Ѓорѓи Маркоски

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД ОПШТА ТОПОЛОГИЈА

Скопје, 2012

Рецензенти

Проф. д-р Никита Шекутковски

Редовен професор на ПМФ, Скопје

Проф. д-р Билјана Крстеска

Редовен професор на ПМФ, Скопје

ПРЕДГОВОР

Оваа збирка задачи пред се е наменета за студентите кои го изучуваат предметот општа топологија на студиите по математика. Но, сметам дека збиркава ќе биде интересна и за сите оние кои сакаат да се запознаат со основните поими од општа топологија.

Збиркава содржи девет глави. На почетокот на секоја од нив дадени се дефиниции и основни својства на поимите кои се разгледуваат во таа глава. Потоа следуваат формулациите на задачите, а решенијата се дадени на крајот, во вториот дел. Доказите на теоремите и целата потребна теоретска подготовка може да се најдат во [1].

Сите задачи се детално решени. Пожелно е читателот да се обиде да ја реши задачата, а ако не успее, дури тогаш да го погледне решението. За да може успешно да се следи материјалот во оваа збирка, потребно е читателот да има добри предзнаења од теорија на множества и пресликувања.

Читателите кои сакаат уште повеќе да го прошират и продлабочат своите познавања, преку задачи, од општа топологија ги упатувам на збирките [2], [3] и [4]. Тие содржат голем број задачи од различни области на топологијата, а [5] и [6] содржат голем број контрапримери. Исто така голем број задачи може да се најдат во задачите после секоја глава во [8] и [9].

Им се заблагодарувам на рецензентите кои дадоа корисни забелешки и предлози за подобрување на оваа збирка задачи. Сите забелешки од читателите ќе бидат добродојдени за подобрување на текстот на оваа книга во иднина.

Скопје, 2012 Авторот

ПРВ ДЕЛ

ЗАДАЧИ

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ТОПОЛОШКИ ПРОСТОР. ОТВОРЕНИ И ЗАТВОРЕНИ МНОЖЕСТВА. БАЗА. ПОДБАЗА. РЕЛАТИВНА (НАСЛЕДЕНА) ТОПОЛОГИЈА

Низ целата книга со $\mathbb{N}$ ќе го означуваме множеството природни броеви, со $\mathbb{Z}$ множеството цели броеви, со $\mathbb{Q}$ множеството рационални броеви и со $\mathbb{R}$ множеството реални броеви.

Нека X е дадено множество и $\mathcal{T}$ е дадена фамилија подмножества од множеството X. За фамилијата подмножества велиме дека е **топологија** ако се исполнети следниве услови:

1) $X, \varnothing \in \mathcal{T}$,

2) ако $U, V \in \mathcal{T}$ тогаш $U \cap V \in \mathcal{T}$,

3) ако $U_a \in \mathcal{T}, a \in A$ тогаш $\bigcup_{a \in A} U_a \in \mathcal{T}$.

Множеството X со топологијата $\mathcal{T}$ ќе го нарекуваме тополошки простор и ќе го означуваме со $(X, \mathcal{T})$. Ако $\mathcal{T}$ е топологија на множеството X, тогаш елементите на $\mathcal{T}$ ги нарекуваме **отворени** множества.

Околина на точката $x \in X$ е секое отворено множество кое ја содржи x.

Нека $(X, \mathcal{T})$ е тополошки простор. Подмножеството P на тополошкиот простор X ќе го нарекуваме **затворено** множество ако $X \setminus P$ е отворено множество.

Теорема. Нека $(X, \mathcal{T})$ е тополошки простор. Тогаш

1) $X, \varnothing$ се затворени множества.

2) ако P, Q се затворени множества, тогаш и $P \cup Q$ е затворено множество.

3) ако $P_a, a \in A$ се затворени , тогаш и $\bigcap_{a \in A} P_a$ е затворено множество.

Нека X е тополошки простор.

Фамилијата $\mathcal{B}$ од отворени множества се нарекува **база за топологијата** на X ако секое отворено множество може да се претстави како унија на елементи на $\mathcal{B}$.

Теорема. Нека X е тополошки простор и нека $\mathcal{B}$ е фамилија од отворени множества. Следниве услови се еквивалентни:

1) $\mathcal{B}$ е база за топологијата на X;

2) за секоја точка $x \in X$ и секоја околина U на x, постои $B \in \mathcal{B}$ така што $x \in B \subseteq U$.

Теорема. Нека X е тополошки простор, $\mathcal{B}$ е база за топологијата на X и $U \subseteq X$. Следните услови се еквивалентни:

1) множеството U е отворено ;

2) за секоја точка $x \in U$ постои околина V на x таква што $V \subseteq U$;

3) за секоја точка $x \in U$ постои базна околина B на x, $B \in \mathcal{B}$, таква што $B \subseteq U$.

Теорема. Фамилијата $\mathcal{B}$ од подмножества на X е база за топологија на X ако се исполнети следниве услови:

1) за секоја точка $x \in X$ постои $B \in \mathcal{B}$ така што $x \in B$;

2) за секои $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ и секој $x \in B_1 \cap B_2$ постои $B \in \mathcal{B}$ таков што $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Теорема. Нека X е множество со две топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Нека $\mathcal{B}_1$ е база за топологијата $\mathcal{B}_1$ и нека $\mathcal{B}_2$ е база за топологијата $\mathcal{T}_2$. Ако за секој $B_1 \in \mathcal{B}_1$ и секоја точка $x \in B_1$ постои $B_2 \in \mathcal{B}_2$, така што $x \in B_2 \subseteq B_1$, тогаш $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

Метрички простор е множество X заедно со пресликување $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ такво што :

1) $d(x,y) = 0$ ако и само ако $x = y$,

2) $d(x,y) = d(y,x)$,

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Неравенството 3) се нарекува неравенство на триаголник.

Пресликувањето $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ се нарекува **метрика**.

Отворена топка со центар во x и радиус $r > 0$ е множеството

$$T(x,r) = \{ y \,|\, d(x,y) < r \}.$$

Индуцирана топологија од метриката е топологија чија база се сите отворени топки.

Тополошкиот простор X се нарекува **2-преброив** ако има преброива база.

Нека X е тополошки простор со топологија $\mathcal{T}$ и нека $Y \subseteq X$. Дефинираме топологија $\mathcal{T}_Y$ на Y со $\mathcal{T}_Y = \{ V \mid V = Y \cap U, U \in \mathcal{T} \}$.

Тологијата $\mathcal{T}_Y$ се нарекува **наследена** (**релативна**) топологија на Y во однос на X.

Нека X е тополошки простор и нека $Y \subseteq X$. Тогаш Y е тополошки простор со наследената топологија од X.

Теорема. Множеството Q е затворено множество во Y ако и само ако $Q = Y \cap P$, каде што P е затворено во X.

Фамилијата подмножества $\mathcal{P}$ е **подбаза** на X ако фамилијата од сите конечни пресеци $\{S_1 \cap ... \cap S_n \mid S_1, ..., S_n \in \mathcal{P}\}$ е база за топологијата на X.

Фамилијата $\mathcal{B}$ од околини на точката x се нарекува **локална база во точката** x ако за секоја околина V на x, постои $U \in \mathcal{B}$ така што $U \subseteq V$.

За фамилијата $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in A\}$ од отворени подмножества на X ќе речеме дека е **покривач** на K ако $K \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$.

Нека $\mathcal{U}$ е покривач на K. За $\mathcal{V}$ ќе речеме дека е **потпокривач** на покривачот $\mathcal{U}$, ако $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

Тополошкиот простор X се нарекува **1-преброив** ако има преброива локална база во секоја точка.

Тополошкиот простор X се нарекува **2-преброив** ако има преброива база.

Теорема. Нека тополошкиот простор X е 1-преброив. Тогаш за секое $x \in X$ постои преброива локална база во x од вложени околини $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \dots$

ЗАДАЧИ

1.1. Нека $X = \{a, b, c, d\}$. Најди пример на фамилија од подмножества од X таква што

а) не важи условот 2) за фамилијата да биде топологија на X,

б) не важи условот 3) за фамилијата да биде топологија на X,

в) фамилијата е топологија на X.

1.2. Нека $X \neq \varnothing$.

а) Колку најмалку елементи може да има една топологија на X? Дали таа е единствена?

б) Ако X е конечно, колку најмногу елементи може да има една топологија на X. Дали топологијата со најмногу елементи е единствена?

в) Ако X има барем два елементи, најди две топологии на X со по три елементи.

1.3. Најди ги сите топологии на множеството $X=\{a,b,c\}$ кои што се состојат од четири елементи.

1.4. Нека $\mathcal{T}$ е фамилијата што се состои од $\mathbb{R}$ (множеството од реалните броеви), $\varnothing$ и сите отворени интервали $A_t=(t,\infty)$, каде што $t\in\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ е множеството од рационалните броеви). Докажи дека $\mathcal{T}$ не е топологија на $\mathbb{R}$.

1.5. Нека $\mathcal{T}$ е фамилијата што се состои од $\mathbb{R}$, $\varnothing$ и сите отворени интервали $A_t=(t,\infty)$, каде што $t\in\mathbb{R}$. Докажи дека $\mathcal{T}$ е топологија на $\mathbb{R}$.

1.6. Нека $\mathcal{T}$ е фамилија од подмножества од $\mathbb{N}$ која се состои од празното множество и сите множества од видот $E_n=\{n,n+1,...\}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

а) Докажи дека $\mathcal{T}$ е топологија на X.

б) Најди ги сите отворени множества што го содржат бројот 8.

1.7. Нека $\{\mathcal{T}_i \mid i\in I\}$ е фамилија топологии на X. Докажи дека и $\cap\{\mathcal{T}_i \mid i\in I\}=\mathcal{T}$ (фамилијата која се состои од заедничките елементи на сите топологии $\mathcal{T}_i$) е топологија на X.

1.8. Најди пример на топологии на X чија унија не е топологија на X

а) ако X е конечно множество

б) ако X е бесконечно множество.

1.9. а) Нека $\mathcal{T}$ е фамилија подмножества од $\mathbb{R}$ која се состои од $\mathbb{R},\varnothing$ и сите отворени интервали од облик (a,b), каде $a,b\in\mathbb{R}$ и $a<b$. Провери дали $\mathcal{T}$ е топологија на $\mathbb{R}$.

б) Дали фамилијата $\mathcal{T}_1$ од подмножества од рамнината $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ која се состои од $\mathbb{R}^2,\varnothing$ и множествата $B(a,b,r)$, каде $a,b\in\mathbb{R}$ и

$r > 0$, каде што $B(a,b,r) = \left\{ (x,y) \middle| (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \right\}$ (сите отворени кругови) е топологија на $\mathbb{R}^2$?

1.10. Докажи дека фамилиите $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_1$ од задачата 1.9 ги исполнуваат условите за база на топологија на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$, соодветно.

1.11. Дали следниве фамилии од подмножества од $\mathbb{R}^2$ формираат база за вообичаената топологија на $\mathbb{R}^2$?
а) Фамилијата од сите отворени рамнострани триаголници.
б) Фамилијата од сите отворени квадрати со страни паралелни со координатните оски.

1.12. Нека $\mathcal{B}$ е база на топологијата $\mathcal{T}$ на X и нека $\mathcal{B}_1$ е фамилија од множества од $\mathcal{T}$ така што $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$. Докажи дека $\mathcal{B}_1$ е база на $\mathcal{T}$.

1.13. Нека X е дискретен тополошки простор и нека $\mathcal{B}$ е фамилијата од сите едноелементни подмножества од X. Докажи дека фамилијата $\mathcal{B}_1$ од подмножества од X е база за дискретната топологија ако и само ако $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$.

1.14. Најди преброива база за вообичаената топологија на $\mathbb{R}$.

1.15. Докажи дека секоја точка од дискретниот тополошки простор има конечна локална база.

1.16. Нека $\mathcal{B} = \left\{ (a,b] \middle| a,b \in \mathbb{R}, a < b \right\}$.

а) Провери дали $\mathcal{B}$ ги исполнува условите за база на топологија на $\mathbb{R}$.

б) Опиши ја топологијата на $\mathbb{R}$ за која $\mathcal{B}$ е база.

1.17. Ако $\mathcal{T}$ е стандардната топологија на $\mathbb{R}$, а $\mathcal{T}_1$ е горно ограничената топологија на $\mathbb{R}$, тогаш важи $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$. Докажи!

1.18. Велиме дека топологијата $\mathcal{T}$ метричкиот простор (X,d) е индуцирана од метриката d ако база $\mathcal{B}$ за $\mathcal{T}$ се сите отворени топки

$T(x,r)=\{y \mid y\in X, d(x,y)<r\}$, т.е. $\mathcal{B}=\{T(x,r) \mid x\in X, r>0\}$.

Нека $\mathcal{T}_1$ е топологијата на $\mathbb{R}^2$ индуцирана од метриката

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

а $\mathcal{T}_2$ е топологијата на $\mathbb{R}^2$ индуцирана од метриката

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2))=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|.$$

Докажи дека $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$.

1.19. Тополошкиот простор $(X,\mathcal{T})$ се нарекува метризабилен, ако постои метрика d на X така што $\mathcal{T}$ е индуцирана од d.

Докажи дека дискретниот простор е метризабилен.

1.20. Дали следниве множества се отворени (затворени) во $\mathbb{R}$ со вообичаената топологија?

а) $[a,b]$, $a<b$ б) $\{1,2,3\}$ в) $(0,1]$ г) $[0,\infty)$

д) $[0,\infty)\setminus\mathbb{N}$ ѓ) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ е) $\mathbb{Q}$ ж) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

1.21. Најди пример на бесконечна фамилија интервали во $\mathbb{R}$ (со вообичаената топологија) така што сите интервали се

а) отворени, но нивниот пресек не е отворен ни затворен.
б) отворени и нивниот пресек е отворен.
в) отворени, но нивниот пресек е затворен.
г) затворени, но нивната унија не е отворена ни затворена.
д) затворени и нивната унија е затворена.
ѓ) затворени, но нивната унија е отворена.

1.22. Дали следниве множества се отворени (затворени) во $\mathbb{R}^2$ со вообичаената топологија?

а) $(a,b)\times\{0\}$, $a<b$ б) $[0,1]\times\{0\}$

в) $\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, 1<y<2\}$ г) $\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, 1\le y\le 3\}$

д) $\{(x,2-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

ѓ) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, каде $A_n=\left\{\left(x,\frac{1}{n}\right) \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$ за секој $n\in\mathbb{N}$

е) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, каде $A_n = \left\{\left(x,\dfrac{1}{n}\right)\middle|\, 0 \le x < 1\right\}$ за секој $n \in \mathbb{N}$

ж) $Y \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$, каде $A_n = \left\{\left(x,\dfrac{1}{n}\right)\middle|\, 0 \le x \le 1\right\}$ за секој $n \in \mathbb{N}$, а $Y = \left\{(x,0)\,\middle|\, 0 \le x \le 1\right\}$.

1.23. Докажи дека фамилијата
$\mathcal{P}= \left\{(a,\infty)\middle| a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(-\infty,a)\middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ е подбаза за вообичаената топологија на $\mathbb{R}$.

1.24. Опиши ја топологијата на $\mathbb{R}$ со подбаза

$$\mathcal{P} = \left\{[a,a+1]\,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}.$$

1.25. Нека $(X,\mathcal{T})$ е дискретен тополошки простор, каде $X = \{a,b,c,d,e\}$. Најди подбаза $\mathcal{P}$ на $\mathcal{T}$ која не содржи едноелементни подмножества.

1.26. Нека $\mathcal{T}$ е вообичаената топологија на $\mathbb{R}$. Најди ја релативната топологија на $\mathbb{N}$.

1.27. Нека A е отворено во $(X,\mathcal{T})$ и нека $A \subseteq Y \subseteq X$. Докажи дека A е отворено во Y (т.е. $A \in \mathcal{T}_Y$, каде $\mathcal{T}_Y$ е наследената топологија на Y од $\mathcal{T}$).

1.28. Нека $(X,\mathcal{T})$ е тополошки простор и нека $Y \subseteq X$.

а) Ако $\mathcal{B}$ е база на $\mathcal{T}$, тогаш $\mathcal{B}_Y = \left\{Y \cap B\middle| B \in \mathcal{B}\right\}$ е база на наследената топологија на Y.

б) Ако $\mathcal{P}$ е подбаза на $\mathcal{T}$, тогаш $\mathcal{P}_Y = \left\{Y \cap B\middle| B \in \mathcal{P}\right\}$ е подбаза на наследената топологија на Y.

1.29. Нека интервалот $(0,1]$ има наследена топологија од вообичаената топологија на $\mathbb{R}$.

а) Најди база и подбаза на оваа топологија на $(0,1]$.

б) Кои од множествата $\left(0,\frac{1}{2}\right]$, $\left(\frac{1}{2},1\right]$, $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ се отворени а кои затворени во $(0,1]$?

1.30. Најди пример на тополошки простор $(X,\mathcal{T})$ кој содржи непразно отворено-затворено (=отворено и затворено) множество кое е различно од X.

1.31. Дадено е множеството

$$A=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\cap\left([0,1]\times[0,1]\right),\text{ каде } A_n=\left\{(x,nx)\,\middle|\,0\leq x\leq 1\right\}.$$

Дали A е

- отворено
- затворено

во $\mathbb{R}^2$ со вообичаената топологија?

1.32. Нека $\mathcal{B}=\left\{[a,b)\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R},a<b\right\}$ е фамилија од подмножества од $\mathbb{R}$. Докажи дека

а) $\mathcal{B}$ ги исполнува условите за база;

б) множествата $(-\infty,a)$, $[b,c)$ и $[d,\infty)$ се отворено-затворени во $\mathbb{R}$ со топологијата со база $\mathcal{B}$, за секои $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ и $b<c$;

в) множествата (a,b) и (c,∞) се отворени, но не се затворени за секои $a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a<b$;

г) множествата $\{a\}$ и $[b,c]$ се затворени, но не се отворени за секои $a,b,c\in\mathbb{R}$, $b<c$.

Множеството $\mathbb{R}$ со топологијата со база $\mathcal{B}$ се нарекува **права на Зоргенфреј.**

1.33. Најди пример на подмножества A и B од тополошки простор X така што A е отворено, B не е отворено, $A\cap B=\varnothing$ и $A\cup B$ е отворено.

1.34. Нека d е стандардната метрика на $\mathbb{R}$, а $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е пресликувањето определено со $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$. Докажи дека

а) d_1 е метрика на $\mathbb{R}$,

б) за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи $d_1(x,y) < 1$,

б) d и d_1 индуцираат иста топологија на $\mathbb{R}$.

2. ВНАТРЕШНОСТ. ГРАНИЦА.
ЗАТВОРАЧ. ТОЧКИ НА АКУМУЛАЦИЈА

Нека X е тополошки простор и $A \subseteq X$.

Точката $x \in X$ е **точка на акумулација на множеството** A ако во секоја околина U на точката x постои точка од A која е различна од x.

Множеството точки на акумулација на дадено множество A се нарекува **изводно множество** на множеството A и се означува со A'.

Нека X е тополошки простор и нека $A \subset X$ е дадено множество. Најмалото затворено множество кое што го содржи множеството A се нарекува **затворач на множеството** A, и се означува со $\overline{A}$.

Теорема. 1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

2) A е затворено ако и само ако $\overline{A} = A$

3) ако $A \subseteq B$ тогаш $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

4) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Теорема. Нека X е тополошки простор и $A \subseteq X$. Множеството A е затворено множество ако и само ако A ги содржи сите свои точки на акумулација.

Теорема. Нека X е тополошки простор и $A \subseteq X$ е дадено множество. Тогаш $\overline{A} = A \cup A'$.

Теорема. Нека X е тополошки простор и $A \subseteq X$. Следниве услови се еквивалентни:

1) $x \in \overline{A}$,

2) во секоја околина на x постои точка од A,

3) во секоја базна околина на x постои точка од A.

Множеството A е **густо** во X ако за секоја точка $x \in X$ и за секоја околина U на точката x постои точка $a \in A$, така што $a \in U$.

Теорема. Нека X е тополошки простор и $A \subseteq X$. Тогаш A е секаде густо во X ако и само ако $\overline{A} = X$.

Тополошкиот простор X е **сепарабилен** ако содржи преброиво секаде густо множество.

Теорема. Сепарабилен метрички простор има преброива база.

Внатрешност на множеството A е најголемото отворено множество содржано во A. Се означува со $\mathbf{int}\, A$ или A°.

Точката $a \in A$ е **внатрешна точка за множеството** A ако постои околина U на a така што $U \subseteq A$. Множеството од сите внатрешни точки на A е еднакво со $\mathrm{int}\, A$.

Теорема. 1) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

2) A е отворено ако и само ако $A^\circ = A$;

3) ако $A \subseteq B$ тогаш $A^\circ \subseteq B^\circ$;

4) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$;

5) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Множеството $\mathrm{int}(X \setminus A)$ се нарекува **надворешност на множеството** A и се означува со $\mathrm{ext}\, A$. Значи, $(X \setminus A)^\circ = \mathrm{ext}\, A$.

Раб на множеството A е множество од сите точки $x \in X$ така што во секоја околина на точката x постои точка од A и од $X \setminus A$. Работ на множеството A обично се означува со ∂A.

Теорема. Нека (X, τ) е тополошки простор и $A \subset X$ е произволно дадено подмножество. Тогаш $X = \mathrm{int}\, A \cup \partial A \cup \mathrm{ext}\, A$, при што унијата е дисјунктна.

ЗАДАЧИ

2.1. Нека $X = \{a, b, c, d, e\}$ и
$\mathcal{T} = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$.

а) Докажи дека $\mathcal{T}$ е топологија на X.

б) Најди ги изводните множества на $A = \{c, d, e\}$, $B = \{b\}$ и $E = \{e\}$.

в) Најди ги сите затворени подмножества од X.

г) Најди ги $\overline{\{b\}}$, $\overline{\{a\}}$ и $\overline{\{c, e\}}$.

д) Кои од множествата $\overline{\{b\}}$, $\overline{\{a\}}$ и $\overline{\{c, e\}}$ се секаде густи во X?

ѓ) Најди ги внатрешноста, надворешноста и границата на $C = \{a, b, c\}$.

2.2. Нека $(X, \mathcal{T})$ е тополошки простор и $A, B \subseteq X$. Докажи дека а) $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$;

б) $A' \cup B' = \left(A \cup B\right)'$;

в) $\left(A \cap B\right)' \subseteq A' \cap B'$. Најди пример каде што не важи равенство.

2.3. Најди ги изводните множества на множествата $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\left[0,1\right]$, $\left(0,1\right]$, $\left\{0\right\} \cup \left[1,2\right]$ во $\mathbb{R}$ со стандардната топологија.

2.4. Нека $A \subseteq \mathbb{R}$ и нека a е точка на акумулација на A. Докажи дека постои низа од реални броеви $\left(a_n\right)$ така што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \in A$ и $a_n \neq a$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

2.5. Најди ги изводните множества на множествата: а) $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ во $\mathbb{R}$ со стандардната топологија;

б) $A = \left[0,\infty\right) \setminus \mathbb{N}$ во $\mathbb{R}$ со стандардната топологија;

в) $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, каде $A_n = \left\{\left(x, \frac{1}{n}\right) \middle| 0 \leq x \leq 1\right\}$ за секој $n \in \mathbb{N}$, во $\mathbb{R}^2$ со стандардната топологија.

2.6. Нека $\left(X, \mathcal{T}\right)$ е дискретен тополошки простор и нека $A \subseteq X$. Докажи дека $A' = \varnothing$.

2.7. Докажи дека $\operatorname{int} A$ е најголемото отворено множество што се содржи во A ако и само ако $\operatorname{int} A$ е унија од сите отворени множества што се содржат во A.

2.8. Нека $\mathcal{T} = \left\{\mathbb{R}, \varnothing\right\} \cup \left\{\left(a,\infty\right) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ е фамилија подмножества од $\mathbb{R}$.

а) Докажи дека $\mathcal{T}$ е топологија на $\mathbb{R}$;

б) Најди ги $\operatorname{int}\left[7,\infty\right)$, $\operatorname{ext}\left[7,\infty\right)$ и $\partial\left[7,\infty\right)$;

в) Најди ги $\operatorname{int}\left[7,8\right)$, $\operatorname{ext}\left[7,8\right)$ и $\partial\left[7,8\right)$.

2.9. Најди подмножество A од $\mathbb{R}^2$ со вообичаената топологија такво што $\partial A = A$.

2.10. Ако p е точка на акумулација на A, тогаш p е точка на акумулација на $A \setminus \{p\}$. Докажи!

2.11. Нека $(X, \mathcal{T})$ е тополошки простор. Дали важи

а) $\operatorname{int} \bar{A} = \overline{\operatorname{int} A}$, за секое $A \subseteq X$?

б) $\bar{E} = \overline{\operatorname{int} E}$, за секое $E \subseteq X$?

2.12. Нека $\mathcal{T}$ е топологијата на $\mathbb{N}$ која што се состои од $\varnothing$ и сите множества од видот $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Најди ги сите затворени подмножества од $\mathbb{N}$;

б) Најди ги затворачите на множествата $\{12, 22, 32, 42\}$ и $\{6, 8, 10, \ldots\}$;

в) Најди ги множествата што се секаде густи во $\mathbb{N}$;

г) Најди ги точките на акумулација на $A = \{5, 12, 27, 35\}$;

д) Најди ги множествата E така што $E' = \mathbb{N}$.

2.13. Докажи дека $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$, за секое A подмножество од тополошкиот простор X со топологија $\mathcal{T}$.

2.14. Докажи дека $\partial A = \partial(X \setminus A)$, за секое $A \subseteq X$.

2.15. Нека (X, d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Докажи дека $d(x, A) = 0$ ако и само ако $x \in \bar{A}$.

2.16. Најди го $\partial \mathbb{Q}$ во вообичаената топологија на $\mathbb{R}$.

2.17. Нека X е тополошки простор и $A \subseteq X$. Докажи дека

а) $\partial A \subseteq A$ ако и само ако A е затворено

б) $\partial A \cap A = \varnothing$ ако и само ако A е отворено

в) $\partial A = \varnothing$ ако и само ако A е отворено-затворено.

3. НЕПРЕКИНАТИ ПРЕСЛИКУВАЊА

Нека X и Y се тополошки простори. За пресликувањето $f : X \to Y$ се вели дека е **непрекинато** ако за секое отворено множество V во Y, множеството $f^{-1}(V)$ е отворено во X.

Теорема. Нека X, Y и Z се тополошки простори и нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ се непрекинати пресликувања. Тогаш композицијата $gf : X \to Z$ е непрекинато пресликување.

Теорема. Нека X и Y се тополошки простори и нека $f : X \to Y$ е пресликување. Следниве услови се еквивалентни:

1) f е непрекинато;
2) за секое затворено подмножество P од Y, $f^{-1}(P)$ е затворено;
3) за секој елемент B од некоја база $\mathcal{B}$ за Y, $f^{-1}(B)$ е отворено;
4) за секоја точка $x \in X$ и за секоја околина V на $f(x)$ постои околина U на x така што $f(U) \subset V$;
5) нека $\mathcal{B}$ е база за X и нека $\mathcal{B}'$ е база за Y. За секоја точка $x \in X$ и за секоја базна околина $B \in \mathcal{B}'$ на $f(x)$ постои околина $A \in \mathcal{B}$ на x, така што $f(A) \subseteq B$.

Пресликувањето $f : X \to Y$ е

- **отворено** ако за секое отворено подмножество U од X, $f(U)$ е отворено во Y.
- **затворено** ако за секое затворено подмножество P од X, $f(P)$ е затворено во Y.

Теорема. Нека f е непрекината биекција од X во Y, каде X и Y се тополошки простори. Следниве услови се еквивалентни:

1) $f^{-1} : Y \to X$ е непрекината,
2) f е отворено,
3) f е затворено.

Нека $f : X \to Y$ е непрекината биекција таква што инверзното пресликување f^{-1} е непрекинато. Тогаш f се нарекува **хомеоморфизам**.

Тополошките простори X и Y се **хомеоморфни** ако постои хомеоморфизам $f: X \to Y$. Пишуваме $X \cong Y$.

Ако $X \cong Y$ и $Y \cong Z$, тогаш и $X \cong Z$.

Нека X и Y се тополошки простори, f е непрекинато пресликување од X во Y. Велиме дека f е **сместување** на X во Y ако $f: X \to f(X)$ е хомеоморфизам.

Нека X е тополошки простор и нека $\{X_a \mid a \in A\}$ е фамилија подмножества на X такви што $X = \bigcup_{a \in A} X_a$. Тогаш за фамилијата $\{X_a \mid a \in A\}$ велиме е покривач за X.

Ако се дадени пресликувања $f_a : X_a \to Y$, за секој $a \in A$, такви што $f_a(x) = f_{a'}(x)$, за секој $x \in X_a \cap X_{a'}$, тогаш може да се дефинира пресликувањето $f: X \to Y$ со $f(x) = f_a(x)$, за $x \in X_a$.

Пресликувањето $f: X \to Y$ е добро дефинирано и го нарекуваме **комбинирано** пресликување.

Теорема. Нека $\{X_a \mid a \in A\}$ е фамилија од отворени подмножества на X такви што $X = \bigcup_{a \in A} X_a$. Ако $f_a : X_a \to Y$, $a \in A$ се непрекинати пресликувања тогаш комбинираното пресликување е непрекинато.

Теорема. Нека $\{X_a \mid a \in A\}$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ е конечна фамилија од затворени подмножества на X такви што $X = X_{a_1} \cup \dots \cup X_{a_n}$. Ако $f_a : X_a \to Y$, $a \in A$ се непрекинати пресликувања тогаш комбинираното пресликување е непрекинато.

Теорема. Нека X и Y се тополошки простори, $f: X \to Y$ е пресликување и нека $\mathcal{B}$ е подбаза на Y. Пресликувањето $f: X \to Y$ е непрекинато ако и само ако $f^{-1}(S)$ е отворено во X за секој $S \in \mathcal{B}$.

Теорема. Нека X е множество и нека $\mathcal{B}$ е фамилија од подмножества на X. Ако за секој $x \in X$, постои $S \in \mathcal{B}$, така што $x \in S$, тогаш конечните пресеци на фамилијата $\mathcal{B}$ формираат база за некоја топологија на X.

Нека (X, d_1) и (Y, d_2) се метрички простори. Пресликувањето $f: X \to Y$ се нарекува **рамномерно непрекинато** на X ако за секој

$\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секои $x, y \in X$ од $d_1(x,y) < \delta$ следува $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Нека X е тополошки простор и $A \subseteq X$. Непрекинатото пресликување $f : X \to A$ се нарекува **ретракција** ако $f|_A = 1_A$. Тогаш A се нарекува **ретракт на** X**.**

ЗАДАЧИ

3.1. Нека $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување и $A \subseteq X$. Докажи дека $f|_A : A \to Y$, дефинирано со $f|_A(x) = f(x)$, е непрекинато. Притоа, A е простор со индуцирана топологија од X.

3.2. Нека $f : X \to Y$ е хомеоморфизам и $A \subseteq X$. Докажи дека $X \setminus A \cong Y \setminus f(A)$.

3.3. Докажи дека следниве пресликувања се непрекинати

а) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$ б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

в) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$, каде $\mathcal{T}$ е дискретна топологија на X

г) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$, каде $\mathcal{T}'$ е индискретна топологија на Y

д) $f : X \to Y$, $f(x) = c$, за секој $x \in X$.

3.4. Нека $Y \subseteq X$ и $\mathcal{T}$ е топологија на X а $\mathcal{T}'$ е топологија на Y индуцирана од $\mathcal{T}$. Дефинираме пресликување $i : Y \to X$ со $i(x) = x$ за секој $x \in Y$ (ова пресликување се нарекува инклузија). Докажи дека i е непрекинато.

3.5. Нека $Y \subseteq X$ и $\mathcal{T}$ е топологија на X а $\mathcal{T}'$ е топологија на Y, и нека $i : Y \to X$ дефинирано со $i(x) = x$ за секој $x \in Y$. Докажи дека ако i е непрекинато, тогаш за секој $U \in \mathcal{T}$ важи $U \cap Y \in \mathcal{T}'$.

3.6. Нека $f : X \to Y$ е пресликување. Тогаш f е непрекинато ако и само ако $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f\left(A\right)}$ за секое $A \subseteq X$. Докажи!

3.7. Пресликувањето $f : X \to Y$ е непрекинато ако и само ако за секој $x_0 \in X$ и секое $A \subseteq X$ важи $x_0 \in \overline{A} \Rightarrow f\left(x_0\right) \in \overline{f(A)}$.

3.8. Пресликувањето $f : X \to Y$ е непрекинато ако и само ако за секое $B \subseteq Y$ важи $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

3.9. Нека $f : X \to Y$ е биекција. Тогаш условот f е хомеоморфизам е еквивалентен со секој од следниве услови:

а) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, за секое $A \subseteq X$;

б) $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$, за секое $B \subseteq Y$.

3.10. Нека $f : X \to Y$ е биекција. Тогаш f е хомеоморфизам ако и само ако $f\left(A'\right) = \left(f\left(A\right)\right)'$, за секое $A \subseteq X$. Докажи!

3.11. а) Нека $f : X \to Y$ е непрекината сурјекција и нека A е густо подмножество од X. Докажи дека $f\left(A\right)$ е густо во Y.

б) Дали ако сликата на секое густо подмножество од X е густо во Y следува непрекинатост на f?

3.12. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е пресликување. Пресликувањето f е непрекинато ако и само ако за секој $a \in \mathbb{R}$ важи: за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in \mathbb{R}$ таков што $| x - a | < \delta$ важи

$$\left|f\left(x\right) - f\left(a\right)\right| < \varepsilon$$

(т.е. од $x \in \left(a - \delta, a + \delta\right)$ следува $f\left(x\right) \in \left(f\left(a\right) - \varepsilon, f\left(a\right) + \varepsilon\right)$).

3.13. Нека $\left(X, d\right)$ и $\left(Y, r\right)$ се метрички простори и $f : X \to Y$ е пресликување. Тогаш f е непрекинато ако и само ако за секој $a \in X$ важи за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in X$

така што $d(x,a)<\delta$ важи $r(f(x),f(a))<\varepsilon$ (т.е. од $x\in T(a,\delta)$ следува дека $f(x)\in T(f(a),\varepsilon)$).

3.14. Докажи дека пресликувањето $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинирано со $f(x)=\sin x$

а) е непрекинато,
б) не е отворено пресликување.

3.15. Нека $(X,\mathcal{T})$ и $(X,\mathcal{T}')$ се тополошки простори и $1_X:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{T}')$ е дефинирано со $1_X(x)=x$ за секој $x\in X$.

а) Докажи дека 1_X е непрекинато ако и само ако $\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}$,

б) Најди пример каде 1_X не е непрекинато.

3.16. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекинато пресликување и нека $A=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},y=f(x)\}$ е графикот на пресликувањето f. Докажи дека A е затворено во $\mathbb{R}^2$ со вообичаената топологија.

3.17. Најди пример на пресликувања f,g,h така што

- f е непрекината биекција, а f^{-1} не е непрекинато;
- g е непрекинато и отворено, а не е затворено пресликување
- h е непрекинато, затворено но не е отворено пресликување.

3.18. Кои од следниве простори (потпростори од $\mathbb{R}$ со вообичаената топологија) се хомеоморфни: $A=\mathbb{N}$, $B=\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$, $C=B\cup\{0\}$?

3.19. Тополошко се нарекува она својство кое се пренесува при хомеоморфизам.

Докажи дека

а) внатрешност е тополошко својство
б) раб е тополошко својство
в) точка на акумулација е тополошко својство
г) Плоштина не е тополошко својство

3.20. Нека $S^2 = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ е сфера во $\mathbb{R}^3$. Докажи дека $S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \cong \mathbb{R}^2$.

3.21. Нека $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување. Докажи дека следниве услови се еквивалентни:

1) f е затворено

2) за секое $B \subseteq Y$ и секое отворено $A \subseteq X$ така што $f^{-1}(B) \subseteq A$ постои отворено $C \subseteq Y$ така што $B \subseteq C$ и $f^{-1}(C) \subseteq A$.

3.22. Нека $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување. Докажи дека следниве услови се еквивалентни:

1) f е затворено

2) за секој $y \in Y$ и секое отворено множество $U \subseteq X$ така што $f^{-1}(\{y\}) \subseteq U$ постои V околина на y така што $f^{-1}(V) \subseteq U$.

3.23. Нека X е тополошки простор и $f : X \to \mathbb{R}$ е пресликување. Докажи дека f е непрекинато ако и само ако множествата $\{x | f(x) < a\}$ и $\{x | f(x) > a\}$ се отворени во X за секој $a \in \mathbb{R}$.

3.24. Нека X е метрички простор и $A \subseteq X$. Тогаш пресликувањето $f : X \to \mathbb{R}$ дефинирано со $f(x) = d(x,A)$ е

а) непрекинато на X

б) рамномерно непрекинато на X.

Докажи!

3.25. Нека A и B се затворени множества во метричкиот простор X и $A \cap B = \varnothing$. Тогаш постои непрекинато пресликување $f : X \to [-1,1]$ така што важи

$f(x) = -1$, за секој $x \in A$,

$f(x) = 1$, за секој $x \in B$,

$-1 < f(x) < 1$, за секој $x \in X \setminus (A \cup B)$.

3.26. Нека f е непрекинато пресликување дефинирано на затворено подмножество F од метричкиот простор X, така што постои $\mu > 0$ така што $|f(x)| \leq \mu$. Тогаш постои непрекинато пресликување $g : X \to \mathbb{R}$ така што

$$|g(x)| \leq \frac{1}{3}\mu, \text{ за секој } x \in X;$$

$$|g(x)| < \frac{1}{3}\mu, \text{ за секој } x \in X \setminus F;$$

$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{2}{3}\mu, \text{ за секој } x \in F.$$

3.27. Нека (X, d_1), (Y, d_2) и (Z, d_3) се метрички простори и $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ се рамномерно непрекинати пресликувања. Тогаш и пресликувањето $gf : X \to Z$ е рамномерно непрекинато.

3.28. Нека X е метрички простор и нека за множествата $F, G \subseteq X$ важи

а) постои $\delta > 0$ така што
$$d(F,G) = \inf\{d(x,y) | x \in F, y \in G\} \geq \delta.$$

б) постои рамномерно непрекинато пресликување
$f : X \to [0,1]$ така што $f(F) = \{0\}$ и $f(G) = \{1\}$.

Докажи дека условите а) и б) се еквивалентни.

Забелешка. Множествата за кои важи а) се нарекуваат разделени во метричкиот простор X, а множествата за кои важи б) се нарекуваат рамномерно разделени во метричкиот простор X

3.29. Пресликувањето $f : X \to Y$ е нарекува **локално константно**, ако за секој $x \in X$ постои околина U_x на x така што $f|_{U_x}$ е константно пресликување.

Докажи дека секое локално константно пресликување е непрекинато.

3.30. Нека X е тополошки простор и $A \subseteq X$. непрекинатото пресликување $f : X \to A$ се нарекува **ретракција** ако $f(a) = a$, за секој $a \in A$. Притоа, A се нарекува **ретракт на X.**

Секое непразно отворено-затворено подмножество од X е ретракт на X. Докажи!

4. АКСИОМИ ЗА СЕПАРАЦИЈА

Нека X е тополошки простор.

X е T_1 простор ако за секои две точки $x, y \in X$ постои околина U на x таква што $y \notin U$.

Теорема. X е $\mathbf{T_1}$ простор ако и само ако за секоја точка $x \in X$, едноелементното множество $\{x\}$ е затворено во X.

X е $\mathbf{T_2}$ (**Хаусдорфов**) простор ако за секои две точки $x, y \in X$ постојат околини U на x и V на y такви што $U \cap V = \varnothing$.

Теорема. Ако X е $\mathbf{T_1}$ (е $\mathbf{T_2}$), тогаш и секој потпростор на X е $\mathbf{T_1}$ (е $\mathbf{T_2}$).

Ако P е подмножество на X, **околина на** P е секое отворено множество кое го содржи P.

X е $\mathbf{T_3}$ (**регуларен**) простор ако за секоја точка $x \in X$ и секое затворено множество P такви што $x \notin P$, постојат околини U на x и V на P такви што $U \cap V = \varnothing$.

Теорема. Следните услови се еквивалентни:

1) X е регуларен,

2) за секоја точка $x \in X$ и секоја околина W на x, постои околина U на x таква што $\overline{U} \subseteq W$.

Теорема. Ако X е регуларен и $\mathbf{T_1}$ тогаш X е $\mathbf{T_2}$.

X е комплетно регуларен ($\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}$, простор на Тихонов) ако за секоја точка $x \in X$ и секое затворено множество P такви што $x \notin P$, постои непрекината функција $f : X \to [0,1]$ таква што $f(P) = \{0\}$ и $f(x) = 1$.

Теорема . Комплетно регуларен простор е регуларен.

X е $\mathbf{T_4}$ **(нормален)** простор ако за секои две затворени множества P и Q такви што $P \cap Q = \varnothing$, постојат околини U на Q и V на P такви што $U \cap V = \varnothing$.

Теорема. Следните услови се еквивалентни:

1) X е нормален,

2) за секое затворено множество Q и секоја околина W на Q, постои околина U на Q таква што $\overline{U} \subseteq W$.

Теорема. Ако X е нормален и $\mathbf{T}_1$, тогаш X е $\mathbf{T}_3$.

Теорема. Секој метрички простор е нормален.

Хауздорфовиот простор X се нарекува **Линделефов** ако од секој отворен покривач на X може да се издвои преброив подпокривач.

ЗАДАЧИ

4.1. Конечно подмножество од T_1 простор нема точки на акумулација. Докажи!

4.2. Нека X е T_1 простор и $A \subseteq X$. Докажи дека следниве услови се еквивалентни:
а) p е точка на акумулација за A;
б) секоја околина на p содржи бесконечно многу точки од A.

4.3. Докажи дека следниве услови се еквивалентни:
а) X е нормален;
б) за секое затворено подмножество F од X и секоја U околина на F постои околина V на F таква што $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

4.4. Докажи дека:
а) Секој конечен T_1 простор е дискретен;
б) Секој конечен T_1 простор е T_2.

4.5. а) Ако X е T_1 простор и $A \subseteq X$, тогаш A' е затворено. Докажи!
б) Докажи дека претпоставката дека X е T_1 во а) е важна.

4.6. Докажи дека секој тополошки простор кој има точно една неизолирана точка е T_4.

4.7. Нека X е хаусдорфов тополошки простор во кој множеството од сите неизолирани точки е конечно. Докажи дека X е нормален.

4.8. Нека X е T_1 простор и $f : X \to Y$ е сурјекција. Тогаш f е хомеоморфизам ако и само ако $\overline{A} = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, за секое $A \subseteq X$.

4.9. Нека $f : X \to Y$ е затворено пресликување. Тогаш за секое $B \subseteq Y$ и U отворено подмножество од X така што $f^{-1}\left(B\right) \subseteq U$ постои отворено множество V во Y така што $B \subseteq V$ и $f^{-1}\left(V\right) \subseteq U$. Докажи!

4.10. Нека $f : X \to Y$ е непрекината затворена сурјекција. Ако X е нормален, тогаш и Y е нормален. Докажи!

4.11. Нека $f : X \to Y$ непрекината затворена сурјекција, каде X е нормален. Тогаш и Y е нормален. Докажи!

4.12. Нека $f : X \to Y$ е непрекината сурјекција. Ако X е Линделефов, тогаш и Y е Линделефов.

4.13. Нека X е метрички простор. Следниве услови се еквивалентни:

1) X е сепарабилен;
2) X е 2-преброив;
3) X е Линделефов.

4.14. Докажи дека правата на Зоргенфреј $\left(\mathbb{R}, \mathcal{T}\right)$не е метризабилен простор.

4.15. T_1-просторот X е комплетно регуларен ако и само ако за секој $x \in X$ и за секоја околина V од некоја подбаза $\mathcal{P}$ на X, така што $x \in V$, постои непрекинато пресликување $f : X \to I\left(= [0,1]\right)$, така што $f(x) = 0$ и $f\left(y\right) = 1$, за секој $y \in X \setminus V$. Докажи!

4.16. За тополошкиот простор X следниве услови се еквивалентни:

а) X е нормален;

б) За секое затворено множество A и секое U, околина на A, постои отворено множество V така што $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$;

в) За секои дисјунктни затворени множества A и B постои отворено множество U така што $A \subseteq U$ и $\overline{U} \cap B = \varnothing$;

г) Секои дисјунктни затворени множества имаат околини со дисјунктни затворачи.

4.17. Да ја разгледаме фамилјата $\mathcal{B} = \{\{0, x\} | x \in \mathbb{R}\}$ од подмножества од $\mathbb{R}$. Докажи дека

а) $\mathcal{B}$ ги исполнува условите за база на некоја топологија $\mathcal{T}$ на $\mathbb{R}$

б) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ е сепарабилен, 1-преброив и не е 2-преброив

в) Потпросторот $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ со индуцирана топологија не е сепарабилен

г) дали $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ е T_1, T_2, T_3 и T_4.

4.18. Множеството од изолирани точки во сепарабилен тополошки простор не преброиво. Докажи!

4.19. Ако $(X, \mathcal{T})$ е простор кој има преброива база тогаш

а) за секое $A \subseteq X$, секој отворен покривач на A има преброив потпокривач;

б) од секоја фамилија подмножества која е база за $\mathcal{T}$ постои потфамилија која е база и е преброива.

4.20. Нека $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ е правата на Зоргенфреј. Докажи дека $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$

а) е сепарабилен;

б) нема преборива база (т.е. не е 2-преброив);

в) има преброива локална база во секоја точка (т.е. е 1-преброив);

4.21. Докажи дека затворено подмножество од линделефов простор е линделефов (во однос на индуцираната топологија).

4.22. Ако $r : X \to A$ е ретракција, $A \subseteq X$ и X е T_2, докажи дека A е затворено во X.

4.23. Нека X и Y се тополошки простори, Y е T_2 а $f, g : X \to Y$ се непрекинати пресликувања.

а) Докажи дека множеството $B = \{x | x \in X, f(x) = g(x)\}$ е затворено во X.

б) Ако постои густо подмножество A од X така што $f|_A = g|_A$ тогаш $f = g$.

4.24. Најди пример на сепарабилен простор кој има несепарабилен потпростор.

5. НИЗИ ВО ТОПОЛОШКИ ПРОСТОРИ

Нека X е тополошки простор. Секое пресликување $a : \mathbb{N} \to X$ од множеството природни броеви во X се нарекува **низа во тополошкиот простор X.**

Обично ставаме $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$, ... и низата ја означуваме со $(a_1, a_2, \ldots)$ или $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ или скратено со (a_n).

Низата (x_n) во тополошкиот простор X велиме дека **конвергира кон точката $x \in X$** ако за секоја околина U на x постои природен број $n_0 \in N$ така што за сите $n \geq n_0$, $x_n \in U$.

Теорема. Ако X е $\mathbf{T}_2$ простор тогаш низата (x_n) во X конвергира најмногу кон една точка.

Теорема. Ако X е 1-преброив простор и нека $A \subseteq X$. Тогаш:

1) $x \in \overline{A}$ ако и само ако постои низа (a_n) во A која конвергира кон x.

2) $x \in A'$ ако и само ако постои низа (a_n) во $A \setminus \{x\}$ која конвергира кон x.

Теорема. Ако X е 1-преброив простор и нека $f : X \to Y$ е пресликување. Следниве услови се еквивалентни:

1) $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување,

2) за секоја точка x и секоја низа (x_n) која конвергира кон x, низата $(f(x_n))$ да конвергира кон $f(x)$.

Нека (X, d_1) и (Y, d_2) се метрички простори. Низата од пресликувања $f_n : X \to Y$ е **конвергентна кон пресликувањето $f : X \to Y$** ако за секој $x \in X$ низата $(f_n(x))$ конвергира кон $f(x)$ во Y.

Нека (X, d_1) и (Y, d_2) се метрички простори. Низата од пресликувања $f_n : X \to Y$ е **рамномерно конвергентна кон пресликувањето $f : X \to Y$** ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geq n_0$ важи $d_2(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, за секој $x \in X$.

ЗАДАЧИ

5.1. Ако секоја низа во X има конвергентна подниза, тогаш секое бесконечно подмножество од X има точка на акумулација. Докажи!

5.2. Нека X е 1-преброив. Подмножеството U од X е отврено ако и само ако ниту една низа од $X \setminus U$ не конвергира кон точка од U.

5.3. Низата (x_n) од метричкиот простор (X,d) конвергира кон $x \in X$ ако и само ако $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$.

5.4. Нека (X,d) е метрички простор и $A \subseteq X$. Докажи дека следниве тврдења се еквивалентни

а) постои низа (a_n) така што $a_n \in A$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \to a$, кога $n \to \infty$.

б) $a \in \bar{A}$

5.5. Нека (X,d_1) и (Y,d_2) се метрички простори. Пресликувањето $f : X \to Y$ е рамномерно непрекинато на X ако и само ако за секои низи (x_n) и (y_n) од X важи

од $d_1(x_n,y_n) \to 0$ следува $d_2(f(x_n),f(y_n)) \to 0$, кога $n \to \infty$.

Докажи!

5.6. Нека (X,d_1) и (Y,d_2) се метрички простори.

а) Ако $f : X \to Y$ е рамномерно непрекинато, тогаш f е непрекинато пресликување. Докажи!

б) дали важи обратното во а)?

5.7. Нека X е метрички простор и $f_i : X \to \mathbb{R}$ е низа од непрекинати пресликувања такви што $|f_i(x)| \le M_i$, за секој $i \in \mathbb{N}$ и за секој $x \in X$. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ е конвергентен, тогаш пресликувањето $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_i(x)$ е непрекинато.

5.8. Нека (f_n) е рамномерно конвергентна низа од рамномерно непрекинати пресликувања од метричкиот простор X во $\mathbb{R}$. Тогаш пресликувањето $f: X \to \mathbb{R}$, дефинирано со $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ е рамномерно непрекинато на X.

5.9 Две метрики d_1 и d_2 на X се еквивалентни (индуцирраат иста топологија на X) ако и само ако за секој $x \in X$ и секоја низа (x_n) од X условите $\lim_{n\to\infty} d_1(x,x_n)=0$ и $\lim_{n\to\infty} d_2(x,x_n)=0$ се еквивалентни. Докажи!

5.10. За секој метрички простор (X,d) постои метрика d_1 на X која е еквивалентна со d и е ограничена со 1. Докажи!

6. ПРОИЗВОД НА ТОПОЛОШКИ ПРОСТОРИ

Нека $\prod_{a\in A} X_a$ е директен производ на фамилијата множества X_a, $a \in A$. Пресликувањето $p_b : \prod_{a\in A} X_a \to X_b$, определено за секој $b \in A$ со $p_b(x_a \mid a \in A) = x_b$ се нарекува b - **проекција**.

Нека X_a, $a \in A$ се тополошки простори. Множеството $\prod_{a\in A} X_a$ со минималната топологија со која сите проекции $p_b : \prod_{a\in A} X_a \to X_b$, $b \in A$ се непрекинати се нарекува **производ на тополошките простори** X_a, $a \in A$.

Теорема. Топологијата на $\prod_{a\in A} X_a$ има база која се состои од сите множества $\prod_{a\in A} U_a$ каде што U_{a_i} се отворени во X_{a_i} за конечен број индекси $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ и $U_a = X_a$ за $a \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Теорема. Пресликувањето $f : Y \to \prod_{a\in A} X_a$ е непрекинато ако и само ако се непрекинати пресликувањата $p_a f : Y \to X_a$ за секој $a \in A$.

Теорема. Проекциите $p_b : \prod_{a\in A} X_a \to X_b$ се отворени пресликувања.

ЗАДАЧИ

6.1. Докажи дека производ топологијата на производот конечен број простори $X_1,...,X_n$ со бази $\mathcal{B}_1,...,\mathcal{B}_n$, соодветно, се совпаѓа со топологијата на $X_1 \times ... \times X_n$ со база

$$\mathcal{B}' = \left\{ B_1 \times ... \times B_n \middle| B_i \in \mathcal{B}_i, i \in \{1,...,n\} \right\}.$$

6.2. Производ топологијата на $\mathbb{R}^2$ се совпаѓа со топологијата на $\mathbb{R}^2$ индуцирана од метриката $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ (стандардната топологија на $\mathbb{R}^2$). Докажи!

6.3. Нека X и Y се тополошки простори. Докажи дека за секои $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$ важи:

а) $\bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B}$

б) $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$

6.4. Докажи дека производ на два

а) 1-преброиви е 1-преброив простор:

б) 2-преброиви е 2-преброив простор;

в) сепарабилни е сепарабилен простор.

6.5. Производ на произволна фамилија хаусдорфови простори е хаусдорфов простор. Докажи!

6.6. Дали производ на дискретни простори е дискретен простор?

6.7. Просторот X е хаусдорфов ако и само ако множеството $\Delta = \{(x,x) | x \in X\}$ е затворено во $X \times X$. Докажи!

6.8. Нека $\{X_a | a \in A\}$ и $\{Y_a | a \in A\}$ се фамилии тополошки простори и нека $f_a : X_a \to Y_a$ е непрекинато пресликување, за секој $a \in A$. Дефинираме

$$F : \prod_{a\in A} X_a \to \prod_{a\in A} Y_a \text{ со } F(x_a | a \in A) = (f_a(x_a) | a \in A)$$

за секој $\left(x_a \middle| a \in A\right) \in \prod_{a \in A} X_a$. Докажи дека F е непрекинато.

6.9. Нека $\left\{X_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ е фамилија метрички простори и нека d_i е метрика на X_i, за секој $i \in \mathbb{N}$. Докажи дека постои метрика на $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ која е ограничена со 1 и индуцира топологија која се совпаѓа со топологијата на производот.

6.10. Рамнина на Зоргенфреј $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}\right)$ се нарекува производот на две прави на Зоргенфеј со топологија на производот. Докажи дека

а) множеството $A = \left\{\left(x, y\right) \middle| x, y \in \mathbb{R},\ x + y = 1\right\}$ е затворено во топологијата на производот

б) множеството A од а) со наследена топологија е дискретен простор

в) $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}\right)$ нема пребroива база

г) $\left(\mathbb{R}, \mathcal{T}\right)$ е нормален

д) $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}\right)$ не е нормален

6.11. Докажи дека $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{0\right\} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.

6.12. Нека $X^A = \prod_{a \in A} X$. Докажи дека X е хомеоморфен со потпросторот $\Delta\left(X\right) = \left\{\prod_{a \in A} \left\{x\right\} \middle| x \in X\right\}$ од X^A.

6.13. Множеството $\Delta\left(X\right)$ е ретракт на X^A. Докажи!

6.14. Нека X и Y се тополошки простори, $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување и нека $G_f = \left\{\left(x, f\left(x\right)\right) \middle| x \in X\right\}$ (ова множество се нарекува график на f) е потпростор од производот $X \times Y$.

Докажи дека

а) $G_f \simeq X$

б) ако Y е T_2, тогаш G_f е затворено во $X \times Y$.

6.15. Наведи пример на пресликување кое е непрекинато а нема затворен график.

6.16. Нека $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} [0,1]$ и $Y = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Докажи дека $X \cong Y$.

6.17. Нека $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \prod_{i \in \mathbb{R}} \mathbb{R}$.

а) Докажи дека $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ не е 1-преброив.

б) Дали е метризабилен?

6.18. Нека $\mathbb{R}^{\infty} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$.

а) Дали $\mathbb{R}^{\infty}$ е сепарабилен?

б) Дали е метризабилен?

7. КОМПАКТНОСТ

Нека X е тополошки простор и нека K е подмножество на X.

За множеството K се вели дека е **компактно** во X ако секој покривач $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in A\}$ на K, кој се состои од отворени подмножества на X содржи конечен потпокривач.

Ова значи дека постојат конечен број индекси $a_1, \dots, a_n \in A$ такви што $K \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}$.

Теорема. Нека X е тополошки простор и нека $K \subseteq Y \subseteq X$. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) K е компактно во X,

2) K е компактно во Y

Теорема. Нека X е компактен тополошки простор и нека K е затворено подмножество на X. Тогаш K е компактно.

Теорема. Нека X е $\mathbf{T}_2$ тополошки простор. Ако K е компактно подмножество на X, тогаш K е затворено.

Теорема. Нека X е компактен тополошки простор и $f : X \to Y$ непрекинато пресликување. Тогаш $f(X)$ е компактно.

Теорема. Нека X е компактен простор и Y е $\mathbf{T}_2$ простор. Ако $f : X \to Y$ е непрекината биекција, тогаш f е хомеоморфизам.

Теорема. Ако X е компактен $\mathbf{T}_2$ простор, тогаш X е нормален.

За фамилијата на подмножества $\{P_a \mid a \in A\}$ на X се вели дека е **центрирана** ако секоја нејзина конечна подфамилија има непразен пресек.

Теорема. Нека X е тополошки простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) X е компактен,

2) секоја центрирана фамилија затворени подмножества на X има непразен пресек.

Теорема. Бесконечно множество во компактен тополошки простор има точка на акумулација.

Нека X е метрички простор со метрика d и нека $A \subseteq X$. **Дијаметар на A** е $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.

За множеството A се вели дека е **ограничено** ако има конечен дијаметар.

Теорема. Компактно множество во метрички простор е ограничено.

Теорема. Подмножество X на евклидскиот реален простор $\mathbb{R}^n$ е компактно ако и само ако е затворено и ограничено.

Теорема. Нека X е компактен метрички простор. Ако $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување, тогаш тоа е рамномерно непрекинато.

Теорема. Производ на компактни тополошки простори е компактен простор.

За тополошкиот простор X се вели дека е **локално компактен** ако за секоја точка x од X постои околина U и компактно множество K така што $x \in U \subseteq K$.

Компактификација со една точка (компактификација на Александров) на некомпактен тополошки простор X е множеството $X^* = X \cup \{\infty\}$ со топологија во која затворени множества се:

1) затворените и компактни подмножества на X,

2) множествата $P^* = P \cup \{\infty\}$, каде што P е затворено подмножество на X.

Теорема. (Александров) X е локално компактен и $\mathbf{T}_2$ ако и само ако X^* е $\mathbf{T}_2$ простор.

Компактниот тополошки простор Y се нарекува **компактификација** на некомпактниот тополошки простор X ако постои сместување $f : X \to Y$ и $\overline{f(X)} = Y$.

ЗАДАЧИ

7.1. Најди отворени покривачи на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{R}^2$ за коишто не постојат конечни потпокривачи.

7.2. Нека X е тополошки простор и нека E е компактно а F затворено подмножество од X. Тогаш $E \cap F$ е компактно. Докажи!

7.3. Докажи дека секој компактен метрички простор има преброива база (т.е. е 2-преброив).

7.4. Нека $A_1, ..., A_n$ се компактни подмножества од X. Докажи дека $A_1 \cup ... \cup A_n$ е компактно.

7.5. Нека X е компактен простор и нека $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е фамилија од затворени непразни подмножества од X така што $F_{n+1} \subseteq F_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

7.6. Докажи дека бесконечно подмножество A од дискретен тополошки простор X не е компактно.

7.7. Дали пресекот на две компактни подмножества од тополошкиот простор X мора да е компактен?

7.8. Нека низата (a_n) конвергира кон a. Докажи дека множеството $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ е компактно.

7.9. Нека A и B се компактни во просторите X и Y, соодветно, и нека G е отворено во $X \times Y$ така што $A \times B \subseteq G$. Тогаш постојат отворени множества U во X и V во Y така што $A \times B \subseteq U \times V \subseteq G$. Докажи!

7.10. Нека (X, d) е метрички простор, $F \subseteq K \subseteq X$, K е компактно а F бесконечно. Докажи дека постои точка на акумулација на F што припаѓа на K.

7.11. Нека (X, d) е метрички простор и $\varnothing \neq A \subseteq X$ е компактно. Тогаш за секое $\varnothing \neq B \subseteq X$ постои $p \in A$ така што $d(p, B) = d(A, B)$. Докажи!

7.12. Нека (X, d) е метрички простор, $A \neq \varnothing$ компактно во X и $B \neq \varnothing$ затворено во X така што $A \cap B = \varnothing$. Докажи дека $d(A, B) > 0$.

7.13. Докажи дека $\mathbb{Q}$ не е локално компактен (со топологија наследена од вообичаената топологија на $\mathbb{R}$).

7.14. Докажи дека $\mathbb{R}^n$ е локално компактен.

7.15. а) Докажи дека комапктно подмножество од метрички простор е ограничено;

б) Дали мора секое затворено и ограничено подмножество од метрички простор да е компактно?

7.16. а) Нека $\left\{F_\alpha \middle| \alpha \in A\right\}$ е центрирана (има својство на конечен непразен пресек) фамилија од затворени подмножества од $\mathbb{R}$. Ако постои $\alpha_0 \in A$ така што F_{α_0} е ограничено, тогаш $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \varnothing$. Докажи!

б) Најди центрирана фамилија од затворени подмножества од $\mathbb{R}$ којашто има празен пресек.

7.17. Докажи дека хилбертовиот куб

$$H = \left\{\left(a_1, \ldots, a_n, \ldots\right) \middle| 0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

е компактен во $l^2 = \left\{\left(a_1, \ldots, a_n, \ldots\right) \middle| a_n \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ конвергира}\right\}$.

7.18. Нека $C_{[0,1]} = \left\{f \middle| f : [0,1] \to [0,1], f \text{ е непрекината}\right\}$. На $C_{[0,1]}$ дефинираме метрика со $d(f,g) = \max\left\{\left|f(x) - g(x)\right| \middle| x \in [0,1]\right\}$. Докажи дека $C_{[0,1]}$ не е компактен простор.

7.19. Докажи дека просторот $X = \cup\left\{X_n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, каде

$$X_n = \left\{\left(x, \frac{x}{n}\right) \middle| 0 \leq x \leq 1\right\}$$

за секој $n \in \mathbb{N}$ не е локално компактен. Притоа просторот има наследена топологија од вообичаената топлогија на $\mathbb{R}^2$.

7.20. Ако X е компактен, тогаш секое непрекинато пресликување $f : X \to \mathbb{R}$ достигнува максимум (и минимум). Докажи!

7.21. Нека $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ е правата за Зоргенфреј. Докажи дека

а) множеството $[a,b)$ не е компактно,

б) $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ не е локално компактен.

7.22. (Теорема на Лебег) Нека $\{U_a \mid a \in A\}$ е отворен покривач на компактниот метрички простор (X,d). Тогаш постои $\delta > 0$ со својтвото

за секое $C \subseteq X$ со $\operatorname{diam} C < \delta$ постои $a \in A$ така што $C \subseteq U_a$.

7.23. Нека (X,d_1) и (Y,d_2) се метрички простори и $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување. Ако X е компактен, тогаш f е рамномерно непрекинато. Докажи!

7.24. Подмножеството A од тополошкиот простор X се нарекува **релативно компактно** ако $\overline{A}$ е компактно множество.

Докажи дека за хауздорфовиот простор X, следниве услови се еквивалентни:

1) X е локално компактен;

2) За секој $x \in X$ и за секоја околина U на X постои релативно компактна околина V на x така што $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$;

3) За секое компактно множество C и секоја околина U на C постои релативно компактна околина V на C така што $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$;

4) X има база од отворени релативно компактни множества.

7.25. Секој локално компактен хауздорфов простор е регуларен.

7.26. Центрираната фамилија $\mathcal{F}$ од подмножества од X се нарекува **предфилтер** ако од $A,B \in \mathcal{F}$ следува дека постои $C \in \mathcal{F}$ така што $C \subseteq A \cap B$.

Нека X е компактен простор и $\mathcal{F}$ е предфилтер во X кој се состои од затворени множества. Тогаш за секое отворено множество U во X кое го содржи множеството $F = \bigcap\limits_{P \in \mathrm{F}} P$ постои $P_0 \in \mathcal{F}$ така што $P_0 \subseteq U$. Докажи!

7.27. Ако F е затворено, а K компактно подмножество од метричкиот простор (X,d) и $F \cap K = \varnothing$, тогаш $d(F,K) > 0$. Докажи!

7.28. Дали мора отворено подмножество од локално компактен простор да е локално компактно?

7.29. Нека X е линделефов простор во кој секоја низа има точка на натрупување. Докажи дека X е компактен.

8. СВРЗАНОСТ. ЛОКАЛНА СВРЗАНОСТ. ПАТ СВРЗАНОСТ

Нека X е тополошки простор.

Нека A и B се непразни подмножества од тополошкиот простор X. За A и B ќе речеме дека се **разделени** во X ако

$$\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B} .$$

Теорема. Нека X е тополошки простор. Нека A и B се непразни дисјунктни подмножества од X, и нека $Y = A \cup B$. Следниве услови се еквивалентни:

1) множествата A и B се разделени во X,
2) множествата A и B се затворени во Y,
3) множествата A и B се отворени во Y,
4) множествата A и B се разделени во Y.

Нека $Y \subseteq X$. За множеството Y ќе речеме дека е **сврзано** во X ако не може да се претстави како унија на две разделени подмножества.

Теорема. Нека X е тополошки простор и $Y \subseteq Z \subseteq X$. Множеството Y е сврзано во тополошкиот простор X ако и само ако е сврзано во тополошкиот простор Z.

Последната теорема покажува дека својството еден тополошки простор да е сврзан не зависи од тоа каде е сместен.

Последица. X е сврзан тополошки простор ако и само ако не може да се претстави како унија на две отворени непразни дисјунктни множества.

Теорема. Нека $X = A \cup B$ каде A и B се разделени во X, и нека C е сврзано подмножество на X. Тогаш $C \subseteq A$ или $C \subseteq B$.

Теорема. Нека C е сврзано подмножество на тополошкиот простор X и $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$. Тогаш и D е сврзано.

Теорема. Нека X е сврзан тополошки простор и $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување. Тогаш и $f(X)$ е сврзано множество.

Теорема. Нека C_a, $a \in A$ се сврзани потпростори на тополошкиот простор X. Ако за секои $a, a' \in A$ $C_a \cap \overline{C}_{a'} \neq \varnothing$ или $\overline{C}_a \cap C_{a'} \neq \varnothing$ тогаш и унијата $\bigcup\limits_{a \in A} C_a$ е сврзан простор.

Последица. Нека C_a, $a \in A$ се сврзани простори. Ако за секои $a, a' \in A$ $C_a \cap C_{a'} \neq \varnothing$ тогаш и унијата $\bigcup_{a \in A} C_a$ е сврзан простор.

Компонента на сврзаност $C(x)$ на точката x е најголемото сврзано множество кое ја содржи точката x.

Теорема. Компонентите на сврзаност се затворени множества.

Тополошкиот простор X е **локално сврзан** ако за секоја точка $x \in X$ и секоја нејзина околина U постои сврзана околина V таква што $V \subseteq U$.

Теорема. Ако X е локално сврзан, тогаш компонентите на сврзаност се отворени множества.

Теорема. Производ на сврзани простори е сврзан простор.

Пат во тополошкиот простор X е секое непрекинато пресликување $k : I \to X$, $I = [0,1]$. Ако $k(0) = x$, $k(1) = y$ тогаш за $k : I \to X$ е пат од x до y.

Тополошкиот простор X е **пат (линиски) сврзан** ако за секои две точки $x, y \in X$ постои пат X од x до y.

Теорема. Ако X е пат сврзан простор тогаш X е сврзан.

Дефинираме релација на еквиваленција во X со: x и y се во релација ако постои пат од x до y. Класите на еквиваленција во однос на оваа релација се нарекуваат **компоненти на пат сврзаност**.

Тополошкиот простор X е **локално пат сврзан** ако за секоја точка $x \in X$ и секоја нејзина околина U постои околина V, $V \subseteq U$ таква што за секоја точка $y \in V$ постои пат во U од x до y.

Теорема. Ако тополошкиот простор X е сврзан и локално пат сврзан, тогаш X е пат сврзан.

ЗАДАЧИ

8.1. Нека $A = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, x \neq 0\right\}$. Докажи дека A не е сврзано во $\mathbb{R}$.

8.2. Нека $A, B \subseteq X$ и A е сврзано а B е отврено-затворено во X и $A \cap B \neq \varnothing$. Докажи дека $A \subseteq B$.

8.3. Нека A и B се непразни подмножества од тополошкиот простор X. Ако $\left(\bar{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \bar{B}\right) = \varnothing$, тогаш $A \cup B$ не е сврзано. Докажи!

8.4. Нека E е подмножество од тополошкиот простор X. Докажи дека $\bar{E}$ е сврзано ако и само ако E не е унија од две непразни множества A и B така што $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$.

8.5. Нека X е сврзан тополоки простор и $f : X \to \mathbb{R}$ е непрекинато пресликување. Ако постојат $x, y \in X$ такви што $f(x) < 0$ и $f(y) > 0$ (или $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$), тогаш постои $z \in X$ така што $f(z) = 0$. Докажи!

8.6. Нека C е сврзано подмножество од X и $E \subseteq X$. Ако $C \cap E \neq \varnothing$ и $C \cap X \setminus E \neq \varnothing$, тогаш $C \cap \partial E \neq \varnothing$. Докажи!

8.7. Секое непразно сврзано множество во X е подмножество од некоја компонента на сврзаност.

8.8. Нека A е непразно отворено-затворено сврзано подмножество од X. Тогаш A е компонента на сврзаност. Докажи!

8.9. Најди ги компонентите на сврзаност на $\mathbb{Q}$ во однос на наследената топологија од вообичаената топологија на $\mathbb{R}$.

8.10. Најди пример на тополошки простор во кој сите компоненти не се отворени.

8.11. Ако X има конечен број компоненти на сврзаност, тогаш секоја компонента е отворено-затворена. Докажи!

8.12. Нека $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување и нека E е компонента на сврзаност на Y. Ако $f^{-1}(E) \neq \varnothing$, тогаш $f^{-1}(E)$ е унија од компоненти на сврзаност на X. Докажи!

8.13. Нека $X = \prod_{a \in A} X_a$. Докажи дека компонентата на секоја точка $x \in X$ е производ на компонентите на координати.

8.14. Нека $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ е фамилија од сврзани подмножества од просторот X, и нека A е сврзано подмножество од X така што $A_\lambda \cap A \neq \varnothing$, за секој $\lambda \in \Lambda$. Докажи дека $B = A \cup \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)$ е сврзано.

8.15. а) Нека X и Y се сврзани тополошки простори и $A \subset X$ ($A \neq X$) и $B \subset Y$ ($B \neq Y$). Тогаш $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ е сврзано во $X \times Y$. Докажи!
б) Дали тврдењето а) важи ако $A = X$ или $B = Y$?

8.16. Најди пример на тополошки простор X и негово подмножество A така што A е сврзано, но $\operatorname{int} A$ не е сврзано.

8.17. Подмножеството A од $\mathbb{R}^n$ се нарекува **конвексно** ако за секои $x, y \in A$ и секој $t \in [0,1]$ следува $tx + (1-t)y \in A$. Докажи дека секое конвексно множество е пат сврзано.

8.18. Докажи дека дискретниот простор е локално сврзан. Дали е сврзан?

8.19. Производ на два локално сврзани простори е локално сврзан. Докажи!

8.20. Ако X е пат сврзан, $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување, тогаш и $f(X)$ е пат сврзан.

8.21. Нека $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ е фамилија од пат сврзани подмножества од тополошкиот простор X такви што $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \neq \varnothing$. Тогаш $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ е пат сврзано множество. Докажи!

8.22. Докажи дека секое отворено, непразно, сврзано подмножество A од $\mathbb{R}^n$ е пат сврзано.

8.23. Нека $Y_n = \left\{ \left(x, \frac{x}{n} \right) \middle| 0 \le x < 1 \right\}$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и нека $Y = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \right) \cup \{ (1,0) \}$. Докажи дека Y

а) е сврзан;

б) не е пат сврзан;

в) не е локално сврзан.

8.24. Нека $X = \{0\} \times [-1,1]$, $Y = \left\{ (x,y) \middle| x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x} \right\}$ се подмножества од $\mathbb{R}^2$ со вообичаената топологија. Докажи дека

а) X и Y се сврзани и пат сврзани;

б) $X \cup Y$ е сврзан;

в) $X \cup Y$ не е пат сврзан.

8.25. Ако U е отворено-затворено множество во просторот X, тогаш U е унија од компоненти на сврзаност во X. Докажи!

8.26. Ако X е локално сврзан, тогаш секоја компонента на сврзаност на отворено множество U во X е отворена. Докажи!

8.27. Нека X е сврзан и U е отворено непразно подмножество од X и $U \neq X$. Тогаш $\overline{U} \setminus U \neq \varnothing$. Докажи!

8.28. Нека $f : X \to Y$ е непрекината, отворена сурјекција. Ако X е локално сврзан, тогаш и Y елокално сврзан. Докажи!

8.29. Дали компонентите на пат сврзаност мора да се затворени?

8.30. Нека X е сврзан тополошки простор и $f : X \to \mathbb{R}$ е непрекинато пресликување кое не е константно. Тогаш X е непреброив. Докажи!

8.31. Сврзан метрички простор (X,d) кој има барем две точки е непреброив. Докажи!

8.32. Нека X и Y се тополошки простори, $C(X)$ и $C(Y)$ множествата од компоненти на сврзаност на X и Y, соодветно, а

$f : X \to Y$ е непрекинато пресликување. Докажи дека f индуцира пресликување $f^* : C(X) \to C(Y)$.

8.33. Нека X, Y и Z се тополошки простори и нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ се непрекинати пресликувања. За пресликувањата f^* и g^* (од претходната задача) важи $(gf)^* = g^* f^*$. Докажи!

8.34. Ако $X \cong Y$, тогаш постои биекција меѓу $C(X)$ и $C(Y)$. Докажи!

8.35. Докажи дека просторите

а) $(0,1)$ и $[0,1)$ во $\mathbb{R}$ со стандардната топологија

б) $(0,1)$ и $S^1 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$.

в) K и O во $\mathbb{R}^2$ со стандардната топологија

г) K и Λ во $\mathbb{R}^2$ со стандардната топологија

не се хомеоморфни.

9. ХОМОТОПИЈА. ХОМОТОПСКИ ТИП

Нека X и Y се тополошки простори
Непрекинатите пресликувања $f, g : X \to Y$ се **хомотопни** ако постои непрекинато пресликување $H : X \times I \to Y$ така што $H(x,0) = f(x)$ и $H(x,1) = g(x)$, за секој $x \in X$. Се означува $f \simeq g$.

Пресликувањето H се нарекува хомотопија меѓу f и g.

Релацијата на хомотопија е релација на еквиваленција.

Теоерема. Ако $f_0, f_1 : X \to Y$ се хомотопни пресликувања и $g_0, g_1 : Y \to Z$ се хомотопни пресликувања, тогаш $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$.

Непрекинатото пресликување $f : X \to Y$ се нарекува **хомотопска еквиваленција** ако постои непрекинато пресликување $g : Y \to X$ така што $gf \simeq 1_X$ и $fg \simeq 1_Y$, каде 1_X и 1_Y се единечните пресликувања.

Теорема. Ако f е хомотопска еквиваленција и $f' \simeq f$, тогаш и f' е хомотопска еквиваленција.

Теорема. Ако $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ се хомотопски еквиваленции, тогаш и $gf : X \to Z$ е хомотопска еквиваленција.

Просторите X и Y се вели дека имаат **ист хомотопски тип** ако постои хомотопска еквиваленција $f : X \to Y$. Се означува $X \simeq Y$.

Оваа релација е релација на еквиваленција.

Просторот X се нарекува **контрактибилен** ако постои $x_0 \in X$ така што $1_X \simeq c_{x_0}$, каде $c_{x_0} : X \to X$ е константното пресликување дефинирано со $c_{x_0}(x) = x_0$, за секој $x \in X$.

Теорема. Ако просторот X е контрактибилен, тогаш секое пресликување $f : Y \to X$ е хомотопно со константното преликување c_{x_0}.

Ако X е контарктибилен и $f, g : Y \to X$ се непрекинати, тогаш $f \simeq g$.

Ако X е контарктибилен, тогаш има ист хомотопски тип со едноелементен простор.

ЗАДАЧИ

9.1. Нека $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Докажи дека $\{x_0\}$ и $\mathbb{R}^2$ имаат ист хомотопски тип.

9.2. Докажи дека цилиндарот $C = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ и кружницата $S = \{(x,y,0) | x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ имаат ист хомотопски тип.

9.3. Докажи дека $S = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ и $T = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ имаат ист хомотопски тип.

9.4. Нека X е тополошки простор. Секое непрекинато пресликување $f : X \to S^2$, каде $S^2 = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, кое не е сурјекција, е хомотопно со константно пресликување. Докажи!

9.5. Нека X е сврзан тополошки простори и нека Y е тополошки простор таков што $X \simeq Y$. Докажи дека и Y е сврзан.

9.6. Докажи дека $X = \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$ и $Y = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}; y > 0\}$ имаат ист хомотопски тип. Притоа двата простори се со наследена топологија од вообичаената топологија на $\mathbb{R}^2$.

9.7. Нека X е тополошки простор. Тогаш $X \simeq X \times I \simeq X \times \mathbb{R}^n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи!

9.8. Докажи дека секои два простори со индискретна топологија имаат ист хомотопски тип.

9.9. Нека $f_a, g_a : X_a \to Y_a$ се непрекинати пресликувања, за секој $a \in A$. Докажи дека

а) Ако $f_a \simeq g_a$, за секој $a \in A$, тогаш $F \simeq G$, каде F и G се производите на пресликувањата $\{f_a | a \in A\}$ и $\{g_a | a \in A\}$, соодветно.

б) Ако f_a е хомотопска еквиваленција за секој $a \in A$, тогаш и F е хомотопска еквиваленција.

9.10. Нека X е тополошки простор, S^n е единечна сфера во $\mathbb{R}^{n+1}$, т.е. $S^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \middle| x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\}$, и нека $f, g : X \to S^n$ се произволни непрекинати пресликувања така што $f(x) \neq -g(x)$ за секој $x \in X$. Докажи дека $f \simeq g$.

9.11. Нека X е тополошки простор и нека $f, g : X \to S^n$ се произволни непрекинати пресликувања кои не се сурјекција. Докажи дека $f \simeq g$.

9.12. Докажи дека X е контрактибилен ако и само ако има ист хомотопски тип со едноелементниот простор $\{p\}$.

9.13. Докажи дека производот ка контрактибилни простори е контрактибилен.

9.14. Докажи дека ретракт на контрактибилен простор е контрактибилен.

9.15. Нека $f, g : X \to Y$ се хомотопски еквивалентни пресликувања и нека $f^*, g^* : C(X) \to C(Y)$ се индуцираните пресликувања. Докажи дека $f^* = g^*$.

9.16. Ако X и Y имаат ист хомотопски тип, тогаш постои биекција меѓу нивните множества од компоненти на сврзаност.

9.17. Нека $X \simeq Y$ и $x \in X$. Дали мора $X \setminus \{x\}$ и $Y \setminus \{f(x)\}$ да имаат ист хомотопски тип, каде $f: X \to Y$ е хомотопска еквиваленција.

9.18. Нека $X_n = \{(x, 1-nx) | x \in [0,1]\}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, нека $Y = \{(0, y) | y \in [0,1]\}$, $X = Y \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \right)$, $x_0 = (0,0)$ и $y_0 = (0,1)$, во $\mathbb{R}^2$ со вообичаената топологија. Докажи дека $1_X \simeq c_{x_0}$, т.е. постои контракција на X во точката x_0. Притоа, $c_{x_0}: X \to X$ е константното пресликување дефинирано со $c_{x_0}(x) = x_0$, за секој $x \in X$.

ВТОР ДЕЛ

РЕШЕНИЈА

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ТОПОЛОШКИ ПРОСТОР. ОТВОРЕНИ И ЗАТВОРЕНИ МНОЖЕСТВА. БАЗА. ПОДБАЗА. РЕЛАТИВНА (НАСЛЕДЕНА) ТОПОЛОГИЈА

1.1. а) Една таква фамилија е $\mathcal{T} = \{X, \varnothing, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$.
Притоа 1) важи, а заради $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\}$ и $\{a\} \notin \mathcal{T}$ следува дека 2) не важи.
б) Во фамилијата $\mathcal{T}$ под а) важи 3) (зошто?).

Да ја разгледаме фамилијата $\mathcal{T}_1 = \{X, \varnothing, \{a,b\}, \{a,c\}\}$. Тогаш $\{a,b\} \cup \{a,c\} = \{a,b,c\} \notin \mathcal{T}_1$, па 3) не важи.
в) Ако на $\mathcal{T}$ од а) се додаде уште и $\{a\}$ добиена фамилија $\{X, \varnothing, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a\}\}$ е топологија на X (провери).

1.2. а) Една топологија на множеството X може да има најмалку два елементи X и $\varnothing$. Таа е единствена топологија со два елементи и се нарекува **индискретна** топологија.
б) Најмногу елементи може да има колку што изнесува бројот на сите подмножества од X, т.е. $2^{|X|}$, каде $|X|$ е број на елементи на X. Топологијата која ги содржи сите подмножества на X се нарекува **дискретна**. И таа е единствена топологија со $2^{|X|}$ елементи.
в) Нека $X \supseteq \{a,b\}$. Тогаш $\mathcal{T}_1 = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ и $\mathcal{T}_2 = \{X, \varnothing, \{b\}\}$ (провери дека овие фамилии се топологии на X !).

1.3. Во сите топологии мора да ги има X и $\varnothing$, па остануваат уште два члена. Да ги означима со A и B.
- Ако $A \cap B = \varnothing$ тогаш $A \cup B = X$, па A и B го разбиваат X на дисјункни подмножества. Такви можности има три:
$\mathcal{T}_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b,c\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{X, \varnothing, \{b\}, \{a,c\}\}$ и
$\mathcal{T}_3 = \{X, \varnothing, \{c\}, \{a,b\}\}$.
- $A \cap B = A$ или $A \cap B = B$. Во првиот случај $A \subseteq B$, а во вториот $B \subseteq A$. Во овој случај добиваме уште шест топологии
$\mathcal{T}_4 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a,b\}\}$, $\mathcal{T}_5 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{a,c\}\}$,
$\mathcal{T}_6 = \{X, \varnothing, \{b\}, \{a,b\}\}$, $\mathcal{T}_7 = \{X, \varnothing, \{b\}, \{b,c\}\}$,

$\mathcal{T}_8 = \{X, \varnothing, \{c\}, \{b, c\}\}$ и $\mathcal{T}_9 = \{X, \varnothing, \{c\}, \{a, c\}\}$.
Тоа се сите можности за топологија на X со четири елементи.

1.4. Јасно е дека условот 1) од дефиницијата за топологија е исполнет. Да го провериме 2).

Нека $A_{t_1} = (t_1, \infty)$ и $A_{t_2} = (t_2, \infty)$ се произволни елементи од $\mathcal{T}$. Притоа $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$. Тогаш $t = \max\{t_1, t_2\} \in \mathbb{Q}$, и

$$A_{t_1} \cap A_{t_2} = (t, \infty) = A_t \in \mathcal{T}.$$

Исто така $A_{t_1} \cap \mathbb{R} = A_{t_1} \in \mathcal{T}$ и $A_{t_1} \cap \varnothing = \varnothing \in \mathcal{T}$. Според тоа условот 2) е исполнет.

Останува да провериме дали е исполнет условот 3). Да ја разгледаме фамилијата $\{A_t \mid t \in \mathbb{Q}, t > \sqrt{2}\}$.

Ќе докажеме дека $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{Q},\ t>\sqrt{2}} A_t = (\sqrt{2}, \infty)$. За секој $t \in \mathbb{Q}$ и $t > \sqrt{2}$ важи $A_t = (t, \infty) \subseteq (\sqrt{2}, \infty)$, па и $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{Q}, t>\sqrt{2}} A_t \subseteq (\sqrt{2}, \infty)$. Обратно, нека $a \in (\sqrt{2}, \infty)$. Значи a е реален број поголем од $\sqrt{2}$, па постои рационален број q таков што $\sqrt{2} < q < a$. Според тоа $a \in (q, \infty) \subseteq \bigcup\limits_{t\in\mathbb{Q},\ t>\sqrt{2}} A_t$.

Значи, $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{Q},\ t>\sqrt{2}} A_t = (\sqrt{2}, \infty)$.

Бидејќи $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ следува дека $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{Q},\ t>\sqrt{2}} A_t \notin \mathcal{T}$, па 3) не важи. Значи, $\mathcal{T}$ не е топологија на $\mathbb{R}$.

1.5. Бидејќи $\mathbb{R}, \varnothing \in \mathcal{T}$ следува дека условот 1) од дефиницијата на топологија е исполнет.

Нека $A_{t_1} = (t_1, \infty)$ и $A_{t_2} = (t_2, \infty)$ се произволни елементи од $\mathcal{T}$. Тогаш $A_{t_1} \cap A_{t_2} = (t, \infty) = A_t \in \mathcal{T}$, каде $t = \max\{t_1, t_2\}$. Исто така $A_{t_1} \cap \mathbb{R} = A_{t_1} \in \mathcal{T}$ и $A_{t_1} \cap \varnothing = \varnothing \in \mathcal{T}$. Според тоа условот 2) е исполнет.

Нека $\{A_i \mid i \in I\}$ е произволна потфамилија од $\mathcal{T}$. Ако постои $i_0 \in I$ така што $A_{i_0} = \mathbb{R}$, тогаш $\cup\{A_i \mid i \in I\} = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Ако некое од множествата A_i е празно, тоа нема да влијае на унијата. Затоа нека $A_i = (a_i, \infty)$ за секој $i \in I$ и нека $A = \{a_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{R}$.

- Множеството A е неограничено од долу. Ќе докажеме дека $\cup\{A_i \mid i \in I\} = \mathbb{R}$.

Јасно е дека $\cup\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathbb{R}$, бидејќи $A_i \subseteq \mathbb{R}$ за секој $i \in I$. Нека $x \in \mathbb{R}$ е произволен. Тогаш, заради неорганиченоста на A од долу постои $a_{i_0} \in A$ така што $a_{i_0} < x$. Значи, $x \in (a_{i_0}, \infty) \subseteq \cup\{A_i \mid i \in I\}$. Според тоа, $\mathbb{R} \subseteq \cup\{A_i \mid i \in I\}$, па $\cup\{A_i \mid i \in I\} = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.
(Докажи дека постои низа $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ од елементи на A таква што $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.)

- Множеството A е ограничено од долу. Тогаш постои $\inf A = a$. Ќе докажеме дека $\cup\{A_i \mid i \in I\} = (a, \infty)$. Бидејќи $a \leq a_i$ за секој $i \in I$, следува дека $(a_i, \infty) \subseteq (a, \infty)$ за секој $i \in I$. Според тоа $\cup\{A_i \mid i \in I\} \subseteq (a, \infty)$. Обратно, нека $x \in (a, \infty)$. Тогаш постои $a_{i_0} \in A$ така што $a \leq a_{i_0} < x$ (зошто?). Значи, $x \in (a_{i_0}, \infty) \subseteq \cup\{A_i \mid i \in I\}$. Според тоа, $\cup\{A_i \mid i \in I\} \supseteq (a, \infty)$, па $\cup\{A_i \mid i \in I\} = (a, \infty) \in \mathcal{T}$.

Од сето ова следува дека условот 3) е исполнет, па $\mathcal{T}$ е топологија на $\mathbb{R}$.

1.6. а) $\varnothing \in \mathcal{T}$. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} = E_1 \in \mathcal{T}$, па 1) е исполнет. Нека $E_n, E_m \in \mathcal{T}$ и нека $p = \max\{n, m\}$. Тогаш
$E_n \cap E_m = \{n, n+1, \ldots\} \cap \{m, m+1, \ldots\} = \{p, p+1, \ldots\} = E_p \in \mathcal{T}$, па и 2) е исполнет.

Нека $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е произволна потфамилија од $\mathcal{T}$. Тогаш $U_\alpha = E_{n_\alpha} = \{n_\alpha, n_\alpha + 1, \ldots\}$, каде $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Бидејќи сите n_α се природни броеви, следува дека постои $\min\{n_\alpha \mid \alpha \in A\} = n$, па

$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = E_n \in \mathcal{T}$ (докажи!). Според тоа важи 3), па $\mathcal{T}$ е топологија на $\mathbb{N}$.

б) Отворени множества (т.е. множества кои се елементи на $\mathcal{T}$) кои го содржат бројот 8 се: $E_1 = \mathbb{N}$, $E_2 = \{2,3,\ldots\}$, $E_3 = \{3,4,\ldots\}$, E_4, E_5, E_6, E_7 и $E_8 = \{8,9,\ldots\}$. Ниту едно друго отворено множество не го содржи 8.

1.7. Бидејќи $\mathcal{T}_i$ е топологија на X за секој $i \in I$, следува дека $X, \varnothing \in \mathcal{T}_i$ за секој $i \in I$. Според тоа, $X, \varnothing \in \cap\{\mathcal{T}_i \mid i \in I\} = \mathcal{T}$.

Нека $U, V \in \cap\{\mathcal{T}_i \mid i \in I\} = \mathcal{T}$. Значи, $U, V \in \mathcal{T}_i$ за секој $i \in I$. Бидејќи $\mathcal{T}_i$ е топологија на X, следува дека $U \cap V \in \mathcal{T}_i$, за секој $i \in I$. Според тоа, $U \cap V \in \cap\{\mathcal{T}_i \mid i \in I\} = \mathcal{T}$.

Нека $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е произволна потфамилија од $\mathcal{T}$. Значи, за секој $\alpha \in A$ важи $U_\alpha \in \mathcal{T}_i$, за секој $i \in I$, т.е. $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е потфамилија од $\mathcal{T}_i$ за секој $i \in I$. Бидејќи $\mathcal{T}_i$ е тополгија за секој $i \in I$, следува дека $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_i$ за секој $i \in I$.
Оттука, $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \cap\{\mathcal{T}_i \mid i \in I\} = \mathcal{T}$. Значи, $\mathcal{T}$ е топологија на X.

1.8. а) Да ги разгледаме топологиите $\mathcal{T}_9 = \{X, \varnothing, \{c\}, \{a,c\}\}$ и
$\mathcal{T}_6 = \{X, \varnothing, \{b\}, \{a,b\}\}$ од задача 1.3. Нивната унија е
$\mathfrak{T} = \{X, \varnothing, \{c\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b\}\}$. Имаме, $\{c\}, \{b\} \in \mathcal{T}$, но
$\{c\} \cup \{b\} = \{b,c\} \notin \mathcal{T}$, па $\mathcal{T}$ не е топологија на X.
б) Нека $\mathcal{T}_1$ е топологијата на $\mathbb{N}$ од задача 1.6, и нека $\mathcal{T}_2$ е фамилијата од подмножества од $\mathbb{N}$ која се состои од $\varnothing$, $\mathbb{N}$ и сите множества од видот $F_n = \{1,\ldots,n\}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Ќе докажеме дека $\mathcal{T}_2$ е топологија на $\mathbb{N}$. Јасно, 1) е исполнет. Ако $F_n, F_m \in \mathcal{T}_2$ и $p = \min\{n,m\}$, тогаш $F_n \cap F_m = F_p \in \mathcal{T}_2$, па 2) е исполнет. Нека $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е потфамилија од $\mathcal{T}_2$. Ако постои $\alpha_0 \in A$ така што $U_\alpha = \mathbb{N}$, тогаш $\cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\} = \mathbb{N} \in \mathcal{T}_2$, па 3) важи. Затоа, нека, $U_\alpha = F_{n_\alpha} = \{1,\ldots,n_\alpha\}$. Значи, $A \subseteq \mathbb{N}$, па ако A е ограничено од горе, постои $\max A = a$ и $\cup\left\{U_\alpha \middle| \alpha \in A\right\} = \left\{1,...,a\right\} = F_a \in \mathcal{T}_2$. Ако, пак, A не е ограничено од горе, тогаш $\cup\left\{U_\alpha \middle| \alpha \in A\right\} = \mathbb{N} \in \mathcal{T}_2$ (докажи!).

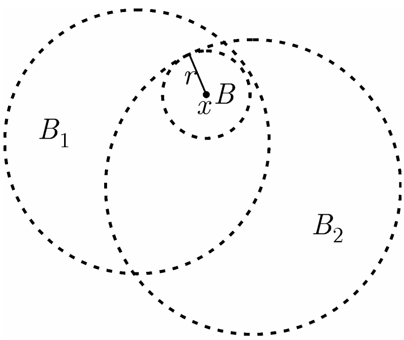
Да провериме дали $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ е топологија на $\mathbb{N}$. Имаме,
$\left\{1,2,3,4\right\}, \left\{2,3,4,...\right\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, но
$\left\{1,2,3,4\right\} \cap \left\{2,3,4,...\right\} = \left\{2,3,4\right\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.
Според тоа $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ не е топологија на $\mathbb{N}$.

1.9. а) Условот 1) е исполнет.

Да го провериме условот 2). Нека $(a,b),(c,d) \in \mathcal{T}$. Ако $c \geq b$ или $d \leq a$, тогаш $(a,b) \cap (c,d) = \varnothing \in \mathcal{T}$. Во другите случаи, во зависност од подреденоста на a,b,c,d пресекот ќе биде интервал, па условот 2) е исполнет.

Условот 3) не е исполнет, заради $(1,2),(3,4) \in \mathcal{T}$ но $(1,2) \cup (3,4) \notin \mathcal{T}$.
Значи, $\mathcal{T}$ не е топологија на $\mathbb{R}$.
б) Слично како во а) се докажува дека $\mathcal{T}$ не е топологија (унија на два круга не мора да е круг)

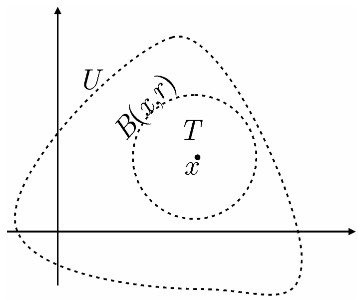
1.10. За $\mathcal{T}$: за секој $x \in \mathbb{R}$,
$$x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{T}.$$
Нека $x \in (a,b) \cap (c,d)$. Можеме да претпоставиме дека $a < c < b < d$ (во останатите случаи се постапува аналогно). Тогаш
$x \in (c,b) \subseteq (a,b) \cap (c,d)$ и
$(c,b) \in \mathcal{T}$. Според тоа $\mathcal{T}$ ги исполнува условите за база. Топологијата со оваа база ќе ја нарекуваме стандардна топологија на $\mathbb{R}$.



црт. 1

За $\mathcal{T}_1$: Јасно е дека секој x припаѓа во некој отворен круг. Нека $x \in B_1 \cap B_2$. Ако r е помалото од растојанијата од x до двете кружници, тогаш кругот B со центар во x и радиус r е подмножество од $B_1 \cap B_2$ (црт.1). Според тоа $\mathcal{T}_1$ ги исполнува условите за база. Топологијата со база $\mathcal{T}_1$ ќе ја нарекуваме вообичаена топологија на $\mathbb{R}^2$.

1.11. а) Нека U е отворено подмножество од $\mathbb{R}^2$ и нека $x \in U$. Бидејќи база на вообичаената топологија е фамилијата од сите отворени топки (кругови), постои топка $B(x,r)$ со центар во x и радиус r така што $x \in B(x,r) \subseteq U$. Во тој круг постои впишан рамностран триаголник T (со страна $r\sqrt{3}$). Според тоа, $x \in T \subseteq B(x,r)$ (црт. 2).



црт. 2

б) На сличен начин, во секој круг постои впишан квадрат со страни пралелни со координатните оски.

Да забележиме дека триаголникот и кругот не мора да се вишани (темињата да лежат на кружницата), туку може да се земат и со помали страни. Потребно е само да се подмножества од кругот и x да припаѓа во нив.

1.12. *I начин.* Нека $x \in X$ и $U \in \mathcal{T}$ е произволно отворено множество така што $x \in U$. Бидејќи $\mathcal{B}$ е база следува дека постои $V \in \mathcal{B}$ така што $x \in V \subseteq U$. Но, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$, па $V \in \mathcal{B}_1$. Значи, постои $V \in \mathcal{B}_1$, така што $x \in V \subseteq U$, па следува дека $\mathcal{B}_1$ е база.

II начин. Нека $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ е произволно непразно отворено множество. Бидејќи $\mathcal{B}$ е база, следува дека U може да се запише како унија на елементи од $\mathcal{B}$. Значи, постојат множества $\{V_\alpha | \alpha \in A\}$, $V_\alpha \in \mathcal{B}$, за секој $\alpha \in A$, така што $U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Заради $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$, следува дека $V_\alpha \in \mathcal{B}_1$, за секој $\alpha \in A$. Според тоа секој елемент од $\mathcal{T}$ може да се запише како унија на елементи од фамилијата $\mathcal{B}_1$, па $\mathcal{B}_1$ е база на $\mathcal{T}$.

1.13. Нека $\mathcal{B}_1$ е база за дискретната топологија на X. Тогаш, секое непразно отворено множество во X може да се запише како унија на елементи од $\mathcal{B}_1$. Бидејќи топологијата е дискретна следува дека и множеството $\{x\}$ е отворено, за секој $x \in X$, па и тоа може да се запише како унија на елементи од $\mathcal{B}_1$. Но, единствена можност за тое е $\{x\} = \{x\} \cup \{x\}$, па $\{x\} \in \mathcal{B}_1$, за секој $x \in X$. Според тоа $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$.
Обратно, нека $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}$. Од задача 1.12 следува дека $\mathcal{B}_1$ е база.

1.14. Да ја разгледаме фамилијата $\mathcal{B}=\left\{(x,y)\middle|x,y\in\mathbb{Q},x<y\right\}$. Бидејќи множеството $\mathbb{Q}$ е преброиво, и $\mathcal{B}\subseteq\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, следува дека и $\mathcal{B}$ е преброиво. Ќе докажеме дека $\mathcal{B}$ е база. Нека $x\in\mathbb{R}$ е призволен и U е произволно непразно отворено множество во $\mathbb{R}$ така што $x\in U$. Бидејќи фамилијата $\mathcal{B}_1=\left\{(x,y)\middle|x,y\in\mathbb{R},x<y\right\}$ е база за вообичаената топологија на $\mathbb{R}$, следува дека постојат $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ така што $x\in(a,b)\subseteq U$. Значи, $a<x<b$. Постојат $r,s\in\mathbb{Q}$ така што $a<r<x<s<b$. Тогаш, $(r,s)\in\mathcal{B}$ и $x\in(r,s)\subseteq(a,b)$, па $\mathcal{B}$ е база.

1.15. Нека x е произволна точка од дискретниот тополоки простор X и нека U е произволно отворено множество во X така што $x\in U$. Множеството $\{x\}$ е отворено и $x\in\{x\}\subseteq U$, па фамилијата $\{\{x\}\}$ која се состои само од еден член $\{x\}$ е локална база во x.

1.16. а) За секој $x\in\mathbb{R}$ важи $x\in(x-1,x]\in\mathcal{B}$.

Нека $x\in(a,b]\cap(c,d]$.

- Ако $a<c<b<d$, тогаш $x\in(c,b]\subseteq(a,b]\cap(c,d]$ и $(c,b]\in\mathcal{B}$.
- Ако $(a,b]\subseteq(c,d]$, тогаш $x\in(a,b]\subseteq(a,b]\cap(c,d]\in\mathcal{B}$ и $(a,b]\in\mathcal{B}$

И останатите случаи се проверуваат на ист начин. Значи, $\mathcal{B}$ ги исполнува условите за база.

б) Топологијата на $\mathbb{R}$ со база $\mathcal{B}$ се состои од сите унии на потфамилии од $\mathcal{B}$, и од празното множество. Значи $\mathcal{T}=\left\{\bigcup\limits_{a,b\in M,a<b}(a,b]\middle|M\subseteq\mathbb{R}\right\}$.

Оваа топологија се нарекува горно ограничена.

На сличен начин, фамилијата $\mathcal{B}_1=\left\{[a,b)\middle|a,b\in\mathbb{R},a<b\right\}$ е база за топологија на $\mathbb{R}$. Таа топологија се нарекува долно ограничена.

1.17. <u>*I начин.*</u> Прво ќе докажеме дека $(a,b)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(a,b-\frac{1}{n}\right]$, за секои $a,b\in\mathbb{R}$ и $a<b$.

За секој $n \in \mathbb{N}$ важи $\left(a, b-\frac{1}{n}\right] \subseteq (a,b)$, па $(a,b) \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(a, b-\frac{1}{n}\right]$.
Обратно, нека $x \in (a,b)$. Значи $a < x < b$, т.е. $b - x > 0$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0} < b - x$, па $x < b - \frac{1}{n_0}$. Според тоа $x \in \left(a, b-\frac{1}{n_0}\right] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(a, b-\frac{1}{n}\right]$, па важи равенство.

Сега, нека $U \in \mathcal{T}$. Тогаш U е унија на базни елементи на $\mathcal{T}$, т.е. постои $M \subseteq \mathbb{R}$ така што $U = \bigcup_{a,b\in M, a<b} (a,b)$. Тогаш

$$U = \bigcup_{a,b\in M, a<b} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(a, b-\frac{1}{n}\right] \right).$$

Според тоа, U може да се запише како унија на елементи од базата на $\mathcal{T}_1$, па $U \in \mathcal{T}_1$.

Тополагиите не се еднакви. Множеството $(0,1] \in \mathcal{T}_1$. Ќе докажеме дека $(0,1] \notin \mathcal{T}$. Да претпоставиме спротивно, дека $(0,1]$ може да се запише како унија на базни елементи од $\mathcal{T}$, т.е. постои $M \subseteq \mathbb{R}$ така што $(0,1] = \bigcup_{a,b\in M, a<b} (a,b)$. Јасно е дека $0 < a, b \leq 1$. Последново равенство не е можно, заради $1 \in (0,1]$, но $1 \notin (a,b)$, за секои $0 < a, b \leq 1$. Според тоа $1 \notin \bigcup_{a,b\in M, a<b} (a,b)$.

II начин. Нека (a,b) е произволен базен елемент на $\mathcal{T}$ и нека $x \in (a,b)$ е произволен. Тогаш $x \in (a,x] \subseteq (a,b)$. Бидејќи $(a,x]$ е базен елемент на $\mathcal{T}_1$, следува тврдењето.

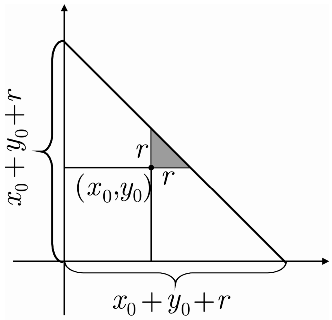
Од друга страна, $(0,1]$ е базен елемент на $\mathcal{T}_1$ и $1 \in (0,1]$, но не постои базен елемент (a,b) од $\mathcal{T}$ така што $1 \in (a,b) \subseteq (0,1]$, па топологиите не се еднакви.

1.18. Прво, да определиме што е отворена топка во двете топологии. Нека $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ и нека $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ е таква што

$$d_1\left((x_0, y_0), (x,y)\right) < r.$$

Тогаш $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2<r^2$.

Значи, отворена топка во $\mathcal{T}_1$ со центар во $\left(x_0,y_0\right)$ и радиус r е отворениот круг со центар во $\left(x_0,y_0\right)$ и радиус r.



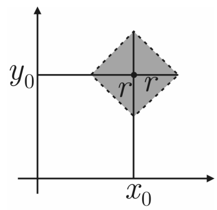
црт. 3

Сега, нека $\left(x_0,y_0\right)\in\mathbb{R}^2$, $r>0$ и нека $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$ е таква што $d_2\left(\left(x_0,y_0\right),\left(x,y\right)\right)<r$, тогаш

$$|x-x_0|+|y-y_0|<r.$$

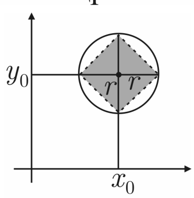
- Ако $x\geq x_0$ и $y\geq y_0$, тогаш добиваме $x-x_0+y-y_0<r$, т.е. $x+y<r+x_0+y_0$. Значи го бараме множеството точки $\left(x,y\right)$ во рамнина такви што $x\geq x_0$, $y\geq y_0$ и $x+y<r+x_0+y_0$. Решение на неравенката е полурамнината определена со правата $x+y=r+x_0+y_0$ (без правата) во која лежи $\left(x_0,y_0\right)$. Заради $x\geq x_0$ и $y\geq y_0$ добиваме дека бараното множество точки во овој случај е триаголникот со темиња $\left(x_0,y_0\right)$, $\left(x_0+r,y_0\right)$ и $\left(x_0,y_0+r\right)$ (црт. 3). Тој не ја содржи страната што лежи на правата, а ги содржи другите две страни.

Постапувајќи на сличен начин и во останатите случаи ($x>x_0,y<y_0$, итн.) бараното множество го добиваме како унија на четирите триаголници. Значи, отворена топка во $\left(X,d_2\right)$ со центатр во $\left(x_0,y_0\right)$ и радиус r е квадрат со дијагонали паралелни со координатните оски и должина на дијагоналата $2r$ (црт. 4).



црт. 4

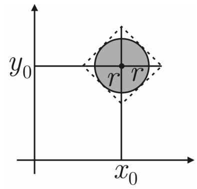
Сега, $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ се бази од сите вакви отворени топки за $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, соодветно.



црт. 5

Нека, $T_1\left(\left(x_0,y_0\right),r\right)\in\mathcal{B}_1$. Занчи, $T_1\left(\left(x_0,y_0\right),r\right)$ е отворен круг со рсиус r. Во тој круг постои впишан отворен квадрат $T_2\left(\left(x_0,y_0\right),r\right)$со центар во $\left(x_0,y_0\right)$ и дијагонала $2r$ (или помала) (црт. 5). Значи, за секој $x\in\mathbb{R}^2$ и секој $T_1\in\mathcal{B}_1$ така што $x\in T_1$ постои $T_2\in\mathcal{B}_2$ така што $x\in T_2\subseteq T_1$, па следува $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$.

Обратно, нека $T_2\left(\left(x_0,y_0\right),r\right)\in\mathcal{B}_2$. Во тој квадрат постои вписан круг $T_1\left(\left(x_0,y_0\right),\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$ (или со помал радиус) (црт. 6). На сличен начин како во претходниот случај заклучуваме дека $\mathcal{T}_2\subseteq\mathcal{T}_1$.



црт. 6

1.19. Нека $\left(X,\mathcal{T}\right)$ е дискретен тополошки простор. Дефинираме пресликување $d:X\times X\to\mathbb{R}$ со

$$d\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}.$$

Ова пресликување е метрика (докажи!).

Бидејќи $\left\{x\right\}=\left\{y\,\middle|\,y\in X,d\left(x,y\right)<\frac{1}{2}\right\}=T\left(x,\frac{1}{2}\right)$ за секој $x\in X$, следува дека сите едноелементни подмножества од X се отворени топки во оваа метрика. Затоа, ако $U\in\mathcal{T}$, тогаш $U=\cup\left\{\left\{x\right\}\middle|x\in U\right\}$. Според тоа $\left\{\left\{x\right\}\middle|x\in X\right\}$ е база за $\mathcal{T}$. Значи $\mathcal{T}$ е индуцирана од d.

1.20. а) - Множеството $\left[a,b\right]$ не е отворено.

<u>*I начин.*</u> Да претпоставиме дека е отворено. Тогаш може да се запише како унија на базни елементи, т.е. Постои $M\subseteq\mathbb{R}$ така што $\left[a,b\right]=\cup\left\{\left(s,t\right)\middle|s,t\in M,s<t\right\}$. Тогаш постојат $s_0,t_0\in M,s_0<t_0$ така што $a\in\left(s_0,t_0\right)$, т.е. $s_0<a<t_0$. Но тоа не е можно, заради $\left(s,t\right)\subset\left[a,b\right]$ за секои $s,t\in M$ и $s<t$.

<u>*II начин.*</u> Ако претпоставиме дека е отворено, тогаш постои базен елемент $\left(s,t\right)$ така то $a\in\left(s,t\right)\subseteq\left[a,b\right]$. Но, од една страна имае $s<a$, а од друга $a\leq s$, па добиваме контрадикција.

- Множеството $\left[a,b\right]$ е затворено.

Ќе докажеме дека $\mathbb{R}\setminus\left[a,b\right]$ е отворено.

<u>*I начин.*</u> Важи

$$\mathbb{R}\setminus\left[a,b\right]=\left(-\infty,a\right)\cup\left(b,\infty\right)=$$
$$=\cup\left\{\left(c,a\right)\middle|c\in\mathbb{R},c<a\right\}\cup\left\{\left(b,c\right)\middle|c\in\mathbb{R},c>b\right\}$$ (докажи!).

Значи, $\mathbb{R}\setminus[a,b]$ може да се запише како унија од базни елементи на вообичаената топологија на $\mathbb{R}$, па е отворено.

<u>*II начин.*</u> Нека $x\in\mathbb{R}\setminus[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ е произволен. Ако $x\in(-\infty,a)$, тогаш $x\in(x-1,a)\subseteq(-\infty,a)\subseteq\mathbb{R}\setminus[a,b]$, а ако $x\in(b,\infty)$, тогаш $x\in(b,x+1)\subseteq(b,\infty)\subseteq\mathbb{R}\setminus[a,b]$. Значи, постои базен елемент U така што $x\in U\subseteq\mathbb{R}\setminus[a,b]$, па $\mathbb{R}\setminus[a,b]$ е отворено.

б) Ова множество не е отворено. Навистина, за секој базен елемент (a,b) така што $1\in(a,b)$ важи $(a,b)\not\subseteq\{1,2,3\}$ (на пример постои ирационален број меѓу a и b и тој не е во $\{1,2,3\}$).

Множеството е затворено. Навистина,
$\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(3,\infty)$ е отворено, како унија на базни и елементи на подбазата на $\mathbb{R}$.

в) $(0,1]$ не е отворено. За секој базен елемент (a,b) така што $1\in(a,b)$ важи $(a,b)\not\subseteq(0,1]$ (бидејќи $b>1$).

Ова множество не е ни затворено. На сличен начин како предхоно се докажува дека $\mathbb{R}\setminus(0,1]=(-\infty,0]\cup(1,\infty)$ не е отворено.

г) $[0,\infty)$ е затворено, заради отвореноста на $\mathbb{R}\setminus[0,\infty)=(-\infty,0)$ (елемент од подбазата), и не е отворено (докажи!).

д) $[0,\infty)\setminus\mathbb{N}=[0,1)\cup\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)\right)$, па не е отворено (0 нема базна околина што се содржи во $[0,\infty)\setminus\mathbb{N}$). Исто така не е затворено, заради $\mathbb{R}\setminus([0,\infty)\setminus\mathbb{N})=(-\infty,0)\cup\mathbb{N}$, кое не е отворено ($1$ нема базна околина што се содржи во $\mathbb{R}\setminus([0,\infty)\setminus\mathbb{N})$).

ѓ) $\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ не е отворено ($\frac{1}{2}$ нема базна околина што се содржи во $\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$), а не е ни затворено заради тоа што $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}=(-\infty,0]\cup(1,\infty)\cup\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\right)$ не е отворено (во секоја базна околина (a,b) на 0 постои $\frac{1}{n_0}$ така што $\frac{1}{n_0} \in (a,b)$. Но $\frac{1}{n_0} \notin \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, па $(a,b) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$).

е) Ќе докажеме дека $\mathbb{Q}$ не е отворено. Нека (a,b) е произволна базна околина на бројот 1. Значи, $a < 1 < b$. Во интервалот (a,b) постои ирационален број. Значи $(a,b) \not\subseteq \mathbb{Q}$. Докажавме дека за секоја базна околина (a,b) на 1 важи $(a,b) \not\subseteq \mathbb{Q}$, па $\mathbb{Q}$ не е отворено.

Ќе докажеме дека $\mathbb{Q}$ не е ни затворено, т.е. дека $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не е отворено. Нека $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и нека (a,b) е произволна базна околина на s. Значи, $a < s < b$. Постои $r \in \mathbb{Q}$ така што $a < r < s$, т.е. $r \in (a,b)$, значи $(a,b) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, па $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не е отворено.

ж) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ не е отворено (е)), а не е ни затворено, затоа што $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ не е отворено.

1.21. а) Да ги разгледаме интервалите $\left\{\left(0,1+\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$. Ќе докажеме дека $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0,1+\frac{1}{n}\right) = (0,1]$.

Јасно е дека $(0,1] \subseteq \left(0,1+\frac{1}{n}\right)$ за секој $n \in \mathbb{N}$, па $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0,1+\frac{1}{n}\right) \supseteq (0,1]$. Обратно, нека $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0,1+\frac{1}{n}\right)$. Тогаш $0 < x \leq 1+\frac{1}{n}$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Да претпоставиме дека $x > 1$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0} < x - 1$, т.е. $1+\frac{1}{n_0} < x$, што не е можно. Според тоа $x \leq 1$, па $x \in (0,1]$. Значи, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0,1+\frac{1}{n}\right) \subseteq (0,1]$.

Множеството $(0,1]$ не е ни отворено ни затворено во $\mathbb{R}$.

б) $\left\{\left(0,1-\frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}$. Заради $\left(0,1-\frac{1}{n}\right) \subseteq \left(0,1-\frac{1}{n+1}\right)$, за секој $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, следува дека $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left(0,1-\frac{1}{n}\right) = \left(0,\frac{1}{2}\right)$.

в) $\left\{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. За нив важи $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \{0\}$ (докажи!).

г) $\left\{\left[0,1-\frac{1}{n}\right] \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}$. Имаме $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left[0,1-\frac{1}{n}\right] = [0,1)$.

д) $\left\{\left[0,1+\frac{1}{n}\right] \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Тогаш $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[0,1+\frac{1}{n}\right] = [0,2]$.

ѓ) $\left\{\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right] \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}\right\}$.

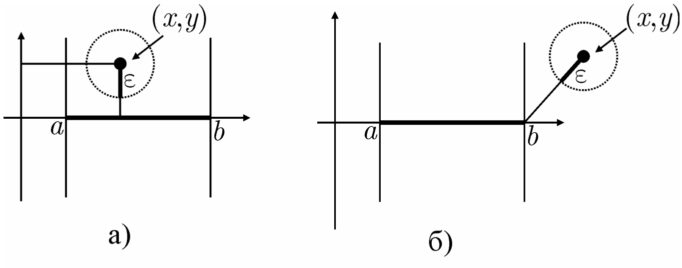
Тогаш $\bigcup \left\{\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right] \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}\right\} = (0,1)$.

1.22. а) $(a,b)\times\{0\} = \{(x,0) \,|\, a < x < b\}$

Не е отворено. Навистина, да избереме точка $(x,0) \in (a,b)\times\{0\}$. За секоја нејзина базна околина $T((x,0),\varepsilon)$ важи $\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \notin (a,b)\times\{0\}$ но $\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \in T((x,0),\varepsilon)$. Значи, за секоја околина $T((x,0),\varepsilon)$ на $(x,0)$важи $T((x,0),\varepsilon) \not\subseteq (a,b)\times\{0\}$.

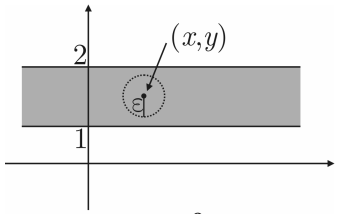
Множеството не е ни затворено. Ќе докажеме дека $\mathbb{R} \setminus ((a,b)\times\{0\})$ не е отворено. Имаме $(a,0) \in \mathbb{R} \setminus ((a,b)\times\{0\})$ и во секоја нејзина базна околина има елемент и од $(a,b)\times\{0\}$, па не е отворено (црт. 7).

б) $[a,b]\times\{0\} = \{(x,0) \,|\, a \le x \le b\}$. На сличен начин како а) се докажува дека множеството не е отворено.
Ќе докажеме дека е затворено.



црт. 8

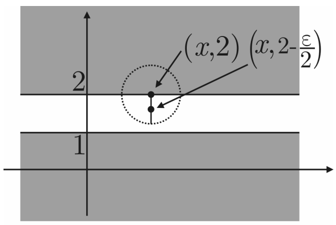
Нека $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \left([a,b]\times\{0\}\right)$ е произволна. Ако $a \leq x \leq b$, тогаш $T\left((x,y),\varepsilon\right) \subseteq \mathbb{R} \setminus \left([a,b]\times\{0\}\right)$, каде $\varepsilon = \dfrac{|y|}{2}$ (црт. 8, а)), а ако пак, $x < a$ или $x > b$, тогаш $T\left((x,y),\varepsilon\right) \subseteq \mathbb{R} \setminus \left([a,b]\times\{0\}\right)$, каде $\varepsilon = \dfrac{d\left((a,0),(x,y)\right)}{2}$ или $\varepsilon = \dfrac{d\left((b,0),(x,y)\right)}{2}$, соодветно (црт. 8, б)). Значи $\mathbb{R} \setminus \left([a,b]\times\{0\}\right)$ е отворено.



црт. 9

в) Всушност $A = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, 1 < y < 2\right\}$ е бесконечна лента без правите $y = 1$ и $y = 2$. Дека множеството е отворено, следува од тоа што ако $(x,y) \in A$, тогаш $T\left((x,y),\varepsilon\right) \subseteq A$, каде $\varepsilon \leq \min\left\{2-y, y-1\right\}$ (црт. 9).

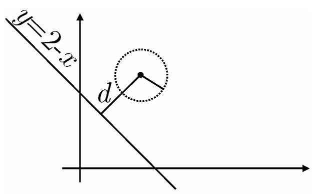
Ќе докажеме дека $\mathbb{R} \setminus A$ не е отворено од што ќе следува дека A не е затворено. Да ја разгледаме точката $(x,2) \in \mathbb{R} \setminus A$. Во секоја нејзина базна околина $T\left((x,2),\varepsilon\right)$ има точка од A (на пример $\left(x, 2-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$), па $T\left((x,2),\varepsilon\right) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus A$ (црт. 10).



црт. 10

г) Слично како в) се докажува дека множеството $\left\{(x,y) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, 1 \leq y \leq 3\right\}$ е затворено и не е отворено.

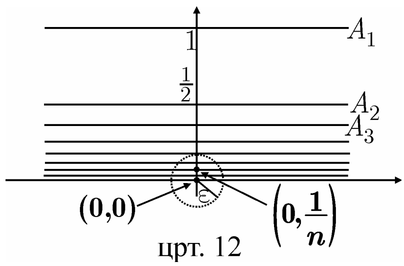
д) Ова множество е графикот на линеарната функција $y = 2 - x$ (црт.11). Дека не е отворено се докажува слично како а). Ќе докажеме дека е



црт. 11

затворено, т.е. дека $\mathbb{R} \setminus \left\{ (x, 2-x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ е отворено. Нека $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (x, 2-x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ и нека d е растојанието од (x,y) до правата $y = 2 - x$. Тогаш, $T\left((x,y), \frac{d}{2}\right) \subseteq \mathbb{R} \setminus \left\{ (x, 2-x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$, па $\mathbb{R} \setminus \left\{ (x, 2-x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ е отворено.

ѓ) Множеството A_n е графикот на линеарната функција $y = \frac{1}{n}$ за секој $n \in \mathbb{N}$ (црт. 12). Бидејќи секоја околина на $(0,1) \in A_1$ содржи точка од $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$, следува дека $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ не е отворено.



црт. 12

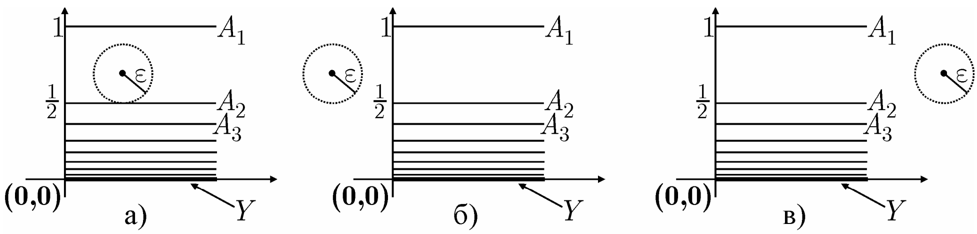
Ќе докажеме дека $\mathbb{R} \setminus A$ не е отворено, од што ќе следува дека A не е затворено. Имаме, $(0,0) \in \mathbb{R} \setminus A$ и нека $T\left((0,0), \varepsilon\right)$ е произволна околина на $(0,0)$. Постои $n \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогаш, $\left(0, \frac{1}{n}\right) \in A_n \subseteq A$, т.е. $T\left((0,0), \varepsilon\right) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus A$, па $\mathbb{R} \setminus A$ не е отворено.

е) Слично како ѓ) се докажува дека и ова множество не е ни отворено ни затворено.

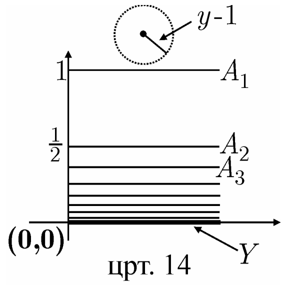
ж) Дека и ова множество не е отворено се докажува слично како претходно.

Ќе докажеме дека множеството $A = Y \cup \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$ е затворено, т.е. $\mathbb{R} \setminus A$ е отворено. Нека $(x,y) \in \mathbb{R} \setminus A$.

- Ако $\frac{1}{n+1} < y < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, тогаш $T\left((x,y), \varepsilon\right) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, каде што $\varepsilon = \min\left\{ \frac{1}{n} - y, y - \frac{1}{n+1} \right\}$ (црт. 13, а), б), в)).



црт. 13



црт. 14

- Ако $y > 1$, тогаш $T\big((x,y),y-1\big) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$ (црт. 14).

- Ако $y < 0$, тогаш $T\big((x,y),-y\big) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$.

1.23. Ќе докажеме дека секој базен елемент (a,b) од вообичаената топологија на $\mathbb{R}$ може да се запише како конечен пресек на елементи од $\mathcal{P}$. Навистина, $(a,\infty),(-\infty,b) \in \mathcal{P}$ и $(a,b) = (a,\infty) \cap (-\infty,b)$.

1.24. Нека $x \in \mathbb{R}$ е произволен. Тогаш $\{x\} = [x-1,x] \cap [x,x+1]$ и $[x-1,x],[x,x+1] \in \mathcal{P}$. Значи, секое едноелементно подмножество од $\mathbb{R}$ може да се запише како конечен пресек на елементи од $\mathcal{P}$. Според тоа, во оваа топологија секое множество е отворено, па таа е дискретната.

1.25. Бидејќи просторот е дискретен, треба да бараме фамилија $\mathcal{P}$ од подмножества од X таква што секое еднолементно подмножество од X (т.е. од базата на $\mathcal{T}$) ќе се добие како пресек на елементи од $\mathcal{P}$. Една таква можност за $\mathcal{P}$ е $\mathcal{P} = \big\{\{a,b\},\{a,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{e,a\}\big\}$. Дали е единствена?

1.26. Ако $(X,\mathcal{T})$ е тополошки простор и $Y \subseteq X$, тогаш релативната топологија $\mathcal{T}_Y$ на Y во однос на X е $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$. Оваа топологија уште се нарекува и наследена од $\mathcal{T}$.

Нека $n \in \mathbb{N}$ е произволен. Тогаш $\{n\} = \left(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{N}$. Бидејќи $\left(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)$ е отворено во $\mathbb{R}$, следува дека $\{n\}$ е отворено во $\mathbb{N}$. Значи, релативната топологија на $\mathbb{N}$ е дискретната.

Дали релативната топологија на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ е дискретна?

1.27. Бидејќи $A \in \mathcal{T}$ и $A = A \cap Y$ следува дека A е отворено во Y, т.е. $A \in \mathcal{T}_Y$.

1.28. а) *I начин.* Нека $y \in Y$ и $U \in \mathcal{T}_Y$ се произволни, така што $y \in U$. Бидејќи U е отворено во Y следува дека постои V отворено множество во X (т.е. $V \in \mathcal{T}$) така што $U = Y \cap V$. Бидејќи $x \in U \subseteq V$ и $\mathcal{B}$ е база на $\mathcal{T}$, следува дека постои $B \in \mathcal{B}$ така што $x \in B \subseteq V$. Значи $x \in B \cap Y \subseteq V \cap Y = U$ и $B \cap Y \in \mathcal{B}_Y$. Сопред тоа, постои $B \cap Y \in \mathcal{B}_Y$ така што $x \in B \cap Y \subseteq U$, па $\mathcal{B}_Y$ е база на $\mathcal{T}_Y$.

II начин. Ќе докажеме дека секои отворено множество во Y (т.е. секој елемент на $\mathcal{T}_Y$) може да се запише како унија на елементи од $\mathcal{B}_Y$. Нека $U \in \mathcal{T}_Y$ е произволен. Постои $V \in \mathcal{T}$ така што $U = Y \cap V$. Бидејќи $\mathcal{B}$ е база на $\mathcal{T}$, следува дека $V = \cup\left\{B_i \middle| i \in I\right\}$, каде $B_i \in \mathcal{B}$ за секој $i \in I$. Тогаш

$$U = Y \cap V = Y \cap \left(\cup\left\{B_i \middle| i \in I\right\}\right) = \cup\left\{Y \cap B_i \middle| i \in I\right\}.$$

Притоа, $Y \cap B_i \in \mathcal{T}_Y$ за секој $i \in I$.

б) Ќе докажеме дека секој елемент од базата $\mathcal{B}_Y$ на $\mathcal{T}_Y$ може да се претстави како конечен пресек на елементи од $\mathcal{P}_Y$. Нека Нека $U \in \mathcal{B}_Y$ е произволен. Постои $V \in \mathcal{B}$ така што $U = Y \cap V$. Бидејќи $\mathcal{P}$ е подбаза на $\mathcal{T}$ следува дека постојат $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{P}$ така што $V = V_1 \cap \dots \cap V_n$. Тогаш

$$U = Y \cap V = Y \cap \left(V_1 \cap \dots \cap V_n\right) = \left(Y \cap V_1\right) \cap \dots \cap \left(Y \cap V_n\right).$$

Бидејќи $Y \cap V_1, \dots, Y \cap V_n \in \mathcal{P}_Y$ следува тврдењето.

1.29. а) Според претходната задача, база е фамилијата

$$\mathcal{B}_{(0,1]} = \left\{\left(a,b\right) \cap \left(0,1\right] \middle| a,b \in \mathbb{R}, a < b\right\}$$

а подбаза

$$\mathcal{P}_{(0,1]} = \left\{\left(0,1\right] \cap \left(a,\infty\right) \middle| a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\left(0,1\right] \cap \left(-\infty,a\right) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}.$$

б) Множеството $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ не е отворено во $\left(0,1\right]$. Да претпоставиме спротивно, дека $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ е отворено во $\left(0,1\right]$. Имаме $\frac{1}{2} \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$, па од отвореноста на $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ во $\left(0,1\right]$ следува дека постои отворено во $\left(0,1\right]$ множество $U\subseteq\left(0,1\right]$ така што $\frac{1}{2}\in U\subseteq\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Постои базен елемент $\left(a,b\right)\cap\left(0,1\right]$ така што $\frac{1}{2}\in\left(a,b\right)\cap\left(0,1\right]\subseteq U\subseteq\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Не може да се случи $b\le\frac{1}{2}$, бидејќи тогаш $\frac{1}{2}\notin\left(a,b\right)$, па мора $b>\frac{1}{2}$. Но, тогаш постои s така што $\frac{1}{2}<s<b$ и $s\in\left(0,1\right]$, па $\left(a,b\right)\not\subseteq\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Добивме контрадикција. Значи $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ не е отворено во $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

Ова множество е затворено во $\left(0,1\right]$, затоа што $\left(0,\frac{1}{2}\right]=\left(0,1\right]\cap\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ е затворено во $\mathbb{R}$.

Множеството $\left(\frac{1}{2},1\right]$ е отворено во $\left(0,1\right]$, затоа што $\left(\frac{1}{2},1\right]=\left(0,1\right]\cap\left(\frac{1}{2},2\right)$ и $\left(\frac{1}{2},2\right)$ е отворено во $\mathbb{R}$.

Ќе докажеме дека $\left(\frac{1}{2},1\right]$ не е затворено во $\left(0,1\right]$. Да претпоставиме дека е затворено. Тогаш $\left(0,1\right]\setminus\left(\frac{1}{2},1\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$ е отворено во $\left(0,1\right]$. Но тоа не е точно.

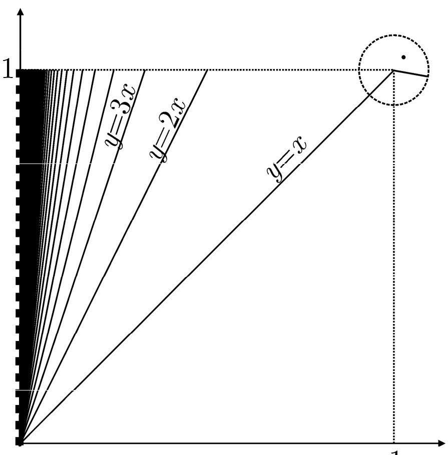
Бидејќи $\left(0,\frac{1}{3}\right)=\left(0,1\right]\cap\left(0,\frac{1}{3}\right)$ и $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ е отворено во $\mathbb{R}$ следува дека и ова множество е отворено во $\left(0,1\right]$.

Да ја испитаме затвореноста. Ако претпоставиме дека $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ е затворено во $\left(0,1\right]$, тогаш $\left(0,1\right]\setminus\left(0,\frac{1}{3}\right)=\left[\frac{1}{3},1\right]$ е отворено во $\left(0,1\right]$. Докажи дека $\left[\frac{1}{3},1\right]$ не е отворено во $\left(0,1\right]$.

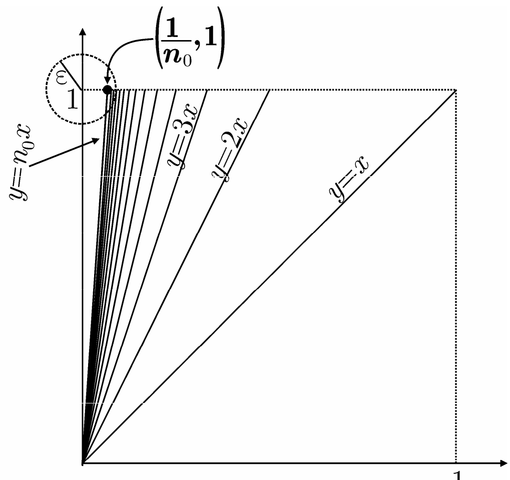
1.30. Нека $X = [0,1] \cup [2,3]$. Притоа, $X \subseteq \mathbb{R}$ е со наследена топологија од вообичаената топологија на $\mathbb{R}$. Бидејќи $[0,1] = X \cap (-1,2)$ и $(-1,2)$ е отворено во $\mathbb{R}$, следува дека $[0,1]$ е отворено во X. Слично, и $[2,3]$ е отворено во X. Според тоа, $[0,1] = X \setminus [2,3]$ е и затворено во X.

1.31. Ова множество го сочинуваат точките од графиците на функциите nx, за секој $n \in \mathbb{N}$ кои што се наоѓаат во квадратот $[0,1] \times [0,1]$. Множеството A не е отворено. Во секоја околина на $(1,1) \in A$ има точка од $\mathbb{R}^2 \setminus A$ (црт. 15).

Ќе докажеме дека $\mathbb{R}^2 \setminus A$ не е отворено. За точката $(0,1)$ важи $(0,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Нека $T((0,1),\varepsilon)$ е произволна базна околина на $(0,1)$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, па $n_0 \frac{1}{n_0} = 1$. Значи, точката $\left(\frac{1}{n_0}, 1\right) \in T((0,1),\varepsilon) \cap A_{n_0} \subseteq T((0,1),\varepsilon) \cap A$ (црт. 16). Според тоа, во секоја околина на $(0,1)$ има точка од A, па $\mathbb{R}^2 \setminus A$ не е отворено, т.е. A не е затворено.



црт. 15



црт. 16

Докажи дека множеството $A \cup (\{0\} \times [0,1])$ е затворено.

1.32. а) За секој $x \in \mathbb{R}$ важи $x \in \left[x, x+1\right)$.
Нека $x \in \left[a,b\right) \cap \left[c,d\right)$.

- Ако $a \leq c < b \leq d$, тогаш $x \in \left[a,b\right) \cap \left[c,d\right) = \left[c,b\right) \in \mathcal{B}$;

- Ако $c < a$ и $a < d < b$, тогаш $x \in \left[a,b\right) \cap \left[c,d\right) = \left[a,d\right) \in \mathcal{B}$

- Ако $\left[a,b\right) \subseteq \left[c,d\right)$ или $\left[c,d\right) \subseteq \left[a,b\right)$ тогаш пресекот е едниот од интервалите, па припаѓа на $\mathcal{B}$.

Значи, $\mathcal{B}$ ги исполнува условите за база.
б) Ќе докажеме дека $\left[a,\infty\right)$ е отворено, од што ќе следува затвореност на $\left(-\infty,a\right)$. Навистина, $\left[a,\infty\right) = \bigcup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>a}} \left[a,n\right)$. Значи, $\left[a,\infty\right)$ може да се запише како унија на елементи од базата, па е отворено. Од друга страна, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $n_0 > 1$ и $-n_0 < a < n_0$. Сега, $\left(-\infty,a\right) = \cup\left\{\left[-n, a-\frac{1}{n}\right) \middle| n \in \mathbb{N}, n > n_0\right\}$ (докажи!). Значи $\left(-\infty,a\right)$ е отворено.

Бидејќи $\left[b,c\right)$ е базен елемент, следува дека е отворено множество. Важи $\mathbb{R} \setminus \left[b,c\right) = \left(-\infty,b\right) \cup \left[c,\infty\right)$. Множествата $\left(-\infty,b\right)$ и $\left[c,\infty\right)$ се отворени, па следува отвореност на $\mathbb{R} \setminus \left[b,c\right)$, т.е. затвореност на $\left[b,c\right)$.

Веќе ја докажавме отвореноста на $\left[d,\infty\right)$ и затвореноста на $\mathbb{R} \setminus \left[d,\infty\right) = \left(-\infty,d\right)$.
в) Заради $\left(a,b\right) = \cup\left\{\left[s,b\right) \middle| s \in \mathbb{R}, a < s < b\right\}$ (докажи!) следува отвореност на $\left(a,b\right)$. Од друга страна, $\mathbb{R} \setminus \left(a,b\right) = \left(-\infty,a\right] \cup \left[b,\infty\right)$. Множеството $\left[b,\infty\right)$ е отворено.

Ќе докажеме дека $\left(-\infty,a\right]$ не е отворено. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $\left(-\infty,a\right]$ е отворено. Значи, тоа може да се запише како унија на елементи од базата, т.е. постои $M \subseteq \mathbb{R}$ така што $\left(-\infty,a\right] = \cup\left\{\left[s,t\right) \middle| s,t \in \mathbb{R}; s < t; s,t \in M\right\}$. Следува дека $\left[s,t\right) \subseteq \left(-\infty,a\right]$, за секои $s,t \in M$ и $s < t$. Од друга страна

$a \in (-\infty, a]$, па постојат $s_0, t_0 \in M$, $s_0 < t_0$ такви што $a \in [s_0, t_0)$. Оттука добиваме $s_0 \le a < t_0$. Бидејќи $[s,t) \subseteq (-\infty, a]$, за секои $s,t \in M$ и $s < t$, добивеме дека $[s_0, t_0) \subseteq (-\infty, a]$, т.е. $s_0 < t_0 \le a$. Неравенствата $s_0 \le a < t_0$ и $s_0 < t_0 \le a$ не е можно да важат истовремено, па добиваме контрадикција.
(Дека $(-\infty, a]$ не е отворено следува и од фактот дека во секоја околина на $a \in (-\infty, a]$ има точка од $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a]$).

Во секоја околина на $a \in \mathbb{R} \setminus (a,b) = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ има точка од $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus (a,b))$, па $\mathbb{R} \setminus (a,b) = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ не е отворено, т.е. (a,b) не е затворено.

Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $n_0 > \max\{c, 1\}$. Отвореноста на (c, ∞) следува од $(c,\infty) = \cup\left\{\left[c + \frac{1}{n}, n\right) \middle| n \in \mathbb{N}, n > n_0\right\}$ (докажи!).
Претходно докажавме дека $\mathbb{R} \setminus (c, \infty) = (-\infty, c]$ не е отворено, па (c, ∞) не е затворено.

г) Во в) докажавме дека (a, ∞) е отворено, па $(-\infty, a]$ е затворено како негов комплемент во $\mathbb{R}$. Во а) докажавме дека $[a, \infty)$ е затворено. Сега, затвореноста на $\{a\}$ следува од $\{a\} = (-\infty, a] \cap [a, \infty)$.
Во секоја базна околина на a има точка од $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, па $\{a\}$ не е отворено.
Затвореноста на $[b,c]$ следува од $\mathbb{R} \setminus [b,c] = (-\infty, b) \cup (c, \infty)$ и од отвореноста на двете множества кои што ја формираат унијата. Од друга страна (c, ∞) не е затворено, па $[b,c]$ не е отворено.

1.33. Нека $A = (-1, 0)$, $B = [0, 1)$. Тогаш A е отворено, B не е отворено и $A \cap B = \varnothing$. Уште $A \cup B = (-1, 1)$ е отворено.

1.34. а) Заради $d(x,y) \ge 0$, за секои $x, y \in \mathbb{R}$ следува дека и $d_1(x,y) \ge 0$, за секои $x, y \in \mathbb{R}$. Натаму,

$$d_1(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \text{ и}$$

$$d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}=d_1(y,x).$$

Останува да се докаже неравенството на триаголник. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}$ се произволни. Реалната функцијата $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ дефинирана со $f(t)=\dfrac{t}{t+1}$ монотоно расте на $\mathbb{R}^+$ (заради $f'(t)=\dfrac{1}{(t+1)^2}>0$ за секој $t\in\mathbb{R}$). Од тоа што d е метрика следува дека $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$, па од тоа што f е растечка следува $f(d(x,y))\le f(d(x,z)+d(z,y))$, т.е.

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\le\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}.$$

Значи,

$$\begin{aligned}d_1(x,y)&=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\le\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}=\\&=\frac{d(x,z)}{\underbrace{1+d(x,z)+d(z,y)}_{\ge 1+d(x,z)}}+\frac{d(z,y)}{\underbrace{1+d(x,z)+d(z,y)}_{\ge 1+d(z,y)}}\le\\&\le\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}=d_1(x,z)+d_1(z,y)\end{aligned}$$

со што неравенството на триаголник за d_1 е докажано.

Следува дека d_1 е метрика на $\mathbb{R}$.

б) Заради $d(x,y)<1+d(x,y)$, и $1+d(x,y)>0$ важи

$d_1(x,y)<1$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

в) Нека $T(x,r)=\{y \mid d(x,y)<r\}$, $T_1(x,r)=\{y \mid d_1(x,y)<r\}$ и нека $\mathcal{T}$ е топологијата со база $\mathcal{B}$ од сите отворени топки во однос на d, а $\mathcal{T}_1$ е топологијата со база $\mathcal{B}_1$ од сите отворени топки во однос на d_2.

Нека $T_1(x,r)\in\mathcal{B}_1$. Ако $r\ge 1$, тогаш $d_1(x,y)<r$ е точно за секој $y\in\mathbb{R}$, (следува од б)), па $\mathbb{R}=T_1(x,r)$. Според тоа за секој $y\in T_1(x,r)$ важи $y\in T(y,1)\subseteq T_1(x,r)$.

Да претпоставиме дека $r < 1$ и нека $y \in T_1(x,r)$ е произволен. Тогаш $d_1(x,y) < r$.

Ќе докажеме дека $T\left(y, \dfrac{r - d_1(x,y)}{1-(r-d_1(x,y))}\right) \subseteq T_1(x,r)$.

Прво, заради $r < 1$ и $d_1(x,y) < r$ следува дека $0 < r - d_1(x,y) < 1$.

Нека $z \in T\left(y, \dfrac{r - d_1(x,y)}{1-(r-d_1(x,y))}\right)$.

Тогаш имаме $d(z,y) < \dfrac{r - d_1(x,y)}{1-(r-d_1(x,y))}$.

Оттука следува дека

$$d_1(z,y) = \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} < \frac{\dfrac{r-d_1(x,y)}{1-(r-d_1(x,y))}}{1+\dfrac{r-d_1(x,y)}{1-(r-d_1(x,y))}} = r - d_1(x,y).$$

Последново неравенство е точно заради тоа што функцијата $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ монотоно расте на $[0,\infty)$.

Сега, $d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z) < d_1(x,y) + r - d_1(x,y) = r$,

т.е. $z \in T_1(x,r)$.

Докажавме дека за секој $T_1(x,r) \in \mathcal{B}_1$ и секој $y \in T_1(x,r)$ постои $T\left(y, \dfrac{r - d_1(x,y)}{1-(r-d_1(x,y))}\right) \in \mathcal{B}$ така што

$y \in T\left(y, \dfrac{r - d_1(x,y)}{1-(r-d_1(x,y))}\right) \subseteq T_1(x,r)$. Следува $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$.

Обратно, нека $T(x,r) \in \mathcal{B}$ и $y \in T(x,r)$ е произволен, тогаш $d(x,y) < r$.

Ќе докажеме дека $T_1\left(y, \dfrac{r-d(x,y)}{1+r-d(x,y)}\right) \subseteq T(x,r)$.

Јасно, заради $d(x,y) < r$ важи $\dfrac{r-d(x,y)}{1+r-d(x,y)} > 0$.

Нека $z \in T_1\left(y, \frac{r-d(x,y)}{1+r-d(x,y)}\right)$ е произволен. Тогаш

$$d_1(z,y) < \frac{r-d(x,y)}{1+r-d(x,y)} \Leftrightarrow \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} < \frac{r-d(x,y)}{1+r-d(x,y)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d(z,y) < r-d(x,y)$$

па имаме $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z) < d(x,y)+r-d(x,y)=r$, т.е. $z \in T(x,r)$.

Значи, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$.

2. ВНАТРЕШНОСТ. ГРАНИЦА.
ЗАТВОРАЧ. ТОЧКИ НА АКУМУЛАЦИЈА

2.1. б) Точката $x \in X$ е точка на акумулација за множеството A ако во секое отворено множество што го содржи x има точка од A различна од x.

Да провериме дали a е точка на акумулација за A. Множеството $\{a\}$ е отворено множество, ја содржи a и $\{a\} \cap A = \varnothing \subseteq \{a\}$, па a не е точка на акумулација за A. Слично, $b \in \{a,b\}$ и $\{a,b\} \cap A = \varnothing \subseteq \{b\}$, па и b не е точка на акумулација за A. За c имаме $X \cap A = \{c,d,e\}$, $\{a,c,d\} \cap A = \{c,d\}$ и $\{a,b,c,d\} \cap A = \{c,d\}$. Значи, во секоја околина на c има точка до A различна од c, па c е точка на акумулација за A. Заради $\{a,b,c,d\} \cap A = \{c,d\}$ и $\{a,c,d\} \cap A = \{c,d\}$ следува дека и d е точка на акумулација за A. Бидејќи $\{a,b,e\} \cap A = \{e\}$, следува дека e не е точка на акумулација за A. Според тоа, изводното множество (множеството од сите точки на акумулација) на A е $A' = \{c,d\}$.

Бидејќи $\{a\} \cap B = \varnothing$ следува $a \notin B'$. Од $\{a,b\} \cap B = \{b\}$ добиваме дека и $b \notin B'$, а од $\{a,c,d\} \cap B = \varnothing$ следува $c \notin B'$ и $d \notin B'$. Заради $X \cap B = \{b\}$ и $\{a,b,e\} \cap B = \{b\}$ следува дека во секоја околина на e има точка од B различна од e, па $e \in B'$. Значи, $B' = \{e\}$.

Слично, $E' = \varnothing$.

в) Затворени множества се комплементите во X на отворените, па заради $X^c = X \setminus X = \varnothing$ и $\varnothing^c = X \setminus \varnothing = X$ следува дека X и $\varnothing$ се затворени. Натаму, $\{a\}^c = \{b,c,d,e\}$, $\{a,b\}^c = \{c,d,e\}$, $\{a,c,d\}^c = \{b,e\}$, $\{a,b,c,d\}^c = \{e\}$ и $\{a,b,e\}^c = \{c,d\}$ се останатите затворени подмножества од X.

г) Најмалото затворено множество што го содржи $\{b\}$ е $\{b,e\}$, па $\overline{\{b\}} = \{b,e\}$ (или $\overline{B} = B \cup B' = \{b\} \cup \{e\} = \{b,e\}$).

Најмалото затворено множество што го содржи $\{a\}$ е X, па $\overline{\{a\}} = X$. Слично, $\overline{\{c,e\}} = \{c,d,e\}$.

д) Бидејќи, единствено $\overline{\{a\}} = X$, само $\{a\}$ е секаде густо во X.

ѓ) $C = \{a,b,c\}$ Бидејќи $a \in \{a\} \subseteq C$ и $b \in \{a,b\} \subseteq C$ следува дека $a,b \in \operatorname{int} C$. Во секоја околина на c,d,e има точки кои не се во C, па $c,d,e \notin \operatorname{int} C$. Значи $\operatorname{int} C = \{a,b\}$. (внатрешноста може да се определи и како најголемото отворено множество што се содржи во C, а тоа е $\{a,b\}$).

Надворешноста на C ($\operatorname{ext} C$) е внатрешноста на $X \setminus C = \{d,e\}$. Единствено отворено множество што се содржи во $X \setminus C$ е $\varnothing$, па $\operatorname{ext} C = \operatorname{int}(X \setminus C) = \varnothing$.

Точките кои не се ни во $\operatorname{int} C$ ни во $\operatorname{ext} C$ ја формираат границата (работ) на C. Значи, $\partial C = \{c,d,e\}$.

2.2. а) Нека $A \subseteq B$, $x \in A'$ и нека U е произволно отворено множество така што $x \in U$. Бидејќи $x \in A'$ следува дека $U \setminus \{x\} \cap A \neq \varnothing$. Тогаш од $A \subseteq B$ следува дека $U \setminus \{x\} \cap B \supseteq U \setminus \{x\} \cap A \neq \varnothing$, па $x \in B'$.

б) Бидејќи $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$ од а) следува дека $A' \subseteq (A \cup B)'$ и $B' \subseteq (A \cup B)'$, па $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. Обратно, нека $x \in (A \cup B)'$ и нека U е произволна околина на x.

<u>*I начин.*</u> Тогаш, $(U \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$ и оттука

$$((U \setminus \{x\}) \cap A) \cup ((U \setminus \{x\}) \cap B) \neq \varnothing.$$

Според тоа, барем едно од множествата $(U \setminus \{x\}) \cap A$ или $(U \setminus \{x\}) \cap B$ е непразно, па $x \in A'$ или $x \in B'$.

<u>*II начин.*</u> Да претпоставиме дека $x \notin A' \cup B'$. Значи, $x \notin A'$ и $x \notin B'$, па постојат отворени множества U и V така што $x \in U$, $x \in V$, $U \cap A \subseteq \{x\}$ и $V \cap B \subseteq \{x\}$. Тогаш, $U \cap V$ е околина на x и

$$\begin{aligned}(U \cap V) \cap (A \cup B) &= (U \cap V \cap A) \cup (U \cap V \cap B) \subseteq \\ &\subseteq (U \cap A) \cup (V \cap B) \subseteq \{x\}.\end{aligned}$$

Но тоа е во контрадикција со $x \in \left(A \cup B\right)'$.

в) Од $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$ и а) следува дека $\left(A \cap B\right)' \subseteq A'$ и $\left(A \cap B\right)' \subseteq B'$ па $\left(A \cap B\right)' \subseteq A' \cap B'$.

<u>*Пример.*</u> Множествата $A = \left(0,1\right)$ и $B = \left(1,2\right)$ се подмножества од $\mathbb{R}$ со вообичаената топологија. Тогаш $A \cap B = \varnothing$, па $\left(A \cap B\right)' = \varnothing$.

Ќе докажеме дека $1 \in A'$. Нека U е произволна околина на 1. Постои ε така што $1 > \varepsilon > 0$, и $\left(1-\varepsilon, 1+\varepsilon\right) \subseteq U$. Тогаш постои $x \in \mathbb{R}$ така што $1 - \varepsilon < x < 1$. Според тоа,
$x \in \left(\left(1-\varepsilon, 1+\varepsilon\right) \setminus \left\{1\right\}\right) \cap \left(0,1\right) \subseteq \left(U \setminus \left\{1\right\}\right) \cap \left(0,1\right)$, па $1 \in A'$.

Слично, $1 \in B'$, $0 \in A'$ и $2 \in B'$. Секоја точка од A и B е точка на акумулација на A и B, соодветно (докажи!).

Значи, $A' = \left[0,1\right]$ и $B' = \left[1,2\right]$, па $A' \cap B' = \left\{1\right\} \neq \varnothing = \left(A \cap B\right)'$.

2.3. Нека $k \in \mathbb{Z}$. Тогаш $\left(k - \dfrac{1}{2}, k + \dfrac{1}{2}\right)$ е околина на k која не содржи друга точка од $\mathbb{Z}$, т.е. $\left(k - \dfrac{1}{2}, k + \dfrac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z} = \left\{k\right\}$. Според тоа, $k \notin \mathbb{Z}'$. Сега, нека $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Постои $r \in \mathbb{Z}$ така што $r < k < r + 1$. Нека $\varepsilon = \min\left\{k - r, r + 1 - k\right\}$. Тогаш $\varepsilon > 0$ и е околина на k која што не содржи точка од $\mathbb{Z}$. Значи, $\left(k - \varepsilon, k + \varepsilon\right) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, па $\mathbb{Z}' = \varnothing$.

Нека $q \in \mathbb{R}$ и нека $\left(q - \varepsilon, q + \varepsilon\right)$, каде што $\varepsilon > 0$, е произволна (базна) околина на q. Постои $r \in \mathbb{Q}$ така што $q < r < q + \varepsilon$, па $r \in \left(q - \varepsilon, q + \varepsilon\right)$. Значи, во секоја околина на q има точка од $\mathbb{Q}$ ртазлична од q, па $q \in \mathbb{Q}'$. Според тоа, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

Слично како во 2.2 в) се докажува дека $\left(\left[0,1\right]\right)' = \left[0,1\right]$ и $\left(\left(0,1\right]\right)' = \left[0,1\right]$.

Од 2.2 б) следува

$$\left(\left\{0\right\} \cup \left[1,2\right]\right)' = \left(\left\{0\right\}\right)' \cup \left(\left[1,2\right]\right)' = \varnothing \cup \left[1,2\right] = \left[1,2\right].$$

2.4. Бидејќи a е точка на акумулација на A следува дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $a_n \in \left(A \cap T\left(a, \frac{1}{n}\right)\right) \setminus \{a\}$, т.е. $0 <| a_n - a |< \frac{1}{n}$. Ќе докажеме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Нека $n \geq n_0$. Тогаш $| a_n - a |< \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, па $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2.5. а) Ќе докажеме дека $0 \in A'$. Нека $T(0,\varepsilon)$ е произволна околина на 0, каде што $\varepsilon > 0$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, па $\frac{1}{n_0} \in T(0,\varepsilon)$. Значи, секоја околина на 0 содржи точка од $A \setminus \{0\}$, па $0 \in A'$.

Заради $T\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ за секој $n \in \mathbb{N}$, следува дека $\frac{1}{n} \notin A'$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Нека $r \in \mathbb{R}$ е таков што $\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$. Тогаш $T\left(r, \min\left\{r - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - r\right\}\right) \cap A = \varnothing$, па $r \notin A'$. Ако, пак, $t \in \mathbb{R}$ е таков што $t > 1$, тогаш $T(t, t-1) \cap A = \varnothing$. И на крај, ако $t < 0$, тогаш $T(t, -t) \cap A = \varnothing$. Значи, $A' = \{0\}$.

б) $A' = [0,\infty)$ (докажи!).

в) $A' = A \cup ([0,1] \times \{0\})$ (Докажи дека секоја точка од A е точка на акумулација, во секоја околина на точка од $[0,1] \times \{0\}$ има точка од A и дека останатите точки од $\mathbb{R}^2$ не се точки на акумулација за A).

2.6. Нека $a \in A$. Тогаш $\{a\}$ е околина на a и таа околина не содржи друга точка од A, т.е. $A \cap \{a\} = \{a\}$. Според тоа, $a \notin A'$. Сега, нека $b \in X \setminus A$. Повторно, $\{b\}$ е околина на b која што не содржи точки од A, т.е. $A \cap \{b\} = \varnothing$. Значи, ниедна точка од X не е точка на акумулација за A, па $A' = \varnothing$ (всушност за секој $x \in X$ важи $A \cap \{x\} \subseteq \{x\}$).

2.7. Нека $\operatorname{int} A$ е најголемото отворено множество што се содржи во A и нека $\{U_i \mid i \in I\}$ е фамилија од сите отворени множества што се содржат во A. Ќе докажеме дека $\operatorname{int} A = \bigcup_{i \in I} U_\alpha$. Бидејќи $\operatorname{int} A$ е отворено множество што се содржи во A (и уште најголемо) следува дека постои $i_0 \in I$ така што $\operatorname{int} A = U_{i_0}$, па јасно е дека $\operatorname{int} A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_\alpha$. Од друга страна, $\bigcup_{i \in I} U_\alpha$ е отворено и $\bigcup_{i \in I} U_\alpha \subseteq A$. Бидејќи $\operatorname{int} A$ е најголемото отворено множество што се содржи во A следува дека $\bigcup_{i \in I} U_\alpha \subseteq \operatorname{int} A$. Значи, $\operatorname{int} A = \bigcup_{i \in I} U_\alpha$.

Обратно, нека $\operatorname{int} A = \bigcup_{i \in I} U_\alpha$ и нека V е отворено множество така што $V \subseteq A$. Бидејќи $\{U_i \mid i \in I\}$ се сите отворено множества содржани во A следува дека постои $i \in I$ така што $V = U_i$. Според тоа, $V \subseteq \bigcup_{i \in I} U_\alpha = \operatorname{int} A$. Докажавме дека секое отворено множество што се содржи во A мора да се содри и во $\operatorname{int} A$, па $\operatorname{int} A$ е најголемото отворено множество што се содржи во A.

2.8. б) Множеството $(7,\infty)$ е отворено и $(7,\infty) \subseteq [7,\infty)$. Нека постои друго отворено множество U така што $U \subseteq [7,\infty)$, $(7,\infty) \subseteq U$ и $(7,\infty) \neq U$ (т.е. $(7,\infty)$ не е најголемото отворено множество содржано во $[7,\infty)$). Тогаш, единствено е можно $U = [7,\infty)$. Сите околини на 7 се од обликот (a,∞) каде $a < 7$ или $a = -\infty$, па секоја околина на 7 има точка од $\mathbb{R} \setminus [7,\infty)$. Значи, U не е отворено. Добивме контрадикција. Значи, $(7,\infty)$ е најголемото отворено множество што се содржи во $[7,\infty)$, па $\operatorname{int}[7,\infty) = (7,\infty)$.

Натаму, $\operatorname{ext}[7,\infty) = \operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus [7,\infty)) = (-\infty,7)$ и секое отворено множество во $\mathbb{R}$ со оваа топологија има облик (a,∞), па има точка од $[7,\infty)$. Значи нема непразно отворено множество што се содржи во $(-\infty,7)$, па $\mathrm{ext}[7,\infty)=\varnothing$.

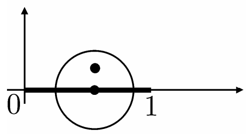
Според тоа, точките кои не се ни во $\mathrm{int}[7,\infty)$ ни во $\mathrm{ext}[7,\infty)$ се во границата на $[7,\infty)$. Значи, $\partial[7,\infty)=(-\infty,7]$.

в) Секое отворено множество во $\mathbb{R}$ има точка од $\mathbb{R}\setminus[7,8)$, па $\mathrm{int}[7,8)=\varnothing$.

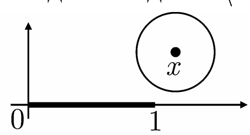
Слично, $\mathbb{R}\setminus[7,8)=(-\infty,7)\cup[8,\infty)$, па најголемото отворено множество што се содржи во $\mathbb{R}\setminus[7,8)$ е $(8,\infty)$. Според тоа, $\mathrm{ext}[7,8)=(8,\infty)$.

На крај, $\partial[7,8)=\mathbb{R}\setminus(\mathrm{int}[7,8)\cup\mathrm{ext}[7,8))=(-\infty,8]$.

2.9. Едно такво множество е $A=[0,1]\times\{0\}$. Навистина, во секоја околина на произволна точка од A има елемент и од A и од $\mathbb{R}^2\setminus A$ (црт. 1).



црт. 1



црт. 2

Значи $A\subseteq\partial A$. Од друга страна, ако $x\notin A$, тогаш постои околина на x која што нема токи од A (црт. 2), па $x\notin\partial A$. Според тоа, $\partial A\subseteq A$, па $\partial A=A$.

2.10. Нека Ако p е точка на акумулација на A и нека U е произволна околина на p. Бидејќи $p\in A'$ следува дека во U има точка $q\in A$ и $q\neq p$, т.е. $A\cap(U\setminus\{p\})\neq\varnothing$. Тогаш, $q\in A\setminus\{p\}$ и $q\in U\setminus\{p\}$, па $q\in(A\setminus\{p\})\cap(U\setminus\{p\})$, т.е.

$$(A\setminus\{p\})\cap(U\setminus\{p\})\neq\varnothing.$$

Значи, во секоја околина на p има точка од $A\setminus\{p\}$ различна од p, па $p\in(A\setminus\{p\})'$.

2.11. а) Не важи, бидејќи $\mathrm{int}\,\bar{A}$ е отворено, а $\overline{\mathrm{int}\,A}$ не мора да е отворено. На пример ако $X=\mathbb{R}$ со стандардната топологија и $A=[0,1]$, тогаш

$\operatorname{int}\bar{A} = \operatorname{int}[0,1] = (0,1)$, а $\overline{\operatorname{int} A} = \overline{(0,1)} = [0,1]$. Од друга страна ако $B = \{1\}$, тогаш важи $\operatorname{int}\bar{B} = \overline{\operatorname{int} B}$.

б) Нека $X = \mathbb{R}$ со стандардната топологија и нека $E = [0,1] \cup \{3\}$. Тогаш $\bar{E} = E$, но $\overline{\operatorname{int} E} = \overline{(0,1)} = [0,1]$, па постои E за кое не важи и ова тврдење.

2.12. а) Бидејќи $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$ и $\mathbb{N} \setminus \varnothing = \mathbb{N}$ следува дека $\mathbb{N}$ и $\varnothing$ се затворени. Секое затворено множество е комплемент на отворено, па останатите затворени множества се $\mathbb{N} \setminus A_n = \{1, \dots, n-1\}$, за $n \geq 2$.

б) Затворачот е најмалото затворено множество што го содржи даденото множество, па $\overline{\{12, 22, 32, 42\}} = \mathbb{N} \setminus A_{43} = \{1, \dots, 42\}$, додека пак, $\overline{\{6, 8, 10, \dots\}} = \mathbb{N}$.

в) Нека E е конечно подмножество од $\mathbb{N}$. Тогаш постои $n \in \mathbb{N}$ така што $E \subseteq A_{n+1}$, па $\bar{E} = \mathbb{N} \setminus A_{n+1}$. Следува дека E не е секаде густо во $\mathbb{N}$.
Нека, сега, E е бесконечно. Тогаш единствено затворено множество во кое се содржи E е $\mathbb{N}$, па $\bar{E} = \mathbb{N}$. Значи, сите бесконечни подмножества се секаде густи. Јасно е дека ако E е секаде густо, тогаш E е бесконечно.

г) Нека $m < 35$. Тогаш околини на m се $A_1, \dots, A_m$, па $35 \in A \cap (A_n \setminus \{m\})$, за секој $n \leq m$. Значи, секоја околина на m има точка од A различна од m. Според тоа, $\{1, \dots, 34\} \subseteq A'$. Заради $A \cap A_{35} = \{35\}$ следува дека $35 \notin A'$, а заради $A \cap A_p = \varnothing$ за секој $p > 35$ следува дека $p \notin A'$, за секој $p > 35$. Значи, $A' = \{1, \dots, 34\}$.

д) Слично како во г) се докажува дека ако E е конечно, тогаш $E' \neq \mathbb{N}$.
Нека E е бесконечно и нека $m \in \mathbb{N}$. Тогаш, сите околини на m се $A_1, \dots, A_m$ и секоја од нив содржи точка од E различна од m (заради бесконечноста на E). Според тоа $m \in E'$, т.е. $\mathbb{N} \subseteq E'$. Секогаш важи $E' \subseteq \mathbb{N}$, па $E' = \mathbb{N}$. Добивме дека за секое бесконечно подмножество E од $\mathbb{N}$ важи $E' = \mathbb{N}$.

Од друга страна, ако $E \subseteq \mathbb{N}$ е такво што $E' = \mathbb{N}$, тогаш тоа е бесконечно (докажи!).
Значи, сите множества за кои $E' = \mathbb{N}$ се бесконечните.

2.13. <u>*I начин.*</u> За секое A важи $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A$, и оваа унија е дисјунктна, па оттука $\operatorname{ext} A = X \setminus \left(\operatorname{int} A \cup \partial A\right)$.

Ќе докажеме дека $X \setminus \overline{A} = \operatorname{ext} A$, од што ќе следува тврдењето. Нека $p \in \operatorname{ext} A = \operatorname{int}\left(X \setminus A\right) \subseteq X \setminus A$. Значи, постои околина U на p така што $p \in U \subseteq X \setminus A$. Значи, $U \cap A = \varnothing$, па $p \notin A'$. Оттука следува дека $p \notin A' \cup A = \overline{A}$, т.е. $p \in X \setminus \overline{A}$. Добивме дека $\operatorname{ext} A \subseteq X \setminus \overline{A}$.

Обратно, нека $x \in X \setminus \overline{A}$. Значи $x \notin \overline{A} = A \cup A'$. Значи, $x \notin A$ и $x \notin A'$. Следува дека постои V околина на x така што $\left(V \setminus \left\{x\right\}\right) \cap A = \varnothing$. Бидејќи $x \notin A$ следува дека

$$V \cap A = \left(V \setminus \left\{x\right\}\right) \cap A = \varnothing.$$

Според тоа, $x \in V \subseteq X \setminus A$, па x е внатрешна точка за $X \setminus A$, т.е. $x \in \operatorname{ext} A$. Значи, $X \setminus \overline{A} \subseteq \operatorname{ext} A$, па $X \setminus \overline{A} = \operatorname{ext} A$.

<u>*II начин.*</u> Нека $x \in \overline{A}$. Тогаш во секоја околина на x има точка од A. Ако постои околина U на x така што $U \subseteq A$, тогаш $x \in \operatorname{int} A$. Затоа, нека за секоја околина V на X важи $V \not\subseteq A$. Значи, секоја околина V на x содржи точка и од A и од $X \setminus A$, па $x \in \partial A$. Докажавме дека $x \in \operatorname{int} A \cup \partial A$, па $\overline{A} \subseteq \operatorname{int} A \cup \partial A$.

Обратно, нека $x \in \operatorname{int} A \cup \partial A$. Ако $x \in \operatorname{int} A$ тогаш $x \in \operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Затоа, нека $x \in \partial A$. Значи, во секоја околина на x има точка од A (и од $X \setminus A$), па $x \in \overline{A}$. Докажавме дека $\overline{A} \supseteq \operatorname{int} A \cup \partial A$, т.е. $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$.

2.14. Нека $x \in \partial A$. Тогаш во секоја околина U на x има точка и од A и од $X \setminus A$. Значи во секоја околина на X има точка од $X \setminus A$ и од $X \setminus \left(X \setminus A\right) = A$, па $x \in \partial\left(X \setminus A\right)$. Слично се докажува и обратното.

2.15. Нека $x \in \overline{A}$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Постои $a \in A \cap T\left(x, \varepsilon\right)$, т.е. $d\left(a, x\right) < \varepsilon$, па

$$d\left(x, A\right) = \inf\left\{d\left(a', x\right) \middle| a' \in A\right\} \leq d\left(a, x\right) \leq \varepsilon.$$

Значи за секој $\varepsilon > 0$ важи $d(x, A) \leq \varepsilon$. Тоа е можно ако и само ако $d(x, A) = 0$.
Обратно, нека $d(x, A) = 0$. Ќе докажеме дека во секоја околина $T(x, \varepsilon)$ на x има точка од A. Бидејќи $d(x, A) = \inf \{ d(a', x) | a' \in A \}$ следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $a_\varepsilon \in A$ така што $d(x, A) \leq d(x, a_\varepsilon) < d(x, A) + \varepsilon$ (во спротивно ќе се добие контрадикција со $d(x, A) = \inf \{ d(a', x) | a' \in A \}$), т.е. заради $d(x, A) = 0$ добиваме $d(x, a_\varepsilon) < \varepsilon$. Значи за секој $\varepsilon > 0$ постои $a_\varepsilon \in A$ така што $a_\varepsilon \in T(x, \varepsilon)$. Следува дека $x \in \bar{A}$.

2.16. Бидејќи во секоја околина на $x \in \mathbb{Q}$ има точка и од $\mathbb{Q}$ и од $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ следува дека $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

2.17. а) Нека $\partial A \subseteq A$ и нека $x \in \bar{A}$. Да претпоставиме спротивно, дека $x \notin A$. Тогаш е можно или $x \in \partial A$ или $x \in \operatorname{ext} A$. Во првиот случај имаме $x \in \partial A \subseteq A$, контрадикција. Во вториот, заради отвореноста на $\operatorname{ext} A$ следува дека x има околина со празен пресек со A. Контрадикција со $x \in \bar{A}$.
Обратно, нека A е затворено и нека $x \in \partial A$. Да претпоставиме спротивно, дека $x \notin A$. Значи, $x \in X \setminus A$ кое е отворено. Па постои околина на x која има празен пресек со A. Тоа е во контрадикција со $x \in \partial A$.
б) Нека $\partial A \cap A = \varnothing$. тогаш $\partial A \subseteq X \setminus A$, па од а) следува дека $X \setminus A$ е затворено, т.е. A е отворено.
Обратно, ако A е отворено, следува $X \setminus A$ е затворено, па од а) добиваме $\partial A \subseteq X \setminus A$, т.е. $\partial A \cap A = \varnothing$.
в) Тврдењето следува од а) и б) имајќи предвид дека $\varnothing = \partial A \subseteq A$ и $\varnothing \cap A = \partial A \cap A = \varnothing$.

3. НЕПРЕКИНАТИ ПРЕСЛИКУВАЊА

3.1. Нека V е произволно отворено множество во Y.

Ќе докажеме дека $f\,|_A^{-1}\left(V\right) = f^{-1}\left(V\right)\cap A$.

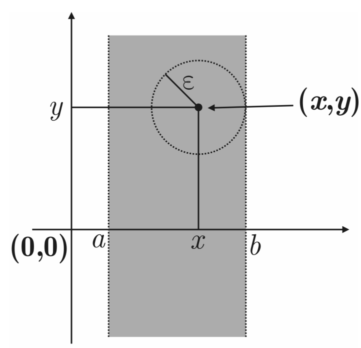
Нека $x \in f\,|_A^{-1}\left(V\right)$. Бидејќи $f\,|_A^{-1}\left(V\right)\subseteq A$ следува дека $x \in A$. Тогаш $f\,|_A\left(x\right)\in V$. Заради $f\left(x\right) = f\,|_A\left(x\right)\in V$ следува дека $x \in f^{-1}\left(V\right)$, па $f\,|_A^{-1}\left(V\right)\subseteq f^{-1}\left(V\right)\cap A$.

Сега, нека $y \in f^{-1}\left(V\right)\cap A$. Тогаш $y\in A$ и $f\left(y\right)\in V$. Заради $y \in A$ следува $f\,|_A\left(y\right) = f\left(y\right)\in V$, па $y \in f\,|_A^{-1}\left(V\right)$. Добивме дека $f\,|_A^{-1}\left(V\right)\supseteq f^{-1}\left(V\right)\cap A$, па следува равенство.

Од непрекинатоста на f следува дека $f^{-1}\left(V\right)$ е отворено во X, па $f^{-1}\left(V\right)\cap A$ е отворено во A. Значи $f\,|_A^{-1}\left(V\right)$ е отворено во A, па $f\,|_A$ е непрекинато.

3.2. Од претходната задача следува дека $f\,|_{X\setminus A}$ е непрекинато. Јасно е дека е биекција. Слично, и $f^{-1}\,|_{Y\setminus f(A)}$ е непрекинато и биекција. Лесно се проверува дека $f\,|_{X\setminus A}\, f^{-1}\,|_{Y\setminus f(A)} = 1_{Y\setminus f(A)}$ и $f^{-1}\,|_{Y\setminus f(A)}\, f\,|_{X\setminus A} = 1_{X\setminus A}$, па $f\,|_{X\setminus A}$ е хомеоморфизам.

3.3. а) Ќе докажеме дека за секој базен елемент $\left(a,b\right)$ од базата на $\mathbb{R}$, важи дека $f^{-1}\left(\left(a,b\right)\right)$ е отворено во $\mathbb{R}^2$. Прво, важи $f^{-1}\left(\left(a,b\right)\right) = \left(a,b\right)\times\left(-\infty,\infty\right)$. Навистина, ако $\left(x,y\right)\in f^{-1}\left(\left(a,b\right)\right)$, тогаш $f\left(x\right)\in\left(a,b\right)$, т.е. $x\in\left(a,b\right)$. Реалниот број y е произволен, па $\left(x,y\right)\in\left(a,b\right)\times\left(-\infty,\infty\right)$.



црт. 1

Обратно, ако $(x,y)\in(a,b)\times(-\infty,\infty)$, тогаш $x\in(a,b)$ и y е произволен, па важи $f(x,y)=x\in(a,b)$, т.е. $f^{-1}(x,y)\in(a,b)$ (црт. 1). Значи, $f^{-1}((a,b))=(a,b)\times(-\infty,\infty)$.

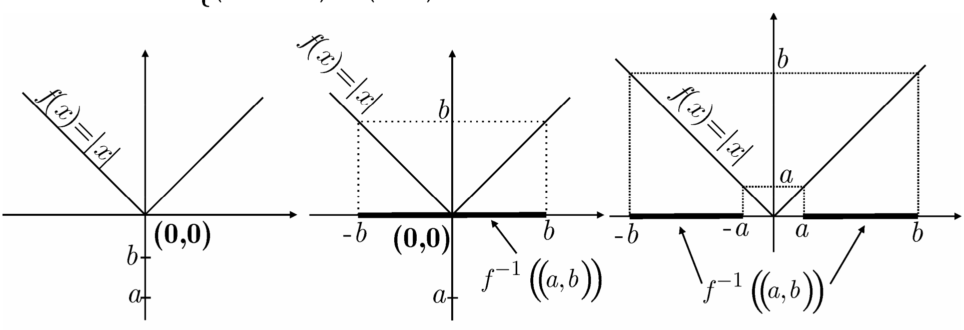
Ако $(x,y)\in(a,b)\times(-\infty,\infty)$ е произволна, тогаш

$$(x,y)\in T((x,y),\varepsilon)\subseteq(a,b)\times(-\infty,\infty) \text{ (црт. 1),}$$

па $f^{-1}((a,b))$ е отворено во $\mathbb{R}^2$. Значи f е непрекинато.

б) Нека (a,b) е произволен елемент од базата на $\mathbb{R}$. Тогаш

$$f^{-1}((a,b))=\begin{cases}\varnothing,\ a<b<0\\(-b,b),\ a<0<b\\(-b,-a)\cup(a,b),\ 0\le a<b\end{cases} \qquad \text{(црт. 2)}$$



црт. 2

Значи, $f^{-1}((a,b))$ е отворено, па f е непрекинато.

в) Нека $U\in\mathcal{T}'$, т.е. U е отворено во Y. Тогаш $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$, па бидејќи $\mathcal{T}$ е дискретна топологија следува дека $f^{-1}(U)$ е отворено во X.

г) Единствени отворени подмножества од y е Y и $\varnothing$, па $f^{-1}(Y)=X$, е отворено и $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ е отворено. Значи f е непрекинато.

д) Нека U е отворено во Y. Тогаш $f^{-1}(U)=\begin{cases}X,\ c\in U\\\varnothing,\ c\notin U\end{cases}$, е отворено, па f е непрекинато.

Забелешка. Натаму, за сликата на интервалот (a,b) ќе ја користиме ознаката $f(a,b)$ наместо $f((a,b))$.

3.4. Нека U е отворено во X, т.е. $U \in \mathcal{T}$. Тогаш $i^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathcal{T}'$, па i е непрекинато.

3.5. Нека $U \in \mathcal{T}$ е произволен. Од непрекинатоста на i следува дека $i^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$. Значи,

$$i^{-1}(U) = \{y \mid y \in Y, i(y) \in U\} = \{y \mid y \in Y, y \in U\} = U \cap Y \in \mathcal{T}'.$$

3.6. Нека f е непрекинато.

<u>*I начин.*</u> Нека $y \in f(\bar{A})$. Ќе докажеме дека $y \in \overline{f(A)}$. Нека V е произволна околина на y. Бидејќи $y \in f(\bar{A})$ следува дека постои $x \in \bar{A}$ така што $y = f(x)$. Пресликувањето f е непрекинато, па $f^{-1}(V)$ е отворено во X. Уште $f(x) = y \in V$ па $x \in f^{-1}(V)$. Значи, $f^{-1}(V)$ е околина на x. Заради $x \in \bar{A}$ постои $a \in A$ така што $a \in f^{-1}(V)$. Следува $f(a) \in V$. Но и $f(a) \in f(A)$. Добивме дека во произволна околина V на Y постои точка од $f(A)$, т.е. $y \in \overline{f(A)}$.

<u>*II начин.*</u> За секое $A \subseteq X$ важи $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, па следува $A \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Бидејќи f е непрекинато а $\overline{f(A)}$ е затворено во Y следува дека $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ е затворено во X. Бидејќи $\bar{A}$ е најмалото затворено множество во X што го содржи A следува дека $\bar{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Оттука следува дека $f(\bar{A}) \subseteq f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

Обратно. Нека $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ за секое $A \subseteq X$.

Ќе докажеме дека $f^{-1}(F)$ е затворено во X за секое затворено $F \subseteq Y$.

Имаме $f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(F)\right)} \subseteq \bar{F} = F$, па следува дека $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$. Оттука следува $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$, па $f^{-1}(F)$ е затворено. Значи f е непрекинато.

3.7. Нека f е непрекинато и нека $x_0 \in \overline{A}$. Тогаш користејќи ја претходната задача добиваме $f(x_0) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Обратно, нека $x_0 \in \overline{A} \Rightarrow f(x_0) \in \overline{f(A)}$ и нека $y_0 \in f(\overline{A})$. Тогаш постои $x_0 \in \overline{A}$ така што $y_0 = f(x_0)$. Следува дека $y_0 = f(x_0) \in f(\overline{A})$, па од претходната задача следува непрекинатост на f.

3.8. Нека f е непрекинато и нека $x \in \overline{f^{-1}(B)}$. Тогаш

$$f(x_0) \in f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \overset{f \text{ е непр.}}{\subseteq} \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \overline{B},$$

па следува дека $x_0 \in f^{-1}(\overline{B})$.

Обратно, нека $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, за секое $B \subseteq Y$ и нека $x_0 \in \overline{A}$ (x_0 и $A \subseteq X$ се произволни). Тогаш $x_0 \in \overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(f(A))} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, па $f(x) \in \overline{f(A)}$. Значи f е непрекинато.

3.9. Следува од претходните 2 задачи.

3.10. Нека f е хомеоморфизам. Ќе докажеме дека важи

$$f(A') = \left(f(A)\right)'.$$

Нека $a \in A'$. За секоја околина $V_{f(a)}$ на $f(a)$ множеството $U_a = f^{-1}\left(V_{f(a)}\right)$ е околина на a. Бидејќи $a \in A'$ следува дека $\left(U_a \setminus \{a\}\right) \cap A \neq \varnothing$. Бидејќи f е хомеоморфизам следува дека важи

$$\begin{aligned} \varnothing \neq f\left(\left(U_a \setminus \{a\}\right) \cap A\right) &= \left(f(U_a) \setminus \{f(a)\}\right) \cap f(A) = \\ &= \left(V_{f(a)} \setminus \{f(a)\}\right) \cap f(A). \end{aligned}$$

Значи во секоја околина на $f(a)$ има точка од $f(A)$, па $f(a) \in \left(f(A)\right)'$, т.е. $f(A') \subseteq \left(f(A)\right)'$.

Обратно, нека $y \in \left(f(A)\right)'$ е произволен. Постои единствен $x \in X$ така што $y = f(x)$. За секоја околина U_x на x множеството

$f(U_x)$ е околина на y. Од $y \in (f(A))'$ следува дека $(f(U_x) \setminus \{y\}) \cap f(A) \neq \varnothing$. Оттука,

$$\varnothing \neq (f(U_x) \setminus \{y\}) \cap f(A) = f((U_x \setminus \{x\}) \cap A),$$

па следува $(U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$. Значи $x \in A'$, па $y \in f(A')$. Добивме дека $(f(A))' \subseteq f(A')$.

Сега, нека важи $f(A') = (f(A))'$. Тогаш

$$f(\bar{A}) = f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') = f(A) \cup (f(A))' = \overline{f(A)}$$

па од претходната задача добиваме дека f е хомеоморфизам.

3.11. а) Бидејќи f е сурјекција и непрекинато имаме

$$Y = f(X) = f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq Y.$$

Оттука следува дека $\overline{f(A)} = Y$, па $f(A)$ е густо во Y.

б) Не мора да важи. На пример, нека $X = \mathbb{R}$ со вообичаената топологија и $Y = \{0,1\}$ е дискретен. Пресликувањето f е дефинирано со

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Множеството $\{1\}$ е отворено во Y а $f^{-1}(\{1\}) = [0,\infty)$ не е отворено во X, па следува дека f не е непрекинато. Нека A е произволно густо множество во X. Тогаш мора $A \cap (-1,0) \neq \varnothing$ и $A \cap (0,1) \neq \varnothing$, па $f(A) = Y$. Значи секое густо множество во X се пресликува во густо во Y.

3.12. Нека f е непрекинато пресликување, $a \in \mathbb{R}$ е произволен и $\varepsilon > 0$ е произволен. Од непрекинатоста на f следува дека

$$f^{-1}(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

е отворено, па е унија на базни елементи. Од отвореноста и од $a \in f^{-1}(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, следува дека постои $\delta > 0$ така што $(a - \delta, a + \delta) \subseteq f^{-1}(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, оттука следува дека $f(a - \delta, a + \delta) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Значи ако $x \in (a - \delta, a + \delta)$, тогаш $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Обратно. Нека за секој $a \in \mathbb{R}$ важи: за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in \mathbb{R}$ таков што $| x - a |< \delta$ важи $\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$.

Нека (s,t) е произволен базен елемент од базата на $\mathbb{R}$. Ќе докажеме дека $f^{-1}(s,t)$ е отворено. Нека $x \in f^{-1}(s,t)$ е произволен. Тогаш $f(x) \in (s,t)$, па од отвореноста на (s,t) следува дека постои $\varepsilon > 0$ така што $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subseteq (s,t)$. За ε постои $\delta > 0$ така што за секој y таков што $y \in (x - \delta, x + \delta)$ важи $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Оттука

$$y \in f^{-1}\left((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\right) \subseteq f^{-1}(s,t),$$

па следува $(x - \delta, x + \delta) \subseteq f^{-1}(s,t)$, од што добиваме дека $f^{-1}(s,t)$ е отворено.

3.13. Постапуваме слично како во претходната задача.
Нека f е непрекинато, $a \in X$ е произволен и $\varepsilon > 0$ е произволен. Од непрекинатоста на f следува дека $f^{-1}(T(f(a),\varepsilon))$ е отворено, па е унија на базни елементи. Од отвореноста и од $a \in f^{-1}(T(f(a),\varepsilon))$, следува дека постои $\delta > 0$ така што $T(a,\delta) \subseteq f^{-1}(T(f(a),\varepsilon))$, оттука следува дека $f(T(a,\delta)) \subseteq T(f(a),\varepsilon)$. Значи ако $x \in T(a,\delta)$, тогаш $f(x) \in T(f(a),\varepsilon)$.

Обратно. Нека за секој $a \in X$ важи: за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што за секој $x \in X$ таков што $x \in T(a,\delta)$ важи $f(x) \in T(f(a),\varepsilon)$.

Нека U е произволен базен елемент од базата на Y. Ќе докажеме дека $f^{-1}(U)$ е отворено. Нека $x \in f^{-1}(U)$ е произволен. Тогаш $f(x) \in U$, па од отвореноста на U следува дека постои $\varepsilon > 0$ така што $T(f(x),\varepsilon) \subseteq U$. За ε постои $\delta > 0$ така што за секој y таков што $y \in T(x,\delta)$ важи $f(y) \in T(f(x),\varepsilon)$.

Оттука $y \in f^{-1}(T(f(x),\varepsilon)) \subseteq f^{-1}(U)$, па следува

$$T(x,\delta) \subseteq f^{-1}(U),$$

од што следува дека $f^{-1}(U)$ е отворено.

3.14. а) Нека $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ се произволни и нека $\delta = \varepsilon$ и нека $|\,x - a\,| < \delta$. Тогаш

$$\left|f(x) - f(a)\right| = |\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x-a}{2}\right| \leq$$
$$\leq 2\frac{|\,x-a\,|}{2} = |\,x - a\,| < \delta = \varepsilon.$$

Според тоа f е непрекината.

б) Множеството $(0,\pi)$ е отворено а $f(0,\pi) = (0,1]$ не е отворено. Следува дека f не е отворено пресликување.

3.15. а) Нека 1_X е непрекинато и нека $U \in \mathcal{T}'$ е произволно. Од непрекинатоста на 1_X следува дека $1_X^{-1}(U) \in \mathcal{T}$, т.е.

$$U = 1_X^{-1}(U) \in \mathcal{T}, \text{ т.е. } \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}.$$

Обратно, нека $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ и нека U е произволно отворено множество во $(X,\mathcal{T}')$ т.е. $U \in \mathcal{T}'$. Тогаш $1_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, па $1_X^{-1}(U)$ е отворено во $(X,\mathcal{T})$, т.е. 1_X е непрекинато.

б) Нека $X = \{a,b\}$, $\mathcal{T}$ е индискретна а $\mathcal{T}'$ дискретна топологија. Тогаш $\mathcal{T}' \not\subseteq \mathcal{T}$. Важи $\{a\} \in \mathcal{T}'$ и $1_X^{-1}(\{a\}) = \{a\} \notin \mathcal{T}$, па 1_X не е непрекинато.

3.16. Нека $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Значи $y_1 = f(x) \neq y$.

Нека $\varepsilon = \dfrac{|\,y - y_1\,|}{2}$. Тогаш $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon) = \varnothing$.

Од непрекинатоста на f следува дека постои $\delta > 0, \delta < \varepsilon$ така што

$$f(x-\delta, x+\delta) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) = (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon).$$

Ќе докажеме дека $A \cap ((x-\delta, x+\delta) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)) = \varnothing$. Да претпоставиме спротивно, нека

$$(z, f(z)) \in A \cap ((x-\delta, x+\delta) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)).$$

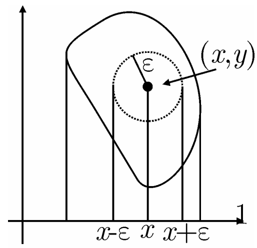
Значи, $z \in (x-\delta, x+\delta)$, но тогаш

$$f(z) \in (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon) \cap (y - \varepsilon, y + \varepsilon) = \varnothing,$$

па добиваме контрадикција.

Значи, $T\big((x,y),\delta\big) \subseteq \big(x-\delta, x+\delta\big) \times \big(y-\varepsilon, y+\varepsilon\big) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus A$, т.е. $\mathbb{R}^2 \setminus A$ е отворено.

3.17. Нека $f = 1_X^{-1}$ од задача 3.8. б). Бидејќи 1_X е биекција, следува дека постои $f = 1_X^{-1} : \big(X, \mathcal{T}'\big) \to \big(X, \mathcal{T}\big)$. Бидејќи $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ($\mathcal{T}$ е индискретна а $\mathcal{T}'$ дискретна топологија) од задача 3.8. а) следува непрекинатоста на f. Јасно, f^{-1} не е непрекинато (3.15. б)).



црт. 3

Да го разгледаме пресликувањето $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинирано со $g\big(x,y\big) = x$. Од задача 3.1. а) следува непрекинатост. Ќе докажеме дека g е орворено. Нека U е произволно отворено подмножество од $\mathbb{R}^2$. Ќе докажеме дека $g\big(U\big)$ е отворено. Нека $x \in g\big(U\big)$ е произволен. Постои $\big(s,y\big) \in U$ така што $g\big(s,y\big) = x$. Од дефиницијата на g следува дека $s = x$. Од отвореноста на U следува дека постои $\varepsilon > 0$ така што $T\big(\big(x,y\big),\varepsilon\big) \subseteq U$. Значи,
$g\big(T\big(\big(x,y\big),\varepsilon\big)\big) = \big(x-\varepsilon, x+\varepsilon\big) \subseteq g\big(U\big)$, па $g\big(U\big)$ е отворено (црт. 3).
Нека $A = \left\{ \left(x, \dfrac{1}{x} \right) \middle| \, x \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$. Тогаш A е затворено (задача 3.10). Но, $g\big(A\big) = \big(0,\infty\big)$ не е затворено во $\mathbb{R}$.
Нека $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дефинирано со $h\big(x\big) = 1$ за секој $x \in \mathbb{R}$. Тогаш h е непрекинато (задача 3.1. д)) и затворено (за секое непразно $A \subseteq \mathbb{R}$ важи $h\big(A\big) = \big\{1\big\}$, кое е затворено и $h\big(\varnothing\big) = \varnothing$). Но, h не е отворено, бидејќи $h\big(0,1\big) = \big\{1\big\}$ не е отворено во $\mathbb{R}$.

3.18. Просторите A и B се простори со дискретна топологија (докажи!). Дефинираме пресликување $f : A \to B$ со $f\big(n\big) = \dfrac{1}{n}$. Јасно е дека f е биекција. Притоа f и f^{-1} се непрекинати како пресликувања меѓу дискретни простори, па f е хомеоморфизам. Значи, $A \cong B$.
Да претпоставиме дека $A \cong C$, т.е. постои $g : C \to A$ хомеоморфизам. Нека $g\big(0\big) = n_0$. Множеството $\big\{n_0\big\}$ е отворено во A, па од

непрекинатоста на g следува дека $g^{-1}\left(\left\{n_0\right\}\right)=\left\{0\right\}$ е отворено во C. Значи, постои $\varepsilon>0$ така што $\left\{0\right\}=\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\cap C$. Последново равенство не е можно, бидејќи постои $n_1\in\mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_1}<\varepsilon$, па $\frac{1}{n_1}\in\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\cap C$. Добивме контрадикција, па $A\not\cong C$.

3.19. а) Треба да докажеме дека $f\left(\operatorname{int}A\right)=\operatorname{int}f\left(A\right)$, каде $f:X\to Y$ е хомеоморфизам и $A\subseteq X$ е произволно.
Множеството
$$f\left(\operatorname{int}A\right)=f\left(\bigcup_{\substack{U\subseteq A\\ U\text{ е отворено во }X}}U\right)=\bigcup_{\substack{U\subseteq A\\ U\text{ е отворено во }X}}f\left(U\right)$$
е отворено во Y, заради отвореноста на $f\left(U\right)$ за секое U отворено во X. Бидејќи $U\subseteq A$ следува дека $f\left(U\right)\subseteq f\left(A\right)$. Значи, $f\left(\operatorname{int}A\right)\subseteq f\left(A\right)$. Но $\operatorname{int}f\left(A\right)$ е најголемото отворено множество што се содржи во $f\left(A\right)$, па следува дека $f\left(\operatorname{int}A\right)\subseteq\operatorname{int}f\left(A\right)$.
Да претпоставиме дека постои V отворено во Y така што $f\left(\operatorname{int}A\right)\subseteq V\subseteq f\left(A\right)$. Заради тоа што f е биекција следува дека $\operatorname{int}A=f^{-1}\left(f\left(\operatorname{int}A\right)\right)\subseteq f^{-1}\left(V\right)\subseteq f^{-1}\left(f\left(A\right)\right)=A$. Множеството $f^{-1}\left(V\right)$ е отворено во X, а $\operatorname{int}A$ е најголемото отворено множество што се содржи во A, па $\operatorname{int}A=f^{-1}\left(V\right)$. Следува $f\left(\operatorname{int}A\right)=V$. Значи, $f\left(\operatorname{int}A\right)$ е најголемото отворено множество што се содржи во $f\left(A\right)$, па $f\left(\operatorname{int}A\right)=\operatorname{int}f\left(A\right)$.
б) <u>*I начин.*</u> Од тоа што f е биекција, од а) и од $f\left(\operatorname{ext}A\right)=\operatorname{ext}f\left(A\right)$ следува
$$f\left(\partial A\right)=f\left(X\setminus\left(\operatorname{int}A\cup\operatorname{ext}A\right)\right)=Y\setminus\left(f\left(\operatorname{int}A\cup\operatorname{ext}A\right)\right)=$$
$$=Y\setminus\left(f\left(\operatorname{int}A\right)\cup f\left(\operatorname{ext}A\right)\right)=Y\setminus\left(\operatorname{int}f\left(A\right)\cup\operatorname{ext}f\left(A\right)\right)=\partial\left(f\left(A\right)\right).$$
<u>*II начин.*</u> Ќе докажеме дека $f\left(\partial A\right)=\partial\left(f\left(A\right)\right)$. Нека $y\in f\left(\partial A\right)$ и нека U е произволна околина на y. Постои $x\in\partial A$ така што $y=f\left(x\right)$. Притоа $x\in f^{-1}\left(U\right)$. Бидејќи $f^{-1}\left(U\right)$ е отоврено и $x\in\partial A$ следува

дека постојат $t \in A \cap f^{-1}(U)$ и $s \in (X \setminus A) \cap f^{-1}(U)$. Според тоа, $f(t) \in U \cap f(A)$ и $f(s) \in U \cap f(X \setminus A) = U \cap (Y \setminus f(A))$. Значи, во секоја околина на y има точка од $f(A)$ и од $Y \setminus f(A)$, па $y \in \partial(f(A))$.

Обратно. Нека $y \in \partial(f(A))$ и нека V е произволна околина на y. Бидејќи f е биекција, следува дека постои $x \in X$ така што $y = f(x)$. Ќе докажеме дека $x \in \partial A$. Нека U е произволна околина на x. Тогаш $f(U)$ е околина на y. Бидејќи $y \in \partial(f(A))$ следува дека постојат $s \in f(A) \cap f(U)$ и $t \in f(U) \cap (Y \setminus f(A))$. Значи, $f^{-1}(s) \in A \cap U$ и

$$f^{-1}(t) \in U \cap f^{-1}(Y \setminus f(A)) = U \cap (X \setminus A).$$

Добивме дека во секоја околина на x има точка и од A и од $X \setminus A$. Следува $x \in \partial A$, па $y = f(x) \in f(\partial A)$.

в) Ќе докажеме дека $f(A') = (f(A))'$.

Нека $y \in f(A')$ и нека V е произволна околина на y. Постои $x \in A'$ така што $y = f(x)$. Тогаш $f^{-1}(V)$ е околина на x, па постои $z \in (f^{-1}(V) \setminus \{x\}) \cap A$. Тогаш $f(z) \neq f(x)$ (f е инјекција) и

$$f(z) \in (V \setminus \{f(x)\}) \cap f(A) = (V \setminus \{y\}) \cap f(A).$$

Значи, $y \in (f(A))'$.

Обратно. Нека $y \in (f(A))'$ и нека $x \in X$ е таков што $y = f(x)$. Ќе докажеме дека $x \in A'$. Нека U е произволна околина на x. Тогаш $f(U)$ е околина на y, па постои $y_1 \in (f(U) \setminus \{y\}) \cap f(A)$. Тогаш $f^{-1}(y_1) \neq x$ и важи $f^{-1}(y_1) \in (U \setminus \{x\}) \cap A$. Значи $x \in A'$, па $y = f(x) \in f(A')$.

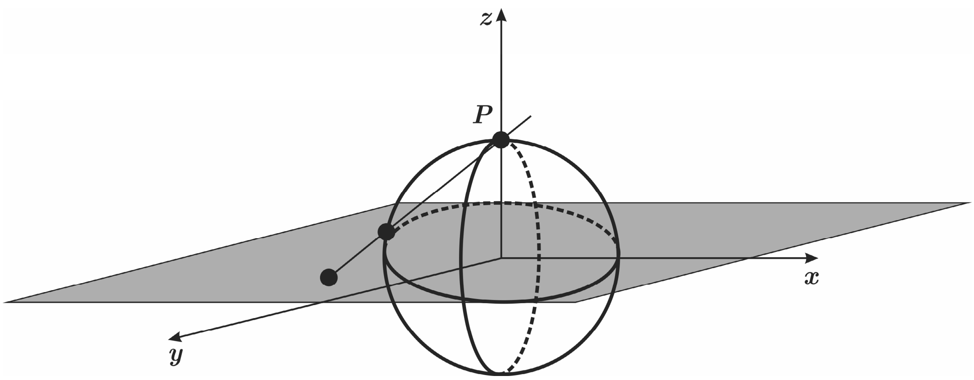
г) Дефинираме $f : T((0,0),1) \to T((0,0),2)$ со $f((x,y)) = (2x, 2y)$. Ова пресликување е хомеоморфизам. Но плоштините на двете топки се различни.

3.20. Заради $\mathbb{R}^2 \cong$ Нека $f : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ е дефинирано со $f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$ и

$g : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ е дефинирано со $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$.

Бидајќи за $(x,y,z) \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ важи $z \neq 1$, следува дека g е добро дефинирано. Од $\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1} \right)^2 + \left(\frac{2y}{x^2+y^2+1} \right)^2 + \left(\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)^2 = 1$ следува дека и f е добро дефинирано. Јасно е дека f и g се непрекинати. Останува да се провери дека f е биекција и дека $f = g^{-1}$. Тоа го оставаме на читателот.

Забелешка. Ова пресликување се нарекува **стереографска проекција**. Всушност сликата на точка A од сферата се добива како пресек на правата низ A и P со рамнината $\mathbb{R}^2$.



3.21. Нека f е затворено, $B \subseteq Y$, и отворено $A \subseteq X$ е отворено така што $f^{-1}(B) \subseteq A$. Да го разгледаме множеството $C = Y \setminus f(X \setminus A)$. Бидејќи f е затворено и $X \setminus A$ е затворено, следува дека $f(X \setminus A)$ е затворено, т.е. C е отворено во Y.

Ќе докажеме дека $B \subseteq C$. Нека $b \in B$ е произволен. Ако претпоставиме дека $b \in f(X \setminus A)$, ќе добиеме дека постои $a \in X \setminus A$ така што $f(a) = b$. Тоа не е можно заради $a \in f^{-1}(B) \cap (X \setminus A) = \varnothing$. Значи $b \in C$.

Уште

$$f^{-1}(C)=f^{-1}(Y\setminus f(X\setminus A))=$$
$$=X\setminus f^{-1}f(X\setminus A)\subseteq X\setminus(X\setminus A)=A.$$

Со тоа 1)$\Rightarrow$ 2) е докажано.

Обратно, за f нека важи 2) и нека F е произволно затворено подмножество до X. Нека $A=X\setminus F$ и $B=Y\setminus f(F)$. Тогаш A е отворено и $f^{-1}(B)=f^{-1}(Y\setminus f(F))=X\setminus f^{-1}f(F)\subseteq X\setminus F=A$. Според 2) постои отворено множество $C\subseteq Y$ така што $Y\setminus f(F)\subseteq C$ и $f^{-1}(C)\subseteq A=X\setminus F$. Следува дека $f^{-1}(C)\cap F=\varnothing$ и оттука $C\cap f(F)=\varnothing$ (ако претпоставиме дека постои $c\in C\cap f(F)$, тогаш постои $z\in F$ така што $c=f(z)$, па $f(z)=c\in C$ и следува $z\in f^{-1}(C)$. Добивме контрадикција со $f^{-1}(C)\cap F=\varnothing$). Според тоа $C\subseteq Y\setminus f(F)$. Зардаи $Y\setminus f(F)\subseteq C$ следува $C=Y\setminus f(F)$. Оттука $f(F)=Y\setminus C$, па од отвореноста на C следува дека $f(F)$ е затворено.

3.22. Ако f е затворено, избирајќи $C=\{y\}$ во 2) од претходната задача добиваме дека важи 2).

Обратно, нека за f важи 2), и нека $B\subseteq Y$ е произволно и $A\subseteq X$ е отворено така што $f^{-1}(B)\subseteq A$. Од 2) следува дека за секој $y\in B$ постои околина V_y на y така што $f^{-1}(V_y)\subseteq A$. Нека $C=\bigcup\limits_{y\in B}V_y$. Јасно, $B\subseteq C$ и $f^{-1}(C)=f^{-1}\left(\bigcup\limits_{y\in B}V_y\right)=\bigcup\limits_{y\in B}f^{-1}(V_y)\subseteq A$, па важи 2) од претходната задача. Следува f е затворено.

3.23. Нека $a\in\mathbb{R}$ е произволен. Да означиме $A_<=\{x|f(x)<a\}$ и $A_>=\{x|f(x)>a\}$.

Нека f е непрекинато. Тогаш множествата

$$A_<=\{x|f(x)<a\}=f^{-1}(-\infty,a)\text{ и}$$
$$A_>=\{x|f(x)>a\}=f^{-1}(a,\infty)$$

се отворени во X, заради отвореноста на $(-\infty,a)$ и (a,∞) во $\mathbb{R}$.

Обратното следува од тоа што сите интервали $(-\infty, a)$ и (a, ∞) формираат подбаза на $\mathbb{R}$ и тоа што сите нивни инверзни слики се отворени во X.

3.24. За секои $x, y \in X$ и $z \in A$ важи $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Тогаш и $\inf\limits_{z \in A} \{d(x,z)\} \leq d(x,y) + \inf\limits_{z \in A} \{d(y,z)\}$,

т.е. $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$.

Значи $f(x) - f(y) \leq d(x,y)$.

Аналогно, за секои $x, y \in X$ и $z \in A$ важи

$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$, па

$\inf\limits_{z \in A} \{d(y,z)\} \leq d(x,y) + \inf\limits_{z \in A} \{d(x,z)\}$, т.е. $f(y) - f(x) \leq d(x,y)$.

Според тоа $|f(y) - f(x)| \leq d(x,y)$.

а) Нека $x \in X$, $\varepsilon > 0$ е произволен и нека $\delta = \varepsilon$. Ако $y \in T(x,\delta)$ е произволен, $d(x,y) < \delta$.

Заради претходното $|f(y) - f(x)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon$, па f е непрекинато во x.

б) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно, $\delta = \varepsilon$ и $x, y \in X$ така што $d(x,y) < \delta$. Тогаш

$$|f(x) - f(y)| = |d(x,T) - d(y,T)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon,$$

па следува рамномерна непрекинатост на пресликувањето f.

3.25. Пресликувањето f го дефинираме на следниов начин:

$$f(x) = \frac{d(x,A) - d(x,B)}{d(x,A) + d(x,B)}, \text{ за секој } x \in X.$$

Јасно е дека $f(x) = -1$, за секој $x \in A$ и $f(x) = 1$, за секој $x \in B$. Ако $x \notin A \cup B$, тогаш $d(x,A) > 0$, $d(x,B) > 0$ и

$d(x,A) - d(x,B) < d(x,A) + d(x,B)$, па $f(x) < 1$.

Исто така и $d(x,A) - d(x,B) > -d(x,A) - d(x,B)$, па $f(x) > -1$. Пресликувањето f е непрекинато заради непрекинатоста на $d(x,A)$ и $d(x,B)$.

3.26. Нека $A = \left\{ x \middle| f(x) \leq -\frac{1}{3}\mu \right\} \left(= f^{-1}\left(\left(-\infty, -\frac{1}{3}\mu \right] \right) \right)$ и

$$B = \left\{ x \middle| f(x) \geq \frac{1}{3}\mu \right\} \left(= f^{-1}\left(\left[-\frac{1}{3}\mu, \infty \right) \right) \right).$$

Тогаш A и B се затворени и дисјунктни подмножества од F. Значи постојат затворени множества C и D во X така што $A = F \cap C$ и $B = F \cap D$. Значи A и B се затворени и во X. Од претходната задача следува дека пресликувањето $g(x) = \frac{1}{3}\mu \frac{d(x,A) - d(x,B)}{d(x,A) + d(x,B)}$ е непрекинато на X.

Ќе докажеме дека g ги исполнува бараните услови.

Ако $x \in A$, тогаш $g(x) = \frac{1}{3}\mu(-1) = -\frac{1}{3}\mu$. Слично, за $x \in B$ важи $g(x) = \frac{1}{3}\mu$. Од претходната задача следува дека $-\frac{1}{3}\mu \leq g(x) \leq \frac{1}{3}\mu$, за секој $x \in X$, и за $x \in X \setminus (A \cup B) \supseteq F$ важи $-\frac{1}{3}\mu < g(x) < \frac{1}{3}\mu$.

Сега, нека $x \in F$.

- ако $x \in A$, тогаш $f(x) \leq -\frac{1}{3}\mu$, па

$$|f(x) - g(x)| = \left| f(x) + \frac{1}{3}\mu \right| = |f(x)| - \frac{1}{3}\mu \leq \mu - \frac{1}{3}\mu = \frac{2}{3}\mu.$$

- ако $x \in B$, тогаш $f(x) \geq \frac{1}{3}\mu$, па имаме

$$|f(x) - g(x)| = \left| f(x) - \frac{1}{3}\mu \right| = f(x) - \frac{1}{3}\mu \leq \mu - \frac{1}{3}\mu = \frac{2}{3}\mu.$$

- ако $x \in F \setminus (A \cup B)$, тогаш $|g(x)| \leq \frac{1}{3}\mu$ и

$|f(x)| < \frac{1}{3}\mu$, па следува

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{3}\mu = \frac{2}{3}\mu.$$

Со тоа докажавме дека g ги исполнува бараните услови.

3.27. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Од рамномерната непрекинатост на g постои $\delta_2 > 0$ така што

$$d_2(z,t) < \delta_2 \Rightarrow d_3(g(z),g(t)) < \varepsilon .$$

Пресликувањето f е рамномерно непрекинато па постои $\delta_1 > 0$ така што $d_1(x,y) < \delta_1 \Rightarrow d_2(f(x),f(y)) < \delta_2$.

Нека $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ и нека $d_1(x,y) < \delta \leq \delta_1$. Тогаш $d_2(f(x),f(y)) < \delta_2$, па $d_3(g(f(x)),g(f(y))) < \varepsilon$. Значи и gf е рамномерно непрекинато.

3.28. Нека F и G се рамномерно разделени во X. Значи постои рамномерно непрекинато пресликување $f : X \to [0,1]$ така што $f(F) = \{0\}$ и $f(G) = \{1\}$. Тогаш $f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$ и двете множества се затворени, па $d(f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})) > 0$.

Од $F \subseteq f^{-1}(\{0\})$ и $G \subseteq f^{-1}(\{1\})$,

следува дека $d(F,G) \geq d(f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})) > 0$.

Обратно, нека F и G се разделени во X и $d(F,G) \geq \delta$. Пресликувањето $g(x) = d(x,F)$ е рамномерно непрекинато на X и $g(x) = 0$ за $x \in F$ и $g(x) \geq \delta$ за $x \in G$. Нека $h(x) = \dfrac{1}{\delta}\min\{g(x),\delta\}$. Ќе докажеме дека h е рамномерно непрекинато на X.

Навистина, нека $\varepsilon > 0$ и $\delta_1 = \delta\varepsilon$. Просторот X може да се запише како

$$X = \underbrace{\{x \mid x \in X, g(x) < \delta\}}_{=A} \cup \underbrace{\{x \mid x \in X, g(x) = \delta\}}_{=B} \cup \underbrace{\{x \mid x \in X, g(x) > \delta\}}_{=C}$$

Нека $x,y \in X$. Од рамномерната непрекинатост на g следува дека постои $\delta_0 > 0$ така што $d(x,y) < \delta_0 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon\delta$.

Нека $\delta_1 = \min\{\delta_0, \varepsilon\delta\}$ и $d(x,y) < \delta_1$.

- ако $x,y \in A$, тогаш $|h(x) - h(y)| = \left|\dfrac{g(x)}{\delta} - \dfrac{g(y)}{\delta}\right| < \dfrac{\varepsilon\delta}{\delta} = \varepsilon$.

- ако $x,y \in B \cup C$, тогаш $|h(x) - h(y)| = |1-1| = 0$.

- ако $x \in A, y \in B \cup C$, тогаш

$$\left|h(x)-h(y)\right|=\left|\frac{g(x)}{\delta}-1\right|=1-\frac{g(x)}{\delta}=\frac{1-g(x)}{\delta}\leq$$
$$\leq\frac{g(y)-g(x)}{\delta}<\frac{\varepsilon\delta}{\delta}=\varepsilon.$$

- ако $x\in B, y\in A$, тогаш

$$\left|h(x)-h(y)\right|=\left|1-\frac{g(x)}{\delta}\right|=1-\frac{g(x)}{\delta}=\frac{1-g(x)}{\delta}\leq$$
$$\leq\frac{g(y)-g(x)}{\delta}<\frac{\varepsilon\delta}{\delta}=\varepsilon.$$

Аналогно се докажуваат и останатите случаи.

Според тоа h е рамномерно непрекинато на X.

Сега, нека $x\in F$. Тогаш $g(x)=0$, па и $h(x)=0$. Ако $x\in G$ следува дека $g(x)\geq\delta$, па $h(x)=\dfrac{\delta}{\delta}=1$. Значи, $h(F)=\{0\}$ и $h(G)=\{1\}$.

Забелешка. Во претходното решение може да се земе и пресликувањето $f(x)=\dfrac{d(x,F)-d(x,G)}{d(x,F)+d(x,G)}$.

Навистина, ако $x\in X\setminus(F\cup G)$, тогаш за секои $y\in F$ и $z\in G$ важи $d(x,y)+d(x,z)\geq d(y,z)$. Барајќи инфимум прво по сите $y\in F$, а потоа по сите $z\in G$ добиваме

$$d(x,F)+d(x,G)\geq d(F,G)\geq\delta.$$

Значи $\left|f(x)\right|\leq\dfrac{1}{\delta}\left|d(x,F)-d(x,G)\right|$.

Пресликувањата $g_1(x)=d(x,F)$ и $g_2(x)=d(x,G)$ се рамномерно непрекинати. Ќе докажеме дека и f е рамномерно непрекинато. Нека $\varepsilon>0$. Постои $\delta_1>0$ така што $\left|g_1(x)-g_1(y)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2\delta}$, за сите $x,y\in X$ такви што $d(x,y)<\delta_1$ и постои $\delta_2>0$ така што $\left|g_2(x)-g_2(y)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2\delta}$, за сите $x,y\in X$ такви што $d(x,y)<\delta_2$. Нека $d(x,y)<\delta_3=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогаш

$$\left|f(x)-f(y)\right| \le \frac{1}{\delta}\left|g_1(x)-g_2(x)-g_1(y)+g_2(y)\right| \le$$
$$\le \frac{1}{\delta}\left|g_1(x)-g_1(y)\right|+\frac{1}{\delta}\left|g_2(x)-g_2(y)\right| <$$
$$< \frac{1}{\delta}\frac{\varepsilon}{2\delta}+\frac{1}{\delta}\frac{\varepsilon}{2\delta}=\varepsilon.$$

Јасно е дека $f(F)=\{-1\}$, $f(G)=\{1\}$ и $-1 \le f(x) \le 1$, за секој $x \in X$.

Сега, во улога на h од претходното решение може да се земе функцијата $f_1 f$, каде $f_1 : [-1,1] \to [0,1]$ е хомеоморфизам. Притоа f_1 е непрекината на затворениот интервал $[-1,1]$, па и рамномерно непрекината. Значи и $f_1 f$ е рамномерно непрекината.

3.29. Нека $x \in X$ е произволен и нека V е произволна околина на $f(x)$. Постои околина U_x на x така што $f|_{U_x}$ е константно. Заради $x \in U_x$ и $f|_{U_x}$ е константно , следува дека $f|_{U_x}(U_x)=\{f(x)\}$. Следува $f(U_x)=f|_{U_x}(U_x)=\{f(x)\} \subseteq V$, па f е непрекинато.

3.30. Нека Y е непразно отворено-затворено подмножество од X. Значи постои $y_0 \in Y$. Нека е пресликување дефинирано со

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \in Y \\ y_0, & x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Јасно е дека $f|_Y = 1_Y$. Останува да се докаже непрекинатоста на f. Нека V е произволно отворено множество во Y. Тогаш

$$f^{-1}(V)=\begin{cases} V, & y_0 \notin V \\ V \cup (X \setminus Y), & y_0 \in V. \end{cases}$$

Бидејќи V е отворено во Y и Y е отворено во X следува дека V е отворено во X. Отвореноста на $V \cup (X \setminus Y)$ во X следува од затвореноста на Y во X. Значи, f е непрекинато.

4. АКСИОМИ ЗА СЕПАРАЦИЈА

4.1. <u>*I начин*</u>. Нека X е T_1 простор и A е конечно подмножество од X. Бидејќи X е T_1 следува дека множеството $\{x\}$ е затворено, за секој $x \in X$. Значи и множеството A е затворено, бидејќи унијата $\bigcup\limits_{a \in A} \{a\}$ е конечна. Според тоа A ги содржи сите свои точки на акумулација, т.е. ниедна точка од $X \setminus A$ не е точка на акумулација за A.
Ќе докажеме дека и ниедна точка од A не е точка на акумулација за A.
Множеството $U_a = X \setminus (A \setminus \{a\})$ е околина на $a \in A$ (множеството $A \setminus \{a\}$ е затворено како конечна унија од едноелементни множества), за секој $a \in A$. Притоа U_a нема други точки од A, т.е. $U_a \setminus \{a\} \cap A = \varnothing$. Следува дека a не е точка на акумулација за A.
<u>*II начин.*</u> Нека $x \in X \setminus A$ и нека $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Постои околина U_i на x така што $a_i \notin U_i$ за секој $i \in \{1, ..., n\}$. Множеството $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ е отворено (бидејќи е конечен пресек на отворени множества) и $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i\right) \setminus \{x\} \cap A = \varnothing$, па x не е точка на акумулација на A.
Сега нека $i \in \{1, ..., n\}$ е произволен. Тогаш за секој $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ постои V_j околина на a_i така што $a_j \notin V_j$. Значи, $\bigcap\limits_{j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}} U_j$ е околина на a_i и $\left(\bigcap\limits_{j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}} U_j\right) \setminus \{a_i\} \cap A = \varnothing$, па a_i не е точка на акумулација за A.

4.2. а)$\Rightarrow$б). Нека $p \in X$ е точка на акумулација за A, и нека G е околина на p е таква што $B = (G \setminus \{p\}) \cap A$ е конечно. Бидејќи X е T_1, а B е конечно, следува дека B е затворено, т.е. $X \setminus B$ е отворено.

Значи и множеството $G \cap (X \setminus B)$ е отворено. Притоа $p \in X \setminus B$, па $p \in G \cap (X \setminus B)$. Нека $x \in ((G \cap (X \setminus B)) \setminus \{p\}) \cap A$. Тогаш $x \in A$, $x \notin B$, $x \in G$ и $x \neq p$. Од $x \notin B$ и $x \in A$ добиваме дека $x \notin G \setminus \{p\}$. Бидејќи $x \neq p$ следува дека $x \notin G$, од каде што добиваме контрадикција.
б) $\Rightarrow$ а) следува од дефиницијата на точка на акумулација.

4.3. а) $\Rightarrow$ б). Нека X е нормален, F затворено подмножество од X и U произволна околина на F. Тогаш множеството $X \setminus U$ е затворено и $F \cap (X \setminus U) = \varnothing$. Од нормалноста на X следува дека постојат околини V на F и W на $X \setminus U$ такви што $V \cap W = \varnothing$. Множеството $X \setminus W$ е затворено и $V \subseteq X \setminus W$. Следува $\bar{V} \subseteq X \setminus W$. Значи,

$$F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus (X \setminus U) = U.$$

б) $\Rightarrow$ а). Нека F и G се затворени и дисјунктни подмножества од X. Множеството $X \setminus F$ е отворено и $G \subseteq X \setminus F$, па постои околина V на G така што $G \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq X \setminus F$. Притоа, $X \setminus \bar{V}$ е отворено, $X \setminus \bar{V} \supseteq X \setminus (X \setminus F) = F$ и $(X \setminus \bar{V}) \cap V = \varnothing$. Според тоа, $X \setminus \bar{V}$ и V се дисјунктни околини на F и G, соодветно. Следува дека X е нормален.

4.4. а) Нека X е конечен T_1 простор. Тогаш $\{x\}$ е затворено, за секој $x \in X$. Секое $A \subseteq X$ е затворено, заради $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ и унијата е конечна. Следува дека секое подмножество од X е и отворено, па X е дискретен.
б) Нека $x, y \in X$ се различни точки од X. Тогаш $\{x\}$ и $\{y\}$ се отворени и $\{x\} \cap \{y\} = \varnothing$, па X е T_2.

4.5. а) Прво ќе докажеме дека

$$(A')' \subseteq A' \qquad (1)$$

Нека $x \in (A')'$ и нека U е произволна околина на x. Тогаш $(U \setminus \{x\}) \cap A' \neq \varnothing$, па нека $p \in (U \setminus \{x\}) \cap A'$. Множеството $\{x\}$ е затворено (X е T_1), па $U \setminus \{x\} = U \cap X \setminus \{x\}$ е отворено и

$p \in U \setminus \{x\}$. Значи $U \setminus \{x\}$ е околина на p и заради $p \in A'$ следува дека $(U \setminus \{x\}) \setminus \{p\} \cap A \neq \varnothing$, т.е. постои $y \in (U \setminus \{x\}) \setminus \{p\} \cap A$. Значи, $y \neq x$, $y \in U$ и $y \in A$. Докажавме дека во секоја околина U на x има точка од A различна од x. Следува дека $x \in A'$ и со тоа (1) е докажано.

Сега, имаме $\overline{A'} = A' \cup (A')' \overset{(1)}{=} A'$.

Да забележиме дека во (1) не важи раенство. На пример ако $A = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$. Тогаш $A' = \{0\}$ а $(A')' = \varnothing$.

б) Нека $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ и нека $A = \{a\}$. Тогаш $A' = \{b\}$ не е затворено ($\overline{A'} = X \neq A'$). Притоа, X не е T_1 простор.

4.6. Нека X е тополошки простор, x_0 е единствената неизолирана точка од X и нека F и G се затворени и дисјунктни подмножества од X. Тогаш $x_0 \notin F$ или $x_0 \notin G$. Нека $x_0 \notin F$. Тогаш сите точки од F се изолирани. Значи за секој $x \in F$ множеството $\{x\}$ е отворено. Следува дека и F е отворено. Значи F е околина на F а $X \setminus F$ е околина на G и притоа $F \cap (X \setminus F) = \varnothing$, па X е нормален.

4.7. Нека $\{x_1, \ldots, x_n\}$ е множеството од сите неизолирани точки од X. За секои $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и $i \neq j$, важи $x_i \neq x_j$, па постојат дисјунктни околини V_{ij} на x_i и V_{ji} на x_j. Нека $V_i = \cap \left\{ V_{ij} \middle| j \in \{q, \ldots, n\} \setminus \{i\} \right\}$, за секој $i \in \{1, \ldots, n\}$. Јасно е дека V_i е околина на x_i, за секој $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $V_i \cap V_j = \varnothing$, за $i \neq j$.

Нека F_1 и F_2 се произволни затворени дисјунктни подмножества од X. Бидејќи за секој изолирана точка x множеството $\{x\}$ е отворено, следува ека множествата

$$U_1 = F_1 \cup \left(\left(\cup \left\{ V_i \middle| x_i \in F_1 \right\} \right) \cap \left(X \setminus F_2 \right) \right) \text{ и}$$
$$U_2 = F_2 \cup \left(\left(\cup \left\{ V_i \middle| x_i \in F_2 \right\} \right) \cap \left(X \setminus F_1 \right) \right)$$

се отворени. Уште, јасно е дека $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ и $F_1 \subseteq U_1$ и $F_2 \subseteq U_2$, па X е нормален.

4.8. Ако f е хомеоморфизам, тогаш f е инјекција, па тврдењето ќе следува од задача од глава 3.

Останува да се докаже дека ако за f важи $\overline{A} = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, за секое $A \subseteq X$, тогаш f е инјекција (непрекинатоста следува од задча од глава 3).

Навистина, нека $f(x) = f(y)$.

Тогаш $\overline{\{x\}} = f^{-1}\left(\overline{f(\{x\})}\right) = f^{-1}\left(\overline{f(\{y\})}\right) = \overline{\{y\}}$. Заради X е T_1 следува дека $x = y$.

4.9. Нека $f : X \to Y$ е затворено пресликување, $B \subseteq Y$ и U отворено подмножество од X така што $f^{-1}(B) \subseteq U$. Тогаш $X \setminus U$ е затворено па од затвореноста на f следува дека и множеството $f(X \setminus U)$ е затворено во Y па $V = Y \setminus f(X \setminus U)$ е отворено во Y. Притоа $(X \setminus U) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$.

Ќе докажеме дека $f(X \setminus U) \cap B = \varnothing$. Да претпоставиме спротивно, дека постои $y \in f(X \setminus U) \cap B$. Тогаш постои $x \in X \setminus U$ така што $y = f(x)$ и $y \in B$. Значи, $f(x) \in B$, па $x \in f^{-1}(B)$ и $x \in X \setminus U$, што е во контарадикција со $(X \setminus U) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$.

Следува, $B \subseteq Y \setminus f(X \setminus U) = V$. Уште

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U)) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U)) \subseteq X \setminus (X \setminus U) = U$$

.

4.10. Нека A и B се произволнио непразни затворени дисјунктни подмножества од Y и нека $A_1 = f^{-1}(A)$ и $B_1 = f^{-1}(B)$. Тогаш A_1 и B_1 се непразни (заради тоа што f е сурјакција), затворени (f е непрекинато) и дисјунктни подмножества од X. Од нормалноста на X следува дека постојат дисјунктни околини U_1 на A_1 и V_1 на B_1. Значи важи $f^{-1}(A) \subseteq U_1$ и $f^{-1}(B) \subseteq V_1$, па од претходната задача следува дека постојат околини U и V на A и B, соодветно, така што $f^{-1}(U) \subseteq U_1$ и $f^{-1}(V) \subseteq V_1$. Останува уште да се докаже дека

$U \cap V = \varnothing$. Нека $z \in U \cap V$. Од сурјективноста на f следува дека постои $t \in X$ така што $z = f(t)$.

Значи $t \in f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \subseteq U_1 \cap V_1 = \varnothing$, што е контрадикција.

4.11. Нека A и B се две затворени и дисјунктни подмножества од Y и нека $A_1 = f^{-1}(A)$ и $B_1 = f^{-1}(B)$. Јасно, $A_1 \cap B_1 = \varnothing$ и заради непрекинатоста на f следува дека A_1 и B_1 се затворени во X. Бидејќи X е нормален, следува дека постојат отворени и дисјунктни множества U_1 и V_1 во X така што $A_1 \subseteq U_1$ и $B_1 \subseteq V_1$. Множеството $X \setminus U_1$ е затворено во X, па од затвореноста на f следува дека и $f(X \setminus U_1)$ е затворено во Y, па $U_2 = Y \setminus f(X \setminus U_1)$ е отворено во Y. Уште заради $(X \setminus U_1) \cap f^{-1}(A) = \varnothing$ важи $f(X \setminus U_1) \cap A = \varnothing$, па следува дека $A \subseteq Y \setminus f(X \setminus U_1) = U_2$.

Важи и

$$\begin{aligned} &f^{-1}(U_2) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U_1)) = X \setminus f^{-1}f(X \setminus U_1) \subseteq \\ &\subseteq X \setminus (X \setminus U_1) = U_1 \end{aligned}.$$

На сличен начин постои отворено подмножество V_2 од Y така што $B \subseteq V_2$ и $f^{-1}(V_2) \subseteq V_1$. Заради $U_1 \cap V_1 = \varnothing$ следува дека $U_2 \cap V_2 = \varnothing$, па Y е нормален.

4.12. Нека $\{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ е произволен отворен покривач на Y. Тогаш $\{f^{-1}(V_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ е отворен покривач на X. Да означиме $U_\lambda = f^{-1}(V_\lambda)$, за секој $\lambda \in \Lambda$. Бидејќи X е Линделефов од покривачот $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ може да се издвои преброив подпокривач $\{U_{\lambda_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$. Пресликувањето f е сурјекција, па $f(U_{\lambda_i}) = f(f^{-1}(V_{\lambda_i})) = V_{\lambda_i}$ за секој $i \in \mathbb{N}$. Тогаш $Y = f\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{\lambda_i}\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(U_{\lambda_i}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_{\lambda_i}$, па $\{V_{\lambda_i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ е преброив покривач на Y.

4.13. 1)$\Rightarrow$2). Нека $A=\{x_i | i\in\mathbb{N}\}$ е преброиво густо подмножество од X. Да ја разгледаме фамилијата
$\mathcal{B}=\{T(x_i,r) | i\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Q}\}$, каде $T(x,r)=\{y | y\in X, d(x,y)<r\}$, а d е метриката на X. Фамилијата $\mathcal{B}$ е преброива.

Ќе докажеме дека $\mathcal{B}$ е база на X.

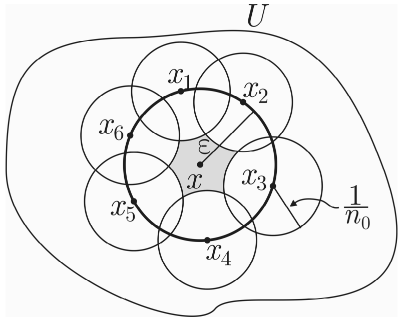
Нека $x\in X$ е произволен и U е произволна околина на x. Постои $\varepsilon>0$ така што $T(x,\varepsilon)\subseteq U$ и постои $r\in\mathbb{Q}$ така што $0<r<\varepsilon$. Значи $T(x,r)\subseteq T(x,\varepsilon)\subseteq U$. Бидејќи A е густо, постои $x_n\in A$ така што $x_n\in T\left(x,\frac{r}{3}\right)$.

Ќе докажеме дека $T\left(x_n,\frac{2r}{3}\right)\subseteq T(x,r)$. Навистина, ако $z\in T\left(x_n,\frac{2r}{3}\right)$ тогаш $d(z,x_n)<\frac{2r}{3}$, па
$d(x,z)\le d(x,x_n)+d(x_n,z)<\frac{r}{3}+\frac{2r}{3}=r$.
Следува $T\left(x_n,\frac{2r}{3}\right)\subseteq T(x,r)$.

Значи $x\in T\left(x_n,\frac{2r}{3}\right)\subseteq T(x,r)\subseteq U$. Од $T\left(x_n,\frac{2r}{3}\right)\in\mathcal{B}$ следува дека $\mathcal{B}$ е база на X.

2)$\Rightarrow$3). Нека X е 2-преброив и $\{V_i | i\in\mathbb{N}\}$ е преброива база за X. Ако $\{U_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ е произволен отворен покривач на X, тогаш за секој $\lambda\in\Lambda$ постојат $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ така што $\lambda_i\in\mathbb{N}$ и $U_\lambda=\bigcup_{i=1}^{\infty}V_{\lambda_i}$. Значи покривачот $\{V_{\lambda_i} | \lambda\in\Lambda, i\in\mathbb{N}\}$ е впишан во $\{U_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$ и $\{V_{\lambda_i} | \lambda\in\Lambda, i\in\mathbb{N}\}\subseteq\{V_i | i\in\mathbb{N}\}$, па $\{V_{\lambda_i} | \lambda\in\Lambda, i\in\mathbb{N}\}$ е преброив. Да избереме по точно едно U_{λ_i} за секој i така што $V_{\lambda_i}\subseteq U_{\lambda_i}$. Така добиваме преброив подпокривач $\{U_{\lambda_i} | \lambda\in\Lambda, i\in\mathbb{N}\}$ од покривачот $\{U_\lambda | \lambda\in\Lambda\}$, па X е Линделефов.

3)$\Rightarrow$1). Нека X е Линделефов. Нека $\varepsilon>0$ е произволен. За покривачот $\{T(x,\varepsilon) | x\in X\}$ постои преброив подпокривач $\{T(x_i,\varepsilon) | i\in\mathbb{N}\}$. Нека $A(\varepsilon)=\{x_i | i\in\mathbb{N}\}$.



Ќе докажеме дека множеството $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}A\left(\frac{1}{n}\right)$ е густо во X (јасно е дека е преброиво).

Нека $x\in X$ и U е произволна околина на x. Постои $\varepsilon>0$ така што $T(x,\varepsilon)\subseteq U$ и постои $n_0\in\mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

Множеството $\left\{T\left(x_i,\frac{1}{n_0}\right)\middle| i\in\mathbb{N}\right\}$ е покривач за X. Бидејќи $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ постои $i\in\mathbb{N}$ така што $x_i\in T(x,\varepsilon)$ (во спротивно би добиле дека $T(x,\varepsilon)\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}T\left(x_i,\frac{1}{n_0}\right)\right)\neq\varnothing$ (цртеж)).

4.14. Од задача од 2 глава следува дека $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ е сепарабилен. Ако претпоставиме дека е метризабилен, од претходната задача ќе следува дека е и 2-пребоив. Но $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ не е 2-преброив (задача од 2 глава).

4.15. Ако X е комплетно регуларен тврдењето веднаш следува, бидејќи $X\setminus V$ е затворено множество што не го содржи x.

Обратно, нека $x\in X$ и F е затворено множество што не го содржи x. Множеството $X\setminus F$ е отворено, $x\in X\setminus F$ и $\mathcal{P}$ е подбаза на X па следува дека постојат $V_1,\ldots,V_k\in\mathcal{P}$ така што $x\in V_1\cap\ldots\cap V_k\subseteq X\setminus F$. Постојат непрекинати пресликувања $f_i:X\to I$ така што $f_i(x)=0$ и $f_i(y)=1$ за секој $y\in X\setminus V_i$, $i=1,\ldots,k$. Да го разгледаме пресликувањето $f:X\to I$ дефинирано со $f(z)=\max\{f_1(z),\ldots,f_k(z)\}$. За него важи $f(x)=0$. Нека $y\in F$ е произволно. Значи $y\notin V_1\cap\ldots\cap V_k$, па постои $i_0\in\{1,\ldots,k\}$ така што $y\notin V_{i_0}$. Значи $f_{j_0}(y)=1$, па и $f(y)=1$.

Останува да се докаже дека f е непрекинато. Доволно е да докажеме за случајот $k=2$. Ќе користиме дека f е непрекинато ако и

само ако множествата $\{x|f(x)<b\}$ и $\{x|f(x)>b\}$ се отворени, за секој $b\in I$.
Од $\{x|f(x)<b\}=\{x|f_1(x)<b\}\cap\{x|f_2(x)<b\}$,
$\{x|f(x)>b\}=\{x|f_1(x)>b\}\cap\{x|f_2(x)>b\}$
и отвореноста на
$\{x|f_1(x)<b\}$, $\{x|f_2(x)<b\}$, $\{x|f_1(x)>b\}$ и $\{x|f_2(x)>b\}$
следува тврдењето.

Забелешка. Непрекинатоста следува и од равенството

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\left|f_1(x)-f_2(x)\right|+f_1(x)+f_2(x)\right).$$

4.16. а)$\Rightarrow$б). Нека X е нормален и нека A е затворено во X и U околина на A. Тогаш множествата A и $X\setminus U$ се затворени и дисјунктни, па постојат дисјунктни околини V на A и W на $X\setminus U$. Останува да докажеме дека $\overline{V}\subseteq U$. Нека $x\in\overline{V}$. Ако $x\notin U$, тогаш $x\in X\setminus U$, т.е. $x\in W$. Но, важи $W\cap V=\varnothing$, па W е околина на x што не содржи точка од V. Тоа е во контрадикција со $x\in\overline{V}$.

б)$\Rightarrow$в). Множеството $X\setminus B$ е околина на A, па од б) следува дека постои U така што $A\subseteq U\subseteq\overline{U}\subseteq X\setminus B$. Сега јасно е дека $\overline{U}\cap B=\varnothing$.

в)$\Rightarrow$г). Нека A и B се дисјунктни затворени подмножества од X. Постојат U и V така што $A\subseteq U$ и $\overline{U}\cap B=\varnothing$, и $B\subseteq V$ и $\overline{V}\cap A=\varnothing$. Множествата $\overline{U}$ и B се дисјунктни и затворени, па следува дека постои V_1 околина на B така што $\overline{U}\cap\overline{V_1}=\varnothing$. Бараните дисјунктни околини на A и B се U и V_1, па X е нормален.

г)$\Rightarrow$а). Следува од дефиницијата за нормален простор.

4.17. а) Дадената фамилија ги исполнува условите за база, затоа што за секој $x\in\mathbb{R}$ важи $x\in\{0,x\}\in\mathcal{B}$ и за секои $\{0,x\},\{0,y\}\in\mathcal{B}$ важи $\{0\}=\{0,x\}\cap\{0,y\}$ и $\{0\}\in\mathcal{B}$, па $0\in\{0\}\subseteq\{0,x\}\cap\{0,y\}$.
б) Множеството $\{0\}$ е густо во $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, затоа што во секој елемент од базата има точка од $\{0\}$. Следува $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ е сепарабилен.

Нека $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и нека V е произволна околина на x. Тогаш $x \in \{0, x\} \subseteq V$. Значи, $\{\{0, x\}\}$ е локална база во x. Локална база во 0 е $\{0\}$. Следува $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ е 1-преброив.

Ако $\mathcal{F}$ е произволна база за $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ и нека $\{0, x\}$ е произволен елемент од $\mathcal{B}$. Тогаш $\{0, x\}$ може да се запише како унија на елементи од $\mathcal{F}$. Единствена можност за таква унија од отворени множества е со $\{0, x\}$, па $\{0, x\} \in \mathcal{F}$. Значи, секоја база мора да ја содржи фамилијата $\mathcal{B}$. Бидејќи $\mathcal{B}$ е непреброива следува дека $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ не може да има преброива база.

в) Бидејќи за секој $y \in Y$ важи $\{y\} = Y \cap \{0, y\}$ следува дека секое $\{y\} \subseteq Y$, па Y е дискретен. Бидејќи не е преброив, следува дека не е сепарабилен.

г) Нека $x \neq 0$, $y \neq 0$ се произволни и нека $x \neq y$. Тогаш $x \in \{0, x\}$ и $y \notin \{0, x\}$. Ако $x \neq 0$ е произволна тогаш секоја околина на x ја содржи 0. Според тоа просторот не е T_1.

Оттука следува дека не е ни T_2.

Множеството $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ е затворено (бидејќи $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{0\}$) е отворено, и $0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Но секое отворено множество ја содржи 0. Според тоа 0 и $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ немаат дисјунктни околини. Следува просторот не е T_3.

Множествата $\{1\}$ и $\{2\}$ се затворени и дисјунктни. Навистина, $\mathbb{R} \setminus \{1\} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}, x \neq 1} \{0, x\}$ и $\mathbb{R} \setminus \{2\} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}, x \neq 2} \{0, x\}$ се отворени. Но, секоја нивна околина ја соржи 0. Според тоа овие две множества немаат дисјунктни околини, па просторот не е T_4.

4.18. Нека K е преброиво густо подмножество од X и нека y е произволна изолирана точка. Тогаш $\{y\}$ е отворено, т.е. е околина на y, па во неа мора да има точка од K. Следува дека $y \in K$. Според тоа множеството од изолирани точки е подмножество од K, па е преброиво.

4.19. а) Нека $\mathcal{B}$ е преброива база на $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ отворен покривач на A. Тогаш за секој $a \in A$ и произволен $U_a \in \mathcal{U}$ така што $a \in U_a$ постои $B_a \in \mathcal{B}$ така што $a \in B_a \subseteq U_a$. Нека $\mathcal{B}_1 = \{B_a | a \in A\}$ и нека за секој $B \in \mathcal{B}_1$, $\mathcal{U}_B = \{U \in \mathcal{U} | B \subseteq U\}$. Од секое $\mathcal{U}_B$ да избереме по едно U_B. Тогаш фамилијата $\{U_B | B \in \mathcal{B}\}$ е преброива (затоа што $\mathcal{B}$ е преброива) и го покрива A. Јасно, $\{U_B | B \in \mathcal{B}\}$ е потфамилија од $\mathcal{U}$.

б) Нека $\mathcal{B}= \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ е преброива база на $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$ произволна база за $\mathcal{T}$. Секој B_n е отворен во X, па постои потфамилија $\mathcal{F}_n$ од фамилијата $\mathcal{F}$ така што $B_n = \cup\{V | V \in \mathcal{F}_n\}$ (секое отворено множество е унија од елементи од базата). Значи, $\mathcal{F}_n$ го покрива B_n, па од а) следува дека постои преброива фамилија $\mathcal{F}'_n$, која е потфамилија од $\mathcal{F}_n$, и која го покрива B_n, т.е. $B_n = \cup\{V | V \in \mathcal{F}'_n\}$. Фамилијата $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}'_n$ е преброива и секој елемент од базата $\mathcal{B}$ може да се претстави како унија на елементи од $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}'_n$. Следува $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}'_n$ е база.

4.20. а) Во секој елемент $[a,b)$ од базата на $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ има рационален број. Според тоа $\mathbb{Q}$ е густо, па $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ е сепарабилен.

б) Да претпоставиме спротивно, дека $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ има пребриова база. Од претходната задача б) следува дека базата $\mathcal{B}_1 = \{[a,b) | a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ може да се сведе на преброива, па нека фамилијата $\mathcal{B} = \{[a_n,b_n) | n \in \mathbb{N}\}$ е база за $\mathcal{T}$. Бидејќи $\mathbb{R}$ не е преброив, множеството $\mathbb{R} \setminus \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ не е празно, па нека $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Нека $y > x$ е произволен. Тогаш $[x,y)$ е отворено па постои $M \subseteq \mathbb{N}$ така што $[x,y) = \bigcup\limits_{n\in M} [a_n,b_n)$.

Заради $x \in \bigcup\limits_{n\in M} [a_n,b_n)$ следува дека постои $n_0 \in M$ така што $x \in [a_{n_0},b_{n_0})$, т.е. $x \geq a_{n_0}$.

Од друга страна за секој $n \in M$ важи $[a_n,b_n) \subseteq [x,y)$, па и $[a_{n_0},b_{n_0}) \subseteq [x,y)$, од што следува $a_{n_0} \leq x$.

Значи, добивме дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $x = a_{n_0}$. Тоа е во противречност со претпоставката дека $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, па следува дека $\mathcal{T}$ нема преброива база.

в) Нека $x \in \mathbb{R}$ е произволен.

Фамилијата $\mathcal{B}_x = \left\{ \left[x, x + \frac{1}{n} \right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ е преброива. Ако U е произволна околина на x, тогаш постои b така што $x \in [x, b) \subseteq U$. Бидејќи $x < b$ следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0} < b - x$, т.е. $x + \frac{1}{n_0} < b$.

Тогаш $\left[x, x + \frac{1}{n_0} \right) \in \mathcal{B}_x$ и $x \in \left[x, x + \frac{1}{n_0} \right) \subseteq [x, b)$.

Следува дека $\mathcal{B}_x$ е локална база во x, па $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ е 1-преброив.

4.21. Нека F е затворено во $(X, \mathcal{T})$, и нека $\{U_a | a \in A\}$ е отворен покривач на $(F, \mathcal{T}_F)$. Бидејќи секое U_a е отворено во F следува дека постои отворено множество V_a во X така што $U_a = A \cap V_a$. Фамилијата $\{V_a | a \in A\} \cup \{X \setminus F\}$ е отворен покривач на X, па постои преброив потпокривач $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ на X. Тогаш $\{F \cap W_n | n \in \mathbb{N}\}$ е преброив покривач на F. Покривачот $\{F \cap W_n | n \in \mathbb{N}\}$ е потпокривач од $\{U_a | a \in A\}$ следува од изборот на $\{V_a | a \in A\}$ и $F \cap (X \setminus F) = \varnothing$.

4.22. Ќе докажеме дека $X \setminus A$ е отворено множество. Нека $x \in X \setminus A$ е произволен. Тогаш $x \neq r(x)$ (во спротивно ќе следува дека $x = r(x) \in A$), па од тоа што X е T_2 следува дека постојат дисјунктни околини U на x и V на $r(x)$. Множеството $V \cap A$ е отворено во A и r е непрекинато, па следува дека $r^{-1}(V \cap A)$ е отворено во X и заради $r(x) \in V$ следува $x \in r^{-1}(A \cap V)$. Според тоа

$W = U \cap r^{-1}(A \cap V)$ е околина на x.

Ќе докажеме дека $W \cap A = \varnothing$.

Да претпоставиме спротивно, нека $z \in W \cap A$. Тогаш $z \in A$ и $z \in U \cap r^{-1}(A \cap V)$. Оттука следува дека $z \in U$ и $r(z) \in A \cap V$. Заради $z \in A$ следува $r(z) = z$.

Значи, $z \in U$, $z = r(z) \in A \cap V \subseteq V$, т.е. $z \in U \cap V$. Добивме контрадикција со $U \cap V = \varnothing$.

Од $W \cap A = \varnothing$ следува дека секоја точка $x \in X \setminus A$ е внатрешна, па $X \setminus A$ е отворено, т.е. A е затворено.

4.23. а) Ќе докажеме дека $X \setminus B$ е отворено. Нека $x \in X \setminus B$ е произволен и нека $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$. Заради $x \notin B$ следува дека $y_1 = f(x) \neq g(x) = y_2$, па од тоа што Y е T_2 следува дека постојат дисјунктни околина V_1 на y_1 и V_2 на y_2. Од непрекинатоста на f и g следува дека множествата $U_1 = f^{-1}(V_1)$ и $U_2 = g^{-1}(V_2)$ се отворени во X па и $U = U_1 \cap U_2$ е отворено. Уште и $x \in U_1$, $x \in U_2$, па и $x \in U$.

Нека $z \in U \cap B$. Тогаш $z \in f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(V_2)$, па $f(z) \in V_1$ и $g(z) \in V_2$. Бидејќи $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ следува дека $f(z) \neq g(z)$, па $z \in X \setminus B$.

Значи, $x \in U \subseteq X \setminus B$, па $X \setminus B$ е отворено.

б) *I начин.* Да претпоставиме спротивно, нека постои $x \in X$ така што $f(x) \neq g(x)$. Заради тоа што Y е T_2 следува дека постојат дисјунктни околини $V_{f(x)}$ на $f(x)$ и $V_{g(x)}$ на $g(x)$. Од непрекинатоста на f и g следува дека постојат околини U_1 и U_2 на x така што $f(U_1) \subseteq V_{f(x)}$ и $g(U_2) \subseteq V_{g(x)}$. Множеството $U_1 \cap U_2$ е околина на x, па од тоа што A е густо во X следува дека постои $a \in A$ така што $a \in U_1 \cap U_2$. Тогаш важи $f(a) = g(a)$ и заради $a \in U_1$ следува $f(a) \in V_{f(x)}$, а од $a \in U_2$ следува дека $g(a) \in V_{g(x)}$. Но, $f(a) = g(a)$, па $f(a) \in V_{f(x)} \cap V_{g(x)}$. Контрадикција со дисјунктноста на $V_{f(x)}$ и $V_{g(x)}$.

<u>*II начин.*</u> Ќе докажеме дека множеството B од а) е густо во X. Нека $x \in X$ е произволен и нека U е произволна околина на x. Бидејќи A е густо следува дека постои $a \in A$ така што $a \in U$. Тогаш заради $a \in A$ важи $f(a) = g(a)$, па $a \in B$. Значи во секоја околина на x има точка од B па B е густо.
Значи добивне дека $\bar{B} = X$. Од а) следува дека $\bar{B} = B$, па $B = X$. Следува $f(x) = g(x)$ за секој $x \in X$.

4.24. Еден таков пример е 4.17. в).
Ќе наведеме уште еден.
Нека $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ е тополошки простор, каде $\mathcal{T}$ е топологијата со база
$$\mathcal{B} = \left\{ \{x\} \cup \left(\mathbb{Q} \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \right) \middle| x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \right\}.$$
Лесно се проверува е дека $\mathcal{B}$ ги исполнува условите за база.
Притоа, во секоја базна околина има точка од $\mathbb{Q}$, па $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ е сепарабилен.
Нека Y е потпросторот кој се состои од ирационалните броеви.
Ќе докажеме дека индуцираната топологија на Y е дискретната.
За секој $y \in Y$ важи $\{y\} = Y \cap \left(\mathbb{Q} \cap (y - 1, y + 1) \right)$, и множеството $\mathbb{Q} \cap (y - 1, y + 1)$ е отворено во $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Следува дека $\{y\}$ е отворено во Y, па Y е дискретен. Бидејќи Y не е преброив следува дека не е сепарабилен.

5. НИЗИ ВО ТОПОЛОШКИ ПРОСТОРИ

5.1. Нека A е бесконечно подмножество од X. тогаш постои преброиво подмножество $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (кое се состои од различни елементи) од A. Значи, (a_n) е низа во X (а и во A) па таа има конвергентна подниза (a_{n_k}). Нека таа конвергира кон a.

Ќе докажеме дека a е точка на акумулација за A. Нека U е произволна околина на a. Постои $k_0 \in \mathbb{N}$ така што $a_{n_k} \in U$ за секој $k \geq k_0$. Значи секоја околина на a содржи точка од A различна од a, па a е точка на акумулација за A.

5.2. Нека X е 1-преброив и нека U е отворено подмножество од X. Да претпоставиме дека постои низа (a_n) од $X \setminus U$ која конвергира кон $p \in U$. Тогаш во секоја околина на p има точка од $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, т.е. од $X \setminus U$. Но, од отвореноста на U и $p \in U$ следува дека постои околина V на p така што $V \subseteq U$, па добиваме контрадикција.

Обратно, нека X е 1-преброив. Да претпоставиме дека U не е отворено. Тогаш постои $p \in U$ така што во секоја околина на p има точка од $X \setminus U$. Бидејќи X е 1-преброив следува дека X има локална преброива база $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Следува дека $B_n \cap (X \setminus U) \neq \varnothing$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Да избереме по едно $a_n \in B_n \cap (X \setminus U)$. Тогаш низата (a_n) конвергира кон p и се состои од точки од $X \setminus U$. Со тоа тврдењето е докажано.

5.3. Нека (x_n) конвергира кон x. Во околината $T\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$ постои x_n, за секој $n \in \mathbb{N}$. Значи $d(x, x_n) < \dfrac{1}{n}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Обратно, нека $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$, $\varepsilon > 0$ е произволно и $T(x, \varepsilon)$ е произволна околина на x. Заради $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$ следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $d(x,x_n) < \varepsilon$, за секој $n \geq n_0$, т.е. $x_n \in T(x,\varepsilon)$, за секој $n \geq n_0$, па (x_n) конвергира кон x.

5.4. а)$\Rightarrow$б) Нека $T(a,\varepsilon)$ е произволна околина на a. Заради $a_n \to a$, кога $n \to \infty$, следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geq n_0$ важи $d(a,a_n) < \varepsilon$, т.е. $a_n \in T(a,\varepsilon)$. Значи во секоја околина на a има точка од A, па следува дека $a \in \overline{A}$.
б)$\Rightarrow$а) Нека $a \in \overline{A}$, и нека $n \in \mathbb{N}$ е произволен природен број. Заради $a \in \overline{A}$ следува дека во околината $T\left(a,\frac{1}{n}\right)$ постои $a_n \in A$. Значи, за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $a_n \in A$ така што $d(a,a_n) < \frac{1}{n}$, па $\lim\limits_{n\to\infty} d(a,a_n) = 0$. Тврдењето следува од претходната задача.

5.5. Нека f е рамномерно непрекинато и нека (x_n) и (y_n) се произволни низи од X за кои важи $d_1(x_n,y_n) \to 0$ кога $n \to \infty$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Од рамномерната непрекинатост на f следува дека постои $\delta > 0$ така што $d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$, за секои $x,y \in X$.

Заради $d_1(x_n,y_n) \to 0$ следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секој $n \geq n_0$ важи $d_1(x_n,y_n) < \delta$.

Нека $n \geq n_0$. Тогаш $d_1(x_n,y_n) < \delta$, па следува дека $d_2(f(x_n),f(y_n)) < \varepsilon$, т.е. дека $d_2(f(x_n),f(y_n)) \to 0$, кога $n \to \infty$.
Обратно, нека за секои низи (x_n) и (y_n) од X важи

од $d_1(x_n,y_n) \to 0$ следува $d_2(f(x_n),f(y_n)) \to 0$, кога $n \to \infty$.
Нека $\varepsilon > 0$ е произволно.
Да претпоставиме спротивно, дека f не е рамномерно непрекинато. Тогаш постои $\varepsilon > 0$ така што за секој $\delta > 0$ постојат $x,y \in X$ така што $d_1(x,y) < \delta$, но $d_2(f(x),f(y)) \geq \varepsilon$. Според тоа и за секој $n \in \mathbb{N}$ постојат $x_n, y_n \in X$ така што $d_1(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$ но

$d_2\left(f\left(x_n\right), f\left(y_n\right)\right) \geq \varepsilon$ (во улога на δ се зема $\frac{1}{n}$). Од $d_1\left(x_n, y_n\right) < \frac{1}{n}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, следува дека $d_1\left(x_n, y_n\right) \to 0$, а од $d_2\left(f\left(x_n\right), f\left(y_n\right)\right) \geq \varepsilon$, за секој $n \in \mathbb{N}$, следува дека $d_2\left(f\left(x_n\right), f\left(y_n\right)\right) \not\to 0$. Добивме контрадикција, па f е рамномерно непрекинато.

5.6. а) Нека $x_0 \in X$ е произволен. Ќе докажеме дека f е непрекинато во x_0. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно.

Од рамномерната непрекинатост следува дека постои $\delta > 0$ така што ако $d_1\left(x, y\right) < \delta$ следува дека $d_2\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) < \varepsilon$.

Нека $x \in X$ е таков што $d_1\left(x_0, x\right) < \delta$. Тогаш $d_2\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) < \varepsilon$, па следува непрекинатост на f.

б) Не. На пример пресликувањето $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирано со $f\left(x\right) = x^2$ е непрекинато, но не е рамномерно непрекинато. Навистина, ако $x_n = n$ и $y_n = n + \frac{1}{n}$ се две низи, за нив важи $| x_n - y_n |= \frac{1}{n} \to 0$ но $\left|f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right)\right| = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| \to 2$.

5.7. Заради $\left|f_i\left(x\right)\right| \leq M_i$ следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_i\left(x\right)$ конвергира, за секој $x \in X$, па со $f\left(x\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_i\left(x\right)$ е дефинирано пресликување $f : X \to \mathbb{R}$. Останува да докажеме дека f е непрекинато.

Нека $s_n\left(x\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\left(x\right)$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Од конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што за $n \geq n_0$ важи $\left|\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} M_k\right| < \varepsilon$. Сега за секој $x \in X$ и $n \geq n_0$ имаме

$$\left|s_n(x)-s_{n_0}(x)\right|=\left|f_{n_0+1}(x)+\ldots+f_n(x)\right|\le\left|f_{n_0+1}(x)\right|+\ldots+\left|f_n(x)\right|\le$$
$$\le M_{n_0+1}+\ldots+M_n<\varepsilon$$

што значи дека низата од пресликувања (s_n) конвергира рамномерно кон f на X.

Значи постои $n_1\in\mathbb{N}$ таков што за секој $x\in X$ и за секој $n\ge n_1$ важи $\left|f(x)-s_n(x)\right|=\left|\sum\limits_{k=n_1+1}^{\infty}f_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Пресликувањето s_n е непрекинато за секој $n\in\mathbb{N}$, па за $\frac{\varepsilon}{3}>0$ постои $\delta>0$ така што $d(x_0,x)<\delta\Rightarrow\left|s_n(x)-s_n(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Сега нека $x\in T(\delta,x_0)$. Тогаш имаме

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\left|f(x)-s_{n_1}(x)+s_{n_1}(x)-s_{n_1}(x_0)+s_{n_1}(x_0)-f(x_0)\right|\le$$
$$\le\left|f(x)-s_{n_1}(x)\right|+\left|s_{n_1}(x)-s_{n_1}(x_0)\right|+\left|s_{n_1}(x_0)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Според тоа f е непрекинато во x_0.

5.8. Нека (x_n) и (y_n) се две произволни низи во X такви што $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$.

Да претпоставиме спротивно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f(x_n)-f(y_n)\right|>0$.

Значи, постои $\varepsilon>0$ и поднизи (x_{n_k}) и (y_{n_k}) од (x_n) и (y_n), соодветно, такви што $\left|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\right|\ge 3\varepsilon$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Низата (f_n) конвергира рамномерно кон f, па постои $i_0\in\mathbb{N}$ така што за секој $i\ge i_0$ важи $\left|f_i(x_{n_k})-f_i(x_{n_k})\right|<\varepsilon$ и $\left|f_i(y_{n_k})-f_i(y_{n_k})\right|<\varepsilon$.

Пресликувањето f_i е рамномерно непрекинато на X па за $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ така што $d(x,y)<\delta\Rightarrow\left|f_i(x)-f_i(y)\right|<\varepsilon$. Заради $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}d(x_{n_k},y_{n_k})=0$ постои $k_0\in\mathbb{N}$ така што за $k\ge k_0$ важи $d(x_{n_k},y_{n_k})<\delta$, па од рамномерната непрекинатост на f_i следува $\left|f_i(x_{n_k})-f_i(y_{n_k})\right|<\varepsilon$.

Сега, за $i \geq i_0$ и $k \geq k_0$ имаме

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(x_{n_k}\right)-f\left(y_{n_k}\right)\right| = \\
&= \left|f\left(x_{n_k}\right)-f_i\left(y_{n_k}\right)+f_i\left(y_{n_k}\right)-f_i\left(x_{n_k}\right)+f_i\left(x_{n_k}\right)-f\left(y_{n_k}\right)\right| \leq \\
&\leq \left|f\left(x_{n_k}\right)-f_i\left(x_{n_k}\right)\right|+\left|f_i\left(x_{n_k}\right)-f_i\left(y_{n_k}\right)\right|+\left|f\left(y_{n_k}\right)-f_i\left(y_{n_k}\right)\right| < \\
&< \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Со тоа добивме контрадикција, па f е рамномерно непрекинато на X.

5.9. Да означиме

$$T^{d_1}(x,\varepsilon) = \left\{y \middle| d_1(x,y) < \varepsilon\right\} \text{ и } T^{d_2}(x,\varepsilon) = \left\{y \middle| d_2(x,y) < \varepsilon\right\}.$$

Нека d_1 и d_2 се еквивалентни и нека $\lim\limits_{n\to\infty} d_1\left(x,x_n\right) = 0$. Значи $\left(x_n\right)$ конвергира кон x во d_1. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и $T^{d_2}(x,\varepsilon)$ е околина на x во d_2. Заради еквивалентноста на метриките следува дека постои $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ така што $T^{d_1}\left(x,\varepsilon_1\right) \subseteq T^{d_2}(x,\varepsilon)$. Од $\lim\limits_{n\to\infty} d_1\left(x,x_n\right) = 0$ следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за $n \geq n_0$ важи $d_1\left(x,x_n\right) < \varepsilon_1$. Но тогаш $d_1\left(x,x_n\right) < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$, па $\lim\limits_{n\to\infty} d_2\left(x,x_n\right) = 0$. Слично се докажува и $\lim\limits_{n\to\infty} d_2\left(x,x_n\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d_1\left(x,x_n\right) = 0$.

Обратно, нека за секој $x \in X$ и секоја низа $\left(x_n\right)$ важи

$$\lim_{n\to\infty} d_2\left(x,x_n\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_1\left(x,x_n\right) = 0,$$

и нека $T^{d_1}(x,\varepsilon)$ е произволна околина на x во d_1. За секој $y \in T^{d_2}\left(x,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ постои низа $\left(y_n\right)$ од $T^{d_2}(x,\varepsilon)$ која конвергира кон y во d_2. Но тогаш низата $\left(y_n\right)$ конвергира кон y и во d_1, па $y \in \overline{T^{d_1}\left(x,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)} \subseteq T^{d_1}(x,\varepsilon)$. Слично се докажува и обратното.

5.10. Нека $d_1(x,y) = \min\left\{1, d(x,y)\right\}$, за сите $x,y \in X$.

Ќе докажеме дека d_1 е метрика на X.

1) Нека $x = y$. Тогаш $d_1(x,y) = \min\left\{1, d(x,y)\right\} = \min\{1,0\} = 0$. Обратно, ако

$0 = d_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$, тогаш мора $d(x,y) = 0$. Бидејќи d е метрика следува дека $x = y$.

2) Равенството $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ важи заради $d(x,y) = d(y,x)$

3) Нека x, y и z се произволни елементи на X и нека $a = d(x,y)$, $b = d(y,z)$ и $c = d(x,z)$. Секој од броевите $2, 1+a, 1+b$ не е помал од 1 и $a+b \geq c$ добиваме

$\min\{2, 1+a, 1+b, a+b\} \geq \min\{1, c\}$. Затоа

$$d_1(x,y) + d_1(y,z) = \min\{1,a\} + \min\{1,b\} =$$
$$= \min\{2, 1+a, 1+b, a+b\} \geq \min\{1,c\} = d_1(x,z).$$

Според тоа d_1 е метрика. Јасно е дека d_1 е ограничена со 1.

Ќе докажеме дека d и d_1 се еквивалентни.

Нека $x \in X$, (x_n) е произволна низа од X и $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за $n \geq n_0$ важи $d(x, x_n) < \varepsilon$.

Тогаш $d_1(x, x_n) = \min\{1, d(x, x_n)\} \leq d(x, x_n) < \varepsilon$, па следува $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x, x_n) = 0$.

Обратно, нека $\lim\limits_{n\to\infty} \min\{1, d(x, x_n)\} = 0$. Тогаш, почнувајќи од некој $n_0 \in \mathbb{N}$ важи $\min\{1, d(x, x_n)\} < 1$, т.е.

$$\min\{1, d(x, x_n)\} = d(x, x_n).$$

Веднаш следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$. Сега, тврдењето дека метриките се еквивалентни следува од претходната задача.

Забелешка. И метриката $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ е еквивалентна со d и е ограничена со 1.

6. ПРОИЗВОД НА ТОПОЛОШКИ ПРОСТОРИ

6.1. Нека p_i е $i-$тата проекција, за секој $i \in \{1,...,n\}$. Ако U_i е отворено во X_i, тогаш

$p_i^{-1}(U_i) = X_1 \times ... \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times ... \times X_n$.

Значи фамилијата

$$\mathcal{P} = \left\{ p_i^{-1}(U_i) \middle| U_i \text{ е отворено во } X_i, i = 1,...,n \right\} =$$
$$= \left\{ X_1 \times ... \times X_{i-1} \times U_i \times X_{i+1} \times ... \times X_n \middle| U_i \text{ е отворено во } X_i, i = 1,...,n \right\}$$

е подбаза за производ топологијата $\mathcal{T}$ на $X_1 \times ... \times X_n$, т.е. нејзината база е

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(U_i) \middle| U_i \text{ е отворено во } X_i \right\} = \left\{ U_1 \times ... \times U_n \middle| U_i \text{ е отворено во } X_i \right\}$$

Нека $\mathcal{B}$ е базата на $\mathcal{T}$, а $\mathcal{B}'$ нека индуцира топологија $\mathcal{T}_1$.

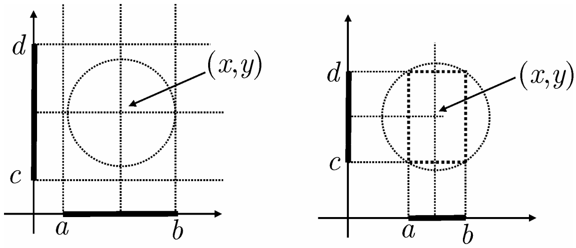
Нека $B_1 \times ... \times B_n \in \mathcal{B}'$. Тогаш B_i е отворено во $\mathcal{B}_i$ за секој $i \in \{1,...,n\}$ и $B_1 \times ... \times B_n = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}$. Значи, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$

Обратно, нека

$$V_1 \times ... \times V_n = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(V_i) \in \mathcal{B}$$

и нека $(x_1,...,x_n) \in V_1 \times ... \times V_n$. Тогаш $x_i \in X_i$ и $\mathcal{B}_i$ е база на X_i, па постои така што $x_i \in B_i \in V_i$, за секој $i \in \{1,...,n\}$. Значи $(x_1,...,x_n) \in B_1 \times ... \times B_n \subseteq V_1 \times ... \times V_n$. Следува $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$.

6.2. Од задача 6.1 следува дека базата на производ топологијата на $\mathbb{R}^2$ е $\mathcal{B} = \{(a,b) \times (c,d) | a,b,c,d \in \mathbb{R}; a < b, c < d\}$, а базата на топологијата индуцирана од стандардната метрика е $\mathcal{B}_1 = \{T((x,y),r) | r > 0; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Сега тврдењето следува од тоа што во секој правоаголник со центар (пресек на дијагоналите) во (x,y)може да се впише отворен круг со центар во (x,y), и обратно (црт. 1).



црт. 1

6.3. а) Нека $(x,y) \in \bar{A} \times \bar{B}$ и нека W е произволна околина на (x,y). Постојат базни околини $U \subseteq X$ на x и $V \subseteq Y$ на y така што $(x,y) \subseteq U \times V \subseteq W$. Бидејќи $x \in \bar{A}$ и $y \in \bar{B}$ следува дека $U \cap A \neq \varnothing$ и $V \cap B \neq \varnothing$. Нека $a \in U \cap A$ и $b \in V \cap B$. Тогаш $(a,b) \in (U \times V) \cap (A \times B) \subseteq W \cap (A \times B)$. Докажавме дека во секоја околина на (x,y) иама точка од $A \times B$, па следува дека $\bar{A} \times \bar{B} \subseteq \overline{A \times B}$.

Обратно, нека $(x,y) \in \overline{A \times B}$ и нека $U \subseteq X$ е произволна околина на x а $V \subseteq Y$ е произволна околина на y. Тогаш $U \times V$ е околина на (x,y) во $X \times Y$. Заради $(x,y) \in \overline{A \times B}$ следува дека постои $(a,b) \in (A \times B) \cap (U \times V)$. Значи, $a \in A \cap U$ и $b \in B \cap V$, т.е. $A \cap U \neq \varnothing$ и $B \cap V \neq \varnothing$, па $(x,y) \in \bar{A} \times \bar{B}$.

б) Множествата $\operatorname{int} A$ и $\operatorname{int} B$ се отворени во X и Y, соодветно, па множеството $\operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$ е отворено во $X \times Y$. Исто така важи $\operatorname{int} A \times \operatorname{int} B \subseteq A \times B$. Но, $\operatorname{int}(A \times B)$ е најголемото отворено множество што се содржи во $A \times B$, па следува дека $\operatorname{int} A \times \operatorname{int} B \subseteq \operatorname{int}(A \times B)$.

Обратно, нека $(x,y) \in \operatorname{int}(A \times B)$. Значи, постои отворено множество $W \subseteq X \times Y$ така што $(x,y) \in W \subseteq A \times B$. Постојат базни околини $U \subseteq X$ на x и $V \subseteq Y$ на y така што $(x,y) \in U \times V \subseteq W \subseteq A \times B$. Од $U \times V \subseteq A \times B$ следува дека $U \subseteq A$ и $V \subseteq B$. Значи $x \in \operatorname{int} A$ и $y \in \operatorname{int} B$, па $(x,y) \in \operatorname{int} A \times \operatorname{int} B$.

6.4. а) Нека (x,y) е произволна точка од $X\times Y$. Просторите X и Y се 1-преброиви, следува дека постојат преброиви локални бази $\{U_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ во x и $\{V_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ во y. Ќе докажеме дека фамилијата $\{U_n\times V_m \mid n,m\in\mathbb{N}\}$ е локална база во (x,y). Нека W е произволна околина на (x,y). Постојат отворени множества U во X и V во Y така што $(x,y)\in U\times V\subseteq W$. Бидејќи $\{U_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ е локална база во x следува дека постои $n_0\in\mathbb{N}$ така што $x\in U_{n_0}\subseteq U$. Слично, постои $n_1\in\mathbb{N}$ така што $y\in V_{n_1}\subseteq V$. Сега имаме

$$(x,y)\in U_{n_0}\times V_{n_1}\subseteq U\times V\subseteq W.$$

Следува дека $\{U_n\times V_m \mid n,m\in\mathbb{N}\}$ е локална база во (x,y). Јасно е дека $\{U_n\times V_m \mid n,m\in\mathbb{N}\}$ е преброива, па следува дека $X\times Y$ е 1-преброив.

б) Нека $\{U_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ е преброива база на X а $\{V_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ е преброива база на Y. Слично како а) се докажува дека $\{U_n\times V_m \mid n,m\in\mathbb{N}\}$ е преброива база за $X\times Y$.

в) Нека $A\subseteq X$ и $B\subseteq Y$ се пребоиви множества така што $\bar{A}=X$ и $\bar{B}=Y$. Од задача 6.3. а) следува дека $\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}=X\times Y$. Множеството $A\times B$ е преброиво, па $X\times Y$ е сепарабилен.

6.5. Нека $\{X_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ е фамилија од хаусдорфови простори, $X=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ и нека $a=(a_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ и $b=(b_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ се две различни точки од X. Тогаш постои $\lambda_0\in\Lambda$ така што $a_{\lambda_0}\neq b_{\lambda_0}$. Притоа $a_{\lambda_0},a_{\lambda_0}\in X_{\lambda_0}$, па од тоа што X_{λ_0} е хаусдорфов следува дека постојат дисјунктни околини U на a_{λ_0} и V на b_{λ_0}. Сега множествата $p_{\lambda_0}^{-1}(U)$ и $p_{\lambda_0}^{-1}(V)$ се дисјунктни и $a\in p_{\lambda_0}^{-1}(U)$, $b\in p_{\lambda_0}^{-1}(V)$. Притоа $p_{\lambda_0}:X\to X_{\lambda_0}$ е λ_0-проекција. Следува дека X е хаусдорфов.

6.6. Нека $\{X_a \mid a\in A\}$ е фамилија дискретни простори и нека $X=\prod\limits_{a\in A}X_a$. Базата на X се состои од сите множества од облик $\prod\limits_{a\in A}U_a$, каде U_a се отворени во X_a за конечно многу $a_1,\dots,a_n \in A$ и $U_a = X_a$ за $a \in A \setminus \{a_1,\dots,a_n\}$.

Прво, нека A е бесконечно и сите X_a нека имаат барем по два елементи. Тогаш едноелементното множество $\{(x_a \mid a \in A)\}$ не може да е отворено, затоа што секој базен елемент ќе содржи и друга точка од производот ($U_a = X_a$ за бесконечно индекси $a \in A$).

Ако сите освен конечно многу $X_{a_1},\dots,X_{a_n}$ се едноелементни, тогаш X е дискретен. Тогаш базна околина на $(x_a \mid a \in A)$ ќе биде $\prod_{a\in A} U_a$ каде $U_a = \{x_a\}$ за $a \in \{a_1,\dots,a_n\}$ и $U_a = X_a = \{x_a\}$ за $a \in A \setminus \{a_1,\dots,a_n\}$. Значи, $\prod_{a\in A} U_a = \{(x_a \mid a \in A)\}$, па во овој случај X е дискретен.

6.7. Нека X е хаусдорфов. Ќе докажеме дека $(X \times X) \setminus \Delta$ е отворено. Нека $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Значи $x \neq y$, па од тоа што X е хаусдорфов следува дека постојат дисјунктни околини U на x и V на Y. Останува да се докаже дека $U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека постои $(u,v) \in (U \times V) \cap \Delta$. Значи, $u \in U$, $v \in V$ и $(u,v) \in \Delta$, што значи $u = v$. Тогаш следува дека $u \in U \cap V$ што не е можнио заради дисјунктноста на U и V. Значи, $U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$, па $(X \times X) \setminus \Delta$ е отворено, т.е. Δ е затворено.
Обратно, нека Δ е затворено во $X \times Y$ и нека x и y се две различни точки од X. Тогаш $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, па од отвореноста на $(X \times X) \setminus \Delta$ следува дека постои отворено множество W во $X \times X$ така што $(x,y) \in W \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$. Постојат отворени множества (базни елементи) U и V во X така што $(x,y) \in U \times V \subseteq W \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$.
Ќе докажеме дека $U \cap V = \varnothing$. Да претпоставиме спротивно, дека постои $a \in U \cap V$. Тогаш $(a,a) \in U \times V$ и $(a,a) \in \Delta$. Но, тоа не е можно заради тоа што $(U \times V) \cap \Delta = \varnothing$. Значи X е хаусдорфов.

6.8. Прво да докажеме дека F е добро дефинирано. Нека $(x_a | a \in A) = (y_a | a \in A)$. Тогаш $x_a = y_a$ за секој $a \in A$. Бидејќи f_a е пресликување следува дека $f_a(x_a) = f_a(y_a)$, за секој $a \in A$, па $(f_a(x_a) | a \in A) = (f_a(y_a) | a \in A)$, т.е.

$$F(x_a | a \in A) = F(y_a | a \in A).$$

Условот $F : \prod_{a \in A} X_a \to \prod_{a \in A} Y_a$ да е непрекинато е еквивалентен со условот $p_a F : \prod_{a \in A} X_a \to Y_a$ да е непрекинато за секој $a \in A$, каде p_a е проекцијата од $\prod_{a \in A} Y_a$ на Y_a. Останува да се докаже дека $p_a F$ е непрекинато за секој $a \in A$. Нека U е отворено во Y_a. Тогаш

$$\begin{aligned} &(p_a F)^{-1}(U) = F^{-1}(p_a^{-1}(U)) = \\ &= F^{-1}\left(\prod \{V_b | V_b = Y_b, b \neq a, V_a = U\}\right) = \\ &= \prod \{W_b | W_b = X_b, b \neq a, W_a = f_a^{-1}(U)\} \end{aligned}$$

е отворено заради отвореноста на $f_a^{-1}(U)$.

Пресликувањето F се нарекува **производ на пресликувањата** $\{f_a | a \in A\}$.

6.9. Заради задачата од глава 3 можеме да претпоставиме дека d_i е метрика ограничена со 1. За секои $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ од производот $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ на тополошките простори $X_1, X_2, \ldots$ да ставиме $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$. Заради ограниченоста со 1 на сите метрики d_n следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$ е конвергентен, за секои $x, y \in X$. Сега, лесно се проверува дека d е метрика на X и дека сумата на редот не е поголема од 1.

Ќе докажеме дека топологијата на $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ се совпаѓа со топологијата индуцирана од метриката определена претходно.

Нека $n \in \mathbb{N}$ е произволен. Ќе докажеме дека проекцијата $p_n : X \to X_n$ е непрекинато пресликување во топологијата индуцирана од метриката d. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен и нека $x, y \in X$ каде $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...)$. Ако $d(x, y) < \frac{1}{2^n}\varepsilon$, тогаш

$$d_n(p_n(x), p_n(y)) = d_n(x_n, y_n) = 2^n\left(\frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)\right) \leq$$

$$\leq 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_k(x_k, y_k) = 2^n d(x, y) < 2^n \frac{1}{2^n}\varepsilon = \varepsilon$$

па p_n е непрекинато.

Според тоа сите проекции се непрекинати во топологијата индуцирана од метриката d. Но топологијата на производот е најгрубата топологија при која сите проекции се непрекинати, па топлогијата индуцирана од метриката d е поситна од топологијата на производот.

Ќе докажеме дека важи и обратното, т.е. дека секое отворено множество U во топологијата индуцирана од метриката е отворено и во топологијата на производот.

Нека $x = (x_1, x_2, ...)$ е произволен елемент од U. Постои $r > 0$ така што $B_r(x) \subseteq U$. Бидејќи p_i е непрекината во топологијата на производот следува дека за секое отворено множество B во X_i множеството $p_i^{-1}(B)$ е отворено. Затоа за да се заврши доказот доволно е да се најдат отворени множества $B_1, ..., B_k$ во $X_1, ..., X_k$, соодветно, такви што $x \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(B_i) \subseteq B_r(x) \subseteq U$.

Од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ следува дека постои $k \in \mathbb{N}$ така што $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k} < \frac{r}{2}$. За секој $i \in \{1, 2, ..., k\}$ да ставиме

$B_i = B_{\frac{r}{2}}(x_i)$.

Нека $y = (y_1, y_2, ...) \in \bigcap_{i=1}^{k} p_i^{-1}(B_i)$ е произволен. Тогаш $y_i = p_i(y) \in B_i$, за секој $i \leq k$, па важи $d_i(x_i, y_i) < \frac{r}{2}$. Сега, имаме

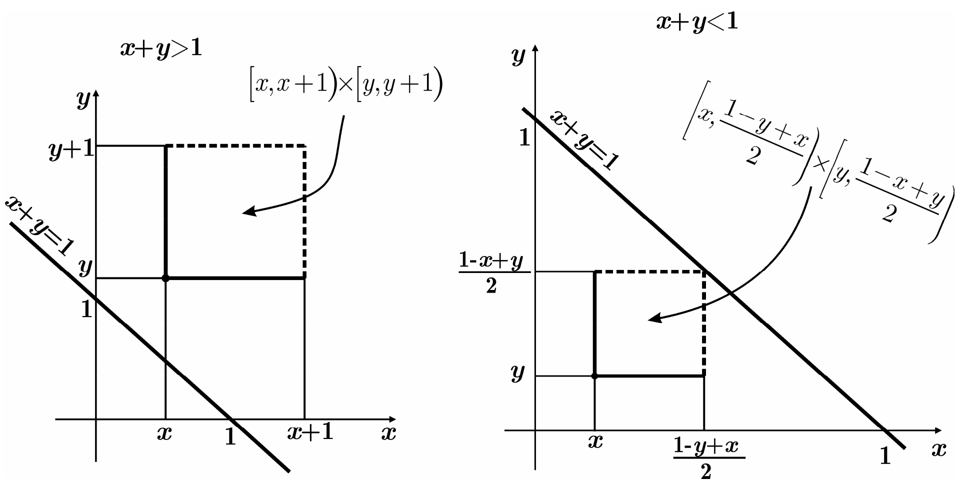
$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}d_i(x_i,y_i)+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}d_i(x_i,y_i)<$$

$$<\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}+\frac{r}{2}=\frac{r}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\right)+1\right)<\frac{r}{2}(1+1)=r\,.$$

Значи $x\in\bigcap_{i=1}^{k}p_i^{-1}(B_i)\subseteq B_r(x)\subseteq U$, па тврдењето е докажано.

Забелешка. Куб (хилбертов) се нарекува множеството $I^{\aleph_0}=\prod_{i=1}^{\infty}I_i$, каде $I_i=I$, за секој $i\in\mathbb{N}$. Од претходното следува дека Кубот е метризабилен простор.

6.10. а) Нека $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus A$. Значи, $y\neq 1-x$. Ако $y>1-x$, тогаш множеството $[x,x+1)\times[y,y+1)$ е околина на (x,y) во производот која има празен пресек со A (навистина, ако



$$(a,b)\in[x,x+1)\times[y,y+1),$$

тогаш заради $x\le a<x+1$ и $y\le b<y+1$

добиваме $b>y>1-x\ge 1-a$, па $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus A$).

Ако, пак, $y<1-x$, тогаш (цртеж)

$\left(\left[x, \frac{1-y+x}{2}\right) \times \left[y, \frac{1-x+y}{2}\right)\right) \cap A = \varnothing$. (Зошто?)

Значи $\mathbb{R}^2 \setminus A$ е отворено, па A е затворено.

б) За секој $(x, 1-x) \in A$ множеството $[x, x+1) \times [1-x, 1-x+1)$ е отворено во $\mathbb{R}^2$ и $\{(x, 1-x)\} = A \cap ([x, x+1) \times [1-x, 1-x+1))$. Според тоа, секое едноелементно помножество од A е отворено, па A е дискретен.

в) Ако претпоставиме дека $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ има преброива база, тогаш мнпжеството A од а) е затворено, па и тоа има преброива база на индуцираната топологија. Но, A е дискретен простор, и непреброиво множество, па неговата база се состои од сите едноелементни подмножества и е непреброива. Добивме контрадикција, па $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ нема преброива база.

г) Нека A и B се дисјунктни затворени множества во $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Од отвореноста на $\mathbb{R} \setminus B$ следува дека за секој $a \in A$ постои $x_a \in \mathbb{R}$ така што $a \in [a, x_a) \subseteq \mathbb{R} \setminus B$. Тогаш $U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$ е околина на A. Постапувајќи на сличен начин добиваме $V = \bigcup_{b \in B} [b, y_b)$ околина на B.

Да претпоставиме дека $U \cap V \neq \varnothing$. Тогаш постојат x_a и y_b така што $[a, x_a) \cap [b, y_b) \neq \varnothing$. Бе губење од општоста може да претпоставиме дека $a < b$ (не може да се случи $a = b$ заради дисјунктноста на A и B). Од $[a, x_a) \cap [b, y_b) \neq \varnothing$ следува дека $b \in [b, y_b)$, што не е можно заради $[b, y_b) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$.

Следува дека $U \cap V = \varnothing$, па просторот е нормален.

д) Множеството $A = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ е затворено и наследената топологија од производот му е дискретна (се докажува слично како а) и б)). Оттука следува дека множествата $F = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Q}\}$ и $G = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ се затворени во $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ (F е затворено во A па постои затворено множество F_1 во $\mathbb{R}^2$ така што $F = F_1 \cap A$, па тврдењето следува од затвореноста на A во $\mathbb{R}^2$) и дисјунктни.

Нека $(a,-a)\in F$ е произволен и нека U е произволна околина на $(a,-a)$ во $\mathbb{R}^2$. Постојат $c,d\in\mathbb{R}$ така што $(a,-a)\in[a,c)\times[-a,d)\subseteq U$. Постои ирационален број s така што $s\in[a,c)$ и $-s\in[-a,d)$, па $(s,-s)\in[a,c)\times[-a,d)\subseteq U$. Значи, $(s,-s)\in U\cap G$. Добивме дека секоја околина на $(a,-a)$ содржи точка од G, па и секоја околина на F содржи точка од G. Следува дека $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ не е нормален.

6.11. Да го разгледаме пресликувањето $f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to S^1\times\mathbb{R}$ дефинирано со $f(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Јасно е дека е добро дефинирано и непрекинато. Проверката дека е хомеоморфизам ја оставаме на читателот.

6.12. Нека $d:X\to X^A$ е дефинирано со $d(x)=\prod_{a\in A}\{x\}$.

Нека U_a^* е елемент од подбазата на X^A. Тогаш постои U_a отворено во X така што

$$U_a^*=\prod\{X_j\,|\,j\in A, X_a=U_a, X_j=X, j\neq a\}.$$

Тогаш $d^{-1}(U_a^*)=U_a$ е отворено во X, па d е непрекинато.

Тогаш и пресликувањето $\delta:X\to\Delta(X)$ дефинирано со $\delta(x)=d(x)$ е непрекинато. Јасно е дека δ е биекција.

Ќе докажеме дека δ е отворено, од што ќе следува дека δ е хомеоморфизам.

Нека U епроизволно товорено множество во X и нека $a\in A$ е избран индекс.

Множеството $U^*=\prod\{X_j\,|\,j\in A, X_a=U_a, X_j=X, j\neq a\}$ е елемент од подбазата на X^A и $\delta(U)=U^*\cap\Delta(X)$, па е отворено во $\Delta(X)$. Следува дека δ е отворено пресликување.

6.13. Пресликувањето $r=\delta p_a:X^A\to\Delta(X)$, за избран $a\in A$ е непрекинато и идентично на $\Delta(A)$, па е ретракција.

6.14. а) Нека $g : G_f \to X$ е дфинирано со $g(x, f(x)) = x$. Јасно е дека g е добро дефинирано и е биекција. Заради $g(x, f(x)) = p_x |_{G_f} (x, f(x))$, каде p_x е проекција на X, следува дека g е рестрикција на непрекинато пресликување, па и g е непрекинато. Инверзното пресликување на g е дефинирано со $g^{-1}(x) = (x, f(x))$. Пресликувањата $p_x g^{-1}(x) = x$ и $p_y g^{-1}(x) = f(x)$ се непрекинати, па следува и непрекинатост на g^{-1}. Според тоа g е хомеоморфизам.

Забелешка. Заклучокот за непрекинатост на g^{-1} може да се изведе и од тоа што g^{-1} е композиција на непрекинатите пресликувања $1_X \times f$ (производ на пресликувања) и d, каде $d : X \to X \times X$ е пресликувањето дефинирано со $d(x) = (x, x)$, кое е и хомеоморфизам од X на $\Delta(X)$.

б) <u>*I начин*</u>. Ќе докажеме дека $(X \times Y) \setminus G_f$ е отворено. Нека $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G_f$. Значи $y \neq f(x)$, и бидејќи Y е T_2 следува дека постојат дисјунктни околини U_y на y и $U_{f(x)}$ на $f(x)$. бидејќи f е непрекинато, следува дека постои околина U_x на x така што $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$. Тогаш $U_x \times U_y$ е околина на (x, y) во $X \times Y$.

Да претпоставиме дека $(U_x \times U_y) \cap G_f \neq \varnothing$ и нека $(z, t) \in (U_x \times U_y) \cap G_f$. Од $(z, t) \in G_f$ следува дека $t = f(z)$, а од $(z, t) \in (U_x \times U_y)$ следува дека $z \in U_x$ и $t = f(z) \in U_y$. Заради $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ и $t = f(z)$ следува дека $t \in U_{f(x)}$, т.е. $t \in U_y \cap U_{f(x)}$. Добивме контрадикција со $U_y \cap U_{f(x)} = \varnothing$.

Значи секај точка од $(X \times Y) \setminus G_f$ е внатрешна, па $(X \times Y) \setminus G_f$ е отворено, т.е. G_f е затворено.

<u>*II начин.*</u> Бидејќи дијагоналата $\Delta(Y) = \{(y, y) | y \in Y\}$ е затворено во $Y \times Y$ (заради тоа што Y е T_2), пресликувањето $F = f \times 1_Y : X \times Y \to Y \times Y$ е непрекинато и

$$G_f = \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y, (f(x), y) \in \Delta(Y)\} =$$
$$= \{(x, y) | (x, y) \in X \times Y, F(x, y) \in \Delta(Y)\} = F^{-1}(\Delta(Y))$$

следува затвореност на G_f.

6.15. Нека X е произволен и $Y = \{a,b\}$ со индискретна топологија, а $f : X \to Y$ е дефинирано со $f(x) = a$ за секој $x \in X$. Тогаш $G_f = \{(x,a) | x \in X\}$ не е затворено во $X \times Y$, затоа што $(X \times Y) \setminus G_f = X \times \{b\}$ не е отворено.

6.16. За секој $n \in \mathbb{N}$ важи $[0,1] \cong \left[0,\frac{1}{n}\right]$, па нека $f_n : [0,1] \to \left[0,\frac{1}{n}\right]$. Тогаш бараниот хомеоморфизам меѓу X и Y е производот на пресликувањата $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$.

6.17. Да претпоставиме спротивно, дека $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ е преброива локална база во $\overline{0} = (0 | x \in \mathbb{R})$. Можеме да претпоставиме дека U_n е елемент на базата на производ топологијата на $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $U_n = \prod_{x\in\mathbb{R}} U_{n_x}$, каде $U_{n_x} = \mathbb{R}$ освен за конечно многу $x \in F_n$. Значи за $x \in F_n$ множеството U_{n_x} е вистинско подмножество од $\mathbb{R}$. Нека $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Бидејќи унијата е преброива а сите F_n се конечни, следува дека F е преброиво подмножество од $\mathbb{R}$.

Бидејќи $\mathbb{R}$ е непреброиво, следува дека постои $y \in \mathbb{R} \setminus F$.

Нека $U = \prod_{x\in\mathbb{R}} U_x$, каде $U_x = \mathbb{R}$ за $x \neq y$ и $U_y = (-1,1)$. Јасно е дека U е базна околина за $\overline{0}$. Бидејќи $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ е локална база во $\overline{0}$ следува дека постои $k \in \mathbb{N}$ така што $U_k \subseteq U$. Бидејќи $y \notin F$ следува дека $U_{k_y} = \mathbb{R}$. Нека $\overline{a} = (a_x | x \in \mathbb{R})$, каде $a_x = 0$ за $x \neq y$ и $a_y = 2$, припаѓа на U_k, а не припаѓа на U. Добивме контрадикција со $U_k \subseteq U$.

б) Ако е метризабилен тогаш мора да е и 1-преброив, што не е точно (од а)). Значи, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ не е метризабилен.

Овој пример покажува дека производ на метризабилни простори не мора да биде метризабилен.

6.18. а) Просторот е сепарабилен. Нека

$A = \left\{ \left(x_n \middle| n \in \mathbb{N} \right) \middle| x_n \in \mathbb{Q} \text{ и постои } k \in \mathbb{N} \text{ така што } x_n = 0 \text{ за } n > k \right\}.$

Множеството A има ист кардинален број со множеството од сите конечни подмножества од преброивото множество $\mathbb{Q}$, па селдува дека е преброиво.

Ќе докажеме дека A е густо во $\mathbb{R}^{\infty}$.

Нека U е произволен елемент од базата на $\mathbb{R}^{\infty}$. Тогаш $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$, каде U_n е отворен интервал во $\mathbb{R}$ за $n \in F$, F е конечно подмножество од $\mathbb{N}$ и $U_n = \mathbb{R}$ за $n \in \mathbb{N} \setminus F$. Во секој U_n, $n \in F$ има рационален број x_n. Нека $n_0 = \max F_n$. Тогаш $\left(y_n \middle| n \in \mathbb{N} \right) \in A \cap U$, каде $y_n = 0$ за $n \in \mathbb{N} \setminus F$ и $y_n = x_n$ за $n \in F$. Следува A е густо во $\mathbb{R}^{\infty}$.

б) Од задача 6.9 следува метризабилност. од метризабилноста и а) следува дека просторот е и 2-пеброив.

7. КОМПАКТНОСТ

7.1. Да ја разгледаме фамилијата $\left\{\left(-n,n\right)\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$. Јасно е дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи $x\in\left(-\left(\left[\,|\,x\,|\,\right]+1\right),\left[\,|\,x\,|\,\right]+1\right)$ (притоа $\left[x\right]$ е најмалиот цел број што не е поголем од x), па $\mathbb{R}\subseteq\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(-n,n\right)$, т.е. фамилијата $\left\{\left(-n,n\right)\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ е отворено покривач на $\mathbb{R}$. Да претпоставиме дека постои конечен потпокривач $\left\{\left(-n_1,n_1\right),\dots,\left(-n_k,n_k\right)\right\}$ на $\mathbb{R}$ од таа фамилија. Тогаш $\max\left\{n_1,\dots,n_k\right\}+1\notin\bigcup\limits_{i=1}^{k}\left(-n_i,n_i\right)$, па добивме контрадикција.
За $\mathbb{R}^2$ да ја разгледаме фамилијата $\left\{T\left(\left(0,0\right),n\right)\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$. Јасно е дека оваа фамилија е отворен покривач на $\mathbb{R}^2$. Но, ако претпоставиме дека постои конечен потпокривач $\left\{T\left(\left(0,0\right),n_1\right),\dots,T\left(\left(0,0\right),n_k\right)\right\}$, тогаш $\left(\max\left\{n_1,\dots,n_k\right\}+1,0\right)\notin\bigcup\limits_{i=1}^{k}T\left(\left(0,0\right),n_i\right)$, па добивме контрадикција.

7.2. Нека $\left\{U_\alpha\middle|\,\alpha\in A\right\}$ е отворен покривач на $E\cap F$. Множеството $X\setminus F$ е отворено, па $\left\{U_\alpha\middle|\,\alpha\in A\right\}\cup\left\{X\setminus F\right\}$ е отворен покривач на E. Од компактноста на E следува дека постои конечен потпокривач $\left\{X\setminus F,U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_k}\right\}$ на E. Бидејќи $\left(E\cap F\right)\cap\left(X\setminus F\right)=\varnothing$ следува дека $E\cap F\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}$. Значи, $\left\{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_k}\right\}$ е конечен потпокривач од $\left\{U_\alpha\middle|\,\alpha\in A\right\}$ за $E\cap F$, па $E\cap F$ е компактно.

7.3. Нека $\left(X,d\right)$ е компактен метрички простор. Фамилијата $\left\{T\left(x,1\right)\middle|\, x\in X\right\}$ е отворен покривач на X, па постои конечен потпокривач $\mathcal{B}_1=\left\{T\left(x_1,1\right),\dots,T\left(x_{n_1},1\right)\right\}$ на X. Слично, фамилијата

$\left\{T\left(x,\frac{1}{2}\right)\middle| x\in X\right\}$ е отворен покривач на X, па постои конечен потпокривач $\mathcal{B}_2=\left\{T\left(x_{n_1+1},\frac{1}{2}\right),...,T\left(x_{n_2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ на X. Продолжувајќи на ваков начин за секој $k\in\mathbb{N}$ добиваме конечен покривач $\mathcal{B}_k=\left\{T\left(x_{n_{k-1}+1},\frac{1}{k}\right),...,T\left(x_{n_k},\frac{1}{k}\right)\right\}$ на X. Нека $\mathcal{B}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_k$. Бидејќи е пребројва унија од конечни множества, следува дека $\mathcal{B}$ е пребројва фамилија.

Останува да се докаже дека $\mathcal{B}$ е база на X.

Нека $x\in X$ и нека U е произволна околина на x. Бидејќи $\left\{T\left(y,\varepsilon\right)\middle|\varepsilon>0, y\in X\right\}$ е база на X следува дека постои $\varepsilon>0$ така што $x\in T\left(x,\varepsilon\right)\subseteq U$. Натаму, постои $k\in\mathbb{N}$ така што $\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{3}$. Фамилијата $\mathcal{B}_k$ го покрива X па постои $T\left(y,\frac{1}{k}\right)$ така што $x\in T\left(y,\frac{1}{k}\right)$ (притоа $y\in\left\{x_{n_{k-1}+1},...,x_{n_k}\right\}$).

Ќе докажеме дека $T\left(y,\frac{1}{k}\right)\subseteq T\left(x,\varepsilon\right)$. Нека $z\in T\left(y,\frac{1}{k}\right)$. Тогаш $d\left(x,z\right)\le d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)<\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}<\frac{3}{k}<\varepsilon$, па $z\in T\left(x,\varepsilon\right)$.

Значи, добивме дека $x\in T\left(y,\frac{1}{k}\right)\subseteq T\left(x,\varepsilon\right)\subseteq U$, па $\mathcal{B}$ е база на X.

7.4. Нека $\left\{U_\alpha\middle|\alpha\in I\right\}$ е отворен покривач на $A_1\cup...\cup A_n$. Тогаш $\left\{U_\alpha\middle|\alpha\in I\right\}$ е оторвен покривач и на A_i за секој $i\in\left\{1,...,n\right\}$, па постои конечен потпокривач $\left\{U_1^i,...,U_{\alpha_i}^i\right\}$ на A_i. Фамилијата $\bigcup_{i=1}^{n}\left\{U_1^i,...,U_{\alpha_i}^i\right\}$ е конечна и за секој $i\in\left\{1,...,n\right\}$ важи $A_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcup_{k=1}^{\alpha_k}U_k^i\right)$ па следува дека $\bigcup_{i=1}^{n}\left\{U_1^i,...,U_{\alpha_i}^i\right\}$ е конечен покривач на $A_1\cup...\cup A_n$, т.е. $A_1\cup...\cup A_n$ е компактно.

7.5. Бидејќи за секоја конечна потфамилија $\left\{F_{n_1},\dots,F_{n_k}\right\}$ од $\left\{F_n \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ важи $F_{n_1}\cap\dots\cap F_{n_k}=F_{\max\{n_1,\dots,n_k\}}\neq\varnothing$, следува дека фамилијата $\left\{F_n \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ има својство на непразен конечен пресек. Бидејќи X е компактен, следува дека $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\neq\varnothing$.

7.6. За секој $a\in A$ множеството $\{a\}$ е отворено, па $\left\{\{a\} \middle| a\in A\right\}$ е отворен покривач на A. Да претпоставиме дека постои конечен потпокривач $\{a_1\},\dots,\{a_n\}$ за A. Тогаш од бесконечноста на A следува дека постои $a\in A\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$, па $a\notin\{a_1\}\cup\dots\cup\{a_n\}$. Добивме контрадикција. Значи не постои конечен потпокривач од $\left\{\{a\} \middle| a\in A\right\}$ на A, па A не е компактно.

7.7. Ако X е T_2 тогаш тврдењето е точно. Значи пример треба да се бара кај простор што не е T_2.

Нека $X=\mathbb{N}\cup\{a,b\}$, каде a и b се различни елементи кои не припаѓаат на $\mathbb{N}$. Нека $\mathcal{T}$ е топологијата на X со база

$$\mathcal{B}=\left\{\{n\} \middle| n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\{a\}\cup A \middle| A\subseteq\mathbb{N} \text{ и } \mathbb{N}\setminus A \text{ е конечно}\right\}\cup$$
$$\cup\left\{\{b\}\cup A \middle| A\subseteq\mathbb{N} \text{ и } \mathbb{N}\setminus A \text{ е конечно}\right\}.$$

Лесно се проверува дека $\mathcal{B}$ ги исполнува условите за база.

Сега ќе докажеме дека множествата $G=\mathbb{N}\cup\{a\}$ и $H=\mathbb{N}\cup\{b\}$ се компактни.

Нека $\mathcal{P}$ е произволен отворен покривач на G. Тогаш постои $P_0\in\mathcal{P}$ така што $a\in P_0$, и постои базен елемент $B=\{a\}\cup A$ така што $B\subseteq P_0$. Тогаш множеството $\mathbb{N}\setminus A$ е конечно и може да се покрие со конечен број елементи $P_1,\dots,P_n$ од $\mathcal{P}$. Значи G има конечен покривач $\{P_0,P_1,\dots,P_n\}$ кој е потпокривач од $\mathcal{P}$, па G е компактно.

Слично, и H е компактно.

Множеството $G\cap H=\mathbb{N}$ не е компактно. Навистина за секој $n\in\mathbb{N}$ множеството $\{n\}$ е отворено во X, па од $\{n\}=\mathbb{N}\cap\{n\}$ следува дека $\{n\}$ е отворено и во $\mathbb{N}$. Значи, индуцираната топологија на $\mathbb{N}$ е дискретна, па од бесконечноста на $\mathbb{N}$ следува дека $\mathbb{N}$ не е компактно.

Да забележиме дека овој простор не е T_2 бидејќи точките a и b немаат дисјунктни околини.

7.8. Нека $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ е отворен покривач на $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$. Постои $\alpha_0 \in I$ така што $a \in U_{\alpha_0}$. Бидејќи (a_n) конвергира кон a следува дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $a_n \in U_{\alpha_0}$ за секој $n \geq n_0$.

Нека $a_1 \in U_{\alpha_1}, \dots, a_{n_0-1} \in U_{\alpha_{n_0-1}}$. Тогаш $\{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_{n_0-1}}\}$ е конечен потпокривач на $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$, па $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ е компактно.

7.9. Нека $a \in A$. Тогаш за секој $b \in B$ постојат отворени множества $U_{a,b}$ во X и $V_{a,b}$ во Y така што $(a,b) \in U_{a,b} \times V_{a,b} \subseteq G$, па следува дека фамилијата $\{U_{a,b} \times V_{a,b} \mid b \in B\}$ е отворен покривач на $\{a\} \times B$. Множеството $\{a\} \times B$ е компактно (како производ на компактни множества) во $X \times Y$ па постои конечен покривач $\{U_{a,b_j} \times V_{a,b_j} \mid j \in \{1, \dots, n\}\}$ на $\{a\} \times B$. Нека $U_a = \bigcap_{j=1}^{n} U_{a,b_j}$ и $V_a = \bigcup_{j=1}^{n} V_{a,b_j}$. Овие множества се отворени и $\{a\} \times B \subseteq U_a \times V_a$.

Фамилијата $\{U_a \times V_a \mid a \in A\}$ е отворен покривач на $A \times B$, па од компактноста на $A \times B$ (како производ на компактни множества) следува дека постои конечен потпокривач $\{U_{a_i} \times V_{a_i} \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$ на $A \times B$. Нека $U = \bigcup_{j=1}^{m} U_{a_j}$ и $V = \bigcap_{j=1}^{m} V_{a_j}$. Тогаш U и V се отворени, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ и $U \times V \subseteq G$ (докажи!).

7.10. Да претпоставиме спротивно, дека ниту една точка од K не е точка на акумулација на F, т.е. за секој $x \in K$ постои $r_x > 0$ така што $T(x, r_x) \cap F \subseteq \{x\}$. Фамилијата $\{T(x, r_x) \mid x \in K\}$ е отворен покривач на K, па од компактноста на K следува дека постои конечен потпокривач $\{T(x_1, r_{x_1}), \dots, T(x_n, r_{x_n})\}$ на K. Сега имаме

$$F = F \cap K \subseteq F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} T\left(x_i, r_{x_1}\right) \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(F \cap T\left(x_i, r_{x_1}\right) \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ x_i \right\}.$$

Последново е во контрадикција со бесконечноста на F. Значи постои барем една точка на акумулација на F што припаѓа на K.

7.11. Нека $\varepsilon = d(A, B)$. Заради $d(A, B) = \inf\left\{ d(a, B) \middle| a \in A \right\}$ следува дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $a_n \in A$ така што $\varepsilon \leq d(a_n, B) < \varepsilon + \frac{1}{n}$. Множеството $\left\{ a_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ се состои од елементи од A и е бесконечно (во спротивно ќе постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $a_{n_0} = a_n$ за секој $n \geq n_0$, па неравенсвото $\varepsilon \leq d(a_n, B) < \varepsilon + \frac{1}{n}$ ќе важи за секој $n \geq n_0$ ако и само ако $\varepsilon = d(a_n, B)$, па тврдењето е докажано). Множеството A е комапктно, па од задача 7.9. следува дека постои точка на акумулација a на $\left\{ a_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ и $a \in A$.

Нека $\delta > 0$ е произволен број. Постои $n_1 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_1} < \frac{\delta}{2}$. Бидејќи a е точка на акумулација на $\left\{ a_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ следува дека постои $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1$ така што за секој $n \geq n_2$ важи $d(a, a_n) < \frac{\delta}{2}$. Тогаш за секој $n \geq n_2$ имаме

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \inf\left\{ d(a, b) \middle| b \in B \right\} \leq \inf\left\{ d(a, a_n) + d(a_n, b) \middle| b \in B \right\} = \\ &= d(a, a_n) + \inf\left\{ d(a_n, b) \middle| b \in B \right\} = d(a, a_n) + d(a_n, B) < \\ &< \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{n} < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{n_1} < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{\delta}{2} = d(A, B) + \delta \end{aligned}$$

Значи добивме дека $d(a, B) < d(A, B) + \delta$ за секој $\delta > 0$.

Притоа важи $d(A, B) = \inf\left\{ d(a, B) \middle| a \in A \right\} \leq d(a, B)$.

Да претпоставиме дека $d(A, B) < d(a, B)$. Тогаш за $\delta = d(a, B) - d(A, B) > 0$ ќе важи $d(a, B) < d(A, B) + \delta$, т.е.

$$d(a, B) < d(A, B) + \delta = d(A, B) + d(a, B) - d(A, B) = d(a, B),$$

што е контрадикција.

Следува $d(a, B) = d(A, B)$.

7.12. Од претходната задача следува дека постои $a \in A$ така што $d(a,B) = d(A,B)$. Да претпоставиме дека $d(A,B) = 0$, т.е. $d(a,B) = 0$. Заради $d(a,B) = \inf\{d(a,b) | b \in B\}$ следува дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $b_n \in B$ така што

$$d(a,B) \leq d(a,b_n) < d(a,B) + \frac{1}{n}, \text{ т.е. } 0 \leq d(a,b_n) < \frac{1}{n}.$$

Следува дека низата (b_n) конвергира кон a, па во секоја околина на a има точка $b_n \in B$. Следува дека $a \in \bar{B} = B$, т.е. $a \in A \cap B$ што е контрадикција.

7.13. Да претпоставиме спротивно дека $\mathbb{Q}$ е локално компактен. Тогаш постои околина $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ на 0 и постои компактно множество K во $\mathbb{Q}$ така што $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subseteq K$. Следува дека затворачот $\overline{((-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q})}_{\mathbb{Q}}$ на $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$ во $\mathbb{Q}$ е компактен во $\mathbb{Q}$ па и во $\mathbb{R}$. Но тоа не е точно, бидејќи $\overline{((-\varepsilon, \varepsilon) \cap \mathbb{Q})}_{\mathbb{Q}} = [-\varepsilon, \varepsilon] \cap \mathbb{Q}$ не е затворено во $\mathbb{R}$, па не е компактно во $\mathbb{R}$.

7.14. Нека $x = (x_1, \ldots, x_n)$ е произволна точка од $\mathbb{R}^n$. Тогаш постојат $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ така што $x \in (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ и важи $x \in (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subseteq [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Множеството $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ е компактно (затворено и ограничено), а $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ е околина на x. Значи секоја точка од $\mathbb{R}^n$ има компактна околина, па $\mathbb{R}^n$ е локално компактен.

7.15. а) Нека K е компактно подмножество од метричкиот простор (X,d). Фамилијата $\{T(x,1) | x \in K\}$ е отворен покривач на K, па постои конечен потпокривач $\{T(x_1,1), \ldots, T(x_n,1)\}$. Нека $x \in K$ е произволна. Постои $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ така што $x \in T(x_{i_0}, 1)$. Тогаш за секој $y \in K$ важи: постои $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ така што $y \in T(x_{i_1}, 1)$ и

$$\begin{aligned} &d(x,y) \leq d(x, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, x_{i_1}) + d(x_{i_1}, y) < \\ &< 1 + \max\{d(x_k, x_j) | k, j \in \{1, \ldots, n\}\} + 1 = M. \end{aligned}$$

Значи $K \subseteq T\left(x, M\right)$, па K е ограничено множество.

б) Не мора. На пример

1) $\left[0,1\right] \cap \mathbb{Q}$ е затворено и ограничено во $\mathbb{Q}$ (со наследена метрика од $\mathbb{R}$) но не е компактно (затоа што не е компактно во $\mathbb{R}$).

2) Да го разгледаме бесконечното множество A со метрика $d\left(a,b\right) = \begin{cases} 1, \ a \neq b \\ 0, \ a = b \end{cases}$. Јасно е дека A е ограничено и затворено. Но A не е компактно (бесконечен дискретен простор).

7.16. а) Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha = \varnothing$. Тогаш $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup\limits_{\alpha \in A} F_\alpha \right) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \left(\mathbb{R} \setminus F_\alpha \right)$ и сите $\mathbb{R} \setminus F_\alpha$ се отворени. Множеството F_{α_0} е ограничен и затворено, па е и компактно и $F_{\alpha_0} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} \left(\mathbb{R} \setminus F_\alpha \right)$, па $\left\{ \mathbb{R} \setminus F_\alpha \middle| \alpha \in A \right\}$ е отоврен покривач на F_{α_0}.

Постои конечен потпокривач $\left\{ \mathbb{R} \setminus F_{\alpha_1}, \dots, \mathbb{R} \setminus F_{\alpha_n} \right\}$ на F_{α_0}.

Значи

$F_{\alpha_0} \subseteq \left(\mathbb{R} \setminus F_{\alpha_1} \right) \cup \dots \cup \left(\mathbb{R} \setminus F_{\alpha_n} \right)$, т.е. $\mathbb{R} \setminus F_{\alpha_0} \supseteq F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n}$.

Тогаш имаме $\varnothing = F_{\alpha_0} \cap \left(\mathbb{R} \setminus F_{\alpha_0} \right) \supseteq F_{\alpha_0} \cap F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n}$, што е контрадикција, бидејќи фамилијата $\left\{ F_\alpha \middle| \alpha \in A \right\}$ е центрирана (т.е. има својство на конечен непразен пресек), па $F_{\alpha_0} \cap F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \neq \varnothing$.

б) Од а) следува дека сите множества во фамилијата мора да се неограничени. Да ја разгледаме фамилијата $\left\{ \left[n, \infty \right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$. Јасно е дека таа се состои од затворени множества и дека е центрирана ($\left[n_1, \infty \right) \cap \dots \cap \left[n_k, \infty \right) = \left[\max\left\{ n_1, \dots, n_k \right\}, \infty \right) \neq \varnothing$, за секое конечно подмножество $\left\{ n_1, \dots, n_k \right\}$ од $\mathbb{N}$).

Ќе докажеме дека $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left[n, \infty \right) = \varnothing$. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека постои $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left[n, \infty \right)$. Тогаш $x \in \left[n, \infty \right)$ за секој $n \in \mathbb{N}$, т.е. $x \geq n$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Тоа не е можно (на пример $x < \left[x \right] + 2 \in \mathbb{N}$).

7.17. Просторот l^2 е метрички со метрика

$d(a,b)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)^2}$, каде $a=(a_1,\ldots,a_n,\ldots)$ и $b=(b_1,\ldots,b_n,\ldots)$ (докажи!). Компактноста на H следува од теоремата на Тихонов, бидејќи $H=\prod_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right]$, а сите $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ се компактни.

7.18. Да избереме подмножество $A=\{f_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ од $C_{[0,1]}$ каде $f_n(x)=x^n$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Јасно, $f_n\neq f_m$ за секои $n,m\in\mathbb{N}$ и $n\neq m$, па A е бесконечно. Ќе докажеме дека A нема точка на акумулација во $C_{[0,1]}$ од што ќе следува дека $C_{[0,1]}$ не е компактен.

Да претпоставиме спротивно, дека постои точка на акумулација $f\in C_{[0,1]}$ за A. Тогаш постои низа (f_{n_k}) од елементи A која конвергира кон f (притоа $n_1<n_2<\ldots$, т.е. $n_k\to\infty$ кога $k\to\infty$). Значи за секој $\varepsilon>0$ постои $k_0\in\mathbb{N}$ така што за секој $k\geq k_0$ важи $d(f_{n_k},f)<\varepsilon$, т.е. $\max\{|f_{n_k}(x)-f(x)| \mid x\in[0,1]\}<\varepsilon$. Следува дека за секој $k\geq k_0$ важи $|f_{n_k}(x)-f(x)|<\varepsilon$, за секој $x\in[0,1]$.

Значи за секој $x\in[0,1]$ бројната низа $(f_{n_k}(x))$ конвергира кон $f(x)$, т.е. (x^{n_k}) конвергира кон $f(x)$. Заради $n_k\to\infty$ кога $k\to\infty$ следува дека (x^{n_k}) конвергира кон функцијата $f(x)=\begin{cases}0, 0\leq x<1\\ 1, x=1\end{cases}$. Притоа $f\notin C_{[0,1]}$ бидејќи не е непрекината.

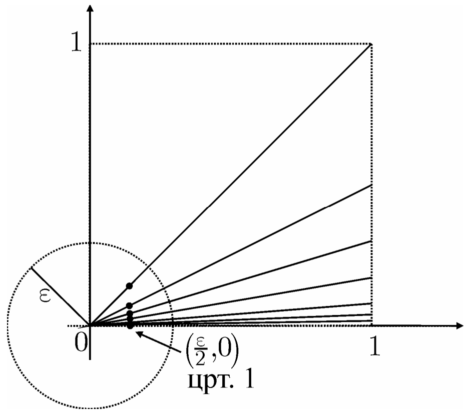
Да забележиме дека $C_{[0,1]}$ е ограничен. Навистина, ако $f_0(x)=0$ за секој $x\in[0,1]$, имаме

$$\begin{aligned}d(f_0,f)&=\max\{|f_0(x)-f(x)| \mid x\in[0,1]\}=\\&=\max\{|f(x)| \mid x\in[0,1]\}\leq 1,\end{aligned}$$

за секој $f\in C_{[0,1]}$, па следува дека $C_{[0,1]}\subseteq T(f_0,1)$.

Докажете дека $C_{[0,1]}$ е метрички простор.

7.19. Нека $T((0,0),\varepsilon)\cap X$ е произволна околина на $(0,0)$ во X. Притоа множеството $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, каде $x_n=\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2n}\right)$ за секој $n\in\mathbb{N}$ е бесконечно подмножество од $T((0,0),\varepsilon)\cap X$. Ако постои компактно подмножество K од X, така што $T((0,0),\varepsilon)\cap X\subseteq K$ ќе следува дека $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ќе има точка на акумулација во K. Но единствена точка на акумулација на



црт. 1

$\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ е точката $\left(\frac{\varepsilon}{2},0\right)$ и $\left(\frac{\varepsilon}{2},0\right)\notin X$. Значи $(0,0)$ нема компактна околина, па X не е локално компактен.
Да забележиме дека заклучокот може да се изведе и од тоа што $\overline{\left(T((0,0),\varepsilon)\cap X\right)}_X$ е не компактно во $\mathbb{R}^2$ (зошто?).

7.20. Бидејќи $f(X)$ е компактен во $\mathbb{R}$ следува дека е затворен и ограничен, па $\sup f(X)\in f(X)$, па е и максимум. За минимум се докажува аналогно.

7.21. а) Фамилијата $\left\{\left[a,b-\frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ е отворен покривач на $[a,b)$ од кој не може да се издвои конечен потпокривач.
б) Ако претпоставиме дека a има околина U и компактно множество K така што $a\in U\subseteq K$, тогаш постои базен елемент $[a,b)$ така што $a\in[a,b)\subseteq U\subseteq K$. Од $[a,b)=K\cap[a,b)$ и затвореноста на $[a,b)$ во $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ следува дека $[a,b)$ е компактно. Но, тоа не е можно заради а).

7.22. За секој $x\in X$ постои $a\in A$ така што $x\in U_a$ (бидејќи $\{U_a \mid a\in A\}$ е покривач на X). Заради отвореноста на U_a следува дека постои $\delta(x)>0$ така што $T(x,\delta(x))\subseteq U_a$. Фамилијата

$\left\{T\left(x,\dfrac{\delta(x)}{2}\right)\middle| x\in X\right\}$ е отворен покривач на X, па заради компактноста на X следува дека постои конечен постпокривач $\left\{T\left(x_i,\dfrac{\delta(x_i)}{2}\right)\middle| i\in\{1,\dots,n\}\right\}$ на X.

Нека $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta(x_i)}{2}\middle| i\in\{1,\dots,n\}\right\}$ и нека C е произволно подмножество од X така што $\operatorname{diam} C<\delta$.

Нека $c\in C$ е фиксен. Од тоа што $\left\{T\left(x_i,\dfrac{\delta(x_i)}{2}\right)\middle| i\in\{1,\dots,n\}\right\}$ е покривач за X следува дека постои $i\in\{1,\dots,n\}$ така што $c\in T\left(x_i,\dfrac{\delta(x_i)}{2}\right)$. Од конструкцијата на $\left\{T\left(x_i,\dfrac{\delta(x_i)}{2}\right)\middle| i\in\{1,\dots,n\}\right\}$ следува дека постои $a\in A$ така што $T(x_i,\delta(x_i))\subseteq U_a$.

Значи, $c\in T\left(x_i,\dfrac{\delta(x_i)}{2}\right)\subseteq T(x_i,\delta(x_i))\subseteq U_a$.

Ќе докажеме дека $C\subseteq U_a$.

Нека $y\in C$ е произволен. Тогаш $d(y,c)<\delta<\dfrac{\delta(x_i)}{2}$, па имаме

$$d(y,x_i)\le d(y,c)+d(c,x_i)<\frac{\delta(x_i)}{2}+\frac{\delta(x_i)}{2}=\delta(x_i).$$

Значи, $y\in T(x_i,\delta(x_i))\subseteq U_a$, па следува $C\subseteq U_a$.

7.23. Нека $\varepsilon>0$ е произволен. За секој $y\in Y$ важи $y\in T\left(y,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, па фамилијата $\left\{T\left(y,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\middle| y\in Y\right\}$ е отворен покривач за Y. Бидејќи f е непрекинато, следува дека множествата $f^{-1}\left(T\left(y,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right)=U_y$ се отворени во X. Значи $\{U_y \mid y\in Y\}$ е отворен покривач за X. Од теоремата на Лебег следува дека постои $\delta>0$ така што за секое $C\subseteq X$ со $\operatorname{diam} C<\delta$ постои $y\in Y$ така што $C\subseteq U_y$.

Нека $x', x'' \in X$ се такви што $d_1\left(x', x''\right) < \delta$. Значи $\operatorname{diam}\left\{x', x''\right\} < \delta$, па постои $y \in Y$ така што $\left\{x', x''\right\} \subseteq U_y = f^{-1}\left(T\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. Според тоа $f\left(x'\right), f\left(x''\right) \in T\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Конечно, имаме

$$d_2\left(f\left(x'\right), f\left(x''\right)\right) \leq d_2\left(f\left(x'\right), y\right) + d_2\left(y, f\left(x''\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажавме дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што ако x' и x'' се произволни точки од X за кои важи $d_1\left(x', x''\right) < \delta$ следува дека важи $d_2\left(f\left(x'\right), f\left(x''\right)\right) < \varepsilon$. Значи f е рамномерно непрекинато.

Забелешка. Доказот на ова тврдење, изведен на друг начин, може да се најде и во [1], стр. 54.

7.24. 1)$\Rightarrow$2). Нека $x \in X$ и U е околина на x. Бидејќи X е локално компактен постои околина W на x така што $x \in W \subseteq \overline{W}$ и $\overline{W}$ е компактно. Значи $\overline{W}$ е регуларен простор и $\overline{W} \cap U$ е околина на x во $\overline{W}$. Според тоа $\overline{W} \setminus \left(\overline{W} \cap U\right)$ е затворено во $\overline{W}$ и $x \notin \overline{W} \setminus \left(\overline{W} \cap U\right)$, па постои отворено множество G во $\overline{W}$ така што $x \in G \subseteq \overline{G}_{\overline{W}} \subseteq \overline{W} \cap U$. Множеството G е отворено во $\overline{W}$, па постои отворено множество E во X така што $G = E \cap \overline{W}$. Бараната околина на x е $V = E \cap W \cap U$. Навистина

$$\overline{V} = \overline{E \cap W \cap U} \subseteq \overline{E \cap \overline{W} \cap U} = \overline{G \cap U} = \overline{G} = \overline{G}_{\overline{W}} \subseteq \overline{W} \cap U \subseteq U.$$

2)$\Rightarrow$3). Нека C е компактно множество и U е околина на C. Од 2) следува дека за секој $c \in C$ постои релативно компактна околина V_c така што $c \in V_c \subseteq \overline{V_c} \subseteq U$. Фамилијата $\left\{V_c \middle| c \in C\right\}$ го покрива C, па постои конечна подфамилија $\left\{V_{c_1}, \ldots, V_{c_n}\right\}$ од $\left\{V_c \middle| c \in C\right\}$ која го покрива C. Бараната околина на C е $V = V_{c_1} \cup \ldots \cup V_{c_n}$.

3)$\Rightarrow$4). Нека $\mathcal{B}$ е фамилијата од сите релативно компактни отворени множества во X. За секој $x \in X$ и секоја околина U на $\{x\}$ (кое е компактно множество) постои V околина на $\{x\}$ така што $\{x\} \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Притоа $\overline{V} \in \mathcal{B}$, па $\mathcal{B}$ е база.

4) $\Rightarrow$ 1). Бидејќи X има база од релативно компактни отворени множества следува дека секој $x \in X$ има околина со компактен затворач, па веднаш следува 1).

7.25. Нека $x \in X$ е произволен и нека P е затворено множество од X така што $x \notin P$. Тогаш $V = X \setminus P$ е околина на x. Заради локалната компактност на X постои околина U на x така што $\overline{U}$ е компактно. Да ја разгледаме околината $W = V \cap U$ на x. Множеството $\overline{W}$ е компактно, како затворено подмножество од компактното множество $\overline{U}$, па следува дека $\overline{W}$ е нормален простор. Според тоа постои оклина O на x во $\overline{W}$, така што $x \in O \subseteq \overline{O_{\overline{W}}} \subseteq W$. Исто така заради $O = O \cap W$ и отвореноста на W во X следува дека O е отворено во X. За него важи и $\overline{O} = \overline{O \cap W} \subseteq \overline{O} \cap \overline{W} \subseteq W \subseteq V = X \setminus P$, па $P \subseteq X \setminus \overline{O}$. Значи $X \setminus \overline{O}$ е околина на P, а O е околина на x и важи $O \cap \left(X \setminus \overline{O}\right) = \varnothing$, па X е регуларен.

7.26. Прво да забележиме дека од дефиницијата следува дека и за конечно многу членови $A_1, \dots, A_n$ на предфилтерот $\mathcal{F}$ постои $A_{n+1} \in \mathcal{F}$ така што $A_{n+1} \subseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$.

Нека $\mathcal{H} = \left\{ (X \setminus U) \cap P \middle| P \in \mathcal{F} \right\}$. Фамилијата $\mathcal{H}$ се состои од затворени множества и

$$\bigcap_{Q \in \mathcal{H}} Q = \bigcap_{P \in \mathcal{F}} \left((X \setminus U) \cap P \right) = (X \setminus U) \cap \left(\bigcap_{P \in \mathcal{F}} P \right) = (X \setminus U) \cap F = \varnothing.$$

Од компактноста на X следува дека фамилијата $\mathcal{H}$ не е центрирана. Значи постојат $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{F}$ така што

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left(P_i \cap (X \setminus U) \right) = \varnothing.$$

Фамилијата $\mathcal{F}$ е предфилтер па постои $P_0 \in \mathcal{F}$ така што $P_0 \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_n$. Тогаш $P_0 \subseteq F$ и

$P_0 \cap (X \setminus U) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \left(P_i \cap (X \setminus U) \right) = \varnothing$, т.е. $P_0 \subseteq U$.

7.27. Прво ќе докажеме дека за секои $x, y \in X$ и $A \subseteq X$ важи $\left| d(x, A) - d(y, A) \right| \leq d(x, y)$. Навистина, за секој $a \in A$ важи

$d(x,A) \le d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a)$, па и

$$d(x,A) \le \inf_{a\in A} d(x,a) \le d(x,y) + \inf_{a\in A} d(y,a),$$

т.е. $d(x,A) \le d(x,y) + d(y,A)$, односно $d(x,A) - d(y,A) \le d(x,y)$.

Заради симетрија важи и $d(y,A) - d(x,A) \le d(x,y)$, па следува

$$\left|d(x,A) - d(y,A)\right| \le d(x,y).$$

Да се вратиме на задачата. Нека $x \in K$ е произволен. Тогаш $x \notin F = \overline{F}$, па $d(x,F) > 0$. Нека $\varepsilon_x = \dfrac{d(x,F)}{2} > 0$ и нека $V_x = T(x,\varepsilon_x)$. Фамилијата $\{V_x \mid x \in K\}$ е отворен покривач на K, па од компактноста на K следува дека постои конечен потпокривач $\{V_{x_1},\dots,V_{x_n}\}$ на K. Нека $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{x_1},\dots,\varepsilon_{x_n}\}$.

За секој $y \in K$ постои $i \in \{1,\dots,n\}$ така што $y \in V_{x_i}$. Значи, $d(y,x_i) < \dfrac{\varepsilon_i}{2}$. Заради претходното тврдење следува дека

$$\left|d(y,F) - d(x_i,F)\right| \le d(y,x_i), \text{ т.е.}$$

$$-d(y,x_i) \le d(y,F) - d(x_i,F) \le d(y,x_i).$$

Од првото неравенство добиваме

$$d(y,F) \ge d(x_i,F) - d(y,x_i) > 2\varepsilon_{x_i} - \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} = \frac{3\varepsilon_{x_i}}{2} \ge \frac{\varepsilon_0}{2} > 0.$$

Оттука имаме $d(K,F) = \inf_{y\in K} d(y,F) \ge \dfrac{\varepsilon_0}{2} > 0$.

Забелешка. Компактноста на во оваа задача K не може да се отфрли. На пример, нека $K = \left\{\left(x,\dfrac{1}{x}\right) \middle| x > 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ и $F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Двете множества се затворени и дисјунктни, но $d(K,F) = 0$.

7.28. Нека X е простор кој не е локално компактен, а X^* е негова компактификација со една точка. Тогаш X^* е локално компактен и X е отворено во X^*. Но, X не е локално компактен.

7.29. Нека $\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in A\}$ е произволен отворен покривач на X. Бидејќи е Линделефов следува дека постои преброив потпокривач

$\mathcal{U}' = \left\{ U_{j_n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ од $\mathcal{U}$. Да претпоставиме дека $\mathcal{U}'$ нема конечен потпокривач.

Тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ постои U_{j_n} така што $U_{j_n} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} U_{j_i}$, бидејќи во спротивно ќе добиеме дека почнувајќи од некој $k = n$ сите U_{j_k} се подмножества од U_{j_n}. Тогаш покривачот $\left\{ U_{j_1}, \dots, U_{j_n} \right\}$ е конечен, што не е можно.

Нека $A = U_{j_1}$ и со A_n да го означиме првото (со најмал индекс) од множествата U_{j_k} така што $U_{j_k} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. Од конструкцијата на множествата A_n јасно е дека $\left\{ A_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ е покривач на X. Множествата A_n се отворени и за секој $n \in \mathbb{N}$ постои x_n така што $x_n \in A_n$ и $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. Низата (x_n) има точка на натрупување x. Бидејќи $\mathcal{U}'$ е покривач на X следува дека постои $n' \in \mathbb{N}$ така што $x \in U_{j_{n'}}$, па следува дека постои $n_1 \in \mathbb{N}$ така што $x \in A_{n_1}$. Бидејќи x е точка на натрупување на (x_n) следува дека во околината A_{n_1} има бесконечно членови на (x_n). Значи постои $k > n_1$ така што $x_k \in A_{n_1}$. Но од конструкцијата на низата (x_n) следува дека ова не е можно, бидејќи x_k е избрано така што не припаѓа во ниедно множество A_n со помал индекс од k. Добивме контрадикција, па X е компактен.

8. СВРЗАНОСТ. ЛОКАЛНА СВРЗАНОСТ. ПАТ СВРЗАНОСТ

8.1. Множеството A може да се претстави на следниов начин $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Притоа, $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ се отворени, непразни и дисјунктни множества во $\mathbb{R}$. Според тоа A не е сврзано.

8.2. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $A \setminus B \neq \varnothing$. Да ги разгледаме множествата B и $X \setminus B$. Имаме $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap X \setminus B \neq \varnothing$. Од тоа што B е затворено следува дека $X \setminus B$ е отворено. Значи, множествата $A \cap B$ и $A \cap (X \setminus B)$ се отворени, непразни и дисјунктни во A и $A = (A \cap B) \cup (A \cap (X \setminus B))$. Добивме контрадикција со A е сврзано. Значи, $A \setminus B = \varnothing$, па $A \subseteq B$.

8.3. Од $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \varnothing$ следува дека

$$\bar{A} \cap B = \varnothing = A \cap \bar{B},$$

па множествата A и B се разделени во X. Следува дека се разделени и во $A \cup B$. Значи, $A \cup B$ е претставен како унија на две непразни разделени множества, па не е сврзан.

8.4. Нека $E = A \cup B$, каде A и B се непразни мнножества такви што $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$. Тогаш $\bar{E} = \bar{A} \cup \bar{B}$ и $\bar{A}$ и $\bar{B}$ се непразни, затворени и дисјунктни. Следува дека $\bar{E}$ не е сврзан.
Обратно, нека $\bar{E}$ не е сврзан. Постојат непразни, затворени множества G и H во $\bar{E}$ така што $G \cap H = \varnothing$ и $G \cup H = \bar{E}$. Од зарцореноста на $\bar{E}$ во X следува дека G и H се затворени во X. Нека $A = G \cap E$ и $B = H \cap E$. Ако претпоставиме дека $A = \varnothing$, тогаш $G \cap E = \varnothing$, па $E \subseteq H$. Оттука $\bar{E} \subseteq \bar{H} = H$. Оттука следува дека $G = \varnothing$, што не е можно. Значи $A \neq \varnothing$. Слично и $B \neq \varnothing$. Натаму,

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \bar{G} \cap \bar{H} = G \cap H = \varnothing,$$

што требаше да се докаже.

8.5. Да претпоставиме спротиво, т.е. дека за секој $z \in X$ важи $f(z) \neq 0$. да ги разгледаме множествата $A = f^{-1}((-\infty,0))$ и $B = f^{-1}((0,\infty))$. Заради отвореноста на $(0,\infty)$ и $(-\infty,0)$ во $\mathbb{R}$ и непрекинатоста на f следува дека A и B се отворени во X. Од $f(x) < 0$ следува $x \in A$, т.е. $A \neq \varnothing$, а од $f(y) > 0$ следува дека $y \in B$, т.е. $B \neq \varnothing$. Уште

$$\begin{aligned} A \cap B &= f^{-1}((-\infty,0)) \cap f^{-1}((0,\infty)) = \\ &= f^{-1}((-\infty,0) \cap (0,\infty)) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \end{aligned}$$

и $X = A \cup B$ (следува од тоа што за секој $z \in X$ важи $f(z) \neq 0$). Според тоа X може да се претстави како унија на две непразни, отворени дисјунктни множества, па не е сврзан. Добивме контрадикција. Значи, постои $z \in X$ така ѓто $f(z) = 0$.

Слично се докажува и вториот случај, кога $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$.

8.6. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $C \cap \partial E = \varnothing$. Бидејќи $X = \operatorname{int} E \cup \partial E \cup \operatorname{ext} E$, следува дека Тогаш

$$C \subseteq \operatorname{int} E \cup \operatorname{ext} E = \operatorname{int} E \cup \operatorname{int}(X \setminus E).$$

Нека $C_1 = C \cap \operatorname{int} E$ и $C_2 = C \cap \operatorname{int}(X \setminus E)$. Од $C \cap E \neq \varnothing$ и $C \cap \partial E = \varnothing$ следува дека $C_1 \neq \varnothing$. Слично, $C_2 \neq \varnothing$. Бидејќи $\operatorname{int} E$ и $\operatorname{int}(X \setminus E)$ се отворени во X следува дека C_1 и C_2 се отворени во C. Уште $C = C_1 \cup C_2$. Добивме контрадикција со сврзаноста на C. Значи, мора $C \cap \partial E \neq \varnothing$.

8.7. Нека A е непразно сврзано подмножество од X и нека $x \in A$. Бидејќи $C(x)$ (компонентата на сврзаност што ја содржи x) е најголемеото сврзано множество во X што ја содржи x, следува дека $A \subseteq C(x)$.

8.8. Нека $x \in A$ и нека $C(x)$ е компонентата на сврзаност на x. Бидејќи $C(x)$ е најголемото сврзано подмножество од X што ја содржи x и A е сврзано, следува дека $A \subseteq C(x)$.

Да претпоставиме дека $A \subset C(x)$, т.е. дека постои $z \in C(x) \setminus A$. Да ги разгледаме множествата A и $X \setminus A$. Тие се непразни ($x \in A$ и

$z \in X \setminus A$), отворени (A е отворено-затворено), дисјунктни во X. Според тоа множествата $C(x) \cap A$ и $C(x) \cap (X \setminus A)$ се непразни ($x \in C(x) \cap A$ и $z \in C(x) \cap (X \setminus A)$), отворени, дисјунктни во $C(x)$ и $C(x) = (C(x) \cap A) \cup (C(x) \cap (X \setminus A))$. Добивме контрадикција со сврзаноста на $C(x)$.

Според тоа, $A = C(x)$.

8.9. Нека $a, b \in \mathbb{Q}$ и нека S е подмножество од $\mathbb{Q}$ така што $a, b \in S$. Уште нека $a < b$. Постои ирационален број r таков што $a < r < b$. Да ги разгледаме множествата $A_1 = \mathbb{Q} \cap (-\infty, r)$ и $A_2 = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Тие се отворени во $\mathbb{Q}$ (бидејќи $(-\infty, r)$ и (r, ∞) се отворени во $\mathbb{R}$), непразни ($a \in A_1$ и $b \in A_2$), дисјунктни и $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$. Значи, $S \subseteq A_1 \cup A_2$ и $S \cap A_1 \neq \varnothing$ и $S \cap A_2 \neq \varnothing$. Следува дека S не е сврзано. Добивме дека ниту едно подмножество од $\mathbb{Q}$ кое содржи барем две точки не е сврзано. Следува дека единствени сврзани подмножества од $\mathbb{Q}$ се едноелементните, па $C(x) = \{x\}$ за секој $x \in \mathbb{Q}$.

8.10. Тоа е просторот од задача 8.8. Сите компоненти се едноелементни множества. Тие не се отворени во $\mathbb{Q}$ (зошто?).

8.11. Нека $C_1, \dots, C_n$ се сите компоненти на X. Тогаш $X = C_1 \cup \dots \cup C_n$ и C_i е затворено, за секој $i \in \{1, \dots, n\}$. Отвореноста на C_i следува од затвореноста на $X \setminus C_i = \bigcup\limits_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} C_k$ (како конечна унија од затворени множества), за секој $i \in \{1, \dots, n\}$.

8.12. Нека $x \in X$ е произволна така што $f(x) \in E$. Нека $C(x)$ е компонентата на сврзаност на x во X. Од непрекинатоста на f следува дека $f(C(x))$ е сврзано. Значи $f(x) \in f(C(x))$, $f(x) \in E$ и $f(C(x))$ и E се сврзани. Но, E е максималното сврзано множество што ја содржи $f(x)$, па следува дека $f(C(x)) \subseteq E$. Оттука добиваме дека

$C(x) \subseteq f^{-1}(E)$. Значи, компонентата на секоја точка од $f^{-1}(E)$ се содржи во $f^{-1}(E)$.

Нека, сега, $y \in X$ е таква што $f(y) \notin E$, т.е. $y \notin f^{-1}(E)$ и нека $C(y)$ е нејзината компонента. Да претпоставиме дека $C(y) \cap f^{-1}(E) \neq \varnothing$ и нека $z \in C(y) \cap f^{-1}(E)$. Јасно е дека $y \neq z$. Тогаш од претходното и од $z \in f^{-1}(E)$ следува дека $C(z) \subseteq f^{-1}(E)$. Од $z \in C(y)$ следува дека $C(y) = C(z) \subseteq f^{-1}(E)$, т.е. $y \in f^{-1}(E)$. Добивме контрадикција. Според тоа, компонентата на секоја точка што не припаѓа на $f^{-1}(E)$ има празен пресек со $f^{-1}(E)$.

Значи, $f^{-1}(E)$ се состои точно од компонентите на неговите точки.

8.13. Нека C_x е компонента на $x = (x_a \mid a \in A)$ а C_{x_a} е компонента на x_a, за секој $a \in A$. Бидејќи проекцијата $p_a : X \to X_a$ е непрекината, а C_x сврзано следува дека $p_a(C_x) \subseteq C_{x_a}$, за секој $a \in A$. Оттука $C_x \subseteq p_a^{-1}(C_{x_a}) = \prod_{a \in A} C_{x_a}$. Уште множеството $\prod_{a \in A} C_{x_a}$ е сврзано како производ на сврзани множества и $x \in \prod_{a \in A} C_{x_a}$. Но, C_x е најголемото сврзано подмножество од X што ја содржи x, па следува $\prod_{a \in A} C_{x_a} \subseteq C_x$.

8.14. Да претпоставиме спротивно, дека b не е сврзано. Значи постојат разделени множества S и T во X така што $B \subseteq S \cup T$. Заради сврзаноста на A и A_λ, за секој $\lambda \in \Lambda$, следува дека или $A \subseteq S$ или $A \subseteq T$ и или $A_\lambda \subseteq S$ или $A_\lambda \subseteq T$, за секој $\lambda \in \Lambda$.

Да претпоставиме дека $A \subseteq S$. Ако постои $\lambda_0 \in \Lambda$ така што $A_{\lambda_0} \subseteq T$, тогаш $A \cap A_{\lambda_0} \subseteq S \cap T = \varnothing$. Значи за секој $\lambda \in \Lambda$ важи $A_\lambda \subseteq S$. Но, тогаш и $B \subseteq S$ од што следува дека $T = \varnothing$. Добивме контрадикција. Слична контрадикција се добива и ако се претпостави дека $A \subseteq T$. Значи B е сврзано.

8.15. а) Нека $p \in X \setminus A$ и $q \in Y \setminus B$ се произволни. Пресликувањето $f : X \to X \times \{q\}$ дефинирано со $f(x) = (x, q)$ е непрекинато (и хомеоморфизам) и $f(X) = X \times \{q\}$, следува дека и $X \times \{q\}$ е сврзан. Слично, $\{p\} \times Y$ е сврзан. Значи, за секои $p \in X \setminus A$ и $q \in Y \setminus B$ множествата $X \times \{q\}$ и $\{p\} \times Y$ се сврзани.

Нека $p_0 \in X \setminus A$ и $q_0 \in Y \setminus B$ се фиксни точки. Според претходното множествата $P_0 = \{p_0\} \times Y$ и $Q_0 = X \times \{q_0\}$ се сврзани. За секој $x \in X \setminus A$ важи

$$(\{x\} \times Y) \cap Q_0 = (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{q_0\}) \neq \varnothing,$$

затоа што $(x, q_0) \in (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{q_0\})$. Значи, сите членови на фамилијата $\{\{x\} \times Y \mid x \in X \setminus A\}$ се сврзани и имаат непразен пресек со сврзаното множество Q_0. Следува, дека

$$Q_0 \cup \left(\bigcup_{x \in X \setminus A} (\{x\} \times Y) \right) = \bigcup_{x \in X \setminus A} ((\{x\} \times Y) \cup Q_0) =$$
$$= ((X \setminus A) \times Y) \cup Q_0$$

е сврзано. Слично се докажува дека и множеството

$$P_0 \cup \left(\bigcup_{y \in Y \setminus B} (X \times \{y\}) \right) = \bigcup_{y \in Y \setminus B} ((X \times \{y\}) \cup P_0) =$$
$$= (X \times (Y \setminus B)) \cup P_0$$

е сврзано.

Заради $P_0 \subseteq (X \setminus A) \times Y$ и $Q_0 \subseteq X \times (Y \setminus B)$ следува дека

$$((X \setminus A) \times Y) \cap (X \times (Y \setminus B)) \supseteq P_0 \cap Q_0 = \{(p_0, q_0)\}.$$

Конечно, добиваме дека множеството

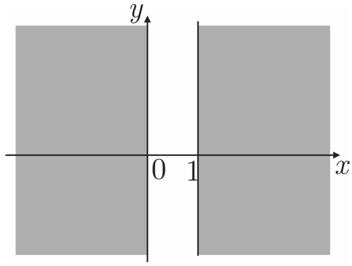
$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times Y) \cup (X \times (Y \setminus B)) =$$
$$= (((X \setminus A) \times Y) \cup Q_0) \cup ((X \times (Y \setminus B)) \cup P_0)$$

е претставено како унија од две сврзани множества со непразен пресек, па е сврзано.

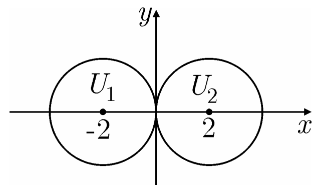
б) Не важи. На пример, нека $A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ и $B = \mathbb{R}$. Тогаш

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}, x \leq 0\} \cup$$
$$\cup \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$$

не е сврзано (црт. 2).



црт. 2



8.16. Нека $X = \mathbb{R}^2$,

$U_1 = \left\{ (x,y) \middle| x,y \in \mathbb{R}, (x-2)^2 + y^2 \le 4 \right\}$,

$U_2 = \left\{ (x,y) \middle| x,y \in \mathbb{R}, (x+2)^2 + y^2 \le 4 \right\}$ и

$A = U_1 \cup U_2$ (цртеж). Тогаш U_1 и U_2 се (пат) сврзани множества и $U_1 \cap U_2 = \{(0,0)\}$, па и $A = U_1 \cup U_2$ е (пат) сврзано. Но

$$\operatorname{int} U_1 = \left\{ (x,y) \middle| x,y \in \mathbb{R}, (x-2)^2 + y^2 < 4 \right\} \text{ и}$$

$$\operatorname{int} U_2 = \left\{ (x,y) \middle| x,y \in \mathbb{R}, (x+2)^2 + y^2 < 4 \right\}$$

се отворени, непразни, дисјунктни и $\operatorname{int} A = \operatorname{int} U_1 \cup \operatorname{int} U_2$. Според тоа $\operatorname{int} A$ не е сврзано.

8.17. Нека $x_1, x_2 \in A$. Пресликувањето $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ дефинирано со $\varphi(t) = tx_1 + (1-t)x_2$ е непрекинато и заради конвексноста на A следува дека $\varphi(t) \in A$ за секој $t \in [0,1]$. Значи, φ е пресликување од $[0,1]$ во A. Уште $\varphi(0) = x_2$ и $\varphi(1) = x_1$. Следува дека A е пат сврзано.

8.18. Нека X е дискретен простор, $x \in X$ и U произволна околина на X. Тогаш $\{x\}$ е околина на x, $\{x\}$ е сврзано множество и $\{x\} \subseteq U$. Следува дека X е локално сврзан.

Ако X има барем две различни точки, т.е. $\{x,y\} \subseteq X$ имаме $X = \{x\} \cup \left(\bigcup_{z \in X \setminus \{x\}} \{z\} \right)$. Двете множества се отворени, непразни ($y \in \bigcup_{z \in X \setminus \{x\}} \{z\}$), дисјунктни. Следува дека X не е сврзан.

Компонентите на сврзаност се едноелементни множества.

Ако $X = \{x\}$, тогаш е сврзан.

8.19. Нека (p,q) е произволна точка од $X \times Y$ и нека U е произволна околина на (p,q). Постојат отворени множества A во X и B во Y така што $(p,q) \in A \times B \subseteq U$. Бидејќи X и Y се локално сврзани постојат сврзани околини A' на p и B' на q така што $p \in A' \subseteq A$ и $q \in B' \subseteq B$. Множеството $A' \times B'$ е отворено во $X \times Y$, сврзано и важи $(p,q) \in A' \times B' \subseteq A \times B \subseteq U$. Следува дека $X \times Y$ е локално сврзан.

8.20. Нека $y_1, y_2 \in f(X)$ се произволни и нека $x_1, x_2 \in X$ се такви што $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Бидејќи X е пат сврзан, следува дека постои непрекинато пресликување $\varphi : [0,1] \to X$ такво што $x_1 = \varphi(0)$ и $x_2 = \varphi(1)$. Да го разгледаме пресликувањето $g = f\varphi : [0,1] \to Y$. Тоа е непрекинато и важи

$$g(0) = f(\varphi(0)) = f(x_1) = y_1 \text{ и } g(1) = f(\varphi(1)) = f(x_2) = y_2.$$

Значи, постои пат меѓу y_1 и y_2, па $f(X)$ е пат сврзан.

8.21. Нека $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ и нека $a, b \in U$ се произволни. Постојат $\alpha \in \Lambda$ и $\beta \in \Lambda$ така што $a \in U_\alpha$ и $b \in U_\beta$. Бидејќи множеството U_α е пат сврзано и $a, x \in U_\alpha$ следува дека постои непрекинато пресликување $\varphi_1 : [0,1] \to U_\alpha$ така што $\varphi_1(0) = a$ и $\varphi_1(1) = x$. Слично, заради пат сврзаноста на U_β постои непрекинато пресликување $\varphi_2 : [0,1] \to U_\beta$ така што $\varphi_2(0) = x$ и $\varphi_2(1) = b$.

Да го разгледаме пресликувањето

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \varphi_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Заради $[0,1] = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и за $t = \frac{1}{2}$ важи

$$\varphi_1\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \varphi_1(1) = x = \varphi_2(0) = \varphi_2\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right),$$

од непрекинатостна на φ_1 на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и на φ_2 на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ следува дека и φ е непрекинато (како комбинирано пресликување). Притоа,

$$\varphi(0) = \varphi_1(2 \cdot 0) = \varphi_1(0) = a \text{ и } \varphi(1) = \varphi_2(2 \cdot 1 - 1) = \varphi_2(1) = b,$$

па φ е пат од a до b. Следува дека U е пат сврзано.

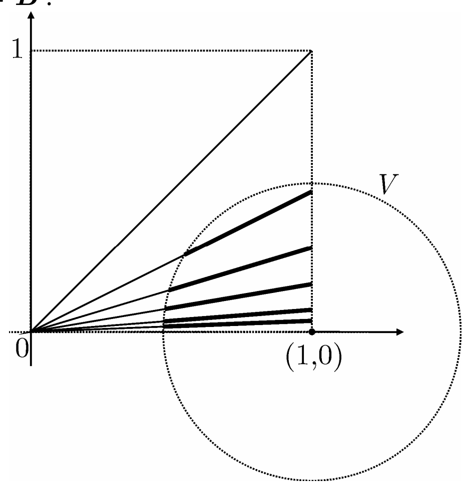
8.22. Нека $a \in A$ и нека B е множеството од сите елементи од A што можат да се сврзат со пат со a во A. Јасно, $B \neq \varnothing$, заради $a \in B$, и дека B е пат сврзано. Нека $b \in B$ е произволен. Постои пат од a до b во A, т.е. постои непрекинато пресликување $\varphi_1 : [0,1] \to A$ така што $\varphi_1(0) = a$ и $\varphi_1(1) = b$. Бидејќи A е отворено следува дека постои $r > 0$ така што $T(b,r) \subseteq A$, а бидејќи $T(b,r)$ е конвексно, следува дека е пат сврзано. Значи секоја точка од $T(b,r)$ може да се поврзе со b со пат во $T(b,r)$, па и во A. Нека $x \in T(b,r)$ е произволна. Постои непрекинато пресликување

$$\varphi_2 : [0,1] \to B$$

така што $\varphi_2(0) = b$ и $\varphi_2(1) = x$. Комбинираното пресликување φ на φ_1 и φ_2 е пат од a до x. Следува $x \in B$. Од произволноста на $x \in T(b,r)$ следува дека

$$T(b,r) \subseteq B.$$

Докажавме дека за секој $b \in B$ постои $r > 0$ така што $b \in T(b,r) \subseteq B$, т.е. дека B е отворено.
Нека $C = A \setminus B$. Да претпоставиме дека $C \neq \varnothing$ и нека $c \in C$ е произволен. Бидејќи $c \in A$ и A е отворено, следува дека постои $\varepsilon > 0$ така што $T(c,\varepsilon) \subseteq A$. Множеството $T(c,\varepsilon)$ е пат сврзано, па мора $T(c,\varepsilon) \cap B = \varnothing$ (во спротивно, ако постои $y \in T(c,\varepsilon) \cap B$, тогаш има пат од a до y, а заради пат сврзаноста на $T(c,\varepsilon)$ има пат од y до c. Значи во има пат од a до c, па $c \in B$, што не е можно). Следува дека $T(c,\varepsilon) \subseteq C$. Докажавме дека C е отворено. Според тоа, $A = C \cup B$, и C и B се отворени, непразни и дисјунктни. Тоа не е можно заради сврзаноста на A. Значи, $C = \varnothing$, па $A = B$.



8.23. а) Множеството $Y' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ е пат сврзано (е унија од пат сврзани простори со непразен пресек), па и сврзано. Ќе докажеме дека Y е сврзан. Да претпоставиме спротивно, дека постојат непразни отворени и дисјунктни множества U и V во Y (со наследена топологија од вообичаената топологија на $\mathbb{R}^2$) така што што $Y = U \cup V$. Заради сврзаноста на Y'

мора $Y' \subseteq U$ и $\{(1,0)\} \subseteq V$ (или обратно). Од тоа што V е отворено во Y и $(1,0) \in V$, следува дека постои $\varepsilon > 0$ така што $T((1,0),\varepsilon) \cap Y \subseteq V$. Постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, па $\left(1,\frac{1}{n_0}\right) \in Y_{n_0} \cap T((1,0),\varepsilon) \subseteq Y' \cap V \subseteq U \cap V$, што не е можно, заради $U \cap V = \varnothing$.
Добивме контрадикција, па следува дека Y е сврзано.
б) Ќе докажеме дека Y не е пат сврзан. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека постои непрекинато пресликување $\varphi : [0,1] \to Y$ така што $\varphi(0) = (1,0)$ и $\varphi(1) = (0,0)$.
Нека $V = \left\{(x,y) \middle| (x-1)^2 + y^2 < \frac{1}{4}\right\}$. Множеството V е отворено во $\mathbb{R}^2$, па $V' = V \cap Y$ е отворено во Y. Заради непрекинатоста на φ следува дека е отворено во $[0,1]$. Од $\varphi(0) = (1,0)$ следува дека $0 \in \varphi^{-1}(V')$. Слично, $1 \notin \varphi^{-1}(V')$. Бидејќи V' е дисјунктна унија од сврзани множества и е отворено, притоа сите отсечки од кои се состои V' се отворени, следува дека $\varphi^{-1}(V')$ може да се претстави како дисјунктна унија од отворено множества во $[0,1]$. Нека

$$\varphi^{-1}(V') = [0,a) \cup \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (b_\lambda, c_\lambda)\right).$$

Притоа $a < 1$. Јасно, $\varphi(a) \notin V'$.
Притоа V' не е сврзано (зошто?) и неговите компоненти на сврзаност се $\{(1,0)\}$ и секоја отсечка, од непрекинатоста на φ и сврзаноста на $[0,a)$ добиваме дека $\varphi([0,a)) = \{(1,0)\}$. Но и $[0,a]$ е сврзано, па неговата слика мора да е сврзано. Следува дека $\varphi([0,a]) = \{(1,0)\}$, што е контрадикција со $\varphi(a) \notin V'$.

в) Да ја разгледаме околината V' на $(1,0)$ од б). Тогаш секоја околина $U' \subseteq V'$ на $(1,0)$ не е сврзана (слично како што не е сврзана и V'). Значи, V' нема подоколина што е сврзана, па Y не е локално сврзан.

8.24. а) Бидејќи X е хомеоморфен со $[-1,1]$ (со хомеоморфизмот $f(x)=(0,x)$) следува пат сврзаност и сврзаност на X. Нека $\left(a,\sin\frac{1}{a}\right)$, $\left(b,\sin\frac{1}{b}\right)\in Y$ и нека $a<b$. Пресликувањето $g:[a,b]\to Y$ дефинирано со $g(x)=\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)$ е непрекинато, па постои пат меѓу $\left(a,\sin\frac{1}{a}\right)$ и $\left(b,\sin\frac{1}{b}\right)$ во Y. Значи, и Y е пат сврзан, следува дека е и сврзан.

б) Да претпоставиме спротивно, дека постојат отворени, непразни дисјунктни множества U и V во $X\cup Y$ така што $X\cup Y=U\cup V$. Тогаш, заради сврзаноста на X и Y важи $X\subseteq U$, $Y\subseteq V$ (или обратно). Бидејќи $(0,0)\in X\subseteq U$ и U е отворено во $X\cup Y$ следува дека постои $\varepsilon>0$ така што $T((0,0),\varepsilon)\cap(X\cup Y)\subseteq U$, т.е. $(T((0,0),\varepsilon)\cap(X\cup Y))\cap V=\varnothing$. Но, постои $n_0\in\mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n_0\pi}<\varepsilon$, па точката

$$\left(\frac{1}{n_0\pi},\sin n_0\pi\right)=\left(\frac{1}{n_0\pi},0\right)\in T((0,0),\varepsilon)\cap Y\subseteq T((0,0),\varepsilon)\cap V,$$

што е контрадикција со $U\cap V=\varnothing$. Значи, $X\cup Y$ е сврзан.

в) Да претпоставиме дека $X\cup Y$ е пат сврзан. Значи постои непрекинато пресликување $f:[0,1]\to X\cup Y$ така што

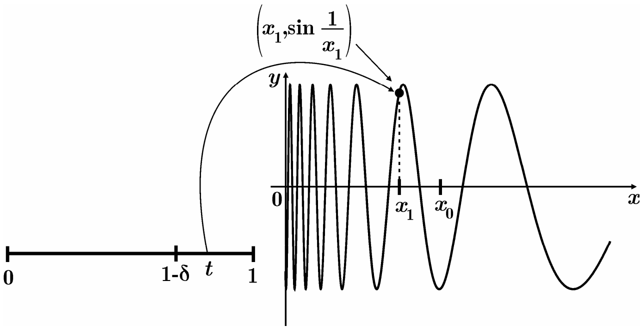
$$f(1)=(0,1)\in X \text{ и } f(0)\in Y.$$

Бидејќи f е непрекинато во 1, за $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$ постои $1>\delta>0$ така што од $x\in[1-\delta,1]$ следува дека $f(x)\in T\left((0,1),\frac{1}{2}\right)\cap(X\cup Y)$. (1)

Нека $f(1-\delta)=(x_0,y_0)$. Нека f_1 е рестрикција на пресликувањето f на $[1-\delta,1]$, т.е. $f_1=f\,|_{[1-\delta,1]}$ а $p_x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е проекција на x-оската. Бидејќи f_1 и p_x се непрекинати, следува дека и нивната композиција е непрекината. т.е. $g=p_xf_1:[1-\delta,1]\to\mathbb{R}$ е непрекината. Бидејќи

$$g(1)=p_x(f_1(1))=p_x(f(1))=p_x(0,1)=0 \text{ и}$$
$$g(1-\delta)=p_x(f_1(1-\delta))=p_x(f(1-\delta))=p_x(x_0,y_0)=x_0,$$

следува дека $0, x_0 \in g\left([1-\delta,1]\right)$. Од (пат) сврзаноста на $[1-\delta,1]$ добиваме дека $g\left([1-\delta,1]\right)$ е интервал и уште $[0,x_0] \subseteq g\left([1-\delta,1]\right)$. Со други зборови, множеството од x-координати на точките од $f\left([1-\delta,1]\right)$ го содржи интервалот $[0,x_0]$. Значи, за секој $x_1 \in (0,x_0]$ постои $t \in [1-\delta,1]$



така што $f(t) = \left(x_1, \sin\dfrac{1}{x_1}\right)$. Но, постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\dfrac{1}{2n_0\pi - \frac{\pi}{2}} < x_0$, па ако се избере $x_1 = \dfrac{1}{2n_0\pi - \frac{\pi}{2}}$ ќе добиеме $x_1 \in (0,x_0]$, па за него постои $t \in [1-\delta,1]$ така шт Бидејќи $t \in [1-\delta,1]$ од (1) следува дека мора да важи $f(t) \in T\left((0,1),\dfrac{1}{2}\right)$, што не е точно, бидејќи точката $\left(\dfrac{1}{2n_0\pi - \frac{\pi}{2}}, -1\right)$ лежи на правата $y=-1$. Добивме контрадикција, па $X \cup Y$ не е пат сврзан.

8.25. Да претпоставиме спротивно, дека постои компонента C таква што $C \cap U \neq \varnothing$ и $C \cap X \setminus U \neq \varnothing$. Множествата U и $X \setminus U$ се отворени во X, па множествата $C \cap U$ и $C \cap X \setminus U$ се отворени и дисјункни во C и $(C \cap U) \cup (C \cap X \setminus U) = C$, што не е можно заради сврзаноста на C.

8.26. Нека Q е компонента на сврзаност на U и нека $x \in Q \subseteq U \subseteq X$. Бидејќи X е локално сврзан, постои сврзана околина V_x на x така што $x \in V_x \subseteq U$. Бидејќи $Q \cup V_x$ е сврзано множество што ја содржи x и се содржи U, а Q е максималното сврзано множество што ја содржи x и се содржи во U следува дека $Q \cup V_x \subseteq Q$, т.е. $V_x \subseteq Q$. Значи Q е отворено.

8.27. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $\overline{U} \setminus U = \varnothing$. Тогаш U е и затворено. Значи во X постои отворено-затворено множество кое е непразно и различно од X. Тоа е во контрадикција со сврзаноста на X. Значи $\overline{U} \setminus U \neq \varnothing$.

8.28. Нека $y \in Y$ е произволен и нека V е произволна околина на y. Пресликувањето f е сурјекција, па постои $x \in X$ така што $y = f(x)$. Од непрекинатоста на f следува дека $U = f^{-1}(V)$ е околина на x. Бидејќи X е локално сврзан, следува дека x има сврзна околина $U' \subseteq U$. Заради отвореноста на f следува дека $f(U')$ е отворено, а заради непрекинатоста добиваме дека $f(U')$ е сврзано. Уште

$$f(U') \subseteq f(U) \subseteq ff^{-1}(V) = V,$$

па бараната сврзана околина на y е $f(U')$.

8.29. Не.

Ако $X_1 = \{(0,y) | -1 \leq y \leq 1\}$ и $X_2 = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \middle| x \in (0,1]\right\}$ се потпростори од $\mathbb{R}^2$ со вообичаената топологија, тогаш тие се пат сврзани, и се најголеми со тоа својство. Значи, се и компоненти на пат сврзаност ($X = X_1 \cup X_2$ не е пат сврзан). Заради $\overline{X_2} = X$ следува дека X_2 не е затворено. И во секоја околина на произволна точка од X_1 има точка од X_2, па следува дека X_1 не е отворен во X.

Да забележиме дека X_2 е отворен во X, а X_1 е затворен.

8.30. Бидејќи f не е константна следува дека $f(X)$ има барем два елементи a и b. Нека $a < b$. Заради сврзаноста на X и непрекинатоста на f следува дека $f(X)$ е сврзан, па мора да го содржи и целиот интервал $[a.b]$. Значи, $f(X)$ е непреброив, па следува дека и X е непреброив.

8.31. Нека x_0 е една точка од X, и нека $f : X \to \mathbb{R}$ е дефинирано со $f(x) = d(x_0, x)$. Пресликувањето d е непрекинато заради тоа што $f(x) = d(x, \{x_0\})$, а $d(x, \{x_0\})$ е непрекинато. Притоа, f не е константно пресликување бидејќи X има барем уште една точка $y_0 \neq x_0$, па $f(x_0) = 0$ и $f(y_0) = d(x_0, y_0) > 0$. Од претходната задача следува дека X е непреброив.

8.32. Нека $C_x \in C(X)$ е компонента на точката x, а нека $C_{f(x)}$ е компонента на $f(x)$. Бидејќи $f(C_x)$ е сврзано множество кое пто ја содржи $f(x)$, а $C_{f(x)}$ е компонента следува дека $f(C_x) \subseteq C_{f(x)}$. Дефинираме $f^*(C_x) = C_{f(x)}$.

Ќе докажеме дека f^* е добро дефинирано.

Нека $C_x = C_y$. Тогаш $x \in C_y$, па $f(x) \in f(C_y) \subseteq C_{f(y)}$. Од друга страна $f(x) \in C_{f(x)}$. Добивме дека $C_{f(x)} \cap C_{f(y)} \neq \varnothing$, па слеудва дека $C_{f(x)} = C_{f(y)}$, т.е. $f^*(C_x) = f^*(C_y)$.

Забелешка. Ако $f = 1_X$ тогаш јасно е дека

$$f^* = {1_{C(X)}}^* = 1_{C(X)}.$$

8.33. Нека $C_x \in C(X)$. Тогаш од дефиницијата на индуцираното пресликување добиваме

$$\begin{aligned}(gf)^*(C_x) &= C_{gf(x)} = C_{g(f(x))} = g^*\left(C_{f(x)}\right) = \\ &= g^*(f^*(C_x)) = (g^* f^*)(C_x)\end{aligned}$$

па важи $(gf)^* = g^* f^*$.

8.34. Нека $f : X \to Y$ е хомеоморфизам. Тогаш и $f^{-1} : Y \to X$ е хомеоморфизам. Заради $f^{-1}f = 1_X$ и $ff^{-1} = 1_Y$ за пресликувањата f^* и f^{-1*} важи

$$f^{-1*} f^* = 1_{C(X)} \text{ и } f^* f^{-1*} = 1_{C(Y)},$$

па f^* и f^{-1*} се биекции.

8.35. а) Да претпоставиме дека постои хомеоморфизам $f:[0,1)\to(0,1)$ и нека $f(0)=a$. Тогаш и

$$f_1=f\,|_{[0,1)\setminus\{0\}}:[0,1)\setminus\{0\}\to(0,1)\setminus\{a\}$$

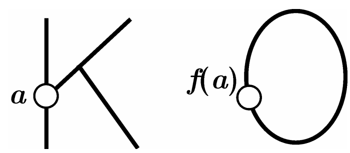
е хомеоморфизам, па

$$f_1{}^*:C([0,1)\setminus\{0\})\to C((0,1)\setminus\{a\})$$

е биекција. Но тоа не е можно зато што $C([0,1)\setminus\{0\})$ има еден елемент а $C((0,1)\setminus\{a\})$ има два.

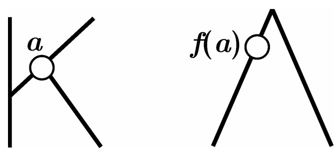
б) Слично како а), ако $f:S^1\to(0,1)$ е хомеоморфизам, и за $a\in S^1$ важи $f(a)=b$ ќе добиеме дека има биекција меѓу $C((0,1)\setminus\{b\})$ и $C(S^1\setminus\{a\})$, што не е можно заради тоа што $C(S^1\setminus\{a\})$ има еден ечемент, а $C((0,1)\setminus\{b\})$ има два.

в) Нека $f:\mathsf{K}\to\mathsf{O}$ е хомеоморфизам и нека $a\in\mathsf{K}$ е како на цртежот. Повтроно индуцираното пресликување е биекција. Добиваме контрадикција со тао што $C(\mathsf{K}\setminus\{a\})$ има два елементи а $C(\mathsf{O})$ има еден.



г) Нека $a\in\mathsf{K}$ е како на цртежот и $f:\mathsf{K}\setminus\{a\}\to\Lambda\setminus\{f(a)\}$ е хомеоморфизам. Има биекција од $C(\mathsf{K}\setminus\{a\})$ во

$$C(\Lambda\setminus\{f(a)\}).$$



Но тоа не е можно, заради тоа што $C(\mathsf{K}\setminus\{a\})$ има три елементи, а $C(\Lambda\setminus\{f(a)\})$ има еден или два.

9. ХОМОТОПИЈА. ХОМОТОПСКИ ТИП

9.1. Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \{x_0\}$ е дефинирано со $f(x) = x_0$, за секој $x \in \mathbb{R}^2$, и нека $g : \{x_0\} \to \mathbb{R}^2$ е дефинирано со $g(x_0) = x_0$. Тогаш $gf : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, па од конвексноста на $\mathbb{R}^2$ следува дека gf и $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2}$ се хомотопни, т.е. $gf \simeq \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2}$. Од друга страна $(fg)(x_0) = x_0$, па $fg = \mathbf{1}_{\{x_0\}}$ и следува $fg \simeq \mathbf{1}_{\{x_0\}}$. Значи, $\mathbb{R}^2 \simeq \{x_0\}$.

9.2. Нека $f : C \to S$ и $g : S \to C$ се пресликувања дефинирани со $f(x,y,z) = (x,y,0)$ и $g(x,y,0) = (x,y,0)$. Јасно е дека f и g се непрекинати.
Притоа, за $f, g : X \to S^n$ имаме $(gf)(x,y,z) = g(x,y,0) = (x,y,0)$.
Нека $I = [0,1]$. Дефинираме пресликување

$$H : C \times I \to C \text{ со } H(x,y,x,t) = (x,y,zt).$$

Пресликувањето H е непрекинато и важи

$$H(x,y,z,0) = (x,y,0) = (gf)(x,y,z) \text{ и}$$
$$H(x,y,z,1) = (x,y,z) = \mathbf{1}_C(x,y,z).$$

Значи, $gf \simeq \mathbf{1}_C$.

Натаму, X, т.е. $fg = \mathbf{1}_S$, па и $fg \simeq \mathbf{1}_S$.

9.3. Нека $f : T \to S$ е дефинирано со

$$f(x,y) = \frac{(x,y)}{|(x,y)|} = \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

и $g : T \to S$ е дефинирано со $g(x,y) = (x,y)$. Заради $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(x) \neq -g(x)$, следува дека $f(x,y) \in S$. Јасно е дека двете пресликувања се непрекинати.
Притоа,

$$(gf)(x,y) = g\left(\frac{(x,y)}{|(x,y)|}\right) = g\left(\frac{x}{|(x,y)|}, \frac{y}{|(x,y)|}\right) = \frac{(x,y)}{|(x,y)|}.$$

Дефинираме $H : T \times I \to T$ со $H\big((x,y),t\big) = \left(\dfrac{t}{\big|(x,y)\big|} - t + 1\right)(x,y)$.

Јасно е дека H е непрекинато и

$$H\big((x,y),0\big) = (x,y) = 1_T(x,y),$$

$$H\big((x,y),1\big) = \frac{1}{\big|(x,y)\big|}(x,y) = (gf)(x,y).$$

Следува $gf \simeq 1_T$.

Од друга страна $fg = 1_S$, па $fg \simeq 1_S$. Следува дека $T \simeq S$.

9.4. Заради тоа што f не е сурјекција постои $p \in S^2 \setminus f(X)$. Нека $c : X \to S^2$ е константно пресликување така што $c(x) = (x_0, y_0, z_0)$. Бидејќи $S^2 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^2$, можеме да сметаме дека $f, c : X \to \mathbb{R}^2$. Бидејќи $\mathbb{R}^2$ е конвексен следува дека $f \simeq c$.

9.5. Заради $X \simeq Y$ постојат $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ така што $gf \simeq 1_X$ и $fg \simeq 1_Y$. Нека е хомотопија меѓу fg и 1_Y, т.е. $x \in X$ и $H(y,1) = fg(y)$. Од сврзаноста на X следува дека и $f(X)$ е сврзан, па постои компонента на сврзаност C на Y така што $f(X) \subseteq C$. Да претпоставиме дека Y има барем уште една компонента на сврзаност D. Значи $D \cap C = \varnothing$. Заради непрекинатоста на H и сврзаноста на D и I, па и на $D \times I$ следува дека $H(D \times I)$ е сврзано.

Од $H(D \times \{0\}) = 1_Y(D) = D$ следува $H(D \times I) \cap D \neq \varnothing$, па заради тоа што D е компонента на сврзаност добиваме $H(D \times I) \subseteq D$.

Слично, од

$$H(D \times \{1\}) = fg(D) = f(g(D)) \subseteq f(X) \subseteq C$$

следува $H(D \times I) \cap C \neq \varnothing$, па и C е компонента и добиваме

$$H(D \times I) \subseteq C.$$

Добивме контрадикција со $C \cap D = \varnothing$. Значи Y има само една компонента на сврзаност, т.е. Y е сврзан.

Слично на претходново се докажува и дека ако $X \simeq Y$ и X е сврзан, следува дека и Y е сврзан.

9.6. Нека $f : Y \to X$ е дефинирано со $f(x,y) = (x,0)$ и $g : X \to Y$ е дефинирано со $g(x,0) = (x,0)$. Јасно е дека f и g се непрекинати. Притоа $fg(x,0) = f(x,0) = (x,0) = 1_X(x,0)$.
Значи $fg = 1_X$, па и $fg \simeq 1_X$.
Дефинираме пресликување $H : Y \times I \to Y$ со $H((x,y),t) = (x,yt)$.
Пресликувањето H е непрекинато и важи

$$H((x,y),0) = (x,0) = g(x,0) = gf(x,y) \text{ и}$$
$$H((x,y),1) = (x,y) = 1_Y(x,y).$$

Значи H е хомотопија која ги сврзува 1_Y и gf. Значи $gf \simeq 1_Y$.

9.7. Нека $f : X \times I \to X$ е дефинирано со $f(x,t) = x$ и $g : X \to X \times I$ е дефинирано со $g(x) = (x,0)$.
Тогаш $gf : X \times I \to X \times I$ и важи

$$gf(x,t) = g(f(x,t)) = g(x) = (x,0).$$

Дефинираме пресликување $H : (X \times I) \times I \to X \times I$ со

$$H(x,t,s) = (x,ts).$$

Пресликувањето H е непрекинато и важи $H(x,t,0) = (x,0) = gf(x,t)$ и $H(x,t,1) = (x,t) = 1_{X\times I}(x,t)$. Значи, $gf \simeq 1_{X\times I}$.
Од друга страна $fg(x) = f(x,0) = x = 1_X(x)$, па $fg = 1_X$. Следува $fg \simeq 1_X$. Докажавме дека $X \simeq X \times I$.

Сега, нека $f_1 : X \times \mathbb{R}^n \to X$ е дефинирано со $f_1(x,\bar{x}) = x$ и $g_1 : X \to X \times \mathbb{R}^n$ е дефинирано со $g(x) = (x,\bar{0})$, каде $\bar{x} = (x_1,\dots,x_n)$.
Јасно е дека f_1 и g_1 се непрекинати. Тогаш $g_1 f_1 : X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^n$ и $g_1 f_1(x,\bar{x}) = g_1(f_1(x,\bar{x})) = g_1(x) = (x,\bar{0})$.
Дефинираме пресликување $H : (X \times \mathbb{R}^n) \times I \to X \times \mathbb{R}^n$ со

$$H(x,\bar{x},s) = (x,s\bar{x}).$$

Пресликувањето H е непрекинато и $H(x,\bar{x},0) = (x,\bar{0}) = g_1 f_1(x,\bar{x})$ и $H(x,\bar{x},1) = (x,\bar{x}) = 1_{X\times\mathbb{R}^n}(x,\bar{x})$. Значи, $g_1 f_1 \simeq 1_{X\times\mathbb{R}^n}$.
Слично како претходно $f_1 g_1(x) = f_1(x,\bar{0}) = x = 1_X(x)$, па $f_1 g_1 = 1_X$.
Следува $f_1 g_1 \simeq 1_X$, па $X \simeq X \times \mathbb{R}^n$.

9.8. Нека X и Y се простори со индискретна топологија и нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ се произволни пресликувања. Заради тоа што X и Y се индискретни, следува дека f и g се непрекинати. Ќе докажеме дека $f \simeq g$.
Дефинираме пресликувања

$$H_1 : X \times I \to X \text{ со } H_1(x,t) = \begin{cases} x, \ 0 \le t < 1 \\ gf(x), \ t = 1 \end{cases} \text{ и}$$

$$H_2 : Y \times I \to Y \text{ со } H_2(y,t) = \begin{cases} y, \ 0 \le t < 1 \\ fg(y), \ t = 1 \end{cases}.$$

Заради индискретноста на X и Y следува дека H_1 и H_2 се непрекинати. Притоа $H_1(x,0) = x = 1_X(x)$ и $H(x,1) = gf(x)$. Следува $gf \simeq 1_X$. Слично $H_2(y,0) = y = 1_Y(y)$ и $H_2(y,1) = fg(y)$, па следува дека $fg \simeq 1_Y$.
Да забележиме дека од ова следува дека кардиналниот број не е хомотопска инваријанта, т.е. два простори кои имаат ист хомотопски тип не мора да имаат ист кардинален број. Ова е точно кај хомеоморфните простори.

9.9. а) Нека $f_a \simeq g_a$, за секој $a \in A$ и нека $H_a : X_a \times I \to Y_a$ е хомотопијата меѓу нив. Значи, $H_a(x,0) = f_a(x)$ и $H_a(x,1) = g_a(x)$. Нека $X = \prod_{a \in A} X_a$ и $Y = \prod_{a \in A} Y_a$. Дефинираме пресликување $H : X \times I \to Y$ со $H\big((x_a | a \in A), t\big) = \big(H_a(x_a, t) | a \in A\big)$. Нека p_a е проекцијата од Y на Y_a.

Бидејќи $p_a H\big((x_a | a \in A), t\big) = p_a\big(H_a(x_a, t) | a \in A\big) = H_a(x_a, t)$ е непрекинато следува дека H е непрекинато.
Заради

$$\begin{aligned} &H\big((x_a | a \in A), 0\big) = \big(H_a(x_a, 0) | a \in A\big) = \\ &= \big(f_a(x_a) | a \in A\big) = F\big(x_a | a \in A\big) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &H\big((x_a | a \in A), 1\big) = \big(H_a(x_a, 1) | a \in A\big) = \\ &= \big(g_a(x_a) | a \in A\big) = G\big(x_a | a \in A\big) \end{aligned}$$

следува дека $F \simeq G$.

б) Бидејќи f_a е хомотопска еквиваленција за секој $a \in A$, постојат непрекинати пресликувања $h_a : Y_a \to X_a$ така што $f_a h_a \simeq 1_{Y_a}$ и $h_a f_a \simeq 1_{X_a}$, за секој $a \in A$. Нека H е производот на пресликувањата $\{h_a | a \in A\}$, а 1_X и 1_Y се производите на единичните пресликувања 1_{X_a} и 1_{Y_a}, соодветно. Јасно е дека 1_X и 1_Y се единечни пресликувања на X и , соодветно.

Тогаш $FH(y_a | a \in A) = F(h_a(y_a) | a \in A) = (f_a h_a(y_a) | a \in A)$, па FH е производот на пресликувањата $\{f_a h_a | a \in A\}$. Заради $f_a h_a \simeq 1_{Y_a}$, од а) следува дека $FH \simeq 1_Y$. Слично, $HF \simeq 1_X$. Значи е хомотопска еквиваленција.

9.10. Нека $Y = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\overline{0}\}$, каде $\overline{0}$ е нулата во $\mathbb{R}^{n+1}$ и нека $i : S^n \to Y$ е инклузијата. Дефинираме пресликувања $f_1, g_1 : X \to Y$ со $f_1 = if$ и $g_1 = ig$. Јасно, f_1 и g_1 се непрекинати. Нека $H : X \times I \to Y$ е дефинирано со $H(x,t) = (1-t)f_1(x) + tg_1(x)$, за секои $x \in X$, $t \in I$. Заради $f(x) \neq -g(x)$ за секој $x \in X$, следува дека $f_1(x) \neq -g_1(x)$. Ако постои $t \in I$ и $x \in X$ така што $(1-t)f_1(x) + tg_1(x) = \overline{0}$, тогаш ќе следува дека $(1-t)f(x) + tg(x) = \overline{0}$. Значи $\overline{0}$ лежи на отсечката меѓу $f(x)$ и $g(x)$, што противречи на условот на задачата.

Значи $H : X \times I \to Y$ е добро дефинирано. Дефинираме $q : Y \to S^n$ со $q(\overline{x}) = \dfrac{\overline{x}}{|\overline{x}|}$, каде $|\overline{x}| = d(0, \overline{x})$ во $\mathbb{R}^{n+1}$. Ова пресликување е добродефинирано ($\overline{0} \notin Y$ и $\left|\dfrac{\overline{x}}{|\overline{x}|}\right| = 1$, па $q(\overline{x}) \in S^n$). Сега имаме $qH : X \times I \to S^n$ е непрекинато и

$$qH(x,0) = q(f_1(x)) = \frac{f_1(x)}{|f_1(x)|} = f_1(x) = if(x) = f(x) \text{ и}$$

$$qH(x,1) = q(g_1(x)) = \frac{g_1(x)}{|g_1(x)|} = g_1(x) = ig(x) = g(x).$$

Значи, qH е хомотопија меѓу f и g.

9.11. Бидејќи f и g не се сурјекции постојат $x_1, x_2 \in S^n$ така што $x_1 \notin f(X)$ и $x_2 \notin f(Y)$. Нека $c_1, c_2 : X \to S^n$ се дефинирани со $c_1(x) = -x_1$ и $c_2(x) = -x_2$, за секој $x \in X$. Пресликувањата c_1 и c_2 се непрекинати и $f(x) \neq x_1 = -c_1(x)$ и $g(x) \neq x_2 = -c_2(x)$, за секој $x \in X$, па од претходната задача следува дека $f \simeq c_1$ и $g \simeq c_2$.

Ако $-x_1 \neq x_2$, добиваме $c_1(x) \neq -c_2(x)$, за секој $x \in X$, па од претходната задача следува дека $c_1 \simeq c_2$, па заради транзитивноста на релацијата „$\simeq$“ следува дека $f \simeq g$.

Ако, пак, $-x_1 = x_2$, тогаш да избереме едно
$x_3 \in S^n \setminus \{x_1, x_2\}$ така што $x_3 \neq -x_1$ и $x_3 \neq -x_2$.
Нека $c_3 : X \to S^n$ е дефинирано со $c_3(x) = x_3$ за секој $x \in X$. Тогаш $c_1(x) = -x_1 \neq x_3 = c_3(x)$ за секој $x \in X$, па од претходната задача следува $c_1 \simeq c_3$. Слично, $c_2 \simeq c_3$. Од транзитивноста на „$\simeq$“ следува дека $f \simeq g$.

9.12. Нека X е контрактибилен. Значи постои $x_0 \in X$ така што $c_{x_0} \simeq 1_X$, каде $c_{x_0} : X \to X$ е константното пресликување дефинирано со $c_{x_0}(x) = x_0$, за секој $x \in X$. Нека $f : X \to \{p\}$ е пресликување (единствено). Јасно, f е непрекинато, и нека $g : \{p\} \to X$ е пресликување дефинирано со $g(p) = x_0$. И g е непрекинато и важи $fg(p) = f(x_0) = p = 1_{\{p\}}(p)$, па следува $fg = 1_{\{p\}}$, т.е. $fg \simeq 1_{\{p\}}$.
За $gf : X \to X$ важи $gf(x) = g(p) = x_0 = c_{x_0}(x)$. Значи $gf = c_{x_0}$, па и $gf \simeq c_{x_0}$. Оттука $gf \simeq c_{x_0} \simeq 1_X$, па следува дека $X \simeq \{p\}$.
Обратно, нека $X \simeq \{p\}$. Бидејќи пресликувањето $f : X \to \{p\}$ е единствено,следува дека постои $g : \{p\} \to X$ така што $fg \simeq 1_{\{p\}}$ и $gf \simeq 1_X$. Нека $g(p) = x_0$. Тогаш $gf(x) = g(p) = x_0 = c_{x_0}(x)$.

Следува дека $gf \simeq c_{x_0}$. Оттука имаме $c_{x_0} \simeq gf \simeq 1_X$, па X е контрактибилен.

9.13. Нека $\{X_a | a \in A\}$ е фамилија контрактибилни простори. Според претходната задача постојат едноелементни простори $\{\{x_a\} | a \in A\}$ така што $X_a \simeq \{x_a\}$, за секој $a \in A$, и притоа $f_a : X_a \to \{x_a\}$ е хомотопска еквиваленција. Следува дека производот $F : \prod_{a \in A} X_a \to \prod_{a \in A} \{x_a\}$ на фамилијата пресликувања $\{f_a | a \in A\}$ е хомотопска еквиваленција. Но $\prod_{a \in A} \{x_a\}$ се состои од една точка, т.е. $\prod_{a \in A} \{x_a\} = \{(x_a | a \in A)\}$, па следува контрактибилност на $\prod_{a \in A} X_a$.

9.14. Нека $Y \subseteq X$ е ретракт на X и нека $r : X \to Y$ е ретракција. Значи r е непрекинато пресликување такво што $r(y) = y$, за секоја $y \in Y$. Бидејќи X е контрактибилен, следува дека постои $x_0 \in X$ така што $c_{x_0} \simeq 1_X$. Нека $H : X \times I \to X$ е хомотопија меѓу 1_X и c_{x_0}, т.е. $H(x,0) = 1_X(x) = x$ и $H(x,1) = c_{x_0}(x) = x_0$.

Нека $H_1 = H|_{Y \times I}$. Пресликувањето H_1 е непрекинато (рестрикција на непрекинато), па и $G = rH_1 : Y \times I \to Y$ е непрекинато. Притоа за секој $y \in Y$ важи $G(y,0) = r(H_1(y,0)) = r(H(y,0)) = r(y) = 1_Y(y)$ и $G(y,1) = r(H_1(y,1)) = r(H(y,1)) = r(x_0) = y_0 = c_{y_0}(y)$.

Значи, $1_Y \simeq c_{y_0}$, па Y е контрактибилен.

9.15. Нека $H : X \times I \to Y$ е хомотопија меѓу f и g, т.е. $H(a,0) = f(a)$ и $H(a,1) = g(a)$, за секој $a \in X$.

Нека $C_x \in C(X)$ е произволен. Тогаш множеството $C_x \times I$ е сврзано во $X \times I$ и од непрекинатоста на H следува дека и $H(C_x \times I)$ е сврзано во Y. Притоа, од $x \in C(X)$ следува дека

$$f(x) = H(x,0) \in H(C_x \times I) \text{ и } g(x) = H(x,1) \in H(C_x \times I).$$

Но $f(x) \in C_{f(x)}$, па следува дека $C_{f(x)} \cap H(C_x \times I) \neq \varnothing$. Бидејќи двете множества се сврзани, а $C_{f(x)}$ е компонента следува дека

$$H(C_x \times I) \subseteq C_{f(x)}.$$

Слично, заради $g(x) \in C_{g(x)}$ следува дека $C_{g(x)} \cap H(C_x \times I) \neq \varnothing$, па од тоа што $C_{g(x)}$ е компонента, следува $H(C_x \times I) \subseteq C_{g(x)}$. Значи $C_{f(x)} \cap C_{g(x)} \supseteq H(C_x \times I) \neq \varnothing$. Бидејќи двете $C_{f(x)}$ и $C_{g(x)}$ се компоненти, следува $C_{f(x)} = C_{g(x)}$.

Добивме дека за секој $C_x \in C(X)$ важи $C_{f(x)} = C_{g(x)}$, т.е. $f*(C_x) = g*(C_x)$, па $f* = g*$.

9.16. Нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ се непрекинати пресликувања такви што $gf \simeq 1_X$ и $fg \simeq 1_Y$.

Од претходната задача следува дека $(gf)* = 1_X*$ и $(fg)* = 1_Y*$, а од својствата на индуцираното пресликување добиваме

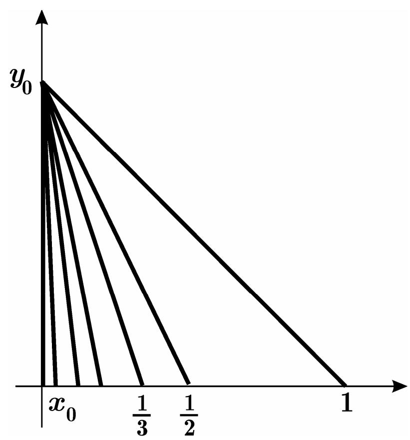
$$g*f* = (gf)* = 1_X* = 1_{C(X)} \text{ и } f*g* = (fg)* = 1_Y* = 1_{C(Y)}.$$

Оттука следува дека $f*$ и $g*$ се биекции.

9.17. Не мора. Следува од претходната задача. Да ги разгледаме просторите $\mathbb{R}^2$ и $\{x_0\}$ од задача 9.1. Важи $\mathbb{R}^2 \simeq \{x_0\}$. Нека $c \in \mathbb{R}^2$. Тогаш $f(c)\, \mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$ има една компонента а $\{x_0\} \setminus \{x_0\} = \varnothing$, па не може да има биекција меѓу едноелементно и празното множество.

9.18. Нека пресликувањето $F : X \times I \to X$ е дефинирано со

$$F(x,t) = (1-t)x + ty_0.$$



Заради конвексноста на секој X_n следува дека F е добро дефинирано. Јасно е дека F е непрекинато. Уште важи $F(x,0) = x$ и $F(x,1) = y_0$, за секој $x \in X$.

Заради конвексноста на Y пресликувањето

$$G : X \times I \to X$$

дефинирано со

$$G(x,t) = tx_0 + (1-t)y_0 = (0, 1-t)$$

е добро дефинирано. Уште е непрекинато и важи

$$G(x,0) = y_0 \text{ и } G(x,1) = x_0 .$$

Да го разгледаме пресликувањето $H : X \times I \to X$ дефинирано со

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ G(x,2t-1), \dfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Ова пресликување е добро дефинирано и непрекинато, заради тоа што множествата $X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ се затворени во $X \times I$ и

$$F\left(x, 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = F(x,1) = y_0 \text{ и } G\left(x, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) = G(x,0) = y_0 .$$

Притоа, $H(x,0) = F(x,0) = x$ и $H(x,1) = G(x,1) = x_0$, за секој $x \in X$.

Според тоа, H е хомотопија меѓу единичното и константното пресликување во x_0.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Шекутковски, *Топологија*, Природно-математички факултет, Скопје, 2002.
[2] M. Mršević, *Zbirka rešenih zadataka iz topologije*, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
[3] O. Ya. Viro, O. A. Ivanov, N. Yu. Netsvetaev, V. M. Kharlamov, *Elementary Topolgy Problem Texbook*, AMS, 2008.
[4] А. В. Архангельский. В. И. Пономарев: *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*, Наука, Москва, 1974.
[5] L. A. Streen, J. A. Seebach Jr, *Counterexamples in topology*, Dover Publications, Inc. New York, 1995.
[6] Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, *Контрпримеы в анализе*, Мир, Москва, 1967.
[7] S. Lipschutz, *Theory and problems of general topology*, Shaum's outline series, McGraw-Hill book company, 1965.
[8] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston 1966.
[9] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Москва, Мир, 1986.

СОДРЖИНА