2019

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ I

(НА ФУНКЦИИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА)

- Функции
- Изводи
- Интеграли

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ I

(НА ФУНКЦИИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА)

Скопје, 2019

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј" во Скопје,
бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Зоран Мисајлески,
вонреден професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Рецензенти:
проф. д-р Никита Шекутковски,
редовен професор на ПМФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Валентина Миовска,
редовен професор на ПМФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Силвана Петрушева,
редовен професор на ГФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Љупчо Лазаров,
редовен професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Техничка обработка:
проф. д-р Зоран Мисајлески,

Лектура на македонски јазик:
ас. м-р Цутка Јованоска
асистент на ДУТ, Тетово

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски", Скопје

517.2/.3(075.8)(076)

МИСАЈЛЕСКИ, Зоран
Решени задачи по диференцијално и интегрално сметање I : (на функции од една променлива) / Зоран Мисајлески. - Скопје : Универзитет „Св. Кирил и Методиј" - Скопје, 2019

Начин на пристап (URL):
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41.
- Текст во PDF формат, содржи 354 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 13.12.2019. -
Библиографија: стр. 350-352

ISBN 978-9989-43-436-5

а) Функции со една променлива - Диференцијално сметање - Интегрално сметање - Високошколски учебници - Вежби COBISS.MK-ID 111863306

Предговор

Збирката задачи „Решени задачи по диференцијално и интегрално сметање I“ го опфаќа материјалот од диференцијалното и интегралното сметање на функциите со една променлива, што се изучува на Градежниот факултет.

Збирката можат да ја користат и студентите од останатите технички факултети бидејќи во нивните предмети од областа математика се изучува ист или сличен материјал, како и учениците од четврта година во средното образование на природно-математичката насока, кои ги изучуваат предметите Математичка анализа и Математика 4, за четврта година на гимназиското образование.

Темите на кои припаѓаат задачите, како и теоремите, формулите и правилата кои се користат во збирката, се според печатените материјали „Диференцијално и интегрално сметање I“ од истиот автор.

Најголем дел од решените задачи се избрани и се решени во периодот 2004 - 2006 година, при подготовката на материјалот за спроведување на вежбите од страна на авторот. Во 2007 година дел од задачите се обработени на компјутер и потоа дел од нив се ставени на веб-страницата на Факултетот, а во 2012 г. се преработени и се дополнети приближно до оваа форма, и како такви им се даваат на студентите за подготовка на предметот. Задачите ги користат асистентите и авторот како материјал за одржување на вежбите и на дел од предавањата. Најголем дел од задачите се зададени и на испитите и парцијалните испити по предметите Математика и Математика I, и тоа во периодот од 2006 до 2014 година, додека подоцна, од 2014 г. до денес, се задаваат како дел од испитните задачи со исти или со заменети цифри.

Авторот му се заблагодарува на Љупчо Петров, демонстратор на предметите Математика и Математика I за учебните 2018 / 2019 и 2019 / 2020, кој го прочита материјалот и исправи некои технички пропусти.

Ова е прво издание на збирката и авторот ќе им биде благодарен на читателите кои со своите забелешки ќе придонесат во подобрувањето на квалитетот на збирката во наредните изданија.

Зоран Мисајлески

Збирката е посветена на татко ми Силјан

1. ФУНКЦИИ

1.1. ФУНКЦИИ

1.1.1. Оперирање со функции

Задача 1-3. За функцијата:

1) $f(x)=\dfrac{x+3}{3x-4}$, најди $f(0)$, $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$ и $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)$;

2) $f(x)=x^2-x+2$, најди $f(2x)$, $f(\sqrt{x})$ и $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$;

3) $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ x\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right]\\ \pi^2-x^2,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\\ e^{-x},\ x\in[0,2\pi]\end{cases}$, најди $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ и $f(9)$.

Решение. Имаме:

1) $f(0)=\dfrac{0+3}{3\cdot 0-4}=-\dfrac{3}{4}$, $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$ не постои и

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{-\frac{4}{3}+3}{3\left(-\frac{4}{3}\right)-4}=-\frac{5}{24}.$$

2) $f(2x)=(2x)^2-2x+2=4x^2-2x+2$,

$$f\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}+2=x-\sqrt{x}+2 \text{ и}$$

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2-\frac{1}{f(x)}+2=\left(\frac{1}{x^2-x+2}\right)^2-\frac{1}{x^2-x+2}+2.$$

3) Имаме: $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. Бидејќи $-\dfrac{1}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, следува:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi^2-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\pi^2-\frac{1}{4}.$$

За $x=9$ функцијата не е дефинирана, односно $f(9)$ не постои.

Задача 4-7. Определи:

4) $f(x+1)$ ако $f(x)=x^2-3x+2$;

5) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ако $f(x)=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}$;

6) $f(x)$ ако $f(x+1)=x^2-3x+2$;

7) $f(x)$ ако $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x^2+2$.

Решение. 4) Ако во функцијата $f(x)$, аргументот x го замениме со $x+1$, добиваме:

$$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2+2x+1-3x-3+2=x^2-x$$

5) Аналогно, ако аргументот x го замениме со $\frac{1}{x}$, добиваме:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}=$$

$$1+x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=1+\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+1}=\begin{cases}1+\sqrt{x^2+1}, & x>0\\ 1-\sqrt{x^2+1}, & x<0\end{cases}.$$

6) За да ја определиме функцијата $y=f(x)$ воведуваме смена $x+1=t$, од што каде имаме $x=t-1$. Тогаш,

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-2t+1-3t+3+2=t^2-5t+6.$$

Значи, функцијата е $f(x)=x^2-5x+6$.

7) За да ја определиме функцијата $f(x)$, воведуваме смена $\frac{x-1}{x+1}=t$. Решавајќи го равенството по t добивме:

$$\frac{x-1}{x+1}=t \Leftrightarrow x-1=t(x+1)\Leftrightarrow x-1=tx+t \Leftrightarrow x(1-t)=1+t \Leftrightarrow x=\frac{1+t}{1-t}.$$

Оттука,

$$f(t)=\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2+2=\frac{1+2t+t^2}{(1-t)^2}+\frac{2-4t+2t^2}{(1-t)^2}=\frac{3-2t+3t^2}{(1-t)^2}.$$

Значи, функцијата е: $f(x)=\dfrac{3-2x+3x^2}{(1-x)^2}$.

Задача 8. Ако $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$, определи ја $f(x)$.

Решение. Ако ставиме смена $t=x+\dfrac{1}{x}$, тогаш

$$t^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+3t,$$

од каде што $x^3+\dfrac{1}{x^3}=t^3-3t$.

Конечно, $f(t)=t^3-3t$ т.е. $f(x)=x^3-3x$.

Задача 9. Ако $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$, покажи дека $f(f(x))=x$.

Решение.

$$f(f(x))=f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=\frac{2\dfrac{2x+1}{x-2}+1}{\dfrac{2x+1}{x-2}-2}=\frac{\dfrac{4x+2+x-2}{x-2}}{\dfrac{2x+1-2x+4}{x-2}}=\frac{5x}{5}=x.$$

Задача 10. Ако $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$, тогаш покажи дека:

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Решение. Средувајќи ја левата страна од равенството добиваме:

$$f(x)+f(y)=\log\frac{1+x}{1-x}+\log\frac{1+y}{1-y}=\log\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\log\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}$$

Средувајќи ја десната страна од равенството добиваме:

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\log\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}=\log\frac{\frac{1+xy+x+y}{1+xy}}{\frac{1+xy-x-y}{1+xy}}=\log\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}.$$

Следува: $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

Задача 11. Најди ја функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ ако $f(-1)=6$, $f(0)=1$ и $f(1)=0$.

Решение. Од дадените услови го добиваме системот равенки

$$a-b+c=6,\ c=1,\ a+b+c=0.$$

Ако од третата равенка ја одземеме првата добиваме $2b=-6$ или $b=-3$. Тогаш, од третата равенка следува: $a-3+1=0$ или $a=2$.

Значи, функцијата е: $f(x)=2x^2-3x+1$.

Задача 12. Напиши го аналитичкиот израз на функцијата $f(x)=|x-3|+|x+1|$ без користење на знакот за апсолутна вредност.

Решение. Имаме:

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ и } x+1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

За $x\in(-\infty,1]$, $f(x)=-(x-3)-(x+1)=-x+3-x-1=-2x+2$.

За $x\in(1,3]$, $f(x)=-(x-3)+x+1=-x+3+x+1=4$ и

За $x\in(3,+\infty)$, $f(x)=x-3+x+1=2x-2$

Следува: $f(x)=\begin{cases}-2x+2, & x\in(-\infty,1]\\ 4, & x\in(1,3]\\ 2x-2, & x\in(3,+\infty)\end{cases}$.

Задача 13-16. Најди функции што ги исполнуваат релациите:

13) $x^2+y^2=1$; 14) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, $a\neq 0$;

15) $2^{\frac{y}{x}}=5$; 16) $\ln x+\ln(y-2)=\ln 3$.

Решение. 13) Имаме:

$$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1-x^2 \Leftrightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt{1-x^2}.$$

Коментар. Покрај функциите $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$, постојат бесконечно функции што ја задоволуваат релацијата $x^2 + y^2 = 1$. На пример, $y(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [0,a] \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \in (a,1] \end{cases}$ за секое $a \in (0,1)$, исто така, ја исполнуваат релацијата.

14) Имаме:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right) \Leftrightarrow \ y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.$$

15) Ако го логаритмираме равенството $2^{\frac{y}{x}} = 5$ добиваме:

$$\log 2^{\frac{y}{x}} = \log 5 \Leftrightarrow \frac{y}{x}\log 2 = \log 5\,.$$

Оттука, $y = x\dfrac{\log 5}{\log 2} \Leftrightarrow y = x\log_2 5$.

Коментар. За функцијата $y = x\log_2 5$ се подразбира дефиниционата област за која $\dfrac{y}{x} \neq 0$, односно $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

16) Од равенството $\ln x + \ln(y-2) = \ln 3$ за $x > 0$ добиваме $\ln x(y-2) = \ln 3$. Оттука,

$$x(y-2) = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x} + 2\,.$$

Коментар. Како во претходната задача, за функцијата $y = \dfrac{3}{x} + 2$, дефиниционата област е: $D_f = (0, +\infty)$.

Задача 17-18. Изрази го y како функција од x ако:

17) $x = 3t + 2$, $y = t^2 + 2t$; 18) $x = 3\sin t$, $y = \dfrac{\sin 2t}{2} + \cos^2 t$.

Решение. 17) Од $x = 3t + 2$ имаме $t = \dfrac{x-2}{3}$, па

$$y = \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x-2}{3}\right).$$

18) Од $x = 3\sin t$ имаме $\sin t = \dfrac{x}{3}$. Сега,

$$y = \frac{\sin 2t}{2} + \cos^2 t = \frac{2\sin t\cos t}{2} + 1 - \sin^2 t = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + 1 - \sin^2 t =$$

$$\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{x\sqrt{9-x^2}+9-x^2}{9}.$$

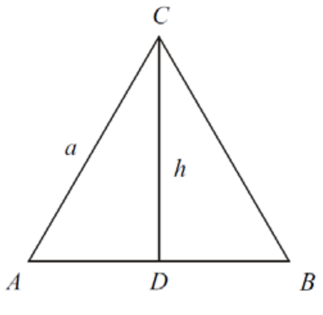
1.1.2. Формирање функции

Задача 1. Изрази ја плоштината на рамностран триаголник како:

а) функција од неговата страна a;

б) функција од неговата висина h.

Решение. а) Од Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник BCD, добиваме:



$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Следува, плоштината на рамностраниот триаголник ABC, изразена преку страната a, е:

$$P(a) = a\frac{h}{2} = a\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

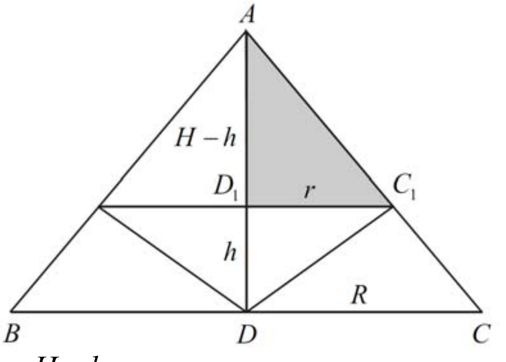
б) Од а) следува дека страната $a = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$. Оттука, плоштината на триаголникот изразена преку висината h е:

$$P(h) = a\frac{h}{2} = \frac{2h}{\sqrt{3}}\frac{h}{2} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}.$$

Задача 2. Во прав кружен конус со радиус R и висина H е впишан друг конус, чиј врв е во центарот на основата од правиот конус. Определи го волуменот на впишаниот конус како функција од неговиот радиус r.

Решение. Волуменот на впишаниот конус е $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi h$.

Од сличноста на триаголниците AD_1C_1 и ADC следува:



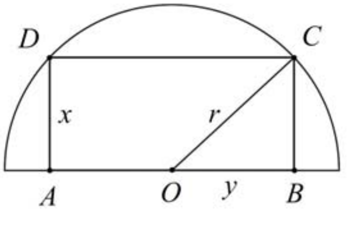
$$\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R}\Leftrightarrow RH-Rh=rH\Leftrightarrow$$

$$Rh=(R-r)H\Leftrightarrow h=\frac{(R-r)H}{R}.$$

Значи, волуменот на конусот, како функција од радиусот, е:

$$V=\frac{r^2(R-r)H}{3R}\pi .$$

Задача 3. Во полукруг со радиус r е впишан правоаголник со висина x. Изрази ја плоштината и периметарот на правоаголникот како функција од висината x.



Решение. Нека основата на паралелограмот е $2y$. Од правоаголниот триаголник OBC, според Питагоровата теорема имаме:

$$x^2+y^2=r^2\Leftrightarrow y^2=r^2-x^2\Leftrightarrow$$

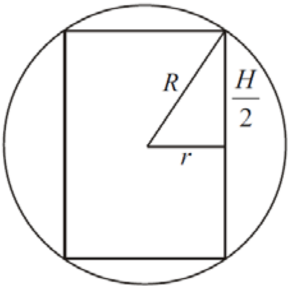
$$y=\sqrt{r^2-x^2}.$$

Оттука, плоштината и периметарот на правоаголникот изразени преку висината x се:

$$P(x)=2xy=2x\sqrt{r^2-x^2} \text{ и } L(x)=2x+4y=2x+4\sqrt{r^2-x^2}.$$

Задача 4. Во топка со радиус R е впишан цилиндар. Изрази го волуменот на цилиндарот како функција од неговата висина H.

Решение. На цртежот е прикажан оскиниот пресек на телата. Користејќи ја Питагоровата теорема добиваме:

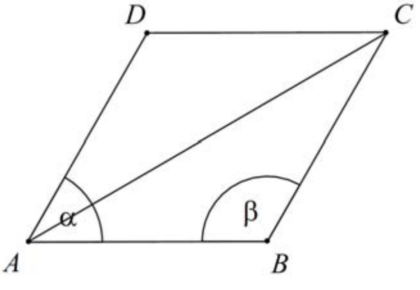


$$r^2+\left(\frac{H}{2}\right)^2=R^2 \Leftrightarrow r^2=R^2-\frac{H^2}{4}$$

Оттука, волуменот на цилиндарот е:

$$V=B\cdot H \Leftrightarrow V=r^2\pi H \Leftrightarrow V=\left(R^2-\frac{H^2}{4}\right)\pi H$$

Задача 5. Ромб со страна a има променливи агли, од кои едниот е означен со α. Изрази го збирот од дијагоналите како функција од α.



Решение. Да го означиме аголот при темето A со α, а аголот при темето B со β. Користејќи ја косинусната теорема за триаголникот ABC, за дијагоналата AC добиваме дека:

$$\overline{AC}^2=a^2+a^2-2a^2\cos\beta=$$

$$2a^2(1-\cos\beta)=2a^2 2\sin^2\frac{\beta}{2}=$$

$$4a^2\sin^2\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)=4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \text{ од каде } \overline{AC}=2a\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Со примена на косинусната теорема за триаголникот ABD добиваме дека:

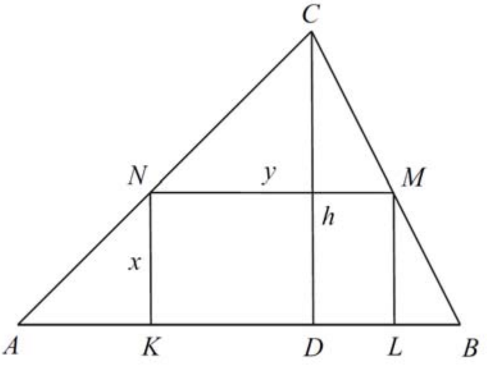
$$\overline{BD}^2=a^2+a^2-2a^2\cos\alpha=2a^2(1-\cos\alpha)=2a^2 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

од каде што $\overline{BD}=2a\sin\frac{\alpha}{2}$. Конечно, збирот од дијагоналите, изразен како функција од аголот, е:

$$y=\overline{AC}+\overline{BD}=2a\cos\frac{\alpha}{2}+2a\sin\frac{\alpha}{2}=2a\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Задача 6. Во триаголник со основа $\overline{AB}=c$ и висина $\overline{CD}=h$ е вписан правоаголникот $KLMN$, со висина $\overline{LM}=x$, така што страната $\overline{KL}$ лежи на основата. Изрази го периметарот и плоштината на правоаголникот како функција од x.

Решение. Нека
$$y=\overline{MN}=\overline{KL}.$$



Од сличноста на триаголниците ABC и NMC следува дека:
$$\frac{c}{y}=\frac{h}{h-x} \Leftrightarrow \; y=\frac{c}{h}\left(h-x\right).$$

Оттука, периметарот и плоштината на правоаголникот $KLMN$ се:
$$L\left(x\right)=2x+2y=2x+\frac{2c}{h}\left(h-x\right) \text{ и}$$
$$P\left(x\right)=xy=\frac{cx}{h}\left(h-x\right).$$

1.1.3 Дефинициона област на функција

Задача 1-4. Најди ја дефиниционата област на следниве функции:

1) $y=\dfrac{x^2-3}{3|x|-2}$; 2) $y=\dfrac{1}{x^2-x+1}$;

3) $y=\dfrac{1-x^3}{\left(x^2-2x+1\right)^5}$; 4) $y=\dfrac{1-x}{x^2-6x+5}$.

Решение. 1) Функцијата не е дефинирана во точките во кои
$$3|x|-2=0 \Leftrightarrow 3|x|=2 \Leftrightarrow |x|=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{3}.$$

Следува: $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right\}$.

2) Бидејќи $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$, следува дека $D_f=\mathbb{R}$.

3) Функцијата не е дефинирана за

$$\left(x^2-2x+1\right)^5=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Следува: $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

4) За да функцијата $y=\dfrac{1-x}{x^2-6x+5}$ биде дефинирана, потребно е $x^2-6x+5\neq 0$. Притоа,

$$x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=5,\ x=1.$$

Значи, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$.

Задача 5-8. Најди ја дефинициoната област на следниве функции:

5) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$; 6) $y=\sqrt[3]{x^2+x-5}$;

7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$; 8) $y=\sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}}$.

Решение. 5) Коренската функција е дефинирана кога поткореновиот израз е ненегативен, односно кога

$$x-1\geq 0,\ 1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1,\ x\leq 1 \Leftrightarrow x=1$$

Следува: $D_f=\{1\}$.

6) Бидејќи третиот корен е дефиниран за која било вредност на неговиот аргумент, дефинициoната област $D_f=\mathbb{R}$.

7) За да постои коренот $\sqrt{3-2x-x^2}$ треба за аргументот да важи $3-2x-x^2\geq 0$. За да постои количникот $\dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ треба именителот $\sqrt{3-2x-x^2}\neq 0$, односно $3-2x-x^2\neq 0$. Следува дека функцијата е дефинирана кога $3-2x-x^2>0$. Притоа,

$$3-2x-x^2=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x=-3,\ x=1.$$

Бидејќи коефициентот пред x^2 е негативен, параболата $y=3-2x-x^2$ е свртена „надолу“ и функцијата е позитивна меѓу $x=-3$ и $x=1$. Значи, дефинициoната област е $D_f=(-3,1)$.

8) Имаме:

$$\frac{x+5}{x-5} \geq 0 \overset{x \neq 5}{\Leftrightarrow} (x+5)(x-5) \geq 0 .$$

Нулите на равенката $(x+5)(x-5)=0$ се: $x=-5$ и $x=5$. Бидејќи коефициентот пред x^2 е позитивен, параболата $(x+5)(x-5)$ е свртена „нагоре“.

Значи, $D_f = (-\infty,-5] \cup (5,+\infty)$ или $D_f = \mathbb{R} \setminus [-5,5)$.

Задача 9-12. Најди ја дефиниционата област на следниве функции:

9) $y = \lg(1+x) + \lg(1-x)$; 10) $y = \sqrt{\ln(x^2+3x+3)}$;

11) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+3}{x}}$; 12) $e^{\frac{x+1}{x^2-1}}$.

Решение. 9) Бидејќи логаритамската функција е дефинирана само за позитивни вредности на аргументот, следува

$$1+x>0 \Leftrightarrow x>-1 \text{ и } 1-x>0 \Leftrightarrow x<1 .$$

Затоа, дефиниционата област е: $D_f = (-1,1)$.

10) Коренот е дефиниран ако:

$$\ln(x^2+3x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x^2+3x+3 \geq 1 .$$

Ќе ја решиме неравенката $x^2+3x+3 \geq 1$ т.е. $x^2+3x+2 \geq 0$. Бидејќи

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-2,\ x=-1 ;$$

и коефициентот пред квадратниот член е позитивен, следува

$$D_f = (-\infty,-2) \cup (-1,+\infty).$$

11) Треба да важи $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+3}{x} \geq 0$. Логаритамската функција со основа помала од 1 е ненегативна ако за аргументот важи

$$0 < \frac{2x+3}{x} \leq 1 .$$

За $x>0$ имаме:

$$0 < 2x+3 \leq x \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2},\ x \leq -3 \Leftrightarrow x \in \varnothing .$$

Значи, равенката нема решение во овој случај.

За $x<0$ имаме:

$$0 > 2x+3 \geq x \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2},\ x \geq -3 \Leftrightarrow x \in \left[-3,-\frac{3}{2}\right).$$

Следува: $D_f = \left[-3,-\frac{3}{2}\right)$.

12) Експоненцијалната функција е дефинирана за сите реални броеви. Рационалната функција $\frac{x+1}{x^2-1}$ постои за $x^2-1 \neq 0$ или за $x \neq \pm 1$. Следува: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

Задача 13-14. Најди ја дефиниционата област на функциите:

13) $y = \arcsin\frac{\sqrt{3x-1}}{2}$; 14) $y = \arccos\frac{1-2x}{5x}$.

Решение. 13) Функцијата $\arcsin$ е дефинирана на интервалот $[-1,1]$. Следува:

$$-1 \leq \frac{\sqrt{3x-1}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{3x-1} \leq 2.$$

Првата неравенка е исполнета за секоја вредност на x, додека од втората неравенка добиваме:

$$\sqrt{3x-1} \leq 2 \ \Leftrightarrow 0 \leq 3x-1 \leq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}, x \leq \frac{5}{3}.$$

Значи, $D_f = \left[\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$.

14) Прв начин. Бидејќи функцијата $\arccos$ е дефинирана на интервалот $[-1,1]$, следува дека $-1 \leq \frac{1-2x}{5x} \leq 1$. Од првиот дел на неравенството добиваме дека:

$$\frac{1-2x}{5x} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{5x}+1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+3x}{5x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+3x \geq 0 \\ 5x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1+3x \leq 0 \\ 5x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \leq -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (0,\infty) \\ x \in \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup (0, \infty) \ (1).$$

Од вториот дел на неравенството имаме:

$$\frac{1-2x}{5x} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{5x} - 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-7x}{5x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-7x \ge 0 \\ 5x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-7x \le 0 \\ 5x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \frac{1}{7} \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge \frac{1}{7} \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty, 0) \\ x \in \left[\frac{1}{7}, +\infty\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{7}, +\infty\right) \ (2).$$

Пресекот на интервалите на (1) и (2) ја одредува дефиниционата област:

$$D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{7}, +\infty\right).$$

Втор начин. Како и кај претходниот начин, најпрво заклучуваме дека треба да се исполнети неравенствата:

$$-1 \le \frac{1-2x}{5x} \le 1 \ \text{(1). Притоа, } x \ne 0.$$

Прв случај. Ако $x > 0$, при множење на неравенствата со $5x$ добиваме:

$$-5x \le 1-2x \le 5x,$$

од каде што

$$1-2x \le 5x \Leftrightarrow 7x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{7} \ \text{ и } \ -5x \le 1-2x \Leftrightarrow 3x \ge -1 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{3}.$$

Следува дека решението е пресек од решенијата на трите неравенки:

$$x > 0, \ x \ge \frac{1}{7} \text{ и } x \ge -\frac{1}{3}, \text{ односно } x \ge \frac{1}{7}.$$

Втор случај. Ако $x < 0$, при множење на двојното неравенство со $5x$ добиваме:

$$-5x \ge 1-2x \ge 5x.$$

Го решаваме системот од две неравенки:

$$-5x \ge 1-2x \Leftrightarrow 3x \le -1 \Leftrightarrow x \le -\frac{1}{3}; \ \text{ и } \ 1-2x \ge 5x \Leftrightarrow 7x \le 1 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{7}.$$

Решението е пресек од трите неравенки, односно $x \le -\frac{1}{3}$.

Конечното решение е унија од решенијата во двата случаи, или:

$$x \in \left(-\infty,-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{7},\infty\right).$$

1.1.4. Парност, непарност и периодичност на функција

Задача 1-4. Испитај ја парноста, непарноста и периодичноста на следниве функции:

1) $f(x) = x^6 - 3x^2$;   2) $f(x) = x - x^3$;

3) $f(x) = \cos x - \sin^2 x$;   4) $f(x) = \sin x - \cos x$.

Решение. Секоја неконстантна функција е или парна или непарна или ниту парна ниту непарна. Монотоните функции на некој од интервалите $(-\infty, a)$ или $(a,+\infty)$, какви што се функциите под а) и б), не се периодични.

1) $D_f = \mathbb{R}$ и

$$f(-x) = (-x)^6 - 3(-x)^2 = x^6 - 3x^2 = f(x).$$

Следува дека функцијата е парна.

2) $D_f = \mathbb{R}$ и

$$f(-x) = -x - (-x)^3 = -x + x^3 = -(x - x^3) = -f(x)$$

Следува дека функцијата е непарна.

3) $D_f = \mathbb{R}$ и

$$f(-x) = \cos(-x) - \sin^2(-x) = \cos x - (-\sin x)^2 = \cos x - \sin^2 x = f(x)$$

Следува дека функцијата е парна. Заради

$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) - \sin^2(x+2\pi) = \cos x - \sin^2 x = f(x),$$

следува дека функцијата е периодична со периода: $T = 2\pi$.

4) $D_f = \mathbb{R}$ и

$$f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x \neq \pm f(x).$$

Следува дека функцијата е ниту парна ниту непарна. Заради

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) - \cos(x+2\pi) = \sin x - \cos x$$

Следува дека функцијата е периодична со периода: $T = 2\pi$.

Задача 5-8. Испитај ја парноста и непарноста на следниве функции:

5) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 6) $f(x)=x\ln\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$;

7) $f(x)=\sqrt{x+2}$; 8) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Решение. 5) Заради

$$\frac{1-x}{1+x}>0 \overset{x\neq -1}{\Leftrightarrow} (1-x)(1+x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1) \Leftrightarrow D_f=(-1,1)$$

$$\text{и } f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x),$$

следува дека функцијата е непарна.

6) Бидејќи $1\pm x+x^2=\left(x\pm\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$, следува: $\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}>0$, односно функцијата е дефинирана на $\mathbb{R}$. Притоа,

$$f(-x)=-x\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=-x\ln\left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)^{-1}=x\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=f(x).$$

Следува дека функцијата е парна.

7) Функцијата е дефинирана за $x+2\geq 0$, од каде што $D_f=[-2,\infty)$. Бидејќи дефиниционата област не е симетрична, следува дека функцијата е ниту парна ниту непарна.

8) $D_f=\mathbb{R}$ и

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=f(x).$$

Следува дека функцијата е парна.

Задача 9. Докажи дека ако функцијата f е периодична со период T, тогаш функцијата F дефинирана со $F(x)=f(ax+b)$, $a>0$ е периодична со период $\dfrac{T}{a}$.

Решение. Бидејќи f е периодична функција, за неа важи $f(x+T)=f(x)$, за секој $T\neq 0$ и $x\in D_f$. Тогаш,

$$F\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f(ax+T+b)=$$
$$f((ax+b)+T)=f(ax+b)=F(x).$$

Следува дека F е периодична функција со период $\frac{T}{a}$.

Задача 10. Најди го основниот период на функцијата $f(x)=\cos 2x-4\cos 3x$.

Решение. Според претходната задача, основниот период на функцијата $\cos 2x$ е: $\frac{2\pi}{2}=\pi$, додека на $\cos 3x$ е: $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$. Бидејќи најмалиот заеднички содржател за π и $\frac{2}{3}\pi$ е 2π, следува дека основниот период на функцијата е 2π.

Задача 11. Најди го основниот период на функцијата $f(x)=\sin^2 x$.

Решение. Прв начин. Бројот π е период за функцијата $f(x)=\sin^2 x$ бидејќи:

$$\sin^2(x+\pi)=(-\sin x)^2=\sin^2 x.$$

Заради

$$\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

на интервалот $[0,\pi]$, единствени нули се $x=0$ и $x=\pi$. Следува дека π е основен период.

Втор начин. Со помош на тригонометрискиот идентитет

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,$$ добиваме:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Функцијата $y=\cos x$ е периодична со основен период $T=2\pi$ и заради претходната задача основниот период на функцијата $f(x)$ е:

$$T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$$

Задача 12. Најди функција која е периодична, но нема основен период.

Решение. Да ја разгледаме константната функција $f(x)=c$, каде што $c\in\mathbb{R}$.

За било кој реален број $T\neq 0$ важи $f(x+T)=c=f(x)$, од каде добиваме дека функцијата $f(x)=c$ е периодична функција. Множеството $\{T>0\mid f(x+T)=f(x)\}$ нема најмал елемент, па не постои реален број различен од 0, за кој важи $f(x+T)=f(x)$.

Задача 13. Докажи дека функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ не е периодична функција.

Решение. Прв начин. Функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ монотоно опаѓа на интервалот $\left(\frac{2}{\pi},+\infty\right)$. Следува дека функцијата не е периодична.

Втор начин. Во точката $x_0=\frac{2}{\pi}$, вредноста на функцијата е $f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. Нека T е произволен позитивен реален број. Тогаш

$$\frac{2}{\pi}+T\in\left(\frac{2}{\pi},+\infty\right) \text{ од каде } \frac{1}{\frac{2}{\pi}+T}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ па } f\left(\frac{2}{\pi}+T\right)=\sin\frac{1}{\frac{2}{\pi}+T}<1.$$

Значи не постои позитивен реален број T за кој $f\left(\frac{2}{\pi}\right)=f\left(\frac{2}{\pi}+T\right)$.

Следува функцијата $f(x)$ не е периодична.

Трет начин. Да ги разгледаме нулите на функцијата

$$\sin\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \Leftrightarrow x=\frac{1}{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Функцијата не е периодична бидејќи $x=\frac{1}{k\pi}\to 0$ кога $k\to\infty$.

1.1.5 Нули, множество вредности, ограниченост и монотоност на функцијата

Задача 1-2. Најди ги нулите на следниве функции:

$$1)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2-3}+\frac{5}{6}(x+1);\quad 2)\ f(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

Решение. 1) Го средуваме изразот:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-3}+\frac{5}{6}(x+1)=\frac{x+1}{x^2-3}+\frac{5x+5}{6}=$$

$$\frac{6(x+1)+5(x+1)(x^2-3)}{6(x^2-3)}=\frac{(x+1)(5x^2-15+6)}{6(x^2-3)}=\frac{(x+1)(5x^2-9)}{6(x^2-3)}.$$

Притоа,

$$(x+1)(5x^2-9)=0 \Leftrightarrow x+1=0\vee 5x^2-9=0 \Leftrightarrow$$

$$x=-1\vee x^2=\frac{9}{5} \Leftrightarrow x=-1\vee x=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Значи, нулите на функцијата се: $x=-1$, $x=\frac{3}{\sqrt{5}}$ и $x=-\frac{3}{\sqrt{5}}$.

2) Имаме $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ и функцијата не е дефинирана во $x=\frac{\pi}{2}$.

Следува дека нулите на функцијата се: $x=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$.

Задача 3-6. Кои од наведените функции се ограничени, а кои не се ограничени?

3) $f(x)=2x+1$; 4) $f(x)=5\cos x$;

5) $f(x)=-3\sin x$; 6) $f(x)=e^x$.

Решение. 3) Множеството вредности на функцијата е

$$V_{2x-1}=(-\infty,+\infty).$$

Значи, функцијата y е неограничена.

4) Бидејќи

$$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow -5 \le 5\cos x \le 5 .$$

следува дека функцијата y е ограничена.

5) Бидејќи

$-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow 3 \ge -3\sin x \ge -3 \Leftrightarrow -3 \le -3\sin x \le 3$,

следува дека функцијата е ограничена.

6) Множеството вредности на функцијата е: $V_{e^x} = (0,+\infty)$.

Значи, функцијата y е неограничена.

Задача 7-10. Кои од наведените функции се монотоно растечки, а кои монотоно опаѓачки?

7) $f(x) = 2x - 1$; 8) $f(x) = -3x + 1$;

9) $f(x) = 2^x$; 10) $f(x) = 2\log x$.

Решение. 7) За $x_2 > x_1$,

$$f(x_2) - f(x_1) = 2x_2 - 1 - (2x_1 - 1) = 2x_2 - 1 - 2x_1 + 1 = 2(x_2 - x_1) > 0 .$$

Следува дека функцијата $f(x) = 2x - 1$ е монотоно растечка.

8) За $x_2 > x_1$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3x_2 + 1 - (-3x_1 + 1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = -3 < 0 .$$

Следува дека функцијата $y = -3x + 1$ е монотоно опаѓачка.

9) Нека $x_2 > x_1$. Тогаш,

$$f(x_2) - f(x_1) = 2^{x_2} - 2^{x_1} = 2^{x_2}\left(1 - 2^{x_1 - x_2}\right).$$

Бидејќи $x_1 - x_2 < 0$, имаме $2^{x_1 - x_2} < 1$, односно $1 - 2^{x_1 - x_2} > 0$. Јасно $2^{x_2} > 0$, па $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Следува дека функцијата $y = 2^x$ е монотоно растечка.

10) За $x_2 > x_1$, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{2\log x_2 - 2\log x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2\log \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} > 0 .$

Следува дека функцијата е монотоно растечка

1.1.6. Инверзна функција

Задача 1. Најди инверзна функција на функцијата $f(x) = \cos x - 2$, на еден интервал на кој таа постои.

Решение. За да дефинираме инверзна функција f^{-1} на f , потребно е да направиме рестрикција на интервалот на кој функцијата е монотона. Таков интервал е $(0,\pi)$. Значи, $f^{-1}:[-1,1]\to(0,\pi)$. Правилото на пресликување на f^{-1} го добиваме ако ги замениме аргументот и сликата,

$$x=\cos f^{-1}(x)-2\text{, од каде што } f^{-1}(x)=\arccos(x+2).$$

Задача 2-5. За дадените функции најди ја инверзната функција ако постои:

2) $y=x^3$; 3) $y=x^4$;

4) $y=\log_5(x-1)$; 5) $y=\cos\dfrac{x+4\pi}{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

Решение. 2) Функцијата $y=x^3$ е монотона. Следува дека има инверзна функција. Инверзната функција се добива ако се заменат променливите x и y во равенката $y=x^3$

$$x=y^3 \Leftrightarrow y=\sqrt[3]{x}.$$

3) Бидејќи $y(-1)=y(1)=1$, следува дека $y=x^4$ нема инверзна функција на $\mathbb{R}$.

Да напомнеме дека $y=x^4$ има инверзна функција на секој од интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$. На $(-\infty,0)$ инверзната функција $y:(-\infty,0)\to(-\infty,0)$ е: $y=-\sqrt[4]{-x}$, а за $x\in(0,+\infty)$ инверзната функција $y:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ е: $y=\sqrt[4]{x}$.

4) $y=\log_5(x-1)$ има инверзна функција бидејќи е монотона. Ако x и y си ги заменат местата за $x>1$, добиваме:

$$x=\log_5(y-1)\Leftrightarrow 5^x=y-1\Leftrightarrow y=5^x+1.$$

5) $y=\cos\dfrac{x+4\pi}{2}=\cos\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\dfrac{x}{2}$ е монотона на интервалот $[0,2\pi]$. Следува дека има инверзна функција $y:[-1,1]\to[0,2\pi]$ зададена со:

$$x=\cos\frac{y}{2}\Leftrightarrow \frac{y}{2}=\arccos x\Leftrightarrow y=2\arccos x.$$

Задача 6. Какви треба да бидат константите a,b,c,d за да функцијата $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$:

а) има исто правило на пресликување со нејзината инверзна функција;

б) е инверзна сама на себе;

в) $f:D_f\to V_f$ е инверзна сама на себе.

Решение. Функцијата е дефинирана ако $c\neq 0$ или $d\neq 0$, т.е. $c^2+d^2>0$ (1) (за $c=0$ дефиниционата област е: $\mathbb{R}$, а за $c\neq 0$, $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$). Функцијата има инверзна за $ad\neq bc$ (2). За $ad=bc$ функцијата е константна, па нема инверзна (провери).

а) Го наоѓаме аналитичкиот запис на инверзната функција:

$$x=\frac{af^{-1}\left(x\right)+b}{cf^{-1}\left(x\right)+d}\Leftrightarrow x\left(cf^{-1}\left(x\right)+d\right)=af^{-1}\left(x\right)+b\Leftrightarrow$$

$$cxf^{-1}\left(x\right)+dx=af^{-1}\left(x\right)+b\Leftrightarrow f^{-1}\left(x\right)\left(cx-a\right)=b-dx\Leftrightarrow$$

$$f^{-1}\left(x\right)=\frac{b-dx}{cx-a}.$$

Функцијата има ист аналитички запис со нејзината инверзна функција ако:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-dx}{cx-a}\Leftrightarrow\left(ax+b\right)\left(cx-a\right)=\left(b-dx\right)\left(cx+d\right)\Leftrightarrow$$

$$acx^2-a^2x+bcx-ab=bcx+bd-cdx^2-d^2x\Leftrightarrow$$

$$c\left(a+d\right)x^2+\left(d^2-a^2\right)x-b\left(d+a\right)=0\Leftrightarrow\left(a+d\right)\left(cx^2+\left(d-a\right)x-b\right)=0.$$

Последното равенство е исполнето за секоја вредност на променливата x, ако

($a+d=0$, т.е. $d=-a$); или ($d=a$ и $b=c=0$) (3).

Заради (1)-(3) решенија се сите подредени четворки:

$$\left(a,b,c,-a\right),\ a\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\},\ b\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{a^2}{c}\right\};$$

$$\left(a,b,0,-a\right),\ a\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\},\ b\in\mathbb{R};\ \text{и}\ \left(a,0,0,a\right),\ a\in\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}.$$

б) Кодоменот на реалните функции е $\mathbb{R}$, освен ако поинаку не е дефинирано. Затоа, за да f и f^{-1} се еднакви покрај исто правило на пресликување, треба да имаат и ист домен и кодомен, т.е. $D_f = V_f = \mathbb{R}$, што е исполнето за: $c = 0$. Па, решенија се:

$$\left(a,b,0,-a\right),\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ b \in \mathbb{R};\ \text{и}\ \left(a,0,0,a\right),\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

в) Овој случај го опфаќа: б) и случајот при кој $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$, за кои треба $-\dfrac{d}{c} = \dfrac{a}{c}$, т.е. $d = -a$, што е еден од условите и за а). Следува дека решенијата се совпаѓаат со случајот под а).

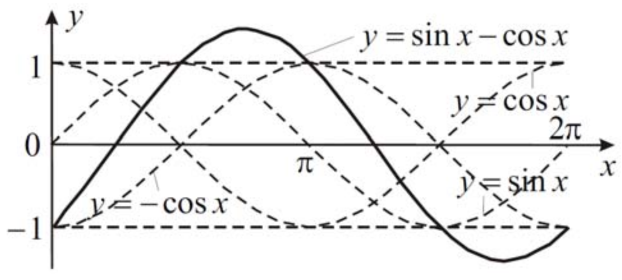
1.2. СКИЦИРАЊЕ КРИВИ

1.2.1. Скицирање графици на функциите зададени со експлицитни равенки

Задача 1-2. Скицирај го графикот на функцијата:

1) $y = \sin x - \cos x$; 2) $y = |\sin x|$.

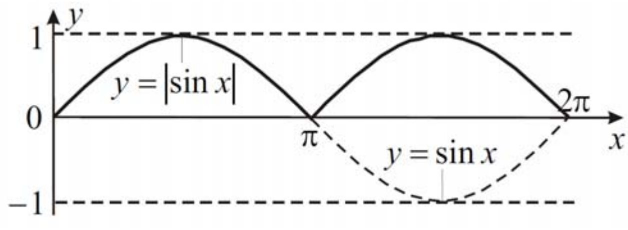
Решение. 1) Прво го цртаме графикот на функцијата $y = \sin x$, потоа $y = \cos x$ и со негова помош $y = -\cos x$. Најпосле, го скицираме бараниот график $y = \sin x - \cos x$ на тој начин што ги собираме ординатите на првиот и на третиот график.



2) За да го нацртаме графикот на функцијата:

$$y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x, \sin x > 0 \\ -\sin x, \sin x < 0 \end{cases},$$

го користиме графикот на функцијата: $y = \sin x$. Потоа, точките за кои $\sin x > 0$ ги оставаме на истото место, а точките за кои $\sin x < 0$ ги пресликуваме симетрично во однос на x-оската.



Задача 3-4. Скицирај го графикот на функцијата:

3) $y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}$; 4) $y=\frac{1}{2}(x+1)^3-1$.

Решение. 3) Ја сведуваме равенката на параболата во каноничен вид:

$$y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(x^2-2x+3\right)=$$

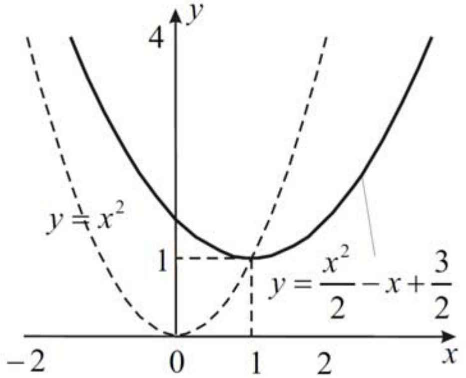
$$\frac{1}{2}\left(x^2-2x+1+2\right)=$$

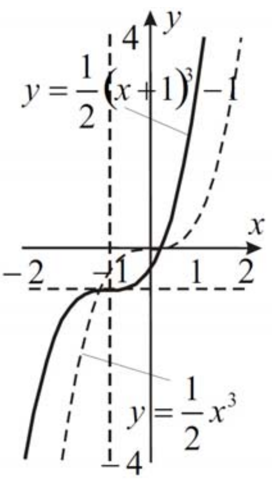
$$\frac{1}{2}\left((x-1)^2+2\right)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1.$$

Значи, темето на бараниот график ќе има координати

$$x=0+1=1 \text{ и } y=\frac{0+2}{2}=1.$$

Затоа, графикот на функцијата $y=x^2$ ќе го транслатираме така да неговото теме се совпадне со точката $(1,1)$ и ќе го растегнеме два пати.





4) Имаме $y+1=\frac{1}{2}(x+1)^3$. Ако $y'=\frac{1}{2}x'^3$, тогаш

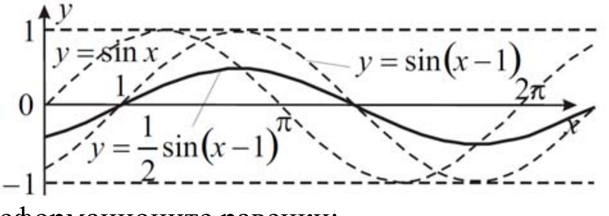
$$y+1=y',\quad x+1=x' \Leftrightarrow y=y'-1,\quad x=x'-1\,.$$

Значи, прво го цртаме графикот на функцијата $y'=\frac{1}{2}x'^3$. Потоа дадениот график го поместуваме за една единица на лево и за една единица надолу.

Задача 5-6. Скицирај ги графиците на следните функции:

5) $y=\frac{1}{2}\sin(x-1)$; 6) $y=2tg\left(\frac{x}{2}-1\right)$.

Решение. 5) Графикот на функцијата $y=\frac{1}{2}\sin(x-1)$ го цртаме со помош на елементарниот график $y'=\sin x'$.



Трансформационите равенки:

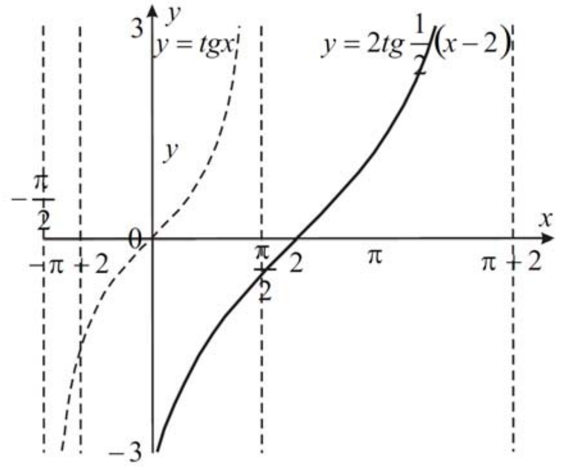
$$\underbrace{2y}_{y'}=\sin\underbrace{(x-1)}_{x'};\ \begin{cases} y'=2y \\ x'=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{y'}{2} \\ x=x'+1 \end{cases},$$

ни кажуваат дека прво графикот на функцијата $y'=\sin x'$ го поместуваме по x-оската за една единица на десно, а потоа го сплескуваме по y-оската два пати, односно ординатите на новодобиениот график ги делиме со 2.

6) Го цртаме графикот на функцијата $y'=tgx'$. Бидејќи

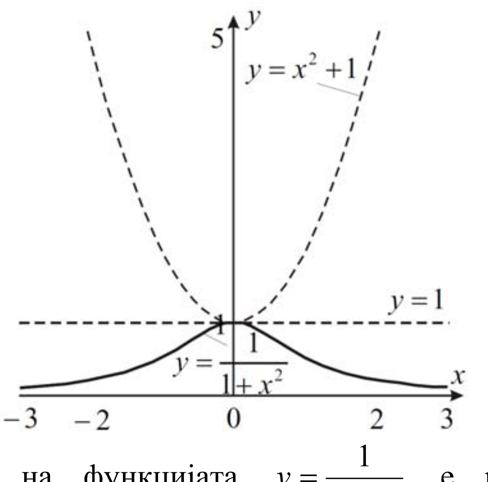
$$\underbrace{\frac{y}{2}}_{y'}=tg\left(\underbrace{\frac{x-2}{2}}_{x'}\right),\ \begin{cases} y'=\dfrac{y}{2} \\ x'=\dfrac{x-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x'+2 \\ y=2y' \end{cases},$$

за да го добиеме бараниот график, прво графикот го поместуваме за две единици во десно во однос на x-оската, а потоа го издолжуваме два пати во однос на y-оската.



Задача 7-8. Скицирај ги графиците на следните функции: 7) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$;   8) $y = \dfrac{1}{3\cos(x-1)}$.

Решение. **а)** Го цртаме графикот на функцијата $y = x^2 + 1$, директно или со транслатирање на графикот на функцијата $y = x^2$ за една единица нагоре по y-оската.

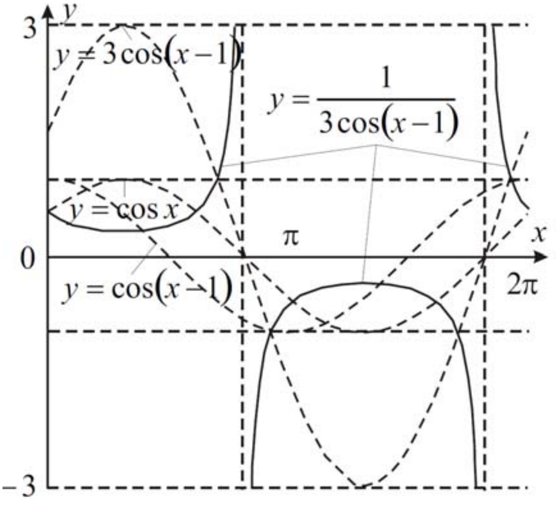


Графикот на функцијата $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ е реципрочен на претходниот. За да го нацртаме него, прво ги цртаме правите $y = -1$ и $y = 1$ и со нивна помош ги определуваме реципрочните вредности на ординатите на точките од графикот.

8) Имајќи предвид дека:

$$y' = \cos x' \Leftrightarrow \underbrace{\frac{y}{3}}_{y'} = \cos\left(\underbrace{x-1}_{x'}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3y' \\ x = x'+1 \end{cases},$$

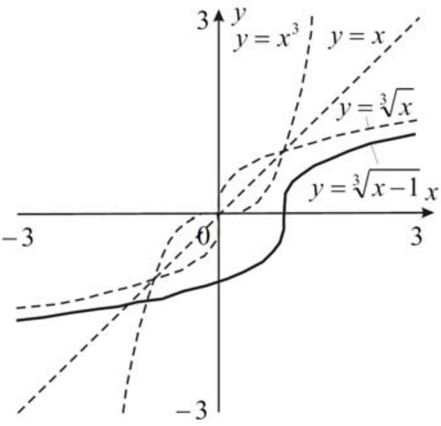
графикот на функцијата $y = 3\cos(x-1)$ ќе го нацртаме со поместување на графикот на функцијата $y = \cos x$ за една единица десно по x-оската и со издолжување три пати по y-оската. Потоа го цртаме графикот на функцијата $y = \dfrac{1}{3\cos(x-1)}$, за кој ординатите на неговите точки имаат реципрочни вредности во однос на ординатите на точките од претходниот график.

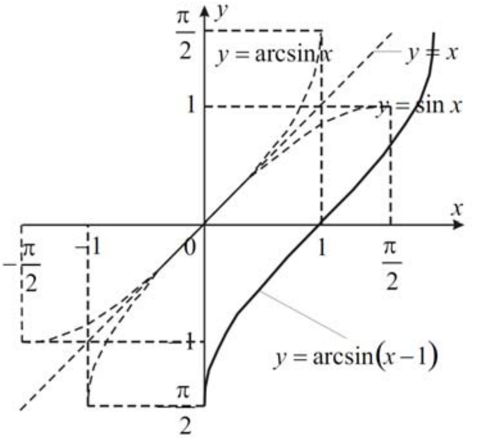


Задача 9-10. Скицирај ги графиците на функциите: 9) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 10) $y = \arcsin(x-1)$.

Решение. 9) Прво го цртаме графикот на функцијата $y = x^3$. Потоа го цртаме графикот на инверзната функција $y' = \sqrt[3]{x'}$, кој е симетричен на претходниот график во однос на правата $y = x$. На крај, овој график го транслатираме за една единица на десно по x-оската, бидејќи:

$$y' = \sqrt[3]{x'} \Leftrightarrow \underbrace{y}_{y'} = \sqrt[3]{\underbrace{x-1}_{x'}} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y' \\ x = x'+1 \end{cases}.$$





10) Заради

$$y' = \arcsin x' \Leftrightarrow \underbrace{y}_{y'} = \arcsin\left(\underbrace{x-1}_{x'}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y' = y \\ x' = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = y' \\ x = x' + 1 \end{cases},$$

графикот на функцијата

$$y = \arcsin(x-1)$$

ќе го добиеме со транслација на претходниот график за една единица на десно по x-оската.

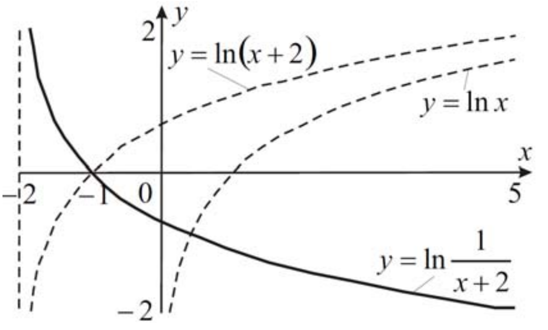
> **Задача 11-12.** Скицирај ги графиците на следниве функции:
>
> $$11)\ y = \ln\frac{1}{x+2}; \qquad 12)\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2.$$

Решение. 11) Имајќи предвид дека:

$$y = \ln\frac{1}{x+2} = \ln(x+2)^{-1} = -\ln(x+2), \text{ и}$$

$$y' = \ln x' \Leftrightarrow \underbrace{-y}_{y'} = \ln\left(\underbrace{x+2}_{x'}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -y' \\ x = x' - 2 \end{cases}$$

графикот на функцијата $y = \ln\dfrac{1}{x+2}$ ќе го нацртаме со поместување за две единици на лево по x-оската на графикот на $y = \ln x$, а потоа со наоѓање на неговиот симетричен график, исто така, во однос на x-оската.

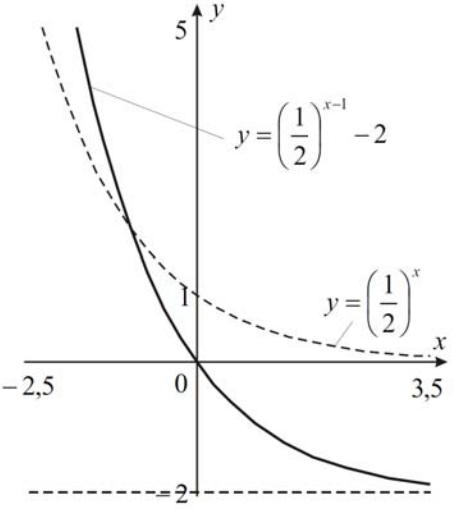


12) Бидејќи

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \Leftrightarrow \underbrace{y+2}_{y'}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\overbrace{x-1}^{x'}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y+2=y' \\ x-1=x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=y'-2 \\ x=x'+1 \end{cases},$$

графикот на функцијата $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-2$ ќе го нацртаме со поместување на една единица на десно и две единици надолу на елементарниот график $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

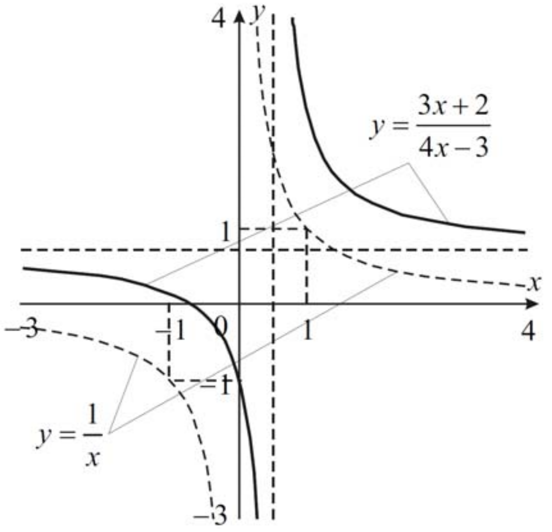


Задача 13. Скицирај го графикот на функцијата $y=\dfrac{3x+2}{4x-3}$.

Решение. Го средуваме изразот:

$$y=\frac{3x+2}{4x-2}=\frac{\frac{3}{2}2x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+2}{2(2x-1)}=\frac{1}{2}-\frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{7}{2}}{2(2x-1)}=\frac{3}{4}+\frac{\frac{7}{4}}{2x-1}.$$

Ако го нацртаме графикот на функцијата $y'=\dfrac{1}{x'}$, кој претставува хипербола што лежи во прв и трет квадрант, а асимптоти ѝ се координатните оски , тогаш од трансформациските равенки:



$$y'=\frac{1}{x'} \Leftrightarrow \underbrace{y-\frac{3}{4}}_{y'}=\frac{1}{\underbrace{\frac{4}{7}(2x-1)}_{x'}} \Leftrightarrow \begin{cases} y-\dfrac{3}{4}=y' \\ 2x-1=\dfrac{7}{4}x' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=y'+\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{7}{8}x'+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

гледаме на кој начин се поместува и се деформира истиот за да се добие графикот на функцијата $y=\dfrac{2x-3}{4x+2}$. Притоа, асимптоти на графикот се правите $x=\dfrac{1}{2}$ и $y=\dfrac{3}{4}$.

1.2.2. Скицирање криви зададени со параметарски равенки

Задача 1-2. Скицирај ги графиците на следните функции:
1) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; 2) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Решение. 1) Функциите $x=a\cos^3 t$ и $y=a\sin^3 t$ имаат заедничка периода: $T=2\pi$. Затоа, за $t\in[0,2\pi]$, ќе бидат испишани сите точки од кривата $x=a\cos^3 t$, $y=a^3\sin t$.

Ако (x,y) е точка од графикот на кривата

$$x(t)=a\cos^3 t,\ y(t)=a\sin^3 t;$$

добиена за некоја вредност на параметарот t, тогаш, бидејќи

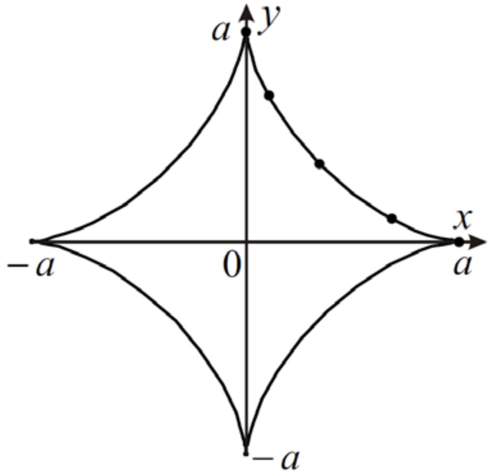
$$a\cos^3(-t+\pi)=-a\cos^3 t=-x,\ a\sin^3(-t+\pi)=a\sin^3 t=y \text{ и}$$

$$a\cos^3(-t)=a\cos^3 t=x,\ a\sin^3(-t)=-a\sin^3 t=-y\ ,$$

следува дека точките $(x,-y)$ и $(-x,y)$ се, исто така, точки од графикот на кривата. Значи, кривата е симетрична во однос на x и y-оските. Затоа, доволно е да го нацртаме нејзиниот график на интервалот $[0,\pi/2]$, а потоа да го пресликаме симетрично во однос на x и y-оските. Формираме табела со карактеристичните вредности на интервалот $[0,\pi/2]$:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a\approx 0,65a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a\approx 0,35a$	$\frac{1}{8}a\approx 0,125a$	0
y	0	$\frac{1}{8}a\approx 0,125a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a\approx 0,35a$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a\approx 0,65a$	a

и ги нанесуваме точките во координатен систем.



2) За да го нацртаме графикот на функцијата

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),$$

прво определуваме неколку точки од графикот кои што потоа ги поврзуваме, имајќи го предвид однесувањето на функциите

$$x(t) \text{ и } y(t).$$

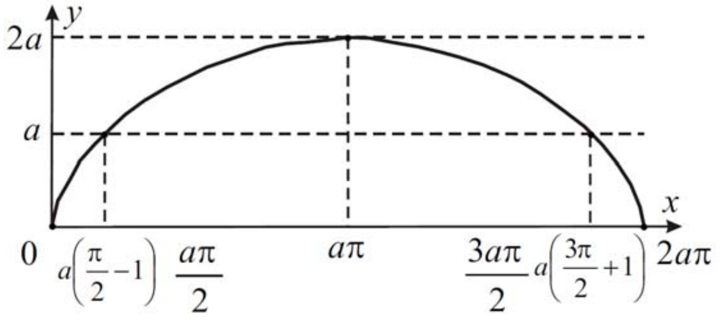
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\approx 0,57a$	$a\pi$	$a\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)\approx 5,71a$	$2a\pi\approx 6,28a$.
y	0	a	$2a$	a	0

Бидејќи

$$y(t+2k\pi)=a\big(1-\cos(t+2k\pi)\big)=a(1-\cos t)=y(t),\ k\in\mathbb{Z};\ \text{и}$$

$$x(t+2k\pi)=a\big((t+2k\pi)-\sin(t+2k\pi)\big)=2ak\pi+x(t),\ k\in\mathbb{Z};$$

кривата е график на периодична функција со период 2π. Затоа, доволно е кривата да ја нацртаме на интервалот $[0,2\pi]$.



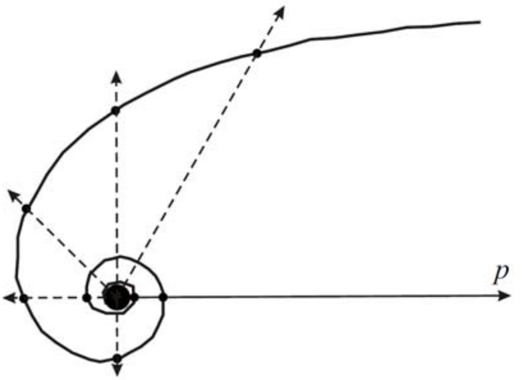
1.2.3. Скицирање криви зададени со поларните равенки

Задача 1-2. Скицирај ги графиците на функциите:

1) $\rho=\dfrac{a\pi}{\varphi}$; б) $\rho=a$.

Решение. 1) Формираме табела на вредностите за променливите φ и $\rho=a\pi/\varphi$:

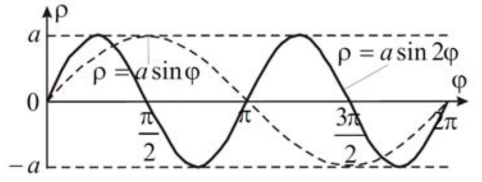
φ	0^+	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	4π	$+\infty$
ρ	$+\infty$	$3a$	$2a$	$\frac{4}{3}a$	a	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{4}a$	0^+

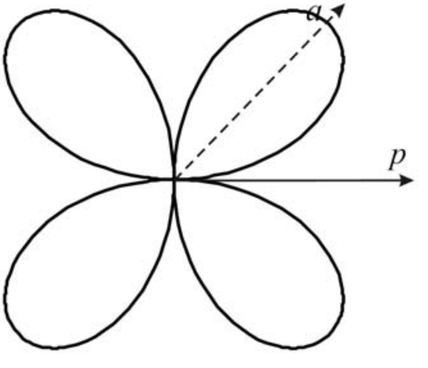


2) Графикот на функцијата $\rho = a$ претставува централна кружница со радиус a.

Задача 3-4. Скицирај ги графиците на функциите:
3) $\rho = a\sin 2\varphi$; 4) $\rho = a(1-\sin\varphi)$.

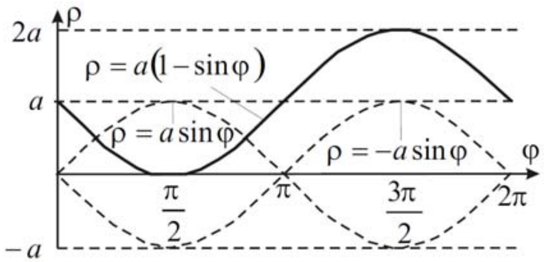
Решение. 3) Прво го цртаме графикот на функцијата $\rho = a\sin 2\varphi$ во Декартови координати, со помош на графикот на $\rho = a\sin\varphi$:

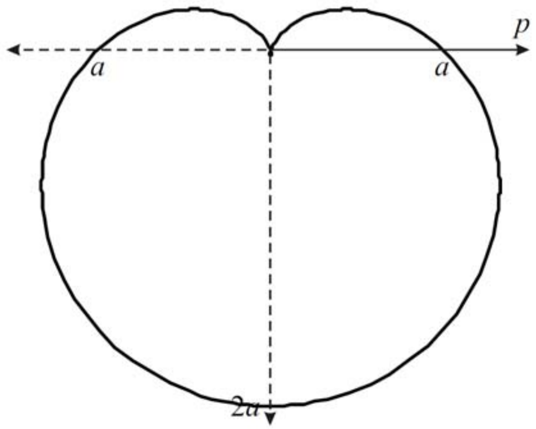




а потоа за произволна вредност на φ ја отчитуваме вредноста за ρ и ги нанесуваме точките на графикот на функцијата зададена во поларни координати. За добра скица со што помалку точки внимаваме на зависноста прикажана на првиот график.

4) Го цртаме прво графикот на функцијата $\rho = a(1-\sin\varphi)$ зададена во декартови координати, а потоа во поларниот координатен систем ги нанесуваме точките на графикот на почетната функција. За брзо нанесување и за избор на точките, ја имаме предвид зависноста на ρ и φ од претходниот график.





Задача 5-6. Трансформирај ги во поларни координати равенките:

5) $x^2 - y^2 = a^2$; 6) $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение. 5) Користејќи дека $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$ и дека радиусот ρ и параметарот a се позитивни броеви, добиваме дека:

$$x^2 - y^2 = a^2 \Leftrightarrow \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = a^2 \Leftrightarrow \rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = a^2 \Leftrightarrow$$

$$\rho^2\cos 2\varphi = a^2 \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi} \Leftrightarrow \rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

6) На ист начин како под а) добиваме:

$$\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - a\rho\cos\varphi\right)^2 = a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\rho^2 - a\rho\cos\varphi\right)^2 = a^2\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2\left(\rho - a\cos\varphi\right)^2 = a^2\rho^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\rho - a\cos\varphi\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \rho - a\cos\varphi = a \Leftrightarrow \rho = a\left(1 + \cos\varphi\right).$$

1.3. НИЗИ

1.3.1. Дефиниција и основни поими на низа

Задача 1. Напиши ги првите неколку члена на низите:

а) $a_n = \left(-1\right)^n$; б) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; в) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Решение. Имаме:

а) $-1,1,-1,1,-1,1,\ldots$; **б)** $0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{6},\dfrac{5}{7},\ldots$; **в)** $1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots$.

Задача 2. Најди го општиот член на низите:

а) $2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{5}{4},\dfrac{6}{5},\ldots$ б) $1,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{16},\ldots$ в) $-1,2,-3,4,\ldots$

Решение. Имаме:

а) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$; **б)** $a_n = \dfrac{1}{n^2}$; **в)** $a_n = \left(-1\right)^n n$.

Задача 3-5. Испитај ја монотоноста на следниве низи:

а) $a_n = \dfrac{1}{n}$; б) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$; в) $a_n = \cos n\pi$.

Решение. 3) Прв начин. Ја споредуваме разликата на произволните два соседни члена од низата, со бројот 0,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n\left(n+1\right)} = -\frac{1}{n\left(n+1\right)} < 0$$

Бидејќи

$$a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow \ a_{n+1} < a_n,$$

низата монотоно опаѓа.

Втор начин. Го споредуваме количникот $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ со бројот 1,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Значи,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \text{ , од каде што } a_{n+1}<a_n \text{ .}$$

Трет начин. Со еквивалентни чекори го трансформираме неравенството $a_{n+1}-a_n<0$ до неравенство чија вистинитост е очигледна.

$$a_{n+1}-a_n<0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0 \ /n(n+1) \Leftrightarrow$$
$$n-(n+1)<0 \Leftrightarrow -1<0$$

Заради точноста на десното неравенство,следува: $a_{n+1}<a_n$.

4) Имаме:

$$a_{n+1}>a_n \Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}>\sqrt{n}-\sqrt{n+1} \Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{n+1}>\sqrt{n}+\sqrt{n+2} \ /^2 \Leftrightarrow$$
$$4(n+1)>n+2\sqrt{n}\sqrt{n+2}+n+2 \Leftrightarrow$$
$$n+1>\sqrt{n}\sqrt{n+2} \ \ /^2 \Leftrightarrow$$
$$n^2+2n+1>n(n+2) \Leftrightarrow 1>0 .$$

Последното неравенство очигледно е точно. Заради еквивалентност на чекорите точно е $a_{n+1}>a_n$. Следува дека низата монотоно расте.

5) Првите три члена на низата се:

$$a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=-1 .$$

Вториот член е поголем од првиот, а е помал од третиот. Следува дека низата не е монотона.

Задача 6. Пополни ја следнава табела:

Низа	Множество вредности	Макси-мум	Мини-мум	Супре-мум	Инфи-мум	Точка на натрупување
$\frac{1}{n^2}$						
$\frac{2n+1}{2n+2}$						
$(-1)^n$						
n^2-n						

Решение.

Низа	Множесто вредности	Макси-мум	Мини мум	Супре-мум	Инфи-мум	Точка на натрупување
$\dfrac{1}{n^2}$	$\left\{1,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{9},\ldots\right\}$	1	Нема	1	0	0
$\dfrac{2n+1}{2n+2}$	$\left\{\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{6},\dfrac{7}{8},\ldots\right\}$	Нема	$\dfrac{3}{4}$	1	$\dfrac{3}{4}$	1
$(-1)^n$	$\{-1,1\}$	1	-1	1	-1	$-1,1$
n^2-n	$\{0,2,6,\ldots\}$	Нема	0	Нема	0	Нема

1.3.2. Граница на низа по дефиниција

Задача 1-2. Со помош на теоремата за конвергенција на монотони низи, докажи ја конвергенцијата на низите:

1) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; 2) $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

Решение. 1) За секој природен број n важи:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{n}{n+2}}{\dfrac{n-1}{n+1}} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} = \frac{n^2+n}{n^2+n-2} > 1.$$

Следува: $a_{n+1} > a_n$, односно низата (a_n) монотоно расте.

Бројот 1 е горна граница на низата, бидејќи $a_n = \dfrac{n-1}{n+1} < 1$.

Значи, низата монотоно расте и е ограничена од горе. Следува дека низата конвергира.

2) За секој природен број n важи:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < 1.$$

Следува: $a_{n+1} < a_n$, односно низата (a_n) монотоно опаѓа.

Притоа, $a_n = \dfrac{1}{n!} > 0$. Следува дека 1 е долна граница за (a_n).

Значи, (a_n) е монотоно опаѓачка низа ограничена од долу. Следува дека (a_n) конвергира.

Задача 3-4. Со помош на дефиницијата за граница на низа докажи:

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{2n+1} = \infty$.

Решение. 3) Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Ја оценуваме разликата:

$$|a_n - a| = \left|\frac{n-1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-3}{2(2n+1)}\right| = \frac{3}{2(2n+1)}.$$

Притоа,

$$\frac{3}{2(2n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow 3 < 2(2n+1)\varepsilon \Leftrightarrow 3 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$3 - 2\varepsilon < 4n\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Значи, за секое $\varepsilon > 0$, постои $n_0 = \left[\dfrac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$, таков што за сите $n > n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$. Следува: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

4) Нека е дадено $M > 0$.

$$|a_n| = \left|\frac{n^2-1}{2n+1}\right| = \frac{n^2-1}{2n+1} = \frac{n\dfrac{2n+1}{2} - \dfrac{1}{2}n - 1}{2n+1} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\frac{n-2}{2n+1} > \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2},$$

каде што

$$\frac{n-1}{2} > M \Leftrightarrow n-1 > 2M \Leftrightarrow n > 2M+1.$$

Значи, за секое $M > 0$ постои $n_0 = [2M+1]$, таков што за сите $n > n_0$, $|a_n| > M$.

Следува: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{2n+1} = \infty$.

Задача 5. Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1}$, а потоа најди го најмалиот природен број n_0, таков што за сите $n>n_0$ да е исполнето $|a_n-a|<\varepsilon$, кога:

а) $\varepsilon=0{,}1$; б) $\varepsilon=0{,}05$; в) $\varepsilon=0{,}01$; г) $\varepsilon=0{,}005$.

Решение. Границата на функцијата е:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n}}{\frac{3n-2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}.$$

Понатаму:

$$|a_n-a|=\left|\frac{2n+1}{3n-2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{6n+3-6n+4}{3(3n-2)}\right|=\left|\frac{7}{3(3n-2)}\right|=\frac{7}{3(3n-2)}.$$

Притоа,

$$a_n-a<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{3(3n-2)}<\varepsilon \Leftrightarrow 7<3(3n-2)\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$7<9n\varepsilon-6\varepsilon \Leftrightarrow \frac{7+6\varepsilon}{9\varepsilon}<n.$$

Избираме: $n_0=\left[\frac{7+6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]=\left[\frac{7}{9\varepsilon}+\frac{2}{3}\right]$.

а) За $\varepsilon=0{,}1$,

$$n_0=\left[\frac{7}{9\cdot 0{,}1}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{70}{9}+\frac{6}{9}\right]=\left[\frac{76}{9}\right]=8;$$

б) За $\varepsilon=0{,}05$,

$$n_0=\left[\frac{7}{9\cdot 0{,}05}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{140}{9}+\frac{6}{9}\right]=\left[\frac{146}{9}\right]=16;$$

в) За $\varepsilon=0{,}01$,

$$n_0=\left[\frac{7}{9\cdot 0{,}01}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{700}{9}+\frac{6}{9}\right]=\left[\frac{706}{9}\right]=78;$$

г) За $\varepsilon=0{,}005$, $n_0=\left[\frac{7}{9\cdot 0{,}005}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{1400}{9}+\frac{6}{9}\right]=156$.

1.3.3. Пресметување граница на низа

Задача 1-4. Пресметај ги границите на низите:

1) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\left(n^2+3n-2\right)}{\left(n-1\right)^2}$; 2) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{n^2}$;

3) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+\left(n+1\right)!}{\left(n+2\right)!}$; 4) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+1\right)\left(3n+2\right)\left(5n-7\right)}{n^3}$.

Решение. 1) $L=5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-2}{n^2-2n+1}=$

$$5\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=5\frac{1+0-0}{1-0+0}=5\,;$$

2) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(1+2+\cdots+n\right)}{n^2}=$

$$2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+0=1\,;$$

3) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+\left(n+1\right)n!}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)n!}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(1+n+1\right)}{n!\left(n^2+3n+2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+3n+2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{n}}{n+3+\dfrac{2}{n}}=\frac{1+0}{+\infty+3+0}=0\,;$$

4) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(3+\dfrac{2}{n}\right)\left(5-\dfrac{7}{n}\right)}{n^3}=1\cdot3\cdot5=15\,.$

Задача 5-6. Пресметај ги границите на низите:

$$5)\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^6+n-2}+n}{n^2+n};\qquad 6)\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n+2}.$$

Решение. 5) Имаме:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{n^6+n-2}}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}-\frac{2}{n^6}}+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt[3]{1+0+0}+0}{1+0}=1$$

$$\textbf{6)}\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3\left(n+\frac{1}{n}\right)}}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\sqrt[3]{n+\frac{1}{n}}}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\sqrt[3]{\infty+0}}{1+0}=\infty.$$

Задача 7-8. Пресметај ги границите на низите:

$$7)\ L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2}\right);\qquad 8)\ L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right).$$

Решение.

$$\textbf{7)}\ L=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2}\right)\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2+2\qquad /:n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}\ \ /:n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2+2}{n^2}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$$

$$\textbf{8)}\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Задача 9-10. Пресметај ги границите на низите:

$$9)\ L=\lim_{n\to\infty} n\left(\ln(n+1)-\ln n\right);\ 10)\ L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Решение.

$$\textbf{9)}\ L=\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=$$

$$\ln\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\ln e=1$$

$$\textbf{10)}\ L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}\frac{2}{n+1}(n+2)}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}}=e^{2}.$$

Задача 11-12. Пресметај ги границите на низите:

$$11)\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}};\qquad 12)\ L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^{10}.$$

Решение.

$$\textbf{11)}\ L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{5^n}+\frac{5^n}{5^n}}{\frac{2\cdot 2^n}{5^n}+\frac{5\cdot 5^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{2\left(\frac{2}{5}\right)^n+5}=\frac{1}{5}.$$

$$\textbf{12)}\ L=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^{10}=$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{4+\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}\right)^{10}=\left(\frac{2}{4}\right)^{10}=\frac{1}{2^{10}}.$$

1.4. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

1.4.1. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА ПО ДЕФИНИЦИЈА

Задача 1. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека $\lim\limits_{x\to 3}(-2x+3)=-3$.

Решение. Прв чекор, погодување на вредноста за δ. Нека е даден позитивниот број ε. Сакаме да најдеме позитивен број $\delta=\delta(\varepsilon)$, таков што

$$|f(x)-A|=|-2x+3-(-3)|=|-2x+6|<\varepsilon,$$

кога $0<|x-x_0|=|x-3|<\delta$. Ја оценуваме разликата

$$|f(x)-A|=|-2x+3-(-3)|=|-2x+6|=|-2(x-3)|=2|x-3|<2\delta,$$

Притоа, за да го поврземе изразот $|-2x+6|$ со $|x-3|$, го искористивме равенството $|-2x+6|=2|x-3|$. Неравенството $|x-3|<2\delta$ ни сугерира да избереме $2\delta=\varepsilon$, односно $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Втор чекор, покажување дека избраниот број δ ги исполнува условите. Значи, за секое $\varepsilon>0$ постои $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, таков што од $0<|x-3|<\delta$ следува: $|-2x+3-(-3)|<\varepsilon$.

Со тоа покажавме дека: $\lim\limits_{x\to 3}(-2x+3)=-3$.

Задача 2. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x}{x-3}=18$.

Решение. Нека е даден позитивниот број ε. Ќе најдеме позитивен број δ, таков што од $0<|x-x_0|=|x-3|<\delta$ да следува $|f(x)-A|=|f(x)-18|<\varepsilon$. Бидејќи

$$\left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x^3-9x}{x-3}-18\right|=\left|\frac{x\left(x^2-9\right)}{x-3}-18\right|=\left|\frac{x(x-3)(x+3)}{x-3}-18\right|=$$

$$\left|x(x+3)-18\right|=\left|x^2+3x-18\right|=\left|x^2-3x+6x-18\right|=$$

$$\left|x(x-3)+6(x-3)\right|=\left|x+6\right|\left|x-3\right|,$$

за да ја оцениме десната страна од равенствата избираме $\delta\le 1$, односно $\left|x-3\right|\le 1$, од каде што $-1\le x-3\le 1$ или $2\le x\le 4$. Следува дека:

$$\left|x+6\right|\,|\,x-3\,|<10\delta=\varepsilon \text{ за } \delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{10}\right\}.$$

Значи, за произволен позитивен број ε, најдовме позитивен број $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{25}\right\}$, таков што за секој $x\in D_f\setminus\{3\}$, од $|\,x-3\,|<\delta$ следува: $\left|\dfrac{x^3-9x}{x-3}-18\right|<\varepsilon$.

Следува: 18 е граница на $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{x-3}$ кога $x\to 3$.

Задача 3. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

Решение. Имаме $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, ако за секој позитивен број ε, постои позитивен број K, таков што за секој $x\in D_f$ од $\left|x\right|>K$ да следува $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Нека $\varepsilon>0$. Ако $\left|x\right|>K>0$ и

$$\left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x-2}{2x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-2-x}{2x}\right|=\left|-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{\left|x\right|}<\frac{1}{K}=\varepsilon \text{ за } K=\frac{1}{\varepsilon}.$$

Значи, за секој позитивен број ε, постои позитивен број $K=\dfrac{1}{\varepsilon}$, таков што $\left|\dfrac{x-2}{2x}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ кога $\left|x\right|>K$. Следува: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

Задача 4. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{2x}=\frac{1}{2}$.

Решение. Функцијата $y=f(x)$ има граница реален број A кога $x\to-\infty$ и ако за секој позитивен број ε постои позитивен број K, таков што $|f(x)-A|<\varepsilon$ кога $x<-K$.

Нека е даден позитивен број ε. Нека $x<-K<0$ и

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x-2}{2x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-2-x}{2x}\right|=\left|-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}=\frac{1}{-x}<\frac{1}{K}=\varepsilon$$

за некој позитивен број K. Притоа, од неравенството $x<-K$ следува дека $-x>K$, односно $\frac{1}{-x}<\frac{1}{K}$. Тогаш, равенството $\frac{1}{K}=\varepsilon$ е исполнето за: $K=\frac{1}{\varepsilon}$.

Значи, за секој позитивен број ε, постои позитивен број $K=\frac{1}{\varepsilon}$ таков што $\left|\frac{x-2}{2x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ кога $x<-K$. Следува: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{2x}=\frac{1}{2}$.

Задача 5. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{2x}=\infty$.

Решение. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$ ако за секој позитивен број M постои позитивен број K таков што $|f(x)|>M$ кога $x>K$.

Нека е даден позитивен број M. Ако $x>K$, тогаш:

$$|f(x)|=\left|\frac{x^2+2}{2x}\right|=\frac{x+\frac{2}{x}}{2}>\frac{x}{2}>\frac{K}{2}=M \text{ за } K=2M.$$

Значи, за за секој позитивен број M постои позитивен број $K=2M$, таков што

$$\left|\frac{x^2+2}{2x}\right|>M \text{ кога } x>K, \text{ односно } \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{2x}=\infty.$$

Задача 6. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{2x}=+\infty$.

Решение. Нека $M>0$, $x>K$ и

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2x}=\frac{x+\frac{2}{x}}{2}>\frac{x}{2}>\frac{K}{2}=M$$

за $\dfrac{K}{2}=M$, односно $K=2M$.

Значи, за за секој позитивен број M постои позитивен број $K=2M$, таков што $|f(x)|>M$ кога $x>K$. Значи, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{2x}=+\infty$.

Задача 7. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2}{2x}=+\infty$.

Решение. Нека $M>0$, $x>K$ и

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2x}=\frac{x+\frac{2}{x}}{2}>\frac{x}{2}>\frac{K}{2}=M \text{ за } K=2M .$$

Значи, за за секој позитивен број M постои позитивен број $K=2M$, таков што $|f(x)|>M$ кога $x>K$. Следува: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{2x}=+\infty$.

2.2.2. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

Задача 1-2. Пресметај ги границите:

1) $\lim\limits_{x\to2}\left(x^2+x+1\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-11}{2x+5}$.

Решение. 1) Границата од збирот x^2+x+1, на функциите x^2, x, 1 е збир од границите на функциите, ако истите постојат. Затоа,

$$\lim_{x\to2}\left(x^2+x+1\right)=\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}1=2^2+2+1=7 .$$

2) Границата од количникот $\frac{x^2-11}{2x+5}$ на функциите x^2-11 и $2x+5$, е количник од границите на функциите, ако границите постојат и количникот не е неопределен облик. Следува:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-11}{2x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 7}\left(x^2-11\right)}{\lim\limits_{x\to 7}\left(2x+5\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 7}x^2-\lim\limits_{x\to 7}11}{\lim\limits_{x\to 7}2x+\lim\limits_{x\to 7}5}=\frac{7^2-11}{19}=2.$$

Задача 3-5. Пресметај ги границите:

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-9}$.

Решение. 3) Границата од разликата $\sqrt{x^2-1}-x$ на функциите е разлика од границите на функциите $\sqrt{x^2-1}$ и x. Кога x неограничено опаѓа, тогаш x^2 неограничено расте. Следува и дека x^2-1 и $\sqrt{x^2-1}$ неограничено растат. Затоа,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}-\lim_{x\to-\infty}x=+\infty-\left(-\infty\right)=+\infty+\infty=+\infty.$$

4) Границата од производот $x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ на функциите x и $\sqrt{x^2+1}-x$ е производ од границите на функциите, ако границите постојат и производот не е неопределен облик. Аналогно како во претходниот случај имаме:

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\lim_{x\to-\infty}x\right)=\left(-\infty\right)\left(+\infty-\left(-\infty\right)\right)=\left(-\infty\right)\left(+\infty\right)=-\infty.$$

5) Кога $x\to-\infty$ именителот x^2-9 е позитивен и неограничено расте, па $\frac{2}{x^2-9}$ се стреми кон 0. Следува:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2-9}=\frac{2}{+\infty}=0.$$

Граници од рационални функции кога x тежи кон конечен број

Задача 6. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$.

Решение. Граничните вредности на функциите во броителот и именителот се:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x-3\right)=3^2-2\cdot 3-3=0 \text{ и } \lim_{x\to 3}(x-3)=3-3=0.$$

За граничната вредност на количникот добиваме неопределен облик $0/0$. Во овој случај ги средуваме членовите во броителот и именителот, односно полиномот во броител го разложуваме на производ од линеарни множители $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$. Потоа, броителот и именителот ги кратиме со членот $x-3$. Кратењето со $x-3$, поради кој ни се јавуваше неопределеноста, е можно бидејќи $x\neq 3$. Значи,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+1)=3+1=4.$$

Коментар. Разложувањето може да го направиме директно со помош на Виетовите формули, со групирање:

$$x^2-2x-3=x^2-3x+x-3=x(x-3)+x-3=(x+1)(x-3),$$

или со решавање на квадратната равенка:

$$x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1=3,\ x_2=-1,$$

од каде разложувањето на триномот е $(x-3)(x+1)$.

Задача 7. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Решение. Границите на функциите во броителот и во именителот се нула. Ги сведуваме полиномите во броителот и во именителот во каноничен вид,

$$x^2-2x+1=(x-1)^2 \text{ и } x^3-x=x\left(x^2-1\right)=x(x-1)(x+1),$$

и ги кратиме со членот $x-1$. Имаме:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{1-1}{1\cdot(1+1)}=0.$$

Граници од рационални функции кога x тежи кон бесконечност

Задача 8-9. Пресметај ги границите:

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-5x+10}{3x^2-9x+6}$; 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-5x+10}{3x^3-9x+6}$.

Решение. 8) Кога $x\to+\infty$ броителот и именителот се бесконечно големи големини и нивниот количник е неопределен израз од обликот $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. За да ја изгубиме неопределеноста, членовите во броителот и во именителот ги делиме со x^2.

Прв начин. Имаме:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-5x+10}{3x^2-9x+6}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{10}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{9x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}{3-\frac{9}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{5-0+0}{3-0+0}.$$

Втор начин. Равенствата може да ги трансформираме со извлекување на членот x^2,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-5x+10}{3x^2-9x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{9}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}{3-\frac{9}{x}+\frac{6}{x^2}}.$$

9) Кога $x\to-\infty$ броителот се стреми кон $-\infty$, а именителот кон $+\infty$. Ако членовите во полиномите ги поделиме со x^3, бидејќи има помал степен од членот со најголем степен во броителот, x^4 и членот со најголем степен во именителот, x^3, имаме:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-5x+10}{3x^3-9x+6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{10}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{9x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-\frac{5}{x^2}+\frac{10}{x^3}}{3-\frac{9}{x^2}+\frac{6}{x^3}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5(-\infty)-0+0}{3-0+0}=-\infty.$$

Задача 10-11. Пресметај ги границите:

$$10)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-3)^2}{x^5+5};\quad 11)\ \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-x\right).$$

Решение. 10) Кога $x\to+\infty$ броителот и именителот се бесконечно големи големини и нивниот количник е неопределен израз од обликот $\frac{+\infty}{+\infty}$. Полиномите во броителот и во именителот имаат степен 5. Затоа, изразот го трансформираме така што броителот го делиме со x^5. Притоа, $x^5=x^3x^2$ и полиномот $(2x+3)^3$, кој има степен 3, го делиме со x^3, а полиномот $(3x-3)^2$, кој има степен 2, со x^2.

$$\frac{(2x+3)^3(3x-3)^2}{x^5+5}=\frac{\dfrac{(2x+3)^3(3x-3)^2}{x^3x^2}}{\dfrac{x^5+5}{x^5}}=$$

$$\frac{\left(\dfrac{2x+3}{x}\right)^3\left(\dfrac{3x-3}{x}\right)^2}{1+\dfrac{5}{x^5}}=\frac{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)^3\left(3-\dfrac{3}{x}\right)^2}{1+\dfrac{5}{x^5}}.$$

Следува:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-3)^2}{x^5+5}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)^3\left(3-\dfrac{3}{x}\right)^2}{1+\dfrac{5}{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2+0)^3(3-0)^2}{1+0}=8\cdot 9=72.$$

11) Кога $x\to-\infty$ и $x^3\to-\infty$, па добиваме неопределен облик $(-\infty)-(-\infty)$. Со извлекување пред загради на членот x^3, бидејќи има најголем степен, добиваме:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{x}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=(-\infty)(1-0)=-\infty.$$

Граници што со рационализација се сведуваат на граници од рационални функции

Задача 12. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{4}{x+2}\right)$.

Решение. Кога

$$x\to -2\,,\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2}{x+2}=\frac{4}{0}=\infty \ \text{ и } \ \lim_{x\to -2}\frac{4}{x+2}=\frac{4}{0}=\infty\,.$$

Значи, добиваме неопределеност од видот $\infty-(\infty)$. Во овој случај ги средуваме изразите. Имаме:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2}{x+2}-\frac{4}{x+2}\right)=(\infty-(\infty))=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

Задача 13. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right)$

Решение. Имаме:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{x^2+2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{1-x}-\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2+2}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}-\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x^2}}=-1-1=-2\,.$$

Забелешка: Ако веднаш го средевме изразот, лимесот ќе го пресметавме на следниов начин:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x(x^2+2)-x^2(1-x)}{(1-x)(x^2+2)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{x(x^2+2)}{xx^2}-\frac{x^2(1-x)}{x^2x}}{\frac{(1-x)(x^2+2)}{xx^2}}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}-\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{1+0-(0-1)}{(0-1)(1+0)}=-2\,.$$

Граници од ирационални функции

Задача 14. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Решение. а) Бидејќи $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$, имаме неопределен облик $+\infty/-\infty$. Затоа, имајќи предвид дека $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ кога $x<0$, го трансформираме изразот во видот:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}},$$

од каде што $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\left(\dfrac{+\infty}{-\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{-\sqrt{1+0}}{1+0}=-1$.

Коментар. Изразот се трансформира и на следниов начин:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}.$$

Задача 15. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+2}$.

Решение. Бидејќи

$$\frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+2}=\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x}}{\frac{x+2}{x}}=\frac{\frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{\sqrt[3]{x^3}}}{\frac{x+2}{x}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2+x}{x^3}}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}},$$

имаме: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+2}=\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt[3]{0^++0^+}}{1+0}=\dfrac{0^+}{1}=0$.

Задача 16-17. Пресметај ги границите:

$$16)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}};\qquad 17)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Решение. 16) Откако ќе утврдиме дека ирациналната функција дава неопределен облик кога $x\to+\infty$, го средуваме изразот $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-1$, од каде што:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty-1=+\infty.$$

17) Од изразите во броителот и во именителот вадиме $\sqrt{x}$ пред заграда. Тоа е можно бидејќи функцијата $y(x)=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ е дефинирана за ненегативни вредности на аргументот x.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\right)}=\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}}}=$$

$$\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}=\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4}}}}=\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\quad \text{и}$$

$$\sqrt{x+1}=\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}.$$

Следува:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}}{\sqrt{1+0}}=1.$$

Задача 18. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Решение. а) Кога $x\to1$, функциите во броителот и во именителот, исто така, се стремат кон 0. Воведуваме смена $x=t^6$, односно $t=\sqrt[6]{x}$. Степеновиот показател 6 го избравме бидејќи $6=НЗС(2,3)$, што ни овозможува ирационалната функција да ја сведеме на рационална. Ако $x\to1$, тогаш $t\to\sqrt[6]{1}=1$. Следува:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{t^3-1}.$$

Одовде, со користење на формулите за разлика од квадрати и разлика од кубови $t^2-1=(t-1)(t+1)$ и $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$ добиваме:

$$\lim_{t\to1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=$$

$$\lim_{t\to1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

Втор начин. Неопределеноста може да ја избегнеме ако членот во броителот го дополниме до разлика на кубови, а членот во именителот го дополниме до разлика на квадрати.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt{1}+1}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2+\sqrt[3]{1}+1}=\frac{2}{3}.$$

Задача 19. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}$.

Решение. Бидејќи $НЗС(3,4)=12$, воведуваме смена $x+1=t^{12}$. Кога x се стреми кон 0, t се стреми кон $\sqrt[12]{0+1}=1$. Следува:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t^{12}}-1}{\sqrt[4]{t^{12}}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\left(t^3+t^2+t+1\right)}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^3+t^2+t+1}{t^2+t+1}=\frac{1+1+1+1}{1+1+1}=\frac{4}{3}.$$

Задача 20-21. Пресметај ги границите:

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)$; 21) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$.

Решение. 20) Ирационалната функција ја дополнуваме до разлика од квадрати. Следува:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)=(+\infty-(+\infty))=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{|x|\sqrt{1+\frac{a}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x\sqrt{1+\frac{a}{x}}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{a}{2}$$

.

Коментар. Да забележиме дека равенствата важат само за $x>0$. Всушност, изразот $x=\sqrt{x^2}$ е точен ако $x>0$. За $x<0$ важи $-x=\sqrt{x^2}$. Исто така, правилата $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ и $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ важат само за $a,b>0$. Од првата задача забележуваме дека кога $x\to-\infty$, изразот $\sqrt{x^2+ax}-x$ не е неопределен.

21) Границата ја пресметуваме со дополнување на изразот во броител до разлика од кубови:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)\frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^3+x^3}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^3+x^3}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Притоа, искористивме дека,

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}=\sqrt[3]{\left(1-(-\infty)^3\right)^2}=\sqrt[3]{\left(1-(-\infty)\right)^2}=\sqrt[3]{(1+\infty)^2}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt[3]{1-x^3}\right)=-(-\infty)\sqrt[3]{1-(-\infty)^3}=+\infty\sqrt[3]{1-(-\infty)}=+\infty(+\infty)=+\infty \text{ и}$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^2=(-\infty)^2=+\infty.$$

и дека сумата од трите граници, исто така, е: $+\infty$.

Задача 22. Пресметај ја границата: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Решение. Имаме:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\left((+\infty)(+\infty-(+\infty))\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

Граници што се пресметуваат со средување на функцијата

Задача 23-24. Пресметај ги границите:

$$23)\ L=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x};\qquad 24)\ L=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}}{x^x}.$$

Решение. 23) Во задачата имаме неопределеност од облик $0/0$.

Со помош на формулата за двоен агол го трансформираме именителот:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right).$$

Следува:

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=$$

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

24) Го трансформираме изразот:

$$\frac{e^{ax}}{x^x}=e^{\ln\frac{e^{ax}}{x^x}}=e^{\ln e^{ax}-\ln x^x}=e^{ax-x\ln x}=e^{x(a-\ln x)}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{x\to+\infty}x(a-\ln x)=(+\infty)(-\infty)=-\infty$ следува дека:

$$L=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{x(a-\ln x)}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x(a-\ln x)}=e^{-\infty}=0.$$

2.2.3. НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ ГРАНИЦИ

Граници што се сведуваат на границата: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Задача 1-2. Пресметај ги следниве граници:

1) $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$; 2) $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{x}$.

Решение. 1) Користејќи ја границата: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, со смената $ax=t$, при која кога $x\to 0$, следува дека $t\to 0$ и имаме:

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{ax}=a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=a\,.$$

2) Изразот во броителот го трансформираме со примена на формулата: $\sin 2x-\sin x=2\sin\dfrac{2x-x}{2}\cos\dfrac{2x+x}{2}=2\sin x\cos 3x$.

Тогаш,

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}2\cos 3x=1\cdot 2\cos 0=2\,.$$

Задача 3. Пресметај ја границата: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$.

Решение. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=1$.

Задача 4-5. Определи ги следниве граници:

4) $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$; 5) $L=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$.

Решение. 4) Границите во броителот $\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{\pi x}{2}=\cos\dfrac{\pi}{2}=1$ и во именителот $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$ даваат неопределен облик. За да ја искористиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, го трансформираме броителот $\cos\frac{\pi x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}(1-x)$ и воведуваме смена $1-x=t$ ($x=t+1$), каде, кога $x\to 1$, следува: $t\to 0$. Имаме:

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\pi}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

5) $L=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(x-\pi)(x+\pi)}=$

$$\left(\begin{array}{c} x-\pi=t \\ x\to\pi\Rightarrow t\to\pi-\pi=0\end{array}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi)}{t(t+2\pi)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t(t+2\pi)}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\lim_{t\to 0}\frac{1}{(t+2\pi)}=-1\cdot\frac{1}{0+2\pi}=-\frac{1}{2\pi}.$$

Притоа, го искористивме тригонометрискиот идентитет:

$$\sin(t+\pi)=-\sin t.$$

Задача 6-7. Пресметај ги границите:

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x^2)}{1-x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$.

Решение. 6) Имаме:

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x^2)}{1-x}\frac{(1+x)}{(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x^2)}{1-x^2}\lim_{x\to 1}(1+x)=$$

$$\lim_{x\to 1}(1+x)=1(1+1)=2.$$

7) Бидејќи $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\sin\frac{1}{\infty}=0$ имаме:

$$L=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(\begin{array}{c}\frac{1}{x}=t \\ \frac{1}{x}=t\Rightarrow t\to\frac{1}{\infty}=0\end{array}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Задача 8-9. Определи ги следниве граници:

$$8)\ L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right);\qquad 9)\ L=\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}.$$

Решение. 8) Заради $\lim\limits_{x\to 0}1/\sin x=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}1/tgx=\infty$ имаме неопределеност од видот $\infty-(\infty)$. Неопределеноста ја елиминираме со средување на изразот:

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}=\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=$$

$$\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

$$\text{Следува: } L=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{0}{1+1}=0.$$

Втор начин. Изразот се средува и со помош на формулата за двоен агол:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{x}{\sin x}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x}=\frac{x}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{x}{\sin x}, \text{ од каде}$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{0}{2}\cdot 1\cdot 1=0.$$

$$\mathbf{9)}\ L=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x}}{x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\sin x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\sin x}{\frac{x^2}{4}x4\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2\cos 0}\cdot 1^2\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Задача 10. Пресметај ја границата: $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$.

Решение. Прво ќе ја определиме границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{pmatrix}\arcsin x=t\Rightarrow x=\sin t\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{pmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

Оттука,

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{2x}=2.$$

Задача 11-12. Определи ги следниве граници:

$$11)\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}};\qquad 12)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}.$$

Решение. 11) Со помош на формулата за двоен агол го трансформираме именителот во следниот вид:

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\begin{cases}\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2},\ \sin\dfrac{x}{2}>0\\ \sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2},\ \sin\dfrac{x}{2}<0\end{cases}\text{, од каде што:}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}2=\sqrt{2},\ \sin\dfrac{x}{2}>0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\frac{x}{2}}{-\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-2)=-\sqrt{2},\ \sin\dfrac{x}{2}<0\end{cases}.$$

Бидејќи левиот и десниот лимес во нулата се различни, следува дека лимесот не постои.

12) Со помош на формулата за разлика од косинуси:

$$\cos 3x-\cos x=-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}=-2\sin 2x\sin x$$

добиваме:

$$L=-2\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-4\cdot 1\cdot 1=-4.$$

Задача 13. Определи ја границата: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}$.

Решение. Имаме:

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{array}{c} arctgx=t\Rightarrow x=tgt \\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{array}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{\cos t}}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\lim_{t\to 0}\cos t=1\cdot\cos 0=1.$$

Граници што се сведуваат на границата: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Задача 14-15. Определи ги следниве граници:

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+4}\right)^{\frac{x+3}{2}}$.

Решение. 14) Границата ќе ја пресметаме со сведување на границата: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$. Го трансформираме изразот, а потоа воведуваме смена $\dfrac{x}{5}=t$. Кога $x\to\infty$ следува $t\to\infty$. Затоа:

$$L=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}5}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{5}=e^{5}.$$

15) Бидејќи

$$\frac{3x+2}{3x+4}=1+\frac{3x+2}{3x+4}-1=1+\frac{3x+2-3x-4}{3x+4}=1+\frac{-2}{3x+4}=1+\frac{1}{\frac{3x+4}{-2}},\text{ па}$$

$$L=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{-2}}\right)^{\frac{3x-1}{-2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2}{3x-1}\frac{x+3}{2}}=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

Задача 16-17. Определи ги границите:

16) $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$; 17) $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{x^2+x}{2x+3}}$.

Решение. 16) За да границата ја сведеме на e, ја трансформираме степенската основа, така што прво ќе додадеме и ќе одземеме единица, а потоа сите членови, освен единицата, ќе ги рационализираме и ќе ги запишеме во реципрочен вид:

$$\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{x+1}{x-1}-1=1+\frac{2}{x-1}=1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}.$$

Потоа воведуваме смена $\dfrac{x-1}{2}=t$. Кога $x\to+\infty$ следува $t\to+\infty$. Во наредните задачи оваа смена нема да ја испишуваме. Значи,

$$L=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2}{x-1}x}=e^2.$$

Трансформациите можевме да ги спроведеме и со групирање:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}.$$

17) Заради

$$\frac{x^2+3x-1}{x^2+x-2}=1+\frac{x^2+3x-1}{x^2+x-2}-1=1+\frac{x^2+3x-1-x^2-x+2}{x^2+x-2}=$$

$$1+\frac{2x+1}{x^2+x-2}=1+\frac{1}{\frac{x^2+x-2}{2x+1}} \text{ и}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{2x+3}\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+2x^2+x}{2x^3+2x^2-4x+3x^2+3x-6}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{2x^3+5x^2-x-6}=1$$

следува:

$$L=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x-2}{2x+1}}\right)^{\frac{x^2+x-2}{2x+1}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x-2}\frac{x^2+x}{2x+3}}=e\,.$$

Задача 18. Определи ја границата: $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

Решение. Со помош на логаритамските формули $\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$ и $a\ln b=\ln b^a$, функцијата ја сведуваме во вид:

$$x\left(\ln(x+3)-\ln x\right)=\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^x=\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}.$$

Потоа, имајќи предвид дека логаритамската функција е непрекината, „влегуваме со границата во функцијата“. Имаме:

$$L=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3=\ln e^3=3\ln e=3\,.$$

Задача 19. Определи ја границата: $\lim\limits_{x\to\infty}x\log_2\left(\dfrac{10+x}{5+x}\right)$

Решение. Имаме:

$$\lim_{x\to\infty}x\log_2\left(\frac{10+x}{5+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{5+5+x}{5+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(1+\frac{5}{5+x}\right)^x=$$

$$\log_2\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5+x}{5}}\right)^{\frac{5+x}{5}\cdot\frac{5}{5+x}x}=\log_2 e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{5+x}}=\log_2 e^5=5\log_2 e\,.$$

Задача 20. Определи ја границата: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Решение. Воведуваме смена: $\frac{1}{x}=t$, $x=\frac{1}{t}$. Кога $x\to 0$, следува: $t\to\infty$. Затоа,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\,.$$

Задача 21. Определи ја границата: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Решение. Имајќи предвид дека $\cos x-1\to 0$ кога $x\to 0$, за да ја сведеме границата на $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, го трансформираме изразот:

$$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}},$$

и ја определуваме границата:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\cos x}=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}\,.$$

Конечно,

$$L=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\,.$$

Задача 22. Определи ја границата $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{ctg\pi x}$

Решение. Воведуваме смена: $\sin\pi x=t$. Кога $x\to 1$, следува: $t\to 0$.

$$L=\left(1^{\infty}\right)=\left(\lim_{t\to 0}(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}}\right)^{\frac{1}{\sin\pi x}\cos\pi x}=$$

$$\left(\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x}=e^{\cos\pi}=e^{-1}=\frac{1}{e}\,.$$

Границите: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

Задача 23-26. Определи ги следниве граници:

23) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$; 24) $L=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; 25) $L=\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. 23) Задачата ќе ја решиме со сведување на границата: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Имено,

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2\cdot 1=2.$$

24) $L=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{pmatrix} t=\frac{1}{x} \\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\end{pmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1\cdot$

25) Имајќи предвид дека $\ln x-1=\ln x-\ln e=\ln\frac{x}{e}$, добиваме:

$$L=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}=\begin{pmatrix}\frac{x}{e}=t+1 \\ x\to e\Rightarrow t\to\frac{e}{e}-1=0\end{pmatrix}=\frac{1}{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}=\frac{1}{e}.$$

Примери за неправилни постапки при пресметување граница или за непостоење граница

Задача 26-27. Каде е грешката во следниве постапки?

26) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{x+1}\underset{1}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}\cos x(x+1)}\underset{2}{=}$

$$\lim_{x\to 0}\left((1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)\cos x}\underset{3}{=}e^{(0+1)\cos 0}\underset{4}{=}e.$$

27) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\underset{1}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\underset{2}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}1\underset{3}{=}1$?

Решение. 26) Не важи 3-то равенство. Имено, кога $x \to 0$, следува: $\cos x \to 1$, па дадената граница не може да се сведе на границата $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Точната постапка е:

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{x+1} = (1+\cos 0)^{0+1} = 2.$$

27) Не важи првото равенство, бидејќи границите од функциите во броителот и во именителот треба истовремено да ги пресметаме. Точната постапка е:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty.$$

Задача 28. Докажи дека $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не постои.

Решение. Имајќи предвид дека: $\cos 2k\pi = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, избираме низа со општ член x_n, така што

$$\frac{1}{x_n} = 2n\pi,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2n\pi}.$$

Тогаш,

$$\lim_{x_n\to 0}\cos\frac{1}{x_n} = 1 \ (1).$$

Од друга страна, за низата (x_n), таква што

$$\frac{1}{x_n} = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{N}\text{, односно } x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}.$$

Тогаш,

$$\lim_{x_n\to 0}\cos\frac{1}{x_n} = \lim_{x_n\to 0}(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0 \ (2).$$

Од (1) и (2) следува дека границата не постои.

2.2.4 Бесконечно мали големини

Задача 1. Спореди ги следниве бесконечно мали големини:
$\alpha(x)=\sqrt{x(4-x)}$ и $\beta(x)=x$ кога $x\to 0^+$.

Решение. Функцијата $\alpha/\beta(x)$ е дефинирана на $(0,4]$. Следува:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x(4-x)}}{\sqrt{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x(4-x)}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{4}{x}-1}==\sqrt{+\infty-1}=+\infty.$$

Значи, $\alpha(x)=\sqrt{x(4-x)}$ е бесконечно мала големина од понизок ред во однос на $\beta(x)=x$ кога $x\to 0^+$.

Задача 2. Спореди ги следниве бесконечно мали големини:
$\alpha(x)=1-\cos x$ и $\beta(x)=x^{\frac{3}{2}}$ кога $x\to 0$.

Решение. Имаме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 x^{\frac{3}{2}}}\frac{x^2}{4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0.$$

Значи, $\alpha(x)$ е бесконечно мала големина од повисок ред во однос на $\beta(x)$ кога $x\to 0$.

Задача 3. Спореди ги следниве бесконечно мали големини:
$\alpha(x)=x^3-8$ и $\beta(x)=x^2-4$ кога $x\to 2$.

Решение. Имаме:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2}=3.$$

Значи, $\alpha(x)=x^3-8$ и $\beta(x)=x^2-4$ се бесконечно мали големини од ист ред кога $x\to 1$.

Задача 4. Спореди ги следниве бесконечно мали големини:

$$\alpha(x)=\frac{1}{x^2} \text{ и } \beta(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \text{ кога } x\to\infty.$$

Решение. Имаме: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

Значи, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се еквивалентни бесконечно мали големини кога $x\to\infty$.

Задача 5. Во зависност од параметрите a, $a>0$ и b, $b>0$, спореди ги бесконечно малите големини $\alpha(x)=x^a$ и $\beta(x)=x^b$ кога $x\to+\infty$.

Решение. Го разгледуваме количникот

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{x^b}=\lim_{x\to+\infty}x^{a-b}.$$

Ако $a>b$, тогаш $a-b>0$, па $L=+\infty$.

Следува дека x^a е бесконечно мала величина од повисок ред во однос на x^b.

Ако $a=b$, тогаш $a-b=0$, па $L=1$.

Следува дека x^a е еквивалентна бесконечно мала величина со x^b.

Ако $a<b$, тогаш $b-a>0$, па

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{-(a-b)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{b-a}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Значи, x^a е бесконечно мала големина од понизок ред во однос на x^b.

Задача 6-10*. Нека $\sigma(\alpha(x))$ означува бесконечно мала големина од повисок ред во однос на $\alpha(x)$. Докажи ги тврдењата:

6) $\sigma(x^a) \pm \sigma(x^b) = \sigma(x^c)$, $a, b > 0$ каде што $c = \min\{a, b\}$, кога $x \to 0$;

7) $\sigma(x^a)\sigma(x^b) = \sigma(x^{a+b})$, $a, b > 0$ кога $x \to 0$;

8) $k\sigma(x^a) = \sigma(x^a)$, $a > 0$ кога $x \to 0$;

9) $x^b \sigma(x^a) = \sigma(x^{a+b})$, $a > 0$, $a + b > 0$ кога $x \to 0$;

10) $(\sigma(x^a))^b = \sigma(x^{ab})$, $a, b > 0$ кога $x \to 0$.

Решение. 6) Бидејќи $\sigma(x^a)$ е бесконечно мала големина од повисок ред во однос на x^a кога $x \to 0$, важи: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma(x^a)}{x^a} = 0$.

Слично, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma(x^b)}{x^b} = 0$. Тогаш,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a) \pm \sigma(x^b)}{x^c} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a)}{x^c} \pm \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^b)}{x^c}.$$

Бројот c е помал или еднаков и од a и од b, па $c = a - d$ и $c = b - e$ за некои $d, e \geq 0$. Следува:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a)}{x^c} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a)}{x^{a-d}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a)}{x^a x^{-d}} = \lim_{x\to 0} x^d \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a)}{x^a} = 0 \cdot 0 = 0 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^b)}{x^c} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^b)}{x^{b-e}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^b)}{x^b x^{-e}} = \lim_{x\to 0} x^e \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^b)}{x^b} = 0 \cdot 0 = 0,$$

од каде што $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma(x^a)}{x^c} \pm \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma(x^b)}{x^c} = 0 + 0 = 0$, односно:
$\sigma(x^a) \pm \sigma(x^b) = \sigma(x^c)$.

7) Треба да покажеме дека $\sigma(x^a)\sigma(x^b)$ е бесконечно мала величина од повисок ред во однос на x^{a+b} кога $x \to 0$, односно
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma(x^a)\sigma(x^b)}{x^{a+b}} = 0$. Навистина,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a)\sigma(x^b)}{x^{a+b}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a)\sigma(x^b)}{x^a x^b} = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^a)}{x^a} \lim_{x\to 0} \frac{\sigma(x^b)}{x^b} = 0 \cdot 0 = 0.$$

8) 9) и **10)** се покажуваат аналогно.

Задача 11-12*. Користејќи ги правилата од претходната задача упрости ги изразите:

11) $\left(x+\sigma(x)\right)^2-\left(x^2+\sigma\left(x^2\right)\right)\left(1+\sigma(x)\right)$;

12) $x^2-\frac{1}{2}x-\sigma(x)-2\left(x+\sigma(x)\right)^3$.

Решение. 11) Најпрво го средуваме изразот:

$$\left(x+\sigma(x)\right)^2-\left(x^2+\sigma\left(x^2\right)\right)\left(1+\sigma(x)\right)=$$
$$x^2+2x\sigma(x)+\sigma^2(x)-\left(x^2+x^2\sigma(x)+\sigma\left(x^2\right)+\sigma\left(x^2\right)\sigma(x)\right)=$$
$$=2x\sigma(x)+\sigma^2(x)-x^2\sigma(x)-\sigma\left(x^2\right)-\sigma\left(x^2\right)\sigma(x).$$

Сега, имајќи ги предвид својствата од претходната задача, добиваме дека:

$$2x\sigma(x)=\sigma\left(x^2\right),\ -x^2\sigma(x)=\sigma\left(x^3\right),$$
$$-\sigma\left(x^2\right)=\sigma\left(x^2\right)\text{ и }\sigma\left(x^2\right)\sigma(x)=\sigma\left(x^3\right),$$

од каде што изразот се трансформира во:

$$\sigma\left(x^2\right)+\sigma\left(x^2\right)+\sigma\left(x^3\right)+\sigma\left(x^2\right)+\sigma\left(x^3\right)=\sigma\left(x^2\right).$$

12) Аналогно како во претходната задача, имаме:

$$x^2-\frac{1}{2}x-\sigma(x)-2\left(x+\sigma(x)\right)^3=$$
$$x^2-\frac{1}{2}x-\sigma(x)-2\left(x^3+3x^2\sigma(x)+3x\sigma^2(x)+\sigma^3(x)\right)=$$
$$x^2-\frac{1}{2}x-\sigma(x)-2x^3-6x^2\sigma(x)-6x\sigma^2(x)-2\sigma^3(x)=$$
$$-2x^3+x^2-\frac{1}{2}x+\sigma(x)+\sigma\left(x^3\right)+\sigma\left(x^3\right)+\sigma\left(x^3\right)=$$
$$-2x^3+x^2-\frac{1}{2}x+\sigma(x).$$

1.5. НЕПРЕКИНАТОСТ

Задача 1. Докажи дека функцијата $f(x)=x^4+3x^2-2x+5$ е непрекината.

Решение. Нека $x_0\in\mathbb{R}$. Заради непрекинатоста на степенската функција и правилата за оперирање со граници, важи:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(x^4+3x^2-2x+5\right)=x_0^4+3x_0^2-2x_0+5=f(x_0).$$

Следува дека функцијата е непрекината во точката x_0. Од произволноста на $x_0\in\mathbb{R}$, следува дека функцијата е непрекината.

Задача 2. Докажи дека функцијата $f(x)=ctgx$ е непрекината.

Решение. За секое $x_0\in D_f$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} ctgx=ctgx_0=f(x_0).$$

Од произволноста на $x_0\in D_f$, следува дека функцијата е непрекината, т.е. е непрекината на $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Задача 3*. Со помош на „$\varepsilon-\delta$" - дефиницијата за непрекинатост на функцијата, покажи ја непрекинатоста на функцијата $f(x)=x^2$.

Решение. Нека е дадено $\varepsilon>0$, $x_0\in\mathbb{R}$ и $x\in(x_0-1,x_0+1)$. Избираме: $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1}>0$. Тогаш, за сите x за кои $|x-x_0|<\delta$ следува:

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|x^2-x_0{}^2\right|=|x-x_0||x+x_0|<\delta(2|x_0|+1)=\varepsilon.$$

Значи, функцијата е непрекината во точката x_0. Од произволноста на $x_0\in\mathbb{R}$, следува дека функцијата е непрекината.

Задача 4. Испитај ја непрекинатоста на функцијата: $f(x)=\begin{cases} x\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Решение. Функцијата $f_1(x) = x\sin^2(1/x)$ е непрекината на секој од интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$. Следува дека и функцијата $f(x)$ е непрекината за секој $x \neq 0$.

Ќе ја испитаме непрекинатоста на функцијата во точката $x = 0$. Имаме: $f(0) = 0$ и заради $0 \leq \sin^2 \frac{1}{x} \leq 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, следува:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\sin^2 \frac{1}{x} = 0.$$

Следува дека функцијата е непрекината на $\mathbb{R}$.

Задача 5. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x|x-2|}{x-2}, x \neq 2 \\ 2, x = 2 \end{cases}.$$

Решение. Функцијата е непрекината за $x \neq 2$. За $x_0 = 2$, $f(2) = 2$ и заради

$$\frac{x|x-2|}{x-2} = \frac{x(x-2)\operatorname{sgn}(x-2)}{x-2} = x\operatorname{sgn}(x-2), \text{ добиваме:}$$

$$\lim_{x\to 2^-} x\operatorname{sgn}(x-2) = -2 \text{ и } \lim_{x\to 2^+} x\operatorname{sgn}(x-2) = 2.$$

Следува дека не постои $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, т.е. функцијата не е непрекината во $x_0 = 2$.

Значи, функцијата е непрекината на множеството $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 6. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}, x \neq 9 \\ \dfrac{1}{6}, x = 9 \end{cases}, \text{ во точката } x_0 = 9.$$

Решение. Во точката $x_0 = 9$, важи $f(9) = \frac{1}{6}$ и

$$\lim_{x\to 9} f(x) = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{x-9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} =$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=f(9)$, следува дека функцијата е непрекината во $x_0=9$.

Задача 7. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, x\neq 1 \\ 0, x=1 \end{cases}, \text{ во точката } x_0=1.$$

Решение. Имаме: $f(1)=0$. Ќе ги испитаме левата и десната граница во $x_0=1$.

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{\frac{1}{1^- -1}}=e^{-\infty}=0 \text{ и}$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{\frac{1}{1^+ -1}}=e^{+\infty}=+\infty$$

Бидејќи не постои $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, следува дека функцијата не е непрекината.

Задача 8. Испитај ги точките на прекин за функцијата:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}-2, x\in(-\infty,0) \\ -1, x=0 \\ \log_2\left(x+\frac{1}{2}\right), x\in(0,+\infty) \end{cases}.$$

Решение. Функцијата е непрекината за: $x\neq 0$. Во $x=0$,

$$f(0)=-1,\ f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(e^{-x}-2\right)=e^0-2=1-2=-1 \text{ и}$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-\log_2 2=-1.$$

Следува дека функцијата е непрекината во $x=0$. Значи, функцијата е непрекината на $\mathbb{R}$.

Задача 9. Испитај ги точките на прекин за функцијата:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

Решение. Функцијата $f\left(x\right)$ е непрекината за $x\neq 0$. Во $x=0$,

$$f\left(0\right)=0\text{, но }\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Бидејќи $x=0$ е точка на натрупување за дефиниционата област на функцијата, следува дека во дадената точка функцијата има прекин. Затоа што постојат левиот и десниот
лимес во нулата, прекинот е од прв ред, а бидејќи уште и се еднакви, прекинот е отстранлив.

Задача 10. Испитај ги точките на прекин за функцијата:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{3+2^{\frac{1}{5-x}}}.$$

Решение. Ако $x\neq 5$, тогаш функцијата е непрекината. Во точката $x=5$ функцијата не е дефинирана, па не е непрекината. Точката $x=5$ е точка на натрупување за дефиниционата област на функцијата:

$$f\left(5^{-}\right)=\lim_{x\to 5^{-}}f\left(x\right)=\lim_{x\to 5^{-}}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{5-x}}}=\frac{1}{3+2^{+\infty}}=0\text{ и}$$

$$f\left(5^{+}\right)=\lim_{x\to 5^{+}}f\left(x\right)=\lim_{x\to 5^{+}}\frac{1}{3+2^{\frac{1}{5-x}}}=\frac{1}{3+2^{-\infty}}=\frac{1}{3}$$

Следува дека $x=5$ е точка на прекин од прв ред.

Задача 11. Испитај ги точките на прекин за функцијата:

$$f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Решение. За $x\neq 2$, функцијата е непрекината. Во точката $x=2$, функцијата не е непрекината, бидејќи не е дефинирана во истата точка. Притоа, $x=2$ е точка на натрупување за функцијата и

$$f\left(2^{-}\right)=\lim_{x\to 2^{-}}e^{\frac{1}{x-2}}=e^{-\infty}=0\text{ и }f\left(2^{+}\right)=\lim_{x\to 1^{+}}e^{\frac{1}{x-2}}=e^{+\infty}=+\infty.$$

Бидејќи една од едностраните граници не постои како конечен број, следува дека функцијата има прекин од втор ред во $x = 2$.

Задача 12. Додефинирај ја функцијата: $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$ во точката $x_0 = 0$, така што да биде непрекината.

Решение. За да функцијата може да се додефинира во точката $x_0 = 0$, треба да има отстранлив прекин во истата точка, односно да постои границата на функцијата во $x_0 = 0$. Имаме:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{1+2x}-1} \frac{\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{1+2x-1} \frac{\sqrt[3]{(1+2x)^2}+\sqrt[3]{1+2x}+1}{1} = \left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}+1\right)\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 3.$$

За да биде: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ треба $f(0) = 3$.

Задача 13. Додефинирај ја функцијата $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$ во точката $x_0 = 1$, така што да биде непрекината.

Бидејќи

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \begin{pmatrix} x-1=t \Rightarrow x=t+1 \\ x\to 1 \Rightarrow t\to 0 \end{pmatrix} = \lim_{x\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

Следува: $f(1) = e$.

Задача 14. Определи ги вредностите на параметарот a, така што функцијата $f(x) = \begin{cases} x^2+2a, & x \le 0 \\ 2-x, & x > 0 \end{cases}$ да биде непрекината.

Решение. Вредноста на параметарот a ќе ја определиме од условот функцијата $f(x)$ да е непрекината во точката $x = 0$. Имаме:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^2 + 2a = 2a,\ f(0) = 2a \text{ и } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2 - 0 = 2,$$

од каде што $f(0^-) = f(0) = f(0^+) \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Задача 15. Определи ги вредностите на параметрите a и b, така што функцијата $f(x)=\begin{cases} 2ae^{x-1}+3b, & x<1 \\ 5, & x=1 \\ 4ax+b, & x>1 \end{cases}$ да биде непрекината.

Решение. Функцијата е непрекината за $x\neq 1$. Во $x=1$ имаме:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(2ae^{x-1}+3b\right)=2ae^0+3b=2a+3b,\ f(1)=5 \text{ и:}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(4ax+b\right)=4a+b.$$

Функцијата е непрекината во точката $x=1$, ако:

$$2a+3b=5 \text{ и } 4a+b=5.$$

Со одземање на првата од втората равенка добиваме: $2a-2b=0$, односно $a=b$. Заменуваме во втората равенка, $5b=5$ или $b=1$. Оттука, $a=1$.

Следува дека функцијата е непрекината ако $a=b=1$.

Задача 16. Определи ги вредностите на параметрите a и b, така што функцијата:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2}{\pi^2}-1, & x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ 2b+\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ a-5b\log_{\frac{\pi}{2}}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$ да биде непрекината.

Решение. Имаме:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\frac{a}{4}-1 \text{ и } \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)=2b+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2b-1,$$

при што следува дека функцијата е непрекината во точката $x=-\pi/2$, ако:

$$\frac{a}{4}-1=2b-1 \Leftrightarrow a=8b \ (1).$$

Понатаму,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)=2b+1 \text{ и } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)=a-5b\log_{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}=a-5b,$$

па функцијата е непрекината во точката $x = \pi/2$, ако:

$$2b+1 = a-5b \Leftrightarrow a-7b=1 \text{ (2).}$$

Ако параметарот a од равенката (1) го замениме во (2), добиваме $8b-7b=1$ или $b=1$. Оттука, $a=8$.

Следува дека функцијата е непрекината за $a=8$ и $b=1$.

Задача 17*. Определи ги вредностите на параметрите a и b, така што функцијата да биде непрекината: $f(x)=\begin{cases} x^a \sin x^b, x \neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$.

Решение. Функцијата $f_1(x)=x^a \sin x^b$ е непрекината за $x \neq 0$. За $x=0$, $f(0)=0$ и:

1. Случај, $b \geq 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^a \sin x^b = \lim_{x\to 0} x^{a+b} \frac{\sin x^b}{x^b} = 0 \text{ акко } a+b>0,$$

бидејќи

$$\text{за } b>0,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^b}{x^b}=1 \text{ и за } b=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^b}{x^b}=1\ ,$$

па за да бараниот лимес е нула треба $\lim_{x\to 0} x^{a+b}=0$, што е исполнето ако $a+b>0$.

2. Случај, $b<0$.

$$\lim_{x\to 0} x^a \sin x^b = 0 \text{ акко } a>0,$$

бидејќи $\lim_{x\to 0}\sin x^b$ не постои, но $\left|\sin x^b\right| \leq 1$ за секое $x \in \mathbb{R}$, па границата е нула ако $\lim_{x\to 0} x^a = 0$ акко $a>0$.

Значи, постојат бесконечно многу параметри a и b кои припаѓаат на множеството $\{(a,b) | a+b>0 \vee (a>0, b<0)\}$, за кои функцијата е непрекината на множеството реални броеви.

Задача 18*. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{\pi}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases} \text{ во } x_0=0.$$

Решение. За низата: (x_n), $x_n = \frac{1}{n}$ важи: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sin\frac{\pi}{\frac{1}{n}} = \sin n\pi = 0.$$

За низата: (x_n), $x_n = \frac{2}{4n+1}$ важи: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{4n+1} = 0$, но

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{\frac{2}{4n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1.$$

Следува: $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$ не постои, односно функцијата не е непрекината.

Задача 19*. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \textit{ако } x \textit{ е рационален број} \\ x, \textit{ако } x \textit{ е ирационален број} \end{cases}.$$

Решение. Функцијата е непрекината во точката $x_0 = 1$, бидејќи $f(1) = 1$ и $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Нека $x_0 \neq 1$ е рационален број. Тогаш, $f(x_0) = 1$. Избираме низа од ирационални броеви (x_n), таква што: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогаш,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{f(x_n)=x_n}{=} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \neq 1 = f(x_0).$$

Следува дека функцијата не е непрекината во ниту една рационална точка различна од единицата.

Нека $x_0 \neq 1$ е ирационален број. Тогаш, $f(x_0) = x_0$. Избираме низа од рационални броеви (x_n), такви што: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогаш,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{f(x_n)=1}{=} \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq x_0 = f(x_0).$$

Следува дека функцијата не е непрекината во ниту една ирационална точка.

Значи, функцијата е непрекината само во точката $x_0 = 1$.

2. ИЗВОДИ

2.1. ИЗВОД НА ФУНКЦИЈАТА ПО ДЕФИНИЦИЈА

Задача 1. Најди го нараснувањето на функцијата $y=\sin x$ во точката $x=\frac{5\pi}{4}$, ако нараснувањето на аргументот е $\Delta x=-\frac{\pi}{12}$.

Решение. Нараснувањето на функцијата Δy е разлика од вредностите на функцијата во точката $x+\Delta x$ и точката x. Следува:

$$\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)-\sin\frac{5\pi}{4}=$$

$$-\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 2-5. Определи го по дефиниција изводот на следниве функции:

2) $y=3$; 3) $y=\frac{1}{x}$;

4) $y=x^2+2x-3$; 5) $y=\sqrt{x}$.

Решение. 2) Нараснувањето на функцијата е:

$$\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=3-3=0.$$

Следува дека изводот на функцијата во точката x е:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

3) Имајќи ја предвид дефиницијата за пресметување на изводот, прво го наоѓаме нараснувањето на функцијата:

$$\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-3-\left(x^2+2x-3\right)=$$
$$x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+2x+2\Delta x-3-x^2-2x+3=2x\Delta x+\Delta x^2+2\Delta x$$
$$\Delta x(\Delta x+2x+2),$$

потоа го формираме количникот:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(\Delta x+2x+2)}{\Delta x}=\Delta x+2x+2$$

и најпосле ја определуваме граничната вредност:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x+2)=2x+2=2(x+1).$$

4) Имаме:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}.$$

5) Имаме:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Задача 6-9. Најди по дефиниција:

6) $y'(-1)$, ако $y=3x+2$; 7) $y'(2)$, ако $y=x^3-4$;

8) $y'(1)$, ако $y=\frac{1}{x^2}$; 9) $y'(1)$, ако $y=\sqrt{x}$.

Решение. 6) Имаме:

$$y'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(-1+\Delta x)-y(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(-1+\Delta x)+2+1}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3+3\Delta x+3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3.$$

Втор начин. Задачата може да ја решиме и ако го пресметаме изводот во произволна точка x, а потоа ја замениме за конкретната точка. Тогаш, постапката би била следна:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)+2-(3x+2)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x+3\Delta x+2-3x-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3,$$

од каде што следува дека: $y'(-1)=3$.

7) $y'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(2+\Delta x)-y(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^3-4-(2^3-4)}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8+3\cdot 4\Delta x+3\cdot 2\Delta x^2+\Delta x^3-8}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{12\Delta x+6\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(12+6\Delta x+\Delta x^2\right)=12$$

8) $y'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{(1+\Delta x)^2}-1}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-(1+\Delta x)^2}{(1+\Delta x)^2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\left(1+2\Delta x+\Delta x^2\right)}{\Delta x\left(1+\Delta x\right)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x(1+\Delta x)^2}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(-2+\Delta x)}{\Delta x(1+\Delta x)^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2+\Delta x}{(1+\Delta x)^2}=-\frac{2+0}{(1+0)^2}=-2\,.$$

Втор начин. Го пресметуваме изводот:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2-(x+\Delta x)^2}{\Delta x(x+\Delta x)^2x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2-\left(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2\right)}{\Delta x\left(x+\Delta x\right)^2x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(-2x+\Delta x)}{\Delta x(x+\Delta x)^2x^2}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x+\Delta x}{x^2\left(x+\Delta x\right)^2}=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}\,,$$

од каде што: $y'(1)=-\dfrac{2}{1^3}=-2$.

9) $y'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}\frac{\sqrt{1+\Delta x}+1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x\left(\sqrt{1+\Delta x}+1\right)}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Задача 10-11. Најди го изводот по дефиниција, од следниве функции:

10) $y=\sqrt{1+2x}$; 11) $y=x\sin x$.

Решение. 10) Изводот на првата функција е:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+2(x+\Delta x)}-\sqrt{1+2x}}{\Delta x}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x+2\Delta x}-\sqrt{1+2x}}{\Delta x}.$$

За да го пресметаме лимесот потребно е броителот да го рационализираме,

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x+2\Delta x}-\sqrt{1+2x}}{\Delta x}\frac{\sqrt{1+2x+2\Delta x}+\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x+2\Delta x}+\sqrt{1+2x}}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+2x+2\Delta x-(1+2x)}{\Delta x\left(\sqrt{1+2x+2\Delta x}+\sqrt{1+2x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{1+2x+2\Delta x}+\sqrt{1+2x}\right)}=$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+2x+2\Delta x}+\sqrt{1+2x}}=\frac{2}{\sqrt{1+2x+0}+\sqrt{1+2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}.$$

11) Нараснувањето на втората функција е:

$$y(x+\Delta x)-y(x)=(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x)-x\sin x=$$
$$x\sin(x+\Delta x)+\Delta x\sin(x+\Delta x)-x\sin x=$$
$$x\left(\sin(x+\Delta x)-\sin x\right)+\Delta x\sin(x+\Delta x).$$

Оттука, нејзиниот извод е:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x(\sin(x+\Delta x)-\sin x)+\Delta x\sin(x+\Delta x)}{\Delta x}=$$
$$\underbrace{x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}}_{I_1}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\Delta x)}_{I_2};$$

каде што првиот лимес е изводот на функцијата $y=\sin x$ во точката x, т.е. $I_1=\cos x$, додека вториот лимес е:

$I_2=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin(x+\Delta x)=\sin x$. Следува: $y'(x)=x\cos x+\sin x$.

Задача 12-13. Покажи дека дадените функции немаат конечен извод во дадените точки:

12) $y=\sqrt[3]{x^2}$ во точката $x=0$; 13) $y=2|x-1|+1$ во точката $x=1$.

Решение. 12) Имаме:

$$y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{0} = \infty .$$

Следува дека во точката $x = 0$ функцијата има бесконечен извод.

13) Заради:

$$\frac{y(1+\Delta x) - y(1)}{\Delta x} = \frac{2|1+\Delta x - 1| + 1 - 1}{\Delta x} = \frac{2|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$y'_-(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2(-\Delta x)}{\Delta x} = -2 \text{ и}$$

$$y'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 .$$

Бидејќи левиот и десниот извод се различни, следува дека функцијата нема извод во точката $x = 1$.

Задача 14-17. Најди ги левиот и десниот извод на функцијата:

14) $y = x^2$, во точката $x = 2$;

15) $y = |x|$, во точката $x = 0$;

16) $y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ во точката $x = 0$;

17) $y(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ во точката $x = 0$.

Дали функциите се диференцијабилни во дадените точки?

Решение. 14) Според дефинициите за лев и за десен извод, добиваме:

$$y'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{y(2+\Delta x) - y(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (4+\Delta x) = 4 \text{ и}$$

$$y'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{y(2+\Delta x) - y(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{4+4\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(4+\Delta x)=4\,.$$

Функцијата е диференцијабилна во точката $x=2$.

15) Имајќи предвид дека $|\Delta x|=\Delta x$, кога $\Delta x>0$ и $|\Delta x|=-\Delta x$, кога $\Delta x<0$, добиваме:

$$y'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \text{ и}$$

$$y'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\,.$$

Бидејќи левиот и десниот извод се различни, следува дека функцијата не е диференцијабилна во нулата.

16) $$y'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}-0}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=1 \text{ и}$$

$$y'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}-0}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}=\frac{1}{1+e^{+\infty}}=0\,.$$

Значи, функцијата не е диференцијабилна во точката $x=0$.

17) Имаме:

$$y'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x^2\cos\frac{\pi}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\Delta x\cos\frac{\pi}{\Delta x} \text{ и}$$

$$y'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^2\cos\frac{\pi}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\Delta x\cos\frac{\pi}{\Delta x}\,.$$

Бидејќи $\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|\le 1$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$, следува: $y'_-(0)=y'_+(0)=0$.

Значи функцијата е диференцијабилна во точката $x=0$.

Задача 18. Дали функцијата $y(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{6}, x<1\\ \sqrt{x}, x\geq 1\end{cases}$ е диференцијабилна во точката $x=1$?

Решение. Прв начин. Ќе ги пресметаме левиот и десниот извод во $x=1$.

$$y'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{(1+\Delta x)^3}{6}-\sqrt{1}}{\Delta x}=\frac{\frac{(1+0)^3}{6}-1}{0^-}=+\infty \text{ и}$$

$$y'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}\frac{\sqrt{1+\Delta x}+1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x\left(\sqrt{1+\Delta x}+1\right)}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}.$$

Бидејќи левиот и десниот лимес се различни, следува дека функцијата не е диференцијабилна во нулата.

Втор начин. Ако функцијата е диференцијабилна во дадена точка, тогаш е непрекината во истата точка, односно:

$$y\left(1^-\right)=y(1)=y\left(1^+\right)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{6}=\sqrt{1}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{1}\Leftrightarrow \frac{1}{6}=1=1,$$

што не е исполенто. Следува дека функцијата нема извод во $x=1$.

Задача 19. Определи го параметарот a, така што функцијата $y(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x^2+ax, x\geq 0\end{cases}$, да е диференцијабилна.

Решение. Функцијата е диференцијабина на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Во $x=0$

$$y'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1 \text{ и}$$

$$y'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{y(0+\Delta x)-y(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^2+a\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x+a)=a.$$

Следува: $a=1$.

Задача 20. Определи ги параметрите a и b, за кои функцијата:

$$y(x)=\begin{cases} x^2+bx-3, & x\le 1 \\ ax^2+1, & x>1 \end{cases}$$

е диференцијабилна во точката $x=1$.

Решение. Функцијата е непрекината во $x=1$, ако и само ако:

$$y(1^-)=y(1)=y(1^+)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(x^2+bx-3)=b-2=\lim_{x\to 1^+}(ax^2+1)\Leftrightarrow$$

$$b-2=b-2=a+1 \Leftrightarrow b=a+3 \, (1).$$

Левиот и десниот лимес се:

$$y'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2+b(1+\Delta x)-3-(b-2)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1+2\Delta x+\Delta x^2+b+b\Delta x-3-b+2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2\Delta x+\Delta x^2+b\Delta x}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}(2+\Delta x+b)=2+b\overset{1}{=}a+5 \text{ и}$$

$$y'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{y(1+\Delta x)-y(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(1+\Delta x)^2+1-(b-2)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a+2a\Delta x+a\Delta x^2+1-b+2}{\Delta x}\overset{1}{=}\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2a\Delta x+a\Delta x^2}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}(2a+a\Delta x)=2a .$$

Од условот $y'(1^-)=y'(1^+)$ следува: $a+5=2a$, од каде што $a=5$. Од (1) $b=8$.

Задача 21*. Покажи дека функцијата:

$$y(x)=\begin{cases} 1, \text{ако } x \text{ е рационален} \\ 0, \text{ако } x \text{ е ирационален} \end{cases},$$

нема извод во ниту една точка.

Решение. Нека x_0 е рационален број, тогаш $y(x_0)=1$. Избираме низа од рационални броеви $(x_0+\Delta x_n)$, таква што $\Delta x_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_0+\Delta x_n)=x_0$, од каде $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x_n=0$. Тогаш,

$$y(x_0+\Delta x_n)=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{y(x_0+\Delta x_n)-y(x_0)}{\Delta x_n}=\lim_{\Delta x_n\to 0}\frac{1-1}{\Delta x_n}=0.$$

Од друга страна, за низата од ирационални броеви $(x_0+\Delta x_n')$, таква што $\Delta x_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_0+\Delta x_n)=x_0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta x_n=0$, важи $y(x_0+\Delta x_n')=0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y(x_0+\Delta x_n')-y(x_0)}{\Delta x_n'}=\lim_{\Delta x_n'\to 0}\frac{0-1}{\Delta x_n'}=\infty.$$

Следува дека не постои изводот во точката x_0.

Аналогно, се покажува случајот кога x_0 е ирационален број.

Втор начин. Како во слична задача од темата непрекинатост, се покажува дека функцијата $y(x)$ не е непрекината во ниту една точка, па следува дека нема извод во ниту една точка.

Задача 22. Најди го коефициентот на правецот на секантата на функцијата $y=y(x)$ која минува низ точките со апциси x и $x+\Delta x$.

Решение. Нека y_2 е вредноста на функцијата во точката со апциса $x_2=x+\Delta x$, а y_1 - вредноста на функцијата во точката со апциса $x_1=x$. Тогаш, коефициентот на правец е:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

.

2.2. ИЗВОД ОД СУМА, РАЗЛИКА, ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК НА ФУНКЦИИТЕ

Задача 1-6. Најди ги изводите на следниве функции:

1) $y=2x^2$; 2) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+1$;

3) $y=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2$; 4) $y=\left(x^3-2\right)\left(x^2+1\right)$;

5) $y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$; 6) $y=x\sqrt{x\sqrt{x}}$.

Решение. 1) Извод од константа по функција е константата по изводот од функцијата. Користејќи го прво ова правило, а потоа формулата за извод од степенска функција, добиваме:

$$y'=\left(2x^2\right)'=2\left(x^2\right)'=2\cdot 2x=4x$$

2) Извод од збир или разлика на функциите е збир или разлика од изводите на функциите. Следува:

$$y'=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}+1\right)'=\left(\frac{x^3}{3}\right)'-\left(\frac{x^5}{5}\right)'+\left(\frac{1}{x^2}\right)'-\left(\frac{1}{x^4}\right)'+1'=$$

$$\frac{3x^2}{3}-\frac{5x^4}{5}-\frac{2}{x^3}-\left(-\frac{4}{x^5}\right)=x^2-x^4-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^5}.$$

3) Ја трансформираме $y=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2=1-x^2+\frac{x^4}{4}$ до збир или разлика од степенски функции, од каде што:

$$y'=(1)'-\left(x^2\right)'+\left(\frac{x^4}{4}\right)'=-2x+\frac{4x^3}{4}=-2x+x^3$$

4) Аналогно, $y=\left(x^3-2\right)\left(x^2+1\right)=x^5+x^3-2x^2-2$, од каде што:

$$y'=\left(x^5\right)'+\left(x^3\right)'-2\left(x^2\right)'-2'=5x^4+3x^2-4x$$

5) Степенските функции $\frac{8}{\sqrt[4]{x}}$ и $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ прво ги доведуваме во нормален вид:

$$y=\frac{8}{\sqrt[4]{x}}-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}=\frac{8}{x^{\frac{1}{4}}}-\frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}=8x^{-\frac{1}{4}}-6x^{-\frac{1}{3}}$$. Оттука, изводот е:

$$y'=8\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{5}{4}}-6\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}=-2x^{-\frac{5}{4}}+2x^{-\frac{4}{3}}.$$

6) Аналогно, како во д), имаме:

$y=x\sqrt{x\sqrt{x}}=x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}=xx^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{7}{4}}$. Следува: $y'=\frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}=\frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$.

Задача 7-12. Најди ги изводите на следниве функции:
7) $y=\arcsin x+\arccos x$; 8) $y=arctgx+arcctgx$;
9) $y=2^x+5\cdot 4^x-e^x$; 10) $y=\ln x+\ln\sqrt{x}$;
11) $y=a\sin x+b\cos x+tgx$; 12) $y=a^2\left(tgx+ctgx-\log_2 x\right)$.

Решение. 7) Имаме:

$$y'=\left(\arcsin x\right)'+\left(\arccos x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0.$$

8) $y'=\left(arctgx\right)'+\left(arcctgx\right)'=\frac{1}{1+x^2}+\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)=0$.

9) $y'=\left(2^x\right)'+5\cdot\left(4^x\right)'-\left(e^x\right)'=2^x\ln 2+5\cdot 4^x\ln 4-e^x=$
$\left(2^x+10\cdot 2^{2x}\right)\ln 2-e^x$.

10) Бидејќи $\ln\sqrt{x}=\ln x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln x$, имаме:

$$y'=\left(\ln x\right)'+\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x}=\frac{3}{2x}.$$

11) $y'=a\left(\sin x\right)'+b\left(\cos x\right)'+\left(tgx\right)'=$
$a\cos x+b\left(-\sin x\right)+\frac{1}{\cos^2 x}=a\cos x-b\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}$.

12) $y'=a^2\left(\left(tgx\right)'+\left(ctgx\right)'-\left(\log_2 x\right)'\right)=a^2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x\ln 2}\right)$.

Задача 13-20. Најди ги изводите на следниве функции:

13) $y = x^2 \sin x$; 14) $y = \dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9}$;

15) $y = \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)$; 16) $y = e^x tgx$;

17) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; 18) $y = \left(2x^2+3x+1\right)e^x$;

19) $y = xarctgx$; 20) $y = \sqrt{x}\cos x$.

Решение. 13) Имајќи ја предвид формулата за извод од производот $(uv)' = u'v + uv'$, добиваме:

$$y' = \left(x^2\right)'\sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x$$

14) $y' = \left(\dfrac{x^3}{3}\ln x\right)' - \left(\dfrac{x^3}{9}\right)' = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)'\ln x + \dfrac{x^3}{3}(\ln x)' - \dfrac{3x^2}{9} =$

$$\frac{1}{3}3x^2\ln x + \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} - \frac{3x^2}{9} = x^2\ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3} = x^2\ln x.$$

15) Формулата за извод од производ на три функции се изведува со помош на формулата за извод од производ на две функции. Имено, ако $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ се диференцијабилни функции, тогаш и функциите $uv(x)$ и $(uvw)(x)$ се диференцијабилни и:

$$(uvw)' = ((uv)w)' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + uvw' =$$
$$= u'vw + uv'w + uvw'.$$

Значи,

$$y' = \left(x^2-1\right)'\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)'\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)'$$
$$2x\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)2x\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)2x =$$
$$2x\left(\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right) + \left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\right).$$

16) $y' = \left(e^x\right)' tgx + e^x(tgx)' = e^x tgx + e^x\dfrac{1}{\cos^2 x} =$

$$e^x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + e^x\frac{1}{\cos^2 x} = e^x\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

17) Функцијата $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$ може да ја разгледаме како производ од функциите $y=x^{-2}$ и $y=\ln x$. Тогаш,

$$y'=(\ln x)'\frac{1}{x^2}+\ln(x)\left(x^{-2}\right)'=\frac{1}{x}\frac{1}{x^2}+\ln(x)\left(-2x^{-3}\right)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

18) $y'=\left(2x^2+3x+1\right)'e^x+\left(2x^2+3x+1\right)\left(e^x\right)'=$

$$\left(4x+3\right)e^x+\left(2x^2+3x+1\right)e^x=\left(2x^2+7x+4\right)e^x.$$

19) $y'=(x)'arctgx+x(arctgx)'=arctgx+\dfrac{x}{1+x^2}$.

20) $y'=\left(\sqrt{x}\right)'\cos x+\sqrt{x}\left(\cos x\right)'=$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\sqrt{x}\left(-\sin x\right)=\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{x}}.$$

Задача 21-28. Најди ги изводите на следниве функции:

21) $y=\dfrac{1}{\cos x}$; 22) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$;

23) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$; 24) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$;

25) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$; 26) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$;

27) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; 28) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$.

Решение. 21) Ако бројот 1 го разгледаме како константна функција, тогаш изводот ќе го најдеме со помош на формулата за извод од количник на две функции $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Имено,

$$y'=\frac{(1)'\cos x-1(\cos x)'}{\cos^2 x}=-\frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

22) $y'=\dfrac{(\cos x)'(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=$

$$\frac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=$$

$$\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}.$$

23) $y'=\left(\dfrac{x^2}{\ln x}\right)'=\dfrac{\left(x^2\right)'\ln x-x^2(\ln x)'}{\ln^2 x}=$

$$\frac{2x\ln x-x^2\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}.$$

24) $y'=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=$

$$\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}.$$

25) $y'=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'\left(x^2+1\right)-\sqrt{x}\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^2+1\right)-\sqrt{x}\,2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$

$$\frac{x^2+1-4x^2}{2\sqrt{x}\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}\left(x^2+1\right)^2}.$$

26) $y'=\dfrac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}.$

27) $y=\dfrac{(\sin x-\cos x)'(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=$

$$\frac{(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$\frac{(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$\frac{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$\frac{2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}.$$

28) Прво ги пресметуваме изводите од функциите во броителот и во именителот:

$$(x\sin x+\cos x)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x \text{ и}$$

$$(x\cos x-\sin x)'=\cos x+x(-\sin x)-\cos x=-x\sin x. \text{ Оттука}$$

$$y'=\frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}=$$

$$\frac{x^2\cos^2 x-x\sin x\cos x+x^2\sin^2 x+x\sin x\cos x}{(x\cos x-\sin x)^2}=$$

$$\frac{x^2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{(x\cos x-\sin x)^2}=\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}.$$

Задача 29-32. Најди:

29) y'' ако $y=x\ln x$; 30) y'' ако $y=\left(1+x^2\right)arctgx$;

31) y''' ако $y=\sqrt{x}$; 32) $y^{(4)}$ ако $y=\sin(x)e^x$.

Решение. 29) За да најдеме втор извод на функцијата, потребно е да го определиме првиот извод на функцијата $y=x\ln x$,

$$y'=(x\ln x)'=\ln x+x\frac{1}{x}=\ln x+1$$

Вториот извод е прв извод на првиот извод,

$$y''=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}$$

30) Имаме: $y'=2xarctgx+\left(1+x^2\right)\dfrac{1}{1+x^2}=2xarctgx+1$, од каде:

$$y''=2arctgx+2x\frac{1}{1+x^2}=2\left(arctgx+\frac{x}{1+x^2}\right).$$

31) Бидејќи $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, следува:

$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и $y''=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$, од каде што:

$$y''' = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}.$$

32) Прв начин. Ги бараме изводите до четвртиот ред,

$$y' = \sin(x)e^x + \cos(x)e^x = (\sin(x)+\cos(x))e^x,$$

$$y'' = (\cos(x)-\sin(x))e^x + (\sin(x)+\cos(x))e^x = 2\cos(x)e^x \text{ и}$$

$$y''' = -\sin(x)2e^x + \cos(x)2e^x = (\cos(x)-\sin(x))2e^x \text{ од каде:}$$

$$y^{(4)} = (-\sin(x)-\cos(x))2e^x + (\cos(x)-\sin(x))2e^x = -4\sin(x)e^x.$$

Втор начин. Бидејќи $y = uv$, каде што:

$$u = \sin x,\ u^{(1)} = \cos x,\ u^{(2)} = -\sin x,\ u^{(3)} = -\cos x,\ u^{(4)} = \sin x \text{ и}$$

$$v = \ldots = v^{(4)} = e^x.$$

Од Лајбницовата формула добиваме:

$$y^{(4)} = u^{(4)}v + \binom{4}{1}u^{(3)}v^{(1)} + \binom{4}{2}u^{(2)}v^{(2)} + \binom{4}{3}u^{(1)}v^{(3)} + uv^{(4)} =$$

$$\sin(x)e^x - 4\cos(x)e^x - 6\sin(x)e^x + 4\cos(x)e^x + \sin(x)e^x = -4\sin(x)e^x.$$

Задача 33-34. Најди ги n-тите изводи на функциите:

33) $y = \ln x$; 34) $y = x^2e^x$.

Решение. 33) Првите четири изводи на функцијата $y = \ln x$ се:

$$y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1}{x^2},\ y^{(3)} = \frac{2}{x^3},\ y^{(4)} = -\frac{2\cdot 3}{x^4}.$$

Изводите можеме да ги запишеме како:

$$y' = (-1)^2\frac{1}{x},\ y'' = (-1)^3\frac{1}{x^2},\ y^{(3)} = (-1)^4\frac{1\cdot 2}{x^3},\ y^{(4)} = (-1)^5\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$$

Заклучуваме дека: $y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

Тврдењето го докажуваме со помош на принципот на математичката индукција.

За $n=1$ равенството е исполнето.

Нека равенството важи за $n=k$, односно:

$$y^{(k)} = (-1)^{(k+1)}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Тогаш, за $n = k+1$,

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left((-1)^{(k+1)} \frac{(k-1)!}{x^k}\right)' = (-1)^{(k+1)}(k-1)!\frac{-k}{x^{k+1}} =$$
$$(-1)^{(k+1)}(-1)\frac{(k-1)!k}{x^{k+1}} = (-1)^{(k+2)} \frac{(k+1-1)!}{x^{k+1}},$$

што требаше да се докаже.

34) Ја претставуваме функцијата $y = uv$, каде $u = x^2$ и $v = e^x$. Бидејќи

$$u^{(1)} = 2x,\ u^{(2)} = 2 \text{ и } u^{(k)} = 0,\ k \geq 3 \text{ и}$$
$$v^{(i)} = e^x,\ i = 1,2,...,n;$$

имаме:

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v^{(1)} + ... + \binom{n}{i}u^{(n-i)}v^{(i)} + ... + \binom{n}{n-1}u^{(1)}v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$
$$= \binom{n}{n-2}2e^x + \binom{n}{n-1}2xe^x + x^2e^x = \left(n(n-1) + 2nx + x^2\right)e^x.$$

Задача 35. Докажи дека функцијата $y = \sin x + \cos x$ ја исполнува равенката $y'' + y = 0$.

Решение. Ги пресметуваме првиот и вториот извод на функцијата:

$$y' = \cos x - \sin x \text{ и } y'' = -\sin x - \cos x.$$

Потоа, добиените резултати ги заменуваме во диференцијалната равенка:

$$y'' + y = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Следува дека функцијата ја исполнува диференцијалната равенка.

Задача 36. Провери дали функцијата $y = (x-1)e^x$ ја исполнува диференцијалната равенка $y''' - y'' - y' + y = 0$.

Решение. Првите три изводи на функцијата се:

$$y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x,$$
$$y'' = e^x + xe^x = (x+1)e^x \text{ и}$$
$$y''' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x.$$

Ако замениме во диференцијалната равенка добиваме:

$$(x+2)e^x-(x+1)e^x-xe^x+(x-1)e^x=0 \Leftrightarrow (x+2-x-1-x+x-1)e^x=0$$
$$\Leftrightarrow 0=0\,.$$

Следува дека функцијата ја исполнува диференцијалната равенка.

Задача 37. Каде е грешката?

$$x=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{x\ \bar{u}a\bar{w}u}\overset{1}{\Rightarrow} x^2=\underbrace{x+x+\ldots+x}_{x\ \bar{u}a\bar{w}u}\overset{2}{\Rightarrow}\left(x^2\right)'=\left(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{x\ \bar{u}a\bar{w}u}\right)'\overset{3}{\Rightarrow}$$
$$2x=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{x\ \bar{u}a\bar{w}u}\overset{4}{\Rightarrow}2x=x\overset{5}{\Rightarrow}2=1$$

Решение. Грешката е во чекор 3 од првата равенка:
$$x=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{x\ \bar{u}a\bar{w}u},$$
при што следува дека x е природен број, односно константа. Затоа,
$$\left(x^2\right)'=0 \text{ и } \left(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{x\ \bar{u}a\bar{w}u}\right)'=0$$

2.3. ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

Задача 1-6. Пресметај ги изводите на следниве функции:

1) $y=\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^2$; 2) $y=(1+2x)^{-1}$;

3) $y=\sqrt{\dfrac{a-bx}{a+bx}}$; 4) $y=\ln\left(x^2+4x\right)$;

5) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 6) $y=e^{\sin^2 x}$.

Решение. 1) Прв начин. Функцијата $y=\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^2$ е сложена функција, бидејќи може да ја запишеме во вид: $y(x)=y(u(x))$, каде што: $y(u)=u^2$ и $u(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$. Сега,
$$y_u'=2u\,,\ u_x'=-\frac{2x}{2}=-x\,.$$

Со примена на формулата за извод од сложена функција: $y'_x = y'_u u'_x$, следува:

$$y' = 2u(-x) = 2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)(-x) = -2x\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = -2x + x^3 .$$

Втор начин. Задачата може да ја решиме и со сведување на полиномот во нормален вид: $y = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{4}$, чиј извод е: $y' = -2x + \dfrac{4x^3}{4} = -2x + x^3$.

2) Заменувајќи $u = 1+2x$, функцијата го добива обликот $y = u^{-1}$, $u = 1+2x$ од каде што следува дека: $y'_u = -\dfrac{1}{u^2}$ и $u'_x = 2$. Оттука,

$$y' = y'_u u'_x = -\frac{1}{u^2}(1+2x)' = -\frac{1}{(1+2x)^2}2 = -\frac{2}{(1+2x)^2} .$$

3) За функцијата $y = \sqrt{\dfrac{a-bx}{a+bx}}$ имаме: $y = \sqrt{u}$ и $u = \dfrac{a-bx}{a+bx}$, од каде што изводите на y по променливата u и на u по x се:

$$y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ и}$$

$$u'_x = \frac{-b(a+bx)-(a-bx)b}{(a+bx)^2} = \frac{-ab-b^2x-ab+b^2x}{(a+bx)^2} = \frac{-2ab}{(a+bx)^2} .$$

Оттука, имајќи предвид дека $(a+bx)^2 = \sqrt{(a+bx)^4}$, добиваме:

$$y' = y'_u u'_x = -2ab\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{a-bx}{a+bx}}}\frac{1}{\sqrt{(a+bx)^4}} =$$

$$-ab\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}\frac{1}{\sqrt{(a+bx)^4}} = -\frac{ab}{\sqrt{(a-bx)(a+bx)^3}} .$$

4) Воведуваме смена: $u = x^2+4x$, $y = \ln u$, од каде што:

$$y' = (\ln u)_u{}' = u'_x = \frac{1}{u}\left(x^2+4x\right)' = \frac{1}{x^2+4x}(2x+4) = \frac{2(x+2)}{x(x+4)} .$$

5) Ставајќи $u = x+\sqrt{1+x^2}$, $y=\ln u$, имаме:

$$y' = \left(\ln u\right)'_u u'_x = \frac{1}{u}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\right).$$

Функцијата $z=\sqrt{1+x^2}$ е, исто така, сложена функција. Со смената $v=1+x^2$ и $z=\sqrt{v}$, од каде што $v'_x = 2x$ и $z'_v = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$, нејзиниот извод е: $z' = z'_v v'_x = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Затоа,

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

6) Заменувајќи $u=\sin^2 x$ функцијата го добива обликот $y=e^u$, од каде што:

$$y' = \left(e^u\right)'_u u_x' = e^u\cdot\left(\sin^2 x\right)' = e^{\sin^2 x}\left(\sin^2 x\right)'.$$

Сложената функција $z=\sin^2 x$ се запишува како $v=\sin x$, $z=v^2$ од каде што: $z'_v = 2v$ и $v_x' = \cos x$, па:

$$z' = z'_v v'_x = 2v\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

Оттука, $y' = \sin 2x e^{\sin^2 x}$.

Со малку рутина пресметувањето на изводот од сложена функција се извршува директно, односно не се запишува која е функцијата u ниту меѓу резултатите y'_u и u'_x.

Задача 7-10. Пресметај ги изводите на следниве функции:

7) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 8) $y=\cos x e^{\sin x}$;

9) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; 10) $y=\ln\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

Решение. 7) Имаме:

$$y'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)'=\frac{\left(e^x+e^{-x}(-x)'\right)\left(e^x-e^{-x}\right)-\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}(-x)'\right)}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=$$

$$\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)-\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=$$

$$\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}-e^{2x}-2-e^{-2x}}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}=-\frac{4}{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}.$$

8) $y'=\left(\cos xe^{\sin x}\right)'=-\sin e^{\sin x}+\cos x\left(e^{\sin x}\right)'=$

$$-\sin e^{\sin x}+\cos xe^{\sin x}\left(\sin x\right)'=-\sin e^{\sin x}+\cos xe^{\sin x}\cos x=$$

$$e^{\sin x}\left(\cos^2 x-\sin x\right).$$

9) $y'=\left(\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)'=$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)'=$$

$$\frac{1}{2\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\frac{\cos x(1-\sin x)-(1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=$$

$$\frac{1}{2(1+\sin x)}\frac{\cos x-\sin x\cos x+\cos x+\sin x\cos x}{1-\sin x}=$$

$$\frac{2\cos x}{2\left(1-\sin^2 x\right)}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}.$$

10) $y'=\left(\ln\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)'=$

$$\frac{a-x}{2(a+x)}\frac{a-x-(a+x)(-1)}{(a-x)^2}=\frac{-2a}{2\left(a^2-x^2\right)}=-\frac{a}{a^2-x^2}.$$

Задача 11-18. Пресметај ги изводите на следниве функции:

11) $y=\ln(\ln x)$; 12) $y=3\sin(3x+5)$;

13) $y=\dfrac{1}{\cos x}$; 14) $y=\sqrt{1+2tgx}$;

15) $y=4\sqrt[3]{ctg^2x}+\sqrt[5]{ctg^8x}$; 16) $y=\cos^2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$;

17) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$; 18) $y=arctg\dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение. 11) $y'=(\ln(\ln x))'=\dfrac{1}{\ln x}(\ln x)'=\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x}$.

12) $y'=(3\sin(3x+5))'=3\cos(3x+5)(3x+5)'=9\cos(3x+5)$.

13) Во оваа задача функцијата $y=\dfrac{1}{\cos x}$ може да ја разгледаме како сложена функција $y=\dfrac{1}{u}$, $u=\cos x$. Тогаш,

$$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x)'=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

14) $y'=\left(\sqrt{1+2tgx}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+2tgx}}(1+2tgx)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+2tgx}}\dfrac{2}{\cos^2 x}$.

15) $y'=\left(4\sqrt[3]{ctg^2x}+\sqrt[5]{tg^8x}\right)'=4\left(ctg^{\frac{2}{3}}x\right)'+\left(ctg^{\frac{8}{5}}x\right)'=$

$$4\frac{2}{3}ctg^{-\frac{1}{3}}x(ctgx)'+\frac{8}{5}ctg^{\frac{3}{5}}x(ctgx)'=$$

$$\frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{ctgx}}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)+\frac{8}{5}\sqrt[5]{ctg^3x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=$$

$$-\frac{1}{\sin^2 x}\left(\frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{ctgx}}+\frac{8}{5}\sqrt[5]{ctg^3x}\right).$$

$$\textbf{16)}\ y'=\left(\cos^2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)'=2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right)'=$$

$$2\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(-\sin\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'=$$

$$-2\sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)'\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)'}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$-\sin\frac{2\left(1-\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1-\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$-\sin\left(\frac{2\left(1-\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}\right)\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{2\left(1-\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}\right)\frac{2}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\sin\frac{2\left(1-\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}}.$$

$$\textbf{17)}\ y'=\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2\right)'\ \frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(-2x\right)=-\frac{1}{|x|}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Бидејќи $|x|=x$ за $x>0$ и $|x|=-x$ за $x<0$, првиот извод може да се запише во следниов облик:

$$y'=\begin{cases}-\frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x>0\\ \frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x>0\\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x<0\end{cases}.$$

18) $y' = \left(arctg\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)' =$

$$\frac{1}{\dfrac{1-2x+x^2+1+2x+x^2}{(1-x)^2}}\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{2\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Задача 19-22. Пресметај:

19) y'' ако $y = e^{3x-1}$; 20) y'' ако $y = arctg\dfrac{1}{x}$;

21) y''' ако $y = \sin^2 x$; 22) $y^{(4)}$ ако $y = x^3 \ln\dfrac{x}{a}$.

Решение. 19) Имаме: $y' = 3e^{3x-1}$ од каде $y'' = 9e^{3x-1}$.

20) Првиот извод е:

$y' = \left(arctg\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$, додека

вториот извод е: $y'' = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

21) $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, $y'' = 2\cos 2x$, $y''' = -4\sin 2x$

22) $y' = 3x^2 \ln\dfrac{x}{a} + x^3\dfrac{a}{x}\dfrac{1}{a} = 3x^2\ln\dfrac{x}{a} + x^2$,

$$y'' = 6x\ln\frac{x}{a} + 3x^2\frac{a}{x}\frac{1}{a} + 2x = 6x\ln\frac{x}{a} + 5x$$

$$y''' = 6\ln\frac{x}{a} + 6x\frac{a}{x}\frac{1}{a} + 5 = 6\ln\frac{x}{a} + 11$$

$$y^{(4)} = 6\frac{a}{x}\frac{1}{a} = \frac{6}{x}.$$

Задача 23-26. Пресметај ги n-тите изводи на функциите:

23) $y = \cos x$; 24) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$;

25) $y=\sin^2 x$; 26) $y=e^x\cos x$.

Решение. 23) Со помош на формулата $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, функцијата косинус ја изразуваме преку синус, $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Потоа, ги пресметуваме првите неколку изводи:

$$y'=\cos x\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+\pi),\ y''=\cos(x+\pi)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin(x+2\pi),\ y^{(4)}=\cos(x+2\pi)=\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right).$$

Заклучуваме дека: $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$.

Со помош на принципот на математичката индукција го покажуваме заклучокот. За $n=1$ тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за $n=k$, односно $y^{(k)}=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$. Тогаш, за $n=k+1$ имаме

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)=$$

$$\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{(k+2)\pi}{2}\right).$$

Следува дека тврдењето е точно и за $n=k+1$. Според принципот на математичка индукција, тврдењето е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

24) Ја претставуваме функцијата како сума од прости дропки:

$$y=\frac{1}{x(1-x)}=\frac{x+1-x}{x(1-x)}=\frac{x}{x(1-x)}+\frac{1-x}{x(1-x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}.$$

Тогаш, првите неколку изводи се:

$$y'=-\frac{1}{(1-x)^2}(-1)-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{x^2},$$

$$y''=-\frac{2}{(1-x)^3}(-1)-(-2)\frac{1}{x^3}=2\left(\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{1}{x^3}\right);$$

$$y''' = 2\left((-3)\frac{1}{(1-x)^4}(-1)+(-3)\frac{1}{x^4}\right) = 2\cdot 3\left(\frac{1}{(1-x)^4}-\frac{1}{x^4}\right);$$

$$y^{(4)} = 2\cdot 3\left((-4)\frac{1}{(1-x)^5}(-1)-(-4)\frac{1}{x^5}\right) = 2\cdot 3\cdot 4\left(\frac{1}{(1-x)^5}+\frac{1}{x^5}\right).$$

Заклучуваме дека: $y^{(n)} = n!\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}\right)$.

Равенството е точно за $n=1$. Нека равенството е точно за $n=k$, односно:

$$y^{(k)} = k!\left(\frac{1}{(1-x)^{k+1}}+(-1)^k\frac{1}{x^{k+1}}\right). \text{ Тогаш,}$$

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = k!\left((-(k+1))\frac{1}{(1-x)^{k+2}}(-1)+(-1)^k(k+1)\frac{1}{x^{k+2}}(-1)\right) =$$

$$k!(k+1)\left(\frac{1}{(1-x)^{k+2}}+(-1)^{k+1}\frac{1}{x^{k+2}}\right) = (k+1)!\left(\frac{1}{(1-x)^{k+2}}+(-1)^{k+1}\frac{1}{x^{k+2}}\right).$$

Следува дека равенството е точно и за $n=k+1$.

25) Имаме:

$$y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x,\ y'' = 2\cos 2x = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = 2^2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2^2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right) \text{ и}$$

$$y^{(4)} = 2^2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right)\cdot 2 = 2^3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2^3\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right).$$

Заклучуваме дека: $y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)$.

За $n=1$ равенството е точно. Нека равенството е точно за $n=k$, односно $y^{(k)} = 2^{k-1}\sin\left(2x+\frac{(k-1)\pi}{2}\right)$. Тогаш, за $n=k+1$ имаме:

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = 2^{k-1}\cos\left(2x+\frac{(k-1)\pi}{2}\right)2 =$$

$$2^k \sin\left(2x+\frac{(k-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 2^{k+1-1}\sin\left(2x+\frac{(k+1-1)\pi}{2}\right).$$

Според принципот на математичка индукција, равенството е точно за секој $n \in \mathbb{N}$.

26) За функцијата $y = e^x \cos x = e^x \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, првите три изводи се:

$$y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin x\right) =$$

$$e^x 2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}+x}{2} = 2e^x \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2x+\frac{\pi}{2}}{2} =$$

$$2e^x\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}}\left(e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$2^{\frac{1}{2}}e^x\left(\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$2^{\frac{1}{2}}e^x 2\sin\frac{x+\frac{3\pi}{4}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\cos\frac{x+\frac{3\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}}{2} =$$

$$2^{\frac{1}{2}}e^x 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{2\pi}{4}\right) \text{ и}$$

$$y''' = 2^{\frac{3}{2}}\left(e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$2^{\frac{3}{2}}e^x\left(\sin(x+\pi)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$2^{\frac{3}{2}}e^x 2\sin\frac{x+\pi-x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\pi+x+\frac{\pi}{2}}{2} =$$

$$2^{\frac{3}{2}} e^x 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=2^{\frac{5}{2}} e^x \cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right).$$

Заклучуваме дека: $y^{(n)}=2^{\frac{2n-1}{2}} e^x \cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

Заклучокот го покажуваме со помош на методот на математичка индукција. Равенството е точно за $n=1$. Нека равенството е точно за $n=k$, односно $y^{(k)}=2^{\frac{2k-1}{2}} e^x \cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)$. Тогаш,

$$y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=2^{\frac{2k-1}{2}}\left(e^x\cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)-e^x\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right)=$$

$$2^{\frac{2k-1}{2}} e^x\left(\sin\left(x+\frac{(k+2)\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right)=$$

$$2^{\frac{2k-1}{2}} e^x 2\sin\frac{x+\frac{(k+2)\pi}{4}-x-\frac{k\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{(k+2)\pi}{4}+x+\frac{k\pi}{4}}{2}=$$

$$2^{\frac{2k-1}{2}} e^x 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right)=2^{\frac{2(k+1)-1}{2}} e^x\cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right).$$

Следува дека равенството е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

Задача 27. Докажи ја следнава формула:

$$(\sin\alpha x)^{(n)}=\alpha^n\sin\left(\alpha x+\frac{n\pi}{2}\right),\ n\geq 0.$$

Решение. Формулата ја покажуваме со принципот на математичка индукција. За $n=0$, $\sin\alpha x=\sin\alpha x$. Нека равенството важи за $n=k$, т.е. $(\sin\alpha x)^{(k)}=\alpha^k\sin\left(\alpha x+\frac{k\pi}{2}\right)$. Треба да покажеме дека равенството важи за $n=k+1$, т.е. $(\sin\alpha x)^{(k+1)}=\alpha^{k+1}\sin\left(\alpha x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$. Навистина,

$$(\sin\alpha x)^{(k+1)}=\left((\sin\alpha x)^{(k)}\right)'=\left(\alpha^k\sin\left(\alpha x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)'=$$

$$\alpha^k \cos\left(\alpha x + \frac{k\pi}{2}\right)\alpha = \alpha^{k+1}\sin\left(\alpha x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \alpha^{k+1}\sin\left(\alpha x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

Задача 28. Докажи дека функцијата $y = \frac{x-2}{x+3}$ ја исполнува равенката: $(x-2)y'' + 2yy' = 0$.

Решение. Најпрво ги наоѓаме првот и вториот извод,

$$y' = \frac{x+3-(x-2)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2} \text{ и } y'' = 5(-2)\frac{1}{(x+3)^3} = -\frac{10}{(x+3)^3}.$$

Потоа, заменуваме во равенката:

$$(x-2)\left(-\frac{10}{(x+3)^3}\right) + 2\frac{x-2}{x+3}\frac{5}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{10(x-2)}{(x+3)^3} + \frac{10(x-2)}{(x+3)^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = 0.$$

Задача 29. Докажи дека функцијата $y = e^{-x}\sin x$ ја исполнува равенката: $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение. Првиот и вториот извод на функцијата $y = e^{-x}\sin x$ се:

$$y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x}\cos x.$$

Со замена на изводите во равенката добиваме:

$$-2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}(\cos x - \sin x) + 2e^{-x}\sin x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Следува дека функцијата ја исполнува равенката.

Задача 30. Докажи дека функцијата $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ ја задоволува равенката: $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$.

Решение. За првиот и за вториот извод на функцијата $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$, имајќи предвид дека:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}},$$

добиваме:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}(-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} \text{ и}$$

$$y'' = -\frac{1}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\frac{1}{-2\sqrt{x}}\right) =$$

$$-\frac{1}{4x\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{4x}e^{-\sqrt{x}}.$$

Следува:

$$\frac{1}{2}y' = \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}},\ xy'' = -\frac{1}{4\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{x}}$$

и

$$-\frac{1}{4}y = -\frac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{x}}$$

Со заменување во равенката $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$ добиваме:

$$-\frac{1}{4\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} -$$

$$\frac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{4}e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Значи, функцијата $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ ја исполнува зададената равенка.

Задача 31. Докажи дека функцијата $y = \arcsin^2 x$ ја исполнува равенката: $(1-x^2)y'' - xy' = 2$.

Решение. Првиот извод на функцијата е:

$$y' = 2\arcsin(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Бидејќи

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = -\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{1}{1-x^2}\frac{\left(1-x^2\right)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}},$$

за вториот извод добиваме:

$$y''=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2\arcsin(x)\frac{x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{1-x^2}\left(1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Со заменување на y' и y'' во равенката $(1-x^2)y''-xy'=2$, имаме:

$$\left(1-x^2\right)\frac{2}{1-x^2}\left(1+\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=2\Leftrightarrow$$

$$2+\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=2\Leftrightarrow 0=0$$

Добивме дека функцијата $y=\arcsin^2 x$ ја исполнува равенката.

Задача 32. Покажи дека функцијата:

$$y=e^{2\arcsin x},$$

ја исполнува диференцијалната равенка: $\left(1-x^2\right)y''-xy'-4y=0$.

Решение. Прво, го наоѓаме изводот на функцијата $y=e^{2\arcsin x}$,

$$y'=e^{2\arcsin x}\left(2\arcsin x\right)'=e^{2\arcsin x}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2e^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Потоа, вториот извод:

$$y''=2\frac{e^{2\arcsin x}\left(2\arcsin x\right)'\sqrt{1-x^2}-e^{2\arcsin x}\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2}$$

$$=2\frac{e^{2\arcsin x}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}-e^{2\arcsin x}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=2\frac{2e^{2\arcsin x}+\frac{xe^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$=2\frac{2\sqrt{1-x^2}e^{2\arcsin x}+xe^{2\arcsin x}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}=\frac{2e^{2\arcsin x}\left(x+2\sqrt{1-x^2}\right)}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$$

и на крајот вршиме проверка на точноста на равенството:

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'-4y=0\Leftrightarrow$$

$$\left(1-x^2\right)\frac{4\sqrt{1-x^2}e^{2\arcsin x}+2xe^{2\arcsin x}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}-x\frac{2e^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}-4e^{2\arcsin x}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{4\sqrt{1-x^2}\,e^{2\arcsin x}+2xe^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}-x\frac{2e^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}-4e^{2\arcsin x}=0 \Leftrightarrow$$

$$4e^{2\arcsin x}+\frac{2xe^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2xe^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}-4e^{2\arcsin x}=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Задача 33. Провери дали функцијата:

$$y=a\cos\left(\ln x\right)+b\sin\left(\ln x\right),$$

ја задоволува диференцијалната равенка: $x^2y''+xy'+y=0$.

Решение. Да ги определиме првиот и вториот извод на дадената функција:

$$y'=-a\sin(\ln x)\frac{1}{x}+b\cos(\ln x)\frac{1}{x}=-a\frac{1}{x}\sin\ln x+b\frac{1}{x}\cos\ln x \text{ и}$$

$$y''=-a\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\ln x-a\frac{1}{x}\cos(\ln x)\frac{1}{x}+$$

$$+b\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos(\ln x)\frac{1}{x}+b\frac{1}{x}(-\sin\ln x)\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{a}{x^2}\sin\ln x-\frac{a}{x^2}\cos\ln x-\frac{b}{x^2}\cos\ln x-\frac{b}{x^2}\sin\ln x=$$

$$\frac{a}{x^2}(\sin\ln x-\cos\ln x)-\frac{b}{x^2}(\cos\ln x+\sin\ln x).$$

При заменување на добиените изводи во дадената равенка добиваме:

$$x^2\left(\frac{a}{x^2}(\sin\ln x-\cos\ln x)-\frac{b}{x^2}(\cos\ln x+\sin\ln x)\right)+$$

$$x\left(-a\frac{1}{x}\sin\ln x+b\frac{1}{x}\cos\ln x\right)+a\cos\ln x+b\sin\ln x=0 \Leftrightarrow$$

$$a\sin\ln x-a\cos\ln x-b\cos\ln x-b\sin\ln x-$$

$$a\sin\ln x+b\cos\ln x+a\cos\ln x+b\sin\ln x=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Значи, функцијата ја исполнува равенката.

2.4. ИЗВОД ОД ПАРАМЕТАРСКИ ЗАДАДЕНА ФУНКЦИЈА

Задача 1-4. Пресметај ги изводите:

1) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

3) $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$;

4) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

Решение. 1) Изводите на $x(t)$ и $y(t)$ по параметарот t се:

$$\dot{x} = -a\sin t,\ \dot{y} = a\cos t.$$

Според формулата за извод на функцијата во параметарски вид, добиваме:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -tgt.$$

2) Бидејќи $\dot{x} = a\left(1 - \cos t\right)$ и $\dot{y} = a\sin t$, изводот на бараната функција е:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\sin t}{a\left(1 - \cos t\right)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

3) За функцијата $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$,

$\dot{x} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t$ и $\dot{y} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t$,

од каде што: $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = tgt$.

4) За функцијата: $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$

$$\dot{x} = e^t \cos t - e^t \sin t,\ \dot{y} = e^t \sin t + e^t \cos t \text{ и}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}.$$

Задача 5-10. Пресметај ги изводите:

5) $x = \dfrac{2t}{1+t}$, $y = \dfrac{1-t}{1+t}$;

6) $x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$;

7) $x = a\left(\ln\left(tg\dfrac{t}{2}\right) + \cos t - \sin t\right)$, $y = a(\sin t + \cos t)$;

8) $x=\sqrt{t^2+1}$, $y=\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$

9) $x=2\ln ctgt$, $y=tgt+ctgt$;

10) $x=\ln\sqrt{1+t^2}$, $y=1-arctgt$.

Решение. 5) Изводите на $x(t)$ и $y(t)$ по параметарот t се:

$$\dot{x}=\left(\frac{2t}{1+t}\right)'=\frac{2(1+t)-2t}{(1+t)^2}=\frac{2}{(1+t)^2} \text{ и}$$

$$\dot{y}=\left(\frac{1-t}{1+t}\right)'=\frac{-1(1+t)-(1-t)\cdot 1}{(1+t)^2}=\frac{-1-t-1+t}{(1+t)^2}=-\frac{2}{(1+t)^2}$$

Според формулата за извод на функција во параметарски вид:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-\dfrac{2}{(1+t)^2}}{\dfrac{2}{(1+t)^2}}=-1 .$$

6) За да се пресметаат изводите $\dot{x}$ и $\dot{y}$, функциите $x(t)$ и $y(t)$ се претставуваат во вид: $x=\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$, $y=\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Оттука,

$$\dot{x}=\frac{1}{3}\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{3}\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{2}},$$

$$\dot{y}=\frac{1}{2}\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{2}\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{3}\right)t^{-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{6}\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2}{3}}.$$

Според тоа,

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-\frac{1}{6}\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{6}\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{2}}}=\frac{-\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\left(1-t^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt[6]{t}}\frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}.$$

7) За функцијата:

$$x = a\left(\ln\left(tg\frac{t}{2}\right) + \cos t - \sin t\right),\ y = a(\sin t + \cos t);$$

$$\dot{x} = a\left(\frac{1}{tg\frac{t}{2}}\left(tg\frac{t}{2}\right)' - \sin t - \cos t\right) = a\left(\frac{1}{tg\frac{t}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\left(\frac{t}{2}\right)' - \sin t - \cos t\right) =$$

$$a\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\frac{1}{\cos\frac{t}{2}}\frac{1}{2} - \sin t - \cos t\right) = a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t - \cos t\right) =$$

$$a\left(\frac{1-\sin^2 t - \sin t\cos t}{\sin t}\right) = a\left(\frac{\cos^2 t - \sin t\cos t}{\sin t}\right) = \frac{a\cos t(\cos t - \sin t)}{\sin t}$$

и

$$\dot{y} = a(\cos t - \sin t),$$

од каде што:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a(\cos t - \sin t)}{\frac{a\cos t(\cos t - \sin t)}{\sin t}} = \frac{\sin t}{\cos t} = tgt\,.$$

8) Ги пресметуваме изводите на функцијата по параметарот t.

$$\dot{x} = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\left(t^2+1\right)' = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{и}$$

$$\dot{y} = \frac{\sqrt{t^2+1} - (t-1)\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1} = \frac{t^2+1-\left(t^2-t\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(t^2+1\right)} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}\left(t^2+1\right)}.$$

Оттука, $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}\left(t^2+1\right)}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \dfrac{\frac{t+1}{t^2+1}}{t} = \dfrac{t+1}{t\left(t^2+1\right)}.$

9) За функцијата: $x = 2\ln ctgt$, $y = tgt + ctgt$,

$$\dot{x} = \frac{2}{ctgt}(ctgt)' = \frac{2}{\frac{\cos t}{\sin t}}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right) = -\frac{2}{\sin t\cos t},$$

$$\dot{y}=\frac{1}{\cos^2 t}-\frac{1}{\sin^2 t}=\frac{\sin^2 t-\cos^2 t}{\cos^2 t\sin^2 t}.$$

и

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\dfrac{\sin^2 t-\cos^2 t}{\cos^2 t\sin^2 t}}{-\dfrac{2}{\sin t\cos t}}=\frac{\sin^2 t-\cos^2 t}{-2\sin t\cos t}=\frac{-\cos 2t}{-\sin 2t}=ctg 2t.$$

10) За функцијата: $x=\ln\sqrt{1+t^2}$, $y=1-arctgt$,

$$\dot{x}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(\sqrt{1+t^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\left(1+t^2\right)'=\frac{t}{1+t^2},\ \dot{y}=-\frac{1}{1+t^2}\ \text{ и}$$

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=-\frac{1}{t}.$$

Задача 11-14. Пресметај:

11) y'' ако $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$;

12) y'' ако $x=\ln t$, $y=t+\dfrac{1}{t}$;

13) y''' ако $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;

14) y''' ако $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Решение. 11) Прв начин. Првиот извод е:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Вториот извод е извод од првиот извод, значи:

$$y''=\frac{\dot{\left(y'\right)}}{\dot{x}}=\frac{1}{a(1-\cos t)}\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\sin t}{(1-\cos t)^2}=$$

$$\frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{a(1-\cos t)^3}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1-\cos t}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

Втор начин. За функцијата $x=a(t-\sin t)$ $y=a(1-\cos t)$ зададена во параметарски вид, прво ќе ги определиме $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$ и $\ddot{y}$:

$$\dot{x}=a(1-\cos t),\quad \ddot{x}=a\sin t,\quad \dot{y}=a\sin t,\quad \ddot{y}=a\cos t$$

Според формулата за втор извод $y''=\dfrac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$, добиваме:

$$y''=\frac{a\cos t a(1-\cos t)-a\sin t a\sin t}{(a(1-\cos t))^3}=\frac{a^2\left(\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t\right)}{a^3(1-\cos t)^3}=$$

$$\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^2\left(-(\cos t-1)\right)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

12) Изводите на функцијата $x=\ln t$, $y=t+\dfrac{1}{t}$ се:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t}\ \text{ и}$$

$$y''=\frac{\overset{\bullet}{(y')}}{\dot{x}}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t^2+1}{t}=t+\frac{1}{t}.$$

13) За функцијата $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ првите три изводи се:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}ctgt,$$

$$y''=\frac{\overset{\bullet}{(y')}}{\dot{x}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=\frac{-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t},\ \text{и}$$

$$y'''=\frac{\overset{\bullet}{(y'')}}{\dot{x}}=\frac{-\frac{b}{a^2}\frac{-3}{\sin^4 t}\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b\cos t}{a^3\sin^5 t}.$$

14) За функцијата y''' ако $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ изводите се:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-tgt,$$

$$y''=\frac{\overset{\bullet}{(y')}}{\dot{x}}=\frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t},$$

$$y''' = \frac{\dot{(y'')}}{\dot{x}} = \frac{\frac{1}{3a}\left(-\frac{1}{\cos^8 t \sin^2 t}\right)\left(4\cos^3 t(-\sin t)\sin t + \cos^4 t \cos t\right)}{3a\cos^4 t \sin t} =$$

$$\frac{\cos^3 t\left(\cos^2 t - 4\sin^2 t\right)}{9a^2\cos^{10} t \sin^2 t} = \frac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2 \cos^7 t \sin^2 t}.$$

Задача 15. Покажи дека функцијата:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t},\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

ја исполнува равенката $y\sqrt{1+y'^2} = y'$.

Решение. Изводите на $x(t)$ и $y(t)$ по параметарот t се:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}2t - \frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\frac{\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}t - \left(\sqrt{1+t^2}+1\right)}{t^2} =$$

$$\frac{-t}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+\sqrt{1+t^2}}\frac{t^2 - 1 - t^2 - \sqrt{1+t^2}}{t\sqrt{1+t^2}} =$$

$$\frac{-t}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+\sqrt{1+t^2}}\frac{-1+\sqrt{1+t^2}}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{-t}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} =$$

$$\frac{-t}{\left(1+t^2\right)\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{-t^2+1+t^2}{t\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{t\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

и

$$\dot{y} = \frac{\sqrt{1+t^2} - t\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}}}{\left(1+t^2\right)} = \frac{\frac{2\left(1+t^2\right)-2t^2}{2\sqrt{1+t^2}}}{\left(1+t^2\right)} =$$

$$\frac{\frac{2+2t^2-2t^2}{2\sqrt{1+t^2}}}{\left(1+t^2\right)} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{1+t^2}}}{\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Според тоа, изводот на функцијата y по променливата x е:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} t\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}} = t\,.$$

Со заменување на функциите y и y' во равенката и нејзиното средување:

$$y\sqrt{1+y'^2} = y' \Leftrightarrow \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{1+t^2} = t \Leftrightarrow 0 = 0\,,$$

се добива идентитет, што значи дека равенството за дадената функција е исполнето.

Задача 16. Покажи дека функцијата:

$$x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\ y = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

ја исполнува равенката $y' + 1 = 0$.

Решение.

$$\dot{x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)' =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1+t^2-1}{1+t^2}}}\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2\right)\left(\sqrt{1+t^2}\right)' = \frac{1}{\frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}2t =$$

$$\frac{t}{|t|\sqrt{1+t^2}} = \begin{cases} \dfrac{t}{t\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & t>0 \\ \dfrac{t}{-t\sqrt{1+t^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & t<0 \end{cases}.$$

$$\dot{y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+t^2-1}{1+t^2}}}\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2\right)\left(\sqrt{1+t^2}\right)' =$$

$$-\frac{1}{\frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}2t=-\frac{t}{|t|\sqrt{1+t^2}}=\begin{cases}-\dfrac{t}{t\sqrt{1+t^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & t>0\\ -\dfrac{t}{-t\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & t<0\end{cases}.$$

Според тоа:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-\dfrac{t}{|t|\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t}{|t|\sqrt{1+t^2}}}=-1.$$

Следува дека: $y'+1=0$, што требаше и да се покаже.

Втор начин. Имајќи предвид дека $\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$ за точките од пресекот на дефиниционите област на функциите аркус косинус и аркус синус, важи:

$$\dot{y}=\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{\bullet}=\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{\bullet}=-\dot{x}\text{, од каде што:}$$

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-\dot{x}}{\dot{x}}=-1.$$

Задача 17. Покажи дека функцијата $y=y(x)$ зададена во параметарски облик со равенките:

$$x=e^t\sin t,\quad y=e^t\cos t;$$

ја исполнува равенката $y''(x+y)^2=2(xy'-y)$.

Решение. Изводите на функцијата по параметарот t се:

$$\dot{x}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t),$$

$$\dot{y}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t),$$

$$\ddot{x}=e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\cos t-\sin t)=2e^t\cos t$$

$$\ddot{y}=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)=-2e^t\sin t$$

Оттука, првиот извод по променливата x е:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t},$$

а вториот извод по променливата x е:

$$y''=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3}=$$

$$\frac{-2e^t\sin te^t\left(\sin t+\cos t\right)-e^t\left(\cos t-\sin t\right)2e^t\cos t}{\left(e^t\left(\sin t+\cos t\right)\right)^3}=$$

$$\frac{-2e^{2t}\left(\sin^2 t+\cos t\sin t\right)-2e^{2t}\left(\cos^2 t-\sin t\cos t\right)}{e^{3t}(\sin t+\cos t)^3}=$$

$$\frac{-2e^{2t}\left(\sin^2 t+\cos t\sin t+\cos^2 t-\sin t\cos t\right)}{e^{3t}\left(\sin t+\cos t\right)^3}=$$

$$\frac{-2}{e^t\left(\sin t+\cos t\right)^3}.$$

Ако замениме во равенката $y''(x+y)^2=2(xy'-y)$, добиваме:

$$\frac{-2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}e^{2t}(\sin t+\cos t)^2=2\left(e^t\sin t\cdot\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}-e^t\cos t\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{-2}{\sin t+\cos t}e^t=2e^t\left(\sin t\cdot\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}-\cos t\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{\sin t+\cos t}=\frac{\cos t\sin t-\sin^2 t-\cos t\sin t-\cos^2 t}{\sin t+\cos t}\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1}{\sin t+\cos t}=\frac{-1}{\sin t+\cos t}\Leftrightarrow$$

$$0=0\,.$$

2.5. ИЗВОД ОД ИМПЛИЦИТНО ЗАДАДЕНА ФУНКЦИЈА

Задача 1-4. Пресметај ги изводите:

1) $x^2+2xy+y^2=4x$; 2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$;

3) $e^{xy}-x^2+y^3=0$; 4) $arctg\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Во следниве задачи се бара извод на равенството по променливата x, при што се има предвид дека y е функција од x. Потоа, членовите што го содржат y' се групираат од едната страна на равенството, а останатите од другата страна, и се изразува y':

1) $x^2+2xy+y^2=4x \Leftrightarrow 2x+2y+2xy'+2yy'=4 \Leftrightarrow$

$$x+y+xy'+yy'=2 \Leftrightarrow y'(x+y)=2-x-y \Leftrightarrow y'=\frac{2-x-y}{x+y}.$$

2) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0 \Leftrightarrow$

$$y'=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$$

3) $e^{xy}-x^2+y^3=0 \Leftrightarrow e^{xy}(y+xy')-2x+3y^2y'=0 \Leftrightarrow$

$$ye^{xy}+xy'e^{xy}-2x+3y^2y'=0 \Leftrightarrow y'\left(xe^{xy}+3y^2\right)=2x-ye^{xy} \Leftrightarrow$$

$$y'=\frac{2x-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}.$$

4) $arctg\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy') \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2} \Leftrightarrow y'(x-y)=x+y \Leftrightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

Задача 5-8. Пресметај ги изводите:

5) $x\cos y-\sin x+y^2\cos x=0$; 6) $\arcsin\dfrac{x}{y}-\cos x=0$;

7) $x=ye^{\sin y}$; 8) $(x+y)^3=27(x-y)$.

Решение. 5) Прво ја диференцираме равенката по x, притоа сметајќи ја y како променлива од x, а потоа го изразуваме y':

$$\cos y-x\sin(y)y'-\cos x+2yy'\cos x-y^2\sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$-x\sin(y)y'+2yy'\cos x=\cos x-\cos y+y^2\sin x \Leftrightarrow$$
$$y'(2y\cos x-x\sin y)=\cos x-\cos y+y^2\sin x \Rightarrow$$
$$y'=\frac{\cos x-\cos y+y^2\sin x}{2y\cos x-x\sin y}.$$

6) $\arcsin\dfrac{x}{y}-\cos x=0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}\left(\dfrac{x}{y}\right)'+\sin x=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{y^2-x^2}{y^2}}}\frac{y-xy'}{y^2}=-\sin x \Leftrightarrow \frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^2}}\frac{y-xy'}{y^2}=-\sin x \Leftrightarrow$$

$$\frac{y-xy'}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}=-\sin x \Rightarrow y-xy'=-|y|\sqrt{y^2-x^2}\sin x \Rightarrow$$

$$y+|y|\sqrt{y^2-x^2}\sin x=xy' \Rightarrow y'=\frac{y+|y|\sqrt{y^2-x^2}\sin x}{x}.$$

7) Со диференцирање на равенството $x=ye^{\sin y}$, добиваме:

$$1=y'e^{\sin y}+ye^{\sin y}(\sin y)' \Leftrightarrow 1=y'e^{\sin y}+ye^{\sin y}\cos(y)y' \Leftrightarrow$$
$$1=y'\left(e^{\sin y}+ye^{\sin y}\cos y\right) \Leftrightarrow y'=\frac{1}{e^{\sin y}+ye^{\sin y}\cos y}.$$

8) Со диференцирање на равенството $(x+y)^3=27(x-y)$, добиваме:

$$3(x+y)^2(x+y)'=27(1-y') \Leftrightarrow (x+y)^2(1+y')=9(1-y') \Leftrightarrow$$
$$(x+y)^2+(x+y)^2y'=9-9y' \Leftrightarrow$$

$$\left((x+y)^2+9\right)y'=9-(x+y)^2 \Leftrightarrow y'=\frac{9-(x+y)^{2}}{9+(x+y)^2}\ .$$

Задача 9-12. Најди го изводот на следниве функции:

9) $y=x^x$; 10) $a^x-e^{x-y}=0$;

11) $a^{x-y}-x^y=0$; 12) $x^y-y^x=0$.

Решение. 9) Прв начин. Со користење на логаритамскиот идентитет $x=e^{\ln x}$, равенството го трансформираме во видот: $y=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$. Оттука,

$$y'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=e^{\ln x^x}\left(\ln x+x\frac{1}{x}\right)=x^x(\ln x+1).$$

Втор начин. Го логаритмираме равенството $y=x^x$,

$$\ln y=\ln x^x \Leftrightarrow \ln y=x\ln x,$$

а потоа ја диференцираме последната равенка,

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+1 \Leftrightarrow y'=y(\ln x+1) \Rightarrow y'=x^x(\ln x+1).$$

10) Диференцирајќи ја левата и десната страна на равенството, $a^x-e^{x-y}=0$, добиваме:

$$a^x\ln a-e^{x-y}(1-y')=0 \Leftrightarrow a^x\ln a-e^{x-y}+y'e^{x-y}=0 \Leftrightarrow$$

$$y'e^{x-y}=e^{x-y}-a^x\ln a \Leftrightarrow y'=\frac{e^{x-y}-a^x\ln a}{e^{x-y}}$$

Со замена на $a^x=e^{x-y}$, добиваме $y'=\dfrac{a^x-a^x\ln a}{a^x}=1-\ln a$.

Втор начин. Од $a^x=e^{x-y}$ следува:

$$\ln a^x=\ln e^{x-y} \Leftrightarrow x\ln a=x-y \Leftrightarrow y=x(1-\ln a) \Rightarrow y'=1-\ln a.$$

11) Со логаритмирање на равенството $a^{x-y}=x^y$ добиваме:

$$\ln a^{x-y}=\ln x^y \Leftrightarrow (x-y)\ln a=y\ln x.$$

Послдното равенство го диференцираме по променливата x:

$$(1-y')\ln a=y'\ln x+y\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln a-y'\ln a=y'\ln x+\frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln a-\frac{y}{x}=y'\ln x+y'\ln a \Leftrightarrow y'(\ln x+\ln a)=\frac{x\ln a-y}{x} \Leftrightarrow y'=\frac{x\ln a-y}{x\ln(ax)}.$$

Втор начин. Со логаритмирање на $a^{x-y}=x^y$ добиваме:

$$(x-y)\ln a = y\ln x \Leftrightarrow y(\ln x+\ln a)=x\ln a \Leftrightarrow y=\frac{x\ln a}{\ln ax}.$$

Следува: $y'=\ln a\dfrac{\ln ax - x\dfrac{1}{ax}a}{\ln^2 ax}=\ln a\dfrac{\ln ax-1}{\ln^2 ax}$.

12) Почетното равенство е еквивалентно со: $y\ln x = x\ln y$. Со диференцирање на двете страни од равенството добиваме:

$$y'\ln x + y\frac{1}{x}=\ln y + x\frac{1}{y}y'.$$ Одовде,

$$y'\ln x-\frac{x}{y}y'=\ln y-\frac{y}{x}\Leftrightarrow y'\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)=\ln y-\frac{y}{x}\Leftrightarrow$$

$$y'=\frac{\ln y-\dfrac{y}{x}}{\ln x-\dfrac{x}{y}}=\frac{\dfrac{x\ln y-y}{x}}{\dfrac{y\ln x-x}{y}}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}.$$

За да ја избегнеме аритметичката сложеност на изразите во експлицитно зададените функции, каде што имаме производ или количник на повеќе фактори, истите може да ги решиме со логаритмирање. Ако $y(x)<0$, тогаш ја логаритмираме $-y(x)$.

Задача 13-14. Пресметај ги изводите:

13) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^5}\sqrt{x^2+2}}{(2x+1)^5}$; 14) $y=\dfrac{x^2(x+1)\sqrt{x^2+1}}{(x+2)(x+3)}$.

Решение. 13) Ги логаритмираме двете страни од равенството:

$$\ln y=\ln\frac{x^{\frac{5}{6}}\left(x^2+2\right)^{\frac{1}{2}}}{(2x+1)^5}\Leftrightarrow \ln y=\frac{5}{6}\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-5\ln(2x+1)$$

Ги диференцираме двете страни од последното равенство, имајќи предвид дека y зависи од x.

$$\frac{1}{y}y'=\frac{5}{6}\frac{1}{x}+\frac{1}{2\left(x^2+2\right)}2x-5\frac{1}{2x+1}2=\frac{5}{6x}+\frac{x}{x^2+2}-\frac{10}{2x+1},$$

од каде што:

$$y' = y\left(\frac{5}{6x} + \frac{x}{x^2+2} - \frac{10}{2x+1}\right) = \frac{\sqrt[6]{x^5}\sqrt{x^2+2}}{(2x+1)^5}\left(\frac{5}{6x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \frac{10}{2x+1}\right).$$

14) Логаритмирајќи го равенството, имаме:

$$\ln y = \ln x^2 + \ln(x+1) + \ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - \ln(x+2) - \ln(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\ln y = 2\ln|x| + \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(x+2) - \ln(x+3),$$

од каде што:

$$\frac{1}{y}y' = 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}2x - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{x^2(x+1)\sqrt{x^2+1}}{(x+2)(x+3)}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right).$$

Коментар. Не можеме да запишеме $\ln x^2 = 2\ln x$, туку $\ln x^2 = 2\ln|x|$, бидејќи функцијата чиј извод го бараме е дефинирана и за негативни вредности на променливата x. Во претходната задача истото беше можно бидејќи функцијата $y = x^{\frac{5}{6}}$ е дефинирана за $x > 0$.

Задача 15-18. Пресметај:

15) y'' ако $arctg\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; 16) y'' ако $y = \frac{1}{x^x}$;

17) y'' ако $y = tg(x+y)$; 18) y''' ако $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Решение. 15) Со диференцирање на функцијата

$arctg\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, добиваме: $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Оттука,

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{x - y + xy' - yy' - x + xy' - y + yy'}{(x-y)^2} =$$

$$\frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2} = \frac{2\left(x\frac{x+y}{x-y} - y\right)}{(x-y)^2} = 2\frac{\frac{x^2+xy-xy+y^2}{x-y}}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}.$$

16) Со логаритмирање на равенката $y=\dfrac{1}{x^x}$, добиваме:

$$\ln y=\ln\frac{1}{x^x}\Leftrightarrow \ln y=\ln x^{-x}\Leftrightarrow \ln y=-x\ln x\,.$$

Последната равенка ја диференцираме. Имаме:

$$\frac{1}{y}y'=-\left(\ln x+x\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow y'=-y(\ln x+1)\Leftrightarrow y'=-x^x(\ln x+1)$$

Оттука,

$$y''=-\left(\left(x^x\right)'(\ln x+1)+x^x(\ln x+1)'\right).$$

Ќе го пресметаме изводот на функцијата $y=x^x$. Имаме:

$$\ln y=\ln x^x\Leftrightarrow \ln y=x\ln x$$

од каде што:

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+x\frac{1}{x}\Leftrightarrow y'=x^x(\ln x+1).$$

Следува:

$$y''=-\left(x^x(\ln x+1)^2+x^x\,\frac{1}{x}\right)=-\left(x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}\right)=$$

$$-x^{x-1}\left(x(\ln x+1)^2+1\right).$$

17) Со диференцирање на двете страни на равенката по x, притоа сметајќи дека y зависи од x, добиваме:

$$y'=\frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+y')\Leftrightarrow y'\left(1-\frac{1}{\cos^2(x+y)}\right)=\frac{1}{\cos^2(x+y)}\Leftrightarrow$$

$$y'\left(\frac{\cos^2(x+y)-1}{\cos^2(x+y)}\right)=\frac{1}{\cos^2(x+y)}\Leftrightarrow y'=\frac{1}{\cos^2(x+y)-1}\Leftrightarrow$$

$$y'=\frac{1}{-\sin^2(x+y)}.$$

Оттука,

$$y''=-\frac{-2}{\sin^3(x+y)}(1+y')=\frac{2}{\sin^3(x+y)}\left(1-\frac{1}{\sin^2(x+y)}\right)=$$

$$\frac{2}{\sin^3(x+y)}\frac{\sin^2(x+y)-1}{\sin^2(x+y)}=-\frac{2\cos^2(x+y)}{\sin^5(x+y)}.$$

18) Од равенката $x^2-xy+y^2=1$ добиваме:

$$2x-(y+xy')+2yy'=0\Leftrightarrow 2x-y-xy'+2yy'=0\Leftrightarrow$$

$$(2y-x)y'=y-2x\Leftrightarrow y'=\frac{y-2x}{2y-x}.$$

Сега вториот и третиот извод се:

$$y''=\frac{(y'-2)(2y-x)-(y-2x)(2y'-1)}{(2y-x)^2}=$$

$$\frac{2yy'-xy'-4y+2x-2yy'+y+4xy'-2x}{(2y-x)^2}=$$

$$\frac{3xy'-3y}{(2y-x)^2}=\frac{3\left(x\frac{y-2x}{2y-x}-y\right)}{(2y-x)^2}=\frac{3\frac{xy-2x^2-2y^2+xy}{2y-x}}{(2y-x)^2}=$$

$$3\frac{2xy-2x^2-2y^2}{(2y-x)^3}=\frac{-6(x^2-xy+y^2)}{(2y-x)^3}.$$

Бидејќи $x^2-xy+y^2=1$ важи $y''=\dfrac{-6}{(2y-x)^3}$. Оттука,

$$y'''=-6\frac{-3}{(2y-x)^4}(2y'-1)=18\frac{2\frac{y-2x}{2y-x}-1}{(2y-x)^4}=18\frac{\frac{2y-4x-2y+x}{2y-x}}{(2y-x)^4}=$$

$$18\frac{-3x}{(2y-x)^5}=\frac{54x}{(x-2y)^5}.$$

Задача 19. Покажи дека функцијата $2y=arctgy+y+x$ го исполнува равенството: $y^3y''+2y'=0$.

Решение. Од равенството $2y=arctgy+y+x$ добиваме дека $y=arctgy+x$. Со диференцирање на равенката по x, имајќи предвид дека y е функција од x, имаме дека:

$$y'=\frac{1}{1+y^2}y'+1\Leftrightarrow y'\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)=1\Leftrightarrow y'\frac{1+y^2-1}{1+y^2}=1\Leftrightarrow$$

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{y^2} + 1$$

Вториот извод се добива со диференцирање на последната равенка по x:

$$y'' = -\frac{2}{y^3}y'$$

Ако равенството го помножиме со y^3, добиваме:

$$y^3 y'' + 2y' = 0.$$

Значи, функцијата го исполнува даденото равенство.

2.6. ДИФЕРЕНЦИЈАЛ НА ФУНКЦИЈАТА

Задача 1. Најди ги прирастот и диференцијалот на функцијата: $y = \frac{1}{2}x^3 - 2x$ за $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}1$, а потоа определи ја апсолутната вредност на нивните разлики.

Решение. Прирастот на функцијата е:

$$y = y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{1}{2}(x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x) - \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Delta x + \frac{3}{2}x\Delta x^2 + \frac{1}{2}\Delta x^3 - 2x - 2\Delta x - \frac{1}{2}x^3 + 2x =$$

$$\frac{3}{2}x^2\Delta x + \frac{3}{2}x\Delta x^2 + \frac{1}{2}\Delta x^3 - 2\Delta x = = \frac{27}{2}\cdot 0{,}1 + \frac{9}{2}0{,}01 + \frac{1}{2}0{,}001 - 2\cdot 0{,}1 =$$

$$1{,}35 + 0{,}045 + 0{,}0005 - 0{,}2 = 1{,}1955 .$$

Диференцијалот на функцијата е:

$$dy = y'dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - 2\right)dx = \left(\frac{3}{2}\cdot 3^2 - 2\right)\cdot 0{,}1 = \frac{23}{2}\cdot 0{,}1 = 1{,}15 .$$

И апсолутната вредност од нивните разлики е:

$$|\Delta y - dy| = |1{,}1955 - 1{,}15| = 0{,}0455 .$$

Задача 2. Најди ја вредноста на диференцијалот на функцијата: $y = 2x^3 + 4x + 5$ за $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}2$.

Решение. Диференцијалот на функцијата е: $dy = \left(6x^2 + 4\right)dx$

За $x=1$ и $\Delta x=0{,}2$,

$$dy\left(x=1, \Delta x=0,2\right)=\left(6+4\right)\cdot 0,2=2 .$$

Задача 3-6. Најди ги диференцијалите на функциите:

3) $y=\frac{1}{5}x^5+7x+\sqrt[3]{x^2}$; 4) $y=\sin x+x\cos x$;

5) $y=\left(x^2+3x\right)\ln x$; 6) $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$.

Решение. 3) Прво го наоѓаме првиот извод на функцијата, а потоа го запишуваме диференцијалот според формулата: $dy=y'dx$.

$$y'=x^4+7 \text{ од каде } dy=\left(x^4+7\right)dx$$

4) $$y'=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x ,$$

$$dy=\left(2\cos x-x\sin x\right)dx$$

5) $$y'=\left(2x+3\right)\ln x+\left(x^2+3x\right)\frac{1}{x}=\left(2x+3\right)\ln x+x+3 ,$$

$$dy=\left(\left(2x+3\right)\ln x+x+3\right)dx$$

6) $$y'=\frac{\left(2x-2\right)\left(x-1\right)-\left(x^2-2x\right)}{\left(x-1\right)^2}=\frac{2\left(x-1\right)^2-x\left(x-2\right)}{\left(x-1\right)^2} ,$$

$$dy=\frac{2\left(x-1\right)^2-x\left(x-2\right)}{\left(x-1\right)^2}dx .$$

Задача 7-10. Најди ги диференцијалите на функциите:

7) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; 8) $y=arctg\left(\ln\sin x\right)$;

9) $y=\sqrt[3]{\left(3+tg2x\right)^5}$; 10) $y=2^{5x}+\arcsin\left(3^{-x}\right)$.

Решение. 7) Прв начин. Првиот извод на функцијата е:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} \text{, од каде}$$

$$dy=\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx .$$

Втор начин. Воведуваме смена $x+\sqrt{x}=u$. Тогаш, $y=\sqrt{u}$, па:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{u}}du = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}d\left(x+\sqrt{x}\right) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx .$$

8) Прв начин. Имаме:

$y' = \frac{1}{1+\ln^2 \sin x}\frac{1}{\sin x}\cos x = \frac{ctgx}{1+\ln^2 \sin x}$ од каде $dy = \frac{ctgx}{1+\ln^2 \sin x}dx$.

Втор начин. Воведуваме смена $u = \sin x$ и $v = \ln u$. Тогаш, $y = arctgv$, од каде што:

$$dy = \frac{1}{1+v^2}dv = \frac{1}{1+\ln^2 u}d\left(\ln u\right) = \frac{1}{1+\ln^2 \sin x}\frac{1}{u}du =$$

$$= \frac{1}{1+\ln^2 \sin x}\frac{1}{\sin x}d\sin x = \frac{1}{1+\ln^2 \sin x}\frac{1}{\sin x}\cos x dx = \frac{ctgx}{1+\ln^2 \sin x}dx .$$

9) $$y' = \frac{5}{3}\left(3+tg2x\right)^{\frac{2}{3}}\frac{2}{\cos^2 2x} = \frac{10}{3}\frac{\sqrt[3]{\left(3+tg2x\right)^2}}{\cos^2 2x},$$

$$dy = \frac{10}{3}\frac{\sqrt[3]{\left(3+tg2x\right)^2}}{\cos^2 2x}dx .$$

10) $$y' = 5\cdot 2^{5x}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{1-\arcsin^2\left(3^{-x}\right)}}3^{-x}\ln 3\left(-1\right) =$$

$$5\cdot 2^{5x}\ln 2 - \frac{\ln 3}{3^x\sqrt{1-\arcsin^2\left(3^{-x}\right)}} .$$

Следува: $dy = \left(5\cdot 2^{5x}\ln 2 - \frac{\ln 3}{3^x\sqrt{1-\arcsin^2\left(3^{-x}\right)}}\right)dx$.

Задача 11-12. Најди ги вторите диференцијали на функциите:

11) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 12) $y = \frac{2}{x} + arctg\frac{x}{2}$.

Решение. 11) Најнапред, ќе ги најдеме првиот и вториот извод:

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\dfrac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

и

$$y'' = -\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(1-x^2\right)' = -\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(-2x\right) = \frac{3x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}.$$

Бидејќи $d^2y = y''dx^2$, добиваме дека: $d^2y = \dfrac{3x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}}dx^2$.

12) За функцијата $y = \dfrac{2}{x} + arctg\dfrac{x}{2}$ првиот и вториот извод се:

$$y' = 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\left(\frac{x}{2}\right)' = -\frac{2}{x^2} + \frac{4}{4+x^2}\frac{1}{2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{4+x^2} =$$

$$-2x^{-2} + 2\left(4+x^2\right)^{-1},$$

$$y'' = 4x^{-3} + 2\left(-\left(4+x^2\right)^{-2}2x\right) = \frac{4}{x^3} - \frac{4x}{\left(4+x^2\right)^2},$$

од каде што:

$$d^2y = \left(\frac{4}{x^3} - \frac{4x}{\left(4+x^2\right)^2}\right)dx^2.$$

Задача 13-14*. Најди d^2y за функцијата $y(x) = e^{-x^2}$, ако:

13) x е независна променлива;

14) x е функција од друга променлива.

Решение. 13) Бидејќи:

$$y'(x) = -2xe^{-x^2} \text{ и } y''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\left(-2x\right) = 2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2},$$

следува:

$$d^2y = 2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}dx^2.$$

14) Од $dy = -2xe^{-x^2}dx$ следува:

$$d^2y = d(dy) = d\left(-2xe^{-x^2}dx\right) = -2d\left(xe^{-x^2}dx\right) =$$

$$-2\left(d\left(xe^{-x^2}\right)dx + xe^{-x^2}d\left(dx\right)\right) =$$
$$-2\left(\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}dx^2 + xe^{-x^2}d^2x\right).$$

Задача 15-16. Користејќи ја формулата за приближно пресметување, најди ја приближната вредност на функцијата:

15) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{x-3}}$ за $x = 4{,}12$; 16) $y = (x-1)^2(x-3)(x-2)^3$ за $x = 2{,}99$.

Решение. 15) Првиот извод на функцијата е:

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x+4}{x-3}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{x-3-(x+4)}{(x-3)^2} = -\frac{7}{3(x-3)^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^2}}.$$

Ја применуваме формулата за приближно пресметување:

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x \Leftrightarrow$$
$$\sqrt[3]{\frac{x+\Delta x+4}{x+\Delta x-3}} \approx \sqrt[3]{\frac{x+4}{x-3}} - \frac{7}{3(x-3)^2 \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+4}{x-3}\right)^2}}\Delta x,$$

за $x = 4$ и $\Delta x = 0{,}12$ и добиваме:

$$\sqrt[3]{\frac{8{,}12}{1{,}12}} \approx \sqrt[3]{8} - \frac{7}{3\sqrt[3]{8^2}} \cdot 0{,}12 = 2 - \frac{7}{12} \cdot 0{,}12 = 2 - 0{,}7 = 1{,}93.$$

16) Првиот извод на функцијата е:

$$y' = 2(x-1)(x-3)(x-2)^3 + (x-1)^2(x-2)^3 + 3(x-1)^2(x-3)(x-2)^2$$

Ако во формулата за приближно пресметување ставиме $x = 3$ и $\Delta x = -0{,}01$, при што $y(3) = 0$ и $y'(3) = (3-1)^2(3-2)^3 = 4$, добиваме:

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x \Leftrightarrow$$
$$y(2{,}99) \approx y(3) + y'(3)(-0{,}01) = -0{,}04.$$

Задача 17-18. Пресметај приближно:
17) $\sqrt{10}$; 18) $\cos 61^0$; 19) $\ln tg 48°$.

Решение. Приближните вредности на функцијата $y(x)$ во точката $x+\Delta x$ ги добиваме со помош на формулата

$$y(x+\Delta x)\approx y(x)+y'(x)\Delta x.$$

17) За $y(x)=\sqrt{x}$, $y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и

$$y(x+\Delta x)\approx y(x)+y'(x)\Delta x \Leftrightarrow \sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Избираме: $x=9$ и $\Delta x=1$. Тогаш,

$$\sqrt{10}\approx\sqrt{9}+\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 1=3+\frac{1}{6}=3{,}1(6).$$

18) Приближната вредност на $\cos 61^0$ ќе ја пресметаме ако ја определиме приближната формула за функцијата $y(x)=\cos x$, при што: $y'(x)=-\sin x$. Имаме:

$$y(x+\Delta x)\approx y(x)+y'(x)\Delta x \Leftrightarrow \cos(x+\Delta x)\approx\cos x-\sin x\Delta x$$

Избираме: $x=\dfrac{\pi}{3}$ и $\Delta x=\dfrac{\pi}{180}$. Тогаш,

$$\cos 61^0=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{\pi}{3}+\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}\approx$$
$$0{,}5-0{,}015=0{,}485.$$

19) За $y(x)=\ln tgx$, $y'(x)=\dfrac{1}{tgx}\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\sin x\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}$.

Избираме: $x=\dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x=\dfrac{\pi}{60}$. Тогаш,

$$y(x+\Delta x)\approx y(x)+y'(x)\Delta x \Leftrightarrow \ln tg(x+\Delta x)\approx\ln tgx+\frac{2}{\sin 2x}\Delta x \Leftrightarrow$$

$$\ln tg 48°\approx\ln tg\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\sin\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{30}\approx 0{,}105.$$

Задача 20. Ако $\sin 1° = 0{,}017452$, определи ја приближната вредност на бројот π.

Решение. Од приближната формула за функцијата $y(x) = \sin x$,

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x \Leftrightarrow \sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos(x)\Delta x,$$

за $x = 0$ и $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$ имаме:

$$\sin\frac{\pi}{180} \approx \sin 0 + \cos(0)\frac{\pi}{180} \Leftrightarrow 0{,}017452 \approx \frac{\pi}{180} \Leftrightarrow \pi \approx 3{,}14.$$

Задача 21. За колку приближно ќе се промени бројот 4^5, ако основата се промени за 0,006.

Решение. Ја користиме приближната формула $\Delta y \approx dy$ кога $\Delta x \approx 0$. Избираме $y = x^5$, при што $y' = 5x^4$ и $\Delta x = 0{,}006 = 6 \cdot 10^{-3}$.

$$y(x+\Delta x) - y(x) \approx y'(x)\Delta x \Leftrightarrow (x+\Delta x)^5 - x^5 \approx 5x^4\Delta x,$$

од каде што:

$$(4+0{,}006)^5 - 4^5 \approx 5 \cdot 4^4 \cdot 0{,}006 = 7{,}68.$$

Значи, бројот приближно ќе се промени за $7{,}7$.

Задача 22. Изведи ја формулата $\dfrac{1}{(1+h)^2} \approx 1 - 2h$ кога $h \approx 0$.

Решение. Приближната формула за функцијата $y(x) = \dfrac{1}{x^2}$ е:

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x \Leftrightarrow \frac{1}{(x+\Delta x)^2} \approx \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\Delta x,$$

кога $\Delta x \approx 0$. За $x = 1$ и $\Delta x = h$ добиваме:

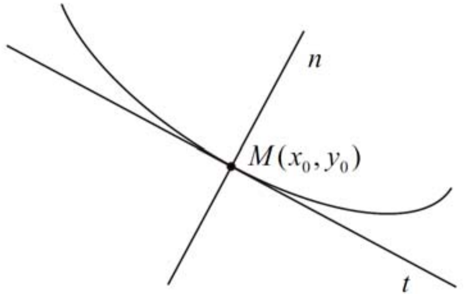
$$\frac{1}{(1+h)^2} \approx 1 - 2h.$$

3.1. РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА НА ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА

Задача 1-4. Напиши ја равенката на тангентата и равенката на нормалата на кривата $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ во точките:

1) $A(-1,0)$; 2) $B(2,3)$; 3) $C(3,0)$; 4) $D(-5,-32)$.

Решение. Изводот на функцијата $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ е:



$$y'=\sqrt[3]{3-x}+(x+1)\frac{1}{3}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(-1)=\sqrt[3]{3-x}-\frac{1}{3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}.$$

1) Ако во равенката на тангентата, ги замениме координатите на допирната точка $A(-1,0)$ и вредноста на изводот за $x_0=-1$, $y_0'=y'(-1)=\sqrt[3]{4}$, ќе ја определиме нејзината равенка:

$$y-y_0=y_0'(x-x_0)\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{4}(x+1)\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{4}.$$

Равенката на нормалата, во точката $A(-1,0)$ е:

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}x-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

2) Во точката $B(2,3)$, изводот на функцијата е $y'(2)=\sqrt[3]{1}-\frac{1}{3}\frac{3}{\sqrt[3]{1}}=0$. Следува дека равенките на тангентата и на нормалата што ги бараме се: $t: y=3$ и $n: x=2$.

3) За точката $C(3,0)$ имаме: $y'(3)=0-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{0}=\infty$, од каде што равенките на тангентата и нормалата се:

$$t: x=3,\; n: y=0.$$

4) Во точката $D(-5,-32)$,

$$y_0' = \sqrt[3]{8} - \frac{1}{3}\frac{-5+1}{\sqrt[3]{(3+5)^2}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Следува дека равенките на тангентата и нормалата се:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \Leftrightarrow y + 32 = \frac{7}{3}(x+5) \Leftrightarrow y = \frac{7}{3}x - \frac{61}{3} \text{ и}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0) \Leftrightarrow y + 32 = -\frac{3}{7}(x+5) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{7}x - \frac{239}{7}.$$

Задача 5. Напиши ја равенката на тангентата и нормалата на кривата $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ во точката во која $t = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Равенката на тангентата е: $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$, а на нормалата: $y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0)$, каде што $M(x_0, y_0)$ е допирната точка. Ги определуваме координатите на допирната точка:

$$x_0 = a\cos^3\frac{\pi}{4} = a\frac{2\sqrt{2}}{8} = a\frac{\sqrt{2}}{4},\ y_0 = a\sin^3\frac{\pi}{4} = a\frac{2\sqrt{2}}{8} = a\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Изводите по параметарот t се:

$$\dot{x} = -3a\cos^2 \sin t \text{ и } \dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Изводот на функцијата е: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3a\sin^2\cos t}{-3a\cos^2\sin t} = -tgt$, додека во точката за која $t = \frac{\pi}{4}$, имаме:

$$y_0' = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{4} = -1.$$

Следува, равенките на тангентата и на нормалата, соодветно се:

$$y - a\frac{\sqrt{2}}{4} = -\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Leftrightarrow y - a\frac{\sqrt{2}}{4} = -x + a\frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow x + y - \frac{\sqrt{2}a}{2} = 0.$$

$$y - a\frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{-1}\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Leftrightarrow y - a\frac{\sqrt{2}}{4} = x - a\frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow y = x.$$

Задача 6. Најди го коефициентот на правец и тангентата на кривата $y = arctgx$, во точката со апциса $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. Ординатата на допирната точка е

$$y_0 = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6},$$

коефициентот на правецот е: $k = y_0' = \frac{1}{1+{x_0}^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$,

и равенката на тангентата е:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \Leftrightarrow y + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}.$$

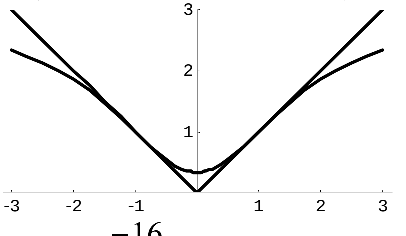
Задача 7. Докажи дека тангентите на кривата $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, повлечени од точките со ординати $y = 1$, се сечат во координатниот почеток.

Решение. Апцисите на точките во кои $y = 1$ се:

$$1 = \frac{1+3x^2}{3+x^2} \Leftrightarrow 3 + x^2 = 1 + 3x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \pm 1.$$

Првиот извод на функцијата е:

$$y' = \frac{6x(3+x^2) - (1+3x^2)2x}{(3+x^2)^2} = \frac{2x(9+3x^2-1-3x^2)}{(3+x^2)^2} = \frac{16x}{(3+x^2)^2}.$$



За точката $(-1,1)$, $y_0' = \frac{-16}{16} = -1$, од каде што равенката на тангентата во дадената точка е:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x .$$

За точката $(-1,1)$, $y_0' = \dfrac{16}{16} = 1$, од каде што равенката на тангентата во дадената точка е:

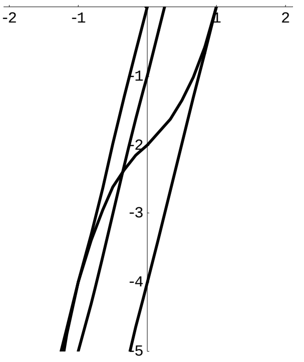
$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \Leftrightarrow y - 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x .$$

Пресечните точки на тангентите се решение на системот равенки:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Значи, тангентите се сечат во точката $(0,0)$.

Задача 8. Во кои точки тангентата на кривата $y = x^3 + x - 2$ е паралелна со правата $y = 4x - 1$?



Решение. Коефициентот на правец на тангентата во точката $M(x_0, y_0)$ е $k_1 = y'(x_0) = 3x_0^{\ 2} + 1$, а на правата $y = 4x - 1$, е $k_2 = y_0' = 4$.

Во точките во кои тангентата на кривата е паралелна со правата, коефициентите на правец им се еднакви, т.е.

$$3x_0^{\ 2} + 1 = 4 \Leftrightarrow x_0^{\ 2} = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1 .$$

Значи, бараните точки се: $A(-1,-4)$ и $B(1,0)$.

Задача 9. Напиши ја равенката на тангентата на кривата $y = \sqrt{5 - x^2}$ која е нормална на правата $y = 2x$.

Решение. Коефициентот на правец на правата е: $k_p = 2$. Коефициентот на правец на тангентата е:

$$k_t = y_0' = \frac{1}{2\sqrt{5 - x_0^2}}(-2x_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{5 - x_0^2}} .$$

Бидејќи правите се заемно нормални, важи:

$$k_t = -\frac{1}{k_p} \Leftrightarrow -\frac{x_0}{\sqrt{5 - x_0^2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x_0 = \sqrt{5 - x_0^2} ,$$

од каде што за $x_0 > 0$ добиваме:

$$4x_0^{\,2} = 5 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^{\,2} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 .$$

Тогаш, $y_0 = \sqrt{5-1^2} = 2$ и $y_0' = -\dfrac{1}{\sqrt{5-1}} = -\dfrac{1}{2}$.

Оттука, равенката на тангентата е:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0) \Leftrightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Задача 10. Состави ја равенката на нормалата на кривата $y = x\ln x$ која е паралелна со правата $2x - 3y + 3 = 0$.

Решение. Изводот на функцијата $y = x\ln x$ е:

$$y' = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x .$$

Коефициентот на правецот на нормалата во точката $M_0(x_0, y_0)$ е:

$$k_n = \frac{-1}{y'(x_0)} = \frac{-1}{1+\ln x_0}.$$

Коефициентот на правецот на правата

$$y = \frac{2x+3}{3} = \frac{2}{3}x + 1 \text{ е } k = \frac{2}{3}.$$

Бидејќи двете прави се паралелни, важи:

$$-\frac{1}{y_0'} = k \Leftrightarrow \frac{-1}{\ln x_0 + 1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\ln x_0 + 2 = -3 \Leftrightarrow$$

$$\ln x_0 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x_0 = e^{-\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt{e^5}}.$$ Следува:

$$y_0 = x_0 \ln x_0 = e^{-\frac{5}{2}} \ln\left(e^{-\frac{5}{2}}\right) = -\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}} \ln e = -\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2\sqrt{e^5}}.$$

Значи, точката во која треба да ја повлечеме нормалата е:

$$M_0\left(e^{-\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}}\right),$$ па нејзината равенка е:

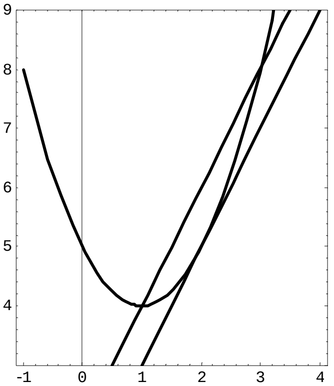
$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}\left(x - e^{-\frac{5}{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}e^{-\frac{5}{2}} \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{15-4}{6}e^{-\frac{5}{2}} \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{6\sqrt{e^5}}$$

Задача 11. Тетивата на параболата $y=x^2-2x+5$ поврзува две точки со апциси $x=1$ и $x=3$. Состави ја равенката на тангентата на кривата која е паралелна на тетивата.

Решение. Бидејќи $y(1)=4$, $y(3)=8$, точките низ кои поминува тетивата, се: $A(1,4)$ и $B(3,8)$.



Од условот за паралелност на две прави, следува дека коефициентите на правец на тетивата $k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-4}{3-1}=2$ и на тангентата $k_2=y_0'=2x_0-2=2(x_0-1)$ се еднакви. Оттука,

$$k_1=k_2 \Leftrightarrow 2=2(x_0-1) \Leftrightarrow 1=x_0-1 \Leftrightarrow x_0=2.$$

Ординатата на допирната точка е: $y_0=2^2-2\cdot 2+5=5$. Значи, точката во која треба да се повлече тангентата е: $M(2,5)$ и $y_0'=2$. Оттука: равенката на тангентата е:

$$y-y_0=y_0'(x-x_0) \Leftrightarrow y-5=2(x-2) \Leftrightarrow 2x-y+1=0.$$

Задача 12. Покажи дека тангентата на кривата:

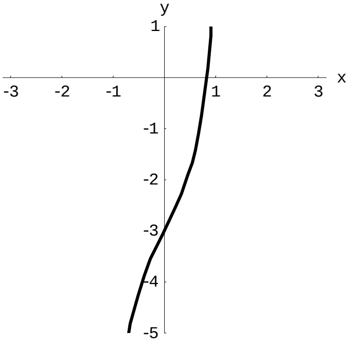
$$y=2x^5+x^3+2x-3$$

во секоја точка со x-оската зафаќа остар агол.

Решение. Изводот на y,

$$y'=tg\alpha=10x^4+3x^2+2>0,$$

е позитивен, односно тангенсот од аголот што го зафаќа тангентата со позитивниот дел од x-оската, е поголем од нула.



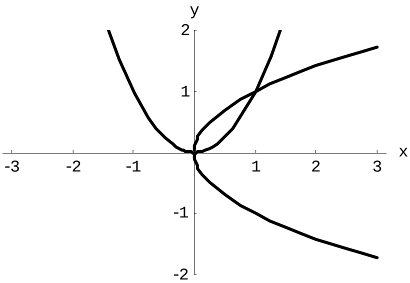
Следува, аголот што го зафаќа тангентата, со позитивниот дел од x-оската е остар.

Задача 13. Најди ги аглите под кои се сечат кривите:
$y = x^2$ и $y^2 = x$.

Решение. Аглите под кои се сечат кривите, се аглите меѓу тангентите на кривите во нивните пресечни точки.

Пресечните точки на кривите се решение на системот равенки: $y = x^2$, $y^2 = x$. Нивните апсциси се:

$x^4 = x \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \; x\left(x^3 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$
$x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$



Во точката $(0,0)$ тангентата на кривата $y = x^2$ е x-оската, а тангентата на кривата $y^2 = x$ е y-оската. Затоа, аголот меѓу тангентите е: $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Во точката $(1,1)$ за кривата $y_1(x) = x^2$, важи: $y_1'(x) = 2x$ и $y_1'(1) = 2$. Кривата $y^2 = x$ во некоја околина на точката $(1,1)$, се совпаѓа со кривата $y_2(x) = \sqrt{x}$, за која $y_2'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и $y_2'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Според формулата за агол, меѓу две криви добиваме:

$$tg\alpha = \frac{y_2'(x_0) - y_1'(x_0)}{1 + y_1'(x_0) y_2'(x_0)} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\text{, од каде што } \alpha = arctg\frac{3}{4}.$$

Значи, кривите се сечат под агли $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ и $\alpha = arctg\dfrac{3}{4}$.

Задача 14. Најди ги аглите меѓу тангентите на кривата $x^2 + y^2 = 1$, повлечени во точка со апсциса $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Ординатите на допирните точки се:

$$x_0^2 + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значи, постојат две точки со апсциса $x_0 = \dfrac{1}{2}$:

$$A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ и } B\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Со диференцирање на равенката $x^2+y^2=1$, добиваме:

$$2x+2yy'=0 \Leftrightarrow x+yy'=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{x}{y}.$$

Коефициентите на правец на тангентите во точките A и B се

$$k_1=y_0'=-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } k_2=y_0'=\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ соодветно.}$$

Следува дека тангенсот од аголот меѓу тангентите е:

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}=\sqrt{3}, \text{ од каде што}$$

$$\alpha=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Задача 15. Најди ги равенките на тангентите на кривата $y=x^2+x+2$ повлечени од точката $A(-1,1)$.

Решение. Да забележиме дека точката A не е допирна точка на кривата бидејќи $y(-1)=2\neq 1$. Равенката на тангената е $y-y_0=y_0'(x-x_0)$, каде што $y_0={x_0}^2+x_0+2$ и $y'(x)=2x+1$, односно $y_0'=2x_0+1$. Апцисата x_0 на допирната точка ќе ја најдеме кога во равенката на тангентата ќе ги замениме координатите на точката A низ која минува тангентата.

$$y-y_0=y_0'(x-x_0) \Leftrightarrow 1-\left({x_0}^2+x_0+2\right)=(2x_0+1)(-1-x_0) \Leftrightarrow$$

$$1-{x_0}^2-x_0-2=-2x_0-2{x_0}^2-1-x_0 \Leftrightarrow {x_0}^2+2x_0=0 \Leftrightarrow x_0(x_0+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$x_0=0,\ x_0=-2.$$

За $x_0=0$, $y_0=2$ и $y_0'=1$, од каде што равенката на тангентата е $y-2=x \Leftrightarrow x-y+2=0$.

За $x_0=-2$, $y_0=4$ и $y_0'=-3$, па равенката на тангентата е:

$$y-4=-3(x+2) \Leftrightarrow 3x+y+2=0.$$

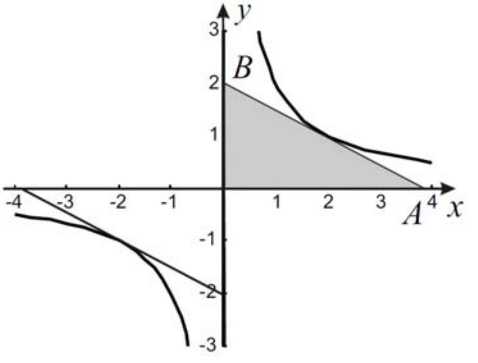
Задача 16. Од точката $A(4,1)$ повлечи тангента на кривата:
$$y=\frac{x-1}{x}.$$

Решение. Изводот на функцијата е $y'=\frac{x-(x-1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}$. Ако допирната точка ја означиме со $D(x_0,y_0)$, равенката на тангентата ќе биде: $y-y_0=\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)$. Бидејќи тангентата минува низ точката $A(4,1)$, нејзините координати ја задоволуваат равенката на тангентата. Бидејќи допирната точка лежи на кривата, важи: $y_0=\frac{x_0-1}{x_0}$. Следува дека апцисата на допирната точка е:
$$1-\frac{x_0-1}{x_0}=\frac{1}{x_0^2}(4-x_0)\Leftrightarrow \frac{x_0-x_0+1}{x_0}=\frac{1}{x_0^2}(4-x_0)\Leftrightarrow 1=\frac{4-x_0}{x_0}\Leftrightarrow$$
$$x_0=4-x_0\Leftrightarrow x_0=2$$
Оттука, $y_0=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$. Значи, допирната точка е: $D\left(2,\frac{1}{2}\right)$, па равенката на тангентата е:
$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{x}{4}.$$

Задача 17. Тангентата на кривата $y=\frac{2}{x}$ ги сече координатните оски во точките A и B. Покажи дека триаголникот OAB има константна плоштина.

Решение. Изводот на функцијата $y=\frac{2}{x}$ е: $y'=-\frac{2}{x^2}$. Равенката на тангентата во точката $M_0(x_0,y_0)$ е:
$$y-y_0=-\frac{2}{x_0^2}(x-x_0).$$
Тангентата ги сече координатните оски $y=0$ и $x=0$ за:
$$0-y_0=-\frac{2}{x_0^2}(x-x_0)\Leftrightarrow -\frac{2}{x_0}=-\frac{2}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0}\Leftrightarrow \frac{4}{x_0}=\frac{2}{x_0^2}x\Leftrightarrow x=2x_0,$$ и

$$y-\frac{2}{x_0}=-\frac{2}{x_0^2}\left(0-x_0\right)\Leftrightarrow y-\frac{2}{x_0}=\frac{2}{x_0}\Leftrightarrow y=\frac{4}{x_0}.$$



Плоштината на триаголникот AOB е:

$$P=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}2x_0\frac{4}{x_0}=4.$$

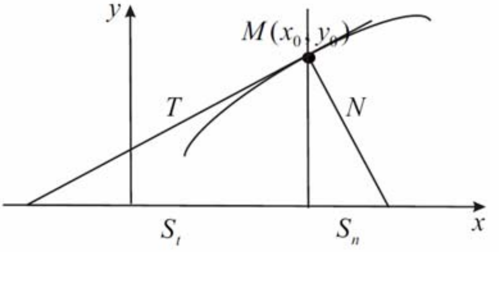
Значи, плоштината на триаголникот не зависи од точката во која се повлекува тангентата.

Допирни големини (должина на тангента, нормала, субтангента и субнормала)

> **Задача 18.** Најди ја должината на субтангентата, субнормалата, тангентата и нормалата на кривата $y=\frac{2}{1+x^2}$ во точката со апциса $x=1$.

Решение. Имајќи предвид дека :

$$y(1)=\frac{2}{2}=1,\quad y'=-2\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}2x=-\frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}\ \text{и}\ y'(1)=-\frac{4}{4}=-1,$$



следува:

$$S_t = \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| = 1,\ S_n = |yy'| = |1(-1)| = 1,$$

$$T = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2} = \left|\frac{1}{-1}\right|\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ и } N = |y|\sqrt{1+y'^2} = |1|\sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Задача 19. Докажи дека должината на тангентата на кривата:

$$x = a\left(\ln tg\frac{t}{2} + \cos t\right),\ y = a\sin t,\ a > 0,\ t \neq k\pi$$

е константна.

Решение. Изводите на функцијата по параметарот t се:

$$\dot{x} = a\left(\frac{1}{tg\frac{t}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\frac{1}{2} - \sin t\right) = a\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} - \sin t\right) =$$

$$a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) = a\left(\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\right) = a\frac{\cos^2 t}{\sin t} \text{ и}$$

$$\dot{y} = a\cos t,$$

од каде што

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\cos t}{a\frac{\cos^2 t}{\sin t}} = \frac{\sin t}{\cos t} = tgt.$$

Сега должината на тангентата на кривата е:

$$T = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2} = \left|\frac{a\sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}}\right|\sqrt{1+tg^2 t} = |a\cos t|\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = a|\cos t|\frac{1}{|\cos t|} = a$$

Задача 20. Докажи дека субтангентата на кривата:

$$y = ae^{bx},\ b \neq 0;$$

во секоја точка има иста должина.

Решение. Имајќи предвид дека $y' = abe^{bx}$, субтангентата е:

$$S_t = \left|\frac{y}{y'}\right| = \left|\frac{ae^{bx}}{abe^{bx}}\right| = \frac{1}{|b|}.$$

3.2. ТЕОРЕМИ ЗА СРЕДНА ВРЕДНОСТ

Задача 1-2. Провери дали функциите:

1) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ на интервалот $[0,2]$ и

2) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x^3}$ на интервалот $[-1,1]$,

ги исполнуваат условите од теоремата на Рол. Во потврден случај најди ја вредноста на точката ξ.

Решение. 1) Функцијата е непрекината на интервалот $[0,2]$ и $y(0)=y(2)=1$. Но, функцијата не е диференцијабилна на интервалот $(0,2)$, бидејќи нема извод во единицата. Имено,

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} \text{ за } x\neq 1 \text{ и}$$

$$f'(1^-)=\frac{2}{3\sqrt[3]{1^- -1}}=-\infty \text{ и } f'(1^+)=\frac{2}{3\sqrt[3]{1^+ -1}}=+\infty .$$

Следува дека функцијата не ги исполнува условите од теоремата на Рол.

2) Функцијата не исполнува ниту еден од условите од теоремата на Рол. Функцијата не е дефинирана во точката $x=0$, па не е непрекината на интервалот $[-1,1]$, ниту диференцијабилна на $(-1,1)$. Освен тоа, $f(-1)=-4$ и $f(1)=-2$, па: $f(-1)\neq f(1)$.

Задача 3. Провери дали функцијата $f(x)=\begin{cases}-x^2+3x, & x\leq 2\\ -x+4, & x>2\end{cases}$ ги исполнува условите од теоремата на Рол на интервалот $[0,4]$. Во потврден случај најди ја соодветната точка ξ од теоремата.

Решение. Во точката $x=2$,

$$f(2^-)=f(2)=f(2^+)\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-}(-x^2+3x)=2=\lim_{x\to 2^+}(-x+4)\Leftrightarrow 2=2=2 .$$

Следува дека функцијата е непрекината во точката $x=2$. Функцијата е непрекината на интервалот $(0,2)$ бидејќи функцијата $f(x)=-x^2+3x$ е непрекината, и е непрекината на интервалот $(2,4)$ бидејќи $f(x)=2x+1$ е непрекината.

Аналогно, функцијата е диференцијабилна во сите точки $x \neq 2$, бидејќи функциите $f(x) = -x^2 + 3x$ и $f(x) = 2x + 1$ се диференцијабилни на множеството реални броеви и $f'(x) = \begin{cases} -2x+3 \\ -1 \end{cases}$. Во точката $x = 2$,

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (-2x+3) = -1 \text{ и}$$

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (-1) = -1.$$

Уште $f(0) = 0$ и $f(4) = 0$.

Следува дека функцијата ги исполнува условите од теоремата на Рол. Точката $\xi \in (0,4)$ го исполнува условот:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -2\xi + 3 = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}.$$

Задача 4. Покажи дека равенката $x^3 + x - 1 = 0$ има точно еден корен.

Решение. Прво ќе покажеме дека равенката има најмалку едно решение. Нека $f(x) = x^3 + x - 1$. Тогаш, $f(0) = -1 < 0$ и $f(1) = 1 > 0$. Од теоремата за средна вредност на непрекинати функции на затворен интервал, следува дека постои точката $\xi \in (-1,1)$, таква што $f'(\xi) = 0$, односно ξ е корен на равенката.

Да претпоставиме дека равенката има два корена a и b, $a < b$. Тогаш, за функцијата f се исполнети условите од теоремата на Рол на интервалот $[a,b]$. Имено, функцијата е непрекината и диференцијабилна на множеството реални броеви и $f(a) = f(b) = 0$. Следува, постои точка $\xi \in (a,b)$, таква што $f'(\xi) = 0$. Но, $f'(x) = 3x^2 + 1$, па $f'(\xi) = 3\xi^2 + 1$. Добивме дека:

$$3\xi^2 + 1 = 0,$$

што не е можно, бидејќи $3\xi^2 + 1 \geq 1$. Знач, имаме противречност со претпоставката дека равенката има две решенија.

Следува дека равенката има точно еден реален корен.

Задача 5. Најди ги интервалите што содржат точно по еден корен од првиот извод на функцијата $f(x) = (x+3)(x+1)(x-2)(x-5)$

Решение. Функцијата f е непрекината и диференцијабилна за секое $x \in \mathbb{R}$ и

$$f(-3) = f(-1) = f(2) = f(5) = 0 .$$

Според теоремата на Рол на секој од интервалите $(-3,-1)$, $(-1,2)$, $(2,5)$ постои точка ξ, таква што $f'(\xi) = 0$.

Значи, нулите на првиот извод се наоѓаат во интервалите: $(-3,-1)$, $(-1,2)$, $(2,5)$.

Задача 6-7. Провери дали функциите:

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ на интервалот $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$;

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ на интервалот $[-1,1]$;

ги исполнуваат условите од теоремата на Лагранж. Во потврден случај, најди ја вредноста на точката ξ.

Решение. **6)** Функцијата е диференцијабилна на целата реална права и $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Специјално, функцијата е непрекината на интервалот $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ и диференцијабилна на $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$. Следува дека функцијата ги исполнува условите од теоремата на Лагранж. Притоа,

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} \text{ и } f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} .$$

Според теоремата на Лагранж, постои точка ξ, таква што:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\sqrt{3}\right) - f\left(-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\xi}{\left(1+\xi^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 .$$

Значи, бараната точка е $\xi = 0$. Забележуваме дека во задачава, всушност, се исполнети условите од теоремата на Рол, која е специјален случај на теоремата на Лагранж.

7) Функцијата е непрекината на интервалот $[-1,1]$, но не е диференцијабилна на $(-1,1)$, бидејќи нема извод во нулата. Навистина, $f'(x) = \dfrac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, од каде $f'(0) = +\infty$. Следува дека не се исполнети условите од теоремата на Лагранж.

Коментар. Во овој случај точката ξ, за која важи $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$, постои, иако не се исполнети условите од теоремата на Лагранж. Имено, равенката:

$$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}}=\frac{1-(-1)}{1-(-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\xi^2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\xi^2=\frac{1}{27} \Leftrightarrow \xi=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}},$$

има решение $\xi=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ на интервалот $[-1,1]$. Последново покажува дека условите од теоремата на Лагранж се доволни, но не и потребни.

Задача 8. Во која точка од графикот на функцијата $f(x)=x^2$, тангентата е паралелна со отсечката што ги поврзува точките $A(-1,1)$ и $B(3,9)$.

Решение. Точките A и B лежат на кривата. Функцијата $f(x)=x^2$ ги исполнува условите на Лагранж на интервалот $[-1,3]$. Следува дека постои точката ξ, таква што:

$$f'(\xi)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} \Leftrightarrow 2\xi=\frac{9-1}{4} \Leftrightarrow \xi=1.$$

Бидејќи $f(1)=1$, бараната точка е $(1,1)$.

Задача 9-10. Со помош на теоремата на Лагранж, покажи ги неравенствата:

9) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a},\ 0<a<b$;

10) $arctgb-arctga<b-a\ ,\ a<b$.

Решение. 9) Функцијата $f(x)=\ln x$ е диференцијабилна за секое $x>0$, па ги исполнува условите од теоремата на Лагранж. Тогаш, за некое $\xi\in(a,b)$,

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a} \Leftrightarrow \ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{\xi}$$

Бидејќи $\xi < b$, следува: $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b}$, од каде што: $\frac{b-a}{\xi} > \frac{b-a}{b}$.

Заради $\xi > a$, имаме: $\frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$, односно: $\frac{b-a}{\xi} < \frac{b-a}{a}$. Следува: $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

10) Прв начин. Функцијата $f(x) = arctgx$ ги исполнува условите од теоремата на Лагранж на секој интервал $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, па следува дека постои точката ξ, таква што:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{arctgb - arctga}{b-a} = \frac{1}{1+\xi^2} \Leftrightarrow$$

$$arctgb - arctga = \frac{b-a}{1+\xi^2}.$$

1. Ако $a < b \le 0$ или $0 \le a < b$ точката $\xi \ne 0$, од каде што: $\frac{b-a}{1+\xi^2} < b-a$, или

$$arctgb - arctga < b-a.$$

2. Ако $a < 0 < b$, тогаш ја применуваме теоремата за средна вредност на секој од интервалите $[a,0]$ и $[0,b]$ и добиваме:

$$\frac{arctg0 - arctga}{0-a} = \frac{1}{1+\xi_1^{\ 2}}, \text{ за некое } \xi_1 \in (a,0) \Rightarrow -arctga < -a$$

$$\frac{arctgb - arctg0}{b-0} = \frac{1}{1+\xi_2^{\ 2}}, \text{ за некое } \xi_2 \in (0,b) \Rightarrow arctgb < b.$$

Со собирање на неравенствата добиваме:

$$arctgb - arctga < b-a.$$

Втор начин. Ја разгледуваме функцијта $f(x) = x - arctgx$. Првиот извод е: $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$. Бидејќи $f'(x) > 0$ за $x \ne 0$ следува дека фунцкијата монотоно расте на секој од интервалите $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, а бидејќи е непрекината и во нулата, следува дека монотоно расте на $\mathbb{R}$.

Следува дека за $a < b$, важи: $a - arctga < b - arctgb$, односно: $arctgb - arctga < b-a$.

Задача 11. Докажи дека функцијата $f(x)=\arcsin x+\arccos x$ е константна. Потоа определи ја функцијата f.

Решение. Функцијата f е дефинирана на интервалот $[-1,1]$ и е непрекината на истиот интервал. Затоа, доволно е да покажеме дека е константна на $(-1,1)$. Бидејќи

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

за сите $x\in(-1,1)$, следува дека f е константна на $(-1,1)$.

Бидејќи $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$, следува дека $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ на интервалот $[-1,1]$.

Задача 12. Докажи го равенството:

$$2arctgx+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x \text{ за } |x|\geq 1.$$

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=2arctgx+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$. Функцијата е добро дефинирана бидејќи $-1\leq\dfrac{2x}{1+x^2}\leq 1$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

За $|x|>1$ важи:

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{\frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}}{1+x^2}}\frac{1-x^2}{1+x^2}=$$

$$\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{\left|1-x^2\right|}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2}{x^2-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=0.$$

Следува дека функцијата е константна на секој од интервалите $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$. Бидејќи функцијата е непрекината на $\mathbb{R}$, следува: $f(x)=f(1)$ за $x>1$ и $f(x)=f(-1)$ за $x<-1$. Притоа,

$$f(-1)=2arctg(-1)+\arcsin(-1)=2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}=-\pi \text{ и}$$

$$f(1)=2arctg1+\arcsin 1=2\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

од каде што:

$$2arctgx+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x \text{ за } |x|\geq 1$$

Задача 13. Докажи го равенството:

$$\cos^2 x-\cos^4 x+\sin^4 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Решение. Функциите:

$$f(x)=\cos^2 x-\cos^4 x+\sin^4 x \text{ и } g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

се диференцијабилни на $\mathbb{R}$. Нивните изводи се:

$$f'(x)=2\cos x(-\sin x)-4\cos^3 x(-\sin x)+4\sin^3 x\cos x$$

$$=\sin x\left(-2\cos x+4\cos^3 x+4\sin^2 x\cos x\right)=$$

$$\sin x\left(-2\cos x+4\cos^3 x+4\left(1-\cos^2 x\right)\cos x\right)=$$

$$\sin x\left(-2\cos x+4\cos^3 x+4\cos x-4\cos^3 x\right)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

и

$$g'(x)=-\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2=\sin 2x$$

Од $f'(x)=g'(x),\ x\in\mathbb{R}$ следува дека $f(x)=g(x)+C$ за секое $x\in\mathbb{R}$. Притоа,за $x=0$,

$$f(0)=\cos^2 0-\cos^4 0+\sin^4 0=0 \text{ и } g(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 0=1.$$

Оттука, следува дека $C=0$. Според тоа, $f(x)=g(x)$ за секое $x\in\mathbb{R}$, што требаше да се покаже.

Задача 14. Провери дали функциите:

$$f(x)=\sin x \text{ и } g(x)=\cos x,$$

ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на интервалот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Во потврден случај најди ја вредноста точката ξ.

Решение. Функциите f и g се диференцијабилни на $\mathbb{R}$ и

$$g(x)=-\sin x\neq 0 \text{ на } \left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

па ги исполнуваат условите од теоремата на Коши на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Следува:

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ за некое } \xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0}=\frac{\cos\xi}{-\sin\xi} \Leftrightarrow$$

$$-1=-ctg\xi \Leftrightarrow ctg\xi=1 \Leftrightarrow \xi=\frac{\pi}{4}.$$

3.3. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Задача 1. Разложи го по степените на $x-2$ полиномот:
$$f(x)=2x^4-5x^3-3x^2+8x+4.$$

Решение. Ја пресметуваме вредноста на функцијата f во точката $x_0=2$ и ги наоѓаме изводите на функцијата и нивните вредности во точката $x_0=2$:

$$f(x)=2x^4-5x^3-3x^2+8x+4,\ f(2)=32-40-12+16+4=0,$$
$$f'(x)=8x^3-15x^2-6x+8,\ f'(2)=64-60-12+8=0,$$
$$f''(x)=24x^2-30x-6,\ f''(2)=96-60-6=30,$$
$$f'''(x)=48x-30,\ f'''(2)=96-30=66,$$
$$f^{(4)}(x)=48,\ f^{(4)}(2)=48,$$
$$f^{(n)}(x)=0,\ n\geq 5.$$

Ја применуваме Тејлоровата формула, заклучно со членовите до четврти ред:

$$f(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+$$
$$\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^n+R_4(x)\Leftrightarrow$$
$$f(x)=\frac{30}{2}(x-2)^2+\frac{66}{6}(x-2)^3+\frac{48}{24}(x-2)^4\Leftrightarrow$$
$$f(x)=15(x-2)^2+11(x-2)^3+2(x-2)^4,$$

бидејќи $R_4(x)=\dfrac{f^{(5)}(2+\theta(x-2))}{5!}(x-2)^5=0$ за $\theta\in(0,1)$.

Задача 2. Пресметај $f(1{,}98)$, ако:
$$f(x)=2x^4-5x^3-3x^2+8x+4.$$

Решение. Од претходната задача:
$f(x)=15(x-2)^2+11(x-2)^3+2(x-2)^4$.

За $x=1{,}98$, $x-2=1{,}98-2=2\cdot 10^{-2}$ имаме:

$$f(1{,}98)\approx 15\cdot 4\cdot 10^{-4}-11\cdot 8\cdot 10^{-6}+2\cdot 16\cdot 10^{-8}=$$
$$(600000-8800+32)\cdot 10^{-8}=591232\cdot 10^{-8}.$$

Задача 3. Разложи го по степените на $x+1$ полиномот:

$$f(x)=\left(x^3+2x^2-3\right)^2.$$

Решение. Прво ќе ја примениме Тејлоровата формула во точката $x=-1$, за полиномот $f(x)=x^3+2x^2-3$. Имаме:

$$f(-1)=-2,\ f'(x)=3x^2+4x;\ f'(-1)=-1;\ f''(x)=6x+4,$$
$$f''(-1)=-2;$$
$$f'''(x)=6,\ f'''(-1)=6 \text{ и } f^{(n)}(x)=0, \text{ за } n\geq 4.$$

Следува дека Тејлоровата формула е:

$$f(x)=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+R_3(x)\Leftrightarrow$$
$$f(x)=-2-(x+1)-(x+1)^2+(x+1)^3.$$

Најпосле, со помош на формулата:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd,$$

го добиваме барното разложување:

$$\left(x^3+2x^2-3\right)^2=\left(2+(x+1)+(x+1)^2-(x+1)^3\right)^2=$$
$$4+(x+1)^2+(x+1)^4+(x+1)^6+$$
$$+4(x+1)+4(x+1)^2-4(x+1)^3+2(x+1)^3-2(x+1)^4-(x+1)^5=$$
$$4+4(x+1)+5(x+1)^2-2(x+1)^3-(x+1)^4-(x+1)^5+(x+1)^6.$$

Задача 4. Апроксимирај ја функцијата $f(x)=\ln(1+x)$ со Маклоренов полином од втор степен.

Решение. Имаме $f(0)=\ln 1=0$. Првите три изводи и нивните вредности во нулата, за функцијата f се:

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $f'(0)=1$; $f''(0)=-1$. Маклореновата формула е

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+R_2(x)\Leftrightarrow f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+R_2(x)$$

Следува: $f(x)\approx x-\dfrac{1}{2}x^2$.

Задача 5. Апроксимирај ја функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ со Тајлоров полином од трет степен во околина на точката $x=1$, а потоа оцени ја грешката на апроксимацијата за $x\in[0{,}9;1{,}1]$.

Решение. Ги пресметуваме вредностите на функцијата и нејзините изводи до четврти ред во точката $x=1$:

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}},\ f(1)=1;\ f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ f'(1)=\frac{1}{2};$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\ f''(1)=-\frac{1}{4};$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}},\ f'''(1)=\frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{3}{8}\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}}=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},\ f^{(4)}(1+\theta(x-1))=-\frac{15}{16}\frac{1}{\sqrt{(1+\theta(x-1))^7}}$$

Бараната Тајлорова формула е:

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+R_3(x)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3+R_3(x),$$

каде

што $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(1+\theta(x-1))}{4!}(x-1)^4=-\dfrac{15}{16\cdot 4!}\dfrac{1}{\sqrt{(1+\theta(x-1))^7}}(x-1)^4$, за

некое $\theta\in(0{,}1)$.

Значи, апроксимацијата на функцијата f со Тајлоров полином од трет степен е:

$$f(x)\approx 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3.$$

Бидејќи $\dfrac{9}{10}\le x\le\dfrac{11}{10}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{10}\le x-1\le\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow|x-1|\le\dfrac{1}{10}$, и $\theta\in(0{,}1)$,

следува:

$$\frac{9}{10}<1+\theta(x-1)<\frac{11}{10}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(1+\theta(x-1))^7}>\frac{3^7}{10^{\frac{7}{2}}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{(1+\theta(x-1))^7}}<\frac{10^{\frac{7}{2}}}{3^7}.$$

и за $x \in [0{,}9;1{,}1]$ грешката при апроксимацијата е:

$$\left|R_3(x)\right| \leq \frac{15}{16 \cdot 4!} \frac{10^{\frac{7}{2}}}{3^7} \frac{1}{10^4} = \frac{5}{2^7 3^7 \sqrt{10}} < 0{,}6 \cdot 10^{-5}.$$

Задача 5. Колку членови треба да се земат во Маклореновата формула за функцијата $f(x) = e^x$, за да добиениот полином ја апроксимира дадената функција со точност 10^{-2}, на интервалот $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Решение. Бројот на потребните членови за да се апроксимира функцијата f со точност 10^{-2}, на интервалот $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, го добиваме со определување на n во изразот $\left|R_n(x)\right| < 10^{-2}$. Лесно се заклучува дека k-от извод е:

$$f^{(k)}(x) = e^x \text{ за сите } k \in \mathbb{R} \text{ и } e^{\theta x} < e^{\frac{1}{2}} < 2,\ \theta x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \text{ Оттука:}$$

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right|}{(n+1)!} |x|^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{2}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{1}{2^n (n+1)!}.$$

Притоа,

$$\left|R_n(x)\right| < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n (n+1)!} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow (n+1)! 2^n > 100.$$

Со проверка, добиваме дека за $n = 3$, $4! 2^3 = 192 > 100$, односно последното неравенство е исполнето.

Значи, потребно е да се земат членовите заклучно до третиот ред, односно да се земат четири члена од Маклореновиот полином.

Задача 6. За кои вредности на променливата x, со помош на приближната формула $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, може да ја пресметаме вредноста на функцијата $f(x) = \cos x$ со точност до 10^{-4}?

Решение. Маклореновата формула за функцијата $f(x) = \cos x$, кога $n = 2$, е:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x) \text{ и } R_2(x) = \frac{x^4}{4!} f^{(x)}(\theta x) = \frac{x^4}{24}\cos\theta x .$$

Треба да важи: $|R_2(x)| \le 10^{-4}$. Бидејќи $|R_2(x)| = \left|\frac{x^4}{24}\cos\theta x\right| \le \frac{|x|^4}{24}$,

следува дека: $|R_2(x)| \le 10^{-4}$, ако:

$$\frac{|x|^4}{24} \le 10^{-4} \Leftrightarrow |x|^4 \le \frac{24}{10^4} \Leftrightarrow |x| \le \frac{\sqrt[4]{24}}{10} .$$

Значи, за $x \in \left[-\frac{\sqrt[4]{24}}{10}, \frac{\sqrt[4]{24}}{10}\right]$ приближната формула дава резутат со точност до 10^{-4}.

Задача 7. Пресметај $\sin 10^\circ$ со точност до 10^{-6}.

Решение. За n-тите изводи на функцијата $f(x) = \sin x$ добиваме:

$$f(x) = \sin x,\ f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ f'(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi),\ f''(0) = \sin\pi = 0$$

$$f'''(x) = \cos(x + \pi) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right),\ f'''(0) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

Заклучуваме:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} .$$

Точноста на последното равенство ја утврдуваме со методот на математичката индукција.

Следува, Маклореновата формула за функцијата $f(x) = \sin x$ е:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x),$$

при што за некое $\theta \in (0,1)$,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|(-1)^n\right| \frac{\left|\sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right|}{(2n+1)!} x^{2n+1} \le \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1} < \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{5^{2n+1}}$$

За $n = 2$, $\left|R_2(x)\right| < \frac{1}{5!}\frac{1}{5^5} = \frac{1}{120}\frac{1}{15625} < 0{,}6 \cdot 10^{-6}$. Следува дека треба да ја користиме приближната формула $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$. Тогаш,

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0{,}173468.$$

При пресметувањето, се јавува дополнително отстапување поради заокружувањето. За точноста да остане 10^{-6}, потребно е бројот $\pi \approx 3{,}14159$ да го заокружиме на 5 децимали.

Задача 8-9. Докажи ги неравенствата:

8) $tgx > x + \frac{x^3}{3!}$ за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 9) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ за $x > -1$.

Решение. 8) Ја развиваме функцијата $f(x) = tgx$ во Маклоренов ред:

$$f(x) = tgx,\ f(0) = tg0 = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ f'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1,$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{\cos^4 x}\right)2\cos x(-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},\ f''(0) = \frac{2\sin 0}{\cos^3 0} = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos x\cos^3 x - 2\sin x 3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} = 2\frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} =$$

$$2\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x},\ f'''(0) = 2\frac{\cos^2 0 + 3\sin^2 0}{\cos^4 0} = 2,$$

од каде што:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_3(x) \Leftrightarrow$$

$$tgx = x + \frac{1}{3}x^3 + R_3(x).$$

Бидејќи

$$f^{(4)}(x)=2\frac{4\sin x\cos^5 x-\left(1+2\sin^2 x\right)4\cos^3 x(-\sin x)}{\cos^8 x}=$$

$$2\frac{4\sin x\cos^2 x+4\sin x+8\sin^3 x}{\cos^5 x}\ .$$

Следува: $R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4>0$ за $\theta\in(0,1)$ и $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Оттука:

$$tgx<x+\frac{2}{6}x^3\,.$$

9) За функцијата $f(x)=\sqrt{1+x}$, $f(0)=1$, додека нејзините први изводи и нивните вредности во $x=0$ се:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},\ f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}},\ f''(0)=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}\,.$$

Маклореновата формула за функцијата f за $n=1$ е:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+R_1(x)\Leftrightarrow\ \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8\sqrt{(1+\theta x)^3}}x^2\,.$$

каде што $R_1(x)=\frac{f^{(2)}(\theta x)}{2!}x^2=-\frac{1}{8\sqrt{(1+\theta x)^3}}x^2<0$ за $\theta\in(0,1)$

Затоа,

$$\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x\,.$$

Маклореновата формула за функцијата f за $n=2$ е:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+R_2(x)\ \Leftrightarrow\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2!}x-\frac{1}{8}x^2+R_2(x)$$

$$\text{и }R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\theta x)}{3!}x^3=\frac{1}{16\sqrt{(1+\theta x)^5}}x^3>0\ \text{ за }\theta\in(0,1).$$

Следува: $\sqrt{1+x}>1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$.

3.4. ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

Неопределености од видовите $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Задача 1-4. Пресметај ги границите:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{\sin^2 x};\qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx};$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2};\qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-e^{\sin x}}.$$

Решение.

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^n x}{\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-n\cos^{n-1}x(-\sin x)}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{n}{2}\cos^{n-2}x=\frac{n}{2}.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos ax}(-\sin ax)a}{\frac{1}{\cos bx}(-\sin bx)b}=$$

$$\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\cos bx}{\cos ax}\frac{\sin ax}{ax}\frac{bx}{\sin bx}\frac{a}{b}=$$

$$\frac{a^2}{b^2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos bx}{\cos ax}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}=\frac{a^2}{b^2}\frac{\cos 0}{\cos 0}1\cdot 1=\frac{a^2}{b^2}.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}2x+\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}e^{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=e^0+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-e^{\sin x}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-\cos xe^{\sin x}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-\left(-\sin xe^{\sin x}+\cos^2 xe^{\sin x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x+\left(\sin x-\cos^2 x\right)e^{\sin x}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x+(\cos x-2\cos x(-\sin x))e^{\sin x}+(\sin x-\cos^2 x)\cos xe^{\sin x}}=$$

$$\frac{1}{e^x+1e^0-1\cdot 1e^0}=1.$$

Задача 5-6. Пресметај ги границите:

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg3x}$.

Решение.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{4x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{12x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{36x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{72x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{72}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}+\infty$.

6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 3x}3}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\frac{1}{3}\frac{\cos^2 0}{\cos^2 0}=\frac{1}{3}$.

Неопределености од видот $0\cdot\infty$.

Задача 7-9. Пресметај ги границите:

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx$.

Решение.

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^{+\infty}}=0$.

8) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$.

9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{tgx}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1/\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\sin x\cos^2 x=0.$$

Неопределености од видот $\infty - \infty$.

Задача 10-11. Пресметај ги границите:

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(x-1\right)e^{-\frac{1}{x+1}}-x\right)$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\right)$.

Решение.

10) $$\lim_{x\to\infty}\left(\left(x-1\right)e^{-\frac{1}{x+1}}-x\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x-1}{x}e^{-\frac{1}{x+1}}-1\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x+1}}-1}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x+1}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x+1}}\frac{1}{\left(x+1\right)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x+1}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x+1}}\frac{1}{\left(x+1\right)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x+1}}\left(1+\frac{x-1}{x}\frac{x^2}{\left(x+1\right)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x+1}}\left(1+\frac{x-1}{x}\frac{x^2}{\left(x+1\right)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$-\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x+1}}\left(1+\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{1}{x+1}}\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}\frac{x^2}{\left(x+1\right)^2}\right)=e^0\left(1+e^0\cdot 1\right)=2.$$

11) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{x\cos x}{\sin^3 x}\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\left(\cos x-x\sin x\right)}{3\sin^2 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x}=$$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}==\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{3}.$$

Во следнава задача ќе разгледаме граници на функциите што не генерираат неопределен облик, на пример изразите од обликот

$$0^{\infty}=0 \text{ и } \frac{\infty}{0}=\infty .$$

Задача 12-13. Пресметај ги границите:

12) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение. 12) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}=0^{+\infty}=0$, **13)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$.

Неопределености од видот 1^{∞}, 0^0 и ∞^0.

Задача 14-15. Пресметај ги границите:

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^x$; 15) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение.

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^x=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\ln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)}=e^{-\frac{2}{\pi}}$,

бидејќи:

$$\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}arctgx}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$-\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{arctgx}\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}.$$

15) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=\left(1^{\infty}\right)$. Нека $L=\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Тогаш

$$\ln L=\ln\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\ln x^{\frac{1}{1-x}}=\ln\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}$$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=-1$. Следува: $L=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Задача 16-17. Пресметај ги границите:

$$16)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}};\qquad 17)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}.$$

Решение.

16) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)}} = e,$

бидејќи

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln\left(e^x-1\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}e^x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{xe^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x+xe^x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

17) Нека $L = \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \left(0^0\right)$. Тогаш

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+}\ln x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0^+}\sin x = 1\cdot\sin 0 = 0.$$

Следува: $L = e^0 = 1$.

Задача 18-19. Пресметај ги границите:

$$18)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}};\qquad 19)\ \lim_{x\to 0^+} ctgx^{\sin x}.$$

Решение. 18) Имаме:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \left(\infty^0\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}} = e,$$

бидејќи

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} = \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}==\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1.$$

19) Прв начин. Нека $L=\lim\limits_{x\to0^+}ctgx^{\sin x}=\left(\infty^0\right)$. Тогаш,

$$\ln L=\lim_{x\to0^+}\ln ctgx^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\sin x\ln ctgx=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln ctgx}{\frac{1}{\sin x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{ctgx}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{ctgx}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin 0}{\cos^2 0}=0.$$

Следува: $L=e^0=1$.

Втор начин. Имаме:

$$\lim_{x\to0^+}ctgx^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\sin x)^{\sin x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0^+}(\cos x)^{\sin x}}{\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\sin x}}.$$

Притоа,

$$\lim_{x\to0^+}(\cos x)^{\sin x}=(\cos 0)^{\sin 0}=1^0=1.$$

и ако $L=\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\sin x}=\left(0^0\right)$, тогаш:

$$\ln L=\ln\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\ln(\sin x)^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\sin(x)\ln(\sin x)=$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}=-\lim_{x\to0^+}\sin x=\sin 0=0.$$

Следува: $L=e^0=1$, од каде што $\lim\limits_{x\to0^+}ctgx^{\sin x}=\frac{1}{1}=1$.

Задача 20-21. Пресметај ги границите:

20) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. 20) Нека $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)$. Тогаш,

$$\ln L=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-\ln e\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{2x(1+x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

21) Нека $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^{\infty}\right)$. Тогаш,

$$\ln L=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\arcsin x}{x}}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\arcsin x}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x-\arcsin x}{x^2}}{2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{2x^2\arcsin x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{ЛП}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}-\frac{x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{4x\arcsin x+\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2x^2\left(2\dfrac{\arcsin x}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(2\dfrac{\arcsin x}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}=\frac{1}{2\cdot 1\cdot\left(2\cdot 1+1\right)}=\frac{1}{6}.$$

Следува: $L=e^{\frac{1}{6}}$.

Примери кога Лопиталовото правило не може да се примени или кога со негова примена не може да се реши лимесот

Задача 22-23. Пресметај ја границата:

$$22)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x};\qquad 23)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}.$$

Решение. 22) Во оваа задача, иако кога $x\to\infty$ се добива неопределеност од обликот ∞/∞, не може да се примени Лопиталовото правило затоа што не постои

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\cos x}.$$

Задачата ќе ја решиме директно со трансформација на изразот $x=x+\sin x-\sin x$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x-\sin x}{x+\sin x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\sin x}{x+\sin x}\right)=1-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x+\sin x}=1-0=1.$$

23) И во оваа задача не се исполнети условите за примена на Лопиталовото правило, бидејќи

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}\ \text{не постои.}$$

Сепак, бидејќи функцијата синус е ограничена, решението едноставно се добива со следнава трансформација на изразот:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0\,.$$

Задача 24. Каде е грешката?

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{6x^2-1}\overset{1}{=}\lim_{x\to 1}\frac{20x^3}{12x}\overset{2}{=}\lim_{x\to 1}\frac{5}{3}x^2\overset{3}{=}\frac{5}{3}\,.$$

Решение. Грешката е во првото равенство. Во дадената граница не може да се примени Лопиталовото правило, затоа што немаме неопределен облик. Границата е директно пресметлива:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{6x^2-1}=\frac{5}{6-1}=1\,.$$

Задача 25. Пресметај ја границата $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Во границата имаме неопределен облик ∞/∞ кога $x\to+\infty$. Со Лопиталовото правило, границата се сведува на

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,.$$

која генерира добиваме неопределен облик ∞/∞. Со повторна примена на Лопиталовото правило,

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,,$$

ја добиваме почетната граница. Значи, дадената задача не може да се реши со примена на Лопиталовото правило. Границата ја определуваме со едноставни трансформации:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+0}=1\,.$$

3.5. ЕКСТРЕМИ

Задача 1. Претстави го бројот a како збир на два броја, така што нивниот производ да биде максимален.

Решение. Го претставуваме бројот a како збир од два собирока, $a = x + y$. Оттука, $y = a - x$, од каде што производот на собироците претставен како функција од x е:

$$P = xy = x(a - x).$$

Ги бараме стационарните точки на функцијата:

$$P'(x) = a - 2x = 0 \Leftrightarrow a - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$

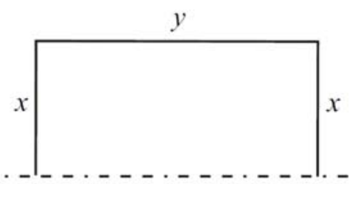
За $x < \frac{a}{2}$, важи: $2x < a \Leftrightarrow a - 2x > 0$ и за $x > \frac{a}{2}$ важи: $2x > a \Leftrightarrow a - 2x < 0$. Според првиот критериум за екстрем, следува дека функцијата P има локален максимум во точката $x = \frac{a}{2}$.

Значи, бројот a треба да се претстави во вид $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ за производот на собироците да биде максимален.

Коментар. Локалниот екстрем може да се определи и според вториот критериум за екстрем. Имено, бидејќи $P''(x) = -2 < 0$ следува дека стационарната точка $x = \frac{a}{2}$ е локален максимум на функцијата P.

Задача 2. Фармер со 2400 метри жица сака да огради едно поле, во форма на правоаголник, кое се наоѓа покрај река. Притоа, нема потреба да користи жица долж реката. Какви треба да бидат димензиите на правоаголникот за да оградениот дел има максимална плоштина?

Решение. Нека со x и y ги означиме димензиите на полето,



каде y е страната паралелна на реката. Бидејќи не треба да се користи жица вдолж реката, тогаш од условите на задачата имаме:

$$2400 = 2x + y \Leftrightarrow y = 2400 - 2x.$$

Функцијата чија екстремна вредност се бара е плоштината на полето:

$$P = xy = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2,$$

каде што:

$$P' = 2400 - 4x \text{ и } P' = 0 \Leftrightarrow 4(600 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 600.$$

Бидејќи $P'' = -4 < 0$, следува дека $x = 600$ е точка на локалниот максимум.

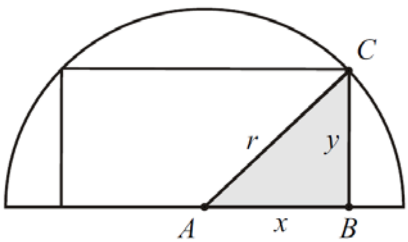
Значи, најголема површина има правоаголникот со димензии:

$$x = 600 \text{ и } y = 2400 - 2 \cdot 600 = 1200 \text{ метри.}$$

Задача 3. Најди ја плоштината на најголемиот правоаголник впишан во полукруг со радиус r.

Решение. Нека со x и y ги означиме страните на правоаголникот чија плоштина е $P = 2xy$. Од правоаголниот триаголник на цртежот важи:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



Оттука, плоштината на правоаголникот е

$$P = 2x\sqrt{r^2 - x^2}, \text{ каде што:}$$

$$P' = 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2\left(r^2 - 2x^2\right)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2\left(r - \sqrt{2}x\right)\left(r + \sqrt{2}x\right)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

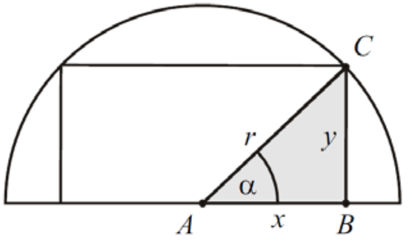
и

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow r - \sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}x \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Притоа, имавме предвид дека $r > 0$ и $x > 0$, односно $r + \sqrt{2}x > 0$. Првиот извод го менува знакот од + кон − при премин низ $x = r/\sqrt{2}$. Имено, за $x < r/\sqrt{2}$ важи: $r - \sqrt{2}x > 0$, а за $x > r/\sqrt{2}$

важи: $r-\sqrt{2}x<0$, додека $\sqrt{r^2-x^2}>0$. Следува: во $x=r/\sqrt{2}$ функцијата достигнува локален максимум и

$$P\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)=2\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}}=r^2$$



е плоштинатата на најголемиот впишан правоаголник.

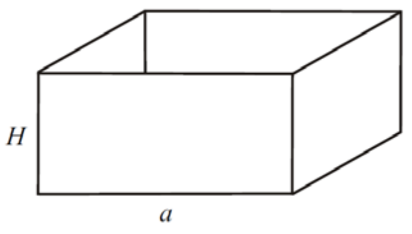
Втор начин. Едноставно решение е можно ако се искористи аголот како променлива. Тогаш,

$P=2xy=2(r\cos\alpha)(r\sin\alpha)=r^2\sin 2\alpha$

Функцијата P ќе има најголема вредност ако

$\sin 2\alpha=1 \Leftrightarrow 2\alpha=\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{4}$, па $P=r^2\sin\dfrac{\pi}{2}=r^2$.

Задача 4. Определи ги димезиите на базен со квадратно дно и волумен V, така што за обложување на ѕидовите и подот на базенот да се потроши најмалку материјал.



Решение. Нека страната од квадратното дно е a, а висината на базенот е H. Плоштината на базенот што треба да се обложи со некој материјал е: $P=a^2+4aH$. Волуменот на базенот е: $V=a^2H$, од каде што висината е: $H=\dfrac{V}{a^2}$.

Следува дека плоштината на базенот, претставена како функција од страната a, е:

$$P=a^2+4a\frac{V}{a^2}=a^2+\frac{4V}{a},$$

каде што:

$$P'=2a-\frac{4V}{a^2}=\frac{2a^3-4V}{a^2}=\frac{2\left(a^3-2V\right)}{a^2}$$

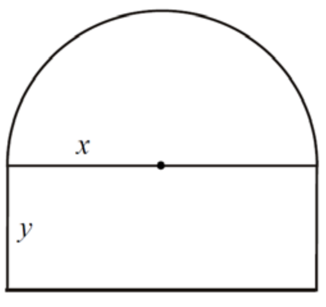
и

$$P'=0 \Leftrightarrow a^3=2V \Leftrightarrow a=\sqrt[3]{2V}$$

има вредност нула за $a^3 = 2V$, односно $a = \sqrt[3]{2V}$. Тогаш, $P'' = 2 - 4V\frac{-2}{a^3} = 2 + \frac{8V}{a^3} > 0$, па во $a = \sqrt[3]{2V}$ функцијата P има локален максимум.

Значи, базенот треба да е долг и широк $a = \sqrt[3]{2V}$ и висок $H = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

Задача 5. Прозорец има форма на полукруг надоврзан на правоаголник. При каков радиус x на полукругот во прозорецот ќе влегува најмногу светлина ако должината на прозорецот е l?



Решение. Бидејќи радиусот на полукругот е x, должината на едната страна на правоаголникот е $2x$. Да ја означиме со y должината на другата страна.

Функцијата од која бараме екстрем е плоштината на прозорецот $P = 2xy + \frac{x^2\pi}{2}$, затоа што најмногу светлина ќе влегува ако плоштината е најголема. Ако од должината на прозорецот $l = 2x + 2y + x\pi$ ја изразиме страната $y = \frac{1}{2}\left(l - 2x - x\pi\right)$ и ја замениме во функцијата, имаме: $P = x\left(l - 2x - x\pi\right) + \frac{x^2\pi}{2} = lx - 2x^2 - \frac{x^2\pi}{2}$.

Изводот:

$$P'(x) = l - 4x - \frac{2x\pi}{2} = l - x(4+\pi).$$

има вредност нула за:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow l = x(4+\pi) \Leftrightarrow x = \frac{l}{4+\pi}.$$

Притоа, $P''(x) = -(4+\pi) < 0$, што значи дека во дадената точка функцијата има максимум.

Значи, за $x = \dfrac{l}{4+\pi}$ во прозорецот ќе влегува најмногу светлина.

Задача 6. Определи ги константите A, B и C, така што функцијата $y(x) = \left(x^3 + Ax^2 + Bx + C\right)e^x$ да ја задоволува равенката $y'' - 2y' + y = (6x-2)e^x$ и во точката $x = 0$ да има максимум 3.

Решение. Прво ги пресметуваме првиот и вториот извод на функцијата:

$$y' = \left(3x^2 + 2Ax + B\right)e^x + \left(x^3 + Ax^2 + Bx + C\right)e^x$$

$$y'' = (6x + 2A)e^x + \left(3x^2 + 2Ax + B\right)e^x +$$

$$+\left(3x^2 + 2Ax + B\right)e^x + \left(x^3 + Ax^2 + Bx + C\right)e^x =$$

$$(6x + 2A)e^x + 2\left(3x^2 + 2Ax + B\right)e^x + \left(x^3 + Ax^2 + Bx + C\right)e^x .$$

Ако замениме во диференцијалната равенка, добиваме:

$$(6x + 2A)e^x + 2\left(3x^2 + 2Ax + B\right)e^x + \left(x^3 + Ax^2 + Bx + C\right)e^x - 2\left(3x^2 + 2Ax + B\right)e^x$$

$$-2\left(x^3 + Ax^2 + Bx + C\right)e^x + \left(x^3 + Ax^2 + Bx + C\right)e^x = (6x-2)e^x \Leftrightarrow$$

$$(6x + 2A)e^x = (6x-2)e^x \Leftrightarrow 2A = -2 \Leftrightarrow A = -1 .$$

Од условот во точката $x = 0$ функцијата да достигнува максимум, следува дека првиот извод е нула во дадената точка, односно:

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow B + C = 0 .$$

Од условот во точката $x = 0$ функцијата да има максимум 3, следува:

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow Ce^0 = 3 \Leftrightarrow C = 3 .$$

Ако замениме во претходната равенка, добиваме: $B = -3$.

Значи, константите се: $A = -1$, $B = -3$ и $C = 3$.

Задача 7. Најди точка од параболата $y^2 = 2x$, која е најблиску до точката $A(1,4)$.

Решение. Функцијата од која бараме екстрем е растојанието d од точката од параболата $T\,(x, y)$ до точката $A(1,4)$. За точките од параболата со координати x и y важи $y^2 = 2x$, т.е. $x = \dfrac{y^2}{2}$, од каде што:

$$d=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2}\,.$$

Првиот извод е:

$$d'=\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2}}\left(\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2\right)'=$$

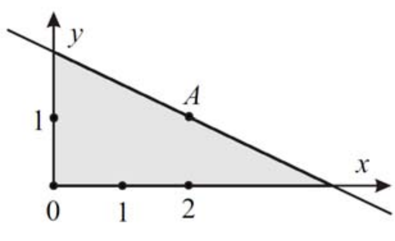
$$\frac{2\left(\frac{y^2}{2}-1\right)y+2(y-4)}{2\sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2}}=\frac{y^3-2y+2y-8}{2\sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2}}=$$

$$\frac{y^3-8}{2\sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2}}=\frac{(y-2)\left(y^2+2y+4\right)}{2\sqrt{\left(\frac{y^2}{2}-1\right)^2+(y-4)^2}}\,.$$

Бидејќи $y^2+2y+4>0$, $d'=0$ ако $y-2=0$ т.е. $y=2$. Функцијата $d'(x)$ го менува знакот од $-$ кон $+$ при премин низ $y=2$. Значи, кога $y=2$ растојанието d е најмало. Следува дека бараната точка е $T(2,2)$.

Задача 8. Низ точката $A(2,1)$ повлечи права која со координатните оски гради триаголник во прв квадрант со најмала плоштина.

Решение. Сегментната равенка на правата е $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, каде што a и b се отсечоците на x-оската и y-оската, соодветно.



Бидејќи триаголникот лежи во првиот квадрант, важи: $a>0$, $b>0$.

Правата ја содржи точката $A(2,1)$. Следува:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{b}=1-\frac{2}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{b}=\frac{a-2}{a} \Leftrightarrow b=\frac{a}{a-2}.$$

Плоштината на триаголникот што правата го гради со координатните оски е:

$$P=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a\frac{a}{a-2}=\frac{1}{2}\frac{a^2}{a-2},$$

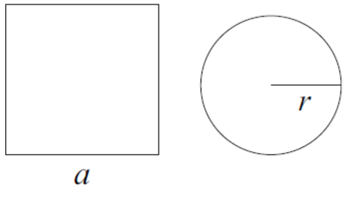
каде што:

$$P'(a)=\frac{1}{2}\frac{2a(a-2)-a^2}{(a-2)^2}=\frac{1}{2}\frac{2a^2-4a-a^2}{(a-2)^2}=\frac{1}{2}\frac{a^2-4a}{(a-2)^2}=\frac{1}{2}\frac{a(a-4)}{(a-2)^2}$$

Притоа, бидејќи $a>0$, $P'(a)=0$ ако $a-4=0$ т.е. $a=4$. Функцијата го менува знакот од $-$ кон $+$ при премин низ $a=4$, односно во дадената точка плоштината е најмала.

Затоа, равенката на правата е $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$.

Задача 9. Како треба да се исече жица со должина од 100 метри, за да од пресечените делови се направи квадрат и круг чиј збир на плоштини е најмал?



Решение. Збирот од плоштините на квадратот и кругот е:

$$P=a^2+r^2\pi.$$

Периметарот на квадратот е $4a$, а на кругот $2r\pi$. Од условот на задачата имаме:

$$100=4a+2r\pi \Leftrightarrow 4a=100-2r\pi \Leftrightarrow a=25-\frac{\pi}{2}r.$$

Тогаш, плоштината изразена како функција од радиусот е:

$$P=a^2+r^2\pi=\left(25-\frac{\pi}{2}r\right)^2+r^2\pi=625-25\pi r+\frac{\pi^2}{4}r^2+r^2\pi.$$

Оттука,

$$P'=-25\pi+\frac{\pi^2}{4}2r+2r\pi=-25\pi+\frac{\pi^2}{2}r+2r\pi.$$

и

$$P'=0 \Leftrightarrow -25\pi+\frac{\pi^2}{2}r+2r\pi=0 \Leftrightarrow -25+\frac{\pi}{2}r+2r=0 \Leftrightarrow$$

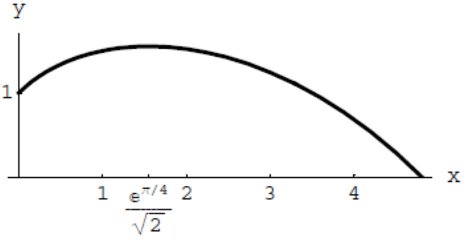
$$\left(\frac{\pi}{2}+2\right)r = 25 \Leftrightarrow r = \frac{25}{\frac{\pi}{2}+2} \Leftrightarrow r = \frac{50}{\pi+4}$$

Бидејќи $P'' = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi > 0$, плоштината во дадената точка е минимална. Значи, едниот дел на жицата ќе има должина $l_2 = 2r\pi = 2\pi\frac{50}{\pi+4} = \frac{100\pi}{\pi+4}$.

Задача 10. Определи ги најголемата и најмалата вредност на функцијата $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Изводите по параметарот t се:

$$\dot{y} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t\left(\cos t - \sin t\right)$$
$$\dot{x} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t\left(\sin t + \cos t\right)$$



Првиот извод по променливата x, е: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$.

Притоа,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow tgt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Во интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ единствено решение е: $t = \frac{\pi}{4}$ и функцијата $y'(x)$ го менува знакот од + кон – при премин низ $t = \frac{\pi}{4}$. Следува дека во $t = \frac{\pi}{4}$, функцијата достигнува локален максимум

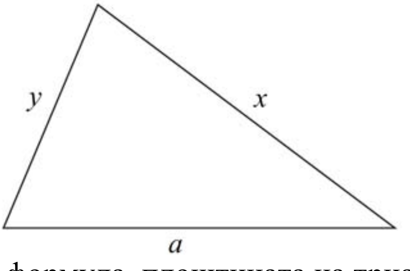
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}.$$

Бидејќи вредностите во крајните точки на интервалот, $y(0)=1$ и $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, се помали, точката $E\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ е точка на апсолутен максимум.

Задача 11. Од сите триаголници со страна a и периметар $2s$, одреди го оној што има најголема плоштина.

Решение. Нека x и y се останатите две страни на триаголникот. Од условот на задачата имаме:

$$2s=a+x+y \Leftrightarrow y=2s-a-x .$$



Според Хероновата формула, плоштината на триаголникот е:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-x)(s-y)}=\sqrt{s(s-a)(s-x)(s-(2s-a-x))}=$$
$$=\sqrt{s(s-a)}\sqrt{(s-x)(a+x-s)}.\ \text{Тогаш,}$$

$$P'=\sqrt{s(s-a)}\frac{-(a+x-s)+s-x}{2\sqrt{(s-x)(a+x-s)}}=\sqrt{s(s-a)}\frac{2\left(s-x-\frac{a}{2}\right)}{2\sqrt{(s-x)(a+x-s)}}=$$

$$\sqrt{s(s-a)}\frac{s-x-\frac{a}{2}}{\sqrt{(s-x)(a+x-s)}}.$$

Притоа, $P'=0 \Leftrightarrow s-x-\frac{a}{2}=0 \Leftrightarrow x=s-\frac{a}{2}$

и P' го менува знакот + кон – при премин низ $x=s-\frac{a}{2}$. Тогаш, $y=2s-a-\left(s-\frac{a}{2}\right)=s-\frac{a}{2}$. Следува: најголема плоштина има рамнокракиот триаголник со основа a и крак $s-\frac{a}{2}$.

Задача 12. Точка се движи по x-оската по равенката $x(t)=\sin 2t+\cos 2t$. Која е максималната оддалеченост на точката од координатниот почеток?

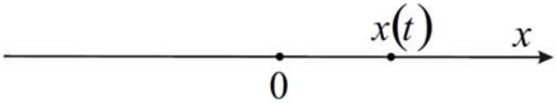
Решение. Растојанието на точката од координатниот почеток во времето t е: $d=|x(t)|$. Бидејќи

$$x'(t)=2\cos 2t-2\sin 2t \text{ и } x'(t)=0 \Leftrightarrow 2\cos 2t-2\sin 2t=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2t=\sin 2t \Leftrightarrow tg2t=1 \Leftrightarrow 2t=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

и функцијата $x'(t)$ го менува знакот при премин низ $2t=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, за дадените вредности на параметарот t, функцијата $x(t)$ достигнува екстремни вредности. Во нив,

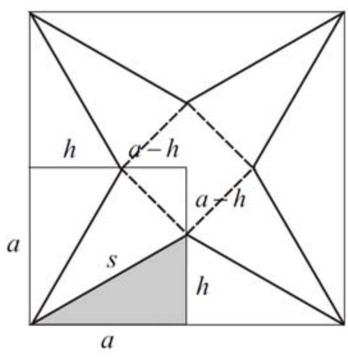
$$d=|x(t)|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right|=\left|\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{2}.$$



Следува дека максималната оддалеченост на точката од координатниот почеток е $\sqrt{2}$.

Задача 13. Ако од лимено парче во форма на квадрат со страна $2a$, од секоја страна се исече по еден ист рамнокрак триаголник, се добива мрежа на права четириаголна пирамида. Определи ја висината на триаголникот што треба да се исече, така што волуменот на добиената пирамида да биде максимален.

Решение. Волуменот на пирамидата е: $V=\frac{1}{3}BH$. Страната на квадратот на основата на пирамидата е $\sqrt{2}(a-h)$, од каде што плоштината на основата е: $B=2(a-h)^2$. Од правоаголниот триаголник обоен со сиво за бочниот раб на пирамидата добиваме:



$s=\sqrt{a^2+h^2}$. Од релацијата $H^2+(a-h)^2=s^2$ ја определуваме висината на пирамидата:

$$H^2+a^2-2ah+h^2=a^2+h^2 \Leftrightarrow H^2=2ah \Leftrightarrow H=\sqrt{2a}\sqrt{h}\,.$$

Следува дека за волуменот на пирамидата добиваме:

$$V=\frac{1}{3}2(a-h)^2\sqrt{2a}\sqrt{h}=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\left(a^2-2ah+h^2\right)\sqrt{h}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\left(a^2-2ah+h^2\right)h^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\left(a^2h^{\frac{1}{2}}-2ah^{\frac{3}{2}}+h^{\frac{5}{2}}\right).$$

Откако волуменот го претставивме како функција $V=V(h)$ од висината на рамнокракиот триаголник h, ќе одредиме за која вредност на h, функцијата $V=V(h)$ има максимум. Првиот извод е:

$$V'(h)=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\left(a^2\frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}-2a\frac{3}{2}h^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}h^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$\frac{2\sqrt{2a}}{3}\left(a^2\frac{1}{2\sqrt{h}}-3a\sqrt{h}+\frac{5}{2}h\sqrt{h}\right)=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\frac{\left(a^2-6ah+5h^2\right)}{2\sqrt{h}}.$$

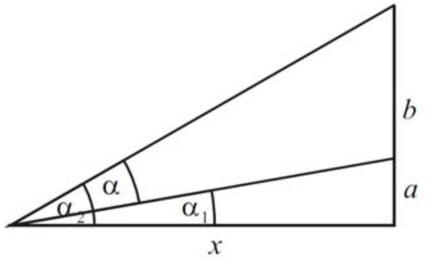
Решенијата на квадратната равенка $5h^2-6ah+a^2=0$ се:

$$h_{1/2}=\frac{6a\pm\sqrt{36a^2-20a^2}}{10} \Leftrightarrow h_{1/2}=\frac{6a\pm 4a}{10} \Leftrightarrow h=a\,,\ h=\frac{a}{5}\,.$$

Следува: $V'(h)=\dfrac{2\sqrt{2a}}{3}\dfrac{5(h-a)\left(h-\frac{a}{5}\right)}{2\sqrt{h}}$.

Решението $h=a$ отпаѓа бидејќи $h<a$. Првиот извод го менува знакот од плус кон минус при премин низ $\frac{a}{5}$. Следува дека вредноста на функцијата $V\left(\frac{a}{5}\right)$, што се добива за висината $h=\frac{a}{5}$, е максимална.

Задача 14. Во киносала најдобра позиција има оној гледач кој екранот го гледа под најголем агол. Одреди на кое растојание од екранот треба се седне гледачот, ако екранот е на висина од a до b метри од окото на гледачот.



Решение. Нека гледачот го гледа екранот, кој е на висина од a до b метри од окото, под агол α. Тогаш,

$tg\alpha_2 = \frac{b}{x} \Leftrightarrow \alpha_2 = arctg\frac{b}{x}$ и

$tg\alpha_1 = a \Leftrightarrow \alpha_1 = arctg\frac{a}{x}$ и

функцијата чија екстремна вредност ќе ја бараме е аголот:

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = arctg\frac{b}{x} - arctg\frac{a}{x}.$$

Првиот извод е:

$$\alpha_1' = \frac{1}{1+\frac{b^2}{x^2}}\left(-\frac{b}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}}\left(-\frac{a}{x^2}\right) = \frac{-b}{x^2+b^2} + \frac{a}{x^2+a^2} =$$

$$\frac{-bx^2 - a^2b + ax^2 + ab^2}{\left(x^2+b^2\right)\left(x^2+a^2\right)} = \frac{x^2(a-b) - ab(a-b)}{\left(x^2+b^2\right)\left(x^2+a^2\right)} = \frac{\left(x^2-ab\right)(a-b)}{\left(x^2+b^2\right)\left(x^2+a^2\right)}.$$

Притоа,

$$\alpha' = 0 \Leftrightarrow x^2 - ab = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{ab}.$$

Бидејќи $x > 0$ следува: $x = \sqrt{ab}$. Заради $a - b < 0$, $\alpha'(x)$ го менува знакот од $+$ кон $-$ при премин низ $x = \sqrt{ab}$, односно во $x = \sqrt{ab}$, α има максимум.

Значи, гледачот треба да е на растојание $x = \sqrt{ab}$ од екранот.

Задача 15. Треба да се направи конзерва во форма на цилиндар која ќе содржи $V\ dm^3$ течност. Најди ги димензиите на конзервата кои го минимизираат трошокот за материјал.

Решение. Врската меѓу волуменот, висината и радиусот на основата на цилиндарот е дадена со формуата: $V = r^2\pi H$. Плоштината на цилиндарот е:

$$P = 2r\pi H + 2r^2\pi = 2r\pi\frac{V}{r^2\pi} + 2r^2\pi = \frac{2V}{r} + 2r^2\pi.$$

Димензиите на конзервата, кои го минимизираат трошокот за изработка, ќе ги определиме ако ги најдеме точките во кои:

$$P'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4r\pi = 2\left(2r\pi - \frac{V}{r^2}\right).$$

се анулира. Имаме:

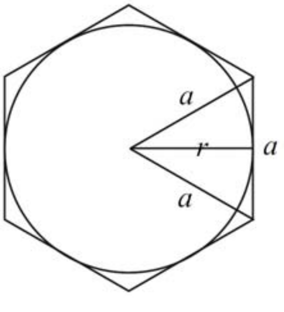
$$P'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{V}{r^2} - 2r\pi = 0 \Leftrightarrow \frac{V}{r^2} = 2r\pi \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Бидејќи $P''(r) = \frac{4V}{r^3} + 4\pi$ и $P''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \frac{4V\,2\pi}{V} + 4\pi = 12\pi > 0$,

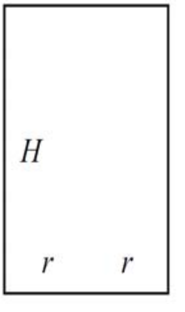
функцијата достигнува минимум во дадената точка.
Следува дека трошоците за изработката на конзервата се минимални ако димензиите на конзервата се:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ и } H = \frac{V}{r^2\pi} = 2r\frac{V}{r^3\,2\pi} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Задача 16. Треба да се направи конзерва во форма на цилиндар која ќе содржи $V\,dm^3$ течност. Притоа, дисковите се отсекуваат од правилни шестоаголници и останатиот лим од дискот се фрла. Најди ги димензиите на конзервата кои го минимизираат трошокот за материјал.



Решение. Плоштината на рамностраниот триаголник е: $P_\Delta = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.
Радиусот на кругот се совпаѓа со висината во рамностраниот триаголник и изнесува $r = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ од каде што: $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Следува дека плоштината на рамностраниот триаголник може да се изрази како функција од радиусот r, $P_\Delta = \frac{4r^2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2\sqrt{3}}{3}$. Шестоаголникот се состои од шест складни рамнострани триаголници и има плоштина $6\frac{r^2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}r^2$.



Врската меѓу волуменот, висината и радиусот на основата на цилиндарот е дадена со формулата: $V = r^2 \pi H$ од каде $H = \dfrac{V}{r^2 \pi}$. Затоа, плоштината на вкупниот лим што се употребува за изработка на конзервата е:

$$P = 2B + M = 2 \cdot 2\sqrt{3}r^2 + 2r\pi H = 4\sqrt{3}r^2 + 2r\pi \frac{V}{r^2 \pi} = 4\sqrt{3}r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Нејзиниот извод:

$$P'(r) = 8\sqrt{3}r - \frac{2V}{r^2} = \frac{8\sqrt{3}r^3 - 2V}{r^2} = \frac{2\left(4\sqrt{3}r^3 - V\right)}{r^2},$$

е нула за:

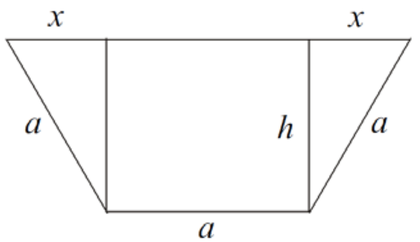
$$4\sqrt{3}r^3 - V = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}r = V \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}V}{12}}.$$

При премин низ стационарната точка, функцијата го менува знакот од $-$ кон $+$. Следува дека функцијата има локален минимум во точката.

Коментар. Добиените резултати се поврзани со практичниот облик на конзервите или буриѓата што се продаваат на пазарот. Имено, ако отидеме во стовариште, во продавница за бои и лакови или во супермаркет, ќе забележиме дека конзервите најчесто се малку издолжени, односно коефициентот $\dfrac{H}{d} = \dfrac{H}{2r} > 1$. Во задачата $\dfrac{H}{d} = \dfrac{V}{2r^3 \pi} = \dfrac{V}{2\pi} \dfrac{12}{\sqrt{3}V} \approx 1{,}11$. Во пракса, освен ако природата на стоката не дозволува да се пакува во произволен облик, односот на висината на конзервата и дијаметарот се движи од 1,1 кај буриѓата до 1,8 кај помалите конзерви. Да го објасниме овој феномен. За да се добие во цврстина дел од обвивката на цилиндарот, се превиткува и се лепи со спротивната страна и со дисковите. Затоа, се јавува дополнителна загуба на лимот на краевите на лентите, од кои се отсекува обвивката. Тогаш, плоштината на цилиндарот е: $P = 4\sqrt{3}r^2 + (2r\pi + k)\left(\dfrac{V}{r^2 \pi} + 2t\right)$, каде што k е ширината на лимот што се лепи за дисковите, а t е ширината на лимот што се лепи за спротивната страна. Ако $k = 2t$, максимумот е достигнат за

$\dfrac{\sqrt[3]{V}}{k}=\sqrt[3]{\dfrac{\pi H}{r}}\,\dfrac{2\pi-\dfrac{H}{r}}{\pi\dfrac{H}{r}-4\sqrt{3}}$. Се забележува дека односот $\dfrac{H}{d}$ е обратно пропорционален на волуменот. Затоа, кај големите конзерви $\dfrac{H}{d}\approx 1{,}11$, а кај малите конзерви $\dfrac{H}{d}$ е поголем.

Задача 17. Од три еднакви штици со должина a, направи корито чиј напречен пресек е трапез.



Решение. Плоштината на трапезот е: $P=\dfrac{a+b}{2}h$.

Поголемата основа ја добиваме со продолжување на помалата основа за x единици, лево и десно. Тогаш, $b=a+2x$. Според Питагоровата теорема важи равенството:

$$h^2=a^2-x^2 \Leftrightarrow h=\sqrt{a^2-x^2}\ ,$$

и плоштина на трапезот, изразена како функција од x, е:

$$P=\frac{a+a+2x}{2}\sqrt{a^2-x^2}=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}\ ,$$

каде што:

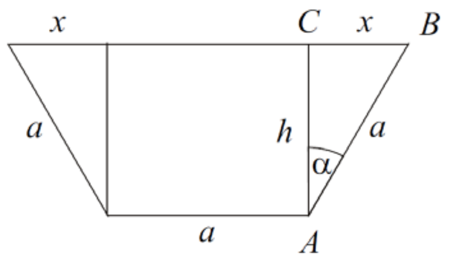
$$P'=\sqrt{a^2-x^2}+(a+x)\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}+\frac{-x(a+x)}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$\frac{a^2-x^2-ax-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-\left(2x^2+ax-a^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Решенијата на квадратната равенка се: $2x^2+ax-a^2=0$ се

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8a^2}}{4}\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-a\pm 3a}{4}\Leftrightarrow x_1=-a\,,\ x_2=\frac{a}{2}\,,$$

па триномот е: $2x^2+ax-a^2=2(x+a)\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$, па $P'=\dfrac{2(x+a)\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}$.



Изразот $x+a$ е позитивен. Затоа, $P'(x)=0$ ако $x=\frac{a}{2}$. Исто така, функцијата $P'(x)$ го менува знакот од минус кон плус при премин низ $x=\frac{a}{2}$.

Следува дека бочните штици треба да се поставаат така што определуваат рамнокрак трапез со основи a и $2a$ и крак a.

Втор начин. Во зависност од местоположбата на штиците, плоштината на напречниот пресек може да ја определиме како функција од аголот α, под кој се поставени страничните даски.

Да забележиме дека во правоаголен триаголник со хипотениза c, крак a, агол што лежи спроти кракот α и кракот b важи $a=c\sin\alpha$ и $b=c\cos\alpha$.

Од триаголникот ABC имаме дека $h=a\cos\alpha$, $x=a\sin\alpha$ и $b=a+2x=a+2a\sin\alpha$. Тогаш,

$$P=\frac{a+b}{2}h=\frac{a+a+2a\sin\alpha}{2}a\cos\alpha=\frac{2a(1+\sin\alpha)}{2}a\cos\alpha=$$
$$a^2(1+\sin\alpha)\cos\alpha .$$

$$P'(\alpha)=a^2(\cos\alpha\cos\alpha+(1+\sin\alpha)(-\sin\alpha))=$$
$$a^2\left(\cos^2\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha\right)=a^2\left(1-\sin^2\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha\right)=$$
$$a^2\left(1-\sin\alpha-2\sin^2\alpha\right)=a^2\left(2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1\right) \text{ и}$$

$$P'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0 \Leftrightarrow \sin\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow$$
$$\sin\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2},\ \sin\alpha=-1 .$$

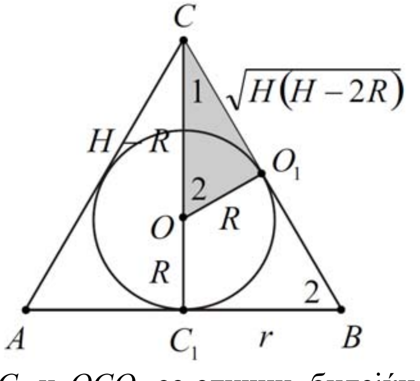
Решението $\sin\alpha=-1$ не е можно бидејќи $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, а $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ за $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Бидејќи $P'(\alpha)=-2a^2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)(\sin\alpha+1)$, $P'(\alpha)$ го менува знакот од плус кон минус при премин низ $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Следува дека, за да напречниот пресек има најмала плоштина, бочните даски треба да се поставаат под агол $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ во однос на нормалата на дното.

Задача 18. Околу топка со радиус R опиши конус со минимален волумен.

Решение. Волуменот на конусот е: $V=B\dfrac{H}{3}=r^2\pi\dfrac{H}{3}$.

Од Питагоровата теорема имаме дека:

$$\overline{CO_1}^2=(H-R)^2-R^2 \Leftrightarrow \overline{CO_1}^2=H^2-2HR+R^2-R^2 \Leftrightarrow$$
$$\overline{CO_1}^2=H(H-2R) \Leftrightarrow \overline{CO_1}=\sqrt{H(H-2R)}.$$



Триаголниците BCC_1 и OCO_1 се слични, бидејќи аголот при темето C им е заеднички, а аглите $\angle CC_1B$ и $\angle CO_1O$ се еднакви како прави агли. Следува:

$$\frac{r}{R}=\frac{H}{\sqrt{H(H-2R)}} \Leftrightarrow r=\frac{RH}{\sqrt{H(H-2R)}} \Leftrightarrow$$
$$r^2=\frac{R^2H^2}{H(H-2R)} \Leftrightarrow r^2=\frac{R^2H}{H-2R}.$$

Затоа, волуменот на конусот може да го претставиме како функција од висината H,

$$V(H)=\frac{R^2H}{H-2R}\pi\frac{H}{3}=\frac{R^2\pi}{3}\frac{H^2}{H-2R},$$

од каде што:

$$V'(H)=\frac{2H(H-2R)-H^2}{(H-2R)^2}=\frac{2H^2-4RH-H^2}{(H-2R)^2}=$$

$$\frac{H^2-4RH-H^2}{(H-2R)^2}=\frac{H(H-4R)}{(H-2R)^2}.$$

Имајќи предвид дека висината е позитивна големина,

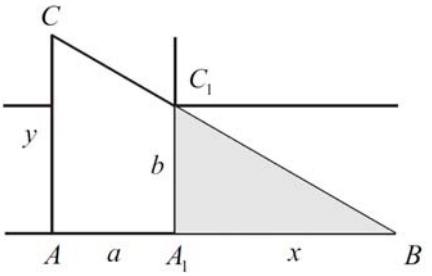
$$V'(H)=0 \Leftrightarrow H-4R=0 \Leftrightarrow H=4R.$$

Значи, најмал волумен има конусот со висина $H=4R$ и радиус:

$$r=\frac{RH}{\sqrt{H(H-2R)}}=\frac{4R^2}{\sqrt{4R2R}}=\frac{4R^2}{2\sqrt{2}R}=\sqrt{2}R.$$

Задача 19. На канал со ширина a, стои нормално друг канал со ширина b. Одреди ја најголемата должина на гредата која може да плива од едниот до другиот канал.

Решение. Ги разгледуваме должините на гредите што ги допираат сите четири ѕида на двата канали.



Од правоаголниот триаголник ABC, важи: $l^2=(a+x)^2+y^2$. Од сличноста на триаголниците ABC и A_1BC_1 следува: $\frac{y}{a+x}=\frac{b}{x}$ од каде што: $y=(a+x)\frac{b}{x}$. Следува дека квадратот од должината на гредата е:

$$l^2=(a+x)^2+(a+x)^2\frac{b^2}{x^2}=(a+x)^2\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right).$$

За да ја најдеме најголемата вредност на функцијата l^2, доволно е да ја најдеме најголемата вредност на функцијата l. Имено, ако во точката x_0, $l^2(x_0)\geq l^2(x)$ за секој аргумент x, тогаш, бидејќи должината е позитивна големина, следува $l(x_0)\geq l(x)$ за секој аргумент x. Првиот извод:

$$\left(l^2\right)'=2(a+x)\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right)+(a+x)^2b^2\frac{-2}{x^3}=2(a+x)\left(1+\frac{b^2}{x^2}-(a+x)\frac{b^2}{x^3}\right)=$$

$$2(a+x)\left(1+\frac{b^2}{x^2}-\frac{ab^2}{x^3}-\frac{b^2}{x^2}\right)=2(a+x)\left(1-\frac{ab^2}{x^3}\right)=2(a+x)\frac{x^3-ab^2}{x^3}.$$

има вредност нула за:

$$\left(l^2\right)' = 0 \Leftrightarrow x^3 - ab^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 = ab^2 \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}.$$

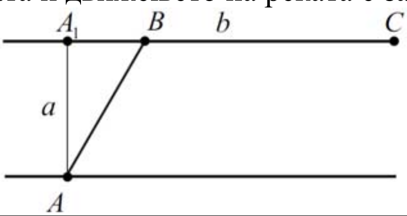
Притоа, l^2 го менува знакот $-$ кон $+$. Значи, во точката $x = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$, функцијата достигнува минимум.

$$l^2 = \left(a + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}}}\right) = \left(a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)\right)^2 \left(1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right) =$$

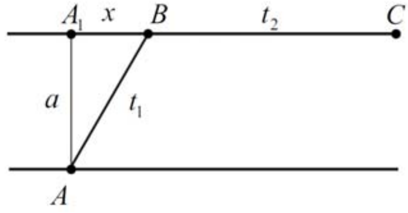
$$\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^2 a^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^2 \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3.$$

Следува дека минимумот на функцијата $l = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ е најголемата должина што може да ја има гредата за да може да плива од едниот до другиот канал.

Задача 20*. Чамец се наоѓа во точка A од брег на река со ширина a - единици (види цртеж). На кое место B на другиот брег, треба да пристигне чамецот, за да патникот стигне најбрзо до местото C, оддалечено b - единици од проекцијата на точката A на другиот брег. Чамецот се движи праволиниски со брзина V_1, а низ брегот пешачи со брзина V_2 ($V_2 > V_1$). Забелешка: Времето е еднакво на патот врз брзината и движењето на реката е занемарливо.



Решение. Времето t, потребно патникот да стигне до точката C, е збир од времето t_1, потребно да оди од точката A до точката B и времето t_2, потребно



да оди од точката B до точката C. Нека x е растојанието од A_1 до B, каде што A_1 е проекцијата на точката A на страната BC, и b е растојанието од точката A_1 до C. Следува дека растојанието од точката B до C е $b-x$.

Од правоаголниот триаголник A_1AB имаме $\overline{AB}^2 = a^2 + x^2$, односно $\overline{AB}^2 = \sqrt{a^2 + x^2}$. Затоа,

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V_1} + \frac{b-x}{V_2}. \text{ Следува:}$$

$$t'(x) = \frac{1}{V_1}\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{V_2} = \frac{x}{V_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{V_2} \text{ и}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{V_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{V_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{V_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{V_2} \Leftrightarrow$$

$$V_2 x = V_1\sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow V_2^{\,2}x^2 = V_1^{\,2}\left(a^2 + x^2\right) \Leftrightarrow V_2^{\,2}x^2 = V_1^{\,2}a^2 + V_1^{\,2}x^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(V_2^{\,2} - V_1^{\,2}\right)x^2 = V_1^{\,2}a^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2\frac{V_1^{\,2}}{V_2^{\,2} - V_1^{\,2}} \Leftrightarrow x = a\frac{V_1}{\sqrt{V_2^{\,2} - V_1^{\,2}}}.$$

Значи, ако $x \geq b$, тогаш точката B се совпаѓа со точката C, па патникот треба да се вози директно до местото C. Ако $x < b$, тогаш патникот треба да се вози со чамецот до точката B оддалечена $a\dfrac{V_1}{\sqrt{V_2^{\,2} - V_1^{\,2}}}$ единици од точката A_1 и во насока на точката C, а потоа да пешачи до точката C.

Задача 21*. Таванот на еден магацин се потпира со две греди кои се на растојание 2 единици. Светилките во просторијата се поставени на синџири во форма на буквата „Y“. Ако светилките висат на 1 единица под гредите, која е најмалата должина на синџирот што треба да се употреби за да ги држи светилките?

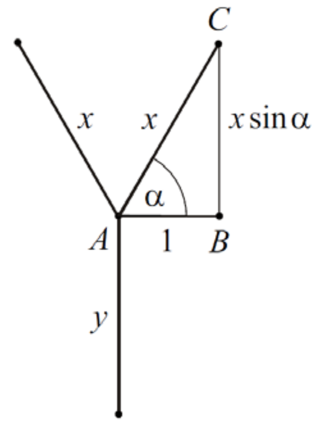
Решение. Должината на синџирот што треба да се употреби за поставување на светилките е: $L = 2x + y$.

Од правоаголниот триаголник ABC имаме дека должината на страната BC е: $x\sin\alpha$, должината на страната AB е: $x\cos\alpha$. Бидејќи висината на синѓирот е 1 единица важи: $x\sin\alpha + y = 1$, односно $y=1-x\sin\alpha$. Бидејќи двете греди се на растојание 2 единици, односно едната греда е на растојание 1 единица од светилката, важи: $1=x\cos\alpha$ или

$$\cos\alpha=\frac{1}{x}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow 1-\sin^2\alpha=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$\sin^2\alpha=1-\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{x^2-1}{x^2}.$$

Заради $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, важи:



$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\Leftrightarrow x\sin\alpha=\sqrt{x^2-1}.$$

Следува, $y=1-x\sin\alpha=1-\sqrt{x^2-1}$, од каде што должината на синџирот е:

$$L(x)=2x+1-\sqrt{x^2-1}.$$

Ги бараме стационарните точки на функцијата $L(x)$,

$$L'(x)=2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=2-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Имајќи предвид дека должината на делот од јажето x е позитивна големина, првиот извод за

$$L'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2-1}=4\Leftrightarrow$$

$$x^2=4x^2-4\Leftrightarrow 3x^2=4\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Вториот извод:

$$L''(x)=-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=-\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=$$

$$-\frac{x^2-1-x^2}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

е позитивен во секоја точка. Следува дека функцијата има минимална вредност во

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{. Од } y=1-\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-1}=1-\sqrt{\frac{4}{3}-1}=1-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

од каде што минималната должина која треба да се употреби за поставување на светилките е:

$$L=2\frac{2}{\sqrt{3}}+1-\frac{1}{\sqrt{3}}=1+\frac{3}{\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$

3.6. КРИВИНА НА КРИВА

Задача 1-4. Најди ја кривината на кривата:

1) $y=\frac{4}{x}$ во точката со апциса $x=2$;

2) $x^2-3xy+y^2+1=0$ во точката $M(1,1)$;

3) $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$ во точката за која $t=0$;

4) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ во произволна точка.

Решение. 1). Бидејќи

$$y(2)=\frac{4}{2}=2,\ y'=-\frac{4}{x^2},\ y'(2)=-1,\ y''=-4\frac{-2}{x^3}=\frac{8}{x^3}\text{ и } y''(2)=1,$$

кривината на кривата во точката $M(2,2)$ е:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

2) Со диференцирање на равенката $x^2-3xy+y^2+1=0$ добиваме

$$2x-3(y+xy')+2yy'=0 \Leftrightarrow 2x-3y-3xy'+2yy'=0 \Leftrightarrow$$

$$(2y-3x)y'=3y-2x \Leftrightarrow$$

$$y'=\frac{3y-2x}{2y-3x}\text{, од каде што: } y'(1)=\frac{3-2}{2-3}=-1;$$

$$y''=\frac{(3y'-2)(2y-3x)-(3y-2x)(2y'-3)}{(2y-3x)^2}\text{ и } y''(1)=\frac{(-5)(-1)-(-5)}{(-1)^2}=10.$$

Следува:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{10}{\left(1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{10}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

3) Прв начин. За $t=0$, $x=e^0\sin 0=0$ и $y=e^0\cos 0=1$. Ќе ја најдеме кривината на кривата во точката $M(0,1)$. Од

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{e^t\cos t+e^t(-\sin t)}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t},\ y'(0)=1;$$

$$y''=\frac{\dot{y'}}{\dot{x}}=\frac{(-\sin t-\cos t)(\sin t+\cos t)-(\cos t-\sin t)^2}{(\cos t-\sin t)^2}\frac{1}{\cos t-\sin t}=$$

$$-\frac{(\cos t+\sin t)^2+(\cos t-\sin t)^2}{(\cos t-\sin t)^3}=-\frac{2}{(\cos t-\sin t)^3} \text{ и } y''(0)=-2$$

имаме:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\left(1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Втор начин. Задачата може да ја решиме со користење на формулата за кривина на параметарски зададена крива. Од

$$\dot{x}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t),\ \dot{x}(0)=1;$$

$$\dot{y}=e^t\cos t+e^t(-\sin t)=e^t(\cos t-\sin t),\ \dot{y}(0)=1;$$

$$\ddot{x}=e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\cos t-\sin t)=2e^t\cos t,\ \ddot{x}(0)=2; \text{ и}$$

$$\ddot{y}=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)=-2e^t\sin t,\ \dot{y}(0)=0.$$

добиваме:

$$K=\frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|0-1\cdot 2|}{\left(1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4) Имаме:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$y''=\frac{\dot{y'}}{\dot{x}}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^3}=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2} \text{ од каде што}$$

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{(1-\cos t)^2}}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{(1-\cos t)^2}}{\left(\frac{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\frac{\frac{1}{(1-\cos t)^2}}{\frac{(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{(1-\cos t)^3}}=\frac{1-\cos t}{\left(2(1-\cos t)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}}=\frac{1}{4\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$$

Задача 5-8. Најди ја максималната вредност на кривината на кривата:

5) $y=\ln x$; 6) $y=a\ln\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right), a>0$;

7) $y=e^x$; 8) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

Решение. 5) Од $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$ добиваме:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{|x|^3}}\overset{x>0}{=}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

За точките во кои кривината има максимална вредност важи $K'=0$, каде што:

$$K'=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-x\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}2x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}\text{ и}$$

$$K'=0\Leftrightarrow 1-2x^2=0\Leftrightarrow 2x^2=1\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Бидејќи $K'>0$ за $x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $K'<0$ за $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ следува дека во $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ функцијата $K=K(x)$ достигнува максимална вредност:

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

6) Имаме:

$$y' = a\frac{1}{1-\frac{x^2}{a^2}}\left(-\frac{2x}{a^2}\right) = -\frac{2ax}{\frac{a^2-x^2}{a^2}a^2} = -\frac{2ax}{a^2-x^2} \text{ и}$$

$$y'' = -\frac{2a\left(a^2-x^2\right)-2ax(-2x)}{\left(a^2-x^2\right)^2} = -\frac{2a\left(a^2-x^2+2x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2} = -\frac{2a\left(a^2+x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}$$

од каде што:

$$K = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2a\left(a^2+x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}}{\left(1+\left(\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \overset{a^2-x^2>0}{=} \frac{\frac{2a\left(a^2+x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}}{\left(1+\frac{4a^2x^2}{\left(a^2-x^2\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{\frac{2a\left(a^2+x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}}{\left(\frac{a^4-2a^2x^2+x^4+4a^2x^2}{\left(a^2-x^2\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2a\left(a^2+x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}}{\left(\frac{\left(a^2+x^2\right)^2}{\left(a^2-x^2\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2a\left(a^2+x^2\right)}{\left(a^2-x^2\right)^2}}{\frac{\left(a^2+x^2\right)^3}{\left(a^2-x^2\right)^3}} = \frac{2a\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^2}$$

и

$$K' = 2a\frac{-2x\left(a^2+x^2\right)^2-\left(a^2-x^2\right)2\left(a^2+x^2\right)2x}{\left(a^2+x^2\right)^4} =$$

$$2a\frac{2x\left(a^2+x^2\right)\left(-a^2-x^2-2a^2+2x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^4} = \frac{4ax\left(x^2-3a^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)^3}.$$

Бидејќи за $x^2-3a^2=0 \Leftrightarrow x^2=3a^2$ и следува $\sqrt{3}a \notin D_y$, имаме:

$$K'=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Притоа, K' го менува знакот од $+$ кон $-$ при премин низ $x=0$, па максималната кривина е:

$$K(0) = \frac{2a^3}{a^4} = \frac{2}{a}.$$

7) Првите два извода на $y=e^x$ се $y'=e^x$ и $y''=e^x$. Следува:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

од каде што:

$$K'=\frac{e^x\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}-e^x\frac{3}{2}\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}2e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)^3}=$$

$$\frac{e^x\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+e^{2x}-3e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^3}=\frac{e^x\left(1-2e^{2x}\right)}{\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{5}{2}}},$$

и

$$K'=0\Leftrightarrow 1-2e^{2x}=0\Leftrightarrow 2e^{2x}=1\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$2x=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=-\ln\sqrt{2}.$$

Функцијата K' го менува знакот од + кон − при премин низ $x=-\ln\sqrt{2}$. Следува дека максималната вредност на кривината е:

$$K=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

8) Ги бараме првите два извода на функцијата $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}y'=0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{y}}y'=-\frac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}},\text{ и}$$

$$y''=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}y'\sqrt{x}-\sqrt{y}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{x}=$$

$$\frac{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}},$$

од каде што:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}}{\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2(x+y)^{\frac{3}{2}}} \text{ и}$$

$$K'=\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)\right)(x+y)^3-\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)2\frac{3}{2}(x+y)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)}{(x+y)^3}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{-3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{(x+y)^3}=-\frac{3(x-y)}{2\sqrt{x}(x+y)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3(y-x)}{2\sqrt{x}\sqrt{(x+y)^5}}.$$

Притоа, $K'=0$ за $x=y$, од каде што:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x}=\sqrt{a} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{a} \Leftrightarrow 4x=a \Leftrightarrow x=\frac{a}{4}. \text{ Тогаш } y=\frac{a}{4}.$$

При премин низ $x=\frac{a}{4}$ функцијата го менува знакот од $+$ кон $-$, па во точката $M\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ кривината има максимална вредност:

$$K=\frac{\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{\sqrt{a}}{2}}{2\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{a}}{2\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Задача 9. Докажи дека радиусот на кривина на циклоидата $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$ во произволна нејзина точка е два пати поголем од должината на нормалата во истата точка.

Решение. Имаме:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$1+y'^2=1+\frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}=\frac{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}=\frac{2-2\cos t}{(1-\cos t)^2}=\frac{2}{1-\cos t}$$

$$y''=\frac{\dot{y}'}{\dot{x}}=\frac{\cos t\left(1-\cos t\right)-\sin t\sin t}{\left(1-\cos t\right)^2}\frac{1}{a\left(1-\cos t\right)}=$$

$$\frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{a\left(1-\cos t\right)^3}=\frac{\cos t-1}{a\left(1-\cos t\right)^3}=-\frac{1-\cos t}{a\left(1-\cos t\right)^3}=-\frac{1}{a\left(1-\cos t\right)^2}.$$

Сега, $\frac{R}{N}=\frac{1}{NK}=\frac{1}{|y|\sqrt{1+y'^2}\,\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{\frac{|yy''|}{1+y'^2}}=\frac{1+y'^2}{|yy''|}$ од каде

што:

$$\frac{R}{N}=\frac{\frac{2}{1-\cos t}}{\left|a\left(1-\cos t\right)\left(-\frac{1}{a\left(1-\cos t\right)^2}\right)\right|}=\frac{\frac{2}{1-\cos t}}{\frac{1}{1-\cos t}}=2 \text{ т.е. } R=2N,$$

Задача 10-11. Најди ја кружницата на кривина на кривата:

10) $y=arctg\left(1+\frac{1}{x}\right)$ во точката со апциса $x=-1$;

11) $xy=a^2$, $a>0$ во точката $M\left(a,a\right)$.

Решение. 10) Имаме:

$$y\left(-1\right)=arctg\left(1+\frac{1}{-1}\right)=arctg0=0,$$

$$y'=\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\frac{x^2+x^2+2x+1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$-\frac{1}{2x^2+2x+1},\ y'\left(-1\right)=-\frac{1}{2-2+1}=-1;\ y''=\frac{1}{\left(2x^2+2x+1\right)^2}\left(4x+2\right) \text{ и}$$

$$y''\left(-1\right)=\frac{1}{\left(2-2+1\right)^2}\left(-2\right)=-2;$$

од каде што:

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\left(1+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ R=\frac{1}{K}=\sqrt{2},$$

$$x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = -1 - \frac{-1(1+1)}{-2} = -2 \text{ и } y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{1+1}{-2} = -1 .$$

Следува дека кружницата на кривина во точката со апциса $x=-1$ е:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 2 .$$

11) Аналогно, од $y = \dfrac{a^2}{x}$ имаме:

$$y' = -\frac{a^2}{x^2},\ y'(a) = -\frac{a^2}{a^2} = -1,\ y'' = -\frac{(-2)a^2}{x^3} = \frac{2a^2}{x^3} \text{ и } y''(a) = \frac{2a^2}{a^3} = \frac{2}{a} .$$

Следува:

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2}{a}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2}{a}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,a},\ R = \frac{1}{K} = \sqrt{2}\,a ,$$

$$x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = a - \frac{-1(1+1)}{\frac{2}{a}} = a + a = 2a \text{ и}$$

$$y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''} = a + \frac{1+1}{\frac{2}{a}} = a + a = 2a ,$$

од каде кружницата на кривина е:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-2a)^2 + (y-2a)^2 = 2a^2 .$$

Задача 12-13. Најди ја еволутата на кривите:

12) $x = 2t^2,\ y = t^4$; 13*) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. 12) Имаме:

$$x = 2t^2,\ y = t^4,\ \dot{x} = 4t,\ \dot{y} = 4t^3,\ y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4t^3}{4t} = t^2,\ y'' = \frac{\dot{y'}}{\dot{x}} = \frac{2t}{4t} = \frac{1}{2},$$

од каде што:

$$x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = 2t^2 - 2t^2(1+t^4) = 2t^2 - 2t^2 - 2t^6 = -2t^6$$

$$y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''} = t^4 + 2(1+t^4) = t^4 + 2 + 2t^4 = 3t^4 + 2 .$$

Следува дека еволутата е параметарски зададената крива $x=-2t^6$, $y=3t^4+2$.

13) Равенката на елипсата ја запишуваме во параметарски вид $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Тогаш,

$$\dot{x}=-a\sin t,\ \dot{y}=b\cos t,\ y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\frac{b}{a}\frac{\cos t}{\sin t}=-\frac{b}{a}ctgt,$$

$$1+y'^2=1+\frac{b^2}{a^2}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}=\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{a^2\sin^2 t}$$

$$y''=\frac{\dot{y'}}{\dot{x}}=-\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\frac{1}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

од каде што:

$$x_0=x-\frac{y'\left(1+y'^2\right)}{y''}=a\cos t-\left(-\frac{b}{a}\frac{\cos t}{\sin t}\right)\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{a^2\sin^2 t}\left(-\frac{a^2}{b}\sin^3 t\right)=$$

$$a\cos t-\frac{\cos t}{a}\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)=a\cos t-\frac{\cos t}{a}\left(a^2+\left(b^2-a^2\right)\cos^2 t\right)=$$

$$a\cos t-a\cos t-\frac{b^2-a^2}{a}\cos^3 t=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t.$$

$$y_0=y+\frac{1+y'^2}{y''}=b\sin t+\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{a^2\sin^2 t}\left(-\frac{a^2}{b}\sin^3 t\right)=$$

$$b\sin t-\frac{\sin t}{b}\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)=b\sin t-\frac{\sin t}{b}\left(\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2\right)=$$

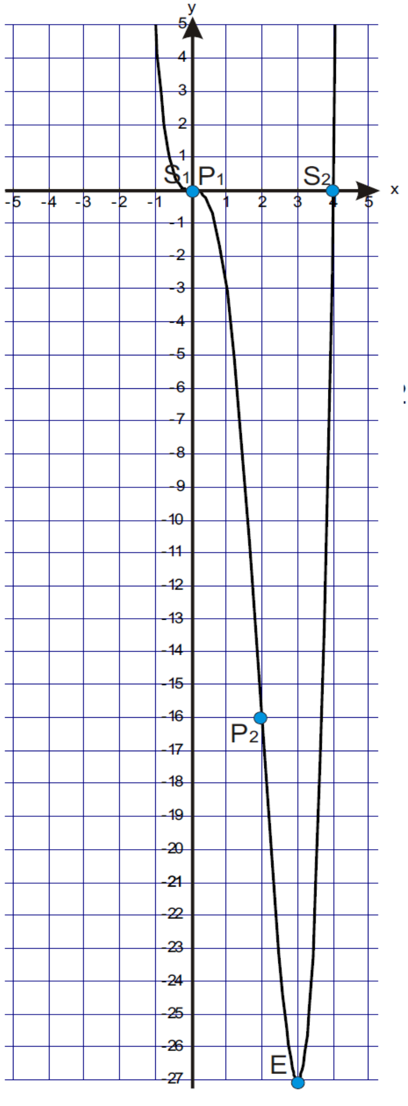
$$b\sin t-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t-b\sin t=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Значи, еволутата е кривата $x=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $y=\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$, која се нарекува деформирана астроида.

3.7. ИСПИТУВАЊЕ ТЕК И ЦРТАЊЕ ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА

3.7.1. Графици од полиномни и рационални функции

Задача 1. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y = x^4 - 4x^3$.



Решение. 1. Дефинициона област. Дефиниционата област на полиномните функции е $\mathbb{R}$.

2. Пресеци со оски. Пресечните точки на графикот на функцијата со координатните оски се добиваат за вредностите на апцисата $x = 0$ и ординатата $y = 0$.

$$y = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^3(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \text{ и}$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Следува дека $S_1(0,0)$ и $S_2(4,0)$ се пресечни точки со оските.

3. Парност, непарност и периодичност. Полиномните функции не се периодични. Бидејќи

$$y(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 =$$
$$x^4 + 4x^3 \neq \pm y(x),$$

функцијата y е ниту парна ниту непарна.

4. Екстреми. Монотоност. За определување на екстремните вредности, прво го наоѓаме и средуваме првиот извод:

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

Првиот извод се анулира и го

менува знакот од $-$ кон $+$ во точката $x=3$. Според првиот критериум за екстрем во $x=3$, функцијата има локален минимум $y(3)=-27$, односно точката $E(3,-27)$ е локален минимум на графикот на функцијата. За $x\in(-\infty,3)$, $y'<0$, односно функцијата y монотоно опаѓа ($\searrow$), а за $x\in(3,+\infty)$, $y'>0$, односно функцијата y монотоно расте ($\nearrow$).

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет. Го пресметуваме вториот извод и го средуваме изразот:

$$y''=12x^2-24x=12x(x-2).$$

Следува:

$$y''=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$$

и функцијата y'' го менува знакот при премин низ $x=0$ и $x=2$. Од $y(0)=0$ и $y(2)=16-32=-16$ следува дека превојните точки на графикот на функцијата се: $P_1(0,0)$ и $P_2(2,-16)$. Со помош на точките на промена на знакот на вториот извод, во следната табела ги определуваме интервалите на конкавитетот. Од каноничниот облик на полиномот утврдуваме дека членот x е негативен за $x<0$, а позитивен за $x>0$ и членот $x-2$ е негативен за $x<2$, а позитивен за $x>2$.

интервал	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
y''	$+$	$-$	$+$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Според податоците од табелата заклучуваме дека функцијата е конкавна на интервалите $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ и конвексна на интервалот $(0,2)$.

6. Асимптоти. Бидејќи $D_f=\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-4x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-4x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{4}{x}\right)=+\infty \text{ и}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-4x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-4x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{4}{x}\right)=-\infty,$$

следува дека функцијата нема асимптоти.

7. График. На цртежот е нацртан графикот на функцијата, според добиените податоци.

Коментар. Полиномните функции со степен поголем од 1 немаат асипмтоти, бидејќи се дефинирани на целиот интервал и количникот од полиномот и x, неограничено расте или опаѓа кога променливата x тежи кон бесконечност.

Задача 2. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Дробно-рационалната функција не е дефинирана во точките во кои полиномот во именителот е еднаков на нула,

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Значи, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Точките -1 и 1 се можни вертикални асимптоти.

2. Пресеци со оски. Бидејќи

$$x=0 \Rightarrow y=0 \text{ и } y=0 \Leftrightarrow x=0,$$

точката $S(0,0)$ е единствената пресечна точка на графикот на функцијата со оските.

3. Парност, непарност и периодичност. Рационалните функции не се периодични. Затоа, ќе ја провериме само парноста.

$$y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-1}=-\frac{x}{x^2-1}=-y(x).$$

Следува дека функцијата е непарна.

4. Екстреми. Монотоност. За да ги најдеме екстремните вредности на функцијата, најпрво го наоѓаме првиот извод:

$$y'=\frac{x^2-1-x2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

Бидејќи $x^2+1\geq 1>0$ и $(x^2-1)^2>0$, на целата дефинициона област, следува дека $y'<0$, односно y монотоно опаѓа (↘) и нема екстремни вредности.

5. Превојни точки. Конкавитет. Вториот извод е:

$$y''=-\frac{2x(x^2-1)^2-(x^2+1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=-\frac{2x(x^2-1)(x^2-1-2(x^2+1))}{(x^2-1)^4}=$$

$$-\frac{2x\left(x^2-1-2x^2-2\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=-\frac{2x\left(-x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Превојните точки на функцијата ги наоѓаме во точките во кои вториот извод, $y''=0$ и , го менува знакот. Бидејќи $x^2+3>0$, превојната точка на функцијата е: $x=0$. Заради $y(0)=0$, превојната точка на графикот е $P(0,0)$. Останатите точки во кои y'' го менува знакот, се точките во кои y'' не постои, т.е. полиномот во именителот е нула и го менува знакот,

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Бидејќи $y''(-2)=\frac{2(-2)(4+3)}{(4-1)^3}<0$, знакот на y'' во првиот интервал е минус, а во останатите интервали наизменично се менува. Затоа, функцијата е испакната на интервалите $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, а вдлабната на $(-1,0)\cup(1,+\infty)$. Заради поголема прегледност, резултатите ги нанесуваме во табела.

		-1		0		1	
y''	$-$		$+$		$-$		$+$
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

6. Асимптоти. Го испитуваме однесувањето на функцијата во околината на точките во кои не е дефинирана:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty,\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{1^--1}=\frac{1}{0^-}=-\infty,$$

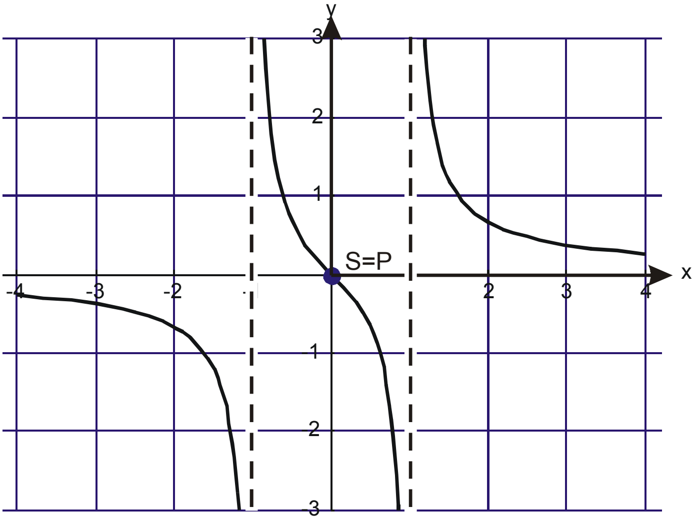
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{1^--1}=\frac{1}{0^-}=-\infty,\ \lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

Следува дека правите $x=-1$ и $x=1$ се вертикални асимптоти на функцијата. Исто така, од горните граници заклучуваме дека функцијата неограничено расте кога аргументот се доближува до 1 оддесно и до -1 одлево, а неограничено опаѓа кога аргументот се доближува до 1 одлево и до -1 оддесно. Бидејќи

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0,$$

правата $y=0$ е хоризонтална асимптота.

7. График. Според добиените податоци го скицираме графикот на функцијата.



Задача 3. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Бидејќи

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1,$$

$D_y=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

2. Пресеци со оски. Бидејќи

$$y=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ и } x=0 \Rightarrow y=0,$$

$S(0,0)$ е пресечна точка со оските.

3. Парност, непарност и периодичност. Рационалните функции не се периодични. Дефинициона област е симетрична во однос на нулата и

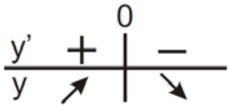
$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}=y(x).$$

Следува дека функцијата е парна.

4. Екстреми. Интервали на монотоност. Од првиот извод,

$$y'=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

$y'=0$ и го менува знакот во $x=0$. За $x<0$ важи $y'>0$, односно y монотоно расте ($\nearrow$), а за $x>0$ важи $y'<0$ односно y монотоно опаѓа ($\searrow$). Следува дека $E(0,0)$ е локален максимум.



5. Превојни точки. Интервали на конкавитет. Вториот извод:

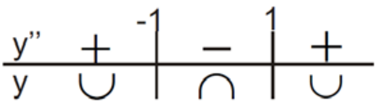
$$y''=\frac{-2\left(x^2-1\right)^2+2x2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$\frac{-2x^2+2+8x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}>0\,.$$

Затоа, графикот на функцијата нема превојни точки. Функцијата y'' го менува знакот во:

$$x^2-1=0\Leftrightarrow x=1\vee x=-1\,.$$

За $x<-1$, $y''<-1$, односно y е конкавна. Во останатите интервали, запишани во табелата, конкавитетот се менува наизменично.



6. Асимптоти. Имаме:

$$\lim_{x\to1^+}y(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{1^+-1}=+\infty\,,\ \lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{1^--1}=-\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{1^--1}=-\infty\,,\ \lim_{x\to-1^-}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{1^+-1}=+\infty$$

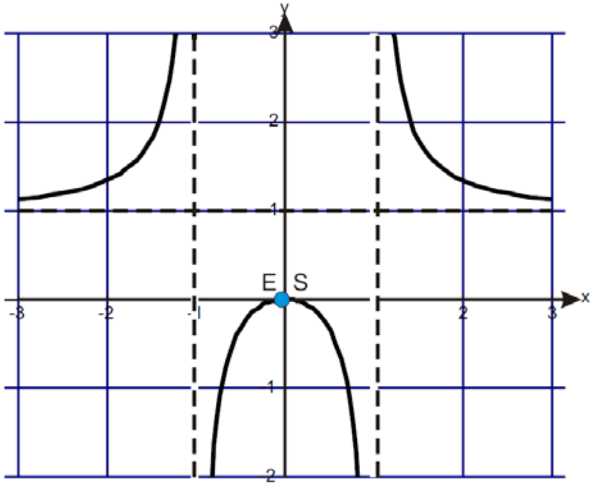
Следува: $x=-1$ и $x=1$ се вертикални асимптоти.

Бидејќи

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1\,,$$

следува дека $y=1$ е хоризонтална асимптота.

7. График. Според добиените податоци го скицираме графикот на функцијата.



Задача 4. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Бидејќи $x^2+1>0$, следува дека $D_y=\mathbb{R}$.

2. Пресеци со оски. Заради

$$y=0 \Leftrightarrow x^3=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ и } x=0 \Rightarrow y=\frac{0^3}{0^2+1}=0,$$

следува дека графикот на функцијата ги сече оските во точката $S(0,0)$.

3. Парност, непарност и периодичност. Од

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=\frac{-x^3}{x^2+1}=-y(x).$$

следува дека функцијата е непарна.

4. Екстреми. Интервали на монотоност. За полесно пресметување на првиот извод, ја средуваме функцијата: $y=\dfrac{x^3+x-x}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$. Тогаш,

$$y'=1-\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+2x^2+1+x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Следува: $y' > 0$, за $x \neq 0$, па функцијата y монотоно расте и нема локални екстреми.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет. Од

$$y'' = \frac{\left(4x^3+6x\right)\left(x^2+1\right)^2 - \left(x^4+3x^2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4} =$$

$$\frac{\left(x^2+1\right)\left(\left(4x^3+6x\right)\left(x^2+1\right) - 4x\left(x^4+3x^2\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^4} =$$

$$\frac{4x^5+4x^3+6x^3+6x-4x^5-12x^3}{\left(x^2+1\right)^3} =$$

$$\frac{-2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{-2x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^3},$$

следува дека $y''=0$ и y'' го менува знакот во $x=0$, $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$. Други точки на промена на знакот на y'' нема. Заради $y(0)=0$, $y\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ и $y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, превојните точки се: $P_1(0,0)$, $P_2\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{4}\right)$ и $P_3\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$. За да го определиме знакот на y'' во интервалите што ги формираат, ги избираме точките на промена на знакот, избираме една точка од еден интервал. На пример, $x=-2$ од првиот интервал $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $y''(-2) = \frac{-2(-2)}{5^3} > 0$.

Податоците ги нанесуваме во следнава табела:

интервал	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
y''	$+$	$-$	$+$	$-$
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

6. Асимптоти. Бидејќи $D_y = \mathbb{R}$, функцијата нема вертикална асимптота. Заради:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{0} = \pm\infty,$$

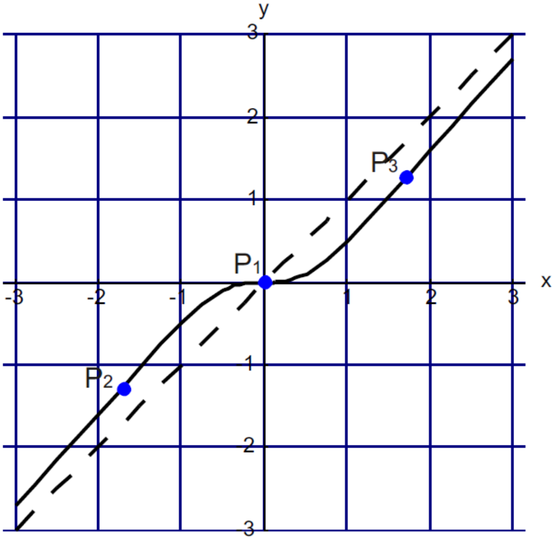
следува дека y нема ниту хоризонтална асимптота. Ќе го испитаме постоењето на коса асимптота $y = kx + n$, каде што:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1, \text{ и}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x}{x^2+1} \right) = 0.$$

Следува дека $y = x$ е коса асимптота.

7. График.



Задача 5. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Дефиниционата област е. $D_y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Пресеци со оски. Бидејќи функцијата не е дефинирана во $x = 0$, следува дека графикот на функцијата нема пресек со y-оската. Заради

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_1 = -1 - \sqrt{2} \vee x_2 = -1 + \sqrt{2},$$

следува дека $S_1\left(-1+\sqrt{2},0\right)$ и $S_2\left(-1-\sqrt{2},0\right)$ се пресечни точки со x-оската.

3. Парност, непарност и периодичност. Дефиниционата област е симетрична и

$$y(-x)=\frac{(-x)^2+2(-x)-1}{(-x)^2}=\frac{x^2-2x-1}{x^2}\neq \pm y(x).$$

Следува дека функцијата е ниту парна ниту непарна.

4. Екстреми. Интервали на монотоност. Го пресметуваме првиот извод:

$$y'=\frac{(2x+2)x^2-\left(x^2+2x-1\right)2x}{x^4}=\frac{x\left(2x^2+2x-2x^2-4x+2\right)}{x^4}=$$
$$\frac{-2x+2}{x^3}=\frac{-2(x-1)}{x^3}.$$

Притоа, $y'=0$ и y' го менува знакот во $x=1$. Функцијата y' го менува знакот и во точката $x=0$. Во $x=-1$, $y'<0$. Со добиените податоци ја пополнуваме следнава табела:

интервал	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
y'	$-$	$+$	$-$
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Заради $y(1)=\dfrac{1+2-1}{1}=2$, од табелата се заклучува дека $E(1,2)$ е локален максимум.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет. Вториот извод е:

$$y''=\frac{-2x^3-(-2x+2)3x^2}{x^6}=\frac{-2x+6x-6}{x^4}=\frac{2(2x-3)}{x^4},$$

каде што

$$y''=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Функцијата y'' го менува знакот во точката $x=\dfrac{3}{2}$. За $x\in\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$, $y''<0$, односно y е испакната, а за $x\in\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, $y''>0$, односно y е вдлабната. Притоа,

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{9}{4}+3-1}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{17}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{17}{9} \text{ и } P\left(\frac{3}{2},\frac{17}{9}\right) \text{ е превојна точка.}$$

6. Асимптоти. Функцијата не е дефинирана во $x=0$ и

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} y(x)=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=-\infty .$$

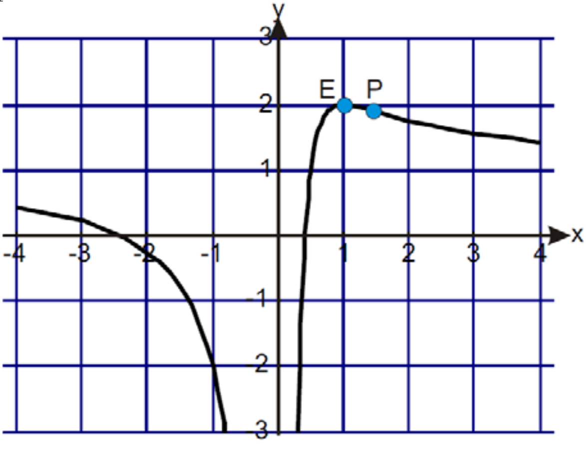
Следува дека $x=0$ е вертикална асимптота.

Заради

$$y=\lim_{x\to\infty} y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1,$$

правата $y=1$ е хоризонтална асимптота.

7. График.



Задача 6. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Решение. 1. Дефинициона област. $D_y=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. Парност непарност и периодичност. Заради,

$$y(-x)=(-x)^2+\frac{1}{(-x)^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=y(x).$$

следува дека функцијата е парна.

3. Пресеци. Функцијата нема пресек со y-оската затоа што не е дефинирана во точката $x=0$. Функцијата нема пресек ниту со x-оската, бидејќи $y=x^2+\frac{1}{x^2}>0$.

4. Екстреми. Интервали на монотоност. Имаме:

$$y'=2x-\frac{2}{x^3} \text{ и}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow 2x-\frac{2}{x^3}=0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}=0 \Leftrightarrow x^4-1=0 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 .$$

Во точките $x=-1$ и $x=1$ функцијата го менува знакот. Друга точка во која функцијата го менува знакот (ТПЗ) е $x=0$. Со помош на овие точки, табелата ги определуваме интервалите во кои функцијата расте или опаѓа.

		-1		0		1	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
y	↘		↗		↘		↗

Заради $y(-1)=y(1)=2$, $E_1(-1,2)$ е локален минимум, а $E_2(1,2)$ локален максимум.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет.

$$y''=2+\frac{6}{x^4}=\frac{2\left(x^4+3\right)}{x^4}.$$

Следува дека $y''>0$, односно дека функцијата y нема превојни точки и нема точки на промена на знак, па е конкавна$(\cup)$ на двата интервали на кои е дефинирана.

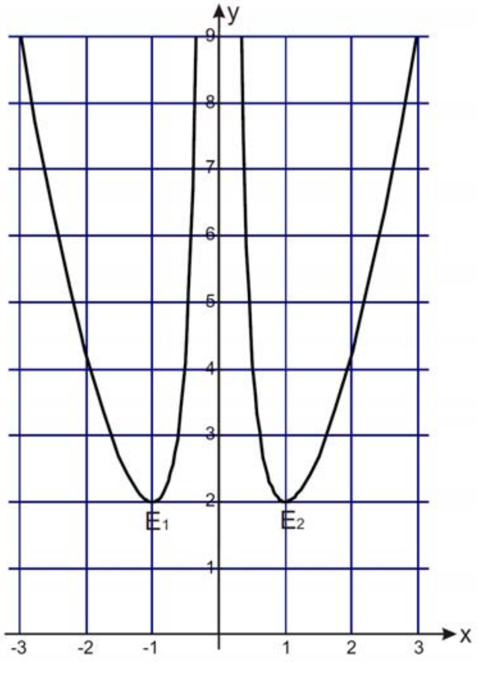
6. Асимптоти. Заради

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=0+(+\infty)=+\infty ,$$

следува дека $x=0$ е вертикална асимптота. Исто така, од

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty+0=+\infty ,$$

следува дека функцијата нема хоризонтална асимтота. Заради



$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)=\pm\infty+0=\pm\infty,$$

следува дека функцијата нема ниту коса асимтота.

7. График.

Задача 7. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y=\dfrac{x^2}{1-x}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Функцијата не е дефинирана во точките во кои

$$1-x=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Следува: $D_y=R\setminus\{1\}$.

2. Пресеци со оски. Од равенствата:

$$x=0 \Rightarrow y=0 \text{ и } y=0 \Leftrightarrow x=0,$$

имаме дека точката $S(0,0)$ е пресечна точка со оските.

3. Парност, непарност и периодичност. Бидејќи дефиниционата област не е симетрична, функцијата е ниту парна ниту непарна.

4. Екстреми. Монотоност.

$$y'=\frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{x\big(2(1-x)-x(-1)\big)}{(1-x)^2}=\frac{x(2-2x+x)}{(1-x)^2}=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

Функцијата има екстреми во $x=0$ и $x=2$. Други ТПЗ нема.

		0		2	
y’	+		−		+
y	↗		↘		↗

Заради $y(0)=0$ и $y(2)=\dfrac{2^2}{1-2}=-4$, па $E_1(0,0)$ е локален максимум и $E_2(2,-4)$ локален минимум.

5. Превојни точки. Конкавитет. За вториот извод добиваме:

$$y''=\left(\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2-2x)(x-1)^2-(2x-x^2)2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$\frac{2(x-1)\left(x-1-x^2+x-2x+x^2\right)}{(x-1)^4}=-\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Следува дека функцијата нема превојни точки, а единствена ТПЗ е $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$. Функцијата е конкавна на интервалот $(-\infty,1)$, а конвексна на $(1,+\infty)$.

	1	
y''	+	−
y	∪	∩

6. Асимптоти. Имаме:

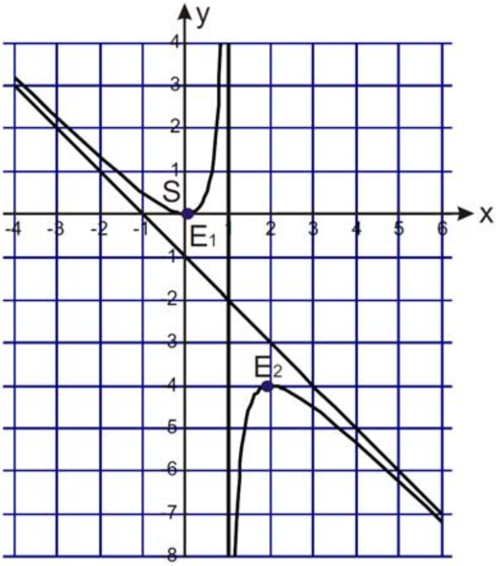
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty \text{ и } \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$$

Следува дека вертикалната асимптота е правата $x=1$. Бидејќи степенот на полиномот во броителот е за еден поголем од степенот во именителот, функцијата има коса асимптота. Покрај вообичаената постапка, асимптотата може да се најде и на следниов начин (ја средуваме функцијата во облик):

$$y=\frac{x^2}{1-x}=\frac{x^2-1+1}{1-x}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x}=-x-1+\frac{1}{1-x}.$$

Бидејќи $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-x}=0$, косата асимптота на функцијата е $y=-x-1$.

7. График.



3.7.2 Графици од експоненцијална и логаритамска функција

Задача 1. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Експоненцијалната функција е дефинирана на $\mathbb{R}$, рационалната функција не е дефинирана во точките за кои:

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Значи, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Пресеци со оски. Бидејќи функцијата y не е дефинирана за $x = 0$, графикот на функцијата нема пресек со y-оската. Бидејќи $y \neq 0$ за ниту една вредност од дефиниционата област графикот на функцијата нема пресек ниту со x-оската.

3. Парност и непарност. Заради

$$y(-x) = \frac{1}{e^{-x} - 1} \neq \pm y(x) \text{ каде } y(x) = \frac{1}{e^x - 1} \text{ и } -y(x) = \frac{-1}{e^x - 1},$$

функцијата е ниту парна ниту непарна.

4. Екстреми. Монотоност.

$$y' = -\frac{1}{\left(e^x - 1\right)^2} e^x = \frac{-e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} < 0.$$

Следува функцијата y нема екстреми и монотоно опаѓа.

5. Превојни точки. Конкавитет.

$$y'' = \frac{-e^x\left(e^x - 1\right)^2 + e^x 2\left(e^x - 1\right)e^x}{\left(e^x - 1\right)^4} =$$

$$\frac{e^x\left(e^x - 1\right)\left(-\left(e^x - 1\right) + 2e^x\right)}{\left(e^x - 1\right)^4} = \frac{e^x\left(e^x + 1\right)}{\left(e^x - 1\right)^3}.$$

Бидејќи $e^x > 0$ и јасно $e^x + 1 > 0$, функцијата нема превојни точки. Точките на промена на знакот за функцијата се решенија на равенката:

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ако $x \in (-\infty, 0)$, тогаш $y''(x) < 0$, односно y е испакната $(\cap)$, а ако $x \in (0, +\infty)$, тогаш $y''(x) > 0$, односно y е вдлабната $(\cup)$.

6. Асимптоти. Во точката $x = 0$ функцијата не е дефинирана и

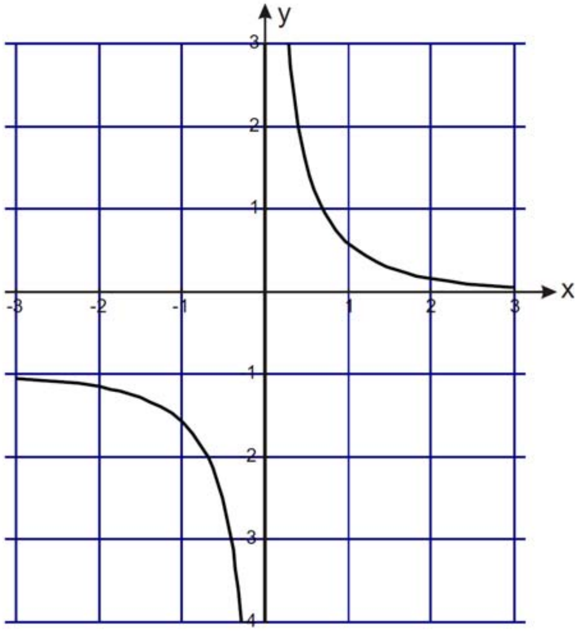
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{0^+} - 1} = +\infty \text{ и } \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{0^-} - 1} = -\infty .$$

Следува дека y-оската е вертикална асимптота. Понатаму,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{-\infty} - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1 \text{ и } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{+\infty} - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Следува дека $y = -1$ и $y = 0$ се хоризонтални асимптоти на функцијата. Бидејќи постојат левата и десната хоризонтална асимптота, функцијата нема коса асимптота.

7. График.



Задача 2. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Функцијата $\frac{1}{x}$ е дефинирана за сите реални броеви освен за $x = 0$. Експоненцијалната функција е дефинирана на $\mathbb{R}$. Затоа, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Пресеци со оски. Бидејќи експоненцијалната функција е позитивна на целата дефинициона област, функцијата нема пресек со x-оската. Бидејќи функцијата не е дефинирана во нулата, таа нема пресек ниту со y-оската.

3. Парност, непарност и периодичност. Заради

$$y(-x) = e^{\frac{1}{-x}} \neq \pm y(x),$$

функцијата е ниту парна ниту непарна.

4. Екстреми. Интервали на монотоност.

$$y' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} < 0.$$

Следува: y монотоно опаѓа и нема локални екстреми.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет.

$$y'' = \frac{-e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)x^2 + e^{\frac{1}{x}}2x}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}.$$

Изразите $e^{\frac{1}{x}} > 0$ и $x^4 \geq 0$, точка на промена на знак е:

$$2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ во која } y''=0 \text{ и } y\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

Следува: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ е превојна точка. Притоа, за $x < -\frac{1}{2}$, $y'' < 0$, односно y е конвексна ($\cap$) и за $x > -\frac{1}{2}$, $y'' > 0$, односно y е конкавна ($\cup$).

6. Асимптоти. Имаме:

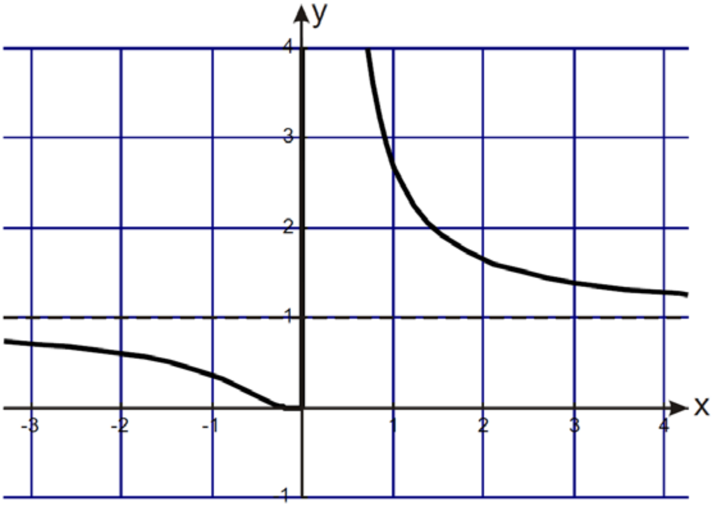
$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0 \text{ и } \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Следува дека $x = 0$ е вертикална асимптота бидејќи десната граница е $+\infty$. Левата граница кажува дека функцијата се доближува до нула одлево во $x = 0$. Заради

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\pm\infty}} = e^0 = 1,$$

следува дека $y=1$ е хоризонтална асимптота.

7. График.



Задача 3. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Логаритамската функција е дефинирана кога:

$$\frac{1+x}{1-x}>0 \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} (1+x)(1-x)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow x\in(-1,1).$$

Следува: $D_y=(-1,1)$.

2. Пресеци со оски. За $x=0$ важи $y=\ln 1=0$ и

$$y=0 \Leftrightarrow \ln\frac{1+x}{1-x}=0 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x}=1 \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} 1+x=1-x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Следува дека $S(0,0)$ е пресечна точка со оските.

3. Парност, непарност и периодичност. Дефиниционата област е симетрична и

$$y(-x)=\ln\frac{1-x}{1-(-x)}=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-y(x)$$

Следува дека функцијата е непарна.

4. Екстреми. Монотоност.

$$y' = \frac{1-x}{1+x}\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}.$$

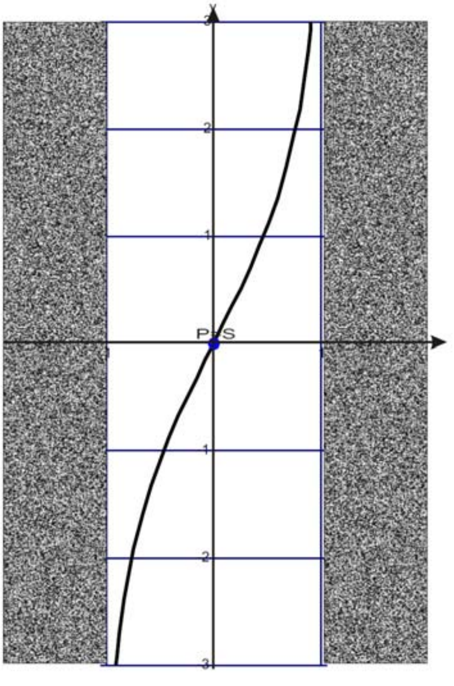
Значи, $y' \neq 0$, односно y нема екстреми. Заради

$$1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,\ D_y = (-1,1) \text{ и } y'(0) = 2,$$

следува дека $y' > 0$, т.е. y монотоно расте.

5. Превојни точки. Конкавитет.

$$y'' = \frac{-2}{\left(1-x^2\right)^2}(-2x) = \frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$



Превојната точка ја добиваме за $x = 0$ и ќе ја означиме со $P(0,0)$. Притоа, за $x < 0$, $y'' < 0$, т.е. y е конвексна и за $x > 0$, $y'' > 0$, т.е. y е конкавна.

6. Асимптоти. Точки на натрупување во кои функцијата не е дефинирана се $x = -1$ и $x = 1$, во кои

$$\lim_{x\to -1^+} \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\frac{0^+}{2} = \ln 0 = -\infty$$

и $\lim_{x\to 1^-} \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\frac{2}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty$.

Вториот лимес и не мораше да се пресметува, следува дека директно од непарноста на y.

Значи, $y = -1$ и $y = 1$ се вертикални асимптоти.

Функцијата y нема хоризонтални и коси асимптоти бидејќи не е дефинирана во околина на $-\infty$ и $+\infty$.

7. График. Со помош на податоците го скицираме графикот на функцијата.

Задача 4. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение. 1. Дефинициона област. За да постои коренот треба $x\geq 0$, а за да постои рационалната функција треба $\sqrt{x}$, т.е. $x\neq 0$. Оттука, $D_y=(0,+\infty)$.

2. Пресеци со оски. Функцијата нема пресек со y-оската. Потоа,

$$y=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Следува дека $S(1,0)$ е пресечна точка на графикот на функцијата со x-оската.

3. Парност, непарност и периодичност. Функцијата y е ниту парна ниту непарна бидејќи дефиниционата област не е симетрична.

4. Екстреми. Интервали на монотоност.

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x^3}}.$$

Тој се анулира за:

$$y'=0 \Leftrightarrow 2-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2.$$

интервал	$(0,e^2)$	$(e^2,+\infty)$
y'	$+$	$-$
y	$\nearrow$	$\searrow$

Во $x=e^2$ функцијата го менува знакот од $+$ кон $-$. Заради

$$y(e^2)=\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2\ln e}{e}=\frac{2}{e},\text{ точката } E\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$$

е локален максимум.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет.

$$y''=\left(\frac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}2x^{\frac{3}{2}}-(2-\ln x)2\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{4x^3}=\frac{x^{\frac{1}{2}}(-2-6+3\ln x)}{4x^3}=\frac{3\ln x-8}{4\sqrt{x^5}}$$

$$\text{и }\; y''=0 \Leftrightarrow 3\ln x-8=0 \Leftrightarrow \ln x=\frac{8}{3} \Leftrightarrow x=e^{\frac{8}{3}}.$$

интервал	$\left(0, e^{\frac{8}{3}}\right)$	$\left(e^{\frac{8}{3}}, +\infty\right)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

Во точката $x = e^{\frac{8}{3}}$, y'' го менува знакот од $-$ кон $+$.

Заради $y\left(e^{\frac{8}{3}}\right) = \dfrac{\ln e^{\frac{8}{3}}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}} = \dfrac{8}{3e^{\frac{4}{3}}}$ превојната точка е $P\left(e^{\frac{8}{3}}, \dfrac{8}{3e^{\frac{4}{3}}}\right)$.

6. Асимптоти. Правата $x = 0$ е вертикална асимптота бидејќи

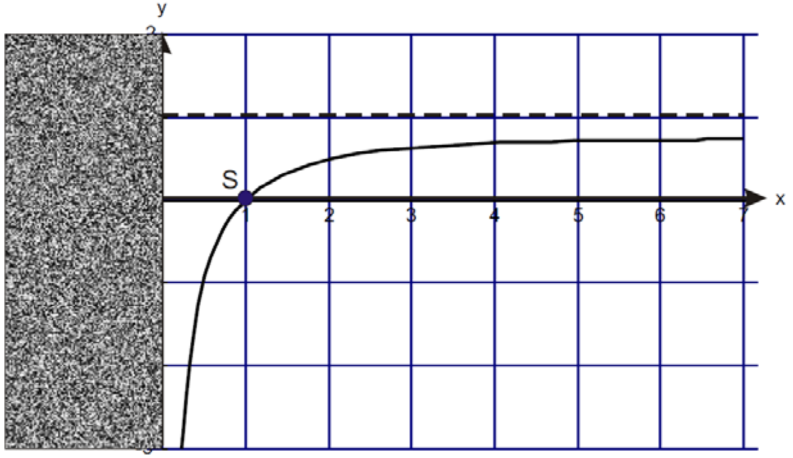
$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty .$$

Функцијата нема лева хоризонтална и коса асимптота бидејќи не е дефинирана во околина на $-\infty$. Заради

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{+\infty} = 0,$$

$y = 0$ е хоризонтална асимптота.

7. График.



Задача 4. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y=\ln\left(1+e^{x}\right)$.

Решение.1. Дефинициона област. Бидејќи $1+e^{x}>1$, следува $D_y=\mathbb{R}$.

2. Пресеци со оски. Од $1+e^{x}>1$ следува дека $\ln\left(1+e^{x}\right)>0$. Значи, функцијата нема пресек со x-оската. За $x=0$ важи $y=\ln\left(1+e^{0}\right)=\ln 2$, следува дека точката $S(0,\ln 2)$ е пресечна точка со y-оската.

3. Парност, непарност и периодичност. Заради

$$y(-x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=\ln\frac{1+e^{x}}{e^{x}}=\ln\left(1+e^{x}\right)-\ln e^{x}=y(x)-x,$$

следува дека функцијата е ниту парна ниту непарна.

4. Екстреми. Монотоност. Првиот извод е:

$$y'=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}>0 .$$

Следува дека функцијата нема екстремни вредност и монотоно расте.

5. Превојни точки. Конкавитет. Вториот извод е:

$$y''=\frac{e^{x}\left(1+e^{x}\right)-e^{x}e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{e^{x}\left(1+e^{x}-e^{x}\right)}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}>0 .$$

Следува дека функцијата нема превојни точки и е конкавна на целата дефинициона област.

6. Асимптоти. Функцијата нема вертикални асиптоти. Заради

$$\lim_{x\to-\infty}y(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=\ln\left(1+e^{-\infty}\right)=\ln 1=0 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=\ln\left(1+e^{+\infty}\right)=\ln(+\infty)=+\infty ,$$

следува дека $y=0$ е лева хоризонтална асимптота. Заради

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{x}}{1+e^{x}}}{1}=$$

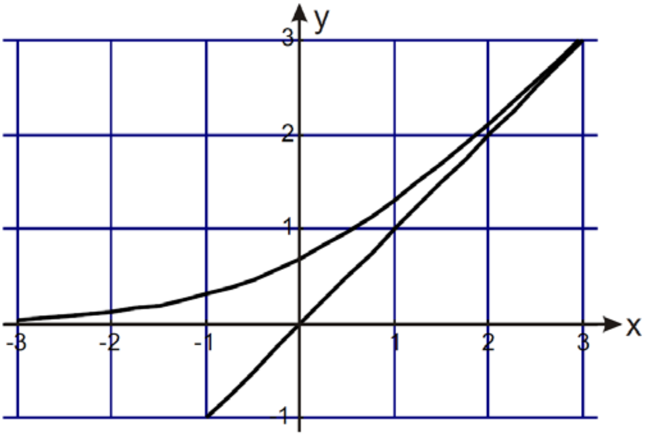
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x}}=1 \text{ и}$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+e^x\right)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{e^x}=\ln 1=0,$$

следува дека $y=x$ е десна коса асимптота.

7. График.



3.7.3. Графици од коренска и тригонометриска функција

Задача 1. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Поткоренов израз:

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0.$$

Следува дека функцијата е дефинирана на $\mathbb{R}$.

2. Пресеци со оски. Од равенствата:

$$x=0\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и}$$

$$y=0\Leftrightarrow\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1,$$

следува дека пресечни точки со оските се $S_1(-1,0)$ и $S_2\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Парност, непарност и периодичност. Функцијата не е периодична и

$$y(-x)=\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\neq \pm y(x).$$

Следува дека функцијата y е ниту парна ниту непарна.

4. Екстреми. Интервали на монотоност. Првиот извод:

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-(1+x)\dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+2x+2\right)^3}}>0.$$

Следува дека функцијата y монотоно расте и нема локални екстреми.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет. Вториот извод,

$$y''=-\frac{3}{2}\frac{2x+2}{\sqrt{\left(x^2+2x+2\right)^5}}=\frac{-3(x+1)}{\sqrt{\left(x^2+2x+2\right)^5}},$$

се анулира и го менува знакот за $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Бидејќи во интервалот за $x<-1$, $y''>0$ и за $x>-1$, $y''<0$, точката $P(-1,0)$ е превојна точка.

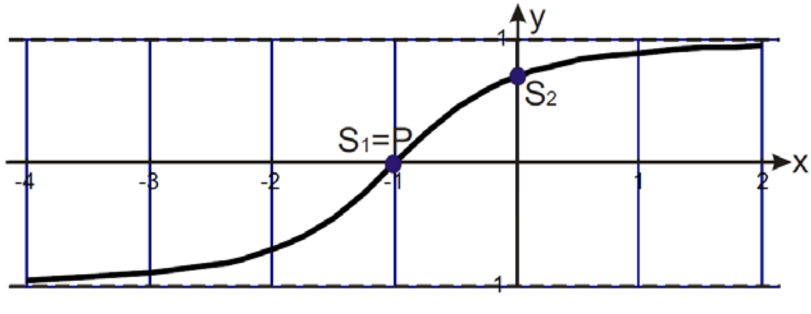
	-1	
y''	+	−
y	∪	∩

6. Асимптоти. Вертикални асимптоти нема. Заради

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{\pm x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}=\pm 1,$$

следува дека $y=-1$ и $y=1$ се хоризонтални асимптоти.

7. График.



Задача 2. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Коренот постои ако $x+1\geq 0$. Рационалната фукција постои ако $x+1\neq 0$. Следува: $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$. Значи, $D_y=(-1,+\infty)$.

2. Пресеци со оски. Поради равенстата:

$$y=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ и } x=0 \Rightarrow y=\frac{0}{\sqrt{1}}=0,$$

следува дека $S(0,0)$ е пресечната точка со координатните оски.

3. Парност непарност и периодичност. Функцијата y е ниту парна ниту непарна бидејќи дефиниционата област не е симетрична.

4. Екстреми. Интервали на монотоност.

$$y'=\frac{2x\sqrt{x+1}-x^2\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(4x(x+1)-x^2\right)}{x+1}=\frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Функцијата y' има иста дефинициона област со y, т.е. $D_{y'}=(-1,+\infty)$. Членот $3x+4>0$ за $x\in D_{y'}$. Следува дека $y'=0$ и y' го менува знакот од $-$ кон $+$ во $x=0$. Значи, за $x<0$, y монотоно опаѓа ($\searrow$); за $x>0$, y монотоно расте ($\nearrow$) и $E(0,0)$ е локален минимум.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет.

$$y''=\left(\frac{3x^2+4x}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right)'=\frac{(6x+4)2(x+1)^{\frac{3}{2}}-\left(3x^2+4x\right)2\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}}{4(x+1)^3}=$$

$$\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}\left(2(6x+4)(x+1)-9x^2-12x\right)}{4(x+1)^3}=$$

$$\frac{12x^2+20x+8-9x^2-12x}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Бидејќи дискриминантата на равенката $3x^2+8x+8=0$ е $D=64-96<0$ и коефициентот пред x^2 е позитивен, следува дека $3x^2+8x+8>0$, т.е. $y''>0$. Значи, функцијата y е вдлабната ($\cup$) и нема превојни точки.

6. Асимптоти. Точката $x=-1$ е точка на натрупување во која функцијата не е дефинирана.

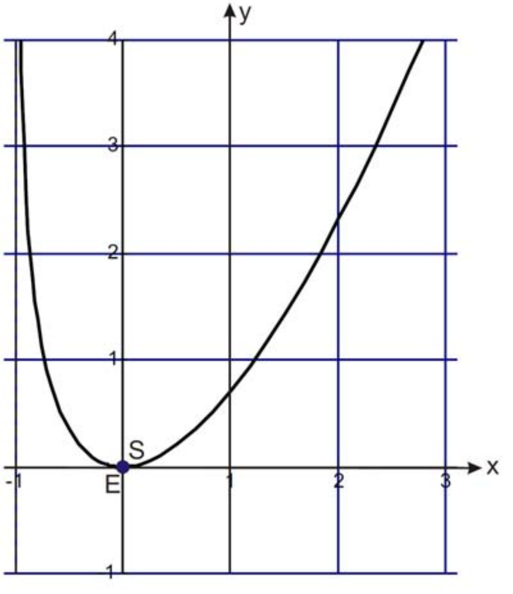
$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

Следува дека $x=-1$ е вертикална асимптота. Бидејќи

$$\lim_{x\to +\infty} y(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = +\infty \text{ и } k = \lim_{x\to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = +\infty ,$$

следува дека функцијата нема ниту хоризонтална ниту коса асимптота. Функцијата неограничено расте кога $x\to+\infty$.

7. График.



Задача 3. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. 1. Дефинициона област. Бидејќи $x^2+1>0$ коренот и количникот секогаш постојат. Затоа $D_f=\mathbb{R}$.

2. Пресеци со оски. Заради

$$x = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ и } y = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2,$$

следува дека точката $S_1(0,-2)$ е пресек на графикот на функцијата со y-оската, додека $S_2(2,0)$ со x-оската.

3. Парност, непарност и периодичност. Функцијата не е периодична. Функцијата е ниту парна ниту непарна, бидејќи

$$y(-x) = \frac{-x-2}{\sqrt{(-x)^2+1}} = -\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} \neq \pm y(x), \text{ каде } \pm y(x) = \frac{\pm x - 2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4. Екстреми. Монотоност.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-2)\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} =$$

$$\frac{x^2+1-x^2+2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ и } (x^2+1)^{\frac{3}{2}} > 0.$$

За

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right),\ y' < 0 \text{ т.е. } y \searrow \text{ и за } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)\ y' > 0 \text{ т.е. } y \nearrow.$$

Заради $y\left(-\frac{1}{2}\right) = \dfrac{-\frac{1}{2}-2}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}} = \dfrac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = -\sqrt{5}$, точката $E\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{5}\right)$ е локален минимум.

5. Превојни точки. Конкавитет.

$$y'' = \frac{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (2x+1)\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}x}{(x^2+1)^3} = \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left(2(x^2+1) - 3x(2x+1)\right)}{(x^2+1)^3} =$$

$$\frac{2x^2+2-6x^2-3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-4x^2-3x+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{4x^2+3x-2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Вториот извод се анулира ако:

$$y''=0 \Leftrightarrow 4x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+32}}{8} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8} \Leftrightarrow$$

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{41}}{8}\approx -1{,}2 \text{ и } x_2=\frac{-3+\sqrt{41}}{8}\approx 0{,}4\,.$$

Равенката $-\left(4x^2+3x-2\right)=0$ е равенка на парабола отворена надолу $(\cap)$, која ја сече x-оската во точките x_1 и x_2. Следува дека во x_1 и x_2, y'' го менува знакот, т.е. $P_1(x_1,y(x_1))$ и $P_2(x_2,y(x_2))$ се превојни точки. За $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$, $y''<0$, т.е. y е испакната $(\cap)$ и за $x\in(x_1,x_2)$, $y''>0$, т.е. y е вдлабната $(\cup)$. Притоа,

$$y(x_1)=\frac{\frac{-3-\sqrt{41}}{8}-2}{\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}\right)^2+1}}=\frac{\frac{-19-\sqrt{41}}{8}}{\frac{\sqrt{114+6\sqrt{41}}}{8}}=\frac{-\left(19+\sqrt{41}\right)}{\sqrt{6\left(19+\sqrt{41}\right)}}=$$

$$-\sqrt{\frac{19+\sqrt{41}}{6}}\approx -2{,}1 \text{ и } y(x_2)=\frac{\frac{-3+\sqrt{41}}{8}-2}{\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{41}}{8}\right)^2+1}}=\frac{\frac{-19+\sqrt{41}}{8}}{\frac{\sqrt{114-6\sqrt{41}}}{8}}=$$

$$\frac{-\left(19-\sqrt{41}\right)}{\sqrt{6\left(19-\sqrt{41}\right)}}=-\sqrt{\frac{19-\sqrt{41}}{6}}\approx -1{,}4\,.$$

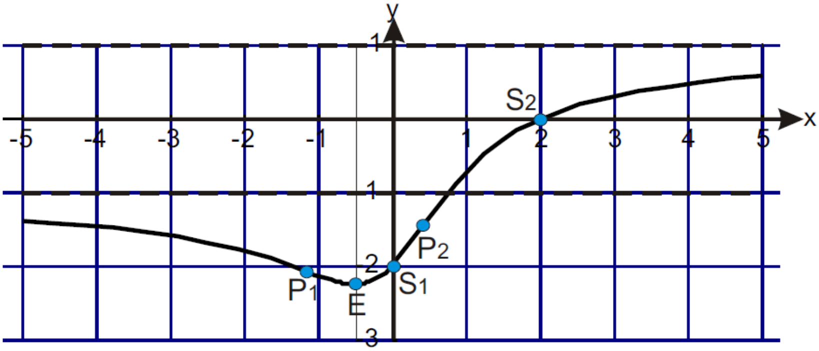
6. Асимптоти. Функцијата нема вертикални асимптоти. Заради

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1,$$

следува дека $x=-1$ и $x=1$ се хоризонтални асиптоти.

7. График.



Задача 4. Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата: $y = 2\cos x + \sin 2x$.

Решение. 1. Дефинициона област. Функциите синус и косинус се дефинирани на $\mathbb{R}$. Затоа, $D_f = \mathbb{R}$.

2. Пресеци со оски. Имаме:

$$y = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(1+\sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos x = 0 \vee 1+\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Значи, пресеци со x-оската на интервалот $[0,2\pi]$ се точките

$S_1\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ и $S_2\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$. Бидејќи $x=0 \Rightarrow y = 2\cos 0 + \sin 0 = 2$,

следува дека точката $S_3(0,2)$ е пресек со y-оската.

3. Парност, непарност и периодичност. Имаме:

$$y(-x) = 2\cos(-x) + \sin(-2x) = 2\cos x - \sin 2x \neq \pm y(x)$$

Следува дека y е ниту парна ниту непарна.

Бидејќи функциите синус и косинус се периодични со период 2π, следува дека и y е периодична со период 2π. Затоа, нејзиниот график е доволно да го разгледаме на интервалот $[0,2\pi]$.

4. Екстреми. Интервали на монотоност.

$$y' = -2\sin x + 2\cos 2x = -2\sin x + 2\left(1-2\sin^2 x\right) = -2\left(2\sin^2 x + \sin x - 1\right),$$

каде што: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. Заради

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}, \sin x = -1$$

$$y' = -2\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)(\sin(x) + 1),$$

членот $1 + \sin x$ е ненегативен. Следува дека функцијата го менува знакот во точките во кои:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi .$$

На интервалот $[0,2\pi]$, ТПЗ се: $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$. Во првата точка функцијата го менува знакот од $+$ кон $-$, а во втората точка од $-$ кон $+$. Притоа,

$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, од каде што $E_1\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ е локален максимум, додека $E_2\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ локален минимум.

интервал	$\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$
y'	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Периодот 2π е и основен период бидејќи двата максимални соседни интервали на опаѓање (или растење) се поместени за 2π.

5. Превојни точки. Интервали на конкавитет. Вториот извод на функцијата е:

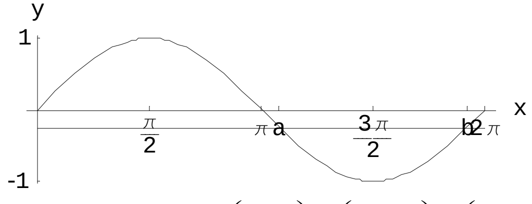
$$y'' = -2\cos x - 4\sin 2x = -2\cos x - 8\sin x \cos x = -2\cos x(1 + 4\sin x)$$

Вториот извод на интервалот $[0,2\pi]$ се анулира за:

$$-2\cos x(1 + 4\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 + 4\sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \sin x = -\frac{1}{4}.$$

На интервалот $[0,2\pi]$ постојат две вредности a и b за кои $\sin x = -\frac{1}{4}$. Нив може приближно да ги одредиме со графичкиот метод. Ги цртаме графиците на функциите $y = \sin x$ и $y = -\frac{1}{4}$ и на цртежот ги одредуваме нивните пресеци.

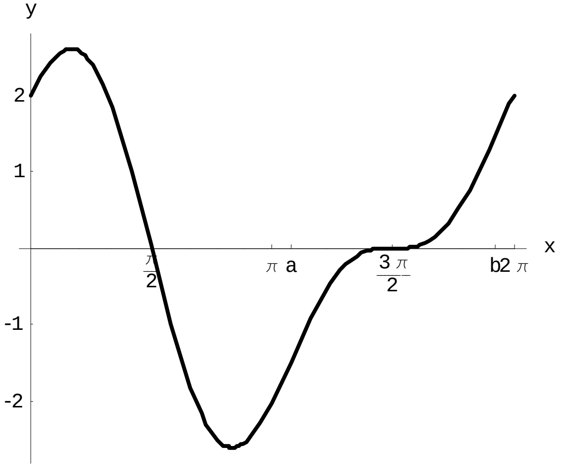


На интервалот $[0,2\pi]$, точките $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\left(a,-\frac{1}{4}\right)$ и $\left(b,-\frac{1}{4}\right)$ се превојни точки.

интервал	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},a\right)$	$\left(a,\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},b\right)$	$(b,2\pi)$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$1+4\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
y''	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
y	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

6. Асимптоти. Тригонометриските функции немаат асимптоти. Вертикална асимптота немаат бидејќи се дефинирани на целата реална права, а коса немаат бидејќи се периодични, односно не постојат границите на функцијата кога $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$.

7. График.



4. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

4.1. ОСНОВНИ ПРАВИЛА И ОПЕРАЦИИ СО ТАБЛИЧНИ ИНТЕГРАЛИ

Задача 1-4. Најди ги интегралите:

1) $I=\int 3dx$;   2) $I=\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$;

3) $I=\int(2x+1)(2x-1)dx$;   4) $I=\int(x-1)^2\,dx$.

Решение. 1) Бидејќи интеграл од константа по функција е константа по интегралот од функцијата, константата можеме да ја извлечеме пред интегралот. Потоа ја применуваме формулата за интеграл од единечната функција. Имаме:

$$I=3\int dx=3x+C.$$

Коментар. Равенствата меѓу неопределени интеграли се равенства меѓу множества на функции. На пример, равенството $3\left\{x+C \middle| C\in\mathbb{R}\right\}=\left\{3x+C \middle| C\in\mathbb{R}\right\}$, по договор го запишуваме како $3(x+C)=3x+C$.

2) Бидејќи интеграл од збир на конечно многу функции, е збир од интегралите на функциите, интегралот го претставуваме како збир од 4 интеграли кои ги наоѓаме со помош на формулата за интеграл од степенска функција. Значи,

$$I=\int x^2dx+\int 2xdx+\int\frac{1}{x}dx+\int x^{-2}dx=$$

$$\frac{x^3}{3}+x^2+\ln|x|+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{x^3}{3}+x^2+\ln|x|-\frac{1}{x}+C.$$

3) За да можеме да го пресметаме интегралот прво ја развиваме подинтегралната функција $(2x+1)(2x-1)=4x^2-1$.

Следува: $I=\int(4x^2-1)dx=4\int x^2dx-\int dx=4\frac{x^3}{3}-x+C$.

4) Аналогно како во претходната задача, добиваме:

$$I=\int(x^2-2x+1)\,dx=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+x+C=\frac{x^3}{3}-x^2+x+C.$$

Задача 5-8. Најди ги интегралите:

5) $I=\int \sqrt[3]{x}dx$; 6) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;

7) $\int -2\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; 8) $I=\int \frac{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)^2}{x}dx$.

Решение. 5) Коренскиот израз го запишуваме преку степен и ја применуваме формулата за интеграл од степенска функција. Притоа, $\frac{x^y}{y}$, кога $y=\frac{a}{b}$, директно го запишуваме како $\frac{b}{a}x^{\frac{a}{b}}$. Па,

$$I=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C .$$

6) Постапувајќи аналогно, добиваме:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx-2\int x^{-\frac{3}{4}}dx=$$

$$2x^{\frac{1}{2}}-2\cdot 4x^{\frac{1}{4}}+C=2\sqrt{x}-8\sqrt[4]{x}+C .$$

7) Подинтегралната функција во степенски запис е:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=\sqrt{x\sqrt{xx^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt{xx^{\frac{3}{4}}}=\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}=x^{\frac{7}{8}}.$$

Оттука,

$$I=-2\int x^{\frac{7}{8}}dx=-2\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C=-\frac{16}{15}\sqrt[8]{x^{15}}+C .$$

8) Најпрво, биномот го развиваме, а потоа членовите ги запишуваме во степенски облик:

$$\frac{\left(\sqrt[5]{x}-1\right)^2}{x}=\frac{\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2-2x^{\frac{1}{5}}+1}{x}=x^{-\frac{3}{5}}-2x^{-\frac{4}{5}}+x^{-1}.$$ Следува:

$$I=\int\left(x^{-\frac{3}{5}}-2x^{-\frac{4}{5}}+x^{-1}\right)dx=\frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}}-2\cdot 5x^{\frac{1}{5}}+\ln|x|+C=$$

$$\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}-10\sqrt[5]{x}+\ln|x|+C .$$

Задача 9-12. Најди ги интегралите:

9) $I=\int\left(1-\sin x+\cos x\right)dx$; 10) $I=\int\sin^2\frac{x}{2}dx$;

11) $I=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$; 12) $I=\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$.

Решение. 9) Со примена на формулите за интеграл од тригонометриските функции синус и косинус, добиваме:

$$I=x+\cos x+\sin x+C.$$

10) Со примена на формулата за двоен агол, $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$, добиваме:

$$I=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\int\frac{1}{2}dx-\int\frac{\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C.$$

11) Со примена на тригонометриските идентитети

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \text{ и } \sin 2x=2\sin x\cos x,$$

добиваме:

$$I=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\left(1-\sin x\right)dx=x+\cos x+C.$$

12) Дадениот подинтегрален израз го изразуваме само преку косинус, а потоа го упростуваме користејќи ја формулата за разлика од квадрати:

$$I=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{1-\cos x}dx=x+\sin x+C.$$

Задача 13-16. Најди ги интегралите:

13) $I=\int tg^2xdx$; 14) $I=\int ctg^2xdx$;

15) $I=\int\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$; 16) $I=\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

Решение. 13) Функцијата тангенс ја запишуваме преку синус и косинус, а потоа и само преку косинус, при што интегралот се ведува до табличен. Имаме:

$$I=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=tgx-x+C.$$

14) Аналогно како во претходната задача, имаме:

$$I=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int dx==-ctgx-x+C\,.$$

15) Со помош на идентитетот $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, добиваме:

$$I=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=tgx-ctgx+C\,.$$

16) Подитегралната функција ја упростуваме со примена на формулата $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$:

$$I=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=tgx-ctgx\,.$$

Задача 17-20. Најди ги интегралите:

17) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}}$; 18) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

19) $I=\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$; 20) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

Решение. 17) Подинтегралната функција $\frac{1}{\sqrt{2-2x^2}}$ е пропорционална со $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, чиј интеграл е табличен. Затоа,

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{2(1-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+C\,.$$

18) Бидејќи $x\in(-1,1)$, важи:

$\sqrt{1-x^4}=\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}=\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}$. Следува:

$$I=\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C\,.$$

19) Заради $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$, добиваме:

$$I=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x-arctgx+C\,.$$

20) Слично,

$$I=\int\frac{1+2x+x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx=\int\frac{\left(1+x^2\right)+2x}{x\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=$$

$$\ln|x|+2arctgx+C\,.$$

Задача 21-24. Најди ги интегралите:

21) $I=\int\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$; 22) $I=\int 2^x e^x dx$;

23) $I=\int 2^x 3^{-x}dx$; 24) $I=\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

Решение. 21) $I=\int\frac{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}{e^x+1}dx=\int\left(e^x-1\right)dx=e^x-x+C\,.$

22) $I=\int(2e)^x\,dx=\frac{(2e)^x}{\ln 2e}+C=\frac{2^x e^x}{\ln(2)+1}+C\,.$

23) $\int 2^x 3^{-x}dx=\int\frac{2^x}{3^x}dx=\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+C=\frac{2^x}{3^x\ln\frac{2}{3}}+C\,.$

24) Подинтегралната функција ја сведуваме на разлика на степените помножени со константи:

$$\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}=\frac{2\cdot 2^x}{10^x}-\frac{5^x}{5\cdot 10^x}=2\left(\frac{2}{10}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{10}\right)^x=2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\,.$$

Оттука,

$$I=2\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx-\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx=2\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}-\frac{1}{5}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}+C=$$

$$-\frac{2}{5^x\cdot\ln 5}+\frac{1}{5\cdot 2^x\cdot\ln 2}+C\,.$$

Задача 25*. Најди го интегралот $I=\int|x|dx$.

Решение. На интервалот $(0,+\infty)$, $|x|=x$ и

$$I=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C.$$

На интервалот $(-\infty,0)$, $|x|=-x$ и

$$I=-\int xdx=-\frac{x^2}{2}+C_2.$$

Бидејќи равенството $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{2}+C_2\right)$ е еквивалентно со $C=C_2$, имаме:

$$\int|x|\,dx=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, x>0\\ 0, x=0\\ -\frac{x^2}{2}, x<0\end{cases}+C=\frac{x|x|}{2}+C=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}(x)+C,\ \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

Задача 26*. Реши го интегралот $I=\int f(x)dx$, каде што:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x+1 & x\in[0,1]\\ 2x & x>1\end{cases}.$$

Решение. Прво ќе го пресметаме неопределениот интеграл на секој од интервалите $(-\infty,1)$, $[0,1]$ и $[1,+\infty)$, и тоа:

-за $x\in(-\infty,1)$, $I=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$;

-за $x\in[0,1]$, $I=\int(x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}+x+C_1$ и

-за $x\in[1,+\infty)$, $I=\int 2xdx=x^2+C_2$.

Да ги разгледаме граничните точки 0 и 1. Бидејќи примитивните функции се непрекинати, важи:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x+C\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}+x+C_1\right)\Leftrightarrow C=C_1 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2}{2}+x+C_1\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+C_2\right)\Leftrightarrow \frac{3}{2}+C=1+C_2 \Leftrightarrow C_2=\frac{1}{2}+C.$$

Следува:

$I=F\left(x\right)+C$, каде што:

$$F(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}+x & x\in[0,1] \\ x^2+\dfrac{1}{2} & x>0 \end{cases}.$$

Задача 27*. Реши го интегралот $I=\int \max\left\{1,x^2\right\}dx$.

Решение. Функцијата $f(x)=\max\{1,x^2\}$ има вредност 1, ако $x^2\le 1$, односно ако $x\in[-1,1]$ и има вредност x^2, ако $x^2>1$, односно ако $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Затоа,

$$f(x)=\max\{1,x^2\}=\begin{cases} x^2, & x\in(-\infty,-1) \\ 1, & x\in[-1,1] \\ x^2, & x\in(1,+\infty)\end{cases}.$$

За $x\in(-\infty,-1)$, $I=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$; за $x\in[-1,1]$, $I=\int xdx=x+C_1$; и за $x\in(1,+\infty)$, $I=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$.

Да ги разгледаме граничните точки -1 и 1. Бидејќи примитивните функции се непрекинати, важи:

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^3}{3}+C\right)=\lim_{x\to -1^+}\left(x+C_1\right)\Leftrightarrow \frac{-1}{3}+C=-1+C_1\Leftrightarrow C_1=C+\frac{2}{3} \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(x+C_1\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3}{3}+C_2\right)\Leftrightarrow 1+C+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+C_2\Leftrightarrow C_2=\frac{4}{3}+C.$$

Следува: $I = F(x) + C$, каде што: $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & x < 0 \\ x + \dfrac{2}{3} & x \in [0,1] \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4}{3} & x > 0 \end{cases}.$

Задача 28. Определи ја равенката на кривата $y = f(x)$, која минува низ точката $M(1,0)$ и нејзиниот извод е $y' = 3x^2 + 1$.

Решение. Равенката на кривата е примитивна функција на функцијата $y' = 3x^2 + 1$. Следува:

$$y = \int (3x^2 + 1)dx = 3\frac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C .$$

Интеграционата константа ќе ја определиме од условот кривата да минува низ точката M, $0 = 1^3 + 1 + C$, односно $C = -2$. Значи кривата е $y = x^3 + x - 2$.

Задача 29. Докажи дека функцијата $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$ е примитивна функција на $y = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

Решение. Треба да покажеме дека втората функција е извод на првата. Навистина,

$$y' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Задача 30. Каде е грешката?

Од една страна:

$$\int -2\sin 2x dx = -2\frac{-\cos 2x}{2} = \cos 2x + C \ \ (1),$$

додека од друга:

$$\int -2\sin 2x dx = -2\int 2\sin x \cos dx = \left(\begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right) =$$

$$4\int t dt = 4\frac{t^2}{2} = 2\cos^2 x + C \ (2)$$

Следува:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x \ (3)$$

Но, тогаш за $x = 0$ би добиле:

$1 = 2$ (4)

Решение. Грешката е во чекор (3). Неопределениот интеграл претставува множество функции што се разликуваат за константа. Затоа, од (1) и (2) би следувало дека $\cos 2x + C = 2\cos^2 x + C_2$ за некои константи C и C_2. Тогаш, за $x = 0$ би добиле $1 + C = 2 + C_2$, односно $C_2 = C - 1$, па точното равенство би било $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

4.2. СМЕНА НА ПРОМЕНЛИВИ

Во задачите 1-8 имаме интеграли од облик $\int f(kx+n)dx$, каде што $\int f(t)dt$ е табличен интеграл. Тие се решаваат со смената $kx + n = t$.

Задача 1-8. Најди ги интегралите:

1) $\int \cos 3x dx$; 2) $\int e^{5x+2} dx$;

3) $\int \sqrt{7x+9} dx$; 4) $\int (2x+3)^5 dx$;

5) $\int \frac{dx}{(x+1)^{15}}$; 6) $\int 2^{3x+5} dx$;

7) $\int \frac{dx}{x+a}$; 8) $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx$.

Решение. 1) За да го доведеме интегралот до табличен, воведуваме смена $3x = t$, од каде што следува дека $3dx = dt$. Затоа,

$$\int \cos 3x dx = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

2) Воведуваме смена: $5x + 2 = t$, $5dx = dt$. Следува:

$$\int e^{5x+2}dx=\int e^t\,\frac{dt}{5}=\frac{1}{5}e^t+C=\frac{1}{5}e^{5x+2}+C\,.$$

3) Воведуваме смена: $7x+9=t$, $7dx=dt$. Имаме:

$$\int\sqrt{7x+9}dx=\int\sqrt{t}\,\frac{dt}{7}=\frac{1}{7}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{21}\sqrt{(7x+9)^3}+C\,.$$

4) Постапките што ги спроведуваме при воведувањето на смената може да ги запишеме во загради. Тогаш,

$$\int(2x+3)^5dx=\begin{pmatrix}2x+3=t\\2dx=dt\end{pmatrix}=\int t^5\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}+C=\frac{1}{12}(2x+3)^6+C\,.$$

5) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^{15}}=\begin{pmatrix}x+1=t\\dx=dt\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{t^{15}}=\frac{t^{-14}}{-14}+C=-\frac{1}{14(x+1)^{14}}+C\,.$

6) $\displaystyle\int 2^{3x+5}dx=\begin{pmatrix}3x+5=t\\3dx=dt\end{pmatrix}=\int 2^t\,\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\frac{2^t}{\ln 2}+C=\frac{2^{3x+5}}{3\ln 2}+C\,.$

7) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+a}=\begin{pmatrix}x+a=t\\dx=dt\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+a|+C\,.$

8) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{5}x)^2}}dx=\begin{pmatrix}\sqrt{5}x=t\\\sqrt{5}dx=dt\end{pmatrix}=$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin t+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\sqrt{5}x\right)+C\,.$$

Задача 9. Најди го интегралот $I=\int f\left(kx+n\right)dx$, каде што $\int f(t)dt=F(t)+C$.

Решение. Воведуваме смена: $kx+n=t$, $kdx=dt$. Следува:

$$\int f(kx+n)dx=\int f(t)\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}F(t)+C=\frac{F\left(kx+n\right)}{k}+C\,.$$

Задача 10. Најди го интегралот $\int\cos\left(2x+1\right)dx$.

Решение. Бидејќи $\int\cos xdx=\sin x+C$, тогаш според претходната задача:

$$\int\cos(2x+1)dx=\frac{\sin(2x+1)}{2}+C\,.$$

Задача 11-18. Најди ги интегралите:

11) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$; 12) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$; 13) $\int x3^{x^2+1}dx$;

14) $\int xe^{-x^2}dx$; 15) $\int \frac{dx}{\left(\arcsin^2 x\right)\sqrt{1-x^2}}$; 16) $\int \frac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}dx$.

Решение. 11) Диференцијалот на членот во именител,

$$d\left(x^3+3x\right)=\left(3x^2+3\right)dx=3\left(x^2+1\right)dx,$$

е пропорционален со останатиот дел од подинтегралниот израз, $\left(x^2+1\right)dx$. Затоа, воведуваме смена: $x^3+3x=t$, од каде што $3\left(x^2+1\right)dx=dt$. Следува:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx=\int \frac{1}{t}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x\right|+C.$$

12) $$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx=\begin{pmatrix} 1+x^4=t \\ 4x^3dx=dt \end{pmatrix}=\int \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{3}}dt=$$

$$\frac{1}{4}\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^4\right)^2}+C.$$

13) $$\int x3^{x^2+1}dx=\begin{pmatrix} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \end{pmatrix}=\int 3^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\frac{3^t}{\ln 3}+C=\frac{3^{x^2+1}}{2\ln 3}+C.$$

14) $$\int xe^{-x^2}dx=\begin{pmatrix} -x^2=t \\ -2xdx=dt \end{pmatrix}=\int e^t\frac{dt}{-2}=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

15) $$\int \frac{dx}{\left(\arcsin^2 x\right)\sqrt{1-x^2}}=\begin{pmatrix} \arcsin x=t \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt \end{pmatrix}\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\arcsin x}+C.$$

16) Забележуваме дека изводот на функцијата е:

$\sin 2x+\cos 2x$ е $2\cos 2x-2\sin 2x=-2\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$,

па, ја воведуваме смената:

$\sin 2x+\cos 2x=t$, од каде $-2\left(\sin 2x-\cos 2x\right)dx=dt$. Затоа,

$$\int \frac{\sin 2x-\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x}dx=\int \frac{1}{t}\frac{dt}{-2}=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\sin 2x+\cos 2x\right|+C.$$

Во следниве две задачи ја воведуваме смената што ни овозможува да ја упростиме подинтегралната функција.

Задача 17-22. Најди ги интегралите:

17) $\int \frac{x^2+4}{x+2}dx$; 18) $\int \frac{x^3}{1-x}dx$; 19) $\int (x+3)(x-1)^5 dx$;

20) $\int x\sqrt[3]{4-x}dx$;21) $\int x^5 \sqrt{x^2+1}dx$; 22) $\int \sqrt{4-\sqrt{x}}dx$.

Решение. 17) Полиномите ќе ги поделиме поедноставно, ако го упростиме именителот со смената: $x+2=t$, $dx=dt$.

$$\int \frac{x^2+4}{x+2}dx = \int \frac{(t-2)^2+4}{t}dt = \int \frac{t^2-4t+4+4}{t}dt = \int \left(t-4+\frac{8}{t}\right)dt =$$

$$\frac{t^2}{2}-4t+8\ln|t|+C = \frac{(x+2)^2}{2}-4(x+2)+8\ln|x+2|+C.$$

18) Аналогно како во претходната задача, имаме:

$$\int \frac{x^3}{1-x}dx = \begin{pmatrix} 1-x=t \\ x=1-t \\ dx=-dt \end{pmatrix} = \int \frac{(1-t)^3}{t}(-dt) = -\int \frac{1-3t+3t^2-t^3}{t}dt =$$

$$-\int \left(\frac{1}{t}-3+3t-t^2\right)dt = -\ln|t|+3t-3\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C =$$

$$-\ln|1-x|+3(1-x)-\frac{3}{2}(1-x)^2+\frac{(1-x)^3}{3}+C.$$

19) Задачата може да ја решиме и со развивање на биномот $(x-1)^5$, но поедноставно би ја решиле ако воведеме смена $x-1=t$, од каде што: $x=t+1$ и $dx=dt$.

$$\int (x+3)(x-1)^5 dx = \int (t+4)t^5 dt = \int \left(t^6+4t^5\right)dt =$$

$$\frac{t^7}{7}+4\frac{t^6}{6}+C = \frac{1}{7}(x-1)^7+\frac{2}{3}(x-1)^6+C.$$

20) Коренскиот израз го упростуваме со смената $4-x=t$, од каде што $x=4-t$ и $dx=-dt$. Подинтегралниот израз се трансформира во:

$$x\sqrt[3]{4-x}dx = (4-t)t^{\frac{1}{3}}(-dt) = (t-4)t^{\frac{1}{3}}dt = \left(t^{\frac{4}{3}}-4t^{\frac{1}{3}}\right)dt \text{ од каде}$$

$$\int x\sqrt[3]{4-x}dx = \frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}} - 4\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{7}\sqrt[3]{(4-x)^7} - 3\sqrt[3]{(4-x)^4} + C.$$

21) $I = \int x^5 \sqrt{x^2+1}dx$. **Прв начин.** Коренската функција ја упростуваме со смената $\sqrt{x^2+1} = t$, од каде што следува дека $x^2 = t^2 - 1$ и $2xdx = 2tdt$, односно $xdx = tdt$. За да ја замениме новата променлива, групираме еден фактор од x^5 со dx. Тогаш, подинтегралниот израз добива форма: $x^4\sqrt{x^2+1}\,xdx = \left(t^2-1\right)^2 ttdt = \left(t^4 - 2t^2 + 1\right)t^2dt = \left(t^6 - 2t^4 + t^2\right)dt$, од каде што:

$$I = \frac{t^7}{7} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} = \frac{1}{7}\sqrt{\left(x^2+1\right)^7} - \frac{2}{5}\sqrt{\left(x^2+1\right)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + C.$$

Втор начин. Воведуваме смена $x^2 + 1 = t$, $2xdx = dt$, па, заради $x^2 = t - 1$, добиваме:

$$I = \int x^4\sqrt{x^2+1}\,xdx = \int (t-1)^2 t^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \left(t^2 - 2t + 1\right)t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$\frac{1}{2}\int\left(t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - 2\frac{2}{5}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + C =$$

$$\frac{1}{7}\sqrt{\left(x^2+1\right)^7} - \frac{2}{5}\sqrt{\left(x^2+1\right)^5} + \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + C.$$

22) Ќе го упростиме коренскиот израз со смената $4 - \sqrt{x} = t$, од каде што $\sqrt{x} = 4 - t$ и $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = -dt$. Тогаш, $dx = -2\sqrt{x}dt = -2(4-t)dt = 2(t-4)dt$. Следува:

$$\int\sqrt{4-\sqrt{x}}dx = \int t^{\frac{1}{2}}2(t-4)\,dt = 2\int\left(t^{\frac{3}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}}\right)dt = 2\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 8\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$\frac{4}{5}\sqrt{\left(4-\sqrt{x}\right)^5} - \frac{16}{3}\sqrt{\left(4-\sqrt{x}\right)^3} + C.$$

Задача 23-26. Најди ги интегралите:

23) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$; 24) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$;

25) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$; 26) $\int \frac{1+\ln x}{x\ln^2 x}dx$.

Решение. 23) Воведуваме смена $\ln x = t$, $\frac{1}{x}dx = dt$. Имаме:

$$I = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(\ln x) + C .$$

24) $I = \begin{pmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{pmatrix} = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(\ln x) + C$.

25) Прв начин. $I = \begin{pmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t\ln t} = \begin{pmatrix} \ln t = k \\ \frac{dt}{t} = dk \end{pmatrix} =$

$$\int \frac{dk}{k} = \ln|k| + C = \ln|\ln t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C .$$

Втор начин. Задачата можеме да ја решиме и во еден чекор со воведување на смената: $\ln(\ln x) = t$, $\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}dx = dt$, од каде што:

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C .$$

26) Воведуваме смена: $\ln x = t$, $\frac{1}{x}dx = dt$. Следува:

$$I = \int \frac{1+t}{t^2}dt = \int\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt = -\frac{1}{t} + \ln|t| + C = -\frac{1}{\ln x} + \ln|\ln x| + C .$$

Во наредните задачи прво ја трансформираме подинтегралната функција, до облик во кој можеме да ја препознаеме смената.

Задача 27-30. Најди ги интегралите:

27) $I=\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 28) $I=\int\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$;

29) $I=\int tgxdx$; 30) $I=\int ctgxdx$.

Решение. 27) Го средуваме изразот:

$e^x+e^{-x}=e^x+\frac{1}{e^x}=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ и воведуваме смена: $e^x=t$, $e^xdx=dt$.

Имаме:

$$I=\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+1}=\int\frac{dt}{t^2+1}=arctgt+C=arctg\left(e^x\right)+C.$$

28) Аналогно, ја средуваме подинтегралната функција:

$$\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}=\sqrt[5]{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)^3}}=(1-x)^{-\frac{3}{5}}$$

и воведуваме смена: $1-x=t$, $dx=-dt$. Следува:

$$I=-\int t^{-\frac{3}{5}}dt=-\frac{5}{2}t^{\frac{2}{5}}+C=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C.$$

29) Ја изразуваме функцијта тангенс преку синус и косинус и воведуваме смена: $\cos x=t$, $-\sin xdx=dt$.

$$I=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int-\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

30) Аналогно,

$$I=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\left(\begin{array}{c}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{array}\right)=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\sin x|+C.$$

Ќе разгледаме интегралите од обликот $\int\frac{f(\ln x)}{x}dx$, што се решаваат со смената: $\ln x=t$, $\frac{1}{x}dx=dt$, како и интегралите $\int f\left(e^x\right)dx$, што се решаваат со смената $e^x=t$, $e^xdx=dt$. На крајот, ќе решиме задачи од обликот: $\int f(\sin x)\cos xdx$ и $\int f(\cos x)\sin xdx$.

Во зависност од функцијата f, дадените типови задачи ќе се појавуваат и во наредните поглавја.

Задача 31-34. Најди ги интегралите:

31) $I=\int\frac{e^x\left(1+e^x\right)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; 32) $I=\int e^x\left(1-e^x\right)\left(1+e^x\right)^{10}dx$;

33) $I=\int\frac{dx}{e^{3x}-e^x}$; 34) $I=\int\frac{e^{3x}-3e^x}{e^{2x}+1}dx$.

Решение.

31) $I=\begin{pmatrix} e^x=t \\ e^x dx=dt\end{pmatrix}=\int\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Првиот интеграл од десниот израз е табличен, додека вториот ќе го најдеме со смената: $1-t^2=k$, $-2tdt=dk$. Следува:

$$I=\arcsin t+\int\frac{dk}{-2}\frac{1}{\sqrt{k}}=\arcsin e^x-\sqrt{k}+C=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{-2x}}+C.$$

32) $I=\begin{pmatrix} 1+e^x=t \\ e^x dx=dt\end{pmatrix}=\int\left(1-\left(t-1\right)\right)t^{10}dt=\int\left(2-t\right)t^{10}dt=$

$$=\int\left(2t^{10}-t^{11}\right)dt=2\frac{t^{11}}{11}-\frac{t^{12}}{12}+C=\frac{2}{11}\left(1+e^x\right)^{11}-\frac{1}{12}\left(1+e^x\right)^{12}+C.$$

33) Воведуваме смена: $e^x=t$, од каде што $x=\ln t$ и $dx=\frac{1}{t}dt$.

Тогаш,

$$I=\begin{pmatrix} e^x=t \\ x=\ln t\Rightarrow dx=\frac{1}{t}dt\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{t}\frac{1}{t^3-t}=\int\frac{dt}{t^2\left(t^2-1\right)}=\int\frac{1-t^2+t^2}{t^2\left(t^2-1\right)}dt=$$

$$\int\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{e^x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C.$$

34) Бидејќи $e^{3x}-3e^x=\left(e^{2x}-3\right)e^x$, со смената $e^x=t$, $e^x dx=dt$ добиваме:

$$I=\int\frac{t^2-3}{t^2+1}dt=\int\frac{t^2+1-4}{t^2+1}dt=\int\left(1-4\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$t-4arctgt=e^x-4arctg\left(e^x\right)+C.$$

Задача 35-36. Најди ги интегралите:

35) $I=\int \sin^3 x\cos x dx$; 36) $I=\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$.

Решение. 35) Воведуваме смена: $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. Следува:

$$I=\int t^3 dt=\frac{t^3}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$$

36) Воведуваме смена: $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$. Следува:

$$I=-\int \frac{dt}{2+t}=-\ln|2+t|+C=-\ln|2+\cos x|+C.$$

4.3. ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

Задача 1-2. Најди ги интегралите:

1) $I=\int x\sin x dx$; 2) $I=\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

Решение. 1) Подинтегралната функција природно може да се раздели на два дела: x и $\sin x$. Ако $u = x$ и $dv=\sin x dx$, тогаш $du = dx$ и $v=-\cos x$. Следствено, според методот за интеграција по делови, имаме:

$$I=\underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(-\cos x\right)}_{v}-\int \underbrace{-\cos x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}=-x\cos x+\sin x+C.$$

Коментар. 1) При изборот на функцијата u, важно е интегралот $\int udv$ да не биде потежок за интегрирање од првобитниот интеграл. На пример, ако земевме $u=\sin x$, $dv = xdx$, тогаш: $du=\cos x dx$, $v=\frac{x^2}{2}$ и $\int x\sin x dx=\frac{x^2}{2}\sin x-\int \frac{x^2}{2}\cos x dx$. Притоа, последниот интеграл е потежок за определување.

2) Понатаму меѓучекорите при примената на парцијалната интеграција ќе ги пишуваме во загради.

2) Интегралот од производот на изводот на функцијата x и интегралот на функцијата $\frac{1}{\cos^2 x}$, дава пресметлив интеграл. Затоа, земаме: $u = x$ и $dv=1/\cos^2 x\,dx$.

$$I=\begin{pmatrix} u=x & dv=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx \\ du=dx & v=tgx \end{pmatrix}=xtgx-\int tgxdx=xtgx-\ln\left|\cos x\right|+C\,.$$

Задача 3-4. Најди ги интегралите:

3) $\int \frac{x}{e^x}dx$; 4) $\int x^2e^{-2x}dx$.

Решение. 3) Функцијата $\frac{x}{e^x}$ ќе ја запишеме во вид xe^{-x}.

Последниот израз н è насочува задачата да ја решиме со парцијална интеграција: $u=x$ и $dv=e^{-x}dx$. Значи,

$$I=\begin{pmatrix} u=x & dv=e^{-x}dx \\ du=dx & v=-e^{-x} \end{pmatrix}=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C=$$

$$-(x+1)e^{-x}+C\,.$$

4) Аналогно како претходното, задачата ја решаваме со помош на парцијална интеграција $u=x^2$ и $dv=e^{-2x}dx$, од каде што $du=2xdx$ и $v=-\frac{1}{2}e^{-2x}$. Тогаш,

$$I=\begin{pmatrix} u=x^2 & dv=e^{-2x}dx \\ du=2xdx & v=-\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\underbrace{\int xe^{-2x}xdx}_{I_1}\,.$$

Десниот интеграл е поедноставен, но и за негово наоѓање е потребно повторно да интегрираме по делови, овојпат земајќи: $u=x$ и $dv=e^{-2x}dx$,

$$I_1=\begin{pmatrix} u=x & dv=e^{-2x}dx \\ du=dx & v=-\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=$$

$$-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C\,.$$

Оттука,

$$I=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C=-\frac{1}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}+C\,.$$

Задача 5-8. Најди ги интегралите:

5) $I=\int \ln x dx$; 6) $I=\int\left(x^2+x\right)\ln(x+1)dx$;

7) $I=\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$; 8) $I=\int \ln\left(x^2+1\right)dx$.

Решение. 5) Функцијата $\ln x$ ја разгледуваме како $(\ln x)\cdot 1$, односно како производ од функциите $\ln x$ и 1. Тогаш, може да го примениме методот на парцијална интеграција земајќи: $u=\ln x$ и $dv=dx$. Имаме:

$$I=\begin{pmatrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=x \end{pmatrix}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

6) За да го поедноставиме интегралот, прво воведуваме смена: $x+1=t$, од каде што $dx=dt$ и $x=t-1$, а потоа применуваме парцијална интеграција:

$$I=\int\left((t-1)^2+t-1\right)\ln t dt=\int\left(t^2-t\right)\ln t dt=$$

$$\begin{pmatrix} u=\ln t & dv=\left(t^2-t\right)dt \\ du=\frac{1}{t}dt & v=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2} \end{pmatrix}=$$

$$\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\int\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}dt=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\int\left(\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{4}+C=$$

$$\left(\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}\right)\ln(x+1)-\frac{(x+1)^3}{9}+\frac{(x+1)^2}{4}+C.$$

Коментар. Задачата можевме да ја решиме директно само со примена н парцијалната интеграција: $u=\ln(x+1)$, $dv=\left(x^2+x\right)dx$

7) $$I=\int\frac{1}{x^2}\ln^2 x dx=\begin{pmatrix} u=\ln^2 x & dv=\frac{1}{x^2}dx \\ du=2\ln(x)\frac{1}{x}dx & v=-\frac{1}{x} \end{pmatrix}=$$

$$-\frac{1}{x}\ln^2 x+2\underbrace{\int\frac{1}{x^2}\ln x dx}_{I_1} \text{ и}$$

$$I_1=\begin{pmatrix} u=\ln x & dv=\frac{1}{x^2}dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=-\frac{1}{x}\end{pmatrix}=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C.$$

Од каде што:

$$I=-\frac{1}{x}\ln^2 x+-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C==-\frac{1}{x}\left(\ln^2 x+2\ln x+2\right)+C.$$

$$\textbf{8)}\ I=\begin{pmatrix} u=\ln\left(x^2+1\right) & dv=dx \\ du=\frac{2x}{x^2+1} & v=x\end{pmatrix}=x\ln\left(x^2+1\right)-2\underbrace{\int\frac{x^2}{x^2+1}dx}_{I_1}$$

Користејќи ја трансформацијата на подинтегралната функција $\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$, го решаваме интегралот:

$$I_1=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x-arctgx+C.$$

Значи, $I=x\ln\left(x^2+1\right)-2\left(x-arctgx\right)+C$.

Задача 9-12. Со помош на парцијалната интеграција најди ги следниве интеграли:

9) $I=\int\arcsin x dx$; 10) $I=\int\frac{1}{x}\arccos\left(\ln x\right)dx$;

11) $I=\int arcctg2xdx$; 12) $I=\int arctg\sqrt{x}dx$.

Решение. 9) Немаме друг избор за u и v, освен да земеме $u=\arcsin x$ и $dv=dx$. Тогаш,

$$I=\begin{pmatrix} u=\arcsin x & dv=dx \\ du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=x\end{pmatrix}=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{pmatrix}1-x^2=t \\ -2xdx=dt\end{pmatrix}=$$

$$x\arcsin x-\int\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{-2}=x\arcsin x+\sqrt{t}+C=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

10) За да го поедноставиме интегралот, воведуваме смена: $\ln x = t$, $\frac{1}{x}dx = dt$. Тогаш,

$$I = \int \arccos t dt = \begin{pmatrix} u = \arccos t & dv = dt \\ du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dt & v = t \end{pmatrix} = t \arccos t + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$\begin{pmatrix} 1-t^2 = k \\ -2tdt = dk \end{pmatrix} = \ln(x) \arccos \ln x + \int \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{dk}{-2} =$$

$$\ln(x) \arccos(\ln x) - \sqrt{k} + C = \ln(x) \arccos(\ln x) - \sqrt{1-\ln^2 x} + C .$$

11) $$I = \begin{pmatrix} u = arcctg 2x & dv = dx \\ du = -\frac{2}{1+4x^2}dx & v = x \end{pmatrix} = xarcctg 2x + 2\underbrace{\int \frac{x}{1+4x^2}dx}_{I_1} .$$

Последниот интеграл го решаваме со смената: $1+4x^2 = t$, $8xdx = dt$.

$$I_1 = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\ln|t| + C = \frac{1}{8}\ln(1+x^2) + C .$$

Следува:

$$I = xarcctg 2x + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C .$$

12) За да ја поедноставиме функцијата, воведуваме смена: $\sqrt{x} = t$, од каде што: $dx = 2tdt$ и $x = t^2$. Имаме:

$$I = \int 2tarctgtdt .$$

Десниот интеграл го решаваме со интегрирање по делови:

$$I = \begin{pmatrix} u = arctgt & dv = 2tdt \\ du = \frac{dt}{1+t^2} & v = t^2 \end{pmatrix} = t^2 arctgt - \int t^2 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$t^2 arctgt - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = xarctg\sqrt{x} - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$xarctg\sqrt{x} - t + arctgt + C =$$

$$xarctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C = (1+x)arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + C .$$

Задача 13-16. Со помош на парцијалната интеграција најди ги следниве интеграли:

13) $I=\int e^x \sin x dx$;   14) $I=\int e^x \cos 2x dx$;

15) $I=\int \sin(\ln x) dx$;   16) $I=\int \cos\ln(-3x) dx$.

Решение. 13) Ако два пати ја интегрираме функцијата e^x, неа повторно ја добиваме како примитивна функција, а втор извод на $\sin x$ е $-\sin x$. Значи, со двојна примена на парцијалната интеграција, ќе го добиеме интегралот: $-\int e^x \sin x dx$, така што, со прирамнување на најлевиот и на најдесниот израз, го добиваме решението на задачата. Имено,

$$\underline{\int e^x \sin x dx} = \begin{pmatrix} u=\sin x & dv=e^x dx \\ du=\cos x dx & v=e^x \end{pmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

$$\begin{pmatrix} u=\cos x & dv=e^x dx \\ du=-\sin x dx & v=e^x \end{pmatrix} = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx\right) =$$

$$\underline{e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx}.$$

Од првиот и од последниот израз на равенствата, имаме:

$$\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \Leftrightarrow$$

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + C \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Коментар. Интегралот ќе го определевме и ако при парцијалната интеграција двапати земевме $u=e^x$. Треба само да внимаваме при двете интегрирања по делови, за u да земаме ист тип на функција, инаку би го добиле почетниот интеграл.

14) $$\int e^x \cos 2x dx = \begin{pmatrix} u=e^x & dv=\cos 2x \\ du=e^x dx & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2dx = \begin{pmatrix} u=e^x & dv=\sin 2x \\ du=e^x dx & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}e^x\sin 2x-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^x\cos 2xdx\right)=$$

$$\frac{1}{2}e^x\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^x\cos 2xdx\,.$$

Следува:

$$\int e^x\cos 2xdx=\frac{1}{2}e^x\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^x\cos 2xdx \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{4}\int e^x\cos 2xdx=\frac{1}{2}e^x\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x+C \Leftrightarrow$$

$$\int e^x\cos 2xdx=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^x\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x\right)+C \Leftrightarrow$$

$$\int e^x\cos 2xdx=\frac{2}{5}e^x\sin 2x+\frac{1}{5}e^x\cos 2x+C\,.$$

15) $$\int \sin(\ln x)dx=\begin{pmatrix} u=\sin(\ln x) & dv=dx \\ du=\cos(\ln x)\dfrac{dx}{x} & v=x \end{pmatrix}=$$

$$x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)x\frac{dx}{x}=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx=$$

$$\begin{pmatrix} u=\cos(\ln x) & dv=dx \\ du=-\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x} & v=x \end{pmatrix}=$$

$$x\sin(\ln x)-\left(x\cos(\ln x)+\int x\sin(\ln x)\frac{dx}{x}\right)=$$

$$x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)dx\,.$$

Следува:

$$\int\sin(\ln x)dx=x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))-\int\sin(\ln x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int\sin(\ln x)dx=\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C\,.$$

Втор начин. Со смената $\ln x=t$, од каде што $x=e^t$ и $dx=e^t dt$, интегралот се сведува на: $\int\sin(\ln x)dx=\int e^t\sin tdt$, пресметан во а), $\int e^t\sin tdt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C$, од каде што

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C .$$

16) Се решава како в).

Задача 17. Каде е грешката?

Имаме:

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \begin{pmatrix} u = \dfrac{1}{\cos x} & dv = \sin xdx \\ du = \dfrac{1}{\cos^2 x}\sin xdx & v = -\cos x \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{\cos x}\cos x + \int \cos x \frac{1}{\cos x^2 x}\sin xdx = -1 + \int tgxdx \ (1)$$

Следува:

$$\int tgxdx = -1 + \int tgxdx \ (2),$$

од каде што добиваме дека:

$$0 = -1 \, (3).$$

Решение. Грешката е во чекор (3). Имено, равенството $\int tgxdx = -1 + \int tgxdx$ претставува равенство меѓу множества, $\{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\} = \{-1 + F(x) + C | C \in \mathbb{R}\}$,

каде што $F(x)$ е една примитивна функција на $f(x) = tgx$, од каде што, пак, следува дека $F(x) + C_1 = -1 + F(x) + C$, за некои константи $C, C_1 \in \mathbb{R}$ и од каде што $C_1 = -1 + C$. Па, во (3) би добиле $F(x) - 1 + C = -1 + F(x) + C$, т.е. $0 = 0$.

4.4. ИНТЕГРАЛИ ОД КВАДРАТЕН ТРИНОМ

4.4.1. Групирање на квадратен трином

Начинот на разложување на квадратниот трином во следнава задача се спроведува при решавање интеграли во кои квадратниот трином не е под корен.

Задача 1-2. Сведи ги во облик $a(t^2 + b)$, $t = x + c$ изразите:

1) $3x^2 + 12x + 11$; 2) $x - x^2$.

Решение. 1) Бројот 3 го вадиме пред триномот, а потоа членот x^2+4x го групираме со помош на формулата: $x^2 \pm ax = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$. За $t = x+2$,

$$3x^2+12x+11 = 3\left(x^2+4x+\frac{11}{3}\right) = 3\left((x+2)^2-4+\frac{11}{3}\right) = 3\left(t^2-\frac{1}{3}\right),.$$

2) $x - x^2 = -(x^2-x) = -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(t^2-\frac{1}{4}\right)$, $t = x-\frac{1}{2}$.

Следнава постапка за групирање на квадратниот трином, се спроведува во интеграли во кои квадратниот трином е под корен.

Задача 3-4. Сведи ги во облик $|a|(t^2+b)$ или $|a|(b^2-t^2)$, $t = x+c$; изразите:

а) $2x^2+3x+3$; б) $-2x^2-9x+11$.

Решение. 3) За $t = x+\frac{3}{4}$ имаме:

$$2x^2+3x+3 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right) = 2\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{3}{2}\right) = 2\left(t^2+\frac{3}{16}\right)$$

4) $$-2x^2-9x+11 = -2\left(x^2+\frac{9}{2}x-\frac{11}{2}\right) = \left(\left(x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{81}{16}-\frac{11}{2}\right) =$$

$$-2\left(\left(x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{169}{16}\right) = 2\left(\left(\frac{13}{4}\right)^2-t^2\right),\ t = x+\frac{9}{4}.$$

4.4.2. Интеграли од обликот: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Задача 1. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

Решение. Со помош на формулата $x^2 \pm ax = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$, го трансформираме триномот $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 - 1 + 3 = (x+1)^2 + 2$, а потоа воведуваме смена: $x + 1 = t$, $dx = dt$. Имаме:

$$I = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C .$$

Задача 2. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}}$.

Решение. Бидејќи
$\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2} = \sqrt{2}(x^2 + 4x + 4) = \sqrt{2}(x+2)^2$, следува:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \begin{pmatrix} x + 2 = t \\ dx = dt \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{t}\right) + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{x+2} + C .$$

Задача 3. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{3 - 2x - 4x^2}$.

Решение. Бидејќи

$3 - 2x - 4x^2 = -4\left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) = -4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{16}\right)$, следува:

$$I = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{13}{16}} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{4} = t \\ dx = dt \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2} =$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{2\frac{\sqrt{13}}{4}} \ln\left|\frac{t - \frac{\sqrt{13}}{4}}{t - \frac{\sqrt{13}}{4}}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{13}} \ln\left|\frac{x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}}{x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}}\right| + C =$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{13}} \ln\left|\frac{4x + 1 - \sqrt{13}}{4x + 1 + \sqrt{13}}\right| + C .$$

Наредниве задачи се од типот на задачите кои со смена се сведуваат до интеграл од квадратен трином.

Задача 4. Најди го интегралот: $I=\int \frac{e^x dx}{20e^x-2{,}5e^{2x}-42{,}5}$.

Решение. Воведуваме смена: $e^x=t$, $e^x dx=dt$. Следува:

$$I=\int \frac{dt}{20t-2{,}5t^2-42{,}5}.$$

Новодобиениот интеграл е интеграл од квадратен трином. Затоа,

$$I=\int \frac{dt}{-2{,}5\left(t^2-8t+17\right)}=-\frac{2}{5}\int \frac{dt}{(t-4)^2+1}=\begin{pmatrix} t-4=k \\ dt=dk \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{2}{5}\int \frac{dk}{k^2+1}=-\frac{2}{5}arctgk+C=-\frac{2}{5}arctg\left(e^x-4\right)+C.$$

Задача 5. Најди го интегралот: $I=\int \frac{\sin x-2}{8\sin x-2\sin^2 x-8}\cos x dx$.

Решение. Воведуваме смена: $\sin x=t$, $\cos x dx=dt$. Следува:

$$I=-\frac{1}{2}\int \frac{t-2}{t^2-4t+4}dt\ -\frac{1}{2}\int \frac{t-2}{(t-2)^2}dt=$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-2}=-\frac{1}{2}\ln|t-2|+C=-\frac{1}{2}\ln|\sin x-2|+C.$$

4.4.3. Интеграли од облик: $\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$, $n\in\mathbb{N}$

Задача 1. Најди го интегралот: $I=\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Решение. Прв начин. Применувајќи ја рекурентната формула за $n=2$, добиваме:

$$I=\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}=\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}arctgx+C.$$

Втор начин. Рекурентната формула е тешка за паметење и пожелно е неа да знаеме да ја изведеме или да ја примениме постапката при конкретна задача.

$$I=\int\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}-\int x\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=$$

$$\begin{pmatrix} u=x & dv=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx \\ du=dx & v=-\dfrac{1}{2\left(1+x^2\right)}\end{pmatrix}=\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$\frac{x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}arctgx+C\,.$$

Задача 2*. Најди го интегралот: $I=\int\frac{xarctgx}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

Решение. Применуваме парцијална интеграција:

$$u=arctgx\,,\ dv=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx\,,\ du=\frac{dx}{1+x^2}\,,$$

$$v=\int\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\begin{pmatrix}1+x^2=t\\ 2xdx=dt\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{2t^2}=-\frac{1}{2t}=-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\text{, од каде што:}$$

$$I=-\frac{acrtgx}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}\overset{зад.1}{=}-\frac{1}{2}\frac{acrtgx}{1+x^2}+\frac{x}{4\left(1+x^2\right)}+\frac{1}{4}arctgx+C\,.$$

4.4.4. Интеграли од обликот: $\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

Задача 1. Најди го интегралот: $I=\int\frac{3x+5}{x^2+4x+2}dx$.

Решение. Прво го средуваме: $x^2+4x+2=\left(x+2\right)^2-2$. Имаме:

$$I=\begin{pmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{pmatrix}=\int\frac{3(t-2)+5}{t^2-2}dt=\int\frac{3t-1}{t^2-2}dt=3\underbrace{\int\frac{t}{t^2-2}dt}_{I_1}-\underbrace{\int\frac{1}{t^2-2}dt}_{I_2},$$

каде што:

$$I_1=\begin{pmatrix} t^2-2=k \\ 2tdt=dk \end{pmatrix}=\int\frac{1}{k}\frac{dk}{2}=\frac{1}{2}\ln|k|=\frac{1}{2}\ln\left|(x+2)^2-2\right| \text{ и}$$

$$I_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Следува: $I=\frac{3}{2}\ln\left|(x+2)^2-2\right|-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right|+C$.

Задача 2. Најди го интегралот: $I=\int\frac{2x-3}{2x^2-3x+5}dx$.

Решение. Го трансформираме квадратниот трином:

$2x^2-3x+5=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right)$. Следува:

$$I=\begin{pmatrix} x-\frac{3}{4}=t \\ dx=dt \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{2\left(t+\frac{3}{4}\right)-3}{t^2+\frac{31}{16}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{31}{16}}dt=$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+\frac{31}{16}}dt-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{31}{16}}=\begin{pmatrix} t^2+\frac{31}{16}=k \\ 2tdt=dk \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{dk}{k}-\frac{3}{4}\frac{4}{\sqrt{31}}arctg\frac{4t}{\sqrt{31}}=$$

$$\frac{1}{2}\ln|k|-\frac{3}{\sqrt{31}}arctg\frac{4\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{31}}+C=$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right|-\frac{3}{\sqrt{31}}arctg\frac{4x-3}{\sqrt{31}}+C.$$

4.4.5. Интеграли од обликот: $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Задача 1-3. Најди ги интегралите:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Решение. Интегралите се таблични или со смена се сведуваат до таблични.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right| + C$.

3) Воведуваме смена: $2x = t$, $2dx = dt$. Тогаш,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin 2x + C.$$

Задача 4. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+10x+15}}$.

Решение. Сакаме именителот да го доведеме до обликот $\sqrt{t^2+k}$. Затоа, триномот го групираме во видот:

$$5x^2+10x+15 = 5\left(x^2+2x+3\right) = 5\left((x+1)^2+2\right),$$

а потоа воведуваме смена: $x+1=t$, $dx = dt$. Следува:

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{5\left(t^2+2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+2}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right| + C.$$

Задача 5. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{7-2x-3x^2}}$.

Решение. Сакаме именителот да го доведеме до обликот $\sqrt{a^2-t^2}$. Затоа, триномот го групираме во видот:

$$7-2x-3x^2 = -3\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right) =$$

$$-3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{7}{3}\right) = 3\left(\frac{22}{9}-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\right).$$

а потоа воведуваме смена: $x+\frac{1}{3}=t$, од каде што: $dx=dt$. Следува:

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{3\left(\left(\frac{\sqrt{22}}{3}\right)^{2}-t^{2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3t}{\sqrt{22}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{22}}+C.$$

Задача 6. Најди го интегралот: $I=\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^{2}x+2\cos x+2}}dx$.

Решение. Воведуваме смена: $\cos x=t$, $-\sin xdx=dt$. Тогаш,

$$I=\int\frac{-dt}{\sqrt{t^{2}+2t+2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t+1)^{2}+1}}=\begin{pmatrix}t+1=k\\ dt=dk\end{pmatrix}=-\int\frac{dk}{\sqrt{k^{2}+1}}=$$

$$-\ln\left|k+\sqrt{k^{2}+1}\right|+C=-\ln\left|\cos x+1+\sqrt{(\cos x+1)^{2}+1}\right|+C.$$

4.4.6. Интеграли од обликот $\int\sqrt{ax^{2}+bx+c}\,dx$

Задача 1-2. Најди ги интегралите: 1) $I=\int\sqrt{t^{2}-4}dt$;   2) $I=\int\sqrt{1-t^{2}}dt$.

Решение. 1) $\int\sqrt{t^{2}-4}dt=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^{2}-4}-\ln\left|t+\sqrt{t^{2}-4}\right|\right)+C$.

2) Прв начин. Според формулата:

$$\int\sqrt{1-t^{2}}dt=\frac{1}{2}\left(\arcsin t+t\sqrt{1-t^{2}}\right)+C.$$

Втор начин. Воведуваме смена: $\sin x=t$, $\cos xdx=dt$ каде што: $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Притоа, $\cos x>0$, па: $\sqrt{1-\sin^{2}x}=\left|\cos x\right|=\cos x$.

Следува:

$$\int\sqrt{1-t^{2}}dt=\int\sqrt{1-\sin^{2}x}\cos xdx=\int\cos^{2}xdx=$$

$$-\int\frac{1+\cos 2x}{2}dk=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\left(\arcsin t+\frac{\sin 2(\arcsin t)}{2}\right)+C.$$

Коментар. Двете решенија се исти бидејќи:

$$\frac{\sin 2x}{2}=\frac{2\sin x\cos x}{2}=\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}=t\sqrt{1-t^2}\ .$$

Трет начин. Воведуваме смена: $\cos x=t$, $-\sin xdx=dt$, каде што $x\in(0,\pi)$. Притоа, $\sin x>0$, па $\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|=\sin x$. Следува:

$$\int\sqrt{1-t^2}dt=\int\sqrt{1-\cos^2 x}(-\sin x)dx=-\int\sin^2 xdx=$$

$$-\int\frac{1-\cos 2x}{2}dk=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C\ \left(=\frac{1}{2}\left(\arccos t-t\sqrt{1-t^2}\right)+C\right).$$

Задача 3. Најди го интегралот: $I=\int\sqrt{2x^2+8x+6}dx$.

Решение. Сакаме подинтегралниот израз да го доведеме до обликот: $\sqrt{t^2\pm a^2}$. Затоа, членот пред x^2 го вадиме пред коренот, а потоа триномот го групираме:

$$2x^2+8x+6=2\left(x^2+4x+3\right)=2\left((x+2)^2-1\right)$$

и воведуваме смена: $x+2=t$, $dx=dt$. Имаме:

$$I=\int\sqrt{2\left((x+2)^2-1\right)}dx=\sqrt{2}\int\sqrt{t^2-1}dt=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C\ .$$

Задача 4. Најди го интегралот: $I=\int\sqrt{-x^2-5x+3}dx$.

Решение. Сакаме подинтегралниот израз да го доведеме до обликот: $\sqrt{a^2-t^2}$. Затоа, триномот го групираме:

$$-x^2-5x+3=-\left(x^2+5x-3\right)=$$

$$-\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-3\right)=\frac{37}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$$

и воведуваме смена: $x+\dfrac{5}{2}=t$, $dx=dt$. Имаме:

$$I=\sqrt{\frac{37}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2-t^2}=$$

$$\frac{37}{2\cdot 4}\arcsin\frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{37}}+\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)}{2}\sqrt{\frac{37}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}+C=$$

$$\frac{37}{8}\arcsin\frac{2x+5}{\sqrt{37}}+\frac{2x+5}{8}\sqrt{37-(2x+5)^2}+C.$$

Задача 5. Најди го интегралот: $I=\int\frac{dx}{\left(18x-2x^2-24\right)^3}$.

Решение. Го трансформираме триномот:

$$18x-2x^2-24=-2\left(x^2-9x+12\right)=-2\left((x-3)^2+3\right),$$

и воведуваме смена: $x-3=t$, $dx=dt$. Имаме: $I=\int\frac{dt}{\left(-2\left(t^2+3\right)\right)^3}$.

Со смената $t=\sqrt{3}k$, $dt=\sqrt{3}dk$ добиваме:

$$I=\frac{1}{-8}\int\frac{\sqrt{3}dk}{\left(3k^2+3\right)^3}=-\frac{\sqrt{3}}{8}\int\frac{dk}{\left(3\left(k^2+1\right)\right)^3}=-\frac{\sqrt{3}}{27\cdot 8}\int\frac{dk}{\left(k^2+1\right)^3}.$$

Со помош на рекурентната формула го решаваме десниот интеграл:

$$\int\frac{dk}{\left(k^2+1\right)^3}=\frac{1}{4}\frac{k}{\left(k^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dk}{\left(k^2+1\right)^2}=$$

$$\frac{1}{4}\frac{k}{\left(k^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{k}{2\left(1+k^2\right)}+\frac{1}{2}arctgk\right)+C,$$ од каде што:

$$I=-\frac{\sqrt{3}}{27\cdot 8}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{x-3}{\left(\frac{(x-3)^2}{3}+1\right)^2}+\frac{3}{8\sqrt{3}}\frac{x-3}{\frac{(x-3)^2}{3}+1}+\frac{3}{8}arctg\frac{x-3}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{27\cdot 8}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{x-3}{\left((x-3)^2+3\right)^2}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{x-3}{(x-3)^2+3}+\frac{3}{8}arctg\frac{x-3}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

4.5. ИНТЕГРАЛИ ОД РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

4.5.1. Делење на полином, факторизација на полином и декомпозиција на рационална функција

Задача 1-2. Подели ги полиномите:
1) $2x^3+x^2+12$ со x^2-4; 2) x^2-1 со x^2+1.

Решение.

1)
$$2x^3+x^2+12 : x^2-4 = 2x+1+\frac{8x+16}{x^2-4}$$
$$\begin{array}{l} \underline{\pm 2x^3 \mp 8x} \\ \qquad x^2+8x+12 \\ \underline{\pm x^2 \mp 4} \\ 8x+16 \end{array}$$

; **2)**
$$x^2-1 : x^2+1 = 1-\frac{2}{x^2+1}$$
$$\begin{array}{l} \underline{\pm x^2 \pm 1} \\ \quad -2 \end{array}$$
.

Задача 3-6. Разложи ги на множители следниве полиноми:
3) x^2+5x+6; 4) $(2x-1)(x^2+x-2)$;
5) x^3+1; 6) $(x-1)(x^2-1)$.

Решение. 3) Решението на равенката $x^2+5x+6=0$ е:
$$x_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-5\pm 1}{2} \Leftrightarrow x_1=-3,\ x_2=-2.$$
Следува $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$.

4) Ги решаваме равенките:
$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow$$
$$x_1=1,\ x_2=-2;\ \text{и}\ 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$
Следува: $(2x-1)(x^2+x-2)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x+2)$.

5) Имаме: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Бидејќи дискриминантата на равенката $x^2-x+1=0$ е негативна, следува дека вториот член е неразложлив.

6) Полиномот ќе го сведеме во нормален вид со групирање:

$$(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1).$$

Задача 7-9. Декомпонирај ги подинтегралните функции, без наоѓање на коефициентите:

7) $\int \frac{dx}{2x^2+5x-12}$; 8) $\int \frac{1+x+x^2}{(x+1)(x+2)^2(x^2+3)^3}dx$; 9) $\int \frac{1}{x^6-x^3}dx$.

Решение. 7) Ќе го разложиме на множители именителот.

$$2x^2+5x-12=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{4}=\frac{-5\pm 11}{4} \Leftrightarrow x_1=\frac{3}{2} \vee x_2=-4,$$

од каде што:

$$2x^2+5x-12=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)=(2x-3)(x+4).$$

На членот $2x-3$ му соодветствува дропката $A/(2x-3)$, а на членот $x+4$, $B/(x+4)$. Затоа, декомпозицијата на подинтегралната функција е:

$$\frac{1}{2x^2+5x-12}=\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{x+4}$$

8) На членот $x+1$ му ја придружуваме дропката $A/x+1$, на членот $(x+2)^2$ сумата од прости дропки: $B/(x+2)+C/(x+2)^2$ и на членот $(x^2+3)^3$ сумата: $\frac{Dx+E}{x^2+3}+\frac{Fx+G}{(x^2+3)^2}+\frac{Hx+I}{(x^2+3)^3}$. Следува:

$$\frac{1+x+x^2}{(x+1)(x+2)^2(x^2+3)^3}=$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+3}+\frac{Fx+G}{(x^2+3)^2}+\frac{Hx+I}{(x^2+3)^3}.$$

9) Со групирање го запишуваме полиномот во именителот во нормален вид, а потоа ја запишуваме подинтегралната функција како сума од прости дропки:

$$\frac{1}{x^6-x^3}=\frac{1}{x^3(x^3-1)}=\frac{1}{x^3(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{(x-1)}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)}.$$

4.5.2. Интеграње на рационалните функции. Специјални случаи

Задача 1. Најди го интегралот: $\int \frac{dx}{x(x+1)}$.

Решение. Ја претставуваме подинтегралната функција, како сума од прости дропки:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Го множиме идентитетот со $x(x+1)$ и добиваме:

$$1 = A(x+1) + Bx \Leftrightarrow 0x + 1 = (A+B)x + A.$$

Бидејќи равенството е точно за секоја вредност на променливата x, исполнет е системот равенки $0 = A+B$ и $A = 1$, од каде што следува дека: $A = 1$ и $B = -1$. Оттука,

$$I = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Втор начин. Со групирање на броителот $1 = 1 + x - x$, добиваме:

$$I = \int \frac{1+x-x}{x(x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

Трет начин. Интегралот може да го пресметаме како интеграл од квадратен трином.

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x^2+x} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \left(\begin{array}{c} x + \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array}\right) =$$

$$\int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

Задача 2. Најди го интегралот: $I = \int \frac{x^2dx}{x-1}$.

Решение. Степенот на полиномот во броителот е поголем од степенот на полиномот во именителот. Затоа, ги делиме полиномите:

$$x^2 : x-1 = x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$\begin{array}{l} \underline{\pm x^2 \mp x} \\ \quad\; x \\ \quad\; \underline{\pm x \mp 1} \\ \qquad\; 1 \end{array}$$

и го интегрираме збирот од полиномот и од рационалната функција во нормален облик:

$$I = \int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$$

Втор начин. Бидејќи именителот е линеарен член, интегралот може да го решиме со смената $x-1=t$, од каде што имаме: $dx = dt$ и $x = t+1$. Тогаш:

$$I = \int\frac{(t+1)^2}{t}dt = \int\frac{t^2+2t+1}{t}dt = \int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$\frac{t^2}{2}+2t+\ln|t|+C = \frac{(x-1)^2}{2}+2(x-1)+\ln|x-1|+C.$$

Коментар. Решенијата се исти бидејќи:

$$\frac{(x-1)^2}{2}+2(x-1)+\ln|x-1|+C = \frac{x^2-2x+1}{2}+2x-2+\ln|x-1|+C =$$

$$\frac{x^2}{2}+x-\frac{3}{2}+\ln|x-1|+C = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C' \text{ за } C' = C-\frac{3}{2}.$$

Трет начин. Со групирање на броителот $x^2 = x^2-1+1$, добиваме:

$$I = \int\frac{x^2-1+1}{x-1}dx = \int\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$$

4.5.3. Интегрирање на рационалните функции. Општ случај

Задача 1. Најди го интегралот: $I = \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x + 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx$.

Решение. Прв чекор. Бидејќи степенот на полиномот во броителот не е помал од степенот на полиномот во именителот, ги делиме полиномите:

$$\left(x^4 + x^3 - x^2 + x + 3\right) : \left(x^3 + 2x^2 + x\right) = x - 1 + \frac{2x+3}{x^3 + 2x^2 + x}$$

$$\underline{\pm x^4 \pm 2x^3 \pm x^2}$$

$$-x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$\underline{\mp x^3 \mp 2x^2 \mp x}$$

$$2x + 3$$

. Следува:

$$I = \int \left(x - 1 + \frac{2x+3}{x^3 + 2x^2 + x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \underbrace{\int \frac{2x+3}{x^3 + 2x^2 + x} dx}_{I_1}.$$

Втор чекор. Го факторизираме именителот во правилната рационална функција.

$$x^3 + 2x^2 + x = x\left(x^2 + 2x + 1\right) = x(x+1)^2.$$

Трет чекор. Ја претставуваме рационалната функција како сума од прости дропки:

$$\frac{2x+3}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Ако помножиме со $x\left(x+1\right)^2$, добиваме:

$$2x + 3 = A\left(x^2 + 2x + 1\right) + B\left(x^2 + x\right) + Cx \Leftrightarrow$$

$$2x + 3 = (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A.$$

Левиот и десниот полином од последното равенство се идентични, па нивните коефициенти мора да се еднакви. Следува:

$0 = A + B$, $2 = 2A + B + C$ $3 = A \Leftrightarrow A = 3$, $B = -3$, $C = -1$

Четврт чекор. Ја интегрираме новодобиената форма на рационалната функција.

$$I_1 = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = 3\ln|x| - 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C =$$

$$3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C\,.$$

Следува: $I=\dfrac{x^2}{2}-x+3\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+\dfrac{1}{x+1}+C\,.$

Задача 2. Најди го интегралот: $I=\displaystyle\int\frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2}dx\,.$

Решение. Бидејḱи степенот на полиномот во броителот е помал од степенот на полиномот во именителот, првиот чекор е исполнет. Го факторизираме именителот:

$$x^3+x^2-2=x^3-1+x^2-1=$$

$$(x-1)\left(x^2+x+1\right)+(x-1)(x+1)=(x-1)\left(x^2+2x+2\right)$$

Притоа, $x^2+2x+2>0$. Сега ја декомпонираме подинтегралната функција:

$$\frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$ (1), од каде што

имаме:

$$x^2+2x+7=A\left(x^2+2x+2\right)+B\left(x^2-x\right)+C(x-1)$$

(2) $\Leftrightarrow$

$$x^2+2x+7=(A+B)x^2+(2A-B+C)x+2A-C$$

и коефициентите A, B и C ги наоѓаме од системот равенки:

$$1=A+B\,,\ 2=2A-B+C\,,\ 7=2A-C\,.$$

Од првата равенка $B=1-A$, со замена во втората добиваме: $2=2A-1+A+C$, т.е. $3=3A+C$. Ако ја собереме со третата равенка од системот, имам: $10=5A$ т.е. $A=2$. Оттука, $B=-1$ и $C=-3$. Следува:

$$I=2\underbrace{\int\frac{dx}{x-1}}_{I_1}-\underbrace{\int\frac{x+3}{x^2+2x+2}dx}_{I_2},$$

каде што:

$$I_1=\ln|x-1|+C \text{ и}$$

$$I_2=\int\frac{(x+3)\,dx}{(x+1)^2+1}=\begin{pmatrix}x+1=t\\ dx=dt\end{pmatrix}=\int\frac{t+2}{t^2+1}dt=\int\frac{t}{t^2+1}dt+2\int\frac{1}{t^2+1}dt=$$

$$\begin{pmatrix} t^2+1=k \\ 2tdt=dk \end{pmatrix} = \int \frac{dk}{2k} + 2arctgt = \frac{1}{2}\ln k + 2arctgt =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) + 2arctg(x+1) + C .$$

Значи,

$$I = 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - 2arctg(x+1) + C .$$

Коментар. Втор начин на факторизирање на именителот. Претходната постапка бара одредена вештина. Но, факторизирањето може да го направиме и со помош на теоремата на Њутн, според која ако равенката $x^3+x^2-2=0$ има целоброен корен, тогаш тој е делив на слободниот член 2. Делители на 2 се ± 1 и ± 2. Со проверка се добива дека 1 е корен на равенката. Сега именителот го делиме со $x-1$,

$$\begin{array}{l} \left(x^3+x^2-2\right) : (x-1) = x^2+2x+2 \\ \underline{\pm x^3 \mp x^2} \\ \quad 2x^2-2 \\ \quad \underline{\pm 2x^2 \mp 2x} \\ \qquad 2x-2 \\ \qquad \underline{\pm 2x \mp 2} \end{array}$$

од каде што:

$$x^3+x^2-2 = (x-1)\left(x^2+2x+2\right).$$

Втор начин на определување на коефициентите. Равенството (2) е точно за секоја вредност на променливата x. Специјално за $x=1$ имаме: $10=5A$ од каде што: $A=2$. За $x=0$ важи: $7=2A-C$, од каде што $C=-3$. Со прирамнување на коефициентите пред членот x^2, добиваме: $1=A+B$, од каде што: $B=-1$.

Задача 3. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}$.

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

од каде што:

$$1=A\left(x^4+2x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x^3+x\right)+\left(Dx+E\right)x \Leftrightarrow$$
$$1=A\left(x^4+2x^2+1\right)+B\left(x^4+x^2\right)+C\left(x^3+x\right)+Dx^2+Ex$$

Следува:

$$0=A+B,\ 0=C,\ 0=2A+B+D,\ 0=C+E,\ A=1 \Leftrightarrow$$
$$A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=-1,\ E=0$$

Зато,

$$I=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx=\begin{pmatrix}x^2+1=t\\ 2xdx=dt\end{pmatrix}=$$

$$\ln|x|-\int\frac{dt}{2t}-\int\frac{dt}{2t^2}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)=$$

$$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C.$$

Задача 4*. Нека P, Q и R се полиноми и $\frac{P(x)}{R(x)}=\frac{Q(x)}{R(x)}$ за $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{x\,\middle|\,R\left(x\right)=0\right\}$. Покажи дека $P(x)=Q(x)$ за секое $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $R(x_0)=0$. Бидејќи $R(x)$ има конечен број на нули, постои ε-околина U на x_0 таква што $P(x)=Q(x)$ за сите $x\in U\setminus\left\{x_0\right\}$.

Полиномите $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ се непрекинати и $P(x)=Q(x)$ за $x\in U\setminus\left\{x_0\right\}$, па:

$$P\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}P\left(x\right)=\lim_{x\to x_0}Q\left(x\right)=Q\left(x_0\right).$$

Коментар. Задачава покажува зошто, на пример во задача 3, равенството (1) не е исполнето за $x=1$, а (2) е исполнето, но дадените вредности може да се користат за определување на коефициентите A, B и C во (1).

Задача 5*. Најди го интегралот: $I=\int\frac{dx}{x^4+1}$.

Решение. Го групираме именителот:

$$x^4+1=\left(x^2+1\right)^2-2x^2=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Следува: $\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ од каде што:

$$1=\left(Ax+B\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\Leftrightarrow$$

$$1=Ax^3-\sqrt{2}Ax^2+Ax+Bx^2-\sqrt{2}Bx+B+$$
$$Cx^3+\sqrt{2}Cx^2+Cx+Dx^2+\sqrt{2}Dx+D\ \Leftrightarrow$$

$$0=A+C\,,\ 0=-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D\,,\ 0=A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D\,,$$
$$1=B+D\,.$$

Од првата и третата равенка имаме: $B-D=0$. Ако последнава равенка ја собереме со четвртата равенка од системот, добиваме: $B=\frac{1}{2}$, од каде што имаме: $D=\frac{1}{2}$. Ако условот $C=-A$ од првата равенка и $1=B+D$ од четвртата, ги замениме во втората, имаме: $0=-2\sqrt{2}A+1$, односно $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Оттука, $C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Следува:

$$I=\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx}_{I_1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx}_{I_2},\text{ каде што:}$$

$$I_1=\int\frac{x+\sqrt{2}}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx=\left(\begin{array}{c}x+\frac{\sqrt{2}}{2}=t\\ dx=dt\end{array}\right)=\int\frac{t+\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+\frac{1}{2}}dt=$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+\frac{1}{2}}dt+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}arctg\sqrt{2}t+C=$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)+arctg\left(\sqrt{2}\,x+1\right)+C \text{ и}$$

$$I_2=\int\frac{x-\sqrt{2}}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx=\left(\begin{array}{c} x-\frac{\sqrt{2}}{2}=t \\ dx=dt\end{array}\right)=\int\frac{t-\frac{\sqrt{2}}{2}}{t^2+\frac{1}{2}}dt=$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+\frac{1}{2}}dt-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}arctg\sqrt{2}t+C=$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)-arctg\left(\sqrt{2}\,x-1\right)+C\,.$$

Значи,

$$I=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(arctg\left(\sqrt{2}\,x+1\right)+arctg\left(\sqrt{2}\,x-1\right)\right)+C\,.$$

4. 6. ИНТЕГРАЛИ ОД ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

4.6.1. Интеграли од видот: $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},\ldots,\sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right)$

Задача 1. Најди го интегралот: $I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.

Решение. Бидејќи коренот е квадратен, воведуваме смена: $x=t^2$, $dx=2tdt$. Тогаш,

$$I=\int\frac{t}{t^2+1}2tdt=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-arctgt\right)+C=$$

$$2\left(\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}\right)+C\,.$$

Задача 2. Најди го интегралот: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Во изразот се појавува квадратен и кубен корен од x. Бидејќи $НЗС(2,3)=6$, со смената $x=t^6$, $dx=6t^5dt$, дадениот интеграл се сведува на интеграл од рационална функција:

$$I=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int \frac{t^5}{t^2(t+1)}dt=6\int \frac{t^3}{t+1}dt\ .$$

Последниот интеграл може да го решиме со трансформација на броителот:

$$\frac{t^3}{t+1}=\frac{t^3+1-1}{t+1}=\frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}=t^2-t+1-\frac{1}{t+1},$$

од каде што, имајќи предвид дека $t=\sqrt[6]{x}$, решението е:

$$I=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C=$$

$$2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Задача 3. Најди го интегралот: $I=\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$.

Решение. Затоа што: $НЗС(2,3,4,6)=12$, воведуваме смена: $x=t^{12}$, $dx=12t^{11}dt$. Тогаш,

$$I=\int \frac{t^6+t^4}{t^{15}-t^{14}}12t^{11}dt=12\int \frac{t^4\left(t^2+1\right)}{t^{14}\left(t-1\right)}t^{11}dt=12\int \frac{t^3+t}{t-1}dt.$$

Рационалната функција ќе ја решиме со смената $t-1=k$, од каде имаме $t=k+1$ и $dt=dk$. Следува:

$$I=12\int \frac{(k+1)^3+k+1}{k}dk=12\int \frac{k^3+3k^2+3k+1+k+1}{k}dk=$$

$$12\int \frac{k^3+3k^2+3k+1+k+1}{k}dk=12\left(\frac{k^3}{3}+3\frac{k^2}{3}+4k+2\ln|k|\right)+C=$$

$$12\left(\frac{\left(\sqrt[12]{x}-1\right)^3}{3}+3\frac{\left(\sqrt[12]{x}-1\right)^2}{3}+4\left(\sqrt[12]{x}-1\right)+2\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|\right)+C.$$

4.6.2. Интеграли од видот $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{(ax+b)^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_n]{(ax+b)^{m_n}}\right)$

Задача 1. Најди го интегралот: $I = \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+5}}$.

Решение. Затоа што имаме трети корен во подинтегралниот израз, воведуваме смена $2x+5=t^3$, од каде што $x=\frac{t^3-5}{2}$ и $dx=\frac{3t^2}{2}dt$. Следува:

$$I=\int \frac{t^3-5}{2t}\frac{3t^2}{2}dt=\frac{3}{4}\int\left(t^3-5\right)tdt=\frac{3}{4}\int\left(t^4-5t\right)dt=\frac{3}{4}\int dt=$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}-5\frac{t^2}{2}\right)+C=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x+5)^5}-\frac{15}{8}\sqrt[3]{(2x+5)^2}+C.$$

Задача 2. Најди го интегралот: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

Решение. Воведуваме смена $x+1=t^6$, од каде што $x=t^6-1$ и $dx=6t^5dt$. Имаме:

$$I=\int\frac{6t^5dt}{t^3+t^4}=6\int\frac{t^5dt}{t^3(1+t)}=6\int\frac{t^2dt}{1+t}=6\int\frac{\left(t^2-1+1\right)dt}{1+t}=$$

$$6\int\frac{((t-1)(t+1)+1)dt}{1+t}=6\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=6\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2}-\sqrt[6]{x+1}+\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)\right)+C.$$

Задача 3. Најди го интегралот: $I=\int\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}dx$.

Решение. Како и во претходните случаеви, ирационалната функција ќе ја сведеме на рационална ако воведеме смена $x+1=t^6$, од каде што $x=t^6-1$ и $dx=6t^5dt$. Имаме:

$$I=6\int\frac{(t^6-1)t^5}{t^2-t^3}dt.$$

Со средување на рационалната функција

$$\frac{(t^6-1)t^5}{t^2-t^3}=\frac{(t-1)(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)t^5}{t^2(1-t)}=-(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t)^3,$$

добиваме:

$$I=-6\int(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3)dt=$$

$$-6\left(\frac{t^9}{9}+\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}-\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}--\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C.$$

Задача 4. Најди го интегралот: $I=\int\frac{\sqrt{2x-1}+2}{(2x-1)^2-\sqrt{2x-1}}dx$.

Решение. Воведуваме смена $2x-1=t^2$, од каде што $2dx=2tdt$ или $dx=tdt$.

$$I=\int\frac{t+2}{t^4-t}tdt=\int\frac{t+2}{t(t^3-1)}tdt=\int\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}dt.$$

Ја разложуваме рационалната функција:

$$\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1},\text{ од каде што:}$$

$$t+2=A(t^2+t+1)+B(t^2-t)+C(t-1).$$

За $t=1$ важи $3A=3$ или $A=1$, за $t=0$ важи $2=A-C$, од каде што $C=-1$ и од коефициентите пред x^2 важи $0=A+B$, од каде што $B=-1$. Следува:

$$I=\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{-t-1}{t^2+t+1}\right)dt=\ln|t-1|-\int\frac{t+1}{t^2+t+1}dt,\text{ каде}$$

$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = \left(\begin{array}{c} t+\frac{1}{2}=k \\ dt=dk \end{array} \right) = \int \frac{k+\frac{1}{2}}{k^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dk =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2k}{k^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dk + \frac{1}{2}\int \frac{2k}{k^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dk =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(k^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2k}{\sqrt{3}}+C =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

Следува:

$$I = \ln\left|\sqrt{2x-1}-1\right| - \left(\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{2x-1}+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$\ln\frac{\left|\sqrt{2x-1}-1\right|}{\sqrt{2x-1+\sqrt{2x-1}+1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

Задача 5. Најди го интегралот: $I = \int \frac{x\cdot\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

Решение. Воведуваме смена: $2+x=t^3$, $dx=3t^2dt$. Тогаш,

$$I = \int \frac{\left(t^3-2\right)t}{t^3-2+t}3t^2dt = 3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt\ .$$

Ќе ги поделиме броителот и именителот од подинтегралната функција:

$$t^6-2t^3 : t^3+t-2 = t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}$$

$$\frac{\pm t^6 \pm t^4 \mp 2t^3}{-t^4}$$

$$\frac{\mp t^4 \mp t^2 \pm 2t}{t^2-2t}$$

и добиваме:

$$I=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}\right)dt=3\frac{t^4}{4}-3\frac{t^2}{2}+3\underbrace{\int\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}dt}_{I_1}\ \ (1).$$

За да го најдеме последниот интеграл, именителот од подинтегралната функција ќе го факторизираме, а потоа ќе ја декомпонираме функцијата.

$$t^3+t-2=t^3-1+t-1=(t-1)\left(t^2+t+1\right)+(t-1)=(t-1)\left(t^2+t+2\right)$$

$$\frac{t^2-2t}{(t-1)\left(t^2+t+2\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+2}\ \text{од каде}$$

$$t^2-2t=A\left(t^2+t+2\right)+B\left(t^2-t\right)+C(t-1).$$

За $t=1$ добиваме $-1=4A$ или $A=-\frac{1}{4}$. За $t=0$ важи $0=2A-C$ од каде $C=-\frac{1}{2}$. Од коефициентите пред x^2 важи $1=A+B$, од каде што $B=\frac{5}{4}$. Следува:

$$I_1=\int\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}+\frac{\frac{5}{4}t-\frac{1}{2}}{t^2+t+2}\right)dt=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{5t-2}{t^2+t+2}dt}_{I_2}\ \ \text{и}$$

$$I_2=\int\frac{5t-2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2}dt=\begin{pmatrix}t+\frac{1}{2}=k\\ dt=dk\end{pmatrix}=\int\frac{5\left(k-\frac{1}{2}\right)-2}{k^2+\frac{7}{4}}dk=$$

$$\frac{5}{2}\int\frac{2k}{k^2+\frac{7}{4}}-\frac{9}{2}\int\frac{dk}{k^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}\ln\left|k^2+\frac{7}{4}\right|-\frac{9}{2}\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2k}{\sqrt{7}}+C=$$

$$\frac{5}{2}\ln\left|t^2+t+2\right|-\frac{9}{\sqrt{7}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Следува:

$$I=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3\left(-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\ln\left|t^2+t+2\right|-\frac{9}{\sqrt{7}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)\right)+C=$$

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-\frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{x+2}-1\right|+$$

$$\frac{15}{8}\ln\left|\sqrt[3]{(2+x)^2}+\sqrt[3]{(2+x)}+2\right|-\frac{27}{4\sqrt{7}}arctg\frac{2\sqrt{(x+2)^3}+1}{\sqrt{7}}+C\,.$$

4.6.3. Интеграли од видот: $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}},\ldots,\sqrt[n_n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_n}}\right)$

Задача 1. Најди го интегралот: $I=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Решение. Воведуваме смена: $\frac{x-1}{x+1}=t^2$. За експлицитно да го определиме x како функција од t, $x=x(t)$, равенството го множиме со $x+1$, а потоа члeновите што го содржат t ги ставаме од левата страна, а останатите членови од десната страна на равенството.

$$x-1=t^2x+t^2\Leftrightarrow x-t^2x=1+t^2\Leftrightarrow\left(1-t^2\right)x=1+t^2\Leftrightarrow x=\frac{1+t^2}{1-t^2}\,.$$

Оттука: $dx=\frac{2t\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)(-2t)}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt$.

На овој начин го добиваме интегралот:

$$I=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}t\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\int\frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)(1-t)(1+t)}dt$$

Ќе ја декомпонираме подинтегралната функција:

$$\frac{4t^2}{\left(1-t^2\right)(1-t)(1+t)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$$

и ќе ги најдеме коефициентите, A, B C и D:

$$4t^2=A\left(1+t+t^2+t^3\right)+B\left(1+t^2\right)(1-t)+(Ct+D)\left(1-t^2\right)$$

$$4t^2=A\left(1+t+t^2+t^3\right)+B\left(1-t+t^2-t^3\right)+C\left(t-t^3\right)+D\left(1-t^2\right).$$

За $t=1$ важи $4=4A$, односно $A=1$. За $t=-1$ важи $4=4B$, односно $B=1$. За $t=0$ важи $0=A+B+D$ од каде $D=-2$. Со прирамнување на коефициентите пред x^3, имаме $A-B-C=0$, од каде што $C=0$.

Имајќи предвид дека: $\int\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|+C$, добиваме:

$$I=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}-\frac{2}{1+t^2}\right)dt=-\ln|1-t|+\ln|1+t|-2arctgt+C=$$

$$\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|-2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C.$$

Коментар. Коефициентите можевме да ги определиме и на стандарден начин, со решавање на системот:

$$\begin{cases}A-B-C=0\\A+B-D=4\\A-B+C=0\\A+B+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2A+2B=4\\2A-2B=0\\C=B-A\\D=-A-B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A=4\\B=A\\C=B-A\\D=-A-B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\\C=0\\D=-2\end{cases}.$$

4.7. ИНТЕГРАЛИ ОД ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

4.7.1. Интеграли од обликот: $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Задача 1. Пресметај ги интегралите: а) $\int\frac{dx}{\sin x}$, б) $\int\frac{dx}{\cos x}$.

Решение. а) Најопшта смена со која сите интеграли од тригонометриските функции се сведуваат на интеграли од рационални функции е: $tg\frac{x}{2}=t$ и се однесува на секој од интервалите $x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Оттука, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ и $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Сега,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = = \ln|t| + C = \ln|tg\frac{x}{2}| + C .$$

Коментар. Бидејќи подинтегралната функција не е дефинирана во точките во кои $\sin x = 0$ односно $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, со смената $tg\frac{x}{2} = t$ не се скратува дефиниционата област.

б) Со помош на тригонометрискиот идентитет $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и резултатот од претходната задача добиваме:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|tg\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right| + C = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C .$$

Задача 2. Најди го интегралот $I = \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}$.

Решение. Воведуваме смена $tg\frac{x}{2} = t$, од каде што имаме дека:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ \text{и}\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} .$$

Бидејќи за точките во кои $tg\frac{x}{2} = 0$ и подинтегралната функција не е дефинирана ($\sin x = 0$), со смената не се скратува дефиниционата област. Следува:

$$I = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t\left(2 + 2t^2 + 1 - t^2 - 4t\right)}dt =$$

$$\int \frac{t^2+1}{t\left(t^2 - 4t + 3\right)}dt = \int \frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)}dt .$$

Добивме интеграл од рационална функција кој ќе го решиме со декомпонирање на подинтегралната функција:

$$\frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3}\text{, од каде што важи:}$$

$$t^2+1=A\left(t^2-4t+3\right)+B\left(t^2-3t\right)+C\left(t^2-t\right)\text{, односно:}$$

$$1=A+B+C\,,\ 0=-4A-3B-C\,,\ 1=3A \Leftrightarrow A=\frac{1}{3}\,,\ B=-1\,,\ C=\frac{5}{3}$$

Па, бараниот интеграл е:

$$I=\int\frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)}dt=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t|-\ln|t-1|+\frac{5}{3}\ln|t-3|+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}-3\right|+C\,.$$

Задача 3. Најди го интегралот: $I=\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+3}$.

Решение. Ја воведуваме смената: $tg\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Следува:

$$I=\int\frac{2}{1+t^2}\frac{1}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}dt=\int\frac{2dt}{4t-1+t^2+3+3t^2}=$$

$$\int\frac{2dt}{2\left(2t^2+2t+1\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\begin{pmatrix} t+\frac{1}{2}=k \\ dt=dk \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dk}{k^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}2arctg2k+C=$$

$$arctg2\left(tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)+C=arctg\left(2tg\frac{x}{2}+1\right)+C\,.$$

*Дефиниционата област на функцијата $f(x)=\dfrac{1}{2\sin x-\cos x+3}$ е множеството реални броеви $\mathbb{R}$, но за да ја примениме смената $tg\dfrac{x}{2}=t$, ги разгледуваме интервалите $((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Значи, функцијата $f(x)=arctg\left(2tg\dfrac{x}{2}+1\right)+C$ е примитивна функција на функцијата $f(x)=\dfrac{1}{2\sin x-\cos x+3}$ на секој од интервалите $((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, но не е примитивна функција на целата дефинициона област $\mathbb{R}$, бидејќи не е дефинирана во точките во кои: $x=(2k+1)\pi$.

Примитивна функција на $\mathbb{R}$ ќе најдеме ако ја додефинираме функцијата $arctg\left(2tg\dfrac{x}{2}+1\right)+C_k$ во точките $x=(2k+1)\pi$ и ги израмниме константите на разделените интервали, така што таа би била непрекината функција. Бидејќи

$$\lim_{x\to(2k+1)\pi^-} arctg\left(2tg\frac{x}{2}+1\right)+C_k=\frac{\pi}{2}+C_k \quad \text{и}$$

$$\lim_{x\to(2k+1)\pi^+} arctg\left(2tg\frac{x}{2}+1\right)+C_{k+1}=-\frac{\pi}{2}+C_{k+1},$$

следува: $\dfrac{\pi}{2}+C_k=-\dfrac{\pi}{2}+C_{k+1}$, односно $C_{k+1}=\pi+C_k$ и за $x=(2k+1)\pi$ функцијата има вредност $\dfrac{\pi}{2}+C_k$. Ако земеме $C_0=C$, добиваме:

$$C_1=\pi+C,\ C_2=2\pi+C \ldots\ C_k=k\pi+C \quad \text{и}$$

$$(2k-1)\pi<x<(2k+1)\pi \Leftrightarrow 2k\pi<x+\pi<2(k+1)\pi \Leftrightarrow k<\frac{x+\pi}{2\pi}<k+1.$$

Следува: $k=\left[\dfrac{x+\pi}{2}\right]$, каде што со $[x]$ е означена функцијата цел дел од x. Значи,

$$I=\begin{cases} arctg\left(2tg\dfrac{x}{2}+1\right)+\pi\left[\dfrac{x+\pi}{2}\right], & x\neq(2k+1)\pi \\ \dfrac{\pi}{2}+\pi\left[\dfrac{x+\pi}{2}\right], & x=(2k+1)\pi \end{cases}+C.$$

Коментар. Во натамошните задачи, усогласувањето на дефиниционите области на функцијата со нејзините примитивни функции, таму каде што се јавува потреба од истото, нема да го правиме, само ќе го подразбираме.

Смената $tg\dfrac{x}{2}=t$ некогаш доведува до сложена рационална функција. Кај некои подинтегрални функции со одредени својства на симетрија, со други смени може да се добие поедноставна рационална функција.

4.7.2. Интеграли од обликот: $R(\sin x,\cos x)\equiv R(-\sin x,-\cos x)$

Задача 1. Најди го интегралот: $I=\displaystyle\int\frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}dx$.

Решение. Прв начин. Бидејќи

$$R(-\sin x,-\cos x)=\frac{2(-\sin x)+3(-\cos x)}{(-\sin x)^2(-\cos x)+9(-\cos x)^3}=$$

$$\frac{2\sin x+3\cos x}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}=R(\sin x,\cos x),$$

воведуваме смена: $tgx=t$, $\sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Следува:

$$I=\int\frac{dt}{1+t^2}\frac{2\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}+3\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{t^2}{1+t^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}+9\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}}}=\int\frac{dt}{1+t^2}\frac{\dfrac{2t+3}{\sqrt{1+t^2}}}{\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)\sqrt{1+t^2}}\left(t^2+9\right)}=$$

$$\int \frac{2t+3}{t^2+9}dt = 2\int \frac{t}{t^2+9}dt + 3\int \frac{dt}{t^2+9} = \ln|t^2+9| + 3\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$\ln|tg^2x+9| + arctg\left(\frac{tgx}{3}\right) + C.$$

Втор начин. Забележуваме дека збирот од степеновите показатали на множителите $\sin^2 x\cos x$ и $\cos^3 x$ во именителот е ист 3. Истото се случува и со броителот, каде што збирот е 1. Затоа, подинтегралната функција може да ја сведеме во обликот: $f(tgx)\frac{1}{\cos^2 x}$,

$$\frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x} = \frac{\left(2\frac{\sin x}{\cos x}+3\right)\cos x}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+9\right)\cos^3 x} = \frac{2tgx+3}{tg^2x+9}\frac{1}{\cos^2 x}$$

Оттука,

$$I = \int \frac{2tgx+3}{tg^2x+9}\frac{dx}{\cos^2 x} = \begin{pmatrix} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{pmatrix} = \int \frac{2t+3}{t^2+9}dt =$$

$$2\int \frac{t}{t^2+9}dt + 3\int \frac{dt}{t^2+9} = \ln|t^2+9| + 3\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$\ln|tg^2x+9| + arctg\left(\frac{tgx}{3}\right) + C.$$

Задача 2. Најди го интегралот: $I = \int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$.

Решение. Прв начин. Со помош на смената:

$$tgx = t,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ и } dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right) = I_k, \text{ добиваме}$$

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2}\frac{1}{2-\dfrac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t^2}\frac{1}{\dfrac{2+2t^2-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C_k=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)+C_k.$$

Втор начин. Заради тригонометрискиот идентитет $2=2\sin^2 x+2\cos^2 x$, имаме:

$$I=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{2\sin^2 x+2\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\int\frac{1}{2+tg^2x}\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$\begin{pmatrix} t=tgx \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C_k=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)+C_k.$$

Задача 3. Реши го интегралот: $I=\int\frac{dx}{1+tgx}$.

Решение. Дадениот интеграл е од обликот $\int R(tgx)dx$ и се решава со смената $tgx=t$. Со диференцирање на равенството $x=arctgt$, добиваме: $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Следува: $I=\int\frac{1}{1+t}\frac{dt}{1+t^2}$.

Подинтегралната функција ја запишуваме во видот:

$$\frac{1}{(1+t)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}\text{, од каде што:}$$

$$1=A\left(1+t^2\right)+B\left(t+t^2\right)+C(1+t).$$

За $t=-1$ важи $1=2A$, односно $A=\frac{1}{2}$. За $t=0$ важи $1=A+C$, од каде што $C=\frac{1}{2}$. Од коефициентите пред t^2, важи $0=A+B$ од каде што $B=-\frac{1}{2}$. Следува:

$$I=\int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\frac{-t+1}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{2}\int\frac{tdt}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$\begin{pmatrix}1+t^2=k \\ 2tdt=dk\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+t\right|-\frac{1}{4}\ln\left|1+t^2\right|+\frac{1}{2}arctgt+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+tgx\right|-\frac{1}{4}\ln\left|1+tg^2x\right|+\frac{1}{2}x+C$$

.

Задача 4*. Реши го интегралот: $I=\int\frac{\ln(tgx)}{\cos^4 x}dx$.

Решение. Интегралот прво го решаваме со парцијална интеграција,

$$u=\ln(tgx),\ dv=\frac{1}{\cos^4 x}dx \text{ од каде } du=\frac{1}{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}dx \text{ и}$$

$$v=\int\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}dx=$$

$$\int\left(1+tg^2x\right)\frac{1}{\cos^2 x}dx=\begin{pmatrix} t=tgx \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{pmatrix}=\int\left(1+t^2\right)dt=t+\frac{t^3}{3}=tgx+\frac{tg^3x}{3}.$$

Следува:

$$I=\left(tgx+\frac{tg^3x}{3}\right)\ln\left(tgx\right)-\int\left(tgx+\frac{tg^3x}{3}\right)\frac{1}{tgx\cos^2 x}dx=$$

$$\left(tgx+\frac{tg^3x}{3}\right)\ln\left(tgx\right)-tgx-\frac{tg^3x}{9}+C,$$

бидејќи:

$$\int\left(tgx+\frac{tg^3x}{3}\right)\frac{1}{tgx\cos^2 x}dx=\begin{pmatrix} t=tgx \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{pmatrix}=\int\left(1+\frac{1}{3}t^2\right)dt=$$

$$\int\left(t+\frac{1}{3}\frac{t^3}{3}\right)dt=tgx+\frac{tg^3x}{9}+C.$$

4.7.3 Интеграли од обликот:

$$\int\sin ax\cos bxdx,\quad \int\sin ax\sin bxdx,\ \int\cos ax\cos bxdx$$

Задача 1. Најди го интегралот: $I=\int \cos 3x\cos(-5x)dx$.

Решение. Имаме:

$$I=\int\frac{1}{2}(\cos(-2x)+\cos 8x)dx=\frac{1}{2}\frac{\sin(-2x)}{-2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 8x}{8}+C=$$

$$\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 8x}{16}+C\,.$$

Задача 2. Најди го интегралот: $I=\int \sin 5x\cos(-3x)dx$.

Решение. Имаме:

$$I=\int\frac{1}{2}(\sin(-2x)+\sin 8x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(-2x)}{-2}-\frac{\cos 8x}{8}\right)+C=$$

$$\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\cos 8x}{16}+C\,.$$

Задача 3. Најди го интегралот: $I=\int \sin 3x\cos(-5x)dx$.

Решение. Имаме:

$$I=\int\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos(-2x))dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8x}{8}+\frac{\sin(-2x)}{-2}\right)+C=$$

$$\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C\,.$$

Задача 4. Реши го интегралот: $I=\int \sin 5x\cos 3x\sin xdx$.

Решение. Имаме:

$$I=\int\frac{1}{2}(\sin(5+3)x+\sin(5-3)x)\sin xdx=$$

$$\frac{1}{2}\int(\sin 8x\sin x+\sin 2x\sin x)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int-\frac{1}{2}(\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x)dx=$$

$$\frac{1}{4}\int(\cos 7x-\cos 9x+\cos x-\cos 3x)dx=$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7}-\frac{\sin 9x}{9}+\sin x-\frac{\sin 3x}{3}\right)+C=$$

$$\frac{\sin 7x}{28}-\frac{\sin 9x}{36}+\frac{\sin x}{4}-\frac{\sin 3x}{12}+C.$$

4.7.4 Интеграли од обликот: $\int R(f(x))f'(x)dx$, $\int I(f(x))f'(x)dx$, каде што R и I се рационални и ирационални функции

Задача 1. Реши го интегралот: $I=\int\frac{\sin^3 x}{3+\cos x}dx$.

Решение. Ја средуваме подинтегралната функција:

$$\frac{\sin^3 x}{3+\cos x}=\frac{\sin^2 x}{3+\cos x}\sin x=\frac{1-\cos^2 x}{3+\cos x}\sin x.$$

Значи, интегралот припаѓа на класата: $\int R(\cos x)\sin x dx$ и се решава со смената: $\cos x=t$, $-\sin x dx=dt$. Имаме:

$$I=\int\frac{1-\cos^2 x}{3+\cos x}\sin x dx=\int\frac{1-t^2}{3+t}(-dt)=\begin{pmatrix}3+t=k\\ dt=dk\end{pmatrix}=-\int\frac{1-(k-3)^2}{k}dk=$$

$$-\int\frac{k^2-6k+8}{k}dk=\int\left(k-6+\frac{8}{k}\right)dk=\frac{k^2}{2}-6k+8\ln|k|+C=$$

$$\frac{1}{2}(3+\cos x)^2-6(3+\cos x)+8\ln|3+\cos x|+C.$$

Задача 2. Реши го интегралот: $I=\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx$.

Решение. Го трансформираме членот $\cos^3 x=\left(1-\sin^2 x\right)\cos x$ и воведуваме смена $\sin x=t$, $\cos x dx=dt$. Тогаш,

$$I=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx=\int\frac{1-t^2}{t^{\frac{4}{5}}}dt=\int\left(t^{\frac{1}{5}}-t^{\frac{6}{5}}\right)dt=\frac{5}{6}t^{\frac{6}{5}}-\frac{5}{11}t^{\frac{11}{5}}+C=$$

$$\frac{5}{6}\sqrt[5]{\sin^6}-\frac{5}{11}\sqrt[5]{\sin^{11}}+C.$$

4.7.5 Интеграли од обликот: $\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n \in Z$.

Задача 1. Најди го интегралот: $I = \int \cos^3 x dx$.

Решение. Степеновиот показател на косинусот е непарен, па воведуваме смена: $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. Понатаму, со помош на идентитетот $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, подинтегралната функција без еден фактор косинус, ја изразуваме преку синус. Имено,

$\cos^3 x = \cos^2(x)\cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x$. Следува:

$$I = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x dx = \int \left(1 - t^2\right)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Задача 2. Реши го интегралот: $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

Решение. Степеновиот показател на функцијата косинус е позитивен и непарен. Затоа, воведуваме смена $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. Потоа, ја трансформираме подинтегралната функција:

$$\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\cos x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x}\cos x.$$

Оттука,

$$I = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x}\cos x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^4} dt = \int \left(t^{-4} - \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{t^{-3}}{-3} + \frac{1}{t} + C =$$

$$-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

Задача 3. Реши го интегралот: $I = \int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

Решение. Степеновиот показател на синусот е непарен, па воведуваме смена $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$. Со помош на идентитетот $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ја трансформирме подинтегралната функција $\sin^5 \cos^2 x = \left(\sin^2\right)^2 \cos^2 x \sin x = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^2 \sin x$. Следува:

$$I = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \cos^2 \sin x dx = \int \left(1 - t^2\right)^2 t^2 (-dt) =$$

$$-\int \left(1 - 2t^2 + t^4\right)t^2 dt = -\int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right)dt =$$

$$\frac{t^3}{3}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=\frac{\cos^3 x}{3}-2\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C\,.$$

Задача 4. Најди го интегралот: $I=\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Интегралот го трансформираме во видот:

$$I=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx\,.$$

Тој припаѓа на класата: $\int R(\cos x)\sin x dx$ и се решава со смената $:\cos x=t$, $-\sin x dx=dt$.

$$I=\int\frac{-dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C\,.$$

Задача 5. Реши го интегралот: $I=\int\sin^2 x\cos^4 x dx$.

Решение. Степеновите показатели на функциите синус и косинус се парни. Со помош на тригинометриските идентитети

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\ \text{и}\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};$$

го снижуваме степенот на функциите:

$$\sin^2 x\cos^4 x=(\sin x\cos x)^2\cos^2 x=\frac{\sin^2 2x}{4}\frac{1+\cos 2x}{2}=$$

$$\frac{1}{8}\frac{1-\cos 4x}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x)=$$

$$\frac{1}{16}\left(1+\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)\right)=$$

$$\frac{1}{16}\left(1+\frac{\cos 2x}{2}-\cos 4x-\frac{\cos 6x}{2}\right).$$

Следува:

$$I=\frac{1}{16}\int\left(1+\frac{\cos 2x}{2}-\cos 4x-\frac{\cos 6x}{2}\right)dx=$$

$$\frac{1}{16}\left(x+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 4x}{4}-\frac{1}{2}\frac{\sin 6x}{6}\right)+C=$$

$$\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C\,.$$

Задача 6. Реши го интегралот: $I=\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

Решение. Бидејќи степеновите показатели на синус и косинус се негативни и нивниот збир е парен број, ја воведуваме смената: $tgx=t$, $\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

Следува:

$$I=\int\frac{dt}{1+t^2}\frac{\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}}{t^3}\frac{\sqrt{\left(1+t^2\right)^5}}{1}=\int\frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^3}dt=\int\frac{1}{t^3}\left(1+3t^2+3t^4+t^6\right)dt=$$

$$\int\left(t^{-3}+3\frac{1}{t}+3t+t^3\right)dt=$$

$$\frac{1}{-2t^2}+3\ln|t|+3\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+C=-\frac{1}{2tg^2x}+3\ln|tgx|+3\frac{tg^2x}{2}+\frac{tg^4x}{4}+C\,.$$

4.7.6 Рекурентни формули за: $\int\sin^n xdx$, $\int\cos^n xdx$.

Задача 1. Реши го интегралот: $I=\int\sin^5 xdx$.

Решение. Прв начин. Интегралот можеме да го решиме со помош на рекурентната формула:

$$\int\sin^n xdx=-\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx\,.$$

Бидејќи формулата е сложена за памтење, таа е пожелно да знаеме да ја изведеме или да ја спроведеме постапката за конкретна вредност на n.

За $n=5$ имаме:

$$\int\sin^5 xdx=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}\int\sin^3 xdx$$

и за $n=3$ имаме:

$$\int\sin^3 xdx=-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x-\frac{2}{3}\cos x+C\,.$$

Конечно, за главниот интеграл добиваме:

$$I=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x-\frac{2}{3}\cos x\right)+C=$$
$$=-\frac{1}{5}\sin^4 x\cos x-\frac{4}{15}\sin^2 x\cos x-\frac{8}{15}\cos x+C.$$

Втор начин. Воведуваме смена: $\cos x=t$, $-\sin xdx=dt$, од каде што:

$$I=\int\sin^4 x\sin xdx=\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\sin xdx=-\int\left(1-t^2\right)dt=$$
$$-\int\left(1-t^2\right)^2dt=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\int\left(-1+2t^2-t^4\right)dt=$$
$$-t+2\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

Задача 3. Реши го интегралот: $I=\int\frac{dx}{\cos^3 x}$.

Решение. Да забележиме дека рекурентните релации важат и за негативни вредности за n. Од формулата за $n=-1$ имаме:

$$\int\cos^{-1}xdx=\frac{1}{-1}\sin x\cos^{-2}x+\frac{-2}{-1}\int\cos^{-3}xdx,$$ при што

следува дека:

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\cos x}\right).$$

Десниот интеграл е:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos xdx}{\cos^2 x}=\int\frac{\cos xdx}{1-\sin^2 x}=\begin{pmatrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{pmatrix}=$$
$$\int\frac{dt}{1-t^2}=-\int\frac{dt}{t^2-1}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C.$$

Од каде што:

$$I=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C.$$

Втор начин. Задачата ќе ја решиме со смената $\sin x=t$. Имаме:

$$I=\int\frac{\cos xdx}{\cos^4 x}=\int\frac{\cos dx}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}=\begin{pmatrix}\sin x=t\\ \cos xdx=dt\end{pmatrix}=\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

Последниот нтеграл ќе го најдеме аналогно како што бараме интеграли од квадратен трином.

$$\int\frac{1}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\int\frac{1-t^2+t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\int\frac{1}{1-t^2}dt+\int\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt.$$ Каде

$$\int\frac{1}{1-t^2}dt=-\int\frac{1}{t^2-1}dt=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$ и

$$\int t\frac{t}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\begin{pmatrix}u=t & dv=\dfrac{t}{\left(1-t^2\right)^2}\\ du=dt & v=\dfrac{1}{2\left(1-t^2\right)}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-t^2}dt=$$

$$\frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Оттука: $\int\frac{t^2}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C$. Следува:

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C=$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C.$$

4.8. ИНТЕГРАЛИ ШТО СЕ РЕШАВААТ СО ТРИГОНОМЕТРИСКИ СМЕНИ

Задача 1. Реши го интегралот: $I=\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение. Интегралот припаѓа на класата: $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ и го решаваме со смената: $x=2\sin t$, $dx=2\cos dt$ каде $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Во тој случај, $\cos t>0$, па $|\cos t|=\cos t$. Сега,

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}=2\sqrt{\cos^2 t}=2\left|\cos t\right|=2\cos t$$

од каде што:

$$I=\int 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=16\int \sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=16\int\frac{\sin^2 2t}{4}dt=$$

$$4\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=2\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 4\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C.$$

Втор начин. Воведуваме смена: $x=2\cos t$, $dx=-2\sin t$ каде што $t\in(0,\pi)$. Тогаш,

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\cos^2 t}=2\left|\sin t\right|=2\sin t \text{ и}$$

$$I=\int 4\cos^2 t\cdot 2\sin t\cdot\left(-2\cos t\right)dt=-16\int\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=$$

$$-2\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=-2\arccos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 4\left(\arccos\frac{x}{2}\right)+C.$$

Задача 2. Најди го интегралот: $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$.

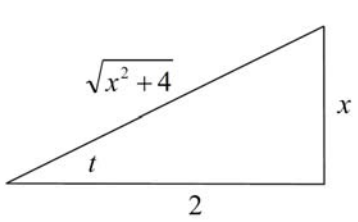
Решение. Воведуваме смена:

$x=2tgt$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, од каде $dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}$ и $1+tg^2t=\frac{1}{\cos^2 t}$. Оттука,

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{4^3\left(1+tg^2t\right)^3}}\frac{2}{\cos^2 t}dt=2\int\frac{1}{\frac{8}{\sqrt{\cos^6 t}}}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{4}\int\cos t dt=$$

$$\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin\left(arctg\frac{x}{2}\right)+C.$$

*Ако сакаме примитивната функција да ја запишеме како ирационална функција, како што е запишана и подинтегралната функција, ја спроведуваме следнава постапка:



Прв начин. Поради равенството $tgt=\frac{x}{2}$, за $x>0$ го разгледуваме правоаголниот триаголник со спротивна катета x и налегната катета 2, во однос на аголот t. Тогаш хипотенузата е:

$\sqrt{x^2+4}$ и $\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Следува: $I = \dfrac{1}{4}\sin t + C = \dfrac{1}{4}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C$.

За $x<0$ и $t<0$ па $\sin(-t) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+4}}$, т.е. $\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

Втор начин. Заради $\sin t = \dfrac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}}$, добиваме:

$$I = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} + C = \frac{1}{4}\frac{tg\left(arctg\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1+tg^2 arctg\frac{x}{2}}} + C =$$

$$\frac{1}{4}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} + C = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C.$$

Задача 3. Најди го интегралот: $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

Решение. Воведуваме смена: $x = \dfrac{a}{\cos t}$ каде $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ или $t \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Оттука,

$dx = -\dfrac{a}{\cos^2 t}(-\sin t)dt = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}$. Од $\cos t = \dfrac{a}{x}$, имаме $t = \arccos\dfrac{a}{x}$. Го средуваме коренот:

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2\left(1-\cos^2 t\right)}{\cos^2 t}} = \sqrt{\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^2 t}} =$$

$$\sqrt{a^2 tg^2 t} = |atgt| = atgt.$$

Следува:

$$I = \int \frac{1}{\frac{a}{\cos t}a\frac{\sin t}{\cos t}}\frac{a}{\cos^2 t}\sin t dt = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + C = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C.$$

Задача 4. Најди го интегралот: $I=\int \frac{x}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$.

Решение. Прво го средуваме триномот под коренот,

$$8-2x-x^2=8-\left(x^2+2x\right)=8-\left((x+1)^2-1\right)=9-(x+1)^2,$$

и воведуваме смена: $x+1=t$. Тогаш, $dx=dt$ и $I=\int \frac{t-1}{\sqrt{9-t^2}}dt$.

Воведуваме смена: $t=3\sin k$ од каде што: $dt=3\cos k dk$, $k=\arcsin\frac{t}{3}$

и $\sqrt{9-t^2}=\sqrt{9-9\sin^2 k}=3\sqrt{1-\sin^2 k}=3\cos k$. Тогаш,

$$I=\int \frac{3\sin k-1}{3\cos k}3\cos k dk=\int (3\sin k-1)dt=-3\cos k-k+C=$$

$$-3\cos k-k+C=-3\cos\arcsin\frac{t}{3}-\arcsin\frac{t}{3}+C=$$

$$-3\sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{x+1}{3}}-\arcsin\frac{x+1}{3}+C=$$

$$-3\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{9}}-\arcsin\frac{x+1}{3}+C=-\sqrt{9-(x+1)^2}-\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Задача 5. Реши го интегралот: $I=\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$.

Решение. Со смената $e^x=t$, $e^x dx=dt$ интегралот се сведува на: $I=\int\sqrt{1-t^2}dt$

и се решава со тригонометриската смена $t=\sin k$, од каде што: $dt=\cos k dk$ и $k=\arcsin t$. Имаме:

$$I=\int\sqrt{1-\sin^2 k}\cos k dk=\int\cos^2 k dk=\int\frac{1+\cos 2k}{2}dk=$$

$$\frac{1}{2}\left(k+\frac{\sin 2k}{2}\right)+C=\frac{1}{2}\arcsin e^x+\frac{1}{4}2\sin\left(\arcsin e^x\right)\cos\left(\arcsin e^x\right)+C=$$

$$\frac{1}{2}\arcsin e^x+\frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C.$$

5. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

5.1. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

5.1.1. Дефиниција на определениот интеграл

Задача 1. Дадена е поделбата: $P=\left\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\}$. Најди ја нормата на поделбата и горната и долната сума за функцијата:

$$f(x)=\sin x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Решение. Должините на секој од подинтервалите се:

$$\Delta x_1=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6},\ \Delta x_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12} \text{ и } \Delta x_3=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Нормата на поделбата е $\|P\|=\pi/4$. Бидејќи функцијата $s\text{in}\,x$ монотоно расте на интервалот $\left[0,\pi/2\right]$, минималните вредности на секој од подинтервалите се:

$$m_1=0,\ m_2=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \text{ и } m_2=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ а максималните:}$$

$$M_1=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ M_2=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } M_3=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Затоа, долната и горната сума, соодветно се:

$$s(P)=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+m_3\Delta x_3=0\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{4}=\left(1+3\sqrt{2}\right)\frac{\pi}{24} \text{ и}$$

$$S(P)=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+M_3\Delta x_3=\frac{1}{2}\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{12}+1\cdot\frac{\pi}{4}=\left(8+\sqrt{2}\right)\frac{\pi}{24}.$$

Задача 2. Докажи дека константната функција $f(x)=c$ е интеграбилна и: $\int_a^b f(x)dx=c(b-a)$.

Решение. За произволна поделба $P=\{x_0,x_1,\ldots x_n\}$ на интервалот $[a,b]$ и за секое $i=1,2,\ldots,n$; важи: $m_i=M_i=c$. Следува:

$$s(P)=S(P)=c\Delta x_1+c\Delta x_2+\ldots+c\Delta x_n=c\left(\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_n\right)=c(b-a)$$

Следува дека f е интеграбилна на $[a,b]$ и $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.

Задача 3. Испитај ја интеграбилноста на функцијата:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in(0,1] \\ 0 & x=0\end{cases} \text{ на } [0,1].$$

Решение. За произволна поделба $P=\{x_0,x_1,\ldots x_n\}$ на интервалот $[0,1]$, да го разгледаме првиот член од Римановите суми $f(\xi_1)\Delta x_1$. Постои $n_0\in\mathbb{N}$, така што за сите $n\geq n_0$, $\xi_{1_n}=\frac{\Delta x_1}{n}\in[0,x_1]$.

Следува:

$$f\left(\xi_{1_n}\right)=\frac{n}{\Delta x_1} \text{ и } \lim_{n\to\infty} f\left(\xi_{1_n}\right)\Delta x_1 = \lim_{n\to\infty} n = +\infty .$$

Значи, функцијата не е интеграбилна.

Задача 4. Испитај ја интеграбилноста на функцијата:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x \text{ е рационален број} \\ 1 & x \text{ е ирационален број}\end{cases} \text{ на } [0,1].$$

Решение. За решавање на задачата ќе го искористиме следново својство: Во секој интервал може да најдеме рационален и ирационален број.

За произволна поделба $P=\{x_0,x_1,\ldots x_n\}$ на интервалот $[0,1]$, ако од секој подинтервал избереме рационална точка ξ_i каде $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, тогаш $f(\xi_i)=0$ и:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0} 0 = 0,$$

а ако избереме ирационална точка ξ_i каде $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, тогаш:

$$f(\xi_i)=1 \text{ и } \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 1 .$$

Следува дека $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ не постои, односно функцијата не е интеграбилна.

Коментар. Ако функциите се интеграбилни, тогаш интегралот не зависи од начинот на разбивање на интервалот така што $\|P\| \to 0$, ниту од изборот на точките $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Во следниве задачи функциите се непрекинати, од каде што следува дека се интеграбилни.

Задача 5. Пресметај по дефиниција: $I = \int_0^1 x dx$.

Решение. Функцијата $f(x) = x$ е непрекината на интервалот $[0,1]$, од каде што следува дека интегралот постои. За да го пресметаме интегралот доволно е да избереме низа поделби P_n на интервалот $[0,1]$, такви што максималната должина $\|P_n\|$ на делбените интервали да тежи кон 0.

Нека n-тата поделба е: $P = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$, каде што: $x_i = \frac{i}{n}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогаш, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$. Поделбата го дели интервалот $[0,1]$ на n подинтервали со еднаква должина. Нормата на поделбата е: $\|P\| = \max\{\Delta x_i\} = \frac{1}{n}$. Точките ξ_i може да се изберат произволно од i-тиот подинтервал. Ние ќе земеме ξ_i да бидат десните крајни точки од подинтервалот, односно $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$. Бидејќи $\|P\| = \frac{1}{n}$, условот $\|P\| \to 0$ е еквивалентен со условот $n \to \infty$. Затоа, определениот интеграл е:

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i =$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Задача 6. Пресметај по дефиницij: $I = \int_0^3 (x^2 + 1) dx$.

Решение. Избираме поделба $P=\{x_0,x_1,...x_n\}$ на интервалот $[0,3]$, таква што $x_i=\frac{3i}{n}$, $i\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш, $\Delta x_i=\frac{3}{n}$. Избираме: $\xi_i=\frac{3i}{n}$. Следува:

$$I=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{3i}{n}\right)^2+1\right)\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27i^2}{n^3}+\frac{3}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3}{n}n\right)$$

$$=\frac{9}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}+3=\frac{9}{2}\cdot 2+3=12.$$

Притоа, начинот на добивање на равенството $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ е покажан во темата Математичка индукција обработена во [2].

Задача 7*. Пресметај по дефиниција: $\int_1^3\frac{1}{x^2}dx$.

Решение. Избираме поделба $P=\{x_0,x_1,...x_n\}$ на интервалот $[1,3]$, таква што: $x_i=1+\frac{2i}{n}$, $i\in\{1,2,...,n\}$. Бидејќи $x_{i-1}<\sqrt{x_{i-1}x_i}<x_i$, може да избереме $\xi_i=\sqrt{x_{i-1}x_i}$, од каде што $f\left(\xi_i\right)=\frac{1}{x_{i-1}x_i}$. Тогаш,

$$I=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i-1}x_i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

5.1.2. Њутн-лајбницова формула

Задача 1-2. Пресметај ги интегралите:

1) $\int\limits_1^3 \frac{1}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_0^\pi \cos^2 xdx$.

Решение. 1) $\int\limits_1^3 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^3 = -\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}$.

2) $\int\limits_0^\pi \cos^2 xdx = \int\limits_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi\right) =$

$$\frac{1}{2}\left(\pi - 0 + \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 3. Пресметај го интегралот: $I = \int\limits_{-1}^{2}|x-1|dx$.

Решение. Бидејќи $|x-1| = x-1$ за $x \geq 1$ и $|x-1| = 1-x$ за $x \leq 1$, имаме:

$$I = \int\limits_{-1}^{1}|x-1|dx + \int\limits_{1}^{2}|x-1|dx = \int\limits_{-1}^{1}(1-x) + \int\limits_{1}^{2}(x-1)\,dxdx =$$

$$\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_{1}^{2} = 1-(-1)-\frac{1}{2}(1-1)+\frac{1}{2}(4-1)-(2-1) = \frac{5}{2}.$$

Задача 4. Пресметај го интегралот: $I = \int\limits_0^\pi x|\cos x|dx$.

Решение. За $x \in [0, \pi/2]$ важи $\cos x \geq 0$, па $|\cos x| = \cos x$. За $x \in [\pi/2, \pi]$ важи $\cos x \leq 0$, па $|\cos x| = -\cos x$. Затоа, интегралот го претставуваме како збир од интегралите:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x|\cos x|dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x|\cos x|dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos xdx.$$

Со методот на интегрирање по делови ќе го пресметаме неопределениот интеграл:

$$\int x\cos x dx = \begin{pmatrix} u = x & dv = \cos x \\ du = dx & v = \sin x \end{pmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C .$$

Оттука, според формулата на Њутн-Лајбниц за определениот интеграл добиваме:

$$I = \left(x\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(x\sin x + \cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 - \left(\pi\sin\pi - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\frac{\pi}{2} - 1 - \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi .$$

Задача 5*. Пресметај го интегралот: $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}dx$.

Решение. Со смената $tg\frac{x}{2} = t$, од каде што $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ и $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, го пресметуваме неопределениот интеграл $\int \frac{1}{2+\sin x}dx$, на секој од интервалите $[0,\pi)$ и $(\pi,2\pi]$. Имаме:

$$\int \frac{1}{2+\sin x}dx = \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{2\frac{1+t^2+t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt =$$

$$\int \frac{1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1}dt = \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dt = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{2} = k \\ dt = dk \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{k^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2k}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C .$$

Тогаш, на интервалот $[0,2\pi]$, примитивните функции имаат облик:

$$F\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C_1,\ x\in\left[0,\pi\right) \text{ и}$$

$$F\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C_2,\ x\in\left(\pi,2\pi\right].$$

Бидејќи F се непрекинати, важи:

$$\lim_{x\to\pi^-}F(x)=\lim_{x\to\pi^+}F(x)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C_1=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C_2\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}arctg(+\infty)+C_1=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg(-\infty)+C_2\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+C_2$$

$$\Leftrightarrow C_2=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+C_1.$$

Ако земеме $C_1=C$, тогаш $C_2=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}+C$ и примитивните функции се:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}},\ x\in\left[0,\pi\right)\\[2ex] \dfrac{\pi}{\sqrt{3}},\ x=\pi\\[2ex] \dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}},\ x\in\left(\pi,2\pi\right]\end{cases}+C.$$

Се проверува дека F се диференцијабилни во π. Според формулата на Њутн-Лајбниц имаме:

$$I=F(x)\Big|_0^{2\pi}=F(2\pi)-F(0)=$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\pi+1}{\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg0+1}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

5.1.3. Оценка на определениот интеграл

Задача 1. Користејќи го неравенството $0 \le \sin x \le x$, кое важи за $x \ge 0$, докажи дека: $0 \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sin x dx \le \frac{1}{64}$.

Решение. Бидејќи $x^2 \sin x \ge 0$ за $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, следува:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sin x dx \ge \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dx = 0 .$$

Бидејќи $x^2 \sin x \le x^2 x = x^3$, следува:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \sin x dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 0\right) = \frac{1}{64} .$$

Задача 2. Покажи дека: $2 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4} dx \le \frac{8}{3}$.

Решение. Имаме: $1 \le 1+x^4 \le 1+2x^2+x^4 = \left(1+x^2\right)^2$, од каде што следува дека:

$$1 \le \sqrt{1+x^4} \le \sqrt{\left(1+x^2\right)^2} = 1+x^2 .$$

Оттука,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4} dx \ge \int_{-1}^{1} dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 \text{ и}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4} dx \le \int_{-1}^{1} \left(1+x^2\right) dx = \left.\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} =$$

$$1 - (-1) + \frac{1}{3}\left(1^3 - (-1)^3\right) = \frac{8}{3} .$$

5.1.4. Каде е грешката?

Задача 1. Каде е грешката?

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx \overset{1}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx \overset{2}{=} \begin{pmatrix} u = \dfrac{1}{\cos x} & dv = \sin xdx \\ du = \dfrac{1}{\cos^2 x}\sin xdx & v = -\cos x \end{pmatrix} \overset{3}{=}$$

$$-\frac{1}{\cos x}\cos x + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \frac{1}{\cos x^2 x}\sin xdx \overset{4}{=} -1 + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx .$$

Следува: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx \overset{5}{=} -1 + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$ односно $0 \overset{6}{=} -1$.

Решение. Грешката е во примената на методот на парцијалната интеграција во равенството (3). Треба да стои:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx \overset{1}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx \overset{2}{=} \begin{pmatrix} u = \dfrac{1}{\cos x} & dv = \sin xdx \\ du = \dfrac{1}{\cos^2 x}\sin xdx & v = -\cos x \end{pmatrix} \overset{3}{=}$$

$$-\frac{1}{\cos x}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \frac{1}{\cos x^2 x}\sin xdx \overset{4}{=} -1\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx =$$

$$-1-(-1) + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx .$$

Задача 2. Каде е грешката?

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^4} \overset{1}{=} \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}+1}dx \overset{2}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x^4} = t & x=-1 \Rightarrow t=1 \\ -\dfrac{4}{x^5}dx = dt & x=1 \Rightarrow t=1 \end{pmatrix} \overset{2}{=} \int_{1}^{1} \frac{t}{t+1}\frac{t^{-\frac{5}{4}}}{-4}dt = 0 .$$

Но, знаеме дека почетниот интеграл е поголем од нула затоа што подинтегралната функција е позитивна.

Решение. Грешката е во равенството (2). Од: $x^{-4}=t$ следува дека $x^4=t^{-1}$ од каде $x=-t^{-\frac{1}{4}}$ за $x<0$ и $x=t^{-\frac{1}{4}}$ за $x>0$. Затоа од $-\frac{4}{x^5}dx=dt$ следува: $dx=\frac{1}{4}t^{-\frac{5}{4}}dt$ за $x<0$ и $dx=-\frac{1}{4}t^{-\frac{5}{4}}dt$ за $x>0$.

Коментар. Смената не ги исполнува условите од теоремата за смена на променливи, ниту е непрекината ниту монотона на интервалот $\left[-1,1\right]$, но бидејќи несвојствениот интеграл $\int_1^{+\infty} dt\Big/\left(4\sqrt[4]{t}\left(t+1\right)\right)$ конвергира, условите во теоремата може да се модифицираат и теоремата да може да се примени.

Задача 3. Каде е грешката?

Знаеме дека ако $F(x)$ е примитивна функција за функцијата $f(x)$, $F'(x)=f(x)$, тогаш фундаменталната теорема на интегралното сметање гласи: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ (1).

Нека: $f(x)=\cos x$ и $F(x)=\sin x+5$ (2). Јасно, $F'(x)=f(x)$.

$$\text{Тогаш, } \int_a^x \cos t dt = F(x) \overset{3}{\Rightarrow} \sin x\Big|_a^x = \sin x+5 \overset{4}{\Rightarrow}$$

$$\sin x-\sin a=\sin x+5 \overset{5}{\Rightarrow} -\sin a=5$$

Но, $\sin a\in\left[-1,1\right]$.

Решение. Грешката е во заклучокот (2). Функцијата $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ е фиксна примитивна функција за функцијата $f(x)$ и не мора $F(x)=\sin x+5$. Всушност, $F(x)=\sin x-\sin a$.

5.2. НЕСВОЈСТВЕН ИНТЕГРАЛ

Несвојствен интеграл од прв тип

Задача 1. Пресметај го интегралот: $I=\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

Решение. Имаме: $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_0^x e^{-\sqrt{t}}dt$. Бидејќи:

$$\int\limits_0^x e^{-\sqrt{t}}dt=\begin{pmatrix} -\sqrt{t}=k & \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt=dk & \begin{matrix} t=x\Rightarrow k=-\sqrt{x} \\ t=0\Rightarrow k=0\end{matrix} \\ dt=2kdk & \end{pmatrix}=$$

$$2\int\limits_0^{-\sqrt{x}}ke^k dk=\begin{pmatrix} u=k & dv=e^k dk \\ du=dk & v=e^k\end{pmatrix}=$$

$$2\left(ke^k\Big|_0^{-\sqrt{x}}-\int\limits_0^{-\sqrt{x}}e^k dk\right)=2\left(-\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}-e^k\Big|_0^{-\sqrt{x}}\right)=$$

$$2\left(-\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}+1\right)=-2\left(\sqrt{x}+1\right)e^{-\sqrt{x}}+2;$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+1}{e^{\sqrt{x}}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{ЛП}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$, следува:

$$I=-2\cdot 0+2=2.$$

Задача 2. Докажи дека интегралот: $I=\int\limits_{-\infty}^0\dfrac{xdx}{x^2+2}$ дивергира.

Решение. Подинтегралната функција е интеграбилна на $\mathbb{R}$ и $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\int\limits_x^0\dfrac{tdt}{t^2+2}$. Притоа,

$$\int\limits_x^0\frac{tdt}{t^2+2}=\begin{pmatrix} t^2+2=k & \\ 2tdt=dk & \begin{matrix} t=0\Rightarrow k=2 \\ t=x\Rightarrow k=x^2+2\end{matrix} \\ tdt=dk/2 & \end{pmatrix}=$$

$$\int\limits_{x^2+2}^2\frac{dk}{2k}=\frac{1}{2}\ln|k|\Big|_{x^2+2}^2=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln\left(x^2+2\right)\right);$$

од каде што: $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2}\left(\ln 2-\ln\left(x^2+2\right)\right)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln 2-\ln\left(+\infty\right)\right)=-\infty$.

Следува дека интегралот дивергира.

Задача 3. Пресметај го интегралот: $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение. Функцијата $\frac{1}{x^2+1}$ е интеграбилна на $\mathbb{R}$. Ја избираме точката 0. Тогаш,

$$I = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \int\limits_{x}^{0} \frac{dt}{t^2+1}}_{I_1} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{t^2+1}}_{I_2}, \text{ каде што:}$$

$$I_1 = \lim_{x\to-\infty} arctgt\Big|_x^0 = \lim_{x\to-\infty}\left(arctg0 - arctgx\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ и}$$

$$I_2 = \lim_{x\to+\infty} arctgt\Big|_0^x = \lim_{x\to+\infty}\left(arctgx - arctg0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Следува: $I = I_1 + I_2 = \pi$.

Несвојствен интеграл од втор тип

Задача 4. Пресметај го интегралот: $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Решение. Функцијата $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ е непрекината во секоја точка од интервалот $(0,1]$. Следува дека функцијата е интеграбилна на секој интервал $[x,1]$, каде $0 < x < 1$. Затоа,

$$I = \lim_{x\to0^+} \int\limits_{x}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \lim_{x\to0^+} \int\limits_{x}^{1} t^{-\frac{1}{3}} dt = \lim_{x\to0^+} \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}}\Bigg|_x^1 = \frac{3}{2} \lim_{x\to0^+} \sqrt[3]{t^2}\Bigg|_x^1 = \frac{3}{2} \lim_{x\to0^+}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Следува дека интегралот конвергира и неговата сума е: $\frac{3}{2}$.

Задача 5. Докажи дека интегралот $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x} dx$ дивергира.

Решение. Функцијата $\frac{1}{x}$ е непрекината на интервалот $(0,1]$ и неограничена во околина на 0. Следува:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\frac{1}{t}dt=\lim_{x\to 0^+}\ln t\Big|_x^1=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln 1-\ln x\right)=-\left(-\infty\right)=+\infty .$$

Задача 6. Пресметај го интегралот: $I=\int_0^2\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$.

Решение. Подинтегралната функција е непрекината на интервалот $(0,2)$ и е неограничена во околина на крајните точки 0 и 2, бидејќи:

$$2x-x^2=0\Leftrightarrow x(2-x)=0\Leftrightarrow x=0,\ x=2 .$$

Избираме точка од интервалот $(0,2)$, на пример 1. Тогаш,

$$I=\int_0^1\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx+\int_1^2\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\int_0^x\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}dt}_{I_1}+\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\int_x^2\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}dt}_{I_2} .$$

Заради

$$\int\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}dt=\left(\begin{array}{c}2t-t^2=k\\ (2-2t)dt=dk\\ (1-t)dt=dk/2\end{array}\right)=\int\frac{dk}{2\sqrt{k}}=\sqrt{k}+C=\sqrt{2t-t^2}+C ,$$

имаме:

$$I_1=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2t-t^2}\Big|_x^1=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)=1 \text{ и}$$

$$I_2=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2t-t^2}\Big|_1^x=\lim_{x\to 2^-}\left(\sqrt{2x-x^2}-1\right)=-1$$

Следува дека интегралот I конвергира и: $I=I_1+I_2=0$.

Задача 7. Каде е грешката во следниве равенства?

$$\int_{-1}^1\frac{1}{x}dx\overset{(1)}{=}\ln|x|\Big|_{-1}^1\overset{(2)}{=}\ln|1|-\ln|-1|\overset{(3)}{=}0 .$$

Решение. Грешката е во првото равенство. Не може да се примени формулата на Њутн Лајбниц, бидејќи се работи за несвојствен интеграл.

Правилната постапка би била следна. Функцијата $\frac{1}{x}$ неограничено расте близу точката 0, па

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx.$$

Бидејќи:

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx=\lim_{x\to 0^-}\int_{-1}^{x}\frac{1}{t}dt=\lim_{x\to 0^-}\ln|t|\Big|_{-1}^{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\ln|x|-\ln|-1|\right)=\lim_{x\to 0^-}\ln|x|=-\infty,$$

следува дека и интегралот $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ дивергира.

Коментар. Нема потреба да го дискутираме интегралот $\int_{0}^{1}\frac{1}{x}dx$, иако и тој, исто така, дивергира.

Задача 8. Пресметај го интегралот $\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Подинтегралната функција неограничено расте во близина на точките $-a$ и a. Од интервалот $(-a,a)$ ја избираме точката 0. Следува: $I=\underbrace{\int_{-a}^{0}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}_{I_1}+\underbrace{\int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}_{I_2}$ и

$$I_1=\lim_{x\to -a^+}\int_{x}^{0}\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=\lim_{x\to -a^+}\arcsin\frac{t}{a}\Big|_{x}^{0}=$$

$$\lim_{x\to -a^+}\left(\arcsin 0-\arcsin\frac{x}{a}\right)=\lim_{x\to -a^+}\left(-\arcsin\frac{x}{a}\right)=-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}\text{ и}$$

$$\int_{0}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{x\to a^-}\int_{0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=\lim_{x\to a^-}\arcsin\frac{t}{a}\Big|_{0}^{x}=$$

$$\lim_{x\to a^-}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\arcsin 0\right)=\lim_{x\to a^-}\arcsin\frac{x}{a}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

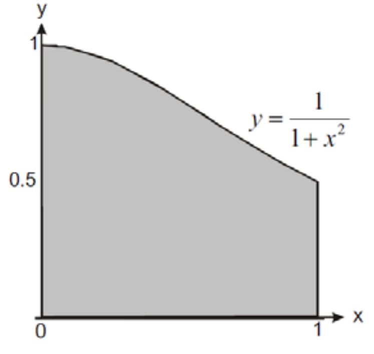
Следува: $I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.

5.3-5.6. ПРИМЕНА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

5.3. ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКА ФИГУРА

5.3.1. Плоштина на фигурата што лежи меѓу графици од експлицитно зададени функции

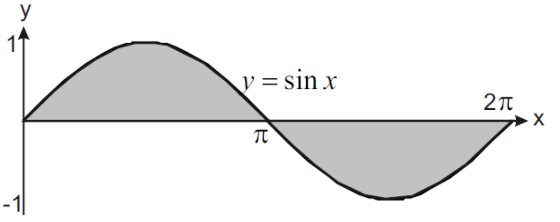
Задача 1. Пресметај ја плоштината на криволинискиот трапез ограничен со: x-оската, правите $x=0$, $x=1$ и функцијата
$$y=\frac{1}{1+x^2}.$$



Решение. Функцијата
$$y=\frac{1}{1+x^2},\ x\in[0,1]$$
е ненегативна. Прво ја скицираме фигурата чија плоштината ја бараме. Плоштината на криволинискиот трапез ограничен со x-оската, правите $x=0$, $x=1$ и функцијата $y=\frac{1}{1+x^2}$ е определениот интеграл на функцијата y, со граници на интеграција $x=0$ и $x=1$, односно:
$$P=\int_a^b y(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=arctgx\Big|_0^1=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}.\blacksquare$$

Задача 2. Пресметај го ликот ограничен со x-оската и функцијата $y=\sin x$, $x\in[0,2\pi]$.

Решение. Функцијата $y=\sin x$ е ненегативна на интервалот $[0,\pi]$. Затоа, плоштината на делот од ликот на интервалот $[0,\pi]$ е определениот интеграл на функцијата $y=\sin x$ во граници од $x=0$ до $x=\pi$. Функцијата $y=\sin x$ е непозитивна на интервалот $[\pi,2\pi]$. Затоа, плоштината на делот од ликот на интервалот $[\pi,2\pi]$ е спротивна на определениот интеграл на функцијата $y=\sin x$ во граници од $x=\pi$ до $x=2\pi$.



Следува:

$$P=\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}-\left(-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=$$

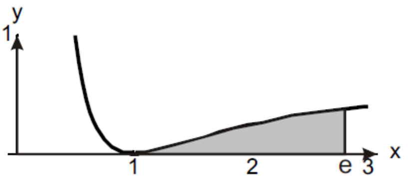
$$-(\cos\pi-\cos 0)+\cos 2\pi-\cos\pi=4\,.$$

Втор начин. Имајќи предвид дека плоштините на деловите од ликот на интервалите $[0,\pi]$ и $[\pi,2\pi]$ се еднакви, плоштината на ликот може да ја најдеме како удвоен производ од плоштината на делот од ликот на интервалот $[0,\pi]$, односно:

$$P=2\int_0^{\pi}\sin x dx=2\left(-\cos x\Big|_0^{\pi}\right)=-2(\cos\pi-\cos 0)=4\,.$$

Задача 3. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите: $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$, $x=e$, $y=0$.

Решение. Апцисата на пресечната точка на кривата $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ со x-оската е решение на равенката:

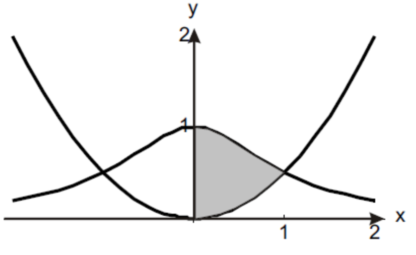


$0=\dfrac{\ln^2 x}{x}\Leftrightarrow \ln^2 x\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

Кривите кои ја заградуваат фигурата, се прикажани на цртежот. Плоштината на фигурата ќе ја пресметаме по формулата: $P=\int_a^b y(x)dx$, каде $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ и $x\in[1,e]$. Имаме:

$$P=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx=\begin{pmatrix} t=\ln x & x=e\Rightarrow t=\ln e=1\\ dt=\dfrac{1}{x}dx & x=1\Rightarrow t=\ln 1=0\end{pmatrix}=\int_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\,.$$

Задача 4. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривите: $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и $y=\dfrac{x^2}{2}$.



Решение. За да ги определиме границите на интеграција, го бараме пресекот на кривите $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и $y=\dfrac{x^2}{2}$, со кои е ограничен ликот. Апсцисите на пресечните точки се решение на равенката:

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 2=x^2+x^4 .$$

Со смената $x^2=t$, равенката ја сведуваме на квадратната равенка:

$$2-t-t^2=0 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow$$

$$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow t_1=1,\ t_2=-2 .$$

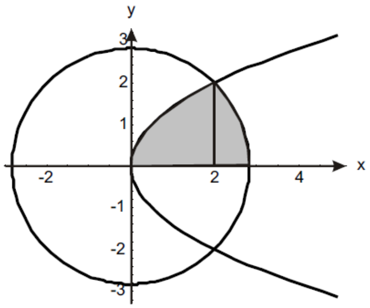
Равенката $x^2=-2$ нема решение, а решенија на равенката $x^2=1$ се $x=-1$ и $x=1$. Ја скицираме кривата. Плоштината на ликот е разлика на плоштините на криволиниските трапези формирани од кривите: $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и $y=\dfrac{x^2}{2}$.

Поради парноста на функциите $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ и $y=\dfrac{x^2}{2}$, плоштината на ликот е два пати поголема од плоштината на делот ликот што го добиваме за $x\in[0,1]$, односно:

$$P=2\int_a^b \left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx=2\left(\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx\right)=$$

$$2\left(\left.\left(arctgx-\frac{x^3}{6}\right)\right|_0^1\right)=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3} .\blacksquare$$

Задача 5. Пресметај ја плоштината на помалата фигура ограничена со параболата $y^2 = 2x$ и кружницата $x^2 + y^2 = 8$.



Решение. Апсцисите на пресечните точки на кривите $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$ ги исполнуваат условите $x \geq 0$ и

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 2 .$$

Значи, пресечните точки имаат апциси $x = 2$. Фигурата е два пати поголема од делот што лежи во првиот квадрант. Плоштината на делот од фигурата за $x \in [0,2]$ е определениот интеграл на функцијата $y = \sqrt{2x}$, а за $x \in \left[2, 2\sqrt{2}\right]$ на функцијата $y = \sqrt{8 - x^2}$. Затоа, плоштината на фигурата е:

$$P = 2\int_a^b y(x)\,dx = 2\left(\underbrace{\int_0^2 \sqrt{2x}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}dx}_{I_2}\right),$$

каде што:

$$I_1 = \sqrt{2}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}2\sqrt{2} = \frac{8}{3} \text{ и}$$

$$I_2 = \left(\begin{array}{ll} x = 2\sqrt{2}\sin t, & x = 2 \Rightarrow 2 = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ dx = 2\sqrt{2}\cos t dt & x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right) =$$

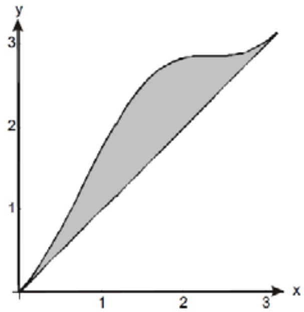
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8}\sqrt{\cos^2 t}\sqrt{8}\cos t dt = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)=4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\pi-2\,.$$

Следува: $P=2\left(\frac{8}{3}+\pi-2\right)=\frac{4}{3}+2\pi$.

Задача 6. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривите: $y=x$ и $y=x+\sin^2 x$, $x\in[0,\pi]$.

Решение. Ликот е ограничен со две функции, такви што $x+\sin^2 x\ge x$ за $x\in[0,\pi]$. Следува:

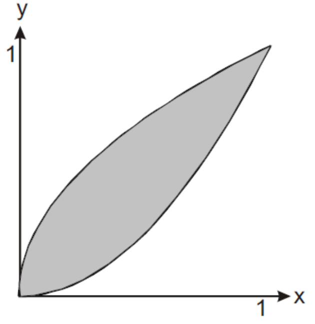


$$P=\int_a^b\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx=$$

$$\int_0^\pi\left(x+\sin^2 x-x\right)dx=\int_0^\pi\sin^2 x dx=$$

$$\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi\right)=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{1}{2}(\sin 2\pi-\sin 0)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Задача 7. Пресметај ја плоштината на ликот кој лежи меѓу кривите: $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.



Решение. Плоштината на ликот ќе ја пресметаме со формулата:

$$P=\int_a^b(y_2(x)-y_1(x))dx,\text{ за } y_2\ge y_1 \text{ на } [a,b].$$

Пресекот на двете криви е во точките кои се решение на системот равенки $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, односно чии x-координати за $x\ge 0$, се решение на равенката:

$$x^2=\sqrt{x}\overset{x\ge 0}{\Leftrightarrow}x^4=x\Leftrightarrow x^4-x=0\Leftrightarrow$$

$$x\left(x^3-1\right)=0 \Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=0\,,x=1\,.$$

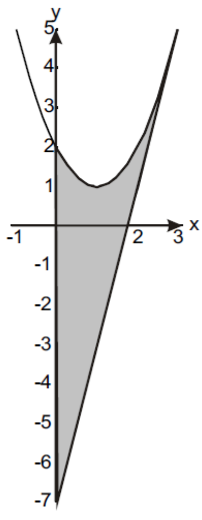
На интервалот $[0,1]$, важи $\sqrt{x} \geq x^2$, односно графикот на функцијата $y=\sqrt{x}$ е над графикот на $y=x^2$. Затоа, $y_2(x)=\sqrt{x}$ и $y_1(x)=x^2$.

Следува: $P=\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Задача 8. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со параболата $y=x^2-2x+2$, нејзината тангента во точката $M(3,5)$ и y-оската.

Решение. Имајќи предвид дека првиот извод $y'=2x-2$ и $y'(3)=4$, тангената на параболата во точката M има равенка:

$$y-y_0=y_0'\left(x-x_0\right) \Leftrightarrow y-5=4(x-3) \Leftrightarrow$$
$$y-5=4x-12 \Leftrightarrow y=4x-7\,.$$



Параболата ја сече y- оската во точка со апциса $x=0$, а тангентата ја допира во точката со апциса $x=3$. Според тоа плоштината на фигурата се наоѓа меѓу графиците на функциите: $y=x^2-2x+2$ и $y=4x-7$ за $x\in[0,3]$. Следува:

$$P=\int\limits_a^b\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx=\int\limits_0^3\left(x^2-2x+2-(4x-7)\right)dx=$$

$$\int\limits_0^3\left(x^2-6x+9\right)dx=\int\limits_0^3(x-3)^2\,dx=$$

$$\begin{pmatrix} t=x-3 & x=0\Rightarrow t=-3 \\ dt=dx & x=3\Rightarrow t=0 \end{pmatrix}=\int\limits_{-3}^0 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_{-3}^0=-\frac{(-3)^3}{3}=9\,.$$

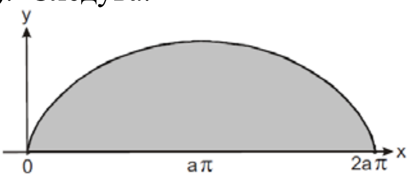
5.3.2. Плоштина на фигура ограничена со параметарски зададени криви

Задача 1. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со еден лак на циклоидата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ и x- оската.

Решение. Имајќи предвид дека:

$$y = 0 \Leftrightarrow 1-\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

еден лак на циклоидата се добива за: $t \in [0,2\pi]$. Притоа, најлевата точка на лакот на циклоидата се добива за: $t = 0$, а најдесната за $t = 2\pi$ (види цртеж). Следува:



$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,dt = \left(\dot{x}(t) = a(1-\cos t)\right) = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt =$$

$$a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt$$

$$= a^2\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt\right) =$$

$$a^2\left(2\pi + \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) = a^2(2\pi+\pi) = 3a^2\pi\ .\blacksquare$$

Задача 2. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

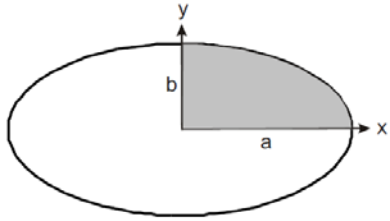
Решение. Дадената крива е елипса чија равенка ќе ја запишеме во параметарски облик: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0,2\pi]$. Плоштината на фигурата е 4 пати поголема од плоштината на делот на фигурата што се наоѓа во првиот квадрант. Пресечната точка на елипсата со y-оската ја добиваме за:

$$0 = a\cos t \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2},$$

а со x-оската:

$$0 = a\sin t \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Затоа, долната граница на интеграција е: $t = \frac{\pi}{2}$, а горната: $t = 0$.



Тогаш, плоштината на делот од рамнината ограничен со елипсата е:

$$P = 4\int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot a(-\sin t)\,dt =$$

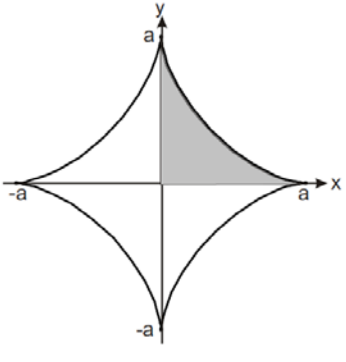
$$4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

$$2ab\left(\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right) = ab\pi.$$

Коментар. 1) Изводот $\dot{x} \neq 0$ и $\dot{x}$ е непрекинатата на $(0, 2\pi)$, што значи дека кривата се исцртува само еднаш без запирање и непрекинато, односно формулата за плоштина на параметарски зададената крива може да се примени. Бидејќи $\dot{x} < 0$, исцртувањето оди од десно кон лево што доведува границите на интеграција да одат од поголема кон помала вредност, ако се има предвид дека формулата е изведена од формулата за плоштината на криволиниски трапез на график на експлицитно зададена функција, $P = 4\int_{a}^{b} y(x)dx$ при $a < b$ и $y \geq 0$, во која е воведена смената $x = x(t)$. Можевме директно ја примениме формулата за плоштина на криволиниски трапез на параметарски зададена функција, $P = 4\int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\,dt$, која важи кога $y \geq 0$ и $\dot{x} > 0$ на (t_1, t_2), $t_1 < t_2$; а при $\dot{x} < 0$ плоштината е спротивна на определениот интеграл, т.е.:

$$P = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\dot{x}(t)\,dt = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t \cdot a(-\sin t)\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt .$$

Задача 3. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со астроидата: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.



Решение. Ќе ја претставиме астроидата во параметарски облик: $x = a\cos^3 t$, $\quad y = a\sin^3 t$, $\quad t \in [0, 2\pi]$. Поради симетрија на астроидата во однос на x и y-оските, плоштината на фигурата ограничена со астроидата е 4 пати поголема од делот од фигурата што се наоѓа во прв квадрант, кој е обоен на цртежот. Долната граница се добива за $x = 0$, односно за:

$$0 = a\cos^3 t \Leftrightarrow \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2},$$

а горната граница за: $x = a$, односно за:

$$a = a\cos^3 t \Leftrightarrow \cos t = 1 \Leftrightarrow t = 0 .$$

Го пресметуваме: $\dot{x} = 3a\cos^2 t(-\sin t)$, од каде што:

$$P = 4\int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a(\sin^3 t)3a\cos^2 t(-\sin t)dt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t dt .$$

Последниот интеграл ќе го решиме со снижување на редот на подинтегралната функција и со помош на идентитетот $\cos a\cos a = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$. Имено,

$$\sin^4 t\cos^2 t = \sin^2 t(\sin t\cos t)^2 = \frac{1-\cos 2t}{2}\frac{\sin^2 2t}{4} =$$

$$\frac{1}{8}(1-\cos 2t)\frac{1-\cos 4t}{2} = \frac{1}{16}(1-\cos 4t - \cos 2t + \cos 2t\cos 4t) =$$

$$\frac{1}{16}\left(1-\cos 4t-\cos 2t+\frac{1}{2}\left(\cos 6t+\cos 2t\right)\right).$$

Следува:

$$P=\frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4t-\cos 2t+\frac{1}{2}\left(\cos 6t+\cos 2t\right)\right)dt=$$

$$\frac{3}{4}a^2\left(t-\frac{\sin 4t}{4}-\frac{\sin 2t}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6t}{6}+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

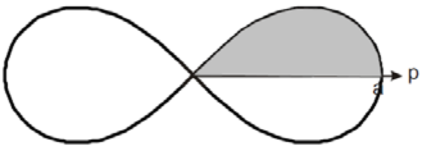
$$=\frac{3}{4}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\left(\sin 2\pi-\sin 0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3\pi \sin 0}{6}-\frac{\sin\pi-\sin 0}{2}\right)\right)=\frac{3}{8}a^2\pi .$$

5.3.3. Плоштина на а ограничена со криви зададени со поларни координати

Задача 1. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата: $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

Решение. Ја скицираме фигурата.

Според формулата $P=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi$, ќе ја пресметаме плоштината на делот од фигурата што ја добиваме за $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, и е 4 пати помала од плоштината на целата фигура.



Тогаш,

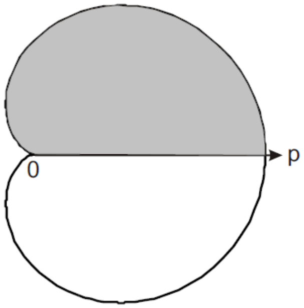
$$P=4\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\sin\frac{\pi}{2}=a^2 .$$

Задача 2. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата: $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Решение. Дадената крива е кардиоида (види цртеж). Плоштината на фигурата е два пати поголема од делот што се наоѓа во горната полурамнина. Според тоа,

$$P = 2\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2 d\varphi =$$

$$a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$



$$a^2\left(\left(\varphi+2\sin\varphi\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right)=$$

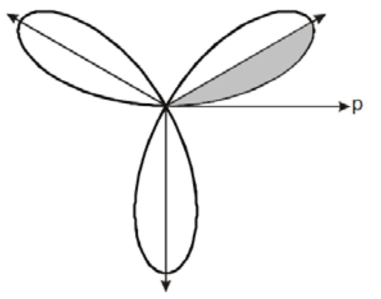
$$a^2\left(\pi+\frac{1}{2}\left(\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi}\right)\right)=$$

$$a^2\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3a^2\pi}{2}.$$

Задача 3. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата: $\rho = a\sin 3\varphi$.

Решение. Дадената крива е трилисна детелина,

Бидејќи делот од ликот што се добива за: $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$, е 6 пати помал од бараниот лик, неговата плоштина е:



$$P = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\rho^2 d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\sin^2 3\varphi d\varphi =$$

$$3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi = \frac{3a^2}{2}\left(\left(\varphi-\frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=$$

$$\frac{3a^2}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\left(\sin\pi-\sin 0\right)\right)=\frac{3a^2\pi}{12}=\frac{a^2\pi}{4}.$$

5.4. ДОЛЖИНА НА ЛАК НА КРИВА

5.4.1. Должина на лак на кривата од експлицитно зададени функции

Задача 1. Пресметај ја должината на лакот на кривата: $y=\ln x-\frac{x^2}{8}$ за $x\in[1,2]$.

Решение. Должината на лакот на кривата ќе ја пресметаме според формулата: $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$, каде што $a=1$, $b=2$, изводот $y'=\frac{1}{x}-\frac{x}{4}$ и коренскиот израз е:

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}}=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)^2}\overset{x>0}{=}\frac{1}{x}+\frac{x}{4}.$$

Следува: $l=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)dx=\left(\ln x+\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\ln 2+\frac{1}{8}(4-1)=\ln 2+\frac{3}{8}$.

Задача 2. Пресметај ја должината на лакот од кривата $y=\ln\sin x$ меѓу точките со апциси $x=\frac{\pi}{3}$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Имаме: $l=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^2}\,dx$, каде $y'=\frac{\cos x}{\sin x}$ и

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{1}{|\sin x|}\overset{\sin x\geq 0}{=}\frac{1}{\sin x}.$$

Следува: $l=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$, каде $\int\frac{1}{\sin x}dx$ го решаваме со смената:

$$tg\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$ Имаме:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|tg\frac{x}{2}| + C$$. Оттука,

$$l = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|tg\frac{\pi}{6}\right| =$$

$$\ln 1 - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = -\ln\left(\sqrt{3}\right)^{-1} = \ln\sqrt{3} = \frac{\ln 3}{2}.$$

Задача 3. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

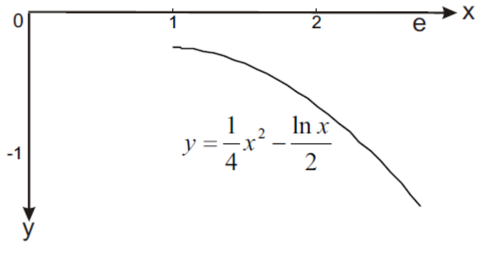
$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\ln x}{2}$$

од точката со апциса $x = 1$ до точката со апциса $x = e$.

Решение. Изводот $y' = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, а поткореновиот израз за $x \in [1, e]$ е:

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|x+\frac{1}{x}\right| \overset{x\geq 0}{=} \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right).$$



Следува дека должината на лакот на кривата е:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\Bigg|_1^e =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \ln e - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

Задача 4. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$$y=2\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right) \text{ од } x=0 \text{ до } x=4.$$

Решение. Изводот на функцијата y е:

$$y'=2\left(e^{\frac{x}{4}}\frac{1}{4}+e^{-\frac{x}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}}\right),$$

а поткореновиот израз:

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}}\right)\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}-2+e^{-\frac{x}{2}}\right)}=$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}+2+e^{-\frac{x}{2}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right).$$

Следува дека должината на лакот на кривата е:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)dx=\frac{1}{2}\left(4e^{\frac{x}{4}}-4e^{-\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$2\left(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^4=2\left(e-1-\left(e^{-1}-1\right)\right)=2\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

Задача 5. При скок во далечина атлетичарот се движи по делот од кривата: $y=-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{2}$ за $x\in[0,8]$. Пресметај ја должината на лакот на кривата образувана додека атлетичарот е во скок.

Решение. Од каноничната равенка на параболата:

$$y=-\frac{1}{16}\left(x^2-8x\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{16}\left((x-4)^2-16\right)\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{16}(x-4)^2,$$

следува дека атлетичарот се движи по парабола со теме во $T(4,1)$.

Затоа, должината на лакот на кривата е двапати поголема од должината на лакот на кривата што се добива додека променливата x се движи од 0 до 4.

За да ја пресметаме должината потребен е првиот извод:

$$y' = -\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\text{ . Оттука,}$$

$$l = 2\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx = 2\int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\right)^2}dx = \left(\begin{matrix} \frac{x}{8}-\frac{1}{2}=t & x=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2} \\ \frac{dx}{8}=dt & x=4 \Rightarrow t=0 \end{matrix}\right) =$$

$$2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{1+t^2}\ 8dt = 16\left(\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0}\right) =$$

$$16\left(0 + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln\left|\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right|\right)\right) =$$

$$16\left(\frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) = 2\sqrt{5} - 8\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Задача 6. Пресметај ја должината на кривата зададена со равенката: $y = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$, каде што: $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Имаме: $l = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+y'^2}dx$, каде што: $y' = \sqrt{\cos x}$ и

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$$

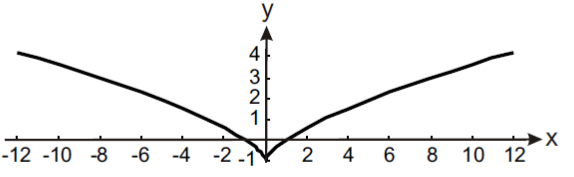
Следува:

$$l = \sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4.$$

Задача 7. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$$x^2 = (y+1)^3,\ y \in [-1, 4].$$

Решение. Од $x^2 = (y+1)^3$ имаме дека: $x = \pm (y+1)^{\frac{3}{2}}$, од каде што: $x' = \pm \frac{3}{2}(y+1)^{\frac{1}{2}}$. Должината на лакот е 2 пати поголема од должината на делот од лакот што се добива за $x > 0$.



$$l = 2\int_a^b \sqrt{1+x'^2}\,dy = 2\int_{-1}^{4} \sqrt{1+\frac{9}{4}(y+1)}\,dy = 2\int_{-1}^{4} \sqrt{\frac{9}{4}y+\frac{13}{4}}\,dy =$$

$$\left(\begin{array}{ll} t^2 = \frac{9}{4}y + \frac{13}{4}, t>0 & y=-1 \Rightarrow t^2 = -\frac{9}{4}+\frac{13}{4} \Rightarrow t=1 \\ 2tdt = \frac{9}{4}dy & y=4 \Rightarrow t^2 = \frac{36}{4}+\frac{13}{4} = \frac{49}{4} \Rightarrow t = \frac{7}{2} \end{array} \right) =$$

$$2\int_1^{\frac{7}{2}} t\frac{8t}{9}dt = \frac{16}{9}\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^{\frac{7}{2}} = \frac{16}{27}\left(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1\right) = \frac{16}{27}\frac{343-8}{8} = \frac{670}{27}.$$

5.4.2. Должина на лакот на кривата зададена со параметарски равенки

Задача 1. Пресметај ја должината на лакот на кривата:

$$x = \frac{t^6}{6},\ y = 2 - \frac{t^4}{4},\ t \in [0,1].$$

Решение. Изводите по параметарот t се: $\dot{x} = t^5$ и $\dot{y} = -t^3$.

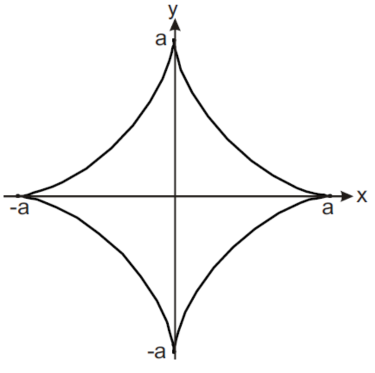
Следува: $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t^{10}+t^6}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t^6(1+t^4)}\,dt =$

$$\int_0^1 |t|^3 \sqrt{1+t^4}\,dt = \int_0^1 t^3\sqrt{1+t^4}\,dt = \left(\begin{array}{ll} 1+t^4 = k & t=0 \Rightarrow k=1 \\ 4t^3dt = dk & t=1 \Rightarrow k=2 \end{array} \right) =$$

$$\frac{1}{4}\int_1^2 \sqrt{k}\,dk = \frac{1}{4}\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Задача 2. Пресметај ја должината на лакот на астроидата:
$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Решение. Должината на астроидата е 4 пати поголема од должината на делот од астроидата што се наоѓа во првиот квадрант, односно за $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Затоа, $l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$. Притоа,



$\dot{x} = -3a\cos^2 t\sin t$, $\dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t$; и

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} =$$

$$\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t} =$$

$$3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} =$$

$$3a\left|\sin t\cos t\right| = 3a\sin t\cos t;$$

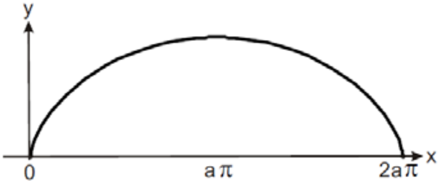
од каде што:

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t\,dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{2}\,dt =$$

$$6a\left(\frac{-\cos 2t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -3a\left(\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -3a(\cos\pi - \cos 0) = 6a. \blacksquare$$

Задача 3. Пресметај ја должината на еден лак на циклоидата: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Еден лак на циклоидата се добива ако: $t \in [0, 2\pi]$.



Следува: $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$ каде што:

$$\dot{x} = a\left(1 - \cos t\right), \dot{y} = a\sin t \text{ и}$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2\left(1 - \cos t\right)^2 + a^2\sin^2 t} =$$

$$a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} = a\sqrt{2\left(1-\cos t\right)} =$$

$$a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2}, \text{ па}$$

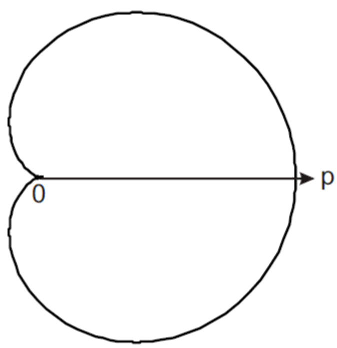
$$l = 2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = -4a\left(\cos\pi-\cos 0\right) = 4a\left(-1-1\right) = 8a .$$

5.4.3. Должина на лакот на кривата зададена со поларни координати

Задача 1. Пресметај ја должината на лакот на кардиоидата:

$$\rho = a\left(1+\cos\varphi\right), \varphi\in\left[0,2\pi\right], a>0 .$$

Решение. Должината на лакот на кардиоидата е 2 пати поголема од делот на кардиоидата што се наоѓа во горната полурамнина, односно за $\varphi\in\left[0,\pi\right]$. Следува:



$$l = 2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi \text{ , каде што:}$$

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2} =$$

$$\sqrt{a^2\left(1+\cos\varphi\right)^2+a^2\sin^2\varphi d\varphi} =$$

$$\sqrt{a^2\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} = a\sqrt{2+2\cos\varphi} = a\sqrt{2\left(1+\cos\varphi\right)} =$$

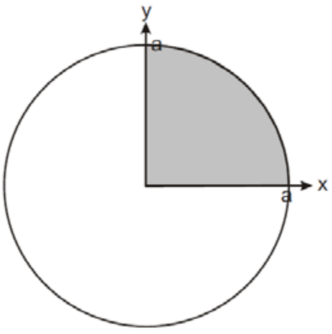
$$a\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 2a\cos\frac{\varphi}{2} .$$

Оттука,

$$l = 2\cdot 2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = 8a\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right) = 8a .$$

Задача 2. Пресметај ја должината на кружницата:

$$x^2+y^2 = a^2 .$$



Решение. Должината на кружницата е 4 пати по делот од кружницата што се наоѓа во првиот квадрант.

I начин. Долната граница е $x = 0$, а горната $x = a$. Првиот извод y' на функцијата $y = y(x)$ се наоѓа со диференцирање на равенката $x^2 + y^2 = a^2$ по променливата x, односно:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow x + yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Првиот извод можеме да го добиеме и со изразување на y од равенката: $x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow y^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$.

Графикот на функцијата $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ го исцртува горниот лак на кружницата, а на $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ долниот лак. Бидејќи го пресметуваме делот од кружницата што се наоѓа во првиот квадрант, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Добиваме:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ за } x \in (-a, a) \text{ и}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Сега,

$$l = 4\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = 4a \lim_{y \to a} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$\begin{pmatrix} x = a\sin t & x = y \Rightarrow y = a\sin t \Rightarrow \sin t = \dfrac{y}{a} \Rightarrow t = \arcsin\dfrac{y}{a} \\ dx = a\cos t\,dt & x = 0 \Rightarrow 0 = a\sin t \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \multicolumn{2}{l}{\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\left(1 - \sin^2 t\right)} = a\sqrt{\cos^2 t} \overset{\cos t \geq 0}{=} a\cos t} \end{pmatrix} =$$

$$4a \lim_{y \to a} \int_0^{\arcsin\frac{y}{a}} \frac{a\cos t\,dt}{a\cos t} = 4a \lim_{y \to a} \int_0^{\arcsin\frac{y}{a}} dt = 4a \lim_{y \to a}\left(\arcsin\frac{y}{a}\right) =$$

$$4a\arcsin\frac{a}{a}=4a\frac{\pi}{2}=2a\pi\ .$$

Втор начин. Несвојствениот интеграл може да го избегнеме ако ја пресметаме должината на кружницата од точката $(0,a)$, до точката $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2},\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Вкупната должина на кружницата е 8 пати поголема од претходниот сегмент, односно:

$$l=8\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx=8\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$\left(\begin{array}{ll} x=a\sin t & x=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{a\sqrt{2}}{2}=a\sin t\Rightarrow\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \\ dx=a\cos tdt & x=0\Rightarrow 0=a\sin t\Rightarrow\sin t=0\Rightarrow t=0\end{array}\right)=$$

$$8a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a\cos tdt}{a\cos t}=8a\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=8at\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=8a\frac{\pi}{4}=2a\pi\ .$$

Трет начин. Ако преминеме во параметарски запис на равенката на кружницата $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, тогаш пресметките значително ќе се олеснат. Долната граница ќе биде точката $t=0$, а горната $t=\frac{\pi}{2}$. Тогаш, должината на кружницата е:

$$l=4\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}dt=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=2a\pi\ .$$

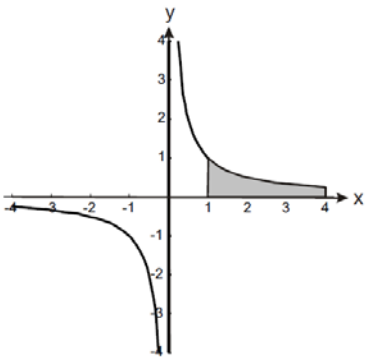
Четврт начин. Задачата може да се реши и со премин во поларни координати $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогаш, $x^2+y^2=\rho^2$, од каде што равенката на кружницата во поларни координати е $\rho=a$. Оттука, нејзината должина е:

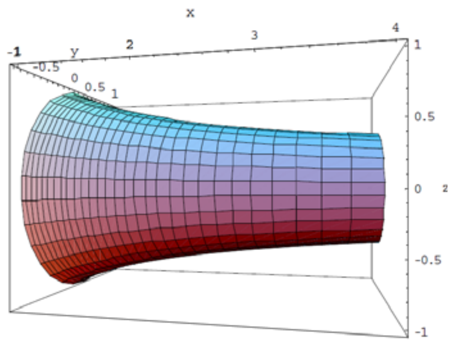
$$l=4\int_{\phi_1}^{\phi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\phi=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2+0}\,d\varphi=4a\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2a\pi\ .$$

5. 5. ВОЛУМЕН НА РОТАЦИОНО ТЕЛО

Задача 1. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x-оската на делот од рамнината ограничен со кривите: $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

Решение. Прво ја скицираме фигурата која ротира околу x-оската. Функцијата $y=\frac{1}{x}$ е хипербола чии асимптоти се x-оската и y-оската. Потоа, го скицираме телото чиј волумен се бара. Во најголем број случаи оваа постапка не е неопходна, но сепак дава поголема претстава на зададениот проблем.



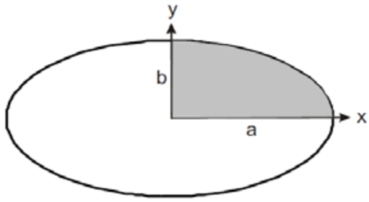


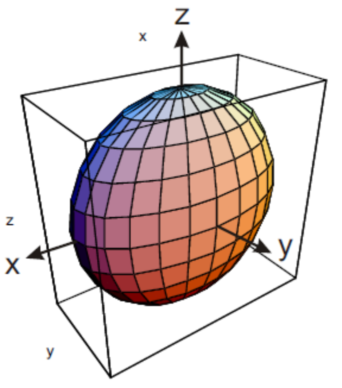
Волуменот на телото го пресметуваме по формулата: $V=\pi\int_a^b y^2dx$, каде што: $y=\frac{1}{x}$, долната граница на интегралот е: $x=1$ и горната: $x=4$. Следува:

$$V=\pi\int_1^4 \frac{1}{x^2}dx=\pi\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^4\right)=\pi\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{3\pi}{4}.\blacksquare$$

Задача 2. Пресметај го волуменот на ротационото тело добиено со ротација на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ околу y-оската.

Решение. Ја скицираме елипсата. Со ротација на елипсата се формира затворена површина, која го ограничува елипсоидот со полуоски a, b и a. На вториот цртеж е даден елипсоидот што се добива ако: $a=2$ и $b=1$.





Имаме: $V=\pi\int_{-b}^{b}x^2dy$. Од равенката на елипсата го наоѓаме: $x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$. Значи,

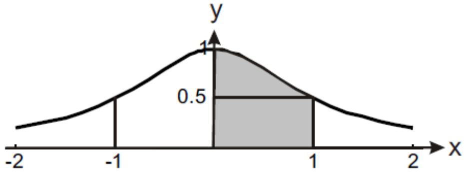
$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\ \pi a^2\left(\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_{-b}^{b}\right)=$$

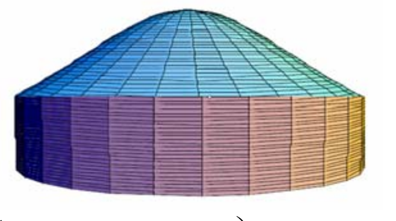
$$\pi a^2\left(b+b-\frac{1}{3b^2}\left(b^3+(-b)^3\right)\right)=\pi a^2\left(2b-\frac{2b}{3}\right)=\pi a^2\frac{4b}{3}=\frac{4a^2b\pi}{3}.$$

Задача 3. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу y-оската на телото ограничено со кривата:

$$y=\frac{1}{1+x^2} \text{ и правите } x=-1,\ x=1,\ y=0.$$

Решение. Од равенката на кривата следува: $x^2=\frac{1}{y}-1$. Волуменот на ротационото тело, што е збир од волуменот на телото што се добива со ротација околу y-оската на правата $x=1$, за $y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и на телото што се добива со ротација околу y-оската на кривата $x^2=\frac{1}{y}-1$, за $y\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. На цртежите е скицирана фигурата со чија ротација се добива ротационото тело, како и самото тело. Следува:





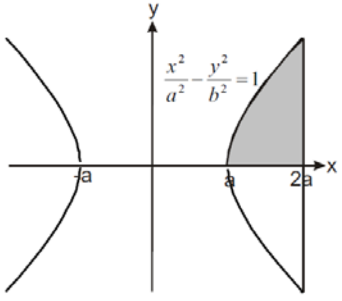
$$V=\pi\left(\int_{y_1}^{y_2} x_1^{\,2}dy+\int_{y_3}^{y_4} x_2^{\,2}dy\right)=\pi\left(\int_0^{\frac12} dy+\pi\int_{\frac12}^{1}\left(\frac{1}{y}-1\right)dy\right)=$$

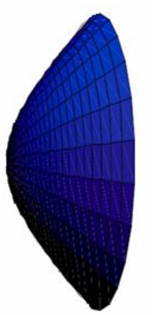
$$\pi\left(y\Big|_0^{\frac12}+\left(\ln|y|-y\right)\Big|_{\frac12}^{1}\right)=\pi\left(\frac12-\ln\frac12-\frac12\right)=\pi\left(-\ln 2^{-1}\right)=\pi\ln 2\,.$$

Задача 4. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x-оската на фигурата ограничена со хиперболата:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и правата } x=2a\,.$$

Решение. Од равенката на хиперболата имаме дека: $y^2=b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}-1\right)$.





Следува дека волуменот на ротационото тело е:

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2dx=\pi\int_a^{2a} b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)dx=b^2\pi\frac{1}{a^2}\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_a^{2a}=$$

$$b^2\pi\left(\frac{1}{3a^2}\left(8a^3-a^3\right)-2a+a\right)=b^2\pi\left(\frac{7}{3}a-a\right)=b^2\pi\frac{4}{3}a=\frac{4}{3}ab^2\pi\,.$$

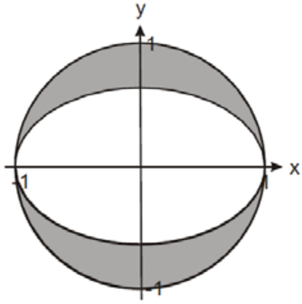
Задача 5. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x-оската на ликот меѓу кривите:

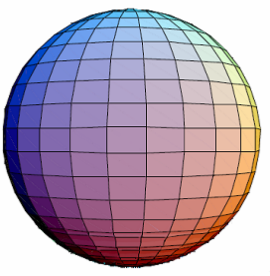
$$x^2+y^2=1 \text{ и } x^2+2y^2=1.$$

Решение. Пресекот на двете криви $x^2+y^2=1$ и $x^2+2y^2=1$ е во точки со апциси:

$$x^2+2\left(1-x^2\right)=1 \Leftrightarrow x^2+2-2x^2=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Ја скицираме фигурата формирана меѓу кривите. Таа е симетрична во однос на x-оската.





Волуменот на ротационото тело е разлика од волуменот на топката што се добива со ротација на горниот дел од кружницата $x^2+y^2=1$ и елипсоидот што се добива со ротација на горниот дел од елипсата $x^2+2y^2=1$. Се пресметува по формулата:

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}\left(y_1^2-y_1^2\right)dx,\ y_1^2=1-x^2\ ,\ y_1^2=\frac{1-x^2}{2},\ x_1=-1 \text{ и } x_2=1.$$

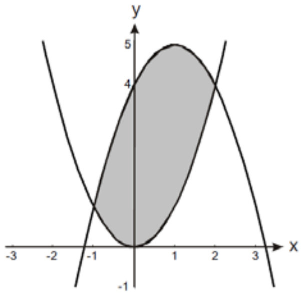
Следува:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2-\frac{1-x^2}{2}\right)dx=\pi\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{2}\frac{4}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

Задача 6. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со кривите:

$$y=x^2,\ y=-x^2+2x+4 \text{ околу } x\text{-оската.}$$



Решение. Пресечните точки на графиците се решенија на системот равенки $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x + 4$. Нивните апциси се:

$$x^2 = -x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = -1 \vee x = 2$$

Притоа, $y_1(x) = -x^2 + 2x + 4 \geq x^2 = y_2(x)$ на интервалот $(-1,2)$, следува:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left(y_1{}^2 - y_2{}^2\right) dx = \pi \int_{-1}^{2} \left(\left(-x^2 + 2x + 4\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right) dx =$$

$$\pi \int_{-1}^{2} \left(x^4 + 4x^2 + 16 - 4x^3 - 8x^2 + 16x - x^4\right) dx =$$

$$\pi \int_{-1}^{2} \left(-4x^3 - 4x^2 + 16x + 16\right) dx = 4\pi \int_{-1}^{2} \left(-x^3 - x^2 + 4x + 4\right) dx =$$

$$4\pi \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$4\pi \left(-4 + \frac{1}{4} - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 8 - 2 + 8 + 4\right) = 4\pi \frac{45}{4} = 45\pi \,.$$

Задача 7. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација околу x-оската на фигурата ограничена со кривите:

$$y = \cos x + \cos 2x, \; x = 0, \; x = \frac{\pi}{3}, \; y = 0.$$

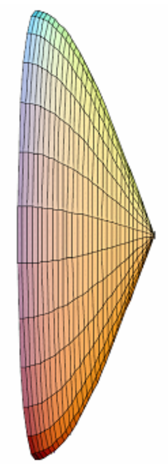
Решение. Волуменот на ротационото тело е:

$$V = \pi \int_{a}^{b} y^2 dx = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x + \cos 2x\right)^2 dx =$$

$$\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 x + 2\cos x \cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+2\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=$$

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{2}+\cos x+\cos 3x\right)dx=$$



$$\pi\left(x+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4}+\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$\pi(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin 0\right)+\frac{1}{8}\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin 0\right)+$$

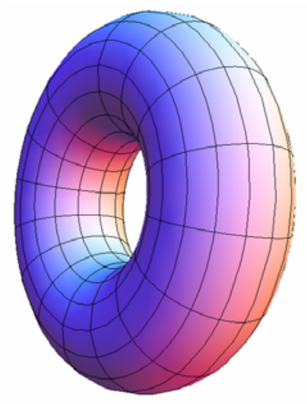
$$\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}(\sin\pi-\sin 0))=$$

$$\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{9\sqrt{3}}{16}\right)$$

$$=\frac{16\pi+27\sqrt{3}}{48}\pi\,.$$

Задача 8. Кривата $x^2+(y-b)^2=a^2$, $0<a<b$ ротира околу x-оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение. Кривата $x^2+(y-b)^2=a^2$ имплицитно содржи две функции од обликот: $y=y(x)$, чии равенки се:



$$x^2+(y-b)^2=a^2\Leftrightarrow (y-b)^2=a^2-x^2\Leftrightarrow$$

$$y-b=\pm\sqrt{a^2-x^2}\Leftrightarrow y=b\pm\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

Дадените функции ја формираат фигурата со чија ротација се добива ротационото тело. Неговиот волумен е разлика од волумените на телата што се добиваат со ротација околу x-оската на функциите:

$$y=b+\sqrt{a^2-x^2}\ \text{ и }\ y=b-\sqrt{a^2-x^2}\,.$$

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}\left(y_1^{\,2}-y_2^{\,2}\right)dx=2\pi\int_0^a\left(\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right)dx=$$

$$2\pi\int_0^a\left(b^2+2b\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2-\left(b^2-2b\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2\right)\right)dx=$$

$$8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Последниот интеграл се решава со тригонометриската смена: $x=a\sin t$, каде што:

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\left|\cos t\right|\overset{\cos t\geq 0}{=}a\cos t$$

.

Следува:

$$V=\begin{pmatrix} x=a\sin t & t=0\Rightarrow x=\sin 0=0 \\ dx=a\cos t dt & t=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=\sin\dfrac{\pi}{2}=1\end{pmatrix}=8b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos(t)a\cos t dt=$$

$$=8a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=8a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=4a^2b\pi\left(\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

$$=4a^2b\pi\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)\right)=4a^2b\pi\frac{\pi}{2}=2a^2b\pi^2.$$

Задача 9. Криволиниски трапез ограничен со x-оската, правата $x=1$ и кривата $y=\arcsin x$ ротира околу x-оската. Пресметај го волуменот на добиеното тело.

Решение. Волуменот е: $V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_0^1\arcsin^2 x dx$.

Интегралот го решаваме со примена на методот за интегрирање по делови:

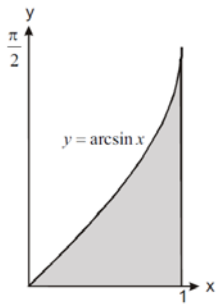
$$V=\begin{pmatrix} u=\arcsin^2 x & dv=dx \\ du=2\arcsin x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=x\end{pmatrix}=$$

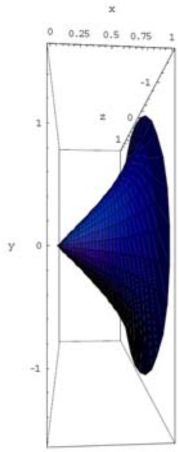
$$\pi\left(x\arcsin^2 x\Big|_0^1-2\int_0^1 x\arcsin x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)=$$

$$\begin{pmatrix} u=\arcsin x & dv=\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\ du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v=-\sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}=$$

$$\pi\left(\arcsin^2 1-2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^1+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)=$$

$$\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\left(\arcsin 0+x\Big|_0^1\right)\right)=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right).$$





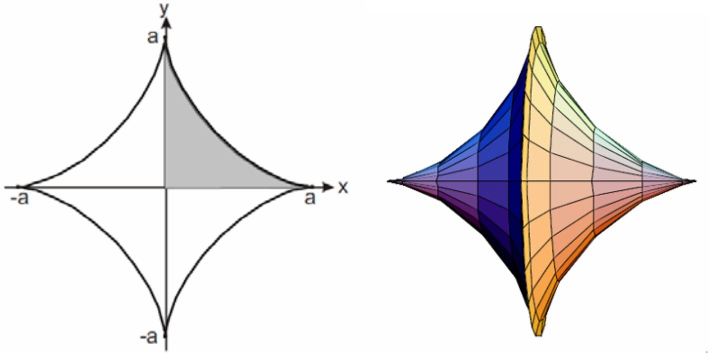
Задача 10. Астроидата $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ротира околу x-оската. Пресметај го волуменот на добиеното ротационо тело.

Решение. Ја скицираме астроидата. Таа е симетрична во однос на x-оската и на y-оската.

Ќе го пресметаме волуменот на телото добиено со ротација на фигурата образувана од делот на астроидата во прв квадрант и координатните оски. Вкупниот волумен ќе биде два пати поголем.

Параметарот t се движи од 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Првиот извод на функцијата x по параметарот t е: $\dot{x}=3a\cos^2 t(-\sin t)$. Бидејќи првиот извод е негативен, волуменот има спротивна вредност од определениот интеграл. Затоа,

$$V=-2\cdot\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2\dot{x}(t)dt=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt\,.$$



Интегралот го решаваме со смената: $k=\cos t$. Следува,

$$V=6a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cos^2 t\sin t dt=$$

$$\begin{pmatrix} k=\cos t & t=0\Rightarrow k=\cos 0=1\\ dk=-\sin t dt & t=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow k=\cos\dfrac{\pi}{2}=0\end{pmatrix}=$$

$$6a^3\pi\int_1^0\left(1-k^2\right)^3k^2\left(-dk\right)=6a^3\pi\int_0^1\left(1-3k^2+3k^4-k^6\right)k^2dk$$

$$=6a^3\pi\int_0^1\left(k^2-3k^4+3k^6-k^8\right)dk=6a^3\pi\left(\left(\frac{k^3}{3}-3\frac{k^5}{5}+3\frac{k^7}{7}-\frac{k^9}{9}\right)\Bigg|_0^1\right)$$

$$=6a^3\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=6a^3\pi\left(\frac{2}{9}-\frac{6}{35}\right)=6a^3\pi\frac{16}{315}=\frac{32}{105}a^3\pi\,.\blacksquare$$

Задача 11. Пресметај го волуменот на ротационото тело што се добива со ротирање на циклоидата:
$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ \ t\in[0,2\pi]$, околу x-оската.

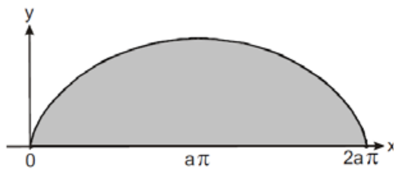
Решение. Циклоидата ја сече x-оската во точките во кои $t=0$ и $t=2\pi$. Волуменот на ротационото тело го добиваме според формулата: $V=\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y^2\dot{x}(t)dt$, каде $t_1=0$, $t_2=2\pi$ и $\dot{x}=a(1-\cos t)$.

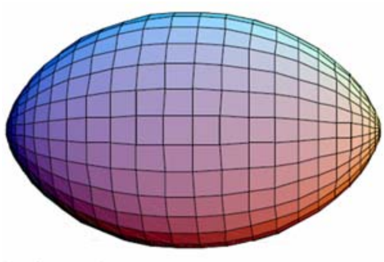
Оттука,

$$V=\pi\int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt = a^3\pi\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt =$$

$$a^3\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt =$$

$$a^3\pi\left(\left(t-3\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}\right)+3\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 tdt-\int\limits_0^{2\pi}\cos^3 tdt\,.$$





Првиот интеграл ќе го решиме ако го снижиме редот на степенот на функцијата косинус со формулата: $\cos^2 t=\dfrac{1+\cos 2t}{2}$,

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 tdt=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\left(\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(2\pi+\frac{1}{2}\left(\sin 4\pi-\sin 0\right)\right)=\pi\,.$$

Бидејќи во вториот интеграл степенот на функцијата косинус е непарен, ја користиме смената: $\sin t=k$.

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos^3 tdt=\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)\cos tdt=$$

$$\begin{pmatrix}\sin t=k & t=2\pi\Rightarrow k=\sin 2\pi=0\\ \cos tdt=dk & t=0\Rightarrow k=\sin 0=0\end{pmatrix}=\int\limits_0^0\left(1-k^2\right)dk=0\,.$$

Следува:

$$V=a^3\pi(2\pi+3\pi)=5a^3\pi^2\,.$$

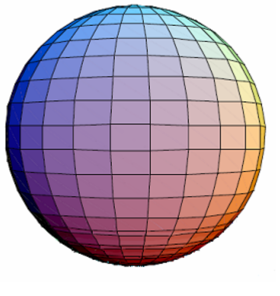
Коментар. Дека: $\int_0^{2\pi}\cos^3 t dt = 0$, заклучуваме и директно, ако се има предвид дека заради $\cos^3 x = -\cos^3(\pi \pm x)$, плоштината на криволинискиот трапез на функцијата: $y=\cos^3 x$ е еднаква, а знакот низменично ѝ се менува, на секој од интервалите

$$\left[k\pi/2, (k+1)\pi/2\right],\ k \in \mathbb{Z}.$$

5.6. ПЛОШТИНА НА РОТАЦИОНА ПОВРШИНА

Задача 1. Пресметај ја плоштината на површината што се добива со ротирање на кружницата: $x^2+y^2=R^2$ околу x-оската.

Решение. Равенката $x^2+y^2=R^2$ ги содржи функциите: $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. Можме да сметаме дека ротационото тело сфера, се добива со ротација на горната гранка $y=\sqrt{R^2-x^2}$ околу x-оската. Тогаш, $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и за плоштината на телото добиваме:



$$P_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$

$$2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx =$$

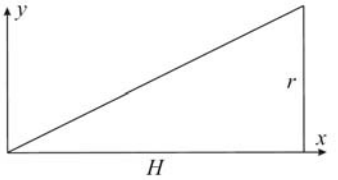
$$2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 2R\pi\int_{-R}^{R}dx =$$

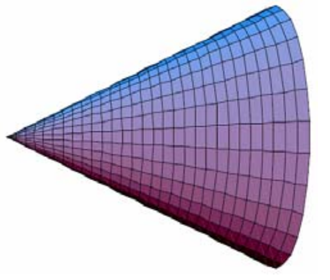
$$2R\pi x\Big|_{-R}^{R} = 2R\pi\left(R+R\right) = 4R^2\pi.$$

Задача 2. Пресметај ја плоштината на прав кружен конус со висина H и радиус r.

Решение. Конусот со радиус r и висина H ќе го поставиме со темето во координатниот почеток, така што оска да му биде x-

оската.





Бидејќи $k = tg\alpha = \dfrac{r}{H}$, конусната површина се добива со ротација околу x-оската на отсечката $y = \dfrac{r}{H}x$, $x \in [0, H]$. Притоа, $y' = \dfrac{r}{H}$. Плоштината на конусот ја добиваме според формулата за плоштина на ротационата површина: $P_x = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Следува:

$$P = 2\pi\int\limits_0^H \frac{r}{H}x\sqrt{1+\left(\frac{r}{H}\right)^2}\,dx = 2\pi\frac{r}{H}\sqrt{\frac{H^2+r^2}{H^2}}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^H = \frac{2r\pi}{H}\frac{\sqrt{H^2+r^2}}{H}\frac{H^2}{2} =$$

$$r\pi\sqrt{H^2+r^2}.$$

Задача 3. Кривата $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, ротира околу x-оската. Пресметај ја плоштината на добиената ротациона површина.

Решение. Функцијата $y = \sin x$ е ненегативна на интервалот $[0, \pi]$ и $y' = \cos x$. Според формулата за плоштина на ротациона површина која ротира околу x-оската, $P = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, имаме:

$$P = 2\pi\int\limits_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = \begin{pmatrix} \cos x = t & x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ -\sin x dx = dt & x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{pmatrix} =$$

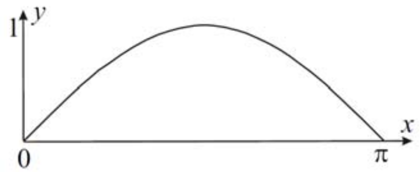
$$2\pi\int\limits_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,(-dt) = 2\pi\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

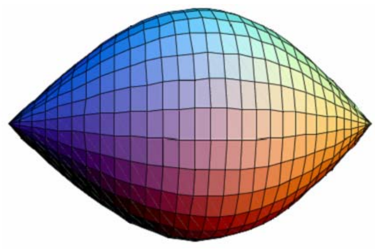
Десниот интеграл од квадратниот бином, ќе го решиме со помош на формулата: $\int\sqrt{t^2+k}\,dt = \dfrac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+k} - \ln\left|t+\sqrt{t^2+k}\right|\right) + C$. Имено,

$$P = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{t^2+1}dt = 2\pi\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1} - \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_{-1}^{1} \right) =$$

$$\pi\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right) = \pi\left(2\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

Коментар. Поради симетричноста на површината, можевме да земеме: $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и добиената вредност да ја помножиме со 2.





Задача 4. Пресметај ја плоштината на површината добиена со ротација на кривата: $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $y \in [1, e]$ околу y-оската.

Решение. Плоштината на ротационата површина ќе ја пресметаме според формулата: $P = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+x'^2}dy$, каде $a=1$, $b=e$ и $x' = \frac{1}{4}2y - \frac{1}{2}\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$.

Подинтегралната функција е:

$$x\sqrt{1+x'^2} = \left(\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)} =$$

$$\frac{1}{4}\left(y^2-2\ln y\right)\sqrt{\frac{1}{4}\left(y^2+2+\frac{1}{y^2}\right)} = \frac{1}{4}\left(y^2-2\ln y\right)\sqrt{\left(y+\frac{1}{y}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{4}\left(y^2-2\ln y\right)\left(y+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{4}\left(y^3+y-2y\ln y-\frac{2}{y}\ln y\right),$$

од каде што:

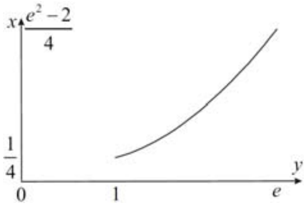
$$P=2\pi\frac{1}{4}\left(\left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^e-2\int_1^e y\ln y dy-2\int_1^e\frac{\ln y}{y}dy\right)=$$

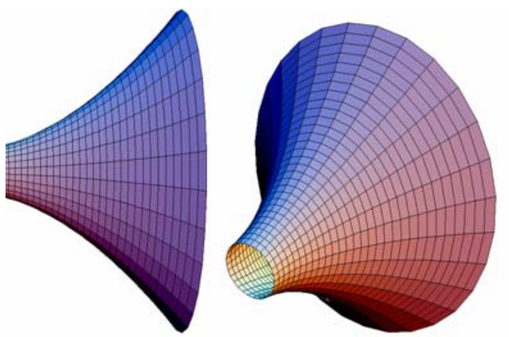
$$\begin{pmatrix} u=\ln y & dv=y \\ du=\dfrac{1}{y}dy & v=\dfrac{y^2}{2}\end{pmatrix}=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{y^2}{2}\ln y\Bigg|_1^e-\int_1^e\frac{y}{2}dy\right)-2\frac{\ln^2 y}{2}\Bigg|_1^e\right)=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}-y^2\ln y\Big|_1^e+\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^e-\ln^2 y\Big|_1^e\right)=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}-e^2+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-1\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^4}{4}-\frac{9}{4}\right)=\frac{\pi}{8}\left(e^4-9\right).$$





Задача 5. Пресметај ја плоштината на површината добиена со ротација околу y-оската, на делот од кривата $y=4-x^2$ што се наоѓа над x-оската.

Решение. Имаме: $P_y=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+x'^2}dy$. Од равенката $y=4-x^2$, $x\geq 0$, добиваме дека: $x^2=4-y$, односно $x=\sqrt{4-y}$, каде што: $y\in[0,4]$. Оттука, $x'=\dfrac{-1}{2\sqrt{4-y}}$ за $y\in(0,4)$, па подинтегралната функција е:

$$x\sqrt{1+x'^2}=\sqrt{4-y}\sqrt{1+\frac{1}{4(4-y)}}=\sqrt{4-y}\sqrt{\frac{16-4y+1}{4(4-y)}}=\frac{1}{2}\sqrt{17-4y}\,.$$

Затоа,

$$P_y=2\pi\int_0^4\frac{1}{2}\sqrt{17-4y}dy=\begin{pmatrix}17-4y=t & y=4\Rightarrow t=1\\ -4dy=dt & y=0\Rightarrow t=17\end{pmatrix}=$$

$$=\pi\int_{17}^{1}\sqrt{t}\,\frac{dt}{-4}=\frac{\pi}{4}\int_1^{17}\sqrt{t}dt=\frac{\pi}{4}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{17}=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

Неправите интеграли ни овозможуваат пресметување на плоштините на неограничените површини и волумените на неограничени тела.

Задача 6*. Пресметај го волуменот и плоштината на ротационото тело, што се добиваат со ротирање на околу x оската на кривата $y=\frac{1}{x}$, $x\in[1,+\infty)$.

Решение. Според дефиницијата за неправ интеграл и формулата за волумен на ротационо тело, добиваме дека волуменот на телото е:

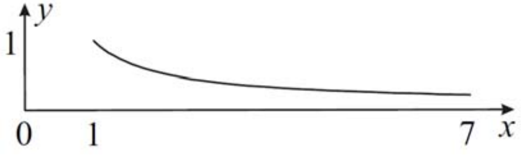
$$V=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\pi\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t^2}dt=\pi\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^x=\lim_{x\to+\infty}\pi\left(1-\frac{1}{x}\right)=\pi\,.$$

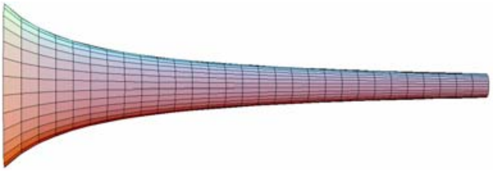
Аналогно, имајќи предвид дека: $y'=-\frac{1}{x^2}$, површината на телото е:

$$P=2\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}dx=2\pi\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}dt\,.$$

Но $\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\geq\frac{1}{t}$, па $P\geq\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t}dt=\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\,.$

Следува дека плоштината на површината е бесконечна.



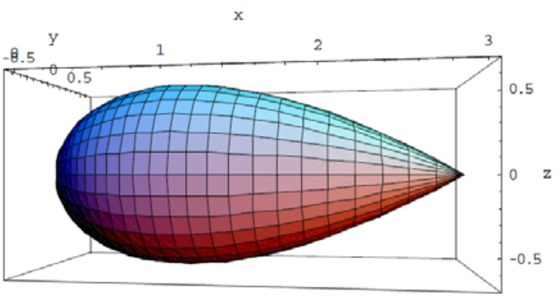


Телото се нарекува труба на Габриел и има конечен волумен, а површината што ја формира, има бесконечна плоштина.

Задача 7. Пресметај ја плоштината на површината образувана со ротација околу x-оската на кривата:

$$x=t^2,\ y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right),\ t\in\left[0,\sqrt{3}\right].$$

Решение. Плоштината ќе ја пресметаме според формулата за плоштина на површината на параметарски зададената крива



$$P=2\pi\int_0^{\sqrt{3}} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Да забележиме дека функцијата $y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right)=\frac{t^3}{3}-t$ е негативна за $t\in\left(0,\sqrt{3}\right)$. За да ја примениме формулата треба да работиме со функцијата $y=t-\frac{t^3}{3}$ која ја генерира истата површина, и е ненегативна (Можеше да се земе истата функција, но тогаш се користи формулата: $P=-2\pi\int_0^{\sqrt{3}} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$). Бидејќи $\dot{x}=2t$ и $\dot{y}=1-t^2$, подинтегралната функција е:

$$y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\sqrt{1+2t^2+t^4}=$$

$$\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\left(1+t^2\right)=t+t^3-\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{3}=t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{3}t^5.$$

Следува:

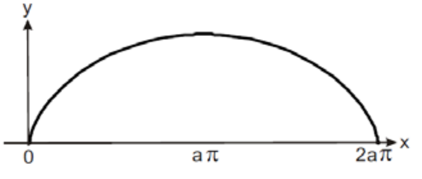
$$P = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^5\right)dt = 2\pi\left(\frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}\frac{t^4}{4} - \frac{1}{3}\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} =$$

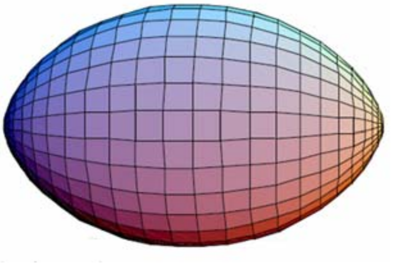
$$2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 9 - \frac{1}{18}\cdot 27\right) = 2\pi\frac{3}{2} = 3\pi\ .$$

Задача 8. Пресметај ја плоштината на површината добиена со ротација на кривата

$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$, околу x-оската.

Решение. Плоштината на ротационата површина ќе ја пресметаме според формулата: $P = 2\pi\int_a^b y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$. Еден свод од циклоидата се испишува ако параметарот $t \in [0, 2\pi]$.





Изводите на параметарските равенки на кривата по параметарот t се $\dot{x} = a(1 - \cos t)$ и $\dot{y} = a\sin t$. Имајќи предвид дека за $t \in [0, 2\pi]$, $\sin\frac{t}{2} \geq 0$, добиваме:

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2\sin^2 t} =$$

$$\sqrt{a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t^2 + \sin^2 t\right)} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} =$$

$$a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2} \text{ и}$$

$$y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a(1 - \cos t)2a\sin\frac{t}{2} =$$

$$2a^2 2\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} = 4a^2\sin^3\frac{t}{2} = 4a^2\left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}.$$

$$\text{Следува: } P = 2\pi 4a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$\left(\begin{array}{ll} \cos\frac{t}{2} = k & t=0 \Rightarrow k=1 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt = dk & t=2\pi \Rightarrow k=-1 \end{array}\right) =$$

$$8a^2\pi\int_1^{-1}\left(1-k^2\right)\left(-2dk\right) = 16a^2\pi\int_{-1}^{1}\left(1-k^2\right)dk =$$

$$16a^2\pi\left(k-\frac{k^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) = 16a^2\pi\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

Втор начин. Интегралот можевме да го решиме и со идентитетот $\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(a+b\right)x+\sin\left(a-b\right)x\right)$. Имено,

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt = 4a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\cos t\right)dt =$$

$$4a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\right)dt = 4a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}\sin\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{3t}{2}\right)dt =$$

$$4a^2\pi\left(\frac{3}{2}\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\cos\frac{3t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

$$4a^2\pi\left(-3\left(-1-1\right)+\frac{1}{3}\left(-1-1\right)\right) = 4a^2\pi\left(6-\frac{2}{3}\right) = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

Задача 9. Пресметај ја плоштината на површината добиена со ротација на кривата:

$$x = e^t\sin t,\ y = e^t\cos t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\ \text{околу } x\text{-оската.}$$

Решение. Имаме:

$$\dot{x} = e^t\left(\sin t+\cos t\right),\ \dot{y} = e^t\left(\cos t-\sin t\right) \text{ и}$$

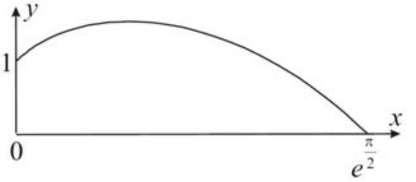
$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{\left(e^t\left(\cos t+\sin t\right)\right)^2+\left(e^t\left(\cos t-\sin t\right)\right)^2} =$$

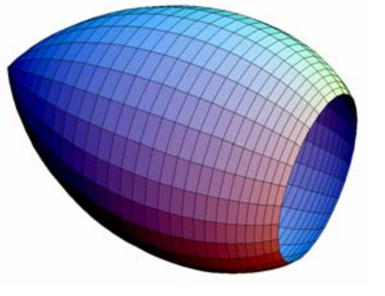
$$\sqrt{e^{2t}\left(\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t\right)+e^{2t}\left(\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t\right)}=$$

$$\sqrt{e^{2t}\left(2\sin^2 t+2\cos^2 t\right)}=\sqrt{2}e^t\,.$$

Следува:

$$P=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt\;=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\cos(t)\sqrt{2}e^t dt=2\sqrt{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t dt\,.$$





Ќе го пресметаме неопределениот интеграл:

$$\underline{\int e^{2t}\cos t dt}=\begin{pmatrix} u=e^{2t} & dv=\cos t dt \\ du=2e^{2t}dt & v=-\cos t \end{pmatrix}=e^{2t}\sin t-2\int e^{2t}\sin t dt=$$

$$\begin{pmatrix} u=e^{2t} & dv=\sin t dt \\ du=2e^{2t}dt & v=-\cos t \end{pmatrix}=e^{2t}\sin t-2\left(-e^{2t}\cos t+2\int e^{2t}\cos t dt\right)=$$

$$\underline{e^{2t}\sin t+2e^{2t}\cos t-4\int e^{2t}\cos t dt}\,.$$

Од каде што: $\int e^{2t}\cos t dt=\frac{1}{5}e^{2t}\left(\sin t+2\cos t\right)$. Оттука,

$$P=2\sqrt{2}\pi\frac{1}{5}e^{2t}\left(\sin t+2\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}\left(e^{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}\right)-e^0\left(\sin 0+2\cos 0\right)\right)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}\left(e^{\pi}-2\right).$$

Литература

[1] Apsen, B. *Repetitorij (Riješeni zadaci) više matematike*, prvi (drugi, treći) deo, Tehnička knjiga, Zagreb, 1982 (1968,1989).

[2] Došenović, T., Takači, A., Rakić, D., Brdar, M. *Zbirka zadataka iz matematike I* , Novi Sad: „Verzal“, 2008.

[3] Drenovak, M. *Metodička zbirka rešenih zadataka iz više matematike,* Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[4] Ellis, R., Gulick, D. *Calculus with analytic geometry*, fourth edition, Harcourt Brace Jovanovich, 1990.

[5] Hadžić, O., Takači, Đ. *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*, Novi Sad, 2000.

[6] Kovačević, I. M., Ralević, N. *Matematička analiza I*, *I dio,* SP Print, Novi Sad*,* 2008.

[7] Kovačević, I., Carić, B., Medić, S., Ćurić, V. *Testovi sa ispita iz matematičke analize I,* SP Print, Novi Sad*,* 2008.

[8] Kovačević, I., Marić, V., Novković, M., Carić, B. *Matematička analiza*, *I dio,* SP Print, Novi Sad*,* 2008.

[9] Miličić, M. (Miličić. N.) *Elementi više matematike*, I (II) део, Akademska misao, Beograd, 2003 (2011).

[10] Miličić, P., Miličić, M. *Zbirka rešenih zadataka iz više matematike, I (II) деo*, Akademska misao, Beograd, 2003 (2008).

[11] Novković, M., Carić, B., Medić, S., Ćurić, V., Kovačević, I. *Zbirka rešenih zadataka iz matemati*čke analize *I, SP Print, Novi Sad, 2008*

[12] Stewart, **J.** *Calculus early transcedentals*, Thomson Brooks/Cole 2007.

[13] Trifunović, M., Topalović, S. *Rešeni ispitni zadaci iz matematike*, Građevinski fakultet u Beogradu.

[14] Miličić P., Ušćumlić M. *Zbirka zadataka iz više matematike*, I-II, IP Nauka, Beograd, 1984 (1982)

[15] *Vježbi iz predmeta Matematika* 1, 2; 2001/2012, Univierzitet u Zenici, Mašinski fakultet, pf.unze.ba\nabokov.

[16] Zill, Dennis G., Warren, D., Wright, S. *Calculus early transcedental*, Jones and Bartlett publishers, 2011.

[17] Андоновиќ, Б., Мисајлески, З., Димовски, Т. *Збирка задачи по математика I,* за студентите на Технолошко-металургискиот факултет, Скопје, 2014.

[18] Асистенти на Градежниот факултет. *Испитни комбинации по математика 1,2*; Градежен факултет, дел од 1970-2003.

[19] Геговска Зајкова, С., Трајковски, Г., Бучковска, А. *Збирка решени испитни задачи од математика 1* - Скопје, 1996.

[20] Георгиевска, С., Атанасова, Е. *Математика 1*, УКИМ, Скопје, 2002.

[21] Демидовиќ, Б. П., Сборник задач и упражении по математическому анализу, Издательство Наука, Москва 1966.

[22] Димитрова, К. Паскалов, П., Дончев, Ц. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1-3, Издателство „Архимед 2000“ ЕООД, Софија, 2008.

[23] Димитрова, К., Паскалов, П., Дончев, Ц. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1-3, Издателство „Архимед 2000“ ЕООД, Софија, 2008.

[24] Јанев, И., Илиевски, Ј., Ѓорѓиев, Д. *Збирка задачи по математика за четврта година на средното образование*, Просветно дело, Скопје, 2002.

[25] Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., Головач, Г. П. Справочное пособие по математическому анализу, чст первая (вторая), „Виша школа“, Киев, 1978 (1986).

[26] Малчески, **А.** *Математика* 1 (2), Машински факултет, чукани материјали.

[27] Малчески, Р. (*Основи на*) *Математичка анализа* I () ПМФ, Скопје, 2002.

[28] Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике, Издательство Наука, Москва 1966.

[29] Мисајлески, З. *Векторска и линеарна алгебра*, електронско издание, УКИМ, Скопје, 2018.

[30] Митевска, Ј., Грибовска-Поповиќ, Л., Манова-Ераковиќ, В., Митрушева, Ф. *Математика,* за IV година на реформираното гимназиско обрзование, Просветно дело, Скопје, 2004.

[31] Сотирова Димова-Нанчева, В., Михайлов Витанов, А., Г. Иванов Караджов, Михайлов Михов, И., Борисов Попов, В., Стефанов Тодорова, С. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1-5, Државно издателство „Техника“, Софија, 1975.

[32] Сотирова Димова-Нанчева, В., Михайлов Витанов, А., Иванов Караджов, Г., Михайлов Михов, И., Борисов Попов, В., Стефанов Тодорова, С. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1-5, Државно издателство „Техника“, Софија, 1975.

[33] Тренчевски, Г. *Векторска алгебра за средно образование*, Просветно дело, Скопје, 2000.

[34] Тренчевски, К., Крстеска, Б., Тренчевски, Г., Здравеска, С. *Математичка анализа*, за IV година на реформираното гимназиско обрзование, Просветно дело АД, Скопје 2004.

[35] Трпеновски, Б., Целаковски, Н., Чупона, Ѓ. *Виша математика, книга I-IV*, Просветно дело, Скопје, 1994

[36] Шапкарев, И. *Збирка задачи по математика I, II* - Скопје, 1995.

[37] Шекутковски, Н. *Математичка анализа I* - Скопје: „Просветно дело", 2008.

Содржина

Е-издание:
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41