & r = 1 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases} \quad (1.21)$$

Тоа значи дека затворениот САУ од слика 1.2 не е во состојба да следи линеарно растечки влез доколку редот на астатизам на неговиот отворен систем е понизок од 1; тој е во состојба да следи влез со константна брзина на промена и тоа со одредено константно отстапување $\frac{v_0}{K_v}$, доколку соодветниот отворен систем има астатизам од

прв ред и идеално го следи набљудуваниот влез доколку отворениот систем има астатизам барем од втор ред. Оттука, величината (бројната вредност) на брзинската константа K_v се употребува како мерка за оценка на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во стационарен режим, кога соодветниот отворен систем има астатизам од прв ред.

Уште еден типичен работен режим на затворениот САУ од слика 1.2 е кога на неговиот влез се доведе референтен сигнал кој се менува по квадратен закон:

$$y(t) = \frac{a_0 t^2}{2} h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{a_0 t^2}{2}, & t \geq 0 \end{cases}; \quad a_0 = const. \in \mathfrak{R} \quad (1.22)$$

со константно забрзување a_0 . Бидејќи во овој случај $Y(s) = \frac{a_0}{s^3}$, за стационарната грешка на набљудуваниот САУ од слика 1.2 во отсуство на пречките $n(t)$ се добива:

$$\begin{aligned}
 e(\infty) &= e_y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_0(s)} Y(s) \right] = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{a_0}{s^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_0}{s + s^2 G_0(s)} = \frac{a_0}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s)} = \frac{a_0}{K_a} \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Граничната вредност:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) \quad (1.24)$$

се нарекува **константа на забрзување** и таа има конечна вредност $\neq 0$ само доколку соодветниот отворен систем има астатизам од втор ред:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{P(s)}{s^{r-2} Q(s)} = \begin{cases} 0, & r \leq 1 \\ K_a, & r = 2 \\ \infty, & r \geq 3 \end{cases} \quad (1.25)$$

Тогаш стационарната грешка на набљудуваниот САУ е:

$$e_y(\infty) = \frac{a_0}{K_a} = \begin{cases} \infty, & r \leq 0 \\ \frac{a_0}{K_a}, & r = 2 \\ 0, & r \geq 3 \end{cases} \quad (1.26)$$

што значи дека тој воопшто не може да следи променлив влез, кој се менува по квадратен закон доколку соодветниот отворен систем има астатизам со понизок ред од 2; системот го следи ваквиот влез со одредено константно отстапување a_0/K_a , кое може да се направи произволно мало преку a_0 и K_a , доколку соодветниот отворен систем има астатизам од втор ред и затворениот систем од слика 1.2 идеално следи параболичен влез кога соодветниот отворен систем има астатизам барем од трет ред. Оттука, бројната вредност на константата K_a се употребува за оценка на квалитетот на поведението на затворениот САУ од слика 1.2 во стационарен режим, кога неговиот отворен систем има астатизам од втор ред.

Во резиме, можат да се дадат следните заклучоци:

- Константите K_p , K_v и K_a го карактеризираат стационарниот режим на еден стабилен затворен систем со единична повратна врска за соодветен влез и ја одредуваат големината на стационарната грешка во системот за тој влез, па, со заедничко име можат да се наречат **константи на стационарната грешка**.

- Константата на положба K_p има конечна вредност $\neq 0$ само кога отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од нулти ред; во сите останати случаи таа има вредност ∞ .
- Брзинска константа K_v има конечна вредност $\neq 0$ само кога отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од прв ред; таа има вредност нула кога отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од нулти ред и бесконечно голема вредност во сите останати случаи.
- Константата на забрзување K_a има конечна вредност $\neq 0$ само кога отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од втор ред; таа има вредност нула кога отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од нулти и прв ред и бесконечно голема вредност во сите останати случаи.
- Константата на положба K_p се употребува како мерка за оценка на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во стационарен режим, кога соодветниот отворен систем има астатизам од нулти ред.
- Брзинската константа K_v се употребува како мерка за оценка на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во стационарен режим, кога соодветниот отворен систем има астатизам од прв ред.
- Константата K_a се употребува за оценка на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во стационарен режим, кога неговиот отворен систем има астатизам од втор ред.
- Стационарната грешка на набљудуваниот затворен систем со единична повратна врска за даден отскочен, линеарен или параболичен влез, зависи обратнопропорционално од соодветната константа на грешка, па истата се намалува кога соодветната константа на грешка расте.

Заклучоците важат за затворени системи со единична повратна врска и даден референтен влез како на слика 1.2 во отсуство на пречки во системот. Случаите на затворени системи со единична негативна повратна врска во кои дејствуваат пречки и затворените системи со неединична повратна врска ќе бидат разгледувани во продолжение.

Погоре добиените резултати и изведените заклучоци за точноста на работата на еден континуален САУ во стационарен режим можат да се прикажат и со табела 1.1.

Нека сега го набљудуваме случајот кога во системот од слика 1.2 постојат и пречките $n(t)$. Стационарната грешка во системот, која се должи на нивното влијание, е дадена со изразот:

$$e_n(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} N(s) \right] \quad (1.27)$$

и ако претпоставиме константни пречки $n(t) = n_0 h(t)$, ќе изнесува:

$$e_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{\frac{1}{G_2(s)} + G_1(s)} \cdot \frac{n_0}{s} \right] = \frac{n_0}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)} = \frac{n_0}{\frac{1}{G_2(0)} + G_1(0)} \quad (1.28)$$

Оттука се гледа дека компонентата на стационарната грешка на затворениот систем од слика 1.2 предизвикана од константни пречки од типот $n(t) = n_0 h(t)$ може да се намалува со зголемување на засилувањето $G_1(0)$ на компонентата $G_1(s)$, или со намалување на засилувањето $G_2(0)$ на компонентата $G_2(s)$. Притоа, под претпоставка, и двете компоненти имаат астатизам од нулти ред.

Табела 1.1. Стационарната грешка на затворениот САУ од слика 1.2 во отсуство на пречки $n(t)$ за различен референтен влез и отворен систем со различен ред на астатизам

влез астатизам	$y(t) = c_0 h(t)$	$y(t) = v_0 t h(t)$	$y(t) = \frac{a_0 t^2}{2} h(t)$
$r = 0$	$e(\infty) = \frac{c_0}{1 + K_p}$	$e(\infty) = \infty$	$e(\infty) = \infty$
$r = 1$	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{v_0}{K_v}$	$e(\infty) = \infty$
$r = 2$		$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{a_0}{K_a}$
$r = 3$		$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = 0$

Ако компонентата $G_1(s)$ има астатизам од произволен ред, стационарната грешка $e_n(\infty)$ ќе биде нулева:

$$e_n(\infty) = \frac{n_0}{\frac{1}{G_2(0)} + \infty} = 0 \quad (1.29)$$

а ако компонентата $G_2(s)$ има астатизам од произволен ред, стационарната грешка $e_n(\infty)$ ќе зависи само од засилувањето $G_1(0)$ на компонентата $G_1(s)$:

$$= \frac{n_0}{\frac{1}{\infty} + G_1(0)} = \frac{n_0}{G_1(0)} \quad (1.30)$$

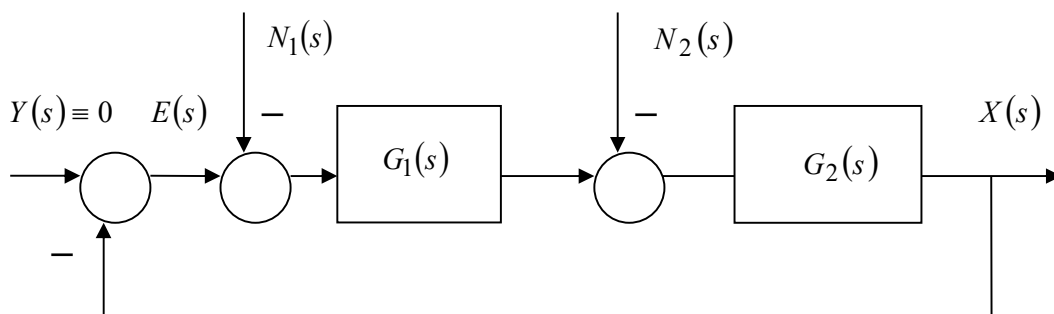
Следствено, во заклучок може да се констатира дека за да се елиминира влијанието на константни пречки од типот $n(t) = n_0 h(t)$ во затворениот систем од слика 1.2, доволно е да се обезбеди компонентата на системот $G_1(s)$ да има астатизам барем од прв ред.

Ако во системот од слика 1.2 додадеме пречки на влезот од блокот $G_1(s)$, ќе го добиеме затворениот систем од слика 1.3. Бидејќи го испитуваме само влијанието на пречките врз стационарниот режим на набљудуваниот затворен систем, можеме да претпоставиме и нулев референтен влез, $y(t) \equiv 0 \forall t$. Тогаш грешката $e(t)$ на овој систем во просторот на L - сликите е дадена со изразот:

$$E(s) = E_n(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)N_1(s) + G_2(s)N_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (1.31)$$

па за нејзината стационарна вредност се добива:

$$e(\infty) = e_n(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_1(s)G_2(s)N_1(s) + G_2(s)N_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (1.32)$$



Слика 1.3. Структурна блок-шема на затворен САУ во кој дејствуваат константни пореметувања $n_1(t)$ и $n_2(t)$

Во согласност со претходните разгледувања, ќе претпоставиме дека набљудуваниот затворен систем е стабилен, дека во системот дејствуваат само константни пречки $n_1(t) = n_{10}h(t)$ и $n_2(t) = n_{20}h(t)$, $n_{10}, n_{20} = const. \in \mathfrak{R}$, и дека блокот $G_2(s)$ претставува статички објект, што значи дека $G_2(0) = K = const. \neq 0$. Тогаш, ако блокот $G_1(s)$ има астатизам од произволен ред, стационарната грешка во системот ќе биде:

$$\begin{aligned}
 e(\infty) = e_n(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_1(s)G_2(s)n_{10} + G_2(s)n_{20}}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_1(s)G_2(s)n_{10}}{1 + G_1(s)G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_2(s)n_{20}}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{n_{10}}{1 + \frac{1}{G_1(s)G_2(s)}} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{n_{20}}{G_1(s) + \frac{1}{G_2(s)}} = \frac{n_{10}}{1 + \frac{1}{\infty}} + \frac{n_{20}}{\infty + \frac{1}{K}} = n_{10}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

што значи дека таа зависи само од пречките $n_1(t)$, додека воопшто не зависи од пречките $n_2(t)$. Со други зборови, астатизмот на блокот $G_1(s)$ во системот од слика 1.3 успешно го елиминира само влијанието на пречките $n_2(t)$, кои дејствуваат на неговиот излез, но не може да го отстрани влијанието на пречките $n_1(t)$, кои дејствуваат на неговиот влез. Оттаму, и астатизмот на блокот $G_2(s)$, нема да овозможи отстранување на влијанието на пречките $n_1(t)$ и $n_2(t)$, бидејќи и двете се јавуваат на неговиот влез, односно пред блокот. Навистина, за $G_1(0) = K = const. \neq 0$ и $G_2(0) = \infty$, за стационарната грешка на системот од слика 1.3 се добива:

$$e(\infty) = e_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{n_{10}}{1 + \frac{1}{KG_2(s)}} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{n_{20}}{K + \frac{1}{G_2(s)}} = \frac{n_{10}}{1 + \frac{1}{\infty}} + \frac{n_{20}}{K + \frac{1}{\infty}} = n_{10} + \frac{n_{20}}{K} \tag{1.34}$$

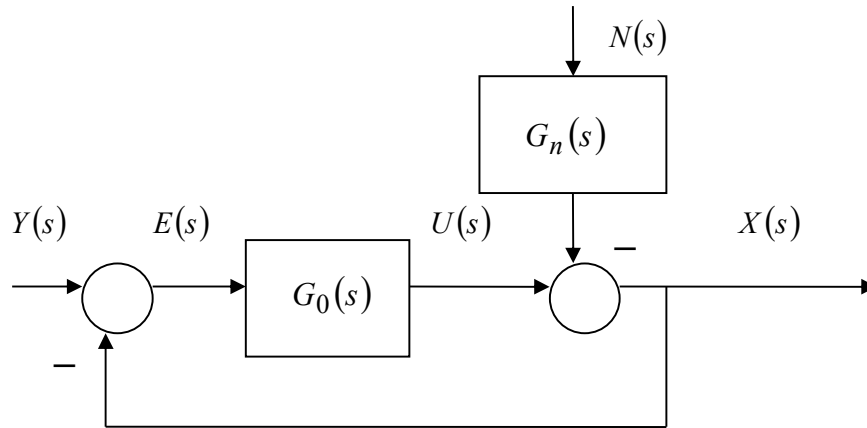
Конечно, ќе го набљудуваме затворениот систем од слика 1.4. Нека, под претпоставка, во него дејствуваат само пречките $n(t)$, кои се од типот на отскочен сигнал:

$$n(t) = n_0h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ n_0, & t \geq 0 \end{cases}; \quad n_0 = const. \in \mathfrak{R} \tag{1.35}$$

Тогаш за стационарната грешка на набљудуваниот систем се добива:

$$e(\infty) = e_n(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_n(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{G_n(s)}{1 + G_0(s)} N(s) \right] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{G_n(s)}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{n_0}{s} \right] = n_0 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_n(s)}{1 + G_0(s)} = n_0 \frac{\lim_{s \rightarrow 0} G_n(s)}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} = n_0 \frac{G_n(0)}{1 + K_p} \quad (1.36)$$



Слика 1.4. Структурна блок-шема на затворен САУ со шум на излезот

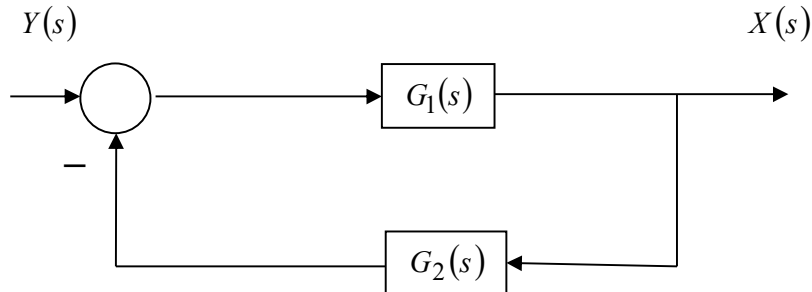
Од изразот (1.36) произлегува дека стационарната грешка $e(\infty)$ зависи како од параметрите и структурата на набљудуваниот систем $G_0(s)$, така и од влијанието на пречките $G_n(s)$; се разбира, $e(\infty)$ зависи и од типот и величината на влезниот сигнал $y(t)$ и пречките $n(t)$. Исто така, од изразот (1.36) следува дека, дури и кога $K_p = \infty$ (соодветниот отворен систем $G_0(s)$ има астатизам барем од прв ред), стационарната грешка $e_n(\infty)$ не мора да биде нулева, затоа што и преносната функција $G_n(s)$ може да има астатизам од одреден ред. Оттука, потребно е да се утврди влијанието на $G_n(s)$ врз $e_n(\infty)$.

Резултатите сумирани во табела 1.1 се изведени и важат само за стабилни затворени континуални САУ со единична повратна врска. За да се применат на пошироката класа стабилни затворени континуални САУ со неединична повратна врска, се набљудува блок-шемата од слика 1.5. Според дефиницијата (1.1), грешката во овој систем е дадена со следниот израз кој важи за комплексното s – подрачје:

$$E(s) = Y(s) - X(s) = Y(s) - G(s)Y(s) = [1 - G(s)]Y(s) \quad (1.37)$$

каде што $G(s)$ е преносната функција на затворениот систем со неединична повратна врска:

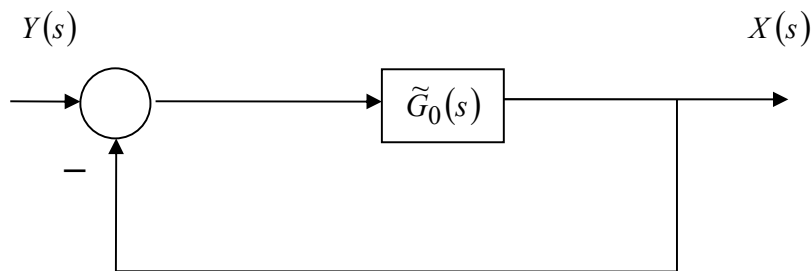
$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (1.38)$$



Слика 1.5. Одредување на константите на грешка кај поширока класа стабилни затворени континуални САУ со неединична повратна врска

За да ги дефинираме константите на грешка на сличен начин како и кај затворените системи со единична повратна врска, системот од слика 1.5 ќе го замениме со еквивалентниот систем од слика 1.6, чијашто грешка во комплексното s – подрачје е дадена со изразот:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \tilde{G}_0(s)} Y(s) \quad (1.39)$$



Слика 1.6. Еквивалентен систем на затворениот систем од слика 1.5

Од претпоставката за еквивалентност на системите од слика 1.5 и слика 1.6 следува дека изразите (1.37) и (1.39) се еквивалентни, па, оттука, непосредно се добива:

$$\frac{1}{1 + \tilde{G}_0(s)} Y(s) = [1 - G(s)] Y(s)$$

$$\frac{1}{1 + \tilde{G}_0(s)} = 1 - G(s)$$

$$\frac{1}{1 - G(s)} = 1 + \tilde{G}_0(s)$$

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{1}{1 - G(s)} - 1$$

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} \quad (1.40)$$

Со други зборови, еквивалентниот затворен систем со единична негативна повратна врска од слика 1.6 за набљудуваниот затворен систем со неединична негативна повратна врска од слика 1.5, ќе има преносна функција на соодветниот отворен систем $\tilde{G}_0(s)$ дадена со изразот (1.40). Сега константите на грешка за системот од слика 1.5 можат да се дефинираат преку неговиот еквивалентен систем од слика 1.6 на веќе изложениот начин. Така, константата на положба за системот од слика 1.5 ќе биде дадена со изразот:

$$\tilde{K}_p = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{G}_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{1 - G(s)} \quad (1.41)$$

а неговата стационарна грешка за единичен отскочен влез ќе биде:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + \tilde{K}_p} \quad (1.42)$$

Брзинската константа за системот од слика 1.5 се определува според изразот:

$$\tilde{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{G}_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{G(s)}{1 - G(s)} \right] \quad (1.43)$$

додека неговата стационарна грешка за единичен линеарно растечки влез изнесува:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{\tilde{K}_v} \quad (1.44)$$

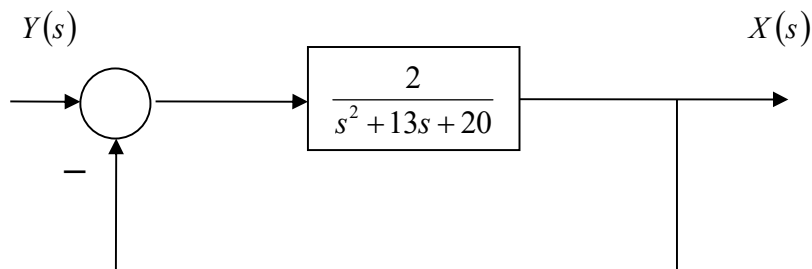
Конечно, константата на забрзување за системот од слика 1.5 е дадена со формулата:

$$\tilde{K}_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \tilde{G}_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left[\frac{G(s)}{1 - G(s)} \right] \quad (1.45)$$

а неговата стационарна грешка за единичен параболичен влез се пресметува според изразот:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{\tilde{K}_a} \quad (1.46)$$

Пример 1.1. Да се определи стационарната грешка на затворениот систем од слика 1.7 за единичен отскочен влез.



Слика 1.7. Илустрација кон примерот 1.1

Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$G_0(s) = \frac{2}{s^2 + 13s + 20} \quad (1.47)$$

па, за неговата константа на положба се добива:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^2 + 13s + 20} = 0.1 \quad (1.48)$$

Оттука и од (1.16), стационарната грешка на набљудуваниот затворен систем ќе изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{10}{11} \quad (1.49)$$

Резултатот може да се провери, на пример, ако се пресмета одзивот на набљудуваниот затворен систем на заддениот единичен отскочен влез:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{2}{s^2 + 13s + 22} = \frac{2}{(s+2)(s+11)}$$

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+11)} = \frac{1}{11s} - \frac{1}{9(s+2)} + \frac{2}{99(s+11)}$$

$$x(t) = \frac{1}{11} - \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{2}{99}e^{-11t}, t \geq 0 \quad (1.50)$$

и потоа се одреди неговата грешка:

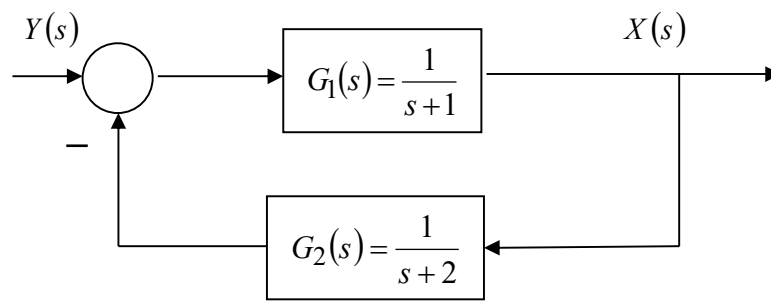
$$e(t) = y(t) - x(t) = 1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{2}{99}e^{-11t} = \frac{10}{11} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{2}{99}e^{-11t}, t \geq 0 \quad (1.51)$$

Оттука:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{10}{11} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{2}{99}e^{-11t} \right) = \frac{10}{11} \quad (1.52)$$

Резултатот (1.52) е идентичен со резултатот (1.49), што можеше и да се очекува. \square

Пример 1.2. Да се определи константата на положба и стационарната грешка на затворениот систем од слика 1.8 за единичен отскочен влез.



Слика 1.8. Илустрација кон примерот 1.2

Преносната функција на набљудуваниот затворен систем е:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 3} \quad (1.53)$$

а преносната функција на соодветниот отворен систем од еквивалентниот затворен систем со единична негативна повратна врска ќе биде:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s+2}{(s+1)^2} \quad (1.54)$$

Следствено, за неговата константа на положба се добива:

$$\tilde{K}_p = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{G}_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s^2 + 2s + 1} = 2 \quad (1.55)$$

Оттука, стационарната грешка на набљудуваниот затворен систем од слика 1.8 ќе изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + \tilde{K}_p} = \frac{1}{3} \quad (1.56)$$

Резултатот може да се провери, на пример, ако се пресмета одзивот на набљудуваниот затворен систем на зададениот единичен отскочен влез:

$$X(s) = G(s)Y(s) = \frac{s+2}{s(s^2+3s+3)} \quad (1.57)$$

и потоа се одреди неговата грешка:

$$E(s) = [1 - G(s)]Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s(s^2 + 3s + 3)} \quad (1.58)$$

Оттука:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} s \frac{s^2 + 2s + 1}{s(s^2 + 3s + 3)} = \frac{1}{3} \quad (1.59)$$

Резултатот (1.59) е идентичен со резултатот (1.56), што можеше и да се очекува. □

1.2. ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН КОНТИНУАЛЕН САУ ВО ПРЕОДЕН РЕЖИМ

Карактерот на преодниот процес во еден систем зависи од неговите динамички својства: брзината на одзив и степенот на релативна стабилност. Оценката на овие својства се врши врз основа на бројните вредности на параметрите на системот кои го карактеризираат неговиот одзив на типична влезна возбуда – најчесто отскочен или простопериодичен сигнал. Со други зборови, динамичките својства на еден систем можат да се утврдат врз основа на неговиот отскочен или фреквенциски одзив.

Нека се набљудува затворениот САУ од слика 1.9 на чиј влез, под претпоставка, дејствува простопериодичен сигнал $y(t)$ од облик:

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_1) h(t) \quad (1.60)$$

Преносната функција на овој систем е:

$$G(s) = \frac{R(s)P(s)}{1 + R(s)P(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (1.61)$$

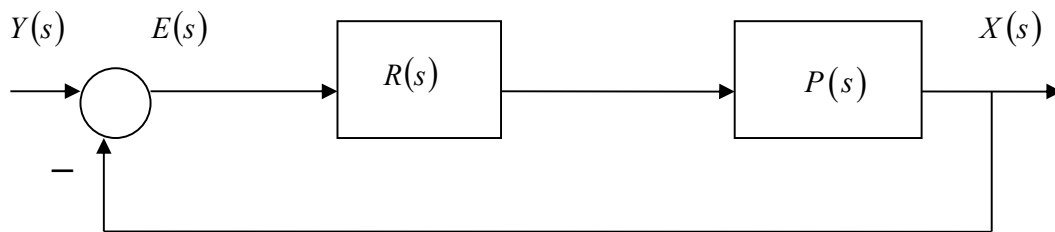
каде што со $G_0(s) = R(s)P(s)$ е означена преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем.

Ако набљудуваниот затворен САУ од слика 1.9 е стабилен, неговиот стационарен одзив на влезот (1.60) ќе биде ист таков простопериодичен сигнал, само со различна амплитуда и фаза:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi_2)h(t) \quad (1.62)$$

при што односот на амплитудите Y и X е даден со изразот:

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \left| \frac{G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right| \quad (1.63)$$



Слика 1.9. Структурна блок-шема на типичен затворен САУ

а фазната разлика $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ со изразот:

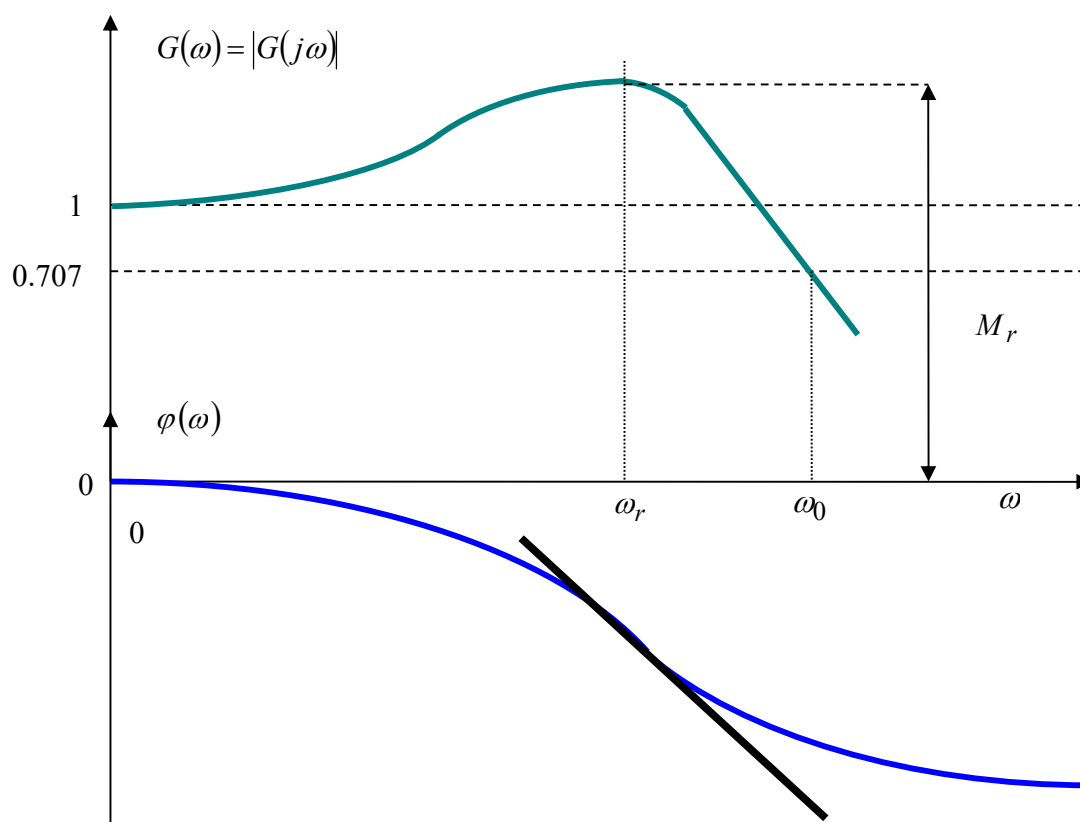
$$\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)] = \arctg \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \quad (1.64)$$

Равенките (1.63) и (1.64) ја претставуваат **амплитудната и фазната фреквенциска карактеристика** на набљудуваниот затворен САУ, соодветно, и тие носат целосна информација за неговите динамички својства. Бидејќи и двете се реални функции од фреквенцијата ω , можат графички да се претстават како што е тоа сторено на слика 1.10. Параметрите M_r , ω_r , ω_0 и T_d , кои го одредуваат изгледот на фреквенциските карактеристики од слика 1.10, се користат за оценка на брзината на одзив на набљудуваниот систем, неговите карактеристики како филтер и квалитетот на репродукција на влезните сигнали. Тие се дефинираат на следниот начин:

M_r – вредност на максимумот на амплитудно-фреквенциската карактеристика на затворениот систем:

$$M_r = \max_{\omega \geq 0} |G(j\omega)| = \max_{\omega \geq 0} G(\omega) \quad (1.65)$$

Се нарекува уште **резонантен врв** и се користи за оценка на степенот на релативна стабилност (резерва на стабилност) на набљудуваниот систем.



Слика 1.10. Типичен изглед на фреквенциските карактеристики на затворениот САУ од слика 1.9

ω_r – **резонантна фреквенција**. Се дефинира како фреквенција при која настапува резонантниот врв M_r и служи за оцена на резервата на стабилност на набљудуваниот систем.

ω_0 – **пропусен опсег**. Понекогаш, кога амплитудно-фреквенциската карактеристика $G(\omega)$ има резонантен врв, ω_0 се дефинира како фреквенција при која карактеристиката $G(\omega)$ повторно поприма вредност 1 по резонантниот врв. Меѓутоа, најчесто ω_0 се дефинира како фреквенција при која амплитудно фреквенциската карактеристиката $G(\omega)$ поприма вредност 0.707 или $-3dB$. Фреквенцијата ω_0 ја одредува широчината на пропусниот опсег на набљудуваниот систем, од којашто зависат неговите филтерски својства и брзината на одсив. Може да се покаже дека брзината на одсив на еден систем е директно пропорционална со големината на неговиот пропусен опсег. Што се однесува до филтерските карактеристики на системот, треба да се има на ум дека пречките и шумовите што го напаѓаат системот често имаат фреквенциски спектари концентрирани на многу тесен опсег фреквенции. Следствено, ако системот има соодветни филтерски својства, кои го спречуваат

преносот на сигнали токму во опсегот фреквенции во кој дејствуваат шумовите, а го овозможуваат надвор од тој опсег, тој ќе биде во состојба да го отстрани влијанието на пречките и шумовите врз управуваната променлива.

T_d – **време на доцнење**. Се дефинира како наклон на фазната фреквенциска карактеристика на набљудуваниот систем:

$$T_d = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (1.66)$$

и служи како мерка за инерцијата односно брзината на одсив на системот. За квалитетна репродукција на влезните сигнали, фазно-фреквенциската карактеристика $\varphi(\omega)$ треба да биде линеарна функција од ω на целиот опсег од фреквенцискиот спектар на влезниот сигнал.

Селективност. Се дефинира како величина на наклонот на амплитудно фреквенциската карактеристика $G(\omega)$ во околина на фреквенцијата ω_0 и служи како мерка за способноста на системот да ги елиминира пречките и шумовите, чиј фреквенциски спектар паѓа во доменот фреквенции непосредно на или зад ω_0 . Селективноста секогаш може да се изрази како целоброен производ од факторот $-20dB/dec$. Така селективноста може да изнесува $-20dB/dec$, $-40dB/dec$ итн.

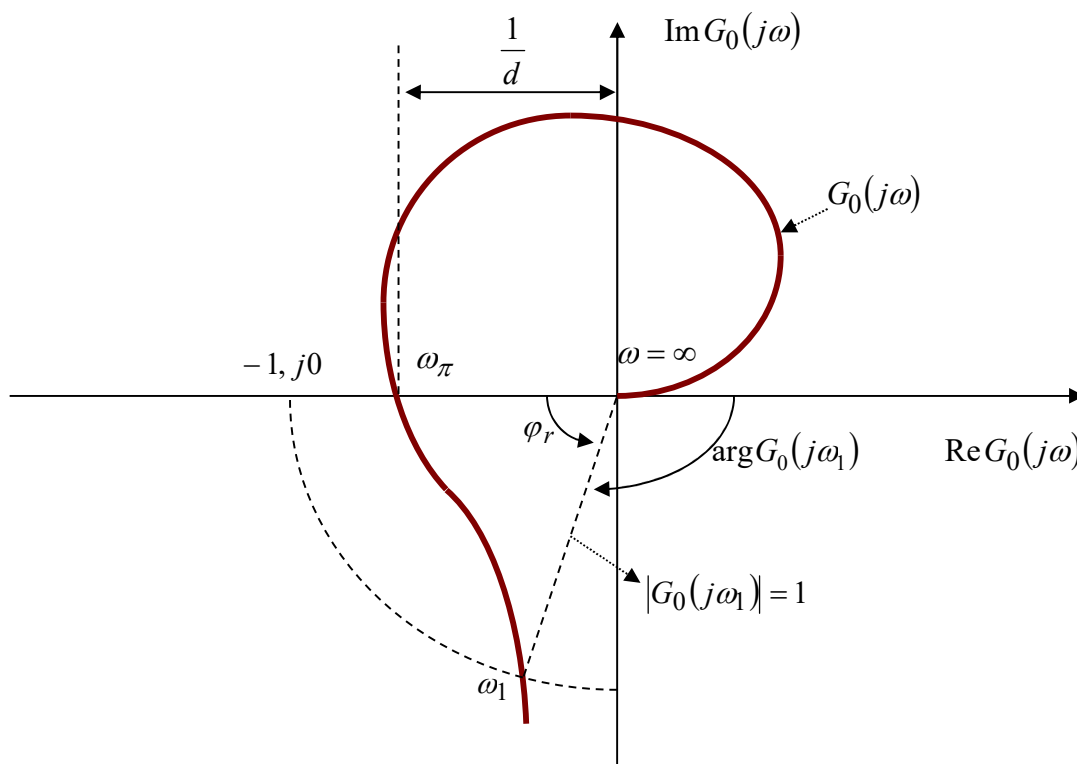
За оценка на степенот на релативна стабилност, односно резервата на стабилност на системот од слика 1.9, наместо фреквенциските карактеристики на самиот затворен систем, многу често се користи фреквенциската карактеристика на соодветниот отворен систем $G_0(s)$. Една таква карактеристика $G_0(j\omega)$ е прикажана на слика 1.11.

Фреквенциската карактеристика $G_0(j\omega)$ уште се нарекува **Најквистова крива** и служи за оценка на стабилноста на затворениот систем. Така, под претпоставка на стабилен отворен систем, набљудуваниот затворен систем ќе биде стабилен доколку критичната точка $(-1, j0)$ се наоѓа надвор од карактеристиката $G_0(j\omega)$. Колку критичната точка $(-1, j0)$ е подалеку од карактеристиката $G_0(j\omega)$, толку затворениот систем ќе биде постабилен. Како мерка за оддалеченоста на затворениот систем од неговата граница на стабилност се користат параметрите d и φ_r , кои се дефинираат на следниот начин:

φ_r - **резерва на фаза**. Ако со ω_1 се означи фреквенцијата за која $|G_0(j\omega_1)| = 1$, резервата на фаза φ_r може да се претстави со збир од аргументот на $G_0(j\omega_1)$ и 180° :

$$\varphi_r = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] \text{ во степени} \quad (1.67)$$

при што ω_1 се нарекува **пресечна фреквенција на засилување**. Кај стабилните системи резервата на фаза е позитивен агол, кај нестабилните е негативен. Ако $\varphi_r = 0$, системот е на граница на стабилност. Еден систем ќе има дотолку поголема резерва на стабилност, доколку φ_r е поголемо.



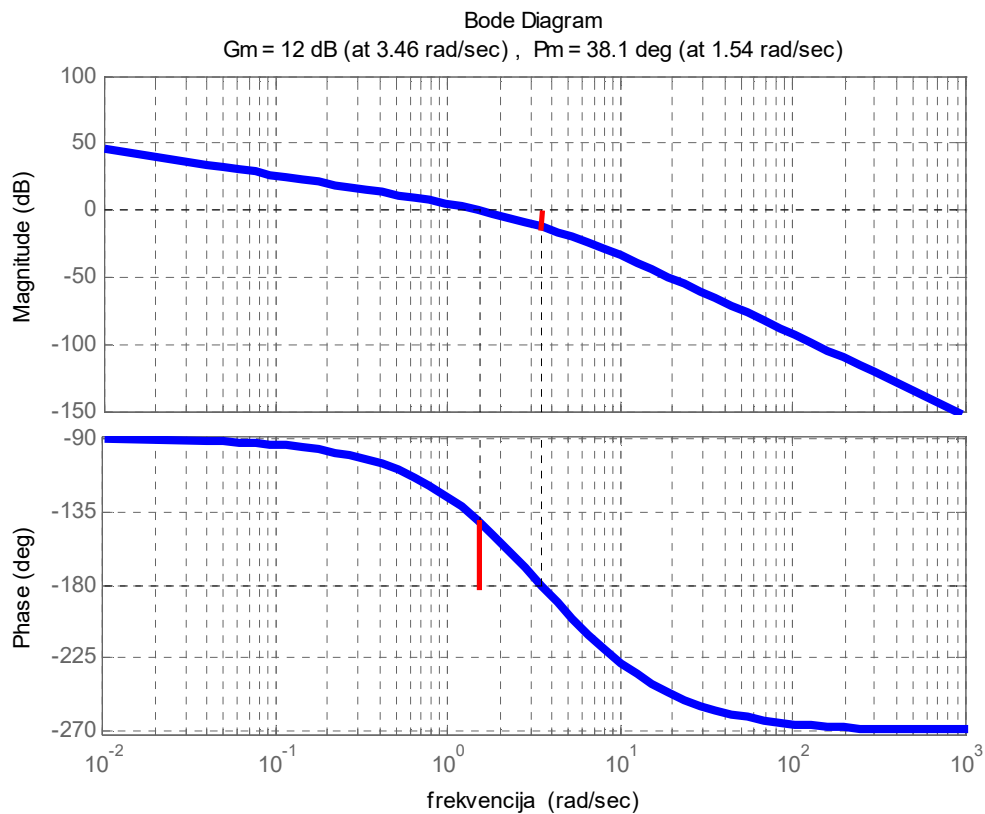
Слика 1.11. Илустрација на резервите на засилување и фаза

d - **резерва на засилување**. Ако со ω_π се означи фреквенцијата за која $\arg[G_0(j\omega_\pi)] = \pi$, резервата на засилување d може да се претстави како реципрочна вредност од модулот на фреквенциската преносна функција $G_0(j\omega)$ за $\omega = \omega_\pi$:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} \quad (1.68)$$

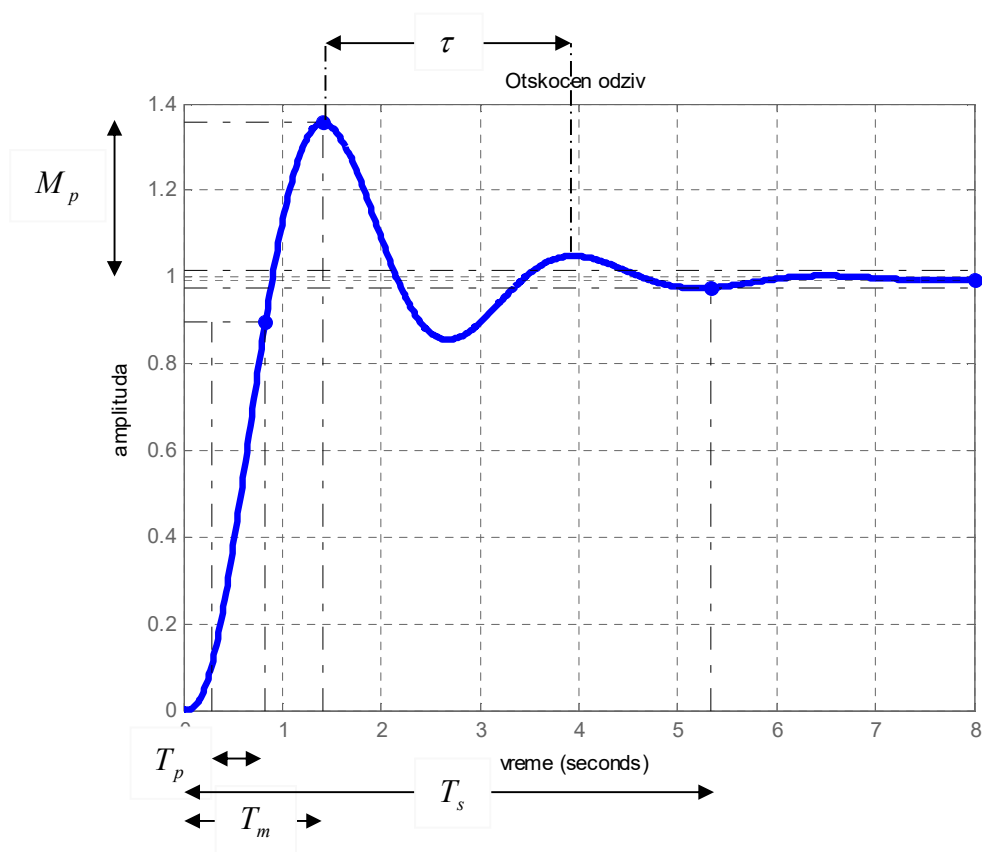
при што ω_π се нарекува **пресечна фреквенција на фаза**. Кај стабилните системи $d > 1$, додека кај нестабилните $d < 1$. Ако $d = 1$, системот се наоѓа на границата на стабилност. Резервата на стабилност на еден систем е дотолку поголема, доколку d е поголемо од 1.

На слика 1.12 се прикажани Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем за даден затворен систем. Пресечната фреквенција на засилување ω_1 е онаа фреквенција, при која Бодевите дијаграма на слабеење на отворениот систем ја сече ω -оската, додека пресечна фреквенција на фаза е онаа фреквенција при која Бодевите дијаграма на фаза на отворениот систем ја сече правата $\varphi = -180^\circ$. Резервата на засилување покажува за колку може да се подигне дијаграмот на слабеење на отворениот систем (за колку може да се зголеми неговиот коефициент на засилување K), а затворениот систем да остане стабилен. Резервата на фаза покажува за колку може да се спушти дијаграмот на фаза на отворениот систем, а затворениот систем да остане стабилен. Тоа значи дека ако $20\log G_0(j\omega_\pi) > 0$ или ако $\arg[G_0(j\omega_1)] < -180^\circ$, системот сигурно ќе биде нестабилен.



Слика 1.12. Дефиниција на резервите на стабилност на еден затворен систем преку Бодевите дијаграми на соодветниот отворен систем

Динамичките својства на системот од слика 1.9 во временско подрачје најдобро се опишуваат преку параметрите τ , M_p , T_p , T_d , T_s , T_g и T_m , кои го одредуваат неговиот отскочен одзив. Еден таков типичен одзив е прикажан на слика 1.13.



Слика 1.13. Типичен отскочен одзив на затворениот САУ од слика 1.9

τ - **период на осцилациите** во отскочниот одзив. Се дефинира како временско растојание помеѓу два соседни максимуми во отскочниот одзив.

M_p – максимален **прескок на отскочниот одзив**. Се дефинира како разлика помеѓу првиот максимум $x(T_m)$ и стационарната вредност $x(\infty)$ на отскочниот одзив на системот:

$$M_p = \frac{x(T_m) - x(\infty)}{x(\infty)} \% \quad (1.69)$$

Најчесто се изразува во % од стационарната вредност на одзивот и служи за одредување на динамичката грешка на системот (грешката во преоден режим), односно како мерка за точноста на работата на системот во преоден режим. Исто така се користи како мерка за степенот на релативна стабилност на системот.

T_p – **време на пораст на отскочниот одзив**. Се дефинира како време потребно отскочниот одзив на системот да порасне од 10% на 90% од својата стационарна

вредност. Величината на овој параметар ја карактеризира брзината на одсив на системот, како и неговата способност за што поверна репродукција на влезните сигнали. Притоа, што е поголемо времето на пораст T_p , тоа се поголеми изобличувањата на влезните сигнали. Кај системите со прескок помал од 10 % важи една битна и многу едноставна емпириска релација помеѓу времето на пораст и ширината на пропусниот опсег ω_0 , изразена во Херци:

$$T_p f_0 = 0.30 \div 0.40 \quad (1.70)$$

T_m – **време на настанување на максималниот прескок на отскочниот одсив**. Тоа е времето на појава на максималниот прескок во отскочниот одсив на набљудуваниот систем и, како и времето на пораст на отскочниот одсив T_p , служи за оценка на брзината на одсив на системот. Се разбира, доколку отскочниот одсив е апериодичен, времето T_m не е дефинирано, па тогаш за оценка на брзината на одсив на набљудуваниот систем се користи времето на пораст на одсивот T_p .

T_d - **време на доцнење**. Тоа е времето потребно отскочниот одсив да достигне половина од својата стационарна вредност. Величината на овој параметар покажува со колкаво задоцнување по моментот на возбудување на системот на неговиот излез ќе се појави значителен сигнал и, следствено, служи како мерка за брзината на одсив на системот.

T_s – **време на смирување на отскочниот одсив**. Тоа е времето потребно отстапувањето на амплитудата на отскочниот одсив од неговата стационарна вредност да стане помало од однапред зададена вредност, на пример, под 2 % или 5 % од вредноста на одсивот во стационарен режим. Се користи за оценка на точноста на работа на набљудуваниот систем во преоден режим исто како и максималниот прескок. За практични цели, преодниот процес во набљудуваниот систем може да се занемари по времето T_s .

T_g – **доминантна временска константа** на системот. Се дефинира како време потребно амвелопата на амплитудите од преодниот процес да опадне на 37 % од својата почетна вредност. Како и времето на смирување T_s , се користи за оценка на времетраењето на преодниот режим. Кај стабилните линеарни динамички системи од прв и втор ред амплитудите на преодниот процес исчезнуваат по експоненцијален закон одреден со членот $e^{-\sigma t}$, $\sigma > 0$. Тогаш, доминантната временска константа кај овие системи се одредува како времето за кое експонентот $\sigma \cdot t$ ќе биде еднаков на 1, па:

$$T_g = \frac{1}{\sigma} \quad (1.71)$$

Кај системите од повисок ред T_g се проценува врз основа на положбата од доминантните полови на системот во s – комплексната рамнина. Доминантни полови за еден систем од повисок ред се оние полови кои имаат доминантно влијание врз преодниот одзив на системот (компонента на одзивот на системот која го карактеризира неговиот преоден режим на работа), а тоа е конјугирано-комплексниот пар полови од преносната функција на системот, кои се наоѓаат најблизу до имагинарната оска во s – комплексната рамнина. Нивната положба во s – рамнината е определена со непридушваната фреквенција на системот ω_n и факторот на релативно придушвање ζ , па во ваков случај:

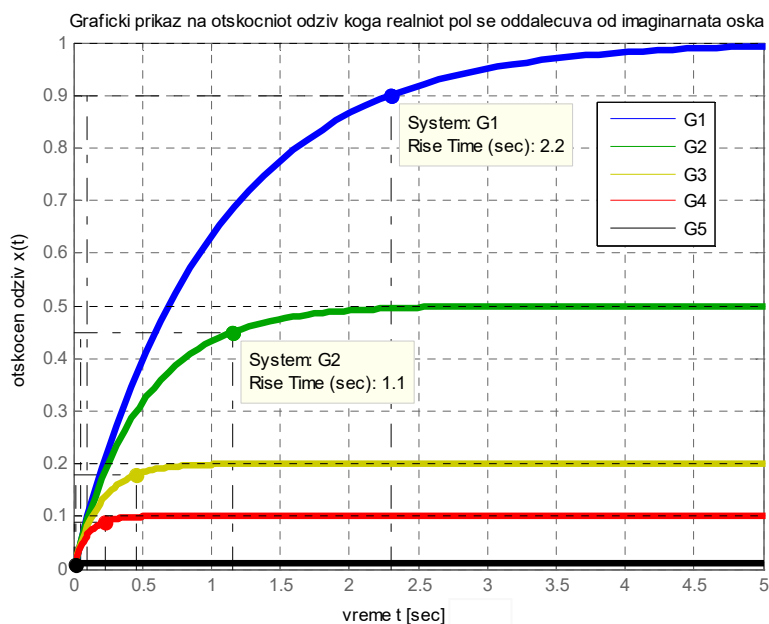
$$T_g = 1/(\zeta\omega_n) \quad (1.72)$$

Пример 1.3. Да се испита влијанието на положбата на единствениот реален пол на стабилен динамички систем од прв ред без конечни нули врз неговиот отскочен одзив.

Решение: Еден стабилен динамички систем од прв ред без конечни нули е опишан со следната преносна функција:

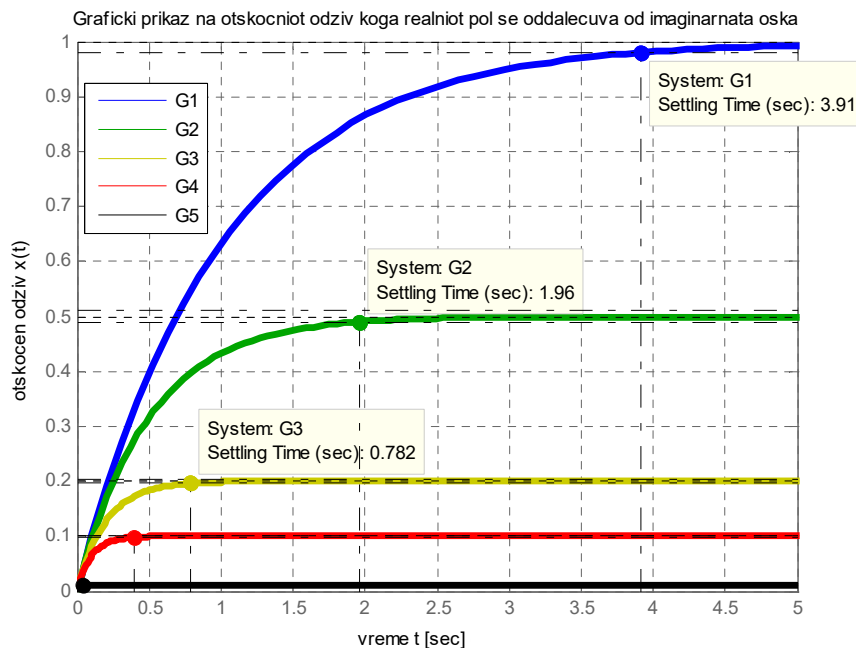
$$G(s) = \frac{1}{s+a}, a > 0 \quad (1.73)$$

За да се испита влијанието на положбата на единствениот реален пол на овој систем врз неговиот отскочен одзив, се набљудуваат следните пет случаи, кога системот има негативен реален пол во точките: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -5$, $s_4 = -10$ и $s_5 = -100$. Резултатот е прикажан на слика 1.14 и слика 1.15.



Слика 1.14. Времето на пораст на отскочниот одзив на системот од пример 1.3 за различно a

Од слика 1.14 се гледа дека со оддалечувањето на полот $s = -a$ од имагинарната оска, времето на пораст на отскочниот одзив се намалува и се зголемува неговата брзина на одзив. Истото може да се каже и за времето на смирување на отскочниот одзив од слика 1.15. Ова се должи на фактот дека со оддалечувањето на полот од имагинарната оска, се намалува неговото влијание врз одзивот на системот. Бидејќи системот е аperiodичен, не постои максимален прескок во неговиот одзив.



Слика 1.15. Времето на смирување на отскочниот одзив на системот од пример 1.3 за различно a □

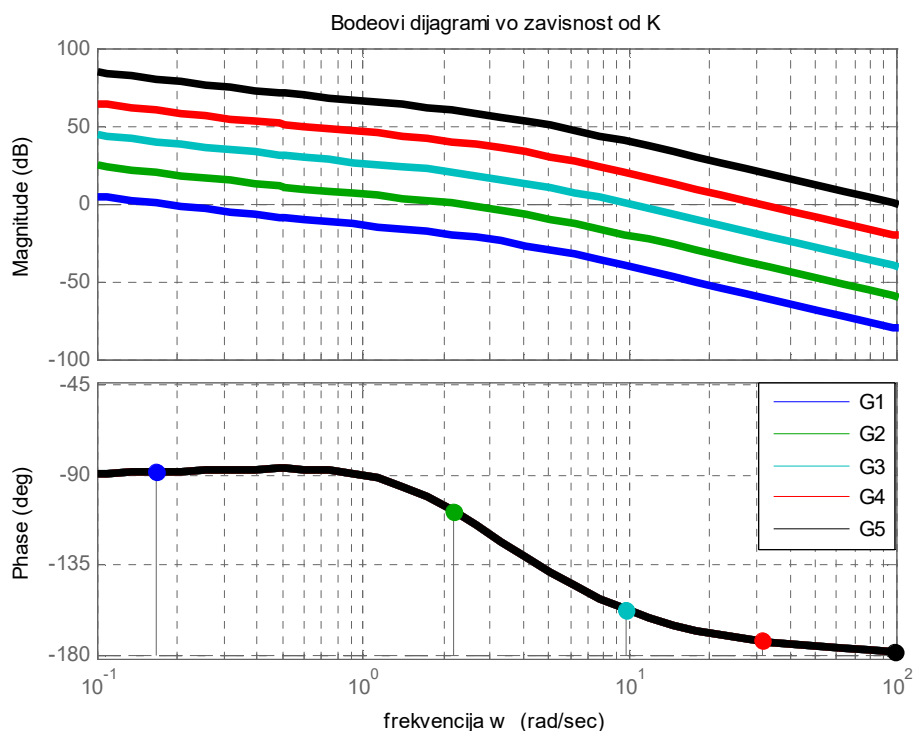
Пример 1.4. Даден е затворен динамички систем од трет ред со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad (1.74)$$

Да се испита влијанието на големината на коефициентот на засилување K на отворениот систем, врз резервата на стабилност на затворениот систем. За таа цел да се разгледаат случаите кога: $K = 1, 10, 100, 1000$.

Решение: Бодевите дијаграми на отворениот систем за различните вредности на K се прикажани на слика 1.16. Од неа може да се констатира дека со зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем, се менува само неговиот дијаграм на слабеење, додека дијаграмот на фаза останува непроменет. Притоа, дијаграмот на слабеење се подига, а со тоа се зголемува пресечната фреквенција на засилување и се

намалува резервата на фаза на затворениот систем. Обратно, со намалување на коефициентот на засилување на отворениот систем, ќе се спушта неговиот дијаграм на слабеење, а со тоа ќе се намалува пресечната фреквенција на засилување и ќе се зголемува резервата на фаза на затворениот систем.



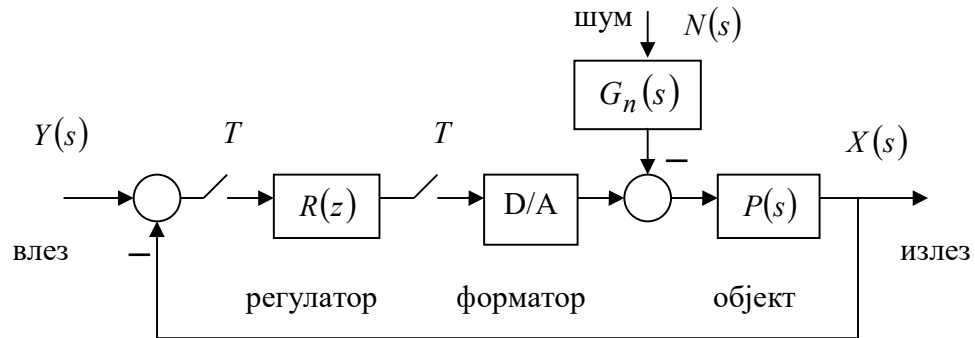
Слика 1.16. Бодеови дијаграми на системот од пример 1.4 во зависност од K □

1.3. ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ДИСКРЕТЕН САУ ВО СТАЦИОНАРЕН РЕЖИМ

За квалитетот на поведението на еден дискретен систем на автоматско управување (ДСАУ) во стационарен режим има смисол да се говори само доколку тој е стабилен. Тогаш карактерот на поведението на набљудуваниот систем во стационарен режим е одреден со редот на астатизам на соодветниот отворен систем во однос на влезниот сигнал, а се оценува преку стационарната вредност на сигналот на грешката во системот.

На слика 1.17 е прикажана структурната блок-шема на еден типичен затворен ДСАУ со референтен влез $y(t)$, излез $x(t)$ и пречки $n(t)$. Z – сликата $E(z)$ на сигналот $e(t)$ во овој систем е:

$$E(z) = Y(z) - X(z) = \frac{1}{1 + R(z)P(z)} Y(z) + \frac{PG_n N(z)}{1 + R(z)P(z)} \quad (1.75)$$



Слика 1.17. Структурна блок-шема на типичен затворен ДСАУ со референтен влез $y(t)$ и пречки $n(t)$

каде што:

$$P(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right\} \quad (1.76)$$

и:

$$PG_nN(z) = Z \{ G_n(s)P(s)N(s) \} \quad (1.77)$$

а нејзината трајна вредност е:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1 + R(z)P(z)} Y(z) + \frac{PG_nN(z)}{1 + R(z)P(z)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1 + R(z)P(z)} Y(z) \right] + \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{PG_nN(z)}{1 + R(z)P(z)} \right] = \\ &= e_y(\infty) + e_n(\infty) \end{aligned} \quad (1.78)$$

Нека, најнапред се набљудува стационарното поведение на системот од слика 1.17 во отсуство на пречки и шумови, $n(t) \equiv 0 \forall t$, и кога на неговиот влез дејствуваат типични влезни сигнали: отскочен, линеарно растечки и параболичен.

¹⁾ $P(z)$ е дискретната преносна функција на континуалниот објект $P(s)$, во која е вклучен и форматор од нулти ред.

Кога референтниот влез $y(t)$ е Хевисајдова функција од облик (1.11) со Z – слика:

$$Y(z) = \frac{c_0 z}{z-1}, \quad |z| > 1 \quad (1.79)$$

за сигналот на грешката $e(t)$ во стационарен режим се добива:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= e_y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_y(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+R(z)P(z)} Y(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} \cdot \frac{c_0 z}{z-1} \right] = \\ &= \frac{c_0}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z)} = \frac{c_0}{1 + K_p} \end{aligned} \quad (1.80)$$

каде што $G_0(z) = R(z)P(z)$ е дискретната преносна функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем.

Граничната вредност:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) \quad (1.81)$$

се нарекува **константа на положба** на дискретниот систем и нејзината вредност зависи од редот на астатизам на соодветниот отворен систем:

$$G_0(z) = K \frac{D(z)}{(z-1)^r C(z)}; \quad K = \frac{b_p}{a_q} \quad (1.82)$$

Ако отворениот систем $G_0(z)$ има астатизам од нулти ред ($r = 0$) во однос на влезниот сигнал (1.79), константата на положба K_p ќе има константна конечна вредност $\neq 0$,

па затворениот систем $G(z) = \frac{G_0(z)}{1+G_0(z)}$ ќе го следи отскочниот референтен влез со

одредена произволно мала константна грешка $e(\infty) = \frac{c_0}{1+K_p}$. Само ако отворениот

систем $G_0(z)$ има астатизам од некој ред ($r \geq 1$), затворениот систем $G(z)$ ќе може идеално да го следи отскочниот референтен влез (1.79). Со други зборови:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{D(z)}{(z-1)^r C(z)} = \begin{cases} K_p, r = 0 \\ \infty, r \geq 1 \end{cases} \quad (1.83)$$

и:

$$e_y(\infty) = \frac{c_0}{1+K_p} = \begin{cases} \frac{c_0}{1+K_p}, & r=0 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (1.84)$$

Кога на влезот од системот од слика 1.17 се доведе променлив влезен сигнал со константна брзина на промена v_0 од облик (1.17), со Z – слика:

$$Y(z) = \frac{v_0 z T}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1 \quad (1.85)$$

за неговата стационарна грешка $e(\infty)$ се добива:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= e_y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_y(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+R(z)P(z)} Y(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} \cdot \frac{v_0 T z}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \frac{v_0 T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z)} = \frac{v_0 T}{K_v} \end{aligned} \quad (1.86)$$

Граничната вредност:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) \quad (1.87)$$

се нарекува **брзинска константа** на набљудуваниот дискретен систем и таа зависи од редот на астатизам на отворениот систем $G_0(z)$:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{D(z)}{(z-1)^{r-1} C(z)} = \begin{cases} 0, & r=0 \\ K_v, & r=1 \\ \infty, & r \geq 2 \end{cases} \quad (1.88)$$

Следствено, грешката (1.86) ќе биде:

$$e_y(\infty) = \frac{v_0 T}{K_v} = \begin{cases} \infty, & r=0 \\ \frac{v_0 T}{K_v}, & r=1 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases} \quad (1.89)$$

Од изразот (1.89) непосредно следува дека затворениот ДСАУ од слика 1.17 нема да биде во состојба да го следи референтниот влез (1.17) кој се менува со константна брзина, доколку соодветниот отворен систем има астатизам од нулти ред; кога отворениот систем $G_0(z)$ има астатизам од прв ред, излезот на набљудуваниот затворен ДСАУ го следи линеарниот референтен сигнал со одредена константна грешка – оваа грешка е толку помала колку што е брзинската константа на системот поголема; конечно, за отворен систем со астатизам од најмалку втор ред, излезот на затворениот дискретен систем идеално го следи референтниот влез со константна брзина на промена.

Ако на влезот од затворениот ДСАУ на слика 1.17 се доведе параболичен референтен сигнал од облик (1.22), со Z – слика:

$$Y(z) = \frac{a_0 z T^2 (z+1)}{2(z-1)^3}, \quad |z| > 1 \quad (1.90)$$

неговата стационарна грешка $e(\infty)$ ќе биде:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= e_y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_y(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+R(z)P(z)} Y(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} \cdot \frac{a_0 T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \right] = \\ &= \frac{a_0 T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z)} = \frac{a_0 T^2}{K_a} \end{aligned} \quad (1.91)$$

Граничната вредност:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z) \quad (1.92)$$

се нарекува **константа на забрзување** на набљудуваниот дискретен систем и таа зависи од редот на астатизам на отворениот систем $G_0(z)$:

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{D(z)}{(z-1)^{r-2} C(z)} = \begin{cases} 0, & r \leq 1 \\ K_a, & r = 2 \\ \infty, & r \geq 3 \end{cases} \quad (1.93)$$

Бидејќи за отворени системи со астатизам од нулти и прв ред K_a има вредност нула, во затворениот дискретен систем од слика 1.17 практично не се воспоставува

стационарен режим кога на неговиот влез дејствува параболичен референтен сигнал – амплитудата на сигналот на грешка расте со тек на времето и излезот на системот (управуваната променлива) не е во состојба да го следи доведениот закон на промена кој се менува со константно забрзување. Ако во отворениот систем се вгради астатизам од втор ред, константата на забрзување K_a ќе има константна конечна вредност и затворениот систем ќе го следи влезниот сигнал во стационарен режим со одредено константно отстапување. Набљудуваниот затворен ДСАУ од слика 1.17 идеално ќе следи параболичен референтен влез, само доколку соодветниот отворен систем има астатизам барем од трет ред. Со други зборови:

$$e_y(\infty) = \frac{a_0 T^2}{K_a} = \begin{cases} \infty, & r \leq 0 \\ \frac{a_0 T^2}{K_a}, & r = 2 \\ 0, & r \geq 3 \end{cases} \quad (1.94)$$

Поведението на затворениот ДСАУ од слика 1.17 во стационарен режим за трите референтни влезови е прикажано во табела 1.2.

Табела 1.2. Стационарната грешка на затворениот ДСАУ од слика 1.17 во отсуство на пречките $n(t)$ за различен референтен влезен сигнал и отворен систем со различен ред на астатизам

влез астатизам	$y(t) = c_0 h(t)$	$y(t) = v_0 t h(t)$	$y(t) = \frac{a_0 t^2}{2} h(t)$
$r = 0$	$e(\infty) = \frac{c_0}{1 + K_p}$	$e(\infty) = \infty$	$e(\infty) = \infty$
$r = 1$	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{v_0 T}{K_v}$	$e(\infty) = \infty$
$r = 2$		$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{a_0 T^2}{K_a}$
$r = 3$		$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = 0$

Како што може да се забележи од табелата 1.2, со зголемување на редот на астатизам на соодветниот отворен систем, се зголемува точноста на работа на набљудуваниот

затворен дискретен систем во стационарен режим и неговата способност да следи брзопроменливи референтни влезни сигнали. Оттаму се наметнува првобитниот (погрешен) заклучок дека при проектирањето на затворени ДСАУ треба да се настојува соодветниот отворен систем да има астатизам од што е можно повисок ред. Меѓутоа, во пракса многу ретко се проектираат системи со астатизам чиј ред е повисок од два. Ова се должи на фактот дека повеќекратните полови на отворениот систем во точката $z = 1$, чија кратност е поголема од 2, значително ја загрозуваат или дури оневозможуваат стабилноста на затворениот систем.

Нека, во продолжение, се набљудува затворениот ДСАУ од слика 1.17 во отсуство на референтен влез, $y(t) \equiv 0 \forall t$, кога во него дејствуваат само пречките $n(t)$. Стационарната грешка $e(\infty)$ на системот во овој случај е:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= e_n(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_n(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_n(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_n(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{PG_nN(z)}{1 + R(z)P(z)} \right] \end{aligned} \quad (1.95)$$

и таа зависи како од сигналот на шумот $n(t)$ и вкупната преносна функција $G_n(s)P(s)$ помеѓу сигналот на шумот и излезот на набљудуваниот ДСАУ, така и од преносната функција на соодветниот отворен систем $G_0(z)$. Поради тоа влијанието на пречките и шумовите врз излезот $x(t)$ во стационарен режим мора да се испитува одделно за секој конкретен случај. Така, ако пречките можат да се претстават со Хевисајдова функција (константни пореметувања), $n(t) = n_0h(t)$, а објектот на управување нема полови во координатниот почеток од s – комплексната рамнина, додека дигиталниот регулатор има пол во точката $z = 1$, и двете преносни функции $G_nPN(z)$ и $G_0(z)$ во (1.95) ќе имаат прост пол во $z = 1$, па за стационарната грешка $e(\infty)$ на системот од слика 1.17 во отсуство на референтен влез се добива 0. Тоа значи дека присуството на пол во $z = 1$ пред точката во која дејствуваат вакви пречки сосема ќе го елиминира нивното влијание врз управуваната големина во стационарен режим.

Врз основа на претходното излагање можат да се изведат следните заклучоци:

1. За да се елиминира стационарната грешка и излезот на еден затворен ДСАУ во стационарна состојба идеално да го следи доведениот референтен влез, потребно е да се обезбеди соодветниот отворен систем да има астатизам од одреден ред; овој астатизам го внесува самиот објект на управување, доколку има полови во точката $z = 1$, или интегралното дејство во управувачкиот закон на регулаторот.
2. Со зголемувањето на редот на астатизам на отворениот систем во однос на влезниот сигнал, се влошуваат условите за стабилност и се намалува брзината на одзив на затворениот дискретен систем.

3. Точноста на работа на дискретниот систем во стационарен режим зависи од периодот на дискретизација T и се зголемува со намалување на T .

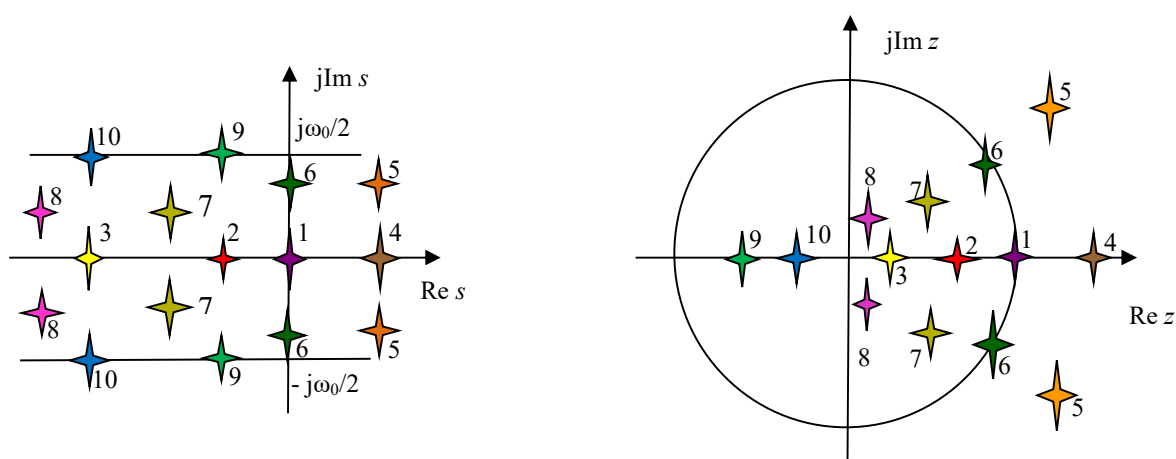
1.4. ОЦЕНКА НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ДИСКРЕТЕН САУ ВО ПРЕОДЕН РЕЖИМ

Квалитетот на поведението на еден континуален систем на автоматско управување во преоден режим се оценува врз основа на бројните вредности на параметрите од некој негов типичен одзив, каков што е отскочниот или фреквенцискиот. Тие параметри овозможуваат да се проценат битните динамички својства на системот како: резервата на стабилност, брзината на одзив, времетраењето на преодниот режим, способноста на системот да го елиминира влијанието на несаканите надворешни влијанија и пречки, итн. Кое множество параметри ќе биде усвоено за оценка на квалитетот на поведението на системот во преодниот режим зависи од избраната постапка на синтеза. Така, ако синтезата се врши во временско подрачје, се користат параметрите на отскочниот одзив: максималниот прескок, времето на доцнење на одзивот, времето на пораст и смирување на одзивот, доминантната временска константа и сл.; кога синтезата се врши во фреквенциско подрачје, се користат параметрите на фреквенцискиот одзив, како: резервата на засилување и фаза, широчината на пропусниот опсег, резонантниот врв и др. За одреден број типични системи од понизок ред, возможно е да се воспостави врска помеѓу овие параметри и половите на набљудуваниот затворен систем. На сличен начин се постапува и при оценката на поведението на еден дискретен САУ во преоден режим. Имено, и кај дискретните САУ управуваниот објект е континуален по својата природа; разликата во однос на континуалните САУ е содржана во управувачкиот дел од системот, кој е дискретен по природа. Следствено, одзивот на еден дискретен САУ на некој типичен влез може да се окарактеризира на ист начин како и кај континуалните системи. Во продолжение, динамичките карактеристики на еден дискретен систем ќе бидат прикажани преку положбата на неговите полови во комплексната рамнина.

Бидејќи дискретните системи многу често се добиваат со дискретизација на континуални системи, пожелно е да се согледа пресликувањето на половите од s – во z – комплексната рамнина. Ова пресликување е прикажано на слика 1.18 и се состои во следното:

1. Реален s пол во нулата се пресликува во позитивен реален z пол во единицата.
2. Реален негативен s пол се пресликува во позитивен реален z пол со модул помал од единица.
3. Реален негативен s пол подалеку од имагинарната оска се пресликува во позитивен реален z пол со модул помал од единица поблизу до координатниот почеток.
4. Реален позитивен s пол се пресликува во позитивен реален z пол со модул поголем од единица.

5. Конјугирано-комплексен пар s полови со позитивен реален дел се пресликува во конјугирано-комплексен пар z полови со позитивен реален дел и модул поголем од единица.
6. Конјугирано-комплексен пар s полови на имагинарната оска се пресликува во конјугирано-комплексен пар z полови со позитивен реален дел и модул еднаков на единица.
7. Конјугирано-комплексен пар s полови со негативен реален дел се пресликува во конјугирано-комплексен пар z полови со позитивен реален дел и модул помал од единица.
8. Конјугирано-комплексен пар s полови со негативен реален дел, кој е подалеку од имагинарната оска, се пресликува во конјугирано-комплексен пар z полови со позитивен реален дел и модул помал од единица поблизу до координатниот почеток.
9. Конјугирано-комплексен пар s полови со негативен реален дел, кои лежат на правата $\pm j\frac{\omega_0}{2}$, се пресликува во реален негативен z пол со модул помал од единица (ω_0 е фреквенцијата на дискретизација).
10. Конјугирано-комплексен пар s полови со негативен реален дел, кои лежат на правата $\pm j\frac{\omega_0}{2}$, а се наоѓаат подалеку од имагинарната оска, се пресликува во реален негативен z пол со модул помал од единица поблизу до координатниот почеток.



Слика 1.18. Пресликување на полови од s – во z – комплексната рамнина

Пресликувањето на половите од s – во z – комплексната рамнина е претставено со функцијата:

$$z = e^{sT} \quad (1.96)$$

Така, конјугирано-комплексниот пар s полови со негативен реален дел од општ облик:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (1.97)$$

каде што ζ е фактор на релативно придушување, а ω_n е природната (непридушувана) фреквенција, со функцијата (1.96) се пресликува во следниот конјугирано-комплексен пар z полови:

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T} = e^{-\zeta\omega_n T \pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} = \rho e^{\pm j\varphi} \quad (1.98)$$

каде што:

$$\rho = |z| = e^{-\zeta\omega_n T} \quad (1.99)$$

$$\varphi = \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2} \quad (1.100)$$

Друг начин да се претстават половите (1.98) е преку нивниот реален и имагинарен дел:

$$\operatorname{Re} z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \cos\left(\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}\right) \quad (1.101)$$

$$\operatorname{Im} z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \sin\left(\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}\right) \quad (1.102)$$

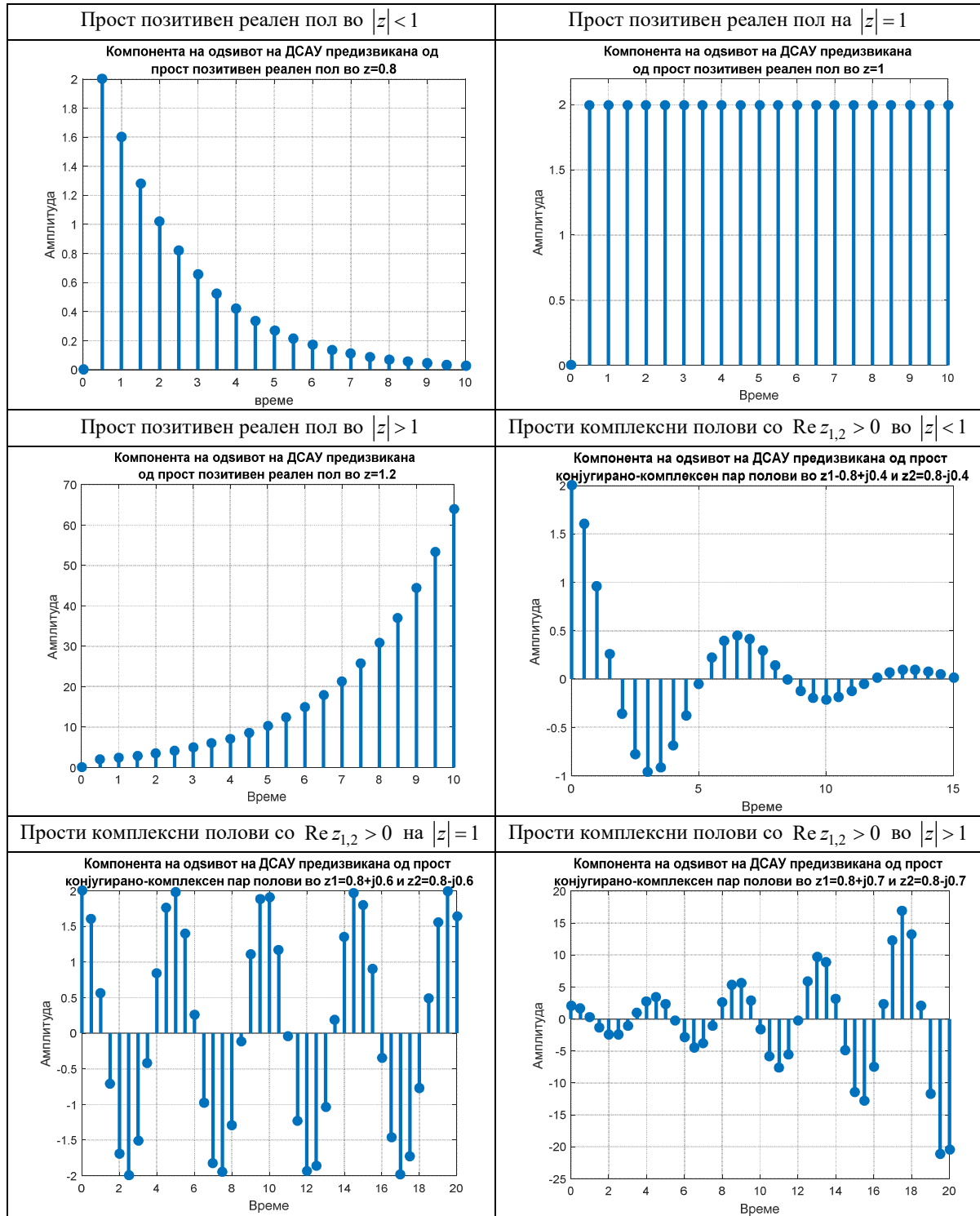
Понекогаш е потребно да се реши обратната задача: ако се познати половите во z – комплексната рамнина, да се определат соодветните полови во s – комплексната рамнина. Тогаш, со решавање на равенките (1.101) – (1.102) по ζ и ω_n , се добиваат релациите:

$$\zeta = \frac{-\ln \rho}{\sqrt{\ln^2 \rho + \varphi^2}} \quad (1.103)$$

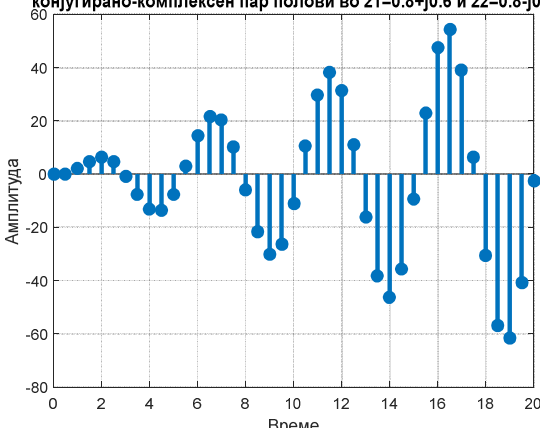
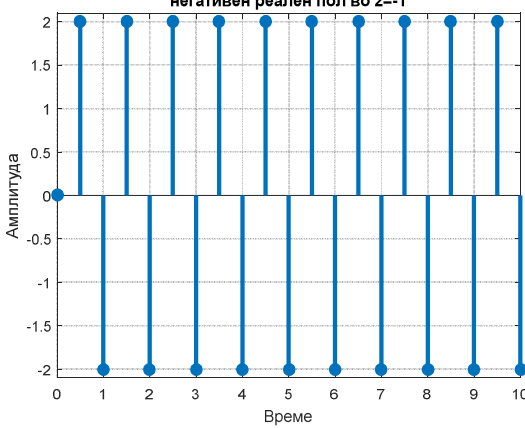
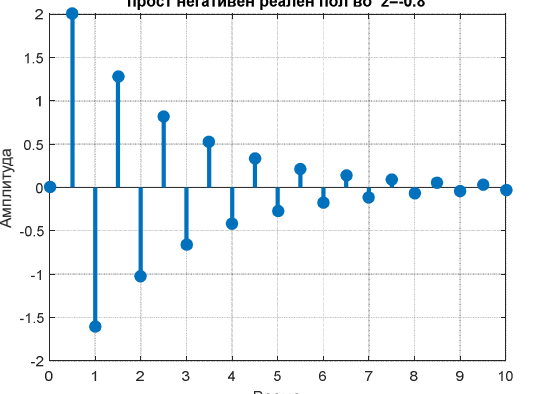
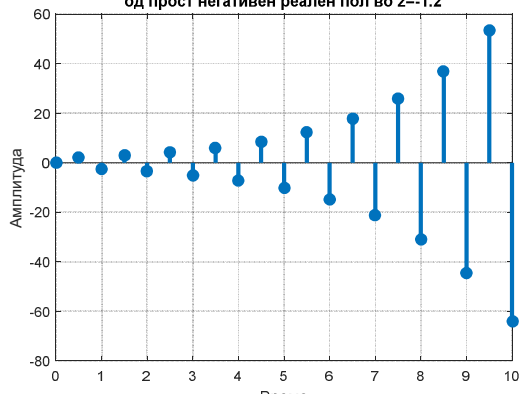
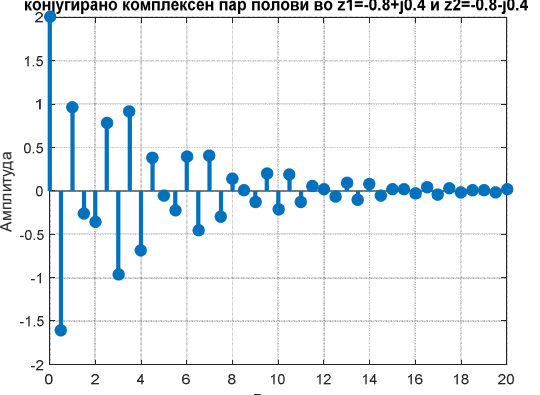
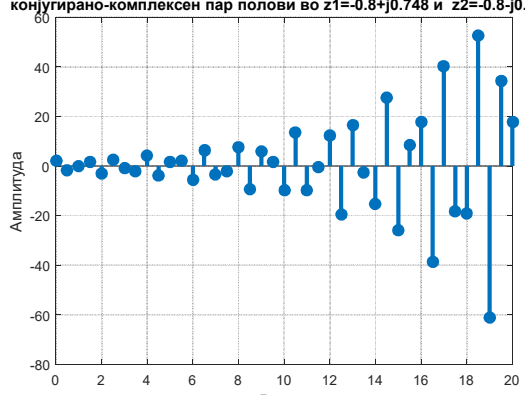
$$\omega_n = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2 \rho + \varphi^2} \quad (1.104)$$

Во продолжение, во табела 1.3 е прикажано влијанието на одделните видови полови врз преодниот одзив на еден дискретен систем.

Табела 1.3. Полови на еден дискретен систем и компоненти на одзивот на дискретниот систем (тежинската низа) кои одговараат на тие полови



Табела 1.3 (продолжение). Полови на еден дискретен систем и компоненти на одзивот на дискретниот систем (тежинската низа) кои одговараат на тие полови

<p>Двократни комплексни полови $\text{Re } z_{1,2} > 0$ на $z = 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од двократен конјугирано-комплексен пар полови во $z_1=0.8+j0.6$ и $z_2=0.8-j0.6$</p> 	<p>Прост негативен реален пол на $z = 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост негативен реален пол во $z=-1$</p> 
<p>Прост негативен реален пол во $z < 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост негативен реален пол во $z=-0.8$</p> 	<p>Прост негативен реален пол во $z > 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост негативен реален пол во $z=-1.2$</p> 
<p>Прости комплексни полови со $\text{Re } z_{1,2} < 0$ во $z < 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост конјугирано комплексен пар полови во $z_1=-0.8+j0.4$ и $z_2=-0.8-j0.4$</p> 	<p>Прости комплексни полови $\text{Re } z_{1,2} < 0$ во $z > 1$</p> <p>Компонента на одзивот на ДСАУ предизвикана од прост конјугирано-комплексен пар полови во $z_1=-0.8+j0.748$ и $z_2=-0.8-j0.748$</p> 

Како што може да се види од табелата 1.3, половите надвор од единичниот круг внесуваат нестабилни компоненти; полот $z = 1$ предизвикува константна компонента, додека парот конјугирано-комплексни полови на единичниот круг предизвикува периодична компонента на одзивот со константна амплитуда; позитивните реални полови внатре во единичниот круг, предизвикуваат аperiodични придушувани компоненти, додека конјугирано-комплексните парови полови со модул помал од единица предизвикуваат придушувани периодични компоненти; негативните реални полови внатре во единичниот круг исто така предизвикуваат придушувани периодични компоненти во одзивот; што е модулот на полот од внатрешноста на единичниот круг поблизу до 1, тоа придушувањето на амплитудите од соодветната компонента на одзивот е помало и обратно; што е аргументот на еден пол поголем, тоа е помала фреквенцијата на осцилациите при дадена периода T , и обратно.

Врз основа на претходното излагање, можат да се извлечат следните битни заклучоци:

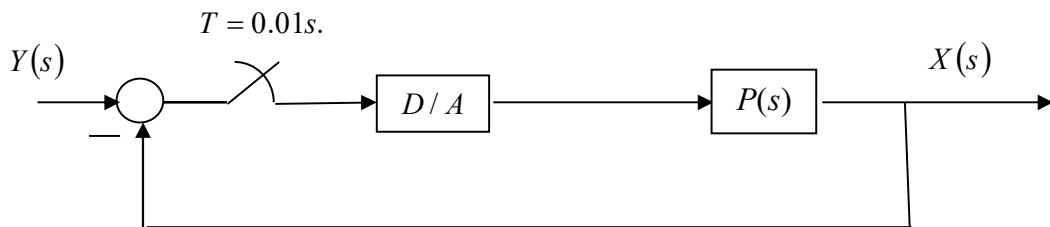
- Што е полот на еден стабилен континуален систем подалеку од имагинарната оска во s – комплексната рамнина, тоа пресликаниот пол е поблизу до координатниот почеток во z – комплексната рамнина. Бидејќи влијанието на овие s полови далеку од имагинарната оска врз одзивот е занемарливо, такво ќе биде и влијанието на пресликаните z полови близу до координатниот почеток.
- Најголемо влијание врз одзивот на еден континуален стабилен систем имаат неговите полови што се наоѓаат најблизу до имагинарната оска. Бидејќи тие се пресликуваат во z полови чиј модул е блиску до единица, следува дека овие z полови ќе имаат најголемо влијание врз преодниот одзив на еден дискретен систем.
- Реалните негативни полови во внатрешноста на единичниот круг од z – комплексната рамнина се непожелни²⁾ и треба да се избегнуваат при синтезата на дискретните САУ. Ако нивното присуство не може да се избегне, тогаш треба да се настојува тие да бидат што е можно поблизу до координатниот почеток, зашто тогаш придушувањето на соодветните компоненти во импулсниот одзив е најголемо.
- Пресликувањето на половите од s – во z – комплексната рамнина битно зависи од големината на периодата на дискретизација T .
- При задавањето на брзината на одзив на еден систем преку природната фреквенција на доминантниот пар полови, треба да се внимава таа да не биде поголема од вредноста дозволена со усвоената периода на дискретизација T :

²⁾ Овие полови се добиваат со пресликување на s полови со негативен реален дел, кои лежат на правата $\pm j\omega_0/2$, а таквите полови означуваат периодични компоненти во импулсниот одзив со максимална брзина на одговор.

$$\omega_n < \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (1.105)$$

Пример 1.5. Даден е затворениот дискретен систем на автоматско управување од слика 1.19. Врз основа на неговите полови, да се определат параметрите на континуалниот отскочен одзив – факторот на релативно придушување, природната фреквенција, доминантната временска константа. Добиениот резултат да се спореди со параметрите на отскочниот одзив на континуалниот систем, кој се добива со отстранување на прекинувачот и Д/А претворувачот од шемата на слика 1.19.

$$P(s) = \frac{32}{s^2 + 8s + 32} \quad (1.106)$$



Слика 1.19. Структурна блок-шема на затворениот ДСАУ од пример 1.5

Решение: Дискретната преносна функција $G_0(z)$ на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$\begin{aligned} G_0(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot P(s) \right\} = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{32}{s^2 + 8s + 32} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ \frac{32}{s(s^2 + 8s + 32)} \right\} = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left\{ \frac{32}{s[(s+4)^2 + 16]} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{32}{s(s+4+j4)(s+4-j4)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s+4}{(s+4)^2 + 16} - \frac{4}{(s+4)^2 + 16} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ 1 - e^{-4T} \cos(4T) - e^{-4T} \sin(4T) \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - ze^{-4T} \cos(4T)}{z^2 - 2ze^{-4T} \cos(4T) + e^{-8T}} - \frac{ze^{-4T} \sin(4T)}{z^2 - 2ze^{-4T} \cos(4T) + e^{-8T}} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - 0.96z}{z^2 - 1.92z + 0.923} - \frac{0.038421z}{z^2 - 1.92z + 0.923} \right] = \\
 &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - 0.9216z}{z^2 - 1.92z + 0.923} \right] = (z-1) \left[\frac{1}{z-1} - \frac{z - 0.9216}{z^2 - 1.92z + 0.923} \right] = \\
 &= (z-1) \left[\frac{0.0016z + 0.0014}{(z-1)(z^2 - 1.92z + 0.923)} \right] = \frac{0.0016z + 0.0014}{z^2 - 1.92z + 0.923} \quad (1.107)
 \end{aligned}$$

додека дискретната преносна функција $G(z)$ на самиот затворен систем изнесува:

$$G(z) = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)} = \frac{0.0016z + 0.0014}{z^2 - 1.9184z + 0.9244} \quad (1.108)$$

Нејзините полови се:

$$z_{1,2} = 0.96 \pm j0.066 = 0.9623e^{\pm j0.0686} \quad (1.109)$$

па за параметрите на континуалниот отскочен одсив се добива:

$$\zeta = \frac{-\ln \rho}{\sqrt{\ln^2 \rho + \phi^2}} = 0.49 \quad (1.110)$$

$$\omega_n = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2 \rho + \phi^2} = 7.86 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (1.111)$$

$$T_d = \frac{1}{\zeta \omega_n} = \frac{-T}{\ln \rho} = 0.26s \quad (1.112)$$

На слика 1.20 е прикажан чисто континуалниот систем на автоматско управување, кој се добива кога во системот од слика 1.19 се отстранат прекинувачот и А/Д претворувачот. Неговата преносна функција $G(s)$ изнесува:

$$G(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)} = \frac{32}{s^2 + 8s + 64} = \frac{\frac{1}{2} \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.113)$$

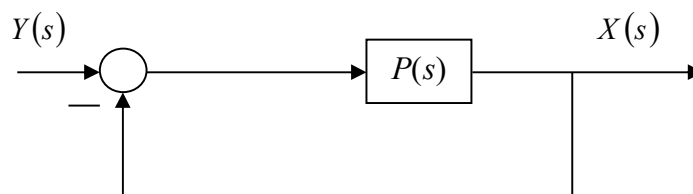
па, оттука, за параметрите на континуалниот отскочен одсив се добива:

$$\zeta = \frac{2}{\omega_n} = 0.5 \quad (1.114)$$

$$\omega_n = \sqrt{64} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (1.115)$$

$$T_d = \frac{1}{\zeta \omega_n} = \frac{1}{2} = 0.25s \quad (1.116)$$

Ако добиените вредности (1.110) – (1.112) се споредат со вредностите (1.114) – (1.116), може да се заклучи дека континуалниот систем има поголемо придушување, поголема резерва на стабилност, поголема брзина на одзив и покусо време на смирување на одзивот во споредба со неговиот дискретен еквивалент. Тоа значи дека во процесот на дискретизација на еден континуален систем, во одредена мерка се влошуваат динамичките карактеристики на системот во целина.



Слика 1.20. Структурна блок-шема на континуалниот затворен САУ од примерот 1.5 □

1.5. ИЗБОР НА ПЕРИОДАТА НА ДИСКРЕТИЗАЦИЈА

Изборот на периодата на дискретизација е многу битен кај дискретните системи на автоматско управување, затоа што од нејзината големина зависи квалитетот на поведење на самиот систем. Така, од табела 1.2 лесно се забележува дека стационарната грешка на овие системи зависи обратнопропорционално од периодата на дискретизација T , што значи дека точноста на работа на еден дискретен систем во стационарен режим е поголема и неговите динамички карактеристики се подобри ако периодата на дискретизација T е помала. Во продолжение, примерот 1.5 покажува дека динамичкото поведење на еден дискретен систем добиен со дискретизација на изворно континуален систем, е „полошо“ од поведението на соодветниот континуален систем, што се должи на фактот дека при процесот на дискретизација доаѓа до делумно губење на информациите што ги носи континуалниот систем. Со несоодветен избор на периодата на дискретизација, може да се случи дискретниот модел на еден континуален систем да стане нестабилен, или да го изгуби својството на управливост и набљудливост, иако изворниот континуален систем е стабилен, управлив и/или набљудлив. Меѓутоа, ова не значи дека дискретните системи на автоматско управување општо гледано се полоши од континуалните, зашто квалитетот на еден систем не зависи само од количеството на информации што ги содржи, туку и од начинот на кој тие информации се користат. Впрочем, од гледиште на обработката на

информации и развојот на различни алгоритми за управување, дискретните системи имаат далеку поголеми можности.

Врз изборот на периодата на дискретизација T влијаат следните чинители:

- саканиот квалитет на поведение на системот во преоден и стационарен режим
- динамиката и физичките ограничувања на објектот на управување
- постапката за формирање на моделот на објектот на управување
- фреквенциското подрачје во кое дејствуваат надворешните пореметувања
- карактеристиките на извршните органи и претворувачите на физичките величини
- ограничувањата кои ги наметнува условот за работа во реално време.

Саканиот квалитет на динамичко поведение на еден дискретен систем се постигнува со избор на мала периода на дискретизација T . Што е периодата на дискретизација T помала, тоа дискретниот систем по квалитетот на преодниот режим се приближува до својот континуален еквивалент. Меѓутоа, ова смалување на периодата на дискретизација T е ограничено на вредност која приближно изнесува една десетина од времето потребно отскочниот одзив на системот да постигне 95 % од својата стационарна вредност. Натамошното намалување на периодата на дискретизација T нема смисла, зашто така оствареното подобрување на динамичките својства на дискретниот систем е занемарливо.

Изборот на периодата на дискретизација T во најголем степен зависи од динамиката на објектот на управување односно од неговата структура, временските константи и транспортното доцнење. Периодата на дискретизација T мора да биде помала од најмалата временска константа на објектот, како и од времето на транспортно доцнење, зашто инаку се губат информации за мигновните вредности на управуваната големина.

Еден затворен систем на автоматско управување има поголема брзина на одзив од соодветниот отворен систем. Меѓутоа, при проектирањето на затворени САУ, не може да се бара многу поголема брзина на одзив на затворениот систем од онаа што ја дозволува динамиката на објектот на управување (отворениот систем). Теоретски гледано, затворениот систем може да има произволно голема брзина на одзив, меѓутоа практично тоа би значело примена на компензатори од висок ред со изразено диференцијално дејство, што пак, за последица, има неможност на објектот на управување да ја следи управувачката големина на својот влез. Оттаму, во пракса, при зададена брзина на одзив на проектираниот дискретен САУ, односно зададена широчина на пропусниот опсег ω_0 , брзината на дискретизација се одбира да биде 3 до 4 пати поголема од граничната фреквенција на пропусниот опсег на системот, односно:

$$T = \frac{1}{(3 \div 4) f_0} \quad (1.117)$$

Влијанието на постапката за моделирање на објектот на управување врз изборот на периодата на дискретизација T особено доаѓа до израз при мало T . Со претераното намалување на периодата на дискретизација T , се јавува опасност да дојде до израз т.н. немоделирана динамика на системот и нејзиното влијание врз неговото динамичко поведење. Имено, при моделирањето на објектот на управување, секогаш се прават одредени апроксимации, при кои се занемаруваат високофреквенциските карактеристики на истиот. Така, критичните фреквенции во преносната функција на објектот одговараат на инерцијалните компоненти, додека половите кои одговараат на компонентите со изразито брз одзив не се земени предвид. Со намалувањето на периодата на дискретизација T , може да се случи да дојде до израз и влијанието на овие полови врз динамичкото поведење на целиот систем.

Зависноста (1.117) е искусвена и ги исполнува условите за квалитетен одзив на проектираниот систем, но не е доволна. При различни режими на работа на системот и ограничувања, треба да се земат предвид и други чинители. Еден од нив е влијанието на надворешните пречки и пореметувања врз работата на системот. Кога проектираниот систем треба да работи во услови на значителни надворешни пречки и пореметувања, се разликуваат три фреквенциски подрачја на работа: (1) подрачје на ниски фреквенции или ниско фреквенциско подрачје ($0 \leq \omega \leq \omega_1$), во кое фреквенцискиот спектар на пореметувањата е мал, па може да се занемари нивното влијание врз управуваната големина; (2) подрачје на средни фреквенции ($\omega_1 < \omega \leq \omega_2$), во кое шумот содржи значителен дел од својата енергија и може битно да влијае врз управуваната големина, и (3) подрачје на високи фреквенции ($\omega_2 < \omega < \infty$), каде што шумот исто така содржи голем дел од својата енергија, но неговото влијание врз управуваната големина е занемарливо, со оглед на тоа дека слабењето на објектот на управување во ова подрачје е многу големо. Со цел да се минимизира влијанието на пречките врз управуваната големина, пропусниот опсег на затворениот систем не смее да биде поголем од $\omega_{\max} = \omega_1$ и тогаш мора да се усвои:

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}} \quad (1.118)$$

Условите (1.117) и (1.118) не се противречни, и дозволуваат избор на мала периода на дискретизација T . Меѓутоа, ако објектот на управување поседува извршен орган со голема инерција, може да се случи при мала периода на дискретизација T тој да не може да ја обработи управувачката променлива меѓу два соседни временски мига на дискретизација. Исто така, постојат дискретни системи кај кои однапред е позната периодата на дискретизација T . Такви се системите кои поседуваат дискретни детектори на физички променливи: хемиски анализатори, енкодери од нумерички тип за мерење на брзината и позицијата од оската на еден мотор и сл. На пример, кај електромоторните погони со голема сила во кои како засилувачи на сила се

употребуваат тиристорски претворувачи, периодата на дискретизација T е однапред зададена и изнесува $1/6$ од периодата на мрежниот напон.

Ако проектираниот дискретен САУ треба да работи во реално време, при што едновремено со дигиталното управување се врши и идентификација или проценка на параметрите или состојбите на објектот, периодата на дискретизација T не смее да се одбере премногу мала. Имено, таа треба да биде доволно голема за да може да се реализираат конкретните алгоритми на идентификација, проценка и управување.

Во заклучок, може да се каже дека изборот на периодата на дискретизација зависи од повеќе фактори, од кои некои се и противречни, како на пример барањето за точност на дискретниот модел и времето на процесирање на дискретните сигнали и алгоритми. Затоа најчесто се усвојува компромисно решение, а во интерес на едноставноста на системите на автоматско управување, за сите објекти на управување во еден систем најчесто се усвојува иста периода на дискретизација.

2. АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ

2.1. АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ КОНТИНУАЛНИ САУ

За разлика од многубројните показатели на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во преоден режим, какви што се: времето на прескок, максималниот прескок, времето на пораст и времето на смирување на преодниот одсив, пропусниот опсег, резонантниот врв, резервите на засилување и фаза и др., сигналот на грешка е единствен показател на сите битни динамички карактеристики на еден систем - резервата на стабилност и брзината на одсив на системот. Затоа тој може да се искористи како критериум за синтеза на еден затворен САУ. Целта на синтезата во овој случај е да се одбере таква структура и такви вредности на променливите параметри на системот (параметри кои можат да се нагодуваат), што грешката во системот, која се дефинира како разлика помеѓу саканиот и стварниот одсив на системот, во секој миг на време да биде минимална.

Критериумите за синтеза на затворените САУ, кои го користат сигналот на грешка, се искажуваат во вид на интегрални, во кои подинтегралната функција за аргумент го има токму сигналот на грешка:

$$J = \int_0^{\infty} F[e(t)]dt \quad (1.6)$$

Такви се:

$$J_1 = \int_0^{\infty} e(t)dt \quad (2.1)$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} |e(t)|dt \quad (2.2)$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} e^2(t)dt \quad (2.3)$$

$$J_4 = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^N c_i [e^{(i)}(t)]^2 dt \quad (2.4)$$

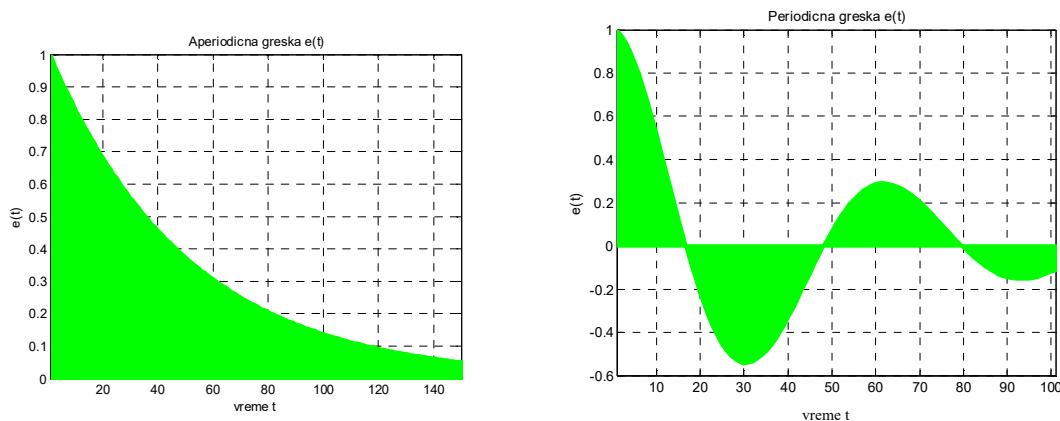
Кај стабилните системи $e(t) \rightarrow 0$ кога $t \rightarrow \infty$, па интегралот (2.1) има конечна вредност, еднаква со површината опфатена помеѓу кривата $e(t)$ и временската оска,

како што е покажано на слика 2.1. Очигледно е дека оваа површина ќе биде дотолку помала, доколку се помали прескокот и времето на смирување на преодниот одзив на набљудуваниот систем.

Вредноста на интегралот (2.1) може лесно да се пресмета:

$$J_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) \quad (2.5)$$

и таа зависи од параметрите на проектираниот систем, па задачата на синтеза се сведува на одредување на оние вредности на променливите параметри од системот, за кои интегралот (2.1) има минимална вредност.



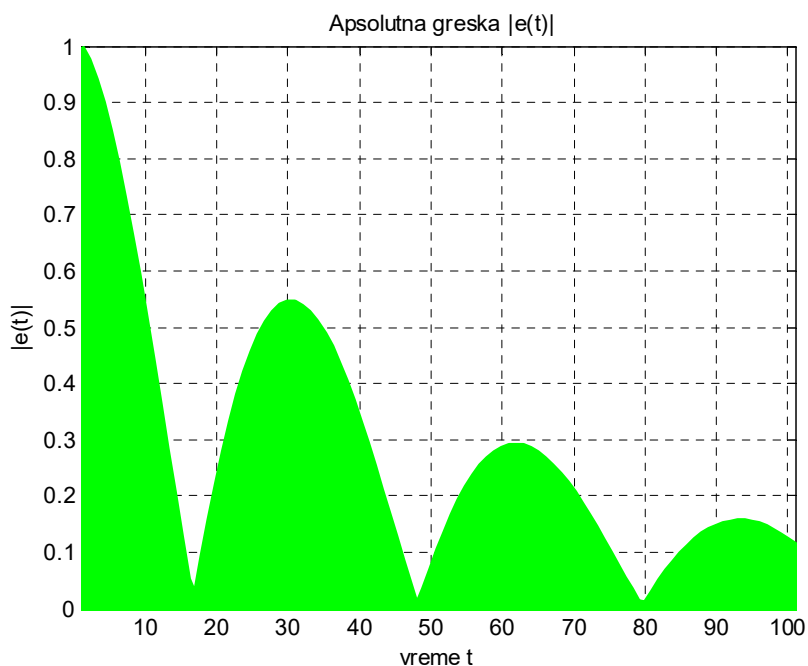
Слика 2.1. Графички приказ на интегралниот критериум (2.1) кој уште се нарекува линеарна регулациона површина

Од слика 2.1 е очигледно дека интегралниот критериум (2.1) може да се применува само доколку преодниот процес на проектираниот систем има аperiodичен карактер, односно доколку грешката $e(t)$ не го менува знакот со тек на времето. Ако преодниот процес е осцилаторен, вредноста на интегралниот критериум (2.1) нема еднозначно да го одредува неговиот карактерот, бидејќи површините под временската оска се одземаат од површините кои се наоѓаат над неа. Следствено, една иста вредност на интегралот (2.1) може да одговара и на систем со аperiodичен и на систем со силно изразен осцилаторен преоден процес. Од овие причини, и поради фактот дека преодниот процес на проектираниот систем не е однапред познат, интегралниот критериум (2.1), иако аналитички едноставно и лесно се пресметува, не се користи во пракса.

Недостатокот на критериумот (2.1) може да се отстрани ако наместо сигналот на грешка $e(t)$, за подинтегрална функција во (1.6) се усвои неговата апсолутна вредност:

$$J_2 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (2.2)$$

Графичкиот приказ на интегралниот критериум (2.2) е даден на слика 2.2. За жал, овој критериум не е лесно (доколку воопшто е) аналитички решлив, па затоа не наоѓа примена во праксата.

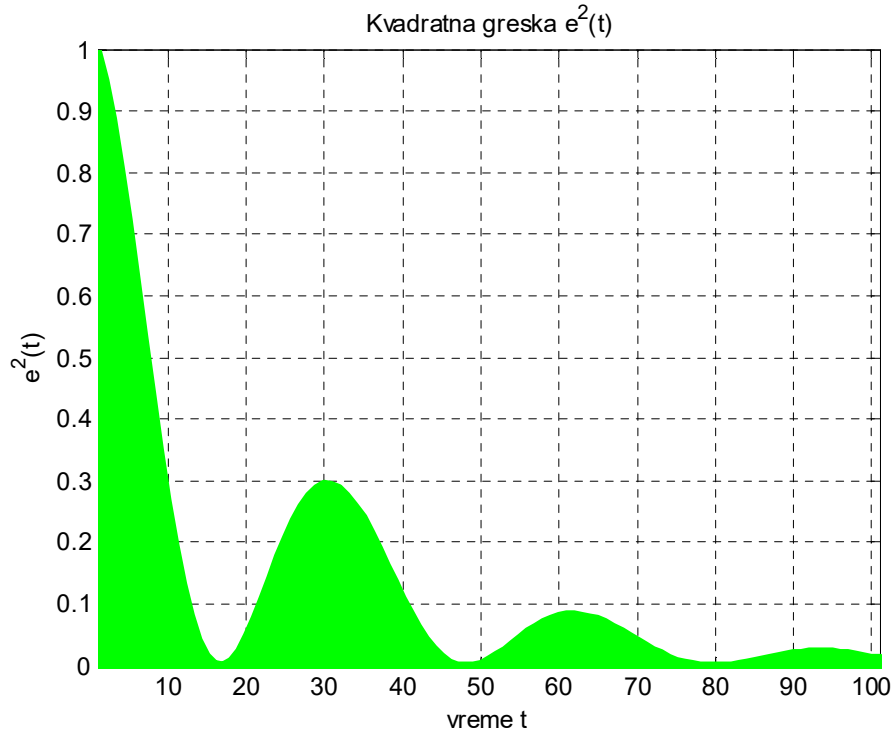


Слика 2.2. Графички приказ на интегралниот критериум (2.2) кој уште се нарекува апсолутна регулациона површина

Интегралниот критериум (2.3), наречен квадратна регулациона површина, не зависи од знакот на грешката, односно од карактерот на преодниот режим. Неговата вредност лесно се пресметува со алгебарски средства и геометриски е еднаква на површината под кривата $e^2(t)$, прикажана на слика 2.3, па задачата на синтеза според овој критериум се сведува на минимизирање на таа површина.

Од сите интегрални критериуми за синтеза, интегралниот критериум (2.3) најчесто се користи во пракса затоа што аналитички е лесно решлив и може да се користи за параметарска оптимизација на системите со стохастички пореметувања. Главен недостаток му е што не го одредува еднозначно преодниот режим. Имено, вредноста на интегралот (2.3) може да биде иста и за еден аperiодичен и за еден осцилаторен преоден процес, што се должи на фактот дека таа зависи само од големината на грешката и времето на смирување. Како резултат на синтезата според овој критериум,

најчесто се добива осцилаторен преоден режим со мало време на доцнење, мало време на пораст и смирување и голем прескок.



Слика 2.3. Графички приказ на интегралниот критериум (2.3) кој уште се нарекува квадратна регулациона површина

Интегралниот критериум (2.4) уште се нарекува општа квадратна регулациона површина, бидејќи во подинтегралната функција, освен сигналот на грешката, фигурираат и квадрати од конечен број нејзини изводи. Од овие интегрални, најчесто се користи интегралот:

$$J_{41} = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(t) + \tau^2 [e'(t)]^2 \right\} dt; \quad \tau = const. \quad (2.6)$$

кој освен за големината на грешката, води сметка и за брзината на нејзината промена. Како резултат на синтезата според интегралниот критериум (2.6), проектираниот систем ќе има преоден режим со помал прескок отколку во случајот кога е применет интегралниот критериум (2.3).

Интегралот (2.6) се пресметува на следниот начин:

$$J_{41} = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(t) + \tau^2 [e'(t)]^2 \right\} dt = \int_0^{\infty} e^2(t) dt + \tau^2 \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt = J_3 + \tau^2 J_{31}; \quad \tau = \text{const.} \quad (2.7)$$

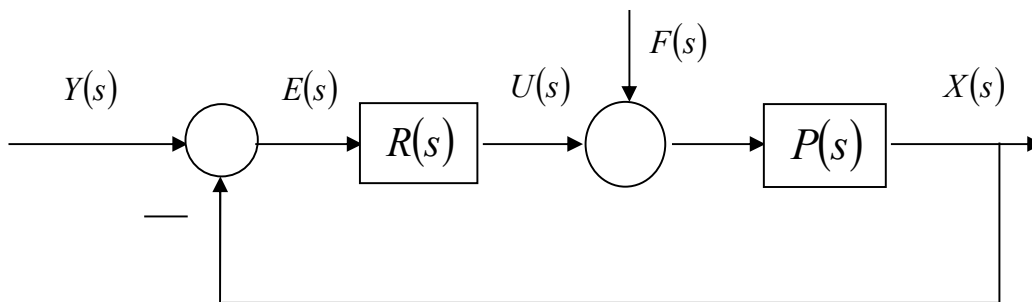
каде што:

$$J_{31} = \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} e_1^2(t) dt \quad (2.8)$$

Со други зборови, пресметувањето на интегралот (2.7) се сведува на пресметување интегралите од типот (2.3), кое може да се врши со алгебарски средства.

Вредноста на применетиот интегрален критериум за синтеза J зависи од параметрите на проектираниот систем. Некои од тие параметри се фиксни (неменливи), додека останатите се променливи и можат да се нагодуваат. Следствено, следен чекор во постапката на синтеза, по пресметувањето на вредноста на интегралниот критериум J , е одредувањето на оние вредности на променливите параметри на системот, за кои тој интеграл има минимум. (Треба да се истакне дека функцијата J не мора воопшто да има минимум во просторот на параметрите на проектираниот систем. Тогаш обично вредностите на параметрите се одбираат така што J ќе има минимум во некој дел од параметарската област на системот, одреден според други проектни барања.) На крајот од постапката треба да се провери дали тие вредности припаѓаат на параметарската област на стабилност на проектираниот систем.

При аналитичката синтеза на затворените континуални САУ со помош на интегралните критериуми (2.1) – (2.4), се набљудува типичен систем како на слика 2.4, при што се претпоставува дека системот е стабилен.



Слика 2.4. Типична структура на затворен САУ

Во многу случаи максималната вредност и другите вредности на пречната големина $f(t)$ се значително помали од соодветните вредности на референтниот влез $y(t)$. Тогаш влијанието на пречките во системот се занемарува и синтезата се врши само врз основа на референтниот влез $y(t)$. Ваквата синтеза уште се нарекува **синтеза на управувањето**. Битно е да се воочи дека при синтезата на управувањето ефикасно се

компензира само компонентата на грешката предизвикана од $y(t)$, додека компонентата на грешката предизвикана од влијанието на пречките $f(t)$ се занемарува, бидејќи е значително помала од претходната. Следствено, грешката која се минимизира при оваа синтеза е дадена со изразот:

$$E(s) = E_y(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) \quad (2.9)$$

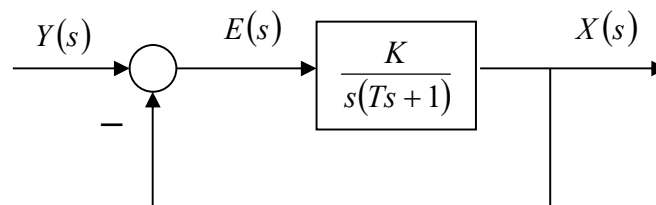
За разлика од синтезата на управувањето, при **синтезата со компензација на пречната големина**, се настојува да се елиминира или барем минимизира влијанието на пречките $f(t)$ во системот. Затоа при оваа синтеза системот на автоматско управување се набљудува како да е само под влијание на пречките, додека референтниот влез се занемарува. Грешката која се минимизира на овој начин е дадена со изразот:

$$E(s) = E_f(s) = -\frac{P(s)}{1 + R(s)P(s)} F(s) \quad (2.10)$$

Во случаите кога се настојува едновремено да се компензира влијанието и на референтниот сигнал $y(t)$ и на пречките $f(t)$, станува збор за т.н. **комбинирана синтеза**. Грешката на проектираниот систем со постапката на комбинирана синтеза има две компоненти и е претставена со изразот:

$$E(s) = E_y(s) + E_f(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) - \frac{P(s)}{1 + R(s)P(s)} F(s) \quad (2.11)$$

Пример 2.1. Со помош на интегралниот критериум (2.7) да се изврши синтеза на затворениот систем од слика 2.5, со променлив коефициент на засилување K , ако на неговиот влез дејствува единичен отскочен референтен сигнал; T е временска константа на системот и има фиксна вредност.



Слика 2.5. Илустрација кон примерот 2.1

Решение: Вредноста на интегралниот критериум J_{41} може да се пресмета според формулата:

$$J_{41} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt + \tau^2 \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds + \tau^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E_1(s)E_1(-s) ds \quad (2.12)$$

каде што $E(s)$ е L -сликата на сигналот на грешката $e(t)$ во набљудуваниот систем:

$$E(s) = L\{e(t)\} = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{(Ts+1)}{s(Ts+1)+K} = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (2.13)$$

а $E_1(s)$ е L -сликата од нејзиниот прв извод:

$$\begin{aligned} E_1(s) &= L\{e_1(t)\} = L\{e'(t)\} = sE(s) - e(0) = \\ &= \frac{s(Ts+1)}{s(Ts+1)+K} - 1 = \frac{-K}{s(Ts+1)+K} = \frac{\tilde{b}_1s + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_2s^2 + \tilde{a}_1s + \tilde{a}_0} \end{aligned} \quad (2.14)$$

и $e(0)$ е почетната вредност на грешката:

$$e(0) = \lim_{t \rightarrow 0} e(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = 1 \quad (2.15)$$

Вредностите на интегралите на десната страна од (2.13) и (2.14) се дадени таблично и изнесуваат:

$$J_3 = \frac{a_0b_1^2 + a_2b_0^2}{2a_0a_1a_2} = \frac{KT^2 + T}{2KT} = \frac{KT + 1}{2K} \quad (2.16)$$

$$J_{31} = \frac{\tilde{a}_0\tilde{b}_1^2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_0^2}{2\tilde{a}_0\tilde{a}_1\tilde{a}_2} = \frac{K}{2} \quad (2.17)$$

Следствено:

$$\begin{aligned} J_{41} &= \int_0^{\infty} e^2(t) dt + \tau^2 \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds + \tau^2 \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E_1(s)E_1(-s) ds = \\ &= \frac{KT + 1}{2K} + \tau^2 \frac{K}{2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Неопределениот параметар K на проектираниот систем се определува од условот за екстрем на функцијата J_{41} , кој екстрем е минимум:

$$\frac{dJ_{41}}{dK} = \frac{d}{dK} \left(\frac{\tau^2 K^2 + KT + 1}{2K} \right) = \frac{\tau^2 K^2 - 1}{2K^2} = 0 \quad (2.19)$$

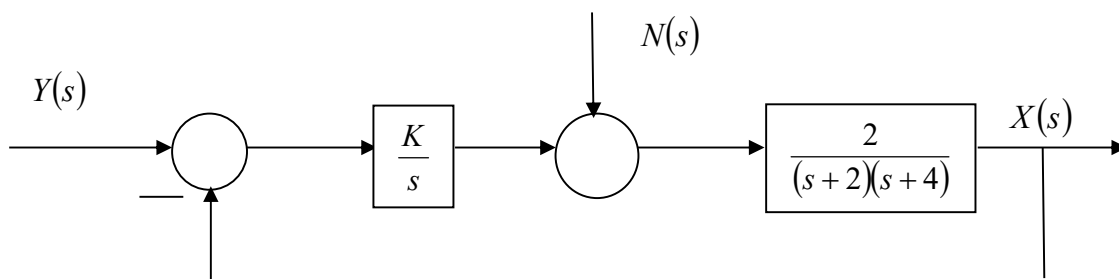
и неговата вредност е:

$$K^2 = \frac{1}{\tau^2} \quad (2.20)$$

Со проверка лесно се утврдува дека вредноста $K = \frac{1}{|\tau|}$ припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот систем $K > 0$. \square

Пример 2.2. Со помош на интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$ да се изврши синтеза

на затворениот систем на автоматско управување од слика 2.6, така што ќе се обезбеди минимално влијание на пречките. Синтезата да се изврши под претпоставка на отскочен влез.



Слика 2.6. Илустрација кон пример 2.2

Решение: Синтезата со минимизација на влијанието на пречките подразбира дека во системот дејствуваат само пречките $n(t)$, па, во тој случај, грешката во системот ќе биде:

$$E(s) = -\frac{\frac{2}{(s+2)(s+4)}}{1 + \frac{2K}{s(s+2)(s+4)}} N(s) = -\frac{2s}{s^3 + 6s^2 + 8s + 2K} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{2}{s^3 + 6s^2 + 8s + 2K} \quad (2.21)$$

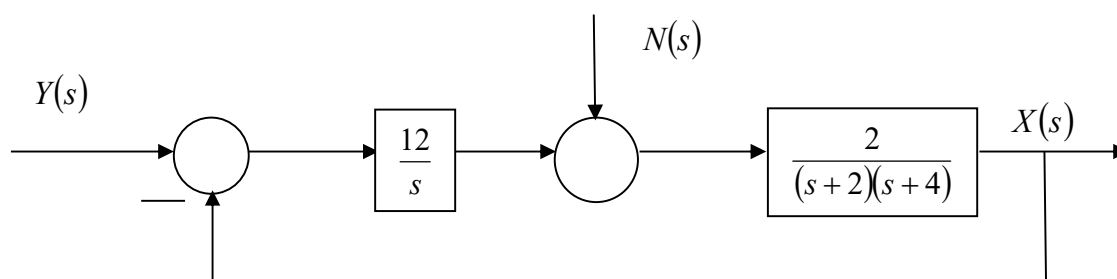
Вредноста на зададениот интегрален критериум во конкретниот случај изнесува:

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{3}{K(24 - K)} \quad (2.22)$$

и неговиот минимум се добива за $K = 12$:

$$\frac{dJ}{dK} = -\frac{24 - 2K}{K^2(24 - K)^2} = 0 \Rightarrow K = 12 \quad (2.23)$$

Решението $K = 12$ припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот затворен систем $0 < K < 24$, па, системот ќе биде како на слика 2.7.



Слика 2.7. Решение на примерот 2.2 □

2.2. АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ ДИСКРЕТНИ САУ

Аналитичката синтеза на дискретните САУ со минимизација на грешката во системот овде ќе биде спомената само од едукативни и историски причини. Истата може да се изврши на сличен начин како и кај континуалните САУ, со тоа што интегралите во соодветните критериуми ќе се заменат со суми, а изводите со конечни разлики. Така на пример, критериумот (2.1) за случајот на еден дискретен САУ ќе добие облик:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} E(z) \quad (2.24)$$

додека критериумот (2.3) ќе гласи:

$$(2.25) \quad I_3 = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} z^{-1} E(z) E(z^{-1}) dz \quad (2.25)$$

Читателот треба да има на ум дека изразите (2.24) и (2.25) важат и се аналитички решливи само доколку набљудуваниот дискретен САУ е стабилен и $E(z)$ е дробно рационална функција од комплексната променлива z .

За да го решиме интегралот (2.25), најнапред ќе ја прикажеме **теоремата на Z – трансформацијата за множење на два оригинали или конволуција на Z – слики**. Оваа теорема може да се искаже на следниот начин: ако оригиналите $f_1(kT)$ и $f_2(kT)$ имаат Z – слики $F_1(z)$ и $F_2(z)$ со радиуси на конвергенција R_1 и R_2 , соодветно:

$$f_1(kT) \xrightarrow{Z} F_1(z) = Z\{f_1(kT)\}, \quad |z| > R_1 \quad (2.26)$$

$$f_2(kT) \xrightarrow{Z} F_2(z) = Z\{f_2(kT)\}, \quad |z| > R_2 \quad (2.27)$$

тогаш и нивниот производ $f_1(kT) f_2(kT)$ има Z – слика и за таа слика важи:

$$Z\{f_1(kT) \cdot f_2(kT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \omega^{-1} F_1(\omega) F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) d\omega \quad (2.28)$$

каде што интегрирањето во (2.28) се врши во позитивна насока по кружницата C дадена со $\omega = Re^{j\varphi}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а за нејзиниот радиус важи $R_1 < R < |z|/R_2$.

Специјален случај на оваа теорема за комплексна конволуција е познатата **Парсервалова теорема за дискретните системи**, која наоѓа примена при аналитичката синтеза на линеарните дискретни системи. Оваа теорема може да се изведе на следниот начин. За специјалниот случај:

$$f_1(kT) = f_2(kT) = f(kT) \quad (2.29)$$

изразот (2.28) ќе стане:

$$Z\{f^2(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) z^{-k} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \omega^{-1} F(\omega) F\left(\frac{z}{\omega}\right) d\omega \quad (2.30)$$

каде што интегрирањето во (2.30) се врши во позитивна насока по кружницата C дадена со $\omega = \rho e^{j\varphi}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $R < \rho < |z|/R$, а R е радиусот на конвергенција на сликата $F(z) = Z\{f(kT)\}$.

Во продолжение ќе биде разгледан изразот (2.30) кога Z – сликата $F(z) = Z\{f(kT)\}$ е аналитичка функција во областа $|z| \geq 1$, односно кога сите нејзини полови се наоѓаат во

внатрешноста од единичниот круг $|z| < 1$ во z -комплексната рамнина. Во тој случај $f(kT) \rightarrow 0$ кога $k \rightarrow \infty$ и, значи, постои сумата:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) \quad (2.31)$$

Од друга страна, ако функцијата $F(z) = Z\{f(kT)\}$ е аналитичка функција во областа $|z| \geq 1$, тогаш интегралот (2.30) конвергира и за $|\omega| = 1$, па во таквиот случај за крива на интеграцијата C може да се одбере единичната кружница $|\omega| = 1$ во ω -комплексната рамнина, т.е.

$$Z\{f^2(kT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \omega^{-1} F(\omega) F\left(\frac{z}{\omega}\right) d\omega \quad (2.32)$$

Со помош на изразот (2.32) може да се определи сумата (2.31). Имено:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) z^{-k} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \omega^{-1} F(\omega) F\left(\frac{z}{\omega}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|\omega|=1} \omega^{-1} F(\omega) F(\omega^{-1}) d\omega \quad (2.33)$$

или, по враќањето на старата променлива:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} z^{-1} F(z) F(z^{-1}) dz \quad (2.34)$$

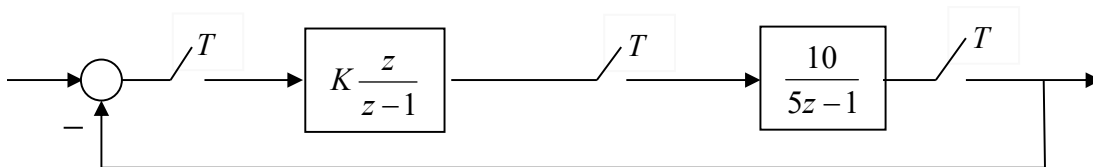
Изразот (2.34) ја претставува познатата Парсервалова теорема за дискретните системи. Тој треба да се чита од лево во десно; со други зборови, ако постои сумата (2.31), тогаш важи релацијата (2.34). Спротивното тврдење не мора секогаш да важи; ако постои комплексниот интеграл на десната страна од (2.34), тоа уште не значи дека постои и сумата (2.31). На крајот уште еднаш е потребно да се нагласи дека Парсерваловата теорема важи исклучиво за функции $f(kT)$, чиишто Z -слики $F(z) = Z\{f(kT)\}$ се регуларни функции на множеството $|z| \geq 1$.

Парсерваловата теорема може со успех да се искористи за аналитичка синтеза на затворените дискретни системи на автоматско управување на следниот начин. Ако со $e(kT)$ се означи грешката во системот, и ако сите полови на нејзината Z -слика $E(z)$ лежат во внатрешноста од единичниот круг $|z| < 1$, тогаш според Парсерваловата теорема ќе важи:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} z^{-1} E(z) E(z^{-1}) dz \quad (2.35)$$

Бидејќи кај линеарните дискретни системи на автоматско управување со константни коефициенти сликата $E(z)$ е дробно-рационална функција од комплексната променлива z , пресметките што се опфатени на десната страна од изразот (2.35) можат да се извршат со алгебарски средства. На тој начин бесконечната сума $\sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT)$ се добива како функција од променливите параметри на проектираниот затворен дискретен систем на автоматско управување, па со нејзина минимизација можат да се одредат оптималните вредности на овие параметри, кои, се разбира, треба да припаѓаат на параметарската област на стабилност на проектираниот систем.

Пример 2.3. Да се изврши синтеза на затворен дискретен систем на автоматско управување како на слика 2.8, според критериумот (2.35).



Слика 2.8. Затворен дискретен систем на автоматско управување

Решение: Грешката во набљудуваниот затворен дискретен систем во z -комплексното подрачје е дадена со изразот:

$$E(z) = \frac{1}{1 + \left(K \frac{z}{z-1}\right) \left(\frac{10}{5z-1}\right)} \cdot \frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{z(5z-1)}{5z^2 + [10K-6]z + 1} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} \quad (2.36)$$

додека параметарската област на стабилност на системот изнесува:

$$0 < K < 1.2 \quad (2.37)$$

Вредноста на сумата (2.35) е дадена со изразот³⁾:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} z^{-1} E(z) E(z^{-1}) dz = \frac{B_0 a_0 A_1 - B_1 a_0 a_1 + B_2 (a_1^2 - a_2 A_1)}{a_0 [(a_0^2 - a_2^2) A_1 - (a_0 - a_2) a_1^2]} \quad (2.38)$$

³⁾ Вредностите на сумата (2.35) се дадени во литературата [10]

каде што:

$$B_0 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 = 5^2 + (-1)^2 + 0 = 26 \quad (2.39)$$

$$B_1 = 2(b_0 b_1 + b_1 b_2) = 2(-5 + 0) = -10 \quad (2.40)$$

$$B_2 = 2b_0 b_2 = 2 \cdot 5 \cdot 0 = 0 \quad (2.41)$$

$$A_1 = a_0 + a_2 = 5 + 1 = 6 \quad (2.42)$$

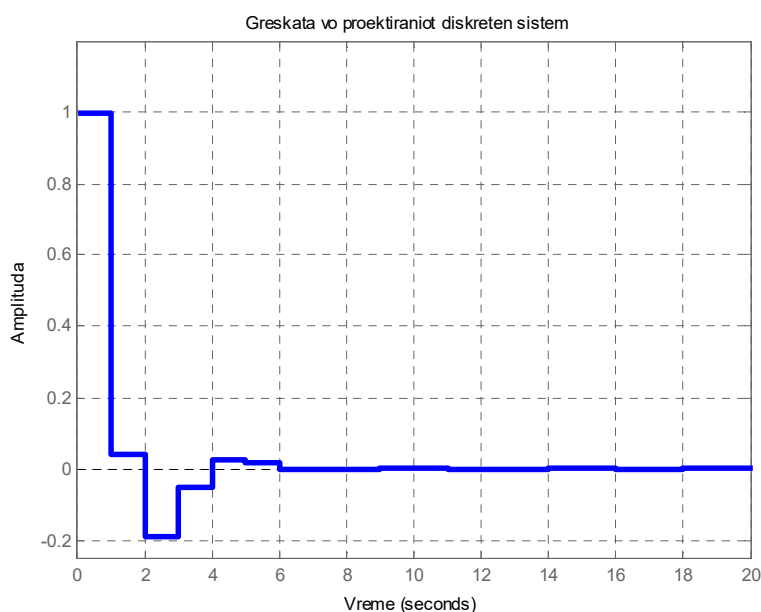
и таа изнесува:

$$S = \frac{B_0 a_0 C_1 - B_1 a_0 a_1}{a_0 [(a_0^2 - a_2^2) C_1 - (a_0 - a_2) a_1^2]} = \frac{480 + 500K}{-2000K^2 + 2400K} \quad (2.43)$$

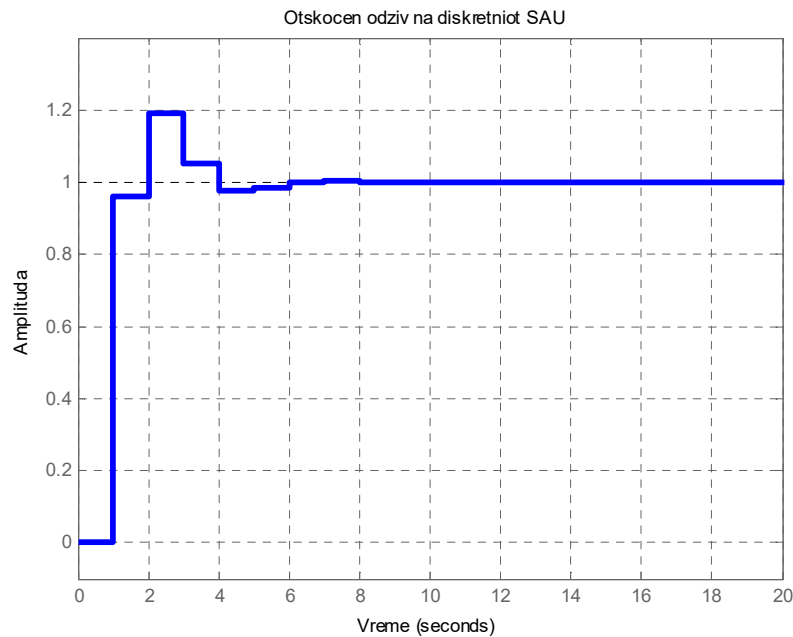
Нејзиниот минимум се добива за:

$$\frac{dS}{dK} = \frac{d}{dK} \left(\frac{480 + 500K}{-2000K^2 + 2400K} \right) = K^2 + 1.92K - 1.152 = 0 \Rightarrow K = 0.48 \quad (2.44)$$

Бидејќи вредноста на коефициентот на регулаторот припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот дискретен систем, може да се реализира неговата синтеза. На долните слики 2.9 и 2.10 се прикажани грешката и отскочниот одсив во проектираниот дискретен систем.



Слика 2.9. Грешката во затворениот ДСАУ од слика 2.8 за $K_i = 0.48$

Слика 2.10. Отскочен одзив на затворениот ДСАУ од слика 2.8 за $K = 0.48$ □

Како што веќе е напоменато, аналитичката синтеза на дискретните системи преку сигналот на грешка нема практична примена, затоа што во меѓувреме се развиени многу подобри и поефикасни методи. Нејзиното значење е повеќе историско, зашто потекнува од времето на почетоците на развојот на теоријата на дискретните системи, кога научниците се обидуваа да најдат аналогична помеѓу постапките за анализа и синтеза на континуалните и дискретните системи. Денес за синтеза на дискретните системи на автоматско управување во класичната теорија се користат постапки засновани врз примената на Најквистовата крива, Бодеовите дијаграми, геометриското место на корени и други. Анализата и синтезата на линеарните затворени ДСАУ со помош на Најквистовите, Бодеовите, Николсовите дијаграми и постапката на геометриско место на корени во основа се врши на ист начин како и кај континуалните САУ. Единствената разлика произлегува од фактот што областа на стабилност кај континуалните системи е $\text{Re } s \geq 0$, што значи дека сите нивни полови мора да лежат лево од имагинарната оска во s -комплексната рамнина, додека областа на стабилност кај ДСАУ е $|z| \geq 1$, што значи дека сите нивни полови мора да лежат во внатрешноста од единичниот круг во z -комплексната рамнина, со центар во координатниот почеток. Уште повеќе, билинеарната трансформација $z = \frac{1+s}{1-s}$, која реализира пресликување од z -во s -комплексната рамнина, овозможува сите познати постапки за анализа и синтеза на линеарните континуални САУ да се применат и кај линеарните ДСАУ. За ова ќе стане збор повеќе при излагањето на конкретните постапки за синтеза.

3. СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

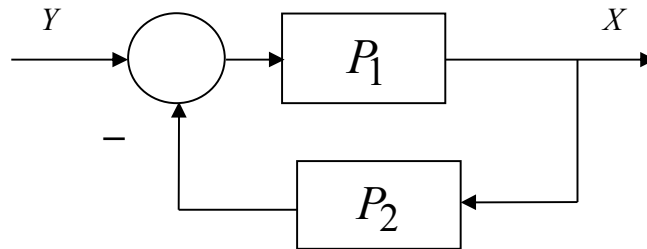
Поведението на системите за автоматско управување е од примарен интерес. Еден успешен систем на автоматско управување мора да биде стабилен, да има прифатлив одзив на влезните наредби, да биде што е можно понечувствителен на промените на своите параметри, да има минимална стационарна грешка и конечно, да го минимизира влијанието од несаканите пореметувања и пречки. Затворените системи на автоматско управување, кои се во состојба да остварат оптимален одзив (поведение) без дополнителни нагодувања, се навистина ретки. Обично, заради многубројните и често, спротивставени проектни барања, не е возможно да се проектира систем на автоматско управување со оптимално поведение, па параметрите на системот се нагодуваат така што тој ќе има само задоволителен односно прифатлив одзив наместо саканиот оптимален.

За анализа на затворените САУ постојат повеќе постапки. Одредувањето на нивниот преоден и стационарен режим преку решавање на соодветниот математички модел (диференцијална равенка или систем диференцијални равенки кај континуалните системи и диферентна равенка или систем диферентни равенки кај дискретните системи) обично претставува обемна и макотрпна работа, посебно ако се работи за системи од повисок ред, а и релативната стабилност на системите потешко се определува во временско подрачје. Наместо посложените и понепрегледни аналитички постапки, за изучувањето на затворените САУ се применуваат поедноставните и поочигледни графички и графо-аналитички постапки какви што се постапките засновани врз геометриското место на корени, Бодеовите, Најквистовите и Николсовите дијаграми. Последните три постапки со едно име се нарекуваат уште и фреквенциски постапки за анализа. Сите наведени постапки за анализа, можат да се применат и за синтеза на затворените САУ.

Основната цел при проектирањето на еден САУ е исполнување на проектните барања кои го опишуваат саканото поведение на проектираниот систем. Овие барања се однесуваат на поведението на системот како во преоден, така и во стационарен режим. Така, на пример, преодниот режим на еден САУ се карактеризира со неговата брзина на одзив, додека стационарниот режим се карактеризира со неговата точност во репродукцијата на доведениот влез. Меѓутоа, сите тие проектни барања во крајна линија се сведуваат на ограничување на вредностите од параметрите на одделни карактеристики на системот, какви што се: пропусниот опсег, резонантниот врв, времето на смирување на отскочниот одзив, максималниот прескок во отскочниот одзив итн. Општо земено, без оглед дали се искажани преку параметрите на карактеристиките на проектираниот систем во фреквенциски или временски домен, проектните барања ги специфицираат следните три важни својства на еден САУ: брзината на одзив, релативната стабилност и грешката на системот.

Понекогаш, саканото поведение на еден САУ може да се оствари само преку промената на еден параметар од системот, каков што е, на пример, неговиот

коэффициент на засилување. Тоа е случај кога, на пример, треба да се зголеми резервата на засилување или фаза на набљудуваниот систем и да се намали неговата стационарна грешка. Меѓутоа, најчесто, за да се постигне саканата цел, потребно е да се промени и структурата на системот. На слика 3.1 е прикажан еден затворен систем, во кој P_1 и P_2 претставуваат фиксни конфигурации од компоненти, врз кои проектантот нема никакво влијание.



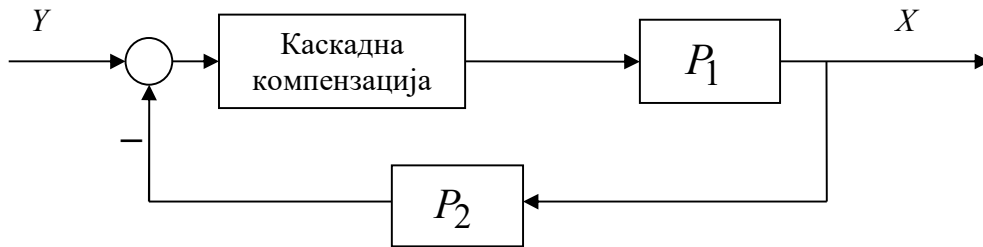
Слика 3.1. Структурна блок-шема на затворен систем

За да се промени поведението на овој систем потребно е во него да се внесат одредени елементи, кои се нарекуваат **компензатори**, бидејќи го компензираат несаканото поведение на набљудуваниот систем. Во зависност од местото на внесување на компензаторот, се зборува за **сериска** или **каскадна компензација**, прикажана на слика 3.2 и **компензација во повратната врска** или **паралелна компензација**, прикажана на слика 3.3 и слика 3.4. (Шемите на слика 3.1, слика 3.2, слика 3.3 и слика 3.4 се однесуваат како на континуални, така и на дискретни системи. Така, во случајот на континуален систем $Y = Y(s)$, $X = X(s)$, $P_1 = P_1(s)$ и $P_2 = P_2(s)$, додека во случајот на дискретен систем $Y = Y(z)$, $X = X(z)$, $P_1 = P_1(z)$ и $P_2 = P_2(z)$).

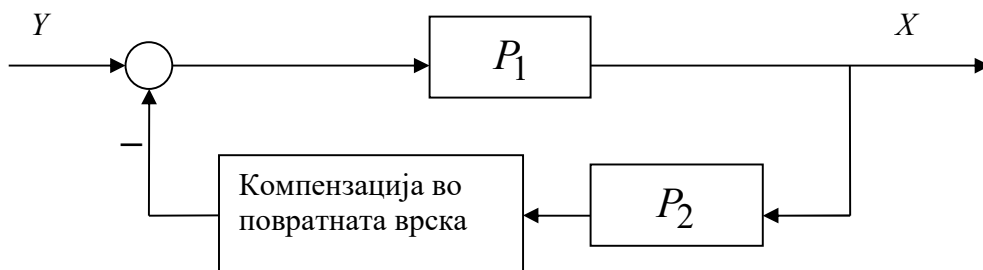
И сериската и паралелната компензација имаат свои предности и негативности. Една од основните предности на сериската компензација во однос на паралелната е што постапките за проектирање сериски компензатори се многу добро развиени и се едноставни, додека постапките за проектирање паралелни компензатори во голема мерка зависат од природата на системот што треба да се компензира, како и од природата на зададените проектни барања. Затоа во продолжение ќе стане збор исклучиво за сериските компензатори и сериската компензација.

Компензаторите се проектираат на таков начин што компензираниот затворен систем (без оглед дали е континуален или дискретен) има прифатлив преоден одзив, што значи прифатливи карактеристики во поглед на стабилноста, и прифатлива точност на работа во стационарен режим. За жал, овие барања често се спротивставени, бидејќи мала стационарна грешка обично значи голем коэффициент на засилување кај соодветниот отворен систем, а големите коефициенти на засилување во отворениот систем по правило ги влошуваат условите за стабилност на затворениот систем. Без оглед дали се реализирани со пасивни елементи, какви што се, на пример, RC – електричните кола, или со активни елементи, каков што е операциониот засилувач,

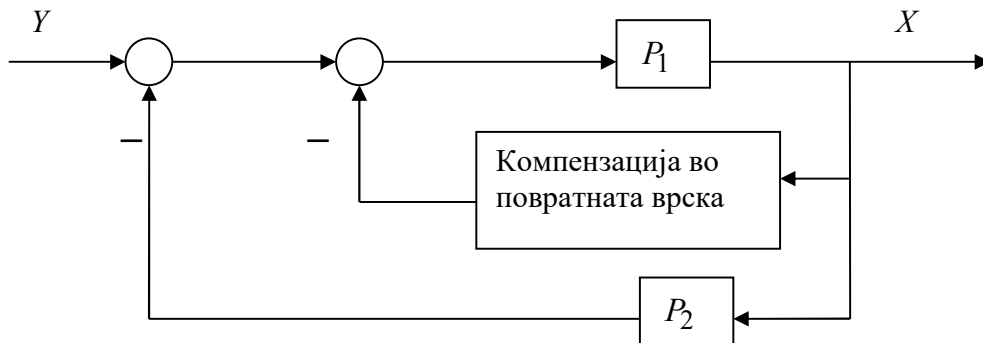
компензаторите, општо земено, ги менуваат коефициентите на засилување и/или временските константи и внесуваат дополнителни нули и полови во еден систем.



Слика 3.2. Сериска компензација



Слика 3.3. Компензација во главната повратна врска



Слика 3.4. Компензација во локалната повратна врска

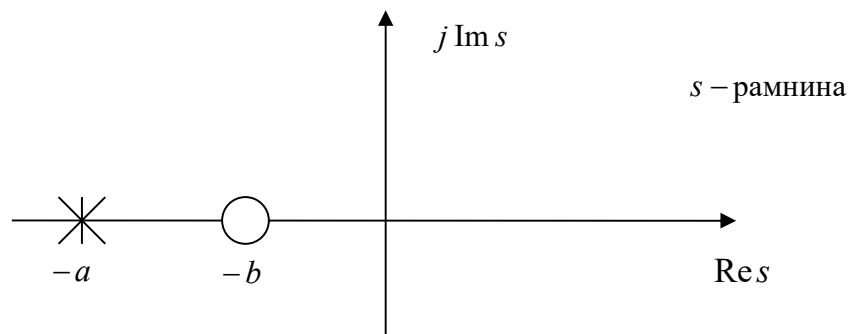
Постојат два основни типа компензатори: диференцијални и интегрални. Со комбинација на диференцијален и интегрален компензатор, се добива специјален интегро-диференцијален компензатор. Во продолжение ќе стане збор за секој од овие компензатори, нивните карактеристики, нивното влијание во затворениот систем на автоматско управување и начините за нивна изведба.

3.1. ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Преносната функција на еден континуален диференцијален компензатор има облик:

$$G_d(s) = \frac{s+b}{s+a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{s}{b}+1}{\frac{s}{a}+1}; \quad 0 < b < a \quad (3.1)$$

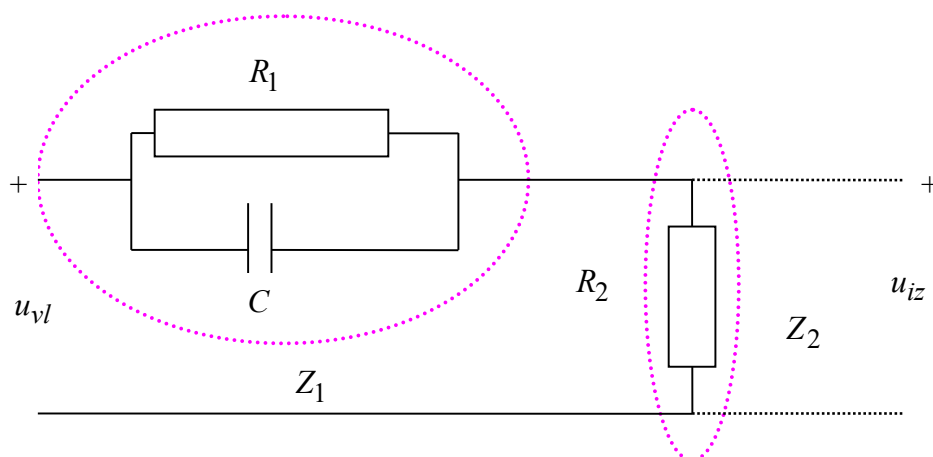
Тој има реална нула во точката $s = -b$ и реален пол во точката $s = -a$, кои се наоѓаат во левата полурамнина од s -комплексната рамнина, при што нулата е поблиску до имагинарната оска.



Слика 3.5. Положба на нулите и половите на еден диференцијален компензатор во s -комплексната рамнина

Диференцијалниот компензатор може да се реализира со елементи од различна физичка природа. На слика 3.6 е прикажана една електрична шема, која се однесува како диференцијален компензатор. Се работи за едноставно пасивно електрично RC-коло, чија преносна функција наједноставно се определува ако колото се набљудува како делител на напон:

$$\begin{aligned} \frac{U_{iz}(s)}{U_{vl}(s)} &= \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_2}{R_1 \cdot \frac{1}{Cs} + R_2} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{R_1Cs + 1} + R_2} = \\ &= \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2} = \frac{s + \frac{1}{R_1C}}{s + \frac{1}{R_1C} + \frac{1}{R_2C}} \quad (3.2) \end{aligned}$$



Слика 3.6. Реализација на диференцијален компензатор со помош на електрично RC – коло

Очигледно, преносната функција (3.2) има ист облик како преносната функција (3.1). Таа има реална нула во точката $s = -b = -\frac{1}{R_1 C}$ и реален пол во точката $s = -a = -\frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_2 C}$, при што $b = \frac{1}{R_1 C} < a = \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}$.

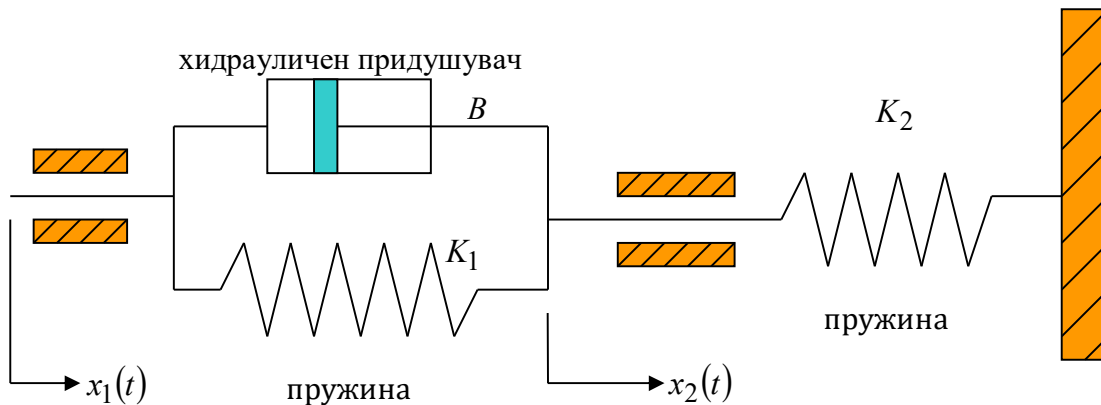
На слика 3.7 е прикажан механички систем, кој е еквивалентен со електричниот систем од слика 3.6. Тој се состои од хидрауличен придушувач со коефициент на придушвање B и две пружини со коефициенти на крутост K_1 и K_2 , соодветно. На движењето на клипот во придушувачот $x_2(t)$ му се спротивставуваат отпорните сили на пружините кои се пропорционални на коефициентите K_1 и K_2 , соодветно, и отпорната сила на триење на вискозната средина со која е исполнет придушувачот, а која е пропорционална со коефициентот B . Следствено, равенката на динамичко поведење на системот од слика 3.7 е:

$$B \frac{d}{dt} [x_1(t) - x_2(t)] + K_1 [x_1(t) - x_2(t)] = K_2 x_2(t) \quad (3.3)$$

додека неговата преносна функција, ако поместувањето $x_1(t)$ се усвои за влез, а поместувањето $x_2(t)$ за излез, има облик:

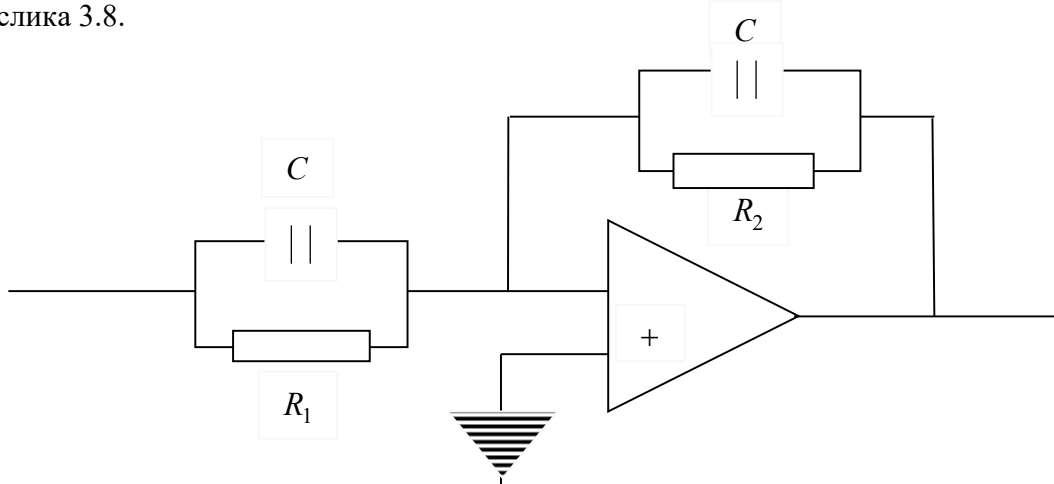
$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{Bs + K_1}{Bs + K_1 + K_2} = \frac{s + \frac{K_1}{B}}{s + \frac{K_1 + K_2}{B}} \quad (3.4)$$

Преносната функција (3.4) има ист облик со преносната функција (3.1). Таа има една реална нула во точката $s = -b = -\frac{K_1}{B}$ и еден реален пол во точката $s = -a = -\frac{K_1 + K_2}{B}$, при што $b = \frac{K_1}{B} < a = \frac{K_1 + K_2}{B}$. Со споредба на мрежите од слика 3.6 и слика 3.7 може да се заклучи дека поместувањата $x_1(t)$ и $x_2(t)$ се аналогни на напоните $u_{vl}(t)$ и $u_{iz}(t)$, коефициентот на вискозно триење на клипот B е аналоген со капацитетот на кондензаторот C , а коефициентите на еластичност на пружините K_1 и K_2 се аналогни со реципрочните вредности од отпорностите R_1 и R_2 .



Слика 3.7. Реализација на диференцијален компензатор со помош на механичка мрежа

Реализацијата на диференцијалните компензатори по правило се врши со електрични елементи, затоа што се евтини, добро стандардизирани и доверливи. Освен со пасивни електрични елементи, тие можат да се реализираат и со активни електрични елементи, каков што е операциониот засилувач. Една таква електрична шема е прикажана на слика 3.8.



Слика 3.8. Диференцијален компензатор реализиран со активно електрично коло

Ако во влезната и повратната гранка од операциониот засилувач на слика 3.8 се приклучат импеданции составени од паралелна врска на отпорник и кондензатор со $R_1 > R_2$:

$$Z_1(s) = \frac{R_1}{R_1Cs + 1} \quad (3.5)$$

$$Z_2(s) = \frac{R_2}{R_2Cs + 1} \quad (3.6)$$

лесно може да се провери дека неговата преносна функција ќе добие облик:

$$\frac{U_{iz}(s)}{U_{vl}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{\frac{R_2}{R_2Cs + 1}}{\frac{R_1}{R_1Cs + 1}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1Cs + 1}{R_2Cs + 1} = -\frac{s + \frac{1}{R_1C}}{s + \frac{1}{R_2C}}; \quad R_1 > R_2 \quad (3.7)$$

и таа е од ист облик со преносната функција (3.1) со исклучок на знакот, што лесно може да се реши со примената на инвертор.

Фреквенциската преносна функција на диференцијалниот компензатор (3.1) е:

$$G_d(j\omega) = \frac{j\omega + b}{j\omega + a} = \frac{\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} e^{j\left(\arctg \frac{\omega}{b} - \arctg \frac{\omega}{a}\right)} \quad (3.8)$$

од каде следува дека аналитичкиот опис на неговите логаритамски фреквенциски карактеристики на слабеење и фаза е:

$$\begin{aligned} G_d(j\omega)_{dB} &= 20 \log |G_d(j\omega)| = 20 \log \frac{\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = \\ &= 20 \log \sqrt{\omega^2 + b^2} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + a^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

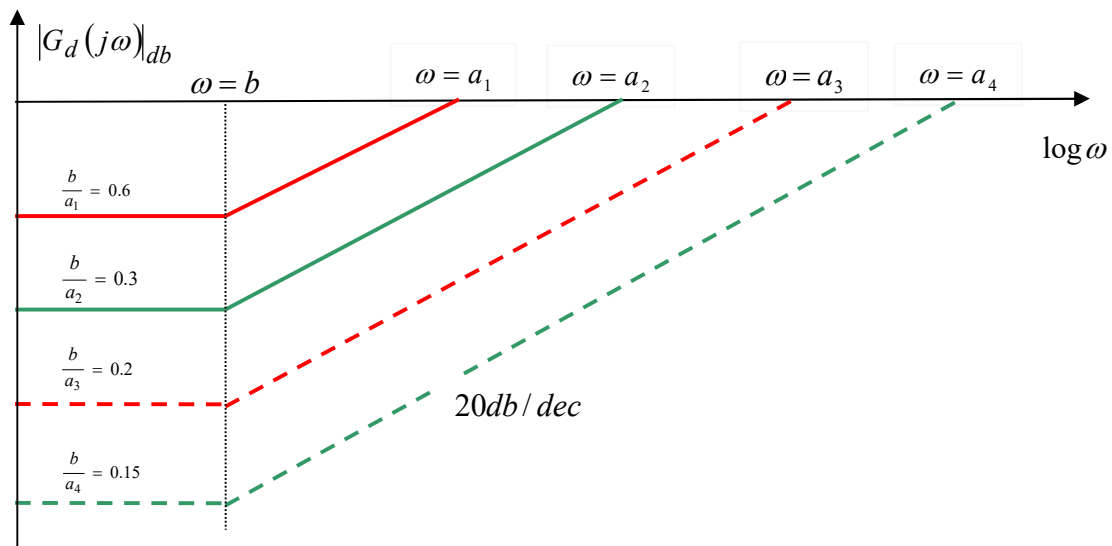
$$\arg[G_d(j\omega)] = \arctg \frac{\omega}{b} - \arctg \frac{\omega}{a} \quad (3.10)$$

Изразите (3.9) и (3.10) ги претставуваат реалните логаритамски карактеристики на слабеење и фаза, додека асимптотските карактеристики се опишани со изразите:

$$|G_d(j\omega)|_{db} = 20\log\sqrt{\omega^2 + b^2} - 20\log\sqrt{\omega^2 + a^2} \approx \begin{cases} 20\log\frac{b}{a}, & \omega < b \\ 20\log\frac{\omega}{a}, & b < \omega < a \\ 0, & \omega > a \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\arg[G_d(j\omega)] = \arctg\frac{\omega}{b} - \arctg\frac{\omega}{a} \approx \begin{cases} 0, & \omega < b \\ \frac{\pi}{2}, & b < \omega < a \\ 0, & \omega > a \end{cases} \quad (3.12)$$

На слика 3.9 е прикажан асимптотскиот логаритамски дијаграм на слабеење на еден диференцијален компензатор за различни вредности на односот b/a , додека на слика 3.10 се прикажани неговите реални логаритамски дијаграми на слабеење и фаза за исти вредности на односот b/a . Од дијаграмите на слика 3.9 и слика 3.10 се гледа дека диференцијалниот компензатор при ниски фреквенции внесува слабеење еднакво на односот b/a , додека слабеењето при високи фреквенции е занемарливо. Фазното поместување што го внесува диференцијалниот компензатор е секогаш позитивно и значајна вредност има само при ниски и средни фреквенции. При многу ниски и при високи фреквенции ова фазно поместување е занемарливо. Фреквенцијата ω_m при која фазното поместување на диференцијалниот компензатор има максимална вредност се одредува од условот за екстрем на функцијата (3.10):



Слика 3.9. Асимптотски логаритамски дијаграм на слабеење на еден диференцијален компензатор за различно b/a

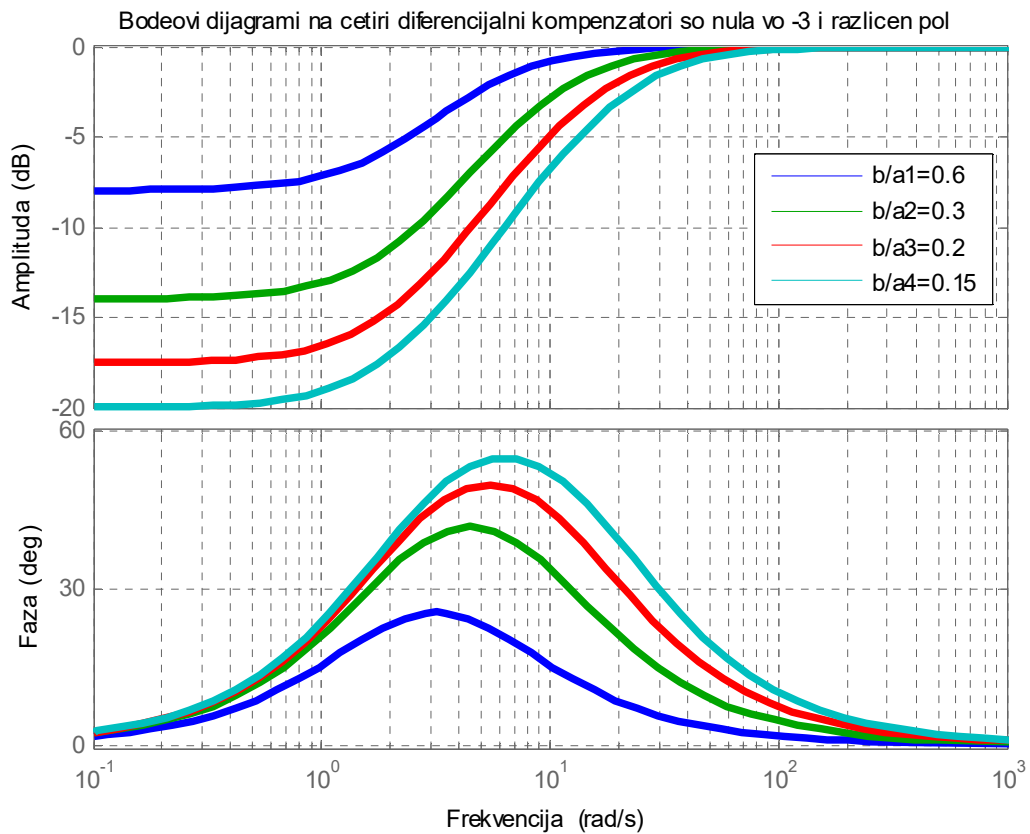
$$\frac{d}{d\omega} \{ \arg [G_d(j\omega)] \} = \frac{d}{d\omega} \left(\arctg \frac{\omega}{b} - \arctg \frac{\omega}{a} \right) = \frac{b}{\omega^2 + b^2} - \frac{a}{\omega^2 + a^2} = 0 \quad (3.13)$$

и изнесува:

$$\omega_m = \sqrt{ab} \quad (3.14)$$

а самото максимално фазно поместување е:

$$\varphi_m = \varphi(\omega_m) = \arctg \frac{\sqrt{ab}}{b} - \arctg \frac{\sqrt{ab}}{a} = \arctg \sqrt{\frac{a}{b}} - \arctg \sqrt{\frac{b}{a}} = 90^\circ - 2 \arctg \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (3.15)$$



Слика 3.10. Реални Бодевии дијаграми на слабеење и фаза на еден диференцијален компензатор за различно b/a

При пресметките, поудобно е преносната функција на диференцијалниот компензатор (3.1) да се претстави во облик:

$$G_d(s) = \frac{s+b}{s+a} = \frac{s+\frac{a}{\alpha}}{s+a} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha s+1}{\frac{s}{a}+1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{s}{b}+1}{\frac{s}{b\alpha}+1} = \frac{s+b}{s+b\alpha} \quad (3.16)$$

каде што $\alpha = \frac{a}{b}$. Тогаш фреквенцијата (3.14) при која настапува максималното фазно поместување на диференцијалниот компензатор може да се изрази како:

$$\omega_m = \sqrt{ab} = \frac{a}{\sqrt{\alpha}} = b\sqrt{\alpha} \quad (3.17)$$

Бидејќи фазното поместување на диференцијалниот компензатор сега може да се претстави на следниот начин:

$$\varphi(\omega) = \arg[G_d(j\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{b\omega(\alpha-1)}{\omega^2 + ab^2} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega}{a}(\alpha-1)}{1 + \alpha\left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \quad (3.18)$$

самото максимално фазно поместување (3.15) ќе биде:

$$\varphi(\omega_m) = \operatorname{arctg} \frac{b\omega_m(\alpha-1)}{\omega_m^2 + ab^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}} \quad (3.19)$$

Ако од (3.19) се изрази:

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega_m) = \frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}} \quad (3.20)$$

и се примени тригонометриската смена:

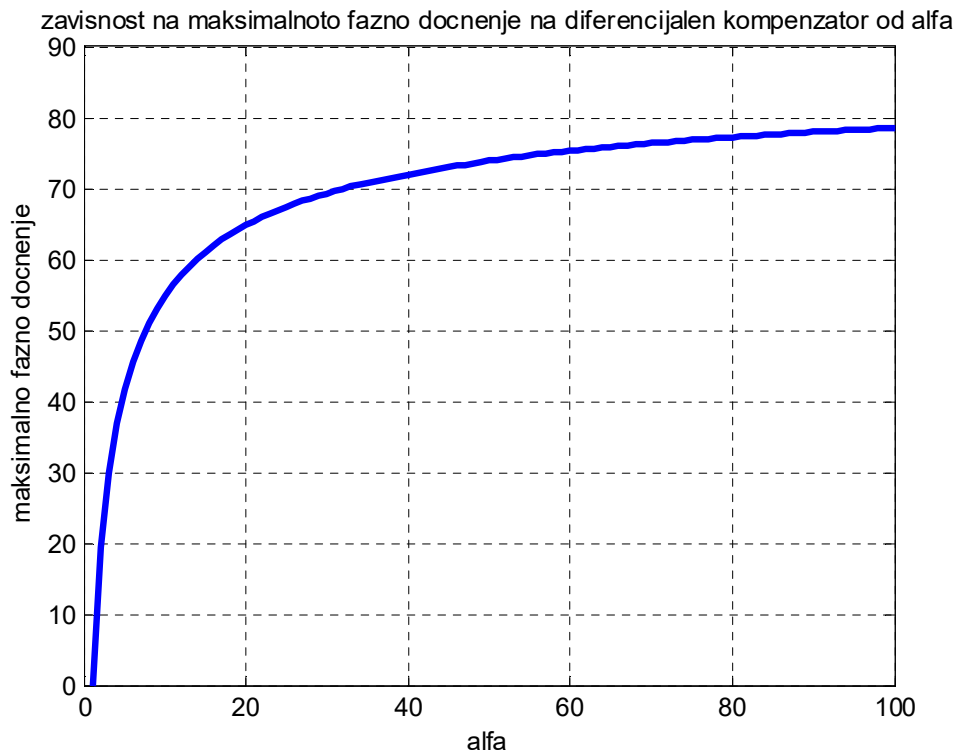
$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (3.21)$$

ќе се добие:

$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \quad (3.22)$$

Изразот (3.22) е многу корисен при одредувањето на односот помеѓу полот и нулата на диференцијалниот компензатор, со цел да се обезбеди саканото максимално фазно поместување.

Од графичкиот приказ на односот $\varphi_m(\alpha)$ на слика 3.11 се гледа дека максималното фазно поместување што го внесува еден диференцијален компензатор е пропорционално со односот меѓу неговиот пол и нула. Меѓутоа, исто така се гледа дека диференцијалниот компензатор (3.1) односно (3.16) не може да постигне многу поголемо фазно поместување од 70° . Од друга страна, од конкретната реализација (3.2) на диференцијалниот компензатор се гледа дека $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$, што значи дека постојат практични ограничувања во однос на максималната вредност за α . Следствено, ако треба да се оствари фазно поместување поголемо од 70° , се користат два или повеќе диференцијални компензатори во сервиска врска.



Слика 3.11. Графички приказ на зависноста $\varphi_m(\alpha)$

Општиот облик на преносната функција на дискретниот еквивалент од диференцијалниот компензатор е:

$$G_d(z) = \frac{K_d(z - z_c)}{z - p_c}; \quad z_c > p_c \quad (3.23)$$

Тој има реална нула во точката $z = z_c$ и реален пол во $z = p_c$, при што нулата е подалеку од координатниот почеток во z -комплексната рамнина. Вредноста на преносната функција (3.23) за $z = 1$ се нарекува **стационарно засилување** и изнесува:

$$G_d(1) = K_d \frac{1 - z_c}{1 - p_c} \quad (3.24)$$

Коефициентот на засилување K_d служи за нагудување на засилувањето на компензаторот при одредена фреквенција.

Преносната функција на дискретниот еквивалент на диференцијалниот компензатор може да се добие од преносната функција на континуалниот диференцијален компензатор:

$$G_d(s) = \frac{s+b}{s+a}; \quad a > b \quad (3.25)$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Така, нулата $s = -b$ на континуалниот диференцијален компензатор $G_d(s)$ со смената $z = e^{sT}$ се пресликува во нулата $z_c = e^{-bT}$, додека полот $s = -a$ се пресликува во полот $p_c = e^{-aT}$. Како резултат се добива:

$$G_d(z) = K_d \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}; \quad z_c = e^{-bT} > e^{-aT} = p_c \quad (3.26)$$

Коефициентот K_d во (3.26) може да се одбере од условот стационарното засилување на дискретниот компензатор $G_d(z)$ да биде еднакво со стационарното засилување на изворниот диференцијален компензатор $G_d(s)$:

$$G_d(z)_{z=1} = K_d \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} = G_d(s)_{s=0} = \frac{b}{a} \Rightarrow K_d = \frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} \quad (3.27)$$

па, за преносната функција $G_d(z)$ дефинитивно се добива:

$$G_d(z) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} \cdot \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}} \quad (3.28)$$

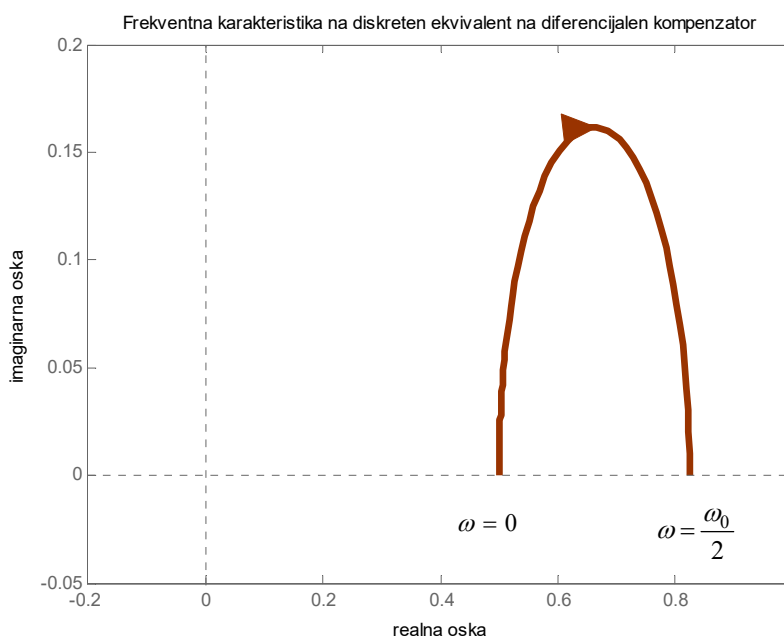
Преносната функција (3.28) претставува само една од можните реализации на дискретниот еквивалент на диференцијалниот компензатор.

Пример 3.1. Да се нацрта фреквенциската карактеристика на дискретниот компензатор:

$$G_d(z) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} \cdot \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}; \quad b < a \quad (3.29)$$

за $a = 2$ и $b = 1$.

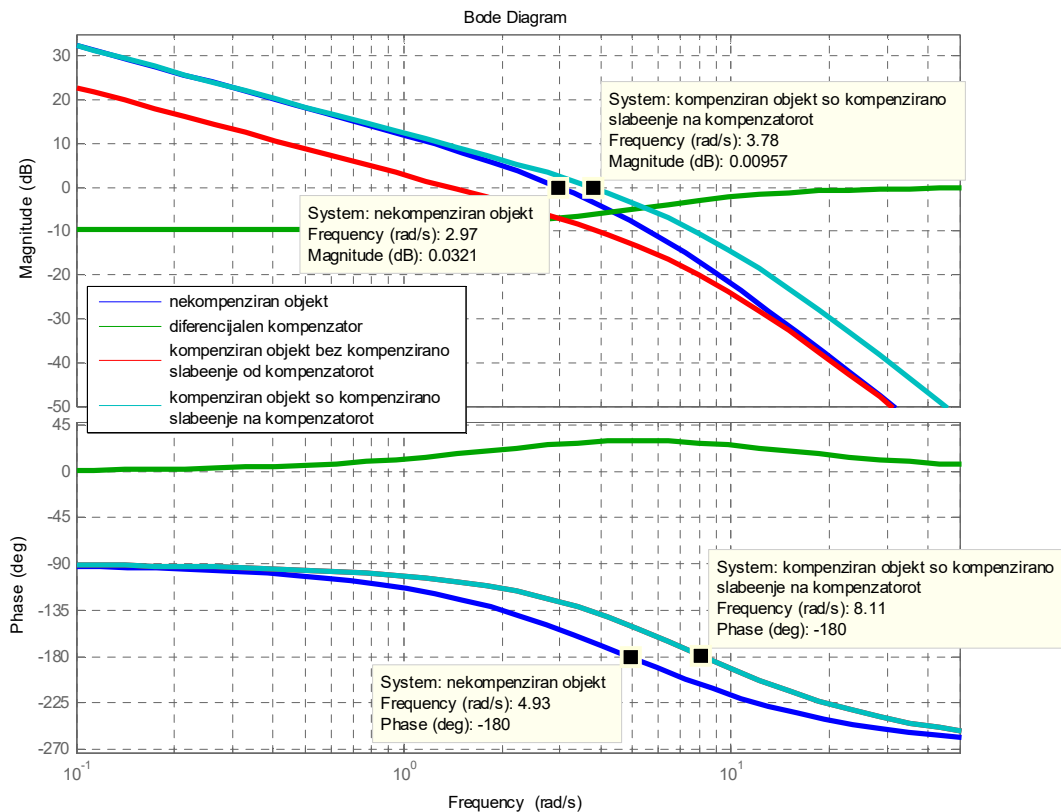
Решение: Бараната фреквенциска карактеристика е прикажана на слика 3.12. Дискретниот компензатор (3.29) е добиен со пресликување на диференцијалниот компензатор (3.1) од s -рамнината во z -комплексната рамнина, при што е зачувано стационарното засилување на континуалниот компензатор $G_d(0) = \frac{b}{a}$.



Слика 3.12. Фреквенциска карактеристика на дискретниот компензатор (3.29) □

На слика 3.13 и слика 3.14 е прикажано влијанието на диференцијалниот компензатор врз фреквенциските карактеристики на еден објект, додека на слика 3.15 е прикажано влијанието на диференцијалниот компензатор врз отскочниот одзив на затворениот систем. Бодевите дијаграми на некомпензираниот систем се прикажани со сино, дијаграмите на диференцијалниот компензатор се прикажани со зелено, а Бодевите дијаграми на компензираниот систем се прикажани со црвено. За да се компензира слабеењето што диференцијалниот компензатор го внесува во компензираниот систем при ниски фреквенции, неговата преносна функција се множи со $\alpha = a/b$. Така се добива дијаграмот означен со сино-зелена боја. Од него се гледа дека при високи

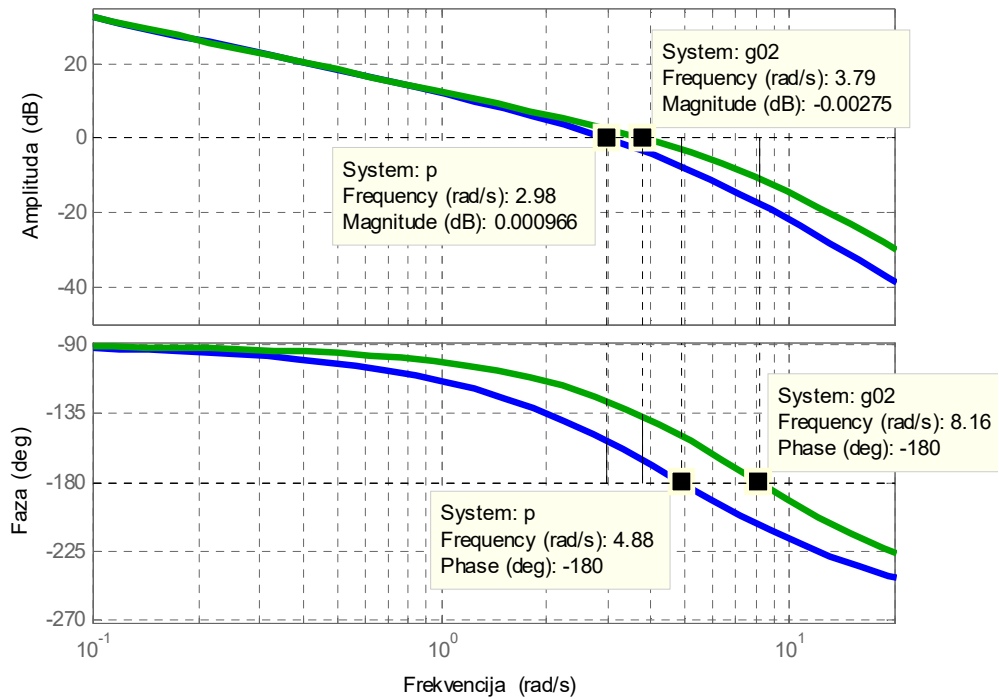
Фреквенцијата на засилување на вака компензираниот систем се зголемува и тоа зголемување изнесува $20\log_{10}(\alpha)$. Како резултат, се зголемува и пресечната фреквенција на засилување, а тоа води кон зголемување на пропусниот опсег и намалување на времето на пораст и времето на смирување на отскочниот одзив на компензираниот систем во однос на некомпензираниот. Од своја страна ова значи зголемување на брзината на одзив на компензираниот систем. За жал, на овој начин може да дојде до засилување на високофреквентните шумови. Позитивното фазно поместување што го внесува диференцијалниот компензатор ја зголемува резервата на фаза на компензираниот систем, а со тоа се зголемува неговата стабилност. Ова значи намалување на максималниот прескок во отскочниот одзив на компензираниот систем. Следствено, примената на диференцијалниот компензатор се засновува врз неговата особина да внесува позитивно фазно поместување и се користи секогаш кога треба да се зголеми резервата на стабилност и ширината на пропусниот опсег (брзината на одзив) на еден систем.



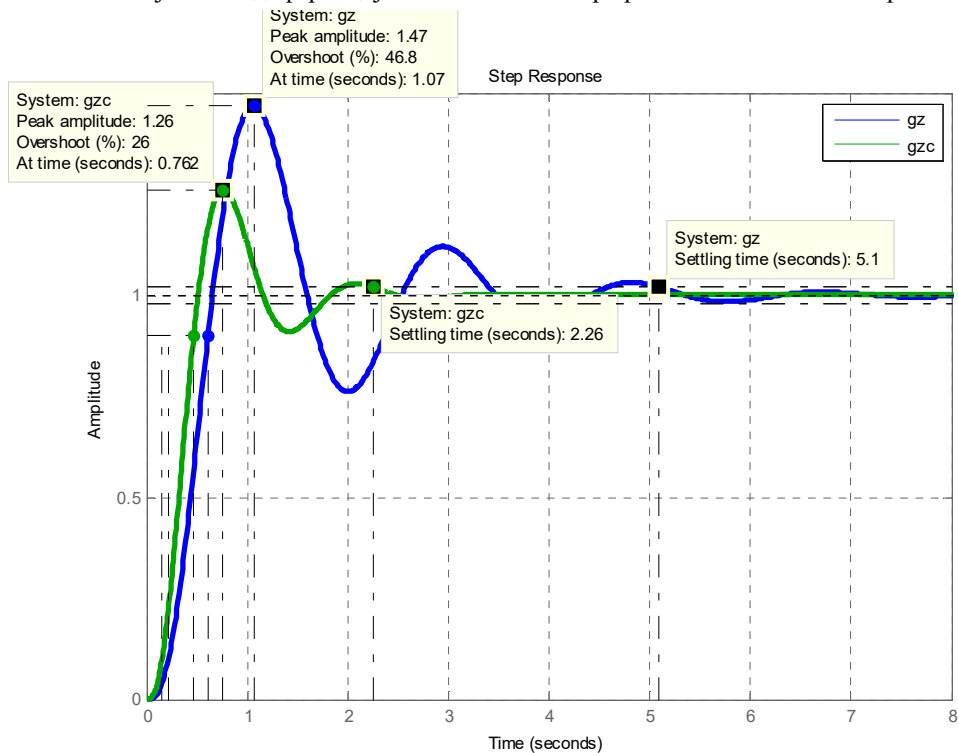
Слика 3.13. Влијание на диференцијалниот компензатор врз фреквенциските карактеристики на еден систем

Диференцијалните компензатори по правило се користат за нагудување на преодниот режим на еден затворен САУ, откако претходно се задоволени проектните барања во поглед на точноста на работа на системот во стационарен режим, како и во поглед на

Влијание на диференцијалниот компензатор врз резервата на стабилност на објектот , $P_m = 43 \text{ deg}$ (at 3.8 rad/s)



Слика 3.14. Влијание на диференцијалниот компензатор врз стабилноста на затворениот систем



Слика 3.15. Влијание на диференцијалниот компензатор врз отскочниот одсвиг на затворениот систем

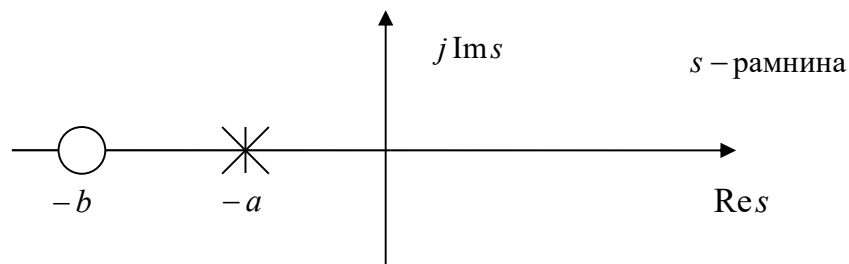
некои забранети области во доменот на ниските фреквенции. Диференцијалните компензатори се проектираат така што најнапред се определува односот $\alpha = a/b$ врз основа на поставеното проектно барање за саканата резерва на фаза, а потоа се определува a така што максималното фазно поместување на диференцијалниот компензатор да настапи при новата пресечна фреквенција на компензираниот систем. Притоа, доколку постојат забранети области во подрачјето на високите фреквенции, изборот на нулата и полот на диференцијалниот компензатор мора да се врши многу внимателно, за да се задоволат сите поставени проектни барања.

3.2. ИНТЕГРАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Преносната функција на еден континуален интегрален компензатор има облик:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a} = \frac{\frac{s}{b} + 1}{\frac{s}{a} + 1}; \quad 0 < a < b \quad (3.30)$$

Тој има реална нула во точката $s = -b$ и реален пол во точката $s = -a$, кои се наоѓаат во левата полурамнина од s -комплексната рамнина, при што полот е поблизу до имагинарната оска. Факторот $\frac{a}{b}$ во преносната функција $G_i(s)$ обезбедува засилувањето $G_i(0)$ на компензаторот да биде еднакво на единица, со што тој нема да влијае врз стационарната грешка на компензираниот систем во процесот на синтеза.



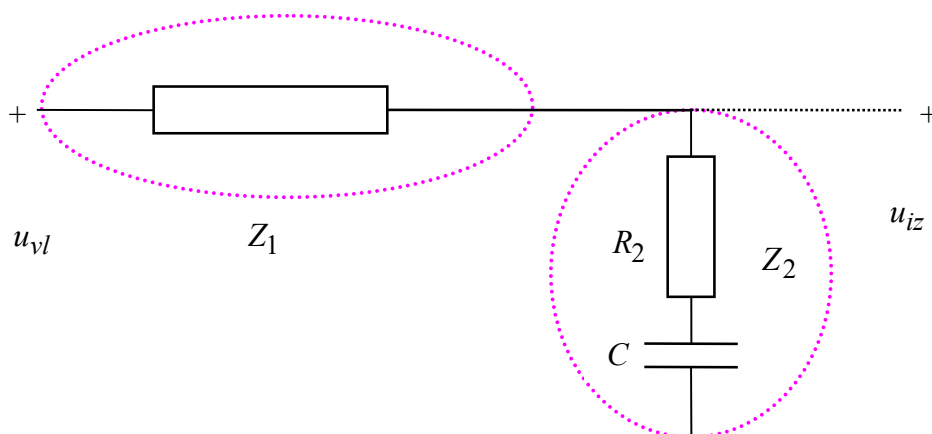
Слика 3.16. Положба на нулите и половите на еден интегрален компензатор во s -комплексната рамнина

На слика 3.17 е прикажана една електрична шема со помош на која може да се реализира интегрален компензатор, додека на слика 3.18 е прикажана аналогна механичка шема.

Преносната функција на RC колото од слика 3.17 е:

$$\begin{aligned} \frac{U_{iz}(s)}{U_{vl}(s)} &= \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \\ &= \frac{R_2Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{s + \frac{1}{R_2C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

и таа има ист облик како преносната функција (3.30). Единствената реална нула на преносната функција (3.31) се наоѓа во точката $s = -b = -\frac{1}{R_2C}$, а нејзиниот единствен реален пол е во точката $s = -a = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C}$, при што $a = \frac{1}{(R_1 + R_2)C} < b = \frac{1}{R_2C}$.



Слика 3.17. Реализација на интегрален компензатор со помош на пасивно електрично RC – коло

Ако се воочи дека поместувањата $x_1(t)$ и $x_2(t)$ во шемата од слика 3.18 се аналогни на напоните $u_{vl}(t)$ и $u_{iz}(t)$, коефициентот на вискозно триење на клипот B е аналоген со капацитетот на кондензаторот C , а коефициентите на еластичност на пружините K_1 и K_2 се аналогни со реципрочните вредности од отпорностите R_1 и R_2 , лесно може да се заклучи дека механичката мрежа од слика 3.18 е аналогна со електричната мрежа од слика 3.17, односно истата претставува интегрален компензатор. Имено, за механичкиот систем од слика 3.18 важат следните релации:

$$K_1[x_2(t) - x_1(t)] = K_2[x_3(t) - x_2(t)] \Rightarrow$$

$$-K_1X_1(s) + (K_1 + K_2)X_2(s) - K_2X_3(s) = 0 \quad (3.32)$$

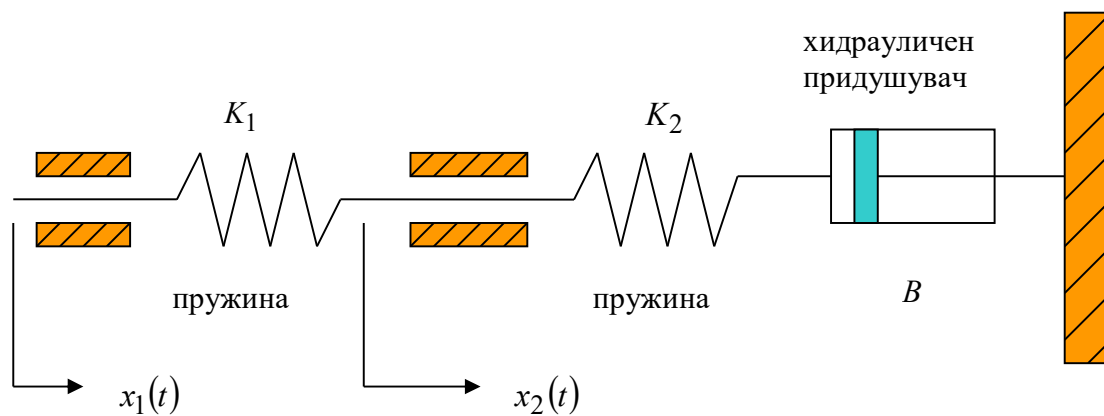
$$K_2[x_3(t) - x_2(t)] = B[\dot{x}_4(t) - \dot{x}_3(t)] = -B\dot{x}_3(t) \Rightarrow$$

$$-K_2X_2(s) + (Bs + K_2)X_3(s) = 0 \Rightarrow X_3(s) = \frac{K_2}{Bs + K_2} X_2(s) \quad (3.33)$$

$$-K_1X_1(s) + (K_1 + K_2)X_2(s) - K_2 \frac{K_2}{Bs + K_2} X_2(s) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[(K_1 + K_2) - K_2 \frac{K_2}{Bs + K_2} \right] X_2(s) = K_1X_1(s) \Rightarrow$$

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{K_1(Bs + K_2)}{(K_1 + K_2)(Bs + K_2) - K_2^2} = \frac{K_1}{K_1 + K_2} \cdot \frac{s + \frac{K_2}{B}}{s + \frac{K_1K_2}{(K_1 + K_2)B}}; \quad \frac{K_2}{B} > \frac{K_2}{\left(1 + \frac{K_2}{K_1}\right)B} \quad (3.34)$$



Слика 3.18. Реализација на интегрален компензатор со помош на механичка мрежа

Освен со пасивни електрични елементи, интегралните компензатори се изведуваат и со помош на активни електрични елементи, каков што е операциониот засилувач, прикажан на слика 3.8. Ако во влезната и повратната гранка од операциониот засилувач на слика 3.8 се приклучат импеданси составени од паралелна врска на отпорник и кондензатор:

$$Z_i(s) = \frac{R_1}{R_1C_1s + 1} \quad (3.35)$$

$$Z_o(s) = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1} \quad (3.36)$$

со $R_2 C_2 > R_1 C_1$, лесно може да се провери дека неговата преносна функција ќе добие облик:

$$G(s) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}; \quad R_2 C_2 > R_1 C_1 \quad (3.37)$$

а тоа е преносна функција на интегрален компензатор.

Фреквенциската преносна функција на интегралниот компензатор (3.30) е:

$$G_i(j\omega) = \frac{a}{b} \cdot \frac{j\omega + b}{j\omega + a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} e^{j\left(\arctg \frac{\omega}{b} - \arctg \frac{\omega}{a}\right)} \quad (3.38)$$

од каде следува дека аналитичкиот опис на неговите логаритамски фреквенциски карактеристики на слабеење и фаза е:

$$\begin{aligned} |G_i(j\omega)|_{db} &= 20 \log |G_i(j\omega)| = 20 \log \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = \\ &= 20 \log \frac{\sqrt{(\omega/b)^2 + 1}}{\sqrt{(\omega/a)^2 + 1}} = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{b}\right)^2 + 1} - 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + 1} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\arg [G_i(j\omega)] = \arctg(\omega/b) - \arctg(\omega/a) \quad (3.40)$$

Изразите (3.39) и (3.40) ги претставуваат реалните логаритамски карактеристики на слабеење и фаза, додека асимптотските карактеристики се опишани со изразите:

$$|G_i(j\omega)|_{db} = 20 \log \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} + 1} - 20 \log \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} + 1} \approx \begin{cases} 0, & \omega < a \\ -20 \log \omega/a, & a < \omega < b \\ -20 \log b/a, & \omega > b \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\arg [G_i(j\omega)] = \arctg \frac{\omega}{b} - \arctg \frac{\omega}{a} \approx \begin{cases} 0, & \omega < a \\ -\frac{\pi}{2}, & a < \omega < b \\ 0, & \omega > b \end{cases} \quad (3.42)$$

На слика 3.19 е прикажан асимптотскиот логаритамски дијаграм на слабеење на еден интегрален компензатор за различни вредности на односот a/b , додека на слика 3.20

се прикажани неговите реални логаритамски дијаграми на слабеење и фаза за истите a/b . Од дијаграмите на слика 3.19 и слика 3.20 се гледа дека слабеењето што го внесува интегралниот компензатор при ниски фреквенции е занемарливо, додека слабеењето при високи фреквенции е еднакво на односот a/b . Фазното поместување на интегралниот компензатор е секогаш негативно и значајна вредност има само при ниски и средни фреквенции. При многу ниски и при високи фреквенции ова фазно поместување е занемарливо. Фреквенцијата ω_m при која фазното поместување на интегралниот компензатор има минимална вредност се одредува од условот за екстрем на функцијата (3.40):

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ \arg[G_i(j\omega)] \right\} = \frac{d}{d\omega} \left(\arctg \frac{\omega}{b} - \arctg \frac{\omega}{a} \right) = \frac{b}{\omega^2 + b^2} - \frac{a}{\omega^2 + a^2} = 0 \quad (3.43)$$

и изнесува :

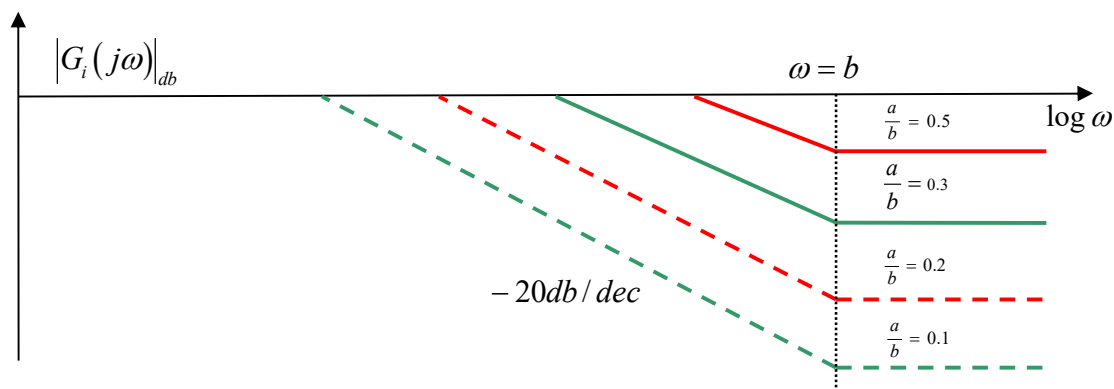
$$\omega_m = \sqrt{ab} \quad (3.44)$$

а самото минимално фазно поместување изнесува:

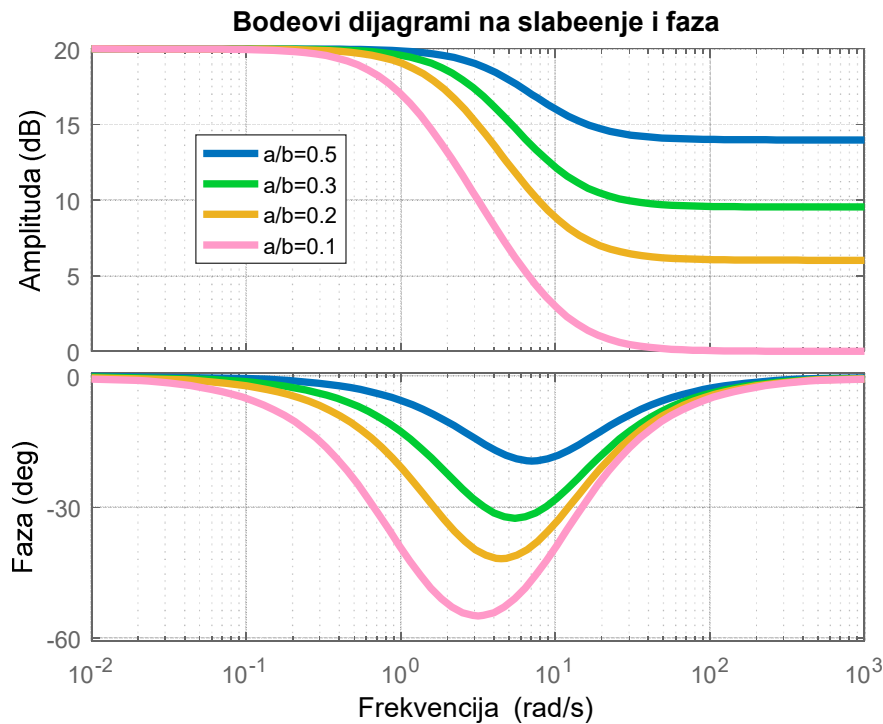
$$\varphi_m = \varphi(\omega_m) = \arctg \frac{\sqrt{ab}}{b} - \arctg \frac{\sqrt{ab}}{a} = \arctg \sqrt{a/b} - \arctg \sqrt{b/a} = -90^\circ + 2\arctg \sqrt{a/b} \quad (3.45)$$

При пресметките, поудобно е преносната функција (3.30) на интегралниот компензатор да се претстави во облик:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a} = \frac{b}{\beta} \cdot \frac{s+b}{s+\frac{b}{\beta}} = \frac{1}{\beta} \frac{s+b}{s+\frac{b}{\beta}} = \frac{\frac{s}{b}+1}{\beta \frac{s}{b}+1} = \frac{\alpha \frac{s}{a}+1}{\frac{s}{a}+1}; \quad 0 < a < b; \quad \beta = \frac{b}{a} \quad (3.46)$$

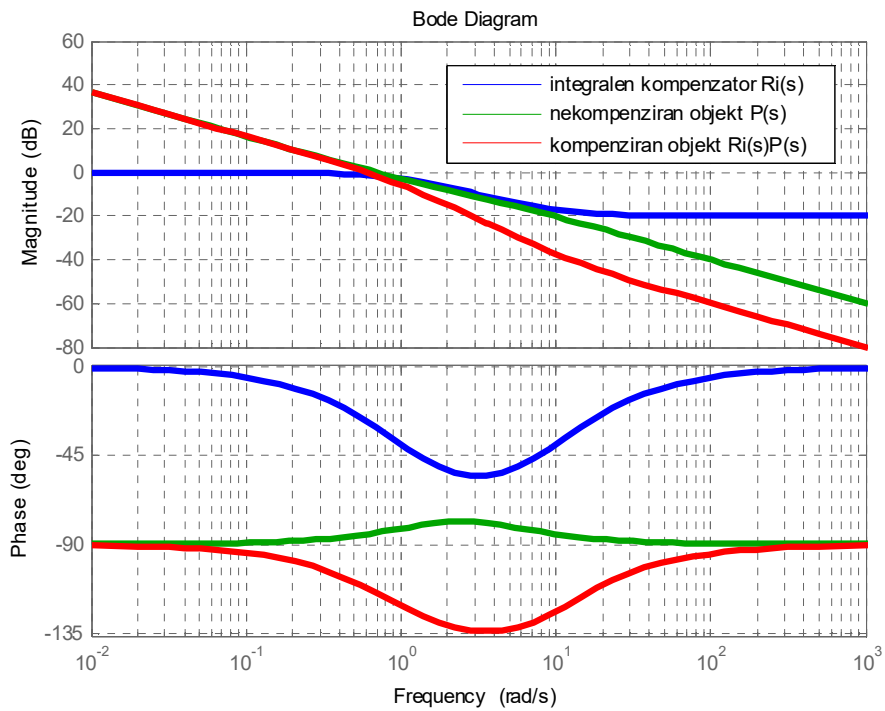


Слика 3.19. Асимптотски Бодеов дијаграм на слабеење на интегралниот компензатор за различно a/b

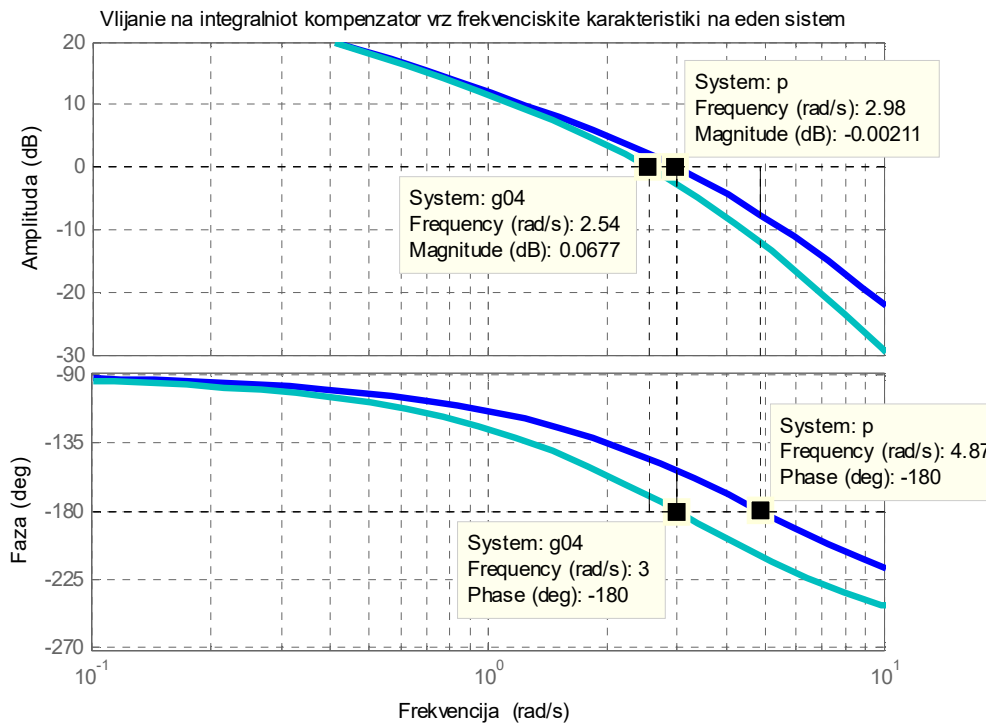


Слика 3.20. Реални Бодевии дијаграми на слабење и фаза на интегрален компензатор за различно a/b

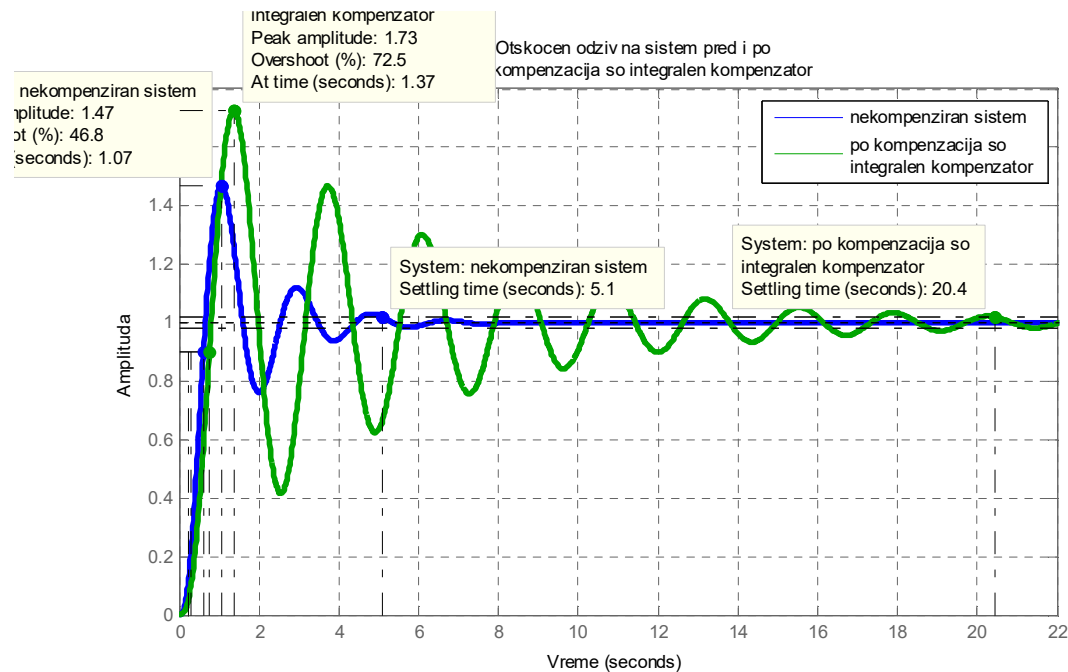
Преносната функција на интегралниот компензатор има ист облик како и преносната функција на диференцијалниот компензатор, само што нулата на интегралниот компензатор е подалеку од имагинарната оска во однос на неговиот пол. Интегралниот компензатор ги поместува половите на компензираниот систем во десно (во однос на половите на некомпензираниот систем), односно кон имагинарната оска, што е непожелно. Затоа при проектирањето на еден интегрален компензатор, неговиот пол и нула се поставуваат блиску едно до друго и уште блиску до координатниот почеток, за да не го менуваат значително ниту преодниот режим ниту стабилноста на компензираниот систем. Влијанието на еден интегрален компензатор врз поведението на компензираниот систем е прикажано на слика 3.21, слика 3.22 и слика 3.23. На слика 3.21 е прикажана генерално идејата за компензација со интегрален компензатор, додека на слика 3.22 е прикажано детално влијанието на компензаторот врз стабилноста на некомпензираниот систем. Од неа се гледа дека внесувањето интегрален компензатор во серија со објектот на управување предизвикува намалување на пресечната фреквенција на засилување и фаза, што има за последица намалување на пропусниот опсег и резервата на стабилност на компензираниот систем во однос на некомпензираниот. Ова пак има за резултат влошување на преодниот режим на компензираниот систем во однос на некомпензираниот, што се гледа од слика 3.23. Оттаму може да се види дека кај компензираниот систем со интегрален компензатор доаѓа до зголемување на максималниот прескок, времето на пораст и времето на смирување на отскочниот одзив во однос на некомпензираниот, односно влошување на стабилноста и намалување на брзината на одзив.



Слика 3.21. Влијание на интегралниот компензатор врз компензираниот систем



Слика 3.22. Влијание на интегралниот компензатор врз стабилноста на компензираниот систем



Слика 3.23. Влијание на интегралниот компензатор врз отскочниот одзив на компензираниот систем

Ако веќе констатиравме дека интегралниот компензатор не смее значително да влијае врз преодниот режим на компензираниот систем, зашто генерално гледано тоа влијание има негативен ефект, се поставува прашањето врз што се засновува неговата примена. Интегралниот компензатор го подобрува стационарниот одзив на компензираниот систем. При високи фреквенции, тој има единично засилување, но при ниски фреквенции, неговото засилување е $\frac{a}{b} > 1$. Константите на грешка K_p, K_v, K_a

на компензираниот систем се поголеми за овој фактор $\frac{a}{b} > 1$ во однос на константите на грешка на некомпензираниот систем, па стационарната грешка на компензираниот систем ќе биде помала за истиот фактор. Следствено, може да заклучиме дека примената на интегралниот компензатор се засновува врз неговата особина да внесува слабеење при ниски фреквенции и занемарливо фазно поместување при високи фреквенции. Бидејќи ова слабеење предизвикува намалување на пропусниот опсег од компензираниот систем, што пак значи намалување на брзината на одзив на системот, интегралниот компензатор се користи само тогаш кога брзината на одзив на проектираниот систем не е од интерес. Интегралниот компензатор се користи секогаш кога треба да се намали влијанието на шумовите и пречките, чиј фреквенциски спектар се наоѓа во областа фреквенции на границата од пропусниот опсег на некомпензираниот систем и кога треба да се зголеми точноста на работа на системот во стационарен режим.

Преносната функција на дискретниот еквивалент на еден интегрален континуален компензатор има општ облик:

$$G_i(z) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c}; \quad z_c < p_c \quad (3.47)$$

Овој компензатор има нула во точката $z = z_c$ и пол во точката $z = p_c$, при што $z_c < p_c$. Неговиот коефициент на засилување во стационарна состојба изнесува:

$$G_i(1) = 1 \quad (3.48)$$

Коефициентот на засилување $K_i = \frac{1-p_c}{1-z_c}$ служи да обезбеди стационарното засилување на дигиталниот компензатор $G_i(z)$ да биде еднакво со стационарното засилување на континуалниот компензатор $G_i(s)$.

Преносната функција на дискретниот еквивалент на еден континуален интегрален компензатор може да се добие од неговата преносна функција:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a}; \quad b > a \quad (3.49)$$

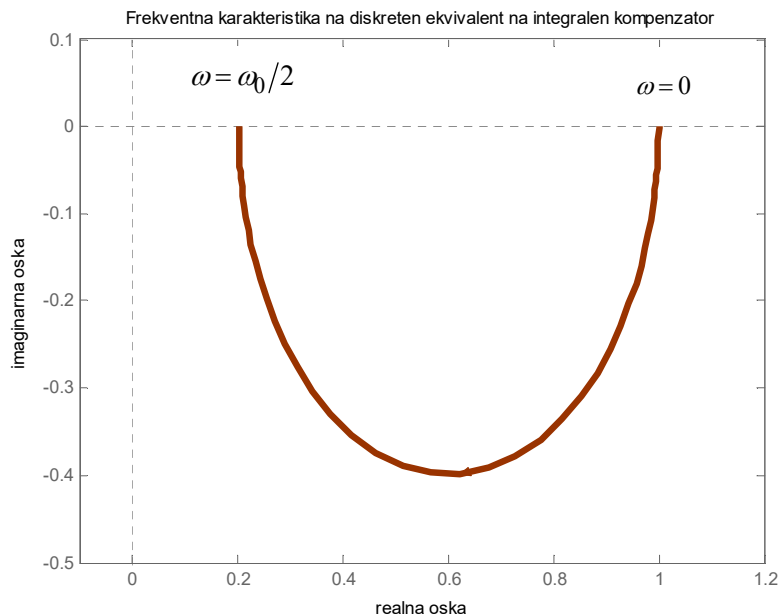
со помош на смената $z = e^{sT}$. Така, нулата $s = -b$ на континуалниот интегрирачки компензатор $G_i(s)$ со смената $z = e^{sT}$ се пресликува во нулата $z_c = e^{-bT}$, додека полот $s = -a$ се пресликува во полот $p_c = e^{-aT}$. Како резултат се добива:

$$G_i(z) = K_i \cdot \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}; \quad z_c = e^{-bT} > e^{-aT} = p_c \quad (3.50)$$

и кога коефициентот K_i се одбере така што да важи $G_i(z)_{z=1} = G_i(s)_{s=0}$, односно стационарното засилување на дигиталниот компензатор $G_i(z)$ да биде еднакво со стационарното засилување на континуалниот компензатор $G_i(s)$, за преносната функција (3.50) дефинитивно се добива:

$$G_i(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} \cdot \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}} \quad (3.51)$$

Може да се потврди дека вредноста на функцијата (3.51) за $z=1$ е $G_i(1) = 1$. Фреквенциската карактеристика на дискретниот еквивалент на еден континуален интегрален компензатор за $z_c = 0.86$ и $p_c = 0.97$ е прикажана на слика 3.24.



Слика 3.24. Фреквенциска карактеристика на дискретниот компензатор (3.51) за $z_c = 0.86$ и $p_c = 0.97$

3.3. ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Предностите на еден диференцијален компензатор се:

- остварување на саканата резерва на стабилност
- зголемување на пропусниот опсег

Од гледна точка на брзината на одзив на проектираниот систем, широкиот пропусен опсег претставува пожелна карактеристика. Имено, што е пропусниот опсег поголем, толку се помали времето на доцнење, времето на пораст и времето на смирување на одзивот на проектираниот систем.

Недостатоци на диференцијалниот компензатор се:

- засилување на брзопроменливите сигнали
- чувствителност на проектираниот систем на шумови и пречки, кои обично припаѓаат во опсегот на високи фреквенции

Елементот на управување, кој се состои само од појачувач (неопходен за компензирање на слабеењето што диференцијалниот компензатор го внесува при ниски фреквенции) и диференцијален компензатор, ги појачува високофреквенциските компоненти и сигнали. Останатите компоненти на проектираниот систем (вообичаено

извршниот орган на управувачкиот дел, кој е обично од електромеханички тип), често не се во состојба да следат големи и брзопроменливи сигнали, па влегуваат во заситување. Тоа значи дека во системите само со диференцијален компензатор се случува одреден број компоненти да престанат да работат во линеарен режим. Тогаш динамичкото поведење на компензираниот систем не одговара на проектните барања, кои претпоставуваат линеарен модел на проектираниот систем.

Позитивни особини на интегралниот компензатор се:

- мала чувствителност на шумови и пречки
- точност во работата во стационарен режим

Главните недостатоци на интегралниот компензатор се:

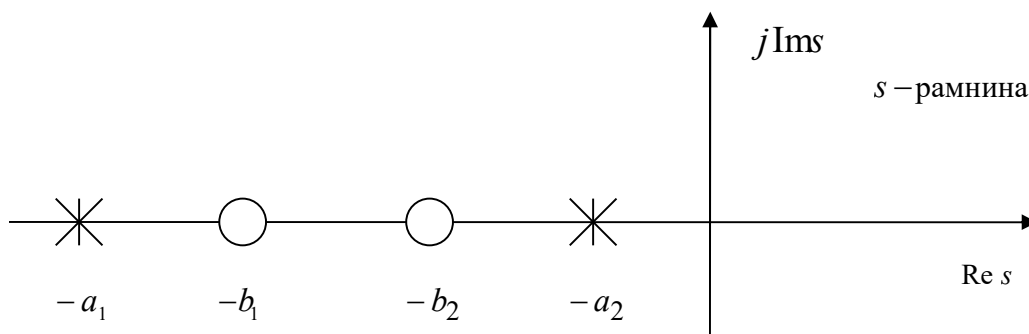
- премногу мал пропусен опсег на компензираниот систем и следствено, недозволена големо време на пораст и смирување на одзивот на системот, што значи мала брзина на одзив
- проблеми со физичката реализација во случајот на големи временски константи на компензаторот
- неможност да се постигне саканата резерва на стабилност кај системите чиј отворен систем има астатизам од повисок ред

Недостатоците на синтезата само со диференцијален или само со интегрален компензатор можат да се надминат ако се примени нивната комбинација.

Преносната функција на еден интегро-диференцијален компензатор е:

$$G_{di}(s) = \frac{(s + b_1)(s + b_2)}{(s + a_1)(s + a_2)} \quad (3.52)$$

Тој има две реални нули во точките $s = -b_1$ и $s = -b_2$ и два реални пола во точките $s = -a_1$ и $s = -a_2$, прикажани на слика 3.25, при што $a_2 < b_2 < b_1 < a_1$.



Слика 3.25. Положба на нулите и половите на еден интегро-диференцијален компензатор во s -комплексната рамнина

Интегро-диференцијалниот компензатор може да се реализира со помош на електричната мрежа од слика 3.26, или аналогната механичка мрежа од слика 3.27. Така, за преносната функција на пасивната електрична мрежа од слика 3.26 се добива:

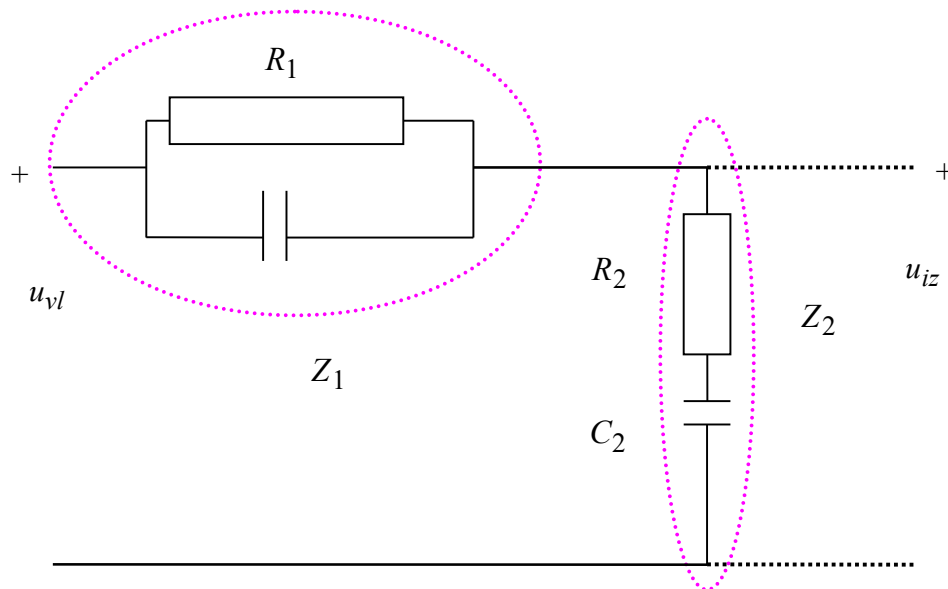
$$Z_1(s) = \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} \quad (3.53)$$

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} \quad (3.54)$$

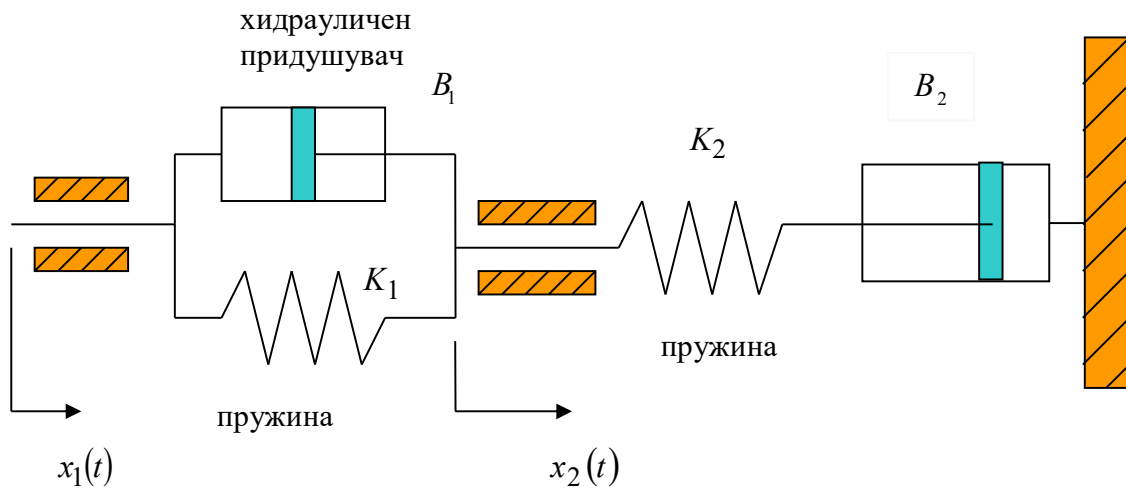
$$G(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{\frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}}{\frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} + \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2 s} =$$

$$= \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2} \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) s + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{(s + b_1)(s + b_2)}{(s + a_1)(s + a_2)} \quad (3.55)$$

$$b_1 = \frac{1}{R_1 C_1}; \quad b_2 = \frac{1}{R_2 C_2}; \quad a_1 a_2 = b_1 b_2; \quad a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + \frac{1}{R_2 C_1} \quad (3.56)$$



Слика 3.26. Реализација на интегро-диференцијален компензатор со помош на електрично RC – коло



Слика 3.27. Реализација на интегро-диференцијален компензатор со помош на аналогна механичка мрежа

Во продолжение е изведена преносната функција $X_2(s)/X_1(s)$ на механичкиот систем од слика 3.27:

$$K_1[x_2(t) - x_1(t)] + B_1[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = K_2[x_3(t) - x_2(t)]$$

$$K_2[x_3(t) - x_2(t)] = -B_2\dot{x}_3(t)$$

$$-(B_1s + K_1)X_1(s) + (B_1s + K_1 + K_2)X_2(s) - K_2X_3(s) = 0$$

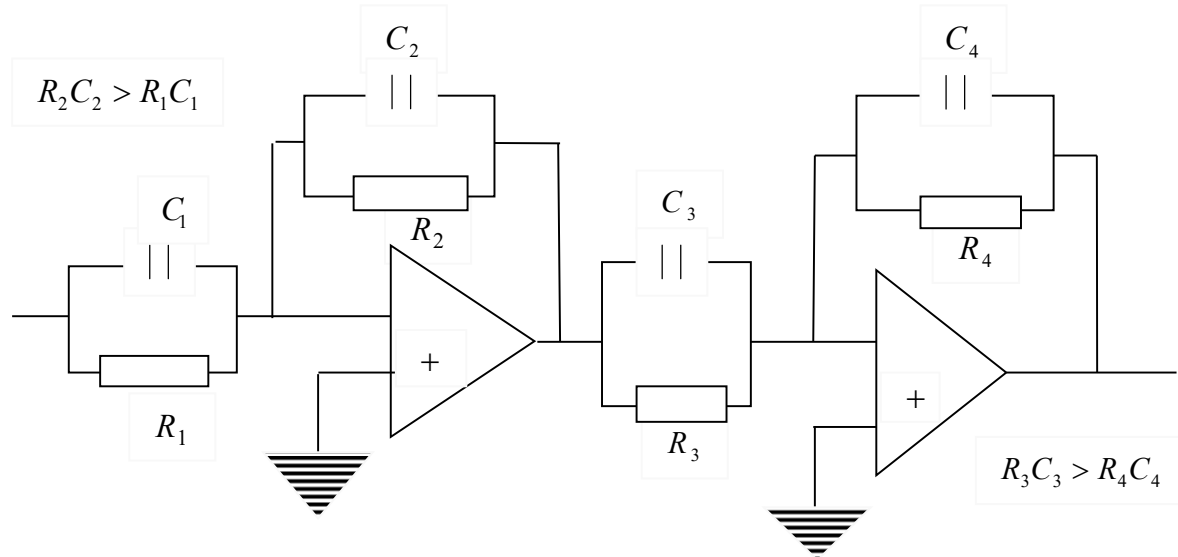
$$-K_2X_2(s) + (B_2s + K_2)X_3(s) = 0 \Rightarrow X_3(s) = \frac{K_2}{(B_2s + K_2)} X_2(s)$$

$$-(B_1s + K_1)X_1(s) + (B_1s + K_1 + K_2)X_2(s) - \frac{K_2^2}{(B_2s + K_2)} X_2(s) = 0$$

$$-(B_1s + K_1)X_1(s) + (B_1s + K_1 + K_2)X_2(s) - \frac{K_2^2}{(B_2s + K_2)} X_2(s) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{X_2(s)}{X_1(s)} &= \frac{(B_1s + K_1)(B_2s + K_2)}{B_1B_2s^2 + (K_1B_2 + K_2B_1 + K_2B_2)s + K_1K_2} = \\ &= \frac{(s + K_1/B_1)(s + K_2/B_2)}{s^2 + (K_1/B_1 + K_2/B_2 + K_2/B_1)s + K_1K_2/B_1B_2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Интегро-диференцијален компензатор може да се реализира и со активни електрични компоненти, како што е покажано на слика 3.28.



Слика 3.28. Интегро-диференцијален компензатор реализиран со помош на операциони засилувачи

Фреквенциската преносна функција на интегро-диференцијалниот компензатор е:

$$G_{di}(j\omega) = \frac{(j\omega + b_1)(j\omega + b_2)}{(j\omega + a_1)(j\omega + a_2)} \quad (3.58)$$

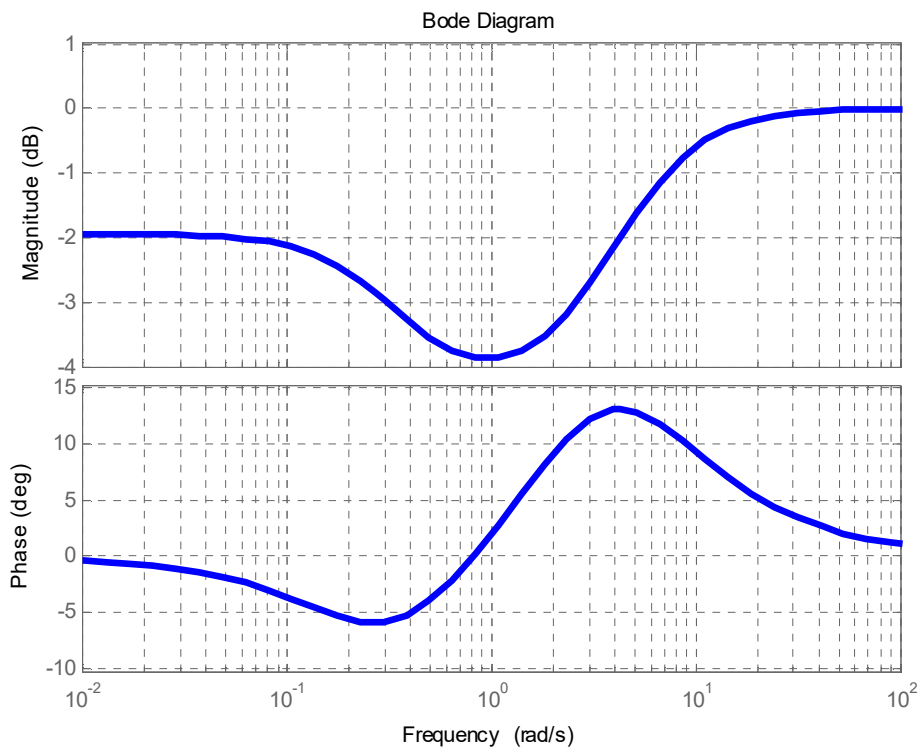
па неговите логаритамски фреквенциски дијаграми на слабеење и фаза се опишани со изразите:

$$\begin{aligned} |G_{di}(j\omega)|_{db} &= 20 \log \left| \frac{(j\omega + b_1)(j\omega + b_2)}{(j\omega + a_1)(j\omega + a_2)} \right| = \\ &= 20 \log \sqrt{\omega^2 + b_1^2} + 20 \log \sqrt{\omega^2 + b_2^2} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + a_1^2} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + a_2^2} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\arg[G_{di}(j\omega)] = \arctg \frac{\omega}{b_1} + \arctg \frac{\omega}{b_2} - \arctg \frac{\omega}{a_1} - \arctg \frac{\omega}{a_2} \quad (3.60)$$

Истите графички се прикажани на слика 3.29 за интегро-диференцијален компензатор со преносна функција:

$$G_{di}(s) = \frac{(s + 0.4)(s + 3)}{(s + 0.3)(s + 5)} \quad (3.61)$$



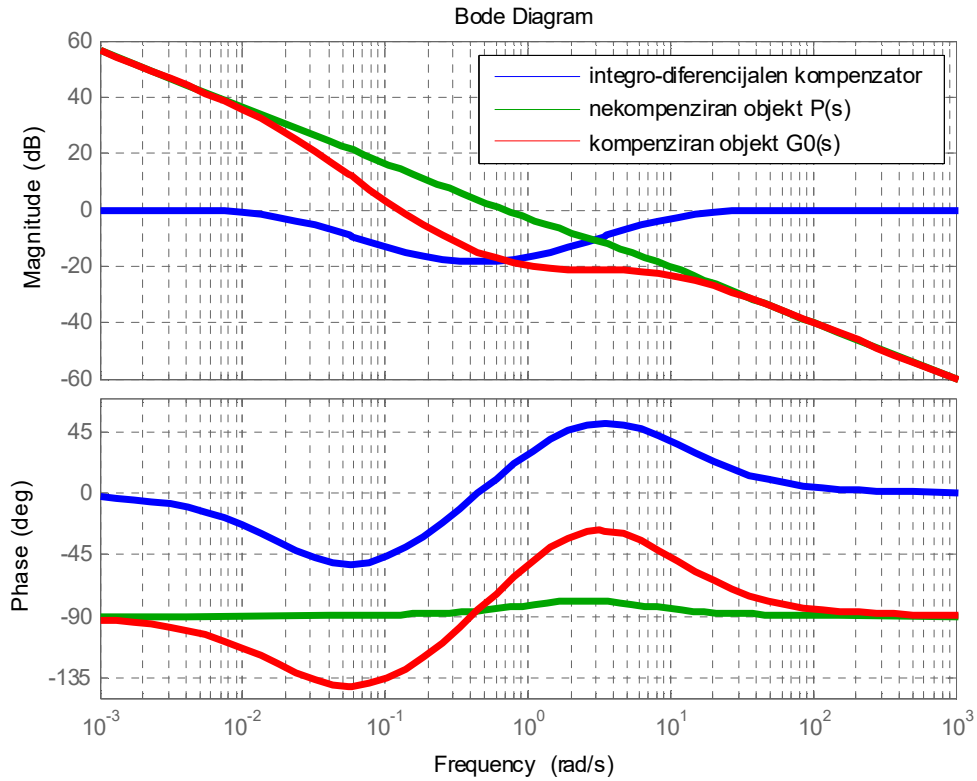
Слика 3.29. Бодови дијаграми на интегро-диференцијалниот компензатор (3.61)

Изразите (3.59) и (3.60) ги претставуваат реалните логаритамски карактеристики на слабеење и фаза, додека асимптотските карактеристики се опишани со изразите:

$$20 \log |G_{di}(j\omega)| = \begin{cases} 20 \log \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}, & \omega T \ll a_2 \\ 20 \log \frac{b_1 b_2}{a_1} - 20 \log \omega, & a_2 \ll \omega T \ll b_2 \\ 20 \log \frac{b_1}{a_1}, & b_2 \ll \omega T \ll b_1 \\ 20 \log \omega - 20 \log a_1, & b_1 \ll \omega T \ll a_1 \\ 0, & \omega T \gg a_1 \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega T \ll a_2 \\ -\frac{\pi}{2}, & a_2 \ll \omega T \ll b_2 \\ 0, & b_2 \ll \omega T \ll b_1 \\ \frac{\pi}{2}, & b_1 \ll \omega T \ll a_1 \\ 0, & \omega T \gg a_1 \end{cases} \quad (3.63)$$

На слика 3.30 е прикажано влијанието на интегро-диференцијалниот компензатор врз фреквенциските карактеристики на еден објект.



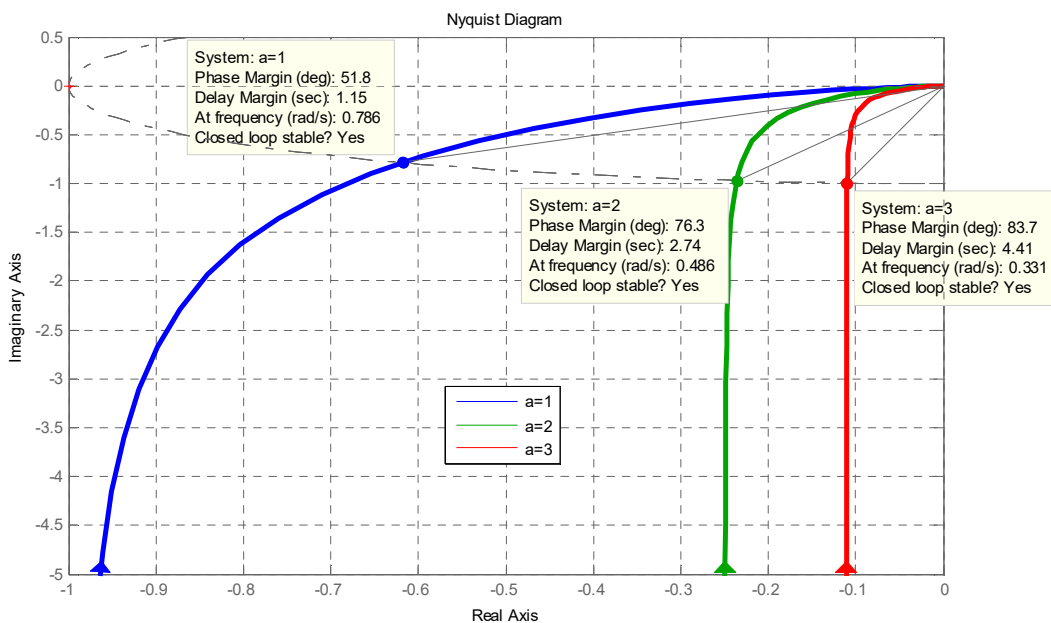
Слика 3.30. Влијание на интегро-диференцијалниот компензатор врз компензираниот систем

4. ФРЕКВЕНЦИСКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА НАЈКВИСТОВАТА КРИВА

Фреквенциската синтеза со помош на Најквистовата крива се врши на ист начин како и со другите постапки: во директната или повратната гранка од набљудуваниот систем се внесуваат соодветни компензатори кои значително го менуваат поведението на некомпензираниот систем. Преку избор на параметрите на тие компензатори се менува фреквенциската карактеристика на соодветниот отворен систем (Најквистовата крива) сè додека не се реализираат поставените проектни барања. Синтезата се врши со постапката на проба и грешка, што значи дека се повторува сè додека не се постигне саканото поведење на компензираниот систем.

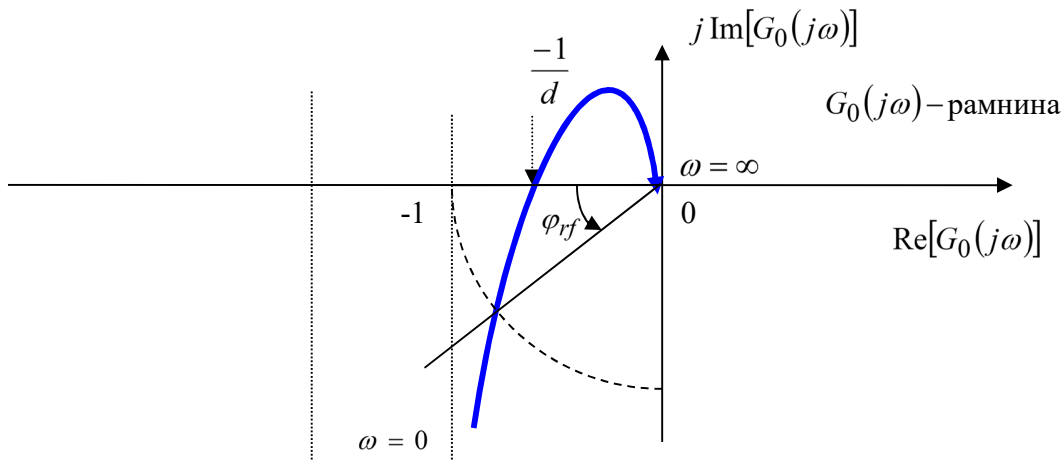
Со помош на Најквистовата крива се дефинирани два показатели на стабилноста на еден затворен систем – резервата на засилување и резервата на фаза. Системите кои имаат поголеми резерви на стабилност, можат да издржат поголеми промени на своите параметри пред да станат нестабилни. На одреден начин може да се воспостави врска помеѓу показателите на стабилност и половите на еден затворен систем. Имено, системите чии полови се наоѓаат подалеку од имагинарната оска, имаат поголем степен на стабилност. Ова може да се забележи на слика 4.1, каде што се прикажани

Најквистовите криви на еден отворен систем од облик $G_0(s) = \frac{1}{s(s+a)}$ за неколку различни вредности на неговиот пол во $s = -a$.



Слика 4.1. Зависност на стабилноста на затворениот систем од положбата на половите на соодветниот отворен систем

Резервата на засилување и резервата на фаза можат да се определат графички од Најквистовата крива на следниот начин. Нека на слика 4.2 е прикажана фреквенциската карактеристика односно Најквистовата крива на отворениот систем за некој затворен систем. Нека, под претпоставка, отворениот систем нема полови во десната полурамнина од s -комплексната рамнина. Тогаш, набљудуваниот затворен систем ќе биде стабилен, доколку фреквенциската карактеристика на отворениот систем не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$, како што е прикажано на слика 4.2.



Слика 4.2. Фреквенциска карактеристика на астатичен отворен систем

Оддалеченоста на точката $-1/d$ во која фреквенциската карактеристика на отворениот систем ја сече реалната оска од критичната точка $(-1, j0)$, одредува колку е блиску затворениот систем до тоа да стане нестабилен. Така, ако фреквенциската преносна функција на отворениот систем се помножи со d , неговата фреквенциска карактеристика ќе помине низ критичната точка $(-1, j0)$. Затоа за d се вели дека е резерва на засилувањето на набљудуваниот систем и најчесто се изразува во децибели, $20 \log_{10} d$. Може да се забележи дека d е реципрочната вредност од растојанието на точката $\left(-\frac{1}{d}, j0\right)$ до имагинарната оска.

Ако низ точката $(-1, j0)$ се нацрта круг со центар во координатниот почеток $(0, j0)$, неговиот пресек со фреквенциската карактеристика на отворениот систем претставува точка во која амплитудата на фреквенциската преносна функција $G_0(j\omega)$ има вредност 1. Тогаш аголот φ_{rf} што го зафаќа векторот $G_0(j\omega)$ што минува низ оваа точка со негативниот дел од реалната оска покажува колку затворениот систем е блиску до тоа да стане нестабилен. Имено, со промена на фазата на отворениот систем за φ_{rf} степени, неговата фреквенциска карактеристика ќе помине низ критичната точка $(-1, j0)$ и затворениот систем ќе се најде на границата на стабилност. Затоа φ_{rf} се нарекува

резерва на фаза. Помеѓу резервата на фаза φ_{rf} и факторот на релативно придущување ζ постои одредена врска за која ќе стане збор во следната глава.

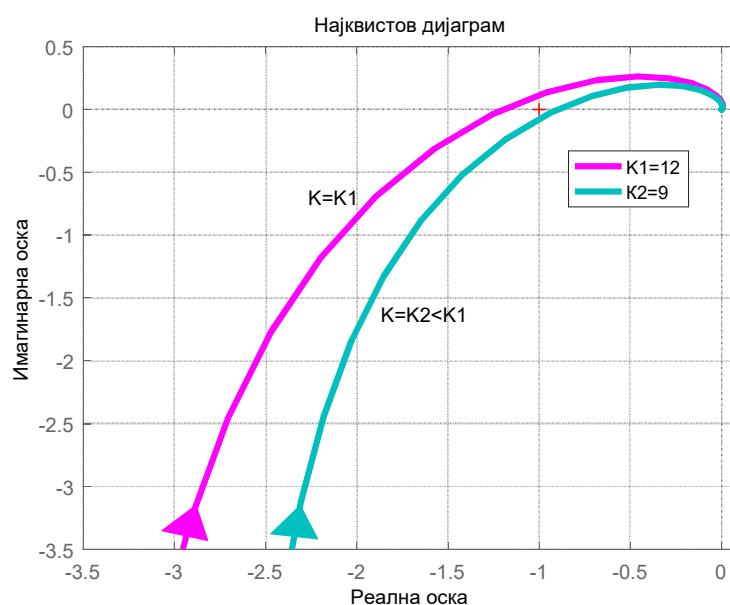
4.1. НАЈКВИСТОВА СИНТЕЗА ПРЕКУ КОМПЕНЗАЦИЈА НА КОЕФИЦИЕНТОТ НА ЗАСИЛУВАЊЕ

Со промена на коефициентот на засилување на отворениот систем, понекогаш може да се стабилизира еден нестабилен затворен систем или, пак, да се дестабилизира стабилен затворен систем. Ова е илустрирано со примерот 4.1.

Пример 4.1. Даден е линеарен стационарен континуален затворен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}; \quad K, p_1, p_2, p_3 > 0 \quad (4.1)$$

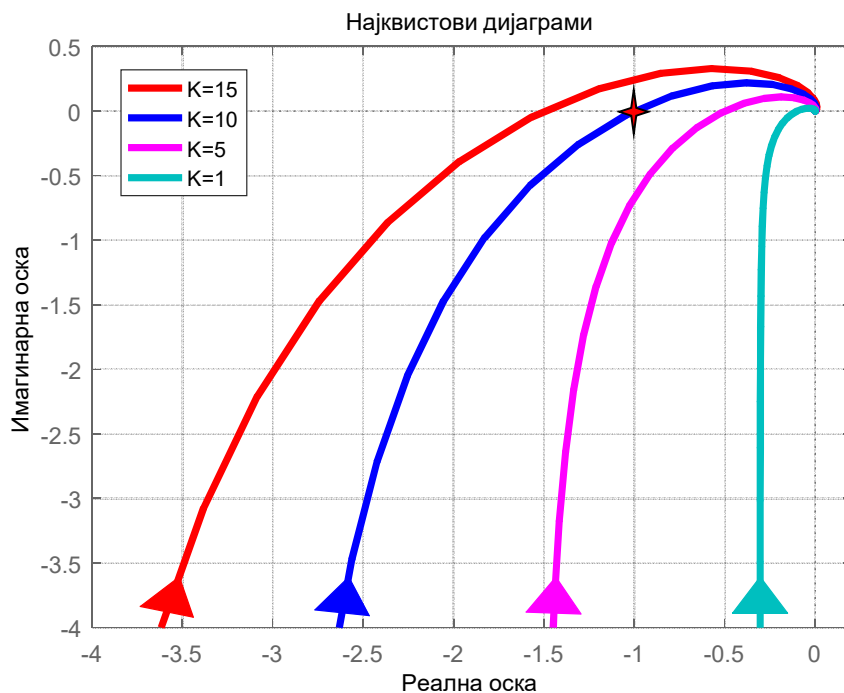
Нека фреквенциската карактеристика на отворениот систем има изглед како на слика 4.3 за $K = K_1$. Очигледно, затворениот систем е нестабилен, бидејќи фреквенциската карактеристика на отворениот систем ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$.



Слика 4.3. Фреквенциска карактеристика на отворениот систем (4.1)

Со намалување на коефициентот на засилување на отворениот систем $K = K_1$, неговата фреквенциска карактеристика се поместува кон имагинарната оска, така што во еден момент, кога ќе биде $K = K_2 < K_1$, критичната точка $(-1, j0)$ ќе остане лево од

фреквенциската карактеристика. Затворениот систем за таа вредност на K е стабилен, и понатамошното намалување на коефициентот на засилување на отворениот систем нема да ја промени неговата стабилност. На слика 4.4 се прикажани фреквенциските карактеристики на отворениот систем (4.1) за $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$ и $K = 15, 10, 5, 1$.



Слика 4.4. Фреквенциска карактеристика на отворениот систем (4.1) за $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$ и $K = 15, 10, 5, 1$ □

Со промена на коефициентот на засилување на отворениот систем, може да се нагодува величината на стационарната грешка на одзивот на еден затворен систем. Така, ако се погледа системот од примерот 4.1, може да се заклучи следното. Бидејќи соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем има астатизам од прв ред, затворениот систем идеално ќе следи отскочна влезна возбуда, без оглед на вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем K . Меѓутоа, затворениот систем не е во состојба идеално да следи променлив влез со константна брзина на промена од обликот $y = v_0 th(t)$; $v_0 = const.$, туку само со одредена константна грешка, која зависи обратнопропорционално од големината на брзинската константа K_v :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{K}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \right] = \frac{K}{p_1 p_2 p_3} \quad (4.2)$$

Оттука, стационарната грешка на затворениот систем од примерот 4.1, за линеарно растечки влез $y = v_0 th(t)$; $v_0 = const.$, која е од облик:

$$e(\infty) = \frac{v_0}{K} = \frac{v_0 P_1 P_2 P_3}{K} \quad (4.3)$$

Може произволно да се намалува преку зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем K . Меѓутоа, зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем неповолно се одразува врз стабилноста на затворениот систем. Како што може да се заклучи врз основа на примерот 4.1, за зголемување на релативната стабилност на еден затворен систем, потребно е коефициентот на засилување на отворениот систем да се намалува, а не да се зголемува. Следствено, барањата за стабилност и мала стационарна грешка на затворениот систем, кој се проектира по пат на компензација на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем се контрадикторни.

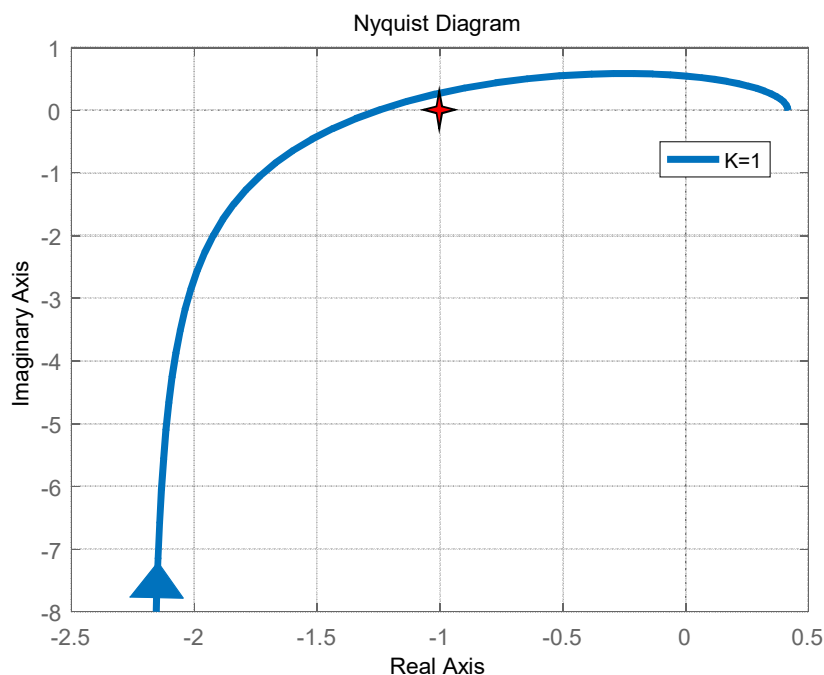
Пример 4.2. Даден е затворен линеарен стационарен дискретен динамички систем со единична негативна повратна врска со еден влез $y(kT)$ и еден излез $x(kT)$, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_{01}(z) = \frac{5}{(z-1)(5z-1)} \quad (4.4)$$

Фреквенциската карактеристика $G_{01}(j\omega)$ е прикажана на слика 4.5. Како што може да се забележи, затворениот дискретен систем е нестабилен, бидејќи Најквистовата крива ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$.

Фреквенциската преносна функција на отворениот систем (4.4) е дадена со изразот:

$$\begin{aligned} G_{01}(j\omega) &= \frac{1}{(e^{j\omega T_0} - 1)(e^{j\omega T_0} - 0.2)} = \\ &= \frac{1}{(e^{j\omega T_0} - 1)(e^{j\omega T_0} - 0.2)} \cdot \frac{(e^{-j\omega T_0} - 1)(e^{-j\omega T_0} - 0.2)}{(e^{-j\omega T_0} - 1)(e^{-j\omega T_0} - 0.2)} = \\ &= \frac{\{\cos(\omega T_0) - 1\} - j \sin(\omega T_0)}{2[1 - \cos(\omega T_0)]} \cdot \frac{\{\cos(\omega T_0) - 0.2\} - j \sin(\omega T_0)}{[1.04 - 0.4 \cos(\omega T_0)]} = \\ &= \frac{20 \cos^2(\omega T_0) - 12 \cos(\omega T_0) - 8}{8[1 - \cos(\omega T_0)] \cdot [2.6 - \cos(\omega T_0)]} - j \frac{20 \sin(\omega T_0)[\cos(\omega T_0) - 0.6]}{8[1 - \cos(\omega T_0)] \cdot [2.6 - \cos(\omega T_0)]} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Слика 4.5. Фреквенциска карактеристика на отворениот систем (4.4) за $K = K_1 = 1$

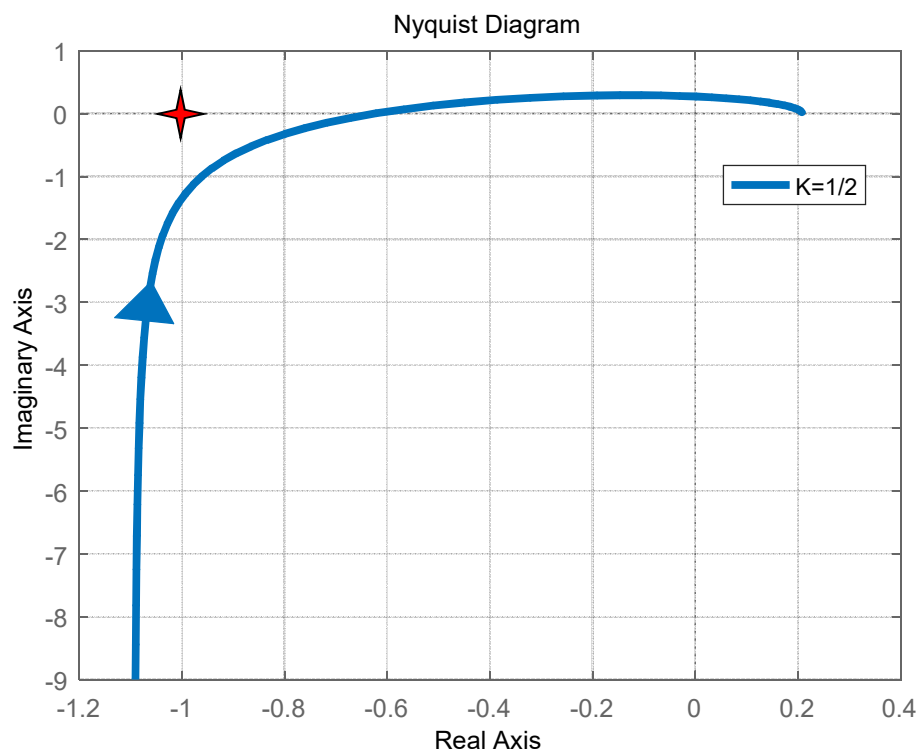
Единствениот пресек на фреквенциската карактеристика $G_{01}(j\omega)$ со реалната оска е одреден со решението на равенката:

$$\operatorname{Im}[G_{01}(j\omega)] = -\frac{20 \sin(\omega T_0) [\cos(\omega T_0) - 0.6]}{8 [1 - \cos(\omega T_0)] \cdot [2.6 - \cos(\omega T_0)]} = 0 \quad (4.6)$$

и настанува при фреквенцијата $\omega = \frac{1}{T_0} \arccos(0.6)$. Оттука, условот за стабилност на набљудуваниот затворен дискретен систем ќе биде:

$$\operatorname{Re}\left[G_{01}\left(j \frac{1}{T_0} \arccos 0.6\right)\right] = \frac{20(0.6)^2 - 12(0.6) - 8}{8(1 - 0.6)[2.6 - (0.6)]} = -\frac{10}{8} > -\frac{1}{K_2} \Rightarrow K_2 < 0.8 \quad (4.7)$$

каде што со K_2 е означено новото засилување на отворениот систем (4.4). Бидејќи во конкретниот случај $K_1 = 1$, ова засилување треба да се намали за повеќе од $5/4$ за да се стабилизира затворениот дискретен систем. На слика 4.6 е прикажана фреквенциската карактеристика на отворениот систем (4.4) со двапати послабо засилување, $K = K_2 = 0.5$, и веднаш може да се забележи дека оваа карактеристика не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$.

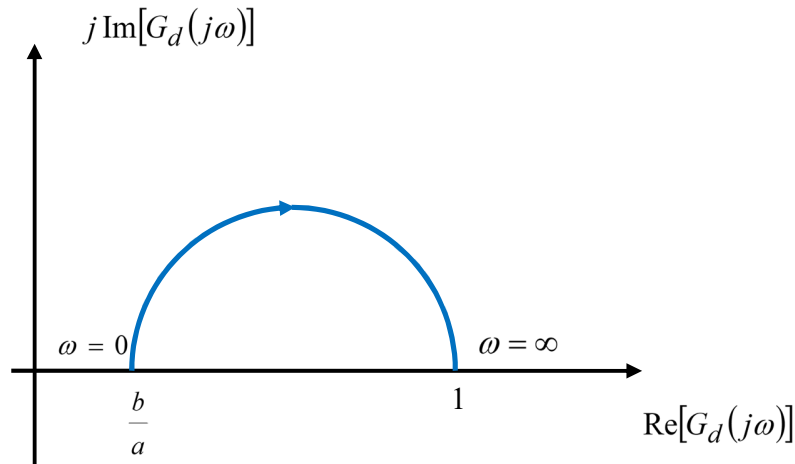
Слика 4.6. Фреквенциска карактеристика на отворениот систем (4.4) за $K = K_2 = 0.5$ □

4.2. КОМПЕНЗАЦИЈА СО ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Преносната функција на еден диференцијален компензатор е:

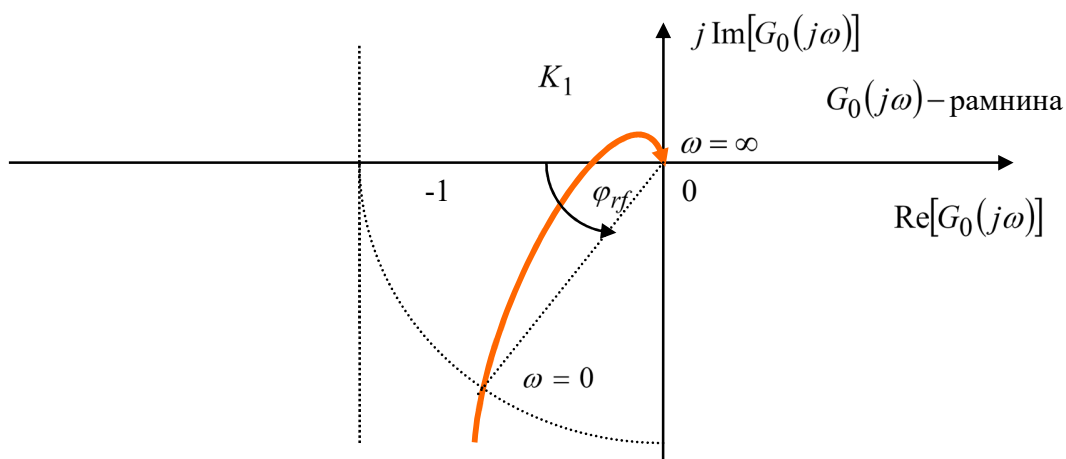
$$G_d(s) = \frac{s+b}{s+a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{s}{b}+1}{\frac{s}{a}+1}; \quad 0 < b < a \quad (4.8)$$

а неговата фреквенциска карактеристика е прикажана на слика 4.7. Примената на диференцијалниот компензатор е поврзана со неговото својство да внесува позитивно фазно поместување и својството да ги придушува сигналите во подрачјето на ниските и средните фреквенции, додека во подрачјето на високите фреквенции неговото слабеење е занемарливо. Притоа, подрачјето на ниски и средни фреквенции се дефинира во околина на резонантната фреквенција ω_r . Диференцијалниот компензатор по правило го зголемува пропусниот опсег на некомпензираниот систем.



Слика 4.7. Фреквенциска карактеристика на диференцијален компензатор

Пример 4.3. Нека повторно се набљудува затворениот систем од пример 4.1 и нека неговата фреквенциска карактеристика сега изгледа како на слика 4.8. Од сликата се гледа дека набљудуваниот затворен систем е стабилен и има резерва на фаза φ_{rf} поголема од 45^0 . Во одредени случаи толку голема резерва на фаза е непожелна, што значи поголемо време на доцнење на преодниот одзив T_d . Исто така таа доведува до неприфатливо голема стационарна грешка. Затоа најнапред ќе ја намалиме стационарната грешка. Бидејќи отворениот систем има астатизам од прв ред, затворениот систем е во состојба идеално да следи отскочен референтен влез $y(t) = r_0 h(t)$ во стационарен режим. Меѓутоа, променливиот влез со константна брзина на промена $y(t) = v_0 th(t)$ може да го следи само со одредено константно отстапување, кое зависи обратно пропорционално од коефициентот на засилување на отворениот систем K .



Слика 4.8. Фреквенциска карактеристика на отворениот систем (4.1)

Во конкретниот случај $K = K_1$ и неговата величина предизвикува премногу мала брзинска константа:

$$K_{v1} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \right] = \frac{K_1}{p_1 p_2 p_3} \quad (4.9)$$

односно голема стационарна грешка:

$$e_1(\infty) = \frac{v_0}{K_{v1}} = \frac{v_0 p_1 p_2 p_3}{K_1} \quad (4.10)$$

За да се намали оваа грешка, потребно е да се зголеми коефициентот на засилување на отворениот систем, со што се зголемува и вредноста на брзинската константа (4.9). Така, стационарната грешка (4.10) да се намали λ – пати:

$$e_2(\infty) = \frac{e_1(\infty)}{\lambda} = \frac{v_0}{\lambda K_{v1}} = \frac{v_0 p_1 p_2 p_3}{\lambda K_1} = \frac{v_0 p_1 p_2 p_3}{K_2} \quad (4.11)$$

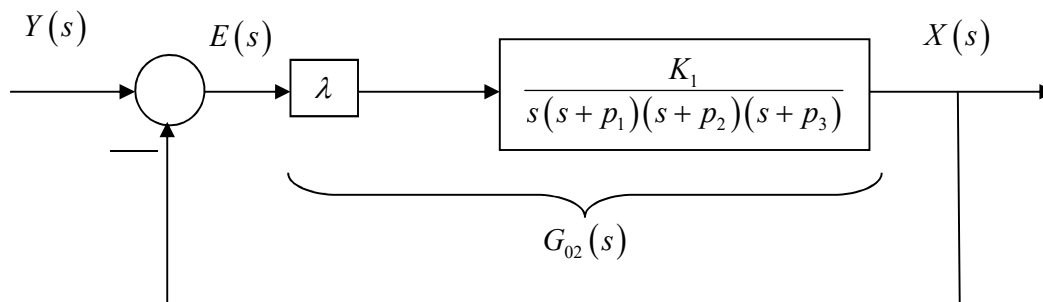
треба коефициентот на засилување на отворениот систем да се зголеми за исто толку:

$$K_2 = \lambda K_1 \quad (4.12)$$

Тогаш преносната функција на компензираниот отворен систем ќе биде:

$$G_{02}(s) = \lambda G_{01}(s) = \frac{\lambda K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} = \frac{K_2}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \quad (4.13)$$

а затворениот систем ќе има структура како на слика 4.9.



Слика 4.9. Структурна блок-шема на затворениот систем од примерот 4.1 по компензацијата на коефициентот на засилување $K = K_1$ на отворениот систем $G_{01}(s)$

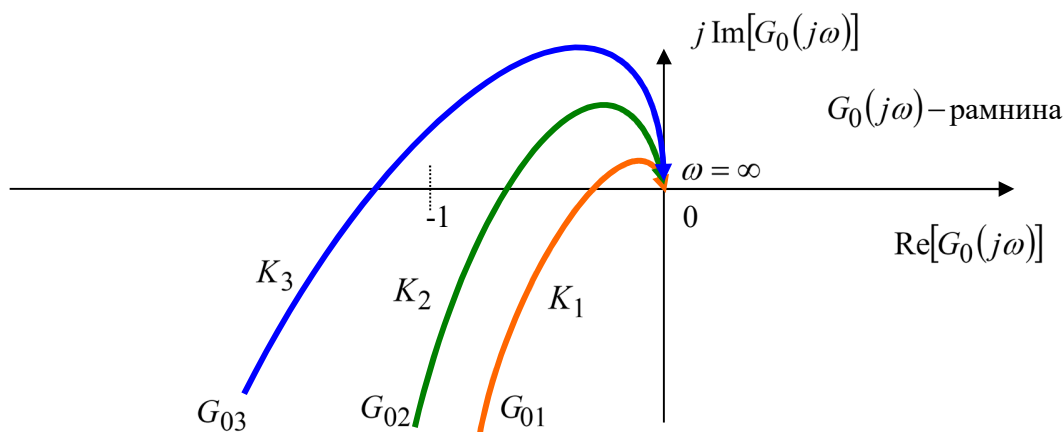
Со зголемувањето на брзинската константа на системот и намалувањето на неговата стационарна грешка, се намалува и резервата на фаза на затворениот систем со компензирано засилување и истата треба сега да се зголеми на вредност 45^0 . Затоа во директната гранка од затворениот систем на слика 4.9 се приклучува диференцијален компензатор, кој ќе влијае врз неговиот преоден одзив. Меѓутоа, заради фактот дека диференцијалниот компензатор внесува одредено слабеење при пониските фреквенции, коефициентот на засилување на отворениот систем ќе се промени, а со тоа и стационарната грешка. Имено, брзинската константа во ваков случај ќе биде помала од саканата, бидејќи диференцијалниот компензатор внесува слабеење пропорционално на односот b/a :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{\lambda K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \frac{s+b}{s+a} \right] = \frac{b}{a} \frac{\lambda K_1}{p_1 p_2 p_3} < \frac{\lambda K_1}{p_1 p_2 p_3} = K_{v2}, \left(\frac{b}{a} < 1 \right) \quad (4.14)$$

Затоа секогаш кога преодниот одзив на затворениот систем се модифицира со диференцијален компензатор, за да се остварат проектните барања во поглед на стационарната грешка, коефициентот на засилување на отворениот систем треба да се промени наместо λ , $\lambda a/b$ -пати. Така, по компензацијата на засилувањето на отворениот систем со факторот $\lambda a/b$, неговата преносна функција ќе биде:

$$G_{03}(s) = \frac{a}{b} G_{02}(s) = \frac{a}{b} \lambda G_{01}(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{K_2}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \quad (4.15)$$

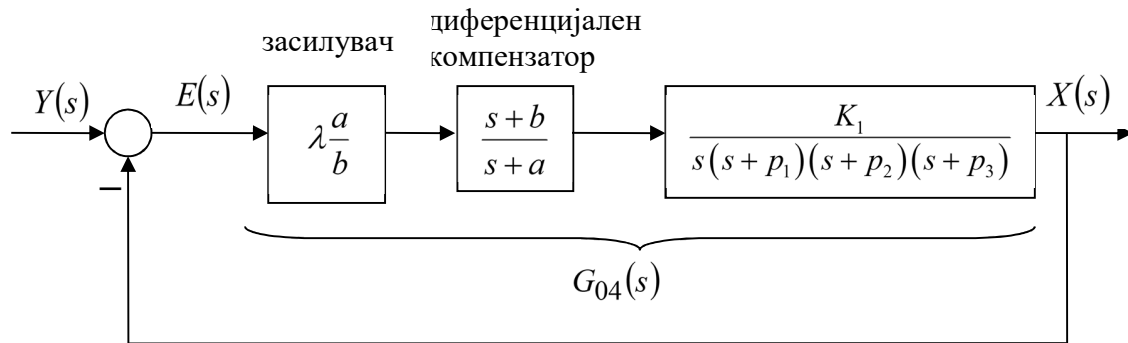
На слика 4.10 се прикажани фреквенциските карактеристики на отворените системи $G_{01}(s)$, $G_{02}(s)$ и $G_{03}(s)$. Како што може да се забележи од сликата, зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем често води кон дестабилизација на затворениот систем што, се разбира, мора да се избегне и компензира.



Слика 4.10. Фреквенциски карактеристики на отворените системи $G_{01}(s)$, $G_{02}(s)$ и $G_{03}(s)$

По внесувањето на диференцијалниот компензатор, структурната блок-шема на затворениот систем ќе биде како на слика 4.11, а отворениот систем ќе има преносна функција:

$$G_{04}(s) = \frac{a}{b} \cdot \lambda \cdot \frac{s+b}{s+a} \cdot \frac{K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \quad (4.16)$$



Слика 4.11. Структурна блок-шема на системот од пример 4.1 по компензацијата на засилувањето $K = K_1$ на отворениот систем $G_{01}(s)$ и компензација со диференцијален компензатор

Со проверка се утврдува дека системот од слика 4.11 ги задоволува барањата во поглед на поведението во стационарен режим:

$$K_{v4} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{a}{b} \cdot \frac{\lambda K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \cdot \frac{s+b}{s+a} \right] = \frac{a}{b} \cdot \frac{\lambda K_1}{p_1 p_2 p_3} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\lambda K_1}{p_1 p_2 p_3} = K_{v2} \quad (4.17)$$

па останува да се провери неговото поведење во преодниот режим.

Фреквенциската преносна функција на отворениот систем $G_{04}(s)$ е:

$$G_{04}(j\omega) = \frac{a}{b} \cdot \lambda \cdot \frac{j\omega+b}{j\omega+a} \cdot \frac{K_1}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)(j\omega+p_3)} \quad (4.18)$$

и при многу ниски фреквенции ($\omega \ll 1$) таа се приближува до $G_{02}(j\omega)$:

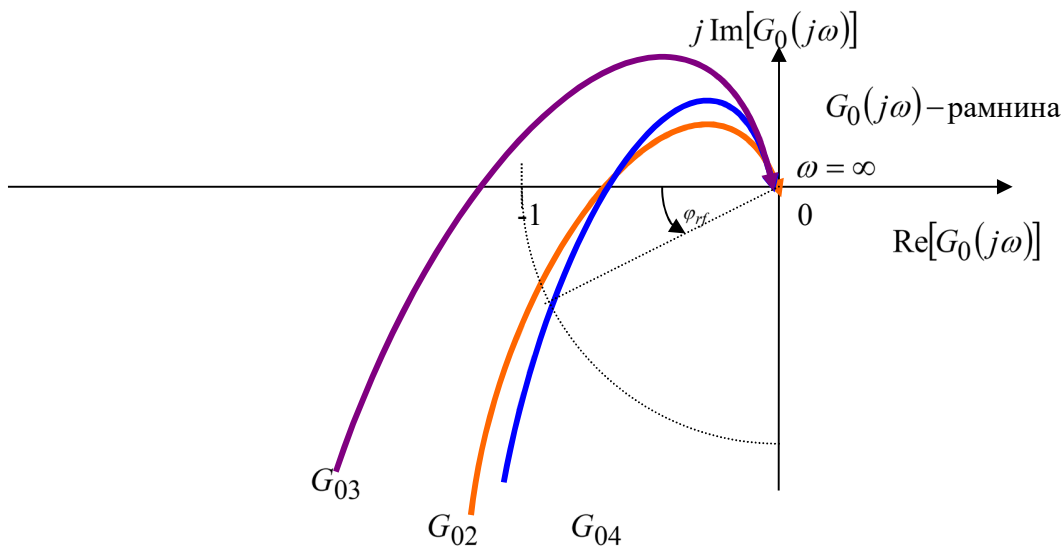
$$\begin{aligned} G_{04}(j\omega) \Big|_{\omega \ll 1} &= \frac{a}{b} \cdot \lambda \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{K_1}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)(j\omega+p_3)} = \\ &= \lambda \cdot \frac{K_1}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)(j\omega+p_3)} = \lambda G_{01}(j\omega) = G_{02}(j\omega) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тоа значи дека стационарниот режим на работа на некомпензираниот систем останал приближно непроменет и по компензацијата со диференцијален компензатор.

Во подрачјето на високи фреквенции ($\omega \gg 1$) $G_{04}(s)$ се приближува до $G_{03}(j\omega)$:

$$G_{04}(j\omega)\Big|_{\omega \gg 1} = \frac{a}{b} \cdot \lambda \cdot \frac{K_1}{j\omega(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)(j\omega + p_3)} = \frac{a}{b} \lambda G_{01}(s) = G_{03}(s) \quad (4.20)$$

Во подрачјето на средните фреквенции, својствата на диференцијалниот компензатор значително ја менуваат фреквенциската карактеристика $G_{04}(j\omega)$, која со порастот на фреквенцијата ω се оддалечува од фреквенциската карактеристика $G_{02}(j\omega)$ и се приближува кон фреквенциската карактеристика $G_{03}(j\omega)$, што е прикажано на слика 4.12. Следствено, внесувањето на диференцијален компензатор во серија со $G_{03}(s)$, ја менува фреквенциската карактеристика $G_{03}(j\omega)$ на отворениот систем на следниот начин: заради позитивното фазно поместување што диференцијалниот компензатор го внесува во системот, карактеристиката $G_{03}(j\omega)$ се поместува надолу и се завртува во насока спротивна од насоката на движењето на стрелката на часовникот; едновременно, таа е изложена и на слабеењето што диференцијалниот компензатор го внесува во системот. Затворениот систем од слика 4.12 е стабилен, со резерва на фаза φ_{rf} помала од 45° , а тоа значи помало време на доцнење од оригиналниот некомпензиран систем. Преку соодветен избор на нулата и полот на диференцијалниот компензатор, со методата на проба и грешка, може да се нагоди и максималниот прескок на преодниот одзив во согласност со проектните барања.



Слика 4.12. Фреквенциски карактеристики на отворените системи $G_{02}(s)$, $G_{03}(s)$ и $G_{04}(s)$ □

Пример 4.4. Да се изврши компензација на поведението на затворениот систем со единична негативна повртна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

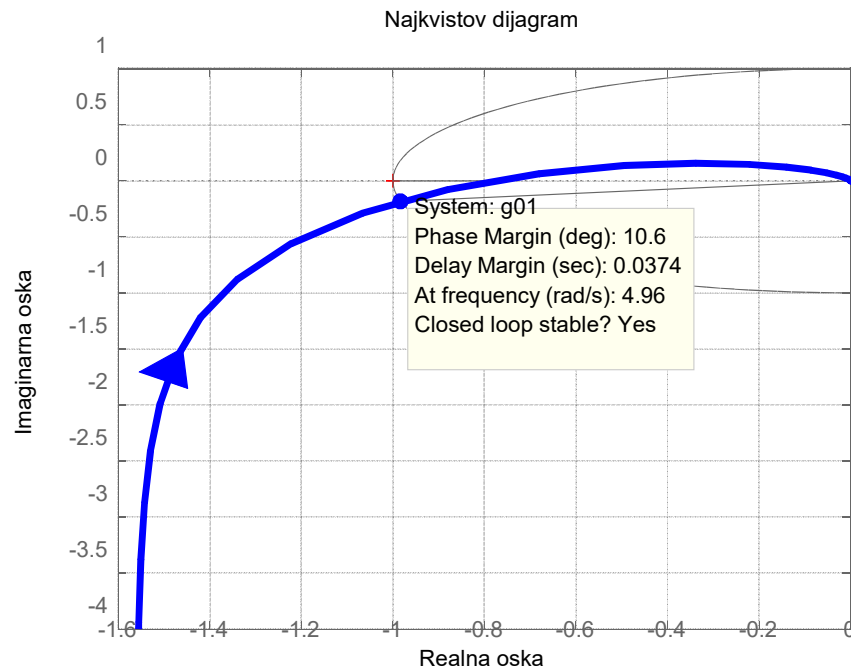
$$P(s) = \frac{1}{s(s^2 + 8s + 32)} \quad (4.21)$$

така што компензираниот систем ќе има брзинска константа $K_v \geq 6.25$ и фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3$.

Со проверка може да се констатира дека некомпензираниот затворен систем има резерва на фаза од 89.6° , брзинска константа $K_v = 1/32$ и стационарна грешка на единичен линеарно растечки влез $e(\infty) = 1/K_v = 32$, што е многу поголема од очекуваната. Со зголемување на засилувањето на отворениот систем за 200 пати, оваа грешка ќе се намали на вредност $\tilde{e}(\infty) = 1/\tilde{K}_v = 32/200 = 0.16$, а преносната функција на отворениот систем со компензирано засилување ќе гласи:

$$G_{01}(s) = 200P(s) = \frac{200}{s(s^2 + 8s + 32)} \quad (4.22)$$

Најквистовата крива на овој систем е прикажана на слика 4.13. Од неа се гледа дека со зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем резервата на фаза на затворениот систем се намалила од 89.6° на вредност 10.6° .



Слика 4.13. Фреквенциска карактеристика на отворениот систем $G_{01}(s)$ со компензирано засилување

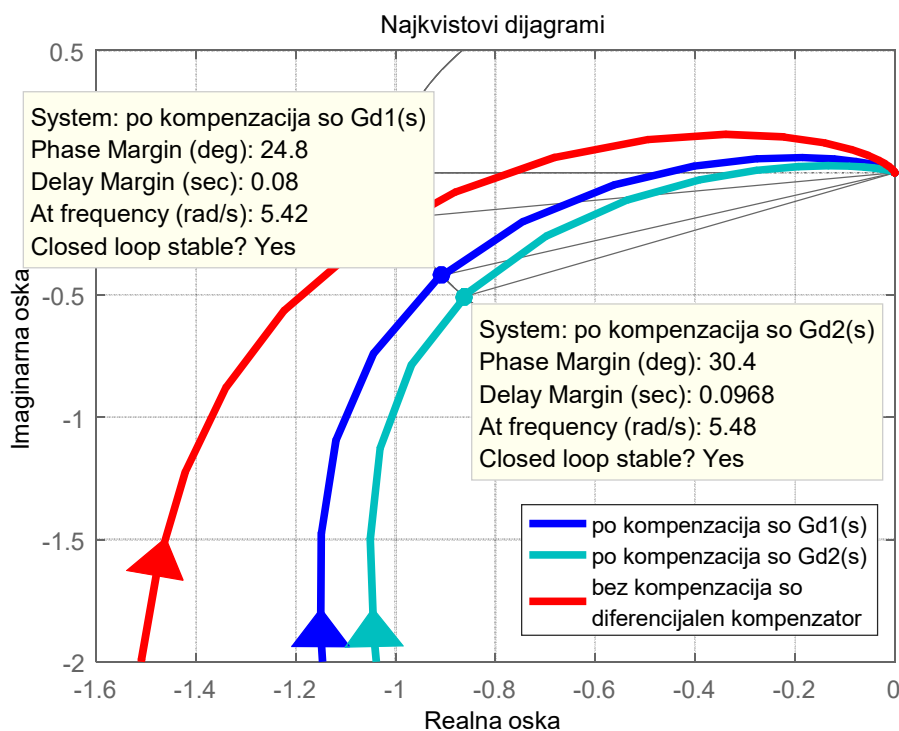
Факторот на релативно придушување $\zeta = 0.3$ значи дека компензираниот затворен систем треба да има резерва на фаза од приближно 30° и за да се обезбеди толкава резерва на фаза, треба да се изврши компензација со диференцијален компензатор кој ќе внесе дополнително позитивно фазно поместување од приближно $30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$. Нека диференцијалниот компензатор го одбереме да биде:

$$G_{d1}(s) = \frac{s+8}{s+24} \quad (4.23)$$

Тогаш, за преносната функција на компензираниот отворен систем ќе се добие:

$$G_{02}(s) = 3G_{d1}(s)G_{01}(s) = 3 \cdot \frac{(s+8)}{(s+24)} \cdot \frac{200}{s(s^2+8s+32)} \quad (4.24)$$

и неговата Најквистова крива (син линија) е прикажана на сликата 4.14. Меѓутоа, од неа се гледа дека компензираниот затворен систем има резерва на фаза од само 24.8° .



Слика 4.14. Најквистови криви на отворениот систем (4.22) без компензација и по компензација со диференцијалните компензатори (4.23) и (4.25)

Бидејќи оддалечувањето на половите на отворениот систем од имагинарната оска во лево значи зголемување на резервата на стабилност на затворениот систем, по пат на

проба и грешка полот на диференцијалниот компензатор ќе го одбереме на двапати поголемо растојание од претходниот обид:

$$G_{d2}(s) = \frac{s+8}{s+48} \quad (4.25)$$

Тогаш, за преносната функција на компензираниот отворен систем ќе се добие:

$$G_{03}(s) = 6G_{d2}(s)G_{01}(s) = 6 \cdot \frac{(s+8)}{(s+48)} \cdot \frac{200}{s(s^2+8s+32)} \quad (4.26)$$

и неговата Најквистова крива е прикажана исто така на слика 4.14 (зелена линија). Од неа се гледа дека вака компензираниот затворен систем има резерва на фаза од 30.4° , што одговара на поставеното проектно барање. Така компензираниот затворен систем дефиниран со (4.26) ги задоволува и двете проектни барања – за резервата на стабилност и за точноста во стационарен режим. □

4.3. КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИНТЕГРАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

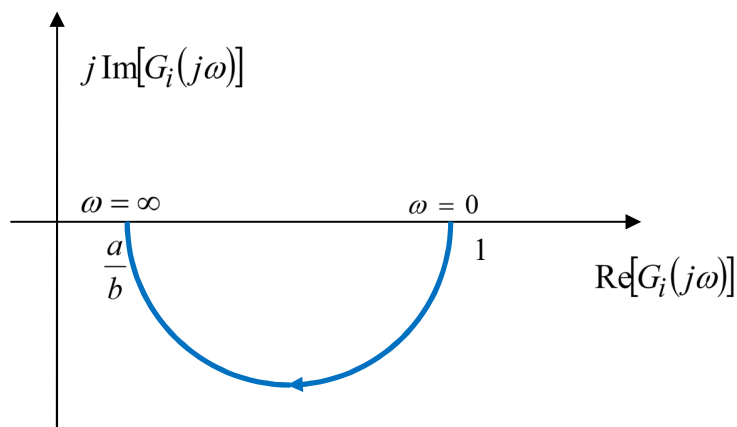
Преносната функција на еден интегрален компензатор е дадена со следниот израз:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a} = \frac{\frac{s}{b} + 1}{\frac{s}{a} + 1}; \quad 0 < a < b \quad (4.27)$$

а неговата фреквенциска карактеристика е прикажана на слика 4.15.

Интегралниот компензатор се користи заради неговото својство да ги придушува високите фреквенции. Кога треба да се реализира многу големо придушување во опсегот на високите фреквенции, се применува сериска врска од два или повеќе интегрални компензатори. Негативното фазно поместување што интегралниот компензатор го внесува во компензираниот систем при синтезата обично се ограничува на многу ниско фреквенциско подрачје. Главните последици од компензацијата со интегрален компензатор вообичаено се:

- Смалување на пропусниот опсег на компензираниот систем во однос на некомпензираниот.
- Зголемување на доминантната временска константа на компензираниот систем.
- Зголемување на константите на стационарна грешка при дадена релативна стабилност.
- Подобрување на релативната стабилност при дадени константи на грешка.



Слика 4.15. Фреквенциска карактеристика на интегрален компензатор

Пример 4.5. Нека во системот:

$$G_{01}(s) = \frac{K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}; \quad K_1, p_1, p_2, p_3 > 0 \quad (4.28)$$

од примерот 4.3, наместо диференцијален компензатор е употребен интегрален компензатор. По извршената компензација на коефициентот на засилување K_1 на отворениот систем $G_{01}(s)$ со фактор λ , преносната функција на отворениот систем ќе биде:

$$G_{02}(s) = \frac{\lambda K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} = \frac{K_2}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \quad (4.29)$$

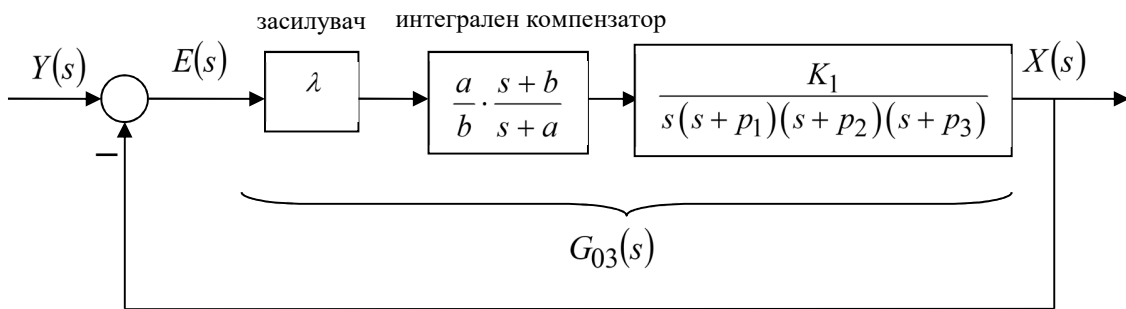
додека по воведувањето интегрален компензатор, таа ќе има облик:

$$G_{03}(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a} \cdot G_{02}(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a} \cdot \frac{\lambda K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \quad (4.30)$$

Структурната блок-шема на компензираниот систем, по компензацијата на засилувањето на отворениот систем и внесувањето интегрален компензатор, ќе има изглед како на слика 4.16.

Бидејќи $G_i(0) = 1$, воведувањето интегрален компензатор не бара дополнителна корекција на засилувањето на отворениот систем како во случајот на диференцијалниот компензатор. Имено:

$$K_{v3} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{a}{b} \cdot \frac{\lambda K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \cdot \frac{s+b}{s+a} \right] = \frac{\lambda K_1}{p_1 p_2 p_3} = \lambda K_{v1} = K_{v2} \quad (4.31)$$



Слика 4.16. Структурна блок-шема на затворениот систем од примерот 4.3 по компензацијата на коефициентот на засилување $K = K_1$ на отворениот систем $G_{01}(s)$ и компензација со интегрален компензатор

што значи дека е исполнето барањето во поглед на стационарната грешка (точноста на работа во стационарен режим) на компензираниот систем. Останува да се види влијанието на интегралниот компензатор врз преодниот режим.

Фреквенциската преносна функција на отворениот систем $G_{03}(s)$ е:

$$G_{03}(j\omega) = \frac{a}{b} \cdot \lambda \cdot \frac{j\omega + b}{j\omega + a} \cdot \frac{K_1}{j\omega(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)(j\omega + p_3)} \quad (4.32)$$

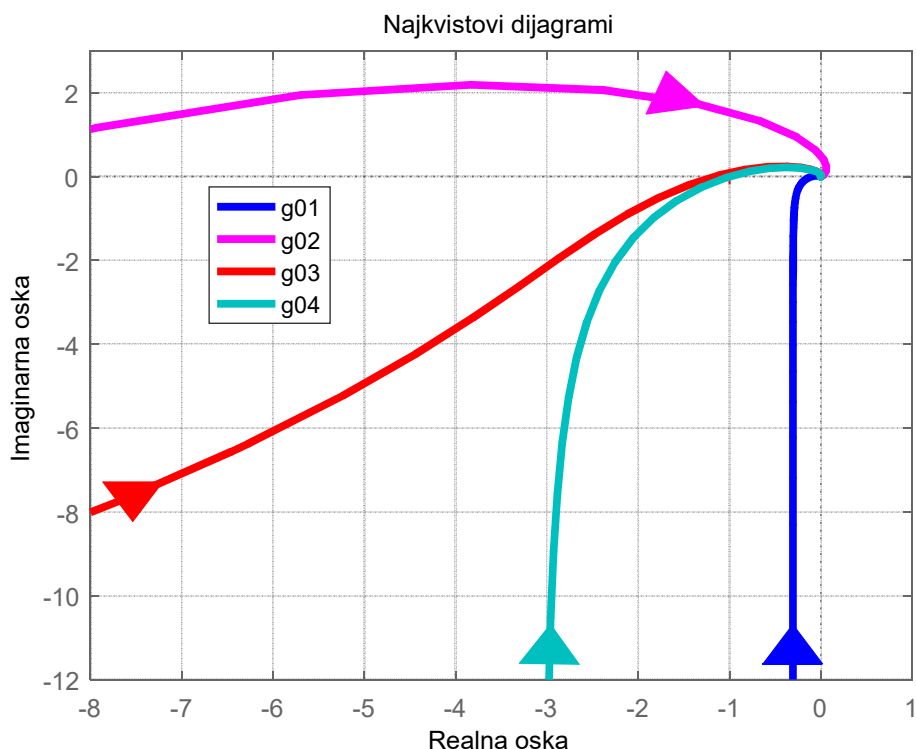
и таа е прикажана на слика 4.17 (црвена линија). Во подрачјето на многу ниски фреквенции ($\omega \ll 1$), таа скоро се совпаѓа со $G_{02}(j\omega)$ (розева линија):

$$\begin{aligned} G_{03}(j\omega) \Big|_{\omega \ll 1} &= \frac{a}{b} \cdot \lambda \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{K_1}{j\omega(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)(j\omega + p_3)} = \\ &= \lambda \cdot \frac{K_1}{j\omega(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)(j\omega + p_3)} = \lambda G_{01}(j\omega) = G_{02}(j\omega) \end{aligned} \quad (4.33)$$

додека во подрачјето на високи фреквенции ($\omega \gg 1$) таа изнесува:

$$G_{03}(j\omega) \Big|_{\omega \gg 1} = \frac{a}{b} \cdot \lambda \cdot \frac{K_1}{j\omega(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)(j\omega + p_3)} = \frac{a}{b} \lambda G_{01}(j\omega) \quad (4.34)$$

Тоа значи дека $G_{03}(j\omega) \Big|_{\omega \gg 1}$ се наоѓа над или под карактеристиката $G_{01}(j\omega) \Big|_{\omega \gg 1}$, во зависност од тоа дали $\lambda \cdot \frac{a}{b} > 1$, $\left(\lambda > \frac{b}{a}\right)$, или $\lambda \cdot \frac{a}{b} < 1$, $\left(\lambda < \frac{b}{a}\right)$; кога $\lambda \cdot \frac{a}{b} = 1$,



Слика 4.17. Фреквенциски карактеристики на отворените системи $G_{01}(s)$, $G_{02}(s)$ и $G_{03}(s)$

($\lambda = b/a$), карактеристиките $G_{03}(j\omega)_{\omega \gg 1}$ и $G_{01}(j\omega)_{\omega \gg 1}$ (сина линија) се совпаѓаат. Во подрачјето на средните фреквенции, придрушувањето што го внесува интегралниот компензатор расте со фреквенцијата, а фазното поместување е релативно мало. \square

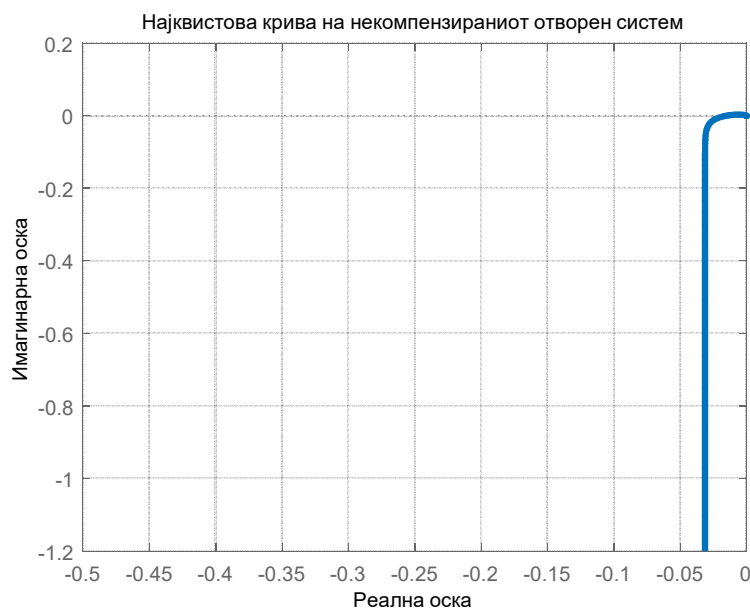
Пример 4.6. Да се определи видот компензатор кој ќе обезбеди резерва на фаза од приближно 45° ако преносната функција на објектот е:

$$P(s) = \frac{4}{s(s^2 + 8s + 32)} \quad (4.35)$$

Притоа, одзивот на компензираниот систем при високи фреквенции треба да остане приближно еднаков на одзивот на некомпензираниот систем во истото фреквенциско подрачје.

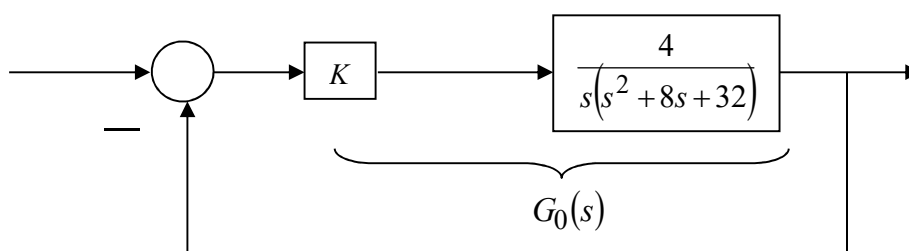
Решение: Фреквенциската карактеристика на објектот $P(s)$ е прикажана квалитативно на слика 4.18. Како што може да се забележи, таа е многу блиску до имагинарната оска

за сите вредности на фреквенцијата ω . Резервата на фаза на објектот е приближно 90^0 , па поставената задача во поглед на стабилноста на проектираниот систем може да се реши било со зголемување на факторот на засилување на објектот, било преку сериска компензација со интегрирачки компензатор.



Слика 4.18. Најквистова крива на некомпензираниот систем од примерот 4.6

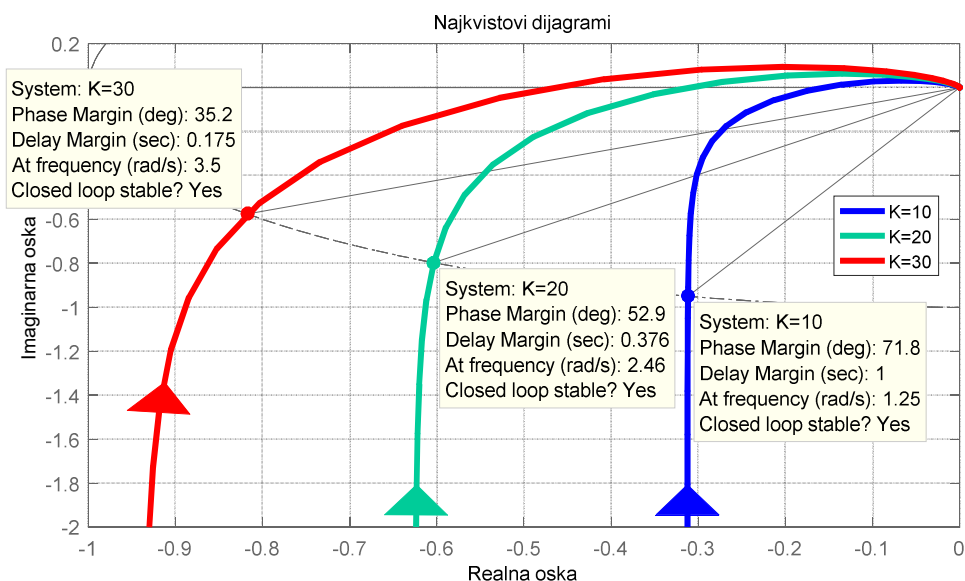
Нека, најнапред, синтезата се изврши со компензација на засилувањето на зададениот објект, слика 4.19. За таа цел, засилувањето на објектот е зголемено 10, 20 и 30 пати, и соодветните Најквистови криви се прикажани на слика 4.20.



Слика 4.19. Затворениот систем од примерот 0 ..по компензацијата на засилувањето на објектот

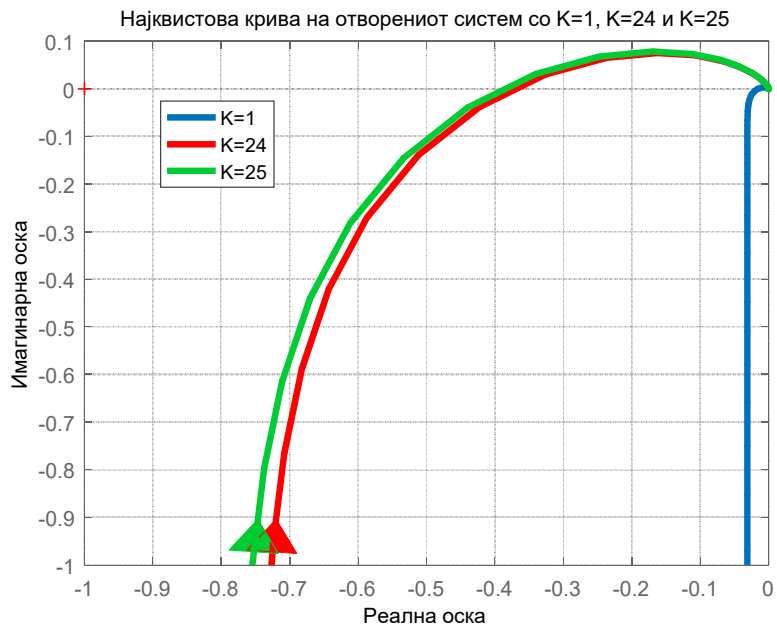
Од дијаграмите на слика 4.20, по графички пат може да се утврди дека отворениот систем за $K = 20$ има резерва на фаза од приближно 45^0 (поточно 53^0). Овој резултат може уште да се подобри, ако за вредност на коефициентот на засилување наместо 20 се усвои 24 или 25. Најквистовата крива за отворениот систем со $K = 24$ и $K = 25$ е

прикажана на слика 4.21, при што во првиот случај резервата на фаза изнесува 45.5° , додека во вториот случај таа е 43.7° . Меѓутоа, без оглед на тоа која вредност ќе се одбере за K ($K = 24$ или $K = 25$), од дијаграмите на слика 4.21 се гледа една многу поважна работа, а тоа е дека поведението на компензираниот затворен систем при високи фреквенции значително ќе се разликува од поведението на некомпензираниот систем, бидејќи Најквистовите криви на соодветните компензирани отворени системи значително отстапуваат од Најквистовата крива на некомпензираниот објект. Ова уште е поочигледно од дијаграмите на слика 4.22, на која се прикажани амплитудните карактеристики на некомпензираниот и компензираниот затворен систем од примерот 4.6.

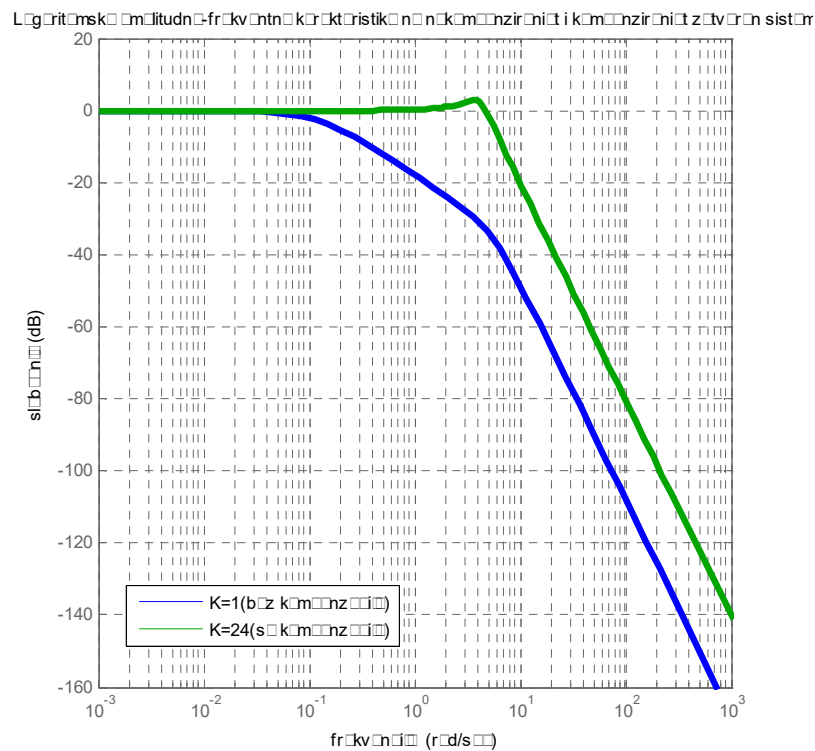


Слика 4.20. Најквистови криви на отворениот систем од примерот 4.6 по компензацијата на засилувањето на објектот

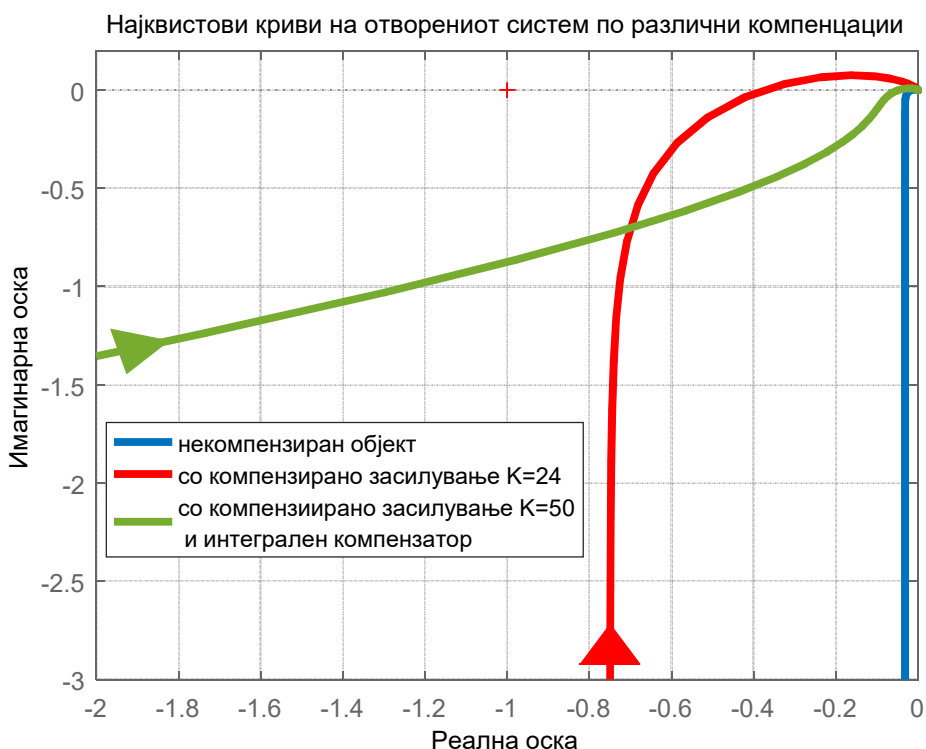
Бидејќи интегрирачкиот компензатор обезбедува придрушување во подрачјето на високите фреквенции, а неговото влијание врз фазата е во подрачјето на ниски фреквенции, со оглед на вториот услов од примерот 4.6, најдобро е поставениот проблем да се реши со комбинација на двете постапки на синтеза – преку нагудување на коефициентот на засилување на отворениот систем со $K = 50$ и со воведување интегрирачки компензатор со пол во $s = -0.022$ и нула во $s = 0.4$. Се разбира, ова не е единствено решение на поставениот проблем. Постојат многу други решенија (различни мрежи и преносни функции), кои исто така можат да ги обезбедат поставените проектни барања. Меѓутоа, интегралниот компензатор и засилувачот имаат предност заради нивната стандардизација, достапност и едноставност на самата постапка на синтеза. Најквистовите криви на отворениот систем пред и по компензацијата со интегрален компензатор се прикажани на слика 4.23. Во подрачјето на високите фреквенции Најквистовата крива на компензираниот систем се доближува до Најквистовата крива на некомпензираниот систем.



Слика 4.21. Најквистови криви на отворениот систем од примерот 4.6 по компензацијата на засилувањето на објектот споредени со Најквистовата крива на објектот пред компензацијата

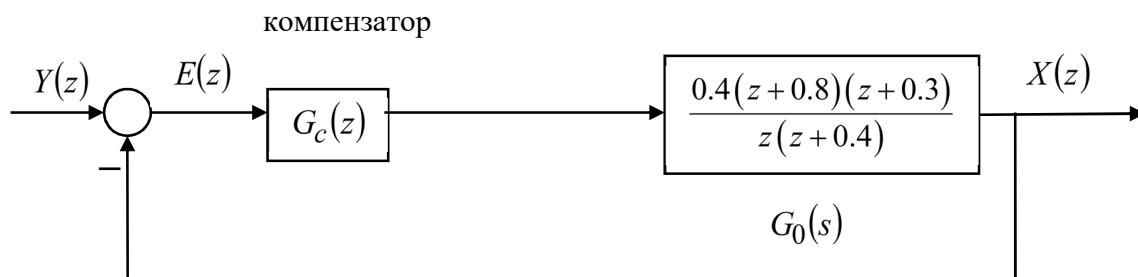


Слика 4.22. Амплитудна карактеристика на затворениот систем од примерот 4.6 пред и по компензацијата на засилувањето на соодветниот отворен систем со $K = 24$, изразени во dB



Слика 4.23. Квалитативен приказ на Најквистовата крива за некомпензираниот отворен систем и двата компензирани отворени системи од пример 4.6 □

Пример 4.7. Даден е затворениот дискретен систем од слика 4.24. Да се изврши соодветна компензација на овој систем, така што неговата стационарна грешка за линеарно растечки влез $y(t) = th(t)$ да биде $e(\infty) \leq 0.2$, системот да има резерва на фаза $\varphi_{rf} \geq 30^\circ$ и пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 \geq 10 \frac{rad}{sec}$. Периодата на дискретизација за системот, под претпоставка е $T_0 = 0.1 sec$.



Слика 4.24. Структурна блок-шема на затворениот дискретен систем од примерот 4.7

Решение: Со оглед на тоа дека отворениот систем $G_0(z)$ на некомпензираниот затворен систем има астатизам од нулти ред (нема полови во точката $z = 1$), затворениот систем не е во состојба да следи линеарно растечки влез. Оттаму, најнапред треба да се обезбеди отворениот систем да има астатизам од прв ред, што значи дека $G_c(z)$ треба да се избере да има пол во $z = 1$:

$$G_{c1}(z) = \frac{1}{z-1} \quad (4.36)$$

Тогаш отворениот систем ќе има преносна функција од облик:

$$G_{01}(z) = G_{c1}(z)G_0(z) = \frac{0.4(z+0.8)(z+0.3)}{z(z-1)(z+0.4)} \quad (4.37)$$

Затворениот систем, чиј отворен систем има облик (4.37), е во состојба да следи променлив влез со константна брзина на промена со одредена грешка, која зависи од величината на брзинската константа на системот $K_v = \lambda K_{v1}$:

$$K_{v1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_{01}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{0.4(z+0.8)(z+0.3)}{z(z-1)(z+0.4)} \right] = 0.66857 \approx 0.67 \quad (4.38)$$

Таа грешка, во конкретниот случај изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_{v1}} = 1.4957 \approx 1.5 \quad (4.39)$$

и е значително поголема од потребната. За да биде $e(\infty) = \frac{1}{K_v} \leq 0.2$, треба $K_v \geq \frac{1}{0.2} = 5$, што значи дека K_{v1} треба да се зголеми λ -пати, при што $\lambda \geq 7.5$:

$$K_v = \lambda K_{v1} = 0.67\lambda \geq 5 \Rightarrow \lambda \geq 7.47865 \approx 7.5 \quad (4.40)$$

Оттука, неопходна е компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем $G_0(z)$, односно компензаторот $G_c(z)$ треба да има преносна функција од облик:

$$G_{c2}(z) = \lambda G_{c1}(z) = \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{z-1} \quad (4.41)$$

Тогаш преносната функција на вака компензираниот отворен систем ќе изнесува:

$$G_{02}(z) = G_{c2}(z)G_0(z) = \frac{3(z+0.8)(z+0.3)}{z(z-1)(z+0.4)} \quad (4.42)$$

и таа го обезбедува саканото поведење на затворениот систем во стационарен режим. Останува да се провери неговото поведење во преоден режим, односно дали се исполнети преостанатите две проектни барања во однос на резервата на фаза и пресечната фреквенција на засилување.

Резервата на фаза и пресечната фреквенција на засилување можат да се определат графички од Најквистовата крива односно фреквенциската карактеристика на отворениот систем $G_{02}(z)$, а можат да се определат и аналитички од соодветните дефиниции:

$$\begin{aligned} |G_{02}(j\omega_1)| &= \left| \frac{3(e^{j\omega_1 T_0} + 0.8)(e^{j\omega_1 T_0} + 0.3)}{e^{j\omega_1 T_0}(e^{j\omega_1 T_0} - 1)(e^{j\omega_1 T_0} + 0.4)} \right| = \\ &= 3 \frac{\sqrt{1.64 + 1.6 \cos(\omega_1 T_0)} \cdot \sqrt{1.09 + 0.6 \cos(\omega_1 T_0)}}{\sqrt{2[1 - \cos(\omega_1 T_0)]} \cdot \sqrt{1.16 + 0.8 \cos(\omega_1 T_0)}} = 1 \Rightarrow \\ &= 9 \frac{[1.64 + 1.6 \cos(\omega_1 T_0)] \cdot [1.09 + 0.6 \cos(\omega_1 T_0)]}{2[1 - \cos(\omega_1 T_0)] \cdot [1.16 + 0.8 \cos(\omega_1 T_0)]} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9[1.64 + 1.6 \cos(\omega_1 T_0)][1.1 + 0.6 \cos(\omega_1 T_0)] = \\ &= 2[1 - \cos(\omega_1 T_0)][1.16 + 0.8 \cos(\omega_1 T_0)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10.24 \cos^2(\omega_1 T_0) + 25.27 \cos(\omega_1 T_0) + 13.7 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(\omega_1 T_0) = -0.805 \Rightarrow \omega_1 T_0 = 2.52 \Rightarrow \omega_1 = 25.2 > 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \arg[G_{02}(j\omega_1)] &= \text{atan} \frac{\sin(\omega_1 T_0)}{\cos(\omega_1 T_0) + 0.8} + \text{atan} \frac{\sin(\omega_1 T_0)}{\cos(\omega_1 T_0) + 0.3} - \\ &- \text{atan} \frac{\sin(\omega_1 T_0)}{\cos(\omega_1 T_0)} - \text{atan} \frac{\sin(\omega_1 T_0)}{\cos(\omega_1 T_0) - 1} - \text{atan} \frac{\sin(\omega_1 T_0)}{\cos(\omega_1 T_0) + 0.4} \Rightarrow \\ \varphi_{rf} &= 180^0 + \arg[G_{02}(j\omega_1)] = -29.2^0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Очигледно, второто проектно барања не е исполнето. Исто така, негативната резерва на фаза значи дека компензираниот затворен систем не е стабилен. За да се надмине овој проблем, соодветен избор е дискретниот еквивалент на интегралниот компензатор, кој ја зголемува резервата на фаза без да влијае врз вредноста на стационарната грешка. Преносната функција на овој дискретен компензатор е:

$$G_i(z) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c} \quad (4.45)$$

па со негово воведување преносната функција на отворениот систем ќе добие облик:

$$G_{03}(z) = G_i(z)G_{02}(z) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c} \cdot \frac{3(z+0.8)(z+0.3)}{z(z-1)(z+0.4)} \quad (4.46)$$

Нулата и полот на компензаторот се одбираат врз основа на зададените проектни услови на следниот начин:

$$G_{03}(j10) = 1 \quad (4.47)$$

$$180^\circ + \arg[G_{03}(j10)] \geq 30^\circ \quad (4.48)$$

Овие равенства обично имаат повеќе решенија, па p_c и z_c треба да се одбираат поблиску до 1, зашто тогаш компензаторот има најмало влијание врз фреквенциската карактеристика на системот $G_{03}(z)$ при високи фреквенции.

Ако се усвои $p_c = 0.968$ и $z_c = 0.86$, преносната функција на компензаторот $G_c(z)$ ќе добие облик:

$$\begin{aligned} G_{c3}(z) &= G_i(z)G_{c2}(z) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c} G_{c2}(z) = \\ &= \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c} \lambda G_{c1}(z) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c} \lambda \frac{1}{z-1} = \\ &= \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1-0.968}{1-0.86} \cdot \frac{z-0.86}{z-0.968} = \frac{12(z-0.86)}{7(z-1)(z-0.968)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

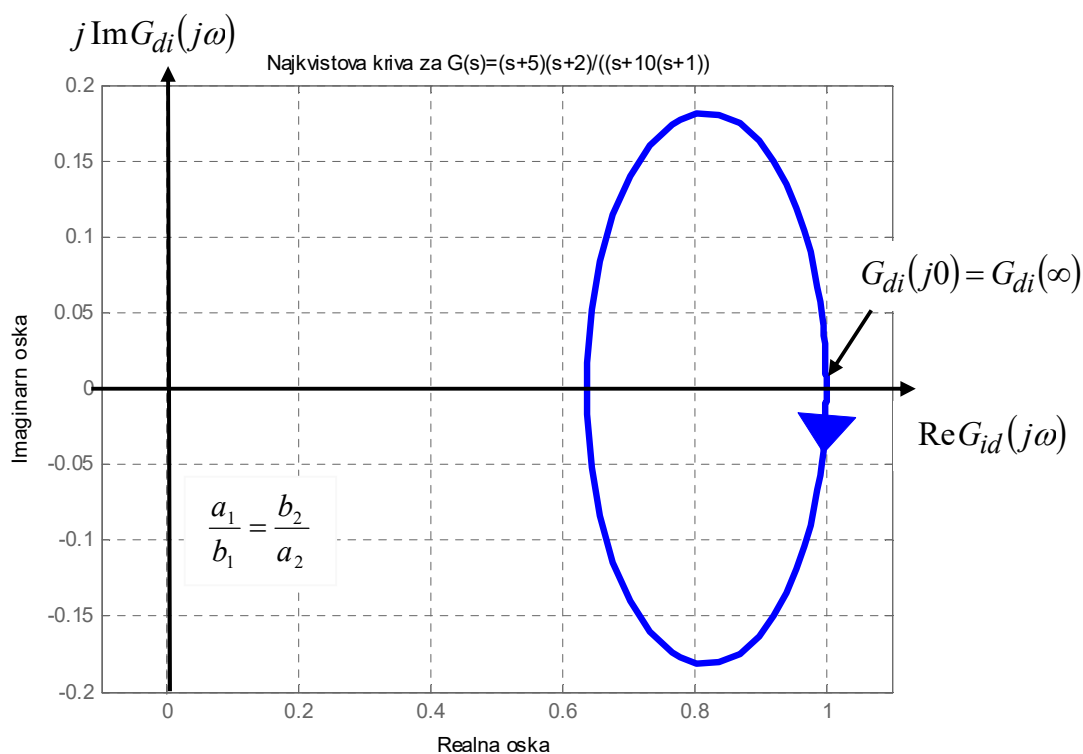
па вака компензираниот затворен систем ќе биде стабилен со резерва на фаза $\varphi_{rf} = 32.6^\circ > 30^\circ$ и пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 10.1 > 10 \frac{rad}{sec}$. □

4.4. КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Интегро-диференцијалниот компензатор ги поседува сите позитивни особини на диференцијалниот и интегралниот компензатор заедно, и само мал дел од нивните негативности. Со примената на овој тип компензатор се избегнува преголемиот пропусен опсег и премногу малата доминантна временска константа кои се последица од компензацијата само со диференцијален компензатор. Преносната функција на еден интегро-диференцијален компензатор е дадена со изразот:

$$G_{di}(s) = \frac{(s+b_1)(s+b_2)}{(s+a_1)(s+a_2)}, \quad a_2 < b_2 < b_1 < a_1 \quad (4.50)$$

а неговата фреквенциска карактеристика е прикажана квалитативно на слика 4.25.



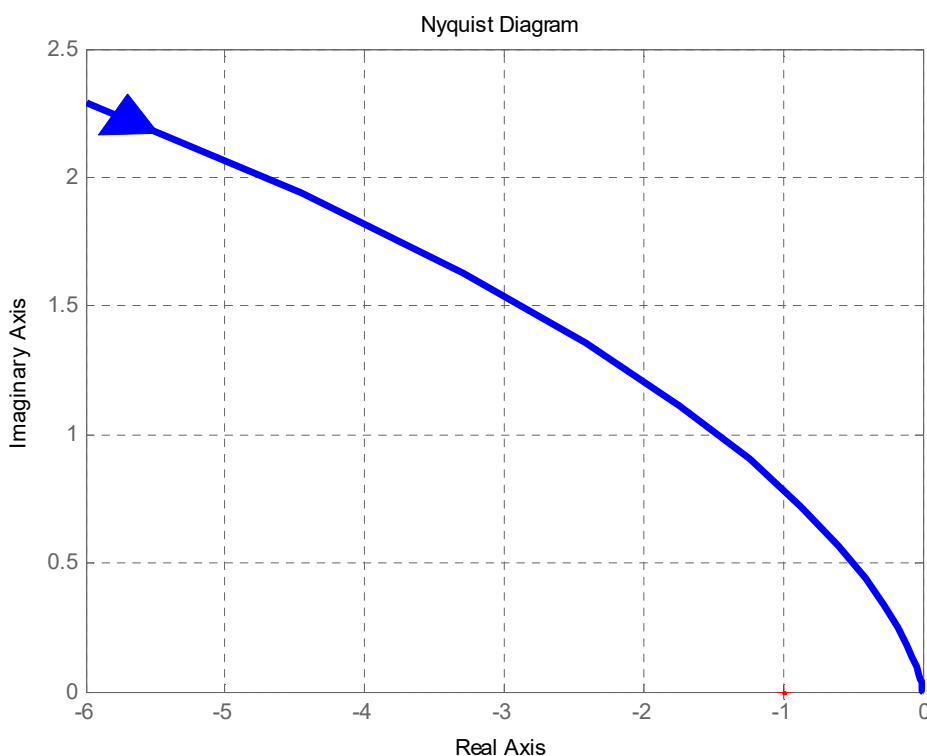
Слика 4.25. Фреквенциска карактеристика на еден интегро-диференцијален компензатор

Не е можно да се развие општа постапка за неговата примена во синтезата на затворените САУ, посебно кога се работи за Најквистовата синтеза. Меѓутоа, за илустрација, во примерот 4.8 е прикажано влијанието на еден интегро-диференцијален компензатор врз особините и фреквенциската карактеристика на некомпензиран отворен систем со астатизам од втор ред.

Пример 4.8. Нека соодветниот отворен систем на еден континуален затворен систем со единична негативна повратна врска е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2(s + p_1)}; \quad p_1, K > 0 \quad (4.51)$$

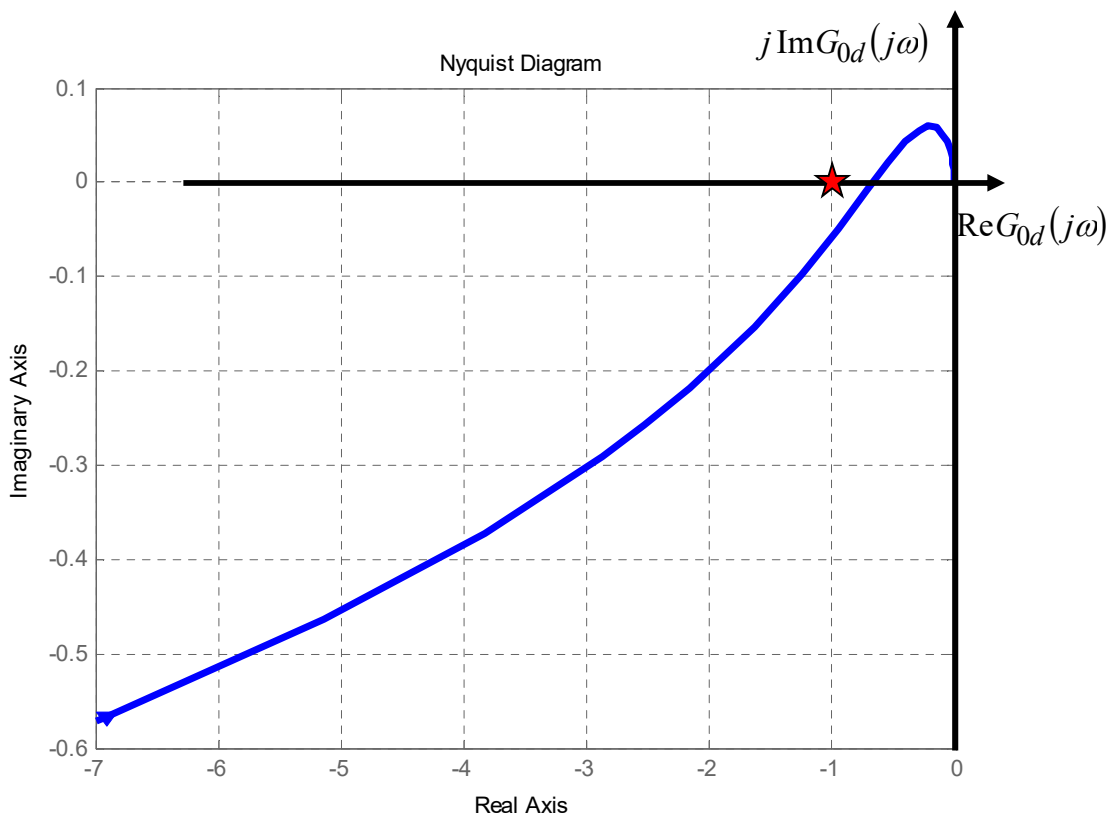
Неговата фреквенциска карактеристика за $K = p_1 = 1$ е прикажана на слика 4.26. Лесно се утврдува дека затворениот некомпензиран систем е нестабилен за секое K . Оттука, стабилизација на затворениот систем не може да се постигне со компензација на коефициентот на засилување K на отворениот систем $G_0(s)$, бидејќи фреквенциската карактеристика $G_0(j\omega)$ секогаш ќе се наоѓа над негативната реална полуоска. Од иста причина не може да се примени ни интегрален компензатор. Следствено, затворениот систем може да се направи стабилен ако се употреби диференцијален компензатор. Фреквенциската карактеристика на отворениот систем (4.51) за $K = p_1 = 1$ по компензацијата со диференцијален компензатор е прикажана на слика 4.27.



Слика 4.26. Фреквенциска карактеристика на системот (4.51) за $K = p_1 = 1$

Компензацијата со диференцијален компензатор често за резултат има премногу широк пропусен опсег на компензираниот систем. За да се избегне ова, подобро е наместо само диференцијален, да се употреби интегро-диференцијален компензатор. Во општ случај,

Фреквенциската карактеристика на системот (4.51) компензиран со интегро-диференцијален компензатор ќе изгледа како на слика 4.28. Системот ќе биде стабилен доколку критичната точка $(-1, j0)$ се најде во областа на стабилност означена на слика 4.28. Со соодветен избор на параметрите на интегро-диференцијалниот компензатор по методот на проба и грешка може да се постигне задоволително поведење на првобитно нестабилниот затворен систем, како во преоден, така и во стационарен режим.

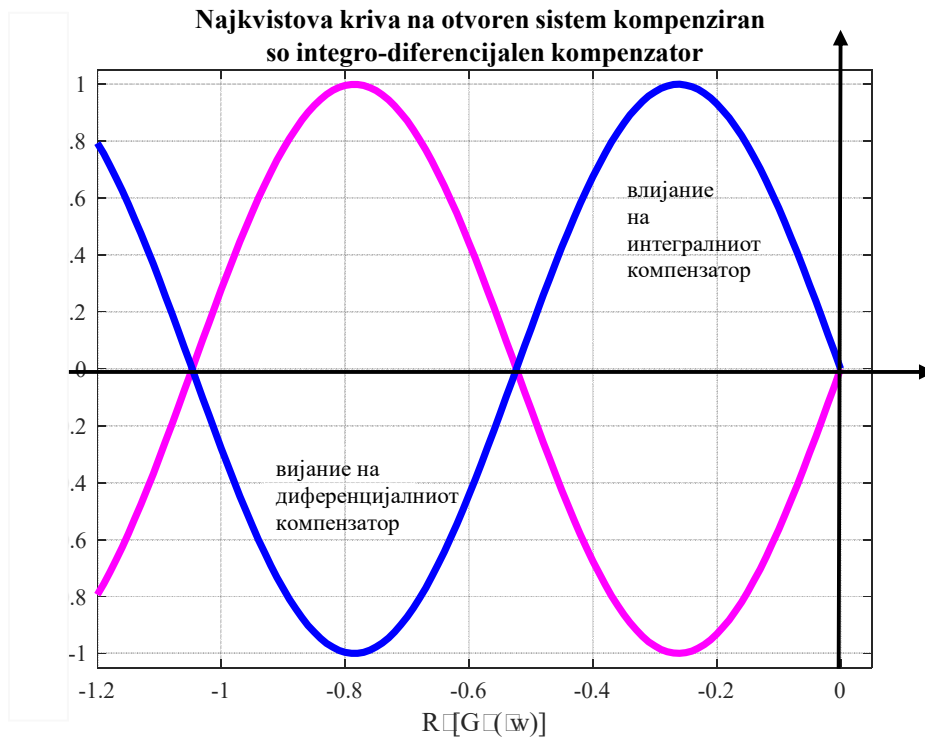


Слика 4.27. Фреквенциска карактеристика на системот (4.51) по компензацијата со диференцијален компензатор $G_d(s) = (s + 0.5)/(s + 5)$

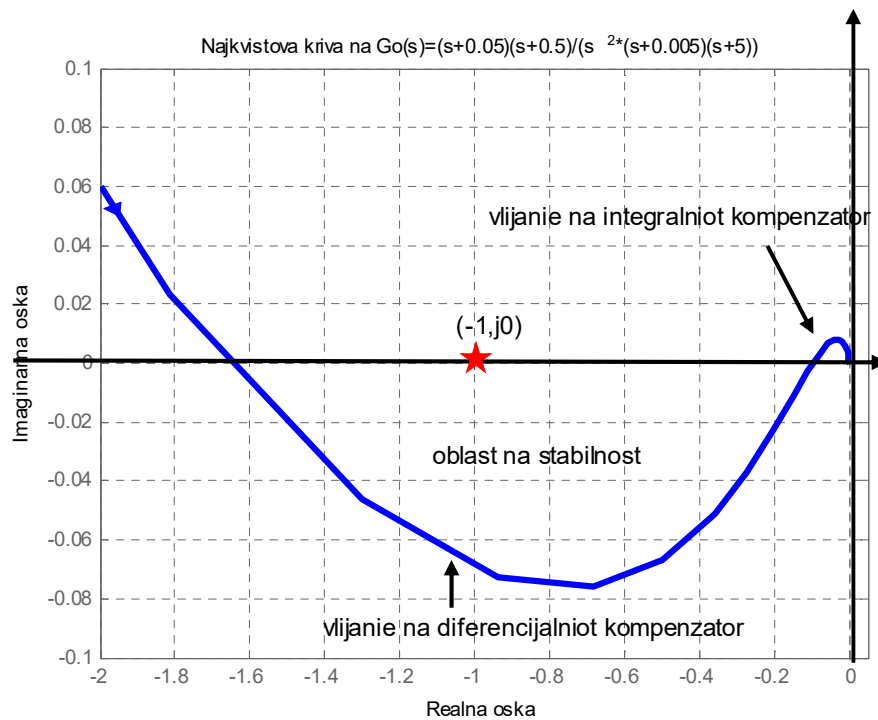
Фреквенциската карактеристика на отворениот систем од примерот 4.8 по компензацијата со интегро-диференцијален компензатор од облик:

$$G_{di}(s) = \frac{(s + 0.5)(s + 0.05)}{(s + 5)(s + 0.005)} \quad (4.52)$$

е прикажана на слика 4.29.



Слика 4.28. Општ изглед на фреквенциската карактеристика на системот од пример 4.8 компензиран со интегро-диференцијален компензатор



Слика 4.29. Фреквенциска карактеристика на системот (4.51) по компензација со интегро-диференцијален компензатор (4.52) □

5. ФРЕКВЕНЦИСКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИТЕ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ ПРЕКУ БОДЕОВИТЕ ДИЈАГРАМИ НА СООДВЕТНИОТ ОТВОРЕН СИСТЕМ

Анализата и синтезата на затворените САУ (било континуални било дискретни) со помош на Бодеовите дијаграми е еквивалентна со Најквистовата фреквенциска анализа и синтеза, бидејќи и двете постапки користат графички приказ на фреквенциската преносна функција од соодветниот отворен систем. Меѓутоа, Бодеовата постапка користи два дијаграми – амплитудната логаритамска фреквенциска карактеристика или Бодеовиот дијаграм на слабеење и фазната полулогаритамска фреквенциска карактеристика или Бодеовиот дијаграм на фаза. И двата дијаграми се прикажуваат во функција од фреквенцијата ω дадена во логаритамски размер; модулот на фреквенциската преносна функција исто така е прикажан во логаритамски размер, додека аргументот на фреквенциската преносна функција на отворениот систем не се прикажува во логаритамски размер.

Бодеовите дијаграми многу јасно ја прикажуваат релативната стабилност на затворениот систем. Од нив многу едноставно се отчитуваат вредностите на резервите на засилување и фаза, кои се квантитативни показатели на степенот на релативна стабилност на еден затворен САУ.

Кога се користи Бодеовата постапка за фреквенциска анализа и синтеза на еден континуален САУ, пожелно е преносната функција на отворениот систем да се доведе на соодветен т.н. **Бодеов облик**:

$$\begin{aligned}
 G_0(s) &= \frac{K(s+z_1)^{K_1} \cdots (s+z_n)^{K_n} (s^2+2\xi_1\omega_{n_1}s+\omega_{n_1}^2)^{L_1} \cdots (s^2+2\xi_\mu\omega_{n_\mu}s+\omega_{n_\mu}^2)^{L_\mu}}{s^q(s+p_1)^{M_1} \cdots (s+p_\nu)^{M_\nu} (s^2+2\zeta_1w_{n_1}s+w_{n_1}^2)^{N_1} \cdots (s^2+2\zeta_\nu w_{n_\nu}s+w_{n_\nu}^2)^{N_\nu}} = \\
 &= K_B \frac{\left(\frac{s}{z_1}+1\right)^{K_1} \cdots \left(\frac{s}{z_n}+1\right)^{K_n} \left(\frac{s^2}{\omega_{n_1}^2} + \frac{2\xi_1}{\omega_{n_1}}s+1\right)^{L_1} \cdots \left(\frac{s^2}{\omega_{n_\mu}^2} + \frac{2\xi_\mu}{\omega_{n_\mu}}s+1\right)^{L_\mu}}{s^q \left(\frac{s}{p_1}+1\right)^{M_1} \cdots \left(\frac{s}{p_\nu}+1\right)^{M_\nu} \left(\frac{s^2}{w_{n_1}^2} + \frac{2\zeta_1}{w_{n_1}}s+1\right)^{N_1} \cdots \left(\frac{s^2}{w_{n_\nu}^2} + \frac{2\zeta_\nu}{w_{n_\nu}}s+1\right)^{N_\nu}} = \\
 &= \frac{K_B(T_{11}s+1)^{K_1} \cdots (T_{1n}s+1)^{K_n} (T_{21}^2s^2+2\xi_1T_{21}s+1)^{L_1} \cdots (T_{2\mu}^2s^2+2\xi_\mu T_{2\mu}s+1)^{L_\mu}}{s^q (T_{31}s+1)^{M_1} \cdots (T_{3\nu}s+1)^{M_\nu} (T_{41}^2s^2+2\zeta_1T_{41}s+1)^{N_1} \cdots (T_{4\nu}^2s^2+2\zeta_\nu T_{4\nu}s+1)^{N_\nu}} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

каде што K_B е т.н. **Бодеово засилување**:

$$K_B = K \frac{\prod_{i=1}^{\eta} (z_i)^{K_i} \prod_{i=1}^{\mu} (\omega_{n_i}^2)^{L_i}}{\prod_{i=1}^{\nu} (p_i)^{M_i} \prod_{i=1}^{\nu} (\omega_{n_i}^2)^{N_i}} \quad (5.2)$$

Лесно може да се провери дека Бодеовото засилување е еднакво на константата на положба $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)$ за отворен систем со астатизам од нулти ред, на брзинската константа $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s)$ за отворен систем со астатизам од прв ред итн. Факторизираниот облик на фреквенциската преносна функција на еден дискретен систем не е така едноставен како кај континуалните системи:

$$G_0(e^{j\omega T_0}) = K \frac{(e^{j\omega T_0} + z_1)^{K_1} \dots (e^{j\omega T_0} + z_\eta)^{K_\eta} \dots}{(e^{j\omega T_0} - 1)^q (e^{j\omega T_0} + p_1)^{M_1} \dots (e^{j\omega T_0} + p_\nu)^{M_\nu} \dots} \quad (5.3)$$

затоа што во изразот (5.3) постојат експоненцијални членови кои водат кон тригонометриски изрази, па не постојат едноставни асимптоти или апроксимации за одделните членови во (5.3). Затоа наједноставен начин да се добијат Бодеовите дијаграми на еден дискретен систем е со помош на дигитален пресметувач, односно некој програмски пакет. Битно е да се истакне дека кај дискретните системи и модулот и фазата на фреквенциската преносна функција се периодични функции од фреквенцијата ω , со периода $\frac{2k\pi}{T_0}$:

$$e^{j\omega T_0} = e^{j\left(\omega + \frac{2k\pi}{T_0}\right)T_0} = e^{j\omega T_0} e^{j2k\pi} \quad (5.4)$$

Следствено, доволно е Бодеовите дијаграми да се нацртаат за $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$.

Пример 5.1. Да се нацртаат Бодеовите логаритамски дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем со преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{10(s+10)}{s+1} \quad (5.5)$$

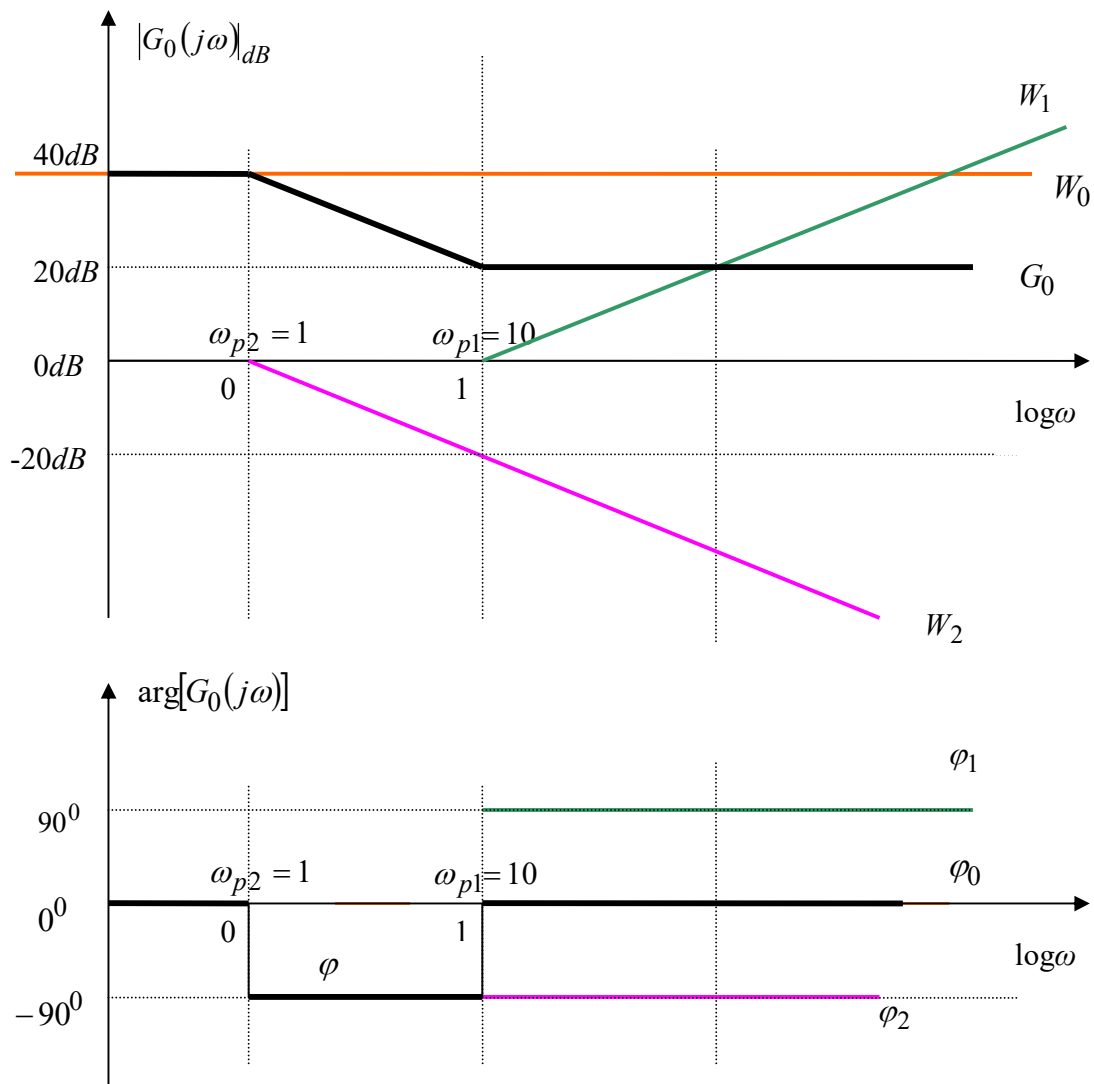
Решение: Најнапред преносната функција (5.5) се доведува во Бодеов облик:

$$G_0(s) = \frac{10(s+10)}{s+1} = \frac{100\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{s+1} \quad (5.6)$$

и потоа се цртаат асимптотските логаритамски дијаграми на слабеење и фаза со помош на податоците во табела 5.1, прикажани на слика 5.1.

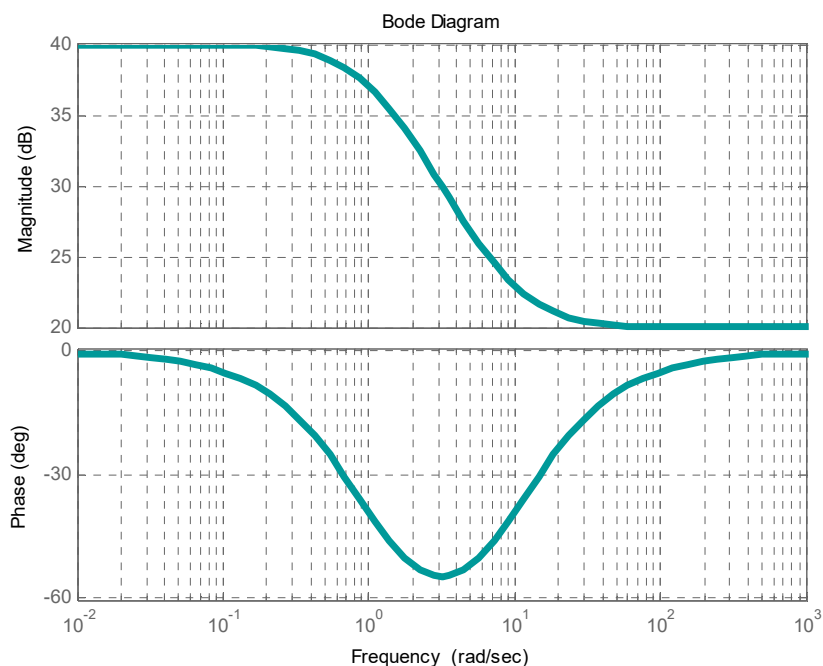
Табела 5.1.

$W_i(s)$	T_i	$\omega_{pi} = \frac{1}{T_i}$	наклон	фаза
$W_0(s) = 100$	/	/	$0dB/dec$	0^0
$W_1(s) = \frac{s}{10} + 1$	$T_1 = 0.1$	$\omega_{p1} = 10$	$+20dB/dec$	90^0
$W_2(s) = \frac{1}{s+1}$	$T_2 = 1$	$\omega_{p2} = 1$	$-20dB/dec$	-90^0

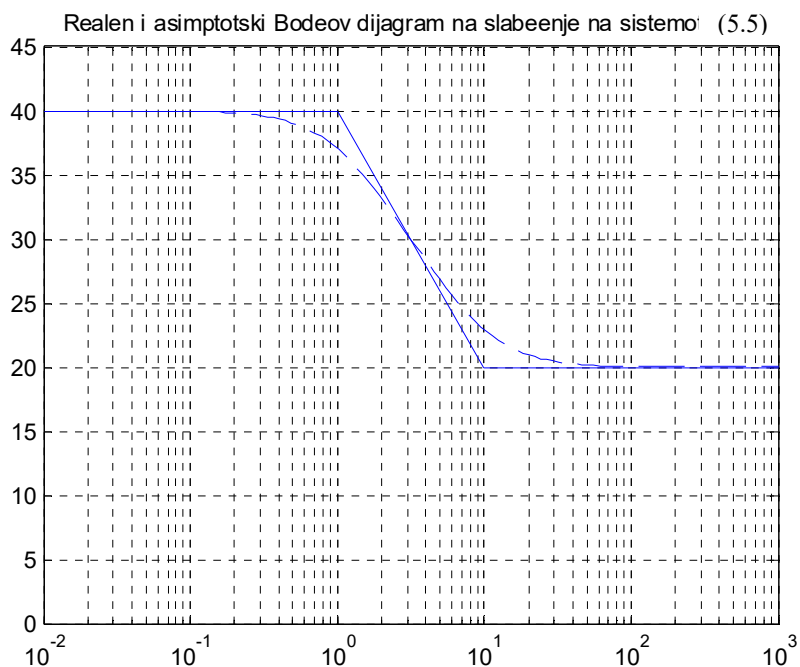


Слика 5.1. Бодови асимптотски дијаграми на слабеење и фаза за системот (5.5)

Реалните Бодев дијаграми за истиот систем се прикажани на слика 5.2, додека на слика 5.3 е прикажан и реалниот и асимпторскиот дијаграм на слабење за системот (5.5).



Слика 5.2. Реални Бодев дијаграми за системот (5.5)



Слика 5.3. Реален и асимпторски Бодев дијаграм на слабење за системот (5.5) □

Пример 5.2. Да се нацртаат Бодеовите дијаграми на отворениот дискретен систем со преносна функција:

$$G_0(z) = \frac{0.01(z+1)^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \quad (5.7)$$

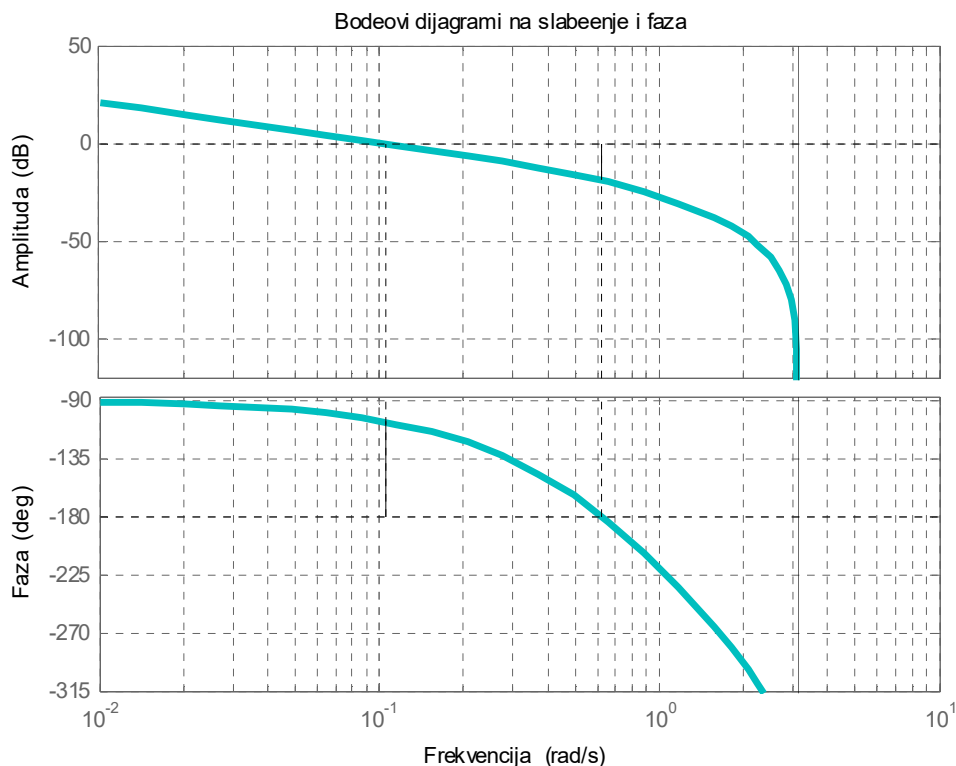
Решение: Бодеовиот облик на преносната функција (5.7) е:

$$G_0(z) = \frac{0.08(z+1)^2}{(z-1)(2z-1)(4z-1)} \quad (5.8)$$

а соодветната фреквенциска преносна функција е:

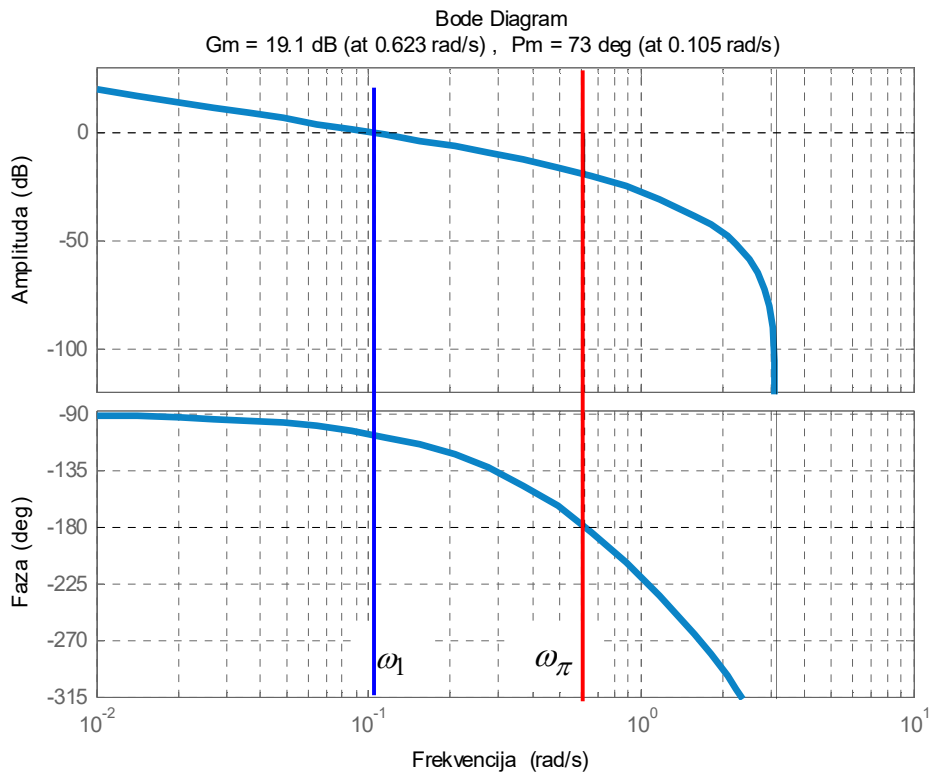
$$G_0(e^{j\omega T_0}) = \frac{0.08(e^{j\omega T_0} + 1)^2}{(e^{j\omega T_0} - 1)(2e^{j\omega T_0} - 1)(4e^{j\omega T_0} - 1)} \quad (5.9)$$

Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на системот (5.7) односно (5.8), добиени со помош на програмскиот пакет MATLAB, се прикажани на слика 5.4.



Слика 5.4. Бодеови дијаграми на слабеење и фаза на дискретниот систем (5.7)

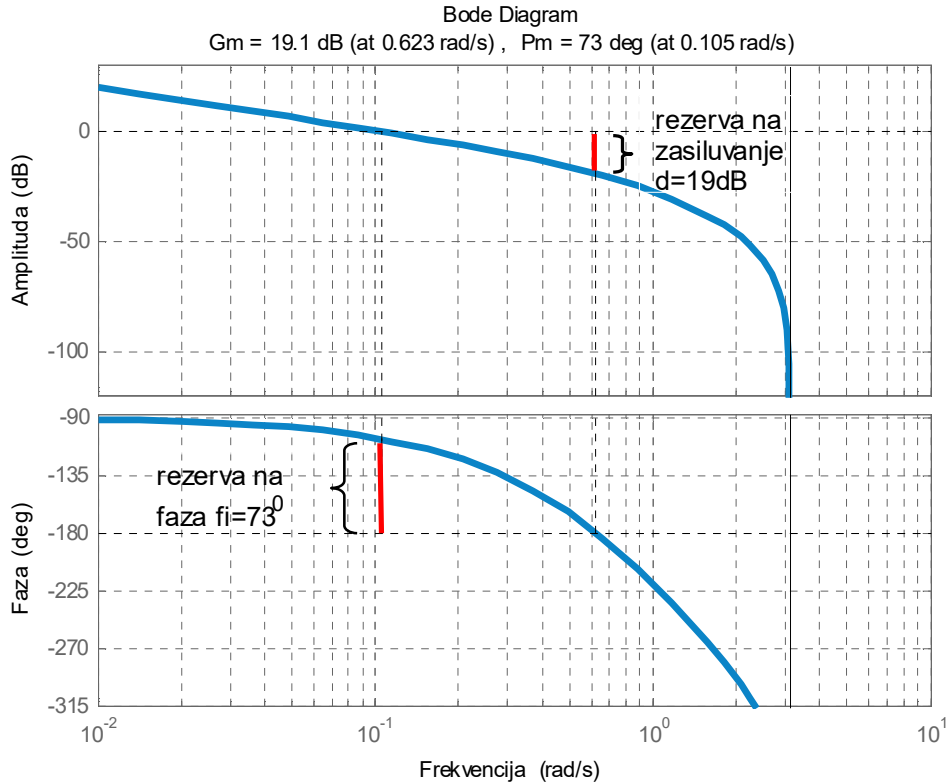
Одредувањето на релативната стабилност за континуалните и дискретните затворени САУ се врши на следниот начин. Најнапред се определуваат пресечните фреквенции на засилување и фаза. По дефиниција, пресечната фреквенција на засилување ω_1 е онаа фреквенција за која модулот на фреквенциската преносна функција на соодветниот отворен систем има вредност $|G_0(j\omega_1)| = 1$. Бидејќи $20 \log|G_0(j\omega_1)| = 0$, следува дека тоа е онаа фреквенција за која Бодеовиот дијаграм на слабење ја сече хоризонталната оска. Од друга страна, пресечната фреквенција на фаза е онаа фреквенција, за која аргументот на фреквенциската преносна функција на отворениот систем има вредност -180° . Следствено, тоа е онаа фреквенција при која Бодеовиот дијаграм на фаза ја сече правата $\varphi = -180^\circ$. Пресечните фреквенции на засилување и фаза за системот (5.7) се прикажани на слика 5.5.



Слика 5.5. Пресечните фреквенции на засилување и фаза за системот (5.7)

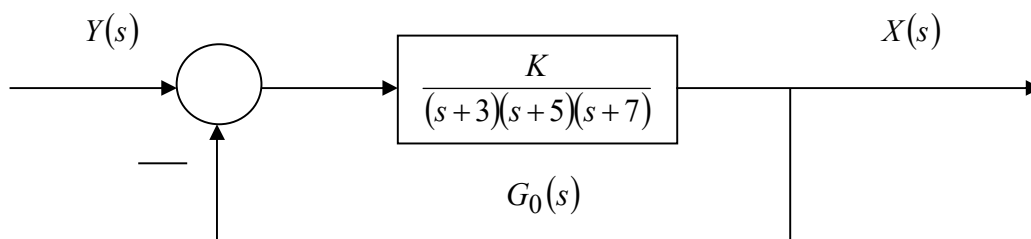
Откако еднаш се определат пресечните фреквенции на засилување и фаза, резервите на засилување и фаза се определуваат мошне едноставно. Резервата на засилување е еднаква со бројот децибели за кои $|G_0(j\omega_\pi)|_{dB}$ се наоѓа под хоризонталната оска, додека резервата на фаза е еднаква со бројот степени за кои $\arg[G_0(j\omega_1)]$ се наоѓа над

аголот -180° . Резервите на засилување и фаза за дискретниот систем од примерот 5.2 се прикажани на слика 5.6.



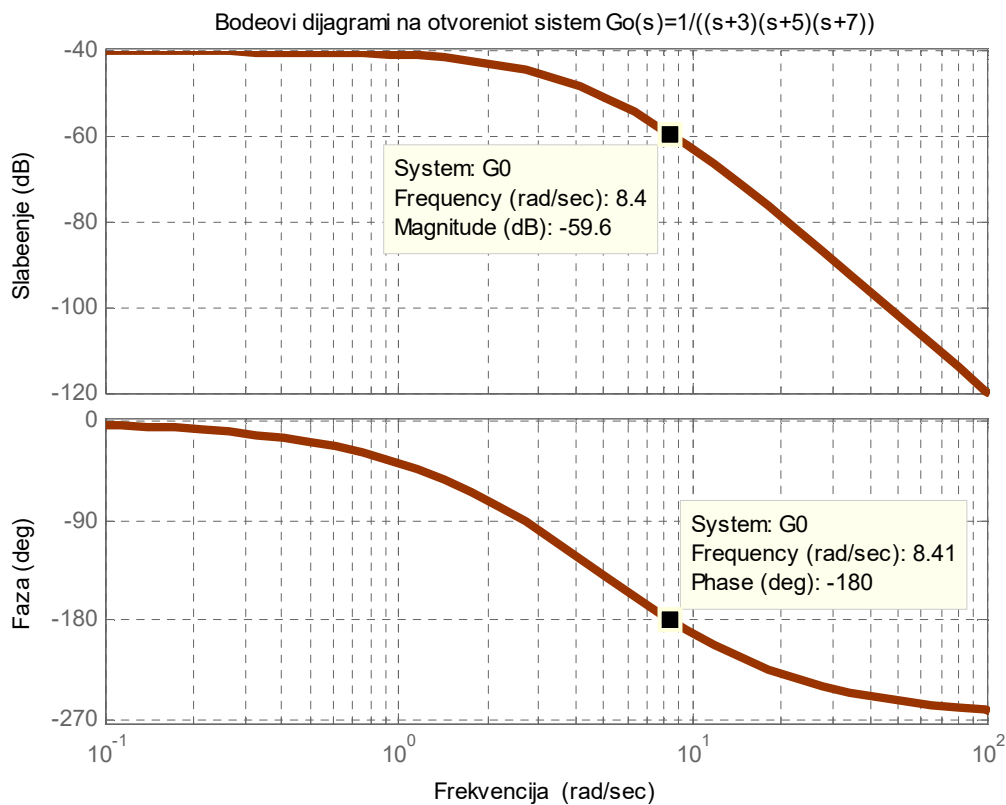
Слика 5.6. Отчитување на пресечните фреквенции и резервите на засилување и фаза за дискретниот систем од примерот 5.2 □

Пример 5.3. Со помош на Бодевите дијаграми да се определи интервалот дозволени вредности на коефициентот на засилување $K > 0$ на отворениот систем $G_0(s)$, за кои соодветниот затворен систем со единична негативна повратна врска од слика 5.7 ќе биде стабилен.



Слика 5.7. Илустрација кон примерот 5.3

Решение: Отворениот систем $G_0(s)$ има три прости негативни реални полови во точките $s_1 = -3$, $s_2 = -5$ и $s_3 = -7$. Бидејќи сите тие лежат во левата полурамнина од комплексната s -рамнина, отворениот систем е стабилен. Тогаш, затворениот систем од слика 5.7 ќе биде стабилен, доколку модулот на фреквенциската преносна функција на отворениот систем при пресечната фреквенција на фаза е помал од единица, $|G_0(j\omega_\pi)| < 1$. Бодеовите дијаграми на отворениот систем за $K=1$, добиени со помош на програмскиот пакет MATLAB, се прикажани на слика 5.8.



Слика 5.8. Бодеови дијаграми на отворениот систем од слика 5.7

Од нив се гледа дека пресечната фреквенција на фаза изнесува приближно $\omega_\pi \approx 8.4 \frac{rad}{sec}$, додека засилувањето на отворениот систем при оваа фреквенција изнесува приближно $-59.6dB$. Тоа значи дека засилувањето на отворениот систем може да се зголеми за $20\log_{10} \lambda = 59.6dB$ или за $\lambda = 955$ пати пред затворениот систем да стане нестабилен. Оттаму, дозволеният интервал вредности на K за кои затворениот систем од слика 5.7 ќе биде стабилен е $0 < K < 955$. Овој резултат може да се спореди со аналитички добиените вредности $0 < K < 960$. □

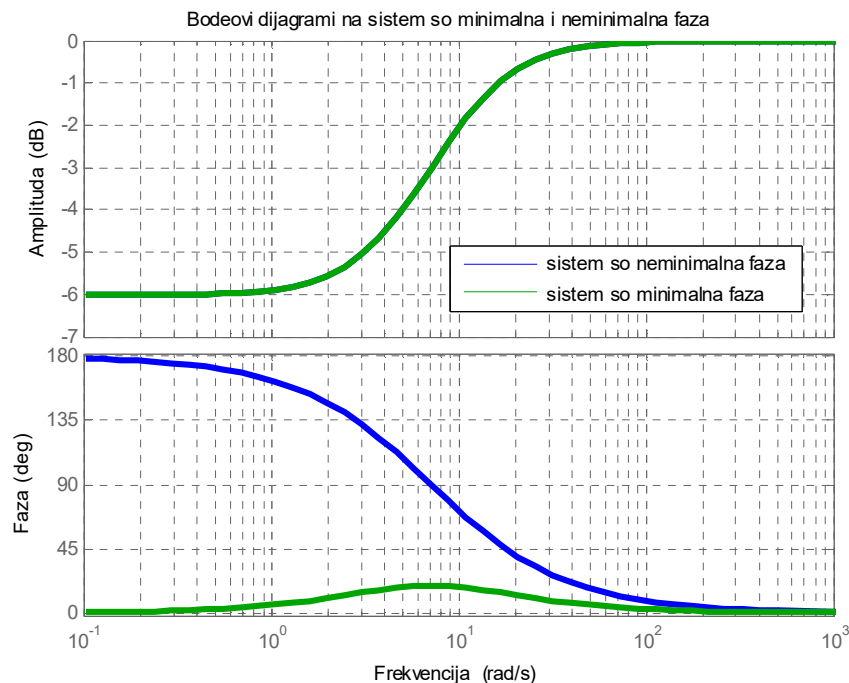
Досега цртавме Бодеои дијаграми само за системи, чии нули и полови се наоѓаат исклучиво во левата полурамнина од s – комплексната рамнина. Овие системи се нарекуваат уште **системи со минимална фаза**. Сега ќе видиме како се цртаат Бодеоите дијаграми за системи кои имаат нули и полови во десната полурамнина од s – комплексната рамнина. Овие системи се нарекуваат уште **системи со неминимална фаза**, затоа што имаат поголема фаза од системите со исти по модул нули и полови, само во левата полурамнина од s – комплексната рамнина. Разликата помеѓу системите со минимална и неминимална фаза е битна во пракса, затоа што системите со минимална фаза полесно се управуваат од системите со неминимална фаза.

Пример 5.4. Да се нацртаат асимптотските Бодеои дијаграми за системот со преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{s-b}{s+a}; \quad a, b > 0 \quad (5.10)$$

На слика 5.9 се прикажани Бодеоите дијаграми на слабеење и фаза на еден систем со неминимална фаза:

$$G_0(s) = \frac{s-5}{s+10} \quad (5.11)$$



Слика 5.9. Бодеои дијаграми на систем со неминимална фаза и соодветен систем со минимална фаза

и соодветниот систем со минимална фаза:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{s+5}{s+10} \quad (5.12)$$

Како што може да се забележи, двата система имаат исти Бодеоови дијаграми на слабеење, што лесно може да се покаже:

$$G_0(s) = \frac{s-b}{s+a} \Rightarrow G_0(j\omega) = \frac{j\omega-b}{j\omega+a} \Rightarrow G_0(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+(-b)^2}}{\sqrt{\omega^2+a^2}} = \frac{\sqrt{\omega^2+b^2}}{\sqrt{\omega^2+a^2}} \quad (5.13)$$

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{s+b}{s+a} \Rightarrow \tilde{G}_0(j\omega) = \frac{j\omega+b}{j\omega+a} \Rightarrow \tilde{G}_0(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+b^2}}{\sqrt{\omega^2+a^2}} = G_0(\omega) \quad (5.14)$$

Разликата е во Бодеоовите дијаграми на фаза, затоа што системот со минимална фаза има Бодеоов дијаграм на фаза:

$$\tilde{\varphi}_{rf} = \arctg\left(\frac{\omega}{b}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.15)$$

додека системот со неминимална фаза има Бодеоов дијаграм на фаза:

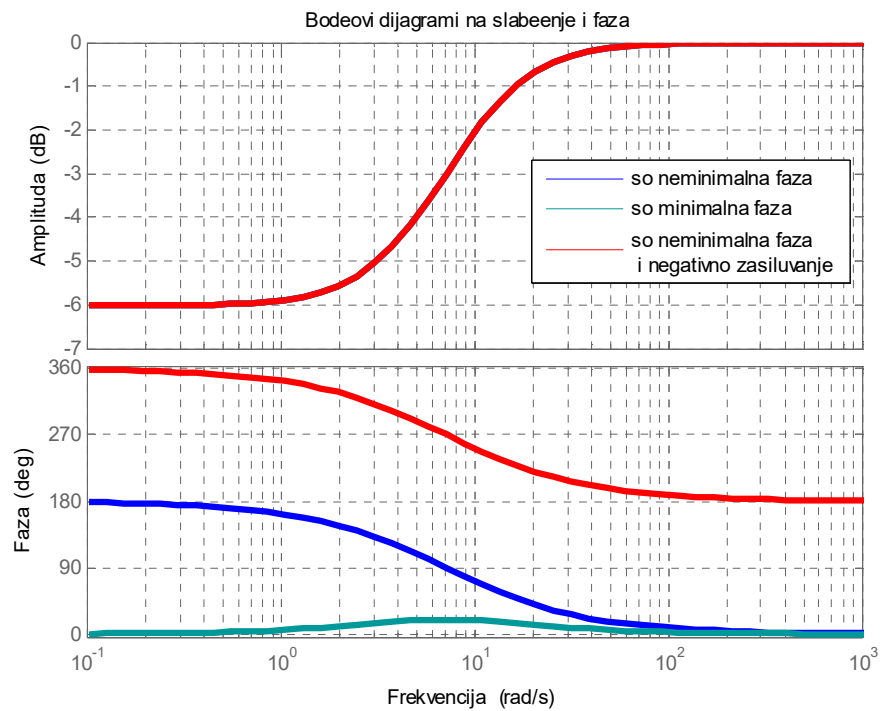
$$\varphi_{rf} = \pi - \arctg\left(\frac{\omega}{b}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.16)$$

што значи дека истиот почнува во π , наместо во нулата. Тоа произлегува од фактот дека кога системот поседува непарен број полови и нули во десната полурамнина од s – комплексната рамнина, почетокот на неговиот Бодеоов дијаграм на фаза се подига за π . За иста вредност треба да се подигне Бодеоовиот дијаграм на фаза на систем со неминимална фаза, и ако неговото Бодеоово засилување има негатива вредност, како на пример, кај системот:

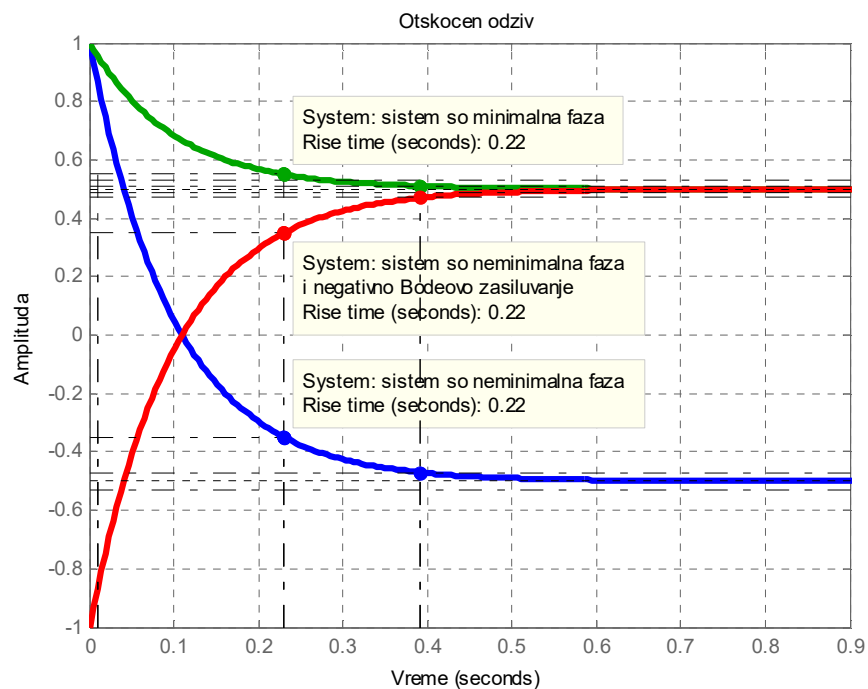
$$\tilde{\tilde{G}}_0(s) = \frac{5-s}{s+10} = -\frac{s-5}{s+10} \quad (5.17)$$

Бодеоовите дијаграми на овој систем се прикажани на слика 5.10 и додека Бодеоовиот дијаграм на слабеење е ист како и кај другите набљудувани системи од овој пример, неговиот дијаграм на фаза започнува во 2π и завршува во π .

Отскочните одсиви на трите набљудувани системи се прикажани на слика 5.11.



Слика 5.10. Бодевите дијаграми на систем со неминимална фаза, истиот систем со негативно Бодеево засилување и соодветен систем со минимална фаза



Слика 5.11. Отскочен одзив на системите од пример 5.4 □

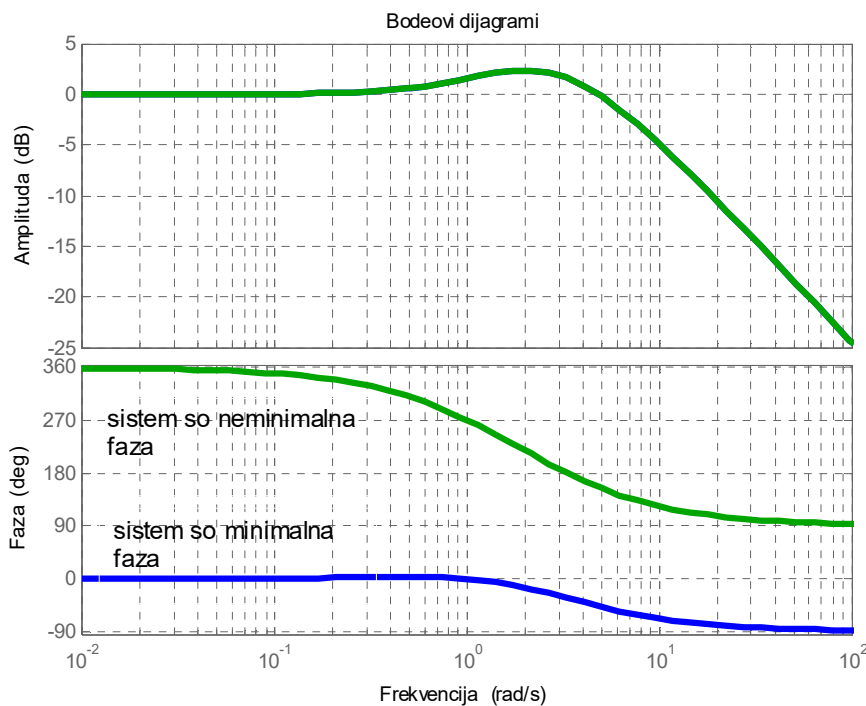
Пример 5.5. Да се нацртаат асимптотските Бодеови дијаграми за системот со преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{6(1-s)}{(s+2)(s+3)} = -\frac{6(s-1)}{(s+2)(s+3)} \quad (5.18)$$

Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на овој систем се прикажани на слика 5.12 и споредени со Бодеовите дијаграми на соодветниот систем со минимална фаза:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{6(s+1)}{(s+2)(s+3)} \quad (5.19)$$

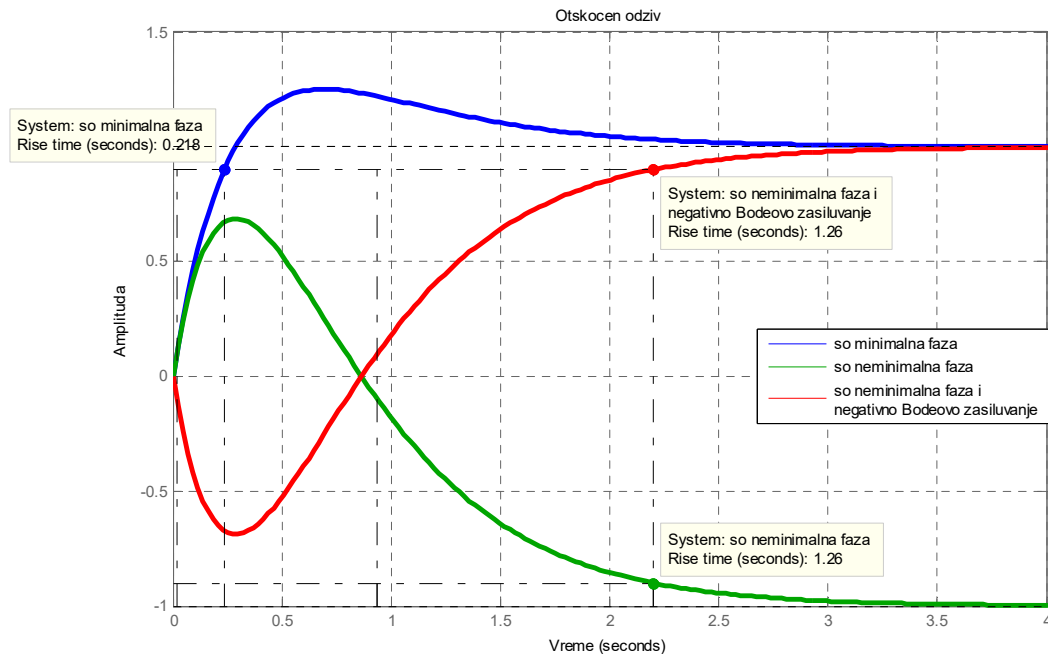
Бидејќи се работи за систем со неминимална фаза, кој има една нула во десната полурамнина од комплексната s – рамнина и негативно Бодеово засилување, неговиот Бодеов дијаграм на фаза почнува во 2π и завршува во $\pi/2$.



Слика 5.12. Бодеови дијаграми на системот со неминимална фаза и соодветниот систем со минимална фаза од примерот 5.5

Отскочните одсиви на двата набљудувани системи се прикажани на слика 5.13. Оттука може да се забележи дека отскочниот одсив на системот со минимална фаза има значително покусо време на пораст, што значи дека овој систем е најбрз од набљудуваните. Во продолжение, може да се забележи дека зададениот систем со неминимална фаза има многу невообичаен отскочен облик во почетокот, кој се

нарекува **инверзен одсив**. Ваквиот систем е многу потежок за управување од соодветниот систем со минимална фаза.



Слика 5.13. Отскочен одсив на системите од пример 5.5 □

Пример 5.6. Да се нацртаат асимптотските Бодеови дијаграми за системот со преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{(1-s)}{(s-2)} = -\frac{(s-1)}{(s-2)} \quad (5.20)$$

Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на овој систем се прикажани на слика 5.14, каде се споредени со Бодеовите дијаграми на соодветниот систем со минимална фаза:

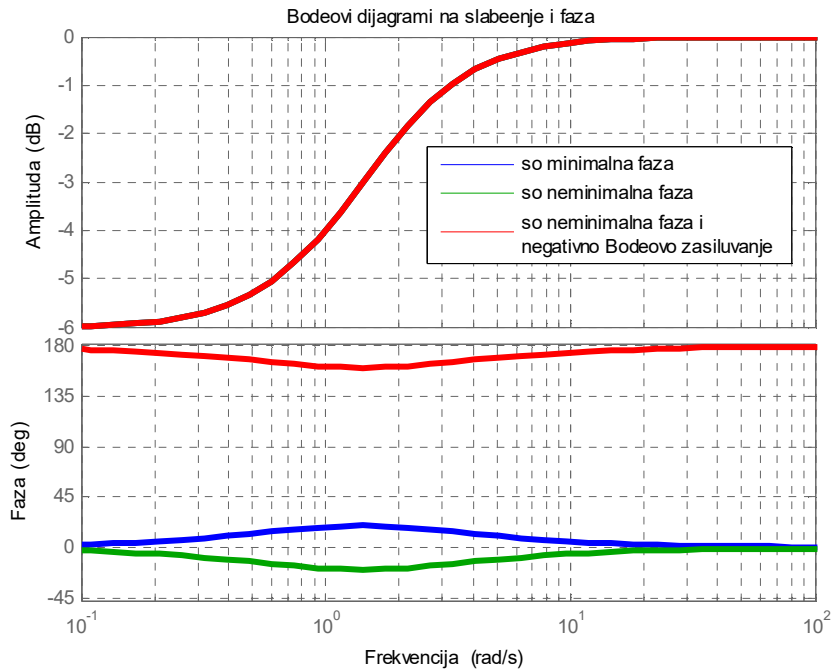
$$\tilde{G}_0(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)} \quad (5.21)$$

и соодветниот систем со неминимална фаза:

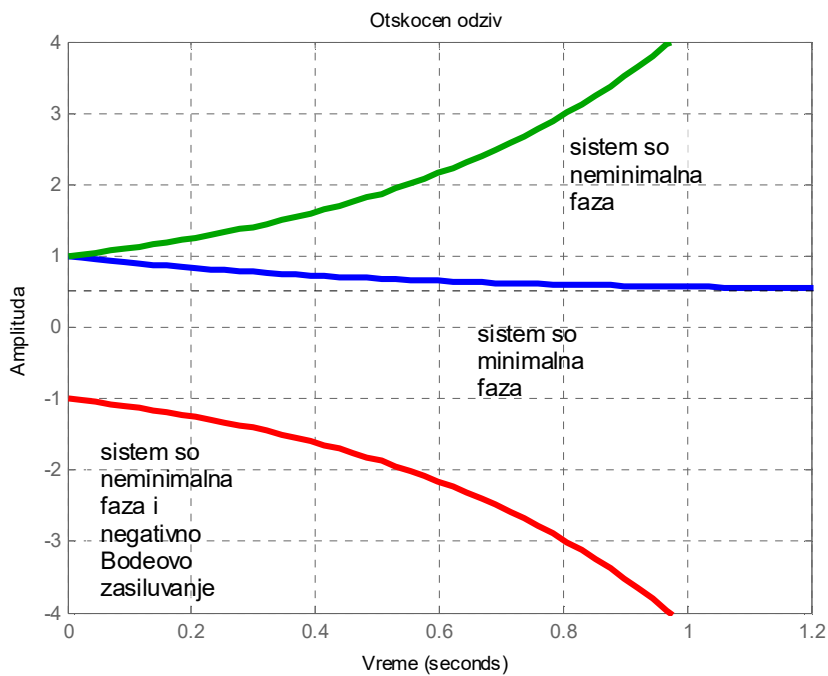
$$\tilde{\tilde{G}}_0(s) = \frac{(s-1)}{(s-2)} \quad (5.22)$$

Додека Бодеовите дијаграми на слабеење на трите системи се исти, нивните дијаграми на фаза се разликуваат. Дијаграмот на фаза на зададениот систем со неминимална фаза и негативно Бодеово засилување е ист со дијаграмот на системот со неминимална фаза и позитивно Бодеово засилување, само што е подигнат за π , додека Бодеовиот дијаграм на фаза на вториот неминимален систем започнува во 0, затоа што има парен

број нули и полови во десната полурамнина од s – комплексната рамнина. На слика 5.15 се прикажани и отскочните одсиви на набљудуваните системи.



Слика 5.14. Бодевите дијаграми на системите од примерот 5.6



Слика 5.15. Отскочен одзив на системите од пример 5.6 □

Постапките за анализа и синтеза на затворените линеарни континуални системи на автоматско управување преку Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на соодветниот отворен систем се директно применливи и кај дискретните системи со помош на билинеарната трансформација:

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (5.23)$$

Така, при анализата и синтезата на еден затворен дискретен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска и соодветен отворен систем $G_0(z)$ се применува следната постапка:

1. Замена на комплексната променлива z во преносната функција $G_0(z)$ на соодветниот отворен систем со смената (5.23).
2. Замена на комплексната променлива s од преносната функција $G_0(s)$, добиена во претходниот чекор, со смената $s = j\omega_s$ и генерирање на Бодевите дијаграми на слабеење и фаза за $G_0(j\omega_s)$.
3. Анализа на релативната стабилност на затворениот систем преку Бодевите дијаграми на $G_0(j\omega_s)$, што подразбира одредување на пресечните фреквенции на засилување и фаза, резервите на засилување и фаза, ширината на пропусниот опсег и сите други фреквенциски показатели на квалитетот на поведението на проектираниот систем од интерес.
4. Трансформација на критичните фреквенции одредени во претходниот чекор од фреквенциското подрачје во s -комплексната рамнина во фреквенциското подрачје во z -комплексната рамнина според формулата $\omega T_0 = 2\arctg\omega_s$.

Пример 5.7. Да се определат критичните фреквенции и резервата на стабилност на затворениот дискретен систем од пример 5.2, со помош на билинеарната трансформација (5.23).

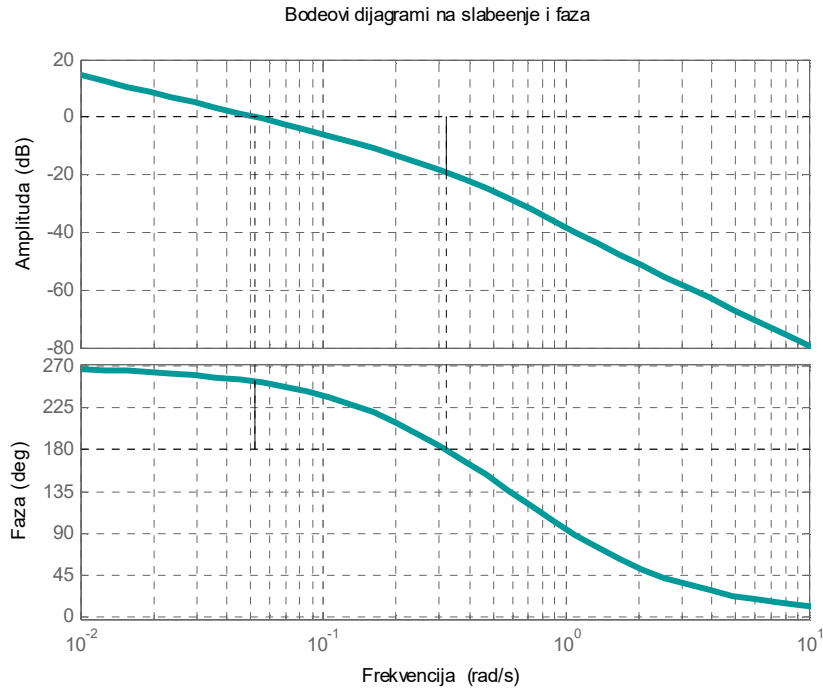
Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за дадениот затворен дискретен систем на автоматско управување со $T = 1$ сек, е:

$$G_0(z) = \frac{\frac{1}{100}(z+1)^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \quad (5.24)$$

Со воведување на билинеарната трансформација $z = \frac{1+s}{1-s}$ во (5.24), се добива преносната функција $G_0(s)$ на соодветниот отворен систем во s -комплексната рамнина, која очигледно е од неминимална фаза:

$$G_0(s) = \frac{16}{100} \frac{(1-s)}{s(3s+1)(5s+3)} \quad (5.25)$$

чии логаритамски дијаграми на слабеење и фаза се прикажани на слика 5.16. Со тоа проблемот се пресликува од z во s -комплексната рамнина.

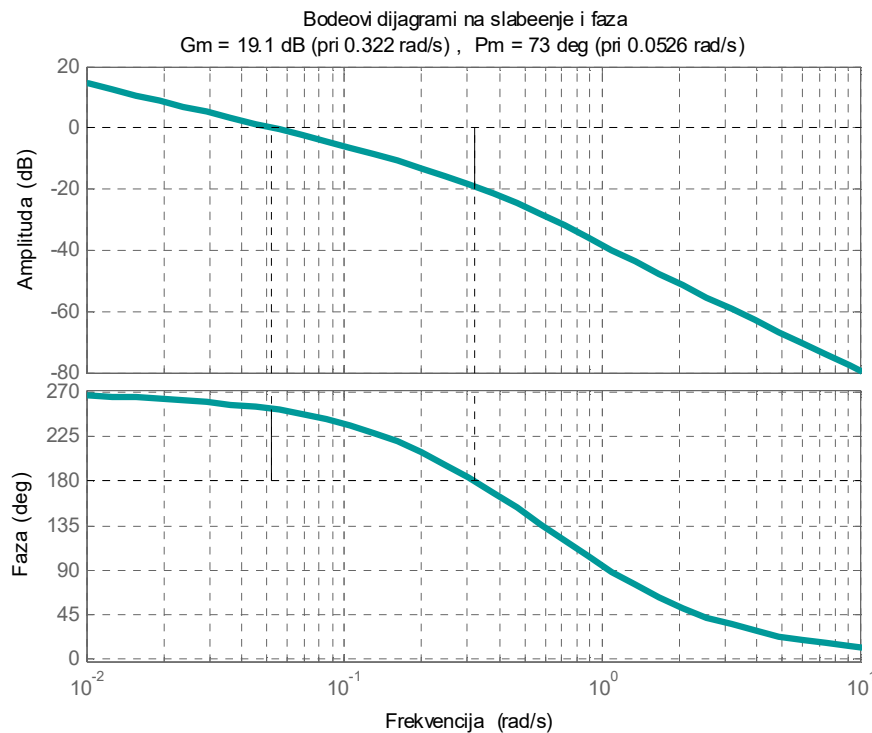


Слика 5.16. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем $G_0(s)$ опишан со (5.25), добиени со помош на програмскиот пакет MATLAB

Пресечните фреквенции на засилување и фаза, како и резервите на засилување и фаза можат да се отчитаат од дијаграмите на слика 5.16. Меѓутоа, тие можат да се добијат и со помош на MATLAB наредбата **margin**, како што е покажано на слика 5.17. Од слика 5.17 се гледа дека резервата на засилување е приближно $19dB$, резервата на фаза изнесува 73° , додека пресечните фреквенции на засилување и фаза се $\omega_1 = 0.0526 \text{sec}^{-1}$ и $\omega_\pi = 0.322 \text{sec}^{-1}$, соодветно. На крајот останува критичните фреквенции да се трансформираат во фреквенциското подрачје од z -рамнината:

$$\omega_1 = \frac{2}{T} \arctg w_1 = \frac{2}{1} \arctg 0.0526 = 0.105 \text{sec}^{-1} \quad (5.26)$$

$$\omega_\pi = \frac{2}{T} \arctg w_\pi = \frac{2}{1} \arctg 0.322 = 0.623 \text{sec}^{-1} \quad (5.27)$$



Слика 5.17. Приказ на резервите на засилување и фаза на Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем $G_0(s)$ опишан со (5.25), добиени со помош на програмскиот пакет MATLAB □

Обично билинеарната трансформација $z = \frac{1+s}{1-s}$ не се користи во фреквенциската анализа на затворените дискретни системи на автоматско управување со помош на Бодевите дијаграми, бидејќи постојат програмски пакети кои ја овозможуваат нивната анализа директно во z -комплексното подрачје. Затоа пак е многу полезна при фреквенциската синтеза на истите со помош на Бодевите дијаграми.

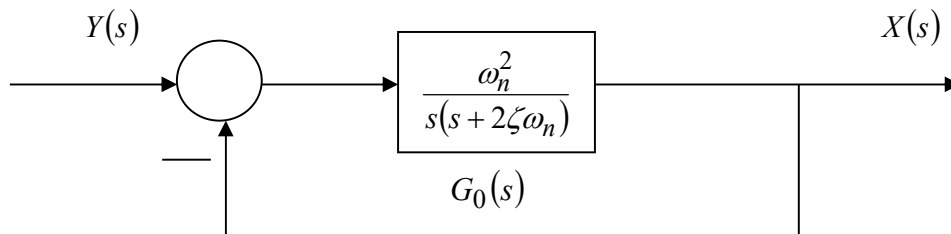
Синтезата на затворените континуални системи на автоматско управување со помош на Бодевите дијаграми се сведува на нагудување на Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, сè додека не бидат задоволени поставените проектни барања. Тоа нагудување се врши со додавање на сериски или паралелни компензатори и претставува релативно едноставна постапка, затоа што Бодевите дијаграми кај континуалните системи се добиваат многу едноставно.

Бидејќи во случајот на дискретните системи не можат да се дефинираат едноставни асимптотски логаритамски дијаграми, нагудувањето на Бодевите дијаграми на слабеење и фаза кај дискретните системи не е ниту така едноставно, ниту така интуитивно како кај континуалните системи. Затоа синтезата на дискретните системи

најчесто се врши во s – подрачјето и потоа добиените резултати се преведуваат во z – подрачјето.

5.1. ВРСКА ПОМЕЃУ ВРЕМЕНСКИТЕ И ФРЕКВЕНЦИСКИТЕ ПОКАЗАТЕЛИ НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН СИСТЕМ

При фреквенциската синтеза на затворените системи на автоматско управување со помош на Бодеовите дијаграми потребно е најнапред сите проектни барања, кои најчесто се искажуваат преку временски показатели какви што се максималниот прескок и времето на смирување на отскочниот одзив, да се искажат преку соодветни фреквенциски показатели, какви што се фреквенцискиот опсег, резонантниот врв итн. Затоа во продолжение ќе бидат дадени врските помеѓу отскочниот и фреквенцискиот одзив на еден затворен САУ, прикажан на слика 5.18.



Слика 5.18. Затворен САУ со единична негативна повратна врска

Преносната функција на затворениот систем од слика 5.18 е дадена со следниот израз:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.28)$$

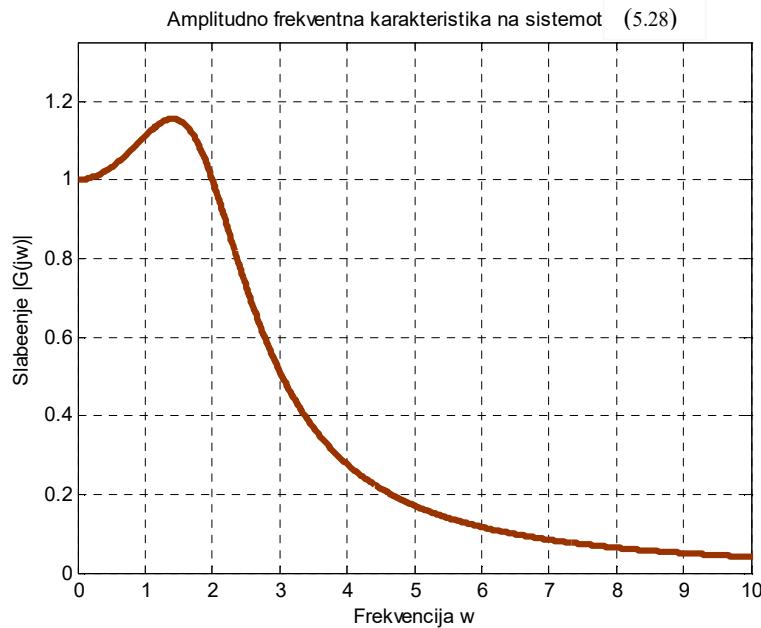
од каде, со смената $s = j\omega$ се добива неговата фреквенциска преносна функција:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} \quad (5.29)$$

со модул:

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \quad (5.30)$$

Квалитативен графички приказ на функцијата (5.30), која претставува амплитудна карактеристика на набљудуваниот систем е дадена на слика 5.19.



Слика 5.19. Амплитудно фреквенциска карактеристика на затворениот систем од слика 5.18 за $\omega_n = 2$ и $\zeta = 0.5$

Како што може да се забележи од слика 5.19, оваа карактеристика има максимум M_r , наречен резонантен врв, кој настапува при одредена фреквенција ω_r , наречена резонантна фреквенција. Резонантните вредности се определуваат од условот за максимум на функцијата (5.30). Така:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (5.31)$$

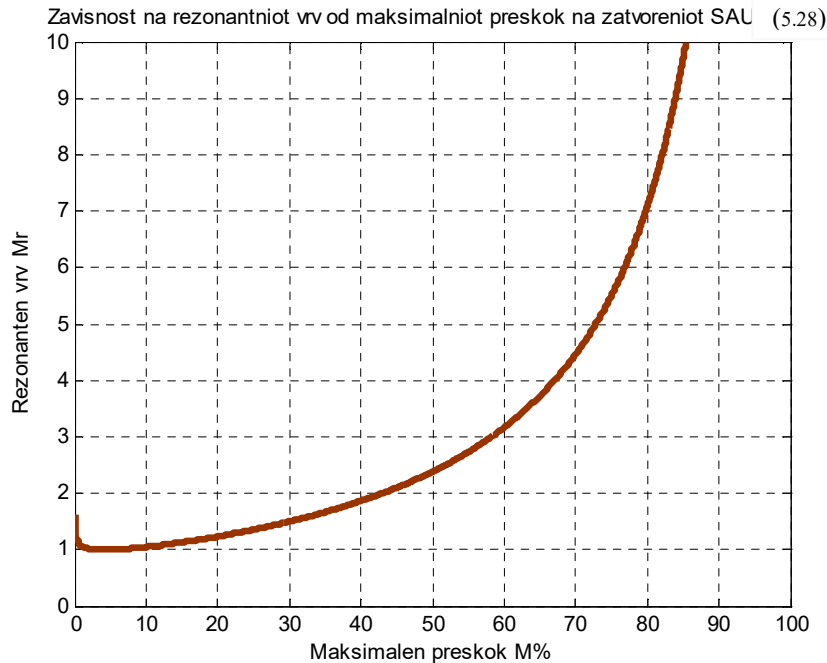
и:

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.32)$$

Равенката (5.32) ја дефинира врската помеѓу резонантниот врв M_r и факторот на релативно придушвање ζ на еден затворен САУ како на слика 5.18, а бидејќи помеѓу факторот на релативно придушвање ζ и максималниот прескок M_p на отскочниот одзив на набљудуваниот затворен систем исто така постои соодветна врска:

$$M = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (5.33)$$

зависноста $M_r = f(M_p)$ може да се прикаже графички како на слика 5.20.



Слика 5.20. Графички приказ на зависноста на резонантниот врв на фреквенцискиот одзив од максималниот прескок на отскочниот одзив на системот од слика 5.18

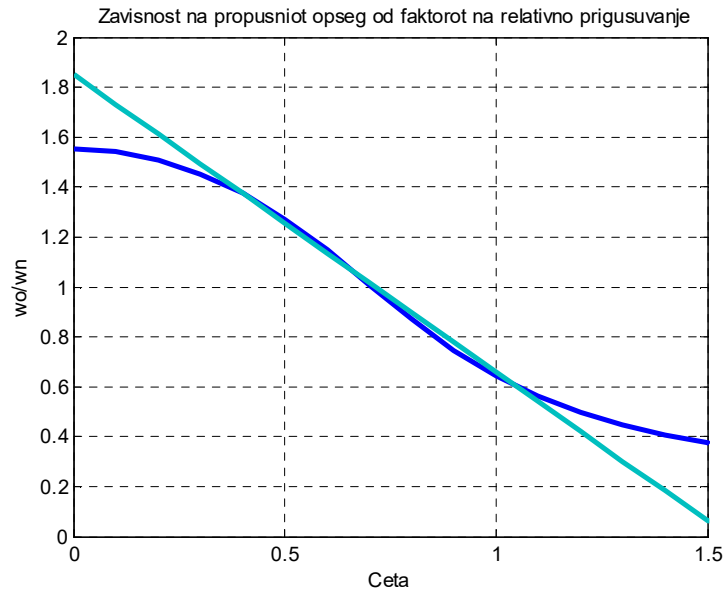
Од изразот (5.31) може да се заклучи дека резонантниот врв не настапува при природната фреквенција на набљудуваниот систем, односно $\omega_r \neq \omega_n$. Меѓутоа, за мали вредности на факторот на релативно придушвање ζ , може да се усвои дека $\omega_r \approx \omega_n$, $\zeta \ll 1$. Конечно, од изразот (5.31) може да се заклучи дека резонантниот врв постои само за $0 < \zeta < 0.707$, што не треба да се меша со фактот дека максималниот прескок постои за $0 < \zeta < 1$.

Друга зависност која може да се воспостави е помеѓу брзината на отскочниот одзив, изразена преку времето на пораст T_p , времето на максимален прескок T_m и времето на смирување на отскочниот одзив T_s , и пропусниот опсег на набљудуваниот затворен систем ω_0 , кој овде е дефиниран како фреквенција при која амплитудата на фреквенцискиот одзив изнесува 0.707 или $-3dB$ (да се види слика 5.19). Пропусниот опсег ω_0 се пресметува од условот $|G(j\omega_0)| = 1/\sqrt{2}$ и за него се добива:

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad (5.34)$$

Врската помеѓу пропусниот опсег ω_0 врз природната фреквенција ω_n и факторот на релативно придушување ζ на системот (5.28), графички е прикажана на слика 5.21 и може со доволна точност да се апроксимира со приближниот израз:

$$\frac{\omega_0}{\omega_n} \approx -1.19\zeta + 1.85; \quad 0.3 \leq \zeta \leq 0.8 \quad (5.35)$$



Слика 5.21. Графички приказ на зависноста на пропусниот опсег на системот (5.28) од коефициентот на релативно придушување ζ

Од изразот (5.34), кој ја дефинира зависноста на ω_0 од факторот на релативно придушување ζ и природната фреквенција ω_n , преку релацијата $T_s = 4/\zeta\omega_n$ може да се воспостави зависност помеѓу пропусниот опсег ω_0 помножен со времето на смирување T_s и факторот на релативно придушување ζ на набљудуваниот систем од слика 5.18:

$$\omega_0 = \frac{4}{\zeta T_s} \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad (5.36)$$

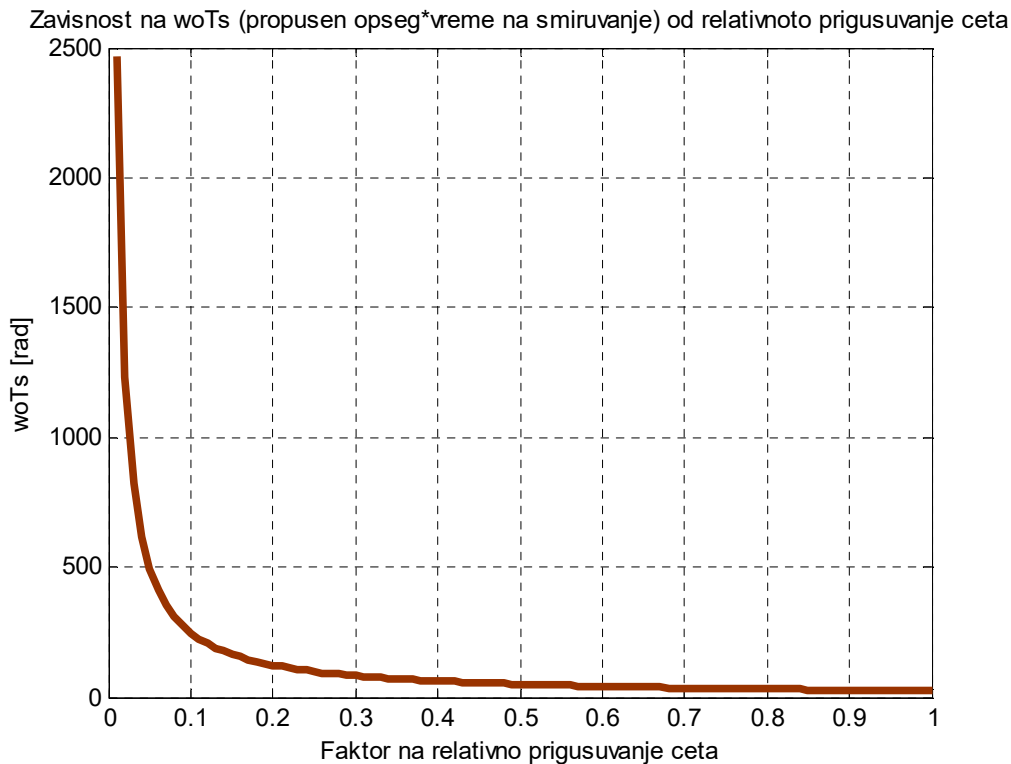
Оваа зависност е прикажана на слика 5.22.

На сличен начин, со помош на релацијата $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$, се воспоставува зависност

помеѓу пропусниот опсег ω_0 помножен со времето на максимален прескок на отскочниот одзив на затворениот САУ и неговиот фактор на придушување ζ :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T_m \sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad (5.37)$$

Оваа зависност е прикажана на слика 5.23.



Слика 5.22. Зависност на пропусниот опсег ω_0 по времето на смирување T_s од факторот на релативно придушување ζ за затворениот САУ од слика 5.18

Соодветна врска може да се воспостави и помеѓу факторот на релативно придушување на затворениот систем од слика 5.18 и неговата резерва на фаза. Оваа врска потоа ќе овозможи да се воспостави и соодветна зависност помеѓу максималниот прескок на отскочниот одсиг и резервата на фаза на набљудуваниот затворен систем. Врз основа на дефиницијата, резервата на фаза φ_{rf} се пресметува со помош на аргументот на фреквенциската преносна функција на соодветниот отворен систем $G_0(s)$ за набљудуваниот затворен систем при пресечната фреквенција на засилување ω_1 :

$$\varphi_{rf} = 180 + \arg[G_0(j\omega_1)] \quad (5.38)$$

која фреквенција се добива од условот:

$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{\omega_n^2}{-\omega_1^2 + j2\zeta\omega_n\omega_1} = 1 \quad (5.39)$$

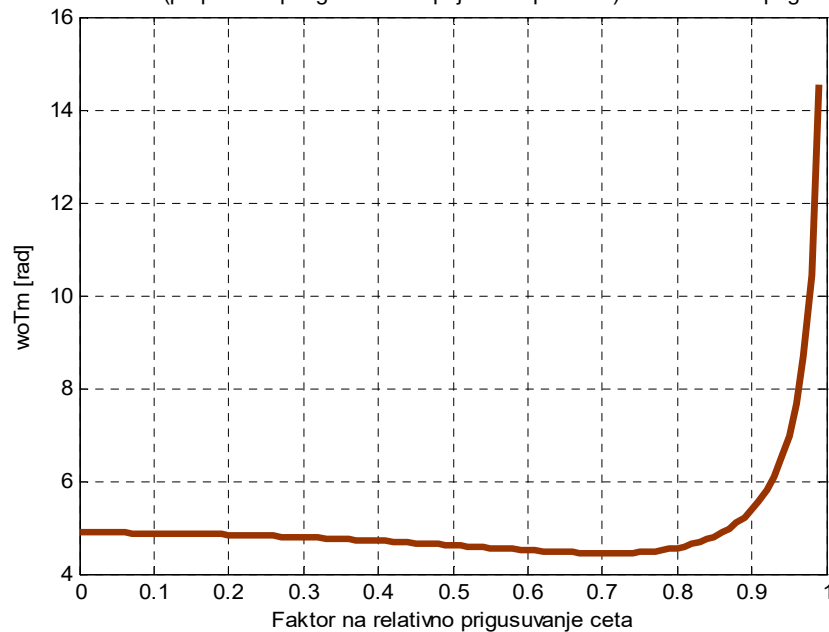
и изнесува:

$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}} \quad (5.40)$$

Оттука:

$$\arg[G_0(j\omega_1)] = -90 - \arctg \frac{\omega_1}{2\zeta\omega_n} = -90 - \arctg \frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}{2\zeta} \quad (5.41)$$

Zavisnost na $\omega_0 T_m$ (propusen opseg* vreme na pojava na preskok) od relativното prigusuvanje ζ



Слика 5.23. Зависност на пропусниот опсег ω_0 по времето на појава на максимален прескок T_m од релативното придушување ζ за затворениот САУ од слика 5.18

па за резервата на фаза се добива:

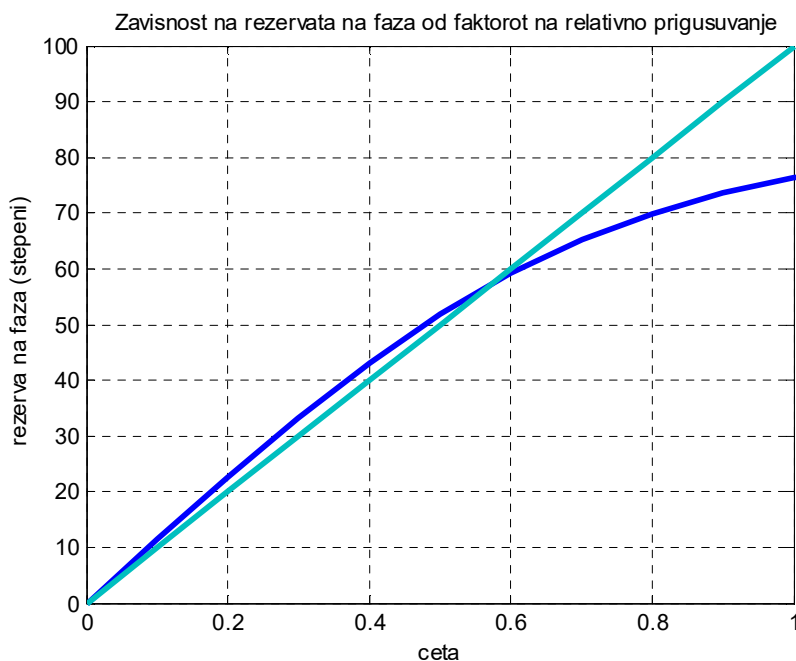
$$\varphi_{rf} = 90 - \arctg \frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}{2\zeta} = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} \quad (5.42)$$

Релацијата (5.42) ја претставува саканата зависност помеѓу факторот на релативно придушување и резервата на фаза на еден затворен систем од втор ред без конечни нули, каков што е системот од слика 5.18. Оваа зависност графички е прикажана на

слика 5.24, од каде може да се отчита ϕ_{rf} за секое конкретно ζ . Ако читателот се потсети дека резонантен врв постои само за $0 < \zeta < 0.707$, што непосредно следува од (5.31), тогаш врз основа на слика 5.24 може да се заклучи дека фреквенцискиот одзив на набљудуваниот затворен систем нема да поседува резонантен врв ако неговата резерва на фаза биде поголема или еднаква на приближно $65.5^\circ (\zeta \geq 0.707)$. Линеарната апроксимација на кривата $\phi_{rf} = f(\zeta)$ е дадена со изразот:

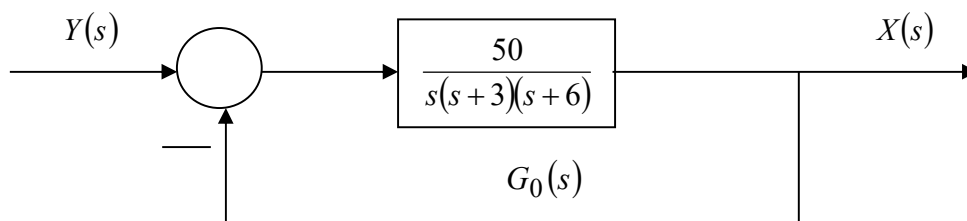
$$\zeta = 0.01\phi_{rf}, \quad \zeta \leq 0.7 \quad (5.43)$$

и таа е задоволително точна за $\zeta \leq 0.7$.



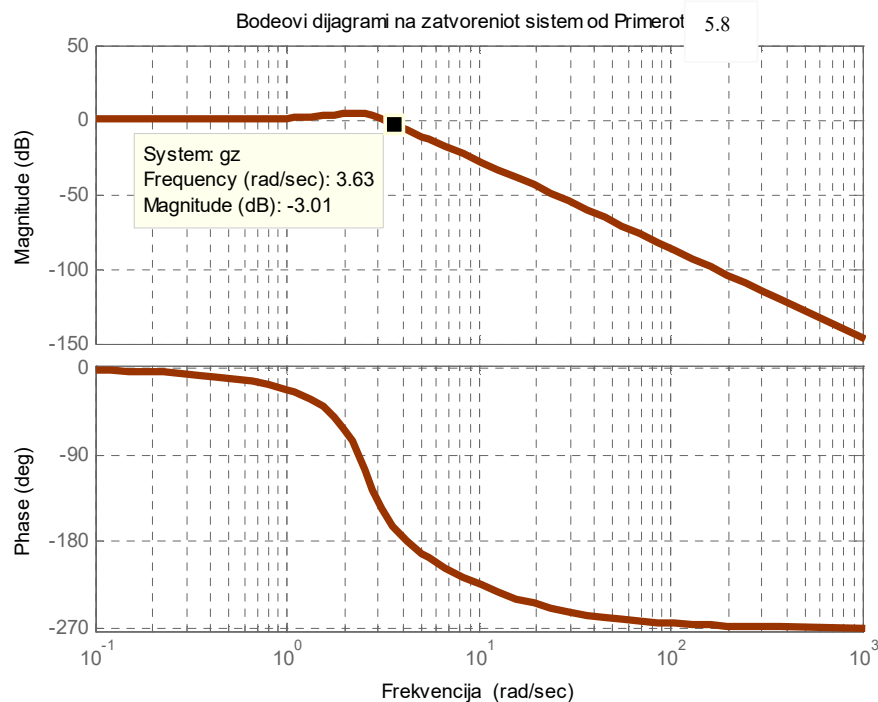
Слика 5.24. Графички приказ на зависноста на резервата на фаза ϕ_{rf} од факторот на релативно придушување ζ на затворениот систем (5.28)

Пример 5.8. Да се изврши проценка на времето на смирување и времето на максималниот прескок на отскочниот одзив на затворениот систем од слика 5.25.



Слика 5.25. Илустрација кон примерот 5.8

Решение: Бодевите дијаграми на системот од слика 5.25 се прикажани на слика 5.26, од каде се гледа дека пропусниот опсег на системот е $\omega_0 \approx 3.7 \frac{rad}{sec}$.

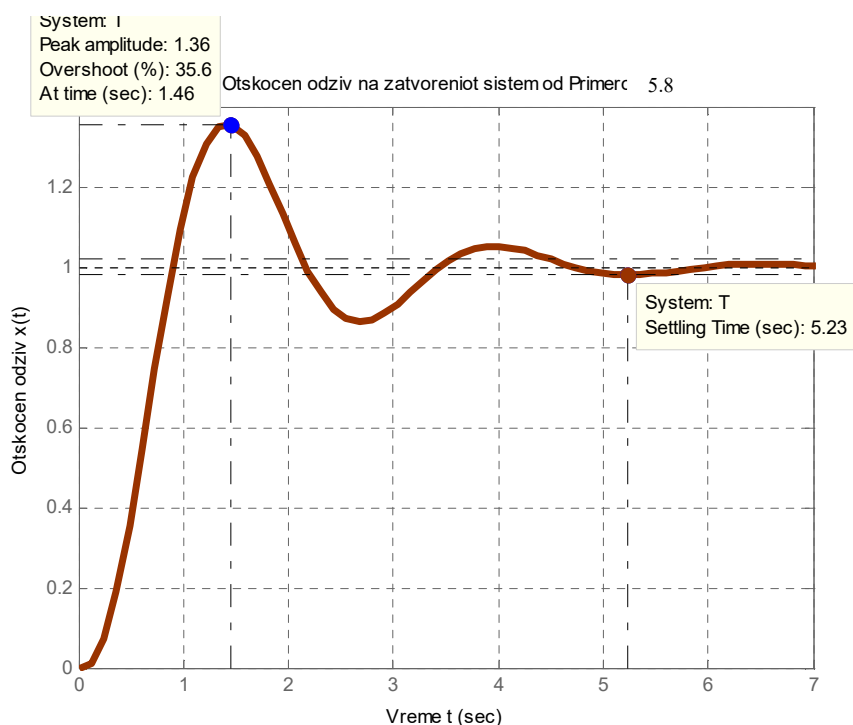


Слика 5.26. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на затворениот систем од слика 5.25 добиени со помош на програмскиот пакет МАТЛАБ

Од друга страна, преносната функција на затворениот систем е:

$$G(s) = \frac{50}{s^3 + 9s^2 + 18s + 50} = \frac{50}{(s + 7.488)(s^2 + 1.512s + 6.677)} \quad (5.44)$$

па природната фреквенција на неговиот доминантен пар полови изнесува $\omega_n \approx 2.58 \frac{rad}{sec}$. Со воведување на овие вредности во (5.34) и решавање по ζ , за факторот на релативно придушување на затворениот систем се добива $\zeta \approx 0.328$. Конечно, од графиконите на слика 5.22 и слика 5.23 се отчитуваат саканите вредности за времето на смирување и времето на максимален прескок на отскочниот одзив на набљудуваниот затворен систем, $T_s \approx 4.73 sec$ и $T_m \approx 1.3 sec$. Овие апроксимативни вредности можат да се споредат со реалните вредности кои се отчитуваат од графиконот на слика 5.27. Разликата се должи на фактот дека набљудуваниот систем е од трет ред, а направените пресметки се однесуваат на неговата апроксимација од втор ред.



Слика 5.27. Графички приказ на отскачниот одзив на затворениот систем од примерот 5.8 □

Врз основа на Бодеовиот дијаграм на слабење можат да се определат и редот на астатизмот на соодветниот отворен систем за даден затворен систем како на слика 5.18, како и неговите константи на грешка: K_p , K_v и K_a . Така, ако соодветниот отворен систем има астатизам од нулти ред, неговата преносна функција може да се претстави во следниот факторизиран облик:

$$G_0(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (5.45)$$

каде што $-z_i (i = 1, 2, \dots, m)$ се неговите нули, а $-p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ се неговите полови. Фреквенциската преносна функција на овој систем е дадена со изразот:

$$G_0(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega + z_i)}{\prod_{i=1}^n (j\omega + p_i)} \quad (5.46)$$

па, оттука, за нејзиниот модул се добива:

$$|G_0(j\omega)| = K \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{\omega^2 + z_i^2}}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\omega^2 + p_i^2}} \quad (5.47)$$

или во dB :

$$20 \log_{10} |G_0(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(K \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{\omega^2 + z_i^2}}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\omega^2 + p_i^2}} \right) \quad (5.48)$$

За многу мали вредности на ω , $\omega \ll 1$, изразот (5.47) станува:

$$|G_0(j\omega)| = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i}, \omega \ll 1 \quad (5.49)$$

односно:

$$20 \log_{10} |G_0(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i} \right), \omega \ll 1 \quad (5.50)$$

Тоа значи дека при многу ниски фреквенции, Бодеовиот дијаграм на слабеење на систем со нулти астатизам е константен, односно е претставен со гранка паралелна со апсисната оска. Од друга страна, со малку сметање може да се заклучи дека константата на положба на овој систем изнесува:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i} \quad (5.51)$$

па, следствено:

$$20 \log_{10} |G_0(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i} \right) = 20 \log_{10} (K_p), \omega \ll 1 \quad (5.52)$$

Со други зборови, вредноста на Бодеовиот дијаграм на слабеење на отворениот систем со астатизам од нулти ред при многу ниски фреквенции одговара на константата на положба K_p изразена во dB .

Кога отворениот систем има астатизам од прв ред, неговата преносна функција ќе гласи:

$$G_0(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (5.53)$$

а фреквенциската преносна функција ќе има облик:

$$G_0(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega + z_i)}{j\omega \prod_{i=1}^n (j\omega + p_i)} \quad (5.54)$$

Оттука, нејзиниот модул ќе биде:

$$|G_0(j\omega)| = K \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{\omega^2 + z_i^2}}{\omega \prod_{i=1}^n \sqrt{\omega^2 + p_i^2}} \quad (5.55)$$

или во dB :

$$20 \log_{10} |G_0(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(K \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{\omega^2 + z_i^2}}{\omega \prod_{i=1}^n \sqrt{\omega^2 + p_i^2}} \right) \quad (5.56)$$

За многу мали вредности на ω , $\omega \ll 1$, изразот (5.55) станува:

$$|G_0(j\omega)| = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\omega \prod_{i=1}^n p_i}, \omega \ll 1 \quad (5.57)$$

односно:

$$20 \log_{10} |G_0(j\omega)| = 20 \log_{10} \left(K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\omega \prod_{i=1}^n p_i} \right), \omega \ll 1 \quad (5.58)$$

Тоа значи дека при многу ниски фреквенции, Бодеовиот дијаграм на слабеење на систем со астатизам од прв ред е претставен со гранка која има наклон од $-20dB/dec$ во однос на апсцисната оска. Од друга страна, (5.57) може да се смета за модул на следната преносна функција:

$$W(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{s \prod_{i=1}^n p_i} \quad (5.59)$$

чиј Бодеов дијаграм на слабеење е права со наклон од $-20dB/dec$, која ја сече апцисната оска во точката $\omega_p = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i}$. Лесно може да се пресмета дека брзинската константа на отворениот систем со астатизам од прв ред е еднаква со оваа вредност:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s \prod_{i=1}^n (s + p_i)} = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i} \quad (5.60)$$

Следствено, брзинската константа на еден отворен систем со астатизам од прв ред лесно може да се отчита од неговиот Бодеов дијаграм на слабеење, ако почетната гранка на дијаграмот се продолжи до пресекот со апцисната оска и се одреди соодветната пресечна фреквенција.

На крајот се набљудува отворен систем со астатизам од втор ред, чија преносна функција има облик:

$$G_0(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^2 \prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (5.61)$$

Соодветната фреквенциска преносна функција гласи:

$$G_0(j\omega) = K \frac{\prod_{i=1}^m (j\omega + z_i)}{\omega^2 \prod_{i=1}^n (j\omega + p_i)} \quad (5.62)$$

со модул:

$$|G_0(j\omega)| = K \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{\omega^2 + z_i^2}}{\omega^2 \prod_{i=1}^n \sqrt{\omega^2 + p_i^2}} \quad (5.63)$$

или во dB :

$$20\log_{10}|G_0(j\omega)| = 20\log_{10}\left(K \frac{\prod_{i=1}^m \sqrt{\omega^2 + z_i^2}}{\omega^2 \prod_{i=1}^n \sqrt{\omega^2 + p_i^2}}\right) \quad (5.64)$$

За многу мали вредности на ω , $\omega \ll 1$, изразот (5.63) станува:

$$|G_0(j\omega)| = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\omega^2 \prod_{i=1}^n p_i}, \omega \ll 1 \quad (5.65)$$

односно:

$$20\log_{10}|G_0(j\omega)| = 20\log_{10}\left(K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\omega^2 \prod_{i=1}^n p_i}\right), \omega \ll 1 \quad (5.66)$$

што значи дека при многу ниски фреквенции, Бодеоовиот дијаграм на слабеење на систем со астатизам од втор ред е претставен со гранка која има наклон од $-40dB/dec$ во однос на апсисната оска. Од друга страна, (5.63) може да се смета за модул на следната преносна функција:

$$W(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{s^2 \prod_{i=1}^n p_i} \quad (5.67)$$

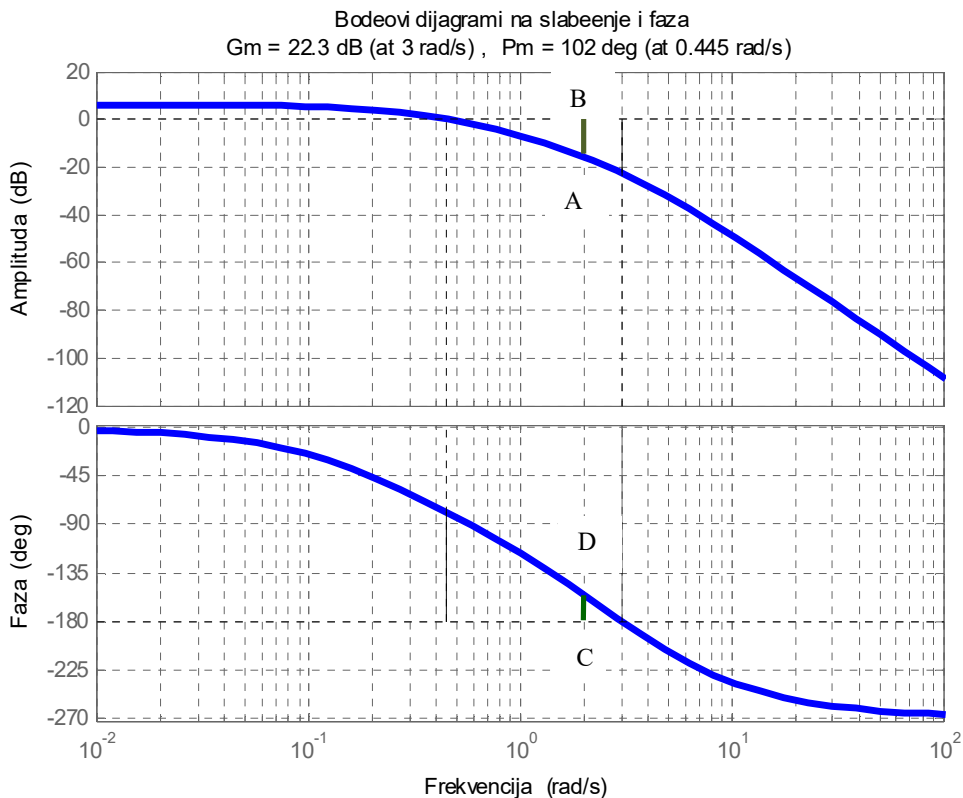
чиј Бодеоов дијаграм на слабеење е права со наклон од $-40dB/dec$, која ја сече апсисната оска во точката $\omega_p = \sqrt{K \prod_{i=1}^m z_i} / \sqrt{\prod_{i=1}^n p_i}$. Лесно може да се пресмета дека константата на забрзување на отворениот систем со астатизам од втор ред е еднаква со квадратот од оваа вредност:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^2 \prod_{i=1}^n (s + p_i)} = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i} \quad (5.68)$$

Следствено, константата на забрзување на еден отворен систем со астатизам од втор ред лесно може да се отчита од неговиот Бодеоов дијаграм на слабеење, ако почетната гранка на дијаграмот се продолжи до пресекот со апсисната оска и се одреди соодветната пресечна фреквенција $\omega_p = \sqrt{K_a}$.

5.2. БОДЕОВА СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА НА КОЕФИЦИЕНТОТ НА ЗАСИЛУВАЊЕ НА ОТВОРЕНИОТ СИСТЕМ

Понекогаш поставените проектни барања можат да се задоволат само преку нагдување на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем. Така, ако читателот се потсети на зависноста помеѓу факторот на релативно придушување ζ и резервата на фаза φ_{rf} , како и на зависноста помеѓу факторот на релативно придушување ζ и максималниот прескок $M\%$ кај системот од слика 5.18, лесно може да заклучи дека преку резервата на фаза може да се влијае врз максималниот прескок на отскочниот одсив, а со тоа и врз преодниот режим на набљудуваниот затворен систем од слика 5.18. Основната идеја е илустрирана на слика 5.28, од каде се гледа дека за да се постигне саканата резерва на фаза $\varphi_{rf} = \overline{CD}$, со која е дефиниран зададениот преоден режим на проектираниот затворен САУ, потребно е да се подигне неговиот дијаграм на слабење за вредност \overline{AB} . Тоа се постига со нагдување на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем.



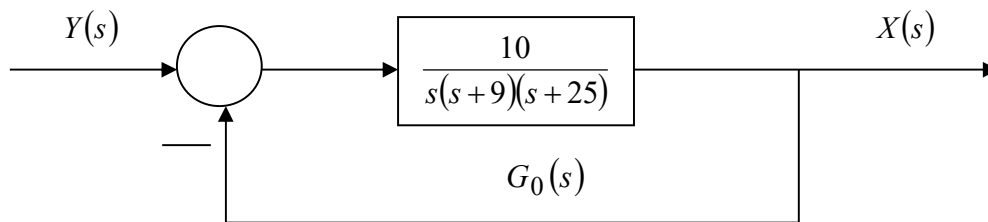
Слика 5.28. Нагдување на преодниот режим на системот од слика 5.18 преку коефициентот на засилување на отворениот систем

Постапката на синтеза се состои од следните чекори:

1. Исцртување на Бодевите дијаграми на некомпензираниот отворен систем за соодветна вредност на коефициентот на засилување K (најчесто се усвојува $K=1$, но не мора).
2. Определување на саканата резерва на фаза $\varphi_{rf} = \overline{CD}$ врз основа на релацијата (5.43).
3. Определување на фреквенцијата $\tilde{\omega}_1$ при која се постига саканата резерва на фаза која треба да ја претставува новата пресечна фреквенција на засилување на отворениот систем, односно пресечната фреквенција на засилување на компензираниот отворен систем.
4. Определување на слабеењето на некомпензираниот отворен систем \overline{AB} при фреквенцијата $\tilde{\omega}_1$.
5. Бидејќи дијаграмот на слабеење на компензираниот отворен систем мора да минува низ апцисната оска при фреквенцијата одредена во чекорот 3, дијаграмот на слабеење на некомпензираниот отворен систем треба да се помести за вредноста определена во претходниот чекор, така што ќе го исполни овој услов.
6. Пресметување на коефициентот на засилување на компензираниот отворен систем \tilde{K} врз основа на вредноста на слабеењето \overline{AB} :

$$\overline{AB} = 20 \log_{10} \tilde{K} \quad (5.69)$$

Пример 5.9. Даден е затворениот систем од слика 5.29. Да се определи вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем, за која затворениот систем ќе има максимален прескок во отскочниот одсвив од 9.5 %.



Слика 5.29. Илустрација кон примерот 5.9

Решение: Бодевите дијаграми на соодветниот отворен систем за $K=10$ се прикажани на сликата 5.30. На максимален дозволен прескок од 9.5 % одговара фактор на релативно придрушување $\zeta = 0.592$, па врз основа на (5.43) се заклучува дека компензираниот затворен систем треба да има резерва на фаза $\tilde{\varphi}_{rf} = 59.2^\circ \approx 59^\circ$. Од Бодевите дијаграми на некомпензираниот отворен систем може да се отчита дека на

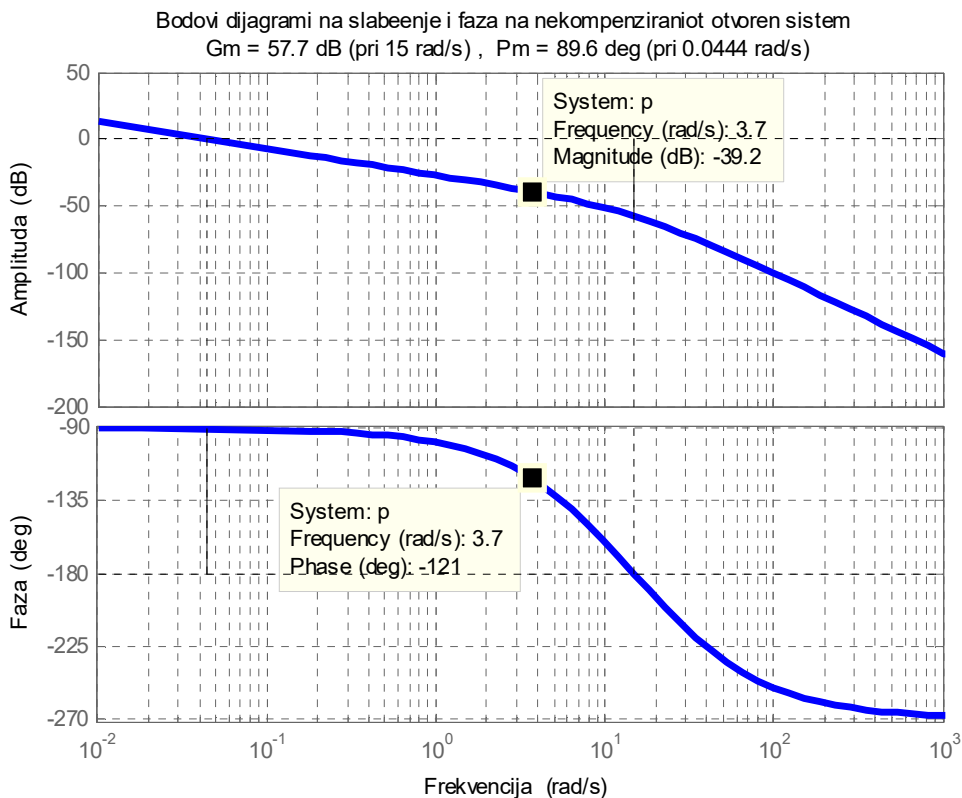
саканата резерва на фаза $\tilde{\varphi}_{rf} = 59^{\circ}$ одговара фреквенција $\tilde{\omega}_1 = 3.7 \frac{rad}{sec}$, која ќе биде

нова пресечна фреквенција на засилување. Засилувањето на некомпензираниот отворен систем при оваа фреквенција изнесува $-39.2dB$, што значи дека Бодеов дијаграм на слабеење на некомпензираниот отворен систем треба да се подигне за $39.2dB = 20\log_{10} \lambda$ за да се принуди да минува низ 0 при фреквенција $\tilde{\omega}_1 = 3.7 \frac{rad}{sec}$.

Оттука, првобитната вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем треба да се зголеми за $\lambda = 92$ пати, или новата вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем треба да изнесува $\tilde{K} = 920$. Преносната функција на отворениот систем со компензирано засилување е:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{920}{s(s+9)(s+25)} \quad (5.70)$$

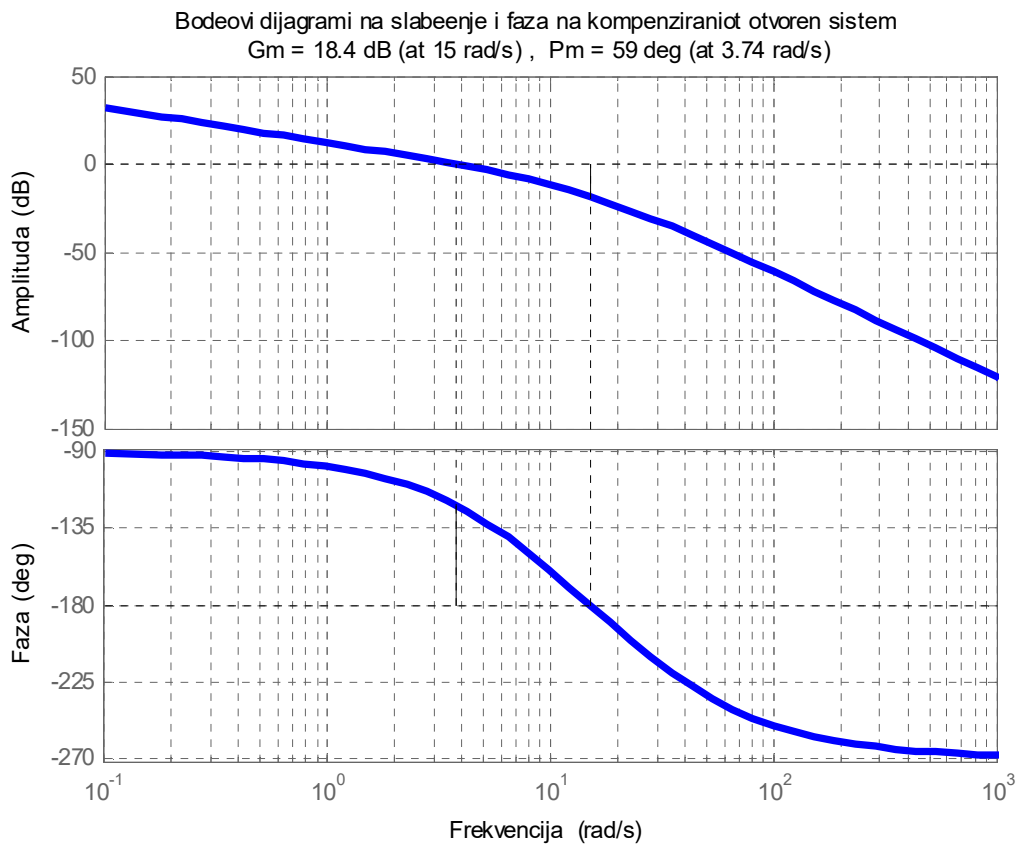
а неговите Бодеови дијаграми и отскочниот одзив се прикажани на слика 5.31 и слика 5.32, соодветно. Синтезата може да се прикаже со долната табела 5.2.



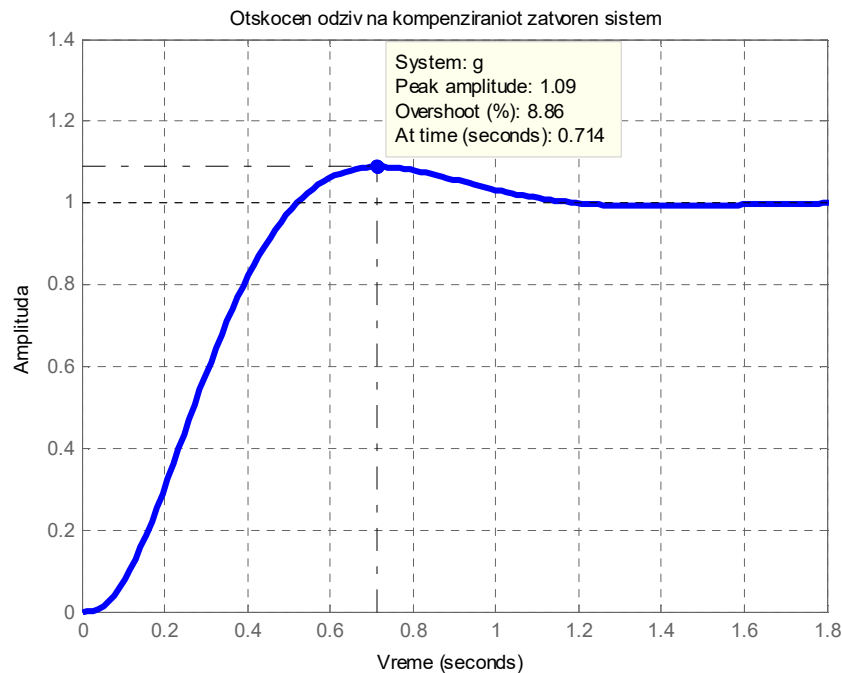
Слика 5.30. Бодеови дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем од слика 5.28 добиени со помош на програмскиот пакет MATLAB

Табела 5.2.

Параметар	Проектни барања	Остварени вредности
Брзинска константа K_v	/	4.0889
Резерва на фаза φ_{rf}	59.2^0	59^0
Пресечна фреквенција на засилување ω_1	/	$3.74 \frac{rad}{sec}$
Максимален прескок $M\%$	9.5 %	8.86 %
Време на максимален прескок T_m	/	0.714s



Слика 5.31. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на компензираниот отворен систем од слика 5.29 добиени со помош на програмскиот пакет MATLAB



Слика 5.32. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем од примерот 5.9 □

Пример 5.10. Даден е затворен дискретен систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{0.01(z - 0.5)^2}{(z - 1)(z - 0.4)(z - 0.8)} \quad (5.71)$$

Затворениот систем треба да ги задоволува следните проектни барања:

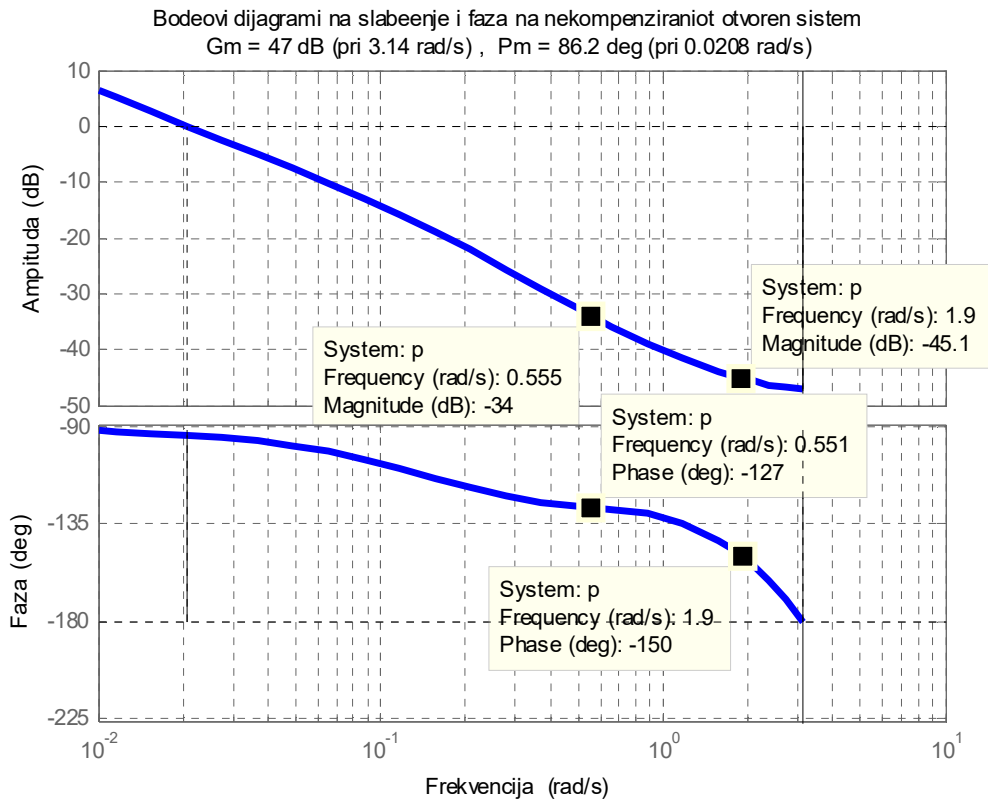
1. $\varphi_{rf} \geq 30^\circ$
2. $10dB < d < 15dB$

Прв чекор е да се провери поведението на некомпензираниот затворен систем и истото да се спореди со неговото сакано поведение, дефинирано со зададените проектни барања. За таа цел се цртаат Бодеовите дијаграми на некомпензираниот отворен систем $G_0(z)$, чија фреквенциска преносна функција $G_0(e^{j\omega T})$ е дадена со изразот:

$$G_0(e^{j\omega T}) = \frac{0.01(e^{j\omega T} - 0.5)^2}{(e^{j\omega T} - 1)(e^{j\omega T} - 0.4)(e^{j\omega T} - 0.8)} \quad (5.72)$$

Овие дијаграми се прикажани на слика 5.33, од каде се гледа дека резервата на засилување на некомпензираниот затворен дискретен систем е приближно $47dB$ при фреквенција $\omega_\pi = 3.14 \text{sec}^{-1}$, додека резервата на фаза е приближно 86.2° , при

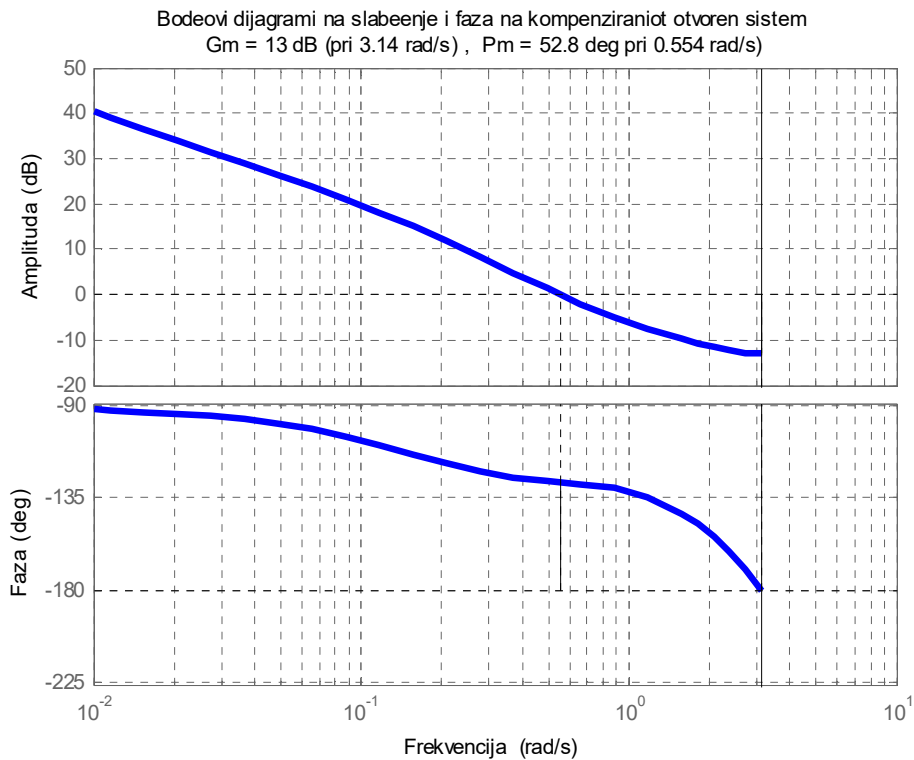
фреквенција $\omega_1 = 0.02 \text{sec}^{-1}$. Од слика 5.33 исто така може да се забележи дека пресечната фреквенција на засилување може да се зголеми сè до вредност $\tilde{\omega}_1 = 1.9 \text{sec}^{-1}$, кога резервата на фаза ќе изнесува $\varphi_{rf} = 30^\circ$. Понатамошното зголемување на пресечната фреквенција на засилување не е прифатливо со оглед на првиот проектен услов.



Слика 5.33. Бодеови дијаграми на некомпензираниот отворен систем од пример 5.10

Зголемувањето на пресечната фреквенција на засилување се постига со зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем, при што Бодеовиот дијаграм на слабеење се подига нагоре и следствено, пресечната фреквенција на засилување се поместува надесно. За нова пресечна фреквенција на засилување би можеле да ја одбереме фреквенцијата $\tilde{\omega}_1 = 1.9 \text{sec}^{-1}$ при која резервата на фаза на набљудуваниот систем ќе ја има граничната вредност $\varphi_{rf} = 30^\circ$. Оваа фреквенција се постига со зголемување на засилувањето на отворениот систем за $\approx 45 \text{dB}$, што може да се отчита од Бодеовиот дијаграм на слабеење на некомпензираниот отворен систем, односно со зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем за 182 пати. Меѓутоа, ова зголемување на засилувањето на отворениот систем има за резултат намалување на резервата на засилување на затворениот систем од 47dB на

$47dB - 45dB = 2dB$. Ваквата вредност за резервата на засилување е многу мала и неприфатлива, со оглед на вториот проектен услов. Затоа, коефициентот на засилување на отворениот систем ќе биде зголемен само за $34dB$. Тогаш резервата на засилување на затворениот систем ќе изнесува $d = 47dB - 34dB = 13dB$, резервата на фаза ќе биде $\varphi_{rf} = 52.8^\circ$, а пресечната фреквенција на засилување ќе биде $\tilde{\omega}_1 = 0.554 \text{sec}^{-1}$, што може да се отчита од Бодеовите дијаграми на компензираниот систем, слика 5.34. Очигледно, вака проектираниот затворен систем ги задоволува поставените проектни барања, што значи дека синтезата е постигната само со компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем. На ова место треба да се напомене дека промената на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем не влијае врз пресечната фреквенција на фаза.



Слика 5.34. Бодеови дијаграми на компензираниот отворен систем од пример 5.10 □

5.3. БОДЕОВА СИНТЕЗА СО ПРИМЕНА НА ИНТЕГРАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

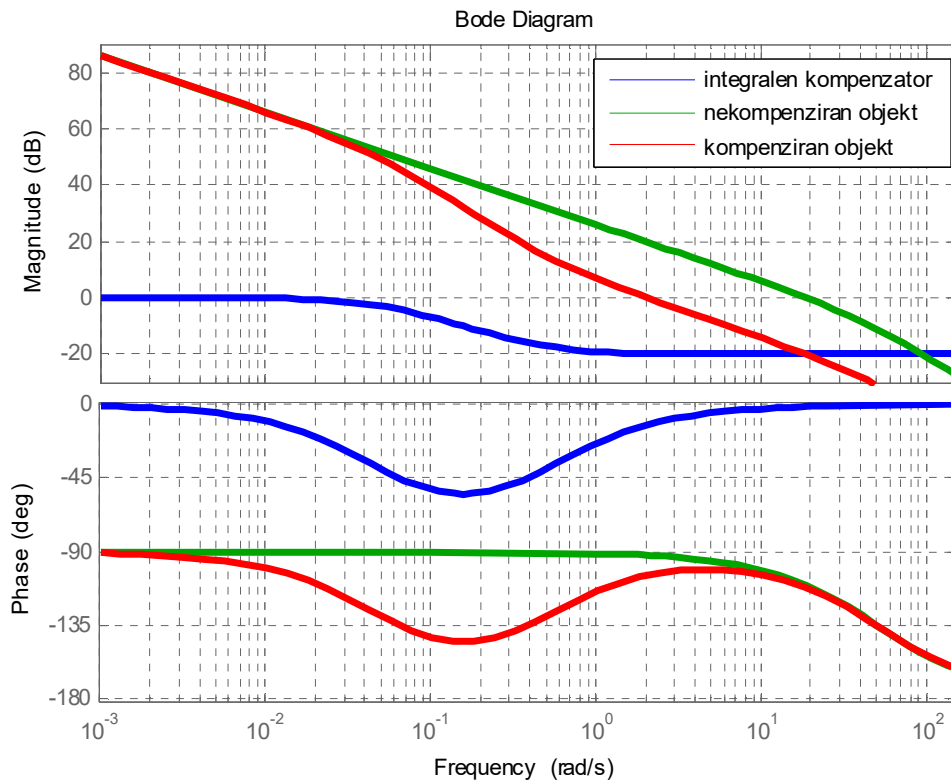
Кај најголемиот дел системи за автоматско управување, од примарен интерес е точноста на работа на системот во стационарен режим. Оваа точност треба да биде што е можно поголема, што значи дека системот треба да има што е можно помала стационарна грешка. Второ барање е преодниот одзив на системот да биде во одредени граници. Точноста на работата на еден затворен САУ со единична негативна повратна

врска во стационарен режим може да се зголеми со зголемување на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем. Меѓутоа, по компензацијата на засилувањето на отворениот систем, доаѓа до промена на преодниот одзив на затворениот систем, кој може да стане и сосема неприфатлив; вака компензираниот затворен систем може да биде дури и нестабилен. Затоа, по компензацијата на засилувањето на отворениот систем, најчесто е потребно во системот да се внесе и соодветен интегрален компензатор, кој ќе обезбеди стабилизирачко дејство. Интегралниот компензатор се применува во постапката на синтеза со интегрална компензација не заради негативното фазно поместување што го внесува, туку заради неговото слабеење при високите фреквенции. Затоа нулата и полот од интегралниот компензатор се одбираат да бидат по величина многу помали од најмалиот пол на некомпензираниот отворен систем, што значи дека фазното поместување што го внесува интегралниот компензатор при пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем ќе биде занемарливо. Инаку, интегралниот компензатор генерално ја намалува пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем во однос на некомпензираниот, што при пониските пресечни фреквенции обично има за резултат зголемување на резервата на фаза на системот. Влијанието на интегралниот компензатор е прикажано на слика 5.35, од каде се гледа дека интегралниот компензатор не го менува засилувањето на системот при ниски фреквенции, додека го редуцира засилувањето при високите фреквенции. Како последица, се зголемува резервата на фаза на компензираниот систем и настапува споменатото стабилизирачко дејство на интегралниот компензатор.

Постапката на Бодеова фреквенциска синтеза преку компензација со интегрален компензатор се состои од следните чекори:

1. Компензација на засилувањето на отворениот систем за дадениот затворен систем со цел да се обезбеди саканото поведение на системот во стационарен режим.
2. Исцртување на Бодеоите дијаграми на отворениот систем со компензирано засилување.
3. Пресметување на резервата на фаза на затворениот систем по извршената компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем K .
4. Определување на новата пресечна фреквенција на засилувањето $\tilde{\omega}_1$, при која Бодеоиот дијаграм на отворениот систем со компензирано засилување ја сече хоризонталната оска, односно неговото слабеење изнесува 0 dB . Оваа фреквенција треба да биде еднаква со фреквенцијата при која компензираниот затворен систем ја има саканата резерва на фаза зголемена за $5^0 \div 12^0$.
5. Избор на нулата на интегралниот компензатор една декада под новата пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1$.

6. Определување на факторот β , кој го дефинира односот помеѓу величините на нулата и полот на интегралниот компензатор, од условот слабењето што го внесува компензаторот при фреквенцијата $\tilde{\omega}_1$ да биде $-20 \log \beta$.
7. Определување на полот од интегралниот компензатор како $a = b/\beta$.
8. Проверка на успешноста на синтезата.



Слика 5.35. Компензација со интегрален компензатор

Пример 5.11. Се набљудува затворениот континуален систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$P(s) = \frac{4K}{s(s+1)} \quad (5.73)$$

Треба да се изврши компензација на затворениот систем, така што факторот на релативно придушување на доминантниот пар конјугирано-комплексни полови од компензираниот систем да биде $\zeta = 0.35$, а неговата брзинска константа да изнесува $K_v \geq 20$.

Решение: Некомпензираниот затворен систем идеално следи отскочен влез, додека линеарно растечки влез следи со одредена грешка, пропорционална со неговата брзинска константа:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{4K}{s(s+1)} \right] = 4K \quad (5.74)$$

За да се обезбеди $K_v \geq 20$, потребно е коефициентот на засилување на отворениот систем да изнесува најмалку 5:

$$K_v = 4K \geq 20 \Rightarrow K \geq 5 \quad (5.75)$$

Ако за K усвоиме $K = 5$, преносната функција на отворениот систем ќе гласи:

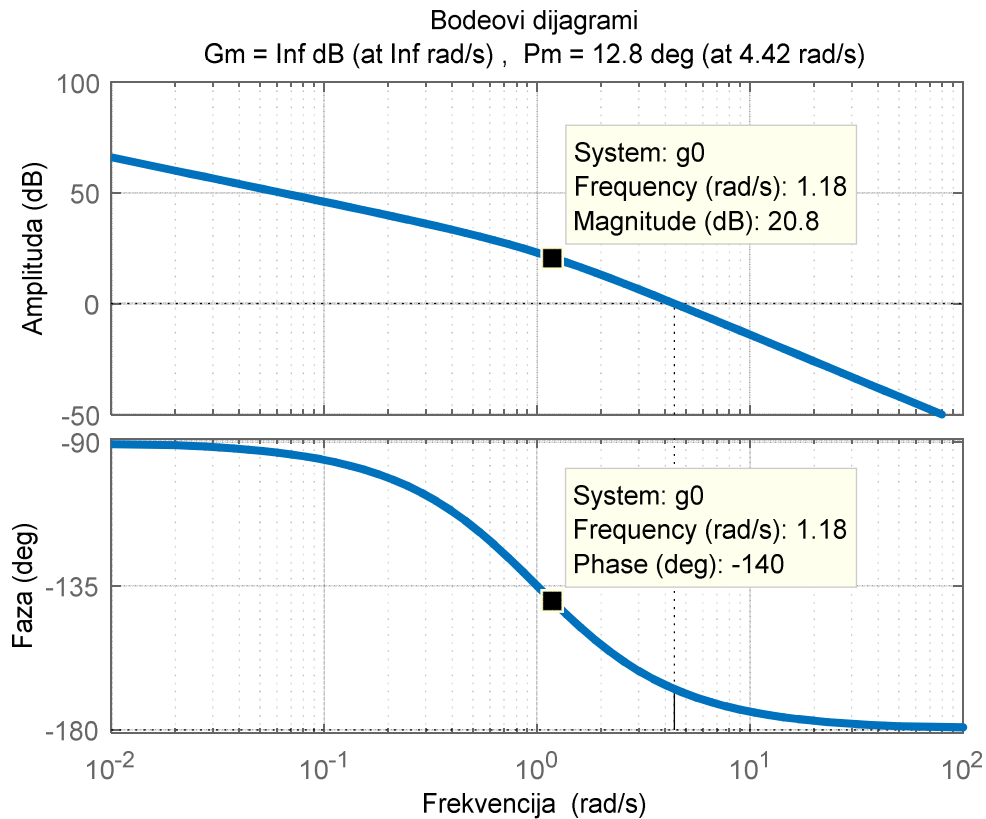
$$G_0(s) = \frac{20}{s(s+1)} \quad (5.76)$$

Од друга страна, факторот на релативно придушување $\zeta = 0.35$ значи дека компензираниот систем треба да има резерва на фаза од 35° . На слика 5.36 се прикажани Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.76). Оттука се гледа дека некомпензираниот систем има резерва на фаза од 12.8° , што не ги задоволува проектните барања, па затоа се врши компензација со интегрален компензатор.

Врз основа на Бодевите дијаграм на фаза на отворениот систем (5.76), се определува новата пресечна фреквенција на засилување на компензираниот систем. Тоа е онаа фреквенција при која дијаграмот на фаза од слика 5.36 се наоѓа $35^\circ + 5^\circ$ над хоризонталата -180° и изнесува приближно $\tilde{\omega}_1 = 1.18 \frac{rad}{sec}$. (Аголот од 5° го зема

предвид фазното поместување на интегралниот компензатор, кое не е големо, бидејќи нулата и полот на компензаторот конструктивно се бираат да бидат многу помали од најмалиот пол на некомпензираниот систем). Како што се гледа од слика 5.36, отворениот систем при оваа фреквенција има слабеење од околу $20.8dB$, па, слабеењето што го внесува интегралниот компензатор при истата фреквенција треба да изнесува $-20.8dB$, за компензираниот отворен систем да има слабеење од $0dB$ при фреквенција $\tilde{\omega}_1 = 1.18 \frac{rad}{sec}$. Ако преносната функција на интегралниот компензатор се претстави во следниот погоден облик:

$$R_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (5.77)$$



Слика 5.36. Бодеои дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.76)

при што коефициентот β се определува од условот слабеењето што го внесува компензаторот при фреквенцијата $\tilde{\omega}_1$ да биде $20.8dB$:

$$20 \log \beta = 20.8dB \Rightarrow \beta = 11.22 \approx 11 \quad (5.78)$$

тогаш нулата и полот на интегралниот компензатор ќе бидат:

$$b = \frac{\tilde{\omega}_1}{10} = 0.118, \quad a = \frac{b}{11} = 0.0107 \quad (5.79)$$

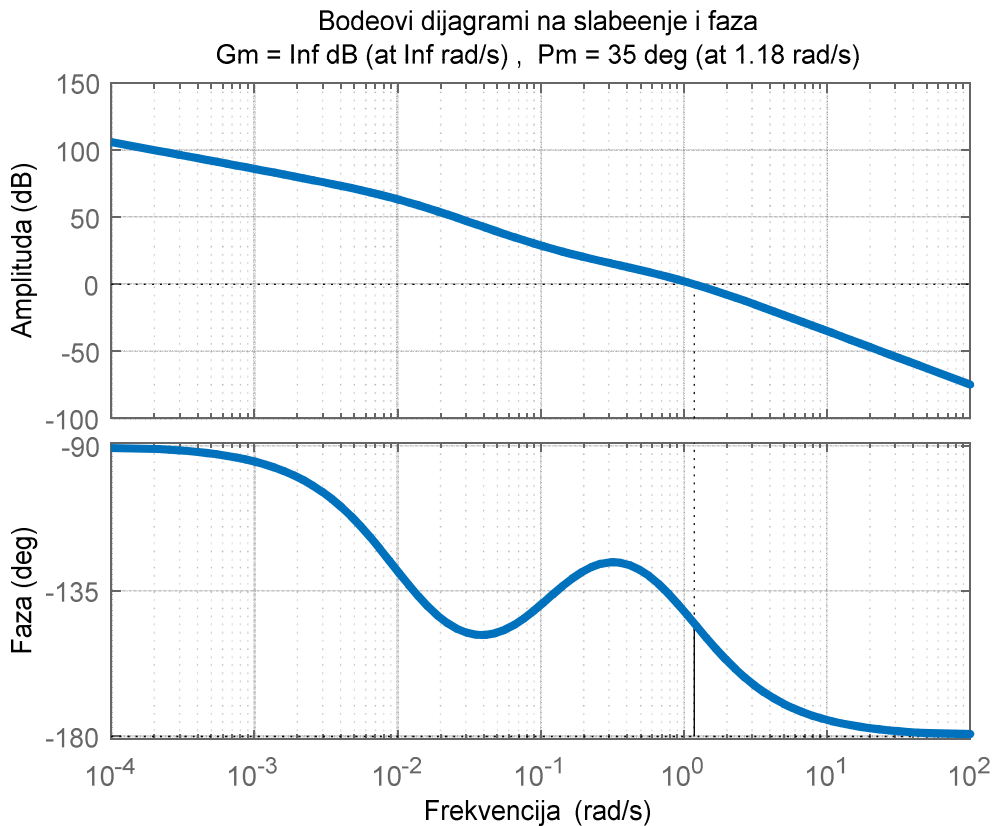
па преносната функција на компензираниот отворен систем за проектираниот затворен систем ќе има облик:

$$G_{02}(s) = G_i(s)P(s) = \frac{1.824(s+0.118)}{(s+0.0107)s(s+1)} \quad (5.80)$$

а самиот компензиран систем ќе биде опишан со преносната функција:

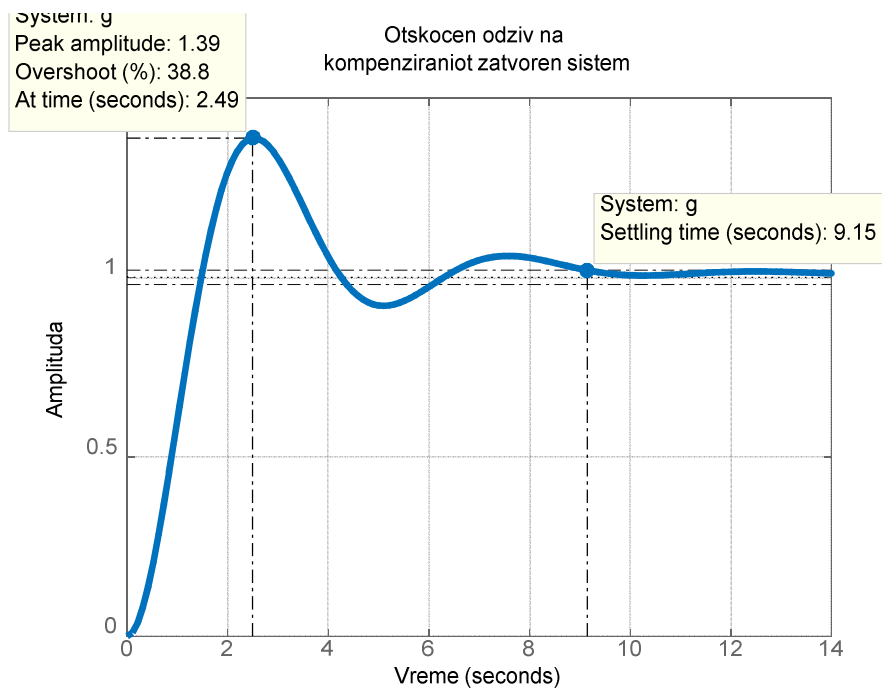
$$G(s) = \frac{G_{02}(s)}{1 + G_{02}(s)} = \frac{1.824(s + 0.118)}{(s + 0.1248)(s^2 + 0.886s + 1.724)} \quad (5.81)$$

На слика 5.37 се прикажани Бодеовите дијаграми на компензираниот отворен систем, додека на слика 5.38 е прикажан отскочниот одзив на компензираниот затворен систем (5.81).

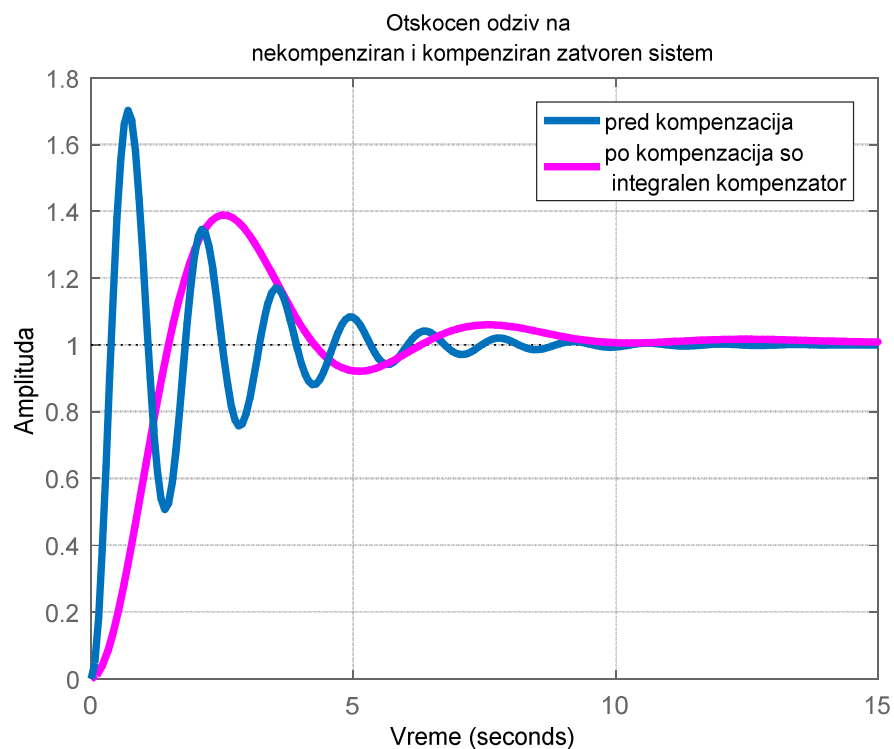


Слика 5.37. Бодеови дијаграми на компензираниот отворен систем (5.80)

Ако отскочниот одзив на компензираниот затворен систем се спореди со отскочниот одзив на некомпензираниот затворен систем, како што е тоа сторено на слика 5.39, може да се забележи дека тој има многу помал максимален прескок, кој настанува при $T_m = 2.5 \text{ sec}$. и изнесува приближно 39 %, но и многу помала брзина на одзив. Воведувањето на интегрален компензатор во затворениот систем има за резултат намалување на пропусниот опсег на компензираниот систем, а со тоа и на неговата брзина на одзив. Во конкретниот случај пропусниот опсег на затворениот систем по компензацијата е намален од $\omega_0 = 6.9 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ на $\omega_0 = 1.9 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.



Слика 5.38. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем (5.81)



Слика 5.39. Споредба на отскочниот одзив на набљудуваниот затворен систем од примерот 5.11 пред и по компензацијата со интегрален компензатор □

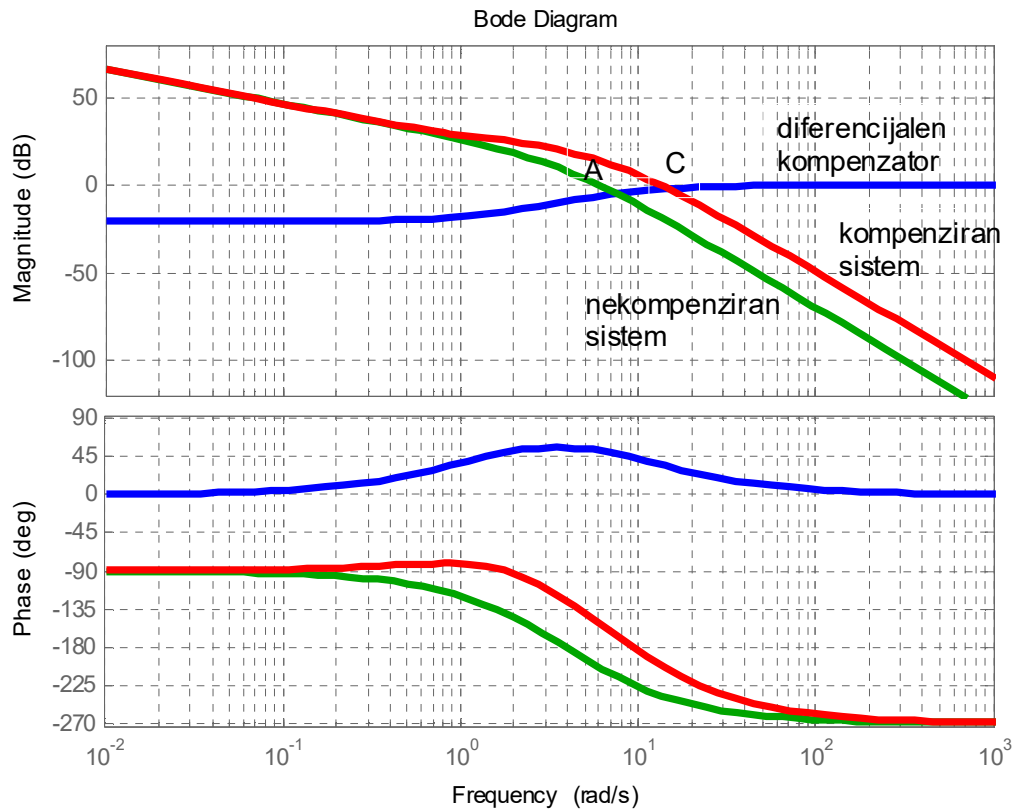
5.4. БОДЕОВА СИНТЕЗА СО ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

При синтезата со интегрален компензатор, целта е да се нагоди стационарниот режим односно поведението на проектираниот затворен систем во стационарен режим, така што ќе се намали неговата стационарна грешка, односно ќе се зголеми точноста на неговата работа во стационарен режим. Притоа, проектираниот интегрален компензатор треба да има незначително влијание врз дијаграмот на фаза на проектираниот затворен систем, со цел да не се промени значително неговиот преоден режим. При синтезата со диференцијален компензатор, напротив, се настојува да се промени дијаграмот на фаза на проектираниот затворен систем, така што ќе се зголеми неговата резерва на фаза, што има за резултат намалување на максималниот прескок во отскочниот одсив на проектираниот затворен систем и зголемување на неговата брзина на одсив, преку зголемување на пресечната фреквенција на засилување. Проектните барања во врска со резервата на фаза (и алтернативно резервата на засилување) се однесуваат на релативната стабилност на проектираниот систем. Така, во случајот кога отворениот систем е стабилен, доволно е резервата на фаза на проектираниот затворен систем да биде позитивна, за системот да биде стабилен. Меѓутоа, премногу мала резерва на фаза, иако позитивна, значи дека резервата на стабилност на затворениот систем е мала, што од своја страна пак значи дека мали промени во параметрите на системот можат да доведат до негова нестабилност. Од друга страна, премногу голема резерва на стабилност значи голема инертност на системот и како таква секогаш не е пожелна. На пример, додека големата резерва на стабилност е пожелна кај патничките авиони, зашто значи сигурност и безбедност на патниците при летот, таа воопшто не е пожелна кај борбените воени авиони, затоа што ја ограничува нивната способност за брзи маневри. Од овие причини, во инженерската пракса е вообичаено резервата на фаза на проектираниот затворен систем да биде во интервалот $[20,60]$.

Концептот на Бодеова фреквенциска синтеза со диференцијален компензатор е прикажан на слика 5.40. Со A е означена пресечната фреквенција на засилување на некомпензираниот систем, а со C пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем. Од дијаграмите на слика 5.40 се гледа дека диференцијалниот компензатор ја зголемува пресечната фреквенција на засилување и го подига дијаграмот на фаза во подрачјето на повисоките фреквенции. Како резултат на тоа во фреквенциското подрачје компензираниот систем има поголема резерва на фаза и поголема пресечна фреквенција на фаза во однос на некомпензираниот систем, додека во временското подрачје отскочниот одсив на компензираниот систем има помал максимален прескок, што е последица од поголемата резерва на фаза, и помало време на појава на максималниот прескок, што е резултат од поголемата пресечна фреквенција на фаза.

Една значајна предност на фреквенциската синтеза со помош на Бодеоите дијаграми е фактот дека таа овозможува најнапред да се изврши синтеза на стационарниот режим, а потоа да се проектира и преодниот режим. Ова тврдење е поткрепено со изгледот на

дијаграмите од слика 5.40, од каде читателот лесно може да уочи дека постапката на синтеза на преодниот режим со диференцијален компензатор воопшто не влијае врз почетниот наклон на дијаграмот на слабеење, кој ја одредува стационарната грешка во затворениот систем.



Слика 5.40. Бодови дијаграми на некомпензираниот отворен систем, диференцијалниот компензатор и компензираниот отворен систем

Бодевата фреквенциска синтеза со примена на диференцијален компензатор се состои од следните чекори:

1. Преведување на зададените проектни барања во однос на саканиот квалитет на преодниот режим, изразени преку соодветните временски показатели на отскочниот одзив - време на смирување, време на пораст, време на максимален прескок и процентуален максимален прескок, во соодветни фреквенциски показатели - широчина на пропусен опсег, резерва на фаза.
2. Проверка дали некомпензираниот затворен систем ги задоволува проектните барања во поглед на величината на соодветните константи на грешка преку Бодевите дијаграми на некомпензираниот отворен систем.

3. Нагодување на коефициентот на засилување K на отворениот систем со цел да се постигне саканата точност на работа на затворениот систем во стационарен режим (саканата величина на стационарната грешка, која се задава преку соодветните вредности на константите на грешка). Ова е можно затоа што диференцијалниот компензатор има занемарливо влијание врз поведението на проектираниот систем при ниски фреквенции.
4. Исцртување на Бодевите дијаграми на отворениот систем за новата компензирана вредност на K и пресметување на резервата на фаза на затворениот систем во кој е извршена компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем.
5. Пресметување на потребното фазно поместување φ_m што треба да го обезбеди диференцијалниот компензатор за да се реализираат проектните барања во поглед на резервата на стабилност на проектираниот затворен систем.
6. Пресметување на вредноста на факторот α , кој го дефинира односот помеѓу величините на полот и нулата на диференцијалниот компензатор.
7. Одредување на новата пресечна фреквенција на засилување на компензираниот систем ω_1 како фреквенција при која системот има слабење од $-10 \log_{10}(\alpha) \text{ dB}$ и при која, едновременно, настапува максималното фазно поместување на диференцијалниот компензатор φ_m .
8. Пресметување на полот и нулата на диференцијалниот компензатор според релациите $a = \omega_m \sqrt{\alpha}$ и $b = \frac{a}{\alpha}$.
9. Зголемување на вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем за фактор α , со цел да се компензира дополнителното слабење што го внесува диференцијалниот компензатор.
10. Проверка на резервата на фаза на затворениот систем по компензацијата со диференцијален компензатор и евентуално повторување на постапката сè додека не се добие задоволително решение.

Пример 5.12. Да се изврши синтеза на затворениот систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем има преносна функција:

$$P(s) = \frac{10}{s(s+9)(s+25)} \quad (5.82)$$

така што компензираниот затворен систем ќе има максимален прескок до 9.5%, брзинска константа $K_v = 50/9$ и време на максимален прескок $T_m \leq 0.5s$.

Решение: 1) На максимален прескок од 9.5% одговара фактор на релативно придушување на доминантниот пар полови $\zeta = 0.59$ и резерва на фаза $\varphi_{rf} = 58.5^\circ$, како и пропушен опсег $\omega_0 = 46.6 \frac{rad}{sec}$ при зададеното време на максимален прескок.

2) Брзинската константа на некомпензираниот систем изнесува:

$$K_v = \frac{10}{9 \cdot 25} < 1 \quad (5.83)$$

и е премногу мала – таа воопшто не го задоволува второто проектно барање.

3) Саканата вредност на брзинската константа се остварува со зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем за λ – пати:

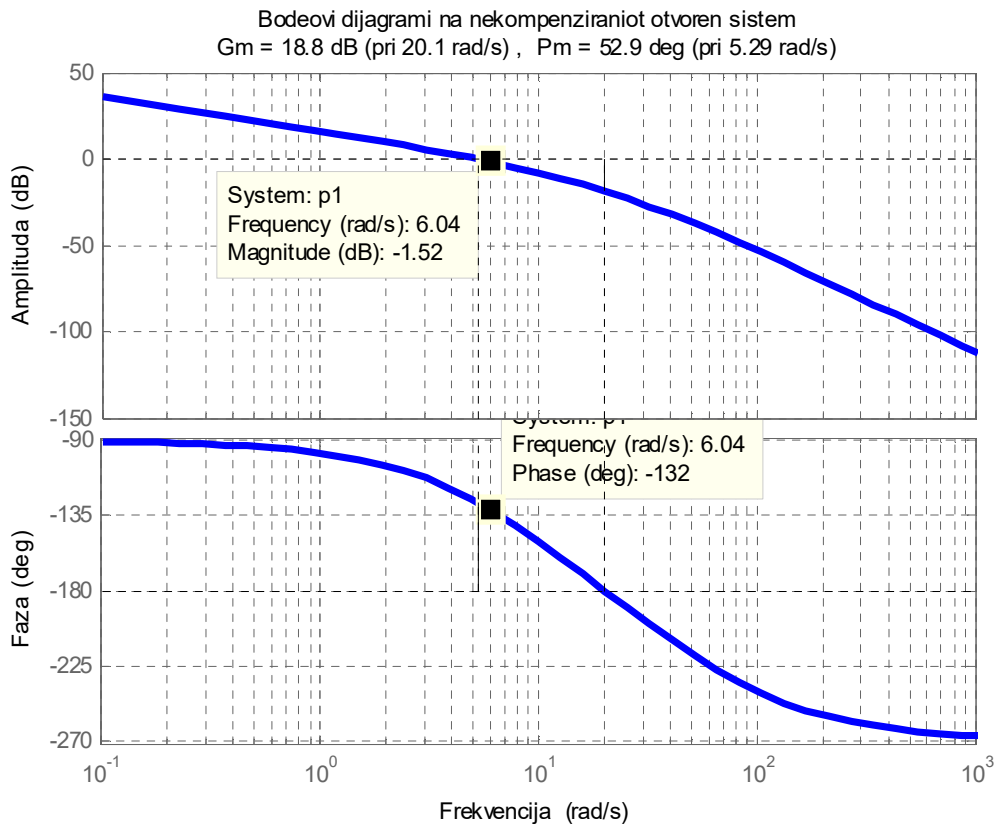
$$\tilde{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s [\lambda P(s)] \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10\lambda}{s(s+9)(s+25)} = \frac{10\lambda}{225} \geq \frac{50}{9} \Rightarrow \lambda \geq 125 \quad (5.84)$$

Тоа значи дека засилувањето на отворениот систем треба да се зголеми најмалку $\lambda = 125$ пати. Ние ќе усвоиме $\lambda = 125$, па, новата вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем ќе изнесува $\tilde{K} = 1250$, а неговата преносна функција ќе гласи:

$$G_{01}(s) = \lambda G_0(s) = \frac{1250}{s(s+9)(s+25)} \quad (5.85)$$

4) Бодеовите дијаграми на отворениот систем (5.85) се прикажани на слика 5.41, од каде се гледа дека затворениот систем има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 52.9^\circ$ при пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 5.29 \frac{rad}{sec}$.

5) Максималното фазно поместување што треба да го внесе диференцијалниот компензатор за да се оствари саканата резерва на фаза изнесува $\varphi_m = (58.5^\circ - 52.9^\circ) = 5.6^\circ$, но ние ќе ја коригираме оваа вредност на $\varphi_m = 10^\circ$, заради фактот дека диференцијалниот компензатор ја зголемува пресечната фреквенција на засилување на вредност $\tilde{\omega}_1$, па при оваа фреквенција некомпензираниот отворен систем има помала фаза отколку што е пресметана при оригиналната пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 5.29 \text{sec}^{-1}$. Тоа лесно може да се утврди врз основа на слика 5.40. Бидејќи во оваа фаза на синтезата новата пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1$ не е позната, корекциониот фактор од $\approx 5^\circ$ се усвојува пробно. Доколку на крајот од синтезата се покаже дека проектираниот систем ги нема саканите перформанси, синтезата ќе мора да се повтори со нов корекционен фактор.



Слика 5.41. Бодеоџи дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем од примерот 5.12 за $\tilde{K} = 1250$ добиени со помош на програмскиот пакет MATLAB

б) За дефинираното максимално фазно поместување на диференцијалниот компензатор $\varphi_m = 10^0$, се добива дека односот помеѓу величините на полот и нулата на диференцијалниот компензатор треба да изнесува $\alpha = 1.42$:

$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \Rightarrow \alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 1.42 \quad (5.86)$$

7) За новата пресечна фреквенција на засилување на компензираниот систем $\tilde{\omega}_1$ се одбира фреквенцијата ω_m при која диференцијалниот компензатор го внесува саканото максимално фазно поместување $\varphi_m = 10^0$. Бидејќи слабеењето на диференцијалниот компензатор при оваа фреквенција изнесува $10 \log_{10}(\alpha) \text{ dB} = 1.52 \text{ dB}$, отворениот систем треба да има слабеење од $-10 \log_{10}(\alpha) \text{ dB} = -1.52 \text{ dB}$ при истата фреквенција, за таа да претставува негова пресечна фреквенција на засилување, односно дијаграмот на слабеење на отворениот систем треба да минува низ нулата при

споменатата фреквенција. Од дијаграмите на слика 5.41 се гледа дека отворениот систем го има саканото слабеење при фреквенција $\omega \approx 6 \frac{rad}{sec}$, па тоа ќе биде

пресечната фреквенција на засилување на компензираниот отворен систем и фреквенцијата на максимално фазно поместување на диференцијалниот компензатор $\tilde{\omega}_1 = \omega_m = 6 \frac{rad}{sec}$.

8) За вака одредената фреквенција на максимално фазно поместување на диференцијалниот компензатор $\omega_m = 6 \frac{rad}{sec}$ и пресметаниот фактор $\alpha = 1.42$ се добива дека нулата и полот на диференцијалниот компензатор се одредени со $a = 7.15$ и $b = 5$:

$$a = 6\sqrt{1.42} = 7.15; \quad b = \frac{6}{\sqrt{1.42}} = 5 \quad (5.87)$$

па неговата преносна функција ќе биде:

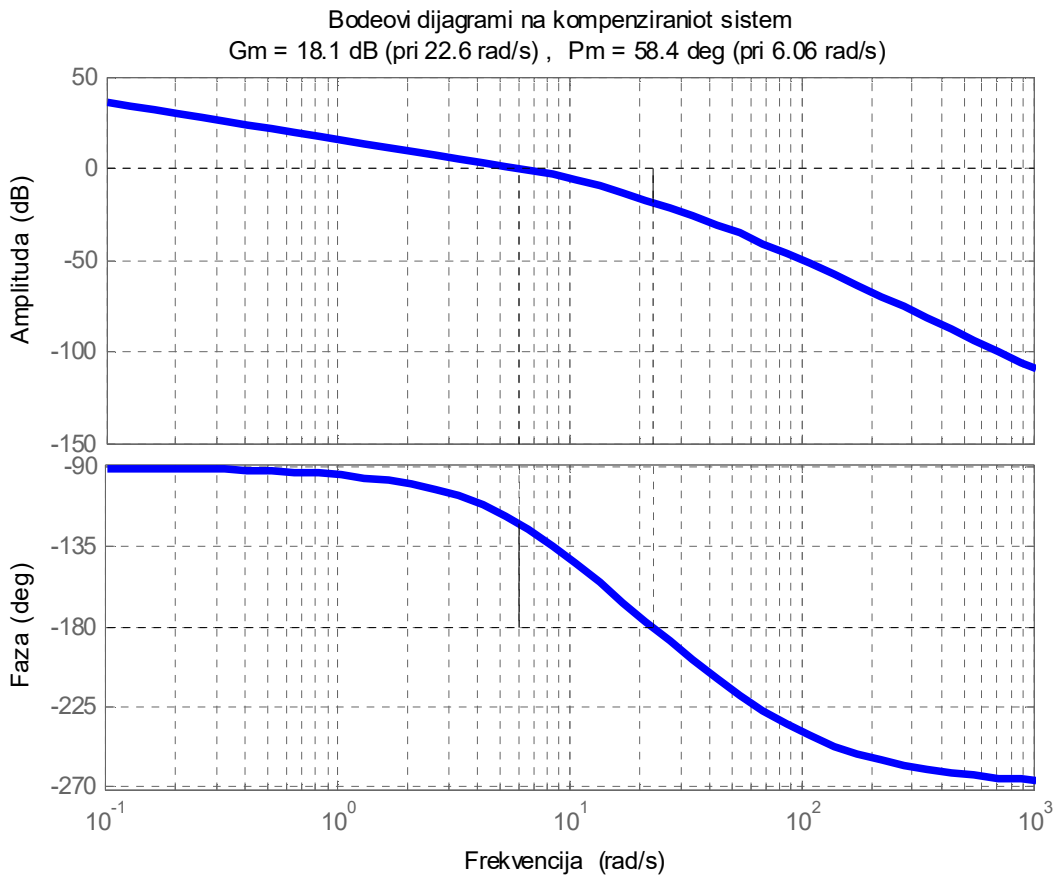
$$G_d(s) = \frac{s+b}{s+a} = \frac{s+5}{s+7.15} \quad (5.88)$$

9) За да не го поремети нагодениот стационарен режим, слабеењето на диференцијалниот компензатор при високи фреквенции треба да изнесува 0, односно мора да биде исполнет условот $G_d(0) = 1$. Оттука, преносната функција (5.88) треба да се коригира за факторот α , па преносната функција на компензираниот отворен систем ќе го има следниот конечен облик:

$$G_{02}(s) = \alpha G_d(s) G_{01}(s) = 1.42 \frac{s+5}{s+7.15} \cdot \frac{1250}{s(s+9)(s+25)} \quad (5.89)$$

10) Бодеовите дијаграми на компензираниот отворен систем се прикажани на слика 5.42. Оттука се гледа дека компензираниот затворен систем има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 58.4^\circ$ при пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1 = 6 \text{sec}^{-1}$.

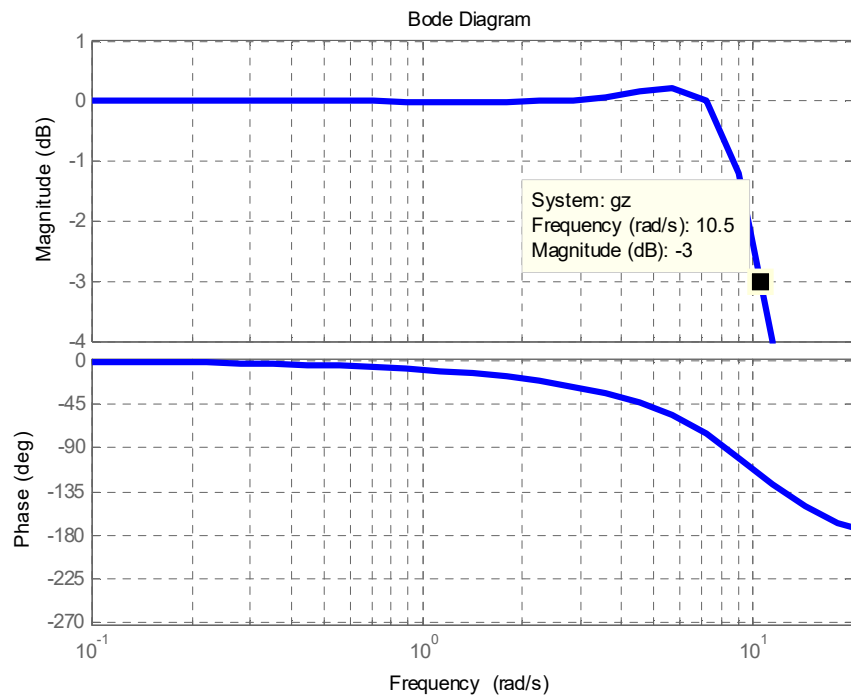
Постапката на синтеза за набљудуваниот систем е прикажана во табела 5.3. Во продолжение, пропусниот опсег на компензираниот затворен систем изнесува приближно $10.5 \frac{rad}{sec}$, што може да се отчита од слика 5.43. Следствено, може да се заклучи дека проектираниот затворен систем ги задоволува поставените проектни барања. Неговиот отскочен одзив е даден на слика 5.44.



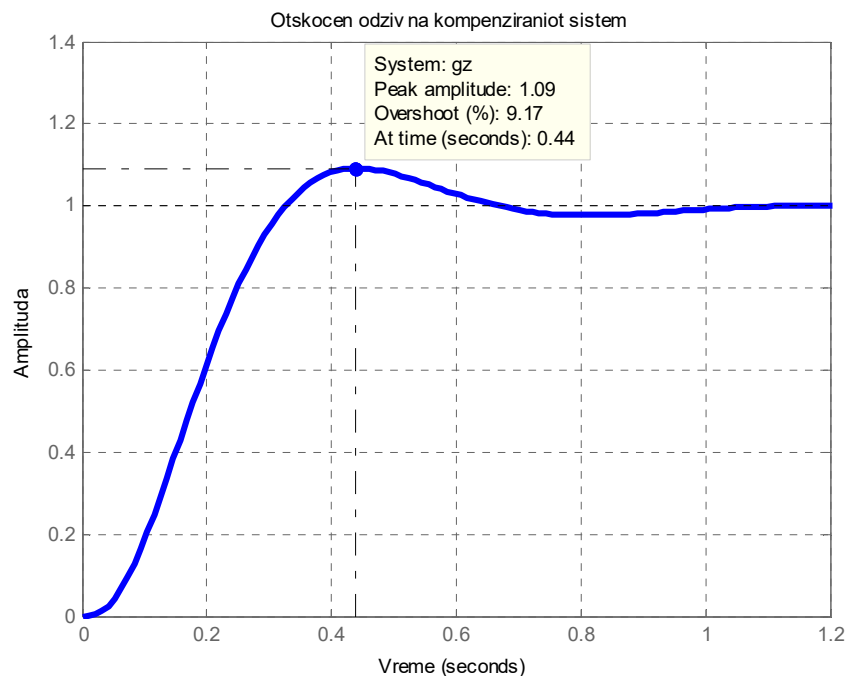
Слика 5.42. Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем од примерот 5.12 по компензацијата со диференцијален компензатор

Табела 5.3.

Параметар	Проектни барања	Остварени вредности
Брзинска константа K_v	10	10
Резерва на фаза φ_{rf}	59°	58.4°
Пресечна фреквенција на засилување ω_1	/	$6 \frac{rad}{sec}$
Максимален прескок $M\%$	$\leq 9.5\%$	9.17%
Време на максимален прескок T_m	0.5s.	0.44s
Пропусен опсег ω_0	$\geq 9 \frac{rad}{sec}$	$10.5 \frac{rad}{sec}$



Слика 5.43. Бодови дијаграми на компензираниот затворен систем по компензацијата со диференцијален компензатор



Слика 5.44. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем по компензацијата со диференцијален компензатор □

Пример 5.13. Даден е затворен континуален систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{4}{s^2 + 4} \quad (5.90)$$

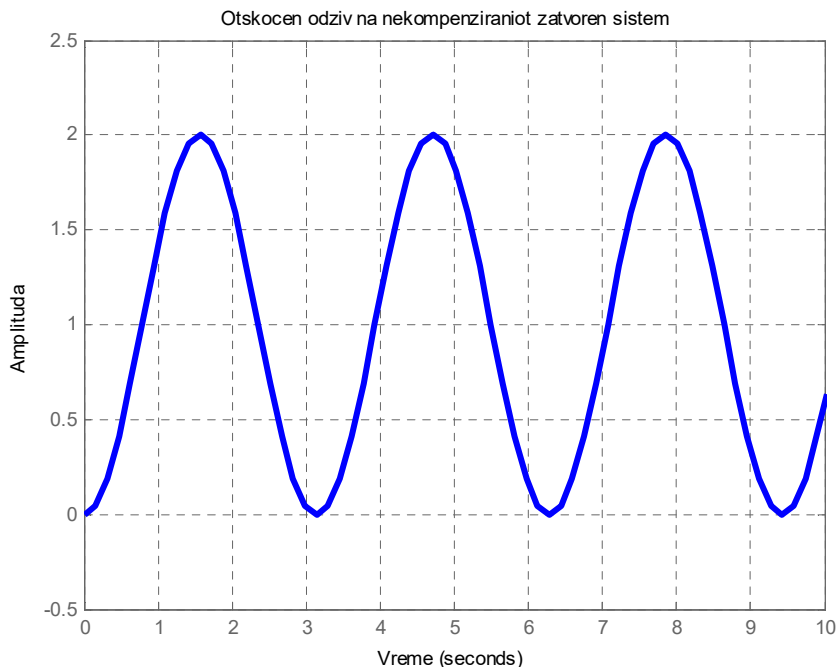
Треба да се изврши компензација на поведението на овој систем, така што компензираниот систем ќе има:

1. Време на смирување $T_s \leq 1 \text{ sec}$
2. Коэффициент на релативно пригушување $\zeta \geq 0.45$

Решение: Лесно може да се утврди дека затворениот систем има незадоволително поведење, бидејќи неговата преносна функција е од облик:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{4}{s^2 + 8} \quad (5.91)$$

и системот има осцилаторен отскачен одзив, прикажан на слика 5.45. Оттаму, неопходно е да се изврши компензација на поведението на системот (5.90), за што е употребен диференцијален компензатор.



Слика 5.45. Импулсен одзив на некомпензираниот затворен систем од примерот 5.13

Соодветниот отворен систем за вака компензираниот затворен систем има преносна функција $G_d(s)G_0(s)$, а преносната функција на затворениот систем ќе биде од облик:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.92)$$

Во изразот (5.92) ζ е коефициентот на релативно придрушување на системот, чија вредност е зададена со второто проектно барање, додека ω_n е природната (непридрушувана) фреквенција на затворениот систем, која може да се определи од условот за T_s :

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 1 \Rightarrow \omega_n \geq \frac{4}{\zeta} \Rightarrow \omega_n \geq \frac{4}{0.45} \approx 9 \frac{rad}{sec} \quad (5.93)$$

Пред да се пристапи кон синтеза на компензираниот затворен систем со диференцијален компензатор, зададените проектни барања треба да се пресликаат во фреквенциски домен. За таа цел се користат веќе изведените врски помеѓу временските и фреквенциските показатели на поведението на еден систем. Така, врската помеѓу природната фреквенција ω_n и пропусниот опсег ω_0 на еден континуален систем од втор ред без конечни нули, опишан со (5.92), графички е прикажана на слика 5.21 и опишана со (5.34). Следствено, пропусниот опсег на компензираниот затворен систем за $\zeta \geq 0.45$ треба да изнесува:

$$\omega_0 \geq 1.33\omega_n \approx 1.33(9) = 12 \frac{rad}{sec} \quad (5.94)$$

Резервата на фаза на компензираниот систем се определува од дијаграмот на слика 5.24, односно релацијата (5.43), која е задоволително точна за $\zeta \leq 0.7$, па, за резервата на фаза на компензираниот систем (5.92) се добива:

$$\varphi_{rf} = 100\zeta \geq 45^0 \quad (5.95)$$

Со тоа проектните барања за компензираниот систем, првобитно зададени преку соодветните вредности на параметрите на неговиот отскочен одсив, се искажани преку параметрите кои го карактеризираат фреквенцискиот одсив на системот:

1. Пропусен опсег $\omega_0 \geq 12 \frac{rad}{sec}$
2. Резерва на фаза $\varphi_{rf} \geq 45^0$

Саканиот пропусен опсег на компензираниот систем (5.92) може да се обезбеди преку соодветен избор на коефициентот на засилување K според релацијата:

$$G_{01}(s) = \frac{4K}{s^2 + 4}$$

$$G_1(s) = \frac{G_{01}(s)}{1 + G_{01}(s)} = \frac{4K}{s^2 + 4 + 4K}$$

$$4 + 4K = \omega_n^2 \geq 19.25 \quad (5.96)$$

па, во конкретниот случај може да се усвои $K = 20$. Така, преносната функција на објектот сега ќе гласи:

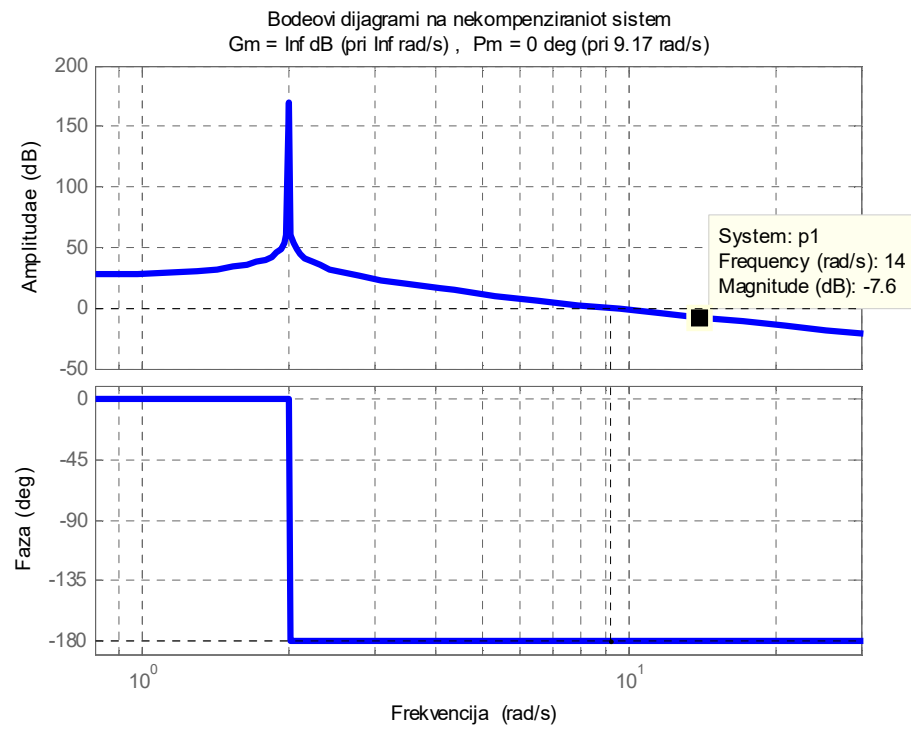
$$G_{01}(s) = \frac{4K}{s^2 + 4} = \frac{80}{s^2 + 4} \quad (5.97)$$

Резервата на фаза на некомпензираниот затворен систем $G_1(s)$ се одредува врз основа на Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.97), кои за $K = 20$ се прикажани на слика 5.46. Оттука се гледа дека затворениот систем $G_1(s)$, кој претставува осцилатор, има резерва на фаза на $\varphi_{rf} = 0^0$, што е очекуван резултат, бидејќи некомпензираниот затворен систем очигледно се наоѓа на границата на стабилност. За да се обезбеди саканата резерва на фаза $\varphi_{rf} \geq 45^0$, потребно е да се употреби диференцијален компензатор кој ќе внесе позитивно фазно поместување од најмалку $\varphi_m = 45^0$. Оттука, врз основа на релацијата:

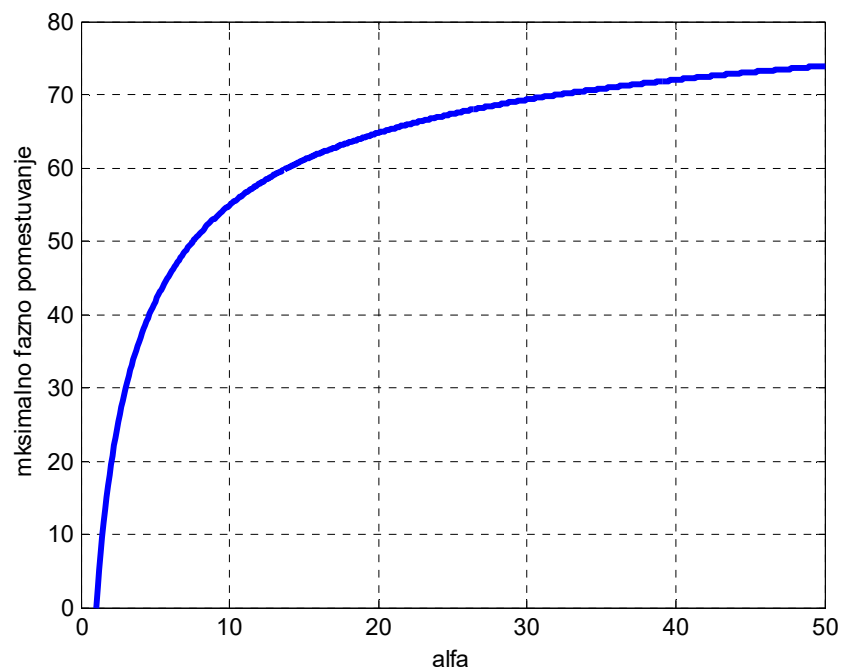
$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (5.98)$$

или врз основа на слика 5.47, се одредува соодносот α помеѓу величините на полот и нулата на диференцијалниот компензатор, $\alpha = 5.8 \approx 6$.

Пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем треба да се поклопи со фреквенцијата ω_m при која настапува максималното фазно поместување $\varphi_m = 45^0$. Оваа фреквенција се определува на следниот начин. Имајќи ја предвид преносната функција на диференцијалниот компензатор $G_d(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{\alpha(1 + \tau s)}$, јасно е дека при фреквенција ω_m тој внесува дополнително слабеење од $20 \log_{10}(\sqrt{\alpha}) = 10 \log_{10}(\alpha) = 10 \log_{10}(6) = 7.65 \text{ dB}$. Следствено, за пресечна фреквенција



Слика 5.46. Бодеои дијаграми на отворениот систем (5.97)



Слика 5.47. Графички приказ на зависноста $\varphi_m(\alpha)$

на засилување на компензираниот систем треба да се одбере онаа фреквенција, при која Бодеоовиот дијаграм на слабеење на некомпензираниот отворен систем (5.97) има вредност -7.65 dB . Таа фреквенција се отчитува од соодветниот дијаграм на слика 5.46 и изнесува $\omega_1 = 14 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Бидејќи тоа воедно е и фреквенцијата ω_m при која настапува максималното фазно поместување од диференцијалниот компензатор $\varphi_m = 45^\circ$, за единствената нула и пол на диференцијалниот компензатор се добива:

$$b = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = \frac{14}{\sqrt{5.8}} \approx 5.7, a = \alpha b \approx 34.3 \quad (5.99)$$

Оттука, неговата преносна функција ќе биде:

$$G_d(s) = \frac{s + 5.7}{s + 34.3} \quad (5.100)$$

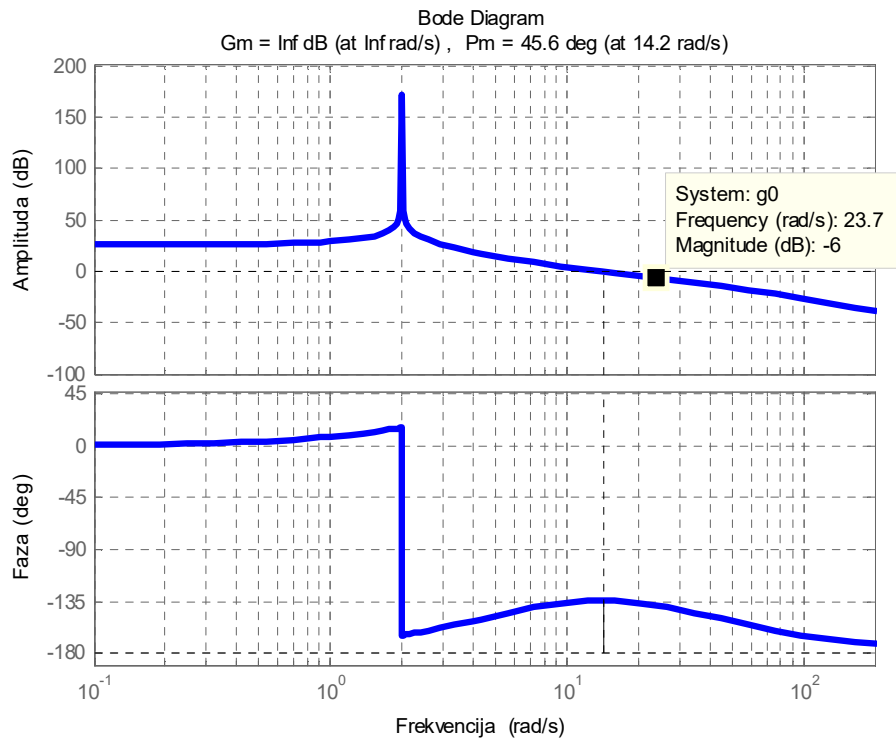
На крајот останува уште да се компензира слабеењето $G_d(0) = 1/\alpha$ на диференцијалниот компензатор во стационарен режим, па, за таа цел, коефициентот на засилување на отворениот систем треба да се коригира за вредноста α . Така, за преносната функција на компензираниот отворен систем конечно се добива:

$$G_{oc}(s) = \alpha G_d(s) G_{o1}(s) = \alpha \frac{s + 5.7}{s + 34.3} \cdot \frac{80}{s^2 + 4} \quad (5.101)$$

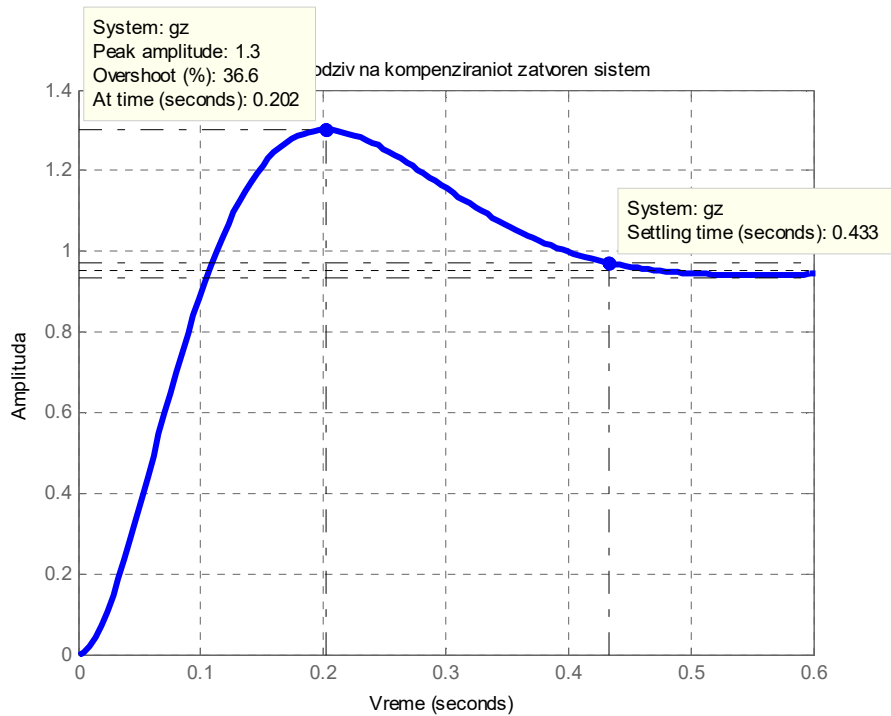
додека преносната функција на компензираниот затворен систем ќе има облик:

$$G_{zc}(s) = \frac{G_{oc}(s)}{1 + G_{oc}(s)} = \frac{464(s + 5.7)}{s^3 + 34.3s^2 + 468s + 2782} \approx \frac{30(s + 5.7)}{(s + 15.8)(s^2 + 18.4s + 174.9)} \quad (5.102)$$

На слика 5.48 се прикажани Бодеоовите дијаграми на слабеење и фаза на компензираниот отворен систем (5.101), додека на слика 5.49 е прикажан отскочниот одзив на компензираниот затворен систем (5.102). Од графиконот на слика 5.49 се гледа дека компензираниот затворен систем има максимален прескок од приближно 37% и време на смирување од приближно 0.43 sec. Пропусниот опсег на компензираниот затворен систем може да се определи од неговата амплитудна карактеристика, но исто така може да се процени и од Бодеоовиот дијаграм на слабеење на компензираниот отворен систем како фреквенција при која $20 \log_{10} |G_{oc}(j\omega)| = -6 \text{ dB}$. Од слика 5.48 се гледа дека тоа е фреквенцијата $\omega_{oc} = 23.7 \text{ sec}^{-1}$. Следствено, компензираниот затворен систем ги задоволува сите поставени проектни барања: $T_{sc} = 0.433 < 1 \text{ sec}$, $\varphi_{rfc} = 45.6^\circ > 45^\circ$, $\omega_{oc} = 23.7 > 12 \text{ sec}^{-1}$.



Слика 5.48. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на компензираниот отворен систем (5.101)



Слика 5.49. Графички приказ на отскочниот одзив на компензираниот систем (5.102) □

Пример 5.14. Да се изврши компензација на поведението на затворениот систем со единична повратна врска, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+5)} = \frac{K}{s(s+5)} \quad (5.103)$$

така што компензирианиот затворен систем ќе има: (1) резерва на фаза $\varphi_{rf} \geq 45^\circ$ и (2) стационарна грешка за линеарно растечки влез еднаква на 2 % од брзината на промена на влезот.

Решение: Стационарната грешка на зададениот затворен систем при линеарно растечки влез зависи од коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем K , па од оваа зависност и вториот проектен услов следува потребната вредност на коефициентот на засилување \tilde{K} на отворениот систем, за која затворениот систем ќе го има саканото стационарно поведение:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\tilde{K}/5} = \frac{5}{\tilde{K}} \leq 0.02 \Rightarrow \tilde{K} \geq 250 \quad (5.104)$$

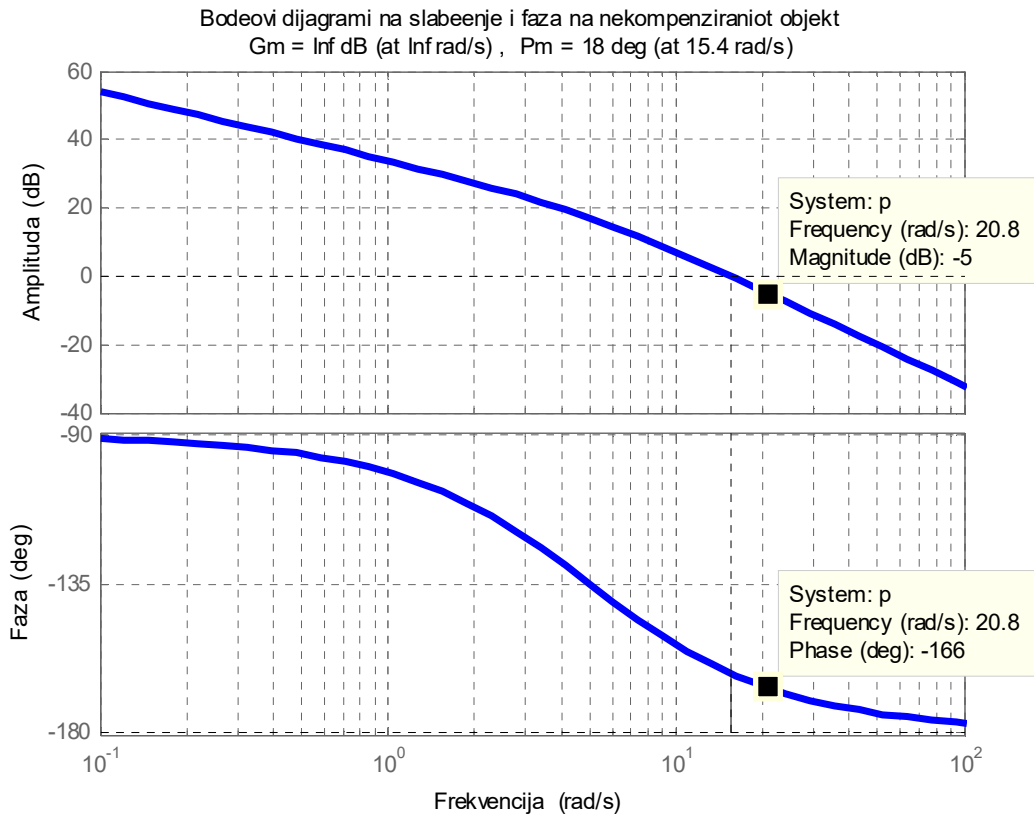
Тоа значи дека засилувањето на објектот $K = 10$ треба да се зголеми најмалку $\lambda = 25$ пати, затоа што $\tilde{K} = \lambda K = 10\lambda \geq 250 \Rightarrow \lambda \geq 25$, па да биде задоволено првото проектно барање. Ние ќе ја усвоиме долната граница за новото засилување на објектот $\tilde{K} = 250$ и синтезата ќе ја вршиме за објектот со компензирано засилување, кој сега има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{\tilde{K}}{s(s+5)} = \frac{250}{s(s+5)} \quad (5.105)$$

Пред да се проследи понатаму со постапката на синтеза, се испитува поведението на затворениот систем за $\tilde{K} = 250$, од аспект на второто проектно барање. За таа цел се цртаат Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.105) за $\tilde{K} = 250$, прикажани на слика 5.50, од каде се заклучува дека затворениот систем има пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 15.4 \frac{rad}{sec}$ и резерва на фаза од 18° , што не го задоволува првиот проектен услов.

За да се обезбеди саканата резерва на фаза, треба да се употреби диференцијален компензатор кој ќе внесе позитивно фазно поместување од $45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$. Следствено, ако усвоиме $\varphi_m = 27^\circ$, за односот $\alpha = \frac{a}{b}$ помеѓу полот и нулата на диференцијалниот компензатор кој треба да се проектира се добива:

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)} = \frac{1 + \sin(27^\circ)}{1 - \sin(27^\circ)} = 2.6629 \approx 3 \quad (5.106)$$



Слика 5.50. Бодеови дијаграми на слабење и фаза на некомпензираниот отворен систем од пример 5.14

Максималното фазно поместување $\varphi_m = 27^\circ$ што го внесува диференцијалниот компензатор е при фреквенција $\omega_m = \sqrt{ab}$, која се усвојува за пресечна фреквенција на засилување на компензираниот систем $\tilde{\omega}_1$. Бидејќи при оваа фреквенција диференцијалниот компензатор внесува слабење од $20\log_{10} \sqrt{\alpha} = 10\log_{10} \alpha = 10\log_{10} 3 = 4.8\text{dB}$, за пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем треба да се усвои фреквенцијата при која некомпензираниот систем има слабење од $-4.8\text{dB} \approx -5\text{dB}$, а тоа е фреквенцијата $\omega = 20.8\text{sec}^{-1}$. Следствено, $\tilde{\omega}_1 = \omega_m = 20.8\text{sec}^{-1}$ и:

$$b = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = \frac{20.8}{\sqrt{3}} \approx 12 \quad (5.107)$$

$$a = \omega_m \sqrt{\alpha} \approx 36 \quad (5.108)$$

па, преносната функција на диференцијалниот компензатор ќе биде:

$$G_d(s) = \frac{s+12}{s+36} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{s}{12} + 1}{\frac{s}{36} + 1} \quad (5.109)$$

Останува уште да се компензира засилувањето на диференцијалниот компензатор во стационарен режим $G_d(0) = \frac{1}{3}$, со што преносната функција на компензираниот отворен систем го добива следниот конечен облик:

$$G_{oc}(s) = 3G_d(s)G_0(s) = 3 \cdot \frac{s+12}{s+36} \cdot \frac{250}{s(s+5)} \quad (5.110)$$

Неговите Бодеови дијаграми се прикажани на слика 5.51, од каде се гледа дека компензираниот затворен систем има резерва на фаза $\varphi_{rf} \approx 44^\circ$, која е нешто помала од проектното барање $\varphi_{rf} \geq 45^\circ$. Ова се должи на фактот дека резервата на фаза на некомпензираниот систем при новата пресечна фреквенција $\tilde{\omega}_1 = \omega_m = 20.8 \frac{rad}{sec}$ е помала од 18° и изнесува околу 14° , па треба да се направи корекција на вредноста на φ_m за 4° . За поголема сигурност ќе усвоиме $\varphi_m = 32^\circ$. Потоа постапката на синтеза на диференцијалниот компензатор се повторува за коригираната вредност на φ_m , односно за $\varphi_m = 32^\circ$. Така, новата вредност за α ќе биде:

$$\alpha = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)} = \frac{1 + \sin(32^\circ)}{1 - \sin(32^\circ)} = 3.2546 \quad (5.111)$$

Максималното фазно поместување $\varphi_m = 32^\circ$ што го внесува диференцијалниот компензаторот е при фреквенција $\omega_m = \sqrt{ab}$, при која диференцијалниот компензатор внесува слабеење од $20 \log_{10}(\sqrt{\alpha}) = 10 \log_{10}(\alpha) \approx 5dB$, па, за пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем треба да се усвои фреквенцијата при која некомпензираниот систем има слабеење од $-5dB$, а тоа е фреквенцијата $\omega = 20.8 \frac{rad}{sec}$

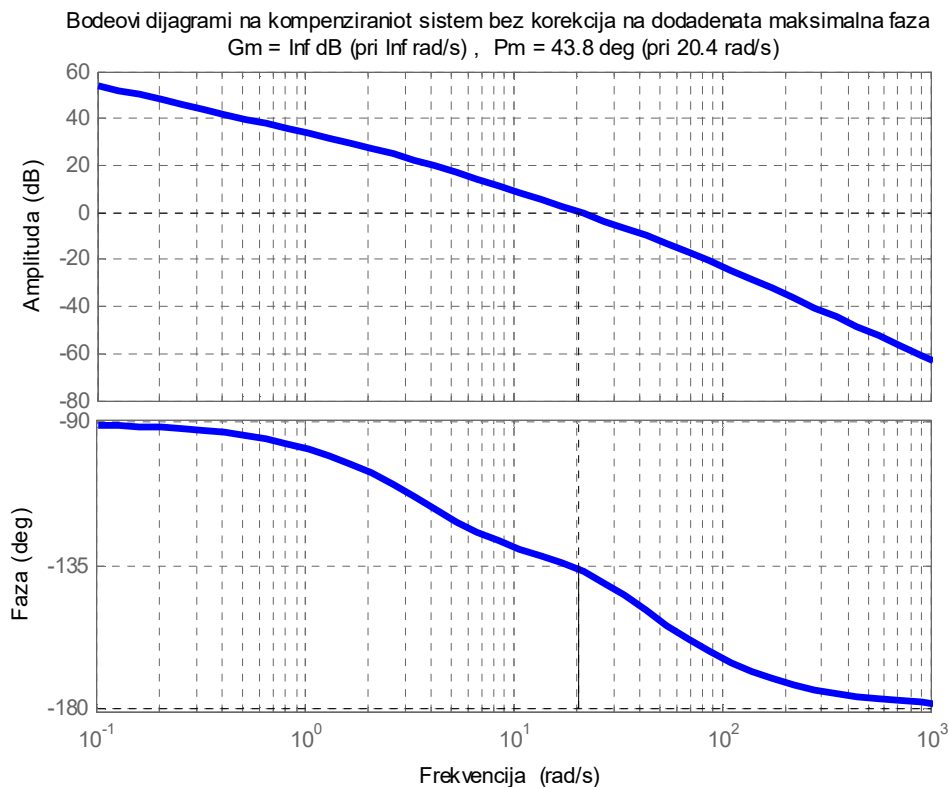
. Следствено, $\tilde{\omega}_1 = \omega_m = 20.8 \frac{rad}{sec}$. Тогаш:

$$b = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = \frac{20.8}{\sqrt{3.2546}} = 11.5296 \quad (5.112)$$

$$a = \omega_m \sqrt{\alpha} = 37.5242 \quad (5.113)$$

па, преносната функција на диференцијалниот компензатор ќе биде:

$$G_d(s) = \frac{s + 11.5296}{s + 37.5242} = \frac{1}{3.2546} \cdot \frac{\frac{s}{11.5296} + 1}{\frac{s}{37.5242} + 1} \quad (5.114)$$

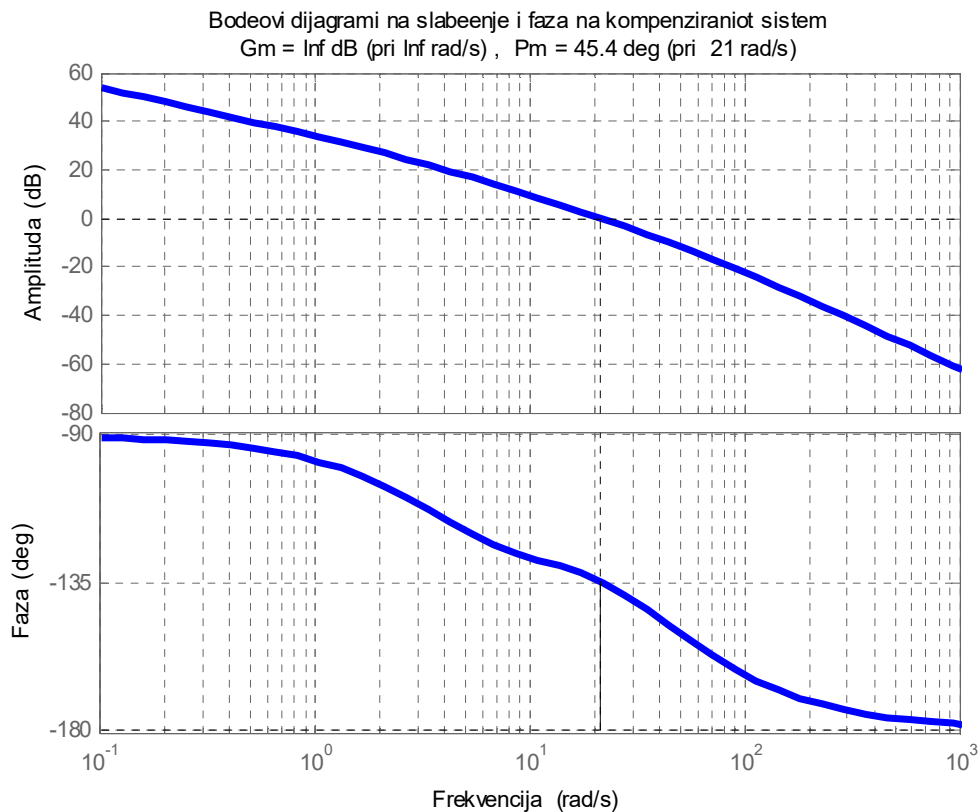


Слика 5.51. Бодеои дијаграми на компензираниот отворен систем (5.110)

Останува уште да се компензира засилувањето на диференцијалниот компензатор во стационарен режим $G_d(0) = \frac{1}{3.2546}$, со што преносната функција на компензираниот отворен систем го добива следниот конечен облик:

$$G_{oc}(s) = 3.2546G_d(s)G_0(s) = (3.2546) \cdot \frac{s + 11.5296}{s + 37.5242} \cdot \frac{250}{s(s + 5)} \quad (5.115)$$

Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем (5.115) се прикажани на слика 5.52, и оттука се гледа дека е исполнето и второто проектно барање.



Слика 5.52. Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем (5.115) □

5.5. БОДЕОВА СИНТЕЗА СО ПРИМЕНА НА ИНТЕГРО – ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Понекогаш за синтеза на еден затворен систем на автоматско управување, потребно е да се примени компензација со интегро-диференцијален компензатор. Притоа, интегралната компонента од овој компензатор има за задача нагодување на стационарниот режим на проектираниот затворен САУ, додека диференцијалната компонента се користи за нагодување на преодниот режим. Така, интегралната компонента на интегро-диференцијалниот компензатор го снижува засилувањето на системот при високи фреквенции, го стабилизира системот и ја намалува неговата

стационарна грешка, додека диференцијалната компонента го обезбедува барањето во поглед на резервата на фаза на проектираниот систем.

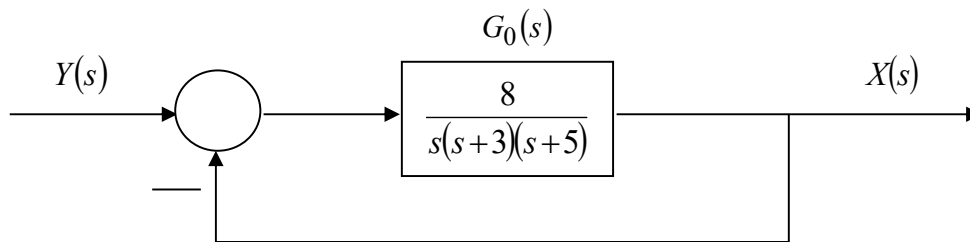
Еден интегро-диференцијален компензатор може да се реализира со помош на пасивната електрична мрежа од слика 3.22. Меѓутоа, оваа мрежа има ограничување во изведбата. Односот помеѓу нулата и полот од диференцијалната компонента мора да биде еднаков со односот помеѓу полот и нулата од интегралната компонента на компензаторот, $a_1 a_2 = b_1 b_2$. Интегро-диференцијален компензатор без ограничувања може да се реализира со помош на активни електрични елементи, или со сервиска врска од пасивен интегрален и диференцијален компензатор, меѓутоа, двата пасивни компензатори мора да бидат одвоени со операционен засилувач, за да едната мрежа не ја оптоварува другата. Од овие причини, примената на пасивен интегро-диференцијален компензатор се покажува како поекономична, затоа што овде нема потреба од дополнителен засилувач кој ги раздвојува интегралниот и диференцијалниот компензатор. Постапката на синтеза со интегро-диференцијален компензатор е следната:

1. Преку апроксимација на некомпензираниот затворен систем со затворен систем од втор ред без конечни нули, се наоѓа пропусниот опсег $\tilde{\omega}_0$ кој ги задоволува проектните барања во поглед на времето на смирување T_s , времето на максимален прескок T_m или времето на пораст T_p на отскочниот одсив (видете ги релациите (5.36) и (5.37)).
2. Се одбира новиот коефициент на засилување на отворениот систем \tilde{K} , кој ќе го обезбеди барањето во поглед на точноста на работа на компензираниот затворен систем во стационарен режим.
3. Користејќи ја апроксимацијата со затворен систем од втор ред без конечни нули, се пресметува потребната резерва на фаза на компензираниот затворен систем, која го задоволува барањето во поглед на саканата вредност на коефициентот на релативно придушвање ξ или дозволеениот максимален прескок на отскочниот одсив $M\%$.
4. За пресметаната вредност на \tilde{K} се цртаат Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем со компензирано засилување.
5. Новата пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1$ се одбира во близина на саканиот пропусен опсег $\tilde{\omega}_0$.
6. Се пресметува дополнителната фаза која треба да му се додаде на системот при оваа фреквенција $\tilde{\omega}_1$, за да се задоволи проектното барање во поглед на резервата на фаза на проектираниот затворен систем, и истата се зголемува за мал износ ($5^\circ \div 10^\circ$) заради дополнителното влијание на интегралниот компензатор.

7. Се проектира интегралниот компензатор, така што неговата нула ќе биде една декада пониска од усвоената пресечна фреквенција на фаза $b_2 = \tilde{\omega}_1/10$, додека неговиот пол се определува како $a_2 = b_2/\beta$, каде што β се добива врз основа на саканата резерва на фаза.
8. Диференцијалниот компензатор се проектира така што неговата нула и пол ќе бидат во точките одредени со $a_1 = \tilde{\omega}_1/\sqrt{\beta}$ и $b_1 = \tilde{\omega}_1\sqrt{\beta}$.
9. Се проверува дали пропусниот опсег на компензираниот затворен систем го задоволува поставеното проектно барање.
10. Синтезата се проверува со симулација на отскочниот одзив на компензираниот затворен систем, и се повторува, доколку резултатите не се задоволителни.

Пример 5.15. Да се изврши компензација со помош на интегро-диференцијален компензатор на затворениот систем од слика 5.53, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$P(s) = \frac{8}{s(s+3)(s+5)} \quad (5.116)$$



Слика 5.53. Илустрација кон примерот 5.15

така што компензираниот затворен систем ќе има максимален прескок $M\% \leq 10\%$, време на максимален прескок $T_m \leq 1\text{sec}$ и брзинска константа $K_v \geq 20$.

Решение: Проектното барање $M\% \leq 10\%$ значи дека компензираниот затворен систем треба да има фактор на релативно придушување $\zeta \approx 0.59$, што пак од своја страна значи резерва на фаза од $\varphi_{rf} \geq 59^\circ$ (релација (5.43) или слика 5.24) и пропусен опсег од $\tilde{\omega}_0 = 4.5\text{sec}^{-1}$ (релација (5.37) или слика 5.23).

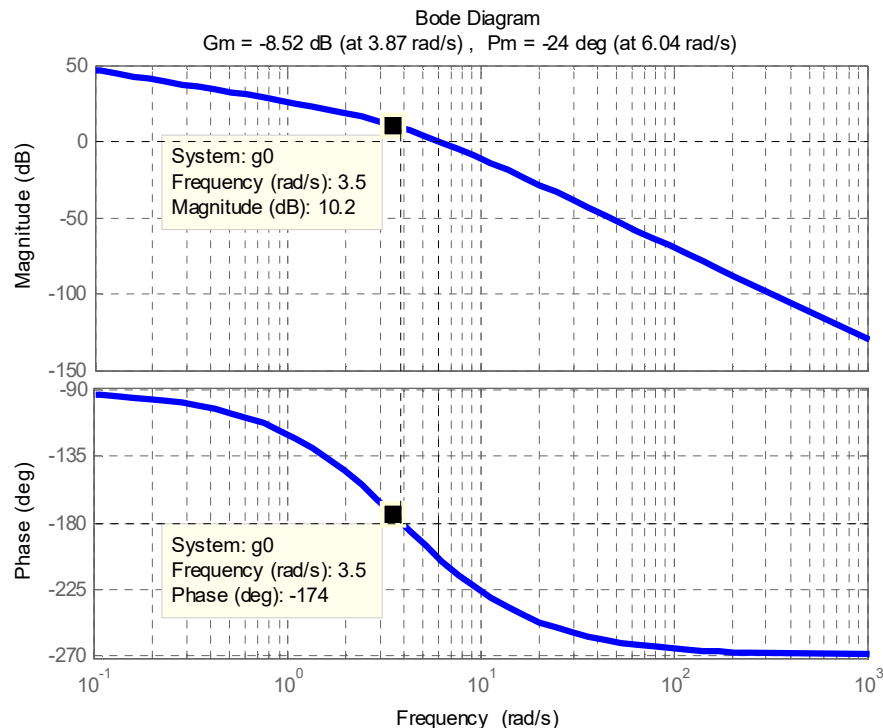
Новата вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем $P(s)$ се определува врз основа на зададената вредност за брзинската константа $K_v \geq 20$:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{8K}{s(s+3)(s+5)} = \frac{8K}{15} \geq 20 \Rightarrow K \geq \frac{300}{8} = 37.5 \quad (5.117)$$

Ако за K се усвои $K = 40$, преносната функција на отворениот систем со компензирано засилување ќе гласи:

$$G_0(s) = KP(s) = \frac{8K}{s(s+3)(s+5)} = \frac{320}{s(s+3)(s+5)} \quad (5.118)$$

и неговите Бодеве дијаграми на слабеење и фаза се прикажани на слика 5.54.



Слика 5.54. Бодеве дијаграми на некомпензираниот отворен систем (5.118)

Новата пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1$ ја одбираме во близина на фреквенцијата $\tilde{\omega}_0$ да изнесува $\tilde{\omega}_1 \approx 3.5 \text{sec}^{-1}$. Бидејќи некомпензираниот затворен систем има резерва на фаза од 6° при одбраната пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1 \approx 3.5 \text{sec}^{-1}$, диференцијалниот компензатор треба да додаде уште фаза од $59^\circ - 6^\circ = 53^\circ$ за да се оствари проектното барање за резервата на фаза на компензираниот затворен систем од 59° . На оваа вредност ќе додадеме уште 4° како корекција заради влијанието на самиот компензатор, па максималното фазно

поместување на диференцијалниот компензатор треба да изнесува $\varphi_m = 57^\circ$. За вака пресметаното φ_m , се пресметува соодветната вредност на односот помеѓу нулата и полот на интегралниот компензатор, која изнесува $\beta = 10.6$. Тогаш, нулата на интегралниот компензатор се одбира да биде една декада под усвоената пресечна фреквенција на засилување, $b_2 = \frac{\tilde{\omega}_1}{10} = 0.35$, додека неговиот пол се одбира да биде $a_2 = b_2/\beta = 0.033$. Следствено, преносната функција на интегралниот компензатор ќе биде:

$$G_i(s) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s+b_2}{s+a_2} = \frac{1}{10.6} \cdot \frac{s+0.35}{s+0.033} \quad (5.119)$$

додека преносната функција на отворениот систем по компензацијата со интегралниот компензатор е дадена со изразот:

$$G_{01}(s) = G_i(s)G_0(s) = \frac{1}{10.6} \cdot \frac{s+0.35}{s+0.033} \cdot \frac{320}{s(s+3)(s+5)} \quad (5.120)$$

Нулата и полот на диференцијалниот компензатор се одбираат да бидат $b_1 = \frac{\tilde{\omega}_1}{\sqrt{\beta}} = 1.075$ и $a_1 = \tilde{\omega}_1\sqrt{\beta} = 11.395$, па неговата преносна функција ќе биде:

$$G_d(s) = \alpha \frac{s+b_1}{s+a_1} = 10.6 \frac{s+1.075}{s+11.395} \quad (5.121)$$

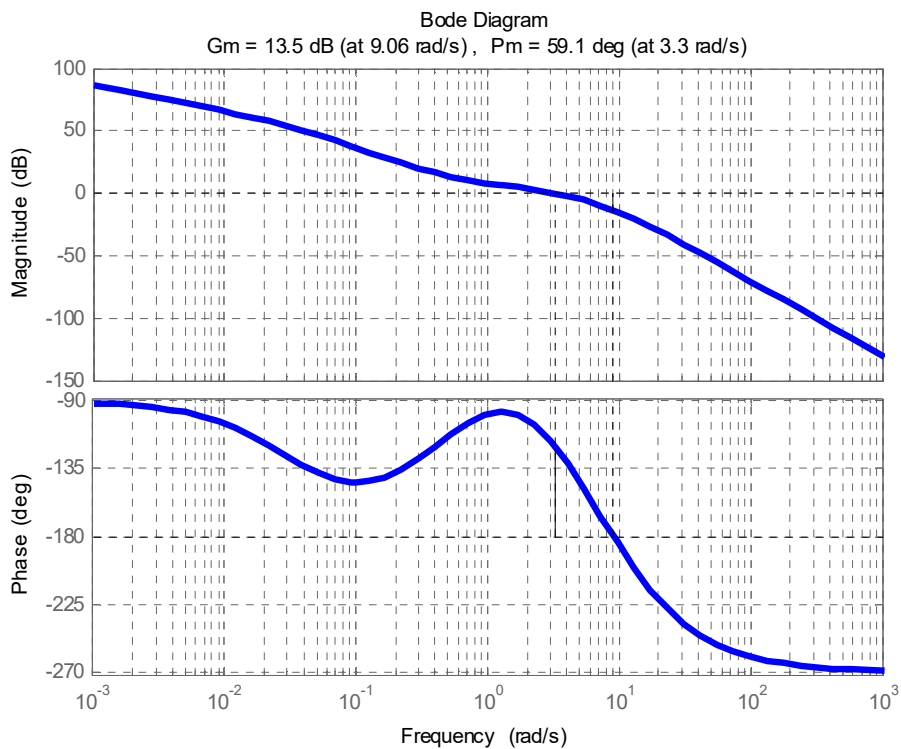
додека преносната функција на отворениот систем по компензацијата и со диференцијалниот компензатор е дадена со изразот:

$$G_{02}(s) = G_d(s)G_{01}(s) = \frac{s+0.35}{s+0.033} \cdot \frac{s+1.075}{s+11.395} \cdot \frac{320}{s(s+3)(s+5)} \quad (5.122)$$

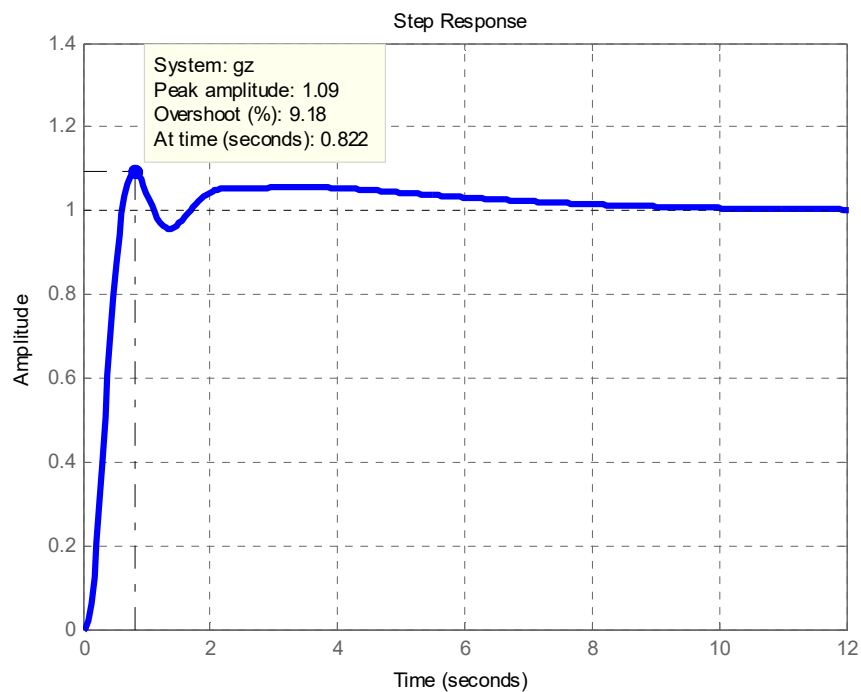
Преносната функција на компензираниот затворен систем има облик:

$$G_2(s) = \frac{G_{02}(s)}{1+G_{02}(s)} = \frac{320s^2 + 456.3s + 120.4}{s^5 + 19.43s^4 + 106.8s^3 + 494.4s^2 + 461.6s + 120.4} \quad (5.123)$$

Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем се прикажани на слика 5.55, а отскочниот одзив на компензираниот затворен систем на слика 5.56.



Слика 5.55. Бодови дијаграми на компензираниот отворен систем (5,121)



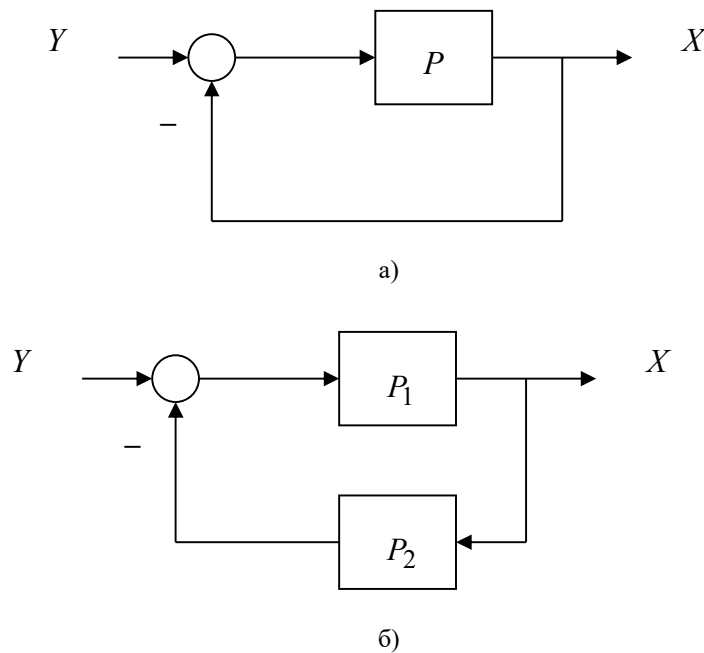
Слика 5.56. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем од пример 5.15

Од дијаграмот на отскочниот одзив на компензираниот затворен систем се гледа дека системот ги задоволува сите поставени проектни барања: максимален прескок $M\% = 9.18\% \leq 10\%$, време на максимален прескок $T_m = 0.822 \text{ sec} \leq 1 \text{ sec}$ и стационарна грешка $e(\infty) = 0.04685$ (брзинска константа $K_v = 21.3455 \geq 20$). \square

6. СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

6.1. ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

На слика 6.1 се прикажани два типа затворени системи на автоматско управување со негативна повратна врска. Првиот систем има единична негативна повратна врска, додека вториот систем се одликува со неединична негативна повратна врска.



Слика 6.1. Два типа затворени системи на автоматско управување со негативна повратна врска: а) систем со единична негативна повратна врска, б) систем со неединична негативна повратна врска

Ако P_1 ја претставува еквивалентната преносна функција во директната гранка во набљудуваниот затворен систем, а P_2 ја претставува еквивалентната преносна функција во повратната гранка, тогаш за првиот систем $P_1 = P$ и $P_2 = 1$.

Соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем со единична негативна повратна врска се добива со мисловно прекинување на повратната врска непосредно пред компараторот и неговата преносна функција изнесува:

$$G_{01} = P \tag{6.1}$$

Соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем со неединична повратна врска се добива на ист начин и неговата преносна функција изнесува:

$$G_{02} = P_1 P_2 \quad (6.2)$$

Преносните функции на двата типа затворени системи од слика 6.1 се:

$$G_1 = \frac{P}{1+P} = \frac{G_{01}}{1+G_{01}} \quad (6.3)$$

и:

$$G_2 = \frac{P_1}{1+P_1 P_2} = \frac{P_1}{1+G_{02}} \quad (6.4)$$

соодветно. Како што може да се забележи, карактеристичната равенка за двата затворени системи има ист облик:

$$a = 1 + G_0 = 0 \quad (6.5)$$

каде што G_0 е преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем. Оттаму, дискусијата што следува ќе се однесува и на двата типа затворени системи од слика 6.1, со тоа што треба да се има на ум дека во случајот на затворениот систем од слика 6.1.а):

$$G_0 = G_{01} \quad (6.6)$$

а во случајот на затворениот систем од слика 6.1.б):

$$G_0 = G_{02} \quad (6.7)$$

Ако преносната функција на отворениот систем се претстави во облик:

$$G_0 = K \frac{B}{A} \quad (6.8)$$

каде што K е соодветен коефициент на засилување, а A и B се полиноми од комплексна променлива и соодветен степен со реални коефициенти, за карактеристичната равенка на затворениот систем се добива:

$$a = 1 + G_0 = 1 + K \frac{B}{A} = \frac{A + KB}{A} = A + KB = 0 \quad (A \neq 0) \quad (6.9)$$

Во досегашното излагање не се дефинирани аргументите на соодветните функции Y , X , P , P_1 , P_2 , G_{01} , G_{02} , G_1 , G_2 , G_0 , A , B и a , бидејќи дискусијата подеднакво се однесува и на континуални и на дискретни динамички системи. Така, во случајот на континуални системи, сите зависно променливи се функции од комплексната независно променлива $s = \text{Re } s + j \text{Im } s = \sigma + j\omega$, додека во случајот на дискретни системи, зависно променливите се функции од комплексната независно променлива $z = \text{Re } z + j \text{Im } z = \rho e^{j\varphi}$.

Постапката геометриско место на корени овозможува одредување на половите на еден затворен систем, каков што е системот од слика 6.1.б), во функција од коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем $G_0 = P_1P_2$, за што е потребно да се познаваат само половите и нулите на отворениот систем, а не е потребно да се врши факторизација на карактеристичниот полином на затворениот систем. Притоа, постапката геометриско место на корени е подеднакво применлива како кај континуалните, така и кај дискретните линеарни динамички системи. Таа не само што овозможува анализа, туку подеднакво успешно се користи и за синтеза на затворените системи на автоматско управување.

6.1.1. ЗАВИСНОСТ НА ПОЛОВИТЕ НА ЗАТВОРЕНИОТ СИСТЕМ ОД КОЕФИЦИЕНТОТ НА ЗАСИЛУВАЊЕ НА СООДВЕТНИОТ ОТВОРЕН СИСТЕМ

Се набљудува затворениот систем од слика 6.1.б). Неговата преносна функција е дадена со изразот:

$$\frac{X}{Y} = \frac{P_1}{1 + P_1P_2} \quad (6.10)$$

Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$G_0 = P_1P_2 = K \frac{B}{A} \quad (6.11)$$

каде што B и A се полиноми од комплексната променлива s за континуални системи, односно полиноми од комплексната променлива z за дискретни системи, а K е коефициент на засилување на отворениот систем. Со воведување на смената (6.11) во (6.10), за преносната функција на затворениот систем од слика 6.1.б) се добива:

$$\frac{X}{Y} = \frac{P_1}{1 + K \frac{B}{A}} = \frac{P_1A}{A + KB} \quad (6.12)$$

Половите на затворениот систем се корени на карактеристичната равенка:

$$1 + G_0 = 1 + K \frac{B}{A} = A + KB = 0 \quad (6.13)$$

и, очигледно, нивната положба во комплексната рамнина зависи од коефициентот на засилување K на отворениот систем. Графичкиот приказ на геометриското место на корени на равенката (6.13) во комплексната рамнина (s – рамнината за континуални и

z – рамнината за дискретни системи) во функција од коефициентот K на отворениот систем се нарекува едноставно **геометриско место на корени** на набљудуваниот затворен систем. Лесно може да се заклучи дека геометриското место на корени не претставува една крива, туку множество криви кои се нарекуваат гранки – по една за секој од половите на набљудуваниот затворен систем.

За $K = 0$, корените на равенката (6.13) се поклопуваат со половите на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем. За $K \rightarrow \infty$, корените на равенката (6.13) тежат кон нулите на отворениот систем (вклучувајќи ги и конечните и бесконечните нули). Следствено, **како K се менува од 0 до ∞ , гранките на геометриското место корени на затворениот систем поаѓаат од половите на соодветниот отворен систем и завршуваат во нулите на отворениот систем.**

Пример 6.1. Даден е затворениот линеарен континуален динамички систем, чијшто отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = P_1(s)P_2(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} = K \frac{s+2}{s^2+4s} = K \frac{s+2}{s(s+4)}; K > 0 \quad (6.14)$$

За $P_2(s)=1$ (кога затворениот систем е со единична негативна повратна врска), преносната функција на затворениот систем ќе биде:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{P_1(s)}{1+P_1(s)} = \frac{K(s+2)}{s^2+4s+K(s+2)} \quad (6.15)$$

а нејзините полови се:

$$p_1 = -\frac{1}{2}(4+K) + \sqrt{4 + \frac{1}{4}K^2} \quad (6.16)$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(4+K) - \sqrt{4 + \frac{1}{4}K^2} \quad (6.17)$$

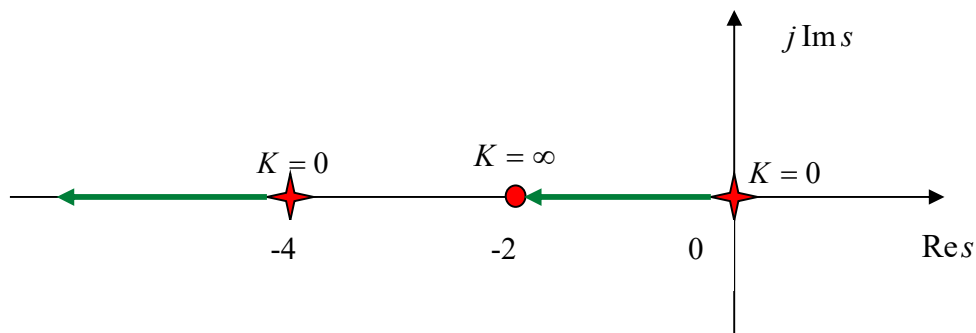
За $K = 0$, полот p_1 ќе биде во точката $p_1 = -\frac{1}{2}(4) + \sqrt{4} = 0$, додека полот p_2 ќе се наоѓа во точката $p_2 = -\frac{1}{2}(4) - \sqrt{4} = -4$. Овие точки одговараат на половите на отворениот систем (6.14). Кога K станува многу големо, (под претпоставка, $K > 0$) полот p_1 ќе тежи кон вредноста -2 :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} p_1 = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}(4+K) + \sqrt{4 + \frac{1}{4}K^2} \right] = -2 \quad (6.18)$$

додека полот p_2 ќе тежи кон $-\infty$:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} p_2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}(4+K) - \sqrt{4 + \frac{1}{4}K^2} \right] = -\infty \quad (6.19)$$

Овие вредности одговараат на конечната нула на отворениот систем (6.14) во -2 и бесконечната нула во $-\infty$. Очигледно, положбата на половите на набљудуваниот затворен систем зависи од коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем и таа зависност графички е прикажана на слика 6.2. Геометриското место на корени за набљудуваниот затворен систем има две гранки, по една за секој пол на отворениот систем и тие гранки лежат на реалната оска во s – комплексната рамнина.



Слика 6.2. Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 6.1 □

6.1.2. КРИТЕРИУМ НА АРГУМЕНТ И МОДУЛ

Ако гранка од геометриското место на корени на системот од слика 6.1.б) минува низ точката p_1 во комплексната рамнина, тоа значи дека таа точка претставува корен на карактеристичната равенка (6.13), односно пол на набљудуваниот затворен систем, за некоја реална вредност на $K > 0$. Со други зборови, мора да важи:

$$A(p_1) + KB(p_1) = 0 \quad (6.20)$$

односно:

$$G_0(p_1) = P_1(p_1)P_2(p_1) = \frac{KB(p_1)}{A(p_1)} = -1 \quad (6.21)$$

што е еквивалентно.

Од (6.21) непосредно следува **критериумот на аргументот**, кој може да се искаже на следниот начин. Точката p_1 ќе биде пол на затворениот систем за дадено $K > 0$ само доколку:

$$\arg G_0(p_1) = 180^\circ + 360^\circ l = (2l+1)\pi \text{ radian}; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.22)$$

Критериумот на аргумент може да се прошири и за $K < 0$ на следниот начин:

$$\arg G_0(p_1) = \begin{cases} (2l+1)\pi \text{ radians, } K > 0 \\ 2l\pi \text{ radians, } K < 0 \end{cases} ; l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.23)$$

Ако точката p_1 претставува пол на набљудуваниот затворен систем, тогаш таа мора, освен критериумот на аргумент, да го задоволува и **критериумот на модул** кој се искажува на следниот начин. Точката p_1 ќе биде пол на затворениот систем за дадено K само доколку:

$$|G_0(p_1)| = \left| K \frac{B(p_1)}{A(p_1)} \right| = 1 \quad (6.24)$$

што значи дека вредноста на K ќе биде дадена со изразот:

$$K = \frac{|A(p_1)|}{|B(p_1)|} \quad (6.25)$$

Благодарение на овие два критериуми, геометриското место корени за даден затворен систем може да се конструира рачно, така што ќе се поврзат сите точки во комплексната рамнина кои го задоволуваат критериумот на аргумент, а потоа критериумот на модул се користи за да се определи конкретната вредност на K за секоја од тие точки. Меѓутоа, денес постојат готови компјутерски програми со помош на кои се избегнува рачното цртање на геометриското место корени за еден систем.

6.1.3. БРОЈ ГРАНКИ НА ЕДНО ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Бројот гранки во геометриското место на корени на еден затворен систем одговара на бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$ – по една гранка за секој пол на отворениот систем.

Пример 6.2. Дадени се преносните функции на соодветниот отворен систем за два затворени системи:

$$G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^2+2s+5)(s+6)} \quad (6.26)$$

$$G_0(z) = \frac{K(z-0.1)(z-0.2)}{z(z^2-z+0.5)} = \frac{K(z-0.1)(z-0.2)}{z(z-0.5+j0.5)(z-0.5-j0.5)} \quad (6.27)$$

Да се определи бројот на гранки во геометриското место на корени за секој од зададените затворени системи.

Решение: а) Четири, бидејќи отворениот систем (6.26) има четири пола:

$$s_1^* = 0, \quad s_{2,3}^* = -1 \pm j2, \quad s_4 = -6 \quad (6.28)$$

б) Три, бидејќи отворениот систем (6.27) има три пола:

$$z_1^* = 0; \quad z_{2,3}^* = 0.5 \pm j0.5 \quad \square \quad (6.29)$$

Пример 6.3. Зошто бројот гранки во геометриското место на корени на затворениот систем мора да одговара на бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$?

Решение: Секоја гранка од геометриското место на корени на затворениот систем претставува по еден пол на затворениот систем. Следствено, геометриското место на корени на затворениот систем мора да има онолку гранки, колку што затворениот систем има полови. Бидејќи бројот полови на затворениот систем е еднаков со бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$, следува дека бројот гранки на геометриското место на корени на затворениот систем одговара на бројот полови на отворениот систем. \square

6.1.4. ГРАНКИ КОИ ЛЕЖАТ НА РЕАЛНАТА ОСКА ВО КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА

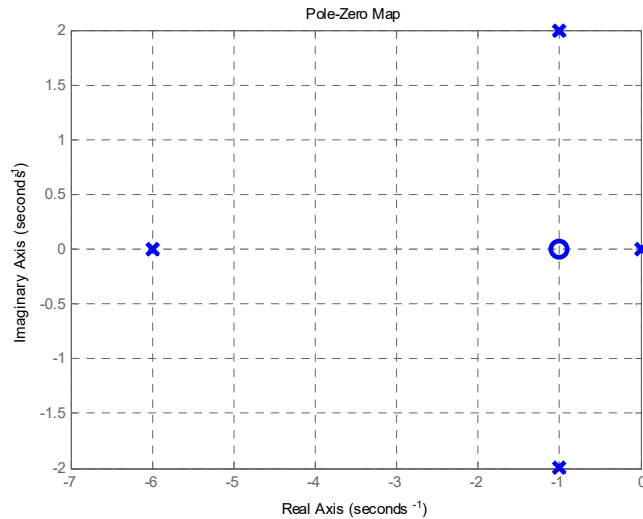
Деловите од геометриското место на корени на затворениот систем кои лежат на реалната оска во комплексната рамнина се определуваат во зависност од знакот на коефициентот на засилување на отворениот систем K врз основа на следните две правила:

Сите точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од непарен број конечни нули и полови на отворениот систем припаѓаат на геометриското место на корени на затворениот систем за $K > 0$. Доколку нема точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од непарен број конечни нули и полови на отворениот систем за $K > 0$, тогаш ниедна гранка од геометриското место на корени на затворениот систем не лежи на реалната оска.

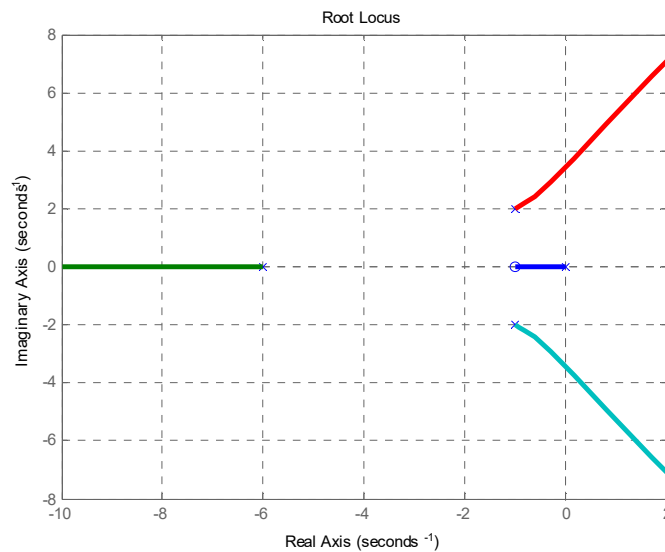
Сите точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од парен број конечни нули и полови на отворениот систем припаѓаат на геометриското место на корени на затворениот систем за $K < 0$. Доколку нема точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од парен број конечни нули и полови на отворениот систем за $K < 0$, тогаш ниедна гранка од геометриското место на корени на затворениот систем не лежи на реалната оска.

Пример 6.4. За секој од отворените системи (6.26) – (6.27) да се прикажат нулите и половите во комплексната рамнина и да се определат деловите од геометриското место на корени на соодветниот затворен систем кои лежат на реалната оска од комплексната рамнина.

Одговор: а) Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.26) во комплексната рамнина е прикажана графички на слика 6.3, додека геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.26), е прикажано на слика 6.4.



Слика 6.3. Графички приказ на нулите и половите на отворениот систем (6.26) во s -комплексната рамнина

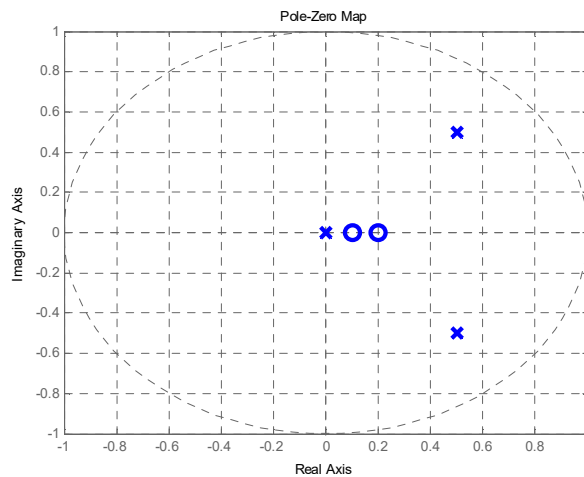


Слика 6.4. Графички приказ на ГМК на затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.26)

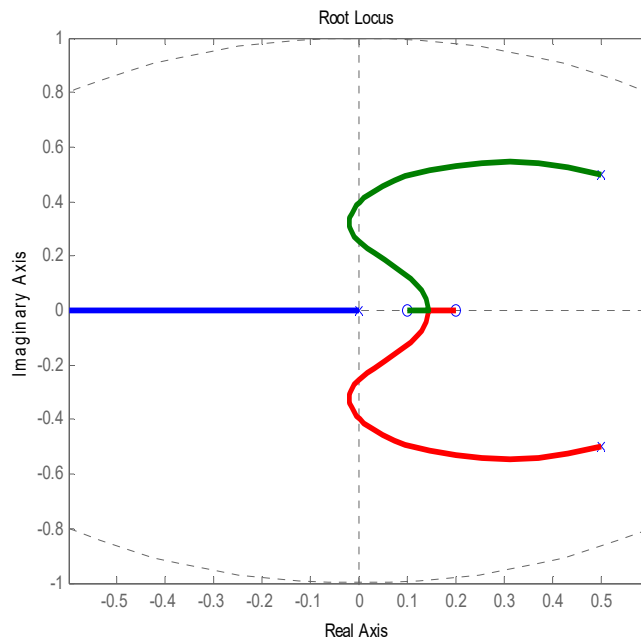
Делот од реалната оска помеѓу точките -1 и 0 се наоѓа лево од непарен број (еден) конечни полови и нули на отворениот систем (6.26). Следствено, тој припаѓа на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$. Исто така, делот од реалната оска помеѓу точките $-\infty$ и -6 се наоѓа лево од непарен број

конечни полови и нули (пет) на отворениот систем (6.26). Следствено, и тој припаѓа на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$. На слика 6.4 се гледаат двете гранки на геометриското место на корени на затворениот систем за $K > 0$, кои лежат на реалната оска.

б) Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.27) во комплексната рамнина е прикажана графички на слика 6.5, додека геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.27), е прикажано на слика 6.6.



Слика 6.5. Положба на нулите и половите на отворениот систем (6.27) во z -комплексната рамнина



Слика 6.6. ГМК на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.27)

Делот од реалната оска помеѓу точките 0.1 и 0.2 се наоѓа лево од непарен број (три) конечни полови и нули на отворениот систем (6.27). Следствено, тој припаѓа на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$. Исто така и делот од реалната оска помеѓу $-\infty$ и 0 се наоѓа лево од непарен број (пет) нули и полови на отворениот систем (6.27). Следствено, и тој припаѓа на ГМК на набљудуваниот затворен систем. На слика 6.6 се гледаат двете гранки на геометриското место на корени на затворениот систем за $K > 0$, кои лежат на реалната оска.

6.1.5. АСИМПТОТИ НА ГРАНКИТЕ ОД ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

На големи растојанија од координатниот почеток во комплексната рамнина, гранките на геометриското место на корени се приближуваат кон одредени асимптоти. Овие асимптоти поаѓаат од точка во комплексната рамнина која се наоѓа на реалната оска и се нарекува **центар на асимптитите** σ_c . Центарот на асимптитите се пресметува според формулата:

$$\sigma_c = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (6.30)$$

каде што $-p_i$ се половите, $-z_i$ се нулите, n е бројот полови, а m е бројот нули на отворениот систем $G_0 = P_1P_2$. Аголот што овие асимптоти го зафаќаат со реалната оска се пресметува според формулата:

$$\beta = \begin{cases} \frac{(2l+1)\pi}{n-m}, & K > 0 \\ \frac{2l\pi}{n-m}, & K < 0 \end{cases} ; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-m-1 \quad (6.31)$$

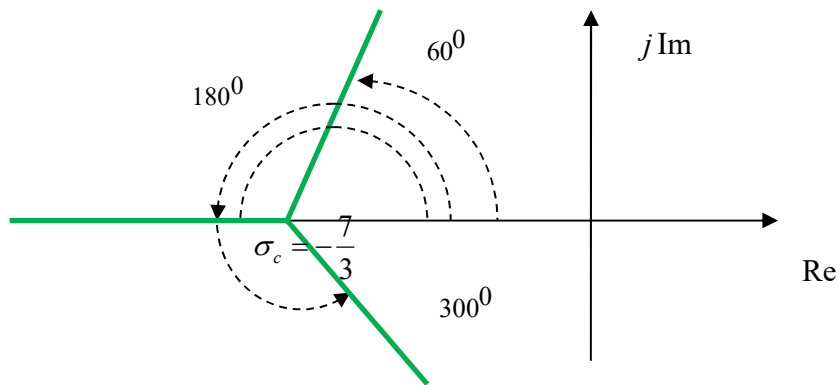
Од (6.30) следува дека бројот асимптоти е $n - m$.

Пример 6.5. Да се определи центарот на асимптитите на геометриското место на корени за затворените системи, чии отворени системи се опишани со формулите (6.26) и (6.27).

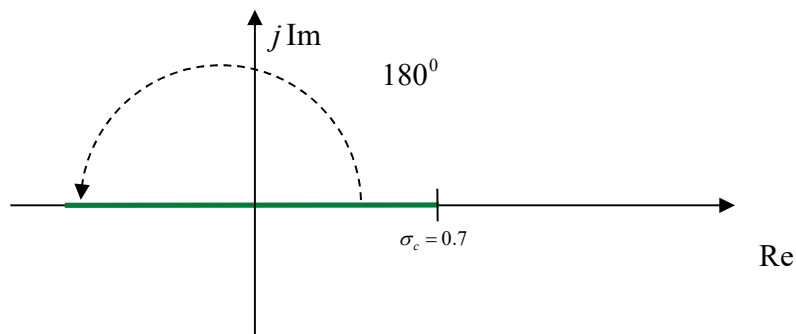
Решение: а) Бидејќи $n - m = 4 - 1 = 3$, бројот асимптоти е еднаков на три. Центарот на овие асимптоти е во точката $\sigma_c = -\frac{0+1-j2+1+j2+6-1}{4-1} = -\frac{7}{3}$. За $K > 0$, асимптитите зафаќаат агол од $\beta_1 = \pi/3$, $\beta_2 = \pi$ и $\beta_3 = 5\pi/3$ радиани со реалната оска.

Асимптотите на геометриското место на корени за затворениот систем чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.26) се прикажани на слика 6.7.

б) Бидејќи $n - m = 3 - 2 = 1$, бројот асимптоти е еднаков на еден. Центарот на оваа асимптота е во точката $\sigma_c = \frac{0.5 - j0.5 + 0.5 + j0.5 - 0.1 - 0.2}{3 - 2} = 0.7$. За $K > 0$, асимптотата зафаќа агол од $\beta = \pi$ радиани со реалната оска. Асимптотите на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.27), се прикажани на слика 6.8.



Слика 6.7. Графички приказ на асимптотите на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.26)



Слика 6.8. Графички приказ на асимптотите на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.27) □

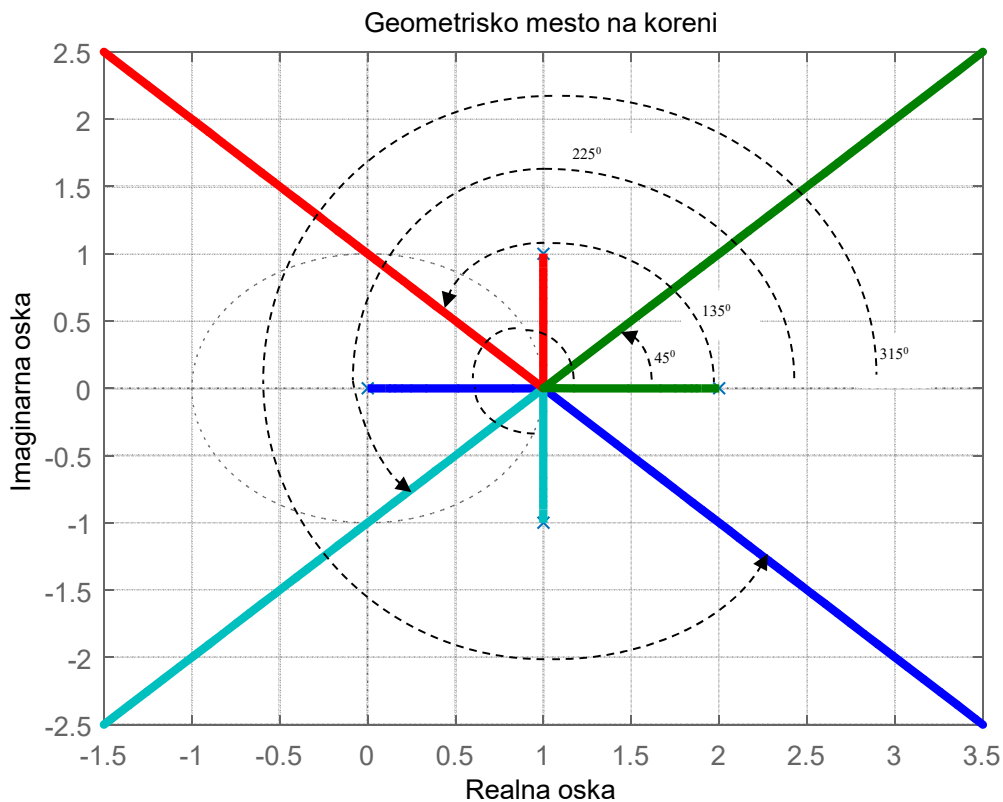
Пример 6.6. Да се определи центарот и аглиите на асимптотите на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{K}{z(z-2)(z-1+j)(z-1-j)} \quad (6.32)$$

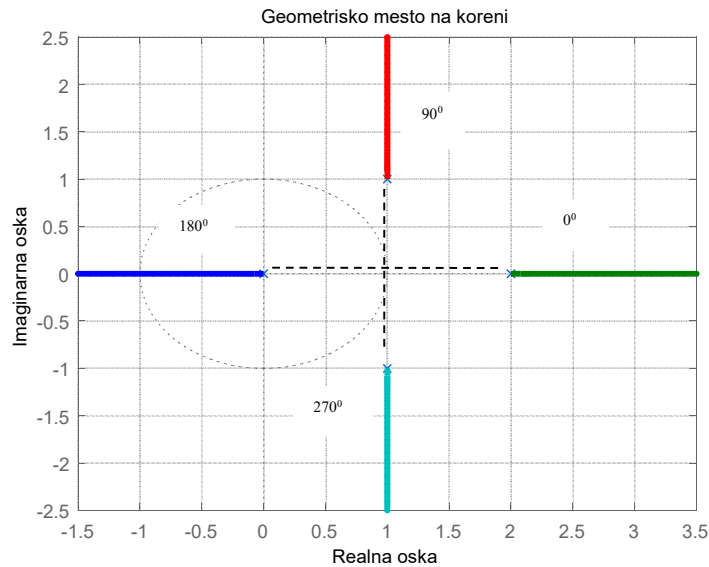
Решение: Центарот на асимптотите е во точката:

$$\sigma_c = -\frac{0-2-1+j-1-j}{4-0} = 1 \quad (6.33)$$

Геометриското место на корени на затворениот систем има четири асимптоти, кои, за $K > 0$, со реалната оска зафаќаат агли $\beta_1 = \pi/4$, $\beta_2 = 3\pi/4$, $\beta_3 = 5\pi/4$ и $\beta_4 = 7\pi/4$. Тие се прикажани на слика 6.9. За $K < 0$, асимптотите зафаќаат агли од $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi/2$, $\beta_3 = \pi$ и $\beta_4 = 3\pi/2$ радиани со реалната оска и се прикажани на слика 6.10.



Слика 6.9. Графички приказ на асимптотите на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.32) за $K > 0$



Слика 6.10. Графички приказ на асимптотите на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.32) за $K < 0$ □

Пример 6.7. Да се покаже дека центарот на асимптотите на геометриското место на корени на еден затворен систем е одреден со формулата (6.30).

Решение: Точките од геометриското место на корени на еден затворен систем ја задоволуваат карактеристичната равенка на системот:

$$A + KB = 0 \tag{6.34}$$

која за континуален систем има конкретен облик:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 + K(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0) = 0 \tag{6.35}$$

Кога (6.35) ќе се подели со полиномот $B(s)$ ќе се добие:

$$s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \dots + K = 0 \tag{6.36}$$

Кога првиот коефициент (коефициентот пред највисокиот степен на комплексната променлива) во еден полином е еднаков на единица, вториот коефициент е еднаков на сумата од нулите на тој полином со негативен знак. Оттаму:

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = \prod_{i=1}^n (s + p_i) \Rightarrow a_{n-1} = \sum_{i=1}^n p_i \tag{6.37}$$

$$B(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0 = \prod_{i=1}^m (s + z_i) \Rightarrow b_{m-1} = \sum_{i=1}^m z_i \quad (6.38)$$

$$-(a_{n-1} - b_{m-1}) = -\left(\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \quad (6.39)$$

За големи вредности на K и соодветно големо растојание од координатниот почеток во комплексната рамнина, $(n-m)$ -те корени на карактеристичната равенка (6.36) тежат кон прави асимптоти долж кои збирот на овие $n-m$ корени е еднаков на $-(a_{n-1} - b_{m-1})$. Бидејќи $-(a_{n-1} - b_{m-1})$ е реален број, асимптотите мора да ја сечат реалната оска во одредена точка, во која збирот од $n-m$ еднакви нули е еднаков на $-(a_{n-1} - b_{m-1})$. Така се добива равенката (6.30).

Истото важи и за дискретните системи, само што сега комплексната променлива s во (6.35) – (6.39) се заменува со комплексната променлива z . \square

6.1.6. ТОЧКИ НА СОСТАВУВАЊЕ ОДНОСНО РАЗДВОЈУВАЊЕ НА ГРАНКИТЕ НА ЕДНО ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Точка на раздвојување односно составување σ_b е точка на реалната оска од која поаѓаат, односно во која се сретнуваат, две или повеќе гранки на геометриското место на корени на еден затворен систем.

Точката на раздвојување односно составување на две или повеќе гранки од геометриското место на корени на еден затворен систем се определува како решение на следната равенка:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_b + p_i} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{\sigma_b + z_i} \right) \quad (6.40)$$

каде што $-p_i$ се половите, а $-z_i$ се нулите на отворениот систем G_0 .

Решението на равенката (6.40) претпоставува одредување на нулите на полином по непознатата σ_b од произволен степен $n+m-1$. Оттаму, точката на раздвојување односно составување на гранките од геометриското место на корени на еден затворен систем може да се определи аналитички само во случаите кога отворениот систем има релативно едноставна преносна функција. Во другите случаи положбата на оваа точка

се определува приближно било интуитивно, било со примена на компјутерски програми.

Пример 6.8. Да се определат точките на спојување односно раздвојување на гранките на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K(s+5)}{(s+2+j2)(s+2-j2)} \quad (6.41)$$

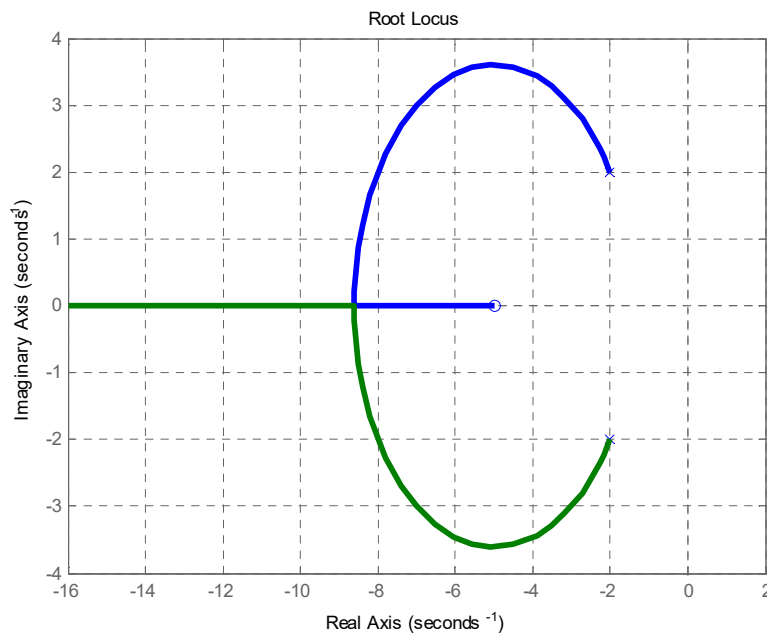
Решение: Од равенките (6.40) и (6.41) непосредно следува:

$$\frac{1}{\sigma_b + 2 + j2} + \frac{1}{\sigma_b + 2 - j2} = \frac{1}{\sigma_b + 5} \quad (6.42)$$

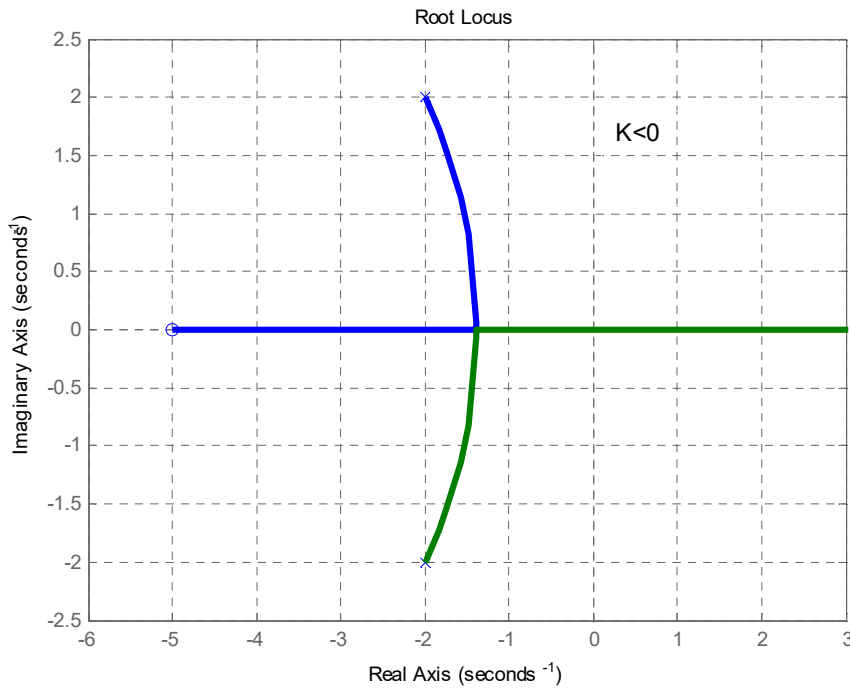
па бараните точки се решенијата на равенката:

$$\sigma_b^2 + 10\sigma_b + 12 = 0 \Rightarrow \sigma_{b1} = -8.6; \sigma_{b2} = -1.39 \quad (6.43)$$

Точката $\sigma_b = -8.6$ е точка на спојување на гранките на ГМК на затворениот систем за $K > 0$, слика 6.11, додека точката $\sigma_b = -1.4$ е точка на спојување на ГМК на затворениот систем за $K < 0$, како што е покажано на слика 6.12.



Слика 6.11. Графички приказ на точката на раздвојување на гранките од ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.41) за $K > 0$



Слика 6.12. Графички приказ на точката на раздвојување на гранките од ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.41) за $K < 0$ □

6.1.7. АГЛИ НА ОДДАЛЕЧУВАЊЕ ОД КОМПЛЕКСЕН ПОЛ И ПРИБЛИЖУВАЊЕ КОН КОМПЛЕКСНА НУЛА НА ГРАНКИТЕ ОД ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

Аголот под кој геометриското место на корени се оддалечува од еден комплексен пол се определува според формулата:

$$\theta_D = 180^\circ + \arg G_0' \quad (6.44)$$

каде што $\arg G_0'$ е фазниот агол на G_0 пресметан во комплексниот пол, со занемарување на влијанието на самиот пол.

Аголот под кој геометриското место на корени се приближува до една комплексна нула се определува според формулата:

$$\theta_A = 180^\circ - \arg G_0'' \quad (6.45)$$

каде што $\arg G_0''$ е фазниот агол на G_0 пресметан во комплексната нула, со занемарување на влијанието на самата нула.

Пример 6.9. Да се определи аголот на оддалечување на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)}, K > 0 \quad (6.46)$$

од комплексниот пол $s = -1 + j$.

Решение: Аргументот на $G_0(s)' = \lim_{s \rightarrow -1+j} (s+1-j)G_0(s)$ е:

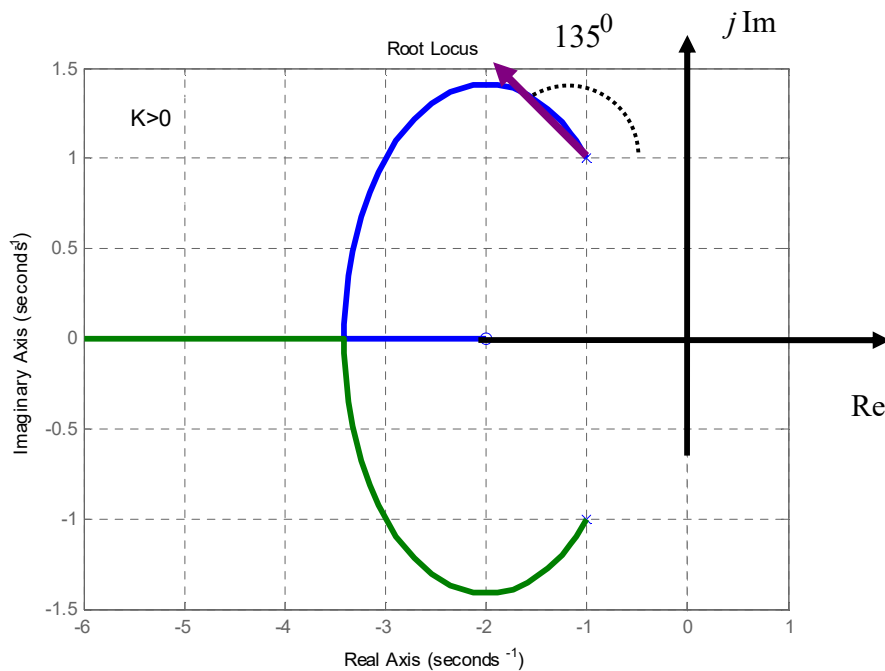
$$\arg[G_0(-1+j)'] = \arg \frac{K(-1+j+2)}{(-1+j+1+j)} = \arg \frac{K(1+j)}{2j} \quad (6.47)$$

$$= \arg K \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}1 = -45^\circ \quad (6.48)$$

Оттука, аголот на оддалечување на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем од комплексниот пол $s = -1 + j$ е:

$$\theta_D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \quad (6.49)$$

како што е покажано на слика 6.13.



Слика 6.13. Приказ на аголот на оддалечување на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.46) од комплексниот пол $s = -1 + j$ □

Пример 6.10. Да се определи аголот на приближување на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{K(z-j)(z+j)}{z(z+1)}, \quad K > 0 \quad (6.50)$$

до комплексната нула $z = j$.

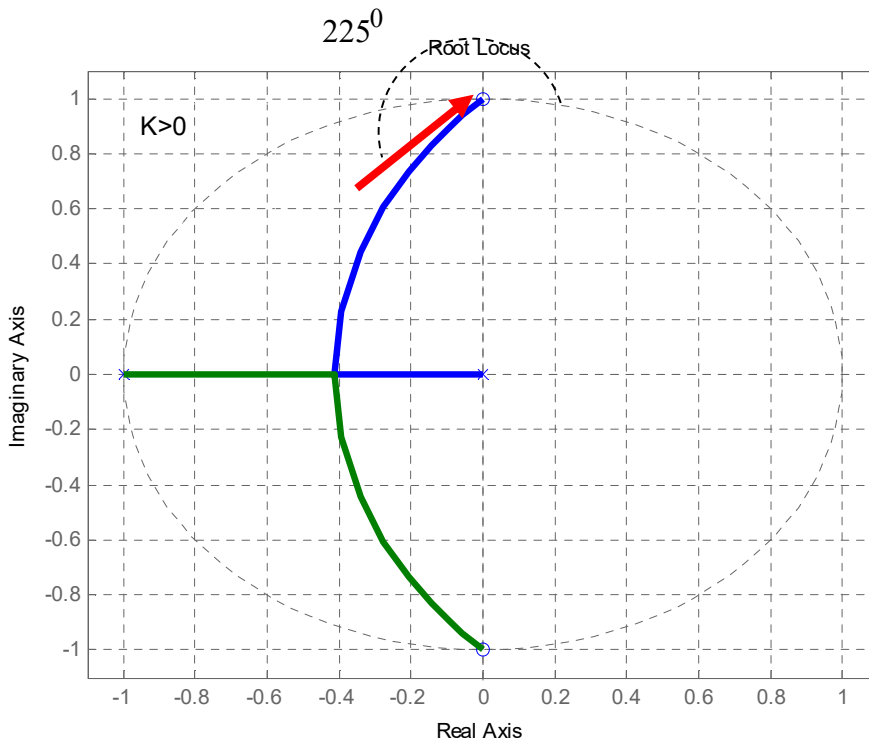
Решение: Аргументот на $G_0(z)'' = \lim_{z \rightarrow j} \frac{G_0(z)}{(z-j)}$ е:

$$\arg[G_0(j)] = \arg \frac{K(j+j)}{j(j+1)} = \arg \left(2K \frac{1-j}{2} \right) = \operatorname{arctg}(-1) = -45^\circ \quad (6.51)$$

Оттука, аголот на приближување на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем кон комплексната нула $z = j$ е:

$$\theta_A = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ \quad (6.52)$$

како што е покажано на слика 6.14.



Слика 6.14. Графички приказ на аголот на приближување на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.49) до комплексната нула $z = j$ □

6.1.8. КОНСТРУКЦИЈА НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН СИСТЕМ

Постапката за скицирање на геометриското место на корени се состои во следното:

- 1) Најнапред се определува бројот гранки на геометриското место корени за набљудуваниот затворен систем.
- 2) Потоа се определува делот односно деловите од геометриското место корени кои лежат на реалната оска од комплексната рамнина.
- 3) Во продолжение, се определува центарот и аглиите на асимптотите на гранките од геометриското место корени и истите се исцртуваат на дијаграмот.
- 4) Како следно, се определуваат аглиите на приближување кон комплексните нули и оддалечување од комплексните полови, доколку такви постојат, и истите се означуваат на дијаграмот.
- 5) На крајот се скицираат гранките од геометриското место на корени, така што секоја гранка почнува од некој пол и завршува во некоја конечна нула на отворениот систем или се стреми кон бесконечност долж некоја од асимптотите. Прецизноста на исцртувањето на геометриското место корени, се разбира, се зголемува со искуството на цртачот.

Точноста на скицираното геометриско место на корени се подобрува ако се определат точките на раздвојување односно спојување на неговите гранките и ако се примени принципот на аргумент за одредени точки од гранките. Принципот на модул се користи за определување на вредноста на коефициентот K на отворениот систем која одговара на конкретна точка од геометриското место на корени.

Бидејќи коефициентите на полиномите во броителот и именителот на преносната функција од набљудуваниот затворен систем се реални броеви, неговите комплексни полови се јавуваат во конјугирано-комплексни парови, па геометриското место на корени е симетрично во однос на реалната оска.

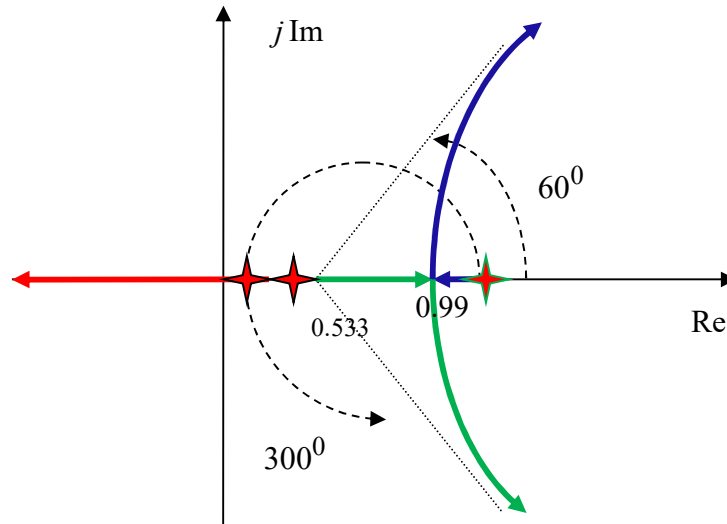
Пример 6.11. Да се нацрта геометриското место корени на затворениот линеарен континуален динамички систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = P_1(z)P_2(z) = \frac{K}{(z-1)(z-0.2)(z-0.4)}, \quad K > 0 \quad (6.53)$$

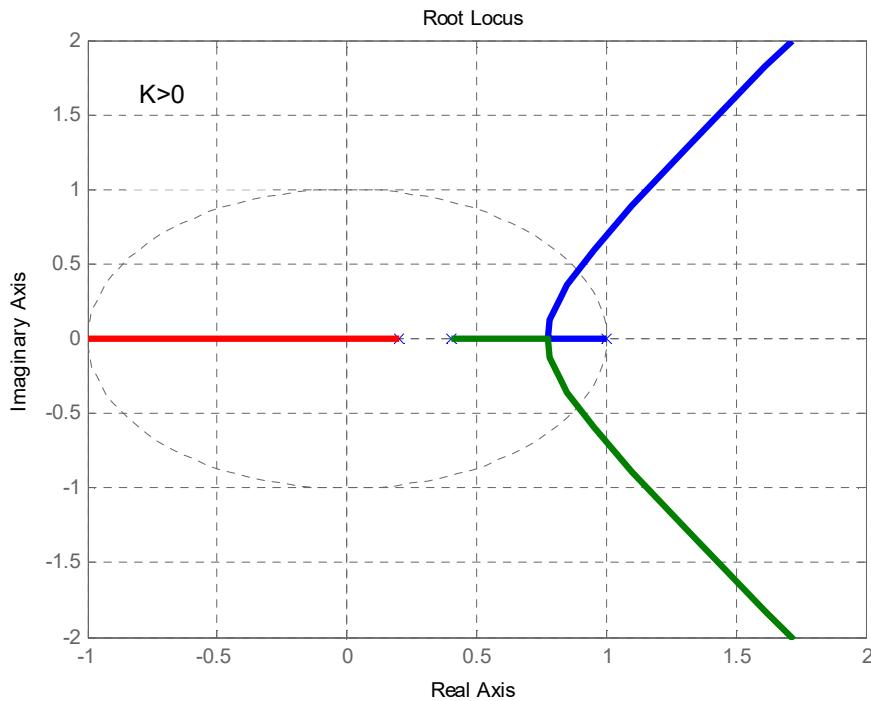
Решение: Бараното геометриско место на корени е скицирано на слика 6.15.

Деловите од реалната оска помеѓу 0.4 и 1 и помеѓу $-\infty$ и 0.2 припаѓаат на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем за $K > 0$. Центарот на асимптотите се определува според (6.30) и се наоѓа во точката:

$$\sigma_c = \frac{1+0.2+0.4}{3} = 0.533 \quad (6.54)$$



Слика 6.15. Графички приказ на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.53)



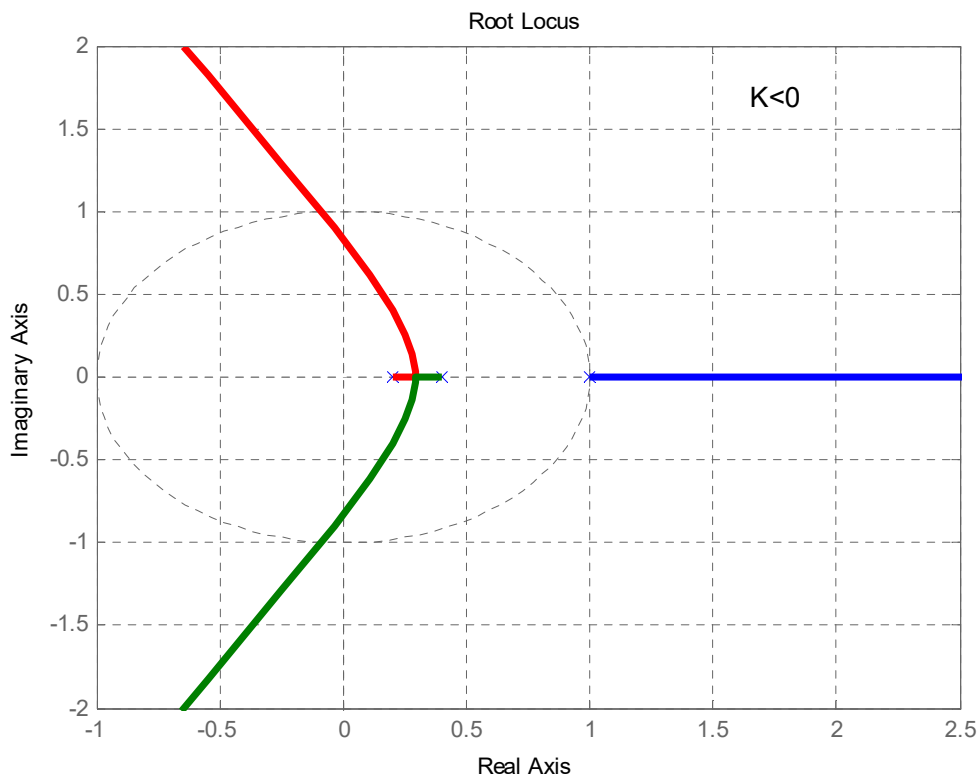
Слика 6.16. Геометриското место корени од слика 6.15 добиено со помош на MATLAB за $K > 0$

ГМК за набљудуваниот затворен систем има три асимптоти и тие зафаќаат агол со реалната оска $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$ и $\beta_3 = 300^\circ$, соодветно. Бидејќи две гранки од ГМК се раздвојуваат на реалната оска помеѓу 0.4 и 1, на тој дел мора да постои точка на раздвојување, која претставува решение на равенката:

$$\frac{1}{\sigma_b - 1} + \frac{1}{\sigma_b - 0.2} + \frac{1}{\sigma_b - 0.4} = 0 \Rightarrow 3\sigma_b^2 - 3.2\sigma_b + 0.68 = 0 \quad (6.55)$$

Тоа е точката $\sigma_b = 0.99$ (првото решение на (6.54) $\sigma_{b1} = 0.0763$ не припаѓа на интервалот (0.4,1)). На слика 6.16 е истото ГМК добиено со помош на MATLAB.

Геометриското место корени за $K < 0$ се црта на сличен начин. Во овој случај на геометриското место на корени припаѓа делот од реалната оска помеѓу точките 0.2 и 0.4 и точките 1 и ∞ . Точката на раздвојување на гранките е $\sigma_{b1} = 0.0763$, а трите асимптотите зафаќаат агол со реалната оска од $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_2 = 120^\circ$ и $\beta_3 = 240^\circ$, соодветно. Геометриското место на корени за набљудуваниот систем за $K < 0$ е прикажано на слика 6.17.



Слика 6.17. Геометриското место корени од пример 6.11 добиено со помош на MATLAB за $K < 0$ □

6.2. ПРИМЕНА НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ ВО АНАЛИЗАТА НА ЗАТВОРЕНИТЕ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ

6.2.1. ОДРЕДУВАЊЕ НА ПРЕНΟΣНАТА ФУНКЦИЈА НА ЗАТВОРЕНИОТ СИСТЕМ И НЕГОВИОТ ОДСИВ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

Преносната функција на затворениот систем G може лесно да се определи од неговото геометриско место на корени за конкретна вредност на факторот на засилување K на соодветниот отворен систем G_0 . Нека, под претпоставка, таа е од облик:

$$G = \frac{G_0}{1 + G_0} \quad (6.56)$$

што значи дека затворениот систем е со единична негативна повратна врска. Преносната функција на објектот во директната гранка G во овој случај е и преносна функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем и за континуален случај таа има општ облик:

$$G_0(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + w_1)(s + w_2) \cdots (s + w_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (6.57)$$

G има ист облик и за дискретниот случај, само што тогаш е функција од комплексната променлива z . Со воведување на смената (6.57) во (6.56) се добива:

$$G = \frac{G_0}{1 + G_0} = \frac{K \frac{A}{B}}{1 + K \frac{A}{B}} = \frac{KA}{B + KA} \quad (6.58)$$

Од изразот (6.58) е очигледно дека G и G_0 имаат исти нули, но различни полови. Конкретно, за континуален систем, преносната функција G има облик:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{K(s + w_1)(s + w_2) \cdots (s + w_m)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)} \quad (6.59)$$

Половите $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$ на затворениот систем (6.59) се определуваат директно од неговото геометриско место на корени за секоја дадена вредност на K .

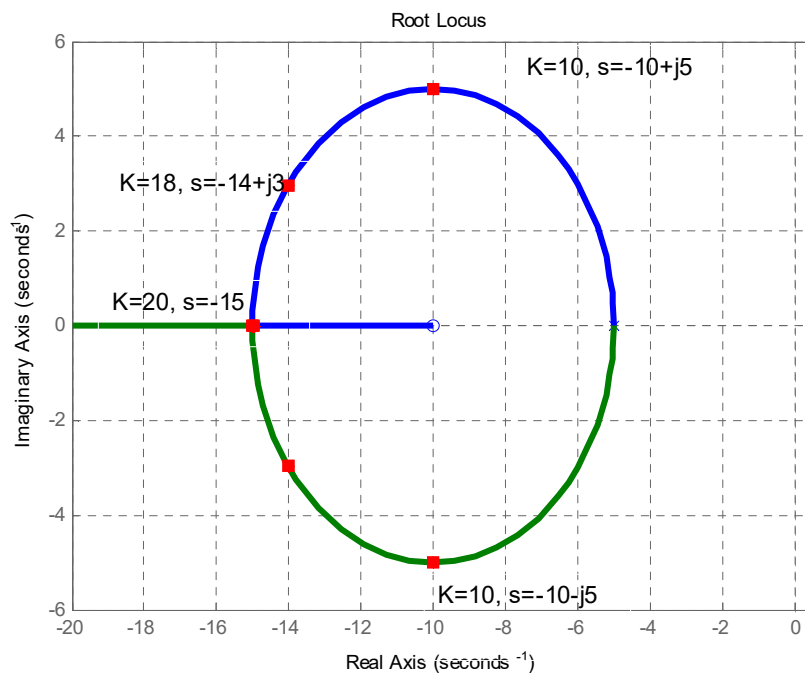
Пример 6.12. Даден е затворениот линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K(s+10)}{(s+5)^2}; \quad K > 0 \quad (6.60)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на слика 6.18. Да се определи преносната функција на затворениот систем.

Решение: На слика 6.18 се прикажани половите на затворениот систем за неколку вредности на коефициентот K . Така, за $K = 20$ затворениот систем има двократен пол во точката $s = -15$, па неговата преносна функција ќе биде од облик:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{20(s+10)}{(s+15)^2} \quad (6.61)$$



Слика 6.18. Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 6.12 □

Кога затворениот систем, чија преносна функција се одредува, не е со единична негативна повратна врска, туку има преносна функција од општ облик:

$$G = \frac{P_1}{1 + P_1 P_2} = \frac{P_1}{1 + G_0} \quad (6.62)$$

каде што P_2 е преносната функција во повратната гранка, неговите полови се определуваат непосредно од геометриското место на корени, но неговите нули мора да се определат посебно од изразот (6.62).

Пример 6.13. Даден е затворениот линеарен стационарен континуален динамички систем со неединична повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$P_1(s)P_2(s) = \frac{K(s+10)}{(s+5)} \cdot \frac{1}{(s+5)}; \quad K > 0 \quad (6.63)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на слика 6.18. Да се определи преносната функција на затворениот систем.

Решение: Со воведување на конкретните изрази (6.63) во изразот (6.62), за преносната функција на затворениот систем се добива:

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{1 + P_1(s)P_2(s)} = \frac{K(s+10)(s+5)}{(s+5)^2 + K(s+10)} = \frac{K(s+10)(s+5)}{(s+s_1)(s+s_2)} \quad (6.64)$$

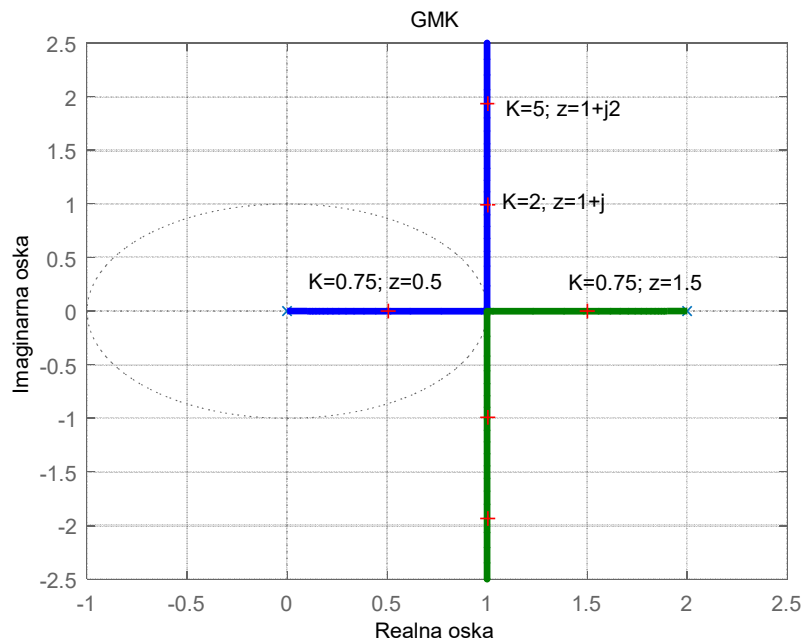
Оттука, затворениот систем (6.64) има нули во точките $w_1 = -10$ и $w_2 = -5$ и тие се разликуваат од нулите на соодветниот отворен систем. Бидејќи геометриското место на корени на затворениот систем (6.64) е исто со геометриското место на корени на системот од претходниот пример, тој ќе ги има истите полови за конкретни вредности на коефициентот K . Така, за $K = 20$ затворениот систем (6.64) има двократен пол во точката: $s = -15$, па неговата преносна функција ќе биде од облик:

$$G(s) = \frac{10(s+5)(s+10)}{(s+15)^2} \quad \square \quad (6.65)$$

Пример 6.14. Даден е затворениот линеарен стационарен дискретен динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{K}{z(z-2)}; \quad K > 0 \quad (6.66)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на слика 6.19. Да се определи преносната функција на затворениот систем.



Слика 6.19. Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 6.14

Решение: На слика 6.19 се прикажани половите на затворениот систем за неколку вредности на коефициентот K . Така, за $K = 0.75$ затворениот систем има прости реални полови во точките $z_1 = 0.5$ и $z_2 = 1.5$, па неговата преносна функција ќе биде од облик:

$$G(z) = \frac{0.75}{(z - 0.5)(z - 1.5)} \quad \square \quad (6.67)$$

6.2.2. ОДРЕДУВАЊЕ НА РЕЗЕРВИТЕ НА ЗАСИЛУВАЊЕ И ФАЗА НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКОТО МЕСТО НА КОРЕНИ

Резервата на засилување е најголемиот фактор за кој може да се зголеми коефициентот на засилување K на отворениот систем, а затворениот систем и понатаму да остане стабилен. Таа може да се определи од геометриското место на корени на затворениот систем според формулата:

$$\text{резерва на засилување} = \frac{\text{вредност на } K \text{ на границата на стабилност}}{\text{изведбена вредност на } K} \quad (6.68)$$

За потсетување, границата на стабилност за континуалните системи е имагинарната оска во s -комплексната рамнина, додека границата на стабилност за дискретните

системи е единичната кружница во z -комплексната рамнина. **Ако геометриското место на корени не ја минува границата на стабилност, резервата на засилување на затворениот систем е бесконечно голема.**

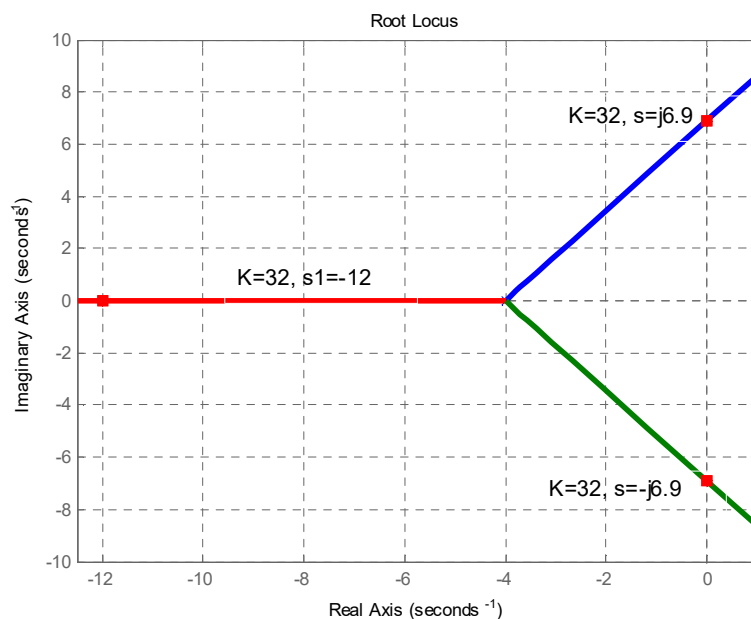
Пример 6.15. На слика 6.20 е прикажано геометриското место на корени на еден континуален динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{16}{(s+4)^3} \quad (6.69)$$

Да се определи неговата резерва на засилување.

Решение: Од слика 6.20 може да се утврди дека вредноста на коефициентот на засилување K , која одговара на пресекот од геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем со имагинарната оска, е $32 \cdot 16 = 512$, додека конструктивната односно изведбена вредност на овој коефициент е 16. Следствено, резервата на засилување на набљудуваниот затворен систем од примерот е:

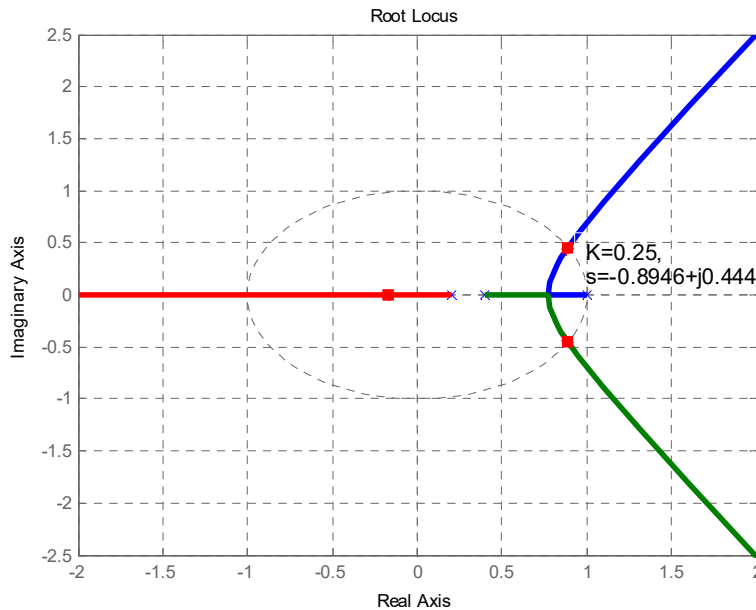
$$\text{резерва на засилување} = \frac{512}{16} = 32 \quad (6.70)$$



Слика 6.20. Геометриско место на корени на затворениот систем од пример 6.15 □

Пример 6.16. Да се определи резервата на засилување на затворениот дискретен систем од примерот 6.11.

Решение:



Слика 6.21. Геометриското место на корени на системот од пример 6.16 добиено со помош на MATLAB

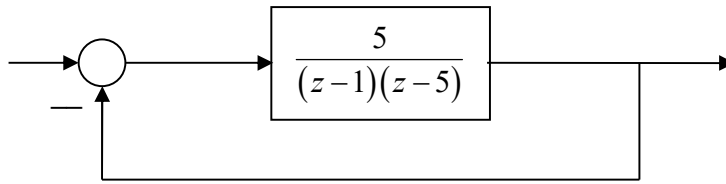
Од слика 6.21 се гледа дека геометриското место на корени на набљудуваниот систем ја сече единичната кружница за $K = 0.25$. Следствено, неговата резерва на засилување ќе биде:

$$\text{резерва на засилување} = \frac{0.25}{1} = 0.25 \quad \square \quad (6.71)$$

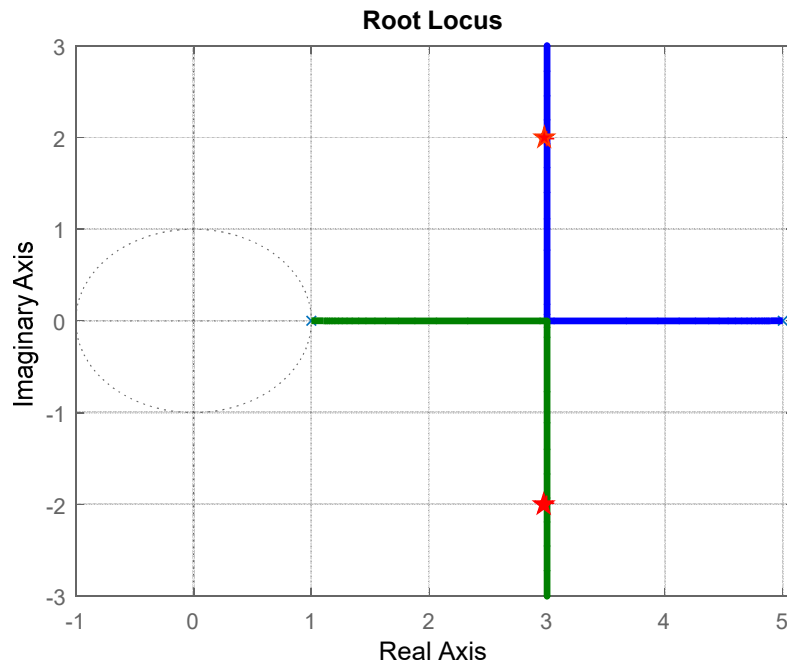
Резервата на фаза на еден затворен систем исто така може да се определи од неговото геометриско место на корени. За таа цел најнапред треба да се определи точка ω_1 на границата на стабилност за која $|G_0| = 1$ за изведбената (конструктивна) вредност K на коефициентот на засилување на отворениот систем. Тогаш резервата на фаза на набљудуваниот систем се определува според формулата:

$$\text{резерва на фаза} = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] \quad (6.72)$$

Пример 6.17. Даден е затворениот линеарен стационарен дискретен систем од слика 6.22, а неговото геометриско место на корени е прикажано на слика 6.23. Да се определи резервата на фаза на набљудуваниот систем.



Слика 6.22. Структурна блок-шема на затворениот систем од примерот 6.17



Слика 6.23. Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 6.17

Решение: Решението на равенката:

$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{5}{\sqrt{2-2\cos(\omega_1 T_0)} \cdot \sqrt{26-10\cos(\omega_1 T_0)}} = 1 \quad (6.73)$$

е $\omega_1 = 1.13 \text{ rad/sec}$ и тоа ја одредува точката во комплексната рамнина на $G_0(j\omega_1)$ за која $|G_0(j\omega_1)| = 1$. Аргументот на $G_0(j\omega_1)$ е -291° , па резервата на фаза на набљудуваниот затворен систем е:

$$\text{резерва на фаза} = 180^\circ - 291^\circ = -111^\circ \quad \square \quad (6.74)$$

6.2.3. ОДРЕДУВАЊЕ НА ФАКТОРОТ НА РЕЛАТИВНО ПРИДУШУВАЊЕ НА ЕДЕН ЗАТВОРЕН КОНТИНУАЛЕН СИСТЕМ СО ПОМОШ НА НЕГОВОТО ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем за еден затворен систем од втор ред без конечни нули, кој одговара на конкретна вредност на факторот на релативно придушување ζ на системот, може лесно да се определи од неговото геометриско место на корени. За таа цел низ координатниот почеток се повлекува права, која со негативниот дел од реалната оска зафаќа агол:

$$\theta = \arccos \zeta \quad (6.75)$$

Оваа права претставува права на константен фактор на релативно придушување. Коефициентот на засилување K кој одговара на пресечната точка на правата (6.75) со геометриското место на корени на набљудуваниот систем е бараната вредност за K .

Постапката може да се примени за произволен пар конјугирано-комплексни полови на еден затворен континуален систем од втор или повисок ред. Меѓутоа, кога се работи за системи од повисок ред, определениот фактор на придушување за конкретен пар комплексни полови не мора да го претставува придушувањето на самиот систем (доминантната временска константа).

Пример 6.18. Да се определи факторот на релативно придушување на затворениот систем од трет ред од примерот 6.15 за $K = 0.5$.

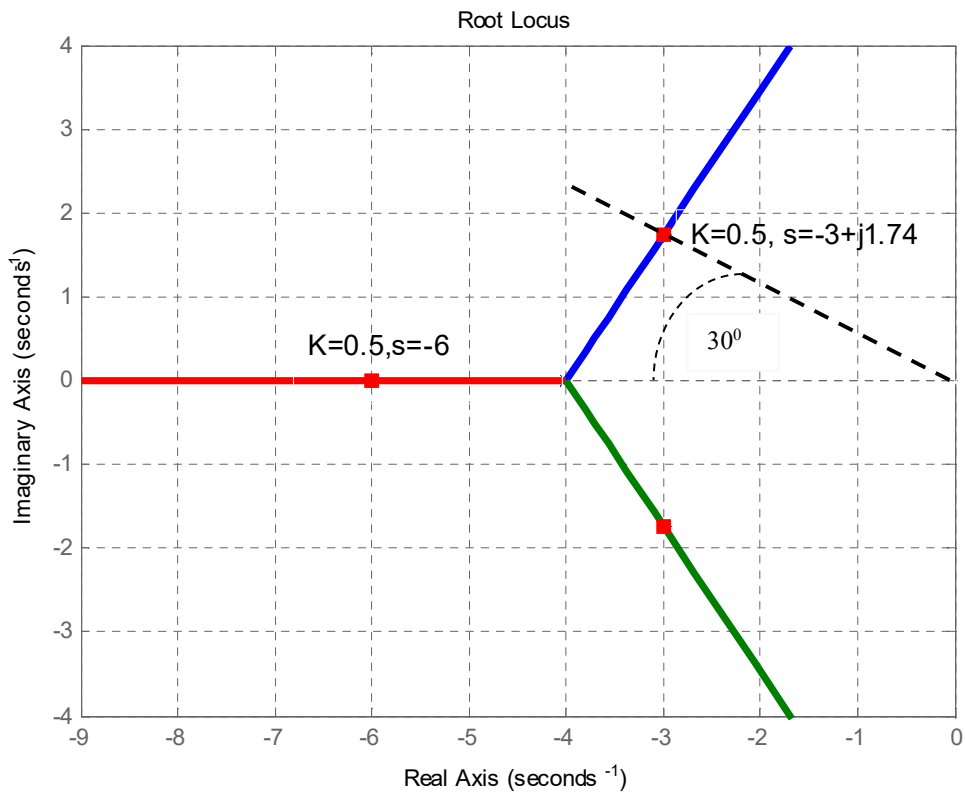
Решение: Ако се повлече права од координатниот почеток низ точката на геометриското место на корени на која одговара коефициент на засилување $K = 0.5$, тоа ќе биде правата на факторот на релативно придушување ζ кој одговара на парот конјугирано-комплексни полови на набљудуваниот систем и тој се определува по формулата:

$$\zeta = \cos \theta \quad (6.76)$$

каде што θ е аголот што го зафаќа правата на бараниот фактор на релативно придушување со негативниот дел од реалната оска. Во конкретниот случај $\theta = 30^\circ$, па:

$$\zeta = \cos \theta = \cos 30^\circ = 0.866 \quad (6.77)$$

Определената вредност за ζ претставува добра апроксимација на факторот на придушување на набљудуваниот затворен систем од трет ред, затоа што неговите комплексни полови имаат доминантно влијание врз неговото поведење.



Слика 6.24. Геометриско место на корени на затворениот систем од примерот 6.18

Добиениот резултат може лесно да се провери ако се определат половите на затворениот систем и пресмета факторот на релативно придушвање на доминантниот пар конјугирано-комплексни полови:

$$G_0(s) = \frac{16K}{(s+4)^3} = \frac{8}{(s+4)^3} \quad (6.78)$$

$$G(s) = \frac{8}{s^3 + 12s^2 + 48s + 72} \quad (6.79)$$

$$s_{1,2} = -3 \pm j1.74 ; s_3 = -6$$

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 6s + 12 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \Rightarrow \omega_n^2 = 12, \zeta = 0.866 \square \quad (6.80)$$

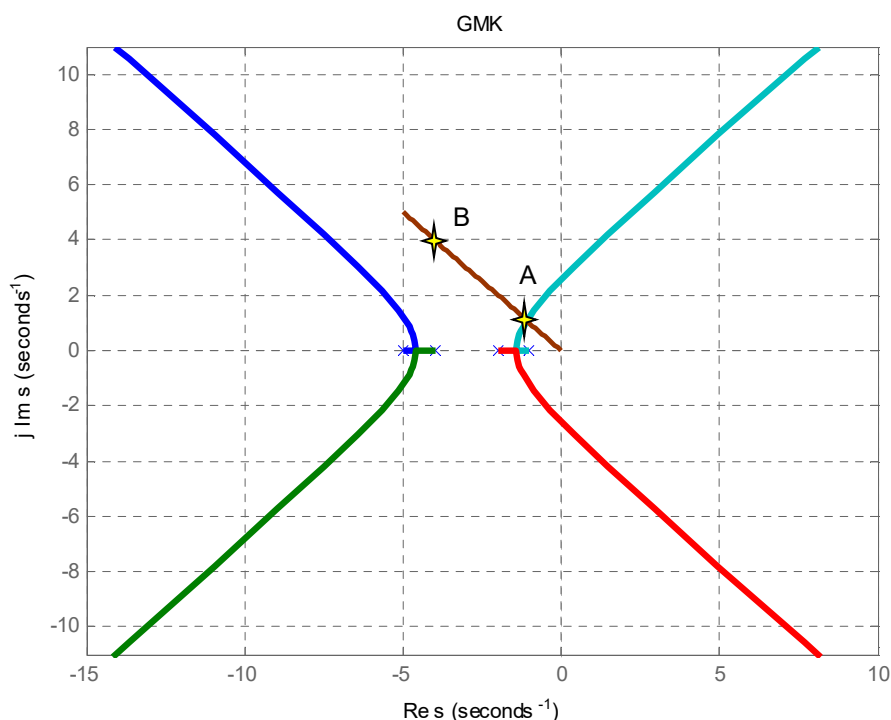
6.3. СИНТЕЗА ПО ПАТ НА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ПОМОШ НА ПОСТАПКАТА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Постапката геометриско место на корени дава графичка информација за преодниот одсвив и стабилноста на набљудуваниот затворен систем. Геометриското место на корени за даден систем може да се скицира релативно брзо и едноставно, со што се добива општ увид во промените во преодниот одсвив, кои ги предизвикува промената на коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем. За да се добијат потребните квантитативни информации за синтеза на набљудуваниот систем, одделни точки од геометриското место на корени можат да се определат и прецизно.

Геометриското место на корени овозможува да се одбере соодветна вредност за коефициентот на засилување K на отворениот систем, која ќе обезбеди затворениот систем да го има саканото поведење во преодниот режим, односно ќе ги оствари поставените проектни барања во поглед на преодниот одсвив на проектираниот затворен систем. Со изборот на конкретна вредност за коефициентот на засилување K на отворениот систем врз основа на неговото геометриско место на корени, се избира преоден одсвив кој зависи од половите на затворениот систем одредени со усвоената вредност на коефициентот на засилување K на отворениот систем, а кои претставуваат точки од геометриското место на корени, кои одговараат на конкретната вредност на K . Кога K се менува, се менува и преодниот одсвив, зашто на различни вредности за K одговараат различни точки од геометриското место на корени на затворениот систем, односно различни полови на затворениот систем. Меѓутоа, во секој случај, типот на преодниот одсвив на затворениот систем е ограничен со неговото геометриско место на корени, односно со половите кои се дефинирани со тоа геометриско место на корени.

На слика 6.25 е прикажано геометриското место на корени за даден затворен систем. Следствено, овој систем може да има само преоден одсвив одреден со неговото геометриско место на корени, односно со половите кои претставуваат точки од неговото геометриско место на корени. Нека, под претпоставка, системот треба да има преоден одсвив кој не е дефиниран со неговото геометриско место на корени (половите на системот кои го одредуваат саканиот преоден одсвив на системот не се наоѓаат на неговото геометриско место на корени) и нека тој преоден одсвив, зададен со времето на смирување и максималниот прескок е претставен на слика 6.25 со точката B . Линијата на слика 6.25 што ја поврзува точката B и координатниот почеток претставува линија на константен максимален прескок, што значи дека преодните одсвиви дефинирани со точки од оваа линија ќе имаат ист максимален прескок, а различни други параметри како, на пример, различно време на смирување. Очигледно, точката B не се наоѓа на геометриското место на корени на набљудуваниот систем, што значи дека тој не може да го има саканиот преоден режим. Најблиска точка од геометриското место на корени на набљудуваниот систем до саканата точка B е точката A , што значи дека системот може да има преоден режим со ист максимален прескок како саканиот, но со време на смирување кое одговара на точката A . Ова може да се постигне со едноставно нагудување на коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем. Меѓутоа, проектното барање затворениот систем да има

време на смирување (односно брзина на одсив) кое одговара на точката B не може да се постигне само со нагодување на коефициентот на засилување на отворениот систем K . Со други зборови, промената на брзината на одсив на набљудуваниот систем, при иста вредност на максималниот прескок, од вредноста која одговара на точката A , на вредност која одговара на точката B , не може да се постигне преку нагодување на коефициентот K , бидејќи точката B не се наоѓа на геометриското место на корени на набљудуваниот систем. Затоа проблемот се решава на друг начин.

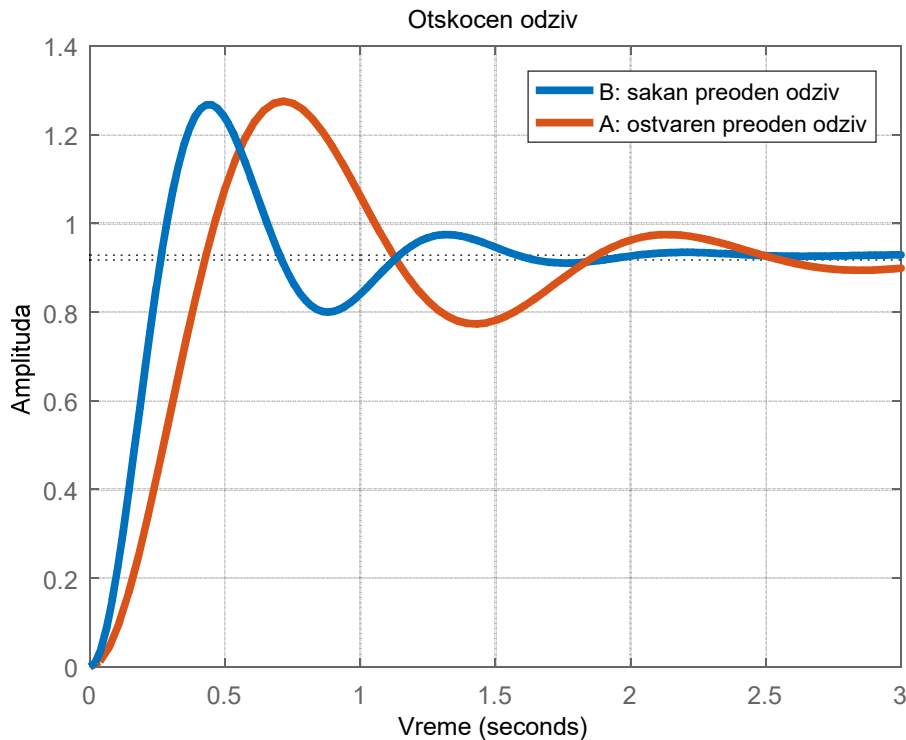


Слика 6.25. Геометриско место на корени за конкретен затворен систем; A – можно проектно решение, B – проектно решение кое не може да се реализира преку нагодување на коефициентот K на соодветниот отворен систем

На слика 6.26 е прикажан саканиот преоден одсив на набљудуваниот затворен систем, одреден со точката B , кој има ист максимален прескок, но покусо време на смирување, односно се одликува со поголема брзина на одсив во однос на одсивот кој одговара на точката A од слика 6.25.

Еден начин да се реши поставениот проблем е конкретниот систем да се замени со друг систем, чие геометриско место на корени минува низ точката B . Меѓутоа, ова решение по правило е скапо и несоодветно, бидејќи системите се одбираат и според други нивни карактеристики, а не само преодниот одсив. На пример, еден мотор или лифт се одбираат според нивната моќност и брзина. Нивните компоненти, кои би го обезбедиле саканиот преоден одсив, многу лесно можат да не ги задоволуваат барањата во поглед на моќноста. Затоа проблемот се решава не со замена на дадениот систем, туку со негово компензирање со дополнителни нули и полови, така што

компензираниот систем ќе има геометриско место на корени кое минува низ саканите полови за дадена вредност на коефициентот на засилување K .



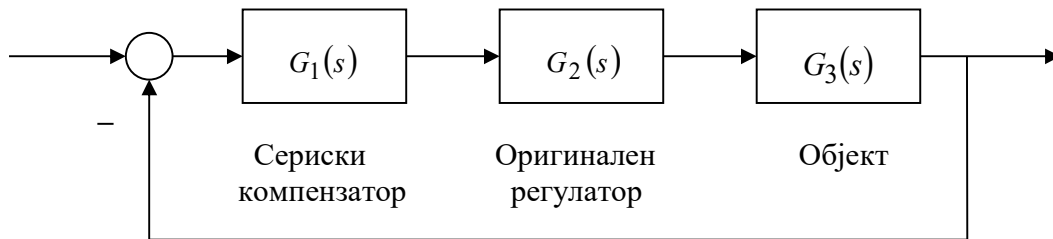
Слика 6.26. Графички приказ на преодниот одзив одреден со точките A и B од слика 6.25

Една предност на компензацијата е што дополнителните нули и полови се додаваат пред објектот, во делот од системот кој се карактеризира со мала моќност, па нивното присуство не претставува дополнително оптоварување на објектот или дополнителен проектен проблем, бидејќи не се судруваат со барањата за излезната моќност на објектот. Можен недостаток на компензацијата е што додавањето дополнителни нули и полови го зголемува редот на компензираниот систем во однос на некомпензираниот, а тоа има значително влијание врз саканиот одзив на системот.

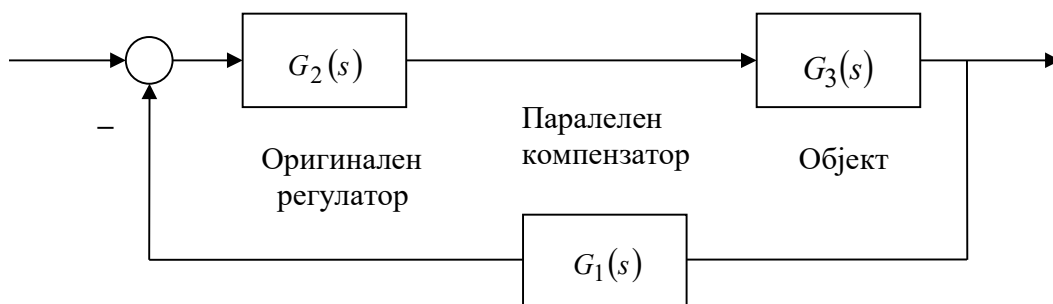
Компензаторите можат да се реализираат со пасивни или активни мрежи. Компензаторите кои реализираат чисто интегрирање или чисто диференцирање се нарекуваат **идеални компензатори**. Идеалните компензатори се реализираат само со активни мрежи, кои претпоставуваат примена на активни засилувачи и евентуални дополнителни извори на енергија. Еден идеален интегрирачки компензатор се користи за подобрување на стационарната грешка односно квалитетот на поведението на компензираниот систем во стационарен режим. Нејова предност е што обезбедува нулева стационарна грешка. Еден идеален диференцирачки компензатор се користи за подобрување на преодниот одзив на компензираниот систем. За оваа цел често се

користат идеални електромеханички компензатори како, на пример, тахометрите, бидејќи тие на погоден начин се поврзуваат со објектот.

Компензаторите кои се реализираат со пасивни елементи какви што се, на пример, отпорниците и кондензаторите, не остваруваат чисто интегрирање или диференцирање и не се идеални компензатори. Нивната предност се состои во пониската цена на чинење во однос на активните компоненти и фактот дека за својата работа не бараат дополнителни извори на енергија. Недостаток им е што не можат да обезбедат нулева стационарна грешка како идеалните интегрирачки компензатори. Изборот на активен или пасивен компензатор зависи од неговата цена на чинење, саканото поведење на компензираниот систем, преносната функција и поврзувањето со останатите компоненти од компензираниот систем. На слика 6.27 се прикажани два типа компензација – каскадна или сериска компензација и паралелна компензација. Кај каскадната компензација, компензаторот $G_1(s)$ е приклучен во директната гранка во делот со мала моќност, пред и во серија со објектот. Кај паралелната компензација, компензаторот $G_1(s)$ е приклучен во повратната врска. И двата вида компензација ги менуваат половите и нулите на отворениот систем, така што геометриското место на корени минува токму низ саканите полови на затворениот систем.



а)



б)

Слика 6.27. Компензирани системи: а) каскадна (сериска) компензација; б) паралелна компензација

6.3.1. СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР СО ПОСТАПКАТА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Под претпоставка дека е постигнато саканото поведење на проектираниот затворен систем во стационарен режим (саканата вредност на стационарната грешка) без да е значително променет односно повлијаен неговиот преоден режим, самиот преоден режим на еден затворен линеарен динамички систем може да се подобри со помош на каскадна односно сериска компензација на два начина. Притоа, подобрувањето на преодниот режим со компензација во основа значи да се проектира компензиран систем кој ќе има зададена вредност на максималниот прескок и покусо време на смирување од некомпензираниот систем.

Првиот начин да се постигне саканата цел е преку компензација со **идеален диференцијален компензатор**. Идеалниот диференцијален компензатор е чист диференцијатор, кој се вметнува во директната гранка од затворениот систем во серија со објектот. Внесувањето чист диференцијатор во директната гранка од затворениот систем има за резултат внесување дополнителна нула во преносната функција на соодветниот отворен систем за проектираниот затворен систем. Недостаток на постапката е реализацијата на чистиот диференцијатор, која е можна само со активни мрежи, а тоа значи повисока цена на чинење и потреба од дополнителни извори на енергија. Исто така, процесот на диференцирање е проследен со појава на големи несакани шумови. Реалните сигнали што се диференцираат, секогаш се проследени со одредени шумови. Дури и кога нивото на овие шумови е ниско, нивната фреквенција е значително повисока од фреквенцијата на самиот сигнал што се диференцира, па со диференцирањето на шумот со висока фреквенција, се појавува голем несакан шум.

Во втората постапка не се применува чисто диференцирање. Наместо чист диференцијатор, се користи **неидеален диференцијален компензатор** кој само го апроксимира диференцирањето, а се реализира со пасивни мрежи. Неидеалниот диференцијален компензатор внесува дополнителна нула и далечен пол во преносната функција на соодветниот отворен систем за проектираниот затворен систем.

6.3.1.1. СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИДЕАЛЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Преодниот одзив на еден затворен линеарен стационарен динамички систем може да се дефинира, односно зададе, преку соодветен избор на неговите полови, односно нивната положба во комплексната рамнина. Доколку саканите полови се наоѓаат на геометриското место корени од системот, сè што треба да се направи за да се постигне саканиот преоден одзив е да се избере соодветната вредност за коефициентот на засилување K на отворениот систем. Со други зборови, синтезата на преодниот одзив на затворениот систем се изведува преку нагудување на коефициентот на засилување

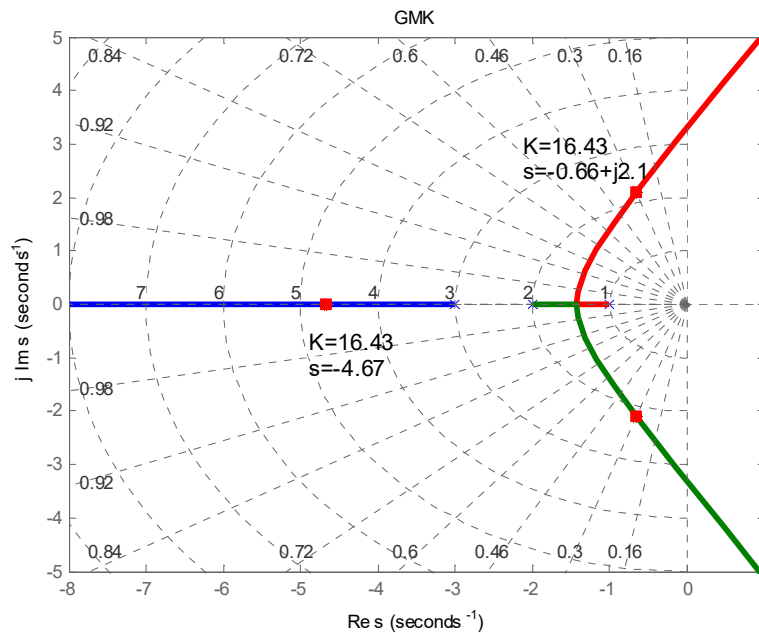
на отворениот систем. Доколку саканите полови не се наоѓаат на геометриското место корени од набљудуваниот систем, потребно е преку компензација да се измени преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, така што новото геометриско место на корени ќе минува низ саканите точки, односно саканите полови на компензираниот систем ќе лежат на новото геометриско место на корени. Компензацијата генерално се состои во додавање нули и полови кон преносната функција на соодветниот отворен систем, а додавањето дополнителна нула кон оваа преносна функција има за резултат зголемување на брзината на одсив на компензираниот систем во однос на некомпензираниот, односно намалување на времето на смирување.

Додавањето нула кон преносната функција на соодветниот отворен систем, во случајот на континуални системи, може да се претстави преку компензатор со следната преносна функција:

$$G_c(s) = s + z_c \quad (6.81)$$

Заради обликот на преносната функција (6.81) идеалниот диференцијален компензатор се нарекува уште **пропорционално-диференцирачки регулатор** или накусо **ПД – регулатор**. На сликите 6.28 – 6.31 е прикажан едноставен пример за тоа како примената на чист диференцијатор ја зголемува брзината на одсив на компензираниот во однос на некомпензираниот систем. Секој од компензираните системи на слика 6.29, слика 6.30 и слика 6.31 има доминантни полови со ист фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3$. Следствено, може да се очекува дека компензираните системи ќе имаат ист максимален прескок како и некомпензираниот систем од слика 6.28. Реалниот дел на доминантните полови од компензираните системи е помал од реалниот дел на доминантните полови од некомпензираниот систем, што значи дека доминантните полови на компензираните системи се наоѓаат подалеку од имагинарната оска во однос на доминантните полови од некомпензираниот систем. Оттаму, времето на смирување на компензираните системи треба да биде покусо од времето на смирување на некомпензираниот систем. Бидејќи доминантните полови на компензираниот систем од слика 6.30 се наоѓаат најдалеку од имагинарната оска, овој систем ќе има најкучо време на смирување во однос на останатите компензирани системи и, се разбира, во однос на некомпензираниот систем.

Имагинарниот дел на доминантните полови од компензираните системи е поголем од имагинарниот дел на доминантните полови од некомпензираниот систем, што значи дека доминантните полови на компензираните системи се наоѓаат подалеку од реалната оска во однос на доминантните полови од некомпензираниот систем. Следствено, компензираните системи ќе имаат помало време на максимален прескок отколку некомпензираниот систем. Од сите компензирани системи на слика 6.29, слика 6.30 и слика 6.31, најмало време на максимален прескок ќе има системот на слика 6.30, бидејќи неговите доминантни полови се наоѓаат најдалеку од реалната оска.



Слика 6.28. Графички приказ на геометриското место на корени на некомпензиран систем со

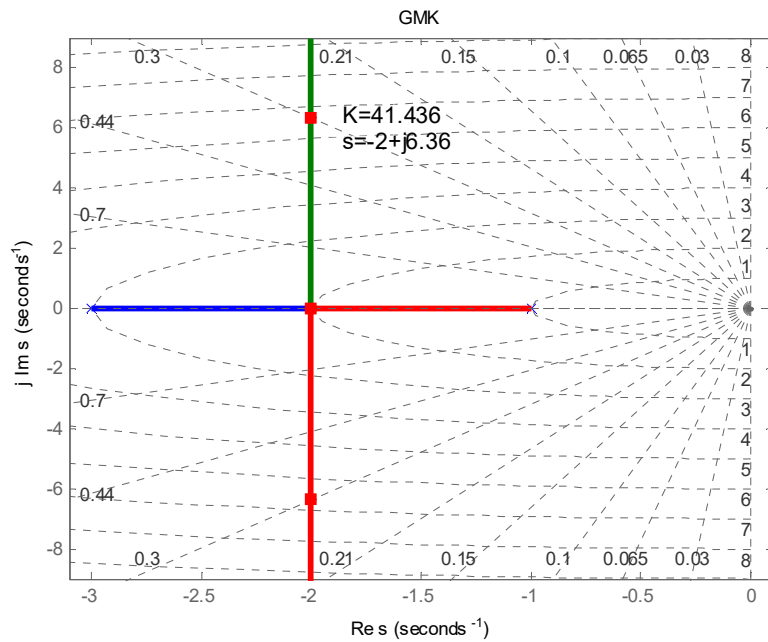
$$G_0(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

и фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3$

Кога дополнителната нула што се воведува во преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од слика 6.28 се оддалечува од координатниот почеток, доминантните полови на компензираните системи се поместуваат кон координатниот почеток и кон доминантните полови од некомпензираниот систем. Ова е најизразено кај компензираниот систем од слика 6.31.

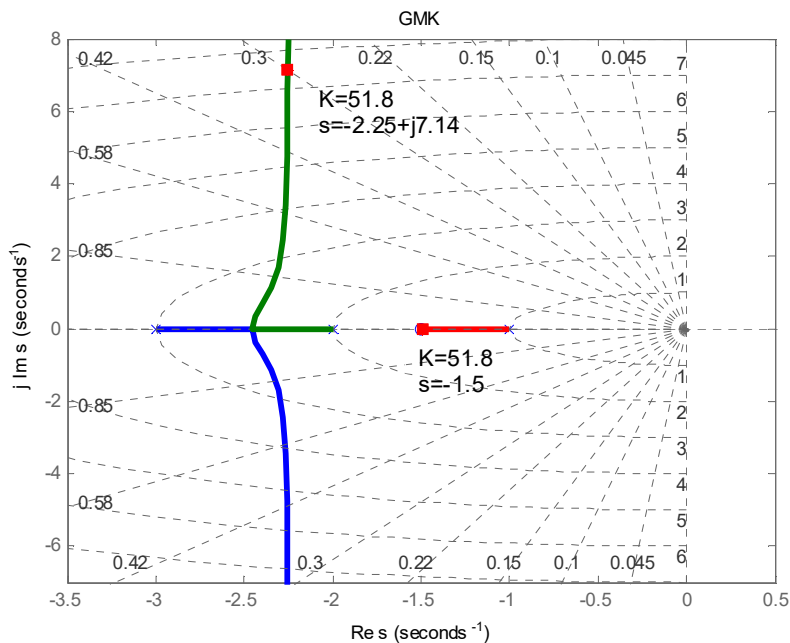
Резултатите добиени со компензација на системот од слика 6.28, како што е прикажано на слика 6.29, слика 6.30 и слика 6.31, се дадени во табела 6.1. Иако компензациите претставени на слика 6.29 и слика 6.31 за резултат имаат побавен одзив во однос на компензираниот систем од слика 6.30, сепак задоволуваат, затоа што го забрзуваат одзивот на некомпензираниот систем од слика 6.28, обезбедувајќи го во исто време саканиот максимален прескок.

Дополнителна придобивка од применетата постапка на компензација со идеален диференцијален компензатор е намалувањето односно подобрувањето на стационарната грешка, иако не е применет интегрален компензатор. Така, ако се погледа во табела 6.1, може да се забележи дека стационарната грешка на компензираниот систем е барем за третина помала од стационарната грешка на некомпензираниот систем. Меѓутоа, читателот не смее да заклучи дека подобрувањето на преодниот одзив на еден затворен систем преку каскадна компензација со идеален диференцијален компензатор секогаш води кон подобрување и на стационарната грешка.



Слика 6.29. Слика 6.26.б) Графички приказ на геометриското место на корени на компензирианиот систем

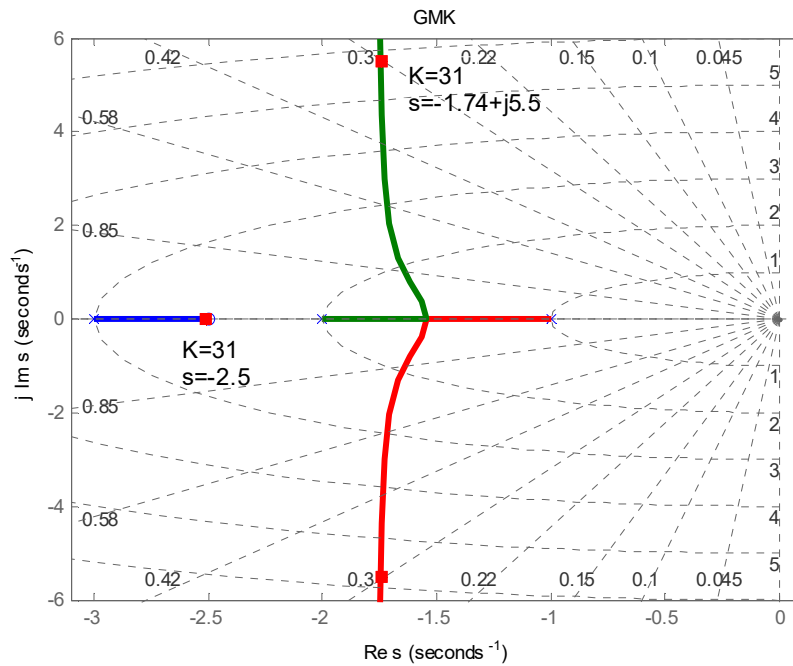
со $G_0(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ и фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3$



Слика 6.30. Графички приказ на геометриското место на корени на компензирианиот систем со

$G_0(s) = \frac{K(s+1.5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ и фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3$

6. СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



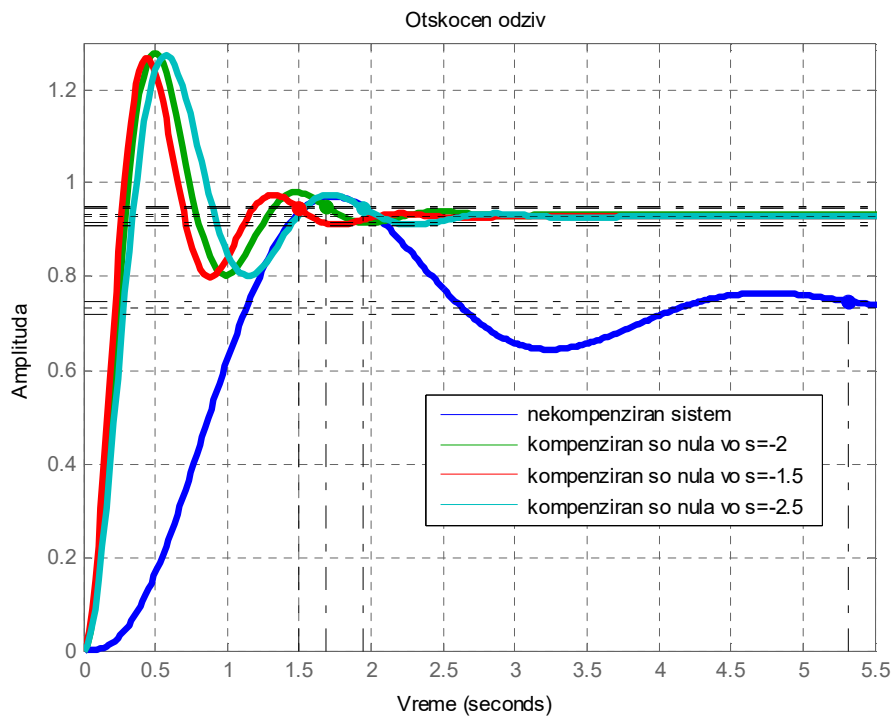
Слика 6.31. Графички приказ на геометриското место на корени на компензираниот систем со

$$G_0(s) = \frac{K(s + 2.5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

и фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3$

Табела 6.1. Компензација на системот од слика 6.28 со диференцијален компензатор

	Некомпензиран систем	Компензација од слика 6.29	Компензација од слика 6.30	Компензација од слика 6.31
Доминантни полови	$-0.66 \pm j2.1$	$-2 \pm j6.36$	$-2.25 \pm j7.14$	$-1.74 \pm j5.5$
K	16.43	41.436	51.8	31
ζ	0.3	0.3	0.3	0.3
ω_n	2.2	6.67	7.48	5.77
$M\%$	32.7	37.1	36.5	37.2
T_s	5.32	1.68	1.5	1.95
T_p	0.686	0.199	0.178	0.229
K_p	2.738	13.8	12.95	12.917
$e(\infty)$	0.267	0.068	0.072	0.072
Трет пол	-4.67	Нема	-1.49	-2.51
Нула	Нема	Нема	-1.5	-2.5
Апроксимација од 2.ред	ОК	Систем од втор ред	ОК	ОК

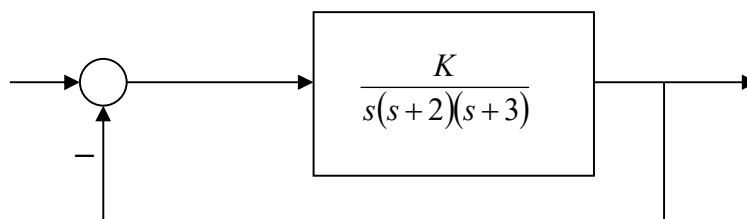


Слика 6.32. Графички приказ на отскочниот одзив на некомпензираниот и компензираните системи од слика 6.28 – 6.31

Пример 6.19. Да се изврши сериска компензација со идеален диференцијален компензатор на затворениот линеарен континуален динамички систем од слика 6.30, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

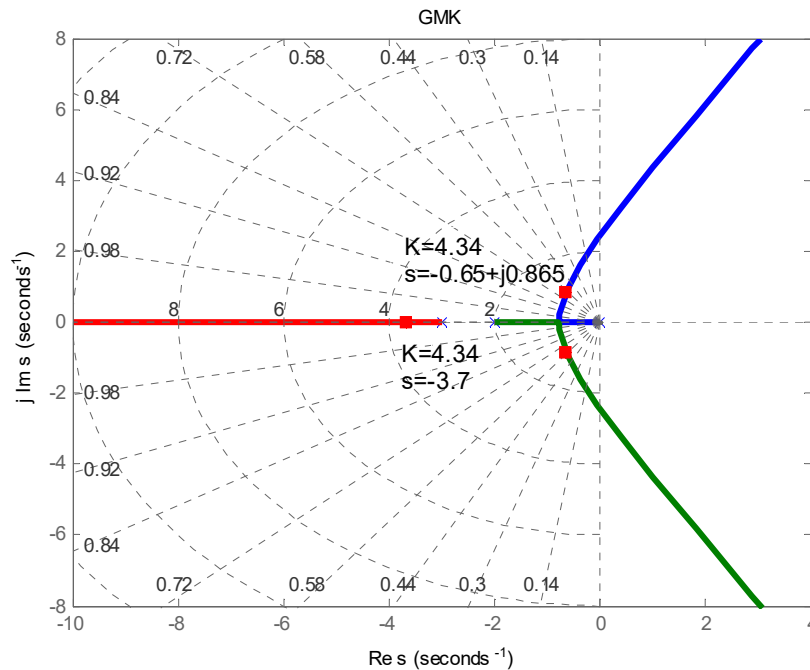
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)}, K > 0 \quad (6.82)$$

така што компензираниот систем ќе има максимален прескок помал од 10% и трипати покусо време на смирување од некомпензираниот.



Слика 6.33. Структурна блок-шема на некомпензираниот систем од примерот 6.19

Решение: Геометриското место корени на некомпензираниот систем од слика 6.33 е прикажано на слика 6.34.



Слика 6.34. Геометриското место на корени на некомпензираниот систем од примерот 6.19

На максимален прескок од 10% одговара фактор на релативно придушување $\zeta = 0.58$, а линијата на константен фактор на придушување $\zeta = 0.58$, која минува низ координатниот почеток, зафаќа агол од 48° со негативниот дел од реалната оска во s -комплексната рамнина. Со пребарување долж оваа линија (пребарувањето се состои во наоѓање точки за кои важи критериумот на аргументот) се утврдува дека доминантните полови на некомпензираниот систем се наоѓаат во точките $-0.65 \pm j0.865$, а со примена на критериумот на модулот се утврдува дека на овие точки одговара коефициент на засилување на отворениот систем $K = 4.34$. Следствено, времето на смирување на некомпензираниот систем е:

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.65} = 6.15 \quad (6.83)$$

Бидејќи одредувањето на максималниот прескок и времето на смирување на зададениот некомпензиран затворен систем, кој е од трет ред, е засновано врз негова апроксимација со систем од втор ред, потребно е да се провери дали таквата апроксимација е издржана. Со други зборови, треба да се провери дали преодниот одзив на реалниот некомпензиран систем од трет ред има ист или приближно ист максимален прескок и време на смирување како и системот од втор ред кој

претставува негова апроксимација. За таа цел потребно е да се одреди и третиот пол на некомпензираниот систем. Овој пол сигурно е реален и лежи на реалната оска во s -комплексната рамнина, а се одредува така што на гранката од геометриското место корени на некомпензираниот систем, која поаѓа од полот на отворениот систем во $s = -3$ и лежи на реалната оска, се бара точка на која ѝ одговара иста вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем $K = 4.34$ како и на доминантните полови $s_{1,2} = -0.65 \pm j0.865$. Така се одредува третиот пол на некомпензираниот систем во точката $s_3 = -3.7$, кој се наоѓа повеќе од пет пати подалеку од имагинарната оска во однос на доминантниот пар полови $s_{1,2} = -0.65 \pm j0.865$. Следствено, може да се заклучи дека направената апроксимација на некомпензираниот систем од слика 6.33 со систем од втор ред е прифатлива.

За да може да се изврши компензација на системот од слика 6.33 со идеален диференцијален компензатор, кој внесува дополнителна нула во преносната функција од отворениот систем, најнапред треба да се определи доминантниот пар полови на компензираниот систем. Овие полови се определуваат од проектниот услов времето на смирување на компензираниот систем да биде трипати покусо од времето на смирување на некомпензираниот систем. Следствено, новото време на смирување изнесува:

$$\tilde{T}_s = \frac{T_s}{3} = 2.05 \quad (6.84)$$

а реалниот дел на доминантниот пар полови од компензираниот систем може да се определи според формулата:

$$\sigma = \frac{4}{\tilde{T}_s} = \frac{4}{2.05} = 1.95 \quad (6.85)$$

Имагинарниот дел на доминантниот пар полови од проектираниот компензиран систем се определува од условот овие полови да лежат на правата $\zeta = 0.58$, кој обезбедува компензираниот систем да го има саканиот прескок:

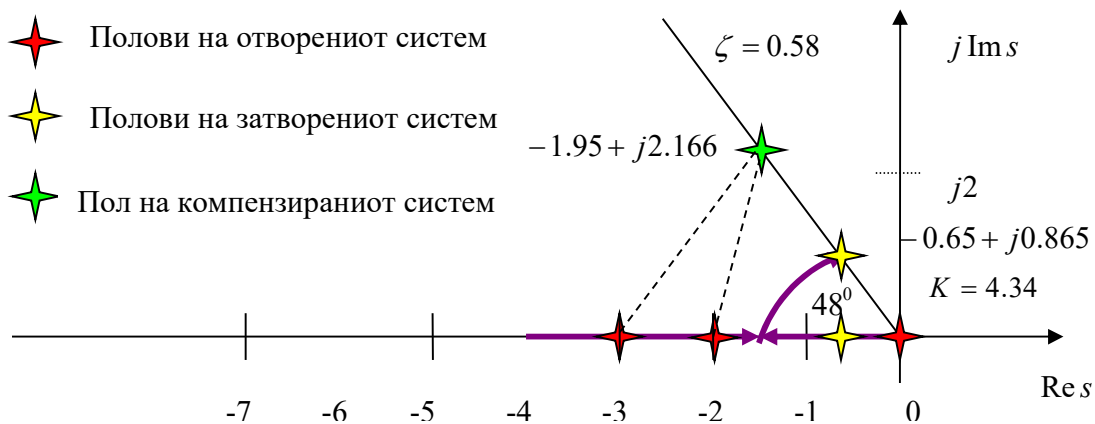
$$\omega = 1.95 \operatorname{tg}(48^\circ) = 2.166 \quad (6.86)$$

Така доминантниот пар полови на компензираниот систем се утврдува во точките $s_{1,2} = -1.95 \pm j2.166$.

Како следно треба да се определи положбата на нулата од компензаторот. Збирот од аглиите што ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на соодветниот отворен систем за затворениот компензиран систем до точката што го претставува доминантниот пол на компензираниот систем во горната полурамнина од s -рамнината треба да изнесува 180° (произлегува од критериумот на аргумент). Следствено,

разликата помеѓу 180^0 и збирот од аглите што ги зафаќаат правите повлечени од сите нули и полови на отворениот систем за компензираниот систем со исклучок на нулата од компензаторот, чија положба допрва треба да се определи, го дава аголот кој го зафаќа правата повлечена од нулата на компензаторот до доминантниот пол на проектираниот компензиран систем $s_1 = -1.95 + j2.166$.

На слика 6.35 се прикажани сите полови од некомпензираниот систем и саканиот доминантен пол од компензираниот систем над реалната оска, освен нулата на компензаторот, чија положба допрва треба да се определи.

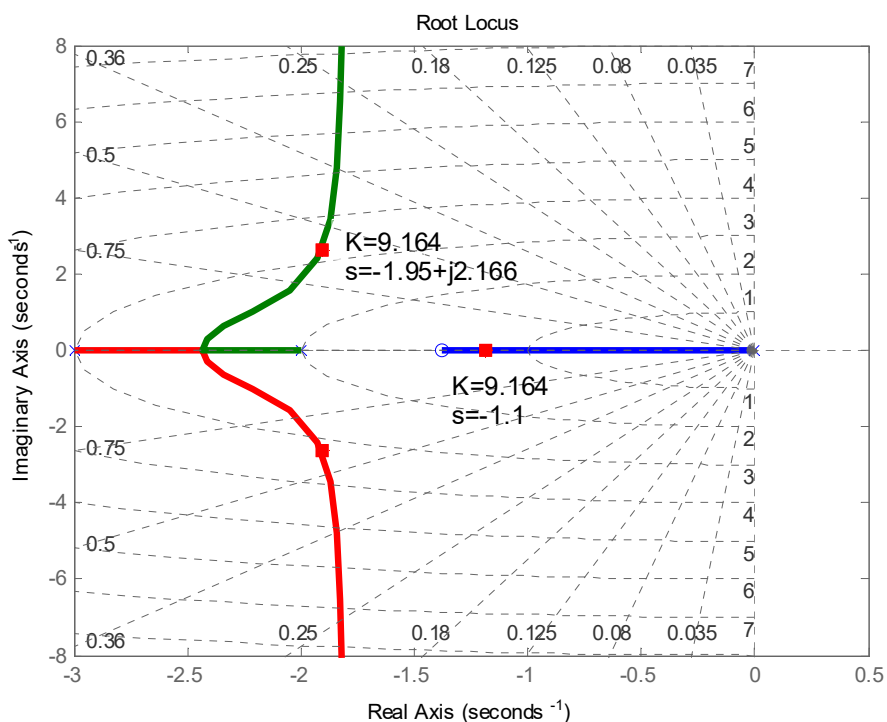


Слика 6.35. Одредување на положбата на нулата од идеалниот диференцијален компензатор за системот од примерот 6.19

Од слика 6.35 може да се определи збирот на аглите што ги зафаќаат правите повлечени од половите на отворениот систем за компензираниот затворен систем до саканиот доминантен пол на компензираниот систем $s_1 = -1.95 + j2.166$ и тој збир изнесува 284.8^0 . Следствено, пресекот на правата, повлечена од саканиот доминантен пол на компензираниот систем $s_1 = -1.95 + j2.166$ под агол еднаков на разликата $284.8^0 - 180^0 = 104.8^0$ во однос на реалната оска, со самата реална оска ја дефинира положбата на непознатата нула од идеалниот диференцијален компензатор:

$$\frac{2.166}{-1.95 - \sigma} = \operatorname{tg}(104.8^0) \Rightarrow \sigma = -1.378 \quad (6.87)$$

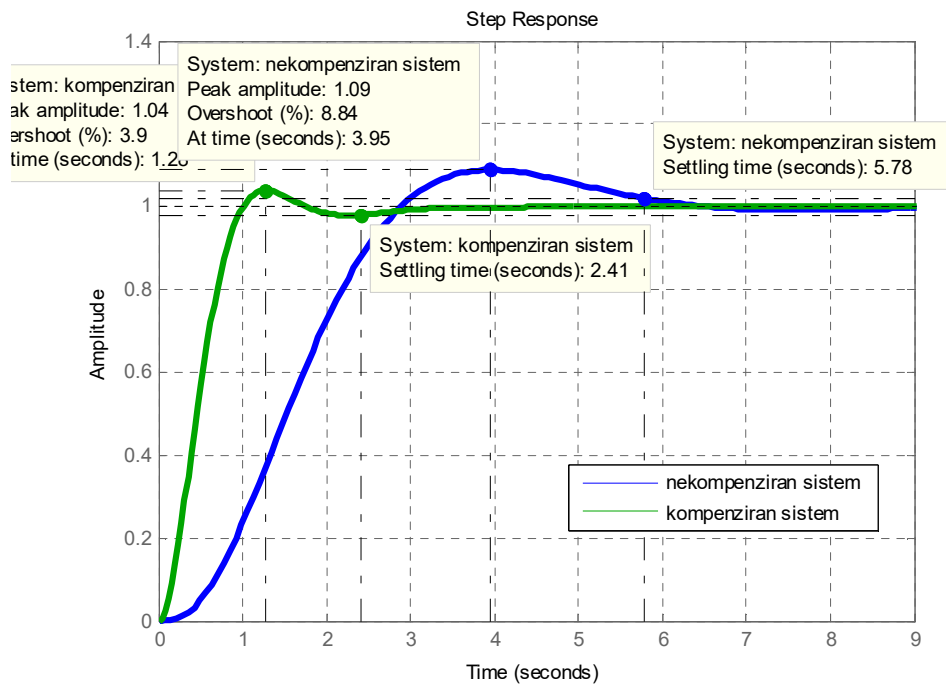
и таа е сместена во точката $\operatorname{Re} s = \sigma = -1.378$. Геометриското место корени за проектираниот компензиран затворен систем од примерот 6.19 е прикажано на слика 6.36, а соодветните отскочни одсиви на слика 6.37. Едновремено, карактеристиките на преодниот и стационарниот режим на некомпензираниот и компензираниот систем се дадени во табела 6.2.



Слика 6.36. Геометриско место на корени на компензираниот затворен систем од примерот 6.19

Табела 6.2. Прилог кон пример 6.19

	Некомпензиран систем	Компензиран систем
Отворен систем	$\frac{K}{s(s+2)(s+3)}$	$\frac{K(s+1.378)}{s(s+2)(s+3)}$
Доминантни полови	$-0.65 \pm j0.865$	$-1.95 \pm j2.166$
K	4.34	9.164
ζ	0.58	0.58
ω_n	1.08	2.91
$M\%$	8.84	3.92
T_s	5.78	2.41
T_m	3.95	1.28
K_v	0.72	2.1
$e(\infty)$	1.39	0.475
Трет пол	-3.7	-1.1
Нула	Нема	-1.378
Апроксимација од 2.ред	ОК	Нема кратење на третиот пол



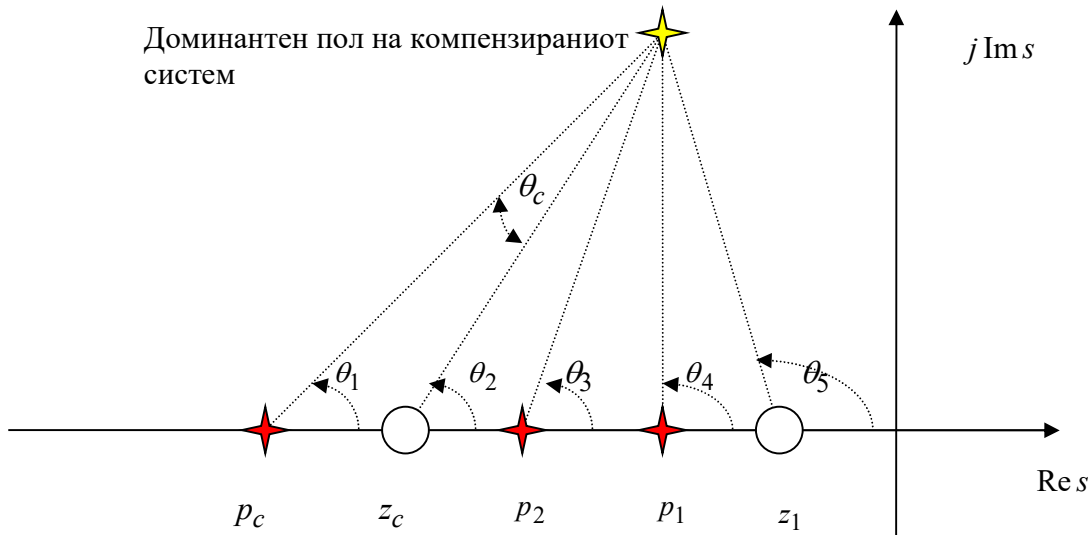
Слика 6.37. Отскочен одсвив на затворениот систем од примерот 6.19 пред и по компензацијата со идеален диференцијален компензатор □

6.3.1.2. СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО НЕИДЕАЛЕН ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Исто како што еден идеален интегрален компензатор (реализиран со активни кола) може да се апроксимира со пасивна интегрирачка мрежа (неидеален интегрален компензатор), така и еден идеален диференцијален компензатор (реализиран со активни кола) може да се апроксимира со пасивна диференцирачка мрежа (неидеален диференцијален компензатор). Со помош на пасивна диференцирачка мрежа не може да се реализира само нула – како резултат се добива компензатор со нула и пол. Меѓутоа, доколку полот на компензаторот се наоѓа подалеку од имагинарната оска во однос на неговата нула, аргументот на компензаторот сè уште ќе биде позитивен и компензаторот може да апроксимира идеален диференцијален компензатор.

Предностите на пасивната диференцирачка мрежа (неидеален диференцијален компензатор) во однос на идеалниот диференцијален компензатор (ПД – регулатор) се: а) нема потреба од дополнителни извори на енергија, б) шумот што секогаш го следи диференцирањето е послаб по интензитет. Меѓутоа, за разлика од идеалниот диференцијален компензатор, неидеалниот не го намалува бројот гранки од геометриското место корени на компензираниот систем кои ја сечат имагинарната оска и минуваат во десната полурамнина од s -комплексната рамнина.

На слика 6.38 и слика 6.39 е илустрирана идејата за сервиска компензација со диференцијален компензатор.



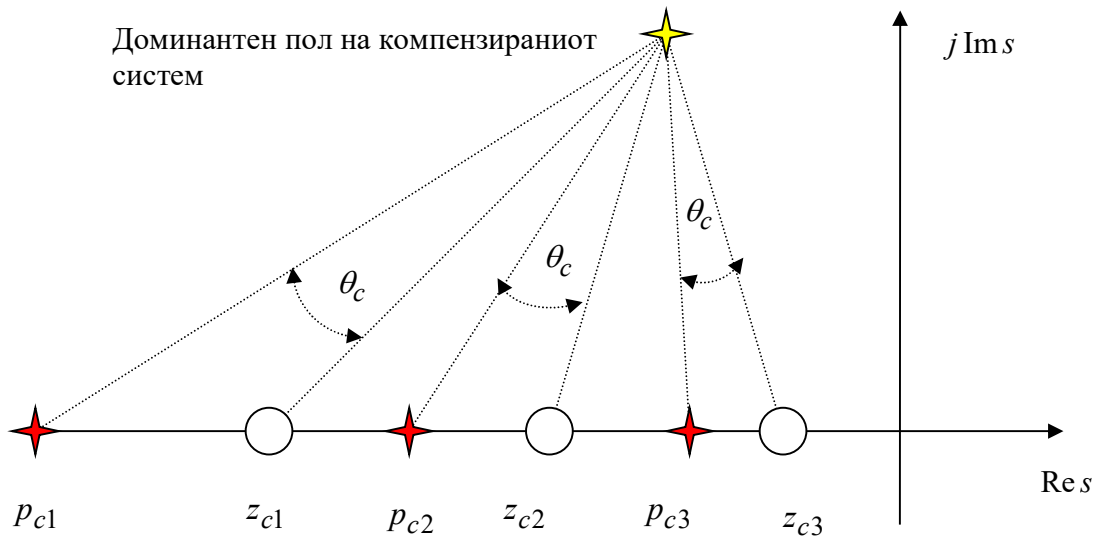
Слика 6.38. Графичка интерпретација на идејата за сервиска компензација со диференцијален компензатор

Разликата помеѓу 180^0 и збирот од аглиите на правите повлечени од нулите и половите на некомпензираниот систем до доминантниот пол на компензираниот систем во горната полурамнина од s -комплексната рамнина, го одредува аргументот θ_c на фреквенциската преносна функција на компензаторот:

$$\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 = (\theta_2 - \theta_1) - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 = \theta_c - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 = (2l + 1)180^0 \quad (6.88)$$

Овој агол θ_c е прикажан на слика 6.38 и тој може да ротира околу своето теме, како што е покажано на слика 6.39. Пресеците на неговите краци со реалната оска од s -комплексната рамнина ги дефинираат полот и нулата на диференцијалниот компензатор. Од слика 6.39 е очигледно дека задачата на сервиска компензација со диференцијален компензатор има бесконечен број решенија. Со други зборови, постојат бесконечно многу решенија кои го задоволуваат проектното барање за карактерот на саканиот преоден режим, одреден со доминантниот пар полови на компензираниот систем. Овие решенија се разликуваат по слободниот избор на положбата на нулата од компензаторот, вредноста за која се намалува стационарната грешка на некомпензираниот систем, вредноста на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем, која одговара на доминантниот пар полови од компензираниот систем, положбата на третиот и четвртиот пол од компензираниот систем на реалната оска, како и нивното влијание врз поведението на компензираниот систем, кое се оценува врз основа на оддалеченоста на дополнителните полови на

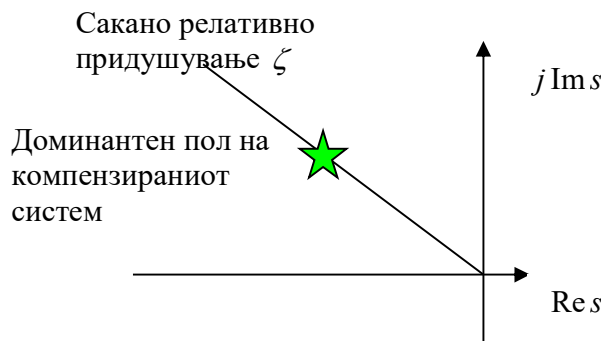
компензираниот систем од неговите доминантни полови, или врз основа на кретењето на дополнителните полови со дополнителни нули на компензираниот систем.



Слика 6.39. Графички приказ на три од бесконечниот број решенија на проблемот на сериска компензација со диференцијален компензатор

Синтезата по пат на сериска компензација со диференцијален компензатор со помош на методот геометриско место на корени може да се резимира во следните неколку чекори, прикажани на слики 6.40 - 6.43:

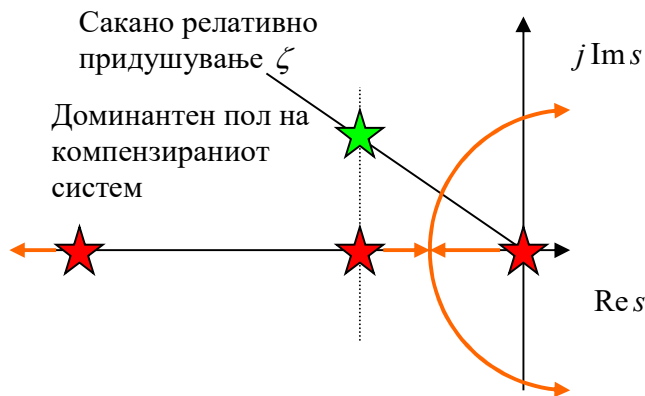
1. Искажување на сите проектни барања во поглед на саканиот преоден режим преку положбата од доминантните полови на компензираниот систем во s – комплексната рамнина.
2. Скицирање на геометриското место на корени од некомпензираниот систем со цел да се утврди дали тој може да ги задоволи поставените проектни барања без соодветна компензација со некој вид компензатор.
3. Доколку синтезата бара компензација со диференцијален компензатор, неговата нула се одбира непосредно под саканиот доминантен пол од компензираниот систем, или лево од првите два реални полови.
4. Положбата на полот од компензаторот се определува со помош на принципот на аргументот, кој треба да го задоволува саканиот доминантен пол од компензираниот систем.
5. Определување на коефициентот на засилување на компензираниот систем врз основа на принципот на модулот, кој треба да го задоволува саканиот доминантен пол од компензираниот систем.
6. Пресметување на константите на грешка за компензираниот систем.
7. Постапката се повторува доколку стационарната грешка на компензираниот систем не задоволува.



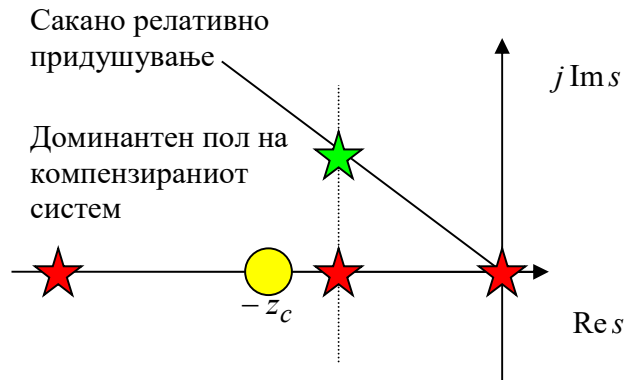
Слика 6.40. Одредување на положбата во комплексната рамнина на доминантниот пар полови од компензираниот систем

Од слика 6.41 лесно може да се уочи дека саканиот доминантен пар полови на компензираниот систем не лежат на геометриското место на корени од некомпензираниот затворен систем – следствено, потребна е компензација со диференцијален компензатор.

При изборот на нулата од диференцијалниот компензатор треба да се внимава таа да не ја промени доминацијата на саканите полови. Од тие причини, нулата се одбира лево од првите два реални пола на отворениот систем од некомпензираниот затворен систем; таа не смее да се одбере помеѓу двата реални пола на отворениот систем (не смее да биде поблизу до имагинарната оска од вториот реален пол), зашто во спротивно во затворениот систем ќе се јави пол близу до координатниот почеток, кој ќе има доминантно влијание врз одзивот на системот. Бидејќи во конкретниот случај саканиот пол на компензираниот систем се наоѓа непосредно над вториот реален пол од отворениот систем, нулата од компензаторот се одбира малку полево од реалниот пол, како што е прикажано на слика 6.42.



Слика 6.41. Геометриското место корени за некомпензираниот затворен систем



Слика 6.42. Избор на нулата од диференцијалниот компензатор лево од првите два реални пола на отворениот систем од некомпензираниот затворен систем

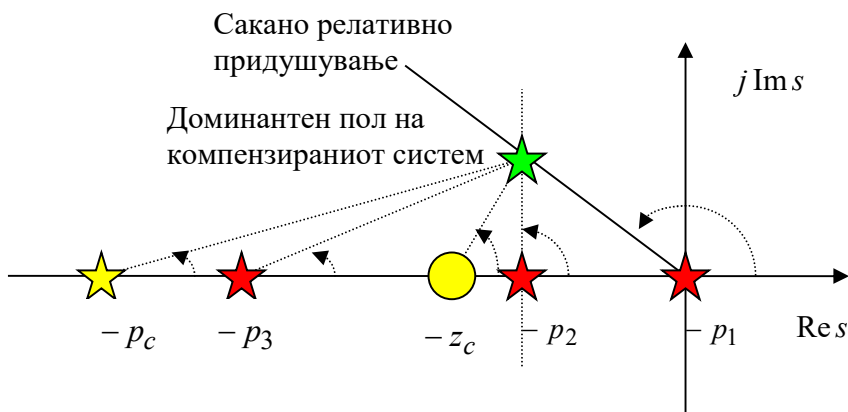
Полот од диференцијалниот компензатор се определува од критериумот на аргументот, кој мора да го задоволува доминантниот пол од компензиранот систем. Тоа значи дека збирот од аглиите, кои со реалната оска од s – комплексната рамнина ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на отворениот систем и нулата и полот на диференцијалниот компензатор до саканиот пол од компензираниот систем, мора да биде еднаков на 180^0 :

$$-\theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} - \theta_{p_c} + \theta_{z_c} = -180^0 \quad (6.89)$$

Следствено, полот од диференцијалниот компензатор се наоѓа во пресекот со реалната оска од правата повлечена од саканиот пол на компензираниот систем под агол:

$$\theta_{p_c} = 180^0 - \theta_{p_1} - \theta_{p_2} - \theta_{p_3} + \theta_{z_c} \quad (6.90)$$

како што е покажано на слика 6.43.



Слика 6.43. Одредување на положбата на полот од диференцијалниот компензатор во s – комплексната рамнина

На крајот, од критериумот на модулот, се определува коефициентот на засилување K на отворениот систем, кој одговара на доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем и се пресметува соодветната константа на грешка. Доколку нејзината вредност ја обезбедува саканата точност на работа на компензираниот систем во стационарен режим, постапката на синтеза тука завршува; во спротивно, се повторува.

Секогаш треба да се има на ум дека поведението на компензираниот систем не е одредено само од неговите доминантни полови, туку зависи од сите негови нули и полови. Затоа на крајот од постапката на синтеза потребно е, со симулација, да се провери поведението на проектираниот систем.

Пример 6.20. Да се изврши сериска компензација со неидеален диференцијален компензатор на затворениот линеарен стационарен континуален динамички систем, опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+9)(s+25)}, K > 0 \quad (6.91)$$

така што компензираниот систем ќе има максимален прескок од 20 % и време на смирување на отскочниот одсив $\tilde{T}_s = 1 \text{sec}$. Да се дадат две можни решенија на поставениот проблем на синтеза.

Решение: Најнапред се определуваат доминантните полови на компензираниот систем. Максимален прескок од 20 % значи фактор на релативно придушвање на доминантниот пар полови на компензираниот систем $\tilde{\zeta} = 0.46$, додека природната фреквенција на овие полови се определува од дадениот услов за времето на смирување на отскочниот одсив на компензираниот систем:

$$\tilde{T}_s = \frac{4}{\tilde{\sigma}} = \frac{4}{\tilde{\zeta}\tilde{\omega}_n} \Rightarrow \tilde{\omega}_n = \frac{4}{\tilde{\zeta}\tilde{T}_s} = \frac{4}{0.46} = 8.7 \text{sec}^{-1} \quad (6.92)$$

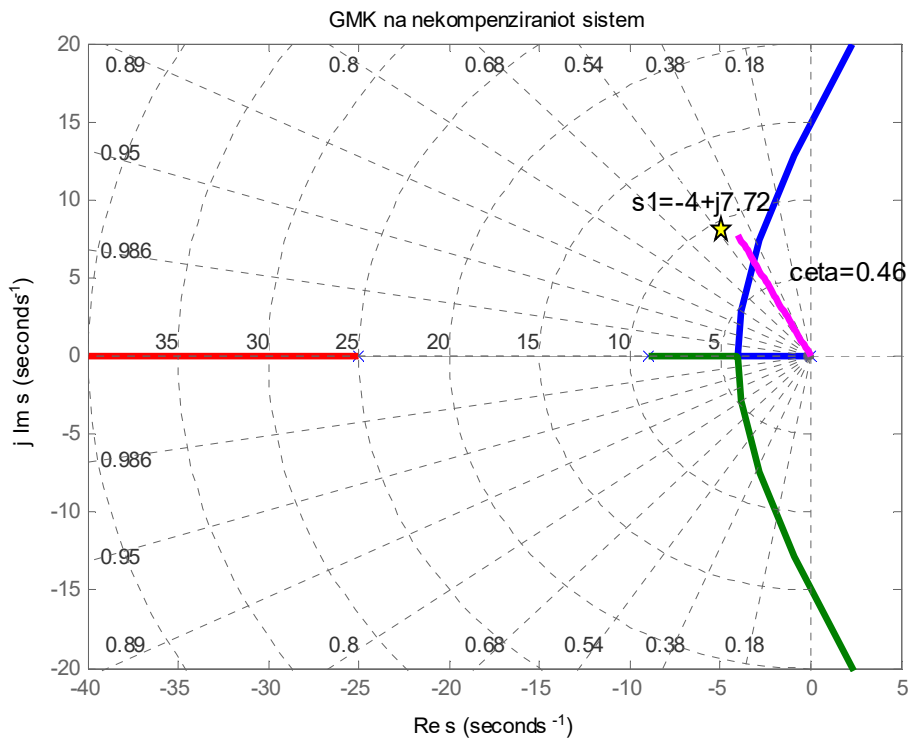
Оттука, треба да се проектира затворен систем, чиј пар доминантни полови ќе изнесува:

$$\tilde{s}_{1,2} = -\tilde{\zeta}\tilde{\omega}_n \pm j\tilde{\omega}_n\sqrt{1-\tilde{\zeta}^2} = -4 \pm j7.725 \quad (6.93)$$

Ако се нацрта ГМК на некомпензираниот затворен систем, слика 6.44, лесно може да се забележи дека овие полови не му припаѓаат нему, што значи дека е потребна компензација на оригиналниот систем, а бидејќи фазата на некомпензираниот отворен систем во полот \tilde{s}_1 е $\arg[G_0(j\omega)] = -\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = -194.66^\circ < -180^\circ$, потребна е компензација со диференцијален компензатор, кој ќе додаде фаза од $-180^\circ - \arg[G_0(j\omega)] = -180^\circ - (-194.66^\circ) = 14.66^\circ$. Со оглед на преносната функција на неидеалниот диференцијален компензатор, вкупната фаза што тој ја внесува е разлика помеѓу фазата од неговата нула и неговиот пол $\arg[G_d(j\omega)] = \theta_{z_c} - \theta_{p_c} = 14.66^\circ$, па има

само една равенка за определување на непознатата нула и пол на диференцијалниот компензатор. Оттаму, едната величина се одбира произволно и најчесто нулата од компензаторот се одбира да го поништи влијанието на некој пол од отворениот систем. Во конкретниот случај, ќе одбереме нулата на компензаторот да биде во точката $s = -9$, со што ќе го поништите влијанието од полот на отворениот систем во истата точка. Така, за полот од диференцијалниот компензатор сега се добива:

$$\begin{aligned} \arg[G_d(j\omega)] &= 0.256 = \theta_{z_c} - \theta_{p_c} = \operatorname{atan}\left(\frac{7.725}{9-4}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{7.725}{p_c-4}\right) = \\ &= 0.9964 - \operatorname{atan}\left(\frac{7.725}{p_c-4}\right) \Rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{7.725}{p_c-4}\right) = 0.9964 - 0.256 = 0.74 \\ \Rightarrow \left(\frac{7.725}{p_c-4}\right) &= \tan(0.74) \Rightarrow p_c = 4 + \frac{7.725}{\tan(0.74)} = 12.46 \end{aligned} \quad (6.94)$$



Слика 6.44. Одредување на доминантниот пар полови на компензираниот систем од примерот 6.20

Останува уште да се определи коефициентот на засилување кој одговара на доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем. Истиот се определува врз принципот на модул:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{1}{|\tilde{G}_0(j\omega)|} = \frac{1}{|G_d(j\omega)||G_0(j\omega)|} = \\ &= \frac{\sqrt{(p_1 - 4)^2 + \omega^2} \cdot \sqrt{(p_2 - 4)^2 + \omega^2} \cdot \sqrt{(p_3 - 4)^2 + \omega^2} \cdot \sqrt{(p_c - 4)^2 + \omega^2}}{\sqrt{z_c^2 + \omega^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{4^2 + 7.725^2} \cdot \sqrt{5^2 + 7.725^2} \cdot \sqrt{21^2 + 7.725^2} \cdot \sqrt{8.46^2 + 7.725^2}}{\sqrt{5^2 + 7.725^2}} = 2230 \end{aligned} \quad (6.95)$$

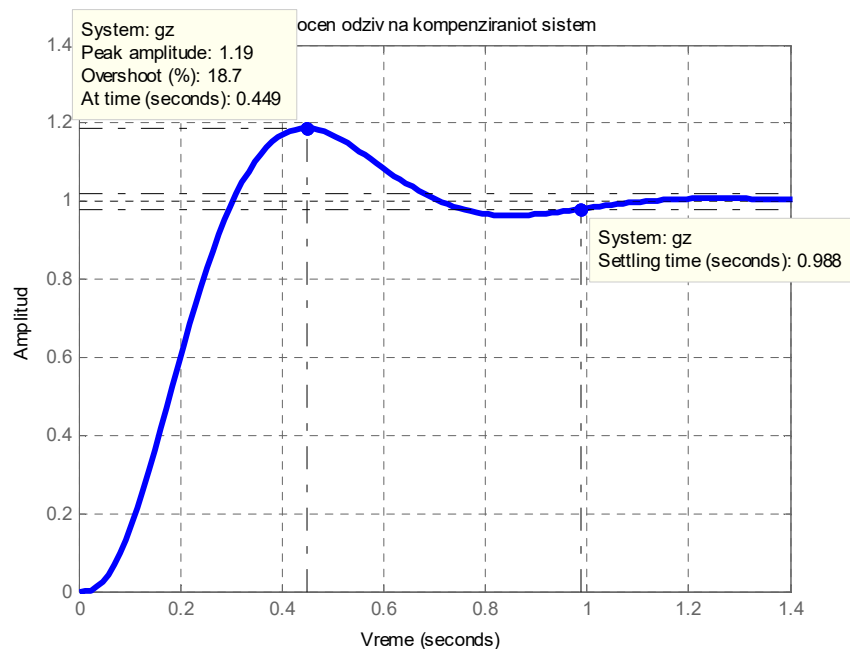
Преносната функција на компензираниот отворен систем ќе гласи:

$$\tilde{G}_{01}(s) = \frac{2230}{s(s + 12.46)(s + 25)} \quad (6.96)$$

додека компензираниот затворен систем ќе има преносна функција:

$$\tilde{G}_1(s) = \frac{2230}{s^3 + 37.46s^2 + 311.5s + 2230} \quad (6.97)$$

Отскочниот одзив на компензираниот затворен систем е прикажан на слика 6.45, од каде се гледа дека тој ги задоволува поставените проектни барања. Освен проектираниот пар доминантни полови, овој систем има и трет пол во точката $s = -29.45$, кој е многу далеку од доминантниот пар полови. Затоа може да се смета дека апроксимацијата на компензираниот систем со систем од втор ред сосема задоволува.



Слика 6.45. Отскочен одзив на компензираниот систем од пример 6.20

Со поставувањето на нулата на диференцијалниот компензатор во друга точка, на пример во $s = 0$, ќе добиеме второ решение на проблемот на синтеза од пример 6.20. Така, за полот од диференцијалниот компензатор сега се добива:

$$\begin{aligned} \arg[G_d(j\omega)] &= 0.256 = \theta_{z_c} - \theta_{p_c} = \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{7.725}{4}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{7.725}{p_c - 4}\right) = \\ &= 0.9964 - \operatorname{atan}\left(\frac{7.725}{p_c - 4}\right) \Rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{7.725}{p_c - 4}\right) = 2.0486 - 0.256 = 1.8 \\ &\Rightarrow \left(\frac{7.725}{p_c - 4}\right) = \tan(1.8) \Rightarrow p_c = 4 + \frac{7.725}{\tan(1.8)} = 2.258 \end{aligned} \quad (6.98)$$

Останува уште да се определи коефициентот на засилување кој одговара на доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем. Истото се определува врз принципот на модул:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2 &= \frac{1}{|\tilde{G}_0(j\omega)|} = \frac{1}{|G_d(j\omega)||G_0(j\omega)|} = \\ &= \frac{\sqrt{(p_1 - 4)^2 + \omega^2} \cdot \sqrt{(p_2 - 4)^2 + \omega^2} \cdot \sqrt{(p_3 - 4)^2 + \omega^2} \cdot \sqrt{(p_c - 4)^2 + \omega^2}}{\sqrt{z_c^2 + \omega^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{4^2 + 7.725^2} \cdot \sqrt{5^2 + 7.725^2} \cdot \sqrt{21^2 + 7.725^2} \cdot \sqrt{1.742^2 + 7.725^2}}{\sqrt{4^2 + 7.725^2}} = 1630.5 \end{aligned} \quad (6.99)$$

Преносната функција на компензираниот отворен систем ќе гласи:

$$\tilde{G}_{02}(s) = \frac{1630.5}{(s + 2.258)(s + 9)(s + 25)} \quad (6.100)$$

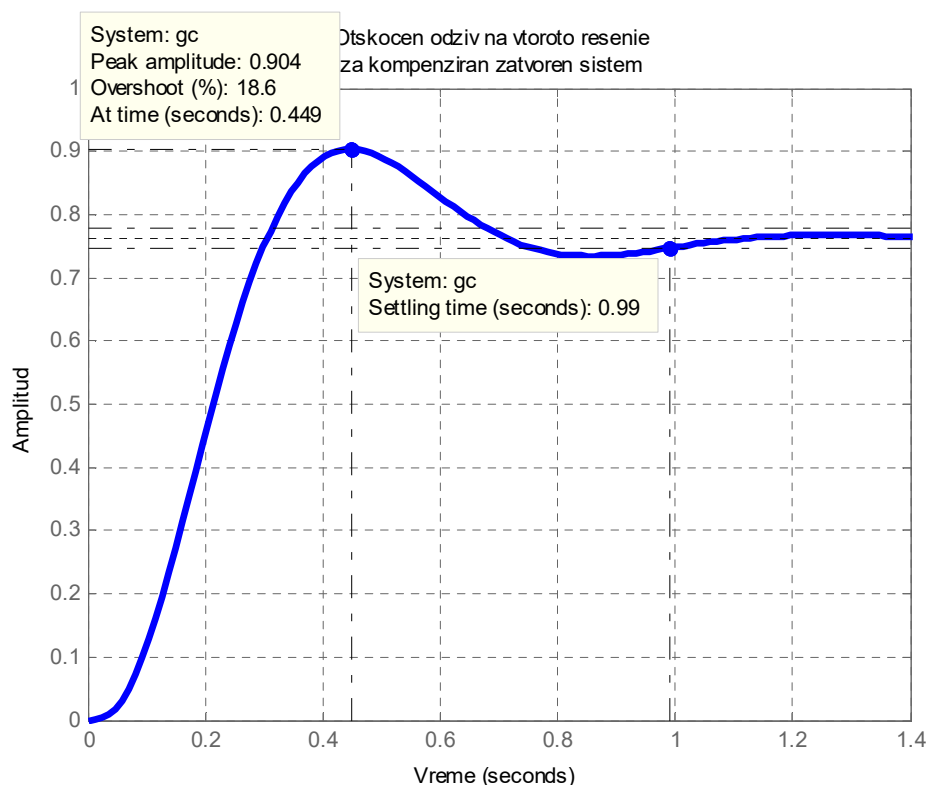
додека компензираниот затворен систем ќе има преносна функција:

$$G_2(s) = \frac{1630.5}{s^3 + 36.26s^2 + 301.8s + 2139} = \frac{1630.5}{(s + 29.45)(s^2 + 8s + 75.68)} \quad (6.101)$$

Отскочниот одзив на вториот компензиран затворен систем е прикажан на слика 6.46, од каде се гледа дека тој ги задоволува поставените проектни барања. Освен проектираниот пар доминантни полови, овој систем има и трет пол во точката $s = -29.45$, кој е многу далеку од доминантниот пар полови. Затоа може да се смета дека апроксимацијата на компензираниот систем со систем од втор ред сосема

задоволува. Интересно е да се забележи дека и двата компензирани отворени системи водат кон ист компензиран затворен систем, што и може да се очекува. Меѓутоа, добиените компензирани системи се многу различни. Така, затворениот систем од првото решение може успешно да следи отскочен влез, затоа што соодветниот отворен систем има пол во координатниот почеток. Затворениот систем од второто решение има отворен систем со нулти астатизам и затоа не може идеално да следи отскочен влез, туку со одредена грешка. Резултатите од компензацијата на затворениот систем од пример 6.20 се прикажани во табела 6.3. Тие се разликуваат според:

- Положбата на произволно одбраната нула на диференцијалниот компензатор.
- Големината на стационарната грешка.
- Големината на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем K .
- Положбата на дополнителните полови и нули и нивното влијание врз преодниот одзив на компензираниот систем, кое влијание се мери преку оддалеченоста од доминантните полови на компензираниот систем или можноста за нивно кретење со соодветни нули.



Слика 6.46. Отскочен одзив на второто решение за проектирање на зададениот систем од пример 6.20

Табела 6.3. Компензација на системот од примерот 6.20 со неидеален диференцијален компензатор □

	Некомпензиран систем	Компензација а)	Компензација б)
	$\frac{K}{s(s+9)(s+25)}$	$\frac{K(s+9)}{s(s+9)(s+25)(s+12.46)}$	$\frac{Ks}{s(s+9)(s+25)(s+2.258)}$
Доминантни полови	$-3.23 \pm j6.06$	$-4 \pm j7.725$	$-4 \pm j7.725$
K	1300	2230	1630.5
ζ	0.46	0.46	0.46
ω_n	6.87	8.7	8.7
$M\%$	18.1%	18.7%	18.6%
T_s	1.24	0.988	0.99
$e(\infty)$	0.173	0.139	0.238
Трет пол	-27.54	-29.45	-29.45
нула	нема	-9	0
	ОК	ОК	ОК

6.3.2. СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИНТЕГРАЛЕН КОМПЕНЗАТОР СО ПОСТАПКАТА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Компензаторите овозможуваат нагодување не само на преодниот туку и на стационарниот режим на работа на еден САУ. При нагодувањето на преодниот одсив на еден затворен систем, по пат на компензација на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем, во принцип доаѓа до зголемување на стационарната грешка на компензираниот систем. Ова се должи на фактот дека и преодниот одсив и стационарната грешка зависат од коефициентот на засилување на отворениот систем. Колку е поголема вредноста на овој коефициент, толку е помала стационарната грешка, но, од друга страна, поголем е и максималниот прескок на преодниот одсив. Намалувањето, пак, на вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем, со цел да се обезбеди преоден одсив на затворениот систем со помал максимален прескок, има за резултат зголемување на стационарната грешка кај затворениот систем. Овој проблем се избегнува со примената на интегрален компензатор.

Интегралните компензатори по правило се користат за подобрување на стационарната грешка на еден затворен САУ. Притоа, компензаторите кои користат чиста интеграција за остварувањето на својата задача, се нарекуваат **идеални интегрални компензатори**. Тие се реализираат со помош на активни мрежи како, на пример, операциони засилувачи. Основна предност на идеалните интегрални компензатори е што обезбедуваат нулева стационарна грешка, а основен недостаток – цената на чинење и потребата од дополнителни извори на енергија.

Неидеалните интегрални компензатори се реализираат со помош на пасивни елементи и мрежи како, на пример, електрични отпорници и кондензатори. Нивна предност е што се поевтини од идеалните и за своето работење не бараат дополнителни извори на енергија, а основен недостаток им е што не можат да обезбедат нулева стационарна грешка.

6.3.2.1. СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИДЕАЛЕН ИНТЕГРИРАЧКИ КОМПЕНЗАТОР

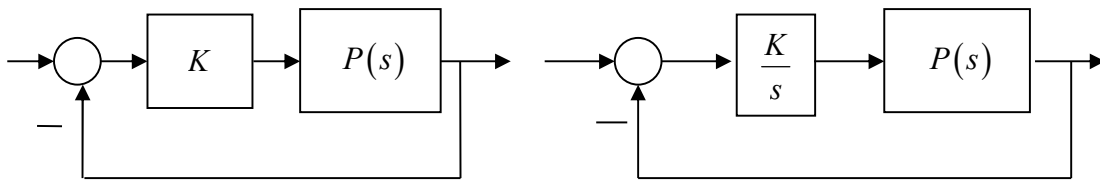
Квалитетот на поведението на еден затворен систем во стационарен режим зависи од редот на астатизмот на соодветниот отворен систем. Ако соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем има астатизам од нулти ред, затворениот систем не е во состојба идеално да следи Хевисајдова влезна возбуда - тој го следи отскочниот влез со одредено конечно отстапување односно грешка. Ако редот на астатизам на отворениот систем се зголеми на еден, затворениот систем ќе биде во состојба идеално да ја следи Хевисајдовата влезна возбуда, односно стационарната грешка на ваков систем е нулева. Редот на астатизам на отворениот систем се зголемува со додавање пол во координатниот почеток, а тоа може да се постигне со помош на активно коло односно идеален интегратор, што значи дека компензаторите можат да се користат не само за подобрување на преодниот одзив на еден систем, туку и за подобрување на неговата грешка во стационарен режим. Во продолжение е прикажано подобрувањето на стационарната грешка во еден систем со помош на сериска компензација со идеален интегратор.

При подобрувањето на стационарната грешка на еден систем со помош на компензација, треба да се внимава значително да не се наруши преодниот режим на системот. Идејата е прикажана на сликите 6.47 – 6.50. На слика 6.47.а) е прикажан затворен САУ, кој, под претпоставка, има задоволувачки преоден одзив. Геометриското место корени на овој систем е прикажано на слика 6.48.а), каде што со A е означен еден од доминантниот пар полови на затворениот систем (оној во горната полурамнина). Бидејќи точката A припаѓа кон геометриското место корени на затворениот систем, збирот од аглиите кои со реалната s – оската ги зафаќаат правите повлечени од половите и нулите на отворениот систем до точката A , мора да биде еднаков на 180^0 :

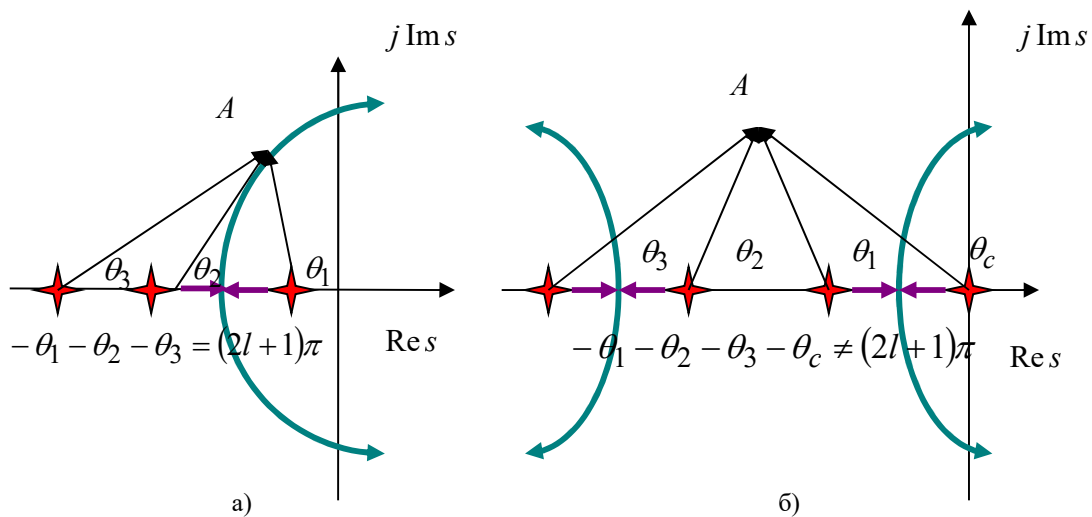
$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = (2l + 1)\pi \quad (6.102)$$

Ако се обезбеди дополнителен пол во координатниот почеток за соодветниот отворен систем, слика 6.47.б), ќе се зголеми редот на астатизмот на отворениот систем, но збирот на аглиите на правите што ги поврзуваат половите на отворениот систем со точката A нема повеќе да биде целоброен производ $(2l + 1)180^0$:

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_c \neq (2l + 1)\pi \quad (6.103)$$

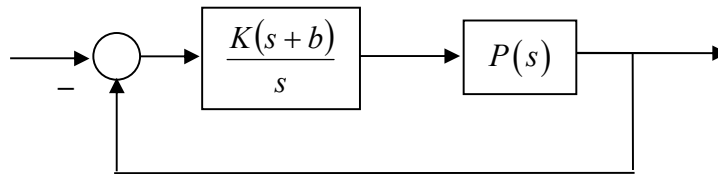


Слика 6.47. Компензација на затворениот систем со: а) нагудување на коефициентот на засилување на отворениот систем и б) со зголемување на редот на астатизам на отворениот систем

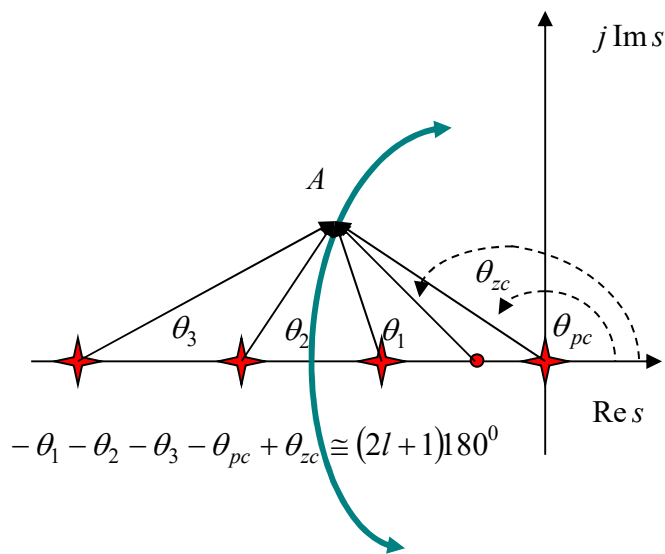


Слика 6.48. Геометриско место на корени на затворените системи од слика 6.47 под а) и б)

и новото геометриско место на корени нема да минува повеќе низ точката A , слика 6.48.б). Тоа би значело и промена на преодниот одсив на набљудуваниот систем, кој треба да остане непроменет. За да се реши овој проблем, се додава нула блиску до координатниот почеток, како што е прикажано на слика 6.49. Дополнителната нула го поништува приближно влијанието на дополнителниот пол, па геометриското место на корени на системот од слика 6.49 повторно минува низ точката A , слика 6.50, иако редот на астатизам на отворениот систем е зголемен за еден. Бидејќи должините на отсечките од дополнителната нула и дополнителниот пол се приближно еднакви, нивниот однос е приближно единица, па коефициентот на засилување, кој одговара на доминантниот пол на компензираниот систем, е приближно ист како и пред компензацијата, со што е постигнато подобрување на стационарната грешка на системот без значителна промена на неговиот преоден одсив.



Слика 6.49. Компензација со идеален интегрирачки компензатор



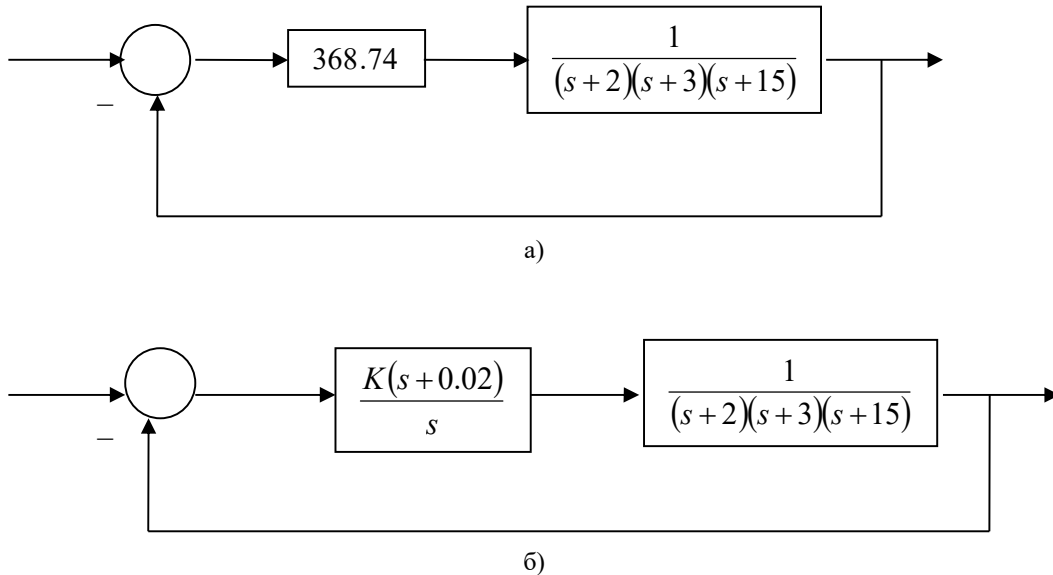
Слика 6.50. Геометриско место на корени на затворениот систем од слика 6.49

Компензаторот со пол во координатниот почеток и нула блиску до координатниот почеток се нарекува **идеален интегрирачки компензатор**. Заради обликот на неговата преносна функција, тој уште се нарекува и ПИ-регулатор (регулатор со пропорционално и интегрално дејство):

$$G_i(s) = \frac{s+b}{s} = 1 + \frac{b}{s} \quad (6.104)$$

Пример 6.21. Даден е затворениот линеарен стационарен континуален динамички систем од слика 6.51.а), кој има фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3$. Да се покаже дека со сервиска компензација на овој систем со помош на идеален интегрирачки компензатор, стационарната грешка на компензираниот затворен систем се сведува на нула, без значително да се измени неговиот преоден одзив во однос на одзивот пред компензацијата. Идеалниот интегрален компензатор има пол во

координатниот почеток и нула во точката $s = -0.02$, која има задача да го поништи влијанието на полот во координатниот почеток врз преодниот одзив на компензираниот систем.



Слика 6.51. Структурна блок-шема на затворениот систем од примерот 6.21: а) пред компензацијата и б)) по компензацијата со идеален интегрирачки компензатор

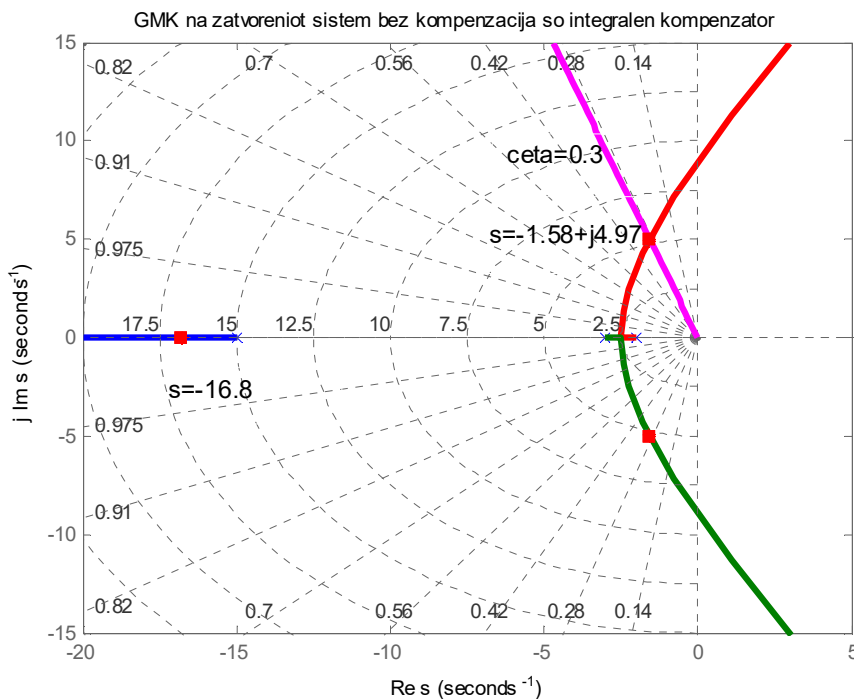
Решение: Геометриското место корени на затворениот систем од слика 6.51.а) е прикажано на слика 6.52. Доминантниот пар полови од затворениот систем $s_{1,2} = -1.58 \pm j4.97$ се наоѓа во пресекот на правата со константен фактор на придрушување $\zeta = 0.3$ и неговото геометриско место на корени. Тој лесно се определува со MATLAB наредбата **rlocfind(G)**, каде што G е преносната функција на системот чие ГМК се истражува. Наредбата го дава и третиот пол од затворениот систем, кој се наоѓа во точката $s_3 = -16.8$. На овие точки одговара вредноста $K = 368.74$ за коефициентот на засилување K на отворениот систем.

Константата на положба на затворениот систем од слика 6.51.а) е:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(s+2)(s+3)(s+15)} = \frac{368.74}{90} = 4.1 \quad (6.105)$$

па неговата стационарна грешка изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0.196 \approx 0.2 \quad (6.106)$$



Слика 6.52. Геометриско место на корени на некомпензираниот затворен систем од слика 6.51.a)

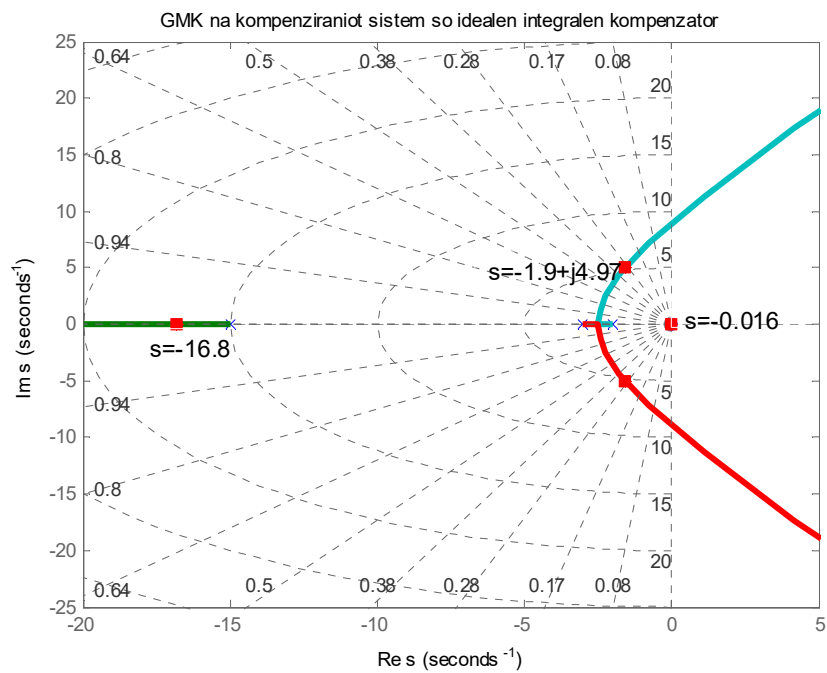
Геометриското место на корени на компензираниот затворен систем од слика 6.51.б) е прикажано на слика 6.53. Неговите доминантни полови $s_{1,2} = -1.59 \pm j4.97$, третиот пол $s_3 = -16.8$ и вредноста на коефициентот на заслугање $K = 368.74$ се приближно еднакви со оние од некомпензираниот систем. Компензираниот затворен систем има и четврт пол во точката $s_4 = -0.0161$, кој се наоѓа во непосредна близина на нулата во точката $s = -0.02$, па нивното дејство врз поведението на системот заемно се поништува. Оттука, преодниот режим на компензираниот затворен систем приближно одговара на преодниот режим од некомпензираниот систем. Меѓутоа, неговото поведење во стационарен режим е многу подобро, што требаше и да се постигне. Имено, константата на положба на затворениот компензиран систем е:

$$\tilde{K}_p = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{G}_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(s+0.02)}{s(s+2)(s+3)(s+15)} = \infty \quad (6.107)$$

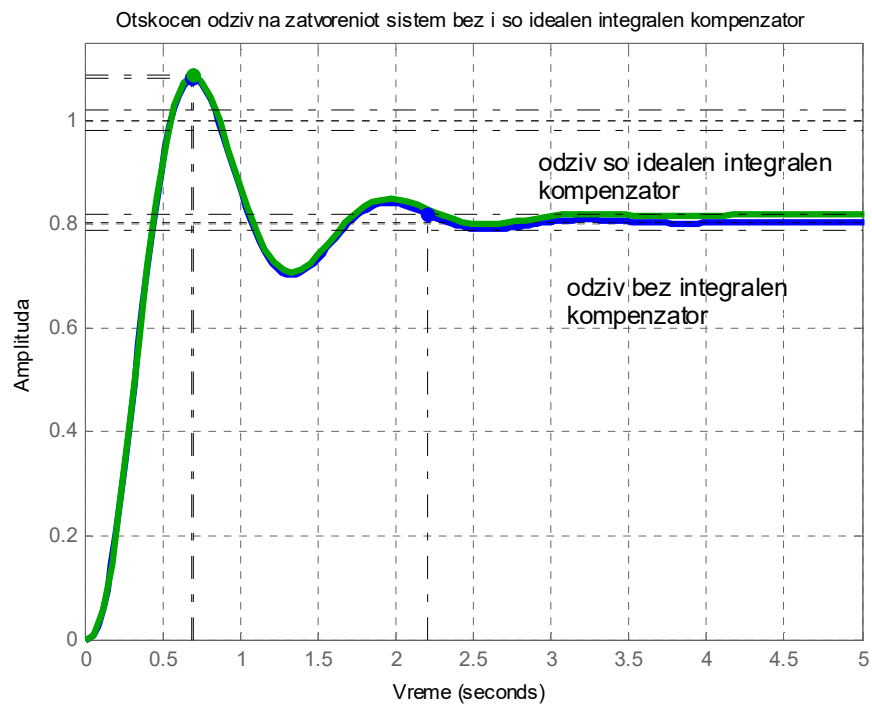
па неговата стационарна грешка изнесува:

$$\tilde{e}(\infty) = \frac{1}{1 + \tilde{K}_p} = 0 \quad (6.108)$$

Отскочниот одзив на двата система е прикажан на слика 6.54. Од сликата се гледа дека преодниот режим на двата системи трае приближно еднакво – околу 3 сек.



Слика 6.53. Геометриско место корени на компензираниот затворен систем од слика 6.51.б)



Слика 6.54. Графички приказ на отскочниот одзив на системите од слика 6.51

Потоа одсивот од компензираниот систем почнува полека да се приближува кон стационарната вредност $x_c(\infty)=1$. Симулацијата покажува дека е потребно приближно 18 сек. па амплитудите на неговиот отскочен одсив да отстапуваат за помалку од 2 % од трајната вредност. Отскочниот одсив на некомпензираниот затворен систем има стационарна вредност $x(\infty)=0.892$ и веќе по 6 сек. неговите амплитуди отстапуваат за помалку од 2 % од оваа вредност. На прв поглед различните времиња на смирување кај двата системи изгледаат збунувачки – меѓутоа, треба да се забележи дека отскочниот одсив од компензираниот затворен систем ја достигнува вредноста $x(\infty)\pm 2^0/0 = 0.892 \pm 2^0/0$ за приближно исто време. □

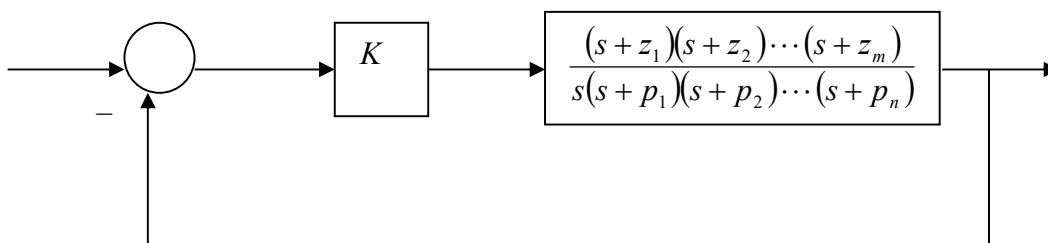
6.3.2.2. СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО НЕИДЕАЛЕН ИНТЕГРИРАЧКИ КОМПЕНЗАТОР

Неидеалниот интегрален компензатор внесува дополнителна нула и дополнителен пол во отворениот систем за компензираниот затворен систем. За да не влијаат значително врз преодниот одсив на проектираниот систем, тие се одбираат близу до координатниот почеток од s – комплексната рамнина. Иако неидеалниот интегрален компензатор не го зголемува редот на астатизам на отворениот систем, тој ја подобрува стационарната грешка на компензираниот затворен систем. За илустрација, се набљудува затворениот систем од слика 6.55. Отворениот систем има астатизам од прв ред, па затворениот систем идеално следи отскочен референтен влез, додека линеарно растечки влез следи со одредено конечно отстапување. Неговата брзинска константа на грешка пред компензацијата е:

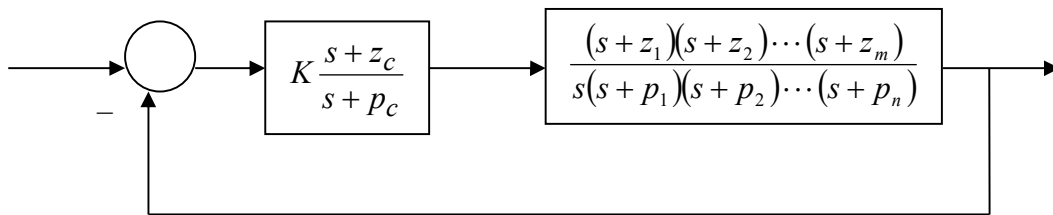
$$K_v = \frac{Kz_1z_2z_3 \cdots z_m}{p_1p_2p_3 \cdots p_n} \quad (6.109)$$

додека по компензацијата со неидеален интегрален компензатор, слика 6.56, изнесува:

$$K_{vc} = \frac{Kz_1z_2z_3 \cdots z_mz_c}{p_1p_2p_3 \cdots p_np_c} \quad (6.110)$$



Слика 6.55. Некомпензиран затворен систем



Слика 6.56. Компензација со неидеален интегрален компензатор на системот од слика 6.55

Ако (6.109) се воведи во (6.110) се добива:

$$K_{vc} = K_v \frac{z_c}{p_c} > K_v \quad (6.111)$$

Изразот (6.111) покажува дека кај компензираниот затворен систем има подобрување на стационарната грешка во однос на некомпензираниот систем, кое зависи од односот помеѓу величината на нулата и полот на употребениот интегрален компензатор. Меѓутоа, за да остане ист предниот одзив на некомпензираниот систем и по компензацијата, нулата и полот од компензаторот се одбираат блиску еден до друг.

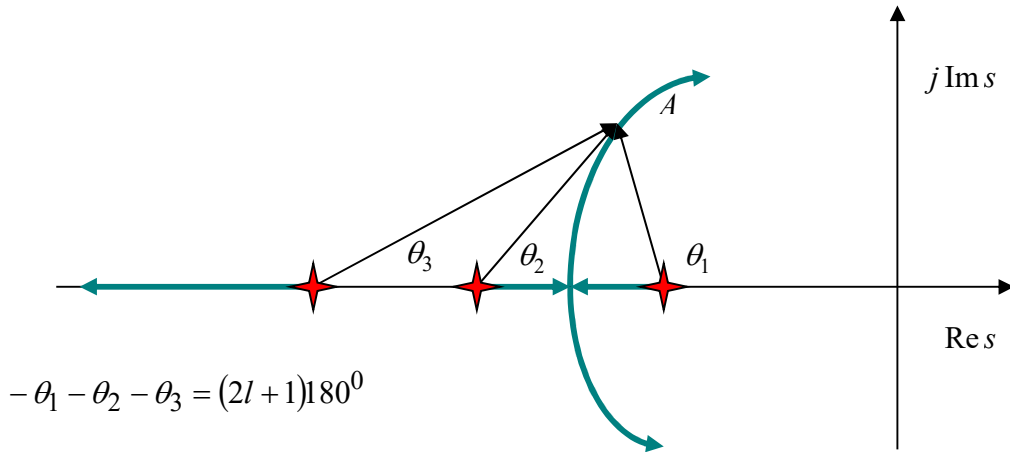
Тогаш, единствен начин да се обезбеди голем по величина однос $\frac{z_c}{p_c}$, кој ќе има за

резултат значително намалување на стационарната грешка на компензираниот систем, и едновременно, нулата и полот од компензаторот да се постават близу еден до друг, што значи практично непроменет преоден одзив по компензацијата, е тие да се сместат во близина на координатниот почеток од s – комплексната рамнина. Така, на пример, кај компензатор со нула во $s = -z_c = -0.01$ и пол во $s = -p_c = -0.001$, односот $\frac{z_c}{p_c}$

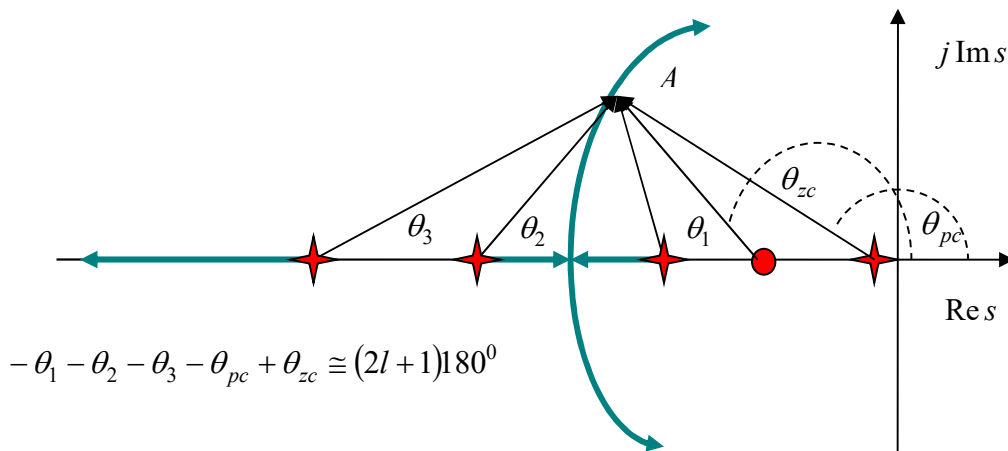
изнесува 10, што значи дека стационарната грешка од компензираниот систем ќе биде десет пати помала од стационарната грешка кај некомпензираниот систем. Во исто време, тие се доволно близу еден до друг, така што нивното влијание врз положбата од доминантниот пар полови е занемарливо.

На слика 6.57 и слика 6.58 е прикажано влијанието на неидеалниот интегрален компензатор врз компензираниот систем. Точката A на слика 6.57 го претставува доминантниот пол од некомпензираниот затворен систем. Бидејќи нулата и полот од компензаторот се одбираат многу близу до координатниот почеток, нивното влијание врз геометриското место на корени на компензираниот систем е занемарливо, па точката A е приближно на иста позиција и во геометриското место на корени на компензираниот систем, слика 6.58. Имено, аглиите што ги зафаќаат правите повлечени од полот и нулата на компензаторот до точката A се приближно еднакви, па $-\theta_{pc} + \theta_{zc} \approx 0^\circ$, што значи дека точката A (односно полот во точката A) го задоволува

принципот на аргумент и по компензацијата. Едновремено, должините на отсечките повлечени од полот и нулата на компензаторот до точката A се приближно еднакви, па коефициентот на засилување K има приближно иста вредност и пред и по компензацијата со неидеален интегрален компензатор.



Слика 6.57. Геометриско место на корени на некомпензираниот затворен систем од слика.6.51.a)



Слика 6.58. Геометриско место на корени на компензираниот затворен систем од слика 6.51.б)

Пример 6.22. Да се изврши компензација на затворениот систем од слика 6.51.a) (претходниот пример 6.21) со помош на неидеален интегрален компензатор, така што стационарната грешка на компензираниот затворен систем ќе биде 10 пати помала од стационарната грешка на некомпензираниот затворен систем, додека предниот режим ќе остане практично непроменет, со фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3$.

Решение: Стационарната грешка на некомпензираниот систем изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0.196 \approx 0.2 \quad (6.112)$$

па за десет пати помала вредност треба:

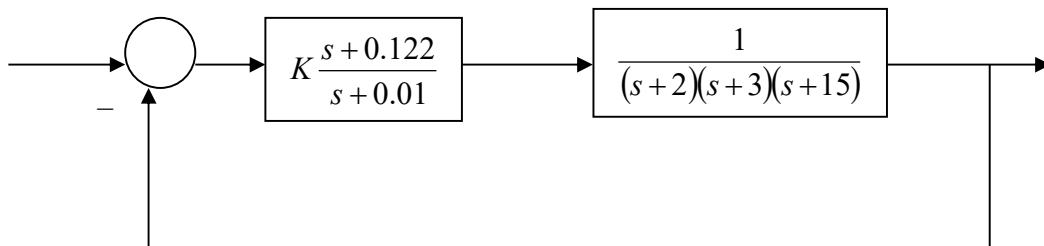
$$\tilde{K}_p = 9 + 10K_p = 50 \quad (6.113)$$

Оттука, односот помеѓу величините на нулата и полот од интегралниот компензатор треба да биде:

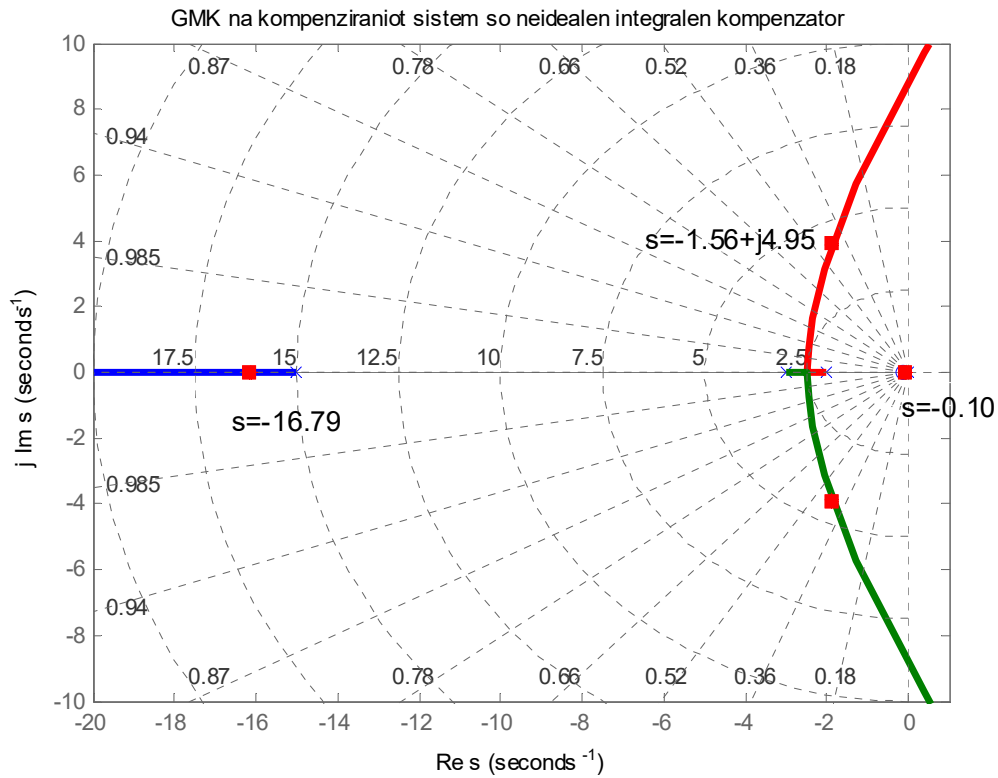
$$\frac{z_c}{p_c} = \frac{(\tilde{K}_p)_{\text{po kompensacija}}}{(K_p)_{\text{pred kompensacija}}} = \frac{50}{4.1} = 12.2 \quad (6.114)$$

па ако полот од компензаторот се одбере произволно во точката $s = -p_c = -0.01$, неговата нула ќе биде во точката $s = -z_c = -0.122$. На слика 6.59 е прикажана структурната блок-шема на компензираниот затворен систем од примерот, а на слика 6.60 е неговото геометриско место на корени. Компензираниот затворен систем од слика 6.59 има доминантен пар полови во $s_{1,2} = -1.56 \pm j4.95$, трет пол во $s_3 = -16.79$, четврт пол во $s_4 = -0.10$ и коефициент на засилување $K = 368.74$. Сите резултати добиени за набљудуваниот затворен систем од примерот 6.22 пред и по компензацијата се прикажани во табела 6.4. Четвртиот пол од компензираниот систем се крати со неговата нула. Оттука, преодниот одсив на двата система – некомпензираниот и компензираниот – е приближно ист, со тоа што компензираниот затворен систем има 10 пати помала стационарна грешка.

Отскочните одсиви на некомпензираниот и компензираниот систем се прикажани на слика 6.61.



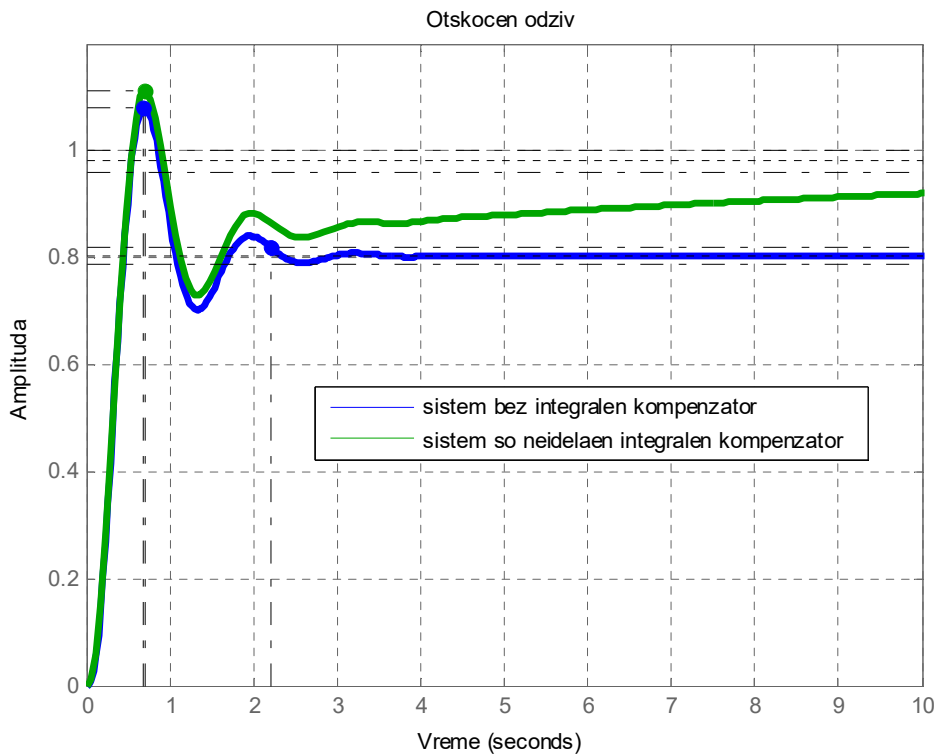
Слика 6.59. Затворен компензиран систем со неидеален интегрален компензатор



Слика 6.60. Геометриско место на корени на компензираниот затворен систем од слика 6.62

Табела 6.4. Компензација на системот од примерот 6.22 со неидеален интегрален компензатор

	некомпензиран систем	компензиран систем
отворен систем	$\frac{K}{(s+2)(s+3)(s+15)}$	$\frac{K(s+0.122)}{(s+2)(s+3)(s+15)(s+0.01)}$
доминантни полови	$-1.58 \pm j4.97$	$-1.56 \pm j4.85$
K	368.74	368.74
ζ	0.3	0.3
K_p	4.1	50
$e(\infty)$	0.196	0.0196
трет пол	-16.8	-16.79
четврт пол	нема	-0.10
нула	нема	-0.122
апроксимација од 2.ред	ОК	ОК



Слика 6.61. Графички приказ на отскочниот одзив на некомпензираниот и компензираниот систем системите од пример 6.22 □

6.3.3. СЕРИСКА КОМПЕНЗАЦИЈА СО ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛЕН КОМПЕНЗАТОР

Постапката на синтеза на еден затворен САУ преку компензација со интегро-диференцијален компензатор ги опфаќа следните чекори:

1. Преведување на зададените проектни барања, кои најчесто се искажуваат преку дозволеният максимален прескок на отскочниот одзив или факторот на релативно придушување на доминантниот пар полови на компензираниот систем, како и преку саканата вредност за стационарната грешка на одзивот на системот, во сакана положба на доминантните полови на компензираниот систем $s_d = \sigma_d \pm j\omega_d$.
2. Цртање на ГМК на некомпензираниот систем и означување на положбата на саканиот доминантен пар полови на истиот графикон. Многу е веројатно дека тие сакани полови нема да лежат на гранките од ГМК на некомпензираниот систем (во спротивно, саканото поведење на системот може да се постигне само преку нагудување на коефициентот на засилување на отворениот систем),

па е потребна компензација за да се обезбеди тие да се најдат на ГМК на компензираниот систем.

3. Кога доминантниот пар полови не лежи на ГМК од некомпензираниот систем, треба да се определи фазата на фреквенциската карактеристика $\arg[G_0(j\omega_d)]$ на отворениот систем во еден од тие полови (полот во горната полурамнина) за да се одлучи за видот потребна компензација. Доколку $\theta = \arg[G_0(j\omega_d)] < -\pi$, што е почест случај, тоа значи дека првиот дел од компензаторот треба да биде од диференцијален тип, затоа што диференцијалните компензатори генерално ја зголемуваат фазата на еден систем.
4. Нулата и полот на диференцијалниот компензатор се одбираат за да биде исполнет принципот на аргумент за доминантниот пол $s_d = \sigma_d + j\omega_d$:

$$\arg[G_d(j\omega_d)G_0(j\omega_d)] = \arg[G_d(j\omega_d)] + \arg[G_0(j\omega_d)] = -\pi \quad (6.115)$$

која равенка води кон условот:

$$\arg[G_d(j\omega_d)] = \arg[b + j\omega_d] - \arg[a + j\omega_d] = \theta_{zc} - \theta_{pc} = -\pi - \theta \quad (6.116)$$

каде што θ_{zc} е аголот помеѓу правата што ја поврзува нулата на компензаторот со доминантниот пол и реалната оска, а θ_{pc} е аголот помеѓу правата што го поврзува полот од компензаторот и реалната оска.

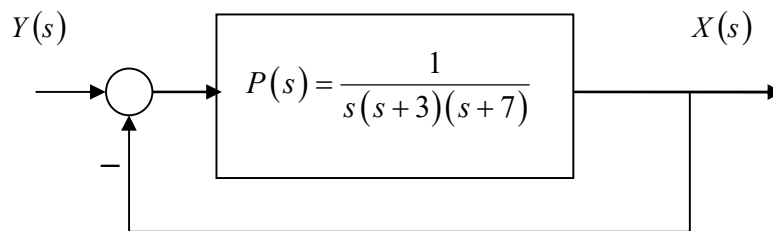
5. Бидејќи има само една равенка, а две непознати, вообичаено нулата на диференцијалниот компензатор се одбира произволно, на пример да го поништи влијанието на некој од половите на отворениот систем.
6. По изборот на диференцијалниот компензатор, се црта ГМК за компензираниот систем и врз основа на принципот на модул се определува соодветното засилување K на компензираниот отворен систем.
7. Во следниот чекор се наредува стационарниот режим на проектираниот затворен систем. Ако отворениот систем нема астатизам, се проверува константата на положба, а ако има астатизам од прв ред, се проверува брзинската константа. Добиените вредности за K_p или K_v се споредуваат со саканите вредности \tilde{K}_p и \tilde{K}_v , соодветно и доколку е $\tilde{K}_p/K_p < 1$ или $\tilde{K}_v/K_v < 1$, значи дека не е исполнет условот за саканата точност во стационарен режим и треба да се проектира интегрален компензатор.
8. Нулата и полот на интегралниот компензатор треба да задоволат две спротивставени барања – да ја зголемат соодветната константа на грешка, а притоа да не го пореметат веќе нагледениот преоден режим. Ова може да се

постигне само доколку истите се одберат да бидат блиски до нулата, што значи дека по апсолутна вредност се многу помали од апсолутната вредност на реалниот дел на доминантниот пар полови. Најнапред се одбира нулата на интегралниот компензатор да биде 20, 30 или 50 пати помала по апсолутна вредност од апсолутната вредност на реалниот дел на доминантниот пар полови, а потоа полот на интегралниот компензатор се одбира од условот:

$$\frac{b}{a} = \frac{\tilde{K}_p}{K_p} \quad (6.117)$$

Вака одбраните нула и пол на интегралниот компензатор не го менуваат значително ГМК на компензираниот систем.

Пример 6.23. Да се изврши компензација на поведението на затворениот систем од слика 6.62, така што компензираниот систем ќе има доминантни полови со фактор на релативно придушување $\zeta = 0.6$ и природна фреквенција $\omega_n = 4$, а неговата брзинска константа ќе изнесува $K_v = 20$.



Слика 6.62. Структурна блок-шема на некомпензираниот систем од примерот 6.23

Решение: Врз основа на зададените проектни барања, компензираниот затворен систем треба да има доминантен пар конјугирано-комплексни полови во точките:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.4 \pm j3.2 \quad (6.118)$$

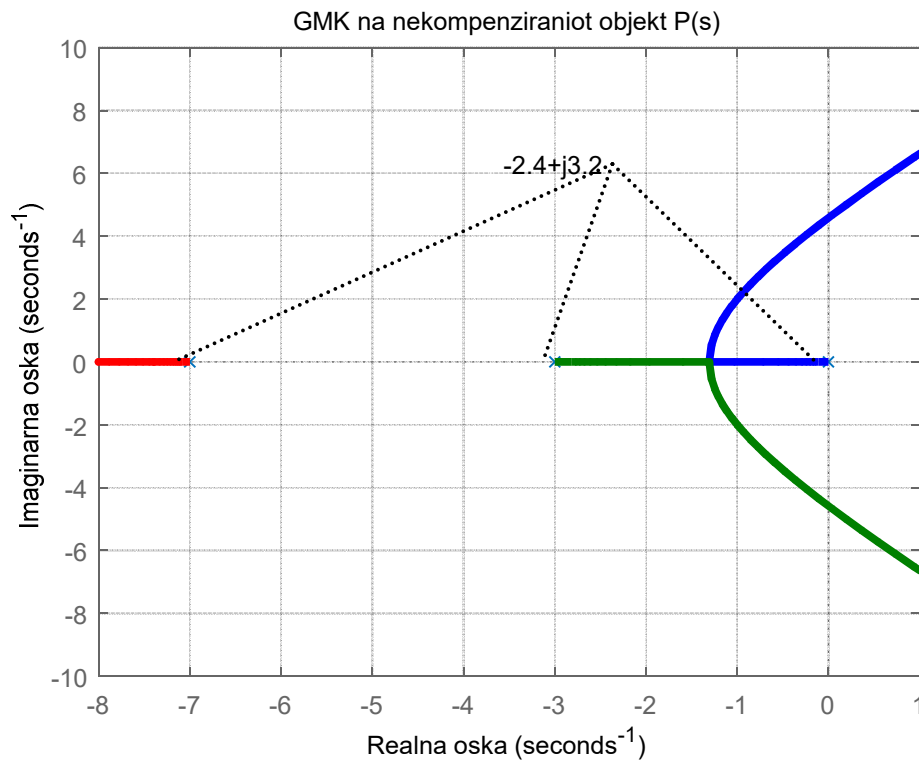
Од слика 6.63 следува дека овие полови не лежат на ГМК од некомпензираниот објект, и $\arg[P(s_1)] = -\theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = -126.87^\circ - 79.38^\circ - 34.82^\circ = -241^\circ$, па потребно е во серија со објектот да се приклучи диференцијален компензатор, кој ќе обезбеди дополнително позитивно фазно поместување во точката s_1 од 61° . Бидејќи се работи за прилично големо фазно поместување, наместо еден, ќе употребиме два идентични диференцијални компензатори. Затоа диференцијалниот компензатор нема да го проектираме со $\varphi_m = 61^\circ$, туку ќе пробаме со $\varphi_m = 25^\circ$. Нулата на диференцијалниот

компензатор ќе ја одбереме да поништи некој пол на објектот, па ја сместуваме во точката $z_{c1} = -3$. Тогаш за нејзиниот пол се добива:

$$p_{c1} = -2.4 - \frac{3.2}{\tan(54.38^\circ)} = -4.7 \quad (6.119)$$

Следствено, преносната функција на диференцијалниот компензатор ќе биде:

$$G_d(s) = \frac{(s+3)^2}{(s+4.7)^2} \quad (6.120)$$



Слика 6.63. ГМК на некомпензираниот објект $P(s)$

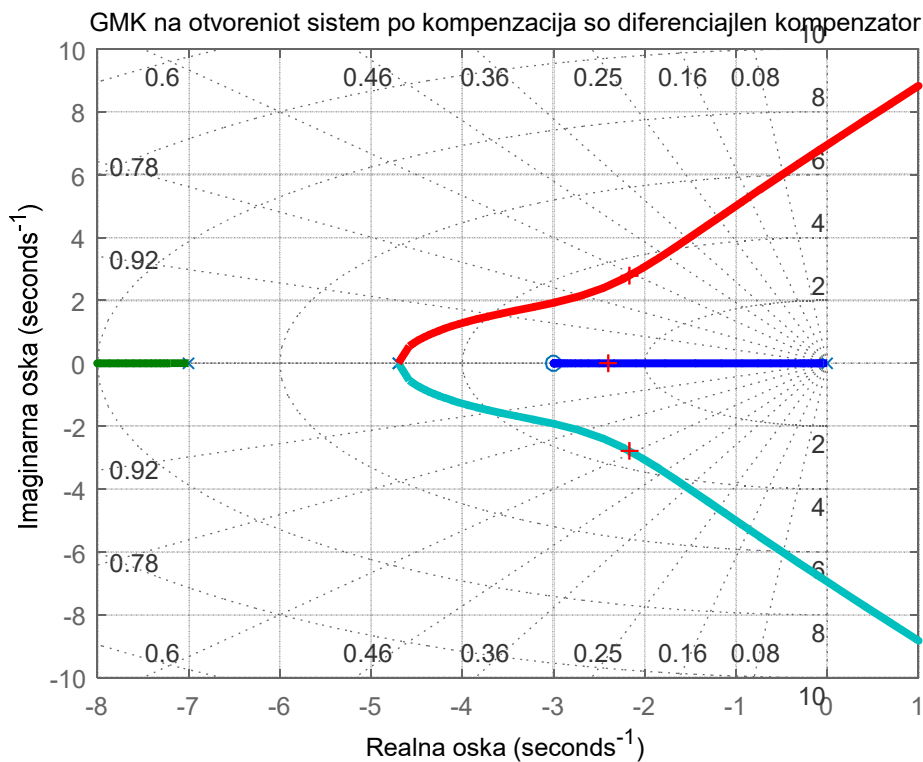
Преносната функција на компензираниот отворен систем со двоен диференцијален компензатор ќе гласи:

$$G_{01}(s) = K \cdot \frac{(s+3)^2}{(s+4.7)^2} \cdot \frac{1}{s(s+3)(s+7)} = \frac{K(s+3)}{s(s+7)(s+4.7)^2} \quad (6.121)$$

при што коефициентот на засилување K се определува врз основа на принципот на модул:

$$K = \sqrt{3.2^2 + 2.4^2} \cdot \sqrt{3.2^2 + 4.6^2} \cdot (3.2^2 + 2.3^2) / \sqrt{3.2^2 + 0.6^2} = 106.9 \approx 107 \quad (6.122)$$

ГМК на компензириот отворен систем (6.121) со $K = 107$ е прикажано на слика 6.64.



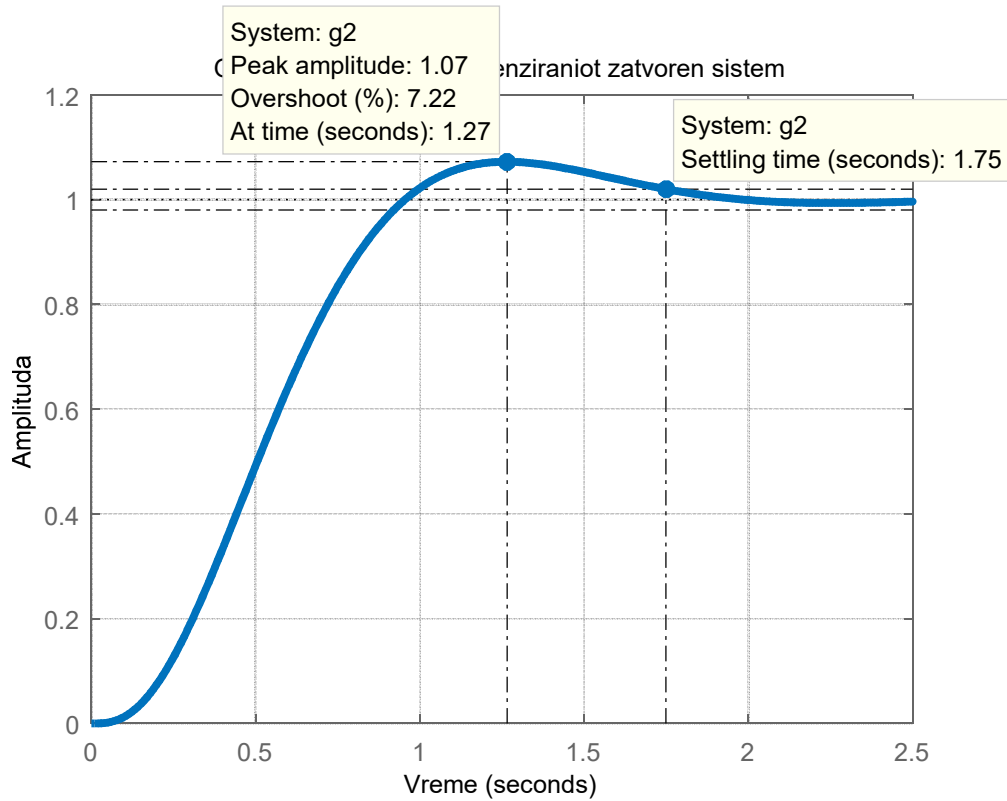
Слика 6.64. ГМК на отворениот систем по компензација со диференцијален компензатор

Останува уште да се нагоди стационарната грешка на компензириот затворен систем, која по компензацијата со диференцијален компензатор е обратнопропорционална од брзинската константа $K_v = \frac{107 \cdot 3}{7(4.7)^2} = 2.07 \approx 2$. За таа цел

се проектира интегрален компензатор со нула во точката $z_{c2} = -0.01$ и пол во точката $p_{c2} = -0.001$. Нулата и полот се доволно мали и близу до координатниот почеток, така што нема да го променат нагодениот преоден режим, а значително ќе ја поправат стационарната грешка на затворениот систем. Преносната функција на отворениот систем по компензацијата и со интегрален компензатор ќе биде:

$$G_{02}(s) = \frac{107(s+0.01)(s+3)}{s(s+0.001)(s+7)(s+4.7)^2} \quad (6.123)$$

Отскочниот одзив на проектираниот затворен систем е прикажан на слика 6.65.



Слика 6.65. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем со интегро-диференцијален компензатор □

7. СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

Предности на синтезата во просторот на состојби во однос на фреквенциската синтеза се следните:

1. Применлива е на поширока класа системи како, на пример, нелинеарните и повеќевеличинските системи.
2. Овозможува дефинирање на положбата на сите полови на затворениот систем. Кај фреквенциската синтеза се проектира само доминантниот пар полови - не постојат доволен број променливи параметри на проектираниот затворен систем за да се нагодат сите негови полови.

Главни недостатоци на синтезата во просторот на состојби се:

1. Не овозможува нагдување на нулите на затворениот систем.
2. Може да биде многу чувствителна на промените на параметрите.

7.1. НАГОДУВАЊЕ НА ПОЛОВИ

Нека, под претпоставка, дадениот објект е опишан со следниот модел во просторот на состојби:

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{v}(t) \tag{7.1}$$

каде што $\mathbf{u}(t)$ е влезен вектор (вектор на влезовите), $\mathbf{x}(t)$ е излезен вектор (вектор на излезите) и $\mathbf{v}(t)$ е вектор на состојби на набљудуваниот линеарен стационарен континуален динамички систем, додека \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} се матрици со соодветна димензија. За систем од n -ти ред, векторот на состојби има токму n елементи, кои ги претставуваат состојбените големини на набљудуваниот систем. На системот со модел (7.1) му одговара структурната блок-шема од слика 7.1.

Ако сега се воведо повратна врска по состојбите на објектот (7.1) од облик:

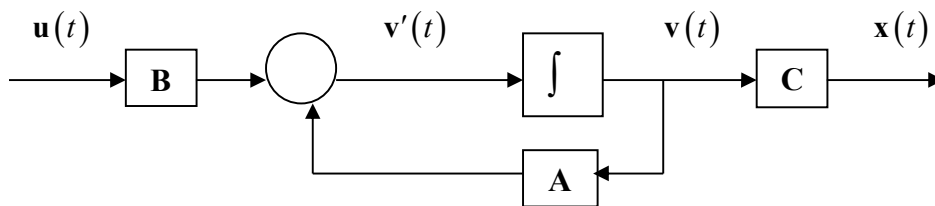
$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{K}\mathbf{v}(t) \tag{7.2}$$

каде што $\mathbf{y}(t)$ е нов референтен влез, а \mathbf{K} е матрица на засилување со соодветна димензија, ќе се добие затворен систем со следниот модел во просторот на состојби:

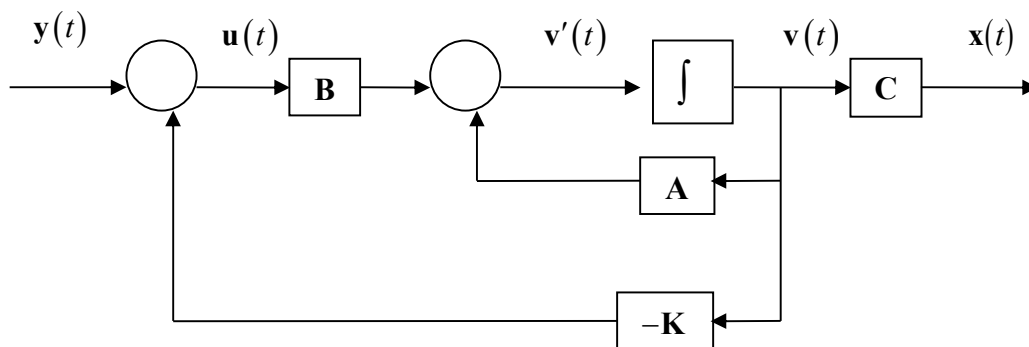
$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{K}\mathbf{v}(t)] = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{v}(t) \tag{7.3}$$

и структурна блок-шема како на слика 7.2.



Слика 7.1. Структурна блок-шема на системот (7.1)



Слика 7.2. Структурна блок-шема на системот (7.1) со повратна врска по состојбите

Карактеристичниот полином на затворениот систем од слика 7.2 е:

$$a(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})] \tag{7.4}$$

и, очигледно, неговите нули зависат од елементите на матрицата \mathbf{K} . Тоа овозможува со соодветен избор на овие елементи да се зададе положбата на нулите на полиномот (7.4), односно да се одреди положбата на половите на затворениот систем (7.3) во s -комплексната рамнина. Постапката е илустрирана во продолжение.

Нека, под претпоставка, објектот (7.1) има еден влез и еден излез и неговата надворешна динамика е опишана со преносна функција од општ облик:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \quad (7.5)$$

L -сликата $X(s)$ на неговиот одсив $x(t)$ може да се претстави на следниот начин:

$$X(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) = b(s)W(s) \quad (7.6)$$

каде што $W(s)$ е L -слика на помошната променлива $w(t)$. За да се опише набљудуваниот систем од произволен ред n во просторот на состојби, потребни се најмалку n состојбени големини, кои се одбираат преку помошната променлива $w(t)$ и нејзините изводи:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= w(t) \\ v_2(t) &= w'(t) \\ v_3(t) &= w''(t) \\ &\dots\dots\dots \\ v_n(t) &= w^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Оттука непосредно произлегуваат следните равенки на векторот на состојби на набљудуваниот објект:

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= w'(t) = v_2(t) \\ v_2'(t) &= w''(t) = v_3(t) \\ v_3'(t) &= w'''(t) = v_4(t) \\ &\dots\dots\dots \\ v_{n-1}'(t) &= w^{(n-1)}(t) = v_n(t) \\ v_n'(t) &= w^{(n)}(t) \end{aligned} \quad (7.8)$$

при што изводот $w^{(n)}(t)$ се определува со помош на релацијата (7.6).

Од (7.6) непосредно следуваат равенките во просторот на L -сликите:

$$X(s) = b(s)W(s) \quad (7.9)$$

$$W(s) = \frac{1}{a(s)}U(s) \quad (7.10)$$

односно равенките:

$$X(s) = b(s)W(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0) W(s) \quad (7.11)$$

$$a(s)W(s) = (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0) W(s) = U(s) \quad (7.12)$$

на кои во просторот на оригиналите им одговараат равенките:

$$x(t) = b_{n-1}w^{(n-1)}(t) + b_{n-2}w^{(n-2)}(t) + \dots + b_1w'(t) + b_0w(t) \quad (7.13)$$

$$w^{(n)}(t) + a_{n-1}w^{(n-1)}(t) + a_{n-2}w^{(n-2)}(t) + \dots + a_1w'(t) + a_0w(t) = u(t) \quad (7.14)$$

Изводот $w^{(n)}(t)$ се определува од равенката (7.14) и тој изнесува:

$$\begin{aligned} w^{(n)}(t) &= -a_0w(t) - a_1w'(t) - \dots - a_{n-2}w^{(n-2)}(t) - a_{n-1}w^{(n-1)}(t) + u(t) = \\ &= -a_0v_1(t) - a_1v_2(t) - \dots - a_{n-2}v_{n-1}(t) - a_{n-1}v_n(t) + u(t) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Следствено, n -те диференцијални равенки од прв ред на векторот на состојби на набљудуваниот објект (7.5) ќе бидат од облик:

$$v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = v_3(t)$$

$$v_3'(t) = v_4(t)$$

.....

$$v_{n-1}'(t) = v_n(t)$$

$$v_n'(t) = -a_0v_1(t) - a_1v_2(t) - \dots - a_{n-2}v_{n-1}(t) - a_{n-1}v_n(t) + u(t) \quad (7.16)$$

Равенката на излезот на набљудуваниот систем во просторот на состојби се добива од (7.13), кога во неа се внесат смените (7.7):

$$x(t) = b_0 v_1(t) + b_1 v_2(t) + \dots + b_{n-2} v_{n-1}(t) + b_{n-1} v_n(t) \quad (7.17)$$

и таа, заедно со равенките (7.16), го чини бараниот модел на системот (7.5) во просторот на состојби.

Моделот (7.16) – (7.17) може да се запише и во матричен облик:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}] \mathbf{v}(t) \quad (7.18)$$

Ако сега се воведо повратна врска по состојбите на објектот (7.5) односно (7.18) од обликот:

$$u(t) = y(t) - \mathbf{K} \mathbf{v}(t) \quad (7.19)$$

каде што \mathbf{K} е матрица-редица со n елементи:

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_{n-1} \quad k_n] \quad (7.20)$$

матрицата $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ ќе биде:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & \dots & -a_{n-2} - k_{n-1} & -a_{n-1} - k_n \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

Оттука, карактеристичниот полином на затворениот систем што се добива кога објектот (7.18) се опфати со повратната врска (7.19) е:

$$a(s) = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] =$$

$$= s^n + (a_{n-1} + k_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + k_{n-1})s^{n-1} + \dots + (a_1 + k_2)s + (a_0 + k_1) \quad (7.22)$$

(Да се спореди со карактеристичниот полином на објектот (7.5))

Нека, под претпоставка, полиномот (7.22) треба да биде од облик:

$$a(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 \quad (7.23)$$

каде што $d_1, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1}$ се однапред зададени и познати коефициенти. Тогаш, од условот за еднаквост на изразите (7.22) и (7.23) непосредно следува:

$$d_0 = a_0 + k_1 \Rightarrow k_1 = d_0 - a_0$$

$$d_1 = a_1 + k_2 \Rightarrow k_2 = d_1 - a_1$$

$$d_2 = a_2 + k_3 \Rightarrow k_3 = d_2 - a_2$$

.....

$$d_{n-1} = a_{n-1} + k_n \Rightarrow k_n = d_{n-1} - a_{n-1} \quad (7.24)$$

Преку задавање на коефициентите на полиномот (7.22), всушност се задава положбата на половите на проектираниот затворен систем во s -комплексната рамнина па, затоа, оваа постапка на синтеза се нарекува **нагодување полови**.

Синтезата на еден затворен систем во просторот на состојби со постапката за нагодување полови се состои од следните чекори:

1. Претставување на зададениот објект со соодветен модел во просторот на состојби од облик (7.18).
2. Воспоставување повратна врска по состојбите на објектот преку соодветна матрица на засилувања \mathbf{K} .
3. Одредување на карактеристичниот полином на затворениот систем на автоматско управување дефиниран во претходниот чекор.
4. Задавање на положбата на половите на проектираниот затворен систем на автоматско управување преку коефициентите на полиномот (7.23).
5. Пресметување на елементите на матрицата на засилувања \mathbf{K} .

Откако ќе се определат половите на проектираниот затворен систем на автоматско управување, останува да се дефинираат и неговите нули. Меѓутоа, за објект опишан во просторот на состојби со моделот (7.18), нулите на затворениот систем се еднакви со нулите на самиот објект. Со тоа синтезата на затворениот систем на автоматско управување, кој се добива со воведување повратна врска по состојбите на зададениот

објект (7.18), е завршена. Проблемот на синтеза на затворен систем на автоматско управување кога објектот на управување во просторот на состојби не е опишан со моделот (7.18) е прикажан подоцна.

Пример 7.1. Да се проектира затворен систем на автоматско управување со воведување повратна врска по состојбите на објектот:

$$G(s) = \frac{100(s+4)}{s(s+2)(s+8)} \quad (7.25)$$

од облик (7.18), така што системот ќе има максимален прескок од 16.3 % и време на смирување од 0.8 sec.

Решение: 1) Соодветниот модел (7.18) на зададениот објект (7.25) во просторот на состојби има облик:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -16 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = [100 \quad 400 \quad 0] \mathbf{v}(t) \quad (7.26)$$

2) Матрицата $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ на проектираниот затворен систем на автоматско управување во конкретниот случај ќе биде:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -16 - k_2 & -10 - k_3 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

3) додека неговиот карактеристичен полином е од облик:

$$a(s) = s^3 + (10 + k_3)s^2 + (16 + k_2)s + k_1 \quad (7.28)$$

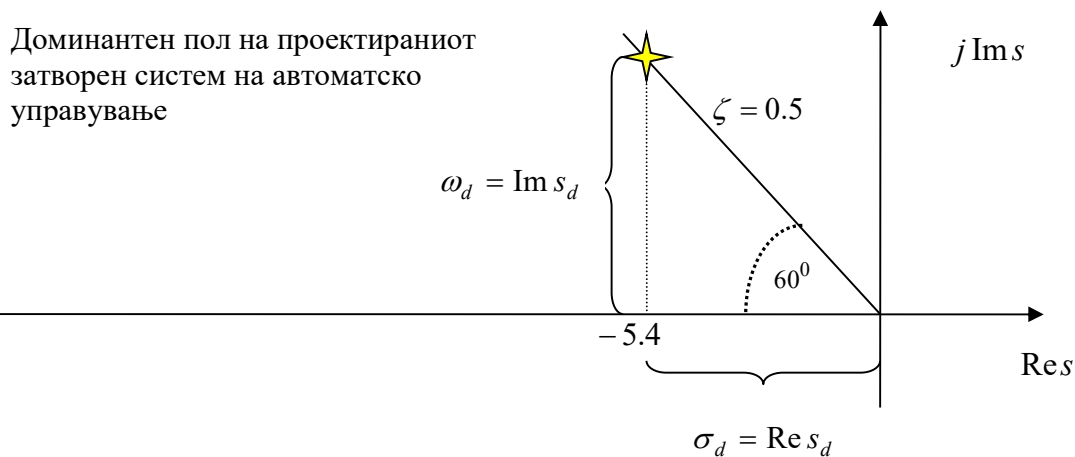
4) Коэффициентите на полиномот (7.28) се одредуваат од дадените проектни услови. Така, на максимален прескок од 16.3 % одговара фактор на релативно придушување $\zeta = 0.5$, додека правата на константен фактор на релативно придушување односно константен максимален прескок со реалната оска во s -комплексната рамнина зафаќа агол од 1.0472 rad или 60° .

Реалниот дел на доминантниот пар полови на проектираниот систем се определува од условот за неговото време на смирување T_s :

$$-\sigma_d = -\frac{4}{T_s} = -\frac{4}{0.8} = -5 \quad (7.29)$$

а имагинарниот дел од слика 7.3⁴⁾:

$$\pm\omega_d = \pm\sigma_d \operatorname{tg}(1.0472) = \pm 8.66 \quad (7.30)$$



Слика 7.3.Одредување на доминантниот пар полови на проектираниот затворен систем на автоматско управување од примерот 7.1

Следствено, проектираниот систем на автоматско управување, за да ги задоволи поставените проектни барања, мора да има пар конјугирано-комплексни полови во точките $s_{1,2} = -5 \pm j8.66$.

Бидејќи проектираниот затворен систем е од трет ред, треба да се дефинира и неговиот трет пол, кој мора да биде прост и реален. Поаѓајќи од фактот дека и затворениот систем има нула во точката -4 како и зададениот објект, третиот пол може да се одбере во истата точка. На тој начин се поништува влијанието на нулата на затворениот систем врз неговиот одсив односно поведење.

⁴⁾ Имагинарниот дел на доминантниот пар полови може да се определи и според релациите:

$$\sigma_d = \zeta\omega_n \Rightarrow \omega_n = \frac{\sigma_d}{\zeta} = \frac{5}{0.5} = 10 \operatorname{sec}^{-1} \quad (7.31)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 10 \sqrt{1 - 0.25} = 10 \sqrt{0.75} = 10(0.866) = 8.66 \quad (7.32)$$

Во согласност со погоре кажаното, карактеристичниот полином (7.28) на проектираниот затворен систем на автоматско управување треба да има конкретен облик:

$$\begin{aligned} a(s) &= (s+5-j8.66)(s+5+j8.66)(s+4) = \left[(s+5)^2 + (8.66)^2 \right] (s+4) = \\ &= \left[(s^2 + 10s + 25) + (75) \right] (s+4) = (s^2 + 10s + 100)(s+4) = \\ &= s^3 + 14s^2 + 140s + 400 \end{aligned} \quad (7.33)$$

5) Од (7.28) и (7.33) непосредно следуваат вредностите на коефициентите на засилување k_i ($i = 1,2,3$) односно елементите на матрицата-редица **K** со кои се постига саканото нагодување на половите на проектираниот затворен систем на автоматско управување:

$$k_1 = 400$$

$$k_2 = 140 - 16 = 124$$

$$k_3 = 14 - 10 = 4 \quad (7.34)$$

Преносната функција на проектираниот затворен систем на автоматско управување од примерот е:

$$G(s) = \frac{100(s+4)}{(s^2 + 10s + 100)(s+4)} = \frac{100}{s^2 + 10s + 100} \quad (7.35)$$

Бидејќи неговиот реален пол и нула заемно се поништуваат, нема потреба од проверка на извршената синтеза по пат на симулација на одзивот на системот.

За да се прикаже влијанието на третиот пол врз одзивот на проектираниот затворен систем, што значи влијание врз процесот на синтеза, како и потребата од проверка и потврдување на синтезата со симулација, наместо во точката -4, третиот пол на системот дефиниран во чекорот 2) може да се одбере, на пример, во -5. Тогаш карактеристичниот полином (7.28) ќе треба да го има следниот конкретен облик:

$$\begin{aligned} a(s) &= (s+5-j8.66)(s+5+j8.66)(s+5) = \left[(s+5)^2 + (8.66)^2 \right] (s+5) = \\ &= \left[(s^2 + 10s + 25) + 75 \right] (s+5) = (s^2 + 10s + 100)(s+5) = \end{aligned}$$

$$= s^3 + 15s^2 + 150s + 500 \quad (7.36)$$

па за коефициентите $k_i (i = 1, 2, 3)$ се добива:

$$k_1 = 500$$

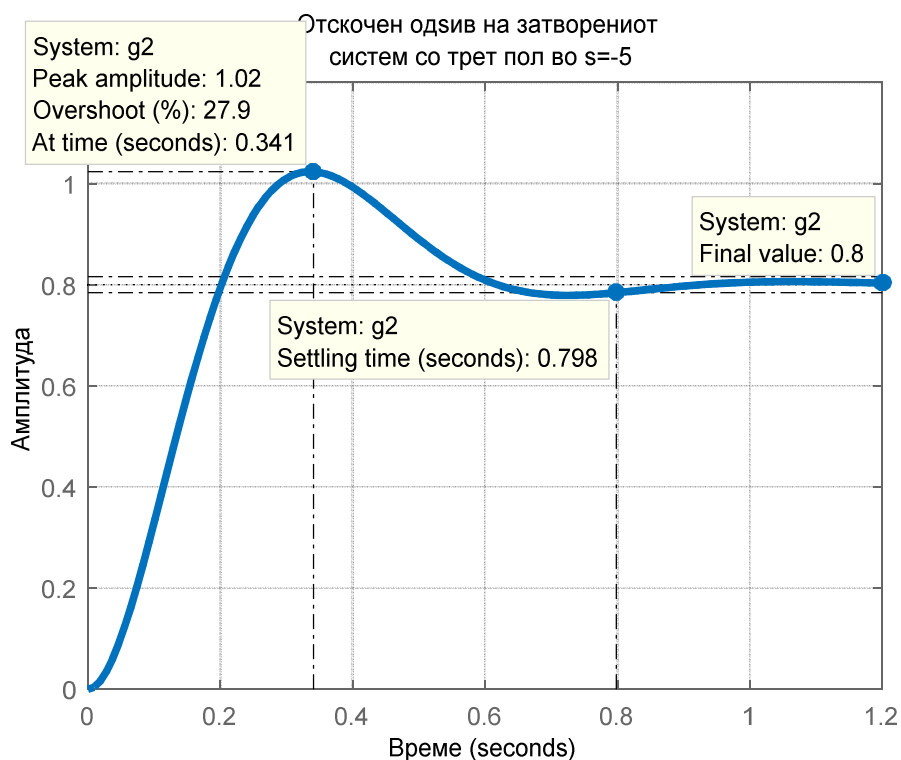
$$k_2 = 150 - 16 = 134$$

$$k_3 = 15 - 10 = 5 \quad (7.37)$$

Врз основа на направените пресметки, проектираниот затворен систем на автоматско управување ќе биде опишан со следниот модел во просторот на состојби:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -500 & -150 & -15 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = [100 \quad 400 \quad 0] \mathbf{v}(t) \quad (7.38)$$



Слика 7.4. Графички приказ на отскочниот одзив на проектираниот затворен систем на автоматско управување со повратна врска по состојбите на објектот (7.38) добиен во MATLAB

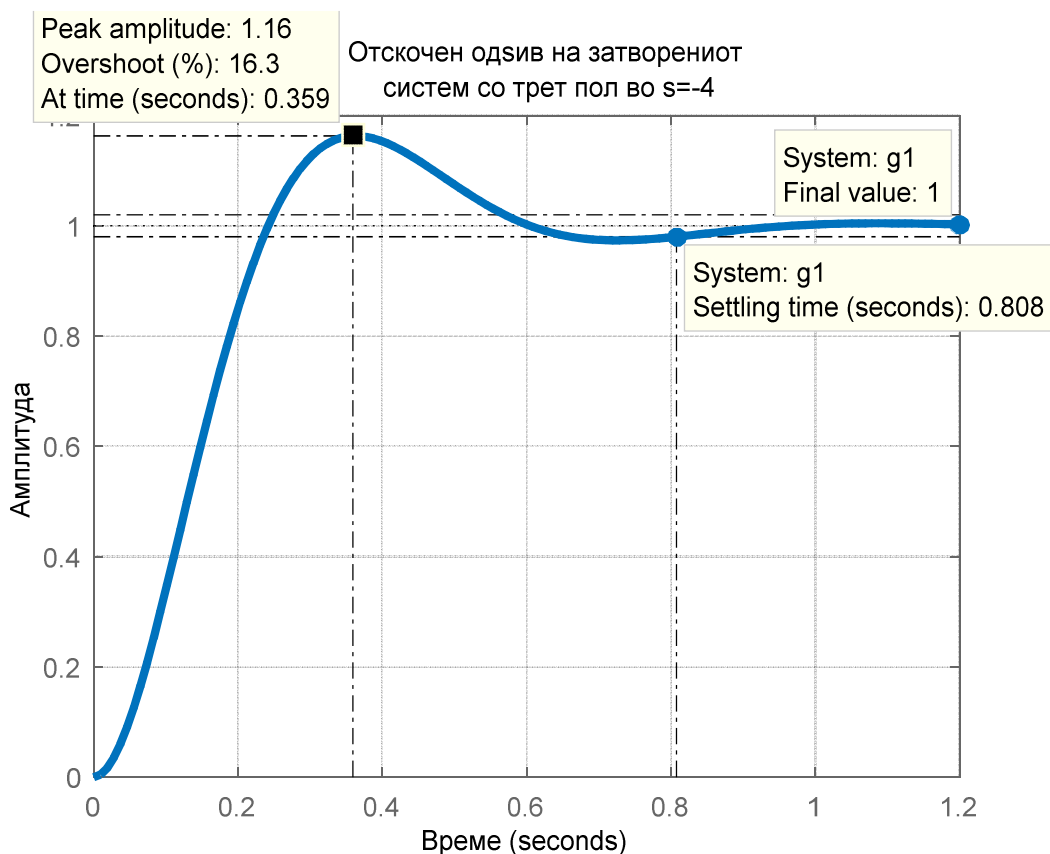
односно со преносната функција:

$$G(s) = \frac{100(s+4)}{s^3 + 15s^2 + 150s + 500} \quad (7.39)$$

Одзивот на овој систем на единичен отскочен влез е прикажан на слика 7.4.

Од слика 7.4 се гледа дека проектираниот затворен систем на автоматско управување (7.39) има максимален прескок од околу 28 %, трајна вредност од 0.8 и време на смирување од околу 0.8 sec. Може да се забележи дека стационарната грешка на проектираниот систем е $e(\infty) = 0.2$, што значи голема грешка. Ваквата грешка е неприфатлива и треба да се исправи, за што ќе стане збор подоцна. Ова се должи на влијанието на третиот пол на системот во точката -5 .

Отскочниот одзив на затворениот систем на автоматско управување (7.35) со пол и нула во точката -4 ги задоволува поставените проектни барања и е прикажан на слика 7.5.



Слика 7.5. Отскочен одзив на затворениот систем (7.35) □

7.2. УПРАВЛИВОСТ

Синтезата со воведување повратна врска по состојбите на управуваниот објект подразбира целосна управливост на неговите состојби. Тоа значи дека нагудувањето на половите на проектираниот затворен систем на автоматско управување нема да биде можно доколку и само една состојба на управуваниот објект е неуправлива. Во продолжение се дискутирани начините на проверка на управливоста на еден линеарен стационарен континуален динамички систем.

7.2.1. ПРОВЕРКА НА УПРАВЛИВОСТА НА ЕДЕН СИСТЕМ ПРЕКУ НЕГОВИОТ МОДЕЛ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

Нека, под претпоставка, набљудуваниот систем, чиј математички модел е од општ облик (7.5), има само прости и реални полови. Тогаш преносната функција (7.5) може да се претстави во следниот факторизиран облик:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} \quad (7.40)$$

и да се развие во парцијални дробки:

$$G(s) = \frac{b(s)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - s_i} \quad (7.41)$$

каде што:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i)G(s) \quad (7.42)$$

се коефициентите на развој на дробно-рационалната функција (7.40) во парцијални дробки по нејзините полови $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Врз основа на (7.41) и (7.40), L -сликата $X(s)$ на одсивот $x(t)$ на набљудуваниот објект може да се запише во облик:

$$X(s) = G(s)U(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - s_i} U(s) \quad (7.43)$$

од каде што се гледа како можат да се изберат состојбените големини за набљудуваниот систем од произволен n -ти ред. Имено, во конкретниот случај,

состојбените големини на објектот (7.41) се одбираат така што за нивните L -слики $V_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) да важат релациите:

$$V_i(s) = \frac{1}{s - s_i} U(s); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.44)$$

Ако релациите (7.44) се преуредат така што се ослободат од именителите на десните страни:

$$(s - s_i)V_i(s) = U(s); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.45)$$

а на левите страни се задржат само членовите со првиот степен од комплексната променлива s , ќе се добијат диференцијалните равенки на векторот на состојби на набљудуваниот систем во s – комплексното подрачје:

$$sV_i(s) = s_i V_i(s) + U(s); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.46)$$

Равенката на излезот на набљудуваниот објект во просторот на сликите се добива од (7.43) со воведување на смените (7.44):

$$X(s) = \sum_{i=1}^n c_i V_i(s) \quad (7.47)$$

и заедно со равенките (7.46) го чини бараниот модел на набљудуваниот објект во просторот на состојби, прикажан во s – комплексното подрачје. Во просторот на оригиналите овој модел има облик:

$$v_i'(t) = s_i v_i(t) + u(t); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.48)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i v_i(t) \quad (7.49)$$

Од равенките (7.48) лесно може да се забележи дека сите состојбени големини на набљудуваниот систем се управливи. Меѓутоа, за жал, не секогаш набљудуваниот објект има прости и реални полови па, следствено, не секогаш може да се претстави со моделот (7.48) – (7.49). Во такви случаи се составуваат други модели на истиот систем во просторот на состојби, од кои не е веднаш очигледно дали дадениот систем е целосно управлив или не и, затоа, мора да се применат соодветните критериуми за проверка на целосната управливост на зададениот систем.

Моделот (7.48) – (7.49) може да се претстави и во матричен облик:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_n \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \cdots \quad c_{n-1} \quad c_n] \mathbf{v}(t) \quad (7.50)$$

кој е карактеристичен по тоа што матрицата \mathbf{A} е квадратна дијагонална матрица, чии елементи се сите еднакви на нула, освен елементите во главната дијагонала, кои се всушност половите на моделираниот систем. Векторот \mathbf{V} , пак, е единичен, што значи дека сите негови елементи се еднакви на единица. За набљудуваниот систем да биде целосно управлив, векторот \mathbf{V} не смее да има нулеви елементи, зашто тогаш соодветните состојби нема да бидат управливи.

7.2.2. МАТЕМАТИЧКИ УСЛОВ ЗА ЦЕЛОСНА УПРАВЛИВОСТ НА ЕДЕН ЛИНЕАРЕН СТАЦИОНАРЕН КОНТИНУАЛЕН ДИНАМИЧКИ СИСТЕМ

Еден линеарен стационарен континуален динамички систем од произволен ред n е целосно управлив, доколку постои управувачки вектор $\mathbf{u}(t)$, таков што системот може да се преведе од произволна почетна состојба $\mathbf{v}_0(t)$ во произволна крајна состојба $\mathbf{v}_f(t)$, за конечно време $t_0 < t < t_f$.

Математичкиот услов за целосна управливост на состојбите на еден линеарен стационарен континуален динамички систем од произволен ред n гласи:

$$\text{rang} \mathbf{N} = \text{rang} \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{A}\mathbf{V} & \mathbf{A}^2\mathbf{V} & \mathbf{A}^3\mathbf{V} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{V} \end{bmatrix} = n \quad (7.51)$$

каде што $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{A}\mathbf{V} & \mathbf{A}^2\mathbf{V} & \mathbf{A}^3\mathbf{V} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{V} \end{bmatrix}$ е матрицата на управливост на состојбите на набљудуваниот систем.

Условот (7.51) може да се искаже и на поинаков начин: **Набљудуваниот линеарен стационарен континуален динамички систем од произволен ред n е целосно управлив доколку неговата матрица на целосна управливост \mathbf{N} има n линеарно независни колони.**

Во најопштиот случај на повеќевеличински систем со произволен број влезови и излези, матрицата \mathbf{N} има n редици, а бројот колони на \mathbf{N} е еднаков со производот од бројот влезови на повеќевеличинскиот систем и неговиот ред. Во случајот на систем со еден влез и еден излез \mathbf{N} е квадратна матрица со димензија $n \times n$ и тогаш условот за целосна управливост на системот со еден влез и еден излез се сведува на условот матрицата \mathbf{N} да биде несингуларна, односно нејзината детерминанта да биде различна од нулата.

7.3. НАГОДУВАЊЕ НА ПОЛОВИТЕ ПРЕКУ ТРАНСФОРМАЦИЈА НА МОДЕЛОТ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

Кога објектот на управување во просторот на состојби не е претставен со моделот (7.18), туку со произволен модел (изборот состојбени големини не е еднозначна задача), синтезата со нагудување полови води кон сложени пресметки на елементите од матрицата на засилување \mathbf{K} , посебно во случајот на системи од повисок ред.

Пример 7.2. Со воведување повратна врска по состојбите на објектот:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{v}(t) \tag{7.52}$$

преку матрицата на засилување \mathbf{K} , да се проектира затворен систем на автоматско управување, кој ќе има трикратен реален пол во точката $s = -1$.

Решение: Карактеристичниот полином на проектираниот затворен систем на автоматско управување е:

$$\begin{aligned} a(s) &= |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ k_1-1 & s+1+k_2 & k_3 \\ k_1-1 & k_2-1 & s+1+k_3 \end{vmatrix} = \\ &= (s+1)(s+1+k_2)(s+1+k_3) - (k_1-1)k_3 - (k_2-1)k_3(s+1) + \\ &+ (k_1-1)(s+1+k_3) = s^3 + (3+k_2+k_3)s^2 + (2+k_1+2k_2+3k_3)s + k_1+k_2+2k_3 \end{aligned} \tag{7.53}$$

и тој треба да биде од облик:

$$a(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 \tag{7.54}$$

Следствено, со изедначување на коефициентите пред истите степени во полиномите (7.53) и (7.54) се добива:

$$3 + k_2 + k_3 = 3$$

$$2 + k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3$$

$$k_1 + k_2 + 2k_3 = 1 \tag{7.55}$$

односно:

$$k_3 = -k_2$$

$$k_1 - k_2 = 1 \tag{7.56}$$

Бидејќи за определување на трите непознати елементи k_1, k_2, k_3 од матрицата \mathbf{K} на располагање стојат само две равенки, едниот коефициент може да се определи произволно. Така, за $k_1 = 2$ се добива решението:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \square \tag{7.57}$$

Пример 7.3. Со воведување повратна врска по состојбите на објектот:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) \tag{7.58}$$

преку матрицата на засилување \mathbf{K} , да се проектира затворен систем на автоматско управување, кој ќе има прости реални полови во точките -1 , -2 и -3 .

Решение: Карактеристичниот полином на проектираниот затворен систем на автоматско управување е:

$$a(s) = \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} \right| = \begin{vmatrix} s+3 & -1 & 0 \\ k_1-4 & s+1+k_2 & k_3+3 \\ k_1-2 & k_2-1 & s+4+k_3 \end{vmatrix} =$$

$$= s^3 + (8 + k_2 + k_3)s^2 + (19 + 4k_2 + 5k_3)s + 11 + 7k_1 + 3k_2 + 4k_3 \quad (7.59)$$

и тој треба да биде од облик:

$$a(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \quad (7.60)$$

Следствено, со изедначување на коефициентите пред истите степени во полиномите (7.59) и (7.60):

$$8 + k_2 + k_3 = 6 \Rightarrow k_2 + k_3 = -2$$

$$19 + 4k_2 + 5k_3 = 11 \Rightarrow 4k_2 + 5k_3 = -8$$

$$11 + 7k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 6 \Rightarrow 7k_1 + 3k_2 + 4k_3 = -5 \quad (7.61)$$

се добива решението:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -2 & 0 \end{bmatrix} \square \quad (7.62)$$

Секогаш кога објектот на управување во проблемот на синтеза во просторот на состојби со нагудување полови не е даден со модел од општиот облик (7.18), за да се избегнат обемните и сложени пресметки на елементите на матрицата на засилувања \mathbf{K} илустрирани со горните примери, најнапред се врши трансформација на моделот на објектот во облик (7.18), потоа се пресметуваат елементите на матрицата на засилувања \mathbf{K} и, конечно, моделот на проектираниот затворен систем на автоматско управување се трансформира назад во оригиналниот облик. Постапката е илустрирана во продолжение.

Нека објектот на управување е зададен со произволен модел во просторот на состојби кој не е од обликот (7.18):

$$\mathbf{w}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{w}(t) \quad (7.63)$$

Неговата матрица на управливост е следната:

$$\mathbf{N}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

Под претпоставка дека врската помеѓу моделот (7.18) и (7.63) е претставена со матрицата \mathbf{P} :

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{P}\mathbf{v}(t) \quad (7.65)$$

моделот (7.63) се трансформира на следниот начин:

$$\mathbf{P}\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) \quad (7.66)$$

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) \quad (7.67)$$

а неговата матрица на управливост се трансформира во матрицата:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_v &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} & (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) & (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^2(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) & \dots & \dots & (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{n-1}\dots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}) \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}_w \end{aligned} \quad (7.68)$$

Од (7.68) следува дека матрицата на трансформација \mathbf{P} на произволниот модел (7.63) во моделот (7.18) е дадена со изразот:

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}_w \mathbf{N}_v^{-1} \quad (7.69)$$

Откако моделот (7.63) на зададениот објект се трансформира во обликот (7.67), кој за матрицата \mathbf{P} одредена со (7.69) е идентичен со моделот (7.18), со воведување повратна врска по состојбите на објектот од облик:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{K}_v \mathbf{v}(t) \quad (7.70)$$

се проектира затворен систем на автоматско управување со модел:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(t) &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{K}_v \mathbf{v}(t)] = \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_v \mathbf{v}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}(t) = \\ &= (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_v) \mathbf{v}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{v}(t) \quad (7.71)$$

Бидејќи моделот (7.67) е од обликот (7.18), карактеристичниот полином на проектираниот затворен систем (7.71) се добива од карактеристичниот полином на објектот (7.67), како што беше покажано во делот 7.1.

Со помош на смената:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}(t) \quad (7.72)$$

моделот (7.71) се трансформира во изворниот облик:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}'(t) = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_v)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}(t) \quad \Rightarrow \quad (7.73)$$

$$\mathbf{w}'(t) = \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}_v)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}(t) + \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{w}(t) \quad \Rightarrow \quad (7.74)$$

$$\mathbf{w}'(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_v\mathbf{P}^{-1})\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{w}(t) \quad \Rightarrow \quad (7.75)$$

$$\mathbf{w}'(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_w)\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{w}(t) \quad (7.76)$$

каде што:

$$\mathbf{K}_w = \mathbf{K}_v\mathbf{P}^{-1} \quad (7.77)$$

е матрицата на засилувања за оригиналниот систем.

Пример 7.4. Со воведување повратна врска по состојбите на објектот:

$$G(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)(s+4)} \quad (7.78)$$

да се проектира затворен систем на автоматско управување кој ќе има максимален прескок од 20.8 % и време на смирување од 4 сек.

Решение: Еден модел на објектот (7.78) во просторот на состојби е следниот:

$$\mathbf{w}'(t) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{w}(t) \quad (7.79)$$

Моделот (7.79) е добиен со сериската постапка:

$$X(s) = U(s) \frac{s+5}{(s+2)(s+3)(s+4)} = W_3(s) \frac{s+5}{(s+3)(s+4)} = W_2(s) \frac{s+5}{s+4} =$$

$$= (s+5)W_1(s) \quad (7.80)$$

Од (7.80) непосредно произлегува дека:

$$W_3(s) = \frac{1}{s+2} U(s)$$

$$W_2(s) = \frac{1}{s+3} W_3(s)$$

$$W_1(s) = \frac{1}{s+4} W_2(s) \quad (7.81)$$

па равенките на векторот на состојби на објектот (7.78) се:

$$w_1'(t) = -4w_1(t) + w_2(t)$$

$$w_2'(t) = -3w_2(t) + w_3(t)$$

$$w_3'(t) = -2w_3(t) + u(t) \quad (7.82)$$

додека равенката на излезот има облик:

$$x(t) = 5w_1(t) + w_1'(t) = w_1(t) + w_2(t) \quad (7.83)$$

Матрицата на управливост за моделот (7.79) гласи:

$$\mathbf{N}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad (7.84)$$

и, бидејќи детерминантата на матрицата (7.84) е различна од нулата:

$$\det \mathbf{N}_w = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad (7.85)$$

моделот (7.79) е целосно управлив во однос на состојбите.

Моделот на објектот (7.78) во просторот на состојби од облик (7.18) лесно се добива со помош на неговиот карактеристичен полином:

$$a(s) = (s+2)(s+3)(s+4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24 \quad (7.86)$$

и тој гласи:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$x(t) = [5 \quad 1 \quad 0] \mathbf{v}(t) \quad (7.87)$$

Равенката на излезот е добиена со помош на коефициентите од броителот на преносната функција на објектот (7.78).

Матрицата на управливост за моделот (7.87) е од облик:

$$\mathbf{N}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & -9 & 55 \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

па со помош на (7.84) и (7.88) се пресметува матрицата на трансформација \mathbf{P} дадена со изразот (7.69):

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}_w \mathbf{N}_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 12 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.89)$$

Максимален прескок од 20.8 % и време на смирување од 4 sec. значи дека проектираниот затворен систем на автоматско управување има конјугирано-комплексен пар полови во точките $-1 \pm j2$. Бидејќи објектот е од трет ред, таков ќе биде и проектираниот затворен систем на автоматско управување, па треба да се проектира и неговиот трет пол, кој сигурно е реален и прост. Тој се одбира да го поништи влијанието на нулата на проектираниот систем, која се наоѓа во точката -5 . Следствено, карактеристичниот полином на проектираниот затворен систем на автоматско управување треба да биде од облик:

$$a(s) = (s+1+j2)(s+1-j2)(s+5) = s^3 + 7s^2 + 15s + 25 \quad (7.90)$$

Врз основа на (7.24), за матрицата на засилувања \mathbf{K}_v се добива:

$$\mathbf{K}_v = [1 \quad -11 \quad -2] \quad (7.91)$$

додека матрицата на засилувања \mathbf{K}_w се добива со помош на матрицата (7.89):

$$\mathbf{K}_w = \mathbf{K}_v \mathbf{P}^{-1} = [13 \quad 3 \quad -2] \quad (7.92)$$

Следствено, моделот на проектираниот затворен систем на автоматско управување кој ги задоволува поставените проектни барања во просторот на состојби ќе биде:

$$\mathbf{w}'(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_w) \mathbf{w}(t) + \mathbf{B}y(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -13 & -3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Cw}(t) = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{w}(t) \quad (7.93)$$

додека неговата преносна функција ќе има облик:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \quad (7.94)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Norman S. Niese, *Control System Engineering* (6-то издание на англиски), John Wiley & Sons, New York, New York, 2010.
2. R. C. Dorf, R. H. Bishop, *Modern Control Systems* (12-то издание на англиски), Prentice Hall, 2010.
3. G. F. Franklin, J. D. Powell, A. E. Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems* (6-то издание на англиски), Prentice Hall, 2009.
4. J. J. Di Stefano III, A. R. Stubberud & I. J. Williams, *Feedback and Control Systems* (2-ро издание на англиски), Mc Graw-Hill Inc., New York, New York, 1994.
5. Милиќ Р. Стојиќ, *Континуални системи на автоматско управување* (на српски), Белград, Србија, (повеќе изданија), 1991.
6. Милиќ Р. Стојиќ, *Дигитални системи на управување* (на српски), Академска мисла, Белград, Србија, (повеќе изданија), 2004.
7. Katsuhiko Ogata, *Discrete-Time Control Systems*, Pearson Education Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
8. Benjamin C. Kuo, *Digital Control Systems*, Oxford University Press, 1995.
9. Жељко Журовиќ, Бранко Ковачевиќ, *Дигитални сигнали и системи: Преглед на теоријата и решени задачи* (на српски), Академска мисла, Белград, Србија, 2004.
10. Е. Лазаревска, *Начини за решавање на Парсерваловата интегрална равенка* (магистерски труд), Факултет за електротехника – Скопје, Универзитет „Свети Кирил и Методиј“ – Скопје, Македонија, 1985.

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на било кој начин без претходна писмена согласност на авторот.

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41