2019

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО

ВЕКТОРСКА И ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

- Беоеви
- Детерминанти
- Матрици
- Векторска алгебра
- Аналитичка геометрија во простор
- Специјални површини

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО

ВЕКТОРСКА И ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

(броеви, детерминанти, матрици, векторска алгебра, аналитичка геометрија во простор, специјални површини)

Скопје, 2019

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
проф. д-р Зоран Мисајлески,
вонреден професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Рецензенти:
проф. д-р Никита Шекутковски
редовен професор на ПМФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Валентина Миовска
редовен професор на ПМФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Силвана Петрушева
редовен професор на ГФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Љупчо Лазаров
редовен професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Техничка обработка:
проф. д-р Зоран Мисајлески

Лектура на македонски јазик:
м-р Соња Попоска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

512.64(075.8)(076)

МИСАЈЛЕСКИ, Зоран
Решени задачи по векторска и линеарна алгебра : (броеви, детерминанти, матрици, векторска алгебра, аналитичка геометрија во простор, специјални површини) / Зоран Мисајлески. - Скопје : Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје, 2019

Начин на пристап (URL):
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41.
- Текст во PDF формат, содржи 307 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 13.12.2019. -
Библиографија: стр. 304-305

ISBN 978-9989-43-435-8

а) Линеарна алгебра - Вектори - Високошколски учебници - Вежби COBISS.MK-ID 111862794

Предговор

Збирката задачи „Решени задачи по Векторска и линеарна алгебра“ го опфаќа материјалот од векторската и линеарна алгебра што се изучува на Градежниот факултет.

Збирката можат да ја користат и студентите од останатите технички факултети бидејќи во нивните предмети од областа математика се изучува ист или сличен материјал, како и учениците од средното образование на природно-математичката насока кои го изучуваат предметот „Линеарна алгебра со аналитичка геометрија“.

Темите на кои припаѓаат задачите, како и теоремите, формулите и правилата кои се користат во збирката, се според учебникот: „Векторска и линеарна алгебра“ од истиот автор.

Најголем дел од решените задачи се формирани во периодот 2004 - 2006 година, при подготовката на материјал за спроведување на вежбите од страна на авторот. Во 2007 година дел од задачите се обработени на компјутер и дел од нив се ставени на веб-страницата на факултетот, а во 2012 се преработени и дополнети приближно до оваа форма и како такви им се даваат на студентите за подготовка на предметот, а ги користат и асистентите и авторот како материјал за држење на вежбите и дел од предавањата. Најголем дел од задачите се зададени на испитите и парцијалните испити по предметите Математика, Математика I и Математика II, и тоа во периодот од 2006-2014 година, додека подоцна, од 2014 до денес, се задаваат како дел од испитните задачи со исти или сменети цифри по предметите Математика и Математика I.

Авторот му се заблагодарува на Љупчо Петров, демонстратор на предметите Математика и Математика I за учебните 2018 / 2019 и 2019 / 2020, кој го прочита материјалот и исправи некои технички пропусти.

Ова е прво издание на збирката и авторот ќе им биде благодарен на читателите кои со своите забелешки ќе придонесат во подобрувањето на квалитетот на учебникот во наредните изданија.

Зоран Мисајлески

Збирката е посветена на мајка ми Верче

1. РЕАЛНИ БРОЕВИ

1.0. Вовед во реалните броеви*

1.0.1. Аксиоматика на реалните броеви*

Задача 1-5. Докажи ги во $\mathbb{R}$ тврдењата:

1) Неутралниот елемент во однос на собирањето е единствен;
2) Секој $a \in \mathbb{R}$, има единствен спротивен елемент $-a$;
3) $-(-a) = a$, $-(a+b) = -a-b$;
4) Равенките $a+x=b$ и $y+a=b$, имаат единствени решенија во $\mathbb{R}$;
5) $a+b=a+c \Rightarrow b=c$ (закон за кратење од лево) и $b+a=c+a \Rightarrow b=c$ (закон за кратење од десно).

Решение. 1) Бројот 0 е неутрален елемент бидејќи за секој $x \in \mathbb{R}$, $0+x=x+0=x$. Нека постојат два неутрални елементи 0 и 0_1. Бидејќи 0 е неутрален елемент важи $0+0_1=0_1+0=0_1$. Бидејќи 0_1 е неутрален елемент важи $0_1+0=0+0_1=0$. Следува $0=0_1$.

2) Секој $a \in \mathbb{R}$ има спротивен елемент $-a \in \mathbb{R}$ т.е. елемент за кој $a+(-a)=-a+a=0$. Ќе ја покажеме единственоста. Нека и a_1 е спротивен елемент на a, т.е. $a+a_1=a_1+a=0$. Тогаш

$$a_1 = a_1+0 = a_1+(a+(-a)) = (a_1+a)+(-a) = 0+(-a) = -a.$$

3) Со примена на аксиомите за множеството реални броеви добиваме

$$-(-a) = -(-a)+0 = -(-a)+(-a+a) = (-(-a)+(-a))+a = 0+a = a.$$

$$\text{Од } (-a-b)+(a+b) = (-b+(-a))+(a+b) =$$
$$-b+(-a+a)+b = -b+0+b = -b+b = 0.$$

Следува $-a-b=-(a+b)$.

4) Ако равенката $a+x=b$ ја собереме со $-a$ имаме,

$$-a+(a+x) = -a+b \Leftrightarrow (-a+a)+x = b-a \Leftrightarrow x = b-a.$$

Ако $a+x_1=b$ за некој елемент x_1, тогаш спроведувајќи ја истата постапка добиваме $x_1=b-a$, од каде следува $x_1=x$.

Единственоста на решението на втората равенка $y+a=b$ се покажува аналогно.

5) Имаме

$$a+b=a+c \Rightarrow -a+(a+b)=-a+(a+c) \Rightarrow$$
$$(-a+a)+b=(-a+a)+c \Rightarrow 0+b=0+c \Rightarrow b=c .$$

Законот за кратење од десно следува заради комутативноста на собирањето.

Задача 6-8. Докажи дека во $\mathbb{R}$ важи:
6) $a\cdot 0=0\cdot a=0$, $ab=0$ ако и само ако $a=0$ или $b=0$;
7) $a(-b)=(-a)b=-(ab)$, $(-a)(-b)=ab$;
8) $(a-b)c=ac-bc$, $c(a-b)=ca-cb$.

Решение. 6) Од $0+0=0$ следува $a\cdot 0=a(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$ од каде $a\cdot 0=0$.

Равенството $0\cdot a=0$ е исполнето заради комутативниот закон на множењето.

Нека $ab=0$ и $a\neq 0$. Тогаш,

$$a^{-1}(ab)=a^{-1}\cdot 0 \Leftrightarrow (a^{-1}a)b=0 \Leftrightarrow 1\cdot b=0 \Leftrightarrow b=0 .$$

Аналогно ако $ab=0$ и $b\neq 0$ следува дека $a=0$.

Обратно ако $a=0$ или $b=0$, тогаш $ab=0$.

7) Од $0=0\cdot b=(a+(-a))b=ab+(-a)b$ следува $(-a)b=-ab$. Аналогно се покажува другото равенство.

Со користење на првиот дел од задачата добиваме

$$(-a)(-b)=-a(-b)=-(-(ab))=ab .$$

8) Имаме

$$(a-b)c=(a+(-b))c=ac+(-b)c=ac-bc .$$

Заради комутативноста на множењето точна е и втората формула.

Задача 9-13. Докажи ги во $\mathbb{R}$ следниве својства:

9) Неутралниот елемент во однос на множењето 1, е единствен;

10) Секој $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, има единствен инверзен елемент a^{-1};

11) $(a^{-1})^{-1}=a$, $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$;

12) Равенките $ax=b$ и $ya=b$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{R}$, имаат единствени решенија во $\mathbb{R}$;

13) $ab=ac\wedge a\neq 0\Rightarrow b=c$ (закон за кратење од лево) и
$ba=ca\wedge a\neq 0\Rightarrow b=c$ (закон за кратење од десно).

Решение. Доказот е аналоген како доказот на тврдењата во задачите 1-5.

Задача 14-20. Докажи дека во $\mathbb{R}$ важи
14) $a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq 0$; 15) $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b \Leftrightarrow a-b \leq 0$;
16) $a^2 = a \cdot a \geq 0$; 17) $1 > 0$;
18) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$; 19) Ако $a \leq b$ и $c \geq 0$ тогаш $ac \leq bc$;
20) $0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$.

Решение. 14) Од $a \geq 0$ и аксиома 14 добиваме

$$a + (-a) \geq 0 + (-a),$$

од каде според аксиома 2 имаме $0 \geq -a$, што е исто со $-a \leq 0$. Аналогно се покажува обратната насока.

15) Имаме

$$a \leq b \Leftrightarrow a + (-a) \leq b + (-a) \Leftrightarrow 0 \leq b + (-a) \Leftrightarrow -b + 0 \leq -b + (b + (-a)) \Leftrightarrow$$
$$-b \leq (-b + b) + (-a) \Leftrightarrow -b \leq -a \Leftrightarrow a + (-b) \leq a + (-a) \Leftrightarrow a - b \leq 0.$$

16) Ако $a > 0$, според аксиома 15 имаме $a^2 = a \cdot a > 0$. Ако $a < 0$, тогаш од а), $a = -b$ и $b \geq 0$ од каде имаме

$$a^2 = (-b)(-b) = b^2 > 0.$$

17) Имаме $1 \neq 0$ бидејќи за секое $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$ (6) и $a \cdot 0 = 0$ Од (6) и в) следува $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$. Значи, $1 \neq 0$ и $1 \geq 0$, па следува $1 > 0$.

18) Нека $a > 0$ и $a^{-1} < 0$. Тогаш, $-a^{-1} > 0$ и

$$0 < a \cdot \left(-a^{-1}\right) = -a \cdot a^{-1} = -1,$$

од каде добиваме $1 < 0$, што не е можно. Следува, $a^{-1} > 0$.

19) Нека $a \leq b$ и $c \geq 0$, тогаш $b - a \geq 0$ и $c \geq 0$ од каде

$(b-a)c \geq 0 \Leftrightarrow bc - ac \geq 0 \Leftrightarrow bc \geq ac$, што е исто со $ac \leq bc$

20) Ако неравенсвото $a \leq b$ го помножиме со $a > 0$ и $b > 0$ имаме $a^2 \leq ab$ и $ab \leq b^2$, од каде следува дека $a^2 \leq b^2$.

Задача 21. Докажи дека множеството реални броеви е секаде густо, односно меѓу секои два реални броја постојат бесконечно многу.

Решение. Да претпоставиме спротивно, нека постојат два реални броја c и d меѓу кои се наоѓаат најмногу n реални броеви. Со помош на аксиома 13, броевите може да ги подредиме во низа $c \leq c_1 \leq \ldots \leq c_n \leq d$, така што меѓу секои два реални броја да не се наоѓа ниту еден друг.

Од друга страна, за произволни реални броеви a и b такви што $a<b$, од аксиома 14 следува, $a+a<a+b$ и $a+b<b+b$, од каде имаме

$$2a<a+b<2b \Rightarrow 2^{-1}(2a)<2^{-1}(a+b)<2^{-1}(2b)\Rightarrow$$

$$\left(2^{-1}2\right)a<\frac{a+b}{2}<\left(2^{-1}2\right)b \Rightarrow a<\frac{a+b}{2}<b .$$

Бројот $\frac{a+b}{2}$ се наоѓа меѓу броевите a и b, што противречи на претпоставката. Следува, меѓу секои два реални броеви постојат бесконечно многу реални броеви.

Неколку задачи со реални броеви

Задача 22. Докажи дека $\frac{7^{2n}-1}{48}$ е природен број за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Со помош на формулата за разлика од n-ти степен,

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

добиваме

$$7^{2n}-1=\left(7^2-1\right)\left(7^{2n-1}+7^{2n-2}+...+7+1\right)=48\left(7^{2n-1}+7^{2n-2}+...+7+1\right).$$

Следува, $\frac{7^{2n}-1}{48}$ е природен број за секој $n\in\mathbb{N}$.

Задача 23. Определи ги целите броеви, $n\in\mathbb{N}$, за кои количникот $\frac{3n^2-3n+20}{n-1}$ исто така е цел број.

Решение. Бидејќи

$$\frac{3n^2-3n+20}{n-1}=\frac{3n(n-1)+20}{n-1}=3n+\frac{20}{n-1},$$

бројот $\frac{3n^2-3n+20}{n-1}$ е цел ако и само ако бројот $\frac{20}{n-1}$ е цел број, односно $n-1|20$. Делители на 20 се $\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\pm10,\pm20$. Бидејќи $n-1$ е делител на 20, $n\in\{-19,-9,-4,-3,-1,0,2,3,6,6,11,21\}$.

Задача 24-25. Разложи ги на фактори изразите:
24) $3x^2+5x-8$; 25) $6x^2-x-2$.

Решение. Разложувањето ќе го направиме според формулата
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$
каде x_1 и x_2 се решенијата на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$.

24) Ја решаваме равенката $3x^2+5x-8=0$. Имаме
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{6} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{6} \Leftrightarrow$$
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm 11}{6} \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{16}{6}=-\frac{8}{3}.$$
Следува $3x^2+5x-8=3(x-1)\left(x+\frac{8}{3}\right)=(x-1)(3x+8)$.

25) Бидејќи
$$6x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{12} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 7}{12} \Leftrightarrow$$
$$x_1=\frac{8}{12}=\frac{2}{3},\ x_2=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2}$$
добиваме
$$6x^2-x-2=6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(3x-2)(2x+1).$$

Задача 26. Нека a и b се позитивни реални броеви и $a<b$. Докажи дека $\sqrt{b}-\sqrt{a}<\sqrt{b-a}$.

Решение. Со еквивалентни трансформации неравенството што треба да го покажеме ќе го сведеме до еквивалентно на него неравенство, чија точност е очигледна. Со квадрирање на неравенството добиваме,
$$\sqrt{b}-\sqrt{a}<\sqrt{b-a} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2<b-a \Leftrightarrow b-2\sqrt{b}\sqrt{a}+a<b-a \Leftrightarrow$$
$$-2\sqrt{b}\sqrt{a}<-2a \Leftrightarrow \sqrt{b}\sqrt{a}>a=\sqrt{a}\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{b}>\sqrt{a} \Leftrightarrow b>a$$

Последното неравенство е секогаш точно. Заради еквивалентноста на чекорите, точно е и првото неавенство.

Задача 27-28. Упрости ги изразите:

27) $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2\sqrt{a^3}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$;

27) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}\right)\left(a-3+2a^{-1}\right)-1:\left(\dfrac{3a-4}{2a+3}\right)^0$.

Решение. 27) $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2\sqrt{a^3}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}=$

$$\frac{\sqrt{a^3}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{a}\,b-\sqrt{b^3}+2\sqrt{a^3}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}+\frac{3\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}=$$

$$\frac{3\sqrt{a^3}-3a\sqrt{b}+3\sqrt{a}\,b}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=$$

$$\frac{3\sqrt{a}\left(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b\right)}+\frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{3\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=3.$$

28) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}\right)\left(a-3+2a^{-1}\right)-1:\left(\dfrac{3a-4}{2a+3}\right)^0=$

$$\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}(a-2)}-\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}(a-1)}\right)\left(a-3+\frac{2}{a}\right)-1=\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a-1}\right)\left(a-3+\frac{2}{a}\right)-1=$$

$$\frac{a^2-a-\left(a^2-2a\right)}{(a-2)(a-1)}\frac{a^2-3a+2}{a}-1=\frac{a}{(a-2)(a-1)}\frac{(a-2)(a-1)}{a}-1=1-1=0,$$

при што искористивме дека $a^2-3a+2=(a-2)(a-1)$ бидејќи решенијата на квадратната равенка $a^2-3a+2=0$ се

$$a_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}\Leftrightarrow a_{1/2}=\frac{3\pm1}{2}\Leftrightarrow a_1=2,\ a_2=1.$$

Задача 29-30. Докажи дека:
29) $\sqrt{2}$ е ирационален број;30) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ е ирационален број.

Решение. 29) Нека $\sqrt{2}$ е рационален број. Тогаш

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}, \text{ каде } p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N} \text{ и } НЗД(p,q)=1.$$

Со квадрирање на идентитетот добиваме $2=\frac{p^2}{q^2}$ или $2q^2=p^2$.

Следува 2 е делител на p^2, од каде $2|p$, односно $p=2p_1$ за некој цел број p_1. Ако замениме во равенството, имаме

$$2q^2=(2p_1)^2 \Leftrightarrow 2q^2=4{p_1}^2 \Leftrightarrow q^2=2{p_1}^2.$$

Од последното равенство следува дека

$$2|q^2 \Rightarrow 2|q \Rightarrow q=2q_1 \text{ за некој цел број } q_1.$$

Значи добивме дека $2|p$ и $2|q$, што противречи на претпоставката дека броевите p и q се заемно прости.

30) Нека $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ е рационален број. Тогаш, $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$ за некој рационален број $r\neq 0$. Тогаш,

$$\sqrt{3}=r-\sqrt{2} \Leftrightarrow 3=\left(r-\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3=r^2-2r\sqrt{2}+2 \Leftrightarrow 2r\sqrt{2}=r^2-1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}=\frac{r^2-1}{2r}.$$

Добивме $\sqrt{2}$ е рационален број, што не е точно. Следува, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ е ирационален број.

Задача 31. Докажи дека збир од рационален и ирационален број е ирационален број.

Решение. Нека r е рационален број, i е ирационален број и нивниот збир $r+i=r_s$ е рационален број. Тогаш би добиле дека $i=r_s-r$ е рационален број, како разлика на два рационални броеви, што не е можно.

Следува дека збир од рационален и ирационален број е ирационален број

.

1.0.2. Равенки и неравенки со апсолутна вредност

Задача 1. Докажи го равенството $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.

Решение. Ако тргнеме да ја развиваме левата страна од равенството, имајќи предвид дека $|x|^2=x^2$, добиваме

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\frac{x^2+2x|x|+|x|^2}{4}+\frac{x^2-2x|x|+|x|^2}{4}=$$

$$\frac{2x^2+2|x|^2}{4}=\frac{2x^2+2x^2}{4}=x^2.$$

Задача 2. Упрости го изразот $|a^2-16|+(a+2)^2$, ако се знае дека $-4<a<4$.

Решение. Условот $-4<a<4$ е еквивалентен со $|a|<4$ односно $a^2<16$. Следува $a^2-16<0$, од каде имаме

$$|a^2-16|=-(a^2-16)=16-a^2. \text{ Затоа}$$

$$|a^2-16|+(a+2)^2=16-a^2+a^2+4a+4=20+4a=5(4+a).$$

Задача 3-6. Реши ги равенките

3) $|x+3|-|x-2|=5$; 4) $|x|-|2-x|+|x+1|=x$;

5) $||x-2|-2|=1$; 6) $|x^2-x-1|=|x-2|$.

Решение. 3) Имаме $x+3=0$ за $x=-3$ и $x-3=0$ за $x=2$. Формираме табела во која ги определуваме знаците на членовите $x+3$ и $x-2$.

$x\in$	$(-\infty,-3)$	$(-3,2)$	$(2,+\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$

1°. Нека $x\in(-\infty,-3]$. Тогаш, $x+3\le 0$ и $x-2<0$, па

$$|x+3|-|x-2|=5 \Leftrightarrow -(x+3)+(x-2)=5 \Leftrightarrow -5=5.$$

Значи, равенката нема решение за $x \in (-\infty,-3]$.

$2°$. Нека $x \in (-3,2]$. Тогаш $x+3>0$ и $x-2 \le 0$, па

$$|x+3|-|x-2|=5 \Leftrightarrow x+3+(x-2)=5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2.$$

Следува, $x=2$ е решение на равенката.

$3°$. Нека $x \in (2,+\infty]$. Тогаш $x+3>0$ и $x-2 \ge 0$, па

$$|x+3|-|x-2|=5 \Leftrightarrow x+3-x+2=5 \Leftrightarrow 5=5.$$

Равенката е исполнета за секоја вредност на променливата x. Следува дека секое $x \in (2,+\infty)$ е решение на равенката.

Значи, множеството решенија е $[2,+\infty)$.

4) Во следната табела, со помош на граничните точки -1, 0 и 2, ги определуваме интервалите на промена на знак на члeновите x, $2-x$ и $x+1$. Имаме

$x \in$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$-$

.

$1°$. За $x \in (-\infty,-1]$,

$$|x|-|2-x|+|x+1|=x \Leftrightarrow -x-(2-x)-(x+1)=x \Leftrightarrow$$

$$-x+x-2-x-1=x \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}.$$

Бидејќи $x=-\frac{3}{2} \in (-\infty,-1]$, следува дека е решение на равенката.

$2°$. За $x \in (-1,0]$.

$$|x|-|2-x|+|x+1|=x \Leftrightarrow -x-(2-x)+(x+1)=x \Leftrightarrow$$

$$-x+x-2+x+1=x \Leftrightarrow -1=0.$$

Добивме противречност. Следува, равенката нема решение на дадениот интервал.

$3°$. За $x \in (0,2]$.

$$|x|-|2-x|+|x+1|=x \Leftrightarrow x-(2-x)+(x+1)=x \Leftrightarrow$$

$$x-2+x+1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Следува дека $x=\frac{1}{2}$ е решение на равенката

$4°$. За $x \in (2,+\infty]$,

$$|x| - |2-x| + |x+1| = x \Leftrightarrow x+2-x+x+1 = x \Leftrightarrow 3 = 0 .$$

Равенката е противречна, па нема решение.

Следува, решенија на равенката се $-\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$.

5) Членот $x-2$ е позитивен ако $x > 2$, а негативен ако $x < 2$.

$1°$. Нека $x \in (-\infty,2]$. Тогаш,

$$||x-2|-2| = 1 \Leftrightarrow |-(x-2)-2| = 1 \Leftrightarrow |2-x-2| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|-x| = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 .$$

И двете вредности на променливата x, припаѓаат на интервалот $(-\infty,2]$, односно се решенија на равенката

$2°$. Нека $x \in (2,+\infty)$. Тогаш

$$||x-2|-2| = 1 \Leftrightarrow |x-2-2| = 1 \Leftrightarrow |x-4| = 1 \Leftrightarrow$$

$$x-4 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 5 ,\ x = 3 .$$

Следува $x = 3$ и $x = 5$ се решенија на равенката.

Значи, сите решенија на равенката се -1, 1, 3 и 5.

6) Имаме $x-2 > 0$ за $x > 2$ и $x-2 < 0$ за $x < 2$.

Бидејќи $x^2 - x - 1 = 0$ за

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6 ,\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}6 ,$$

и коефициентот пред x^2 е позитивен, следува дека

$$x^2 - x - 1 > 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \text{ и}$$

$$x^2 - x - 1 < 0 \text{ за } x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Заради прегледност, резултатите ги внесуваме во табела

$x \in$	$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$	$(2,+\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - x - 1$	$+$	$-$	$+$	$+$

.

Оттука,

1°. За $x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right]$,

$$|x^2 - x - 1| = |x - 2| \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = -(x-2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} .$$

Следува $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ се решенија на равенката.

2°. За $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$,

$$|x^2 - x - 1| = |x - 2| \Leftrightarrow -(x^2 - x - 1) = -(x-2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 .$$

Вредноста $x = 1$ е решение на равенката.

3°. За $x \in (2, +\infty)$,

$$|x^2 - x - 1| = |x - 2| \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = x - 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 .$$

Бидејќи $1 \notin (2, +\infty)$, во дадениот интервал равенката нема решение.

Конечно, решенијата на равенката се $-\sqrt{3}$, 1 и $\sqrt{3}$.

Задача 7-8. Реши ги неравенките: 7) $|x-2| < 3$; 8) $|x+3| \geq 4$.

Решение. 7) Имаме

$$|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2 \Leftrightarrow -1 < x < 5 .$$

8) $|x+3| \geq 4 \Leftrightarrow x + 3 \leq -4 \vee x + 3 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -7 \vee x \geq 1$.

Задача 9-10. Реши ги неравенките:

9) $|2x-5| > 1$; 10) $|3-x| < 2 + x$.

Решение. 9) Прв начин. Од дефиницијата за апсолутна вредност на $|2x-5| > 1$, добиваме

$$2x - 5 < -1 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2 \text{ или}$$
$$2x - 5 > 1 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3 .$$

Следува, решението на неравенката е множеството $\mathbb{R} \setminus [2, 3]$.

Втор начин. Ја решаваме комплементарната неравенка

$$|2x-5| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 5 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 5 \wedge 2x - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \wedge x \leq 3 .$$

Нејзиното решение е интервалот $[2,3]$, од каде бараното решение е $\mathbb{R}\setminus[2,3]$.

10) Имаме

$$|3-x|<2+x \Leftrightarrow -(2+x)<3-x<2+x \Leftrightarrow -2-x<3-x<2+x \Leftrightarrow$$

$$-2-x<3-x \wedge 3-x<2+x \Leftrightarrow -2<3 \wedge 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}.$$

Следува дека решението е интервалот $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Задача 11-14. Реши ги неравенките

11) $|x-4|+|2x-3|<1$; 12) $|x-1|+|x+2|>5$; 13) $\frac{3-x}{x-5}<1$; 14) $\left|\frac{2x+3}{3x-1}\right|\le 1$.

Решение. 11) Точките на промена на знак на членовите $x-4$ и $2x-3$ се соодведно $x=4$ и $x=\frac{3}{2}$. Ги определуваме интервалите на кои дадените членови имаат ист знак

$x\in$	$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},4\right)$	$(4,+\infty)$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$2x-3$	$-$	$+$	$+$

1°. За $x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ неравенката има вид

$$-(x-4)-(2x-3)<1 \Leftrightarrow -x+4-2x+3<1 \Leftrightarrow 6<3x \Leftrightarrow x>2.$$

2°. За $x\in\left(\frac{3}{2},4\right]$ неравенката е

$$-(x-4)+2x-3<1 \Leftrightarrow 4-x+2x-3<1 \Leftrightarrow x<1.$$

3°. За $x\in(4,+\infty)$,

$$x-4+2x-3<1 \Leftrightarrow 3x<8 \Leftrightarrow x<\frac{8}{3}.$$

Следува дека равенката нема решение за ниту една вредност на x, односно множеството решенија е празно множество.

12) Бидејќи $x-1=0$ за $x=1$ и $x+2=0$ за $x=-2$, имаме

$x\in$	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

.

1°. За $x\in(-\infty,-2]$

$$-(x-1)-(x+2)>5 \Leftrightarrow -x+1-x-2>5 \Leftrightarrow -2x>6 \Leftrightarrow x<-3$$

Следува $x\in(-\infty,-3)$.

2°. За $x\in(-2,1]$ неравенката е

$$-(x-1)+x+2>5 \Leftrightarrow -x+1+x+2>5 \Leftrightarrow 3>5\,.$$

Бидејќи исказот $3>5$ не е точен, неравенката нема решение во дадениот интервал.

3°. За $x\in(1,+\infty)$,

$$x-1+x+2>5 \Leftrightarrow 2x>4 \Leftrightarrow x>2\,.$$

Следува, $x\in(2,+\infty)$.

Конечно, решението на неравенката е множеството

$$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty).$$

13) Прв начин. За $x-5>0$ неравенката е еквивалентна со

$$3-x<x-5 \Leftrightarrow 8<2x \Leftrightarrow x>4\,,$$

односно решение е интервалот $(5,+\infty)$.

За $x-5<0$ неравенката е еквивалентна со

$$3-x>x-5 \Leftrightarrow 8>2x \Leftrightarrow x<4\,,$$

односно решение е интервалот $(-\infty,4)$.

Значи, решение на неравенката е множеството $\mathbb{R}\setminus[4,5]$.

Втор начин. Имаме

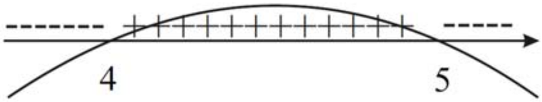
$$\frac{3-x}{x-5}<1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x-5}-1<0 \Leftrightarrow \frac{3-x-(x-5)}{x-5}<0 \Leftrightarrow \frac{8-2x}{x-5}<0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}8-2x<0\\ x-5>0\end{cases}\\ \begin{cases}8-2x>0\\ x-5<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4\\ x>5\end{cases}\\ \begin{cases}x<4\\ x<5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>5\\ x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty,4)\cup(5,+\infty).$$

Трет начин. $\dfrac{3-x}{x-5}<1 \Leftrightarrow \dfrac{8-2x}{x-5}<0 \Leftrightarrow (8-2x)(x-5)<0$

Решенија на равенката $(8-2x)(x-5)=0$ се

$$8-2x=0 \Leftrightarrow x=4\,,\ x-5=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ или } x=5\,.$$



Бидејќи членот пред x^2 е негативен, параболата $f(x)=(8-2x)(x-5)$ е свртена со темето надолу и има негативни вредности на интервалот $\mathbb{R}\setminus[4,5]$.

14) Неравенката $\left|\frac{2x+3}{3x-1}\right|\le 1$ е еквивалентна со системот неравенки $-1\le\frac{2x+3}{3x-1}\le 1$. Множиме со $3x-1$.

$1°$. За $3x-1>0$, односно $x>\frac{1}{3}$ добиваме

$$-(3x-1)\le\frac{2x+3}{3x-1}(3x-1)\le 3x-1 \Leftrightarrow 1-3x\le 2x+3\le 3x-1 \Leftrightarrow$$

$$-2\le 5x \wedge -x\le -4 \Leftrightarrow x\ge -\frac{2}{5}\wedge x\ge 4 \Leftrightarrow x\ge 4.$$

Следува дека решение е интервалот $[4,+\infty)$

$2°$. За $3x-1<0$, односно $x<\frac{1}{3}$, добиваме

$$1-3x\ge 2x+3\ge 3x-1 \Leftrightarrow -2\ge 5x\wedge 4\ge x \Leftrightarrow x\le -\frac{2}{5}\wedge x\le 4 \Leftrightarrow x\le -\frac{2}{5}.$$

Следува дека решение е интервалот $\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right]$.

Значи, конечното решение е множеството $\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right]\cup[4,+\infty)$.

Задача 15* (Предлог за регионален натпревар за втора година средно гимназиско образование). Определи ја вредноста на параметарот a, така што неравенката $\left|\frac{(a+2)x}{x^2-x+1}\right|<1$, да е исполнета за сите вредности на променливата x.

Решение. Прв начин. Ако $x=0$ неравенката е точна за секој реален број a.

Нека $x\ne 0$. Тогаш,

$$\left|\frac{(a+2)x}{x^2-x+1}\right|<1 \Leftrightarrow |a+2|<\left|\frac{x^2-x+1}{x}\right| \text{ и}$$

$$\left|\frac{x^2-x+1}{x}\right|=\frac{x^2-x+1}{|x|}=|x|+\frac{1}{|x|}-\operatorname{sgn} x \geq 2-1=1.$$

Притоа, за $x=1$ важи равенство. Искористивме дека

$$|x|+\frac{1}{|x|}=\left(\sqrt{|x|}-\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^2+2\geq 2, \text{ за } x\neq 0. \text{ Значи}$$

$$|a+2|<1 \Leftrightarrow -1<a+2<1 \Leftrightarrow -3<a<-1.$$

Втор начин. Неравенката $\left|\frac{(a+2)x}{x^2-x+1}\right|<1$ е еквивалентна со $-1<\frac{(a+2)x}{x^2-x+1}<1$. Бидејќи $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, имаме

$$-\left(x^2-x+1\right)<(a+2)x<x^2-x+1$$

Ако $x=0$, неравенката е точна за секој реален број a.

Ако $x>0$, неравенката е еквивалентна со

$$-x+1-\frac{1}{x}<a+2<x-1+\frac{1}{x} \Leftrightarrow -1-\left(x+\frac{1}{x}\right)<a<-3+x+\frac{1}{x}.$$

Бидејќи $x+\frac{1}{x}\geq 2$, од каде $-\left(x+\frac{1}{x}\right)\leq -2$, следува дека

$$-1-\left(x+\frac{1}{x}\right)\leq -3<a \text{ и } -3+x+\frac{1}{x}\geq -1>a.$$

За да биде равенката точна за секоја вредност на променливата $x>0$, треба $a\in(-3,-1)$.

Ако $x<0$, неравенката е еквивалентна со

$$-1-\left(x+\frac{1}{x}\right)>a>-3+x+\frac{1}{x}.$$

Бидејќи $x+\frac{1}{x}\leq -2$ од каде $-\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$, имаме

$$-1-\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 1>a \text{ и } -3+x+\frac{1}{x}\leq -5<a.$$

Следува за $x<0$, $a\in(-5,1)$. Значи, решението е интервалот $(-3,-1)$.

1.1. РЕАЛНИ БРОЕВИ

1.1.1. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

Задача 1. Докажи го равенството

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Решение. За $n=1$ го добиваме равенството $1=1^2$. Јасно, равенството е точно.

Претпоставуваме дека равенството е точно за $n=k$, т.е.

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2.$$

Треба да покажеме дека равенството е исполнето за $n=k+1$, односно дека $1+3+5+\ldots+2k+1=(k+1)^2$. Навистина, ако тргнеме од левата страна на равенството и ако ја искористиме индуктивната претпоставка, добиваме

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

Според принципот на математичка индукција, тврдењето е точно за секој природен број n.

Задача 2. Со помош на принципот на математичка индукција докажи дека

$$1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Решение. За $n=1$ имаме дека $1\cdot2=\frac{1\cdot2\cdot3}{3}$. Следува за $n=1$ тврдењето е точно.

Претпоставуваме дека равенството важи за $n=k$, односно дека $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

Тогаш за $n=k+1$, добиваме

$$1\cdot2+2\cdot3+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=$$

$$(k+1)\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=$$

$$(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},$$

од каде согласно принципот на математичка индукција, заклучуваме дека тврдењето е точно за секој $n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Докажи дека
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ за секој } n \in \mathbb{N},$$
користејќи го принципот на математичка индукција.

Решение. За $n = 1$ тврдењето е точно бидејќи $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Претпоставуваме дека равенството е точно за $n = k$, т.е.
$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$
Тогаш за $n = k+1$, имаме
$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$
$$(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = (k+1)^2\frac{k^2+4k+4}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Задача 4. Докажи дека, за секој природен број n важи равенството
$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Решение. За $n = 1$ имаме дека $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$, што е точно тврдење.

Претпоставуваме дека равенството е точно за $n = k$, односно
$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$
Треба да покажеме дека тврдењето е точно за $n = k+1$, односно
$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$ Имено,

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2k+1}\left(k+\frac{1}{2k+3}\right)=\frac{1}{2k+1}\frac{2k^2+3k+1}{2k+3}.$$

Со групирање, триномот $2k^2+3k+1$ ќе го претставиме како производ на два члена, од кои едниот да биде $k+1$. Имаме

$$2k^2+3k+1=\left(2k^2+2k\right)+(k+1)=2k(k+1)+(k+1)=(2k+1)(k+1).$$

Оттука,

$$\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}.$$

Следува deka тврдењето е точно и за $n=k+1$. Според принципот на математичка индукција тврдењето е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

Задача 5. Докажи го равенството

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. За $n=1$ равенството има облик

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2+3}{4\cdot 3}\ \text{ односно }\ \frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Нека важи равенството за $n=k$, односно

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot 3^k}$$

Тогаш за $n=k+1$, добиваме

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{k}{3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4\cdot 3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{4k+4-6k-9}{4\cdot 3^{k+1}}=\frac{3}{4}+\frac{-2k-5}{4\cdot 3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4\cdot 3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2(k+1)+3}{4\cdot 3^{k+1}},$$

што значи дека равенството е точно за секој $n=k+1$.

Задача 6. Докажи дека

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2},\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. За $n=1$ равенството има облик

$$1-\frac{1}{4}=\frac{1+2}{2+2}\Leftrightarrow\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Нека важи равенството за $n=k$, односно

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2k+2}.$$

Тогаш

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+2}{2k+2}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=$$

$$\frac{k+2}{2k+2}\frac{k^2+4k+4-1}{(k+2)^2}=\frac{k^2+4k+3}{(2k+2)(k+2)}=\frac{(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)+2}{2(k+1)+2},$$

односно равенството важи и за $n=k+1$. Според принципот на математичка индукција, равенството е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

Задача 7. Докажи дека $10^n+18n-28$ е делив со 27.

Решение. За $n=1$ имаме дека $10^1+18\cdot 1-28=0$ е делив со 27 бидејќи $0=27\cdot 0$.

Претпоставуваме дека тврдењето важи за $n=k$, односно

$$27\,|\,10^k+18k-28\Leftrightarrow 10^k+18k-28=27a \text{ за некој цел број } a.$$

Оттука, $10^k=27a-18k+28$.

Сега, за $n=k+1$, добиваме

$$10^{k+1}+18(k+1)-28=10\cdot 10^k+18k+18-28=$$

$$10(27a-18k+28)+18k-10=$$

$$10\cdot 27a-9\cdot 18k+270=27(10a-6k+10).$$

Согласно принципот на математичка индукција, тврдењето е точно за секој природен број n.

Задача 8. Покажи дека збирот од кубовите на три последователни природни броја

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 \text{ е делив со 9.}$$

Решение. Бројот $1^3+2^3+3^3=36$ е делив со 9. Следува дека равенството е точно за $n=1$.

Нека равенството е точно за $n=k$. Значи бројот

$$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3 \quad \text{е делив со 9,}$$

односно $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9a$ за некој природен број a. Тогаш,

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =$$
$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 3k^2 \cdot 3 + 3k \cdot 9 + 27 =$$
$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9k^2 + 27k + 27 =$$
$$9a + 9\left(k^2 + 3k + 3\right) = 9\left(a + k^2 + 3k + 3\right).$$

Следува дека бројот $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ е делив со 9, односно равенството е точно за $n = k+1$. Според принципот на математичка индукција тврдењето важи за сите природни броеви.

Задача 9. Докажи дека производот од 4 последователни природни броја $n(n+1)(n+2)(n+3)$ е делив со 24.

Решение. Бројот $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ е делив со 24.

Претпоставуваме дека бројот $k(k+1)(k+2)(k+3)$ е делив со 24. Тогаш,

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3).$$

Да ја разгледаме десната страна од равенството. Првиот собирок е делив со 24 од индуктивната претпоставка. Вториот собирок содржи производ од 3 последователни природни броја кои се деливи со 6, па вториот собирок е делив со $4 \cdot 6 = 24$. Оттука и збирот е делив со 24.

Значи равенството е точно и за $n = k+1$. Според принципот на математичка индукција равенството важи за сите природни броеви.

Задача 10. Докажи дека $\dfrac{13^{2n} - 1}{168}$ е природен број, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Со $P(n)$ да го означиме тврдењето $\dfrac{13^{2n} - 1}{168}$ е природен број.

$P(1)$ е точно тврдење бидејќи $\dfrac{13^2 - 1}{168} = \dfrac{168}{168} = 1$ е природен број.

Нека $P(k)$ е точно тврдење, односно нека $\frac{13^{2k}-1}{168}$ е природен број. Ќе покажеме дека $P(k+1)$ исто така е точно тврдење, односно дека $\frac{13^{2k+2}-1}{168}$ е природен број. Имено,

$$\frac{13^{2k+2}-1}{168}=\frac{13^{2k}\cdot 13^2-1}{168}=\frac{13^{2k}\cdot 169-1}{168}=\frac{13^{2k}\cdot(168+1)-1}{168}=$$

$$\frac{13^{2k}\cdot 168+13^{2k}-1}{168}=13^{2k}+\frac{13^{2k}-1}{168}$$

е природен број бидејќи е збир од два природни броја

$$13^{2k} \text{ и } \frac{13^{2k}-1}{168}.$$

Задача 11. Докажи го равенството

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^n=x\frac{x^n-1}{x-1}, \; x\neq 1, \; n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Тврдењето $x=x\frac{x^1-1}{x-1}$ т.е. $x=x$ е точно.

Нека е точно тврдењето $x+x^2+x^3+\ldots+x^k=x\frac{x^k-1}{x-1}$ за некој природен број $k\geq 1$. Тогаш,

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^k+x^{k+1}=x\frac{x^k-1}{x-1}+x^{k+1}=$$

$$x\left(\frac{x^k-1}{x-1}+x^k\right)=x\frac{x^k-1+x^{k+1}-x^k}{x-1}=x\frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$$

Следува дека тврдењето е точно и за бројот $k+1$. Според принципот на математичка индукција, тврдењето е точно за сите природни броеви.

Задача 12. Докажи го неравенството на Бернули $(1+x)^n\geq 1+nx$, за секој реален број $x>-1$, и природен број n.

Решение. За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $1+x\geq 1+x$.

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n=k$, односно

$$(1+x)^k \geq 1+kx .$$

Треба да покажеме дека тврдењето е точно за $n=k+1$, односно дека $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Навистина,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 =$$
$$1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x .$$

Од принципот на математичка индукција следува точноста на тврдењето за секој природен број n.

Задача 13. Со помош на математичка индукција докажи го идентитетот

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{2^2}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}},$$

за било кој реален број $x \neq \pm 1$ и број $n \in \mathbb{N}_0$.

Задача 14. Докажи го неравенството

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2,\ n \in \mathbb{N},\ n>1 .$$

Решение. Неравенството е точно за $n=2$ бидејќи,

$$4! = 24 < 64 = 2^4(2!)^2$$

За $n=k \geq 2$ нека важи $(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$.

Треба да покажеме дека неравенството е точно за $n=k+1$ односно дека $(2k+2)! < 2^{2k+2}((k+1)!)^2$. Имено,

$$(2k+2)! = (2k)!(2k+1)(2k+2) < 2^{2k}(k!)^2(2k+1)\frac{(2(k+1))^2}{2(k+1)}$$

$$= 2^{2k+2}((k+1)!)^2\,\frac{2k+1}{2k+2} < 2^{2k+2}((k+1)!)^2$$

Според принципот на математичка индукција неравенството е точно за секој $n \in \mathbb{N}, n>1$.

Задача 15. Докажи го неравенството, $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{n} < 3$ за секој природен број n.

Решение. За $n=1$, тврдењето е $\sqrt{6}<3$ и очигледно е точно.

Нека тврдењето е точно за $n=k$, односно

$$\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{k}<3 .$$

Следува $\underbrace{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{k}<6+3=9$. Ако го коренуваме последното ненегативно неравенство добиваме

$$\underbrace{\sqrt{6+\underbrace{\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}_{k}}}_{k+1}<\sqrt{6+3}=3 .$$

Последното неравенство е неравенството што се добива за $n=k+1$.

Според принципот на математичка индукција неравенството е точно за секој $n\in\mathbb{N}$.

Во следнава задача без примена на математичка индукција ќе се изведат сумите од првите n броеви, како и збирот од нивните квадрати и кубови.

Задача 16*. Пресметај ги сумите:

а) $1+2+\ldots+n$; б) $1^2+2^2+\ldots+n^2$; в) $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

Решение. **а)** Со собирање на идентитетите $(n+1)^2-n^2=2n+1$ за $n=1,2,\ldots,n$ добиваме

$$(n+1)^2-1^2=2(1+2+\ldots+n)+n \Leftrightarrow$$
$$n^2+2n=2(1+2+\ldots+n)+n \Leftrightarrow$$
$$2(1+2+\ldots+n)=n^2+n \Leftrightarrow 1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} .$$

$$2^2-1^2=2\cdot 1+1$$
$$3^2-2^2=2\cdot 2+1$$
$$\ldots$$
$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$
$$\overline{(n+1)^2-1^2=2(1+2+\ldots+n)+n}$$

б) Ги собираме идентитетите

$\left(n+1\right)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ за $n = 1,2,...,n$. Имаме

$$\left(n+1\right)^3 - 1^3 = 3\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) + 3\left(1 + 2 + ... + n\right) + n \Leftrightarrow$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) + 3\frac{n(n+1)}{2} + n,$$ од каде

$$3\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) = n^3 + 3n^2 + 2n - 3\frac{n(n+1)}{2} = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} =$$

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n\left(2n^2 + 3n + 1\right)}{2} = \frac{n \cdot 2\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

$$\left(2n^2 + 3n + 1 = 0 \Leftrightarrow n_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow n_1 = -\frac{1}{2},\ n_2 = -1\right)$$

Следува, $1^2 + 2^2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

$$\begin{array}{c} 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ ... \\ \left(n+1\right)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ \hline \left(n+1\right)^3 - 1^3 = 3\left(1^2 + ... + n^2\right) + 3\left(1 + ... + n\right) + n \end{array}$$

в) Од идентитетите $\left(n+1\right)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$, за $n = 1,2,...,n$ имаме

$$\begin{array}{c} 2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\ 3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ ... \\ \left(n+1\right)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \\ \hline \left(n+1\right)^4 - 1^4 = 4\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) + 4\left(1 + 2 + ... + n\right) + n \end{array}$$

или

$$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n$$

од каде

$$4\left(1^3 + 2^3 + ... + n^3\right) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) =$$

$$n\left(n^3+4n^2+6n+3-(n+1)(2n+1)-2(n+1)\right)=$$
$$n\left(n^3+4n^2+6n+3-\left(2n^2+3n+1\right)-(2n+2)\right)=$$
$$n\left(n^3+4n^2+6n+3-2n^2-3n-1-2n-2\right)=n\left(n^3+2n^2+n\right)=$$
$$n^2\left(n^2+2n+1\right)=n^2(n+1)^2 .$$

Следува $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Задача 17. Докажи го равенството

$$\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\ldots+\frac{2n}{n^2}=1+\frac{1}{n}, \text{ за секој } n\in\mathbb{N} .$$

Решение. Прв начин. За $n=1$, равенството е $\dfrac{2}{1^2}=1+\dfrac{1}{1}$, односно $2=2$.

Нека равенството е точно за $n=k$, односно

$$\frac{2}{k^2}+\frac{4}{k^2}+\ldots+\frac{2k}{k^2}=1+\frac{1}{k}.$$

Ако помножиме со k^2 добиваме,

$$2+4+\ldots+2k=k^2\left(1+\frac{1}{k}\right) \text{ или } 2+4+\ldots+2k=k^2+k .$$

Треба да го покажеме равенството за $n=k+1$, односно

$$\frac{2}{(k+1)^2}+\frac{4}{(k+1)^2}+\ldots\frac{2k}{(k+1)^2}+\frac{2(k+1)}{(k+1)^2}=1+\frac{1}{k+1}.$$

Тргнувајќи од левата страна, добиваме

$$\frac{2}{(k+1)^2}+\frac{4}{(k+1)^2}+\ldots\frac{2k}{(k+1)^2}+\frac{2(k+1)}{(k+1)^2}=\frac{2+4+\ldots+2k+2(k+1)}{(k+1)^2}=$$
$$\frac{k^2+k+2k+2}{(k+1)^2}=\frac{k^2+3k+2}{(k+1)^2}=\frac{(k+2)(k+1)}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{k+1}=1+\frac{1}{k+1}.$$

Втор начин. Користејќи го збирот $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, бараното равенство ќе го покажеме директно:

$$\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\ldots+\frac{2n}{n^2}=(1+2+\ldots+n)\frac{2}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2}\frac{2}{n^2}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}.$$

Задача 18*. (Предлог за регионален натпревар за четврта година од средното гимназиско образование) Докажи дека за секој природен број $n \geq 2$, постојат различни природни броеви x_1, x_2, ..., x_n, такви што $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2013}$.

Решение. Задачата ќе ја докажеме со методот на математичка индукција. За $n=2$,

$$\frac{1}{2013}=\frac{1}{3\cdot 671}=\frac{1}{674}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{671}\right)=\frac{1}{3\cdot 674}+\frac{1}{671\cdot 674},$$

т.е. равенството е исполнето.

Нека тврдењето важи за $n=k$, односно постојат различни природни броеви x_1, x_2, ..., x_k, такви што $\frac{1}{2013}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_k}$.

Тогаш $\frac{1}{2013}=\frac{1}{4026}+\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+...+\frac{1}{2x_k}$.

Јасно $x_i \neq 2013$, односно $2x_i \neq 4026$ за сите $i=1,2..,n$ и $2x_1$, $2x_2$, ..., $2x_k$ се различни природни броеви. Следува дека тврдењето важи и за $n=k+1$.

1.1.2. БИНОМНА ФОРМУЛА

Задача 1. Степенувај го биномот $(2x+5)^4$.

Решение. Користејќи ја биномната формула добиваме

$$(2x+5)^4=(2x)^4+\binom{4}{1}(2x)^3\cdot 5+\binom{4}{2}(2x)^2\cdot 5^2+\binom{4}{3}2x\cdot 5^3+5^4,$$

каде биномните коефициенти се $\binom{4}{1}=\binom{4}{3}=4$ и $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$.

Следува

$$(2x+5)^4=16x^4+4\cdot 8x^3\cdot 5+6\cdot 4x^2\cdot 25+4\cdot 2x\cdot 125+625=$$
$$16x^4+160x^3+600x^2+1000x+625.$$

Задача 2. Најди го седмиот член во развојот на биномот $\left(x+\sqrt{2}\right)^{12}$.

Решение. Според формулата за определување на $k+1$-от член во развојот на биномот $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, добиваме

$$T_7=\binom{12}{6}x^{12-6}\left(\sqrt{2}\right)^6=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}x^6 2^3=7\cdot4\cdot3\cdot11\cdot8x^6=7392x^6.$$

Задача 3. Најди го средниот член во развојот на биномот $(x-2)^8$.

Решение. Развојот на биномот има 9 члена. Следува дека средниот член е петтиот,

$$T_5=\binom{8}{4}x^{8-4}\left(-2\right)^4=16\frac{\cancel{8}\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}x^4=16\cdot7\cdot2\cdot5x^4=1120x^4.$$

Задача 4. Определи го членот во развојот на биномот $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ што не ја содржи променливата x.

Решение. Користејќи ја формулата за определување на $k+1$-от член од развиениот бином, добиваме

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=$$

$$\binom{9}{k}\left(x^2\right)^{9-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=\binom{9}{k}x^{18-2k}\left(-1\right)^k\frac{1}{x^k}=\left(-1\right)^k\binom{9}{k}x^{18-3k}.$$

За членот што не ја содржи променливата x важи $18-3k=0$, односно $k=6$. Следува седмиот член,

$$T_{6+1}=\left(-1\right)^6\binom{9}{6}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}=84,$$

не ја содржи променливата x.

Задача 5. Најди го средниот член во развојот на биномот $\left(a^{-2}\sqrt{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$ ако биномниот коефициентот на петтиот спрема биномниот коефициентот на третиот член се однесуваат како 14:3.

Задача 6. Определи го четвртиот член од развиениот бином $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\frac{x^{-2}}{7}}\right)^{y}$ ако x и y ги задоволуваат релациите

$$\binom{y}{x+1}:\binom{y}{x}:\binom{y}{x-1}=1:3:5.$$

Решение. Ги запишуваме корените во биномот во степенски вид

$$\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\frac{x^{-2}}{7}}\right)^{y}=\left(x^{\frac{1}{4}}+7^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{y}.$$

Од условот $\binom{y}{x+1}:\binom{y}{x}=1:3$, добиваме

$$\frac{\frac{y!}{(x+1)!(y-x-1)!}}{\frac{y!}{x!(y-x)!}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{y-x}{x+1}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3y-3x=x+1\Leftrightarrow y=\frac{4x+1}{3}.$$

Од условот $\binom{y}{x}:\binom{y}{x-1}=3:5$, добиваме

$$\frac{\frac{y!}{x!(y-x)!}}{\frac{y!}{(x-1)!(y-x+1)!}}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\frac{y-x+1}{x}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow 5y-5x+5=3x\Leftrightarrow y=\frac{8x-5}{5}.$$

Со елиминирање на променливата y од двете равенки, добиваме

$$\frac{4x+1}{3}=\frac{8x-5}{5}\Leftrightarrow 20x+5=24x-15\Leftrightarrow 4x=20\Leftrightarrow x=5.$$

Оттука, $y=\frac{8\cdot 5-5}{5}=7$. Следува дека четвртиот член од развиениот бином е

$$T_4=T_{3+1}=\binom{7}{3}\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{7-3}\left(7^{-\frac{1}{3}}5^{-\frac{2}{3}}\right)^{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 5\cdot 7^{-1}\cdot 5^{-2}=7\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}=1.$$

Задача 7. Биномниот коефициент на третиот член од развиениот бином $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\right)^n$ е 10. Најди го членот што го содржи $x^{-\frac{5}{3}}$.

Решение. Степенот на биномот n ќе го најдеме од условот, биномниот коефициент на третиот член од развиениот бином е 10.

$$\binom{n}{2}=10 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}=10 \Leftrightarrow$$

$$n(n-1)=20 \Leftrightarrow n(n-1)=5\cdot 4 \Leftrightarrow n=5 .$$

Следува дека секој член од развојот има форма

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{5}{k}x^{\frac{1}{3}(5-k)}x^{-\frac{4k}{3}}=\binom{5}{k}x^{\frac{5-5k}{3}} .$$

Бидејќи го бараме членот што го содржи $x^{-\frac{5}{3}}$, треба да важи $\frac{5-5k}{3}=-\frac{5}{3}$, односно $5-5k=-5$ или $k=2$. Добивме дека третиот член

$$T_3=\binom{5}{2}x^{-\frac{5}{3}}=\frac{5\cdot 4}{2}x^{-\frac{5}{3}}=10x^{-\frac{5}{3}},$$

ги исполнува условите од задачата.

Задача 8. Збирот од биномните коефициенти на првиот и третиот член од биномот $\left(2^x+4^{-x}\right)^n$ е 29, а четвртиот член е 4 пати поголем од третиот. Најди го x.

Решение. Степенот на биномот n ќе го најдеме од условот, збирот од првиот и третиот биномен коефициент е 29.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}=29 \Leftrightarrow 1+\frac{n(n-1)}{2}=29 \Leftrightarrow 2+n^2-n=58 \Leftrightarrow n^2-n-56=0$$

$$\Leftrightarrow n_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 56}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{1\pm 15}{2} \Leftrightarrow n_1=8 \vee n_2=-7 .$$

Значи, $n=8$. Од условот, четвртиот член е 4 пати поголем од третиот, добиваме $\binom{n}{3}\left(2^x\right)^{n-3}\left(4^{-x}\right)^3=4\binom{n}{2}\left(2^x\right)^{n-2}\left(4^{-x}\right)^2$. Ако замениме за $n=8$, имаме

$$\binom{8}{3}\left(2^x\right)^{8-3}\left(\left(2^2\right)^{-x}\right)^3=4\binom{8}{2}\left(2^x\right)^{8-2}\left(\left(2^2\right)^{-x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8!}{3!5!}\cdot 2^{5x}\cdot 2^{-6x}=4\cdot\frac{8!}{2!6!}\cdot 2^{6x}\cdot 2^{-4x} \Leftrightarrow \frac{1}{3}2^{5x}2^{-6x}=4\frac{1}{6}2^{6x}\cdot 2^{-4x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}2^{-x}=\frac{2}{3}2^{2x} \Leftrightarrow 2^{-x}=2^{2x+1} \Leftrightarrow -x=2x+1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

Следува дека бројот $-\frac{1}{3}$ ги исполнува барањата на задачата.

Задача 9. Биномните коефициенти на четвртиот и шестиот член од развојот на биномот $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$ се однесуваат како $5:18$. Определи го членот во развојот што не го содржи x.

Решение. Бидејќи четвртиот и шестиот биномен коефициент се однесуваат како $5:18$, добиваме

$$\binom{n}{3}:\binom{n}{5}=5:18 \Leftrightarrow \frac{\frac{n!}{3!\cdot(n-3)!}}{\frac{n!}{5!\cdot(n-5)!}}=\frac{5}{18} \Leftrightarrow (n-3)(n-4)=72 \Leftrightarrow$$

$$n^2-7n+12=72 \Leftrightarrow n^2-7n-60=0 \Leftrightarrow$$
$$(n-12)(n+5)=0 \Leftrightarrow n=12 \vee n=-5.$$

Бидејќи n е природен број, решението $n=-5$ го отфрламе. Значи $n=12$. Имајќи предвид дека $k+1$-от член има облик

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{12}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}\left(\sqrt{x}\right)^k=\binom{12}{k}x^{k-12}\cdot x^{\frac{k}{2}}=\binom{12}{k}x^{\frac{3k}{2}-12}$$

и степенот на x во развојот на биномот е 0, добиваме

$$\frac{3k}{2}-12=0 \text{ т.е. } k=8.$$

Значи бараниот член е деветтиот член и тој изнесува

$$T_9 = \binom{12}{8} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 495\,.$$

Задача 10. Третиот член од развојот на биномот $\left(x + x^{\lg x}\right)^5$ е 10^6. Најди го x.

Решение. Третиот член во развојот на биномот е

$$T_3 = \binom{5}{2} x^3 x^{2\lg x} = 10 x^{3+2\lg x}\,.$$

Од условот на задачата $T_3 = 10^6$ ја добиваме равенката

$$10x^{3+2\lg x} = 10^6 \Leftrightarrow x^{3+2\lg x} = 10^5 \Leftrightarrow \lg x^{3+2\lg x} = \lg 10^5 \Leftrightarrow$$

$$(3 + 2\lg x)\lg x = 5 \Leftrightarrow 2\lg^2 x + \lg x - 5 = 5$$

Со смената $t = \lg x$, последната равенка ја трансформираме во равенката

$$2t^2 + 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{4} \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{-3 \pm 7}{4} \Leftrightarrow t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{5}{2}\,.$$

Следува дека $\lg x = 1$ и $\lg x = -\frac{5}{2}$, од каде имаме

$$x_1 = 10\,,\ x_2 = 10^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{100\sqrt{10}}\,.$$

Задача 11. Најди го членот со најголем коефициент во развојот на биномот $(5x+6)^{18}$.

Решение. Да разгледаме два последователни члена во развиениот облик на биномот

$$T_{k+1} = \binom{18}{k} 5^{18-k} 6^k \quad \text{и } T_k = \binom{18}{k-1} 5^{19-k} 6^{k-1}\,.$$

Членот T_{k+1} е поголем од членот T_k ако

$$T_{k+1} > T_k \Leftrightarrow \frac{18!}{k!(18-k)!} 5^{18-k} 6^k > \frac{18!}{(k-1)!(19-k)!} 5^{19-k} 6^{k-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{k(k-1)!(18-k)!} 5^{18-k} 6 \cdot 6^{k-1} > \frac{1}{(k-1)!(19-k)(18-k)!} 5 \cdot 5^{18-k} 6^{k-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{6}{k} > \frac{5}{19-k} \overset{1}{\Leftrightarrow} 114-6k > 5k \Leftrightarrow 11k < 114 \Leftrightarrow k < \frac{114}{11} = 10 + \frac{4}{11}.$$

Да забележиме дека еквиваленцијата (1) е точна бидејќи $k \in \{1,2,...,18\}$, односно членот $19-k > 0$. Значи за $k \le 10$ важи $T_{k+1} > T_k$, од каде имаме $T_{11} > T_{10} > ... > T_1$. Сосема аналогно за $k > \frac{114}{11}$, односно $k \ge 11$ ќе важи $T_{k+1} < T_k$. Оттука $T_{11} < T_{12} < ... < T_{18}$. Следува дека единаесеттиот член

$$T_{11} = \binom{18}{10} 5^8 6^{10} = 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 5^8 \cdot 6^{10} \cdot 11 \cdot 13$$

има најголем коефициент.

Задача 12-13. Пресметај го бројот

12) $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+...+\binom{7}{7}$; 13) $\binom{7}{0}-\binom{7}{1}+\binom{7}{2}-...-\binom{7}{7}$.

Решение. 12) Ако во биномната формула

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

ставиме: $n = 7$, $a = 1$ и $b = 1$, добиваме

$$(1+1)^7 = \binom{7}{0}+\binom{7}{1}+...+\binom{7}{7} \Leftrightarrow \binom{7}{0}+\binom{7}{1}+...+\binom{7}{7} = 2^7.$$

13) Ако во биномната формула ставиме: $n = 7$, $a = 1$ и $b = -1$ добиваме

$$(1-1)^7 = \binom{7}{0}-\binom{7}{1}+\binom{7}{2}...-\binom{7}{7} \Leftrightarrow \binom{7}{0}-\binom{7}{1}+\binom{7}{2}...-\binom{7}{7} = 0.$$

Задача 14. Во развојот на биномот $\left(a\sqrt[5]{\frac{a}{8}}+\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^n$ најди го оној член што содржи a^3 ако збирот на сите биномни коефициенти во развојот на биномот е 4096.

Решение. Бидејќи збирот на сите биномни коефициенти во развојот на биномот $(a+b)^n$ изнесува 2^n, имаме $2^n = 4096$, односно

$n=12$. Користејќи ја формулата за општиот член на биномот, добиваме

$$T_{k+1}=\binom{12}{k}\left(a\sqrt[5]{\frac{a}{8}}\right)^{12-k}\left(\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^{k}=$$

$$\binom{12}{k}a^{12-k}a^{\frac{12-k}{5}}8^{-\frac{12-k}{5}}a^{-\frac{3k}{7}}=\binom{12}{k}8^{\frac{k-12}{5}}a^{\frac{6(12-k)}{5}-\frac{3k}{7}}.$$

Од условот $a^{\frac{6(12-k)}{5}-\frac{3k}{7}}=a^3$ добиваме $\frac{6(12-k)}{5}-\frac{3k}{7}=3$, односно

$$\frac{42(12-k)-15k}{35}=3\Leftrightarrow 504-42k-15k=105\Leftrightarrow 57k=399\Leftrightarrow k=7$$

Значи, бараниот член е осмиот

$$T_8=\binom{12}{7}8^{-1}a^3=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\frac{1}{8}a^3=99a^3.$$

Задача 15. Најди ги рационалните членови во развојот на биномот $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

Решение. Од формулата за општиот член имаме,

$$T_{k+1}=\binom{24}{k}\left(\sqrt[5]{3}\right)^{24-k}\left(\sqrt[7]{2}\right)^{k}=\binom{24}{k}3^{\frac{24-k}{5}}2^{\frac{k}{7}}.$$

Последниот израз е рационален број ако истовремено $\frac{24-k}{5}$ и $\frac{k}{7}$ се цели броеви. Бидејќи $k\in\{0,1,...,24\}$, $\frac{k}{7}$ е цел број само ако $k\in\{0,7,14,21\}$. Од нив само за $k=14$, изразот $\frac{24-k}{5}$ е цел број. Следува дека развојот на биномот има само еден рационален член

$$T_{15}=\binom{24}{14}3^2 2^2.$$

1.2.1. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Задача 1-2. Претстави ги во алгебарски вид броевите:

1) $\dfrac{7}{2+i}$; 2) $\dfrac{3-i}{-1+2i}$.

Решение. **1)** Комплексниот број го претставуваме во алгебарски вид, така што го множиме со коњугираниот член на изразот во именител,

$$\frac{7}{2+i}=\frac{7}{2+i}\frac{2-i}{2-i}=\frac{14-7i}{4+1}=\frac{14}{5}-\frac{7}{5}i.$$

2) $\dfrac{3-i}{-1+2i}=\dfrac{(3-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\dfrac{-3+i-6i-2}{1+4}=\dfrac{-5-5i}{5}=-1-i$.

Задача 3-4. Запиши ги во тригонометриска форма следниве комплексни броеви

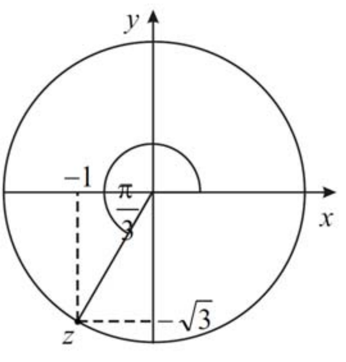
3) $z=-1-\sqrt{3}i$; 4) $z=-1$.

Решение. 3) Прв начин. Комлексниот број го претставуваме како точка во рамнина. Неговиот радиус и аргумент се

$$\rho=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2 \text{ и } \varphi=arctg\frac{\sqrt{3}}{1}+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}.$$

Следува дека $z=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Втор начин. Радиусот и аргументот на комплексниот број ги определуваме по формулата



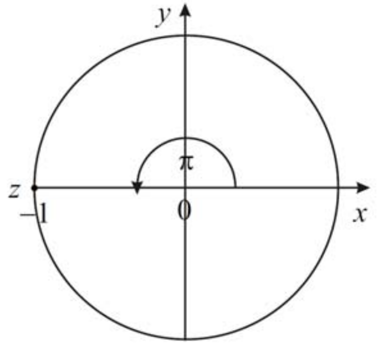
$$\varphi=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & 1\ квадрант \\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi & 2{,}3\ квадрант \\ arctg\dfrac{y}{x}+2\pi & 4\ квадрант \end{cases}.$$

Бидејќи отсечоците на x и y оските се негативни, комплексниот број се наоѓа во трет квадрант. Следува дека

$$\varphi=arctg\frac{-\sqrt{3}}{-1}+\pi=arctg\sqrt{3}+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}.$$

Коментар. Забележуваме дека при пресметувањето на аголот според формула, определуваме аркустангенс од количникот од отсечоците на x и y оските, додека при претходниот начин работиме со должините на отсечоците.

4) Комплексниот број $z=-1$ лежи на негативната страна на x-оската.



Јасно, $\rho=1$ и $\varphi=1$. До истиот резултат може да дојдеме формално со примена на формулите за радиус и аргумент на комлексен број. Следува,

$$z=\cos\pi+i\sin\pi\ .$$

Во понатамошните задачи, при сведување на комплексните броеви во тригонометриски вид, заради економичност во испишувањето, ќе го применуваме вториот метод и меѓу-оперциите ќе ги пишуваме во заграда.

Задача 5. Пресметај ја вредноста на изразот $\dfrac{\left(2+i\sqrt{12}\right)^5}{(1-i)^6}$.

Решение. Имаме

$$\frac{\left(2+i\sqrt{12}\right)^5}{(1-i)^6}=\begin{pmatrix}\rho_1=\sqrt{4+12}=4 & \varphi_1=arctg\dfrac{\sqrt{12}}{2}=arctg\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}\\ \rho_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} & \varphi_2=arctg\dfrac{-1}{1}+2\pi=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi=\dfrac{7\pi}{4}\end{pmatrix}=$$

$$\frac{4^5\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^5}{\left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)^6}=\frac{2^{10}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)}{2^3\left(\cos\dfrac{42\pi}{4}+i\sin\dfrac{42\pi}{4}\right)}=$$

$$2^7\frac{\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)}{\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)}=2^7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$2^7\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=2^7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=-2^6\left(\sqrt{3}+i\right).$$

Задача 6. Пресметај ја вредноста на изразот $\left(\dfrac{3}{1+i}+\dfrac{1+i}{2i}\right)^{16}$.

Решение. Имаме

$$\left(\frac{3}{1+i}+\frac{1+i}{2i}\right)^{16}=\left(\frac{6i+(1+i)^2}{2i(1+i)}\right)^{16}=$$

$$\left(\frac{6i+1+2i+i^2}{2i+2i^2}\right)^{16}=\left(\frac{8i}{2i-2}\right)^{16}=\left(\frac{4i}{i-1}\right)^{16}.$$

Наместо да ги степенуваме одделно броителот и именителот во дропката $\dfrac{4i}{i-1}$, можеме најпрво истиот комплексен број да го претставиме во алгебарски вид

$$\frac{4i}{i-1}=\frac{4i(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\frac{4i^2+4i}{i^2-1}=\frac{-4+4i}{-1-1}=\frac{-4+4i}{-2}=2-2i=2(1-i).$$

Потоа бројот $1-i$ го претставуваме во тригонометриски вид

$$1-i=\left(\begin{array}{c}\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\\ \varphi=arctg\dfrac{-1}{1}+2\pi=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi=\dfrac{7\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

и со еднократна примена на Моавровата формула, го добиваме бараниот резултат:

$$\left(\frac{4i}{i-1}\right)^{16}=\left(2(1-i)\right)^{16}=2^{16}\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{16}=$$

$$2^{16}\cdot 2^8\left(\cos\left(-\frac{16\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{16\pi}{4}\right)\right)=$$

$$2^{24}\left(\cos(-4\pi)+i\sin(-4\pi)\right)=2^{24}.$$

Задача 7. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

Решение. Во тригонометриски запис комплексниот број

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, додека $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$.

Затоа

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\right)^{n-2}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-2}\left(\cos\frac{-\pi(n-2)}{4}+i\sin\frac{-\pi(n-2)}{4}\right)}=$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{n-n+2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{(n-2)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{(n-2)\pi}{4}\right)\right)=$$

$$2\left(\cos\left(\frac{2n\pi-2\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi-2\pi}{4}\right)\right)=$$

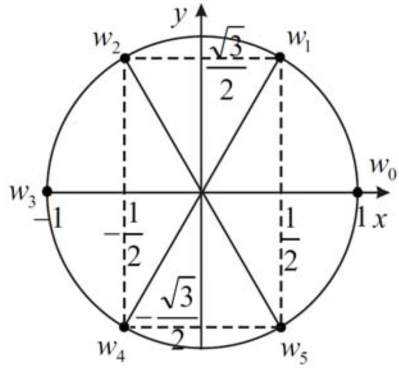
$$2\left(\cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)=\begin{cases}2,\ n=4k\\ 2i,\ n=4k+1\\ -2,\ n=4k+2\\ -2i,\ n=4k+3\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Задача 8. Во множеството комплексни броеви најди го коренот $\sqrt[6]{1}$. Потоа скицирај ги решенијата.

Решение. Прв начин. Тригонометрискиот запис на бројот 1 е $1=\cos 0+i\sin 0$. Оттука, множеството од шести корени на единицата е

$$\sqrt[6]{1}=\left\{\cos\frac{2k\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi}{6}\,\middle|\,k=0,1,2,3,4,5\right\}.$$

Секој корен во горната формула го добиваме за некоја вредност на k, и тоа



за $k=0$, $w_0=\cos 0+i\sin 0=1$,

за $k=1$,

$w_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

за $k=2$,

$w_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

за $k=3$,

$w_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$;

за $k=4$, $w_4=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

и за $k=5$, $w_5=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

На цртежот се нанесени корените на тригонометриската кружница.

Втор начин. Определуваме еден шести корен на 1. Очигледно, $w_0=1$ е шести корен на 1. Останатите корени лежат на централната кружница со радиус 1 и се поместени за 60^0 еден од друг. Затоа,

$$w_1=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)w_0=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)w_0=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_3=(\cos\pi+i\sin\pi)w_0=-1,$$

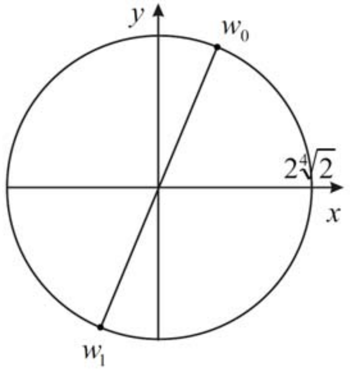
$$w_4=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)w_0=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и}$$

$$w_5=\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)w_0=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 9. Во множеството комплексни броеви најди го коренот $\sqrt{-4+4i}$. Потоа скицирај ги решенијата.

Решение. Прво комплексниот број под коренот го претставуваме во тригонометриски вид.

$$-4+4i=\left(\begin{array}{c}\rho=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}\\ \phi=arctg\dfrac{4}{-4}+\pi=-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$



Потоа ја применуваме Моавровата формула за квадратен корен на комплексен број,

$$\sqrt{-4+4i}=\left\{\sqrt{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)\middle| k=0,1\right\}.$$

Следува дека за $k=0$ коренот е $w_0=2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$,

и за $k=1$,

$$w_1=2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{2}\right)=2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right).$$

Коментар. Корените лежат на централна кружница со радиус $2\sqrt[4]{2}$ и се поместени за 180^0 степени.

Затоа е доволно да се најде еден корен. Сите останати корени се добиваат со ротација на дадениот корен. Така со помош на коренот w_0, може да се определи коренот w_1, кој може да се добие со ротација за 180^0 на w_0, односно,

$$w_1 = (\cos\pi + i\sin\pi)w_0 = (\cos\pi + i\sin\pi)2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$= 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \pi\right)\right) = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\right).$$

Задача 10-11. Во множеството комплексни броеви реши ги равенките:

10) $z^2 + 16 = 0$; 11) $(1+i)z^3 + (-1+i) = 0$.

Решение. 10) $z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \sqrt{-16} = 4\sqrt{-1}$. Бројот -1 во тригонометриски вид е $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Оттука

$$w_k = 4\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right),\ k = 0,1;$$

односно $w_0 = 4i$ и $w_1 = -4i$.

Коментар. Забележуваме дека ако a е позитивен реален број тогаш $\sqrt{a}$ во множеството комплексни броеви е множеството $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$, каде $\sqrt{a}$ е корен во множеството реални броеви, додека ако a е негативен реален број, тогаш $\sqrt{a}$ во множеството комплексни броеви е множеството $\{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$, каде $\sqrt{-a}$ е корен во множеството реални броеви.

11) Аналогно и оваа равенка ја решаваме најпрво по z,

$$(1+i)z^3 + (-1+i) = 0 \ \Leftrightarrow z^3 = \frac{1-i}{1+i}$$

потоа го средуваме изразот

$$\frac{1-i}{1+i} = \begin{pmatrix} \rho_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} & \varphi_1 = arctg(-1) + 2\pi = \dfrac{7\pi}{4} \\ \rho_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} & \varphi_2 = arctg1 = \dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$$

и на крај бараме трет корен од претходниот број. Третите корени се

$$w_k=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3},\quad k=0,1,2\,;$$

при што

$$w_0=\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i\,,$$

$$w_1=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{3}=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\,,$$

$$w_2=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\,.$$

Задача 12-13. Во множеството комплексни броеви реши ги равенките:

12) $z^4+3z^2-4=0$; 13) $2z^3-\sqrt{3}-i=0$.

Решение. 12) Ја решаваме равенката со смената $z^2=t$.

$$t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow (t+4)(t-1)=0 \Leftrightarrow t=-4 \vee t=1$$

За $t=-4$ ја добиваме равенката $z^2=-4$ чии решенија се:

$$w_0=2i \text{ и } w_1=-2i\,,$$

и за $t=1$ ја добиваме равенката $z^2=1$ чии решенија се

$$w_3=1\,,\ w_4=-1\,.$$

Значи, множеството решенија на бараната равенка е $\{1,-1,2i,-2i\}$.

13) Равенката $2z^3-\sqrt{3}-i=0$ се сведува на $z^3=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Притоа

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Следува дека решенијата на равенката се

$$w_k=\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3},\quad k=0,1,2 \text{ односно}$$

$$w_0=\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9},$$

$$w_1=\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3}=\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9} \text{ и}$$

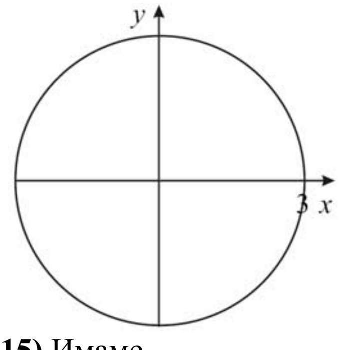
$$w_2=\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3}=\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}.$$

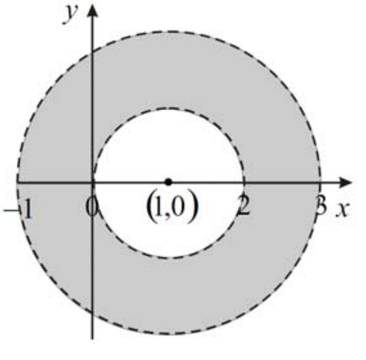
Задача 14-15. Определи ги множествата комплексни броеви:
14) $\{z \mid |z|=3\}$; 15) $\{z \mid 1<|z-1|<2\}$.

Решение. 14) Го запишуваме бројот $z=x+iy$ во алгебарски облик. Тогаш

$$|z|=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=3 \Leftrightarrow x^2+y^2=9.$$

Последниот израз е равенка на централна кружница со радиус 3





15) Имаме

$$1<|z-1|<2 \Leftrightarrow 1<|x-1+iy|<2 \Leftrightarrow$$

$$1<\sqrt{(x-1)^2+y^2}<2 \Leftrightarrow 1<(x-1)^2+y^2<4$$

Значи множеството решенија на равенката е внатрешноста на кружниот прстен определен со кружниците со центар во $(1,0)$ и радиуси 1 и 2.

Задача 16. Најди го комплексниот број z од условот

$$\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1,\ \frac{z}{\bar{z}} = i.$$

Решение. Го запишуваме бројот $z = x + iy$ во алгебарски облик.

$$\left|\frac{x+iy}{x+iy+1}\right| = 1 \overset{x+iy+1\neq 0}{\Leftrightarrow} |x+iy| = |x+iy+1| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2 = (x+1)^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2+2x+1+y^2 \Leftrightarrow$$

$$2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ (1)\ \text{и}$$

$$\frac{x+iy}{x-iy} = i \overset{x-iy\neq 0}{\Leftrightarrow} x+iy = ix+y \Leftrightarrow x = y\ (2).$$

Со замена на (1) во (2), добиваме $y = -\frac{1}{2}$. Значи $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Задача 17. Определи го комплексниот број z, што ги исполнува условите

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+3i}{2+i}\right) = \frac{3}{5}\ \text{и}\ \mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}+3i}{3+i}\right) = \frac{7}{5}.$$

Решение. Нека $z = x + iy$. Ќе ги искористиме релациите $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ и $\mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Имаме

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+3i}{2+i}\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{x+iy+3i}{2+i}\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{x+i(y+3)}{2+i}\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{x+i(y+3)}{2+i} + \frac{x-i(y+3)}{2-i}}{2} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+i(y+3))(2-i)}{5} + \frac{(x-i(y+3))(2+i)}{5} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow$$

$$\left(x+i(y+3)\right)(2-i)+\left(x-i(y+3)\right)(2+i)=6 \Leftrightarrow$$
$$2x+2i(y+3)-ix+(y+3)+2x-2i(y+3)+ix+(y+3)=6 \Leftrightarrow$$
$$2\left(2x+(y+3)\right)=6 \Leftrightarrow 2x+y+3=3 \Leftrightarrow 2x+y=0 \text{ (1) и}$$
$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}+3i}{3+i}\right)=\frac{7}{5} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{x-iy+3i}{3+i}\right)=\frac{7}{5} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{x-i(y-3)}{3+i}\right)=\frac{7}{5} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\frac{x-i(y-3)}{3+i}-\frac{x+i(y-3)}{3-i}}{2i}=\frac{7}{5} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\left(x-i(y-3)\right)(3-i)}{10}-\frac{\left(x+i(y-3)\right)(3+i)}{10}=\frac{14i}{5} \Leftrightarrow$$
$$\left(x-i(y-3)\right)(3-i)-\left(x+i(y-3)\right)(3+i)=28i \Leftrightarrow$$
$$3x-3i(y-3)-ix-(y-3)-\left(3x+3i(y-3)+ix-(y-3)\right)=28i \Leftrightarrow$$
$$2\left(-3i(y-3)-ix\right)=28i \Leftrightarrow -3i(y-3)-ix=14i \Leftrightarrow -3(y-3)-x=14 \Leftrightarrow$$
$$-3y+9-x=14 \Leftrightarrow x+3y+5=0 \text{ (2).}$$

Од (1) и (2) имаме

$$2x+y=0 \text{ и } x+3y+5=0.$$

Ќе го решиме системот равенки. Од првата равенка $y=-2x$. Заменуваме во втората равенка

$$x+3y+5=0 \Leftrightarrow x+-6x+5=0 \Leftrightarrow -5x=-5 \Leftrightarrow x=1.$$

Оттука, $y=-2$. Следува комплексниот број е $z=1-2i$.

Задача 18*. Докажи ги тригонометриските идентитети
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ и $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Решение. Нека $z=\cos x + i\sin x$. Со примена на моавровата формула добиваме

$$z^3=(\cos x+i\sin x)^3=\cos 3x+i\sin 3x.$$

Од друга страна

$$z^3=(\cos x+i\sin x)^3=\cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x.$$

Ако ги прирамниме десните страни на равенставата добиваме

$$\cos 3x+i\sin 3x=\cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x.$$

Оттука следува,

$$\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x \Leftrightarrow \cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\left(1-\cos^2 x\right) \Leftrightarrow$$
$$\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x+3\cos^4 x \Leftrightarrow \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x \text{ и}$$

$$\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \Leftrightarrow \sin 3x = 3\left(1-\sin^2 x\right)\sin x - \sin^3 x \Leftrightarrow$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x \Leftrightarrow \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x .$$

Задача 19*. Пресметај ги сумите $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$ и $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$.

Решение. Нека $z = \cos x + i\sin x$. Тогаш

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + i(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx) =$$
$$= \cos x + i\sin x + \cos 2x + i\sin 2x + \ldots + \cos nx + i\sin nx =$$
$$= z + z^2 + \ldots + z^n = z\left(1 + z + \ldots + z^{n-1}\right) = z\frac{z^n - 1}{z-1},$$

каде што

$$z - 1 = \cos x + i\sin x - 1 = -(1-\cos x) + i\sin x =$$
$$= ii2\sin^2\frac{x}{2} + 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2i\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right) \text{ и}$$
$$z^n - 1 = \cos nx + i\sin nx - 1 = -(1-\cos nx) + i\sin nx =$$
$$= ii2\sin^2\frac{nx}{2} + 2i\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2} = 2i\sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

Следува,

$$z\frac{z^n - 1}{z-1} = (\cos x + i\sin x)\frac{2i\sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)}{2i\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)} =$$

$$\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\left(x + \frac{nx}{2} - \frac{x}{2}\right) + i\sin\left(x + \frac{nx}{2} - \frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2} + i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right).$$

Со прирамнување на реалниот и имагинарниот дел во равенството,

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx + i(\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx) =$$

$$\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2}+i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right),$$ добиваме

$$\cos x+\cos 2x+...+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{(n+1)x}{2}$$ и

$$\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(n+1)x}{2}.$$

Задача 20*. Во кружница со центар во точката $z_0=-3+4i$, впишан е правилен шестоаголник. Едно негово теме е во точката $z_1=-3+5i$. Определи ги останатите темиња.

Решение. Останатите темиња, z_2, z_3, z_4, z_5 и z_6 се добиваат со ротација за агли од $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$ на бројот z_1 околу центарот z_0. Притоа, $z_1-z_0=i$. Следува дека

$$z_2-z_0=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_1-z_0)\Leftrightarrow z_2=-3+4i+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\Leftrightarrow$$

$$z_2=-3+4i+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow z_2=-3-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}i,$$

$$z_3-z_0=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)(z_1-z_0)\Leftrightarrow z_3=-3+4i+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\Leftrightarrow$$

$$z_3=-3+4i-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow z_3=-3-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}i,$$

$$z_4-z_0=(\cos\pi+i\sin\pi)(z_1-z_0)\Leftrightarrow z_4=-3+4i-1\cdot i\Leftrightarrow z_4=-3+3i,$$

$$z_5-z_0=\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)(z_1-z_0)\Leftrightarrow z_5=-3+4i+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\Leftrightarrow$$

$$z_5 = -3 + 4i - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_5 = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i$$

$$z_6 - z_0 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)(z_1 - z_0) \Leftrightarrow z_6 = -3 + 4i + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i \Leftrightarrow$$

$$z_6 = -3 + 4i + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_6 = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}i.$$

Задача 21. Дадени се две спротивни темиња од квадратот $z_1z_2z_3z_4$, $z_2 = 2$ и $z_4 = 1 + 3i$. Најди ги преостанатите две темиња.

Решение. Нека z_0 е средината на отсечката z_2z_4. Тогаш

$$z_0 = \frac{z_2 + z_4}{2} = \frac{2 + 1 + 3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Комплексниот број z_1 го добиваме со ротација за $\frac{\pi}{2}$ на бројот z_4 околу z_0. Следува дека

$$z_1 - z_0 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z_4 - z_0) \Leftrightarrow$$

$$z_1 - z_0 = i(z_4 - z_0) \Leftrightarrow z_1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i = i\left(1 + 3i - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right) \Leftrightarrow$$

$$z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) \Leftrightarrow z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + -\frac{1}{2}i - \frac{3}{2} \Leftrightarrow z_1 = i.$$

Аналогно z_3 го добиваме со ротација за $\frac{\pi}{2}$ на бројот z_2, па

$$z_3 - z_0 = i(z_2 - z_0) \Leftrightarrow z_3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i = i\left(2 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right) \Leftrightarrow$$

$$z_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + i\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) \Leftrightarrow z_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} \Leftrightarrow z_3 = 2i + 3.$$

Следува дека преостанатите темиња на квадратот се

$$z_1 = i \text{ и } z_3 = 2i + 3.$$

Задача 22*. (Државен натпревар за втора година, гимназиско образование, 2013) Од надворешноста на страните BC и AC во триаголникот ABC, се конструирани квадрати со центри D и E. Нека P е средина на страната AB. Докажи дека отсечките PD и PE се еднакви и заемно нормални.

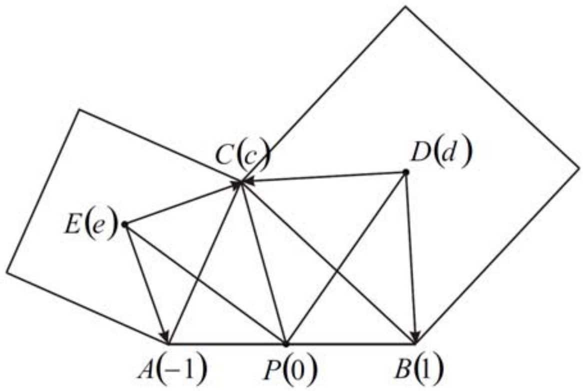
Решение. Триаголникот го сместуваме во координатен систем xPy, така што средината P да е во координатниот почеток и страната AB да лежи на x-оската, при што темето A се совпаѓа со комплексниот број -1, а темето B со бројот 1. Нека на темињата D, C и E им одговараат комплексните броеви d, c и e, соодветно. Тогаш комплексниот број 1 е добиен со ротација за 90^0 околу D на c. Затоа,

$$1-d=i(c-d)\Leftrightarrow (i-1)d=ic-1\Leftrightarrow d=\frac{1-ic}{1-i}\ (1).$$

Од друга страна комплексниот број c е добиен со ротација за 90^0 околу центарот E на бројот -1. Значи

$$c-e=i(-1-e)\Leftrightarrow (i-1)e=-i-c\Leftrightarrow e=\frac{i+c}{1-i}\Leftrightarrow e=i\frac{1-ic}{1-i}\ (2).$$

Од (1) и (2) добиваме дека $e=id$. Последново равенство значи дека темето E е добиено со ротација за 90^0 на темето D околу координатниот почеток, односно отсечките PD и PE се еднакви и заемно нормални.



Задача 23*. (Предлог за регионален натпревар за втора година, гимназиско образование) Нека z_1, z_2 и z_3 се комплексни броеви со радиуси

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2013 .$$

Докажи дека $(z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3)(z_3 + \bar{z}_1)$ е реален број.

Решение. Да забележиме дека ако $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2013$, тогаш

$$\bar{z}_1 = \frac{2013^2}{z_1},\ \bar{z}_2 = \frac{2013^2}{z_2} \text{ и } \bar{z}_3 = \frac{2013^2}{z_3} .$$

Оттука,

$$z = (z_1 + \bar{z}_2)(z_2 + \bar{z}_3)(z_3 + \bar{z}_1) =$$

$$\left(z_1 + \frac{2013^2}{z_2}\right)\left(z_2 + \frac{2013^2}{z_3}\right)\left(z_3 + \frac{2013^2}{z_1}\right) =$$

$$\left(z_1 + \frac{2013^2}{z_2}\right)\left(z_2 + \frac{2013^2}{z_3}\right)\left(z_3 + \frac{2013^2}{z_1}\right) =$$

$$\frac{(z_1z_2 + 2013^2)(z_2z_3 + 2013^2)(z_3z_1 + 2013^2)}{z_1z_2z_3},$$

од каде

$$\bar{z} = \frac{(\bar{z}_1\bar{z}_2 + 2013^2)(\bar{z}_2\bar{z}_3 + 2013^2)(\bar{z}_3\bar{z}_1 + 2013^2)}{\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2013^2}{z_1}\frac{2013^2}{z_2} + 2013^2\right)\left(\frac{2013^2}{z_2}\frac{2013^2}{z_3} + 2013^2\right)\left(\frac{2013^2}{z_2}\frac{2013^2}{z_1} + 2013^2\right)}{\frac{2013^2}{z_1}\frac{2013^2}{z_2}\frac{2013^2}{z_3}} =$$

$$= \frac{(z_1z_2 + 2013^2)(z_2z_3 + 2013^2)(z_3z_1 + 2013^2)}{z_1z_2z_3} = z .$$

Од последниов заклучок следува дека $z=\bar{z}$, односно z е реален број.

Задача 24*. (Предлог за регионален натпревар за втора година, гимназиско образование) Нека z е комплексен број, таков што $|z|=2$. Определете ја минималната и максималната вредност на изразот $\left|z-\frac{1}{z}\right|$.

Решение. Имаме

$$\left|z-\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{z^2-1}{z}\right|=\frac{1}{2}\left|z^2-1\right|.$$

Бидејќи

$\left|z^2-1\right|\geq|z|^2-1=3$ и $\left|z^2-1\right|\leq|z|^2+1=5$, следува дека $\left|z-\frac{1}{z}\right|\in\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.

Сега, за

$z=2$ важи $\left|z-\frac{1}{z}\right|=\left|2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$ и за $z=2i$, $\left|z-\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{2}\left|(2i)^2-1\right|=\frac{5}{2}$.

Значи минималната и максималната вредност на комплексните броеви $\left|z-\frac{1}{z}\right|$, се $\frac{3}{2}$ и $\frac{5}{2}$.

Задача 25*. (Предлог за државен натпревар за втора година, гимназиско образование) Докажи дека $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

Решение. Прв начин. Нека $z=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$. Тогаш

$$z^5=\cos\pi+i\sin\pi=-1 \Leftrightarrow z^5+1=0 \Leftrightarrow (z+1)\left(z^4-z^3+z^2-z+1\right)=0.$$

Бидејќи $z+1\neq 0$, следува дека

$$z^4-z^3+z^2-z+1=0 \text{ (1). Притоа } z^6=-z \text{ (2)}$$

Од друга страна,

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z} \text{ и } \cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)=\frac{z^6+1}{2z^3},$$

од каде

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{z^2+1}{2z}+\frac{z^6+1}{2z^3}\overset{2}{=}\frac{z^4+z^2-z+1}{2z^3}\overset{1}{=}\frac{z^3}{2z^3}=\frac{1}{2}.$$

Втор начин. Задачата може да ја решиме и со помош на формулите за двоен агол. Имаме

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{3\pi}{5}\right)\right)=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=$$

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{2}.$$

1.2.2. КУБНА РАВЕНКА

Задача 1. Реши ја кубната равенка $x^3+8=0$.

Решение. Равенката е еквивалентна со $x^3=-8$. Го запишуваме комплексниот број во тригонометриски облик, $-8=8(\cos\pi+i\sin\pi)$. Според формулата на Моавр за 3-ти корен на комплексен број, решенијата се

$$\text{за } k=0,\ w_0=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$\text{за } k=1,\ w_1=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2 \text{ и}$$

$$\text{за } k=2,\ w_2=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

Значи решенијата на равенката се -2, $1-i\sqrt{3}$ и $1+i\sqrt{3}$.

Задача 2. Реши ја кубната равенка $x^3+24x-56=0$.

Решение. Квадратната резоловента на равенката има решенија

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \Leftrightarrow z^2-56z-\frac{24^3}{3^3}=0 \Leftrightarrow$$

$$z^2-56z-8^3=0 \Leftrightarrow z_{1/2}=\frac{56\pm\sqrt{56^2+4\cdot 8^3}}{2}.$$

Притоа $56^2+4\cdot 8^3=7^2 2^6+2^{11}=2^6(49+32)=2^6 9^2$, од каде

$$z_{1/2}=\frac{56\pm\sqrt{2^6 9^2}}{2} \Leftrightarrow z_{1/2}=\frac{56\pm 72}{2} \Leftrightarrow z_1=64,\ z_2=-8.$$

Ќе го разгледаме бројот $z_2=-8$.

Избираме $u=-2$ од каде $v=-\frac{p}{3u}=-\frac{24}{3(-2)}=4$. Тогаш

$$x_1=u+v=-2+4=2,$$

$$x_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2=-2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$1-\sqrt{3}i-2-2\sqrt{3}i=-1-3\sqrt{3}i.$$

Следува дека $x_3=-1+3\sqrt{3}i$.

Втор начин. Според методот на Њутн, со проверка утврдуваме дека $x=2$ е решение на равенката. Количникот на полиномот $x^3+24x-56$ со $x-2$ е $x^2+2x+28$. Соодветната квадратна равенка има решенија,

$$x^2+2x+28=0 \Leftrightarrow$$

$$x_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{4-112}}{2} \Leftrightarrow x_{2,3}=\frac{-2\pm i6\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x_{2,3}=-1\pm 3\sqrt{3}i.$$

Задача 3. Реши ја кубната равенка $x^3-6x-5=0$.

Решение. Решенијата на квадратната резолвента се

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \Leftrightarrow z^2-5z-\frac{-6^3}{3^3}=0 \Leftrightarrow z^2-5z+8=0 \Leftrightarrow$$

$$z_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-32}}{2} \Leftrightarrow z_{1/2}=\frac{5\pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Го избираме бројот $z=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$. Го запишуваме комплексниот број во тригонометриски вид,

$$R^2=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{7}{4}}=\sqrt{\frac{32}{4}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},\text{ и } \varphi=arctg\frac{\sqrt{7}/2}{5/2}=arctg\frac{\sqrt{7}}{5}.$$

Значи $z = 2^{\frac{3}{2}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, каде $\varphi = arctg\dfrac{\sqrt{7}}{5}$. Следува еден трети корен е

$$u = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),\ \varphi = arctg\frac{\sqrt{7}}{5},$$

од каде

$$v = -\frac{p}{3u} = -\frac{-6}{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

и

$$x_1 = u + v = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2 =$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right),\ \varphi = arctg\frac{\sqrt{7}}{5}$$

$$x_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right),\ \varphi = arctg\frac{\sqrt{7}}{5}.$$

Втор начин. Со проверка покажуваме дека $x = -1$ е решение на равенката. При делење на полиномот $x^3 - 6x - 5$ со $x + 1$ добиваме количник $x^2 - x - 5$. Ја решаваме равенката

$$x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2} \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Значи решенијата на кубната равенка се -1, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}$ и $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Забележуваме дека во оваа задача методот на Њутн дава попрегледен запис на решенијата.

Задача 4. Реши ја кубната равенка $x^3+3x-i=0$.

Решение. Квадратната резолвента $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$ има решенија,

$$z^2-iz-\frac{3^3}{3^3}=0 \Leftrightarrow z^2-iz-1=0 \Leftrightarrow$$

$$z_{1/2}=\frac{i\pm\sqrt{-1+4}}{2} \Leftrightarrow z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}.$$

Го сведуваме бројот $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ во тригонометриски вид,

$$R=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1,\ \varphi=arctg\,\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$$

од каде $z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$. Еден негов трети корен е

$$u=\cos\frac{\frac{\pi}{6}}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}}{3}=\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18},$$

од каде

$$v=-\frac{p}{3u}=-\frac{3}{3\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)}=-\left(\cos\frac{\pi}{18}-i\sin\frac{\pi}{18}\right)=-\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}$$

Следува дека решенијата се

$$x_1=u+v=\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}-\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}=2i\sin\frac{\pi}{18},$$

$$x_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2=$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$\cos\frac{\pi}{18}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\sin\frac{\pi}{18}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}-i\sin\frac{\pi}{18},$$

$$x_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$\cos\frac{\pi}{18}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sin\frac{\pi}{18}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18} - i\sin\frac{\pi}{18}.$$

Задача 5. Реши ја кубната равенка $x^3 - 2x - \sqrt{3} = 0$.

Решение. Ја решаваме квадратната резолвента

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{3}z - \frac{(-2)^3}{3^3} = 0 \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{3}z + \frac{2^3}{3^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_{1/2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 4\frac{2^3}{3^3}}}{2} \Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{\frac{81-32}{3^3}}}{2} \Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{\sqrt{3} \pm \frac{7}{3\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$z_{1/2} = \frac{9 \pm 7\cdot}{2\cdot 3\sqrt{3}} \Leftrightarrow z_1 = 8\cdot 3^{-\frac{3}{2}},\ z_2 = 3^{-\frac{3}{2}}.$$

Еден трети корен на $z_2 = 3^{-\frac{3}{2}}$ е

$$u = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{од каде } v = -\frac{-2}{3\cdot 3^{-\frac{1}{2}}} = 2\cdot 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Следува дека решенијата се

$$x_1 = u + v = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$x_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{\sqrt{3}} - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$x_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Задача 6. Реши ја кубната равенка $x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{27} = 0$.

Решение. Ја решаваме квадратната резолвента.

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{2}{27}z - \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}{3^3} = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{2}{27}z + \frac{1}{27^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{-\frac{2}{27} \pm \sqrt{\frac{4}{27^2} - \frac{4}{27^2}}}{2} \Leftrightarrow z_{1/2} = -\frac{1}{27} \Leftrightarrow z_1 = z_2 = -\frac{1}{27}.$$

Избираме еден трети корен

$$u = -\frac{1}{3}. \text{ Оттука } v = -\frac{p}{3u} = -\frac{-\frac{1}{3}}{3\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3}.$$

Затоа, решенијата се

$$x_1 = u + v = -\frac{1}{3} + -\frac{1}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$x_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2 = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{3}(-1) = \frac{1}{3},$$

$$x_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{3}(-1) = \frac{1}{3}.$$

Задача 7. Реши ја кубната равенка $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Решение. Воведуваме смена $x = y - \frac{a}{3} = y - \frac{3}{3} = y - 1$ (1).

Тогаш,

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^3 + 3(y-1)^2 - 3(y-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3(y^2 - 2y + 1) - 3y + 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3y^2 - 6y + 3 - 3y + 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y^3 - 6y + 4 = 0 \text{ (2).}$$

Квадратната резолвента на (2) има решенија,

$$z^2+4z-\frac{(-6)^3}{3^3}=0 \Leftrightarrow z^2+4z+8=0 \Leftrightarrow$$

$$z_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2} \Leftrightarrow z_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$z_{1/2}=\frac{-4\pm 4i}{2} \Leftrightarrow z_1=-2+2i\,,\ z_2=-2-2i\,.$$

Комплексниот број $z_1=-2+2i$ го претставуваме во тригонометриски вид,

$$R=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}\,,\ \varphi=\frac{\pi}{2}+arctg\frac{2}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\,.$$

Значи, $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Еден трети корен е

$$u=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i\text{, од каде}$$

$$v=-\frac{p}{3u}=-\frac{-6}{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i\,.$$

Следува, решенијата на (2) се,

$$y_1=u+v=1+i+1-i=2\,,$$

$$y_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2=(1+i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(1-i)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}=-1-\sqrt{3}\,,$$

$$y_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon = (1+i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1-i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}\,.$$

Сега од (1) ги добиваме решенијата на равенката,

$$x_1 = y_1 - 1 = 2 - 1 = 1\,,$$

$$x_2 = y_2 - 1 = -1 - \sqrt{3} - 1 = -2 - \sqrt{3} \text{ и}$$

$$x_3 = y_3 - 1 = -1 + \sqrt{3} - 1 = -2 + \sqrt{3}\,.$$

Втор начин. Ако равенката $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ има рационален корен, тогаш, бидејќи слободниот член е ± 1, коренот p е цел број и $p|1$ т.е $p \in \{-1,1\}$.

Со проверка се добива дека $p = 1$ е решение на равенката. Со делење на полиномот $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ со $x - 1$ го добиваме биномот $x^2 + 4x + 1$. Решенијата на равенката $x^2 + 4x + 1 = 0$ се: $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

$$\begin{array}{l}
x^3 + 3x^2 - 3x - 1 : x - 1 = x^2 + 4x + 1 \\
\underline{\pm x^3 \mp x^2} \\
\quad 4x^2 - 3x - 1 \\
\quad \underline{\pm 4x^2 \mp 4x} \\
\qquad x - 1 \\
\qquad \underline{\pm x \mp 1} \\
\qquad = \; =
\end{array}$$

Значи, решенија на кубната равенка се

$$x_1 = 1\,,\; x_2 = -2 + \sqrt{3} \text{ и } x_3 = -2 - \sqrt{3}\,.$$

1.3. Задачи за вежбање

1.1.1. Математичка индукција

Задача 1-10. Со помош на принципот на математичка индукција, докажи ја точноста на равенствата за секој $n \in \mathbb{N}$:

1) $1+2+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$;

2) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\ldots+\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}=n+1-\frac{1}{2^{n-1}}$;

3) $1^2-2^2+3^2-...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;

4) $1^2+4^2+...+(3n-2)^2=\frac{n\left(6n^2-3n-1\right)}{2}$;

5) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

6) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

7) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$; 16);

8) $1+11+...+\underbrace{11...1}_{n}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$;

9) $1+x+x^2+...+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1},\ x\neq1$;

10) $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2},\ x\neq0$.

Задача 11-14. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот:

11) $7^{n+2}+8^{2n+1}$ е делив со 57; 12) $7^{2n}-1$ е делив со 48;

13) $2^{2n+3}+5^{3n+2}$ е делив со 11; 14) $10^n+18n-1$ е делив со 27.

Задача 15-17. Со помош на принципот на математичка индукција, докажи ја точноста, за секој $n \in \mathbb{N}$, на неравенствата

15) $2^n>n$; 16) $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a}}}}_{n}<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$;

$$17)\ \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}\,.$$

1.1.2. Биномна формула

Задача 1-2. Запиши ги во развиена форма биномите:

1) $(x+1)^4$; 2) $(2-x)^5$.

Задача 3. Најди го третиот член во развојот на биномот $\left(\sqrt[4]{x^3}+\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}\right)^{12}$.

Задача 4. Најди ги средните два члена во развојот на биномот $(2x-3y)^{11}$.

Задача 5. Најди го членот во развојот на биномот $\left(\frac{2}{5}\sqrt[3]{x^2}+\frac{7}{2}\sqrt[4]{x^3}\right)^{12}$ што го содржи x^{14}.

1.2. Комплексни броеви

1.2.1. Комплексни броеви

Задача 1-2. Претстави ги во алгебарски вид броевите:

1) $\frac{3-4i}{7+3i}$; 2) $\frac{2-5i}{-1+3i}$.

Задача 3-4. Претстави ги во тригонометриски вид броевите:

16) $z=2+2\sqrt{2}i$; 17) $z=-\sqrt{3}-i$.

Задача 5. Пресметај го изразот $\left(\frac{1+i}{-1-\sqrt{3}i}\right)^7$.

1.2.2. Кубна равенка

Задача 1. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката $z^4+2=0$.

Задача 2-7. Во множеството комплексни броеви реши ги кубните равенки:

2) $x^3-27=0$; 3) $x^3+1=0$;

4) $x^3+9x-26=0$; 5) $x^3-6x+4=0$;

6) $x^3-2x^2-5x+6=0$; 7) $x^3+x^2-x-1=0$.

2. ДЕТЕРМИНАНТИ И СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

2.1. ДЕТЕРМИНАНТИ

2.1.1. Детерминанти од втор и трет ред

Детерминанти од втор ред

Задача 1-6. Пресметај ги детерминантите:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} - (-3)(-1) = -2$;

2) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & 3-\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} & 1-\sqrt{5} \end{vmatrix} = \left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right) - \left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right) =$

$$1 - 5 - (9-2) = -11;$$

3) $\begin{vmatrix} \log_3 9 & \log_2 8 \\ \log_8 2 & \log_9 3 \end{vmatrix} = \log_3 9 \cdot \log_9 3 - \log_2 8 \cdot \log_8 2 = 1 - 1 = 0$;

4) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 = 0$;

5) $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x^2+xy+y^2 & x^2-xy+y^2 \end{vmatrix} =$

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) - (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = x^3+y^3-\left(x^3-y^3\right) = 2y^3;$$

6) $\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\alpha+\cos\beta \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix} =$

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta) - (\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha) =$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \left(\cos^2\beta - \cos^2\alpha\right) = \underline{\sin^2\alpha} - \sin^2\beta - \cos^2\beta + \underline{\cos^2\alpha} =$$

$$1 - 1 = 0.$$

Задача 7. За кои вредности на x детерминантата $\begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ -2 & x+2 \end{vmatrix}$ има вредност нула?

Решение. Ја пресметуваме детерминантата

$$\begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} = (x-2)(x+2)+3 = x^2-4+3 = x^2-1\,.$$

Нејзината вредност е нула ако и само ако $x^2-1=0$, од каде $x^2=1$ односно $x=1$ или $x=-1$.

Задача 8. Реши ја равенката $\begin{vmatrix} 6\sin x & 1 \\ 3 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Со пресметување на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 6\sin x & 1 \\ 3 & \cos x \end{vmatrix} = 6\sin x\cdot\cos x-3 = 3(2\sin x\cdot\cos x-1)$$

условот на задачата се сведува наоѓање решение на равенката

$$2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$2x = \frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Задача 9. Реши ја неравенката $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} > 8$.

Решение. Неравенката $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} < 8$ се сведува на

$$x^2-4+3<8 \Leftrightarrow x^2-9<0$$

Соодветната равенка $x^2-9=0$ има решенија

$$x=3 \text{ и } x=-3\,.$$

Бидејќи коефициентот пред x^2 е позитивен, следува дека $x\in(-3,3)$.

Задача 10. Докажи го равенството

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(ax+by+cz\right)^2.$$

Решение. Ако ги запишеме левата и десната страна на равенството во развиен облик

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}^2 = (ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 =$$

$$= a^2y^2-2abxy+b^2x^2+b^2z^2-2bczy+c^2y^2+c^2x^2-2acxz+a^2z^2$$

и

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(ax+by+cz\right)^2=$$
$$a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-$$
$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz=$$
$$a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2abxy-2acxz-2bcyz\,,$$
ја констатираме точноста на тврдењето.

Детерминанти од трет ред

Задача 11. Со примена на Сарусово правило пресметај ја детерминантата $\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ a & a \\ a & a \end{matrix}=a^3+ab^2+a^2b-a^2b-a^2b-a^2b=$$
$$a^3+ab^2-2a^2b=a\left(a^2-2ab+b^2\right)=a(a-b)^2.$$

Задача 12-13. Со примена на правило на триаголник пресметај ги следните детерминанти:

$$\textbf{12)}\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=$$
$$2\cdot1\cdot0+(-3)(-3)\cdot1+1\cdot(-2)\cdot4-4\cdot1\cdot1-(-3)\cdot1\cdot0-(-3)(-2)\cdot2=$$
$$9-8-4-12=-15\,;$$
$$\textbf{13)}\ \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$(1+\cos\alpha)^2+1+\sin\alpha+1-\sin\alpha-(1+\cos\alpha)-(1+\cos\alpha)-$$
$$(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha+2-2-2\cos\alpha-1+\sin^2\alpha=$$
$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\,.$$

Задача 14. Пресметај ја следнава детерминанта со развивање по прва редица.

Решение. Имаме

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$2(1-8) - 3(0+4) - (0+2) = -14 - 12 - 2 = -28.$$

Задача 15. Пресметај ја детерминанта $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, со развивање по втора колона.

Решение. Имаме

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 16 = -28.$$

Задача 16-17. Користејќи својства на детерминанти пресметај ги најбрзо детерминантите:

$$16)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}; \quad 17)\begin{vmatrix} 101 & -707 & 101 \\ 0 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. 16) Елементите од првата и третата колона се пропорционални, па вредноста на детерминантатата е нула, т.е.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{4}{=} 3\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{3}{=} 0.$$

17) $$\begin{vmatrix} 101 & -707 & 101 \\ 0 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 101\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 101\cdot 7\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$707(1-1-1-1) = -1414.$$

Задача 18. Користејќи својства на детерминанти пресметај ја најбрзо детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Со одземање на првата и втората редица, а потоа развивање по првата колона од третата добиваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3.$$

Задача 19-21. Користејќи ги својствата на детерминантите, пресметај:

$$19)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}; \qquad 20)\ \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}; \qquad 21)\ \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Решение. 19) Прв начин. Од втората и третата редица ја одземаме првата редица помножена со x и x^2, соодветно, а потоа детерминантата ја развиваме по првата колона. Добиваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ (y-x)(y+x) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix} =$$

$$(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y+x & z+x \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z+x-(y+x)) =$$

$$(y-x)(z-x)(z-y).$$

Втор начин. Втората редица ја множиме со $-x$ и ја додаваме на третата редица, потоа првата редица ја множиме со $-x$, ја додаваме на втората и развиваме по прва колона.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y^2-yx & z^2-zx \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y(y-x) & z(z-x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y(y-x) & z(z-x) \end{vmatrix} =$$

$$(y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

20) Забележуваме дека збирот на елементите во редиците е еднаков. Затоа првата и втората редица ги додаваме на третата. Потоа од втората и третата редица ја одземаме правата и ја развиваме детрминантата по третата колона. Имаме

$$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 2(a+b) \\ b & a+b & 2(a+b) \\ a+b & a & 2(a+b) \end{vmatrix} = 2(a+b)\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a+b & 1 \\ a+b & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2(a+b)\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b-a & a & 0 \\ b & a-b & 0 \end{vmatrix} = = 2(a+b)\begin{vmatrix} -(a-b) & a \\ b & a-b \end{vmatrix} =$$

$$2(a+b)\left(-a^2+2ab-b^2-ab\right) = -2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) = -2\left(a^3+b^3\right).$$

21) Од втората и третата редица ја одземаме првата. Имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & ac-bc \\ 0 & c-a & ab-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & -c(b-a) \\ 0 & c-a & -b(c-a) \end{vmatrix}.$$

Сега ги вадиме заедничките членови од втората и третата редица пред детерминантата и ја развиваме новодобиената детерминанта по прва колона,

$$D = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Задача 22-24. Користејќи ги својствата на детерминантите, пресметај:

22) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 23) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & a-b-c & 2b \\ 2c & 2c & a-b-c \end{vmatrix}$;

$$24)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Решение. 22) Од првата и втората редица ја одземаме третата редица. Потоа развиваме по трета колона. Имено,

$$\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} R_1^* = R_1 - R_3 \\ R_2^* = R_2 - R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

23) Забележуваме дека збирот на елементите во колоните е еднаков. Затоа втората и третата редица ги додаваме на првата. Потоа првата колона ја одземаме од останатите и ја развиваме детерминантата по првата редица. Имаме

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

24) $$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{0}.$$

Првата детерминанта е нула бидејќи елемените во првата и втората колона се пропорционални. Од исти причини и четвртата детерминанта е нула. Од втората и третата колона на третата детерминанта вадиме x пред детерминантата. Тогаш

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1-x^2\right)\left(a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3\right).$$

Задача 25. Докажи дека $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Прво, од втората и третата колона извлекуваме по едно a пред детерминантата. Потоа, првата редица ја множиме со -1 и ја додаваме на втората, па на третата редица. Тогаш детерминантата не се менува. Симболично постапките ќе ги означиме со $R_1(-1)+R_2$ и $R_1(-1)+R_3$. Следува дека

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2(1+a) \\ 1 & a^2 & a\left(1+a^2\right) \\ 1 & a^3 & a(1+a) \end{vmatrix} = aa \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+a^2 \\ 1 & a & 1+a^2 \\ 1 & a^2 & 1+a \end{vmatrix} \begin{array}{l} = R_1(-1)+R_2 = \\ \quad R_1(-1)+R_3 \end{array}$$

$$a^2\begin{vmatrix}1 & 1 & a+a^2\\ 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & a^2-1 & 1-a^2\end{vmatrix}=a^2\left(a-1\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & a+a^2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & \left(a-1\right)\left(a+1\right) & -\left(a-1\right)\left(a+1\right)\end{vmatrix}=$$

$$a^2(a-1)(a-1)(a+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & a+a^2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}\overset{R_2=R_3}{=}0.$$

Задача 26. Докажи дека $\begin{vmatrix}x_1-a & y_1-b & 1\\ x_2-a & y_2-b & 1\\ x_3-a & y_3-b & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$.

Решение. Прв начин. Третата колона ја множиме со a и со b и ја додаваме на првата и втората колона соодветно, од каде веднаш следува точноста на равенството

$$\begin{vmatrix}x_1-a & y_1-b & 1\\ x_2-a & y_2-b & 1\\ x_3-a & y_3-b & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}K_1^*=K_3a+K_1\\ =K_2^*=K_3b+K_2=\\ K_3^*=K_3\end{matrix}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

Втор начин.

$$\begin{vmatrix}x_1-a & y_1-b & 1\\ x_2-a & y_2-b & 1\\ x_3-a & y_3-b & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1-b & 1\\ x_2 & y_2-b & 1\\ x_3 & y_3-b & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & y_1-b & 1\\ a & y_2-b & 1\\ a & y_3-b & 1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_1 & b & 1\\ x_2 & b & 1\\ x_3 & b & 1\end{vmatrix}-0=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}-0=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

Задача 27. Докажи дека детерминантата

$$D=\begin{vmatrix}1 & m+3 & (m+2)(m+3)\\ 1 & m+4 & (m+3)(m+4)\\ 1 & m+5 & (m+4)(m+5)\end{vmatrix}$$

не зависи од m.

Решение. Втората колона ќе ја помножиме со $-\left(m+2\right)$ и ќе ја додадеме на третата колона. Потоа, првата колона ќе ја помножиме со $-(m+3)$ и ќе ја додадеме на втората колона. Најпосле, детерминантата ја развиваме по првата редица.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & (m+3)(m+4)-(m+2)(m+4)\\ 1 & 2 & (m+4)(m+5)-(m+2)(m+5)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & m+4\\ 1 & 2 & 2(m+5)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}1 & m+4\\ 2 & 2(m+5)\end{vmatrix}=2\,.$$

Следува дека вредноста на детерминантата не зависи од m .

Задача 28. Реши ја равенката $\begin{vmatrix}x-3 & x+2 & x-1\\ x+2 & x-4 & x\\ x-1 & x+4 & x-5\end{vmatrix}=0$.

Решение. Забележуваме дека без примена својства на детерминанти ќе се добие сложен израз кој тешко се средува. Но ако од втората и третата равенка ја одземеме првата, добиваме

$$\begin{vmatrix}x-3 & x+2 & x-1\\ x+2 & x-4 & x\\ x-1 & x+4 & x-5\end{vmatrix}=\begin{matrix}R_2^*\to -R_1+R_2\\ R_3^*\to -R_1+R_3\end{matrix}=\begin{vmatrix}x-3 & x+2 & x-1\\ 5 & -6 & 1\\ 2 & 2 & -4\end{vmatrix}=0\,,$$

што се сведува на линеарната равенка по променливата x

$$24(x-3)+2(x+2)+10(x-1)+12(x-1)-2(x-3)+20(x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 22(x-3)+22(x+2)+22(x-1)=0\Leftrightarrow x-3+x+2+x-1=0\Leftrightarrow$$

$$3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\,.$$

2.1.2. Детерминанти од n-ти ред

Задача 1. Пресметај ја детерминантата $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 4 & -1\end{vmatrix}$.

Решение. Прв начин. Ја развиваме детерминантата по прва редица

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&-1\\2&3&-1&0\\0&-1&2&4\\-1&0&4&-1\end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}3&-1&0\\-1&2&4\\0&4&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&2&4\\-1&4&-1\end{vmatrix}+$$

$$0+(-1)^{1+4}(-1)\begin{vmatrix}2&3&-1\\0&-1&2\\-1&0&4\end{vmatrix}.$$

Понатаму членот $(-1)^{i+j}$ од производот директно ќе го пресметуваме. Имено ако збирот на редицата и колоната е парен број тогаш $(-1)^{i+j}=1$, а ако е непарен број $(-1)^{i+j}=-1$. Ги пресметуваме детерминантите од трет ред

$$\begin{vmatrix}3&-1&0\\-1&2&4\\0&4&-1\end{vmatrix}=-6-48+1=-53,$$

$$\begin{vmatrix}2&-1&0\\0&2&4\\-1&4&-1\end{vmatrix}=-4+4-32=-32,\begin{vmatrix}2&3&-1\\0&-1&2\\-1&0&4\end{vmatrix}=-8-6+1=-13$$

Следува,

$$D=53-2(-32)+(-13)=-53+64-13=-2.$$

Втор начин. Ја сведуваме детерминантата во скалеста форма, а потоа ја пресметуваме детерминантата како производ од дијагоналните елементи.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&-1\\2&3&-1&0\\0&-1&2&4\\-1&0&4&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}=\\ R_1(-2)+R_2\\ \\ R_1\cdot 1+R_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&-1\\0&-1&-1&2\\0&-1&2&4\\0&2&4&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}=\\ \\ R_2(-1)+R_3\\ R_2\cdot 2+R_4\end{matrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{R_3\left(-\frac{2}{3}\right)+R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)3\cdot\frac{2}{3} = -2 .$$

Трет начин. (комбиниран) Прво со примена на елементарни трансформации детерминантата ја сведуваме на детерминанта чии елементи во првата колона под првиот елемент се нули, а потоа ја развиваме по истата колона.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ R_1(-2)+R_2 \\ \\ R_1\cdot 1+R_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 .$$

Најчесто ќе го применуваме третиот начин.

Задача 2. Пресметај ја детерминантата

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix} .$$

Решение. Од четврата редица вадиме $\frac{1}{7}$ втората редица 3, додека од првата, втората, третата и четвртата колона вадиме $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{2}$ пред детерминантата.

$$D=\frac{1}{7}3\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2}\\ 1 & -4 & \frac{7}{5} & 5\\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2}\\ -1 & 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{7}3\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 3\\ 3 & -8 & 7 & 10\\ 2 & -9 & 4 & 5\\ -3 & 4 & -5 & 6\end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{140}\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 3\\ 3 & -8 & 7 & 10\\ 2 & -9 & 4 & 5\\ -3 & 4 & -5 & 6\end{vmatrix}.$$

Сега првата редица ја множиме со -3, -2 и 3 и ја додаваме на втората, третата и четвртата редица, соодветно. Потоа ја развиваме детерминантата по првата колона.

$$D=\frac{1}{140}\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -11 & 1 & 15\end{vmatrix}=\frac{1}{140}\begin{vmatrix}7 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -11 & 1 & 15\end{vmatrix}=\frac{1}{140}(11+1+7-15)=\frac{1}{35}.$$

Задача 3. Пресметај ја детерминантата $D=\begin{vmatrix}7 & 2 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7\\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3\end{vmatrix}$.

Решение. Втората и третата редица имаат нули на исти позиции. Затоа втората редица ја множиме со -2 и ја додаваме на третата редица. Добиваме

$$D=\begin{vmatrix}7 & 2 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Сега, детерминанантата ја развиваме по третата редица,

$$D=+\underbrace{\begin{vmatrix}2&1&3&4\\0&2&0&3\\3&2&4&5\\1&2&2&3\end{vmatrix}}_{A}+\underbrace{\begin{vmatrix}7&2&1&3\\1&0&2&0\\6&3&2&4\\5&1&2&2\end{vmatrix}}_{B}.$$

Ќе ги пресметаме одделно секоја од детерминантите со развивање по втора колона,

$$A=+2\begin{vmatrix}2&3&4\\3&4&5\\1&2&3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&1&3\\3&2&4\\1&2&2\end{vmatrix}=$$

$$2(24+15+24-16-20-27)+3(8+4+18-6-16-6)=6$$

и

$$B=-\begin{vmatrix}2&1&3\\3&2&4\\1&2&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}7&2&3\\6&3&4\\5&1&2\end{vmatrix}=$$

$$-(8+4+18-6-16-6)-2(42+40+18-45-28-24)=-2-6=-8.$$

Оттука детерминатата е

$$D=6-8=-2.$$

Задача 4. Пресметај ја детерминантата

$$D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1+b&1&1\\1&1&1+c&1\\1&1&1&1+d\end{vmatrix}.$$

Решение. Првата редица ја множиме со -1 и ја додаваме на останатите редици. Имаме

$$D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\-a&b&0&0\\-a&0&c&0\\-a&0&0&d\end{vmatrix}$$

Детерминаната ја развиваме по четвртата редица

$$D = -(-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$abc + d(bc + ab + ac + abc) = abc + abd + acd + bcd + abcd \; .$$

Задача 5. Пресметај ја детерминантата $D = \begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix}$.

Решение. Забележуваме дека збирот на елементите во редиците е ист. Затоа соодветните елементи од првите три колони ги додаваме на четврата колона.

$$D = \begin{vmatrix} a & b & a & 2a+2b \\ b & a & a & 2a+2b \\ a & b & b & 2a+2b \\ b & a & b & 2a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b)\begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b & a & a & 1 \\ a & b & b & 1 \\ b & a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

Сега од елементите од втората, третата и четвртата редица ги одземаме елементите од првата редица и ја развиваме детерминантата по четвртата колона.

$$D = 2(a+b)\begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ b-a & a-b & b-a & 0 \end{vmatrix} = 2(a+b)(b-a)^3\begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)(b-a)^3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{0} \overset{3}{=} 0 \, .$$

Задача 6*. Пресметај ја детерминантата

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0\end{vmatrix}.$$

Решение. Елементите од првата редица ги множиме со -1 и ги додаваме на останатите редици. Добиваме

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1\end{vmatrix}.$$

Елементите под дијагоналата се нула. Затоа вредноста на детерминантата е производ од елементите на дијагоналата, односно

$$D=1\cdot\underbrace{(-1)(-1)\dots(-1)}_{n}=(-1)^{n-1}.$$

Задача 7*. Низа на Фибоначи се нарекува низата која започнува со броевите 1 и 2, а секој нареден член е збир од претходните два, 1,2,3,5,8,... Докажи дека n-тиот член на низата на Фибоначи е еднаков со детерминантата од n-ти ред

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

Решение. Треба да покажеме дека $D_n=D_{n-1}+D_{n-2}$, каде $D_1=1$, $D_2=2$.

Детерминантата ја развиваме по првата колона, а потоа втората детерминанта по првата редица. Имаме,

$$D_n = +1\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-1} - (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-1} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-1} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{n-2} =$$

$$D_{n-1} + D_{n-2}\,.$$

Притоа, $D_1 = 1$ и $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

Задача 8*. Со помош на математичка индукција докажи дека

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{D_n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Решение. Нека детерминантата од левата страна на равенството е D_n.

За $n = 1$ равенството е точно бидејќи $D_1 = 1 + x^2$.

Нека равенството е точно за $n = 1,2,\dots,k$, односно

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{D_k} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2k}.$$

Тогаш за $n=k+1$, прво ја развиваме D_{k+1} по прва колона. а потоа втората детерминаната ја развиваме по првата редица. Имаме

$$D_{k+1} = \left(1+x^2\right)\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k} -$$

$$x\underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k} =$$

$$\left(1+x^2\right)D_k - x^2\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k-1} =$$

$$\left(1+x^2\right)D_k - x^2 D_{k-1}.$$

Користејќи ја индуктивната претпоставка, добиваме

$$D_{k+1} = \left(1+x^2\right)\left(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k}\right) - x^2\left(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k-2}\right) =$$
$$= 1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k}+x^2+x^4+\ldots+x^{2k+2} - \left(x^2+x^4+\ldots+x^{2k}\right) =$$
$$1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k}+x^{2k+2},$$

што требаше да се покаже. Според принципот на математичка индукција, равенството е точно за секој природен број.

Задача 9.** Пресметај ја детерминантата на Вандермонд

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Решение. Претпоследната, $n-1$-ва колона ја множиме со $-x_1$ и ја додаваме на последната n-та колона, $n-2$-вата колона ја множиме со $-x_1$ и ја додаваме на последната $n-1$-та колона и т. н., се до првата колона која ја множиме со $-x_1$ и ја додаваме на втората колона. На тој начин ја добиваме детерминантата

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 & \ldots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1x_n & \ldots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2\left(x_2-x_1\right) & \ldots & x_2^{n-2}\left(x_2-x_1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n\left(x_n-x_1\right) & \ldots & x_n^{n-2}\left(x_n-x_1\right) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2\left(x_2-x_1\right) & x_2^2\left(x_2-x_1\right) & \ldots & x_2^{n-2}\left(x_2-x_1\right) \\ x_3-x_1 & x_3\left(x_3-x_1\right) & x_3^2\left(x_3-x_1\right) & \ldots & x_n^{n-2}\left(x_n-x_1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n\left(x_n-x_1\right) & x_n^2\left(x_n-x_1\right) & \ldots & x_n^{n-2}\left(x_n-x_1\right) \end{vmatrix} =$$

$$\left(x_2-x_1\right)\left(x_3-x_1\right)\ldots\left(x_n-x_1\right)\begin{vmatrix}1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_n^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}=$$

$$\left(x_2-x_1\right)\left(x_3-x_1\right)\ldots\left(x_n-x_1\right)D_{n-1}$$

Забележуваме дека новодобиената детерминанта има ист облик, но еден степен помалку. Затоа

$$D_{n-1}=\left(x_3-x_2\right)\left(x_4-x_2\right)\ldots\left(x_n-x_2\right)D_{n-2}$$

Продолжувајќи ја понатаму постапката добиваме производ од сите разлики во кои индексот на намалителот е поголем од индексот на намаленикот, односно

$$D_n=\prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i-x_j\right).$$

2.2. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Дискусија на систем 2x2, 2x3, 3x3 по параметар

Дискусија на систем 2x2 по параметар

Задача 1. Во зависност од параметерот a определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases}ax-2y=1\\ 8x-ay=2\end{cases}$.

Решение. Прв начин. Главната детерминанта на системот е

$$D=\begin{vmatrix}a & -2\\ 8 & -a\end{vmatrix}=-a^2+16$$

Притоа,

$$D=0\Leftrightarrow -a^2+16=0\Leftrightarrow a=\pm 4$$

Споредните детерминанти на системот се

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -a\end{vmatrix}=-a+4,\quad D_y=\begin{vmatrix}a & -1\\ 8 & 2\end{vmatrix}=2a-8$$

Дискусија:

1. Ако $a \neq \pm 4$ тогаш $D \neq 0$ и системот има единствено решение:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{4-a}{16-a^2} = \frac{4-a}{(4-a)(4+a)} = \frac{1}{a+4}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2a-8}{16-a^2} = \frac{2(a-4)}{(4-a)(4+a)} = \frac{2(a-4)}{-(a-4)(a+4)} = -\frac{2}{a+4}.$$

2. За $a = 4$ добиваме $D = 0$, $D_x = 0$ и $D_y = 0$. Значи равенките се еквивалентни. Со отфрлање на првата равенка го добиваме системот

$$4x - 2y = 1,$$

кој има бесконечно решенија:

$$x = t,\ y = \frac{4t-1}{2}.$$

3. За $a = -4$ равенките се противречни, па системот нема решение.

Втор начин. Од првата равенка имаме $y = \dfrac{ax-1}{2}$ (1). Заменуваме во втората равенка

$$8x - a\frac{ax-1}{2} = 2 \Leftrightarrow 16x - a^2x + a = 4 \Leftrightarrow (4-a)(4+a)x = 4-a \qquad (2).$$

Ако $4 - a \neq 0$ односно $a \neq 4$, последната равенка можеме да ја скратиме со $4-a$, при што добиваме $x = \dfrac{1}{4+a}$. Тогаш,

$$y = \frac{a\dfrac{1}{4+a} - 1}{2} = \frac{-4}{2(4+a)} = -\frac{2}{4+a}.$$

Ако $4 - a = 0$, односно $a = 4$, тогаш (2) е исполнета за секоја вредност на x, па решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на (1). Земаме $x = t$. Тогаш $y = \dfrac{4t-1}{2}$.

Задача 2. Во зависност од параметрите a и b, определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} ax - 9y = 6 \\ 10x - by = 10 \end{cases}$.

Решение. Види учебник

Дискусија на систем 2x3 по параметар

Задача 3. Во зависност од параметерот a определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 2x+y+az=1 \end{cases}$.

Решение. Коефициентите пред непознатите се пропорционални, ако

$$2:2=1:1=1:a \Leftrightarrow a=1$$

1. Нека $a \neq 1$. Земаме една од променливите за параметар. Нека $y=t$. Го решаваме системот

$$\begin{cases} 2x+z=-t \\ 2x+az=1-t \end{cases},$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=2(a-1),\ D_x=\begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1-t & a \end{vmatrix}=-at+t-1,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & -t \\ 2 & 1-t \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -t \\ 1 & 1-t \end{vmatrix}=2 \text{; и}$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-at+t-1}{2(a-1)},\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{2}{2(a-1)}=\frac{1}{(a-1)}$$

Оттука решенијата на бараниот систем се

$$x=\frac{-at+t-1}{2(a-1)},\ y=t,\ z=\frac{1}{(a-1)},\ t\in\mathbb{R}.$$

2. Ако $a=1$ равенките се противречни, па системот нема решение.

Забелешка. Не е сеедно која од променливите ќе ја земеме за параметар. Ако земевме $z=t$, ќе се добиеше системот $\begin{cases} 2x+y=-t \\ 2x+y=1-at \end{cases}$, кој нема решение за произволна вредност на t.

Втор начин. Од првата равенка на системот добиваме $y=-2x-z$. Заменуваме во втората равенка,

$$2x-2x-z+az=1 \Leftrightarrow (a-1)z=1 \ (1)$$

Ако $a-1\neq 0$, односно $a\neq 1$, важи $z=\frac{1}{a-1}$. Земаме $x=t$. Тогаш

$$y=-2t-\frac{1}{a-1}=\frac{-2at+2t-1}{a-1}.$$

Ако $a-1=0$, тогаш равенката (1) нема решение, па и системот нема решение.

Системи што се сведуваат на систем линеарни равенки

Задача 4. Реши го системот равенки $\begin{cases}\frac{1}{x-y}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{y-z}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{z-x}=-\frac{1}{4}\end{cases}$.

Решение. Од равенките $\frac{1}{x-y}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{y-z}=\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{z-x}=-\frac{1}{4}$ добиваме $x-y=2$, $y-z=2$ и $z-x=-4$. Притоа, за $x\neq y$, $y\neq z$ и $z\neq x$ системот е еквивалентен со системот $\begin{cases}x-y=2\\ y-z=2\\ z-x=-4\end{cases}$. Од првата равенка имаме $x=y+2$. Тогаш од третата равенка добиваме $z-(y+2)=-4$, односно $y=z+2$. Последната равенка е еквивалентна со втората. Земаме $z=t$. Тогаш, $y=t+2$ и $x=t+2+2=t+4$. Значи, решенијата се $(t+4,t+2,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Задача 5. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{1}{x+y-2z}+\frac{1}{2x+3y+z}+\frac{1}{x+3y+z}=1\\ \frac{2}{x+y-2z}+\frac{2}{2x+3y+z}+\frac{1}{x+3y+z}=3\\ \frac{1}{x+y-2z}-\frac{1}{2x+3y+z}+\frac{3}{x+3y+z}=-1\end{cases}.$$

Решение. Со воведување на смените $\frac{1}{x+y-2z}=u$, $\frac{1}{2x+3y+z}=v$ и $\frac{1}{x+3y+z}=w$ го добиваме системот

$$\begin{cases} u+v+w=1 \\ 2u+2v+w=3 \\ u-v+w=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=1-u-v \\ 2u+2v+1-u-v=3 \\ u-v+1-u-v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} w=1-u-v \\ u+v-2=0 \\ -2v+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=1-u-v \\ u=1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=-1 \\ u=1 \\ v=1 \end{cases}.$$

Оттука имаме дека

$$x+y-2z=1,\ 2x+3y+z=1 \text{ и } x+3y+z=-1$$

односно

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y+z=1 \\ x+3y+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1+2z-x \\ 2x+3(1+2z-x)+z=1 \\ x+3(1+2z-x)+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=1+2z-x \\ 2x+3+6z-3x+z=1 \\ x+3+6z-3x+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=1+2z-x \\ -x+7z+2=0 \\ -2x+7z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1+2z-x \\ -x+2=0 \\ -x+7z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=0 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Проверуваме дали $(2,-1,0)$ е решение и на првобитниот систем. Бидејќи истото е исполнето, решението на бараниот систем е подредената тројка $(2,-1,0)$.

Дискусија на систем 3x3, по параметар

Задача 6. Во зависност од параметарот a, определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+az=2 \\ ax-3y+z=0 \end{cases}$.

Решение. Види учебник.

Задача 7. Во зависност од параметерот a, определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} 2x-ay+2z=8 \\ 2x+3y-z=3 \\ ax-y+z=11 \end{cases}$.

Решение. Детерминантите на системот се

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -a & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix}=6+a^2-4-6a-2+2a=a^2-4a=a(a-4)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & -a & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 11 & -1 & 1 \end{vmatrix}=24+11a-6-66-8+3a=14a-56=14(a-4)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ a & 11 & 1 \end{vmatrix}=6-8a+44-6a+22-16=14a+56=-14(a-4)$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & -a & 8 \\ 3 & 3 & 3 \\ a & -1 & 11 \end{vmatrix}=66-3a^2-16-24a+6+22a=-3a^2-2a+56=$$

$$\left(a_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12\cdot 56}}{-6}\Leftrightarrow a_{1,2}=\frac{2\pm 26}{-6}\Leftrightarrow a_1=-\frac{14}{3},\ a_2=4\right)$$

$$=-3\left(a+\frac{14}{3}\right)(a-4)=-(3a+14)(a-4)$$

Главната детерминанта е нула ако

$$D=0\Leftrightarrow a(a-4)=0\Leftrightarrow a=0,\ a=4$$

Дискусија:

1. Ако $a \neq 0, a \neq 4$, системот има единствено решение

$$x = \frac{14(a-4)}{a(a-4)} = \frac{14}{a},\ y = -\frac{14(a-4)}{a(a-4)} = -\frac{14}{a},$$

$$z = -\frac{(3a+14)(a-4)}{a(a-4)} = -\frac{3a+14}{a}$$

2. За $a = 4$ се добива системот $\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 8 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$ чии детерминанти се $D = D_x = D_y = D_z = 0$ и нема противречни и еквивалентни равенки. Затоа системот $\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 8 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$ е еквивалентен на претходниот. Избираме $z = t$ и го решаваме системот $\begin{cases} 2x - 4y = 8 - 2t \\ 2x + 3y = 3 + t \end{cases}$ од две линеарни равенки со две непознати. Детерминантите се

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8-2t & -4 \\ 3+t & 3 \end{vmatrix} = 24 - 6t + 12 + 4t = 36 - 2t = 2(18 - t),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8-2t \\ 2 & 3+t \end{vmatrix} = 6 + 2t - 16 + 4t = 6t - 10 = 2(3t - 5),$$

од каде $x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(18-t)}{14} = \frac{18-t}{7}$, $\quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(3t-5)}{14} = \frac{3t-5}{7}$. Значи решенијата на бараниот систем се $\left\{ \left(\frac{18-t}{7}, \frac{3t-5}{7}, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Ако $a = 0$ имаме $D = 0$ и $D_x \neq 0$, па системот нема решение.

Задача 8. Во зависност од параметатрите a и c, определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} ax + 2ay + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + cz = 1 \end{cases}$.

Решение. Детерминантите на системот се

$$D=\begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}=ac+2a+2-1-2a-2ac=1-ac,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}=c+2a+2-1-2-2ac=-ac+2a+c-1,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=ac+1+1-1-a-c=ac-a-c+1,$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=a+2a+2-1-2a-2a=1-a.$$

Детерминантата на системот е 0, ако $ac=1$. Притоа, $D_z=0$ за $a=1$. Ако $ac=1$ и $a=1$, тогаш $c=1$. За $a=1$ и $c=1$, $D=D_x=D_y=D_z=0$.

Дискусија:

1. За $ac\neq 1$, системот има единствено решение

$$x=\frac{-ac+2a+c-1}{1-ac},\ y=\frac{ac-a-c+1}{1-ac} \text{ и } z=\frac{1-a}{1-ac}.$$

2. За $a=1$ и $c=1$, го добиваме системот $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$ кој е еквивалентен со $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Ако ги одземеме равенките добиваме $y=0$. Тогаш, $x+z=1$. Ако $x=t$, имаме $z=1-t$. Па решенијата се $(t,0,1-t)$, $t\in\mathbb{R}$.

3. За $ac=1$ и $a\neq 1$, важи $D=0$ и $D_z\neq 0$, односно системот нема решение.

Задача 9. Во зависност од параметарот a определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} ax+y+4z=0 \\ 3x+2y+5z=0 \\ 5x+(a+1)y+(4a+1)z=0 \end{cases}$.

Решение. Детерминантата на системот е

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & a+1 & 4a+1 \end{vmatrix}=$$

$$2a(4a+1)+25+12(a+1)-40-5a(a+1)-3(4a+1)=$$
$$=8a^2+2a+25+12a+12-40-5a^2-5a-12a-3=$$
$$3a^2-3a-6=3(a^2-a-2).$$

Таа има вредност нула ако

$$D=0 \Leftrightarrow a^2-a-2=0 \Leftrightarrow (a-2)(a+1) \Leftrightarrow a=2 \vee a=-1$$

Дискусија:

1. Ако $a \neq 2 \wedge a \neq -1$, системот има единствено решение $(0,0,0)$.

2. За $a=2$ го добиваме системот $\begin{cases} 2x+y+4z=0 \\ 3x+2y+5z=0 \\ 5x+3y+5z=0 \end{cases}$ кој е еквивалентен со системот $\begin{cases} 2x+y+4z=0 \\ 3x+2y+5z=0 \end{cases}$ и има решенија

$$x=t\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-3t,\ \ y=t\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=2t,\ \ z=t\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=t,\ t\in\mathbb{R}.$$

3. За $a=-1$ го добиваме системот $\begin{cases} -x+y+4z=0 \\ 3x+2y+5z=0 \\ 5x-3z=0 \end{cases}$ кој е еквивалентен со системот $\begin{cases} -x+y+4z=0 \\ 3x+2y+5z=0 \end{cases}$ и има решенија

$$x=t\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-3t,\ \ y=t\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=17t,\ z=t\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5t,\ t\in\mathbb{R}.$$

2.3. Задачи за вежбање

2. Детерминанти и системи линеарни равенки
2.1. Детерминанти
2.1.1 Детерминанти од втор и трет ред

Задача 1-4. Пресметај ги детерминантите:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}; \qquad 3)\ \begin{vmatrix} ctgx & 1 \\ \cos^2 x & tgx \end{vmatrix}; \qquad 4)\ \begin{vmatrix} a^x & a^y \\ -a^{-x} & a^{-y} \end{vmatrix}.$$

Задача 5-6. Реши ги равенките:

$$5)\ \begin{vmatrix} x^2-2 & -2 \\ 6x+2 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \qquad 6)\ \begin{vmatrix} \cos 7x & \sin 3x \\ -\sin 7x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 7-8. Реши ги равенките:

$$7)\ \begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} < 0; \qquad 8)\ \begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} > 0.$$

Задача 9-12. Пресметај ги детерминантите:

$$9)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 10)\ \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix};$$

$$11)\begin{vmatrix} 0 & \cos x & tgx \\ \cos x & 0 & \cos x \\ tgx & \cos x & 0 \end{vmatrix}; \qquad 12)\ \begin{vmatrix} y^2+z^2 & y^2 & z^2 \\ x^2 & z^2+x^2 & z^2 \\ x^2 & y^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}.$$

Задача 13-14. Пресметај ги детерминантите:

$$13)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$ со развивање по втора редица,

$$14)\ \begin{vmatrix} 1 & -x & y \\ xy^2 & -1 & y^{-2} \\ x & -x & 1 \end{vmatrix}$$ со развивање по трета колона.

2.1.2. Својства на детерминанти од втор и трет ред

Задача 1-4. Без развивање на детерминантите, користејќи ги својствата, покажи дека следниве детерминанти се 0.

$$1)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$3)\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}; \qquad 4)\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \sin^2 y & \cos^2 y & \sin 2y \\ \sin^2 z & \cos^2 z & \sin 2z \end{vmatrix}.$$

Задача 5-6. Докажи дека:

$$5)\begin{vmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) & -\cos(x+y) \\ \sin(x-y) & \cos(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin 2x & 0 & \cos 2x \end{vmatrix} = \sin 2(x+y).$$

$$6)\begin{vmatrix} x+a & x^2+a^2 & x^3+a^3 \\ 1 & y & y^2 \\ 2 & x+a & x^2+a^2 \end{vmatrix} = (a-x)^2(a-y)(x-y).$$

Задача 7. Без да ја развиваш детерминантата, покажи дека

$$\begin{vmatrix} ka_1+b_1 & kb_1+c_1 & kc_1+a_1 \\ ka_2+b_2 & kb_2+c_2 & kc_2+a_2 \\ ka_3+b_3 & kb_3+c_3 & kc_3+a_3 \end{vmatrix} = (k+1)(k^2-k+1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Задача 8-9. Реши ги по x равенките

$$а)\begin{vmatrix} x+a & a & a \\ a & x+a & a \\ a & a & x+a \end{vmatrix} = 0; \qquad б)\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & 3 \\ x+3 & 2 & x+1 \\ 1 & x+2 & x+3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.1.3 Детерминанти од n-ти ред

Задача 1-6. Пресметај ги детерминантите:

$$1)\ D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$3)\ D=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&a&1&1\\1&1&a&1\\1&1&1&a\end{vmatrix};\qquad 4)\ D=\begin{vmatrix}a&1&1&1\\b&0&1&1\\c&1&0&1\\d&1&1&0\end{vmatrix};$$

$$5)\ D=\begin{vmatrix}3&-3&4&1&0\\2&-1&1&3&2\\1&1&2&1&1\\5&0&5&2&-1\\3&-2&2&2&-2\end{vmatrix};\ 6)\ D=\begin{vmatrix}-2&1&0&-1&3\\1&0&3&7&-2\\1&-1&0&1&1\\2&3&-4&1&2\\0&-2&-1&2&-1\end{vmatrix}.$$

Задача 7-12. Пресметај ги детерминантите,

$$7)\ D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix};\qquad 8)\ D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&a_{nn}\end{vmatrix};$$

$$9)\ D=\begin{vmatrix}0&\dots&0&0&a_{1n}\\0&\dots&0&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\dots&a_{n,n-2}&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix};$$

$$10)\ D=\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1,n-2}&a_{1,n-1}&a_{1n}\\a_{21}&\dots&a_{2,n-2}&a_{2,n-1}&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\dots&0&0&0\end{vmatrix}.$$

Задача 41-42. Со сведување до триаголна форма, пресметај ги детерминантите,

$$11)\ D=\begin{vmatrix}-1&-2&-3&\dots&-k\\1&0&3&\dots&k\\1&2&0&\dots&k\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&2&3&\dots&0\end{vmatrix};\ 12)\ D=\underbrace{\begin{vmatrix}3&3&\dots&3&7\\3&3&\dots&7&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\7&3&\dots&\dots&3\end{vmatrix}}_{n}.$$

Задача 13-14. Пресметај ги детерминантите

$$13)\ D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \qquad 14)\ D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 6-x^2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & 2 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

2.2 Системи линеарни равенки

Линеарна равенка со две или три непознати

Задача 1-2. Реши ја равенката:

$$1)\ \frac{1}{2}x+\sqrt{3}y=1; \qquad 2)\ 2x-7y+z=0.$$

Систем од 2 линеарни равенки со 2 непознати

Задача 3-5. Реши го системот равенки:

$$3)\ \begin{cases} 3x-7y=5 \\ x+4y=8 \end{cases}; \qquad 4)\ \begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}; \qquad 5)\ \begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=1 \\ 0\cdot x+0\cdot y=2 \end{cases}.$$

Задача 6-7. Во зависност од параметерите a, b и c, определи ги решенијата на системот равенки:

$$6)\ \begin{cases} ax+by=c \\ -bx+ay=c \end{cases},\ a^2+b^2\neq 0; \qquad 7)\ \begin{cases} 3ax-5by=2c \\ ax-2by=c \end{cases}.$$

Систем од 2 линеарни равенки со 3 непознати

Задача 8-10. Реши го системот равенки:

$$8)\ \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}; \quad 9)\ \begin{cases} x-2y+3z=1 \\ -2x+4y-6z=-2 \end{cases}; \quad 10)\ \begin{cases} 4x+2y-2z=3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}.$$

Задача 11-12. Реши го системот равенки:

$$11)\ \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}; \qquad 12)\ \begin{cases} 4x+2y-2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}.$$

Задача 13-14. Во зависност од параметрите a и b, определи ги решенијата на системот равенки:

$$13)\ \begin{cases} 2x+ay+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}; \qquad 14)\ \begin{cases} ax+by+z=2 \\ 2x+y+az=1 \end{cases}.$$

Систем од 3 линеарни равенки со 3 непознати

Задача 15-20. Реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} 2x-y+2z=2 \\ x+10y-3z=5 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-2y-4z=2 \\ 2x-3y-5z=1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-2y-4z=2 \\ 2x-3y-5z=1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x-y+3z=8 \\ -x+2y+z=4 \\ 3x+y-4z=0 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ 2x-4y-6z=2 \\ 3x-6y-9z=3 \end{cases}$; ѓ) $\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=1 \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0 \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0 \end{cases}$.

Задача 21-22. Реши ги системите равенки:

20) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{z+x}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$; 21) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-2z}+\dfrac{1}{2x+3y+z}+\dfrac{1}{x+3y+z}=1 \\ \dfrac{2}{x+y-2z}+\dfrac{2}{2x+3y+z}+\dfrac{1}{x+3y+z}=3 \\ \dfrac{1}{x+y-2z}-\dfrac{1}{2x+3y+z}+\dfrac{3}{x+3y+z}=-1 \end{cases}$.

Задача 22. Со помош на Крамеровото правило, реши го системот равенки $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3-4x_4=-2 \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4=-1 \\ -x_1+2x_2-x_3-2x_4=1 \\ 2x_1-2x_2-x_3-x_4=-6 \end{cases}$.

<u>Хомоген систем од 3 линеарни равенки со 3 непознати</u>

Задача 22-23. Реши ги системите равенки

22) $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 23) $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+3y-4z=0 \end{cases}$.

<u>Дискусија на систем 3 со 3 по параметар</u>

Задача 24-32. Во зависност од параметарот a, определи ги решенијата на системот равенки

1) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+3y+az=3 \\ 2ax-9y+3z=0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} ax-y+z=3 \\ -x+y+z=-1 \\ x+y+3z=1 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} (a-1)x+y+4z=0 \\ 3x+2y+5z=0 \\ 5x+ay+(4a-3)z=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} (1+a)x+y+z=1 \\ x+(1+a)y+z=a \\ x+y+(1+a)z=a^2 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x+ay=3 \\ ax+z=2 \\ y+az=1 \end{cases}$, $a\neq -1$; 6) $\begin{cases} 5ax-4by+2cz=3abc \\ 3ax-6by+5cz=2abc \\ 2ax-3by+cz=0 \end{cases}$, $abc\neq -1$;

7) $\begin{cases} x+3y+az=0 \\ 4x+5y-z=0 \\ 4x-2y+10z=0 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} ax+y+z=3 \\ x+y+z=1 \\ x+y-az=1 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x-ay+z=3 \\ -x+ay+z=-1 \\ x+2ay+z=0 \end{cases}$.

3. МАТРИЦИ

3.1. ОПЕРАЦИИ СО МАТРИЦИ

Задача 1. Пресметај $2A$-$3B$, ако матрицата

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 1\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица се множи со број, така што секој елемент од матрицата се множи со бројот. Затоа

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ 6 & 0 & 2\\ -2 & 8 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5 & 4\\ 6 & 0 & 5\\ -2 & 11 & 2\end{bmatrix}.$$

Задача 2. Определи ги x, y, z и t, така што матрицата $2\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & x+1\\ t & z-1\end{bmatrix}$ да е еднаква со матрицата $\begin{bmatrix}0 & y\\ -1 & t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

Решение. Од условот на задачата, имаме

$$2\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & x+1\\ t & z-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & y\\ -1 & t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 4\\ 0 & -2\end{bmatrix}, \text{ односно}$$

$$\begin{bmatrix}2x+2 & 2y+x+1\\ 2z+t & 2t+z-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & y+4\\ -1 & t-2\end{bmatrix},$$

од каде го добиваме системот равенки

$$2x+2=4,\ x+2y+1=y+4,\ 2z+t=-1 \text{ и } z+2t-1=t-2 \text{ или}$$

$$x=1,\ x+y=3,\ 2z+t=-1 \text{ и } z+t=-1.$$

Од првата равенка имаме $x=1$. Следува, од втората равенка, $y=2$. Ако од третата равенка ја одземеме четвртата, добиваме $z=0$, од каде $t=-1$. Следува $x=1$, $y=2$, $z=0$ и $t=-1$ е решението на задачата.

Задача 3. Пресметај го производот $2AB+C$ ако

$$A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \text{ и } C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}.$$

Решение. Бидејќи

$$AB=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 16 & -5\\ -9 & -10 & 3\\ 6 & 8 & -2\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}, \text{ следува дека}$$

$$2AB+C=\begin{bmatrix}30 & 32 & -10\\ -18 & -20 & 6\\ 12 & 16 & -4\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 3\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 31 & -8\\ -16 & -20 & 7\\ 14 & 14 & -1\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}.$$

Задача 4. Пресметај $\left(AB\right)^T$ и $B^T A^T$, ако

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}. \text{ Што заклучуваш?}$$

Решение. Имаме

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix} \text{ и}$$

$$B^T A^T=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Заклучуваме дека $\left(AB\right)^T=B^T A^T$. Во учебникот е покажана точноста на тврдењето за кои било матрици за кои постои нивниот производ.

Степенување на матрици

Задача 5. Пресметај A^5, ако $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$.

Решение. Ги пресметуваме матриците

$A^2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}=7E$ и $A^4=A^2A^2=7E\cdot 7E=49E$, од

каде: $A^5=A^4A=49E\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=49\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}98 & 49\\ 147 & -98\end{bmatrix}$.

Задача 6. Пресметај A^3, ако $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\end{bmatrix}$.

Решение. Имаме

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 0 & -4\\ 0 & 3 & -8\\ 12 & -16 & 17\end{bmatrix}, \text{ од каде:}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-5 & 0 & -4\\ 0 & 3 & -8\\ 12 & -16 & 17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -6 & 12\\ 9 & -35 & 30\\ -36 & 60 & -83\end{bmatrix}.$$

Задача 7. Ако полиномот $f(x)=x^2+2x-2$, пресметај $f(A)$, каде матрицата

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Решение. Нека E е единечна матрица од трет ред. Тогаш:

$$f(A)=A^2+2A-2E=$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 8 \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 14 & 12 \\ -3 & -6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Задача 8. Матрицата A е нилпотентна, ако $A^n = 0$ за некој природен број n. Докажи дека матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ е нилпотентна.

Решение. Ги пресметуваме првите неколку степени на матрицата A:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следува дека матрицата е нилпотентна, бидејќи $A^4 = 0$.

Задача 9. Пресметај $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Бидејќи

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E,$$

заклучуваме дека ако n е парен број, односно $n=2k$, $k\in\mathbb{N}_0$, важи:

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}^{2k}=\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}^{2}\right)^{k}=E^k=E,$$

и ако n е непарен број, односно $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}_0$, важи

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}^{2k+1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}^{2k}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=E\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}.$$

Задача 10. Пресметај $A^n=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ги разгледуваме првите неколку степени:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -7\\ 0 & 8\end{bmatrix}.$$

Претпоставуваме дека $A^n=\begin{bmatrix}1 & -2^n+1\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$. Точноста на претпоставката ја докажуваме со методот на математичка индукција. За $n=1$ тврдењето важи. Ако твдрењето е точно за произволен $n=k$ т.е.

$$A^k=\begin{bmatrix}1 & -2^k+1\\ 0 & 2^k\end{bmatrix}\ \text{тогаш}$$

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{bmatrix}1 & -2^k+1\\ 0 & 2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2^{k+1}+1\\ 0 & 2^{k+1}\end{bmatrix}.$$

Следува, тврдењето е точно и за $n=k+1$.

Задача 11. Пресметај $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^n$.

Решение. Ги пресметуваме првите неколку степени

$$1)\ \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix},$$

2) $$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix},$$

3) $$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha & -\cos 2\alpha\sin\alpha-\sin 2\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha\sin\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha & -\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\cos 3\alpha & -\sin 3\alpha\\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha\end{bmatrix}.$$

Индуктивно заклучуваме дека
$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{bmatrix}^n.$$

Заклучокот го докажуваме со помош на принципот на математичка индукција.

За $n=1$ равенството е исполнето.

Нека равенството важи за $n=k$, односно
$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{bmatrix}^k.$$

Тогаш, за $n=k+1$ добиваме
$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha & -\cos k\alpha\sin\alpha-\sin k\alpha\cos\alpha\\ \cos k\alpha\sin\alpha+\sin k\alpha\cos\alpha & -\cos k\alpha\cos\alpha+\sin k\alpha\sin\alpha\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}\cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha\\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha\end{bmatrix}.$$

Задача 12. Пресметај $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$.

Решение. Ги пресметуваме првите неколку степени,

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$2)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Елементите што се наоѓаат во првата редица и третата колона се $0 = \dfrac{0 \cdot 1}{2}$ во првиот степен, $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$ во вториот, $3 = 1 + 2 = \dfrac{2 \cdot 3}{2}$ во третиот, $6 = 3 + 3 = 1 + 2 + 3 = \dfrac{3 \cdot 4}{2}$ во четвртиот степен.

Затоа, заклучуваме дека $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Точноста ја утврдуваме со помош на принципот на математичка индукција. За $n=1$ равенството е точно.

Нека равенството е точно за $n=k$, односно

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{(k-1)k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Треба да докажеме дека тврдењето важи за $n=k+1$, односно

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Навистина

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k & \frac{(k-1)k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k & \frac{(k-1)k}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+k & k+\dfrac{(k-1)k}{2} \\ 0 & 1 & 1+k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & \dfrac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 13. Докажи ги равенствата $A^{2n} - A^{2n-2} - A^2 + E = 0$, каде $n \in \mathbb{N}$ и матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Равенствата ќе ги докажеме со помош на принципот на математичка индукција.

За $n = 1$, важи

$$A^2 - A^0 - A^2 + E = 0 \Leftrightarrow 0 = 0,$$

односно равенството е исполнето.

Нека равенството е исполнето за $n = k$, односно

$$A^{2k} - A^{2k-2} - A^2 + E = 0.$$

Ќе покажеме дека равенството важи за $n = k+1$, односно $A^{2k+2} - A^{2k} - A^2 + E = 0$. Од равенството $A^{2k} - A^{2k-2} - A^2 + E = 0$ имаме $A^{2k} - A^{2k-2} = A^2 - E$.

Оттука

$$A^{2k+2} - A^{2k} - A^2 + E = A^2 A^{2k} - A^{2k} - A^2 + E =$$

$$A^2\left(A^{2k-2} + A^2 - E\right) - A^{2k} - A^2 + E = A^{2k} + A^4 - A^2 - A^{2k} - A^2 + E =$$

$$A^4 - 2A^2 + E.$$

Бидејќи

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

имаме

$$A^4-2A^2+E=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0&0\\-2&-2&0\\-2&0&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$$

Следува, $A^{2k+2}-A^{2k}-A^2+E=0$.

Втор начин. Од обликот на матриците E, A^2 и A^4 заклучуваме дека

$$A^{2n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{bmatrix}.$$

Јасно, равенството е точно за $n=0$. Нека равенството е точно за

$n=k$ т.е. $A^{2k}=\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\k&0&1\end{bmatrix}$. Тогаш,

$$A^{2(k+1)}=A^{2k}A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\k&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\k+1&1&0\\k+1&0&1\end{bmatrix}.$$

Следува тврдењето е точно за сите природни броеви. Сега

$$A^{2n}-A^{2n-2}-A^2+E=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\n&1&0\\n&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\n-1&1&0\\n-1&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$0=0.$$

3.2. РАНГ НА МАТРИЦА. ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

Задача 1. Најди го рангот на матрицата

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&7\\7&8&9&10&11&12\end{bmatrix}.$$

Решение. Прво со примена на елементарни трансформации наоѓаме еквивалентна матрица на матрицата A, која е во скалеста форма. Елементите од првата редица ги множиме со -2 и ги додаваме на соодветните елементи од втората редица, потоа ги множиме со -3 и ги додаваме на елементите од третата редица, и ги множиме со -7 и ги додаваме на елементите од четвртата редица. На тој начин ја добиваме еквивалентната матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 11 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}.$$

Сега, елементите од втората редица ги множиме со 2 и ги додаваме на соодветните елементи од третата редица, а потоа ги множиме со 6 и ги додаваме на елементите од четвртата редица. Резултатот е матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

која е во скалеста форма и има 3 ненулти редици. Следува $r(A) = 3$.

Коментар. Понатаму, елементарните трансформации, ќе ги опишуваме симболично. На пример, трансформацијата со која елементите од првата редица ги множиме со -2, и ги додаваме на соодветните елементи од втората редица ќе ја запишеме со $-2R_1 + R_2$. Тогаш, процесот на решавање би бил следен:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -3R_1 + R_3 \\ R_4 \to -7R_1 + R_4 \end{matrix} \approx$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 11 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_3 \to 2R_2+R_3 \\ R_4 \to 6R_2+R_4}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \approx \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Следува } r(A) = 2.$$

ИНВЕРЗНА МАТРИЦА

Задача 2. Најди ја инверзната матрица на матрицата $A = [2]$.

Решение. Инверзната матрица на матрицата A е матрицата A^{-1} за која важат равенствата $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Бидејќи A е квадратна матрица доволно е да важи $AA^{-1} = E$. Нека $A^{-1} = [a]$, тогаш имаме $[2][a] = [1]$, од каде следува дека $a = \frac{1}{2}$. Значи,

$$A^{-1} = \left[\frac{1}{2}\right].$$

Задача 3. Покажи дека инверзната матрица на несингуларната матрица

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ е } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Решение. Инверзната матрица ќе ја најдеме според формулата $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\widetilde{A}\right)^T$, каде алгебарските комплементи се

$$A_{11} = (-1)^{1+1} d = d, \; A_{12} = (-1)^{1+2} c = -c, \; A_{21} = (-1)^{2+1} b = -b,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} a = a.$$

Следува,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Коментар. Во претходната задача изведовме критериум за пресметување на инверзна матрица на матрица од втор ред. Тој гласи:

Инверзната матрица на матрицата од втор ред A, се добива ако елементите што лежат на главната дијагонала на матрицата A се ротираат, елементите што лежат на споредната дијагонала ги менуваат знаците, а новодобиената матрица се множи со $\frac{1}{\det A}$.

Задача 4. Најди инверзна матрица на матрицата $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}$.

Решение. Прв начин. Инверзната матрица ќе ја пресметаме според формулата $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(adjA\right)^T$. Имаме $\det A=15-6=9$ и

$$A_{11}=\left(-1\right)^{1+1}3=3,\; A_{12}=\left(-1\right)^{1+2}3=-3,\; A_{21}=\left(-1\right)^{2+1}2=-2,$$

$$A_{22}=\left(-1\right)^{2+2}5=5.$$

Следува $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & 5\end{bmatrix}^T=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$.

Втор начин. Според формулата од претходната задача, бидејќи $\det A=9$, следува дека

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -3 & 5\end{bmatrix}.$$

Трет начин. Нека матрицата $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Од условот $AA^{-1}=E$, ја добиваме матричната равенка

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}5a+2c & 5b+2d\\ 3a+3c & 3b+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

која е еквивалентна со системот

$$5a+2c=1,\; 5b+2d=0,\; a+c=0 \text{ и } b+d=\frac{1}{3}.$$

Од третата равенка следува, $c=-a$. Заменуваме во првата равенка, $5a-2a=1$, односно $a=\frac{1}{3}$. Оттука, $c=-\frac{1}{3}$. Променливата

$d=\frac{1}{3}-b$ од четвртата равенка ја заменуваме во втората равенка, $5b+\frac{2}{3}-2b=0$ или $b=-\frac{2}{9}$. Оттука, $d=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$. Следува

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Четврт начин. Бидејќи $\det A\neq 0$, следува дека матрицата A, има инверзна. Инверзната матрица ќе ја најдеме со методот на Гаус-Жордан, $\left[A\middle|E\right]\approx\left[E\middle|A^{-1}\right]$. Формираме матрица која се добива кога до елементите на матрицата A, од десна страна ќе се допишат елементите на единечната матрица од втор ред E. Потоа,со елементарни трансформации елементите на подматрицата A ги сведуваме до елементи на единечна подматрица.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_1/5 \\ R_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_1 \\ R_1(-3)+R_2 \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_1 \\ R_2\cdot\frac{5}{9} \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_2\left(-\frac{2}{5}\right)+R_1 \\ R_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{array}\right].$$

$$\text{Следува, } A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Задача 5. Најди за која вредност на x, матрицата
$$A=\begin{bmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
е сингуларна.

Решение. Матрицата A е сингуларна (нема инверзна), ако нејзината детерминанта е нула. Бидејќи
$$\det A=\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2x^2+12+9x-18-3x^2-4x=-x^2+5x-6\text{, следува}$$
$$\det A=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-6)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=6,\ x=-1.$$
Значи матрицата A е сингуларна за $x=-1$ и $x=6$.

Задача 6. Најди инверзна матрица на матрицата
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Прв начин. Имаме
$$\det A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=4-1=3 \text{ и}$$
$$A_{11}=+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1,\ A_{13}=+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2,$$
$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=+\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0,$$
$$A_{31}=+\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2\quad A_{33}=+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1,$$
$$\text{Следува, } A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}^T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -8 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 7. Со помош на методот на Гаус-Жордан, $\left[A\middle|E\right]\approx\left[E\middle|A^{-1}\right]$, најди инверзна матрица на матрицата

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Решение. Со помош на елементарни трансформации имаме

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\approx\begin{array}{c}R_4(-1)+R_1\\R_4(-1)+R_2\\R_4(-1)+R_3\\R_4\end{array}\approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&1&0&0&-1\\0&1&1&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\approx\begin{array}{c}R_3(-1)+R_1\\R_3(-1)+R_2\\R_3\\R_4\end{array}\approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&-1&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\approx\begin{array}{c}R_2(-1)+R_1\\R_2\\R_3\\R_4\end{array}\approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right].$$

Следува дека инверзната матрица е $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

3.3. Решавање на системи линеарни равенки со Гаусов метод на елиминации

Системи линеарни равенки што имаат единствено решение

Задача 1. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теорема на Кронекер-Капели, определи ги решенијата на системот равенки

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 22 \\ x_1 + 6x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_4 = 28 \end{cases}.$$

Решение. Ја запишуваме проширената матрица на системот и со помош на елементарни трансформации, ја сведуваме до еквивалентна матрица во скалеста форма. Имаме

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 9 & 8 & 5 & 22 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 9 & 0 & 6 & 28 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_1(-1)+R_2 \\ R_1(-1)+R_3 \\ R_1(-2)+R_4 \end{array} \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 8 & 3 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] \approx R_2 \leftrightarrow R_3 \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 12 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_2 \cdot 2 + R_3 \\ R_2(-5)+R_4 \end{array} \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 28 \end{array}\right].$$

Бројот на решенија ќе го толкуваме со помош на теоремата на Кронекер-Капели. Имаме $r(A)=4$, $r(A_p)=4$ и $n=4$. Следува системот равенки има единствено решение.

На последната матрица ѝ одговара системот

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 2x_4 = 10 \\ -x_2 - x_4 = -4 \\ 8x_3 + x_4 = 4 \\ +7x_4 = 28 \end{cases}.$$

Од четвртата равенка имаме $7x_4 = 28$, односно $x_4 = 4$. Од третата равенка, $8x_3 + 4 = 4$, односно $x_3 = 0$. Од втората равенка,

$-x_2 - 4 = -4$ или $x_2 = 0$ и од првата равенка $x_1 + 8 = 10$, од каде $x_1 = 2$.

Системи линеарни равенки што немаат решение

Задача 2. Со помош на Гаусов метод на елиминации, толкувајќи според теорема на Кронекер-Капели, определи ги решенијата на системот равенки

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Со примена на Гаусовиот метод на елиминации, добиваме

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -5 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_2 \to R_1(-1) + R_2 \\ R_3 \to R_1(-1) + R_3 \\ R_4 \to R_1(-3) + R_4 \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_2 2 + R_3 \\ R_2(-1) + R_4 \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right] \approx R_3 \leftrightarrow R_4 \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Рангот на матрицата на системот равенки е 2, а рангот на проширената матрица е 3. Од теоремата на Кронекер-Капели, следува дека системот равенки нема решение.

Системи линеарни равенки што имаат бесконечно решенија

Задача 3. Со помош на Гаусов метод на елиминации, толкувајќи според теорема на Кронекер-Капели, определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=0 \\ 2x_1-x_3=1 \\ x_2-x_4=2 \end{cases}$.

Решение. Со примена на Гаусов метод на елиминации, добиваме

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \approx R_2 \to R_1(-2)+R_2 \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_3 \leftrightarrow R_2 \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right] \approx_{R_3 \to 4R_2+R_3} \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 9 \end{array}\right].$$

Сега, решенијата ќе ги толкуваме со помош на теоремата на Кронекер-Капели. Имаме $r(A)=3$, $r(A_p)=3$ и $n=4$. Следува дека системот равенки има бесконечно многу решенија изразени преку еден параметар.

На последната матрица ѝ одговара системот

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=0 \\ x_2-x_4=2 \\ x_3-10x_4=9 \end{cases}$$

Земаме $x_4=t$. Тогаш, од четвртата равенка $x_3-10t=9$, односно $x_3=9+10t$. Од третата равенка имаме $x_2-t=2$ или $x_2=2+t$, а од првата равенка $x_1+2(2+t)-(9+10t)+3t=0$ или $x_1+4+2t-9-10t+3t=0$, од каде $x_1=5+5t$. Значи, решенијата се

$$x_1=5+5t,\ x_2=2+t,\ x_3=9+10t \text{ и } x_4=t$$

каде t е произволен параметар.

Системи линеарни равенки зависни од параметар

Задача 4. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теоремата на Кронекер-Капели, во зависност од параметарот λ, определи ги решенијата на системот равенки

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = -12 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \end{cases}.$$

Решение. Проширената матрица на системот ја сведуваме до еквивалентна матрица во скалеста форма,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \\ -1 & -1 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & 1 & \lambda \end{array}\right] \underset{\substack{-R_1+R_2 \\ R_1+R_3 \\ 2R_1+R_4}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 18+\lambda \end{array}\right] \underset{-3R_2+R_4}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 9+\lambda \end{array}\right] \underset{\frac{7}{3}R_3+R_4}{\approx} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda \end{array}\right].$$

Дискусија:

1. Ако $\lambda + 2 \neq 0$, односно $\lambda \neq -2$, тогаш $r(A) = 3$ и $r(A_p) = 4$, па системот равенки нема решение.

2. Ако $\lambda = -2$, тогаш $r(A) = 3$, $r(A_p) = 3$ и $n = 3$. Следува, системот равенки има единствено решение. Тој е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 9 \\ x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$$

Од втората равенка, $x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 2(-1) = 5$, а од првата

$$x_1 = 9 - x_2 + x_3 = 9 - 5 - 1 = 3.$$

Значи, решението е подредената тројка $(3,5,-1)$.

Задача 5. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теоремата на Кронекер-Капели, во зависност од параметарот a, определи ги решенијата на системот равенки

$$\begin{cases} (1+a)x+y+z=1 \\ x+(1+a)y+z=a \\ x+y+(1+a)z=a^2 \end{cases}.$$

Решение. Проширената матрица на системот ја сведуваме до еквивалентна матрица во скалеста форма,

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1+a & a^2 \end{array}\right]\approx \begin{array}{c} R_1\leftrightarrow R_3 \\ \\ \\ \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+a & a^2 \\ 1 & 1+a & 1 & a \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\approx \begin{array}{c} \\ R_1(-1)+R_2 \\ R_1(-1-a)+R_3 \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+a & a^2 \\ 0 & a & -a & a-a^2 \\ 0 & -a & -a^2-2a & 1-a^2-a^3 \end{array}\right]\approx \begin{array}{c} \\ \\ R_2\cdot 1+R_3 \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+a & a^2 \\ 0 & a & -a & a(1-a) \\ 0 & 0 & -a(a+3) & 1+a-2a^2-a^3 \end{array}\right] (1).$$

Дискусија:

1. Ако $a=0$,

$$A\approx\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Следува дека системот нема решение бидејќи рангот на матрицата на системот е 1, а рангот на проширената матрица на системот е 2.

2. Ако $a=-3$,

$$A \approx \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -47 \end{array}\right].$$

Следува дека системот нема решение бидејќи рангот на матрицата на системот е 2, а рангот на проширената матрица на системот е 3.

3. Ако $a \neq 0$ и $a \neq -3$, тогаш системот има единствено решение бидејќи матрицата (1) е во скалеста форма и вториот елемент од втората редица и третиот од третата редица се ненулти, односно $r(A) = 3$, $r(A_p) = 3$ и $n = 3$.

На последната матрица и одговара системот

$$\begin{cases} x + y + (1+a)z = a^2 \\ ay - az = a(1-a) \\ -a(a+3)z = 1 + a - 2a^2 - a^3 \end{cases}.$$

Од третата равенка имаме $z = -\dfrac{1+a-2a^2-a^3}{a(a+3)}$. Од втората равенка следува, $y - z = 1 - a$ т.е. $y = z + 1 - a$, од каде

$$y = \frac{1+a-2a^2-a^3}{-a(a+3)} + 1 - a =$$

$$\frac{1+a-2a^2-a^3-a^2-3a+a^3+3a^2}{-a(a+3)} = -\frac{1-2a}{a(a+3)} = \frac{2a-1}{a(a+3)}.$$

И од првата равенка $x = a^2 - y - (1+a)z$, односно

$$x = a^2 + \frac{1-2a}{a(a+3)} + \frac{(1+a)(1+a-2a^2-a^3)}{a(a+3)} =$$

$$\frac{a^4+3a^3+1-2a+1+a-2a^2-a^3+a+a^2-2a^3-a^4}{a(a+3)} = \frac{2-a^2}{a(a+3)}.$$

Значи, решенијата се:

$$x = \frac{2-a^2}{a(a+3)},\ y = \frac{2a-1}{a(a+3)} \text{ и } z = -\frac{1+a-2a^2-a^3}{a(a+3)},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Задача 6. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теоремата на Кронекер-Капели, во зависност од параметарот k, определи ги решенијата на системот равенки

$$\begin{cases} kx+y+z+t=1 \\ x+(k+1)y+z+t=0 \\ x+y+(k+2)z+t=1 \\ x+y+z+t=1 \end{cases}.$$

Решение. Матриците на системот се:

$$M=\left[\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_4(-1)+R_1 \\ R_4(-1)+R_2 \\ R_4(-1)+R_3 \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|c} k-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Дискусија: 1. За $k\neq -1,0,1$; $M\sim\begin{array}{c} R_1/-(k-1)+R_4 \\ R_2/(-k)+R_4 \\ R_3/-(k+1)+R_4 \end{array}\sim$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} k-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{k+1}{k} \end{array}\right]\begin{array}{c} R_2/k \\ R_3/(k+1) \end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{k+1}{k} \end{array}\right].$$

Значи $r(A)=r(A_p)=n=4$, па системот има единствено решение

$$\left(0,-\frac{1}{k},0,\frac{k+1}{k}\right).$$

2. За $k=-1$,

$$M\sim\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_1/(-2), R_2/(-1) \\ R_1/(-2)+R_4 \\ R_2/(-1)+R_4 \\ R_3\leftrightarrow R_4^* \end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Следува, $r(A)=r(A_p)=3$ и $n=4$ т.е. системот има бесконечно решенија изразени преку еден параметар. Ако t го земеме за параметар, добиваме $z=-t$, $y=1$ и $x=0$ т.е. решенијата се $(0,1,-t,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

2. За $k=0$ втората равенка е противречна, па системот нема решение. Во овој случај, $r(A)=3$ и $r(A_p)=4$.

3. За $k=1$,

$$M\sim\left[\begin{array}{cccc|c}0&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1\\0&0&2&0&0\\1&1&1&1&1\end{array}\right]\begin{array}{c}R_4\leftrightarrow R_1\\ \\ R_3/2\\ \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

Следува $r(A)=r(A_p)=3$ и $n=4$. Решенијата се $(1-t,-1,0,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

3.4. МАТРИЧНИ РАВЕНКИ

Решавање на системи линеарни равенки со матрични равенки

Задача 1. Реши го системот равенки $\begin{cases}x+2y=3\\x+3y=4\end{cases}$ со формирање и решавање на неговата матрична равенка.

Решение. Системот равенки ќе го замениме со соодветната матрична равенка. $AX=B$ т.е.

$$\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}.$$

Системот линеарни равенки има смисла да се решава со матрична равенка, само во случајот кога матрицата A има инверзна. Бидејќи $\det A=1$, следува дека постои $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}$. Ако равенката $AX=B$ ја помножиме со A^{-1} од лево, добиваме

$$X=A^{-1}B\;\Leftrightarrow\; X=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Следува дека решението на системот е $x=1$ и $y=1$.

Задача 2. Реши го системот равенки $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+3y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$, со формирање и решавање на неговата матрична равенка.

Решение. Еквивалентната матрична равенка, $AX=B$, на системот ја добиваме ако земеме

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Од равенката $AX=B$ ја добиваме равенката $X=A^{-1}B$. Бидејќи

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=6-1+1+3-2-1=6 \text{ и}$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2, \quad A_{13}=+\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad A_{22}=+\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \quad A_{33}=+\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5,$$

инверзната матрица на матрицата A е

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Следува, $X=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix}.$

Значи, решението е $x=\dfrac{4}{3}$, $y=-\dfrac{1}{6}$ и $z=\dfrac{17}{6}$

Матрични равенки

Задача 3-6. Изрази ја регуларната матрица X од матричните равенки, под претпоставка сите матрици во процесот на изразување да се регуларни

3) $-2X + C^T = \widetilde{A} - B$; 4) $3X - XA = XA - XC^T + 2\left(B + X\right)$;

5) $\left(A + X\right)^2 = AX + X^2 + B$; 6) $\left(AX\right)^{-1} + X^{-1} = B$.

Решение. 3) Ја изразуваме матрицата X со користење на операциите собирање и одземање на матрици и множење на матрица со број. Имаме

$$-2X + C^T = \widetilde{A} - B \Leftrightarrow -2X = \widetilde{A} - B - C^T \Leftrightarrow X = -\frac{1}{2}\left(\widetilde{A} - B - C^T\right).$$

4) Во оваа равенка, прво се ослободуваме од заградите, а потоа членовите што ја содржат матрицата X ги групираме на левата страна на равенката, а останатите на десната. Имаме

$$3X - XA = XA - XC^T + 2\left(B + X\right) \Leftrightarrow 3X - 2XA = -XC^T + 2B + 2X \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XE + X\left(-2A\right) + XC^T = 2B \Leftrightarrow X\left(E - 2A + C^T\right) = 2B.$$

Сега равенката ја множиме со $\left(E - 2A + C^T\right)^{-1}$ од десно,

$$X\left(E - 2A + C^T\right)\left(E - 2A + C^T\right)^{-1} = 2B\left(E - 2A + C^T\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$X = 2B\left(E - 2A + C^T\right)^{-1}.$$

5) Да забележиме дека формулата $\left(A + X\right)^2 = A^2 + 2AX + X^2$ важи само ако матриците A и X, се комутативни. Во општ случај

$$\left(A + X\right)^2 = \left(A + X\right)\left(A + X\right) = A^2 + AX + XA + X^2.$$

Затоа

$$\left(A + X\right)^2 = AX + X^2 + B \Leftrightarrow A^2 + AX + XA + X^2 = AX + X^2 + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow XA = B - A^2 \ / A^{-1} \text{ десно} \Leftrightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} - A^2A^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1} - A.$$

6) Прв начин. Директно. Ја множиме равенката со AX од лево. На овој начин, место X^{-1} ќе фигурира матрицата X. Потоа ја изразуваме експлицитно матрицата X. Значи,

$$\left(AX\right)^{-1} + X^{-1} = B \ / AX \text{ лево} \Leftrightarrow AX\left(AX\right)^{-1} + AXX^{-1} = AXB \Leftrightarrow$$

$$E + A = AXB \ / A^{-1} \text{ лево}$$

$$\Leftrightarrow\ A^{-1}E + A^{-1}A = A^{-1}AXB \Leftrightarrow A^{-1} + AE = XB \ /B^{-1}\text{десно} \Leftrightarrow$$
$$\left(A^{-1}+E\right)B^{-1} = XBB^{-1} \Leftrightarrow X = \left(A^{-1}+E\right)B^{-1}.$$

Втор начин. Со користење на формулата $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ добиваме

$$\left(AX\right)^{-1} + X^{-1} = B \Leftrightarrow X^{-1}A^{-1} + X^{-1} = B \Leftrightarrow X^{-1}\left(A^{-1}+E\right) = B$$

$$/\left(A^{-1}+E\right)^{-1}\text{десно} \Leftrightarrow X^{-1}\left(A^{-1}+E\right)\left(A^{-1}+E\right)^{-1} = B\left(A^{-1}+E\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$X^{-1} = B\left(A^{-1}+E\right)^{-1} \Leftrightarrow \left(X^{-1}\right)^{-1} = \left(B\left(A^{-1}+E\right)^{-1}\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$X = \left(\left(A^{-1}+E\right)^{-1}\right)^{-1}B^{-1} \Leftrightarrow X = \left(A^{-1}+E\right)B^{-1}.$$

Матрични равенки од матрици од квадратен тип со единствено решение

Задача 7. Реши ја матричната равенка $2X + 3AB = 4C$, ако

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Ја решаваме матричната равенка по матрицата X,

$$2X + 3AB = 4C \Leftrightarrow 2X = 4C - 3AB \Leftrightarrow X = 2C - \frac{3}{2}AB.$$

Од каде имаме

$$X = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 8. Реши ја матричната равенка $X^{-1}AB = X^{-1}A + C$, каде што
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$ и X е регуларна матрица.

Решение. Прво ја решаваме матрицата по непознатата матрица X^{-1}. Од равенката $X^{-1}AB = X^{-1}A + C$ имаме $X^{-1}AB - X^{-1}A = C$, од каде со примена на левиот дистрибутивен закон добиваме, односно
$$X^{-1}A(B-E) = C.$$
Ако равенката ја помножиме со X од лева страна, ќе ја добиеме еквивалентната равенка
$$XX^{-1}A(B-E) = XC \Leftrightarrow A(B-E) = XC.$$
Бидејќи $\det C = 1$, следува дека матрицата C е регуларна.
Последната равенка ја множиме со C^{-1} од десно. Имаме
$$A(B-E)C^{-1} = XCC^{-1} \Leftrightarrow X = A(B-E)C^{-1}$$
Матриците $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ и $B - E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ се регуларни бидејќи $\det A = -2$ и $\det(B-E) = -3$, па $X = A(B-E)C^{-1}$ е решение на првобитната матрична равенка. Притоа ,
$$C^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$ од каде
$$X = A(B-E)C^{-1} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Задача 9. Реши ја матричната равенка $(A - 3E)X = -A + E$, ако
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. За да ја изразиме матрицата X, ќе ја помножиме матричната равенка $(A-3E)X=-A+E$ (1), со $(A-3E)^{-1}$ од лево. Притоа, матрицата $(A-3E)^{-1}$ постои бидејќи

$$\det(A-3E)=\begin{vmatrix}-2 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-8+2+12=6.$$ Имаме

$$(A-3E)^{-1}(A-3E)X=(A-3E)^{-1}(-A+E)\Leftrightarrow X=(A-3E)^{-1}(-A+E)$$

каде

$$(A-3E)^{-1}=\frac{1}{\det(A-3E)}\left(adj(A-3E)\right)^T=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & 6 & -2\\ 4 & 3 & -2\\ -2 & -3 & -2\end{bmatrix}^T=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & 4 & -2\\ 6 & 3 & -3\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

и

$$-A+E=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ -3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$ Оттука

$$X=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & 4 & -2\\ 6 & 3 & -3\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-14 & -8 & 4\\ -12 & -12 & 6\\ 4 & 4 & -2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-7 & -4 & 2\\ -6 & -6 & 3\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Задача 10. Реши ја матричната равенка $AX-2AB^T=3C^T$ ако
$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\4&-1&3\end{bmatrix}\ \text{и}\ C=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&-3\\1&2&-1\end{bmatrix}.$$

Решение. Ја изразуваме матрицата X, од матричната равенка. Имаме
$$AX-2AB^T=3C^T \Leftrightarrow AX=3C^T+2AB^T.$$
Бидејќи $\det A=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=1-1-6=-6$, следува дека матрицата A е регуларна. Следува дека авенката можеме да ја помножиме со A^{-1} од лево. Имаме
$$A^{-1}AX=3A^{-1}C^T+2A^{-1}AB^T\text{, односно } X=3A^{-1}C^T+2B^T.$$
Притоа,
$$B^T=\begin{bmatrix}-1&1&4\\0&1&-1\\2&0&3\end{bmatrix},\ C^T=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&0&2\\0&-3&-1\end{bmatrix}\ \text{и}$$
$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\left(\tilde{A}\right)^T=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&0\\-1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&1\\-1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&-1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\3&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=$$
$$-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-3&1\\-2&0&-2\\1&-3&-5\end{bmatrix}^T=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-2&1\\-3&0&-3\\1&-2&-5\end{bmatrix},$$
од каде
$$X=3\left(-\frac{1}{6}\right)\begin{bmatrix}1&-2&1\\-3&0&-3\\1&-2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&1\\1&0&2\\0&-3&-1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1&1&4\\0&1&-1\\2&0&3\end{bmatrix}=$$

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -6 & 9 & 0 \\ 0 & 15 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 3 & -\frac{9}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & 10 \\ 3 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 4 & -\frac{15}{2} & 5 \end{bmatrix}.$$

Задача 11. Реши ја матричната равенка $(AX)^{-1}+X^{-1}=B$, ако $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ и X е регуларна матрица.

Решение. Бидејќи

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \text{ и } \det B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1-4=-3,$$

постојат A^{-1} и B^{-1}. Ја изразуваме матрицата X од равенката.

$$(AX)^{-1}+X^{-1}=B \Leftrightarrow X^{-1}A^{-1}+X^{-1}=B \Leftrightarrow X^{-1}\left(A^{-1}+E\right)=B$$

$$/\left(A^{-1}+E\right)^{-1}\text{десно} \Leftrightarrow X^{-1}\left(A^{-1}+E\right)\left(A^{-1}+E\right)^{-1}=B\left(A^{-1}+E\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$X^{-1}=B\left(A^{-1}+E\right)^{-1} \Leftrightarrow X=\left(A^{-1}+E\right)B^{-1}.$$

Ја пресметуваме инверзната матрица на матрицата A. Имаме

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad A_{13}=+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{22}=+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2\quad A_{33}=+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

од каде $A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-2&-2&1\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Ја пресметуваме инверзната матрица на матрицата B. Имаме

$$B_{11}=+\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3,\quad B_{12}=-\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}=0,\quad B_{13}=+\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}=0,$$

$$B_{21}=-\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=-1,\quad B_{22}=+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\quad B_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$B_{31}=+\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}=2,\quad B_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=-2\quad B_{33}=+\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$$

од каде $B^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-3&0&0\\-1&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}^{T}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3&-1&2\\0&1&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}$.

Оттука, $X=\left(A^{-1}+E\right)B^{-1}=$

$$\left(\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix}-3&-1&2\\0&1&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}=$$

$$-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&-2\\0&2&-2\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-1&2\\0&1&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6&3&0\\0&6&-6\\0&-4&2\end{bmatrix}.$$

Проверуваме дали X е регуларна, $\det X=-\frac{1}{3}\left(-72+144\right)=48$.

Следува матрицата $X=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6&3&0\\0&6&-6\\0&-4&2\end{bmatrix}$ е решение на матричната равенка.

Матрична равенка од матрици од квадратен тип што има бесконечно решенија

Задача 12. Реши ја матричната равенка

$$\left(XA+C\right)\left(AX+2AB\right)^{-1}=A^{-1} \text{ ако}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix} \text{ и } C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix} \text{ и}$$

$X+2B$ е регуларна матрица.

Решение. Да забележиме дека матрицата A е регуларна, односно задачата е добро поставена. Исто така и матрицата $X+2B$ треба да е регуларна. Ја средуваме матричната равенка

$$\left(XA+C\right)\left(AX+2AB\right)^{-1}=A^{-1}\Leftrightarrow\left(XA+C\right)\left(A\left(X+2B\right)\right)^{-1}=A^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\left(XA+C\right)\left(X+2B\right)^{-1}A^{-1}=A^{-1}\ /A$$

$$\text{десно}\Leftrightarrow\left(XA+C\right)\left(X+2B\right)^{-1}A^{-1}A=A^{-1}A\Leftrightarrow$$

$$\left(XA+C\right)\left(X+2B\right)^{-1}=E\ /X+2B$$

$$\text{десно}\Leftrightarrow\left(XA+C\right)\left(X+2B\right)^{-1}\left(X+2B\right)=X+2B\ \Leftrightarrow$$

$$XA+C=X+2B\ \Leftrightarrow\ XA-X=2B-C\Leftrightarrow X\left(A-E\right)=2B-C\,.$$

Бидејќи $\det\left(A-E\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$, следува матрицата $A-E$ е сингуларна.

Исто така матрицата

$2B-C=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 8 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{bmatrix}$ е сингуларна и $\det\left(2B-C\right)=0$.

Нека $X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Матричната равенка е

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2a+4b & a+2b\\ 2c+4d & c+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a+4b=2 \\ a+2b=1 \\ 2c+4d=8 \\ c+2d=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-2b \\ c=4-2d \end{cases}.$$

Следува $X=\begin{bmatrix} 1-2b & b \\ 4-2d & d \end{bmatrix}$. Од условот на задачата, не влегуваат решенијата за кои $\det(X+2B)=0$, односно

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-2b & b \\ 4-2d & d \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right)=0;$$

$$\begin{vmatrix} 5-2b & b+2 \\ 12-2d & d+2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5d+10-2bd-4b-12b-24+2bd+4d=0 \Leftrightarrow$$

$$9d=14+16b \Leftrightarrow d=\frac{14}{9}+\frac{16}{9}b.$$

Следува, решенијата се $X=\begin{bmatrix} 1-2b & b \\ 4-2d & d \end{bmatrix}$, $b\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{14}{9}+\frac{16}{9}b\right\}$.

Матрична равенка од матрици од квадратен тип што нема решение

Задача 13. Реши ја матричната равенка $AX=B+X$, ако

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Имаме

$$(A-E)X=B \text{ и } A-E=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Прв начин. Бидејќи $\det(A-E)=0$ и $\det B=-1\neq 0$ од основната теорема за детерминанти, следува дека системот нема решение, инаку би добиле

$$\det B=\det(A-E)\det X=0.$$

Втор начин. Нека $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Тогаш,

$$\left(A-E\right)X=B \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$2a+c=1, 2b+d=1, 4a+2c=1,,\ \ 4b+2d=0.$$

Но последниот систем нема решение бидејќи првата и третата негова равенка се противречни.

Задача 14. Реши ја матричната равенка $\left(AX\right)^{-1}+X^{-1}=B$, ако $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ и X е регуларна матрица.

Решение. Ја изразуваме матрицата X од равенката.

$$\left(AX\right)^{-1}+X^{-1}=B \Leftrightarrow X^{-1}A^{-1}+X^{-1}=B \Leftrightarrow X^{-1}\left(A^{-1}+E\right)=B$$

Притоа, $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ и $A^{-1}+E=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

Бидејќи $\det\left(A^{-1}+E\right)=0$ и $\det B=4-3=1\neq 0$, следува дека равенката $\det X^{-1}\det\left(A^{-1}+E\right)=\det B$ нема решение за ниту една матрица X^{-1}, односно матричната равенка нема решение.

Втор начин. Нека матрицата $X^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Од равенството $X^{-1}\left(A^{-1}+E\right)=B$ добиваме

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a+b & a+b\\ c+d & c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix},$$

односно

$$a+b=2,\ a+b=-3,\ c+d=-1 \text{ и } c+d=2.$$

Но, претходниот систем нема решение.

Трет начин. Ја изразуваме матрицата X како во претходната задача, $X=\left(A^{-1}+E\right)B^{-1}$, при претпоставка дека постојат A^{-1}, B^{-1} и X^{-1}. Матриците A^{-1} и B^{-1} постојат бидејќи $\det A\neq 0$ и $\det B\neq 0$, од каде $X=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 3 & 5\end{bmatrix}$. Но $\det X=0$, противречи на претпоствката дека матрицата X има инверзна. Следува дека матричната равенка нема решение.

Матрична равенка од матрици од квадратен тип што има бесконечно решенија

Задача 15. Реши ја матричната равенка $XA + C = X + 2B$ ако матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Ја средуваме матричната равенка во вид

$$XA + C = X + 2B \Leftrightarrow XA - X = 2B - C \Leftrightarrow X(A - E) = 2B - C\ .$$

Притоа,

$$A - E\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$2B - C = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Бидејќи $\det(A - E) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, следува дека матрицата $A - E$ нема инверзна. Исто така и матрицата $2B - C$ нема инверзна, бидејќи $\det(2B - C) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$.

Нека матрицата $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Тогаш,

$$X(A - E) = 2B - C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2a + 4b & a + 2b \\ 2c + 4d & c + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$2a + 4b = 2\ ,\ a + 2b = 1,\ 2c + 4d = 8,\ c + 2d = 4$$

$$\Leftrightarrow a + 2b = 1,\ c + 2d = 4 \Leftrightarrow a = 1 - 2b\ ,\ c = 4 - 2d\ .$$

Значи матричната равенка има бесконечно решенија. Решенија се сите матрици

$$X = \begin{bmatrix} 1 - 2b & b \\ 4 - 2d & d \end{bmatrix},\ c, d \in \mathbb{R}\ .$$

Матрична равенка од матрици од произволен тип што има единствено решение

Задача 16. Реши ја матричната равенка $AX = B$, ако матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}.$$

Решение. Бројот на редици на матрицата X се совпаѓа со бројот на колони на матрицата A, односно матрицата X има две редици. Бројот на колони на матрицата X се совпаѓа со бројот на колони на матрицата B, односно матрицата X има две колони. Нека $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Сега,

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 7 & 18 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+2c & 2b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}.$$

Бидејќи матриците од последната равенка се еднакви, исполнет е системот:

$$a+2c=3,\ b+2d=8,\ 2a+2c=4,\ 2b+2d=10,\ 3a+4c=7,$$
$$3b+4d=18 \Leftrightarrow$$
$$a+2c=3,\ a+c=2,\ 3a+4c=7,\ b+2d=8,\ b+d=5,\ 3b+4d=18.$$

Ако од првата равенка на системот ја одземеме втората добиваме $c=1$. Од втората равенка имаме $a=1$. Проверуваме дали е исполнета третата равенка, $3+4=7$ односно $7=7$.

Ако од четвртата равенка ја одземеме петтата, добиваме $d=3$. Од петтата равенка имаме $b=2$. Проверуваме дали е исполнета шестата равенка, $3\cdot 2+4\cdot 3=18$ односно $18=18$.

Следува дека матричната равенка има единствено решение

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Матрична равенка од матрици од произволен тип што има бесконечно решенија

Задача 17. Реши ја матричната равенка $AX + BC - D = 0$, ако матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ и } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3.4.3 Текстуални задачи што се сведуваат на матрични равенки

Задача 18. Определи ги сите матрици што комутираат со матрицата $X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решение. Нека матрицата $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ комутира со матрицата A. Тогаш матриците

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+5c & b+5d \\ -a+2c & -b+2d \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & 5a+2b \\ c-d & 5c+2d \end{bmatrix},$$

се еднакви, односно важи системот

$$\begin{cases} a+5c = a-b \\ b+5d = 5a+2b \\ -a+2c = c-d \\ -b+2d = 5c+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5c \\ b = 5d-5a \\ c = a-d \\ b = -5c \end{cases}.$$

Од првата равенка имаме $b = -5c$. Притоа, четвртата равенка е исполнета. Од втората равенка имаме $-5c = 5d - 5a$, односно $d = a - c$. Притоа, третата равенка е исполнета. Значи, претходниот систем е еквивалентен со системот

$$b = -5c,\ d = a - c.$$

Следува дека бараните матрици се $\begin{bmatrix} a & -5c \\ a-c & c \end{bmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R}$.

Задача 19. Докажи дека матриците што комутираат со матрицата $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, комутираат и меѓу себе.

Решение. Нека матрицата $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ комутира со матрицата A. Тогаш, $AB=BA$, односно

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}c & d\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & a\\ d & c\end{bmatrix} \Leftrightarrow c=b,\ d=a.$$

Значи, матриците што комутираат со матрицата A имаат облик

$$\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}.$$

Нека $B_1=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & a_1\end{bmatrix}$ и $B_2=\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ b_2 & a_2\end{bmatrix}$ се две матрици од овој вид.

Бидејќи

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ b_2 & a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1a_2+b_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2\\ b_1a_2+a_1b_2 & b_1b_2+a_1a_2\end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ b_2 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2a_1+b_2b_1 & a_2b_1+b_2a_1\\ b_2a_1+a_2b_1 & b_2b_1+a_2a_1\end{bmatrix}$$

следува дека $B_1B_2=B_2B_1$, со што е докажано тврдењето на задачата.

Задача 20*. Матрицата A е инволуторна, ако $A^2=E$. Определи ги сите инволуторни матрици од втор ред.

Решение. Нека матрицата $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ е инволуторна. Тогаш, $A^2=E$, односно

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

од каде добиваме

$$a^2+bc=1,\ ab+bd=0,\ ac+cd=0 \text{ и } bc+d^2=1,$$

односно

$$a^2+bc=1,\ b(a+d)=0,\ c(a+d)=0 \text{ и } bc+d^2=1.$$

Од втората равенка имаме $b=0$ или $a=-d$.

Ако $b=0$, тогаш од првата равенка следува дека $a^2=1$ односно $a=\pm 1$, а од четвртата равенка имаме $d^2=1$, односно $d=\pm 1$. Ако a и d имаат ист знак, тогаш од третата равенка $c=0$. Ако a и d имаат спротивен знак, тогаш третата равенка секогаш е исполнета.

Ако $b\neq 0$, тогаш од втората равенка $a=-d$. Притоа, третата равенка е исполнета. Од првата равенка имаме $d^2=1-bc$, односно $c=\frac{1-d^2}{b}$. Тогаш, четвртата равенка е исполнета. Значи решенијата се:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ c & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\ c & 1\end{bmatrix}, c\in\mathbb{R}; \begin{bmatrix}-d & b\\ \frac{1-d^2}{b} & d\end{bmatrix}, d\in\mathbb{R},$$
$$b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Задача 21*. Определи ги сите инволуторни матрици што комутираат со матрицата
$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Решение. Нека матрицата $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ комутира со матрицата A. Тогаш,
$$AB=BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix}a-2c & b-2d\\ -a & -b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b & -2a\\ c-d & -2c\end{bmatrix}.$$

Следува дека важи системот
$$a-2c=a-b,\ b-2d=-2a,\ -a=c-d \text{ и } -b=-2c$$
односно
$$b=2c,\ a=d-c.$$

Значи, матрицата B има облик $\begin{bmatrix}d-c & 2c\\ c & d\end{bmatrix}$.

Бидејќи матрицата B е инволуторна важи $B^2=E$, односно

$$\begin{bmatrix} d-c & 2c \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d-c & 2c \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} (d-c)^2+2c^2 & 2c(d-c)+2cd \\ c(d-c)+cd & 2c^2+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d^2-2dc+c^2+2c^2 & 2cd-2c^2+2cd \\ cd-c^2+cd & 2c^2+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} d^2-2dc+3c^2 & 2c(2d-c) \\ c(2d-c) & 2c^2+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следува дека

$$d^2-2dc+3c^2=1,\ c(2d-c)=0 \text{ и } 2c^2+d^2=1.$$

Од втората равенка имаме $c=0$ или $c=2d$.

Ако $c=0$, од првата равенка, следува дека $d^2=1$, односно $d=\pm 1$. Третата равенка е исполнета.

Ако $c=2d$ од третата равенка имаме $9d^2=1$ односно $d=\pm\frac{1}{3}$. Првата равенка е исполнета.

Следува дека решенијата се

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Задача 22. Матрицата A е инволуторна, ако $A^2=E$, а идемпотентна, ако $A^2=A$. Докажи дека матрицата A е идемпотентна акко матрицата $B=2A-E$ е инволуторна.

Решение. Бидејќи $B=2A-E$, заради еквивалентноста на равенствата

$$B^2=E \Leftrightarrow (2A-E)^2=E \Leftrightarrow 4A^2-4AE+E^2=E \Leftrightarrow 4A^2-4A+E=E$$
$$\Leftrightarrow A^2=A.$$

следува дека матрицата A е идемпотентна, ако и само ако матрицата B е инволуторна.

Задача 23. Секоја квадратна матрица A, може да се напише како збир од, симетричната и антисиметричната матрица,

$$A_1 = \frac{A + A^T}{2} \text{ и } A_2 = \frac{A - A^T}{2}. \text{ Докажи.}$$

Решение. Збирот на матриците A_1 и A_2 е

$$A_1 + A_2 = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = A.$$

Бидејќи

$$A_1^T = \left(\frac{A + A^T}{2}\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T + \left(A^T\right)^T\right) = \frac{A + A^T}{2} = A_1$$

следува дека матрицата A_1 е симетрична.

Бидејќи

$$A_2^T = \left(\frac{A - A^T}{2}\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T - \left(A^T\right)^T\right) = -\frac{1}{2}\left(A^T - A\right) = -\frac{A - A^T}{2} - A_1$$

следува матрицата A_2 е антисиметрична.

3.5. ТЕОРЕМА НА ХАМИЛТОН-КЕЛИ

Задача 1. Најди го карактеристичниот полином на матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е

$$\det\left(A - \lambda E\right) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda) + \sqrt{2}\sqrt{2} = -2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 + \sqrt{2}\sqrt{2} = \lambda^2 + \lambda.$$

Задача 2-4. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, пресметај ги изразите:

2) $-A^3 + 11A^2 - 36A + 36E$; 3) $-A^3 + 11A^2 - 40A + 37E$;

4) $A^4-3A^3-3A^2+8A+5E$ ако $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е

$$\det(A-\lambda E)=\det\left(\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)=$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&1\\-1&5-\lambda&-1\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2(5-\lambda)+1+1-(5-\lambda)-(3-\lambda)-(3-\lambda)=$$

$$(9-6\lambda+\lambda^2)(5-\lambda)+2-5+\lambda-2(3-\lambda)=$$

$$45-9\lambda-30\lambda+6\lambda^2+5\lambda^2-\lambda^3+2-5+\lambda-6+2\lambda=$$

$$-\lambda^3+11\lambda^2-36\lambda+36.$$

Според теоремата на Хамилтон-Кели, секоја матрица е корен на својот карактеристичен полином, односно

$$-A^3+11A^2-36A+36E=0$$

Следува:

2) $\quad -A^3+11A^2-36A+36E=0$ и

3) $-A^3+11A^2-40A+37E=\underbrace{-A^3+11A^2-36A+36E}_{0}-4A+E=$

$$=-4\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11&4&-4\\4&-19&4\\-4&4&-11\end{bmatrix}.$$

4) Од $-A^3+11A^2-36A+36E=0$ следува

$$A^3=4A^2-A-6E\Leftrightarrow A^4=4A^3-A^2-6A.$$

Оттука

$$A^4-3A^3-3A^2+8A+5E=4A^3-A^2-6A-3A^3-3A^2+8A+5E=$$

$$A^3-4A^2+2A+5E=4A^2-A-6E-4A^2+2A+5E=A-E=$$

$$\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&4&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}.$$

Задача 5. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, најди ја инверзната матрица на матрицата $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином е $P(\lambda)=\det(A-\lambda E)$, каде

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=12-3\lambda-4\lambda+\lambda^2+12=\lambda^2-7\lambda+14 .$$

Според теоремата на Хамилтон-Кели, $P(A)=0$, односно $A^2-7A+14E=0$. Бидејќи $\det A=14\neq 0$, равенката може да ја помножиме со A^{-1},

$$A^{-1}A^2-7A^{-1}A+14A^{-1}E=0 \Leftrightarrow A-7E+14A^{-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$14A^{-1}=7E - A \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{14}(7E - A).$$

Оттука, $A^{-1}=\frac{1}{14}\left(\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\right)=\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Коментар. Со помош на равенствата од дефиницијата за инверзна матрица на матрицата A, $A^{-1}A=E$ и $AA^{-1}=E$, можеме да извршиме контрола на точноста на резултатот. Навистина $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Притоа доволна е едната проверка бидејќи $A^{-1}A=E$ повлекува $AA^{-1}=E$ и обратно (заради $\tilde{A}^T A=A\tilde{A}^T$).

Задача 6. Со помош на карактеристичниот полином на матрицата $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, докажи дека истата нема инверзна.

Решение. Ако го пресметавме карактеристичниот полином на матрицата A, ќе добиевме

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(-4-\lambda)+4=$$

$$-4-\lambda+4\lambda+\lambda^2+4=\lambda^2+3\lambda .$$

Забележуваме дека слободниот член во полиномот е 0. Оттука следува дека $\det A=0$, односно матрицата A нема инверзна.

Задача 7. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, најди ја инверзната матрица на матрицата $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda)-3(1-\lambda)=$$

$$\left(1-2\lambda+\lambda^2\right)(2-\lambda)-3+3\lambda=$$

$$2-\lambda-4\lambda+2\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3-3+3\lambda=$$

$$-\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda-1$$

и $\det A=-1\neq 0-1$, па од теорема на Хамилтон-Кели, имаме

$$-A^3+4A^2-2A-E=0\ /A^{-1}\Leftrightarrow -A^2+4A-2E-A^{-1}=0\Leftrightarrow$$

$$A^{-1}=-A^2+4A-2E \text{ . Следува}$$

$$A^{-1}=-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 8 & 8 & -4\\ 0 & -12 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=$$

$$-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 7 & -3\\ -6 & -9 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 8 & 6 & -4\\ 0 & -12 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 6 & -3 & -2\end{bmatrix}.$$

Коментар. Проверката би била следна

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 6 & -3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 6 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

3.6. СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ И ВЕКТОРИ

Матрица од втор ред што има една сопствена вредност

Задача 1. Определи ги сопствените вредности и вектори на матрицата $A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}$.

Решение. Бидејќи

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ 1 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)(4+\lambda)+1=\lambda^2+6\lambda+9=(\lambda+3)^2$$

и

$$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow (\lambda+3)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=-3$$

следува дека $\lambda=-3$ е сопствена вредност на матрицата A. Од условот

$$(A-\lambda E)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\ x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\{x-y=0 \Leftrightarrow x=t,\ y=t,\ t\in\mathbb{R},$$

следува дека сопствените вектори што одговараат на сопствената вредност $\lambda=-3$ се

$$X=\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Матрица од втор ред што нема сопствени вредности

Задача 2. Определи ги сопствените вредности и вектори на матрицата $A=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином е

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -2\\ 4 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)(4+\lambda)+8=\lambda^2+6\lambda+16.$$

Бидејќи $\lambda^2+6\lambda+16=(\lambda+3)^2+7>0$, следува дека равенката $\det(A-\lambda E)=0$ нема решенија во множеството реални броеви, односно матрицата A нема сопствени вредности, па нема ни сопствени вектори.

Матрица од втор ред што има две сопствени вредности

Задача 3. Определи ги сопствените вредности и сопствените вектори на матрицата

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}.$$

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\left(5-\lambda\right)\left(3-\lambda\right)-8=$$

$$15-5\lambda-3\lambda+\lambda^2-8=\lambda^2-8\lambda-7=\left(\lambda-7\right)\left(\lambda-1\right).$$

Сопствените вредности се решенија на карактеристичната равенка $\det\left(A-\lambda E\right)=0$, односно $\lambda=7$, $\lambda=1$. Сопствените вектори се ненулти решенија на равенката $\left(A-\lambda E\right)X=0$.

Нека $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ е сопствен вектор што одговара на сопствената вредност $\lambda=7$. Имаме

$$\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+2y=0\\ 4x-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=t,\ y=t,\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Следува $X=\begin{bmatrix}t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Нека $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ е сопствен вектор што одговара на сопствената вредност $\lambda=1$. Имаме

$$\begin{bmatrix}4 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=0\\ 4x+2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\left\{2x+y=0\right.\Leftrightarrow x=t,\ y=-2t,\ t\in\mathbb{R}$$

Следува, $X=\begin{bmatrix}t\\ -2t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Матрица од трет ред што има три сопствени вредности

Задача 4. Најди ги сопствените вредности и вектори за матрицата $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda)+1+1-(5-\lambda)-(3-\lambda)-(3-\lambda)=$$

$$=(3-\lambda)^2(5-\lambda)+3\lambda-9=(\lambda-3)^2(5-\lambda)+3(\lambda-3)$$

$$=(\lambda-3)((\lambda-3)(5-\lambda)+3)=(\lambda-3)(5\lambda-\lambda^2-15+3\lambda+3)=$$

$$(\lambda-3)(-\lambda^2+8\lambda-12)=-(\lambda-3)(\lambda^2-8\lambda+12)=-(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-2).$$

Следува, сопствените вредности се

$$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \lambda=2,\ \lambda=3 \text{ и } \lambda=6.$$

За $\lambda=2$ имаме

$$(A-\lambda E)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+3y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-3y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=t\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=2t,\ y=t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\ z=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-2t,$$

$$t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x=t,\ y=0 \text{ и } z=t,\ t\in\mathbb{R},$$

од каде сопствените вектори се $X=t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

За $\lambda=3$ имаме

$$(A-\lambda E)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=t\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-t,\ y=t\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-t,$$

$$z=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-t \Leftrightarrow x=t\,,\; y=t\,,\; z=t\,,\; t\in\mathbb{R}\,;$$

од каде сопствените вектори се $X=t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\; t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

За $\lambda=6$ имаме

$$(A-\lambda E)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-3 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x-y+z=0\\ -x-y-z=0\\ x-y-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}3x+y-z=0\\ x+y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow x=t\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2t\,,\; y=t\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4t\,,$$

$$z=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2t\,, t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x=t\,,\; y=-2t\,,\; z=t\,;$$

од каде сопствените вектори се $X=t\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\; t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Матрица од трет ред што има две сопствени вредности

Задача 5. Најди ги сопствените вредности и вектори за матрицата $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2+1-\lambda-(1-\lambda)=$$

$$-\lambda(1-\lambda)^2\,.$$

Следува, сопствените вредности се

$$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ или } \lambda=1\,.$$

За $\lambda=0$ имаме

$$\left(A-\lambda E\right)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$y=-z\,,\ x=2z \Leftrightarrow x=2t\,,\ y=-t\,,\ z=t\,;$$

од каде сопствените вектори се $X=t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

За $\lambda=1$ имаме

$$\left(A-\lambda E\right)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=z\,,\ y=0 \Leftrightarrow x=t\,,\ y=0\,,\ z=t\,;$$

од каде сопствените вектори се $X=t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Матрица од трет ред што има две сопствени вредности но три линеарно независни сопствени вектори

Задача 6. Најди ги сопствените вредности и вектори за матрицата $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е

$$\det\left(A-\lambda E\right)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+2+2+2(2-\lambda)-2(4-\lambda)+1-\lambda=$$

$$=(4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+4+4-2\lambda-8+2\lambda+1-\lambda=$$
$$(4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+1-\lambda=(1-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda)+1)=$$
$$(1-\lambda)(8-6\lambda+\lambda^2+1)=(1-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9)=(1-\lambda)(\lambda-3)^2=$$

Следува, сопствените вредности се
$$\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ или } \lambda=3.$$

За $\lambda=1$ имаме
$$(A-\lambda E)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$y=-x,\ z=2x \Leftrightarrow x=t,\ y=-t,\ z=2t,\ t\in\mathbb{R};$$

од каде сопствените вектори се $X=t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

За $\lambda=3$ имаме
$$(A-\lambda E)X=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x+y-z=0 \Leftrightarrow x=t,\ y=k,\ z=t+k,\ t\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{R}$; од каде
$$X=\begin{bmatrix} t \\ k \\ t+k \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t,k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Матрица од трет ред што има една сопствена вредност

Задача 7. Најди ги сопствените вредности и вектори за матрицата $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. Види учебник.

3.7. Задачи за вежбање

3.1. Операции со матрици

Задача 1. Пресметај $5A-2B$, ако матрицата

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}1 & -7 & 2\\ 0 & -5 & 3\end{bmatrix}.$$

Задача 2 Пресметај AB, ако

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\\ -3 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Задача 3. Определи ги x, y, z и t, така што да важи:

$$\begin{bmatrix}x & 2y-6\\ 2z+1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+t & 3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}.$$

Задача 4. Покажи дека матрицата

$$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

е симетрична, ортогонална и инволуторна.

Задача 5-6. Дадени се матриците

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$ Покажи дека:

5) Матриците $A+A^T$ и $B+B^T$ се симетрични, но нивниот производ не е.

6) Матрицата B нилпотентна со степен 3.

Задача 7-8. Пресметај:

7) A^4, ако $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$; 8) A^3, ако $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -3\end{bmatrix}$.

Задача 9. Нека е даден полиномот $f(x)=-2x^2+x^2-2x+1$.

Пресметај $f(A)$, ако $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

Задача 10-11. Покажи дека следниве матрици се идемпотентни

$$10)\ A=\begin{bmatrix}-3 & -6\\ 2 & 4\end{bmatrix};\quad 11)\ A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Задача 12-17. Пресметај:

$$12)\ \begin{bmatrix}-1 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}^n;\qquad 13)\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}^n;\qquad 14)\ \begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n$$

$$15)\ \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}^n;\qquad 16)\ \begin{bmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{bmatrix}^n;\qquad 17)\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^n.$$

Задача 18. Докажи дека ако A и B се комутативни матрици, тогаш и матриците A^n, $n\in\mathbb{N}$ и B^m, $m\in\mathbb{N}$ се комутативни. Дали важи обратното тврдење?

Задача 19. Докажи дека за матриците

$$A=\begin{bmatrix}2 & 6 & 3\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\text{ и } B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

важи $A^2B=BA^2$ но $AB\neq BA$.

3.2. Ранг на матрица. Инверзна матрица.

Задача 1. Со помош на елементарни трансформации, матрицата

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 5 & -1 & 0\\ -2 & 0 & -2 & 3 & 1\end{bmatrix}\text{ редуцирај ја до:}$$

а) редично-скалеста форма; б) канонично-скалеста форма. Колку е рангот на A?

Задача 2-5. Најди го рангот на матрицата:

$$1)\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \qquad 2)\ \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix};$$

$$3)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad 4)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & 7 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Задача 6. Во зависност од параметарот a дискутирај го рангот на матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2a & 1 \\ -a & a & a-1 & 5a+1 \\ a & a & -a+1 & 1-a \end{bmatrix}$.

Задача 7-9. Најди ја адјунгираната матрица на матрицата:

$$7)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad 8)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}; \quad 9)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задача 10. Определи го параметарот x, така што матрицата $A = \begin{bmatrix} x^2 & -2 & 1 \\ x & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ да биде сингуларна?

Задача 11-14. Докажи дека дадените матрици се несингуларни, а потоа најди ги нивните инверзни матрици.

$$11)\ A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \end{bmatrix}; \qquad 12)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix};$$

$$13)\ A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad 14)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 15-18. Со помош на методот на Гаус-Жордан, најди ги инверзните матрици на:

15) $A=\left\lfloor\sqrt{2}\right\rfloor$; 16) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}$;

17) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 2 & 0\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$; 18) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 2\\1 & 1 & 2 & 3\\2 & 2 & 2 & 3\\2 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$.

Задача 19. Со помош на методот на Гаус-Жордан, најди инверзна матрица на:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Задача 20. Пресметај $\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\3 & -1 & 2\\0 & 4 & -3\end{bmatrix}^{-2}$.

Задача 21. Пресметај $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Задача 22. Квадратната матрица A од ред n има инверзна акко $r(A)=n$. Докажи.

<u>3.3. Матрични равенки</u>

Задача 1-4. Изрази ја регуларната матрица X од матричните равенки:

1) $-3X-AX=2AB+X$; 2) $(A-X)^2=BX-XA$;

3) $(BX)^{-1}+X^{-1}=A$; 4) $\left(CX^{-1}\right)^{-1}+XB=A$.

Задача 5-10. Реши ги матричните равенки:

5) $\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$; 6) $X\begin{bmatrix}6 & 5\\3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & 2\end{bmatrix}$.

7) $\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2 & 3\\-2 & -3\end{bmatrix}$; 8) $X\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\-2 & -5\end{bmatrix}$.

9) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix} X = \begin{bmatrix}4 & 6 & 3\\ 5 & 8 & 4\\ 6 & 8 & 3\end{bmatrix}$; 10) $X\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5 & 7\end{bmatrix}$

Задача 11-15. Реши ги матричните равенки:

11) $(A+E)X = B$, ако

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix}-4 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix};$$

12) $AX = B - EX$, ако

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix}-4 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix};$$

13) $X^{-1}AB = X^{-1}A + C$, ако

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix};$$

14) $X(A-E) = A + E$, ако $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

15) $(A-B)C^{-1} = (X-C)^{-1}$, ако

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Текстуални задачи што се сведуваат на матрични равенки

Задача 16-17. Определи ги сите матрици што комутираат со матрицата:

$$16)\ A = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}; \qquad 17)\ B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Задача 18-19. Нека A е квадратна матрица. Докажи дека матрицата:

18) $A + A^T$ е симетрична; 19) $A - A^T$ е антисиметрична.

<u>*3.4. Решавање на системи линеарни равенки со матрици*</u>

<u>*3.4.1. Сведување на систем линеарни равенки на матрична равенка*</u>

Задача 1-2. Реши го системот равенки:

$$1)\ \begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=4 \end{cases};\qquad 2)\ \begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+y-z=0 \\ 2x-y+z=2 \end{cases};$$

со формирање и решавање на неговата матрична равенка.

Задача 3-8. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теоремата на Кронекер-Капели, определи ги решенијата на системите равенки

$$3)\ \begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x+y-6z=-1 \\ 3x-4y+2z=3 \\ x-3y+3z=0 \end{cases};\qquad 4)\ \begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=5 \\ 2x_1+x_2-3x_3=5 \end{cases};$$

$$5)\ \begin{cases} x+2y+2z=5 \\ 2x-y-z=-1 \\ 3x-2y+z=2 \\ x-y+2z=3 \end{cases};\qquad 6)\ \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3 \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2 \\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=1 \end{cases};$$

$$7)\ \begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases};\qquad 8)\ \begin{cases} 9x_2+7x_4=0 \\ x_1+9x_2+8x_3+8x_4=9 \\ 3x_2+9x_4=0 \\ x_1+9x_2+8x_3+7x_4=9 \end{cases}.$$

Задача 9-10. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теоремата на Кронекер-Капели, во зависност од параметарот a, определи ги решенијата на системот равенки:

$$9)\ \begin{cases} x+y-2z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ x+y+2z=6 \\ x+y+az=-a \end{cases};\qquad 10)\ \begin{cases} ax+2y=1 \\ 2x+ay=1 \end{cases}.$$

3.5. Теорема на Хамилтон-Кели

Задача 1-2. Најди го карактеристичниот полином на матрицата:

$$1)\ A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}; \qquad 2)\ A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Користејќи го карактеристичниот полином, напиши ја вредноста на детерминантата на матрицата A. Ако матрицата A има инверзна, со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, пресметај ја инверзната матрица.

Задача 3-6. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, најди ја инверзната матрица, ако постои, на матрицата

$$3)\ A=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix} \qquad 4)\ A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

$$5)\ A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -4 & 1\end{bmatrix} \qquad 6)\ A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Задача 7-8. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, пресметај ги изразите

7) $A^5-2A^4+3A^3-5A+E$, каде $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

8) $A^8-2A^7-A^4+2A^3+A-5E$, каде $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Задача 9. Користејќи ја теоремата на Хамилтон-Кели, докажи дека секоја триаголна матрица во која елементите на главната дијагонала се нули, е нилпотентна.

3.6. Сопствени вредности и вектори

Задача 1-6. Определи ги сопствените вредности и вектори на следниве матрици:

1) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$; 3) $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$; 5) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$; 6) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

Задача 7. Во зависност од параметарот a, определи ги сопствените вредности за матрицата $A=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Задача 8-10. Нека λ е сопствена вредност на матрицата A и $p(x)$ е полином. Тогаш:

8) λ е сопствена вредност и на матрицата A^T;

9) λ^n е сопствена вредност на A^n; и

10) $p(\lambda)$ е сопствена вредност на $p(A)$.

Докажи.

Задача 11. Ако λ е сопствена вредност на несингуларната матрица A, тогаш λ^{-1} е сопствена вредност на A^{-1}.

Коментар. Во претходните 4 задачи сопствените вектори на соодветните матрици се совпаѓаат.

Матрицата B е слична на матрицата A, ако постои регуларна матрица S, таква што $B=S^{-1}AS$. Ако B е слична на A, тогаш и A е слична на B ($A=\left(S^{-1}\right)^{-1}BS^{-1}$), па велиме матриците A и B се слични.

Задача 12. Сличните матрици имаат исти сопствени вредности. Докажи.

Задача 13. Ако матриците A и B се слични тогаш и матриците A^n и B^n се слични. Докажи.

Задача 14. Ако сопствените вредности на матрицата од n-ти ред A се $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, тогаш:

1) $\det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$;

2) $\det A=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$;

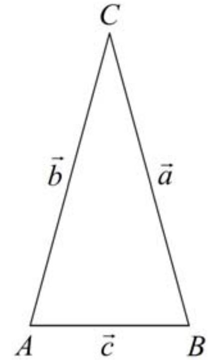
3) Матрицата A е сингуларна ако и само ако некоја нејзина вредност е нула.

4. ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

4.1. ОПЕРАЦИИ СО ВЕКТОРИ

Задача 1. Дали може должината на збирот од два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ да биде помала од должината на секој од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Да, може. **Прв начин.** Ако $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} = -\vec{a}$, тогаш $|\vec{a}| > 0$, но $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{a}| = 0$.



Втор начин. За рамнокракиот триаголник ABC, со основа AC, таква што нејзината должина е помала од должината на краците, ако земеме $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, тогаш $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$. Притоа

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| > |\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{c}|.$$

Задача 2. Со помош на векторите $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}$ изрази го векторот $4\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение. Ги изразуваме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ преку $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{a} - \vec{b} \\ \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{b} = \vec{a} - \vec{u} \\ \vec{v} = 2\vec{a} + \vec{a} - \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \\ \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} - \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \\ \vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \end{cases}.$$

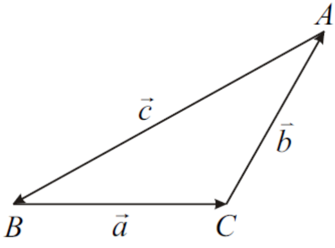
Оттука

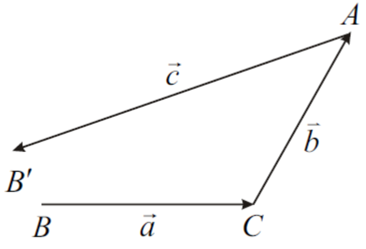
$$4\vec{a} - 3\vec{b} = 4\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}\right) - 3\left(-\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}\right) =$$

$$\frac{4}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v} + 2\vec{u} - \vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{10}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}.$$

Задача 3. Докажи дека услов за формирање на триаголник од ненултите вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$.

Решение. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ со надоврзување го образуваат триаголникот ABC (види го првиот цртеж).





Тогаш,

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$$

Обратно, нека $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Ако земеме $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AB'}$ (види го вториот цртеж). Тогаш,

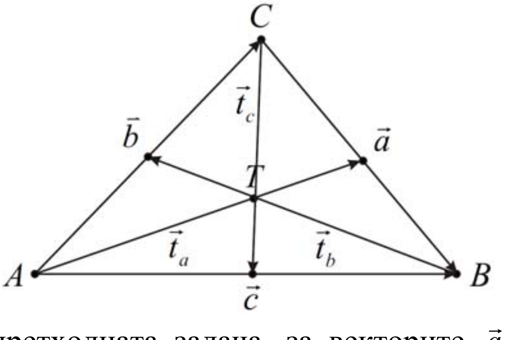
$$\vec{0}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BB'}.$$

Следува, точките B и B' се совпаѓаат, односно векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ го образуваат триаголникот ABC.

Задача 4. Докажи дека може да се конструира триаголник чии страни се еднакви и паралелни со тежишните линии на даден триаголник.

Решение. Нека $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Тогаш за тежишните линии, спуштени од точките A, B и C, добиваме

$$\vec{t}_a=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a},\ \vec{t}_b=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\ \text{ и }\ \vec{t}_c=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$



Според претходната задача, за векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Па, збирот на тежишните линии е

$$\vec{t}_a+\vec{t}_b+\vec{t}_c=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{3}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{0}.$$

Задача 5. Докажи дека дијагоналите во паралелограмот $ABCD$ се преполовуваат.

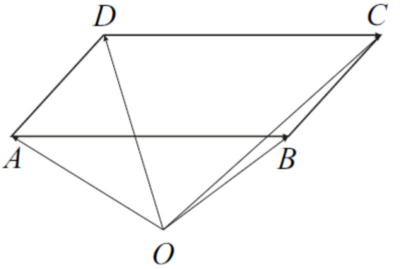
Решение. Види учебник.

Задача 6. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и A, B, C и D не се колинеарни.

Решение. Ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, тогаш $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Бидејќи $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, следува дека страните AB и CD се еднакви и паралелни. Знаеме дека еден четириаголник е паралелограм ако има еден пар еднакви и паралелни страни. Следува $ABCD$ е паралелограм.

Задача 7. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако за произволна точка O важи $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.



Решение. Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

Следува,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

Поради еквивалентност во чекорите, тврдењето е докажано во двете насоки.

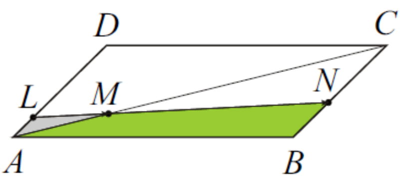
Задача 8. Даден е паралелограмот $ABCD$ и произволна точка O. Ако S е пресекот на дијагоналите тогаш $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OS}$.

Решение. Види учебник.

Задача 9. Докажи дека средните линии во произволен четириаголник се преполовуваат.

Решение. Види учебник.

Задача 10. Во паралелограмот $ABCD$, на страната AD се наоѓа точка L, таква што $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, на дијагоналата AC се наоѓа точка M таква што $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, и на страната BC се наоѓа точка N таква што $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. Докажи дека точките L, M и N, лежат на една права. Пресметај во каков однос точката M ја дели отсечката LN.



Решение. Да означиме со $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$. Задачата ќе ја решиме, ако векторите $\overrightarrow{LM}$ и $\overrightarrow{MN}$ ги изразиме преку $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Имаме

$$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AL}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=$$

$$-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{20}\vec{b}\ \text{(1), и}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AM}+\vec{a}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{20}\vec{b}=3\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{20}\vec{b}\right)\ \text{(2).}$$

Од (1) и (2) добиваме дека $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{LM}$, односно дека точките L, M и N лежат на една права и $\overline{MN}:\overline{LM}=3:1$.

Задача 11. Нека A, B, C и D се четири точки во просторот, а P и Q се средини на отсечките AC и BD. Докажи дека

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{PQ}.$$

Решение. Нека O е произволна точка во просторот. Тогаш:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=$$

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=$$

$$2\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)-2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Притоа, од $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}}{2}$ и $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2}$, имаме

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)-2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=4\overrightarrow{OQ}-4\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{PQ}.$$

Втор начин. Задачата може да ја решиме без користење на надворешна точка. На пример:

$$2\overrightarrow{PQ}=2\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}\right)=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$$

и

$$2\overrightarrow{PQ}=2\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}\right)=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$$

Со собирање на левите и десните страни од равенствата, добиваме

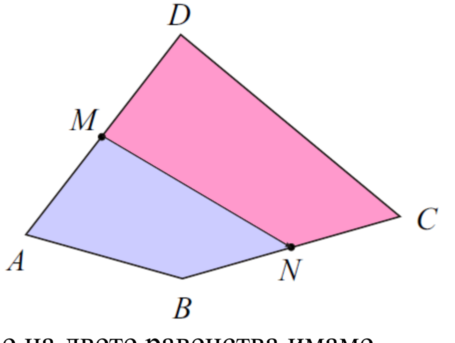
$$4\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}.$$

Задача 12. Нека M и N се средини на страните AD и BC во четириаголникот $ABCD$. Докажи дека $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

Решение. Нека е даден четириаголникот $ABCD$. Векторот $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$.

Од друга страна,

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}.$$



Со собирање на двете равенства имаме

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}.$$

Бидејќи точките M и N се средини на страните AD и BC, важи $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$. Затоа,

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right).$$

Задача 13. Докажи дека средната линија на трапезот е $ABCD$ е паралелна со основите, а нејзината должина е еднаква на полузбирот од основите.

Решение. Кај трапезот векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ се колинеарни. Затоа векторот $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$, добиен од претходната задача, е колинеарен со $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$. Следува дека средната линија е паралелна со основите.

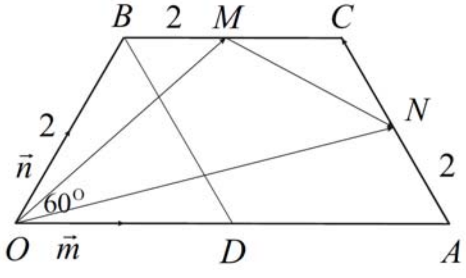
Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ се истонасочени. Следува,

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|.\text{ Оттука }\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|\right).$$

Со тоа го докажавме вториот дел од тврдењето.

Задача 14. Во рамнокрак трапез $OACB$ аголот BOA е $60°$ и $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=2$. Точките M и N се средини на страните BC и AC, соодветно. Изрази ги векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ со помош на векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ кои се единечни вектори по правците $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соодветно.

Решение. Векторот $\overrightarrow{OB}=2\vec{n}$. Избираме точка D таква што страната BD е паралелна со CA. Тогаш важи $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}=2\vec{m}$.



Триаголникот ODB е рамностран, бидејќи $\sphericalangle ODB=\sphericalangle OAC=60°$. Следува, $\overrightarrow{OD}=2\vec{m}$ и $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=4\vec{m}$. Оттука,

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=-2\vec{m}+2\vec{n}=2\left(\vec{n}-\vec{m}\right),$$

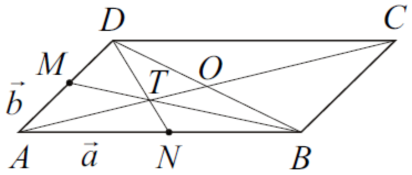
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=2\vec{n}+\vec{m}.$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = 4\vec{m} + \frac{1}{2}2\left(\vec{n} - \vec{m}\right) = 3\vec{m} + \vec{n} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}2\vec{m} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{m} - \left(\vec{n} - \vec{m}\right) = 2\vec{m} - \vec{n}$$

Задача 15. Во паралелограмот $ABCD$, точката M е средина на страната AD, а точката N е средина на страната AB. Изрази го векторот $\overrightarrow{AT}$, каде T е тежиштето на триаголникот ABD, преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

Решение. Нека T е пресекот на отсечките BM и DN, а O пресекот на отсечките AT и BD.



Тогаш точката T е тежишна линија на триаголникот ABD и O е пресекот на дијагоналите на паралелограмот. Затоа

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} \text{ каде } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Следува

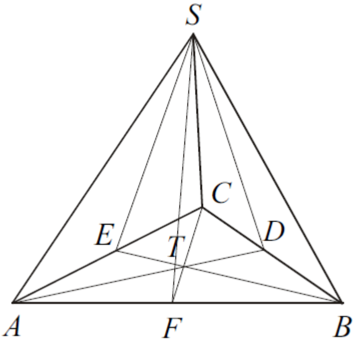
$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Задача 16. Дадена е тристрана пирамида чија основа е триаголникот ABC, а врвот е во точката S. Срединитe на рабовите на основата BC, CA и AB се обележани со D, E и F, соодветно. Покажи дека $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{ES} + \overrightarrow{FS}$.

Решение. Ги изразуваме векторите $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ и $\overrightarrow{CS}$ со помош на векторите на страните на триаголникот ABC и векторите $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{ES}$ и $\overrightarrow{FS}$. Имаме

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FS},\ \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ES} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ES}.$$



Со собирање на левите и десните страни од равенствата добиваме

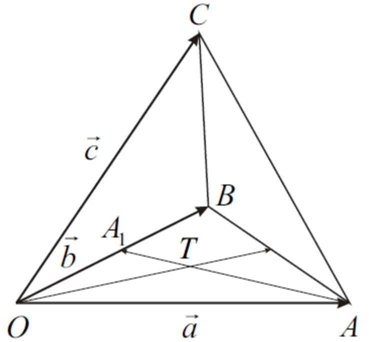
$$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{FS}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{FS}.$$

Притоа го искористивме равенството $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

Задача 17. Во тетраедарот $OABC$, дадени се рабовите $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$. Со помош на дадените вектори изрази ги векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, како и векторот $\overrightarrow{OT}$, каде T е тежиштето на триаголникот ABC.

Решение. Со помош на правилата за оперирање со вектори, добиваме

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{c}-\vec{a} \text{ и}$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}.$$



Имајќи предвид дека тежиштето ги дели тежишните линии во однос 2:1, важи

$\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, каде A_1 е средина на OB, т.е. $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right)$. Затоа,

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AT}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right)=$$

$$\vec{a}+\frac{1}{3}\left(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

4.2. КООРДИНАТИ НА ВЕКТОР

Задача 1. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC, $A(1,2,1)$, $B(3,1,-1)$, $C(2,3,1)$.

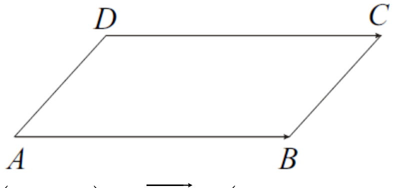
Решение. Векторот $\overrightarrow{AB}=(2,-1,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(-1,2,2)$ и $\overrightarrow{CA}=(1,1,0)$. Следува периметарот на триаголникот ABC е

$$L=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{CA}\right|=$$

$$\sqrt{4+1+4}+\sqrt{1+4+4}+\sqrt{1+1+0}==3+3+\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

Задача 2. Дадени се три последователни темиња на паралелограмот $ABCD$: $A(-3,2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$. Определи ги координатите на четвртото теме D.

Решение. Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, ако и само ако $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Нека координатите на темето D се $D(x,y,z)$.



Тогаш $\overrightarrow{AB}=(6,-5,1)$ и $\overrightarrow{DC}=(5-x,-y,2-z)$, од каде

$$6=5-x,\ -5=-y,\ 1=2-z \Leftrightarrow x=-1,\ y=5,\ z=1.$$

Следува, бараното теме е $D(-1,5,1)$.

Задача 3. Дадени се три последователни темиња на паралелограмот $ABCD$: $A(-3,2,t)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,t,2)$.

Определи ги темињата на паралелограмот така што должината на отсечката $\overrightarrow{AD}$ да изнесува $\sqrt{14}$.

Решение. Види учебник.

Задача 4. Темињата во четириаголникот $ABCD$ се

$$A(2,0,4),\ B(7,-15,16) \text{ и } C(-1,-1,11) \text{ и } D(-14,28,-6).$$

Докажи дека $ABCD$ е трапез.

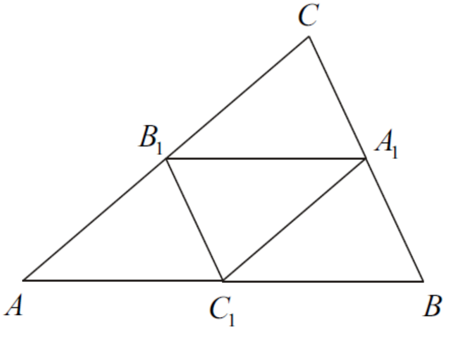
Решение. Четириаголникот $ABCD$ е трапез ако има еден пар паралелни спротивни страни. Ги разгледуваме векторите $\overrightarrow{AB}=(5,-15,12)$ и $\overrightarrow{CD}=(-13,29,-17)$, како и $\overrightarrow{BC}=(-8,14,-5)$ и $\overrightarrow{DA}=(-16,28,-10)$. Забележуваме дека $2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$. Следува дека $ABCD$ е трапез.

Задача 5. Средините на страните во триаголникот се во точките $A_1(2,3,0)$, $B_1(4,-1,1)$ и $C_1(-2,1,-1)$. Најди ги координатите на темињата во триаголникот.

Решение. Со $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ и $C(x_3,y_3,z_3)$ ќе ги означиме темињата во триаголникот.

Векторите што лежат на средните линии во триаголникот се

$$\overrightarrow{A_1B_1}=(2,-4,1),\ \overrightarrow{B_1C_1}=(-6,2,-2) \text{ и } \overrightarrow{C_1A_1}=(4,2,1).$$



Имаме

$$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{C_1A} \Leftrightarrow (2,-4,1)=(x_1+2,y_1-1,z_1+1) \Leftrightarrow x_1=0,\ y_1=-3,\ z_1=0;$$

$$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{A_1B} \Leftrightarrow (-6,2,-2)=(x_2-2,y_2-3,z_2) \Leftrightarrow x_2=-4,\ y_2=5,\ z_2=-2;$$

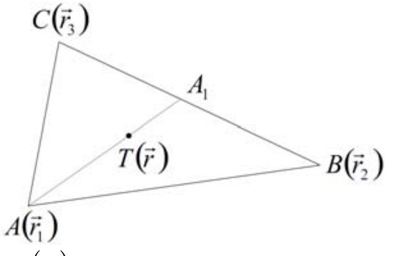
$$\overrightarrow{C_1A_1}=\overrightarrow{B_1C} \Leftrightarrow (4,2,1)=(x_3-4,y_3+1,z_3-1) \Leftrightarrow x_3=8,\ y_3=1,\ z_3=2.$$

Следува, темињата во триаголникот се

$$A(0,-3,0),\ B(-4,5,-2) \text{ и } C(8,1,2).$$

Задача 6. Дадени се темињата $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ во триаголникот ABC. Определи ги координатите на тежиштето T.

Решение. Нека радиус векторите на точките A, B и C се $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$. Според формулата за делење на отсечка во даден однос, радиус векторот на средината A_1 на страната BC е $\dfrac{\vec{r}_2+\vec{r}_3}{2}$.



Бидејќи тежиштето $T(\vec{r})$, ја дели тежишната линија AA_1 во однос $\lambda = 2$, важи

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \frac{\vec{r}_2+\vec{r}_3}{2}}{\lambda+1} \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + 2 \frac{\vec{r}_2+\vec{r}_3}{2}}{3} \Leftrightarrow \vec{r} = \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3}.$$

Од последната равенка ги добиваме координатите на тежиштето T,

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

Задача 7. Најди ги координатите на тежиштето T на триаголникот ABC, чии темиња се $A(-2,1,3)$, $B(1,2,-1)$ и $C(1,-3,-2)$.

Решение. Прв начин. Според формулата од претходната задача, координатите на тежиштето $T(x, y, z)$ се

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ z = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-2+1+1}{3} = 0,\ y = \frac{1+2-3}{3} = 0,\ z = \frac{3-1-2}{3} = 0.$$

Втор начин. Средината A_1 на страната BC има координати $A_1\left(\frac{1+1}{2}, \frac{2-3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)$, односно $A_1\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Бидејќи тежиштето

$T(x,y,z)$, ја дели тежишната линија AA_1 во однос $\lambda=2$, неговите координати се

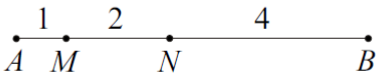
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{-2+2}{3}=0,\ y=\frac{1+2\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}=0,\ z=\frac{3+2\left(-\frac{3}{2}\right)}{3}=0.$$

Задача 8. Отсечката чии крајни точки се $A(5,10,4)$ и $B(-2,3,-3)$ со внатрешните точки M и N е поделена на 3 дела така што, тргнувајќи од A кон B, секој следен дел е 2 пати поголем од претходниот. Определи ги координатите на точките M и N.

Решение. Точката $M(x,y,z)$ ја дели отсечката AB во однос

$$\lambda=\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{1}{6}.$$



Според формулата за делење на отсечка во даден однос, координатите на точката M се

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{5+\frac{1}{6}(-2)}{1+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{28}{6}}{\frac{7}{6}}=4,\ y=\frac{10+\frac{1}{6}3}{1+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{63}{6}}{\frac{7}{6}}=9,\ z=\frac{4+\frac{1}{6}(-3)}{1+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{21}{6}}{\frac{7}{6}}=3$$

Точката $N(x,y,z)$ ја дели отсечката AB во однос

$\lambda=\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}=\frac{3}{4}$. Следува координатите на точката N се

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{5+\frac{3}{4}(-2)}{1+\frac{1}{6}}=2\qquad y=\frac{10+\frac{3}{4}3}{1+\frac{3}{4}}=7\qquad z=\frac{4+\frac{3}{4}(-3)}{1+\frac{3}{4}}=1.$$

Значи бараните точки се $M(4,9,3)$ и $N(2,7,1)$.

Задача 9. Паралелопипедот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со теме во точката $A(2,1,0)$ е генериран од векторите $\overrightarrow{AB}=(1,0,1)$, $\overrightarrow{AD}=(-1,2,1)$ и $\overrightarrow{AA_1}=(1,1,1)$. Определи ги координатите на останатите темиња. Покажи дека просторните дијагонали во паралелопипедот се сечат во една точка, која ги преполовува истите.

Решение. Имаме

$$\vec{r}(B)=\vec{r}(A)+\overrightarrow{AB}=(2,1,0)+(1,0,1)=(3,1,1),$$

$$\vec{r}(C)=\vec{r}(B)+\overrightarrow{BC}=\vec{r}(B)+\overrightarrow{AD}=(3,1,1)+(-1,2,1)=(2,3,2),$$

$$\vec{r}(D)=\vec{r}(A)+\overrightarrow{AD}=(2,1,0)+(-1,2,1)=(1,3,1),$$

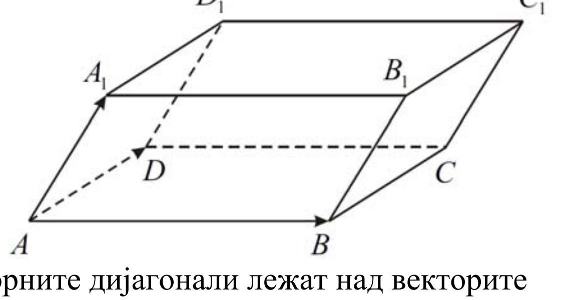
$$\vec{r}(A_1)=\vec{r}(A)+\overrightarrow{AA_1}=(2,1,0)+(1,1,1)=(3,2,1),$$

$$\vec{r}(B_1)=\vec{r}(B)+\overrightarrow{BB_1}=\vec{r}(B)+\overrightarrow{AA_1}=(3,1,1)+(1,1,1)=(4,2,2),$$

$$\vec{r}(C_1)=\vec{r}(C)+\overrightarrow{CC_1}=\vec{r}(C)+\overrightarrow{AA_1}=(2,3,2)+(1,1,1)=(3,4,3) \text{ и}$$

$$\vec{r}(D_1)=\vec{r}(D)+\overrightarrow{DD_1}=\vec{r}(D)+\overrightarrow{AA_1}=(1,3,1)+(1,1,1)=(2,4,2).$$

Значи темињата во паралелопипедот, покрај $A(2,1,0)$, се $B(3,1,1)$, $C(2,3,2)$, $D(1,3,1)$, $A_1(3,2,1)$, $B_1(4,2,2)$, $C_1(3,4,3)$ и $D_1(2,4,2)$.



Просторните дијагонали лежат над векторите

$$\overrightarrow{AC_1}=(1,3,3),\ \overrightarrow{BD_1}=(-1,3,1),\ \overrightarrow{CA_1}=(1,-1,-1) \text{ и } \overrightarrow{DB_1}=(3,-1,1).$$

Нека S_1, S_2, S_3 и S_4 се соодветните средишни точки на просторните дијагонали. Тогаш,

$$\vec{r}\left(S_1\right)=\frac{\vec{r}\left(A\right)+\vec{r}\left(C_1\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(5,5,3\right),\ \vec{r}\left(S_2\right)=\frac{\vec{r}\left(B\right)+\vec{r}\left(D_1\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(5,5,3\right),$$

$$\vec{r}\left(S_3\right)=\frac{\vec{r}\left(C\right)+\vec{r}\left(A_1\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(5,5,3\right) \text{ и } \vec{r}\left(S_4\right)=\frac{\vec{r}\left(D\right)+\vec{r}\left(B_1\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(5,5,3\right).$$

Следува, $S_1=S_2=S_3=S_4=S$, односно просторните дијагонали се преполовуваат.

Коментар. Аналогно се покажува дека просторните дијагонали во произволен паралелопипед се преполовуваат.

4.3. ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ И НЕЗАВИСНОСТ НА ВЕКТОРИ

Задача 1. Испитај ја линеарната зависност на векторите $\vec{a}=\left(2,-1,1\right)$, $\vec{b}=\left(1,3,-2\right)$ и $\vec{c}=\left(-2,1,-3\right)$, а потоа претстави го векторот $\vec{d}=\left(3,2,5\right)$ како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение. а) Прв начин. Бидејќи

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=-18-4+1+6+4-3=-14\neq 0,$$

следува дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни.

Втор начин. Утврдуваме кога линеарната комбинација на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е нултиот вектор.

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \Leftrightarrow x\left(2,-1,1\right)+y\left(1,3,-2\right)+z\left(-2,1,-3\right)=\left(0,0,0\right) \Leftrightarrow$$

$$2x+y-2z=0,\ -x+3y+z=0,\ x-2y-3z=0.$$

Бидејќи детерминантата на системот

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=-14\neq 0,$$

следува системот има единствено решение $x=0, y=0, z=0$, односно векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни.

б) Нека векторот $\vec{d}$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + c\vec{z} \Leftrightarrow (3,2,5) = x(2,-1,1) + y(1,3,-2) + z(-2,1,-3) \Leftrightarrow$$
$$x(2,-1,1) + y(1,3,-2) + z(-2,1,-3) = (3,2,5) \Leftrightarrow 2x + y - 2z = 3,$$
$$-x + 3y + z = 2,\ x - 2y - 3z = 5.$$

Детерминантите на системот се

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -14,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 5 + 8 + 30 + 6 + 6 = 28,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 3 + 10 + 4 - 10 - 9 = -14,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 2 + 6 - 9 + 8 + 5 = 42,$$

од каде

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{28}{-14} = -2, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-14}{-14} = 1, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{42}{-14} = -3.$$

Следува, $\vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

Задача 2. Дадени се точките

$$A(2,-1,3),\ B(1,-1,1),\ C\left(-\frac{3}{2},2,-2\right) \text{ и } D(-1,2,-1).$$

Докажи дека радиус векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на точките A, B и C, соодветно, се линеарно независни, а потоа изрази го радиус векторот $\vec{d}$ на точката D, како линеарна комбинација на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение. Радиус векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, на точките A, B, C и D се $\vec{a} = (2,-1,3)$, $\vec{b} = (1,-1,1)$, $\vec{c} = \left(-\frac{3}{2},2,-2\right)$ и $\vec{d} = (-1,2,-1)$

Бидејќи

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -2 \end{vmatrix}=4+\frac{3}{2}+6-\frac{9}{2}-4-2=1\neq 0,$$

векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни.

Нека $\vec{d}$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+c\vec{z} \Leftrightarrow x(2,-1,3)+y(1,-1,1)+z\left(-\frac{3}{2},2,-2\right)=(-1,2,-1) \Leftrightarrow$$

$$2x+y-\frac{3}{2}z=-1,\ -x-y+2z=2,\ 3x+y-2z=-1.$$

Ако ги собереме првата и втората равенка од системот, добиваме $x+\frac{1}{2}z=1$. Ако ги собереме втората и третата равенка, имаме $2x=1$, односно $x=\frac{1}{2}$. Оттука, $z=1$. Со замена во првата равенка од системот, добиваме $2\frac{1}{2}+y-\frac{3}{2}=-1$, односно $y=-\frac{1}{2}$.

Следува, $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

Задача 3. Дадени се векторите $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$. Разложи го векторот $\vec{c}=9\vec{i}+4\vec{j}$ по правците на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. претстави го како линеарна комбинација на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $\vec{i}$ и $\vec{j}$ се единечни заемно нормални вектори.

Решение. Равенството $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ е исполнето за

$$9\vec{i}+4\vec{j}=x\left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)+y\left(\vec{i}+2\vec{j}\right) \Leftrightarrow 9\vec{i}+4\vec{j}=(2x+y)\vec{i}+(-3x+2y)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9=2x+y \\ 4=-3x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9-2x \\ 4=-3x+18-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}.$$

Следува, $\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$.

Задача 4. Докажи дека векторите $\vec{a}=(8,2,2)$, $\vec{b}=(6,-3,-3)$ и $\vec{c}=(0,3,3)$ се линеарно зависни, а потоа изрази го векторот $\vec{c}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Детерминантата

$$D=2\cdot3\cdot3\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=18(-4+3+4-3)=0$$

бидејќи соодветните коефициенти во втората и третата колона се еднакви. Следува векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни. Векторот $\vec{c}$ е линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, акко

$$(0,3,3)=x(8,2,2)+y(6,-3,-3)\Leftrightarrow(0,3,3)=(8x+6y,2x-3y,2x-3y)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8x+6y=0\\ 2x-3y=-3\\ 2x-3y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3y=0\\ 2x-3y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x=-3\\ 2x-3y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{2}{3}\end{cases}.$$

Значи $\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$.

Коментар. Во општ случај може да се случи векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ да се линеарно зависни, но $\vec{c}$ да не може да се изрази преку $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Имено векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни ако и само ако барем еден од нив може да се изрази како линеарна комбинација од останатите.

Задача 5. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни. Докажи дека векторите $2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+3\vec{a}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$ исто така се линеарно независни.

Решение. Линеарната комбинација на векторите $\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{c}+\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ е $\vec{0}$ ако

$$x\left(2\vec{b}+\vec{c}\right)+y\left(\vec{c}+3\vec{a}\right)+z\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$(3y+2z)\vec{a}+(2x-z)\vec{b}+(x+y)\vec{c}=(0,0,0).$$

Бидејќи $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни, важи $\begin{cases} 3y+2z=0 \\ 2x-z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$.

Детерминантата на хомогениот систем е

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3+4=1\neq 0.$$

Следува дека системот има единствено решение $x=0$, $y=0$ и $z=0$, односно векторите $2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+3\vec{a}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$ исто така се линеарно независни.

Задача 6. Докажи дека векторите $3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{b}-3\vec{c}$ и $2\vec{c}-\vec{a}$ секогаш се линеарно зависни.

Решение. Ќе го претставиме првиот вектор како линеарна комбинација од останатите вектори.

$$3\vec{a}-2\vec{b}=x\left(\vec{b}-3\vec{c}\right)+y\left(2\vec{c}-\vec{a}\right)\Leftrightarrow\left(3+y\right)\vec{a}+\left(-2-x\right)\vec{b}+\left(3x+2y\right)\vec{c}=\vec{0}.$$

Последното равенство секогаш е исполнето ако е непротивречен системот равенки $3+y=0$, $-2-x=0$ и $3x+2y=0$. Системот има решение: $x=-2$ и $y=-3$. Значи $3\vec{a}-2\vec{b}=-2\left(\vec{b}-3\vec{c}\right)-3\left(2\vec{c}-\vec{a}\right)$.

Следува дека векторите $3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{b}-3\vec{c}$ и $2\vec{c}-\vec{a}$ се линеарно зависни.

Втор начин. Ја формираме линеарната комбинација од векторите $3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{b}-3\vec{c}$ и $2\vec{c}-\vec{a}$,

$$x\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)+y\left(\vec{b}-3\vec{c}\right)+z\left(2\vec{c}-\vec{a}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\left(3x-z\right)\vec{a}+\left(-2x+y\right)\vec{b}+\left(-3y+2z\right)\vec{c}=\vec{0}.$$

Векторското равенство секогаш е исполнето ако скаларите пред векторите се нули. Системот равенки $3x-z=0$, $-2x+y=0$, $-3y+2z=0$ е еквивалентен со системот $z=3x$, $y=2x$ кој има бесконечно многу решенија $\left(t,2t,3t\right)$. Следува дека векторите $3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{b}-3\vec{c}$ и $2\vec{c}-\vec{a}$ се линеарно зависни.

Задача 7. Дадени се векторите $\vec{m} = x\vec{a} - 4\vec{b} - 6\vec{c}$ и $\vec{n} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + y\vec{c}$, каде $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се некомпланарни вектори. Најди ги вредностите на x и y, за векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ да бидат колинеарни.

Решение. Векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се колинеарни, ако

$$\vec{m} = k\vec{n} \Leftrightarrow x\vec{a} - 4\vec{b} - 6\vec{c} = -3k\vec{a} + 2k\vec{b} + yk\vec{c} \Leftrightarrow$$

$$(x+3k)\vec{a} - 2(2+k)\vec{b} - (6+yk)\vec{c} = 0$$

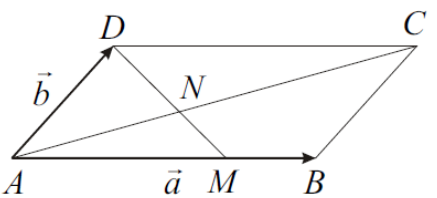
Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се некомпланарни вектори, односно линеарно независни. Затоа

$$x + 3k = 0,\ 2 + k = 0,\ 6 + yk = 0 \Leftrightarrow k = -2,\ x = 6,\ y = 3.$$

Следува $x = 6$, $y = 3$.

РАВЕНСТВОТО $x\vec{a} = y\vec{b}$

Задача 1. Даден е паралелограмот $ABCD$. На страната AB се наоѓа точка M, таква што $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Нека точката $N = AC \cap DM$. Пресметај во каков однос точката N ја дели отсечката AC.



Решение. Нека $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Точките A, N и C се колинеарни, следува постои скалар x таков што $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$. Точките M, N и D се колинеарни, следува постои скалар y таков што $\overrightarrow{MN} = y\overrightarrow{MD}$. Од триаголникот AMN добиваме

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}\vec{a} = x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + y\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow \frac{2}{3}\vec{a} = x\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + y\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \vec{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}\vec{a} = x\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + y\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}\vec{a} = x\vec{a} + x\vec{b} - \frac{2}{3}y\vec{a} + y\vec{b} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}y - x\right)\vec{a} + \left(-(x+y)\right)\vec{b} = 0.$$

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, следува, скаларите пред нив во линеарната комбинација се нула, $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}y-x=0$, $x+y=0$.

Од втората равенка добиваме $y=-x$. Со замена во првата равенка добиваме

$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x-x=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}=\frac{5}{3}x \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$. Оттука $y=-\frac{2}{5}$. Следува,

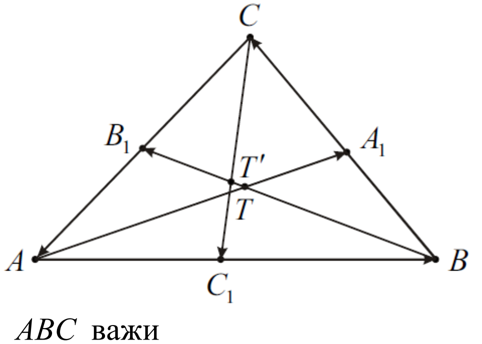
$$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \text{ и } \overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} \text{ т.е. } \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NC}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}.$$

Задача 2. Докажи дека тежишните линии во триаголникот се сечат во една точка, тежиште, кое ја дели тежишната линија во однос $2:1$.

Решение. Нека T е пресекот на тежишните линии $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. Бидејќи векторот $\overrightarrow{AT}$ е паралелен со векторот $\overrightarrow{AA_1}$ и векторот $\overrightarrow{BT}$ е паралелен со векторот $\overrightarrow{BB_1}$ следува $\overrightarrow{AT}=x\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BT}=y\overrightarrow{BB_1}$.

Од триаголникот ABT, важи $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{AB}$. Целта на задачата е сите вектори да ги изразиме преку два неколинеарни вектори, на пример $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Имаме

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2} \text{ и } \overrightarrow{BB_1}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$



Од триаголникот ABC важи

$$\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow x\overrightarrow{AA_1}-y\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$$

$$x\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}-y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{x}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{y}{2}\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x}{2}+y-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$$

Бидејќи векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се линеарно независни, следува дека $\frac{x}{2}+y-1=0$ и $\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=0$. Од втората равенка имаме $y=x$. Ако замениме во првата равенка добиваме $\frac{3x}{2}-1=0$ или $x=\frac{2}{3}$. Оттука, $y=\frac{2}{3}$. Следува, $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$.

Нека T' е пресекот на тежишните линии $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Од претходно покажаното имаме $\overrightarrow{CT'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$ и

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.$$

Тогаш

$$\overrightarrow{CT'}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AT}=-\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Значи $\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{CT'}$, односно $T\equiv T'$. Следува тежишните линии се сечат во една точка.

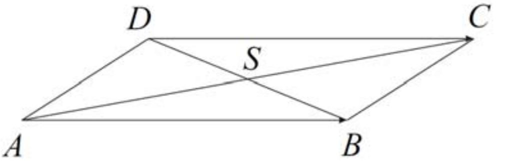
Од равенствата $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$, следува дека тежиштето ги дели тежишните линии во однос $2:1$.

Задача 3. Докажи дека дијагоналите во паралелограмот се преполовуваат.

Решение. Задачата која е докажана претходно, сега ќе ја покажеме на уште два начини, со помош на линеарна зависност на вектори и со помош на равенството $x\vec{a}=y\vec{b}$.

Прв начин. Нека S е пресекот на дијагоналите во паралелограмот $ABCD$. Важи $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Притоа,

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB}-\overrightarrow{DS}=-\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC} \text{ (1).}$$



Векторот $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ не е колинеарен со векторот $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$, од каде следува дека

$\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=0$ односно $\overrightarrow{SB}=-\overrightarrow{SD}$ и $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=0$ или $\overrightarrow{SA}=-\overrightarrow{SC}$.

Значи дијагоналите во паралелограмот се преполовуваат.

Втор начин. Означуваме $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

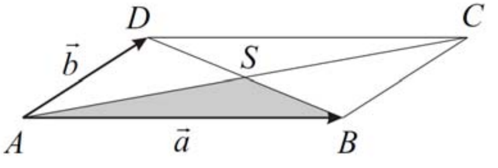
Векторот $\overrightarrow{AS}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{AC}$ и векторот $\overrightarrow{SB}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{DB}$. Следува дека постојат броеви x и y, такви што $\overrightarrow{AS}=x\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{SB}=y\overrightarrow{DB}$. Од триаголникот ABS имаме

$$\underline{\overrightarrow{AB}}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{DB}=x\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+y\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\underline{x\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{a}-y\vec{b}}.$$

Со прирамнување на левата и десната страна на равенствата добиваме

$$\vec{a}=x\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{a}-y\vec{b} \Leftrightarrow \left(1-x-y\right)\vec{a}+\left(y-x\right)\vec{b}=0.$$

Бидејќи векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се неколинеарни, односно линеарно независни, важат равенствата $1-x-y=0$ и $y-x=0$. Од втората равенка имаме $y=x$. Со замена во првата равенка добиваме $x=\frac{1}{2}$, од каде следува $y=\frac{1}{2}$.



Значи, $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, со што е покажано тврдењето во задачата.

4.4. СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

Задача 1. Дадени се векторите $\vec{a}=(2,1,4)$, $\vec{b}=(1,-2,-3)$ и $\vec{c}=(1,1,1)$. Најди ги координатите на векторот $\vec{x}$ кој е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c}\cdot\vec{x}=2$.

Решение. Нека векторот $\vec{x}=(x,y,z)$. Од условите на задачата важи

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{x}=0\\ \vec{b}\cdot\vec{x}=0\\ \vec{c}\cdot\vec{x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+4z=0\\ x-2y-3z=0\\ x+y+z=2\end{cases}.$$

Го решаваме системот равенки. Неговите детерминанти се

$$D=\begin{vmatrix}2&1&4\\1&-2&-3\\1&1&1\end{vmatrix}=-4+4-3+8+6-1=10,$$

$$D_x=\begin{vmatrix}0&1&4\\0&-2&-3\\2&1&1\end{vmatrix}=-6+16=10,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&0&4\\1&0&-3\\1&2&1\end{vmatrix}=8+12=20,\quad D_z=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&-2&0\\1&1&2\end{vmatrix}=-8-2=-10,$$

од каде според Крамеровите формули, решението е:

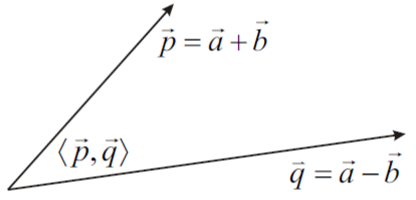
$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{10}{10}=1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{20}{10}=2,\qquad z=\frac{D_z}{D}=-\frac{10}{10}=-1.$$

Значи $\vec{x}=(1,2,-1)$.

Задача 2. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зафаќаат агол $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Ако се знае дека нивните должини се $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ и $|\vec{b}|=3$, пресметај го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$.

Решение. Види учебник.

Задача 3. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зафаќаат агол $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Ако се знае дека нивните должини се $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ и $|\vec{b}| = 1$, пресметај го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.



Решение. Косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се пресметува по формулата $\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \dfrac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$, каде скаларaниот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$$

и имајќи предвид дека $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 3$ и $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 1$, за скаларниот производ $\vec{p}\vec{q}$ и должините на векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, добиваме

$$\vec{p}\vec{q} = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3 - 1 = 2,$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{3+3+1} = \sqrt{7},$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{\left(\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right)} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{3-3+1} = 1$$

Следува $\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Задача 4. Определи го аголот меѓу векторите $\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, ако должините на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $|\vec{c}| = 1$ и аглите што ги зафаќаат се

$$\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\pi}{3},\ \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{c}\right) = \frac{5\pi}{6} \text{ и } \sphericalangle\left(\vec{b},\vec{c}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ е

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\frac{\vec{p}\vec{q}}{\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|}$$. Притоа

$$\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=3,\ \vec{a}\vec{c}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\frac{5\pi}{6}=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$$ и

$$\vec{b}\vec{c}=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\frac{5\pi}{6}=3\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$, и

$$\vec{p}\vec{q}=\left(3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)=$$

$$3\vec{a}^2+6\vec{a}\vec{b}-3\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2+\vec{b}\vec{c}+2\vec{a}\vec{c}+4\vec{b}\vec{c}-2\vec{c}^2=$$

$$3\vec{a}^2-2\vec{b}^2-2\vec{c}^2+5\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}+5\vec{b}\vec{c}=$$

$$3\cdot 4-2\cdot 9-2+5\cdot 3+\sqrt{3}+\frac{15\sqrt{2}}{2}=7+\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{2}}{2},$$

$$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{\left(3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}\right)^2}=\sqrt{9\vec{a}^2+\vec{b}^2+4\vec{c}^2-6\vec{a}\vec{b}+12\vec{a}\vec{c}-4\vec{b}\vec{c}}=$$

$$\sqrt{36+9+4-18-12\sqrt{3}-6\sqrt{2}}=\sqrt{31-12\sqrt{3}-6\sqrt{2}}$$ и

$$\left|\vec{q}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{b}^2+\vec{c}^2+4\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{c}-4\vec{b}\vec{c}}=$$

$$\sqrt{4+36+1+12+2\sqrt{3}-6\sqrt{2}}=\sqrt{53+2\sqrt{3}-6\sqrt{2}}.$$

Следува $\cos\sphericalangle\left(\vec{p},\vec{q}\right)=\dfrac{7+\sqrt{3}+15\sqrt{2}/2}{\sqrt{31-12\sqrt{3}-6\sqrt{2}}\sqrt{53+2\sqrt{3}-6\sqrt{2}}}$.

Задача 5. Определи го аголот меѓу единечните вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$, ако $\vec{m}+2\vec{n}$ и $5\vec{m}-4\vec{n}$ се заемно нормални вектори.

Решение. Аголот меѓу векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ го добиваме од условот за заемна нормалност на векторите $\vec{m}+2\vec{n}$ и $5\vec{m}-4\vec{n}$, односно

$$\left(\vec{m}+2\vec{n}\right)\left(5\vec{m}-4\vec{n}\right)=0\Leftrightarrow 5\vec{m}^2-4\vec{m}\vec{n}+10\vec{m}\vec{n}-8\vec{n}^2=0\Leftrightarrow$$

$$5\left|\vec{m}\right|^2+6\vec{m}\vec{n}-8\left|\vec{n}\right|^2=0\Leftrightarrow -3+6\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\sphericalangle\left(\vec{m},\vec{n}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{m},\vec{n}\right)=\frac{1}{2}$$

Следува аголот меѓу векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ е $\sphericalangle\left(\vec{m},\vec{n}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

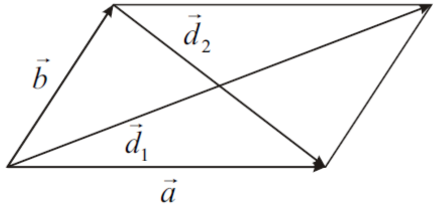
Задача 6. Најди го аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Векторите

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n} + \vec{m} - 2\vec{n} = 3\vec{m} - \vec{n} \text{ и}$$

$$\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n} - \vec{m} + 2\vec{n} = \vec{m} + 3\vec{n}$$

лежат на дијагоналите.



Бидејќи $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$ и $\vec{m}\vec{n} = |\vec{m}||\vec{n}|\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, аголот е

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{d}_1, \vec{d}_2\right) = \frac{\vec{d}_1\vec{d}_2}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{\left(3\vec{m} - \vec{n}\right)\left(\vec{m} + 3\vec{n}\right)}{\sqrt{\left(3\vec{m} - \vec{n}\right)^2}\sqrt{\left(\vec{m} + 3\vec{n}\right)^2}} =$$

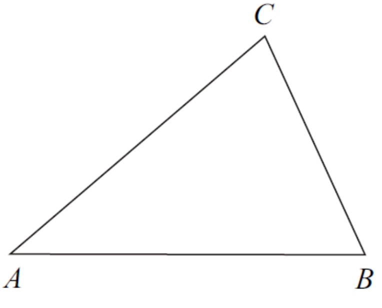
$$\frac{3\vec{m}^2 + 9\vec{m}\vec{n} - \vec{m}\vec{n} - 3\vec{n}^2}{\sqrt{\left(9\vec{m}^2 - 6\vec{m}\vec{n} + \vec{n}^2\right)^2}\sqrt{\left(\vec{m}^2 + 6\vec{m}\vec{n} + 9\vec{n}^2\right)^2}} = \frac{4}{\sqrt{7}\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{91}}.$$

Задача 7. Во триаголникот ABC, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$, каде $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални ортови. Определи ги страните и аглите на триаголникот ABC.

Решение. Со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ го изразуваме векторот

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$$

$$2\vec{a} - 6\vec{b} + \vec{a} + 7\vec{b} = 3\vec{a} + \vec{b}.$$



Бидејќи $\vec{a}\vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = 1$ и $|\vec{b}| = 1$ должините на страните на триаголникот се

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(2\vec{a}-6\vec{b}\right)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ ,$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}+7\vec{b}\right)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\ \text{ и}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}\ .$$

Оттука, аглите во триаголникот ABC се

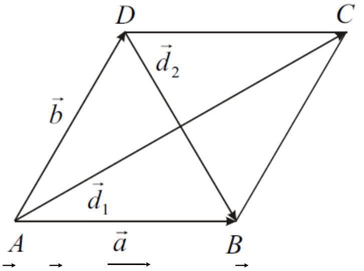
$$\cos\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = \frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\left(2\vec{a}-6\vec{b}\right)\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)}{2\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{6-6}{20} = 0, \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right\rangle = \frac{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\left(-2\vec{a}+6\vec{b}\right)\left(\vec{a}+7\vec{b}\right)}{2\sqrt{10}5\sqrt{2}} = \frac{-2+42}{20\sqrt{5}} = \frac{40}{20\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\ , \text{ и}$$

$$\cos\left\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \right\rangle = \frac{\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{\left(-3\vec{a}-\vec{b}\right)\left(-\vec{a}-7\vec{b}\right)}{\sqrt{10}5\sqrt{2}} = \frac{3+7}{10\sqrt{5}} = \frac{10}{10\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ .$$

Задача 8. Докажи дека дијагоналите во ромбот $ABCD$ се заемно нормални.

Решение. Да означиме со $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.



Тогаш $\vec{d}_1 = \overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}_2 = \overrightarrow{DB} = \vec{a}-\vec{b}$ и

$$\vec{d}_1\vec{d}_2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

Следува дека дијагоналите во ромбот се заемно нормални.

Задача 9. Најди го аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}=(2,1,0)$ и $\vec{b}=(0,-2,1)$.

Решение. Векторите што лежат на дијагоналите се $\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}=(2,-1,1)$ и $\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}=(2,3,-1)$. Тогаш,

$$\cos\measuredangle\left(\vec{d}_1,\vec{d}_2\right)=\frac{\vec{d}_1\vec{d}_2}{\left|\vec{d}_1\right|\left|\vec{d}_2\right|}=\frac{4-3-1}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{4+9+1}}=0 \text{ т.е. } \measuredangle\left(\vec{d}_1,\vec{d}_2\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Задача 10. Докажи дека со помош на векторите $\vec{a}=(10,-5,10)$, $\vec{b}=(-11,-2,10)$ и $\vec{c}=(-2,-14,-5)$ може да се конструира коцка.

Решение. Треба да докажеме дека

$$|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=|\vec{c}| \text{ и } \vec{a}\perp\vec{b},\ \vec{b}\perp\vec{c},\ \vec{c}\perp\vec{a}.$$

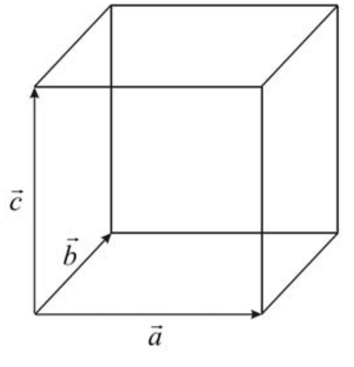
Навистина

$$|\vec{a}|=\sqrt{100+25+100}=\sqrt{225}=15,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{121+4+100}=\sqrt{225}=15,$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{4+196+25}=\sqrt{225}=15 \text{ и}$$

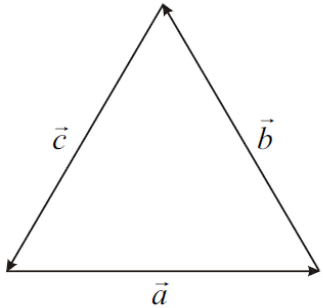
$$\vec{a}\vec{b}=-110+10+100=0,\ \vec{b}\vec{c}=22+28-50=0 \text{ и}$$

$$\vec{c}\vec{a}=-20+70-50=0.$$



Задача 11. За единечните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Пресметај го изразот $\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

Решение. Прв начин. Од условот $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ следува дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат триаголник. Бидејќи се единечни вектори, следува дека триаголникот е рамностран, од каде аголот меѓу секои два вектори од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е $\frac{2\pi}{3}$. Значи,



$$\vec{a}\vec{b}=\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}=1\cdot 1\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

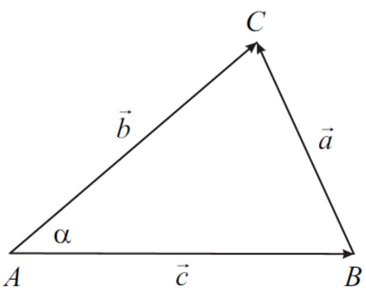
Следува, $\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}=-\frac{3}{2}$.

Втор начин. Ако го квадрираме равенството $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ добиваме

$$\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}=0 \Leftrightarrow$$

$$3+2\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}=-\frac{3}{2}.$$

Задача 12*. Докажи ја косинусната теорема: „Во секој триаголник ABC важи равенството $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, каде $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$ и $\alpha=\angle BAC$."



Решение. Нека е даден триаголникот ABC. Означуваме, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $|\overrightarrow{AB}|=c$, $|\overrightarrow{BC}|=a$, $|\overrightarrow{CA}|=b$.

Го квадрираме равенството $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$,

$$\vec{a}^2=\vec{b}^2-2\vec{b}\vec{c}+\vec{c}^2.$$

Имаме, $\vec{a}^2=a^2$, $\vec{b}^2=b^2$, $\vec{c}^2=c^2$ и $\vec{b}\vec{c}=bc\cos\alpha$. Затоа

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

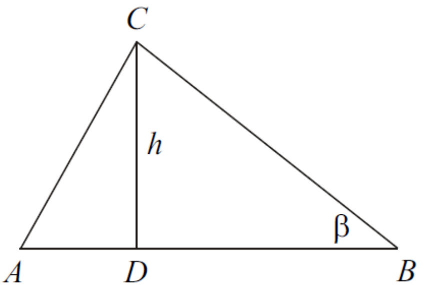
Забелешка. Поради симетрија, докажана е точноста и на равенствата

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta \text{ и } c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

каде β и γ се аглите при темињата B и C.

Задача 13. Дадени се страните на триаголникот ABC, $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$. Пресметај ја должината на висината CD, ако $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се единечни заемно нормални вектори.

Решение. Прв начин. За векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ познати се следниве податоци $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ и $\vec{p}\vec{q}=0$. Нека со β го означиме аголот при темето B во триаголникот ABC и $h=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.



Тогаш, $\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}$, каде

$$\overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}=\left(-3\vec{p}+4\vec{q}\right)\left(\vec{p}+5\vec{q}\right)=-3\vec{p}^2+20\vec{q}^2=17,$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{\left(-3\vec{p}+4\vec{q}\right)^2}=\sqrt{9+16}=5 \text{ и}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{\left(\vec{p}+5\vec{q}\right)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}.$$

Следува дека $\cos\beta=\dfrac{17}{5\sqrt{26}}$. Оттука,

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\frac{289}{25\cdot 26}=\frac{650-289}{25\cdot 26}=\frac{361}{25\cdot 26}$$

и бидејќи $0<\beta<\pi$, имаме

$$\sin\beta=\frac{19}{5\sqrt{26}}. \text{ Од друга страна } \sin\beta=\frac{h}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{h}{\sqrt{26}}.$$

Со прирамнување на десните страни од последниве равенства, добиваме

$$\frac{h}{\sqrt{26}}=\frac{19}{5\sqrt{26}} \Leftrightarrow h=\frac{19}{5}.$$

Втор начин. Имаме $\left|\overrightarrow{AB}\right|=5$ и $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{26}$. Бидејќи векторите $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$ се заемно нормални важи $\overrightarrow{CD}\overrightarrow{AB}=0$ односно

$$\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow$$

$$-\left(\vec{p}+5\vec{q}\right)\left(3\vec{p}-4\vec{q}\right)+\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\measuredangle\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$-(3-20)+\left|\overrightarrow{BD}\right|5(-1)=0 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right|=\frac{17}{5}.$$

Од Питагоровата теорема за триаголникот BCD, важи

$$h^2=\left(\sqrt{26}\right)^2-\left(\frac{17}{5}\right)^2=26-\frac{289}{25}=\frac{650-289}{25}=\frac{361}{25}$$

$$\text{од каде } h=\sqrt{\frac{361}{25}}=\frac{19}{5}.$$

Задача 14. Определи го аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ако векторот $\vec{a}+3\vec{b}$ е нормален на векторот $7\vec{a}-5\vec{b}$, а векторот $\vec{a}-4\vec{b}$ е нормален на векторот $7\vec{a}-2\vec{b}$.

Решение. Од условот на задачата, векторот $\vec{a}+3\vec{b}$ е нормален на $7\vec{a}-5\vec{b}$, а векторот $\vec{a}-4\vec{b}$ е нормален на $7\vec{a}-2\vec{b}$, го добиваме системот

$$\begin{cases}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\left(7\vec{a}-\vec{b}\right)=0\\ \left(\vec{a}-4\vec{b}\right)\left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7\vec{a}^2+16\vec{a}\vec{b}-15\vec{b}^2=0\\ 7\vec{a}^2-30\vec{a}\vec{b}+8\vec{b}^2=0\end{cases}.$$

Ако од втората равенка од системот, ја одземеме првата добиваме

$$-46\vec{a}\vec{b}+23\vec{b}^2=0 \Leftrightarrow 23\vec{b}^2=46\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}^2=2\vec{a}\vec{b}.$$

Со замена на последниот резултат во првата равенка, имаме

$$7\vec{a}^2+8\vec{b}^2-15\vec{b}^2=0 \Leftrightarrow 7\vec{a}^2-8\vec{b}^2=0 \Leftrightarrow \vec{a}^2=\vec{b}^2 \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|.$$

Сега, од равенката $2\vec{a}\vec{b}=\vec{b}^2$ добиваме

$$2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\vec{b}^2 \Leftrightarrow \cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\left|\vec{b}\right|^2}{2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\left|\vec{b}\right|}{2\left|\vec{a}\right|}=\frac{1}{2}$$

Оттука аголот $\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Коментар. Системот во задачата го разгледуваме како систем од две равенки со три непознати $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\vec{b}$ и може да го решаваме во повеќе варијанти. На пример, од втората равенка во системот добиваме

$$7\vec{a}^2 - 30\vec{a}\vec{b} + 8\vec{b}^2 = 0 \Leftrightarrow 8\vec{b}^2 = -7\vec{a}^2 + 30\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow$$
$$-15\vec{b}^2 = \frac{105}{8}\vec{a}^2 - \frac{225}{4}\vec{a}\vec{b}\,.$$

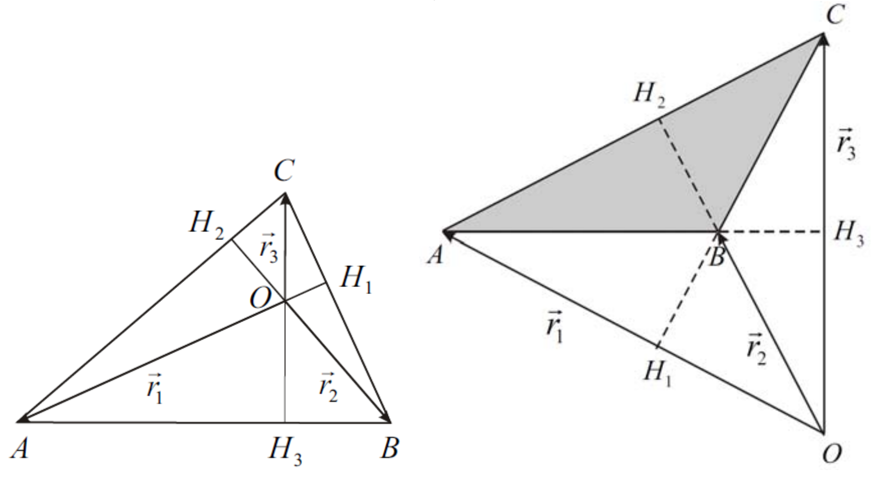
Со замена во првата равенка имаме

$$7\vec{a}^2 + 16\vec{a}\vec{b} + \frac{105}{8}\vec{a}^2 - \frac{225}{4}\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{161}{8}\vec{a}^2 = \frac{161}{4}\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}^2 = 2\vec{a}\vec{b}\,.$$

Оттука, имаме $\vec{b}^2 = 2\vec{a}\vec{b}$, па $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$.

Задача 15. Докажи дека висините во секој триаголник ABC се сечат во една точка, која се нарекува ортоцентар.

Решение. Нека е даден триаголникот ABC и H_1, H_2 и H_3 се подножните точки на висините спуштени од точките A, B и C.



Нека O е пресечната точка на висините AH_1 и BH_2. Означуваме $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{r}_3 = \overrightarrow{OC}$. Тогаш,

$$\overrightarrow{BC} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2\,,\ \overrightarrow{CA} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 \text{ и } \overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,.$$

Бидејќи висините се нормални на страните врз кои се спуштени, важи

$$\vec{r}_1\left(\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right) = 0 \text{ и } \vec{r}_2\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right) = 0, \text{ односно } \vec{r}_1\vec{r}_2 = \vec{r}_1\vec{r}_3 = \vec{r}_2\vec{r}_3$$

Тогаш,

$$\vec{r}_3\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \vec{r}_3\vec{r}_2 - \vec{r}_3\vec{r}_1 = 0\,.$$

Следува дека векторот $\vec{r}_3 = \overrightarrow{OC}$ е нормален на векторот $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{AB}$, односно точката O лежи и на висината спуштена од темето C. Значи, висините се сечат во една точка.

Задача 16. За триаголникот ABC познати се должините на неговите страни a, b и c. Најди ја должината на тежишната линија спуштена од темето A.

Решение. Означуваме $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = c$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = a$, $\left|\overrightarrow{CA}\right| = b$, $\vec{t}_a$ е векторот на тежишната линија спуштена од темето A и $\left|\vec{t}_a\right| = t_a$.

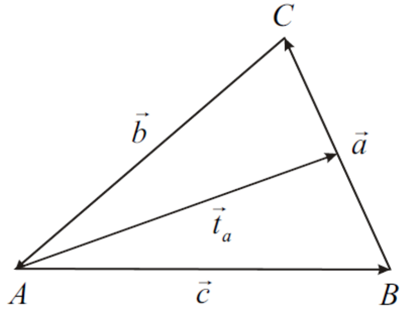
Со квадрирање на равенството

$$\vec{t}_a = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \text{ добиваме } t_a{}^2 = c^2 + \vec{a}\vec{c} + \frac{1}{4}a^2.$$

Изразот $\vec{a}\vec{c}$ ќе го определиме со квадрирање на равенството $\vec{b} = -\vec{a} - \vec{c}$,

$$b^2 = a^2 + 2\vec{a}\vec{c} + c^2 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{c} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2},$$

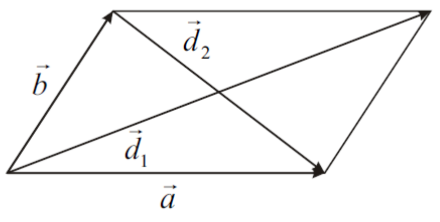
од каде $t_a{}^2 = c^2 + \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{2} + \dfrac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow t_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$.



Коментар. Аналогно, должините на останатите тежишни линии се

$$t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \text{ и } t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}.$$

Задача 17. Докажи дека во секој паралелограм збирот од квадратите на дијагоналите е еднаков на двојниот збир од квадратите на две соседни страни.



Решение. Векторите

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} \text{ и } \vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} \quad (1),$$

лежат на дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ако a и b се должините на страните, d_1 и d_2 должините на дијагоналите, тогаш со квадрирање на равенствата (1), добиваме

$$d_1^{\,2} = a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2 \text{ и } d_2^{\,2} = a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2 .$$

Оттука $d_1^{\,2} + d_2^{\,2} = 2\left(a^2 + b^2\right)$, што требаше да се покаже.

4.5. ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

Задача 1. Дадени се векторите $\vec{a} = (2,-3,1)$ и $\vec{b} = (1,2,-2)$. Најди ги векторските производи $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$. Што забележуваш?

Решение. Имаме

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (4,5,7) \text{ и}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-4,-5,-7) .$$

Забележуваме дека важи равенството $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$.

Задача 2. Дали векторите $\vec{a} = (1,-3,1)$ и $\vec{b} = (2,-6,2)$ се колинерни.

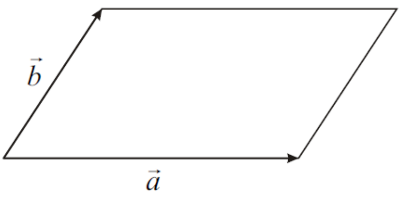
Решение. Бидејќи векторскиот производ,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \right) = (0,0,0)$$

е нултиот вектор, следува дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни.

Задача 3. Најди ја плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = 3\vec{m} - 7\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + 5\vec{n}$, каде што $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\frac{\pi}{6}$.

Решение. Плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изнесува



$$P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\left(3\vec{m} - 7\vec{n}\right) \times \left(2\vec{m} + 5\vec{n}\right)\right| =$$

$$\left|6\vec{m} \times \vec{m} + 15\vec{m} \times \vec{n} - 14\vec{n} \times \vec{m} - 35\vec{n} \times \vec{n}\right| =$$

$$= \left|15\vec{m} \times \vec{n} + 15\vec{m} \times \vec{n}\right| = 29\left|\vec{m} \times \vec{n}\right| =$$

$$= 29\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right| \sin \sphericalangle\left(m, n\right) =$$

$$29 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{29}{2}.$$

Задача 4. Пресметај ја плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a} = 2\vec{n} - \vec{m}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, ако $\left|\vec{m}\right| = 5$ и $\left|\vec{n}\right| = 5$ $\langle m, n\rangle = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изнесува

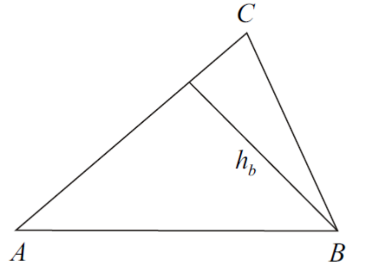
$$P = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\left(2\vec{n} - \vec{m}\right) \times \left(3\vec{m} + 2\vec{n}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|6\left(\vec{n} \times \vec{m}\right) - 2\left(\vec{m} \times \vec{n}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|-8\left(\vec{m} \times \vec{n}\right)\right| =$$

$$= 4\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right| \sin\langle m, n\rangle = 4 \cdot 5 \cdot 5 \sin\frac{\pi}{4} = 100\frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}.$$

Задача 5. Дадени се темињата на триаголникот ABC: $A\left(3, -4, 1\right)$, $B\left(-5, 6, -3\right)$ и $C\left(2, 2, 1\right)$. Пресметај ја должината на висината повлечена од темето C кон страната AB.

Решение. Триаголникот е конструиран над векторите $\overrightarrow{AB} = \left(-8, 10, -4\right) = -2\left(4, -5, 2\right)$ и $\overrightarrow{AC} = \left(7, -4, 7\right)$.



Должината на висината повлечена од темето B кон страната AB се пресметува според формулата $h_b = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, каде

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2\left(\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} \right) = -2(-27, -14, 19),$$

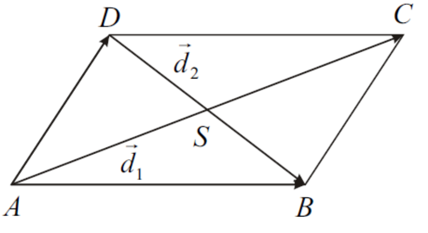
$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{729 + 196 + 361} = 2\sqrt{1286} \text{ и}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|(4, -5, 2)\right| = 2\sqrt{16 + 25 + 4} = 2\sqrt{45} = 6\sqrt{5}.$$

Следува дека должината на висината е $h_b = \dfrac{2\sqrt{1286}}{6\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{1286}}{3\sqrt{5}}$.

Задача 6. Докажи дека плоштината на паралелограмот $ABCD$ е $P = \dfrac{1}{2}\left|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\right|$, каде $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ се векторите кои лежат над дијагоналите AC и BD.

Решение. Нека $\vec{d}_1 = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{d}_2 = \overrightarrow{BD}$. Нека S е пресечната точка на дијагоналите.



Тогаш векторите над кои е конструиран паралелограмот се

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = \frac{1}{2}\vec{d}_1 + \frac{1}{2}\vec{d}_2 \text{ и } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\vec{d}_1 - \frac{1}{2}\vec{d}_2.$$

Следува,

$$P=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\left(\frac{1}{2}\vec{d}_1+\frac{1}{2}\vec{d}_2\right)\times\left(\frac{1}{2}\vec{d}_1-\frac{1}{2}\vec{d}_2\right)\right|=$$

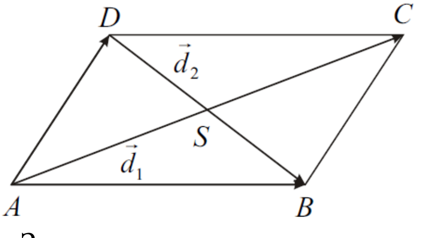
$$\left|-\frac{1}{4}\vec{d}_1\times\vec{d}_2+\frac{1}{4}\vec{d}_2\times\vec{d}_1\right|=\left|-\frac{1}{2}\vec{d}_1\times\vec{d}_2\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{d}_1\times\vec{d}_2\right|.$$

Задача 7. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се определени од векторите $\vec{d}_1=(3,1,-2)$ и $\vec{d}_2=(1,-3,4)$

Решение. Прв начин. Според формулата од претходната задача:

$$P=\frac{1}{2}\left|\vec{d}_1\times\vec{d}_2\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\right)\right|=$$

$$\frac{1}{2}\left|(-2,-14,-10)\right|=\frac{1}{2}2\left|(1,7,5)\right|=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}\ .$$



Втор начин. Заради

$$\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}_1+\vec{d}_2\right)=\frac{1}{2}(4,-2,2)=(2,-1,1)\text{ и}$$

$$\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}_1-\vec{d}_2\right)=\frac{1}{2}(2,4,-6)=(1,2,-3),$$

добиваме

$$P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)\right|=$$

$$\left|(1,7,5)\right|=\sqrt{1+49+25}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}\ .$$

Задача 8. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се конструирани над векторите $\vec{d}_1=3\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{d}_2=\vec{m}-\vec{n}$ каде што $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Според формулата од претходната задача, за плоштината на бараниот паралелограм добиваме

$$P=\frac{1}{2}\left|\vec{d}_1\times\vec{d}_2\right|=\frac{1}{2}\left|\left(3\vec{m}+3\vec{n}\right)\times\left(\vec{m}-\vec{n}\right)\right|=\frac{3}{2}\left|\left(\vec{m}+\vec{n}\right)\times\left(\vec{m}-\vec{n}\right)\right|=$$

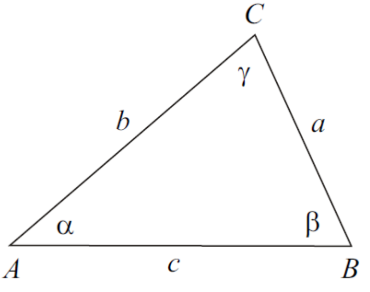
$$\frac{3}{2}\left|-\vec{m}\times\vec{n}+\vec{n}\times\vec{m}\right|=\frac{3}{2}2\left|\vec{m}\times\vec{n}\right|=3\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}.$$

Задача 9. Докажи ја синусната теорема, „Во секој триаголник ABC важат равенствата $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$, каде што $a=\left|BC\right|$, $b=\left|AC\right|$, $c=\left|AB\right|$ и $\alpha=\sphericalangle BAC$, $\beta=\sphericalangle ABC$ и $\gamma=\sphericalangle ACB$.“

Решение. Нека е даден триаголникот ABC, чија плоштина е P. Според формулата за пресметување на плоштина на триаголник со помош на векторски производ, добиваме

$$P=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|,\ P=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| \text{ и } P=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right|, \text{ односно}$$

$$P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha,\ P=\frac{1}{2}ac\sin\beta \text{ и } P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$



Од првото и второто равенство имаме

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta \Leftrightarrow b\sin\alpha=a\sin\beta \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$

Од првото и третото равенство имаме

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ab\sin\gamma \Leftrightarrow c\sin\alpha=a\sin\gamma \Leftrightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Од претходните резултати следува дека $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$, што требаше да се докаже.

Задача 10. Пресметај ја проекцијата на векторот $\vec{a}=(3,-12,4)$ врз векторот $\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$, ако $\vec{c}=(1,0,-2)$ и $\vec{d}=(1,3,-4)$.

Решение. Векторот $\vec{b}$ има координати

$$\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}=\left(\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & -4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)=(6,2,3).$$

Врската меѓу скаларниот производ на два вектори и проекцијата на едниот вектор врз другиот е дадена со формулата $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, од каде

$$3\cdot 6-12\cdot 2+4\cdot 3=\sqrt{9+144+16}\,pr_{\vec{a}}\vec{b}\Leftrightarrow 6=13\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}\Leftrightarrow \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{6}{13}.$$

Задача 11. Најди вектор $\vec{x}$ кој е нормален на векторите $\vec{a}=(1,2,7)$ и $\vec{b}=(1,-2,3)$, а неговата проекција врз векторот $\vec{c}=(1,2,-7)$ е $\frac{10}{3\sqrt{6}}$.

Решение. Векторот $\vec{x}=(x,y,z)$ е нормален на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следува, $\vec{x}$ е колинеарен со векторскиот производ $\vec{a}\times\vec{b}$, односно

$$\vec{x}=k\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=k\left(\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=$$

$$k(-7,-5,-1)=(-7k,-5k,-k).$$

Според формулата за проекција, добиваме

$$\text{пр}_{\vec{c}}\vec{x}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}\Leftrightarrow\frac{-7k+2(-5k)-7(-k)}{\sqrt{54}}=\frac{10}{3\sqrt{6}}\Leftrightarrow\frac{k(-7+10+7)}{3\sqrt{6}}=\frac{10}{3\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow -10k=10\Leftrightarrow k=-1.$$

Следува дека $\vec{x}=(7,5,1)$.

Задача 12. Докажи го равенството $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$.

Решение. Користејќи ги дефинициите за скаларен производ и модул на векторски производ добиваме,

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2+\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=$$

$$\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right)^2+\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)^2=$$

$$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=$$

$$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left(\sin^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\cos^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2\vec{b}^2 .$$

Задача 13. Ако $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ и $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$, докажи дека векторите $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ се линеарно зависни.

Решение. Нека $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ и $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$. Векторите $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ се линеарно зависни ако се колинеарни, односно нивниот векторски производ е нула. Навистина

$$\left(\vec{a}-\vec{d}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}=$$

$$\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{c}\times\vec{d}=$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{d}\right)=\vec{0}-\vec{0}=\vec{0} .$$

4.6. МЕШАН ПРОИЗВОД

Задача 1. Провери дали точките $A(1,-1,2)$, $B(-2,1,3)$, $C(1,0,1)$ и $D(2,-2,-1)$ лежат во иста рамнина.

Решение. Точките A, B, C и D лежат во иста рамнина ако векторите

$$\overrightarrow{AB}=(-3,2,1),\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-1),\ \overrightarrow{AD}=(1,-1,-3)$$

се компланарни, т.е. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0$. Имаме

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=9-2-1+3=9\neq 0 .$$

Следува точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина.

Задача 2. Определи параметарот t таков што векторите

$$\vec{a}=\left(\ln\left(t-2\right),-2,6\right),\ \vec{b}=\left(t,-2,5\right)\ \text{и}\ \vec{c}=\left(0,-1,3\right)$$

да бидат компланарни.

Решение. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни ако нивниот мешан производ $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$, односно

$$\begin{vmatrix} \ln(t-2) & -2 & 6 \\ t & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6\ln(t-2) - 6t + 5\ln(t-2) + 6t = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\ln(t-2) = 0 \Leftrightarrow \ln(t-2) = 0 \Leftrightarrow t-2 = e^0 \Leftrightarrow t = 3.$$

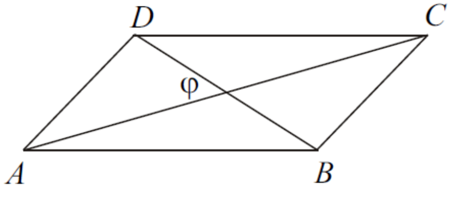
Задача 3. Дадени се точките $A(3,2,-3)$, $B(4,3,1)$, $C(7,0,1)$ и $D(6,-1,-3)$. Докажи дека точките A, B, C и D лежат во иста рамнина. Најди го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $ABCD$.

Решение. Точките A, B, C и D лежат во иста рамнина ако векторите

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,4),\ \overrightarrow{AC} = (4,-2,4),\ \overrightarrow{AD} = (3,-3,0)$$

се компланарни, т.е. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = 0$. Навистина

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 48 + 24 + 12 + 0 = 0.$$

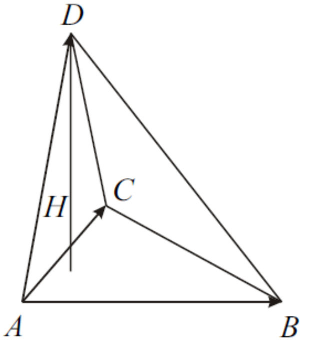


Аголот меѓу дијагоналите на кои лежат векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD} = (2,-4,-4)$ е

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{4\cdot 2 + (-2)(-4) + 4(-4)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-4)^2}} = 0.$$

Следува дека $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 4. Дадени се темињата на тетраедарот $ABCD$:
$A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ и $D(-5,-4,8)$.
Пресметај ја висината спуштена од темето D.



Решение. Висината на тетраедарот конструиран над векторите

$$\overrightarrow{AB}=(2,-2,-3),\ \overrightarrow{AC}=(4,0,6)=2(2,0,3) \text{ и}$$

$$\overrightarrow{AD}=(-7,-7,7)=7(-1,-1,1),$$

спуштена од темето D, се пресметува според формулата $H=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}$. Притоа,

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=2\cdot 7\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}=14(6+6+6+4)=14\cdot 22,$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\left(\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right)=2(-6,-12,4)=4(-3,-6,2), \text{ и}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=4\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=4\sqrt{49}=28.$$

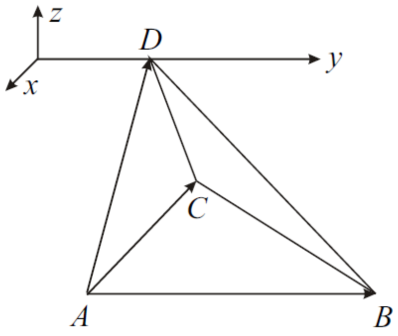
Следува дека $H=\dfrac{14\cdot 22}{28}=11$.

Задача 5. Волуменот на тетраедарот $ABCD$ е 5. Трите негови темиња се во точките $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ и $C(2,-1,3)$. Определи ги координатите на четвртото теме D, ако е познато дека тоа лежи на y-скатa.

Решение. Бидејќи темето D лежи на y-оската, неговите координати се $D(0,y,0)$. Притоа,

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,2),\ \overrightarrow{AC}=(0,-2,4),\ \overrightarrow{AD}=(-2,y-1,1) \text{ и}$$

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 4\\ -2 & y-1 & 1\end{vmatrix}=-2+8-8-4(y-1)=-4y+2.$$



Од условот волуменот на тетраедарот да е 5 добиваме

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right| \Leftrightarrow 5=\frac{1}{6}\left|2-4y\right| \Leftrightarrow 30=\pm(2-4y) \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}30=2-4y\\30=-2+4y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4y=28\\4y=32\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-7\\y=8\end{array}\right. .$$

Следува дека задачата има две решенија

$$D_1(0,-7,0) \text{ и } D_2(0,8,0).$$

Задача 6. Преметај ја висината во паралелопипедот конструиран на векторите

$$\vec{a}=(3,-2,5),\ \vec{b}=(1,-1,4) \text{ и } \vec{b}=(1,-3,1),$$

спуштена кон страната конструирана над векторите $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Решение. Имаме

$$V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=\left\|\begin{matrix}3 & -2 & 5\\1 & -1 & 4\\1 & -3 & 1\end{matrix}\right\|=\left|-3-8-15+5+36+2\right|=17 \text{ и}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\left(\begin{vmatrix}-2 & 5\\-1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5 & 3\\4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -2\\1 & -1\end{vmatrix}\right)\right|=\left|(-3,-7,-1)\right|=\sqrt{9+49+1}=\sqrt{59},$$

од каде

$$H=\frac{\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\frac{17}{\sqrt{59}}.$$

Задача 7. Ако, $\vec{a} = a_1\vec{m} + a_2\vec{n} + a_3\vec{p}$, $\vec{b} = b_1\vec{m} + b_2\vec{n} + b_3\vec{p}$ и $\vec{c} = c_1\vec{m} + c_2\vec{n} + c_3\vec{p}$, тогаш волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е

$$V = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| \left| \left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) \right|.$$

Решение. Имајќи ги предвид дека

$$\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) = \left(\vec{n}, \vec{p}, \vec{m} \right) = \left(\vec{p}, \vec{m}, \vec{n} \right) = -\left(\vec{n}, \vec{m}, \vec{p} \right) = -\left(\vec{p}, \vec{n}, \vec{m} \right) = -\left(\vec{m}, \vec{p}, \vec{n} \right),$$

важи

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = \left(a_1\vec{m} + a_2\vec{n} + a_3\vec{p}, b_1\vec{m} + b_2\vec{n} + b_3\vec{p}, c_1\vec{m} + c_2\vec{n} + c_3\vec{p} \right) =$$

$$a_1b_2c_3\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) + a_1b_3c_2\left(\vec{m}, \vec{p}, \vec{n} \right) + a_2b_1c_3\left(\vec{n}, \vec{m}, \vec{p} \right) + a_2b_3c_1\left(\vec{n}, \vec{p}, \vec{m} \right) +$$

$$a_3b_1c_2\left(\vec{p}, \vec{m}, \vec{n} \right) + a_3b_2c_1\left(\vec{p}, \vec{n}, \vec{m} \right) = a_1b_2c_3\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) - a_1b_3c_2\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) -$$

$$a_2b_1c_3\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) + a_2b_3c_1\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) + a_3b_1c_2\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) - a_3b_2c_1\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) =$$

$$\left(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \right)\left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right)$$

Следува волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, е

$$V = \left| \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) \right| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| \left| \left(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p} \right) \right|.$$

Задача 8. Пресметај го волуменот на паралелопипедот, конструиран над векторите $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$, $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$ и $\vec{c} = \vec{m} - \vec{n} + \vec{p}$, ако волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ е 1.

Решение. Според формулата од претходната задача, волуменот на паралелопипедот конструиран над $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е

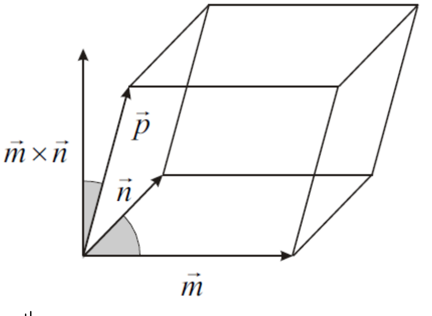
$$V=\left\|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\right\|\left|\left(\vec{m},\vec{n},\vec{p}\right)\right|=\left|1-1-1-1-1-1\right|\cdot 1=4.$$

Задача 9. Пресметај го волуменот на паралелопипедот, конструиран над векторите $\vec{a}=\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+\vec{p}$ и $\vec{c}=\vec{m}-\vec{n}-\vec{p}$, ако $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $|\vec{p}|=3$, $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n})=\frac{\pi}{3}$ и $\sphericalangle(\vec{p},\Sigma)=\frac{\pi}{3}$, каде Σ е рамнината во која лежат векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

Решение. Аголот меѓу векторите $\vec{m}\times\vec{n}$ и $\vec{p}$ може да биде $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$ или $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$. И во двата случаи $\left|\cos\sphericalangle(\vec{p},\Sigma)\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Апсолутната вредност од мешаниот производ на векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ е

$$\left|\left(\vec{m},\vec{n},\vec{p}\right)\right|=\left|\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)\vec{p}\right|=\left|\vec{m}\times\vec{n}\right|\left|\vec{p}\right|\left|\cos\sphericalangle(\vec{p},\Sigma)\right|=$$

$$=|\vec{m}||\vec{n}|\sin\left(\sphericalangle(\vec{m},\vec{n})\right)\frac{\sqrt{3}}{2}3=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}3=\frac{9}{4}.$$



Сега $V=\left\|\begin{vmatrix}1&-2&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\right\|\left|\left(\vec{m},\vec{n},\vec{p}\right)\right|=\left|-2+1-2\right|\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$.

Задача 10. За ненултите вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи равенството $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$. Докажи дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни.

Решение. Ако равенството $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, го помножиме со векторот $\vec{a}$, добиваме

$$\vec{a}\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{a},\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{0}.$$

Следува векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни.

4.7. Задачи за вежбање

4.1. Операции со вектори

Задача 1. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат должини $|\vec{a}|=2$ и $|\vec{b}|=3$ и зафаќаат агол $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. Пресметај ги должините на векторите $2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{a}-2\vec{b}$.

Задача 2. Со помош на векторите $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}$ изрази го векторот $\vec{a}+3\vec{b}$.

Задача 3. Докажи дека услов за формирање на четириаголник од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ е $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

Задача 4. Нека векторите $\vec{a}=-2\vec{x}+3\vec{y}+5\vec{z}$, $\vec{b}=3\vec{x}-2\vec{y}+\vec{z}$ и $\vec{c}=\vec{x}-\vec{y}-4\vec{z}$, соодветно се конструирани над три соседни страни во еден четириаголник. Изрази го векторот $\vec{d}$, конструиран над четвртата страна во четириаголникот, преку векторите $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$.

Задача 5. Точките E, F, G и H ги делат страните на четириаголникот $ABCD$ во однос k, соодветно. Докажи дека векторите $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$ и $\overrightarrow{DH}$ формираат четириаголник.

Задача 6. Докажи дека тежишните линии, можат да бидат страни на триаголник.

Задача 7. Дадени се неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажи дека векторите $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $-\vec{a}+\vec{b}$ и $-\vec{a}-\vec{b}$ формираат паралелограм и крајните точки на векторите $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $-\vec{a}+\vec{b}$ и $-\vec{a}-\vec{b}$ доведени до заеднички почеток, се темиња на еден паралелограм.

Задача 8. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако за произволна точка O важи $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$.

Задача 9. Даден е паралелограмот $ABCD$ и произволна точка O. Тогаш,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

ако и само ако O е пресекот на дијагоналите.

Задача 10. Во паралелограмот $ABCD$, на страната AD се наоѓа точка L, таква што $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, на дијагоналата AC се наоѓа точка M, таква што $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, и на страната BC се наоѓа точка N, таква што $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Докажи дека точките L, M и N, лежат на една права. Пресметај во каков однос точката M ја дели отсечката LN.

Задача 11. Нека $ABCDEF$ е правилен шестоаголник. Да се покаже дека должината на збирот на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AF}$ е $6R$, каде R е радиусот на опишаната кружница околу шестоаголникот.

Задача 12. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. Докажи дека

$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Задача 13. Нека T е точка во внатрешноста или на страните на триаголникот ABC, таква што $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$. Докажи дека T е тежиште на триаголникот ABC.

Задача 14. Векторите $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ изразени преку векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се:

$$\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}\,,\ \vec{y}=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}\ \text{ и }\ \vec{z}=-2\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\,.$$

Изрази го векторот $\vec{t}=3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ со помош на векторите $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$.

4.2. Координати на вектор

Задача 1. Дадени се векторите $\vec{a}=(2,-2,1)$ и $\vec{b}=(-1,2,5)$. Најди ја должината на векторот $\vec{a}$ и векторите $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$.

Задача 2. Пресметај го периметарот на четириаголникот $ABCD$, $A(1,2,1)$, $B(3,1,-1)$, $C(2,3,1)$ и $D(4,-7,6)$.

Задача 3. Напиши го множеството на вектори колинеарни со збирот на векторите $\vec{a}=(2,-2,1)$ и $\vec{b}=(-1,2,5)$.

Задача 4. Дадени се три последователни темиња на паралелограмот $ABCD$: $A(3,-2,0)$, $B(1,-1,2)$, $C(7,-1,2)$. Определи ги координатите на четвртото теме D.

Задача 5. Докажи дека $A(-2,7,-9)$, $B(4,-5,9)$, $C(1,-1,-3)$ и $D(4,-7,6)$ се темиња на трапез.

Задача 6. Средините на страните во триаголникот се во точките $A_1(-1,0,-3)$, $B_1(1,-4,-2)$ и $C_1(-2,3,1)$. Најди ги координатите на темињата во триаголникот.

Задача 7. Најди ги координатите на тежиштето T на триаголникот ABC, чии темиња се $A(-2,1,3)$, $B(1,-2,1)$ и $C(1,2,-3)$.

Задача 8. Определи ги координатите на точката M која ја дели отсечката AB, $A(5,10,4)$ и $B(-2,3,-3)$, во однос $\lambda=\overrightarrow{AM}:\overrightarrow{MB}=5$.

4.3. Линеарна зависност и независност на вектори

Задача 1. Дали се линеарно зависни или независни векторите $\vec{a}=(1,-2,1)$, $\vec{b}=(0,1,-2)$, $\vec{c}=(-1,0,2)$ и $\vec{d}=(0,-3,5)$? Образложи.

Задача 2. Дадени се векторите $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$. Разложи го векторот $\vec{c}=7\vec{i}+3\vec{j}$ по правците на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. претстави го како линеарна комбинација на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 3-4. Испитај ја линеарната зависност на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а потоа претстави го векторот $\vec{d}$ како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако:

3) $\vec{a}=(-1,2,1)$, $\vec{b}=(-2,1,1)$, $\vec{c}=(1,2,0)$ и $\vec{d}=(1,-2,3)$;

4) $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(1,-1,1)$, $\vec{c}=\left(-\frac{3}{2},2,-2\right)$ и $\vec{d}=(-1,2,-1)$.

Задача 5-6. Провери дали се линеарно зависни или независни векторите

5) $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} + 3\vec{r}$ и $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q} - 2\vec{r}$

6) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$, $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$ и $\vec{a} = \vec{p} + \vec{r}$,

ако $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ се линеарно независни вектори.

Задача 7-8. Провери дали векторите $\vec{a} = (-1,3,2)$, $\vec{b} = (-2,-3,4)$ и $\vec{c} = (-3,12,6)$ се линеарно зависни или независни. Во случај кога векторите се линеарно зависни изрази го векторот $\vec{c}$, ако е можно, со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ако не е можно да се изрази $\vec{c}$, изрази го векторот $\vec{a}$ или $\vec{b}$ преку остантите вектори.

7) $\vec{a} = (-1,3,2)$, $\vec{b} = (-2,-3,4)$ и $\vec{c} = (-3,12,6)$;

8) $\vec{a} = (2,-4,6)$, $\vec{b} = (-3,9,-6)$ и $\vec{c} = (8,7,3)$.

Задача 9. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни. Докажи дека векторите $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} + \vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ исто така се линеарно независни.

Задача 10. Докажи дека векторите $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - 3\vec{c}$ и $3\vec{c} - \vec{a}$ се линеарно зависни.

Задача 11. Дадени се векторите $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, каде $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се некомпланарни вектори. Да се разложи векторот $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ по векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$.

Задача 12. Дадени се векторите $\vec{p} = x\vec{a} - 4\vec{b} - 6\vec{c}$ и $\vec{q} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + y\vec{c}$, каде $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се некомпланарни вектори. Најди ги вредностите на x и y за кои векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се колинеарни.

Равенството $\underline{x\vec{a} = y\vec{b}}$

Задача 13. Даден е паралелограмот $ABCD$. На страната AB се наоѓа точка M, таква што $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$. Нека точката $N = AC \cap DM$. Пресметај во каков однос точката N ја дели отсечката AC .

Задача 14. Во паралелограмот $ABCD$, точката E е средина на страната $\overrightarrow{AB}$, S е средина на $\overrightarrow{AD}$, додека T е пресечна точка на отсечките DE и CS . Најди ги односите $\overline{ET} : \overline{ED}$ и $\overline{ST} : \overline{SC}$.

Задача 15. Во паралелограмот $ABCD$, точките E и F се средини на страните BC и CD, соодветно. Докажи дека отсечките AE и AF ја делат дијагоналата BD на три еднакви дела.

4.4. Скаларен производ

Задача 1. Дадени се векторите $\vec{a}=(1,-2,4)$, $\vec{b}=(7,2,-3)$ и $\vec{c}=(2,-1,-1)$. Најди ги координатите на векторот $\vec{x}$ кој е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c}\cdot\vec{x}=-1$.

Задача 2. Дадени се векторите $\vec{a}=(1,1,1)$, $\vec{b}=(3,-p,-4)$ и $\vec{c}=(p,-3,-5)$. Определи вектор $\vec{d}$ што ги задоволува условите $\vec{a}\cdot\vec{d}=2$, $\vec{b}\cdot\vec{d}=4$ и $\vec{c}\cdot\vec{d}=5$. За кои вредности на параметарот p не постои векторот $\vec{d}$?

Задача 3. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуваат агол $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ и нивните должини соодветно се 4 и 5. Пресметај:

1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(2\vec{a}-3\vec{b})(7\vec{a}+\vec{b})$; 5) $(2\vec{a}-3\vec{b})^2$.

Задача 4. Пресметај го аголот меѓу векторите

1) $\vec{a}=(1,2,3)$ и $\vec{b}=(3,-2,1)$; 2) $\vec{a}=(7,-2,5)$ и $\vec{b}=(5,10,-3)$.

Задача 5-6. Пресметај го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ако:

5) $|\vec{a}|=2$ и $|\vec{b}|=7$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{6}$, $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ и и $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$;

6) $|\vec{a}|=2$ и $|\vec{b}|=1$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{4}$, $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ и и $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}$.

Задача 7. Пресметај го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$, ако должините на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ и $|\vec{c}|=3$ и аглите што ги зафаќаат се

$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\ \sphericalangle(\vec{b},\vec{c})=\frac{5\pi}{3} \text{ и } \sphericalangle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{2}.$$

Задача 8. Должините на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ и аголот меѓу нив е $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$. За векторот $\vec{p}=3\vec{a}+4\vec{c}$ најди ја должината на $\vec{p}$, $|\vec{p}|$, единечниот вектор на $\vec{p}$, $\vec{p}/|\vec{p}|$ и аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{p}$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{p})$.

Задача 9. Најди го аголот меѓу векторите $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, каде $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\frac{\pi}{3}$.

Задача 10. Определи го аголот меѓу векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$, ако $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=2$ и векторите $\vec{a}=5\vec{m}-3\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}-4\vec{n}$ се заемно нормални.

Задача 11. Во триаголникот ABC, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\overrightarrow{BC}=3\vec{a}+\vec{b}$, каде $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални ортови. Определи ги страните и аглите на триаголникот ABC.

Задача 12. Најди го аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}=2\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{b}=5\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\frac{\pi}{3}$.

Задача 13. Најди го аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}=(-3,1,2)$ и $\vec{b}=(2,-2,1)$.

Задача 14. Најди го аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот со страни a, b и остар агол α.

Задача 15. Нека $\vec{p}$ е произволен вектор и векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат триаголник. Пресметај $\vec{a}\vec{p}+\vec{b}\vec{p}+\vec{c}\vec{p}$.

Задача 16. Определи го аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ако векторот $2\vec{a}+3\vec{b}$ е нормален на векторот $-7\vec{a}+\vec{b}$, а векторот $\vec{a}-3\vec{b}$ е нормален на векторот $3\vec{a}-\vec{b}$.

Задача 17. Најди ја проекцијата на векторот $\vec{a}=(7,-2,2)$ врз векторот $\vec{c}=(-2,3,-2)$

Задача 18. Најди ги насочните косинуси што ги зафаќа векторот $\vec{a}=(-2,6,9)$ со координатните оски.

4.5. Векторски производ

Задача 1. Дадени се векторите $\vec{a}=(1,2,-3)$ и $\vec{b}=(-1,-2,-1)$. Најди ги векторските производи:

1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $3\vec{b}\times(-2)\vec{a}$; 3) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)$.

Задача 2. Испитај дали векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинерни, ако

1) $\vec{a}=(1,-2,1)$ и $\vec{b}=(-1,2,-2)$;

2) $\vec{a}=(1,-2,1)$ и $\vec{b}=(-2,4,-2)$.

Задача 3. Најди $\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, ако $\vec{a}=(3,1,2)$ и $\vec{b}=(2,-1,4)$.

Задача 4. Дадени се векторите

$$\vec{a}=(1,1,1),\ \vec{b}=(3,2,1) \text{ и } \vec{c}=(1,2,3).$$

Најди ги сите вектори нормални на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 5. Пресметај ја плоштината на

а) триаголникот со темиња

$$A(3,-1,2),\ B(1,2,-1) \text{ и } C(2,5,-6).$$

б) паралелограмот со темиња

$$A(3,-1,2),\ B(1,2,-1),\ C(2,5,-6) \text{ и } D(4,2,-3).$$

Задача 6. Пресметај ја плоштината на

1) триаголникот 2) паралелограмот

конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, каде

$$|\vec{a}|=2,\ \left|\vec{b}\right|=7 \text{ и } \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{3\pi}{4}.$$

Задача 7-8. Пресметај ја плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, ако:

7) $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, каде $\vec{a}=(1,2,0)$ и $\vec{b}=(0,-1,1)$

8) $\vec{p}=\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{q}=4\vec{a}-\vec{b}$, каде $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 9. Пресметај ја плоштината и должината на страните на паралелограмот конструиран над векторите $2\vec{b}-\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, ако

$$|\vec{a}|=2,\ \left|\vec{b}\right|=3 \text{ и } \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Задача 10. Пресметај ја плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a}=-2\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, ако

$$|\vec{m}|=7 \text{ и } |\vec{n}|=7 \text{ и } \sphericalangle(\vec{m},\vec{n})=\frac{\pi}{4}.$$

Задача 11. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако:

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}\,,\ \overrightarrow{AC} = \vec{p} + 5\vec{q}\,,\ |\vec{p}| = 2\,,\ |\vec{q}| = 1 \text{ и } \sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{6}\,.$$

Задача 12. Дадени се страните на триаголникот ABC, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{p} - \vec{q}$. Пресметај ја висината спуштена од темето C, ако $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се единечни заемно нормални вектори.

Задача 13. Пресметај ја висината на триаголникот ABC спуштена од темето C, ако неговите темиња се во точките

$$A(1,1,2),\ B(2,1,3) \text{ и } C(1,0,-1).$$

Задача 14-16. Дадени се темињата на триаголникот ABC: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$. Пресметај ја должината на висината повлечена од темето

14) B кон страната AC;

15) C кон страната AB;

16) A кон страната BC.

Задача 17. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се определени од векторите

$$\vec{d}_1 = (-2,3,-2) \text{ и } \vec{d}_2 = (3,-2,3)\,.$$

Задача 18. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се конструирани над векторите $\vec{d}_1 = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{d}_2 = \vec{m} + \vec{n}$ каде што $|\vec{m}| = 2$ и $|\vec{n}| = 1$ и $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

Задача 19. Докажи ја синусната теорема, „Во секој триаголник ABC важи

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\text{“}.$$

Задача 20. Пресметај ја проекцијата на векторот $\vec{a} = (3,-7,4)$ врз векторот $\vec{b} = -2\vec{c} \times \left(-3\vec{d}\right)$, ако $\vec{c} = (-1,1,-2)$ и $\vec{d} = (2,3,-4)$.

Задача 21. Најди вектор $\vec{x}$ кој е нормален на векторите $\vec{a} = (-1,2,2)$ и $\vec{b} = (1,2,1)$, а неговата проекција врз векторот $\vec{c} = (3,5,3)$ е 7.

Задача 22. Докажи дека $\left(\vec{b} - \vec{a}\right)\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$.

Задача 23. Докажи дека векторот $\vec{a}\left(\vec{b}\vec{c}\right)-\vec{b}\left(\vec{c}\vec{a}\right)$ е норален на векторот $\vec{c}$.

4.6. Мешан производ

Задача 1-2. Пресметај го мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако:

1) $\vec{a}=\left(3,-1,2\right)$, $\vec{b}=\left(2,-2,5\right)$ и $\vec{c}=\left(0,-7,3\right)$

2) $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{c}\right|=5$, $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ и $\sphericalangle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Задача 3-4. Провери дали се компланарни векторите

3) $\vec{a}=\left(5,3,1\right)$, $\vec{b}=\left(0,-1,4\right)$ и $\vec{c}=\left(6,9,-10\right)$

4) $\vec{a}=\left(1,-1,0\right)$, $\vec{b}=\left(3,2,-4\right)$ и $\vec{c}=\left(-1,-4,4\right)$.

Задача 5. Определи параметарот t така што векторите

$$\vec{a}=\left(t,-1,2\right),\ \vec{b}=\left(t,-2,5\right) \text{ и } \vec{c}=\left(1,-2,3\right)$$

да бидат компланарни.

Задача 6-7. Испитај дали точките A, B, C и D лежат во една рамнина, ако:

6) $A(4,1,3)$, $B(3,2,-1)$, $C(5,5,4)$ и $D(2,-1,1)$

7) $A(3,-1,-1)$, $B(-2,-1,4)$, $C(1,1,-1)$ и $D(2,-1,0)$.

Задача 8-9. Дадени се точките

$$A(3,2,-3),\ B(4,3,1),\ C(7,0,1) \text{ и } D(6,-1,-3).$$

8) Докажи дека точките A, B, C и D лежат во иста рамнина.

9) Најди го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $ABCD$.

Задача 10. Пресметај ги волумените V_1, V_2 и V_3 на паралелопипедот, тристраната призма и тетраедарот, конструирани над векторите $\vec{a}=\left(1,-2,3\right)$, $\vec{b}=\left(-1,0,1\right)$ и $\vec{c}=\left(-3,2,1\right)$.

Задача 11. Волуменот на тетраедарот $ABCD$ е 5. Трите негови темиња се во точките $A(1,3,0)$, $B(3,2,-1)$ и $C(-1,2,1)$.

Определи ги координатите на четвртото теме D, ако е познато дека тоа лежи на z-ската.

Задача 12. Дадени се темињата на тетраедарот $ABCD$,

$$A(-1,1,-1),\ B(-1,-1,1),\ C(3,-1,-1) \text{ и } D(0,2,-1).$$

Пресметај ја должината на висината спуштена од темето D.

Задача 13. Дадени се темињата на тетраедарот $ABCD$: $A(2,-1,3)$, $B(5,-2,5)$, $C(4,-1,2)$ и $D(2,0,4)$. Пресметај ја должината на висината во тетраедарот спуштена од темето:

1) A; 2) B; 3) C; 4) D.

Задача 14. Дадени се темињата на паралелограмот $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A(1,0,1)$, $B(-1,2,-1)$, $D(2,1,0)$ и $A_1(0,1,2)$. Пресметај ја должината на висината во паралелограмот спуштена кон страната $ABCD$.

Задача 15. Пресметај ги висините во паралелопипедот конструиран над векторите

$$\vec{a}=(3,-2,5),\ \vec{b}=(1,-1,4) \text{ и } \vec{c}=(1,-3,1),$$

спуштени кон страната конструирана над векторите

1) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 2) $\vec{a}$ и $\vec{c}$ 3) $\vec{b}$ и $\vec{c}$ 4) $\vec{b}-\vec{a}$ и $\vec{c}-\vec{a}$.

Задача 16-19. Пресметај ги висините во тетраедарот конструиран над векторите

$$\vec{a}=(2,3,1),\ \vec{b}=(1,2,4) \text{ и } \vec{c}=(3,-1,2),$$

спуштени кон страната конструирана над векторите

16) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 17) $\vec{a}$ и $\vec{c}$; 18) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; 19) $\vec{b}-\vec{a}$ и $\vec{c}-\vec{a}$.

Задача 20. Пресметај го волуменот на паралелопипедот, конструиран над векторите $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$ и $\vec{c}=\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}$, ако волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ е 3.

Задача 21. Три соседни рабови на еден тетраедар се a, b и c, а рабовите b и c, a и c; и a и b ги зафаќаат аглите α, β и γ, соодветно. Докажи дека волуменот на паралелопипедот онструиран над a, b и c е $V=a^2b^2c^2\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 22-24. Докажи ги идентитетите:

22) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{b}$; 23) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}$;

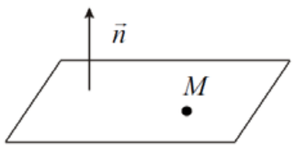
24) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\vec{a}\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)$;

4) $\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d},\vec{e}\times\vec{f}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)\left(\vec{c},\vec{e},\vec{f}\right)-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\left(\vec{d},\vec{e},\vec{f}\right)$.

5. АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

5.1. РАМНИНА

Задача 1. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(-3,1,2)$ и е нормална на векторот $\vec{n}=(2,-3,-4)$.



Решение. Според формулата за равенка на рамнина што содржи дадена точка и е нормална на даден вектор, добиваме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow -3(x+3)+y-1+2(z-2)=0$$
$$\Leftrightarrow -3x-9+y-1+2z-4=0 \Leftrightarrow 3x-y-2z+14=0\,.$$

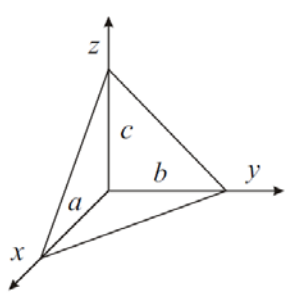
Задача 2. Општата равенка на рамнината $2x+y-2z-4=0$ напиши ја во сегментен вид.

Решение. Слободниот член, од општата равенка на рамнината, го префрламе од десна страна на равенката, а потоа ја делиме равенката со слободниот член.

$$2x+y-2z-4=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z=4 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{4}-\frac{z}{2}=1\,.$$

Задача 3. Дадена е точката $M(-3,1,2)$. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката M, а на координатните оски отсекува сегменти a, b и c така што $a:b:c=1:2:3$.

Решение. Од условот на задачата $a:b:c=1:2:3$, следува, $b=2a$, $c=3a$. Исто така точката M лежи на рамнината. Па,



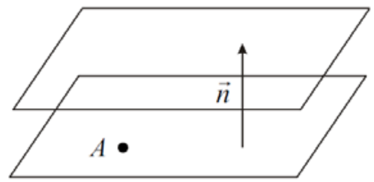
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{-3}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{2}{3a}=1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{-18+3+4}{6a}=1 \Leftrightarrow a=-\frac{6}{11}\,.$$

Оттука равенката на рамнина е

$$\frac{11x}{6}+\frac{11y}{12}+\frac{11z}{18}=-1 \Leftrightarrow 66x+33y+22z+36=0 \ .$$

Задача 4. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(-3,1,2)$ и е паралелна со рамнината $2x-y+2z-4=0$.

Решение. Нормалниот вектор $\vec{n}=(2,-1,2)$ на дадената рамнина е нормален вектор и на рамнината чија равенка треба да ја најдеме. Затоа, нејзината равенка е



$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$-3(x-3)+y+1+2(z-2)=0 \Leftrightarrow -3x+9+y+1+2z-4=0 \Leftrightarrow$$

$$3x-y-2z-6=0 .$$

Задача 5. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точките $A(-3,1,2)$, $B(3,2,2)$ и $C(1,-1,1)$.

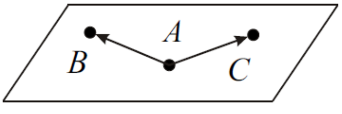
Решение. Векторите $\overrightarrow{AB}=(6,1,0)$ и $\overrightarrow{AC}=(4,-2,-1)$ се паралелни на рамнината. Затоа нивниот векторски производ

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 6\\ -1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}\right)=(-1,6,-16)\|(1,-6,16),$$

е нормален на рамнината. Следува дека равенката на рамнината е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$x+3-6(y-1)+16(z-2)=0 \Leftrightarrow x-6y+16z-23=0 .$$



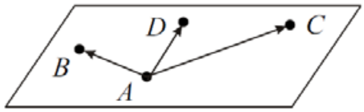
Задача 6. Провери дали точките $A(0,0,1)$, $B(3,-2,0)$, $C(4,6,-9)$ и $D(-1,0,2)$, лежат во една рамнина. Во случај на потврден одговор, најди ја равенката на рамнината во која лежат.

Решение. Точките A, B, C и D лежат во една рамнина ако и само ако векторите

$$\overrightarrow{AB}=(3,-2,-1),\ \overrightarrow{AC}=(4,6,-10)\ \text{и}\ \overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$$

лежат во една рамнина, т.е. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0$. Имаме

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ 4 & 6 & -10\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=18-20-6+8=0.$$



Следува дека точките A, B, C и D лежат во една рамнина. Еден нормален вектор на бараната рамнина е

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 6 & -10\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -10 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix}\right)=(26,26,26)\|(1,1,1).$$

Точката A лежи на рамнината, па нејзината равенка е

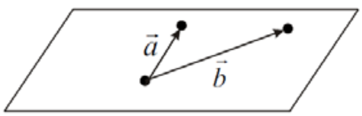
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow x+y+z-1=0.$$

Задача 7. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(2,2,3)$ и е паралелна со векторите

$$\vec{a}=(-3,0,-5)\ \text{и}\ \vec{b}=(1,-1,-2).$$

Решение. Еден нормален вектор на рамнината е векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}0 & -5\\ -1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-5 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(-5,+11,-3)\|(5,-11,3).$$



Следува, равенката на рамнината е:

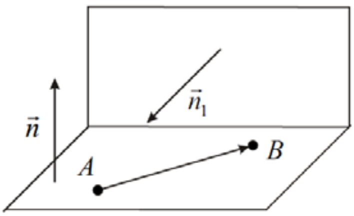
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Leftrightarrow -5(x-2)-11(y-2)+3(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 5(x-2)+11(y-2)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow 5x-10+11y-22-3z+9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+11y-3z-23=0.$$

Задача 8. Напиши ја равенката на рамнината која ги содржи точките $A(3,-1,2)$ и $B(0,1,2)$ и е нормална на рамнината $2x-y+2z-4=0$.

Решение. Рамнината $2x-y+2z-4=0$ е нормална на векторот $\vec{n}_1=(2,-1,2)$. Еден нормален вектор $\vec{n}$ на рамнината чија равенка треба да ја најдеме е векторскиот производ од векторите $\overrightarrow{AB}=(-3,2,0)$ и $\vec{n}_1=(2,-1,2)$.



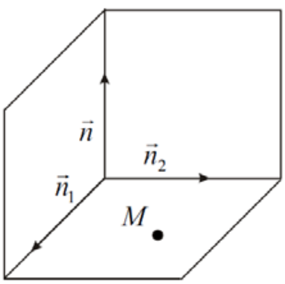
$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{n}_1=\left(\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right)=(4,6,-1).$$

Оттука равенката на рамнината е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 4(x-3)+6(y+1)-(z-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$4x-12+6y+6-z+2=0 \Leftrightarrow 4x+6y-z-4=0$$

Задача 9. Напиши ја равенката на рамнината која ја содржи точката $M(3,-1,2)$ и е нормална на рамнините $2x-y+2z-4=0$ и $x+y+4z-5=0$.

Решение. Еден нормален вектор на рамнината е векторскиот производ на нормалните вектори $\vec{n}_1=(2,-1,2)$ и $\vec{n}_2=(1,1,4)$ на дадените рамнини. Имаме

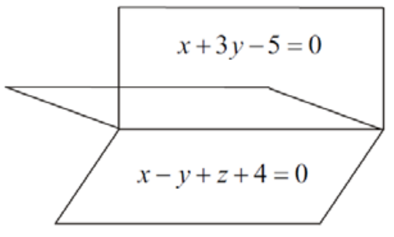


$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-6,-6,3)\|(2,2,-1).$$

Следува равенката на рамнината е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 2(x-3)+2(y+1)-(z-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$2x-6+2y+2-z+2=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z-2=0\,.$$

Задача 10. Во снопот рамнини $x+3y-5+\lambda(x-y+z+4)=0$ најди ја рамнината која отсекува еднакви ненулти отсечки на x и y оските.



Решение. Равенката на рамнината која е дел од снопот рамнини $x+3y-5+\lambda(x-y+z+4)=0$, ја доведуваме до сегментен облик

$$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+\lambda z=5-4\lambda \Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{\frac{5-4\lambda}{1+\lambda}}+\frac{y}{\frac{5-4\lambda}{3-\lambda}}+\frac{z}{\frac{5-4\lambda}{3\lambda}}=1\,.$$

Притоа поделивме со $5-4\lambda$, бидејќи отсечоците се ненулти броеви. Сега рамнината отсекува еднакви отсечоци на x и y оската ако

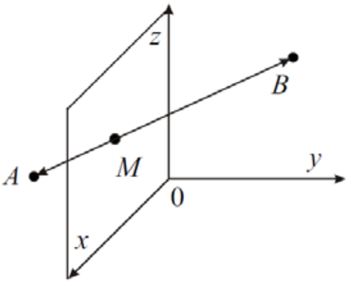
$$\frac{5-4\lambda}{1+\lambda}=\frac{5-4\lambda}{3-\lambda} \Leftrightarrow 1+\lambda=3-\lambda \Leftrightarrow \lambda=1\,.$$

Оттука нејзината равенка е

$$x+3y-5+x-y+z+4=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z=1\,.$$

Задача 11. Во xOz рамнината најди точка M колинеарна со точките $A(3,-1,2)$ и $B(-1,-2,4)$.

Решение. Точката $M(x,y,z)$ лежи на xOz рамнината. Следува $y=0$.



Точките A, B и M се колинеарни. Следува дека векторите.

$$\overrightarrow{AB}=\left(-4,-1,2\right) \text{ и } \overrightarrow{AM}=\left(x-3,1,z-2\right)$$

се колинеарни, односно

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & z-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -4\\ z-2 & x-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & -1\\ x-3 & 1\end{vmatrix}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\left(-\left(z-2\right)-2,2\left(x-3\right)+4\left(z-2\right),-4+\left(x-3\right)\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\left(z,2x+4z-14,x-7\right)=\left(0,0,0\right)\Leftrightarrow z=0\,,\ x+2z-7=0\,,\ x-7=0\Leftrightarrow$$

$$x=7\,,\ z=0\,.$$

Следува дека $M\left(7,0,0\right)$.

5.2. ПРАВА

Задача 1. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $P\left(1,-7,3\right)$ и е паралелна на векторот $\vec{p}=\left(2,-3,1\right)$.

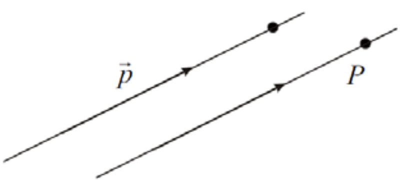
Решение. Равенката ја наоѓаме според формулата за равенка на права што минува низ дадена точка и е паралелна на даден вектор,

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z-3}{1}.$$

Задача 2. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $P\left(1,2,3\right)$ и е паралелна со правата $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$.

Решение. Правата е паралелна со векторот $\vec{p}=\left(1,-2,2\right)$ и минува низ точката M, па нејзината равенка е

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}\Leftrightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{2}.$$



Задача 3. Напиши ја равенката на правата што минува низ точките $P\left(1,2,3\right)$ и $Q\left(1,1,-1\right)$.

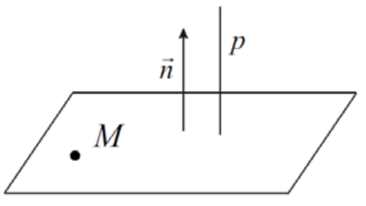
Решение. Правата е паралелна на векторот

$$\overrightarrow{PQ}=(0,-1,-4)\|(0,1,4)$$

и ја содржи точката Q. Следува нејзината равенка е

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\Leftrightarrow\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}.$$

Задача 4. Најди ги: а) векторските; б) каноничните; и в) параметарските; равенки на правата што минува низ точката $M(3,1,2)$ и е нормална на рамнината $x+2y+z-1=0$.



Решение. Рамнината минува низ точката M, чиј радиус вектор е $\vec{r}_0=(3,1,2)$ и е нормална на векторот $\vec{a}=(1,-2,1)$. Истиот вектор е паралелен со правата.

а) Векторската равенка на правата е $\vec{r}=\vec{r}_0+\lambda\vec{a}$ односно $\vec{r}=(3,1,2)+\lambda(1,-2,1)$

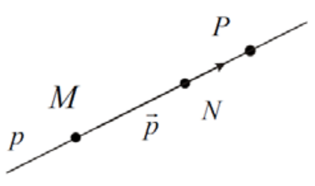
б) Каноничните равенки на правата се

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\Leftrightarrow\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

в) Параметарските равенки на правата се

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt\Leftrightarrow x=3+t,\ y=1+2t,\ z=2+t.$$

Задача 5. Провери дали правата $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$ минува низ точките $M(1,3,-1)$ и $N(-2,1,1)$.



Решение. Правата минува низ дадените точки, ако нивните координати ги исполнуваат нејзините равенки. За точката M добиваме

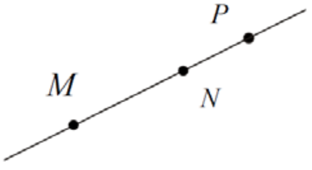
$$\frac{1-1}{1}=\frac{3-3}{2}=\frac{-1+1}{-1}\Leftrightarrow 0=0=0.$$

Значи, точката M лежи на правата. За точката N добиваме

$$\frac{-2-1}{1}=\frac{1-3}{2}=\frac{1+1}{-1}\Leftrightarrow -3=-1=-2.$$

Значи, точката N не лежи на правата.

Задача 6. Провери дали точките $M(3,0,1)$, $N(0,2,4)$ и $P\left(1,\frac{4}{3},3\right)$ лежат на една права.



Решение. Прво ќе ја најдеме равенката на правата што минува низ точките M и N.

Векторот $\overrightarrow{MN}=(-3,2,3)$, од каде равенката на правата е

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Сега проверуваме дали точката P лежи на правата.

$$\frac{1-3}{-3}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{3-1}{3} \Leftrightarrow \frac{-2}{-3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}=\frac{2}{2}=\frac{2}{3}.$$

Следува дека точката P лежи на правата MN, односно точките M, N и P се колинеарни.

Втор начин. Точките M, N и P се колинеарни ако векторите $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}=\left(-2,\frac{4}{3},2\right)$ се колинеарни, односно ако нивниот векторски производ е $\vec{0}$. Имаме

$$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\ \frac{4}{3} & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -2 & \frac{4}{3}\end{vmatrix}\right)=(0,0,0).$$

Следува дека M, N и P се колинеарни.

Трет начин. Точките M, N и P се колинеарни ако векторите $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MP}=\left(-2,\frac{4}{3},2\right)$ се колинеарни, односно ако постои скалар λ, таков што $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MP}$. Имаме

$$(-3,2,3)=\lambda\left(-2,\frac{4}{3},2\right) \Leftrightarrow -3=-2\lambda,\ 2=\frac{4}{3}\lambda,\ 3=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}.$$

Следува дека точките M, N и P се колинеарни.

Задача 7. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $P(-2,3,1)$ и е паралелна на z -оската.

Решение. Ортот $\vec{k}=(0,0,1)$ е нормален на z оската, па следува е паралелен на правата. Оттука равенката на правата е

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x+2}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{1}.$$

Задача 8. Равенката на правата $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{-1}$, напиши ја во параметарски вид.

Решение. Секоја страна од равенките ја прирамнуваме со параметарот t,

$$\frac{x+2}{1}=t,\ \frac{y-3}{0}=t,\ \frac{z-1}{-1}=t \Leftrightarrow x=t-2,\ y=3,\ z=1-t$$

Десните равенки се параметарските равенки на правата.

Задача 9. Равенките на правата $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{1}$, запиши ги во проекции.

Решение. Од првата и втората равенка добиваме $-(x+2)=y-3$, односно $x+y-1=0$. Од првата и третата равенка добиваме $x+2=z-1$ односно $x-z+3=0$. Следува дека равенките на правата во проекции се

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-z+3=0 \end{cases}.$$

Задача 10. Равенката на правата $\begin{cases} 2x-3y+4z-7=0 \\ 3x-y-z+19=0 \end{cases}$ запиши ја во проекции.

Решение. Ја изразуваме променливата y од втората равенка, $y=3x-z+19=0$ и ја заменуваме во првата равенка

$$2x-3(3x-z+19)+4z-7=0 \Leftrightarrow -7x+5z-64=0 \Leftrightarrow 7x-5z+64=0$$

Од последната равенка ја изразуваме променливата $z = -\dfrac{64+7x}{5}$ и ја зменуваме во првата равенка

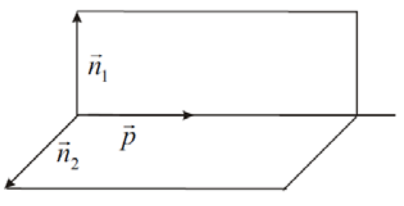
$$2x - 3y + 4\left(-\frac{64+7x}{5}\right) - 7 = 0 \Leftrightarrow 10x - 15y - 20(64+7x) - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$10x - 15y - 1280 - 140x - 7 = 0 \Leftrightarrow 130x + 15y + 1287 = 0\,.$$

Следува, равенките на правата во проекции се $\begin{cases} 7x - 5z + 64 = 0 \\ 130x + 15y + 1287 = 0 \end{cases}.$

Задача 11. Најди паралелен вектор на правата
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 7 = 0 \\ 3x - y - z + 19 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Првата рамнина од равенките на правата е нормална на векторот $\vec{n}_1 = (2,-3,4)$, а втората на векторот $\vec{n}_2 = (3,-1,-1)$. Векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ се нормални на правата, следува дека нивниот векторски производ



$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (7,14,7) \parallel (1,2,1)$$

е паралелен на правата.

Задача 12. Најди точка што лежи на правата
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 7 = 0 \\ 3x - y - z + 19 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Равенка на права е множество точки чии координати ги исполнуваат нејзините равенки. Една точка може да добиеме ако фиксираме една од променливите. На пример за $z = 0$, го добиваме системот равенки $\begin{cases} 2x - 3y - 7 = 0 \\ 3x - y + 19 = 0 \end{cases}$. Ја изразуваме променливата во втората равенка $y = 3x + 19$ и ја заменуваме во првата равенка

$$2x-3(x+19)-7=0 \Leftrightarrow 2x-9x-57-7=0 \Leftrightarrow 7x=-64 \Leftrightarrow x=-\frac{64}{7}.$$

Оттука, $y=3\cdot\left(-\frac{64}{7}\right)+19=\frac{-192+133}{7}=-\frac{59}{7}$.

Следува координатите на точката се $P\left(-\frac{64}{7},-\frac{59}{7},0\right)$.

Втор начин. Го решаваме системот од две линеарни равенки со три непознати $\begin{cases}2x-3y+4z-7=0\\ 3x-y-z+19=0\end{cases}$. Тој има бесконечно решенија изразени преку еден параметар, на пример z. Од втората равенка $y=3x-z+19$. Ако замениме во првата добиваме

$$2x-3(3x-z+19)+4z-7=0 \Leftrightarrow 2x-9x+3z-57+4z-7=0 \Leftrightarrow$$

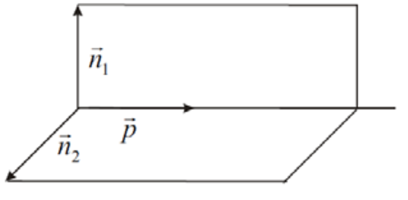
$$-7x+7z-64=0 \Leftrightarrow x-z+\frac{64}{7}=0 \Leftrightarrow x=z-\frac{64}{7}.$$

Следува $y=3z-\frac{192}{7}-z+\frac{133}{7}=2z-\frac{59}{7}$, па решенијата се $\left(z-\frac{64}{7},2z-\frac{59}{7},z\right)$. За $z=0$ се добива точката $P\left(-\frac{64}{7},-\frac{59}{7},0\right)$.

Задача 13. Напиши ги равенките на правата $\begin{cases}2x+y+8z=16\\ x-2y-z=-2\end{cases}$ во каноничен вид.

Решение. Рамнините се нормални на векторите $\vec{n}_1=(2,1,8)$ и $\vec{n}_2=(1,-2,-1)$. Еден паралелен вектор на правата е

$$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left(\begin{vmatrix}1 & 8\\ -2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}8 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(15,10,-5)\parallel(3,2,-1).$$



За да најдеме точка од правата бараме едно решение на системот равенки $\begin{cases} 2x+y+8z=16 \\ x-2y-z=-2 \end{cases}$. На пример, за $x=0$ добиваме

$$\begin{cases} y+8z=16 \\ -2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+16z=32 \\ -2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15z=30 \\ -2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Сега, равенката на правата гласи:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Втор начин. Прво равенките на правата $\begin{cases} 2x+y+8z=16 \\ x-2y-z=-2 \end{cases}$, ги сведуваме во проекции. Од првата равенка ја изразуваме променливата $y=16-2x-8z$ и ја заменуваме во втората равенка

$$x-2(16-2x-8z)-z=-2 \Leftrightarrow x-32+4x+16z-z+2=0 \Leftrightarrow$$
$$5x+15z-30=0 \Leftrightarrow x+3z-6=0 \Leftrightarrow x=6-3z.$$

Променливата x, ја заменуваме во втората равенка

$$2(6-3z)+y+8z=16 \Leftrightarrow 12-6z+y+8z=16 \Leftrightarrow 2z+y-4=0.$$

Следува, равенките на правата во проекции се $x+3z-6=0$, $2z+y-4=0$. Од равенките ја изразуваме променливата z, што се содржи и во двете равенки

$$3z=-(x-6) \Leftrightarrow z=\frac{x-6}{-3};\ 2z=-(y-4),\ z=\frac{y-4}{-2}.$$

Следува дека каноничните равенки на правата се

$$\frac{x-6}{-3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z}{1} \text{ или } \frac{x-6}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{-1}.$$

Задача 14. Напиши ги равенките на правата $x=0$, $y+2z-1=0$ во каноничен вид.

Решение. Ја изразуваме променливата y од втората равенка

$$y=-2z+1=-2\left(z-\frac{1}{2}\right)=\frac{z-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}.$$

Следува дека каноничните равенки на правата се

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}.$$

Втор начин. Задачата секогаш може да се реши според општата постапка за сведување на општ во каноничен облик равенки на права. Рамнините се нормални на векторите $\vec{n}_1=(1,0,0)$ и $\vec{n}_2=(0,1,2)$. Еден паралелен вектор на правата е

$$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left(\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)=(0,-2,1).$$

За $z=0$, од равенките на правата добиваме $x=0$ и $y=1$. Следува точката $(0,1,0)$ лежи на правата. Оттука нејзината равенка е

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{0}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}.$$

Задача 15. Најди ја пресечната точка на рамнините
$2x+y-z+1=0$, $x-2y+z=0$, $x-z+3=0$.

Решение. Пресекот на рамнините е решение на системот формиран од нивните равенки. Од третата равенка $z=x+3$. Со замена во првите две добиваме,

$$2x+y-x-3+1=0 \Leftrightarrow x+y-2=0 \Leftrightarrow y=-x+2;$$

$$x-2y+x+3=0 \Leftrightarrow 2x-2y+3=0;$$

$$2x-2(-x+2)+3=0 \Leftrightarrow 4x-1=0 \Leftrightarrow$$

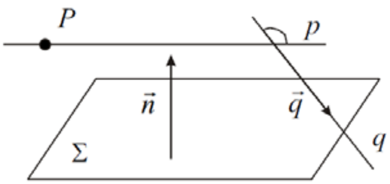
$$x=\frac{1}{4};\; y=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4};\; z=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}.$$

Следува дека пресекот е $P\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4},\frac{13}{4}\right)$.

5.3. ЗАЕМЕН ОДНОС НА ПРАВИ И РАМНИНИ

Во учебникот преку задачите 5.3.1-11, е анализиран заемниот однос на две прави, права и рамнина и две рамнини.

Задача 1. Најди ја равенката на правата p што минува низ точката $P(-3,0,1)$, нормална е на правата q: $2x-3z-4=0$, $y=1$ и паралелна е со рамнината $\sum: x-2y+3z-7=0$.



Решение. Каноничните равенки на правата q се: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{2}$. Следува правата q е паралелна на векторот $\vec{q}=(3,0,2)$. Рамнината $\sum$ е нормална на векторот $\vec{n}=(1,-2,3)$. И двата вектори се нормални на правата p, па нивниот векторски производ е паралелен на p.

$$\vec{q}\times\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(4,-7,-6).$$

Следува правата p има равенка

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}\Leftrightarrow\frac{x+3}{4}=\frac{y}{-7}=\frac{z-1}{-6}.$$

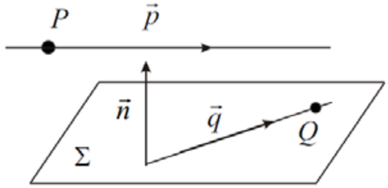
Задача 2. Најди ја равенката на рамнината која е паралелна со правата

$$p:\begin{cases}x=4t-5\\ y=7t+2\\ z=2t+1\end{cases}\text{ и ја содржи правата } q:\begin{cases}x=2t+3\\ y=t-4\\ z=-3t+2\end{cases}.$$

Решение. Правата p е паралелна со векторот $\vec{p}=(4,7,2)$ и правата q е паралелна со векторот $\vec{q}=(2,1,-3)$.

Нивниот векторски производ

$$\vec{p}\times\vec{q}=\left(\begin{vmatrix}7 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & 7\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=(-23,16,-10)\,\|\,(23,-16,10)$$



е нормален на рамнината. Точката $Q(3,-4,2)$ лежи на правата q, па следува дека лежи и на рамнината, чија равенка е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$
$$23(x-3)-16(y+4)+10(z-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$23x-69-16y-64+10z-20=0 \Leftrightarrow 23x-15y+10z-153=0\,.$$

Втор начин. Нека $X(x,y,z)$ е произволна точка од рамнината. Тогаш векторите $\vec{p}=(4,7,2)$, $\vec{q}=(2,1,-3)$ и $\overrightarrow{QX}=(x-3,y+4,z-2)$ се компланарни, односно

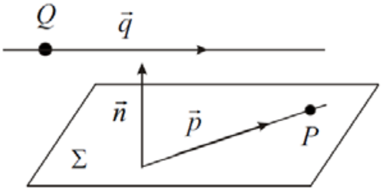
$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}-(y+4)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$
$$23(x-3)-16(y+4)+10(z-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$23x-69-16y-64+10z-20=0 \Leftrightarrow 23x-16y+10z-153=0\,.$$

Задача 3. Најди ја равенката на рамнината што минува низ правата p која е пресек на рамнините $x+4y+3z+4=0$ и $3x+2y+5z+12=0$ и која е паралелна со правата $q:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

Решение. Правата q е паралелна со векторот $\vec{q}=(3,2,-3)$.

За да најдеме еден вектор $\vec{p}$ што е е паралелен на правата p и една нејзина точка, равенката ја сведуваме во каноничен облик. Имаме,

$$\vec{p}\,\|\,\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{pmatrix} \vec{n}_1=(1,4,3) \\ \vec{n}_2=(3,2,5) \end{pmatrix}=\left(\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)=$$
$$(14,4,-10)\,\|\,(7,2,-5).$$



Избираме, $\vec{p}=(7,2,-5)$. Ако во системот равенки, земеме $z=0$, се добива

$$\begin{cases} x+4y+4=0 \\ 3x+2y+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4y-4 \\ 3(-4y-4)+2y+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-4y-4 \\ -12y-12+2y+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases}.$$

Следува дека равенката на правата p е $\dfrac{x+4}{7}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-5}$.

Сега еден нормален вектор на рамнината е векторскиот производ

$$\vec{p}\times\vec{q}=\left(\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)=(4,-6,8)\parallel(2,-3,4).$$

Равенката на рамнината ја наоѓаме според формулата за равенка на рамнина што минува низ дадена точка и е нормална на даден вектор.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 2(x+4)-3y+4z=0 \Leftrightarrow$$
$$2x-3y+4z+8=0.$$

Задача 4. Напиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(-3,0,2)$ и правата $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$.

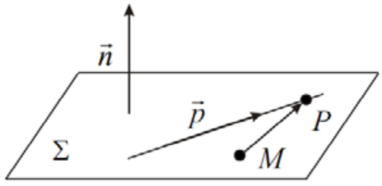
Решение. Правата е паралелна со векторот $\vec{p}=(1,-2,2)$ и ја содржи точката $P(1,-2,0)$. Векторот $\overrightarrow{MP}=(4,-2,-2)\parallel(2,-1,-1)$ лежи во рамнината. Следува дека векторскиот производ

$$\vec{p}\times\overrightarrow{MP}=\left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)=(4,5,3),$$

е нормален на рамнината

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 4(x+3)+5y+3(z-2)=0 \Leftrightarrow$$

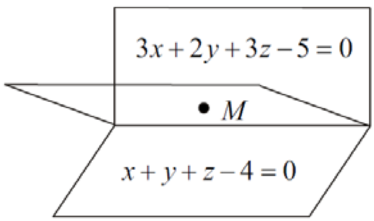
$$4x+12+5y+3z-6=0 \Leftrightarrow 4x+5y+3z+6=0.$$



Задача 5. Напиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(-3,0,2)$ и правата $p:\begin{cases}3x+2y+3z-5=0\\ x+y+z-4=0\end{cases}$.

Решение. Прв начин. Рамнината ја содржи точката $M(-3,0,2)$ и припаѓа на снопот рамнини

$$3x+2y+3z-5+\lambda(x+y+z-4)=0.$$



Од овие услови го наоѓаме параметарот λ. Имено,

$$3(-3)+2\cdot 0+3\cdot 2-5+\lambda(-3+0+2-4)=0 \Leftrightarrow -8-5\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{8}{5}$$

Оттука, равенката на рамнината е

$$3x+2y+3z-5-\frac{8}{5}(x+y+z-4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x+10y+15z-25-8x-8y-8z+32=0$$

$$\Leftrightarrow 7x+2y+7z+7=0.$$

Втор начин. Наоѓаме носечки вектор и точка од правата.

$$\vec{p}=\left(\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-1,0,1).$$

За $z=0$, од втората равенка имаме $y=4-x$, од каде со замена во првата добиваме $3x+8-2x-5=0 \Leftrightarrow x=-3$. Следува, $y=7$ т.е. $P(-3,7,0)$. Оттука, $\overrightarrow{PM}=(0,-7,2)$.

Носечки вектор на бараната рамнина е

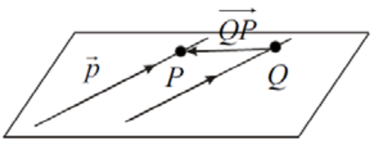
$$\vec{p}\times\overrightarrow{PM}=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ -7 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -7\end{vmatrix}\right)=(7,2,7),$$

од каде нејзината равенка е:

$$7(x+3)+2y+7(z-2)=0 \Leftrightarrow 7x+2y+7z+7=0.$$

Задача 6. Напиши ја равенката на рамнината во која лежат паралелните прави

$$p:\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+5}{7} \text{ и } q:\ x=4t+4,\ y=-4t+2,\ z=7t-1.$$



Решение. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p}=(3,-4,7)$ и ја содржи точката $P(-2,1,-5)$. Правата q е паралелна на векторот $\vec{p}$ и ја содржи точката $Q(4,2,-1)$.

Треба да најдеме уште еден неколинеарен вектор со векторот $\vec{p}$, што е паралелен на рамнината. Таков вектор е $\overrightarrow{PQ}=(6,1,4)$. Сега, векторот

$$\vec{p}\times\overrightarrow{QP}=\left(\begin{vmatrix}-4 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}7 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & -4\\ 6 & 1\end{vmatrix}\right)=(-23,30,27)\|(23,-30,-27),$$

е нормален на рамнината. Оттука равенката на рамнината е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$23(x+2)-30(y-1)-27(z+5)=0 \Leftrightarrow$$

$$23x+46-30y+30-27z+135=0 \Leftrightarrow 23x-30y-27z+59=0.$$

Задача 7. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ правата $p:\begin{cases}2x-y+z=0\\ x+3y-2z+3=0\end{cases}$ и на x и y оските отсекува еднакви ненулти отсечоци.

Решение. Ги сведуваме равенките на правата во каноничен вид. Еден паралелен вектор е

$$\vec{p} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-1, 5, 7) = -(1, -5, -7),$$

За $x = 0$ го добиваме системот $y = z$, $3y - 2z + 3 = 0$, од каде следува дека $y = -3$ и $z = -3$. Значи една точка од правата е $P(0,-3,-3)$. Следува дека каноничните равенки се $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+3}{-7}$.

Бидејќи отсечоците на x и y оските се неенулти и еднакви, правата ги содржи и точките $A(a,0,0)$ и $B(0,a,0)$, за некој број $a \neq 0$. Следува, векторот $\overrightarrow{BA} = (a,-a,0) = a(1,-1,0)$ е паралелен со правата.

Значи бараната рамнина е паралелна со векторите $(1,-1,0)$ и $(1,-5,-7)$. Еден нејзин нормален вектор е

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \right) = (7, 7, -4).$$

Следува дека равенката на рамнината е

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow 7x + 7(y+3) - 4(z+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$7x + 7y + 21 - 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow 7x + 7y - 4z + 9 = 0.$$

Задача 8. За кои вредности на параметрите B и D, правата $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ лежи во xOy рамнината.

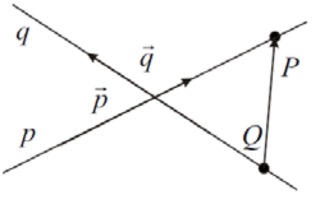
Решение. Бидејќи правата лежи во xOy рамнината, следува $z = 0$. Тогаш, нејзината равенка е $\begin{cases} x - 2y - 9 = 0 \\ 3x + By + D = 0 \end{cases}$. Од првата равенка имаме $x = 2y + 9$. Ако замениме во втората равенка, добиваме

$$3(2y+9) + By + D = 0 \Leftrightarrow 6y + 27 + By + D = 0 \Leftrightarrow (6+B)y + D + 27 = 0.$$

Не може $6 + B \neq 0$, бидејќи тогаш системот би имал единствено решение $y = -\frac{D+27}{B+6}$, $x = 2y + 9 = -2\frac{D+27}{B+6} + 9$, односно системот не би определувал равенка на права, туку равенка на точка. Следува дека $6+B=0$, од каде $D+27=0$. Оттука добиваме дека $B=-6$ и $D=-27$.

Задача 9. Покажи дека правите
$p:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и $q:\ \dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ се сечат.

Решение. Правата p е паралелна со векторот $\vec{p}=(2,1,4)$ и ја содржи точката $P(1,7,5)$. Правата q е паралелна со векторот $\vec{q}=(3,-2,1)$ и ја содржи точката $Q(6,-1,0)$.



Векторот $\overrightarrow{PQ}=(5,-8,-5)$. Правите p и q се сечат ако $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=0$. Имаме

$$\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=\begin{vmatrix}5 & -8 & -5\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=5-96+20+15+40+16=0.$$

Втор начин. Равенките на правите во параметарски вид се

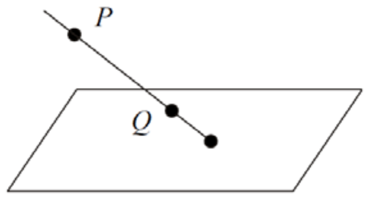
$$p:\begin{cases}x=2t+1\\ y=t+7\\ z=4t+5\end{cases},\quad q:\begin{cases}x=3k+6\\ y=-2k-1\\ z=k\end{cases}.$$

Пресечната точка ги исполнува равенките и на двете прави. Односно $2t+1=3k+6$, $t+7=-2k-1$ и $4t+5=k$. Со замена на третата во втората равенка добиваме $t+7=-8t-10-1$, или $t=-2$. Оттука $k=-8+5=-3$. Проверуваме дали е е исполнета првата равенка. $2(-2)+1=3(-3)+6$, односно $-3=-3$. Следува дека правите се сечат.

Задача 10. Најди го прободот на правата што минува низ точките $P(-2,-1,0)$ и $Q(3,1,1)$ врз рамнината $2x-3y-5z-1=0$.

Решение. Правата што минува низ точките P и Q, е паралелна со векторот $\overrightarrow{PQ}=(5,2,1)$. Затоа нејзината равенка е

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x+2}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}.$$



Равенките на правата ги запишуваме во параметарски вид, $x=5t-2$, $y=2t-1$, $z=t$; и ги заменуваме во равенката на рамнината,

$$2(5t-2)-3(2t-1)-5t-1=0 \Leftrightarrow 10t-4-6t+3-5t-1=0 \Leftrightarrow t=-2.$$

Следува дека прободот е $S(-12,-5,-2)$.

Задача 11. Покажи дека правите

$$p:\begin{cases}4x+z-1=0\\ x-2y+3=0\end{cases} \text{ и } q:\begin{cases}3x+y-z+4=0\\ y+2z-8=0\end{cases} \text{ се сечат.}$$

Решение. Прв начин. Задачата се сведува на решавање на систем од 4 равенки со 3 непознати

$$4x+z-1=0,\ x-2y+3=0,\ 3x+y-z+4=0,\ y+2z-8=0.$$

Од првата равенка имаме $z=1-4x$. Од четвртата равенка имаме $y=8-2z=8-2+8x=8x+6$. Од втората равенка имаме

$$x-16x-12+3=0 \Leftrightarrow -15x-9=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}.$$

Следува дека

$$z=1-4\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{17}{5} \text{ и } y=8\left(-\frac{3}{5}\right)+6=\frac{6}{5}.$$

Проверуваме дали е исполнета третата равенка

$$3\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{6}{5}-\frac{17}{5}+4=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Следува дека системот равенки има единствено решение, односно правите се сечат.

Втор начин. Ги сведуваме равенките на правите во каноничен вид. Еден паралелен вектор на правата p е

$$\vec{p}=(4,0,1)\times(1,-2,0)=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(2,1,-8).$$

За $x=0$ добиваме $y=\dfrac{3}{2}$ и $z=1$. Следува дека една точка од правата p е $P\left(0,\dfrac{3}{2},1\right)$. Еден паралелен вектор на правата q е

$$(3,1,-1)\times(0,1,2)=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=(3,-6,3)\,\|\,(1,-2,1)=\vec{q}\,.$$

За $z=0$ од втората равенка имаме $y=8$, а од првата $3x+12=0$ или $x=-4$. Значи точката $Q(-4,8,0)$ лежи на правата q. Тогаш $\overrightarrow{PQ}=\left(-4,\dfrac{13}{2},-1\right)\|(8,-13,2)$. Сега, мешаниот производ

$$\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & -8\\ 1 & -2 & 1\\ 8 & -13 & 2\end{vmatrix}=-8+8+104-128+26-2=0\,.$$

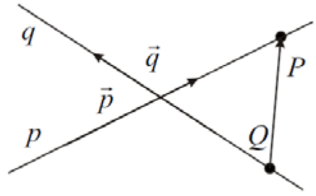
Следува дека правите p и q се сечат.

Задача 12. Дадени се правите

$$p:\ \frac{x-2}{a}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{1}\ \text{ и }\ q:\begin{cases}x=-2+t\\ y=1+2t\\ z=t\end{cases}.$$

Определи го параметарот a, така што правите p и q да се сечат, а потоа за тие вредности на a, најди ја пресечната точка и равенката на рамнината во која лежат.

Решение. Правата p е паралелна со векторот $\vec{p}=(a,1,1)$ и ја содржи точката $P(2,4,2)$. Правата q е паралелна со векторот $\vec{q}=(1,2,1)$ и ја содржи точката $Q(-2,1,0)$, па $\overrightarrow{QP}=(4,3,2)$.



Правите p и q се сечат ако $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{QP}\right)=0$. Имаме

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 4a+4+3-8-3a-2=0 \Leftrightarrow a=3.$$

За да ја најдеме пресечната точка, променливите x, y и z од параметарските равенки на правата q, ги заменуваме во равенките на правата p.

$$\frac{-2+t-2}{3}=\frac{1+2t-4}{1}=\frac{t-2}{1}.$$

Од равенката $\dfrac{-2+t-2}{3}=\dfrac{t-2}{1}$, добиваме $t-4=3t-6$ т.е. $t=1$. Бидејќи докажавме дека правите се сечат, вредноста на параметарот $t=1$ ги исполнува и другите равенки на правата. Со замена на $t=1$ во равенките на правата q, ги добиваме координатите на пресечната точка $x=-1$, $y=3$ и $z=1$. Па пресечната точка е $M(-1,3,1)$.

Нека $X(x,y,z)$ е произволна точка од рамнината во која лежат правите. Векторите $\overrightarrow{QX}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се компланарни, односно $\left(\overrightarrow{QX},\vec{p},\vec{q}\right)=0$,

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

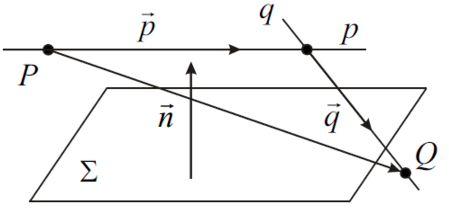
$$x+2+2y-2+5z=0 \Leftrightarrow x+2y-5z=0.$$

Последната равенка е равенка на заедничката рамнина на правите.

Коментар. Равенката на рамнината можевме да ја најдеме и на стандарден начин, со помош на формулата за равенка на рамнина, која ја содржи точката Q и е нормална на векторскиот производ $\vec{p}\times\vec{q}$.

Задача 13. Најди ги равенките на правата p која минува низ точката $P(2,4,5)$, паралелна е со рамнината $\Sigma: 2x-y+z=7$ и ја сече правата $q: \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-6}{2}$.

Решение. Рамнината Σ е нормална на векторот $\vec{n}=(2,-2,1)$. Правата q е паралелна на векторот $\vec{q}=(-1,3,2)$ и ја содржи $Q(3,4,6)$. Нека правата p е паралелна на $\vec{p}=(x,y,z)$. Векторот $\overrightarrow{PQ}=(1,0,1)$.



Од условот, правата p е паралелна со рамнината Σ, следува,

$$\vec{p}\vec{n}=0. \Leftrightarrow (x,y,z)(2,-2,1)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z=0.$$

Од условот, правите p и q се сечат, следува

$$\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$3x+2y-3z+y=0 \Leftrightarrow x+y-z=0$$

Двата услови се исполнети ако се решение на системот равенки $\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$, односно ако

$$x=k\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=k,\ y=k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3k,\ z=k\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4k.$$

Следува векторот $\vec{p}=(k,3k,4k)\|(1,3,4)$.

Конечно равенките на правата p гласат $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{4}$.

Задача 14*. Најди ги равенките на правата која е паралелна со рамнините $\sum : 3x+12y-3z-5=0$ и $\prod : 3x-4y+9z+7=0$ и ги сече правите

$$p: \frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3} \text{ и } q: \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

Решение. Нормалните вектори на рамнините се $\vec{n}_1=(3,12,-3)\|(1,4,-1)$ и $\vec{n}_2=(3,-4,9)$. Правата е паралелна со векторскиот производ

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left(\begin{vmatrix}4 & -1\\ -4 & 9\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 9 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -4\end{vmatrix}\right)=(32,-12,-16)\|(8,-3,-4).$$

Нека $R(x,y,z)$ е точка од бараната права r. Бидејќи правата r ја сече правата p, векторите $\overrightarrow{PR}=(x+5,y-3,z+1)$, $\vec{q}=(2,-4,3)$ и $\vec{r}=(8,-3,-4)$ се компланарни, односно $\left(\overrightarrow{PR},\vec{p},\vec{r}\right)=0$,

$$\begin{vmatrix}x+5 & y-3 & z+1\\ 2 & -4 & 3\\ 8 & -3 & -4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$16(x+5)+24(y-3)-6(z+1)+32(z+1)+9(x+5)+8(y-3)=0\Leftrightarrow$$

$$25(x+5)+32(y-3)+26(z+1)=0\Leftrightarrow 25x+125+32y-96+26z+26=0$$

$$\Leftrightarrow 25x+32y+26z+55=0.$$

Бидејќи правата r ја сече правата q, векторите $\overrightarrow{QR}=(x-3,y+1,z-2)$, $\vec{q}=(-2,3,4)$ и $\vec{r}=(8,-3,-4)$ се компланарни, односно $\left(\overrightarrow{QR},\vec{q},\vec{r}\right)=0$,

$$\begin{vmatrix}x-3 & y+1 & z-2\\ -2 & 3 & 4\\ 8 & -3 & -4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$-12(x-3)+32(y+1)+6(z-2)-24(z-2)+12(x-3)-8(y+1)=0\Leftrightarrow$$

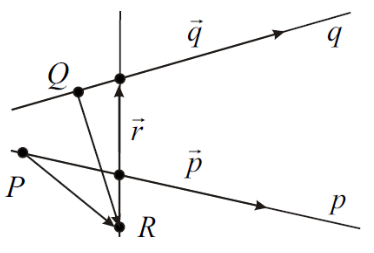
$$24(y+1)-18(z-2)=0\Leftrightarrow 4(y+1)-3(z-2)=0\Leftrightarrow 4y-3z+10=0.$$

Следува, равенката на правата r е $\begin{cases}25x+32y+26z+55=0\\ 4y-3z+10=0\end{cases}$.

Задача 15*. Најди ги равенките на заедничката нормала на правите

$$p:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1} \text{ и } q:\ \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

Решение. Прв начин. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p}=(1,2,1)$ и ја содржи точката $P(1,2,0)$, правата q е паралелна на векторот $\vec{q}=(1,-1,1)$ и ја содржи точката $Q(3,-1,1)$. Нормала на права, е права што е нормална и ја сече правата. Нека r е заедничката нормала на правите која е паралелна на вектор $\vec{r}$ и ја содржи точката $R(x,y,z)$.



Векторот $\vec{r}$ е нормален на векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, следува дека е паралелен на нивниот векторски производ

$$\vec{p}\times\vec{q}=\left(\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(3,0,-3)\|(1,0,-1).$$

Земаме $\vec{r}=(1,0,-1)$.

Векторите $\overrightarrow{PR}=(x-1,y-2,z)$, $\vec{p}$ и $\vec{r}$ се компланарни. Следува

$$\left(\overrightarrow{PR},\vec{p},\vec{r}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1&y-2&z\\1&2&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$-2(x-1)+y-2-2z+y-2=0 \Leftrightarrow -2(x-1)+2(y-2)-2z=0 \Leftrightarrow$$
$$x-1-y+2+z=0 \Leftrightarrow x-y+z+1=0.$$

Векторите $\overrightarrow{QR}=(x-3,y+1,z-1)$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ се компланарни. Следува дека

$$\left(\overrightarrow{QR},\vec{q},\vec{r}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$x-3+y+1+z-1+y+1=0 \Leftrightarrow x+2y+z-2=0\,.$$

Од претходните два става, добиваме дека равенките на правата p се

$$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x+2y+z-2=0 \end{cases}.$$

Втор начин. Ги пишуваме равенките на правите во параметарски облик,

$$p:\ x=1+t\,,\ y=2+2t\,,\ z=t$$

$$q:\ x=3+k\,,\ y=-1-k\,,\ z=1+k\,.$$

Нека точките P и Q се пресечни точки на правите со заедничката нормала. Нивните координати се $P(1+t,2+2t,t)$ и $Q(3+k,-1-k,1+k)$, за некои t и k. Векторот $\overrightarrow{PQ}=(2+k-t,-3-k-2t,1+k-t)$ е паралелен со нормалата, односно е нормален на векторите $\vec{p}=(1,2,1)$ и $\vec{q}=(1,-1,1)$. Следува,

$$\overrightarrow{PQ}\vec{p}=0 \Leftrightarrow 2+k-t+2(-3-k-2t)+1+k-t=0 \Leftrightarrow$$

$$2+k-t-6-2k-4t+1+k-t=0 \Leftrightarrow -3-6t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{PQ}\vec{q}=0 \Leftrightarrow 2+k-t-(-3-k-2t)+1+k-t=0 \Leftrightarrow$$

$$2+k-t+3+k+2t+1+k-t=0 \Leftrightarrow k=-2\,.$$

Значи точките имаат координати $P\left(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$ и $Q(1,1,-1)$.

Векторот $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)\|(1,0,-1)$. Следува равенката на нормалата е

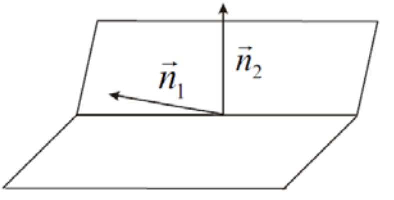
$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{-1}\,.$$

Коментар. Вториот начин најчесто е аритметички потежок.

5.4. АГОЛ

Задача 1. Најди го косинусот од аголот меѓу рамнините $x-2y+3z+7=0$ и $x+y-3z-5=0$.

Решение. Првата рамнина е нормална на векторот $\vec{n}_1=(1,-2,3)$, а втората на $\vec{n}_2=(1,1,-3)$. Нека со φ го означиме аголот меѓу рамнините.



Следува дека

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|1\cdot 1+(-2)\cdot 1+3\cdot(-3)|}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{1+1+9}}=\frac{10}{\sqrt{154}}.$$

Задача 2. Најди го аголот меѓу рамнините $2x-3y+z-1=0$ и $4x-6y+2z-3=0$.

Решение. Прв начин. Рамнините се паралелни бидејќи коефициентите пред променливите се пропорционални. Следува дека аголот меѓу нив е 0.

Втор начин. До истиот заклучок би дошле и ако задачата ја решиме според формулата за агол меѓу две рамнини.

$$\cos\phi=\frac{|\vec{n}_1\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\begin{pmatrix}\vec{n}_1=(2,-3,1)\\ \vec{n}_2=(4,-6,2)\end{pmatrix}=\frac{8+18+2}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\sqrt{4^2+6^2+2^2}}=$$

$$\frac{28}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=\frac{28}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=1.$$

Следува,

$$\varphi=\arccos 1=0.$$

Задача 3. Најди аголот меѓу правите p: $x=0$, $y=0$ и q: $x=2$, $y=-1$.

Решение. Правите се паралелни на z-оската. Следува дека аголот меѓу нив е 0.

Коментар. Каноничните равенки на правите се

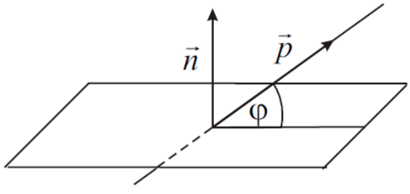
$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1} \text{ и } \frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}.$$

Задача 4. Најди го синусот од аголот меѓу правата $x+y-5z+8=0$, $x-2z+1=0$ и рамнината $2x-y+z-5=0$.

Решение. Правата е паралелна со векторот

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \vec{n}_1 = (1,1,-5) \\ \vec{n}_2 = (1,0,-2) \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$(-2,-3,-1) \| (2,3,1) = \vec{p}\,.$$



Рамнината е нормална на векторот $\vec{n} = (2,-1,1)$. Следува,

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{p}\vec{n}|}{|\vec{p}||\vec{n}|} = \frac{|2\cdot 2 + 3(-1) + 1\cdot 1|}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{21}},$$

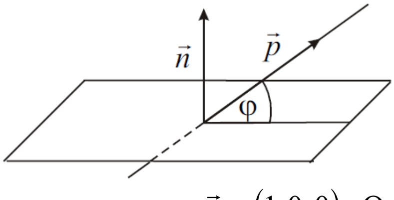
од каде $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{21}}$.

Задача 5. Најди го аголот меѓу правата $\begin{cases} y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$ и рамнината $x = 1$.

Решение. Правата е паралелна на векторот:

$$\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \vec{n}_1 = (0,1,0) \\ \vec{n}_2 = (3,0,-\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$(-\sqrt{3},0,-3).$$



Рамнината е нормална на векторот $\vec{n} = (1,0,0)$. Оттука,

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{p}\vec{n}|}{|\vec{p}||\vec{n}|} = \frac{\left|-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \text{ од каде}$$

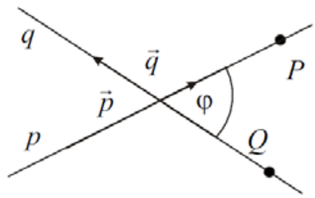
$$\varphi = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Задача 6. Најди аголот меѓу правите

$$p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{2} \text{ и } q: \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}.$$

Решение. Правата p е паралелна со векторот $\vec{p} = (1,-2,2)$. Правата q е паралелна на векторот

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \vec{n}_1 = (2,-1,1) \\ \vec{n}_2 = (1,1,-1) \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0,3,3).$$



Па, $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{p}\vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \dfrac{|2\cdot 0 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{0^2+3^2+3^2}} = 0$. Следува $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 7. Напиши ги равенките на правата што минува низ точката $M(1,-5,3)$ и со координатните оски x, y и z зафаќа агли $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{2\pi}{3}$, соодветно.

Решение. Еден паралелен вектор на правата е $\vec{p} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, каде α, β и γ се аглите што ги зафаќа правата со координатните оски. (Имено, ако $\vec{p} = (x,y,z)$ е паралелен вектор на правата, аглите што ги гради со ортовите $\vec{i} = (1,0,0,)$, $\vec{j} = (0,1,0,)$ и $\vec{k} = (0,0,1)$ се:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p}\vec{i}}{|\vec{p}||\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{p}|},\ \cos\beta = \frac{\vec{p}\vec{j}}{|\vec{p}||\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{p}|} \text{ и } \cos\gamma = \frac{\vec{p}\vec{k}}{|\vec{p}||\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{p}|}.$$

Следува дека $\left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right) = \frac{1}{|\vec{p}|}\left(x, y, z,\right) = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ е исто така паралелен вектор на правата).

Од условот на задачата

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\ \cos\beta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \cos\gamma = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

следува дека $\left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \| \left(1, \sqrt{2}, -1\right)$.

Затоа, равенката на правата е

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}.$$

Задача 8. Пресметај ги косинусите на аглите што правата $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{2}$ ги гради со координатните оски.

Решение. Правата е паралелна на векторот $\vec{p} = \left(1, -2, 2\right)$. Векторите паралелни со x, y и z оската се $\vec{i} = \left(1, 0, 0\right)$, $\vec{j} = \left(0, 1, 0\right)$ и $\vec{k} = \left(0, 0, 1\right)$, соодветно. Тогаш косинусите на аглите што правата ги гради со координатните оски се

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p}\vec{i}}{|\vec{p}||\vec{i}|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{\vec{p}\vec{j}}{|\vec{p}||\vec{j}|} = \frac{-2}{\sqrt{1+4+4}} = -\frac{2}{3} \text{ и}$$

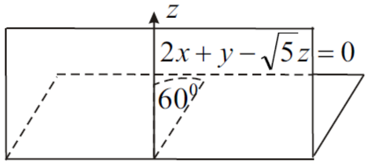
$$\cos\gamma = \frac{\vec{p}\vec{k}}{|\vec{p}||\vec{k}|} = \frac{2}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{2}{3}.$$

Задача 9*. Низ z оската повлечи рамнина која со рамнината $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ зафаќа агол од 60^0.

Решение. Бидејќи рамнината минува низ z-оската, има равенка $Ax + By = 0$. Ако $A = 0$, аголот меѓу рамнините

$$y=0 \text{ и } 2x+y-\sqrt{5}z=0 \text{ е } \cos\varphi=\frac{2\cdot 0+1\cdot 1-\sqrt{5}\cdot 0}{1\cdot\sqrt{2+1+5}}=\frac{1}{\sqrt{8}}$$

и е различен од 60°.



Значи $A\neq 0$, па равенката на рамнината може да се подели со A, $x+\dfrac{B}{A}y=0$. Земаме $\dfrac{B}{A}=B'$. Значи, равенката на рамнината е

$$x+B'y=0.$$

Коефициентот B' ќе го определиме од условот аголот меѓу рамнините да изнесува 60°.

$$\cos\phi=\left(\begin{array}{c}\vec{n}'=(1,B',0)\\ \vec{n}=\left(2,1,-\sqrt{5}\right)\end{array}\right)=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\Leftrightarrow \cos 60^o=\frac{2\cdot 1+1\cdot B'-\sqrt{5}\cdot 0}{\sqrt{1+B'^2}\sqrt{2^2+1^2+5}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2+B'}{\sqrt{1+B'^2}\sqrt{10}}\Leftrightarrow \sqrt{1+B'^2}\sqrt{10}=2(2+B')\Leftrightarrow \left(1+B'^2\right)\cdot 10=4(2+B')^2$$

$$\Leftrightarrow 10+10B'^2=8+8B'+2B'^2\Leftrightarrow 3B'^2-8B'-3=0\Leftrightarrow$$

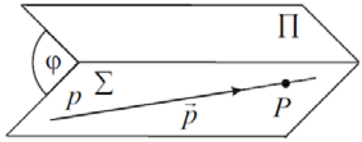
$$B'_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{64+4\cdot 3\cdot 3}}{6}\Leftrightarrow B'_{1/2}=\frac{8\pm 10}{6}\Leftrightarrow B'_1=3,\ B'_2=-\frac{1}{3}.$$

Значи постојат две рамнини кои ги исполнуваат условите на задачата

$$x+3y=0 \text{ и } x-\frac{1}{3}y=0.$$

Задача 10*. Запиши ја равенката на рамнината $\sum$ која ја содржи правата $p:\ \begin{cases}x+5y+z=0\\ x-z+4=0\end{cases}$ и со рамнината $\prod$: $x-4y-8z+12=0$, зафаќа агол $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Рамнината $\prod$ е нормална на $\vec{n}_1=(1,-4,-8)$.



Рамнината $\sum$ припаѓа на снопот равенки што го формираат рамнините $x+5y+z=0$ и $x-z+4=0$, односно за одредена вредност на λ се добива нејзината равенка.

$$x+5y+z=0+\lambda(x-z+4=0)=0 \Leftrightarrow (1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0\,.$$

Нормалниот вектор на рамнината $\sum$ е $\vec{n}=(1+\lambda,5,1-\lambda)$.

Бидејќи аголот меѓу двете рамнини е $\dfrac{\pi}{4}$, важи:

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}=\frac{|1+\lambda-20-8+8\lambda|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}\sqrt{1+16+64}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|9\lambda-27|}{\sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+25+1-2\lambda+\lambda^2}\sqrt{81}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{9|\lambda-3|}{9\sqrt{27+2\lambda^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{27+2\lambda^2}=\sqrt{2}|\lambda-3| \Leftrightarrow$$

$$27+2\lambda^2=2(\lambda-3)^2 \Leftrightarrow 27+2\lambda^2=2\left(\lambda^2-6\lambda+9\right) \Leftrightarrow$$

$$27+2\lambda^2=2\lambda^2-12\lambda+18 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{3}{4}.$$

Следува равенката на рамнината $\sum$ е

$$\left(1-\frac{3}{4}\right)x+5y+\left(1+\frac{3}{4}\right)z+4\left(-\frac{3}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x+5y+\frac{7}{4}z-3=0 \Leftrightarrow$$

$$x+20y+7z-14=0\,.$$

Проверуваме каков агол зафаќа рамнината $x-z+4=0$ со рамнината $\prod$.

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\begin{pmatrix}\vec{n}_1=(1,-4,-8)\\ \vec{n}_2=(1,0,-1)\end{pmatrix}=\frac{|1+8|}{9\sqrt{2}}=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Добивме дека $\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$, па и оваа рамнина ги исполнува условите на задачата.

Значи решенија се рамнините

$$x+20y+7z-14=0 \text{ и } x-z+4=0\,.$$

Втор начин. Правата p е паралелна со векторот

$$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{pmatrix}\vec{n}_1=(1,5,1)\\ \vec{n}_2=(1,0,-1)\end{pmatrix}=\left(\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)=(-5,2,-5).$$

Нека нормалниот вектор на бараната рамнина е $\vec{n}=(A,B,C)$. Векторите $\vec{p}$ и $\vec{n}$ се заемно нормални, следува дека $\vec{p}\vec{n}=0$, односно $-5A+2B-5C=0$. Бидејќи $A\neq 0$, може да земеме $A=1$. Тогаш $2B=5C+5$ или $B=\frac{5}{2}C+\frac{5}{2}$. Бидејќи векторите $\vec{n}$ и $\vec{n}_1$ зафаќаат агол од $\frac{\pi}{4}$, важи:

$$\cos\phi=\frac{|\vec{n}\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left|1-4\left(\frac{5}{2}C+\frac{5}{2}\right)-8C\right|}{9\sqrt{1+\left(\frac{5}{2}C+\frac{5}{2}\right)^2+C^2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|-9-18C|}{9\sqrt{1+\frac{25}{4}C^2+\frac{25}{2}C+\frac{25}{4}+C^2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{9|1+2C|}{9\sqrt{\frac{29}{4}C^2+\frac{25}{2}C+\frac{29}{4}}}\Leftrightarrow\frac{29}{4}C^2+\frac{25}{2}C+\frac{29}{4}=2(1+2C)^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{29}{4}C^2+\frac{25}{2}C+\frac{29}{4}=2+8C+8C^2\Leftrightarrow$$

$$29C^2+50C+29=8+32C+32C^2\Leftrightarrow 3C^2-18C-21=0\Leftrightarrow$$

$$C_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{324+252}}{6}\Leftrightarrow C_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{576}}{6}\Leftrightarrow C_{1,2}=\frac{18\pm 24}{6}\Leftrightarrow$$

$$C_1=7,\ C_2=-1.$$

Оттука,

$$B_1=\frac{5}{2}7+\frac{5}{2}=20 \text{ и } B_2=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=0.$$

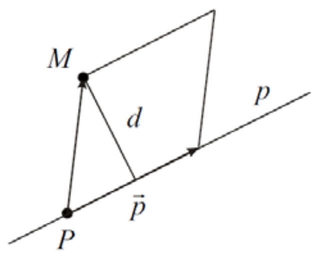
Значи решенија се рамнините

$$x+20y+7z-14=0 \text{ и } x-z+4=0.$$

5.5. РАСТОЈАНИЕ

Задача 1. Најди го растојанието од точката $M(3,5,4)$ до правата p: $2x+3y-z+5=0$, $x-2y-3z-4=0$.

Решение. Правата ја содржи точката $P(2,1,0)$ и е паралелна на векторот



$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{pmatrix}\vec{n}_1=(2,3,-1)\\ \vec{n}_2=(1,-2,-3)\end{pmatrix}=$$

$$\left(\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=$$

$$(-11,5,-7)\|(11,-5,7)=\vec{p}.$$

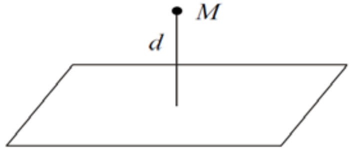
Векторот $\overrightarrow{PM}=(1,4,4)$ и $d=\dfrac{\left|\vec{p}\times\overrightarrow{PM}\right|}{|\vec{p}|}$. Имаме

$$\vec{p}\times\overrightarrow{PM}=\left(\begin{vmatrix}-5 & 7\\ 4 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}7 & 11\\ 4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}11 & -5\\ 1 & 4\end{vmatrix}\right)=(-48,-37,49)\|(48,37,-49),$$

$$\left|\vec{p}\times\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{48^2+37^2+49^2}=\sqrt{6074} \text{ и } |\vec{p}|=\sqrt{121+25+49}=\sqrt{195}.$$

Следува дека $d=\dfrac{\sqrt{6074}}{\sqrt{195}}$.

Задача 2. Најди го растојанието од точката $M(3,5,4)$ до рамнината $2x+y-4z+3=0$.

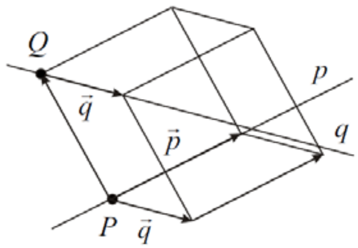


Решение. Според формулата за растојание од точка до рамнина,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$\frac{|2\cdot 3+1\cdot 5-4\cdot 4+3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{2}{3}.$$

Задача 3. Најди го растојанието меѓу разминувачките прави $p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ и $q: \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{1}$.



Решение. Прв начин. Според формулата за растојание меѓу разминувачки прави,

$$d = \frac{\left|\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}\right)\right|}{\left|\vec{p} \times \vec{q}\right|}, \text{ каде:}$$

$$\vec{p} = (-1,2,2),\ \vec{q} = (2,2,1),\ P(2,1,0),$$

$$Q(5,4,3) \text{ и } \overrightarrow{PQ} = (3,3,3) = 3(1,1,1).$$

Притоа,

$$\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}\right) = 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(-2+2+4-4+1-4) = -9,\ \left|\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}\right)\right| = 9,$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-2,5,-6) \text{ и}$$

$$\left|\vec{p} \times \vec{q}\right| = \sqrt{4+25+36} = \sqrt{65}. \text{ Следува } d = \frac{9}{\sqrt{65}}.$$

Втор начин. Ќе ја определиме равенката на рамнината што минува низ правата p и е паралелна на правата q. Бидејќи $\vec{p} \times \vec{q} = (-2,5,-6) \| (2,-5,6)$, нејзината равенка е

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) - 5(y-1) + 6z = 0 \Leftrightarrow$$

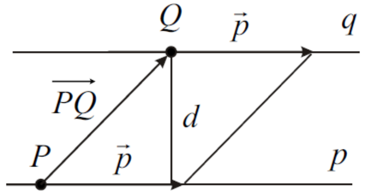
$$2x - 5y + 6z + 1 = 0.$$

Сега бараното растојание е растојанието од точка од правата q, на пример Q, до рамнината,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 5 - 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{4+25+36}} = \frac{9}{\sqrt{65}}.$$

Задача 4. Најди го растојанието меѓу паралелните прави:
$p: x = 2t+1,\ y = 3t-2,\ z = -5t-4$; и
$q: x = 2t+3,\ y = 3t+2,\ z = -5t-1$.

Решение. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p} = (2,3,-5)$ и ја содржи точката $P(1,-2,-4)$, правата q ја содржи точката $Q(3,2,-1)$ и $\overrightarrow{PQ} = (2,4,3)$. Притоа,



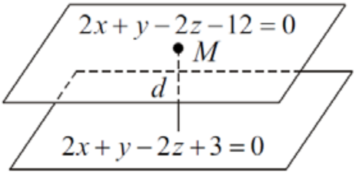
$$\vec{p} \times \overrightarrow{PQ} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) = (29,-16,2),$$

$\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{29^2 + 16^2 + 2^2} = \sqrt{1101}$ и $|\vec{p}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$, од каде

$$d = \frac{\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PQ}\right|}{|\vec{p}|} = \frac{\sqrt{1101}}{\sqrt{38}}.$$

Задача 5. Најди го растојанието меѓу паралелните рамнини $2x + y - 2z + 3 = 0$ и $2x + y - 2z - 12 = 0$.

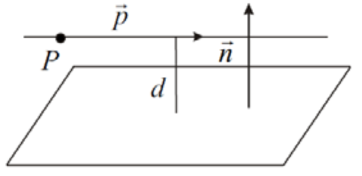
Решение. Растојание меѓу паралелни рамнини е растојанието од произволна точка од едната рамнина до другата рамнина.



Избираме точка од рамнината $2x + y - 2z - 12 = 0$. За $x = 0$ и $z = 0$ се добива $y = 12$. Значи, точката $M(0,12,0)$ лежи на рамнината. Сега,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 12 - 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{15}{3} = 5.$$

Задача 6. Најди го растојанието меѓу правата $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ и рамнината $2x+y=0$.



Решение. Правата е паралелна на векторот $\vec{p}=(-1,2,2)$ и ја содржи точката $P(2,1,0)$, а рамнината е нормална на векторот $\vec{n}=(2,1,0)$. Бидејќи $\vec{p}\vec{n}=-2+2=0$, следува дека правата е паралелна со рамнината. Оттука

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 2+1\cdot 1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\,.$$

Задача 7. Најди равенка на рамнина која е паралелна со рамнината $2x+2y-z-11=0$ и е на растојание 5 единици од неа. Притоа бараната рамнина и точката $M(1,2,4)$ се на различни страни од дадената рамнина.

Решение. Бидејќи бараната рамнина е паралелна на дадената, нејзината равенка е $2x+2y-z+D=0$. Една нејзина точка е $M_b(0,0,D)$.

Рамнините да се на растојание 5 единици ако

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\Leftrightarrow 5=\frac{|2\cdot 0+2\cdot 0-D-11|}{\sqrt{4+4+1}}\Leftrightarrow$$

$$|D+11|=15\Leftrightarrow D+11=\pm 15\Leftrightarrow D=4,\ D=-26\,.$$

Бараната рамнина и точката M се на различни страни од дадената рамнина $2x+2y-z-11=0$, ако

$$d_M=2+4-4-11=-9<0 \text{ и } d_{M_b}=-D-11$$

се со различи знаци, т.е. $-D-11>0$, односно $D<-11$. Следува дека $D=-26$.

Значи решението е $2x+2y-z-26=0$.

Задача 8. Најди го растојанието меѓу разминувачките прави

$$p:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases} \quad \text{и} \quad q:\begin{cases} x+y-4=0 \\ z=1 \end{cases}.$$

Решение. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p}=(2,-1,2)$ и ја содржи точката $P(-1,1,2)$. Равенките на правата q ги трансформираме во вид $x=\frac{y-4}{-1}$, $z-1=0$, од каде $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-1}{0}$. Следува дека q е паралелна на векторот $\vec{q}=(1,-1,0)$ и ја содржи точката $Q(0,4,1)$. Притоа, $\overrightarrow{PQ}=(1,3,-1)$ и

$$\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2+6+2-1=9,\ \left|\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)\right|=9,$$

$$\vec{p}\times\vec{q}=\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)=(2,2,-1),\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|=\sqrt{4+4+1}=3.$$

Оттука растојанието е $d=\dfrac{\left|\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)\right|}{\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|}=\dfrac{9}{3}=3$.

Задача 9. На x-оската определи точка M еднакво оддалечена од рамнините $2x+2y-z-1=0$ и $12x-16y+15z+1=0$.

Решение. Бидејќи точката M припаѓа на x-оската, има координати $M(x,0,0)$.

Растојанијата од точката M до двете рамнини се еднакви т.е.

$$\frac{|2x-0+0+1|}{\sqrt{12^2+(-16)^2+15^2}}=\frac{|2x+0-1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \frac{|12x+1|}{25}=\frac{|2x-1|}{3} \Leftrightarrow$$

$$3|12x+1|=25|2x-1| \Leftrightarrow |36x+3|=|50x-25|$$

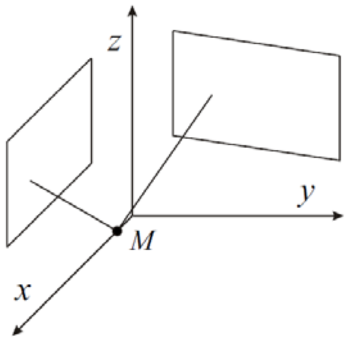
$$\Leftrightarrow 36x+3=\pm(50x-25).$$

Имаме два случаи

$$36x+3=50x-25 \Leftrightarrow 14x=28 \Leftrightarrow x=2,$$

или

$$36x+3=-(50x-25) \Leftrightarrow 36x+3=-50x+25 \Leftrightarrow 86x=22 \Leftrightarrow x=\frac{11}{43}.$$



Значи, постојат две точки кои ги исполнуваат условите на задачата

$$M_1(2,0,0) \text{ и } M_2\left(\frac{11}{43},0,0\right).$$

Следува дека задачата има две решенија

$$4x-2y-4z+19=0 \text{ и } 4x-2y-4z-29=0.$$

Задача 10. Точките $A(1,-2,3)$ и $C(5,-4,-1)$ се спротивни темиња на ромб. Третото теме B лежи на правата

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-2}{-3}.$$

Напиши ја равенката на рамнината во која лежи ромбот и пресметај ја неговата плоштина.

Решение. Параметарските равенки на правата се

$$x=2t+1,\ y=5t-4 \text{ и } z=-3t+2.$$

Темето B лежи на правата. Следува $B(2t+1,5t-4,-3t+2)$, за некој број t. Векторот

$$\overrightarrow{AB}=(2t,5t-2,-3t-1) \text{ и } \overrightarrow{CB}=(2t-4,5t,-3t+3).$$

Бидејќи страните во ромбот се еднакви, следува $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|$

односно,

$$\sqrt{4t^2+(5t-2)^2+(3t+1)^2}=\sqrt{(2t-4)^2+25t^2+(3t-3)^2}\ \ /^2 \Leftrightarrow$$

$$4t^2+25t^2-20t+4+9t^2+6t+1=4t^2-16t+16+25t^2+9t^2-18t+9 \Leftrightarrow$$

$$-14t+5=-34t+25 \Leftrightarrow 20t=20 \Leftrightarrow t=1.$$

Следува $\overrightarrow{BA}=(-2,-3,4)$, $\overrightarrow{BC}=(2,-5,-0)$, од каде

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\left(\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -5 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}4 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 2 & -5\end{vmatrix}\right)=(20,8,16)=4(5,2,4),$$

и плоштината на ромбот е

$$P=\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=4\sqrt{25+4+16}=4\sqrt{45}=4\cdot\sqrt{5}=12\sqrt{5}.$$

Рамнината во која лежи ромбот е нормална на векторот $(5,2,4)$ и ја содржи точката $A(1,-2,3)$, од каде нејзината равенка е

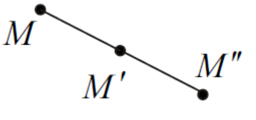
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 5(x-1)+2(y+2)+4(z-3)=0 \Leftrightarrow$$
$$5x-5+2y+4+4z-12=0 \Leftrightarrow 5x+2y+4z-13=0.$$

5.6. СИМЕТРИЧНИ ТОЧКИ

Во учебникот, во задачите 5.6.1-5.6.3 се опишани постапките за наоѓање на проекции на точка врз рамнина, точка врз права, и права врз рамнина.

Задача 1. Најди ја симетричната точка на точката $M(2,-3,5)$, во однос на точката $M'(4,1,1)$.

Решение. Прв начин. Нека симетричната точка е $M''(x,y,z)$.



Точката M' е средина на отсечката MM'', односно $\overrightarrow{MM'}:\overrightarrow{M'M''}=1$. Според формулата за делење на отечка во даден однос, $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$, координатите на точката M'' се

$$4=\frac{2+x}{2},\ 1=\frac{-3+y}{2},\ 1=\frac{5+x}{2} \Leftrightarrow x=6,\ y=5,\ z=-3.$$

Следува, $M''(6,5,-3)$

Втор начин. Нека симетричната точка е $M''(x,y,z)$. Векторот $\overrightarrow{MM'}=(2,4,-4)$ е еднаков со $\overrightarrow{M'M''}=(x-4,y-1,z-1)$ т.е.

$$(2,4,-4)=(x-4,y-1,z-1)\Leftrightarrow 2=x-4,\ 4=y-1,\ -4=z-1\Leftrightarrow$$
$$x=6,\ y=5,\ z=-3.$$

Задача 2. Дадена е точката $M(2,3,4)$ и рамнината $\Sigma: x-y+2z+5=0$. Најди ја:

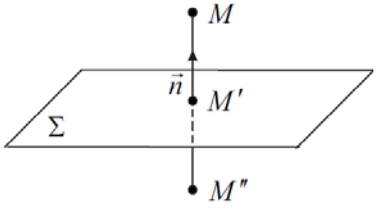
а) правата низ точката M нормална на рамнината Σ.

б) ортогонална проекција M' на точката M врз рамнината Σ.

в) точката M'' симетрична на точката M во однос на рамнината Σ.

Решение. а) Правата е паралелна на векторот $\vec{n}=(1,-1,2)$. Нејзината равенка е

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\Leftrightarrow\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{2}.$$



б) Го определуваме параметарот t, на тој начин што равенките правата ги сведуваме во параметарски вид $x=2+t$, $y=3-t$, $z=4+2t$, и ги заменуваме во равенката на рамнината $x-y+2z+5=0$.

$$(2+t)-3+t+2(4+2t)+5=0\Leftrightarrow$$
$$2+t-3+t+8+4t+5=0\Leftrightarrow 6t+12=0\Leftrightarrow t=-2$$

Координатите на ортогоналната проекција се $M'(0,5,0)$.

в) Нека $M''(x'',y'',z'')$ е симетричната точка. Според формулата за делење на отсечка во даден однос, имаме

$$0=\frac{2+x''}{2}\Leftrightarrow x''=-2,\ 5=\frac{3+y''}{2}\Leftrightarrow y''=7,\ 0=\frac{4+z''}{2}\Leftrightarrow z''=-4.$$

Следува симетричната точка е $M''(-2,7,-4)$.

Задача 3. Дадени се точката $M(2,3,4)$ и правата $p:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Најди ја:

а) рамнината низ точката M нормална на правата p.

б) ортогоналната проекција M' на точката M врз правата p.

в) точката M'' симетрична на M во однос на правата p.

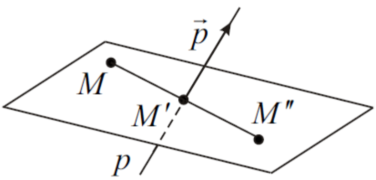
Решение. Правата е паралелна на векторот $\vec{n}=(3,2,1)$.

а) Равенката на рамнината што е нормална на векторот $\vec{n}$ и ја содржи точката M е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$3(x-2)+2(y-3)+(z-4)=0 \Leftrightarrow$$

$$3x-6+2y-6+z-4=0 \Leftrightarrow \; 3x+2y+z-16=0.$$



б) Ортогоналната проекција е пресек на правата чија равенка ја запишуваме во параметарски вид $x=3t+1$, $y=2t$, $z=t-1$ и рамнината $3x+2y+z-16=0$. Со замена на равенките на правата во рамнината го определуваме параметарот t,

$$3(3t+1)+2\cdot 2t+t-1-16=0 \Leftrightarrow$$

$$9t+3+4t+t-1-16=0 \Leftrightarrow 14t-14=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Следува $M'(4,2,0)$.

в) Нека $M''(x'',y'',z'')$ е симетричната точка. Од условот за делење на отсечка во даден однос, важи

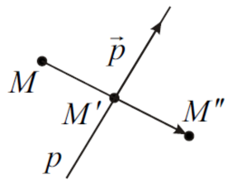
$$4=\frac{2+x''}{2} \Leftrightarrow x=6,\; 2=\frac{3+y''}{2} \Leftrightarrow y''=1,\; 0=\frac{4+z''}{2} \Leftrightarrow z''=-4.$$

Следува дека $M''(6,1,-4)$.

Задача 4. Најди ја симетричната точка на точката $M(2,3,4)$ во однос на правата

$$p: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Решение. Прв начин е да ја спроведеме постапката од претходната задача.



Втор начин. Правата е паралелна на векторот $\vec{p} = (3,2,1)$. Нека координатите на симетричната точка се $M''(x,y,z)$. Векторот $\overrightarrow{MM''} = (x-2, y-3, z-4)$ е нормален со векторот $\vec{p}$. Следува дека

$$\overrightarrow{MM''}\,\vec{p} = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)+2(y-3)+z-4=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z-16=0.$$

Средината на отсечката MM'', $M'\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z+4}{2}\right)$, лежи на правата, чии равенки во параметарски вид се $x = 3t+1$, $y = 2t$ и $z = t-1$. Следува дека

$$\frac{x+2}{2} = 3t+1,\ \frac{y+3}{2} = 2t,\ \frac{z+4}{2} = t-1 \Leftrightarrow$$

$$x+2 = 6t+2,\ y+3 = 4t,\ z+4 = 2t-2 \Leftrightarrow x = 6t,\ y = 4t-3,\ z = 2t-6.$$

Ако замениме во условот $3x+2y+z-16=0$, добиваме

$$18t+2(4t-3)+2t-6-16=0 \Leftrightarrow 18t+8t-6+2t-6-16=0 \Leftrightarrow$$

$$28t-28=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Оттука координатите на симетричната точка се $M''(6,1,-4)$.

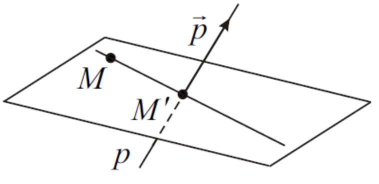
Задача 5. Напиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(1,-1,1)$ и е заемно нормална со правата $p: \begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$.

Решение. Нека $\vec{n} = (x,y,z)$ е нормалниот вектор на нормалата на правата p која минува низ точката M.

Равенките на правата p од општ вид ги сведуваме во каноничен

$$x=0,\ y-z+1=0 \Leftrightarrow x=0,\ y=z-1 \Leftrightarrow \frac{x}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}.$$

Следува дека правата p е паралелна на векторот $\vec{p}=(0,1,1)$.



Определуваме равенка на рамнина која е нормална на правата p и ја содржи точката M,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 0(x-1)+1(y+1)+1(z-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$y+z=0.$$

Го бараме пресекот P на правата $x=0$, $y=-1+t$, $z=t$ и рамнината $y+z=0$,

$$t-1+t=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.\ \text{Следува}\ P\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

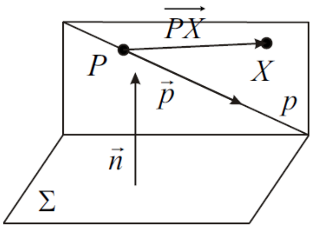
На крај, го определуваме векторот $\overrightarrow{PM}=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Big\|(2,-1,1)$.

Ги добивме сите податоци потребни за определување на равенката на нормалата,

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

Задача 6. Дадена е правата $p:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ и рамнината $\Sigma: x-y+2z+5=0$. Најди ја проекцијата p' на правата p врз рамнината Σ.

Решение. Прв начин. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p}=(3,2,1)$ и ја содржи точката $P(1,0,-1)$, а рамнината Σ е нормална на векторот $\vec{n}=(1,-1,2)$.



Равенката на проектирачката рамнина е

$$\left(\overrightarrow{PX},\vec{p},\vec{n}\right)=0 \iff \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \iff$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\iff 5(x-1)-5y-5(z+1)=0\ /:5 \iff$$

$$x-1-y-z-1=0 \iff x-y-z-2=0\,.$$

Оттука равенките на проекцијата p' се $\begin{cases} x-y+2z+5=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$.

Втор начин. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p}=(3,2,1)$ и ја содржи точката $P(1,0,-1)$, а рамнината Σ е нормална на векторот $\vec{n}=(1,-1,2)$. Еден нормален вектор на проектирачката рамнина е векторскиот производ на векторите $\vec{p}$ и $\vec{n}$,

$$\vec{p}\times\vec{n}=\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)=(5,-5,-5)=5(1,-1,-1)\,.$$

Бидејќи проектирачката рамнина ја содржи точката P, нејзината равенка е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \iff$$

$$x-1-y-(z+1)=0 \iff x-y-z-2=0\,.$$

Следува дека равенките на проекцијата p' се $\begin{cases} x-y+2z+5=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$.

Трет начин. Ја бараме пресечната точка Q на правата p и рамнината Σ. Параметарските равенки на правата p се, $x=3t+1$, $y=2t$, $z=t-1$. Со замена во равенката на рамнината добиваме

$$3t+1-2t+2(t-1)+5=0 \Leftrightarrow 3t+4=0 \Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}.$$

Следува дека координатите на пресечната точка се

$$x=3\left(-\frac{4}{3}\right)+1=-3,\ y=2\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{3},\ z=-\frac{4}{3}-1=-\frac{7}{3}.$$

Ја бараме ортогоналната проекција P' на точката P врз рамнината Σ. Правата што минува низ точката P и е нормална на рамнината има равенка

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2} \Leftrightarrow$$
$$x=t+1,\ y=-t,\ z=2t-1.$$

Со замена во равенката на рамнината го определуваме параметарот t,

$t+1+t+2(2t-1)+5=0 \Leftrightarrow 6t+4=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$. Значи $P'\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{7}{3}\right)$.

Векторот

$$\overrightarrow{PP'}=\left(\frac{1}{3}+3,\frac{2}{3}+\frac{8}{3},-\frac{7}{3}+\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3},0\right)\Big\|(1,1,0).$$

Следува дека равенката на ортогоналната проекција е

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x+3}{1}=\frac{y+\frac{8}{3}}{1}=\frac{z+\frac{7}{3}}{0}.$$

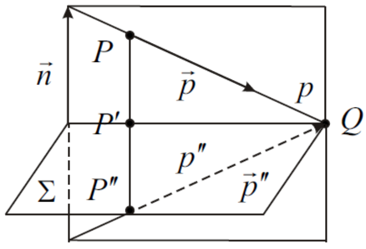
Задача 7*. Најди ја симетричната права на правата $p:\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ во однос на рамнината $\Sigma: x-y+3z+8=0$.

Решение. Прво ја наоѓаме пресечната точка Q на правата и рамнината.

Равенките на правата во параметарски вид се $x=4t$, $y=3t+4$, $z=-2t-1$. Параметарот t е

$$4t-(3t+4)+3(-2t-1)+8=0 \Leftrightarrow 4t-3t-4-6t-3+8=0 \Leftrightarrow$$
$$-5t+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{5}.\text{ Следува } Q\left(\frac{4}{5},\frac{23}{5},-\frac{7}{5}\right).$$

Ја наоѓаме симетричната точка на точката $P(0,4,-1)$ во однос на рамнината $\sum$, чиј нормален вектор е $\vec{n}=(1,-1,3)$.



Правата што е нормална на рамнината $\sum$ и ја содржи точката P има равенка

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{3} \Leftrightarrow x=t\ ,\ y=-t+4,$$
$$z=3t-1.$$

Ортогоналната проекција на точката P врз рамнината $\sum$, ја добиваме за следната вредност на параметарот t,

$$t-(-t+4)+3(3t-1)+8=0 \Leftrightarrow t+t-4+9t-3+8=0 \Leftrightarrow 11t+1=0 \Leftrightarrow$$
$$t=-\frac{1}{11}.$$

Нејзините координати се $P'\left(-\frac{1}{11},\frac{45}{11},-\frac{14}{11}\right)$. Нека координатите на симетричната точка се $P''(x,y,z)$. Од условот $\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{P'P''}$ добиваме

$$-\frac{1}{11}=x+\frac{1}{11} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{11},\ \frac{1}{11}=y-\frac{45}{11} \Leftrightarrow$$
$$y=\frac{46}{11},\ -\frac{3}{11}=z+\frac{14}{11} \Leftrightarrow z=-\frac{17}{11}.\ \text{Значи, } P''\left(-\frac{2}{11},\frac{46}{11},-\frac{17}{11}\right).$$

Векторот

$$\overrightarrow{P''Q}=\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{11},\frac{23}{5}-\frac{46}{11},-\frac{7}{5}-\frac{17}{11}\right)=$$
$$\left(\frac{44+10}{55},\frac{253-230}{55},\frac{-77+85}{55}\right)=\left(\frac{54}{55},\frac{23}{55},\frac{8}{55}\right)\|(54,23,8).$$

Конечно, симетричната права е правата што е паралелна на векторот $(54,23,8)$ и ја содржи точката Q,

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x-\frac{4}{5}}{54}=\frac{y-\frac{23}{5}}{23}=\frac{z+\frac{7}{5}}{8}.$$

5.7. Задачи за вежбање

5. Аналитичка геометрија

5.1. Рамнина

Задача 1. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M\left(-7,-2,-1\right)$ и е нормална на векторот $\vec{n}=\left(3,-7,2\right)$.

Задача 2. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M\left(-3,2,-1\right)$ и е нормална на z -оската.

Задача 3. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M\left(-2,6,-4\right)$ и е паралелна со рамнината $x-2y+2z-4=0$.

Задача 4. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M\left(-2,6,-4\right)$ и е паралелна со xOy рамнината.

Задача 5. Равенката на рамнината $2x+2y-z-5=0$ напиши ја во сегментен вид.

Задача 6. Напиши ги векторските и параметарските равенки на рамнината $2x+2y-z-5=0$.

Задача 7. Напиши ја

1) векторската 2) скаларната

равенка на рамнината што минува низ точката $M\left(5,4,-1\right)$ и е нормална на векторот $\vec{n}=\left(1,-7,2\right)$.

Задача 8. Дадена е точката $M\left(-2,-1,6\right)$. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката M, а на координатните оски отсекува сегменти a, b и c, така што $a:b:c=4:-2:3$.

Задача 9. Најди го волуменот на тетраедарот ограничен со координатните рамнини и рамнината $3x+4y+6z-12=0$.

Задача 10. Равенката на рамнината $2x+2y-z-5=0$ напиши ја во нормален вид.

Задача 11. Скицирај ги рамнините

а) $z-1=0$; б) $3x-2=0$; в) $x+y-z=0$.

Задача 12. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точките $A\left(1,1,2\right)$, $B\left(1,-2,-2\right)$ и $C\left(-2,3,1\right)$.

Задача 13. Провери дали точките $A(0,0,1)$ и $B(3,-2,0)$ лежат на рамнината $2x+2y-z+1=0$.

Задача 14-15. Провери дали точките:

1) $A(0,0,1)$, $B(3,-2,0)$, $C(4,6,-9)$ и $D(-1,0,2)$;

2) $A(0,0,1)$, $B(3,-2,0)$, $C(4,6,-9)$ и $D(1,0,2)$;

лежат во една рамнина. Во случај на потврден одговор, најди ја равенката на рамнината во која лежат.

Задача 16. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(3,3,2)$ и е паралелна со векторите $\vec{a}=(-1,0,-5)$ и $\vec{b}=(1,-1,-2)$.

Задача 17. Напиши ја равенката на рамнината што ги содржи точките $A(-2,4,1)$ и $B(2,-1,1)$ и е нормална на рамнината $3x-2y+3z-4=0$.

Задача 18. Напиши ја равенката на рамнината што ја содржи точката $M(1,-1,2)$ и е нормална на рамнините $x-2y+2z-4=0$ и $x+2y-3z-5=0$.

Задача 19. Дадени се точките $A(-2,4,1)$ и $B(2,-1,1)$. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ средината на отсечката $\overrightarrow{AB}$ и е нормална $\overrightarrow{AB}$.

Задача 20. Напиши ја равенката на рамнината што е поставена нормално на векторот $\vec{n}=(2,-2,-1)$, така што векторот е насочен кон рамнината и е на растојание 5 единици од координатниот почеток.

Задача 19. Во снопот рамнини определен со рамнините $\Sigma: 2x+y-3z+2=0$ и $\prod: 25x+5y-48z+31=0$, определи две нормални една на друга рамнини, од кои едната минува низ точката $M(4,-3,1)$.

Задача 20-21. Дадена е рамнината $x+2y-3z+2=0$. Провери дали точките A и B лежат на иста или на различна страна од рамнината, ако

1) $A(3,2,1)$ и $B(1,1,-1)$ 2) $A(2,3,5)$ и $B(4,1,1)$.

Задача 22. Провери дали рамнината $4x-2y+3z-7=0$ ги сече страните на триаголникот ABC, ако $A(4,-3,2)$, $B(3,-1,7)$ и $C(-2,1,-5)$.

5.2. Права

Задача 1. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $P(1,-2,2)$ и е паралелна на векторот $\vec{p}=(2,-3,3)$.

Задача 2. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $P(-2,3,1)$ и е паралелна на y-оската.

Задача 3. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $P(3,2,-1)$ и е паралелна со правата $\frac{x+7}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-3}{2}$.

Задача 4. Напиши ја равенката на правата што минува низ точките $P(-5,6,1)$ и $Q(7,9,-1)$.

Задача 5. Најди ги:

а) векторските; б) каноничните; в) параметарските; равенки на правата што минува низ точката $M(3,1,2)$ и е нормална на рамнината $x+2y+z-1=0$.

Задача 6. Равенките на правата $\frac{x+7}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-3}{2}$ запиши ги во параметарски вид.

Задача 7-8. Напиши ги равенките на правата p во каноничен вид ако:

7) $p: x=-7t+1,\ y=3t-2,\ z=5$; 8) $p: x=0,\ y+2z-1=0$;

Задача 14-16. Напиши ги равенките на правата p во каноничен вид ако:

1) $p:\begin{cases}2x+3y-z=9\\ x-y+3z=8\end{cases}$; 2) $p:\begin{cases}2x+y+z+2=0\\ x+2y-z+1=0\end{cases}$.

Задача 17-18. Равенките на правата p запиши ги во проекции, ако:

1) $p:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{1}$; 2) $\begin{cases}2x-3y+4z-7=0\\ 3x-y-z+19=0\end{cases}$.

Задача 19. Најди паралелен вектор на правата

$$\begin{cases}2x-3y+4z-7=0\\ 3x-y-z+19=0\end{cases}.$$

Задача 20. Најди точка што лежи на правата

$$\begin{cases} 2x-3y+4z-7=0 \\ 3x-y-z+19=0 \end{cases}.$$

Задача 21. Провери дали правата $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1}$ минува низ точката

1) $M(1,3,-1)$; 2) $N(-2,1,1)$.

Задача 22. Провери дали точките

$$M(3,0,1),\ N(0,2,4) \text{ и } P\left(1,\frac{4}{3},3\right)$$

лежат на една права.

Задача 23. Покажи дека правата $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{3}$ лежи во рамнината $x+y-z-6=0$.

Задача 24. Дадени се темињата на триаголникот ABC: $A(1,-2,-4)$, $B(3,1,-3)$, $C(5,1,-7)$. Напиши ги равенките на правата конструирана над висината повлечена од темето B.

Задача 25. Дадени се темињата на тристраната пирамида $ABCD$: $A(2,2,3)$, $B(1,-1,0)$, $C(1,2,1)$ и $D(2,2,0)$. Напиши ги равенките на правата конструирана над висината спуштена од темето D.

5.3. Заемен однос, сечење

Задача 1-3. Најди ја пресечната точка, ако постои, на рамнините:

1) $x+2y+z-4=0$, $3x-5y+3z-1=0$ и $2x+7y-z-8=0$

2) $2x-y+z+2=0$, $x+2y+3z+1=0$ и $x-3y-2z-3=0$

2) $2x-y+2z=0$, $3x+3z+1=0$ и $x-2y+z-1=0$.

Задача 4-5. Провери дали правите p и q се заемно нормални, ако:

1) $p:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$ и $q:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$

2) $p:\begin{cases} 3x+2y+3z-5=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$ и $q:\begin{cases} x=2t+3 \\ y=t-4 \\ z=-3t+2 \end{cases}$.

Задача 6-7. Најди го прободот на правата p врз рамнината $\sum$ ако:

$$1)\ p:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2} \text{ и } \sum: x-2y+z-1=0;$$

$$2)\ p: x+1=\frac{y-2}{2}=z-1 \text{ и } \sum: x+y+z+4=0.$$

Задача 8. Најди го прободот на правата што минува низ точките $P(-3,3,2)$ и $Q(-1,-1,0)$ врз рамнината $x-2y+z-1=0$.

Задача 9. Определи ги равенките на правата што минува низ пресечните точки на правите $p:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{4}$ и $q: x=2y=3z$ со рамнината $\sum: 2x+3y+z+1=0$.

Задача 10-12. Најди ја равенката на правата p што минува низ точката P, нормална е на правата q и паралелна со рамнината $\sum$, ако:

$$1)\ P(1,-2,3),\ q:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2} \text{ и } \sum: x+y-z+2=0;$$

$$2)\ P(1,-2,3),\ q:\begin{cases}2x+3y-z=9\\ x-y+3z=8\end{cases} \text{ и } \sum: x+y-z+2=0;$$

$$3)\ P(2,-1,1),\ q:\begin{cases}3x+2y+3z-5=0\\ x+y+z-4=0\end{cases} \text{ и } x-y+z=2.$$

Задача 13. Напиши ги равенките на правата што минува низ пресечната точка на рамнините

$$x-2y+z=0,\ 3x-z=0 \text{ и } 3x-y=1,$$

нормална е на правата $x=t+1$, $y=-2t-2$, $z=2t$ и е паралелна со рамнината $x+y-z+2=0$.

Задача 14-15. Најди ја равенката на рамнината која е паралелна со правата p и ја содржи правата q, ако:

$$14)\ p:\begin{cases}x=4t-5\\ y=7t+2\\ z=2t+1\end{cases} \text{ и } q:\begin{cases}x=2t+3\\ y=t-4\\ z=-3t+2\end{cases};$$

$$15)\ p:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2} \text{ и } q:\begin{cases}3x+2y+3z-5=0\\ x+y+z-4=0\end{cases}.$$

Задача 16-18. Напиши ја равенката на рамнината која минува низ точката M и правата p, ако:

$$1)\ M(5,2,3) \text{ и } p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{3};$$

$$2)\ M(-3,0,2) \text{ и } p: \begin{cases} 3x+2y+3z-5=0 \\ x+y+z-4=0 \end{cases};$$

$$3)\ M(-3,1,2) \text{ и } p:\ x=t+1,\ y=-2t+2,\ z=3t-7.$$

Задача 19. Напиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(-3,0,2)$ и е паралелна со правите

$$\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3} \text{ и } \frac{x}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{2}.$$

Задача 20. Напиши ја равенката на рамнината во која лежат паралелните прави

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2} \text{ и } \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}.$$

Задача 21. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ правата $p: \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$ и на y и z-оските отсекува еднакви ненулти отсечоци.

Задача 22-24. Испитај дали правите p и q се сечат, ако

$$1)\ p: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4} \text{ и } q: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3};$$

$$2)\ p: \begin{cases} 4x+z-1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases} \text{ и } q: \begin{cases} 3x+y-z+4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases};$$

$$3)\ p:\ x=2t+2,\ y=4t+1,\ z=-t-1 \text{ и}$$
$$q:\ x=3k-31,\ y=2k+6,\ z=6k+3.$$

Задача 25. Определи го параметарот a така што правата $\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 2x-3y-z+a=0 \end{cases}$ да ја сече z-оската.

Задача 27. Определи го параметарот a така што правите

$$p: \frac{x-2}{a} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ и } q: \begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$$

да се сечат, а потоа за тие вредности на a, најди ја пресечната точка и равенката на рамнината во која лежат.

Задача 28. Најди ги равенките на правата p што минува низ точката P, паралелна е со рамнината Σ и ја сече правата q, ако:

1) $P(1,-2,1)$, $\Sigma: 2x-y+z=7$ и $q: \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-6}{2}$;

2) $P(1,0,7)$, $\Sigma: 3x-y+2z-15=0$ и $q: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$.

Задача 29. Напиши ја равенката на правата која минува низ координатниот почеток и е нормална и ја сече правата $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Задача 30. Најди ги равенките на правата која е паралелна со рамнините $\sum: 3x+12y-3z-5=0$ и $\prod: 3x-4y+9z+7=0$ и ги сече правите

$p: \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$ и $q: \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$.

Задача 31-32. Најди ги равенките на заедничката нормала на правите p и q, ако:

1) $p: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{1}$ и $q: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$;

2) $p: x=3t-1$, $y=2t+1$, $z=t-2$ и $q: 6x=3y=2z$.

5.4. Аīол

Задача 1-2. Најди го косинусот од аголот меѓу рамнините $\sum$ и $\prod$, ако:

1) $\sum: 2x-y+2z-1=0$ и $\prod: x+y+4z-5=0$;

2) $\sum: 2x-y+2z-1=0$ и $\prod: 4x-2y+4z-5=0$.

Задача 3-4. Најди го синусот од аголот меѓу правата p и рамнината $\sum$, ако

1) $p: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$ и $\sum: 2x-y+z-5=0$;

2) $p: \begin{cases} y=2 \\ x-z=0 \end{cases}$ и $\sum: x=1$.

Задача 5. Најди го аголот меѓу правата $x = y - 2$, $2x = z$ и рамнината што минува низ точката $M(2,3,4)$ и е паралелна со правите $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$.

Задача 6-9. Најди го косинусот од аголот меѓу правите p и q, ако:

$$1)\ p: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2} \text{ и } q: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{-2};$$

$$2)\ p: \begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0 \\ x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \text{ и } q: \begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0 \end{cases};$$

$$3)\ p:\ x = 0,\ y = 0 \text{ и } q:\ x = 2,\ y = -1;$$

$$4)\ p: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{2} \text{ и } q: \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}.$$

Задача 10. Најди го аголот меѓу правата

$$x = 2z - 1,\ y = -2z + 1;$$

и правата која минува низ координатниот почеток и низ точката $P(1,-1,-1)$.

Задача 11. Напиши ги равенките на правата, што минува низ точката $M(1,-5,3)$, и со координатните оски x, y и z, соодветно зафаќа агли $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{2\pi}{3}$.

Задача 12. Пресметај ги косинусите на аглите што правата $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$ ги гради со координатните оски.

Задача 13. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точките $A(0,0,1)$ и $B(3,0,0)$, и со xOy рамнината зафаќа агол $\frac{\pi}{3}$.

Задача 14. Во равенката на рамнината $\sum$: $x + y + az - 5 = 0$, определи го параметарот a, така што низ x-оката да може да се постави само една рамнина $\prod$, која со рамнината $\sum$ ќе образува агол од $30°$.

5.5. Растојание

Задача 1. Најди го растојанието од точката $M(2,-5,4)$ до рамнината $x-2y-2z+4=0$.

Задача 2. Најди го растојанието меѓу паралелните рамнини $x+2y-z-8=0$ и $x+2y-z-2=0$.

Задача 3. Најди го растојанието меѓу правата $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ и рамнината $2x+y=0$.

Задача 4-5. Најди го растојанието од точката M до правата p, ако:

$$1)\ M(3,5,4),\ p:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2};$$

$$2)\ M(3,5,4),\ p:4x-2y-z-4=0,\ x+z-15=0.$$

Задача 6. Најди го растојанието меѓу паралелните прави

$$p:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2} \text{ и } q:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

Задача 7-9. Најди го растојанието меѓу разминувачките прави p и q, ако

$$1)\ p:\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{2} \text{ и } q:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{4}.$$

$$2)\ p:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-2} \text{ и } q:x+y=0,\ z=2$$

$$3)\ p:\begin{cases}3x+y-z+1=0\\x-y+2z-7=0\end{cases} \text{ и } q:\begin{cases}x=3t+2\\y=-t+1\\z=-2t-2\end{cases}.$$

Задача 10-11. Во зависност од параметарот a, да се определи растојанието меѓу правите:

$$1)\ p:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1} \text{ и } q:ax-y=0,\ z=0;$$

$$2)\ p:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1} \text{ и } q:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-7}{a}.$$

Задача 12-13. Провери дали точките A и B лежат на исти или на различни страни од рамнината $x+3y-3z+2=0$, ако:

1) $A(3,2,1)$, $B(1,1,-1)$ 2) $A(2,3,5)$, $B(4,1,1)$.

Задача 14. На правата $\begin{cases} 5x+3y-1=0 \\ 2x+3z+5=0 \end{cases}$ најди точка еднакво оддалечена од рамнините $3x+3y-2=0$ и $4x+y+z+4=0$.

Задача 15. Состави равенка на рамнина $\sum$, која паралелна на рамнината $\prod$: $x+3y-4z-2=0$ и е на растојание 7 единици од неа.

Задача 16. Дадена е правата $p: \dfrac{x-8}{8}=\dfrac{y-2}{-6}$, $z=0$ и точката $A(8,2,0)$ од правата. Најди ги точките на правата p, оддалечени за 10 единици од точката A.

Задача 17. Две страни на една коцка лежат на рамнините

$$6x-18y-9z-5=0 \text{ и } 4x-12y-6z-7=0.$$

Пресметај го волуменот на коцката.

<u>5.6. Симетрични точки</u>

Задача 1. Најди ја симетричната точка на точката $M(1,-2,1)$, во однос на точката $M'(-2,5,4)$.

Задача 2-3. Најди ги координатите на ортогоналната проекција на точката M врз рамнината $\sum$, ако

2) $M(2,-3,5)$ и $\sum: x+2y-2z-4=0$;

3) $M(2,3,4)$ и $\sum: x-y+2z+5=0$.

Задача 4. Дадена е точката $M(3,0,1)$ и рамнината $\Sigma: 2x-y+z+2=0$. Најди ја:

а) правата низ точката M нормална на рамнината Σ.

б) ортогонална проекција M' на точката M врз рамнината Σ.

в) точката M'' симетрична на точката M во однос на рамнината Σ.

Задача 5. Најди ги координатите на симетричната точка на точката $M(3,4,7)$ во однос на рамнината $2x-y+z+9=0$.

Задача 6-7. Најди ги координатите на ортогоналната проекција на точката A врз правата p, ако:

6) $A(1,2,8)$ и $p: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$;

7) $A(1,2,8)$ и $p: x=3z+2$, $y=2z$.

Задача 8. Напиши ја равенката на нормалата спуштена од точката $M(1,0,1)$ на правата $p:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$.

Задача 9. Дадени се точката $M(2,3,4)$ и правата

$p:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Најди ја:

а) рамнината низ точката M нормална на правата p.

б) ортогоналната проекција M' на точката M врз правата p.

в) точката M'' симетрична на точката M во однос на правата p.

Задача 10. Најди ја симетричната точка на точката $A(2,1,0)$ во однос на правата $\frac{x-6}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$.

Задача 11-13. Дадена е правата p и рамнината Σ. Најди ја проекцијата p' на правата p врз рамнината Σ, ако

11) $p:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ и $\Sigma: x-y+2z+5=0$

12) $p:\ \begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x+2y-z+4=0 \end{cases}$ и $\Sigma: 2x-4y+z-2=0$

13) $p:\ x=5t+3,\ y=t-1,\ z=t+4$ и $\Sigma: 2x-2y+3z+5=0$.

Задача 14. Најди ја симетричната права на правата $p:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$ во однос на рамнината $\sum: x-y+2z+1=0$.

Задача 15-16*. На рамнината $\sum$, најди точка M, таква што збирот од растојанијата до точките A и B да биде најмал, ако

1) $\sum: x+2y-3z+2=0$, $A(2,3,5)$ и $B(4,1,1)$;

2) $\sum: z=1$, $A(-1,4,3)$ и $B(5,1,2)$.

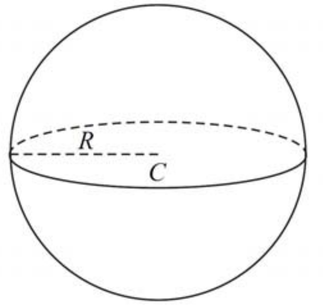
6. ПОВРШИНИ

6.1. ПОВРШИНИ ОД ВТОР РЕД

6.1.1. СФЕРА

Задача 1. Најди го центарот и радиусот на сферата
$$3x^2+3y^2+3z^2+12y-18z+19=0.$$

Решение. Ја сведуваме равенката на сферата од општ во каноничен вид



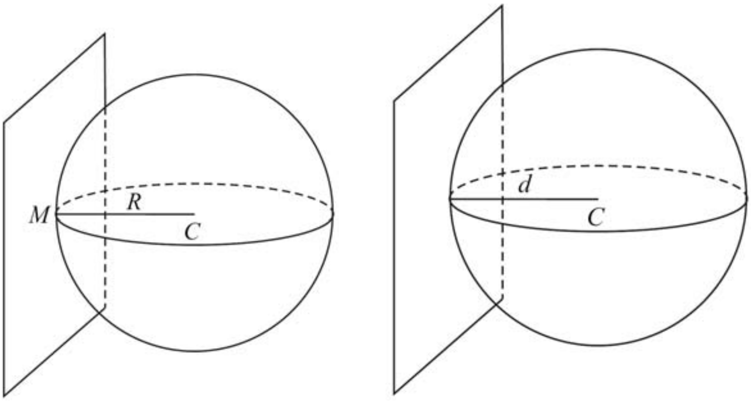
$$3x^2+3y^2+3z^2+12y-18z+30=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2+4y-6z+10=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-1+(y+2)^2-4+(z-3)^2-9+10=0 \Leftrightarrow$$
$x^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Следува дека центарот е $C(0,-2,3)$, а радиусот е $R=2$.

Задача 2. Најди ја равенката на сферата со центар во точката $C(3,-2,0)$ и радиус $R=4$.

Решение. Равенката на сферата со центар $C(3,-2,0)$ и радиус $R=4$ е
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2+z^2=16.$$

Задача 3. Најди ја равенката на сферата што има центар во точката $C(1,3,-2)$ и ја допира рамнината $x+y-z+2=0$.

Решение. Радиусот на сферата е еднаков на растојанието од центарот на сферата до рамнината, $d=R$. Растојанието е
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Leftrightarrow d=\frac{|1+3+2+2|}{\sqrt{1+1+1}} \Leftrightarrow d=\frac{8}{\sqrt{3}}.$$
Тогаш, равенката на сферата е
$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=\frac{64}{3}.$$



Задача 4. Определи ја равенката на рамнината што ја допира сферата $x^2+y^2+z^2-8x+2y-2z+9=0$ во точката $M(2,1,2)$.

Решение. Ја сведуваме равенката на сферата во облик

$$(x-4)^2-16+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1+9=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-4)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$$

Следува сферата има центар во точката $C(4,-1,1)$.

Нормалниот вектор на рамнината е векторот $\overrightarrow{MC}=(2,-2,-1)$. Затоа нејзината равенка е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$

$$2(x-2)-2(y-1)-(z-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$2x-4-2y+2-z+2=0 \Leftrightarrow 2x-2y-z=0.$$

Задача 5. Напиши ја равенката на сферата што минува низ точките $A(2,-1,3)$, $B(3,2,-1)$, $C(2,3,4)$ и $D(-3,-2,5)$.

Решение. Каноничната равенка на сферата е

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

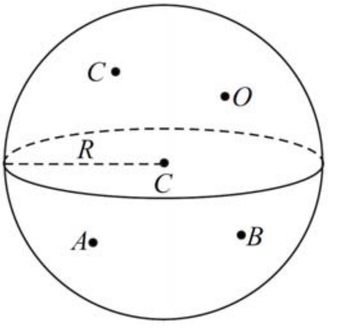
Бидејќи точките A, B, C и O лежат на сферата, исполнет е системот равенки

$$(2-x_0)^2+(1+y_0)^2+(3-z_0)^2=R^2 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2-4x_0+2y_0-6z_0+14=R^2,$$

$$(3-x_0)^2+(2-y_0)^2+(1+z_0)^2=R^2 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2-6x_0-4y_0+2z_0+14=R^2,$$
$$\left(2-x_0\right)^2+\left(3-y_0\right)^2+\left(4-z_0\right)^2=R^2 \Leftrightarrow$$
$$x_0^2+y_0^2+z_0^2-4x_0-6y_0-8z_0-29=R^2$$
$$\left(3+x_0\right)^2+\left(2+y_0\right)^2+\left(5-z_0\right)^2=R^2 \Leftrightarrow$$
$$x_0^2+y_0^2+z_0^2+6x_0+4y_0-10z_0-38=R^2.$$



Ако од четвртата равенка ги одземеме првите три, добиваме

$$10x_0+2y_0-4z_0-52=0 \Leftrightarrow 5x_0+y_0-2z_0=26,$$
$$12x_0+8y_0-12z_0-52=0 \Leftrightarrow 3x_0+2y_0-3z_0=13,$$
$$10x_0+10y_0-2z_0-9=0 \Leftrightarrow 10x_0+10y_0-2z_0=9.$$

Од првата равенка $y_0=26-5x_0+2z_0$, од каде

$$3x_0+52-10x_0+4z_0-3z_0=13 \Leftrightarrow -7x_0+z_0=-39 \Leftrightarrow z_0=-39+7x_0$$
$$10x_0+260-50x_0+20z_0-2z_0=9 \Leftrightarrow -40x_0+18z_0=-251$$

Оттука $-40x_0-702+126x_0=-251 \Leftrightarrow 86x_0=451 \Leftrightarrow x_0=\frac{451}{86}$, од каде

$$z_0=-39+\frac{3157}{86}=-\frac{197}{86},\ y_0=26-\frac{2255}{86}-\frac{394}{86}=-\frac{413}{86};\text{ и}$$
$$R^2=\left(2-\frac{451}{86}\right)^2+\left(1-\frac{413}{86}\right)^2+\left(3+\frac{413}{86}\right)^2=\frac{635011}{7396}.$$

Значи равенката на сферата е

$$\left(x-\frac{451}{86}\right)^2+\left(y+\frac{413}{86}\right)^2+\left(z+\frac{197}{86}\right)^2=\frac{635011}{7396}.$$

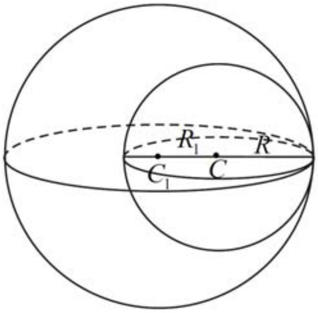
Задача 6. Напиши ја равенката на сферата која има центар во точката $C(2,6,0)$ и ја допира одвнатре сферата $S_1: x^2+y^2+z^2-8x-10y+4z+20=0$.

Решение. Каноничната равенка на сферата S_1 е

$$(x-4)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=25.$$

Оттука ги добиваме нејзиниот центар $C_1(4,5,-2)$ и радиус $R_1=5$.

Бидејќи $(2-4)^2+(6-5)^2+2^2=9<25$, точката C навистина лежи во внатрешноста на сферата S_1.



Сферите се допираат одвнатре ако $\left|\overrightarrow{CC_1}\right| = R_1 - R$, каде R е радиусот на бараната сфера.

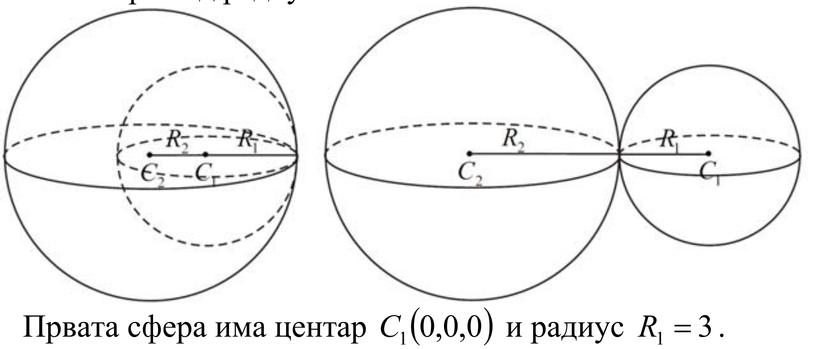
Имаме $\overrightarrow{CC_1} = (2,-1,-2)$ и $\left|\overrightarrow{CC_1}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$, од каде

$$\left|\overrightarrow{CC_1}\right| = R_1 - R \Leftrightarrow 3 = 5 - R \Leftrightarrow R = 2.$$

Следува дека равенката на сферата е $(x-2)^2 + (y-6)^2 + z^2 = 4$.

Задача 7. Покажи дека сферите $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0$ се допираат, определи ги координатите на допирната точка и најди ја равенката на нивната заедничка тангентна рамнина.

Решение. Сферите се допираат одвнатре ако растојанието меѓу центрите на сферите е еднакво на разликата од нивните радиуси, или се допираат однадвор ако растојанието меѓу центрите е еднакво на збирот од радиусите.



Првата сфера има центар $C_1(0,0,0)$ и радиус $R_1 = 3$.

За да го одредиме радиусот и центарот на втората сфера најпрво нејзината равенка ја сведуваме во каноничен вид,

$$x^2+y^2+z^2-8x+4y+8z-45=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-4)^2-16+(y+2)^2-4+(z+4)^2-16-45=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-4)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=81$$

Значи втората сфера има центар $C_2(4,-2,-4)$ и радиус $R_2=9$. Векторот $\overrightarrow{C_1C_2}=(4,-2,-4)\|(2,-1,-2)$. Растојанието меѓу центрите на сферите е

$$\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right|=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=6.$$

Бидејќи растојанието меѓу центрите е еднакво на разликата од радиусите, заклучуваме дека сферите се допираат.

Пресечната точка ја наоѓаме како пресек на правата низ точките C_1 и C_2,

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-2} \Leftrightarrow x=2t,\ y=-t,\ z=-2t$$

и една од сферите, на пример $x^2+y^2+z^2=9$.

$$(2t)^2+(-t)^2+(-2t)^2=9 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow t=\pm 1$$

За вредноста на параметарот $t=1$ ја добиваме точката $P_1(2,-1,2)$, а за $t=-1$, ја добиваме точката $P_2(-2,1,-2)$. Точката $P_1(2,-1,2)$ од првата сфера лежи и на втората сфера, ако

$$(2-4)^2-16+(-1+2)^2-4+(-2+4)^2=81 \Leftrightarrow 9=81$$

што не е исполнето. Затоа пресечната точка на сферите е $P_2(-2,1,2)$. Навистина

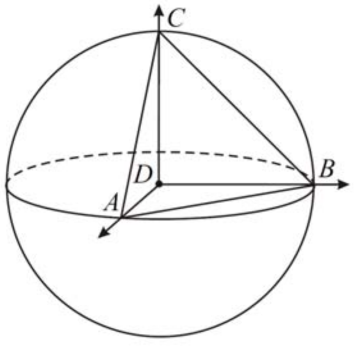
$$(-2-4)^2-16+(1+2)^2-4+(2+4)^2=81 \Leftrightarrow 81=81.$$

На крај ја одредуваме равенката на заедничката тангентна рамнина, која е нормална на векторот $\overrightarrow{C_1C_2}$ и ја содржи точката P_2,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 2(x+2)-(y-1)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$2x+4-y+1-2z+4=0 \Leftrightarrow 2x-y-2z+9=0.$$

Задача 8. Напиши ја равенката на сферата опишана околу тетраедарот чии темиња се во точките
$$A(2,0,0),\ B(0,5,0),\ C(0,0,3) \text{ и } D(0,0,0).$$

Решение. Во задачава треба да најдеме равенка на сфера
$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=R^2,$$
што содржи четири точки.



Бидејќи точките A, B, C и D лежат на сферата, важи
$$\begin{cases}(2-p)^2+q^2+r^2=R^2\\ p^2+(5-q)^2+r^2=R^2\\ p^2+q^2+(3-r)^2=R^2\\ p^2+q^2+r^2=R^2\end{cases}.$$

Ако од втората третата и четвртата равенка на системот ја одземеме првата равенка добиваме
$$(2-p)^2-p^2=0 \Leftrightarrow 4-4p+p^2-p^2=0 \Leftrightarrow 4=4p \Leftrightarrow p=1,$$
$$(5-q)^2-q^2=0 \Leftrightarrow 25-10q+q^2-q^2=0 \Leftrightarrow 25=10q \Leftrightarrow q=\frac{5}{2} \text{ и}$$
$$(3-r)^2-r^2=0 \Leftrightarrow 9-6r+r^2-r^2=0 \Leftrightarrow 9=6r \Leftrightarrow r=\frac{3}{2}.$$

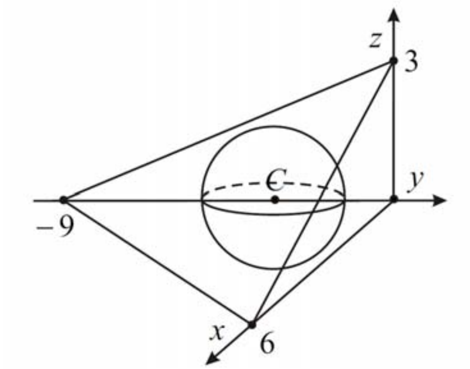
Значи центарот на сферата е $C\left(1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$. Ако неговите координати ги замениме во четвртата равенка од системот, го добиваме радиусот
$$p^2+q^2+r^2=R^2 \Leftrightarrow 1^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=\frac{19}{2}.$$

Па, равенката на сферата е $(x-1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{19}{2}$.

Задача 9. Напиши ја равенката на сферата впишана во тетраедарот што го заградуваат рамнините $3x-2y+6z-18=0$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$.

Решение. Ако ја запишеме равенката на првата рамнина во сегментен вид, $\frac{x}{6}+\frac{y}{-9}+\frac{z}{3}=1$, ќе утврдиме дека отсечоците на координатните оски се $6, -9$ и 3.

Оттука, заклучуваме дека ако центарот на сферата е точката $C(x_0,y_0,z_0)$, тогаш $x_0>0$, $y_0<0$ и $z_0>0$.



Растојанието од центарот C до секоја од рамнините е еднакво на радиусот на сферата. Ако ја примениме формулата за растојание од точката C до секоја од рамнините добиваме

$$R=|x_0|=|y_0|=|z_0|=\frac{|3x_0-2y_0+6z_0-18|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}},$$

од каде имајќи го предвид првиот заклучок имаме

$$x_0=R,\ y_0=-R,\ z_0=R \text{ и}$$

$$R=\frac{|3R-2(-R)+6R-18|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} \Leftrightarrow R=\frac{|11R-18|}{7} \Leftrightarrow 7R=|11R-18|$$

Ако $7R=11R-18$ тогаш $R=\frac{9}{2}$, што не е можно бидејќи дијаметарот на сферата е помал од отсечокот на z-оската. Значи $7R=-(11R-18)$ односно $R=1$. Следува дека равенката на сферата е

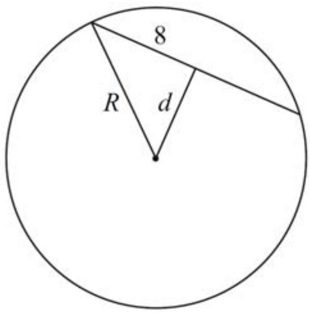
$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1.$$

Задача 10. Напиши ја равенката на сферата чиј центар е во точката $C(2,3,-1)$ и која од правата $p:\ 5x-4y+3z+20=0$, $3x-4y+z-8=0$, отсекува тетива со должина 16 единици.

Решение. Правата е паралелна на векторот

$$\left(\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -4 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5 & -4\\ 3 & -4\end{vmatrix}\right)=(8,4,-8)\|(2,1,-2)=\vec{p}\,.$$

Избираме една точка од правата. За $x=0$ добиваме $-4y+3z+20=0$ и $-4y+z-8=0$. Ако од првата равенка ја одземеме втората, имаме $2z+28=0$, односно $z=-14$. Оттука $-4y-22=0$ или $y=-\dfrac{11}{2}$. Значи, точката е $P\left(0,-\dfrac{11}{2},-14\right)$.



Векторот $\overrightarrow{PC}=\left(2,\dfrac{17}{2},13\right)=\dfrac{1}{2}(4,17,26)$. Растојанието од центарот на сферата до правата p е $d=\dfrac{\left|\vec{p}\times\overrightarrow{PC}\right|}{|\vec{p}|}$, каде

$$\vec{p}\times\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}1 & -2\\ 17 & 26\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 26 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 17\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{2}(60,-60,30)=15(2,-2,1),$$

$$\left|\vec{p}\times\overrightarrow{PC}\right|=15\sqrt{4+4+1}=45 \text{ и } |\vec{p}|=\sqrt{4+1+4}=3\,.$$

Следува растојанието е $d=\dfrac{45}{3}=15$. Од Питагоровата теорема, радиусот е $R^2=15^2+8^2=289$. Следува дека равенката на сферата е

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289\,.$$

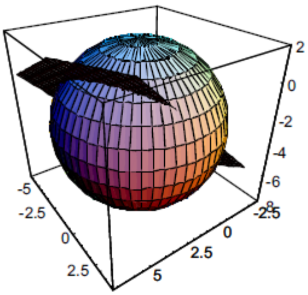
Задача 11. Најди ги координатите на центарот C_1 и радиусот r на кружницата која е пресек на сферата $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z-11=0$ и рамнината $2x+y-2z=0$.

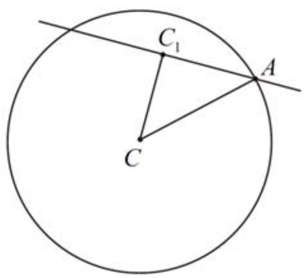
Решение. Ја сведуваме равенката на сферата во каноничен вид

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z-11=0 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1+(z-3)^2-9-11=0 \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25.$$

Значи сферата има центар $C(-2,1,3)$ и радиус $R=5$.

Правата што минува низ центарот на сферата и е нормална на рамнината во која лежи кружницата, минува и низ центарот на кружницата. Нејзината равенка е





$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-2} \Leftrightarrow x=2t-2,\ y=t+1,$$
$$z=-2t+3.$$

Центарот на кружницата го наоѓаме како пресек на горната права и рамнината $2x+y-2z=0$, во која лежи кружницата.

$$2(2t-2)+t+1-2(-2t+3)=0 \Leftrightarrow$$
$$4t-4+t+1+4t-6=0 \Leftrightarrow 9t=9 \Leftrightarrow t=1,$$

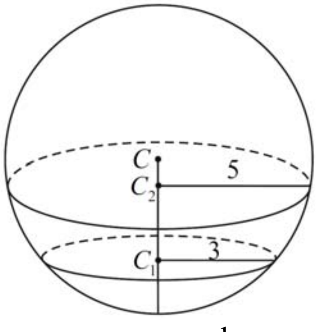
односно центарот е $C_1(0,2,1)$ и го добиваме за вредноста на параметарот $t=1$ од параметарската равенка на сферата. Оттука, $\overrightarrow{CC_1}=(2,1,-2)$ и $\overline{CC_1}=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$. Од Питагоровата теорема за триаголникот ACC_1 имаме дека радиусот на сферата е $r=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Задача 12. Напиши ја равенката на сферата што минува низ кружниците

$$x^2+y^2=9,\ z=0 \text{ и } x^2+y^2=25,\ z=2.$$

Решение. Кружниците лежат на паралелните рамнини $z=0$ и $z=2$. Затоа, правата што минува низ нивните центри $C_1(0,0,0)$ и $C_2(0,0,2)$, односно z-оската, го содржи и центарот на сферата.
Нека центарот на сферата е $C(0,0,z_0)$. Тогаш, равенката на сферата е

$$x^2+y^2+(z-z_0)^2=R^2.$$



Бидејќи кружниците лежат на сферата, важат равенките,

$$9+{z_0}^2=R^2 \text{ и}$$

$$25+(2-z_0)^2=R^2 \Leftrightarrow 25+4+4z_0+{z_0}^2=R^2 \Leftrightarrow 29+4z_0+{z_0}^2=R^2.$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата, добиваме

$$20+4z_0=0 \Leftrightarrow 5+z_0=0 \Leftrightarrow z_0=-5.$$

Следува дека $R^2=9+(-5)^2=34$. Оттука, равенката на сферата е

$$x^2+y^2+(z+5)^2=34.$$

Задача 13. Напиши ја равенката на сферата што минува низ кружницата

$$x^2+y^2-11=0,\ z=0 \quad (1)$$

и ја допира рамнината $x+y+z-5=0$.

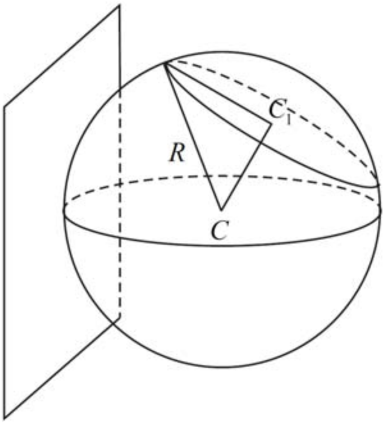
Решение. Центарот на кружницата е $C_1(0,0,0)$. Центарот на сферата лежи на правата што го содржи центарот на кружнцата и е нормален на рамнината $z=0$, односно на z-оската.

Следува центарот на сферата има облик $C(0,0,z_0)$, односно равенката на сферата е

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Точките што лежат на кружницата го задоволуваат и системот (1), од каде добиваме

$$11 + z_0^{\ 2} = R^2 \ (2).$$



Од условот, сферата ја допира рамнината, добиваме дека растојанието од центарот на сферата до рамнината е R, односно

$$R = \frac{|z_0 - 5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |z_0 - 5| = \sqrt{3}R \Leftrightarrow$$

$$(z_0 - 5)^2 = 3R^2 \Leftrightarrow z_0^{\ 2} - 10z_0 + 25 = 3R^2 \ (3)$$

Со замена на (2) во (3) добиваме,

$$z_0^{\ 2} - 10z_0 + 25 = 3\left(11 + z_0^{\ 2}\right) \Leftrightarrow 2z_0^{\ 2} + 10z_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_0^{\ 2} + 5z_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z_0 + 4)(z_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow z_0 = -4 \text{ или } z_0 = -1.$$

Значи, постојат две решенија на задачата.

За $z_0 = -4$, имаме $R^2 = 11 + 16 = 27$, од каде равенката на првата сфера што ги исполнува условите на задачата е

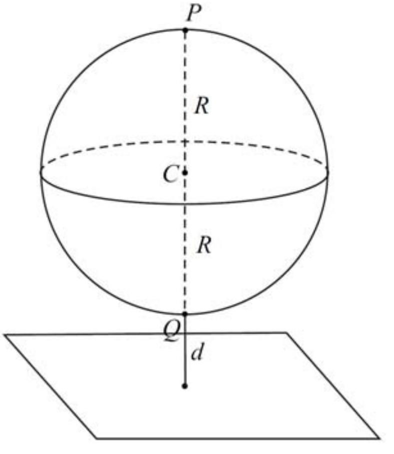
$$x^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 27,$$

и за $z_0 = -1$ следува дека $R^2 = 11 + 1 = 12$, од каде равенката на втората сфера е

$$x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 12.$$

Задача 14. Најди точка на сферата $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ која е најблиску до рамнината $3x-4y+19=0$. Пресметај го растојанието од таа точка до рамнината.

Решение. Центарот на сферата е $C(1,-2,3)$, а еден нормален вектор на рамнината е $\vec{n}=(3,-4,0)$. Точката од сферата што е најблиску до рамнината, лежи на правата што го содржи центарот на сферата и е нормална на рамнината. Нејзината равенка е



$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{0}.$$

За да го најдеме пресекот на правата со сферата, ја запишуваме равенката на правата во параметарски вид,

$$x=3t+1,\ y=-4t-2,\ z=3.$$

и ги заменуваме x, y и z во равенката на сферата

$$(3t)^2+(-4t)^2+0^2=25\Leftrightarrow 9t^2+16t^2=25\Leftrightarrow$$

$$t^2=1\Leftrightarrow t=\pm 1.$$

За $t=1$ имаме $x=4$, $y=-6$, $z=3$, а за $t=-1$, $x=-2$, $y=2$, $z=3$.

Значи правата ја сече сферата во точките $P(4,-6,3)$ и $Q(-2,2,3)$.

Растојанието од точката P до рамнината $3x-4y+19=0$ е

$$d=\frac{|3\cdot 4-4(-6)+19|}{\sqrt{9+16+0}}=\frac{55}{5}=11,$$

додека растојанието од точката Q до рамнината е

$$d=\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot 2+19|}{\sqrt{9+16+0}}=\frac{5}{5}=1.$$

Следува дека точката Q е најблиску до рамнината и е оддалечена 1 единица од неа.

6.1.2. ЕЛИПСИОД. ХИПЕРБОЛОИД. ПАРАБОЛОИД. КОНУС

Задача 1. Напиши ги пресечните точки на хиперболоидот $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и правата $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

Решение. Ги запишуваме равенките на правата во параметарски вид,

$$x=4t,\ y=-3t,\ z=4t-2$$

и ги заменуваме во равенката на елипсоидот,

$$16\frac{t^2}{16}+\frac{9t^2}{9}-\frac{(4t-2)^2}{4}=1 \Leftrightarrow t^2+t^2-\frac{4(2t-1)^2}{4}=1 \Leftrightarrow$$

$$2t^2-4t^2+4t-1=1 \Leftrightarrow -2t^2+4t-2=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Значи правата го допира хиперболоидот во точката $P(4,-3,2)$.

Задача 2. Напиши ја равенката на множеството точки еднакво оддалечени од точката $A\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$ и рамнината $\sum : z=-\frac{a}{2}$. Што претставува тоа множество точки?

Решение. Нека точката $X(x,y,z)$ е еднакво оддалечена од точката A и рамнината $\sum$. Тогаш растојанијата

$$d_1=d(X,\sum)=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\left|z+\frac{a}{2}\right| \text{ и}$$

$$d_2=d(X,A)=\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2}$$

се еднакви, односно

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow {d_1}^2={d_2}^2 \Leftrightarrow \left(z+\frac{a}{2}\right)^2=x^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2+az+\frac{a^2}{4}=x^2+y^2+z^2-az+\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 2az=x^2+y^2.$$

Следува равенката на бараното множество точки е параболоидот $2az=x^2+y^2$.

Задача 3. Точката $M(1,y,-1)$ лежи на хиперболичниот параболоид $4x^2-z^2=y$. Напиши ги равенките на правите што лежат на параболоидот и ја содржат точката M.

Решение. Бидејќи точката лежи на параболоидот, нејзината втора координата е $y=3$.

Правата што ја содржи точката M има равенка,

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \Leftrightarrow \frac{x-1}{a}=\frac{y-3}{b}=\frac{z+1}{c} \Leftrightarrow x=at+1,$$

$$y=bt+3,\ z=ct-1.$$

Бидејќи правата лежи на параболоидот, важи

$$4(at+1)^2-(ct-1)^2=bt+3 \Leftrightarrow$$

$$4a^2t^2+8at+4-c^2t^2+2ct-1=bt+3 \Leftrightarrow \left(4a^2-c^2\right)t^2+(8a+2c)t=bt$$

Заради последното равенство за секој реален број t, следува дека

$$4a^2-c^2=0 \text{ и } 8a+2c=b.$$

Од првата равенка имаме $c^2=4a^2$ или $c=\pm 2a$. Ако замениме во втората равенка добиваме $b_1=12a$ и $b_2=4a$. Значи паралените вектори на бараните прави се $(a,4a,-2a)$ и $(a,12a,2a)$. Следува дека решенија се правите

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{-2} \text{ и } \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{12}=\frac{z+1}{2}.$$

Задача 4. Напиши ја допирната рамнина на елипсоидот $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$, што е нормална на векторот $\vec{n}=(1,-1,0)$.

Решение. Бидејќи допирната рамнина е нормална на векторот $\vec{n}$, нејзината равенка има облик $x-y+D=0$.

Го изразуваме $y=x+D$ и го заменуваме во равенката на сферата,

$$\frac{x^2}{4}+(x+D)^2+\frac{z^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+x^2+2xD+D^2+\frac{z^2}{9}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5x^2}{4}+2xD+D^2+\frac{z^2}{9}=1/\frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{8}{5}xD+\frac{4}{5}D^2+\frac{4z^2}{45}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{5}D\right)^2-\frac{16}{25}D^2+\frac{4}{5}D^2+\frac{4z^2}{45}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{4}{5}D\right)^2+\frac{4z^2}{45}=\frac{4}{5}-\frac{4}{25}D^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{5}D\right)^2+\frac{4z^2}{45}=\frac{4\left(5-D^2\right)}{5}.$$

Пресекот на сферата и елипсоидот е решение на системот равенки

$$y=x+D \text{ и } \left(x+\frac{4}{5}D\right)^2+\frac{4z^2}{45}=\frac{4\left(5-D^2\right)}{5}.$$

Бидејќи системот има точно едно решение важи

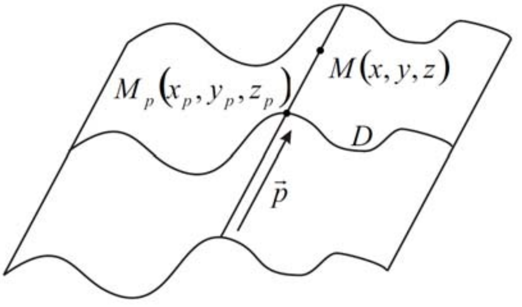
$x+\frac{4}{5}D=0$ и $5-D^2=0$, од каде имаме $D=\pm\sqrt{5}$.

Така, добивме две рамнини $x-y+\sqrt{5}=0$ и $x-y-\sqrt{5}=0$ што ги исполнуваат условите на задачата.

6.2. ЦИЛИНДРИЧНИ, КОНУСНИ И РОТАЦИОНИ ПОВРШИНИ

6.2.1. ЦИЛИНДРИЧНИ ПОВРШИНИ

Задача 1. Состави ја равенката на цилиндричната површина чија директриса е дадена со равенката: $x=t$, $y=2$, $z=t^2+1$; а генератрисата е паралелна со векторот $\vec{p}=(-1,1,3)$.



Решение. Директрисата на цилиндричната површина ја запишуваме во облик:

$$z=x^2+1,\ y=2.$$

Нека $M(x,y,z)$ е точка од цилиндричната површина. Правата низ M која е паралелна со векторот $\vec{p}$, минува низ една точка од директисата $M_p(x_p,y_p,z_p)$. Ги изразуваме координатите на точката M_p преку координатите на точката M,

$$\frac{x-x_p}{l}=\frac{y-y_p}{m}=\frac{z-z_p}{n}=t \Leftrightarrow \frac{x-x_p}{-1}=\frac{y-y_p}{1}=\frac{z-z_p}{3}=t \Leftrightarrow$$

$$x-x_p=-t,\ y-y_p=t,\ z-z_p=3t \Leftrightarrow x_p=x+t,\ y_p=y-t,\ z_p=z-3t.$$

Бидејќи $M_p(x_p, y_p, z_p)$ лежи на директрисата, важи:

$$y_p = 2 \Leftrightarrow y - t = 2 \Leftrightarrow t = y - 2;$$

$$z_p = x_p^2 + 1 \Leftrightarrow z - 3t = (x+t)^2 + 1.$$

Со елиминација на параметарот t од првата во втората равенка ја добиваме цилиндричната површина:

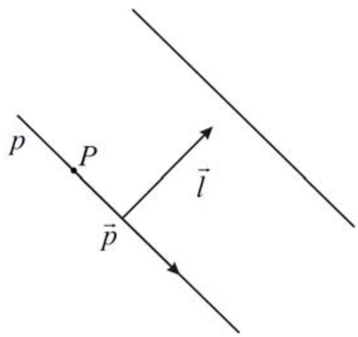
$$z - 3(y-2) = (x+y-2)^2 + 1 \Leftrightarrow z = (x+y-2)^2 + 3y - 5.$$

Задача 2. Состави ја равенката на цилиндричната површина чија директриса е правата $p: y = x+1,\ z = x-2$, а векторот на правец е $\vec{l} = (2,-1,3)$.

Решение. Цилиндричната површина е рамнината што ја содржи правата p и е паралелна со векторот $\vec{l}$.

Едни параметарски равенки на правата p се

$$x = t,\ y = t+1,\ z = t-2$$



Следува дека правата p е паралелна со векторот $\vec{p} = (1,1,1)$ и ја содржи точката $P(0,1,-2)$. Еден нормален вектор на рамнината е

$$\vec{p}\times\vec{l} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (4,-1,-3)$$

Оттука, равенката на бараната рамнина е

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow 4(x-0) - (y-1) - 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x - y + 1 - 3z - 6 = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 3z - 5 = 0.$$

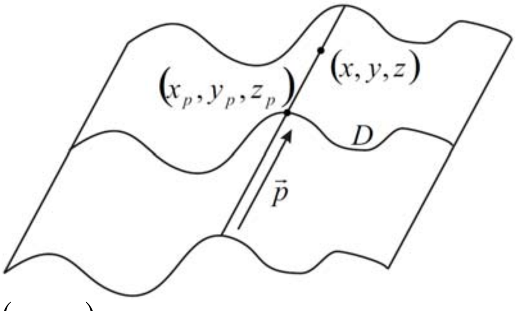
Задача 3. Директрисата на цилиндричната површина е дадена со равенките

$$x = y^2 + z^2,\ x = 2z,$$

а генератрисата е нормална на рамнината во која лежи директрисата. Состави ја равенката на цилиндричната површина.

Решение. Рамнината во која лежи директрисата е $x = 2z$ и е нормална на векторот $\vec{p} = (1,0,-2)$.

Ќе ја најдеме равенката на цилиндрична површина со дадена директриса $x = y^2 + z^2$, $x = 2z$ и вектор на правец $\vec{p} = (1, 0, -2)$.



Нека $M(x, y, z)$ е точка од цилиндричната површина. Нека правата низ M паралелна со $\vec{p}$, минува низ точката од директисата $M_p(x_p, y_p, z_p)$. Ги изразуваме координатите на точката M_p преку координатите на точката M,

$$\frac{x - x_p}{l} = \frac{y - y_p}{m} = \frac{z - z_p}{n} = t \Leftrightarrow \frac{x - x_p}{1} = \frac{y - y_p}{0} = \frac{z - z_p}{-2} = t \Leftrightarrow$$

$$x - x_p = t,\ y - y_p = 0,\ z - z_p = -2t \Leftrightarrow x_p = x - t,\ y_p = y,\ z_p = z + 2t;$$

Ги заменуваме координатите на M_p во равенките на директрисата

$$x_p = 2z_p \Leftrightarrow x - t = 2(z + 2t) \Leftrightarrow x - t = 2z + 4t \Leftrightarrow t = \frac{x - 2z}{5},$$

$$x_p = {y_p}^2 + {z_p}^2 \Leftrightarrow x - t = y^2 + (z + 2t)^2,$$

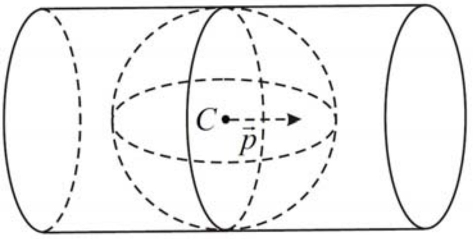
и го елиминираме параметарот t,

$$x - \frac{x - 2z}{5} = y^2 + \left(z + \frac{2x - 4z}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4x + 2z}{5} = y^2 + \left(\frac{z + 2x}{5}\right)^2 \ /25 \Leftrightarrow$$

$$10(2x + z) = y^2 + (z + 2x)^2.$$

Значи цилиндричната површина има равенка $10(2x + z) = y^2 + (z + 2x)^2$.

Задача 4. Состави ја равенката на цилиндричната површина која е паралелна со правата $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ и е опишана околу топката $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Решение. Векторот на правец на цилиндричната површина е $\vec{p} = (1,2,3)$.

Една директриса на површината ќе определиме како пресек на сферата со рамнината што минува низ центарот на сферата $C(0,0,0)$ и е нормална на векторот $\vec{p}$. Рамнината има равенка

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z=0 .$$

Следува дека равенката на директрисата е

$$x^2+y^2+z^2=1,\ x+2y+3z=0$$

Нека $M(x,y,z)$ е точка од цилиндричната површина, додека $M_p(x_p,y_p,z_p)$ е точка од директрисата што лежи на правата низ M, паралелна на $\vec{p}$. Тогаш важи

$$\frac{x-x_p}{p_1}=\frac{y-y_p}{p_2}=\frac{z-z_p}{p_3}=t \Leftrightarrow \frac{x-x_p}{1}=\frac{y-y_p}{2}=\frac{z-z_p}{3}=t \Leftrightarrow$$

$$x-x_p=t,\ y-y_p=2t,\ z-z_p=3t \Leftrightarrow x_p=x-t,\ y_p=y-2t,\ z_p=z-3t$$

Ги заменуваме x_p, y_p и z_p во равенките на директрисата:

$$x_p+2y_p+3z_p=0 \Leftrightarrow x-t+2\left(y-2t\right)+3\left(z-3t\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$x+2y+3z-14t=0 \Leftrightarrow t=\frac{x+2y+3z}{14},$$

$$x_p{}^2+y_p{}^2+z_p{}^2=1 \Leftrightarrow (x-t)^2+(y-2t)^2+(z-3t)^2=1$$

и ја определуваме равенката на површината со елиминација на параметарот t,

$$\left(x-\frac{x+2y+3z}{14}\right)^2+\left(y-\frac{2x+4y+6z}{14}\right)^2+\left(z-\frac{3x+6y+9z}{14}\right)^2=1 \Leftrightarrow$$

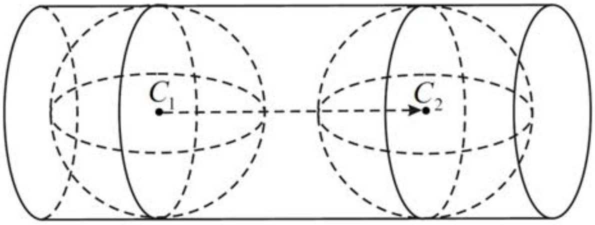
$$\left(\frac{13x-2y-3z}{14}\right)^2+\left(\frac{10y-2x-6z}{14}\right)^2+\left(\frac{5z-3x-6y}{14}\right)^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\left(13x-2y-3z\right)^2+4\left(5y-x-3z\right)^2+\left(5z-3x-6y\right)^2=196 .$$

Задача 5. Состави ја равенката на цилиндричната површина опишана околу сферите

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=49 \text{ и } (x-1)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=49.$$

Решение. Центрите на сферите се $C_1(-1,3,2)$ и $C_2(1,5,-3)$, од каде векторот на правец на цилиндричната површина е $\overrightarrow{C_1C_2}=(2,2,-5)$.



Рамнината што ја содржи C_1 и е нормална на $\overrightarrow{C_1C_2}$ е

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 2(x+1)+2(y-3)-5(z-2)=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y-5z+6=0$.

Следува, директрисата е

$$D:(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=49,\ 2x+2y-5z+6=0.$$

Ќе ја определиме равенката на цилиндричната површина која има директриса D и е паралелна со $\overrightarrow{C_1C_2}$,

$$\frac{x-x_p}{p_1}=\frac{y-y_p}{p_2}=\frac{z-z_p}{p_3}=t \Leftrightarrow \frac{x-x_p}{2}=\frac{y-y_p}{2}=\frac{z-z_p}{-5}=t \Leftrightarrow$$

$$x-x_p=2t,\ y-y_p=2t,\ z-z_p=-5t \Leftrightarrow x_p=x-2t,\ y_p=y-2t,$$

$$z_p=z+5t;$$

Точката M_p лежи на директрисата, па

$$2x_p+2y_p-5z_p+6=0 \Leftrightarrow 2(x-2t)+2(y-2t)-5(z+5t)+6=0 \Leftrightarrow$$

$$2x-4t+2y-4t-5z-25t+6=0 \Leftrightarrow t=\frac{2x+2y-5z+6}{33};$$

$$(x_p+1)^2+(y_p-3)^2+(z_p-2)^2=49 \Leftrightarrow$$

$$(x+1-2t)^2+(y-3-2t)^2+(z-2+5t)^2=49.$$

Оттука равенката на цилиндричната површина е:

$$\left(x+1-2t\right)^2+\left(y-3-2t\right)^2+\left(z-2+5t\right)^2=49 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+1+\frac{-4x-4y+10z-12}{33}\right)^2+\left(y-3+\frac{-4x-4y+10z-12}{33}\right)^2+$$

$$\left(z-2+\frac{10x+10y+25z+30}{33}\right)^2=49 \Leftrightarrow$$

$$\left(29x-4y+10z+21\right)^2+\left(4x-29y-10z+111\right)^2+\left(10x+10y+58z-33\right)^2=53361\,.$$

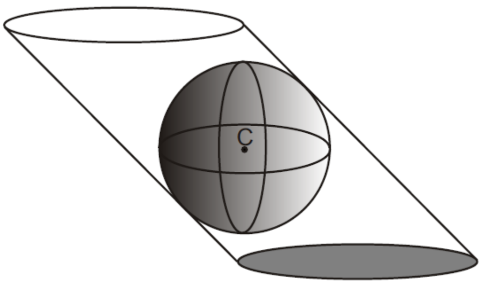
Задача 6. Сферата со равенка $x^2+y^2+z^2=4z$ е осветлена од зраци паралелни на правата $\begin{cases} x=0 \\ z=y \end{cases}$. Најди ја равенката на контурата на сенката во xOy рамнината.

Решение. Директрисата на цилиндричната површина ја добиваме како пресек на сферата

$$x^2+y^2+z^2=4z \Leftrightarrow x^2+y^2+\left(z-2\right)^2=4$$

и рамнината која е нормална на векторот $\vec{p}=\left(0,1,1\right)$ и го содржи центарот на сферата $C\left(0,0,2\right)$,

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0 \Leftrightarrow y+z-2=0\,.$$



Значи директрисата е $D: x^2+y^2+\left(z-2\right)^2=4\,,\; y+z-2=0\,.$
Сега ја определуваме равенката на цилиндричната површина.

$$\frac{x-x_p}{0}=\frac{y-y_p}{1}=\frac{z-z_p}{1}=t \Leftrightarrow$$

$$x_p=x,\, y_p=y-t,\, z_p=z-t$$

$$D_p:\begin{cases} x_p{}^2+y_p{}^2+\left(z_p-2\right)^2=4 \\ y_p+z_p-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\left(y-t\right)^2+\left(z-t-2\right)^2=4 \\ y-t+z-t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+(y-t)^2+(z-t-2)^2=4 \\ t=\dfrac{y+z-2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2+\left(y-\frac{y+z-2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y+z-2}{2}\right)^2+\left(z-\frac{y+z-2}{2}-2\right)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\left(\frac{y-z+2}{2}\right)^2+\left(\frac{z-y-2}{2}\right)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+(y-z+2)^2+(y-z+2)^2=16$$

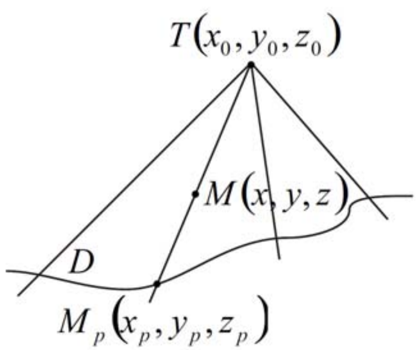
Најпосле, контурата на сенката ја добиваме како пресек на цилиндричната површина $4x^2+(y-z+2)^2+(y-z+2)^2=16$ со рамнината $z=0$. Нејзината равенка е

$$4x^2+(y+2)^2+(y+2)^2=16 \Leftrightarrow 2x^2+(y+2)^2=8.$$

6.2.2. КОНУСНИ ПОВРШИНИ

Задача 1. Состави ја равенката на конусната површина со теме $T(2,1,5)$ и директриса $(x-1)^2+y^2=1$, $x-z=0$.

Решение. Нека $M(x,y,z)$ е точка од конусната површина. Правата MT минува низ една точка од директисата $M_p(x_p,y_p,z_p)$. Ги изразуваме координатите на точката M_p преку координатите на точката M,



$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-2}{x_p-2}=\frac{y-1}{y_p-1}=\frac{z-5}{z_p-5}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow$$

$$x_p=2+t(x-2),\ y_p=1+t(y-1),\ z_p=5+t(z-5).$$

Бидејќи точката $M_p(x_p,y_p,z_p)$ лежи на директрисата, важи:

$$x_p-z_p=0 \Leftrightarrow 2+tx-2t-(5+t(z-5))=0 \Leftrightarrow$$

$$2+tx-2t-5-tz+5t=0 \Leftrightarrow$$
$$t\left(x-z+3\right)=3 \Leftrightarrow t=\frac{3}{x-z+3};$$
$$\left(x_p-1\right)^2+y_p^2=1 \Leftrightarrow \left(1+t\left(x-2\right)\right)^2+\left(1+t\left(y-1\right)\right)^2=1 \Leftrightarrow$$
$$\left(1+\frac{3x-6}{x-z+3}\right)^2+\left(1+\frac{3y-3}{x-z+3}\right)^2=1 \Leftrightarrow$$
$$\left(4x-z-3\right)^2+\left(x+3y-z\right)^2=\left(x-z+3\right)^2.$$

Задача 2. Состави ја равенката на конусната површина со теме во точката $T(a,b,c)$ и директриса $y^2=2px$, $z=0$.

Решение. Нека $M(x,y,z)$ е точка од конусната површина. Правата MT минува низ една точка од директисата $M_p(x_p,y_p,z_p)$. Ги изразуваме координатите на точката M_p преку координатите на точката M ,

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{x-a}{x_p-a}=\frac{y-b}{y_p-b}=\frac{z-c}{z_p-c}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow$$
$$x_p-a=t(x-a),\ y_p-b=t(y-b),\ z_p-c=t(z-c) \Leftrightarrow$$
$$x_p=a+t(x-a),\ y_p=b+t(y-b),\ z_p=c+t(z-c).$$

Точката $M_p(x_p,y_p,z_p)$ лежи на директрисата, следува дека

$$z_p=0 \Leftrightarrow c+t(z-c)=0 \Leftrightarrow t=-\frac{c}{z-c}, \text{ и}$$
$$y_p{}^2=2px_p \Leftrightarrow \left(b+t(y-b)\right)^2=2p\left(a+t(x-a)\right)$$

Параметарот t од првата равенка го заменуваме во втората, и ја добиваме равенката на конусната површина,

$$\left(b-\frac{c(y-b)}{z-c}\right)^2=2p\left(a-\frac{c(x-a)}{z-c}\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{b(z-c)-c(y-b)}{z-c}\right)^2=2p\left(\frac{a(z-c)-c(x-a)}{(z-c)}\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{(bz-bc-cy+bc)^2}{(z-c)^2}=2p\frac{az-ac-cx+ac}{z-c} \Leftrightarrow$$

$$(bz-cy)^2=2p(az-cx)(z-c).$$

Задача 3. Состави ја равенката на конусната површина што има теме во точката $T(3,0,0)$ и е опишана околу сферата $x^2+y^2+z^2=1$.

Решение. Прв начин. За директрисата на конусната површина која е пресек на сферата $x^2+y^2+z^2=1$ и сферата со центар во точката T и радиус R, со помош на Питагоровата теорема добиваме дека $R^2=3^2-1^2=8$. Значи, една директриса на површината е

$$x^2+y^2+z^2=1,\ (x-3)^2+y^2+z^2=8\ (1).$$

Со одземање на втората од првата равенка добиваме

$$-6x+9=7\Leftrightarrow -6x=-2\Leftrightarrow 3x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Директрисата може да ја запишеме со равенката

$$(x-3)^2+y^2+z^2=8,\ x=\frac{1}{3}\ (2)$$

бидејќи системите (1) и (2) се еквивалентни.

Нека $M(x,y,z)$ е точка од конусната површина, а $M_p(x_p,y_p,z_p)$ точка од директрисата што лежи на правата MT. Важи

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow\frac{x-3}{x_p-3}=\frac{y}{y_p}=\frac{z}{z_p}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow$$

$$x_p-3=t(x-3),\ y_p=ty,\ z_p=tz.$$

Бидејќи точката M_p лежи на директрисата, важи:

$$x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3+t(x-3)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow t(x-3)=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow t=-\frac{8}{3(x-3)}\ \text{и}$$

$$(x_p-3)^2+{y_p}^2+{z_p}^2=8\Leftrightarrow t^2(x-3)^2+t^2y^2+t^2z^2=8\Leftrightarrow$$

$$t^2\left((x-3)^2+y^2+z^2\right)=8.$$

Со замена на параметарот t ја добиваме равенката на бараната конусна површина

$$\frac{64}{9(x-3)^2}\left((x-3)^2+y^2+z^2\right)=8\Leftrightarrow(x-3)^2+y^2+z^2=\frac{9}{8}(x-3)^2\Leftrightarrow$$

$$y^2+z^2=\frac{1}{8}(x-3)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2=8\left(y^2+z^2\right).$$

Втор начин. Нека (x,y,z) е произволна точка од конусната површина. Тогаш, генератрисата е

$$x=3+lt\,,\ y=mt \text{ и } z=nt \ (1),$$

каде (l,m,n) е паралелен вектор на генератрисата.

Ако замениме во равенката на сферата, добиваме

$$x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow (3+lt)^2+m^2t^2+n^2t^2=1 \Leftrightarrow$$

$$9+6lt+l^2t^2+m^2t^2+n^2t^2=1 \Leftrightarrow \left(l^2+m^2+n^2\right)t^2+6lt+8=0\,.$$

Бидејќи генератрисата ја допира сферата, последната равенка има едно решение. Следува дискриминантата $D=0$, односно

$$36l^2-32\left(l^2+m^2+n^2\right)=0 \Leftrightarrow 9l^2-8\left(l^2+m^2+n^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$l^2-8m^2-8n^2=0 \ (2).$$

Од (1) имаме $l=\dfrac{x-3}{t}$, $m=\dfrac{y}{t}$ и $n=\dfrac{z}{t}$. Ако замениме во (2), ја добиваме равенката на бараната конусна површина

$$\frac{(x-3)^2}{t^2}-8\frac{y^2}{t^2}-8\frac{z^2}{t^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2-8y^2-8z^2=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=8\left(y^2+z^2\right).$$

Задача 4. Светлосен извор се наоѓа во координатниот почеток. Најди ја контурата на сенката на сферата $S: x^2+y^2+z^2-10x+2y+10=0$ во рамнината $3x-2y=30$.

Решение. Прво ќе ја определиме конусната површина која има теме во точката $O(0,0,0)$ и е опишана околу сферата S. Каноничната равенка на сферата S е

$$(x-5)^2-25+(y+1)^2-1+z^2+10=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16\,,$$

од каде нејзиниот радиус и центар се $C(5,-1,0)$ и $R=4$. Растојанието $\left|\overrightarrow{CO}\right|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$.

Да ја разгледаме сферата S_1 со центар во координатниот почеток и радиус R_1 што го задоволува условот $R_1{}^2=\left|\overrightarrow{CO}\right|^2-R^2$ т.е. $R_1{}^2=26-16=10$. Нејзината равенка е $x^2+y^2+z^2=10$. Ако од равенката на сферата S_1 ја одземеме равенката на сферата S, добиваме $10x-2y-10=10$ или $5x-y-10=0$. Оттука равенката на една директриса е

$$x^2+y^2+z^2=10,\ 5x-y-10=0$$

Ја спроведуваме постапката за добивање на равенка на конусна површина со дадена директриса и теме.

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow\frac{x}{x_p}=\frac{y}{y_p}=\frac{z}{z_p}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow x_p=tx,$$

$$y_p=ty,\ z_p=tz;$$

$$5x_p-y_p-10=0\Leftrightarrow 5tx-ty-10=0\Leftrightarrow t(5x-y)=10\Leftrightarrow t=\frac{10}{5x-y};$$

$$x_p{}^2+x_p{}^2+z_p{}^2=10\Leftrightarrow t^2x^2+t^2y^2+t^2z^2=10\Leftrightarrow t^2\left(x^2+y^2+z^2\right)=10;$$

$$\frac{10^2}{(5x-y)^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=10\Leftrightarrow 10\left(x^2+y^2+z^2\right)=(5x-y)^2.$$

Следува дека равенката на контурата на сенката е

$$10\left(x^2+y^2+z^2\right)=(5x-y)^2,\ 3x-2y=30.$$

Задача 5. Состави ја равенката на конусната површина опишана околу сферите

$$S_1:(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1 \text{ и } S_2:x^2+y^2+z^2=4.$$

Решение. Центрите и радиусите на сферите се

$$C_2(0,0,0),\ R_2=2,\ C_1(3,3,3) \text{ и } R_1=1, \text{ од каде}$$

$$\overrightarrow{C_2C_1}=(3,3,3) \text{ и } d=\left|\overrightarrow{C_2C_1}\right|=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}.$$

Ако x е растојанието од центарот на првата сфера до темето, тогаш, користејќи сличност на триаголници добиваме

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{d+x}{x}\Leftrightarrow\frac{2}{1}=\frac{3\sqrt{3}+x}{x}\Leftrightarrow x=3\sqrt{3} \text{ или}$$

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{d-x}{x}\Leftrightarrow\frac{2}{1}=\frac{3\sqrt{3}-x}{x}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}.$$

Нека $x=3\sqrt{3}$. Темето $T(x,y,z)$ на конусната површина лежи на оската на површината што минува низ центрите на сферите и е оддалечено $3\sqrt{3}$ единици од центарот C_1. Равенката на оската е

$$x=t\,,\ y=t\,,\ z=t\,.$$

Притоа,

$$d(T,C_1)=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{(t-3)^2+(t-3)^2+(t-3)^2}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{3}|t-3|=3\sqrt{3}\Leftrightarrow|t-3|=3\Leftrightarrow t-3=\pm3\Leftrightarrow t=0\,,\ t=6$$

Постојат две точки на оската што се оддалаечени $3\sqrt{3}$ единици од C_1, од кои само една е теме. За $t=0$ ја добиваме точката C_2 која не е теме. Следува, темето е $T(6,6,6)$.

Значи, една директриса е пресекот на сферите

$$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1,\quad \text{и}\quad (x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2.$$

Ако од првата сфера ја одземеме втората, добиваме

$$6x-27+6y-27+6z-27=-26\Leftrightarrow 6x+6y+6z=55\,.$$

Па равенката на директрисата може да ја зашишеме како пресек на површините,

$$(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=27\,,\ 6x+6y+6z=55\,.$$

Според постапката за добивање на равенка на конусна површина, имаме

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow\frac{x-6}{x_p-6}=\frac{y-6}{y_p-6}=\frac{z-6}{z_p-6}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow$$
$$x_p-6=t(x-6),\ y_p-6=t(y-6),\ z_p-6=t(z-6)\Leftrightarrow$$
$$x_p=6+t(x-6),\ y_p=6+t(y-6),\ z_p=6+t(z-6);$$
$$6x_p+6y_p+6z_p=55\Leftrightarrow$$
$$36+6t(x-6)+36+6t(y-6)+36+6t(z-6)=55\Leftrightarrow$$
$$6t(x+y+z-18)=-53\Leftrightarrow t=\frac{-53}{6(x+y+z-18)},$$
$$(x_p-6)^2+(y_p-6)^2+(z_p-6)^2=27\Leftrightarrow$$
$$t^2(x-6)^2+t^2(y-6)^2+t^2(z-6)^2=27\Leftrightarrow$$
$$t^2\left((x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2\right)=27\,;$$
$$\frac{53^2}{36(x+y+z-18)^2}\left((x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2\right)=27\Leftrightarrow$$
$$53^2\left((x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2\right)=3^5\cdot4(x+y+z-18)^2\,.$$

Аналогно ја добиваме конусната површина кога $x=\sqrt{3}$.

Задача 6. Состави равенка на кружна конусна површина што минува низ точката $S(2,-1,1)$, има теме во точката $M(4,-4,3)$, а за оска и служи правата $p: x=3t+1$, $y=-2t-2$, $z=t+2$.

Решение. Директрисата на конусната површина е пресек на сферата со радиус $\overline{MS}$,

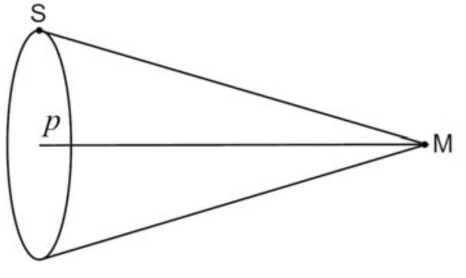
$$\overline{MS}=\sqrt{(4-2)^2+(-4+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$$

и центар во точката M, со равенка

$$(x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=17,$$

и рамнината која минува низ точката S и е нормална на дадената права,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 3(x-2)-2(y+1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$3x-2y+z-9=0.$$



Значи, равенката на директрисата е

$$D:\begin{cases}(x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=17\\ 3x-2y+z-9=0\end{cases}.$$

Оттука, равенката на конусната површина е

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow\frac{x-4}{x_p-4}=\frac{y+4}{y_p+4}=\frac{z-3}{z_p-3}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow$$
$$x_p-4=t(x-4),\ y_p+4=t(y+4),\ z_p-3=t(z-3)\Leftrightarrow$$
$$x_p=4+t(x-4),\ y_p=-4+t(y+4),\ z_p=3+t(z-3).$$
$$D_p:\begin{cases}(x_p-4)^2+(y_p+4)^2+(z_p-3)^2=17\\ 3x_p-2y_p+z_p-9=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}(t(x-4))^2+(t(y+4))^2+(t(z-3))^2=17\\ 3(4+t(x-4))-2(-4+t(y+4))+3+t(z-3)-9=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^2\left((x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2\right)=17 \\ 3(4+t(x-4))-2(-4+t(y+4))+3+t(z-3)-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^2\left((x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2\right)=17 \\ 12+3t(x-4)+8-2t(y+4)+3+t(z-3)-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

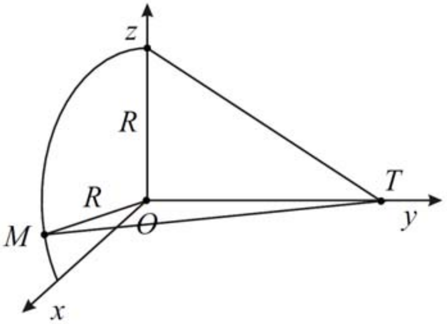
$$\begin{cases} t^2\left((x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2\right)=17 \\ t(3x-12-2y-8+z-3)=-14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^2\left((x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2\right)=17 \\ t=\dfrac{-14}{3x-2y+z-23} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{-14}{3x-2y+z-23}\right)^2\left((x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2\right)=17 \Leftrightarrow$$

$$196\left((x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2\right)=17(3x-2y+z-23)^2 .$$

Задача 7. Правата $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ ротира околу y-оската. Состави ја равенката на опишаната површина.



Решение. Пресекот на правата $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ со y-оската е точката $T(0,2,0)$. Затоа опишаната површина е конусна и има теме во точката T.

Рамнината $x0z$ е нормална на оската на ротација на конусната површина. Нека $M(x,0,z)$ е пресечната точка на дадената права со $x0z$ рамнината. Важи:

$$\frac{x}{6}=\frac{-2}{3}=\frac{z}{2} \Leftrightarrow x=-4,\ z=-\frac{4}{3},$$

односно $M\left(-4,0,-\frac{4}{3}\right)$, од каде $R=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{(-4)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{160}{9}}$.

Директрисата е пресек на $x0z$ рамнината и сферата со центар во координатниот почеток и радиус R, односно $D: x^2+y^2+z^2=\frac{160}{9},\ y=0$. Следува, равенката на конусната површина е:

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{x}{x_p}=\frac{y-2}{y_p-2}=\frac{z}{z_p}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow$$

$$x_p=tx,\ y_p-2=t(y-2),\ z_p=tz \Leftrightarrow x_p=tx,\ y_p=t(y-2)+2,\ z_p=tz;$$

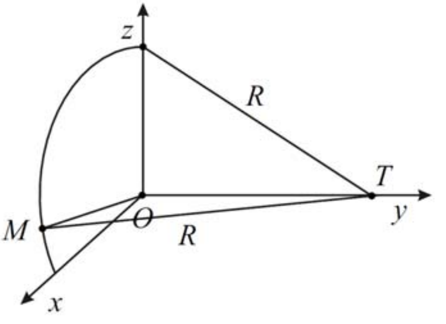
$$D_p:\begin{cases} x_p^{\ 2}+y_p^{\ 2}+z_p^{\ 2}=\frac{160}{9} \\ y_p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2x^2+(t(y-2)+2)^2+t^2z^2=\frac{160}{9} \\ t(y-2)+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t^2\left(x^2+z^2\right)=\frac{160}{9} \\ t=\frac{-2}{y-2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{-2}{y-2}\right)^2\left(x^2+z^2\right)=\frac{160}{9} \Leftrightarrow$$

$$9\left(x^2+z^2\right)=40(y-2)^2 \Leftrightarrow 9x^2+40(y-2)^2+z^2=0.$$

Коментар. Директрисата може да ја претставиме и како пресек на $x0z$ со сферата со центар во темето T и радиус

$$R=\left|\overrightarrow{MT}\right|=\left(4,2,\frac{4}{3}\right)=\sqrt{16+4+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{196}{9}}.$$



Тогаш нејзината равенка е

$$x^2+(y-2)^2+z^2=\frac{196}{9},\ y=0$$

Равенката на директрисата може да ја претставиме и во вид

$$x^2+z^2=\frac{160}{9},\ y=0.$$

6.2.3. РОТАЦИОНИ ПОВРШИНИ

Задача 1-6. Најди ги равенките на површините што се добиваат со ротација на следниве криви околу дадените оски:

1) $z=3x,\ y=0$ околу x-оската.

2) $x^2+y^2=1,\ z=0$ околу y-оската.

3) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1,\ y=0$ околу z-оската.

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ околу x-оската.

5) $(y-2)^2+(z-2)^2=1,\ x=0$ околу y-оската.

6) $z=y^2+1, x=0$ околу z-оската.

Решение. 1) Бидејќи ротационата површина ротира околу x-оската променливата x останува иста, а z го заменуваме со $\pm\sqrt{y^2+z^2}$,

$$\pm\sqrt{y^2+z^2}=3x \Leftrightarrow \pm\sqrt{y^2+z^2}=2x \Leftrightarrow y^2+z^2=9x^2 .$$

2) Бидејќи ротационата површина ротира околу y-оската променливата y останува иста, а x го заменуваме со $\pm\sqrt{x^2+z^2}$,

$$\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=a^2$$

3) Бидејќи ротационата површина ротира околу z-оската променливата z останува иста, а x го заменуваме со $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1 .$$

4) Бидејќи ротационата површина ротира околу околу x-оската променливата x останува иста, а y го заменуваме со $\pm\sqrt{y^2+z^2}$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 .$$

5) Бидејќи ротационата површина ротира околу y-оската, променливата y останува иста, а z ја заменуваме со $\pm\sqrt{x^2+z^2}$,

$$\left(y-2\right)^2+\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}-2\right)^2=1 \Leftrightarrow \left(y-2\right)^2+x^2+z^2\mp 4\sqrt{x^2+z^2}+4=1$$
$$\Leftrightarrow 16\left(x^2+z^2\right)=\left(\left(y-2\right)^2+x^2+z^2+3\right)^2.$$

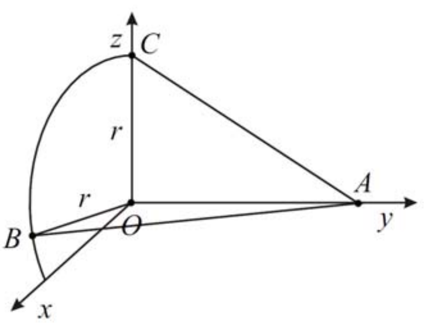
6) Бидејќи ротационата површина ротира околу околу z-оската, променливата z останува иста, а x го заменуваме со $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

$$z=\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+1 \Leftrightarrow z=x^2+y^2+1.$$

Коментар. Добиените ротациони тела во претходната задача соодветно се конус, сфера и еднокрилен хиперболоид, ротацион елиопсоид, нема име и параболоид.

Задача 7. Правата $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ ротира околу y-оската. Состави ја равенката на опишаната површина.

Решение. Ќе ја најдеме равенката на една права која лежи на $y0z$ рамнината и на опишаната површина.



Пресекот на правата $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ со y-оската е точката $A\left(0,2,0\right)$. Нека дадената права ја сече $x0z$ рамнината во точката $B\left(x,0,z\right)$. Тогаш, нејзините координати се

$$\frac{x}{6}=\frac{-2}{3}=\frac{z}{2} \Leftrightarrow x=-4,\ z=-\frac{4}{3}$$

од каде

$$r=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{\left(-4\right)^2+\left(-\frac{4}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{160}{9}}=\frac{4\sqrt{10}}{3}.$$

Затоа точката $C\left(0,0,\frac{4\sqrt{10}}{3}\right)$ лежи на површината. Векторот

$\overrightarrow{AC} = \left(0,2,-\frac{4\sqrt{10}}{3}\right) \Bigg\| \left(0,1,-\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$, па равенката на правата AC е

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-\frac{2\sqrt{10}}{3}}.$$

Бараната површина е ротациона површина добиена со ротација на правата

$y-2 = \dfrac{z}{-\frac{2\sqrt{10}}{3}}$, $x=0$ околу y-оската. Нејзината равенка е

$$y-2 = \frac{\pm\sqrt{x^2+z^2}}{-\frac{2\sqrt{10}}{3}} \Leftrightarrow (y-2)^2 = \frac{x^2+z^2}{\frac{40}{9}} \Leftrightarrow 9\left(x^2+z^2\right) = 40(y-2)^2.$$

Задачи за вежбање

6.1. Површини од втор ред

6.1.1. Сфера

Задача 1-2. Најди ја равенката на сферата со центар во точката C и радиус R, ако:

1) $C(3,-2,0)$ и $R=7$; 2) $C(-1,2,3)$ и $R=3$.

Задача 3-4. Најди ја равенката на сферата што минува низ точката M и има центар во точката C, ако:

3) $M(4,1,2)$ и $C(1,-2,3)$; 4) $M(4,1,2)$ и $C(-1,2,3)$;

Задача 5-8. Најди го центарот и радиусот на сферата:

5) $x^2+y^2+z^2+2y+4z-5=0$; 6) $x^2+y^2+z^2+8x-2z+14=0$;

7) $x^2+y^2+z^2-3x+5z+7=0$; 8) $2x^2+2y^2+2z^2+6y-4z+1=0$.

Задача 9-10. Напиши ја равенката на сферата што минува низ точките A, B, C и D, ако:

9) $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(4,1,-1)$ и $D(-1,-1,-2)$;

10) $A(4,0,2)$, $B(-1,-3,2)$, $C(2,0,6)$ и $D(-2,-1,1)$.

Задача 11. Напиши ја равенката на сферата опишана околу тетраедарот чии темиња се во точките

$A(-3,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,-2)$ и $D(0,0,0)$.

Задача 12. Изведи го условот при кој рамнината $Ax+By+Cz+D=0$ ја допира сферата

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=1.$$

Задача 13-14. Определи ја равенката на рамнината што ја допира сферата S во точката M, ако:

13) $S:\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$ и $M(1,1,3)$;

14) $S:\ x^2+y^2+z^2-8x+2y-2z+9=0$ и $M(2,1,2)$.

Задача 15-16. Напиши ги равенките на рамнините што минуваат низ правата p и ја допираат сферата S, ако:

15) $p:-x=y=z-\sqrt{2}$ и $S:x^2+y^2+z^2=1$;

16) $p:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-7}{-4}$ и $S:x^2+y^2+z^2-4x-2y-6z-22=0$.

Задача 17. Најди ја равенката на сферата што има центар во точката $C(2,-1,0)$ и ја допира рамнината $2x-3y-7z+2=0$.

Задача 18. Напиши ја равенката на сферата која има центар во точката $C(1,-2,0)$ и ја допира одвнатре сферата

$$S_1:x^2+y^2+z^2-12x+8y-6z+20=0.$$

Задача 19-20. Напиши ја равенката на сферата впишана во тетраедарот што го заградуваат рамнините координатните рамнини и рамнината

19) $3x+4y+12z-18=0$; 20) $3x-4y-12z-18=0$.

Задача 21. Напиши ја равенката на сферата впишана во тетраедарот што го заградува рамнината $x-2y+z=1$, со координатните рамнини.

Задача 22. Дадени се сферите

$$\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z+1\right)^2=5 \text{ и } (x-3)^2+y^2+z^2=4.$$

Најди ја равенката на рамнината што ја содржи пресечната кружница на сферите, а потоа најди ги центарот и радиусот на таа кружница.

Задача 23. Најди точка на сферата

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$$

која е најблиску до рамнината $3x+4y+19=0$. Пресметај го растојанието од таа точка до рамнината.

<u>6.1.2. Елипсоид, параболоид, хиперболоид и конус</u>

Задача 1-4. Кои површини се определени со следниве равенки:

1) $x^2+4y^2=1$; 2) $y=x^2$; 3) $x^2-z^2=4$; 4) $y^2-z^2=0$.

Задача 5-12. Кои површини се определени со следниве равенки:

5) $8x^2-4y^2+24z^2-48=0$; 6) $2x^2-6y^2-3z^2=6$; 7) $y^2-2x+1=0$;

8) $x^2+y^2-z^2=0$; 9) $x^2+y^2-z=0$; 10) $x^2+y^2+1=0$;

11) $x^2+y^2-z^2-2x-4y+2z+3=0$; 12) $2x^2-3y^2-6z=0$.

Задача 13-14. Најди ги заедничките точки, ако постојат, на правата p и површинта S, ако:

13) p: $x=-2+t$, $y=1-2t$, $z=3t$; и S: $z=x^2+y^2$.

14) p: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{3}$ и S: $2x^2+3y^2=1$.

Задача 15. Пресекот на конусот $x^2+y^2-2z^2=0$ со рамнината $x+2z-4=0$ е елипса. Најди ја ортогоналната проекција на елипсата.

Задача 16. Покажи дека правите

$$\begin{cases}2x+3y-6z-6=0\\2x-3y+6z-6=0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x-3z=0\\ \quad y-2\end{cases}$$

лежат на хиперболоидот $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$.

Задача 17. Со помош на трансформацијата

$$x=\frac{1}{3}\left(x'+2y'+2z'\right),\ y=\frac{1}{3}\left(2x'+y'-2z'\right),\ z=\frac{1}{3}\left(2x'-2y'+z'\right);$$

докажи дека равенката $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-18=0$ е равенка на елипсоид.

6.2. Цилиндрични, конусни и ротациони површини

6.2.1. Цилиндрични површини

Задача 1-2. Состави ја равенката на цилиндричната површина со директриса D и вектор на правец p, ако:

1) D: $y=x+1$, $z=x-2$; и $\vec{p}=(2,-1,3)$;

2) D: $x^2+y^2=1$, $z=1$; и $\vec{p}=(1,1,1)$.

Задача 3. Состави ја равенката на цилиндричната површина чија директриса е дадена со равенката $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$, $x + y = 0$, а генератрисата е паралелна со правата $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{-2}$.

Задача 4. Состави ја равенката на цилиндричната површина која е паралелна со правата $\frac{x-5}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+4}{-3}$ и е опишана околу топката $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задача 5. Состави ја равенката на цилиндричната површина опишана околу сферите:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9 \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

Задача 6. Сферата со равенка $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ е осветлена од зраци паралелни на правата $x - 2y + z = 0$, $3x + y - 4z = 0$. Најди ја равенката на контурата на сенката во xOy рамнината.

6.2.2. Конусни површини

Задача 1-3. Состави ја равенката на конусната површина со теме T и директриса D, ако:

1) $T(2,-1,3)$ и D: $z = x^2 + y^2$, $z = 4$;
2) $T(-2,1,3)$ и D: $y^2 = 2x$, $z = 0$;
3) $T(1,-2,1)$ и D: $x + y - z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 4. Состави ја равенката на конусната површина со директриса $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ и теме кое се наоѓа во пресекот на правата $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ со рамнината $2x + y + z - 1 = 0$.

Задача 5. Состави ја равенката на конусната површина што има теме во точката $T(3,-4,7)$ и е опишана околу сферата $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$.

Задача 6. Светлосен извор се наоѓа во $T(2,-1,3)$. Најди ја контурата на сенката на сферата $S: (x-1)^2 + (y+7)^2 + (z+3)^2 = 1$ во рамнината $x + y = 0$.

Задача 7. Состави ја равенката на конусната површина опишана околу сферите $S_1 : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2$ и $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Задача 8. Правата $\frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z-2}{3}$ ротира околу z -оската. Да се состави равенката на опишаната површина.

Задача 9-10. Состави ја равенката на кружната конусна површина што минува низ точката S, има теме во точката T, а за оска и служи правата p, ако:

9) $S(2,-1,1)$, $T(4,-4,3)$, $p : x = 3t+1$, $y = -2t-2$, $z = t+2$;

10) $S(0,1,0)$, $T(0,1,0)$, $p : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

6.2.3. Ротациони површини

Задача 1-3. Најди ги равенките на површините што се добиваат со ротација на следниве криви околу дадените оски:

1) $z = |y|$, околу y -оската и околу z -оската;

2) $z = \frac{1}{y^2 - 1}$, околу z -оската;

3) $z = x^3$, околу x -оската и околу z -оската.

Литература

[1] З. Мисајлески, *Векторска и линеарна алгебра*, е издание, УКИМ, Скопје, 2018

[2] З. Мисајлески, Б. Андоновиќ, Т. Димовски, *Збирка задачи по математика I*, за студентите на Технолошко-металургискиот факултет, е издание, УКИМ, Скопје, 2015

[3] Н. Целакоски, *Задачи по линеарна алгебра*, Просветно дело, Скопје

[4] И. Шапкарев, *Збирка задачи по математика I (II)* - Скопје, 1995

[5] Асистенти на Градежниот факултет во Скопје *Испитни комбинации по математика*, I (II) дел, 1970-2003

[6] P. Miličić, M. Miličić, *Zbirka rešenih zadataka iz više matematike,* I (II) део- Beograd: „Akademska misao", 2003 (2008)

[7] Г. Н. Берман, Сборник задач по курсу математического анализа, Издательство Наука, Москва, 1969

[8] Б. П. Демидовиќ, Сборник задач и упражении по математическому анализу, Издательство Наука, Москва 1966

[9] В. П. Минорский, Сборник задач по высшей математике, Издательство Наука, Москва 1966

[10] В. Сотирова Димова-Нанчева, А. Михайлов Витанов, Г. Иванов Караджов, И. Михайлов Михов, В. Борисов Попов, С. Стефанов Тодорова, Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1-5, Државно издателство „Техника", Софија, 1975

[11] К. Димитрова, П. Паскалов, Ц. Дончев, Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част 1-3, Издателство „Архимед 2000" ЕООД, Софија, 2008

[12] Vježbi iz predmeta Matematika 1, 2; 2001/2012, Univierzitet u Zenici, Mašinski fakultet, pf.unze.ba\nabokov

[13] А. Самарџиски, *Векторска алгебра низ задачи*, УКИМ, Скопје, 1991

[14] И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач, Справочное пособие по математическому анализу, чст первая (вторая), „Виша школа", Киев, 1978 (1986)

[15] Miličić P., Uščumlić M. *Zbirka zadataka iz više matematike*, I-II, IP Nauka, Beograd, 1984 (1982)

[16] **T. Došenović, A. Takači, D. Rakić, M. Brdar,** *Zbirka zadataka iz matematike I* , Verzal, Novi Sad, 2008

[17] **С. Георгиевска, Е. Атанасова,** *Математика (0,I,II),* УКИМ, Скопје, 2002

[18] **Б. Трпеновски, Н. Целаковски, Ѓ. Чупона,** *Виша математика, книга I-IV*, Просветно дело, Скопје, 1994

[19] **R. Ellis, D.Gulick,** *Calculus with analytic geometry*, fourth edition, Harcourt Brace Jovanovich, 1990

[20] **J. Stewart,** *Calculus early transcedental*, Thomson Brooks/Cole 2007

[21] **Dennis G. Zill, D. Warren. S. Wright,** *Calculus early transcedental*, Jones and Bartlett publishers, 2011

[22] **(N. Miličić), M. Miličić,** *Elementi više matematike*, I (II) део, Akademska misao, Beograd, 2003

[23] **O. Hadžić, Đ. Takači,** *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*, Novi Sad, 2000

[24] **И. Шапкарев, П. Кржовски,** *Линеарна алгебра со аналитичка геометрија*, УКИМ, Скопје, 1988

[25] **А. Малчески,** *Математика 1, 2*; Машински факултет, чукани материјали

[26] **B. Apsen,** *Repetitorij (Riješeni zadaci) više matematike*, prvi (drugi, treći) deo, Tehnička knjiga, Zagreb, 1982 (1968,1989)

[27] **К. Тренчевски, Б. Крстеска, Г. Тренчевски, С. Здравеска,** *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија* за III година на реформираното гимназиско образование Просветно дело АД, Скопје, 2004

[28] **И. Јанев, Ј. Илиевски, Д. Ѓорѓиев,** *Збирка задачи по математика за четврта година на средното образование*, Просветно дело, Скопје, 2002

[29] **Ј. Митевска, И. Трајков, Л. Грибовска-Поповиќ,** *Математика* за III година на реформираното гимназиско образование

Содржина

Е-издание:
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41