



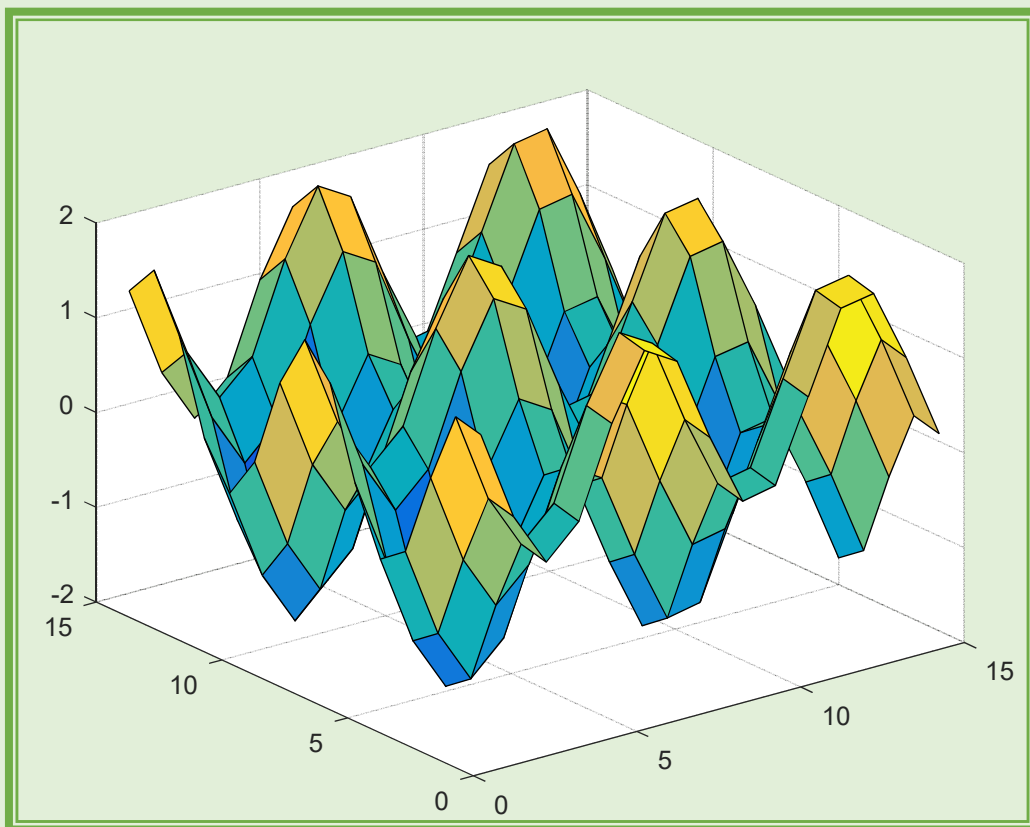
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ -  
Скопје

Факултет за електротехника и  
информациски технологии - Скопје



**ЕЛИЗАБЕТА ЛАЗАРЕВСКА**

**РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД ОБЛАСТА МОДЕЛИРАЊЕ, СИМУЛАЦИЈА И  
ИДЕНТИФИКАЦИЈА НА ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ**



**Скопје, 2018**

**Издавач:**

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје  
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје  
www.ukim@ukim.edu.mk

**Уредник за издавачка дејност на УКИМ:**

проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

**Уредник на публикацијата:**

Д-р Елизабета Лазаревска, редовен професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

**Рецензенти**

1. Д-р Весна Ојлеска, доцент на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје
2. Д-р Горан Стојановски, доцент на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

**Техничка обработка**

Д-р Елизабета Лазаревска

**Лектура на македонски јазик:**

Дијана Ристова

CIP - Каталогизација во публикација  
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517.938:004.942(075.8)(076)

ЛАЗАРЕВСКА, Елизабета

Решени задачи од областа моделирање, симулација и идентификација на динамички системи / Елизабета Лазаревска. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2018. - 330 стр. : илустр. ; 30 см

Библиографија: стр. 329-330

ISBN 978-9989-43-411-2

а) Динамички системи - Математички модели - Симулација - Високошколски учебници - Вежби COBISS.MK-ID 108084234

## ПРЕДГОВОР

Збирката решени задачи по моделирање, симулација и идентификација на динамички системи во прв ред е наменета на студентите на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје, од насоката Компјутерско системско инженерство, автоматика и роботика, кои го слушаат задолжителниот предмет Моделирање, симулација и идентификација во VI-тиот семестар од III година според најновата програма. Во тој контекст, таа целосно го следи и илустрира материјалот изложен во скриптата Предавања по предметот моделирање, симулација и идентификација на динамички системи, издадена од ФЕИТ-Скопје, 2015 година, кој е неопходен за целосно разбирање на применетата теорија во Збирката. Меѓутоа, освен на оваа група корисници, Збирката многу корисно ќе им послужи и на друга, широка класа корисници, која ги опфаќа сите студенти од природно-научните и техничките факултети, инженери и останати заинтересирани за моделирање на динамичките системи, воопшто.

Материјалот во збирката е изложен во четири генерални подрачја: Моделирање динамички системи, Нумеричко решавање диференцијални равенки, Линеаризација на нелинеарни динамички системи и Идентификација на динамички системи. Во првата глава под наслов Моделирање на динамички системи се изложени главните постапки за моделирање на динамичките системи, поделени во четири подзаглавија: Моделирање на електрични системи, Моделирање на механички и електромеханички системи, Модели на континуалните системи во просторот на состојби и Моделирање на дискретни системи. Главата опфаќа 64 целосно решени задачи од наведените области.

Во втората глава се изложени постапки за симулација на динамичките системи, во прв ред со помош на дигитален пресметувач. Затоа главата ги илустрира основните постапки за нумеричко решавање диференцијални равенки, кои ги опфаќаат Ојлеровите постапки, Тајлоровата формула и Рунге-Кута постапките. Во некои одбрани примери се дадени и MATLAB програмски кодови за симулација. Во продолжение, прикажана е симулацијата на динамички системи со помош на програмскиот пакет SIMULINK на MATLAB, при што се дадени SIMULINK модели на некои интересни динамички системи. Главата опфаќа 54 целосно решени примери.

Третата глава ја презентира низ примери линеаризацијата на нелинеарни динамички системи, којашто претставува важно подрачје од моделирањето на динамички системи, со оглед на фактот дека реалните системи се по правило нелинеарни. Главата опфаќа 18 целосно решени примери.

Конечно, четвртата глава е посветена на проблемот на идентификација на динамички системи, која овде е презентирана само на воведно ниво, затоа што идентификацијата, со оглед на нејзината важност, заслужува да биде третирана целосно како независно подрачје. Главата прикажува постапки за временска и фреквенциска идентификација на континуални динамички системи, идентификација со помош на методот на најмали квадрати и идентификација на стохастички системи. Главата опфаќа 34 решени примери.

Во надеж дека Збирката успешно ќе им помогне на сите заинтересирани во совладување на изложената проблематика,

Авторот

Скопје, 2018

## СОДРЖИНА

I	МОДЕЛИРАЊЕ НА ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ	1
I-1	МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА ЕЛЕКТРИЧНИ СИСТЕМИ	1
I-2	МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА МЕХАНИЧКИ СИСТЕМИ	17
I-3	МОДЕЛИ НА ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ	56
I-4	МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА ЛИНЕАРНИ ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ	84
II	НУМЕРИЧКО РЕШАВАЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ	117
II-1	ОЈЛЕРОВИ ПОСТАПКИ	117
II-2	ТАЈЛОРОВА ФОРМУЛА	143
II-3	РУНГЕ-КУТА ПОСТАПКИ	178
II-4	СИМУЛАЦИЈА СО ПОМОШ НА SIMULINK	193
III	ЛИНЕАРИЗАЦИЈА НА НЕЛИНЕАРНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ	223
IV	ИДЕНТИФИКАЦИЈА НА ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ	267
IV-1	ВРЕМЕНСКА ИДЕНТИФИКАЦИЈА НА КОНТИНУАЛНИ ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ	267
IV-2	ФРЕКВЕНЦИСКА ИДЕНТИФИКАЦИЈА НА ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ КОНТИНУАЛНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ	270
IV-3	МЕТОД НА НАЈМАЛИ КВАДРАТИ ЗА ПРОЦЕНКА НА ПАРАМЕТРИТЕ НА ЕДЕН СИСТЕМ	274
IV-4	МОДЕЛИРАЊЕ СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ И СИСТЕМИ	305
	ЛИТЕРАТУРА	329

*I see trees of green, red roses too,  
I see them bloom for me and you.  
And I think to myself  
- What a wonderful world!*

*Bob Thiele (as George Douglas);  
George David Weiss*

“То гледам зеленилото,  
црвените рози што цветаат за нас,  
и си мислам: Колку е прекрасен светот!”

Џорџ Даглас, Џорџ Вејс

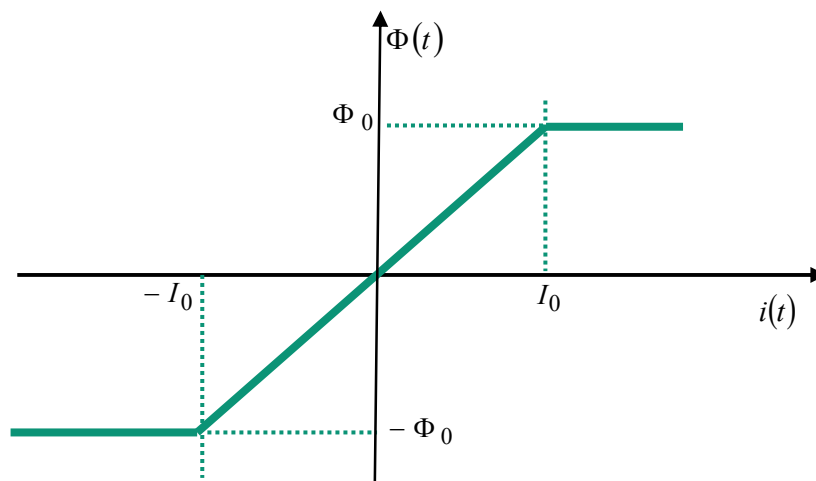
Книгата е посветена на мојот сопруг.

Елизабета Лазаревска



## I-1. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА ЕЛЕКТРИЧНИ СИСТЕМИ

**Задача I-1.1.** Да се состави модел во временското подрачје (просторот на оригиналите) на една електрична намотка (индуктивен елемент) со индуктивност  $L$ , кој ќе ја дефинира врската помеѓу напонот  $u(t)$ , што се создава на краевите од намотката и струјата  $i(t)$  што тече низ неа, ако е дадена зависноста од слика I-1.1. Бараниот модел да се состави за  $-I_0 \leq i(t) \leq I_0$ . Упатство: Врз основа на Фарадеевиот закон за електромагнетна индукција, кој е основен закон на електромагнетиката, напонот  $u(t)$ , што се појавува на краевите од намотката, е еднаков со брзината на промена на магнетниот флуks  $\Phi(t)$  низ намотката, кој е прикажан графички на сликата I-1.1.



Слика I-1.1. Зависност на магнетниот флуks  $\Phi(t)$  од струјата  $i(t)$

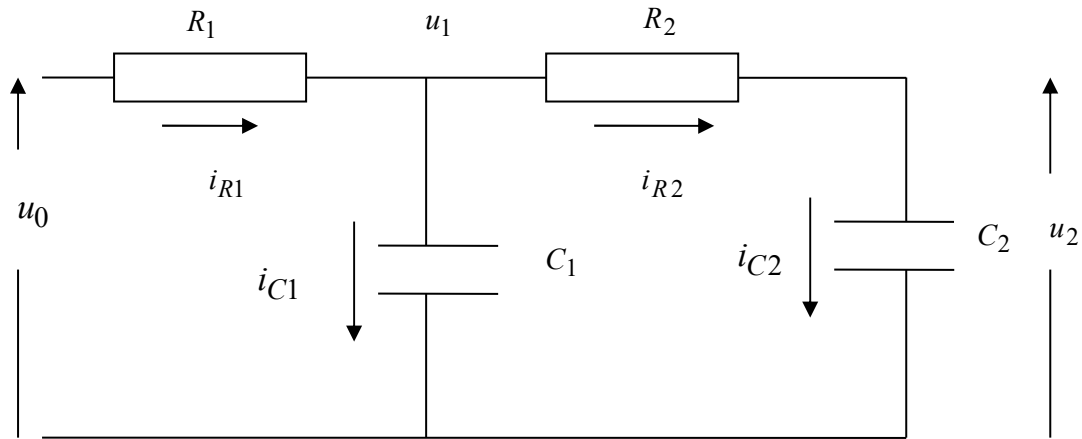
**Решение:** За линеарното подрачје  $-I_0 \leq i(t) \leq I_0$  од слика I-1.1 важи:

$$\Phi(t) = \frac{\Phi_0}{I_0} i(t) = Li(t), \quad -I_0 \leq i(t) \leq I_0 \quad (\text{I-1.1})$$

па, во согласност со Фарадеевиот закон, се добива:

$$u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}, \quad -I_0 \leq i(t) \leq I_0 \quad (\text{I-1.2})$$

**Задача I-1.2.** Да се состави математички модел за електричното коло од слика I-1.2, каде  $u_0(t)$  е влезниот, а  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  се излезни напони во колото.



Слика I-1.2. Електрично RC коло од задачата I-1.2

**Решение:** За струите во колото важи:

$$i_{R1}(t) = \frac{u_0(t) - u_1(t)}{R_1} \quad (\text{I-1.3})$$

$$i_{R2}(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_2} \quad (\text{I-1.4})$$

$$i_{C1}(t) = C_1 \frac{du_1(t)}{dt} \quad (\text{I-1.5})$$

$$i_{C2}(t) = C_2 \frac{du_2(t)}{dt} \quad (\text{I-1.6})$$

$$i_{R1}(t) = i_{C1}(t) + i_{R2}(t) \quad (\text{I-1.7})$$

$$i_{R2}(t) = i_{C2}(t) \quad (\text{I-1.8})$$

Оттука:

$$\frac{u_0(t) - u_1(t)}{R_1} = C_1 \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_2} \quad (\text{I-1.9})$$

$$\frac{u_0(t)}{R_1} = C_1 \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{u_1(t)}{R_1} + \frac{u_1(t)}{R_2} - \frac{u_2(t)}{R_2} \quad (\text{I-1.10})$$

$$R_2 u_0(t) = R_1 R_2 C_1 \frac{du_1(t)}{dt} + (R_1 + R_2) u_1(t) - R_1 u_2(t) \quad (\text{I-1.11})$$



$$\frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_2} = C_2 \frac{du_2(t)}{dt} \quad (\text{I-1.12})$$

$$\frac{u_1(t)}{R_2} = \frac{u_2(t)}{R_2} + C_2 \frac{du_2(t)}{dt} \quad (\text{I-1.13})$$

$$u_1(t) = R_2 C_2 \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \quad (\text{I-1.14})$$

$$\begin{aligned} R_2 u_0(t) &= R_1 R_2 C_1 \frac{d}{dt} \left[ R_2 C_2 \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \right] + \\ &+ (R_1 + R_2) \left[ R_2 C_2 \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \right] - R_1 u_2(t) \end{aligned} \quad (\text{I-1.15})$$

$$u_0(t) = R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + [R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2] \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \quad (\text{I-1.16})$$

каде што:

$$a_2 = R_1 C_1 R_2 C_2, a_1 = R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2, a_0 = 1$$

$$u_2(0) = u_{20}, u_2'(0) = u_{20}'$$

$$u_2'(0) = \left[ \frac{du_2(t)}{dt} \right]_{t=0} = \frac{u_1(0) - u_2(0)}{C_2 R_2} \quad (\text{I-1.17})$$

Бидејќи се работи за систем со два излеза, бараниот модел ќе се состои од две равенки и ќе гласи:

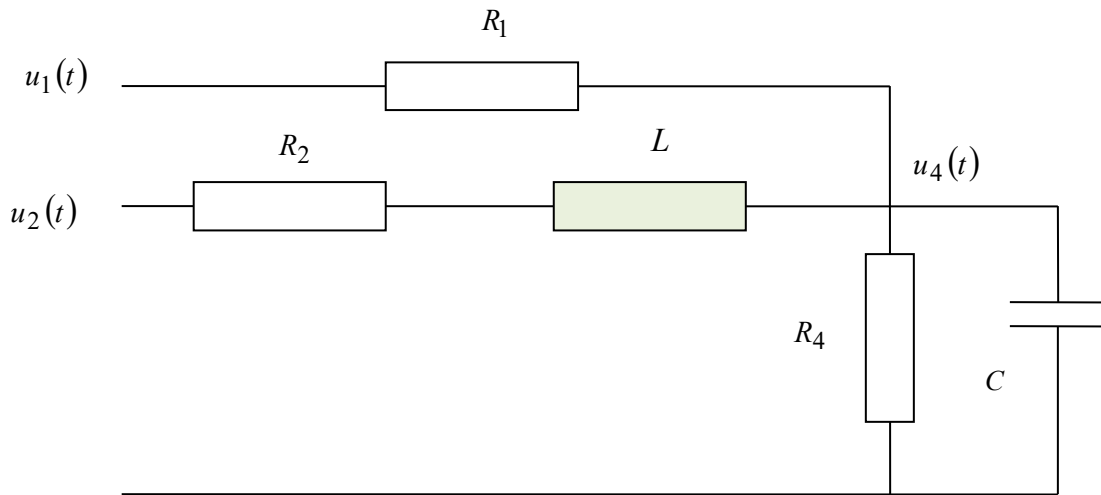
$$\begin{aligned} \frac{du_1(t)}{dt} &= - \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) u_1(t) + \frac{1}{R_2 C_1} u_2(t) + \frac{1}{R_1 C_1} u_0(t) \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= \frac{1}{R_2 C_2} u_1(t) - \frac{1}{R_2 C_2} u_2(t) \end{aligned} \quad (\text{I-1.18})$$

или, во матричен облик:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} \\ \frac{du_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & - \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u_0(t) \quad (\text{I-1.19})$$

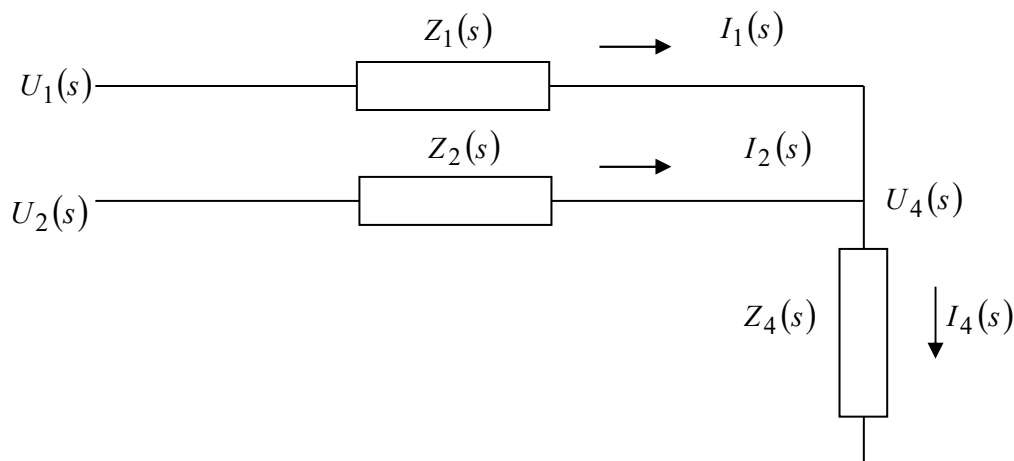
$$\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{C1}(0) \\ u_{C2}(0) \end{bmatrix} \quad (I-1.20)$$

**Задача I-1.3.** Да се состави соодветен математички модел на RLC колото од слика I-1.3, кој ќе ја дефинира врската помеѓу излезниот напон  $u_4(t)$  на колото и двата влезни напони  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ .



Слика I-1.3. Илустрација кон задачата I-1.3 – електрично RLC коло со два влеза и еден излез

**Решение: 1. начин.** Задачата наједноставно може да се реши во просторот на  $L$  – сликите. Тогаш шемата од слика I-1.3 може да се замени со шемата од слика I-1.4, од каде непосредно следува:



Слика I-1.4. Електричното коло од слика I-1.3 претставено во просторот на  $L$  – сликите

$$I_1(s) = \frac{U_1(s) - U_4(s)}{Z_1(s)} \quad (\text{I-1.21})$$

$$I_2(s) = \frac{U_2(s) - U_4(s)}{Z_2(s)} \quad (\text{I-1.22})$$

$$I_4(s) = \frac{U_4(s)}{Z_4(s)} \quad (\text{I-1.23})$$

$$I_4(s) = I_1(s) + I_2(s) \quad (\text{I-1.24})$$

Оттука, со воведување на првите три равенки во последната, се добива:

$$\frac{U_4(s)}{Z_4(s)} = I_4(s) = I_1(s) + I_2(s) = \frac{U_1(s) - U_4(s)}{Z_1(s)} + \frac{U_2(s) - U_4(s)}{Z_2(s)} \quad (\text{I-1.25})$$

Равенката (I-1.25) се решава во однос на непознатата  $U_4(s)$ :

$$\frac{U_4(s)}{Z_4(s)} + \frac{U_4(s)}{Z_1(s)} + \frac{U_4(s)}{Z_2(s)} = \frac{U_1(s)}{Z_1(s)} + \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} \quad (\text{I-1.26})$$

$$\left[ \frac{1}{Z_4(s)} + \frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} \right] U_4(s) = \frac{U_1(s)}{Z_1(s)} + \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} \quad (\text{I-1.27})$$

$$U_4(s) = \frac{Z_2(s)Z_4(s)U_1(s)}{Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_4(s) + Z_2(s)Z_4(s)} + \frac{Z_1(s)Z_4(s)U_2(s)}{Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_4(s) + Z_2(s)Z_4(s)} \quad (\text{I-1.28})$$

$$[Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_4(s) + Z_2(s)Z_4(s)]U_4(s) = Z_2(s)Z_4(s)U_1(s) + Z_1(s)Z_4(s)U_2(s) \quad (\text{I-1.29})$$

Имајќи на ум дека импедансите  $Z_1(s)$ ,  $Z_2(s)$  и  $Z_4(s)$  се познати:

$$Z_1(s) = R_1 \quad (\text{I-1.30})$$

$$Z_2(s) = Ls + R_2 \quad (\text{I-1.31})$$

$$Z_4(s) = R_4 \left| \frac{1}{Cs} = \frac{R_4}{R_4Cs + 1} \right. \quad (\text{I-1.32})$$

со нивно воведување во равенката за  $U_4(s)$  и по мало средување се добива равенката:

$$\begin{aligned} & \left\{ R_1 R_4 L C s^2 + [(R_1 + R_4)L + R_1 R_2 R_4 C] s + R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4 \right\} U_4(s) = \\ & = (R_4 L s + R_2 R_4) U_1(s) + R_1 R_4 U_2(s) \end{aligned} \quad (\text{I-1.33})$$

на која во временско подрачје (просторот на оригиналите) ѝ одговара диференцијалната равенка од втор ред:

$$\begin{aligned} R_1 R_4 L C u_4''(t) + [(R_1 + R_4)L + R_1 R_2 R_4 C] u_4'(t) + (R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4) u_4(t) = \\ = R_4 L u_1'(t) + R_2 R_4 u_1(t) + R_1 R_4 u_2(t) \end{aligned} \quad (\text{I-1.34})$$

со соодветни почетни услови:

$$u_{40} = u_4(0), \quad u_{41} = u_4'(0) \quad (\text{I-1.35})$$

**2. начин.** Се разбира, задачата може да се реши и директно во временско подрачје. Така, од слика I-1.3 непосредно следува:

$$i_1(t) + i_2(t) = i_3(t) + i_4(t) \quad (\text{I-1.36})$$

каде што струите  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  и  $i_4(t)$  се струи низ соодветните гранки од колото;

$i_1(t)$  е струја низ гранката со отпорникот  $R_1$

$$i_1(t) = \frac{u_1(t) - u_4(t)}{R_1} \quad (\text{I-1.37})$$

$i_2(t)$  е струја низ гранката со отпорникот  $R_2$  и индуктивниот елемент  $L$

$$i_2(t) = i_3(t) + i_4(t) - i_1(t) \quad (\text{I-1.38})$$

$i_3(t)$  е струја низ гранката со кондензаторот  $C$

$$i_3(t) = C u_4'(t) \quad (\text{I-1.39})$$

$i_4(t)$  е струја низ гранката со отпорникот  $R_4$

$$i_4(t) = \frac{u_4(t)}{R_4} \quad (\text{I-1.40})$$

Изразот за струјата  $i_2(t)$  ќе се добие ако во равенката за струите се внесат конкретните изрази за струите  $i_1(t)$ ,  $i_3(t)$  и  $i_4(t)$ :

$$i_2(t) = i_3(t) + i_4(t) - i_1(t) = C u_4'(t) + \frac{u_4(t)}{R_4} - \frac{u_1(t) - u_4(t)}{R_1} \quad (\text{I-1.41})$$

Од законот за рамнотежа на напоните непосредно произлегува:

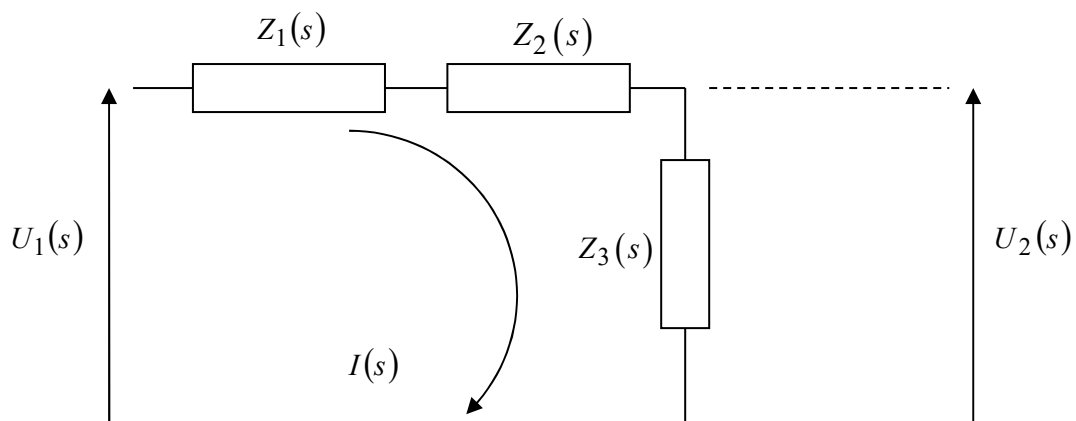
$$u_2(t) = Li_2'(t) + R_2i_2(t) + u_4(t) \quad (\text{I-1.42})$$

па со воведување на изразите за струјата  $i_2(t)$  и нејзиниот прв извод  $i_2'(t)$  во оваа равенка, и по нејзино средување во однос на непознатиот напон  $u_4(t)$ , се добива бараната равенка на динамичко поведение на набљудуваниот електричен систем од слика I-1.3:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= Li_2'(t) + R_2i_2(t) + u_4(t) = \\ &= L \left[ Cu_4'(t) + \frac{u_4(t)}{R_4} - \frac{u_1(t) - u_4(t)}{R_1} \right]' + R_2 \left[ Cu_4'(t) + \frac{u_4(t)}{R_4} - \frac{u_1(t) - u_4(t)}{R_1} \right] + u_4(t) = \\ &= L \left[ Cu_4''(t) + \frac{u_4'(t)}{R_4} - \frac{u_1'(t) - u_4'(t)}{R_1} \right] + R_2 \left[ Cu_4'(t) + \frac{u_4(t)}{R_4} - \frac{u_1(t) - u_4(t)}{R_1} \right] + u_4(t) \end{aligned} \quad (\text{I-1.43})$$

$$\begin{aligned} R_1R_4LCu_4''(t) + [R_1R_2R_4C + (R_1 + R_4)L]u_4'(t) + (R_1R_2 + R_1R_4 + R_2R_4)u_4(t) &= \\ = R_4Lu_1'(t) + R_2R_4u_1(t) + R_1R_4u_2(t) \end{aligned} \quad (\text{I-1.44})$$

**Задача I-1.4.** На слика I-1.5 е прикажано едноставно електрично коло со влез  $u_1(t)$  и излез  $u_2(t)$ . а) Да се состави математички модел на колото како отворен систем, кој ќе ја опише зависноста на напонот  $u_2(t)$  од напонот  $u_1(t)$  и да се нацрта соодветна структурна блок-шема. б) Потоа да се состави математички модел на колото како затворен систем и да се нацрта соодветната структурна блок-шема.



Слика I-1.5. Илустрација кон задачата I-1.4

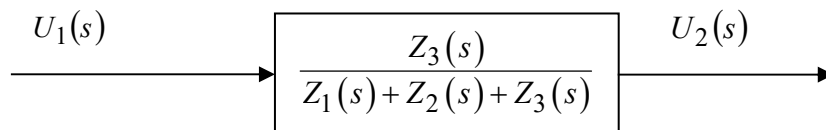
**Решение:** а) За електричното коло од слика I-1.5 важи:

$$U_2(s) = Z_3(s)I(s) \quad (\text{I-1.45})$$

$$I(s) = \frac{U_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)} \quad (\text{I-1.46})$$

$$U_2(s) = Z_3(s)I(s) = \frac{Z_3(s)U_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s) + Z_3(s)} \quad (\text{I-1.47})$$

Преносната функција (I-1.47) ја дефинира бараната зависност помеѓу влезниот и излезниот напон на набљудуваното електрично коло и претставува негов модел во просторот на  $L$  – сликите. Неа ѝ одговара структурната блок-шема од сликата I-1.6, на која колото е претставено како отворен систем.



Слика I-1.6. Електричното коло од слика I-1.5 прикажано како отворен систем

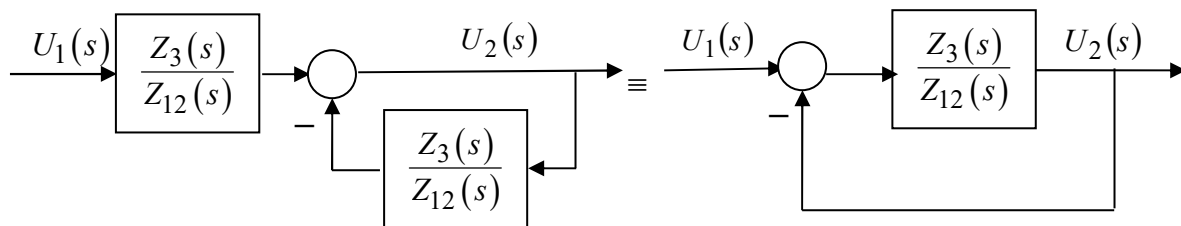
б) Бараната зависност може да се прикаже и на следниот начин:

$$U_2(s) = Z_3(s)I(s) \quad (\text{I-1.48})$$

$$I(s) = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{U_1(s) - U_2(s)}{Z_{12}(s)} \quad (\text{I-1.49})$$

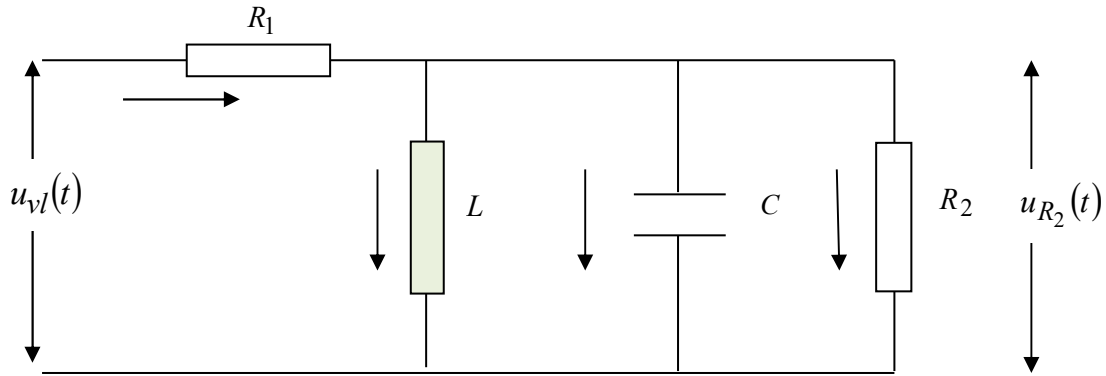
$$U_2(s) = Z_3(s)I(s) = Z_3(s) \frac{U_1(s) - U_2(s)}{Z_{12}(s)} = \frac{Z_3(s)}{Z_{12}(s)}U_1(s) - \frac{Z_3(s)}{Z_{12}(s)}U_2(s) \quad (\text{I-1.50})$$

при што на релацијата (I-1.50) ѝ одговара структурната блок-шема од слика I-1.7.



Слика I-1.7. Електричното коло од слика I-1.5 прикажано како затворен систем

**Задача I-1.5.** Да се состави диференцијалната равенка на динамичко поведење на електричното коло од слика I-1.8. За влез во колото да се усвои напонот  $u_{v1}(t)$ , а за излез напонот  $u_{R_2}(t)$ .



Слика I-1.8. Илустрација кон задачата I-1.5

**Решение:** Нека  $i(t)$  е струјата што тече низ отпорникот  $R_1$ , додека струите низ гранките со намотката, кондензаторот и отпорникот  $R_2$  се  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  и  $i_3(t)$ , соодветно:

$$x(t) = u_{R_2}(t) = R_2 i_3(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau = L \frac{di_1(t)}{dt} \quad (\text{I-1.51})$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \quad (\text{I-1.52})$$

$$y(t) = u_{vl}(t) = R_1 i(t) + x(t) \quad (\text{I-1.53})$$

$$x(t) = y(t) - R_1 i(t) = y(t) - R_1 \left[ \frac{1}{L} \int_0^t x(\tau) d\tau + C \frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)}{R_2} \right] \quad (\text{I-1.54})$$

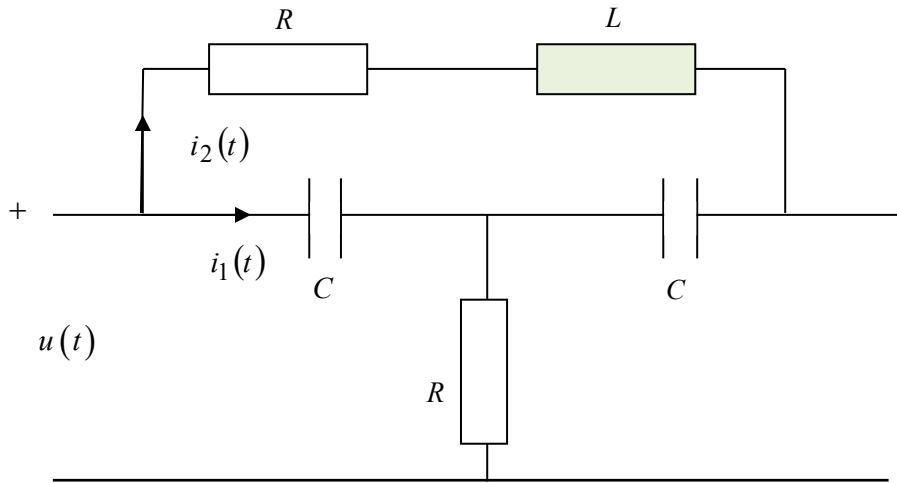
$$x'(t) = y'(t) - R_1 \left[ \frac{1}{L} x(t) + C x''(t) + \frac{x'(t)}{R_2} \right] \quad (\text{I-1.55})$$

$$\frac{1}{L} x(t) + C x''(t) + \frac{x'(t)}{R_1} + \frac{x'(t)}{R_2} = \frac{1}{R_1} y'(t) \quad (\text{I-1.56})$$

$$LCx''(t) + L \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x'(t) + x(t) = \frac{L}{R_1} y'(t) \quad (\text{I-1.57})$$

$$T_2^2 x''(t) + T_{12} x'(t) + x(t) = T_1 y'(t); \quad T_1 = \frac{L}{R_1}, T_{12} = \frac{L}{R_{12}} = L \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), T_2 = \sqrt{LC} \quad (\text{I-1.58})$$

**Задача I-1.6.** Да се состави математички модел на електричното коло од слика I-1.9. За влез во колото да се усвои напонот  $u(t)$ , а за излез струјата  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ .



Слика I-1.9. Илустрација кон задачата I-1.6

**Решение:** Од шемата на слика I-1.9 непосредно следува:

$$RI(s) + \frac{1}{Cs} I_1(s) = U(s) \quad (\text{I-1.59})$$

$$\left( \frac{1}{Cs} + R + Ls \right) I_2(s) = \frac{1}{Cs} I_1(s) \quad (\text{I-1.60})$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) \quad (\text{I-1.61})$$

Оттука:

$$I_1(s) = CsU(s) - RCsI(s) \quad (\text{I-1.62})$$

$$\frac{1}{Cs} I_1(s) = \left( Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) I_2(s) \quad (\text{I-1.63})$$

$$I_2(s) = \frac{I_1(s)}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{I_1(s)}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}; \quad T_1 = RC, \quad T_2^2 = LC \quad (\text{I-1.64})$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) = \frac{(T_2^2 s^2 + T_1 s + 2) I_1(s)}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} = \frac{(T_2^2 s^2 + T_1 s + 2) [CsU(s) - T_1 s I(s)]}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \quad (\text{I-1.65})$$

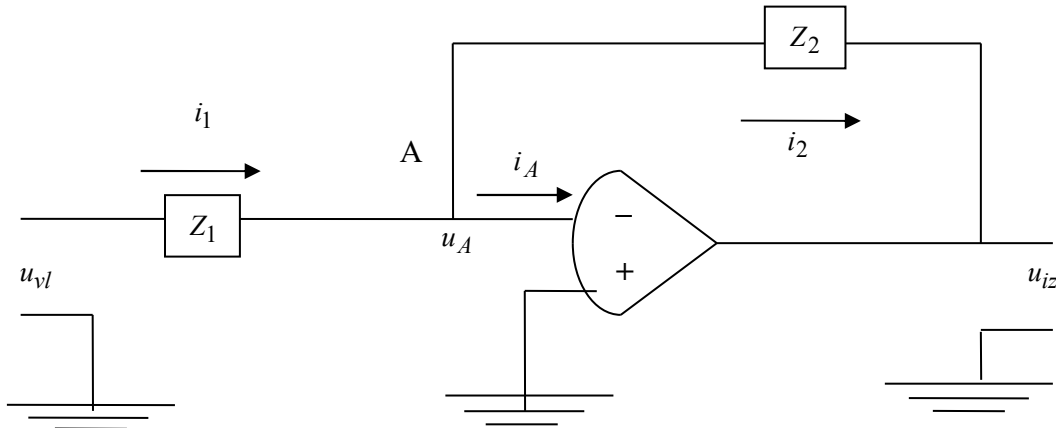
Бараниот модел во просторот на оригиналите гласи:



$$L^{-1} \left\{ \left[ T_1 T_2^2 s^3 + (T_1^2 + T_2^2) s^2 + 3T_1 s + 1 \right] I(s) \right\} = L^{-1} \left\{ (T_2^2 s^2 + T_1 s + 2) C s U(s) \right\} \quad (I-1.66)$$

$$T_1 T_2^2 i'''(t) + (T_1^2 + T_2^2) i''(t) + 3T_1 i'(t) + i(t) = T_2^2 C u'''(t) + T_1 C u''(t) + 2C u'(t) \quad (I-1.67)$$

**Задача I-1.7.** Да се определи преносната функција на операциониот засилувач од слика I-1.10. Како со помош на овој засилувач може да се добие И – регулатор?



Слика I-1.10. Електрична шема на еден операционен засилувач

**Решение:** Од сликата I-1.10 непосредно следува:

$$I_1(s) = \frac{U_{vl}(s) - U_A(s)}{Z_1(s)} \quad (I-1.68)$$

$$I_2(s) = \frac{U_A(s) - U_{iz}(s)}{Z_2(s)} \quad (I-1.69)$$

$$I_1(s) = I_A(s) + I_2(s) \quad (I-1.70)$$

Имајќи на ум дека струјата во засилувачот  $i_A$  е занемарливо мала,  $i_A \approx 0$ , со воведување на равенките (I-1.68) и (I-1.69) во равенката (I-1.70), се добива:

$$\frac{U_{vl}(s) - U_A(s)}{Z_1(s)} \approx \frac{U_A(s) - U_{iz}(s)}{Z_2(s)} \quad (I-1.71)$$

$$U_{iz}(s) \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} U_{vl}(s) + \left[ 1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \right] U_A(s) \quad (I-1.72)$$

Од друга страна, равенката на засилувачот, чие засилување  $K$  е многу големо, е:

$$U_{iz}(s) = -KU_A(s) \quad (I-1.73)$$

па со воведување на (I-1.73) во (I-1.72) се добива:

$$U_{iz}(s) \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{K} \cdot \left[1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}\right]} U_{vl}(s) \quad (I-1.74)$$

Ако се претпостави дека  $K \rightarrow \infty$ , равенката (I-1.74) може да се упрости во облик:

$$U_{iz}(s) \approx -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} U_{vl}(s) \quad (I-1.75)$$

па, бараната преносна функција на набљудуваниот операционен засилувач од слика I-1.10, во идеален случај ( $K \rightarrow \infty$ ) ќе биде:

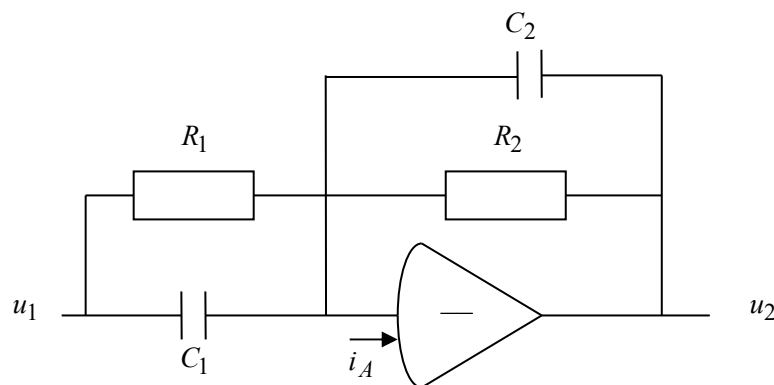
$$\frac{U_{iz}(s)}{U_{vl}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad (I-1.76)$$

Со приклучување чиста омска отпорност во влезната гранка и кондензатор во повратната гранка, за преносната функција на засилувачот се добива:

$$\frac{U_{iz}(s)}{U_{vl}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{1}{Cs} = -\frac{1}{RCs} = -\frac{k}{s}; \quad k = \frac{1}{RC} \quad (I-1.77)$$

што претставува преносна функција на И-регулатор со параметар  $r_1 = \frac{1}{RC}$ .

**Задача I-1.8.** Да се состави математички модел на електричното коло од слика I-1.11.



Слика I-1.11. Илустрација кон задачата I-1.8

Под претпоставка, еднонасочниот напонски засилувач има бесконечно големо засилување  $K$  и занемарливо мала влезна струја  $i_A$ .

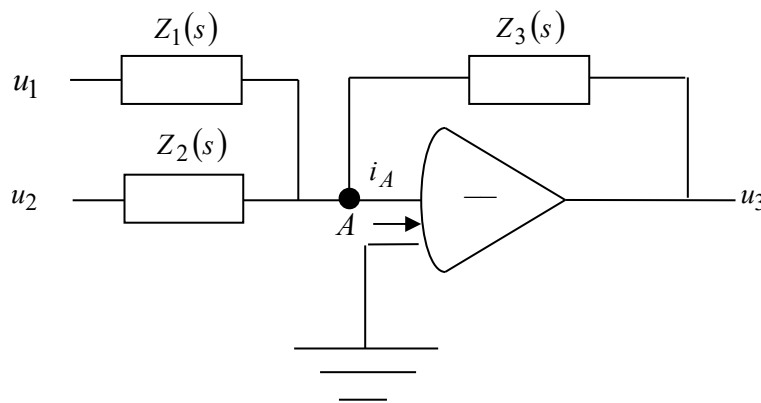
**Решение:** Преносната функција на операциониот засилувач од задачата е:

$$U_2(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} \cdot U_1(s) \quad (\text{I-1.78})$$

Следствено, неговата диференцијална равенка на динамичко поведење која ја дефинира врската помеѓу влезниот и излезниот напон на засилувачот ќе има облик:

$$R_2 C_2 u_2'(t) + u_2(t) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot [R_1 C_1 u_1'(t) + u_1(t)] \quad (\text{I-1.79})$$

**Задача I-1.9.** Да се состави математички модел на активното електрично коло од слика I-1.12, чиешто влезови се напоните  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , а излез е напонот  $u_3(t)$ . Под претпоставка, еднонасочниот напонски засилувач има бесконечно големо засилување  $K$  и занемарливо мала влезна струја  $i_A$ .



Слика I-1.12. Илустрација кон задачата I-1.9

**Решение:** Нека струите што течат низ влезните гранки се означат со  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ , соодветно, додека  $i_3(t)$  е струјата што тече во повратната гранка на операциониот засилувач. Имајќи ги на ум направените претпоставки во задачата дека влезната струја на засилувачот е занемарливо мала,  $i_A(t) \approx 0$ , а неговото засилување  $K$  е бесконечно големо,  $K \rightarrow \infty$ , за набљудуваното електрично коло ќе важат следните релации:

$$I_1(s) = \frac{U_1(s) - U_A(s)}{Z_1(s)} \quad (\text{I-1.80})$$

$$I_2(s) = \frac{U_2(s) - U_A(s)}{Z_2(s)} \quad (\text{I-1.81})$$

$$I_3(s) = \frac{U_A(s) - U_3(s)}{Z_3(s)} \quad (\text{I-1.82})$$

$$I_1(s) + I_2(s) = I_A(s) + I_3(s) \approx I_3(s) \quad (\text{I-1.83})$$

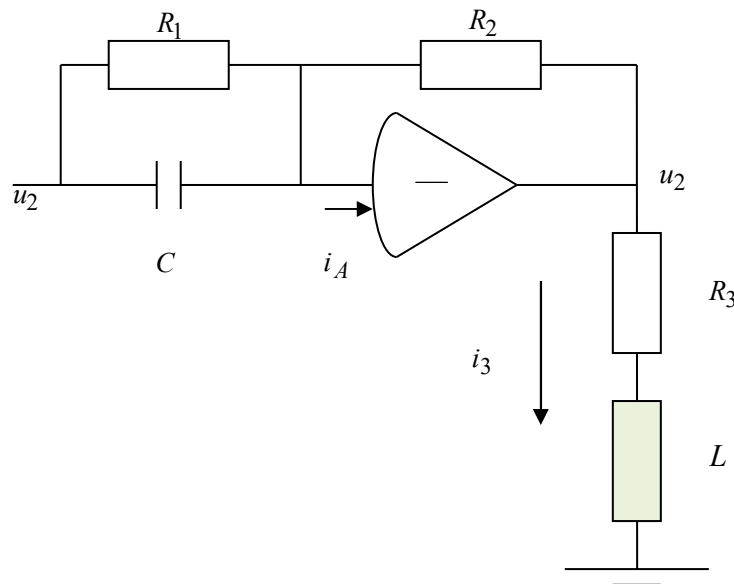
$$\frac{U_1(s) - U_A(s)}{Z_1(s)} + \frac{U_2(s) - U_A(s)}{Z_2(s)} = \frac{U_A(s) - U_3(s)}{Z_3(s)} \quad (\text{I-1.84})$$

$$U_A(s) = -\frac{U_3(s)}{K} \approx 0 \quad (\text{I-1.85})$$

$$\frac{U_1(s)}{Z_1(s)} + \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} = \frac{-U_3(s)}{Z_3(s)} \quad (\text{I-1.86})$$

$$U_3(s) = -\frac{Z_3(s)}{Z_1(s)}U_1(s) - \frac{Z_3(s)}{Z_2(s)}U_2(s) \quad (\text{I-1.87})$$

**Задача I-1.10.** Дадено е електричното коло од слика I-1.13. Да се состави соодветен математички модел, кој ќе ја дефинира зависноста помеѓу влезниот напон на колото  $u_1(t)$  и струјата што тече низ намотката  $L$  и отпорникот  $R_3$ , приклучени на излезот од операциониот засилувач. Под претпоставка, еднонасочниот напонски засилувач има бесконечно големо засилување  $K$  и занемарливо мала струја  $i_A$ .



Слика I-1.13. Илустрација кон задачата I-1.10

**Решение:** Преносната функција на операциониот засилувач од слика I-1.13 е:

$$U_2(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}U_1(s) = -\frac{R_2}{R_1}(R_1Cs + 1)U_1(s) \quad (\text{I-1.88})$$

додека врската помеѓу напонот на краевите од  $R_3 - L$  колото и струјата што тече низ него е:

$$U_2(s) = Z_3(s)I_3(s) = (Ls + R_3)I_3(s) \quad (\text{I-1.89})$$

Оттука, струјата што тече низ  $R_3 - L$  колото може да се изрази на следниот начин:

$$I_3(s) = \frac{U_2(s)}{Z_3(s)} = \frac{U_2(s)}{Ls + R_3} \quad (\text{I-1.90})$$

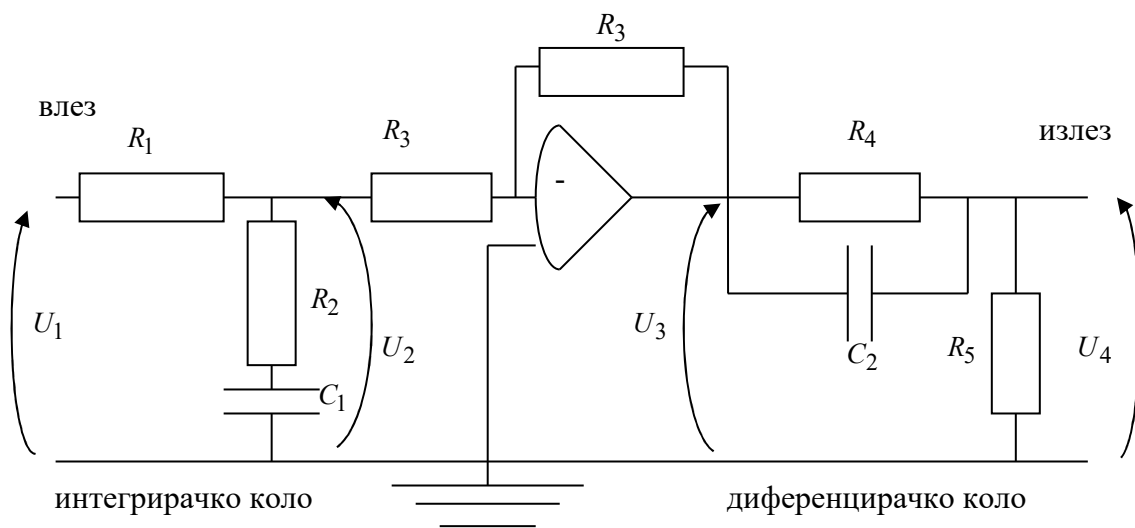
па, со воведување на (I-1.88) во (I-1.90), се добива:

$$\begin{aligned} I_3(s) &= \frac{U_2(s)}{Z_3(s)} = \frac{U_2(s)}{Ls + R_3} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}(R_1Cs + 1)U_1(s)}{Ls + R_3} = \\ &= -\frac{R_2}{R_1R_3} \cdot \frac{R_1Cs + 1}{\frac{L}{R_3}s + 1} U_1(s) = -K \cdot \frac{T_1s + 1}{T_3s + 1} U_1(s) \end{aligned} \quad (\text{I-1.91})$$

Бараниот математички модел, кој ја дава зависноста на струјата  $i_3(t)$  и напонот  $u_1(t)$  во колото од слика I-1.13, е следната диференцијална равенка:

$$T_3i_3'(t) + i_3(t) = -K [T_1u_1'(t) + u_1(t)] \quad (\text{I-1.92})$$

**Задача I-1.11.** Да се состави математички модел на колото од слика I-1.14 во вид на соодветна диференцијална равенка на динамичко поведење.



Слика I-1.14. Илустрација кон задачата I-1.11

**Решение:** Колото претставува интегро-диференцијален компензатор, кој е добиен како сериска врска од едно интегро и едно диференцирачко електрично коло, реализирани со пасивни електрични елементи – отпорници и кондензатори. Помеѓу колата е поставен операционен засилувач, чија улога е да обезбеди едното електрично коло да не претставува товар за другото. Преносната функција  $G_i(s)$  на првата пасивна мрежа е:

$$G_i(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{\frac{R_2 C_1 s + 1}{C_1 s}}{\frac{(R_1 + R_2) C_1 s + 1}{C_1 s}} = \frac{R_2 C_1 s + 1}{(R_1 + R_2) C_1 s + 1} \quad (\text{I-1.93})$$

Преносната функција  $G_d(s)$  на втората пасивна мрежа, која го претставува диференцирачкиот дел е:

$$G_d(s) = \frac{U_4(s)}{U_3(s)} = \frac{R_5}{R_4 + \frac{1}{C_2 s}} = \frac{R_5}{R_5 + \frac{R_4}{R_4 C_2 s + 1}} = \frac{R_5 (R_4 C_2 s + 1)}{R_5 (R_4 C_2 s + 1) + R_4} \quad (\text{I-1.94})$$

и преносната функција  $G_z(s)$  на операциониот засилувач е:

$$G_z(s) = \frac{U_3(s)}{U_2(s)} = -\frac{R_3}{R_3} = -1 \quad (\text{I-1.95})$$

Следствено, преносната функција  $G_{di}(s)$  на компензаторот ќе биде:

$$\begin{aligned} G_{di}(s) &= \frac{U_4(s)}{U_1(s)} = \frac{U_4(s)}{U_3(s)} \cdot \frac{U_3(s)}{U_2(s)} \cdot \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = G_d(s) \cdot G_z(s) \cdot G_i(s) = \\ &= -\frac{R_5 (R_4 C_2 s + 1)}{R_5 (R_4 C_2 s + 1) + R_4} \cdot \frac{R_2 C_1 s + 1}{(R_1 + R_2) C_1 s + 1} = \\ &= -\frac{s + \frac{1}{R_4 C_2}}{s + \frac{1}{R_4 C_2} + \frac{1}{R_5 C_2}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{s + \frac{1}{R_2 C_1}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2) C_1}} = \\ &= -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{s^2 + \left( \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_4 C_2} \right) s + \frac{1}{R_2 C_1} \cdot \frac{1}{R_4 C_2}}{s^2 + \left[ \frac{1}{R_4 C_2} + \frac{1}{R_5 C_2} + \frac{1}{(R_1 + R_2) C_1} \right] s + \left( \frac{1}{R_4 C_2} + \frac{1}{R_5 C_2} \right) \cdot \frac{1}{(R_1 + R_2) C_1}} \quad (\text{I-1.96}) \end{aligned}$$

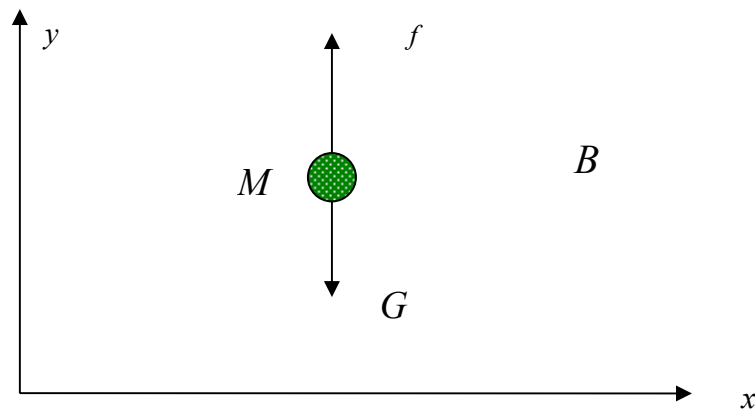
Оттука произлегува диференцијалната равенка на динамичко поведење на интегро-диференцијалниот компензатор:

$$u_4''(t) + a_1 u_4'(t) + a_0 u_4(t) = b_2 u_1''(t) + b_1 u_1'(t) + b_0 u_1(t) \quad (\text{I-1.97})$$

каде што коефициентите  $a_i, b_j (i, j = 0, 1, 2, 3)$  се истите коефициенти на преносната функција  $G_{di}(s)$ .

## I-2. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА МЕХАНИЧКИ СИСТЕМИ

**Задача I-2.1.** Да се определи равенката на движење на точка со маса  $M$  во средина со коефициент на триење  $B$ , прикажана на слика I-2.1, која може да се движи само вертикално. Под претпоставка,  $f$  е надворешна сила која дејствува врз точката.



Слика I-2.1. Илустрација кон задачата I-2.1

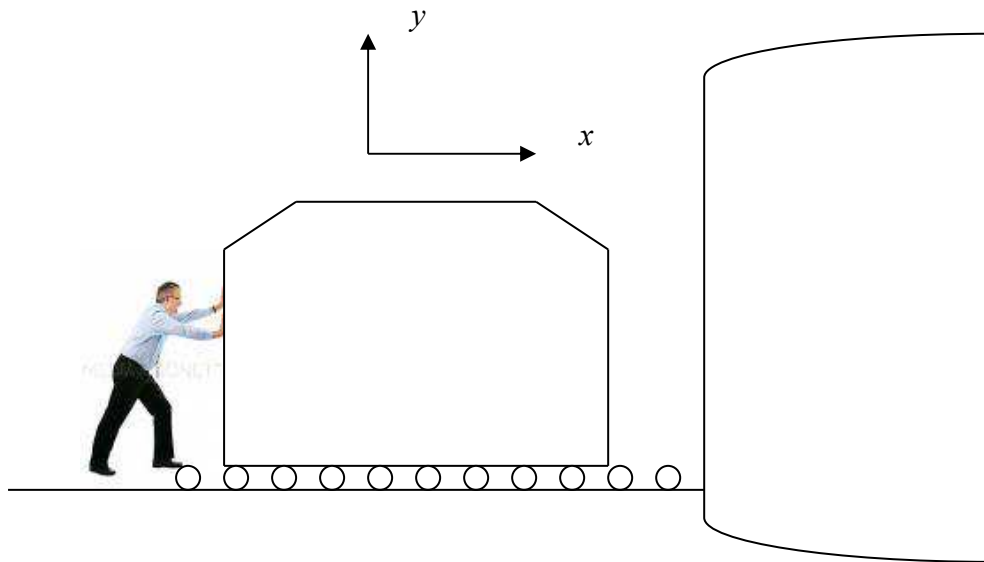
**Решение:** Точката од слика I-2.1 претставува систем со еден степен слобода на движење, па, нејзиното движење ќе биде опишано со една равенка, која може да се добие врз основа на Њутновиот закон за рамнотежа на силите што дејствуваат врз набљудуваната точка. Надворешната сила  $f$  која дејствува врз точката е во рамнотежа со инерционата сила на точката  $f_m$ , отпорната сила на триење со околната средина  $f_b$  и Земјината тежа  $f_g$ . Движењето на точката е во правец на  $y$  – оската, па може едноставно да се означи со  $y$ . Тогаш:

$$f_m = M\ddot{y}, \quad f_b = B\dot{y}, \quad f_g = Mg \quad (\text{I-2.1})$$

$$f = f_m + f_b + f_g = M\ddot{y} + B\dot{y} + Mg \quad (\text{I-2.2})$$

каде што  $g$  е Земјиното забрзување.

**Задача I-2.2.** На слика I-2.2 е прикажан голем товар кој се качува на авион. Товарот има маса  $M = 150\text{kg}$ . Да се определи забрзувањето на товарот доколку врз него дејствува сила  $f = 15\text{N}$ . Колку далеку ќе се придвижи товарот, доколку врз него дејствува константна надворешна сила  $f = 15\text{N}$  во траење од  $t = 10\text{sec}$ . Дозволено е да се занемари силата на триење која дејствува врз товарот, бидејќи тој е поставен на тркала.



Слика I-2.2. Илустрација кон задачата I-2.2

**Решение:** Врз основа на вториот Њутнов закон, за силите кои дејствуваат врз товарот важи:

$$\sum f = M\ddot{x} \quad (\text{I-2.3})$$

$$f_{\text{vozbuda}} - f_{\text{trienje}} = M\ddot{x} \quad (\text{I-2.4})$$

Оттука, со направената претпоставка за занемарување на силата на триење, се добива следниот модел на набљудуваниот систем од слика I-2.2:

$$f(t) = M\ddot{x}(t) \quad (\text{I-2.5})$$

Бараното забрзување на товарот е:

$$\ddot{x}(t) = \frac{f(t)}{M} = \frac{15}{150} = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{I-2.6})$$

а изминатиот пат се добива со двократно интегрирање на равенката (I-2.6):



$$\dot{x}(t) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{M} d\tau + \dot{x}(0) = \frac{f}{M} t \quad (\text{I-2.7})$$

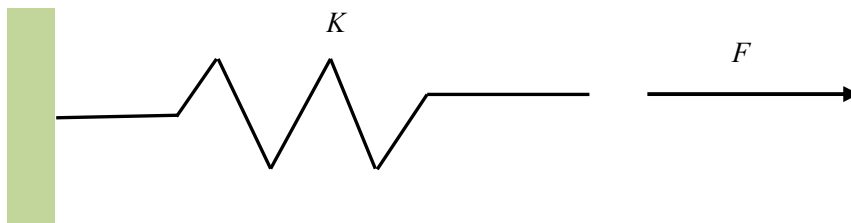
каде што  $\dot{x}(0)$  е почетната брзина на товарот, која е нулева, и:

$$x(t) = \int_0^t \frac{f}{M} \tau d\tau + x(0) = \frac{f}{M} \cdot \frac{t^2}{2} \quad (\text{I-2.8})$$

каде што  $x(0)$  е почетното поместување на товарот, кое е исто така нулево. По  $t = 10\text{sec}$ , товарот ќе се помести за:

$$x(10) = \int_0^{10} \frac{f}{M} \tau d\tau = \frac{f}{M} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{10} = 0.1 \frac{m}{s^2} \cdot 50s^2 = 5m \quad (\text{I-2.9})$$

**Задача I-2.3.** Колку изнесува издолжувањето на нелинеарната транслаторна пружина од слика I-2.3 со коефициент на крутост  $K = 1.28 \cdot 10^4 \frac{N}{m}$  и кубна карактеристика, ако на нејзиниот слободен крај дејствува статичка сила  $F = 200 N$  ?



Слика I-2.3. Илустрација кон задачата I-2.3

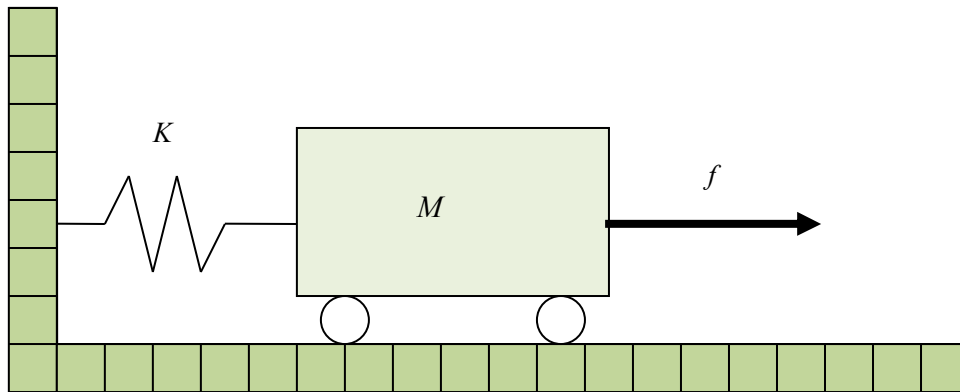
**Решение:** Од моделот на набљудуваната нелинеарна пружина се пресметува нејзиното издолжување за дадената статичка сила:

$$F = K(x - x_0)^3 = Kx^3 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{F}{K}} = \sqrt[3]{\frac{200}{12800}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} = 0.25m = 25cm \quad (\text{I-2.10})$$

и тоа изнесува  $25cm$ .

**Задача I-2.4.** Даден е системот со еден степен слобода на движење прикажан на слика I-2.4. Тој се состои од количка со маса  $M$ , која се движи по хоризонтална подлога. Од едната страна количката е прицврстена за вертикален ѕид преку пружина со коефициент на крутост односно еластичност  $K$ . Под претпоставка, тркалата на количката имаат занемарлива инерција. Да се состави соодветен математички модел на движењето на количката под дејство на силата  $f$ .

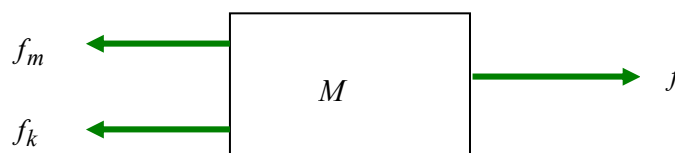


Слика I-2.4. Шематски приказ на едноставен систем со еден степен слобода на движење

**Решение:** Променливата  $x$  го опишува движењето на набљудуваниот систем по хоризонталната подлога. Бидејќи се работи за систем со еден степен слобода на движење, неговото движење ќе биде опишано само со една равенка. На надворешната сила  $f$  што дејствува врз количката ѝ се спротивставуваат силата на крутост на пружината  $f_k$  и силата на инерција  $f_m$  на количката. Силата на крутост  $f_k$  (или еластичност) на пружината е пропорционална на движењето на количката  $x$  со фактор на пропорционалност  $K$ , додека инерцијата на количката  $f_m$  е пропорционална на масата од количката  $M$  и нејзиното забрзување  $a = \ddot{x}$ . Следствено, за силите што дејствуваат врз количката се добива:

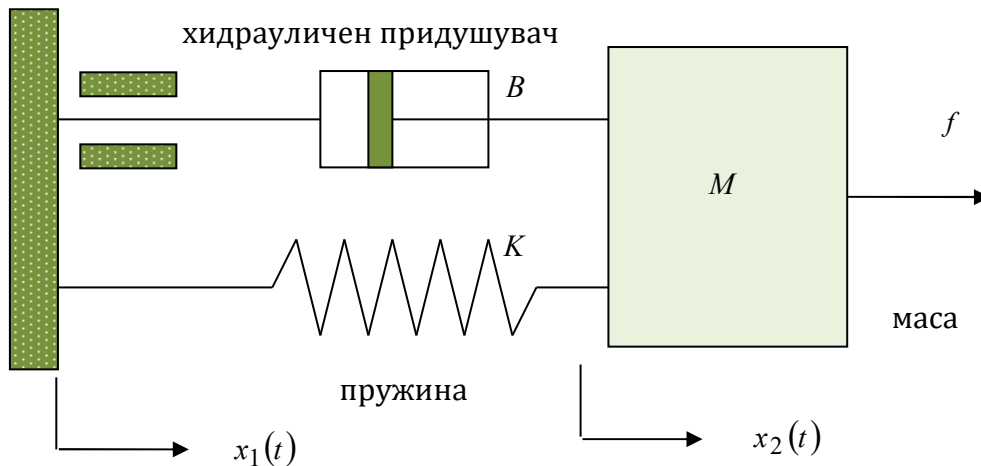
$$f(t) = f_m(t) + f_k(t) = M\ddot{x}(t) + Kx(t) \quad (I-2.11)$$

Дијаграмот на силите што дејствуваат врз количката од слика I-2.4 е прикажан на слика I-2.5.



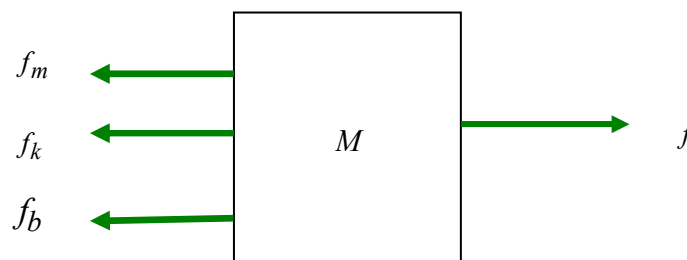
Слика I-2.5. Дијаграм на силите за системот од слика I-2.4

**Задача I-2.5.** Даден е механичкиот систем со еден степен слобода на движење од слика I-2.6. Да се состави соодветен математички модел на овој систем како во просторот на оригиналите (временско подрачје), така и во просторот на сликите (комплексно подрачје).



Слика I-2.6. Транслаторен механички динамички систем со еден степен слобода на движење

**Решение:** Нека променливата  $x = x_2 - x_1 = x_2$  го опишува движењето на набљудуваниот систем во хоризонтален правец (правец на дејството на надворешната сила  $f$ ). Овој систем е сличен со механичкиот систем од претходната задача I-2.4, само што сега во системот постои и отпорната сила на вискозно триење  $f_b = B\dot{x}$ . Силите што дејствуваат во набљудуваниот систем од слика I-2.6 се прикажани на слика I-2.7.



Слика I-2.7. Дијаграм на силите за системот од слика I-2.6

Следствено, еден математички модел на набљудуваниот систем во временското подрачје ќе гласи:

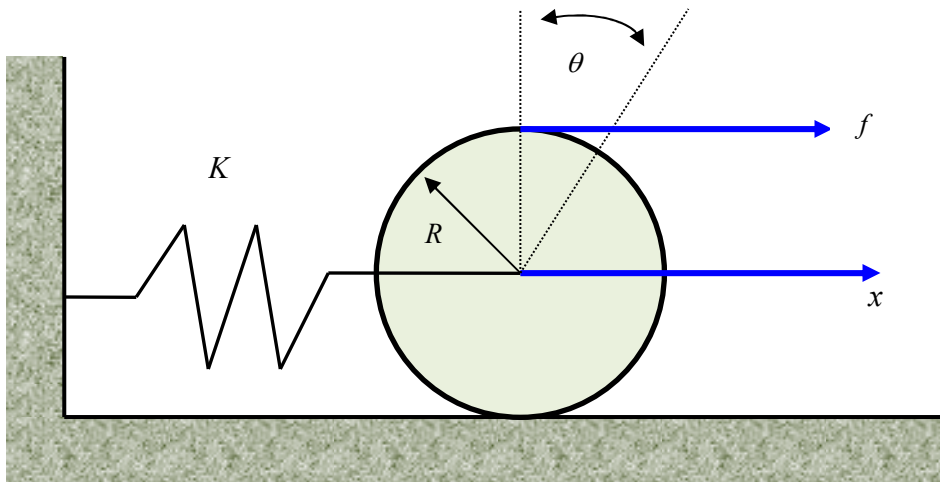
$$f(t) = f_m(t) + f_b(t) + f_k(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) \quad (\text{I-2.12})$$

Со Лапласова трансформација на горната диференцијална равенка на динамичко поведење, под претпоставка на нулеви почетни услови, се добива следниот модел во комплексното подрачје:

$$Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (\text{I-2.13})$$

**Задача I-2.6.** Даден е механичкиот систем од слика I-2.8. Системот се состои од еден транслаторен и еден ротационен елемент. Ротациониот елемент е претставен со униформно и хомогено тркало со маса  $M$ , радиус  $R$  и момент на инерција  $J = \frac{MR^2}{2}$  кое се тркала по хоризонтална површина без лизгање. Транслаторниот елемент е претставен со пружина со крутост  $K$ , која го поврзува центарот на тркалото со неподвижен вертикален ѕид. Врз тркалото дејствува надворешна сила  $f$ . Да се состави соодветен математички модел за овој механички систем, кој ќе го опише хоризонталното движење  $x$  на центарот од тркалото.



Слика I-2.8. Илустрација кон задачата I-2.6

**Решение:** На слика I-2.9 се прикажани силите кои дејствуваат врз тркалото:  $f$  - надворешната сила која го предизвикува тркалањето,  $f_k$  - отпорна сила на пружината,  $f_m$  - инерција на тркалото,  $f_b$  - сила на триење при тркалање,  $f_g$  - тежина на тркалото и  $f_n$  - нормална сила на подлогата.

Механичкиот систем од сликата се повинува на следните закони: Закон за рамнотежа на сите сили во правец на  $x$ -оската

$$\sum f_x = 0 \quad (I-2.14)$$

Закон за рамнотежа на сите сили во правец на  $y$  - оската

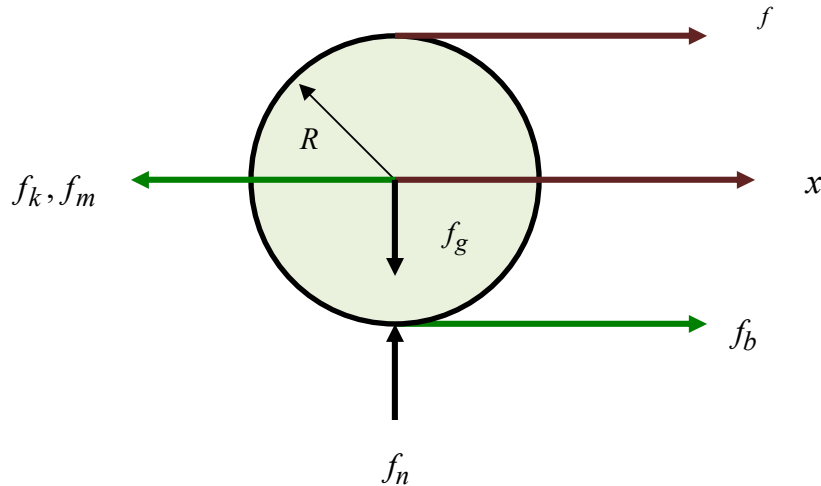
$$\sum f_y = 0 \quad (I-2.15)$$

Закон за рамнотежа на сите вртливи моменти кои дејствуваат врз тркалото

$$\sum T = 0 \quad (I-2.16)$$

Вртливиот момент што го создаваат силите  $f$  и  $f_b$  е еднаков на производот од соодветната сила и радиусот на тркалото, а агловото и транслаторното движење на тркалото се поврзани со релацијата:

$$x = R\theta \quad (I-2.17)$$



Слика I-2.9. Приказ на силите кои дејствуваат врз тркалото

Од Закон за рамнотежа на силите што дејствуваат врз тркалото во правец на  $x$ -оската следува:

$$f + f_b = f_m + f_k = M\ddot{x} + Kx \quad (I-2.18)$$

Од Закон за рамнотежа на силите што дејствуваат врз тркалото во правец на  $y$ -оската следува:

$$f_g = f_n \quad (I-2.19)$$

Од Закон за рамнотежа на сите вртливи моменти кои дејствуваат врз тркалото следува:

$$Rf = J\ddot{\theta} + Rf_b \quad (I-2.20)$$

Непознатата сила на триење при тркалање  $f_b$  може да се изрази од последната равенка и да се замени во првата. Така се добива:

$$f_b = f - \frac{J}{R}\ddot{\theta} \quad (I-2.21)$$

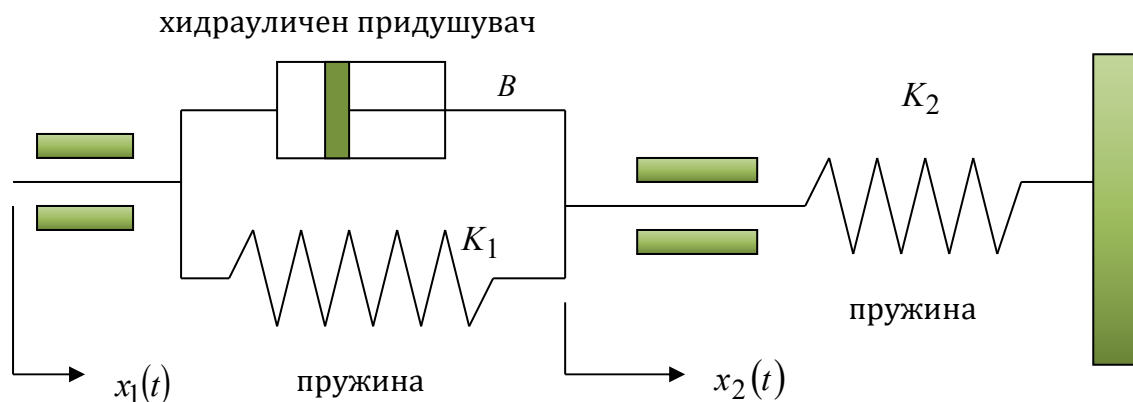
и:

$$M\ddot{x} + Kx + \frac{J}{R}\ddot{\theta} = 2f \quad (\text{I-2.22})$$

Останува уште  $\theta$  да се изрази преку  $x$  и заедно со  $J$  да се замени во добиениот модел:

$$\frac{3}{2}M\ddot{x} + Kx = 2f \quad (\text{I-2.23})$$

**Задача I-2.7.** Даден е механичкиот систем од слика I-2.10. Да се состави негов математички модел во просторот на оригиналите и во комплексното подрачје.



Слика I-2.10. Механички динамички систем

**Решение:** Отпорните сили на пружините се:

$$f_{k_1}(t) = K_1[x_2(t) - x_1(t)] \quad (\text{I-2.24})$$

$$f_{k_2}(t) = K_2[x_3(t) - x_2(t)] \quad (\text{I-2.25})$$

додека отпорната сила на пригушувачот изнесува:

$$f_b(t) = B[x_2'(t) - x_1'(t)] \quad (\text{I-2.26})$$

Ако се занемари инерцијата на системот, се добива следниот услов за рамнотежа на силите во него:

$$f_b(t) + f_{k_1}(t) - f_{k_2}(t) = 0$$

$$B[x_2'(t) - x_1'(t)] + K_1[x_2(t) - x_1(t)] + K_2[x_2(t) - x_3(t)] = 0$$

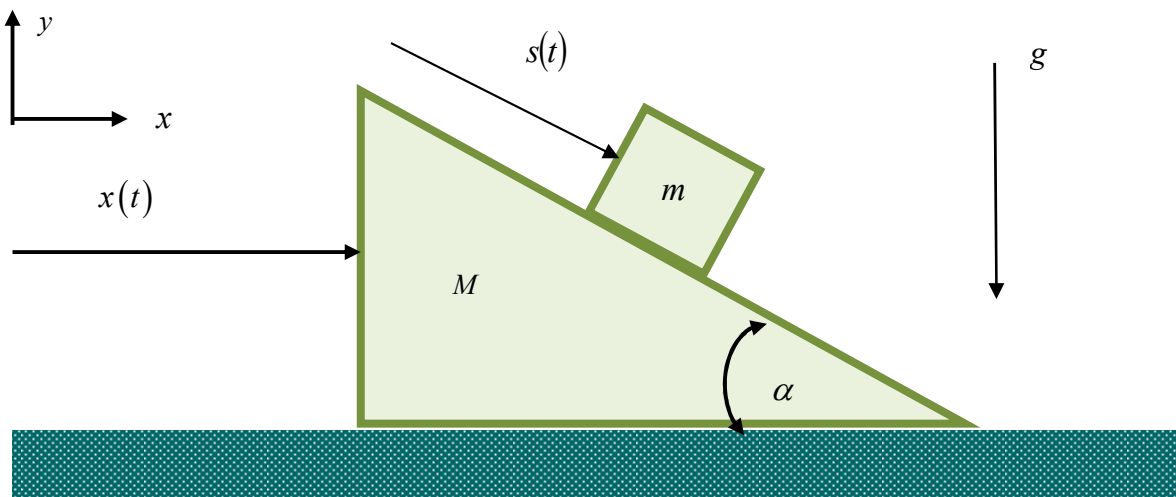
$$B[x_2'(t) - x_1'(t)] + K_1[x_2(t) - x_1(t)] + K_2x_2(t) = 0; \quad x_3(t) = 0 \quad (\text{I-2.27})$$

Равенката (I-2.27) го претставува бараниот модел на механичкиот систем од слика I-2.10 во просторот на оригиналите, односно во временското подрачје. Со Лапласова трансформација на оваа равенка се добива преносната функција на набљудуваниот систем односно бараниот модел во комплексното подрачје:

$$Bs[X_2(s) - X_1(s)] + K_1[X_2(s) - X_1(s)] + K_2X_2(s) = 0$$

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{Bs + K_1}{Bs + K_1 + K_2} = \frac{s + \frac{K_1}{B}}{s + \frac{K_1 + K_2}{B}} \quad (\text{I-2.28})$$

**Задача I-2.8.** Коцка со маса  $m$  се лизга по мазна површина (отсуство на триење), која ја претставува наклонената страна на едно легнато тело во вид на клин, како што е прикажано на слика I-2.11. Телото има маса  $M$  и од своја страна може слободно да се движи по мазната хоризонтална рамнина на која лежи (отсуство на триење). Да се состави математички модел на движењето на овој механички систем со помош на Њутновата и Лагранжовата механика [1].



Слика I-2.11. Илустрација кон задачата I-2.8

**Решение: I начин.** Движењето на телото  $M$  е претставено со хоризонталното поместување  $x(t)$ , додека движењето на коцката  $m$  е опишано со патот што таа го изминува по наклонената површина  $s(t)$ . Движењето на коцката има две компоненти – во правец на  $x$ -оската и  $y$ -оската, додека телото може да се движи само во хоризонтален правец.

Вкупното поместување на коцката во правец на  $x$ -оската изнесува:

$$x_m(t) = x(t) + s(t)\cos \alpha \quad (\text{I-2.29})$$

додека во правец на  $y$  – оската тоа изнесува:

$$y_m(t) = -s(t)\sin \alpha \quad (\text{I-2.30})$$

Вкупното движење на телото е исклучиво во правец на  $x$  – оската и изнесува:

$$x_M(t) = x(t) \quad (\text{I-2.31})$$

Оттука лесно се пресметуваат и брзините на двете тела:

$$\dot{x}_m(t) = \dot{x}(t) + \dot{s}(t)\cos \alpha \quad (\text{I-2.32})$$

$$\dot{y}_m(t) = -\dot{s}(t)\sin \alpha \quad (\text{I-2.33})$$

$$\dot{x}_M(t) = \dot{x}(t) \quad (\text{I-2.34})$$

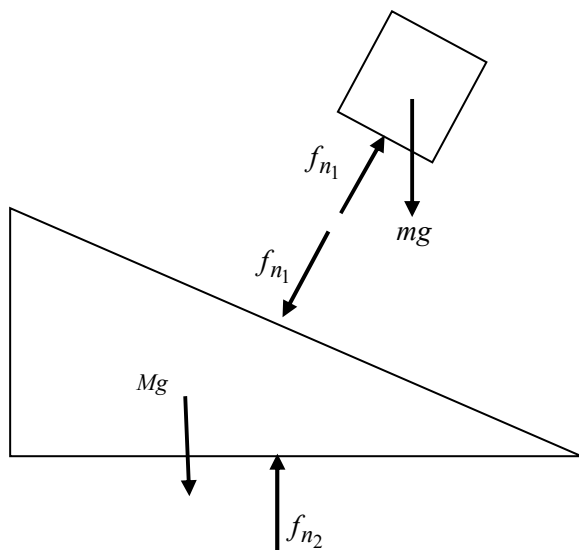
како и нивните забрзувања:

$$\ddot{x}_m(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{s}(t)\cos \alpha \quad (\text{I-2.35})$$

$$\ddot{y}_m(t) = -\ddot{s}(t)\sin \alpha \quad (\text{I-2.36})$$

$$\ddot{x}_M(t) = \ddot{x}(t) \quad (\text{I-2.37})$$

На слика I-2.12 се прикажани слободните дијаграми на силите за двете тела.



Слика I-2.12. Слободни дијаграми на силите во системот од задачата I-2.8



Единствени сили кои дејствуваат во системот се силите на реакција на подлогите  $f_{n_1}$  и  $f_{n_2}$  и Земјината тежа, зашто, под претпоставка, во системот нема триење и не дејствуваат никакви надворешни принуди. Нека  $f_{n_1}$  е силата на реакција на подлогите помеѓу коцката и телото, а  $f_{n_2}$  е силата на реакција на подлогите помеѓу телото и хоризонталната подлога по која се движи. Треба да се воочи дека силата  $f_{n_1}$  со која телото дејствува врз коцката е еднаква по јачина и со спротивна насока од силата со која коцката дејствува врз телото. Аналогно важи и за телото и хоризонталната подлога.

Од условот за рамнотежа на силите што дејствуваат во набљудуваниот систем се добива:

- за коцката во правец на  $x$  – оската

$$m\ddot{x}_m(t) = f_{n_1} \sin \alpha \Rightarrow$$

$$m\ddot{x}(t) + m\ddot{s}(t)\cos \alpha = f_{n_1} \sin \alpha \quad (\text{I-2.38})$$

- за коцката во правец на  $y$  – оската

$$m\ddot{y}_m(t) = f_{n_1} \cos \alpha - mg \Rightarrow$$

$$-m\ddot{s}(t)\sin \alpha = f_{n_1} \cos \alpha - mg \quad (\text{I-2.39})$$

- за телото во правец на  $x$  – оската

$$M\ddot{x}_M(t) = -f_{n_1} \sin \alpha \Rightarrow$$

$$M\ddot{x}(t) = -f_{n_1} \sin \alpha \quad (\text{I-2.40})$$

Бараниот модел на движењето на набљудуваниот систем, кој има два степени слобода на движење, се добива со елиминација на силата  $f_{n_1}$  од системот равенки:

$$m\ddot{x}(t) + m\ddot{s}(t)\cos \alpha = f_{n_1} \sin \alpha$$

$$-m\ddot{s}(t)\sin \alpha = f_{n_1} \cos \alpha - mg$$

$$M\ddot{x}(t) = -f_{n_1} \sin \alpha \quad (\text{I-2.41})$$

што може да се направи на следниот начин. Ако се соберат првата и третата равенка ќе се добие:

$$(M + m)\ddot{x}(t) + m\ddot{s}(t)\cos\alpha = 0 \quad (\text{I-2.42})$$

а ако првата равенка се помножи со  $\cos\alpha$  :

$$m\ddot{x}(t)\cos\alpha + m\ddot{s}(t)\cos^2\alpha = f_{n_1}\sin\alpha\cos\alpha \quad (\text{I-2.43})$$

втората со  $\sin\alpha$  :

$$-m\ddot{s}(t)\sin^2\alpha = f_{n_1}\sin\alpha\cos\alpha - mg\sin\alpha \quad (\text{I-2.44})$$

и истите се одземат една од друга, ќе се добие:

$$m\ddot{x}(t)\cos\alpha + m\ddot{s}(t)\cos^2\alpha + m\ddot{s}(t)\sin^2\alpha = f_{n_1}\sin\alpha\cos\alpha - f_{n_1}\sin\alpha\cos\alpha + mg\sin\alpha \Rightarrow$$

$$m\ddot{x}(t)\cos\alpha + m\ddot{s}(t) = mg\sin\alpha \quad (\text{I-2.45})$$

Следствено, бараниот математички модел на движењето на набљудуваниот систем е:

$$(M + m)\ddot{x}(t) + m\ddot{s}(t)\cos\alpha = 0 \quad (\text{I-2.46})$$

$$m\ddot{x}(t)\cos\alpha + m\ddot{s}(t) = mg\sin\alpha \quad (\text{I-2.47})$$

**II начин.** Движењето на телото  $M$  е претставено со хоризонталното поместување  $x(t)$ , додека движењето на коцката  $m$  е опишано со патот што таа го изминува по наклоната површина  $s(t)$ . Движењето на коцката има две компоненти – во правец на  $x$ -оската и  $y$ -оската, додека телото може да се движи само во хоризонтален правец.

Вкупното поместување на коцката во правец на  $x$ -оската изнесува:

$$x_m(t) = x(t) + s(t)\cos\alpha \quad (\text{I-2.48})$$

додека во правец на  $y$ -оската тоа изнесува:

$$y_m(t) = -s(t)\sin\alpha \quad (\text{I-2.49})$$

Вкупното движење на телото е исклучиво во правец на  $x$ -оската и изнесува:

$$x_M(t) = x(t) \quad (\text{I-2.50})$$

Оттука лесно се пресметуваат и брзините на двете тела:

$$\dot{x}_m(t) = \dot{x}(t) + \dot{s}(t)\cos\alpha$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_m(t) &= -\dot{s}(t)\sin\alpha \\ \dot{x}_M(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned} \tag{I-2.51}$$

како и нивните забрзувања:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_m(t) &= \ddot{x}(t) + \ddot{s}(t)\cos\alpha \\ \ddot{y}_m(t) &= -\ddot{s}(t)\sin\alpha \\ \ddot{x}_M(t) &= \ddot{x}(t) \end{aligned} \tag{I-2.52}$$

Вкупната кинетичка енергија на системот може да се претстави како збир од кинетичката енергија на телото со маса  $M$  и коцката со маса  $m$ :

$$K = K_M + K_m \tag{I-2.53}$$

каде што:

$$K_M = \frac{1}{2}M\dot{x}^2(t) \tag{I-2.54}$$

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{1}{2}m[\dot{x}_m^2(t) + \dot{y}_m^2(t)] = \frac{1}{2}m[\dot{x}(t) + \dot{s}(t)\cos\alpha]^2 + \frac{1}{2}m[-\dot{s}(t)\sin\alpha]^2 = \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(t) + \dot{s}^2(t)\cos^2\alpha + 2\dot{x}(t)\dot{s}(t)\cos\alpha] + \frac{1}{2}m[\dot{s}^2(t)\sin^2\alpha] = \\ &= \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(t) + \dot{s}^2(t) + 2\dot{x}(t)\dot{s}(t)\cos\alpha] \end{aligned} \tag{I-2.55}$$

Потенцијалната енергија на системот доаѓа само од потенцијалната енергија на коцката и изнесува:

$$P = -mgs(t)\sin\alpha \tag{I-2.56}$$

Лагранжијанот на системот е:

$$L = K - P = \frac{1}{2}M\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2(t) + \dot{s}^2(t) + 2\dot{x}(t)\dot{s}(t)\cos\alpha] + mgs(t)\sin\alpha \tag{I-2.57}$$

па:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = mg\sin\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}(t) + m\dot{x}(t) + m\dot{s}(t)\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}(t) + m\dot{x}(t)\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x}(t) + m\ddot{s}(t)\cos\alpha$$

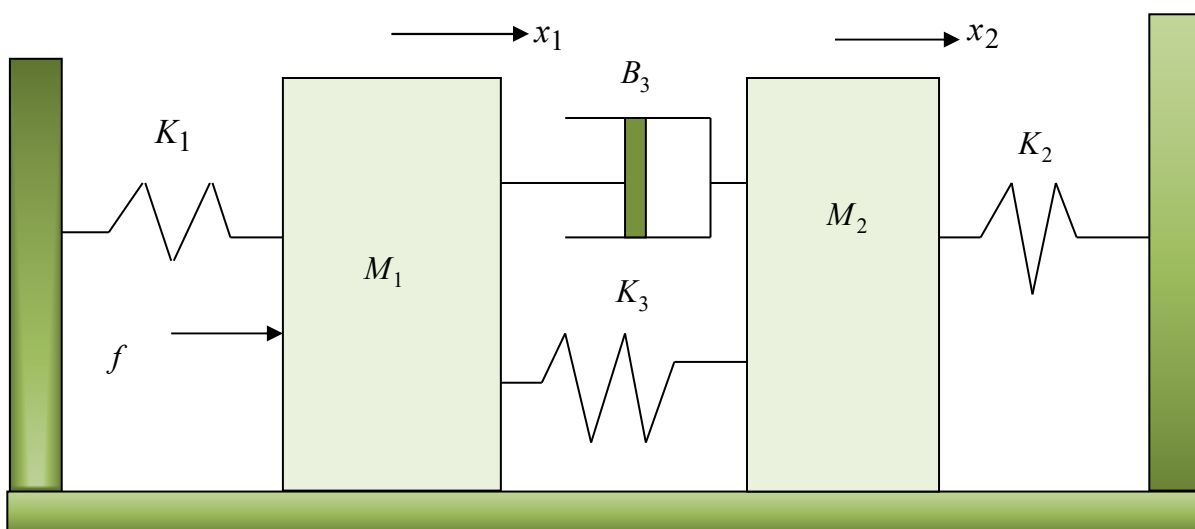
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = m\ddot{s}(t) + m\ddot{x}(t)\cos\alpha \quad (\text{I-2.58})$$

Бараниот модел на движењето на системот е:

$$(M+m)\ddot{x}(t) + m\ddot{s}(t)\cos\alpha = 0 \quad (\text{I-2.59})$$

$$m\ddot{s}(t) + m\ddot{x}(t)\cos\alpha = mg\sin\alpha \quad (\text{I-2.60})$$

**Задача I-2.9.** Даден е транслаторниот механички систем од слика I-2.13. Тој се состои од два тега со маси  $M_1$  и  $M_2$ , соодветно, кои се меѓусебно поврзани преку пружина со коефициент на крутост  $K_3$  и хидрауличен придушувач со коефициент на вискозно триење  $B_3$ . Тегот  $M_1$ , преку пружина со коефициент на крутост  $K_1$  е прикачен за лева неподвижна вертикална подлога, додека тегот  $M_2$ , преку пружина со коефициент на крутост  $K_2$ , е прикачен за десен вертикален сид. Да се состави соодветен математички модел на движењето на овој систем во временското подрачје, ако се претпостави дека коефициентот на триење на тегот  $M_1$  со подлогата е  $B_1$ , а коефициентот на триење на тегот  $M_2$  со подлогата е  $B_2$ . Врз тегот  $M_1$  дејствува надворешна сила  $f$ .



Слика I-2.13. Транслаторен механички систем со два степени слобода на движење од задачата I-2.9

**Решение:** Набљудуваниот механички систем од слика I-2.13 има два степени слобода на движење, бидејќи има две линеарно независни движења. Имено, двата тега можат да се движат независно еден од друг. Затоа математичкиот модел на овој систем ќе се состои од две диференцијални равенки, по една за секое од двете независни движења. Силите кои што дејствуваат врз теговите се прикажани на слика I-2.14. Така, врз тегот  $M_1$  дејствува силата на пружината  $K_1$ , силата на пружината  $K_3$ , инерцијата на масата  $M_1$ , силата на триење со подлогата  $B_1$ , силата на триење на пригушувачот  $B_3$  и надворешната сила  $f$ :

$$f = f_{m_1} + f_{b_1} - f_{b_3} + f_{k_1} - f_{k_3}$$

$$f = M_1\ddot{x}_1 + B_1\dot{x}_1 + B_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1x_1 + K_3(x_1 - x_2) \quad (I-2.61)$$

додека врз тегот  $M_2$  дејствува силата на пружината  $K_2$ , силата на пружината  $K_3$ , инерцијата на масата  $M_2$ , силата на триење со подлогата  $B_2$  и силата на придушувачот  $B_3$ :

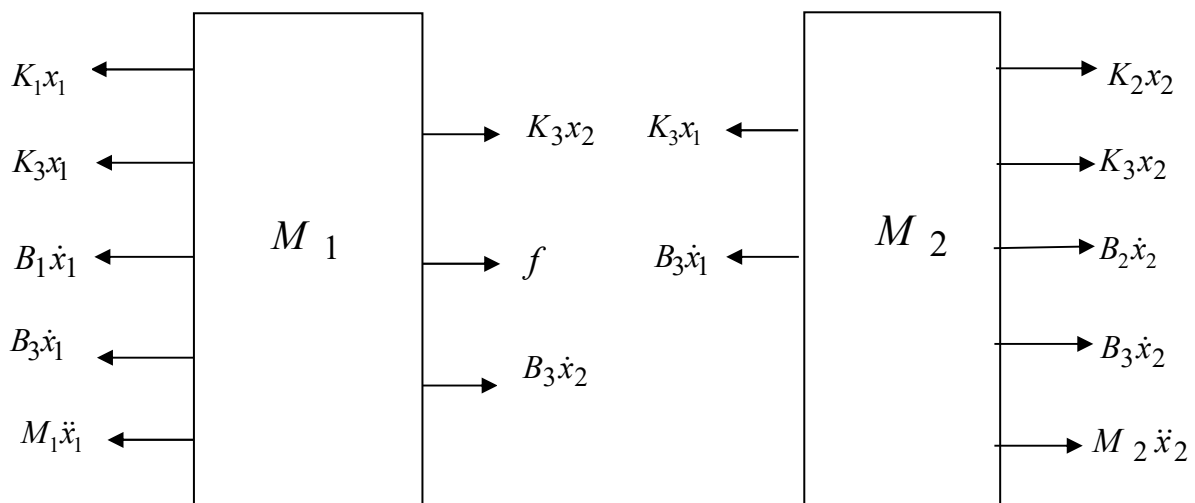
$$0 = f_{m_2} + f_{b_2} - f_{b_3} + f_{k_2} - f_{k_3}$$

$$0 = M_2\ddot{x}_2 + B_2\dot{x}_2 + K_2x_2 + B_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_3(x_2 - x_1) \quad (I-2.62)$$

Оттука, бараниот модел на набљудуваниот систем ќе гласи:

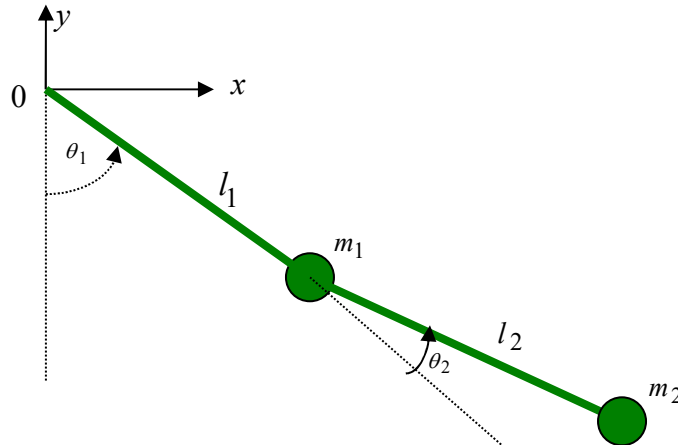
$$M_1\ddot{x}_1 + (B_1 + B_3)\dot{x}_1 + (K_1 + K_3)x_1 - B_3\dot{x}_2 - K_3x_2 = f \quad (I-2.63)$$

$$-B_3\dot{x}_1 - K_3x_1 + M_2\ddot{x}_2 + (B_2 + B_3)\dot{x}_2 + (K_2 + K_3)x_2 = 0 \quad (I-2.64)$$



Слика I-2.14. Слободни дијаграми на силите во системот од задачата I-2.9

**Задача I-2.10.** На слика I-2.15 е прикажан систем со два степени слобода на движење. Системот се состои од два лоста (краци), со должини  $l_1$  и  $l_2$ , соодветно, кои меѓу себе се поврзани со зглобови. Тој е многу сличен со роботска рака со два степени слобода на движење, со таа разлика што овде се претпоставува дека масата на секој лост е концентрирана на крајот од лостот. Да се состави динамички модел на набљудуваниот систем.



Слика I-2.15. Систем со два степени слобода на движење од задачата I-2.10

**Решение:** Движењето на лостот  $l_2$  може да се разложи на две компоненти – една во правец на  $x$ -оската, а друга во правец на  $y$ -оската. Така, равенките на движење на лостот  $l_2$  се:

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I-2.65})$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I-2.66})$$

а со нивно диференцирање во однос на времето се добиваат и соодветните равенки на компонентите на векторот на брзина на лостот  $l_2$ :

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I-2.67})$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I-2.68})$$

Кинетичката енергија на системот е збир од кинетичките енергии на одделните компоненти од системот:

$$K = K_1 + K_2 \quad (\text{I-2.69})$$

каде што:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[ (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 + (-l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 \right] = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{I-2.70})$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (\text{I-2.71})$$

$$\begin{aligned} V_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \left[ l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \right]^2 + \\ &+ \left[ l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \right]^2 = \\ &= (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2(l_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (\text{I-2.72})$$

па за кинетичката енергија (I-2.71) се добива:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[ (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2(l_2^2 + l_1 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] \quad (\text{I-2.73})$$

Вкупната кинетичка енергија на системот од слика I-2.15 е дадена со изразот:

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 = \left[ \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2) \right] \dot{\theta}_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (\text{I-2.74})$$

Потенцијалната енергија на системот од слика I-2.15 се определува на сличен начин:

$$P = P_1 + P_2 \quad (\text{I-2.75})$$

$$P_1 = -m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) \quad (\text{I-2.76})$$

$$P_2 = -m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1) - m_2 g l_2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] \quad (\text{I-2.77})$$

$$P = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 - m_2 g l_2 \quad (\text{I-2.78})$$

при што како линија на нулева потенцијална енергија е усвоена оската „ $x = 0$ “.

Лагранжовиот оператор за системот од слика I-2.15 е:

$$\begin{aligned} L &= K - P = \frac{1}{2} \left[ (m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 \right] \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\ &+ (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 + m_2 g l_2 - \end{aligned}$$

$$-(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I-2.79})$$

па со соодветно диференцирање на (I-2.79):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \left[ (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos \theta_2 \right] \dot{\theta}_1 + (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_2 \quad (\text{I-2.80})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \left[ (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos \theta_2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\ &+ (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - 2m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{I-2.81})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 + m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I-2.82})$$

за ротационото движење на првиот крак од системот на слика I-2.15 се добива:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left[ (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos \theta_2 \right] \ddot{\theta}_1 + \\ &+ (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - 2m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - \\ &-(m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 - m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{I-2.83})$$

На сличен начин се определува и равенката за ротационото движење на вториот крак на системот од слика I-2.15:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 + m_2l_2^2 \dot{\theta}_2 \quad (\text{I-2.84})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (\text{I-2.85})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{I-2.86})$$

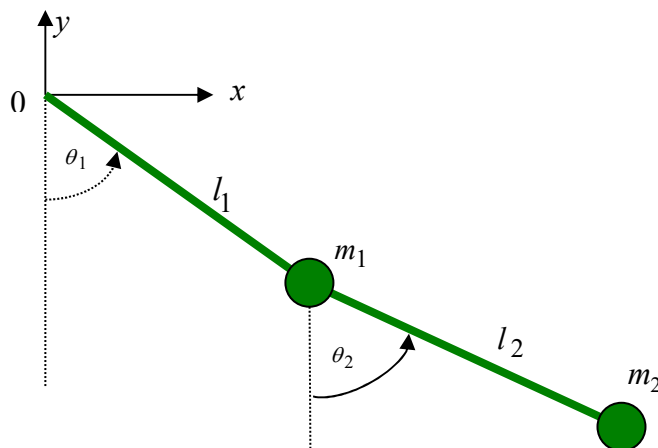
$$\begin{aligned} T_2 &= (m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \\ &+ m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{I-2.87})$$

Равенките на движењето на системот од слика I-2.15 можат да се претстават во следниот матричен облик:



$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos\theta_2 & m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos\theta_2 \\ m_2l_2^2 + m_2l_1l_2 \cos\theta_2 & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & -m_2l_1l_2 \sin\theta_2 \\ m_2l_1l_2 \sin\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} -m_2l_1l_2 \sin\theta_2 & -m_2l_1l_2 \sin\theta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} - \\
 &- \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin\theta_1 + m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2gl_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \tag{I-2.88}
 \end{aligned}$$

**Задача I-2.11.** Да се состави математички модел на движењето на механичкиот систем од слика I-2.16, кој се состои од два крака со маси  $m_1$  и  $m_2$ , соодветно, концентрирани во нивните крајни точки. Упатство: како линија на нулева потенцијална енергија да се усвои оската „ $x = 0$ “.



Слика I-2.16. Илустрација кон задачата I-2.11

**Решение:** Се работи за истиот систем од претходната задача, само што во овој случај поинаку е дефинирана ротацијата на вториот крак. Оттука, за координатите на масата  $m_1$  и нејзината брзина важи:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= l_1 \sin \theta_1 \\
 y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 \\
 \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1
 \end{aligned} \tag{I-2.89}$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (\text{I-2.90})$$

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{I-2.91})$$

па, кинетичката енергија на масата  $m_1$  ќе биде:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (\text{I-2.92})$$

Аналогно, за движењето, брзината и кинетичката енергија на масата  $m_2$  се добива:

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_2)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos(\theta_2) \quad (\text{I-2.93})$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (\text{I-2.94})$$

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 = \\ &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (\text{I-2.95})$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (\text{I-2.96})$$

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (\text{I-2.97})$$

$$P = P_1 + P_2 \quad (\text{I-2.98})$$

$$P_1 = -m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) \quad (\text{I-2.99})$$

$$P_2 = -m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1) - m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2) \quad (\text{I-2.100})$$

$$P = P_1 + P_2 = -(m_1 + m_2)gl_1 - m_2gl_2 + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2 \quad (\text{I-2.101})$$

$$L = K - P =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 +$$

$$+(m_1 + m_2)gl_1 + m_2gl_2 - (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{I-2.102})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{I-2.103})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -l_1l_2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \quad (\text{I-2.104})$$

$$T_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} =$$

$$= (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) +$$

$$+ l_1l_2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \quad (\text{I-2.105})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{I-2.106})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{I-2.107})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = l_1l_2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + m_2gl_2 \sin \theta_2 \quad (\text{I-2.108})$$

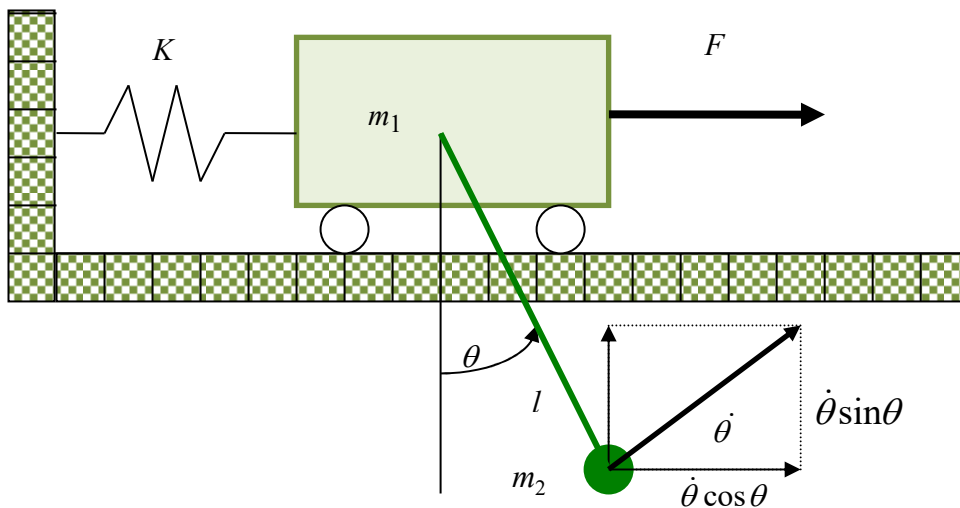
$$T_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} =$$

$$= m_2l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) +$$

$$- l_1l_2m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2gl_2 \sin \theta_2 \quad (\text{I-2.109})$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -m_2l_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \\
 &- \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \\ m_2gl_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{I-2.110}$$

**Задача I-2.12.** На слика I-2.17 е прикажан механички систем, кој претставува количка со маса  $m_1$  која се движи по хоризонтална подлога. Количката од едната страна е прицврстена за вертикална подлога преку пружина со коефициент на крутост (односно еластичност)  $K$ , додека за самата количка е закачено нишало со маса  $m_2$  и должина  $l$ . [2]



Слика I-2.17. Шематски приказ на систем со два степени слобода на движење од задачата I-2.12

**Решение:** Во конкретниот пример постојат два степени слобода на движење и две координати на движењето  $x$  и  $\theta$ . Следствено, постојат две равенки на движење – една за линеарното движење на системот, а друга за ротационото движење на нишалото. Кинетичката енергија на системот се состои од кинетичката енергија на количката и кинетичката енергија на нишалото. Имајќи на ум дека брзината на нишалото  $\mathbf{v}_n$  е збир од брзината на количката  $\mathbf{v}_k$  и брзината на нишалото во однос на количката  $\mathbf{v}_{n/k}$ :

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_{n/k} = \dot{x}\mathbf{i} + (l\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{i} + (l\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{j} = (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{i} + (l\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{j} \tag{I-2.111}$$

$$v_n^2 = (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\theta} \sin \theta)^2 \tag{I-2.112}$$

за кинетичката енергија на системот од слика I-2.17 се добива:

$$\begin{aligned} K &= K_k + K_n = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}m_2(l\dot{\theta}\sin\theta)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) \end{aligned} \quad (I-2.113)$$

На сличен начин, потенцијалната енергија на системот може да се претстави како збир од потенцијалната енергија на количката и потенцијалната енергија на нишалото. Потенцијалната енергија на количката се должи на дејството на пружината и таа е еластична потенцијална енергија, која е пропорционална на коефициентот на крутост на пружината и квадратот од нејзиното издолжување:

$$P_k = \frac{1}{2}Kx^2 \quad (I-2.114)$$

Од друга страна, потенцијалната енергија на нишалото се должи исклучиво на гравитацијата (гравитациона потенцијална енергија) и е еднаква на тежината на нишалото помножена со промената на висината на нишалото кога тоа се отклонува од вертикалната оска на нулева потенцијална енергија ( $\theta = 0^0$ ). Бидејќи должината на нишалото е  $l$ , промената на висината е  $l(1 - \cos\theta)$ , па, потенцијалната енергија на нишалото ќе изнесува:

$$P_n = m_2gl(1 - \cos\theta) \quad (I-2.115)$$

Оттука:

$$P = \frac{1}{2}kx^2 + m_2gl(1 - \cos\theta) \quad (I-2.116)$$

Лагранжијанот за системот од слика I-2.17 е:

$$L = K - P = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2 - m_2gl(1 - \cos\theta) \quad (I-2.117)$$

а со негово диференцирање по променливата  $x$  и нејзиниот извод  $\dot{x}$  се добива:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2l\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx \end{aligned} \quad (I-2.118)$$

Следствено, равенката на линеарното движење на системот од слика I-2.17 е:

$$F = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\theta}\cos\theta - m_2l\dot{\theta}^2\sin\theta + kx \quad (I-2.119)$$

Со диференцирање на (I-2.117) по променливата  $\theta$  и нејзиниот извод  $\dot{\theta}$  се добива:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l^2 \dot{\theta} + m_2 l \dot{x} \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{x} \cos \theta - m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 g l \sin \theta - m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{I-2.120})$$

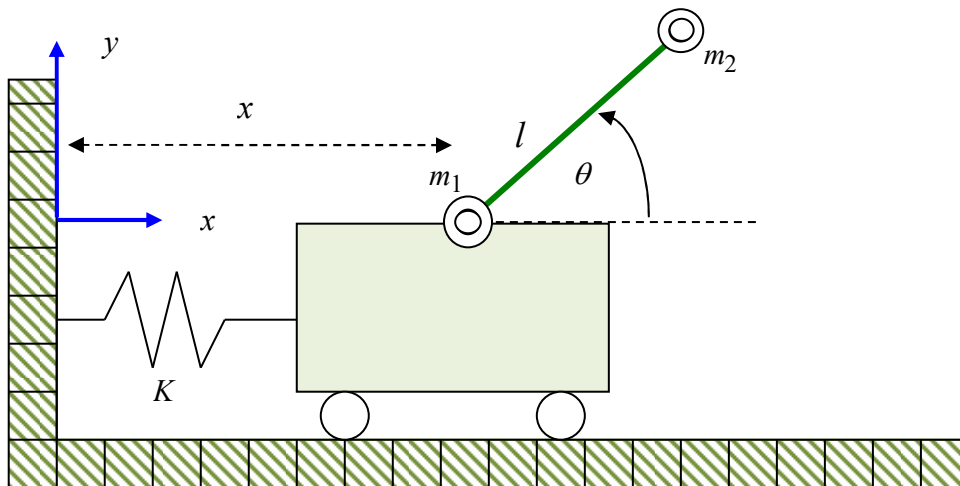
за равенката на ротационото движење на набљудуваниот систем се добива:

$$T = m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{x} \cos \theta + m_2 g l \sin \theta \quad (\text{I-2.121})$$

Во матричен облик двете равенки на движењето на системот од слика I-2.17 се:

$$\begin{bmatrix} F \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \cos \theta \\ m_2 l \cos \theta & m_2 l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}^2 \\ \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kx \\ m_2 g l \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{I-2.122})$$

**Задача I-2.13.** На слика I-2.18 е прикажано инвертирано нишало поставено на количка.



Слика I-2.18. Илустрација кон задачата I-2.13

Рамнината на движењето е рамнината  $(x, y)$ . Количката се движи во правец на  $x$  – оската и ова движење е претставено со растојанието  $x$ . Масата на количката е  $m_1$ , а на нишалото  $m_2$ . Под претпоставка, масите  $m_1$  и  $m_2$  се концентрирани во соодветните точки. Да се состави динамичкиот модел на овој систем.

**Решение:** Ако со  $x_1$  и  $y_1$  се означат координатите на масата  $m_1$ , а со  $x_2$  и  $y_2$  се означат координатите на масата  $m_2$ , тогаш кинетичката енергија на системот може да се претстави како збир од кинетичките енергии на масите  $m_1$  и  $m_2$ :

$$K = K_1 + K_2 = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \quad (\text{I-2.123})$$

каде што  $v_1$  е брзината на масата  $m_1$  и  $v_2$  е брзината на масата  $m_2$ :

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \quad (\text{I-2.124})$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \quad (\text{I-2.125})$$

Од слика I-2.18 непосредно следува:

$$x_1 = x \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}$$

$$y_1 = 0 \Rightarrow \dot{y}_1 = 0 \quad (\text{I-2.126})$$

$$v_1^2 = \dot{x}^2 \quad (\text{I-2.127})$$

$$x_2 = x + l \cos \theta \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x} - l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$y_2 = l \sin \theta \Rightarrow \dot{y}_2 = l \dot{\theta} \cos \theta \quad (\text{I-2.128})$$

$$v_2^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{I-2.129})$$

па за кинетичките енергии на масите  $m_1$  и  $m_2$  се добива:

$$K_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 \quad (\text{I-2.130})$$

$$K_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta) \quad (\text{I-2.131})$$

Вкупната кинетичка енергија на набљудуваниот систем е:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta) \quad (\text{I-2.132})$$

или по средовањето:

$$K = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta \quad (\text{I-2.133})$$

Потенцијалната енергија на системот може да се претстави како збир од потенцијалните енергии на двете маси:

$$P = P_1 + P_2 \quad (I-2.134)$$

каде што:

$$P_1 = \frac{1}{2} Kx^2 \quad (I-2.135)$$

$$P_2 = m_2 gl \sin \theta \quad (I-2.136)$$

Лагранжијанот за набљудуваниот систем е даден со изразот:

$$L = K - P = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 - m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - \frac{1}{2} Kx^2 \quad (I-2.137)$$

Равенките на движењето на набљудуваниот систем се:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (I-2.138)$$

каде што:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} - m_2 l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l^2 \dot{\theta} - m_2 l \dot{x} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x} - m_2 l \ddot{\theta} \sin \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_2 l^2 \ddot{\theta} - m_2 l \ddot{x} \sin \theta - m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$$

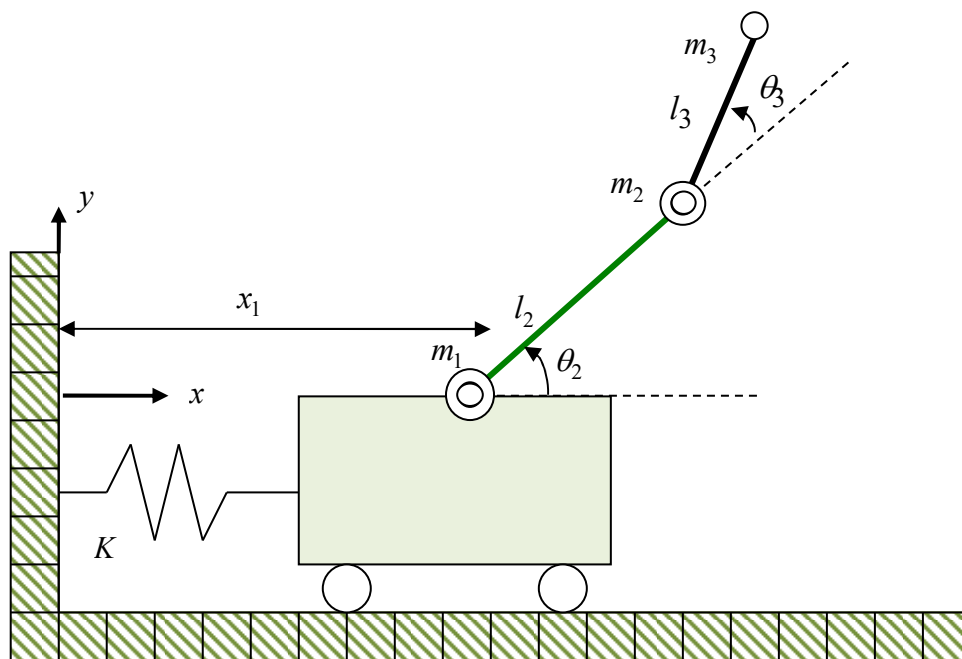
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta - m_2 gl \cos \theta \quad (I-2.139)$$

Следствено, за динамичкиот модел на инвертираното нишало од слика I-2.18 се добива:



$$\begin{bmatrix} F_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2l\ddot{\theta}\sin\theta - m_2l\dot{\theta}^2\cos\theta + Kx \\ m_2l^2\ddot{\theta} - m_2\dot{x}\sin\theta + m_2gl\cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{I-2.140})$$

**Задача I-2.14.** Даден е системот со три степени слобода на движење од слика I-2.19, кој се состои од два крака поставени на подвижна количка и поврзани меѓусебно со подвижни зглобови. Под претпоставка,  $m_1, m_2, m_3$  се концентрирани маси во соодветните точки. Да се состави математичкиот модел на движењето на крајната точка од системот во дадениот координатен систем, кој ја определува врската помеѓу брзината на точката и брзините на зглобовите. Потоа резултатот да се искористи за добивање на динамичкиот модел на набљудуваниот систем.



Слика I-2.19. Илустрација кон задачата I-2.14

**Решение:** Задачата може да се реши геометриски. Така, врз основа на слика I-2.19, масата  $m_1$  вржи само хоризонтално движење  $x_1$ , додека за  $x$  – координатите и  $y$  – координатите на движењето на масите  $m_2$  и  $m_3$  важи:

$$x_2 = x_1 + l_2 \cos \theta_2 = x_1 + l_2 C_2$$

$$y_2 = l_2 \sin \theta_2 = l_2 S_2 \quad (\text{I-2.141})$$

$$x_3 = x_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) = x_1 + l_2 C_2 + l_3 C_{23}$$

$$y_3 = l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) = l_2 S_2 + l_3 S_{23} \quad (\text{I-2.142})$$

Со диференцирање на горните равенки се добива:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = \dot{x}_1 - l_2 \dot{\theta}_2 S_2$$

$$\dot{y}_2 = l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 = l_2 C_2 \dot{\theta}_2 \quad (\text{I-2.143})$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 - l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) = \dot{x}_1 - l_2 S_2 \dot{\theta}_2 - l_3 S_{23}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)$$

$$\dot{y}_3 = l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) = l_2 C_2 \dot{\theta}_2 + l_3 C_{23}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \quad (\text{I-2.144})$$

Оттука, кинетичките енергии на масите  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  ќе бидат:

$$K_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 \quad (\text{I-2.145})$$

$$K_2 = \frac{m_2}{2} [\dot{x}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - 2l_2 S_2 \dot{x}_1 \dot{\theta}_2] \quad (\text{I-2.146})$$

$$K_3 = \frac{m_3}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_3}{2} (l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 C_3) \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_3}{2} l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 (l_3^2 + l_2 l_3 C_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - m_3 [l_2 S_2 \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 + l_3 S_{23} \dot{x}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)] \quad (\text{I-2.147})$$

Вкупната кинетичка енергија на набљудуваниот систем е:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} \dot{x}_1^2 + \left[ \frac{m_2 + m_3}{2} l_2^2 + \frac{m_3}{2} (l_3^2 + 2l_2 l_3 C_3) \right] \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_3}{2} l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 (l_3^2 + l_2 l_3 C_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - [(m_2 + m_3) l_2 S_2 + m_3 l_3 S_{23}] \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 - m_3 l_3 S_{23} \dot{x}_1 \dot{\theta}_3 \quad (\text{I-2.148})$$

Потенцијалната енергија  $P$  на системот може да се претстави како збир од потенцијалните енергии на масите:

$$P_1 = \frac{1}{2} K x_1^2 \quad (\text{I-2.149})$$

$$P_2 = m_2 g l_2 S_2 \quad (\text{I-2.150})$$

$$P_3 = m_3 g l_2 S_2 + m_3 g l_3 S_{23} \quad (\text{I-2.151})$$

па:

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{2} Kx_1^2 + m_2 gl_2 S_2 + m_3 gl_2 S_2 + m_3 gl_3 S_{23} = \\
 &= \frac{1}{2} Kx_1^2 + (m_2 + m_3) gl_2 S_2 + m_3 gl_3 S_{23}
 \end{aligned} \tag{I-2.152}$$

Лагранжијанот за набљудуваниот систем е даден со изразот:

$$\begin{aligned}
 L &= K - P = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{2} \dot{x}_1^2 + \left[ \frac{m_2 + m_3}{2} l_2^2 + \frac{m_3}{2} (l_3^2 + 2l_2 l_3 C_3) \right] \dot{\theta}_2^2 + \\
 &+ \frac{m_3}{2} l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_3 (l_3^2 + l_2 l_3 C_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - [(m_2 + m_3) l_2 S_2 + m_3 l_3 S_{23}] \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} Kx_1^2 - \\
 &- m_3 l_3 S_{23} \dot{x}_1 \dot{\theta}_3 - (m_2 + m_3) gl_2 S_2 - m_3 gl_3 S_{23}
 \end{aligned} \tag{I-2.153}$$

од каде непосредно следува:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2 + m_3) \dot{x}_1 - [(m_2 + m_3) l_2 S_2 + m_3 l_3 S_{23}] \dot{\theta}_2 - m_3 l_3 S_{23} \dot{\theta}_3 \tag{I-2.154}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= [(m_2 + m_3) l_2^2 + m_3 (l_3^2 + 2l_2 l_3 C_3)] \dot{\theta}_2 + m_3 (l_3^2 + l_2 l_3 C_3) \dot{\theta}_3 - \\
 &- [(m_2 + m_3) l_2 S_2 + m_3 l_3 S_{23}] \dot{x}_1
 \end{aligned} \tag{I-2.155}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = m_3 l_3^2 \dot{\theta}_3 + m_3 (l_3^2 + l_2 l_3 C_3) \dot{\theta}_2 - m_3 l_3 S_{23} \dot{x}_1 \tag{I-2.156}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) &= (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_1 - [(m_2 + m_3) L_2 S_2 + m_3 L_3 S_{23}] \ddot{\theta}_2 - m_3 L_3 S_{23} \ddot{\theta}_3 - \\
 &- [(m_2 + m_3) L_2 C_2 + m_3 L_3 C_{23}] \dot{\theta}_2^2 - m_3 L_3 C_{23} \dot{\theta}_3^2 - 2m_3 L_3 C_{23} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3
 \end{aligned} \tag{I-2.157}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= [(m_2 + m_3) L_2^2 + m_3 (L_3^2 + 2L_2 L_3 C_3)] \ddot{\theta}_2 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \ddot{\theta}_3 - \\
 &- [(m_2 + m_3) L_2 S_2 + m_3 L_3 S_{23}] \ddot{x}_1 - m_3 L_2 L_3 S_3 \dot{\theta}_3^2 - [(m_2 + m_3) L_2 C_2 + m_3 L_3 C_{23}] \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 - \\
 &- m_3 L_3 C_{23} \dot{x}_1 \dot{\theta}_3 - 2m_3 L_2 L_3 S_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3
 \end{aligned} \tag{I-2.158}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= m_3 L_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_3 (L_3^2 + L_2 L_3 C_3) \ddot{\theta}_2 - m_3 L_3 S_{23} \ddot{x}_1 + \\
 &- m_3 L_3 C_{23} \dot{x}_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - m_3 L_2 L_3 S_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3
 \end{aligned} \tag{I-2.159}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -Kx_1 \tag{I-2.160}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -[(m_2 + m_3)l_2 C_2 + m_3 l_3 C_{23}] \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 - m_3 l_3 C_{23} \dot{x}_1 \dot{\theta}_3 +$$

$$-(m_2 + m_3)gl_2 C_2 - m_3 gl_3 C_{23} \quad (\text{I-2.161})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = -m_3 l_2 l_3 S_3 \dot{\theta}_2^2 - m_3 l_2 l_3 S_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - m_3 l_3 C_{23} \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 - m_3 l_3 C_{23} \dot{x}_1 \dot{\theta}_3 - m_3 gl_3 C_{23} \quad (\text{I-2.162})$$

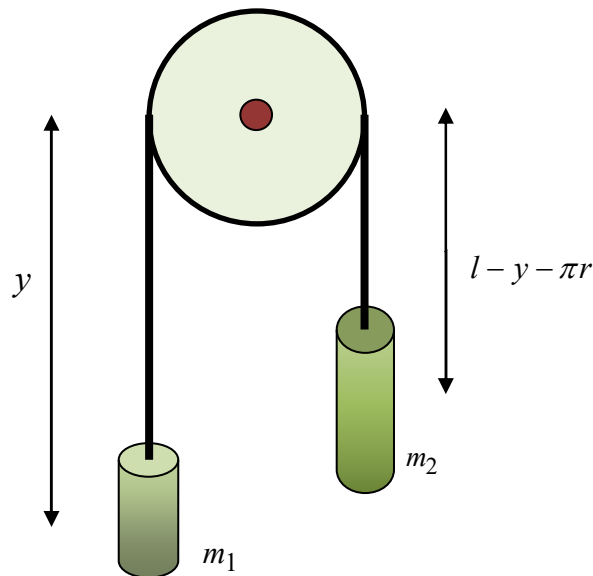
Оттука, равенките на движењето на набљудуваниот систем од слика I-2.19 се:

$$F_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad (\text{I-2.163})$$

$$T_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad (\text{I-2.164})$$

$$T_3 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \quad (\text{I-2.165})$$

**Задача I-2.15.** Јаже со должина  $l$  е префрлено преку макара со радиус  $r$  и момент на инерција  $I$ . На едниот крај од јагето е закачен тег со маса  $m_1$ , а на другиот – тег со маса  $m_2$ . Под претпоставка, масите можат да се движат само во вертикален правец и во системот не постои триење или лизгање. Со помош на Лагранжовата механика да се состави математички модел на движењето на овој систем.



Слика I-2.20. Илустрација кон задачата I-2.15

**Решение:** Нека движењето на првиот тег е претставено со  $y$ . Тогаш движењето на вториот тег ќе биде  $l - y - \pi r$ . Вкупната кинетичка енергија на набљудуваниот

систем е збир од кинетичката енергија на првиот тег, кинетичката енергија на вториот тег и кинетичката енергија на макарата:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 \quad (\text{I-2.166})$$

каде што:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 \quad (\text{I-2.167})$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 \quad (\text{I-2.168})$$

$$K_3 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{I \dot{y}^2}{2r^2}; \quad \dot{y} = r\omega \quad (\text{I-2.169})$$

Од друга страна, потенцијална енергија имаат само теговите, која е пропорционална на нивната висина, па за вкупната потенцијална енергија на системот се добива:

$$P = P_1 + P_2 = -m_1 g y - m_2 g (l - y - \pi r) \quad (\text{I-2.170})$$

Оттука:

$$L = K - P = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{I}{2r^2} \dot{y}^2 + m_1 g y + m_2 g (l - y - \pi r) \quad (\text{I-2.171})$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m_1 g - m_2 g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_1 \dot{y} + m_2 \dot{y} + \frac{I \dot{y}}{r^2}$$

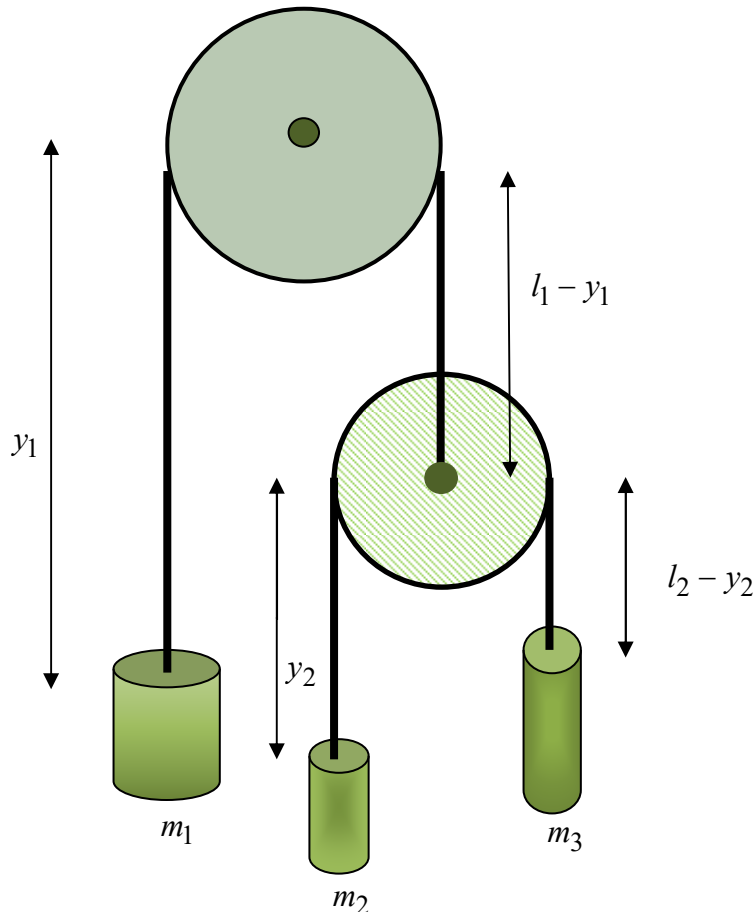
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \left( m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{y} \quad (\text{I-2.172})$$

па, бараниот модел на движењето на набљудуваниот систем е:

$$\left( m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{y} = (m_1 - m_2) g \quad (\text{I-2.173})$$

**Задача I-2.16.** Даден е механичкиот систем од слика I-2.21. Тој се состои од две макари со занемарлива инерција и занемарлив радиус во однос на должината на јажињата. Нека јажето префрлено преку првата макара има должина  $l_1$ , а јажето префрлено преку втората макара има должина  $l_2$ . Тегот закачен на првото јаже има маса  $m_1$ , а теговите закачени на двата краја од второто јаже имаат маси  $m_2$  и

$m_3$ , соодветно. Нека, под претпоставка, масите можат да се движат само во вертикален правец и во системот не постои појава на триење или лизгање. Со помош на Лагранжовата механика да се состави математички модел на движењето на овој систем.



Слика I-2.21. Илустрација кон задачата I-2.16

**Решение:** Нека движењето на првиот тег е претставено со  $y_1$ . Тогаш движењето на втората макара ќе биде  $l_1 - y_1$ . Ако движењето на вториот тег во однос на втората макара се означи со  $y_2$ , неговото движење во однос на првата макара ќе биде  $(l_1 - y_1) + y_2$ . Конечно, движењето на третиот тег во однос на втората макара ќе биде  $l_2 - y_2$ , додека неговото движење во однос на првата макара ќе биде  $(l_1 - y_1) + (l_2 - y_2)$ .

Вкупната кинетичка енергија на набљудуваниот механички систем може да се опише како збир од кинетичката енергија на трите тега:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 \tag{I-2.174}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (-\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2$$

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 (-\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 \quad (\text{I-2.175})$$

Аналогно:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = -m_1 g y_1 - m_2 g (l_1 - y_1 + y_2) - m_3 g (l_1 + l_2 - y_1 - y_2) \quad (\text{I-2.176})$$

Лагранжијанот за системот е:

$$\begin{aligned} L &= K - P = \\ &= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (-\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 (-\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + \\ &+ m_1 g y_1 + m_2 g (l_1 - y_1 + y_2) + m_3 g (l_1 + l_2 - y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (\text{I-2.177})$$

па:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = m_1 g - m_2 g - m_3 g$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = m_2 g - m_3 g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_1 - m_2 \dot{y}_2 + m_3 \dot{y}_1 + m_3 \dot{y}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = -m_2 \dot{y}_1 + m_3 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 + m_3 \dot{y}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_1 - (m_2 - m_3) \ddot{y}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = -(m_2 - m_3) \ddot{y}_1 + (m_2 + m_3) \ddot{y}_2 \quad (\text{I-2.178})$$

Бараниот модел на движењето на набљудуваниот систем е:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{y}_1 - (m_2 - m_3) \ddot{y}_2 = m_1 g - m_2 g - m_3 g \quad (\text{I-2.179})$$

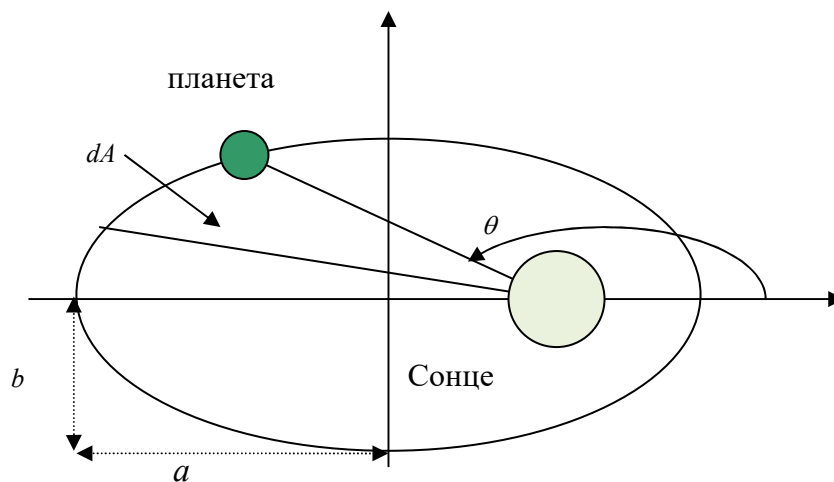
$$-(m_2 - m_3) \ddot{y}_1 + (m_2 + m_3) \ddot{y}_2 = m_2 g - m_3 g \quad (\text{I-2.180})$$

**Задача I-2.17.** Да се состави математички модел на движењето на една планета околу Сонцето [3], ако е познато дека патеката на планетата претставува елипса (прв Кеплеров закон), математички опишана со равенката:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}; \quad p = a(1 - e^2) \quad (\text{I-2.181})$$

и графички прикажана на слика I-2.22. Исто така, врз основа на вториот Кеплеров закон за движењето на планетата важи:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \quad (\text{I-2.182})$$



Слика I-2.22. Приказ на орбитата на една планета околу Сонцето

**Решение:** Изразот (I-2.182) произлегува од вториот Кеплеров закон кој гласи: Радиус -векторот  $r$  повлечен од Сонцето до планетата, во исти временски интервали поминува еднакви површини. Со негово диференцирање по времето се добива:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = K \quad / \quad \frac{d}{dt} (\cdot)$$

$$2r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$2 \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad (\text{I-2.183})$$

Изразот (I-2.181) произлегува од првиот Кеплеров закон кој гласи: Орбитата на една планета, која кружи околу Сонцето, е елипса, а Сонцето се наоѓа во еден од фокусите на елипсата. Со негово диференцирање по времето, се добива:



$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow r + r e \cos \theta = p \quad / \quad \frac{d}{dt}(\cdot)$$

$$\frac{dr}{dt} + e \cos \theta \frac{dr}{dt} - er \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{er \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{ep \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{I-2.184})$$

Ако се воведат смените:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{r^2} \quad (\text{I-2.185})$$

$$(1 + e \cos \theta) = \frac{p}{r} \quad (\text{I-2.186})$$

добие ниот израз за  $\frac{dr}{dt}$  може да се запише на следниот начин:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{eK}{p} \sin \theta \quad (\text{I-2.187})$$

па, со негово диференцирање по време, се добива:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{eK}{p} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{eK}{p} \cos \theta \frac{K}{r^2} = \frac{eK^2}{pr^2} \cos \theta = \frac{eK^2}{pr^2} \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r} - 1 \right) = \\ &= \frac{K^2}{r^3} - \frac{K^2}{pr^2} = r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{K^2}{pr^2} \end{aligned} \quad (\text{I-2.188})$$

односно:

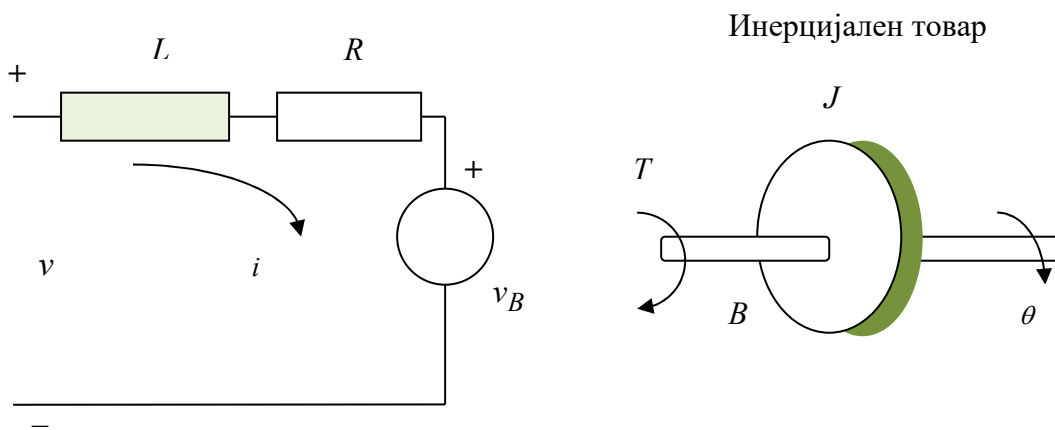
$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{K^2}{pr^2} = 0 \quad (\text{I-2.189})$$

**Задача I-2.18.** На слика I-2.23 е прикажан шематски еден електромеханички систем. Тој се состои од еднонасочен електричен мотор, на чија излезна оска е поставен одреден инерционен товар. Со  $R$  и  $L$  се означени отпорноста и индуктивноста во колото од арматурата на моторот, а напонот  $v_B$  ја претставува генерираната електромоторна сила во моторот, која е пропорционална со брзината на вртење на оската од моторот  $d\theta/dt$ . Вртливиот момент  $T$ , кој го генерира моторот, е пропорционален со струјата на арматурата  $i$ , и нему му се

спротивставуваат инерционата сила на подвижните делови од моторот заедно со товарот и отпорната сила на вискозно триење на околната средина. Инерцијата  $J$  ја претставува комбинираната инерција од арматурата на моторот и товарот, а  $B$  е вкупното вискозно триење кое дејствува врз излезната оска од моторот. Да се состави соодветен модел на набљудуваниот систем, кој ја дефинира врската помеѓу влезниот напон  $v$  и агловата положба  $\theta$  на излезната оска од моторот, ако:

$$v_B(t) = K_1 \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad T(t) = K_2 i(t) \quad (\text{I-2.190})$$

(Отпорната сила на триење е пропорционална со брзината на вртење на оската од моторот, а инерционата сила е пропорционална со забрзувањето на оската од моторот.)



Слика I-2.23. Илустрација кон задачата I-2.18

**Решение:** Од електричното коло прикажано на слика I-2.23 непосредно следува:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = v(t) - v_B(t) = v(t) - K_1 \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (\text{I-2.191})$$

додека вртливиот момент на моторот ја урамнотежува отпорната сила на инерција  $f_J(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$  и отпорната сила на триење  $f_B(t) = B \frac{d\theta(t)}{dt}$ :

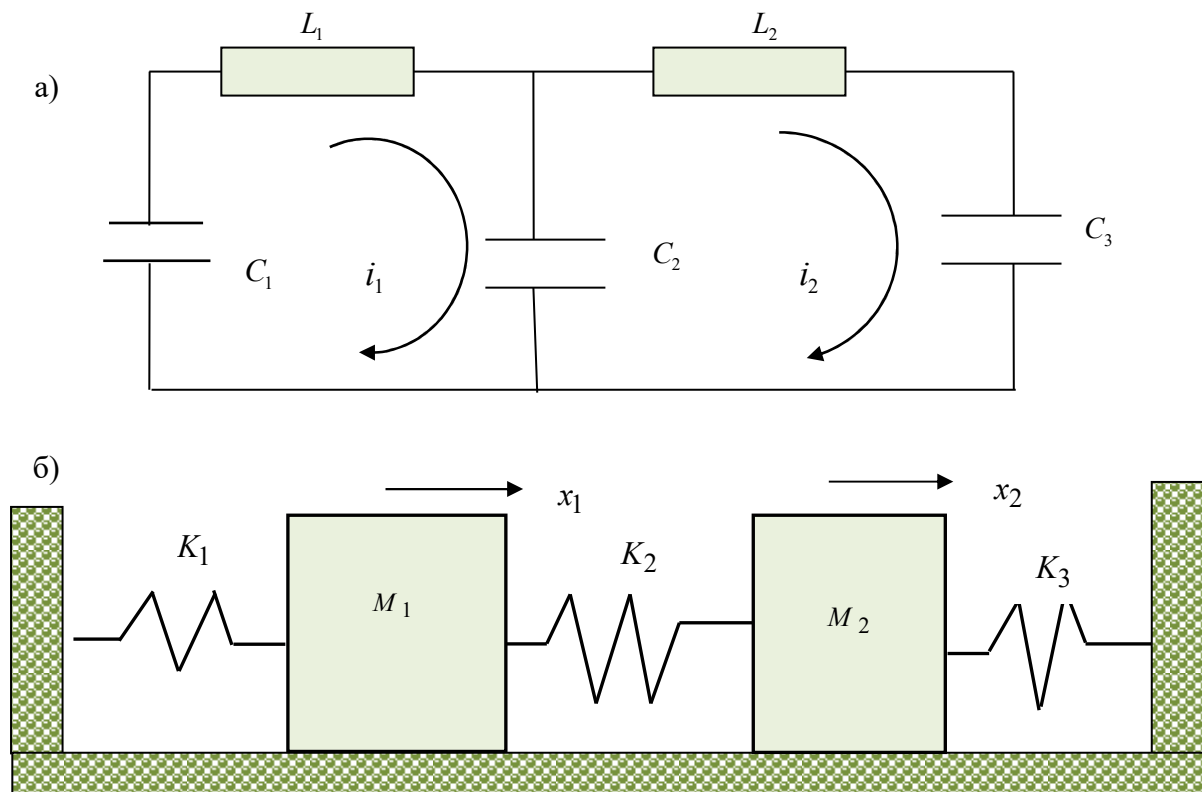
$$T(t) = f_J(t) + f_B(t) = K_2 i(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (\text{I-2.192})$$

Со воведување на втората равенка во првата и по мало средување, се добива:

$$\frac{R}{K_2} \left[ J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} \right] + \frac{L}{K_2} \left[ J \frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + B \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right] = v(t) - K_1 \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (I-2.193)$$

$$LJ \frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + (JR + BL) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + (BR + K_1K_2) \frac{d\theta(t)}{dt} = K_2v(t) \quad (I-2.194)$$

**Задача I-2.19.** На слика I-2.24 под а) е прикажан еден електричен систем, кој се состои од три кондензатори  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и две намотки  $L_1$  и  $L_2$ . На слика I-2.24 под б) е прикажан механички систем кој се состои од три пружини со коефициенти  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  и два тега со маси  $M_1$  и  $M_2$ . Да се покаже дека двата системи се динамички еквивалентни.



Слика I-2.24. Илустрација кон задачата I-2.19: а) електричен систем, б) механички систем

**Решение:** За математичкиот модел на електричниот систем од слика I-2.24.а) се добива:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(t) dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t [i_1(t) - i_2(t)] dt = 0$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_2(t) dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t [i_2(t) - i_1(t)] dt = 0$$

$$L_1 \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_1(t) + \frac{1}{C_2} [i_1(t) - i_2(t)] = 0$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_3} i_2(t) + \frac{1}{C_2} [i_2(t) - i_1(t)] = 0$$

$$L_1 \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i_1(t) - \frac{1}{C_2} i_2(t) = 0 \quad (\text{I-2.195})$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) i_2(t) - \frac{1}{C_2} i_1(t) = 0 \quad (\text{I-2.196})$$

додека математичкиот модел на механичкиот систем од слика I-2.246) гласи:

$$M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + K_1 [x_1(t) - x_0(t)] = K_2 [x_2(t) - x_1(t)]$$

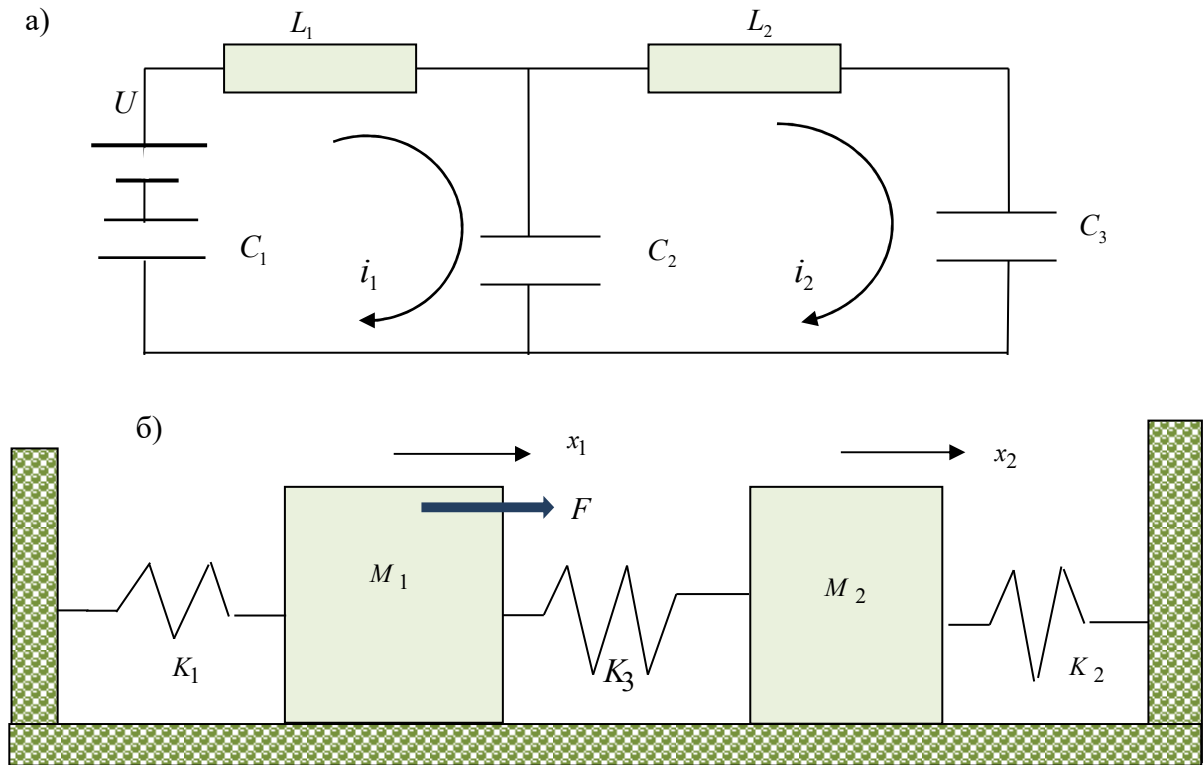
$$M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + K_2 [x_2(t) - x_1(t)] = K_3 [x_3(t) - x_2(t)]$$

$$M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (K_1 + K_2) x_1(t) - K_2 x_2(t) = 0 \quad (\text{I-2.197})$$

$$M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + (K_2 + K_3) x_2(t) - K_2 x_1(t) = 0 \quad (\text{I-2.198})$$

Со споредба на овие два модели лесно може да се утврди дека набљудуваните системи имаат исто динамичко поведење, при што можат да се воспостават следните аналогии: електрична струја  $i(t)$  – поместување  $x(t)$ , електрична индуктивност  $L$  – маса  $M$ , реципрочна вредност на електричен капацитет  $\frac{1}{C}$  – коефициент на еластичност  $K$ .

**Задача I-2.20.** На слика I-2.25 се прикажани системите од слика I-2.24, со соодветни возбуди - напонски извор  $U$  во електричното коло и надворешна сила  $F$  во механичкиот систем. Да се покаже дека и овие системи се динамички еквивалентни.



Слика I-2.25. Илустрација кон задачата I-2.20: а) електричен систем и б) механички систем

**Решение:** За математичкиот модел на електричниот систем од слика I-2.25.a) се добива:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(t) dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t [i_1(t) - i_2(t)] dt = U$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_2(t) dt + \frac{1}{C_2} \int_0^t [i_2(t) - i_1(t)] dt = 0$$

$$L_1 \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_1(t) + \frac{1}{C_2} [i_1(t) - i_2(t)] = U$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_3} i_2(t) + \frac{1}{C_2} [i_2(t) - i_1(t)] = 0$$

$$L_1 \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i_1(t) - \frac{1}{C_2} i_2(t) = U \quad (\text{I-2.199})$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) i_2(t) - \frac{1}{C_2} i_1(t) = 0 \quad (\text{I-2.200})$$

додека за математичкиот модел на механичкиот систем од слика I-2.25б) важи:

$$M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + K_1 [x_1(t) - x_0(t)] = F + K_2 [x_2(t) - x_1(t)]$$

$$M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + K_2 [x_2(t) - x_1(t)] = K_3 [x_3(t) - x_2(t)]$$

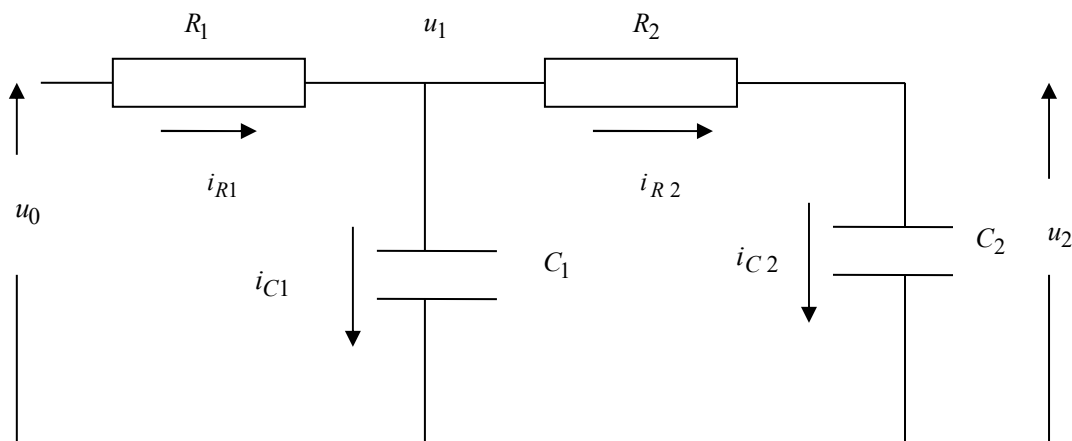
$$M_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + (K_1 + K_2)x_1(t) - K_2 x_2(t) = F \quad (\text{I-2.201})$$

$$M_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + (K_2 + K_3)x_2(t) - K_2 x_1(t) = 0 \quad (\text{I-2.202})$$

Со споредба на овие два модели лесно може да се утврди дека набљудуваните системи имаат исто динамичко поведење.

### I-3. МОДЕЛИ НА ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

**Задача I-3.1.** Да се определи излезниот напон  $u_2(t)$  на електричното коло од слика I-3.1, во функција од влезниот напон  $u_0(t)$ . Потоа да се состави соодветен модел на набљудуваниот систем во просторот на состојби.



Слика I-3.1. Електрично RC коло од задачата I-3.1

**Решение:** Равенките на струите во колото од слика I-3.1 се:

$$i_{R1}(t) = \frac{u_0(t) - u_1(t)}{R_1} \quad (\text{I-3.1})$$

$$i_{R2}(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_2} \quad (\text{I-3.2})$$

$$i_{C1}(t) = C_1 \frac{du_1(t)}{dt} \quad (\text{I-3.3})$$

$$i_{C2}(t) = C_2 \frac{du_2(t)}{dt} \quad (\text{I-3.4})$$

$$i_{R1}(t) = i_{C1}(t) + i_{R2}(t) \quad (\text{I-3.5})$$

$$i_{R2}(t) = i_{C2}(t) \quad (\text{I-3.6})$$

Оттука, со воведување на (I-3.1), (I-3.2) и (I-3.3) во (I-3.5), се добива:

$$\frac{u_0(t) - u_1(t)}{R_1} = C_1 \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_2} \quad (\text{I-3.7})$$

$$\frac{u_0(t)}{R_1} = C_1 \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{u_1(t)}{R_1} + \frac{u_1(t)}{R_2} - \frac{u_2(t)}{R_2} \quad (\text{I-3.8})$$

$$R_2 u_0(t) = R_1 R_2 C_1 \frac{du_1(t)}{dt} + (R_1 + R_2) u_1(t) - R_1 u_2(t) \quad (\text{I-3.9})$$

Аналогно, со воведување на (I-3.2) и (I-3.4) во (I-3.6), се добива:

$$\frac{u_1(t) - u_2(t)}{R_2} = C_2 \frac{du_2(t)}{dt} \quad (\text{I-3.10})$$

$$\frac{u_1(t)}{R_2} = \frac{u_2(t)}{R_2} + C_2 \frac{du_2(t)}{dt} \quad (\text{I-3.11})$$

$$u_1(t) = R_2 C_2 \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \quad (\text{I-3.12})$$

Бараниот модел на набљудуваното RC коло се добива со воведување на (I-3.12) во (I-3.9):

$$\begin{aligned} R_2 u_0(t) &= R_1 R_2 C_1 \frac{d}{dt} \left[ R_2 C_2 \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \right] + \\ &+ (R_1 + R_2) \left[ R_2 C_2 \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \right] - R_1 u_2(t) \end{aligned} \quad (\text{I-3.13})$$

$$u_0(t) = R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + [R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2] \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) \quad (\text{I-3.14})$$

Моделот (I-3.14) на RC колото од слика I-3.1 е линеарна диференцијална равенка од втор ред со коефициенти:

$$a_2 = R_1 C_1 R_2 C_2, \quad a_1 = R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2, \quad a_0 = 1 \quad (\text{I-3.15})$$

и почетни услови:

$$u_2(0) = u_{20}, \quad u_2'(0) = u_{20}' \quad (\text{I-3.16})$$

Почетните вредности  $u_1(0) = u_{10}$  и  $u_2(0) = u_{20}$  се познати, бидејќи се работи за почетниот полнеж на кондензаторите  $u_1(0) = u_{C1}(0)$  и  $u_2(0) = u_{C2}(0)$ , додека вредноста  $u_2'(0) = u_{20}'$  треба дополнително да се определи. Тоа се прави со помош на равенката (I-3.10), која мора да важи за секое  $t$ , па, следствено, и за  $t = 0$ . Оттука:

$$u_2'(0) = \left[ \frac{du_2(t)}{dt} \right]_{t=0} = \frac{u_1(0) - u_2(0)}{C_2 R_2} \quad (\text{I-3.17})$$

За да се избегне определувањето на почетните услови, што може да претставува проблем кај системите од повисок ред, подобро е моделот на електричното коло од слика I-3.1 да се претстави во просторот на состојби, при што како состојбени големини се усвојуваат напоните на кондензаторите  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . Така, со средувањето на (I-3.9) и (I-3.12) се добива:

$$\frac{du_1(t)}{dt} = - \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) u_1(t) + \frac{1}{R_2 C_1} u_2(t) + \frac{1}{R_1 C_1} u_0(t) \quad (\text{I-3.18})$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} u_1(t) - \frac{1}{R_2 C_2} u_2(t) \quad (\text{I-3.19})$$

или, во матричен облик:

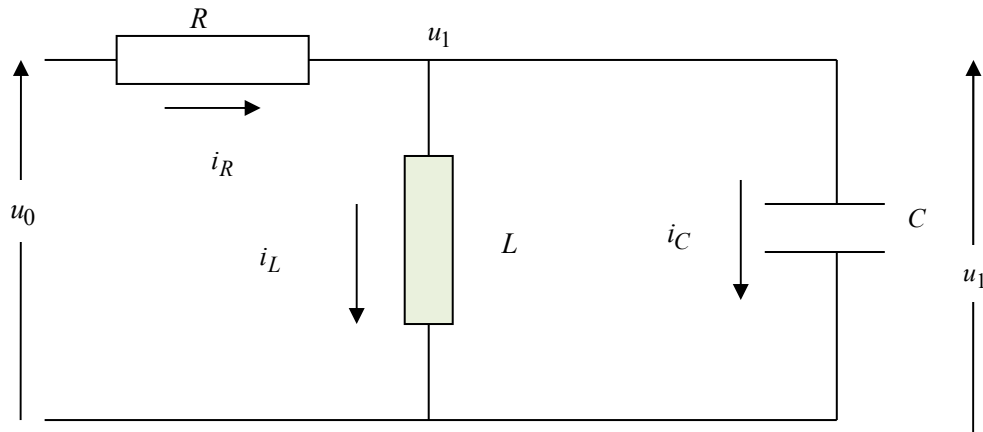
$$\begin{bmatrix} \frac{du_1(t)}{dt} \\ \frac{du_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & - \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u_0(t) \quad (\text{I-3.20})$$

при што почетните услови се дадени со векторот:

$$\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{C1}(0) \\ u_{C2}(0) \end{bmatrix} \quad (\text{I-3.21})$$



**Задача I-3.2.** Да се определи диференцијалната равенка на динамичко поведење на паралелното RLC коло од слика I-3.2 со влез  $u_0(t)$  и излез  $u_1(t)$ , неговата преносна функција  $\frac{U_1(s)}{U_0(s)}$  и соодветниот модел во просторот на состојби, ако за состојбени големини се усвојат струјата  $i_L(t)$  низ индуктивниот елемент  $L$  и напонот  $u_C(t)$  на краевите од кондензаторот  $C$ . Параметрите на колото  $R, L, C$ , под претпоставка, се константни.



Слика I-3.2. Електрично RLC коло од задачата I-3.2

**Решение:** Равенките на одделните елементи во колото од слика I-3.2 се:

$$i_R(t) = \frac{u_0(t) - u_1(t)}{R} \quad (\text{I-3.22})$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_1(\tau) d\tau \quad (\text{I-3.23})$$

$$i_C(t) = C \frac{du_1(t)}{dt} \quad (\text{I-3.24})$$

и со нивно воведување во равенката на струите:

$$i_R(t) = i_L(t) + i_C(t) \quad (\text{I-3.25})$$

се добива:

$$\frac{u_0(t) - u_1(t)}{R} = \frac{1}{L} \int_0^t u_1(\tau) d\tau + C \frac{du_1(t)}{dt} \quad (\text{I-3.26})$$

Бараната диференцијална равенка на динамичко поведење на колото од слика I-3.2, која ја дефинира врската помеѓу неговиот влез и излез, се добива од (I-3.26) со еднократно диференцирање и мало средување:

$$\frac{d^2[u_1(t)]}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{d[u_1(t)]}{dt} + \frac{1}{LC} u_1(t) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{d[u_0(t)]}{dt} \quad (\text{I-3.27})$$

Почетните услови на равенката (I-3.27) се:

$$u_1(0) = u_{10}, \quad u_1'(0) = u_{10}', \quad u_0(0) = u_{00} \quad (\text{I-3.28})$$

Преносната функција на колото од слика I-3.2, за дефинираниот влез и излез, се добива со Лапласова трансформација на равенката (I-3.27):

$$\frac{U_1(s)}{U_0(s)} = \frac{\frac{L}{R} s}{LCs^2 + \frac{L}{R} s + 1} = \frac{T_1 s}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \quad (\text{I-3.29})$$

Од (I-3.23) следува:

$$u_1(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (\text{I-3.30})$$

и тоа е првата диференцијална равенка на векторот на состојби на набљудуваниот систем. Втората се добива со воведување на равенките (I-3.22) и (I-3.24) во (I-3.25):

$$C \frac{d[u_1(t)]}{dt} = i_C(t) = i_R(t) - i_L(t) = \frac{u_0(t) - u_1(t)}{R} - i_L(t) \quad (\text{I-3.31})$$

и нејзино средување:

$$\frac{d[u_1(t)]}{dt} = -\frac{1}{C} i_L(t) - \frac{1}{RC} u_1(t) + \frac{1}{RC} u_0(t) \quad (\text{I-3.32})$$

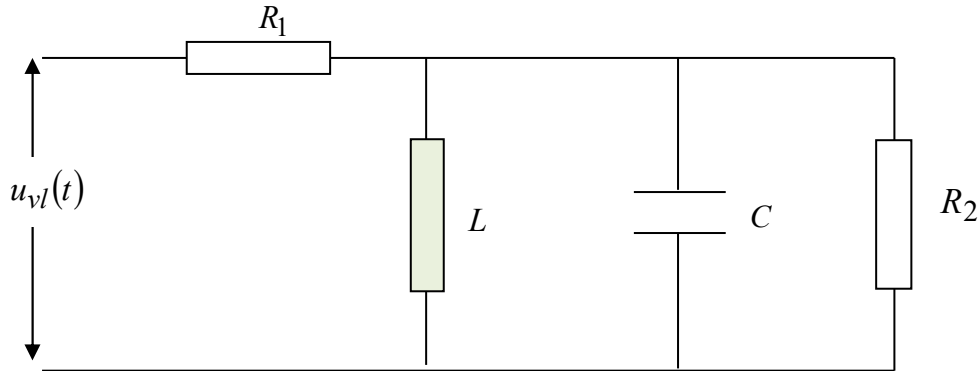
Следствено, бараниот модел на електричното RLC коло од слика I-3.2 во просторот на состојби со дефинираните состојбени големини е:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{du_1(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} u_0(t) \quad (\text{I-3.33})$$

со почетни услови:

$$\begin{bmatrix} i_L(0) \\ u_1(0) \end{bmatrix} \quad (\text{I-3.34})$$

**Задача I-3.3.** Да се состави соодветен модел во просторот на состојби за електричното коло од слика I-3.3. Влез во колото е напонот  $u_{vl}(t)$ , додека за излез да се усвои струјата низ отпорникот  $R_2$ .



Слика I-3.3. Илустрација кон задачата I-3.3

**Решение:** По правило, за состојбени големини кај електричните системи се усвојуваат напоните на краевите од кондензаторите и струите низ индуктивните елементи. Во согласност со ова, ако струјата низ намотката се означи со  $i_L(t)$ , а напонот на краевите од кондензаторот со  $u_c(t)$ , за електричното коло од слика I-3.3 можат да се напишат релациите:

$$\frac{u_{vl}(t) - u_c(t)}{R_1} = i_L(t) + C \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{R_2} \quad (I-3.35)$$

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = u_c(t) \quad (I-3.36)$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{u_{vl}(t) - u_c(t)}{R_1 C} - \frac{1}{C} i_L(t) - \frac{u_c(t)}{R_2 C} \quad (I-3.37)$$

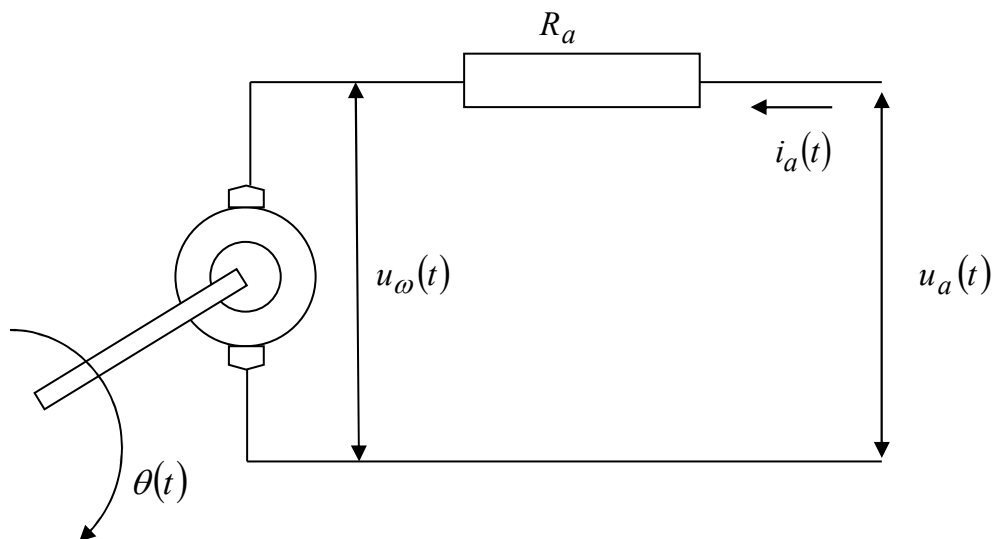
$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_c(t) \quad (I-3.38)$$

$$x(t) = i_{R_2}(t) = \frac{u_c(t)}{R_2} \quad (I-3.39)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{du_c(t)}{dt} \\ \frac{di_L(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} - \frac{1}{R_2 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} u_{vl}(t) \quad (I-3.40)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u_{vl}(t) \quad (\text{I-3.41})$$

**Задача I-3.4.** Да се состави модел во просторот на состојби за еднонасочниот електричен мотор од слика I-3.4. Величините кои се однесуваат на арматурата на моторот се означени со индекс  $a$ , како струјата низ арматурата  $i_a(t)$ , напонот на напојување на арматурата  $u_a(t)$  и нејзината отпорност  $R_a$ , додека со  $\theta(t)$  е означен аголот на завртување на оската од моторот. Во продолжение,  $J$  е моментот на инерција на подвижните делови од моторот,  $\tau(t)$  е вртливиот момент на моторот, кој е пропорционален на струјата на арматурата и  $u_\omega(t)$  е напонот на краевите од моторот, кој е пропорционален со брзината на вртење на моторот. Влез во системот претставува напонот на арматурата  $u_a(t)$ , а излез аголот на завртување на моторот  $\theta(t)$ .



Слика I-3.4. Илустрација кон задачата I-3.4

**Решение:** Од описот на самиот проблем следува:

$$\tau(t) = J\ddot{\theta}(t) = K_1 i_a(t); K_1 = \text{const.} \quad (\text{I-3.42})$$

$$u_\omega(t) = K_2 \dot{\theta}(t); K_2 = \text{const.} \quad (\text{I-3.43})$$

$$i_a(t) = \frac{u_a(t) - u_\omega(t)}{R_a} \quad (\text{I-3.44})$$

Оттука, движењето на моторот е опишано со следната диференцијална равенка:

$$\tau(t) = J\ddot{\theta}(t) = K_1 i_a(t) = K_1 \frac{u_a(t) - u_\omega(t)}{R_a} = K_1 \frac{u_a(t) - K_2 \dot{\theta}(t)}{R_a} \quad (\text{I-3.45})$$

односно равенката:

$$J\ddot{\theta}(t) + \frac{K_1 K_2}{R_a} \dot{\theta}(t) = \frac{K_1}{R_a} u_a(t) \quad (\text{I-3.46})$$

Ако за состојбени големини се одберат:

$$v_1(t) = \theta(t) \quad (\text{I-3.47})$$

$$v_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (\text{I-3.48})$$

ќе се добие следниот модел во просторот на состојби:

$$v_1'(t) = \dot{\theta}(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{K_1 K_2}{J R_a} \dot{\theta}(t) + \frac{K_1}{R_a J} u_a(t) = -\frac{K_1 K_2}{J R_a} v_2(t) + \frac{K_1}{R_a J} u_a(t)$$

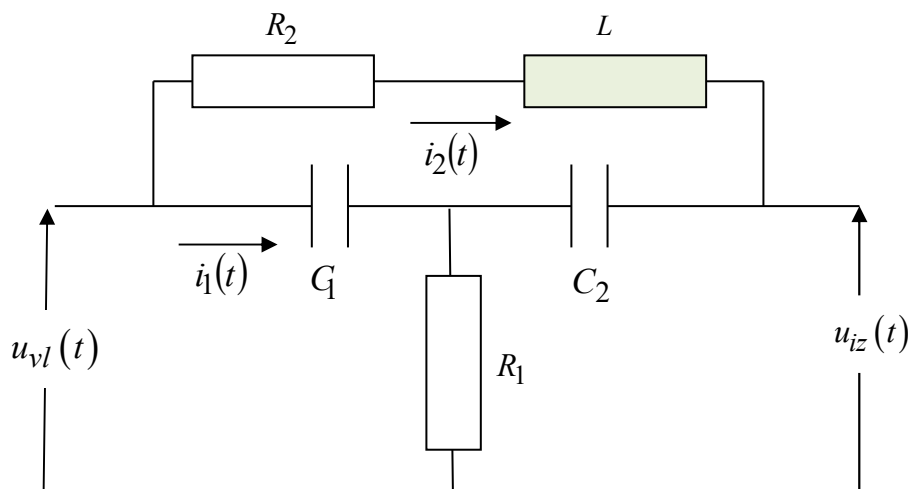
$$x(t) = \theta(t) = v_1(t) \quad (\text{I-3.49})$$

или, во матричен облик:

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K_1 K_2}{J R_a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1}{J R_a} \end{bmatrix} u_a(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + 0 \cdot u_a(t) \quad (\text{I-3.50})$$

**Задача I-3.5.** Да се состави модел во просторот на состојби на електричниот систем од слика I-3.5.



Слика I-3.5. Илустрација кон задачата I-3.5

За состојбени големини да се усвојат напоните на кондензаторите  $u_{C_1}(t)$ ,  $u_{C_2}(t)$  и струјата низ индуктивниот елемент  $i_L(t)$ :

$$v_1(t) = u_{C_1}(t)$$

$$v_2(t) = u_{C_2}(t)$$

$$v_3(t) = i_L(t) \tag{I-3.51}$$

**Решение:** За напоните и струите во колото од сликата I-3.5, важи:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \tag{I-3.52}$$

$$i_1(t) = C_1 \frac{du_{C_1}(t)}{dt} \tag{I-3.53}$$

$$i_2(t) = C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt} \tag{I-3.54}$$

$$u_{C_1}(t) = u_{R_2}(t) + u_L(t) + u_{C_2}(t) \tag{I-3.55}$$

$$u_{v_l}(t) - u_{C_1}(t) - R_1 i(t) = 0 \tag{I-3.56}$$

$$u_{i_z}(t) = u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t) \tag{I-3.57}$$

Со воведување на состојбените големини (I-3.51) во равенките (I-3.52) – (I-3.57) се добива:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = C_1 \frac{du_{C_1}(t)}{dt} + i_2(t) = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + v_3(t) \tag{I-3.58}$$

$$u_{v_l}(t) - u_{C_1}(t) - R_1 i(t) = u_{v_l}(t) - v_1(t) - R_1 \left[ C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + v_3(t) \right] = 0 \tag{I-3.59}$$

$$\frac{du_{C_2}(t)}{dt} = \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} i_2(t) = \frac{1}{C_2} v_3(t) \tag{I-3.60}$$

$$u_{C_1}(t) = v_1(t) = R_2 i_2(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} + u_{C_2}(t) = R_2 v_3(t) + L \frac{dv_3(t)}{dt} + v_2(t) \tag{I-3.61}$$

$$u_{i_z}(t) = u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t) = v_1(t) + v_2(t) \tag{I-3.62}$$

Следствено, еден модел во просторот на состојби на набљудуваното електрично коло е следниот:

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{1}{R_1 C_1} u_{vl}(t) - \frac{1}{R_1 C_1} v_1(t) - \frac{1}{C_1} v_3(t)$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{1}{C_2} v_3(t)$$

$$\frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{1}{L} v_1(t) - \frac{1}{L} v_2(t) - \frac{R_2}{L} v_3(t)$$

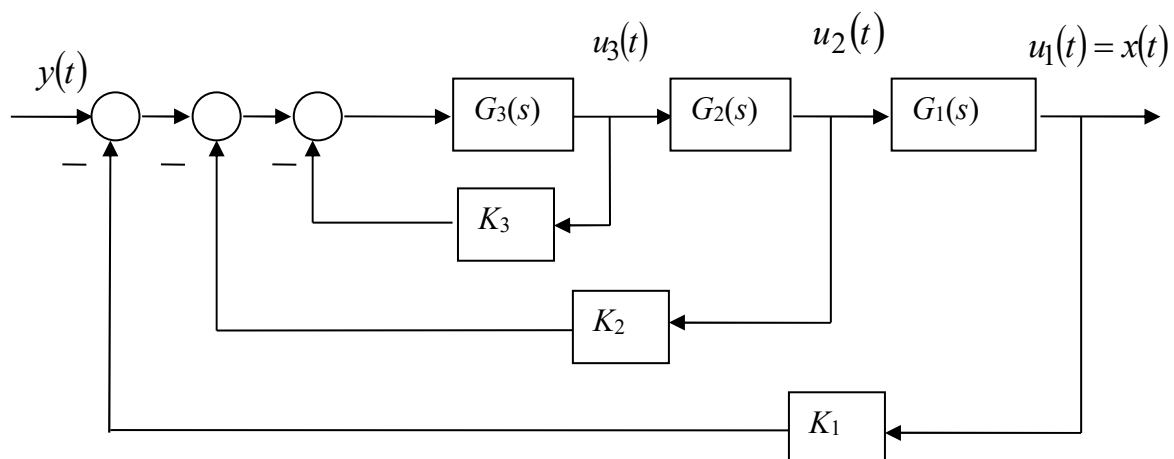
$$u_{iz}(t) = u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (I-3.63)$$

Оттука, бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваното електрично коло во матричен облик ќе биде:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{vl}(t)$$

$$u_{iz}(t) = [1 \quad 1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + u_{vl}(t) \quad (I-3.64)$$

**Задача I-3.6.** Да се состави моделот во просторот на состојби на затворениот систем од слика I-3.6.



Слика I-3.6. Илустрација кон задачата I-3.6

За состојбени големини да се одберат сигналите  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и  $u_3(t)$  и да се усвои:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad (I-3.65)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+2} \quad (I-3.66)$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s+3} \quad (I-3.67)$$

**Решение:** Од структурната блок-шема на слика I-3.6 за усвоените состојбени големини непосредно произлегуваат изразите:

$$U_1(s) = G_1(s)U_2(s) = \frac{1}{s+1}U_2(s) \quad (I-3.68)$$

$$U_2(s) = G_2(s)U_3(s) = \frac{1}{s+2}U_3(s) \quad (I-3.69)$$

$$U_3(s) = G_3(s)E(s) = \frac{1}{s+3}E(s) = \frac{1}{s+3}[Y(s) - K_1U_1(s) - K_2U_2(s) - K_3U_3(s)] \quad (I-3.70)$$

За да се добијат равенките на векторот на состојби на набљудуваниот систем во конечен облик, во равенките (I-3.68) – (I-3.70) најнапред се елиминира именителот на десната страна:

$$(s+1)U_1(s) = U_2(s) \quad (I-3.71)$$

$$(s+2)U_2(s) = U_3(s) \quad (I-3.72)$$

$$(s+3)U_3(s) = Y(s) - K_1U_1(s) - K_2U_2(s) - K_3U_3(s) \quad (I-3.73)$$

а потоа на левата страна од секоја равенка се задржува само првиот член, додека сите останати членови се префрлаат на десната страна од соодветната равенка:

$$sU_1(s) = -U_1(s) + U_2(s) \quad (I-3.74)$$

$$sU_2(s) = -2U_2(s) + U_3(s) \quad (I-3.75)$$

$$sU_3(s) = -K_1U_1(s) - K_2U_2(s) - (K_3 + 3)U_3(s) + Y(s) \quad (I-3.76)$$

Равенките (I-3.74) – (I-3.76) се бараните равенки на векторот на состојби во комплексното подрачје и ним им одговараат следните равенки во просторот на оригиналите:



$$u_1'(t) = -u_1(t) + u_2(t) \quad (\text{I-3.77})$$

$$u_2'(t) = -2u_2(t) + u_3(t) \quad (\text{I-3.78})$$

$$u_3'(t) = -K_1 u_1(t) - K_2 u_2(t) - (K_3 + 3)u_3(t) + y(t) \quad (\text{I-3.79})$$

Кога диференцијалните равенки на векторот на состојби (I-3.77) – (I-3.79) ќе се дополнат со равенката на излезот:

$$x(t) = u_1(t) \quad (\text{I-3.80})$$

ќе се добие бараниот модел во просторот на состојби на системот од слика I-3.6 во конечен облик. Моделот (I-3.77) – (I-3.80) може да се запише и во матричен облик:

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K_1 & -K_2 & -(K_3 + 3) \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) \quad (\text{I-3.81})$$

$$x(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{u}(t) \quad (\text{I-3.82})$$

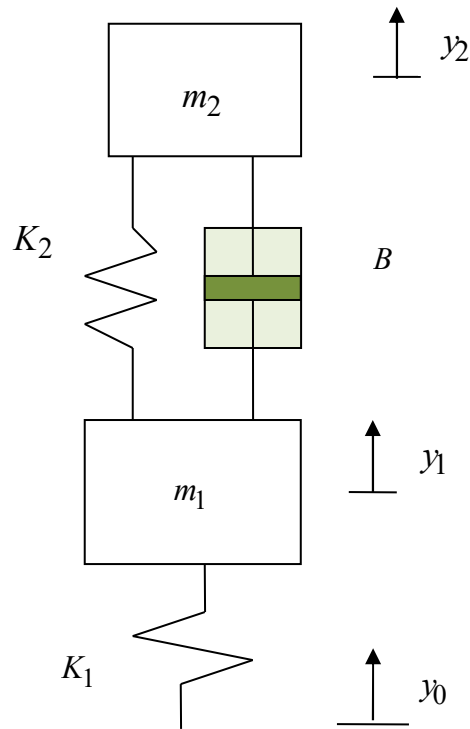
кој е определен со елементите:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -K_1 & -K_2 & -(K_3 + 3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [1 \ 0 \ 0] \quad (\text{I-3.83})$$

**Задача I-3.7.** На слика I-3.7 е прикажан упростен систем за амортизација на вертикалното движење кај едно возило (набљудувано е само едно тркало) [4]. Крутоста на тркалото е моделирана со линеарна пружина со коефициент  $K_1$ , самото тркало, оската на која е поставено и останатите подвижни делови поврзани со тркалото се моделирани со масата  $m_1$ , самиот систем за амортизација е моделиран со придушувач  $B$  и пружина  $K_2$ , додека каросеријата од возилото и останатите делови над тркалото се моделирани со масата  $m_2$ . Неравнините на патот, кои дејствуваат како пречки, се претставени со  $y_0$ . Да се состави математички модел на движењето на овој систем во просторот на состојби, ако со  $y_1$  и  $y_2$  е означено движењето на масите  $m_1$  и  $m_2$ , соодветно.



Слика I-3.7. Илустрација кон задачата I-3.7

**Решение:** Одделните компоненти на системот и силите што дејствуваат врз нив се прикажани на слика I-3.8. Врз основа на Њутновиот закон за силите, за масите  $m_1$  и  $m_2$  можат да се напишат следните равенки:

$$K_1[y_1(t) - y_0(t)] + m_1\ddot{y}_1(t) = B[\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] + K_2[y_2(t) - y_1(t)] \Rightarrow$$

$$K_1[y_1(t) - y_0(t)] + m_1\ddot{y}_1 + B[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)] + K_2[y_1(t) - y_2(t)] = 0 \quad (I-3.84)$$

$$m_2\ddot{y}_2(t) + B[\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] + K_2[y_2(t) - y_1(t)] = 0 \quad (I-3.85)$$

Оттука, бараниот модел на набљудуваниот механички систем ќе биде:

$$m_1\ddot{y}_1 + B[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)] + K_1[y_1(t) - y_0(t)] + K_2[y_1(t) - y_2(t)] = 0 \quad (I-3.86)$$

$$m_2\ddot{y}_2(t) + B[\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)] + K_2[y_2(t) - y_1(t)] = 0 \quad (I-3.87)$$

Со воведување на состојбените големини:

$$v_1(t) = y_1(t) \quad (I-3.88)$$

$$v_2(t) = \dot{y}_1(t) \quad (I-3.89)$$

$$v_3(t) = y_2(t) \quad (I-3.90)$$

$$v_4(t) = \dot{y}_2(t) \quad (I-3.91)$$

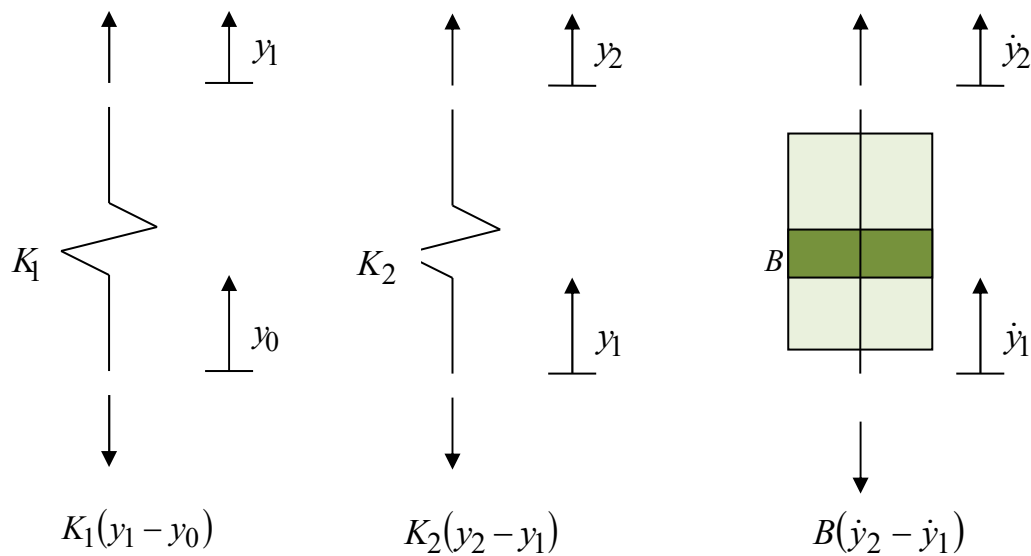
се добива следниот модел во просторот на состојби:

$$\dot{v}_1(t) = v_2(t) \quad (I-3.92)$$

$$\dot{v}_2(t) = -\frac{B}{m_1}[v_2(t) - v_4(t)] - \frac{K_1}{m_1}[v_1(t) - y_0(t)] - \frac{K_2}{m_1}[v_1(t) - v_3(t)] \quad (I-3.93)$$

$$\dot{v}_3(t) = v_4(t) \quad (I-3.94)$$

$$\dot{v}_4(t) = -\frac{B}{m_2}[v_4(t) - v_2(t)] - \frac{K_2}{m_2}[v_3(t) - v_1(t)] \quad (I-3.95)$$



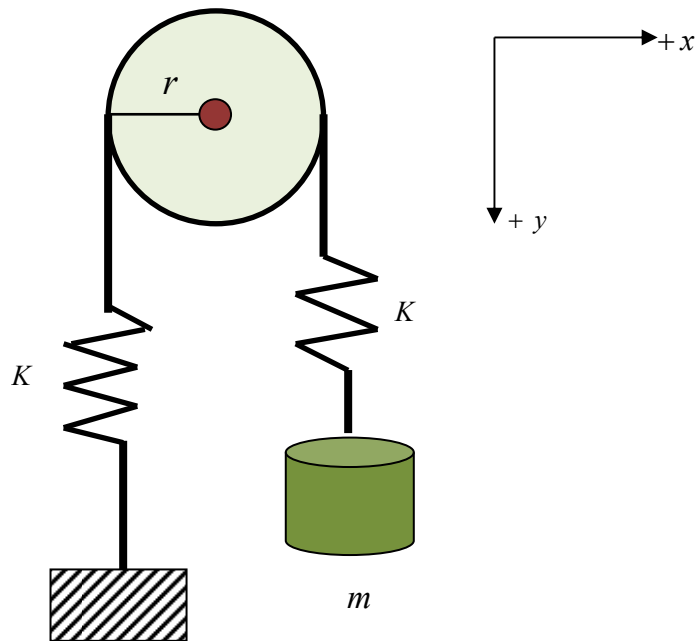
Слика I-3.8. Приказ на одделните компоненти на системот и силите врз нив

или, во матричен облик:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1 + K_2}{m_1} & -\frac{B}{m_1} & \frac{K_2}{m_1} & \frac{B}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_2}{m_2} & \frac{B}{m_2} & -\frac{K_2}{m_2} & -\frac{B}{m_2} \end{bmatrix}$$

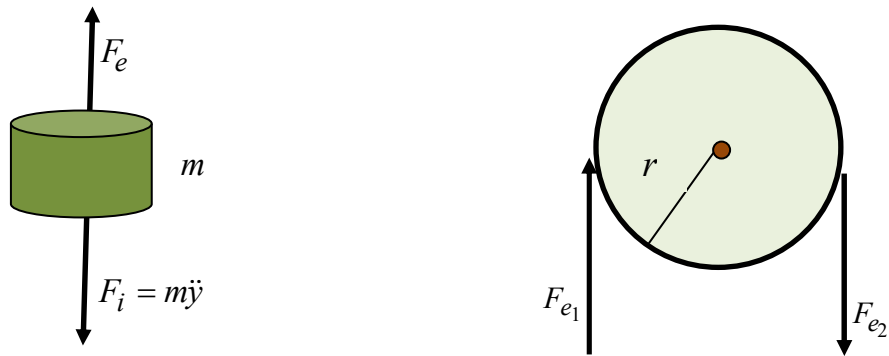
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \\ m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [1 \ 0 \ 1 \ 0], d = 0 \quad (\text{I-3.96})$$

**Задача I-3.8.** Да се состави математички модел во просторот на состојби на движењето на механичкиот систем од слика I-3.9. Системот се состои од диск со момент на инерција  $I$ , кој ротира во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Преку пружина со коефициент на крутост  $K$ , на дискот е закачен тег со маса  $m$ , чие линеарно движење е во насока на позитивната  $y$  – оска. Движењето на тегот се одредува во однос на рамнотежната состојба.



Слика I-3.9. Илустрација кон задача I-3.8

**Решение:** Од сликата I-3.9 се гледа дека системот има два степени слобода на движење – едниот степен е претставен со ротационото движење на дискот, а другиот со линеарното движење на тегот. Нека, по договор, движењето на дискот е опишано со аголот на ротација  $\theta$ , додека движењето на тегот е опишано со поместувањето  $y$ . Тогаш соодветните брзини на движење ќе бидат  $\dot{\theta}$  и  $\dot{y}$ . Аналогно, агловето забрзување на дискот ќе биде  $\ddot{\theta}$ , додека забрзувањето на тегот е претставено со  $\ddot{y}$ . На слика I-3.10 се прикажани дијаграмите на силите што дејствуваат врз тегот и дискот одделно.



Слика I-3.10. Дијаграм на силите што дејствуваат врз одделните компоненти на моделираниот механички систем од слика I-3.9

Врз тегот дејствуваат две сили – отпорната сила на пружината  $F_e$  и инерцијата на тегот  $F_i$ , во прикажаните насоки. Силата на Земјината тежа не е прикажана на сликата I-3.10 затоа што, под претпоставка, системот првобитно се наоѓа во рамнотежна состојба на мирување, кога тежината на тегот е урамнотежена со соодветната отпорна сила на пружината.

Врз основа на вториот Њутнов закон, според кој сумата на сите сили што дејствуваат врз едно тело мора да биде еднаква со производот од неговата маса и забрзување, за тегот се добива моделот:

$$F_i(t) + F_e(t) = m\ddot{y}(t) + F_e(t) = 0 \quad (\text{I-3.97})$$

Издолжувањето на пружината на тегот, кое е предизвикано од ротацијата на дискот, е пропорционално со аголот на ротација  $\theta$  и радиусот на дискот  $r$ . Бидејќи дискот, под претпоставка ротира во насока спротивна од насоката на движење на стрелките од часовникот, ова издолжување на пружината на која е закачен тегот е во насока на негативната  $y$ -оска. Од друга страна, под претпоставка, тегот се движи во насока на позитивната  $y$ -оска, па вкупното издолжување на пружината ќе биде  $r\theta + y$ . Оттука, за отпорната сила на пружината се добива:

$$F_e(t) = K[r\theta(t) + y(t)] \quad (\text{I-3.98})$$

со што равенката (I-3.97) го добива дефинитивниот облик:

$$m\ddot{y}(t) + Ky(t) + Kr\theta(t) = 0 \quad (\text{I-3.99})$$

Збирот од сите вртливи моменти кои дејствуваат врз дискот, одредени во однос на неговото тежиште, мора да биде еднаков со производот од неговиот момент на инерција и аглоовото забрзување. Следствено, за движењето на дискот се добива следната равенка:

$$rF_{e_1}(t) + rF_{e_2}(t) + I\ddot{\theta}(t) = 0 \quad (\text{I-3.100})$$

Имајќи на ум дека:

$$F_{e_1}(t) = Kr\theta(t) \quad (\text{I-3.101})$$

$$F_{e_2}(t) = K[r\theta(t) + y(t)] \quad (\text{I-3.102})$$

равенката (I-3.100) може да се доведе на облик:

$$I\ddot{\theta}(t) + 2Kr^2\theta(t) + Kry(t) = 0 \quad (\text{I-3.103})$$

и заедно со равенката (I-3.99) таа го претставува моделот на набљудуваниот механички систем:

$$m\ddot{y}(t) + Ky(t) + Kr\theta(t) = 0 \quad (\text{I-3.104})$$

$$I\ddot{\theta}(t) + 2Kr^2\theta(t) + Kry(t) = 0 \quad (\text{I-3.105})$$

Состојбените големини на набљудуваниот систем можат да се дефинираат на следниот начин:

$$v_1(t) = y(t) \quad (\text{I-3.106})$$

$$v_2(t) = \dot{y}(t) \quad (\text{I-3.107})$$

$$v_3(t) = \theta(t) \quad (\text{I-3.108})$$

$$v_4(t) = \dot{\theta}(t) \quad (\text{I-3.109})$$

Оттука, и од (I-3.104) – (I-3.105) за диференцијалните равенки на векторот на состојба се добива:

$$\dot{v}_1(t) = \dot{y}(t) = v_2(t) \quad (\text{I-3.110})$$

$$\dot{v}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{1}{m}[Kv_1(t) + Kr v_3(t)] \quad (\text{I-3.111})$$

$$\dot{v}_3(t) = \dot{\theta}(t) = v_4(t) \quad (\text{I-3.112})$$

$$\dot{v}_4(t) = -\frac{1}{I}[2Kr^2\theta(t) + Kry(t)] = -\frac{1}{I}[2Kr^2 v_3(t) + Kr v_1(t)] \quad (\text{I-3.113})$$

Следствено, бараниот модел во просторот на состојби на механичкиот систем од слика I-3.9 во матричен облик ќе биде:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \\ \dot{v}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{m} & 0 & -\frac{Kr}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{Kr}{I} & 0 & -\frac{2Kr^2}{I} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I-3.114})$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} \quad (\text{I-3.115})$$

**Задача I-3.9.** Со помош на моделот со разгранет влез, да се опише во просторот на состојби континуалниот систем со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$  со преносна функција:

$$G(s) = \frac{2s^4 + 30s^3 + 86s^2 + 120s + 98}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24} \quad (\text{I-3.116})$$

**Решение:** Преносната функција (I-3.116) има четири прости реални полови во точките  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -2$ ,  $s_3 = -3$ ,  $s_4 = -1$  и може да се претстави на следниот начин:

$$G(s) = \frac{2s^4 + 30s^3 + 86s^2 + 120s + 98}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = 2 + \frac{10s^3 + 16s^2 + 20s + 50}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = 2 + \tilde{G}(s) \quad (\text{I-3.117})$$

Дробнорационалната функција  $\tilde{G}(s)$  ги има истите полови како и оригиналната преносна функција  $G(s)$  и нејзиниот развој во парцијални друпки е:

$$\tilde{G}(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{3}{s+2} - \frac{68}{s+3} + \frac{69}{s+4} \quad (\text{I-3.118})$$

Оттука, за  $L$ -сликата  $X(s)$  на моделираниот континуален систем се добива:

$$\begin{aligned} X(s) &= G(s)Y(s) = \left[ 2 + \tilde{G}(s) \right] Y(s) = \left( 2 + \frac{6}{s+1} + \frac{3}{s+2} - \frac{68}{s+3} + \frac{69}{s+4} \right) Y(s) = \\ &= 2Y(s) + \frac{6}{s+1} Y(s) + \frac{3}{s+2} Y(s) - \frac{68}{s+3} Y(s) + \frac{69}{s+4} Y(s) \end{aligned} \quad (\text{I-3.119})$$

За опис на овој систем во просторот на состојби потребни се најмалку четири состојбени големини -  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $v_3(t)$  и  $v_4(t)$ , бидејќи системот е од четврти ред. Овие состојбени големини се одбираат така што за нивните  $L$ -слики да важи:

$$V_1(s) = \frac{1}{s+1} Y(s)$$

$$V_2(s) = \frac{1}{s+2} Y(s)$$

$$V_3(s) = \frac{1}{s+3} Y(s)$$

$$V_4(s) = \frac{1}{s+4} Y(s) \tag{I-3.120}$$

па, со воведување на смените (I-3.120) во (I-3.119), за излезот  $X(s)$  се добива:

$$X(s) = 2Y(s) + 6V_1(s) + 3V_2(s) - 68V_3(s) + 69V_4(s) \tag{I-3.121}$$

Равенките (I-3.120) - (I-3.121) го претставуваат бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот континуален систем:

$$sV_1(s) = -V_1(s) + Y(s)$$

$$sV_2(s) = -2V_2(s) + Y(s)$$

$$sV_3(s) = -3V_3(s) + Y(s)$$

$$sV_4(s) = -4V_4(s) + Y(s) \tag{I-3.122}$$

$$X(s) = 2Y(s) + 6V_1(s) + 3V_2(s) - 68V_3(s) + 69V_4(s) \tag{I-3.123}$$

кој во просторот на оригиналите гласи:

$$\dot{v}_1(t) = -v_1(t) + y(t)$$

$$\dot{v}_2(t) = -2v_2(t) + y(t)$$

$$\dot{v}_3(t) = -3v_3(t) + y(t)$$

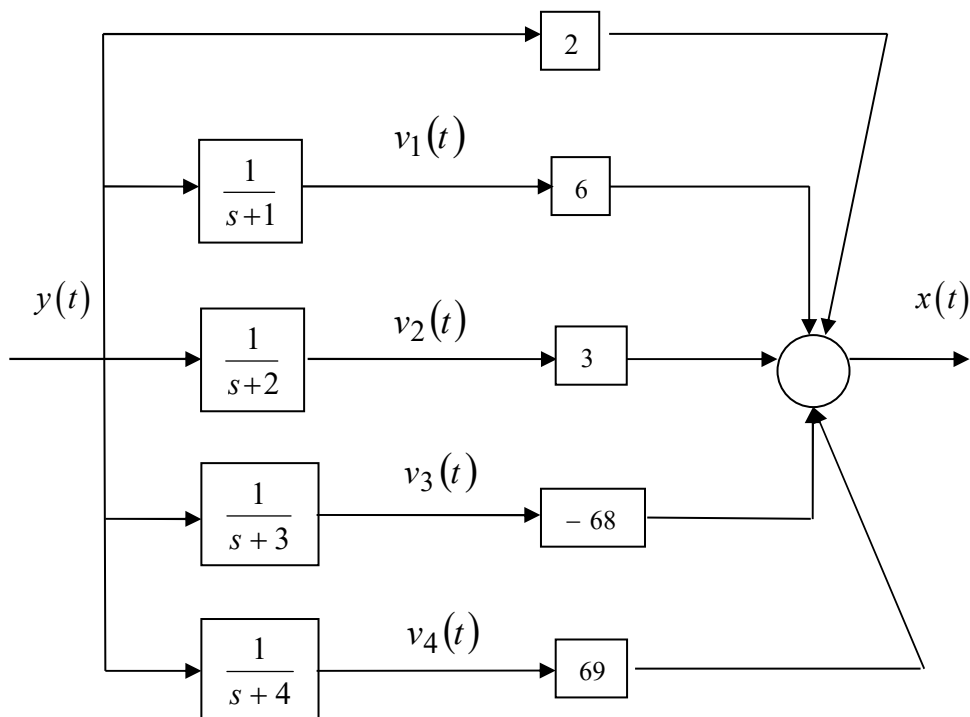
$$\dot{v}_4(t) = -4v_4(t) + y(t) \tag{I-3.124}$$



$$x(t) = 6v_1(t) + 3v_2(t) - 68v_3(t) + 69v_4(t) + 2y(t) \quad (\text{I-3.125})$$

Соодветната структурна блок-шема е прикажана на слика I-3.11. Елементите на моделот (I-3.124) – (I-3.125) се:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [6 \quad 3 \quad -68 \quad 69], d = 2 \quad (\text{I-3.126})$$



Слика I-3.11. Структурна блок-шема на континуалниот систем од задачата I-3.9

**Задача I-3.10.** Со помош на методот на постепено снижување на редот на изводот, да се опише во просторот на состојби континуалниот систем од задачата I-3.9.

**Решение:** При оваа постапка, состојбените големини на набљудуваниот систем се одбираат преку помошната променлива  $w(t)$  и нејзините изводи:

$$v_1(t) = w(t)$$

$$v_2(t) = w'(t)$$

$$v_3(t) = w''(t)$$

$$v_4(t) = w'''(t) \quad (\text{I-3.127})$$

а самата променлива  $w(t)$  се одбира така што за нејзината  $L$ -слика  $W(s)$  да важи:

$$W(s) = \frac{1}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24} Y(s) \quad (\text{I-3.128})$$

Од изразот (I-3.128) непосредно следува:

$$w^{iv}(t) = -24w(t) - 50w'(t) - 35w''(t) - 10w'''(t) + y(t) \quad (\text{I-3.129})$$

Диференцијалните равенки на векторот на состојби се добиваат од (I-3.127) со нивно еднократно диференцирање:

$$v_1'(t) = w'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = w''(t) = v_3(t)$$

$$v_3'(t) = w'''(t) = v_4(t)$$

$$\begin{aligned} v_4'(t) &= w^{iv}(t) = -24w(t) - 50w'(t) - 35w''(t) - 10w'''(t) + y(t) = \\ &= -24v_1(t) - 50v_2(t) - 35v_3(t) - 10v_4(t) + y(t) \end{aligned} \quad (\text{I-3.130})$$

Имајќи ја на ум смената (I-3.128), равенката на излезот на набљудуваниот систем во комплексното подрачје може да се запише на следниот начин:

$$X(s) = 2Y(s) + (10s^3 + 16s^2 + 20s + 50)W(s) \quad (\text{I-3.131})$$

па, во просторот на оригиналите таа ќе гласи:

$$\begin{aligned} x(t) &= 50w(t) + 20w'(t) + 16w''(t) + 10w'''(t) + 2y(t) = \\ &= 50v_1(t) + 20v_2(t) + 16v_3(t) + 10v_4(t) + 2y(t) \end{aligned} \quad (\text{I-3.132})$$

Бараниот модел на набљудуваниот систем во просторот на оригиналите може да се запише и во матричен облик:

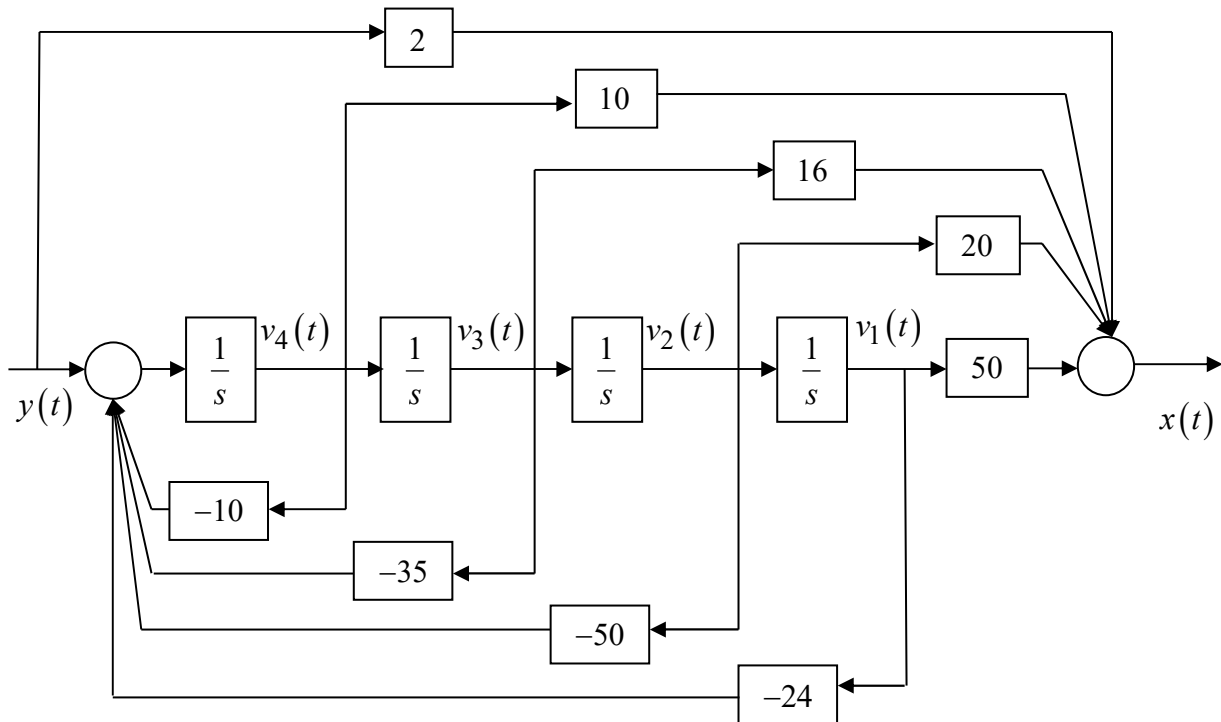
$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} y(t) \quad (\text{I-3.133})$$

$$x(t) = [50 \quad 20 \quad 16 \quad 10] \mathbf{v}(t) + 2y(t) \quad (\text{I-3.134})$$

чии елементи се:

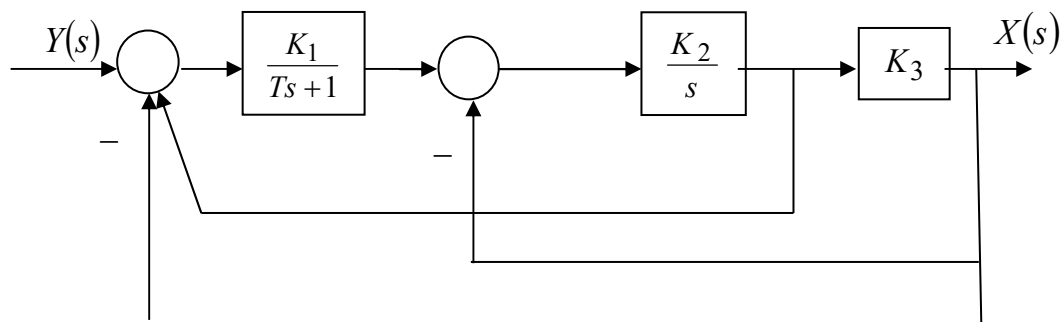
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -25 & -10 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [50 \quad 20 \quad 16 \quad 10], d = 2 \quad (\text{I-3.135})$$

Структурната блок-шема, која одговара на моделот (I-3.133) – (I-3.134) е прикажана на слика I-3.12.



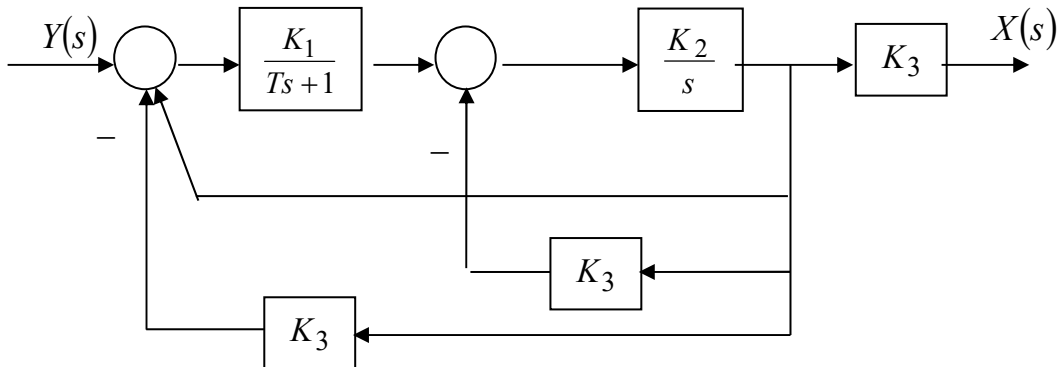
Слика I-3.12. Структурна блок-шема на моделот (I=3.133) – (I-3.134)

**Задача I-3.11.** Со помош на постапката на постепено снижување на редот на изводот да се состави модел во просторот на состојби при нулеви почетни услови на системот прикажан на слика I-3.13.

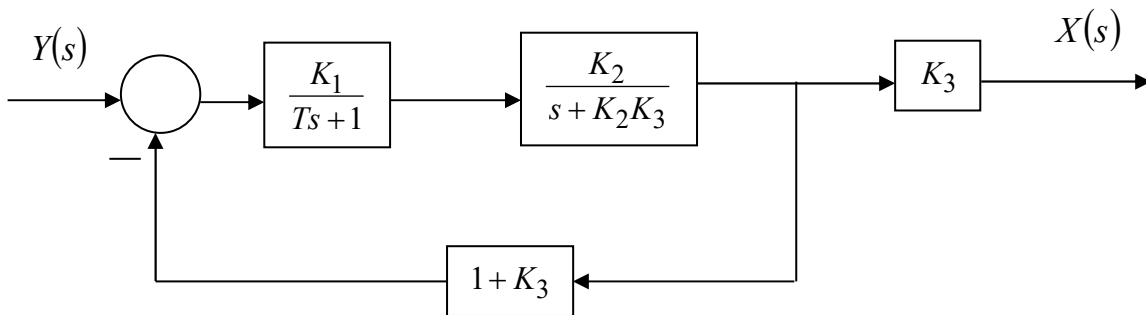


Слика I-3.13. Илустрација кон задачата I-3.11

**Решение:** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите, шемата од слика I-3.13 се трансформира во шемите од слика I-3.14 и слика I-3.15.



Слика I-3.14. Трансформација на шемата од слика I-3.13



Слика I-3.15. Еквивалентна блок-шема на шемата од слика I-3.14

па, преносната функција на набљудуваниот затворен систем ќе биде:

$$G(s) = \frac{\frac{K_1}{Ts+1} \cdot \frac{K_2}{s+K_2K_3}}{1 + \frac{K_1}{Ts+1} \cdot \frac{K_2}{s+K_2K_3} \cdot (1+K_3)} \cdot K_3 = \frac{K_1K_2K_3}{(Ts+1)(s+K_2K_3) + K_1K_2(1+K_3)} =$$

$$= \frac{K_1K_2K_3}{Ts^2 + (1+TK_2K_3)s + K_2(K_1+K_3+K_1K_3)} \quad (I-3.136)$$

Со воведување на помошната променлива  $w(t)$ :

$$W(s) = \frac{1}{Ts^2 + (1+TK_2K_3)s + K_2(K_1+K_3+K_1K_3)} Y(s) \quad (I-3.137)$$

се добиваат следните две равенки во просторот на  $L$  – сликите:

$$X(s) = K_1 K_2 K_3 W(s)$$

$$\left[ Ts^2 + (1 + TK_2 K_3)s + K_2(K_1 + K_3 + K_1 K_3) \right] W(s) = Y(s) \quad (\text{I-3.138})$$

кои во просторот на оригиналите гласат:

$$T w''(t) + (1 + TK_2 K_3) w'(t) + K_2(K_1 + K_3 + K_1 K_3) w(t) = y(t)$$

$$x(t) = K_1 K_2 K_3 w(t) \quad (\text{I-3.139})$$

Состојбените големини на моделираниот систем се избираат на следниот начин:

$$v_1(t) = w(t)$$

$$v_2(t) = w'(t) \quad (\text{I-3.140})$$

па, за бараниот модел се добива:

$$v_1'(t) = w'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = w''(t) = \frac{1}{T} [y(t) - K_2(K_1 + K_3 + K_1 K_3) w(t) - (1 + TK_2 K_3) w'(t)] =$$

$$= \frac{1}{T} [y(t) - K_2(K_1 + K_3 + K_1 K_3) v_1(t) - (1 + TK_2 K_3) v_2(t)]$$

$$x(t) = K_1 K_2 K_3 v_1(t) \quad (\text{I-3.141})$$

Елементите на овој модел се:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_2(K_1 + K_3 + K_1 K_3) & -(1 + TK_2 K_3) \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [1 \quad 0], d = 0 \quad (\text{I-3.142})$$

**Задача I-3.12.** Со помош на методот разгранет влез и излез, да се состави модел во просторот на состојби на континуалниот динамички систем од трет ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , чија надворешна динамика е опишана со преносната функција:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 5s^2 + 6s + 3} \quad (\text{I-3.143})$$

**Решение:** Со преуредување на изразот (I-3.143):

$$(s^3 + 5s^2 + 6s + 3)X(s) = (s^3 + 2s^2 + 3s + 4)Y(s)$$

$$\begin{aligned}
 s^3 X(s) &= (s^3 + 2s^2 + 3s + 4)Y(s) - (s^3 + 5s^2 + 6s + 3)X(s) = \\
 &= s^3 Y(s) + s^2 [2Y(s) - 5X(s)] + s [3Y(s) - 6X(s)] + [4Y(s) - 3X(s)] \\
 X(s) &= Y(s) + s^{-1} [2Y(s) - 5X(s)] + s^{-2} [3Y(s) - 6X(s)] + s^{-3} [4Y(s) - 3X(s)] = \\
 &= Y(s) + s^{-1} \left\{ [2Y(s) - 5X(s)] + s^{-1} \left\{ [3Y(s) - 6X(s)] + s^{-1} [4Y(s) - 3X(s)] \right\} \right\} \quad (\text{I-3.144})
 \end{aligned}$$

се добива изразот (I-3.144), од каде се гледа како можат да се дефинираат состојбените големина на моделираниот систем:

$$\begin{aligned}
 V_1(s) &= s^{-1} [4Y(s) - 3X(s)] \\
 V_2(s) &= s^{-1} \{ [3Y(s) - 6X(s)] + V_1(s) \} \\
 V_3(s) &= s^{-1} \{ [2Y(s) - 5X(s)] + V_2(s) \} \quad (\text{I-3.145})
 \end{aligned}$$

Равенките (I-3.145) се равенки на векторот на состојба во комплексното подрачје:

$$\begin{aligned}
 sV_1(s) &= 4Y(s) - 3X(s) \\
 sV_2(s) &= [3Y(s) - 6X(s)] + V_1(s) \\
 sV_3(s) &= [2Y(s) - 5X(s)] + V_2(s) \quad (\text{I-3.146})
 \end{aligned}$$

кои заедно со равенката на излезот:

$$X(s) = V_3(s) + Y(s) \quad (\text{I-3.147})$$

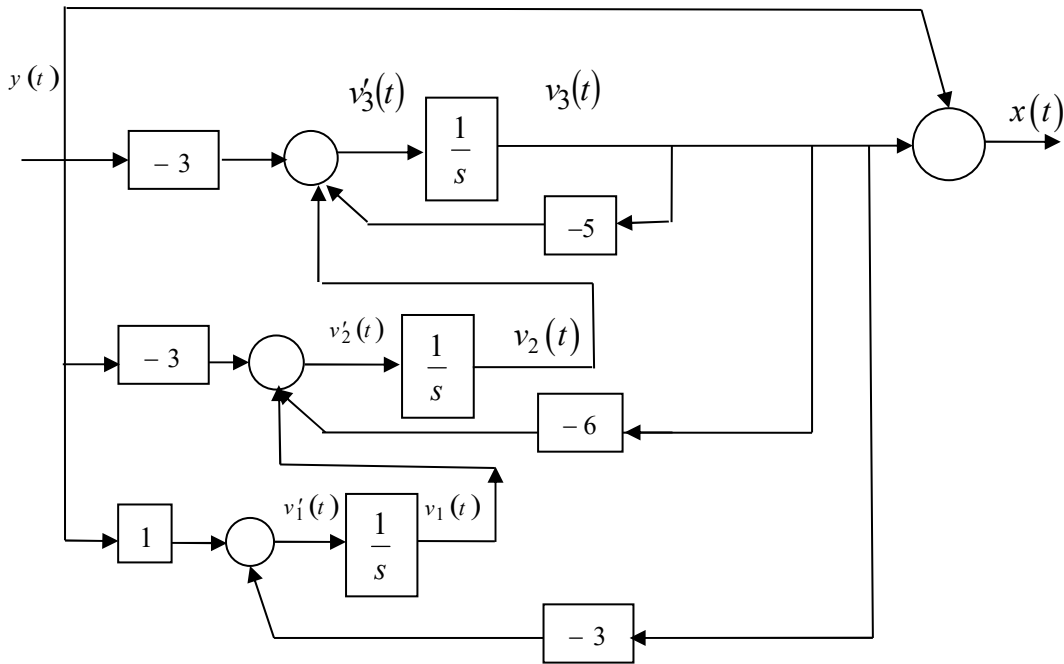
го прават бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот динамички систем, претставен во просторот на  $L$  – сликите. Во просторот на оригиналите тој модел има облик:

$$\begin{aligned}
 v_1'(t) &= 4y(t) - 3x(t) \\
 v_2'(t) &= [3y(t) - 6x(t)] + v_1(t) \\
 v_3'(t) &= [2y(t) - 5x(t)] + v_2(t) \\
 x(t) &= v_3(t) + y(t) \quad (\text{I-3.148})
 \end{aligned}$$

ОДНОСНО:

$$\begin{aligned}
 v_1'(t) &= -3v_3(t) + y(t) \\
 v_2'(t) &= v_1(t) - 6v_3(t) - 3y(t) \\
 v_3'(t) &= v_2(t) - 5v_3(t) - 3y(t) \\
 x(t) &= v_3(t) + y(t)
 \end{aligned}
 \tag{I-3.149}$$

и него му одговара блок-шешата од слика I-3.16.



Слика I-3.16. Структурна блок-шема на моделот (I-3.149)

Елементите на матричниот запис на моделот (I-3.149) се:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [0 \ 0 \ 1], d = 1
 \tag{I-3.150}$$

**Задача I-3.13.** Со помош на постапката разгранет влез и излез да се состави модел во просторот на состојби за дадениот повеќевеличински систем и да се дефинираат неговите елементи **A**, **B**, **C** и **D**:

$$\ddot{x}_1(t) + 3\dot{x}_1(t) + 2\dot{x}_2(t) + 2x_1(t) + x_2(t) = \dot{y}_1(t) + y_1(t)
 \tag{I-3.151}$$

$$\ddot{x}_2(t) + \dot{x}_1(t) + 5\dot{x}_2(t) + 2x_1(t) + 4x_2(t) = y_1(t)
 \tag{I-3.152}$$

**Решение:** Од првата равенка се добива:

$$\begin{aligned}
 s^2 X_1(s) + 3sX_1(s) + 2sX_2(s) + 2X_1(s) + X_2(s) &= sY_1(s) + Y_1(s) \\
 s^2 X_1(s) &= sY_1(s) + Y_1(s) - 3sX_1(s) - 2sX_2(s) - 2X_1(s) - X_2(s) \\
 s^2 X_1(s) &= s[Y_1(s) - 3X_1(s) - 2X_2(s)] + [Y_1(s) - 2X_1(s) - X_2(s)] \\
 X_1(s) &= \frac{1}{s} [Y_1(s) - 3X_1(s) - 2X_2(s)] + \frac{1}{s^2} [Y_1(s) - 2X_1(s) - X_2(s)] \\
 X_1(s) &= \frac{1}{s} \left\{ [Y_1(s) - 3X_1(s) - 2X_2(s)] + \frac{1}{s} [Y_1(s) - 2X_1(s) - X_2(s)] \right\} \tag{I-3.153}
 \end{aligned}$$

Нека:

$$\begin{aligned}
 V_2(s) &= \frac{1}{s} [Y_1(s) - 2X_1(s) - X_2(s)] \\
 V_1(s) &= \frac{1}{s} \{ [Y_1(s) - 3X_1(s) - 2X_2(s)] + V_2(s) \} \tag{I-3.154}
 \end{aligned}$$

Тогаш:

$$\begin{aligned}
 sV_1(s) &= Y_1(s) - 3X_1(s) - 2X_2(s) + V_2(s) \\
 sV_2(s) &= Y_1(s) - 2X_1(s) - X_2(s) \\
 X_1(s) &= V_1(s) \tag{I-3.155}
 \end{aligned}$$

Аналогно, од втората равенка следува:

$$\begin{aligned}
 s^2 X_2(s) + sX_1(s) + 5sX_2(s) + 2X_1(s) + 4X_2(s) &= Y_1(s) \\
 s^2 X_2(s) &= Y_1(s) - sX_1(s) - 5sX_2(s) - 2X_1(s) - 4X_2(s) \\
 s^2 X_2(s) &= s[-X_1(s) - 5X_2(s)] + [Y_1(s) - 2X_1(s) - 4X_2(s)] \\
 X_2(s) &= \frac{1}{s} [-X_1(s) - 5X_2(s)] + \frac{1}{s^2} [Y_1(s) - 2X_1(s) - 4X_2(s)] \\
 X_2(s) &= \frac{1}{s} \left\{ [-X_1(s) - 5X_2(s)] + \frac{1}{s} [Y_1(s) - 2X_1(s) - 4X_2(s)] \right\} \tag{I-3.156}
 \end{aligned}$$

Нека:

$$\begin{aligned}
 V_4(s) &= \frac{1}{s} [Y_1(s) - 2X_1(s) - 4X_2(s)] \\
 V_3(s) &= \frac{1}{s} \{ [-X_1(s) - 5X_2(s)] + V_4(s) \} \tag{I-3.157}
 \end{aligned}$$

Тогаш:



$$sV_3(s) = -X_1(s) - 5X_2(s) + V_4(s)$$

$$sV_4(s) = Y_1(s) - 2X_1(s) - 4X_2(s)$$

$$X_2(s) = V_3(s) \tag{I-3.158}$$

Бараниот модел прикажан во комплексното подрачје е:

$$sV_1(s) = Y_1(s) - 3X_1(s) - 2X_2(s) + V_2(s)$$

$$sV_2(s) = Y_1(s) - 2X_1(s) - X_2(s)$$

$$sV_3(s) = -X_1(s) - 5X_2(s) + V_4(s)$$

$$sV_4(s) = Y_1(s) - 2X_1(s) - 4X_2(s)$$

$$X_1(s) = V_1(s)$$

$$X_2(s) = V_3(s) \tag{I-3.159}$$

додека во временското подрачје тој има облик:

$$v_1'(t) = -3v_1(t) + v_2(t) - 2v_3(t) + y_1(t)$$

$$v_2'(t) = -2v_1(t) - v_3(t) + y_1(t)$$

$$v_3'(t) = -v_1(t) - 5v_3(t) + v_4(t)$$

$$v_4'(t) = -2v_1(t) - 4v_3(t) + y_1(t)$$

$$x_1(t) = v_1(t)$$

$$x_2(t) = v_3(t) \tag{I-3.160}$$

Во матричен облик истиот ќе гласи:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_1(t)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{t}) + \mathbf{0} \cdot y(t) \tag{I-3.161}$$

**Задача I-3.14.** Дали дадените модели во просторот на состојби се еквивалентни:

$$(a) \quad \mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) \quad (б) \quad \mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$x(t) = [1 \quad 0] \mathbf{v}(t) \quad x(t) = [1 \quad -1] \mathbf{v}(t)$$

**Решение:** Одговорот е потврден. Тие имаат исти модели во просторот на оригиналите.

(a)

$$v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = -2v_1(t) - 3v_2(t) + y(t)$$

$$x(t) = v_1(t)$$

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = y(t) \quad (I-3.162)$$

(б)

$$v_1'(t) = -v_1(t) + y(t)$$

$$v_2'(t) = -2v_2(t) + y(t)$$

$$x(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = y(t) \quad (I-3.163)$$

#### I-4. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА ЛИНЕАРНИ ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

**Задача I-4.1.** Да се состави математички модел на еден нумерички интегратор со произволен влез  $y(t)$ .

**Решение:** Од математиката е познато дека определениот интеграл на една функција  $y(t)$  на произволен интервал  $(a, b)$  од нејзината област на дефинираност е еднаков на површината опфатена помеѓу функцијата  $y(t)$ , оската  $t$  и вертикалите  $t = a$  и  $t = b$ . Таа површина може да се апроксимира со збир од површините на елементарни правоаголници со широчина  $T$  и височина  $y(t_i)$ , каде што  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . За таа цел интервалот  $(a, b)$  се дели на  $N$  сегменти (подинтервали) со иста широчина  $T$ . Тогаш важи:

$$x(t) = \int_a^b y(t) dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} Ty(t_i) \quad (\text{I-4.1})$$

За  $a = 0$  и  $b$  произволно, интегралот (I-4.1) има граници:

$$x(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^{N-1} Ty(t_i) \quad (\text{I-4.2})$$

па одовде за  $t = kT$  се добива:

$$x(kT) = \int_0^{kT} y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^{k-1} Ty(t_i) \quad (\text{I-4.3})$$

а за  $t = kT + T$  следува:

$$x(kT + T) = \int_0^{kT+T} y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^k Ty(t_i) \quad (\text{I-4.4})$$

Со одземање на претходните две равенки една од друга се добива диферентната равенка:

$$\begin{aligned} x(kT + T) - x(kT) &= \int_0^{kT+T} y(\tau) d\tau - \int_0^{kT} y(\tau) d\tau = \\ &= \int_{kT}^{kT+T} y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^k Ty(iT) - \sum_{i=0}^{k-1} Ty(iT) = Ty(kT) \end{aligned} \quad (\text{I-4.5})$$

односно равенката:

$$x(kT + T) - x(kT) = Ty(kT) \quad (\text{I-4.6})$$

**Задача I-4.2.** Почетниот влог во банка изнесува  $P_0$  денари. Колку ќе изнесува влогот по  $n$  години, ако годишната камата изнесува 10 %? Да се состави математички модел на овој систем на штедење и да се објасни каков е тој модел. За каков систем станува збор?

**Решение:** На крајот од првата година влогот ќе биде еднаков на почетниот влог зголемен за износот на каматата и ќе изнесува:

$$P_1 = P_0 + 0.1P_0 = 1.1P_0 \quad (\text{I-4.7})$$

Аналогно, на крајот од втората, третата година итн. влогот ќе изнесува:

$$P_2 = P_1 + 0.1P_1 = 1.1P_1 = 1.1(1.1)P_0 = (1.1)^2 P_0$$

$$P_3 = P_2 + 0.1P_2 = 1.1P_2 = 1.1(1.1)P_1 = 1.1(1.1)(1.1)P_0 = (1.1)^3 P_0 \quad (I-4.8)$$

На крајот од  $n$ -тата година, влогот ќе изнесува:

$$P_n = P_{n-1} + 0.1P_{n-1} = 1.1P_{n-1} = 1.1(1.1)P_{n-2} = \dots = (1.1)^n P_0 \quad (I-4.9)$$

што значи дека почетниот влог се зголемил за  $(1.1)^n$  пати. Горниот резултат може да се докаже со математичка индукција. На крајот од  $n+1$ -вата година, влогот ќе изнесува:

$$P_{n+1} = (1.1)^{n+1} P_0 \quad (I-4.10)$$

па со одземање на равенката (I-4.9) од равенката I-(4.10) се добива:

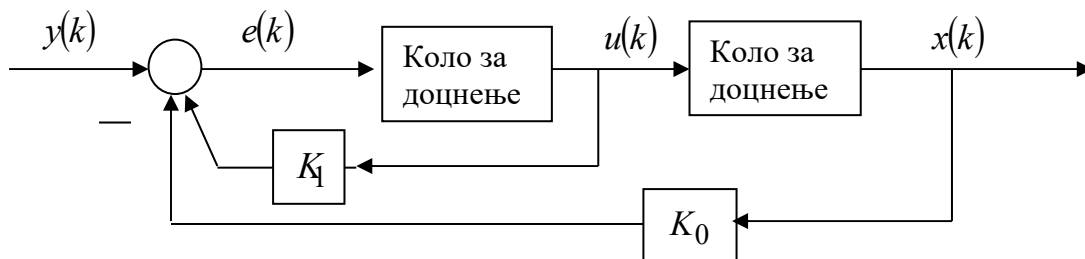
$$P_{n+1} - P_n = (1.1)^{n+1} P_0 - (1.1)^n P_0 = 0.1(1.1)^n P_0 = 0.1P_n \quad (I-4.11)$$

Оттука, бараниот математички модел на системот на штедење ќе биде:

$$P_{n+1} = P_n + 0.1P_n = 1.1P_n \quad (I-4.12)$$

и тој претставува линеарна диферентна равенка од прв ред со константни коефициенти. Следствено, се работи за линеарен стационарен дискретен динамички систем од прв ред.

**Задача I-4.3.** Да се состави математички модел за дискретниот динамички систем од слика I-4.1, кој ќе ја опише зависноста помеѓу влезот на системот  $y(k)$  и неговиот излез  $x(k)$ . Под претпоставка, периодот на дискретизација е  $T = 1s.$ , а динамичките елементи во системот се идеални кола за доцнење, кои влезниот сигнал го задоцнуваат една периода на дискретизација.



Слика I-4.1. Илустрација кон задачата I-4.3

**Решение:** Од слика I-4.1 непосредно следува:

$$x(k) = u(k-1) \Rightarrow X(z) = z^{-1}U(z) \quad (I-4.13)$$

$$u(k) = e(k-1) \Rightarrow U(z) = z^{-1}E(z) \quad (I-4.14)$$

$$e(k) = y(k) - K_1u(k) - K_0x(k) \Rightarrow E(z) = Y(z) - K_1U(z) - K_0X(z) \quad (I-4.15)$$

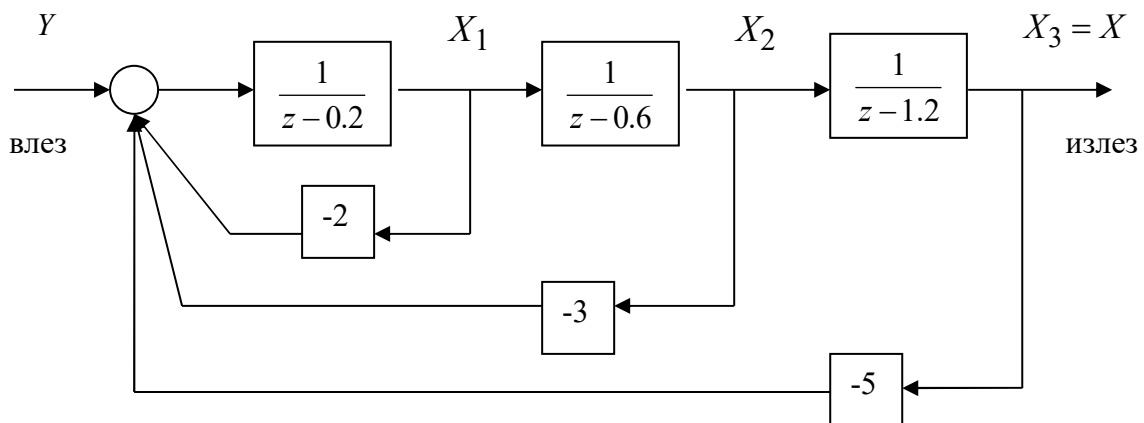
$$\begin{aligned} E(z) &= Y(z) - K_1U(z) - K_0X(z) = Y(z) - K_1U(z) - K_0z^{-1}U(z) = \\ &= Y(z) - (K_1 + K_0z^{-1})U(z) = Y(z) - (K_1 + K_0z^{-1})z^{-1}E(z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow E(z) = \frac{1}{1 + K_1z^{-1} + K_0z^{-2}} Y(z) \end{aligned} \quad (I-4.16)$$

па, со воведување на изразот (I-4.14) и (I-4.16) во (I-4.13), се добива:

$$X(z) = z^{-1}U(z) = z^{-2}E(z) = \frac{z^{-2}}{1 + K_1z^{-1} + K_0z^{-2}} Y(z) = \frac{1}{z^2 + K_1z + K_0} Y(z)$$

$$x(k+2) + K_1x(k+1) + K_0x(k) = y(k) \quad (I-4.17)$$

**Задача I-4.4.** Да се состави соодветен математички модел во просторот на состојби за динамичкиот систем од слика I-4.2, така што за состојбени големини ќе се одберат сигналите  $x_1(kT)$ ,  $x_2(kT)$  и  $x_3(kT)$ .



Слика I-4.2. Илустрација кон задачата I-4.4

**Решение:** Од структурната блок-шема на сликата I-4.2 непосредно следува:

$$X_1(z) = \frac{1}{z-0.2} E(z) \Rightarrow (z-0.2)X_1(z) = E(z)$$

$$X_2(z) = \frac{1}{z-0.6} X_1(z) \Rightarrow (z-0.6)X_2(z) = X_1(z)$$

$$X_3(z) = \frac{1}{z-1.2} X_2(z) \Rightarrow (z-1.2)X_3(z) = X_2(z)$$

$$E(z) = Y(z) - 2X_1(z) - 3X_2(z) - 5X_3(z)$$

$$X_3(z) = X(z) \tag{I-4.18}$$

Следствено, бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот дискретен систем, прикажан во комплексното подрачје гласи:

$$zX_1(z) = Y(z) - 1.8X_1(z) - 3X_2(z) - 5X_3(z)$$

$$zX_2(z) = X_1(z) + 0.6X_2(z)$$

$$zX_3(z) = X_2(z) + 1.2X_3(z) \tag{I-4.19}$$

$$X(z) = X_3(z) \tag{I-4.20}$$

или, во просторот на оригиналите:

$$x_1(k+1) = y(k) - 1.8x_1(k) - 3x_2(k) - 5x_3(k)$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) + 0.6x_2(k)$$

$$x_3(k+1) = x_2(k) + 1.2x_3(k) \tag{I-4.21}$$

$$x(k) = x_3(k) \tag{I-4.22}$$

Елементите на овој модел се:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.8 & -3 & -5 \\ 1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [0 \ 0 \ 1], d = 0 \tag{I-4.23}$$

**Задача I-4.5.** Со помош на методот за директно програмирање, да се состави соодветниот модел во просторот на состојби на дискретниот систем со еден влез  $y(k)$  и еден излез  $x(k)$ , чијашто влезно-излезна динамика е опишана со линеарната диферентна равенка од втор ред:

$$x(k+2)+0.9x(k+1)+0.2x(k)=y(k+1)+2y(k) \quad (\text{I-4.24})$$

**Решение:** Со  $Z$ -трансформација на диферентната равенка (I-4.24), под претпоставка на нулеви почетни услови, се добива:

$$Z\{x(k+2)+0.9x(k+1)+0.2x(k)\}=Z\{y(k+1)+2y(k)\}$$

$$z^2 X(z)+0.9zX(z)+0.2X(z)=zY(z)+2Y(z)$$

$$X(z)=\frac{z+2}{z^2+0.9z+0.2}Y(z)=\frac{z^{-1}+2z^{-2}}{1+0.9z^{-1}+0.2z^{-2}}Y(z) \quad (\text{I-4.25})$$

Бараните состојбени големини  $v_1(k)$  и  $v_2(k)$  се определуваат преку помошната променлива  $w(k)$  дефинирана на следниот начин:

$$W(z)=\frac{1}{1+0.9z^{-1}+0.2z^{-2}}Y(z) \quad (\text{I-4.26})$$

и тоа така што за нивните  $Z$ -слики да важи:

$$V_1(z)=z^{-1}W(z)$$

$$V_2(z)=z^{-2}W(z) \quad (\text{I-4.27})$$

Тогаш:

$$zV_1(z)=W(z) \quad (\text{I-4.28})$$

$$zV_2(z)=z^{-1}W(z)=V_1(z) \quad (\text{I-4.29})$$

Сликата  $W(z)$  може да се определи од равенката (I-4.26):

$$W(z)=\frac{1}{1+0.9z^{-1}+0.2z^{-2}}Y(z)\Rightarrow$$

$$W(z)+0.9z^{-1}W(z)+0.2z^{-2}W(z)=Y(z)\Rightarrow$$

$$W(z)+0.9V_1(z)+0.2V_2(z)=Y(z)\Rightarrow$$

$$W(z)=Y(z)-0.9V_1(z)-0.2V_2(z) \quad (\text{I-4.30})$$

па, со воведување на изразот за  $W(z)$  во (I-4.28), се добива:

$$\begin{aligned} zV_1(z) &= Y(z) - 0.9V_1(z) - 0.2V_2(z) \\ zV_2(z) &= V_1(z) \end{aligned} \tag{I-4.31}$$

Равенките (I-4.31), заедно со равенката:

$$X(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}} Y(z) = (z^{-1} + 2z^{-2}) W(z) = V_1(z) + 2V_2(z) \tag{I-4.32}$$

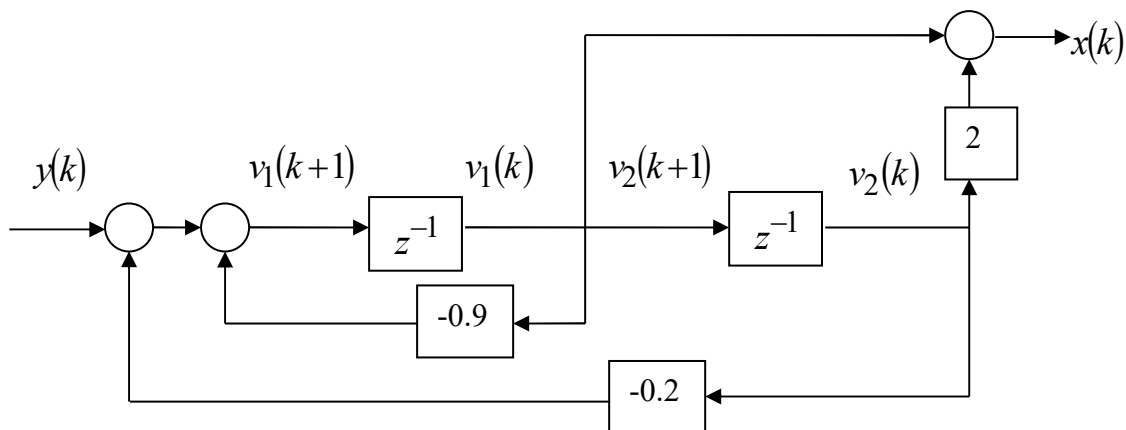
го претставуваат бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот дискретен систем, прикажан во комплексното подрачје. Во просторот на оригиналите, тој модел гласи:

$$\begin{aligned} v_1(k+1) &= y(k) - 0.9v_1(k) - 0.2v_2(k) \\ v_2(k+1) &= v_1(k) \\ x(k) &= v_1(k) + 2v_2(k) \end{aligned} \tag{I-4.33}$$

или, во матричен облик:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.9 & -0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y(k) \\ x(k) &= [1 \quad 2] \mathbf{v}(k) \end{aligned} \tag{I-4.34}$$

Соодветната структурна блок-шема е прикажана на слика I-4.3.



Слика I-4.3. Структурна блок-шема кон моделот (I-4.33)



**Задача I-4.6.** Со помош на методот за директно програмирање, да се состави соодветниот модел во просторот на состојби на дискретниот систем со еден влез  $y(k)$  и еден излез  $x(k)$ , чијашто влезно-излезна динамика е опишана со линеарната диферентна равенка од втор ред:

$$x(k) + 2x(k-1) + 3x(k-2) + 4x(k-3) = 6y(k-1) + 7y(k-2) + 8y(k-3) \quad (I-4.35)$$

**Решение:** Со  $Z$ -трансформација на диферентната равенка, под претпоставка на нулеви почетни услови, се добива:

$$Z\{x(k) + 2x(k-1) + 3x(k-2) + 4x(k-3)\} = Z\{6y(k-1) + 7y(k-2) + 8y(k-3)\}$$

$$X(z) + 2z^{-1}X(z) + 3z^{-2}X(z) + 4z^{-3}X(z) = 6z^{-1}Y(z) + 7z^{-2}Y(z) + 8z^{-3}Y(z)$$

$$X(z) = \frac{6z^{-1} + 7z^{-2} + 8z^{-3}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}} Y(z) \quad (I-4.36)$$

Бараните состојбени големини  $v_1(k)$ ,  $v_2(k)$  и  $v_3(k)$  се определуваат преку помошната променлива  $w(k)$  дефинирана на следниот начин:

$$W(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}} Y(z) \quad (I-4.37)$$

и тоа така што за нивните  $Z$ -слики да важи:

$$V_1(z) = z^{-1}W(z)$$

$$V_2(z) = z^{-2}W(z)$$

$$V_3(z) = z^{-3}W(z) \quad (I-4.38)$$

Тогаш:

$$zV_1(z) = W(z)$$

$$zV_2(z) = z^{-1}W(z) = V_1(z)$$

$$zV_3(z) = z^{-2}W(z) = V_2(z) \quad (I-4.39)$$

Сликата  $W(z)$  може да се определи од равенката (I-4.37):

$$W(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}} Y(z) \Rightarrow$$

$$W(z) + 2z^{-1}W(z) + 3z^{-2}W(z) + 4z^{-3}W(z) = Y(z) \Rightarrow$$

$$W(z) + 2V_1(z) + 3V_2(z) + 4V_3(z) = Y(z) \Rightarrow$$

$$W(z) = Y(z) - 2V_1(z) - 3V_2(z) - 4V_3(z) \quad (\text{I-4.40})$$

па, со воведување на изразот за  $W(z)$  во равенките (I-4.39), се добива:

$$zV_1(z) = Y(z) - 2V_1(z) - 3V_2(z) - 4V_3(z)$$

$$zV_2(z) = V_1(z)$$

$$zV_3(z) = V_2(z) \quad (\text{I-4.41})$$

Равенките (I-4.41), заедно со равенката:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{6z^{-1} + 7z^{-2} + 8z^{-3}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3}} Y(z) = (6z^{-1} + 7z^{-2} + 8z^{-3})W(z) = \\ &= 6V_1(z) + 7V_2(z) + 8V_3(z) \end{aligned} \quad (\text{I-4.42})$$

го претставуваат бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот дискретен систем, прикажан во комплексното подрачје. Во просторот на оригиналите, тој модел гласи:

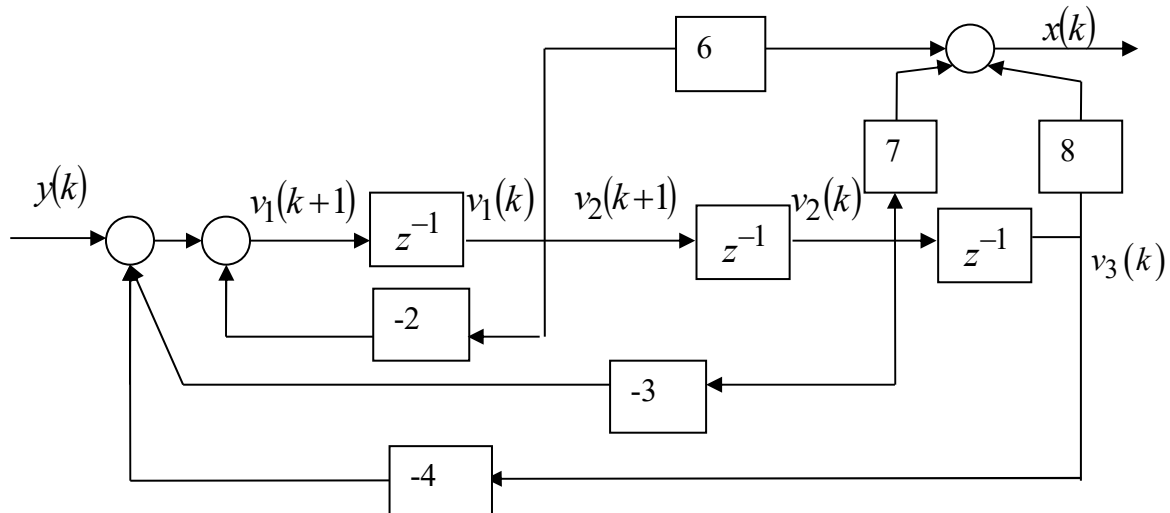
$$v_1(k+1) = y(k) - 2v_1(k) - 3v_2(k) - 4v_3(k)$$

$$v_2(k+1) = v_1(k)$$

$$v_3(k+1) = v_2(k)$$

$$x(k) = 6v_1(k) + 7v_2(k) + 8v_3(k) \quad (\text{I-4.43})$$

Соодветната структурна блок-шема е прикажана на слика I-4.4.



Слика I-4.4. Структурна блок шема кон моделот (I-4.43)

**Задача I-4.7.** Со помош на постапката разгранет влез и излез да се состави соодветен модел во просторот на состојби за дискретниот систем со еден влез  $y(k) = h(k)$  и еден излез  $x(k)$ , чијашто влезно-излезна динамика е опишана со линеарната диферентна равенка од втор ред:

$$x(k+2) - 1.5x(k+1) + 0.5x(k) = y(k+2) + 4y(k+1) + 2y(k) \quad (I-4.44)$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 0 \quad (I-4.45)$$

**Решение:** Со  $z$ -трансформација на диферентната равенка (I-4.44), под претпоставка на нулеви почетни услови, се добива:

$$Z\{x(k+2) - 1.5x(k+1) + 0.5x(k) = y(k+2) + 4y(k+1) + 2y(k)\}$$

$$Z\{x(k+2) - 1.5x(k+1) + 0.5x(k)\} = Z\{y(k+2) + 4y(k+1) + 2y(k)\}$$

$$Z\{x(k+2)\} - 1.5Z\{x(k+1)\} + 0.5Z\{x(k)\} = Z\{x(k+2)\} + 4Z\{x(k+1)\} + 2Z\{x(k)\}$$

$$z^2 X(z) - 1.5zX(z) + 0.5X(z) = z^2 Y(z) + 4zY(z) + 2Y(z) \quad (I-4.46)$$

од каде што, по мало средување, непосредно следува:

$$X(z) = Y(z) + z^{-1} \{4Y(z) + 1.5X(z) + z^{-1} [2Y(z) - 0.5X(z)]\} \quad (I-4.47)$$

Динамиката на набљудуваниот дискретен систем, кој е од втор ред, ќе биде целосно опишана во просторот на состојби со две состојбени големини  $v_1(kT)$  и  $v_2(kT)$ , кои можат да се дефинираат на следниот начин:

$$V_1(z) = z^{-1} [2Y(z) - 0.5X(z)]$$

$$V_2(z) = z^{-1} [4Y(z) + 1.5X(z) + V_1(z)] \quad (\text{I-4.48})$$

Равенките (I-4.48) се трансформираат во следните равенки:

$$zV_1(z) = 2Y(z) - 0.5X(z)$$

$$zV_2(z) = 4Y(z) + 1.5X(z) + V_1(z) \quad (\text{I-4.49})$$

а равенката (I-4.47), по воведувањето на смените (I-4.48), станува:

$$X(z) = Y(z) + V_2(z) \quad (\text{I-4.50})$$

На равенките (I-4.49) - (I-4.50) во просторот на оригиналите им одговараат следните диферентни равенки:

$$v_1(k+1) = 2y(k) - 0.5x(k)$$

$$v_2(k+1) = 4y(k) + 1.5x(k) + v_1(k)$$

$$x(k) = y(k) + v_2(k) \quad (\text{I-4.51})$$

Првите две равенки во овој модел се диферентни равенки од прв ред, чии решенија се состојбените големини на набљудуваниот дискретен систем, па тие ги претставуваат равенките на состојба на системот, додека последната равенка е равенка на излезот од системот. Со воведување на третата равенка во првите две, моделот (I-4.51) го добива дефинитивниот облик:

$$v_1(k+1) = 1.5y(k) - 0.5v_2(k)$$

$$v_2(k+1) = 5.5y(k) + v_1(kT) + 1.5v_2(kT)$$

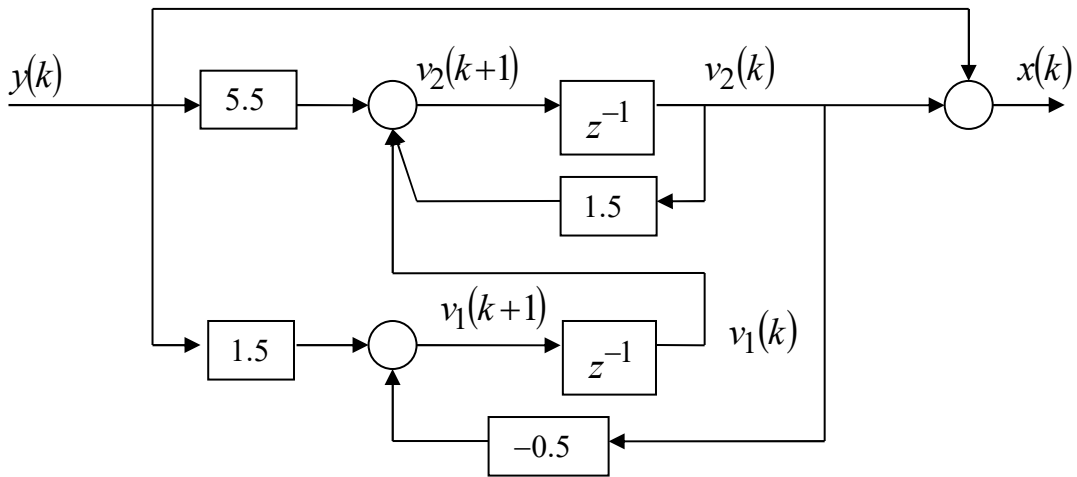
$$x(k) = y(k) + v_2(k) \quad (\text{I-4.52})$$

или, следниот матричен облик:

$$\mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} 1.5 \\ 5.5 \end{bmatrix} y(k) = \mathbf{A}\mathbf{v}(k) + \mathbf{b}y(k)$$

$$x(k) = [0 \quad 1] \mathbf{v}(k) + y(k) = \mathbf{c}\mathbf{v}(k) + y(k) \quad (\text{I-4.53})$$

Соодветната структурна блок-шема е прикажана на слика I-4.5.



Слика I-4.5. Структурна блок-шема на моделот (I-4.53)

Почетните услови на (I-4.53) се определуваат врз основа на (I-4.52). Имено:

$$v_2(0) = x(0) - y(0) = 1 - 1 = 0$$

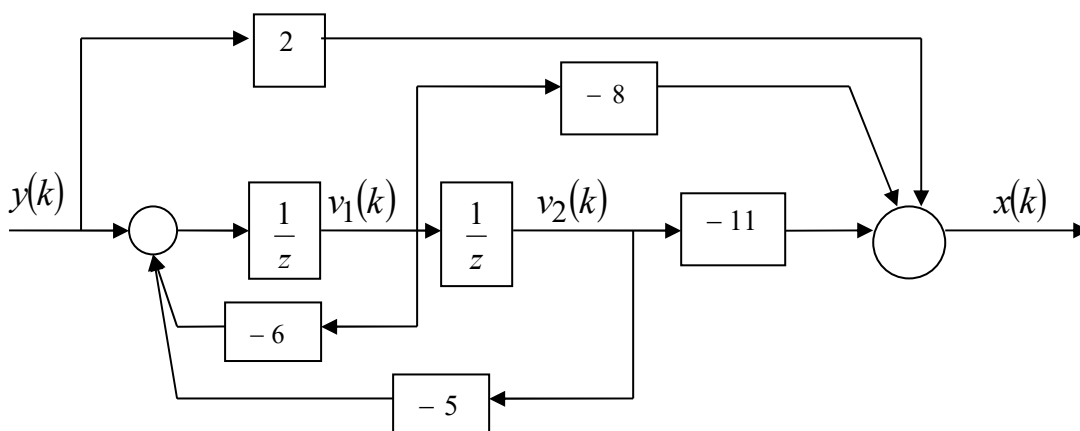
$$v_2(1) = x(1) - y(1) = 0 - 1 = -1$$

$$v_2(1) = 5.5y(0) + v_1(0) + 1.5v_2(0) = 5.5 + v_1(0) = -1 \Rightarrow v_1(0) = -6.5 \quad (I-4.54)$$

па, следствено:

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I-4.55)$$

**Задача I-4.8.** Да се определи моделот во просторот на состојби на кој одговара дадената структурна блок-шема од слика I-4.6.



Слика I-4.6. Илустрација кон задачата I-4.8

**Решение:**

$$V_1(z) = \frac{1}{z} [Y(z) - 6V_1(z) - 5V_2(z)]$$

$$V_2(z) = \frac{1}{z} V_1(z)$$

$$X(z) = 2Y(z) - 8V_1(z) - 11V_2(z)$$

$$v_1(k+1) = -6v_1(k) - 5v_2(k) + 2y(k)$$

$$v_2(k+1) = v_1(k)$$

$$x(k) = 2y(k) - 8v_1(k) - 11v_2(k) \tag{I-4.56}$$

**Задача I-4.9.** Да се претстави во просторот на состојби дискретниот систем со модел:

$$2\Delta^2 x(k) - 4\Delta x(k) = y(k); \quad x(0) = 1, x(1) = 0 \tag{I-4.57}$$

каде што  $y(k)$  е влезот, а  $x(k)$  е излезот на системот и, потоа, врз основа на добиениот модел во просторот на состојби, да се определи неговата преносна функција  $G(z)$ .

**Решение:** За претставување на зададениот дискретен систем од втор ред во просторот на состојби потребни се две состојбени големини  $v_1(k)$  и  $v_2(k)$ , кои можат да се дефинираат на следниот начин:

$$v_1(k) = x(k)$$

$$v_2(k) = \Delta x(k) \tag{I-4.58}$$

Тогаш, од (I-4.58) непосредно следува:

$$\Delta v_1(k) = \Delta x(k) = v_2(k)$$

$$\Delta v_2(k) = \Delta^2 x(k) = 0.5y(k) + 2v_2(k) \tag{I-4.59}$$

при што (I-4.59) претставуваат диферентни равенки од прв ред со еквивалентен облик:

$$v_1(k+1) = v_1(k) + v_2(k)$$

$$v_2(k+1) = 0.5y(k) + 3v_2(k) \quad (I-4.60)$$

чишто решенија се состојбените големини на набљудуваниот дискретен систем. Тие се диферентните равенки на векторот на состојби и заедно со равенката на излезот:

$$x(k) = v_1(k) \quad (I-4.61)$$

го чинат бараниот модел во просторот на состојби на дискретниот систем (I-4.57). Во матричен облик моделот (I-4.60) – (I-4.61) може да се претстави на следниот начин:

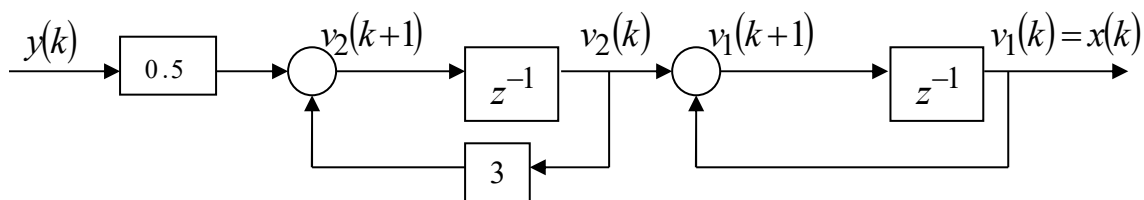
$$\mathbf{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} y(k)$$

$$x(k) = [1 \quad 0] \mathbf{v}(k) \quad (I-4.62)$$

со почетни услови:

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (I-4.63)$$

Структурната блок-шема, која одговара на моделот (I-4.62), е прикажана на слика I-4.7.



Слика I-4.7. Структурна блок-шема на моделот (I-4.62)

Преносната функција  $G(z)$  на дискретниот систем (I-4.57) може да се определи врз основа на (I-4.62) на следниот начин:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} = \\ &= [1 \quad 0] \cdot \left( z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{(z-1)(z-3)} [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{(z-1)(z-3)} [z-3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2(z-1)(z-3)}, \quad |z| > 3 \tag{I-4.64}
 \end{aligned}$$

**Задача I-4.10.** Даден е стабилен континуален динамички систем со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , опишан со преносната функција:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}; \quad a_0, b_0, b_1 = \text{const.} \in \mathfrak{R} \tag{I-4.65}$$

Да се најде негов дискретен модел во просторот на состојби за влезна возбуда од облик:

$$y(t) = y(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{I-4.66}$$

**Решение:** Еден модел во просторот на состојби на набљудуваниот континуален систем се добива на следниот начин:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0} = \frac{X(s)}{Y(s)} \\
 X(s) &= G(s)Y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0} Y(s) = \left( b_1 + \frac{b_0 - a_0 b_1}{s + a_0} \right) Y(s) \\
 W(s) &= \frac{1}{s + a_0} Y(s) \\
 (s + a_0)W(s) &= Y(s) \\
 X(s) &= (b_0 - a_0 b_1)W(s) + b_1 Y(s) \tag{I-4.67}
 \end{aligned}$$

Оттука:

$$w'(t) = -a_0 w(t) + y(t)$$



$$x(t) = (b_0 - a_0 b_1)w(t) + b_1 y(t) \quad (\text{I-4.68})$$

со елементи:

$$A = -a_0$$

$$b = 1$$

$$c = (b_0 - b_1 a_0)$$

$$d = b_1 \quad (\text{I-4.69})$$

Бараниот дискретен еквивалент на моделот (I-4.68) е:

$$w((k+1)T) = e^{-AT} w(kT) + \int_0^T b e^{-At} y(kT) dt =$$

$$= e^{-a_0 T} w(kT) + \int_0^T e^{-a_0 t} y(kT) dt =$$

$$= e^{-a_0 T} w(kT) + \frac{1}{a_0} e^{-a_0 t} y(kT) \Big|_0^T =$$

$$= e^{-a_0 T} w(kT) + \frac{1}{a_0} (1 - e^{-a_0 T}) y(kT)$$

$$x(k) = (b_0 - a_0 b_1)w(k) + b_1 y(k) \quad (\text{I-4.70})$$

**Задача I-4.11.** Да се состави дискретниот модел во просторот на состојби на еден континуален динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , опишан со неговата преносна функција:

$$G(s) = \frac{s + b_1}{(s + a_1)(s + a_2)}; \quad a_1, a_2, b_1 = \text{const.} \in \Re \quad (\text{I-4.71})$$

ако се претпостави дека  $T = 1s$ . и влезот на системот е од облик:

$$y(t) = y(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I-4.72})$$

**Решение:** Еден начин да се опише зададениот континуален систем во просторот на состојби е следниот:

$$G(s) = \frac{s + b_1}{(s + a_1)(s + a_2)} = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

$$X(s) = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{1}{s + a_1} Y(s) - \frac{b_1 - a_2}{a_2 - a_1} \cdot \frac{1}{s + a_2} Y(s)$$

$$V_1(s) = \frac{1}{s + a_1} Y(s)$$

$$V_2(s) = \frac{1}{s + a_2} Y(s) \tag{I-4.73}$$

$$X(s) = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1} V_1(s) - \frac{b_1 - a_2}{a_2 - a_1} V_2(s) \tag{I-4.74}$$

$$v_1'(t) = -a_1 v_1(t) + y(t)$$

$$v_2'(t) = -a_2 v_2(t) + y(t) \tag{I-4.75}$$

$$x(t) = \frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1} v_1(t) - \frac{b_1 - a_2}{a_2 - a_1} v_2(t) \tag{I-4.76}$$

каде што  $v_1(kT)$  и  $v_2(kT)$  може да се усвојат за состојбени големини на набљудуваниот континуален систем. Следствено, равенките (I-4.75) ќе бидат равенките на векторот на состојба, а (I-4.76) ќе биде равенката на излезот од моделот во просторот на состојби на континуалниот систем (I-4.71), чијшто матричен облик гласи:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & -b_1 + a_2 \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) \tag{I-4.77}$$

Моделот (I-4.77), чиј општ облик е:

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}y(t)$$

$$x(t) = \mathbf{c}\mathbf{v}(t) + d y(t) \tag{I-4.78}$$

има дискретен еквивалент од облик:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}((k+1)T) &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{v}(kT) + \tilde{\mathbf{b}}y(kT) \\ x(kT) &= \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{v}(kT) + \tilde{d}y(kT) \end{aligned} \quad (\text{I-4.79})$$

при што важат следните релации:

$$\tilde{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{f}(T), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} dt, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}, \quad \tilde{d} = d \quad (\text{I-4.80})$$

Фундаменталната матрица  $\mathbf{f}(t)$  на системот (I-4.71) е:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+a_1 & 0 \\ 0 & s+a_2 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a_1)(s+a_2)}\begin{bmatrix} s+a_2 & 0 \\ 0 & s+a_1 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-a_2 t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I-4.81})$$

а со нејзина помош се пресметува:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{f}(T) = \begin{bmatrix} e^{-a_1 T} & 0 \\ 0 & e^{-a_2 T} \end{bmatrix} \quad (\text{I-4.82})$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \int_0^T \mathbf{f}(t) \mathbf{b} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-a_2 t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-a_1 t} \\ e^{-a_2 t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1}(1 - e^{-a_1 T}) \\ \frac{1}{a_2}(1 - e^{-a_2 T}) \end{bmatrix} \quad (\text{I-4.83})$$

Оттука, еден дискретен модел во просторот на состојби на зададениот континуален систем (I-4.71) е моделот:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}((k+1)T) &= \begin{bmatrix} e^{-a_1 T} & 0 \\ 0 & e^{-a_2 T} \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1}(1 - e^{-a_1 T}) \\ \frac{1}{a_2}(1 - e^{-a_2 T}) \end{bmatrix} y(kT) \\ x(kT) &= \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_1}{a_2 - a_1} & -\frac{b_1 - a_2}{a_2 - a_1} \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) \end{aligned} \quad (\text{I-4.84})$$

**Задача I-4.12.** Да се состави дискретен модел во просторот на состојби на еден континуален динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , опишан со неговата преносна функција:

$$G(s) = \frac{s+25}{s(s+10)}, \operatorname{Re}s > 0 \quad (\text{I-4.85})$$

ако се претпостави дека  $T = 1s$ . и влезот на системот е од облик:

$$y(t) = y(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I-4.86})$$

**Решение:** Еден начин да се опише зададениот континуален систем во просторот на состојби е со воведување на помошната променлива  $w(t)$  на следниот начин:

$$G(s) = \frac{s+25}{s(s+10)} = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad (\text{I-4.87})$$

$$X(s) = \frac{s+25}{s(s+10)} Y(s) \quad (\text{I-4.88})$$

$$W(s) = \frac{1}{s(s+10)} Y(s) \quad (\text{I-4.89})$$

Тогаш, со воведување на (I-4.89) во (I-4.88), за  $L$ -сликата на одзивот  $X(s)$  на набљудуваниот континуален систем (I-4.85), се добива:

$$X(s) = (s+25)W(s) \quad (\text{I-4.90})$$

На равенките (I-4.89) и (I-4.90) во просторот на оригиналите им одговараат следните равенки:

$$w''(t) + 10w'(t) = y(t) \quad (\text{I-4.91})$$

$$x(t) = w'(t) + 25w(t) \quad (\text{I-4.92})$$

кои, со воведување на смените:

$$v_1(t) = w(t)$$

$$v_2(t) = w'(t) \quad (\text{I-4.93})$$

се трансформираат во следниот систем:

$$v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = -10v_2(t) + y(t) \quad (\text{I-4.94})$$

$$x(t) = 25v_1(t) + v_2(t) \quad (\text{I-4.95})$$

Равенките (I-4.94) се равенките на векторот на состојба, а (I-4.95) е равенката на излезот од моделот во просторот на состојби на континуалниот систем (I-4.85), чијшто матричен облик гласи:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}y(t)$$

$$x(t) = [25 \quad 1]\mathbf{v}(t) = \mathbf{c}\mathbf{v}(t) + d y(t) \quad (\text{I-4.96})$$

За дискретниот еквивалент на моделот (I-4.96) важи:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{v}(kT) + \tilde{\mathbf{b}}y(kT)$$

$$x(kT) = \tilde{\mathbf{c}}\mathbf{v}(kT) + \tilde{d}y(kT) \quad (\text{I-4.97})$$

каде што:

$$\tilde{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{f}(T), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} dt, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}, \quad \tilde{d} = d \quad (\text{I-4.98})$$

Фундаменталната матрица  $\mathbf{f}(t)$  на системот (I-4.85) е:

$$\mathbf{f}(t) = L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix}^{-1} \right\} =$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+10)} \begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-10t} \\ 0 & e^{-10t} \end{bmatrix} \quad (\text{I-4.99})$$

а со нејзина помош се пресметува:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{f}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-10T} \\ 0 & e^{-10T} \end{bmatrix} \quad (\text{I-4.100})$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \int_0^T \mathbf{f}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-10t} \\ 0 & e^{-10t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t - \frac{1}{10}e^{-10t} \\ -\frac{1}{10}e^{-10t} \end{bmatrix}_0^T = \begin{bmatrix} T + \frac{1}{10}(1-e^{-10T}) \\ \frac{1}{10}(1-e^{-10T}) \end{bmatrix} \quad (\text{I-4.101})$$

Оттука, еден дискретен модел во просторот на состојби на зададениот континуален систем (I-4.85) е моделот:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-10T} \\ 0 & e^{-10T} \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} T + \frac{1}{10}(1-e^{-10T}) \\ \frac{1}{10}(1-e^{-10T}) \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(kT) = [25 \quad 1] \mathbf{v}(kT) \quad (\text{I-4.102})$$

**Задача I-4.13.** Да се состави моделот во просторот на состојби на континуалниот динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , опишан со преносната функција:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 25}; \operatorname{Re} s > 0 \quad (\text{I-4.103})$$

Потоа, под претпоставка дека е исполнет условот (I-4.86), да се состави еквивалентен дискретен модел на овој систем во просторот на состојби.

**Решение:** Со оглед на дефиницијата на една преносна функција, за зададениот континуален систем може да се запише:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 25} = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad (\text{I-4.104})$$

па, оттука, непосредно следува:

$$X(s) = \frac{25}{s^2 + 25} Y(s) \quad (\text{I-4.105})$$

Со воведување на помошната променлива  $w(t)$ , така што за нејзината  $L$ -слика да важи:

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 25} Y(s) \quad (\text{I-4.106})$$

равенката (I-4.105) се трансформира во равенката:

$$X(s) = 25W(s) \quad (\text{I-4.107})$$

На равенките (I-4.106) и (I-4.107) во просторот на оригиналите им одговараат следните равенки:

$$w''t + 25w(t) = y(t)$$

$$x(t) = 25w(t) \quad (\text{I-4.108})$$

кои, со воведување на состојбените големини  $v_1(kT)$  и  $v_2(kT)$ :

$$v_1(t) = w(t)$$

$$v_2(t) = w'(t) \tag{I-4.109}$$

поминуваат во равенките:

$$v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = -25v_1(t) + y(t)$$

$$x(t) = 25v_1(t) \tag{I-4.110}$$

Равенките (I-4.110) го претставуваат моделот во просторот на состојби на континуалниот систем (I-4.103), чиј матричен облик гласи:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$x(t) = [25 \ 0] \mathbf{v}(t) \tag{I-4.111}$$

Фундаменталната матрица  $\mathbf{f}(t)$  на системот (I-4.111) е:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 25} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \cos(5t) & \frac{1}{5} \sin(5t) \\ -5 \sin(5t) & \cos(5t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{I-4.112}$$

па со нејзина помош се пресметува:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{f}(T) = \begin{bmatrix} \cos(5T) & \frac{1}{5} \sin(5T) \\ -5 \sin(5T) & \cos(5T) \end{bmatrix} \tag{I-4.113}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \int_0^T \mathbf{f}(t) \mathbf{b} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} \cos(5t) & \frac{1}{5} \sin(5t) \\ -5 \sin(5t) & \cos(5t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{25} \cos(5t) \\ \frac{1}{5} \sin(5t) \end{bmatrix}_0^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{25} - \frac{1}{25} \cos(5T) \\ \frac{1}{5} \sin(5T) \end{bmatrix} \quad (\text{I-4.114})$$

Следствено, бараниот дискретен модел во просторот на состојби на дадениот континуален систем (I-4.103) е:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} \cos(5T) & \frac{1}{5} \sin(5T) \\ -5 \sin(5T) & \cos(5T) \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} \frac{1}{25} - \frac{1}{25} \cos(5T) \\ \frac{1}{5} \sin(5T) \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(t) = [25 \ 0] \mathbf{v}(t) \quad (\text{I-4.115})$$

**Задача I-4.14.** Да се состави дискретен модел во просторот на состојби на континуалниот систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$  со модел:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) \quad (\text{I-4.116})$$

под претпоставка, дека влезот  $y(t)$  е од облик (I-4.86) и  $\zeta < 1$ .

**Решение:** Фундаменталната матрица  $\mathbf{f}(t)$  на системот (I-4.116) се определува на следниот начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s + 2\zeta\omega \end{bmatrix}^{-1} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I-4.117})$$

каде што  $s_1$  и  $s_2$  се нули на полиномот:

$$a(s) = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = (s - s_1)(s - s_2) \quad (\text{I-4.118})$$



и тие, со оглед на тоа дека  $\zeta$  претставува фактор на релативно придушување во системот помало од 1, изнесуваат:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega \pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2} \quad (\text{I-4.119})$$

Тогаш, за елементите на  $\mathbf{f}(t)$  се добива:

$$\begin{aligned} f_{11}(t) &= e^{-\zeta\omega t} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) + e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) \\ f_{12}(t) &= e^{-\zeta\omega t} \frac{1}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) \\ f_{21}(t) &= -e^{-\zeta\omega t} \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) \\ f_{22}(t) &= -e^{-\zeta\omega t} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) + e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) \end{aligned} \quad (\text{I-4.120})$$

па, бараниот дискретен модел на системот (I-4.116), е определен со матрицата:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{f}(T) \quad (\text{I-4.121})$$

и векторот:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}} &= \int_0^T \begin{bmatrix} f_{12}(t) \\ f_{22}(t) \end{bmatrix} dt = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} - e^{-\zeta\omega T} \frac{\zeta}{\omega^2\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega T\sqrt{1-\zeta^2}) - \frac{1}{\omega^2} e^{-\zeta\omega T} \cos(\omega T\sqrt{1-\zeta^2}) \\ e^{-\zeta\omega T} \frac{\zeta}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega T\sqrt{1-\zeta^2}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I-4.122})$$

**Задача I-4.15.** Динамиката на еден објект на управување е опишана со неговата преносна функција:

$$G(s) = \frac{1}{s^3}, \quad \text{Re } s > 0 \quad (\text{I-4.123})$$

Да се определи дискретен модел на овој систем во просторот на состојби.

**Решение:** Еден модел во просторот на состојби на набљудуваниот континуален објект е даден со равенките:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}y(t)$$

$$x(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{v}(t) = \mathbf{c}\mathbf{v}(t) \quad (\text{I-4.124})$$

а неговиот дискретен еквивалент има облик:

$$\mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} T^3/6 \\ T^2/2 \\ T \end{bmatrix} y(kT) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{v}(kT) + \tilde{\mathbf{b}}y(kT)$$

$$x(kT) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{v}(kT) = \mathbf{c}\mathbf{v}(kT) \quad (\text{I-4.125})$$

**Задача I-4.16.** Што претставува дискретниот математички модел во просторот на состојби на континуалниот динамички систем со следниот модел во просторот на состојби:

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{w}(t); \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{w}(t) \quad (\text{I-4.126})$$

каде што  $\mathbf{y}(t)$  е саканиот влез, а  $\mathbf{w}(t)$  се пречките во набљудуваниот систем. Под претпоставка:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(kT), kT \leq t < kT + T$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(kT), kT \leq t < kT + T \quad (\text{I-4.127})$$

**Решение:**

$$\mathbf{v}(k+1) = e^{\mathbf{A}T} \cdot \mathbf{v}(k) + \left[ \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} dt \right] \cdot \mathbf{y}(k) + \left[ \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{E} dt \right] \cdot \mathbf{w}(k); \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

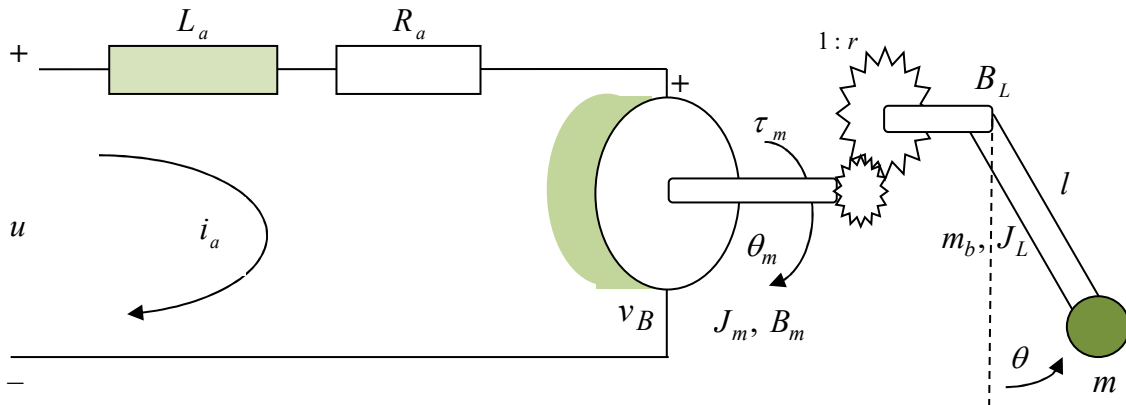
$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{y}(k) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{w}(k) \quad (\text{I-4.128})$$

**Задача I-4.17.** Даден е роботскиот механизам од слика I-4.8, кој се состои од еднонасочен електричен мотор што задвижува роботска рака во вид на нишалото [5]. Моторот е спрегнат со нишалото со посредство на пар запчаници (преку редуктор), чиј преносен однос е  $r$ , а нишалото може да се движи само во

вертикалната рамнина под дејство на Земјината тежа. Динамичкиот модел на нишалото гласи:

$$J_L \ddot{\theta}(t) + B_L \dot{\theta}(t) + K_L \sin[\theta(t)] = \tau(t) \quad (I-4.129)$$

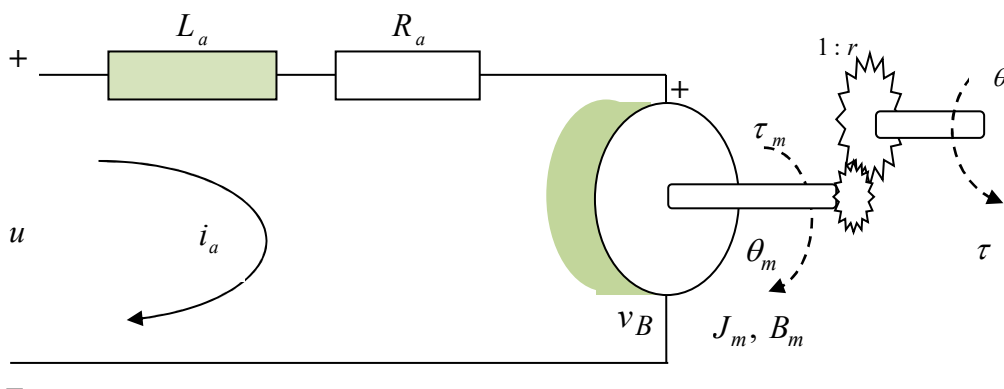
каде што  $J_L$ ,  $k_L$  и  $B_L$  се соодветни константи;  $\tau$  – е вртливиот момент што го предизвикува движењето на нишалото и  $\theta$  е аголот на ротација на нишалото.



Слика I-4.8. Роботски механизам сочинет од електричен мотор како актуатор и рака во вид на нишалото

Упростен динамички модел на електромоторот, прикажан на слика I-4.9, кој е употребен како актуатор во набљудуваниот роботски механизам со занемарлив индуктивитет на арматурата, е претставен со равенката:

$$J_m \ddot{\theta}(t) + B_m \dot{\theta}(t) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{\theta}(t) + \frac{\tau(t)}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} u(t) \quad (I-4.130)$$



Слика I-4.9. Шематски приказ на еден електричен електромотор

каде што  $J_m$ ,  $K_a$ ,  $R_a$ ,  $K_b$  и  $B_m$  се соодветни константи на моторот,  $\tau$  е вртливиот момент кој го генерира моторот и кој дејствува врз товарот (во конкретниот

случај нишалото),  $\theta$  е агловата положба на оската од товарот,  $r$  е преносниот однос на запчаниците и  $u$  е напонот на арматурата на моторот. Равенката односно моделот на еднонасочниот мотор ја дефинира врската помеѓу влезниот напон  $u$  на арматурата и вртливиот момент  $\tau$ , со кој моторот дејствува врз товарот. Да се состави линеарен дискретен математички модел на динамиката на набљудуваниот роботски механизам во просторот на состојби под претпоставка дека  $r \gg 1$  и влезот е константен во текот на секој период на дискретизација. Упатство: најнапред да се дефинира влезот и излезот на овој систем и неговите состојбени големини.

**Решение:** Влез за набљудуваниот роботски механизам, кој претставува електромеханички систем, е влезниот напон на арматурата од моторот  $u$ , а излез е аголот на поместувањето на роботската рака односно нишалото  $\theta$ . Ако равенката (I-4.129) се воведо равенката (I-4.130), ќе се добие:

$$\left( J_m + \frac{J_L}{r^2} \right) \ddot{\theta}(t) + \left( B_m + \frac{B_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \dot{\theta}(t) + \frac{K_L}{r^2} \sin[\theta(t)] = \frac{K_a}{r R_a} u(t) \quad (\text{I-4.131})$$

или:

$$\tilde{J} \ddot{\theta}(t) + \tilde{B} \dot{\theta}(t) + R \sin[\theta(t)] = K u(t) \quad (\text{I-4.132})$$

каде што:

$$\tilde{J} = J_m + \frac{J_L}{r^2}$$

$$\tilde{B} = B_m + \frac{B_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a}$$

$$R = \frac{K_L}{r^2}$$

$$K = \frac{K_a}{r R_a} \quad (\text{I-4.133})$$

Претпоставката за  $r \gg 1$  овозможува да се занемари нелинеарната динамика на раката претставена со моделот (I-4.132), бидејќи при  $r \gg 1$  е  $R \approx 0$ , па (I-4.132) поминува во многу поедноставниот линеарен облик:

$$J \ddot{\theta}(t) + B \dot{\theta}(t) = K u(t) \quad (\text{I-4.134})$$

каде што:

$$J = J_m, \quad B = \left( B_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \quad (\text{I-4.135})$$

Нека:

$$v_1(t) = \theta(t)$$

$$v_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (\text{I-4.136})$$

Тогаш еден модел на набљудуваниот систем во просторот на состојби е следниот:

$$\dot{v}_1(t) = v_2(t)$$

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{J} [Ku(t) - Bv_2(t)]$$

$$x(t) = v_1(t) \quad (\text{I-4.137})$$

Елементите на овој модел се:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [1 \quad 0], d = 0 \quad (\text{I-4.138})$$

и со помош на нив се пресметуваат елементите на соодветниот дискретен еквивалент во просторот на состојби:

$$\mathbf{f}(t) = L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \frac{B}{J} \end{bmatrix}^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{\begin{bmatrix} s + \frac{B}{J} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s \left( s + \frac{B}{J} \right)} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-\frac{B}{J}t} \\ 0 & e^{-\frac{B}{J}t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{f}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-\frac{B}{J}T} \\ 0 & e^{-\frac{B}{J}T} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \int_0^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-\frac{B}{J}t} \\ 0 & e^{-\frac{B}{J}t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{K}{J} \left( 1 - e^{-\frac{B}{J}T} \right) \\ \frac{K}{J} \left( 1 - e^{-\frac{B}{J}T} \right) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$$

$$\tilde{d} = d = 0 \quad (\text{I-4.139})$$

**Задача I-4.18.** Линеарен стационарен континуален динамички систем од втор ред со влез  $y(t)$  и излез  $x(t)$  е опишан со следната диференцијална равенка:

$$x''(t) + bx'(t) + ax(t) = y(t), \quad t \geq 0 \quad (\text{I-4.140})$$

каде што  $a$  и  $b$  се произволни реални константи. Да се испитаат особините на Ојлеровата апроксимација на дадениот модел во поглед на стабилноста на неговите решенија. Со други зборови, доколку набљудуваниот континуален систем е стабилен, дали е таков и неговиот дискретен модел добиен според Ојлеровата постапка?

**Решение:** Со воведување на смените:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x'(t) \end{aligned} \quad (\text{I-4.141})$$

се добива следниот систем од две диференцијални равенки од прв ред:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= y(t) - ax_1(t) - bx_2(t) \end{aligned} \quad (\text{I-4.142})$$

Ојлеровите апроксимации на равенките (I-4.142) се:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + T \cdot x_{2,k} \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + T(y_k - ax_{1,k} - bx_{2,k}); \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{I-4.143})$$

каде што  $T$  е прираснувањето на времето  $t$ , односно чекорот на интеграција според Ојлеровата постапка.

Очигледно е дека системот опишан со равенката (I-4.140) ќе биде стабилен за секое позитивно  $a$  и  $b$ . Останува да се испита стабилноста на моделот (I-4.143).

Карактеристичниот полином на дискретниот систем (I-4.143) е даден со следната детерминанта:

$$a(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} z-1 & -T \\ aT & z-1+bT \end{vmatrix} = z^2 + (bT-2)z + (1-bT+aT^2) \quad (\text{I-4.144})$$

а неговите нули се:

$$z_{1,2} = 1 - \frac{bT}{2} \pm \sqrt{T^2 \left( \frac{b^2}{4} - a \right)} \quad (\text{I-4.145})$$

Очигледно, положбата на половите (I-4.145) на дискретниот модел (I-4.143) во  $z$ -комплексната рамнина, а со тоа и неговата стабилност, ќе зависи од вредноста на параметрите  $a$  и  $b$ , но и од вредноста на усвоениот чекор на интеграција  $T$ . Така, на пример, за  $a = 25$  и  $b = 6$  се добива:

$$z_{1,2} = 1 - 3T \pm j4T \quad (\text{I-4.146})$$

па системот (I-4.143) ќе биде нестабилен за секое  $T \geq 0.24$ , бидејќи:

$$|z_{1,2}|_{T \geq 0.24} = |1 - 3T \pm j4T|_{T \geq 0.24} \geq 1 \quad (\text{I-4.147})$$

Ако, пак,  $a = 0.25$  и  $b = 0.6$ , половите на системот (I-4.143) ќе бидат:

$$z_{1,2} = 1 - 0.3T \pm j0.4T \quad (\text{I-4.148})$$

па за  $T = 1$ , на пример, тие ќе се наоѓаат во единичниот круг од  $z$ -комплексната рамнина  $|z| \leq 1$ :

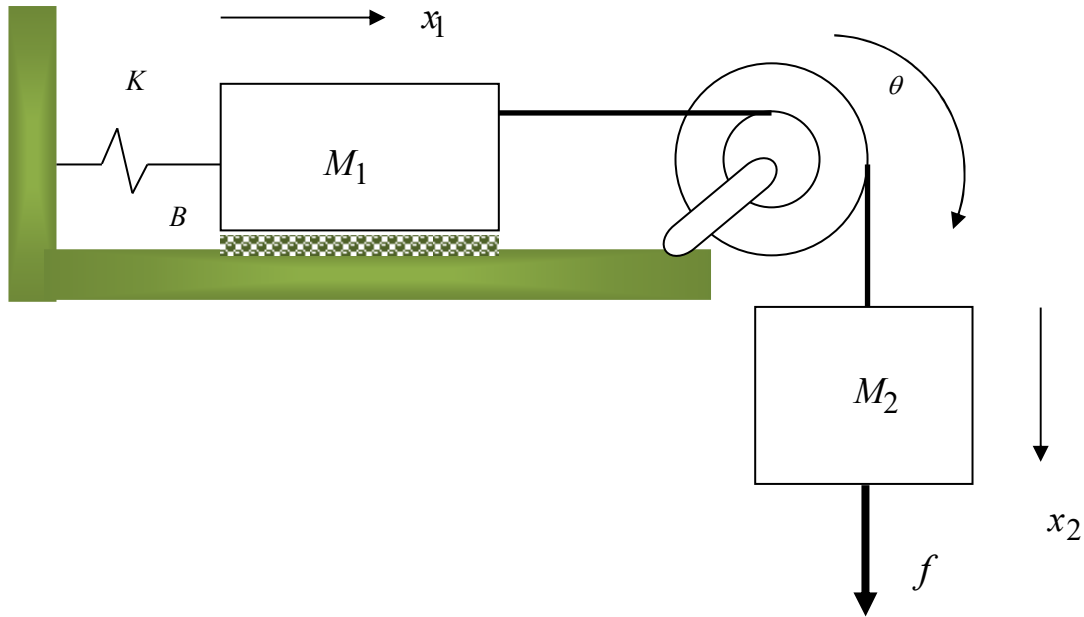
$$|z_{1,2}|_{T=1} = |0.7 \pm j0.4| < 1 \quad (\text{I-4.149})$$

Меѓутоа, за  $T = 2.5$ , при истиот избор на параметрите  $a$  и  $b$ :

$$|z_{1,2}|_{T=2.5} = |0.25 \pm j1| > 1 \quad (\text{I-4.150})$$

што значи дека моделот (I-4.143) е нестабилен.

**Задача I-4.19.** Да се состави дискретен модел во просторот на состојби на механичкиот систем од слика I-4.10. Системот се состои од два тега со маси  $M_1 = 180\text{kg}$  и  $M_2 = 160\text{kg}$ , меѓусебно поврзани со јаже префрлено преку макара. Тегот  $M_1$  од левата страна е прицврстен за неподвижна вертикална подлога (сид) со помош на пружина со коефициент на крутост  $K = 270 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  и се движи по хоризонтална подлога намачкана со масло со коефициент на триење  $B = 0.18 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ . Макаратата има внатрешен и надворешен радиус  $R_1 = 100\text{mm}$  и  $R_2 = 150\text{mm}$ , соодветно, а врз тегот  $M_2$  кој виси на јажето од макаратата дејствува надворешна сила  $f(t)$ . Моделот да се состави во однос на поместувањето  $x_2(t)$  на вториот тег. (Упатство: пред почетокот на дејството на силата  $f(t)$  системот бил во рамнотежа, што значи не мора да се води сметка за Земјината тежа која дејствува врз  $M_2$ .)



Слика I-4.10. Илустрација кон задачата I- 4.19

**Решение:**

$$M_1 x_1''(t) + B x_1'(t) + K x_1(t) = T_1(t)$$

$$M_2 x_2''(t) + T_2(t) = f(t) \quad (I-4.151)$$

$$R_1 T_1(t) = R_2 T_2(t)$$

$$x_1(t) = R_1 \theta(t)$$

$$x_2(t) = R_2 \theta(t)$$

$$T_1(t) = \frac{R_2}{R_1} T_2(t) = \frac{1}{N} T_2(t)$$

$$x_1(t) = \frac{R_2}{R_1} x_2(t) = \frac{1}{N} x_2(t) \quad (I-4.152)$$

$$M_1 x_1''(t) + B x_1'(t) + K x_1(t) = T_1(t) \Rightarrow$$

$$M_1 N x_2''(t) + B N x_2'(t) + K N x_2(t) = \frac{1}{N} T_2(t) \Rightarrow$$

$$T_2(t) = M_1 N^2 x_2''(t) + B N^2 x_2'(t) + K N^2 x_2(t)$$



$$M_2 x_2''(t) + T_2(t) = f(t) \Rightarrow$$

$$M_2 x_2''(t) + M_1 N^2 x_2''(t) + B N^2 x_2'(t) + K N^2 x_2(t) = f(t) \Rightarrow$$

$$(M_2 + M_1 N^2) x_2''(t) + B N^2 x_2'(t) + K N^2 x_2(t) = f(t)$$

$$240 x_2''(t) + 0.08 x_2'(t) + 120 x_2(t) = f(t)$$

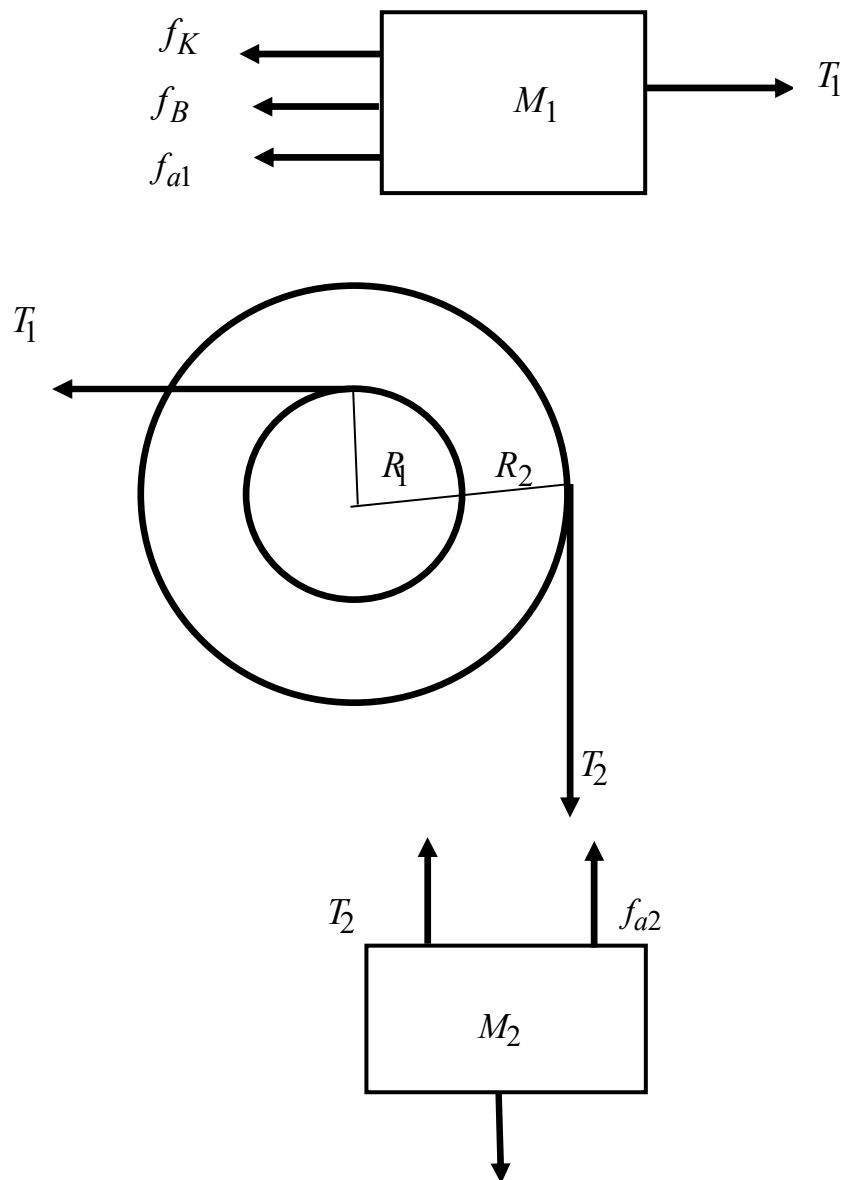
$$x_2''(t) + 0.5 x_2(t) = 0.004 f(t) \tag{I-4.153}$$

Еден модел на набљудуваниот механички систем во просторот на состојби е следниот:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.004 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [1 \ 0], d = 0 \tag{I-4.154}$$

и со негова дискретизација се добива следниот дискретен модел:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{f}(T) &= L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\}_{t=T} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0.5 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\}_{t=T} = \\ &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 0.5} & \frac{1}{s^2 + 0.5} \\ \frac{-0.5}{s^2 + 0.5} & \frac{s}{s^2 + 0.5} \end{bmatrix} \right\}_{t=T} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T\right) & \sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T\right) \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{b}} &= \int_0^T \mathbf{f}(t) \mathbf{b} dt = 0.004 \begin{bmatrix} \int_0^T \sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) dt \\ \int_0^T \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) dt \end{bmatrix} = \\ &= 0.004 \begin{bmatrix} -2 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \Big|_0^T \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \Big|_0^T \end{bmatrix} = 0.004 \begin{bmatrix} 2 - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T\right) \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}T\right) \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{c}} &= \mathbf{c} \tag{I-4.155} \end{aligned}$$



Слика I-4.11. Дијаграм на силите што дејствуваат врз одделните тела од системот

## II-1. ОЈЛЕРОВИ ПОСТАПКИ

**Задача II-1.1.** Нека динамичкото поведење на еден систем со влез  $y(t)$  и излез  $x(t)$ , при што влезот  $y(t)$  секогаш се смета за однапред позната и зададена функција, е опишано со диференцијалната равенка:

$$x'(t) = f[x(t), y(t), t] \quad (\text{II-1.1})$$

со почетен услов:

$$x_0 = x(t_0) \quad (\text{II-1.2})$$

Да се одреди Ојлеровата апроксимација на оваа равенка, односно соодветниот дискретен еквивалент (модел) на набљудуваниот континуален систем.

**Решение:** Нека:

$$x_k = x(t_k); \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II-1.3})$$

се вредностите на одсивот  $x(t)$  на набљудуваниот динамички систем опишан со (II-1.1), односно вредностите на решението на диференцијалната равенка (II-1.1) во дискретните временски мигови  $t = t_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Тогаш нивните прираснувања на крајот од еквиливантните временски интервали:

$$t_{k+1} - t_k = T = \text{const.} > 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II-1.4})$$

се дадени со изразите:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II-1.5})$$

Диференцијалната равенка (II-1.1) во прво приближување може да се претстави преку прираснувањето (II-1.5) на следниот начин:

$$x' \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{\Delta x_k}{T} = f(x_k, y_k, t_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II-1.6})$$

Оттука непосредно следува:

$$\Delta x_k = T f(x_k, y_k, t_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II-1.7})$$

Релацијата (II-1.7) овозможува да се пресмета секоја следна вредност  $x_{k+1} = x(t_{k+1}); k = 0, 1, 2, 3, \dots$  на бараното решение  $x(t)$  ако е позната неговата претходна вредност  $x_k = x(t_k); k = 0, 1, 2, 3, \dots$  според формулата:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = x_k + T f(x_k, y_k, t_k); \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II-1.8})$$

Следствено, релацијата (II-1.8) го претставува бараниот дискретен модел на системот (II-1.1), односно соодветната Ојлерова апроксимација на диференцијалната равенка (II-1.1).

Алгоритамот на Ојлер за приближно решавање диференцијални равенки од обликот (II-1.1) гласи:

$$\begin{aligned}
 t_{k+1} &= t_k + T \\
 \Delta x_k &= Tf(x_k, y_k, t_k) \\
 x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k = x_k + Tf(x_k, y_k, t_k); \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{II-1.9}$$

при што важи (II-1.3) и:

$$f(x_k, y_k, t_k) = f[x(t_k), y(t_k), t_k]; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots
 \tag{II-1.10}$$

**Задача II-1.2.** Да се даде геометриска интерпретација на Ојлеровата метода врз основа на примерот од претходната задача II-1.1.

**Решение:** Нека решението  $x(t)$  на диференцијалната равенка (II-1.1) со почетен услов (II-1.2) се бара на интервалот:

$$t \in [a, b]
 \tag{II-1.11}$$

За таа цел овој интервал со помош на еквилистантните точки:

$$t_{k+1} = t_k + T = t_0 + (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1
 \tag{II-1.12}$$

каде што:

$$T = \frac{b-a}{N} = \text{const.}
 \tag{II-1.13}$$

е растојанието меѓу секои две соседни точки  $t_k$  и  $t_{k+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ), се дели на  $N$  еднакви делови (сегменти):

$$[t_k, t_{k+1}]; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1
 \tag{II-1.14}$$

со широчина  $T$ , така што:

$$t_0 = a, \quad t_N = t_0 + NT = a + N \frac{b-a}{N} = b
 \tag{II-1.15}$$

Во продолжение, низ точката  $M_0(t_0, x_0)$ , која одговара на почетокот од интервалот на интеграција (II-1.11), се повлекува тангента на интегралната

крива  $x(t)$ , која го претставува бараното решение на диференцијалната равенка (II-1.1). Наклонот на оваа тангента е одреден со аголот  $\alpha_0$ , така што:

$$tg\alpha_0 = f(x_0, y_0, t_0) = f[x(t_0), y(t_0), t_0] \quad (II-1.16)$$

а нејзината равенка е:

$$x - x_0 = tg\alpha_0(t - t_0) \quad (II-1.17)$$

Пресекот на тангентата (II-1.17) со вертикалата:

$$t_1 = t_0 + T \quad (II-1.18)$$

каде што  $T$  е чекорот на интеграција (II-1.13), ја одредува точката  $M_1(t_1, x_1)$ , чија ордината  $x_1$  претставува приближна вредност на решението  $x(t)$  на диференцијалната равенка (II-1.1) во мигот  $t = t_1$ :

$$x_1 = x(t_1) = x(t_0 + T) \quad (II-1.19)$$

Врз основа на (II-1.16) и (II-1.17) се добива:

$$tg\alpha_0 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{x_1 - x_0}{T} = f(x_0, y_0, t_0) \quad (II-1.20)$$

па, оттука, за (II-1.19) следува:

$$x_1 = x_0 + Tf(x_0, y_0, t_0) \quad (II-1.21)$$

Точката  $M_1(t_1, x_1)$  претставува почетна точка за вториот сегмент на интеграција  $[t_1, t_2]$ , низ која се повлекува нова права:

$$x - x_1 = tg\alpha_1(t - t_1) \quad (II-1.22)$$

со наклон:

$$tg\alpha_1 = f(x_1, y_1, t_1) = f[x(t_1), y(t_1), t_1] \quad (II-1.23)$$

Пресекот на оваа права со вертикалата:

$$t_2 = t_1 + T = t_0 + 2T \quad (II-1.24)$$

ја дава точката  $M_2(t_2, x_2)$ , чија ордината  $x_2$  претставува приближна вредност на бараното решение  $x(t)$  на диференцијалната равенка (II-1.1) за  $t = t_2$ :

$$x_2 = x(t_2) = x(t_1 + T) = x(t_0 + 2T) \quad (II-1.25)$$

и таа се пресметува според формулата:

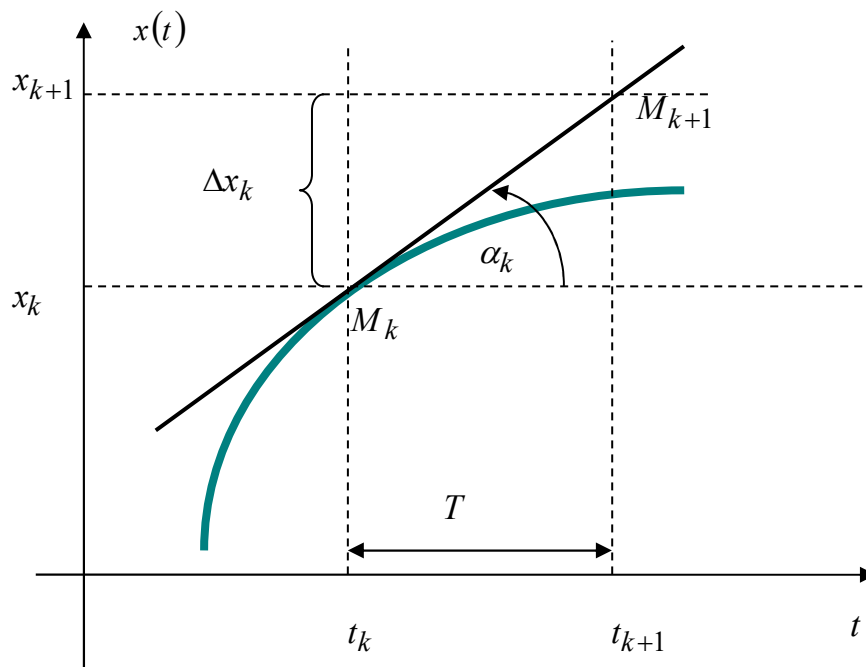
$$x_2 = x_1 + Tf(x_1, y_1, t_1) \quad (\text{II-1.26})$$

Прикажаната постапка продолжува на ист начин и за  $(k = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$ . На тој начин, на секој сегмент на интеграција (II-1.14) од набљудуваниот интервал (II-1.11), оригиналната крива  $x(t)$ , која го претставува бараното решение на диференцијалната равенка (II-1.1), се апроксимира со отсечки од правата:

$$x - x_k = tg\alpha_k(t - t_k); \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (\text{II-1.27})$$

чиј наклон е одреден со аголот:

$$tg\alpha_k = f(x_k, y_k, t_k) = f[x(t_k), y(t_k), t_k]; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (\text{II-1.28})$$



Слика II-1.1. Геометриска интерпретација на методот на Ојлер

Со други зборови, на набљудуваниот интервал на интеграција (II-1.11), оригиналната крива  $x(t)$ , односно бараното решение на диференцијалната равенка (II-1.1), се заменува со искршена права линија, според постапката прикажана на слика II-1.1. Добиената полигонална линија се нарекува Ојлерова линија и колку е поголем бројот точки  $N$  толку таа подобро ја апроксимира бараната интегрална крива  $x(t)$ . Може да се покаже дека ако функцијата  $f[x(t), y(t), t]$  е непрекината, тогаш на доволно мал интервал  $[a, b]$ , низата од полигонални линии на Ојлер конвергира кон бараната интегрална крива  $x(t)$  кога  $N \rightarrow \infty$ , односно  $T \rightarrow 0$ .

**Задача II-1.3.** Со помош на методот на Ојлер да се пресмета вредноста  $x(2)$  на одзивот  $x(t)$  на системот, чија диференцијална равенка на динамичко поведење гласи:

$$tx'(t) + x(t) = 2y(t); \quad x(1) = 2 \quad (\text{II-1.29})$$

ако неговиот влез  $y(t)$  е зададен со:

$$y(t) = t, t \geq 0 \quad (\text{II-1.30})$$

**Решение:** Од (II-1.29) и (II-1.30) непосредно следува:

$$x'(t) = f[x(t), y(t), t] = 2 - \frac{x(t)}{t} \quad (\text{II-1.31})$$

Равенката (II-1.31) се решава на интервалот:

$$t \in [1, 2] \quad (\text{II-1.32})$$

при што за чекор на интеграција може да се усвои  $T = 0.5 \text{ sec}$ . Тогаш, со оглед на усвоениот чекор на интеграција и (II-1.31), а во согласност со алгоритмот на Ојлер (II-1.9), бараната вредност  $x(2)$  на одзивот  $x(t)$  на системот (II-1.29) се добива по вториот чекор на интеграција:

$$k = 0: \quad t_1 = t_0 + T = 1 + 0.5 = 1.5$$

$$f[x(t_0), y(t_0), t_0] = f[x(1), y(1), 1] = 2 - \frac{x(1)}{1} = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_0) + Tf[x(t_0), y(t_0), t_0] = \\ &= x(1.5) = x(1) + 0.5f[x(1), y(1), 1] = 2 + 0.5(0) = 2 \end{aligned} \quad (\text{II-1.33})$$

$$k = 1: \quad t_2 = t_1 + T = 1.5 + 0.5 = 2.0$$

$$f[x(t_1), y(t_1), t_1] = f[x(1.5), y(1.5), 1.5] = 2 - \frac{x(1.5)}{1.5} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x(t_1) + Tf[x(t_1), y(t_1), t_1] = \\ &= x(2.0) = x(1.5) + 0.5f[x(1.5), y(1.5), 1.5] = 2 + 0.5\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3} \end{aligned} \quad (\text{II-1.34})$$

и изнесува приближно:

$$x(2) \approx 2.33 \quad (\text{II-1.35})$$

**Задача II-1.4.** Со помош на методот на Ојлер да се пресмета одзивот  $x(t)$  на динамичкиот систем опишан со линеарниот модел:

$$x'(t) + x(t) = y(t); \quad x(0) = 0 \quad (\text{II-1.36})$$

во мигот  $t = 0.5$ , ако влезот  $y(t)$  е зададен со (II-1.30).

**Решение:** Одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот динамички систем претставува решение на диференцијалната равенка (II-1.36), кое во конкретниот случај се бара на интервалот:

$$t \in [0; 0.5] \quad (\text{II-1.37})$$

Равенката (II-1.36), со мало преуредување и воведување на (II-1.30), може да се доведе на облик:

$$x'(t) = t - x(t) = f[x(t), t] \quad (\text{II-1.38})$$

а за чекор на интеграција може да се усвои  $T = 0.1$ . Тогаш соодветните пресметки и резултати според алгоритмот на Ојлер се дадени во таблица II-1.1, од каде се гледа дека одзивот  $x(t)$  на системот (II-1.36) во мигот  $t = 0.5$  приближно изнесува:

$$x(0.5) \approx 0.0905 \quad (\text{II-1.39})$$

Точното решение  $x_e(t)$  на равенката (II-1.36), при дадените почетни услови, е:

$$x(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad t \geq 0 \quad (\text{II-1.40})$$

а неговите вредности за  $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  се впишани во претпоследната колона од таблица II-1.1. Оттука лесно можат да се определат грешките на Ојлеровиот метод во одделните чекори на интеграција на равенката (II-1.36) и тие се дадени во последната колона од таблица II-1.1.

**Таблица II-1.1. Пресметки на решението од задачата II-1.4**

$k$	$t_k$	$x_k$	$f(x_k, t_k)$	$\Delta x_k$	$x_e(t_k)$	$\delta_k = x(t_k) - x_e(t_k)$
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1	0.0000	0.1000	0.1000	0.0048	0.0048
2	0.2	0.0100	0.1900	0.0190	0.0187	0.0087
3	0.3	0.0290	0.2710	0.0271	0.0408	0.0118
4	0.4	0.0561	0.3439	0.0344	0.0703	0.0142
5	0.5	0.0905			0.1065	0.0160

Методот на Ојлер е еден од наједноставните методи за дигитална симулација на динамичките системи, односно за нумеричко решавање диференцијални равенки.



Освен со голема едноставност, тој се одликува и со голема брзина во добивањето на бараното решение. Меѓутоа, Ојлеровиот метод има два големи недостатока – мала точност на добиеното решение и систематско натрупување на грешките, што може да се забележи и од таблица II-1.1.

**Задача II-1.5.** Со помош на Ојлеровиот метод да се табелира слободниот режим  $x(t)$  на системот:

$$x'(t) - \frac{t}{2}x(t) = 0; \quad x(0) = 1 \quad (\text{II-1.41})$$

во миговите  $t = 0; 0.1; 0.2; \dots; 1.0$ .

**Решение:** Чекорот на интеграција во конкретниот случај е  $T = 0.1$ . Резултатите од пресметките се дадени во таблица II-1.2. Точното решение  $x_e(t)$  на диференцијалната равенка (II-1.41) е:

$$x_e(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}, \quad t \geq 0 \quad (\text{II-1.42})$$

а неговите вредности за  $t = 0; 0.1; 0.2; \dots; 1.0$  се внесени во претпоследната колона од таблица II-1.2. Ова овозможува да се пресмета грешката на Ојлеровиот метод за секој чекор на интеграција од решаваниот проблем и тие грешки се прикажани во последната колона од таблица II-1.2. Од таблица II-1.2 лесно може да се забележи дека грешката на Ојлеровиот метод е кумулативна, што се должи на фактот дека секое следно приближување  $x_k$  кон бараното решение  $x$  на дадената диференцијална равенка е извор на нови грешки, кои се собираат со претходните.

**Таблица II-1.2. Пресметки на решението од задачата II-1.5**

$k$	$t_k$	$x_k$	$f(x_k, t_k)$	$\Delta x_k$	$x_e(t_k)$	$\delta_k = x(t_k) - x_e(t_k)$
0	0.0	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.0000	0.0500	0.0050	1.0025	0.0025
2	0.2	1.0050	0.1005	0.0101	1.0100	0.0050
3	0.3	1.0151	0.1523	0.0152	1.0227	0.0076
4	0.4	1.0303	0.2067	0.0207	1.0408	0.0105
5	0.5	1.0509	0.2627	0.0263	1.0845	0.0136
6	0.6	1.0772	0.3232	0.0323	1.0942	0.0170
7	0.7	1.0950	0.3883	0.0388	1.1303	0.0208
8	0.8	1.1483	0.4593	0.0459	1.1735	0.0252
9	0.9	1.1942	0.5374	0.0537	1.2244	0.0302
10	1.0	1.2479			1.2840	0.0361

**Задача II-1.6.** Со помош на методот на Ојлер да се пресмета одзивот  $x(t)$  на системот со линеарен модел:

$$x'(t) - x(t) = y(t); \quad x(0) = 1 \quad (\text{II-1.43})$$

во миговите  $t = 0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ , со влез  $y(t) = t, t \geq 0$ .

**Решение:** Одзивот  $x(t)$  на системот опишан со (II-1.43) е решение на диференцијалната равенка (II-1.43), кое во конкретниот случај се бара на интервалот  $t \in [0; 0.5]$ . Согласно Ојлеровата постапка, секоја следна вредност  $x_{k+1} = x(t_{k+1})$  на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот динамички систем се пресметува врз основа на неговата претходна вредност  $x_k = x(t_k)$  според рекурентната формула (II-1.9), при што за чекор на интеграција е усвоено  $T = 0.1$ . Вкупниот број чекори на интеграција во конкретниот случај изнесува  $N = 5$ , а резултатите од пресметките се дадени во таблица II-1.3.

**Таблица II-1.3. Пресметки на решението од задачата II-1.6**

$k$	$t_k$	$x_k$	$f(x_k, t_k)$	$\Delta x_k$	$x_e(t_k)$	$\delta_k = x(t_k) - x_e(t_k)$
0	0.0	1.0000	1.0000	0.1000	1.0000	0.0000
1	0.1	1.1000	1.2000	0.1200	1.1103	0.0003
2	0.2	1.2200	1.4200	0.1420	1.2428	0.0228
3	0.3	1.3620	1.6620	0.1662	1.3997	0.0377
4	0.4	1.5282	1.9282	0.1928	1.5836	0.0554
5	0.5	1.7210			1.7974	0.0764

Едновремено во таблица II-1.3 се прикажани и вредностите на точното решение  $x_e(t)$  на равенката (II-1.43), кое е дадено со изразот:

$$x(t) = 2e^t - t - 1, t \geq 0 \quad (\text{II-1.44})$$

како и грешките на Ојлеровата постапка за соодветните чекори на интеграција.

**Задача II-1.7.** Со помош на Ојлеровата постапка да се определи вредноста  $x(2)$  на одзивот  $x(t)$  на системот чие динамичко поведење е опишано со диференцијалната равенка:

$$x'(t) - x^2(t) = y(t); \quad x(1) = 1 \quad (\text{II-1.45})$$

ако  $y(t) = t, t \geq 0$ .

**Решение:** Решението  $x(t)$  на равенката (II-1.45), која лесно се доведува на облик:

$$x'(t) = t + x^2(t); \quad x(1) = 1 \quad (\text{II-1.46})$$

се бара на сегментот  $t \in [1,2]$ , па, ако за чекор на интеграција се усвои  $T = 0.2$ , соодветните резултати од пресметките ќе бидат како во таблица II-1.4. Ојлеровата постапка подеднакво успешно се применува како во случај на линеарните, така и во случај на нелинеарните динамички системи.

**Таблица II-1.4. Пресметки на решението од задачата II-1.7**

$k$	$t_k$	$x_k$	$f(x_k, t_k)$	$\Delta x_k$
0	1.0	1.000	2.000	0.400
1	1.2	1.400	3.160	0.632
2	1.4	2.032	5.529	1.106
3	1.6	3.138	11.447	2.289
4	1.8	5.427	31.252	6.250
5	2.0	11.877		

**Задача II-1.8.** Со помош на Ојлеровата постапка да се табелира одсивот  $x(t)$  на динамичкиот систем:

$$x(t)x'(t) - x^2(t) = 2y(t), \quad x(0) = 1 \quad (\text{II-1.47})$$

во миговите  $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ , ако  $y(t) = t, t \geq 0$ .

**Решение:** Одсивот  $x(t)$  на набљудуваниот динамички систем е решение на диференцијалната равенка (II-1.47), кое се бара на интервалот  $t \in [0;0.5]$  со чекор  $T = 0.1$ . Соодветните резултати од пресметките според Ојлеровиот алгоритам се дадени во таблица II-1.5.

**Таблица II-1.5. Пресметки на решението од задачата II-1.8**

$k$	$t_k$	$x_k$	$f(x_k, t_k)$	$\Delta x_k$
0	0.0	1.0000	1.0000	0.1000
1	0.1	1.1000	1.2818	0.1282
2	0.2	1.2282	1.5539	0.1554
3	0.3	1.3836	1.8172	0.1817
4	0.4	1.5653	2.0764	0.2076
5	0.5	1.7729		

**Задача II-1.9.** Со помош на Ојлеровата постапка да се определи слободниот режим  $x(t)$  на континуалниот динамички систем опишан со диференцијалната равенка:

$$[T_1 + T_2|x(t)]x'(t) + x(t) = Ky(t); \quad x(0) = 2 \quad (\text{II-1.48})$$

ако  $T_1 = T_2 = 1s$  и  $K = 1s^{-1}$ .

**Решение:** Слободниот режим на набљудуваниот динамички систем е опишан со хомогената диференцијална равенка:

$$[T_1 + T_2|x(t)]x'(t) + x(t) = 0; \quad x(0) = 2 \quad (\text{II-1.49})$$

Оттука:

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{T_1 + T_2|x(t)|} \quad (\text{II-1.50})$$

или, за конкретните вредности на параметрите  $T_1$  и  $T_2$ :

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{T_1 + T_2|x(t)|} \quad (\text{II-1.51})$$

Чекорот на интеграција  $T$ , по правило, се одбира во зависност од временските константи на моделираниот систем. Вообичаено е тој да се одбира според правилото:

$$T = (0.1 \div 0.3)T_{\min} \quad (\text{II-1.52})$$

каде што  $T_{\min}$  е најмалата по вредност временска константа на набљудуваниот систем.

Нека, во конкретниот случај, се усвои  $T = 0.2$ . Тогаш:

$$\Delta x_k = Tf(x_k, t_k) = -0.2 \frac{x_k}{1 + |x_k|}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II-1.53})$$

и:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = x_k - 0.2 \frac{x_k}{1 + |x_k|}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II-1.54})$$

па резултатите од пресметките според рекурентната формула (II-1.54) за  $N = 25$  и  $x_0 = 2$  се дадени во таблица II-1.6.

Таблица II-1.6. Решение на задачата II-1.9 според методот на Ојлер

$k$	$t_k$	$x_k$	$\Delta x_k$	$k$	$t_k$	$x_k$	$\Delta x_k$
0	0.0	2.000	-0.133	13	2.6	0.580	-0.073
1	0.2	1.867	-0.130	14	2.8	0.507	-0.067
2	0.4	1.736	-0.127	15	3.0	0.440	-0.061
3	0.6	1.609	-0.123	16	3.2	0.379	-0.056
4	0.8	1.486	-0.120	17	3.4	0.323	-0.049
5	1.0	1.366	-0.115	18	3.6	0.274	-0.043
6	1.2	1.251	-0.111	19	3.8	0.231	-0.038
7	1.4	1.140	-0.107	20	4.0	0.193	-0.032
8	1.6	1.033	-0.102	21	4.2	0.161	-0.028
9	1.8	0.931	-0.096	22	4.4	0.133	-0.023
10	2.0	0.835	-0.091	23	4.6	0.110	-0.020
11	2.2	0.744	-0.085	24	4.8	0.090	
12	2.4	0.659	-0.079		5.0		

**Задача II-1.10.** Со помош на Ојлеровата постапка да се определи вредноста  $x(0.2)$  на слободниот одсив  $x(t)$  на динамичкиот систем од втор ред опишан со диференцијалната равенка:

$$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = y(t) \quad (\text{II-1.55})$$

ако за почетни услови се усвојат:

$$x(0) = 0, x'(0) = 1 \quad (\text{II-1.56})$$

**Решение:** Слободниот режим на системот (II-1.55), за дадените почетни услови (II-1.56), претставува решение на хомогената диференцијална равенка:

$$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 0; \quad x(0) = 0, x'(0) = 1 \quad (\text{II-1.57})$$

Со воведување на смените:

$$x_1(t) = x(t) \quad (\text{II-1.58})$$

$$x_2(t) = x'(t) \quad (\text{II-1.59})$$

равенката (II-1.57) се трансформира во систем од две диференцијални равенки од прв ред:

$$x_1'(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), t] = x_2(t) \quad (\text{II-1.60})$$

$$x_2'(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), t] = -4x_1(t) - 5x_2(t) \quad (\text{II-1.61})$$

Решението  $x(t)$  на диференцијалната равенка (II-1.57) се бара на интервалот:

$$t \in [0; 0.2] \quad (\text{II-1.62})$$

Временските константи на набљудуваниот систем се:

$$T_1 = 1s, T_2 = 0.25s \quad (\text{II-1.63})$$

па, за чекор на интеграција може да се усвои:

$$T = 0.05 \quad (\text{II-1.64})$$

Тогаш, со оглед на (II-1.60), (II-1.61) и усвоениот чекор на интеграција (II-1.64), според Ојлеровата постапка се добиваат резултатите од таблица II-1.7, од каде се гледа дека бараното решение  $x(0.2)$  на диференцијалната равенка (II-1.60) приближно изнесува:

$$x(0.2) = x_1(0.5) \approx 0.135 \quad (\text{II-1.65})$$

**Таблица II-1.7. Решение на задачата II-1.10 според методот на Ојлер**

$k$	$t_k$	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$\Delta x_{1,k}$	$\Delta x_{2,k}$
0	0.00	0.0000	1.0000	0.0500	-0.2500
1	0.05	0.0500	0.7500	0.0375	-0.1975
2	0.10	0.0875	0.5525	0.0276	-0.1558
3	0.15	0.1151	0.3969	0.0198	-0.1222
4	0.20	0.1349	0.2747		

**Задача II-1.11.** Со помош на Ојлеровата постапка да се табелира одзивот  $x(t)$  на нестационарниот линеарен динамички систем од втор ред, опишан со диференцијалната равенка:

$$x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) = 0 \quad (\text{II-1.66})$$

со почетни услови:

$$x(1) = 1, x'(1) = 0 \quad (\text{II-1.67})$$

на сегментот (II-1.32). За чекор на интеграција да се усвои  $T = 0.1$ .

**Решение:** За  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  дефинирани со (II-1.58)-(II-1.59), од (II-1.66) непосредно следува:

$$x_1'(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), t] = x_2(t) \quad (\text{II-1.68})$$

$$x_2'(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), t] = -\frac{1}{t} x_1(t) \quad (\text{II-1.69})$$

Оттука:

$$\Delta x_{1,k} = T x_{2,k} \quad (\text{II-1.70})$$

$$\Delta x_{2,k} = -T \frac{1}{t_k} x_{1,k}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad (\text{II-1.71})$$

Резултатите од пресметките се дадени во таблица II-1.8.

**Таблица II-1.8. Решение на задачата II-1.11 според методот на Ојлер**

$k$	$t_k$	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$\Delta x_{1,k}$	$\Delta x_{2,k}$
0	1.0	1.0000	0.0000	0.0000	-0.1000
1	1.1	1.0000	-0.1000	-0.0100	-0.0909
2	1.2	0.9900	-0.1909	-0.0191	-0.0825
3	1.3	0.9709	-0.2734	-0.0273	-0.0747
4	1.4	0.9436	-0.3481	-0.0348	-0.0674
5	1.5	0.9088	-0.4155	-0.0416	-0.0606
6	1.6	0.8672	-0.4761	-0.0476	-0.0542
7	1.7	0.8196	-0.5303	-0.0530	-0.0482
8	1.8	0.7666	-0.5765	-0.0578	-0.0426
9	1.9	0.7088	-0.6211	-0.0621	-0.0373
10	2.0	0.6467	-0.6584		

**Задача II-1.12.** Динамичкиот систем со влез  $y(t)$  и излез  $x(t)$  е опишан со диференцијалната равенка:

$$x''(t) = \cos[x(t) + x'(t)]; \quad x(0) = 0, x'(0) = 1 \quad (\text{II-1.72})$$

Со помош на Ојлеровата постапка да се определи одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот систем и неговиот прв извод  $x'(t)$  во мигот  $t = 0.1$ . За чекор на интеграција да се усвои  $T = 0.02$ .

**Решение:** Со воведување на смените (II-1.58)-(II-1.59) во (II-1.72) се добива:

$$x_1'(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), t] = x_2(t) \quad (\text{II-1.73})$$

$$x_2'(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), t] = \cos[x_1(t) + x_1(t)] \quad (\text{II-1.74})$$

па според Ојлеровиот алгоритам се составува таблица II-1.9. Бараните решенија се:

$$x(0.02) = x_1(0.02) \approx 0.102 \quad (\text{II-1.75})$$

$$x'(0.02) = x_2(0.02) \approx 1.0487 \quad (\text{II-1.76})$$

**Таблица II-1.9. Решение на задачата II-1.12 според методот на Ојлер**

$k$	$t_k$	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$\Delta x_{1,k}$	$\Delta x_{2,k}$
0	0.00	0.0000	1.0000	0.0200	0.0108
1	0.02	0.0200	1.0108	0.0202	0.0103
2	0.04	0.0402	1.0211	0.0204	0.0097
3	0.06	0.0606	1.0308	0.0206	0.0092
4	0.08	0.0812	1.0400	0.0208	0.0087
5	0.10	0.1020	1.0487		

**Задача II-1.13.** Да се состави алгоритам за нумеричко решавање на системот равенки:

$$x''(t) + 2x'(t) - x(t) + y(t) = 0; \quad x(0) = x'(0) = 0 \quad (\text{II-1.77})$$

$$y'(t) = x'(t) - 2y(t); \quad y(0) = 1 \quad (\text{II-1.78})$$

со помош на Ојлеровата постапка.

**Решение:** Нека:

$$x_1(t) = x(t) \quad (\text{II-1.79})$$

$$x_2(t) = x'(t) \quad (\text{II-1.80})$$

$$x_3(t) = y(t) \quad (\text{II-1.81})$$

Тогаш:

$$x_1'(t) = x_2(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t), t]; \quad x_1(0) = 0 \quad (\text{II-1.82})$$

$$x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) - x_3(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), t]; \quad x_2(0) = 0 \quad (\text{II-1.83})$$

$$x_3'(t) = x_2(t) - 2x_3(t) = f_3[x_1(t), x_2(t), x_3(t), t]; \quad x_3(0) = 1 \quad (\text{II-1.84})$$



и, следствено, проблемот за нумеричко решавање на дадениот систем равенки се сведува на проблем за нумеричко решавање на системот (II-1.82)-(II-1.84) од три диференцијални равенки од прв ред. Соодветниот алгоритам за нумеричко решавање на овој систем равенки според Ојлеровата постапка гласи:

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= 0; \quad x_{2,0} = 0; \quad x_{3,0} = 1 \\ x_{1,k+1} &= x_{1,k} + T \cdot f_1(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; k) = x_{1,k} + T \cdot x_{2,k} \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + T \cdot f_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; k) = x_{2,k} + T(x_{1,k} - 2x_{2,k} - x_{3,k}) \\ x_{3,k+1} &= x_{3,k} + T \cdot f_3(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; k) = x_{3,k} + T \cdot (x_{2,k} - 2x_{3,k}); \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad \text{(II-1.85)}$$

каде што  $T$  е усвоениот чекор на интеграција.

**Задача II-1.14.** Со помош на Ојлеровата постапка да се определат вредностите на одзивот  $x(t)$  на динамичкиот систем:

$$x'''(t) = y(t); \quad x(1) = 0.042, x'(1) = 0.167, x''(1) = 0.500 \quad \text{(II-1.86)}$$

во миговите  $t = 1, 1.1, 1.2, 1.3$ , ако влезот  $y(t)$  е зададен со (II-1.30).

**Решение:** Со воведување на смените:

$$x_1(t) = x(t) \quad \text{(II-1.87)}$$

$$x_2(t) = x'(t) \quad \text{(II-1.88)}$$

$$x_3(t) = x''(t) \quad \text{(II-1.89)}$$

во (II-1.86) се добива:

$$x_1'(t) = x_2(t) \quad \text{(II-1.90)}$$

$$x_2'(t) = x_3(t) \quad \text{(II-1.91)}$$

$$x_3'(t) = y(t) \quad \text{(II-1.92)}$$

Оттука:

$$\Delta x_{1,k} = T x_{2,k} \quad \text{(II-1.93)}$$

$$\Delta x_{2,k} = T x_{3,k} \quad \text{(II-1.94)}$$

$$\Delta x_{3,k} = T y_k; \quad k = 0, 1, 2 \quad \text{(II-1.95)}$$

Резултатите од пресметките се дадени во таблица II-1.10.

**Таблица II-1.10. Пресметки на решението од задачата II-1.14**

$k$	$t_k$	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$x_{3,k}$	$\Delta x_{1,k}$	$\Delta x_{2,k}$	$\Delta x_{3,k}$	$x_e$	$\delta$
0	1.0	0.042	0.167	0.500	0.017	0.050	0.100	0.042	0
1	1.1	0.059	0.217	0.550	0.022	0.055	0.121	0.061	0.002
2	1.2	0.080	0.272	0.671	0.027	0.067	0.144	0.086	0.006
3	1.3	0.108	0.339	0.815				0.119	0.011

Приближното решение на диференцијалната равенка (II-1.86) е  $x_1(t)$  и неговите вредности на интервалот  $t \in [1; 1.3]$  се прикажани во третата колона од таблица II-1.10. Точното решение на равенката (II-1.86) е:

$$x_e(t) = \frac{t^4}{24} \quad (\text{II-1.96})$$

и неговите вредности во точките на интеграција се дадени во претпоследната колона од таблица II-1.10. Во последната колона од таблица II-1.10 е прикажана грешката во секој од чекорите на интеграција.

**Задача II-1.15.** Да се состави алгоритам за нумеричко решавање на системот равенки:

$$x'''(t) + 3x''(t) + 3x'(t) + x(t) + y'(t) + 2y(t) = 0; \quad x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 1 \quad (\text{II-1.97})$$

$$y''(t) = 2y'(t) - 2y(t) + x'(t) - 2x(t); \quad y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (\text{II-1.98})$$

со помош на Ојлеровата постапка.

**Решение:** Со постепено интегрирање на равенката (II-1.97) се добива:

$$x'''(t) = -3x''(t) - 3x'(t) - x(t) - y'(t) - 2y(t)$$

$$x''(t) = \int_0^t [-3x''(\tau) - 3x'(\tau) - x(\tau) - y'(\tau) - 2y(\tau)] d\tau + x''(0)$$

$$x'(t) = \int_0^t x''(\tau) d\tau + x'(0)$$

$$x(t) = \int_0^t x'(\tau) d\tau + x(0) \quad (\text{II-1.99})$$

додека со постепено интегрирање на равенката (II-1.98) се добива:

$$y''(t) = 2y'(t) - 2y(t) + x'(t) - 2x(t)$$

$$y'(t) = \int_0^t [2y'(\tau) - 2y(\tau) + x'(\tau) - 2x(\tau)] d\tau + y'(0)$$

$$y(t) = \int_0^t y'(\tau) d\tau + y(0) \quad (\text{II-1.100})$$

Нека:

$$x_1(t) = x(t) = \int_0^t x_2(\tau) d\tau + x_1(0)$$

$$x_2(t) = x'(t) = \int_0^t x_3(\tau) d\tau + x_2(0)$$

$$x_3(t) = x''(t) = \int_0^t [-3x_3(\tau) - 3x_2(\tau) - x_1(\tau) - y'(\tau) - 2y(\tau)] d\tau + x_3(0)$$

$$x_4 = y(t) = \int_0^t x_5(\tau) d\tau + x_4(0)$$

$$x_5(t) = y'(t) = \int_0^t [2x_5(\tau) - 2x_4(\tau) + x_2(\tau) - 2x_1(\tau)] d\tau + x_5(0) \quad (\text{II-1.101})$$

Тогаш:

$$x_1'(t) = x_2(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), t]; \quad x_1(0) = 0$$

$$x_2'(t) = x_3(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), t]; \quad x_2(0) = 0$$

$$x_3'(t) = f_3[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), t] =$$

$$= -3x_3(t) - 3x_2(t) - x_1(t) - x_5(t) - 2x_4(t); \quad x_3(0) = 1$$

$$x_4'(t) = x_5(t) = f_4[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), t]; \quad x_4(0) = 1$$

$$x_5'(t) = f_5[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), t] =$$

$$= 2x_5(t) - 2x_4(t) + x_2(t) - 2x_1(t); \quad x_5(0) = 0 \quad (\text{II-1.102})$$

и, следствено, проблемот за нумеричко решавање на дадениот систем равенки (II-1.97) – (II-1.98) се сведува на проблем за нумеричко решавање на системот (II-1.102), кој се состои од пет диференцијални равенки од прв ред. Соодветниот алгоритам за нумеричко решавање на овој систем равенки според Ојлеровата постапка гласи:

$$\begin{aligned}
 x_{1,0} &= 0; \quad x_{2,0} = 0; \quad x_{3,0} = 1; \quad x_{4,0} = 1; \quad x_{5,0} = 0 \\
 x_{1,k+1} &= x_{1,k} + T \cdot f_1(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; x_{5,k}; k) = x_{1,k} + T \cdot x_{2,k} \\
 x_{2,k+1} &= x_{2,k} + T \cdot f_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; x_{5,k}; k) = x_{2,k} + T \cdot x_{3,k} \\
 x_{3,k+1} &= x_{3,k} + T \cdot f_3(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; x_{5,k}; k) = \\
 &= x_{3,k} + T \cdot [-3x_3(t) - 3x_2(t) - x_1(t) - x_5(t) - 2x_4(t)] \\
 x_{4,k+1} &= x_{4,k} + T \cdot f_4(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; x_{5,k}; k) = x_{4,k} + T \cdot x_{5,k} \\
 x_{5,k+1} &= x_{5,k} + T \cdot f_5(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; x_{5,k}; k) = \\
 &= x_{5,k} + T \cdot [2x_5(t) - 2x_4(t) + x_2(t) - 2x_1(t)]; \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{II-1.103}$$

каде што  $T$  е усвоениот чекор на интеграција.

**Задача II-1.16.** Да се табелира принудниот одзив  $x(t)$  на динамичкиот систем со преносна функција:

$$G(s) = \frac{s+4}{(s-1)(s-2)(s-3)} \tag{II-1.104}$$

на интервалот  $t \in [0; 0.05]$ , ако неговиот влез е:

$$y(t) = 1, t \geq 0 \tag{II-1.105}$$

**Решение:** Диференцијалната равенка на динамичко поведење на набљудуваниот систем со влез  $y(t)$  и излез  $x(t)$  има облик:

$$x'''(t) - 6x''(t) + 11x'(t) - 6x(t) = y'(t) + 4y(t) \tag{II-1.106}$$

а еден негов модел во просторот на состојби е:

$$x_1'(t) = 6x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2'(t) = -11x_1(t) + x_3(t) + y(t)$$

$$x_3'(t) = 6x_1(t) + 4y(t)$$

$$x(t) = x_1(t) \tag{II-1.107}$$

Да се моделира диференцијалната равенка од трет ред (II-1.106) е исто што и да се моделира системот диференцијални равенки од прв ред (II-1.107), бидејќи тие се еквивалентни во однос на своето решение  $x(t)$ . Следствено, во согласност со Ојлеровата постапка, за нумеричко решавање на системот равенки (II-1.107) се добива следниот алгоритам:

$$\begin{aligned}
 t_{k+1} &= t_k + T \\
 \Delta x_{1,k} &= Tf_1(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) = T(x_{1,k} + 6x_{2,k}) \\
 x_{1,k+1} &= x_{1,k} + \Delta x_{1,k} \\
 \Delta x_{2,k} &= Tf_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) = T(-11x_{1,k} + x_{3,k} + 1) \\
 x_{2,k+1} &= x_{2,k} + \Delta x_{2,k} \\
 \Delta x_{3,k} &= Tf_3(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) = T(6x_{1,k} + 4) \\
 x_{3,k+1} &= x_{3,k} + \Delta x_{3,k}
 \end{aligned} \tag{II-1.108}$$

Временските константи на набљудуваниот динамички систем се:  $T_1 = 1s$ ,  $T_2 = 0.5s$  и  $T_3 = 1/3s$ , па за чекор на интеграција може да се усвои  $T = 0.1s$ . Тогаш резултатите од пресметките според (II-1.108) се дадени во таблица II-1.11. Точното решение на равенката (II-1.106) е:

$$x_e(t) = -\frac{2}{3} + \frac{5}{2}e^t - 3e^{2t} + \frac{7}{6}e^{3t}, \quad t \geq 0 \tag{II-1.109}$$

и неговите вредности во точките на интеграција се дадени во претпоследната колона од таблица II-1.11 за споредба со приближното решение  $x_1(t)$ .

**Таблица II-1.11. Пресметки на решението од задача II-1.16 со чекор  $T = 0.1s$**

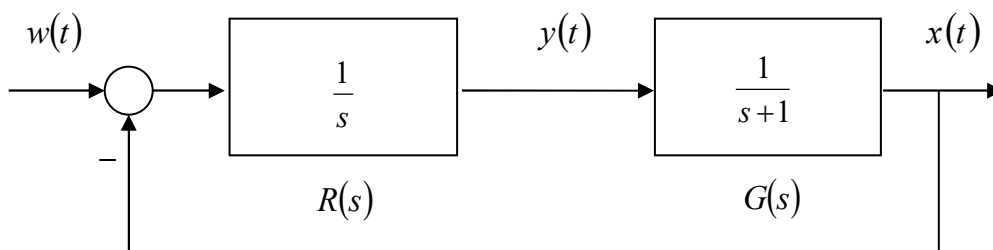
$k$	$t_k$	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$x_{3,k}$	$\Delta x_{1,k}$	$\Delta x_{2,k}$	$\Delta x_{3,k}$	$x_e$	$\delta$
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1000	0.4000	0.0000	0.0000
1	0.1	0.0000	0.1000	0.4000	0.0100	0.1400	0.4000	0.0069	0.0069
2	0.2	0.0100	0.2400	0.8000	0.0300	0.1690	0.4060	0.0372	0.0272
3	0.3	0.0400	0.4090	1.2060	0.0649	0.1766	0.4240	0.1112	0.0712
4	0.4	0.1049	0.5856	1.6300	0.1215	0.1476	0.4629	0.2597	0.1548
5	0.5	0.2264	0.7332	2.0929				0.5289	0.3028

Со цел да се покаже влијанието од големината на чекорот на интеграција врз точноста на пресметките според Ојлеровиот метод, пресметките за  $T = 0.01s$  се дадени во таблица II-1.12.

**Таблица II-1.12. Пресметки на решението од задача II-1.16 со чекор  $T = 0.01s$**

$k$	$t_k$	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$x_{3,k}$	$\Delta x_{1,k}$	$\Delta x_{2,k}$	$\Delta x_{3,k}$	$x_e$	$\delta$
0	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.01000	0.04000	0.00000	0.00000
1	0.01	0.00000	0.01000	0.04000	0.00010	0.01040	0.04000	0.00005	0.00005
2	0.02	0.00010	0.02040	0.08000	0.00021	0.01079	0.04001	0.00021	0.00011
3	0.03	0.00031	0.03119	0.12001	0.00033	0.01117	0.04002	0.00049	0.00018
4	0.04	0.00064	0.04236	0.16003	0.00046	0.01153	0.04004	0.00091	0.00027
5	0.05	0.00110	0.05389	0.20007				0.00150	0.00040

**Задача II-1.17.** Даден е затворениот систем на автоматско управување од слика II-1.2.



Слика II-1.2. Илустрација кон задачата II-1.17

Со помош на Ојлеровата постапка да се определат вредностите  $y(0.2)$ ,  $x(0.2)$ ,  $y(0.4)$  и  $x(0.4)$  на управувачкиот сигнал  $y(t)$  и одзивот  $x(t)$  на овој систем ако, под претпоставка, системот бил во мирување кога на неговиот референтен влез е донесена возбуда од облик:

$$w(t) = 1, t \geq 0 \quad (\text{II-1.110})$$

**Решение:** Затворениот систем на автоматско управување од слика II-1.2 е опишан со следните равенки:

- диференцијална равенка на динамичко поведење на објектот  $G(s)$

$$x'(t) + x(t) = y(t) \quad (\text{II-1.111})$$

- диференцијална равенка на динамичко поведење на регулаторот  $R(s)$

$$y'(t) = w(t) - x(t) \quad (\text{II-1.112})$$

кои, потоа, можат да се доведат на облик:

$$x'(t) = f[x(t), y(t), t] = y(t) - x(t) \quad (\text{II-1.113})$$

$$y'(t) = g[x(t), y(t), t] = 1 - x(t) \quad (\text{II-1.114})$$

Решенијата  $y(t)$  и  $x(t)$  на системот диференцијални равенки (II-1.113)-(II-1.114) ги претставуваат управувачкиот сигнал и одзивот на набљудуваниот систем од слика II-1.2 и тие се бараат на интервалот  $t \in [0; 0.4]$ . Притоа почетните услови се нулеви, а за чекор на интеграција може да се усвои  $T = 0.2$  s. Тогаш, во согласност со алгоритмот на Ојлер се добива:

$$k = 0: t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$\Delta x_0 = T(y_0 - x_0) = 0$$

$$\Delta y_0 = T(1 - x_0) = 0.2$$

$$k = 1: t_1 = t_0 + T = 0.2$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 0$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0.2 \quad (\text{II-1.115})$$

$$\Delta x_1 = T(y_1 - x_1) = 0.04$$

$$\Delta y_1 = T(1 - x_1) = 0.2$$

$$k = 2: t_2 = t_1 + T = 0.4$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = 0.04$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0.4 \quad (\text{II-1.116})$$

па бараните вредности на сигналите  $y(t)$  и  $x(t)$  се:

$$y(0.2) = y_1 \approx 0.2; x(0.2) = x_1 \approx 0 \quad (\text{II-1.117})$$

$$y(0.4) = y_2 \approx 0.4; x(0.4) = x_2 \approx 0.04 \quad (\text{II-1.118})$$

**Задача II-1.18.** Линеарен стационарен континуален динамички систем од втор ред со влез  $y(t)$  и излез  $x(t)$  е опишан со следната диференцијална равенка:

$$x''(t) + bx'(t) + ax(t) = y(t), \quad t \geq 0 \quad (\text{II-1.119})$$

каде што  $a$  и  $b$  се произволни реални константи. Да се испитаат особините на Ојлеровата апроксимација на диференцијалната равенка (II-1.119) во поглед на стабилноста на нејзините решенија. Со други зборови, доколку набљудуваниот

континуален систем е стабилен, дали е таков и неговиот дискретен модел добиен според Ојлеровата постапка?

**Решение:** Со воведување на смените (II-1.58)-(II-1.59) во (II-1.119) се добива следниот систем од две диференцијални равенки од прв ред:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= x_2(t) \\x_2'(t) &= y(t) - ax_1(t) - bx_2(t)\end{aligned}\tag{II-1.120}$$

Ојлеровите апроксимации на равенките (II-1.120) се:

$$\begin{aligned}x_{1,k+1} &= x_{1,k} + T \cdot x_{2,k} \\x_{2,k+1} &= x_{2,k} + T(y_k - ax_{1,k} - bx_{2,k}); \quad k = 0,1,2,\dots\end{aligned}\tag{II-1.121}$$

каде што  $T$  е прираснувањето на времето  $t$ , односно чекорот при интегрирањето на диференцијалната равенка (II-1.119) според Ојлеровата постапка.

Очигледно е дека системот опишан со равенката (II-1.119) ќе биде стабилен за секое позитивно  $a$  и  $b$ . Останува да се испита стабилноста на моделот (II-1.121).

Карактеристичниот полином на дискретниот систем (II-1.121) е даден со следната детерминанта:

$$a(z) = \det(zI - \underline{A}) = \begin{vmatrix} z-1 & -T \\ aT & z-1+bT \end{vmatrix} = z^2 + (bT-2)z + (1-bT+aT^2)\tag{II-1.122}$$

а неговите нули се:

$$z_{1,2} = 1 - \frac{bT}{2} \pm \sqrt{T^2 \left( \frac{b^2}{4} - a \right)}\tag{II-1.123}$$

Очигледно, положбата на половите (II-1.123) на дискретниот модел (II-1.121) во  $z$ -комплексната рамнина, а со тоа и неговата стабилност, ќе зависи од вредноста на параметрите  $a$  и  $b$ , но и од вредноста на усвоениот чекор на интеграција  $T$ . Така, на пример, за  $a = 10$  и  $b = 2$  се добива:

$$z_{1,2} = 1 - T \pm j3T\tag{II-1.124}$$

па системот (II-1.121) ќе биде нестабилен за секое  $T \geq 0.2$ , бидејќи:

$$\left| z_{1,2} \right|_{T \geq 0.2} = \left| 1 - T \pm j3T \right|_{T \geq 0.2} \geq 1\tag{II-1.125}$$

Ако, пак,  $a = 0.1$  и  $b = 0.2$ , половите на системот (II-1.121) ќе бидат:



$$z_{1,2} = 1 - 0.1T \pm j0.3T \quad (\text{II-1.126})$$

па за  $T = 0.1$ , на пример, тие ќе се наоѓаат во единичниот круг од  $z$ -комплексната рамнина  $|z| \leq 1$ :

$$|z_{1,2}| = |0.99 \pm j0.03| < 1 \quad (\text{II-1.127})$$

Меѓутоа, за  $T = 2$ , при истиот избор на параметрите  $a$  и  $b$ :

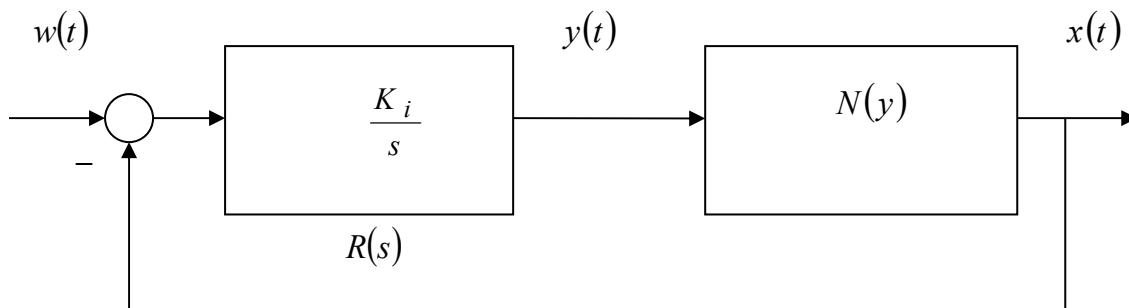
$$|z_{1,2}| = |0.8 \pm j0.6| = 1 \quad (\text{II-1.128})$$

што значи дека моделот (II-1.121) е нестабилен.

**Задача II-1.19.** Да се определи слободниот одзив на затворениот систем на автоматско управување од слика II-1.3 за  $t \in [0; 3.0]s$ . Системот се состои од нелинеарен објект на управување, опишан со моделот:

$$[T + \tau |x(t)|]x'(t) + x(t) = Ky(t); \quad T = \tau = 1s, \quad K = 1s^{-1} \quad (\text{II-1.129})$$

и И-регулатор со коефициент на засилување  $K_i = 10$ . За почетни услови да се усвојат  $x(0) = 2$  и  $x'(0) = 0$ .



Слика II-1.3. Илустрација кон задачата II-1.19

**Решение:** Динамичкото поведение на набљудуваниот нелинеарен затворен систем на автоматско управување од слика II-1.3 е опишано со системот диференцијални равенки:

$$[1 + |x(t)|]x'(t) + x(t) = y(t)$$

$$y'(t) = 10[w(t) - x(t)] \quad (\text{II-1.130})$$

чиј еквивалентен облик е:

$$x'(t) = \frac{y(t) - x(t)}{1 + |x(t)|}$$

$$y'(t) = 10[w(t) - x(t)] \tag{II-1.131}$$

Алгоритмот на Ојлер за нумеричко решавање на системот равенки (II-1.131), ако за чекор на интеграција се усвои  $T = 0.1$ , гласи:

$$t_{k+1} = t_k + T$$

$$\Delta x_k = Tf(x_k, y_k, t_k) = 0.1 \frac{y_k - x_k}{1 + |x_k|}$$

$$\Delta y_k = Tg(x_k, y_k, t_k) = -x_k$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{II-1.132}$$

Пресметките според (II-1.132) се дадени во таблица II-1.13.

**Таблица II-1.13. Пресметки на решението од задачата II-1.19**

$k$	$t_k$	$x_k$	$y_k$	$\Delta x_k$	$\Delta y_k$	$k$	$t_k$	$x_k$	$y_k$	$\Delta x_k$	$\Delta y_k$
0	0.0	2.0000	2.0000	0.0000	2.0000	16	1.6	-1.4389	2.9923	0.1817	1.4389
1	0.1	2.0000	0.0000	-0.0667	2.0000	17	1.7	-1.2572	4.2495	0.2440	1.2572
2	0.2	1.9333	-1.9333	-0.1318	1.9333	18	1.8	-1.0132	5.2627	0.3117	1.0132
3	0.3	1.8015	-3.7348	-0.1976	1.8015	19	1.9	-0.7015	5.9642	0.3918	0.7015
4	0.4	1.6039	-5.3387	-0.2666	1.6039	20	2.0	-0.3097	6.2739	0.5027	0.3097
5	0.5	1.3373	-6.6760	-0.3428	1.3373	21	2.1	0.1930	6.0809	0.4935	-0.1930
6	0.6	0.9945	-7.6705	-0.4344	0.9945	22	2.2	0.6865	5.3944	0.2792	-0.6865
7	0.7	0.5601	-8.2301	-0.5635	0.5601	23	2.3	0.9657	4.4287	0.1762	-0.9657
8	0.8	0.0034	8.2267	0.8195	0.0034	24	2.4	1.1419	3.2868	0.1001	1.1419
9	0.9	0.8229	7.4038	0.3610	0.8229	25	2.5	1.2420	2.0448	0.0358	1.2420
10	1.0	1.1839	6.2199	0.2306	1.1839	26	2.6	1.2778	0.7670	0.0224	1.2778
11	1.1	1.4145	4.8054	0.1404	1.4145	27	2.7	1.2554	0.4884	0.0773	1.2554
12	1.2	1.5549	3.2501	0.0664	1.5549	28	2.8	1.1823	1.6707	0.1307	1.1823
13	1.3	1.6213	1.6292	0.0008	1.6213	29	2.9	1.0516	2.7223	0.1839	1.0516
14	1.4	1.6221	0.0071	0.0616	1.6221	30	3.0	0.8677			
15	1.5	1.5605	1.5534	0.1216	1.5605						

**Задача II-1.20.** Да се состави алгоритам за нумеричко решавање на системот диференцијални равенки:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5y = 0; \quad x(0) = -1; \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (\text{II-1.133})$$

$$\ddot{x} + 2y = \ddot{y}; \quad y(0) = 1; \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (\text{II-1.134})$$

со помош на Ојлеровата постапка. За чекор на интеграција да се усвои  $T = 0.1$ , а решението се бара на интервалот  $[0,1]$ .

**Решение:** Со постепено интегрирање на равенките од дадениот систем се добива:

$$\ddot{x}(t) = -2\dot{x}(t) - 5y(t) \quad (\text{II-1.135})$$

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau + \dot{x}(0) = \int_0^t [-2\dot{x}(\tau) - 5y(\tau)] d\tau + \dot{x}(0) \quad (\text{II-1.136})$$

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + x(0) \quad (\text{II-1.137})$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t) + 2y(t) \quad (\text{II-1.138})$$

$$\dot{y}(t) = \int_0^t \ddot{y}(\tau) d\tau + \dot{y}(0) = \int_0^t [\ddot{x}(\tau) + 2y(\tau)] d\tau + \dot{y}(0) \quad (\text{II-1.139})$$

$$y(t) = \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau + y(0) \quad (\text{II-1.140})$$

Нека:

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$x_3(t) = y(t)$$

$$x_4(t) = \dot{y}(t) \quad (\text{II-1.141})$$

Тогаш:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -2\dot{x}(t) - 5y(t) = -2x_2(t) - 5x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \dot{y}(t) = x_4(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_4(t) &= \ddot{y}(t) = \ddot{x}(t) + 2y(t) = [-2\dot{x}(t) - 5y(t)] + 2y(t) = \\ &= -2\dot{x}(t) - 3y(t) = -2x_2(t) - 3x_3(t)\end{aligned}\quad (\text{II-1.142})$$

ОДНОСНО:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), t] \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) - 5x_3(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), t] \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) = f_3[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), t] \\ \dot{x}_4(t) &= -2x_2(t) - 3x_3(t) = f_4[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), t]\end{aligned}\quad (\text{II-1.143})$$

Ојлеровиот алгоритам за нумеричко решавање на горниот систем равенки е:

$$\begin{aligned}x_1(0) &= -1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1, x_4(0) = 0 \\ t_0 &= 0; T = 0.1 \\ x_{1,k+1} &= x_{1,k} + \Delta x_{1,k} = x_{1,k} + Tf_1(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; t_k) = x_{1,k} + Tx_{2,k} \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + \Delta x_{2,k} = x_{2,k} + Tf_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; t_k) = x_{2,k} + T(-2x_{2,k} - 5x_{3,k}) \\ x_{3,k+1} &= x_{3,k} + \Delta x_{3,k} = x_{3,k} + Tf_3(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; t_k) = x_{3,k} + Tx_{3,k} \\ x_{4,k+1} &= x_{4,k} + \Delta x_{4,k} = x_{4,k} + Tf_4(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; x_{4,k}; t_k) = x_{4,k} + T(-2x_{2,k} - 3x_{3,k}) \\ k &= 0, 1, 2, \dots, 9\end{aligned}\quad (\text{II-1.144})$$

**Задача II-1.21.** Со помош на усовершената метода на Ојлер да се табелира решението  $x(t)$  на диференцијалната равенка:

$$x'(t) = x(t) - \frac{2t}{x(t)}; \quad x(0) = 2 \quad (\text{II-1.145})$$

на отсечката  $t \in [0, 1]$ . За чекор на интеграција да се усвои  $T = 0.2$ .

**Решение:** Од (II-1.145) непосредно следува:

$$f[x(t), t] = x(t) - \frac{2t}{x(t)} \quad (\text{II-1.146})$$

Тогаш, во согласност со алгоритмот на усовершената постапка на Ојлер, во првиот чекор на интеграција се добива:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = x(t_0) = x(0) = 2,$$

$$f(x_0, t_0) = x_0 - \frac{2t_0}{x_0} = 2; \quad \frac{T}{2} f(x_0, t_0) = \frac{0.2}{2}(2) = 0.2$$

$$t_0 + \frac{T}{2} = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$x_{0+\frac{T}{2}} = x_0 + \frac{T}{2} f(x_0, t_0) = 2 + 0.2 = 2.2$$

$$f\left(x_{0+\frac{T}{2}}, t_0 + \frac{T}{2}\right) = f(2.2; 0.1) = 2.2 - 2 \frac{0.1}{2.2} = 2.1091$$

$$\Delta x_0 = Tf\left(x_{0+\frac{T}{2}}, t_0 + \frac{T}{2}\right) = (0.2)(2.1091) = 0.4218$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 2.4218 \tag{II-1.147}$$

Овие и останатите пресметки се дадени во таблица II-1.14.

**Таблица II-1.14. Приближно решение на равенката (II-1.145) добиено со усовершената постапка на Ојлер**

$k$	$t_k$	$x_k$	$\frac{T}{2} \operatorname{tg} \alpha_k$	$t_{k+\frac{1}{2}}$	$x_{k+\frac{1}{2}}$	$\Delta x_k$
0	0.0	2.0000	0.2000	0.1	2.2000	0.4218
1	0.2	2.4218	0.2257	0.3	2.6475	0.4954
2	0.4	2.9172	0.2643	0.5	3.1815	0.5734
3	0.6	3.4906	0.3147	0.7	3.8053	0.6875
4	0.8	4.1781	0.3795	0.9	4.5576	0.8325
5	1.0	5.0106				

## II-2. ТАЈЛОРОВА ФОРМУЛА

**Задача II-2.1.** Еден континуален динамички систем е опишан со следниот модел:

$$\dot{x} = f(t, x, y) \tag{II-2.1}$$

$$\dot{y} = g(t, x, y) \tag{II-2.2}$$

каде што:

$$x = x(t) \tag{II-2.3}$$

$$y = y(t) \quad (\text{II-2.4})$$

$$\dot{x} = \dot{x}(t) = f[t, x(t), y(t)] \quad (\text{II-2.5})$$

$$\dot{y} = \dot{y}(t) = g[t, x(t), y(t)] \quad (\text{II-2.6})$$

а) Да се покаже дека Тајлоровата формула од втор ред во овој случај е дадена со релациите:

$$x(k+1) = x(k) + Tf + \frac{1}{2}T^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (\text{II-2.7})$$

$$y(k+1) = y(k) + Tg + \frac{1}{2}T^2 \left( \frac{\partial g}{\partial t} + f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial g}{\partial y} \right) \quad (\text{II-2.8})$$

б) Со примена на Тајлоровата формула од втор ред да се состави алгоритам за нумеричко решавање на системот равенки:

$$\dot{x} = x + y + 5t, \quad x(0) = 1 \quad (\text{II-2.9})$$

$$\dot{y} = x^2 + y^2 + t^2, \quad y(0) = 2 \quad (\text{II-2.10})$$

**Решение:** а) Тајлоровата формула од втор ред гласи:

$$x(t+h) \approx x(t) + T\dot{x}(t) + \frac{1}{2}T^2\ddot{x}(t) \quad (\text{II-2.11})$$

$$y(t+h) \approx y(t) + T\dot{y}(t) + \frac{1}{2}T^2\ddot{y}(t) \quad (\text{II-2.12})$$

Во конкретниот случај:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} f(t, x, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{II-2.13})$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} g(t, x, y) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial g}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial g}{\partial y} \quad (\text{II-2.14})$$

б) За дадените функции  $f$  и  $g$  важи:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 5, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad (\text{II-2.15})$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \quad (\text{II-2.16})$$

па, бараниот алгоритам ќе биде од облик:

$$x_0 = 1, y_0 = 2, h$$

$$t_{k+1} = t_k + T; k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{k+1} = x_k + T(x_k + y_k + 5t_k) + \frac{1}{2}T^2(5 + x_k + y_k + 5t_k + x_k^2 + y_k^2 + t_k^2)$$

$$y_{k+1} = y_k + T(x_k^2 + y_k^2 + t_k^2) + \frac{1}{2}T^2[2t_k + (x_k + y_k + 5t_k)2x_k + (x_k^2 + y_k^2 + t_k^2)2y_k] \quad (\text{II-2.17})$$

**Задача II-2.2.** Со примена на Тајлоровата формула од втор ред да се состави алгоритам за нумеричко решавање на системот равенки:

$$\dot{x} = xy + 4t, x(0) = -1 \quad (\text{II-2.18})$$

$$\dot{y} = x + 3y - \cos t, y(0) = 1 \quad (\text{II-2.19})$$

**Решение:** Врз основа на покажаното во претходната задача следува:

$$t_{k+1} = t_k + T; k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{k+1} = x_k + T(x_k y_k + 4t_k) + \frac{1}{2}T^2[4 + (x_k y_k + 4t_k)y_k + (x_k + 3y_k - \cos t_k)x_k]$$

$$y_{k+1} = y_k + T(x_k + 3y_k - \cos t_k) + \frac{1}{2}T^2[\sin t_k + (x_k y_k + 4t_k) + 3(x_k + 3y_k - \cos t_k)] \quad (\text{II-2.20})$$

**Задача II-2.3.** Со помош на Тајлоровата постапка од втор ред да се состави алгоритам за дигитална симулација на одзивот на динамички систем од втор ред опишан со диференцијалната равенка:

$$\ddot{x}(t) + 3x(t)\dot{x}(t) + x(t) = y(t) \quad (\text{II-2.21})$$

$$y(t) = \cos t, t \geq 0 \quad (\text{II-2.22})$$

$$x(0) = 2, \dot{x}(0) = 1 \quad (\text{II-2.23})$$

За чекор на интеграција да се усвои  $T = 0.1$  и решението да се определи на интервалот  $t \in [0, 10]$ .

**Решение:**

$$\ddot{x}(t) = -3x(t)\dot{x}(t) - x(t) + y(t) = -3x(t)\dot{x}(t) - x(t) + \cos t$$

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau + \dot{x}(0) = \int_0^t [-3x(\tau)\dot{x}(\tau) - x(\tau) + \cos \tau] d\tau + 2$$

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + x(0) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + 1 \quad (\text{II-2.24})$$

Нека:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{II-2.25})$$

Тогаш:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{x}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{x}(t) = -3x(t)\dot{x}(t) - x(t) + \text{cost} = -3x_1(t)x_2(t) - x_1(t) + \text{cost} \end{aligned} \quad (\text{II-2.26})$$

односно:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), t] \\ \dot{x}_2(t) &= -3x_1(t)x_2(t) - x_1(t) + \text{cost} = f_2[x_1(t), x_2(t), t] \end{aligned} \quad (\text{II-2.27})$$

Според Тајлоровата формула од втор ред:

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &\approx x_1(t) + T\dot{x}_1(t) + \frac{1}{2}T^2\ddot{x}_1(t) \\ x_2(t+T) &\approx x_2(t) + T\dot{x}_2(t) + \frac{1}{2}T^2\ddot{x}_2(t) \end{aligned} \quad (\text{II-2.28})$$

при што:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1[x_1(t), x_2(t), t] = x_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) &= \frac{d}{dt} f_1[x_1(t), x_2(t), t] = \frac{\partial}{\partial t} f_1[x_1(t), x_2(t), t] \frac{dt}{dt} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_1} f_1[x_1(t), x_2(t), t] \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_2} f_1[x_1(t), x_2(t), t] \frac{dx_2(t)}{dt} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} f_1[x_1(t), x_2(t), t] + f_1[x_1(t), x_2(t), t] \frac{\partial}{\partial x_1} f_1[x_1(t), x_2(t), t] + \\ &+ f_2[x_1(t), x_2(t), t] \frac{\partial}{\partial x_2} f_1[x_1(t), x_2(t), t] \end{aligned} \quad (\text{II-2.29})$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), t] = -3x_1(t)x_2(t) - x_1(t) + \text{cost}$$

$$\ddot{x}_2(t) = \frac{d}{dt} f_2[x_1(t), x_2(t), t] = \frac{\partial}{\partial t} f_2[x_1(t), x_2(t), t] \frac{dt}{dt} +$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial x_1} f_2[x_1(t), x_2(t), t] \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2[x_1(t), x_2(t), t] \frac{dx_2(t)}{dt} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} f_2[x_1(t), x_2(t), t] + f_1[x_1(t), x_2(t), t] \frac{\partial}{\partial x_1} f_2[x_1(t), x_2(t), t] + \\
 & + f_2[x_1(t), x_2(t), t] \frac{\partial}{\partial x_2} f_2[x_1(t), x_2(t), t] \tag{II-2.30}
 \end{aligned}$$

Од изразите (II-2.27) непосредно следува:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} f_1[x_1(t), x_2(t), t] &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x_1} f_1[x_1(t), x_2(t), t] &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x_2} f_1[x_1(t), x_2(t), t] &= 1 \\
 \frac{\partial}{\partial t} f_2[x_1(t), x_2(t), t] &= -\sin t \\
 \frac{\partial}{\partial x_1} f_2[x_1(t), x_2(t), t] &= -3x_2(t) - 1 \\
 \frac{\partial}{\partial x_2} f_2[x_1(t), x_2(t), t] &= -3x_1(t) \tag{II-2.31}
 \end{aligned}$$

Оттука, со воведување на парцијалните изводи (II-2.31) во равенките (II-2.29) и (II-2.30), се добива:

$$\begin{aligned}
 x_1(t+T) &\approx x_1(t) + T\dot{x}_1(t) + \frac{1}{2}T^2\ddot{x}_1(t) = \\
 &= x_1(t) + Tx_2(t) + \frac{1}{2}T^2\{0 + x_2(t) \cdot 0 + [-3x_1(t)x_2(t) - x_1(t) + \cos t] \cdot 1\} = \\
 &= x_1(t) + Tx_2(t) + \frac{1}{2}T^2[-3x_1(t)x_2(t) - x_1(t) + \cos t] = \\
 &= x_1(t) + Tx_2(t) - \frac{3}{2}T^2x_1(t)x_2(t) - \frac{T^2}{2}x_1(t) + \frac{T^2}{2}\cos t \tag{II-2.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t+T) &\approx x_2(t) + T\dot{x}_2(t) + \frac{1}{2}T^2\ddot{x}_2(t) = \\
 &= x_2(t) + T[-3x_1(t)x_2(t) - x_1(t) + \cos t] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2}T^2 \left[ -\sin t - 3x_2^2(t) - x_2(t) + 9x_1^2(t)x_2(t) + 3x_1^2(t) - 3x_1(t)\cos t \right] = \\
 & = x_2(t) - 3Tx_1(t)x_2(t) - Tx_1(t) + T\cos t - \frac{1}{2}T^2\cos t - \frac{3}{2}T^2x_2^2(t) - \\
 & - \frac{T^2}{2}x_2(t) + \frac{9}{2}T^2x_1^2(t)x_2(t) + \frac{3}{2}T^2x_1^2(t) - \frac{3}{2}T^2x_1(t)\cos t
 \end{aligned} \tag{II-2.33}$$

Следствено, бараниот алгоритам за нумеричко решавање на диференцијалната равенка (2.21) со помош на Тајлоровата постапка од втор ред, со чекор  $T = 0.1$  на интервалот  $t \in [0,10]$ , ќе биде:

$$\begin{aligned}
 & x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1 \\
 & T = 0.1, \quad t_0 = 0 \\
 & t_{k+1} = t_k + T; \quad k = 0, 1, 2, \dots, 99 \\
 & x_{1,k+1} = x_{1,k} + Tx_{2,k} - \frac{3}{2}T^2x_{1,k}x_{2,k} - \frac{T^2}{2}x_{1,k} + \frac{T^2}{2}\cos t_k \\
 & x_{2,k+1} = x_{2,k} - 3Tx_{1,k}x_{2,k} + Tt_k + \frac{1}{2}T^2 - \frac{3}{2}T^2x_{2,k}^2 + \frac{9}{2}T^2x_{1,k}^2x_{2,k} - \frac{3}{2}T^2t_kx_{1,k} \\
 & x_{2,k+1} = x_{2,k} - 3Tx_{1,k}x_{2,k} - Tx_{1,k} + T\cos t_k - \frac{1}{2}T^2\sin t_k - \frac{3}{2}T^2x_{2,k}^2 - \\
 & - \frac{T^2}{2}x_{2,k} + \frac{9}{2}T^2x_{1,k}^2x_{2,k} + \frac{3}{2}T^2x_{1,k}^2 - \frac{3}{2}T^2x_{1,k}\cos t_k
 \end{aligned} \tag{II-2.34}$$

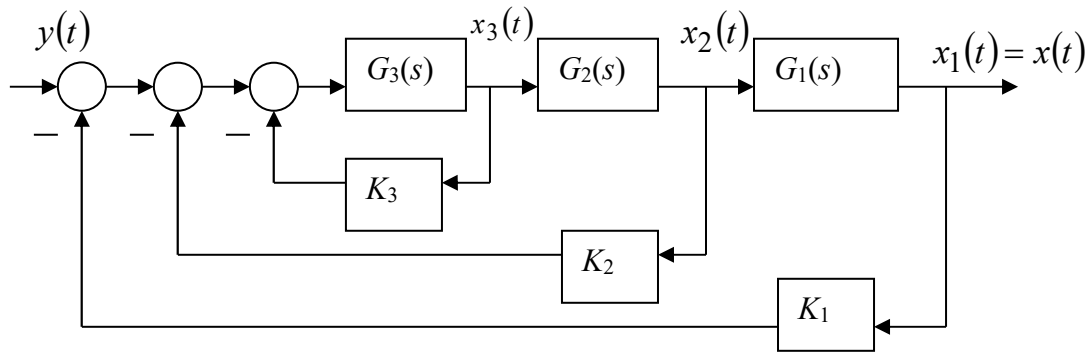
**Задача II-2.4.** Даден е затворениот линеарен континуален динамички систем со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$  од слика II-2.1. Со помош на Тајлоровата формула од втор ред, да се состави алгоритам за дигитална симулација на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот систем, ако  $y(t) = (t+2)h(t)$ . Нека:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \tag{II-2.35}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+2} \tag{II-2.36}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s+3} \tag{II-2.37}$$

и  $K_1, K_2, K_3 = const..$  За чекор на интеграција да се усвои  $T = 0.2$ .



Слика II-2.1. Илустрација кон задачата II-2.4

**Решение:** Од структурната блок-шема на слика II-2.1 непосредно следува:

$$X_1(s) = G_1(s)X_2(s) = \frac{1}{s+1} X_2(s)$$

$$X_2(s) = G_2(s)X_3(s) = \frac{1}{s+2} X_3(s)$$

$$X_3(s) = G_3(s)E(s) = \frac{1}{s+3} [Y(s) - K_1X_1(s) - K_2X_2(s) - K_3X_3(s)] \quad (\text{II-2.38})$$

$$X(S) = X_1(s) \quad (\text{II-2.39})$$

Равенките (II-2.38) можат да се преуредат во облик:

$$(s+1)X_1(s) = X_2(s)$$

$$(s+2)X_2(s) = X_3(s)$$

$$(s+3)X_3(s) = Y(s) - K_1X_1(s) - K_2X_2(s) - K_3X_3(s) \quad (\text{II-2.40})$$

односно:

$$sX_1(s) = -X_1(s) + X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -2X_2(s) + X_3(s)$$

$$sX_3(s) = -K_1X_1(s) - K_2X_2(s) - (K_3 + 3)X_3(s) + Y(s) \quad (\text{II-2.41})$$

Равенките (II-2.41) претставуваат систем од три диференцијални равенки од прв ред:

$$x_1'(t) = -x_1(t) + x_2(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t); t]$$

$$x_2'(t) = -2x_2(t) + x_3(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t); t]$$

$$x_3'(t) = -K_1x_1(t) - K_2x_2(t) - (K_3 + 3)x_3(t) + y(t) = f_3[x_1(t), x_2(t), x_3(t); t] \quad (\text{II-2.42})$$

и тие без проблем можат да се симулираат на дигитален пресметувач со помош на Тајлоровата постапка од втор ред според следниот алгоритам:

$$t_0 = 0; \quad x_{1,0} = x_{2,0} = x_{3,0} = 0; \quad T, K_1, K_2, K_3$$

$$y_k = t_k + 2$$

$$t_{k+1} = t_k + T$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{1,k} &= Tf_1(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) = \\ &= Tf_1(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left[ -f_1(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + f_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) \right] = \\ &= T(-x_{1,k} + x_{2,k}) + \frac{T^2}{2} \left[ -(-x_{1,k} + x_{2,k}) + (-2x_{2,k} + x_{3,k}) \right] = \\ &= T(-x_{1,k} + x_{2,k}) + \frac{T^2}{2} (x_{1,k} - 3x_{2,k} + x_{3,k}) \end{aligned}$$

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + \Delta x_{1,k}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{2,k} &= Tf_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) = \\ &= Tf_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left[ -2f_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + f_3(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) \right] = \\ &= T(-2x_{2,k} + x_{3,k}) + \\ &+ \frac{T^2}{2} \left\{ -2(-2x_{2,k} + x_{3,k}) + [y_k - K_1x_{1,k} - K_2x_{2,k} - (K_3 + 3)x_{3,k}] \right\} = \\ &= T(-2x_{2,k} + x_{3,k}) + \\ &+ \frac{T^2}{2} [y_k - K_1x_{1,k} + (4 - K_2)x_{2,k} - (K_3 + 5)x_{3,k}] \end{aligned}$$

$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + \Delta x_{2,k}$$

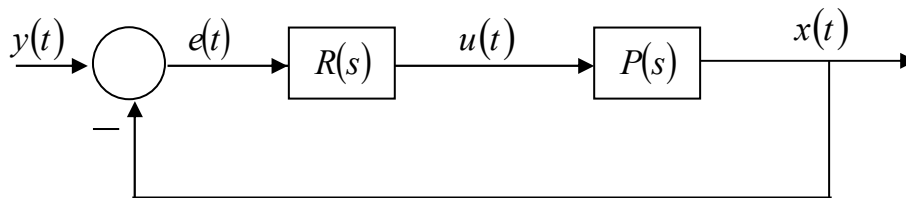
$$\begin{aligned} \Delta x_{3,k} &= Tf_3(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) = \\ &= Tf_3(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} [1 - K_1f_1 - K_2f_2 - (K_3 + 3)f_3] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= T[y_k - K_1 x_{1,k} - K_2 x_{2,k} - (K_3 + 3)x_{3,k}] + \frac{T^2}{2} \{1 - K_1(-x_{1,k} + x_{2,k}) - \\
 &- K_2(-2x_{2,k} + x_{3,k}) - (K_3 + 3)[y_k - K_1 x_{1,k} - K_2 x_{2,k} - (K_3 + 3)x_{3,k}]\} = \\
 &x_k = x_{1,k} \\
 &k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}
 \tag{II-2.43}$$

Забелешка: Од равенките (II-2.42) непосредно следува:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0 \\
 \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 1 \\
 \frac{\partial f_3}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -K_1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -K_2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -(K_3 + 3)
 \end{aligned}
 \tag{II-2.44}$$

**Задача II-2.5.** Со помош на Тајлоровата формула од втор ред, да се состави алгоритам за дигитална симулација на одзивот  $x(t)$  на затворениот линеарен континуален систем на автоматско управување од слика II-2.2 со влез  $y(t) = th(t)$ .



Слика II-2.2. Илустрација кон задачата II-2.5

Еден математички модел на објектот  $P(s)$  во просторот на состојби е:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
 x(t) &= [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{v}(t)
 \end{aligned}
 \tag{II-2.45}$$

додека регулаторот  $R(s)$  е опишан со равенките:

$$\begin{aligned}
 w_1'(t) &= w_2(t) \\
 w_2'(t) &= -2.7w_1(t) - 9.3w_2(t) + e(t)
 \end{aligned}$$

$$u(t) = -0.3w_1(t) - 4.7w_2(t) + e(t) \quad (\text{II-2.46})$$

**Решение:** Од матричниот запис на моделот во просторот на состојби на објектот на управување во набљудуваниот затворен САУ следуваат следните диференцијални равенки на векторот на состојби:

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= -6v_3(t) + 11u(t) = f_1[v_1(t), v_2(t), v_3(t), u(t), t] \\ v_2'(t) &= v_1(t) - 11v_3(t) + u(t) = f_2[v_1(t), v_2(t), v_3(t), u(t), t] \\ v_3'(t) &= v_2(t) - 6v_3(t) = f_3[v_1(t), v_2(t), v_3(t), u(t), t] \end{aligned} \quad (\text{II-2.47})$$

Овие равенки можат да се симулираат според приложениот алгоритам, добиен со примена на Тајлоровата постапка од втор ред.

$$\begin{aligned} \Delta v_{1,k} &= T f_1(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; u_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v_3} + u' \frac{\partial f_1}{\partial u} \right)_k = \\ &= T(-6v_{3,k} + 11u_k) + \frac{T^2}{2} [-6(v_{2,k} - 6v_{3,k}) + 11u'_k] = \\ &= T(-6v_{3,k} + 11u_k) + \frac{T^2}{2} (-6v_{2,k} + 36v_{3,k} + 11u'_k) \\ v_{1,k+1} &= v_{1,k} + \Delta v_{1,k} \\ \Delta v_{2,k} &= T f_2(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; u_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial v_3} + u' \frac{\partial f_2}{\partial u} \right)_k = \\ &= T(v_{1,k} - 11v_{3,k} + u_k) + \frac{T^2}{2} [(-6v_{3,k} + 11u_k) - 11(v_{2,k} - 6v_{3,k}) + u'_k] = \\ &= T(v_{1,k} - 11v_{3,k} + u_k) + \frac{T^2}{2} (11u_k - 11v_{2,k} + 60v_{3,k} + u'_k) \\ v_{2,k+1} &= v_{2,k} + \Delta v_{2,k} \\ \Delta v_{3,k} &= T f_3(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; u_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial v_3} + u' \frac{\partial f_3}{\partial u} \right)_k = \\ &= T(v_{2,k} - 6v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [-(v_{1,k} - 11v_{3,k} + u_k) - 6(v_{2,k} - 6v_{3,k})] = \\ &= T(v_{2,k} - 6v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} (-u_k - v_{1,k} - 6v_{2,k} + 47v_{3,k}) \end{aligned} \quad (\text{II-2.48})$$

$$v_{3,k+1} = v_{3,k} + \Delta v_{3,k}$$

На сличен начин, со помош на Тајлоровата постапка од втор ред, за дигитална симулација на равенките:

$$w_1'(t) = w_2(t) = g_1[w_1(t), w_2(t), e(t), t]$$

$$w_2'(t) = -2.7w_1(t) - 9.3w_2(t) + e(t) = g_2[w_1(t), w_2(t), e(t), t] \quad (\text{II-2.49})$$

се добива следниот алгоритам:

$$\Delta w_{1,k} = Tg_1(w_{1,k}; w_{2,k}; e_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial w_1} + g_2 \frac{\partial g_1}{\partial w_2} + e' \frac{\partial g_1}{\partial e} \right)_k =$$

$$= T(w_{2,k}) + \frac{T^2}{2} (-2.7w_{1,k} - 9.3w_{2,k} + e_k)$$

$$w_{1,k+1} = w_{1,k} + \Delta w_{1,k}$$

$$\Delta w_{2,k} = Tg_2(w_{1,k}; w_{2,k}; e_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_2}{\partial w_1} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial w_2} + e' \frac{\partial g_2}{\partial e} \right) =$$

$$= T(-2.7w_{1,k} - 9.3w_{2,k} + e_k) + \frac{T^2}{2} [-2.7w_{2,k} - 9.3(-2.7w_{1,k} - 9.3w_{2,k} + e_k) + e'_k] =$$

$$= T(-2.7w_{1,k} - 9.3w_{2,k} + e_k) + \frac{T^2}{2} [25.11w_{1,k} + 83.79w_{2,k} - 9.3e_k + e'_k]$$

$$w_{2,k+1} = w_{2,k} + \Delta w_{2,k} \quad (\text{II-2.50})$$

Имајќи ја на ум важноста на редоследот на извршување на одделните пресметки, бараниот алгоритам за дигитална симулација на одзивот  $x(t)$  на затворениот линеарен континуален систем на автоматско управување од слика II-2.2, добиен врз основа на Тајлоровата постапка од втор ред, е даден во продолжение:

$$w_{1,0} = w_{2,0} = 0; \quad v_{1,0} = v_{2,0} = v_{3,0} = 0; \quad x_0 = 0; \quad t_0 = 0; \quad T$$

$$e_0 = y_0 - x_0 = y_0$$

$$e'_0 = 1$$

$$u_0 = -0.3w_{1,0} - 4.7w_{2,0} + e_0 = e_0 \quad (\text{II-2.51})$$

$$u'_0 = e'_0 \quad (\text{II-2.52})$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{II-2.53})$$

$$y_k = t_k$$

$$e_k = y_k - x_k$$

$$u_k = -0.3w_{1,k} - 4.7w_{2,k} + e_k$$

$$e'_k = 1 - v_{2,k} + 6v_{3,k}$$

$$u'_k = -0.3g_{1,k} - 4.7g_{2,k} + e'_k$$

$$\Delta w_{1,k} = Tg_1(w_{1,k}; w_{2,k}; e_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial w_1} + g_2 \frac{\partial g_1}{\partial w_2} + e' \frac{\partial g_1}{\partial e} \right)_k =$$

$$= T(w_{2,k}) + \frac{T^2}{2} (-2.7w_{1,k} - 9.3w_{2,k} + e_k)$$

$$w_{1,k+1} = w_{1,k} + \Delta w_{1,k}$$

$$\Delta w_{2,k} = Tg_2(w_{1,k}; w_{2,k}; e_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_2}{\partial w_1} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial w_2} + e' \frac{\partial g_2}{\partial e} \right) =$$

$$= T(-2.7w_{1,k} - 9.3w_{2,k} + e_k) + \frac{T^2}{2} [-2.7w_{2,k} - 9.3(-2.7w_{1,k} - 9.3w_{2,k} + e_k) + e'_k] =$$

$$= T(-2.7w_{1,k} - 9.3w_{2,k} + e_k) + \frac{T^2}{2} [25.11w_{1,k} + 83.79w_{2,k} - 9.3e_k + e'_k]$$

$$w_{2,k+1} = w_{2,k} + \Delta w_{2,k}$$

$$\Delta v_{1,k} = Tf_1(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; u_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v_3} + u' \frac{\partial f_1}{\partial u} \right)_k =$$

$$= T(-6v_{3,k} + 11u_k) + \frac{T^2}{2} [-6(v_{2,k} - 6v_{3,k}) + 11u'_k] =$$

$$= T(-6v_{3,k} + 11u_k) + \frac{T^2}{2} (-6v_{2,k} + 36v_{3,k} + 11u'_k)$$

$$v_{1,k+1} = v_{1,k} + \Delta v_{1,k}$$

$$\Delta v_{2,k} = Tf_2(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; u_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial v_3} + u' \frac{\partial f_2}{\partial u} \right)_k =$$

$$= T(v_{1,k} - 11v_{3,k} + u_k) + \frac{T^2}{2} [(-6v_{3,k} + 11u_k) - 11(v_{2,k} - 6v_{3,k}) + u'_k] =$$

$$= T(v_{1,k} - 11v_{3,k} + u_k) + \frac{T^2}{2} (11u_k - 11v_{2,k} + 60v_{3,k} + u'_k)$$



$$v_{2,k+1} = v_{2,k} + \Delta v_{2,k}$$

$$\Delta v_{3,k} = T f_3(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; u_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial v_3} + u' \frac{\partial f_3}{\partial u} \right)_k =$$

$$= T(v_{2,k} - 6v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [(v_{1,k} - 11v_{3,k} + u_k) - 6(v_{2,k} - 6v_{3,k})] =$$

$$= T(v_{2,k} - 6v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} (u_k + v_{1,k} - 6v_{2,k} + 25v_{3,k})$$

$$v_{3,k+1} = v_{3,k} + \Delta v_{3,k}$$

$$x_k = v_{3,k}$$

$$t_{k+1} = t_k + T$$

(II-2.54)

Забелешка: Од равенките (II-2.47), (II-2.49) и равенката (II-2.46) непосредно следува:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_3} = -6, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 11$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_1} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_3} = -11, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_2} = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_3} = -6, \quad \frac{\partial f_3}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial w_1} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial w_2} = 1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial w_1} = -0.3, \quad \frac{\partial g_2}{\partial w_2} = -4.7, \quad \frac{\partial g_2}{\partial e} = 1$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t} = 1$$

(II-2.55)

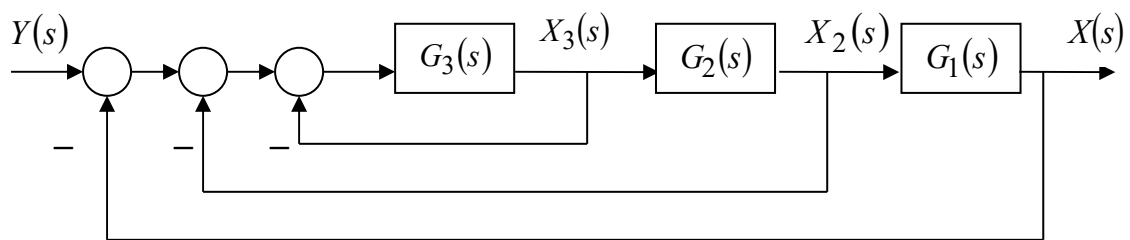
**Задача II-2.6.** Со помош на Тајлоровата формула од втор ред, да се состави алгоритам за дигитална симулација на одзивот  $x(t)$  на затворениот линеарен континуален динамички систем од слика II-2.3 со влез  $y(t)$ . Да се усвои:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad (\text{II-2.56})$$

$$G_2(s) = \frac{2}{2s+1} \quad (\text{II-2.57})$$

$$G_3(s) = \frac{3}{3s+1} \quad (\text{II-2.58})$$

$$y(t) = (t^2)h(t) \quad (\text{II-2.59})$$



Слика II-2.3. Илустрација кон задачата II-2.6

**Решение:** Од структурната блок-шема на слика II-2.3 непосредно следува:

$$X(s) = X_1(s) = G_1(s)X_2(s) = \frac{1}{s+1} X_2(s) \Rightarrow (s+1)X_1(s) = X_2(s)$$

$$X_2(s) = G_2(s)X_3(s) = \frac{2}{2s+1} X_3(s) \Rightarrow (2s+1)X_2(s) = 2X_3(s)$$

$$X_3(s) = G_3(s)E(s) = \frac{3}{3s+1} [Y(s) - X_1(s) - X_2(s) - X_3(s)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3s+1)X_3(s) = 3Y(s) - 3X_1(s) - 3X_2(s) - 3X_3(s) \quad (\text{II-2.60})$$

$$X(s) = X_1(s) \quad (\text{II-2.61})$$

односно:

$$sX_1(s) = -X_1(s) + X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -\frac{1}{2}X_2(s) + X_3(s)$$

$$sX_3(s) = Y(s) - X_1(s) - X_2(s) - \frac{4}{3}X_3(s) \quad (\text{II-2.62})$$

$$X(s) = X_1(s) \quad (\text{II-2.63})$$

Релациите (II-2.62) го претставуваат следниот систем диференцијални равенки од прв ред:

$$x_1'(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t), t] = -x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2'(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), t] = -\frac{1}{2}x_2(t) + x_3(t)$$

$$x_3'(t) = f_3[x_1(t), x_2(t), x_3(t), t] = y(t) - x_1(t) - x_2(t) - \frac{4}{3}x_3(t) \quad (\text{II-2.64})$$

за кои важи:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -\frac{4}{3} \quad (\text{II-2.65})$$

Со помош на Тајлоровата постапка од втор ред, за дигитална симулација на равенките (II-2.64) се добива следниот алгоритам:

$$\begin{aligned} \Delta x_{1,k} &= Tf_1(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) = \\ &= Tf_1 + \frac{T^2}{2} (-f_1 + f_2) = \\ &= T(-x_{1,k} + x_{2,k}) + \frac{T^2}{2} \left[ -(-x_{1,k} + x_{2,k}) + \left( -\frac{1}{2}x_{2,k} - x_{3,k} \right) \right] = \\ &= T(-x_{1,k} + x_{2,k}) + \frac{T^2}{2} \left( x_{1,k} - \frac{3}{2}x_{2,k} - x_{3,k} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-2.66})$$

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + \Delta x_{1,k} \quad (\text{II-2.67})$$

$$\Delta x_{2,k} = Tf_2(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) =$$

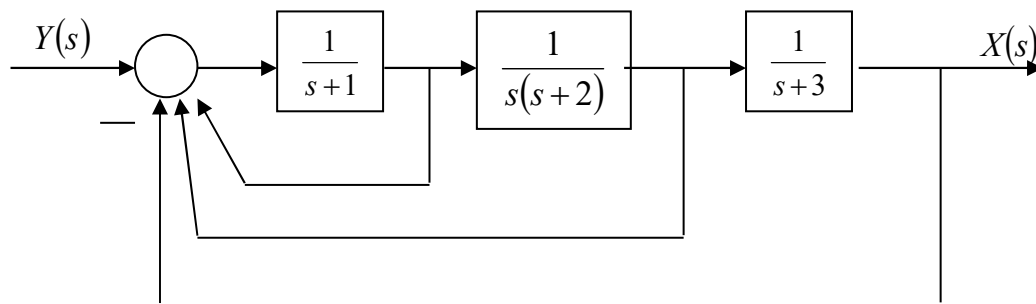
$$\begin{aligned}
 &= Tf_2 + \frac{T^2}{2} \left( -\frac{1}{2} f_2 + f_3 \right) = \\
 &= T \left( -\frac{1}{2} x_{2,k} + x_{3,k} \right) + \frac{T^2}{2} \left[ -\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} x_{2,k} + x_{3,k} \right) + \left( t_k^2 - x_{1,k} - x_{2,k} - \frac{4}{3} x_{3,k} \right) \right] = \\
 &= T \left( -\frac{1}{2} x_{2,k} + x_{3,k} \right) + \frac{T^2}{2} \left( t_k^2 - x_{1,k} - \frac{3}{4} x_{2,k} - \frac{11}{6} x_{3,k} \right) \tag{II-2.68}
 \end{aligned}$$

$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + \Delta x_{2,k} \tag{II-2.69}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{3,k} &= Tf_3(x_{1,k}; x_{2,k}; x_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) = \\
 &= Tf_3 + \frac{T^2}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - f_1 - f_2 - \frac{4}{3} f_3 \right] = \\
 &= T \left( t_k^2 - x_{1,k} - x_{2,k} - \frac{4}{3} x_{3,k} \right) + \\
 &+ \frac{T^2}{2} \left[ 2t_k - (-x_{1,k} + x_{2,k}) - \left( -\frac{1}{2} x_{2,k} + x_{3,k} \right) - \frac{4}{3} \left( t_k^2 - x_{1,k} - x_{2,k} - \frac{4}{3} x_{3,k} \right) \right] = \\
 &= T \left( t_k^2 - x_{1,k} - x_{2,k} - \frac{4}{3} x_{3,k} \right) + \\
 &+ \frac{T^2}{2} \left[ 2t_k - \frac{4}{3} t_k^2 + \frac{7}{3} x_{1,k} + \frac{5}{6} x_{2,k} + \frac{7}{9} x_{3,k} \right] \tag{II-2.70}
 \end{aligned}$$

$$x_{3,k+1} = x_{3,k} + \Delta x_{3,k} \tag{II-2.71}$$

**Задача II-2.7.** Со помош на Тајлоровата формула од втор ред да се состави алгоритам за нумеричко пресметување на одзивот на затворениот систем од слика II-2.4.



Слика II-2.4. Илустрација кон задачата II-2.7

**Решение:** Ако структурната блок-шема од слика II-2.4 се претстави како на слика II-2.5, за состојбени големини можат да се усвојат излезите од соодветните интегратори. Тогаш, врз основа на слика II-2.5 се добиваат потребните равенки на векторот на состојби, претставени во комплексното подрачје.

$$X_1(s) = \frac{1}{s+3} X_2(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2} X_3(s)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s} X_4(s)$$

$$X_4(s) = \frac{1}{s+1} E(s) \quad (\text{II-2.72})$$

каде што:

$$E(s) = Y(s) - X_1(s) - X_2(s) - X_4(s) \quad (\text{II-2.73})$$

По мало пресметување:

$$(s+3)X_1(s) = X_2(s)$$

$$(s+2)X_2(s) = X_3(s)$$

$$sX_3(s) = X_4(s)$$

$$(s+1)X_4(s) = Y(s) - X_1(s) - X_2(s) - X_4(s) \quad (\text{II-2.74})$$

$$sX_1(s) = -3X_1(s) + X_2(s)$$

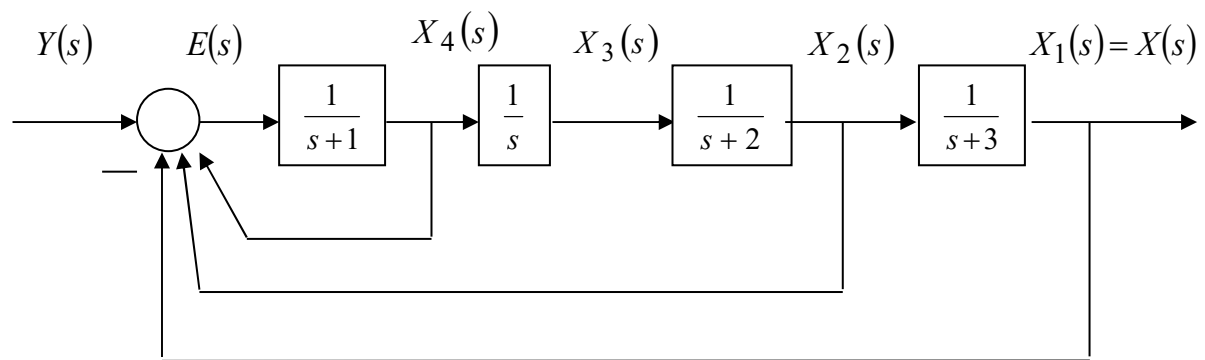
$$sX_2(s) = -2X_2(s) + X_3(s)$$

$$sX_3(s) = X_4(s)$$

$$sX_4(s) = Y(s) - X_1(s) - X_2(s) - 2X_4(s) \quad (\text{II-2.75})$$

за диференцијалните равенки на векторот на состојба се добива:

$$\begin{aligned}
 x_1'(t) &= -3x_1(t) + x_2(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), y(t)] \\
 x_2'(t) &= -2x_2(t) + x_3(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), y(t)] \\
 x_3'(t) &= x_4(t) = f_3[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), y(t)] \\
 x_4'(t) &= y(t) - x_1(t) - x_2(t) - 2x_4(t) = f_4[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), y(t)]
 \end{aligned}
 \tag{II-2.76}$$



Слика II-2.5. Дефинирање на состојбените големини за системот од слика II-2.4

Бидејќи:

$$\begin{aligned}
 x_1''(t) &= \frac{\partial f_1}{\partial y} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} + f_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\
 x_2''(t) &= \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\
 x_3''(t) &= \frac{\partial f_3}{\partial y} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + f_4 \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\
 x_4''(t) &= \frac{\partial f_4}{\partial y} + f_1 \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_4}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial f_4}{\partial x_3} + f_4 \frac{\partial f_4}{\partial x_4}
 \end{aligned}
 \tag{II-2.77}$$

и:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0 \\
 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -2 \quad (\text{II-2.78})$$

бараниот модел ќе биде:

$$\Delta x_{1,k} = Tf_{1,k} + \frac{T^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_k + f_{1,k} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_k + f_{2,k} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_k + f_{3,k} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right)_k + f_{4,k} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \right)_k \right] =$$

$$= x_{1,k} + Tf_{1,k} + \frac{T^2}{2} (-3f_{1,k} + f_{2,k}) =$$

$$= x_{1,k} + T(-3x_{1,k} + x_{2,k}) + \frac{T^2}{2} [-3(-3x_{1,k} + x_{2,k}) + (-2x_{2,k} + x_{3,k})]$$

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + \Delta x_{1,k}$$

$$\Delta x_{2,k} = Tf_{2,k} + \frac{T^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)_k + f_{1,k} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_k + f_{2,k} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_k + f_{3,k} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right)_k + f_{4,k} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right)_k \right] =$$

$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + Tf_{2,k} + \frac{T^2}{2} (-2f_{2,k} + f_{3,k}) =$$

$$= x_{2,k} + T(-2x_{2,k} + x_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [-2(-2x_{2,k} + x_{3,k}) + (x_{4,k})]$$

$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + \Delta x_{2,k}$$

$$\Delta x_{3,k} = Tf_{3,k} + \frac{T^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} \right)_k + f_{1,k} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right)_k + f_{2,k} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right)_k + f_{3,k} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right)_k + f_{4,k} \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \right)_k \right] =$$

$$x_{3,k+1} = x_{3,k} + Tf_{3,k} + \frac{T^2}{2} (f_{4,k}) =$$

$$= x_{3,k} + Tx_{4,k} + \frac{T^2}{2} (y_k - x_{1,k} - x_{2,k} - 2x_{4,k})$$

$$x_{3,k+1} = x_{3,k} + \Delta x_{3,k}$$

$$\Delta x_{4,k} = Tf_{4,k} + \frac{T^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial f_4}{\partial y} \right)_k + f_{1,k} \left( \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \right)_k + f_{2,k} \left( \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \right)_k + f_{3,k} \left( \frac{\partial f_4}{\partial x_3} \right)_k + f_{4,k} \left( \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \right)_k \right] =$$

$$x_{4,k+1} = x_{4,k} + Tf_{4,k} + \frac{T^2}{2} [y'(t_k) - f_{1,k} - f_{2,k} - 2f_{4,k}] =$$

$$x_{4,k+1} = x_{4,k} + T(y_k - x_{1,k} - x_{2,k} - 2x_{4,k}) +$$

$$+ \frac{T^2}{2} [1 - (-3x_{1,k} + x_{2,k}) - (-2x_{2,k} + x_{3,k}) - 2(y_k - x_{1,k} - x_{2,k} - 2x_{4,k})]$$

$$x_{4,k+1} = x_{4,k} + \Delta x_{4,k} \tag{II-2.79}$$

**Задача II-2.8.** Да се покаже дека ако:

$$x'(t) = f[x(t), t] \tag{II-2.80}$$

тогаш:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + f \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{II-2.81}$$

Со помош на овој резултат да се изведе Тајлорова формула од трет ред за нумеричко решавање на диференцијални равенки од прв ред од обликот:

$$x'(t) = f[x(t), t] \tag{II-2.82}$$

**Решение:**

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), t]$$

$$x''(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} f[x(t), t] = \frac{\partial}{\partial t} f[x(t), t] + \frac{\partial}{\partial x} f[x(t), t] \frac{dx(t)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$x'''(t) = \frac{d^3 x(t)}{dt^3} = \frac{d^2}{dt^2} f[x(t), t] = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right\} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{d}{dt} \left( f \frac{\partial f}{\partial x} \right) =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{df}{dt} + f \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) + f \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right) = \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + f \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + f \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \tag{II-2.83}
 \end{aligned}$$

Следствено, Тајлоровата формула од трет ред за нумеричко решавање диференцијални равенки од обликот (II-2.82) е:

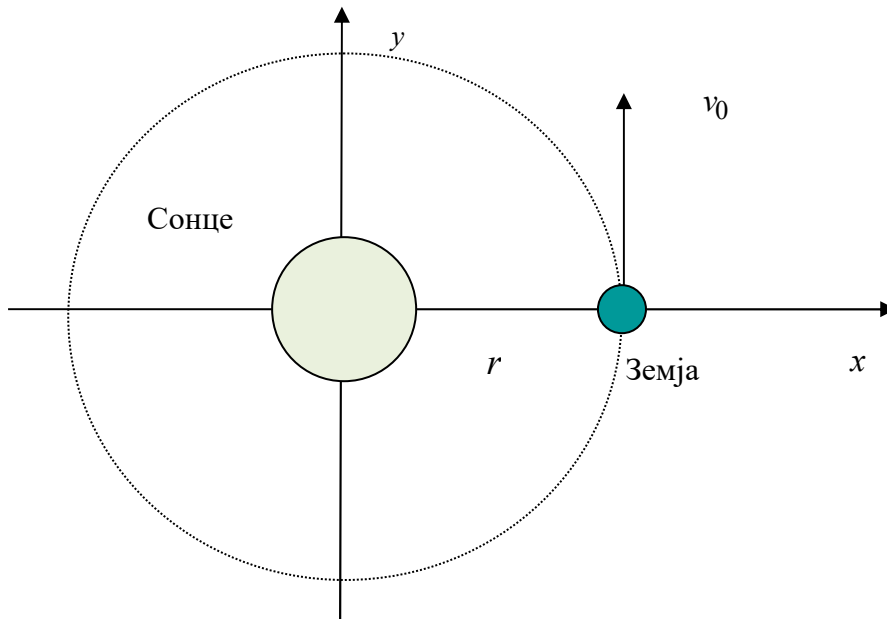
$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= x(k) + Tf + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \\
 &+ \frac{T^3}{6} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t} + f \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \right]; k = 0, 1, 2, \dots \tag{II-2.84}
 \end{aligned}$$

**Задача II-2.9.** На сликата II-2.6 е претставен идеализиран едноставен планетарен систем, кој го симулира движењето на Земјата околу Сонцето. Ако се претпостави дека Земјата и Сонцето се точки со соодветни маси, динамиката на ова движење може да се опише со системот равенки:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{-mGx(t)}{\left[ x^2(t) + y^2(t) \right]^{\frac{3}{2}}} \tag{II-2.85}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{-mGy(t)}{\left[ x^2(t) + y^2(t) \right]^{\frac{3}{2}}} \tag{II-2.86}$$

каде што  $G$  е универзална гравитациона константа,  $m$  е масата на Сонцето,  $x$  и  $y$  се Декартови координати на положбата на Земјата во однос на Сонцето. Почетните услови се дефинирани со прикажаната положба на Земјата на сликата II-2.6. Со помош на Тајлоровата формула од втор ред да се состави алгоритам за дигитална симулација на движењето на Земјата околу Сонцето.



Слика II-2.6. Илустрација кон задачата II-2.9

**Решение:** Нека:

$$v_1(t) = x(t)$$

$$v_2(t) = x'(t)$$

$$v_3(t) = y(t)$$

$$v_4(t) = y'(t)$$

(II-2.87)

Тогаш:

$$v_1'(t) = x'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = x''(t) = \frac{-mGx(t)}{[x^2(t) + y^2(t)]^{3/2}} = \frac{-mGv_1(t)}{[v_1^2(t) + v_3^2(t)]^{3/2}}$$

$$v_3'(t) = y'(t) = v_4(t)$$

$$v_4'(t) = y''(t) = \frac{-mGy(t)}{[x^2(t) + y^2(t)]^{3/2}} = \frac{-mGv_3(t)}{[v_1^2(t) + v_3^2(t)]^{3/2}}$$

(II-2.88)

односно:

$$v_1'(t) = v_2(t) = f_1[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]$$

$$v_2'(t) = \frac{-mGv_1(t)}{\left[v_1^2(t) + v_3^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}} = f_2[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]$$

$$v_3'(t) = v_4(t) = f_3[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]$$

$$v_4'(t) = \frac{-mGv_3(t)}{\left[v_1^2(t) + v_3^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}} = f_4[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)] \quad (\text{II-2.89})$$

Во согласност со Тајлоровата формула, за прираснувањата на одделните променливи се добива:

$$\Delta v_1 = Tf_1 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial v_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial v_2} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial v_3} f_3 + \frac{\partial f_1}{\partial v_4} f_4 \right) = Tf_1 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial v_2} f_2 \right)$$

$$\Delta v_2 = Tf_2 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_1} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial v_2} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial v_3} f_3 + \frac{\partial f_2}{\partial v_4} f_4 \right) = Tf_2 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_1} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial v_3} f_3 \right)$$

$$\Delta v_3 = Tf_3 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial v_1} f_1 + \frac{\partial f_3}{\partial v_2} f_2 + \frac{\partial f_3}{\partial v_3} f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial v_4} f_4 \right) = Tf_3 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial v_4} f_4 \right)$$

$$\Delta v_4 = Tf_4 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_4}{\partial v_1} f_1 + \frac{\partial f_4}{\partial v_2} f_2 + \frac{\partial f_4}{\partial v_3} f_3 + \frac{\partial f_4}{\partial v_4} f_4 \right) = Tf_4 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_4}{\partial v_1} f_1 + \frac{\partial f_4}{\partial v_3} f_3 \right) \quad (\text{II-2.90})$$

каде што:

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0; \frac{\partial f_1}{\partial v_2} = 1; \frac{\partial f_1}{\partial v_3} = 0; \frac{\partial f_1}{\partial v_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v_1} = \frac{mG(2v_1^2 - v_3^2)}{\left(v_1^2 + v_3^2\right)^{\frac{5}{2}}}; \frac{\partial f_2}{\partial v_2} = 0; \frac{\partial f_2}{\partial v_3} = \frac{3mGv_1v_3}{\left(v_1^2 + v_3^2\right)^{\frac{5}{2}}}; \frac{\partial f_2}{\partial v_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial v_1} = 0; \frac{\partial f_3}{\partial v_2} = 0; \frac{\partial f_3}{\partial v_3} = 0; \frac{\partial f_3}{\partial v_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial v_1} = \frac{3mGv_1v_3}{\left(v_1^2 + v_3^2\right)^{\frac{5}{2}}}; \frac{\partial f_4}{\partial v_2} = 0; \frac{\partial f_4}{\partial v_3} = \frac{mG(2v_3^2 - v_1^2)}{\left(v_1^2 + v_3^2\right)^{\frac{5}{2}}}; \frac{\partial f_4}{\partial v_4} = 0 \quad (\text{II-2.91})$$

Следствено:

$$\Delta v_{1,k} = T f_1 + \frac{T^2}{2} f_2 = T v_{2,k} + \frac{T^2}{2} \left[ \frac{-mGv_{1,k}}{(v_{1,k}^2 + v_{3,k}^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$v_{1,k+1} = v_{1,k} + \Delta v_{1,k}$$

$$\Delta v_{2,k} = T \left[ \frac{-mGv_{1,k}}{(v_{1,k}^2 + v_{3,k}^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{T^2}{2} \left[ \frac{mG(2v_{1,k}^2 - v_{3,k}^2)}{(v_{1,k}^2 + v_{3,k}^2)^{\frac{5}{2}}} v_{2,k} + \frac{3mGv_{1,k}v_{3,k}}{(v_{1,k}^2 + v_{3,k}^2)^{\frac{5}{2}}} v_{4,k} \right]$$

$$v_{2,k+1} = v_{2,k} + \Delta v_{2,k}$$

$$\Delta v_{3,k} = T v_{4,k} + \frac{T^2}{2} \left[ \frac{-mGv_{3,k}}{(v_{1,k}^2 + v_{3,k}^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$v_{3,k+1} = v_{3,k} + \Delta v_{3,k}$$

$$\Delta v_{4,k} = T \left[ \frac{-mGv_{1,k}}{(v_{1,k}^2 + v_{3,k}^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{T^2}{2} \left[ \frac{3mGv_{1,k}v_{3,k}}{(v_{1,k}^2 + v_{3,k}^2)^{\frac{5}{2}}} v_{2,k} + \frac{mG(2v_{3,k}^2 - v_{1,k}^2)}{(v_{1,k}^2 + v_{3,k}^2)^{\frac{5}{2}}} v_{4,k} \right]$$

$$v_{4,k+1} = v_{4,k} + \Delta v_{4,k}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

(II-2.92)

За почетните услови, врз основа на сликата, се добива:

$$v_{10} = x(0) = r$$

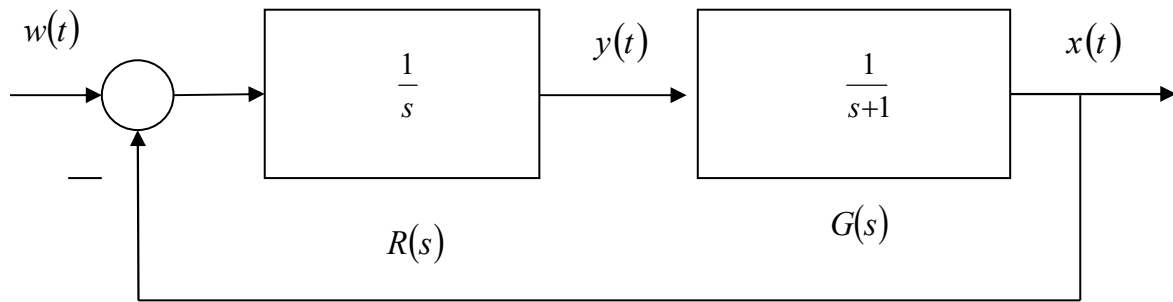
$$v_{20} = x'(0) = 0$$

$$v_{30} = y(0) = 0$$

$$v_{40} = y'(0) = v_0$$

(II-2.93)

**Задача II-2.10.** Даден е затворениот систем на автоматско управување од слика II-2.7. Со помош на Тајлоровата постапка од втор ред да се определат вредностите  $y(0.2)$ ,  $x(0.2)$ ,  $y(0.4)$  и  $x(0.4)$  на управувачкиот сигнал  $y(t)$  и одзивот  $x(t)$  на овој систем ако, под претпоставка, системот бил во мирување кога на неговиот референтен влез е донесена возбуда од облик  $w(t) = 1, t \geq 0$ . (Упатство: за чекор на интеграција може да се усвои  $T = 0.2$  s.)



Слика II-2.7. Илустрација кон задачата II-2.10

**Решение:** Затворениот систем на автоматско управување од слика II-2.7 е опишан со следните равенки:

$$x'(t) + x(t) = y(t) \quad (\text{II-2.94})$$

$$y'(t) = w(t) - x(t) \quad (\text{II-2.95})$$

кои, потоа, можат да се доведат на облик:

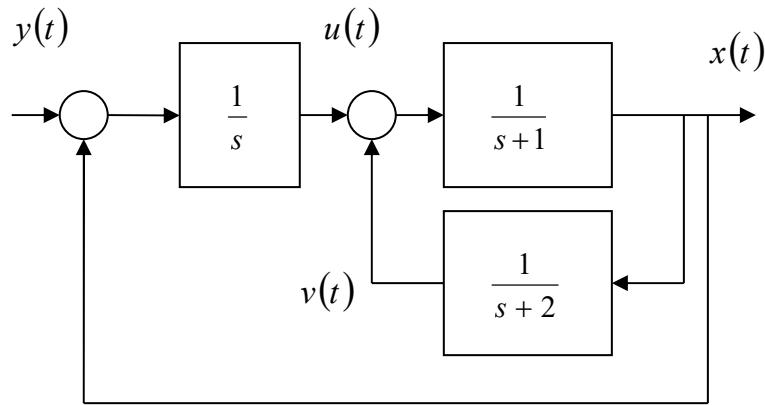
$$x'(t) = f[x(t), y(t), t] = y(t) - x(t)$$

$$y'(t) = g[x(t), y(t), t] = 1 - x(t) \quad (\text{II-2.96})$$

Решенијата  $y(t)$  и  $x(t)$  на системот диференцијални равенки (II-2.96) ги претставуваат управувачкиот сигнал и одзивот на набљудуваниот систем од слика II-2.7 и тие се бараат на интервалот  $t \in [0; 0.4]$ ; притоа почетните услови се нулеви.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + Tf + \frac{1}{2}T^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= x(k) + T[y(k) - x(k)] + \frac{1}{2}T^2 [1 - y(k)] \\ y(k+1) &= y(k) + Tg + \frac{1}{2}T^2 \left( \frac{\partial g}{\partial t} + f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial g}{\partial y} \right) = \\ &= y(k) + T[1 - x(k)] + \frac{1}{2}T^2 [x(k) - y(k)] \end{aligned} \quad (\text{II-2.97})$$

**Задача II-2.11.** Со помош на Тајлоровата постапка, да се состави алгоритам за дигитална симулација на слободниот одзив  $x(t)$  на затворениот систем од слика II-2.8. Упатство: за помошни големини да се усвојат сигналите  $u(t)$ ,  $v(t)$  и  $x(t)$ .



Слика II-2.8. Илустрација кон задачата II-2.11

**Решение:** Од структурната блок-шема на слика II-2.8 непосредно следува:

$$E_1(s) = Y(s) - X(s)$$

$$U(s) = \frac{1}{s} E_1(s) = Y(s) - X(s)$$

$$V(s) = \frac{1}{s+2} X(s)$$

$$E_2(s) = U(s) - V(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} E_2(s) = \frac{1}{s+1} [U(s) - V(s)] \quad (\text{II-2.98})$$

Следствено:

$$sU(s) = Y(s) - X(s) = -X(s)$$

$$sV(s) = -2V(s) + X(s)$$

$$sX(s) = -X(s) + U(s) - V(s) \quad (\text{II-2.99})$$

или, во временско подрачје:

$$u'(t) = -x(t) = f_1[u(t), v(t), x(t), t]$$

$$v'(t) = -2v(t) + x(t) = f_2[u(t), v(t), x(t), t]$$

$$x'(t) = u(t) - v(t) - x(t) = f_3[u(t), v(t), x(t), t] \quad (\text{II-2.100})$$

Така, проблемот за дигитална симулација на слободниот одзив на набљудуваниот затворен систем од слика II-2.8 се сведува на нумеричко решавање на горниот систем од три диференцијални равенки од прв ред. Имајќи на ум дека:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = -2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v} = -1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = -1 \end{aligned} \quad (\text{II-2.101})$$

Соодветниот алгоритам за нумеричко решавање на овој систем равенки според Тајлоровата постапка гласи:

$$t_0 = 0; \quad u_0; \quad v_0; \quad x_0; \quad T$$

$$t_{k+1} = t_k + T$$

$$\begin{aligned} \Delta u_k &= Tf_1(u_k; v_k; x_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial v} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) = \\ &= Tf_1 + \frac{T^2}{2} (-f_3) = -Tx_k - \frac{T^2}{2} (u_k - v_k - x_k) \end{aligned}$$

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k$$

$$\begin{aligned} \Delta v_k &= Tf_2(u_k; v_k; x_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial v} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) = \\ &= Tf_2 + \frac{T^2}{2} (-2f_2 + f_3) = T(-2v_k + x_k) + \frac{T^2}{2} [-2(-2v_k + x_k) + u_k - v_k - x_k] = \\ &= T(-2v_k + x_k) + \frac{T^2}{2} (u_k + 3v_k - 3x_k) \end{aligned}$$

$$v_{k+1} = v_k + \Delta v_k$$

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= Tf_3(u_k; v_k; x_k; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial u} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial v} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) = \\ &= Tf_3 + \frac{T^2}{2} (f_1 - f_2 - f_3) = \\ &= T(u_k - v_k - x_k) + \frac{T^2}{2} [-x_k - (-2v_k + x_k) - (u_k - v_k - x_k)] = \\ &= T(u_k - v_k - x_k) + \frac{T^2}{2} (-u_k + 3v_k - x_k) \end{aligned}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \quad (\text{II-2.102})$$

каде што  $T$  е усвоениот чекор на интеграција.

**Задача II-2.12.** Со помош на Тајлоровата формула од втор ред, да се состави алгоритам за дигитална симулација на одзивот  $c(t)$  на затворениот линеарен континуален систем на автоматско управување од слика II-2.9 со влез  $r(t) = th(t)$  ако еден математички модел на објектот  $G_{ob}(s)$  во просторот на состојби е:

$$\underline{v}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \end{bmatrix} \underline{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

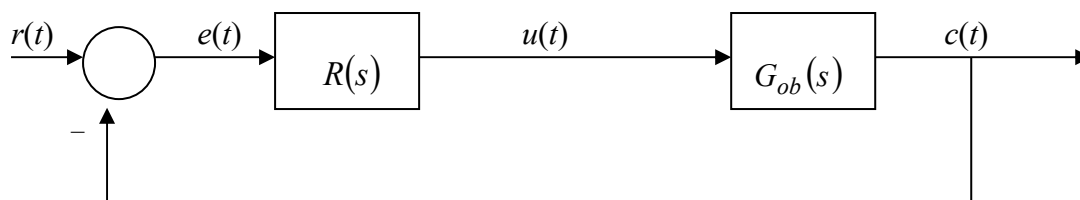
$$c(t) = [-1 \quad 1 \quad 0] \underline{v}(t) \quad (\text{II-2.103})$$

додека регулаторот  $R(s)$  е опишан со равенките:

$$w_1'(t) = -2w_1(t) + e(t)$$

$$w_2'(t) = w_1(t)$$

$$u(t) = aw_1(t) + bw_2(t) + 10e(t); a, b = \text{const.} \quad (\text{II-2.104})$$



Слика II-2.9. Илустрација кон задачата II-2.12

**Решение:** Од матричниот запис на моделот во просторот на состојби на објектот на управување во набљудуваниот затворен САУ следуваат следните диференцијални равенки на векторот на состојби:

$$v_1'(t) = -2v_1(t) + 2v_3(t) = f_1[v_1(t), v_2(t), v_3(t), t]$$

$$v_2'(t) = -v_1(t) + 2v_3(t) = f_2[v_1(t), v_2(t), v_3(t), t]$$

$$v_3'(t) = -4v_2(t) - 6v_3(t) + u(t) = f_3[v_1(t), v_2(t), v_3(t), t] \quad (\text{II-2.105})$$



Овие равенки можат да се симулираат според следниот алгоритам, добиен со примена на Тајлоровата постапка од втор ред:

$$\begin{aligned}
 v_{1,k+1} &= v_{1,k} + \Delta v_{1,k} \\
 \Delta v_{1,k} &= Tf_1(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v_3} \right) = \\
 &= Tf_1 + \frac{T^2}{2} (-2f_1 + 2f_3) = \\
 &= T(-2v_{1,k} + 2v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [-2(-2v_{1,k} + 2v_{3,k}) + 2(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k})] = \\
 &= T(-2v_{1,k} + 2v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} (2u_k + 4v_{1,k} - 8v_{2,k} - 16v_{3,k}) \\
 v_{2,k+1} &= v_{2,k} + \Delta v_{2,k} \\
 \Delta v_{2,k} &= Tf_2(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial v_3} \right) = \\
 &= Tf_2 + \frac{T^2}{2} (-f_1 + 2f_3) = \\
 &= T(-v_{1,k} + 2v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [ -(-2v_{1,k} + 2v_{3,k}) + 2(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k}) ] = \\
 &= T(-v_{1,k} + 2v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} (2u_k + 2v_{1,k} - 8v_{2,k} - 14v_{3,k}) \\
 v_{3,k+1} &= v_{3,k} + \Delta v_{3,k} \\
 \Delta v_{3,k} &= Tf_3(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial v_3} \right) = \\
 &= Tf_3 + \frac{T^2}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - 4f_2 - 6f_3 \right] = \\
 &= T(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [10 - 4(-v_{1,k} + v_{3,k}) - 6(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k})] = \\
 &= T(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} (10 - 6u_k + 4v_{1,k} + 24v_{2,k} + 286v_{3,k}) \tag{II-2.106}
 \end{aligned}$$

На сличен начин, со помош на Тајлоровата постапка од втор ред, за дигитална симулација на равенките:

$$w_1'(t) = -2w_1(t) + e(t) = g_1[w_1(t), w_2(t), t]$$

$$w_2'(t) = w_1(t) = g_2[w_1(t), w_2(t), t] \quad (\text{II-2.107})$$

а имајќи на ум дека:

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (\text{II-2.108})$$

се добива:

$$\begin{aligned} w_{1,k+1} &= w_{1,k} + \Delta w_{1,k} \\ \Delta w_{1,k} &= Tg_1(w_{1,k}; w_{2,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial w_1} + g_2 \frac{\partial g_1}{\partial w_2} \right) = \\ &= Tg_1 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} - 2g_1 \right) = T(-2w_{1,k} + e_k) + \frac{T^2}{2} [1 - 2(-2w_{1,k} + e_k)] = \\ &= T(-2w_{1,k} + e_k) + \frac{T^2}{2} (1 - 2e_k + 4w_{1,k}) \\ w_{2,k+1} &= w_{2,k} + \Delta w_{2,k} \\ \Delta w_{2,k} &= Tg_2(w_{1,k}; w_{2,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_2}{\partial w_1} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial w_2} \right) = \\ &= Tg_2 + \frac{T^2}{2} g_1 = Tw_{1,k} + \frac{T^2}{2} (e_k - 2w_{1,k}) \end{aligned} \quad (\text{II-2.109})$$

Имајќи ја на ум важноста на редоследот на извршување на одделните пресметки, бараниот алгоритам за дигитална симулација на одзивот  $c(t)$  на затворениот линеарен континуален систем на автоматско управување од горната слика, добиен врз основа на Тајлоровата постапка од втор ред ќе биде:

$$w_{1,0} = w_{2,0} = 0; \quad v_{1,0} = v_{2,0} = v_{3,0} = 0; \quad c_0 = 0; \quad t_0 = 0; \quad T, a, b$$

$$r_k = t_k$$

$$t_{k+1} = t_k + T$$

$$e_k = r_k - c_k$$

$$\begin{aligned} \Delta w_{1,k} &= Tg_1(w_{1,k}; w_{2,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial w_1} + g_2 \frac{\partial g_1}{\partial w_2} \right) = Tg_1 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} - 2g_1 \right) = \\ &= T(-2w_{1,k} + e_k) + \frac{T^2}{2} [1 - 2(-2w_{1,k} + e_k)] = T(-2w_{1,k} + e_k) + \frac{T^2}{2} (1 - 2e_k + 4w_{1,k}) \end{aligned}$$

$$w_{1,k+1} = w_{1,k} + \Delta w_{1,k}$$

$$\begin{aligned} \Delta w_{2,k} &= Tg_2(w_{1,k}; w_{2,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_2}{\partial w_1} + g_2 \frac{\partial g_2}{\partial w_2} \right) = Tg_2 + \frac{T^2}{2} g_1 = \\ &= Tw_{1,k} + \frac{T^2}{2} (e_k - 2w_{1,k}) \end{aligned}$$

$$w_{2,k+1} = w_{2,k} + \Delta w_{2,k}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{1,k} &= Tf_1(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v_3} \right) = \\ &= Tf_1 + \frac{T^2}{2} (-2f_1 + 2f_3) = \\ &= T(-2v_{1,k} + 2v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [-2(-2v_{1,k} + 2v_{3,k}) + 2(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k})] = \\ &= T(-2v_{1,k} + 2v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} (2u_k + 4v_{1,k} - 8v_{2,k} - 16v_{3,k}) \end{aligned}$$

$$v_{1,k+1} = v_{1,k} + \Delta v_{1,k}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{2,k} &= Tf_2(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial v_3} \right) = \\ &= Tf_2 + \frac{T^2}{2} (-f_1 + 2f_3) = \\ &= Tf_2 + \frac{T^2}{2} (-f_1 + 2f_3) = \\ &= T(-v_{1,k} + 2v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [ -(-2v_{1,k} + 2v_{3,k}) + 2(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k}) ] = \\ &= T(-v_{1,k} + 2v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} (2u_k + 2v_{1,k} - 8v_{2,k} - 14v_{3,k}) \end{aligned}$$

$$v_{2,k+1} = v_{2,k} + \Delta v_{2,k}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{3,k} &= Tf_3(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial v_3} \right) = \\ &= Tf_3 + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - 4f_2 - 6f_3 \right) = \end{aligned}$$

$$= T(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} [10 - 4(-v_{1,k} + v_{3,k}) - 6(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k})] =$$

$$= T(u_k - 4v_{2,k} - 6v_{3,k}) + \frac{T^2}{2} (10 - 6u_k + 4v_{1,k} + 24v_{2,k} + 286v_{3,k})$$

$$v_{3,k+1} = v_{3,k} + \Delta v_{3,k}$$

$$c_k = -v_{1,k} + v_{2,k}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

(II-2.110)

Забелешка: Од равенките (II-2.105), (II-2.107) и равенката (II-2.108) непосредно следува:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = -2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_3} = 2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_1} = -1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_3} = 2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -4, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -6$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 10$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t}, \quad \frac{\partial g_1}{\partial w_1} = -2, \quad \frac{\partial g_1}{\partial w_2} = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial w_1} = 1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial w_2} = 0$$

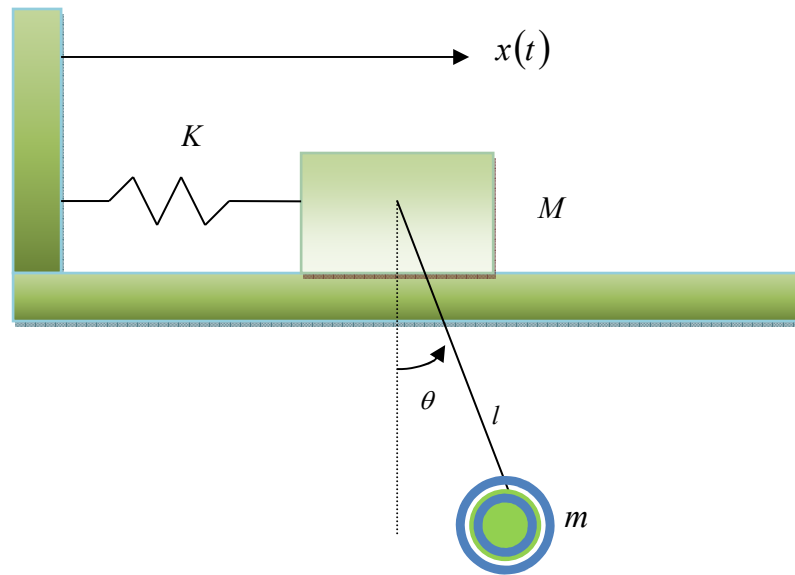
$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t} = 1$$

(II-2.111)

**Задача II-2.13.** Даден е механичкиот систем од слика II-2.10, кој се состои од тег со маса  $M$  прицврстен за ѕид со пружина со коефициент на крутост  $K$ . За тегот е закачено нишало со должина  $l$  и маса  $m$ , кое осцилира околу својата рамнотежна состојба со агол  $\theta$ . Движењето на набљудуваниот систем е опишано со следниов систем диференцијални равенки:

$$\begin{bmatrix} m & ml \cos \theta(t) + ml \sin \theta(t) \operatorname{tg} \theta(t) \\ m + M & ml \cos \theta(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x''(t) \\ \theta''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mgt \operatorname{tg} \theta(t) \\ ml \sin \theta(t) \theta'^2(t) - Kx(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II-2.112})$$

Да се определи алгоритмот за нумеричко решавање на овој систем равенки според Тајлоровата постапка од втор ред.



Слика II-2.10. Нелинеарен механички систем од четврти ред

**Решение:** Ако за состојбени големини се одберат транслаторното движење  $x(t)$ , транслаторната брзина  $x'(t)$ , аголното движење  $\theta(t)$  и аголната брзина  $\theta'(t)$ :

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= x(t) \\
 v_2(t) &= x'(t) \\
 v_3(t) &= \theta(t) \\
 v_4(t) &= \theta'(t)
 \end{aligned} \tag{II-2.113}$$

еден модел на набљудуваниот нелинеарен систем во просторот на состојби ќе биде следниот:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & ml \cos v_3(t) + ml \sin v_3(t) \operatorname{tg} v_3(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m + M & 0 & ml \cos v_3(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \\ v_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2(t) \\ -mgt \operatorname{tg} v_3(t) \\ v_4(t) \\ ml \sin v_3(t) [v_4(t)]^2 - Kv_1(t) \end{bmatrix} \tag{II-2.114}$$

Моделот е од облик:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}'(t) = \mathbf{B} \tag{II-2.115}$$

кој по множењето од лево со инверзната матрица кон матрицата  $\mathbf{A}$ , станува:

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{II-2.116})$$

или, во развиен облик:

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \frac{\frac{1}{2}mg \sin(2v_3) + ml \sin(v_3)v_4^2 - Kv_1}{M + m \sin^2(v_3)} \\ v_4 \\ \frac{Kv_1 \cos(v_3) - \frac{1}{2}ml \sin(2v_3)v_4^2 - g(m + M)\cos(v_3)}{Ml + ml \sin^2(v_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(v_1, v_2, v_3, v_4, t) \\ f_2(v_1, v_2, v_3, v_4, t) \\ f_3(v_1, v_2, v_3, v_4, t) \\ f_4(v_1, v_2, v_3, v_4, t) \end{bmatrix} \quad (\text{II-2.117})$$

Очигледно, овој систем равенки е нелинеарен, заради присуството нелинеарни членови во него – тригонометриски функции од променливите, производи од тригонометриски функции од променливите и квадрати од променливите и истите можат да се симулираат според следниот алгоритам, добиен со примена на Тајлоровата постапка од втор ред:

$$v_1(0) = x(0), \quad v_2(0) = x'(0), \quad v_3(0) = \theta(0), \quad v_4(0) = \theta'(0), \quad T$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{1,k} &= Tf_1(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; v_{4,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v_3} + f_4 \frac{\partial f_1}{\partial v_4} \right) = \\ &= Tf_1 + \frac{T^2}{2} f_2 = Tv_2 + \frac{T^2}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}mg \sin(2v_3) + ml \sin(v_3)v_4^2 - Kv_1}{M + m \sin^2(v_3)} \end{aligned}$$

$$v_{1,k+1} = v_{1,k} + \Delta v_{1,k}$$

$$\Delta v_{2,k} = Tf_2(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; v_{4,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_2}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial v_3} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial v_4} \right) =$$

$$\Delta v_{2,k} = Tf_2 + \frac{T^2}{2} \left( f_1 \frac{\partial f_2}{\partial v_1} + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial v_3} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial v_4} \right) =$$

$$= T \frac{\frac{1}{2}mg \sin(2v_3) + ml \sin(v_3)v_4^2 - Kv_1}{M + m \sin^2(v_3)} + \frac{T^2}{2} \left\{ v_2 \left[ \frac{-K}{M + m \sin^2(v_3)} \right] + \right.$$

$$\left. + v_4 \left[ \frac{Mmg \cos(2v_3) + mKv_1 \sin(2v_3)}{[M + m \sin^2(v_3)]^2} \right] \right.$$

$$+ \frac{-m^2 g \sin^2(v_3) - m^2 l \sin^2(v_3) \cos(v_3) v_4^2 + M m l \cos(v_3) v_4^2}{[M + m \sin^2(v_3)]^2} \Bigg] +$$

$$+ \frac{[2Kv_1 \cos(v_3) - ml \sin(2v_3) v_4^2 - 2g(m + M) \cos(v_3)] m \sin(v_3) v_4}{[M + m \sin^2(v_3)]^2} \Bigg\}$$

$$v_{2,k+1} = v_{2,k} + \Delta v_{2,k}$$

$$\Delta v_{3,k} = Tf_3(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; v_{4,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_3}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial v_3} + f_4 \frac{\partial f_3}{\partial v_4} \right) =$$

$$= Tf_3 + \frac{T^2}{2} f_4 = Tv_4 + \frac{T^2}{2} \cdot \frac{Kv_1 \cos(v_3) - \frac{1}{2} ml \sin(2v_3) v_4^2 - g(m + M) \cos(v_3)}{Ml + ml \sin^2(v_3)}$$

$$\Delta v_{4,k} = Tf_4(v_{1,k}; v_{2,k}; v_{3,k}; v_{4,k}; t_k) + \frac{T^2}{2} \left( \frac{\partial f_4}{\partial t} + f_1 \frac{\partial f_4}{\partial v_1} + f_2 \frac{\partial f_4}{\partial v_2} + f_3 \frac{\partial f_4}{\partial v_3} + f_4 \frac{\partial f_4}{\partial v_4} \right) =$$

$$= Tf_4 + \frac{T^2}{2} \left( f_1 \frac{\partial f_4}{\partial v_1} + f_3 \frac{\partial f_4}{\partial v_3} + f_4 \frac{\partial f_4}{\partial v_4} \right) =$$

$$= T \frac{Kv_1 \cos(v_3) - \frac{1}{2} ml \sin(2v_3) v_4^2 - g(m + M) \cos(v_3)}{Ml + ml \sin^2(v_3)} + \frac{T^2}{2} \left\{ v_2 \left[ \frac{K \cos(v_3)}{Ml + ml \sin^2(v_3)} \right] + \right.$$

$$+ v_4 \left[ \frac{m^2 l^2 \sin^2(v_3) v_4^2 + 2mlKv_1 \sin(v_3) \cos^2(v_3) + 2gml(M + m) \sin(v_3) \cos^2(v_3)}{[M + m \sin^2(v_3)]^2} + \right.$$

$$+ \frac{gml(M + m) \sin^3(v_3) + gMl(M + m) \sin(v_3)}{[M + m \sin^2(v_3)]^2} +$$

$$\left. - \frac{2mlKv_1 \sin^3(v_3) + MLKv_1 \sin(v_3) + Mm^2 l \cos(2v_3) v_4^2}{[M + m \sin^2(v_3)]^2} \right\} +$$

$$+ \frac{Kv_1 \cos(v_3) - \frac{1}{2} ml \sin(2v_3) v_4^2 - g(m + M) \cos(v_3)}{Ml + ml \sin^2(v_3)} \cdot \frac{-m \sin(2v_3) v_4}{M + m \sin^2(v_3)} \Bigg\}$$

$$v_{4,k+1} = v_{4,k} + \Delta v_{4,k}$$

$$k = k + 1$$

(II-2.118)

Забелешка:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_1} = \frac{-K}{M + m \sin^2(v_3)}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v_3} = \frac{Mmg \cos(2v_3) + mKv_1 \sin(2v_3) - m^2 g \sin^2(v_3) - m^2 l \sin^2(v_3) \cos(v_3) v_4^2 + Mml \cos(v_3) v_4^2}{[M + m \sin^2(v_3)]^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v_4} = \frac{2ml \sin(v_3) v_4}{M + m \sin^2(v_3)}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_2} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_3} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial v_1} = \frac{K \cos(v_3)}{Ml + ml \sin^2(v_3)}, \quad \frac{\partial f_4}{\partial v_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial v_3} = \frac{m^2 l^2 \sin^2(v_3) v_4^2 + 2mlKv_1 \sin(v_3) \cos^2(v_3) + 2gml(M + m) \sin(v_3) \cos^2(v_3)}{[M + m \sin^2(v_3)]^2} +$$

$$+ \frac{gml(M + m) \sin^3(v_3) + gMl(M + m) \sin(v_3) - 2mlKv_1 \sin^3(v_3)}{[M + m \sin^2(v_3)]^2}$$

$$- \frac{MKv_1 \sin(v_3) + Mm^2 l \cos(2v_3) v_4^2}{[M + m \sin^2(v_3)]^2}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial v_4} = \frac{-m \sin(2v_3) v_4}{M + m \sin^2(v_3)}$$

(II-2.119)

### II-3. РУНГЕ-КУТА ПОСТАПКИ

**Задача II-3.1.** Со помош на MATLAB и Рунге-Кута методот од четврти ред да се испрограмира нумеричкото решение на диференцијалната равенка:

$$x'(t) + tx(t) = 1, x_0 = x(0) = 1 \quad (\text{II-3.1})$$

на интервалот  $t \in [0, 4]$  со чекор  $T = 0.1$ .



**Решение:**

$$x'(t) = 1 - tx(t) = f(x, t)$$

$$t_0 = 0; x_0 = 1, T = 1$$

$$K_1 = f(x_k, t_k)$$

$$K_2 = f\left(x_k + T \frac{K_1}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$K_3 = f\left(x_k + T \frac{K_2}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$K_4 = f(x_k + TK_3, t_k + T)$$

$$\Delta x_k = \frac{T}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$k = 0$$

$$K_1 = f(x_0, t_0) = 1 - t_0 x_0 = 1$$

$$K_2 = f\left(x_k + T \frac{K_1}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = 1 - (t_0 + 0.05)(x_0 + 0.05) = 0.9475$$

$$K_3 = f\left(x_k + T \frac{K_2}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = 1 - (t_0 + 0.05)(x_0 + 0.047375) = 0.9476$$

$$K_4 = f(x_0 + TK_3, t_0 + T) = 1 - (t_0 + 0.1)(x_0 + 0.09476) = 0.8905$$

$$\Delta x_0 = \frac{0.1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0.0947$$

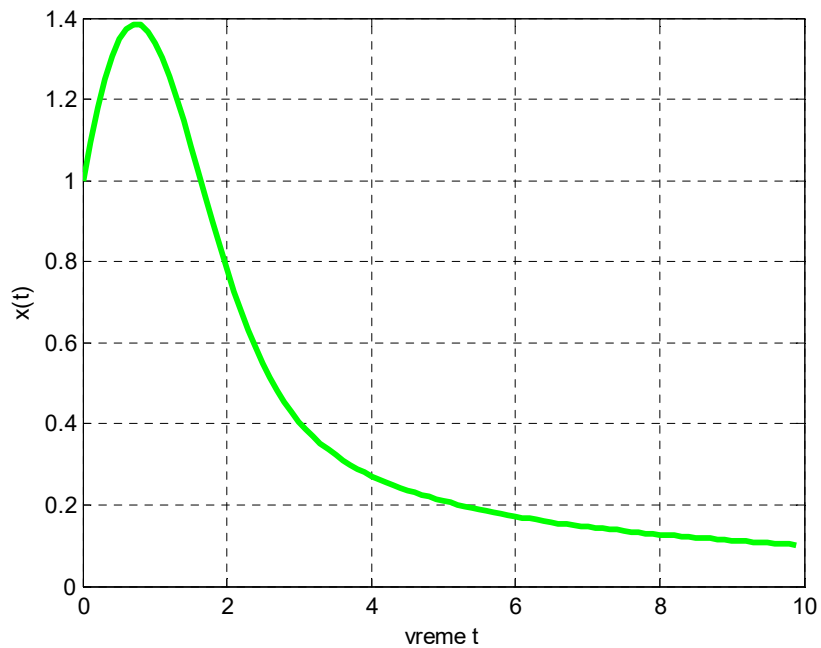
$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 1 + 0.0947 = 1.0947$$

(II-3.2)

.....

<pre>&gt;&gt; n=100; t0=0; x0=1; x(1)=x0; t(1)=t0; T=0.1; for i=2:n K1=1-t(i-1).*x(i-1); K2=1-(t(i-1)+T/2).*(x(i-1)+T*K1/2); K3=1-(t(i-1)+T/2).*(x(i-1)+T*K2/2); K4=1-(t(i-1)+T/2).*(x(i-1)+T*K3); x(i)=x(i-1)+T*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;</pre>	
---	--

```
t(i)=t(i-1)+T;
end
figure(1); plot(t,x,'g'),grid
xlabel('vreme t')
ylabel('x(t)')
```



Слика II-3.1. Приближно решение на равенката (II-3.1) добиено со Рунге-Кута методот од четврти ред и приложениот MATLAB код

**Задача II-3.2.** Со помош на MATLAB и Рунге-Кута методот од четврти ред нумерички да се реши диференцијалната равенка:

$$x'(t) = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8.5, x_0 = x(0) = 1 \quad (\text{II-3.3})$$

на интервалот  $t \in [0, 4]$  со чекор  $T = 0.5$  и добиеното приближно решение да се спореди со точното.

**Решение:**

$$x'(t) = -2t^3 + 12t^2 - 20t + 8.5 = f(x, t)$$

$$t_0 = 0; x_0 = 1, T = 0.5$$

$$K_1 = f(x_k, t_k)$$

$$K_2 = f\left(x_k + T \frac{K_1}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$K_3 = f\left(x_k + T \frac{K_2}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$K_4 = f(x_k + TK_3, t_k + T)$$

$$\Delta x_k = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$k = 0$$

$$K_1 = f(x_0, t_0) = -2t_0^3 + 12t_0^2 - 20t_0 + 8.5 = 8.5$$

$$K_2 = f\left(x_k + T \frac{K_1}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = -2\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)^3 + 12\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)^2 - 20\left(t_0 + \frac{T}{2}\right) + 8.5 = 4.21875$$

$$K_3 = f\left(x_k + T \frac{K_2}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = -2\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)^3 + 12\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)^2 - 20\left(t_0 + \frac{T}{2}\right) + 8.5 = 4.21875$$

$$K_4 = f(x_0 + TK_3, t_0 + T) = -2(t_0 + T)^3 + 12(t_0 + T)^2 - 20(t_0 + T) + 8.5 = 1.25$$

$$\Delta x_0 = \frac{T}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 2.21875$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 1 + 2.21875 = 3.21875 \tag{II-3.4}$$

.....

Точното решение на дадената диференцијална равенка изнесува:

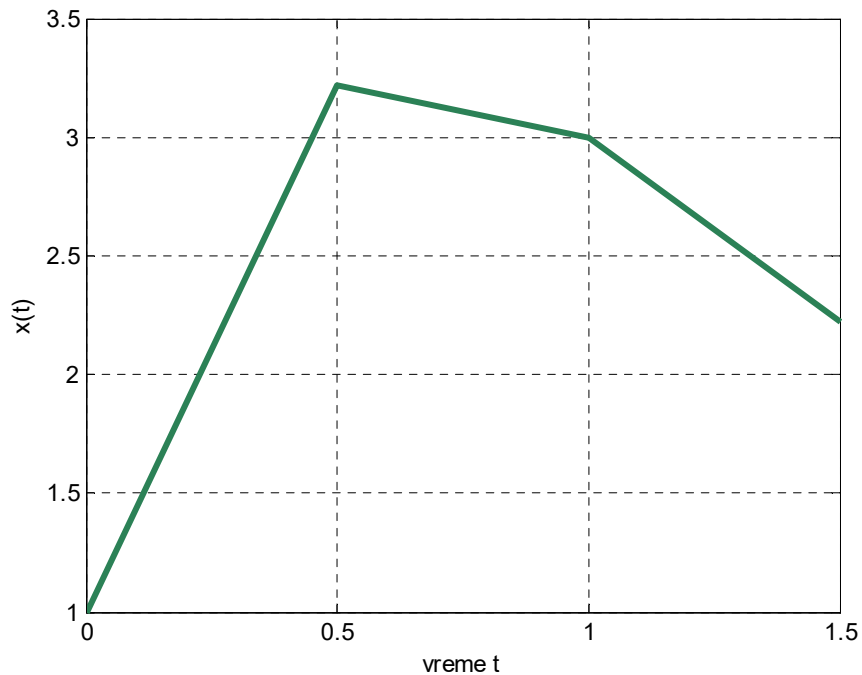
$$x(t) = -0.5t^4 + 4t^3 - 10t^2 + 8.5t + 1 \tag{II-3.5}$$

и тоа може да се употреби за одредување на грешката на добиеното приближно решение, прикажано на слика II-3.2.

<pre>&gt;&gt; n=4; h=0.5; t0=0; x0=1; x(1)=x0;t(1)=t0; T=0.5;X(1)=1; for i=2:n K1=-2*t(i-1).^3+12*t(i-1).^2-20*t(i-1)+8.5; K2=-2*(t(i-1)+T/2).^3+12*(t(i-1)+T/2).^2-20*(t(i-1)+T/2)+8.5; K3=-2*(t(i-1)+T/2).^3+12*(t(i-1)+T/2).^2-20*(t(i-1)+T/2)+8.5;</pre>	
--	--

```

K4=-2*(t(i-1)+T).^3+12*(t(i-1)+T).^2-20*(t(i-1)+T)+8.5;
x(i)=x(i-1)+h*(1/6)*(K1+2*K2+2*K3+K4);
t(i)=t(i-1)+h;
end
figure(1); plot(t,x,'g'),grid
xlabel('vreme t'), ylabel('x(t)')
    
```



Слика II-3.2. Приближно решение на равенката (II-3.3) добиено со Рунге-Кута методот од 4-ти ред

**Задача II-3.3.** Да се состави алгоритам за нумеричко решавање на диференцијалната равенка:

$$x'(t) = t^2 - e^{x(t)} \sin(t), x(0) = 1 \quad (\text{II-3.6})$$

на интервалот  $t \in [0, 3]$  со чекор  $T = 0.25$ , при што ќе се примени методот на Рунге-Кута од четврти ред. Добиениот алгоритам да се испрограмира во MATLAB и добиеното приближно решение да се прикаже графички.

**Решение:** Решението е дадено на слика III-3.3, а бараниот алгоритам е следниот:

$$x'(t) = t^2 - e^{x(t)} \sin(t) = f(x(t), t)$$

$$t_0 = 0; x_0 = 1, T = 0.25$$

$$K_1 = f(x_k, t_k) = t_k^2 - e^{x_k} \sin(t_k)$$

$$K_2 = f\left(x_k + T \frac{K_1}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = \left(t_k + \frac{T}{2}\right)^2 - e^{\left(x_k + T \frac{K_1}{2}\right)} \sin\left(t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$K_3 = f\left(x_k + T \frac{K_2}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = \left(t_k + \frac{T}{2}\right)^2 - e^{\left(x_k + T \frac{K_2}{2}\right)} \sin\left(t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$K_4 = f(x_k + TK_3, t_k + T) = (t_k + T)^2 - e^{(x_k + TK_3)} \sin(t_k + T)$$

$$\Delta x_k = \frac{T}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$k = 0$$

$$K_1 = f(x_0, t_0) = t_0^2 - e^{x_0} \sin(t_0) = 0$$

$$K_2 = f\left(x_0 + T \frac{K_1}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right) = \left(t_0 + \frac{T}{2}\right)^2 - e^{\left(x_0 + T \frac{K_1}{2}\right)} \sin\left(t_0 + \frac{T}{2}\right) = -0.3233$$

$$K_3 = f\left(x_0 + T \frac{K_2}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right) = \left(t_0 + \frac{T}{2}\right)^2 - e^{\left(x_0 + T \frac{K_2}{2}\right)} \sin\left(t_0 + \frac{T}{2}\right) = -0.3099$$

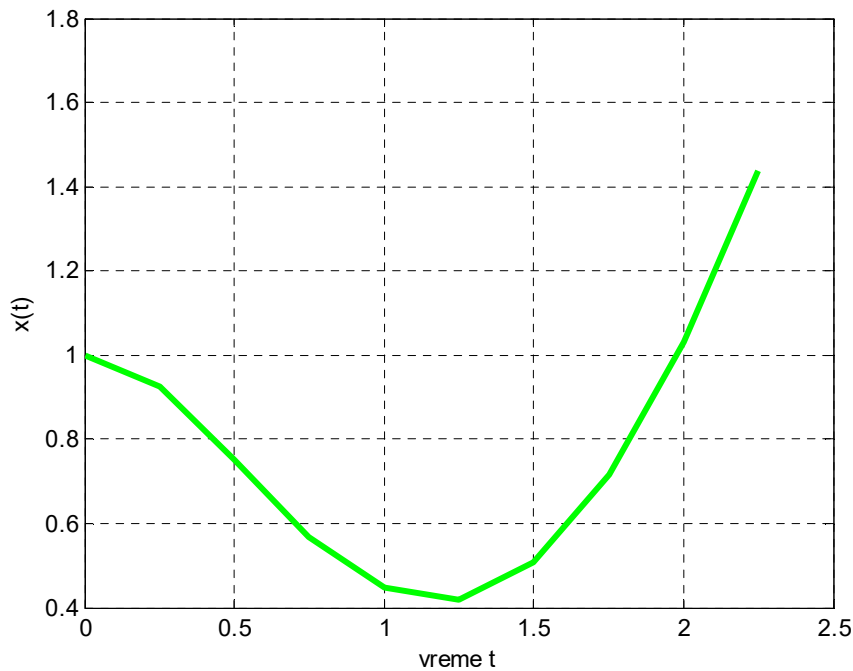
$$K_4 = f(x_0 + TK_3, t_0 + T) = (t_0 + T)^2 - e^{(x_0 + TK_3)} \sin(t_0 + T) = -0.5599$$

$$\Delta x_0 = \frac{T}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = -0.0761$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 1 + 2.21875 = 0.9239$$

(II-3.7)

```
>> n=10; h=0.25; t0=0; x0=1; x(1)=x0; t(1)=t0; T=0.25;
for i=2:n
K1=t(i-1).^2-exp(x(i-1))*sin(t(i-1));
K2=(t(i-1)+T/2).^2-exp(x(i-1)+T*K1/2)*sin(t(i-1)+T/2);
K3=(t(i-1)+T/2).^2-exp(x(i-1)+T*K2/2)*sin(t(i-1)+T/2);
K4=(t(i-1)+T).^2-exp(x(i-1)+T*K3)*sin(t(i-1)+T);
x(i)=x(i-1)+T*(K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
t(i)=t(i-1)+T;
end
figure(3); plot(t,x,'g'),grid
xlabel('vreme t')
ylabel('x(t)')
```



Слика II-3.3. Приближно решение на равенката (II-3.6) добиено со Рунге-Кута методот од четврти ред и MATLAB

**Задача II-3.4.** Даден е системот нелинеарни диференцијални равенки:

$$x'(t) = t^2 \sin[x(t)] + e^t \cos[y(t)], x(0) = 1$$

$$y'(t) = 2tx(t) + e^{y(t)}, y(0) = -1 \quad (\text{II-3.8})$$

Со помош на методот Рунге-Кута од четврти ред нумерички да се пресметаат решенијата  $x(t)$  и  $y(t)$  на интервалот  $t \in [0, 1]$  со чекор  $T = 0.1$ .

**Решение:**

$$y'(t) = g[x(t), y(t), t] = 2tx(t) + e^{y(t)}$$

$$K_{11} = f[x(t_k), y(t_k), t_k] = f(x_k, y_k, t_k) = t_k^2 \sin(x_k) + e^{t_k} \cos(y_k)$$

$$K_{21} = g[x(t_k), y(t_k), t_k] = g(x_k, y_k, t_k) = 2t_k x_k + e^{y_k}$$

$$K_{12} = f\left(x_k + T \frac{K_{11}}{2}, y_k + T \frac{K_{21}}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = \left(t_k + \frac{T}{2}\right)^2 \sin\left(x_k + T \frac{K_{11}}{2}\right) + e^{\left(t_k + \frac{T}{2}\right)} \cos\left(y_k + T \frac{K_{21}}{2}\right)$$

$$K_{22} = g\left(x_k + T \frac{K_{11}}{2}, y_k + T \frac{K_{21}}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = 2\left(t_k + \frac{T}{2}\right)\left(x_k + T \frac{K_{11}}{2}\right) + e^{y_k + T \frac{K_{21}}{2}}$$

$$K_{13} = f\left(x_k + T \frac{K_{12}}{2}, y_k + T \frac{K_{22}}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = \left(t_k + \frac{T}{2}\right)^2 \sin\left(x_k + T \frac{K_{12}}{2}\right) + e^{\left(t_k + \frac{T}{2}\right)} \cos\left(y_k + T \frac{K_{22}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 K_{23} &= g\left(x_k + \frac{K_{12}}{2}, y_k + \frac{K_{22}}{2}, t_k + \frac{T}{2}\right) = 2\left(t_k + \frac{T}{2}\right)\left(x_k + T\frac{K_{12}}{2}\right) + e^{y_k + T\frac{K_{22}}{2}} \\
 K_{14} &= f(x_k + TK_{13}, y_k + TK_{23}) = (t_k + T)^2 \sin(x_k + TK_{13}) + e^{(t_k + T)} \cos(y_k + TK_{23}) \\
 K_{24} &= g(x_k + TK_{13}, y_k + TK_{23}, t_k + T) = 2(t_k + T)(x_k + TK_{13}) + e^{y_k + TK_{23}} \\
 x_{k+1} &= x_k + T(K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14})/6 \\
 y_{k+1} &= y_k + T(K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24})/6 \tag{II-3.9}
 \end{aligned}$$

$k = 0$ :

$$K_{11} = f(x_0, y_0, t_0) = t_0^2 \sin(x_0) + e^{t_0} \cos(y_0) = 0.5403$$

$$K_{21} = g(x_0, y_0, t_0) = 2t_0 x_0 + e^{y_0} = 0.3679$$

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= f\left(x_0 + T\frac{K_{11}}{2}, y_0 + T\frac{K_{21}}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right) = \\
 &= \left(t_0 + \frac{T}{2}\right)^2 \sin\left(x_0 + T\frac{K_{11}}{2}\right) + e^{\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)} \cos\left(y_0 + T\frac{K_{21}}{2}\right) = 0.5863
 \end{aligned}$$

$$K_{22} = g\left(x_0 + T\frac{K_{11}}{2}, y_0 + T\frac{K_{21}}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right) = 2\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)\left(x_0 + T\frac{K_{11}}{2}\right) + e^{y_0 + T\frac{K_{21}}{2}} = 0.4774$$

$$\begin{aligned}
 K_{13} &= f\left(x_0 + T\frac{K_{12}}{2}, y_0 + T\frac{K_{22}}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right) = \\
 &= \left(t_0 + \frac{T}{2}\right)^2 \sin\left(x_0 + T\frac{K_{12}}{2}\right) + e^{\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)} \cos\left(y_0 + T\frac{K_{22}}{2}\right) = 0.5911
 \end{aligned}$$

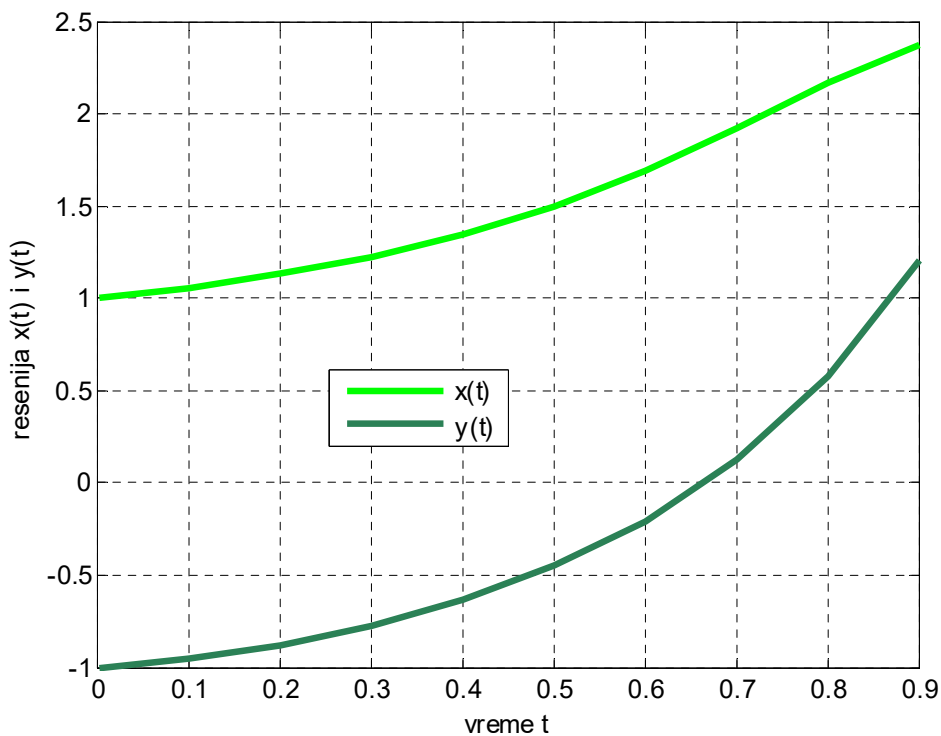
$$K_{23} = g\left(x_0 + T\frac{K_{12}}{2}, y_0 + T\frac{K_{22}}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right) = 2\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)\left(x_0 + T\frac{K_{12}}{2}\right) + e^{y_0 + T\frac{K_{22}}{2}} = 0.4792$$

$$\begin{aligned}
 K_{14} &= f(x_0 + TK_{13}, y_0 + TK_{23}) = (t_0 + T)^2 \sin(x_0 + TK_{13}) + \\
 &+ e^{(t_0 + T)} \cos(y_0 + TK_{23}) = 0.6498
 \end{aligned}$$

$$K_{24} = g(x_0 + TK_{13}, y_0 + TK_{23}, t_0 + T) = 2(t_0 + T)(x_0 + TK_{13}) + e^{y_0 + TK_{23}} = 0.5978$$

$$x_1 = x_0 + T(K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14})/6 = 1.0591$$

$$y_1 = y_0 + T(K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24})/6 = -0.9520 \tag{II-3.10}$$



Слика II-3.4. Приближно решение на системот равенки (II-3.8) добиено со Рунге-Кута методот од четврти ред

```

>> n=6; h=0.1; t0=0; x0=1; y0=-1; t=t0; x=x0; y=y0; X(1)=x0;
Y(1)=y0;T(1)=t0;
for i=2:n
K11=t.^2*sin(x)+exp(t)*cos(y)
K21=2*t*x+exp(y);
K12=(t+h/2).^2*sin(x+K11/2)+exp(t+h/2)*cos(y+K21/2)
K22=2*(t+h/2)*(x+K11/2)+exp(y+K21/2)
K13=(t+h/2).^2*sin(x+K12/2)+exp(t+h/2)*cos(y+K22/2)
K23=2*(t+h/2)*(x+K12/2)+exp(y+K22/2)
K14=(t+h).^2*sin(x+K13)+exp(t+h)*cos(y+K23)
K24=2*(t+h)*(x+K13)+exp(y+K23)
x=x+h*(K11+2*K12+2*K13+K14)/6
y=y+h*(K21+2*K22+2*K23+K24)/6
t=t+h;
X(i)=x; Y(i)=y; T(i)=t;
end
    
```



```
figure(1); plot(T,X,'r',T,Y,'b'),grid
xlabel('vreme t')
ylabel('resenija x(t) i y(t)')
```

**Задача II-3.5.** Со помош на Рунге-Кута постапката од четврти ред да се состави алгоритам за нумеричко определување на одзивот на динамичкиот систем со следниот математички модел:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)[6 - 2x(t) - y(t)]; & x(0) &= x_0 = 100 \\ \dot{y}(t) &= y(t)[4 - x(t) - y(t)]; & y(0) &= y_0 = 300 \end{aligned} \quad (\text{II-3.11})$$

Потоа да се изврши симулација на поведението на добиениот модел на интервалот  $t \in [0; 25]$  со чекор  $T = 0.01s$  и истото да се спореди со поведението на набљудуваниот систем добиено со SIMULINK модел.

**Решение:**

$$\dot{x}(t) = f[x(t), y(t)] = x(t)[6 - 2x(t) - y(t)]; \quad x(0) = x_0 = 100$$

$$\dot{y}(t) = g[x(t), y(t)] = y(t)[4 - x(t) - y(t)]; \quad y(0) = y_0 = 300$$

$$K_{11} = f[x(t_k), y(t_k)] = f(x_k, y_k) = x_k(6 - 2x_k - y_k)$$

$$K_{21} = g[x(t_k), y(t_k)] = g(x_k, y_k) = y_k(4 - x_k - y_k)$$

$$K_{12} = f\left(x_k + \frac{T}{2}K_{11}, y_k + \frac{T}{2}K_{21}\right) = \left(x_k + \frac{T}{2}K_{11}\right) \left[6 - 2\left(x_k + \frac{T}{2}K_{11}\right) - \left(y_k + \frac{T}{2}K_{21}\right)\right]$$

$$K_{22} = g\left(x_k + \frac{T}{2}K_{11}, y_k + \frac{T}{2}K_{21}\right) = \left(y_k + \frac{T}{2}K_{21}\right) \left[4 - \left(x_k + \frac{T}{2}K_{11}\right) - \left(y_k + \frac{T}{2}K_{21}\right)\right]$$

$$K_{13} = f\left(x_k + \frac{T}{2}K_{12}, y_k + \frac{T}{2}K_{22}\right) = \left(x_k + \frac{T}{2}K_{12}\right) \left[6 - 2\left(x_k + \frac{T}{2}K_{12}\right) - \left(y_k + \frac{T}{2}K_{22}\right)\right]$$

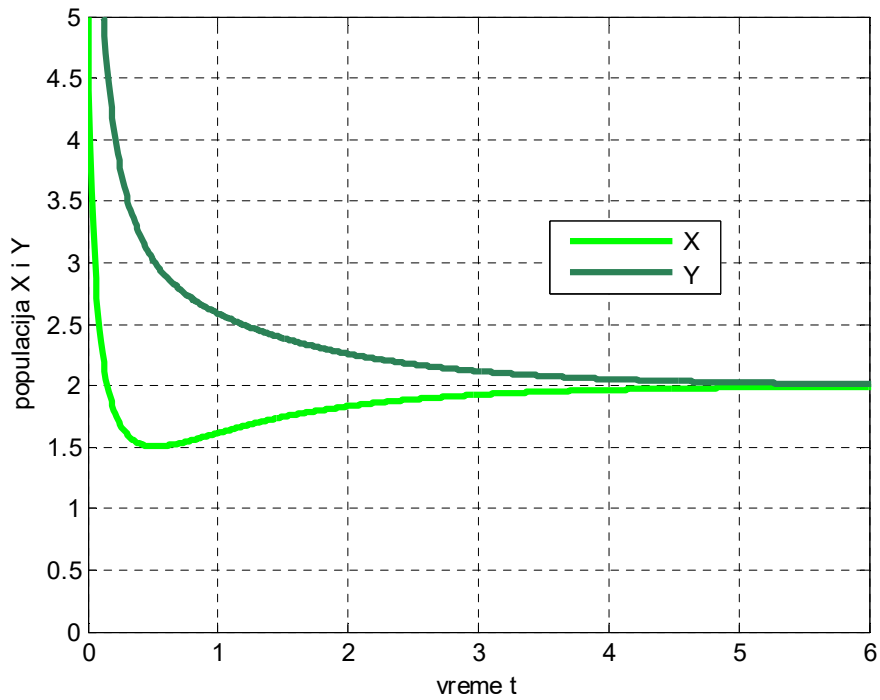
$$K_{23} = g\left(x_k + \frac{T}{2}K_{12}, y_k + \frac{T}{2}K_{22}\right) = \left(y_k + \frac{T}{2}K_{22}\right) \left[4 - \left(x_k + \frac{T}{2}K_{12}\right) - \left(y_k + \frac{T}{2}K_{22}\right)\right]$$

$$K_{14} = f(x_k + TK_{13}, y_k + TK_{23}) = (x_k + TK_{13})[6 - 2(x_k + TK_{13}) - (y_k + TK_{23})]$$

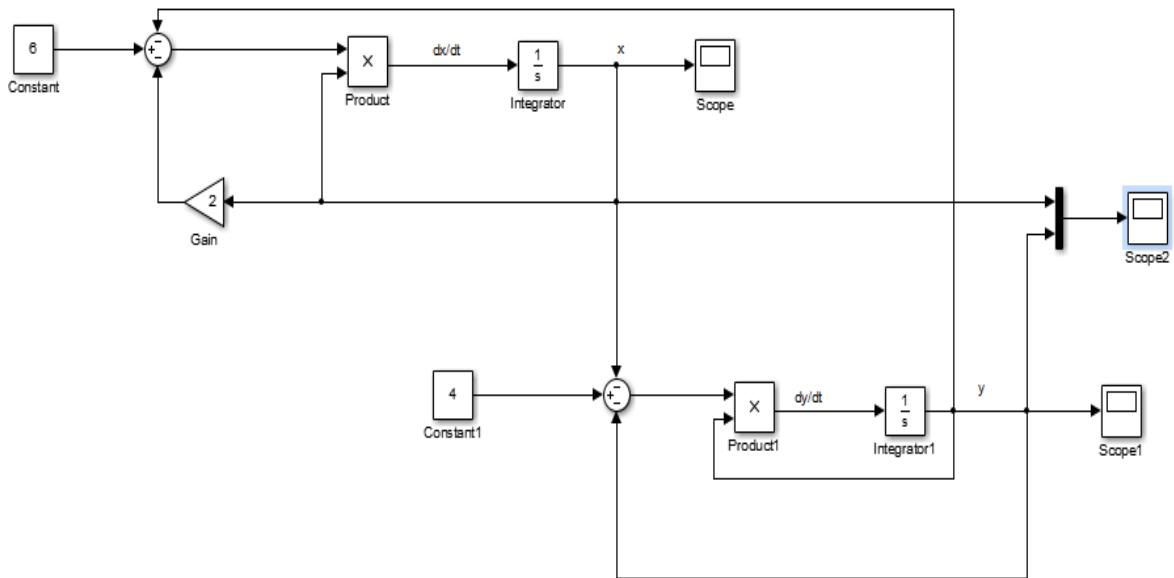
$$K_{24} = g(x_k + TK_{13}, y_k + TK_{23}) = (y_k + TK_{23})[4 - (x_k + TK_{13}) - (y_k + TK_{23})]$$

$$x_{k+1} = x_k + T(K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14})/6$$

$$y_{k+1} = y_k + T(K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24})/6 \quad (\text{II-3.12})$$



Слика II-3.5. Симулација на моделот (II-3.11) со помош на Рунге-Кута методот од четврти ред и MATLAB



Слика II-3.6. SIMULINK модел за симулација на системот равенки (II-3.11)

```
>> n=2500; h=0.01; t0=0; tn=25; x0=5; y0=10; t=t0;
x=x0; y=y0; X(1)=x0; Y(1)=y0;
```

```

for i=2:n
K11=x*(6-2*x-y);
K21=y*(4-x-y);
K12=(x+h*K11/2)*(6-2*(x+h*K11/2)-(y+h*K21/2));
K22=(y+h*K21/2)*(4-(x+h*K11/2)-(y+h*K21/2));
K13=(x+h*K12/2)*(6-2*(x+h*K12/2)-(y+h*K22/2));
K23=(y+h*K22/2)*(4-(x+h*K12/2)-(y+h*K22/2));
K14=(x+h*K13)*(6-2*(x+h*K13)-(y+h*K23));
K24=(y+h*K23)*(4-(x+h*K13)-(y+h*K23));
x=x+h*(K11+2*K12+2*K13+K14)/6;
y=y+h*(K21+2*K22+2*K23+K24)/6;
t=t+h;
X(i)=x;
Y(i)=y;
T(i)=t;
x1(i)=x*(6-2*x-y);
y1(i)=y*(4-x-y);
end
figure(1); plot(T,X,'r',T,Y,'b'),grid
xlabel('vreme t')
ylabel('populacija X i Y')
figure(2); plot(X,x1),grid
xlabel('populacija X')
ylabel('brzina na promena na populacija X')
figure(3); plot(Y,y1),grid
xlabel('populacija Y')
ylabel('brzina na promena na populacija Y')

```

**Задача II-3.6.** Со помош на Рунге-Кута постапката од четврти ред да се состави алгоритам за симулација на одсвот на набљудуваниот динамички систем на интервалот  $t = [0,10]$  со чекор  $T = 0.01$ . За излез да се усвои вредноста  $x_1 - x_2$  и да се претпостават нулеви почетни услови. Динамичкото поведење на системот е опишано со следните диференцијални равенки:

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + b_1 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + k_1 [x_1(t) - x_2(t)] = y(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + b_1 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)] + k_1 [x_1(t) - x_2(t)] - b_2 [\dot{w}_1(t) - \dot{x}_2(t)] - k_2 [w(t) - x_2(t)] = -y(t) \quad (\text{II-3.13})$$

каде што  $y(t) = h(t)$  е влез,  $w(t) = 0.1h(t)$  се пречки, а  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  се состојбени големини. За параметрите на системот да се усвојат следните вредности:  $m_1 = 2500$ ,  $m_2 = 320$ ,  $k_1 = 80000$ ,  $k_2 = 500000$ ,  $b_1 = 350$ ,  $b_2 = 15020$ .

**Решение:** Еден модел на набљудуваниот систем во просторот на состојби е:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= \dot{x}_1(t) = v_2(t) \\ \dot{v}_2(t) &= \ddot{x}_1(t) = \frac{1}{m_1} y(t) - \frac{b_1}{m_1} [v_2(t) - v_4(t)] - \frac{k_1}{m_1} [v_1(t) - v_3(t)] \\ \dot{v}_3(t) &= \dot{x}_2(t) = v_4(t) \\ \dot{v}_4(t) &= \ddot{x}_2(t) = -\frac{b_1}{m_2} [v_2(t) - v_4(t)] - \frac{k_1}{m_2} [v_1(t) - v_3(t)] - \\ &+ \frac{b_2}{m_2} [\dot{w}_1(t) - v_4(t)] + \frac{k_2}{m_2} [w(t) - v_3(t)] - \frac{1}{m_2} y(t) \end{aligned} \quad (\text{II-3.14})$$

односно:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= v_2(t) = f_1[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t), y(t), w(t), t] \\ \dot{v}_2(t) &= 0.0004y(t) - 0.14[v_2(t) - v_4(t)] - 32[v_1(t) - v_3(t)] = \\ &= f_2[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t), y(t), w(t), t] \\ \dot{v}_3(t) &= v_4(t) = f_3[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t), y(t), w(t), t] \\ \dot{v}_4(t) &= -1.09375[v_2(t) - v_4(t)] - 250[v_1(t) - v_3(t)] + 46.9375[-v_4(t)] + 1562.5[w(t) - v_3(t)] - \\ &- 0.003125y(t) = f_4[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t), y(t), w(t), t] \end{aligned} \quad (\text{II-3.15})$$

Алгоритамот за нумеричко решавање на овој модел според Рунге-Кута од четврти ред е:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ T &= 0.01 \\ k &= 0 : 0.01 : 10 \\ v_{10} &= x_{10}, v_{20} = \dot{x}_{10}, v_{30} = x_{20}, v_{40} = \dot{x}_{20} \end{aligned}$$

$$K_{11} = f_1[v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}, v_{4k}, t_k] = v_{2k}$$

$$K_{21} = f_2[v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}, v_{4k}, t_k] =$$

$$= 0.0004 - 32v_{1k} - 0.14v_{2k} + 32v_{3k} + 0.14v_{4k}$$

$$K_{31} = f_3[v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}, v_{4k}, t_k] = v_{4k}$$

$$K_{41} = f_4[v_{1k}, v_{2k}, v_{3k}, v_{4k}, t_k] =$$

$$= -250v_{1k} - 1.09375v_{2k} - 1312.5v_{3k} - 45.84375v_{4k} + 156.2469$$

$$K_{12} = f_1\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{11}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{21}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{31}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{41}, t_k + \frac{1}{2}T\right] =$$

$$v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{21}$$

$$K_{22} = f_2\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{11}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{21}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{31}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{41}, t_k + \frac{1}{2}T\right] =$$

$$= 0.0004 - 32\left(v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{11}\right) - 0.14\left(v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{21}\right) +$$

$$+ 32\left(v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{31}\right) + 0.14\left(v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{41}\right)$$

$$K_{32} = f_3\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{11}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{21}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{31}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{41}, t_k + \frac{1}{2}T\right] =$$

$$= v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{41}$$

$$K_{42} = f_4\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{11}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{21}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{31}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{41}, t_k + \frac{1}{2}T\right] =$$

$$= -250\left(v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{11}\right) - 1.09375\left(v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{21}\right) - 1312.5\left(v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{31}\right) -$$

$$- 45.84375\left(v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{41}\right) + 156.2469$$

$$K_{13} = f_1\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{12}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{22}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{32}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{42}, t_k + \frac{1}{2}T\right] =$$

$$= v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{22}$$

$$K_{23} = f_2\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{12}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{22}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{32}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{42}, t_k + \frac{1}{2}T\right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.0004y_{1k} - 32\left(v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{12}\right) - 0.14\left(v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{22}\right) + \\
 &+ 32\left(v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{32}\right) + 0.14\left(v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{42}\right) \\
 K_{33} &= f_3\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{12}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{22}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{32}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{42}, t_k + \frac{1}{2}T\right] = \\
 &= v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{42} \\
 K_{43} &= f_4\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{12}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{22}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{32}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{42}, t_k + \frac{1}{2}T\right] = \\
 &= -250\left(v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{12}\right) - 1.09375\left(v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{22}\right) - 1312.5\left(v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{32}\right) - \\
 &- 45.84375\left(v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{42}\right) + 156.2469 \\
 K_{14} &= f_1\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{13}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{23}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{33}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{43}, t_k + T\right] = \\
 &= v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{23} \\
 K_{24} &= f_2\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{13}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{23}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{33}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{43}, t_k + T\right] = \\
 &= 0.0004y_{1k} - 32\left(v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{13}\right) - 0.14\left(v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{23}\right) + \\
 &+ 32\left(v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{33}\right) + 0.14\left(v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{43}\right) \\
 K_{34} &= f_3\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{13}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{23}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{33}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{43}, t_k + T\right] = \\
 &= v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{43} \\
 K_{44} &= f_4\left[v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{13}, v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{23}, v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{33}, v_{4k} + \frac{1}{2}TK_{43}, t_k + T\right] = \\
 &= -250\left(v_{1k} + \frac{1}{2}TK_{13}\right) - 1.09375\left(v_{2k} + \frac{1}{2}TK_{23}\right) - 1312.5\left(v_{3k} + \frac{1}{2}TK_{33}\right) +
 \end{aligned}$$

$$-45.84375 \left( v_{4k} + \frac{1}{2} TK_{43} \right) + 156.2469$$

$$v_{1,k+1} = v_{1k} + \frac{1}{6} T [K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14}]$$

$$v_{2,k+1} = v_{2k} + \frac{1}{6} T [K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24}]$$

$$v_{3,k+1} = v_{3k} + \frac{1}{6} T [K_{31} + 2K_{32} + 2K_{33} + K_{34}]$$

$$v_{4,k+1} = v_{4k} + \frac{1}{6} T [K_{41} + 2K_{42} + 2K_{43} + K_{44}]$$

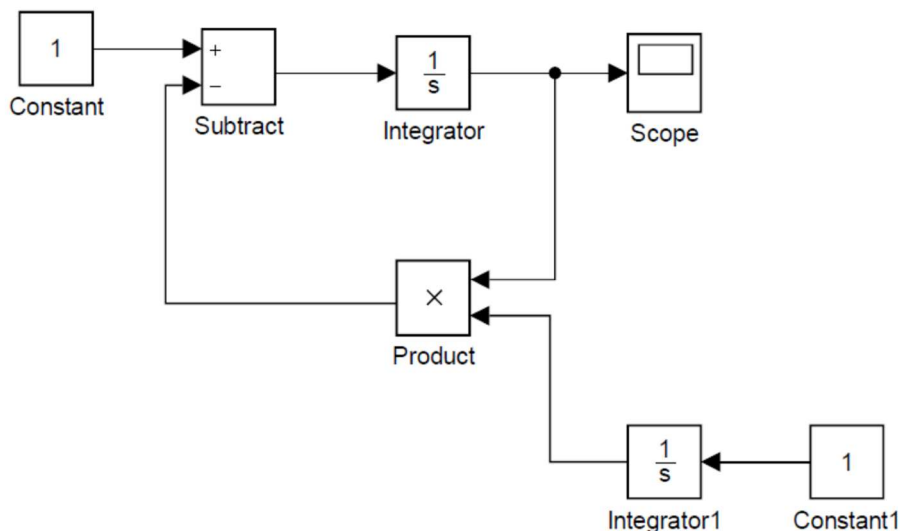
$$x_k = v_{1k} - v_{3k}$$

$$t_{k+1} = t_k + T$$

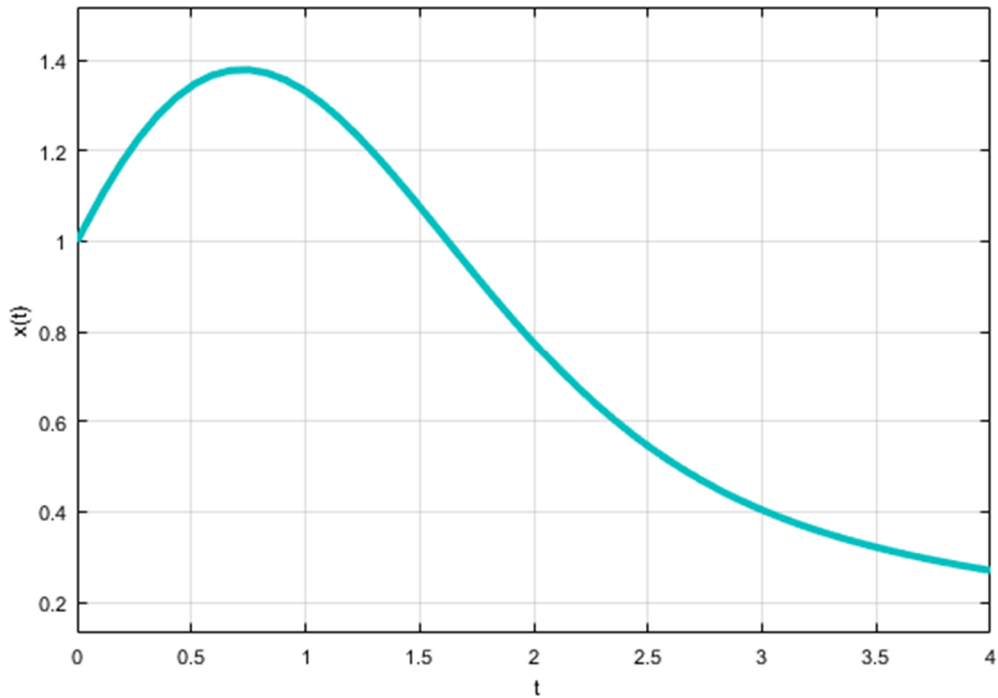
## II-4. СИМУЛАЦИЈА СО ПОМОШ НА SIMULINK

**Задача II-4.1.** Да се состави SIMULINK модел за симулација на решението на диференцијалната равенка (II-3.1) и истото да се прикаже графички.

**Решение:** Бараниот SIMULINK модел е прикажан на слика II-4.1, а добиеното решение на слика II-4.2.



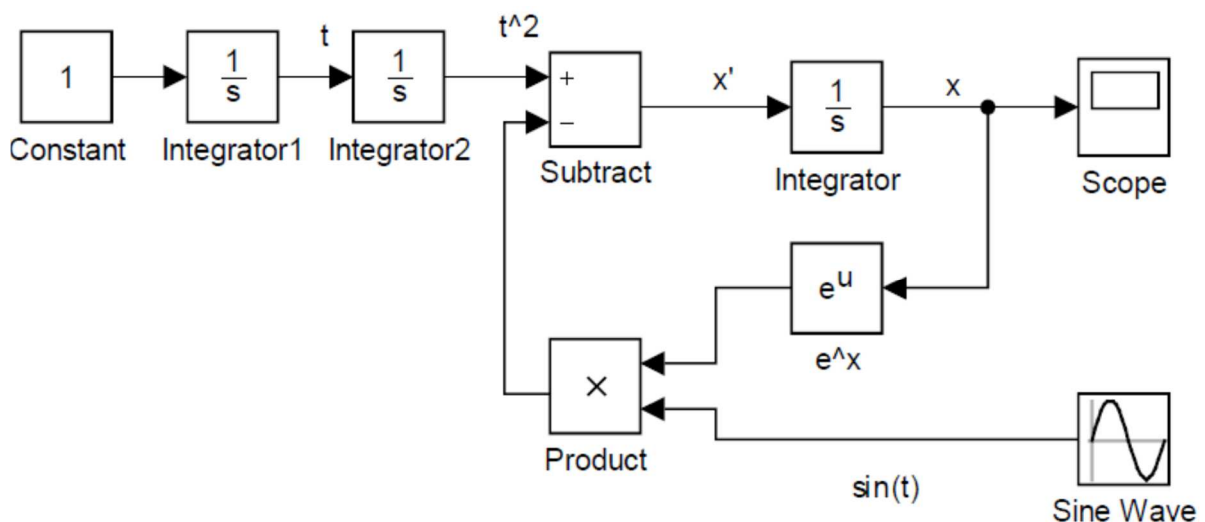
Слика II-4.1. SIMULINK модел за симулација на решението на диференцијалната равенка (II-3.1)



Слика II-4.2. Графички приказ на решението на диференцијалната равенка (II-3.1) добиено со симулација

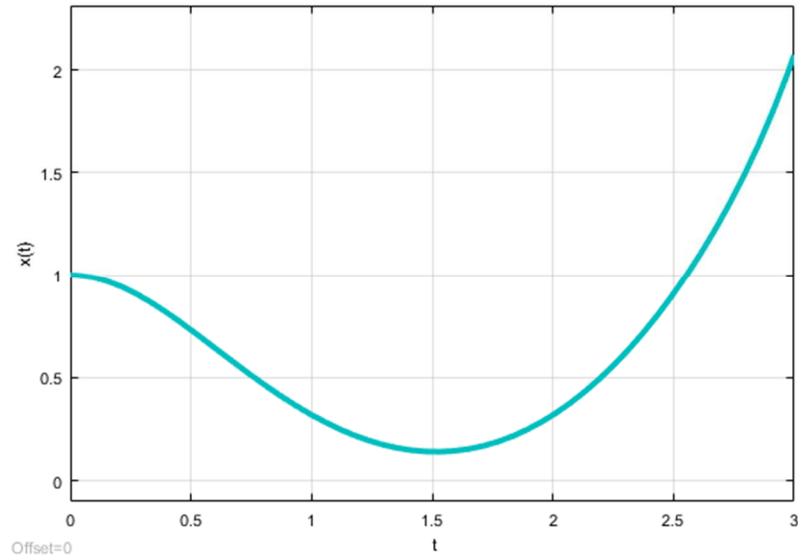
**Задача II-4.2.** Да се состави SIMULINK модел за симулација на диференцијалната равенка (II-3.6) и да се прикаже графички резултатот од симулацијата.

**Решение:** Добиениот SIMULINK модел е прикажан на слика II-4.3, а резултатот од неговата симулација е прикажан на слика II-4.4.



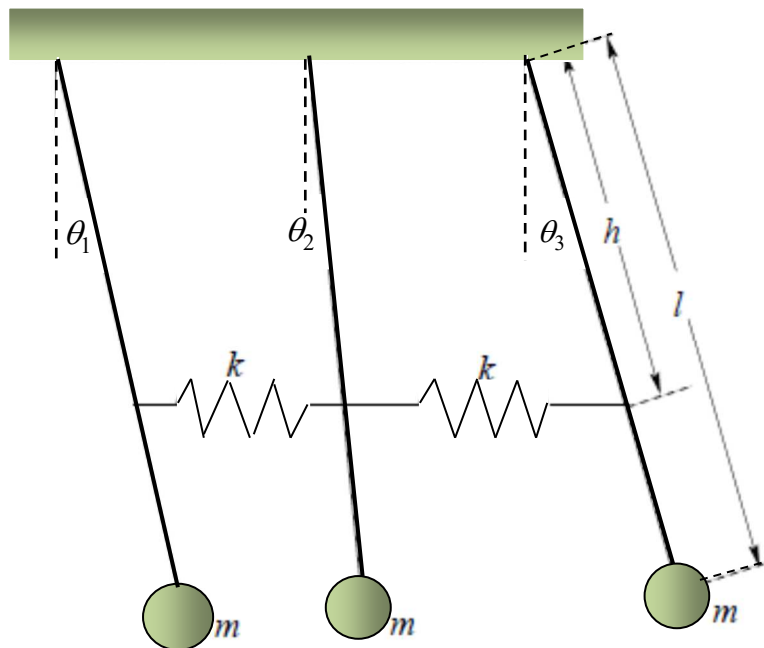
Слика II-4.3. SIMULINK модел за симулација на решението на диференцијалната равенка (II-3.6)





Слика II-4.4. Графички приказ на решението на диференцијалната равенка (II-3.6) добиено со симулација

**Задача II-4.3.** Даден е механичкиот систем од слика II-4.5, кој се состои од три нишала со идентична должина  $l = 1\text{ m}$  и маса  $m = 0.5\text{ kg}$ , закачени за неподвижна подлога. Нишалата се меѓусебно поврзани на растојание  $h = 0.6\text{ m}$  од точката на прицврстување со идентични пружини со коефициент на крутост  $K = 20\text{ N/m}$ . Нишалата можат да осцилираат само во вертикалната рамнина. Да се состави SIMULINK модел на овој систем. За почетни услови да се усвои  $\theta_1 = 5^\circ$ ,  $\theta_2 = 3^\circ$  и  $\theta_3 = 8^\circ$ .



Слика II-4.5. Илустрација кон задачата II-4.3

**Решение:** Кинетичката енергија на набљудуваниот механички систем може да се претстави како збир од кинетичките енергии на трите нишала:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \quad (\text{II-4.1})$$

Гравитационата потенцијална енергија на нишалата е:

$$\begin{aligned} P_g &= P_{g1} + P_{g2} + P_{g3} = \\ &= mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) + mgl(1 - \cos \theta_3) \end{aligned} \quad (\text{II-4.2})$$

Издолжувањето на првата пружина изнесува:

$$h(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (\text{II-4.3})$$

додека издолжувањето на втората пружина е:

$$h(\sin \theta_3 - \sin \theta_2) \quad (\text{II-4.4})$$

Еластичната потенцијална енергија на системот ќе биде збир од еластичната потенцијална енергија на двете пружини:

$$\begin{aligned} P_e &= P_{e1} + P_{e2} = \\ &= \frac{1}{2} kh^2 [(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (\sin \theta_3 - \sin \theta_2)^2] \end{aligned} \quad (\text{II-4.5})$$

а вкупната потенцијална енергија на набљудуваниот механички систем се добива како збир од неговата гравитациона и еластична потенцијална енергија:

$$\begin{aligned} P &= P_g + P_e = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) + mgl(1 - \cos \theta_3) + \\ &+ \frac{1}{2} kh^2 [(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (\sin \theta_3 - \sin \theta_2)^2] \end{aligned} \quad (\text{II-4.6})$$

За многу мали агли, изразот за потенцијална енергија преминува во облик:

$$P = \frac{1}{2} kh^2 [(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2] \quad (\text{II-4.7})$$

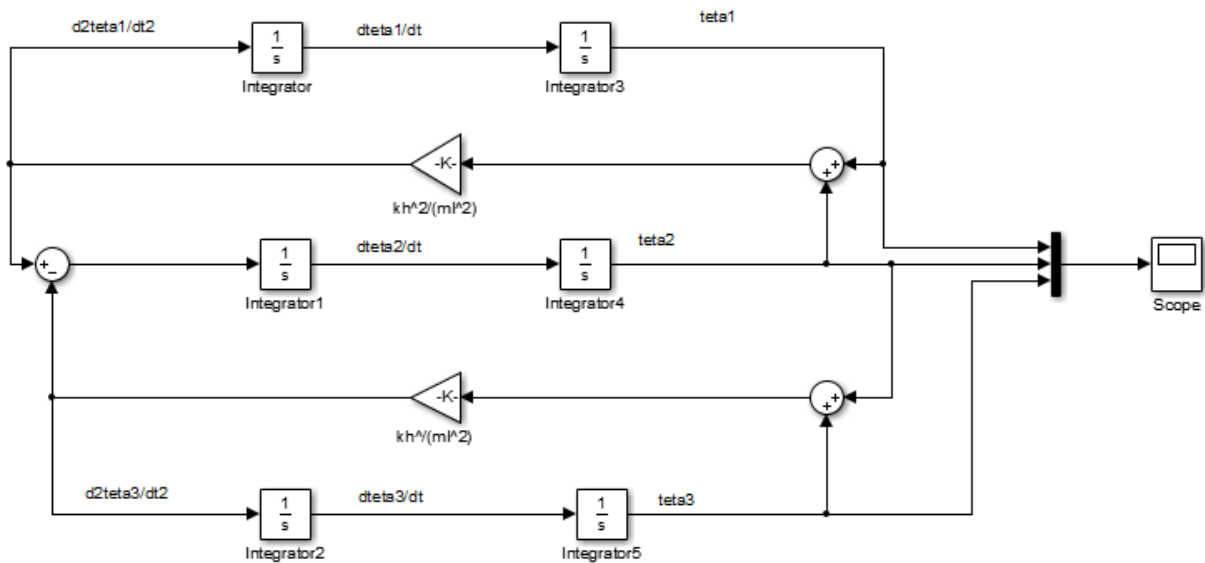
па, математичкиот модел на движењето на овој систем, ќе биде:

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 + kh^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$ml^2 \ddot{\theta}_2 + kh^2 (\theta_2 - \theta_1) + kh^2 (\theta_2 - \theta_3) = 0$$

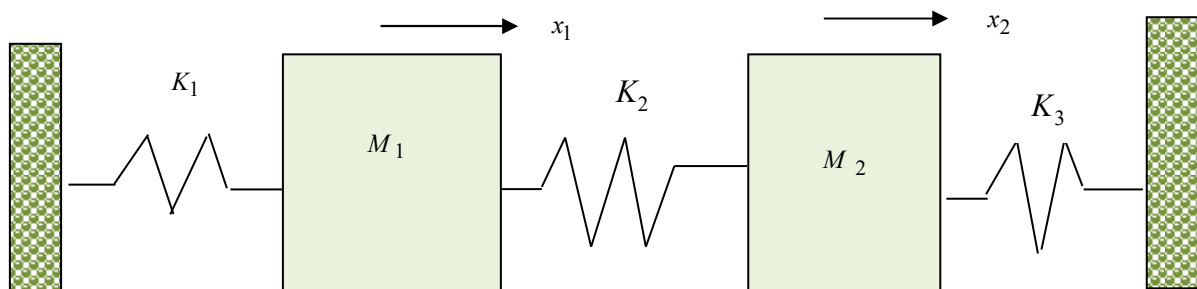
$$ml^2 \ddot{\theta}_3 + kh^2 (\theta_3 - \theta_2) = 0$$

(II-4.8)



Слика II-4.6. SIMULINK модел на механичкиот систем од слика II-4.5

**Задача II-4.4.** Да се состави SIMULINK модел на механичкиот систем од слика II-4.7. Системот се состои од два тега со маси  $m_1 = 10\text{kg}$  и  $m_2 = 5\text{kg}$  кои се поврзани меѓусебно и со неподвижни вертикални сидови преку пружини со коефициенти на крутост  $K_1 = 25\text{N/m}$ ,  $K_2 = 10\text{N/m}$  и  $K_3 = 5\text{N/m}$ . Да се занемари триењето во системот. За почетни услови да се усвои  $x_{10} = 10\text{cm}$  и  $x_{20} = 5\text{cm}$ .



Слика II-4.7. Илустрација кон задачата II-4.4

**Решение:** Математичкиот модел на набљудуваниот механички систем е следниот:

$$m_1 \ddot{x}_1 + K_1 (x_1 - x_0) = K_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + K_2(x_2 - x_1) = K_3(x_3 - x_2) \quad (\text{II-4.9})$$

Првата пружина е прицврстена за неподвижна подлога од лево, па:

$$x_0 = 0 \quad (\text{II-4.10})$$

додека третата пружина е прицврстена за неподвижна подлога од десно, па:

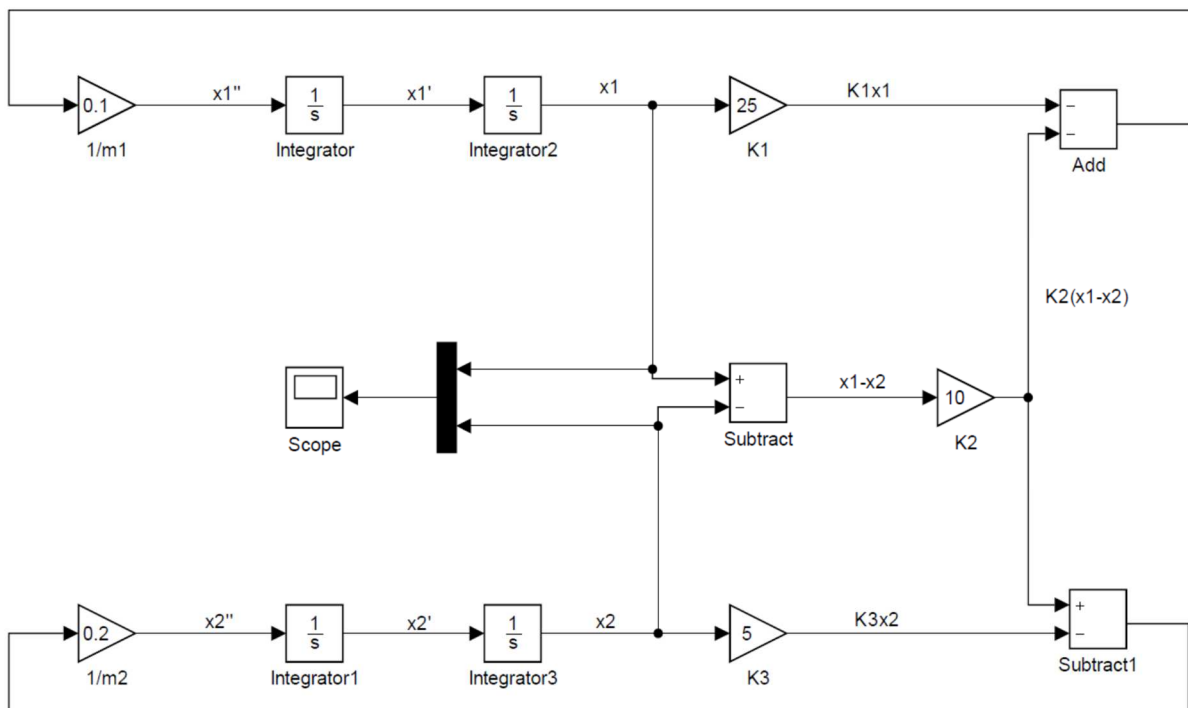
$$x_3 = 0 \quad (\text{II-4.11})$$

Така, моделот на системот може да се претстави во следниот облик:

$$m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + K_2(x_1 - x_2) = 0; \quad x_{10} = x_1(0) = 0.1; \quad \dot{x}_{10} = \dot{x}_1(0) = 0$$

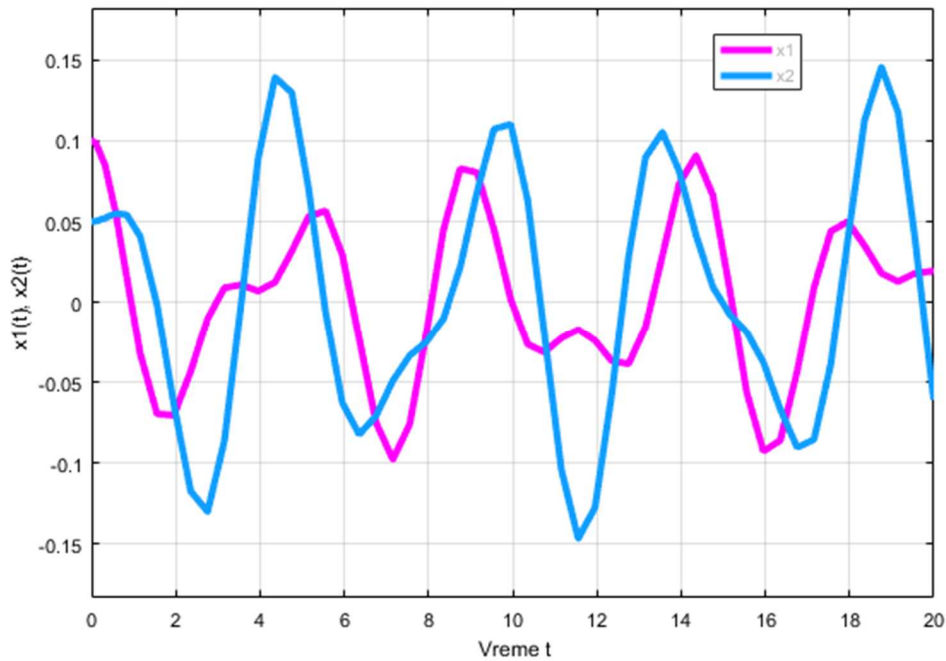
$$m_2 \ddot{x}_2 + K_3 x_2 - K_2(x_1 - x_2) = 0; \quad x_{20} = x_2(0) = 0.05; \quad \dot{x}_{20} = \dot{x}_2(0) = 0 \quad (\text{II-4.12})$$

Соодветниот SIMULINK модел е прикажан на слика II-4.8.



Слика II-4.8. SIMULINK модел на механичкиот систем од слика II-4.7

Решенијата на моделот (II-4.12), добиени со SIMULINK моделот од слика II-4.8, се прикажани на слика II-4.9.



Слика II-4.9. Решенија на моделот (II-4.12) добиени со симулација

**Задача II-4.5.** Да се состави MATLAB програм за симулација на решението и генерирање на  $X - Y$  портрет на Лотка-Волтера моделот:

$$\dot{x} = 3x(1 - 0.1y), \quad x(0) = 10$$

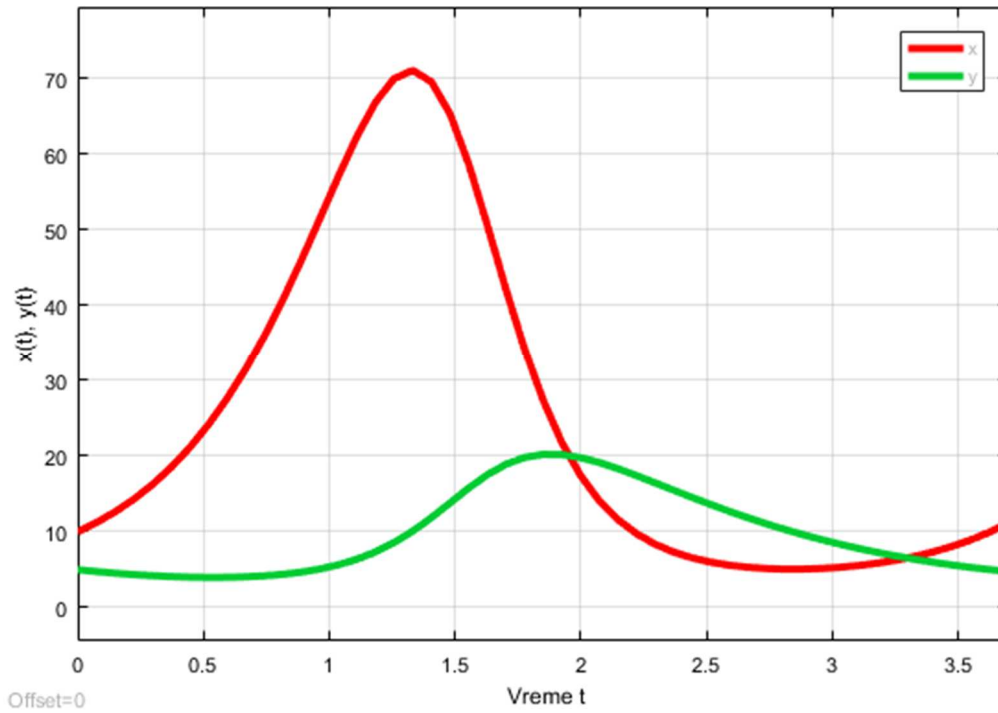
$$\dot{y} = 1.2y(-1 + 0.04x), \quad y(0) = 5 \quad (\text{II-4.13})$$

Бараното решение да се прикаже на интервалот  $[0,5]$ . Потоа да се состави и соодветен SIMULINK модел за симулација на решението на набљудуваниот систем ловец-плен.

**Решение:** Саканиот MATLAB програм за симулација на решението на системот (II-4.13) е даден во продолжение.

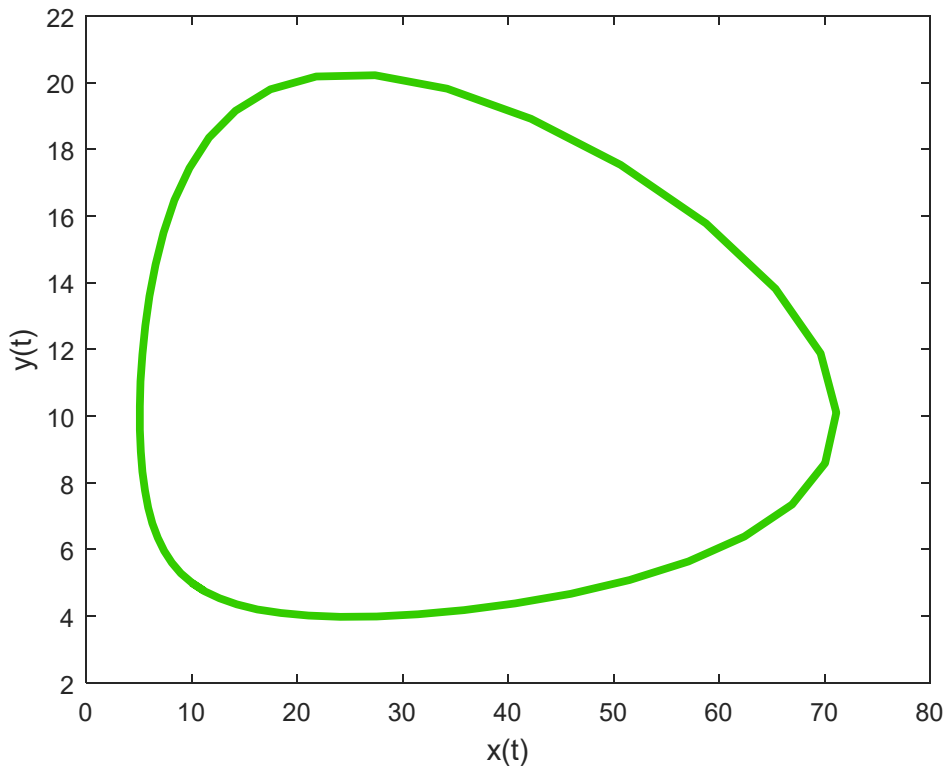
```
T=0.001;
x(1)=10;
y(1)=5;
for i=1:5000
    x(i+1)=x(i)*(1+3*T-3*T*y(i)/10);
    y(i+1)=y(i)*(1-1.2*T+1.2*T*x(i)/25);
end
t=[0:0.001:5];
plot(t,x,t,y)
plot(x,y)
```

На слика II-4.10 се прикажани решенијата на моделот (II-4.13).



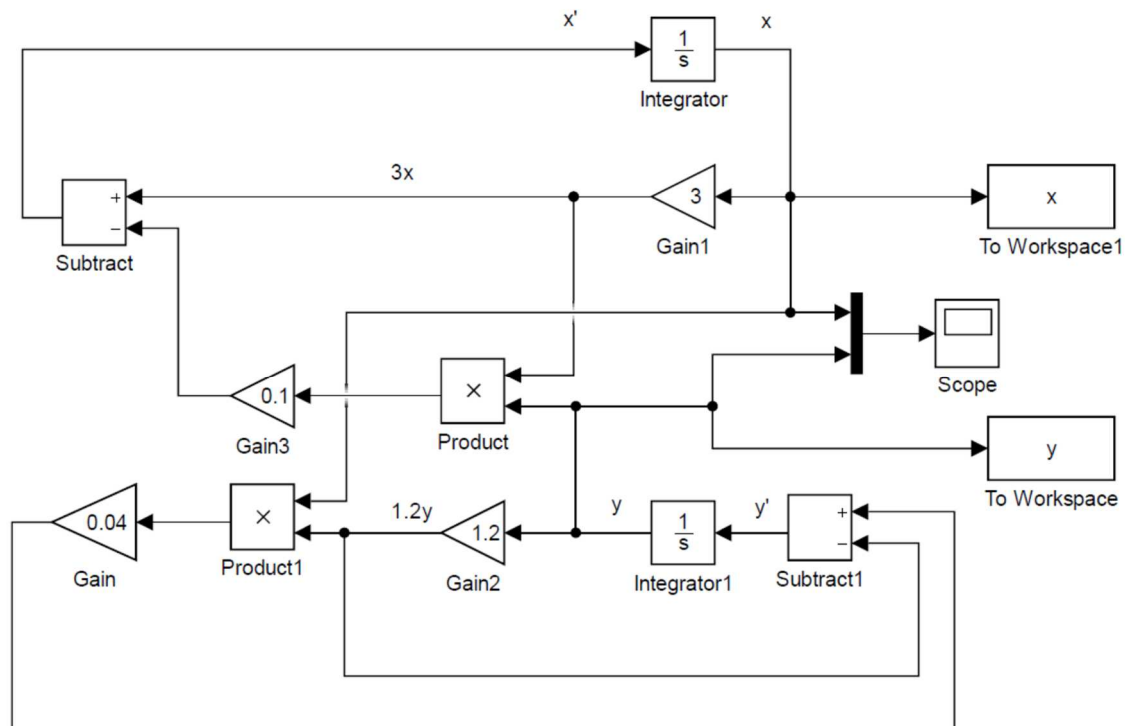
Слика II-4.10. Графички приказ на прирастот на двете животински врсти  $x$  и  $y$

На слика II-4.11 е прикажан неговиот  $X - Y$  портрет.



Слика II-4.11.  $X - Y$  портрет на моделот ловец-плен

Бараниот SIMULINK модел е прикажан на слика II-4.12.



Слика II-4.12. SIMULINK модел на Лотка-Волтера моделот (II-4.13)

**Задача II-4.6.** Да се изврши симулација на динамиката на ширење на некоја инфективна болест во дадена популација со помош на SIMULINK. Популацијата е поделена во три категории:  $x_1(t)$  – загрошена група (здрави единки кои никогаш не ја прележале болеста и не поседуваат имунитет кон неа),  $x_2(t)$  – болни,  $x_3(t)$  – единки кои веќе ја прележале болеста и поседуваат имунитет. Динамиката на ширењето на болеста во популацијата е опишана со следниот модел:

$$\dot{x}_1(t) = -p_1 x_1(t) x_2(t); x_1(0) = 700$$

$$\dot{x}_2(t) = p_1 x_1(t) x_2(t) - p_2 x_2(t); x_2(0) = 25$$

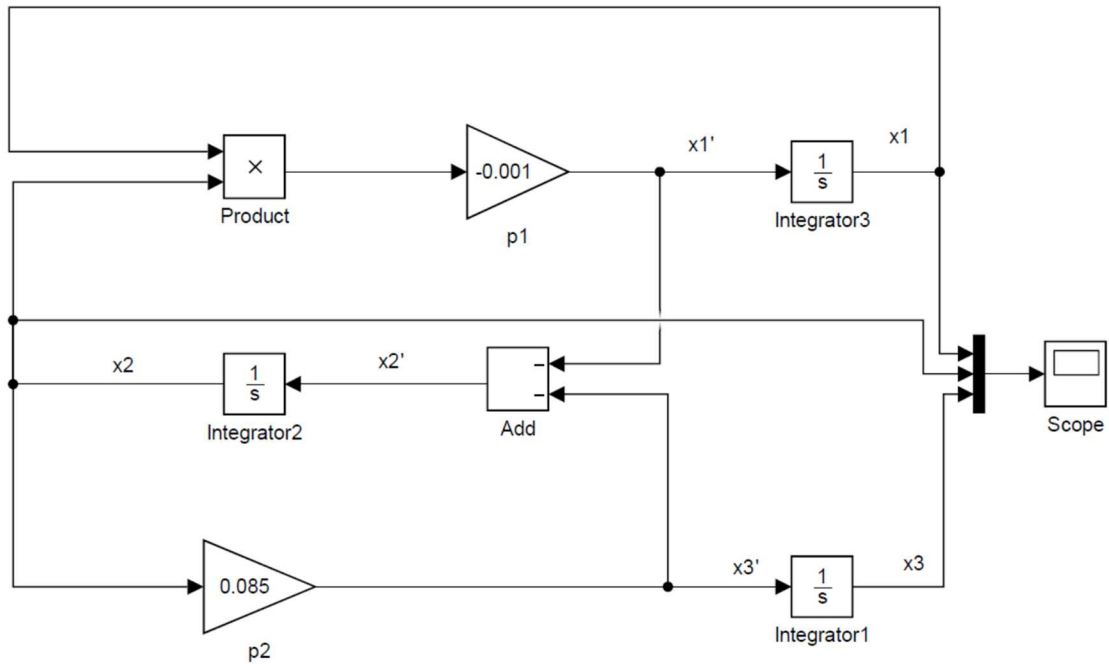
$$\dot{x}_3(t) = p_2 x_2(t); x_3(0) = 100 \tag{II-4.14}$$

Вкупната популација е збир од трите категории единки:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \tag{II-4.15}$$

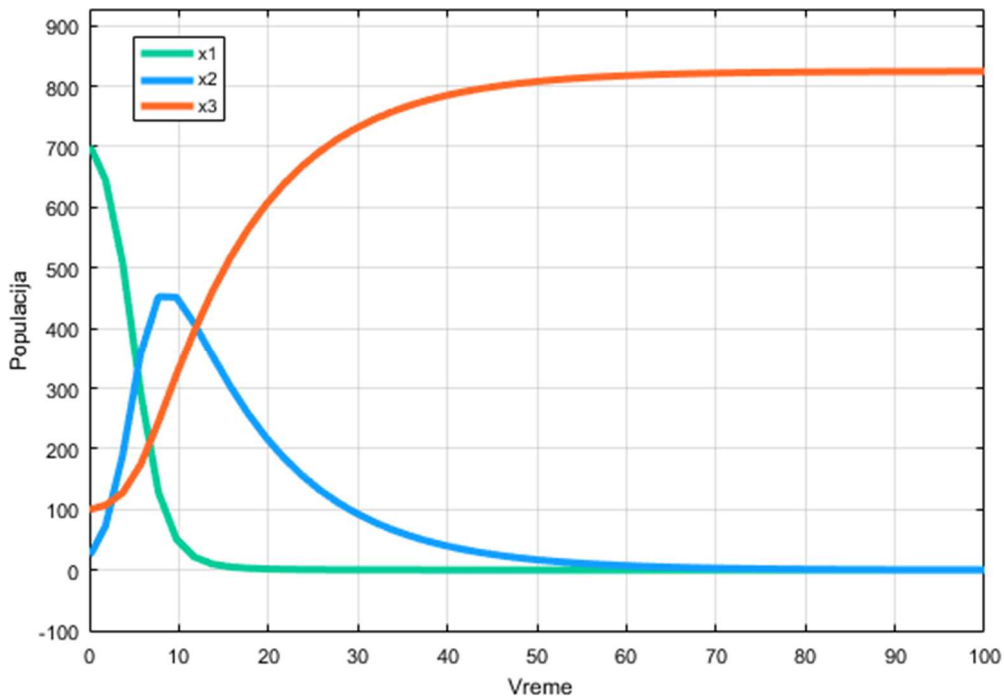
Параметрите се:  $p_1 = 0.001$ ,  $p_2 = 0.085$ . Во дадениот модел се претпоставува дека сите болни единки кои ќе ја прележат болеста стекнуваат траен имунитет. Да се модифицира моделот според претпоставката дека единките кои ја прележале болеста не стекнуваат имунитет. Бројот имуни единки и понатаму е 100.

**Решение:** Бараниот SIMULINK модел е прикажан на долната слика II-4.13.



Слика II-4.13. SIMULINK модел на динамиката на ширење на некоја болест

Моделот ја дава следата динамика за одделните категории на популација, прикажана на слика II-4.14.



Слика II-4.14. Резултат од симулацијата на моделот од слика II-4.13

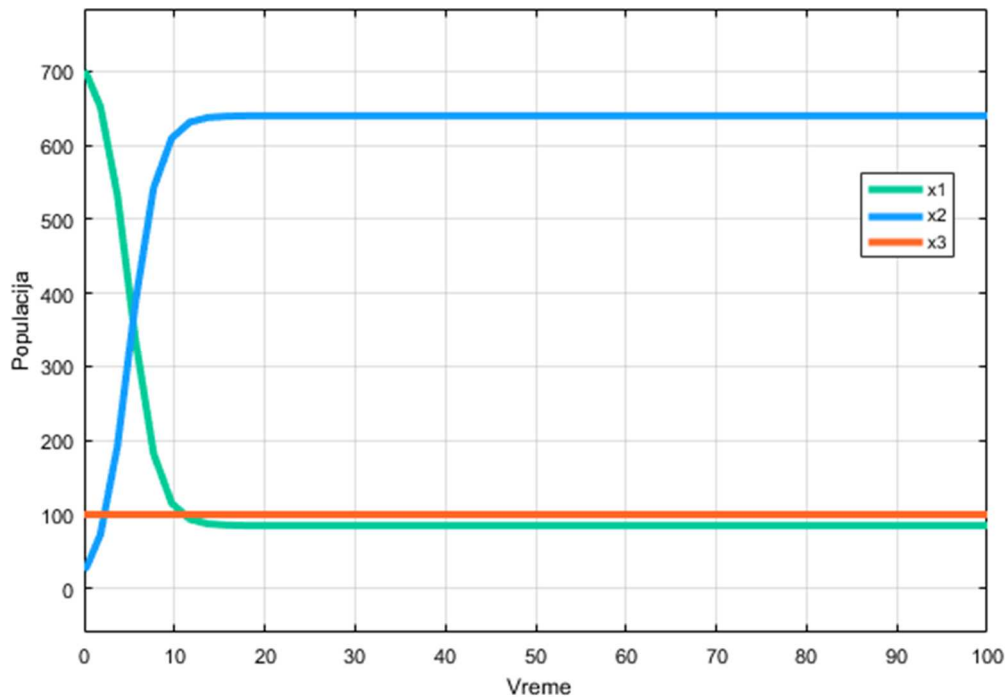


Производот  $x_1(t)x_2(t)$  помеѓу двете категории ги претставува сите можни комбинации помеѓу нив. Веројатноста единките од загрозената група да се заразат со болеста кога ќе дојдат во контакт со болни е  $p_1$ . Веројатноста на болните единки да оздрават по болеста е  $p_2$ .

Претпоставката дека единките кои ја преболеле болеста не стекнуваат имунитет, ги прави истите членови на првата категорија – загрозени единки. Оттаму, моделот треба да се модифицира на следниот начин:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -p_1x_1(t)x_2(t) + p_2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= p_1x_1(t)x_2(t) - p_2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 0 \end{aligned} \tag{II-4.16}$$

Излезот на модифицираниот модел (II-4.16) е прикажан на слика II-4.15.



Слика II-4.15. Резултат од симулацијата на системот (II-4.16)

**Задача II-4.7.** Да се состави SIMULINK модел за симулација на ширењето на грип низ населението од дадена урбана средина. Оваа ситуација може да се опише со следниот математички модел:

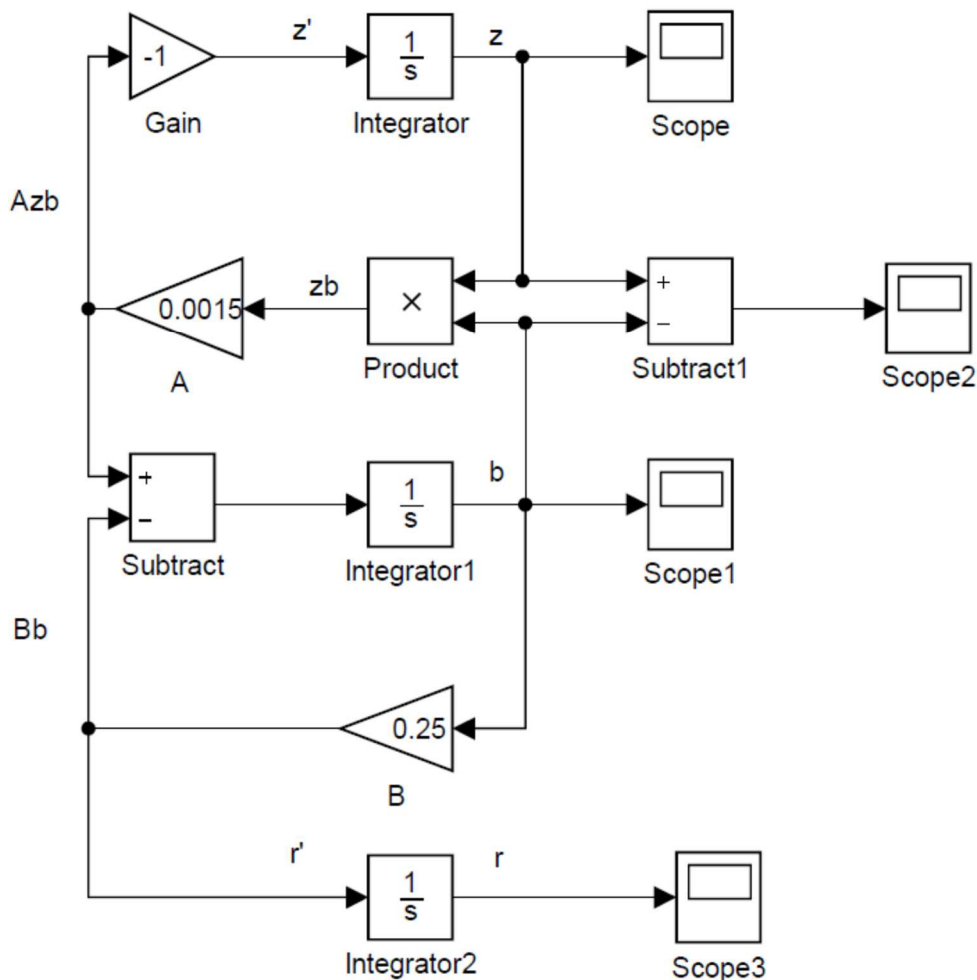
$$z'(t) = -Az(t)b(t); z(0) = 1000$$

$$b'(t) = Az(t)b(t) - Bb(t); b(0) = 250$$

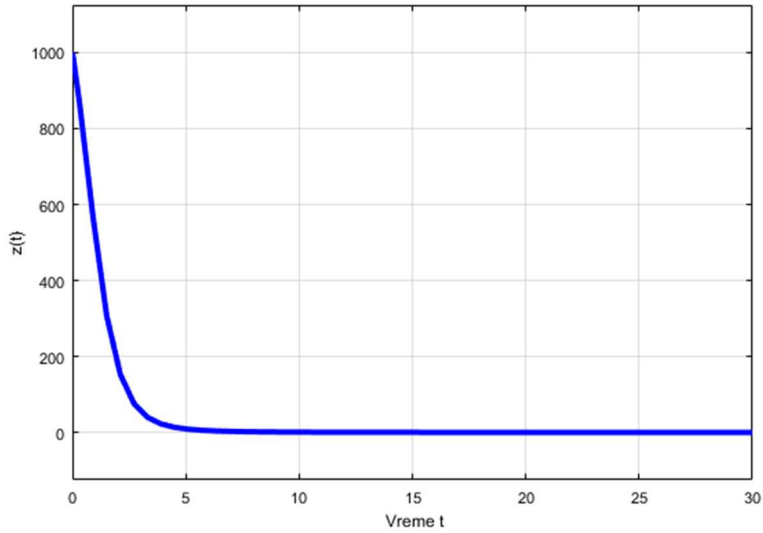
$$r'(t) = Bb(t); r(0) = 0 \quad (\text{II-4.17})$$

каде што:  $z(t)$  – го претставува бројот здрави луѓе, кои сè уште не биле заразени со болеста,  $b(t)$  – го претставува бројот тековно болни луѓе,  $r(t)$  – го претставува бројот луѓе што ја преболеле болеста и стекнале имунитет,  $A = 0.0015$  е позитивна константа, која го зема предвид вкупниот број контакти помеѓу двете групи  $z(t)$  и  $b(t)$  и бројот контакти кои резултираат во заразување,  $B = 0.25$  е константа на пропорционалност која ја отсликува брзината на оздравување на заразените. Во одговор да се нацртаат графиконите на зависностите  $z(t)$ ,  $b(t)$  и зависноста  $z(t) - b(t)$ . Симулацијата да се изврши за време  $t = 30$ .

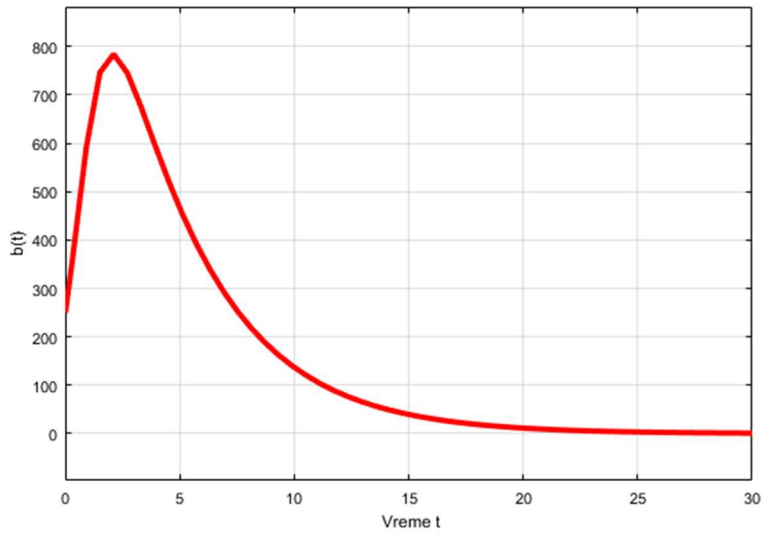
**Решение:** Бараниот SIMULINK модел и соодветните решенија на моделот (II-4.17) се прикажани во продолжение.



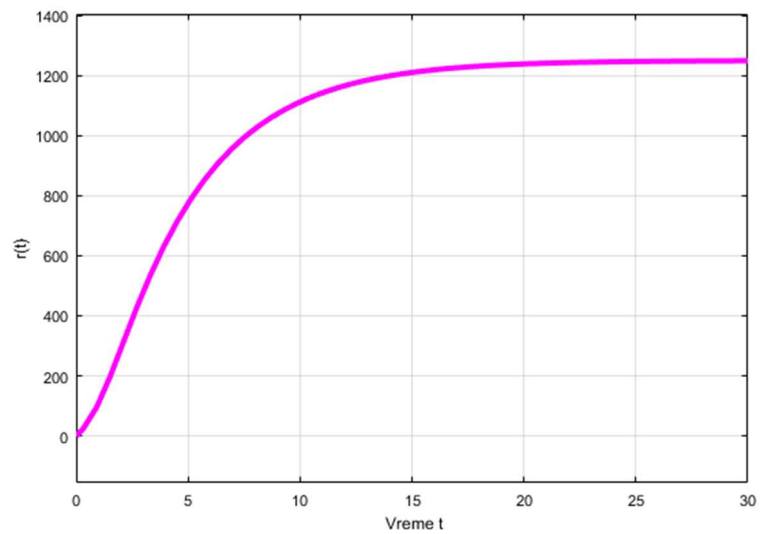
Слика II-4.16. SIMULINK модел за симулација на системот (II-4.17)



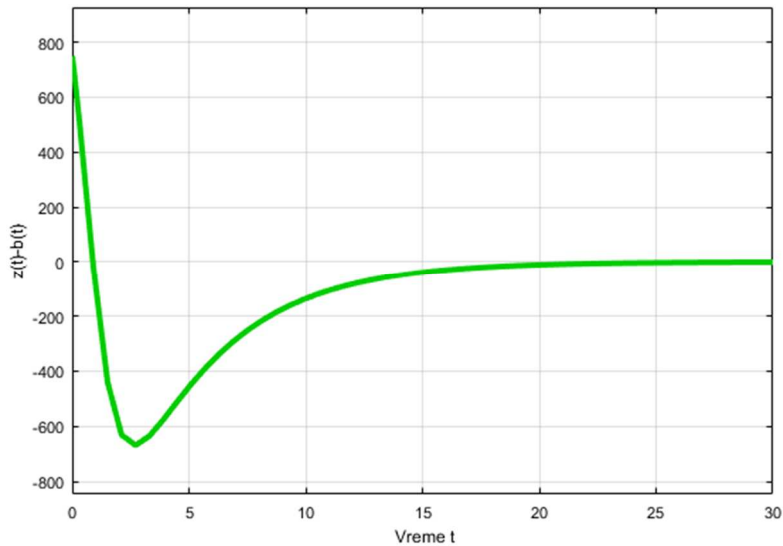
Слика II-4.17. Графикон на здрави луѓе со текот на времето



Слика II-4.18. Графикон на заразени со текот на времето



Слика II-4.19. Графикон на луѓе што ја преболеле болеста и стекнале имунитет



Слика II-4.20. Споредба на здрави и болни единици со тек на времето

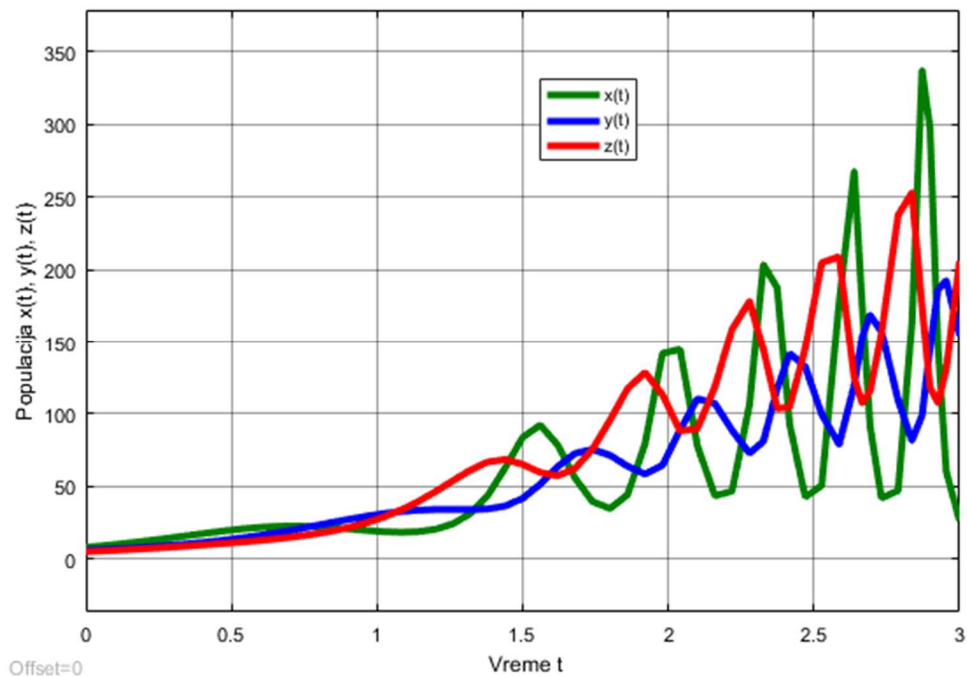
**Задача II-4.8.** Да се состави SIMULINK модел за симулација на Лотка-Волтера моделот со три популации на интервалот  $[0,3]$ :

$$\dot{x} = x(3 - 0.3y + 0.2z), \quad x(0) = 8$$

$$\dot{y} = y(1.2 + 0.06x - 0.048z), \quad y(0) = 6$$

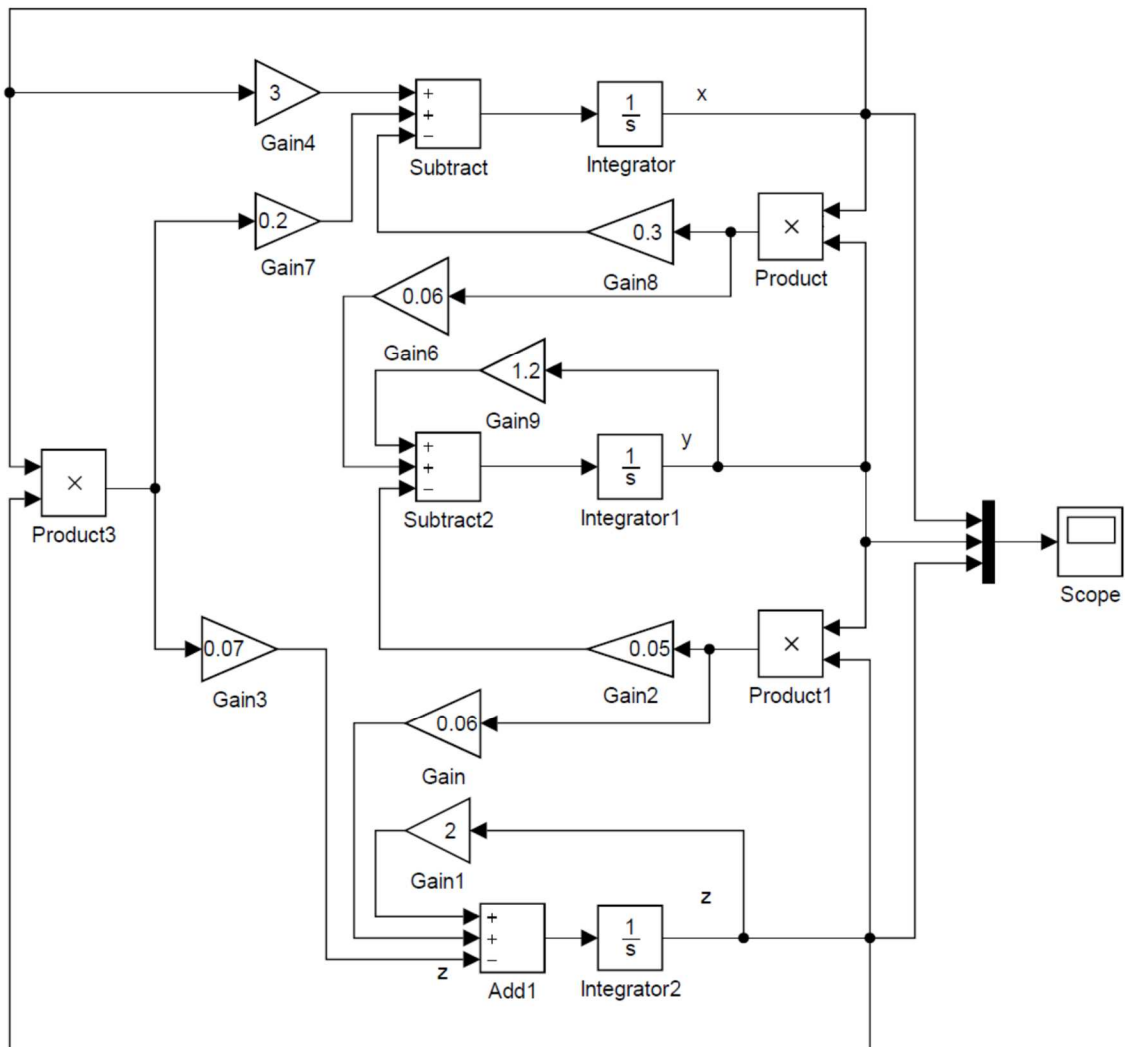
$$\dot{z} = z(2 - 0.07x + 0.06y), \quad z(0) = 5 \tag{II-4.18}$$

**Решение:** На слика II-4.21 се прикажани графички решенијата на моделот (II-4.18).



Слика II-4.21. Решенија на моделот (II-4.18)

Добиениот SIMULINK модел е прикажан на слика II-4.22.



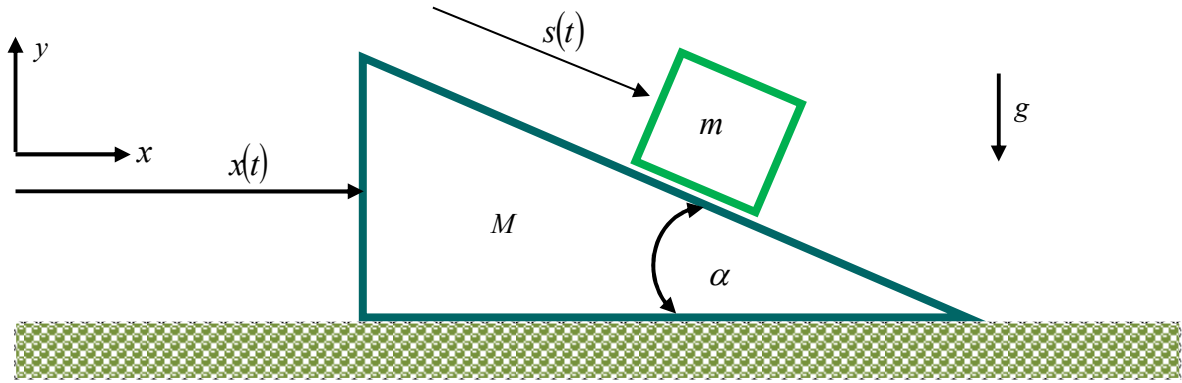
Слика II-4.22. SIMULINK модел на Лотка-Волтера моделот со три популации

**Задача II-4.9.** Коцка со маса  $m = 5kg$  се лизга по мазна површина (отсуство на триење), која ја претставува накосената страна на едно легнато тело, како што е прикажано на слика II-4.23. Телото има маса  $M = 45kg$  и од своја страна може слободно да се движи по мазната хоризонтална рамнина на која лежи (отсуство на триење). Математичкиот модел на движењето на овој механички систем е:

$$(M + m)\ddot{x}(t) + m\ddot{s}(t)\cos\alpha = 0$$

$$m\ddot{s}(t) + m\ddot{x}(t)\cos\alpha = mg\sin\alpha \quad (\text{II-4.19})$$

Нека  $\alpha = 60^\circ$ . Да се состави SIMULINK модел за симулација на движењето на набљудуваниот систем.



Слика II-4.23. Илустрација кон задачата II-4.9

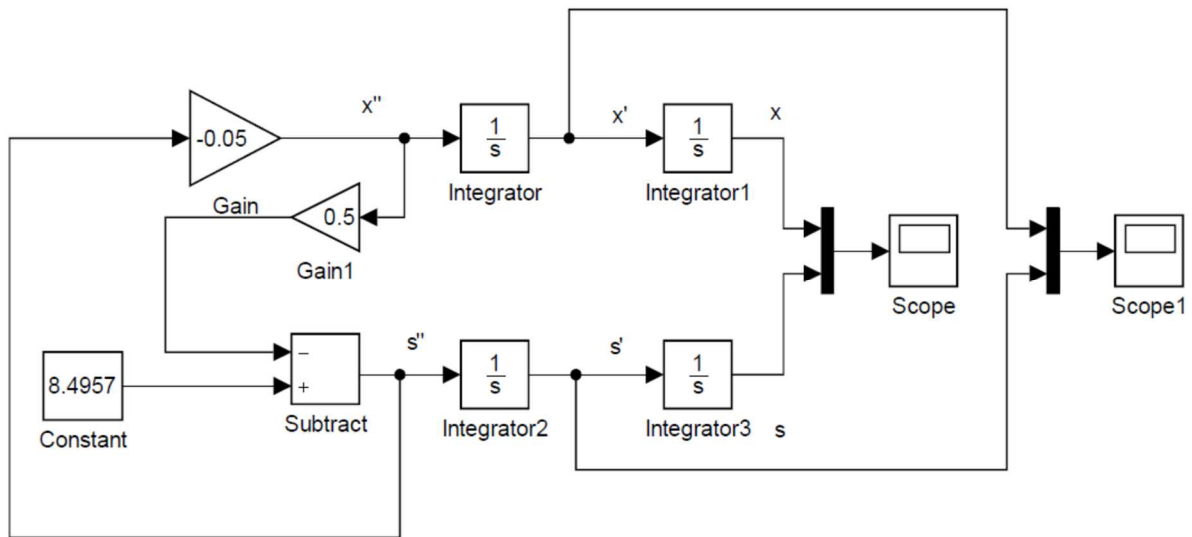
**Решение: 1. Начин.**

Математичкиот модел (II-4.19) може да се доведе на облик:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{m \cos \alpha}{(M + m)} \ddot{s}(t)$$

$$\ddot{s}(t) = g \sin \alpha - \ddot{x}(t) \cos \alpha \tag{II-4.20}$$

од каде следува SIMULINK моделот од слика II-4.24.



Слика II-4.24. SIMULINK модел на системот (II-4.20)

**2.начин.** Системот равенки (II-4.19) може да се реши во однос на  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{s}(t)$  на следниот начин:

$$\begin{bmatrix} M + m & m \cos \alpha \\ m \cos \alpha & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{s}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M + m & m \cos \alpha \\ m \cos \alpha & m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ mg \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{s}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{m(M + m) - m^2 \cos^2 \alpha} \cdot \begin{bmatrix} m & -m \cos \alpha \\ -m \cos \alpha & M + m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ mg \sin \alpha \end{bmatrix}$$

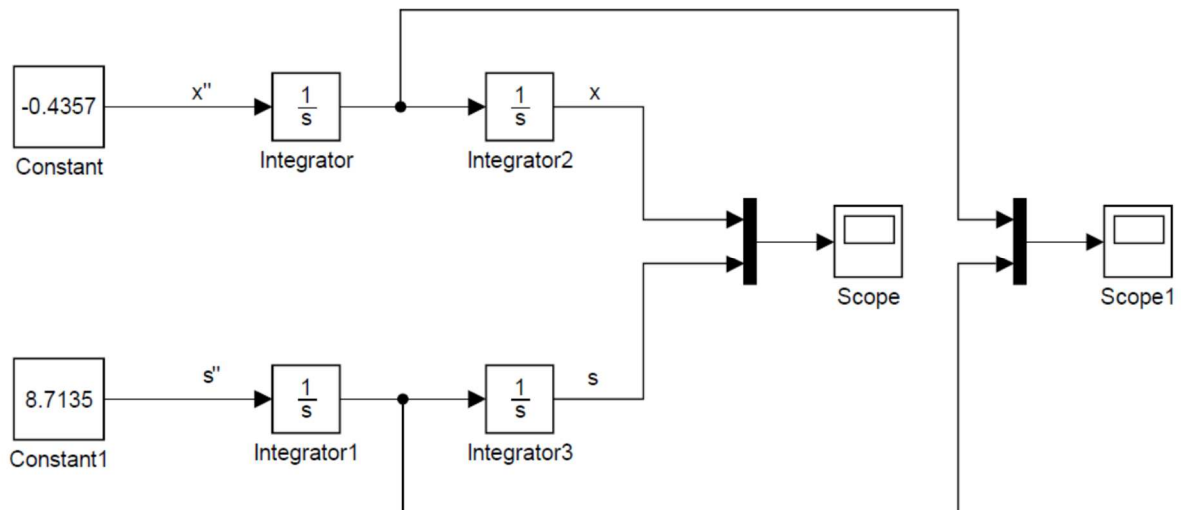
$$\ddot{x}(t) = \frac{-g \sin \alpha \cos \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right) - \cos^2 \alpha}$$

$$\ddot{s}(t) = \frac{g \sin \alpha}{1 - \frac{m}{m + M} \cos^2 \alpha}$$

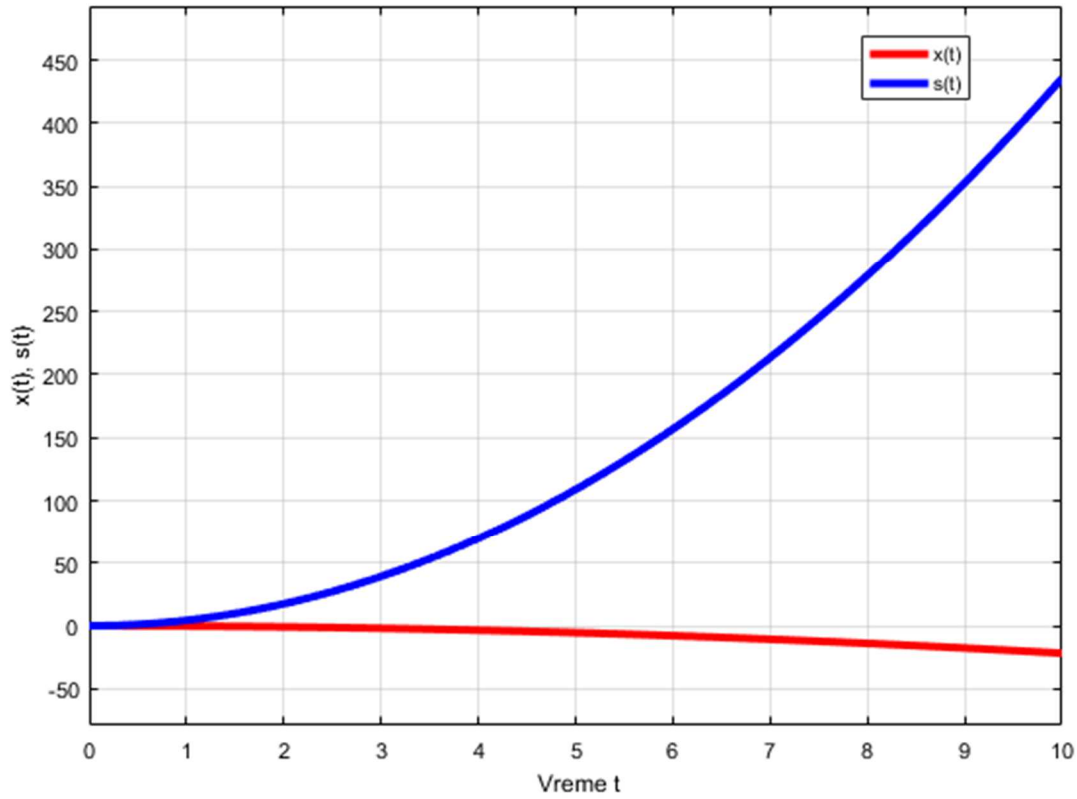
$$\dot{x}(t) = \int_0^t \ddot{x}(\tau) d\tau + \dot{x}(0), \quad x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + x(0)$$

$$\dot{s}(t) = \int_0^t \ddot{s}(\tau) d\tau + \dot{s}(0), \quad s(t) = \int_0^t \dot{s}(\tau) d\tau + s(0) \tag{II-4.21}$$

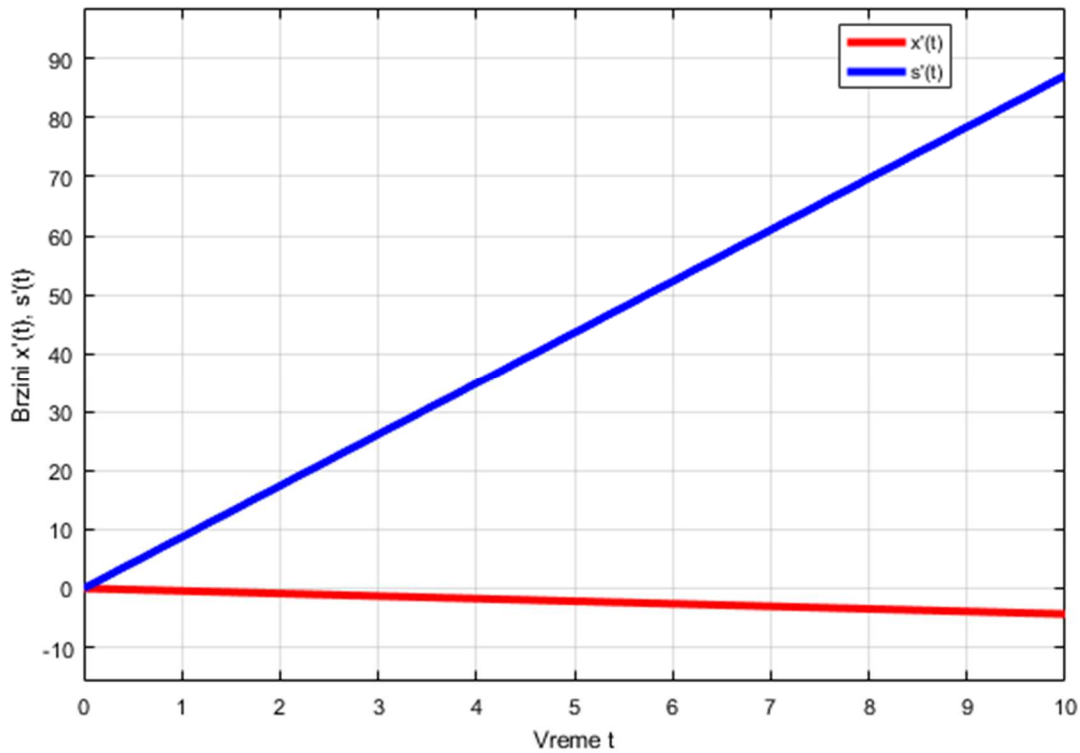
Соодветниот SIMULINK модел, добиен врз основа на математичкиот модел (II-4.21) е прикажан на слика II-4.25, а резултатите од симулацијата се дадени на слика II-4.26 и слика II-4.27.



Слика II-4.25. SIMULINK модел на системот (II-4.21)



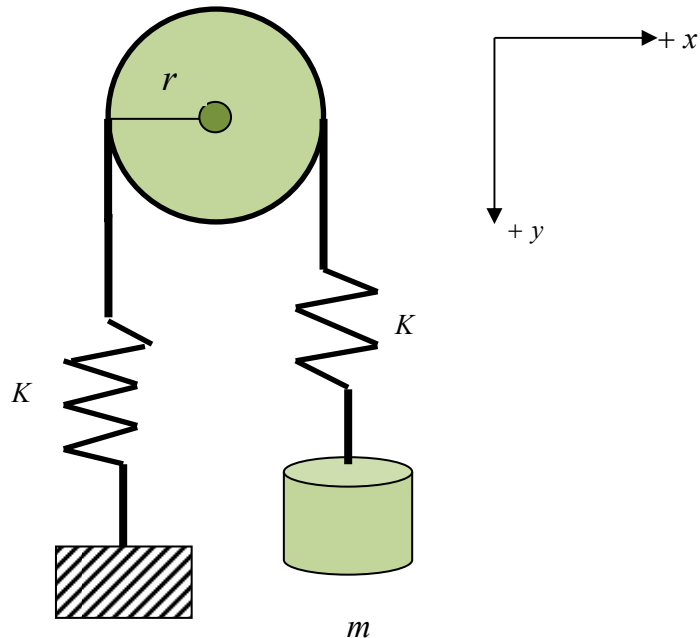
Слика II-4.26. Резултат од симулацијата на движењето на масите од слика II-4.23



Слика II-4.27. Резултат од симулацијата на брзините на масите од слика II-4.23



**Задача II-4.10.** Да се состави SIMULINK модел на движењето на механичкиот систем од слика II-4.28. Системот се состои од диск со момент на инерција  $I$ , кој ротира во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот. Преку пружина со коефициент на крутост  $K$ , на дискот е закачен тег со маса  $m$ , чие линеарно движење е во насока на позитивната  $y$ -оска. Движењето на тегот се одредува во однос на рамнотежната состојба.



Слика II-4.28. Илустрација кон задача II-4.10

**Решение:** Математичкиот модел на овој систем веќе е изведен во задача I-3.8 и гласи:

$$m\ddot{y}(t) + Ky(t) + Kr\theta(t) = 0$$

$$I\ddot{\theta}(t) + 2Kr^2\theta(t) + Kry(t) = 0 \tag{II-4.22}$$

Со негово преуредување се добива следниот систем равенки, кои се симулирани со SIMULINK моделот прикажан на слика II-4.29:

$$\ddot{y}(t) = -\frac{K}{m}y(t) - \frac{Kr}{m}\theta(t)$$

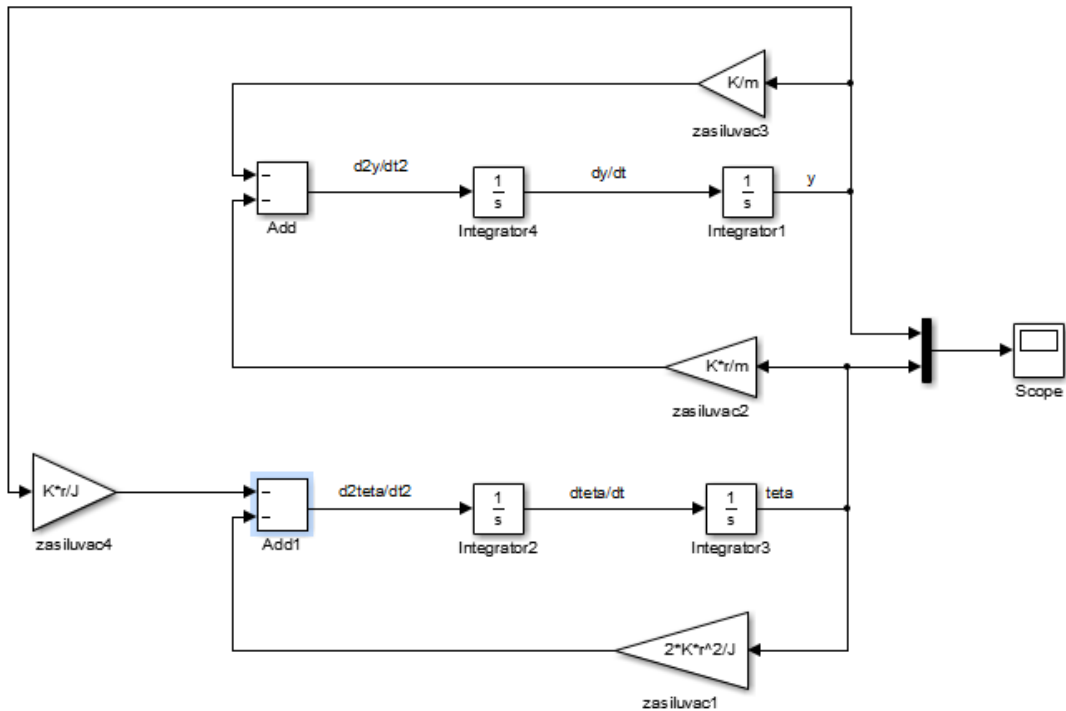
$$\dot{y}(t) = \int_0^t \ddot{y}(\tau) d\tau + \dot{y}(0)$$

$$y(t) = \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau + y(0)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{2Kr^2}{I}\theta(t) - \frac{Kr}{I}y(t)$$

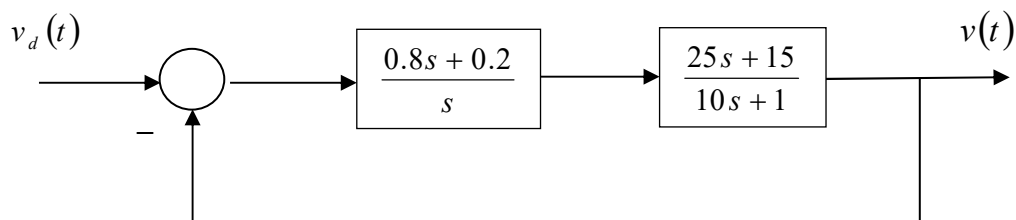
$$\dot{\theta}(t) = \int_0^t \ddot{\theta}(\tau) d\tau + \dot{\theta}(0)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \dot{\theta}(\tau) d\tau + \theta(0) \tag{II-4.23}$$

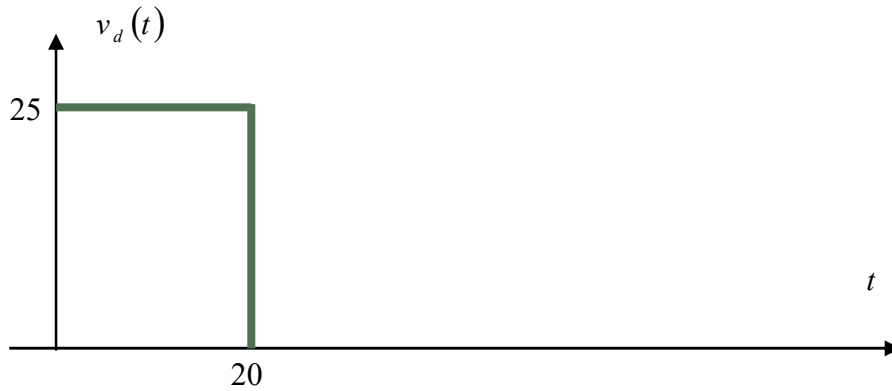


Слика II-4.29. SIMULINK модел за симулација на системот (II-4.23)

**Задача II-4.11.** Даден е затворениот систем на автоматско управување од слика II-4.30. На влезот од системот е доведен правоаголен импулс прикажан на слика II-4.31. Да се состави соодветен SIMULINK модел за симулација на одсивот на системот на конкретниот влез. Графички да се прикажат влезниот сигнал  $v_d(t)$ , кој ја претставува саканата брзина на системот, излезниот сигнал  $v(t) = x'(t)$ , кој ја претставува фактичката брзина на системот и самото движење на системот  $x(t)$ .

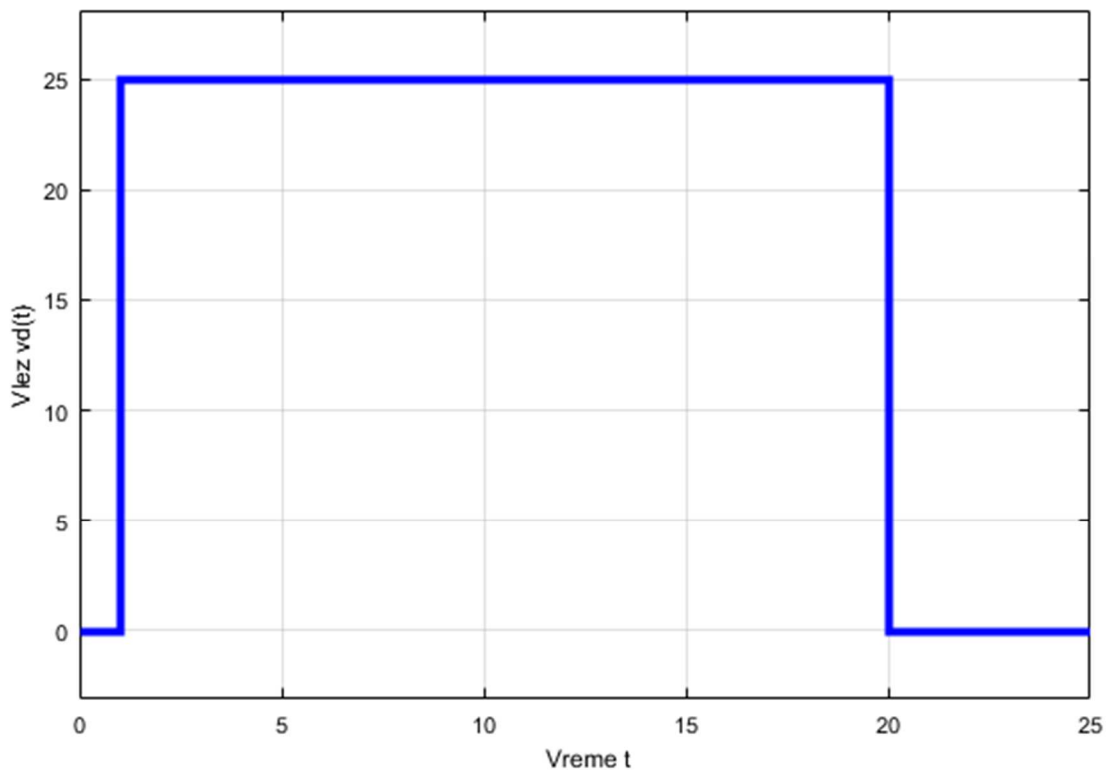


Слика II-4.30. Илустрација кон задачата II-4.11

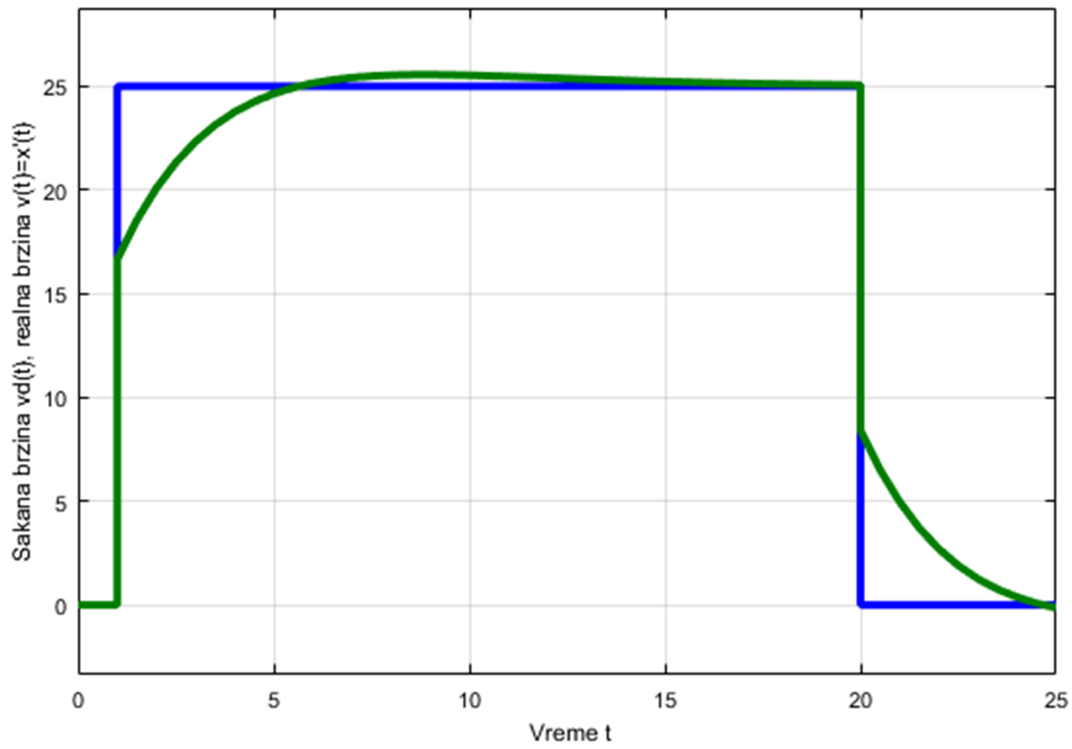


Слика II-4.31. Графички приказ на зададениот влез за системот од слика II-4.30

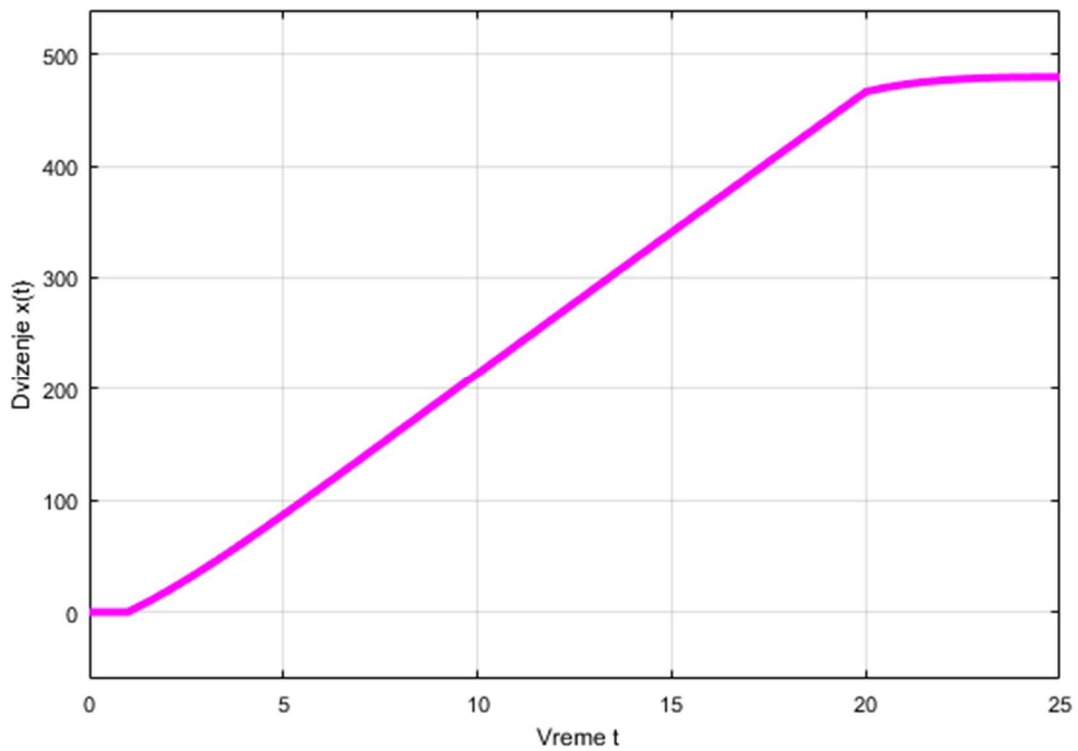
**Решение:** Бараните сигнали графички се прикажани на слика II-4.32, II-4.33 и II-4.34, додека соодветниот SIMULINK модел е прикажан на слика II-4.35. При составувањето на SIMULINK моделот за симулација на набљудуваниот САУ се употребени два Transfer Fnc блока од SIMULINK датотеката Continuous, еден за регулаторот и еден за објектот, а бидејќи се бара и движењето на системот, употребен е и интегратор. Бараните сигнали графички се добиени со помош на три осцилоскопи, а зададениот влез во системот е генериран како разлика од две отскочни функции  $25h(t) - 25h(t - 20)$ .



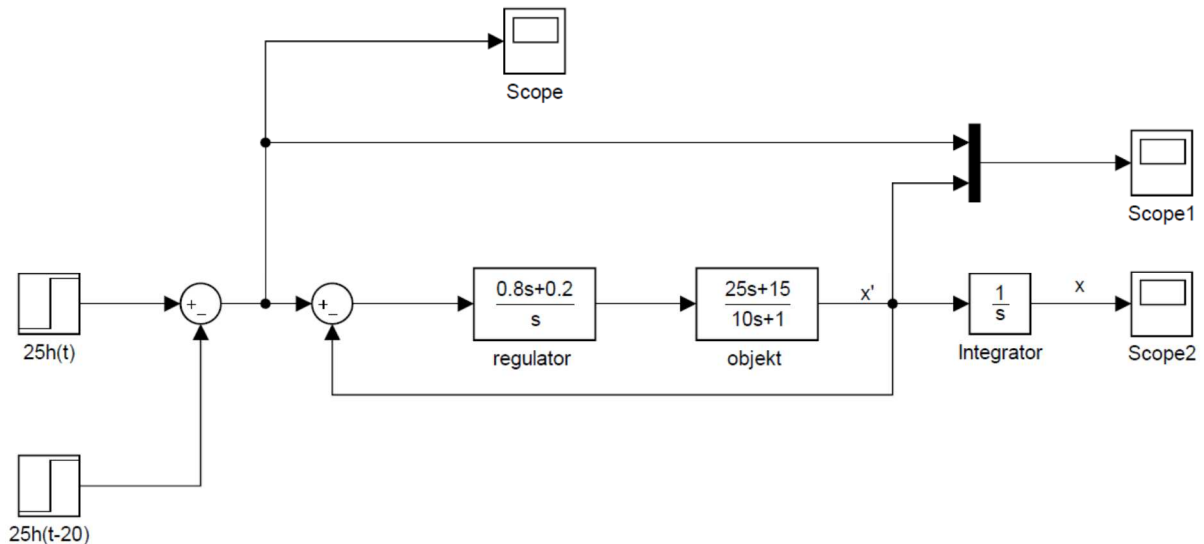
Слика II-4.32. Графички приказ на влезниот сигнал  $v_d(t)$



Слика II-4.33. Графички приказ на влезот  $v_d(t)$  и брзината  $x'(t)$



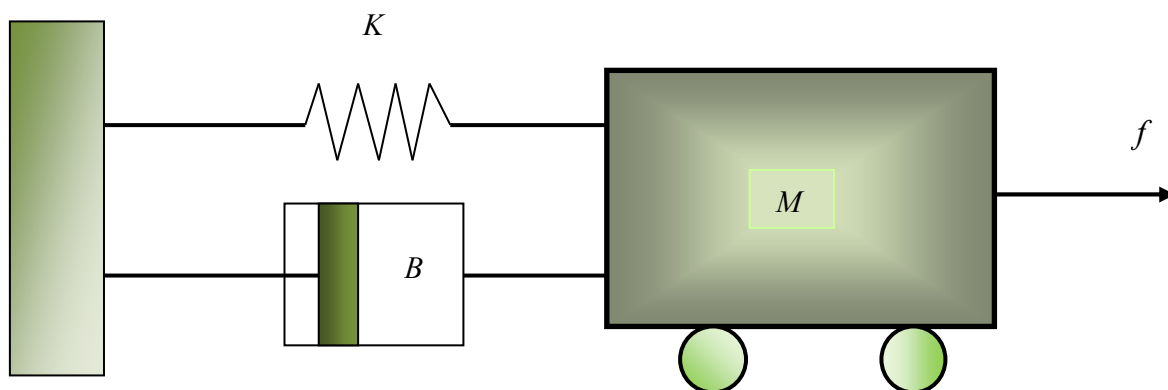
Слика II-4.34. Графички приказ на движењето  $x(t)$



Слика II-4.35. SIMULINK модел од задача II-4.11

**Задача II-4.12.** Даден е системот од слика II-4.36. Тој се состои од количка со маса  $M$ , прицврстена за вертикална подлога (сид) преку пружина со крутост  $K$ . Врз количката дејствува надворешна сила  $f$ . Нека параметрите на овој систем се:  $M = 5\text{kg}$ ,  $K = 0.5\text{ N/m}$  и  $B = 0.5\text{ Ns/m}$  и количката првобитно била во мирување.

- Да се состави математички модел на набљудуваниот систем во вид на диференцијална равенка на динамичко поведење, при што за излез ќе се усвои движењето на количката  $x$ .
- Да се определи преносната функција на моделот добиен под а).
- Да се состави модел во просторот на состојби со методот за постепено снижување на редот на изводот.
- Да се состави соодветен SIMULINK модел за набљудуваниот систем.
- Да се изврши симулација на отскочниот одзив на набљудуваниот систем преку моделот добиен под г).



Слика II-4.36. Илустрација кон задача II-4.12

**Решение:** а)

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (\text{II-4.24})$$

б)

$$Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (\text{II-4.25})$$

в)

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{B}{M}\dot{x}(t) + \frac{K}{M}x(t) = \frac{1}{M}f(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{B}{M}\dot{x}(t) - \frac{K}{M}x(t) + \frac{1}{M}f(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -\frac{B}{M}\dot{x}(t) - \frac{K}{M}x(t) + \frac{1}{M}F(t) = -\frac{B}{M}x_2(t) - \frac{K}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}f(t) \quad (\text{II-4.26})$$

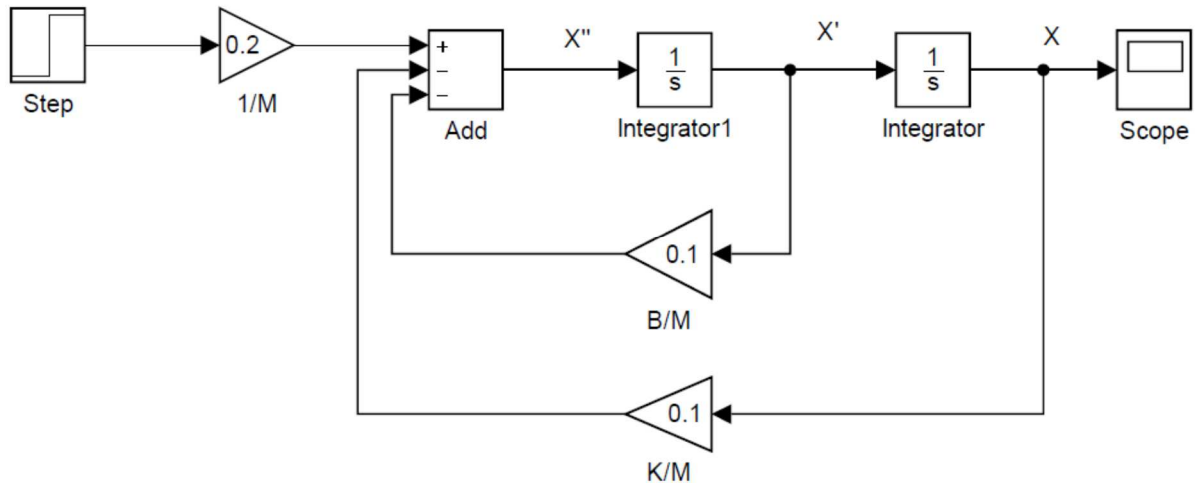
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -\frac{B}{M}x_2(t) - \frac{K}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}f(t)$$

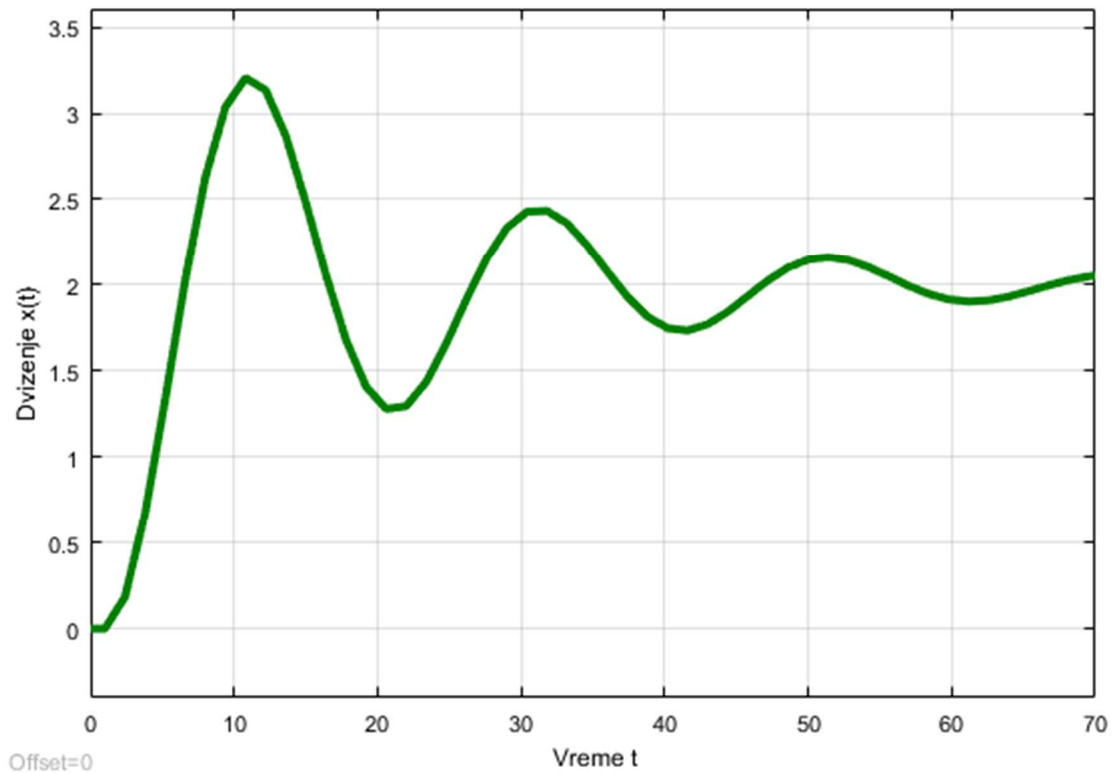
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} f(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) \quad (\text{II-4.27})$$

г) Бараниот SIMULINK модел е прикажан на слика II-4.37, а решението од симулацијата на слика II-4.38.



Слика II-4.37. SIMULINK модел за симулација на равенката (II-4.24)



Слика II-4.38. Графички приказ на решението на равенката (II-4.24) добиено со симулација

**Задача II-4.13.** Под претпоставка,  $N$  моторни кајчиња со редни броеви од 1 до  $N$  се наоѓаат во Охридското пристаниште. Секое од нив поаѓа од различна позиција, се движи со константна брзина и настојува да го стаса кајчето со следниот реден број. Со други зборови, првото кајче вози директно кон второто, второто кон третото итн. Последното кајче вози директно кон првото.

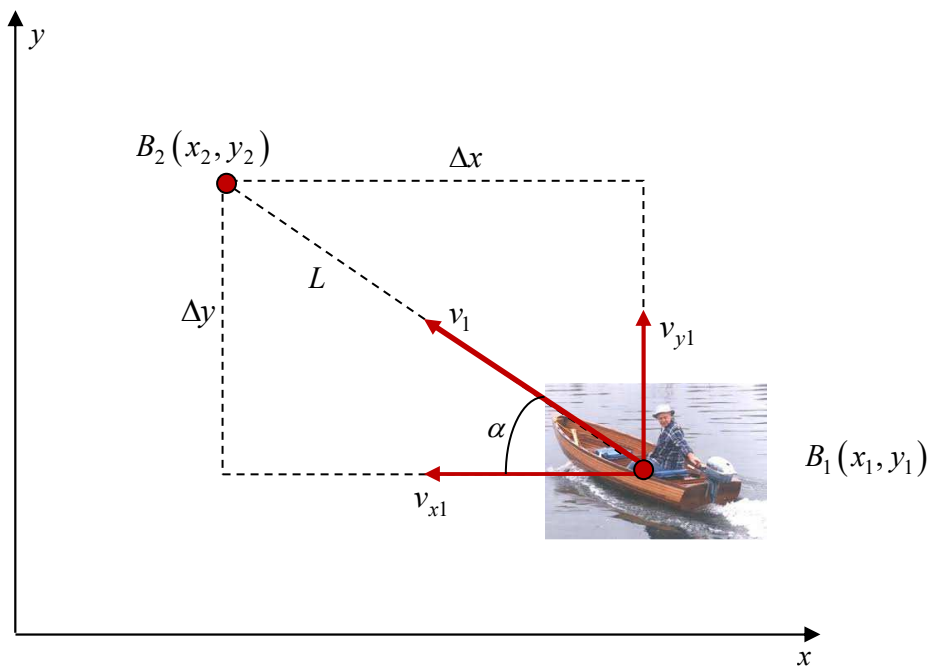
а) Да се состави математички модел на движењето на  $i$  – тото кајче.

б) Да се набљудува случајот кога  $N = 4$ . Нека се познати почетните позиции на четирите моторни кајчиња и нивните брзини.

Реден број	Почетна позиција	Брзина
1	(15;0)	$v_1 = 17 \frac{km}{cas}$
2	(1;3)	$v_2 = 14 \frac{km}{cas}$
3	(0;13)	$v_3 = 12 \frac{km}{cas}$
4	(14;18)	$v_4 = 15 \frac{km}{cas}$

Да се изврши симулација на движењето на кајчињата за да се одреди точката на нивно сретнување.

**Решение:** а) Движењето на првото кајче е прикажано на слика II-4.39 и за него важи:



Слика II-4.39. Геометриска интерпретација на задача II-4.13



$$\cos\alpha = \frac{v_{x1}}{v_1} = \frac{\Delta x}{L}, \quad \sin\alpha = \frac{v_{y1}}{v_1} = \frac{\Delta y}{L}$$

$$v_{x1} = \frac{\Delta x}{L} v_1, \quad v_{y1} = \frac{\Delta y}{L} v_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1$$

$$L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \Rightarrow L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$v_{x1} = \frac{v_1(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$v_{y1} = \frac{v_1(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

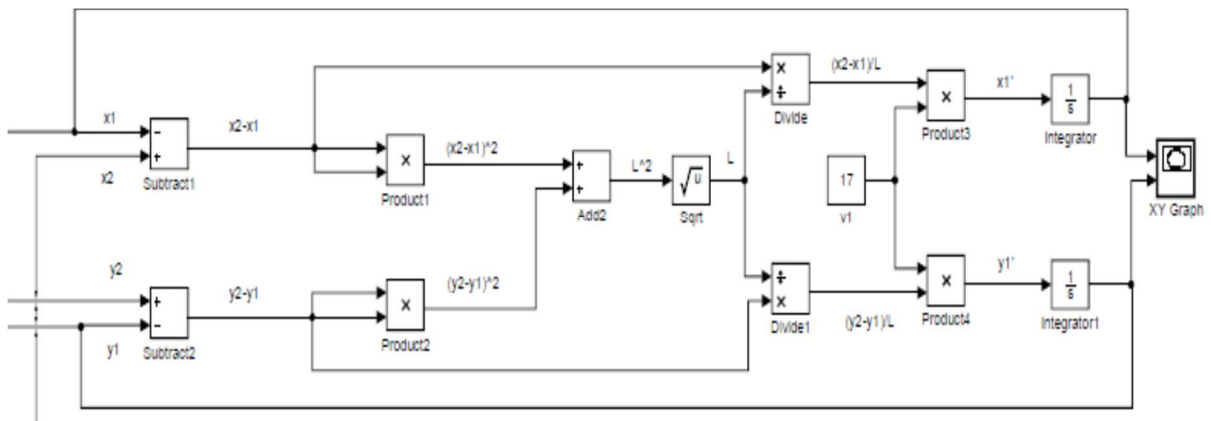
Оттука, за  $i$ -тото кајче може да се запише:

$$\dot{x}_i = \frac{v_i(x_{i+1} - x_i)}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

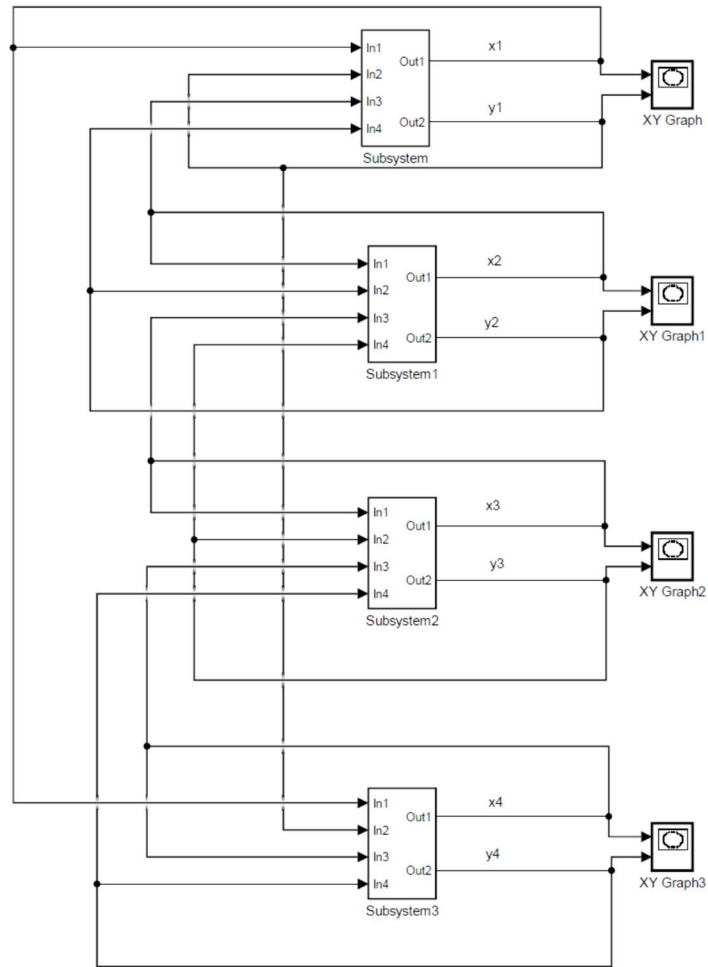
$$\dot{y}_i = \frac{v_i(y_{i+1} - y_i)}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}$$

(II-4.28)

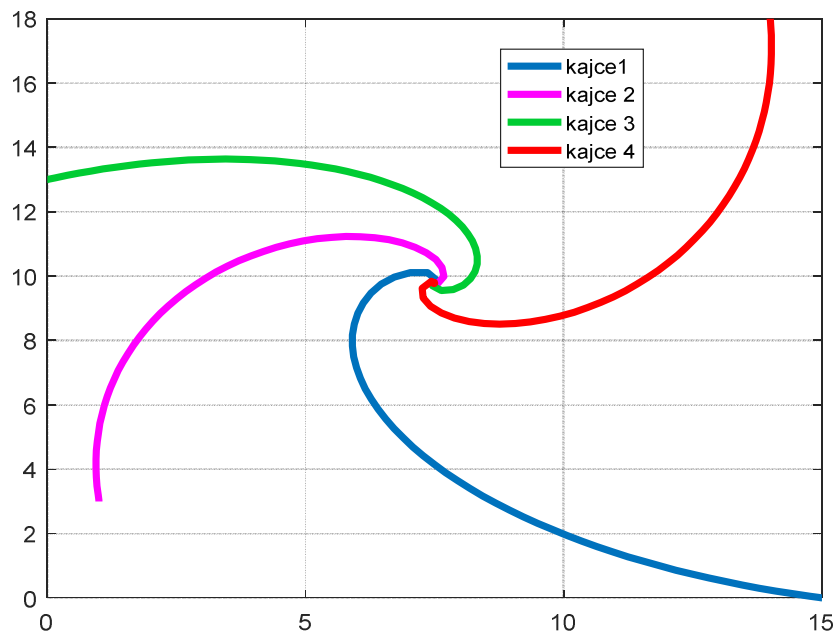
Соодветниот SIMULINK модел за првото кајче е прикажан на слика II-4.40, а бидејќи има 4 кајчиња, нивните модели ќе претставуваат потсистеми на комплетниот SIMULINK модел за симулација на движењето на групата, прикажан на слика II-4.41. Резултатот од симулацијата е прикажан на слика II-4.42.



Слика II-4.40. SIMULINK модел за првото кајче



Слика II-4.41. SIMULINK модел за симулација на движењето на целата група од 4 кајчиња



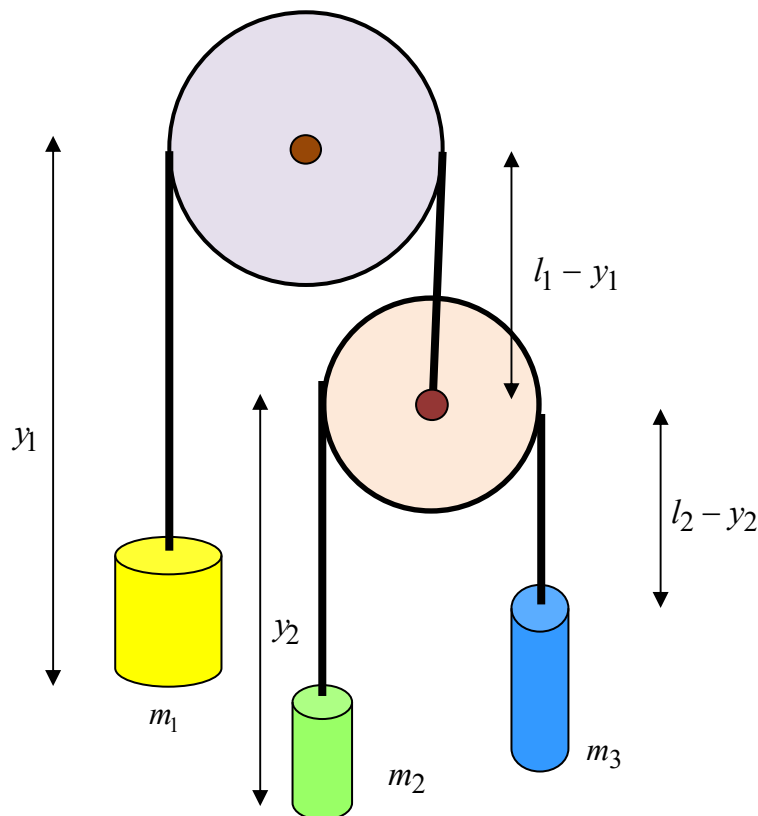
Слика II-4.42. Графички приказ на движењето на 4 кајчиња добиено со симулација

**Задача II-4.14.** Даден е механичкиот систем од слика II-4.43, кој се состои од две макари со занемарлива инерција и занемарлив радиус во однос на должината на јажињата. Нека, под претпоставка, масите можат да се движат само во вертикален правец и во системот не постои појава на триење или лизгање.

Еден математички модел на динамиката на набљудуваниот систем е:

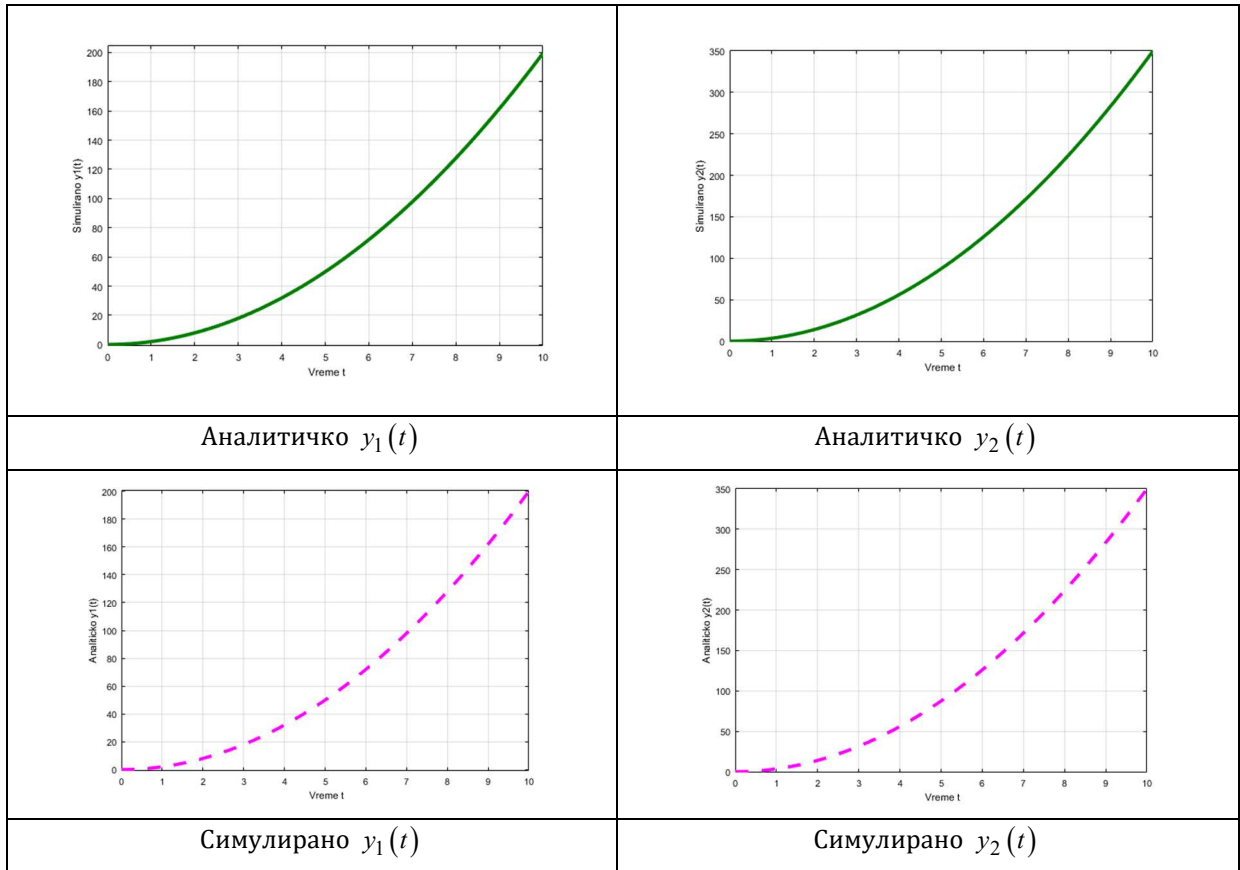
$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y}_1 - (m_2 - m_3)\ddot{y}_2 &= m_1g - m_2g - m_3g \\ -(m_2 - m_3)\ddot{y}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{y}_2 &= m_2g - m_3g \end{aligned} \quad (\text{II-4.29})$$

Да се состави SIMULINK модел за симулација на поведението на набљудуваниот систем, ако се усвои:  $m_1 = 35\text{kg}$ ,  $m_2 = 15\text{kg}$ ,  $m_3 = 5\text{kg}$  и  $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Резултатот од симулацијата да се спореди со аналитичкото решение на задачата.

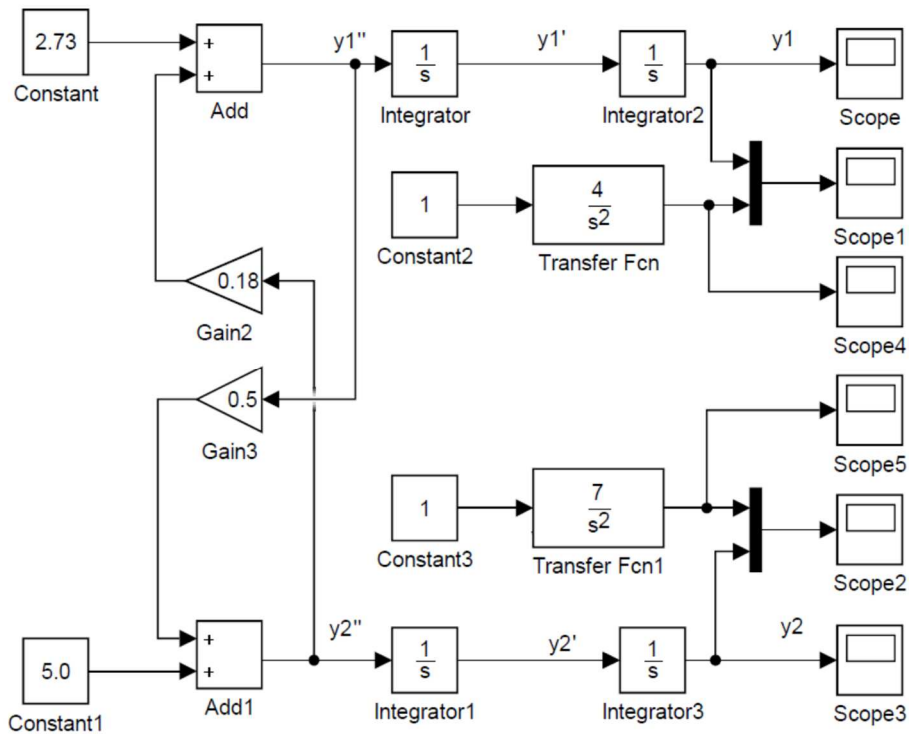


Слика II-4.43. Механички систем со две макари

**Решение:** Резултатите од симулацијата се прикажани на слика II-4.44, а самиот SIMULINK модел со кој се добиени, е прикажан на слика II-4.45.



Слика II-4.44. Графички приказ на решенијата на моделот (II-4.29), добиени со симулација



Слика II-4.45. SIMULINK модел за симулација на равенките (II-4.29)

### III - ЛИНЕАРИЗАЦИЈА НА НЕЛИНЕАРНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

**Задача III-1.** Да се изврши линеаризација на нелинеарниот систем:

$$x'(t) = -x(t)\sqrt{x(t)} + \frac{y^3(t)}{8} \quad (\text{III-1})$$

околу рамнотежната состојба која се карактеризира со вредноста  $y_0 = 10$ .

**Решение:** Рамнотежната состојба на набљудуваниот нелинеарен систем, која настапува во мигот  $t_0$ , се карактеризира со условот:

$$x'(t_0) = -x(t_0)\sqrt{x(t_0)} + \frac{y^3(t_0)}{8} = -x_0\sqrt{x_0} + \frac{y_0^3}{8} = 0 \quad (\text{III-2})$$

и таа е претставена со точката  $(y_0, x_0) = (10, 25)$ :

$$x_0\sqrt{x_0} = \frac{y_0^3}{8} \Rightarrow x_0^3 = \frac{y_0^6}{64} \Rightarrow x_0 = \frac{y_0^2}{4} \Rightarrow x_0 = \frac{100}{4} \Rightarrow x_0 = 25 \quad (\text{III-3})$$

Бараниот линеарен модел на набљудуваниот нелинеарен динамички систем се добива со развој на нелинеарната функција:

$$f[x(t), y(t)] = -x(t)\sqrt{x(t)} + \frac{y^3(t)}{8} \quad (\text{III-4})$$

во Тајлоров ред во околина на точката  $(y_0, x_0) = (10, 25)$  и задржување само на линеарните членови од тој развој:

$$\begin{aligned} f[x(t), y(t)] &= f[x(t), y(t)]_0 + \left\{ \frac{\partial f[x(t), y(t)]}{\partial x(t)} \right\}_0 [x(t) - x_0] + \\ &+ \left\{ \frac{\partial f[x(t), y(t)]}{\partial y(t)} \right\}_0 [y(t) - y_0] = -x_0\sqrt{x_0} + \frac{y_0^3}{8} - \frac{3}{2}\sqrt{x_0}[x(t) - x_0] + \\ &+ \frac{3y_0^2}{8}[y(t) - y_0] = -\frac{3}{2}\sqrt{x_0}\Delta x(t) + \frac{3y_0^2}{8}\Delta y(t) = -\frac{15}{2}\Delta x(t) + \frac{300}{8}\Delta y(t) \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

$$x'(t) = [x_0 + \Delta x(t)]' = [\Delta x(t)]' = f[x(t), y(t)] = -7.5\Delta x(t) + 37.5\Delta y(t) \quad (\text{III-6})$$

$$[\Delta x(t)]' = -7.5\Delta x(t) + 37.5\Delta y(t) \quad (\text{III-7})$$

**Задача III-2.** Нелинеарен динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$  е опишан со следната диференцијална равенка на динамичко поведење:

$$x''(t) + 5x(t)x'(t) + 2\sin\left[\frac{\pi}{3}x(t)\right] = y(t)x(t) \quad (\text{III-8})$$

Да се изврши линеаризација на овој модел во околина на рамнотежната состојба на системот, при која  $y_0 = 2$ .

**Решение:** Бидејќи при рамнотежната состојба:

$$x'_0 = 0, \quad x''_0 = 0 \quad (\text{III-9})$$

од равенката (III-8) се добива:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{3}x_0\right) = y_0x_0 = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \quad (\text{III-10})$$

Следствено, рамнотежната состојба на набљудуваниот систем се карактеризира со следната точка:

$$y_0 = 2; x_0 = \frac{1}{2}; x'_0 = 0; x''_0 = 0 \quad (\text{III-11})$$

Линеаризацијата на моделот (III-8) се врши така што нелинеарната функција:

$$x''(t) = y(t)x(t) - 5x(t)x'(t) - 2\sin\left[\frac{\pi}{3}x(t)\right] = f[x(t), x'(t), y(t)] \quad (\text{III-12})$$

се развива во Тајлоров ред во околина на точката (III-11) и се задржуваат само линеарните членови од тој развој:

$$x''(t) = y(t)x(t) - 5x(t)x'(t) - 2\sin\left[\frac{\pi}{3}x(t)\right] = f[x(t), x'(t), y(t)] \quad (\text{III-13})$$

$$f(x, x', y) = f(x_0, x'_0, y_0) + \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial x}\right]_0 \Delta x + \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial x'}\right]_0 \Delta x' + \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial y}\right]_0 \Delta y$$

$$x''_0 + \Delta x'' = f(x_0, x'_0, y_0) + \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial x}\right]_0 \Delta x + \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial x'}\right]_0 \Delta x' + \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial y}\right]_0 \Delta y$$

$$\Delta x'' = \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial x}\right]_0 \Delta x + \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial x'}\right]_0 \Delta x' + \left[\frac{\partial f(x, x', y)}{\partial y}\right]_0 \Delta y$$

$$\Delta x'' = \left[ y_0 - 2\frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}x_0\right) - 5x_0' \right] \Delta x - 5x_0 \Delta x' + x_0 \Delta y$$

$$\Delta x'' = \left[ 2 - 2\frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \Delta x - 5x_0 \Delta x' + x_0 \Delta y$$

$$\Delta x''(t) + 2.5\Delta x'(t) - \left( 2 - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \right) \Delta x = 0.5\Delta y \quad (\text{III-14})$$

Треба да се истакне дека добиениот линеарен модел важи само во непосредна околина на набљудуваната рамнотежна состојба и е изведен во однос на прираснувањата на променливите, а не на самите променливи.

Бараниот линеарен модел на зададениот нелинеарен систем може да се определи и на следниот начин. Се воведуваат смените:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= x'(t) \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

па, оттука, и од дадениот изворен модел, се добива:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), y(t)] \\ x_2'(t) &= x''(t) = y(t)x_1(t) - 5x_1(t)x_2(t) - 2\sin\left[\frac{\pi}{3}x_1(t)\right] = f_2[x_1(t), x_2(t), y(t)] \end{aligned} \quad (\text{III-16})$$

Линеаризацијата на моделот (III-16) во околина на дефинираната рамнотежна состојба во општ случај се врши со развој на функциите  $f_1[x_1(t), x_2(t), y(t)]$  и  $f_2[x_1(t), x_2(t), y(t)]$  во Тајлоров ред и задржување само на линеарните членови од тој развој. Меѓутоа, во овој случај, тоа не се прави со функцијата  $f_1[x_1(t), x_2(t), y(t)]$ , бидејќи таа е веќе линеарна, туку само со функцијата  $f_2[x_1(t), x_2(t), y(t)]$ :

$$\begin{aligned} \Delta x_2'(t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1, x_2, y) \right]_0 \Delta x_1(t) + \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, y) \right]_0 \Delta x_2(t) + \left[ \frac{\partial}{\partial y} f_2(x_1, x_2, y) \right]_0 \Delta y(t) \\ \Delta x_2'(t) &= \left\{ y(t) - 5x_2(t) - 2\frac{\pi}{3} \cos\left[\frac{\pi}{3}x_1(t)\right] \right\} \Delta x_1(t) + [-5x_1(t)]_0 \Delta x_2(t) + [x_1(t)]_0 \Delta y(t) \\ \Delta x_2'(t) &= \left( 2 - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \right) \Delta x_1(t) - 2.5\Delta x_2(t) + 0.5\Delta y(t) \end{aligned} \quad (\text{III-17})$$

Следствено, бараниот линеарен модел ќе биде:

$$\Delta x_1'(t) = \Delta x_2(t)$$

$$\Delta x_2'(t) = \left(2 - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)\Delta x_1(t) - 2.5\Delta x_2(t) + 0.5\Delta y(t) \quad (\text{III-18})$$

**Задача III-3.** Нелинеарен континуален динамички систем со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$  е опишан со следниот модел во просторот на состојби:

$$v_1'(t) = c_1 y(t) v_2(t) - c_2 v_1^2(t)$$

$$v_2'(t) = \frac{c_3 v_1(t)}{c_4 + v_1(t)}$$

$$x(t) = c_5 v_1^2(t) \quad (\text{III-19})$$

каде што  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  се состојбените големини на набљудуваниот систем, а  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  и  $c_5$  се негови константни параметри. Да се изврши линеаризација на моделот (III-19) во непосредна околина на точката дефинирана со  $v_{10} = v_1(t_0)$ ,  $v_{20} = v_2(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $x_0 = x(t_0)$  и  $t_0$ .

**Решение:** Бараниот линеарен модел на набљудуваниот нелинеарен динамички систем се добива со линеаризација на нелинеарните функции:

$$v_1'(t) = f_1[v_1(t), v_2(t), y(t)]$$

$$v_2'(t) = f_2[v_1(t), v_2(t), y(t)]$$

$$x(t) = g[v_1(t), v_2(t), y(t)] \quad (\text{III-20})$$

која се состои во развој на функциите (III-20) во Тајлоров ред во дадената точка, и задржување само на линеарните членови од тој развој:

$$f_1(v_1, v_2, y) = f_1(v_{10}, v_{20}, y_0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_1}\right)_0 (v_1 - v_{10}) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_2}\right)_0 (v_2 - v_{20}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

$$f_2(v_1, v_2, y) = f_2(v_{10}, v_{20}, y_0) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_1}\right)_0 (v_1 - v_{10}) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_2}\right)_0 (v_2 - v_{20}) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$



$$\begin{aligned}
 g(v_1, v_2, y) &= g(v_{10}, v_{20}, y_0) + \left( \frac{\partial g}{\partial v_1} \right)_0 (v_1 - v_{10}) + \\
 &+ \left( \frac{\partial g}{\partial v_2} \right)_0 (v_2 - v_{10}) + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_0 (y - y_0)
 \end{aligned} \tag{III-21}$$

Следствено, со пресметување на парцијалните изводи во (III-21):

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \right)_0 &= -2c_2 v_{10}, \quad \left( \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \right)_0 = c_1 y_0, \quad \left( \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_0 = c_1 v_{20} \\
 \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \right)_0 &= \frac{c_3 c_4}{(c_4 + v_{10})^2}, \quad \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)_0 = 0 \\
 \left( \frac{\partial g}{\partial v_1} \right)_0 &= 2c_5 v_{10}, \quad \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial g}{\partial v_2} \right)_0 = 0
 \end{aligned} \tag{III-22}$$

за бараниот линеарен модел се добива:

$$\begin{aligned}
 v_1' &= (c_1 y_0 v_{20} - c_2 v_{10}^2) - 2c_2 v_{10} (v_1 - v_{10}) + c_1 y_0 (v_2 - v_{10}) + c_1 v_{20} (y - y_0) \\
 v_2' &= \frac{c_3 v_{10}}{c_4 + v_{10}} + \frac{c_3 c_4}{(c_4 + v_{10})^2} (v_1 - v_{10}) \\
 x &= (c_5 v_{10}^2) + 2c_5 v_{10} (v_1 - v_{10})
 \end{aligned} \tag{III-23}$$

при што треба да се има на ум дека  $v_1 = v_1(t)$ ,  $v_2 = v_2(t)$ ,  $v_1' = v_1'(t)$ ,  $v_2' = v_2'(t)$ ,  $y = y(t)$  и  $x = x(t)$ . Ако се дефинираат прираснувањата на соодветните променливи  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $y(t)$  и  $x(t)$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta v_1(t) &= v_1(t) - v_{10} \\
 \Delta v_2(t) &= v_2(t) - v_{20} \\
 \Delta y(t) &= y(t) - y_0 \\
 \Delta x(t) &= x(t) - x_0
 \end{aligned} \tag{III-24}$$

и се уочи дека:

$$\begin{aligned}
 [\Delta v_1(t)]' &= v_1'(t) - v_{10}' \\
 [\Delta v_2(t)]' &= v_2'(t) - v_{20}'
 \end{aligned} \tag{III-25}$$

моделот (III-23) може да се доведе на следниот облик:

$$[\Delta v_1(t)]' = -2c_2v_{10}\Delta v_1(t) + c_1y_0\Delta v_2(t) + c_1v_{20}\Delta y(t)$$

$$[\Delta v_2(t)]' = \frac{c_3c_4}{(c_4 + v_{10})^2} \Delta v_1(t)$$

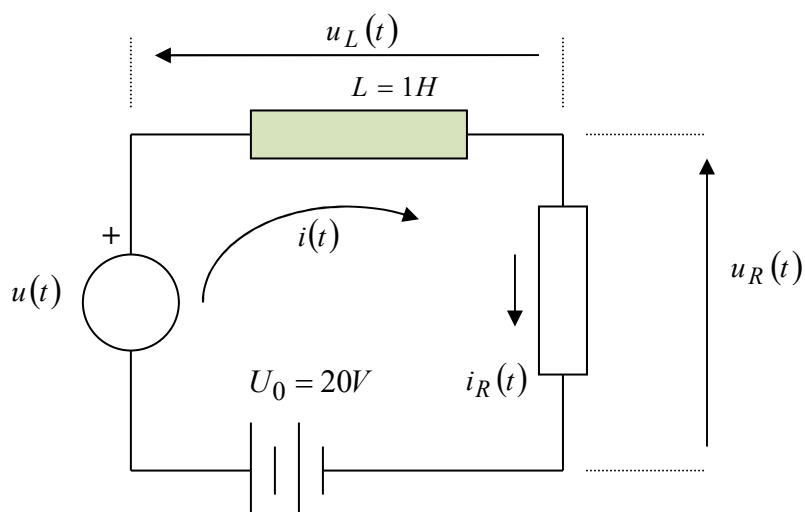
$$\Delta x(t) = 2c_5v_{10}\Delta v_1(t) \quad (\text{III-26})$$

што значи дека линеарниот модел (III-26) се однесува на прираснувањата на одделните променливи на набљудуваниот нелинеарен систем, а не на самите променливи. Во продолжение, заради поедноставен запис, ќе биде испуштен знакот за прираснување  $\Delta$ , па може да се запише:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} -2c_2v_{10} & c_1y_0 \\ \frac{c_3c_4}{(c_4 + v_{10})^2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} c_1v_{20} \\ 0 \end{bmatrix} y(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = [2c_5v_{10} \quad 0] \mathbf{v}(t) + [0] y(t) \quad (\text{III-27})$$

**Задача III-4.** Да се состави линеарен модел за електричното коло од слика III-1, кој доволно точно ќе го претставува зададениот нелинеарен систем во непосредна околина на неговата рамнотежна состојба. За излез да се усвои струјата што тече низ колото. Колото се состои од сериска врска на напонски извор  $u(t)$ , индуктивен елемент со индуктивност  $L = 1H$ , нелинеарен отпорник и батерија  $U_0$  од  $20V$ . Нелинеарниот отпорник е опишан со релацијата:



Слика III-1. Илустрација кон задачата III-4

$$i_R(t) = 2e^{0.1u_R(t)} \quad (\text{III-28})$$

каде што  $i_R(t)$  е струјата низ отпорникот, а  $u_R(t)$  е напонот на неговите краеве [6].

**Решение:** За усвоените ознаки на слика III-1, од Законот за рамнотежа на напоните во даденото електрично коло, следува:

$$u(t) = u_L(t) + u_R(t) - U_0 = L \frac{di_L(t)}{dt} + 10 \ln \frac{i_R(t)}{2} - U_0 = L \frac{di(t)}{dt} + 10 \ln \frac{i(t)}{2} - U_0 \quad (\text{III-29})$$

бидејќи:

$$u(t) = i_L(t) = i_R(t) = i(t) \quad (\text{III-30})$$

За да се определи рамнотежната состојба на набљудуваното електрично коло, најнапред се поставува  $u(t) = 0$ . Тогаш во колото ќе постои само батеријата  $U_0$ , врзана во серија со нелинеарниот отпорник и индуктивниот елемент  $L$ . Во рамнотежна состојба напонот  $u_L(t)$  исто така ќе биде еднаков на нула, бидејќи  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , а  $\frac{di(t)}{dt} = 0$ , зошто во колото постои само извор на константен напон.

Во продолжение, напонот на краевите од отпорникот  $u_R(t)$  ќе биде:

$$u_R(t) - U_0 = 0 \Rightarrow u_R(t) = U_0 = 20V \quad (\text{III-31})$$

па, од влезно-излезната карактеристика на нелинеарниот отпорник следува:

$$i_R = 2e^{0.1u_R} = 2e^{0.1(20)} = 2e^2 = 14.78A = i_0 \quad (\text{III-32})$$

Струјата  $i_0 = 14.78A$  ја карактеризира рамнотежната состојба на набљудуваното електрично коло од задачата, и во непосредна околина на точката  $i_0 = 14.78A$  (за мали отстапувања на струјата  $i$  од вредноста  $i_0$ ) ќе важи:

$$i(t) = i_0 + \Delta i(t) \quad (\text{III-33})$$

Нелинеарната функција  $\ln \frac{i}{2}$  може да се развие во Тајлоров ред во околина на точката  $i_0$  и да се задржат само линеарните членови од тој развој:

$$\ln \frac{i}{2} = \left( \ln \frac{i}{2} \right)_0 + \left[ \frac{d}{di} \left( \ln \frac{i}{2} \right) \right]_0 (i - i_0) = \ln \frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0} \Delta i \quad (\text{III-34})$$

Со воведување на последните две смени во равенката на набљудуваното електрично коло од сликата, се добива:

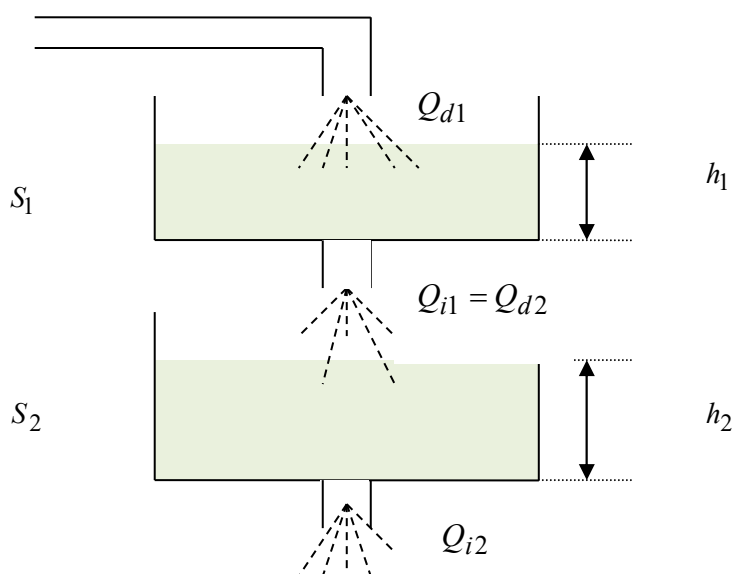
$$\begin{aligned}
 u(t) &= L \frac{d[i_0 + \Delta i(t)]}{dt} + 10 \ln \frac{[i_0 + \Delta i(t)]}{2} - U_0 = \\
 &= L \frac{d[\Delta i(t)]}{dt} + 10 \ln \frac{i_0}{2} + \frac{10}{i_0} \Delta i(t) - U_0
 \end{aligned} \tag{III-35}$$

Следствено, равенката:

$$L \frac{d[\Delta i(t)]}{dt} + 10 \ln \frac{i_0}{2} + \frac{10}{i_0} \Delta i(t) - U_0 = \frac{d[\Delta i(t)]}{dt} + 0.677 \Delta i(t) = u(t) \tag{III-36}$$

го претставува бараниот линеарен модел на набљудуваниот нелинеарен електричен систем, во околина на рамнотежната состојба.

**Задача III-5.** Даден е системот сврзани резервоари од слика III-2. Сите величини кои се однесуваат на првиот резервоар се означени со индекс 1, додека величините кои се однесуваат на вториот резервоар се означени со индекс 2. Со  $Q_d$  е означено количеството течност што дотекнува во еден резервоар во единица време, а со  $Q_i$  е означено количеството течност што истекува од истиот резервоар во единица време;  $h$  е нивото на течност во соодветниот резервоар и  $S$  е попречниот пресек на резервоарот кој е, под претпоставка, константен. За секој од резервоарите важи законот за зачувување на материјата според кој промената на количеството течност во еден резервоар за даден временски интервал  $\Delta t$  е еднаква со разликата помеѓу количеството течност што дотекло и количеството течност што истекло од резервоарот во набљудуваниот временски интервал  $\Delta t$ :  $S \Delta h = (Q_d - Q_i) \Delta t$ . Резервоарите се сврзани така што истекот од првиот резервоар претставува дотек за вториот.



Слика III-2. Илустрација кон задачата III-5

Да се состави линеарен модел на набљудуваниот систем за непосредна околина на неговата рамнотежна состојба. За влез да се усвои дотекот течност во првиот резервоар, а за излез нивото течност во вториот резервоар. Сите величини што се однесуваат на рамнотежната состојба на системот резервоари се означени со индекс 0.

**Решение:** За двата резервоари важи:

$$S_1 \Delta h_1 = (Q_{d1} - Q_{i1}) \Delta t$$

$$S_2 \Delta h_2 = (Q_{d2} - Q_{i2}) \Delta t \quad (\text{III-37})$$

Бидејќи врската помеѓу резервоарите е:

$$Q_{d2} = Q_{i1} \quad (\text{III-38})$$

горниот систем равенки може да се претстави на следниот начин:

$$S_1 \Delta h_1 = (Q_{d1} - Q_{i1}) \Delta t$$

$$S_2 \Delta h_2 = (Q_{i1} - Q_{i2}) \Delta t \quad (\text{III-39})$$

Ако сега се пушти времето  $t$  да тежи кон нула:

$$t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta t \rightarrow dt, Q_{d1} \rightarrow Q_{d1}(t), Q_{i1} \rightarrow Q_{i1}(t) \quad (\text{III-40})$$

се добиваат следните диференцијални равенки од прв ред, кои претставуваат модел на набљудуваниот систем во просторот на состојби:

$$S_1 dh_1(t) = [Q_{d1}(t) - Q_{i1}(t)] dt$$

$$S_2 dh_2(t) = [Q_{i1}(t) - Q_{i2}(t)] dt \quad (\text{III-41})$$

Истекот на течност од еден резервоар е во нелинеарна зависност од нивото на течноста во него, па за набљудуваните резервоари важи:

$$Q_{i1} = \alpha_1 \sqrt{h_1}$$

$$Q_{i2} = \alpha_2 \sqrt{h_2} \quad (\text{III-42})$$

каде што  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се конструктивни константи на резервоарите. Со воведување на овие зависности во моделот на системот, тој се трансформира во следниот облик:

$$\begin{aligned}
 S_1 h_1'(t) &= Q_{d1}(t) - \alpha_1 \sqrt{h_1(t)} \\
 S_2 h_2'(t) &= \alpha_1 \sqrt{h_1(t)} - \alpha_2 \sqrt{h_2(t)}
 \end{aligned}
 \tag{III-43}$$

од каде станува очигледна нелинеарната природа на системот. Бараниот линеарен модел се добива со линеаризација на функциите  $\sqrt{h_1}$  и  $\sqrt{h_2}$  преку нивен развој во Тајлоров ред и задржување само на линеарните членови од тој развој:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{h_1} &= \sqrt{h_{10}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{10}}}(h_1 - h_{10}) \\
 \sqrt{h_2} &= \sqrt{h_{20}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{20}}}(h_2 - h_{20})
 \end{aligned}
 \tag{III-44}$$

Така нелинеарните диференцијални равенки (III-43) се трансформираат во следните линеарни диференцијални равенки:

$$\begin{aligned}
 S_1 h_1'(t) &= Q_{d1}(t) - \alpha_1 \sqrt{h_{10}} - \frac{1}{2\sqrt{h_{10}}} \alpha_1 [h_1(t) - h_{10}] \\
 S_2 h_2'(t) &= \alpha_1 \sqrt{h_{10}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{10}}} \alpha_1 [h_1(t) - h_{10}] - \alpha_2 \sqrt{h_{20}} - \frac{1}{2\sqrt{h_{20}}} \alpha_2 [h_2(t) - h_{20}]
 \end{aligned}
 \tag{III-45}$$

Во продолжение, заради поголема едноставност на пресметките, а без какво и да било ограничување на резултатите и заклучоците што следуваат, може да се усвои дека резервоарите се идентични по градба, што значи:

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 = S_2 \\
 \alpha &= \alpha_1 = \alpha_2
 \end{aligned}
 \tag{III-46}$$

Рамнотежната состојба на системот набљудувани резервоари подразбира урамнотежување на дотекот и истекот на течност од резервоарите:

$$(Q_{d1})_0 = (Q_{i1})_0 = \alpha \sqrt{h_{10}} = (Q_{d2})_0 = (Q_{i2})_0 = \alpha \sqrt{h_{20}}
 \tag{III-47}$$

Од друга страна, за мали отстапувања од рамнотежната состојба важи:

$$\begin{aligned}
 h_1(t) &= h_{10} + \Delta h_1(t) \\
 h_2(t) &= h_{20} + \Delta h_2(t)
 \end{aligned}
 \tag{III-48}$$

$$h_1'(t) = [\Delta h_1(t)]'$$

$$h_2'(t) = [\Delta h_2(t)]' \quad (\text{III-49})$$

па, ако се имаат на ум сите овие релации, линеарниот модел на набљудуваниот систем ќе се сведе на следниот облик:

$$S[\Delta h_1(t)]' = Q_{d1}(t) - (Q_{d1})_0 - \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \alpha \Delta h_1(t) = \Delta Q_{d1}(t) - \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \alpha \Delta h_1(t)$$

$$S[\Delta h_2(t)]' = \frac{\alpha}{2\sqrt{h_0}} \Delta h_1(t) - \frac{\alpha}{2\sqrt{h_0}} \Delta h_2(t) \quad (\text{III-50})$$

Од релациите (III-50) станува очигледно дека линеаризацијата важи само за непосредна околина на рамнотежната состојба, односно за мали отстапувања од неа, бидејќи тие се во однос на прираснувањата на одделните променливи, а не во однос на самите променливи. Во продолжение, заради поголема едноставност на записот, може да се испушти знакот за прираснување, па моделот (III-50) да се претстави на следниот начин:

$$Sh_1'(t) = Q_{d1}(t) - \frac{\alpha}{2\sqrt{h_0}} h_1(t)$$

$$Sh_2'(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{h_0}} h_1(t) - \frac{\alpha}{2\sqrt{h_0}} h_2(t) \quad (\text{III-51})$$

Релациите (III-51) претставуваат линеарен модел на набљудуваниот нелинеарен хидрауличен систем за влез  $Q_{d1}(t)$  и излези  $h_1(t)$  и  $h_2(t)$ . Доколку од интерес е само  $h_2(t)$ , со елиминација на променливата  $h_1(t)$  од горниот систем равенки се добива:

$$S^2 h_2''(t) + \frac{\alpha S}{\sqrt{h_0}} h_2'(t) + \frac{\alpha^2}{4h_0} h_2(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{h_0}} Q_{d1}(t) \quad (\text{III-52})$$

**Задача III-6.** Динамиката на едно физичко нишало е опишана со моделот:

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0; \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta_1 \quad (\text{III-53})$$

Да се состави линеарен модел на нишалото околу неговата рамнотежна состојба.

**Решение:** Еден модел на нишалото во просторот на состојби може да се добие со воведување на смените:

$$x_1(t) = \theta(t)$$

$$x_2(t) = \theta'(t) \tag{III-54}$$

и тој гласи:

$$x_1'(t) = \theta'(t) = x_2(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), t]$$

$$x_2'(t) = \theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin[x_1(t)] = f_2[x_1(t), x_2(t), t] \tag{III-55}$$

Рамнотежната состојба на нишалото се определува од условот:

$$x_1'(t) = 0$$

$$x_2'(t) = 0 \tag{III-56}$$

од каде произлегува:

$$x_{20} = 0$$

$$\sin x_{10} = 0 \Rightarrow x_{10} = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{III-57}$$

Може да се забележи дека постојат бесконечно многу рамнотежни вредности за променливата  $x_1$ . Вообичаено се усвојува првата:

$$x_{10} = 0 \tag{III-58}$$

Функцијата  $f_1[x_1(t), x_2(t), t]$  веќе е линеарна, па останува да се линеаризира  $f_2[x_1(t), x_2(t), t]$ . Со развој на  $f_2[x_1(t), x_2(t), t]$  во Тајлоров ред во околина на точката  $(x_{10}, x_{20})$  и задржување само на линеарните членови од тој развој, се добива:

$$\begin{aligned} f_2[x_1, x_2] &= f_2(x_1) = f_2(x_{10}) + \left[ \frac{df_2(x_1)}{dx_1} \right]_0 (x_1 - x_{10}) = \\ &= 0 - \frac{g}{l} \cos x_{10} (x_1 - x_{10}) = -\frac{g}{l} (x_1 - x_{10}) \end{aligned} \tag{III-59}$$

Со воведување на смените:

$$x_1(t) = x_{10} + \Delta x_1(t) = \Delta x_1(t)$$

$$x_2(t) = x_{20} + \Delta x_2(t) = \Delta x_2(t) \tag{III-60}$$



се добива бараниот линеарен модел на нишалото:

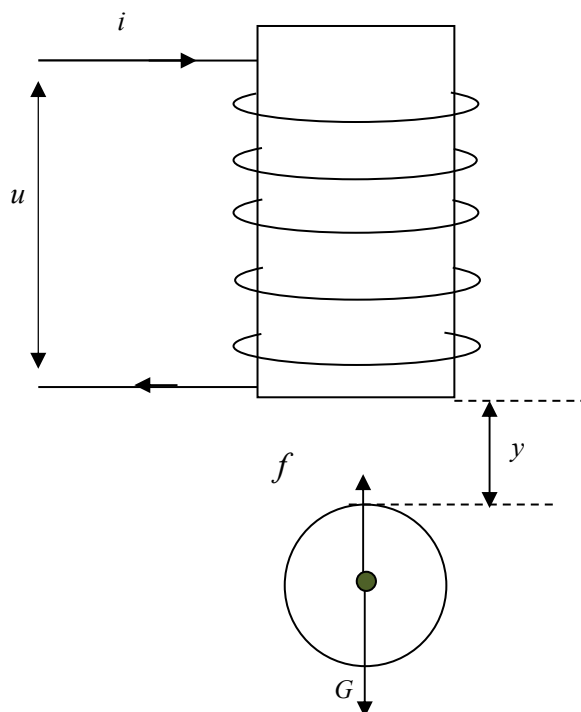
$$\begin{aligned} \frac{d[\Delta x_1(t)]}{dt} &= \Delta x_2(t) \\ \frac{d[\Delta x_2(t)]}{dt} &= -\frac{g}{l} \Delta x_1(t) \end{aligned} \quad (\text{III-61})$$

Заради поедноставен запис, ознаката  $\Delta$  често се испушта, па моделот (III-61) се запишува на следниот начин:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -\frac{g}{l} x_1(t) \end{aligned} \quad (\text{III-62})$$

Останува да се потенцира дека (III-62) е линеарен модел во однос на прираснувањата на променливите, а не самите променливи.

**Задача III-7.** На слика III-3 е прикажан електромагнетен систем за подигање метално топче со маса  $m$  на одредена височина.  $R$  е отпорноста на намотката,  $L$  е нејзината индуктивност, додека  $i$  ја претставува струјата што тече низ неа. Напонот на напојување на зададениот електромагнет е  $u$  [7].



Слика III-3. Илустрација кон задачата III-7

Да се состави соодветен линеарен модел на набљудуваниот систем, ако е познато дека привлечната сила која дејствува врз топчето е дадена со изразот:

$$f = \frac{Ki^2}{y^2}; \quad K = \text{const.} \quad (\text{III-63})$$

**Решение:** Равенката на динамичко поведење на електромагнетот гласи:

$$Li'(t) + Ri(t) = u(t) \quad (\text{III-64})$$

додека динамичкото поведење на топчето е опишано со равенката:

$$my''(t) = K \frac{i^2(t)}{y^2(t)} - mg \quad (\text{III-65})$$

каде што  $g$  е Земјиното забрзување. Оттука, ако за состојбени големини се одберат  $y(t)$ ,  $y'(t)$  и  $i(t)$ :

$$v_1(t) = y(t)$$

$$v_2(t) = y'(t)$$

$$v_3(t) = i(t) \quad (\text{III-66})$$

еден модел на набљудуваниот систем во просторот на состојби ќе биде следниот:

$$v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = \frac{Kv_3^2(t)}{mv_1^2(t)} - g$$

$$v_3'(t) = -\frac{R}{L}v_3(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

$$x(t) = y(t) \quad (\text{III-67})$$

Првите три равенки во горниот систем се равенките на векторот на состојба, додека последната е равенката на излезот на набљудуваниот систем.

Очигледно, набљудуваниот модел (III-67) е нелинеарен. За да се изврши негова линеаризација, потребно е, најнапред, да се определи неговата рамнотежна состојба, која е дефинирана со релациите:

$$v_1'(t) = v_2(t) = 0$$

$$v_2'(t) = \frac{Kv_3^2(t)}{mv_1^2(t)} - g = 0$$

$$v_3'(t) = -\frac{R}{L}v_3(t) + \frac{1}{L}u(t) = 0 \quad (\text{III-68})$$

Оттука непосредно следува дека:

$$v_{2r}(t) = 0$$

$$v_{1r}(t) = \pm \sqrt{\frac{Kv_{3r}^2(t)}{gm}}$$

$$v_{3r}(t) = \frac{1}{R}u_r(t) \quad (\text{III-69})$$

Во непосредна околина на дефинираната рамнотежна состојба (III-69), важат релациите:

$$v_1(t) = v_{1r}(t) + \Delta v_1(t)$$

$$v_2(t) = v_{2r}(t) + \Delta v_2(t)$$

$$v_3(t) = v_{3r}(t) + \Delta v_3(t)$$

$$u(t) = u_r(t) + \Delta u(t)$$

$$v_{2r}'(t) = \frac{Kv_{3r}^2(t)}{mv_{1r}^2(t)} - g \quad (\text{III-70})$$

па, со развој на нелинеарната функција  $v_2'(t)$  во Тајлоров ред во околина на рамнотежната состојба и задржување само на линеарните членови од тој развој, се добива:

$$\begin{aligned} v_2'(t) = [v_{2r}(t) + \Delta v_2(t)]' &= \left[ \frac{Kv_{3r}^2(t)}{mv_{1r}^2(t)} - g \right]_r + \left\{ \frac{\partial}{\partial v_1(t)} \left[ \frac{Kv_{3r}^2(t)}{mv_{1r}^2(t)} - g \right] \right\}_r [v_1(t) - v_{1r}(t)] + \\ &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial v_2(t)} \left[ \frac{Kv_{3r}^2(t)}{mv_{1r}^2(t)} - g \right] \right\}_r [v_2(t) - v_{2r}(t)] + \left\{ \frac{\partial}{\partial v_3(t)} \left[ \frac{Kv_{3r}^2(t)}{mv_{1r}^2(t)} - g \right] \right\}_r [v_3(t) - v_{3r}(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\Delta v_2(t)]' &= -\frac{2Kv_{3r}^2(t)}{mv_{1r}^3(t)}\Delta v_1(t) + \frac{2Kv_{3r}(t)}{mv_{1r}^2(t)}\Delta v_3(t) = \\
 &= \frac{2Rg\sqrt{gm}}{u_r(t)\sqrt{K}}\Delta v_1(t) + \frac{2gR}{u_r(t)}\Delta v_3(t)
 \end{aligned} \tag{III-71}$$

Следствено, бараниот линеарен модел во просторот на состојби на набљудуваниот нелинеарен електромагнетен систем од задачата ќе биде:

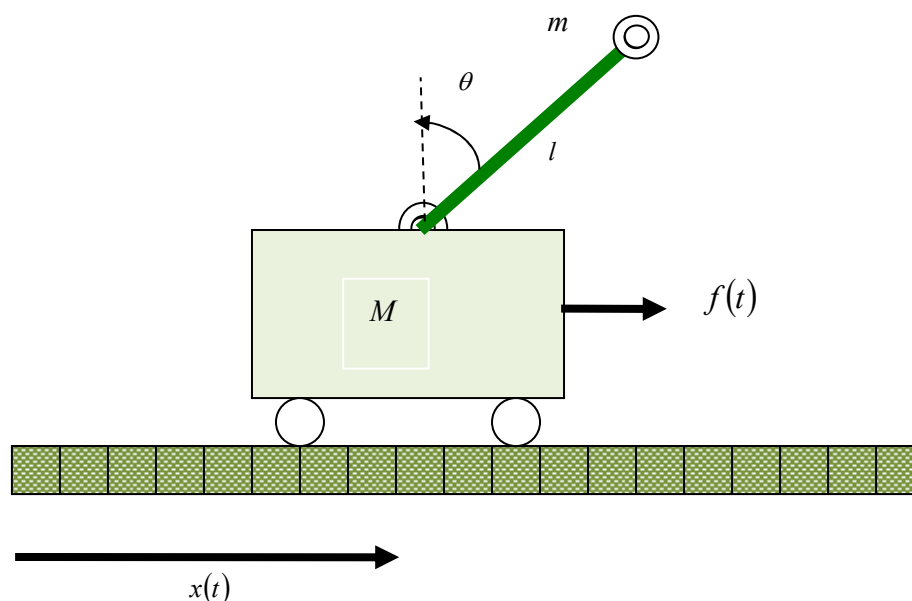
$$\begin{aligned}
 [\Delta v_1(t)]' &= \Delta v_2(t) \\
 [\Delta v_2(t)]' &= \frac{2Rg\sqrt{gm}}{u_r(t)\sqrt{K}}\Delta v_1(t) + \frac{2gR}{u_r(t)}\Delta v_3(t) \\
 [\Delta v_3(t)]' &= -\frac{R}{L}\Delta v_3(t) + \frac{1}{L}\Delta u(t) \\
 \Delta x(t) &= \Delta y(t)
 \end{aligned} \tag{III-72}$$

Тој може да се претстави во следниот матричен облик:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2R}{u_r(t)}\sqrt{\frac{mg^3}{K}} & 0 & \frac{2gR}{u_r(t)} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \\
 x(t) &= [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{III-73}$$

Читателот може да забележи дека во (III-73), заради поголема едноставност на записот, се испуштени ознаките за прираснувањата на променливите.

**Задача III-8.** Да се состави линеарен модел во просторот на состојби на инвертираното нишало прикажано на слика III-4. Со  $x(t)$  е означено хоризонталното растојание на количката од некоја референтна точка,  $\theta(t)$  е аголот на отклонување на нишалото од вертикалната оска,  $M$  е масата на количката,  $m$  е масата на нишалото,  $l$  е должината на нишалото и  $f(t)$  е надворешната сила која ја придвижува количката. Под претпоставка, масата на нишалото е концентрирана во неговиот врв.



Слика III-4. Илустрација кон задачата III-8

**Решение:** Со примена на Њутновите закони, за еден модел на набљудуваното нишало се добива следниот систем диференцијални равенки [8]:

$$\begin{aligned}
 x''(t) &= \frac{f(t) + lm\theta'^2(t)\sin\theta(t) + mg\cos\theta(t)\sin\theta(t)}{M + m\sin^2\theta(t)} \\
 \theta''(t) &= \frac{-f(t)\cos\theta(t) - lm\theta'^2(t)\sin\theta(t)\cos\theta(t) - (m + M)g\sin\theta(t)}{lM + lm\sin^2\theta(t)}
 \end{aligned}
 \tag{III-74}$$

Ако за состојбени големини се одберат:

$$\begin{aligned}
 v_1(t) &= x(t) \\
 v_2(t) &= x'(t) \\
 v_3(t) &= \theta(t) \\
 v_4(t) &= \theta'(t)
 \end{aligned}
 \tag{III-75}$$

ќе се добие следниот нелинеарен модел во просторот на состојби:

$$v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = \frac{f(t) + lmv_4^2(t) \sin v_3(t) + mg \cos v_3(t) \sin v_3(t)}{M + m \sin^2 v_3(t)}$$

$$v_3'(t) = v_4(t)$$

$$v_4'(t) = \frac{-f(t) \cos v_3(t) - lmv_4^2(t) \sin v_3(t) \cos v_3(t) - (M + m)g \sin v_3(t)}{lM + lm \sin^2 v_3(t)} \quad (\text{III-76})$$

Линеаризацијата на овој модел се врши околу рамнотежната состојба, која е одредена со условите:

$$v_{30} = 0$$

$$v_1'(t) = 0 \Rightarrow v_2(t_0) = v_{20} = 0$$

$$v_2'(t) = 0$$

$$v_3'(t) = 0 \Rightarrow v_4(t_0) = v_{40} = 0$$

$$v_4'(t) = 0 \quad (\text{III-77})$$

и, бидејќи:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial v_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_2}\right)_0 = 1, \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_3}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_4}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_1}{\partial f}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial v_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_2}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_3}\right)_0 = \frac{mg}{M}, \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_4}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_2}{\partial f}\right)_0 = \frac{1}{M}$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial v_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_2}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_3}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_4}\right)_0 = 1, \left(\frac{\partial f_3}{\partial f}\right)_0 = 0$$

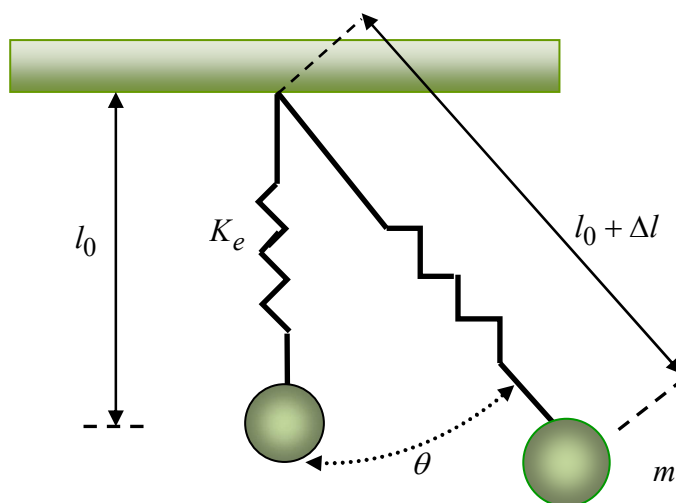
$$\left(\frac{\partial f_4}{\partial v_1}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_2}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_3}\right)_0 = \frac{-(M+m)g}{lM}, \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_4}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_4}{\partial f}\right)_0 = \frac{-1}{lM} \quad (\text{III-78})$$

за бараниот линеарен модел се добива:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \\ v_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{Ml} \end{bmatrix} f(t)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) \quad (\text{III-79})$$

**Задача III-9.** Даден е механичкиот систем од слика III-5, кој се состои од нишало со должина  $l_0$  во мирување и маса  $m$ , закачено за неподвижна подлога преку пружина со коефициент на крутост  $K_e$ . Нишалото може слободно да осцилира во вертикалната рамнина, а неговото движење е опишано со две координати: аголот на отклонување од вертикалната оска  $\theta$  и отстапувањето  $\Delta l$  на должината на нишалото од неговата должина во рамнотежна состојба  $l_0$ . Да се состави математички модел на движењето на овој систем во просторот на состојби и да се изврши негова линеаризација во околина на рамнотежната состојба на системот.



Слика III-5. Илустрација кон задачата III-9

**Решение:** Положбата на нишалото во просторот може да се опише со две координати - аголот на отклонување на нишалото од вертикалната оска  $\theta$  и координата која зависи од радијалното растојание на нишалото од точката на прицврстување. Постојат многу можни начини да се опише оваа координата, а наведениот начин во задачата е еден од нив. Имено, нишалото е во стабилна

рамнотежна состојба кога слободно виси (мирува) и аголот на отклонување од вертикалната оска е  $\theta = 0$ , а неговото издолжување е еднакво на  $\frac{mg}{K_e}$ , каде што  $g$  е земјиното забрзување. Ако вкупната должина на нишалото во мирување се означи со  $l_0$ , тогаш отстапувањето на должината на нишалото од оваа вредност кога тоа осцилира, може да се означи со  $\Delta l$ . Рамнотежната состојба на нишалото исто така се усвојува како ниво на нулта потенцијална енергија.

Во согласност со усвоените координати, вкупната кинетичка енергија на системот може да се претстави како збир од радијалната компонента  $\frac{1}{2}m[l'(t)]^2$  и тангенцијалната компонента  $\frac{1}{2}m[l(t)\theta'(t)]^2$ :

$$K = \frac{1}{2}m[l'(t)]^2 + \frac{1}{2}ml^2(t)[\theta'(t)]^2; \quad l(t) = l_0 + \Delta l(t) \quad (\text{III-80})$$

Може да се забележи дека кинетичката енергија зависи не само од брзините  $l'(t)$  и  $\theta'(t)$ , туку и од должината  $\Delta l$ .

Потенцијалната енергија исто така има две компоненти – еластична и гравитациона. Бидејќи должината на нишалото при осцилирање е  $\Delta l + \frac{mg}{K_e}$ , еластичната потенцијална енергија ќе изнесува:

$$P_1 = \frac{1}{2}K_e \left( \Delta l + \frac{mg}{K_e} \right)^2 \quad (\text{III-81})$$

а, бидејќи висината на која се наоѓа нишалото при осцилирањето во однос на рамнотежната положба е  $l_0 - (l_0 + \Delta l)\cos\theta$ , гравитационата потенцијална енергија ќе биде:

$$P_2 = mg[l_0 - (l_0 + \Delta l)\cos\theta] \quad (\text{III-82})$$

Лагранжијанот на набљудуваниот механички систем е:

$$L = K - P = \frac{1}{2}m[l'(t)]^2 + \frac{1}{2}ml^2(t)[\theta'(t)]^2 - \frac{1}{2}K_e \left( \Delta l + \frac{mg}{K_e} \right)^2 - mg[l_0 - (l_0 + \Delta l)\cos\theta] \quad (\text{III-83})$$

па:



$$\frac{\partial L}{\partial l} = m(l_0 + \Delta l) \theta'^2 - K_e \left( \Delta l + \frac{mg}{K_e} \right) + mg \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial l'} = ml'$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(l_0 + \Delta l) \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = m(l_0 + \Delta l)^2 \theta'$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial l'} \right] = ml''$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) = m(l_0 + \Delta l)^2 \theta'' + 2m(l_0 + \Delta l)(\Delta l)' \theta' \quad (\text{III-84})$$

Динамичкиот модел на нишалото се состои од две диференцијални равенки:

$$ml'' - m(l_0 + \Delta l) \theta'^2 + K_e \left( \Delta l + \frac{mg}{K_e} \right) - mg \cos \theta = 0$$

$$m(l_0 + \Delta l)^2 \theta'' + 2m(l_0 + \Delta l)l' \theta' + mg(l_0 + \Delta l) \sin \theta = 0 \quad (\text{III-85})$$

Со постепено снижување на редот на изводот во дадените равенки се добива:

$$l''(t) = -\frac{K_e}{m} [\Delta l(t) + l_0] + g \cos[\theta(t)] + [\Delta l(t) + l_0] \theta'^2(t)$$

$$l'(t) = \int_0^t l''(\tau) d\tau$$

$$l(t) = \int_0^t l'(\tau) d\tau + l_0$$

$$\theta''(t) = -\frac{2[\Delta l(t)]' \theta'(t)}{[\Delta l(t) + l_0]} - \frac{g \sin[\theta(t)]}{[\Delta l(t) + l_0]}$$

$$\theta'(t) = \int_0^t \theta''(\tau) d\tau$$

$$\theta(t) = \int_0^t \theta'(\tau) d\tau \quad (\text{III-86})$$

па, ако за состојбени големини се одберат:

$$v_1(t) = l(t)$$

$$v_2(t) = l'(t)$$

$$v_3(t) = \theta(t)$$

$$v_4(t) = \theta'(t) \quad (\text{III-87})$$

еден модел на набљудуваниот систем во просторот на состојби ќе биде:

$$v_1'(t) = l'(t) = v_2(t) = f_1[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]$$

$$v_2'(t) = l''(t) = -\frac{K_e}{m}[\Delta l(t) + l_0] + g \cos[\theta(t)] + [\Delta l(t) + l_0]\theta'^2(t) =$$

$$= -\frac{K_e}{m}\left[v_1(t) + \frac{mg}{K_e}\right] + g \cos[v_3(t)] + \left[v_1(t) + \frac{mg}{K_e}\right]v_4^2(t) =$$

$$= f_2[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]$$

$$v_3'(t) = \theta'(t) = v_4(t) = f_3[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]$$

$$v_4'(t) = \theta''(t) = -\frac{2[\Delta l(t)]'\theta'(t)}{[\Delta l(t) + l_0]} - \frac{g \sin[\theta(t)]}{[\Delta l(t) + l_0]} =$$

$$= -\frac{2v_2(t)v_4(t)}{\left[v_1(t) + \frac{mg}{K_e}\right]} - \frac{g \sin[v_3(t)]}{\left[v_1(t) + \frac{mg}{K_e}\right]} = f_4[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)] \quad (\text{III-88})$$

За рамнотежната состојба на системот важи:

$$l_0 = \frac{mg}{K_e}$$

$$v_{30} = \theta_0 = 0$$

$$v_1'(t) = 0 \Rightarrow v_{20} = 0$$

$$v_2'(t) = 0 \Rightarrow v_{10} = 0$$

$$v_3'(t) = 0 \Rightarrow v_{40} = 0$$

$$v_4'(t) = 0 \Rightarrow -\frac{2v_{20}v_{40}}{\left(v_{10} + \frac{mg}{K_e}\right)} - \frac{g \sin v_{30}}{\left(v_{10} + \frac{mg}{K_e}\right)} = 0 \quad (\text{III-89})$$

Вредностите на парцијалните изводи за рамнотежната состојба се:

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_1} = \frac{\partial f_1}{\partial v_3} = \frac{\partial f_1}{\partial v_4} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_2} = 1$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial v_1}\right)_0 = \left(-\frac{K_e}{m} + \frac{mg}{K_e} v_4^2\right)_0 = -\frac{K_e}{m}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial v_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial v_3}\right)_0 = (-g \sin v_3)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_4}\right)_0 = \left(\frac{2mg}{K_e} v_4\right)_0 = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial v_1} = \frac{\partial f_3}{\partial v_3} = \frac{\partial f_3}{\partial v_4} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_2} = 1$$

$$\left(\frac{\partial f_4}{\partial v_1}\right)_0 = \frac{2v_{20}v_{40}}{\left(v_{10} + \frac{mg}{K_e}\right)^2} + \frac{g \sin v_{30}}{\left(v_{10} + \frac{mg}{K_e}\right)^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_4}{\partial v_2}\right)_0 = -\frac{2v_{40}}{\left(v_{10} + \frac{mg}{k}\right)} = 0, \quad \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_3}\right)_0 = -\frac{g \cos v_{30}}{\left(v_{10} + \frac{mg}{k}\right)} = -\frac{k}{m}$$

$$\left(\frac{\partial f_4}{\partial v_4}\right)_0 = -\frac{2v_{20}}{\left(v_{10} + \frac{mg}{k}\right)} = 0 \quad (\text{III-90})$$

па, со линеаризација на нелинеарните функции  $f_2[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]$  и  $f_4[v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)]$  во околина на рамнотежната состојба, се добива следниот линеарен модел на набљудуваниот нелинеарен механички систем:

$$(\Delta v_1)' = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_1}\right)_0 \Delta v_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_2}\right)_0 \Delta v_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_3}\right)_0 \Delta v_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_4}\right)_0 \Delta v_4 = \Delta v_2$$

$$(\Delta v_2)' = \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_1}\right)_0 \Delta v_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_2}\right)_0 \Delta v_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_3}\right)_0 \Delta v_3 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_4}\right)_0 \Delta v_4 = -\frac{K_e}{m} \Delta v_1$$

$$(\Delta v_3)' = \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_1}\right)_0 \Delta v_1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_2}\right)_0 \Delta v_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_3}\right)_0 \Delta v_3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_4}\right)_0 \Delta v_4 = \Delta v_4$$

$$(\Delta v_4)' = \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_1}\right)_0 \Delta v_1 + \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_2}\right)_0 \Delta v_2 + \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_3}\right)_0 \Delta v_3 + \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_4}\right)_0 \Delta v_4 = -\frac{K_e}{m} \Delta v_3$$

$$\Delta l = \Delta v_1$$

$$\Delta \theta = \Delta v_3 \tag{III-91}$$

или, по испуштањето на ознаките за прираснувањата, во матричен облик:

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \\ v_3'(t) \\ v_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_e}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K_e}{m} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta l(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{v}(t) \tag{III-92}$$

**Задача III-10.** Математичкиот модел на роботска рака со еден еластичен зглоб гласи:

$$I\ddot{\theta}_1(t) + mgl \sin[\theta_1(t)] + K[\theta_1(t) - \theta_2(t)] = 0$$

$$J\ddot{\theta}_2(t) - K[\theta_1(t) - \theta_2(t)] = T(t) \quad (\text{III-93})$$

каде што  $I, J$  се моменти на инерција;  $m$  е масата, а  $l$  должината на единствениот крак на роботската рака;  $K$  е константата на крутост односно еластичност на кракот од раката;  $\theta_1(t), \theta_2(t)$  се аглови позиции на кракот и  $T(t)$  е вртливиот момент кој дејствува во зглобот од раката [5]. Да се состави модел на динамиката на роботската рака во просторот на состојби, ако за излез се усвои  $\theta_1(t)$ . Потоа да се изврши негова линеаризација во околина на номиналната работна точка дефинирана со  $\theta_{1n} = 0$ .

**Решение:** Со воведување на смените:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \theta_1(t) \\ x_2(t) &= \dot{\theta}_1(t) \\ x_3(t) &= \theta_2(t) \\ x_4(t) &= \dot{\theta}_2(t) \end{aligned} \quad (\text{III-94})$$

се добива следниот модел за набљудуваната роботска рака:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{\theta}_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \dot{\theta}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \ddot{\theta}_2(t) \\ y(t) &= \theta_1(t) \end{aligned} \quad (\text{III-95})$$

$\ddot{\theta}_1(t)$  и  $\ddot{\theta}_2(t)$  се изразуваат од првата и втората равенка на дадениот модел:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1(t) &= -\frac{mgl}{I} \sin[\theta_1(t)] - \frac{K}{I} [\theta_1(t) - \theta_2(t)] = -\frac{mgl}{I} \sin[x_1(t)] - \frac{K}{I} [x_1(t) - x_3(t)] \\ \ddot{\theta}_2(t) &= \frac{1}{J} T(t) + \frac{K}{J} [\theta_1(t) - \theta_2(t)] = \frac{1}{J} T(t) + \frac{K}{J} [x_1(t) - x_3(t)] \end{aligned} \quad (\text{III-96})$$

па, за бараниот модел во просторот на состојби дефинитивно се добива:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= -\frac{mgl}{I} \sin[x_1(t)] - \frac{K}{I} [x_1(t) - x_3(t)] \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= \frac{1}{J} T(t) + \frac{K}{J} [x_1(t) - x_3(t)] \\
 y(t) &= \theta_1(t)
 \end{aligned} \tag{III-97}$$

Линеаризацијата на овој модел се врши околу номиналната работна точка  $(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}, T_n)$ , при што треба да се линеаризира само функцијата:

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{mgl}{I} \sin[x_1(t)] - \frac{K}{I} [x_1(t) - x_3(t)] = f_2[x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), T(t)] \tag{III-98}$$

Бидејќи:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -\frac{mgl}{I} \cos[x_1(t)] - \frac{K}{I}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \\
 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= \frac{K}{I}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial T} = 0
 \end{aligned} \tag{III-99}$$

бараниот линеарен модел ќе гласи:

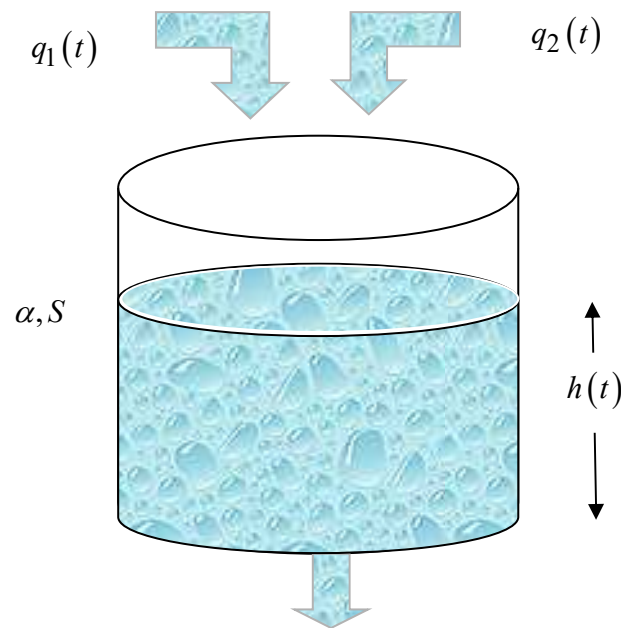
$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= -\left[ \frac{mgl}{I} \cos(x_{1n}) + \frac{K}{I} \right] [x_1(t) - x_{1n}] + \frac{K}{I} [x_3(t) - x_{3n}] \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= \frac{1}{J} [T(t) - T_n] + \frac{K}{J} [x_1(t) - x_{1n}] - \frac{K}{J} [x_3(t) - x_{3n}] \\
 y(t) &= \theta_1(t)
 \end{aligned} \tag{III-100}$$

или, во матричен облик:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{mgl}{I} + \frac{K}{I}\right) & 0 & \frac{K}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & 0 & -\frac{K}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{III-101})$$

**Задача III-11.** Даден е резервоар во кој се мешаат две течности со различна константна температура  $T_1$  и  $T_2$ , соодветно. Нека дотекот на првата течност е  $q_1(t)$ , а дотекот на втората течност  $q_2(t)$ , површината на попречниот пресек на резервоарот  $S$  е, под претпоставка, константна и нивото на течност во резервоарот е  $h(t)$ . Да се состави математички модел на динамиката на овој систем, ако за влез се усвојат дотеците на течностите  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$ , а за излез нивото на течност во резервоарот  $h(t)$  и нејзината резултантна температура  $T(t)$ . Потоа да се изврши линеаризација на добиениот модел во околина на рамнотежната состојба на системот.



Слика III-6. Илустрација кон задачата III-11

**Решение:** Математичкиот модел на резервоарот гласи:

$$S \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) + q_2(t) - \alpha \sqrt{h(t)}; \alpha = const.$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{Sh(t)} \{q_1(t)[T_1 - T(t)] + q_2(t)[T_2 - T(t)]\} \quad (\text{III-102})$$

Со соодветен избор на состојбените големини:

$$v_1(t) = h(t)$$

$$v_2(t) = T(t) \quad (\text{III-103})$$

се добива следниот модел на набљудуваниот систем во просторот на состојби:

$$v_1'(t) = \frac{1}{S} q_1(t) + \frac{1}{S} q_2(t) - \frac{\alpha}{S} \sqrt{v_1(t)}$$

$$v_2'(t) = \frac{1}{Sv_1(t)} \{q_1(t)[T_1 - v_2(t)] + q_2(t)[T_2 - v_2(t)]\}$$

$$x_1(t) = h(t) = v_1(t)$$

$$x_2(t) = T(t) = v_2(t) \quad (\text{III-104})$$

Рамнотежната состојба на системот се добива од условите  $v_1'(t) = 0$  и  $v_2'(t) = 0$ :

$$v_1'(t) = \frac{1}{S} q_1(t) + \frac{1}{S} q_2(t) - \frac{\alpha}{S} \sqrt{v_1(t)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{S} q_{10} + \frac{1}{S} q_{20} - \frac{\alpha}{S} \sqrt{v_{10}} = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{v_{10}} = \frac{q_{10} + q_{20}}{\alpha} \Rightarrow v_{10} = \frac{(q_{10} + q_{20})^2}{\alpha^2}$$

$$v_2'(t) = \frac{1}{Sv_1(t)} \{q_1(t)[T_1 - v_2(t)] + q_2(t)[T_2 - v_2(t)]\} = 0$$

$$\frac{1}{Sv_{10}} [q_{10}(T_1 - v_{20}) + q_{20}(T_2 - v_{20})] = 0$$



$$v_{20} = \frac{q_{10}T_1 + q_{20}T_2}{q_{10} + q_{20}} \quad (\text{III-105})$$

а вредностите на парцијалните изводи на нелинеарните функции  $v_1'(t) = f_1[v_1(t), v_2(t), q_1(t), q_2(t)]$  и  $v_2'(t) = f_2[v_1(t), v_2(t), q_1(t), q_2(t)]$  за оваа рамнотежна состојба се:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_1}\right)_0 &= \frac{-\alpha}{2S\sqrt{v_{10}}}, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\right)_0 = \frac{1}{S}, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\right)_0 = \frac{1}{S} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_1}\right)_0 &= -\frac{q_{10}(T_1 - v_{20}) + q_{20}(T_2 - v_{20})}{Sv_{10}^2} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_2}\right)_0 &= -\frac{q_{10} + q_{20}}{Sv_{10}}, \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_1}\right)_0 = \frac{T_1 - v_{20}}{Sv_{10}}, \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_2}\right)_0 = \frac{T_2 - v_{20}}{Sv_{10}} \end{aligned} \quad (\text{III-106})$$

Оттука, бараниот линеарен модел на набљудуваниот систем ќе биде:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(t) &= \begin{bmatrix} \frac{-\alpha}{2S\sqrt{v_{10}}} & 0 \\ -\frac{q_{10}(T_1 - v_{20}) + q_{20}(T_2 - v_{20})}{Sv_{10}^2} & -\frac{q_{10} + q_{20}}{Sv_{10}} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \\ &+ \frac{1}{S} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{T_1 - v_{20}}{v_{10}} & \frac{T_2 - v_{20}}{v_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (\text{III-107})$$

**Задача III-12.** Даден е роботскиот механизам од слика III-7, кој се состои од еднонасочен електричен мотор што задвижува роботска рака во вид на нишало [5]. Моторот е спрегнат со нишалото со посредство на пар запчаници (преку редуктор), чиј преносен однос е  $r$ , а нишалото може да се движи само во вертикалната рамнина под дејство на Земјината тежа. Равенката на движење на роботската рака, земајќи го предвид и оптоварувањето  $m$ , е следната:

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} + B_L\dot{\theta} + (m_b l_b + ml)g \sin(\theta) = \tau \quad (\text{III-108})$$

каде што:

$J$  – е моментот на инерција на раката без оптоварувањето ( $m = 0$ ), одреден во однос на оската на ротација

$m_b$  – е масата на раката без оптоварувањето

$l_b$  – е растојанието на тежиштето на раката без оптоварување до оската на ротација

$m$  – е масата на товарот на крајот од раката за која се претпоставува дека е концентрирана во точка и дека нема димензии или облик

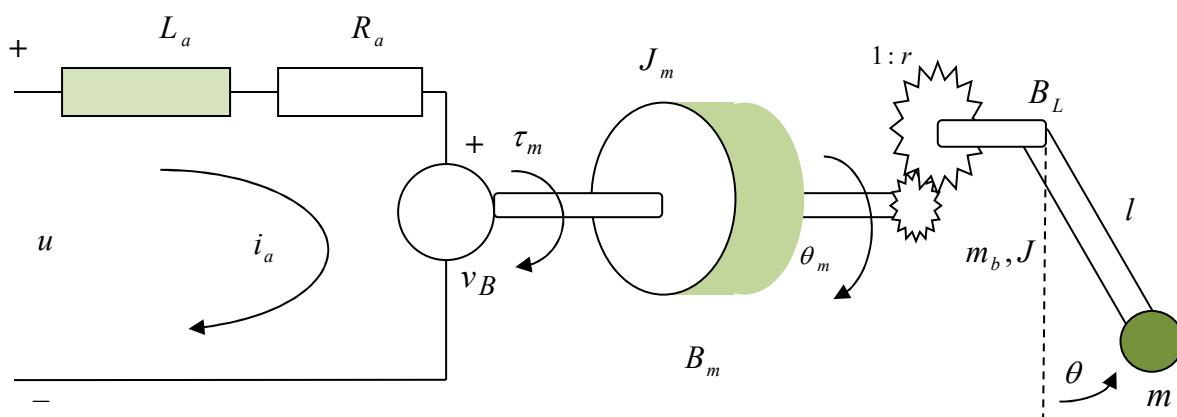
$l$  – растојание помеѓу масата  $m$  и оската на ротација

$g$  – е Земјиното забрзување

$\tau$  – е вртливиот момент што дејствува врз оската на ротација и ја принудува на движење

$B_L$  – е коефициент на триење на раката заедно со оптоварувањето

$\theta$  – е агловото движење на оската од товарот [ $rad$ ]



Слика III-7. Роботски механизам сочинет од електричен мотор како актуатор и рака во вид на нишало со оптоварување  $m$  на крајот

Равенката (III-108) може да се запише и на следниот начин:

$$J_L \ddot{\theta} + B_L \dot{\theta} + k_L \sin(\theta) = \tau \quad (\text{III-109})$$

каде што:

$$J_L = J + ml^2$$

$$k_L = m_b l_b + ml$$

Упростен динамички модел на електромоторот кој е употребен како актуатор во набљудуваниот роботски механизам со занемарлив индуктивитет на арматурата, е претставен со равенката:

$$I_m \ddot{\theta} + B_m \dot{\theta} + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{\theta} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} u \quad (\text{III-110})$$

каде што:

$J_m$  – е момент на инерција на роторот  $[kg \cdot m^2]$

$K_a$  – е торзионата константа на моторот  $\left[ \frac{Nm}{A} \right]$

$R_a$  – е отпорноста на арматурата  $[\Omega]$

$K_b$  – е константа на повратната електромоторна сила  $v_B \left[ \frac{V \text{sec}}{\text{rad}} \right]$

$B_m$  – е коефициент на триење на роторот  $[N \cdot m]$

$\tau$  – е вртливиот момент кој го генерира моторот и кој дејствува врз товарот  $[N \cdot m]$

$\theta$  – е агловата положба на оската од товарот  $[rad]$

$r$  – е преносниот однос на запчаниците (вообичаено  $r \gg 1$ )

$u$  – е напонот на арматурата  $[V]$

Равенката односно моделот на еднонасочниот мотор (III-110) ја дефинира врската помеѓу влезниот напон  $u$  на арматурата и вртливиот момент  $\tau$ , со кој моторот дејствува врз товарот. Да се состави линеарен математички модел на динамиката на набљудуваниот роботски механизам во просторот на состојби. (Упатство: најнапред да се дефинира влезот и излезот на овој систем и неговите состојбени големини. Исто така да се претпостави многу голем преносен однос  $r$ ,  $r \gg 1$ .)

**Решение:** Влез за набљудуваниот роботски механизам кој претставува електромеханички систем е влезниот напон на арматурата од моторот  $u$ , а излез е аголот на поместувањето на роботската рака односно нишалото  $\theta$ . Ако на равенката (III-109) се воведо равенката (III-110), ќе се добие:

$$\left( I_m + \frac{J_L}{r^2} \right) \ddot{\theta}(t) + \left( B_m + \frac{B_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \dot{\theta}(t) + \frac{k_L}{r^2} \sin[\theta(t)] = \frac{K_a}{r R_a} u(t)$$

$$\tilde{J} \ddot{\theta}(t) + \tilde{B} \dot{\theta}(t) + R \sin[\theta(t)] = K u(t) \quad (\text{III-111})$$

каде што:

$$\tilde{J} = I_m + \frac{J_L}{r^2}$$

$$\tilde{B} = B_m + \frac{B_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a}$$

$$R = \frac{k_L}{r^2}$$

$$K = \frac{K_a}{r R_a} \tag{III-112}$$

Претпоставката за  $r \gg 1$  овозможува да се занемари нелинеарната динамика на раката претставена со моделот (III-111), бидејќи при  $r \gg 1$  е  $R \approx 0$ , и (III-111) поминува во многу поедноставниот линеарен облик:

$$J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) = Ku(t) \tag{III-113}$$

$$J = I_m, \quad B = \left( B_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \tag{III-114}$$

Нека:

$$v_1(t) = \theta(t)$$

$$v_2(t) = \dot{\theta}(t) \tag{III-115}$$

па, еден модел на набљудуваниот систем во просторот на состојби е следниот:

$$\dot{v}_1(t) = v_2(t)$$

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{J} [Ku(t) - Bv_2(t)]$$

$$x(t) = v_1(t) \tag{III-116}$$

Елементите на овој модел се:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0], \quad d = 0 \tag{III-117}$$

**Задача III-13.** Нека  $x(t)$  е големината на популацијата на пленот, а  $y(t)$  - големината на популацијата на ловците, кои коегзистираат во дадена околина. Брзината на промена на двете популации е дадена со релациите:

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)[6 - 2x(t) - y(t)] \\y'(t) &= y(t)[4 - x(t) - y(t)]\end{aligned}\tag{III-118}$$

Да се изврши линеаризација на дадениот модел во околина на рамнотежната состојба  $(x_n, y_n)$ ;  $x_n > 0, y_n > 0$ .

**Решение:** Рамнотежните состојби на набљудуваниот модел се добиваат од условот:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 0 \\y'(t) &= 0\end{aligned}\tag{III-119}$$

од каде што следува дека системот има четири рамнотежни состојби  $(0,0)$ ,  $(3,0)$ ,  $(0,4)$ ,  $(2,2)$ . Во согласност со условот од задачата III-13, линеаризацијата се врши во околина на точката  $(2,2)$ :

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)[6 - 2x(t) - y(t)] = f[x(t), y(t)] \\ \frac{\partial}{\partial x} f[x(t), y(t)] &= 6 - 4x(t) - y(t) \\ \frac{\partial}{\partial y} f[x(t), y(t)] &= -x(t) \\ y'(t) &= y(t)[4 - x(t) - y(t)] = g[x(t), y(t)] \\ \frac{\partial}{\partial x} g[x(t), y(t)] &= -y(t) \\ \frac{\partial}{\partial y} g[x(t), y(t)] &= 4 - x(t) - 2y(t)\end{aligned}\tag{III-120}$$

Бараниот линеарен модел ќе биде:

$$\begin{aligned}x'(t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} f[x(t), y(t)] \right]_{(2,2)} x(t) + \left[ \frac{\partial}{\partial y} f[x(t), y(t)] \right]_{(2,2)} y(t) \\ y'(t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} g[x(t), y(t)] \right]_{(2,2)} x(t) + \left[ \frac{\partial}{\partial y} g[x(t), y(t)] \right]_{(2,2)} y(t)\end{aligned}$$

$$x'(t) = [6 - 4x(t) - y(t)]_{(2,2)}x(t) + [-x(t)]_{(2,2)}y(t)$$

$$y'(t) = [-y(t)]_{(2,2)}x(t) + [4 - x(t) - 2y(t)]_{(2,2)}y(t)$$

$$x'(t) = -4x(t) - 2y(t)$$

$$y'(t) = -2x(t) - 2y(t) \quad (\text{III-121})$$

со тоа што истиот се однесува на прираснувањата кон одредените променливи, а не на самите променливи и претставува задоволителна апроксимација само во непосредна околина на избраната рамнотежна состојба.

**Задача III-14.** Да се изврши линеаризација на следниот нелинеарен динамички систем во околина на рамнотежната состојба (1,1):

$$x'(t) = x(t)[y(t) - 1], x(0) = 1$$

$$y'(t) = y(t)[2 - x(t) - y(t)], y(0) = 2 \quad (\text{III-122})$$

Да се испита стабилноста на таа рамнотежна состојба и да се нацрта фазниот портрет на оригиналниот систем и неговиот линеарен модел.

**Решение:** За да се испита стабилноста на дефинираната рамнотежна состојба, потребно е да се најдат следните парцијални изводи:

$$x'(t) = x(t)[y(t) - 1] = f[x(t), y(t)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f[x(t), y(t)] = y(t) - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f[x(t), y(t)] = x(t)$$

$$y'(t) = y(t)[2 - x(t) - y(t)] = g[x(t), y(t)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} g[x(t), y(t)] = -y(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g[x(t), y(t)] = 2 - x(t) - 2y(t) \quad (\text{III-123})$$

и да се пресметаат сопствените вредности на матрицата:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f[x(t), y(t)] & \frac{\partial}{\partial y} f[x(t), y(t)] \\ \frac{\partial}{\partial x} g[x(t), y(t)] & \frac{\partial}{\partial y} g[x(t), y(t)] \end{bmatrix}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} y(t) - 1 & x(t) \\ -y(t) & 2 - x(t) - 2y(t) \end{bmatrix}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \quad (\text{III-124})$$

Бидејќи истите имаат негативни реални делови, се утврдува дека рамнотежната состојба (1,1) е стабилна. Бараниот линеарен модел ќе гласи:

$$x'(t) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} f[x(t), y(t)] \right]_{(1,1)} x(t) + \left[ \frac{\partial}{\partial y} f[x(t), y(t)] \right]_{(1,1)} y(t)$$

$$y'(t) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} g[x(t), y(t)] \right]_{(1,1)} x(t) + \left[ \frac{\partial}{\partial y} g[x(t), y(t)] \right]_{(1,1)} y(t)$$

$$x'(t) = [y(t) - 1]_{(1,1)} x(t) + [x(t)]_{(1,1)} y(t)$$

$$y'(t) = [-y(t)]_{(1,1)} x(t) + [4 - x(t) - 2y(t)]_{(1,1)} y(t)$$

$$x'(t) = y(t)$$

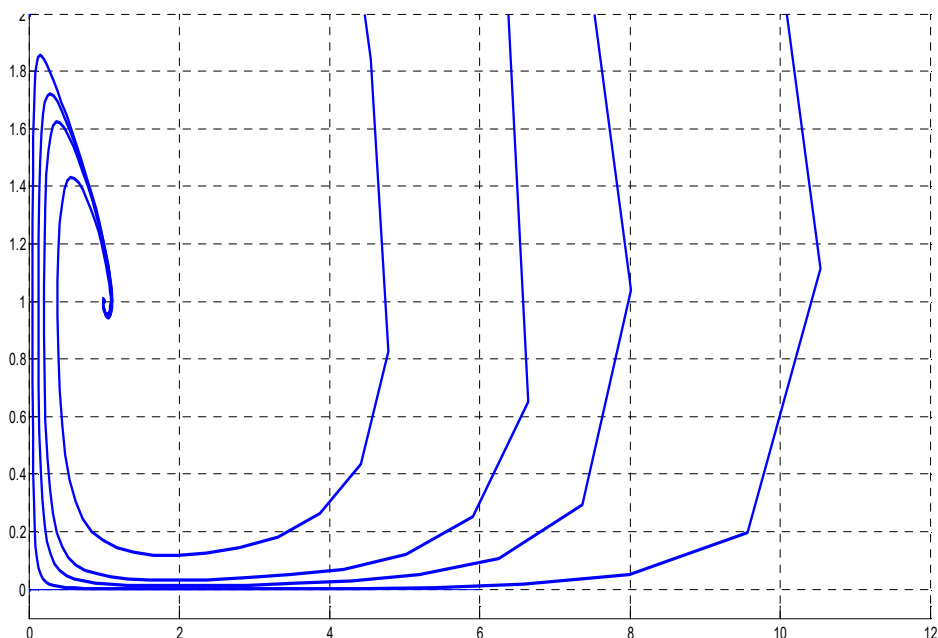
$$y'(t) = -x(t) - y(t) \quad (\text{III-125})$$

Моделот (III-125) претставува задоволителна апроксимација само во непосредна околина на избраната рамнотежна состојба и се однесува на прираснувањата на одделните променливи, а не на самите променливи.

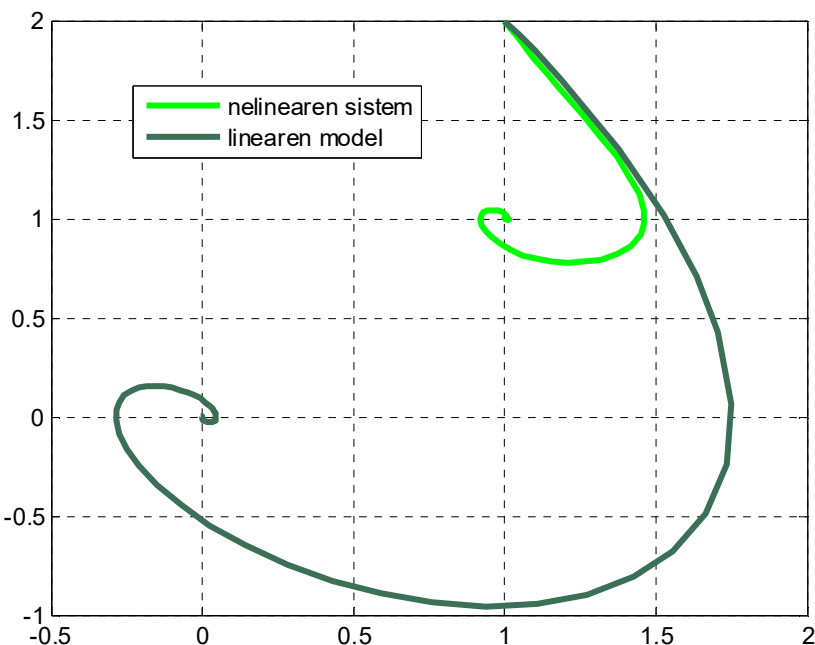
Фазниот портрет на оригиналниот нелинеарен модел за различни почетни услови може да се добие со помош на прикажаните MATLAB наредби и истиот е даден на слика III-8.

```
>> f=inline('[v(1)*v(2)-v(1);2*v(2)-v(1)*v(2)-v(2)^2]','t','v');
>> close all; hold on
for a=0:3:6
for b=0:5:10
[t,v]=ode45(f,0:0.2:20,[a;b]);
plot(v(:,1),v(:,2))
end
end
hold off
```

За споредба, фазниот портрет на оригиналниот нелинеарен систем и неговиот линеарен модел за зададените почетни услови се прикажани на слика III-9. Оттаму може да се забележи дека линеарниот модел претставува добра апроксимација во околина на избраната рамнотежна состојба, но значително отстапува подалеку од неа.



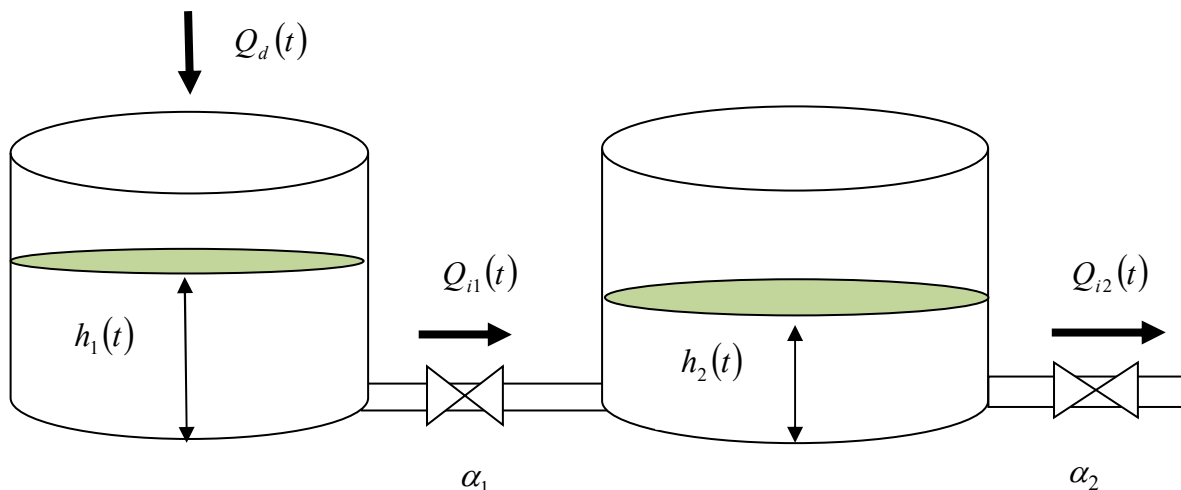
Слика III-8. Фазен портрет на оригиналниот нелинеарен систем од задача III-14



Слика III-9. Фазен портрет на оригиналниот нелинеарен систем од задача III-14 и неговиот линеарен модел



**Задача III-15.** Нека е даден системот сврзани резервоари од слика III-10. Да се состави математички модел на овој систем во просторот на оригиналите. Влез во системот претставува дотекот на течност во првиот резервоар, а за излез да се усвои нивото на течноста во вториот резервоар. Површините на попречниот пресек на двата резервоари се  $S_1$  и  $S_2$ , соодветно и истите се константни. Потоа да се состави соодветен модел на набљудуваниот хидрауличен систем во просторот на состојби и да се изврши негова линеаризација околу рамнотежната состојба  $(h_1, h_2, Q_d)_0$ .



Слика III-10. Илустрација кон задачата III-15

**Решение:** Математичкиот модел на динамичкото поведење на овој систем е:

$$\begin{aligned} S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} &= Q_d(t) - \alpha_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \\ S_2 \frac{dh_2(t)}{dt} &= \alpha_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - \alpha_2 \sqrt{h_2(t)} \end{aligned} \quad (\text{III-126})$$

Ако нивоата на течност во резервоарите се усвојат за состојбени големини, соодветниот модел во просторот на состојби ќе биде:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1(t)}{dt} &= \frac{1}{S_1} Q_d(t) - \frac{1}{S_1} \alpha_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} = f_1[Q_d(t), h_1(t), h_2(t)] \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= \frac{1}{S_2} \alpha_1 \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - \frac{1}{S_2} \alpha_2 \sqrt{h_2(t)} = f_2[Q_d(t), h_1(t), h_2(t)] \end{aligned} \quad (\text{III-127})$$

со чија линеаризација околу рамнотежната состојба  $\mathbf{h}_0 = [h_{10} \quad h_{20}]^T$  се добива следниот линеарен модел:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 - h_{10} \\ h_2 - h_{20} \end{bmatrix}$$

$$u = Q_d - Q_{d0}$$

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \right)_0 = - \frac{\alpha_1}{2S_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}}$$

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \right)_0 = \frac{\alpha_1}{2S_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}}$$

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial Q_d} \right)_0 = \frac{1}{S_1}$$

$$\left( \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \right)_0 = \frac{\alpha_1}{2S_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}}$$

$$\left( \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \right)_0 = - \frac{\alpha_1}{2S_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} - \frac{\alpha_2}{2S_2 \sqrt{h_{20}}}$$

$$\left( \frac{\partial f_2}{\partial Q_d} \right)_0 = 0$$

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} - \frac{\alpha_1}{2S_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} & \frac{\alpha_1}{2S_1 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} \\ \frac{\alpha_1}{2S_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} & - \frac{\alpha_1}{2S_2 \sqrt{h_{10} - h_{20}}} - \frac{\alpha_2}{2S_2 \sqrt{h_{20}}} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \mathbf{v}(t) \tag{III-128}$$

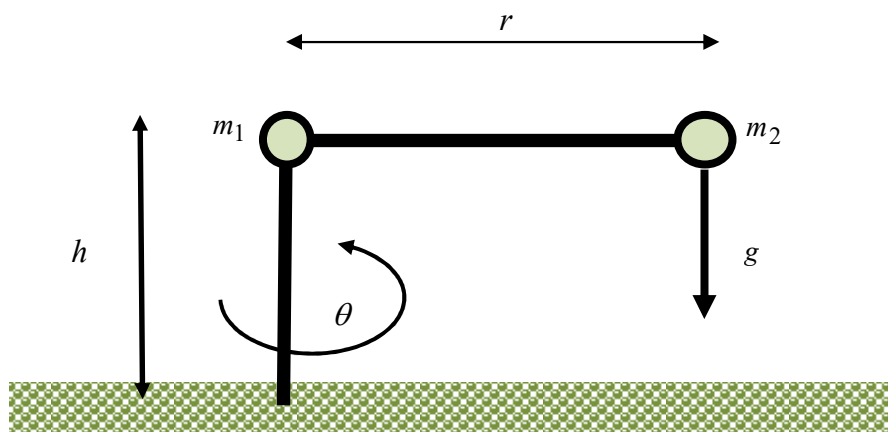
**Задача III-16.** Дадена е роботската рака со два транслаторни и еден ротационен зглоб (цилиндрична роботска рака), прикажана на слика III-11. Нејзиниот динамички модел гласи:

$$(I + m_2 r^2) \ddot{\theta} + 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} = \tau$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{l} + (m_1 + m_2)g = f_2$$

$$m_2 \ddot{r} - m_2 r \dot{\theta}^2 = f_3 \quad (\text{III-129})$$

каде што:  $m_1$  е масата на првиот трансляторен крак,  $m_2$  е масата на вториот трансляторен крак,  $I$  е момент на инерција на ротациониот крак во однос на неговата оска на ротација,  $g$  е Земјиното забрзување,  $l = l(t)$  е променливата на првиот трансляторен зглоб,  $r = r(t)$  е променливата на вториот трансляторен зглоб,  $\theta = \theta(t)$  е променливата на ротациониот зглоб,  $\tau = \tau(t)$  се вртливите моменти што дејствуваат во ротациониот зглоб, а  $f_2 = f_2(t)$  и  $f_3 = f_3(t)$  се силите што дејствуваат во првиот и вториот трансляторен зглоб, соодветно. а) Да се дефинираат влезовите и излезите на овој модел. б) Да се дефинираат состојбени големини на набљудуваната роботска рака и да се состави нејзиниот модел во просторот на состојби. в) Да се определат рамнотежните состојби на раката и да се изврши линеаризација на моделот добиен под б) во околина на дефинираната рамнотежна состојба.



Слика III-11. Илустрација кон задачата III-16

**Решение:** Влезови на набљудуваната роботска рака се силите и вртливите моменти што дејствуваат во нејзините зглобови, а излези се променливите на зглобовите. Ако со  $\boldsymbol{\tau}$  го означиме векторот на влезовите, а со  $\mathbf{q}$  векторот на излезите, ќе важи:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta \\ l \\ r \end{bmatrix} \quad (\text{III-130})$$

За состојбени големини можат да се усвојат променливите на зглобовите и нивните први изводи, па еден модел на набљудуваната роботска рака во просторот на состојби ќе биде следниот:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ l \\ r \\ \dot{\theta} \\ \dot{l} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{l} \\ \dot{r} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{l} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r} \\ \dot{l} \\ \frac{\tau - 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta}}{I + m_2 r^2} \\ \frac{f_2 - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} \\ \frac{f_3 + m_2 r \dot{\theta}^2}{m_2} \end{bmatrix} \quad (\text{III-131})$$

Рамнотежните услови за набљудуваната роботска рака се добиваат кога сите изводи во моделот (III-131) се изедначат со нула:

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{l} = 0$$

$$\dot{r} = 0$$

$$\frac{\tau - 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta}}{I + m_2 r^2} = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

$$\frac{f_2 - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow f_2 = (m_1 + m_2)g$$

$$\frac{f_3 + m_2 r \dot{\theta}^2}{m_2} = 0 \Rightarrow f_3 = 0 \quad (\text{III-132})$$

Бараниот линеарен модел ќе биде:

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (I + m_2 r^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-133})$$

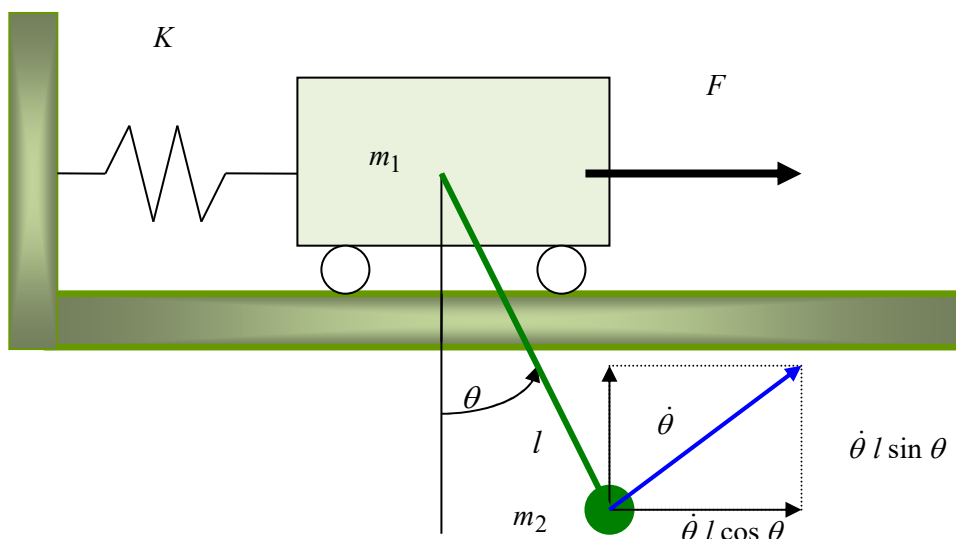
**Задача III-17.** Даден е системот од слика III-12, кој се состои од количка со маса  $m_1$ , што се движи по хоризонтална подлога. Количката од едната страна е прицврстена за вертикална подлога преку пружина со коефициент на крутост  $K$ , додека за самата количка е закачено нишало со маса  $m_2$  и должина  $l$ .

Еден математички модел на овој систем гласи:

$$F = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta + Kx$$

$$T = m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 l \ddot{x} \cos \theta + m_2 g l \sin \theta \quad (\text{III-134})$$

Да се определи соодветен линеарен модел на дадениот систем во околина на неговата рамнотежна состојба.



Слика III-12. Шематски приказ на систем со два степени слобода на движење

**Решение:** Ако состојбените големини се усвојат на следниот начин:

$$v_1 = x$$

$$v_2 = \dot{x}$$

$$v_3 = \theta$$

$$v_4 = \dot{\theta}$$

(III-135)

ќе се добие:

$$\dot{v}_1 = \dot{x} = v_2$$

$$\dot{v}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m_1 + m_2} [F - m_2 l \dot{v}_4 \cos v_3 + m_2 l v_4^2 \sin v_3 - k v_1]$$

$$\dot{v}_3 = \dot{\theta} = v_4$$

$$\dot{v}_4 = \ddot{\theta} = \frac{1}{m_2 l^2} [T - m_2 l \dot{v}_2 \cos v_3 - m_2 g l \sin v_3] \quad (\text{III-136})$$

од каде за рамнотежната состојба на системот следува:

$$\dot{v}_1 = v_2 = 0$$

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} [F - k v_1] = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{F}{K}$$

$$\dot{v}_3 = v_4 = 0$$

$$\dot{v}_4 = \frac{1}{m_2 l^2} [T - m_2 g l \sin v_3] = 0 \Rightarrow \sin v_3 = \frac{T}{m_2 g l} \quad (\text{III-137})$$

Имајќи на ум дека:

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_1} = \frac{\partial f_1}{\partial v_3} = \frac{\partial f_1}{\partial v_4} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_2} = 1$$

$$\left( \frac{\partial f_2}{\partial v_1} \right)_0 = -\frac{K}{m_1 + m_2}, \quad \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \right)_0 = \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_3} \right)_0 = \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_4} \right)_0 = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial v_1} = \frac{\partial f_3}{\partial v_2} = \frac{\partial f_3}{\partial v_3} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial v_4} = 1$$

$$\left( \frac{\partial f_4}{\partial v_1} \right)_0 = \left( \frac{\partial f_4}{\partial v_2} \right)_0 = \left( \frac{\partial f_4}{\partial v_4} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial f_4}{\partial v_3} \right)_0 = -\frac{\sqrt{m_2^2 g^2 l^2 - T^2}}{m_2 l} \quad (\text{III-138})$$

за бараниот линеарен модел се добива:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \\ \dot{v}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K}{m_1+m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{m_2^2 g^2 l^2 - T^2}}{m_2 l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1+m_2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2 l^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F \\ T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{III-139}$$

**Задача III-18.** Едноставен математички модел кој ја илустрира инфекцијата со СИДА е даден со следниве равенки [6]:

$$\frac{dT}{dt} = S - DT - BTv$$

$$\frac{dT^*}{dt} = BTv - MT^*$$

$$\frac{dv}{dt} = KT^* - Cv \tag{III-140}$$

каде што:  $T$  е број на здрави клетки,  $T^*$  е број на инфицирани клетки и  $v$  е број на слободни вируси. Да се најдат рамнотежните состојби на системот и да се изврши линеаризација околу ненулевата рамнотежна состојба. Константите на моделот се дадени во долната таблица.

**Таблица III-1. Константи на моделот (III-140)**

$D$	0.02/den
$K$	100broja/kletka
$S$	10/mm <sup>3</sup> /den
$B$	2.410 <sup>-5</sup> /mm <sup>3</sup> /den
$C$	2.4/den
$M$	0.24/den

Ако се користат лековите L1 и L2, соодветно, моделот се модифицира во облик:

$$\frac{dT}{dt} = S - DT - (1 - u_1)BTv = f_1(T, T^*, v)$$

$$\frac{dT^*}{dt} = (1 - u_1)BTv - MT^* = f_2(T, T^*, v)$$

$$\frac{dv}{dt} = (1 - u_2)KT^* - Cv = f_3(T, T^*, v) \quad (\text{III-141})$$

каде што  $0 \leq u_1 \leq 1$ ,  $0 \leq u_2 \leq 1$  ја претставуваат ефикасноста на лековите L1 и L2, соодветно. Да се состави линеарен модел околу истата рамнотежна состојба со  $u_{10} = u_{20} = 0$  од облик:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ex} + \mathbf{Fu} \quad (\text{III-142})$$

Како излез да се усвои бројот на слободни вируси.

**Решение:** Набљудуваниот систем е нелинеарен. Системот има две рамнотежни состојби:  $(T_0, T_0^*, v_0) = \left(\frac{S}{D}, 0, 0\right)$  и  $(T_0, T_0^*, v_0) = \left(\frac{CM}{BK}, \frac{S}{M} - \frac{CD}{BK}, \frac{SK}{CM} - \frac{D}{B}\right)$ . Матриците

**A**, **B** и **E** се дадени со:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix}, \mathbf{E} = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (\text{III-143})$$

па, за нивните конкретни вредности се добива:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(D + Bv_0) & 0 & -BT_0 \\ Bv_0 & -M & BT_0 \\ 0 & K & -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0 & -0.00576 \\ 0.02 & -0.24 & 0.00576 \\ 0 & 100 & -2.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} BT_0v_0 & 0 \\ -BT_0v_0 & 0 \\ 0 & -KT_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2 & 0 \\ -5.2 & 0 \\ 0 & -2 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \quad (\text{III-144})$$



## IV-1 ВРЕМЕНСКА ИДЕНТИФИКАЦИЈА НА КОНТИНУАЛНИ ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

**Задача IV-1.1.** Да се определат половите  $s_{1,2}$  на преносната функција  $G(s)$  на линеарен стационарен континуален динамички систем од втор ред, од чија преодна карактеристика  $x(t)$  се снимени неколку точки и се дадени во таблица IV-1.1.

**Таблица IV-1.1.** Точки од преодната карактеристика  $x(t)$  од задача IV-1.1

$t$	0	1.5	3.0	4.5	$\infty$
$x(t)$	0	1.295	1.449	1.394	1

**Решение:** Соодветните вредности на помошната карактеристика  $\bar{x}(t) = x(\infty) - x(t)$  се дадени во таблица IV-1.2.

**Таблица IV-1.2.** Точки од помошната карактеристика  $\bar{x}(t)$  од задача IV-1.1

$t$	0	1.5	3.0	4.5	$\infty$
$\bar{x}(t)$	1	-0.295	-0.449	-0.394	0

Со оглед на редот на системот што се идентификува, се формира систем од две линеарни алгебарски равенки со две непознати  $D_1$  и  $D_2$ :

$$\bar{x}_0 + \bar{x}_1 D_1 + \bar{x}_2 D_2 = 0$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 D_1 + \bar{x}_3 D_2 = 0 \tag{IV-1.1}$$

каде што вредностите  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  се отчитуваат од таблица IV-1.2. Следствено, решенијата  $D_1$  и  $D_2$  на системот (IV-1.1) со конкретен облик:

$$1 - 0.295 D_1 - 0.449 D_2 = 0$$

$$-0.295 - 0.449 D_1 - 0.394 D_2 = 0 \tag{IV-1.2}$$

се:

$$D_1 = -6.167, D_2 = 6.278 \tag{IV-1.3}$$

и тие претставуваат коефициенти на полиномот:

$$a(z) = 1 + \sum_{i=1}^2 D_i z^i = 1 + D_1 z + D_2 z^2 = 1 - 6.167z + 6.278z^2 \quad (\text{IV-1.4})$$

чии нули се:

$$z_1 = 0.776, z_2 = 0.204 \quad (\text{IV-1.5})$$

Бараните полови на набљудуваниот систем од примерот се определуваат на следниот начин:

$$s_1 = \frac{1}{T} \ln z_1 = \frac{1}{1.5} \ln 0.776 = -0.169$$

$$s_2 = \frac{1}{T} \ln z_2 = \frac{1}{1.5} \ln 0.204 = -1.059 \quad (\text{IV-1.6})$$

**Задача IV-1.2.** Треба да се изврши идентификација на динамиката на линеарен стационарен стабилен континуален динамички систем од втор ред. За таа цел се снимени неколку точки од неговата преодна карактеристика и истите се дадени во таблица IV-1.3. Врз основа на извршените мерења да се определи преносната функција на набљудуваниот систем.

**Таблица IV-1.3. Точки од преодната карактеристика  $x(t)$  од задача IV-1.2**

$t$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	$\infty$
$x(t)$	0.0000	0.1977	0.3840	0.5530	0.7023	0.8319	1

**Решение:** Наместо со таблица IV-1.3, се работи со таблица IV-1.4.

**Таблица IV-1.4. Точки на помошната карактеристика  $\bar{x}(t)$  во задачата IV-1.2**

$t$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	$\infty$
$\bar{x}(t)$	1.0000	0.8023	0.6160	0.4470	0.2977	0.1681	0

$$1 + 0.8023D_1 + 0.6160D_2 = 0$$

$$0.8023 + 0.6160D_1 + 0.4470D_2 = 0 \quad (\text{IV-1.7})$$

$$\begin{bmatrix} 0.8023 & 0.6160 \\ 0.6160 & 0.4470 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0000 \\ -0.8023 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-1.8})$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8023 & 0.6160 \\ 0.6160 & 0.4470 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1.0000 \\ -0.8023 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.2670 \\ 1.3292 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-1.9})$$

$$a(z) = 1.3292 z^2 - 2.2670 z + 1 \quad (\text{IV-1.10})$$

$$z_{1,2} = 0.8528 \pm j0.1585 = 0.8674 e^{\pm j0.1838} \quad (\text{IV-1.11})$$

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{1}{0.2} \ln z_{1,2} = 5[\ln 0.8674 \pm j0.1838] = \\ &= 5(-0.1423 \pm j0.1838) = -0.7115 \pm j0.9190 \end{aligned} \quad (\text{IV-1.12})$$

$$s_{1,2} \approx -0.7 \pm j0.9 \quad (\text{IV-1.13})$$

$$\bar{x}(t) = C_1 e^{-0.7t - j0.9t} + C_2 e^{-0.7t + j0.9t} \quad (\text{IV-1.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= (\alpha - j\beta) e^{-0.7t - j0.9t} + (\alpha + j\beta) e^{-0.7t + j0.9t} = \\ &= \alpha e^{-0.7t} (e^{-j0.9t} + e^{j0.9t}) - j\beta e^{-0.7t} (e^{-j0.9t} - e^{j0.9t}) = \\ &= 2\alpha e^{-0.7t} \cos(0.9t) - 2\beta e^{-0.7t} \sin(0.9t) \end{aligned} \quad (\text{IV-1.15})$$

$$\bar{x}(0) = (\alpha - j\beta) + (\alpha + j\beta) = 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0.5 \quad (\text{IV-1.16})$$

$$\bar{x}(t) = e^{-0.7t} [\cos(0.9t) - 2\beta e^{-0.7t} \sin(0.9t)] \quad (\text{IV-1.17})$$

$$F(\beta) = \sum_{i=1}^3 \{ \bar{x}(t_i) - e^{-0.7t_i} [ \ ] \}$$

$$F(\beta) = \sum_{i=1}^3 \{ \bar{x}(t_i) - e^{-0.7t_i} [\cos(0.9t_i) - 2\beta e^{-0.7t_i} \sin(0.9t_i)] \}^2 \quad (\text{IV-1.18})$$

$$\frac{d}{d\beta} F(\beta) = 2 \sum_{i=1}^3 \{ \bar{x}(t_i) - e^{-0.7t_i} [\cos(0.9t_i) - 2\beta e^{-0.7t_i} \sin(0.9t_i)] \} \cdot [2e^{-2(0.7t_i)} \sin(0.9t_i)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \{ \bar{x}(t_i) - e^{-0.7t_i} [\cos(0.9t_i) - 2\beta e^{-0.7t_i} \sin(0.9t_i)] \} \cdot [e^{-2(0.7t_i)} \sin(0.9t_i)] = 0$$

$$\beta = 0.1783 \quad (\text{IV-1.19})$$

$$\bar{x}(t) = e^{-0.7t} [\cos(0.9t) - 0.3566e^{-0.7t} \sin(0.9t)] \quad (\text{IV-1.20})$$

$$x(t) = 1 - \bar{x}(t) = 1 - e^{-0.7t} [\cos(0.9t) - 0.3566e^{-0.7t} \sin(0.9t)] \quad (\text{IV-1.21})$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+0.7}{(s+0.7)^2 + 0.9^2} + 0.3566 \frac{0.9}{(s+0.7)^2 + 0.9^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+0.3791}{s^2 + 1.4s + 1.3} = \\ &= \frac{s^2 + 1.4s + 1.3 - s^2 - 0.38s}{s(s^2 + 1.4s + 1.3)} = \frac{1.02s + 1.3}{s(s^2 + 1.4s + 1.3)} \end{aligned} \quad (\text{IV-1.22})$$

$$G(s) = \frac{1.02s + 1.3}{(s^2 + 1.4s + 1.3)} \quad (\text{IV-1.23})$$

## IV-2 ФРЕКВЕНЦИСКА ИДЕНТИФИКАЦИЈА НА ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ КОНТИНУАЛНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

**Задача IV-2.1.** Да се изврши фреквенциска идентификација на непознат динамички систем со еден влез и еден излез, од чија фреквенциска карактеристика се снимени неколку точки, дадени во таблица IV-2.1. Во процесот на идентификација да се примени модел од трет ред, чија преносна функција има општ облик:

$$G_a(s) = \frac{b_1s + b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (\text{IV-2.1})$$

**Таблица IV-2.1.** Измерени точки од фреквенциската карактеристика на системот од задача IV-2.1

$\omega$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
$U(\omega)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$V(\omega)$	125	64	27	8	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{125}$

а) Да се состават линеарните равенки за определување на непознатите коефициенти на  $G_a(s)$ .

б) Да се определи бројот на точки од експериментално снимената карактеристика  $G(j\omega)$  потребни за определување на непознатите коефициенти на  $G_a(s)$ .

в) Да се пресметаат коефициентите на  $G_a(s)$ .

**Решение:** а) Коефициентите на моделот  $G_a(s)$  се определуваат од условот:

$$G_a(j\omega) = G_a(s)|_{s=j\omega} = \frac{b_0 + j\omega b_1}{a_0 - a_2\omega^2 + j\omega a_1 - j\omega^3 a_3} = U(\omega) + jV(\omega) \quad (\text{IV-2.2})$$

Оттука:

$$\begin{aligned} (a_0 - \omega^2 a_2)U(\omega) - (\omega a_1 - \omega^3 a_3)V(\omega) &= b_0 \\ (a_0 - \omega^2 a_2)V(\omega) + (\omega a_1 - \omega^3 a_3)U(\omega) &= \omega b_1 \end{aligned} \quad (\text{IV-2.3})$$

$$\begin{aligned} U(\omega)a_0 - V(\omega)\omega a_1 - U(\omega)\omega^2 a_2 + V(\omega)\omega^3 a_3 - b_0 &= 0 \\ V(\omega)a_0 + U(\omega)\omega a_1 - V(\omega)\omega^2 a_2 - U(\omega)\omega^3 a_3 - \omega b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-2.4})$$

па бараните равенки за пресметување на непознатите  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1$  се:

$$\begin{aligned} -V(\omega)\omega a_1 + V(\omega)\omega^3 a_3 - b_0 &= 0 \\ V(\omega)a_0 - V(\omega)\omega^2 a_2 - \omega b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-2.5})$$

**Таблица IV-2.2. Точки од фреквенциската карактеристика од задача IV-2.1**

$\omega$	$\frac{1}{2}$	1	2
$U(\omega)$	0	0	0
$V(\omega)$	8	1	$\frac{1}{8}$

б) За определување шест непознати коефициенти, потребни се 3 точки од експерименталната фреквенциска карактеристика на идентификуваниот систем. Ако се усвојат точките од таблица IV-2.2, се добива:

$$\begin{cases} 4a_1 - a_3 + b_0 = 0 \\ 16a_0 - 4a_2 - b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 - 4a_3 + 4b_0 = 0 \\ a_0 - 4a_2 - 16b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 - a_3 + b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = -a_1 + a_3 \\ -a_0 + a_2 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = a_0 - a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a_1 - a_3 - a_1 + a_3 = 0 \Rightarrow 3a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ 16a_0 - 4a_2 - a_0 + a_2 = 5a_0 - a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 5a_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 - 4a_3 - 4a_1 + 4a_3 = 0 \Rightarrow -3a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_0 - 4a_2 - 16a_0 + 16a_2 = -5a_0 + 4a_2 = 0 \Rightarrow 4a_2 = 5a_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = 5a_0 \\ 4a_2 = 5a_0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = a_2 = 0 \quad (\text{IV-2.6})$$

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0 = b_1 \quad b_0 = a_3 \quad (\text{IV-2.7})$$

$$G_a(s) = \frac{1}{s^3} \quad (\text{IV-2.8})$$

**Задача IV-2.2.** Да се изврши фреквенциска идентификација на непознат динамички систем со еден влез и еден излез, од чија фреквенциска карактеристика се снимени неколку точки, дадени во таблица IV-7. Во процесот на идентификација да се примени модел од втор ред, чија преносна функција има општ блик:

$$G_a(s) = \frac{b_1s + b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (\text{IV-2.9})$$

**Таблица IV-2.3. Точки од фреквенциската карактеристика на системот од задача IV-2.2**

$\omega$	0	1	2
$U(\omega)$	1.5	0.6	0.15
$V(\omega)$	0	-0.8	-0.55

**Решение:** Фреквенциската преносна функција на апроксимативниот модел во конкретниот случај има облик:

$$G_a(j\omega) = \frac{b_1(j\omega) + b_0}{a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{b_0 + jb_1\omega}{a_0 - a_2\omega^2 + ja_1\omega} \quad (\text{IV-2.10})$$

па условите за определување на непознатите коефициенти  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  ќе бидат:

$$\begin{aligned} a_2\omega^2 U(\omega) + a_1\omega V(\omega) &= a_0U(\omega) - b_0 \\ a_1\omega U(\omega) - a_2\omega^2 V(\omega) &= b_1\omega - a_0V(\omega) \end{aligned} \quad (\text{IV-2.11})$$

Со воведување на вредностите од дадената таблица IV-2.3 во равенките (IV-2.11), се добива следниот систем алгебарски равенки:

$$\begin{aligned} 1.5a_0 - b_0 &= 0 \Rightarrow b_0 = 1.5a_0 \\ a_0(0) &= 0 \\ -0.8a_1 + 0.6a_2 &= 0.6a_0 - b_0 \\ 0.6a_1 + 0.8a_2 &= b_1 + 0.8a_0 \\ -1.1a_1 + 0.6a_2 &= 0.6a_0 - b_0 \\ 0.3a_1 + 2.2a_2 &= 2b_1 + 0.55a_0 \end{aligned} \quad (\text{IV-2.12})$$

чии решенија се:

$$a_1 = 1.5a_0, a_2 = 0.5a_0, b_0 = 1.5a_0, b_1 = 0.5a_0 \quad (\text{IV-2.13})$$

Следствено, апроксимативната преносна функција на набљудуваниот систем ќе биде:

$$G(s) = \frac{0.5s + 1.5}{0.5s^2 + 1.5s + 1} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} \quad (\text{IV-2.14})$$

### IV-3 МЕТОД НА НАЈМАЛИ КВАДРАТИ ЗА ПРОЦЕНКА НА ПАРАМЕТРИТЕ НА ЕДЕН СИСТЕМ

**Задача IV-3.1.** Во долната таблица IV-3.1 е даден бројот на запишани студенти на насоката КСИА во периодот 2004-2007. Даденото множество податоци да се претстави со полином од прв степен. Потоа со помош на идентификуваниот полиномен модел да се предвиди бројот на студенти кои се очекува да се запишат на КСИА во 2008.

**Таблица IV-3.1. Број на запишани студенти на КСИА во периодот 2004-2007**

Година	2004	2005	2006	2007
Број на студенти	40	56	62	72

**Решение:** За поголема едноставност, дадените податоци се претставуваат како во таблица IV-3.2.

**Таблица IV-3.2. Број на запишани студенти на КСИА во периодот 2004-2007**

$x$	1	2	3	4
$y$	40	56	62	72

Ако се усвои модел од прв ред од облик:

$$y_M = a_1x + a_0 \quad (\text{IV-3.1})$$

отстапувањето помеѓу овој модел и реалниот систем ќе биде:

$$e = y - a_1x - a_0 \quad (\text{IV-3.2})$$

Критериумската функција за идентификација претставува збир од квадратите на грешките за сите направени мерења:

$$S = \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1x_i - a_0)^2 \quad (\text{IV-3.3})$$

и бараните параметри на идентификуваниот систем се добиваат со нејзина минимизација:



$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1 x_i - a_0) \quad (\text{IV-3.4})$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1 x_i - a_0) x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1 x_i - a_0) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1 x_i - a_0) x_i = 0 \quad (\text{IV-3.5})$$

Од условите за минимум на функцијата (IV-3.3) се добива следниот систем од две равенки:

$$\left( \sum_{i=1}^4 x_i \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^4 1 \right) a_0 = \sum_{i=1}^4 y_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^4 x_i^2 \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^4 x_i \right) a_0 = \sum_{i=1}^4 y_i x_i \quad (\text{IV-3.6})$$

$$10a_1 + 4a_0 = 230$$

$$30a_1 + 10a_0 = 626 \quad (\text{IV-3.7})$$

чишто решенија се параметрите на линеарниот модел на идентификуваниот систем:

$$a_0 = 32, a_1 = 10.2 \quad (\text{IV-3.8})$$

Овие вредности не се точните вредности на параметрите на идентификуваниот систем, туку само нивна проценка и добиениот модел на системот ќе биде:

$$y = 10.2x + 32 \quad (\text{IV-3.9})$$

Врз основа на усвоениот полиномен модел (IV-3.9), може да се процени дека во 2008 година на КСИА ќе се запишат 83 нови студенти.

$$y = 10.2(5) + 32 = 83 \quad (\text{IV-3.10})$$

**Задача IV-3.2.** Во таблицата IV-3.3 е даден бројот на запишани студенти на насоката КСИА во периодот 2004-2008.

**Таблица IV-3.3. Преглед на запишани студенти на насоката КСИА по години за периодот 2004-2008**

Година	2004	2005	2006	2007	2008
Број на студенти	40	56	62	72	83

Даденото множество податоци да се претстави со полином од прв степен. Потоа со помош на идентификуваниот полиномен модел да се предвиди бројот на студенти кои се очекува да се запишат на КСИА во 2009.

**Решение:** Дадените податоци можат да се претстават како во таблица IV-3.4.

**Таблица IV-3.4. Преглед на запишани студенти на насоката КСИА по години за периодот 2004-2008**

$x$	1	2	3	4	5
$y$	40	56	62	72	83

$$e = y - a_1x - a_0 \quad (\text{IV-3.11})$$

$$S = \sum_{i=1}^5 (y_i - a_1x_i - a_0)^2 \quad (\text{IV-3.12})$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^5 (y_i - a_1x_i - a_0) \quad (\text{IV-3.13})$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^5 (y_i - a_1x_i - a_0)x_i \quad (\text{IV-3.14})$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^5 (y_i - a_1x_i - a_0) = 0 \quad (\text{IV-3.15})$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^5 (y_i - a_1 x_i - a_0) x_i = 0 \quad (\text{IV-3.16})$$

$$\left( \sum_{i=1}^5 x_i \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^5 1 \right) a_0 = \sum_{i=1}^5 y_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^5 x_i^2 \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^5 x_i \right) a_0 = \sum_{i=1}^5 y_i x_i \quad (\text{IV-3.17})$$

$$15a_1 + 5a_0 = 313$$

$$55a_1 + 15a_0 = 1041 \quad (\text{IV-3.18})$$

$$a_0 = 32.4, \quad a_1 = 10 \quad (\text{IV-3.19})$$

$$y = 10.2x + 32 \quad (\text{IV-3.20})$$

$$y = 10.2(6) + 32 = 93.2 \quad (\text{IV-3.21})$$

Врз основа на усвоениот полиномен модел, може да се процени дека во 2009 година на КСИА ќе се запишат 93 нови студенти.

**Задача IV-3.3.** Во долната таблица IV-3.5 е прикажан прирастот на населението во еден град по декади. Даденото множество податоци да се претстави со полином од втор степен. Потоа со помош на идентификуваниот полиномен модел да се предвиди колкав ќе биде прирастот на населението во 2010 година.

**Таблица IV-3.5. Прираст на населението по декади од задача IV-3.3**

Декада	1970	1980	1990	2000
Прираст	1000	4000	9000	16000

**Таблица IV-3.6. Модификација на таблица IV-3.5**

$x$	1	2	3	4
$y/1000$	1	4	9	16

$$e = y - a_2x^2 - a_1x - a_0 \quad (\text{IV-3.22})$$

$$S = \sum_{i=1}^4 (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0)^2 \quad (\text{IV-3.23})$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^4 (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^4 (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0)x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^4 (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0)x_i^2 \quad (\text{IV-3.24})$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0)x_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (y_i - a_2x_i^2 - a_1x_i - a_0)x_i^2 = 0 \quad (\text{IV-3.25})$$

$$\left( \sum_{i=1}^4 x_i^2 \right) a_2 + \left( \sum_{i=1}^4 x_i \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^4 1 \right) a_0 = \sum_{i=1}^4 y_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^4 x_i^3 \right) a_2 + \left( \sum_{i=1}^4 x_i^2 \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^4 x_i \right) a_0 = \sum_{i=1}^4 y_i x_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^4 x_i^4 \right) a_2 + \left( \sum_{i=1}^4 x_i^3 \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^4 x_i^2 \right) a_0 = \sum_{i=1}^4 y_i x_i^2 \quad (\text{IV-3.26})$$

$$30a_2 + 10a_1 + 4a_0 = 30$$

$$100a_2 + 30a_1 + 10a_0 = 100$$

$$354a_2 + 100a_1 + 30a_0 = 354 \quad (\text{IV-3.27})$$

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1 \quad (\text{IV-3.28})$$

$$y = 1000x^2 \quad (\text{IV-3.29})$$

Врз основа на усвоениот полиномен модел, може да се процени дека во 2010 година прирастот на населението ќе изнесува 25 000.

**Задача IV-3.4.** Се набљудува честичка маса која се движи со константна брзина  $v$ . По експериментален пат се собрани податоци за положбата на честичката во различни временски мигови. Почетната позиција на честичката е  $x_0 = 2$  во мигот  $t = 0$ . Со помош на методата најмали квадрати да се определат параметрите на моделот на ова движење даден со равенката:

$$x = x_0 + vt \quad (\text{IV-3.30})$$

**Таблица IV-3.7. Положба на честичката од задачата IV-3.4**

$t$	0	2	6	12	20	30	42	56
$x$	2.0	4	8.2	14.0	22.0	32.1	44.0	57.9

**Решение:**

$$e = x_i - x_0 - vt_i \quad (\text{IV-3.31})$$

$$S = \sum_{i=0}^7 (x_i - x_0 - vt_i)^2 \quad (\text{IV-3.32})$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = -2 \sum_{i=0}^7 (x_i - x_0 - vt_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^7 (x_i - x_0 - vt_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial v} = -2 \sum_{i=0}^7 (x_i - x_0 - vt_i)t_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^7 (x_i - x_0 - vt_i)t_i = 0 \quad (\text{IV-3.33})$$

$$\left( \sum_{i=0}^7 1 \right) x_0 + \left( \sum_{i=0}^7 t_i \right) v = \sum_{i=0}^7 x_i$$

$$\left( \sum_{i=0}^7 t_i \right) x_0 + \left( \sum_{i=0}^7 t_i^2 \right) v = \sum_{i=0}^7 x_i t_i \quad (\text{IV-3.34})$$

$$\begin{bmatrix} \left( \sum_{i=0}^7 1 \right) & \left( \sum_{i=0}^7 t_i \right) \\ \left( \sum_{i=0}^7 t_i \right) & \left( \sum_{i=0}^7 t_i^2 \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^7 x_i \\ \sum_{i=0}^7 x_i t_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \sum_{i=0}^7 1 \right) & \left( \sum_{i=0}^7 t_i \right) \\ \left( \sum_{i=0}^7 t_i \right) & \left( \sum_{i=0}^7 t_i^2 \right) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^7 x_i \\ \sum_{i=0}^7 x_i t_i \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.35})$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 168 \\ 168 & 6384 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 184.2 \\ 6718.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0662 \\ 0.9980 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.36})$$

Бараниот модел на движењето на честичката ќе биде:

$$x = 2.066 + 0.998t \quad (\text{IV-3.37})$$

**Задача IV-3.5.** Во долната таблица IV-3.8 се дадени резултатите од седум мерења на издолжувањето на пружина под дејство на надворешна сила. Според Хуковиот закон, промената на должината на една пружина е пропорционална на применетата сила:

$$l = l_0 + K \cdot f \quad (\text{IV-3.38})$$

каде што:

$l_0$  е почетната должина на пружината, пред дејството на каква и да било надворешна сила

$f$  е надворешната сила што предизвикува издолжување на пружината

$l$  е новата должина на пружината по издолжувањето предизвикано од надворешната сила  $f$

$K$  е коефициент на пропорционалност

Со помош на методот на најмали квадрати да се изврши идентификација на динамиката на овој систем и да се пресмета колку ќе изнесува должината на пружината кога силата ќе биде  $f = 50[N]$ .

**Таблица IV-3.8. Мерења од задача IV-3.5**

ЕКСПЕРИМЕНТ	СИЛА (ЊУТНИ)	ДОЛЖИНА (САНТИМЕТРИ)
1	9	50.5
2	21	51.0
3	31	51.5
4	42	52.1
5	59	53.0
6	72	53.5
7	89	54.5

**Решение:**

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^7 l_0 + \sum_{i=1}^7 Kf &= \sum_{i=1}^7 l \\ \sum_{i=1}^7 l_0 f + \sum_{i=1}^7 Kf^2 &= \sum_{i=1}^7 lf \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 7l_0 + 323K &= 366 \\ 323l_0 + 19833K &= 17140 \end{aligned} \right\}$$

$$l_0 = 49.9895 \approx 50$$

$$K = 0.0501 \approx 0.05$$

$$l = 50 + 0.05f$$

$$l = 50 + 0.5(50) = 52.5 \text{ cm} \tag{IV-3.39}$$

**Задача IV-3.6.** Дадени се податоците од таблица IV-3.9. Да се состават линеарни модели на родените, доселените и иселените жители во периодот 2008-2012, врз основа на кои ќе се направи соодветна проценка за 2013 година. Едновременно да се процени грешката на направените модели.

**Таблица IV-3.9. Пописна статистика**

Година	2008	2009	2010	2011	2012
Родени	22945	23684	24296	26770	33568
Умрени	18982	19060	19113	19465	20134
Доселени	1609	2057	2615	3211	3789
Иселени	751	792	1002	1290	1915
Прираст	4821	5889	6796	9226	15308

Ако се усвои модел од прв ред од облик:

$$y_M = a_1x + a_0 \quad (\text{IV-3.40})$$

отстапувањето помеѓу овој апроксимативен модел и реалниот ќе биде:

$$e = y - a_1x - a_0 \quad (\text{IV-3.41})$$

Критериумската функција за идентификација претставува збир од квадратите на грешките за сите направени мерења:

$$S = \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1x_i - a_0)^2 \quad (\text{IV-3.42})$$

и бараните параметри на идентификуваниот модел се добиваат со нејзина минимизација:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1x_i - a_0)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1x_i - a_0)x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1x_i - a_0) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (y_i - a_1x_i - a_0)x_i = 0 \quad (\text{IV-3.43})$$

Од условите за минимум на функцијата  $S$  се добива следниот систем од четири равенки:

$$\left( \sum_{i=1}^5 x_i \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^5 1 \right) a_0 = \sum_{i=1}^5 y_i$$

$$\left( \sum_{i=1}^5 x_i^2 \right) a_1 + \left( \sum_{i=1}^5 x_i \right) a_0 = \sum_{i=1}^5 y_i x_i$$

$$15a_1 + 5a_0 = 131263$$

$$55a_1 + 15a_0 = 418121 \quad (\text{IV-3.44})$$

чишто решенија се:



$$a_0 = 18953, \quad a_1 = 2433 \quad (\text{IV-3.45})$$

Добиениот модел на родените ќе биде:

$$y_r = 2433x + 18953 \quad (\text{IV-3.46})$$

Врз основа на усвоениот полиномен модел може да се процени дека во 2013 година ќе се родат 33 551 нови жители.

Добиениот модел на умрените ќе биде:

$$y_m = 271x + 18538 \quad (\text{IV-3.47})$$

Врз основа на овој модел може да се процени дека во 2013 година ќе умрат 20 164 жители.

Добиениот модел на доселените ќе биде:

$$y_d = 551x + 1002 \quad (\text{IV-3.48})$$

Врз основа на овој модел може да се процени дека во 2013 година ќе се доселат нови 4 308 жители.

Добиениот модел на иселените ќе биде:

$$y_i = 283x + 302 \quad (\text{IV-3.49})$$

Врз основа на овој модел може да се процени дека во 2013 година ќе се иселат 2 000 жители.

Добиениот модел на прираст на населението ќе биде:

$$y_p = 2431x + 1115 \quad (\text{IV-3.50})$$

Врз основа на овој модел може да се процени дека во 2013 година ќе има прираст на населението од нови 15 701 жители.

Во долната таблица IV-3.10 е дадена проценката за 2013 година.

**Таблица IV-3.10. Проценка за 2013 година**

Година	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Родени	22 945	23 684	24 296	26 770	33 568	33 551
Умрени	18 982	19 060	19 113	19 465	20 134	20 164
Доселени	1 609	2 057	2 615	3 211	3 789	4 308
Иселени	751	792	1 002	1 290	1 915	2 000
Прираст	4 821	5 889	6 796	9 226	15 308	15 701

Грешката на усвоените модели од прв ред е прикажана во таблица IV-3.11.

**Таблица IV-3.11. Грешка на моделите од прв ред од задача IV-10**

	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Родени	22 945	23 684	24 296	26 770	33 568	
Проценка	21 386	23 819	26 252	28 685	31 118	33 551
Грешка	1 559	-135	-1 956	-1 915	2 450	
Грешка %	6.8 %	0.6 %	8 %	7 %	7.3 %	
Умрени	18 982	19 060	19 113	19 465	20 134	
Проценка	18 809	19 080	19 351	19 622	19 893	20 164
Грешка	173	-20	-238	-157	241	
Грешка %	0.9 %	0.1 %	1.25 %	0.8 %	1.2 %	
Доселени	1 609	2 057	2 615	3 211	3 789	
Проценка	1 553	2 104	1 655	3 206	3 757	4 308
Грешка	56	-47	-40	5	32	
Грешка %	3.5 %	2.3 %	1.5 %	0.15 %	0.84 %	
Иселени	751	792	1 002	1 290	1 915	
Проценка	585	868	1 151	1 434	1 717	2 000
Грешка	166	-76	-149	-144	198	
Грешка %	22 %	9,6 %	14,9 %	11 %	10 %	
Прираст	4 821	5 889	6 796	9 226	15 308	
Проценка	3 546	5 977	8 408	10 839	13 270	
Грешка	1 275	-88	-1 612	-1 613	2 038	
Грешка %	26.4 %	15 %	23.7 %	17.5 %	13.3 %	

**Задача IV-3.7.** Со помош на методот на најмали квадрати да се определат параметрите  $K_0$  и  $K_3$  на нелинеарниот нединамички систем со влез  $u(k)$  и излез  $y(k)$ , опишан со следниот модел:

$$y(k) = K_0 + K_3 u^3(k) \quad (\text{IV-3.51})$$

За таа цел направени се  $N = 10$  мерења на влезот и излезот на набљудуваниот систем, врз основа на кои е составена долната таблица IV-3.12.

**Таблица IV-3.12. Влезно-излезни мерења за задача IV-3.7**

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u^3(k)$	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
$y(k)$	5	6	13	32	69	130	221	348	517	734

**Решение:**

$$y_M(k) = \hat{K}_0 + \hat{K}_3 u^3(k)$$

$$e(k) = y(k) - y_M(k) = y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_3 u^3(k)]$$

$$S = \sum_{k=1}^N e^2(k) = \sum_{k=1}^{10} \{y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_3 u^3(k)]\}^2 \quad (\text{IV-3.52})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{K}_0} = -2 \sum_{k=1}^{10} \{y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_3 u^3(k)]\} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{K}_3} = -2 \sum_{k=1}^{10} \{y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_3 u^3(k)]\} u^3(k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{10} [\hat{K}_0 + \hat{K}_3 u^3(k)] = \sum_{k=1}^{10} y(k)$$

$$\sum_{k=1}^{10} [\hat{K}_0 + \hat{K}_3 u^3(k)] u^3(k) = \sum_{k=1}^{10} y(k) u^3(k) \quad (\text{IV-3.53})$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{10} 1 & \sum_{k=1}^{10} u^3(k) \\ \sum_{k=1}^{10} u^3(k) & \sum_{k=1}^{10} u^6(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{10} y(k) \\ \sum_{k=1}^{10} y(k) u^3(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 2025 \\ 2025 & 478405 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2025 \\ 988530 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.54})$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.55})$$

```
>> K0=5;K3=1;
>> u(1)=0;u3(1)=(u(1))^3;u6(1)=(u(1))^6;
>> y(1)=K0+K3*u3(1);
>> S11=1;S12=u3(1);S22=u6(1);
>> S1=y(1);S2=y(1)*u3(1);
    for k=1:9
        u(k+1)=u(k)+1;S11=S11+1;
        u3(k+1)=(u(k+1))^3;S12=S12+u3(k+1);
        u6(k+1)=(u(k+1))^6;
        S21=S12;S22=S22+u6(k+1);
        y(k+1)=K0+K3*u3(k+1);
        S1=S1+y(k+1);S2=S2+y(k+1)*u3(k+1);
    end
>> S1,S2,S11,S12,S21,S22
S1 =
    2075
S2 =
    988530
S11 =
    10
S12 =
    2025
S21 =
    2025
S22 =
    978405
>> A=[S11 S12;S21 S22]
A =
    10    2025
    2025  978405
>> B=[S1;S2]
B =
    2075
```

988530 >> inv(A)*B ans = 5.0000 1.0000	
--	--

**Задача IV-3.8.** Со помош на методот на најмали квадрати да се определат параметрите на нелинеарниот систем со следниот математички модел:

$$y(k) = K_0 + K_1 u(k) + K_3 u^3(k) \quad (\text{IV-3.56})$$

ако се дадени 10 влезно-излезни податоци од таблица IV-3.13, добиени со мерење на влезот и излезот на системот во еквиливантни временски мигови.

**Таблица IV-3.13. Мерења од задача IV-3.8**

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u^3(k)$	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
$y(k)$	5	6	13	32	69	130	221	348	517	734

**Решение:**

$$y_M(k) = \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \quad (\text{IV-3.57})$$

$$e(k) = y(k) - y_M(k) = y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k)]$$

$$S = \sum_{k=1}^N e^2(k) = \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k)] \right\}^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{K}_0} = -2 \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k)] \right\} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{K}_1} = -2 \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k)] \right\} u(k) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{K}_3} = -2 \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] \right\} u^3(k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] = \sum_{k=1}^{10} y(k)$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] u(k) = \sum_{k=1}^{10} y(k) u(k)$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] u^3(k) = \sum_{k=1}^{10} y(k) u^3(k)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{10} 1 & \sum_{k=1}^{10} u(k) & \sum_{k=1}^{10} u^3(k) \\ \sum_{k=1}^{10} u(k) & \sum_{k=1}^{10} u^2(k) & \sum_{k=1}^{10} u^4(k) \\ \sum_{k=1}^{10} u^3(k) & \sum_{k=1}^{10} u^4(k) & \sum_{k=1}^{10} u^6(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{10} y(k) \\ \sum_{k=1}^{10} y(k) u(k) \\ \sum_{k=1}^{10} y(k) u^3(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 45 & 2025 \\ 45 & 285 & 15333 \\ 2025 & 15333 & 978405 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2075 \\ 15558 \\ 988530 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(IV-3.58)

```
>> u(1)=0;u(2)=1;u(3)=2;u(4)=3;u(5)=4;
>> u(6)=5;u(7)=6;u(8)=7;u(9)=8;u(10)=9;
>> u3(1)=0;u3(2)=1;u3(3)=8;u3(4)=27;u3(5)=64;
>> u3(6)=125;u3(7)=216;u3(8)=343;u3(9)=512;u3(10)=729;
>> y(1)=5;y(2)=6;y(3)=13;y(4)=32;y(5)=69;
>> y(6)=130;y(7)=221;y(8)=348;y(9)=517;y(10)=734;
>> yu(1)=y(1)*u(1);yu3(1)=y(1)*u3(1);
```

```

>> S1=y(1);S2=yu(1);S3=yu3(1);
>> S11=1;S12=u(1);S13=u3(1);S21=S12;
>> S22=(u(1))^2;S23=(u(1))^4;
>> S31=S13;S32=S23;S33=(u(1))^6;
>> for k=1:9
    u2(k+1)=u(k+1)*u(k+1);
    u4(k+1)=u2(k+1)*u2(k+1);
    u6(k+1)=u3(k+1)*u3(k+1);
    yu(k+1)=y(k+1)*u(k+1);
    yu3(k+1)=y(k+1)*u3(k+1);
    S11=S11+1;
    S12=S12+u(k+1);
    S13=S13+u3(k+1);
    S21=S12;
    S22=S22+u2(k+1);
    S23=S23+u4(k+1);
    S31=S13;
    S32=S23;
    S33=S33+u6(k+1);
    S1=S1+y(k+1);S2=S2+yu(k+1);
    S3=S3+yu3(k+1);
end
>> A=[S11 S12 S13;S21 S22 S23;S31 S32 S33]
A =
    10     45    2025
    45    285   15333
   2025   15333  978405
>> B=[S1;S2;S3]
B =
    2075
   15558
   988530
>> K=inv(A)*B

```

K =	
5.0000	
0	
1.0000	

**Задача IV-3.9.** Со помош на методот на најмали квадрати да се определат параметрите  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  на нелинеарниот нединамички систем со влез  $u(k)$  и излез  $y(k)$ , опишан со следниот модел:

$$y(k) = K_0 + K_1u(k) + K_2u^2(k) + K_3u^3(k) \quad (\text{IV-3.59})$$

За таа цел направени се  $N = 10$  мерења на влезот и излезот на набљудуваниот систем, врз основа на кои е составена долната таблица IV-3.14.

**Таблица IV-3.14. Влезно-излезни мерења за задача IV-3.9**

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u(k)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$u^2(k)$	1	9	25	49	81	121	169	225	289	361
$u^3(k)$	1	27	125	343	729	1331	2197	3375	4913	6859
$y(k)$	125	729	2197	4913	9261	15625	24389	35937	50653	68921

**Решение:**

$$y_M(k) = \hat{K}_0 + \hat{K}_1u(k) + \hat{K}_2u^2(k) + \hat{K}_3u^3(k) \quad (\text{IV-3.60})$$

$$e(k) = y(k) - y_M(k) = y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_1u(k) + \hat{K}_2u^2(k) + \hat{K}_3u^3(k)] \quad (\text{IV-3.61})$$

$$S = \sum_{k=1}^N e^2(k) = \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_1u(k) + \hat{K}_2u^2(k) + \hat{K}_3u^3(k)] \right\}^2 \quad (\text{IV-3.62})$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{K}_0} = -2 \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - [\hat{K}_0 + \hat{K}_1u(k) + \hat{K}_2u^2(k) + \hat{K}_3u^3(k)] \right\} = 0$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{K}_1} &= -2 \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_2 u^2(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] \right\} u(k) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \hat{K}_2} &= -2 \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_2 u^2(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] \right\} u^2(k) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \hat{K}_3} &= -2 \sum_{k=1}^{10} \left\{ y(k) - \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_2 u^2(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] \right\} u^3(k) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-3.63})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_2 u^2(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] &= \sum_{k=1}^{10} y(k) \\ \sum_{k=1}^{10} \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_2 u^2(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] u(k) &= \sum_{k=1}^{10} y(k) u(k) \\ \sum_{k=1}^{10} \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_2 u^2(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] u^2(k) &= \sum_{k=1}^{10} y(k) u^2(k) \\ \sum_{k=1}^{10} \left[ \hat{K}_0 + \hat{K}_1 u(k) + \hat{K}_2 u^2(k) + \hat{K}_3 u^3(k) \right] u^3(k) &= \sum_{k=1}^{10} y(k) u^3(k) \end{aligned} \quad (\text{IV-3.64})$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{10} 1 & \sum_{k=1}^{10} u(k) & \sum_{k=1}^{10} u^2(k) & \sum_{k=1}^{10} u^3(k) \\ \sum_{k=1}^{10} u(k) & \sum_{k=1}^{10} u^2(k) & \sum_{k=1}^{10} u^3(k) & \sum_{k=1}^{10} u^4(k) \\ \sum_{k=1}^{10} u^2(k) & \sum_{k=1}^{10} u^3(k) & \sum_{k=1}^{10} u^4(k) & \sum_{k=1}^{10} u^5(k) \\ \sum_{k=1}^{10} u^3(k) & \sum_{k=1}^{10} u^4(k) & \sum_{k=1}^{10} u^5(k) & \sum_{k=1}^{10} u^6(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \\ \hat{K}_2 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{10} y(k) \\ \sum_{k=1}^{10} y(k) u(k) \\ \sum_{k=1}^{10} y(k) u^2(k) \\ \sum_{k=1}^{10} y(k) u^3(k) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.65})$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 100 & 1330 & 19900 \\ 100 & 1330 & 19900 & 317338 \\ 1330 & 19900 & 317338 & 5266900 \\ 19900 & 317338 & 5266900 & 89837890 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \\ \hat{K}_2 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 212750 \\ 3329624 \\ 54669878 \\ 925985072 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.66})$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \\ \hat{K}_2 \\ \hat{K}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 54 \\ 36 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.67})$$

```

>> u(1)=1;u2(1)=1;u3(1)=1;u4(1)=1;u5(1)=1;u6(1)=1;
>> y(1)=125;
>> yu(1)=y(1)*u(1);yu2(1)=y(1)*u2(1);yu3(1)=y(1)*u3(1);
>> S1=y(1);S2=yu(1);S3=yu2(1);S4=yu3(1);
>> S11=1;S12=u(1);S13=u2(1);S14=u3(1);
>> S24=u4(1);S34=u5(1);S44=u6(1);
>> K0=27;K1=54;K2=36;K3=8;
>> for k=1:9
    u(k+1)=2*k+1;
    u2(k+1)=(u(k+1))^2;
    u3(k+1)=(u(k+1))^3;
    u4(k+1)=(u(k+1))^4;
    u5(k+1)=(u(k+1))^5;
    u6(k+1)=(u(k+1))^6;
    y(k+1)=K0+K1*u(k+1)+K2*u2(k+1)+K3*u3(k+1);
    yu(k+1)=y(k+1)*u(k+1);
    yu2(k+1)=y(k+1)*u2(k+1);
    yu3(k+1)=y(k+1)*u3(k+1);
    S11=S11+1;
    S12=S12+u(k+1);
    S13=S13+u2(k+1);

    S14=S14+u3(k+1);
    S21=S12;
    S22=S13;
    S23=S14;

```

```
S24=S24+u4(k+1);
S31=S13;
S32=S23;
S33=S24;
S34=S34+u5(k+1);
S41=S14;
S42=S24;
S43=S34;
S44=S44+u6(k+1);
S1=S1+y(k+1);S2=S2+yu(k+1);
S3=S3+yu2(k+1);S4=S4+yu3(k+1);
end
>> A=[S11 S12 S13 S14;S21 S22 S23 S24;S31 S32 S33 S34;S41 S42
S43 S44]
A =
    10    100    1330    19900
    100    1330    19900    317338
    1330    19900    317338    5266900
    19900    317338    5266900    89837890
>> B=[S1;S2;S3;S4]
>> K=inv(A)*B
B =
    212750
    3329624
    54669878
    925985072
K =
    27.0000
    54.0000
    36.0000
    8.0000
```

**Задача IV-3.10.** Во некоја хемиска фабрика треба да се изврши идентификација на конкретен хемиски процес. По одредено снимање на процесот и извршени 1000 влезно-излезни мерења, констатирано е дека единствената динамика на процесот е временско доцнење  $\tau$ . Пречките во системот  $n(k)$ , под претпоставка, претставуваат бел шум со средна вредност  $\mu$ . Да се состави модел на овој процес и со методот најмали квадрати да се определат неговите параметри. Притоа, на располагање се следните информации:

$$\sum_{k=0}^{N-1} u(k) = 210.4$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) = 51$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} u(k)u(k+1) = 45$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} u(k)y(k+1) = 230.6$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} y(k)y(k+1) = 1126.8$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} y(k)u(k+1) = 255.5$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} y(k+1) = 1054.9$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} y^2(k) = 1277.9 \tag{IV-3.68}$$

**Решение:** Ако периодата на дискретизација се одбере да биде еднаква со времето на доцнење  $T = \tau$ , идентификуваниот процес може да се опише со следниот дискретен модел:

$$y(k) = au(k-1) + n(k) \tag{IV-3.69}$$

каде што пречките во системот  $n(k)$  претставуваат бел шум со средна вредност  $\mu$ . Овој модел може да се запише и на следниот начин:

$$y(k) = au(k-1) + e(k) + \mu = \begin{bmatrix} u(k-1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \mu \end{bmatrix} + e(k) = \Phi(k)\theta + e(k) \quad (\text{IV-3.70})$$

каде што  $e(k) = n(k) - \mu$  е бел шум со нулева средна вредност.

Измерените податоци можат да се претстават со следните матрици:

$$\mathbf{Y} = \Phi\theta + \mathbf{V} \quad (\text{IV-3.71})$$

при што:

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_N]^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} u(0) & 1 \\ u(1) & 1 \\ \vdots & 1 \\ u(N-1) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.72})$$

Процената на параметрите на системот е:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) & \sum_{k=0}^{N-1} u(k) \\ \sum_{k=0}^{N-1} u(k) & \sum_{k=0}^{N-1} 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} u(k)y(k+1) \\ \sum_{k=0}^{N-1} y(k+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 51 & 210.4 \\ 210.4 & 1000 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 230.6 \\ 1054.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2848 \\ 0.7846 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.73})$$

**Задача IV-3.11.** Во долната таблица IV-3.15 се дадени резултатите од  $N + 1 = 6$  мерења на влезот  $u(k)$  и излезот  $y(k)$  на еден систем, чија непозната влезно-излезна динамика треба да се апроксимира со модел од прв ред со помош на методот најмали квадрати. Да се определат параметрите на тој модел.

**Таблица IV-3.15. Влезно-излезни мерења за системот од задача IV-3.11**

$k$	0	1	2	3	4	5
$u(k)$	0	1	2	3	4	5
$y(k)$	0	0	1	4	11	26

**Решение:** Структурата и редот на моделот на набљудуваниот непознат динамички систем се зададени, па тој ќе биде од облик:

$$y_M(k) - a_M y_M(k-1) = b_M u(k-1) \quad (\text{IV-3.74})$$

каде што  $a_M$  и  $b_M$  се непознатите параметри на моделот, кои допрва треба да се определат. За таа цел се дефинира грешката на моделот:

$$\begin{aligned} e(k) &= y(k) - y_M(k) = y(k) - [a_M y_M(k-1) + b_M u(k-1)] = \\ &= y(k) - [y_M(k-1) \quad u(k-1)] \cdot \begin{bmatrix} a_M \\ b_M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-3.75})$$

која покажува колку претпоставениот модел отстапува од реалниот систем. Во продолжение, заради поголема едноставност на записот, индексот  $M$  ќе биде испуштен. За направените мерења, грешката може да се претстави со следниот вектор:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ e(4) \\ e(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(0) & u(0) \\ y(1) & u(1) \\ y(2) & u(2) \\ y(3) & u(3) \\ y(4) & u(4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{y} - \Phi \Theta \quad (\text{IV-3.76})$$

Процената  $\hat{\Theta}$  на параметрите на набљудуваниот систем  $\Theta$ , во согласност со методот најмали квадрати, е дадена со изразот:

$$\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (\text{IV-3.77})$$

па, следствено, за проценетите параметри се добива:

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 11 \\ 26 \end{bmatrix} = \\ &= \left( \begin{bmatrix} 138 & -58 \\ -58 & 30 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 334 \\ 146 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 138 & -58 \\ -58 & 30 \end{bmatrix}}{776} \begin{bmatrix} 334 \\ 146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV-3.78})$$

Моделот на идентификуваниот систем е претставен со равенката:

$$y(k) - 2y(k-1) = u(k-1) \quad (\text{IV-3.79})$$

**Задача IV-3.12.** Даден е стабилен линеарен стационарен дискретен динамички систем со влез  $u(k)$  и излез  $y_u(k)$ , опишан со следната диферентна равенка:

$$y_u(k) + ay_u(k-1) = bu(k-1); \quad y(k) = y_u(k) + n(k) \quad (\text{IV-3.80})$$

каде што  $u(k)$  и  $y(k)$  се мерливи сигнали на системот, додека  $n(k)$  е немерлив шум суперпониран на излезот од системот  $y_u(k)$ . Притоа:

$$u(k) = U(k) - U_\infty$$

$$y(k) = Y(k) - Y_\infty \quad (\text{IV-3.81})$$

се отстапувањата на сигналите  $u(k)$  и  $y(k)$  од нивните стационарни вредности  $U_\infty$  и  $Y_\infty$ , соодветно. Со помош на методот на најмали квадрати да се определат непознатите параметри  $a$  и  $b$  на набљудуваниот дискретен динамички систем од прв ред врз основа на направени  $N+1$  мерења на влезниот и излезниот сигнал, ако влезниот сигнал е од облик:

$$u(k) = u_0 \sin(\omega k T_0); \quad u_0, \omega, T_0 = \text{const.} > 0 \quad (\text{IV-3.82})$$

Притоа да се усвојат следните претпоставки:

- влезниот сигнал  $u(k)$  и неговата стационарна вредност  $U_\infty$  се точно мерливи
- излезниот сигнал  $y(k)$  и неговата стационарна вредност  $Y_\infty$  се точно мерливи
- шумот  $n(k)$  е ограничен по амплитуда и со нулева средна вредност
- редот на процесот што се идентификува е познат

**Решение:**

$$y_u(k) + ay_u(k-1) = bu(k-1)$$

$$y_u(k) = -ay_u(k-1) + bu(k-1) \quad (\text{IV-3.83})$$

Отстапувањето помеѓу измерениот излез на системот и излезот на неговиот модел е:

$$e(k) = y(k) - y_u(k) = y(k) + ay_u(k-1) - bu(k-1) \quad (\text{IV-3.84})$$

Вектор на непознатите параметри на системот што се идентификува е:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.85})$$

Вектор на направените влезно-излезни мерења е:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} -y(0) & u(0) \\ -y(1) & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ -y(N) & u(N) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.86})$$

Тогаш:

$$\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} -y(0) & -y(1) & \dots & -y(N) \\ u(0) & u(1) & \dots & u(N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y(0) & u(0) \\ -y(1) & u(1) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -y(N) & u(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N y^2(i) & -\sum_{i=0}^N u(i)y(i) \\ -\sum_{i=0}^N u(i)y(i) & \sum_{i=0}^N u^2(i) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{N+1} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(0) & -\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0) \\ -\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0) & \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(0) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -y(0) & -y(1) & \dots & -y(N) \\ u(0) & u(1) & \dots & u(N) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=0}^N y(i)y(i+1) \\ \sum_{i=0}^N u(i)y(i+1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{N+1} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(1) \\ \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(1) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.87})$$

Непознатите параметри на идентификуваниот систем  $\boldsymbol{\theta}$  се определуваат според формулата:



$$\begin{aligned}
 \theta &= (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{Y} = \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(0) & -\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0) \\ -\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0) & \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(1) \\ \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(1) \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(0) & \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0) \\ \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0) & \hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(0) \end{bmatrix}}{\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(0)\hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(0) - \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0)\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0)} \begin{bmatrix} -\hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(1) \\ \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(1) \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} -\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(0)\hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(1) + \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0)\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(1) \\ -\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0)\hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(1) + \hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(0)\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(1) \end{bmatrix}}{\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(0)\hat{C}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(0) - \hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0)\hat{C}_{\mathbf{U}\mathbf{Y}}(0)} \quad (\text{IV-3.88})
 \end{aligned}$$

Бидејќи моделот на набљудуваниот процес е линеарен, стационарен и стабилен, неговиот излез ќе има ист облик како и влезот  $u(k)$ , само различна амплитуда и фаза:

$$y_M(kT_0) = y_0 \sin(\omega k T_0 + \varphi) \quad (\text{IV-3.89})$$

па за  $\theta$  се добива:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\begin{bmatrix} -\cos(\omega T_0) + \cos(\omega T_0 + \varphi) \\ -\frac{y_0}{u_0} \cos(\omega T_0) + \frac{y_0}{u_0} \cos(\omega T_0 + \varphi) \end{bmatrix}}{\sin^2(\varphi)} \quad (\text{IV-3.90})$$

**Задача IV-3.13.** Со помош на методот на најмали квадрати да се изврши идентификација на тежинската низа  $g(k)$  на еден линеарен стационарен дискретен систем со влез  $y(k)$  и излез  $x(k)$ . За таа цел направени се  $N+1$  мерења на неговиот влез и излез.

**Решение:** Тежинската низа на набљудуваниот дискретен систем е дадена со множеството дискретни вредности:

$$\{g(k)\} = \{g(0), g(1), g(2), \dots\} \quad (\text{IV-3.91})$$

додека одзивот на набљудуваниот дискретен систем е претставен со следната дискретна конволуција:

$$x(k) = \sum_{n=0}^k g(n)y(k-n) = g(0)y(k) + g(1)y(k-1) + \dots + g(k)y(0) =$$

$$[y(k) \quad y(k-1) \quad \dots \quad y(0)] \cdot \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ \vdots \\ g(k) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.92})$$

По направените  $N+1$  мерења, ќе ги имаме следните информации:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ \vdots \\ x(k+N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(k) & y(k-1) & \dots & y(0) \\ y(k+1) & y(k) & \dots & y(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+N) & y(k+N-1) & \dots & y(N) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.93})$$

па равенката на излезот ќе гласи:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{G}$$

каде што  $\mathbf{G}$  е векторот на непознатите вредности на тежинската низа  $g(k)$ :

$$\mathbf{G} = [g(0) \quad g(1) \quad \dots \quad g(k)]^T \quad (\text{IV-3.94})$$

Со примена на методот на најмали квадрати, за  $\mathbf{G}$  се добива:

$$\hat{\mathbf{G}} = (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{X} \quad (\text{IV-3.95})$$

**Задача IV-3.14.** Со помош на методот на најмали квадрати да се изврши идентификација на моделот во просторот на состојби  $\mathbf{v}'(k) = \mathbf{A}\mathbf{v}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$  на еден повеќевеличински линеарен стационарен дискретен систем од  $n$ -ти ред со  $l$  влезови претставени со влезниот вектор  $\mathbf{u}(k)$  и  $t$  излези претставени со излезниот вектор  $\mathbf{x}(k)$ . За таа цел направени се  $N$  мерења на неговиот влез и состојбени големини.

**Решение:** Моделот на набљудуваниот дискретен систем во просторот на состојби може да се претстави на следниот начин:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} v_1(k+1) \\ v_2(k+1) \\ \vdots \\ v_n(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_l(k) \end{bmatrix} = \\
 &= [v_1(k) \ v_2(k) \ \cdots \ v_n(k) \ y_1(k) \ y_1(k) \ \cdots \ y_l(k)] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1l} & b_{2l} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.96})
 \end{aligned}$$

По направените  $N$  мерења, ќе ги имаме следните информации за секоја од состојбените големини:

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} v_i(k+1) \\ v_i(k+2) \\ \vdots \\ v_i(k+N) \end{bmatrix}; i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} v_1(k) & \cdots & v_n(k) & y_1(k) & \cdots & y_l(k) \\ v_1(k+1) & \cdots & v_n(k+1) & y_1(k+1) & \cdots & y_l(k+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(k+N-1) & \cdots & v_n(k+N-1) & y_1(k+N-1) & \cdots & y_l(k+N-1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \\ b_{i1} \\ b_{i2} \\ \vdots \\ b_{il} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.97})$$

каде што  $\boldsymbol{\theta}_i$  е векторот на непознатите параметри на идентификуваниот модел за  $i$  – тата состојбена големина.

Со примена на методот на најмали квадрати, за  $\theta_i$  се добива:

$$\hat{\theta}_i = (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{V}_i \quad (\text{IV-3.98})$$

**Задача IV-3.15.** Даден е резервоар како на слика III-6, кој претставува едноставен хидрауличен систем од прв ред. Нека  $Q_1$  го означува количеството течност што дотекува во резервоарот,  $Q_2$  ги претставува немерливите пречки во системот, а  $Q_3$  е количеството течност што истекува од резервоарот. Нивото на течноста во резервоарот е  $h$ . Да се состави дискретен модел на набљудуваниот систем и да се определат параметрите на соодветниот ARMA модел, кој има општ облик:

$$\mathbf{y}(k) = \Phi^T(k) \theta \quad (\text{IV-3.99})$$

Притоа да се употребат следните мерења (мерењата се вршат во интервал од 0 до 30 s. со чекор 0.1s):

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} h(0.1) \\ h(0.2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h(30.0) \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} h(0.0) & Q_1(0.0) \\ h(0.1) & Q_1(0.1) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ h(29.9) & Q_1(29.9) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.100})$$

Параметрите на ARMA моделот да се споредат со параметрите на реалниот модел (диферентната равенка на динамичко поведение). Да се употребат следните конкретни вредности: површина на попречниот пресек на резервоарот -  $S = 3m^2$ , конструктивна константа на резервоарот -  $\alpha = 0.6 \frac{m^2}{s}$ , почетна вредност на нивото на течноста во резервоарот -  $h_0 = 1m$ , почетна вредност на дотекот -  $Q_{10} = 0.2 \frac{m^3}{s}$ . За влезот  $Q_1$  да се усвои функцијата  $0.2th(t)$ , а за  $Q_2$  да се усвои бел шум со средна вредност  $\mu_w = 0.5$ .

**Решение:** Еден математички модел на набљудуваниот систем е:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_1(t) + Q_2(t) - Q_3(t) \quad (\text{IV-3.101})$$

каде што  $V$  е волуменот на течноста во резервоарот:

$$V(t) = Sh(t) \quad (\text{IV-3.102})$$

а  $Q_3$  е количеството течност што истекува од резервоарот. Под претпоставка:

$$Q_3(t) = \alpha h(t) \quad (\text{IV-3.103})$$

(Во стварност зависноста на истекот на течноста од резервоарот од нејзиното ниво е нелинеарна).

Моделот на системот може да се трансформира на следниот начин:

$$S \frac{dh(t)}{dt} = Q_1(t) + Q_2(t) - \alpha h(t) \Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} Q_1(t) + \frac{1}{S} Q_2(t) - \frac{\alpha}{S} h(t) \Rightarrow$$

$$h'(t) = ah(t) + bQ_1(t) + bQ_2(t) \Rightarrow a = -\frac{\alpha}{S}, \quad b = \frac{1}{S} \quad (\text{IV-3.104})$$

па, со негова дискретизација се добива следниот дискретен модел:

$$h(k+1) = \tilde{a}h(k) + \tilde{b}Q_1(k) + \tilde{b}Q_2(k) \quad (\text{IV-3.105})$$

односно:

$$h(k) = \tilde{a}h(k-1) + \tilde{b}Q_1(k-1) + \tilde{b}Q_2(k-1) \quad (\text{IV-3.106})$$

каде што:

$$\tilde{a} = e^{-aT} = e^{-\frac{\alpha T}{S}}$$

$$\tilde{b} = \int_0^T e^{at} b dt = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha T}{S}} \right) \quad (\text{IV-3.107})$$

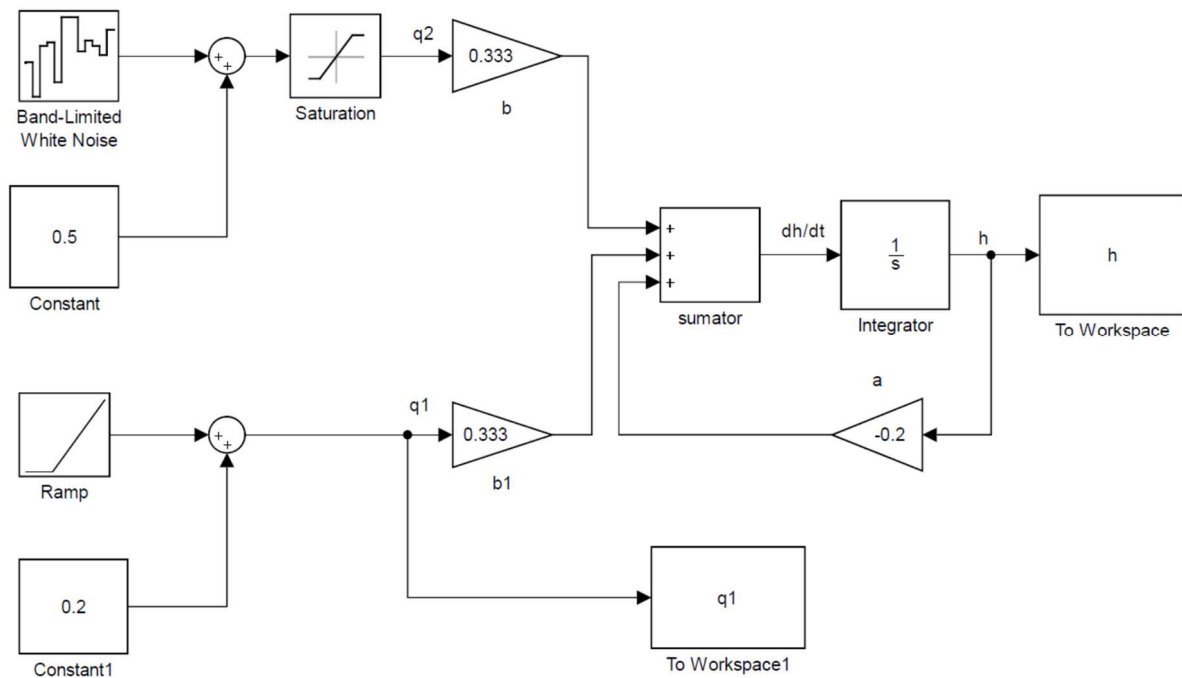
Општиот регресионен модел ќе биде од обликот (IV-3.99), каде што:

$$y(k) = h(k)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} h(k-1) \\ Q_1(k-1) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3.108})$$

а за проценка односно идентификација на параметрите на моделот се користат податоците (IV-3.100) генерирани со SIMULINK моделот од слика IV-3.1.



Слика IV-3.1. SIMULINK модел на системот (IV-3.104)

Пресметките се реализирани во MATLAB и дадени во продолжение. Од тука се гледа дека проценетите вредности на параметрите на моделот  $(\tilde{a})_{proc} = 0.9780$ ,  $(\tilde{b})_{proc} = 0.0367$  се приближни до вистинските вредности  $(\tilde{a})_{proc} = 0.9802$ ,  $(\tilde{b})_{proc} = 0.0330$  на дискретниот систем (IV-3.106).

<pre>&gt;&gt; T = 0.1; &gt;&gt; [a_d,b_d]=c2d(a,b,T)  a_d =      0.9802  b_d =      0.0330  &gt;&gt; Y = h(2:301); &gt;&gt; Fi = [h(1:300) Q1(1:300)];</pre>	<pre>% пресметајте ги реалните параметри a_d и b_d за чекор 0.1  % формирајте регресиона структура и извршете проценка</pre>
--	--

<pre>&gt;&gt; theta = inv(Fi'*Fi)*Fi'*Y  theta =      0.9780      0.0367</pre>	
--	--

### IV-4 МОДЕЛИРАЊЕ СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ И СИСТЕМИ

**Задача IV-4.1.** Нека  $X$  и  $Y$  се дефинирани на следниот начин:

$$X = \cos \Theta, \quad Y = \sin \Theta \tag{IV-4.1}$$

каде што  $\Theta$  е случајна променлива униформно распределена на интервалот  $(0, 2\pi)$ . Да се покаже дека  $X$  и  $Y$ : а) не се во корелација и б) не се независни.

**Решение:** Ако  $Y = g(X)$ , каде што  $X$  е континуална случајна променлива, математичкото очекување  $E[Y]$  на континуалната случајна променлива  $Y$ , дефинирана како функција  $g(\cdot)$  од случајната променлива  $X$ , се пресметува според формулата:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \tag{IV-4.2}$$

Примената на оваа формула бара најнапред да се определи  $f_Y(y)$  преку  $f_X(x)$ , па, за да се избегнат тие пресметки, поудобно е да се користи формулата:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \tag{IV-4.3}$$

Ако ова се примени во конкретниот случај од задачата, имајќи на ум дека:

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \theta < 2\pi \\ 0, & \text{за друго } \theta \end{cases} \tag{IV-4.4}$$

се добива:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot f_{\Theta}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0 \quad (\text{IV-4.5})$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot f_{\Theta}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot d\theta = 0 \quad (\text{IV-4.6})$$

а)

$$E[XY] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = 0 = E[X]E[Y] \quad (\text{IV-4.7})$$

Бидејќи  $E[XY] = 0$  следува дека  $X$  и  $Y$  не се во корелација.

б)

$$E[X^2] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \quad (\text{IV-4.8})$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \quad (\text{IV-4.9})$$

$$E[X^2 Y^2] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = E[X^2]E[Y^2] \quad (\text{IV-4.10})$$

Бидејќи  $E[X^2 Y^2] \neq E[X^2]E[Y^2]$  следува дека  $X$  и  $Y$  не се независни.

**Задача IV-4.2.** Да се испита дали случајниот процес:

$$Y(t) = A \cos t + B \sin t \quad (\text{IV-4.11})$$

каде што  $A$  и  $B$  се случајни, некорелирани променливи со нулева средна вредност и варијанса  $\sigma^2$ , е слабо стационарен.

**Решение:** Средната вредност на процесот е:



$$E[\mathbf{Y}(t)] = E[A \cos t + B \sin t] = E[A] \cos t + E[B] \sin t = \mu_A \cos t + \mu_B \sin t = 0 \quad (\text{IV-4.12})$$

додека за неговата коваријанса се добива:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(t, t + \tau) &= E\{[\mathbf{Y}(t) - \mu_{\mathbf{Y}}(t)][\mathbf{Y}(t + \tau) - \mu_{\mathbf{Y}}(t + \tau)]\} = E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t + \tau)] = \\ &= E\{[A \cos t + B \sin t][A \cos(t + \tau) + B \sin(t + \tau)]\} = \\ &= E\left[A^2\right] \cos t \cos(t + \tau) + E[AB] \cos t \sin(t + \tau) + \\ &+ E[AB] \sin t \cos(t + \tau) + E\left[B^2\right] \sin t \sin(t + \tau) = \\ &= \sigma^2 \cos t \cos(t + \tau) + 0 \cos t \sin(t + \tau) + \\ &+ 0 \sin t \cos(t + \tau) + \sigma^2 \sin t \sin(t + \tau) = \\ &= \sigma^2 [\cos t \cos(t + \tau) + \sin t \sin(t + \tau)] = \\ &= \sigma^2 \cos[t - (t + \tau)] = \sigma^2 \cos(-\tau) = \sigma^2 \cos(\tau) = C_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(t, t + \tau) = C_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(\tau) \end{aligned} \quad (\text{IV-4.13})$$

Набљудуваниот случаен процес е слабо стационарен, бидејќи и неговата средна вредност и неговата автокорелациона функција не зависат од  $t$ .

Забелешка:  $E[AB] = 0$  бидејќи, според условот од задачата,  $A$  и  $B$  не се во корелација.

**Задача IV-4.3.** Да се провери дали набљудуваниот случаен процес е стационарен во поширока смисла:

$$\mathbf{X}(n) = \cos[2\pi(0.1)n + \Theta] \quad (\text{IV-4.14})$$

каде што  $\Theta$  е случајна променлива униформно распределена на интервалот  $(0, 2\pi)$ . Упатство: Средната вредност на функцијата  $Y = g(X)$ , каде што  $X$  е континуална случајна променлива, а  $Y$  е дискретна случајна променлива се пресметува според формулата:

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \quad (\text{IV-4.15})$$

**Решение:** Средната вредност на дадениот процес  $\mathbf{X}(n)$  е:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{X}}(n) &= E[\mathbf{X}(n)] = E\{\cos[2\pi(0.1)n + \Theta]\} = \int_0^{2\pi} \cos[2\pi(0.1)n + \theta] \frac{1}{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sin[2\pi(0.1)n + \theta]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}\quad (\text{IV-4.16})$$

додека за неговата автокорелациона функција се добива:

$$\begin{aligned}E[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}(n+k)] &= \int_0^{2\pi} \cos[2\pi(0.1)n + \theta] \cos[2\pi(0.1)(n+k) + \theta] \frac{1}{2\pi} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \cos[2\pi(0.1)k] + \frac{1}{2} \cos[2\pi(0.1)(2n+k) + 2\theta] \right\} \frac{1}{2\pi} d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cos[2\pi(0.1)k] \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin[2\pi(0.1)(2n+k) + 2\theta] \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \cos[2\pi(0.1)k]\end{aligned}\quad (\text{IV-4.17})$$

Очигледно, набљудуваниот процес е стационарен во однос на средната вредност и корелативно стационарен. Следствено, тој е стационарен во поширока смисла.

**Задача IV-4.4.** Да се пресмета средната вредност, варијансата и автокорелационата функција на еден случаен процес кој се состои од четири слични сигнали:

$$\mathbf{X}(t) = \{t^2, 1-t^2, t(1-t), t^2+1\} \quad (\text{IV-4.18})$$

Дали овој процес е стационарен?

**Решение:** Средна вредност на процесот  $\mathbf{X}(t)$ :

$$\mu_{\mathbf{X}}(t) = E[\mathbf{X}(t)] = \frac{1}{4} [(t^2) + (1-t^2) + (t-t^2) + (t^2+1)] = \frac{1}{4}(t+2) \quad (\text{IV-4.19})$$

Средна квадратна вредност на процесот  $\mathbf{X}(t)$ :

$$\begin{aligned} r_{\mathbf{X}}(t) &= E[\mathbf{X}^2(t)] = \frac{1}{4} \left[ (t^2)^2 + (1-t^2)^2 + (t-t^2)^2 + (t^2+1)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} (4t^4 - 2t^3 + t^2 + 2) \end{aligned} \quad (\text{IV-4.20})$$

Варијанса на процесот  $\mathbf{X}(t)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{X}}^2(t) &= E[\mathbf{X}^2(t)] - \mu_{\mathbf{X}}^2(t) = \frac{1}{4} (4t^4 - 2t^3 + t^2 + 2) - \frac{1}{16} (t+2)^2 = \\ &= \frac{1}{16} (16t^4 - 8t^3 + 3t^2 - 4t + 4) \end{aligned} \quad (\text{IV-4.21})$$

Автокорелациона функција на процесот  $\mathbf{X}(t)$ :

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{X}}(t, \tau) &= E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)] = \frac{1}{4} \left\{ (t^2)(t+\tau)^2 + (1-t^2)[1-(t+\tau)^2] + \right. \\ &\left. + t(1-t)[(t+\tau)(1-t-\tau)] + (t^2+1)[(t+\tau)^2+1] \right\} = \\ &= \frac{1}{4} (4t^4 - 2t^3 + t^2 + 2 + 6t^3\tau + 2t^2\tau^2 + t^2\tau + t\tau^2 - t\tau) \end{aligned} \quad (\text{IV-4.22})$$

Набљудуваниот процес е нестационарен, бидејќи неговата автокорелациона функција зависи од времето  $t$ .

**Задача IV-4.5.** Да се пресмета средната вредност, коваријансата и варијансата на МА процесот:

$$\mathbf{X}(n) = \frac{1}{2} \mathbf{W}(n) + \frac{1}{2} \mathbf{W}(n-1), \quad -\infty < n < \infty \quad (\text{IV-4.23})$$

каде што  $\mathbf{W}(n)$  е бел Гаусов шум со нулева средна вредност. Коваријансата да се претстави графички и да се објасни добиениот резултат. **Упатство:** Да се искористи фактот дека белиот Гаусов шум е стационарен процес со варијанса  $\sigma_{\mathbf{W}}^2$ . Врз основа на графичкиот приказ треба да се одговори на прашањата – колку е

корелацијата на примероци кои се оддалечени повеќе од еден чекор  $|n - k| > 1$ , колку е коваријансата меѓу соседните примероци  $\mathbf{X}(1)$  и  $\mathbf{X}(2)$ , а колкава помеѓу примероците  $\mathbf{X}(9)$  и  $\mathbf{X}(10)$ , дали графиконот е симетричен и околу која оска, колку е коваријансата за  $k = 0$ .

**Решение:** Средната вредност на дадениот МА процес е:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{X}} &= E[\mathbf{X}(n)] = E\left[\frac{1}{2}\mathbf{W}(n) + \frac{1}{2}\mathbf{W}(n-1)\right] = \\ &= \frac{1}{2}E[\mathbf{W}(n)] + \frac{1}{2}E[\mathbf{W}(n-1)] = \frac{1}{2}\mu_{\mathbf{W}} + \frac{1}{2}\mu_{\mathbf{W}} = 0\end{aligned}\quad (\text{IV-4.24})$$

додека неговата коваријанса се пресметува според формулата:

$$\begin{aligned}V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(n, n+k) &= \text{Cov}[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}(n+k)] = \\ &= E\{[\mathbf{X}(n) - \mu_{\mathbf{X}}(n)][\mathbf{X}(n+k) - \mu_{\mathbf{X}}(n+k)]\} = E[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}(n+k)] = \\ &= E\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{W}(n) + \mathbf{W}(n-1)]\frac{1}{2}[\mathbf{W}(n+k) + \mathbf{W}(n+k-1)]\right\} = \\ &= \frac{1}{4}E\{[\mathbf{W}(n)\mathbf{W}(n+k)] + [\mathbf{W}(n)\mathbf{W}(n+k-1)] + \\ &+ [\mathbf{W}(n-1)\mathbf{W}(n+k)] + [\mathbf{W}(n-1)\mathbf{W}(n+k-1)]\} = \\ &= \frac{1}{4}\{E[\mathbf{W}(n)\mathbf{W}(n+k)] + E[\mathbf{W}(n)\mathbf{W}(n+k-1)] + \\ &+ E[\mathbf{W}(n-1)\mathbf{W}(n+k)] + E[\mathbf{W}(n-1)\mathbf{W}(n+k-1)]\} = \\ &= \frac{1}{4}[C_{\mathbf{W}\mathbf{W}}(n, n+k) + C_{\mathbf{W}\mathbf{W}}(n, n+k-1) + \\ &+ C_{\mathbf{W}\mathbf{W}}(n-1, n+k) + C_{\mathbf{W}\mathbf{W}}(n-1, n+k-1)]\end{aligned}\quad (\text{IV-4.25})$$

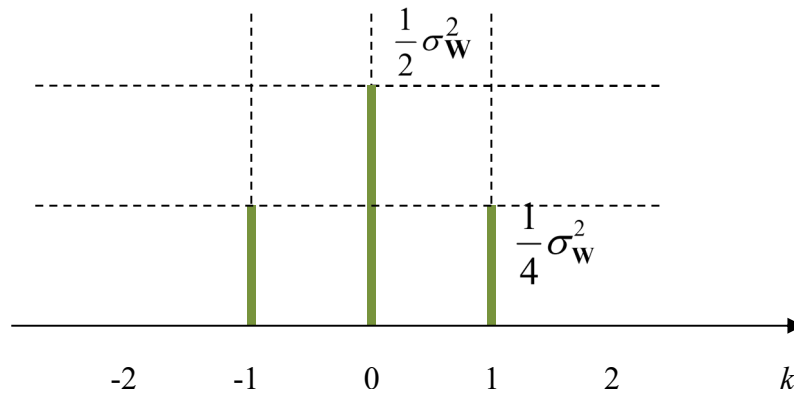
Ако се земе предвид фактот дека белиот Гаусов шум е стационарен процес, што значи дека:

$$E[\mathbf{W}(n)\mathbf{W}(n+k)] = \sigma_{\mathbf{W}}^2 \delta(k) \quad (\text{IV-4.26})$$

изразот за  $V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(n, n+k)$  може да се запише во облик:

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(n, n+k) &= \frac{1}{4} \sigma_{\mathbf{W}}^2 [\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k+1) + \delta(k)] = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{\mathbf{W}}^2 \delta(k) + \frac{1}{4} \sigma_{\mathbf{W}}^2 \delta(k-1) + \frac{1}{4} \sigma_{\mathbf{W}}^2 \delta(k+1) = V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(k) \end{aligned} \quad (\text{IV-4.27})$$

Функцијата  $V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(n, n+k) = V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(k)$  графички е прикажана на слика IV-4.1. Од графиконот се гледа дека коваријансата е еднаква на нула доколку два примерока се на растојание поголемо од еден чекор, бидејќи тие не се во корелација, што се должи на фактот дека за секое  $|n-k| > 1$   $\mathbf{X}(n)$  и  $\mathbf{X}(k)$  се независни (функции од независни случајни променливи се и самите независни). Понатаму, два произволни примероци кои се на растојание од еден чекор имаат иста коваријанса и коваријансата е симетрична во однос на оската  $k = 0$ . Графиконот е симетричен околу оската  $k = 0$ .



Слика IV-4.1. Графички приказ на коваријансата на MA процесот од задачата IV-4.5

Конечно, за набљудуваниот MA процес може да се запише:

$$V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(k) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\mathbf{W}}^2}{2}, & k = 0 \\ \frac{\sigma_{\mathbf{W}}^2}{4}, & |k| = 1 \\ 0, & |k| > 1 \end{cases} \quad (\text{IV-4.28})$$

Варијансата на процесот е:

$$\sigma_{\mathbf{X}}^2 = V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(n, n+k)_{k=0} = V_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(n, n) = \frac{\sigma_{\mathbf{W}}^2}{2} \forall n \quad (\text{IV-4.29})$$

**Задача IV-4.6.** Да се определи спектралната густина на случаен процес со автокорелациона функција дадена со изразот:

$$C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & |\tau| > 1 \end{cases} \quad (\text{IV-4.30})$$

**Решение:**

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \int_{-1}^1 C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\ &= \int_{-1}^0 (1+\tau) \cos(\omega\tau) d\tau + \int_0^1 (1-\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \\ &= \int_{-1}^0 \cos(\omega\tau) d\tau + \int_{-1}^0 \tau \cos(\omega\tau) d\tau + \int_0^1 \cos(\omega\tau) d\tau - \int_0^1 \tau \cos(\omega\tau) d\tau = \\ &= \left[ \int_{-1}^0 \cos(\omega\tau) d\tau + \int_0^1 \cos(\omega\tau) d\tau \right] + \left[ \int_{-1}^0 \tau \cos(\omega\tau) d\tau - \int_0^1 \tau \cos(\omega\tau) d\tau \right] = \\ &= 2 \left[ \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega} \right]_0^1 + \left[ \frac{\tau \sin(\omega\tau)}{\omega} \right]_{-1}^0 - \frac{1}{\omega} \int_{-1}^0 \sin(\omega\tau) d\tau - \left[ \frac{\tau \sin(\omega\tau)}{\omega} \right]_0^1 - \frac{1}{\omega} \int_0^1 \sin(\omega\tau) d\tau = \\ &= 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} + \left\{ \left[ 0 - \frac{-\sin(-\omega)}{\omega} \right] - \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\cos(\omega\tau)}{\omega} \right]_{-1}^0 \right\} - \left\{ \left[ \frac{\sin(\omega)}{\omega} - 0 \right] - \frac{1}{\omega} \left[ \frac{\cos(\omega\tau)}{\omega} \right]_0^1 \right\} = \\ &= 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} + \left[ -\frac{\sin(\omega)}{\omega} - \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right] + \left\{ -\frac{1}{\omega} \left[ \frac{\cos(\omega\tau)}{\omega} \right]_{-1}^0 \right\} - \left\{ -\frac{1}{\omega} \left[ \frac{\cos(\omega\tau)}{\omega} \right]_0^1 \right\} = \\ &= 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} - 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \left[ \cos(\omega\tau) \right]_{-1}^0 - \cos(\omega\tau) \Big|_0^1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\omega^2} [-1 + \cos(-\omega) + \cos(\omega) - 1] = \frac{1}{\omega^2} [2 - 2\cos(\omega)] = \frac{2}{\omega^2} [1 - \cos(\omega)] = \\
 &= \frac{2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \right] = \frac{2}{\omega^2} \left[ 1 - \cos^2 \frac{\omega}{2} + \sin^2 \frac{\omega}{2} \right] = \\
 &= \frac{2}{\omega^2} \cdot 2 \sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\left( \frac{\omega}{2} \right)^2}
 \end{aligned} \tag{IV-4.31}$$

**Задача IV-4.7.** Нека  $\mathbf{Y}(n)$  е слабо стационарен (стационарен во поширока смисла) случаен процес, со средна вредност  $\mu_Y$  и автокорелациона функција  $C_{YY}(k)$  и нека, под претпоставка, тој претставува влез на линеарен стационарен дискретен динамички систем со тежинска низа:

$$g(k) = \begin{cases} g(0), & k = 0 \\ g(1), & k = 1 \\ 0, & k \neq 0, 1 \end{cases} \tag{IV-4.32}$$

Да се определи средната вредност и автокорелационата функција на одзивот  $\mathbf{X}(n)$  на овој систем на дадениот влез и да се утврди дали тој одзив е слабо стационарен.

**Решение:** Одзивот  $x(n)$  на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем опишан со својата тежинска низа  $g(n)$ , на влез  $y(n)$ , е даден со конволуциската сума:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)y(n-k) \tag{IV-4.33}$$

Оттука, во конкретниот случај ќе биде:

$$\mathbf{X}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\mathbf{Y}(n-k) = g(0)\mathbf{Y}(n) + g(1)\mathbf{Y}(n-1) \tag{IV-4.34}$$

Средната вредност на одзивот  $\mathbf{X}(n)$  на набљудуваниот дискретен систем е:

$$\mu_X = E[\mathbf{X}(n)] = E[g(0)\mathbf{Y}(n) + g(1)\mathbf{Y}(n-1)] = g(0)E[\mathbf{Y}(n)] + g(1)E[\mathbf{Y}(n-1)] =$$

$$= g(0)\mu_Y + g(1)\mu_Y = [g(0) + g(1)]\mu_Y \quad (\text{IV-4.35})$$

додека за неговата автокорелациона функција се добива:

$$\begin{aligned} C_{XX}(n, n+k) &= E\{[g(0)Y(n) + g(1)Y(n-1)][g(0)Y(n+k) + g(1)Y(n+k-1)]\} = \\ &= E[g^2(0)Y(n)Y(n+k)] + E[g(0)Y(n-1)g(1)Y(n+k)] + \\ &+ E[g(0)Y(n)g(1)Y(n+k-1)] + E[g^2(1)Y(n-1)Y(n+k-1)] = \\ &= g^2(0)E[Y(n)Y(n+k)] + g(0)g(1)E[Y(n-1)Y(n+k)] + \\ &+ g(0)g(1)E[Y(n)Y(n+k-1)] + g^2(1)E[Y(n-1)Y(n+k-1)] = \\ &= g^2(0)C_{YY}(k) + g(0)g(1)C_{YY}(k+1) + \\ &+ g(0)g(1)C_{YY}(k-1) + g^2(1)C_{YY}(k) = \\ &= [g^2(0) + g^2(1)]C_{YY}(k) + g(0)g(1)C_{YY}(k+1) + g(0)g(1)C_{YY}(k-1) \end{aligned} \quad (\text{IV-4.36})$$

Очигледно и средната вредност и автокорелационата функција на одзивот  $X(n)$  на набљудуваниот дискретен систем не зависат од  $n$ . Следствено, одзивот  $X(n)$  е исто така слабо стационарен.

**Задача IV-4.8.** Даден е процесот:

$$x(k) = 2w(k) + 3w(k-3) + 4w(k-7) \quad (\text{IV-4.37})$$

(а) Каков е овој процес? (MA, AR, ARMA,...?)

(б) Да се определи автокорелационата функција  $C_{xx}(\tau)$  на набљудуваниот процес.

(в) За кој процес не е потребно да се дискутира стабилноста и зошто?

**Решение:** а) Зададениот процес е MA процес, бидејќи  $x(k)$  во произволен временски миг зависи само од тековната и минатите вредности на  $w(k)$ , а не зависи од своите минати вредности.



б) Автокорелационата функција на еден МА процес се определува според формулата:

$$C_{xx}(\tau) = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-|\tau|} b_k b_{k+|\tau|} \quad (\text{IV-4.38})$$

или на следниот начин:

$$\begin{aligned} C_{xx} &= E[x(k)x(k+\tau)] = \\ &= E[\{2w(k) + 3w(k-3) + 4w(k-7)\}\{2w(k+\tau) + 3w(k-3+\tau) + 4w(k-7+\tau)\}] = \\ &= E[4w(k)w(k+\tau) + 6w(k-3)w(k+\tau) + 8w(k-7)w(k+\tau) + 6w(k)w(k+\tau-3) + \\ &+ 9w(k-3)w(k+\tau-3) + 12w(k-7)w(k+\tau-3) + 8w(k)w(k+\tau-7) + \\ &+ 12w(k-3)w(k+\tau-7) + 16w(k-7)w(k+\tau-7)] = \\ &= 29C_{ww}(\tau) + 6\{C_{ww}(\tau-3) + C_{ww}(\tau+3)\} + \\ &+ 8\{C_{ww}(\tau-7) + C_{ww}(\tau+7)\} + 12\{C_{ww}(\tau-4) + C_{ww}(\tau+4)\} = \\ &= \{29\delta(\tau) + 6[\delta(\tau-3) + \delta(\tau+3)] + \\ &+ 12[\delta(\tau-4) + \delta(\tau+4)] + 8[\delta(\tau-7) + \delta(\tau+7)]\}\sigma_w^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-4.39})$$

в) За МА процесите нема потреба да се дискутира стабилноста, бидејќи, без оглед на нивните коефициенти, тие секогаш влегуваат во стационарен режим.

**Задача IV-4.9.** Да се определи аналитички и графички автокорелационата функција  $C_{xx}(\tau)$  на процесот:

$$x(k) = w(k) + 5w(k-1) + 4w(k-3) \quad (\text{IV-4.40})$$

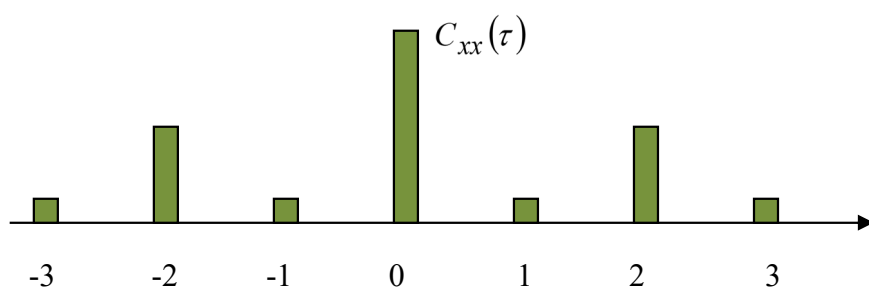
каде што  $w(t)$  е бел шум со варијанса  $\sigma_w^2 = 4$ . Да се одреди стабилноста на овој процес и да се утврди дали таа зависи од неговите коефициенти?

**Решение:** Автокорелационата функција на дадениот МА процес е прикажана графички на слика IV-4.2, а се определува според формулата:

$$C_{xx}(\tau) = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-|\tau|} b_k b_{k+|\tau|} \quad (\text{IV-4.41})$$

или на следниот начин:

$$\begin{aligned} C_{xx} &= E[x(k)x(k+\tau)] = \\ &= E[\{w(k) + 5w(k-1) + 4w(k-3)\}\{w(k+\tau) + 5w(k-1+\tau) + 4w(k-3+\tau)\}] = \\ &= E[w(k)w(k+\tau) + 5w(k-1)w(k+\tau) + 4w(k-3)w(k+\tau) + 5w(k)w(k+\tau-1) + \\ &+ 25w(k-1)w(k+\tau-1) + 20w(k-3)w(k+\tau-1) + 4w(k)w(k+\tau-3) + \\ &+ 20w(k-1)w(k+\tau-3) + 16w(k-3)w(k+\tau-3)] = \\ &= 42C_{ww}(\tau) + 5[C_{ww}(\tau-1) + C_{ww}(\tau+1)] + \\ &+ 20[C_{ww}(\tau-2) + C_{ww}(\tau+2)] + 4[C_{ww}(\tau-3) + C_{ww}(\tau+3)] = \\ &= \{42\delta(\tau) + 5[\delta(\tau-1) + \delta(\tau+1)] + \\ &+ 20[\delta(\tau-2) + \delta(\tau+2)] + 4[\delta(\tau-3) + \delta(\tau+3)]\} \sigma_w^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-4.42})$$



Слика IV-4.2. Автокорелационата функција на процесот од задачата IV-4.9

Набљудуваниот случаен процес е МА процес, што значи дека тој сигурно е стабилен. Навистина, за преносната функција на процесот се добива:

$$G(Z) = \frac{x(Z)}{w(Z)} = 1 + 5Z^{-1} + 4Z^{-3} = \frac{Z^3 + 5Z^2 + 4}{Z^3} \quad (\text{IV-4.43})$$

што значи дека сите негови полови лежат во точката  $Z = 0$  внатре во единичниот круг во  $z$ -комплексната рамнина. Оттука, стабилноста на процесот не зависи од неговите коефициенти.

**Задача IV-4.10.** Да се моделираат дадените податоци како AR процес од прв ред. Потоа моделот да се спореди со емпириските податоци од таблица IV-4,1.

**Таблица IV-4.1. Емпириски податоци за задача IV-4.10**

$\tau$	$C_{xx}(\tau)$
0	0.7
1	0.6
2	0.5
3	0.2
4	0.1

**Решение:** Коефициентите на бараниот модел се определуваат според формулата:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{p} \quad (\text{IV-4.44})$$

каде што:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{xx}(1) & -1 \\ C_{xx}(0) & 0 \\ C_{xx}(1) & 0 \\ C_{xx}(2) & 0 \\ C_{xx}(3) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -1 \\ 0.7 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ -0.6 \\ -0.5 \\ -0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & -1 \\ 0.7 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.6 \\ -0.6 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.6 \\ -0.6 & 1.0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8772 & 0.5263 \\ 0.5263 & 1.3158 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0.8772 & 0.5263 \\ 0.5263 & 1.3158 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.614 & 0.5263 & 0.4386 & 0.1754 \\ -1 & 0.3684 & 0.3158 & 0.2632 & 0.1053 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \sigma_w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.614 & 0.5263 & 0.4386 & 0.1754 \\ -1 & 0.3684 & 0.3158 & 0.2632 & 0.1053 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.7 \\ -0.6 \\ -0.5 \\ -0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7368 \\ 0.2579 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-4.45})$$

а самиот модел е од облик:

$$x(k) = w(k) + 0.7368x(k-1); \quad (\text{IV-4.46})$$

додека  $w(k)$  е бел шум со варијанса  $\sigma_w^2 \approx 0.2579$ .

Теоретски, за да се спореди овој модел со дадените емпириски податоци, соодветните вредности на автокорелационата функција  $C_{xx}(\pm p) = C_{xx}(\pm 1)$  се пресметуваат според формулата:

$$\begin{bmatrix} C_{xx}(0) & C_{xx}(-1) \\ C_{xx}(1) & C_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-4.47})$$

**Задача IV-4.11.** Во таблица IV-4.2 се дадени емпириски податоци за некој стохастички процес. Најнапред да се моделираат дадените податоци како AR процес од втор ред. Потоа добиениот модел да се спореди со дадените емпириски податоци од таблица IV-4.2.

**Таблица IV-4.2. Емпириски податоци за задача IV-4.11**

$\tau$	$C_{xx}(\tau)$
0	6
1	5
2	6
3	4
4	2
5	1

**Решение:** Коефициентите на бараниот модел се определуваат според формулата:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{p} \quad (\text{IV-4.48})$$

каде што:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ -6 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 142 & 152 & -5 \\ 152 & 174 & -6 \\ -5 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1094 & -0.0967 & -0.0333 \\ -0.0967 & 0.0927 & 0.0729 \\ -0.0333 & 0.0729 & 1.2710 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T &= \begin{bmatrix} 0.1094 & -0.0967 & -0.0333 \\ -0.0967 & 0.0927 & 0.0729 \\ -0.0333 & 0.0729 & 1.2710 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.1727 & -0.0333 & 0.1727 & -0.1426 & -0.1680 \\ 0.0000 & -0.1165 & 0.0729 & -0.1165 & 0.1696 & 0.1775 \\ -1.0000 & 0.1648 & 0.2710 & 0.1648 & 0.3043 & 0.2250 \end{bmatrix} \\
 \underline{a} &= \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.1727 & -0.0333 & 0.1727 & -0.1426 & -0.1680 \\ 0.0000 & -0.1165 & 0.0729 & -0.1165 & 0.1696 & 0.1775 \\ -1.0000 & 0.1648 & 0.2710 & 0.1648 & 0.3043 & 0.2250 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ -6 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -0.9017 \\ 0.0943 \\ 2.0571 \end{bmatrix} \tag{IV-4.49}
 \end{aligned}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \sigma_w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9017 \\ 0.0943 \\ 2.0571 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.1 \\ 2.0 \end{bmatrix} \tag{IV-4.50}$$

а самиот модел е од облик:

$$x(k) = w(k) + 0.9x(k-1) - 0.1x(k-2); \quad \sigma_w^2 \approx 2 \tag{IV-4.51}$$

За да се спореди овој модел со дадените емпириски податоци, соодветните вредности на автокорелационата функција  $C_{xx}(\pm p) = C_{xx}(\pm 2)$  се пресметуваат според формулата:

$$\begin{bmatrix} C_{xx}(0) & C_{xx}(-1) & \cdot & \cdot & \cdot & C_{xx}(-p) \\ C_{xx}(1) & C_{xx}(0) & \cdot & \cdot & \cdot & C_{xx}(1-p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{xx}(p) & C_{xx}(p-1) & \cdot & \cdot & \cdot & C_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \tag{IV-4.52}$$

која во конкретниот случај има облик:

$$\begin{bmatrix} C_{xx}(0) & C_{xx}(1) & C_{xx}(2) \\ C_{xx}(1) & C_{xx}(0) & C_{xx}(1) \\ C_{xx}(2) & C_{xx}(1) & C_{xx}(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-4.53})$$

односно:

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -0.9000 & 0.1000 \\ -0.9000 & 1.1000 & 0 \\ 0.1000 & -0.9000 & 1.0000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{xx}(0) \\ C_{xx}(1) \\ C_{xx}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-4.54})$$

Одовде следува:

$$\begin{bmatrix} C_{xx}(0) \\ C_{xx}(1) \\ C_{xx}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0556 & 2.2500 & -0.3056 \\ 2.5000 & 2.7500 & -0.2500 \\ 1.9444 & 2.2500 & 0.8056 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.111 \\ 5.000 \\ 3.8889 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-4.55})$$

Очигледно, совпаѓањето е најголемо во центарот, а отстапувањето се зголемува со оддалечувањето од него. Веќе  $C_{xx}(2) = 3.8889$  значително отстапува од соодветниот емпириски податок. За подобри резултати, треба да се примени модел од повисок ред.

**Задача IV-4.12.** Даден е ARMA процесот:

$$x(k) = -2x(k-1) - 2x(k-2) + w(k) + 2w(k-2) \quad (\text{IV-4.56})$$

каде што, под претпоставка,  $w(t)$  е бел шум со варијанса  $\sigma_w^2 = 1$ . а) Да се определи преносната функција на процесот  $G(Z)$  и неговиот карактеристичен полином  $C(Z)$ . б) Да се определат половите на дадениот ARMA модел и дискутира неговата стабилност. в) Да се определи автокорелационата функција на набљудуваниот ARMA процес.

**Решение:** а)

$$x(k) = -2Z^{-1}x(k) - 2Z^{-2}x(k) + w(k) + 2Z^{-2}w(k)$$

$$(1 + 2Z^{-1} + 2Z^{-2})x(k) = (1 + 2Z^{-2})w(k)$$

$$G(Z) = \frac{x(k)}{w(k)} = \frac{1 + 2Z^{-2}}{1 + 2Z^{-1} + 2Z^{-2}} = \frac{Z^2 + 2}{2 + 2Z + Z^2}$$

$$C(Z) = 2 + 2Z + Z^2 \quad (\text{IV-4.57})$$

б) Бидејќи нулите  $Z_{1,2} = -1 \pm j$  на карактеристичниот полином  $C(Z)$  лежат надвор од единичниот круг, односно имаат модул поголем од 1, се заклучува дека набљудуваниот процес е нестабилен:

$$|Z_{1,2}| = \sqrt{2} > 1 \quad (\text{IV-4.58})$$

в) Бараната автокорелациона функција се пресметува според формулата:

$$C_{xx}(\tau) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i C_{xx}(|\tau| - i) + \sum_{i=0}^{q-|\tau|} b_{i+|\tau|} g(i), & |\tau| \leq q \\ -\sum_{i=1}^p a_i C_{xx}(|\tau| - i), & |\tau| > q \end{cases} \quad (\text{IV-4.59})$$

од каде непосредно следува:

$$C_{xx}(\tau) = \begin{cases} -a_1 C_{xx}(-1) - a_2 C_{xx}(-2) + g(0)b_0 + g(1)b_1 + g(2)b_2, & \tau = 0 \\ -a_1 C_{xx}(0) - a_2 C_{xx}(-1) + b_1 g(0) + g(1)b_2, & \tau = 1 \\ -a_1 C_{xx}(1) - a_2 C_{xx}(0) + g(0)b_2, & \tau = 2 \\ -a_1 C_{xx}(|\tau| - 1) - a_2 C_{xx}(|\tau| - 2), & |\tau| > 2 \end{cases} \quad (\text{IV-4.60})$$

Вредностите  $g(0), g(1), g(2)$  се соодветните коефициенти на бесконечниот ред:

$$G(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots} = g(0) + g(1)Z^{-1} + g(2)Z^{-2} + \dots \quad (\text{IV-4.61})$$

каде што  $a_i, b_i$  се коефициентите на набљудуваниот модел. Во конкретниот случај од задачата:

$$G(Z) = \frac{x(k)}{w(k)} = \frac{1 + 2Z^{-2}}{1 + 2Z^{-1} + 2Z^{-2}} = 1 - 2Z^{-1} + 4Z^{-2} - \dots \quad (\text{IV-4.62})$$

па:



$$\begin{aligned}
 C_{xx}(0) &= -2C_{xx}(-1) - 2C_{xx}(-2) + (1)(1) + (4)(2) = -2C_{xx}(1) - 2C_{xx}(2) + 9 \\
 C_{xx}(1) &= -2C_{xx}(0) - 2C_{xx}(-1) + (-2)(2) = -2C_{xx}(0) - 2C_{xx}(1) - 4 \\
 C_{xx}(2) &= -2C_{xx}(1) - 2C_{xx}(0) + (1)(2) = -2C_{xx}(1) - 2C_{xx}(0) + 2
 \end{aligned} \tag{IV-4.63}$$

Со решавање на системот равенки:

$$\begin{aligned}
 C_{xx}(0) + 2C_{xx}(1) + 2C_{xx}(2) &= 9 \\
 2C_{xx}(0) + 3C_{xx}(1) &= -4 \\
 2C_{xx}(0) + 2C_{xx}(1) + C_{xx}(2) &= 2
 \end{aligned} \tag{IV-4.64}$$

се добива:

$$\begin{aligned}
 C_{xx}(0) &= -1.4 \\
 C_{xx}(1) &= -0.4 \\
 C_{xx}(2) &= 5.6
 \end{aligned} \tag{IV-4.65}$$

додека:

$$C_{xx}(\tau) = -2C_{xx}(\tau - 1) - 2C_{xx}(\tau - 2), \quad \tau > 2 \tag{IV-4.66}$$

Бидејќи  $C_{xx}(\tau)$  е парна функција,  $C_{xx}(-\tau) = C_{xx}(\tau)$ .

**Задача IV-4.13.** Да се определи автокорелационата функција на случајниот процес опишан со следниот модел:

$$y(k+1) = 0.8y(k) + w(k+1) + 0.2w(k) \tag{IV-4.67}$$

каде што, под претпоставка,  $w(t)$  е бел шум со нулева средна вредност,  $\mu_w = 0$ , и со позната варијанса  $\sigma_w^2$ .

**Решение:** Дадениот модел:

$$y(k+1) = 0.8y(k) + w(k+1) + 0.2w(k) \quad (\text{IV-4.68})$$

е еквивалентен со моделот:

$$y(k) = 0.8y(k-1) + w(k) + 0.2w(k-1) \quad (\text{IV-4.69})$$

чиј општ облик е:

$$x(k) = -\sum_{i=1}^p a_i x(k-i) + \sum_{i=0}^q b_i w(k-i) \quad (\text{IV-4.70})$$

Оттука, во конкретниот случај:

$$p = 1, q = 1, a_1 = -0.8, b_0 = 1, b_1 = 0.2 \quad (\text{IV-4.71})$$

Бараната автокорелациона функција се пресметува според формулата:

$$C_{yy}(\tau) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^p a_i C_{yy}(|\tau|-i) + \sum_{i=0}^{q-|\tau|} b_{i+|\tau|} g(i), & |\tau| \leq q \\ -\sum_{i=1}^p a_i C_{yy}(|\tau|-i), & |\tau| > q \end{cases} \quad (\text{IV-4.72})$$

од каде непосредно следува:

$$C_{yy}(\tau) = \begin{cases} -a_1 C_{yy}(-1) + \sum_{i=0}^1 b_i g(i), & \tau = 0 \\ -a_1 C_{yy}(0) + b_1 g(0), & \tau = 1 \\ -a_1 C_{yy}(|\tau|-1), & |\tau| > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_{YY}(\tau) = \begin{cases} -a_1 C_{yy}(-1) + b_0 g(0) + b_1 g(1), & \tau = 0 \\ -a_1 C_{yy}(0) + b_1 g(0), & \tau = 1 \\ -a_1 C_{yy}(|\tau|-1), & |\tau| > 1 \end{cases} \quad (\text{IV-4.73})$$

ОДНОСНО:

$$C_{yy}(0) = -a_1 C_{yy}(-1) + b_0 g(0) + b_1 g(1) = -a_1 C_{yy}(1) + b_0 g(0) + b_1 g(1)$$

$$C_{yy}(1) = -a_1 C_{yy}(0) + b_1 g(0)$$

$$C_{yy}(\tau) = -a_1 C_{yy}(|\tau| - 1), \quad |\tau| > 1 \quad (\text{IV-4.74})$$

Вредностите  $g(0), g(1)$  се соодветните коефициенти на бесконечниот ред:

$$G(Z) = \frac{b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots} = g(0) + g(1)Z^{-1} + g(2)Z^{-2} + \dots \quad (\text{IV-4.75})$$

каде што  $a_i, b_i$  се коефициентите на набљудуваниот модел. Во конкретниот случај од задачата:

$$y(k) = 0.8Z^{-1}y(k) + w(k) + 0.2Z^{-1}w(k)$$

$$G(Z) = \frac{y(k)}{w(k)} = \frac{1 + 0.2Z^{-1}}{1 - 0.8Z^{-1}} = 1 + Z^{-1} + 0.8Z^{-2} + 0.64Z^{-3} + \dots \quad (\text{IV-4.76})$$

Одовде:

$$g(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0.8^{k-1}, & k > 0 \end{cases} \quad (\text{IV-4.77})$$

Со воведување на соодветните вредности во равенките:

$$C_{yy}(0) = -a_1 C_{yy}(-1) + b_0 g(0) + b_1 g(1) = -a_1 C_{yy}(1) + b_0 g(0) + b_1 g(1)$$

$$C_{yy}(1) = -a_1 C_{yy}(0) + b_1 g(0) \quad (\text{IV-4.78})$$

и нивно решавање, се определуваат вредностите  $C_{yy}(0)$  и  $C_{yy}(1)$ . Вредностите  $C_{yy}(\tau)$  за  $|\tau| > 1$  се пресметуваат според рекурентната формула:

$$C_{yy}(\tau) = -a_1 C_{yy}(|\tau| - 1), \quad |\tau| > 1 \quad (\text{IV-4.79})$$

при што се има на ум дека  $C_{yy}(\tau)$  е парна функција.

**Задача IV-4.14.** Даден е ARMA процесот:

$$x(k) = -\frac{1}{4}x(k-2) + w(k) + 4w(k-2) \quad (\text{IV-4.80})$$

каде што, под претпоставка,  $w(t)$  е бел шум со варијанса  $\sigma_w^2 = 1$ .

а) Да се определи преносната функција на процесот  $G(Z)$  и неговиот карактеристичен полином  $C(Z)$ .

б) Да се определат половите на дадениот ARMA модел и дискутира неговата стабилност.

в) Да се определи автокорелационата функција на набљудуваниот ARMA процес.

**Решение:**

$$x(k) = -0.25Z^{-2}x(k) + w(k) + 4Z^{-2}w(k)$$

$$G(Z) = \frac{x(k)}{w(k)} = \frac{1 + 4Z^{-2}}{1 + 0.25Z^{-2}} = 1 + 3.75Z^{-2} + \dots \quad (\text{IV-4.81})$$

Карактеристичен полином  $C(Z)$  е:

$$C(Z) = Z^2 + 0.25 = (Z - j0.5)(Z + j0.5) \quad (\text{IV-4.82})$$

и тој има две нули  $Z = \pm j0.5$  кои имаат модул помал од единица. Следствено, набљудуваниот процес е стабилен.

Бидејќи во конкретниот случај  $p = 2, q = 2, a_1 = 0, a_2 = -0.25, b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 4$  и  $g(0) = 1, g(1) = 0, g(2) = 3.75$  за автокорелационата функција на набљудуваниот процес се добива:

$$\begin{aligned} C_{xx}(0) &= -a_1C_{xx}(-1) - a_2C_{xx}(-2) + b_0g(0) + b_1g(1) + b_2g(2) = \\ &= -a_2C_x(2) + b_0g(0) + b_2g(2) = \end{aligned}$$

$$= 0.25C_{xx}(2) + 1 + 4(3.75) = 0.25C_{xx}(2) + 1 + 15$$

$$C_{xx}(1) = -a_2C_{xx}(-1) + b_1g(0) + b_2g(1) = 0.25C_{xx}(1) + 0 = 0.25C_{xx}(1)$$

$$C_{xx}(2) = -a_2C_{xx}(0) + b_2g(0) = 0.25C_{xx}(0) + 4$$

$$C_{xx}(\tau) = -a_2C_{xx}(|\tau| - 2) = 0.25C_{xx}(|\tau| - 2), \quad |\tau| > 2 \quad (\text{IV-4.83})$$

ОДНОСНО:

$$C_{xx}(0) = \frac{272}{15} \approx 18.13$$

$$C_{xx}(1) = 0$$

$$C_{xx}(2) = \frac{128}{15} \approx 8.53$$

$$C_{xx}(\tau) = -a_2C_{xx}(|\tau| - 2) = 0.25C_{xx}(|\tau| - 2), \quad |\tau| > 2 \quad (\text{IV-4.84})$$

**Задача IV-4.15.** а) Да се дискутира стабилноста и б) Да се определи автокорелационата функција на случајниот процес опишан со следниот модел:

$$y(k+2) = 0.25y(k) + w(k+1) + 0.2w(k) \quad (\text{IV-4.85})$$

каде што, под претпоставка,  $w(t)$  е бел шум со нулева средна вредност,  $\mu_w = 0$  и со позната варијанса  $\sigma_w^2$ .

**Решение:**

$$y(k) = -\frac{1}{4}Z^{-2}y(k) + Z^{-1}w(k) + \frac{1}{5}Z^{-2}w(k)$$

$$G(Z) = \frac{y(k)}{w(k)} = \frac{Z^{-1} + 0.2Z^{-2}}{1 - 0.25Z^{-2}} = \frac{Z + 0.2}{Z^2 - 0.25} = Z^{-1} + 0.2Z^{-2} + 0.25Z^{-3} + \dots \quad (\text{IV-4.86})$$

Карактеристичен полином  $C(Z)$  е:

$$C(Z) = Z^2 - 0.25 = (Z - 0.5)^2 \quad (\text{IV-4.87})$$

и тој има две нули  $Z_{1,2} = -0.5$  кои имаат модул помал од единица. Следствено, набљудуваниот процес е стабилен.

Бидејќи во конкретниот случај  $p = 2$ ,  $q = 2$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -0.25$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0.2$ ,  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = 1$ ,  $g(2) = 0.2$ ,  $g(3) = 0.25, \dots$  за  $C_{xx}(\tau)$  се добива:

$$\begin{aligned} C_{xx}(0) &= -a_1 C_{xx}(-1) - a_2 C_{xx}(-2) + \\ &+ b_0 g(0) + b_1 g(1) + b_2 g(2) = -a_2 C_{xx}(2) + b_1 g(1) + b_2 g(2) = \\ &= 0.25 C_{xx}(2) + 1 + 0.2(0.2) = 0.25 C_{xx}(2) + 1.04 \\ C_{xx}(1) &= -a_1 C_{xx}(0) - a_2 C_{xx}(-1) + b_1 g(0) + b_2 g(1) = 0.25 C_{xx}(1) + 0.2 \\ C_{xx}(2) &= -a_1 C_{xx}(1) - a_2 C_{xx}(0) + b_2 g(0) = 0.25 C_{xx}(0) \\ C_{xx}(\tau) &= -a_2 C_{xx}(|\tau| - 2) = 0.25 C_{xx}(|\tau| - 2), \quad |\tau| > 2 \end{aligned} \quad (\text{IV-4.88})$$

односно:

$$\begin{aligned} C_{xx}(0) &= \frac{1.04}{0.9375} = 1.1093 \\ C_{xx}(1) &= \frac{0.2}{0.75} = 0.2667 \\ C_{xx}(2) &= 0.25(1.1093) = 0.2773 \end{aligned} \quad (\text{IV-4.89})$$

---

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] MIT OCW, 2.004 *Modeling Dynamics and Control II*, (<https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-004-modeling-dynamics-and-control-ii-spring-2003/index.htm>)
- [2] S. B. Niku, *Introduction to Robotics: Analysis, Control, Applications* (2<sup>nd</sup> ed.), J. Wiley and Sons, 2010.
- [3] J. J. Distefano III., A. R. Stubberud, I. J. Williams, *Feedback and Control Systems* (2<sup>nd</sup> ed.), Mc Graw-Hill, 2013.
- [4] Carnegie Melon University, *Control Tutorials for MATLAB and SIMULINK*, (<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>)
- [5] R. Kelly, V. Santibáñez and A. Loría, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, Springer, 2005.
- [6] N. S. Nise, *Control Systems Engineering* (6th ed.), J. Wiley and Sons Inc., 2011.
- [7] Texas A&M University, Dept. of Mech. Eng., MEEN 364, *Handout E.12 - Examples on Linearization*, (<http://wonjongkim.tamu.edu/MEEN364/E12.pdf>)
- [8] University of Michigan, *Control Tutorials for MATLAB and SIMULINK*, (<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/Index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling>)
- [9] R. Woods, K. L. Lawrence, *Modeling and Simulation of Dynamic Systems*, Prentice Hall, 1997.
- [10] F. Haugen, *Dynamic Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, Tapir Forlag, 2004.
- [11] J. R. Raol, G. Giriya, J. Singh, *Modelling and Parameter Estimation of Dynamic Systems* (IEE Control Engineering), Institution of Engineering and Technology, 2004.
- [12] R. Isermann, M. Munchhof, *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications* (Advanced Textbooks in Control), Springer, 2010.
- [13] J. N. Juang, *Applied System Identification*, Prentice Hall, 1993.
- [14] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall, 1999.

- [15] P. P. J. Van Den Bosch, A. C. Van Der Klauw, *Modeling, Identification and Simulation of Dynamical Systems*, CRC, 1994.
- [16] Milic Stojic, *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Akademska misao, Beograd, 1996.
- [17] Frank L. Severance, *System Modeling and Simulation: An Introduction*, John Wiley & Sons, 2001.

Ниту еден дел од оваа публикација не смее да биде репродуциран на било кој начин без претходна писмена согласност на авторот

Е-издание: [http://www.ukim.edu.mk/mk\\_content.php?meni=53&glavno=41](http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41)