Универзитет “Св. Кирил и Методиј”
Градежен факултет - Скопје

Даниел Велинов

СТОХАСТИЧКИ ПРОЦЕСИ И ПРИМЕНА

Стохастички процеси и примена

Даниел Велинов

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
Даниел Велинов, Градежен факултет-Скопје

Рецензенти
1. проф. д-р Сања Атанасова
Вонреден професор на ФЕИТ, УКИМ, Скопје
2. проф. д-р Павел Димовски
Вонреден професор на ТМФ, УКИМ, Скопје
3. доц. д-р Симона Богоевска
Доцент на ГФ, УКИМ, Скопје

Техничка обработка
Даниел Велинов

Лектура на македонски јазик:
ас. м-р Цутка Јованоска
асистент на ДУТ, Тетово

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

519.216-7(075.8)

ВЕЛИНОВ, Даниел
Стохастички процеси и примена [Електронски извор] / Даниел Велинов. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Градежен факултет, 2021

Начин на пристапување (URL):
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41. - Текст во PDF формат, содржи 365 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 29.06.2021. - Библиографија: стр. 361-365

ISBN 978-9989-43-459-4

а) Стохастички процеси -- Математичка статистика -- Теорија на веројатност -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 54228485

ПРЕДГОВОР

Овој учебник е наменет првенствено за студентите на вториот и на третиот циклус студии на Градежниот факултет во Скопје по предметите „Стохастички процеси и нивна примена“ и „Одбрани поглавја од математиката“, како и за студентите од другите технички факултети кои во своите наставни програми изучуваат делови од оваа книга.

Теоријата на стохастичките процеси може да се разгледува како динамички дел од статистиката, а математичкиот апарат во оваа теорија се заснова на математичката анализа и теоријата на веројатноста. Врз основа на овој математички апарат е развиена теоријата на мартингали и полумартингали. Од аспект на примената, стохастичкиот калкулус слободно може да се опише како поле од применетата математика кое го изучува инфинитезималниот калкулус на недиференцијабилни функции. Потребата од овој калкус доаѓа од потребата да се вклучат непредвидливи фактори во моделирањето. Овде настапува на сцена теоријата на веројатноста и како нејзин резултат калкулусот за случајни функции или стохастички процеси.

Основна цел на овој учебник е да го запознае студентот со теоријата на стохастичките процеси, како и да добие вештини за математичко моделирање на физички, економски и социјални процеси.

Материјалот во книгата е поделен во 11 глави. Направен е обид изложениот материјал да е претставен што е можно поедноставно, а притоа е задржана математичката ригорозност.

Во првата глава се дадени воведни и основни дефиниции поврзани со стохастичките процеси. Од апликативна гледна точка опишано е како компјутерски се генерираат стохастичките процеси.

Втората глава се однесува на основите на стохастичките процеси, поточно се концентрира на Брауновото движење, поточно на дефиницијата, својствата на патиштата на Брауновото движење, мартингалите на Брауновото движење, нулите и големината на нараснувањата на Брауновото движење. Бидејќи оваа глава се однесува на основните стохастички процеси, во неа се дадени и Поасоновите и стационарните процеси.

Третата глава се однесува на стохастичкиот калкулус, односно на дефиницијата и својствата на Итовиот интеграл од процеси, Итовата формула за Брауновото движење и Итовите процеси.

Во четвртата и во седмата глава се дадени и се изучуваат стохастичките диференцијални равенки и нивните решенија, дифузии. Се разгледуваат стохастичките експоненцијали и логаритми, линеарни стохастички диференцијални равенки, како и Марковото својство на решенијата и слабите решенија. Понатаму се дадени математичките очекувања на парцијалните диференцијални решенија и репрезентација на решенијата на обичните диференцијални равенки.

Во петтата и во шестата глава е дадена теоријата на мартингалите и на полумартингалите. Подетално, е дадена дефиницијата на мартингалите, конвергенцијата, локализацијата и квадратната варијација на мартингалите, како и неравенствата со мартингали. Кај полумартингалите, покрај нивната дефиниција, дадена е декомпозицијата на Дуб-Мејер, Итовата формула за полумартингали, компензаторите и острозаградените процеси.

Осмата глава е посветена на процесите на чисти скокови. Дадена е Итовата формула за процеси со конечна варијација, процесите на броење и процесите на Марковиот скок.

Деветтата и десеттата глава се посветени на апликацијата на теоријата на стохастичките процеси. Дадени се апликации кои се многу значајни за практичните истражувања во инженерските науки, но и за теориските изучувања. Монте Карло-методите се дадени како еден природен спој на техниката и на напредната статистика.

Во последната глава е даден додаток, кој на читателите ќе им ги даде потребните основни знаења за да може подетално и подлабоко да се навлезе во теоријата од главниот дел на книгата.

Авторот сака да изрази посебна благодарност на рецезентите на овој учебник, кои со своите забелешки значително придонесоа во подобрувањето на неговата содржина.

За идејното решение на корицата на учебникот, авторот изразува особена благодарност на Ана Иванова.

Авторот ќе биде посебно благодарен на сите читатели, кои со своите забелешки и сугестии ќе придонесат за подобрување на квалитетот на учебникот.

Скопје, декември 2020 г. Авторот

1. Вовед

Изразот *стохастички процес* е, всушност, друг (помодерен) назив за изразот *случаен процес*. Стохастичи процес е фамилија (обично бесконечна) од случајни променливи, означени со параметар t, кој најчесто, го означува времето, односно $X(t)$ или X_t.

Еден тривијален пример за стохастички процес е случаен независен примерок од некоја специфична дистрибуција, која е бесконечна: $X_1, X_2, X_3, \ldots$. Во овој случај, параметарот t ги брои поединечните испитувања. Потипичен пример за стохастички процес се случајните променливи кои се корелирани со друга случајна променлива.

Генерално, стохастичките процеси може да се поделат на четири различни категории кои зависат од тоа дали случајните променливи $X(t)$ се дискретни или непрекинати и од тоа дали параметарот t е дискретен или непрекинат:

1) $X(t)$ и t се дискретни:

а) Фрлајќи коцка последователно (бесконечно), каде што $X_1, X_2, X_3, \ldots$ се настаните од овој Бернулиев процес (просторот на сите елементарни настани се состои од: $1,2,3,4,5,6$).

б) Да го разгледаме истиот Бернулиев процес, каде што $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ го претставуваат вкупниот збир од бројот на точките добиени пред наредното фрлање, односно: $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1 + X_2$, $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3, \ldots$. Во овој случај, сите Y се јасно корелирани (просторот на сите елементарни настани се состои од сите природни броеви).

в) Маркови ланци - Овие процеси ќе бидат изучувани подетално во продолжение (просторот од сите елементарни настани се состои од конечно подмножество од целите броеви, за конечни Маркови ланци и просторот од сите елементарни настани од сите цели броеви за бесконечни Маркови ланци).

2) $X(t)$ се дискретни, а t е непрекинато:

а) Поасонов процес - бројот на луѓе кои влегле во една библиотека од времето на отворање, па сѐ до времето t. Тогаш $X(t)$ ќе има Поасонова дистрибуција со математичко очекување $\delta \cdot t$, каде што δ е времето на пристигнување во библиотеката, но $X(t)$ не се независни помеѓу себе (просторот од сите елементарни настани се состои од сите природни броеви).

б) Процес на чекање (queuing process) - бројот на луѓе кои освен што влегле и излегле од библиотеката (ова е пример на бесконечен сервер ред, при што ќе ни биде потребна дистрибуцијата на времето поминато во библиотеката). Исто така, има и други примери на редици со еден сервер, два сервера и итн., со разни варијации кои се интересни за изучување.

3) $X(t)$ и t се непрекинати:

а) Брауново движење (Brownian motion) (процес на дифузија) - мала честичка задржана во течноста се движи во ирегуларно движење, како резултат на тоа што била задржана во молекулата на течноста. Ова движење ние ќе го изучуваме, како и проблемите - како што е: „која е веројатноста дека честичката ќе се врати во почетната позиција" и други.

4) $X(t)$ се непрекинати, а t е дискретно (т.н. временски серии):

а) месечни флуктуации на стапката на инфлација,

б) дневни флуктуации на берзата,

в) годишни флуктуации на БДП.

Овде можеме да ги испитуваме трендовите (систематски или сезонски), да дизајнираме различни модели за останатите (случајни) компоненти (Марков, Јул и други).

По ова останува проблемот за оценката на параметрите на моделот.

1.1. Основни дефиниции

Дефиниција 1. Стохастички процес е фамилија од случајни променливи $\{X(t) : t \in \tau\}$, дефинирана со просторот на веројатност (Ω, F, p) и индексирана со параметар t, каде што t припаѓа на множеството τ.

Дефиниција 2. Ако τ е дискретно, тогаш велиме дека стохастичкиот процес е дискретен. Ако τ е непрекинато (бесконечно непреброиво множество), тогаш за стохастичкиот процес велиме дека е непрекинат.

Параметарот t вообичаено игра улога на време и случајната променлива може да биде дискретно вредносна или непрекинато вредносна за секоја вредност на t. На пример, непрекинат стохастички процес може да биде дискретно вредносен. Кога е потребно да се моделира некоја појава, потребно е претходно многу добро да се познаваат и двата типа на стохастички процеси: дискретни и непрекинати, како и нивната поврзаност.

Стохастичките процеси многу често се појавуваат во техничките науки. Навистина, решенијата на стохастичките диференцијални равенки се стохастички процеси. Во овој дел ќе ги разгледаме дискретните и непрекинатите стохастички модели. Потоа, ќе дадеме опис на Хилбертовиот простор од стохастички процеси. Многу важниот Винеров (Wiener process) процес ќе биде воведен и ќе биде дадено компјутерско генерирање на стохастички процеси. Понатаму, ќе бидат споменати неколку добро познати стохастички процеси. Кратко кажано, во овој дел ќе бидат дадени основните работи поврзани со стохастичките процеси кои се потребни за стохастичко моделирање и за изучување на стохастичките диференцијални равенки.

1.2. Дискретни стохастички процеси

Во овој дел ќе бидат изучувани дискретните стохастички процеси. За овие процеси, нека $\tau = \{t_0, t_1, t_2, ...\}$ е дискретно множество од времиња. Нека е дадена низата од случајни променливи: $X(t_0), X(t_1), X(t_2), ...$, при што секоја случајна променлива е дефинирана на просторот од сите елементарни настани Ω. Оваа низа може да ги опише, на пример, еволуцијата на физички, биолошки или финансиски систем за време на дискретната низа од времиња: $t_0, t_1, t_2, ...$.

Дефиниција 1. Ако само вредноста на случајната променлива $X(t_n) = X_n$ е доволна за да се определи вредноста на наредната случајна променлива $X(t_{n+1}) = X_{n+1}$, тогаш за низата $(X_n)_n$ велиме дека е Марков процес.

Во оваа секција, дискретните стохастички процеси, кои ќе бидат разгледувани, ќе бидат Марковите процеси. Овие процеси се многу чести и се корисни при изучувањето на моделие дадени преку стохастички диференцијални равенки. Дискретно вредносниот Марков процес се нарекува Марков ланец. Нека со $p(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$ се дефинирани веројатностите за транзиција од еден чекор за Марков ланец. Јасно е дека:

$$p(X_{n+1} = x_{n+1},\ X_n = x_n) = p(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \cdot p(X_n = x_n).$$

Дефиниција 2. Ако транзиционите веројатности се независни од времето t_n, тогаш за Марковиот ланец се вели дека има стационарни транзициони вредности и за Марковиот ланец се вели дека е хомоген Марков ланец.

Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Овде во овој пример е даден еден непрекинат Марков процес.

Нека: $t_i = i\Delta t$ и $\eta_i : N(0,1)$, за $i = 0,1,2,...,N$, каде што: $\Delta t = \frac{1}{N}$.

Нека: $X_i = X(t_i)$, се дефинирани со:

$$X_{i+1} = X_i + \eta_i \sqrt{\Delta t}\,, \quad \text{за } i = 0, 1, 2, ..., N-1,$$

каде што: $X_0 = 0$. Тогаш, $(X_i)_{i=0}^N$ е Марков процес со непрекинати вредности на X_i и дискретни вредности за времето t_i. Да забележиме дека:

$$X_N = \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i \sqrt{\frac{1}{N}}\,,$$

па $X_N : N(0,1)$. ♦

Пример 2. Во овој пример ќе биде даден еден хомоген Марков процес.

Нека: $X_i = X(t_i)$, за $t_i = i\Delta t$, за $i = 0, 1, 2, ..., N$, каде што: $\Delta t = \frac{1}{N}$ и $X_0 = 0$. Дефинираме закон на распределба на веројатноста на случајната променлива δ, која ги прима вредностите: $-\alpha,\ 0,\ \alpha$, со

$$p(\delta = -\alpha) = \gamma \Delta t\,,$$
$$p(\delta = \alpha) = \gamma \Delta t\,,$$
$$p(\delta = 0) = 1 - 2\gamma \Delta t\,,$$

при претпоставка $1 - 2\gamma\Delta t > 0$. Нека:

$$X_{i+1} = X_i + \delta_i, \qquad \text{за } i = 0, 1, 2, ..., N-1,$$

каде што δ_i се независни помеѓу себе случајни променливи, со исти закони на распределба како δ. Тогаш: $E(\delta_i) = 0$ и $D(\delta_i) = 2\alpha^2\gamma\Delta t = \frac{2\alpha^2\gamma}{N}$, за сите $i = 0, 1, 2, ..., N-1$. Да забележиме дека стохастичкиот процес $(X_i)_i$, прима дискретни вредности, а, исто така, и времето е дискретно. На пример, транзиционите веројатности имаат форма:

$$p(X_{n+1} = l\alpha \mid X_n = k\alpha) = \begin{cases} 1 - 2\gamma\Delta t, & l = k \\ \gamma\Delta t, & l = k-1 \text{ или } l = k+1 \\ 0, & l \notin \{k-1, k, k+1\} \end{cases}.$$

Дополнително, да забележиме дека:

$$X_N = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\delta_i}{\sqrt{N}}\,,$$

каде што:

$$\delta_i = \delta_i \sqrt{N}, \qquad E(\delta_i) = 0 \qquad \text{и} \qquad D(\delta_i) = 2\alpha^2\gamma .$$

Од Централната гранична теорема, имаме:

$X_N : N(0, 2\alpha^2\gamma)$, за доволно големо N.

Ако $2\alpha^2\gamma = 1$, тогаш: $X_N : N(0,1)$, за доволно големо N. Па, ако N расте, дистрибуцијата на X_N се приближува (станува доволно блиска) како кај случајната променлива во претходниот пример. ♦

Пред да разгледуваме нехомогени Маркови ланци, кратко ќе наведеме некои својства на хомогените Маркови ланци. Нека $\{X_n : n \geq 0\}$ е хомоген Марков ланец дефиниран за дискретните времиња: $\tau = \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$, каде што: $t_n = n\Delta t$, па $t_{n+k} = t_n + t_k$. Нека X_n примаат вредности ненегативни цели броеви за секој t_n, $n = 0,1,2,\ldots$. Значи, $X_n \in \{0,1,2,\ldots\}$. Нека:

$p_{ij} = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i),\ i \geq 0,\ j \geq 0$

ги дефинираат транзиционите веројатности. Транзитивната матрица, дефинирана со: $P = [p_{ij}]$ и $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1$, за $i = 0,1,2,\ldots$.

Законот на распределба на веројатноста на случајната променлива X_n, за $n \geq 1$, може да се пресмета користејќи ја транзитивната матрица P. Го дефинираме k-тиот степен на матрицата P, со $P^k = [p_{ij}^{(k)}]$. Бидејќи $P^{l+n} = P^l P^n$, од множењето на матрици имаме:

$$p_{ij}^{(l+n)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{im}^{(l)} \cdot p_{mj}^{(n)}, \qquad \text{за } l, n \geq 0,$$

каде што P^0 е дефинирано со $P^0 = I$. Оваа врска е позната како Чапман-Колмогорова формула за хомоген Марков ланец. Со ова е дадена дефиницијата на P^k. Нека:

$$p_i(t_k) = p(X(t_k) = i), \text{ за } i = 0,1,2,\ldots$$

е законот на распределба на случајната променлива X_k. Нека:

$$p(t_k) = [p_0(t_k),\ p_1(t_k), \ldots, p_r(t_k), \ldots]^T,$$

каде што: $(p(t_0))_i = p(X(t_0) = 1)$ се почетниот закон на распределба на $X(t_0)$. Јасно,

$$(p(t_1))^T = (p(t_0))^T P$$

$$(p(t_2))^T = (p(t_1))^T P = (p(t_0))^T P^2$$
$$\vdots$$
$$(p(t_n))^T = (p(t_{n-1}))^T P = (p(t_0))^T P^n .$$

Следува:

$$p_i(t_n) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(t_{n-1}) \cdot p_{mi} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(t_0) p_{mi}^{(n)} .$$

Пример 3. (Апроксимација на Поасонов процес)

Да го разгледаме дискретниот хомоген стохастички процес дефиниран со транзитивните веројатности:

$$p_{ik} = \begin{cases} 1-\lambda\Delta t, & k=i \\ \lambda\Delta t, & k=i+1 \\ 0, & k \notin \{i, i+1\} \end{cases} .$$

Да претпоставиме дека: $p(0) = [1,0,0,...]^T$. Во овој пример, транзитивната матрица P е бидијагонална и равенката:

$$(p(t+\Delta t))^T = (p(t))^T P$$

има форма по компоненти:

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\lambda\Delta t)$$

и:

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t)(1-\lambda\Delta t) + p_{i-1}(t)\lambda\Delta t, \qquad \text{за } j \geq 1.$$

Со средување, добиваме:

$$\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t)$$

и:

$$\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = -\lambda p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t), \qquad \text{за } i \geq 1,$$

каде што: $p_0(0) = 1$ и $p_i(0) = 0$, за $i \geq 1$. Кога $\Delta t \to 0$, веројатностите во горниот Марков ланец се приближуваат до оние веројатности кои одговараат на Поасоновиот процес. Навистина,

$$p_i(t) \approx \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^i}{i!}, \qquad \text{за } \Delta t \text{ е доволно мало.}$$

Сега, да разгледаме Маркови ланци кои не мора да бидат хомогени. Нека: $\tau = \{t_0, t_1, t_2, ...\}$, каде што: $t_n = n\Delta t$. Нека: $\{X_n : n \geq 0\}$ е Марков ланец за кој важи: $X_n \in M = \{z_{-m}, z_{-m+1}, ..., z_0, z_1, ..., z_m\}$, каде што: m може да биде произволно голем број и $z_i = i\Delta x$, за секој i и позитивен број Δx. Нека:

$$p_{ij}^{(n)} = P_n\{X_{n+1} = z_j \mid X_n = z_i\}, \quad -m \le i, j \le m$$

дефинираат транзитивни веројатности кои може и да не зависат од времето t_n. Транзитивната матрица е матрица од редот: $(2m+1)\times(2m+1)$, односно: $P_n = [p_{ij}^{(n)}]$, каде $\sum_{j=-m}^{m} p_{ij}^{(n)} = 1$, за секој i и n.

Слично на хомогениот Марков ланец, законот на распределбата на случајната променлива X_n, за $n \ge 1$, може да се најде преку транзитивните матрици P_n, за $n \ge 0$. Нека со $p_i(t_n) = p(X_n = z_i)$, за $i = -m, -m+1, ..., m$ ја дефинираме веројатноста во време t_n. Нека:

$$p(t_n) = [p_{-m}(t_n), p_{-m+1}(t_n), ..., p_m(t_n)]^T,$$

каде што:

$$p(t_0) = [p_{-m}(t_0), p_{-m+1}(t_0), ..., p_m(t_0)]^T$$

се почетните веројатности. Да забележиме дека:

$$p_i(t_1) = \sum_{l=-m}^{m} p_l(t_0) p_{li}^{(0)},$$

за $i = -m, -m+1, ..., m$, па јасно е дека:

$$(p(t_1))^T = (p(t_0))^T P_0$$

$$(p(t_2))^T = (p(t_1))^T P_1 = (p(t_0))^T P_0 P_1$$

$$\vdots$$

$$(p(t_n))^T = (p(t_{n-1}))^T P_{n-1} = (p(t_0))^T P_0 P_1 \cdot ... \cdot P_{n-1}.$$

Ако транзитивната матрица P_n е независна од времето t_n, горниве изрази се сведуваат на изрази како кај хомогениот Марков ланец, на пример:

$$(p(t_n))^T = (p(t_0))^T P^n. \ \blacklozenge$$

Наредно, ќе дадеме многу важен пример за нехомогени дискретни стохастички процеси, односно ќе го дадеме примерот на нанапред Колмогорови равенки. Овој процес е многу важен за развивање модели кои користат стохастички диференцијални равенки.

Пример 4. (Нанапред Колмогорови равенки)

Нека $t_i = i\Delta t$, за $i = 0, 1, 2, ..., N$ и нека $x_j = j\delta$, за $j = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$. Нека X_0 е дадена случајна променлива. Ги дефинираме транзитивните веројатности на дискретен стохастички процес на следниов начин:

$$p_{ik}(t)=\begin{cases}\dfrac{r(t,x_i)\Delta t}{\delta^2}, & k=i+1\\ 1-\dfrac{r(t,x_i)\Delta t}{\delta^2}-\dfrac{s(t,x_i)\Delta t}{\delta^2}, & k=i\\ \dfrac{s(t,x_i)\Delta t}{\delta^2}, & k=i-1\end{cases},$$

каде што r и s се бесконечно диференцијабилни ненегативни фунцкии. Да забележиме дека за горните транзитивни веројатности, ако ΔX е промената на стохастичкиот процес за време t, ставајќи $X(t)=x_i$, можеме да ги пресметаме математичкото очекување и дисперзијата на ΔX. Навистина,

$$E(\Delta X)=\frac{(r(t,X)-s(t,X))\Delta t}{\delta}$$

$$D(\Delta X)=(r(t,X)+s(t,X))\Delta t.$$

Овде претпоставивме дека $\dfrac{\Delta t}{\delta^2}$ е толку мало, така што:

$$1-\frac{r(t,x_k)\Delta t}{\delta^2}-\frac{s(t,x_k)\Delta t}{\delta^2}>0.$$

Нека $p_k(t)=p(X(t)=x_k)$ е веројатноста во момент t. Тогаш, за $p_k(t+\Delta t)$ имаме:

$$p_k(t+\Delta t)=p_k(t)+\frac{\left(p_{k+1}(t)s(t,x_{k+1})-p_k(t)(r(t,x_k)+s(t,x_k))+p_{k-1}(t)r(t,x_{k-1})\right)\Delta t}{\delta^2}. \quad (*)$$

Со средување на последниот израз, добиваме:

$$\frac{p_k(t+\Delta t)-p_k(t)}{\Delta t}=-\left(\frac{p_{k+1}(t)a(t,x_{k+1})-p_{k-1}a(t,x_{k-1})}{2\delta^2}\right)$$

$$+\left(\frac{p_{k+1}(t)b(t,x_{k+1})-2p_k(t)b(t,x_k)+p_{k-1}(t)b(t,x_{k-1})}{2\delta^2}\right),$$

каде што ставаме:

$$a(t,x)=\frac{r(t,x)-s(t,x)}{\delta}$$

и:

$$b(t,x)=r(t,x)+s(t,x).$$

Ако ставиме $\Delta t \to 0$, дискретниот стохастички процес се приближува кон процес со непрекинат дел за времето t. Тогаш, ако ставиме $\Delta t \to 0$, за $p_k(t)$ важи Кошиевиот проблем:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\left(\frac{p_{k+1}(t)a(t,x_{k+1}) - p_{k-1}(t)a(t,x_{k-1})}{2\delta}\right)$$

$$+\left(\frac{p_{k+1}(t)b(t,x_{k+1}) - 2p_k(t)b(t,x_k) + p_{k-1}(t)b(t,x_{k-1})}{2\delta^2}\right), \qquad (**)$$

за $k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$, каде што $(p_k(0))_{k=-m}^{m}$ се познати. Горните равенки заедно со почетниот услов се нарекуваат нанапред Колмогорови равенки за стохастички процес со непрекинато време.

Сега, да претпоставиме дека δ е мало, така што стохастичкиот процес се приближува кон непрекинат процес. Бидејќи:

$$\frac{F(x+\delta) - F(x-\delta)}{2\delta} = F'(x) + \frac{\delta^2}{6}F'''(\xi_1)$$

и:

$$\frac{F(x+\delta) - 2F(x) + F(x-\delta)}{\delta^2} = F''(x) + \frac{\delta^2}{12}F''''(\xi_2),$$

за некои вредности ξ_1, ξ_2, така што: $x - \delta \le \xi_1, \xi_2 \le x + \delta$, тогаш горниот систем од диференцијални равенки ја апроксимира парцијалната диференцијална равенка:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial(a(t,x)p(t,x))}{\partial x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\left(b(t,x)p(t,x)\right)}{\partial x^2}. \qquad (***)$$

Равенката (**) е диференцна апроксимација на последната парцијална диференцијална равенка. Оваа апроксимација е прецизна за мало δ и споредувајќи ги решенијата на (*) и (***), имаме:

$$p(t,x_k) = p_k(t) + O(\Delta t) + O(\delta^2).$$

Покажано е дека напредната Колмогорова равенка одговара на процесот на дифузија, кој има стохастичка диференцијална равенка:

$$dX(t) = a(t,X)dt + \sqrt{b(t,X)}\,dW(t).$$

На крајот, да забележиме дека коефициентите во времето t на горната стохастичка диференцијална равенка се поврзани со дискретниот стохастички модел (*), преку математичкото очекување и дисперзијата на промената на процесот ΔX, за многу краток интервал Δt, ставајќи $X(t) = x$. Важи:

$$E(\Delta X) = a(t,X)\Delta t$$

и:

$$D(\Delta X) = b(t, X)\Delta t\,. \blacklozenge$$

Пример 5. (Специфичен пример на нанапред Колмогорови равенки)

Како специјален случај на претходниот пример, да го разгледаме процесот раѓање - смрт, каде што: $\delta = 1$, $x_j = j$, за $j = 0,1,2,...,b$ е per capita стапка на раѓање и d е per capita стапка на смртност. Претпоставуваме дека b и d се константи. Транзитивните веројатности за овој пример се:

$$p_{ik}(t) = \begin{cases} bx_i\Delta t, & k = i+1 \\ 1 - bx_i\Delta t - d\cdot x_i\Delta t, & k = i \\ d\cdot x_i\Delta t, & k = i-1 \end{cases}.$$

Следува дека законот на распределба при непрекинато време (ставајќи $\Delta t \to 0$) ги задоволува нанапред Колмогоровите равенки:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -(b-d)\left(\frac{p_{k+1}(t)x_{k+1} - p_{k-1}(t)x_{k-1}}{2}\right)$$

$$+\frac{b+d}{2}\left(p_{k+1}(t)x_{k+1} - 2p_k(t)x_k + p_{k-1}(t)x_{k-1}\right),$$

при што: $p_M(0) = p(X(0) = x_M) = 1$ и $p_k(0) = p(X(0) = x_k) = 0$, за $k \neq M$ претпоставувајќи почетна популација со големина M. Ставајќи $X(t) = x_i$ во момент t, за математичкото очекување и дисперзија имаме:

$$E(\Delta X) = (b-d)X\Delta t$$

и:

$$D(\Delta X) = (b+d)X\Delta t,$$

до ред $(\Delta t)^2$. За големо M, горните равенки приближно ја задоволуваат Фокер-Планковата равенка:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial\left((b-d)xp(t,x)\right)}{\partial x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\left((b+d)xp(t,x)\right)}{\partial x^2},$$

со почетен услов: $p(0,x) = \delta(x-M)$.

Законот на распределба на веројатноста $p(t,x)$ е законот на распределба на решенијата на Итовата (Itô) стохастичка диференцијална равенка:

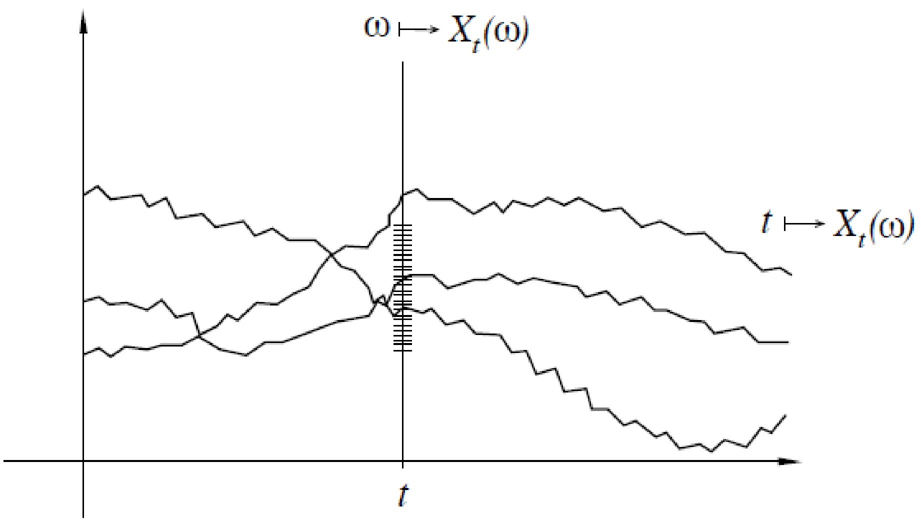
$$dX(t) = (b-d)X(t)dt + \sqrt{(b+d)X(t)}\,dW(t),$$

со почетен услов $X(0) = M$. Решенијата на горната стохастичка диференцијална равенка имаат приближно еднакви закони на распределба, како што е случајот со стохастичкиот процес раѓање - смрт. Како прифатлив модел за прост процес раѓање-смрт може да се земе горната стохастичка диференцијална равенка. ♦

1.3. Непрекинати стохастички процеси

Нека е даден непрекинат стохастички процес: $\{X(t) : t \in \tau\}$, дефиниран на просторот на веројатноста: $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, каде што $\tau = [0,T]$ е интервал за времето и процесот е дефиниран за сите вредности t на времето во тој интервал. Стохастичкиот процес со непрекинато време е функција $X : \tau \times \Omega \to \mathbb{R}$ со две променливи t и ω и X може да биде дискретно вредносна или непрекинато вредносна случајна променлива. Всушност, $X(t) = X(t,\cdot)$ е случајна променлива за секоја вредност $t \in \tau$ и $X(\cdot,\omega)$ го пресликува интервалот τ во $\mathbb{R}$ и се нарекува прост пат, реализација или траекторија на стохастичкиот процес за сите $\omega \in \Omega$. Важно е дека посебно знаење за настаните ω не е потребно, но секое ω е важно бидејќи за секое $\omega \in \Omega$ имаме различна траекторија. Па, во согласност со ова можеме да земеме дека $X(t)$ е случајна променлива за секоја вредност од t и $X(\cdot)$ претставува траекторија над интервалот $\tau = [0,T]$. Овде ќе споменеме дека ако го вклучиме ω, тоа најчесто ќе биде направено со цел да потенцираме дека X е функција од две променливи.

На следнава слика е даден пример на траекторија, која е реализација на процесот $X(t)$.



Дефиниција 1. Стохастичкиот процес X е Марков процес ако состојбата на процесот во кој било момент $t_n \in \tau$, ја определува идната состојба на процесот, односно:

$$p(X(t_{n+1}) \le x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n) = p(X(t_{n+1}) \le x_{n+1} \mid X(t_1) = x_1, ..., X(t_n) = x_n),$$

кога $t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$.

Марковите процеси се многу чести стохастички процеси и повеќето од процесите кои ќе ги разгледуваме овде ќе бидат Маркови процеси. Наредниве два примера се примери на Маркови процеси.

Пример 1. (Поасонов процес со големина λ)

Нека $X(t)$ е еднаков на бројот на реализирани експерименти до време t. Да претпоставиме дека веројатноста за реализација на еден експеримент во временски интервал Δt е еднаква на $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Јасно е дека ова е непрекинат стохастички процес и веројатноста за реализација на n експерименти во моментот t е:

$$p(X(t) = n) = p_n(t) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Процесот $X(t)$ е непрекинат по време стохастички процес кој е дискретно вредносен. Специјално, $X(t)$ е Поасонов процес со големина $\lambda > 0$. Да забележиме дека $X(0) = 0$ и бројот на реализирани експерименти во кој било момент t има Поасонова дистрибуција со математичко очекување λt. Па, за секое $s \ge 0$:

$$p(X(t+s) - X(s) = n) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Навистина, ова е Марков процес и:

$$p(X(t+\Delta t) \le m + \Delta m \mid X(t) = m) = \sum_{l=0}^{\Delta m} \exp(-\lambda\Delta t)\frac{(\lambda\Delta t)^l}{l!},$$

и веројатноста во време $t + \Delta t$ зависи само од состојбата на системот во време t, а не од историјата на системот. Во примерот 4 од претходниот дел, видовме дека:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t),$$

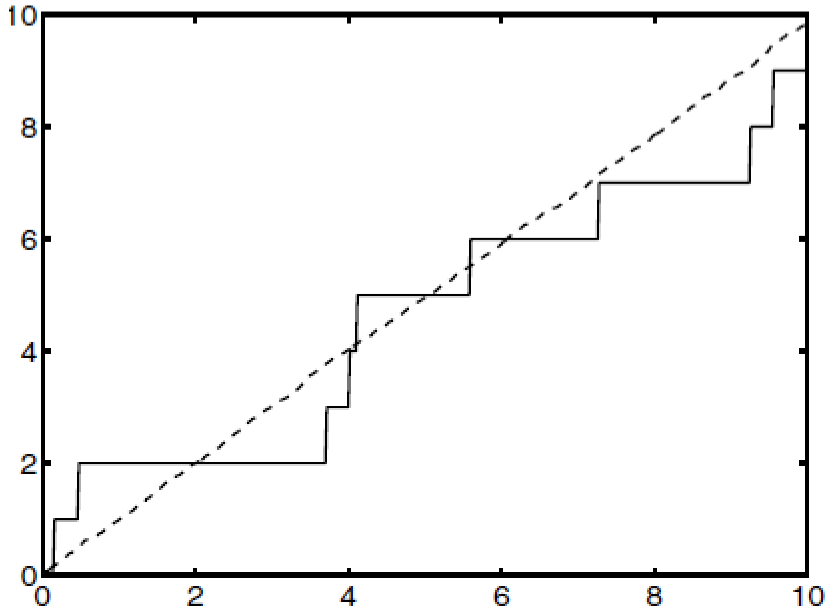
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \qquad \text{за } n \geq 1.$$

Математичкото очекување и дисперзијата на $X(t)$ се:

$$E(X(t)) = \lambda t$$

$$D(X(t)) = \lambda t .$$

Дополнително, ако $Y(t) = X(t+s) - X(s)$, за секои $s \geq 0$, тогаш $Y(t)$ има Поасонова распределба со големина λ и $Y(0) = 0$. На сликата подолу е дадено случајно однесување на дискретните скокови во Поасонов процес. Средната крива, дадена на цртежот, е за 200 прости патишта. Да забележиме дека средната крива приближно е правата $y = \lambda t$.



На x-оската е времето, а на y-оската е Поасонов процес - единечен интензитет. Целата линија е еден прост пат на Поасоновиот процес, а испрекинатата линија е средината на 200 Поасонови процеси за $\lambda = 1$. ♦

Интересно е да се разгледува функцијата на густина на транзитивната веројатност за премин од состојба x во време s во состојба y во време t, за непрекинат Марков процес. Аналогно на дискретните Маркови процеси, функцијата на густина на транзитивната веројатност ја задоволува Чапман-Колмогоровата равенка:

$$p(y,t,x,s) = \int_{\mathbb{R}} p(y,t,z,u)\, p(z,u,x,s)\, dz .$$

Дефиниција 2. За Марков процес $X(t)$ велиме дека е хомоген, ако за функцијата на густината за транзитивната веројатност важи:

$$p(y,t+u,x,s+u) = p(y,t,x,s).$$

Од дефиницијата, јасно е дека функцијата на густината на транзитивната веројатност зависи само од изминатото време. Во овој случај може да се напише: $p(y,x,t-s)$.

Пример 2. (Апроксимиран Винеров процес (Approximate Wiener process)

Нека $X_i(t)$ за $i=1,2,...,N$, се N независни Поасонови процеси со големина λ, како во претходниот пример. Нека $Y_N(t)$ е друг стохастички процес дефиниран со:

$$Y_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda N}} .$$

Од Централната гранична теорема, кога N расте, $Y_N(t)$ тежи кон случајна променлива со нормална распределба со математичко очекување 0 и дисперзија t. Навистина, од претходниот пример, $Y_N(t+s) - Y_N(t)$, тежи кон случајна променлива со математичко очекување 0 и дисперзија s, за секое $s,t \in \tau$. ♦

Во претходниот пример, $Y_N(t)$ тежи кон Винеров процес или Брауново движење $W(t)$, кога N расте. Винеров процес $\{W(t) : t \geq 0\}$ е непрекинат стохастички процес со стационарни независни нараснувања, така што:

$$W(0) = 0 \qquad \text{и} \qquad W(t) - W(s) : N(0, t-s),$$

за сите $0 \leq s \leq t$. Па,

$$E(W(t)) = 0,$$

$$D(W(t) - W(s)) = t - s,$$

за $0 \leq s \leq t$. Дополнително,

$$W(t_2) - W(t_1) : N(0, t_2 - t_1) \qquad \text{и} \qquad W(t_4) - W(t_3) : N(0, t_4 - t_3)$$

се непрекинати случајни променливи за $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$. Да забележиме дека Винеров процес е хомоген Марков процес и по договор

$W(t) = W(t, \omega)$. Па, $W(t)$ претставува случајна променлива за секоја вредност t.

Еден прост пат од Винеров процес $W(t)$ може да се генерира од конечен број на точки. Да претпоставиме дека траекторијата на еден Винеров процес на интервал $[t_0, t_N]$ во точките $\{t_i\}_{i=0}^N$, каде што $t_0 = 0$. Тогаш, $W(t_0) = 0$ и рекурентната релација која ги дава вредностите на траекторијата на Винеровиот процес во точките $t_0, t_1, ..., t_N$ е дадена со:

$$W(t_i) = W(t_{i-1}) + \eta_{i-1}\sqrt{t_i - t_{i-1}}, \qquad \text{за } i = 1, 2, ..., N,$$

каде што η_{i-1} се независни случајни променливи со распределба $N(0,1)$, за $i = 1, 2, 3, ..., N$. Вредностите $W(t_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., N$ определуваат прост Винеров пат во точките $\{t_i\}_{i=0}^N$. Со користење на овие $N+1$ вредности, простиот Винеров пат може да се апроксимира секаде на интервалот $[t_0, t_N]$.

Друг начин да се генерира Винеров процес, кој користи преброиво многу случајни променливи кои имаат нормална дистрибуција е Кархунен - Лоеве (Karhunen-Loève) развојот. Кархунен-Лоеве развојот, всушност, е изведен од развојот во Фуриев ред на Винеровиот процес и има облик:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2T}}{(2n+1)\pi} \eta_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right),$$

за $t \in [0, T]$, каде што η_n се независни случајни променливи со стандардна (единечна) нормална распределба, т.е. $\eta_n : N(0,1)$, за $n = 0, 1, 2, ...$ Навистина, η_n во горната равенка, експлицитно може да се запише како:

$$\eta_n = \frac{(2n+1)\pi}{T\sqrt{2T}} \int_0^T W(t) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right) dt, \qquad \text{за } n = 0, 1, 2, ... \ .$$

За да видиме дека горедефинираниот процес $W(t)$ ги има својствата на Винеров процес, нека:

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{2\sqrt{2T}}{(2n+1)\pi} \eta_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right)$$

е N-тата парцијална сума на редот од дефиницијата на $W(t)$. Лесно се покажува дека $S_N(t) \in H_{RV}$ за секое $t \in [0, T]$ и $(S_N(t))$ е Кошиева низа во Хилбертовиот простор H_{RV} (дефиницијата на H_{RV} е дадена во наредната секција). Следува дека $S_N(t) \to S(t)$, кога $N \to \infty$ во H_{RV} за секое

$t \in [0,T]$. Навистина, ако $\eta_n : N(0,1)$, за секој n, тогаш $S_N(t) : N(0, \sigma_N^2(t))$, каде што:

$$\sigma_N^2(t) = t - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{8T}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right),$$

при што:

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8T}{(2n+1)^2 \pi^2} \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4T}{(2n+1)^2 \pi^2} \left(1 - \cos\left(\frac{(2n+1)2\pi t}{2T}\right)\right),$$

за $0 < t < T$. Дополнително, со помош на тригонометрискиот индентитет:

$$\sin(at)\sin(as) - \sin^2(at) = \frac{1}{2}\cos(at - as) - \frac{1}{2}\cos(at + as) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2at),$$

добиваме:

$$E\big((S(s) - S(t))S(t)\big) = 0, \qquad \text{за } s \geq t.$$

Да забележиме дека за секој $t \in [0,T]$, $W(t) \in H_{RV}$. Дополнително W е непрекината во средно квадратна смисла, но не поседува извод. За да ја видиме непрекинатоста на W, имаме:

$$\| W(t + \Delta t) - W(t) \|_{RV}^2 = E(W(t + \Delta t) - W(t))^2 = \Delta t.$$

Следува дека: $\| W(t + \Delta t) - W(t) \|_{RV} = \sqrt{\Delta t}$, па за дадено $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, така што: $\| W(t + \Delta t) - W(t) \|_{RV} < \varepsilon$, за $\Delta t < \delta$. Бидејќи:

$$\left\| \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} \right\|_{RV}^2 = \frac{1}{\Delta t},$$

не постои $F(t) \in H_{RV}$, така што:

$$\left\| \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} - F(t) \right\|_{RV}^2 \to 0, \text{ кога } \Delta t \to 0.$$

Да ги разгледаме математичките очекувања на функциите $W(t)$, за $0 \leq t \leq T$. Прво,

$$p(t, xy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi |t|}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2|t|}\right), \qquad \text{за } x, y \in \mathbb{R}$$

е функцијата на густина на нормалната распределба на случајни променливи со математичко очекување y и дисперзија $|t|$. Нека $W(t)$ е Винеров процес на $[0,T]$. Јасно за $t_1 \in [0,T]$ и $G:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$E(G(W(t_1))) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_1)\, p(t_1, x_1, 0)\, dx_1 \ .$$

Дополнително,

$$p(W(t_1) \le z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} p(t_1, x_1, 0)\, dx_1 \ .$$

Сега, да разгледаме едно разбивање на интервалот $[0,T]$,

$$0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_k \le T \ .$$

За $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$E(G(W(t_1), W(t_2))) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x_1, x_2)\, p(t_1, x_1, 0)\, p(t_2 - t_1, x_2, x_1)\, dx_1\, dx_2 \ .$$

Дополнително, за $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$E(G(W(t_1), W(t_2), ..., W(t_k)))$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_1, x_2, ..., x_k)\, p(t_1, x_1, 0) \cdot ... \cdot p(t_k - t_{k-1}, x_k, x_{k-1})\, dx_1 dx_2 \cdot ... \cdot dx_k$$

.

Функциите на густините $p(t_m - t_{m-1}, x_m, x_{m-1})$ за $m = 1, 2, 3, ..., k$ дефинираат множество од конечно димензионални мери на $\mathbb{R}^k$. Имаме:

$$T_{t_1 t_2 ... t_k}(z_1, z_2, ..., z_k) = p(W(t_1) \le z_1, ..., W(t_k) \le z_k)$$

$$= \int_{-\infty}^{z_k} \int_{-\infty}^{z_{k-1}} ... \int_{-\infty}^{z_1} p(t_1, x_1, 0) \cdot ... \cdot p(t_k - t_{k-1}, x_k, x_{k-1})\, dx_1 \cdot ... \cdot dx_k \ . \qquad (*)$$

Теоремата за екстензија на Колмогоров може да се примени во овој случај и на тој начин можеме да најдеме простор на веројатност и стохастички процес, така што конечнодимензионалните закони на распределба на веројатноста се идентични со горните закони на распределби на веројатностите. Стохастичкиот процес е Винеровиот процес или Брауновото движење $W(t)$ и за која било партиција на $[0,T]$, конечнодимензионалните закони на распределба на веројатностите на $W(t)$ се сведуваат на изразот (*).

Конечно, нека е дадена транзитивната функција на густина на веројатноста $p(y,t,x,s)$ за Винеровиот процес од состојбата x во момент s во состојбата y во момент t. Во овој случај:

$$p(y,t,x,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi|t-s|}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2|t-s|}\right)$$

и јасно $p(y,t,x,s)=p(y,x,|t-s|)$, па Винеровиот процес е непрекинат хомоген Марков процес. Дополнително, директно може да се провери дека важи Чапман-Колмогоровата равенка за транзитивните функции на густини на веројатностите, односно за $s<u<t$, важи:

$$p(y,t,x,s)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z,u,x,s)\,p(y,t,z,u)\,dz\,.$$

1.4. Хилбертов простор од стохастички процеси

Во овој дел ќе го дефинираме Хилбетовиот простор од стохастички процеси. Овој дел е важен бидејќи конвергенцијата на низа од стохастички процеси може да се олесни ако просторот е Хилбертов простор. Всушност, Кошиевите низи конвергираат во Хилбертовиот простор, бидејќи овој простор е комплетен простор. Прво, ќе дефинираме метрички простор, кој ќе се состои од елементарни стохастички процеси. Потоа овој простор ќе биде комплетиран до Хилбертов простор и множеството од сите елементарни стохастички процеси ќе биде густо во Хилбертовиот простор.

Нека имаме непрекинат стохастички процес дефиниран на интервалот $[0,T]$ и простор на веројатноста $(\Omega,\ \mathcal{F}\ ,p)$. Нека $f(t)=f(t,\omega)$ е елементарен стохастички процес кој е случајна степенеста функција дефинирана на $[0,T]\times\Omega$. Ова значи дека функцијата f има облик:

$$f(t,\omega)=\sum_{i=0}^{N-1}f(t_i,\omega)I_i(t)\,,$$

каде што: $0=t_0<t_1<t_2<...<t_N=T$ е разбивање на интервалот $[0,T]$ и $I_i(t)$ е карактеристична функција, дадена со:

$$I_i(t)=\begin{cases}1, & t_i\le t<t_{i+1}\\ 0, & t\notin[t_i,t_{i+1})\end{cases},$$

за: $i=0,1,2,3,...,N-1$.

Го дефинираме Хилбертовиот простор од случајни променливи H_{RV} на следниов начин: Случајната променлива $f(t_i,\cdot)\in H_{RV}$ за секој t_i, $i=0,1,2,3,...,N-1$, ако $E(f^2(t_i))<\infty$, за секој $i=0,1,2,3,...,N-1$.

Сега, метричкиот простор е дефиниран на следниов начин:

S_{SP} се состои од сите случајни степенести функции $f(t,\omega)$ дефинирани на $[0,T]\times\Omega$, така што важи:

$$\int_0^T E(f(t))^2\,dt = \sum E(f^2(t_i))(t_{i+1}-t_i) < \infty .$$

На S_{SP}, скаларниот производ $(\cdot,\cdot)_{SP}$ е дефиниран како:

$$(f,g)_{SP} = \int_0^T E(f(t)g(t))\,dt ,$$

а нормата на просторот е дефинирана со:

$$\| f \|_{SP} = (f,f)_{SP}^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T E(|f(t)|^2)\,dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Просторот S_{SP} е метрички простор со метрика $\|\cdot\|_{SP}$. Но, просторот S_{SP} не е комплетен и многу лесно може да се забележи дека не сите Кошиеви низи конвергираат во S_{SP}. Овој простор може да се комплетира со додавање на дополнителни стохастички процеси. Комплетираните простори дефинирани како H_{SP} и S_{SP} се густи во H_{SP}. Ова значи дека за дадено $f\in H_{SP}$ и $\varepsilon>0$, постои $g\in S_{SP}$, така што: $\| f-g \|_{SP}<\varepsilon$. Во процесот на комплетирање на просторот S_{SP}, многу стохастички процеси можат да бидат додадени на S_{SP} за да се формира H_{SP}.

На пример, да претпоставиме дека за стохастичкиот процес $f(t,\omega)$ важи: За некои позитивни константи k_1 и k_2, неравенствата $\| f(0) \|_{RV}^2 \le k_1$ и $\| f(t_2)-f(t_1) \|_{RV}^2 \le k_2\,|t_2-t_1|$, за сите $t_1,t_2\in[0,T]$. Тогаш, $f\in H_{SP}$ и

$$f_N(t,\omega) = \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i,\omega)\,I_i(t) ,$$

формира Кошиева низа во $S_{SP}\subset H_{SP}$ која конвергира кон f. Навистина,

$$\| f \|_{SP}^2 \le 2\int_0^T E\,|f(t)-f(0)|^2\,dt + 2\int_0^T E\,|f(0)|^2\,dt \le k_2T^2 + 2k_1T .$$

Од теоремата на Фубини, имаме дека важи:

$$\int_0^T E\,|f(t)|dt = E\left(\int_0^T |f(t)|dt \right)$$

и:

$$\int_0^T E\,|\,f(t)\,|^2\,dt = E\left(\int_0^T |\,f(t)\,|^2\,dt\right).$$

За $f \in H_{SP}$, важи неравенството на Коши-Шварц: $|\,(f,g)_{SP}\,| \leq \|\,f\,\|_{SP} \cdot \|\,g\,\|_{SP}$, кое запишано експлицитно го има следниов облик:

$$\left|\int_0^T E(f(t)g(t))\,dt\right| \leq \left(\int_0^T E\,|\,f(t)\,|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^T E\,|\,g(t)\,|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Па, применувајќи ги истовремено неравенството на Коши-Шварц и теоремата на Фубини, имаме:

$$E\left(\int_0^T |\,f(t)\,|dt\right) = \int_0^T E\,|\,f(t)\,|dt \leq T^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^T E\,|\,f(t)\,|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенството на триаголник: $\|\,f+g\,\|_{SP} \leq \|\,f\,\|_{SP} + \|\,g\,\|_{SP}$, за $f,g \in H_{SP}$, може да се запише експлицитно како:

$$\left(\int_0^T E\,|\,f(t)+g(t)\,|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T E\,|\,f(t)\,|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^T E\,|\,g(t)\,|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Некогаш, потребно е да примениме стохастички процеси кои се многу поелементарни од стохастичките процеси во S_{SP}. Нека $S_{SP} \subset S_{SP}$ е множество од сите случајни степенести функции. Ова значи дека $f \in \hat{S}_{SP}$ има облик:

$$f(t,\omega) = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} f_{ij}(\omega) I_{A_j} I_i(t),$$

каде што: $A_j \in \mathcal{F}$.

Бидејќи простите функции се густи во H_{RV}, $\hat{S}_{SP}$ е густ во H_{SP}.

На крајот, да резимираме дека H_{SP} е Хилбертов простор од стохастички процеси со скаларен производ:

$$(f,g)_{SP} = \int_0^T E(f(t)g(t))\,dt,$$

односно , норма:

$$\| f \|_{SP} = \left(\int_0^T E \mid f(t) \mid^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пример 1. (Конвергентна низа од стохастички процеси)

Нека е дефиниран стохастичкиот процес $f_N(t)$ со:

$$f_N(t) = \sum_{i=0}^{N-1} I_i(t) W(t_i),$$

каде што: $h = \dfrac{T}{N}$ и $t_i = ih$, за $i = 0,1,2,,,,,N$.

Јасно, $f_N \in H_{SP}$ за секој N. Важи:

$$\| f_N - W \|_{SP}^2 = \int_0^T E \left(\sum_{i=0}^{N-1} (W(t) - W(t_i)) I_i(t) \right)^2 dt$$

$$= \int_0^T \sum_{i=0}^{N-1} (t - t_i) I_i(t)\, dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i)\, dt = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h^2}{2} = \frac{T^2}{2N}.$$

Бидејќи $\| f_N - W \|_{SP} \to 0$, кога $N \to \infty$, низата од стохастички процеси $(f_N)_{N=1}^{\infty}$ конвергира кон W во H_{SP}. ♦

Пример 2. (Конвергентна низа од стохастички процеси 2)

Нека $W \in H_{SP}$ е Винеров процес на $[0,T]$. Го дефинираме стохастичкиот процес $X_n(t)$ на следниов начин:

$$X_n(t) = \frac{n-1}{n} W(t),$$

за $n = 1,2,...$. Тогаш:

$$\| X_n - W \|_{SP}^2 = \int_0^T E(X_n(t) - W(t))^2\, dt = \int E(W(t))^2 \cdot \frac{1}{n^2} dt = \frac{T^2}{2n^2}.$$

Оттука, X_n конвергира кон W во H_{SP}, кога $n \to \infty$. ♦

Пример 3. (Интеграција на функција од Поасонов процес)

Нека $J(e^{-X}) = \int_0^T \exp(-X(t))\, dt$, каде што X е Поасонов процес со големина λ на интервалот $[0,T]$. Да претпоставиме дека $X(t)$ е единично зголемување во моментите $t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_{N-1}$ на $[0,T]$ и нека $t_0 = 0$ и $t_N = T$. Тогаш $X(t)$ може да е запишан во обликот:

$$X(t) = i, \qquad \text{за } t_i \le t \le t_{i+1}, \text{ за } i = 0,1,2,...,N-1.$$

Па, оттука јасно се гледа дека:

$$J(e^{-X}) = \int_0^T \exp(-X(t))\,dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \exp(-i)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \exp(-i)(t_{i+1} - t_i)\,.$$

Дополнително, да забележиме дека:

$$E(J(e^{-X})) = E\left(\int_0^T \exp(-X(t))\,dt \right) = \int_0^T \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-i) \frac{(\lambda t)^i \exp(-\lambda t)}{i!}\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-i)}{i!} \int_0^T (\lambda t)^i \exp(-\lambda t)\,dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-i)}{i!\lambda} \int_0^{\lambda T} (x)^i \exp(-x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp(-i) B_i(\lambda T)}{i!\lambda}\,,$$

каде што:

$$B_i(\lambda T) = \int_0^{\lambda T} x^i \exp(-x)\,dx\,.$$

Сега, кога $T \to \infty$, $B_i(\lambda T) \to i!$ и:

$$E\left(\int_0^{\infty} \exp(-X(t))\,dt \right) = \frac{e}{\lambda(e-1)}\,. \blacklozenge$$

Пример 4. (Апроксимација на Винеровиот процес)

Да го разгледаме интервалот $0 \le t \le T$ и нека $t_i = ih$, за $i = 0,1,2,...,N$, каде што $h = \dfrac{T}{N}$. Нека $W(t) : N(0,t)$ е Винеров процес. Ги дефинираме по непрекинатите по делови линеарни стохастички процеси $X_N(t)$ на интервалот $[0,T]$, преку:

$$X_N(t) = W(t_i) \frac{t_{i+1} - t}{h} + W(t_{i+1}) \frac{t - t_i}{h}\,,$$

за: $t_i \le t \le t_{i+1}$ и $i = 0,1,2,...,N-1$. Да забележиме дека $X_N(t_i) = W(t_i)$, за $i = 0,1,2,...,N$ и $X_N(t)$ е непрекинато на $[0,T]$. Важи:

$$\| X_N - W \|_{SP}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E\left(W(t_i) \frac{t_{i+1} - t}{h} + W(t_{i+1}) \frac{t - t_i}{h} - W(t) \right)^2 dt$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E\left((W(t_i) - W(t) \frac{t_{i+1} - t}{h} + (W(t_{i+1}) - W(t)) \frac{t - t_i}{h} \right)^2 dt$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{2(t - t_i)(t_{i+1} - t)}{h} dt$$

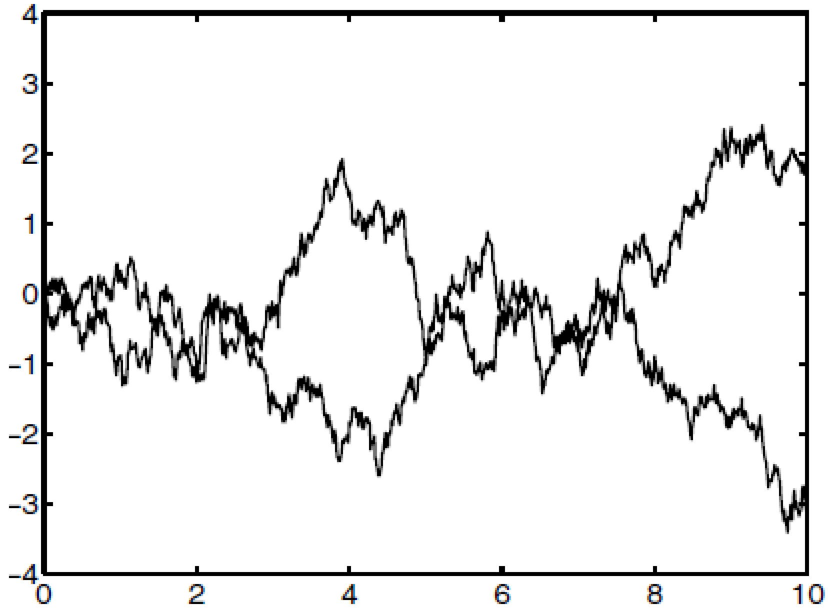
$$= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h^2}{3} = \frac{T^2}{3N} .$$

Следува:

$| X_N - W \|_{SP}^2 \to 0$, кога $N \to \infty$, односно $X_N \to W$ во H_{SP}, кога $N \to \infty$. За големи вредности на N , графикот од прост пат на $X_N(t, \omega)$ не се разликува од графикот од соодветниот прост пат на $W(t, \omega)$, за $\omega \in \Omega$. Графикот на Винеровиот процес се претставува преку цртање на $X_N(t)$, за големи вредности на N . Подолу на сликата се дадени два прости патишта на Винеров процес на интервалот $[0,10]$. Овде е ставено $N = 1000$ и е користена рекурентната релација:

$$W(t_i) = W(t_{i-1}) + \eta_{i-1} \sqrt{t_i - t_{i-1}} \text{, за } i = 1, 2, ..., 1000 ,$$

за да се генерираат 1000 вредности за $W(t_i)$, за $i = 1, 2, ..., 1000$ за секоја траекторија на Винеровиот процес. ♦



Ќе дадеме некои дополнителни својства на стохастичките процеси во Хилбертовиот простор H_{SP}, кои можат да бидат корисни. Прво, ако $X \in H_{SP}$, тогаш: $\int_0^T E\,|\,X(t)\,|^2\,dt < \infty$, од каде следува дека: $X(t) \in H_{RV}$, за скоро секој $t \in [0,T]$. Дополнително, ако низата (X_n) во H_{SP} конвергира кон стохастичкиот процес $X \in H_{SP}$, тогаш: $\|\,X_n - X\,\|_{SP} \to 0$, кога $n \to \infty$. Следува: $E\,|\,X_n(t) - X(t)\,|^2 \to 0$, за скоро секој $t \in [0,T]$. Ова значи дека конвергенцијата во Хилбертовиот простор H_{SP}, повлекува конвергенција по веројатност на $[0,T]$. Специјално, $\|\,X_n - X\,\|_{SP} \to 0$, кога $n \to \infty$, повлекува дека за секое $\varepsilon > 0$, $p((\omega\,;\,|\,X_n(t,\omega) - X(t,\omega)\,| > \varepsilon)) \to 0$, кога $n \to \infty$ за скоро сите $t \in [0,T]$.

Сега, да претпоставиме дека $X(0) \in H_{RV}$ и за $X \in H_{SP}$ важи:

$$\|\,X(t_2) - X(t_1)\,\|_{RV}^2 = E\,|\,X(t_2) - X(t_1)\,|^2 \le K\,|\,t_2 - t_1\,|,$$

за кои било $t_1, t_2 \in [0,T]$ и константа $K > 0$. Тогаш, можеме да најдеме горна граница на $\| X \|_{SP}$ и X е непрекинат на $[0,T]$ во однос на нормата на H_{RV}. Прво, ако $X(0) \in H_{RV}$, тогаш: $X(0) \in H_{SP}$ и:

$$\| X \|_{SP} \leq \| X - X(0) \|_{SP} + \| X(0) \|_{SP} \leq \left(\frac{KT^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}} \cdot \| X(0) \|_{RV}.$$

Следува, $\| X \|_{SP}$ е ограничено со $\left(\frac{KT^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}} \cdot \| X(0) \|_{RV}$. Лесно се гледа и дека X е непрекинат на $[0,T]$ во однос на нормата на просторот H_{RV}. За дадено $\varepsilon > 0$, имаме:

$$\| X(t_2) - X(t_1) \|_{RV} \leq K^{\frac{1}{2}} \, | t_1 - t_2 |^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon,$$

$$\text{за } | t_1 - t_2 | \leq \frac{\varepsilon^2}{K}.$$

Нека $W(t,\omega)$ е Винеров процес дефиниран на просторот на веројатноста $(\Omega, \mathcal{F}, p)$. Нека $\{ \mathcal{F}(t) : 0 \leq t \leq T \}$ е фамилија од под- σ-алгебрата од $\mathcal{F}$, за која важи $\mathcal{F}(t_1) \subset \mathcal{F}(t_2)$, ако $t_1 < t_2$, $W(t)$ е $\mathcal{F}(t)$-мерлива и $W(t+s) - E(t)$ е независно од $\mathcal{F}(t)$. $\mathcal{F}(t)$ е σ-алгебра од настани кои се генерирани од вредностите на Винеровиот процес до моментот t.

Дефиниција 1. За еден стохастички процес $f(t,\omega)$ се вели дека е адаптиран на $\mathcal{F}(t)$ ако $f(t,\cdot)$ е $\mathcal{F}(t)$- мерлива за сите $t \in [0,T]$. Ако f е мерлива функција на $[0,T] \times \Omega$, тогаш се вели дека f е неантиципативна функција.

Секоја неантиципативна фунцкија $f(t)$ е независна од Винеровото нараснување $W(t+s) - W(t)$ за $s > 0$. Дополнително, Хилбертовиот простор H_{SP} е простор од неантиципативни стохастички процеси f, за кои важи:

$$\int_0^T E \, | f(t) |^2 \, dt < \infty.$$

1.5. Компјутерско генерирање

Многупати, корисно е да се знае како стохасатичките процеси можат да бидат компјутерски симулирани со помош на псевдослучајни броеви.

Прво, ќе разгледаме симулација на дискретен стохастички процес, односно Марков ланец $\{X_n\}$ на $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$, каде што $X_0 = z_0$ и X_n е дискретна случајна променлива за секоја вредност на $t_n, n = 0,1,2,..., N$. Специјално, нека $X_n \in \{z_{-m}, z_{-m+1},..., z_m\}$.

Да претпоставиме дека транзитивната матрица:

$$P_n = [p_{ij}^{(n)}], \quad \text{каде} \quad p_{ij}^{(n)} = p(X_{n+1} = z_j \mid X_n = z_i\}$$

зависи од времето t_n. Да го разгледаме генерирањето на една траекторија или простиот пат $\{X_n : 0 \leq n \leq N\}$. Во моментот t_0, $X_0 = z_0$. За да го најдеме X_1, $p_{0j}^{(0)}$, најпрво се пресметува за $j = -m, -m+1,..., m$. Наредно, се генерира псевдослучаен број η_0 со рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$. Тогаш, r_0 е пресметано така што да важи:

$$\sum_{j=-m}^{r_0-1} p_{0j}^{(0)} < \eta_0 \leq \sum_{j=-m}^{r_0} p_{0j}^{(0)} .$$

Конечно, X_1 е ставено да биде еднакво на z_{r_0}. За да го најдеме X_2, се пресметуваат $p_{r_0 j}^{(1)}$ за $j = -m, -m+1,..., m$. Тогаш, се генерира η_1 со рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$. Сега, r_1 се пресметува така што важи:

$$\sum_{j=-m}^{r_1-1} p_{r_0 j}^{(1)} < \eta_1 \leq \sum_{j=-m}^{r_1} p_{r_0 j}^{(1)} .$$

Тогаш ставаме X_2 да биде еднакво на z_{r_1}. Овие чекори се повторуваат N пати и со тоа се дава една реализација $(X_k)_{k=0}^N$ на дискретниот стохастички процес.

Сега нека го разгледаме генерирањето на траекторија за непрекинат Марков процес $\{X(t) : t \in [0,T]\}$. Генерално, како што ќе биде илустрирано во примерите подолу, траекториите на непрекинатите процеси се определени врз основа на дискретно множество од времиња. Специјално, траекторијата $X(t)$ е пресметана во времиња $t_0, t_1, ..., t_N$, каде што $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$. Тогаш, $X(t)$ може да се апроксимира помеѓу овие точки користејќи, на пример, по делови линеарна интерполација.

Пример 1. (Симулација на Поасонов процес)

Да разгледаме Поасонов процес $X(t)$, со големина λ. Да се потсетиме дека овој процес $X(t)$ е еднаков на бројот на реализирани експерименти во моментот t, каде што веројатноста за една реализација на еден експеримент во времето Δt е еднаква на $\lambda \Delta t + o((\Delta t)^2)$. Од претходно,

$$p(X(t) = n) = \exp(-\lambda t) \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Сега да разгледаме симулирање на овој стохастички процес во дискретни времиња $t_k = kh$, за $k = 0,1,2,...,N$, каде што: $h = \frac{T}{N}$. Нека:

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \hat{\eta}_k, \text{ за } k = 0,1,2,...,N-1,$$

каде што: $X_{t_0} = 0$ и случајните броеви $\hat{\eta}_k$ се избрани, така што:

$$p(\hat{\eta}_k = n) = \exp(-\lambda h) \frac{(\lambda h)^n}{n!}, \qquad \text{за } n = 0,1,2,... .$$

Тогаш, $X(t_k)$ се Поасонови случајни променливи со големина λ, во дискретни времиња $t_0, t_1, ..., t_N$. Да забележиме дека за да го најдеме $\hat{\eta}_k$, η_k се рамномерно распоредени на $[0,1]$ и се користи релацијата:

$$\sum_{j=0}^{\hat{\eta}_k - 1} \exp(-\lambda h) \frac{(\lambda h)^j}{j!} < \eta_k \le \sum_{j=0}^{\hat{\eta}_k} \exp(-\lambda h) \frac{(\lambda h)^j}{j!}. \blacklozenge$$

Пример 2. (Симулацијата на прост пат на Винеров процес)

Да го разгледаме Винеровиот прецес $W(t)$ на $[0,T]$. Да ја разгледаме симулацијата на овој непрекинат стохастички процес во дискретни времиња $t_k = kh$ за $k = 0,1,2,...,N$, каде $h = \frac{T}{N}$. Нека:

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + \eta_k, \text{ за } k = 0,1,2,...,N-1,$$

каде што: $X_{t_0} = 0$ и η_k се случајни броеви со нормална распределба со математичко очекување 0 и дисперзија h. Како во претходниот пример, секој прост пат на овој непрекинат стохастички процес се пресметува во дискретни моменти (времиња) $t_0, t_1, ..., t_N$. Следува: $W(t_k) = X(t_k)$, за

$k = 0,1,2,...,N$. За да го оцениме $W(t)$, во време $t \neq t_k$, за секое k, може да се искористи непрекината линеарна интерполација. Важи:

$$W(t) \approx X(t_k)\frac{t_{k+1}-t}{h} + X(t_{k+1})\frac{t-t_k}{h}, \qquad \text{за } t_k \leq t \leq t_{k+1}. \blacklozenge$$

Пример 3. (Симулација на Винеров процес со дискретен процес)

Нека $t_k = kh$, за $k = 0,1,2,...,N$, каде што $h = \frac{T}{N}$. Го дефинираме стохастичкиот процес $\{X_n\}_{n=0}^{N}$ на разбивањето $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ на следниов начин: Нека $X_0 = 0$ и нека транзитивните веројатности

$$p_{ik} = p(X_{n+1} = k\delta \mid X_n = i\delta\}$$

се дадени со:

$$p_{ik}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda \Delta t}{2\delta^2}, & k = i-1 \\ 1 - \frac{\lambda \Delta t}{\delta^2}, & k = i \\ \frac{\lambda \Delta t}{2\delta^2}, & k = i+1 \end{cases},$$

при претпоставка дека: $\frac{\lambda \Delta t}{\delta^2} < 1$. Тогаш, за законот на распределба на веројатноста за X_k, кога $\Delta t \to 0$, ги задоволува нанапред Колмогоровите равенки:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{p_{k+1}(t) - 2p_k(t) + p_{k-1}(t)}{\delta^2}\right),$$

каде што $p_k(0) = 0$, за $k \neq 0$. За мало δ, $p_k(t_n) = p(X(t_n) = k\delta)$ приближно е еднаква на $p(t_n, k\delta)\delta$, каде што $p(t,x)$ ја задоволува парцијалната диференцијална равенка:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2},$$

со почетен услов $p(0,x) = \delta(x-0)$.

Со решавање на оваа парцијална диференцијална равенка добиваме дека:

$$p(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda t}\right).$$

Дополнително, за $\lambda=1$, $\frac{\Delta t}{\delta^2}<1$ и Δt мало, X_n е приближно нормално дистрибуирана случајна променлива со математичко очекување 0 и дисперзија $n\Delta t$. Уште повеќе, $X_n - X_j$ има приближно нормална распределба со математичко очекување 0 и дисперзија $(n-j)\Delta t$ и е независна од $X_l - X_m$, за $j \geq l$. Навистина, $\{X_n\}_{n=0}^N$ апроксимира Винеров процес на поделбата $0=t_0<t_1<...<t_N=T$ на интервалот $[0,T]$. ♦

1.6. Примери на стохастички процеси

Стохастичките процеси се многу чести во физиката, биологијата, метеорологијата, економијата и во инженерските науки. Стохастичките процеси се појавуваат секогаш кога еден динамички систем претрпува случајни влијанија. Класичен пример на физички стохастички процес е радиоактивното опаѓање, каде што атомите на нестабилни изотопи се трансформираат спонтано во други изотопи. Да претпоставиме дека на почетокот има n_0 атоми на радиоактивен изотоп. Нека λ е опаѓачката константа на изотопот. Ова значи дека веројатноста дека еден атом се трансформира во мал временски интервал Δt е еднаков на $\lambda\Delta t + O((\Delta t)^2)$. Нека $N(t)$ е бројот на атоми во момент t. Да го разгледаме очекуваниот број на атоми $N(t)$ во момент t, односно: $E(N(t))$. Нека $p_n(t)$ е веројатноста дека има n атоми во момент t. Тогаш, имајќи ги предвид сите можни премини во временскиот интервал Δt, се добива дека:

$$p_n(t+\Delta t)=p_{n+1}(t)\lambda(n+1)\Delta t + p_n(t)(1-\lambda n\Delta t)+O((\Delta t)^2).$$

Ставајќи $\Delta t \to 0$, добиваме:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda n_0 p_n(t) \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda n p_n(t) + \lambda(n+1)p_{n+1}(t), \quad \text{и} \quad p_n(0) = 0 \end{cases}, \quad \text{и} \quad p_n(0) = 1,$$

за $0 \le n < n_0$.

Очекуваниот број на атоми може да се пресмета со:

$$E(N(t)) = \sum_{n=0}^{n_0} np_n(t)$$

и:

$$\frac{dE(N(t))}{dt} = \sum_{n=0}^{n_0} n\frac{dp_n(t)}{dt}.$$

Оттука,

$$\begin{aligned} \frac{dE(N(t))}{dt} &= \sum_{n=0}^{n_0} n\frac{dp_n(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{n_0} -\lambda n^2 p_n(t) + \sum_{n=0}^{n_0-1} \lambda n(n+1)p_{n+1}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} -\lambda n^2 p_n(t) + \sum_{n=1}^{n_0} \lambda(n-1)np_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} -\lambda np_n(t) = -\lambda E(N(t)). \end{aligned}$$

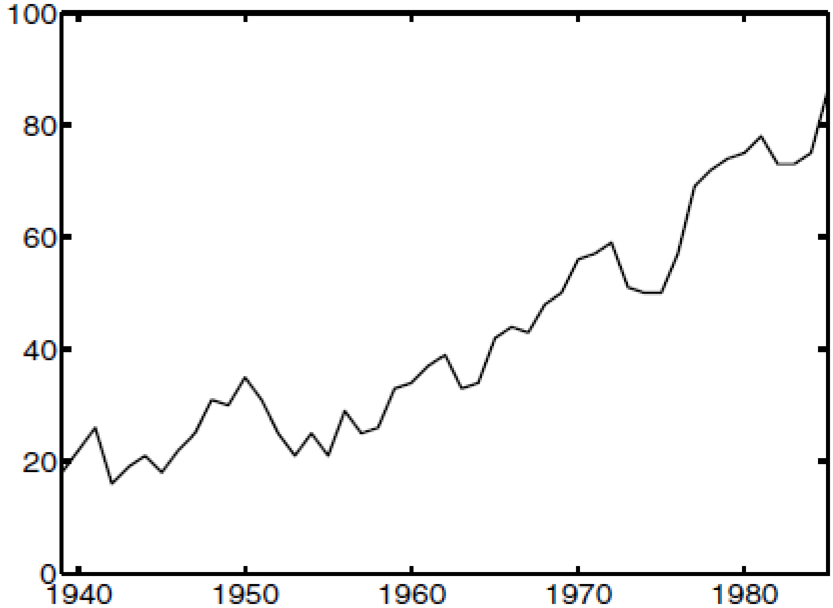
Следува:

$$\frac{dE(N(t))}{dt} = -\lambda E(N(t)),$$

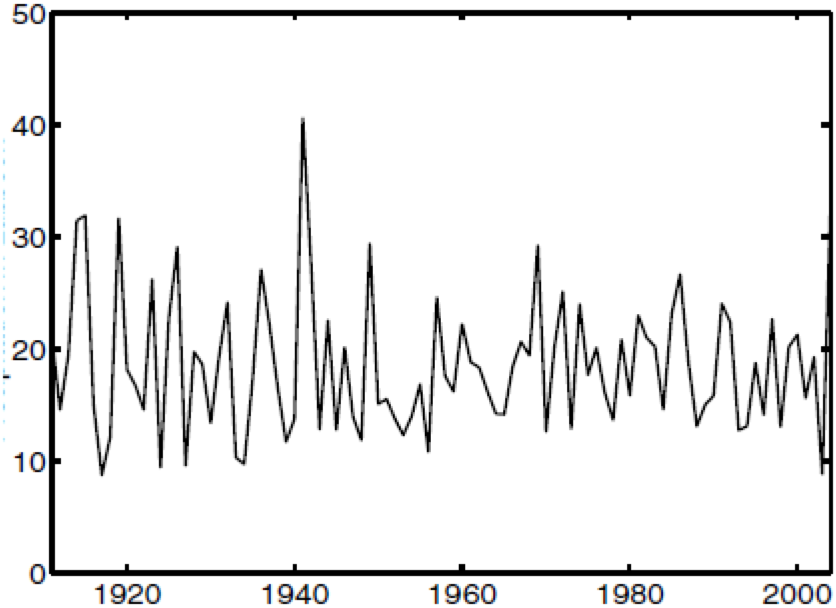
со почетен услов $E(N(0)) = n_0$.

Па, $E(N(t)) = n_0 \exp(-\lambda t)$ е очекуваниот број на атоми во момент t.

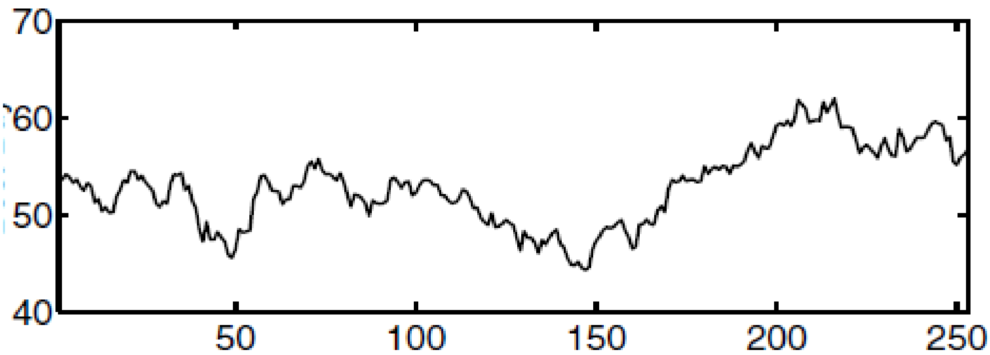
Делот од биологијата кој се занимава со растење и опаѓање на популацијата се состои од анализа на стохастички процеси. Математичките модели се корисни за разбирање на случајни стохастички процеси. Процесите раѓање - смрт, сами по себе се стохастички процеси. Исто така, промените во природата и во популацијата се дополнително случајни влијанија кои зависат од времето и парцијално варираат. Како разултат на тоа, растот на популацијата е стохастички процес. Ова случајно однесување е дадено во наредниве слики. На првата слика е претставен бројот на гулаби (во илјади) во Македонија, од $1940-1980$ година.



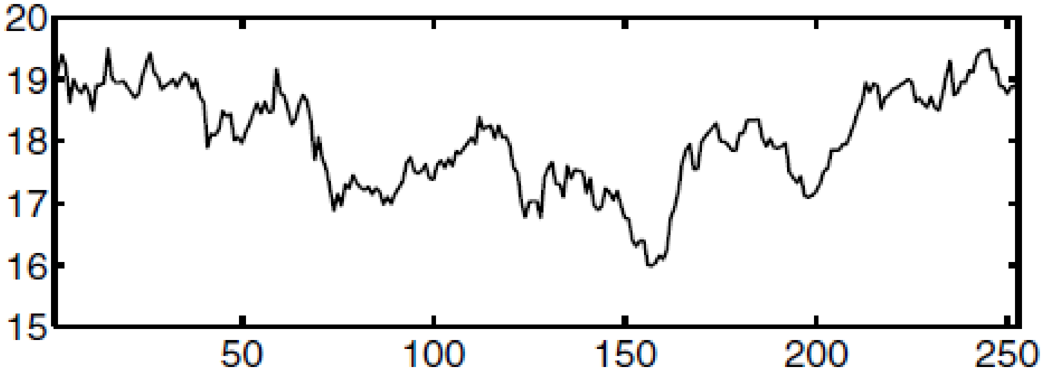
На втората слика е дадено движењето на популацијата на одреден вид пеперутки (во илјади) во општина Скопје, од 1920 до 2000 година.



Како дополнување на физичките и на биолошките феномени може да ги разгледаме и човечките активности, како што е тргувањето на берза, кои се квантитативно мерливи и вклучуваат многу несигурности и добиваат случајно однесување. Долу на сликата се дадени цените на Best Buy Company и Mattel Inc, од 13-ти јануари 2004 година до 12-ти јануари 2005 година.



Best Buy Company од 13-ти јануари 2004 година до 12-ти јануари 2005 година



Mattel Inc од 13-ти јануари 2004 година до 12-ти јануари 2005 година

2. Основни стохастички процеси

Во овој дел главно ќе биде разгледувано Баруновото движење. Ова е главниот процес во анализата на непрекинати стохастички процеси. Поасоновиот процес е главниот процес во анализата на стохастички процеси со скокови. За да се изучуваат двата процеса се воведуваат функциите со позитивна квадратна варијација.

2.1. Брауново движење

Ботаничарот Р. Браун (R. Brown) го опишал движењето на честичка од полен во течност во 1828 година. Тој забележал дека честичката се движела неправилно и случајно. А. Ајнташјн (A. Einstein), во 1905 година, утврдил дека ова движење е резултат на честичката од молекулите на течноста и ги добил познатите равенки за Брауново движење. Во 1900 година, Л. Башелје (L. Bachelier), го користел Брауновото движење како модел за движење на цените на берзата во неговиот математички модел за шпекулации на берзата. Математичката подлога за Брауновото движење како стохастички процес е дадена од Н. Винер (N. Wiener) во 1931 година, па овој процес уште се нарекува и Винеров процес.

Брауновото движење (процес) $B(t)$ служи како основен модел за кумулативниот ефект на чистиот шум. Ако $B(t)$ ја означува позицијата на честичката во момент t, тогаш поместувањето $B(t)-B(0)$ е ефектот на чисто случајно бомбардирање на честичката со молекулите на течноста или ефектот на шум за време t.

Брауновото движење $\{B(t): t \in \tau\}$ е стохастички процес со следниве својства:

1) (Независност на нараснувањето) $B(t)-B(s)$, за $t>s$ е независно од минатото, односно B_u, $0 \le u \le s$ или од $\mathcal{F}_s$, σ-алгебрата генерирана од $B(u)$, за $u \le s$.

2) (Нормални нараснувања) $B(t)-B(s)$ има нормална распределба со математичко очекување 0 и дисперзија $t-s$. Ова значи дека (земајќи $s=0$), $B(t)-B(0)$ има $N(0,t)$ распределба.

3) (Непрекинатост на патиштата) $B(t)$, $t \ge 0$ се непрекинати функции од t.

Почетната положба на Брауновото движење не е определена во дефиницијата. Кога $B(0) = x$, тогаш велиме дека процесот е Брауново движење кое почнало во x. Нека p_x ја означува веројатноста на настаните кога процесот започнал во x. Временскиот интервал на кој Брауновото движење е дефинирано е $[0,T]$, за некое T, кое може да биде и бесконечно.

Овде нема да докажуваме дека Брауновото движење постои, само ќе кажеме дека заинтересираниот читател може да консултира090 понапредна литература (книги и научни трудови) за стохастички процеси, а некои од нив се дадени во користената литература од оваа книга.

Бидејќи:

$$E(B(t) - B(s))^4 = 3(t-s)^2,$$

непрекината верзија на Брауновото движење постои.

Да забележиме дека дефиницијата на Брауновото движење е погенерален модел, кој содржи дополнителна информација, е даден со парот $\{B(t),\ \mathcal{F}_t\}$, $t \geq 0$, каде $\mathcal{F}_t$ е растечка низа од σ-алгебри, $B(t)$ е адаптиран процес, однос $B(t)$ е $\mathcal{F}_t$ – мерливо, така што својствата подолу важат.

Многу важна репрезентација која се користи за пресметување во процесите со независни нараснувања е: за сите $s \geq 0$

$$B(t+s) = B(s) + (B(t+s) - B(s)),$$

каде што двете променливи се независни.

Нека $W(t) = B(t+s) - B(s)$. Тогаш, за фиксно s, како процес од t, $W(t)$ е Брауново движење кое почнало во 0.

Пример 1. Иако $B(t) - B(s)$ е независно од минатото, $2B(t) - B(s)$ или $B(t) - 2B(s)$ не се независни од минатото. На пример,

$$B(t) - 2B(s) = (B(t) - B(s)) - B(s)$$

е разлика од две променливи , од кои едната е независна од минатото, а другата е $B(s)$. ♦

Пример 2. Нека $B(0) = 0$. Ќе ги пресметаме:

$$P(B(t) \leq 0,\ \text{за}\ t = 2) \qquad \text{и} \qquad P(B(t) \leq 0,\ \text{за}\ t = 0,1,2).$$

Бидејќи $B(2)$ има нормална распределба со математичко очекување 0 и дисперзија 2, имаме:

$$P(B(t) \leq 0,\ \text{за}\ t = 2) = \frac{1}{2}.$$

Бидејќи $B(0)=0$, $P(B(t)\le 0,\ за\ t=0,1,2)=p(B(1)\le 0,\ B(2)\le 0)$. Да забележиме дека $B(2)$ и $B(1)$ не се независни, па затоа веројатноста не може да се пресмета како производ од поединечните веројатности. Користејќи ја декомпозицијата:

$$B(2)=B(1)+(B(2)-B(1))=B(1)+W(1),$$

каде што вете случајни променливи се независни. Па, имаме:

$$p(B(1)\le 0, B(2)\le 0)=p(B(1)\le 0, B(1)+W(1)\le 0)$$
$$=p(B(1)\le 0, W(1)\le -B(1)).$$

Оттука,

$$p(B(1)\le 0, W(1)\le -B(1))=\int_{-\infty}^{0} p(W(1)\le -x)\, f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}\Phi(-x)\,d\Phi(x),$$

каде $\Phi(x)$ и $f(x)$ се функцијата на распределба и функцијата на густина на распределба на нормалната распределба. Со смена на променливи, во последниот интеграл добиваме:

$$\int_0^{\infty}\Phi(x)\, f(-x)\,dx=\int_0^{\infty}\Phi(x)\,d\Phi(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{1} y\,dy=\frac{3}{8}.\ \blacklozenge$$

Ако процесот почнал во x, $B(0)=x$, тогаш $B(t)$ има $N(x,t)$ дистрибуција. Погенерално, условната веројатност $B(t+s)$, при услов $B(s)=x$ е $N(x,t)$. Функцијата на густина на транзитивната веројатност $p(y,t,x,s)$ е дадена со:

$$p(y,t,x,s)=p(B(t+s)\le y \mid B(s)=x)=p_x(B(t)\le y).$$

Функцијата на густина на распределба на веројатноста е функцијата на густина на транзитивна веројатност на Брауновото движење:

$$p_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}.$$

Конечнодимензионалните распределби на веројатноста можат да се пресметаат преку функцијата на густина на транзитивните веројатности, користејќи ја независноста на нараснувањата, на начин како во претходниот пример:

$$p_x(B(t_1)\le x_1, B(t_2)\le x_2, ..., B(t_n)\le x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1} p_{t_1}(x,y_1)\,dy_1\int_{-\infty}^{x_2} p_{t_2-t_1}(y_1,y_2)\,dy_2\cdot\ldots\cdot\int_{-\infty}^{x_n} p_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1},y_n)\,dy_n.\quad (*)$$

Лесно е да се забележи дека еднодимензионалната функција на закон на распределба на Брауновото движење задоволува:

$$p_0(B(t) \in A) = p_x(B(t) \in x + A),$$

каде што A е интервал од реалната оска.

Ако $B^x(t)$ го означува Брауновото движење кое започнало во x, од (*) имаме дека конечнодимензионалните закони на распределба на веројатностите на $B^x(t)$ и $x + B^0(t)$ се исти. Оттука, $B^x(t) - x$ е Брауново движење кое почнало во 0 и $B^0(t) + x$ е Брауново движење кое почнало во x, односно:

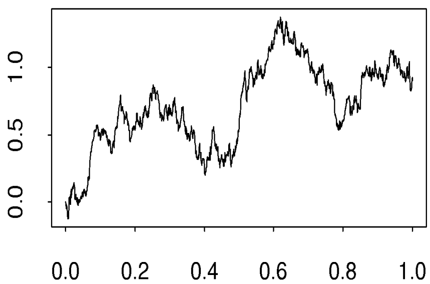
$$B^x(t) = x + B^0(t)\,. \qquad (1)$$

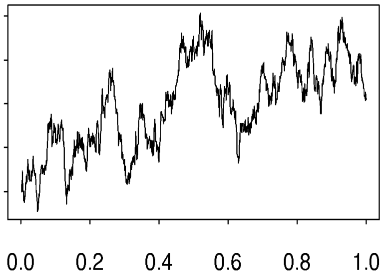
Својството (1) се нарекува својство на хомогеност на просторот на Брауново движење.

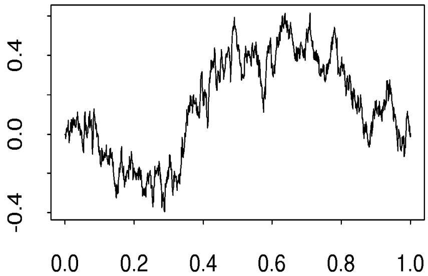
Дефиниција 1. Еден стохастички процес се нарекува хомоген простор ако неговата конечнодимензионална функција на распределба на веројатноста не се менува со поместување во просторот, односно важи:

$$p(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, ..., X(t_n) \le x_n \mid X(0) = 0)$$
$$= p(X(t_1) \le x_1 + x, X(t_2) \le x_2 + x, ..., X(t_n) \le x_n + x \mid X(0) = x)\,.$$

Подолу се дадени четири примери на Брауново движење $B = B(t)$, кои почнале во 0. Иако е процес кој е случаен со математичко очекување 0, ова движење во одредени региони изгледа како да има некои „трендови“. Да забележиме дека на $x-$оската е наменета за времето, додека на y-оската е растојанието.







Еден процес се нарекува Гаусов процес, ако кое било конечно подмножество од случајни променливи, разгледувано како случаен вектор, има повеќедимензионална нормална распределба.

Пример 3. Нека случајните променливи X и Y се независни случајни променливи со нормални распределби $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ и $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, соодветно. Тогаш функцијата на распределба на $(X,X+Y)$ е дводимензионална случајна променлива со вектор на математичко очекување $(\mu_1,\mu_1+\mu_2)$ и матрица на конваријанса:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2+\sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

За да се увериме во последното тврдење, ќе претпоставиме дека $Z=(Z_1,Z_2)$ има координати кои имаат нормална распределба, тогаш јасно:

$$(X,X+Y)=\mu+AZ,$$

каде што: $\mu=(\mu_1,\mu_1+\mu_2)$ и:

$$A=\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Сега, тврдењето следува од дефиницијата на општата нормална распределба, како трансформација на класични нормални распределби. ♦

Слично на горниот пример, од репрезентацијата:

$$(B(t_1),B(t_2),...,B(t_n))$$
$$=(B(t_1),B(t_1)+(B(t_2)-B(t_1))\ ,\ .....,\ B(t_{n-1}))+(B(t_n))-B(t_{n-1}))$$

имаме дека овој вектор е линеарна репрезентација на нормален вектор кој има нормална распределба, па има повеќедимензионална распределба.

Нека $Y_1 = B(t_1)$ и за $k > 1$, $Y_k = B(t_k) - B(t_{k-1})$. Тогаш, од својството на независност на Брауновото движење од нараснувањата, Y_k се независни. Исто така, тие имаат нормална распределба, $Y_1 : N(0,t_1)$ и $Y_k : N(0,t_k - t_{k-1})$. Следува дека $(B(t_1), B(t_2),..., B(t_n))$ е линеарна трансформација на $(Y_1, Y_2,..., Y_n)$. Но, $Y_1 = \sqrt{t_1}\, Z_1$ и $Y_k = \sqrt{t_k - t_{k-1}}\, Z_k$, каде што Z_k се независни случајни променливи кои имаат нормална распределба. Следува дека $(B(t_1), B(t_2),..., B(t_n))$ е линеарна трансформација на $(Z_1, Z_2,..., Z_n)$.

Дефиниција 2. Функцијата на коваријанса на процесот $X(t)$ е дефинирана со:

$$\begin{aligned}\gamma(s,t) &= \operatorname{cov}(X(t), X(s)) = E(X(t) - EX(t))(X(s) - EX(s)) \\ &= E(X(t)X(s)) - EX(t)EX(s).\end{aligned}$$

Следнава теорема го карактеризира Брауновото движење како Гаусов процес.

Теорема 1. Едно Брауново движење е Гаусов процес со 0 функција на математичко очекување и функција на коваријанса $\min(t,s)$. Обратно, еден Гаусов процес со 0 функција на математичко очекување и функција на коваријанса $\min(t,s)$ е Брауново движење.

Доказ. Бидејќи функцијата на математичко очекување е 0, имаме:

$$\gamma(s,t) = \operatorname{cov}(B(t), B(s)) = E(B(t)B(s)).$$

Ако $t < s$, тогаш:

$$B(s) = B(t) + B(s) - B(t)$$

и:

$$E(B(t)B(s)) = EB^2(t) + E(B(t)(B(s) - B(t))) = EB^2(t) = t,$$

каде што го користевме својството на независност од нараснувањета на Брауновото движење.

Слично, ако $t > s$,

$$E(B(t)B(s)) = s.$$

Следува,

$$E(B(t)B(s)) = \min(t,s).$$

За да го докажеме обратното тврдење, ќе претпоставиме дека t е произволно и $s \geq 0$. Бидејќи $X(t)$ е Гаусов процес, имаме дека $(X(t), X(t+s))$ има дводимензионална нормална распределба и од условот има 0 како функција на математичкото очекување. Следува дека векторот

$(X(t), X(t+s)-X(t))$ има дводимензионална нормална распределба. Случајните променеливи $X(t)$ и $X(t+s)-X(t)$ се некорелирани, па

$$\operatorname{cov}(X(t), X(T+s)) = \min(t,s),$$

од каде што:

$$\operatorname{cov}(X(t), X(t+s)-X(t)) = \operatorname{cov}(X(t), X(t+s)) - \operatorname{cov}(X(t), X(t)) = t - t = 0.$$

Од својствата на повеќедимензионалната (општа) нормална распределба имаме дека овие случајни променливи се независни. Следува, нараснувањето $X(t+s)-X(t)$ е независно од $X(t)$ и има $N(0,s)$ распределба. Па, ова е Брауново движење. ■

Пример 4. Во овој пример ќе го најдеме законот на распределба на:

$$B(1)+B(2)+B(3)+B(4).$$

Да го разгледаме случајниот вектор:

$$X = (B(1), B(2), B(3), B(4)).$$

Бидејќи Брауновото движење е Гаусов процес, сите координати имаат нормална дистрибуција, па X има повеќедимензионална нормална распределба со 0 функција на математичко очекување и матрица на коваријанса дадена со $\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)$. На пример, $\operatorname{cov}(X_1, X_3) = \operatorname{cov}(B(1), B(3)) = 1$. Имаме:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Сега, нека $\vec{a} = (1,1,1,1)$. Тогаш:

$$\vec{a}X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = B(1)+B(2)+B(3)+B(4).$$

Јасно $\vec{a}X$ има нормална распределба со 0 функција на математичко очекување и диспрезија $\vec{a}\Sigma\vec{a}^T$, па во овој случај диспрезијата е дадена како збир на елементите во матрицата на коваријанса. Следува дека $B(1)+B(2)+B(3)+B(4)$ има нормална распределба со 0 функција на математичко очекување и дисперзија 30.

Алтернативно, дисперзијата на збирот може да се пресмета како:

$$D(X_1+X_2+X_3+X_4)$$

$$= \operatorname{cov}(X_1+X_2+X_3+X_4, X_1+X_2+X_3+X_4)$$

$$= \sum_{i,j} \operatorname{cov}(X_i, X_j) = 30. \ \blacklozenge$$

Со наредниов пример ќе дадеме илустрација на скалирањето кај Брауновото движење.

Пример 5. Овде ќе го најдеме законот на распределба на:

$$B\left(\frac{1}{4}\right)+B\left(\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{3}{4}\right)+B(1).$$

Да го разгледаме случајниот вектор:

$$Y=\left(B\left(\frac{1}{4}\right),B\left(\frac{1}{2}\right),B\left(\frac{3}{4}\right),B(1)\right).$$

Лесно може да се забележи дека Y и $\frac{1}{2}X$, каде што $X=(B(1),B(2),B(3),B(4))$ имаат ист закон на распределба. Па, матрицата на коваријаса е дадена со $\frac{1}{4}\Sigma$, каде што Σ е исто како во претходниот пример. Според ова, $\vec{a}Y$ има нормална распределба со 0 функција на математичко очекување и дисперзија $\frac{30}{4}$. ♦

Пример 6. Најди ја веројатноста $p\left(\int_0^1 B(t)\,dt>\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Најпрво, да забележиме дека Брауновото движење има непрекинати патишта, па Римановиот интеграл $\int_0^1 B(t)\,dt$ е добро дефиниран за кој било случаен пат. За да ја најдеме бараната веројатност, треба да го знаеме законот на распределба на веројатноста на $\int_0^1 B(t)\,dt$. Ова може да се добие како гранична вредност на законите на распределба на апроксимирачките суми:

$$\sum B(t_i)\,\Delta,$$

каде што точките t_i се од разбивањето на $[0,1]$ и $\Delta=t_{i+1}-t_i$. Ако, на пример, $t_i=\frac{i}{n}$, тогаш за $n=4$, апроксимирачката сума е $\frac{1}{4}\left(B\left(\frac{1}{4}\right)+B\left(\frac{1}{2}\right)+B\left(\frac{3}{4}\right)+B(1)\right)$, чиј закон на распределба беше најден во претходниот пример, односно има нормална распределба $N\left(0,\dfrac{15}{32}\right)$. Слично, законот на распределба на апроксимирачките суми има нормална распределба со 0 математичко очекување. Познато е дека границата на нормални распределби е нормална распределба. Следува дека $\int_0^1 B(t)\,dt$ има нормална дистрибуција со 0 математичко очекување. Останува уште да ја пресметаме дисперзијата:

$$D\left(\int_0^1 B(t)\,dt\right)=\operatorname{cov}\left(\int_0^1 B(t)\,dt,\int_0^1 B(s)\,ds\right)$$

$$=E\left(\int_0^1 B(t)\,dt\int_0^1 B(s)\,ds\right)=\int_0^1\int_0^1 E(B(t)B(s))\,dtds$$

$$=\int_0^1\int_0^1 \operatorname{cov}(B(t),B(s))\,dtds=\int_0^1\int_0^1 \min(t,s)\;dtds=\frac{1}{3}.$$

Влезот на математичкото очекување во интегралите е направено со користење на теоремата на Фубини, бидејќи:

$$\int_0^1\int_0^1 E\,|\,B(t)B(s)\,|\,dtds\le\int_0^1\int_0^1\sqrt{ts}\;dtds<1.$$

Следува дека $\int_0^1 B(t)\,dt$ има нормална распределба, поточно има распределба: $N\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$. Во согласност со ова, бараната веројатност е приближно $0,025$. ♦

Процесот:

$$\xi_0\frac{t}{\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(jt)}{j}\xi_j\ ,$$

каде што ξ_j , $j=0,1,2,...$ се нормални независни случајни променливи кои имаат нормална распределба, е Брауново движење на $[0,\pi]$. Конвергенцијата на редот погоре е во смисла скоро сигурно. Оваа репрезентација потекнува од примерот на непрекината функција која не е диференцијабилна никаде. За да се покаже дека овој процес е Брауново движење, се покажува дека парцијалните суми на редот погоре конвергираат рамномерно, дека процесот е Гаусов, има 0 математичко очекување и коваријанса $m(s,t)$.

Забелешка. Слична, но погенерална репрезентација на Брауновото движење е дадена со помош на користење на ортогонална низа од функции на $[0,T]$, означена со $h_j(t)$. Нека:

$$B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j H_j(t),$$

каде што:

$$H_j(t) = \int_0^t h_j(s)\, ds$$

е Брауново движење на $[0,T]$.

2.2. Својства на патиштата на Брауновото движење

Појавувањето на Брауновото движење разгледувано на временскиот интервал од време 0 до време T, е случајна функција по t, на интервалот $[0,T]$. Ова се нарекува реализација, пат или траекторија.

Дефиниција 1. Квадратната варијација на Брауновото движење $[B,B](t)$ е дефинирана како:

$$[B,B](t) = [B,B]([0,t]) = \lim \sum_{i=1}^{n} | B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n) |^2, \qquad (*)$$

каде што граничната вредност е земена по сите разбивања на интервалот $[0,t]$, каде што $\delta_n = \max_i \left(t_{i+1}^n - t_i^n \right) \to 0$, кога $n \to \infty$.

Да забележиме дека, иако сите суми во горната дефиниција се случајни, горната гранична вредност не е случајна, а тоа може да се види од следнава теорема.

Теорема 1. Квадратната варијација на Брауновото движење на $[0,t]$ е t.

Доказ. Доказот ќе го дадеме за низа од разбивање за која важи: $\sum_n \delta_n < \infty$. Пример за разбивање на интервалот $[0,t]$, за кој важи дека горната сума е конвергентна, е ако еден интервал се подели на два подинтервали, па секој од тие подинтервали се поделат на уште два интервали итн. Нека:

$$T_n = \sum_i | B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n) |^2 .$$

Јасно,

$$E(T_n) = E\left(\sum_i | B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n) |^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} (t_i^n - t_{i-1}^n) = t - 0 = t .$$

Користејќи дека четвртиот момент на нормалната распределба $N(0,\sigma^2)$ е $3\sigma^4$, добиваме дека дисперзијата на T_n е:

$$D(T_n) = D\left(\sum_i | B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n) |^2 \right) = \sum_i D(B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n))^2$$

$$= \sum_i 3(t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \le 3\max(t_i^n - t_{i-1}^n)t = 3t\delta_n .$$

Следува дека: $\sum_{n=1}^{\infty} D(T_n) < \infty$. Користејќи ја теоремата за монотона конвергенција, имаме дека:

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} (T_n - ET_n)^2 \right) < \infty .$$

Оттука, имаме дека редот кој се наоѓа внатре во математичкото очекување конвергира скоро сигурно. Следува дека неговите членови конвергираат кон 0 и:

$$T_n - ET_n \to 0 ,$$

скоро сигурно, па $T_n \to t$, скоро сигурно.

Да забележиме дека е можно да се покаже дека $T_n \to t$, скоро сигурно за која било низа од разбивања кои се последователно пофини од претходните разбивања и важи $\delta_n \to 0$, кога $n \to \infty$, но доказот на ова тврдење овде ќе го скокнеме. ■

Значи, со менување на t, квадратната варијација на Брауновото движење е t. Да забележиме дека класичната квадратна варијација на Брауновите патишта (дефинирани како супремум од сите партиции во сумите во (*)) е бесконечна.

Брауновото движење $B(t)$, како функција од t ги има следните својства: Скоро секој прост пат $B(t)$, $0 \le t \le T$ е:

а) непрекината функција по t;

б) не е монотона во кој било интервал, без разлика колку е мал интервалот;

в) не е диференцијабилна во која било точка;

г) има бесконечна варијација на кој било интервал, без разлика колку е мал интервалот;

д) има квадратна варијација на $[0,t]$ еднаква на t, за кое било t.

Својствата а) и в) на Брауновото движење, без разлика на неговата реализација, $B(t)$ е непрекината функција по t и нејзините нараснувања $\Delta B(t)$ на интервалот со должина Δt се многу поголеми од Δt, кога $\Delta t \to 0$. Бидејќи $E(B(t+\Delta t)-B(t))^2 = \Delta t$, имаме дека нараснувањата грубо се однесуваат како $\sqrt{\Delta t}$. Ова тврдење следува од својството г).

Знаеме дека позитивна квадратна варијација повлекува бесконечна дисперзија, па г) следува од д).

Од друга страна, непрекинатата функција со ограничен извод е со конечна варијација (дисперзија). Па, од г) следува дека $B(t)$ не може да има ограничен извод на кој било интервал, без разлика колку е мал интервалот, што значи дека тоа не е недиференцијабилност во која било точка, но е многу блиску до ова. Во продолжение, ја имаме следнава теорема:

Теорема 2. За кое било t, скоро сите траектории на Брауновото движење не се диференцијабилни во t.

Доказ. Имаме:

$$\frac{B(t+\Delta)-B(t)}{\Delta} = \frac{\sqrt{\Delta}\,Z}{\Delta} = \frac{Z}{\sqrt{\Delta}},$$

за некоја стандардна нормална случајна променлива Z. Па, количникот конвергира кон ∞ по веројатност, бидејќи:

$$p\left(\left|\frac{Z}{\sqrt{\Delta}}\right| > K\right) \to 1,$$

за кој било K, кога $\Delta \to 0$, исклучувајќи го постоењето на изводот во t.

Ова може да се провери со помош на компјутер. На пример, нека $\Delta = 10^{-20}$. Тогаш,

$$\Delta B(t) = 10^{-10} Z$$

и:

$$\frac{\Delta B(t)}{\Delta} = 10^{10} Z ,$$

што е многу голема вредност, со доста голема веројатност. ■

2.3. Мартингали на Брауновото движење

Во овој дел ќе разгледаме три мартингали асоцирани со Брауновото движење. Во наредната дефиниција е дадена дефиницијата на мартингал.

Дефиниција 1. Еден стохастички процес $\{X(t) : t \geq 0\}$ е мартингал ако за секое t е интеграбилен, $E \mid X(t) \mid < \infty$ и за секое $s > 0$

$$E(X(t+s) \mid \mathcal{F}_t) = X(t), \text{ скоро сигурно,}$$

каде што $\mathcal{F}_t$ е информацијата за процесот до време t и равенството важи скоро сигурно.

Својството на мартингал значи дека, ако ги знаеме вредностите на процесот до време t и $X(t) = x$, тогаш очекуваната идна вредност во кое било идно време е x.

Забелешка. $\mathcal{F}_t$ претставува информација која е достапна на некој набљудувач во време t. Имаме $A \in \mathcal{F}_t$ ако и само ако во набљудувањето на процесот до време t, може да се одлучи дали A се појавил или не се појавил. Формално, $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s) : 0 \leq s \leq t)$ ја означува σ-алгебрата генерирана од вредностите на процесот сѐ до време t.

Бидејќи условното математичко очекување, при дадена σ-алгебра, е дефинирана како случајна променлива, сите релации кои вклучуваат условни математички очекувања, како што се равенствата и неравенствата, мора да се земаат во смисла - скоро сигурно. Ова секогаш ќе биде претпоставувано, дури и во ситуација во која тоа не е експлицитно наведено.

Примери на мартингали кои се конструирани од Брауновото движење се дадени во следнава теорема:

Теорема 1. Нека $B(t)$ е Брауново движење. Тогаш:

1) $B(t)$ е мартингал,

2) $B(t)^2 - t$ е мартингал и

3) За кое било u, $e^{uB(t)-\frac{u^2}{2}t}$ е мартингал.

Доказ. Клучната идеја за да се провери дали е задоволено својството на мартингал е ако за која било функција g, условното математичко очекување на $g(B(t+s)-B(t))$, при услов $\mathcal{F}_t$ е еднакво на безусловното математичко очекување:

$$E(g(B(t+s)-B(t) \mid \mathcal{F}_t) = E(g(B(t+s)-B(t))), \qquad (*)$$

како резултат на независноста на $B(t+s)-B(t)$ и $\mathcal{F}_t$. Последното очекување е $Eg(X)$, каде што X е случајна променлива која има нормална распределба $N(0,s)$.

1) По дефиниција, $B(t): N(0,t)$, па $B(t)$ е интеграбилна и $E(B(t))=0$.

$$E(B(t+s) \mid \mathcal{F}_t) = E(B(tt)+(B(t+s)-B(t)) \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= E(B(t) \mid \mathcal{F}_t) + E(B(t+s)-B(t) \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= B(t) + E(B(t+s)-B(t)) = B(t).$$

2) По дефиниција, $E(B^2(t)) = t < \infty$, па $B^2(t)$ е интеграбилно. Бидејќи:

$$B^2(t+s) = (B(t)+B(t+s)-B(t))^2$$

$$= B^2(t) + 2B(t)(B(ts+)-B(t)) + (B(t+s)-B(t))^2,$$

$$E(B^2(t+s) \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= B^2(t) + 2E(B(t)(B(t+s)-B(t)) \mid \mathcal{F}_t) + E((B(t+s)-B(t))^2 \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= B^2(t) + s,$$

при што искористивме дека $B(t+s)-B(t)$ е независно од $\mathcal{F}_t$ и има математичко очекување и (*) важи за $g(x)=x^2$. Одземајќи $(t+s)$ од двете страни на горното равенство, го добиваме својството на мартинигал за $B^2(t)-t$.

3) Момент-генерирачката функција на $B(t)$ е:

$$E(e^{uB(t)}) = e^{\frac{tu^2}{2}} < \infty,$$

бидејќи $B(t)$ има нормална дистрибуција $N(0,t)$. Оттука, ја добиваме интеграбилноста на $e^{uB(t)-\frac{tu^2}{2}}$ и дополнително имаме:

$$E\left(e^{uB(t)-\frac{tu^2}{2}}\right)=1.$$

Својството на мартингал се добива со користење на (*), ставајќи: $g(x)=e^{ux}$.

$$E(e^{uB(t+s)} \mid \mathcal{F}_t) = E(e^{uB(t)+u(B(t+s)-B(t))} \mid \mathcal{F}_t)$$
$$= e^{uB(t)} E(e^{u(B(t+s)-B(t))} \mid \mathcal{F}_t)$$
$$= e^{uB(t)} E(e^{u(B(t+s)-B(t))}) = e^{\frac{u^2}{2}s} e^{uB(t)},$$

при што беше искористено дека $B(t)$ е $\mathcal{F}_t$–мерливо и дека нараснувањето на $B(t)$ е независно од $\mathcal{F}_t$.

Својството на мартингал на $e^{uB(t)-\frac{tu^2}{2}}$ се добива со множење на двете страни со $e^{-\frac{u^2}{2}(t+s)}$. ■

Сите три мартингали имаат многу важно место во теоријата на стохастичките процеси. Мартингалот $B^2(t)-t$ дава карактеризација (карактеризација на Леви) на Брауновото движење. Подоцна ќе видиме дека процесот $X(t)$ е непрекинат мартингал бидејќи $X^2(t)-t$ е, исто така, мартингал, па тогаш $X(t)$ е Брауново движење. Мартингалот $e^{uB(t)-\frac{tu^2}{2}}$ е познат како експоненцијален мартингал и овој мартингал е поврзан со момент-генерирачката функција и многу често се користи за давање на својствата на стохастичкиот процес.

2.4. Марково својство на Брауновото движење

Марковото својство гласи: Ако ја знаеме сегашната состојба на процесот, тогаш идното однесување на процесот е независно од неговото минато. Процесот $X(t)$ го има Марковото својство ако условната распределба на $X(t+s)$, при $X(t)=x$, не зависи од минатите вредности (но, може да зависи од сегашната вредност x). Процесот „не памети“ како системот стигнал до состојба x. Нека со $\mathcal{F}_t$ ја означиме σ-алгебрата генерирана од процесот до моментот t.

Дефиниција 1. $\{X(t): : t \geq 0\}$ е Марков процес ако за кои било t и $s>0$, условната распределба на $X(t+s)$, при $\mathcal{F}_t$ е исто како и законот на условната распределба на $X(t+s)$, при дадено $X(t)$, односно:

$$p(X(t+s) \leq y \mid \mathcal{F}_t) = p(X(t+s) \leq y \mid X(t)) \text{ скоро сигурно.}$$

Теорема 1. Брауновото движење $B(t)$ го поседува Марковото својство.

Доказ. Лесно се забележува со користење на момент генерирачката функција дека законот на условната распределба на $B(t+s)$, при $\mathcal{F}_t$ е ист со законот на распределба на $B(t)$. Навистина,

$$\begin{aligned} E(e^{uB(t+s)} \mid \mathcal{F}_t) &= e^{uB(t)} E(e^{u(B(t+s)-B(t))} \mid \mathcal{F}_t) \\ &= e^{uB(t)} E(e^{u(B(t+s)-B(t))}) = e^{uB(t)} e^{\frac{u^2 s}{2}} \\ &= e^{uB(t)} E(e^{u(B(t+s)-B(t))} \mid B(t)) = E(e^{uB(t+s)} \mid B(t)), \end{aligned}$$

при што беше искористено дека $e^{u(B(t+s)-B(t))}$ е независно од $\mathcal{F}_t$ и $B(t+s)-B(t)$ има нормална распределба $N(0,s)$. ■

Функцијата на густина на транзитивната веројатност на Марковиот процес $X(t)$ е дефиниран со:

$$p(y,t,x,s) = p(X(t) \leq y \mid X(s) = x)$$

е функцијата на густина на условна распределба на процесот во момент t, при услов дека се наоѓа во точка x во момент $s<t$. Можно е да се изберат s и x, така што за кој било фиксен x, ја добиваме веројатноста на $p(X(t) \leq y)$. Во случај со Брауновото движење, оваа веројатност е дадена преку нормалната распределба $N(x, t-s)$, односно:

$$p(y,t,x,s)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{\frac{(u-x)^2}{2(t-s)}}\,du\,.$$

Функцијата на густина на транзитивната веројатност на Брауновото движење задоволува:

$$p(y,t,x,s)=p(y,t-s,x,0)\,.$$

Со други зборови,

$$p(B(t)\le y\mid B(s)=x)=p(B(t-s)\le y\mid B(0)=x)\,. \qquad (*)$$

За фиксни x и t, $p(y,t,x,0)$ има густина $p_t(x,y)$, дадена со:

$$p_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}\,.$$

Својството (*) кажува дека Брауновото движење е временски хомогено, односно неговиот закон на распределба на веројатноста не се менува со промени во времето. На пример, распределбата на $B(t)$, дадена со $B(s)=x$ е иста како распределбата на $B(t-s)$, дадена со $B(0)=x$.

Понатаму, со p_x ќе ја означуваме условната веројатност при услов $B(0)=x$.

Дефиниција 2. Случајното време T се нарекува време на стопирање за $B(t),\ t\ge 0$, ако за кое било t е можно да се одлучи дали T се има појавено или не се има појавено со набљудување на $B(s),\ 0\le s\le t$. Построго, за кое било t, множествата $\{T\le t\}\in\ \mathcal{F}_t$, и σ-алгебрата е генерирана од $B(s),\ 0\le s\le t$.

Пример 1. (Примери на времиња на стопирања и случајни времиња)

а) Кое било неслучајно време T е време на стопирање. Формално, $\{T\le t\}$ е или $\varnothing$ или Ω, кои припаѓаат на $\mathcal{F}_t$ за кое било време t.

б) Нека T е времето кога прв пат $B(t)$ прима вредност 1. Тогаш T е време на стопирање. Јасно, ако го знаеме $B(s)$ за сите $s\le t$, тогаш ние знаеме дали Брауновото движење прима вредност 1 пред моментот t или не прима вредност. Следува, ние знаеме дека $\{T\le t\}$ се појавило или не се појавило само со разгледување на процесот до момент t. Формално,

$$\{T\le t\}=\{B(t)<1,\ \textit{за сите } u\le t\}\in\ \mathcal{F}_t\,.$$

в) Слично,

$$T_a=\inf\{t>0:B(t)=a\}$$

е време на стопирање.

г) Нека T е времето кога Брауновото движење го достигнува својот максимум на интервалот $[0,1]$. Тогаш, за да одлучиме дали $\{T \le t\}$ се појавил или не, не е доволно да ги знаеме вредностите на процесот до моментот t, туку потребно е да ги знаеме сите вредности на интервалот $[0,1]$. Па, T не е време на стопирање.

д) Нека T е последната нула на Брауновото движење пред време $t=1$. Тогаш T не е време на стопирање, бидејќи ако $T \le t$, тогаш не постојат нули во $(t,1]$, кој настан е определен со набљудување на процесот до време 1, па ова множество не припаѓа на $\mathcal{F}_t$. ♦

Силното Марково својство е слично на Марковото својство, со тоа што во дефиницијата на Марковото својство фиксното време t е заменето со времето на стопирање T. Доказот на наредната теорема ќе биде изоставен.

Теорема 2. Брауновото движење $B(t)$ го има силното Марково својство: за кое било конечно време на стопирање T распределбата на условната веројатност на $B(T+t),\ t \ge 0$, при услов $\mathcal{F}_t$ е $p_{B(T)}$, односно:

$$p(B(T+t) \le y \mid \mathcal{F}_t) = p(B(T+t) \le y \mid B(T)),$$ скоро сигурно.

Последица 1. Нека T е конечно време на стопирање и нека дефинираме нов процес:

$$B(t) = B(T+t) - B(T),\ t \ge 0.$$

Тогаш $B(t)$ е Брауново движење кое почнало во 0 и е независно од $\mathcal{F}_t$.

Да забележиме дека силниот Марков процес важи кога T е време на стопирање. Ако T е случјано време, тогаш $B(T+t) - B(T)$ не мора да биде Брауново движење.

2.5. Времиња на постигања и излезни времиња

Нека со T_x го означиме првиот момент кога $B(t)$ ќе го постигне нивото x, т.е.:

$$T_x = \inf\{t > 0 : B(t) = x\}.$$

Да го означиме времето на излез од интевалот (a,b), со $\tau = \min(T_a, T_b)$.

Теорема 1. Нека $a < x < b$ и $\tau = \min(T_a, T_b)$. Тогаш:

$$p_x(\tau < \infty) = 1 \qquad \text{и} \qquad E_x \tau < \infty .$$

Доказ. $\{\tau > 1\} = \{a < B(s) < b, \ \forall \ 0 \le s \le 1\} \subset \{a < B(1) < b\}$.

Следува, имаме:

$$p_x(\tau > 1) \le p_x(B(1) \in (a,b)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} dy .$$

Функцијата $p_x(B(1) \in (a,b))$ е непрекината по x на $[a,b]$, па оваа функција го достигнува својот максимум $\theta < 1$. Со користење на силното Марково својство, може да се докаже дека $p_x(\tau > n) \le \theta^n$. За која било ненегативна случајна променлива $X \ge 0$, $EX \le \sum_{n=0}^{\infty} p(X > n)$. Следува:

$$E_x \tau \le \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{1}{1-\theta} < \infty .$$

Горната граница на $p_x(\tau > n)$ ја определуваме на следниов начин:

$$p_x(\tau > n) = p_x(B(s) \in (a,b), \ 0 \le s \le n)$$
$$= p_x(B(s) \in (a,b), 0 \le s \le n-1, B(s) \in (a,b), n-1 \le s \le n)$$
$$= p_x(\tau > n-1, B(s) \in (a,b), n-1 \le s \le n)$$
$$= p_x(\tau > n-1, B(n-1) + B(s) \in (a,b), 0 \le s \le 1)$$
$$= E(p_x(\tau > n-1, B^y(s) \in (a,b), 0 \le s \le 1 \mid B(n-1) = y))$$
$$= E((p_x(\tau > n-1 \mid B(n-1) = y) p_x(B^y(s) \in (a,b), 0 \le s \le 1) \mid B(n-1) = y))$$
$$= E((P_x(\tau > n-1 \mid B(n-1) = y)) p_y(B^y(s) \in (a,b), 0 \le s \le 1))$$
$$\le \max p_y(B(s) \in (a,b), 0 \le s \le 1) \, p_x(\tau > n-1)$$
$$\le \theta p_x(\tau > n-1) \le \theta^n ,$$

со итерации. ■

Следната теорема го дава својството на рекурентност на Брауновото движење.

Теорема 2. $p_a(T_b < \infty) = 1, \quad p_a(T_a < \infty) = 1$.

Доказ. Второто тврдење следува од првото тврдење, бидејќи:

$$p_a(T_a < \infty) \ge p_a(T_b < \infty) p_b(T_a < \infty) = 1 .$$

Ќе докажеме дека $p_0(T_1 < \infty) = 1$, а за другите точки доказот е сличен. Прво да забележиме дека од претходната теорема и од симетрија, за кои било a и b

$$p_{\frac{a+b}{2}}(T_a < T_b) = \frac{1}{2}.$$

Следува: $p_0(T_{-1} < T_1) = \frac{1}{2}$, $p_{-1}(T_{-3} < T_1) = \frac{1}{2}$, $p_{-3}(T_{-7} < T_1) = \frac{1}{2}$ и итн.

Да ја разгледаме сега веројатноста $p_0(T_{-(2^n-1)} < T_1)$. Бидејќи патиштата на Брауновото движење се непрекинати, за да се постигне $-(2^n-1)$, патот прво мора да го постигне -1, па мора патот да оди од -1 до -3 и итн. Па, добиваме:

$$p_0(T_{-(2^n-1)} < T_1)$$

$$= p_0(T_{-1} < T_1)p_{-1}(T_{-3} < T_1) \cdot \ldots \cdot p_{-(2^{n-1}-1)}(T_{-(2^n-1)} < T_1) = \frac{1}{2^n}.$$

Ако A_n го означува настанот дека Брауновото движење ќе постигне $-(2^n-1)$ пред да постигне 1, тогаш ние покажавме дека $p(A_n) = 2^{-n}$. Да забележиме дека $A_n \subset A_{n-1}$ и бидејќи Брауновото движење постигнува $-(2^n-1)$ пред да постигне 1, а, исто така, ги постигнува и точките поголеми од $-(2^n-1)$. Следува:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n$$

и:

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} p(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Од ова имаме дека:

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1.$$

Со други зборови, со веројатност 1, еден од настаните кои се комплементни на A_n се појавува, односно постои n, така што Брауновото движење го постигнува 1, пред да го постигне $-(2^n-1)$. Оттука, $p_0(T_1 < \infty) = 1$. ■

2.6. Максимум и минимум на Брауновото движење

Во овој дел ќе ја дадеме дистрибуцијата на максимумот и минимумот на Брауновото движење на $[0,t]$,

$$M(t)=\max_{0\le s\le t} B(s) \qquad \text{и} \qquad m(t)=\min_{0\le s\le t} B(s),$$

како и распределбата на првото време на постигање на x,

$$T_x=\inf\{t>0 : B(t)=x\}.$$

Теорема 1. За кое било $x>0$, имаме:

$$p_0(M(t)\ge x)=2p_0(B(t)\ge x)=2\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right),$$

каде што $\Phi(x)$ е функцијата на нормалната распределба.

Доказ. Да забележиме дека настаните $\{M(t)\ge x\}$ и $\{T_x\le t\}$ се исти. Навистина, ако максимумот во моментот t е поголем од x, тогаш во некој момент пред t Брауновото движење ја постигнало вредноста x и ако Брауновото движење ја постигнало вредноста x во некој момент пред t, тогаш максимумот ќе биде најмалку x. Бидејќи:

$$\{B(t)\ge x\}\subset\{T_x\le t\}$$

$$p(B(t)\ge x)=p(B(t)\ge x,\, T_x\le t).$$

Бидејќи $B(T_x)=x$,

$$p(B(t)\ge x)=p(T_x\le t,\, B(T_x+(t-T_x))-B(T_x)\ge 0).$$

Од теоремата 2, од претходниот дел, T_x е конечно време на стопирање и од силното Марково својство, случајната променлива

$B(s)=B(T_x+s)-B(T_x)$ е независна од $\mathcal{F}_{Tx}$ и има нормална распределба, па имаме:

$$p(B(t)\ge x)=p(T_x\le t, B(t-T_x)\ge 0). \qquad (*)$$

Ако s е независно од T_x, тогаш:

$$p(T_x\le t, B(s)\ge 0)=p(T_x\le t)p(B(s)\ge 0)$$

$$=p(T_x\le t)\cdot\frac{1}{2}=p(M(t))\ge x)\cdot\frac{1}{2},$$

па сме готови. Но, во (*) $s=t-T_x$ и јасно зависи од T_x. Не е лесно да се покаже дека (овде ќе биде прескокнат доказот):

$$p(B(t) \geq x) = p(T_x \leq t,\ B(t - T_x) \geq 0)$$
$$= p(T_x \leq t)\frac{1}{2} = p(M(t) \geq x)\frac{1}{2}\,. \ \blacksquare$$

Едноставна примена на овој резултат е дадена во наредниот пример, од кој добиваме дека Брауновото движење го менува знакот во $(0,\varepsilon)$, за кое било ε, произволно мало.

Пример 1. Ќе ја најдеме веројатноста $p(B(t) \leq 0,\ \forall t,\ 0 \leq t \leq 1)$. Да забележиме дека бараната веројатност вклучува непреброиво многу случајни променливи: сите $B(t)$ се помали или еднакви на нула, за $0 \leq t \leq 1$. Ние, всушност, сакаме да знаеме која е веројатноста дека кој било пат од 0 до 1, ќе остане под 0. Ќе ја пресметаме бараната веројатност за n вредности во процесот и потоа ќе пуштиме $n \to \infty$. Но, во овој случај е поедноставно бараната веројатност да ја изразиме како функција од целиот пат. Сите $B(t)$ се помали или еднакви на нула ако и само ако нивниот максимум е помал или еднаков на нула. Имаме:

$$\{B(t) \leq 0 \quad \forall t \quad 0 \leq t \leq 1\} = \{\max_{0 \leq t \leq 1} B(t) \leq 0\}$$

и последователно овие настани имаат некои веројатности. Сега,

$$p(\max_{0 \leq t \leq 1} B(t) \leq 0) = 1 - p(\max_{0 \leq t \leq 1} B(t) > 0)\,.$$

Од теоремата (теорема 1) за максимум на Брауновото движење,

$$p(\max_{0 \leq t \leq 1} B(t) > 0) = 2p(B(1) > 0) = 1\,.$$

следува:

$$p(B(t) \leq 0 \ \ \forall t \ \ 0 \leq t \leq 1) = 0\,. \ \blacklozenge$$

За да ја најдеме распределбата на минимумот на Брауновото движење,

$$m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} B(s)\,,$$

користиме симетрија и

$$-\min_{0 \leq s \leq t} B(s) = \max_{0 \leq s \leq t}(-B(s))\,.$$

Теорема 2. Ако $B(t)$ е Брауново движење за кое $B(0) = 0$, тогаш $B(t) = -B(t)$ е, исто така, Брауново движење за кое важи $B(0) = 0$.

Теорема 3. За кое било $x < 0$

$$p_0(\min_{0 \leq s \leq t} B(s) \leq x) = 2p_0(B(t) \geq -x) = 2p_0(B(t) \leq x)\,.$$

2.7. Распределба на времињата на постигања

Времето T_x е конечно. Наредната теорема ја дава распределбата на T_x и тврди дека има бесконечно математичко очекување.

Теорема 1. Функцијата на густина на распределба на T_x е дадена со:

$$f_{T_x}(t) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

што е инверзна функција на густина на гама распределба со параметри $\frac{1}{2}$ и $\frac{x^2}{2}$. Дополнително, $E_0 T_x = +\infty$.

Доказ. Нека $x > 0$. Настаните $\{M(t) \geq x\}$ и $\{T_x \leq t\}$ се исти настани, па имаме:

$$\begin{aligned} p(T_x \leq t) &= p(M(t) \geq x) \\ &= 2p(B(t) \geq x) = \int_x^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \, dy. \end{aligned}$$

Формулата за функцијата на густина на распределба на T_x е добиена со диференцирање со смена на променливите $u = \frac{y}{\sqrt{t}}$ во интегралот. Конечно,

$$E_0 T_x = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \, dt = \infty,$$

бидејќи:

$$t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}, \text{ кога } t \to \infty.$$

За $x < 0$ доказот е сличен, па ќе го изоставиме. ■

Својството $p(T_x < \infty) = 1$ се нарекува својство на рекурентност на Брауновото движење. Но, $p(T_x < \infty) = 1$ и $E(T_x) = \infty$, иако x е посетен (се постигнува) со веројатност 1, математичкото очекување на T_x е бесконечно.

Теорема 2. Стохастичкиот процес $\{T_x : x \geq 0\}$ од времињата на постигања, има нараснувања кои се независни од минатото, односно за кои било $0 < a < b$, $T_b - T_a$ е независно од $B(t), t \leq T_a$ и распределбата на нараснувањето $T_b - T_a$ е иста како на T_{b-a} и е даден со функцијата на густина на распределба:

$$f_{T_{b-a}}(t) = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(b-a)^2}{2t}} .$$

Доказ. Од силното Марково својство $B(t) = B(T_a + t) - B(T_a)$ е Брауново движење кое започнало во 0 и е независно од минатото на $B(t)$, $t \leq T_a$. Имаме:

$$T_b - T_a = \inf\{t \geq 0 : B(t) = b - a\}.$$

Следува $T_b - T_a$ е исто како во првото време на постигање на $b - a$ од B. ■

2.8. Принцип на рефлексија

Нека $B(t)$ е Брауново движење кое започнало од x и $B(t) = -B(t)$. Тогаш, $B(t)$ е Брауново движење кое започнало во $-x$. Ова е наједноставна форма на принципот на рефлексија. Овде Брауновото движење е рефлектирано во однос на хоризонаталната оска. Погенерално, процесот кој е добиен со рефлексија на Брауновото движење во однос на хоризонталната права која минува низ $(T, B(T))$, за време на стопирање T, е, исто така, Брауново движење.

Да забележиме дека за $t \geq T$ рефлектираниот пат е:

$$B(t) - B(T) = -(B(t) - B(T)),$$

од каде што:

$$B(t) = 2B(T) - B(t).$$

Теорема 1. (Принцип на рефлексија) Нека T е време на стопирање. Дефинираме: $B(t) = B(t)$, за $t \leq T$ и $B(t) = 2B(T) - B(t)$, за $t \geq T$. Тогаш, B е Брауново движење.

Овде доказот ќе биде изоставен, но интуитивно може да се размислува на следниов начин: За $t \geq T$, процесот $-(B(t) - B(T))$ е, исто така, Брауново движење од силното Марково својство, па B, конструирано од Брауновото движење пред времето на стопирање и другото Брауново движење по времето на стопирање, е, исто така, Брауново движење.

Теорема 2. Распределбата на $(B(t), M(t))$ има функција на густина на распределба:

$$f_{B,M}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(2y-x)}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(2y-x)^2}{2t}}, \quad \text{за } y\geq 0,\ x\leq y.$$

Доказ. Нека за $y>0$ и $y>x$, $B(t)$ е $B(t)$ рефлектирано во T_y. Тогаш:

$$p(B(t)\leq x, M(t)\geq y)$$

$$= p(T_y\leq t,\ B(t)\leq x) \qquad \text{(бидејќи } \{M(t)\geq y\}=\{T_y\leq t\}\text{)}$$

$$= p(T_y\leq t, B(t)\geq 2y-x) \qquad \text{(на } \{T_y\leq t\},\ B(t)=2y-B(t)\text{)}$$

$$= p(T_y\leq t,\ B(t)\geq 2y-x) \qquad \text{(бидејќи } T_y \text{ е исто како за } B \text{ и } B\text{)}$$

$$= p(B(t)\geq 2y-x) \qquad \text{(бидејќи } y-x>0 \text{ и } \{B(t)\geq 2y-x\}\subset\{T_y\leq t\}\text{)}$$

$$=1-\Phi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right).$$

Конечно, функцијата на густина на распределба ја добиваме со диференцирање. ■

Теорема 3. Двата процеси $|B(t)|$ и $M(t)-B(t)$ се и двата Маркови процеси со функција на густина на распределба на транзитивната веројатност $p_t(x,y)+p_t(x,-y)$, каде што

$$p_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$$

е функцијата на густина на распределба на транзитивната веројатност на Брауновото движење. Дополнително, двата процеси ја имаат истата распределба.

Теорема 4. Имаме:

$$p(a<m(t)\leq M(t)<b \quad и \quad B(t)\in A)=\int_A k(y)\,dy,$$

каде што:

$$k(y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_t(2n(b-a),y)-p_t(2a,2n(b-a)+y)$$

за $t>0$ и $a<0<b$.

2.9. Нули на Брауновото движење

Моментот τ се нарекува нула на Брауновото движење ако $B(\tau)=0$. Со примена на распределбата на максимумот на Брауновото движење добиваме информации за нулите на Брауновото движење. Понатаму, со $\{B^x(t)\}$, ќе означуваме Брауново движење кое започнало во x.

Теорема 1. За кое било $x\neq 0$, веројатноста дека $\{B^x(t)\}$ има најмалку една нула во интервалот $(0,t)$ е дадена со:

$$\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}\,du\,.$$

Доказ. Ако $x<0$, тогаш од непрекинатоста на $B^x(t)$, имаме:

$$p(B^x \text{ има најмалку една нула во } (0,t))=p(\max_{0\le s\le t}B^x(t)\ge 0)\,.$$

Бидејќи $B^x(t)=B(t)+x$, каде што $B(t)$ е Брауново движење кое започнало во момент нула,

$$p_x(B \text{ има нула помеѓу } 0 \text{ и } t)=p(\max_{0\le s\le t} B^x(t)\ge 0)$$

$$=p_0(\max_{0\le s\le t}B(t)+x\ge 0)=p_0(\max_{0\le s\le t} B(t)\ge -x)$$

$$=2p_0(B(t)\ge -x)=p_0(T_x\le t)$$

$$=\int_0^t f_{T_x}(u)\,du=\frac{-x}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}\,du\,.$$

За $x>0$ доказот е сличен и е базиран на распределбата на минимумот на Брауновото движење. ■

Теорема 2. Веројатноста дека Брауновото движење $B(t)$ ќе има најмалку една нула во временскиот интервал (a,b) е дадена со:

$$\frac{2}{\pi}\arccos\sqrt{\frac{a}{b}}\,.$$

Доказ. Нека означиме со:

$$h(x) = p(B \text{ има најмалку една нула во } (a,b) \mid B_a = x).$$

Од Марковото својство:

$$p(B \text{ има најмалку една нула во } (a,b) \mid B_a = x) \text{ е иста како}$$

$$p(B^x \text{ има најмалку една нула во } (0, b-a)).$$

Од условот:

$$p(B \text{ има најмалку една нула во } (a,b))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p(B \text{ има најмалку една нула во } (a,b) \mid B_a = x) p(B_a \in dx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) p(B_a \in dx) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \int_0^{\infty} h(x) e^{-\frac{x^2}{2a}} dx.$$

Ставајќи во изразот за $h(x)$ од претходниот пример и потребните пресметки го добиваме тврдењето на теоремата. ■

Теорема 3. (Закон на аркус синус) Веројатноста дека Брауновото движење $\{B(t) : t \geq 0\}$ нема нули во интервалот (a,b) е еднаква на $\frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Следната теорема ја дава распределбата на последната нула пред моментот t и првата нула по моментот t. Нека:

$$\gamma_t = \sup\{s \leq t : B(s) = 0\} = \text{ последната нула пред } t$$

$$\beta_t = \inf\{s \geq t : B(s) = 0\} = \text{првата нула после } t.$$

Да забележиме дека β_t е време на стопирање, но γ_t не е време на стопирање.

Теорема 4. Имаме:

$$p(\gamma_t \leq x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{x}{t}}$$

$$p(\beta_t \geq y) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t}{y}}$$

$$p(\gamma_t \leq x,\ \beta_t \geq y) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Доказ. Сите три тврдења следуваат од претходниот резултат. На пример,

$$p(\gamma_t \le x) = p(B\ \textit{нема нули во}\ (x,t))\,.$$

$$p(\gamma_t \le x,\ \beta_t \ge y) = p(B\ \textit{нема нули во}\ (x,y))\,. \blacksquare$$

Бидејќи Брауновото движење е непрекинато и нема нули на интервалот (γ_t, β_t), тоа го задржува истиот знак на овој интервал, без разлика дали е позитивен или негативен. Кога Бруановото движење е целосно позитивно или целосно негативно на некој интервал, за тој пат велиме дека е екскурзија на Брауновото движење. Според тоа, претходниот резултат вели дека екскурзиите го задоволуваат законот на аркус синус. За да добиеме претстава за Брауновиот пат, да ја разгледаме за секоја реализација $B\{B(t) : 0 \le t \le 1\}$, множеството од неговите нули на интервалот $[0,1]$, односно тоа е случајното множество:

$$L_0 = L_0(B) = \{t : B(t) = 0,\ 0 \le t \le 1\}.$$

Теорема 5. Нулите на Брауновото движење се случајно непреброиво множество без изолирани точки и има Лебегова мера 0.

Доказ. Од претходно, веројатноста дека Брауновото движење ќе остане под нула на интервалот $[0,1]$ е нула. Следува дека Брауновото движење го менува знакот на овој интервал. Па, бидејќи Брауновото движење е непрекинато, тогаш има нула во $[0,1]$. На ист начин, добиваме дека за кое било позитивно t, веројатноста дека Брауновото движење има ист знак на интервалот $[0,t]$ е нула. Па, има нула во внатрешноста на $[0,t]$ за секое t, без разлика колку е мало t. Од овде следува дека множеството од нули е бесконечно множество.

Да забележиме дека множеството од нули е затворено, односно ако $B(\tau_n) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$, тогаш $B(\tau) = 0$. Ова е точно бидејќи $B(t)$ е непрекината функција по t.

Со користење на силното Марково својство, можно е да се забележи дека која било нула на Брауновото движење е гранична вредност од другите нули. Ако $B(\tau) = 0$ и τ е време на стопирање, па $B(t) = B(\tau + t) - B(\tau) = B(t+\tau)$ е, исто така, Брауново движење, кое започнало одново во момент τ. Па, моментот $t = 0$ за новото Брауново движење B е граница од десно на нулите на B. Но, $B = B(t+\tau)$, па така τ е граница од десно на нулите од B. Секако, не секоја нула на Брауновото движење е време на стопирање. На пример, за фиксни t, γ_t, последната нула пред моментот t не е време на стопирање. Може да се види дека која било нула е граница на низата до другите нули. Скицата на доказот е во продолжение. Ако τ е првата нула по t, тогаш τ е време на стопирање. Следува множеството од прости патишта, така што τ е гранична вредност на низата на нулите од десно и има веројатност 1. Следува за скоро сите прости патишта, првата нула која следува по кој било рационален број е граница на нулите од десно. Оттука, која било точка на L_0 е гранична точка од L_0 (за вакво множество се вели дека е перфектно множество). Од теоријата на множества, ако бесконечно множество се совпаѓа со множеството од своите гранични точки, тогаш тоа множество е непреброиво.

Иако непреброиво, L_0 има Лебегова мера 0. Лебеговата мера на L_0 е

$$|L_0| = \int_0^1 I(B(t)=0)\,dt .$$

Ова е ненегативна случајна променлива. Барајќи го математичкото очекување на L_0 и со промена на редоследот на интеграција користејќи ја теоремата на Фубини, добиваме:

$$E\,|L_0| = E\left(\int_0^1 I(B(t)=0\right)dt = \int_0^1 p(B(t)=0)\,dt = 0 .$$

Оттука, $p(|L_0|=0)=1$. ■

Теорема 6. Кое било множество $L_a = \{t : B(t)=a,\ 0 \le t \le 1\}$ ги има истите својства како L_0.

Доказ. Нека T_a е првиот момент за кој се постигнува $B(t)=a$. Тогаш, од силното Марково својство, $B(t) = B_{T_a+t} - B_{T_a} = B_{T_a+t} - a$ е Брауново движење. ■

2.10. Големина на нараснувањата на Брауновото движење

Нараснувањата на големи интервали го задоволува законот на големи броеви и законот на итериран логаритам. Ќе ги дадеме следниве две теореми без доказ.

Теорема 1. (Закон на големи броеви)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0, \text{ скоро сигурно.}$$

Теорема 2. (Закон на итериран логаритам)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1, \qquad \text{скоро сигурно.}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1, \qquad \text{скоро сигурно.}$$

За да се добие однесувањето за t кое е блиску до 0, се разгледува процесот $W(t) = tB\left(\frac{1}{t}\right)$, кој, исто така, е Брауново движење.

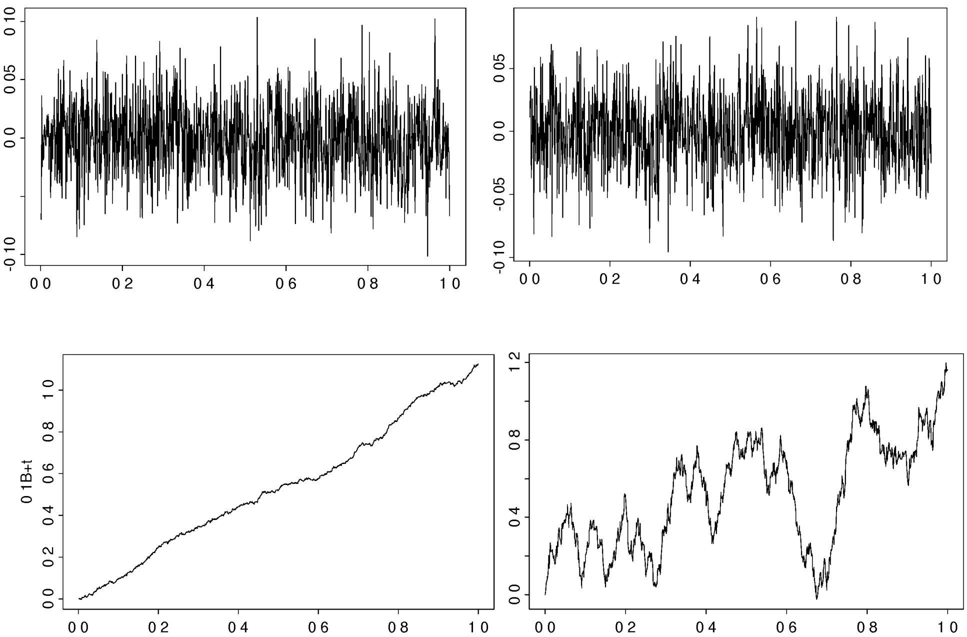
Пример 1. Нека $B(t)$ е Брауново движење. Процесот $W(t)$ дефиниран како $W(t) = tB\left(\frac{1}{t}\right)$, за $t > 0$ и $W(0) = 0$ е, исто така, Брауново движење. Навистина, $W(t)$ има непрекинати патишта. Непрекинатоста во 0 следува од законот за големи броеви. Јасно, $W(t)$ е Гаусов процес и има математичко очекување 0. Коваријансата е дадена со:

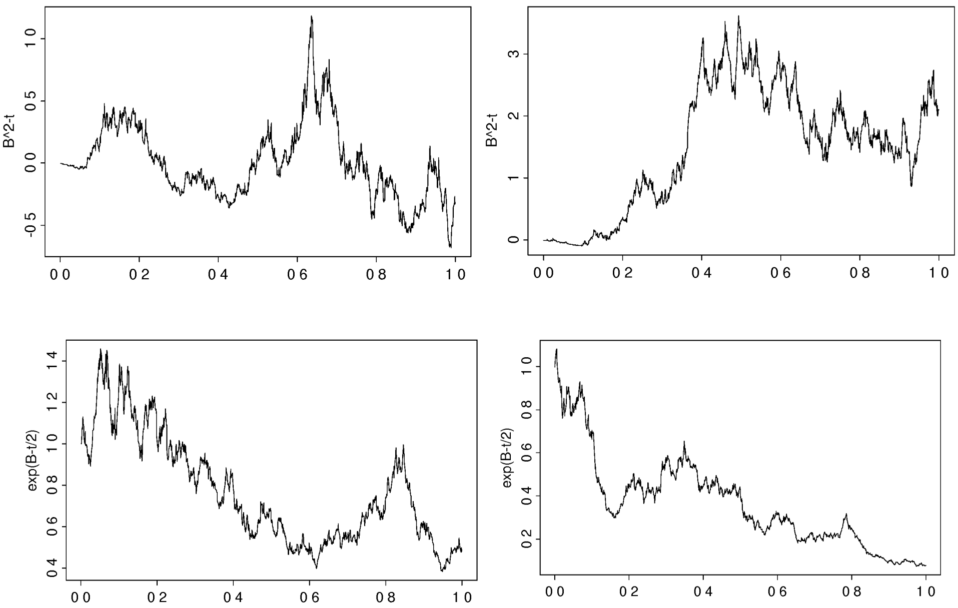
$$\operatorname{cov}(W(t), W(s)) = E(W(t)W(s)) = t \cdot s \cdot E(B\left(\frac{1}{t}\right)B\left(\frac{1}{s}\right) = t \cdot s \cdot \left(\frac{1}{t}\right) = s,$$

за $s < t$. Бидејќи $W(t)$ е Гаусов процес со математичко очекување 0 и коваријанса на Брауново движење, е Брауново движење.

Овој резултат ни дава да ги префрлиме резултатите на однесувањето на патиштата на Брауновото движење за големи и мали t. На пример, има среден закон за итериран логаритам блиску до нула, од некој закон кој е блиску до бесконечност.

Графиците на некои функции од Брауновото движење се дадени во насока за да ги визуелизираме овие процеси. За да ги добиеме овие графици се генерирани 1000 независни случајни променливи со нормална распределба со математичко очекување 0 и дисперзија $0{,}001$. Времето е земено за да биде дискретно (како и која било друга променлива на компјутер) кое се движи од 0 до 1, со чекор $0{,}001$. Првите две слики се реализација на бел шум. Сликите на $0{,}1B(t)+t$ и $B(t)+0{,}1t$ демонстрираат дека кога шумот е мал во споредба со лизгањето, лизгањето доминира, а ако лизгањето е мало, тогаш шумот доминира во однесувањето на процесот. Следниве две реализации се две реализации на мартингалот $B^2(t)-t$, кој има математичко очекување 0. Од својството на рекурентност на Брауновото движење, $B(t)$ секогаш ќе се враќа кон 0. Следува дека $B^2(t)-t$ секогаш ќе се враќа на $-t$ во бесконечност. Последните две слики се реализации на експоненцијалниот мартингал $e^{B(t)-\frac{t}{2}}$. Иако мартингалот има математичко очекување 1, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{B(t)-\frac{t}{2}}=0$, што може да се види од законот на големи броеви. Па, реализацијата на овој мартингал ќе тежи кон 0, во бесконечност.




B^2-t
-0.5
0.0
0.5
1.0
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
B^2-t
0
1
2
3
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
exp(B-t/2)
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
exp(B-t/2)
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0

2.11. Брауново движење во повеќе димензии

Дефиниција 1. Дефинираме Брауново движење во повеќе димензии како случаен вектор $\mathbf{B}(t) = (B^1(t), B^2(t), ..., B^n(t))$, при што сите координати $B^i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ се независни еднодимензионални Браунови движења.

Алтернативно, Брауновото движење во $\mathbb{R}^n$ може да се дефинира и како процес со независни повеќедимензионални Гаусови нараснувања. Од дефинициите, слично како и кај еднодимензионалниот случај, следува дека Брауновото движење во $\mathbb{R}^n$ е Марков Гаусов процес кој е хомоген и по простор и по време. Функцијата на густина на транзитивната веројатност е дадена со:

$$p_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2t}},$$

каде што $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ се n-димензионални вектори и $|\mathbf{x}|$ е должината на $\mathbf{x}$.

Да забележиме дека во една и две димензии Брауновото движење е рекурентно, односно тоа ќе се врати во околината, колку и да е мала, во која било точка бесконечно, многупати. Во три димензии и повеќе Брауновото движење е транзиентно, односно ќе излезе од некоја топка, прозволно голема, околу која било точка и никогаш нема да се врати во топката.

2.12. Случајни прошетки

Аналогно на процесите на Брауновото движење во дискретно време $t = 0, 1, 2, ..., n, ...$ се процесите на случајна прошетка. Брауновото движење може да се конструира како гранична вредност на случајни прошетки, кога големината на чекорот станува сѐ помал и помал. Случајните прошетки се појавуваат во многу примени, вклучувајќи ги областите како што се: осигурањето, финансиите и биологијата.

Како модел на чиста случајност може да послужи фрлањето паричка (идеална, исправна) со еднакви веројатности за да се појави петка или глава. Нека случајната променлива ξ ги прима вредностите $+1$ (ако се паднала глава) и -1 (ако се паданала петка), секоја од нив со веројатност $\frac{1}{2}$. Ако паричката е фрлена n пати, тогаш низата од случајни променливи $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ го опишува експериментот. Сите ξ_i имаат иста распределба како ξ_1, и уште повеќе тие се непрекинати. Процесот S_n е случајна прошетка, дефинирана со $S_0 = 0$ и

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n .$$

S_n ја дава количината на собрани пари ако по n фрлања, кога добиваме еден денар, ако се појавила глава при фрлањето, додека губиме еден денар - ако се појави петка при фрлањето.

Бидејќи $E(\xi_i) = 0$ и $D(\xi_i) = E(\xi^2) = 1$, па математичкото очекување и дисперзијата на случајна прошетка се дадени со:

$$E(S_n) = E(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + ... + E(\xi_n) = 0 ,$$

$$D(S_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + ... + D(\xi_n) = nD(\xi_1) = n ,$$

при што користевме дека дисперзија од збир на независни случајни променливи е збир од поединечните дисперзии на случајните променливи. Поопшто, случајна прошетка е процесот:

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i ,$$

каде што ξ_i се независни случајни променливи и имаат иста распределба. Во овој модел, важи $p(\xi_i = 1) = p$, $p\left(\xi_i = -1\right) = q = 1 - p$.

Теорема 1. Следниве процеси се мартингали.

1) $S_n - \mu n$, каде $\mu = E(\xi_1)$. Подетално, ако на случајната прошетка нема надворешно влијание $(\mu = 0)$, тогаш ова е мартингал.

2) $(S_n - \mu n)^2 - \sigma^2 n$, каде $\sigma^2 = E(\xi_1 - \mu)^2 = D(\xi_1)$.

3) За кој било u, $e^{uS_n - nh(u)}$, каде $h(u) = \ln(E(e^{u\xi_1})$. Подетално, ако $p(\xi_1 = 1) = p$,

$$p(\xi_1 = -1) = q = 1 - p , \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} .$$

Доказ. Од неравенството на триаголник,

$$E \mid S_n - n\mu \mid = E \mid S_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i - n\mu \mid \leq E \mid S_0 \mid + \sum_{i=1}^{n} E \mid \xi_i \mid + n \mid \mu \mid$$

$$= E \mid S_0 \mid + n(E \mid \xi_1 \mid + \mid \mu \mid) ,$$

имаме: $S_n - n\mu$ е интеграбилно, бидејќи $E|\xi_1|<\infty$ и $E|S_0|<\infty$. За да го добиеме својството на мартингал, да забележиме дека за секој n:

$$E\left(S_{n+1} \mid S_n\right) = S_n + E(\xi_{n+1} \mid S_n).$$

Бидејќи ξ_{n+1} не зависи од минатото и S_n е определено од првите n променливи, ξ_{n+1} е независно од S_n. Следува, $E(\xi_{n+1} \mid S_n) = E(\xi_{n+1})$. Сега,

$$E(S_{n+1} | S_n) = S_n + E(\xi_{n+1} \mid S_n) = S_n + \mu$$

и одземајќи $(n+1)\mu$ од двете страни на последната равенка, го добиваме својството на мартингал:

$$E(S_{n+1} - (n+1)\mu \mid S_n) = S_n - n\mu.$$

2) Со мали модификации на доказот под 1), се добива тврдењето.

3) Нека $M_n = e^{uS_n - nh(u)}$. Бидејќи $M_n \geq 0$, $E|M_n| = E(M_n)$, од каде што:

$$E(M_n) = E\left(e^{uS_n - nh(u)}\right) = e^{-nh(u)} E\left(e^{uS_n}\right) = e^{-nh(u)} E\left(e^{u(S_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i)}\right)$$

$$= e^{uS_0} e^{-nh(u)} E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{u\xi_i}\right) = e^{uS_0} e^{-nh(u)} \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{u\xi_i}\right)$$

$$= e^{uS_0} e^{-nh(u)} \prod_{i=1}^{n} e^{h(u)} = e^{uS_0} < \infty.$$

Својството на мартингал се добива од фактот дека:

$$S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1},$$

каде што ξ_{n+1} е независно од S_n и од сите претходни ξ_i, $i \leq n$ или независно од $\mathcal{F}_t$. Користејќи ги својствата на условното очекување, имаме:

$$E(e^{uS_{n+1}} \mid \mathcal{F}_t) = E(e^{uS_n + u\xi_{n+1}} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= e^{uS_n} E(e^{u\xi_{n+1}} \mid \mathcal{F}_t) = e^{uS_n} E(e^{u\xi_{n+1}}) = e^{uS_n + h(u)}.$$

Множејќи ги двете страни на горната равенка со $e^{-(n+1)h(u)}$, својството на мартингал е добиено, $E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_t) = M_n$.

Во специјален случај, кога $p(\xi_i = 1) = p$, $p(\xi_i = -1) = q = 1 - p$, избираме $u = \ln\left(\frac{q}{p}\right)$, во претходниот мартингал, имаме: $e^{u\xi_1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1}$ и

$E\left(e^{u\xi_1}\right)=1$. Следува: $h(u)=\ln E(e^{u\xi_1})=0$ и $e^{uS_n-nh(u)}=\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$.

Алтернативно, во овој случај, својството на мартингал на $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ се утврдува лесно. ■

2.13. Стохастички интеграл по дискретно време

Нека S_n е случајна прошетка без надворешни влијанија, која го означува капиталот на играч кој се обложува на исходот на фрлањето хомогена паричка. Нека H_n е сумата на пари (големината на влогот) кој играчот ќе ги вложува во секој момент n. Ова се заснова на исходите во играта во моменти $1,2,...,n-1$, но не од исходот во моментот n. Ова е пример на процес кој е предвидлив. Концептот на предвидливост на процесите игра многу важна улога во стохастичкиот калкулус. Процесот $\{H_n\}$ се нарекува предвидлив ако H_n може да се предвиди од информацијата достапна во момент $n-1$. Нека $\mathcal{F}_{n-1}$ е σ-алгбрата која е генерирано од $S_0, S_1,..., S_{n-1}$.

Дефиниција 1. Процесот $\{H_n : n\geq 1\}$се нарекува предвидлив процес ако за сите $n\geq 1$, H_n е $\mathcal{F}_{n-1}$ мерливо.

Ако е користена стратегија на обложување $\{H_n\}_{n=0}^{t}$ во фрлањето на паричка, тогаш добивката во момент t е дадена со:

$$(H\cdot S)_t=\sum_{n=1}^{t} H_n(S_n-S_{n-1}),$$

бидејќи $S_n-S_{n-1}=+1$ или -1, кога n-тото фрлање доведува до добивка или до загуба. Погенерално, $S_n-S_{n-1}=\xi_n$, претставува сумата на пари изгубена или добиена во еден чекор на обложување во n-тото обложување. Ако H_n единици се поставени, тогаш сумата на пари загубена или добиена во n-тиот облог е $H_n(S_n-S_{n-1})$. Добивката во момент t се добива кога ќе се соберат и ќе се одземат парите кои се добиени или се изгубени во сите облози од моментот t.

Дефиниција 2. Стохастичкиот интеграл по дискретно време од предвидлив процес H, во однос на процесот S е дефиниран со:

$$(H \cdot S)_t = H_0 S_0 + \sum_{n=1}^{t} H_n (S_n - S_{n-1}) .$$

Стохастичкиот интеграл ја дава добивката во играта кога се обложуваме на S и се користи стратегија за обложување H. За мартингал, стохастичкиот интеграл во горната дефиниција се нарекува и мартингал трансформација. Следниот резултат тврди дека, кога имаме систем на обложување кој се користи на мартингал, повторно ќе имаме мартингал.

Теорема 1. Ако M_n е мартингал, H_n е предвидлив процес и случајните променливи $(H \cdot M)_t$ се интеграбилни, тогаш $(H \cdot M)_t$ е мартингал.

Доказ.

$$E((H \cdot M)_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\ ) = E((H \cdot M)_t \mid \mathcal{F}_t\ \mathcal{F}_t\ ) + E(H_{t+1}(M_{t+1} - M(t)) \mid\ )$$

$$= (H \cdot M)_t + H_{t+1} E(M_{t+1} - M(t)) \mid \mathcal{F}_t\ ) = (H \cdot M)_t . \blacksquare$$

Како последица ја имаме следнава теорема:

Теорема 2. Ако M_n е мартингал, H_n е предвидлив и ограничен, тогаш $(H \cdot M)_t$ е мартингал.

Доказ. Од претпоставката дека H_n е огранчен, имаме:

$$E \mid (H \cdot M)_t \mid = E \mid \sum_{n=1}^{t} H_n (M_n - M_{n-1}) \mid$$

$$\leq \sum_{n=1}^{t} E \mid H_n (M_n - M_{n-1}) \mid \leq 2C \sum_{n=1}^{t} E \mid M_n \mid < \infty .$$

Бидејќи $(H \cdot M)_t$ е интеграбилен, условот од претходната теорема е исполнет. ■

Нека $(M_n,\ \mathcal{F}_t\ )$ е мартингал и τ е време на стопирање. Како потсетување ја имаме дефиницијата на време на стопирање: За случајно време се вели дека е време на стопирање ако за кој било n, $\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_t$.

Нека земеме $H_n = 1$, ако $n \leq \tau$ и $H_n = 0$, ако $n > \tau$, односно со други зборови: $H_n = I\ (\tau \geq n)$. Тогаш H_n е предвидлив, бидејќи

$\{\tau \geq n\} = \{\tau > n+1\} \in \mathcal{F}_t$. Стохастичкиот интеграл дава дека мартингалот сопрел во момент τ ,

$$(H \cdot M)_n = H_0 M_0 + H_1(M_1 - M_0) + \ldots + H_n(M_n - M_{n-1})$$
$$= M_{\tau\wedge n} = M_\tau I(\tau \leq n) + M_n I(\tau > n).$$

Бидејќи $H_n = I(\tau \geq n)$ е ограничен со 1, од теоремата 1 следува дека процесот $(H \cdot M)_n = M_{\tau\wedge n}$ е мартингал. Со ова ја докажавме следната теорема.

Теорема 3. Ако мартингалот сопрел во момент τ , $M_{\tau\wedge n}$ е мартингал. Уште повеќе,

$$EM_{\tau\wedge n} = EM_0 .$$

Да забележиме дека горната теорема важи и за непрекинато време.

Пример 1. (Стратегија на дуплирање на влоговите)

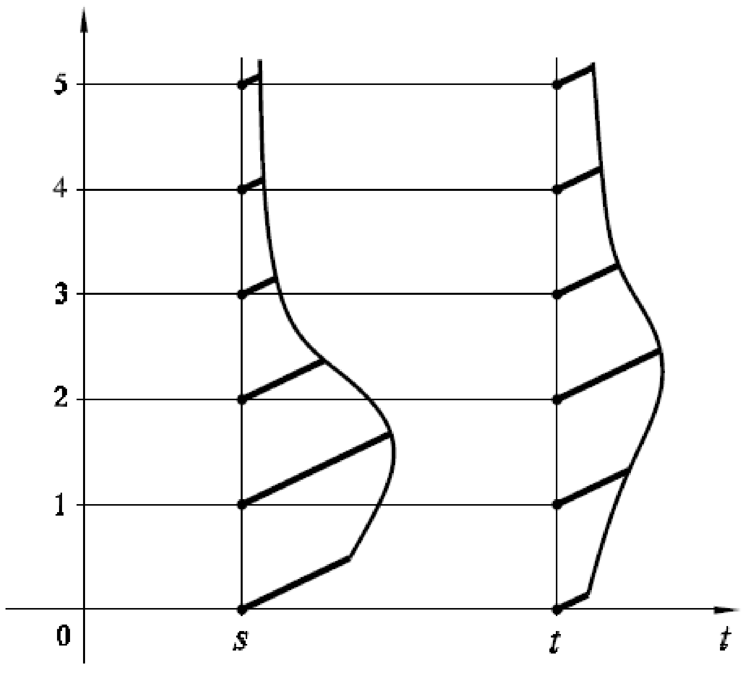
Нека разгледаме стратегија на дуплирање на влоговите, кога се обложуваме на тоа дека се паднало глава, при фрлање на хомогена паричка. Нека вложиме $H_1 = 1$. Ако се појави глава, тогаш сопираме. Тогаш профитот е $G_1 = 1$. Ако се паднала петка, тогаш вложуваме $H_2 = 2$ на второто фрлање. Ако во второто фрлање се паднала глава, тогаш сопираме. Тогаш, профитот е $G_2 = 4 - 3 = 1$. Ако играта продолжува во n чекори (ова значи дека во претходните $n-1$ фрлања не се појавила глава), тогаш вложуваме $H_n = 2^{n-1}$ при n-тото фрлања на паричката. Ако во n-тото фрлање на паричката се појави глава, тогаш сопираме. Во оваа ситуација, профитот е $G_n = 2 \cdot 2^{n-1} - (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n - (2^n - 1) = 1$. Веројатноста дека играта ќе заврши во конечен број на чекори е 1 минус веројатноста дека нема да се појави глава. Веројатноста дека во првите n фрлања на паричката, ќе се појавуваат само петки, имајќи ја предвид независноста на настаните, е $\frac{1}{2^n}$. Веројатноста дека не се појавила глава е вредноста на граничната вредност $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, па следува дека играта ќе заврши сигурно. За кое било неслучјано време T , процесот на добивка (процес бидејќи добивката е динамична во однос од исходите на фрлањето на паричката) $G_t,\ t \leq T$ е мартингал со математичко очекување 0. Стратегијата на двојно вложување не е во контрадикција со резултатот погоре, бидејќи стратегијата користи неограничено време на стопирање и првата добивка е еден. ♦

2.14. Поасонов процес

Ако Брауновото движење е основен процес за кумулативен мал шум е непрекинато, Поасоновиот процес е основен модел за кумулативен шум кој се појавува како шок.

Нека $\lambda > 0$. Случајна променлива X има Поасонова распределба со параметар λ, означена со $P(\lambda)$, ако не прима ненегативни цели броеви $k \geq 0$ со веројатности:

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; k = 0,1,2,\dots \; .$$



На сликата погоре се прикажани априорни веројатности за можни состојби на процесот во моментите s и t.

Момент генерирачката фунцкија на оваа распределба е даден со:

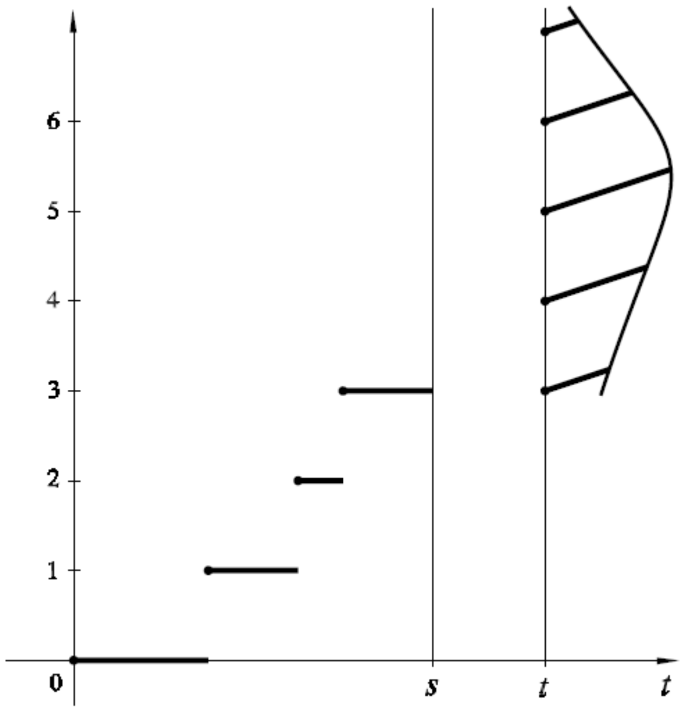
$$E(e^{uX}) = e^{\lambda(e^u - 1)} .$$

Поасоновиот процес $N(t)$ е стохастички процес со следниве својства:

а) (Независност на нараснувањата) $N(t)-N(s)$ е независно од минатото, односно од $\mathcal{F}_s$, σ-алгебрата генерирана од $N(u), u \leq s$.

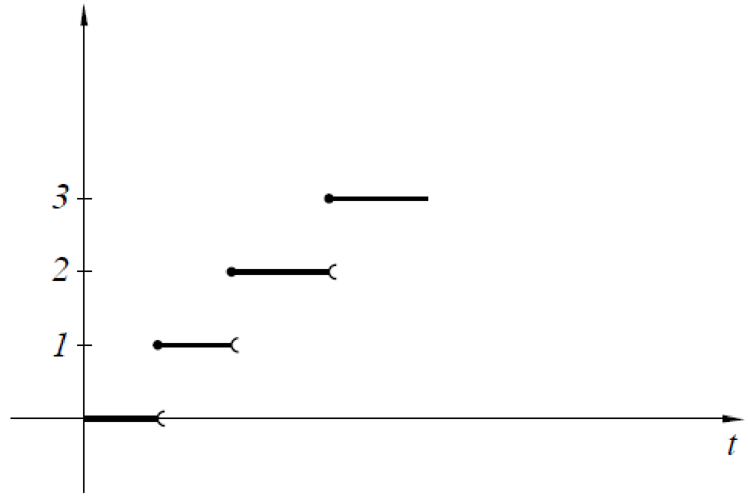
б) (Поасонови нараснувања) $N(t)-N(s)$, $t > s$ има Поасонова распределба со параметар $\lambda(t-s)$. Ако $N(0)=0$, тогаш $N(t)$ има $P(\lambda t)$ распределба.

На следнава слика е прикажана (условната) распределба по моментот s, во кој процесот примил вредност $k=3$.



в) (Патишта на степенасти функции) Патиштата $N(t)$, $t \geq 0$ се растечки функции по t, кои имаат промени само со скокови со големина 1.

На следнава слика е дадена типична траекторија на Поасонов процес.



Пример 1. Нека $N(t)$ го означува бројот на риби кои еден рибар ги фатил за време $t > 0$. Нека претпоставиме дека:

1) бројот на риби е голем;

2) рибата со еднаква веројатност може да биде фатена во кој било временски интервал со еднаква должина.

Тогаш, $N(t)$ е Поасонов процес.

Времето до првиот улов, како и времето помеѓу два улова има експоненцијална распределба со ист параметар. Иста распределба има, по силното Марково својство, и времето до уловот на следната риба, без оглед на поминатото време од уловот на претходната риба. Времето на чекање без улов нема никакво влијание на евентуалниот поран улов на наредната риба. Ова е последица на својството на експоненцијалната распределба која нема меморија. ♦

Забелешка. Дефиницијата на Поасоновиот процес е погенерален модел кој содржи дополнителни информации е дадена со парот:

$\{N(t),\ \mathcal{F}_t\},\ t \geq 0$, каде што $\mathcal{F}_t$ е растечка низа од σ-алгебри, $N(t)$ е адаптиран процес, односно $N(t)$ е $\mathcal{F}_t$-мерлив, така што својствата а)-в) важат.

Да разгледаме модел на појавување на независни настани. Дефинираме стапка λ која е просечиниот број на настани по единица време. Нека $N(t)$ е бројот на настани кои се појавиле до моментот t, односно во временскиот интервал $(0,t]$. Тогаш, $N(t)-N(s)$ го дава бројот на настани кои се појавиле во временскиот интервал $(s,t]$.

Поасонов процес $N(t)$ може да се конструира на следниов начин. Нека $\tau_1, \tau_2, \ldots$ се независни случајни променливи со експоненцијална распределба, односно $p(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t}$. Случајните променливи τ ги претставуваат времињата помеѓу појавувањето на два последователни настана. Нека $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$ е времето на n-тиот настан. Тогаш,

$$N(t) = \sup\{n : T_n \le t\}$$

го користи бројот на настани сѐ до момент t. Не е тешко да се провери важењето на својствата а)-в) за Поасоновиот процес. $N(t)$ има Поасоновиот распределба со параметар λt. Последователно,

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \; k = 0,1,2,\ldots$$

$$EN(t) = \lambda t \qquad \text{и} \qquad D(N(t)) = \lambda t .$$

Нека $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t$ е разбивање на $[0, t]$. Лесно е да се види дека варијацијата на Поасоновиот пат е:

$$V_n(t) = \lim \sum_{i=1}^{n} | N(t_i^n) - N(t_{i-1}^n) | = N(t) - N(0) = N(t) \tag{*}$$

каде што граничната вредност е земена кога $\delta_n = \max(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$ и $n \to \infty$. Да забележиме дека варијацијата на чиста скок функција е збир од апсолутните вредности на скоковите. Бидејќи Поасоновиот процес има само позитивни скокови со големина единица, добиваме дека важи (*).

За да ја пресметаме квадратната варијација, да забележиме дека $N(t_i^n) - N(t_{i-1}^n)$ прима само две вредности 0 и 1 за мали $t_i^n - t_{i-1}^n$, па следува дека важи исто и за нивниот квадрат, $N(t_i^n) - N(t_{i-1}^n) = (N(t_i^n) - N(t_{i-1}^n))^2$. Следува дека квадратната варијација на N е иста како и нејзината варијација:

$$[N, N](t) = \lim \sum_{i=1}^{n} (N(t_i^n) - N(t_{i-1}^n))^2 = N(t) - N_0 = N(t) .$$

Следува дека за Поасоновиот процес варијацијата и квадратната варијација се позитивни и конечни.

Процесот $N(t)$ е растечки, па не може да биде мартингал. Но, процесот $N(t) - \lambda t$ е мартингал. Овој мартингал е аналоген на Брауновото движење.

Теорема 1. Следниве процеси се мартингали:

1) $N(t)-\lambda t$,

2) $(N(t)-\lambda t)^2-\lambda t$,

3) $e^{\ln(1-u)N(t)+u\lambda t}$, за кое било $0<u<1$.

Доказ. Својството на мартингал следува од независноста на нараснувањата на Поасоновата распределба на нараснувањата и изразите за математичкото очекување и варијација на Поасоновата распределба. Ќе го покажеме својството на мартингал за ескпоненцијалниот мартингал:

$$E(e^{\ln(10u)N(t+s)} \mid \mathcal{F}_t) = E(e^{\ln(1-u)N(t)+\ln(1-u)(N(t+s)-N(t))} \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= e^{\ln(1-u)N(t)}E(e^{\ln(1-u)(N(t+s)-N(t))}) \mid \mathcal{F}_t) \text{ (бидејќи } N(t) \text{ е } \mathcal{F}_t \text{ –мерливо)}$$

$$= e^{\ln(1-u)N(t)}E(e^{\ln(1-u)(N(t+s)-N(t))}) \text{ (нараснувањето е независно од)}$$

$$= e^{\ln(1-u)N(t)}e^{-u\lambda s},$$

од момент генерирачката функција, бидејќи $N(t+s)-N(t)$ има $P(\lambda s)$ распределба. Множејќи ги двете страни со $e^{u\lambda(t+s)}$, го добиваме својството на мартингал. ■

Користејќи го експоненцијалниот мартингал, добиваме дека Поасоновиот процес го поседува силното Марково својство.

Пример 2. Еден Поасонов процес го регистрира бројот на повици во една телефонска централа. Ако очекуваниот број на повици во една минута е еднаков на $1,2$, најди ја веројатноста на настанот $\{N(2)=2, N(4)=3\}$.

За случајната променлива $N(t)$, важи $E(N(t))=\lambda t$. Од условот, имаме дека за $t=1$, ова очекување е еднакво на $1,2$. Тогаш, $\lambda=1,2$. Бараната веројатност може да се пресмета врз основа на дводимензионалната распределба:

$$p(N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2)=\lambda^{k_2}\frac{t_1^{k_1}(t_2-t_1)^{k_2-k_1}}{k_1!\cdot(k_2-k_1)!}e^{-\lambda t_2}.$$

Заменувајќи, $t_1=2,\ t_2=4,\ k_1=2,\ k_2=3$, добиваме:

$$p(N(2)=2,\ N(4)=3)=\lambda^3\frac{2^2(4-2)^{3-2}}{2!\cdot(3-2)!}e^{-4\lambda}=4\lambda^3e^{-4\lambda}=0.0569. \ \blacklozenge$$

Пример 3. (Поасонов процес и геометриска распределба) Да разгледаме две независни низи од настани, A и B, кои се појавуваат во согласност со Поасоновите процеси со параметри at и bt, соодветно. Нека

N е бројот на појавувања на настанот A помеѓу две последователни реализации на настанот B. Тогаш, N има геометриска распределба.

Навистина, нека времето ξ помеѓу две последователни реализации на настанот B има експоненцијална распределба со функција на густина на распределба $f(x) = be^{-bx}$. Веројатноста дека во внатрешноста на интервалот $[0,t]$, настанот A, ќе се појави k пати е:

$$\frac{e^{-at}(at)^k}{k!}.$$

Затоа, имаме:

$$p(N=k) = \int_0^{\infty} p(N=k \mid \xi = t)\, f(t)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at}(at)^k}{k!} be^{-bt}\, dt$$

$$= \frac{ba^k}{k!}\int_0^{\infty} t^k e^{-(a+b)t}\, dt = \frac{ba^k}{(a+b)^{k+1}}$$

$$= \frac{b}{a+b}\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^k,\ k = 0,1,2,3,\ldots\ . \blacklozenge$$

2.15. Стационарен процес

Дефиниција 1. За стохастичкиот процес $X(t)$ велиме дека е стационарен (во потесна смисла) ако за секое t, случајните вектори $(X(t_1),...,X(t_n))$ и $(X(t_1+t),...,X(t_n+t))$ имаат ист закон на распределба.

Стационарните процеси се процеси чии конечнодимензионални распределби се инваријантни на поместувањето по време.

Условот за стационарност е доста силен услов. Во многу случаи, сосема доволно е да се бара послаба временска инваријабилност, односно временска инваријабилност не за сите конечнодимензионални распределби, туку за само две функции кои зависат од еднодимензионалните и дводимензионалните распределби. Тие две функции се математичкото очекување и корелациската функција. Имаме:

$$E(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_t(x)\,dx$$

и знаејќи ги дводимензионалните распределби на процесот може да се пресмета корелациската функција:

$$R(t,s) = E(X(t)X(s)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{t,s}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 \,.$$

Ако процесот $X(t)$ е стационарен во потесна смисла, тогаш математичкото очекување доколку постои е константно. Слично, за сите t, s и h, важи:

$$R(t+h,s+h) = E(X(t+h)X(s+h)) = E(X(t)X(s)) = R(t,s)\,.$$

Функција со две променливи со ова својство зависи само од разликата на аргументите t и s. Нека $t > s$. Тогаш, ставајќи $h = -s$, имаме:

$$R(t,s) = R(t-s,s-s) = R(t-s,0) = E(X(t-s)X(0))\,.$$

Поради ова, ќе користиме иста буква за функцијата од разлика од аргументите:

$$R(t-s) = E(X(t)X(s))\,.$$

Ова, најчесто ќе се запишува како:

$$R(h) = E(X(t)X(t+h))\,,$$

бидејќи десната страна не зависи од моментот t, туку само од временската разлика h.

Дефиниција 2. За процесот $X(t)$ велиме дека е стационарен (во поширока смисла) ако важи:

1) математичкото очекување е константно, т.е. $E(X(t)) = const$;

2) корелациската функција $R(t,s)$ зависи само од временската разлика $t-s$.

Освен корелациската функција, понекогаш се разгледува и коваријациската функција $C(t,s)$, дадена со:

$$C(t,s) = E((X(t) - E(X(t))(X(s) - E(X(s))).$$

Имајќи ја предвид линеарноста на математичкото очекување, десната страна може да се запише како:

$$C(t,s) = E(X(t)X(s)) - E(X(t))E(X(s)) = R(t,s) - E(X(t))E(X(s)).$$

Коваријациската функција се совпаѓа со корелациската функција кај центрираните процеси чие математичко очекување е еднакво на нула. Меѓутоа, секој процес многу едноставно може да се центрира. Доволно е да му ја одземеме неговата детерминистичка функција $E(X(t))$. Ставаме, $X^{\circ} = X(t) - E(X(t))$. За овој процес важи $E(X^{\circ}(t)) = 0$, но,

$$C_{X^{\circ}X^{\circ}}(t,s) = R_{X^{\circ}X^{\circ}}(t,s) = C_{XX}(t,s).$$

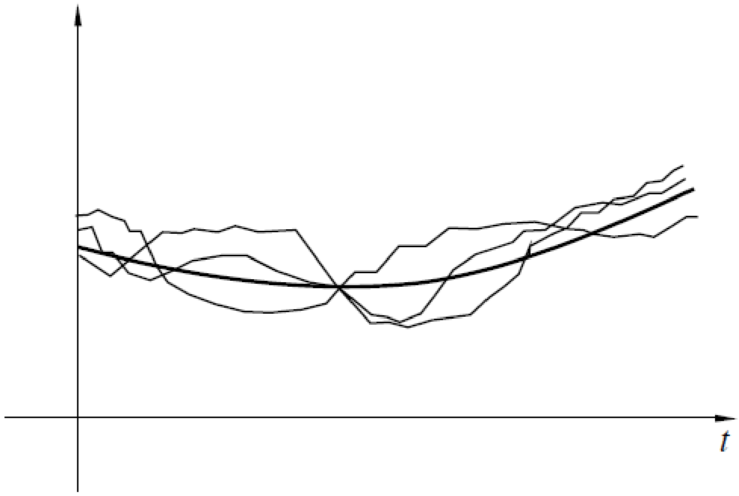
Овде функцијата $C_{X^{\circ}X^{\circ}}$ е коваријациска функција на процесот X°, а функцијата C_{XX} е коваријациска функција на процесот X.

Дисперзијата на случајната променлива $X(t)$ се пресметува како:

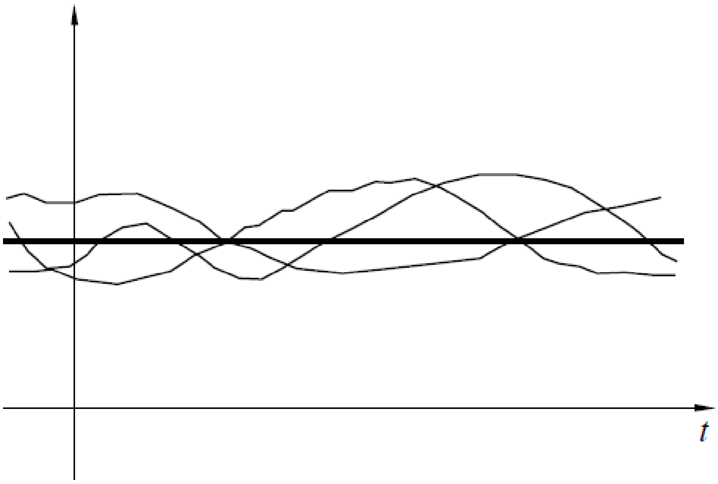
$$D(X(t)) = E(X(t)^2) - (E(X(t)))^2 = R(t,t) - (E(X(t)))^2.$$

Знаејќи ги моментите од прв и од втор ред, може да се кажат дополнителни работи за самиот процес. Функцијата $E(X(t))$ го опишува трендот на раст и опаѓање на математичкото очекување.

На следнава слика дадено е математичкото очекување на процесот $X(t)$ како „средина“ на сите траектории на $X(t)$.

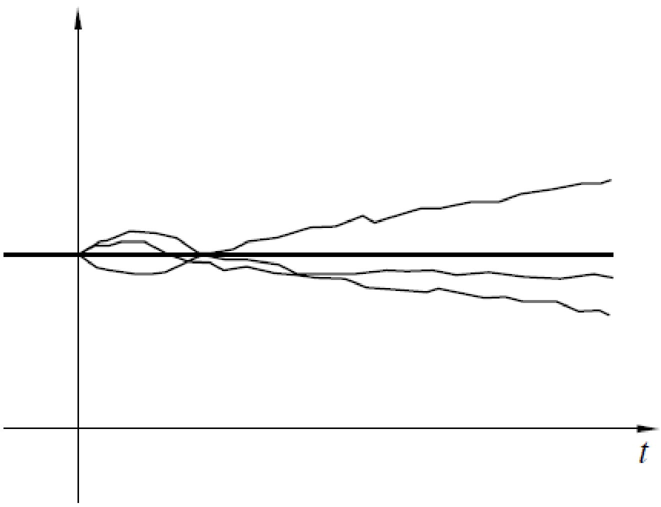


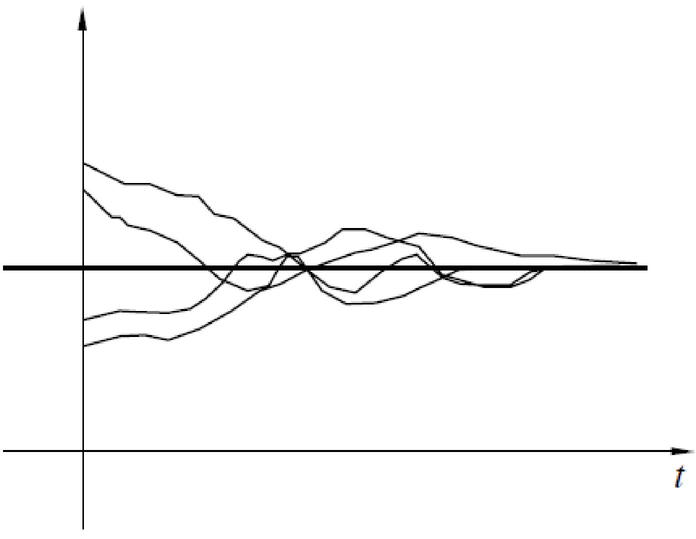
Кај стационарните процеси математичкото очекување е константно, па овие процеси со текот на времето не покажуваат тенденција ниту на раст ниту на пад, како што се гледа на сликата подолу.



Како моментите од втор ред влијаат на однесувањето на процесот ќе видиме преку различни ситуации. Ќе ги разгледаме процесите, кои имаат константно математичко очекување, за да подобро се види влијанието на моментите од втор ред.

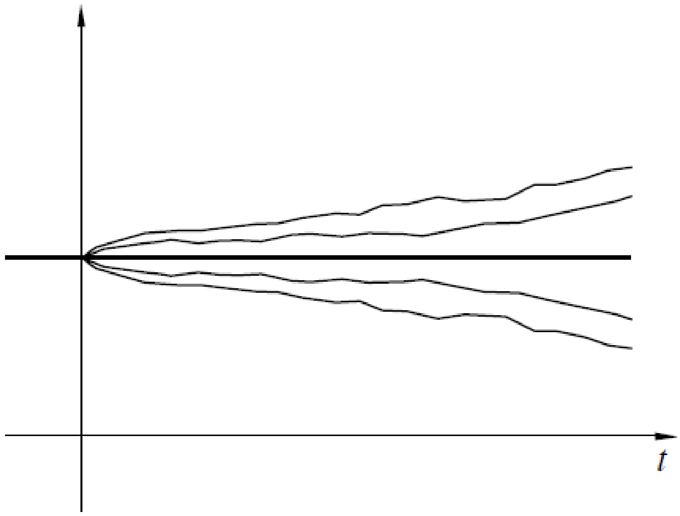
Во процесот чии траектории се дадени на првата слика, дисперзијата расте со времето, додека во процесот кој има траектории дадени на втората слика, дисперзијата опаѓа со текот на времето.

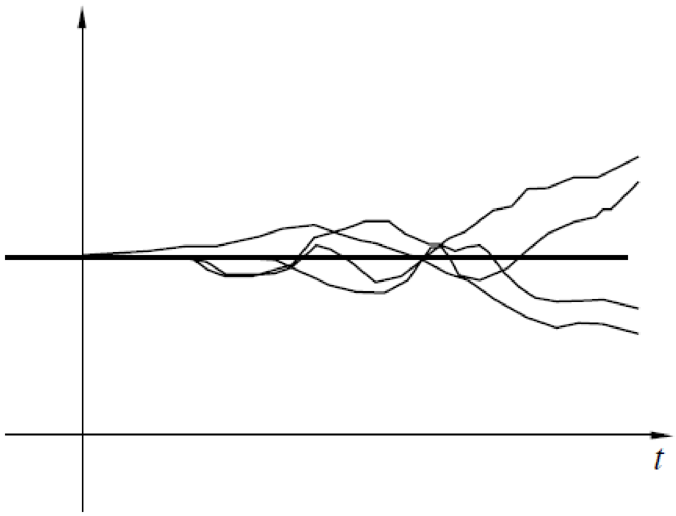




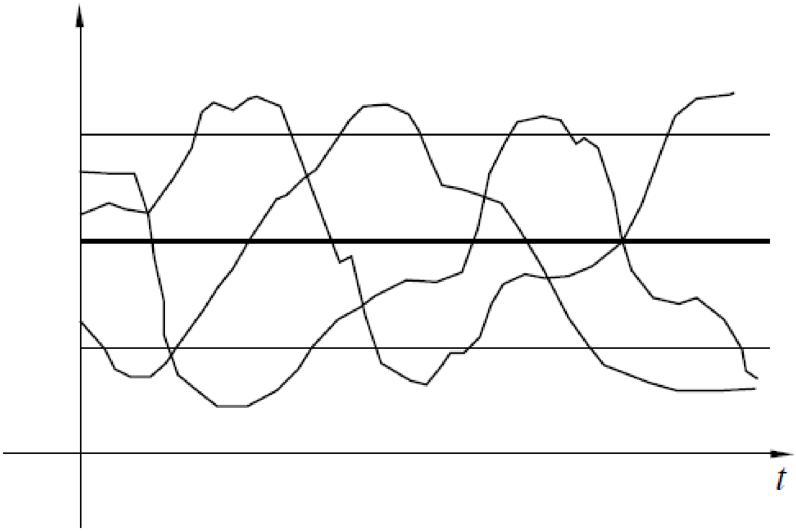
Во продолжение, ќе дадеме скици на траекториите на процес кој има константно математичко очекување и еднаква дисперзија. Нивните траектории се разликуваат бидејќи им се разликуваат корелациските (коваријациските) функции.

Кај првиот процес, корелациската функција $R(t,s)$ е голема за блиски t и s. Поради тоа траекториите не се менуваат многу во кратки временски интервали. Кај вториот процес, корелациската функција е мала, па затоа траекториите се менуваат побрзо.





Да забележиме дека процесот на горната слика не е стационарен, бидејќи овде дисперзијата не е константна (не е задоволен вториот услов за стационарност). Графичкиот приказ на траекторијата на некој стационарен процес е даден на сликата подолу.



Да забележиме дека овде и математичкото очекување и дисперзијата на процесот се константни.

Пример 1. Нека $X(t) = A_1 + A_2 t$, при што A_1 и A_2 се независни случајни променливи, $E(A_i) = a_i$, $D(A_i) = \sigma_i^{\,2}$, $i = 1,2$. Ќе ја најдеме коваријациската функција на овој процес. Имаме:

$$E(X(t)) = E(A_1) + E(A_2)\cdot t = a_1 + a_2 t$$

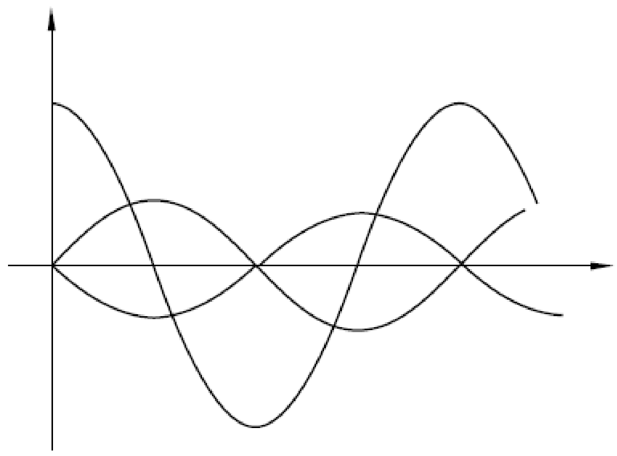
$$\begin{aligned} R(t,s) = E(X(t)X(s)) &= E((A_1 + A_2 t)(A_1 + A_2 s)) \\ &= E(A_1^2 + A_1 A_2 s + A_1 A_2 t + A_2^2 ts) \\ &= E(A_1^2) + E(A_1 A_2)(t+s) + E(A_2^2)ts \\ &= \sigma_1^2 + a_1^2 + a_1 a_2 (t+s) + (\sigma_2^2 + a_2^2)ts \,. \end{aligned}$$

Конечно, имаме:

$$C(t,s) = R(t,s) - (a_1 + a_2 t)(a_1 + a_2 s) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 ts \,. \ \blacklozenge$$

Пример 2. Нека $X(t) = A\cos(ut + \Phi)$, каде што A и Φ се независни случајни променливи и $\Phi : U[0, 2\pi]$. Ќе докажеме дека овој процес е стационарен.

На следнава слика дадени се траекториите на процесот $X(t) = A\cos(ut + \Phi)$.



Износот на амплитудата е одреден со случајната променлива A. Фазното поместување е случајно, со рамномерна распределба на интервалот $[0, 2\pi]$. По реализацијата на тие две променливи, траекторијата на процесот е синусоида, која во целост е определена.

Важи:

$$E(X(t)) = E(A)\cdot E(\cos(ut+\Phi)) = E(A)\cdot \int_0^{2\pi} \cos(ut+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi = 0 .$$

Дополнително,

$$\begin{aligned} R(t,t+h) &= E(X(t)X(t+h)) \\ &= E(A^2)\cdot \int_0^{2\pi} \cos(ut+\phi)\cos(ut+uh+\phi)\frac{1}{2\pi}d\phi \\ &= \frac{E(A^2)}{2\pi}\cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(\cos(uh)+\cos(2ut+uh+\phi)\big)d\phi \\ &= \frac{1}{2}E(A^2)\cos uh . \end{aligned}$$

Јасно се гледа дека оваа функција зависи само од разликата на аргументите, па процесот е стационарен во широка смисла. ♦

3. Калкулус на Брауновото движење

Во оваа глава ќе ги воведеме и ќе ги проучуваме својствата на стохастичките интеграли во однос на Брауновото движење. Овие интеграли се познати и како Итови интеграли, а калкулусот, ќе биде нарекуван Итов клакулус.

3.1. Дефиниција на Итовиот интеграл

Нашата цел е да го дефинираме стохастичкиот интеграл $\int_0^T X(t)\,dB(t)$, кој се означува и како $\int X\,dB$ или $X \cdot B$. Овој интеграл треба да го има својството: Ако $X(t)=1$, тогаш: $\int_0^T dB(t) = B(T)-B(0)$. Слично, ако $X(t)$ е константа c, тогаш интегралот треба да биде: $c(B(T)-B(0))$. На овој начин, можеме да интегрираме константни процеси во однос B. Интегралот над $(0,T]$ треба да биде збир на интегралите на двата подинтервали $(0,a]$ и $(a,T]$. Следува дека, ако $X(t)$ прима две вредности c_1 на $(0,a]$ и c_2 на $(a,T]$, тогаш интегралот на X во однос на B се дефинира лесно. На овој начин интегралот се дефинира за прости процеси, односно процесите кои се константи на конечно многу интервали. Со пуштање на гранична вредност, интегралот е дефиниран за погенерални процеси.

3.2. Итов интеграл од прости процеси

Да разгледаме интеграли од неслучајни прости процеси $X(t)$, кои се функции од t и не зависи од $B(t)$. Од дефиницијата, прост неслучаен процес $X(t)$ е процес за кој постојат времиња $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$ и константи $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, така што:

$$X(t) = c_0 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i I_{(t_i,t_{i+1})}(t)\,. \qquad (*)$$

Итовиот интеграл $\int_0^T X(t)\,dB(t)$ е дефиниран преку сумата:

$$\int_0^T X(t)\,dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right). \qquad (**)$$

Лесно може да се забележи дека, со користење на независноста на Брауновите нараснувања, интегралот, кој е сумата (**) е случајна променлива со нормална распределба со математичко очекување 0 и варијација:

$$V\left(\int_0^T X(t)\,dB(t)\right) = V\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(B(t_{i+1}) - B(t_i\,)\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} V(c_i\,(B(t_{i+1}) - B(t_i))) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2\,(t_{i+1} - t_i)$$
.

Пример 1. Нека $X(t) = -1$ за $0 \le t \le 1$, $X(t) = 1$, за $1 < t \le 2$ и $X(t) = 2$, за $2 < t \le 3$. Тогаш, (да забележиме дека $t_i = 0,1,2,3$, $c_i = X(t_{i+1})$, $c_0 = -1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$)

$$\int_0^3 X(t)\,dB(t) = c_0\,(B(1) - B(0)) + c_2\,(B(2) - B(1)) + c_3\,(B(3) - B(2))$$
$$= -B(1) + (B(2) - B(1)) + 2(B(3) - B(2)) = 2B(3) - B(2) - 2B(1).$$

Распределбата на интегралот е нормална распределба $N(0,6)$, којашто може да се пресмета директно како сума од независните случајни променливи $N(0,1) + N(0,1) + N(0,4)$ или со користење на резултатите погоре. ♦

Со пуштање на лимес по прости неслучајни процеси, ќе можеме да интегрираме поопшти, но сѐ уште неслучајни процеси во однос на Брауновото движење.

За да интегрираме случајни процеси, важно е да дозволиме константите c_i во (*) да бидат случајни. Ако c_i се заменети со случајни променливи ξ_i, со цел да добиеме згодни и едноставни својства на интегралот, дозволуваме случајните променливи ξ_i да зависат од вредностите на $B(t)$, за $t \le t_i$, но не од идните вредности на $B(t)$, за $t > t_i$. Ако $\mathcal{F}_t$ е σ-алгебра генерирана од Брауновото движење сѐ до време t, тогаш ξ_i е $\mathcal{F}_t$–мерливо. Пристапот на дефинирањето на интегралот со апроксимација може да се изведе за класа на адаптирани процеси $X(t)$, $0 \le t \le T$.

Дефиниција 1. За еден процес X се вели дека е адаптиран на филтрацијата $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$, ако за сите t, $X(t)$ е $\mathcal{F}_t$–мерливо.

Забелешка. Со цел интегралот да ги има посакуваните својства, односно математичкото очекување и интегралот да можат да си ги менуваат местата (користејќи ја теоремата на Фубини), барањето процесот X да биде адаптиран е многу слаб, па потребен е посилен услов, кој ќе го нарекуваме прогресивност (прогресивна мерливост).

Дефиниција 2. За еден процес ќе велиме дека е прогресивен ако тој е мерлива функција по парот (t,ω), односно $\mathbf{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$ е мерливо како пресликување од $[0,t] \times \Omega$ во $\mathbb{R}$.

Може да се види секоја адаптирана случајна променлива која е непрекината од десно - со постоење на лева граница или непрекината од лево - со постоење на десна граница, во тој случај процесот е прогресивен. Понатаму, за прогресивен процес ќе користиме регуларен адаптиран процес, бидејќи е полесно да се разбере што се мисли под регуларен адаптиран процес, имајќи го предвид претходниот коментар.

Дефиниција 3. Процесот $X = \{X(t) : 0 \le t \le T\}$ се нарекува прост адаптиран процес ако постојат времиња $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ и случајни променливи $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$, така што ξ_0 е константна, ξ_i е $\mathcal{F}_t$–мерлива (зависи од вредностите на $B(t)$, за $t \le t_i$, но не од вредностите на $B(t)$ за $t > t_i$) и $E(\xi_i^2) < \infty$, $i = 0,1,...,n-1$, така што:

$$X(t) = \xi_0 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t) .$$

За прост адаптиран процес, Итовиот интеграл $\int_0^T X \, dB$ е дефиниран преку сумата:

$$\int_0^T X(t) \, dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) .$$

Да забележиме дека кога ξ_i се случајни променливи, интегралот не мора да има нормална распределба, како што е случај кога c_i не се случајни.

Забелешка. Простите адаптирани процеси се дефинирани како непрекинати од лево степенести функции, иако алтернативно можат да се разгледуваат непрекинати функции од десно. Но, кога се дефинира стохастички интеграл во однос на општи мартингали, кои не се Брауново движење, се земаат само непрекинати функции од лево.

Во продолжение, ќе ги дадеме главните својства на Итовиот интеграл од прости процеси. Овие својства се пренесуваат и на Итовиот интеграл од генерални процеси.

Теорема 1.

1) (Линеарност) Ако $X(t)$ и $Y(t)$ се прости процеси и α и β се константи, тогаш:

$$\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t))\, dB(t) = \alpha \int_0^T X(t)\, dB(t) + \beta \int_0^T Y(t)\, dB(t).$$

2) За индикаторска функција на интервалот $(a,b]$, означена со $I_{(a,b]}(t)$, а дефинирана со:

$$I_{(a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (a,b] \\ 0, & t \notin (a,b] \end{cases}, \text{ имаме:}$$

$$\int_0^T I_{(a,b]}(t)\, dB(t) = B(b) - B(a),$$

$$\int_0^T I_{(a,b]}(t)\, X(t)\, dB(t) = \int_a^b X(t)\, dB(t).$$

3) Интегралот има математичко очекување 0, односно:

$$E\left(\int_0^T X(t)\, dB(t) \right) = 0.$$

4) (Изометрија)

$$E\left(\int_0^T X(t)\, dB(t) \right)^2 = \int_0^T E\left(X^2(t) \right) dt.$$

Доказ. Својствата 1) и 2) следуваат директно од дефиницијата на Итовиот интеграл. Доказот за линеарноста на интегралот следува од фактот што линеарна комбинација на прости процеси е повторно прост процес, а ова важи и за: $I_{(a,b]}(t) X(t)$.

Бидејќи ξ_i се квадратно интеграбилни, тогаш од неравенството на Коши-Шварц имаме:

$$E\left|\xi_i(B(t_{i+1})-B(t_i))\right| \le \sqrt{E(\xi_i^2)E\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)^2} < \infty ,$$

од каде што добиваме дека:

$$E\left|\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} E\left|\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)\right| < \infty ,$$

па стохастичкиот интеграл има математичко очекување. Од својството на мартингал на Брауновото движење, користејќи дека ξ_i се $\mathcal{F}_t$-мерливи, добиваме:

$$E(\xi_i\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right) \mid \mathcal{F}_t) = \xi_i E(\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right) \mid \mathcal{F}_t) = 0 ,$$

па следува дека:

$$E\left(\xi_i\left(B(T_{i+1})-B(t_i)\right)\right) = 0 ,$$

со што е докажано дека важи 3).

За да докажеме дека важи 4), ќе користиме дека важи:

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1}E\left(\xi_i^2\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)^2\right)$$

$$+2\sum_{i<j}E(\xi_i\xi_j\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)\left(B(t_{j+1})-B(t_j)\right)). \qquad (***)$$

Користејќи го својството на мартингал на Брауновото движење,

$$\sum_{i=0}^{n-1}E\left(\xi_i^2\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1}EE(\xi_i^2\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}E(\xi_i^2 E(\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i})) = \sum_{i=0}^{n-1}E(\xi_i^2)(t_{i+1}-t_i) .$$

Последната сума е точно интегралот $\int_0^T E(X^2(t))\,dt$, бидејќи $X(t)=\xi_i$ на $(t_i, t_{i+1}]$. На сличен начин, за $i<j$ добиваме:

$$E\left(\xi_i\xi_j\left(B(t_{i+1})-B(t_i)\right)\left(B(t_{j+1})-B(t_j)\right)\right) = 0 ,$$

па добиваме дека сумата $\sum_{i<j}$ во (***) е нула, па добиваме дека својството 4) важи. ■

Во продолжение ќе го разгледуваме Итовиот интеграл од адаптирани процеси.

Нека $X^n(t)$ е низа од прости процеси кои конвергираат по веројатност кон процесот $X(t)$. Тогаш, под некои услови, низата од нивните интеграли $\int_0^T X^n(t)\,dB(t)$,исто така, конвергира по веројатност кон границата J. Случајната променлива J е земена да биде интегралот: $\int_0^T X(t)\,dB(t)$.

Пример 2. Најди го $\int_0^T B(t)\,dB(t)$.

Нека: $0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < ... < t_n^n = T$ е разбивање на интервалот $[0,T]$ и нека:

$$X^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B\left(t_i^n\right) I_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}(t).$$

Тогаш, за кој било n, $X^n(t)$ е прост адаптиран процес. (Овде $\xi_i^n = B(t_i^n)$). Од непрекинатоста на $B(t)$, $\lim_{n\to\infty} X^n(t) = B(t)$ скоро сигурно, кога $\max_i\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) \to 0$. Итовиот интеграл на простата функција $X^n(t)$ е даден со:

$$\int_0^T X^n(t)\,dB(t) = \sum B\left(t_i^n\right)\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right).$$

Ќе покажеме дека оваа низа од интеграли конвергира по веројатност кон:

$$J = \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

Додавајќи и одземајќи $B^2(t_{i+1}^n)$, добиваме:

$$B(t_i^n)\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right) = \frac{1}{2}\left(B^2(t_{i+1}^n) - B^2(t_i^n) - \left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right)^2\right)$$

и:

$$\int_0^T X^n(t)\,dB(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(B^2(t_{i+1}^n) - B^2(t_i^n)\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}B^2(0) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right)^2,$$

бидејќи првата сума е телескопска. Од дефиницијата на квадратна варијација на Брауновото движење, втората сума конвергира по веројатност кон T. Во согласност со тоа,

$\int_0^T B(t)\,dB(t) = J = \lim_{n\to\infty}\int_0^T X^n(t)\; dB(t) = \frac{1}{2}B^2(T) - \frac{1}{2}T$. ♦

Забелешка. Ако $X(t)$ е диференцијабилна функција (поопшто, функција со конечна варијација), тогаш стохастичкиот интеграл $\int_0^T X(t)\,dB(t)$ може да се дефинира со помош на парцијална интеграција:

$$\int_0^T X(t)\,dB(t) = X(T)B(T) - X(0)B(0) - \int_0^T B(t)\,dX(t).$$

Но, овој пристап не може да се користи кога $X(t)$ зависи од $B(t)$.

Брауновото движење нема извод, но има генерализиран извод кој е дистрибуција (Шварцова дистрибуција). Тој е дефиниран со помош на следнава релација: За глатка функција g со компактен носач (оваа функција е нула надвор од конечен интервал):

$$\int g(t)B'(t)\,dt := -\int B(t)g'(t)\,dt.$$

Но, овој пристап не може да се примени кога $g(t)$ зависи од $B(t)$.

За прости процеси Итовиот интеграл е дефиниран за секој ω, по делови од патот, но во општа ситуација ова не е можно. На пример, $\int_0^1 B(\omega,t)\,dB(\omega,t)$ не е дефиниран, каде што: $\left(\int_0^1 B(t)\,dB(t)\right)(\omega) = J(\omega)$ е дефиниран како граница по веројатност на интегралите (сумите) од прости процеси.

Теорема 2. Нека $X(t)$ е регуларен адаптиран процес, така што со веројатност 1 важи: $\int_0^T X^2(t)\,dt < \infty$. Тогаш Итовиот интеграл $\int_0^T X(t)\,dB(t)$ е дефиниран и ги има следниве својства:

1) (Линеарност) Ако Итовите интеграли од $X(t)$ и $Y(t)$ се дефинирани и α и β се константи, тогаш:

$$\int_0^T \left(\alpha X(t) + \beta Y(t)\right) dB(t) = \alpha\int_0^T X(t)\,dB(t) + \beta\int_0^T Y(t)\,dB(t).$$

2) Важи:

$$\int_0^T X(t)\,I_{(a,b]}(t)\,dB(t0 = \int_a^b X(t)\,dB(t)$$

Следниве две својства важат кога процесот ја задоволува дополнителната претпоставка:

$$\int_0^T E\left(X^2(t)\right)dt < \infty . \qquad \text{(o)}$$

3) Итовиот интеграл има математичко очекување нула. Ако горниот услов (о) важи, тогаш:

$$E\left(\int_0^T X(t)\,dB(t)\right) = 0 .$$

4) (Изометрија) Ако горниот услов (о) важи, тогаш:

$$E\left(\int_0^T X(t)\,dB(t)\right)^2 = \int_0^T E\left(X^2(t)\right)dt .$$

Доказ. Заради комплексноста на доказот, деталите ќе бидат изоставени, а заинтересираниот читател може да ги побара во некои од наведените наслови во литературата. Затоа, овде ќе дадеме само скица на доказот. Прво се докажува дека Итовиот интеграл е добро дефиниран за адаптирани процеси и ја задоволува дополнителната претпоставка (о) во теоремата. Овие процеси можат да се апроксимираат со простите процеси:

$$X^n(t) = X(0) + \sum_{i=0}^{n-1} X\left(t_i^n\right) I_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}(t),$$

каде што (t_i^n) е разбивање на интервалот $[0,T]$, како $\delta_n = \max_i (t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$, кога $n \to \infty$. Во оваа сума само еден член е различен од нула, кој одговара на интервалот во разбивањето кој го содржи t. Процесот $X^n(t)$ е еднаков на $X(t)$ за сите точки во разбивањето, но може да се разликуват на секој мал интервал (t_i^n, t_{i+1}^n). Сега,

$$\int_0^T (X^n(t))^2\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} X^2(t_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) \to \int_0^T X^2(t)\,dt ,$$

$$\int_0^T E\left(X^n(t)\right)^2 dt = \sum_{k=0}^{n-1} EX^2(t_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) \to \int_0^T EX^2(t)\,dt ,$$

кога $n \to \infty$, бидејќи сумите се Риманови суми за соодветните интеграли. Уште повеќе, можеме да докажеме дека:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T E\left(X^n(t) - X(t)\right)^2 dt = 0 . \qquad \text{(oo)}$$

Нека го означиме Итовиот интеграл од простиот процес со:

$$J_n = \int_0^T X^n(t)\,dB(t) = \sum_{k=0}^{n-1} X(t_i^n)\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right).$$

За J_n важи условот (о) важи, па имаме: $E(J_n) = 0$ и од изометријата од претходната теорема, $E(J_n^2)$ е дадено со:

$$E(J_n^2) = \sum_{k=0}^{n-1} EX^2(t_i^n)(t_{i+1}^n - t_i^n)\ .$$

Користејќи го (оо) имаме:

$$E(J_n - J_m)^2 = E\left(\int_0^T X^m(t)\,dB(t) - \int_0^T X^n(t)\,dB(t)\right)^2$$

$$= E\left(\int_0^T \left(X^m(t) - X^n(t)\right)dB(t)\right)^2 = E\left(\int \left(X^m(t) - X^n(t)\right)^2 dt\right)$$

$$\leq 2E\left(\int_0^T \left(X^m(t) - X(t)\right)^2 dt\right) + 2E\left(\int_0^T \left(X^n(t) - X(t)\right)^2 dt\right) \to 0,$$

кога $n,m \to \infty$. Просторот L^2 од случајни променливи со математичко очекување 0, конечни моменти од втор ред и со средно квадратна конвергенција е комплетен простор и последното равенство покажува дека J_n е Кошиева низа во овој простор. Од овде имаме дека постои елемент J, така што $J_n \to J$ во L^2. Оваа гранична вредност J е земено да биде Итовиот интеграл $\int_0^T X(t)\,dB(t)$. Ако се користи друга низа за апроксимација, тогаш не е тешко да се провери дека оваа гранична вредност не се менува.

Сега да разгледаме адаптиран процес со конечен интеграл $\int_0^T X^2(t)\,dt$, но не мора да има конечно математичко очекување. Може да се докаже, користејќи го претходниот резултат, дека овие процеси можат да се апроксимираат со прости процеси со пуштање на гранична вредност по веројатност. Низата од соодветните Итовите интеграли е Кошиева низа, каде што конвергенцијата е земена по веројатност. Оваа низа конвергира по веројатност кон граничната вредност: $\int_0^T X(t)\,dB(t)$.

Да забележиме дека Итовите интеграли не мора да имаат математичко очекување и дисперзија, но кога имаат, математичкото очекување е нула и дисперзијата е дадена со формулата:

$$E\left(\int_0^T X(t)\,dB(t)\right)^2 = \int_0^T E\left(X^2(t)\right)dt.$$

Последица 1. Ако X е непрекинат адаптиран процес, тогаш Итовиот интеграл $\int_0^T X(t)\,dB(t)$ постои. Уште повеќе, $\int_0^T f(B(t))\,dB(t)$, каде што f е добро дефинирана функција на $\mathbb{R}$.

Доказ. Бидејќи кој било пат на $X(t)$ е непрекината функција и $\int_0^T X^2(t)\,dt < \infty$, па тврдењето следува од претходната теорема. Ако f е непрекината функција на $\mathbb{R}$, па $f(B(t))$ е непрекината на $[0,T]$. ■

Забелешка. Од доказот на горната теорема, имаме дека сумите:

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} X(t_i^n)\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right)$$

го апроксимираат Итовиот интеграл $\int_0^T X(t)\,dB(t)$.

Во апроксимацијата на Стилтјесовиот интеграл со суми, функцијата f на интервалот $[t_i, t_{i+1}]$ е заменета со нејзината вредност во некоја средна точка $\theta_i \in [t_i, t_{i+1}]$, каде што во горната апроксимација на Итовиот интеграл, најлевата точка мора да се земе за $\theta_i = t_i$, инаку процесот нема да биде адаптиран.

Можно е да се дефинира интеграл (интеграл кој е поразличен од Итов интеграл) кога θ_i е избрано да биде внатрешна точка на интервалот, $\theta_i = \lambda t_i + (1-\lambda)t_{i+1}$, за некое $\lambda \in (0,1)$. Резултатниот интеграл може да зависи од изборот на λ. Кога $\lambda = \frac{1}{2}$ го имаме стохастичкиот интеграл на Стратанович. Калкулусот кај овој тип на интеграл е многу сличен како кај Итовиот интеграл.

Забелешка. Да забележиме дека Итовиот интеграл не е монотон, односно важи:

од $X(t) \le Y(t)$ не следува $\int_0^T X(t)\,dB(t) \le \int_0^T Y(t)\,dB(t)$.

Едноставен контрапример за ова е: $\int_0^T 1\cdot dB(t) = B(1)$. Со веројатност од $\frac{1}{2}$, ова е помало од нула, односно Итовиот интеграл помал од нула.

Ќе дадеме примери на Итови интеграли со облик: $\int_0^1 f(B(t))\,dB(t)$, со или без првите два момента.

Пример 3. Нека $f(t) = e^t$. Тогаш, интегралот $\int_0^1 e^{B(t)}\,dB(t)$ е добро дефиниран, бидејќи функцијата $f(t)$ е непрекината на $\mathbb{R}$. Бидејќи:

$$E\left(\int_0^1 e^{2B(t)}\,dt\right) = \int_0^1 E\left(e^{2B(t)}\right)dt = \int_0^1 e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}(e^2-1) < \infty,$$

$$E\left(\int_0^1 e^{B(t)}\,dB(t)\right) = 0 \quad \text{и} \quad E\left(\int_0^1 e^{B(t)}\,dB(t)\right)^2 = \frac{1}{2}(e^2-1).\ \blacklozenge$$

Пример 4. Нека $f(t) = t$ и да го разгледаме интегралот $\int_0^1 B(t)\,dB(t)$. Тогаш условот (оо) е задоволен, бидејќи:

$$\int_0^1 E\left(B^2(t)\right)dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2} < \infty.$$

Следува дека: $\int_0^1 B(t)\,dB(t)$ има математичко очекување нула и дисперзија $\frac{1}{2}$. ♦

Пример 5. Нека $f(t) = e^{t^2}$ и да го разгледаме интегралот $\int_0^1 e^{B^2(t)}\,dB(t)$. Иако овој интеграл е добро дефиниран, условот (оо) не важи, бидејќи: $\int_0^1 E\left(e^{2B^2(t)}\right)dt = \infty$, бидејќи:

$$E\left(e^{2B^2(t)}\right) = \int e^{2x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}} = \infty, \quad \text{за } t \ge \frac{1}{4}.$$

Оттука, не можеме да тврдиме дека овој Итов интеграл има конечни моменти. Користејќи ги неравенствата на мартингал, кои ќе бидат дадени во продолжение, може да се докаже дека математичкото очекување на Итовиот интеграл не постои. ♦

Пример 6. Нека $J=\int_0^1 t\,dB(t)$. Ќе го пресметаме $E(J)$ и $D(J)$.

Бидејќи $\int_0^1 t^2\,dt<\infty$, Итовиот интеграл е дефиниран. Бидејќи интеграндот t е неслучаен, условот (оо) важи и интегралот ги има првите два момента, $E(J)=0$ и $E(J^2)=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}$. ♦

Пример 7. За кои вредности на α интегралот $\int_0^1 (1-t)^{-\alpha}\,dB(t)$ е дефиниран?

За да Итовиот интеграл биде дефиниран, мора: $\int_0^1 (1-t)^{-2\alpha}\,dt<\infty$. Оттука, $\alpha<\frac{1}{2}$. ♦

Како последица на изометријата, можеме да го најдеме математичкото очекување на производот на два Итови интеграли.

Теорема 3. Нека $X(t)$ и $Y(t)$ се регуларни адаптирани процеси, така што: $E\left(\int\limits_0^T X(t)^2\,dt\right)<\infty$ и $E\left(\int\limits_0^T Y(t)^2\,dt\right)<\infty$. Тогаш,

$$E\left(\int\limits_0^T X(t)\,dB(t)\ \int\limits_0^T Y(t)\,dB(t)\right)=\int\limits_0^T E\big(X(t)Y(t)\big)\,dt.$$

Доказ. Нека означиме: $I_1=\int_0^T X(t)\,dB(t)$ и: $I_2=\int_0^T Y(t)\,dB(t)$. Производот погоре може да се презапише користејќи го равенството:

$$I_1I_2=\frac{(I_1+I_2)^2}{2}-\frac{I_1^2}{2}-\frac{I_2^2}{2},$$

а потоа користејќи ја изометријата, го добиваме тврдењето на задачата. ■

3.3. Итов интеграл процес

Нека X е регуларен адаптиран процес, така што $\int_0^T X^2(s)\,ds < \infty$, со веројатност 1, па $\int_0^t X(s)\,dB(s)$, дефиниран за секој $t \le T$. Бидејќи е случајна променлива за кое било фиксно t, $\int_0^t X(s)\,dB(s)$ како функција од горната граница t дефинира стохастички процес:

$$Y(t) = \int_0^t X(s)\,dB(s).$$

Може да се докаже дека постои верзија на Итовиот интеграл $Y(t)$, со непрекинати прости патишта. Секогаш ќе претпоставуваме дека е земена непрекината верзија на Итовиот интеграл. Подоцна ќе видиме дека Итовиот интеграл има позитивна квадратна варијација и бесконечна варијација.

Интуитивно, јасно е од конструкцијата на Итовите интеграли дека тие се адаптирани. За да го видиме ова формално, Итовите интеграли од прости процеси се очигледно адаптирани и, исто така, непрекинати. Бидејќи $Y(t)$ е гранична вредност на интегралите од прости процеси, па, оттука и $Y(t)$ е адаптиран процес.

Да претпоставиме дополнително на условот $\int_0^T X^2(s)\,ds < \infty$, условот (oo) важи, $\int_0^T EX^2(s)\,ds < \infty$. Последново следува од (oo) со примена на теоремата на Фубини. Тогаш,

$$Y(t) = \int_0^t X(s)\,dB(s), \quad 0 \le t \le T,$$

е добро дефиниран и ги има првите два момента. Може да се покаже, прво за прости процеси, а потоа и поопшто, за $s < t$,

$$E\left(\int_s^t X(u)\,dB(u) \mid \mathcal{F}_t\right) = 0.$$

Следува:

$$E(Y(t) \mid \mathcal{F}_t) = E\left(\int_0^t X(u)\,dB(u) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \int_0^s X(u)\,dB(u) + E\left(\int_s^t X(u)\,dB(u) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \int_0^s X(u)\,dB(u) = Y(s).$$

Следува дека $Y(t)$ е мартингал. Вторите моменти на $Y(t)$ се дадени преку својството на изометрија:

$$E\left(\int_0^t X(s)\,dB(s)\right)^2 = \int_0^t EX^2(s)\,ds.$$

Оттука, имаме дека:

$$\sup_{t\le T} E\left(Y^2(t)\right) = \int_0^T EX^2(s)\,ds < \infty.$$

Дефиниција 1. Еден мартингал се вели дека е квадратно интеграбилен на $[0,T]$ ако неговите втори моменти се ограничени.

Теорема 1. Нека $X(t)$ е адаптиран процес, така што $\int_0^T EX^2(s)\,ds < \infty$. Тогаш,

$$Y(t) = \int_0^t X(s)\,dB(s), \quad 0 \le t \le T$$

е непрекинато квадратно интеграбилен мартингал со математичко очекување 0.

Забелешка. Ако $\int_0^T EX^2(s)\,ds = \infty$, тогаш Итовиот интеграл $\int_0^t X(s)\,dB(s)$ може да не биде мартингал, но секогаш е локален мартингал. (ќе ја дадеме дефиницијата подоцна).

Користејќи ја последната теорема, можеме да конструираме мартингали.

Последица 1. За секоја ограничена функција f на $\mathbb{R}$, $\int_0^t f(B(s))\,dB(s)$ е квадратно интеграбилен мартингал.

Доказ. Процесот $X(t) = f(B(t))$ е адаптиран и бидејќи $|f(x)| < K$, за некоја константа $K > 0$, $\int_0^T Ef^2(B(s))\,ds \le KT$ и користејќи ја претходната теорема го добиваме тврдењето на последицата. ■

Итовиот интеграл $Y(t)=\int X(s)\,dB(s)$, $0\le t\le T$ е случајна функција по t. Овој интеграл е непрекинат и адаптиран. Квадратната варијација на Y е дефинирана со:

$$[Y,Y](t)=\lim\sum_{i=0}^{n-1}\left(Y(t_{i+1}^n)-Y(t_i^n)\right)^2,$$

каде што за секој n, $(t_i^n)_{i=0}^n$ е разбивање на $[0,t]$ и граничината вредност по веројатност, земена по сите разбивања, каде што $\delta_n=\max_i\left(t_{i+1}^n-t_i^n\right)\to 0$, кога $n\to\infty$.

Теорема 2. Квадратната варијација на Итовиот интеграл $\int_0^t X(s)\,dB(s)$ е дадена со:

$$\left(\int_0^t X(s)\,dB(s),\int_0^t X(s)\,dB(s)\right)(t)=\int_0^t X^2(s)\,ds.$$

Пример 1. За да поедноставиме, нека претпоставиме дека X прима две различни вредности на: $[0,1]$: ξ_0 на $[0,\frac{1}{2}]$ и ξ_1 на $[\frac{1}{2},1]$

$$X_t=\xi_0 I_{[0,\frac{1}{2}]}(t)+\xi_1 I_{(\frac{1}{2},1]}(t).$$

Лесно се забележува дека:

$$Y(t)=\int_0^t X(s)\,ds=\begin{cases}\xi_0 B(t), & t\le\dfrac{1}{2}\\ \xi_0 B\left(\dfrac{1}{2}\right)+\xi_1\left(B(t)-B\left(\dfrac{1}{2}\right)\right), & t>\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Следува дека за секое разбивање на $[0,t]$,

$$Y(t_{i+1}^n)-Y(t_i^n)=\begin{cases}\xi_0\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right), & t_i^n<t_{i+1}^n\le\dfrac{1}{2}\\ \xi_1\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right), & \dfrac{1}{2}\le t_i^n<t_{i+1}^n\end{cases}.$$

Вклучувајќи го $\frac{1}{2}$ во разбивањето, имаме дека за $t\le\frac{1}{2}$,

$$[Y,Y](t)=\lim\sum_{i=0}^{n-1}\left(Y(t_{i+1}^n)-Y(t_i^n)\right)^2$$

$$= \xi_o \lim \sum_{i=0}^{n-1} \left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n) \right)^2 = \xi_0^2 [B,B](t) = \xi_0^2 t = \int_0^t X^2(s)\, ds$$

и за $t > \frac{1}{2}$

$$[Y,Y](t) = \lim \sum_{i=0}^{n-1} \left(Y(t_{i+1}) - Y(t_i) \right)^2$$

$$= \xi_0^2 \lim \sum_{t_i < \frac{1}{2}} \left(B(t_{i+1}) - B(t_i) \right)^2 + \xi_1^2 \lim \sum_{t_i > \frac{1}{2}} \left(B(t_{i+1}) - B(t_i) \right)^2$$

$$= \xi_0^2 [B,B]\left(\frac{1}{2} \right) + \xi_1^2 [B,B]\left((\frac{1}{2}, t] \right) = \int_0^t X^2(s)\, ds \, .$$

Горните граници се гранични вредности по веројатност, кога $\delta_n = \max_i \left(t_{i+1}^n - t_i^n \right) \to 0$. Тврдењето на теоремата важи за која било проста функција. ♦

Пример 2. Користејќи ја претходната теорема, квадратната варијација на Итовиот интеграл е:

$$\left(\int_0^t B(s)\, dB(s) \right)(t) = \int_0^t B^2(s)\, ds \, .$$

Последица 2. Ако $\int_0^t X^2(s)\, ds > 0$, за сите $t \le T$, тогаш Итовиот интеграл $Y(t) = \int_0^t X(s)\, dB(s)$ има бесконечна варијација на $[0,t]$, за сите $t \le T$.

Доказ. Ако $Y(t)$ има конечна варијација, неговата квадратна варијација ќе биде нула, што е контрадикција. ■

Како и Брауновото движење, Итовиот интеграл $Y(t)$ е непрекината, но никаде диференцијабилна функција по t.

Нека сега $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ се два Итови интеграли од $X_1(t)$ и $X_2(t)$ во однос на исто Брауново движење $B(t)$. Тогаш, јасно процесот $Y_1(t) + Y_2(t)$ е, исто така, Итов интеграл од $X_1(t) + X_2(t)$, во однос на $B(t)$.

Квадратната коваријација на Y_1 и Y_2 на $[0,t]$ е дефинирана со:

$$[Y_1, Y_2](t) = \frac{1}{2} \left([Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_2](t) - [Y_1, Y_1](t) - [Y_2, Y_2](t) \right).$$

Од претходната теорема имаме дека:

$$[Y_1,Y_2](t)=\int_0^t X_1(s)X_2(s)\,ds\,.$$

Јасно е дека $[Y_1,Y_2](t)=[Y_2,Y_1](t)$, па може да се забележи дека квадратната коваријација е дадена преку гранична вредност по веројатност од производите на нараснувањата на процесите Y_1 и Y_2, кога разбивањата (t_i^n) на $[0,t]$ се стеснуваат, односно нивниот дијаметар се намалува,

$$[Y_1,Y_2](t)=\lim\sum_{i=0}^{n-1}\left(Y_1(t_{i+1}^n)-Y_1(t_i^n)\right)\left(Y_2(t_{i+1}^n)-Y_2(t_i^n)\right).$$

3.4. Итов интеграл и Гаусови процеси

Веќе видовме дека Итовиот интеграл од прости неслучајни процеси е случајна променлива која има нормална распределба. Исто така, користејќи генерирачки функции, јасно е дека гранична вредност по веројатност на низа од вакви Итови интеграли е случајна променлива со нормална распределба. Ја имаме следнава теорема.

Теорема 1. Ако $X(t)$ е неслучаен процес, така што: $\int_0^T X^2(s)\,ds<\infty$, тогаш неговиот Итов интеграл $Y(t)=\int_0^t X(s)\,dB(s)$ е Гаусов процес со математичко очекување 0 и функција на коваријанса дадена со:

$$\operatorname{cov}(Y(t),Y(t+u))=\int_0^t X^2(s)\,ds\,,\ \ u\geq 0\,.$$

Уште повеќе, $Y(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал.

Доказ. Бидејќи подинтегралната функција е неслучајна,

$$\int_0^t EX^2(s)\,ds=\int_0^t X^2(s)\,ds<\infty\,.$$

Од својството на Итовиот интеграл дека има математичко очекување 0, следува дека Y има математичко очекување 0. За да ја најдеме функцијата на коваријанса, интегралот $\int_0^{t+u}$ ќе го запишеме како $\int_0^t+\int_t^{t+u}$ и ќе го користиме својството на мартингал на $Y(t)$ за да добиеме:

$$E(\int_0^t X(s)\,dB(s)\,E(\int_t^{t+u} X(s)\,dB(s) \mid \mathcal{F}_t\ )) = 0\,.$$

Па, имаме:

$$\operatorname{cov}(Y(t),Y(t+u)) = E\left(\int_0^t X(s)\,dB(s)\int_0^{t+u} X(s)\,dB(s)\right)$$

$$= E\left(\int_0^t X(s)\,dB(s)\right)^2 = \int_0^t EX^2(s)\,ds = \int_0^t X^2(s)\,ds\,. \blacksquare$$

Со помош на претходната теорема можеме да заклучиме дека интегралот $J = \int_0^t s\,dB(s)$ има нормална распределба $N(0,\frac{t^3}{3})$.

Пример 1. Нека $X(t) = 2I_{[0,1]}(t) + 3I_{(1,3]}(t) - 5I_{(3,4]}(t)$. Интегралот $\int_0^4 X(t)\,dB(t)$ запиши го како сума од случајни променливи, најди ја неговата дистрибуција, математичко очекување и дисперзија. Ќе докажеме дека процесот $M(t) = \int_0^t X(s)\,dB(s)$, $0 \le t \le 4$ е Гаусов процес и е мартингал.

Имаме:

$$\int_0^4 X(t)\,dB(t) = \int_0^1 X(t)\,dB(t) + \int_1^3 X(t)\,dB(t) + \int_3^4 X(t)\,dB(t)$$

$$= \int_0^1 2dB(t) + \int_1^3 3\,dB(t) + \int_3^4 (-5)\,dB(t)$$

$$= 2(B(1)-B(0)) + 3(B(3)-B(1)) - 5(B(4)-B(3))\,.$$

Итовиот интеграл е сума од три независни случајни променливи кои имаат нормална распределба (од независноста на нараснувањата на Брауновото движење), $2N(0,1)+3N(0,2)-5N(0,1)$. Во согласност со ова, распределбата на Итовиот интеграл е: $N(0,47)$.

Својството на мартингал и Гаусовото својство на $M(t) = \int_0^t X(s)\,dB(s)$, $0 \le t \le 4$, следуваат од независноста на нараснувањата на $M(t)$, нивното математичко очекување е 0 и нормалната распределба на нараснувањата. Уште, $M(t) - M(s) = \int_s^t X(u)\,dB(u)$. Нека земеме, на пример, $0 < s < t < 1$, тогаш:

$$M(t) - M(s) = \int_s^t X(u)\, dB(u) = 2(B(t) - B(s)),$$

што е независно од Брауновото движење сè до моментот s и има $N(0, 4(t-s))$ распределба.

Ако $0 < s < 1 < t < 3$, тогаш:

$$M(t) - M(s) = \int_s^t X(u)\, dB(u) = \int_s^1 X(u)\, dB(u) + \int_1^t X(u)\, dB(u)$$
$$= 2(B(1) - B(s)) + 3(B(t) - B(1)),$$

што е независно од Брауновото движење сè до момент s, $B(u)$, $u \le s$ (исто $M(u)$, $u \le s$) и има $N(0, 4(1-s) + 9(t-1))$ распределба. Останатите случаи се слични. Уште повеќе процесот е Гаусов.

Независноста од нараснувањата, заедно со математичко очекување 0 на нараснувањата го дава својството на мартингал на $M(t)$. На пример, ако $0 < s < 1 < t < 3$,

$$E(M(t) \mid M(u), u \le s) = E(M(s) + M(t) - M(s) \mid M(u), u \le s)$$
$$= M(s) + E(M(t) - M(s) \mid M(u), u \le s) = M(s).$$

Ако $Y(t) = \int_0^t X(t,s)\, dB(s)$, каде $X(t,s)$ зависи од горната граница на интеграција t, тогаш $Y(t)$ не мора да биде мартингал, но останува Гаусов процес за неслучаен процес $X(t,s)$. ♦

Теорема 2. За сите $t \le T$, нека $X(t,s)$ е регуларна неслучајна функција за која важи $\int_0^t X^2(t,s)\, ds < \infty$. Тогаш, процесот $Y(t) = \int_0^t X(t,s)\, dB(s)$ е Гаусов процес со математичко очекување 0 и функција на коваријација за $t, u \ge 0$

$$\operatorname{cov}(Y(t), T(t+u)) = \int_0^t X(t,s)\, X(t+u,s)\, ds.$$

Доказ. За фиксно t, распределбата на $Y(t)$, како и онаа на Итовиот интеграл на неслучајна функција, е нормална распределба со математичко очекување 0 и дисперзија $\int_0^t X^2(t,s)\, ds$. Нема да докажуваме дека процесот е Гаусов (ова може да се види со апроксимирање на $X(t,s)$ со функции од облик $f(t)g(s)$), но ќе ја пресметаме коваријансата. За $u > 0$

$$Y(t+u) = \int_0^t X(t+u,s)\,dB(s) + \int_t^{t+u} X(t+u,s)\,dB(s)\,.$$

Бидејќи $X(t+u,s)$ е неслучајна, Итовиот интеграл $\int_t^{t+u} X(t+u,s)\,dB(s)$ е независен од $\mathcal{F}_t$. Следува:

$$E\left(\int_0^t X(t,s)\,dB(s) \int_t^{t+u} X(t+u,s)\,dB(s)\right) = 0$$

и

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y(t),Y(t+u)) &= E(Y(t)Y(t+u))\\ &= E\left(\int_0^t X(t,s)\,dB(s) \int_0^t X(t+u,s)\,dB(s)\right)\\ &= \int_0^t X(t,s)\,X(t+u,s)\,ds\,,\end{aligned}$$

каде што последното равенство беше добиено од резултатот за математичкото очекување на производот на Итовите интеграли. ■

3.5. Итова формула за Брауново движење

Итовата формула, уште позната и како смена на променливи, е една од главните алатки во стохастичкиот калкулус.

Теорема 1. Ако $B(t)$ е Брауново движење на $[0,T]$ и $f(x)$ е двапати непрекинато диференцијабилна функција на $\mathbb{R}$, тогаш за секој $t \le T$

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))\,dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))\,ds\,.$$

Доказ. Да забележиме дека сите интеграли во теоремата се добро дефинирани. Нека (t_i^n) е разбивање на интервалот $[0,t]$. Јасно,

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1}\Big(f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))\Big)\,.$$

Со примена на Тејлеровата формула на $f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))$, добиваме:

$$f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n)) = f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)) + \frac{1}{2} f''(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2,$$

каде $\theta_i^n \in \left(B(t_i^n), B(t_{i+1}^n)\right)$. Следува:

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 .$$

Ако пуштиме $\delta_n \to 0$, првата сума конвергира кон Итовиот интеграл $\int_0^t f'(B(s))\,dB(s)$. Втората сума конвергира кон $\int_0^t f''(B(s))\,ds$ (ова следува од наредната теорема), па го добиваме тврдењето на теоремата. ■

Теорема 2. Ако g е ограничена непрекината функција и (t_i^n) е разбивање на интервалот $[0,t]$, тогаш за кое било $\theta_i^n \in (B(t_i^n), B(t_{i+1}^n))$, за граничната вредност по веројатност имаме:

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n)\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right)^2 = \int_0^t g(B(s))\,ds .$$

Доказ. Нека $\theta_i^n = B(t_i^n)$ се левите краеви на интервалот $(B(t_i^n), B(t_{i+1}^n))$. Ќе покажеме дека сумите конвергираат по веројатност, односно:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right)^2 \to \int_0^t g(B(s))\,ds . \qquad (*)$$

Од непрекинатоста на $g(B(t))$ и дефиницијата на интегралот, имаме дека:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) \to \int_0^t g(B(s))\,ds .$$

Наредно ќе покажеме дека разликата помеѓу овие суми конвергира кон нула во L^2, односно:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))\left(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\right)^2 - \sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i))(t_{i+1} - t_i) \to 0 .$$

За $\Delta B_i = B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)$ и $\Delta t_i = t_{i+1}^n - t_i^n$, имаме:

$$E(\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i))^2 = E\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))E(((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i})$$

$$= 2E\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))(\Delta t_i)^2 \le \delta \cdot 2 \cdot E\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))\Delta t_i \to 0,$$

кога $\delta \to 0$. Следува дека:

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) \to 0,$$

каде што конвергенцијата е (L^2) средна квадратна конвергенција, па двете горни суми имаат иста гранична вредност, па (*). Сега за кој било избор на θ_i^n, за $\delta_n \to 0$, имаме:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Big(g(\theta_i^n) - g(B(t_i^n))\Big)\Big(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\Big)^2$$

$$\le \max_i \Big(g(\theta_i^n) - g(B(t_i^n))\Big)\sum_{i=0}^{n-1}\Big(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)\Big)^2 \to 0.$$

Првиот член конвергира кон нула скоро сигурно по непрекинатост на g и B, а вториот член конвергира по веројатност кон квадратната варијација на Брауновото движење, t, од каде што маме конвергенција по веројатност кон нула, во последниот израз. Оттука, двете суми $\sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n)(\Delta B_i)^2$ и $\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i))(\Delta B_i)^2$ имаат иста граница по веројатност, па резултатот следува од (*). ■

Пример 1. Земајќи $f(x) = x^m$, $m \ge 2$, имаме:

$$B^m(t) = m\int_0^t B^{m-1}(s)\,dB(s) + \frac{m(m-1)}{2}\int_0^t B^{m-2}(s)\,ds.$$

За $m = 2$,

$$B^2(t) = 2\int_0^t B(s)\,dB(s) + t.$$

Од последните две равенства, го добиваме познатото равенство за стохастичкиот интеграл:

$$\int_0^t B(s)\,dB(s) = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2}t. \ \blacklozenge$$

Пример 2. Нека $f(x) = e^x$. Тогаш, имаме:

$$e^{B(t)} = 1 + \int_0^t e^{B(s)}\, dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{B(s)}\, ds\,. \blacklozenge$$

3.6. Итови процеси и стохастички диференцијали

Секој Итов процес има облик:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dB(s), \quad 0 \le t \le T\,, \qquad (*)$$

каде што $Y(0)$ е $\mathcal{F}_0$-мерлив, процесите $\mu(t)$ и $\sigma(t)$ се $\mathcal{F}_t$– адаптирани, така што:

$$\int_0^T |\,\mu(t)\,|\, dt < \infty \qquad \text{и} \qquad \int_0^T \sigma^2(t)\, dt < \infty\,.$$

Дефиниција 1. За процесот $Y(t)$ велиме дека има стохастички диференцијал на $[0,T]$, ако:

$$dY(t) = \mu(t)\, dt + \sigma(t)\, dB(t), \quad 0 \le t \le T\,.$$

Потенцираме дека горната репрезентација има значење како (*) и нема друго значење. Да забележиме дека процесите μ и σ во (*) може (многу често) да зависат од $Y(t)$ или $B(t)$, дури и од целото минато на $B(s)$, $s \le t$ или на пример може да зависи од максимумот на Брауновото движење $\max_{s\le t} B(s)$.

Пример 1. Од примерот 1 од претходниот наслов, имаме дека:

$$B^2(t) = t + 2\int_0^t B(s)\, dB(s)\,.$$

Со други зборови, за $Y(t) = B^2(t)$, можеме да запишеме:

$$Y(t) = \int_0^t ds + \int_0^t 2B(s)\, dB(s)\,.$$

Следува: $\mu(s) = 1$ и $\sigma(s) = 2B(s)$. Стохастичкиот диференцијал на $B^2(t)$ е:

$$d(B^2(t)) = 2B(t)\,dB(t) + dt\,.$$

Единственото значење на последната равенка во овој пример е првата равенка од овој пример. ♦

Пример 2. Од примерот 2 од претходниот наслов, имаме дека: $Y(t) = e^{B(t)}$ има стохастички диференцијал:

$$de^{B(t)} = e^{B(t)}\,dB(t) + \frac{1}{2}e^{B(t)}\,dt\,,$$

или:

$$dY(t) = Y(t)dB(t) + \frac{1}{2}Y(t)\,dt\,.$$

Итовата формула во диференцијална нотација значи: За двапати непрекинато диференцијалбилна функција f, важи:

$$d(f(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))\,dt\,. \blacklozenge$$

Пример 3. Во овој пример ќе го најдеме $d(\sin(B(t)))$. За $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. Следува:

$$d(\sin(B(t))) = \cos(B(t))\,dB(t) - \frac{1}{2}\sin(B(t))\,dt\,.$$

Слично,

$$d(\cos(B(t))) = \sin(B(t))\,dB(t) - \frac{1}{2}\cos(B(t))\,dt\,. \blacklozenge$$

Пример 4. Во овој пример ќе го најдеме $d(e^{iB(t)})$, при што $i^2 = -1$. Примената на Итовата формула на комплексно вредносна функција, подразбира примена на реалните и имагинарните делови на функцијата. Формална примена, со третирање на i како друга константа го дава истиот резултат. Користејќи го претходниот пример, можеме да пресметаме

$$d(e^{iB(t)}) = d\cos(B(t)) + id\sin(B(t))$$

или директно со користење на Итовата формула за $f(x) = e^{ix}$. Имаме:

$$f'(x) = ie^{ix},\ f''(x) = -e^{ix}$$

и:

$$d\left(e^{iB(t)}\right) = ie^{iB(t)}\,dB(t) - \frac{1}{2}e^{iB(t)}\,dt\,.$$

Следува, $X(t) = e^{iB(t)}$ има стохастички диференцијал:

$$dX(t) = iX(t)dB(t) - \frac{1}{2}X(t)\,dt\,. \blacklozenge$$

Нека $Y(t)$ е Итов процес:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dB(s),$$

каде што претпоставуваме дека μ и σ се такви што горните интеграли се дефинирани. Тогаш од својствата на интегралите, $Y(t)$, $0 \le t \le T$, е (случајна) непрекината функција, интегралот $\int_0^t \mu(s)\,ds$ е непрекината функција по t и има конечна варијација (диференцијабилна скоро секаде) и Итовиот интеграл $\int_0^t \sigma(s)\,dB(s)$ е непрекината функција. Квадратната варијација на Y на интервалот $[0,t]$ е дефинирана со:

$$[Y](t) = [Y,Y]([0,t]) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n) \right)^2,$$

каде што за секој n, (t_i^n) е разбивање на интервалот $[0,t]$ и граничната вредност е земена по веројатност по сите разбивања, при што $\delta_n = \max_i (t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$, кога $n \to \infty$ и е дадена со:

$$[Y](t) = \left[\int_0^{\cdot} \mu(s)\,ds + \int_0^{\cdot} \sigma(s)\,dB(s) \right](t)$$

$$= \left[\int_0^{\cdot} \mu(s)\,ds \right](t) + 2\left[\int_0^{\cdot} \mu(s)\,ds, \int_0^{\cdot} \sigma(s)\,dB(s) \right](t) + \left[\int_0^{\cdot} \sigma(s)\,dB(s) \right](t).$$

Знаеме дека квадратната варијација на непрекината функција со функција со конечна варијација е нула. Од ова следува дека квадратната коваријација на интегралот $\int_0^t \mu(s)\,ds$ со горните членови е нула, па користејќи го резултатот за квадратната варијација на Итовите интеграли, имаме:

$$[Y](t) = \left[\int_0^{\cdot} \sigma(s)\,dB(s) \right](t) = \int_0^t \sigma^2(s)\,ds.$$

Ако $Y(t)$ и $X(t)$ имаат стохастички диференцијали во однос на исто Брауново движење $B(t)$, тогаш јасно процесот $Y(t) + X(t)$ има стохастички диференцијал во однос на истото Брауново движење. Следува дека коваријацијата на X и Y на $[0,t]$ постои и е дадена со:

$$[X,Y](t) = \frac{1}{2}\big([X+Y, X+Y](t) - [X,X](t) - [Y,Y](t)\big).$$

Теорема 1. Ако X и Y се Итови процеси и X има конечна варијација, тогаш имаме: $[X,Y](t) = 0$.

Пример 5. Нека $X(t) = e^t$, $Y(t) = B(t)$. Тогаш:

$$[X,Y](t) = [\exp, B](t) = 0 . ♦$$

Во продолжение ќе дадеме една претпоставка, која ќе ни дозволува формална манипулација со стохастичките диференцијали.

$$dY(t)\,dX(t) = d[X,Y](t),$$

или поспецијално:

$$(dY(t))^2 = d[Y,Y](t).$$

Бидејќи $X(t) = t$ е непрекината функција со конечна варијација и $Y(t) = B(t)$ е непрекината со квадратна варијација t, ги имаме следниве правила:

$$dB(t)\,dt = 0, \quad (dt)^2 = 0,$$

но,

$$(dB(t))^2 = d[B,B](t) = dt.$$

Во продолжение ќе го прошириме интегрирањето во однос на процесите добиени од Брауновото движење. Нека Итов интеграл процесот $Y(t) = \int_0^t X(s)\,dB(s)$ е дефиниран за сите $t \le T$, каде што $X(t)$ е адаптиран процес, така што $\int_0^T X^2(s)\,ds < \infty$ со веројатност 1. Нека за адаптираниот процес $H(t)$ важи $\int_0^T H^2(s) X^2(s)\,ds < \infty$ со веројатност 1. Тогаш Итов интеграл процесот $Z(t) = \int_0^t H(s)\,X(s)\,dB(s)$ е, исто така добро дефиниран за сите $t \le T$. Во овој случај формално, со идентификување на $dY(t)$ и $X(t)dB(t)$, да запишеме:

$$Z(t) = \int_0^t H(s)\,dY(s) := \int_0^t H(s) X(s)\,dB(s).$$

Поопшто, ако Y е Итов процес за кој важи:

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t),$$

каде што H е адаптиран и важи $\int_0^t H^2(s)\sigma^2(s)\,ds < \infty$, $\int_0^t | H(s)\mu(s) |ds < \infty$. Тогаш,

$$Z(t) = \int_0^t H(s)\,dY(s)$$

е дефиниран как:

$$Z(t) = \int_0^t H(s)\,dY(s) := \int_0^t H(s)\mu(s)\,ds + \int_0^t H(s)\sigma(s)\,dB(s).$$

Пример 6. Ако $a(t)$ е бројот на контакти кои се одвивале до моментот t, тогаш добивката од трговијата од контактите за време на временски интервал $[0,T]$ е дадена со $\int_0^T a(t)\,dS(t)$. ♦

3.7. Итова формула за Итови процеси

Теорема 1. (Итова формула за $f(X(t))$) Нека $X(t)$ има стохастички диференцијал за $0 \le t \le T$

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)\,dB(t).$$

Ако $f(x)$ е двапати непрекинато диференцијабилна, тогаш стохастичкиот диференцијал од процесот $Y(t) = f(X(t))$ постои и е даден со формулата:

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))d[X,X](t)$$

$$= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\sigma^2(t)dt$$

$$= \left(f'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\sigma^2(t) \right)dt + f'(X(t))\sigma(t)\,dB(t).$$

Значењето на горниов израз е:

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))\,dX(s)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\sigma^2(s)\,ds,$$

каде што првиот интеграл е Итов интеграл во однос на стохастичкиот диференцијал. Постоењето на интегралите во горниот израз е овозможен од теоремата 1 од Итовата формула за Брауновото движење. Доказот е сличен како и кај споменатата теорема, па затоа ќе го изоставиме.

Пример 1. Нека $X(t)$ има стохастички диференцијал:

$$dX(t) = X(t)\,dB(t) + \frac{1}{2}X(t)\,dt\,.$$

Ќе го најдеме процесот X кој ја задоволува горната равенка и ќе го бараме во позитивните процеси X. Користејќи ја Итовата формула за $X(t)$,

$$((\ln x)' = \frac{1}{x},\ (\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}),$$

$$d\ln X(t) = \frac{1}{X(t)}dX(t) - \frac{1}{2X_t^2}X_t^2\,dt \quad (\text{користиме } \sigma(t) = X(t))$$

$$= dB(t) + \frac{1}{2}dt - \frac{1}{2}dt = dB(t)\,.$$

Па, $\ln X(t) = \ln X(0) + B(t)$ и

$$X(t) = X(0)e^{B(t)}.$$

Користејќи ја Итовата формула, лесно се проверува дека $X(t)$ ја задоволува горната равенка, но не тврдиме дека тоа е единствено решение. ♦

Ќе дадеме репрезентација на квадратната коваријација $[X,Y](t)$ на два Итови процеси $X(t)$ и $Y(t)$ дадени преку Итови интеграли. Оваа репрезентација потекнува од формулата за парцијална интеграција.

Квадратната коваријација е гранична вредност на разбивањата на $[0,t]$, при што дијаметарот на разбивањето тежи кон нула,

$$[X,Y](t) = \lim_{\delta_n \to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\right)\left(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)\right).$$

Сумата од десната страна може да се запише како:

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(X(t_{i+1}^n)Y(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)Y(t_i^n)\right)$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}X(t_i^n)\left(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)\right) - \sum_{i=0}^{n-1}Y(t_i^n)\left(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\right)$$

$$= X(t)Y(t) - X(0)Y(0)$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}X(t_i^n)\left(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)\right) - \sum_{i=0}^{n-1}Y(t_i^n)\left(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\right).$$

Последниве две суми конвергираат по веројатност кон Итовите интеграли $\int_0^t X(s)\,dY(s)$ и $\int_0^t Y(s)\,dX(s)$. Па, го добиваме следниов израз:

$$[X,Y](t) = X(t)Y(t) - X(0)Y(0) - \int_0^t X(s)\,dY(s) - \int_0^t Y(s)\,dX(s)\,. \quad (*)$$

Формулата за интеграција по делови (стохастички производ) е дадена со:

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X(s)\,dY(s) + \int_0^t Y(s)\,dX(s) + [X,Y](t)\,.$$

Во нотација на диференцијали, формулата може да се запише како:

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d[X,Y](t)\,.$$

Ако:

$$dX(t) = \mu_X(t)\,dt + \sigma_X(t)\,dB(t)$$
$$dY(t) = \mu_Y(t)\,dt + \sigma_Y(t)\,dB(t)\,,$$

тогаш, нивната квадратна коваријација може да се добие формално со множење на dX и dY. Имено,

$$d[X,Y](t) = dX(t)dY(t)$$
$$= \sigma_X(t)\sigma_Y(t)(dB(t))^2 = \sigma_X(t)\sigma_Y(t)\,dt\,,$$

води кон формулата:

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + \sigma_X(t)\sigma_Y(t)\,dt\,.$$

Да забележиме дека ако еден од процесите не е непрекинат и има конечна варијација, тогаш делот со коваријацијата е нула. Следува, за вакви процеси стохастичкиот производ е ист како и вообичаено.

Интеграцијата по делови (парцијална интеграција) може да се воведе строго (ригорозно) со помош на користење на Итовата формула за функција со две променливи x, y или со апроксимација со прости процеси.

Формулата (*) дава алтернативна репрезентација на квадратната варијација:

$$[X,X](t) = X^2(t) - X^2(0) - 2\int_0^t X(s)\,dX(s)\,.$$

Од формулата за квадратната варијација имаме дека ова не е неопаѓачки процес во t, па има конечна варијација. Од последната формула јасно е дека квадратната варијација е непрекината, а и коваријансата е, исто така, непрекината и има конечна варијација.

Пример 2. Нека $X(t)$ има стохастички диференцијал:

$$dX(t) = B(t)\,dt + t\,dB(t), \quad X(0) = 0 .$$

Ќе го најдеме $X(t)$, ќе ја најдеме неговата распределба, математичко очекување и коваријанса. Јасно е дека $X(t) = tB(t)$ ја задоволува горната равенка, бидејќи правилото за производот на стохастички диференцијали важи, кога еден од процесите е непрекинат и има конечна варијација. Следува дека $X(t) = tB(t)$ е Гаусов процес, со математичко очекување 0 и функција на коваријанса:

$$\gamma(t,s) = \operatorname{cov}(X(t), X(s)) = E(X(t)X(s))$$
$$= E(B(t)B(s)) = \operatorname{cov}(B(t)B(s)) = \min(t,s) . \ \blacklozenge$$

Пример 3. Нека $Y(t)$ има стохастички диференцијал:

$$dY(t) = \frac{1}{2}Y(t)\,dt + Y(t)\,dB(t), \quad Y(0) = 1 .$$

Нека $X(t) = tB(t)$. Ќе го најдеме $d(X(t)Y(t))$. $Y(t)$ е геометриско Брауново движење $e^{B(t)}$. За $d(X(t)Y(t))$ ќе го користиме правилото за производ. Потребен ни е изразот за $d[X,Y](t)$.

$$d[X,Y](t) = dX(t)dY(t) = (B(t)\,dt + t\,dB(t))\left(\frac{1}{2}Y(t)\,dt + Y(t)\,dB(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}B(t)Y(t)(dt)^2 + \left(B(t)Y(t) + \frac{1}{2}tY(t)\right)dB(t)\,dt + tY(t)(dB(t))^2 = tY(t)\,dt ,$$

бидејќи $(dB(t))^2 = dt$ и останатите членови се нула. Следува,

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)\,dX(t) + d[X,Y](t)$$
$$= X(t)\,dY(t) + Y(t)\,dX(t) + tY(t)\,dt ,$$

од каде што со замена на изразите за X и Y се добива одговорот. ♦

Пример 4. Нека f е двапати непрекинато диференцијабилна функција и $B(t)$ е Брауново движење. Ќе ја најдеме квадратната коваријација за $[f(B), B](t)$. Одговорот ќе го дадеме со помош на формални пресметки. Користејќи ја Итовата формула:

$$df(B(t)) = f'(B(t))\,dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))\,dt ,$$

и претпоставката (договорот):

$$d[f(B), B](t) = df(B(t))\,dB(t) ,$$

имаме:

$$d[f(B), B](t) = df(B(t))\,dB(t) = f'(B(t))(dB(t))^2 + \frac{1}{2}f''(B(t))\,dB(t)\,dt = f'(B(t))\,dt \cdot$$

Овде користевме $(dB)^2 = dt$ и $dBdt = 0$. Следува:

$$[f(B), B](t) = \int_0^t f'(B(s))\, ds .$$

Ако користиме поинтуитивен начин, од дефиницијата за коваријација, барајќи гранична вредност по сите разбивања, при што дијаметарот на разбивањата тежи кон нула, имаме:

$$[f(B), B](t) = \lim \sum_{i=0}^{n-1} (f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n)))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))$$

$$= \lim \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))}{B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2$$

$$\approx \lim \sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 = \int_0^t f'(B(s))\, ds . \blacklozenge$$

Пример 5. Нека $f(t)$ е растечка диференцијабилна функција и нека $X(t) = B(f(t))$. Ќе покажеме дека:

$$[X, X](t) = [B(f), B(f)](t) = [B, B] f(t) = f(t) .$$

Пуштајќи гранична вредност по сите разбивања, при што дијаметарот на разбивањата тежи кон нула, имаме:

$$[X, X](t) = \lim \sum_{i=0}^{n-1} (B(f(t_{i+1}^n)) - B(f(t_i^n)))^2$$

$$= \lim \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)) \left(\frac{B(f(t_{i+1}^n)) - B(f(t_i^n))}{\sqrt{f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)}} \right)^2$$

$$= \lim \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)) Z_i^2 = \lim T_n ,$$

каде што:

$$Z_i \frac{B(f(t_{i+1}^n)) - B(f(t_i^n))}{\sqrt{f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)}}$$

се независни случајни променливи кои имаат нормална распределба, од својствата на Брауновото движење и:

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)) Z_i^2 .$$

Тогаш за секое n, имаме:

$$E(T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)) = f(t) .$$

$$D(T_n) = D\left(\sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n)\right) = 3\sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n))^2 ,$$

што следува од независноста и $D(Z^2) = 3$. Последната сума конвергира кон нула, бидејќи f е со конечна варијација и непрекината, од каде што:

$$E(T_n - f(t))^2 \to 0 .$$

Ова значи дека граничната вредност во L^2 на T_n е $f(t)$, од каде се добива дека граничната вредност по веројатност на T_n е $f(t)$ и:

$$[B(f), B(f)](t) = f(t) . \blacklozenge$$

Ако два процеси X и Y кои поседуваат стохастички диференцијали во однос на $B(t)$ и $f(x,y)$ имаат непрекинати парцијални изводи од прв и од втор ред, тогаш и $f(X(t),Y(t))$ поседува стохастички диференцијал. За да ја најдеме неговата форма, ќе го разгледаме Тејлоровиот развој на $f(x,y)$ до втор ред,

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2}(dy)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dxdy \right).$$

Сега,

$$(dX(t))^2 dX(t)\, dX(t) = d[X,X](t) = \sigma_X^2(X(t))\, dt ,$$

$$(dY(t))^2 = d[Y,Y]_t = \sigma_Y^2(Y(t))\, dt$$

и:

$$dX(t)\, dY(t) = d[X,Y]_t = \sigma_X(X(t))\sigma_Y(Y(t))\, dt ,$$

каде што $\sigma_X(t)$ и $\sigma_Y(t)$ се дифузиони коефициенти на X и Y, соодветно. Ја имаме следнава теорема:

Теорема 2. Нека $f(x,y)$ има непрекинати парцијални изводи од прв и од втор ред и X и Y се Итови процеси. Тогаш,

$$df(X(t),Y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),Y(t))\, dX(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t),Y(t))\, dY(t)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),Y(t))\sigma_X^2(X(t))\,dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X(t),Y(t))\sigma_Y^2(Y(t))\,dt$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(X(t),Y9t))\sigma_X(X(t))\,\sigma_Y(Y(t))\,dt\,.$$

Доказот е сличен како во теоремата 1 од делот за Итовата формула за Брауновото движење, па затоа овде ќе го изоставиме. Овде диференцијалните формули имаат толкување само преку нивните интегрални репрезентации.

Пример 6. Ако $f(x,y)=xy$, тогаш го добиваме диференцијалот на производот, кој ја дава формулата за парцијална интеграција:

$$d(X(t)Y(t))=X(t)\,dY(t)+Y(t)\,dX(t)+\sigma_X(t)\sigma_Y(t)(t)\,dt\,.\ \blacklozenge$$

Многу важен случај на Итовата формула е за функции од облик $f(X(t),t)$.

Теорема 3. Нека $f(x,t)$ е двапати непрекинато диференцијабилна по x, непрекинато диференцијабилна по t и X е Итов процес. Тогаш,

$$df(X(t),t)=\frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)\,dX(t)+\frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t)\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_X^2(X(t),t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t),t)\,dt\,.$$

Оваа теорема може да се добие од претходната теорема, со ставање $Y(t)=t$ и имајќи предвид дека $d[Y,Y]=0$ и $d[X,Y]=0$.

Пример 7. Во овој пример ќе го најдеме диференцијалот на $X(t)=e^{B(t)-\frac{t}{2}}$.

Користејќи ја Итовата формула, за $f(x,t)=e^{x-\frac{t}{2}}$. Процесот $X(t)=f(B(t),t)$, задоволува:

$$dX(t)=df(B(t),t)=\frac{\partial f}{\partial x}dB(t)+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt$$

$$=f(B(t),t)\,dB(t)-\frac{1}{2}f(B(t),t)\,dt+\frac{1}{2}f(B(t),t)\,dt$$

$$=f(B(t),t)\,dB(t)=X(t)\,dB(t)\,.$$

Па, имаме:

$$dX(t)=X(t)\,dB(t)\,.\ \blacklozenge$$

3.8. Итови процеси во повеќе димензии

Нека $\mathbf{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), ..., B_d(t))$ е Брауново движење во $\mathbb{R}^d$, така што координатите $B_i(t)$ се независни еднодимензионални Браунови движења. Нека $\mathcal{F}_t$ е σ-алгебрата генерирана од $\mathbf{B}(s)$, $s \leq t$. Нека $\mathbf{H}(t)$ е регуларен адаптиран процес кој е d-димензионален векторски процес, односно секој од неговите координати е регуларен адаптиран процес. Ако за секој j, $\int_0^T H_j^2(t)\,dt < \infty$, тогаш Итовите интеграли $\int_0^T H_j(t)\,dB_j(t)$ се дефинирани. Еден еквивалентен услов даден во однос на должината на векторот $|\mathbf{H}|^2 = \sum_{i=1}^{d} H_i^2$ е:

$$\int_0^T |\mathbf{H}(t)|^2\,dt < \infty .$$

Многу често ќе користиме скаларен производ,

$$\mathbf{H}(t) \cdot d\mathbf{B}(t) = \sum_{j=1}^{d} H_j(t)\,dB_j(t)$$

и:

$$\int_0^T \mathbf{H}(t) \cdot d\mathbf{B}(t) = \sum_{j=1}^{d} \int_0^T H_j(t)\,dB_j(t) .$$

Ако $b(t)$ е интеграбилна функција, тогаш процесот:

$$dX(t) = b(t)\,dt + \sum_{j=1}^{d} H_j(t)\,dB_j(t)$$

е добро дефиниран. Ова е скаларен Итов процес, кој се добива од d-димензионално Брауново движење. Поопшто, можеме да имаме кои било n процеси добиени од d-димензионално Брауново движење (векторот $\mathbf{H}_i = (\sigma_{i1}, ..., \sigma_{id})$)

$$dX_i(t) = b_i(t)\,dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)\,dB_j(t), \quad i = 1, 2, ..., n ,$$

каде што σ е $n \times d$ матрично вредносна функција, $\mathbf{B}$ е d-димензионално Брауново движење, $\mathbf{X}, \mathbf{b}$ се n-димензионални вектор-вредносни функции, интегралите во однос на Брауновото движење се Итови интеграли. Тогаш $\mathbf{X}$ се нарекува Итов процес. Горниот вектор, се трансформира во:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(t)\,dt + \sigma(t)\,d\mathbf{B}_t .$$

Зависноста на $\mathbf{b}(t)$ и $\sigma(t)$ од времето t, може да биде преку патот на процесот сè до моментот t, патот на $\mathbf{B}_s$, $s \le t$. Единствена рестрикција на овие резултати е:

За сите $i = 1,2,...,n$, $b_i(t)$ е адаптиран и $\int_0^T |b_i(t)|\,dt < \infty$, скоро сигурно.

За сите $i = 1,2,...,n$, $\sigma_{ij}(t)$ е адаптиран и $\int_0^T \sigma_{ij}^2(t)\,dt < \infty$, скоро сигурно, што гарантира постоење на бараните интеграли.

Еден важен случај е кога оваа зависност е од облик $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)$, $\sigma(t) = \sigma(\mathbf{X}(t),t)$. Во овој случај стохастичкиот диференцијал е запишан како:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)\,dt + \sigma(\mathbf{X}(t),t)\,d\mathbf{B}(t) ,$$

па $\mathbf{X}(t)$ е дифузен процес.

За Итовата формула, потребна ни е квадратната варијација на повеќе димензионалните Итови процеси. Лесно се гледа дека квадратната коваријација на две независни Браунови движења е нула.

Теорема 1. Нека $B_1(t)$ и $B_2(t)$ се независни Браунови движења. Тогаш нивниот коваријационен процес постои и е идентично еднаков на нула.

Доказ. Нека (t_i^n) е разбивање на $[0,t]$ и да го разгледаме:

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} (B_1(t_{i+1}^n) - B_1(t_i^n))(B_2(t_{i+1}^n) - B_2(t_i^n)) .$$

Користејќи ја независноста на B_1 и B_2, $E(T_n) = 0$. Бидејќи нараснувањата на Брауновото движење се независни, дисперзијата е сума на дисперзиите, па имаме:

$$D(T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} E\left(B_1(t_{i+1}^n) - B_1(t_i^n)\right)^2 E\left(B_2(t_{i+1}^n) - B_2(t_i^n)\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right)^2 \le \max_i\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right)t .$$

Па,

$$D(T_n) = E(T_n^2) \to 0, \text{ кога } \delta_n = \max_i\left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) \to 0 .$$

Оттука, следува дека $T_n \to 0$, по веројатност, со што е докажано тврдењето на теоремата.

Следува, за $k \neq l$, $k,l = 1,2,...,d$,

$$[B_k, B_l](t) = 0.$$

Користејќи ја последната равенка и билинеарноста на коваријацијата, имаме:

$$d[X_i, X_j](t) = dX_i(t)\, dX_j(t) = a_{ij}\, dt, \quad \text{за} \quad i,j = 1,2,...,n,$$

каде што a се нарекува дифузиона матрица, дадена со:

$$a = \sigma \cdot \sigma^T,$$

каде што σ^T, ја означува транспонираната матрица на σ.

Ако $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t),..., X_n(t))$ е векторски Итов процес и $f(x_1, x_2,..., x_n)$ е двапати непрекинато диференцијабилна функција од n променливи, тогаш: $f(X_1(t), X_2(t),..., X_n(t))$ е, исто така, Итов процес. Уште повеќе, неговиот стохастички диференцијал е даден со:

$$df(X_1(t), X_2(t),..., X_n(t))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_1(t), X_2(t),..., X_n(t))\, dX_i(t)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X_1(t), X_2(t),..., X_n(t))\, d[X_i, X_j](t).$$

Кога имаме само едно Брауново движење, односно $d = 1$, оваа формула е обопштување на Итовата формула за функција со две променливи. ■

Забелешка. Нека $X(t)$ и $Y(t)$ се два Итови процеса кои се адаптирани во однос на независните Браунови движења B_1 и B_2. Да земеме: $f(x,y) = xy$. Јасно е дека само еден од вторите парцијални изводи е различен од нула, $\frac{\partial^2 xy}{\partial x \partial y}$, но тогаш членот со кој множиме е нула, па $d[B_1, B_2](t) = 0$. Па коваријацијата на $X(t)$ и $Y(t)$ е нула и имаме:

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)\, dY(t) + Y(t)\, dX(t),$$

што е вообичаената формула за парцијална интеграција.

Во некои примени корелираното Брауново движење е користено. Овој тип на Брауново движење е добиен со линеарна трансформација од независни Браунови движења. Ако B_1 и $B_2 W$ се независни, тогаш парот процеси B_1 и

$W = \rho B_1 + \sqrt{1-\rho^2}\, B_2$ се корелирани Браунови движења. Лесно се гледа дека W е Брауново движење и $d[B_1, W](t) = \rho\, dt$.

Итовата формула може да се генерализира на функции кои не се толку глатки како двапати непрекинато диференцијабилните функции. Еден таков пример е $f(x) = |x|$. Итовата формула за $f(x) = |x|$, станува формула на Танака и води кон концептот на локално време.

4. Стохастички диференцијални равенки

Диференцијалните равенки се користат за да се опише една еволуција на некој динамички систем. Стохастичките диференцијални равенки се користат кога случаен шум се појавува во обичните диференцијални равенки. Во оваа глава ние ќе разгледаме два концепта на решенија на стохастички диференцијални равенки: силни и слаби решенија.

4.1.Општи дефиниции

Ако $x(t)$ е диференцијабилна функција дефинирана за $t \geq 0$, $\mu(x,t)$ е функција од x и t и следната релација е исполнета за сите t, $0 \leq t \leq T$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = \mu(x(t), x), \qquad\qquad x(0) = x_0,$$

тогаш, $x(t)$ е решение на обичната диференцијална равенка со почетен услов x_0. Обично се додава барањето $x'(t)$ да биде непрекинато. Горната равенка може да се запише во облик:

$$dx(t) = \mu(x(t),t)\,dt$$

и (од непрекинатоста на $x'(t)$)

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \mu(x(s),s)\,ds.$$

Пред да дадеме строга дефиниција на стохастичките диференцијални равенки, ќе покажеме како тие се појавуваат од случајни пертурбирани обични диференцијални равенки и ќе дадеме нивна физичка интерпретација.

Процесот бел шум $\xi(t)$ е формално дефиниран како извод на Брауновото движење,

$$\xi(t) = \frac{dB(t)}{dt} = B'(t).$$

Да напоменеме дека во обична смисла не постои функција по t, бидејќи Брауновото движење не е никаде диференцијабилно.

Ако $\sigma(x,t)$ е интензитетот на шумот во точка x во момент t, тогаш прифаќаме дека:

$$\int_0^T \sigma(X(t),t)\xi(t)\,dt = \int_0^T \sigma(X(t),t)B'(t)\,dt = \int_0^T \sigma(X(t),t)\,dB(t),$$

каде што интегралот е Итов интеграл.

Стохастичките диференцијални равенки се појавуваат, на пример, кога коефициентите на обични диференцијални равенки се пертурбирани со бел шум.

Пример 1. (Black-Scholes-Merton модел) Овој модел е за раст со несигурна стапка на враќање. $x(t)$ е вредноста на едно евро по време t, инвестирано во штедење. Од дефиницијата на сложена камата, ја имаме обичната диференцијална равенка:

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = r\,dt \quad \text{или} \quad \frac{dx(t)}{dt} = rx(t),$$

каде што r е каматата. Ако каматата е несигурна (обично е така, каматата е фиксна одреден период, а потоа променлива), тогаш таа е земена да биде пертурбирана со шум, $r+\xi(t)$, па ја добиваме следнава стохастичка диференцијална равенка:

$$\frac{dX(t)}{dt} = (r+\sigma\xi(t))\,X(t),$$

со значење:

$$dX(t) = rX(t)\,dt + \sigma\,X(t)\,dB(t).$$

Случајот $\sigma = 0$ одговара кога нема шум и добиваме детерминистичка равенка. Решението на детерминистичката равенка се добива лесно со раздвојување на променливите, па $x(t) = e^{rt}$. Решението на горната стохастичка диференцијална равенка е дадена со геометриското Брауново движење, што може да се види од Итовата формула:

$$X(t) = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B(t)}. \ \blacklozenge$$

Пример 2. (Раст на популација) Ако $x(t)$ ја означува густината на популацијата, тогаш растот на популацијата може да се опише со обичната диференцијална равенка:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)(1-x(t)).$$

Растот е експоненцијален со стапка на раѓање a, кога густината е мала и се намалува кога густината се зголемува. Случајни пертурбации на стапката на раст резултираат со равенката:

$$\frac{dX(t)}{dt} = (a + \sigma\xi(t))X(t)(1 - X(t))$$

или стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = aX(t)(1 - X(t)dt + \sigma X(t)(1 - X(t))dB(t).♦$$

Физичкиот феномен кој е опишан со математичкиот модел на дифузија (и Брауново движење) е микроскопско движење на честичка потопена со флуид. Молекулите на флуидот се движат со различни брзини и се судираат со честичката од секој можен правец, со што имаме константно бомбардирање. Како резултат на ова бомбардирање, честичката се движи непостојано (со различни брзини и во различни правци). Ова движење се интензивира со зголемување на температурата на флуидот. Да го означиме со $X(t)$ поместувањето на честичката во еден правец од нејзината почетна позиција во момент t. Ако $\sigma(x,t)$ го мери ефектот на температурата во точката x во моментот t, тогаш поместувањето како резултат на бомбардирањето за време на временскиот интервал $[t, t+\Delta]$ е моделирано како $\sigma(x,t)(B(t+\Delta) - B(t))$. Ако брзината на флуидот во точката x во момент t е $\mu(x,t)$, тогаш поместувањето на честичката како резултат на движењето на флуидот за време на истиот временски интервал $[t, t+\Delta]$ е $\mu(x,t)\Delta$. Следува тоталното поместување од неговата позиција x, во момент t е дадено со:

$$X(t+\Delta) - x \approx \mu(x,t)\Delta + \sigma(x,t)\big(B(t+\Delta) - B(t)\big). \qquad (*)$$

Од оваа равенка, математичкото очекување на поместувањето од x за време на краток временски интервал со должина Δ е дадено со:

$$E\big((X(t+\Delta) - X(t)) \mid X(t) = x\big) \approx \mu(x,t) \cdot \Delta,$$

а вториот момент на поместувањето од x за време на краток временски интервал со должина Δ е даден со:

$$E\Big((X(t+\Delta) - X(t))^2 \mid X(t) = x\Big) \approx \sigma^2(x,t) \cdot \Delta.$$

Горните релации покажуваат дека за мали временски интервали и математичкото очекување и вториот момент (и дисперзијата) на поместувањето на дифузна честичка во момент t во точка x се пропорционални со должината на интервалот, со коефициенти $\mu(x,t)$ и $\sigma^2(x,t)$, соодветно.

Може да се покаже дека, земајќи ги горните релации како асимптотски релации кога $\Delta \to 0$, односно заменувајќи го знакот $\approx$ со еднаквост и додавајќи ги членовите $o(\Delta)$ на десните страни, горните релации со направените измени карактеризираат дифузиони процеси.

Претпоставувајќи дека $\mu(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ се глатки функции, равенката (*), исто така, покажува дека за мали временски интервали Δ, дифузиите се Гаусови процеси . Нека $X(t)=x$, $X(t+\Delta)-X(t)$ има приближно нормална распределба $N(\mu(x,t)\Delta,\sigma^2(x,t)\Delta)$. Јасно, за големи временски интервали дифузиите не се Гаусови, освен ако коефициентите се неслучајни.

Стохастичката диференцијална равенка е добиена хеуристички од релацијата (*) со замена на Δ на dt, на $\Delta B = B(t+\Delta)-B(t)$ со $dB(t)$ и на $X(t+\Delta)-X(t)$ со $dX(t)$.

Дефиниција 1. Нека $B(t)$, $t \geq 0$ е Брауново движење процес. Равенка од облик:

$$dX(t)=\mu(X(t),t)\,dt+\sigma(X(t),t)\,dB(t), \qquad (**)$$

каде што функциите $\mu(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ се дадени и $X(t)$ е непознат процес се нарекува стохастичка диференцијална равенка дадена (управувана) преку Брауновото движење.

Функциите $\mu(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ се нарекуваат коефициенти на стохастичката диференцијална равенка.

Дефиниција 2. Процесот $X(t)$ се нарекува силно решение на стохастичката диференцијална равенката (**) ако за сите $t>0$ интегралите $\int_0^t \mu(X(s),s)\,ds$ и $\int_0^t \sigma(X(s),s)\,dB(s)$ постојат, при што вториот интеграл е Итов интеграл и важи:

$$X(t)=X(0)+\int_0^t \mu(X(s),s)\,ds+\int_0^t \sigma(X(s),s)\,dB(s).$$

Забелешка. Силно решение е некоја функција (функционал) $F(t,(B(s),s\leq t))$ од даденото Брауново движење $B(t)$. Кога $\sigma=0$, стохастичката диференцијална равенка станува обична диференцијална равенка. Друга интерпретација на (**), која се нарекува слабо решение, е дистрибуционо решение.

Равенките од облик (**) се нарекуваат дифузиони стохастички диференцијални равенки. Поопштите стохастички диференцијални равенки го имаат обликот:

$$dX(t)=\mu(t)\,dt+\sigma(t)\,dB(t), \text{ каде што:}$$

$\mu(t)$ и $\sigma(t)$ можат да зависат од t и целото минато на процесите $X(t)$ и $B(t)$ $(X(s), B(s),\ s \le t)$, односно $\mu(t) = \mu((X(s), s \le t), t)$, $\sigma(t) = \sigma((X(s), s \le t), t)$. Единствената рестрикција на $\mu(t)$ и $\sigma(t)$ е тоа дека тие мора да бидат адаптирани процеси, при што соодветните интеграли се дефинирани. Иако многу резултати (како постоењето и единственоста на решенијата) може да се формулираат и за општи стохастички диференцијални равенки, ние овде ќе се сконцентрираме на дифузионите стохастички диференцијални равенки.

Пример 3. Веќе видовме дека $X(t) = e^{B(t) - \frac{t}{2}}$ е решение на стохастичката експоненцијална диференцијална равенка:

$$dX(t) = X(t)\,dB(t), \quad X(0) = 1. \ \blacklozenge$$

Пример 4. Нека го разгледаме процесот $X(t)$, за кој важи $dX(t) = a(t)\,dB(t)$, каде што $a(t)$ е неслучајна функција. Јасно,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)\,dB(s).$$

Ова може да го претставиме како функција од Брауновото движење со парцијална интеграција,

$$X(t) = X(0) + a(t)B(t) - \int_0^t B(s)\,a'(s)\,ds,$$

при што е претпоставено дека $a(t)$ е диференцијабилна. Во овој случај, функцијата:

$$F(t, (x(s), s \le t)) = X(0) + a(t)x(t) - \int_0^t x(s)\,a'(s)\,ds. \ \blacklozenge$$

Наредните два примера покажуваат како може да се најде силно решение со помош на Итовата формула и парцијалната интеграција.

Пример 5. Да ја разгледаме стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t), \quad X(0) = 1.$$

Земаме $f(x) = \ln x$. Тогаш, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ и $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Имаме:

$$d(\ln X(t)) = \frac{1}{X(t)}\,dX(t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X^2(t)}\right)\sigma^2 X^2(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{X(t)}\left(\mu X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t)\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\,dt$$

$$= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\,dt + \sigma\,dB(t)\,.$$

Па, за $Y(t) = \ln X(t)$ важи:

$$dY(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\,dt + \sigma\,dB(t)\,.$$

Од Итовата интегрална репрезентација имаме:

$$Y(t) = Y(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)$$

и:

$$X(t) = X(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}\,. \blacklozenge$$

Пример 6. [Лангевин (Langevin) равенка и Орнштајн-Уленбек (Ornstein-Uhlenbeck) процес]

Да ја разгледаме стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = -\alpha X(t)\,dt + \sigma\,dB(t)\,, \qquad (***)$$

каде што α и σ се некои ненегативни константи.

Да забележиме дека во случај кога $\sigma = 0$, решението на обичната диференцијална равенка е $x_0 e^{-\alpha t}$ или со други зборови $x(t)e^{\alpha t}$ е константа. За да ја решиме стохастичката диференцијална равенка, да го разгледаме процесот $Y(t) = X(t)e^{\alpha t}$. Користејќи го правилото за диференцијал на производ и имајќи предвид дека коваријацијата на $e^{\alpha t}$ со $X(t)$ е нула, бидејќи е диференцијабилна функција $(d(e^{\alpha t})\,dX(t) = \alpha e^{\alpha t}\,dt\,dX(t) = 0)$, имаме:

$$dY(t) = e^{\alpha t}\,dX(t) + \alpha e^{\alpha t}\,X(t)\,dt\,.$$

Користејќи ја стохастичката диференцијална равенка за $dX(t)$, добиваме:

$$dY(t) = \sigma e^{\alpha t}\,dB(t)\,.$$

Оттука,

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}\,dB(s)\,.$$

Сега, решението за $X(t)$ е:

$$X(t) = e^{-\alpha t}(X(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}\, dB(s)).$$

Процесот $X(t)$ даден со равенката (***) е познат како Орнштајн-Уленбек процес.

Исто така, може да се најде функционална зависност на решението од патот на Брауновото движење. Со парцијална интеграција, можеме да најдеме функција од каде што се добива силното решение:

$$X(t) = F(t, (B(s), 0 \le s \le t)) = e^{-\alpha t}X(0) + \sigma B(t) - \sigma\alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}B(s)\, ds.$$

Многу поопшта стохастичка диференцијална равенка од претходната равенка е:

$$dX(t) = (\beta - \alpha X(t))\, dt + \sigma\, dB(t),$$

со решение:

$$X(t) = \frac{\beta}{\alpha} + e^{-\alpha t}\left(X(0) - \frac{\beta}{\alpha} + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}\, dB(s)\right). \blacklozenge$$

Користејќи ја Итовата формула, многу лесно може да се утврди дека ова е решение на разгледуваната стохастичка диференцијална равенка.

Пример 7. Да ја разгледаме стохастичката диференцијална равенка

$$dX(t) = B(t)\, dB(t).$$

Јасно,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t B(s)\, dB(s)$$

и користејќи парцијална интеграција (или Итовата формула), добиваме:

$$X(t) = X(0) + \frac{1}{2}(B^2(t) - t). \blacklozenge$$

Забелешка. Ако постои силно решение, тогаш од дефиницијата тоа е адаптирано на филтрацијата на дадено Брауново движење и интуитивно е јасно дека тоа е функција од патот $(B(s), s \le t)$. Резултатите на Јамада (Yamada) и Ватанабе (Watanabe) и Каленберг (Kallenberg) ни даваат дека условите за постоење и единственост на теоремата се исполнети, тогаш постои функција F, така што силното решение е дадено со $X(t) = F(t, (B(s), s \le t))$. Не се знае многу за F генерално. Многу често, не е лесно да се најде оваа функција, дури и за Итовите интеграли $X(t)=\int_0^t f(B(s))\,dB(s)$ или $X(t)=\int_0^t |B(s)|^{\frac{1}{2}}\,dB(s)$.

Само некои класи на стохастички диференцијални равенки имаат решение во затворена форма. Кога решението е во затворена форма е тешко да се најде, резултатите за постоењето и единственоста се важни, бидејќи без нив, не е јасно што, всушност, равенката значи. Кога решението постои и е единствено, тогаш нумеричките методи можат да се искористат за да се најде тоа решение. Слично како и кај обичните диференцијални равенки, линеарните стохастички диференцијални равенки можат да се решат експлицитно (со квадратури).

4.2. Стохастички експоненцијали и логаритми

Нека X има стохастички диференцијал и U задоволува:

$$dU(t)=U(t)\,dX(t),\ U(0)=1 \tag{*}$$

или:

$$U(t)=1+\int_0^t U(s)\,dX(s).$$

Тогаш U се нарекува стохастички експоненцијал на X и се означува со $E(X)$. Ако $X(t)$ е со конечна варијација тогаш решението на (*) е дадено со $U(t)=e^{X(t)}$.

За Итовите процеси, решението е дадено со следнава теорема.

Теорема 1. Единственото решение на (*) е дадено со:

$$U(t)=E(X)(t)=e^{X(t)-X(0)-\frac{1}{2}[X,X](t)}. \tag{**}$$

Доказ. Доказот за постоење на решение на (*) се состои од верификација, со користење на Итовата формула, на (**). Нека ставиме $U(t)=e^{V(t)}$, каде што:

$$V(t)=X(t)-X(0)-\frac{1}{2}[X,X](t).$$

Тогаш,

$$dE(X)(t)=dU(t)=d(e^{V(t)})=e^{V(t)}dV(t)+\frac{1}{2}e^{V(t)}d[V,V](t).$$

Бидејќи $[X,X](t)$ има конечна варијација и $X(t)$ е непрекинат, $[X,[X,X]](t)=0$ и

$[V,V](t)=[X,X](t)$. Користејќи го ова за равенката за $V(t)$, добиваме:

$$dE(X)(t)=e^{V(t)}dX(t)-\frac{1}{2}e^{V(t)}d[X,X](t)+\frac{1}{2}e^{V(t)}d[X,X](t)=e^{V(t)}\,dX(t)$$

и (*) важи. Доказот за единственоста е со претпоставка дека постои друг процес кој ја задоволува равенката (*), на пример $U_1(t)$, и со парцијална интеграција добиваме дека: $d\left(\dfrac{U_1(t)}{U(t)}\right)=0$. ■

Да забележиме дека за разлика од случајот на вообичаениот експонецијал $g(t)=\exp(f)(t)=e^{f(t)}$, стохсатичкиот експонецијал $E(X)$ бара знаење на сите вредности на процесот до момент t, бидејќи го вклучува членот со квадратна варијација $[X,X](t)$.

Пример 1. Стохастичкиот експоненцијал на Брауновото движење $B(t)$ е даден со $U(t)=E(B)(t)=e^{B(t)-\frac{1}{2}t}$ и важи за сите t,

$$dU(t)=U(t)\,dB(t),\quad U(0)=1. \ ♦$$

Пример 2. (Примена во финансии, берза процес и процес на нејзино враќање) Нека $S(t)$ја означува сумата на берзата и да претпоставиме дека тоа е Итов процес, односно има стохастички диференцијал. Процесот на враќање на берзата $R(t)$ е дефиниран со релацијата:

$$dR(t)=\frac{dS(t)}{S(t)}.$$

Со други зборови,

$$dS(t)=S(t)\,dR(t)$$

и сумата на берзата е стохастички експоненцијал на враќањето. Враќањата се обично полесни да се моделираат. На пример, во Black-Scholes-моделот е претпоставено дека враќањата, на временски интервали кои не се преклопуваат, се независни и имаат конечна варијација. Претпоставката води кон моделот на процес на враќање:

$$R(t)=\mu t+\sigma B(t).$$

Сумата на берзата е дадена со:

$$S(t)=S(0)E(R)_t=S_0e^{R(t)-R(0)-\frac{1}{2}[R,R](t)}$$

$$= S(0)e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B(t)}. \blacklozenge$$

Во продолжение ќе дадеме простор на стохастички логаритам. Ако $U = E(X)$, тогаш процесот X се нарекува стохастички логаритам од U, и ќе го означуваме со $L(U)$. Ова е инверзна операција на стохастичкиот експоненцијал. На пример, стохастичкиот експоненцијал на Брауновото движење $B(t)$ е даден со $e^{B(t)-\frac{1}{2}t}$. Па, $B(t)$ е стохастички логаритам на $e^{B(t)-\frac{1}{2}t}$.

Теорема 2. Нека U има стохастички диференцијал и нека не ја прима вредноста 0. Тогаш стохастичкиот логаритам од U ја задоволува стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \frac{dU(t)}{U(t)}, \qquad X(0) = 0.$$

Уште повеќе,

$$X(t) = L(U)(t) = \ln\left(\frac{U(t)}{U(0)}\right) + \int_0^t \frac{d[U,U](t)}{2U^2(t)}. \qquad \text{(o)}$$

Доказ. Стохастичката диференцијална равенка за стохастичкиот логаритам $L(U)$ е по дефиниција $E(X)$. Решението дадено во теоремата и единственоста е добиена од Итовата формула. ■

Пример 3. Нека $U(t) = e^{B(t)}$. Ќе го најдеме стохастичкиот логаритам $L(U)$ директно, а потоа ќе видиме дека важи (о). Имаме:

$$dU(t) = e^{B(t)}\, dB(t) + \frac{1}{2}e^{B(t)}\, dt.$$

Следува,

$$dX(t) = dL(U)(t) = \frac{dU(t)}{U(t)} = dB(t) + \frac{1}{2}dt.$$

Оттука,

$$X(t) = L(U)(t) = B(t) + \frac{1}{2}t.$$

Сега,

$$d[U,U](t) = dU(t)\,dU(t) = e^{2B(t)}\, dt,$$

така што важи:

$$L(U)(t)=\ln U(t)+\int_0^t \frac{e^{2B(t)}\,dt}{2e^{2B(t)}}=B(t)+\int_0^t \frac{1}{2}dt=B(t)+\frac{1}{2}t,$$

од каде што го добиваме (о). ♦

Да забележиме дека стохастичкиот логаритам е многу корисен во апликациите во финансии.

4.3. Линеарни стохастички диференцијални равенки

Линеарните стохастички диференцијални равенки формираат класа од стохастичките диференцијални равенки кои можат да се решат експлицитно (со квадратури). Да разгледаме општа линеарна стохастичка диференцијална равенка во една димензија:

$$dX(t)=(\alpha(t)+\beta(t)X(t))\,dt+(\gamma(t)+\delta(t)X(t))\,dB(t), \qquad (*)$$

каде што функциите $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ се дадени адаптирани процеси и се непрекинати функции по t. Примерите разгледувани во претходниот наслов се примери на линеарни стохастички диференцијални равенки.

Ќе побараме решенија во случајот кога $\alpha(t)=0$ и $\gamma(t)=0$. Тогаш стохастичката диференцијална равенка го добива обликот:

$$dU(t)=\beta(t)U(t)\,dt+\delta(t)U(t)\,dB(t). \qquad (**)$$

Оваа стохастичка диференцијална равенка има облик:

$$dU(t)=U(t)\,dY(t),$$

каде што Итовиот процес $Y(t)$ е дефиниран со:

$$dY(t)=\beta(t)\,dt+\delta(t)\,dB(t).$$

Стохастичката диференцијална равенка (**) е стохастички експоненцијал на Y. Стохастичкиот експоненцијал на Y е даден со:

$$\begin{aligned}U(t)&=E(Y)(t)\\&=U(0)\exp\left(Y(t)-Y(0)-\frac{1}{2}[Y,Y](t)\right)\\&=U(0)\exp\left(\int_0^t\beta(s)\,ds+\int_0^t\delta(s)\,dB(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\delta^2(s)\,ds\right)\\&=U(0)\exp\left(\int_0^t(\beta(s)-\frac{1}{2}\delta^2(s))\,ds+\int_0^t\delta(s)\,dB(s)\right),\qquad (***)\end{aligned}$$

каде што $[Y,Y](t)$ е добиено од пресметките:

$$d[Y,Y](t) = dY(t)\,dY(t) = \delta^2(t)\,dt\,.$$

За да го најдеме решението на (*) во општа ситуација, ќе побараме решение кое има облик:

$$X(t) = U(t)V(t)\,,$$

каде што:

$$dU(t) = \beta(t)U(t)\,dt + \delta(t)U(t)\,dB(t)$$

и:

$$dV(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dB(t)\,.$$

Ставаме: $U(0)=1$ и $V(0) = X(0)$. Да забележиме дека U е дефинирано со (***). Земајќи диференцијал од производот, лесно се забележува дека можеме да избереме коефициенти $a(t)$ и $b(t)$, така што важи:

$$X(t) = U(t)V(t)\,.$$

Бараните коефициенти $a(t)$ и $b(t)$ ги задоволуваат равенките:

$$b(t)U(t) = \gamma(t)$$

и:

$$a(t)U(t) = \alpha(t) - \delta(t)\gamma(t)\,.$$

Користејќи го изразот за $U(t)$, може да се определат коефициентите $a(t)$ и $b(t)$. Следува дека $V(t)$ може да се добие, па $X(t)$ е:

$$X(t) = U(t)\left(X(0) + \int_0^t \frac{\alpha(s) - \delta(s)\gamma(s)}{U(s)}\,ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{U(s)}\,dB(s) \right). \quad \text{(o)}$$

Нека $X(t)$ задоволува:

$$dX(t) = a(t)X(t)\,dt + dB(t)\,,$$

каде што $a(t)$ е даден адаптиран и непрекинат процес. Кога $a(t) = -\alpha$, равенката е позната како Лангевинова (Langevin) равенка.

Ја решаваме стохастичката диференцијална равенка на два начина: со користење на формулата (o) и директно слично на Лангевиновата стохастичка диференцијална равенка.

Јасно, $\beta(t) = a(t), \gamma(t) = 1$ и $\alpha(t) = \delta(t) = 0$. За да го најдеме $U(t)$, мораме да ја решиме равенката $dU(t) = a(t)U(t)\,dt$. Добиваме дека:

$$U(t) = e^{\int_0^t a(s)\,ds}\,.$$

Од (o), добиваме:

$$X(t) = e^{\int_0^t a(s)\,ds}\left(X(0) + \int_0^t e^{-\int_0^u a(s)\,ds}\,dB(u)\right).$$

Да го разгледаме процесот $e^{-\int_0^t a(s)\,ds} X(t)$ и искористиме парцијална интеграција. Процесот $e^{-\int_0^t a(s)\,ds}$ е непрекинат и има конечна варијација. Следува, има коваријација нула со $X(t)$, па:

$$d\left(e^{-\int_0^t a(s)\,ds} X(t)\right) = e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dX(t) - a(t) e^{-\int_0^t a(s)\,ds} X(t)\,dt$$

$$= e^{-\int_0^t a(s)\,ds} dB(t).$$

Со интегрирање, добиваме:

$$e^{-\int_0^t a(s)\,ds} X(t) = X(0) + \int_0^t e^{-\int_0^u a(s)\,ds}\,dB(u)$$

и конечно:

$$X(t) = X(0) e^{\int_0^t a(s)\,ds} + e^{\int_0^t a(s)\,ds} \int_0^t e^{-\int_0^u a(s)\,ds}\,dB(u).$$

Брауновиот мост или закачено Брауново движење е решение на следнава стохастичка диференцијална равенка:

$$dX(t) = \frac{b - X(t)}{T - t} dt + dB(t), \quad 0 \le t < T, \quad X(0) = a.$$

Процесот е трансформирано Брауново движење со фиксни вредности на секој од интервалите $[0, T]$, $X(0) = a$ и $X(T) = b$. Горната стохастичка диференцијална равенка е линеарна стохастичка диференцијална равенка, со:

$$\alpha(t) = -\frac{1}{T - t}, \ \beta(t) = \frac{b}{T - t}, \ \gamma(t) = 1 \text{ и } \delta(t) = 0.$$

Идентификувајќи ги $U(t)$ и $V(t)$ во (о), добиваме:

$$X(t) = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T - t)\int_0^t \frac{1}{T - s} dB(s), \quad \text{за } 0 \le t < T.$$

Бидејќи функцијата под Итовиот интеграл е детерминистичка и за кое било $t < T$, $\int_0^t \frac{ds}{(T-s)^2} < \infty$, процесот $\int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s)$ е мартингал и Гаусов. Следува $X(t)$ на $[0,T)$ е Гаусов процес со почетна вредност $X(0) = a$. Вредноста во T, на процесот, е определена од непрекинатоста.

Следува дека Брауновиот мост е непрекинат Гаусов процес на $[0,T]$ со математичко очекување:

$$a\left(1-\frac{t}{T}\right)+\frac{bt}{T}$$

и функција на коваријација:

$$\operatorname{cov}(X(t), X(s)) = \min(s,t) - \frac{st}{T}.$$

Пример 1. Ќе покажеме дека: $\lim_{t\to T^+}(T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s) = 0$, скоро сигурно.

Користејќи парцијална интеграција (која е иста како и стандардната формула, бидејќи коваријацијата е нула помеѓу детерминистичкиот член и Брауновото движење), за кој било $t < T$, важи:

$$\int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s) = \frac{B(t)}{T-t} - \int_0^t \frac{B(s)}{(T-s)^2} ds$$

и:

$$(T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s) = B(t) - (T-s)\int_0^t \frac{B(s)}{(T-s)^2} ds.$$

Со ставање на смена $u = \frac{1}{t-s}$ или со разгледување на интегралите $\int_0^{T-\delta}$ и $\int_{T-\delta}^t$ можеме да видиме дека за секоја непрекината функција $g(s)$,

$$\lim_{t\to T^+}(T-t)\int_0^t \frac{g(s)}{(T-s)^2} ds = g(T).$$

Со ставање на $g(s) = B(s)$, добиваме дека:

$$\lim_{t\to T^+}(T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s} dB(s) = 0. \ \blacklozenge$$

4.4. Постоење и единственост на силни решенија

Нека за $X(t)$ важи:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)\,dt + \sigma(X(t),t)\,dB(t)\,. \qquad (*)$$

Теорема 1. (Постоење и единственост) Нека следниве услови се задоволени:

1) Коефициентите се локално Липшиц по x рамномерно по t, односно за секои T и N, постои константа K која зависи само од T и N, така што за сите $|x|,|y| \le N$ и сите $0 \le t \le T$, важи:

$$|\mu(x,t) - \mu(y,t)| + |\sigma(x,t) - \sigma(y,t)| < K|x - y|\,.$$

2) Коефициентите имаат линеарен раст, односно:

$$|\mu(x,t)| + |\sigma(x,t)| \le K(1 + |x|)\,.$$

3) $X(0)$ е независно од $(B(t),\ 0 \le t \le T)$ и $EX^2(0) < \infty$.

Тогаш постои единствено силно решение $X(t)$ на стохастичката диференцијална равенка (*). Решението $X(t)$ има непрекинати патишта, и важи:

$$E\left(\sup_{0 \le t \le T} X^2(t)\right) < C(1 + E(X^2(0)))\,,$$

каде што константата C зависи од K и T.

Доказот за постоењето на теоремата е даден преку сукцесивни (последователни апроксимации), слично како за обичните диференцијални равенки (итерации на Пикард). Условот на Липшиц важи и ако, на пример, парцијалните изводи $\frac{\partial \mu}{\partial x}(t,x)$ и $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(t,x)$ се ограничени за $|x|,|y| \le N$ и за сите $0 \le t \le T$, што е точно ако изводите се непрекинати.

Следниот резултат е специфичен за еднодимензионални стохастички диференцијални равенки. Овој резултат е даден во случајот кога коефициентите не зависат од времето.

Теорема 2. (Yamada-Watanabe) Да претпоставиме дека $\mu(x)$ го задоволува условот на Липшиц и $\sigma(x)$ го задоволува условот на Холдер од ред α, $\alpha \ge \frac{1}{2}$, односно постои константа K, така што:

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| < K|x - y|^{\alpha}\,.$$

Тогаш постои силно решение и тоа решение е единствено.

Пример 1. (Гирсанова стохастичка диференцијална равенка)

$$dX(t) = |X(t)|^r \, dB(t), \qquad X(0) = 0, \qquad \frac{1}{2} \le r < 1.$$

Да забележиме дека за такво r, $|x|^r$ го задоволува Холдеровиот, но не Липшицовиот услов. $X(t) \equiv 0$ е силно решение. Бидејќи условите на горната теорема се задоволени, $X(t) \equiv 0$ е единствено решение.

4.5. Марково својство на решенијата

Марковото својство тврди дека при дадена моментална состојба на процесот, иднината на процесот е независна од минатото. Ова може да се каже и на следниов начин: Ако $\mathcal{F}_t$ ја означува σ-алгебрата генерирана од процесот сѐ до момент t, тогаш за кое било $0 \le s < t$,

$$p(X(t) \le y \mid \mathcal{F}_t) = p(X(t) \le y \mid X(s)), \text{ скоро сигурно.}$$

Интуитивно е јасно дека решенијата на стохастичката диференцијална равенка треба да го задоволуваат Марковото својство. За мало Δ, и дадени $X(t) = x$, $X(t+\Delta)$ и зависи од $B(t+\Delta) - B(t)$, што е независен од минатото.

Нема да докажуваме дека силните решенија поседуваат Марково својство. Од конструкцијата на решението на каноничен простор (слабо решение) може да се види дека Марковото својство важи.

Марковите процеси се карактеризирани со транзитивните веројатносни функции. Означуваме со:

$$p(y,t,x,s) = p(X(t) \le y \mid X(s) = x) \qquad (*)$$

е функција на условна распределба на случајната променлива $X(t)$, при услов $X(s) = x$, односно распределбата на вредностите во момент t, знаејќи дека процесот бил во состојба x во момент s.

Теорема 1. Нека $X(t)$ е решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)\,dt + \sigma(X(t),t)\,dB(t).$$

Тогаш $X(t)$ го има Марковото својство.

Користејќи го законот за тотална веројатност, со услов на сите можни вредности z на процесот во момент u, за $s < u < t$, добиваме дека функцијата на транзитивна веројатност $p(y,t,x,s)$ во (*) ја задоволува Чапман-Колмогоровата равенка:

$$p(y,t,x,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y,t,z,u)\, p(dz,u,x,s) \text{, за кое било } s < u < t .$$

Всушност, секоја функција која ја задоволува оваа равенка е и функција на распределба по y за фиксни вредности по другите променливи, е функција на транзитивни веројатности за некои Маркови процеси.

Пример 1. Ако $p(y,t,x,s) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{\frac{(u-x)^2}{2(t-s)}}\, du$ е функција на кумулативна дистрибуција на нормалната распределба $N(x,t-s)$, тогаш соодветниот дифузионен процес е Брауново движење. Навистина, $p(B(t) \le y \mid \mathcal{F}_t) = p(B(t) \le y \mid B(s))$ и функцијата на условна распределба на $B(t)$, при услов $B(s) = x$ е $N(x,t-s)$. ♦

Пример 2. Нека $X(t)$ е решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t)$$

за некои константи μ и σ. Од претходно знаеме дека:

$$X(t) = X(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)} .$$

Следува,

$$X(t) = X(s)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(B(t)-B(s))}$$

и нејзината транзитивна функција на веројатност е:

$$p(X(t) \le y \mid X(s) = x) = p(X(s)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(B(t)-B(s))} \le y \mid X(s) = x)$$

$$= p(xe^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(B(t)-B(s))} \le y \mid X(s) = x) .$$

Користејќи ја независноста на $B(t) - B(s)$ и $X(s)$, условната веројатност е дадена со:

$$p(xe^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(B(t)-B(s))} \le y)$$

$$= p(e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma(B(t)-B(s))} \le \frac{y}{x}) .$$

Следува,

$$p(y,t,x,s)=\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}}\right).\ \blacklozenge$$

Забелешка. Ќе воведеме корисна репрезентација, која бара да знаеме кога и каде процесот започнал. Да ја означиме $X_s^x(t)$ вредноста на процесот во момент t, кога тој почнува во момент s, од точка x. Јасно е дека за $0\le s<t$, $X_0^x(t)=X_s^{X_0^x(s)}(t)$. Марковото својство тврди дека при услов $X_s^{x_0}(t)=x$, процесите $X_s^{x_0}(u)$, $s\le u\le t$ и $X_t^x(u)$, $t\le u$ се независни.

Дефиниција 1. За еден процес велиме дека го има силното Марково својство ако важи:

$$p(X(t)\le y\mid \mathcal{F}_t)=p(X(t)\le y\mid X(s)),\ \text{скоро сигурно}$$

кога неслучајното време s е заменето со конечно време на стопирање τ.

Решенијата на стохастичките диференцијални равенки го поседуваат силното Марково својство, што значи дека овие решенија се откажуваат од историјата на процесот (решението) сѐ до времето на стопирање τ, односот на процесот во некое идно време t, е независен од минатото.

Ако една стохастичка диференцијална равенка има силно решение $X(t)$, тогаш $X(t)$ има функција на транзитивна веројатност $p(y,t,x,s)$. Оваа функција може да се најде како решение на нанапред и наназад парцијалните диференцијални равенки.

Функцијата на транзитивна веројатност $p(y,t,x,s)$ може да постои за стохастичка диференцијална равенка без постоење на силно решение. Оваа функција го определува Марковото својство на единствен начин (за сите конечнодимензионални распределби). Овој процес е познат како слабо решение на стохастичката диференцијална равенка. На овој начин ќе можеме да дефинираме решенија на стохастички диференцијални равенки под помалку строги услови на нејзините коефициенти.

4.6. Слаби решенија

Концептот на слаби решенија ни овозможува да дадеме значење на некои стохастички диференцијални равенки кои немаат силни решенија. Слабите решенија се решенија по дистрибуција и тие можат да бидат дефинирани на некои други простори на веројатност и постојат под помалку силни услови на коефициентите на стохастичката диференцијална равенка.

Дефиниција 1. Ако постои простор на веројатност со филтрација, Брауново движење $B(t)$ и процес $X(t)$ адаптиран на таа филтрација, така што: $X(0)$ има дадена распределба, за сите t интегралите подолу се дефинирани и $X(t)$ задоволува:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(u),u)\,du + \int_0^t \sigma(X(u),u)\,dB(u),$$

тогаш за $X(t)$ велиме дека е слабо решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)\,dt + \sigma(X(t),t)\,dB(t).$$

Дефиниција 2. За слабо решение велиме дека е единствено ако за кои било две решенија $X(t)$ и $X'(t)$ се две решенија (можеби на различни простори на веројатност), така што распределбите на $X(0)$ и $X'(0)$ се исти, тогаш сите конечнодимензионални распределби на $X(t)$ и $X'(t)$ се исти.

Јасно, од дефиницијата, силното решение е исто и слабо решение. Единственоста на силното решение (единственост по патишта) повлекува единственост на слабото решение. Во следниов пример, силно решение не постои, но слабо решение постои и е единствено.

Пример 1. (Танакова стохастичка диференцијална равенка)

$$dX(t) = \operatorname{sgn}(X(t))\,dB(t),$$

каде што:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Бидејќи $\sigma(x) = \operatorname{sgn}(x)$ не е непрекината функција во $x = 0$, не е Липшицова и условите за постоење на силно решение не важат. Може да се покаже дека оваа стохастичка диференцијална равенка не поседува силно решение (ние тоа овде ќе го скокнеме). Ќе покажеме дека Брауновото движење е единствено слабо решение на оваа стохастичка диференцијална равенка. Нека $X(t)$ е некое Брауново движење. Да го разгледаме процесот:

$$Y(t) = \int_0^t \frac{1}{\operatorname{sgn}(X(s))} dX(s) = \int_0^t \operatorname{sgn}(X(s))\, dX(s).$$

$\operatorname{sgn}(X(t))$ е адаптиран процес, $\int_0^T (\operatorname{sgn}(X(t)))^2\, dt = T < \infty$ и $Y(t)$ е добро дефиниран и е непрекинат мартингал.

$$[Y,Y](t) = \int_0^t \operatorname{sgn}^2(X(s))\, d[X,X](s) = \int_0^t ds = t.$$

Од теоремата на Леви (која ќе биде дадена подоцна), $Y(t)$ е Брауново движење, ќе го означиме со $B(t)$,

$$B(t) = \int_0^t \frac{dX(s)}{\operatorname{sgn}(X(s))}.$$

Со презапишување на последната равенка во диференцијална нотација ја добиваме стохастичката диференцијална равенка на Танака. Од теоремата на Леви за карактеризација следува дека кое било слабо решение е Брауново движење. ♦

Пример 2. (Гирсанова стохастичка диференцијална равенка) Равенката:

$$dX(t) = |X(t)|^r\, dB(t),$$

$r > 0,\ t \geq 0$ има силно решение $X(t) \equiv 0$. За $r \geq \frac{1}{2}$, ова е единствено силно решение. Следува дека нема други слаби решенија различни од нула. За $0 < r < \frac{1}{2}$, стохастичката диференцијална равенка има бесконечно многу слаби решенија (нема да даваме доказ овде). Не постои силна единственост во овој случај, бидејќи во спротивно ќе имаме само едно слабо решение. ♦

Во продолжение, ќе дадеме резултати кои се однесуваат на постоењето и единственоста на слабите решенија на стохастичките диференцијални равенки. Конструкцијата на слаби решенија бара понапредно знаење, па овие делови ќе бидат испуштени.

Теорема 1. Ако за секое $t > 0$, функциите $\mu(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ се ограничени и непрекинати, тогаш стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)\, dt + \sigma(X(t),t)\, dB(t) \qquad (*)$$

има најмалку едно слабо решение кое почнува во момент s во точка x, за сите s и x. Ако дополнително нејзините парцијални изводи во однос на x од први и втори ред се ограничени и непрекинати, тогаш горната стохастичка диференцијална равенка (*) има единствено решение кое почнува во момент s во точка x. Уште повеќе, ова решение го има силното Марково својство.

Теорема 2. Нека $\sigma(x,t)$ е позитивна и непрекината и за секое $T>0$, постои K_T така што за сите $x\in\mathbb{R}$, важи:

$$|\mu(x,t)|+|\sigma(x,t)|\leq K_T(1+|x|).$$

Тогаш постои единствено слабо решение на стохастичката диференцијална равенка (*), кое почнува во момент $x\in\mathbb{R}$ во кое било време $s\geq 0$. Уште повеќе, решението го има силното Марково својство.

Решенијата на стохастичките диференцијални равенки или дифузии може да се применат на просторот на веројатност од непрекинати функции. Означуваме: како да ја дефинираме веројатноста на овој простор преку транзитивна функција, како да ја најдеме транзитивната функција од дадена стохастичка диференцијална равенка и како да провериме дека конструираниот процес навистина ја задоволува стохастичката диференцијална равенка.

Слабите решенија можат да бидат конструирани на каноничниот простор $\Omega=C([0,\infty))$ од непрекинати функции од $[0,\infty)$ во $\mathbb{R}$. Бореловата σ-алгебра на Ω е генерирано од отворените множества. Отворените множества се дефинирани со помош на метрика, на пример, отворена топка со радиус ε и центар ω е множеството:

$$D_\varepsilon(\omega)=\{\omega' : d(\omega,\omega')<\varepsilon\}.$$

Растојанието помеѓу две непрекинати функции ω_1 и ω_2 е дадено со:

$$d(\omega_1,\omega_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\sup\limits_{0\leq t\leq n}|\omega_1(t)-\omega_2(t)|}{1+\sup\limits_{0\leq t\leq n}|\omega_1(t)-\omega_2(t)|}.$$

Конвергенцијата на елементите од Ω во оваа метрика е рамномерната конвергенција на функции на ограничени затворени интервали $[0,T]$. Дифузиите на конечен интервал $[0,T]$ може да се применат на просторот $C([0,T])$ со метриката:

$$d(\omega_1,\omega_2)=\sup_{0\leq t\leq T}|\omega_1(t)-\omega_2(t)|.$$

Канoничниот процес $X(t)$ е дефиниран со $X(t,\omega)=\omega(t)$, $0\le t<\infty$. Познато е дека Бореловата σ-алгебра $\mathcal{F}$ е дадена со $\sigma(X(t),\ 0\le t<\infty)$. Филтрацијата е дефинирана со σ-алгебрите $\mathcal{F}_t\ =(X(s),\ 0\le s\le t)$.

Ќе дадеме скица на постапката на конструкција на веројатносни мери од дадена транзитивна функција $p(y,t,x,s)$. Всушност, оваа конструкција ја дава Винеровата мера која одговара на процесот Брауново движење.

За кое било фиксно $x\in\mathbb{R}$ и $s\ge 0$ и веројатност $p=p_{x,s}$ на $(\Omega,\ \mathcal{F})$ може да биде конструирана со користење на својствата:

1) $p(X(u)=x,\ 0\le u\le s)=1$

2) $p(X(t_2)\in B\,|\,\mathcal{F}_{t_1}\ )=p(B,t_2,X(t_1),t_1)$.

Второто својство тврди дека за кои било Борелови множества $A,B\subset\mathbb{R}$, имаме:

$$\begin{aligned}
p_{t_1,t_2}(A\times B) &:= p(X(t_1)\in A, X(t_2)\in B)\\
&= E(p(X(t_2)\in B\,|\,\mathcal{F}_{t_1}\ )I(X(t_1)\in A))\\
&= E(p(B,t_2,X(t_1),t_1)\,I((X(t_1)\in A))\\
&= \int_A\int_B p(dy_2,t_2,y_1,t_1)\,p_{t_1}(dy_1),
\end{aligned}$$

каде што $p_{t_1}(C)=p(X(t_1)\in C)$. Ова се проширува на n-димензионалните цилиндрични множества $\{\omega\in\Omega:(\omega(t_1),...,\omega(t_n))\in J_n\}$, каде $J_n\subset\mathbb{R}^n$, со:

$$p_{t_1,...,t_{n+1}}(J_{n+1})=\int_{J_{n+1}} p(dy_{n+1},t_{n+1},y_n,t_n)p_{t_1,...,t_n}(dy_1\times...\times dy_n).$$

Овие веројатности ги даваат конечнодимензионалните распределби $p((\omega(t_1),...,\omega(t_n))\in J_n)$. Конзистентноста на овие веројатности е последица на Чапман-Коломогоровата равенка за транзитивната функција. Од теоремата на Колмогоров за проширување, p може да се прошири на единствен начин на $\mathcal{F}$. Оваа веројатност на мера $p=p_{x,s}$ одговара на Марковиот процес кој започнал од x во момент s, означен претходно со $X_s^x(t)$. Следува дека која било транзитивна функција дефинира веројатност, така што каноничниот процес е Марков процес. Всушност, ние опишавме конструкција на Винерова мера или Брауново движење.

При соодветни услови на коефициентите $\mu(x,t)$ и $\sigma(x,t)$, $p(y,t,x,s)$ е определена од парцијалната диференцијална равенка:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)+L_s u(x,s)=0,$$

која се нарекува наназад парцијална диференцијална равенка, во која се појавува диференцијалниот оператор од втор ред L_s, даден со:

$$L_s f(x,s)=(L_s f)(x,s)=\frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,s)+\mu(x,s)\frac{\partial f}{\partial x}(x,s).$$

Од клучното својство на транзитивната функција, имаме дека:

$$f(X(t))-\int_s^t (L_u f)(X(u))\,du \qquad (**)$$

е мартингал при $p_{x,s}$, во однос на $\mathcal{F}_t$, за $t\geq s$, за која било двапати непрекинато диференцијабилна функција f која е нула надвор од конечен интервал (со други зборови има компактен носач), $f\in C_K^2(\mathbb{R})$.

Дополнителните концепти (како локалните мартингали и нивните интеграли) се користат за да се докаже некаква ригорозност. Главната идеја е следнава. Да претпоставиме дека (**) важи за функциите $f(x)=x$ и $f(x)=x^2$ (иако овие функции немаат компактен носач, можат да се апроксимираат со C_K^2 функции на кој било конечен интервал). Применувајќи го (**) на линеарнаа функција $f(x)=x$, добиваме дека:

$$Y(t)=X(t)-\int_s^t \mu(X(u),u)\,du$$

е мартингал. Применувајќи го (**) на квадратната функција $f(x)=x^2$, добиваме дека:

$$X^2(t)-\int_s^t (\sigma^2(X(u),u)+2\mu(X(u),u)X(u))\,du$$

е мартингал. Од својството на карактеризација на квадратната варијација за непрекинати мартингали $Y^2(t)-[Y,Y](t)$ е мартингал, па од претходните релации следува дека:

$$[Y,Y](t)=\int_s^t \sigma^2(X(u),u)\,du.$$

Можеме да дефинираме Итов интеграл процес:

$$B(t) = \int_s^t \frac{dY(t)}{\sigma(X(u),u)} .$$

Од својствата на стохастичките интеграли, следува дека $B(t)$ е непрекинат локален мартингал и $[B,B](t) = t$. Следува од Теоремата на Леви, $B(t)$ е Брауново движење. Имајќи го предвид претходното и користејќи диференцијална нотација ја добиваме бараната стохастичка диференцијална равенка.

Земајќи ја релацијата (**) како основна, Струк и Варадан, дефинирале слабо решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)\,dt + \sigma(X(t),t)\,dB(t)$$

како решение на таканаречениот проблем на мартингал.

Дефиниција 3. Проблемот на мартингал за коефициентите или операторот L_s е следниов: За секој $x \in \mathbb{R}$ и $s > 0$, најди веројатносна мера $p_{x,s}$ на $(\Omega, \mathcal{F})$, така што:

1) $p_{x,s}(X(u) = x,\ 0 \le u \le s) = 1$

2) За која било двапати непрекинато диференцијабилна функција f, која е нула надвор од конечен интервал, следниов процес е мартингал при $p_{x,s}$, во однос на $\mathcal{F}_t$,

$$f(X(t)) - \int_s^t (L_u f)(X(u))\,du . \qquad (***)$$

Во случај кога постои само едно решение на проблемот на мартингал, се вели дека проблемот на мартингал е добро поставен.

Пример 3. Брауновото движење $B(t)$ е решение на проблемот на мартингал за Лапласовиот оператор $L = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$, односно, за двапати непрекинато диференцијабилна функција f, која е нула надвор на конечен интервал:

$$f(B(t)) - \int_0^t \frac{1}{2} f''(B(s))\,ds$$

е мартингал. Бидејќи Брауновото движење постои и е определено од неговата распределба еднозначно, проблемот на мартингал за L е добро поставен. ♦

Забелешка. Да забележиме дека ако функција е нула надвор од некој конечен интервал, тогаш нејзините изводи се, исто така, нула надвор од истиот тој конечен интервал. Следува дека за двапати непрекинато диференцијалбилна функција која е нула надвор од некој конечен интервал ($f \in C_K^2$), $(L_s f)$ постои и е непрекината и е нула надвор од истиот тој конечен интервал. Ова ни гарантира дека процесот даден со (***) постои. Ако се бара само f да биде двапати непрекинато диференцијабилна со ограничени изводи ($f \in C_b^2$), тогаш $(L_s f)$ постои, но не мора да биде ограничена и математичкото очекување во (***) може да не постои. Ако $f \in C_b^2$, тогаш бараме решенија на локалниот проблем на мартингал и кое било такво решение го прави процесот во (***) локален мартингал.

Теорема 3. Слабите решенија во смисла на дефиницијата 1 од овој дел и дефиницијат 1 се еквивалентни.

Доказ. Овде веќе го дадовме доказот во еден правец, со тоа што ако проблемот на мартингал има решение, тогаш решението ја задоволува стохастичката диференцијална равенка. Обратниот правец се добива со користење на Итовата формула. Нека $X(t)$ е слабо решение во смисла на дефиницијата 1. Тогаш постои простор кој го поддржува Брауновото движење $B(t)$, така што:

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \mu(X(u),u)\,du + \int_s^t \sigma(X(u),u)\,dB(u), \qquad X(s) = x$$

е исполнето за сите $t \geq s$. Нека f е двапати непрекинато диференцијабилна функција со компактен носач. Применувајќи ја Итовата формула на $f(X(t))$, имаме:

$$f(X(t)) = f(X(s)) + \int_s^t (L_u f)(X(u))\,du$$

$$+\int_s^t f'(X(u))\sigma(X(u),u)\,dB(u)\,.$$

Следува:

$$f(X(t)) - \int_s^t (L_u f)(X(u))\,du$$

$$= f(X(s)) + \int_s^t f'(X(u))\sigma(X(u),u)\,dB(u)\,.$$

Бидејќи f и нејзините изводи се нула, надвор од некој интервал, на пример $[-K, K]$, функциите $f'(x)\sigma(x,u)$ се, исто така, нула, надвор од овој интервал, за кое било u. Претпоставувајќи дека $\sigma(x,u)$ се ограничени кога x припаѓа на конечни интервали со некоја константа за сите u, па следува дека $|f'(x)\sigma(x,u)| < K_1$. Следува, интегралот:

$$\int_s^t f'(X(u))\sigma(X(u),u)\, dB(u)$$

е мартингал по t, каде $t \geq s$. Оттука, проблемот на мартингал има решение. ■

4.7. Нанапред и наназад равенки

Во многу примени, како физиката, инженерството и финансиите, важноста на дифузиите лежи во нивната врска со парцијалните диференцијални равенки и многу често дифузиите се специфицирани со парцијална диференцијална равенка која се нарекува Фокер-Планкова равенка (Fokker-Plank). Иако парцијалните диференцијални равенки тешко се решаваат во затворена форма (со квадратури, алгоритам), тие лесно можат да се решат нумерички. Во практика, многу често доволно е да се провери дека условите за постоење и единственост се задоволени, па тогаш решението може да се пресмета со нумерички методи со однапред зададена точност.

Во овој дел ќе прикажеме како се добива транзитивна функција која го определува слаботo решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)\, dt + \sigma(X(t),t)\, dB(t), \quad t \geq 0 .$$

Резултатите подолу се главни резултати од теоријата на парцијални диференцијални равенки кои се користат за конструкција на дифузии.

Го дефинираме диференцијалниот оператор L_s, $0 \leq s \leq T$, со:

$$L_s f(x,s) = (L_s f)(x,s) = \frac{1}{2}\sigma^2(x,s)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,s) + \mu(x,s)\frac{\partial f}{\partial x}(x,s) .$$

Операторот L_s дејствува на двапати непрекинато диференцијабилна по x функција $f(x,s)$ и резултатот на неговото дејство на $f(x,s)$ е друга функција, означена со $(L_s f)$, со вредности во точката (x,s) кои се определуваат со горната формула.

Дефиниција 1. Фундаментално решение на парцијалната диференцијална равенка:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)+L_s u(x,s)=0 \qquad (*)$$

е ненегативна функција $p(y,t,x,s)$ со следниве својства:

1) непрекината по y,t,x,s, двапати непрекинато диференцијабилна по x и ја задоволува равенката (*) во однос на s и x;

2) за која било ограничена непрекината функција $g(x)$ на $\mathbb{R}$ и за кое било $t>0$

$$u(x,s)=\int_{\mathbb{R}} g(y)\,p(y,t,x,s)\,dy$$

е ограничена, ја задоволува равенката (*) и $\lim_{s\to t^+} u(x,s)=g(x)$, за $x\in\mathbb{R}$.

Теорема 1. Да претпоставиме дека $\sigma(x,t)$ и $\mu(x,t)$ се ограничени и непрекинати функции, така што:

а) $\sigma^2(x,t)\geq c>0$,

б) $\mu(x,t)$ и $\sigma^2(x,t)$ го задоволуват Холдеровиот услов во однос на x и t, односно за сите $x,y\in\mathbb{R}$ и $s,t>0$

$$|\,\mu(y,t)-\mu(x,s)\,|+|\,\sigma^2(y,t)-\sigma^2(x,s)\,|\leq K\left(|\,y-x\,|^{\alpha}+|\,t-s\,|^{\alpha}\right).$$

Тогаш парцијалната диференцијална равенка (*) има фундаментално решение $p(y,t,x,s)$, кое е единствено и е строго позитивно.

Ако дополнително $\mu(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ имаат два парцијални извода во однос на x, кои се ограничени и го задоволуваат Холдеровиот услов во однос на x, тогаш $p(y,t,x,s)$ како функција од y и t, ја задоволува парцијалната диференцијална равенка:

$$-\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(y,t)p\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y,t)p\right)=0\,. \qquad (**)$$

Теорема 2. Нека коефициентите на L_s во (*) ги задоволуваат условите а) и б) од теоремата 1. Тогаш, парцијалната диференцијална равенка (*) има единствено фундаментално решение $p(y,t,x,s)$. Функцијата

$P(y,t,x,s)=\int_{-\infty}^{y} p(u,t,x,s)\,du$ дефинира единствена функција на транзитивни веројатности. Уште повеќе, оваа функција го има својството дека за која било ограничена функција $f(x,t)$ двапати непрекинато диференцијабилна по x непрекинато диференцијабилна по t ($f \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}\times[0,t])$)

$$\int_{\mathbb{R}} f(y,t)P(dy,t,x,s)-f(x,s)$$

$$=\int_s^t\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial}{\partial u}+L_u\right)f(y,u)P(dy,u,x,s)\,du\,, \qquad (***)$$

за сите $0\le s<t,\ x\in\mathbb{R}$.

Функцијата на транзитивните веројатности $P(y,t,x,s)$ во горната теорема дефинира единствен Марков процес $X(t)$, односно за сите x,y и $0\le s\le t$, важи:

$$P(y,t,x,s)=p(X(t)\le y\,|\,X(s)=x)\,.$$

Равенката (*) е парцијална диференцијална равенка со station наназад променливи (x,s), па според тоа се нарекува наназад равенка или уште позната како Колмогорова наназад равенка. Равенката (**) е парцијална диференцијална равенка со нанапред променливи (y,t), па се нарекува нанапред равенка или уште позната како Фокер-Планкова равенка, дифузиона равенка или Колмогорова нанапред равенка.

Процесот $X(t)$ се нарекува дифузија, а диференцијалниот оператор L_s се нарекува нејзин генератор. Својството (***) повлекува дека $X(t)$ ја задоволува стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t)=\mu(X(t),t)\,dt+\sigma(X(t),t)\,dB(t),\quad t\ge 0\,.$$

Слабото решение постои, е единствено и го има силното Марково својство.

4.8. Стратанович стохастички калкулус

Стохастичките интеграли во апликациите многу често се земени во смисла на Стратановичовиот калкулус. Овој калкулус е конструиран на начин така што неговите основни правила, интергирањето со замена и парцијалната интеграција се исти и како во стандардниот калкулус. Иако основните правила се исти, сепак, калкулусите се разликуваат. Процесите мораат да бидат адаптирани исто како и во Итовиот калкулус. Бидејќи Стратановичовите стохастички интеграли можат да се сведат на Итовите интеграли, стандардната теорија на стохастичките диференцијални равенки може да се користи за Стратановичеви стохастички диференцијални равенки. Да забележиме дека Стратановичовиот интеграл е подобар и позгоден за користење кога разгледуваме генерализации на стохастичкиот калкулус на многуобразија.

Директна дефиниција на Стратановичовиот интеграл, кој ќе го означуваме со $\int_0^t Y(s)\,\partial X(s)$, е дадена преку средно квадратна (L^2) конвергенција Стратановичевите апроксимирачки суми:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(Y(t_{i+1}^n)-Y(t_i^n)\right)\left(X(t_{i+1}^n)-X(t_i^n)\right),$$

кога разбивањата (t_i^n) стануваат сѐ пофини. Во Стратановичевите апроксимирачки суми средната вредност на Y на интервалот (t_i^n, t_{i+1}^n), $\frac{1}{2}\left(Y(t_{i+1}^n)-Y(t_i^n)\right)$, е земена, при што за споредба во Итовиот интеграл е земена најлевата вредност, $Y(t_i^n)$. Алтернативна дефиниција на Стратановичевиот интеграл е дадена со помош на Итовиот интеграл.

Дефиниција 1. Нека X и Y се непрекинати адаптирани процеси, така што стохастичкииот интеграл $\int_0^t Y(s)\,dX(s)$ е дефиниран. Стратановичевиот интеграл е дефиниран со:

$$\int_0^t Y(s)\,\partial X(s)=\int_0^t Y(s)\,dX(s)+\frac{1}{2}[Y,X](t).$$

Стратановичевиот диференцијал е дефиниран со:

$$Y(t)\,\partial X(t)=Y(t)\,dX(t)+\frac{1}{2}d[Y,X](t).$$

Теорема 1. Под услов сите членови да бидат дефинирани, важи:

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X(s)\,\partial Y(s) + \int_0^t Y(s)\,\partial X(s)$$

$$\partial(X(t)Y(t)) = X(t)\partial Y(t) + Y(t)\partial X(t)\,.$$

Доказ. Доказот е директна примена на правилото за стохастички производ. Имаме:

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)\,dY(t) + Y(t)\,dX(t) + d[X,Y](t)$$

$$= X(t)\,dY(t) + \frac{1}{2}[X,Y](t) + Y(t)\,dX(t) + \frac{1}{2}[X,Y](t)$$

$$= X(t)\partial Y(t) + Y(t)\partial X(t)\,. \blacksquare$$

Теорема 2. (Смена на променливи) Нека X е непрекината и f е трипати непрекинато диференцијабилна ($f \in C^3$). Тогаш,

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_0^t f'(X(s))\partial X(s),$$

$$\partial f(X(t)) = f'(X(t))\,\partial X(t)\,.$$

Доказ. Од Итовата формула $f(X(t))$ е полумартингал и од дефиницијата на стохастички интеграл:

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_0^t df(X(s))\,.$$

Од Итовата формула,

$$df(X(t)) = f'(X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\,d[X,X](t)\,.$$

Нека $Y(t) = f'(X(t))$. Па, доволно е да докажеме дека:

$$d[Y,X](t) = f''(X(t))\,d[X,X](t)\,.$$

Но, ова следува од Итовата формула, бидејќи:

$$dY(t) = df'(X(t)) = f''(X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2} f'''(X(t))\,d[X,X](t)$$

и:

$$d[Y,X](t) = dY(t)\,dX(t) = f''(X(t))\,dX(t)\,dX(t) = f''(X(t))\,d[X,X](t)\,,$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 1. Ако $B(t)$ е Брауново движење, тогаш неговиот Стратановичиев стохастички диференцијал е:

$$\partial B^2(t) = 2B(t)\partial B(t)\,,$$

во споредба со Итовиот диференцијал:

$$dB^2(t) = 2B(t)\,dB(t) + dt\,. \blacklozenge$$

Наредната теорема ни го дава преминот од Стратановичеви стохастички диференцијални равенки во Итови стохастички диференцијални равенки.

Теорема 3. Нека $X(t)$ ја задоволува следната стохастичка диференцијална равенка во смисла на Стратанович:

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,\partial B(t),$$

каде што $\sigma(x)$ е двапати непрекинато диференцијабилна. Тогаш, $X(t)$ ја задоволува Итовата стохастичка диференцијална равенка:

$$dX(t) = (\mu(X(t)) + \frac{1}{2}\sigma'(X(t))\sigma(X(t)))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t).$$

Следува дека инфинитезималниот лизгачки коефициент во Итовата дифузија е:

$$\mu(x) + \frac{1}{2}\sigma'(x)\sigma(x)$$

и дифузиониот коефициент е $\sigma(x)$.

Доказ. Од дефиницијата за Стратановичев интеграл, $X(t)$ ја задоволува равенката:

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t) + \frac{1}{2}d[\sigma(X), B](t). \qquad \text{(о)}$$

Бидејќи $[\sigma(X), B](t)$ е процес со конечна варијација, следува дека $X(t)$ е решение на дифузиониот тип на стохастичката диференцијална равенка со истиот дифузионен коефициент $\sigma(X(t))$. Со формално пресметување на $d[\sigma(X), B](t)$, имаме:

$$d[\sigma(X), B](t) = d\sigma(X(t))\,dB(t). \ \blacksquare$$

Со примена на Итовата формула, добиваме:

$$d\sigma(X(t)) = \sigma'(X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2}\sigma''(X(t))\,d[X, X](t).$$

Од (о), следува:

$$d[X, B](t) = dX(t)\,dB(t) = \sigma(X(t))\,dt,$$

па,

$$d[\sigma(X), B](t) = d\sigma(X(t))\,dB(t)$$
$$= \sigma'(X(t))\,dX(t)\,dB(t) = \sigma'(X(t))\sigma(X(t))\,dt.$$

Сега, равенката во тврдењето на теоремата следува од (о).

5. Мартингали

Мартингалите играат многу важна улога во модерната теорија на стохастички процеси и стохастичкиот калкулус. Мартингалите конструирани од Брауновото движење беа дефинирани и разгледувани и пред оваа глава. Мартингалите имаат константно математичко очекување, кое останува исто по секое случајно сопирање. Мартингалите конвергираат скоро сигурно. Стохастичките интеграли се мартингали. Ова се најважните својства на мартингалите, кои важат при одредени услови.

5.1. Дефиниција на мартингали

Дефиниција 1. Еден стохастички процес $M(t)$, каде што t е непрекинато, $0 \le t \le T$ или дискретно $t = 0,1,2,...,T$, адаптиран на филтрацијата $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ е мартингал ако за секој t, $M(t)$ е интеграбилно, односно $E(|M(t)|) < \infty$ и за кои било t и s, за кои $0 \le s < t \le T$, важи:

$$E(M(t) \mid \mathcal{F}_s) = M(s), \text{ скоро сигурно.} \qquad (*)$$

$M(t)$ е мартингал на $[0,\infty)$ ако е интеграбилен и својството на мартингал (*) важи за кои било $0 \le s < t < \infty$.

Дефиниција 2. Еден стохастички процес $X(t)$, $t \ge 0$ адаптиран на филтрацијата $\mathbf{F}$ е супермартингал (субмартингал) ако е интеграбилен и за кои било t и s, $0 \le s < t \le T$, важи:

$$E(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \le X(s), \ (E(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \ge X(s)), \text{ скоро сигурно.}$$

Ако $X(t)$ е супермартингал, тогаш $-X(t)$ е субмартингал. Математичкото очекување на супермартингалот е нерастечка функција по t, а математичкото очекување е неопаѓачка функција по t, а математичкото очекување на мартингал е константна функција по t. Ова својство се користи при тестирање дали супермартингал или субмартингал е вистински мартингал.

Теорема 1. Супермартингал $M(t)$, $0 \le t \le T$ е мартингал ако и само ако $E(M(T)) = E(M(0))$.

Доказ. Ако $M(t)$ е мартингал, тогаш $E(M(T)) = E(M(0))$ следува дека од својството на мартингал за $s = 0$ и $t = T$. Обратно, нека претпоставиме дека $M(t)$ е супермартингал и $E(M(T)) = E(M(0))$. Ако за некои t и s, имаме строго неравенство, $E(M(t)\,|\,\mathcal{F}_s\,) < M(s)$ на множество со позитивна веројатност, па за математичките очекувања имаме дека $E(M(t)) < E(M(s))$. Бидејќи математичкото очекување на супермартингалот е нерастечка функција, $E(M(T)) \le E(M(t)) < E(M(s)) \le E(M(0))$. Но, ова е во контрадикција со условот на теоремата $E(M(T)) = E(M(0))$. Следува дека за сите t и s, неравенството $E(M(t)\,|\,\mathcal{F}_s\,) \le M(s)$, мора да биде еднаквост скоро сигурно. ■

Специјална улога во теоријата на интеграција играат квадратно интеграбилните мартингали.

Дефиниција 3. Случајна променлива X е квадратно интеграбилна ако $E(X^2) < \infty$. Процесот $X(t)$ на временскиот интервал $[0,T]$ каде што T може да биде бесконечно, е квадратно интеграбилен ако $\sup_{t\in[0,T]} EX^2(t) < \infty$ $(\sup_{t\ge 0} EX^2(t) < \infty)$, односно вторите моменти се ограничени.

Пример 1. Брауновото движење $B(t)$ на конечен временски интервал $0 \le t \le T$ е квадратно интеграбилен мартингал, бидејќи $EB^2(t) = t < T < \infty$. Слично, $B^2(t) - t$ е квадратно интеграбилен мартингал, но не се квадратно интеграбилни кога $T = \infty$.

Ако $f(x)$ е ограничена и непрекината функција на $\mathbb{R}$, тогаш Итовите интеграли $\int_0^t f(B(s))\,dB(s)$ и $\int_0^t f(s)\,dB(s)$ се квадратно интеграбилни мартингали на кој било конечен временски интервал $0 \le t \le T$. Од претходно, Итовиот интеграл е мартингал и бидејќи $|\,f(x)| \le K$,

$$E\left(\int_0^t f(B(s))\,dB(s)\right)^2 = E\left(\int_0^t f^2(B(s))\,ds\right) \le K^2 t \le K^2 T < \infty .$$

Ако, дополнително, $\int_0^\infty f^2(s)\,ds < \infty$, тогаш $\int_0^t f(s)\,dB(s)$ е квадратно интеграбилен мартингал на $[0,\infty)$. ♦

5.2. Рамномерна интеграбилност

За да ја дадеме дефиницијата за рамномерна интеграбилност на процес, ќе се повикаме на дефиницијата за интеграбилност на случајна променлива X. За оваа случајана променлива велиме дека е интеграбилна ако $E|X|<\infty$. Лесно се забележува дека X е интеграбилна ако и само ако:

$$\lim_{n\to\infty} E(|X|I(|X|>n))=0. \qquad (*)$$

Навистина, ако X е интеграбилна, тогаш (*) важи од доминантна конвергенција, бидејќи $\lim_{n\to\infty}|X|I(|X|>n)=0$ и $|X|I(|X|>n)\leq|X|$. Обратно, нека n е доволно големо така што десната страна на (*) е конечно. Тогаш,

$$E|X|=E)|X|I(|X|>n))+E(|X|I(|X|\leq n))<\infty,$$

бидејќи првиот член е конечен од (*) , а вториот член е ограничен со n.

Дефиниција 1. Процесот $X(t)$, $0\leq t\leq T$ се нарекува рамномерно интеграбилен ако $E(|X(t)I(|X(t)|>n))$ конвергира кон нула, кога $n\to\infty$ рамномерно по t, односно:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_t E\left(|X(t)I(|X(t)|>n)\right)=0,$$

каде што супремумот е над $[0,T]$ во случај на конечен временски интервал и $[0,\infty)$ ако процесот се разгледува на $0\leq t<\infty$.

Пример 1. Ќе докажеме дека ако $X(t)$, $0\leq t\leq T$ е рамномерно интеграбилна, тогаш е интеграбилна, односно $\sup_t E|X(t)|<\infty$. Навистина,

$$\sup_t E|X(t)|<\sup_t E\left(|X(t)|I(|X(t)>n)\right)+n.$$

Бидејќи $X(t)$ е рамномерно интеграбилна, првиот член конвергира кон нула, кога $n\to\infty$, всушност, е ограничен, па следува тврдењето. ♦

Во наредната теорема, ќе бидат дадени доволните услови за рамномерна интеграбилност.

Теорема 1. Ако процесот $X(t)$ е ограничен со интеграбилна рамномерна променлива, $|X(t)|\leq Y$ и $E(Y)<\infty$, тогаш процесот $X(t)$ е рамномерна интеграбилна. Всушност, ако $E(\sup_t|X(t)|)<\infty$, тогаш процесот $X(t)$ е рамномерно интеграбилен.

Доказ. Имаме:

$$E\left(|X(t)|I(|X(t)|>n)\right)<E\left(|Y|I(|Y|>n)\right)\to 0\ ,$$

кога $n\to\infty$, со што го добиваме тврдењето на теоремата. ■

Да забележиме дека има рамномерно интеграбилни процеси (мартингали) кои не се ограничени со интеграбилна рамномерна променлива, па доволниот услов за рамномерна интеграбилност $E(\sup_t|X(t)|)<\infty$ не е потребен за рамномерна интеграбилност. Следнава теорема ни дава друг доволен услов за рамномерна интеграбилност на процесот $X(t)$.

Теорема 2. Нека за некоја позитивна, растечка конвексна функција $f(x)$ на $[0,\infty)$, така што $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$, важи:

$$\sup_{t\le T}E(f(|X(t)|))<\infty .$$

Тогаш $X(t)$, $t\le T$ е рамномерно интеграбилна.

Поради комплексноста, доказот ќе биде изоставен. Често се користи случајот кога $f(x)=x^r$ за $r>1$ и рамномерната интеграбилност се проверува преку моментите. За вторите моменти, $r=2$, имаме: квадратната интеграбилност повлекува рамномерна интеграбилност.

Последица 1. Ако $X(t)$ е квадратно интеграбилен, односно $\sup_t EX^2(t)<\infty$, тогаш процесот е рамномерно интеграбилен.

Во согласно со ова, примери на рамномерно интеграбилни мартингали се дадени преку квадратно интеграбилни мартингали кои се дадени во примерот 1 од претходниот наслов. Наредната теорема ни дава начин на кој може да се конструираат рамномерно интеграбилни мартингали.

Теорема 3. (Дубов, Левиев мартингал) Нека Y е интеграбилна случајна променлива, односно $E|Y|<\infty$ и нека:

$$M(t)=E(Y\mid\mathcal{F}_t\ ). \qquad (**)$$

Тогаш, $M(t)$ е рамномерно интеграбилен мартингал.

Доказ. Лесно се гледа дека $M(t)$ е мартингал. Навистина, од теоремата за двојно математичко очекување,

$$E(M(t)\mid\mathcal{F}_s\ )=E(E(Y\mid\mathcal{F}_t\ )\mid\mathcal{F}_s\ )=E(Y\mid\ \mathcal{F}_s\ )=M(s).$$

Доволно е да докажеме дека тврдењето е точно за $Y\ge 0$, бидејќи општиот случај следува ако се разгледуваат Y^+ и Y^-. Ако $Y\ge 0$, тогаш

$M(t) \geq 0$ за сите t. Ќе докажеме дека $M^* = \sup_{t \leq T} M(t) < \infty$. Ако ова не е исполнето, постои низа $t_n \to \infty$, така што $M(t_n) \to \infty$. Од монотоната конвергенција, имаме дека $E(M(t_n)) \to \infty$, што е контрадикција, бидејќи $E(M(t_n)) = EY < \infty$. Сега од дефиницијата на условно математичко очекување, имаме:

$$E(M(t)I(M(t) > n)) = E(YI(M(t) > n)).$$

Бидејќи

$$(M(t) > n) \subseteq (M^* > n), \quad E(YI(M(t) > n)) \leq E(YI(M^* > n)),$$

следува:

$$E(M(t)I(M(t) > n)) \leq E(YI(M^* > n)).$$

Бидејќи десната страна не зависи од t,

$$\sup_{t \leq T} E(M(t)I(M(t) > n)) \leq E(YI(M^* > n)).$$

Ова конвергира кон нула, кога $n \to \infty$, бидејќи M^* е конечно и Y е интеграбилно. ■

За мартингалот (**) се вели дека е затворен од Y. Ја имаме следнава последица.

Последица 2. Секој мартингал $M(t)$ на конечен временски интервал $0 \leq t \leq T < \infty$ е рамномерно интеграбилен и е затворен од $M(T)$.

Во наредната лекција, ќе видиме дека рамномерно интеграбилен мартингал на $[0, \infty)$ е, исто така, со облик (**). Ова значи дека постои случајна променлива, која ќе ја означуваме со $M(\infty)$, така што својството на мартингал важи за сите $0 \leq s < t$, при што t може да биде и ∞.

5.3. Конвергенција на мартингали

Во овој дел, ќе разгледуваме мартингали на бесконечен временски интервал $[0,\infty)$.

Теорема 1. (Конвергенција на мартингали) Ако $M(t)$, $0 \le t < \infty$ е интеграбилен мартингал (супермартингал или субмартингал), односно ако $\sup_{t\ge 0} E\left(|M(t)|\right) < \infty$, тогаш скоро сигурно постои граничната вредност $\lim_{t\to\infty} M(t) = Y$ и Y е интеграбилна случајна променлива.

Поради комплексноста, доказот ќе биде скокнат. Ако $M(t)$ е мартингал, тогаш условот $\sup_{t\ge 0} E\left(|M(t)|\right) < \infty$ е еквивалентен на некој од следниве услови:

а) $\lim_{t\to\infty} E\left(|M(t)|\right) < \infty$. Ова важи бидејќи $|x|$ е конвексна функција, од каде што $|M(t)|$ е субмартингал и математичкото очекување на субмартингал е растечка функција по t. Следува дека граничната вредност е иста како и супремумот.

б) $\lim_{t\to\infty} EM^+(t) < \infty$. Ова важи бидејќи $E\left(|M(t)|\right) = E(M^+(t)) + E(M^-(t))$. Ако $E(M(t)) = c$, тогаш:

$$E(M(t)) = E(M^+(t)) - E(M^-(t)) = c \text{ и } E(M^+(t)) = E(M^-(t)) + c.$$

в) $\lim_{t\to\infty} E(M^-(t)) < \infty$.

Ако $M(t)$ е субмартингал, доволно е да бараме да $\sup_t E(M^+(t)) < \infty$ и ако е супермартингал доволно е да бараме $\sup_t E(M^-(t)) < \infty$, за постоење на крајната гранична вредност.

Последица 1. а) Рамномерно интеграбилните мартингали конвергираат скоро сигурно.

б) Квадратно интеграбилните мартингали конвергираат скоро сигурно.

в) Позитивните мартингали конвергираат скоро сигурно.

г) Субмартингалите ограничени од горе (негативни) конвергираат скоро сигурно.

д) Супермартингалите ограничени од долу (позитивни) конвергираат скоро сигурно.

Доказ. Бидејќи рамномерно интеграбилните мартингали се интеграбилни, тие конвергираат. Бидејќи квадратно интеграбилните мартингали се рамномерно интеграбилни, тие конвергираат. Ако $M(t)$ се позитивни, тогаш $|M(t)| = M(t)$ и

$$E(|M(t)|) = E(M(t)) = E(M(0)) < \infty .$$

Да забележиме дека математичките очекувања може, но и не мора да конвергираат кон математичкото очекување на граничната вредност $\lim EY$. Случајот кога $EY = \lim_{t\to\infty} E(M(t))$, важи кога $M(t)$ е рамномерно интеграбилна. Наредната теорема, дадена без доказ, тврди дека рамномерно интеграбилните мартингали имаат облик (**) од претходниот наслов.

Теорема 2. Ако $M(t)$ е рамномерно интеграбилен мартингал тогаш тој конвергира кон случајна променлива Y, скоро сигурно и во L^1. Обратно, ако $M(t)$ е мартингал тогаш тој конвергира во L^1 кон случајна променлива Y, тогаш $M(t)$ е рамномерно интеграбилна и конвергира скоро сигурно кон Y. Во кој било случај, $M(t) = E(Y \mid \mathcal{F}_t)$.

Пример 1. (Експоненцијален мартингал од Брауновото движење) Нека $M(t) = e^{B(t)-\frac{t}{2}}$. Тогаш, $M(t), t \geq 0$ е мартингал. Бидејќи е позитивен, тој конвергира од претходната последица скоро сигурно кон граничната вредност Y. Од Законот на големи броеви за Брауновото движење $\frac{B(t)}{t}$ конвергира скоро сигурно кон нула. Следува дека $M(t) = e^{\left(\frac{B(t)}{t}-\frac{1}{2}\right)}$, кога $t \to \infty$. Следува, $Y = 0$, скоро сигурно. Следува дека $M(t)$ не е рамномерно интеграбилна, бидејќи $EY = 0 \neq 1 = E(M(t))$. ♦

Пример 2. Нека $f(s)$ е неслучајна, така што: $\int_0^\infty f^2(s)\,ds < \infty$. Ќе покажеме дека $M(t) = \int_0^t f(s)\,dB(s)$ е рамномерно интеграбилен мартингал и ќе најдеме репрезентација за затворачката случајна променлива. Бидејќи $\int_0^\infty f^2(s)\,ds < \infty$, интегралот $\int_0^t f(s)\,dB(s)$ е дефиниран за сите $t > 0$ и е мартингал. Бидејќи

$$\sup_{t>0} E(M^2(t)) = \sup_{t>0} \int_0^t f^2(s)\,ds = \int_0^\infty f^2(s)\,ds < \infty ,$$

$M(t)$ е рамномерно интеграбилна. Следува конвергира скоро сигурно кон Y. Конвергенцијата е, исто така, и во L^1, односно $E(|M(t)-Y|)\to 0$, кога $t\to\infty$. Нека означиме со:

$$Y = M(\infty) = \int_0^\infty f(s)\,dB(s).$$

Тогаш, докажавме дека:

$Y - M(t) = \int_t^\infty f(s)\,dB(s)$ конвергира кон нула скоро сигурно и конвергира и во L^1. Случајната променлива Y е затворачка променлива. Навистина,

$$E(Y\,|\,\mathcal{F}_t) = E(M(\infty)\,|\,\mathcal{F}_t) = E(\int_0^\infty f(s)\,dB(s)\,|\,\mathcal{F}_t) = \int_0^t f(s)\,dB(s) = M(t). \ ♦$$

Пример 3. Нека разгледаме позитивен мартингал $M(t) = E(I(Y>0)\,|\,\mathcal{F}_t)$, каде што $Y = \int_0^\infty f(s)\,dB(s)$, при што $f(s)$ е неслучајна и $\int_0^\infty f^2(s)\,ds < \infty$, од претходниот пример.

Тогаш,

$$\begin{aligned} M(t) &= E(I(Y>0)\,|\,\mathcal{F}_t) = p(Y>0\,|\,\mathcal{F}_t) \\ &= p(\int_t^\infty f(s)\,dB(s) > -\int_0^t f(s)\,dB(s)\,|\,\mathcal{F}_t) \\ &= \Phi\left(\frac{\int_0^t f(s)\,dB(s)}{\sqrt{\int_t^\infty f^2(s)\,ds}}\right), \end{aligned}$$

каде што последното равенство е последица на нормалноста на Итовиот интеграл за неслучајна функција f.

Со земање на f да биде нула на (T,∞), резултатот се добива за мартингали од облик $E(I(\int_0^T f(s)\,dB(s)>0)\,|\,\mathcal{F}_t)$. Всушност, со земање на $f(s) = 1_{[0,T]}(s)$, добиваме дека:

$$\Phi\left(\frac{B(t)}{\sqrt{T-t}}\right)$$

е позитивен ограничен мартингал на $[0,T]$. ♦

5.4. Стопирање по избор

Во овој дел, ќе дадеме разултати поврзани со сопрени мартингали во случајни времиња. Од претходно, за случајно време τ, велиме дека е време на стопирање ако за кое било $t>0$ множествата $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$. За филтрациите генерирани од процесот X, τ е време на стопирање ако е можно да одлучиме дали τ се појавило или не врз основа на набљудување на процесот сѐ до моментот t. Мартингал кој сопрел во случајно време τ е процесот $M(t\wedge\tau)$. Без доказ ќе дадеме еден основен резултат поврзан со стопирањето, кој тврди дека мартингал кој сопрел во стопирачко време е мартингал, односно $E(M(\tau\wedge t)) = E(M(0))$.

Теорема 1. Ако $M(t)$ е мартингал и τ е стопирачко време, тогаш сопрениот процес $M(\tau\wedge t)$ е мартингал. Уште повеќе,

$$E(M(\tau\wedge t)) = E(M(0)).$$

Доказот на оваа теорема е даден во случај кога времето е дискретно. Равенката во формулацијата на горната теорема ќе ја нарекуваме и основна стопирачка равенка. Да потенцираме дека во оваа теорема $M(\tau\wedge t)$ е мартингал во однос на почетната филтрација $\mathcal{F}_t$. Бидејќи е адаптиран на $\mathcal{F}_{\tau\wedge t}$, тогаш тој е и $\mathcal{F}_{\tau\wedge t}$-мартингал.

Пример 1. (Излез на Брауновото движење на интервал) Нека $B(t)$ е Брауново движење почнато во x и τ е првиот момент кога $B(t)$ излегува од интервалот (a,b), $a<x<b$, односно $\tau = \inf\{t : B(t) = a \text{ } или \text{ } b\}$. Јасно τ е време на стопирање. Од основната стопирачка равенка, имаме $E(B(\tau\wedge t)) = B(0) = x$. Од дефиницијата на τ, $|B(\tau\wedge t)| \le \max(|a|,|b|)$. Пуштајќи $t\to\infty$ и користејќи ја теоремата за доминантна конвергенција, добиваме: $E(B(\tau)) = x$. Но, $B(\tau)=b$, со веројатност p и $B(\tau)=a$, со веројатност $1-p$. Од овие равенки, добиваме дека $p=\dfrac{x-a}{b-a}$ е веројатноста дека Брауновото движење го достигнува b, пред да го достигне a. ♦

Ако $M(t)$ е мартингал, тогаш $E(M(t)) = E(M(0))$. Ако τ е време на стопирање, тогаш $E(M(\tau))$ може да се разликува од $E(M(0))$, како што се гледа во наредниот пример.

Пример 2. Нека $B(t)$ е Брауново движење кое започнало во 0 и τ е времето на постигање на 1. Тогаш, по дефиниција $B(\tau)=1$ и $E(B(\tau)) = 1 \neq 0 = E(B(0))$. ♦

Со некои дополнителни претпоставки на мартингалот или на времето на стопирање, случајното стопирање може да го менува математичкото очекување. Следнава теорема ги дава доволните услови за опционо стопирање.

Теорема 2. (Опционо стопирање) Нека $M(t)$ е мартингал.

а) Ако $\tau \le K < \infty$ е ограничено време на стопирање, тогаш:

$$E(M(\tau)) = E(M(0)).$$

б) Ако $M(t)$ е рамномерно интеграбилна, тогаш за кое било време на стопирање τ,

$$E(M(\tau)) = E(M(0)).$$

Тврдењето под а) следува од основната стопирачка равенка (*), со земање на $t > K$ и примена на (*),

$$E(M(0)) = E(M(t \wedge \tau)) = E(M(\tau)).$$

Применувајќи го овој резултат на коцкање, имаме дека кога се обложуваме на мартингал, математичкото очекување е дека не сме оствариле загуба или сме оствариле добивка, дури и кога паметното стопирачко правило е користено, под услов тој да е ограничен. Доказот на б), ќе го скокнеме, заради неговата комплексност, односно комплицираниот доказ дека $M(\tau)$ е интеграбилен.

Теорема 3. Нека $M(t)$ е мартингал и τ е конечно време на стопирање. Ако $E(|M(t)|) < \infty$ и важи:

$$\lim_{t\to\infty} E\left(M(t) I(\tau > t)\right) = 0.$$

Тогаш, $E(M(\tau)) = E(M(0))$.

Доказ. За $M(\tau \wedge t)$, имаме:

$$M(\tau \wedge t) = M(t) I(t < \tau) + M(\tau) I(t \ge \tau).$$

Користејќи ја основната стопирачка равенка (*), имаме $E(M(\tau \wedge t)) = E(M(0))$. Ставајќи математички очекувања на последната равенка, добиваме:

$$E(M(0)) = E(M(t)I(t < \tau)) + E(M(\tau)I(t \geq \tau)).$$

Пуштаме сега гранична вредност во последната равенка, кога $t \to \infty$. Бидејќи τ е кончен,

$$I(t \geq \tau) \to I(\tau < \infty) = 1,$$

добиваме дека:

$$|M(\tau)|\, I(t \geq \tau) \leq |M(\tau)|$$

е интеграбилен. Следува,

$$E(M(\tau)I(t \geq \tau)) \to E(M(\tau))$$

од теоремата за доминантна конвергенција. Од претпоставката дека $E(M(t)I(t < \tau)) \to 0$, кога $t \to \infty$, го добиваме тврдењето на теоремата. ■

Основната стопирачка равенка или опционото стопирање се користат во распределбите на стопирачките времиња за Брауновото движење или случајни патишта.

Пример 3. (Достигнувачки времиња за Брауновото движење) Ќе ја изведеме Лапласовата трансформација за достигнувачки времиња, за кои, исто така, следува дека се конечни. Нека $B(t)$ е Брауново движење кое започнува во 0 и $T_b = \inf\{t : B(t) = b\}$, $b > 0$. Нека го разгледаме експоненцијалниот мартингал на Брауновото движење $e^{uB(t) - u^2 \frac{t}{2}}$, $u > 0$, запрело во T_b, $e^{uB(t \wedge T_b) - (t \wedge T_b)\frac{u^2}{2}}$. Користејќи ја основната стопирачка равенка (*), имаме:

$$E(e^{uB(t \wedge T_b) - (t \wedge T_b)\frac{u^2}{2}}) = 1.$$

Мартингалот е ограничен од горе со e^{ub} и е позитивен. Ако земеме дека е веќе докажано дека T_b е конечно, $p(T_b < \infty) = 1$, тогаш со земање $t \to \infty$, добиваме дека:

$$E\left(e^{ub - (t \wedge T_b)\frac{u^2}{2}} \right) = 1.$$

Заменувајќи го u со $\sqrt{2u}$, добиваме дека Лапласовата трансформација на T_b е:

$$\psi_{T_b}(u) = E\left(e^{-uT_b}\right) = e^{-b\sqrt{2u}}.$$

Ќе ја докажеме конечноста на T_b. Математичкото очекување на сопрениот мартингал е:

$$E\left(e^{ub-T_b\frac{u^2}{2}}I(T_b \le t)\right)+E\left(e^{uB(t)-t\frac{u^2}{2}}I(T_b > t)\right)=1.$$

Членот:

$$E\left(e^{uB(t)-t\frac{u^2}{2}}I(T_b > t)\right)\le E\left(e^{ub-t\frac{u^2}{2}}I(T_b > t)\right)\le e^{ub-t\frac{u^2}{2}}\to 0,$$

кога $t\to\infty$. Следува, пуштајќи гранични вредности во горната равенка, добиваме:

$$E\left(e^{ub-T_b\frac{u^2}{2}}I(T_b \le t)\right)\to E\left(e^{ub-T_b\frac{u^2}{2}}I(T_b < \infty)\right)=1.$$

Оттука,

$$E\left(e^{-T_b\frac{u^2}{2}}I(T_b < \infty)\right)=e^{-ub}.$$

Но,

$$e^{-T_b u^2}(T_b=\infty)=0,$$

па, со додавање на овој член, добиваме:

$$E\left(e^{-T_b\frac{u^2}{2}}\right)=e^{-ub}.$$

Следува дека:

$$p(T_b<\infty)=\lim_{t\to 0}\psi(u)=1,$$

па, T_b е конечно. Оттука,

$$\psi_{T_b}(u)=E\left(e^{-uT_b}\right)=e^{-b\sqrt{2u}}.$$

Функцијата на густина на распределба на T_b која одговара на горната равенка е:

$$f_{T_b}(t)=\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

која е, всушност, инверзна Гама распределба со параметри $\frac{1}{2}$ и $\frac{x^2}{2}$. ♦

Наредната теорема е на некој начин инверзна на теоремата за опционо стопирање.

Теорема 4. Нека $X(t), t \geq 0$ е таков што за кое било ограничено стопирачко време τ, $X(\tau)$ е интеграбилен и $E(X(\tau)) = E(X(0))$. Тогаш, $X(t)$, $t \geq 0$ е мартингал.

Доказ. Доказот се состои од проверка на својството на мартингал со користење на соодветните стопирачки времиња. Бидејќи детерминистичкото време е време на стопирање, $X(t)$ е интеграбилен. Без губење на општоста, нека земеме $X(0) = 0$. Наредно, ќе покажеме дека за $t > s$, $E(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = X(s)$. Со други зборови, треба да докажеме дека за секое $s < t$ и било кое множество $B \in \mathcal{F}_s$, важи:

$$E(X(t)I(B)) = E(X(s)I(B)). \qquad (**)$$

Нека фиксираме множество $B \in \mathcal{F}_s$ и за кој било $t > s$, дефинираме стопирачко време:

$$\tau = sI(B) + tI(B^c).$$

Имаме дека:

$$E(X(\tau)) = E(X(s)I(B)) + E(X(t)I(B^c)).$$

Бидејќи $E(X(\tau)) = 0$, добиваме:

$$E(X(s)I(B)) = E(X(\tau)) - E(X(t)I(B^c)) = -E(X(t)I(B^c)).$$

Бидејќи десната страна на горното равенство не зависи од s, следува дека важи равнството (**). ■

Следната теорема е позната и како теорема за опционо земање на примероци.

Теорема 5. (Опционо земање на примероци) Нека $M(t)$ е рамномерно интеграбилен мартингал и $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \infty$ се две времиња на стопирање. Тогаш,

$$E(M(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) = M(\tau_1), \text{ скоро сигурно.}$$

Наредно, ќе го разгледуваме случајот кога имаме дискретно време, односно $t = 0, 1, 2, \ldots$ и мартингалите произлегуваат од случајни патишта.

Да разгледаме една игра која ја играат двајца со обложување на исходите на фрлање паричка. Избраниот играч добива едно евро ако се падне глава, а губи едно евро ако се падне петка. Играта сопира кога еден од играчите ќе снема пари. Избраниот играч почнува во x евра, додека другиот играч со b евра. Тогаш, S_n сумата на пари која ја има избраниот играч во момент n е случаен пат. Проблемот на „уништување на коцкарот“ е проблем да се најдат веројатностите за да коцкарите останат без пари.

Во оваа игра загубата на еден од играчите се додава на другиот играч. Претпоставувајќи дека играта ќе заврши за конечно време τ (ова ќе биде покажано подоцна), следува дека збирот на „уништувачките “ веројатности на играчите е 1. Да го разгледаме случајот на хомогена паричка. Тогаш,

$$S_n = x + \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$p(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}, \qquad p(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$$

е мартингал. Нека τ е време кога играта сопира, првиот пат кога избраниот играч има вкупно нула евра („уништен“) или $x+b$ има другиот играч. Тогаш τ е време на стопирање. Да ја означиме со u веројатноста на „уништување“ на избраниот играч. Тоа е веројатноста избраниот играч да го изгуби почетниот капитал од x евра, пред да добие b евра. Следува:

$$p(S_\tau = 0) = u \text{ и } \qquad p(S_\tau = x+b) = 1-u .$$

Применувајќи ја формално опционата теорема за стопирање, добиваме:

$$E(S_\tau) = S_0 = x .$$

Но,

$$E(S_\tau) = (x+b)\cdot(1-u) + 0\cdot u = (x+b)\cdot u .$$

Овие равенки даваат:

$$u = \frac{b}{x+b} .$$

Па, „уништувачките“ веројатности се дадени со едноставни пресметки со користење на сопрени мартингали.

Ќе ги објасниме чекорите. S_n е мартингал и τ е време на стопирање. Од претходно, имаме $S_{n\wedge\tau}$ е мартингал. Тој е ненегативен и ограничен со $x+b$, од дефиницијата на τ. Следува, $S_{n\wedge\tau}$ е рамномерно интеграбилен мартингал. Следува тој конвергира скоро сигурно кон конечната граница Y, $(EY = x)$, $\lim_{n\to\infty} S_{n\wedge\tau} = Y$. Имаме дека $S_n^2 - n$ е мартингал, па и $S_{n\wedge\tau}^2 - n\wedge\tau$ е мартингал. Следува, за сите n, земајќи математичко очекување, имаме:

$$E\left(S_{n\wedge\tau}^{2}\right)=E\left(n\wedge\tau\right)+E\left(S_{0}^{2}\right).$$

Од теоремата за доминантна конвергенција, левата страна има конечна граница, па постои конечна граница $\lim_{n\to\infty}E(n\wedge\tau)$. Развивајќи го ова, имаме:

$$E(n\wedge\tau)\geq np(\tau>n),$$

па за да видиме дека граничната вредност постои, мора:

$$\lim_{n\to\infty}p(\tau>n)=0,$$

па, $p(\tau<\infty)=1$ и τ е конечно. Да забележиме дека доказот за конечност на τ е стандарден и се прави со помош на теоријата на Маркови ланци, својството на рекурентност на состојбите на случајни патишта. Запишуваме: $E\left(S_{n\wedge\tau}\right)=x$ и барајќи гранична вредност, кога $n\to\infty$, добиваме дека $E(S_{\tau})=S_0=x$. Од овде имаме строго заклучок за „уништувачките“ веројатности во случајни патишта врз кои нема надворешно влијание.

Сега да го разгледаме случајот кога случајните патишта се под надворешно влијание, $p\neq q$. Тогаш,

$$S_n=x+\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

$$p(\xi_i=1)=p \qquad \text{и} \qquad p(\xi_i=-1)=q=1-p.$$

Во овој случај, се користи експоненцијалниот мартингал на случајниот пат, $M_n=\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$. Од сопрениот мартингал, ја добиваме „уништувачката“ веројатност:

$$u=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{b+x}-\left(\frac{q}{p}\right)^{x}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{b+x}-1}.$$

Нека S_n означува случаен пат на целите броеви кој започнал во $S_0=x$ и:

$$S_n=S_0+\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

$$p(\xi_i=1)=p \qquad \text{и} \qquad p(\xi_i=-1)=q=1-p,$$

со призволно p и T_b првото достигање на b, $T_b = \inf\{n : S_n = b\}$ (да забележиме дека земаме да инфимум на празно множество е бесконечност). Без губење на општоста неказемеме дека почетната состојба е $x = 0$, во спротивно го разгледуваме процесот $S_n - x$. Разгледуваме ниво на достигнување $b > 0$, а за $b < 0$ го земаме процесот $-S_n$.

Ќе ја најдеме Лапласовата трансформација на T_b,

$$\psi(\lambda) = E\left(e^{-\lambda T_b}\right),\ \lambda > 0,$$

со сопирање на експоненцијалниот мартингал на случајниот пат,

$$M_n = e^{uS_n - nh(u)},$$

каде што:

$$h(u) = \ln\left(E\left(e^{u\xi_1}\right)\right)$$

и u е произволно. Имаме:

$$E(M_{n\wedge T_b}) = E\left(e^{uS_{n\wedge T_b} - (n\wedge T_b)h(u)}\right) = 1.$$

Го земаме u, така што $h(u) = \lambda > 0$. Последниот израз, може да се запише како:

$$E\left(e^{uS_{n\wedge T_b} - (n\wedge T_b)h(u)}\right) = E\left(e^{uS_{T_b} - T_b h(u)} I(T_b \le n)\right)$$

$$+E\left(e^{uS_n - nh(u)} I(T_b > n)\right). \qquad \text{(o)}$$

Првиот член е еднаков на:

$$E\left(e^{ub - T_b h(u)} I(T_b \le n)\right).$$

Вториот член конвергира кон нула, бидејќи од дефиницијата на T_b,

$$E\left(e^{uS_n - nh(u)} I(T_b > n)\right) \le E\left(e^{ub - nh(u)} I(T_b > n)\right) \le e^{ub - nh(u)} \to 0.$$

Сега, пуштајќи гранична вредност во (o) и користејќи ја теоремата за доминантна конвергенција, добиваме:

$$E\left(e^{-h(u)T_b} I(T_b < \infty)\right) = e^{-ub}.$$

Да забележиме дека:

$$e^{-h(u)T_b} I(T_b = \infty) = 0,$$

па, со додавање на овој член, можеме да запишеме дека:

$$E\left(e^{-h(u)T_b}\right) = e^{-ub}.$$

Ова е, всушност, Лапласовата трансформација на T_b, останува да го замениме $h(u)$ со λ, со земање $u = h^{-1}(\lambda)$, каде што h^{-1} е инверзна функција на h. Следува дека Лапласовата трансформација на T_b е дадена со:

$$\psi(\lambda) = E\left(e^{-\lambda T_b}\right) = e^{-h^{-1}(\lambda)b}.$$

За да го најдеме $h^{-1}(\lambda)$, ја решаваме равенката $h(u) = \lambda$, што е еквивалентно на $E\left(e^{u\xi_1}\right) = e^{\lambda}$ или:

$$pe^{u} + (1-p)e^{-u} = e^{\lambda}.$$

Имаме две вредности за:

$$e^{u} = \frac{(e^{\lambda} \pm \sqrt{e^{2\lambda} - 4p(1-p)}}{2p},$$

но, само една вредност одговара на горната Лапласова трансформација. Следува,

$$\psi(\lambda) = E\left(e^{-\lambda T_b}\right) = \left(\frac{2p}{e^{\lambda} + \sqrt{e^{2\lambda} - 4p(1-p)}}\right)^{b}.$$

Користејќи резултат за Лапласовата трансформација на случајна променлива,

$$p(T_b < \infty) = \lim_{\lambda \to 0} \psi(\lambda) = \left(\frac{2p}{1 + |1-2p|}\right)^{b}.$$

Следува дека времето на достигање T_b кон b е конечно ако и само ако $p \geq \frac{1}{2}$. За $p < \frac{1}{2}$, постои позитивна веројатност, така што нивото b никогаш не се постигнува,

$$p(T_b = \infty) = 1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{b}.$$

Кога времето на достигнување на ниво b е конечно, може, но и не мора да има конечно математичко очекување. Ако $p \geq \frac{1}{2}$, имаме:

$$E(T_b) = -\psi'(0) = \begin{cases} \dfrac{l}{2p-1}, & p > \dfrac{1}{2} \\ \infty, & p = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Па, имаме докажано дека кога $p \geq \frac{1}{2}$, која било позитивна состојба може да се достигне од 0 до конечно време, но кога $p = \frac{1}{2}$, средното време за тоа може да биде бесконечно.

Резултатите добиени погоре се познати како минливост $\left(p \neq \frac{1}{2}\right)$ и рекурентност $\left(p = \frac{1}{2}\right)$ на случаен пат и вообичаено се добиваат од теоријата на Маркови ланци.

Пример 4. (Опционо сопирање на дискретно временски мартингали) Нека $M(t)$ е дискретно временски мартингал и τ е време на стопирање, така што $E\left(|M(\tau)|\right) < \infty$.

Ако $E(\tau) < \infty$ и $|(M(t+1) - M(t)| \leq K$, тогаш $E(M(\tau)) = E(M(0))$.

Ако $E(\tau) < \infty$ и $E(|M(t+1) - M(t)| \,|\, \mathcal{F}_t) \leq K$, тогаш $E(M(\tau)) = E(M(0))$.

Ќе го докажеме само првото тврдење. Имаме:

$$M(t) = M(0) + \sum_{i=0}^{t-1}\left(M(i+1) - M(i)\right).$$

Ова, заедно со ограничувањата на нараснувањата, имаме:

$$M(t) \leq |M(0)| + \sum_{i=0}^{t-1} |M(i+1) - M(i)| \leq |M(0)| + Kt.$$

Земаме $M(0)$ дека е неслучајна вредност. Тогаш,

$$E(M(t))I(\tau > t) \leq |M(0)|\, p(\tau > t) + Ktp(\tau > t).$$

Последниот член конвергира кон нула,

$$tp(\tau > t) \leq E\left(\tau I(\tau > t)\right) \to 0$$

од теоремата за доминантна конвергенција, бидејќи $E(\tau) < \infty$. Следува:

$$\lim_{t\to\infty} E(M(t)I(\tau > t)) = 0,$$

па, го добиваме горното тврдење.

Доказот на второто тврдење е сличен, па ќе го изоставиме. ♦

5.5. Локализација и локални мартингали

Од претходно видовме дека Итовите интеграли $\int_0^t X(s)\,dB(s)$ се мартингали, при дополнителниот услов $\int_0^t X^2(s)\,ds < \infty$. Општо, стохастичките интеграли, во однос на мартингалите, се единствените локални мартингали, во однос на вистинските мартингали. Ова е главната причина за воведување на локалните мартингали. Исто така, видовме дека за пресметките на математичкото очекување на стопирањето и цепкањето многу често се користат. Ја имаме следнава дефиниција:

Дефиниција 1. Својството на стохастичкиот процес $X(t)$ велиме дека важи локално ако постои низа од времиња на стопирање τ_n, нарекувана локализирана низа, така што $\tau_n \to \infty$, кога $n \to \infty$ и за секој n, стопирачките процеси $X(t \wedge \tau_n)$ го имаат ова својство.

На пример, својството на рамномерната интеграбилност е локално за кој било мартингал. Мартингалот, кој е конвергентен во L^1, е рамномерно интеграбилен. Овде $M(t \wedge n) = M(n)$, за $t > n$, па $\tau_n = n$ е локализирана низа. Локалните мартингали се дефинирани со локализирање на својството на мартингал.

Дефиниција 2. Адаптиран процес $M(t)$се нарекува локален мартингал ако постои низа од стопирачки времиња τ_n, така што $\tau_n \to \infty$ и за секој n сопрениот процес $M(t \wedge \tau_n)$ е рамномерно интеграбилен мартингал по t.

Како што веќе видовме, кој било мартингал е локален мартингал. Примери на локални мартингали, кои не се мартингали се дадени во примерите во продолжение.

Пример 1. Нека $M(t) = \dfrac{1}{|\mathbf{B}(t)|}$, каде што $\mathbf{B}(t)$ е тридимензионално Брауново движење, $\mathbf{B}(0) = \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Ако D_r е комплементарно множество на топка со радиус r, со центар во координатниот почеток, $D_r = \{\mathbf{z} : |\mathbf{z}| > r\}$, тогаш $f(\mathbf{z}) = \dfrac{1}{|\mathbf{z}|}$ е хармониска функција за Лапласијанот на D_r.

Последователно, $\frac{1}{|\mathbf{B}(t \wedge \tau_{D_r})|}$ е мартингал, каде што τ_{D_r} е времето на излегување од D_r. Нека сега земеме дека τ_n е времето на излегување од $D_{\frac{1}{n}}$, односно $\tau_n = \inf\{t > 0 : |\mathbf{B}(t)| = \frac{1}{n}\}$. Сега за кое било фиксно n, $\frac{1}{|\mathbf{B}(t \wedge \tau_n)|}$ е мартингал. Бидејќи τ_n расте кон, на пример τ, и од непрекинатоста имаме: $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{0}$. Бидејќи Брауновото движење во три димензии никогаш не го посетува координатниот почеток, следува од непрекинатоста дека τ е бесконечност. Следува дека $M(t)$ е локален мартингал. За да видиме дека не е вистински (само) мартингал, да забележиме дека во три димензии Брауновото движење е минливо и $|\mathbf{B}(t)| \to \infty$, кога $t \to \infty$. Следува дека $E(M(t)) \to 0$, при што $E(M(0)) = \frac{1}{|x|}$. Бидејќи математичкото очекување на мартингал е константа, $M(t)$ не е мартингал. ♦

Пример 2. (Итови интеграли) Нека $M(t) = \int_0^t e^{B^2(s)}\, dB(s)$, $t > \frac{1}{4}$, каде што B е Брауново движење во една димензија, каде што $B(0) = 0$. Нека $\tau_n = \inf\{t > 0 : e^{B^2(t)} = n\}$. Тогаш, за $t \le \tau_n$, подинтегралната функција е ограничена со n. Од својството на мартингал на Итовите интеграли, $M(t \wedge \tau_n)$ е мартингал по t и за сите n. Од непрекинатоста, $\exp\left(B^2(\tau)\right) = \infty$, па следува дека $\tau_n \to \tau = \infty$. Следува дека $M(t)$ е локален мартингал. За да видиме дека не е (само) мартингал, да забележиме дека за $t > \frac{1}{4}$, $E\left(e^{B^2(t)}\right) = \infty$, од каде што добиваме дека $M(t)$ не е интеграбилен. ♦

Да забележиме дека не е доволно за локален мартингал да биде интеграбилен за да биде мартингал. На пример, позитивните локални мартингали се интеграбилни, но во општа ситуација тие не се мартингали, но се супермартингали. Дури рамномерно интеграбилните локални мартингали може да не бидат мартингали. Но, ако локален мартингал е ограничен со интеграбилна случајна променлива, тогаш тој е мартингал.

Теорема 1. Нека $M(t)$, $0 \le t < \infty$ е локален мартингал, така што $|M(t)| \le Y$ и $EY < \infty$. Тогаш, $M(t)$ е рамномерно интеграбилен мартингал.

Доказ. Нека τ_n е локализирана низа. Тогаш. за кој било n и $s<t$,

$$E(M(t\wedge\tau_n)\,|\,\mathcal{F}_s)=M(s\wedge\tau_n).$$

Бидејќи $M(t)$ е јасно интеграбилен, следува дека $E(|M(t)|)\le EY<\infty$. Бидејќи $\lim_{n\to\infty}M(t\wedge\tau_n)=M(t)$, од теоремата за доминантна конвергенција за условните математички очекувања:

$$\lim_{n\to\infty}E(M(t\wedge\tau_n)\,|\,\mathcal{F}_s)=E(M(t)\,|\,\mathcal{F}_s).$$

Бидејќи:

$$\lim_{n\to\infty}M(s\wedge\tau_n)=M(s),$$

својството на мартингал се добива со барање гранична вредност во горниот израз. Ако мартингалот е ограничен со интеграбилна случајна променлива, тогаш тој е рамномерно интеграбилен. ■

Последица 1. Нека $M(t)$, $0\le t<\infty$ е локален мартингал, така што за сите t,

$$E\left(\sup_{s\le t}|M(s)|\right)<\infty.$$

Тогаш, $M(t)$ е мартингал, е рамномерно интеграбилен на кој било конечен интервал $[0,T]$. Дополнително, ако:

$$E\left(\sup_{t\ge 0}|M(t)|\right)<\infty\ ),$$

тогаш, $M(t)$, $t\ge 0$ е рамномерно интеграбилна на $[0,\infty)$.

Многу често во апликацијата на стохастичките процеси во финансии се користат позитивни локални мартингали.

Теорема 2. Ненегативен локален мартингал $M(t)$, $0\le t\le T$ е супермартингал, односно $E(M(t))<\infty$ и за сите $s<t$, $E(M(t)\,|\,\mathcal{F}_s)\le M(s)$.

Доказ. Нека τ_n е локализирана низа. Тогаш, бидејќи $M(t\wedge\tau_n)\ge 0$ од лема на Фату, имаме:

$$E\left(\liminf_{n\to\infty}M(t\wedge\tau_n)\right)\le\liminf_{n\to\infty}E(M(t\wedge\tau_n)).$$

Бидејќи граничната вредност постои, долната граница е иста, односно:

$$\lim_{n\to\infty}M(t\wedge\tau_n)=M(t),$$

повлекува дека:

$$\liminf_{n\to\infty} M(t\wedge\tau_n) = M(t).$$

Но, од својството на мартингал на $M(t\wedge\tau_n)$, имаме:

$$E(M(t\wedge\tau_n)) = E(M(0\wedge\tau_n)) = E(M(0)).$$

Оттука, со пуштање на гранични вредности, добиваме дека $E(M(t)) \le E(M(0))$, па $M(t)$ е интеграбилен. Својството на супермартингал се докажува на сосема сличен начин. Користејќи ја лемата на Фату за условните математички очекувања, имаме:

$$E(\liminf_{n\to\infty} M(t\wedge\tau_n) \mid \mathcal{F}_s) \le \liminf_{n\to\infty} E(M(t\wedge\tau_n) \mid \mathcal{F}_s) = M(s\wedge\tau_n).$$

Пуштајќи гранична вредност кога $n\to\infty$, добиваме:

$E(M(t) \mid \mathcal{F}_s) = M(s)$, скоро сигурно. ■

Теорема 3. Ненегативен локален мартингал $M(t),\ 0\le t\le T$ е мартингал ако и само ако $E(M(T)) = M(0)$.

За општи локални мартингали потребен и доволен услов за да мартингалот биде рамномерно интеграбилен е опишан преку својства на Дирихлеовата класа (D). Оваа класа на процеси се појавува и во калкулусите на други области од математиката.

Дефиниција 3. Процесот $X(t)$ е од Дирихлеова класа (D) ако фамилијата $\{X(\tau) : \tau\ \textit{е време на стопирање}\}$ е рамномерно интеграбилна.

Користејќи локализација, можеме да го докажеме обратниот правец.

Теорема 4. Локален мартингал $M(t)$ е рамномерно интеграбилен мартингал ако и само ако е од класа (D).

Доказ. Нека претпоставиме дека $M(t)$ е локален мартингал од класа (D). Нека τ_n е локализирана низа, па така $M(t\wedge\tau_n)$ е рамномерно интеграбилен мартингал по t. Тогаш, за $s<t$, имаме:

$$M(s\wedge\tau_n) = E(M(t\wedge\tau_n) \mid \mathcal{F}_s). \qquad (о)$$

Својството на мартингал на $M(t)$ е добиено, со пуштање $n\to\infty$ на двете страни на равенката.

Бидејќи $\tau_n\to\infty$, $M(s\wedge\tau_n)\to M(s)$ скоро сигурно. $s\wedge\tau_n$ е конечно време на стопирање и бидејќи M е во (D), низата од случајни променливи $\{M(s\wedge\tau_n)\}_n$ е рамномерно интеграбилна. Следува $M(s\wedge\tau_n)\to M(s)$ исто во L^1, односно:

$$E\left(|M(s\wedge\tau_n) - M(s)|\right) \to 0.$$

Користејќи ги својствата на условното математичко очекување, имаме:

$$E\,|\,E(M\wedge\tau_n)\,|\,\mathcal{F}_s\,) - E(M(t)\,|\,\mathcal{F}_s\,)| = E\,|\,E(M(t\wedge\tau_n) - M(t)\,|\,\mathcal{F}_s\,|$$
$$\le E(E\,|\,M(t\wedge\tau_n) - M(t)\,|\,\mathcal{F}_s\,)$$
$$= E\,|\,M(t\wedge\tau_n) - M(t)\,|.$$

Последново конвергира кон нула, бидејќи $E\,|\,M(s\wedge\tau_n) - M(s)\,| \to 0$. Ова повлекува дека:

$$E(M(t\wedge\tau_n)\,|\,\mathcal{F}_s\,) \to E(M(t)\,|\,\mathcal{F}_s\,),$$

кога $n\to\infty$. Пуштајќи гранични вредности во (o), кога $n\to\infty$, го добиваме својството на мартингал на M. Бидејќи е во (D), со земање $\tau = t$, е рамномерно интеграбилна. ■

5.6. Квадратна варијација на мартингали

Квадратната варијација на процесот $X(t)$ е дефинирана како гранична вредност по веројатност:

$$[X,X](t) = \lim \sum_{i=1}^{n} (X(t_i^n) - X(t_{i-1}^n))^2 , \qquad (*)$$

каде што граничната вредност е земена на разбивањето:

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t,$$

при што $\delta_n = \max_{0\le i\le n}(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$. Ако $M(t)$ е мартингал, тогаш $M^2(t)$ е субмартингал и нивните математички очекувања растат (освен ако $M(t)$ е константен). Со компензирање на $M^2(t)$ со некои растечки процеси, можно е да стане мартингал. Процесот кој го компензира $M^2(t)$ во мартингал е квадратната варијација на процесот M. Може да се покаже дека квадратната варијација на мартингалите постои и е карактеризирана од горното својство.

Теорема 1. Нека $M(t)$ е мартингал со конечни втори моменти, $E\left(M^2(t)\right) < \infty$ за сите t. Тогаш, процесот на квадратна варијација $[M,M](t)$ дефиниран со (*) постои и $M^2(t) - [M,M](t)$, е мартингал.

Ако M е локален мартингал, тогаш $[M,M](t)$ постои и $M^2(t) - [M,M](t)$ е локален мартингал.

Доказ. Ќе дадеме скица на доказот само на првото тврдење. Второто тврдење за локални мартингали следува од локално квадратно интеграбилни мартингали со локализација. За локалните мартингали резултатот следува од репрезентацијата на квадратна варијација за средини од стохастички интеграли.

Имаме:

$$E(M(t)M(s)) = E(E(M(t)M(s) \mid \mathcal{F}_s)) = E(M(s)E(M(t) \mid \mathcal{F}_s)) = E(M^2(s)).$$

Користејќи го ова, лесно се добива дека:

$$E(M(t) - M(s))^2 = E(M^2(t)) - E(M^2(s)).$$

Лесно се гледа дека сумите во дефиницијата на квадратната варијација $[M,M](t)$ имаат константно математичко очекување, како на $EM^2(t)$. Можно е, но не е едноставно, да се докаже дека тие суми конвергираат по веројатност кон граничната вредност $[M,M](t)$. Сега користејќи го горното равенство, можеме да запишеме:

$$E(M^2(t) - M^2(s) \mid \mathcal{F}_s) = E(M(t) - M(s))^2 \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= E(\sum (M(t_{i+1}) - M(t_i))^2 \mid \mathcal{F}_s),$$

каде што $\{t_i\}$ е разбивање на интервалот $[s,t]$. Пуштајќи гранична вредност на двете страни на ова равенство, кога дијаметарот на поделбата тежи кон нула, добиваме:

$$E(M^2(t) - M^2(s) \mid \mathcal{F}_s) = E([M,M](t) - [M,M](s) \mid \mathcal{F}_s).$$

Со средување, го добиваме својството на мартингал на $M^2(t) - [M,M](t)$. ■

Да забележиме дека ако M е мартингал, тогаш за секое t,

$$E(M(t) - M(0))^2 = E(M^2(t)) - E(M^2(0)),$$

од каде што имаме дека $E(M^2(t)) > E(M^2(0))$, ако не е $M(t) = M(0)$ скоро сигурно. Следува дека M^2 не може да биде мартингал на $[0,t]$, освен ако не е $M(t) = M(0)$. Ако $M(t) = M(0)$, тогаш за сите $s < t, M(s) = E(M(t) \mid \mathcal{F}_s)$ и M е константа на $[0,t]$.

Теорема 2. Нека $M(t)$ е мартингал, каде што $M(0) = 0$. Ако за некое t, $M(t)$ не е идентично еднакво на нула, тогаш $[M,M](t) > 0$. Обратно, ако $[M,M](t) = 0$, тогаш $M(s) = 0$ скоро сигурно, за сите $s \le t$. Теоремата важи и за локални мартингали.

Доказ. Ќе ја докажеме теоремата за квадратно интеграбилни мартингали. За локални мартингали може да се докаже со локализација. Нека претпоставиме дека $[M,M](t)=0$, за некое $t>0$. Од претходната теорема, $M^2(s),\ s\le t$ е мартингал. Уште повеќе $E(M^2(t))=0$. Оттука, $M(t)=0$ е скоро сигурно, што е контрадикција. Следува дека: $[M,M](t)>0$.

Обратно, ако $[M,M](t)=0$, од истата дискусија од претходно имаме дека $M(t)=0$ скоро сигурно и од својството на мартингал $M(s)=0$, за сите $s\le t$. ■

Од доказот следува дека M и $[M,M]$ имаат исти интервали на кои тие се константни. Значи, секој непрекинат мартингал кој не е константен има бесконечна варијација на кој било интервал.

Теорема 3. Нека $M(t)$ е непрекинат локален мартингал и нека t е фиксно. Ако $M(t)$ не е идентично еднакво на $M(0)$, тогаш $M(t)$ има бесконечна варијација над $[0,t]$.

Доказ. Имаме дека $M(t)-M(0)$ е мартингал, нула во нулата, со вредност на t, која не е идентично еднаква на нула. Од претходната теорема имаме дека $M(t)$ има позитивна квадратна варијација на $[0,t]$, $[M,M](t)>0$. Непрекинат процес со конечна варијација на $[0,t]$ има квадратна варијација 0 над овој интервал. Следува, $M(t)$ мора да има бесконечна варијација над интервалот $[0,t]$. ■

Последица 1. Ако непрекинат мартингал има конечна варијација над конечен интервал, тогаш тој мора да биде константен над тој интервал.

Да забележиме дека има мартингали со конечна варијација, но од претходниот резултат тие не може да бидат непрекинати. Пример за таков мартингал е Поасоновиот процес мартингал $N(t)-t$.

5.7. Неравенства со мартингали

Нека со $M(t)$ означиме мартингал или локален мартингал на интервалот $[0,T]$, каде што T може да биде и бесконечност.

Теорема 1. Ако $M(t)$ е мартингал (или позитивен мартингал), тогаш за $p \geq 1$

$$p(\sup_{s \leq t} |M(s)| \geq a) \leq \frac{1}{a^p} \sup_{s \leq t} E(|M(s)|^p).$$

Ако $p > 1$, тогаш:

$$E\left(\sup_{s \leq t} |M(s)|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left(|M(t)|^p\right).$$

Случајот кога $p = 2$, се нарекува неравенство на Дуб (Doob) за мартингали:

$$E\left(\sup_{s \leq T} M(s)^2\right), 4E\left(M^2(T)\right).$$

Како последица, ако $p > 1$,

$$\sup_{t \leq T} E\left(|M(t)|^p\right) < \infty,$$

тогаш $M(t)$ е рамномерно интеграбилен мартингал.

Теорема 2. Ако $M(t)$ е локален квадратно интеграбилен мартингал, каде што $M(0) = 0$, тогаш:

$$p\left(\sup_{t \leq T} |M(t)| > a\right) \leq \frac{1}{a^2} E\left([M,M](T)\right).$$

Теорема 3. (Неравенство на Дејвис (Davis)) Постојат константи $c > 0$ и $C < \infty$, така што за кој било локален мартингал $M(t)$, нула во координатниот почеток,

$$cE\left(\sqrt{[M,M](T)}\right) \leq E\left(\sup_{t \leq T} |M(t)|\right) \leq CE\left(\sqrt{[M,M](T)}\right).$$

Теорема 4. (Неравенство на Буркхолдер-Ганди, (Burkholder-Gundy)) Постојат константи c_p и C_p, кои зависат само од p, така што за кој било локален мартингал $M(t)$, нула во координатниот почеток, важи:

$$c_p E\left([M,M](T)^{\frac{p}{2}}\right) \le E\left((\sup_{t\le T}|M(t)|)^p\right) \le C_p E\left([M,M](T)^{\frac{p}{2}}\right),$$

за $1 < p < \infty$. Ако дополнително, $M(t)$ е непрекинат, тогаш овој резултат важи и за $0 < p \le 1$.

Горните неравенства важат кога T е време на стопирање.

Во продолжение горните неравенства ќе бидат искористени за да се дадат доволни услови за локалниот мартингал да биде (вистински) мартингал.

Теорема 5. Нека $M(t)$ е локален мартингал, нула во координатниот почеток, така што:

$$E\left(\sqrt{[M,M](t)}\right) < \infty,$$

за сите t. Тогаш $M(t)$ е рамномерно интеграбилен мартингал на $[0,T]$, за кое било конечно T. Ако дополнително, $E([M,M](t)) < \infty$, тогаш $M(t)$ е мартингал за кој важи:

$$E\left(M^2(t)\right) = E\left([M,M](t)\right) < \infty$$

за сите t. Ако $\sup_{t<\infty} E\left([M,M](t)\right) < \infty$, тогаш $M(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал.

Доказ. Од неравенството на Дејвис, $\sup_{t\le T}|M(t)|$ е интеграбилна случајна променлива и важи:

$$E\left(\sup_{t\le T}|M(t)|\right) \le CE\left(\sqrt{[M,M](T)}\right) < \infty.$$

Следува дека $M(t)$ е ограничено со интеграбилна случајна променлива на кој било конечен интервал, па тој е рамномерно интеграбилен мартингал. Условот $E([M,M])(t) < \infty$, го повлекува претходниот услов $E\left(\sqrt{[M,M](t)}\right) < \infty$ и за $X \ge 0$, $E(X) \ge \left(E(\sqrt{X})\right)^2$, поради $D(\sqrt{X}) \ge 0$. Следува дека $M(t)$ е мартингал. Алтернативно, ова може да се докаже користејќи го неравенството на Буркхолдер-Гунди. Од претходно знаеме дека ако $M(t)$ е мартингал, со $E\left(M^2(t)\right) < \infty$, тогаш $M^2(t) - [M,M](t)$ е мартингал. За кое било конечно време t, имаме:

$$E\left(M^2(t)\right) = E\left([M,M](t)\right),$$

со што е докажано второто тврдење. За да го докажеме третото тврдење, да забележиме дека бидејќи двете страни на горното равенство се неопаѓачки, тие имаат гранична вредност. Бидејќи од претпоставка имаме дека $\lim_{t\to\infty} E\left([M,M](t)\right) < \infty$, $\sup_{t<\infty} E(M^2(t)) < \infty$ и $M(t)$, $0 \le t < \infty$ е квадратно интеграбилен мартингал. ■

Нека $X(t) = \int_0^t H(s)\,dB(s)$. Бидејќи $X(t)$ е Итов интеграл, $X(t)$ е локален мартингал. Неговата квадратна варијација е дадена со $[X,X](t) = \int_0^t H^2(s)\,ds$. Од неравенството на Буркхолдер-Гунди, за $p = 2$ имаме дека:

$$E\left(\sup_{t\le T} X^2(t)\right) \le CE\left([X,X](T)\right) = E\left(\int_0^T H^2(s)\,ds\right).$$

Ако $E\left(\int_0^T H^2(s)\,ds\right) < \infty$, тогаш $X(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал. Тогаш, имаме:

$$E\left(X^2(t)\right) = E\left(\int_0^t H^2(s)\,ds\right).$$

Од неравенството на Дејвис, имаме:

$$E\left(\sup_{t\le T} \int_0^t H(s)\,dB(s)\right) \le CE\left(\sqrt{\int_0^t H^2(s)\,ds}\right).$$

Следува условот:

$$E\left(\sqrt{\int_0^t H^2(s)\,ds}\right) < \infty$$

е доволен услов за Итовиот интеграл да биде мартингал и особено, да има математичко очекување нула. Овој услов не ги обезбедува вторите моменти.

5.8. Непрекинати мартингали

Брауновото движење е основен непрекинат мартингал од кој сите непрекинати мартингали може да бидат конструирани, дали преку случајна промена на времето, дадено во овој дел, или преку стохастичка интеграција, што ќе биде дадено во наредната лекција. Почетната точка е резултат кој го карактеризира Брауновото движење.

Теорема 1. (Теорема на Леви (Levy)) Процесот $M(t)$, каде што $M(0)=0$ е Брауново движење ако и само ако тој е непрекинат локален мартингал со процес на квадратна варијација $[M,M](t)=t$.

Доказ. Ако $M(t)$ е Брауново движење, тогаш тој е непрекинат мартингал со $[M,M](t)=t$.

Нека $M(t)$ е непрекинат локален мартингал и $[M,M](t)=t$. Тогаш $uM(t)$ е непрекинат локален мартингал и $[uM,uM](t)=u^2t$. Ќе докажеме дека:

$$U(t)=e^{uM(t)-u^2\frac{t}{2}}=e^{uM(t)-\frac{[uM,uM](t)}{2}}$$

е мартингал. Кога ова ќе биде докажано, доказот ќе биде готов со примена на својството на мартингал.

Општата теорија на интеграција во однос на мартингалите бара да се докаже својството на мартингал на $U(t)$. Ова е директна последица на еден општ резултат кај стохастичките експоненцијални мартингали. Запишувајќи го својството на мартингал, имаме:

$$E(e^{uM(t)-u^2\frac{t}{2}}\mid \mathcal{F}_s)=e^{uM(s)-u^2\frac{s}{2}},$$

од каде следува дека:

$$E(e^{u(M(t)-M(s))}\mid \mathcal{F}_s)=e^{\frac{u^2(t-s)}{2}}.$$

Бидејќи десната страна на последната равенка е неслучајна, следува дека $M(t)$ има независни нараснувања. Земајќи математички очекувања во горната равенка, добиваме:

$$E\left(e^{u(M(t)-M(s))}\right)=e^{\frac{u^2(t-s)}{2}},$$

од каде што добиваме дека нараснувањето на мартингалот $M(t)-M(s)$ има нормална распределба со математичко очекување 0 и дисперзија $(t-s)$. Следува, $M(t)$ е непрекинат процес со независни Гаусови нараснувања, па следува дека е Брауново движење. ■

Пример 1. Кое било решение на стохастичката диференцијална равенка на Танака е Брауново движење (слаба единственост).

$$dX(t) = \operatorname{sgn}(X(t))\, DB(t),$$

каде што $\operatorname{sgn}(x) = 1$, ако $x \geq 0$ и $\operatorname{sgn}(x) = -1$, ако $x < 0$. Јасно $X(0) = 0$ и:

$$X(t) = \int_0^t \operatorname{sgn}(X(s))\, dB(s).$$

Бидејќи е Итов интеграл, тој е локален мартингал (дури и мартингал, бидејќи и условот за мартингал е исполнет). Тој е непрекинат и неговата квадратна варијација е дадена со:

$$[X, X](t) = \int_0^t \operatorname{sgn}^2(X(s))\, ds = t.$$

Следува дека ова е Брауново движење. ♦

Главниот резултат овде тврди дека непрекинат мартингал $M(t)$ е Брауново движење со промена во времето, каде што времето се мери со квадратната варијација $[M, M](t)$, имено постои Брауново движење $B(t)$, така што $M(t) = B([M, M])(t))$. Ова $B(t)$ е конструирано од $M(t)$. Дефинираме:

$$\tau_t = \inf\{s : [M, M](s) > t\}.$$

Ако $[M, M](t)$ е строго растечка, тогаш τ_t е негова инверзна функција.

Теорема 2. (Теорема на Дамбис, Дубинс-Шварц (Dambis, Dubins-Schwartz)) Нека $M(t)$ е непрекинат мартингал, нула во координатниот почеток, така што $[M, M](t)$ е неопаѓачка кон ∞ и τ_t дефинирана со:

$$\tau_t = \inf\{s : [M, M](s) > t\}. \qquad (*)$$

Тогаш процесот $B(t) = M(\tau_t)$ е Брауново движење во однос на филтрацијата $\mathcal{F}_{\tau_t}$. Уште повеќе, $[M, M](t)$ е време на стопирање во однос на оваа филтрација и мартингалот $M(t)$ може да се добие од Брауновото движење $B(t)$ со промена на времето $M(t) = B([M, M](t))$. Оваа теорема важи и кога $M(t)$ е непрекинат локален мартингал.

Доказ. Овде ќе ја дадеме скицата на доказот. Нека $M(t)$ е локален мартингал. τ_t дефинирани со (*) се конечни стопирачки времиња, бидејќи

$[M,M](t) \to \infty$. Следува, $\mathcal{F}_{\tau_t}$ се добро дефинирани. Да забележиме дека $\{[M,M](s) \le t\} = \{\tau_t \ge s\}$. Оттука, $[M,M](s)$ се времиња на стопирања за $\mathcal{F}_{\tau_t}$. Бидејќи $[M,M](s)$ е непрекинат, $[M,M](\tau_t) = t$. Нека $X(t) = M(\tau_t)$. Тогаш тој е непрекинат локален мартингал, бидејќи $M(t)$ и $[M,M]$ ги имаат истите интервали на кои се константни. Од претходен резултат, имаме:

$$E(X^2(t)) = E([X,X](t)) = E([M,M](\tau_t)) = t .$$

Од Левиевата карактеризација, следува дека X е Брауново движење. За вториот дел на теоремата, се повикуваме на тоа дека $M(t)$ и $[M,M]$ имаат исти интервали на кои се константни, од каде што:

$$X([M,M](t)) = M(\tau_{[M,M](t)}) = M(t) . \blacksquare$$

Пример 2. Нека $M(t) = \int_0^t f(s)\,dB(s)$, каде што f е непрекината и неслучајна. Тогаш $M(t)$ е Гаусов мартингал. Неговата квадратна варијација е дадена со:

$$[M,M](t) = \int_0^t f^2(s)\,ds .$$

На пример, за $f(s) = s$, $M(t) = \int_0^t s\,dB(s)$ и:

$$[M,M](t) = \int_0^t s^2\,ds = \frac{t^3}{3} .$$

Во овој пример $[M,M](t)$ е неслучајна и растечка. τ_t е дадено преку неговата инверзна функција $\tau_t = (3t)^{\frac{1}{3}}$. Нека:

$$X(t) = M(\tau_t) = \int_0^{\sqrt[3]{3t}} s\,dB(s) .$$

Тогаш, јасно $X(t)$ е непрекинат, како композиција на непрекинати функции. Тој е исто мартингал со квадратна варијација $t = \frac{\tau_t^{\,3}}{3}$. Следува, од теоремата на Леви, тој е Брауново движење, $X(t) = B(t)$. Од горната теорема, $M(t) = B\left(\frac{t^3}{3}\right)$. ♦

Пример 3. Ако $M(t)=\int_0^t H(s)\,dB(s)$ е Итов интеграл, тогаш тој е локален мартингал со квадратна варијација:

$$[M,M](t)=\int_0^t H^2(s)\,ds .$$

Ако $\int_0^\infty H^2(s)\,ds=\infty$, тогаш:

$$M(t)=B\left(\int_0^t H^2(s)\,ds\right),$$

каде што $B(t)$ е Брауново движење и може да се реконструира од $M(t)$, со соодветна промена на времето. ♦

Пример 4. (Браунов мост како временска промена во Брауновото движење) Стохастичката диференцијална равенка за Брауновиот мост:

$$X(t)=a\left(1-\frac{t}{T}\right)+b\frac{t}{T}+(T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s}\,dB(s),\quad 0\le t<T \qquad (**)$$

го содржи единствениот стохастички член $\int_0^t \frac{1}{T-s}\,dB(s)$. Бидејќи за кој било $t<T$ тој е непрекинат мартингал со квадратна варијација:

$$[Y,Y](t)=\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\,ds=\frac{t}{T(T-t)},$$

од теормата на Дамбис, Дубинс-Шварц, следува:

$$Y(t)=B\left(\frac{t}{T(T-t)}\right),$$

за некое Брауново движење B. Следува, стохастичката диференцијална равенка (**) ја има следнава репрезентација:

$$X(t)=a\left(1-\frac{t}{T}\right)+b\frac{t}{T}+(T-t)B\left(\frac{t}{T(T-t)}\right),\quad 0\le t\le T .$$

Во оваа репрезентација $t=T$ е дозволено и е разбрано преку непрекинатоста, бидејќи граничната вредност на $tB\left(\frac{1}{t}\right)$, кога $t\to 0$ е нула од законот на големи броеви за Брауновото движење. ♦

Во продолжение ќе разгледаме промена на времето во стохастичките диференцијални равенки. Ќе ги користиме теоремата на Дамбис и теоремата на Дубинс-Шварц за конструкција на слаби решенија за некои стохастички диференцијални равенки.

Нека:

$$X(t)=\int_0^t \sqrt{f'(t)}\,dB(t),$$

каде што $f(t)$ е адаптиран, позитивен, растечки, диференцијабилен процес, кој е нула во координантниот почеток. Тој е мартингал со квадратна варијација:

$$[X,X](t)=\int_0^t f'(s)\,ds.$$

Следува $\tau_t = f^{-1}(t)$ е инверзна функција на f и користејќи ја теоремата за промена на времето, процесот $X(f^{-1}(t))=B(t)$ е Брауново движење (во однос на $\mathcal{F}_{\tau_t}$) и:

$$X(t)=B(f(t)).$$

Во согласност со ова, ја имаме следнава теорема:

Теорема 3. Нека $f(t)$ е адаптиран, позитивен, растечки, диференцијабилен процес и:

$$dX(t)=\sqrt{f'(t)}\,dB(t). \qquad (***)$$

Тогаш процесот $B(f(t))$ е слабо решение.

Равенката (***) може да се запише на следниов начин: За Брауново движење B и функција f, постои Брауново движење B, така што:

$$d\,B(f(t))=\sqrt{f'(t)}\,dB(t). \qquad (o)$$

Во случај на неслучајна промена на времето на Брауновото движење $B(f(t))$, лесно е директно да се провери дека $M(t)=B(f(t))$ е мартингал (во однос на филтрацијата $\mathcal{F}_{f(t)}$). Квадратната варијација на $B(f(t))$ е:

$$[M,M](t)=[B(f),B(f)](t)=f(t).$$

Пример 5. (Орнстајн-Уленбек процес со промена на времето во Брауново движење) За:

$$f(t)=\frac{\sigma^2(e^{2\alpha t}-1)}{2\alpha},$$

процесот:

$$B\left(\frac{\sigma^2(e^{2\alpha t}-1)}{2\alpha}\right)$$

е слабо решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t)=\sigma e^{\alpha t}\,dB(t).$$

Нека $U(t)=e^{-\alpha t}X(t)$. Со парцијална интеграција, добиваме:

$$dU(t)=-\alpha U(t)\,dt+\sigma\,dB(t).$$

Решението на оваа стохастичка диференцијална равенка е дадена со:

$$X(t)=e^{-\alpha t}(X(0)+\int_0^t \sigma e^{\alpha s}\,dB(s)).$$

Следува $U(t)$ е Орнстајн-Уленбек процес. Оттука, Орнстајн-Уленбек процесот има репрезентација:

$$U(t)=e^{-\alpha t}B\left(\frac{\sigma^2(e^{2\alpha t}-1)}{2\alpha}\right).$$

За да имаме $U(0)=x$, земаме $B(t)$ да биде Брауново движење кое започнало од x. Да забележиме дека во последните две равенки со $B(t)$ се означени различни Браунови движења. ♦

Наредно, ќе конструираме слабо решение на стохастичката диференцијална равенка која има облик:

$$dX(t)=\sigma(X(t))\,dB(t),$$

каде што $\sigma(x)>0$ е такво што:

$$G(t)=\int_0^t \frac{ds}{\sigma^2(B(s))}$$

е конечно за конечни t, расте до бесконечност и $\int_0^\infty \frac{ds}{\sigma^2(B(s))}=\infty$ скоро сигурно. Тогаш $G(t)$ е адаптиран, непрекинат и строго растечки, така што $G(\infty)=\infty$. Следува, има инверзна функција:

$$\tau_t=G^{-1}(t).$$

Да забележиме дека за секое фиксно t, τ_t е време на стопирање и е прв пат кога процесот $G(t)$ го достигнува t и τ_t е растечко.

Теорема 4. Процесот $X(t)=B(\tau_t)$ е слабо решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \sigma(X(t))\,dB(t).$$

Доказ. Имаме:

$$X(t) = B(\tau_t) = B(G^{-1}(t)).$$

Користејќи ја равенката (о), при што ставаме $f = G^{-1}$, добиваме:

$$dB(G^{-1}(t)) = \sqrt{(G^{-1})'(t)}\,d\,B(t).$$

Уште,

$$(G^{-1})'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1}(t))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sigma^2(B(G^{-1}(t)))}} = \sigma^2(B(\tau_t)).$$

Оттука, добиваме:

$$dB(\tau_t) = \sigma^2(B(\tau_t))\,d\,B(t),$$

од каде што следува тврдењето на теоремата. ■

Теорема 5. Нека $\sigma(x)$ е позитивна функција која е ограничена надвор од нулата, $\sigma(x) \geq \delta > 0$. Тогаш стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \sigma(X(t))\,dB(t)$$

има единствено решение.

Доказ. Нека $X(t)$ е слабо решение на стохастичката диференцијална равенка. Тогаш $X(t)$ е локален мартингал и постои Брауново движење $\beta(t)$, така што:

$$X(t) = \beta([X,X](t)).$$

Сега,

$$[X,X](t) = \int_0^t \sigma^2(X(s))\,ds = \int_0^t \sigma^2(\beta([X,X](s)))\,ds.$$

Следува $[X,X](t)$ е решение на обичната диференцијална равенка

$$d\,a(t) = \sigma^2(\beta(a(t)))\,dt.$$

Бидејќи решението на обичната диференцијална равенка е единствено, имаме и дека решението на дадената стохастичка диференцијална равенка е единствено. ■

Многу поопшта промена на времето е направена за стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t).$$

Нека $g(x)$ е позитивна функција за која $G(t)=\int_0^t g(X(s))\,ds$ е конечен за конечно t и расте до бесконечност скоро сигурно. Дефинираме $\tau_t = G^{-1}(t)$.

Теорема 6. Нека $X(t)$ е решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t)=\mu(X(t))\,dt+\sigma(X(t))\,dB(t).$$

Дефинираме $Y(t)=X(\tau_t)$. Тогаш $Y(t)$ е слабо решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dY(t)=\frac{\mu(Y(t))}{g(Y(t))}dt+\frac{\sigma(Y(t))}{\sqrt{g(Y(t))}}dB(t),\ \text{каде } Y(0)=X(0).$$

Може да користиме промена на времето на интервал $[0,T]$, за време на стопирање T.

Пример 6. (Лампертиева промена на време (Lamperti)) Нека $X(t)$ ја задоволува стохастичката диференцијална равенка (Фелер-Бранчева дифузија (Feller-Branch))

$$dX(t)=\mu X(t)\,dt+\sigma\sqrt{X(t)}\,dB(t),\quad \text{каде } X(0)=x>0,$$

за позитивни константи μ и σ. Ламппертиевата промена на времето е:

$$G(t)=\int_0^t X(s)\,ds.$$

Овде $g(x)=x$. Тогаш $Y(t)=X(\tau_t)$, ја задоволува стохастичката диференцијална равенка:

$$dY(t)=\frac{\mu Y(t)}{Y(t)}dt+\frac{\sigma\sqrt{Y(t)}}{\sqrt{Y(t)}\,dB(t)}$$
$$=\mu\,dt+\sigma\,dB(t),\ \text{каде } Y(0)=x$$

и:

$$Y(t)=x+\mu t+\sigma B(t).$$

Со други зборови, со случајна промена на времето, Бранчиевата дифузија е Брауново движење со лизгање. Во случајна точка каде што $G(t)$ престанува да ја зголемува инверзната τ_t, дефинирана како десен инверзен елемент $\tau_t=\inf\{s:G(s)=t\}$. Ова се случува во момент t, кога $X(t)=0$. Може да види дека процесот е нула и останува така цело време.

Нека $T = \inf\{t : X(t) = 0\}$. T е време на стопирање и $Y(t)$ е Брауновото движење кое сопрело во тоа време.

Другата насока е, исто така, точна, Бранчиевата дифузија може да се добие од Брауновото движење со лизгање. Нека $Y(t)$ го задоволува:

$$Y(t) = x + \mu t + \sigma B(t)$$

и нека $T = \inf\{t : Y(t) = 0\}$. Сега $Y(t) > 0$ за $t \le T$. Дефинираме:

$$G(t) = \int_0^{t \wedge T} \frac{1}{Y(s)} ds$$

и нека τ_t е инверзна на G, кое е дефинирано на $[0, T)$. Тогаш $X(t) = Y(\tau_t)$ кој ја задоволува стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu X(t)\, dt + \sigma \sqrt{X(t)}\, dB(t), \quad X(0) = x > 0,$$

сопира кога ќе достигне нула. ♦

Кое било решение на една стохастичка диференцијална равенка со коефициенти кои се независни од времето може да се добие од Брауновото движење со користење на промена на променливи и случајна промена на времето.

Постојат три главни метода кои се користат за решавање на стохастички диференцијални равенки: промена на просторот, односно смена на променливи (Итова формула), смена на времето и смена на мерата. Досега видовме примери на стохастички диференцијални равенки користејќи смена на променливи и смена на времето, додека овде нема да разгледуваме смена на мера.

6. Полумартингали

Во оваа глава ќе бидат дадени правила за пресметување и работа со најопштите процеси за кој стохастичкиот калкулус е развиен. Овие процеси се нарекуваат полумартингали. Полумартингал е процес кој е сума од локален мартингал и процес со конечна варијација. Интеграцијата во однос на полумартингалите вклучува интеграција во однос на локални мартингали и овие интеграли го генерализираат Итовиот интеграл, каде што интеграцијата се врши во однос на Брауновото движење. Важни концепти, како што се компензаторите и остро заградените процеси се воведени. Исто така, дадена е Итовата формула во поопшта форма.

6.1. Дефиниција на полумартингали

Во стохастичкиот калкулус се разгледуваат само регуларни процеси. Овие процеси се или непрекинати процеси или се непрекинати од десно со постоење на леви граници или непрекинати од лево со постоење на десни граници. Регуларноста на процесот повлекува дека тој може да има најмногу преброиво прекини, кои се нарекуваат скокови. Дефиницијата на полумартингал претпоставува дадена филтрација и процеси кои се адаптирани на неа. Следејќи го класичниот пристап, полумартингал е сума од локален мартингал и процес со конечна варијација.

Дефиниција 1. Регуларен непрекинат од десно со леви граници (непрекинат од лево со десни граници) адаптиран процес е полумартингал ако може да се претстави како сума од два процеса: локален мартингал $M(t)$ и процес со конечна варијација $A(t)$, каде $M(0) = A(0) = 0$ и

$$S(t) = S(0) + M(t) + A(t).$$

Пример 1. (Полумартингали)

1) $S(t) = B^2(t)$, каде $B(t)$ е Брауново движење е полумартингал. $S(t) = M(t) + t$, каде $M(t) = B^2(t) - t$ е мартингал и $A(t) = t$ е процес со конечна варијација.

2) $S(t) = N(t)$, каде што $N(t)$ е Поасонов процес со стапка λ е полумартингал, бидејќи е процес со кончна варијација.

3) Еден начин за да се добијат полумартингали од познати полумартингали е со примена на двапати непрекинато диференцијабилни трансформации. Ако $S(t)$ е полумартингал и f е двапати непрекинато диференцијабилна функција $(f \in C^2)$, тогаш $f(S(t))$ е полумартингал. Декомпозицијата на $f(S(t))$ на мартингал и на процес со конечна варијација е дадена со Итовата формула, којашто ќе биде дадена подоцна. На овој начин можеме да тврдиме дека геометриското Брауново движење $e^{\sigma B(t)+\mu t}$ е полумартингал.

4) Непрекината од десно со постоење на леви граници (непрекинати од лево, со постоење на десни граници) детерминистичката функција $f(t)$ е полумартингал ако и само ако има конечна варијација. Следува дека $f(t) = t\sin\left(\frac{1}{t}\right)$, $t \in (0,1]$, $f(0)$ е непрекината, но не е полумартингал.

5) Дифузија, која е решение на стохастичка диференцијална равенка во однос на Брауновото движење е полумартингал. Навистина, Итовиот интеграл во однос на $dB(t)$ е локален мартингал и интегралот во однос на dt е процес со конечна варијација.

6) Иако класата од полумартингали е прилично голема, постојат процеси кои не се полумартингали. Некои примери се: $|B(t)|^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, каде што $B(t)$ е еднодимензионално Брауново движење; $\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, dB(s)$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$. Потребна е дополнителна анализа за да утврдиме дека споменативе процеси не се полумартингали, која ние овде ќе ја изоставиме. ♦

За полумартингал X, процесот од скокови ΔX е дефиниран со:

$$\Delta X = X(t) - X(t^-)$$

и го претставува скокот во точката t. Ако X е непрекинат, тогаш јасно е дека $\Delta X = 0$.

6.2. Предвидливи процеси

Во овој дел ќе ја опишиме класата од предвидливи процеси. Оваа класа од процеси игра многу значајна улога во теоријата на полумартингали. Всушност, само предвидливите процеси можат да бидат интегрирани во однос на полумартингал. Да се потсетиме дека кога имаме процес H по дискретно време, тој е предвидлив ако H_n е $\mathcal{F}_{n-1}$ – мерлив, односно H е познат со сигурност во моментот n, врз основа на информациите кои ги имаме сѐ до моментот $n-1$. Предвидливоста кога имаме непрекинато време е потешко да се дефинира. Ќе разгледаме некои општи дефиниции за процесите, почнувајќи од класата на адаптирани процеси.

Дефиниција 1. Процесот $X(t)$ се нарекува адаптиран на филтрацијата $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$, ако за сите t, $X(t)$ е $\mathcal{F}_t$ – мерлив.

Во конструкцијата на стохастичкиот интеграл $\int_0^t H(u)\,dS(u)$, процесите H и S се земени да бидат адаптирани на $\mathbf{F}$. За општ полумартингал S, барањето H да биде адаптиран е преслаб, бидејќи не дава мерливост при некои основни конструкции. H мора да биде предвидлив. Точната дефиниција на предвидливи процеси вклучува σ-алгебри кои се генерирани на $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. Да забележиме дека процесите кои се непрекинати од лево се предвидливи, во смисла: $H(t) = \lim_{s \to t} H(s) = H(s^-)$. Па, ако вредностите пред t се познати, тогаш вредноста на t е определена со граничната вредност.

Дефиниција 2. Процесот H е предвидлив ако е едно од наведените:

а) непрекинат од лево адаптиран процес, особено, непрекинат адаптиран процес;

б) гранична вредност (скоро сигурно, по веројатност) на непрекинати од лево процеси;

в) регуларен непрекинат од десно така што, за кое било време на стопирање τ, H_τ е $\mathcal{F}_\tau$–мерлив, σ-алгебрата генерирана од множествата $A \cap \{T < t\}$, каде $A \in \mathcal{F}_t$;

г) Борел-мерлива функција од предвидлив процес.

Пример 1. Поасоновиот процес $N(t)$ е непрекинат од десно и јасно е адаптиран на неговата природна филтрација. Може да се покаже дека не е предвидлив. Неговата непрекината лева модификација $N(t^-) = \lim_{s\to t} N(s)$ е предвидлив, бидејќи е адапитран и непрекинат од лево од а). Која било мерлива функција од $N(t^-)$ е, исто така, предвидлив од г). ♦

Пример 2. Непрекинат од десно адаптиран процес може да не биде предвидлив, дури и ако е граница на непрекинати од лево процеси, на пример $X_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} X((t+\varepsilon)^-)$. ♦

Пример 3. Нека T е време на стопирање. Ова значи дека за кое било t, множеството $\{T > t\} \in \mathcal{F}_t$. Да го разгледаме процесот $X(t) = I_{[0,T]}(t)$. Тој е адаптиран, бидејќи неговите вредности се определени од множеството $\{T \le t\}$ $(X(t) = 1$ ако и само ако $\omega \in \{T \le t\})$ и $\{T \le t\} = \{T > t\}^c \in \mathcal{F}_t$. $X(t)$ е непрекинат од лево. Следува дека тој е предвидлив процес од а).

Се гледа и дека T е време на стопирање ако и само ако процесот $X(t) = I_{[0,T]}(t)$ е адаптиран. ♦

Пример 4. Подоцна ќе видиме дека кога филтрацијата е генерирана од Брауновото движење, тогаш кој било непрекинат од десно адаптиран процес е предвидлив. Ова е причината зошто во дефиницијата на Итовиот интеграл непрекинатите од десно функции се дозволени како интеграли. ♦

6.3. Декомпозиција на Дуб-Мејер

Теорема 1. Ако $X(t)$ е субмартингал или локален субмартингал, тогаш постои локален мартингал $M(t)$ и единствен растечки предвидлив процес $A(t)$, кој е локално интеграбилен, така што:

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t). \qquad (*)$$

Ако $X(t)$ е субмартингал од Дирихлеова класа (D), тогаш процесот A е интеграбилен, односно $\sup_t E(A(t)) < \infty$ и $M(t)$ е рамномерно интеграбилен мартингал.

Пример 1.

1) Нека $X(t) = B^2(t)$ на конечен интервал $t \le T$. $X(t)$ е субмартингал. Декомпозицијата (*) важи за: $M(t) = B^2(t) - t$ и $A(t) = t$.

Бидејќи интервалот е конечен, $M(t)$ е рамномерно интеграбилен и A е интеграбилен.

2) Нека $X(t) = B^2(t)$ на бесконечен интервал $t \geq 0$. Тогаш (*) важи за: $M(t) = B^2(t) - t$ и $A(t) = t$.

Бидејќи интервалот е бесконечен $M(t)$ е мартингал и A е локално интеграбилен, на пример може да се земе локализираната низа $\tau_n = n$.

3) Нека $X(t) = N(t)$ е Поасонов процес со стапка (интензитет) λ. Тогаш X е субмартингал.

Декомпозицијата (*) важи за $M(t) = N(t) - \lambda t$ и $A(t) = \lambda t$. ♦

За процесите по дискретно време, декомпозицијата (*) е дадена од Дуб (Doob) и се добива лесно.

Навистина, ако X_n е субмартингал, тогаш јасно е:

$$X_{n+1} = X_0 + \sum_{i=0}^{n}((X_{i+1} - E(X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i)) + \sum_{i=0}^{n}(E(X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i) - X_i),$$

каде што мартингалот и растечкиот процес се дадени со:

$$M_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}(X_{i+1} - E(X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i))$$

и:

$$A_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}(E(X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i) - X_i).$$

A_n е растечки процес од својството на субмартингал, $E(X_{i+1} \mid \mathcal{F}_i) - X_i \geq 0$, за сите $i \in \mathbb{N}$. Тој е, исто така, предвидлив, бидејќи $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ и сите други членови се $\mathcal{F}_n$-мерливи.

Многу потешко е да се докаже декомпозицијата (*) во непрекинат случај и ова е направено од Мејер (Meyer).

6.4. Интеграли во однос на полумартингали

Во овој дел ќе биде дефиниран стохастичкиот интеграл $\int_0^T H(t)\,dS(t)$, каде што $S(t)$ е полумартингал. Имаќи ја предвид репрезентацијата на $S(t)$, $S(t) = S(0) + M(t) + A(t)$, интегралот во однос на $S(t)$ е сума на два интеграли во однос на локалниот мартингал $M(t)$ и друг интеграл во однос на процесот со конечна варијација $A(t)$. Интегралот во однос на $A(t)$ може да се пресмета со интеграција по пат како Стилтјесов интеграл, бидејќи $A(t)$, иако е случаен, е со конечна варијација.

Интегралот во однос на мартингалот $M(t)$ е нов, односно тоа е стохастичкиот интеграл $\int_0^T H(t)\,dM(t)$. Кога $M(t)$ е Брауновото движење $B(t)$, тоа е Итовиот интеграл, кој веќе претходно го разгледувавме. Сега за мартингалите е дозволено да имаат скокови и ова ја прави теоријата покомплицирана. Клучното својство кое се користи во дефиницијата на Итовиот интеграл е тоа дека на конечните интервали Брауновото движење е квадратно интеграбилен мартингал. Ова својство на локално ниво игра многу важна улога во општ случај. Условите за постоење на интегралот во однос на мартингалот ја вклучува квадратната варијација на мартингалот.

За прост предвидлив процес $H(t)$, даден со:

$$H(t) = H(0)I_0 + \sum_{i=0}^{n-1} H_i I_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

каде што $0 = T_0 \le T_1 \le \ldots \le T_n \le T$ се времиња на стопирање и H_i се $\mathcal{F}_{T_i}$ –мерливи, стохастичкиот интеграл е дефиниран преку сумата:

$$\int_0^T H(t)\,dS(t) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i (M(T_{i+1}) - M(T_i)).$$

Ако $M(t)$ е локално квадратно интеграбилен мартингал, тогаш од L^2 теоријата (Хилбертови простори) може да се прошири стохастичкиот интеграл од прости предвидливи процеси на класата од предвидиливи процеси H, така што:

$$\sqrt{\int_0^T H^2(t)\,d[M,M](t)} \qquad (*)$$

е локално интеграбилен. Ако $M(t)$ е непрекинат локален мартингал, тогаш стохастичкиот интеграл е дефиниран за поширока класа од предвидливи процеси H, за кои важи:

$$\int_0^T H^2(t)\,d[M,M](t) < \infty \qquad \text{скоро сигурно.}$$

Во продолжение ќе ги дадеме својствата на стохастичките интеграли во однос на мартингалите.

1) (Локално својство на мартингал) Ако $M(t)$ е локален мартингал, интегралот $\int_0^t H(s)\,dM(s)$ е локален мартингал.

2) (Својство на изометрија) Ако $M(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал и H задоволува:

$$E\left(\int_0^T H^2(s)\,d[M,M](s)\right) < \infty,$$

тогаш, $\int_0^t H(s)\,dM(s)$ е квадратно интеграбилен мартингал со математичко очекување 0 и дисперзија:

$$E\left(\int_0^t H(s)\,dM(s)\right)^2 = E\left(\int_0^t H^2(s)\,d[M,M](s)\right).$$

3) Ако локален мартингал $M(t)$ има конечна варијација, тогаш стохастичкиот интеграл не се разликува од Стилтјесовиот интеграл.

Пример 1. Да ги разгледаме Итовите интеграли во однос на Брауново движење. Бидејќи $B(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал на $[0,T]$, со $[B,B](t) = t$, за предвидлив процес H, така што $E\left(\int_0^T H^2(s)\,ds\right) < \infty$ и $\int_0^t H(s)\,dB(s)$ е квадратно интеграбилен мартингал со математичко очекување нула и дисперзија $\int_0^t E(H^2(s))\,ds$. ♦

Во продолжение ќе ги разгледаме стохастичките интеграли во однос на полумартингалите. Нека S е полумартингал со репрезентација:

$$S(t) = S(0) + M(t) + A(t),$$

каде што $M(t)$ е локален мартингал и $A(t)$ е процес со конечна варијација. Нека H е предвидлив процес, така што (*) е локално интеграбилен и:

$$\int_0^T |H(t)|dV_A(t) < \infty,$$

каде што $V_A(t)$ е варијација на процесот A. Тогаш стохастичкиот интеграл е дефиниран како сума од интегралите:

$$\int_0^t H(t)\,dS(t) = \int_0^T H(t)\,dM(t) + \int_0^T H(t)\,dA(t).$$

Бидејќи репрезентацијата на полумартингалот не е единствена, може да се провери дека стохастичкиот интеграл не зависи од репрезентацијата на полумартингалот. Навистина, ако $S(t) = S(0) + M_1(t) + A_1(t)$ е некоја друга репрезентација на полумартингалот $S(t)$, тогаш $(M - M_1)(t) = -(A - A_1)(t)$. Па, $M - M_1$ е локален мартингал со конечна дисперзија. Но, за вакви мартингали стохастичките и Стилтјесовите интеграли се совпаѓаат и следува дека:

$$\int H(t)\,dM_1(t) + \int H(t)\,dA_1(t) = \int H(t)\,dM(t) + \int H(t)\,dA(t) = \int H(t)\,dS(t)$$

.

Бидејќи интегралот во однос на локален мартингал е локален мартингал и интегралот во однос на процес со конечна варијација, следува дека стохастичкиот интеграл во однос на полумартингал е полумартингал.

Пример 2. Нека $N(t)$ е Поасонов процес. $N(t)$ има конечна варијација и интегралот $\int_0^T N(t)\,dN(t)$ е добро дефиниран како Стилтјесов интеграл,

$$\int_0^T N(t)\,dN(t) = \sum_{\tau_i \le T} N(\tau_i),$$

каде што τ_i се скоковите на $N(t)$. Интегралот $\int_0^T N(t)\,dN(t)$ не е стохастички интеграл, бидејќи $N(t)$ не е предвидлив, но $\int_0^T N(t^-)\,dN(t)$ е предвидлив процес. Ова не се разликува од интегралот во смисла на Стилтјес,

$$\int_0^T N(t^-)\,dN(t) = \sum_{\tau_i \le T} N(\tau_{i-1}).\ ♦$$

Во продолжение, ќе ги дадеме својствата на стохастичките интеграли во однос на полумартингали. Нека $X(t)$ е полумартингал и H е предвидлив процес, така што стохастичкиот интеграл постои за $0 \le t \le T$ и нека означиме:

$$(H \cdot X)(t); = \int_0^t H(s)\, dX() .$$

Тогаш, стохастичкиот интеграл $H \cdot X$ ги има следниве својства:

1) Скоковите на интегралот се појавуваат во точките на скок на полумартингалот X и:

$$\Delta(H \cdot X)(t) = H(t)\Delta X(t) .$$

Всушност, стохастичкиот интеграл во однос на непрекинат полумартингал е непрекинат процес.

2) Ако τ е време на стопирање, тогаш сопрениот интеграл е интеграл во однос на сопрениот полумартингал:

$$\int_0^{t\wedge\tau} H(s)\, dX(s) = \int_0^t H(s) I(s \le \tau)\, dX(s) = \int_0^t H(s)\, dX(s \wedge \tau) .$$

3) Ако $X(t)$ е процес со конечна варијација, тогаш $\int_0^t H(s)\, dX(s)$ не се разликува од Стилтјесовиот интеграл кој се пресметува со интеграција по патишта.

4) (Асоцијативност) Ако $Y(t) = \int_0^t H(s)\, dX(s)$ е полумартингал и ако K е предвидлив процес, така што $(K \cdot Y)(t) = \int_0^t K(s)\, dY(s)$ е дефиниран, тогаш:

$$K \cdot Y = K \cdot (H \cdot X) = (K \cdot H) \cdot X ,$$

односно:

$$\int_0^t K(s)\, dY(s) = \int_0^t K(s) H(s)\, dX(s) .$$

6.5. Квадратна варијација и коваријација

Ако X и Y се полумартингали на еден ист простор, тогаш квадратниот процес на коваријација, познат и како квадратно заграден процес, и го означуваме со $[X,Y](t)$, е дефиниран, обично, со:

$$[X,Y](t) = \lim \sum_{i=0}^{n-1} \left(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n) \right) \left(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n) \right),$$

каде што граничната вредност е земена по сите поделби $(t_i^n)_{i=0}^n$ на интервалот $[0,t]$, кога $\delta_n = \max_i (t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$, каде што конвергенцијата е по веројатност. Земајќи $Y = X$, го добиваме процесот на квадратна варијација на X.

Пример 1. Од претходно знаеме дека квадратната варијација на Брауновото движење $B(t)$ е $[B,B](t) = t$ и на Поасоновиот процес $N(t)$ е $[N,N](t) = N(t)$. ♦

Ќе ги дадеме основните својства на квадратната варијација, со соодветни објаснувања, при што доказите ќе бидат прескокнати.

1) Ако $X(t)$ е полумартингал, тогаш $[X,X]$ постои и е адаптиран процес.

2) Јасно е од дефиницијата дека квадратната варијација на интервали кои не се преклопуваат е сума од квадратните варијации над секој интервал. Па, $[X,X](t)$ е неопаѓачка функција по t. Последователно $[X,X](t)$ е функција со конечна варијација.

3) Од дефиницијата следува дека $[X,Y]$ е билинеарна и симетрична, односно $[X,Y] = [Y,X]$ и

$$[\alpha X + Y, \beta U + V] = \alpha\beta[X,U] + \alpha[X,V] + \beta[Y,U] + [Y,V].$$

4) (Поларизационен идентитет)

$$[X,Y] = \frac{1}{2}\left([X+Y, X+Y] - [X,X] - [Y,Y]\right).$$

Ова својство следува директно од претходното својство.

5) $[X,Y](t)$ е регуларна непрекината од десно функција (непрекината од лево функција) со конечна варијација. Ова следува од поларизациониот индентит, бидејќи $[X,Y]$ е разлика помеѓу две растечки функции.

6) Скоковите на процесот на квадратна коваријација се појавуваат во точките каде што сите процеси имаат скокови,

$$\Delta[X,Y](t) = \Delta X(t) \Delta Y(t).$$

7) Ако еден од процесите X или Y има конечна варијација, тогаш:

$$[X,Y](t)=\sum_{s\le t}\Delta X(s)\Delta Y(s).$$

Да забележиме дека, иако сумирањето е земено по сите s, кои се помали од t, има најмногу преброиво многу членови кои се различни од нула.

Следново својство се користи често и е директна последица на 7).

Последица 1. Ако $X(t)$ е непрекинат полумартингал со конечна варијација, тогаш тој има квадратна варијација нула со кои било друг полумартингал $Y(t)$.

Квадратната коваријација на стохастичките интеграли го има следново својство:

$$\left(\int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s),\int_0^{\cdot} K(s)\,dY(s)\right)(t)=\int_0^t H(s)K(s)\,d[X,Y](s).$$

Всушност, квадратната варијација на стохастичкиот интеграл е дадена со:

$$\left(\int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s),\int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s)\right)(t)=\int_0^t H^2(s)\,d[X,X](s)$$

и:

$$\left(\int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s),Y\right)(t)=\left(\int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s),\int_0^{\cdot} 1dY(s)\right)(t)$$

$$=\int_0^t H(s)\,d[X,Y](s).$$

Квадратната варијација има репрезентација преку стохастичкиот интеграл.

Теорема 1. Нека $X(t)$ е полумартингал кој е нула во координатниот почеток. Тогаш,

$$[X,X](t)=X^2(t)-2\int_0^t X(s^-)\,dX(s).$$

За разбивањето (t_i^n) на $[0,t]$, разгледуваме:

$$v_n(t)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(X(t_{i+1}^n)-X(t_i^n)\right)^2 .$$

За кое било фиксно t, низата $v_n(t)$, конвергира по веројатност кон граничната вредност $[X,X](t)$, кога $\max_{i\le n}(t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$. Уште повеќе, постои подниза n_k, така што во процесите $v_{n_k}(t)$, конвергира рамномерно на ограничен временски интервал кон процесот:

$$X^2(t) - 2\int_0^t X(s^-)\,dX(s).$$

Горната формула во теоремата интуитивно може да се толкува на следниот начин. Во сумата за $v_n(t)$, додавајќи и одземајќи $X^2(t_i)$, добиваме:

$$v_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(X^2(t_{i+1}^n) - X^2(t_i^n)\right) - 2\sum_{i=0}^{n-1} X(t_i^n)\left(X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n)\right).$$

Првата сума е $X^2(t)$, додека втората сума има гранична вредност, по веројатност, $\int_0^t X(s^-)\,dX(s)$. Да забележиме дека ова може да се искористи и во построгиот доказ. Алтернативно, горната формула може да се добие со користење на Итовата формула.

Последица 2. За полумартингалите X и Y, процесот на квадратната коваријација е дадена со:

$$[X,Y](t) = X(t)Y(t) - X(0)Y(0) - \int_0^t X(s^-)\,dY(s) - \int_0^t Y(s^-)\,dX(s).$$

Оваа формула е позната и како парцијална интеграција или правило на производ.

6.6. Итова формула за непрекинати полумартингали

Ако $X(t)$ е непрекинат мартингал и f е двапати непрекинато диференцијабилна функција, тогаш $Y(t) = f(X(t))$ е полумартингал и ја има следнава репрезентација:

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_0^t f'(X(s))\,dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\,d[X,X](s). \quad (*)$$

Последново равенство, во диференцијална форма може да се запише како:

$$df(X(t)) = f'(X(t))\,dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))\,d[X,X](t) .$$

Следува дека $f(X(t))$ е, исто така, полумартингал и неговата декомпозиција на мартингал и процес со конечна варијација може да се добие од Итовата формула со делење на стохастичкиот интеграл во однос на $X(t)$ во интеграл во однос на локален мартингал $M(t)$ и процес со конечна варијација $A(t)$.

Забелешка. Барањето за диференцијабилност на функцијата f може да се олабави. Ако, на пример $X(t)$ е со конечна варијација, тогаш f доволно е да биде еднаш непрекинато диференцијабилна. Функцијата f може да се дефинира само на отворено множество, но тогаш $X(t)$ мора да ги прима вредностите скоро сигурно во ова множество. На пример, ако $X(t)$ е позитивен полумартингал, тогаш Итовата формула може да се користи за $f(x) = \ln x$.

Итовата формула важи за конкавни функции и поопшто за функции кои се разлика од две конкавни функции, а оваа формула е позната како формула на Мејер-Ито (Ито-Танака). Всушност, ако f е конкавна функција на $\mathbb{R}$ и $X(t)$ е полумартингал, тогаш $f(X(t))$ е, исто така, полумартингал.

Од Итовата формула, следува дека ако полумартингал $X(t)$ е непрекинат со нула квадратна варијација $[X,X](t) = 0$, тогаш правилото за диференцирање е исто како во регуларниот калкулус. Ако $X(t)$ е Брауново движење, тогаш $d[X,X](t) = dt$ и важи:

$$d(f(B(t))) = f'(B(t))\,dB(t) + \frac{1}{2} f''(B(t))\,dt ,$$

$$f(B(t)) = f(B(0)) + \int_0^t f'(B(s))\,dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))\sigma^2(s)\,ds .$$

Ако $X(t)$ има скокови, тогаш формулата има уште еден дополнителен член.

Следниов резултат е директна последица на Итовата формула.

Последица 1. Нека $X(t)$ е непрекинат полумартингал и f е двапати непрекинато диференцијабилна функција. Тогаш,

$$[f(X), f(X)](t) = \int_0^t \left(f'(X(s)) \right)^2 d[X,X](s) .$$

Доказ. Бидејќи $[X, X]$ е со конечна варијација, од (*) следува:

$$[f(X), f(X)](t) = \left(\int_0^{\cdot} f'(X(s))\, dX(s), \int_0^{\cdot} f'(X(s))\, dX(s) \right)(t) . \blacksquare$$

Во продолжение, ќе ја дадеме Итовата формула за функции од повеќе променливи. Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е двапати непрекинато диференцијабилна функција и нека $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), ..., X_n(t))$ е непрекинат полумартингал во $\mathbb{R}^n$, односно секој $X_i(t)$ е непрекинат полумартингал. Тогаш, $f(\mathbf{X})$ е полумартингал и ја има следнава репрезентација:

$$f(\mathbf{X}(t)) - f(\mathbf{X}(0)) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}(s))\, dX_i(s)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{X}(s))\, d[X_i, X_j](s) .$$

6.7. Локални времиња

Нека $X(t)$ е непрекинат полумартингал. Да го разгледаме $|X(t) - a|$, $a \in \mathbb{R}$. Функцијата $|x - a|$ не е диференцијабилна во a, но во која било друга точка нејзиниот извод е даден со $\operatorname{sgn}(x - a)$, каде $\operatorname{sgn}(x) = 1$, за $x > 0$ и $\operatorname{sgn}(x) = -1$, за $x \le 0$. Ќе ја прошириме Итовата формула за овој случај.

Теорема 1. (Формула на Танака (Tanaka)) Нека $X(t)$ е непрекинат полумартингал. Тогаш, за кое било $a \in \mathbb{R}$, постои непрекинат неопаѓачки адаптиран процес $L^a(t)$, кој се нарекува локално време во a на $X(t)$, така што важи:

$$|X(t) - a| = |X(0) - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X(s) - a)\, dX(s) + L^a(t) .$$

Како функција во a, $L^a(t)$ е непрекината од десно со постоење на леви граници. За кое било фиксно a, како функција по t, $L^a(t)$ расте само кога $X(t) = a$, тоа е:

$$L^a(t)=\int_0^t I(X(s)=a)\,dL^a(s).$$

Уште повеќе, ако $X(t)$ е непрекинат локален мартингал, тогаш $L^a(t)$ е непрекината и по a и t.

Забелешка. Интуитивно, формулата на Танака може да се оправда со формална примена на Итовата формула на функцијата $\mathrm{sgn}(x)$. Изводот на $\mathrm{sgn}(x)$ е нула секаде, освен во нулата, каде што не е дефиниран. Можно е да се дефинира изводот како генерализирана функција или Шварцова дистрибуција, во случај кога е еднаков на 2δ. Следува дека вториот извод на $|x-a|$ е $\delta(x-a)$, каде δ е генерализирана функција (Диракова делта дистрибуција). Локалното време во a на $X(t)$ е дефинирано како:

$$L^a(t)=\int_0^t \delta\big(X(s)-a\big)\,ds,$$

од каде што со формална примена на Итовата формула ја добиваме формулата во горната теорема.

Теорема 2. (Формула за време на окупирање) Нека $X(t)$ е непрекинат полумартингал со локално време $L^a(t)$. Тогаш, за која било ограничена мерлива функција $g(x)$, така што важи:

$$\int_0^t g(X(s))\,d[X,X](s)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(a)\,L^a(t)\,da. \qquad (*)$$

Всушност,

$$[X,X](t)=\int_{-\infty}^{+\infty} L^a(t)\,da.$$

Пример 1. Нека $X(t)=B(t)$ е Брауново движење. Тогаш неговото локално време во нултиот процес, $L^0(t)$ (ја задоволува формулата на Танака):

$$L^0(t)=|B(t)|-\int_0^t \mathrm{sgn}(B(s))\,dB(s).$$

Од формулата (*) за времињата за окупирање, имаме:

$$\int_0^t g(B(s))\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty} g(a)L^a(t)\,da. \qquad (**)$$

Времето кое Брауновото движење го поминува во множество $A\subset\mathbb{R}$ сѐ до момент t е дадено (за $g(x)=I_A(x)$)

$$\int_0^t I_A(B(s))\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} I_A(a)\,L^a(t)\,da = \int_A L^a(t)\,da\,. \blacklozenge \qquad (***)$$

Забелешка. Земајќи $A = (a, a+da)$ и $g(x) = I_{(a,a+ad)}(x)$ е нејзиниот индикатор во (**), $L^a(t)\,da$ е време на Брауновото движење поминато во $(a, a+da)$ сѐ до момент t, кое го објаснува терминот „локално време“. Времето кое Брауновото движење го поминува во множеството A е $\int_A L^a(t)\,da$, а со тоа терминот „густина на време на окупирање“ е формулата (***). За непрекинат полумартингал формулата за времиња на окупирање (*) е „густина на времињата на окупација“ е формула во однос на случаен „часовник“ $d[X,X](s)$.

Пример 2. $X(t) = |B(t)|$ е полумартингал, бидејќи $|x|$ е конкавна функција. Неговата декомпозиција на мартингал и процес со конечна варијација е дадена со формулата на Танака (Теорема 1). Имаме дека $\sqrt{|B(t)|}$ не е полумартингал. ♦

Пример 3. Функцијата $(x-a)^+$ е многу важна при апликациите во финансии, бидејќи преку неа се даваат исплаќањата при операции на берзата. Формулата на Мејер-Танака за $(x-a)^+$ е:

$$(X(t)-a)^+ = (X(0)-a)^+ + \int_0^t I(X(s)>a)\,dX(s) + \frac{1}{2}L_t^a\,. \blacklozenge$$

Теорема 3. Нека $L^a(t)$ е локално време на Брауновото движење во a и $f_t(a)$ е густината на $N(0,t)$ во a. Тогаш,

$$E\left(L^a(t)\right) = \int_0^t f_s(a)\,da\,,$$

од каде што:

$$\frac{dE\left(L^a(t)\right)}{dt} = f_t(a)\,.$$

Доказ. Земајќи го математичко очекување на двете страни на равенката (**) и правејќи промена во редоследот на интеграција, добиваме дека за која било позитивна и ограничена функција g,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(a)\,f_s(a)\,dsda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(a)\,E\left(L^a(t)\right)da\,.$$

Бидејќи функцијата g е ограничена, следува тврдењето на теоремата. ■

Сличен резултат може да се даде за непрекинати полумартингали за користење на равенката (*).

Да забележиме дека локалните времиња можат да бидат дефинирани за прекинати полумартингали. За кое било фиксно a, $L^a(t)$ е непрекината неопаѓачка функција t и расте само во точките на непрекинатост во $X(t)$, каде што е еднакво на a, односно $X(t^-) = X(t) = a$. Формулата (*) важи за квадратната варијација $[X, X]$, која е заменета со нејзиниот непрекинат дел $[X, X]^c$.

6.8. Стохастички експоненцијал

Стохастичкиот експоненцијал (исто познат како полумартингал или Долеан-Дад експоненцијал (Doléans-Dade)) е стохастички аналог на експоненцијалната функција. Ако $f(t)$ е глатка функција (бесконечно непрекинато диференцијабилна), тогаш $g(t) = e^{f(t)}$ е решение на диференцијалната равенка $dg(t) = g(t)\,df(t)$. Стохастичкиот експоненцијал е дефиниран како решение на слична стохастичка диференцијална равенка. Стохастичкиот експоненцијал на Итовите процеси беше веќе претходно воведен. За полумартингал $X(t)$, неговиот стохастички експоненцијал $E(X)(t) = U(t)$ е дефиниран како единствено решение на равенката:

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(s^-)\,dX(s) \qquad (*)$$

или:

$$dU(t) = U(t^-)\,dX(t),$$

каде што $U(0) = 1$. Како примена на Итовата формула и правилата на стохастичкиот калкулус ја имаме следнава теорема:

Теорема 1. Нека $X(t)$ е непрекинат полумартингал. Тогаш неговиот стохастички експоненцијал е даден со:

$$U(t) = E(X)(t) = e^{X(t) - X(0) - \frac{1}{2}[X,X](t)}. \qquad (**)$$

Доказ. Запишуваме $U(t)=e^{V(t)}$, каде што:

$$V(t)=X(t)-X(0)-\frac{1}{2}[X,X](t).$$

Тогаш,

$$dU(t)=d\left(e^{V(t)}\right)=e^{V(t)}dV(t)+\frac{1}{2}e^{V(t)}\,d[V,V](t).$$

Користејќи дека $[X,X](t)$ е непрекинат процес со конечна варијација, добиваме:

$$[X,[X,X]](t)=0$$

и:

$$[V,V](t)=[X,X](t).$$

Користејќи го ова, добиваме:

$$dU(t)=e^{V(t)}\,dX(t)-\frac{1}{2}e^{V(t)}d[X,X](t)+\frac{1}{2}e^{V(t)}\,d[X,X](t)=e^{V(t)}\,dX(t)$$

или $dU(t)=U(t)\,dX(t)$. Следува дека $U(t)$ е дефинирано со (**) го задоволува (*). За да ја докажеме единственоста, нека $V(t)$ биде друго решение на (*) и нека го разгледаме $\dfrac{V(t)}{U(t)}$. Со парцијална интеграција, добиваме:

$$d\left(\frac{V(t)}{U(t)}\right)V(t)\,d\left(\frac{1}{U(t)}\right)+\frac{1}{U(t)}dV(t)+d[V,\frac{1}{U}](t).$$

Од Итовата формула, користејќи дека $U(t)$ е непрекинат и го задоволува (*), имаме:

$$d\left(\frac{1}{U(t)}\right)=-\frac{1}{U(t)}dX(t)+\frac{1}{U(t)}d[X,X](t).$$

Оттука,

$$d\left(\frac{V(t)}{U(t)}\right)=-\frac{V(t)}{U(t)}dX(t)+\frac{V(t)}{U(t)}dX(t)$$

$$+\frac{V(t)}{U(t)}d[X,X](t)-\frac{V(t)}{U(t)}d[X,X](t)=0.$$

Следува:

$$\frac{V(t)}{U(t)}=const=\frac{V(0)}{U(0)}=1. \blacksquare$$

Својствата на стохастичкиот експоненцијал се дадени во наредната теорема.

Теорема 2. Нека $X(t)$ и $Y(t)$ се полумартингали на ист простор. Тогаш,

а) $E(X)E(Y)(t) = E(X + Y + [X,Y])(t)$

б) Ако $X(t)$ е непрекинат, $X(0) = 0$, тогаш:

$(E(X)(t))^{-1} = E(-X + [X, X])(t)$.

Пример 1. (Процес на берза и процес на враќање) Примената во финансиите е дадена преку врската на процесот на берза и процесот на враќање. Враќањето е дефинирано со:

$$dR(t) = \frac{dS(t)}{dS(t^-)}.$$

Следува, цената на берзата (акциите) е стохастички експоненцијал од враќањето:

$$dS(t) = S(t^-)\,dR(t)$$

и:

$$S(t) = S(0)E(R)(t). \blacklozenge$$

Стохастичкиот експоненцијал $U = E(M)$ од мартингал или локален мартингал, $M(t)$ е стохастички интеграл во однос на $M(t)$. Бидејќи стохастичките интеграли во однос на мартингалите или локалните мартингали, се локални мартингали, $E(M)$ е локален мартингал. Во апликациите е многу важно да се има дополнителни услови за $E(M)$ за да биде мартингал.

Теорема 3. (Мартингал експоненцијал) Нека $M(t)$, $0 \le t \le T < \infty$ е непрекинат локален мартингал кој е нула во координатниот почеток. Тогаш, неговиот стохастички експоненцијал $E(M)$ е даден со: $e^{M(t)-\frac{1}{2}[M,M](t)}$ и тој е непрекинат позитивен локален мартингал. Последователно, тој е супермартингал, тој е интеграбилен и има конечно нерастечко математичко очекување. Тој е мартингал ако и само ако следниве услови важат:

1) $E\left(e^{M(T)-\frac{1}{2}[M,M](T)}\right) = 1$.

2) За сите $t \ge 0$, $E\left(\int e^{2M(s)-[M,M](s)}\, d[M,M](s)\right) < \infty$.

3) За сите $t \geq 0$, $E\left(\int_0^t e^{2M(s)} d[M,M](s)\right) < \infty$.

Дополнително, ако математичките очекувања погоре се конечни, тогаш $E(X)$ е квадратно интеграбилен мартингал.

Доказ. Од теоремата 1, од овој дел, $E(M)(t) = e^{M(t) - \frac{1}{2}[M,M](t)}$, па имаме дека ова е позитивен процес. Бидејќи е стохастички интеграл во однос на мартингал, тој е локален мартингал. Следува дека $E(M)$ е супермартингал, како позитивен локален мартингал. Супермартингалите имаат нерастечко математичко очекување и се мартингали ако и само ако нивното математичко очекување во моментот T е еднакво на математичкото очекување во 0. Од ова го имаме првиот услов. Вториот услов е директна последица на веќе познат резултат, кој вели дека ако еден локален мартингал има конечно математичко очекување на неговата квадратна варијација, тогаш тој локален мартингал е мартингал. Па, ако $E\left(E(M), E(M)\right)(t) < \infty$, тогаш $E(M)$ е мартингал. Од квадратната варијација на интегралот, имаме:

$$[E(M), E(M)](t) = \int_0^t e^{2M(s) - [M,M](s)} \, d[M,M](s).$$

Третиот услов следува од вториот услов, бидејќи $[M,M]$ е позитивен и растечки. Бидејќи:

$$\sup_{t \geq 0} E\left(E(M), E(M)\right) < \infty,$$

следува последното тврдење. ■

Теорема 4. (Услов на Казамаки (Kazamaki)) Нека $M(t)$ е непрекинат локален мартингал, каде што $M(0) = 0$. Ако $e^{\frac{1}{2}M(t)}$ е субмартингал, тогаш $E(M)$ е мартингал.

Теорема 5. Нека $M(t)$ е непрекинат мартингал, каде што $M(0) = 0$. Ако

$$E\left(e^{\frac{1}{2}M(T)}\right) < \infty,$$

тогаш, $E(M)$ е мартингал на $[0,T]$.

Доказ. Од неравенството на Јенсен, ако g е конкавна функција и $E\left(|g(M(t))|\right) < \infty$, за $t \leq T$, тогаш:

$$E\left(g(M(t))\right) \le E\left(g(M(T))\right)$$

и е субмартингал. Бидејќи $e^{\frac{x}{2}}$ е конкавна, тврдењето на теоремата следува од условот на Казамаки. ■

Теорема 6. (Услов на Новиков (Novikov)) Нека $M(t)$ е непрекинат локален мартингал, каде што $M(0) = 0$. Да претпоставиме дека за секој $t \le T$, важи:

$$E\left(e^{\frac{1}{2}[M,M](t)}\right) < \infty . \qquad (***)$$

Тогаш $E(M)$ е мартингал со математичко очекување 1. Всушност, ако за секој t постои константа K_t, така што $[M,M](t) < K_t$, тогаш $E(M)(t)$, $t \le T$ е мартингал.

Доказ. Условот (***) повлекува дека $[M,M](t)$ има моменти. Од неравенството на Буркхолдер-Гунди, имаме дека $\sup_{t \le T} M(t)$ е интеграбилен, тогаш $M(t)$ е мартингал. Следно, користејќи ја формулата за $E(M)$ и неравенството на Јенсен,

$$E\left(\sqrt{X}\right) \le \sqrt{E(X)} ,$$

$$E\left(e^{\frac{1}{2}M(T)}\right) = E\left(\sqrt{\mathbf{E}(M)(T)e^{\frac{1}{2}[M,M](T)}}\right) \le \sqrt{E\left(\mathbf{E}(M)(T)E\left(e^{\frac{1}{2}[M,M](T)}\right)\right)} < \infty .$$

Последниот израз е конечен, бидејќи $E\left(\mathbf{E}(M)(T)\right) < \infty$, бидејќи $\mathbf{E}(M)$ е супермартингал. Сега од условот, следува тврдењето на теоремата. ■

Во продолжение е чекорот, кој недостасуваше во доказот на теоремата на Леви, за карактеризацијата на Бруновото движење.

Последица 1. Ако $M(t)$ е непрекинат локален мартингал, каде што: $[M,M](t) = t$, тогаш, $U(t) = E(uM)(t) = e^{uM(t) - u^2\frac{t}{2}}$ е мартингал.

Доказ. Јасно, $uX(t)$ е непрекинат локален мартингал со квадратна варијација $u^2 t$. Сега резултатот следува од условот на Новиков.

Можно е да се даде доказ од првите принципи, со користење на неравенството на Буркхолдер-Гунди и фактот дека при условот:

$$E\left(\int_0^T H^2(s)\,d[M,M](s)\right) < \infty,$$

стохастичките интеграли во однос на мартингали се мартингали. Бидејќи U е стохастички експоненцијал, тој ја задоволува стохастичката диференцијална равенка:

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(s)\,d(uM(s)).$$

Доволен услов за стохастичкиот интеграл да биде мартингал е конечноста на математичкото очекување од неговата квадратна варијација. Следува дека доволно е да го провериме условот:

$$E\left(\int U^2(t)\,d[uM,uM](t)\right) = u^2 E\left(\int_0^T U^2(t)\,dt\right) < \infty.$$

За да го видиме ова, го користиме неравенството на Буркхолдер-Гунди за $p = 2$ (за $U(t) - 1$ за да имаме 0 во $t = 0$). Добиваме:

$$E(U^2(T) - 1) \le E\left(\sup_{t \le T} U(t)\right)^2 - 1 \le CE\left([U,U](T)\right) = C\int_0^T E\left(U^2(t)\right)dt.$$

Нека: $h(t) = E\left(U^2(t)\right)$. Тогаш,

$$h(T) \le 1 + C\int_0^T h(t)\,dt.$$

Неравенството на Гронвал (Gronwall) ни дава дека $h(T) \le e^{CT} < \infty$. Следува дека:

$E(U^2(T)) < \infty$ и $U(t)$ е мартингал. ■

Наредниот дел ќе се однесува повеќе за алатките за процеси со скокови.

6.9. Компензатори и острозаградени процеси

Еден процес N се нарекува растечки ако сите негови реализации $N(t)$ се неопаѓачки функции по t. Еден процес N е со конечна варијација, ако сите негови реализации $N(t)$ се функции со конечна варијација, $V_N(t) < \infty$ за сите t, каде што $V_N(t)$ е варијацијата на N на $[0,t]$.

Дефиниција 1. Растечки процес N, $t \geq 0$ се нарекува интеграбилен ако $\sup_{t\geq 0} E(N(t)) < \infty$.

Процес со конечна варијација $N(t)$ е со интеграбилна варијација ако неговиот процес на варијација е интеграбилен, $\sup_{t\geq 0} E(V_N(t)) < \infty$.

Процес со конечна варијација $N(t)$ е со локално интеграбилна варијација ако постои низа од стопирачки времиња $\tau_n \to \infty$, така што $N(t \wedge \tau_n)$ е со интеграбилна варијација, односно $\sup_{t\geq 0} E(V_N(t)) < \infty$.

Пример 1. Поасонов процес $N(t)$ со параметар λ е со конечна, но не интеграбилна варијација, бидејќи за кое било t, $V_N(t) = N(t) < \infty$, но $\sup_{t\geq 0} E(V_N(t)) = \infty$. Тој е со локално интеграбилна варијација, бидејќи $\sup_{t\geq 0} E(V_N(t \wedge n) = \lambda n < \infty$. Овде $\tau_n = n$. ♦

Пример 2. Може да се види дека процесот со конечна варијација $N(t)$, со ограничени скокови, $|\Delta N(t)| \leq c$ е со локално интеграбилна варијација. Ако $\tau_n = \inf\{t : V_N(t) \geq n\}$, тогаш $N(t \wedge \tau_n)$ има варијација ограничена со $n + c$. τ_n се времиња на стопирање, за првпат кога ќе се помине границата. ♦

Дефиниција 2. Нека $N(t)$ е адаптиран процес со интеграбилна или локално интеграбилна варијација. Негов компензатор $A(t)$ е единствен предвидлив процес, така што $M(t) = N(t) - A(t)$ е локален мартингал.

Постоењето на компензатори е осигурано со Дуб-Мејеровата декомпозиција.

Теорема 1. Нека $N(t)$ е адаптиран процес со интеграбилна или локално интерабилна варијација. Тогаш постои неговиот компензатор. Уште повеќе, тој компензатор е локално интеграбилен.

Доказ. Бидејќи процесот со конечна варијација е разлика од два растечки процеси, доволно е да ја докажеме оваа теорема за растечки процеси.

Со локализација можно е да претпоставиме дека тој е интеграбилен. Но, растечки интеграбилен процес е субмартингал и тврдењето на теоремата следува од теоремата за декомпозиција на Дуб-Мејер. ■

Забелешка. Условот $M = N - A$ е локален мартингал е еквивалентен на условот:

$$E\left(\int_0^\infty H(s)\,dN(s)\right) = E\left(\int_0^\infty H(s)\,dA(s)\right),$$

за кој било позитивен предвидлив процес. Понекогаш, дури овој услов се зема во дефиницијата за негов компензатор.

Компензаторот на $N(t)$, исто така, се нарекува дуална предвидлива проекција на $N(t)$. Да забележиме дека компензаторот е единствен во однос на дадена филтрација и веројатност. Ако филтрацијата или веројатноста се променат, тогаш се менува и компензаторот.

Од претходно, процесот на квадратна варијација $[X, X](t)$ на полумартингал $X(t)$ постои и е неопаѓачки. Да ги разгледаме полумартингалите со интеграбилна $(\sup_{t\geq 0} E([X, X])(t)) < \infty)$ или локално интеграбилна квадратна варијација.

Дефиниција 3. Острозаградениот (аголно заграден или предвидлива квадратна варијација) $\langle X, X\rangle(t)$ процес од полумартингалот $X(t)$ е компензаторот на $[X, X](t)$. Тоа значи дека, тој е единствен предвидлив процес за кој, $[X, X](t) - \langle X, X\rangle(t)$ е локален мартингал.

Пример 3. Нека $N(t)$ е Поасонов процес. Тој е со конечна варијација и се менува само со скокови (чист скок процес), кои се со големина 1, $\Delta N(t) = 0$ или 1 и $(\Delta N(t))^2 = \Delta N(t)$. Неговата квадратна варијација е самиот процес $N(t)$,

$$[N, N](t) = \sum_{0\leq s\leq t} (\Delta N(s))^2 = \sum_{0\leq s\leq t} \Delta N(s) = N(t).$$

Јасно, $\sup_{0\leq t\leq T} E([N, N](t)) = T$. Следува дека $N(t)$ е со интеграбилна варијација на $[0, T]$. t е неслучајно, па со тоа предивдлив. Бидејќи:

$$[N, N](t) - t = N(t) - t$$

е мартингал,

$$\langle N, N\rangle(t) = t. \blacklozenge$$

Пример 4. Нека $B(t)$ е Брауново движење. Неговата квадратна варијација е $[B,B](t)=t$ и бидејќи е неслучајна, таа е предвидлива. Следува, $\langle B,B\rangle(t)=t$ и делот мартингал во теоремата на Дуб-Мејер декомпозицијата на $[B,B](t)$ е тривијален, $M(t)\equiv 0$. ♦

Последниов пример, може да се генерализира на кој било непрекинат полумартингал.

Теорема 2. Ако $X(t)$ е непрекинат полумартингал со интеграбилна квадратна варијација, тогаш $\langle X,X\rangle(t)=[X,X](t)$ и не постои разлика помеѓу острозаградениот и квадратнозаградениот процес.

Доказ. Квадратната варијација скока на точките на скокови на $X(t)$ и $\Delta[X,X](s)=(\Delta X(s))^2$. Бидејќи $X(t)$ нема скокови, $[X,X](t)$ е непрекинат, $[X,X](t)$ е предвидлив како непрекинат и адаптиран процес, па делот на мартингал во теоремата за декомпозиција на Дуб-Мејер на $[X,X](t)$ е тривијален, $M(t)\equiv 0$ и $\langle X,X\rangle(t)=[M,M](t)$. ■

Пример 5. Нека $X(t)$ е дифузија која е решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t)=\mu(X(t))+\sigma(X(t))\,dB(t).$$

Тогаш,

$$[X,X](t)=\int_0^t \sigma^2(X(s))\,ds=\langle X,X\rangle(t). \ \blacklozenge$$

Нека $M(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал, односно $\sup_t E(M^2(t))<\infty$. Квадратната варијација на $M(t)$ го има својството:

$$M^2(t)-[M,M](t)$$

е мартингал. $M^2(t)$ е субмартингал, бидејќи x^2 е конкавна функција. Користејќи ја теоремата на Дуб-Мејер за декомпозиција за полумартингали можеме да ја дадеме следнава теорема:

Теорема 3. Нека $M(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал. Тогаш острозаградениот процес $\langle M,M(t)\rangle$ е единствен предвидлив растечки процес за кои:

$$M^2(t)-\langle M,M\rangle(t) \qquad (*)$$

е мартингал.

Доказ. Од дефиницијата за острозаграден процес, $[M,M](t)-\langle M,M\rangle(t)$ е мартингал. Како разлика на два мартингали, $M^2(t)-\langle M,M\rangle(t)$ е, исто така, мартингал. Бидејќи $\langle M,M\rangle(t)$ е предвидлив и $M^2(t)$ е субмартингал, а единственоста следува од теоремата на Дуб-Мејер за декомпозиција. ■

Со земање на математичко очекување во (*), ја добиваме следнава последица:

Последица 1. Нека $M(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал. Тогаш,

$$E(M^2(T))=E\left([M,M(t)\right)=E\left(\langle M,M\rangle(t)\right).$$

Оваа последица ни дава за право да го користиме неравенството на Дуб за мартингали во острозаграден случај, т.е.:

$$E\left((\sup_{s\le T} M(s))^2\right)\le 4E\left(M^2(T)\right)=4E\left(\langle M,M\rangle(T)\right).$$

Теорема 4. Нека $M(t)$ е локално интеграбилен мартингал, тогаш предвидиливата квадратна варијација $\langle M,M\rangle(t)$ е единствен предвидлив процес за кој $M^2(t)-\langle M,M\rangle(t)$ е локален мартингал.

Следната теорема ни овозможува да донесеме одлука кога локален мартингал е мартингал со користење предвидлива квадратна варијација.

Теорема 5. Нека $M(t)$, $0\le t\le T<\infty$ е локален мартингал, така што за сите t, $E\left(\langle M,M\rangle(t)\right)<\infty$. Тогаш, $M(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал и дополнително важи:

$$E\left(M^2(t)\right)=E\left([M,M](t)\right)=E\left(\langle M,M\rangle(t)\right).$$

Ако $T=\infty$ и $\sup_{t<\infty} E\left(\langle M,M\rangle(t)\right)<\infty$, тогаш $M(t)$ е квадратно интеграбилен мартингал на $[0,\infty)$.

Доказ. Имаме $[M,M](t)-\langle M,M\rangle(t)$ е локален мартингал. Нека τ_n е локализирана низа. Тогаш, $E\left([M,M](t\wedge\tau_n)\right)=E\left(\langle M,M\rangle(t\wedge\tau_n)\right)$. Бидејќи двете страни се неопаѓачки, тие конвергираат кон истата граница кога $n\to\infty$. Но,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\langle M,M\rangle(t\wedge\tau_n)\right)=E\left(\langle M,M\rangle(t)\right)<\infty.$$

Оттука,

$$E\left([M,M](t)\right)=E\left(\langle M,M\rangle(t)\right)<\infty,$$

од каде што следува тврдењето на теоремата. ■

Бидејќи непрекинат локален мартингал е локално квадратно интеграбилен мартингал, ја имаме следнава последица.

Последица 2. Постои острозаградениот процес (предвидлива квадратна варијација) за непрекинат локален мартингал.

Функција со конечна варијација има декомпозиција на непрекинат и дискретен дел. Полумартингал е сума на процес со конечна варијација и локален мартингал. Локалниот мартингал може да се запише како декомпозиција на непрекинат локален мартингал и чисто прекинат дел. Таква декомпозиција бара поразличен пристап во случај на процеси со конечна варијација.

Дефиниција 4. Локален мартингал е чисто прекинат ако тој е ортогонален на кој било непрекинат локален мартингал. Локалните мартингали $M(t)$ и $N(t)$ се ортогонални ако $M(t)N(t)$ е локален мартингал.

Пример 6. Компензираниот Поасонов процес $\overline{N}(t)=N(t)-t$ е чисто прекинат мартингал. Нека $M(t)$ е произволен непрекинат локален мартингал. Тогаш од формулата за парцијална интеграција, добиваме:

$$M(t)\overline{N}(t)=\int_0^t M(s^-)\,d\overline{N}(s)+\int_0^t \overline{N}(s^-)\,dM(s)+[M,\overline{N}](t).$$

Бидејќи $\overline{N}$ е со конечна варијација, за квадратната коваријација имаме:

$$[M,\overline{N}](t)=\sum_{s\le t}\Delta M(s)\Delta\overline{N}(s).$$

Но, $M(t)$ е непрекинат, $\Delta M(s)=0$ и $[M,\overline{N}](t)=0$. Следува, $M(t)\overline{N}(t)$ е сума од два стохастички интеграли во однос на локални мартингали, па $M(t)\overline{N}(t)$ е локален мартингал. ♦

Може да се покаже дека кој било локален мартингал $M(t)$ има единствена декомпозиција:

$$M=M^c+M^d,$$

каде што M^c е непрекинат и M^d е чисто прекинат локален мартингал.

Ако $X(t)$ е полумартингал со репрезентација:

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t),$$

каде што $M(t)$ е локален мартингал, тогаш $M^c(t)$ е непрекинат мартингал-компонента на X, означена со X^{cm}. Ако горната репрезентација на $X(t)$ не е единствена, тогаш непрекинатиот мартингал-компонента на $X(t)$ е иста за сите репрезентации. Навистина, ако $X(t) = X(0) + M_1(t) + A_1(t)$ е друга репрезентација, тогаш $(M - M_1)(t) = -(A - A_1)(t)$. Следува дека $(M - M_1)$ е мартингал со конечна варијација. Следува дека неговата непрекината компонента е, исто така, мартингал со конечна варијација. Но, непрекинат мартингал со конечна варијација е константа. Оттука, $M^c - M_1^c = 0$. Следува, $X^{cm} = M^c$ е исто за сите репрезентации. Ако $X(t)$ е со конечна варијација, тогаш делот со мартингал е нула и од единственоста на X^{cm} ја имаме следнава последица:

Последица 3. Ако $X(t)$ е полумартингал со конечна варијација, тогаш $X^{cm} \equiv 0$.

На пример, компензираниот Поасонов процес $N(t) - t$ има нула непрекината мартингал компонента.

Може да се докаже дека:

$$\left\langle X^{cm}, X^{cm} \right\rangle = [X, X]^c,$$

каде што $[X, X]^c$ е непрекинат дел од процесот со конечна варијација $[X, X]$. Јасно, бидејќи X^{cm} е непрекинат, $\left\langle X^{cm}, X^{cm} \right\rangle = [X^{cm}, X^{cm}]$.

Нека $\Delta X(s) = X(s) - X(s^-)$ и ставаме: $X(0^-) = 0$ и $[X, X]^c(0) = 0$. Бидејќи скоковите на квадратната варијација задоволуваат:

$$\Delta[X, X](s) = (\Delta X(s))^2,$$

имаме:

$$[X, X](t) = [X, X]^c(t) + \sum_{0<s\le t} \Delta[X, X](s) = [X, X]^c(t) + \sum_{0<s\le t} (\Delta X(s))^2$$

$$= \left\langle X^{cm}, X^{cm} \right\rangle + \sum_{0<s\le t} (\Delta X(s))^2.$$

Бидејќи квадратната варијација $[X, X]$ за полумартингал постои и предвидливата квадратна варијација $\left\langle X^{cm}, X^{cm} \right\rangle$ постои.

Последица 4. Ако $X(t)$ е полумартингал, тогаш за секој t, важи:

$$\sum_{s\le t}(\Delta X(s))^2 < \infty .$$

Во продолжение, ќе ги разгледаме условите за постоење на стохастичкиот интеграл. Класата од процеси $H(t)$, за кои стохастичкиот интеграл во однос на мартингал $M(t)$ може да се дефинира, на есенцијален начин зависи од својствата на предвидливата квадратна варијација $\langle M, M\rangle$ на $M(t)$. Да ги разгледаме интегралите во однос на локално квадратно интеграбилен мартингал $M(t)$, кој може да биде прекинат. Стохастичкиот интеграл $\int_0^T H(s)\,dM(s)$ може да се дефинира за предвидливи процеси $H(t)$, така што:

$$\int_0^T H^2(t)\,d\langle M, M\rangle(t) < \infty \qquad (**)$$

и во овој случај интегралот $\int_0^t H(s)\,dM(s)$, $0 \le t \le T$ е локален мартингал.

Класата од процеси $H(t)$ кои можат да бидат интегрирани во однос на $M(t)$ е поширока кога $\langle M, M\rangle(t)$ е непрекинат и дури е и поширока кога $\langle M, M\rangle(t)$ е апсолутно непрекинат (може да се претстави како интеграл во однос на dt).

Пример 7. Нека филтрацијата $\mathbf{F}$ е генерирана од Брауновото движење $B(t)$ и Поасоновиот процес $N(t)$. Процесот $N(t^-)$ е непрекинат од лево модификација на $N(t)$. Од дефиницијата, $N(t^-) = \lim_{s\to t} N(s)$. Бидејќи е непрекинат од лево, овој процес е предвидлив. Имаме дека условот (**) е задоволен. Интегралот $\int_0^t N(s^-)\,dB(s)$ е добро дефиниран интеграл од предвидлив процес во однос на мартингалот $B(t)$. ♦

Предвидливата квадратна варијација (острозаградениот процес) има слични својства на квадратната варијација (квадратнозаграден) процес. Ќе бидат наведени без доказ. Сите процеси подолу се полумартингали со локално интеграбилна квадратна варијација. Тогаш,

1) $\langle X, X\rangle(t)$ е растечки по t.

2) $\langle X,Y\rangle$ е билинеарен и симетричен процес,

$$\langle \alpha X + Y, \beta U + V\rangle = \alpha\beta\langle X,U\rangle + \alpha\langle X,V\rangle + \beta\langle Y,U\rangle + \langle Y,V\rangle .$$

3) (Поларизационен идентитет)

$$\langle X,Y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle X+Y, X+Y\rangle - \langle X-Y, X-Y\rangle\big).$$

4) $\langle X,Y\rangle$ е предвидлив процес со конечна варијација.

5) $\langle X,Y\rangle = 0$ ако $X(t)$ или $Y(t)$ се со конечна варијација и еден од нив е непрекинат.

6) За острозаградениот процес од стохастички интеграли $\langle H\cdot X, K\cdot Y\rangle(t)$, имаме:

$$\left\langle \int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s), \int_0^{\cdot} K(s)\,dY(s)\right\rangle(t) = \int_0^t H(s)K(s)\,d\langle X,Y\rangle(s),$$

всушност,

$$\left\langle \int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s), \int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s)\right\rangle(t) = \int_0^t H^2(s)\,d\langle X,X\rangle(s),$$

$$\left\langle \int_0^{\cdot} H(s)\,dX(s), Y\right\rangle(t) = \left\langle \int_0^{\cdot} H(s)\,dX, \int_0^{\cdot} dY\right\rangle(t) = \int_0^t H(s)\,d\langle X,Y\rangle(s).$$

Знаеме дека стохастичките интеграли во однос на локалните мартингали се повторно локални мартингали. Можеме да ја дадеме следнава теорема користејќи ја острозаградeноста.

Теорема 6. Нека $M(t)$, $0\le t\le T$ е локален мартингал и $H(t)$ е предвидлив процес, така што:

$$E\left(\int_0^T H^2(s)\,d\langle M,M\rangle(s)\right) < \infty .$$

Тогаш, $\int_0^t H(s)\,dM(s)$ е квадратно интеграбилен мартингал, уште повеќе:

$$\left\langle \int_0^{\cdot} H(s)\,dM(s), \int_0^{\cdot} H(s)\,dM(s)\right\rangle(t) = \int_0^t H^2(s)\,d\langle M,M\rangle(s).$$

Користејќи ја оваа теорема, го добиваме својството на изометрија за стохастички интеграли преку острозаграден процес.

$$E\left(\int_0^t H(s)\,dM(s)\right)^2 = E\left(\int_0^t H^2(s)\,d\langle M,M\rangle(s)\right).$$

Пример 8. Нека $M(t)$ е компензиран Поасонов процес, $M(t)=N(t)-t$ и $H(t)$ е предвидлив, каде што $E\left(\int_0^T H^2(t)\,dt\right)<\infty$. Тогаш, $\int_0^t H(s)\,dM(s)$ е мартингал и дополнително:

$$E\left(\int_0^t H(s)\,dM(s)\right)=0$$

и:

$$E\left(\int_0^t H(s)\,dM(s)\right)^2 = E\left(\int_0^t H^2(s)\,ds\right). \blacklozenge$$

6.10. Итова формула за полумартингали

Нека $X(t)$ е полумартингал и нека f е двапати непрекинато диференцијабилна функција. Тогаш, $f(X(t))$ е полумартингал и Итовата формула зависи:

$$f(X(t))-f(X(0))=\int_0^t f'(X(s^-))\,dX(s)+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s^-))\,d[X,X](s)$$

$$+\sum\left(f(X(s))-f(X(s^-))-f'(X(s^-))\Delta X(s)-\frac{1}{2}f''(X(s^-))(\Delta X(s))^2\right)$$

.

Квадратната варијација $[X,X]$ скока во точките на скок на $X(t)$ и неговите скокови:

$$\Delta[X,X](s)=(\Delta X(s))^2.$$

Следува, делот со скокот на интегралот:

$$\int_0^t f''(X(s^-))d[X,X](s)$$

е дадена со:

$$\sum_{s\le t} f''(X(s^-))(\Delta X(s))^2 \ ,$$

од каде што добиваме еквивалентна форма на формулата:

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_0^t f'(X(s^-))\,dX(s) + \frac{1}{2}\int f''(X(s^-))\,d[X,X]^c(s)$$

$$+\sum_{s\le t}\Big(f(X(s)) - f(X(s^-)) - f'(X(s^-))\Delta X(s)\Big),$$

каде што $[X,X]^c$ е непрекинатата компонента од функцијата со конечна варијација $[X,X]$. Користејќи ја врската помеѓу квадратно заградените и острозаградените процеси, можеме да ја напишеме Итовата формула за острозаграден процес од $X(t)$, при претпоставка дека постои острозаградениот процес, имаме:

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_0^t f'(X(s^-))\,dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(S^-))\,d\left\langle X^{cm}, X^{cm}\right\rangle(s)$$

$$+\sum\Big(f(X(s)) - f(X(s^-)) - f'(X(s^-))\Delta X(s)\Big), \qquad (*)$$

каде што X^{cm} го означува делот со непрекинатиот мартингал од $X(t)$.

Пример 1. Нека $N(t)$ е Поасонов процес. Ќе го пресметаме $\int_0^t N(s^-)\,dN(s)$. Одговорот може да се даде со парцијална интеграција и имајќи предвид дека $(N(t)-t)^{cm} = 0$, добиваме:

$$N^2(t) = 2\int_0^t N(s^-)\,dN(s) + \sum_{s\le t}\Big(N^2(s) - N^2(s^-) - 2N(s^-)\Delta N(s)\Big).$$

Бидејќи, $N(s) = N(s^-) + \Delta N(s)$,

$$(N(s^-) + \Delta N(s))^2 - N^2(s^-) - 2N(s^-)\Delta N(s) = (\Delta N(s))^2 = \Delta N(s),$$

од каде што со средување, добиваме:

$$\sum_{s\le t} \Delta N(s) = N(t).$$

Оттука,

$$\int_0^t N(s^-)\,dN(s) = \frac{1}{2}\left(N^2(t) - N(t)\right). \blacklozenge$$

Формулата (*) за функција од n променливи гласи: $\mathbf{X}(t) = (X^1(t), X^2(t), ..., X^n(t))$ е полумартингал и f е двапати непрекинато диференцијабилна функција со n променливи,

$$f(\mathbf{X}(t)) - f(\mathbf{X}(0)) = \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}(s^-))\,dX^i(s)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial x_j}(\mathbf{X}(s^-))\,d\left\langle X^{i,cm}, X^{j,cm}\right\rangle(s)$$

$$+\sum_{s\le t}\left(f(\mathbf{X}(s)) - f(\mathbf{X}(s^-)) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{X}(s^-))\Delta X^i(s)\right).$$

Како примена на Итовата формула и правилата во стохастичкиот калкулус, ќе биде даден доказот на следнава теорема:

Теорема 1. Нека $X(t)$ е полумартингал. Тогаш стохастичката равенка:

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(s^-)\,dX(s) \qquad (*)$$

има единствено решение, кое се нарекува стохастички експоненцијал на $X(t)$ и ова решение е дадено со:

$$U(t) = \mathbf{E}(X)(t) = e^{X(t)-X(0)-\frac{1}{2}\langle X,X\rangle^c(t)}\prod_{s\le t}(1+\Delta X(s))e^{-\Delta X(s)}. \qquad (**)$$

Формулата (**), може да се запише, користејќи ја квадратната варијација, на следниов начин:

$$\mathbf{E}(x)(t) = e^{X(t)-X(0)-\frac{1}{2}[X,X](t)}\prod_{s\le t}(1+\Delta X(s))e^{(-\Delta X(s))+\frac{1}{2}(\Delta X(s))^2}.$$

Доказ. Нека $Y(t) = X(t) - X(0) - \frac{1}{2}\langle X, X\rangle^c(t)$

и:

$$V(t) = \prod_{s\le t}(1+\Delta X(s))e^{-\Delta X(s)}.$$

Да забележиме дека, иако производот е земен по сите $s \le t$, тогаш има најмногу преброиво многу точки во кои $\Delta X(s) \ne 0$ (од својството на регуларноста на процесот), па следува дека постојат најмногу преброиво многу елементи кои се различни од 1 во производот. Ќе докажеме дека овој производ конвергира. Бидејќи, $\sum_{s\le t}(\Delta X(s))^2 < \infty$, постојат само конечен број точки s, за кои $|\Delta X(s)| > \frac{1}{2}$, кои даваат конечен број на ненулт придонес на производот. Земајќи го производот со броеви поголеми од s, за кои $|\Delta X(s)| \le \frac{1}{2}$ и земајќи логаритам, доволно е да докажеме дека:

$$\sum_{s\le t} |\ln(1+\Delta X(s)) - \Delta X(s)|$$

ковергира. Ова следува од неравенството:

$$|\ln(1+\Delta X(s)) - \Delta X(s)| \le (\Delta X(s))^2 .$$

За да видиме дека $U(t)$ дефинирано со (**) ја задоволува равенката (*), ја користиме Итовата формула на функцијата $f(Y(t),V(t))$, каде што $f(x_1,x_2) = e^{x_1}x_2$. Овде дискусијата за единственоста заради компексноста ќе биде прескокната. ■

Пример 2. Стохастичкиот експоненцијал (**) на Поасоновиот процес лесно се гледа дека е: $\mathbf{E}(N)(t) = 2^{N(t)}$. ♦

Ако $U = \mathbf{E}(X)$ е стохастичкиот експоненцијал на $X(t)$, тогаш $X = \mathbf{L}(U)$ е стохастичкиот логаритам на $U(t)$, кој ја задоволува равенката (*),

$$dX(t) = \frac{dU(t)}{U(t^-)}$$

или:

$$\mathbf{L}(\mathbf{E}(X)) = X .$$

Во овој дел, ќе дадеме некои резултати од репрезентацијата на мартингали од стохастички интеграли од предвидливи процеси, кои уште се нарекуваат и предвидливи репрезентации. Нека $M(t)$ е мартингал, $0 \le t \le T$, адаптиран на филтрацијата $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ и $H(t)$ е предвидлив процес за кој важи $\int_0^T H^2(s)\,d\langle M,M\rangle(s) < \infty$, со веројатност 1. Тогаш, $\int_0^t H(s)\,dM(s)$ е локален мартингал. Својството на предвидливата репрезентација значи и дека обратното е точно. Нека со $\mathbf{F}^M = (\mathcal{F}_t^{\ M})$ ја означуваме природната филтрација на M .

Дефиниција 1. Локален мартингал $M(t)$ го има својството на предвидлива репрезентација ако за секој $\mathbf{F}^M$ -локален мартингал $X(t)$ постои предвидлив процес $H(t)$, така што:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t H(s)\,dM(s)\,.$$

Оваа дефиниција се разликува од класичната за мартингали со скокови, но се совпаѓа со дефиницијата за непрекинати мартингали. Брауновото движење го има својството на предвидилива репрезентација.

Теорема 2. (Репрезентација на Браунов мартингал) Нека $X(t)$, $0 \le t \le T$ е локален мартингал адаптиран на Брауновата филтрација: $\mathbf{F}^B = (\mathcal{F}_t)$. Тогаш постои предвидлив процес $H(t)$ така што $\int_0^T H^2(s)\,ds < \infty$ со веројатност 1 и важи равенката:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t H(s)\,dB(s)\,. \tag{*}$$

Дополнително, ако Y е интеграбилна $\mathcal{F}_T$–мерлива случајна променлива, $E(|Y|) < \infty$, тогаш:

$$Y = EY + \int_0^T H(t)\,dB(t)\,. \tag{**}$$

Ако Y и B имаат заедничка нормална диструбуција, тогаш процесот (**) е детереминиран.

Доказ. Нема да ја докажеме репрезентацијата на мартингал, ќе ја докажеме репрезентацијата за случајна променлива, чиј доказ е базиран на репрезентацијата на мартингал. Нека $X(t) = E(Y \mid \mathcal{F}_t)$. Тогаш, $X(t)$, $0 \le t \le T$ е мартингал. Од репрезентацијата на мартингал, постои $H(s)$, така што:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t H(s)\,dB(s)\,.$$

Земајќи $t = T$ го добиваме тврдењето на теоремата. ■

Да забележиме дека функционал на пат од Брауновото движење $B_{[0,T]}$ е случајна променлива Y, $\mathcal{F}_T$-мерлива. Претходната теорема тврди дека под претпоставките во теоремата, кој било функционал на Брауновото движење ја има формата (**).

Бидејќи Итовите интеграли се непрекинати и секој локален мартингал од Браунова филтрација е Итов интеграл, следува дека сите локални мартингали од Браунова филтрација се непрекинати.

Последица 1. Сите локални мартингали од Брауновата филтрација се непрекинати. Сите непрекинати од десно адаптирани процеси се предвидливи.

Последица 2. Нека $X(t)$, $0 \le t \le T$ е квадратно интеграбилен мартингал адаптиран на Брауновата филтрација $\mathbf{F}$. Тогаш постои и предвидлив процес $H(t)$, така што $E\left(\int_0^T H^2(s)\,ds\right) < \infty$ и важи репрезентацијата (*) . Уште повеќе,

$$\langle X, B\rangle(t) = \int_0^t H(s)\,ds \text{ и } \qquad H(t) = \frac{d\langle X, B\rangle(t)}{dt}. \qquad (***)$$

Горната равенка (***) во теоремата, следува од (*) од правилото за острозаграденост на интеграли.

Пример 3. (Репрезентација на мартингали)

1) Нека $X(t) = B^2(t) - t$. Тогаш, $X(t) = \int_0^t 2B(s)\,dB(s)$. Овде $H(t) = 2B(t)$, што се добива со користење на (***).

2) Нека $X(t) = f(B(t), t)$ е мартингал. Од Итовата формула:

$$dX(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(B(t), t)\,dB(t).$$

Следува:

$$H(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(B(t), t).$$

Оттука,

$$\frac{\langle f(B,t), B\rangle(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(B(t), t). \ \blacklozenge$$

Пример 4. (Репрезентација на случајни променливи)

1) Ако $Y = \int_0^T B(s)\,ds$, тогаш $Y = \int_0^T (T - s)\,dB(s)$.

2) Нека $Y = B^2(1)$. Тогаш,

$$M(t) = E(B^2(1) \mid \mathcal{F}_t) = B^2(t) + (1 - t).$$

Користејќи ја Итовата формула за $M(t)$, добиваме дека:

$$B^2(1) = 1 + 2\int_0^1 B(t)\, dB(t) . \blacklozenge$$

Сличен резултат важи и за филтрацијата на Поасоновиот процес.

Теорема 3. (Репрезентација на Поасонов мартингал)

Нека $M(t),\ 0 \le t \le T$ е локален мартингал адаптиран на Поасоновата филтрација. Тогаш постои предвидлив процес $H(t)$, така што:

$$M(t) = M(0) + \int_0^t H(s)\, d\overline{N}(s) ,$$

каде што $\overline{N}(t) = N(t) - t$ е компензиран Поасонов процес.

Кога филтрацијата е поголема од природната филтрација на мартингалот, тогаш ја имаме следнава теорема:

Теорема 4. Ако $M(t),\ 0 \le t \le T$ е произволен непрекинат локален мартингал и X е непрекинат $\mathbf{F}^M$ - локален мартингал. Тогаш $X(t)$ има репрезентација:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t H(s)\, dM(s) + Z(t),$$

каде што $H(t)$ е предвидлив процес и $\langle M, Z \rangle = 0$ (последователно $\langle X - Z, Z \rangle = 0$).

Пример 5. Нека $\mathbf{F}$ е генерирана од две независни Браунови движења B и W и нека:

$$M(t) = \int_0^t W(s)\, dB(s) .$$

Тој е мартингал, бидејќи стохастичкиот интеграл задоволува $E\left(W^2(s)\, ds\right) < \infty$. Ќе покажеме дека $M(t)$ го нема својството на предвидлива репрезентација. Имаме:

$$\langle M, M \rangle (t) = \int_0^t W^2(s)\, ds .$$

Следува:

$$W^2(t) = \frac{d\langle S,S\rangle(t)}{dt},$$

кој покажува дека $W^2(t)$ е $\mathcal{F}_t^M$ – мерлив. Следува дека мартингалот $X(t) = W^2(t) - t$ е адаптиран на $\mathcal{F}_t^M$, но не е интеграл од предвидлив процес во однос на $M(t)$. Од Итовата формула, имаме:

$$X(t) = 2\int_0^t W(s)\,dW(s).$$

Следува:

$$\langle X,M\rangle(t) = \int_0^t W^2(s)\,d\langle W,B\rangle(s) = 0.$$

Да претпоставиме дека постои $H(t)$, така што:

$$X(t) = \int_0^t H(u)\,dM(u).$$

Тогаш од (***),

$$H(t) = \frac{d\langle X,M\rangle(t)}{dt} = 0,$$

од каде што следува дека $X(t) = 0$, која е контрадикција. ♦

Овој пример има примена во финансии и ја покажува некомплетноста на стохастички модел на нестабилност.

Пример 6. Нека **F** е генерирана од Брауновото движење $B(t)$ и Поасоновиот процес $N(t)$ и нека:

$$M(t) = B(t) + N(t) - t = B(t) + \overline{N}(t),$$

каде што $\overline{N}(t) = N(t) - t$. Процесот $M(t)$ е мартингал, како сума од два мартингала. Ќе докажеме дека $M(t)$ го нема својството на предвидлива репрезентација.

Имаме:

$$[M,M](t) = [B,B](t) + [N,N](t) = N(t) + t.$$

Тогаш, имаме дека:

$$N(t) = [M,M](t) - t$$

е – $\mathcal{F}_t^M$ мерлив. Следува:

$$B(t) = M(t) - N(t) + t$$

е $\mathcal{F}_t^M$ -мерлив. Следува мартингало:

$$X(t) = \int_0^t N(s^-)\, dB(s)$$

е $\mathcal{F}_t^M$ –мерлив, но нема својство на предвидлива репрезентација. Во спротивно, ако има, тогаш:

$$\int_0^t N(s^-)\, dB(s) = \int_0^t H(s)\, dB(s) + \int_0^t H(s)\, d\overline{N}(s)$$

и:

$$\int_0^t \big(N(s^-) - H(s)\big) dB(s) = \int_0^t H(s)\, d\overline{N}(s)\,.$$

Бидејќи интегралот на десната страна е со конечна варијација, $H(s) = H(s^-)$, за скоро сите s. Следува дека $\int_0^t H(s)\, d\overline{N}(s) = 0$. Ова е исто како:

$$\int_0^t N(s^-)\, dN(s) = \int_0^t N(s^-)\, ds\,,$$

што не е можно. Ова не е можно, бидејќи при претпоставка дека $t = T_2$ е времето на вториот скок на $N(t)$, имаме дека:

$$\int_0^{T_2} N(s^-)\, dN(s) = 1$$

и:

$$\int_0^{T_2} N(s^-)\, ds = T_2 - T_1,$$

што не е можно. Овој пример ја покажува некомплетноста на моделите за цени на берза (акции) со компонента која има скокови. ♦

Забелешка. Дефиницијата 1 во овој дел се согласува со стандардната дефиниција за непрекинати мартингали, но е различна од дефиницијата за предвидлива репрезентација во однос на полумартингали. Општата дефиниција дозволува различни предвидливи функции h и H да бидат користени во интегралите во однос на делот со непрекинат мартингал M^c и делот со дискретен мартингал M^d од M,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t h(s)\, dM^c(s) + \int_0^t H(s)\, dM^d(s)\,.$$

Со оваа дефиниција, мартингалот во претходниот пример го има својството на предвидлива репрезентација.

Дефиницијата дадена овде е позгодна во примената во финансиите. Според теоријата на финансиската математика, опција може да се цени ако може да се репродуцира, што значи дека таа е интеграл од предвидлив процес $H(t)$ во однос на прекинатиот процес на цена берзата (акциите) $M(t)$, кој е мартингал. Процесот $H(t)$ го претставува бројот на споделувања (купопродажби), па нема смисла процесот $H(t)$ да се состои од две различни компоненти.

7. Дифузии

Во оваа глава ќе бидат разгледани различни својства на решенијата на стохастичките диференцијални равенки, односно ќе биде дадена квалитативна анализа на решенијата на стохастичките диференцијални равенки. Пристапот во анализата на решенија се заснова на мартингали кои се добиени преку Итовата формула. Овде, ќе бидат разгледани релациите помеѓу стохастичките диференцијални равенки и парцијалните диференцијални равенки, без претходно да имаме информации за парцијалните диференцијални равенки. Решенијата на стохастичките диференцијални равенки ќе ги нарекуваме дифузии.

7.1. Мартингали и формулата на Динкин

Итовата формула дава извор за конструкција на мартингали. Нека $X(t)$ е решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu(X(t),t)\,dt + \sigma(X(t),t)\,dB(t), \quad t \geq 0 \qquad (*)$$

и L_t е генераторот на $X(t)$, односно диференцијалниот оператор од втор ред асоциран на стохастичката диференцијална равенка (*)

$$L_t f(x,t) = (L_f)(x,t) = \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}(x,t).$$

Теорема 1. За која било двапати непрекината диференцијална по x и непрекинато диференцијабилна по t, функција $f(x,t)$, имаме:

$$df(X(t),t) = \left(L_f(X(t),t) + \frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t)\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)\sigma(X(t),t)\,dB(t).$$

Бидејќи при соодветни услови, Итовиот интеграл е мартингал, со изолирање на Итовиот интеграл се добиваат мартингали.

За да ја илустрираме оваа проста идеја, нека f има ограничен (со K) извод и ја користиме Итовата формула за $f(B(t))$. Тогаш,

$$f(B(t)) = f(0) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))\,ds + \int_0^t f'(B(s))\,dB(s).$$

Итовиот интеграл $\int_0^t f'(B(s))\,dB(s)$ е мартингал на $[0,T]$, бидејќи:

$$\int_0^T (f'(B(s)))^2\, ds < K^2 T < \infty .$$

Следува:

$$f(B(t)) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))\, ds$$

е мартингал.

Теорема 2. Нека $X(t)$ е решение на стохастичката диференцијална равенка (*) со коефициенти $\mu(x,t)$ и $\sigma(x,t)$, кои се Липшицови по x, со истата константа за сите t и за нив важи:

$$|\mu(x,t)| + |\sigma(x,t)| \le K(1+|x|) .$$

Ако $f(x,t)$ е двапати непрекинато диференцијабилна функција по x и непрекинато диференцијабилна по t ($f \in C^{2,1}$) со ограничен прв извод по x, тогаш процесот:

$$M_f(t) = f(X(t),t) - \int_0^t \left(L_u f + \frac{\partial f}{\partial t} \right)(X(u),u)\, du$$

е мартингал.

Доказ. Од Итовата формула:

$$M_f(t) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X(u),u)\,\sigma(X(u),u)\, dB(u) .$$

Од претпоставката дека $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ е ограничен за сите x и u,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) \right)^2 < K_1 .$$

Следува:

$$\int_0^T E\left(\frac{\partial f}{\partial x}(X(u),u)\sigma(X(u),u) \right)^2 du \le K_1 \int_0^T E\left(\sigma^2(X(u),u) \right) du .$$

Користејќи го условот за линеарен раст,

$$\int_0^T E\left(\frac{\partial f}{\partial x}(X(u),u)\sigma(X(u),u) \right)^2 du \le 2K_1 K^2 T \left(1 + E\left(\sup_{u \le T} X^2(u) \right) \right).$$

Но, $E\left(\sup_{u \le T} X^2(u) \right) < \infty$ од единственоста и постоењето, имаме дека дека горниот израз е конечен. Па, Итовиот интеграл го задоволува својството на мартингал. ■

Условот за ограничен парцијален извод на f, може да се замени со услов за експоненцијален раст.

Теорема 3. Нека $X(t)$ ги задоволува условите на претходната теорема. Ако $|X(0)|$ има момент генерирачка функција $E\left(e^{u|X(0)|}\right)<\infty$, за сите реални u, така што и $|X(t)|$ има момент генерирачка функција, $E\left(e^{u|X(t)|}\right)<\infty$, за сите $t\geq 0$. Во овој случај,

$$M_f(t)=f(X(t),t)-\int_0^t\left(L_f+\frac{\partial f}{\partial t}\right)(X(u),u)\,du$$

е мартингал за сите $f(x,t)\in C^{2,1}$, за кои важи следниов услов: за кое било t, постојат константи c_t и k_t така што за сите x, сите $t>0$ и $0\leq u\leq t$,

$$\max\left(\left|\frac{\partial f(x,u)}{\partial t}\right|,\left|\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right|\right)\leq c_t e^{k_t|x|}.$$

Доказ. Ќе го дадеме доказот кога дифузијата $X(t)=B(t)$ е Брауново движење. Нека $X(t)=B(t)$, тогаш од Итовата формула, $M_f(t)$ е дадена со:

$$M_f(t)=\int_0^t\frac{\partial f(B(s),s)}{\partial x}\,dB(s).$$

Имајќи ја предвид границата за: $\left|\frac{\partial f(x,s)}{\partial x}\right|$, за $s\leq t$

$$E\left(\frac{\partial f(B(s),s)}{\partial x}\right)^2\leq c_t^2 E\left(e^{2k_t|B(s)|}\right).$$

Запишувајќи го последното математичко очекување како интеграл во однос на функцијата на густина на распределба на нормалната распределба $N(0,t)$, јасно е дека тоа е конечно и интегралот на $[0,t]$ е конечен:

$$\int_0^t E\left(\frac{\partial f(B(s),s)}{\partial x}\right)^2 ds<\infty\ .$$

Од својството на мартингал на Итовите интеграли, конечноста на горниот интеграл повлекува дека Итовиот интеграл за $M_f(t)$ е мартингал. Може да се докаже дека без користење на Итовата формула, преку пресметки на интегралите во однос на функцијата на густината на нормалните распределби. ■

Последица 1. Нека $f(x,t)$ е решение на наназад стохастичката диференцијална равенка:

$$L_t f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0$$

и важат условите на која било од претходните две теореми. Тогаш $f(X(t),t)$ е мартингал.

Пример 1. Нека $X(t) = B(t)$. Тогаш $(Lf)(x) = \frac{1}{2} f''(x)$. Решенијата на $Lf = 0$ се линеарни функции $f(x) = ax + b$. Следува дека $f(B(t)) = aB(t) + b$ е мартингал, кое е очигледно, исто така, и од фактот дека $B(t)$ е мартингал. ♦

Пример 2. Нека $X(t) = B(t)$. Функцијата $f(x,t) = e^{x-\frac{t}{2}}$ е решение на наназад стохастичката диференцијална равенка:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0 .$$

Оттука, од последната последица можеме да го добиеме експоненцијалниот мартингал на Брауновото движење: $e^{B(t)-\frac{t}{2}}$. ♦

Последица 2. (Формула на Динкин (Dynkin)) Нека $X(t)$ ја задоволува равенката (*). Ако условите на која било од двете теореми важат, тогаш за кое било t, $0 \le t \le T$,

важи:

$$E\big(f(X(t),t)\big) = f(X(0),0) + E\left(\int_0^t \left(L_u f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)(X(u),u)\,du\right). \quad (**)$$

Тврдењето важи ако t е заменето со ограничено време на стопирање τ, $0 \le \tau \le T$.

Доказ. Ограничувањата на растот на функцијата и нејзините парцијални изводи се користат за да се добие интеграбилноста на $f(X(t),t)$ и останатите интеграли во (**). Бидејќи $M_f(t)$ е мартингал, тврдењето следува со земање на математички очекувања. За ограничени времиња на стопирање, резултатот следува од теоремата за опционо стопирање. ■

Пример 3. Ќе докажеме дека $J = \int_0^1 s\,dB(s)$ има нормална распределба $N\left(0, \frac{1}{3}\right)$ со барање на момент генерирачката функција

$m(u) = E\left(e^{uJ}\right)$. Да го разгледаме Итовиот интеграл $X(t) = \int_0^t s\, dB(s),\ t \le 1$ и да забележиме дека $J = X_1$. Бидејќи $dX(t) = t\, dB(t)$, имаме дека $X(t)$ е Итов процес каде што $\mu(x,t) = 0$ и $\sigma(x,t) = 0$. Нека $f(x,t) = f(x) = e^{ux}$. Оваа функција ги задоволува условите на последната теорема од овој дел. Лесно се гледа дека $L_t f(x,t) = \frac{1}{2} t^2 u^2 e^{ux}$ и $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Сега, од формулата на Динкин, добиваме:

$$E\left(e^{uX(t)}\right) = 1 + \frac{1}{2} u^2 \int_0^t s^2 E\left(e^{uX(s)}\right) ds .$$

Да означиме дека: $h(t) = E\left(e^{uX(t)}\right)$. Имаме:

$$h'(t) = \frac{1}{2} u^2 t^2 h(t), \text{ каде } h(0) = 1.$$

Решавајќи ја диференцијалната равенка со раздвојување на променливите, имаме:

$$\ln h(t) = \frac{1}{2} u^2 \int_0^t s^2\, ds = \frac{1}{2} u^2 \frac{t^3}{3}.$$

Следува:

$$h(t) = e^{\frac{1}{2} u^2 \frac{t^3}{3}},$$

која одговара на нормална распределба $N\left(0, \frac{t^3}{3}\right)$. Следува:

$$X(t) = \int_0^t s\, dB(s)$$

има нормална распределба $N\left(0, \frac{t^3}{3}\right)$, па добиваме дека интегралот J има нормална распределба $N\left(0, \frac{1}{3}\right)$. ♦

Пример 4. Ќе докажеме дека $\int_0^1 B(t)\, dt$ има нормална распределба $N\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Користејќи парцијална интеграција:

$$\int_0^1 B(t)\,dt = B(1) - \int_0^1 t\,dB(t) = \int_0^1 dB(t) - \int_0^1 t\,dB(t) = \int_0^1 (1-t)\,dB(t),$$

па, добиваме дека $\int_0^1 B(t)\,dt$ има нормална распределба $N\left(0,\frac{1}{3}\right)$. ♦

7.2. Математички очекувања на парцијални диференцијални равенки

Резултатите во овој дел даваат метод за пресметување на математичките очекувања на функција или функционал на процес на дифузија на границата. Ова математичко очекување може да се пресмета со користење решение на соодветна парцијална диференцијална равенка со даден граничен услов. Оваа врска покажува дека решенијата на парцијалните диференцијални равенки можат да се претставaт како функции (функционали) на соодветната дифузија.

Нека $X(t)$ е дифузија која ја задоволува стохастичката диференцијална равенка за $t > s \geq 0$,

$$dX(t) = \mu(X(t),t)\,dt + \sigma(X(t),t)\,dB(t) \qquad \text{и} \qquad X(s) = x.$$

Во продолжение ќе дадеме разултати за $E(g(X(T)) \mid X(t) = x)$. Да забележиме дека $g(X(T))$ мора да биде интеграбилен, за да $(E(|\,g(X(T))| < \infty)$ има смисла. Јасно, ако g е ограничено, тогаш ова е точно. Да забележиме дека од Марковото својство на $X(t)$, имаме:

$$E(g(X(T)) \mid X(t)) = E(g(X(T)) \mid \mathcal{F}_t).$$

Да забележиме дека последниов процес е мартингал. Последниов дел е Итовата формула, која го поврзува ова со парцијалните диференцијални равенки. Повторно овде внимаваме да имаме член мартингал, за што треба да дадеме одредени претпоставки за функцијата и нејзините изводи, кои се многу слични на условите во теоремите од претходниот дел.

Теорема 1. Нека $f(x,t)$ е решение на station наназад стохастичката диференцијална равенка:

$$L_t f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0, \text{ при што } f(x,T) = g(x)$$

каде што L_t е даден со:

$$L_t f(x,t) = (L_t f)(x,t) = \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,.$$

Ако за $f(x,t)$ важат условите на која било теорема од претходниот дел, тогаш:

$f(x,t) = E(g(X(T)) \mid X(t) = x)\,.$

Доказ. Од последицата 1 од претходниот дел од оваа глава, $f(X(t),t)$, $s \le t \le T$ е мартингал. Од својството на мартингал имаме:

$$E(f(X(T),T) \mid \mathcal{F}_t) = f(X(t),t)\,.$$

На границата $f(x,T) = g(x)$, имаме дека: $f(X(T),T) = g(X(T))$ и

$$f(X(t),t) = E(g(X(T)) \mid \mathcal{F}_t)\,.$$

Од својството на Марков на $X(t)$, имаме:

$$f(X(t),t) = E(g(X(T)) \mid X(t)),$$

па го добиваме тврдењето на теоремата. ■

Не е едноставно да се докаже дека математичкото очекување:

$$E(g(X(T)) \mid X(t) = x) = f(X,t)$$

ја задоволува наназад парцијалната диференцијална равенка, од каде што следува постоењето на нејзините решенија. Да претпоставиме за момент дека можеме да ја искористиме Итовата формула за $f(X(t),t)$. Тогаш, имаме:

$$f(X(t),t) = f(X(0),0) + \int_0^t \left(L_s f + \frac{\partial f}{\partial s} \right)(X(s),s)\,ds + M(t)\,,$$

каде што $M(t)$ е мартингал. Како што забележавме претходно,

$$f(X(t),t) = E(g(X(T)) \mid \mathcal{F}_t)$$

е мартингал. Следува дека:

$$\int_t^T \left(L_s f + \frac{\partial f}{\partial s} \right)(X(s),s)\,ds$$

е мартингал како разлика на два мартингала. Бидејќи интегралот во однос на ds е функција со конечна варијација, но мартингалот не е. Последното е точно ако интегралот е нула, од каде што ја добиваме наназад стохастичката диференцијална равенка:

$$L_t f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0, \text{ при што } f(x,T) = g(x)\,.$$

За оваа дискусија да биде попрецизна, потребно да ја провериме точноста на Итовата формула, односно глаткоста на условното математичко очекување. Ова може да се види со запишување на математичкото очекување како интеграл во однос на функцијата на густина,

$$f(x,t)=E\left(g(X(T)\mid X(t)=x\right)=\int g(y)\,p(y,T,x,t)\,dy\,,$$

каде што $p(y,T,x,t)$ е функцијата на густина на транзитивната веројатност. Па, x е во функцијата на густина на транзитивната веројатност и глаткоста (диференцијабилноста) по x следува. За Брауновото движење имаме дека:

$$p(y,T,x,t)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sqrt{T-t}}}$$

е глатка по x (бесконечно многу пати непрекинато диференцијабилна), па тврдењето се добива со диференцирање под интегралот. За други Гаусови дифузии дискусијата е слична. Во општ случај, ова е доста тешко да се докаже.

Забелешка. Последната теорема покажува дека кое било решение на наназад стохастичката диференцијална равенка со граничен услов даден со $g(x)$ е даден преку интеграл од g во однос на функцијата на густина на транзитивната веројатност, потврдувајќи дека функцијата на густина на транзитивната веројатност е фундаментално решение.

Сличен резултат на последната теорема се добива кога нулата на десната страна на наназад стохастичката диференцијална равенка е заменета со позната функција $-\phi$.

Теорема 2. Нека $f(x,t)$ е решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$L_t f(x,t)+\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=-\phi(x),\ \text{каде}\ f(x,T)=g(x).$$

Тогаш,

$$f(x,t)=E\left(\left(g(X(T))+\int\phi(X(s))\,ds\right)\mid X(t)=x\right).$$

Тврдење кое е поопшто од теоремата 1, од овој дел, е дадена со формулата Фејнман-Кац.

Теорема 3. [Формула на Фејнман-Кац (Feynmann-Kac)] За дадени ограничени функции $r(x,t)$ и $g(x)$ нека:

$$C(x,t)=E\left(e^{-\int_t^T r(X(u),u)\,du}g(X(T))\mid X(t)=x\right).$$

Да претпоставиме дека постои решение на стохастичката диференцијална равенка:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)+L_t f(x,t)=r(x,t)f(x,t)\text{, при што } f(x,T)=g(x). \qquad (*)$$

Тогаш решението е единствено и $C(x,t)$ е тоа решение.

Доказ. Ќе дадеме скица на доказот со користење на Итовата формула која е спарена со решенија на линеарна стохастичка диференцијална равенка. Да земеме едно решение на (*) и со примена на Итовата формула, имаме:

$$df(X(t),t)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}(X(t),t)+L_t f(X(t),t)\right)dt+\frac{\partial f}{\partial x}(X(t),t)\,\sigma(X(t),t)\,dB(t).$$

Последниот член е мартингал, па го запишуваме како $dM(t)$.Сега, користејќи го (*), добиваме:

$$df(X(t),t)=r(X(t),t)f(X(t),t)\,dt+dM(t).$$

Ова е линеарна стохастичка диференцијална равенка од Лангевин тип за $f(X(t),t)$, каде што $B(t)$ е заменето со $M(t)$. Со интегрирање на оваа стохастичка диференцијална равенка од t до T и користејќи дека $T\geq t$ како време е променлива и t како почеток, добиваме:

$$f(X(T),T)=f(X(t),t)e^{\int_t^T r(X(u),u)\,du}+e^{\int_t^T r(X(u),u)\,du}\int_t^T e^{\int_t^s r(X(u),u)\,du}\,dM(s).$$

Но,

$$f(X(T),T)=g(X(T)),$$

па со средување, добиваме:

$$g(X(T))e^{-\int_t^T r(X(u),u)\,du}=f(X(t),t)+\int_t^T e^{\int_t^s r(X(u),u)\,du}\,dM(s).$$

Бидејќи последниот член е интеграл од ограничена функција во однос на мартингал, па овој член е мартингал со математичко очекување 0. Барајќи математичко очекување, при што $X(t)=x$, добиваме дека: $C(x,t)=f(x,t)$.

■

Пример 1. Ќе дадеме веројатносна репрезентација на решението $f(x,t)$ на парцијалната диференцијална равенка:

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\mu x\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}=rf\,,\quad 0\leq t\leq T\,,\quad f(x,T)=x^2,$$

каде што σ, μ и r се позитивни константи. Ја решаваме оваа парцијална диференцијална равенка користејќи го решението на соодветната стохастичка диференцијална равенка. Стохастичката диференцијална равенка која одговара на L е:

$$dX(t) = \mu X(t)\,dt + \sigma X(t)\,dB(t).$$

Нејзиното решение е:

$$X(t) = X(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)}.$$

Од формулата на Фејнман-Кац, имаме:

$$f(x,t) = E\left(e^{-r(T-t)}X^2(T) \mid X(t) = x\right) = e^{-r(T-t)}E\left(X^2(T) \mid X(t) = x\right).$$

Користејќи дека:

$$X(T) = X(t)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(B(T) - B(t))},$$

добиваме:

$$E\left(X^2(T) \mid X(t) = x\right) = x^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(T-t)},$$

од каде што добиваме дека:

$$f(x,t) = x^2 e^{(2\mu + \sigma^2 - r)(T-t)}. \ \blacklozenge$$

Следнава теорема ни покажува дека $f(x,t) = E(g(X(T)) \mid X(t) = x)$ ја задоволува наназад парцијалната диференцијална равенка.

Теорема 4. (Равенка на Колмогоров (Kolmogorov)) Нека $X(t)$ е дифузија со генератор L_t. Да претпоставиме дека коефициентите $\mu(x,t)$ и $\sigma(x,t)$ на L_t се локално Липшиц непрекинати и имаат линеарен раст. Нека претпоставиме дополнително дека тие се двапати непрекинато диференцијабилни во однос на x и тие имаат најмногу полиномен раст. Ако $g(x)$ е двапати непрекинато диференцијабилна функција и заедно со своите изводи има полиномен раст, тогаш за функцијата:

$$f(x,t) = E(g(X(T)) \mid X(t) = x)$$

важи:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + L_t f(x,t) = 0,$$

во областа $0 \le t < T,\ x \in \mathbb{R}$, со граничен услов $f(x,T) = \lim_{t \to T} f(x,t) = g(x)$.

7.3. Временски хомогени дифузии

Случајот на временско независни коефициенти во стохастичките диференцијални равенки одговара на таканаречените временско хомогени дифузии,

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t). \qquad (*)$$

Теорема 1. Да претпоставиме дека постои единствено слабо решение на (*). Тогаш функцијата на густина на распределба на транзитивната веројатност на решението $p(y,t,x,s) = p(y,t-s,x,0)$ зависи само од $t-s$.

Доказ. Да го означиме со (X,B) слабото решение на (*). Од дефиницијата за функцијата на густина на распределба на транзитивната веројатност

$$p(y,t,x,s) = p(X(t) \le y \mid X(s) = x) = p(X_s^x(t) \le y),$$

каде што процесот $X_s^x(t)$ задоволува $X_x^s(s) = x$ и за $t > 0$, имаме:

$$X_s^x(s+t) = x + \int_s^{s+t} \mu(X_s^x(u))\,du + \int_s^{s+t} \sigma(X_s^x(u))\,dB(u). \qquad (**)$$

Нека $Y(t) = X_s^x(s+t)$ и $B_1(t) = B(s+t) - B(s)$, $t \ge 0$. Тогаш, $B_1(t)$ е Брауново движење и од горната равенка имаме дека за $Y(t)$, каде $t \ge 0$, важи:

$$Y(t) = x + \int_0^t \mu(Y(v))\,dv + \int_0^t \sigma(Y(v))\,dB_1(v) \quad \text{и} \quad Y(0) = x.$$

Ставајќи $s = 0$ во (**), добиваме:

$$X_0^x(t) = x + \int_0^t \mu(X_0^x(v))\,dv + \int_0^t \sigma(X_0^x(v))\,dB(v) \quad \text{и} \quad X_0^x(0) = x.$$

Следува дека $Y(t)$ и $X_0^x(t)$ ја задоволуваат истата стохастичка диференцијална равенка. Следува дека $Y(t)$ и $X_0^x(t)$ ја имаат истата распределба. Следува дека за $t > s$, имаме:

$$p(y,t,x,s) = p(X_s^x(t) \le y) = p(Y(t-s) \le y)$$
$$= p(X_0^x(t-s) \le y) = p(y,t-s,x,0). \ \blacksquare$$

Бидејќи функцијата на густина на распределба на транзитивната веројатност на хомогена дифузија зависи од t и s само преку $t-s$ и е означена како:

$$p(t,x,y) = p(y,t+s,x,s) = p(y,t,x,0) = p(X(t) \le y \mid X(0) = x)$$

и ја дава веројатноста за процесот да оди од x до $(-\infty, y]$ за време t. Нејзината функција на густина на распределба $p(t,x,y)$, кога таа постои, е функција на густина на распределба на условната веројатност на $X(t)$, при услов $X(0) = x$.

Генераторот L на временско хомогената дифузија е даден со:

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x) f''(x) + \mu(x) f'(x).$$

При соодветни услови, $p(t,x,y)$ е фундаментално решение на наназад парцијалната диференцијална равенка:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp = \frac{1}{2}\ \sigma^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Ако дополнително, $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ имаат изводи, $\sigma'(x)$, $\mu'(x)$ и $\sigma''(x)$, кои се ограничени и го задоволуваат Холдеровиот услов, тогаш $p(t,x,y)$ ја задоволува нанапред равенката по t и y, за кое било фиксно x, го добива обликот:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(y)p(t,x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)p(t,x,y)\right).$$

Запишани преку генераторот, наназад и нанапред равенките се:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp, \qquad\qquad \frac{\partial p}{\partial t} = L^* p,$$

каде што:

$$(L^* f)(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(y) f(y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y) f(y)\right),$$

го означува операторот кој се појавува во претходната равенка и е познат како адјунгиран оператор на L. Адјунгираниот оператор се дефинира, секогаш кога интегралите постојат, да го задоволува следното равенство:

$$\int g(x) Lf(x)\,dx = \int f(x) L^* g(x)\,dx.$$

Пример 1. Генераторот на Брауновото движење $L = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}$ се нарекува Лапласијан. Наназад парцијалната диференцијална равенка за функцијата на густина на распределба на транзитивната веројатност е:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Бидејќи распределбата на $B(t)$, кога $B(0) = x$ е нормална распределба $N(x,t)$, функцијата на густина на распределба на транзитивната веројатност е дадена со $N(x,t)$ и фундаменталното решение на горната парцијална диференцијална равенка:

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}.$$

Адјунгираниот оператор L^* е ист како L, па L е самоадјунгиран. Можно е да се докаже дека ако $\int e^{-ay^2} |g(y)| dy < \infty$, за некое $a > 0$, тогаш $f(x,t) = E_x(G(B(t)))$, за $t < \frac{1}{2a}$ ја задоволува топлинската равенка (heat equation) со почетен услов $f(0,x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Познат резултат е дека за кое било ненегативно решение на равенка за топлопроводливост може да се претстави како $\int p(t,x,y)\, dF(y)$ за некоја неопаѓачка функција F. ♦

Пример 2. (Блек-Шолс, (Black-Scholes)) Блек-Шолсовата стохастичка диференцијална равенка е дадена со:

$$dX(t) = \mu X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dB(t)$$

за константи μ и σ. Генераторот на оваа дифузија е:

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f''(x) + \mu x f'(x).$$

Нивната функција на густина на распределба на транзитивната веројатност е фундаментално решение на парцијалната диференцијална равенка:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Функцијата на густина на распределба на транзитивната веројатност е:

$$p(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right). \ ♦$$

Ако $X(t)$ е решение на (*), тогаш Итовата формула го добива обликот: за која било двапати непрекинато диференцијабилна $f(x)$, имаме:

$$df(X(t)) = Lf(X(t))\, dt + f'(X(t))\sigma(X(t))\, dB(t).$$

Сега ја имаме следнава теорема:

Теорема 2. Нека $X(t)$ е решение на стохастичката диференцијална равенка (*) со коефициенти $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ кои се Липшиц непрекинати и го задоволуваат условот:

$$|\mu(x)|+|\sigma(x)|\leq K(1+|x|).$$

Ако $f(x)$ е двапати непрекинато диференцијабилна по x со изводи кои немаат поголем раст од експоненцијалниот раст, тогаш процесот:

$$M_f(t)=f(X(t))-\int_0^t Lf(X(u))\,du$$

е мартингал.

Слабите решенија на (*) се дефинирани како решение на проблемот на мартингал со барање за постоење на филтриран простор на веројатност, со адаптиран процес $X(t)$, така што:

$$f(X(t))-\int_0^t Lf(X(u))\,du$$

е мартингал за која било двапати непрекинато диференцијабилна функција f, која е нула надвор од конечен интервал. Последниов израз ни овозможува да ги идентификуваме генераторите.

Забелешка. Концептот на генератор се појавува и во теоријата на Маркови процеси. Генераторот на временскиот хомоген Марков процес (не мора да биде процес дифузија) е линеарен оператор дефиниран со:

$$Lf(x)=\lim_{t\to 0}\frac{E\left(f(X(t))|X_0=x\right)-f(x)}{t}.$$

Ако горната граница постои, велиме дека f е во доменот на генераторот. Ако $X(t)$ е решение на (*) и f е ограничена функција и двапати непрекинато диференцијабилна, тогаш од последното равенство го добиваме генераторот на дифузијата. Ова може да се види со промена на редоследот на границата и математичкото очекување (доминантна конвергенција), користејќи ја Тејлоровата формула.

Следната теорема е резултат кој го дава постоењето и единственоста на слаби решенија.

Теорема 3. Ако $\sigma(x)$ е позитивна и непрекината и за сите $T>0$ постои K_T, така што за сите $x\in\mathbb{R}$, важи:

$$|\mu(x)|+|\sigma(x)|\le K_T(1+|x|),$$

тогаш постои единствено слабо решение на стохастичката диференцијална равенка (*) во која било точка $x\in\mathbb{R}$. Дополнително, ова решение го има силното Марково својство.

Следнава теорема важи за еднодимензионални хомогени дифузии, но не важи во повеќе димензии.

Теорема 4. (Енгелберт-Шмит, (Engelbert-Schmidt)) Стохастичката диференцијална равенка

$$dX(t)=\sigma(X(t))\,dB(t)$$

има слабо решение за било која почетна вредност $X(0)$ ако и само ако за сите $x\in\mathbb{R}$, од условот:

$$\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sigma^2(x+y)}=\infty, \quad \text{за сите } a>0$$

имаме $\sigma(x)=0$. Слабото решение е единствено ако горниот услов е еквивалентен со $\sigma(x)=0$.

Последица 1. Ако $\sigma(x)$ е непрекината функција на $\mathbb{R}$ или ограничена надвор од нулата, тогаш горната стохастичка диференцијална равенка има единствено слабо решение.

Пример 3. Од горната последица имаме дека стохастичката диференцијална равенка на Танака:

$$dX(t)=\operatorname{sgn}(X(t))\,dB(t), \qquad X(0)=0$$

има единствено слабо решение.

7.4. Излезни времиња од интервал

Главната алатка за изучување на различни својства на дифузиите е резултат на излезни времиња од интервал. Дефинираме $\tau_{(a,b)}$ да биде првиот временски момент кога дифузијата излегува (го напушта) интервалот (a,b), односно:

$$\tau_{(a,b)}=\inf\{t>0\ :\ X(t)\notin(a,b)\}.$$

Бидејќи $X(t)$ е непрекинат процес, $X(\tau_{(a,b)}) = a$ или b. Бидејќи τ е време на стопирање и уште повеќе бидејќи филтрацијата е непрекината од десно, $\{\tau < t\}$ и $\{\tau \ge t\}$ се во $\mathcal{F}_t$ за сите t. Во овој дел ќе дадеме резултати за $\tau_{(a,b)}$. Бидејќи интервалот (a,b) ќе биде фиксен овде, ќе користиме $\tau = \tau_{(a,b)}$.

Фактот дека процесот започнал во (a,b) и останал во (a,b) за сите $t < \tau$, ни овозможува да се конструираат мартингали, без дополнителни претпоставки на функциите и коефициентите. Следниот резултат е даден за анализа на дифузии, а е познат уште и како формула на Динкин. Нека T_a и T_b се времиња на достигање на a и b, соодветно, $T_a = \inf\{t > 0 : X(t) = a\}$, со договорот дека инфимум на празно множество е бесконечност. Јасно, $\tau = \min\{T_a, T_b\} = T_a \wedge T_b$.

Теорема 1. Нека $X(t)$ е дифузија со непрекинати $\sigma(x) > 0$ на $[a,b]$ и $X(0) = x$, $a < x < b$. Тогаш, за која било двапати непрекинато диференцијабилна функција $f(x)$ на $\mathbb{R}$, процесот:

$$f(X(t \wedge \tau)) - \int_0^{t\wedge\tau} Lf(X(s))\,ds$$

е мартингал.

Како последица на ова, имаме:

$$E_x\left(f(X(t \wedge \tau)) - \int_0^{t\wedge\tau} Lf(X(s))\,ds \right) = f(x). \tag{*}$$

Доказ. Користејќи ја Итовата формула и заменувајќи го t со $t \wedge \tau$, имаме:

$$f(X(t \wedge \tau)) - \int_0^{t\wedge\tau} Lf(X(s))\,ds = f(x) + \int_0^{t\wedge\tau} f'(X(s))\sigma(X(s))\,dB(s)\,. \tag{**}$$

Го запишуваме Итовиот интеграл како:

$$\int_0^t I(s \le \tau) f'(X(s))\sigma(X(s))\,dB(s).$$

Од претходен резултат, имаме дека $\{\tau \ge s\}$ се во $\mathcal{F}_s$, за сите s. Следува дека $I(s \le \tau)$ е адаптиран. Сега, за сите $s \le \tau$, $X(s) \in [a,b]$. Бидејќи $f'(s)\sigma(x)$ е непрекината на $[a,b]$ и е ограничена на $[a,b]$, на пример со K. Следува за сите $s \le t$, имаме:

$$| I(s \le \tau) f'(X(s))\sigma(X(s)) | \le K$$

и математичкото очекување:

$$E\left(\int_0^t I(s\le\tau)(f'(X(s))\sigma(X(s))^2\right)<K^2t$$

е конечен. Следува дека Итовиот интеграл:

$$\int_0^t I(s\le t)f'(X(s))\sigma(X(s))\,dB(s)$$

е мартингал за сите $t\le T$ и кое било T. Бидејќи тој е мартингал, има константно математичко очекување и земајќи математичко очекување во (**) го добиваме (*). ■

Следнава теорема тврди дека τ има конечно математичко очекување, а оттука тоа е конечно со веројатност единица.

Теорема 2. Нека $X(t)$ е дифузија со генератор L со непрекината $\sigma(x)>0$ на $[a,b]$ и $X(0)=x$, $a<x<b$. Тогаш, $E_x(\tau)=\nu(x)$ ја задоволува диференцијалната равенка:

$$L\nu=-1,$$

каде што:

$$\nu(a)=\nu(b)=0.$$

Доказ. Нека $\nu(x)$ ја задоволува горната равенка. Од претходната равенка:

$$E_x\left(\nu(X(t\wedge\tau))-\int_0^{t\wedge\tau}L\nu(X(s))\,ds\right)=\nu(x).$$

Но, $L\nu=-1$, па:

$$E_x\left(\nu(X(t\wedge\tau))\right)+E_x(t\wedge\tau)=\nu(x)$$

и:

$$E_x(t\wedge\tau)=\nu(x)-E_x\left(\nu(X(t\wedge\tau))\right). \qquad (***)$$

Јасно, $(t\wedge\tau)$ расте кон τ, кога $t\to\infty$. Уште $X(t\wedge\tau)\in(a,b)$ за кое било t и $\nu(x)$ е ограничено на $[a,b]$, на пример со K, па оттука:

$$E_x(\nu(X(t\wedge\tau)))\le K.$$

Од последната равенка (***) следува дека $E_x(\tau)<\infty$, па τ е конечно скоро сигурно и уште повеќе од теоремата за доминантна конвергенција:

$$E_x(\nu(X(t\wedge\tau)))\to E_x(\nu(X(\tau))).$$

Но, $X(\tau)=a$ или b, па $\nu(X(\tau))=0$. Од (***), имаме $E_x(\tau)=\nu(x)$. ■

Веројатноста дека процесот го достигнува b, пред тоа го достигнува a, односно $p_x(T_b < T_a)$ се користи за да се добијат некои понатамошни својства. Оваа веројатност се пресметува со помош на функцијата $S(x)$, која е решение на равенката:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)S''(x) + \mu(x)S'(x) = 0 \tag{o}$$

или:

$$LS = 0 .$$

Кое било решение на (о) се нарекува хармониска функција за L. Овде од интерес, ќе ни бидат само позитивните хармониски функции и со отфрлање на константните решенија, лесно се гледа дека за која било таква функција:

$$S'(x) = C\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}ds\right).$$

Па, $S'(x)$ е или позитивна за сите x ако $C > 0$ или негативна за сите x ако $C < 0$.

Последователно, ако S не е идентично еднакво на константа, $S(x)$ е монотона. Да претпоставиме дека $\sigma(x)$ е непрекината и позитивна и $\mu(x)$ е позитивна функција. Тогаш која било L-хармониска функција се добива од општото решение на (о), кое е дадено со:

$$S(x) = \int^{x}\exp\left(-\int^{u}\frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)du \tag{oo}$$

и вклучува две неопределени константи.

Пример 1. Ќе покажеме дека хармониските функции за L се дадени со (оо). Тогаш, S мора да биде решение на равенката:

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)S''(x) + \mu(x)S'(x) = 0 .$$

Оваа равенка нѐ води кон (со $h = S'$)

$$\frac{h'}{h} = -\frac{2\mu(x)}{\sigma^2(x)}$$

и имајќи предвид дека $\dfrac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}$ е интеграбилна, добиваме:

$$S'(x) = e^{-\int^{x}\frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy} .$$

Интегрирајќи повторно, го добиваме $S(x)$, односно:

$$S(x)=\int^{x}\exp\left(-\int^{u}\frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)du\ .\ \blacklozenge$$

Теорема 3. Нека $X(t)$ е дифузија со генератор L со непрекината $\sigma(x)>0$ на $[a,b]$. Нека $X(0)=x$, $a<x<b$. Тогаш,

$$p_x(T_b<T_a)=\frac{S(x)-S(a)}{S(b)-S(a)},$$

каде што $S(x)$ е дадено со (оо).

Доказ. Од првата теорема во овој дел, имаме:

$$E_x\left(S(X(t\wedge\tau))-\int_0^{t\wedge\tau}LS(X(s))\,ds\right)=S(x).$$

Но, $LS=0$, па оттука:

$$E_x(S(X(t\wedge\tau)))=S(x).$$

Бидејќи τ е конечно, тоа ги прима вредностите T_b со веројатност $p_x(T_b<T_a)$ и T_a со комплементарната веројатност. Бидејќи не е ограничено времето на стопирање, кога ќе пуштиме $t\to\infty$, со примена на теоремата за доминантна конвергенција, ќе добиеме:

$$E(S(X(\tau)))=E(S(X(0)))=S(x).$$

Со земање на математичкото очекување на лево и со средување се добива тврдењето на теоремата. ■

Забелешка. Да забележиме дека односот $p_x(T_b<T_a)=\dfrac{S(x)-S(a)}{S(b)-S(a)}$, останува ист без разлика на неконстантното решение $S(x)$ на (оо). Иако доказот на теоремата е даден при претпоставка за непрекинатост на лизгањето $\mu(x)$, теоремата важи за $\mu(x)$ ограничена на конечни интервали.

Од горната теорема има повеќе последици кои ќе бидат наведени во продолжение.

Последица 1. Нека $X(t)$ е дифузија со лизгање 0 на (a,b), $X(0)=x$, $a<x<b$. Тогаш,

$$p_x(T_b<T_a)=\frac{x-a}{b-a}.$$

Доказ. Ако $\mu(x)=0$ на (a,b), тогаш $S(x)$ е линеарна функција на (a,b) и од $p_x(T_b < T_a) = \dfrac{S(x)-S(a)}{S(b)-S(a)}$, го добиваме тврдењето на последицата. ■

Дифузијата $S(X(t))$ има 0 лизгање од Итовата формула и важи (о). Излезните веројатности од интервалот се пропорционални на растојанијата од крајните точки. Ова објаснува зошто функцијата $S(x)$ се нарекува скала функција. За дифузија $S(X(t))$ се нарекува природна скала.

Пример 2. Ќе ја специфицираме $p_x(T_b < T_a)$ за Брауново движење и Орнстајн-Уленбек процеси. Брауновото движење е во природна скала, бидејќи $\mu(x)=0$. Следува дека: $S(x)=x$ и $p_x(T_b < T_a) = \dfrac{x-a}{b-a}$. ♦

За Орнстајн-Уленбек процесот со параметри $\mu(x) = -\alpha x$, $\sigma^2(x) = \sigma^2$, имаме:

$$S(x) = \int^{x} \exp\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} y^2\right) dy .$$

Оттука,

$$p_x(T_b < T_a) = \frac{\int_a^x \exp\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} y^2\right) dy}{\int_a^b \exp\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} y^2\right) dy} .$$

При стандардни претпоставки, постои позитивна веројатност за процесот на дифузија да достигне која било точка од која било стартна точка.

Последица 2. Нека $X(t)$ е дифузија за која важат условите од претходната теорема. Тогаш, за кои било $x, y \in (a,b)$, имаме:

$$p_x(T_y < \infty) > 0 .$$

Навистина, за $x < y$, $T_y < T_b$ и:

$$p_x(T_y < \infty) > p_x(T_b < \infty) > p_x(T_b < T_a) > 0 ,$$

а слично важи и за: $y < x$.

Како примена на својствата на скала функција има подобар резултат за постоење и единственост на силните решенија. Трансформацијата $Y(t) = S(X(t))$ резултира во дифузија без лизгање која ни овозможува да се откажеме од условите на лизгањето.

Теорема 4. [Теорема на Звонкин (Zvonkin)] Да претпоставиме дека $\mu(x)$ е ограничена и $\sigma(x)$ го задоволува Липшицовиот услов и е ограничена надвор од нулата. Тогаш, силното решение постои и е единствено. Всушност, која било стохастичка диференцијална равенка со облик:

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma\,dB(t), \quad \text{каде } X(0) = x_0,$$

за која било ограничена функција $\mu(x)$ и константа σ има единствено силно решение.

Доказ. Ако $Y(t) = S(X(t))$, тогаш:

$$dY(t) = \sigma(X(t))\,S'(X(t))\,dB(t).$$

Да забележиме дека $S(x)$ е строго растечка, па имаме $X(t) = h(Y(t))$, каде што h е инверзна на S. Следува дека стохастичката диференцијална равенка за $Y(t)$ е:

$$dY(t) = \sigma(h(Y(t)))\,S'(h(Y(t)))\,dB(t) = \sigma_Y(Y(t))\,dB(t).$$

Останатиот дел од доказот со состои од проверка дека:

$$\sigma_Y(x) = \sigma(h(x))S'(h(x))$$

го задоволува локалниот Липшицов услов (ние ќе го скокнеме овој дел) и при дадените претпоставки, ги задоволува условите за постоење и единственост на силното решение на стохастичката диференцијална равенка. ■

7.4. Репрезентација на решенијата на обичните диференцијални равенки

Решенијата на некои парцијални диференцијални равенки имаат стохастички репрезентации. Такви репрезентации дадовме и претходно. Овде ќе покажеме дека ако решението на обичната диференцијална равенка задоволува одредени гранични услови, тогаш има репрезентации како математичко очекување на процес на дифузија сопрен на границата.

Теорема 1. Нека $X(t)$ е дифузија со генератор L со временски независни коефициенти, $L = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \mu(x)\frac{d}{dx}$, непрекината функција $\sigma(x) > 0$ на $[a,b]$ и $X(0) = x$, $a < x < b$. Ако f е двапати непрекинато диференцијабилна на (a,b) и непрекината на $[a,b]$ и важи:

$$Lf = -\phi \quad \text{на} \quad (a,b), \qquad f(a) = g(a), \ f(b) = g(b) \qquad (*)$$

за некои ограничени функции g и ϕ, тогаш f има репрезентација:

$$f(x) = E_x(g(X(\tau))) + E_x\left(\int_0^{\tau}\phi(X(s))\,ds\right),$$

каде што τ е излезно време од интервалот (a,b). Всушност, ако $\phi \equiv 0$ решението на (*) е дадено со:

$$f(x) = E_x(g(X(\tau))).$$

Доказ. Доказот е директна последица на првата теорема од претходниот дел. Навистина, имаме дека:

$$E_x\left(f(X(t\wedge\tau)) - \int_0^{t\wedge\tau} Lf(X(u))\,du\right) = f(x).$$

Бидејќи τ е конечно, со земање на гранични вредности, кога $n \to \infty$ и теоремата за доминантна конвергенција, добиваме:

$$E_x\big(f(X(\tau))\big) = f(x) + E_x\left(\int_0^{\tau} Lf(X(u))\,du\right).$$

Но, $Lf(X(u)) = -\phi(X(u))$ за кои било $u < \tau$ и $X(\tau)$ е во границата $\{a,b\}$, каде што $f(x) = g(x)$, па го добиваме тврдењето на теоремата. ■

Пример 1. Нека $X(t) = B(t)$ е Брауново движење. Да го разгледаме решението на равенката:

$$\frac{1}{2}f''(x) = 0 \quad \text{во} \quad (a,b), \quad f(a) = 0, \quad f(b) = 1.$$

Овде ќе ја решиме равенката директно и ќе го потврдиме резултатот со примена на претходната теорема. Јасно, решението е линеарна функција и од граничните услови следува дека мора $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Ова решение ја има репрезентацијата:

$$f(x) = E_x(g(B(\tau)))$$
$$= g(a)p_x(T_a < T_b) + g(b)(1 - p_x(T_a < T_b)) = p_x(T_b < T_a).$$

Од претходно, знаеме дека за Брауновото движење, важи:

$$p_x(T_b < T_a) = \frac{x-a}{b-a},$$

со што го потврдивме претходно добиениот резултат. ♦

7.6. Експлозија

Овој термин се однесува на ситуацијата кога процесот достигнува бесконечни вредности во конечно време. На пример, функцијата $\frac{1}{1-t}$, $t<1$, експлодира во $t=1$. Слично, решението $x(t)$ на обичната диференцијална равенка:

$$dx(t) = (1+x^2(t))\,dt, \qquad x(0)=0$$

експлодира. Навистина, да го разгледаме $x(t)=tgt$, која тежи кон бесконечност, кога t се приближува кон $\frac{\pi}{2}$. Времето на експлозија е $\frac{\pi}{2}$. Слична ситуација може да се појави и кај решенијата на стохастичките диференцијални равенки, освен кога времето на експлодирање е случајно. Решенијата може да се разгледуваат сѐ до времето на експлодирање.

Нека дифузијата $X(t)$ ја задоволува стохастичката диференцијална равенка на $\mathbb{R}$,

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t) \quad \text{и} \quad X(0)=x.$$

Нека $D_n = (-n,n)$ за $n=1,2,...,\tau_n = \tau_n = \tau_{D_n}$ е првиот момент кога процесот достигнува апсолутна вредност n. Бидејќи процесот на дифузија е непрекинат, мора да се достигне нивото n, пред да се достигне нивото $n+1$. Следува дека τ_n е неопаѓачка, па конвергира кон гранична вредност $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty}\tau_n$. Експлозија се појавува на множеството $\{\tau_\infty < \infty\}$, бидејќи на ова множество, од непрекинатоста на $X(t)$, $X(\tau_\infty) = \lim_{n\to\infty} X(\tau_n)$. Следува:

$$|X(\tau_\infty)| = \lim_{n\to\infty} |X(\tau_n)| = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

и бесконечност се достигнува за конечно време на ова множество.

Дефиниција 1. Дифузијата која почнала од x експлодира ако: $p_x(\tau_\infty < \infty) > 0$.

Да забележиме дека при соодветни услови на коефициентите, ако дифузијата експлодира кога започнала во некое x_0, тогаш таа експлодира кога започнала во кое било $x \in \mathbb{R}$. Навистина, ако за кои било x, y, важи $p_x(T_y < \infty) > 0$, тогаш:

$$p_y(\tau_\infty < \infty) \geq p_y(T_x < \infty) p_x(\tau_\infty < \infty) > 0.$$

Следнава теорема ги дава потребните и доволните услови за експлозии. Оваа теорема е позната како Фелеров тест (Feller) за експлозии.

Теорема 1. Да претпоставиме дека $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ се ограничени на конечни интервали и $\sigma(x) > 0$ е непрекината функција. Тогаш процесот на дифузија експлодира ако и само ако еден од следниве два услови е исполнет. Постои x_0 така што:

$$1)\ \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds\right) \left(\int_{x}^{x_0} \frac{\exp\left(\int_{x_0}^{y} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds\right)}{\sigma^2(y)} dy \right) dx < \infty.$$

$$2)\ \int_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds\right) \left(\int_{x_0}^{x} \frac{\exp\left(\int_{x_0}^{y} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds\right)}{\sigma^2(y)} dy \right) dx < \infty.$$

Овде нема да го дадеме доказот на теоремата, но само ќе споменеме дека доказот се заснова на анализата на излезните времиња τ_n и формулата на Фејнман-Кац.

Ако коефициентот на лизгање $\mu(x) \equiv 0$, тогаш и двата услова на горната теорема не важат, бидејќи $\int_x^{x_0} \frac{1}{\sigma^2(y)} dy \not\to 0$, кога $x \to -\infty$, па ја имаме следнава последица:

Последица 1. Стохастичките диференцијални равенки кои имаат облик:

$$dX(t) = \sigma(X(t))\, dB(t)$$

не експлодираат.

Пример 1. Да ја разгледаме стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = cX^r(t)\, dt + dB(t), \quad c > 0.$$

Решенијата на $dx(t) = cx^r(t)\, dt$ експлодираат ако и само ако $r > 1$. Овде $\sigma(x) = 1$ и $\mu(x) = cx^r$, $c > 0$ и $D = (\alpha, \beta) = (0, \infty)$. Јасно е дека оваа дифузија се лизга кон $+\infty$ како резултат на позитивното лизгање за кое било $r > 0$. Експлозија се појавува само во случајот кога $r > 1$, односно $p_x(\tau_D < \infty) > 0$ ако $r > 1$ и $p_x(\tau_D < \infty) = 0$ ако $r \leq 1$. Интегралот во делот 2) од претходната теорема е:

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\int_{x_0}^{x} \exp\left(\frac{2c}{r+1} y^{r+1}\right) dy}{\exp\left(\frac{2c}{r+1} x^{r+1}\right)}\, dx.$$

Користејќи го Лопиталовото правило, може да се види дека функцијата под интегралот е од ред x^{-r}, кога $x \to \infty$. Бидејќи $\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x^r} dx < \infty$ ако и само ако $r > 1$, го добиваме горното тврдење. ♦

Пример 2. Да ја разгледаме стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = X^2(t)\, dt + X^r(t)\, dB(t).$$

Користејќи го интегралниот тест, може да се види дека ако $r < \frac{3}{2}$ нема експлозија и ако $r > \frac{3}{2}$ има експлозија. ♦

7.7. Рекурентност и минливост

Нека $X(t)$ е дифузија на $\mathbb{R}$. Постојат различни дефиниции за рекурентноста и минливоста во литературата, кои при дадени претпоставки на коефициентите се еквивалентни.

Дефиниција 1. Точката x се нарекува рекурентна за дифузијата $X(t)$ ако веројатноста за процесот да се врати повторно во x бесконечно многу пати е 1, односно:

$$p_x(X(t) = x \ \ \textit{за низа од t која бесконечно расте}) = 1.$$

Дефиниција 2. Точката x се нарекува минлива за дифузијата $X(t)$ ако:

$$p_x(\lim_{t\to\infty} |X(t)| = \infty) = 1.$$

Ако сите точки од дифузијата се рекурентни, тогаш за таа дифузија велиме дека е рекурентна. Ако сите точки на дифузијата се минливи, тогаш за таа дифузија велиме дека е минлива.

Теорема 1. Нека $X(t)$ е дифузија на $\mathbb{R}$ која ги задоволува претпоставките за постоење и единственост, односно $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ се ограничени на конечни интервали, $\sigma(x)$ е непрекината и позитивна и $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ го задоволуваат условот да имаат линеарен раст. Тогаш:

1) Ако постои една рекурентна точка - сите точки се рекурентни.

2) Ако не постојат рекурентни точки - дифузијата е минлива.

За да ја докажеме оваа теорема ќе користиме два основни резултати за дифузии. Првиот е силното Марково својство, а вториот е силното Фелерово својство, кое вели дека за која било ограничена функција $f(x)$, $E_x(f(X(t)))$ е непрекината функција по x за секое $t > 0$. Двете овие својства важат при наведените услови. Исто така, може да се види дека рекурентноста е еквивалентна со следново својство: за кои било x, y $p_x(T_y < \infty)$, каде што T_y е време на достигање на y. Од горната теорема, минливоста е еквивалентна со својството: за кои било x, y $p_x(T_y < \infty) < 1$. За да одлучиме дали $p_x(T_y < \infty) < 1$, се користи формулата $p_x(T_b < T_a) = \dfrac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}$ за веројатноста да излезе од еден крај на интервалот преку скала функција. Ако дифузијата не експлодира, тогаш времето на достигање на бесконечност е дефинирано со $T_\infty = \lim_{b\to\infty} T_b = \infty$ и $T_{-\infty} = \lim_{a\to-\infty} T_a = \infty$. Бидејќи:

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{u} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds\right) du$$

и од формулата за $p_x(T_b < T_a)$, за $y > x$ имаме:

$$p_x(T_y < \infty) = \lim_{a \to -\infty} p_x(T_y < T_a) = \lim_{a \to -\infty} \frac{S(x) - S(a)}{S(y) - S(a)}.$$

Следува, ако:

$$S(-\infty) = \lim_{a \to -\infty} S(a) = \infty ,$$

тогаш:

$p_x(T_y < \infty) = 1$. Слично, за $y < x$, имаме:

$$p_x(T_y < \infty) = \lim_{b \to \infty} p_x(T_y < T_b) = \lim_{b \to \infty} \frac{S(x) - S(b)}{S(y) - S(b)}.$$

Следува, ако: $S(\infty) = \lim_{b \to \infty} S(b) = \infty$, тогаш: $p_x(T_y < \infty) = 1$. Следува, за кои било y,

$p_x(T_y < \infty) = 1$, што е својството на рекурентност.

Ако една од вредностите $S(-\infty)$ или $S(\infty)$ е конечна, тогаш за некое y, $p_x(T_y < \infty) < 1$, што е својството на минливост. Следува дека потребните и доволните услови за рекурентност и минливост се дадени во следнава теорема:

Теорема 2. Нека операторот $L = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \mu(x)\frac{d}{dx}$ има коефициенти кои ги задоволуваат условите на претходната теорема. Нека за фиксно x_0, означиме:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\int_{x_0}^{u} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right) du$$

и:

$$I_2 = \int_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\int_{x_0}^{u} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right) du .$$

Дифузијата која одговара на операторот L е рекурентна ако и само ако и двата интеграли I_1 и I_2 се бесконечни, а е минлива кога барем еден од интегралите I_1 или I_2 е конечен.

7.8. Дифузија на интервал

Да ја разгледаме дифузијата на интервалот (α, β), при што една од крајните точки на интервалот е конечна. Главната разлика помеѓу овој случај и целата права е во конечните краеви на интервалот (барем еден конечен крај) може да се достигнат за конечно време, а ситуацијата со експлозија е аналогна како во ситуацијата на реалната права. Земаме α да биде конечно, односно $-\infty < \alpha < \beta \leq \infty$. Случајот со β е сличен. Ја запишуваме скала функцијата во облик:

$$S(x) = \int_{x_1}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{u} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right) du ,$$

каде што $x_0, x_1 \in (\alpha, \beta)$. Со користење на стопирање на $S(X(t))$ се добива мартингал и на ист начин ги добиваме како претходно веројатностите за излез од интервалот $(a,b) \subset (\alpha, \beta)$ дадени со:

$$p_x(T_a < T_b) = \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)} .$$

Ако $S(\alpha) = -\infty$, тогаш горната веројатност може да се направи произволно мала со земање $a \to \alpha$. Ова значи дека: $p_x(T_\alpha < T_b) = 0$ и границата α не се достигнува пред b за кој било b. Ако $S(\alpha) > -\infty$, тогаш: $p_x(T_\alpha < T_b) > 0$.

Теорема 1. Нека: $L_1 = \int_\alpha^b \exp\left(-\int_b^u \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right) du$. Ако $L_1 = \infty$, тогаш: дифузијата ја достигнува точката b пред α, за која било почетна точка $x \in (\alpha, b)$. Ако $L_1 < \infty$, тогаш нека:

$$L_2 = \int_\alpha^b \frac{1}{\sigma^2(y)} \int_\alpha^y \exp\left(-\int_b^x \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right) \exp\left(\int_b^y \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds \right) dy .$$

1) Ако $L_2 < \infty$, тогаш за сите $x \in (\alpha, b)$ дифузијата излегува од (α, b) за конечно време и дополнително: $p_x(T_\alpha < \infty) > 0$.

2) Ако $L_2 = \infty$, тогаш или излезното време од (α, b) е бесконечно и $\lim_{t\to\infty} X(t) = \alpha$ или излезното време од (α, b) е конечно и $p_x(T_b < T_\alpha) = 1$.

Пример 1. Користејќи ја дифузијата дадена со стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = n\,dt + 2\sqrt{X(t)}\,dB(t),$$

каде што n е природен број. Подоцна, ќе видиме дека $X(t)$ е квадратното растојание од почетокот на Брауновото движење во n димензии. Ако T_0 е првата посета на нула, ќе покажеме дека ако $n \geq 2$, тогаш $p_x(T_0 = \infty) = 1$. Ова значи дека $X(t)$ никогаш не ја посетува нулата, односно $p(X(t) > 0,\ \textit{за сите}\ t \geq 0) = 1$. Но, за $n = 1$, $p_x(T_0 < \infty) = 1$. За $n = 2$, скала функцијата $S(x)$ е дадена со $S(x) = \ln x$, па за кое било $b > 0$, имаме:

$$p_1(T_0 < T_b) = \frac{S(1) - S(b)}{S(0) - S(b)} = 0,$$

па,

$p_1(T_0 < \infty) = 0$. За $n \geq 3$, скала функцијата $S(x)$ е дадена со:

$$S(x) = \frac{1 - x^{-\frac{n}{2}+1}}{1 - \frac{n}{2}}.$$

Следува:

$$p_1(T_0 < \infty) = \frac{S(1) - S(\infty)}{S(0) - S(\infty)} = 0.$$

Следува дека за сите $n \geq 2$, $p_1(T_0 = \infty) = 1$. Директно, $\alpha = 0$ и од горната теорема добиваме: $L_1 = \infty$, па тврдењето следува: кога $n = 1$, пресметките ни даваат дека $L_1 < \infty$ и $L_2 < \infty$, па следува: $p_1(T_0 < \infty) > 0$. ♦

Забелешка. Постои класификација на граничните точки која зависи од константите L_1, L_2 и L_3 каде што:

$$L_3 = \int_{\alpha}^{b} \frac{1}{\sigma^2(y)} \exp\left(\int_{x_0}^{y} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}\,ds \right) dy.$$

Границата α се нарекува:

а) природна, ако: $L_1 = \infty$;

б) привлекувачка, ако: $L_1 < \infty,\ L_2 = \infty$;

в) апсорбирачка, ако: $L_1 < \infty,\ L_2 < \infty,\ L_3 = \infty$;

г) регуларна, ако: $L_1 < \infty,\ L_2 < \infty,\ L_3 < \infty$.

7.9. Стационарни распределби

Да го разгледаме дифузиониот процес даден со стохастичката диференцијална равенка:

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t),$$

каде што $X(0)$ има распределба $\nu(x) = p(X(0) \le x)$. Распределбата $\nu(x)$ се нарекува стационарна или инваријантна за дифузиониот процес $X(t)$ ако за секое t распределбата на $X(t)$ е иста како и распределбата $\nu(x)$. Ако $p(t,x,y)$ ја означува функцијата на густина на распределба на транзитивната веројатност на процесот $X(t)$, односно $p(t,x,y) = p(X(t) \le y \mid X(0) = x)$, тогаш за инваријантната $\nu(x)$ важи:

$$\nu(y) = \int p(t,x,y)\,d\nu(x).$$

Оправданоста на последната формула се добива со користење на формулата за тотална веројатност и фактот дека стационарната распределба е распределбата на $X(t)$ за сите t,

$$p(X_0 \le y) = p(X_t \le y) = \int p(X_t \le y \mid X_0 = x)\,d\nu(x).$$

Ако стационарната распределба има густина, $\pi(x) = \dfrac{d\nu(x)}{dx}$, тогаш $\pi(x)$ се нарекува стационарна или инваријантна густина. Ако $p(t,xy) = \dfrac{\partial p(t,x,y)}{\partial y}$ ја означува функцијата на густина на распределба на $p(t,x,y)$, тогаш за π имаме:

$$\pi(y) = \int p(t,x,y)\,\pi(x)\,dx.$$

При соодветни услови на коефициентите (μ и σ се двапати непрекинато диференцијабилни со втори изводи кои го задоволуваат Холдеровиот услов) постои инваријантната функција на густина на распределба ако и само ако следниве два услови важат:

1) $\int\limits_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds\right) dx = \int\limits_{x_0}^{\infty} exo\left(-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds\right) dx = \infty$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)} ds\right) dx < \infty$.

Уште повеќе, ако инваријантната функција на густина на распределба е двапати непрекинато диференцијабилна, тогаш е исполнета обичната диференцијална равенка:

$$L^*\pi = 0,$$

односно:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(y)\pi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)\pi\right) = 0 . \qquad (*)$$

Дополнително, кое било решение на оваа равенка со конечен интеграл дефинира инваријантна функција на густина на распределба. Интуитивно последната равенка, при соодветните услови, функцијата на густина на распределба на $X(t)$ ја задоволува нанапред (Фокер-Планк) равенката:

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma^2(y,t)p\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y,t)p\right) = 0 .$$

Ако системот е во стационарен режим, неговата функција на густина на распределба не се менува со промена на времето, што значи дека изводот на функцијата на густина на распределба, во однос на t е нула, од каде што ја добиваме равенката (*).

Равенката (*) може да се решава, откако ќе биде редуцирана на обична диференцијална равенка од прв ред. Решението на горната равенка (*) е дадено со:

$$\pi(x) = \frac{C}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)} dy\right),$$

каде што C се наоѓа од условот $\int \pi(x)\, dx = 1$.

Пример 1. За Брауновото движење условот 1) од погоре е исполнет, но не е исполнет условот 2). Следува дека не постои стационарна распределба. Нанапред равенката за инваријантната распределба е:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0\,,$$

чиишто решенија се линеарни функции по x и ниту една од нив нема конечен интеграл. ♦

Пример 2. Нанапред равенката за Орнстајн-Уленбек процесот е:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = L^* p = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial x}(xp)$$

и равенката за инваријантната функција на густина на распределба е дадена преку:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial}{\partial x}(xp) = 0\,.$$

Решението е дадено преку равенката:

$$\pi(x) = \frac{C}{\sigma^2}\exp\left(\int_0^x \frac{-2\alpha}{\sigma^2}\,dy\right) = \frac{C}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma^2}x^2\right).$$

Оттука, се гледа дека ако α е негативно, не постои стационарна распределба и ако α е позитивно тогаш стационарната распределба е нормалната распределба $N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$. Всушност, фактот дека $N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$ е стационарна распределба може директно да се провери преку репрезентацијата:

$$X(t) = e^{-\alpha t}\left(X(0) + \int_0^t \sigma e^{\alpha s}\,dB(s)\right). ♦$$

Забелешка. Орнстајн-Уленбек процесот ги има следниве својства: тој е Гаусов процес со непрекинати патишта, тој е Марков процес и е стационарен, од што добиваме дека почетната распределба е стационарната распределба $N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$. Стационарноста значи дека конечнодимензионалните распределби не се менуваат со поместување во времето. За Гаусовиот процес, стационарноста е еквивалентна со функцијата на коваријанса да биде функција само од $|t-s|$, односно:

$$\operatorname{cov}(X(t), X(s)) = h(|t-s|)\,.$$

Орнстајн-Уленбек процесот е единствениот процес кој истовремено е Гаусов процес, Марков процес и стационарен процес.

8. Процеси на чисти скокови

Во овој дел ќе ги разгледаме процесите кои се чисти скокови, односно процесите кои се менуваат само со скокови. Овде ќе бидат дефинирани процесите на броење и процесите на Марков скок, а ќе биде дадена и нивната репрезентација преку полумартингали. Оваа репрезентација ни дава можност да разгледуваме процес како решение на стохастичка диференцијална равенка дадена преку прекинати мартингали.

8.1. Основни дефиниции

Процес на броење е определен со низа од ненегативни случајни променливи T_n, за кои важи: $T_n < T_{n+1}$ ако $T_n < \infty$ и $T_n = T_{n+1}$, ако $T_n = \infty$. Овде T_n може да се разгледува како време на n-тото појавување на некој настан (многу често се нарекувани како времиња на пристигнување). $N(t)$ го брои бројот на настани кои се појавиле сѐ до момент t, односно:

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I(T_n \le t), \quad \text{каде } N(0) = 0.$$

$N(t)$ е по делови константна функција и има скокови со големина единица во точките T_n. Такви процеси се, исто така, познати и како просто точкасти процеси за да се разликуваат и од поопштите означени точкасти процеси, кои се опишани со низата (T_n, Z_n) за некои случајни променливи Z_n. Овде Z_n, на пример, може да се опише со големината на скокот во T_n.

Дефиниција 1. Процесот на чист скок $X(t)$ се дефинира преку равенката:

$$X(t) = X(0) + \sum_{n=1}^{\infty} I(T_n \le t) Z_n .$$

Да забележиме дека формулата во горната функција е непрекината од десно, по делови константа, каде што времето на n-тиот скок е T_n и:

$$Z_n = X(T_n) - X(T_n^-) = X(T_n) - X(T_{n-1})$$

е големина на скокот во T_n.

8.2. Филтрација на процеси на чисти скокови

Филтрацијата $\mathbf{F}$ која ќе се разгледува во овој дел е природна филтрација на процесот. За процесот $X(t)$ неговата природна филтрација е дефинирана со σ-алгебрата $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s),\, 0 \le s \le t)$ и ја претставува информацијата добиена со разгледување на процесот $[0,t]$. Строгото минато е информацијата добиена со разгледување на процесот на $[0,t)$ и е означено со: $\mathcal{F}_{t^-} = \sigma(X(s),\, 0 \le s < t)$.

Ненегативна случајна променлива τ, која е дозволено да биде и бесконечност, е времето на стопирање ако $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ за секое t. Ова заедно со разгледување на процесот на $[0,t]$ може да заклучиме дали τ се појавил.

Информацијата добиена со разгледување на процесот сѐ до времето на стопирање τ е $\mathcal{F}_\tau$, дефинирано со:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \textit{за сите } t,\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Строгото минато на $X(t)$ во τ е опишано со σ-алгебрата: $\mathcal{F}_{\tau^-} = \sigma(A \cap \{t < \tau\} :\, t \ge 0,\ A \in \mathcal{F}_t) \vee \mathcal{F}_0$. Да забележиме дека: $\tau \in \mathcal{F}_{\tau^-}$ (земаме $A = \{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$). Јасно, $\mathcal{F}_{\tau^-} \subset \mathcal{F}_\tau$.

Јасно, времињата на пристнување T_n се времиња на стопирање за $\mathbf{F}$. Тие обично се земаат како локализирана низа. Да забележиме дека: $\mathcal{F}_{T_n} = \sigma((T_i, Z_i),\, i)$ и $X(T_n^-) = X(T_{n-1})$, бидејќи за t важи $T_{n-1} \le t < T_n$, $X(t) = X(T_{n-1})$ и оваа вредност е сѐ додека не дојде до наредниот скок во момент T_n. Бидејќи $T_n \in \mathcal{F}_{T_n^-}$, $\mathcal{F}_{T_n^-} = \sigma((T_i, Z_i),\, i \le n-1,\, T_n)$. Следува дека Z_n е големина на скокот во T_n е единствената информација во $\mathcal{F}_{T_n}$ која ја нема во $\mathcal{F}_{T_n^-}$.

Може да се докаже дека $\mathcal{F}_t$ е непрекината од десно, односно: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$, како и нареднава теорема која е основна за барање на компензатори.

Теорема 1. Ако τ е време на стопирање, тогаш за секое n постои случајна променлива ξ_n која е $\mathcal{F}_{T_n}$-мерлива така што:

$$\tau \wedge T_{n+1} = (T_n + \xi_n) \wedge T_{n+1} \quad \text{на} \quad \{T_n \le \tau\}.$$

Бидејќи компензаторите се предвидливи процеси, важно е да имаме некои критериуми за да можеме да одлучуваме по однос на предвидливоста. По дефиниција, кој било адаптиран непрекинат од лево процес или непрекинат процес е предвидлив. Следнава конструкција, која често се применува во пресметките, резултира со предвидлив процес.

Теорема 2. Нека T_n се времиња на пристигнување на процес на чист скок и за сите $n = 0,1,2,...$, $Y_n(t)$ е адаптиран процес, така што за кое било $t \in (T_n, T_{n+1}]$ е $\mathcal{F}_{T_n}$ - мерливо. Тогаш, процесот:

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t) I(T_n < t \le T_{n+1})$$

е предвидлив.

Доказ. Овде, всушност, ќе дадеме скица на доказот. Процесот: $I_n(t) = I(T_n < t \le T_{n+1})$ е предвидлив. Навистина,

$$I_n(t) = I(T_n < t \le T_{n+1}) = I(t \le T_{n+1}) - I(t \le T_n).$$

Бидејќи за секој n, T_n е време на стопирање, $\{T_n \ge t\} \in \mathcal{F}_t$, па оттука $I_n(t)$ е адаптиран. Но, бидејќи е непрекинат од лево, следува дека е предвидлив. Бидејќи $Y_n(t)$ е „познат“ кога $T_n < t \le T_{n+1}$, $X(t)$ е предвидлив. ■

Во продолжение ќе дадеме некои претпоставки. Да забележиме дека $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n$ постои, бидејќи $(T_n)_n$ е неопаѓачка низа. Резултатите дадени подолу важат за $t < T_\infty$, па за да избегнеме повторување претпоставуваме дека $T_\infty = \infty$, освен ако не е наведено поинаку. Во случајот кога $T_\infty < \infty$ постојат бесконечно многу скокови на конечен интервал $[0, T_\infty)$ и се вели дека се појавува експлозија. Претпоставуваме дека нема експлозии. Подоцна ќе бидат дадени доволните услови за Марков скок процес.

Ќе претпоставиме дека скоковите се интеграбилни, $E(|Z_n|) < \infty$ за сите n. При оваа претпоставка $X(t)$ е локално интеграбилен, бидејќи:

$$E\left(|X(t \wedge T_n)|\right) \le \sum_{i=1}^{n} E(|Z_i|) < \infty,$$

па, оттука има единствено дефиниран компензатор A.

$M(t) = X(t) - A(t)$ е локален мартингал придружен на $X(t)$, кој се нарекува и иновативен мартингал.

8.3. Итова формула за процеси со конечна варијација

Ако полумартингал $X(t)$ е со конечна варијација, тогаш неговиот непрекинат дел од мартингалот $X^{cm}(t)=0$, па $\left\langle X,X\right\rangle^{c}(t)=\left\langle X^{cm},X^{cm}\right\rangle(t)=0$. Следува членот во формулата:

$$f(X(t))-f(X(0))=\int_0^t f'(X(s^-))dX(s)+\frac{1}{2}\int f''(X(s^-))\,d\left\langle X^{cm},X^{cm}\right\rangle(s)$$

$$+\sum\left(f(X(s))-f(X(s^-))-f'(X(s^-))\Delta X(s)\right)$$

кој го содржи f'' се губи. Дополнително, бидејќи $X(t)$ е со конечна варијација, за неговиот непрекинат дел $X^{c}(t)$ важи:

$$dX^{c}(t)=dX(t)-\Delta X(t)$$

и Итовата формула го добива обликот: за која било непрекинато диференцијабилна функција f важи:

$$f(X(t))-f(X(0))=\int_0^t f'(X(s^-))\,dX^{c}(s)+\sum_{s\le t}\left(f(X(s))-f(X(s^-))\right)$$

.

Ако непрекинатиот дел $X^{c}(t)$ е нула, тогаш формулата е идентитет, претставувајќи ја функцијата како збир од нејзините скокови. Слична формула важи и за функција со n променливи.

Стохастичкиот експоненцијал на процеси со конечна варијација се поедноставува на:

$$\mathbf{E}(X)(t)=e^{X(t)-X(0)}\prod_{s\le t}(1+\Delta X(s))e^{-\Delta X(s)}=e^{X^{c}(t)}\prod_{s\le t}(1+\Delta X(s)),$$

каде што $X^{c}(t)$ е непрекинатиот дел од $X(t)$. Последното равенство следува од:

$$X^{c}(t)=X(t)-X(0)-\sum_{s\le t}\Delta X(s).$$

Пример 1. Нека $X(t)$ е процес со скокови со големина 1 (процес на броење), па така $\Delta X(s)=0$ или 1. Неговиот стохастички експоненцијал е даден со:

$$\mathbf{E}(X)(t) = \prod_{s \le t} (1 + \Delta X(s)) = 2^{X(t) - X(0)} \ . \ \blacklozenge$$

Формулата за парцијална ннтеграција се добива директно од интегралната репезентација на квадратната коваријација. Ако $X(t)$ и $Y(t)$ се со конечна варијација, тогаш нивната квадратна коваријација е дадена со:

$$[X, Y](t) = \sum_{0 < s \le t} \Delta X(s) \Delta Y(s)$$

и:

$$[X](t) = [X, X](t) = \sum_{0 < s \le t} (\Delta X(s))^2 \ .$$

Сега, добиваме дека:

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X(s^-)\, dY(s) + \int_0^t Y(s^-)\, dX(s) + \sum_{0 < s \le t} \Delta X(s) \Delta Y(s)$$

.

Забелешка. Следнава формула важи за процеси со конечна варијација:

$$\sum_{s \le t} \Delta X(s) \Delta Y(s) = \int_0^t \Delta X(s)\, dY(s) \, .$$

Навистина, со ставање:

$$Y^c(t) = Y(t) - \sum_{s \le t} \Delta Y(s)$$

да биде непрекинатиот дел на Y, имаме:

$$\int_0^t \Delta X(s)\, dY(s) - \sum_{s \le t} \Delta X(s)\, \Delta Y(s) = \int_0^t \Delta X(s)\, dY^c(s) = 0 \, ,$$

бидејќи $Y^c(s)$ е непрекинат и $\Delta X(s)$ е различен од нула во најмногу преброиво многу точки.

8.4. Процеси на броење

Нека $N(t)$ е процес на броење. Тогаш тоа е процес на чист скок со скокови со големина 1. Следува:

$$[N,N](t) = \sum_{s \le t} (\Delta N(s))^2 = N(t).$$

Теорема 1. Компензаторот $A(t)$ и острозаградениот процес од N се еднакви, односно: $A(t) = \langle N,N \rangle(t)$.

Доказ. $N(t)$ е со локално интеграбилна варијација, бидејќи $N(t \wedge T_n) \le n$ и $(T_n)_n$ е локализирана низа. Процесот $A(t)$ е единствен предвидлив процес, така што $N(t) - A(t)$ е локален мартингал. Острозаградениот процес од N, $\langle N,N \rangle$ е единствен предвидлив процес, така што $[N,N](t) - \langle N,N \rangle(t)$ е локален мартингал. Сега, тврдењето следува од горниот израз за $[N,N](t)$ и единственоста на компензаторот.

Компензаторот за процес на броење е даден со:

$$dA(t) = E(dN(t) \mid \mathcal{F}_{t^-}),$$

каде што ја $\mathcal{F}_{t^-}$ означува информацијата која е достапна пред моментот t, набљудувајќи го процесот над $[0,t)$ и $t + dt > t$. Уште, $dM(t) = d(N - A)(t) = dN(t) - dA(t)$ е тој дел од $dN(t)$ кој не може да се предвиди од набљудувањето на $N(t)$ над $[0,t)$. ■

Следнава теорема ја дава врската помеѓу острозаграденоста на мартингалот и компензаторот во процес на броење. Бидејќи доказот е директна примена на стохастичкиот калкулус, ќе биде даден по теоремата. Корисно е за пресметување на варијацијата на $M(t)$. Навистина, $E(M^2(t)) = E\left(\langle M,M \rangle(t)\right)$.

Теорема 2. Нека $M = N - A$. Тогаш:

$$\langle M,M \rangle(t) = \int_0^t (1 - \Delta A(s))\, dA(s).$$

Дополнително, ако $A(t)$ е непрекинат, тогаш: $\langle M,M \rangle(t) = A(t)$.

Доказ. Со парцијална интеграција добиваме:

$$M^2(t) = 2\int_0^t M(s^-)\,dM(s) + \sum_{s\le t} (\Delta M(s))^2 .$$

Користејќи дека $\Delta M(s) = \Delta N(s) - \Delta A(s)$ и развивајќи ја сумата, добиваме:

$$\sum_{s\le t} (\Delta M(s))^2 = \sum_{s\le t} \Delta N(s) - 2\sum_{s\le t} \Delta N(s)\Delta A(s) + \sum_{s\le t} (\Delta A(s))^2 ,$$

каде што користевме дека бидејќи $N(t)$ е прост процес, $(\Delta N(s))^2 = \Delta N(s)$. Следува дека со користење на формулата:

$$\sum_{s\le t} \Delta X(s)\Delta Y(s) = \int_0^t \Delta X(s)\,dY(s)$$

и $N(t) = M(t) + A(t)$, добиваме:

$$M^2(t) = 2\int_0^t M(s^-)\,dM(s) + N(t) - 2\int_0^t \Delta A(s)\,dN(s) + \int_0^t \Delta A(s)\,dA(s)$$

$$= \int_0^t \left(2M(s^-) + 1 - 2\Delta A(s)\right) dM(s) + \int_0^t (1 - \Delta A(s))\,dA(s) .$$

Процесот во првиот интеграл е предвидлив, бидејќи $M(s^-)$ е адаптиран и непрекинат од лево, $A(s)$ е предвидлив, па $\Delta A(s)$ е, исто така, предвидлив. Следува дека првиот интеграл е локален мартингал. Вториот интеграл е предвидлив, бидејќи $A(t)$ е предвидлив. Следува дека горната равенка е декомпозиција на Дуб-Мејер на $M^2(t)$. Сега тврдењето на теоремата следува од единственоста на декомпозицијата на Дуб-Мејер. ■

Во продолжение ќе дадеме примери на процеси и нивните компензатори.

Нека T е случајна променлива и процесот $N(t)$ има единствен скок во случајно време t, односно $N(t) = I(T \le t)$, Нека F е функција на распределба на случајната променлива T.

Теорема 3. Компензаторот $A(t)$ на $N(t) = I(T \le t)$ е даден со:

$$A(t) = \int_0^{t\wedge T} \frac{dF(s)}{1 - F(s^-)} .$$

Доказ. Процесот $A(t)$ е предвидлив. За да докажеме дека $N(t) - A(t)$ е мартингал, доволно е да докажеме дека $E(N(S)) = E(A(S))$ за кое време било на стопирање S. Од првата теорема од оваа глава, постои $\mathcal{F}_0$-мерлива (скоро сигурно константна) случајна променлива ξ, така што:

$$\{S \geq T\} = \{S \wedge T = T\} = \{\xi \wedge T = T\} = \{T \leq \xi\}.$$

Следува:

$$E(N(S)) = p(S \geq T) = p(T \leq \xi)$$

$$= \int_0^{\xi} dF(t) = \int_0^{\xi} \frac{p(T \geq t)}{1 - F(t^-)} dF(t)$$

$$= E\left(\int_0^{\xi} \frac{I(T \geq t)}{1 - F(t^-)} dF(t)\right) = E\left(\int_0^{\xi \wedge T} \frac{dF(t)}{1 - F(t^-)}\right)$$

$$= E\left(\int_0^{S \wedge T} \frac{dF(t)}{1 - F(t^-)}\right),$$

па го добиваме тврдењето на теоремата. ■

Ако F има функција на густина на распределба f, тогаш $A(t) = \int_0^{t \wedge T} h(s)\, ds$, каде што:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

се нарекува хазардна функција и оваа функција ја дава веројатноста за појавување на скок во моментот t, ако се знае дека претходно пред моментот t, не се појавил скок.

Следната теорема дава експлицитна форма на компензаторот на општ процес на броење. Бидејќи доказот ги користи истите елементи како и во доказот на претходната теорема, тој ќе биде прескокнат.

Теорема 4. Нека $N(t)$ е процес на броење кој е генериран од низата (T_n). Означуваме со $U_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ се помеѓу пристигнување времиња и T_0. Нека $F_n(t) = p(U_{n+1} \leq t \mid T_1, \ldots, T_n)$ ја означува регуларната функција на условна распределба и $F_0(t) = p(T_1 \leq t)$. Тогаш компензаторот $A(t)$ е даден со:

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{t \wedge T_{i+1} - t \wedge T_i} \frac{dF_i(s)}{1 - F_i(s^-)}.$$

Да забележиме дека ако функциите на условна распределба F_n во горната теорема се непрекинати и $F_n(0) = 0$, тогаш со смена на променливите, имаме:

$$\int_0^a \frac{dF_n(s)}{1-F_n(s^-)} = \int_0^a \frac{dF_n(s)}{1-F_n(s)} = -\ln(1-F_n(a)),$$

па горната равенка може да се соодветно упрости.

Обновлив процес $N(t)$ е точкаст процес во кој сите внатрешни помеѓу пристигнувачки времиња се независни и со идентична распределба, односно: $T_1, T_2 - T_1, ..., T_{n+1} - T_n$ имаат идентична распределба, со функција на распределба $F(x)$. Во овој случај сите функции на распределба од претходната теорема се дадени со $F(x)$. Ја имаме следнава последица на последната теорема.

Последица 1. Да претпоставиме дека помеѓу пристигнувачката распределба е непрекината и $F(0) = 0$. Тогаш компензаторот на обновлив процес е даден со:

$$A(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - F(t \wedge T_n - t \wedge T_{n-1}\right).$$

Дефиниција 1. Ако $A(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$, каде што $\lambda(t)$ е позитивен предвидлив процес, тогаш $\lambda(t)$ се нарекува стохастички интензитет на $N(t)$.

Да забележиме дека ако $A(t)$ е детерминистичка и диференцијабилна со извод $A'(t)$ и $A(t) = \int_0^t A'(s)\, ds$, тогаш $\lambda(t) = A'(t)$ е предвидлив и е стохастички интензитет. Ако $A(t)$ е случаен и диференцијабилен со извод $A'(t)$, односно важи $A(t) = \int_0^t A'(s)\, ds$, тогаш $\lambda(t) = A'(t^-)$. Навистина, $A(t) = \int_0^t A'(s^-)\, ds$.

Ако стохастичкиот интензитет постои, тогаш од дефиницијата на компензаторот, имаме дека $N(t) - \int_0^t \lambda(s)\, ds$ е локален мартингал. За процеси на броење, за интензитетот имаме дека:

$$\lambda(t)\, dt = dA(t) = E(dN(t) \mid \mathcal{F}_{t^-}) = p(dN(t) = 1 \mid \mathcal{F}_{t^-}).$$

Ако стохастичкиот интензитет постои, тогаш компензаторот е непрекинат и острозаграденоста на мартингалот $M(t)=N(t)-A(t)$ е дадена со:

$$\langle M,M\rangle(t)=\int_0^t \lambda(s)\,ds\,.$$

Пример 1. Детерминистички точкаст процес е сам свој компензатор, па нема стохастички интензитет.

Стохастичкиот интензитет за обновлив процес со непрекината помеѓу пристигачка распределба F е дадена со $h(V(t^-))$, каде h е хазардна функција и $V(t)=t-T_{N(t)}$ се нарекува процес на стареење. Ова може да се види со барање извод на компензаторот. ♦

Стохастичкиот интензитет за обновлив процес со дискретна помеѓу пристигнувачка распределба F не постои.

Теорема 1. Нека $N(t)$ е точкаст процес со непрекинат детерминистички компензатор $A(t)$. Тогаш, овој процес има независни Поасоново распределени нараснувања, односно распределбата на $N(t)-N(s)$ е Поасонова со параметар $A(t)-A(s)$, $0\le s<t$.

Ако $A(t)$ има функција на густина на распределба $\lambda(t)$, односно $A(t)=\int_0^t \lambda(s)\,ds$, тогаш $N(t)$ се нарекува нехомоген Поасонов процес со параметар $\lambda(s)$.

Доказ. Ќе ја докажеме теоремата со примена на стохастички експоненцијал. $M(t)=N(t)-A(t)$ е мартингал. За фиксно $0<u<1$, $-uM(t)$ е, исто така, мартингал. Да го разгледаме $\mathbf{E}(uM)(t)$. Имаме:

$$\mathbf{E}(-uM)(t)=e^{uA(t)}\prod_{s\le t}(1-u\Delta M(s))$$
$$=e^{uA(t)}\prod_{s\le t}(1-u\Delta N(s))=e^{uA(t)}(1-u)^{N(t)}$$
$$=e^{uA(t)+N(t)\ln(1-u)}, \qquad (*)$$

каде што користевме дека $\Delta N(s)$ е нула или еден. Стохастичкиот експоненцијал на мартингал е секогаш локален мартингал, но во овој случај е и (вистински, само) мартингал. Навистина, бидејќи $A(t)$ е детерминистичка и неопаѓачка, имаме:

$$E\left(\sup_{t\le T} e^{uA(t)+N(t)\ln(1-u)}\right) \le e^{uA(T)} E\left(\sup_{t\le T} e^{N(t)\ln(1-u)}\right) \le e^{uA(T)} < \infty ,$$

па оттука, користејќи резултат од претходно имаме дека стохастичкиот експоненцијал на мартингал, е мартингал. Барајќи математичко очекување во (*), добиваме дека момент генерирачката функција на $N(t)$ е:

$$E\left((1-u)^{N(t)}\right) = e^{-uA(t)}$$

или ставајќи $v = 1-u$, имаме:

$$E\left(v^{N(t)}\right) = e^{(1-v)A(t)}.$$

Оттука, добиваме дека $N(t)$ е Поасонова случајна променлива со параметар $A(t)$. Ако земеме условно математичко очекување во (*) и го користиме својството на мартингал, на истиот начин ќе добиеме дека за сите $s < t$

$$E(v^{N(t)-N(s)} \mid \mathcal{F}_s) = e^{(1-v)(A(t)-A(s))},$$

од каде што добиваме дека распределбата на $N(t)-N(s)$ не зависи од минатото и е Поасонова. ■

Сличен резултат важи, ако компензаторот е детерминистички, но прекинат.

Теорема 2. Нека $N(t)$ е точкаст процес со детерминистички компензатор $A(t)$. Тогаш $N(t)$ има независни нараснувања.

Следнава теорема тврди дека точкастиот процес со непрекинат, но можно случаен, компензатор може да се трансформира во Поасонов процес со случајна промена на времето.

Теорема 3. Нека процесот на броење $N(t)$ има непрекинат компензатор $A(t)$ и $\lim_{t\to\infty} A(t) = \infty$. Дефинираме: $\rho(t) = \inf\{s \ge 0 : A(s) = t\}$. Нека $K(t) = N(\rho(t))$ и $G_t = \mathcal{F}_{\rho(t)}$. Тогаш, процесот $K(t)$ во однос на филтрацијата G_t е Поасонов со параметар 1.

Доказот поради комплексноста, ќе биде изоставен, но за да се убедиме во тврдењето на теоремата, да го разгледаме случајот кога $A(t)$ е строго растечка, тогаш $\rho(t)$ е инверзен на $A(t)$, односно $A(\rho(t)) = t$. Тогаш, $E(K(t)) = E(N(\rho(t))) = E(A(\rho(t))) = t$, па $K(t)$ е десно математичко очекување.

Нека за сите $t \geq 0$,

$$X(t) = X(0) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n I(T_n \leq t),$$

е процес на чист скок генериран од низата (T_n, Z_n).

Теорема 4. Нека $F_n(t) = p(T_{n+1} - T_n \leq t \mid \mathcal{F}_{T_n})$ ја означува регуларната условна распределба на помеѓу пристнувачките времиња, $F_0(t) = p(T_1 \leq t)$ и

$$m_n = E(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_{T_n}) = E(X(T_{n+1}) - X(T_n) \mid \mathcal{F}_{T_n})$$

го означува условното математичко очекување на големините на скоковите. Тогаш, компензаторот $A(t)$ е даден со:

$$A(t)\sum_{n=0}^{\infty} m_n \int_0^{t\wedge T_{n+1} - t\wedge T_n} \frac{dF_n(s)}{1 - F_n(s^-)}. \qquad (о)$$

Следнава теорема многу често се користи во калкулусот на процеси од чисти скокови.

Теорема 5. Ако $X(t)$ е процес на чист скок, тогаш за функција f, $f(X(t))$ е, исто така, процес на чист скок со исти времиња на скок T_n. Големината на скокот во T_n е дадена со $Z'_n = f(X(T_n)) - f(X(T_n^-))$. Дополнително, ако f е таква што $E(|Z'_n|) < \infty$, тогаш компензаторот на $f(X(t))$ е даден со:

$$A(t)\sum_{n=0}^{\infty} m_n \int_0^{t\wedge T_{n+1} - t\wedge T_n} \frac{dF_n(s)}{1 - F_n(s^-)},$$

каде што m_n е заменето со $m'_n = E(Z'_{n+1} \mid \mathcal{F}_{T_n})$.

Теорема 6. Нека $X(t)$ е процес на чист скок генериран од низата (T_n, Z_n). Да претпоставиме дека важат истите услови и ознаки од теоремата 4 и компензаторот $A(t)$ да е непрекинат. Да претпоставиме дополнително дека $E(Z_n^2) < \infty$ и $v_n = E(Z_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_{T_n})$. Нека $M(t) = X(t) - A(t)$, тогаш $\langle M, M \rangle(t)$ е дадено со:

$$A(t)\sum_{n=0}^{\infty} m_n \int_0^{t\wedge T_{n+1} - t\wedge T_n} \frac{dF_n(s)}{1 - F_n(s^-)},$$

каде што m_n е заменето со v_n.

Доказ. Бидејќи претпоставивме дека $A(t)$ е непрекинат (и секогаш има конечна варијација), имаме:

$$[M,M](t) = [X - A, X - A](t) = [X, X](t) = \sum_{0<s\le t} (\Delta X(s))^2 .$$

Следува, $[M,M]$ е процес на чист скок со времиња на скок T_n и големини на скоковите $(\Delta X(T_n))^2 = Z_n^2$. Следува, $[M,M](t)$ е процес на чист скок генериран од низата (T_n, Z_n^2). Тогаш, $\langle M,M \rangle(t)$ е неговиот компензатор. Сега, тврдењето на теоремата следува од теорема 4.

Еден пример на процеси со чист скок е класата на процеси со експоненцијална распределба помеѓу пристигнувачки времиња и независни големини на скоковите. Ова е класата на Марков скок процеси, која ќе биде разгледувана наредно во посебен дел.

8.5. Марков скок процеси

Нека за сите $t \ge 0$,

$$X(t) = X(0) + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n I(T_n \le t),$$

каде што T_n и Z_n ги имаат следниве условни распределби. Нека $X(T_n) = x$, $T_{n+1} - T_n$ се експоненцијално распределени со математичко очекување $\dfrac{1}{\lambda(x)}$ и се независни од минатото. Скоковите $Z_{n+1} = X(T_{n+1}) - X(T_n)$ се независни од минатото и имаат распределба која зависи само од x.

$$F_n(t) = p(T_{n+1} - T_n \le t \mid \mathcal{F}_{T_n}) = 1 - e^{-\lambda(X(T_n))t}$$

и за некоја фамилија од функции на распределба $K(x,\cdot)$

$$p(X(T_{n+1}) - X(T_n) \le t \mid \mathcal{F}_{T_n}) = K(X(T_n), t),$$

$$E(X(T_{n+1}) - X(T_n) \mid \mathcal{F}_{T_n}) = m(X(T_n)) = m_n .$$

Интиутивно е јасно дека $X(t)$ дефинирано на овој начин го има Марковото својство, е последица на меморијата на експоненцијалната распределба.

Марков скок процесите можат да се опишат на следниов начин:

Ако процесот е во состојба x, тогаш тој останува во таа состојба со експоненцијална временска должина со математичко очекување $\frac{1}{\lambda(x)}$ (параметар $\lambda(x)$) по која процесот од состојба x скока во нова состојба $x+\xi(x)$, каде што $p(\xi(x) \le t) = K(x,t)$ ја означува функцијата на густина на распределба на скокот од x. Параметрите на процесите се: функцијата $\lambda(x)$ (која е временскиот параметар) и распределбата $K(x,\cdot)$ (распределбата на големината на скоковите).

Функцијата $\lambda(x)$ е секогаш ненегативна. Ако за некое x, $\lambda(x)$, тогаш кога еднаш процесот ќе дојде во состојба x, тогаш останува во x засекогаш, па во овој случај се вели дека состојбата x е апсорбирачка. Ќе претпоставиме дека нема апсорбирачки состојби. Ако $\lambda(x) = \infty$, тогаш процесот го напушта x моментално. Ќе претпоставиме дека $\lambda(x)$ е конечна на конечни интервали, па нема моментални состојби.

Ќе го добиеме прво интуитивно резултатот за компензаторот, а потоа ќе дадаме и прецизна постапка. Да претпоставиме дека $X(t) = x$. Од својството на недостаток на меморија на експоненцијалната распределба, не е важно колку време процесот има поминато во состојбата x, скокот во x сѐ уште ќе се појави по експоненцијално распределено (со параметар $\lambda(x)$) случајно време. Па, условната веројатност дека се појавил скок во интервалот $(t, t+dt)$, при услов претходно да не се појавил претходно (со U имајќи експоненцијална $\exp(\lambda(x))$ распределба), е дадено со:

$$p(U \le dt) = 1 - \exp(-\lambda(x)\,dt) \approx \lambda(x)\,dt .$$

Кога скокот се појавува, неговата големина е $\xi(x)$ со математичко очекување $m(x) = E(\xi(x))$. Следува:

$$dA(t) = E(dX(t) \mid \mathcal{F}_{t^-}) = \lambda(X(t)) m(X(t))\,dt .$$

Да претпоставиме дека $\lim_{n\to\infty} T_n = T_{ki} = \infty$ (овие процеси се нарекуваат регуларни и доволните услови за нив се дадени во наредниот дел). Ако $T_\infty < \infty$, тогаш компензаторот е даден за времињата $t < T_\infty$.

Теорема 1. Нека $X(t)$ е Марков скок процес, така што за сите x, временскиот параметар е позитивен, односно $\lambda(x) > 0$ и големината на скокот од x е интеграбилен со математичко очекување $m(x)$.

1) Компензаторот на $X(t)$ е даден со:

$$A(t) = \int_0^t \lambda(X(s))\, m(X(s))\, ds.$$

(*)

2) Да претпоставиме дека вторите моменти на скоковите се конечни, $\nu(x) = E(\xi^2(x)) < \infty$. Тогаш, острозаградениот локален мартингал $M(t) = X(t) - A(t)$ е даден со:

$$\langle M, M \rangle(t) = \int_0^t \lambda(X(s))\nu(X(s))\, ds.$$

Доказ. Формулата (*) следува од (о) од претходниот дел. Навистина, користејќи ја експоненцијалната форма на F_n, имаме:

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\infty} m(X(T_i))\lambda(X(T_i))(t \wedge T_{i+1} - t \wedge T_i).$$

Да забележиме дека бидејќи процесот $X(t)$ има константна вредност $X(T_i)$ на временскиот интервал $[T_i, T_{i+1})$, за функцијата f, имаме:

$$\int_0^t f(X(s))\, ds = \sum_{i=0}^{\infty} f(X(T_i))(t \wedge T_{i+1} - t \wedge T_i)$$

и земајќи $f(x) = \lambda(x)m(x)$ ја добиваме формулата (*). Формулата (**) следува од последната теорема од претходниот дел. ■

8.6. Стохастичка равенка за процеси на скок

Јасно е дека од теоремата 1, од претходниот дел дека Марков скок процес $X(t)$ има полумартингал процес репрезентација:

$$X(t) = X(0) + A(t) + M(t) = X(0) + \int_0^t \lambda(X(s))m(X(s))\, ds + M(t). \quad (*)$$

Последнава равенка е интегрална форма на стохастичката диференцијална равенка за: $X(t)$

$$dX(t) = \lambda(X(t))m(X(t))\,dt + dM(t),$$

каде што $M(t)$ е мартингал кој е чисто прекинат и со конечна дисперзија. По аналогија со дифузиите, инфинетизималното математичко очекување е: $\lambda(x)m(x)$ и инфинитезималната дисперзија е: $\lambda(x)\nu(x)$.

Ќе дадеме услови кои ќе ни осигураат дека локалниот мартингал $M(t)$ во репрезентацијата (*) е мартингал. Овие услови се дадени во наредната теорема.

Теорема 1. Дапретпоставиме дека за сите x, важи:

$$\lambda(x)E(|\,\xi(x)\,|) \le C(1+|\,x\,|).$$

Тогаш, репрезентацијата (*) важи, при што математичкото очекување на мартингалот $M(t)$ е нула. Дополнително,

$$\lambda(x)\nu(x) \le C(1+x^2),$$

тогаш, $M(t)$ е квадратно интеграбилен и важи:

$$\langle M, M\rangle(t) = \int_0^t \lambda(X(s))\nu(X(s))\,ds.$$

Оттука, ја имаме следнава последица:

Последица 1. Да претпоставиме дека условите во претходната теорема се исполнети. Тогаш,

$$E(X(t)) = E(X(0)) + E\left(\int_0^t \lambda(X(s))m(X(s))\,ds\right),$$

$$D(M(t) - M(0)) = E\left(\int_0^t \lambda(X(s))\nu(X(s))\,ds\right).$$

Забелешка. Марков скок процесите со преброиво или конечно многу состојби се нарекуваат Маркови ланци. Скок променливите имаат дискретна распределба во Марковиот ланец, каде што може да имаме непрекината распределба во Марков процес. Марков скок процесите се исто познати и како Маркови ланци во општ простор.

Модел за случајно еволуирачка популација може да биде Марков ланец од природни броеви. Во овој случај состојбите на процесот се можните вредности за големината на популацијата. Традиционалниот начин на дефинирање на Марков ланец е со инфинитезимални веројатности: за цели броеви i и j и мало δ

$$p(X(t+\delta)=j \mid X(t)=i)=\lambda_{ij}\delta+o(\delta),$$

каде што $\lim_{\delta\to 0}\dfrac{o(\delta)}{\delta}=0$. Во овој дел е дадена скоро сигурна, по пат репрезентација на Марков скок процес.

Нека $X(t)$ е Марков скок процес кој е даден со:

$$X(t)=X(0)+\sum_{n=1}^{\infty}Z_n I(T_n\le t),$$

за сите $t\ge 0$. Да претпоставиме дека $\lambda(x)$ е ограничена, односно $\sup_x \lambda(x)<\infty$. Го дефинираме следниов линеарен оператор L кој дејствува на ограничени функции со:

$$Lf(x)=\lambda(x)E(f(x+\xi(x))-f(x))=\lambda(x)m_f(x).$$

Теорема 2. (Формула на Динкин (Dynkin)) Нека L е операторот кој е дефиниран погоре и нека дефинираме $M^f(t)$ со:

$$M^f(t)=f(X(t))-f(X(0))-\int_0^t Lf(X(s))\,ds. \qquad (**)$$

Тогаш, $M^f(t)$ е мартингал и имаме:

$$E(f(X(t))=f(X(0))+E\left(\int_0^t Lf(X(s))\,ds\right). \qquad (***)$$

Доказ. Доказот на оваа теорема следува од теоремата 1 од делот за Марков процес скок и од теоремата 5 од делот за процеси на броење. Процесот $f(X(t))$ е чист скок процес со исти времиња на пристигнување T_n и скокови со големина: $Z'_n=f(X(T_n))-f(X(T_n^-))$ (во овој случај е, исто така, и Марков процес). Скоковите се ограничени, бидејќи f е ограничена. Математичкото очекување на скокот од x е дадено преку:

$$E(Z'_{n+1} \mid \mathcal{F}_{T_n}, X(T_n)=x)=E(f(x+\xi(x))-f(x))=m_f(x).$$

Оттука, компензаторот на $f(X(t))$ е:

$$\int_0^t \lambda(X(s))m_f(X(s))\,ds.$$

Од овде добиваме дека M^f е локален мартингал. Ако $\lambda(x)$ е ограничена, тогаш $M(t)$ е ограничена со Ct на кој било конечен интервал $[0,t]$. Бидејќи ограничен локален мартингал е мартингал, M^f е мартингал.

Уште повеќе овој мартингал е квадратно интеграбилен на кој било конечен временски интервал. ■

Линеарниот оператор L дефиниран погоре се нарекува генератор на $X(t)$. Може да се покаже дека со негова помош може да се дефинираат веројатности на просторот на десно непрекинати функции, така што координатниот процес е Марков процес.

Теоремата 1 од овој дел може да се разгледува како генерализација на формулата на Динкин за идентичната функција $f(x)=x$ и квадратната функција $f(x)=x^2$. Овие случаи се парцијални случаи од следнава теорема:

Теорема 3. Да претпоставиме дека нема експлозии, односно $T_n \to \infty$. Да претпоставиме дека за неограничена функција f постои константа C, така што за сите x, важи:

$$\lambda(x)E\left(|\ f(x+\xi(x))-f(x)\,|\right)\leq C(1+|\ f(x)\,|).$$

Д претпоставиме дека $E\left(|\ f(X(0))\,|\right)<\infty$. Тогаш, за сите t, $0\leq t<\infty$, $E(|\ f(X(t))\,|)<\infty$ и уште повеќе M^f во (**) е мартингал и важи (***).

8.7. Експлозии во Марков скок процеси

Нека $X(t)$ е Марков скок процес и прима реални вредности. Ако процесот е во состојба x, тогаш тој останува во таа состојба во експоненцијална временска должина со математичко очекување $\dfrac{1}{\lambda(x)}$ по кое процесот скока од x. Ако $\lambda(x)\to\infty$ за множество на вредности x, тогаш очекуваното време на останување во состојба x, $\dfrac{1}{\lambda(x)}\to 0$ и времето поминато во состојба x станува пократко и пократко. Може да се случи процесот да скока бесконечно многу пати во конечен временски интервал, односно: $\lim_{n\to\infty} T_n = T_\infty < \infty$. Овој феномен се нарекува експлозија. Терминологијата доаѓа од случајот кога процесот прима само цели вредности и $\lambda(x)$ може да тежи кон бесконечност само кога $x\to\infty$. Во овој случај постојат бесконечно многу скокови само ако процесот достигнува бесконечност во конечно време.

Кога процесот не експлодира тој процес се нарекува регуларен. Со други зборови, претпоставката за регуларност е:

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = \infty \quad \text{скоро секаде.}$$

Ако $p(T_\infty < \infty) > 0$, тогаш велиме дека процесот експлодира на множеството $\{T_\infty < \infty\}$. Потребен и доволен услов за нееексплозија е даден со наредната теорема.

Теорема 1. Важи:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(X(T_n))} = \infty \quad \text{скоро секаде.}$$

Доказ. Овде, ќе дадеме скица на доказот. Нека ν_n е низа независни случајни променливи со експоненцијална распределба со параметар λ_n. Лесно се гледа (со земање на Лапласова трансформација) дека $\sum_{i=0}^{n} \nu_i < \infty$ конвергира по распределба ако и само ако $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. Користејќи дека редот од независни случајни променливи конвергира скоро сигурно ако и само ако конвергира по распределба, имаме дека $\sum_{N=0}^{\infty} \nu_n < \infty$ скоро сигурно ако и само ако $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. Сега го добиваме условот на теоремата, бидејќи условната распределба на $T_{n+1} - T_n$ и имајќи предвид дека до n-тиот скок, $\mathcal{F}_{T_n}$, има експоненцијална распределба со параметар $\lambda(X(T_n))$. ■

Условот во горната теорема во општ случај е тешко да се провери, бидејќи ги вклучува случајните променливи $X(T_n)$. Едноставен услов, кој е даден преку функцијата $\lambda(x)m(x)$ (лизгањето) е даден во наредната теорема.

Теорема 2. Да претпоставиме дека $X(t) \geq 0$ и постои монотона функција $f(x)$, така што $\lambda(x)m(x) \leq f(x)$ и $\int_0^\infty \frac{dx}{f(x)} = \infty$. Тогаш процесот $X(t)$ не експлодира, односно:

$$p(X(t) < \infty, \quad \text{за сите } t, \quad 0 \leq t < \infty) = 1.$$

Имајќи ја предвид последната теорема, можеме да заклучиме дека првиот услов во резултатот за интеграбилност, гарантира дека процесот не експлодира.

9. Примена на стохастичките процеси во инженерските науки

Во овој дел ќе дадеме примена на стохастичкиот калкулус на проблемот на филтрација и случајните осцилатори во инженерството. Проблемот на филтрација се состои од наоѓање на најдобрата оцена на сигналот, кога информациите се загадени (контаминирани) со шум. За голем број класични равенки на движење во физиката, ќе најдеме функции на стационарни густини кога движењето е предмет на случајни математички очекувања.

9.1. Филтрација

Проблемот на филтрација, всушност, е проблем на оценка на сигналот кој е загаден (контаминиран) со шум. Нека $Y(t)$ е разгледуваниот процес и нека со $\mathcal{F}_t^Y$ ја означиме информацијата која може да ја добиеме со набљудување на процесот сѐ до моментот t, односно $\mathcal{F}_t^Y = \sigma(Y(s) : s \leq t)$. Разгледувањето на процесот $Y(t)$ во момент t е резултат на детерминистичка трансформација на сигналниот процес $X(s)$, $s \leq t$, обично линеарна трансформација, на која е додаден случаен шум. Проблемот на филтрација е да се најде „најдобрата“ оценка $\pi_X(t)$ на сигналот $X(t)$ на основа на сите набљудувања $Y(s)$, $s \leq t$ или $\mathcal{F}_t^Y$. Овде „најдобра“ оценка е во смисла на најмала грешка на оценката:

$$E((X(t) - Z(t))^2 \mid \mathcal{F}_t^Y),$$

каде што $Z(t)$ припаѓа во множеството на сите $\mathcal{F}_t^Y$ – мерливи процеси. Нека означиме за адаптиран процес $h(t)$,

$$\pi_t(h) = E(h(t) \mid \mathcal{F}_t^Y).$$

Па, проблемот на филтрација се трансформира во наоѓање на $\pi_t(X)$.

Двата главни резултата на стохастичкиот калкулус, кои ќе бидат користени за решавање на проблемот на филтрација, се карактеризацијата на Леви на Брауновото движење и својството на предвидлива репрезентација на Брауновата филтрација.

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ е комплетен простор на веројатност и нека $(\mathcal{F}_t)$, $0 \le t \le T$ е неопаѓачка фамилија од непрекинати од десно σ-алгебри од $\mathcal{F}$ за која важат вообичаените услови и се добро дефинирани адаптираните процеси $X(t)$ и $Y(t)$.

Наша цел ќе биде да ја најдеме $\pi_t(h)$ за адаптираниот процес $h(t)$. Всушност, можеме да го најдеме $E(g(X(t)) \mid \mathcal{F}_t^Y)$ за реално вредносна функција g. Кога g припаѓа на множеството од сите тест-функции, се добива условната распределба на $X(t)$ при дадено $\mathcal{F}_t^Y$. Уште повеќе, земајќи $g(x) = x$, добиваме најдобра оценка за $\pi_X(t)$. Претпоставуваме дека процесот $h(t)$, кој сакаме да го филтрираме и набљудуваниот процес $Y(t)$ ги задоволуваат стохастичките диференцијални равенки:

$$dh(t) = H(t)\,dt + dM(t)$$
$$dY(t) = A(t)\,dt + B(Y(t))\,dW(t), \qquad \text{(o)}$$

каде што:

а) процесот $M(t)$ е $\mathcal{F}_t$ - мартингал;

б) процесот $W(t)$ е $\mathcal{F}_t$ - Брауново движење;

в) процесите $H(t)$ и $A(t)$ се случајни и за нив со веројатност 1 важи:

$$\int_0^T |H(t)|\,dt < \infty, \qquad \int_0^t |A(t)|\,dt < \infty \;;$$

г) $\sup\limits_{t \le T} E(h^2(t)) < \infty$, $\qquad \displaystyle\int_0^T E(H^2(t))\,dt < \infty$,

$$\int_0^T E(A^2(t))\,dt < \infty \;;$$

д) дифузиониот коефициент на набљудуваниот процес $Y(t)$ е функција $B(y)$ само од $Y(t)$, а не зависи од $X(t)$. Важи $B^2(y) \ge C > 0$ и $B^2(t)$ го задоволува Липшицовиот услов и условот за линеарен раст.

Теорема 1. За секое t, $0 \le t \le T$,

$$d\pi_t(h) = \pi_t(H)\,dt + \left(\pi_t(D) + \frac{\pi_t(hA) - \pi_t(h)\pi_t(A)}{B(Y(t))}\right) d\overline{W}(t),$$

каде што: $d\overline{W}(t) = \dfrac{dY(t) - \pi_t(A)}{B(Y(t))}$ е $\mathcal{F}_t^Y$ – Брауново движење и

$$D(t)=\frac{d\langle M,W\rangle(t)}{dt}.$$

Процесот $\overline{W}(t)$ се нарекува иновативен процес. Ќе дадеме скица на доказот на теоремата. Од стохастичките диференцијални равенки од претходно, имаме:

$$h(t)=h(0)+\int_0^t H(s)\,ds+M(t) \qquad (*)$$

и:

$$E(h(t)\,|\,\mathcal{F}_t^Y)=E(h(0)\,|\,\mathcal{F}_t^Y)+E(\int_0^t H(s)\,ds\,|\,\mathcal{F}_t^Y)\,ds+E(M(t)\,|\,\mathcal{F}_t^Y).$$

Комплицираноста овде во пресметувањето на условните математички очекувања при дадено $\mathcal{F}_t^Y$ е дека процесите, се σ-алгебри и двете зависат од t.

Теорема 2. Нека $A(t)$ е $\mathcal{F}_t$ –адаптиран процес, така што:

$$\int_0^T E(|\,A(t)\,|)\,dt<\infty \qquad \text{и} \qquad V(t)=\int_0^t A(s)\,ds.$$

Тогаш,

$$\pi_t(V)-\int_0^t \pi_s(A)\,ds=E(\int_0^t A(s)\,ds\,|\,\mathcal{F}_t^Y)-\int_0^t E(A(s)\,|\,\mathcal{F}_t^Y)\,ds$$

е $\mathcal{F}_t^Y$ – мартингал.

Доказ. Нека $\tau\le T$ е $\mathcal{F}_t^Y$ – стопирачко време. Од претходно, доволно е да докажеме дека:

$$E(\pi_\tau(V))=E\left(\int_0^\tau \pi_s(A)\,ds\right).$$

Од законот за двојно математичко очекување, имаме:

$$E(\pi_\tau(V))=E(V(\tau))=E\left(\int_0^\tau A(s)\,ds\right)$$

$$=\int_0^T E(I(s\le\tau)A(s))\,ds=\int_0^T E(I(s\le\tau)\pi_s(A))\,ds=E\left(\int_0^\tau \pi_s(A)\,ds\right).$$

Во последната еднаквост беше искористено дека $I(s\le\tau)$ е $\mathcal{F}_t^Y$ – мерлива. ■

Да забележиме дека од условна верзија на теоремата на Фубини, добиваме:

$$E\left(\int_0^t A(s)\,ds \mid \mathbf{G}\right) = \int_0^t E(A(s) \mid \mathbf{G})\,ds\,.$$

Со лесна проверка ја добиваме следнава теорема:

Теорема 3. Нека $M(t)$ е $\mathcal{F}_t$ – мартингал. Тогаш, $\pi_t(M)$ е $\mathcal{F}_t$ – мартингал.

Последица 1. Важи:

$$\pi_t(h) = \pi_t(0) + \int_0^t \pi_s(H)\,ds + M_1(t) + M_2(t) + M_3(t)\,,$$

каде што $M_i(t)$ се мартингали во нула;

$$M_1(t) = E(h(X(0)) \mid \mathcal{F}_t^Y) - h(0)$$

$$M_2(t) = E(\int_0^t H(s)\,ds \mid \mathcal{F}_t^Y)ds - \int_0^t \pi_s(H)\,ds$$

$$M_3(t) = E(M(t) \mid \mathcal{F}_t^Y)\,.$$

Доказ. Од (*) имаме дека првиот член $E(h(X(0)) \mid \mathcal{F}_t^Y)$ е Дуб-Левиев мартингал. Вториот член е мартингал од теоремата 2, додека третиот член е мартингал од теоремата 3. ■

Наша цел ќе биде да искористиме репрезентација на $\mathcal{F}_t^Y$ – мартингали. Ова се прави со користење на иновативниот процес.

Теорема 4. Иновативниот процес $\overline{W}(t) = \int_0^t \frac{dY(s) - \pi_s(A)\,ds}{B(Y(s))}$ е $\mathcal{F}_t^Y$ – Брауново движење. Уште повеќе,

$$dY(t) = \pi_A(t)\,dt + B(Y(t))\,d\overline{W}(t)\,.$$

Доказ. Со користење на стохастичките диференцијални равенки (о), добиваме:

$$\overline{W}(t) = \int (A(s) - E(A(s) \mid \mathcal{F}_t^Y)) / B(Y(s))\,ds + W(t)\,.$$

За $t > t'$, имаме:

$$E(\overline{W}(t) - \overline{W}(t') \mid \mathcal{F}_t^Y) = E(W(t) - W(t') \mid \mathcal{F}_t^Y)$$

$$\int E((A(s) - E(A(s) \mid \mathcal{F}_t^Y)) / (B(Y(s)) \mid \mathcal{F}_t^Y) ds.$$

Десната страна на равенството е нула, првиот член е нула од теоремата 3, додека вториот член е нула од условната верзија на теоремата на Фубини. Следува дека $\overline{W}(t)$ е $\mathcal{F}_t^Y$- мартингал. Јасно овој мартингал е непрекинат. Имаме дека: $[\overline{W},\overline{W}](t) = [W,W](t) = t$. Сега, тврдењето на теоремата следува од Левиевата карактеризација. ■

Сега, ако:

$$\mathcal{F}_t^{\overline{W}} = \mathcal{F}_t^Y, \tag{**}$$

тогаш условните математички очекувања при дадено $\mathcal{F}_t^Y$ се исти како при дадено $\mathcal{F}_t^{\overline{W}}$. За да важи (**) доволно е стохастичката диференцијална равенка, за $Y(t)$ во формулацијата на претходната теорема, да има слабо решение. Имаме дека постојат предвидливи процеси $g_i(s)$, така што:

$$M_i(t) = \int_0^T g_i(s)\, d\overline{W}(s),$$

каде што:

$$g_i(t) = \frac{d\left\langle M_i, \overline{W}\right\rangle(t)}{dt}.$$

Може да се докаже дека:

$$g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = \pi_t(D) + \frac{\pi_t(hA) - \pi_t(h)\pi_t(A)}{B(Y(t))},$$

но овде, тој доказ ќе биде скокнат.

Нека $(X(t), Y(t))$, $0 \le t \le T$ е процес на дифузија во однос на независни Браунови движења $W_i(t)$, $i = 1,2$, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_1(s), W_2(s),\ s \le t)$ и

$$dX(t) = a(X(t))\,dt + b(X(t))\,dW_1(t)$$
$$dY(t) = A(X(t))\,dt + B(Y(t))\,dW_2(t).$$

Да претпоставиме дека коефициентите го задоволуваат Липшицовиот услов, односно за кои било од функциите a, A, b, B, важи (на пример за a)

$$|a(x') - a(x'')| \le K\,|x' - x''|$$

и:

$$B^2(y) \ge C > 0.$$

Нека $h = h(X(t))$. За функцијата h ќе велиме дека е двапати непрекинато диференцијабилна. Со примена на теоремата 1 на $h(X(t))$ и Итовата формула, добиваме:

$$h(X(t)) = h(X(0)) + \int_0^t Lh(X(s))\,ds + \int_0^t h'(X(s))b(X(s))\,dW_1(s),$$

каде што:

$$Lh(x) = h'(x)a(x) + \frac{1}{2}h''(x)b^2(x).$$

Од теоремата 1 добиваме:

$$\pi_t(h) = \pi_0(h) + \int_0^t \pi_s(Lh)\,ds + \int_0^t \frac{\pi_s(Ah) - \pi_s(A)\pi_s(h)}{B(Y(s))}\,d\overline{W}(s),$$

каде што:

$$\overline{W}(t) = \int_0^t \frac{dY(s) - \pi_s(A)\,ds}{B(Y(s))}.$$

Во продолжение линеарниот случај ќе биде разгледуван и решен. Да претпоставиме дека сигналот и набљудуваните процеси ги задоволуваат линеарните стохастички диференцијални равенки со временско зависни неслучајни коефициенти:

$$dX(t) = a(t)X(t)\,dt + b(t)dW_1(t)$$
$$dY(t) = A(t)X(t)\,dt + B(t)dW_2(t),$$

со две независни Браунови движења (W_1, W_2) и почетни услови $X(0)$, $Y(0)$. Поради линеарноста, во овој случај имаме решение во затворена форма за процесите $X(t)$ и $Y(t)$ и исто за оптималната оцена на $X(t)$, при дадено $\mathcal{F}_t^Y$. Во линеарниот случај лесно е да се решат горните стохастички диференцијални равенки и се добива дека процесите $X(t)$, $Y(t)$ се заедно Гаусов процес. Јасно, во овој случај ја користиме ознаката:

$$X(t) = \pi_t(X) = E(X(t) \mid \mathcal{F}_t^Y).$$

Теорема 5. Да претпоставиме дека сигналот $X(t)$ и набљудувањето $Y(t)$ се дадени со равенките:

$$dX(t) = a(t)X(t)\,dt + b(t)dW_1(t)$$
$$dY(t) = A(t)X(t)\,dt + B(t)dW_2(t).$$

Тогаш, најдобрата оцена $X(t) = E(X(t) \mid \mathcal{F}_t^Y)$ ја задоволува стохастичката диференцијална равенка:

$$d\,X(t) = \left(a(t) - \nu(t)\frac{A^2(t)}{B^2(t)} \right) X(t)\,dt + \nu(t)\frac{A(t)}{B^2(t)} dY(t),$$

каде што $\nu(t) = E(X(t) - X(t))^2$ е грешката на квадратната оцена. Ако е задоволена Рикатиевата обична диференцијална равенка:

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = 2a(t)\nu(t) + b^2(t) - \frac{A^2(t)\nu^2(t)}{B^2(t)},$$

со почетни услови $X(0)$ и $\nu(0) = D(X(0)) - \dfrac{\operatorname{cov}^2(X(0),Y(0))}{D(Y(0))}$.

Доказ. Со примена на теоремата 1, со $h(x) = x$, имаме:

$$d\,X(t) = a(t)X(s)\,dt + \frac{A(t)}{B^2(t)}\left(\pi_t(h^2) - \left(\pi_t(h)\right)^2\right)\left(dY(t) - A(t)X(t)\,dt\right).$$

Да забележиме дека:

$$\pi_t(h^2) - \left(\pi_t(h)\right)^2 = E((X(t) - X(t))^2 \mid \mathcal{F}_t^Y).$$

Бидејќи процесите $X(t)$ и $Y(t)$ се заедно Гаусов процес, $X(t)$ е ортогонална проекција и $X(t) - X(t)$ е ортогонален (некорелирани) на $Y(s)$, $s \le t$. Но, ако Гаусовите случајни променливи се некорелирани, тие се независни. Следува дека $X(t) - X(t)$ е независен од $\mathcal{F}_t^Y$ и имаме дека $\nu(t)$ е детерминистичка:

$$\nu(t) = E((X(t) - X(t))^2 \mid\,) = E((X(t) - X(t))^2).$$

Почетната вредност $\nu(0)$ е добиена со резултат за корелација кај нормалната распределба. Нека $\delta(t) = X(t) - X(t)$. Тогаш, $\nu(t) = E(\delta^2(t))$. Стохастичката диференцијална равенка за $\delta^2(t)$ е добиена од стохастичките диференцијални равенки:

$$dX(t) = a(t)X(t)\,dt + b(t)dW_1(t)$$

$$d\,X(t) = a(t)X(s)\,dt + \frac{A(t)}{B^2(t)}\left(\pi_t(h^2) - \left(\pi_t(h)\right)^2\right)\left(dY(t) - A(t)X(t)\,dt\right),$$

на следниов начин:

$$d\delta(t) = a(t)\delta(t)\,dt + b(t)dW_1(t) - \frac{A^2(t)\nu(t)}{B^2(t)}\delta(t)\,dt - \frac{A(t)\nu(t)}{B(t)}dW_2(t).$$

Со примена на Итовата формула за $\delta^2(t)$, имаме:

$$d\delta^2(t) = \left(2(a(t) - \frac{A^2(t)\nu(t)}{B^2(t)})\delta^2(t) + (b^2(t) + \frac{A^2(t)\nu^2(t)}{B^2(t)}) \right) dt$$
$$+\delta(t)\left(b(t)dW_1(t) - \frac{A(t)\nu(t)}{B(t)} dW_2(t) \right).$$

Запишувајќи го последниот израз во интегрална форма и барајќи математичко очекување, имаме:

$$\nu(t) = \nu(0) + \int_0^t \left(2\left(a(s) - \frac{A^2(s)\nu(s)}{B^2(s)} \right)\nu(s) + \left(b^2(s) + \frac{A^2(s)\nu^2(s)}{B^2(s)} \right) \right) ds$$
$$= \nu(0) + \int_0^t \left(2a(s) + b^2(s) - \frac{A^2(s)\nu^2(s)}{B^2(s)} \right) ds,$$

од каде што се добива тврдењето на теоремата. ■

Повеќедимензионалниот случај е сличен, со таа разлика што обичната Рикатиева равенка станува матрична Рикатиева равенка за коваријансната матрица за грешката на оцената.

Калман-Бусиевиот (Kalman-Bucy) филтер овозможува директна примена на горните равенки, кои се користат рекурзивно за пресметување на $X(t+\Delta t)$ од претходните вредности за $X(t)$ и $\nu(t)$.

Пример 1. (Модел со константни коефициенти) Да го разгледаме случајот со константни коефициенти,

$$dX(t) = aX(t)\,dt + dW_1(t),$$
$$dY(t) = cX(t)\,dt + dW_2(t).$$

Во овој случај,

$$d\,X(t) = (a - \nu(t)c^2)X(t)\,dt + c\nu(t)\,dY(t)$$

и $\nu(t)$ ја задоволува Рикатиевата равенка:

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = 2a\nu(t) + 1 - c^2\nu^2(t).$$

Оваа равенка има експлицитно решение:

$$\nu(t) = \frac{\gamma\alpha e^{\lambda t} + \beta}{\gamma e^{\lambda t} + 1},$$

каде што α и β се корените на $1+2ax-c^2x^2=0$, при претпоставка $\alpha>0$, $\beta<0$, $\lambda=c^2(\alpha-\beta)$ и $\gamma=\dfrac{\sigma^2-\beta}{\alpha-\sigma^2}$, каде што $\sigma^2=D(X(0))$.

Користејќи го $v(t)$, оптималната оцена $X(t)$ може да се најде од:

$$d\,X(t)=(a-v(t)c^2)X(t)\,dt+cv(t)\,dY(t)\,.\ ♦$$

9.2. Случајни осцилатори

Диференцијалните равенки од втор ред,

$$\ddot{x}+h(x,\dot{x})=0,$$

се користат за да се опише широк спектар на физички феномени. Осцилациите се едни од нив.

Пример 1. (Хармониски осцилатор) Автономен вибрирачки систем е даден со равенката:

$$\ddot{x}+x=0, \qquad x(0)=0, \qquad \dot{x}(0)=1,$$

каде што $x(t)$ го означува поместувањето од состојба на статичка рамнотежа. Решението на оваа равенка е: $x(t)=\sin(t)$. Траекториите на овој систем во фазниот простор $x_1=x$, $x_2=\dot{x}$ се затворени кружници. ♦

Пример 2. (Нишало) Нишало е дадено со равенката $\ddot{x}+a\sin x=0$, каде што $x(t)$ го означува аголното поместување во однос на неговата состојба на рамнотежа. Нејзиното решение не може да се добие преку елементарни функции, но може да се даде во фазна рамнина, $(\dot{x})^2=2a\cos x+C$. ♦

Пример 3. [Осцилатор на Ван дер Пол (Van der Pol)] Во некои системи големите осцилатори имаат амортизери, додека помалите осцилатори се засилени (негативно амортизирани). Таквото движење е дадено со равенката на Ван дер Пол:

$$\ddot{x}-a(1-x^2)\dot{x}+x=0,$$

каде што: $a>0$. Решението на оваа равенка не може да се даде преку елементарни функции, дури и во фазна рамнина. ♦

Пример 4. [Осцилатор на Рејлег (Rayleigh)] Овој осцилатор е даден со равенката:

$$\ddot{x}-a(1-\dot{x}^2)\dot{x}+x=0,$$

каде што: $a > 0$. ♦

Да ги разгледаме случајните математички очекувања на овие системи со бел шум (користиме јазик на применета математика) со облик $\sum_{i=1}^{2} f_i(x,\dot{x})\dot{W}_i(t)$, каде $\dot{W}_i(t)$, $i = 1,2$ се бели шумови со делта функции на корелација:

$$E\left(\dot{W}_i(t)\dot{W}_j(t+\tau)\right) = 2\pi K_{ij}\delta(\tau)\,dt\,.$$

Следува дека случајно пертурбираната равенка има облик:

$$\ddot{X} + h(x,\dot{X}) = \sum_i f_i(X,\dot{X})\dot{W}_i(t)\,.$$

Белиот шум формално е извод од Брауновото движење. Бидејќи Брауновото движење не е никаде диференцијабилно, горниот систем има само формално значење.

Ригорозното значење на овој тип на равенки е дадено преку систем од прв ред Итови стохастички равенки. Репрезентацијата како систем од две равенки од прв ред ја следи истата идеја како кај детерминистичкиот случај со ставање на: $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$. Го добиваме следниов Итов систем од стохастички диференцијални равенки:

$$dX_1 = X_2\,dt$$

$$dX_2 = \left(-h(X_1,X_2) + \pi\sum_{j,k} K_{jk}\,f_j(X_1,X_2)\frac{\partial f_k}{\partial x_2}(X_1,X_2)\right)$$

$$+\sum_{i=0}^{2} f_i(X_1,X_2)dW_i(t)\,.$$

Горниот систем е дводимензионална дифузија и го има истиот генератор како наредниот систем даден преку Брауново движење $B(t)$,

$$dX_1 = X_2\,dt$$

$$dX_2 = A(X_1,X_2)\,dt + G(X_1,X_2)\,dB(t)\,,$$

каде што:

$$A(x_1,x_2) = -h(x_1,x_2) + \pi\sum_{j,k} K_{jk}\,f_j(x_1,x_2)\frac{\partial f_k(x_1,x_2)}{\partial x_2}\,,$$

$$G(x_1,x_2) = \sqrt{2\pi\left(\sum_{j,k} K_{jk}\,f_j(x_1,x_2)\,f_k(x_1,x_2)\right)}\,.$$

Последниот систем е ригорозен математички модел од случајни осцилатори и оваа форма е наша стартна точка во оваа анализа. Решенијата на добиените Фокер-Планкови равенки ги даваат функциите на густини на распределба на инваријантни мери или стационарни распределби за такви случајни системи. Соодветната Фокер-Планкова равенка ја има формата:

$$x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} p_s + \frac{\partial}{\partial x_2}(Ap_s) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(G^2 p_s) = 0,$$

каде што $p_s(x_1, x_2)$ е функцијата на густина на распределба на инваријантна мера. Кога решението на Фокер-Планковата равенка има конечен интеграл, тогаш тоа е стационарната распределба на процесот. Но, ова решение може да не постои, особено во системи со траектории кои тежат кон бесконечност. Во вакви случаи инваријантните мери кои не се функции на густина на распределба на веројатноста може да постојат и да даваат информации за основната динамика.

За илустрација, да ги разгледаме стохастичките диференцијални равенки од втор ред без шум по $\dot{x}$,

$$\ddot{X} + h(X, \dot{X}) = \sigma \dot{B}.$$

Соодветниот Итов систем е даден со:

$$dX_1 = X_2\, dt$$

$$dX_2 = -h(X_1, X_2)\, dt + \sigma\, dB(t).$$

Димензијата е $n = 2$, па постои едно Брауново движење, $d = 1$, па:

$$\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))^T,$$

$$b(\mathbf{X}(t)) = (b_1(\mathbf{X}(t)), b_2(\mathbf{X}(t)))^T = (X_2(t), -h(X_1(t), X_2(t)))^T,$$

$$\sigma(\mathbf{X}(t)) = (0, \sigma)^T.$$

Дифузионата матрица е:

$$a = \sigma\sigma^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix},$$

па, генераторот е даден со равенката:

$$L = \sum_{i=1}^{2} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - h(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Многу важен пример е даден преку линеарните равенки:

$$\ddot{X} + a\dot{X} + bX = \sigma \dot{B},$$

со константни коефициенти. Решенијата на овие равенки можат да се запишат преку општата формула:

$$\mathbf{X}(t) = (\exp(Ft))\left(\mathbf{X}(0) + \int_0^t (\exp(-Fs))(0,\sigma)^T \, dB(s)\right),$$

каде тшто: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$ и $\exp(Ft)$ го означува матричниот експоненцијал.

За некои системи Фокер-Планковата равенка може да се реши со методот на детален баланс. Во продолжение K_0, K_1 ќе означуваат скалирачки константи.

Да разгледаме адитивна стохастичка пертурбација на Дуфинговата (Duffing) равенка:

$$\ddot{X} + a\dot{X} + X + bX^3 = \dot{W}.$$

$$p_s(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{a}{2\pi K_0}(x_2^2 + \frac{1}{2}bx_1^4 + x_1^2)\right).$$

Типични примери на графици на оваа фунцкија на густина на распределба на инваријантните мери ќе бидат прикажани подолу.

Да го разгледаме следниов осцилатор со адитивен шум:

$$\ddot{X} - a(1 - X^2 - \dot{X}^2)\dot{X} + X = \dot{W}.$$

Функцијата на густина на распределба на инваријантната мера е дадена со:

$$p_s = \exp\left(-\frac{a(x_1^2 + x_2^2)^2}{4\pi K_0}\right).$$

Следува дека кога $a = 0$, површината која ја претставува инваријантната функција на густина на распределба е рамнина. Кога $a > 0$, површина од четврт ред во однос на x_1, x_2 има максимум во крива која го претставува граничниот циклус на детерминистичката равенка.

Сега да ја разгледаме истата равенка со параметарски шум со облик:

$$\ddot{X} - a(1 - X^2 - \dot{X}^2)\dot{X} + X = \dot{W}_0 + (X^2 + \dot{X}^2)\dot{W}_1.$$

Функцијата на густина на распределба на инваријантната мера е дадена со:

$$p_s = (K_0 + 2K_1 x_1^2 x_2^2 + K_1 x_1^4 + K_1 x_2^4)^{-\frac{\sqrt{K_0}(a + 2\pi K_1)}{4}}$$

$$\cdot \exp\left(\frac{2a\, arctg \dfrac{\sqrt{K_1}\,(x_1^2 + x_2^2)}{\sqrt{K_0}}}{4\pi\sqrt{K_0 K_1}} \right).$$

Типични примери на графици на оваа фунцкија на густина на распределба на инваријантните мери ќе бидат прикажани подолу.

Да разгледаме случајни пертурбации на систем со цилиндрична фаза:

$$-\pi \le x < \pi,\ -\infty < \dot{x} < \infty,$$

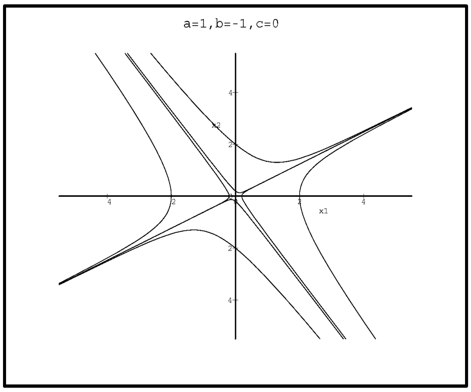
$$\ddot{X} + a\dot{X} + b + \sin(X) = \dot{W}.$$

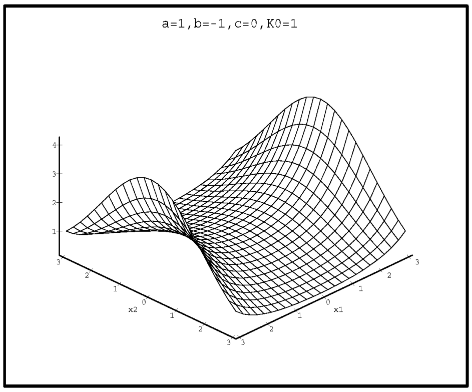
Неговата функција на густина на распределба на веројатноста е дадена со:

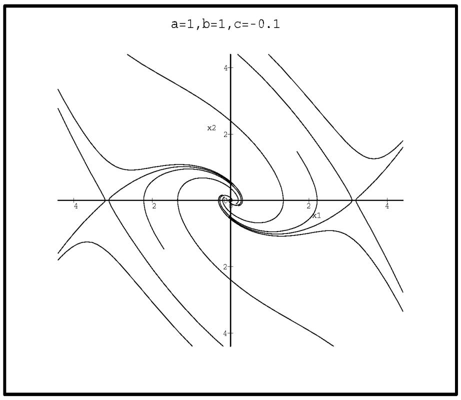
$$p_s = \exp\left(-\frac{a(x_2^2 + 2bx_1 - 2\cos x_1)}{2\pi K_0} \right).$$

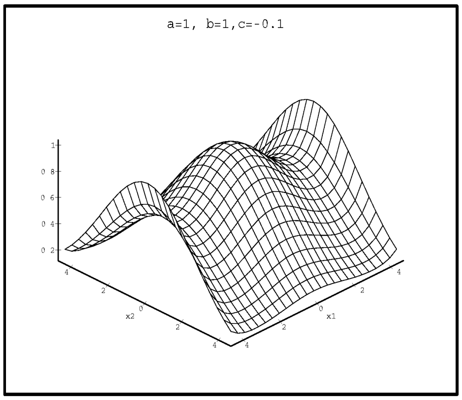
Типични примери на графици на оваа функција на густина на распределба на инваријатните мери ќе бидат прикажани подолу.

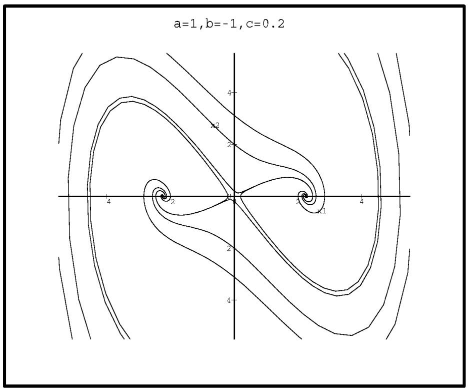
Сега ќе бидат прикажани типични примери за Дуфинговата равенка.

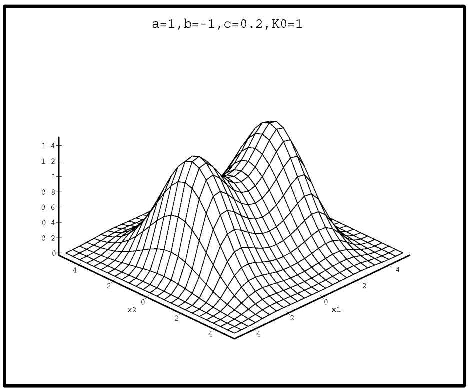




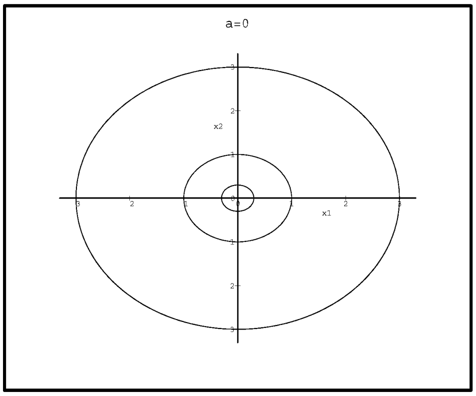


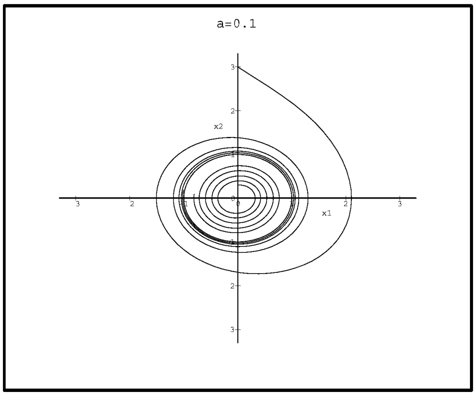


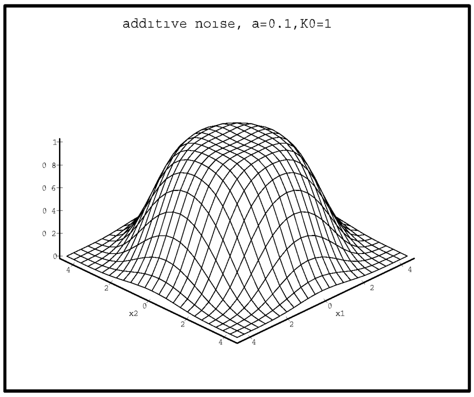


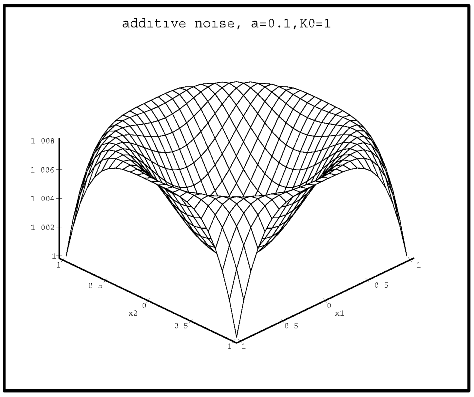


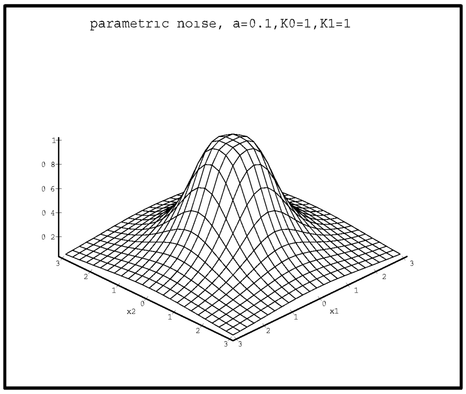
Во продолжение ќе бидат дадени некои типични примери кај случајниот осцилатор.



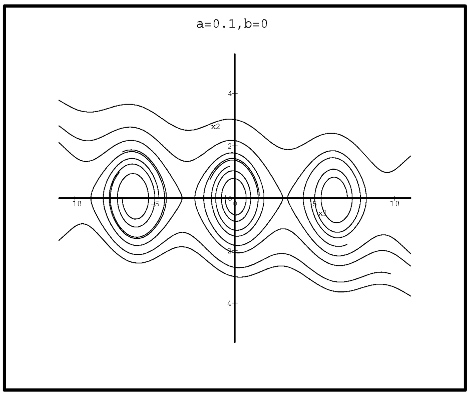


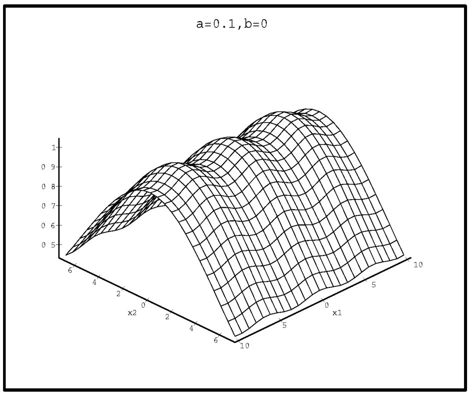


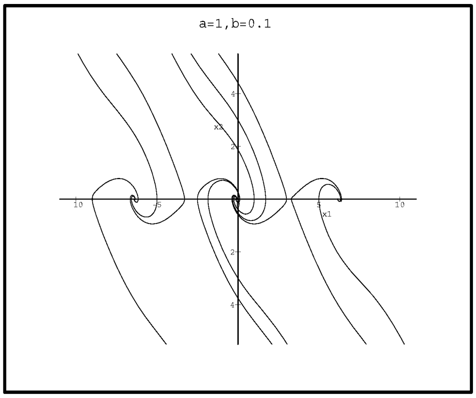


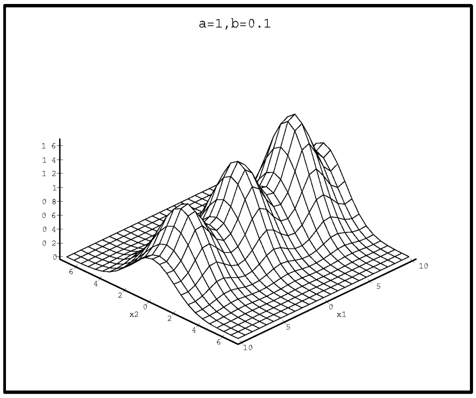


Понатаму, даваме карактеристични примери на графици на решенија на системот со цилиндрична фазна рамнина.






a=1,b=0.1
x2
x1
10
5
10
4
2
2
4


a=1,b=0.1
x2
x1

10. Методи Монте Карло

Овде можеме да си го поставиме прашањето: Што ќе добиеме ако ја измериме енергијата на еден систем? Фокусот на овој дел ќе биде да се најде очекуваната врдност на која било случајна променлива - енергија или некое друго својство, со помош на Монте Карло - методите.

Како многу логична мисла во однос на мерењето на енерегијата е да ја најдеме најверојатната енергија. Познато е дека веројатноста да се појави состојбата j е дадена со:

$$p(E_j) = \frac{\exp(-\beta E_j)}{\sum_s \exp(-\beta E_s)}.$$

Именителот е константен, па може да се максимизира $P(E_j)$ со минимизирање на βE_j. Ако претпоставиме дека β е позитивно, тогаш можеме да ја најдеме максималната веројатност со максимизирање на енергијата.

Ова решение е премногу едноставно. За почеток, потребна ни е попрезицна дефиниција на тоа што значи системот да се наоѓа во некоја состојба, што е микросостојба или што е макросостојба. Точно овие работи ќе имаат големо влијание на тоа кое ќе биде најголемо математичко очекување на енергијата.

Ќе ни биде потребна идеја како правилно да ги претставиме сите состојби на системот и што ќе подразбираме под тие состојби. Потоа, ќе треба да работиме со тие веројатности аналитички и ќе извлечеме репрезентативна состојба на системот за нумерички оцени. Главната алатка која ќе ја користиме за да креираме оваков репрезентативен примерок е Монте Карловиот алгоритам.

10.1. Микросостојби и макросостојби

Да разгледаме систем од три еднакво силни магнетни прачки A, B и C во рамномерно магнетно поле, поставени така што тие покажуваат „нагоре“ - со нивниот север покажуваат кон северот на магнетното поле или „надолу“- нивниот север покажува кон југот на магнетното поле. Енергијата на овие магнети ќе зависи од конфигурацијата на магнетните вредности.

Една состојба може да ја има магнетната прачка A нагоре, B надолу и C надолу. Дали оваа е иста состојба ако A е надолу, B нагоре и C

надолу? Или ако A и B се надолу и C нагоре? Од тоа како е поставен проблемот, овие состојби треба да имаат иста енергија, и исто да изгледаат. Но, дали сите овие состојби се иста состојба? Дали е важен описот на состојбата j дека „A е нагоре, B и C се надолу“ или тоа е состојбата „еден е нагоре, а останатите две се надолу“? Ова ќе има ефект на тоа која ќе биде очекуваната вредност на енергијата. Ќе ги дадеме следниве два описа на микросостојба и макросостојба.

Микросостојба е првиот опис на состојбата погоре, односно идејата дека сакаме да опишеме дека „магнетната прачка A е нагоре, а магнетните прачки B и C се надолу. Ова е опис на системот со наведување на вредностите на сите компоненти.

Макросостојба е втор опис на системот, во кој само се опишуваат вкупните својства, но не е дадено како системот е уреден за да ги има тие својства. Ова е опис на системот со наведување на вкупните вредности на целиот систем.

Опис на микросостојба повлекува макросостојба: деталните информации за целиот систем можат да се искористат за да се добие поапстрактен опис. Ако ја знаеме брзината и масата на секоја група на честички од гас, можеме да ја пресметаме со сигурност кинетичката енергија на гасот. Макросостојбата типично има повеќе микросостојби кои се совпаѓаат со описот на макросостојбата, но, сепак, од неа не може да се извлече детална информација за микросостојбите. Разликата помеѓу микросостојба и макросостојба може илустративно да се прикаже како на два начина на претставување на податоци од попис на една населба: макросостојбата во пописот на населбата (на популацијата) кажува колку луѓе живеат во секоја од куќите во населбата. Микросостојбата во пописот на населбата кажува кои луѓе живеат во секоја од куќите.

За покомплицирани системи кои се интересни за нас, да земеме некој дел со означени M места и група од N честички, за кои важи:

$$1 \ll M \ll N,$$

каде што симболот „$\ll$“ означува значително помалку. За поедноставно, да ја земеме ситуацијата со законот за идеален гас, да претпоставиме дека секое место j има енергија e_j и „циркулација“ Γ_j и окупацијата на некое место не влијае на динамиката на друго место.

Да претпоставиме дека системот е во контакт со топол резервоар на температура $T = V_\beta$ и исто „циркулацијата“ во резервоарот има хемиски потенцијал μ.

Енергијата на една микросостојба $a \in A$ е:

$$E(a) = E(A) = \sum_{j=1}^{M} a_j e_j ,$$

а нејзината циркулација е:

$$\Gamma(a) = \Gamma(A) = \sum_{j=1}^{M} a_j \Gamma_j .$$

Дополнително, го имаме и следново ограничување на бројот на честички:

$$\sum_{j=1}^{M} a_j = N .$$

Дефиниција 1. Дегенерираноста на макросостојбата е бројот на миркосостојби $a \in A$, за кои важи:

$$\gamma(A) = \frac{N!}{\prod_{j=1}^{M} a_j !} .$$

Ова значи дека дегенерираноста кажува на колку можни начини може да се даде макросостојбата, така што генералната слика е непроменета. Вкупниот број на микросостојби, по сите можни макросостојби е:

$$| D | = \frac{N!}{(N-M)!},$$

каде што D е множеството од сите микросостојби. Веројатноста дека која било микросостојба од A, при претпоставка дека секоја микросостојба $a \in D$ е еднакво веројатна, е:

$$p(A) = \gamma(A) \cdot \frac{(N-M)!}{N!} = \frac{(N-M)!}{\prod a_j !} .$$

За да моделот се направи пореален, ќе претпоставиме дека веројатноста за некоја микросостојба $a \in A$, ќе зависи не само од енергијата на макросостојбата $E(A)$, но, исто така, и од нејзината циркулација $\Gamma(A)$. Следствено,

$$p(a) = x \exp(-\beta E(A) - \mu \Gamma(A)) ,$$

каде што k е дефинирано, така што:

$$\frac{1}{k} = Z = \sum_{a \in D} \exp(-\beta E(a) - \mu \Gamma(a)) \qquad (*)$$

е фактор на нормализација.

Веројатноста за макросостојбата A е дадена со:

$$p(A) = \gamma(A)\, p(a)$$

за која било микросостојба $a \in A$, бидејќи веројатноста $p(a)$ е фиксна, бидејќи се фиксни $E(A)$ и $\Gamma(A)$. Следува:

$$p(A) = \frac{N!}{\prod a_j!} \cdot \frac{\exp(-\beta E(A) - \mu\Gamma(A))}{\sum_{a\in D} \exp(-\beta E(a) - \mu\Gamma(a))}$$

$$= \frac{\exp(-\beta E(A) - \mu\Gamma(A)\,\gamma(A))}{\sum_{A'} \gamma(A')\exp(-\beta E(A') - \mu\Gamma(A'))}. \qquad (**)$$

Знаејќи ја веројатноста да настане макросостојбата A, логичното прашање кое може да си го поставиме е кое е најверојатната макросостојба A_0, имајќи ја предвид равенката (**). Проблемот е еквивалентен со максимизирање на:

$$\ln(p(A)) = \ln(\gamma(A)) + \ln k - \beta E(A) - \mu\Gamma(A) \ ,$$

односно:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_j} p(A) = -\ln a_j - \beta e_j - \mu\Gamma_j \, ,$$

за кој дополнително важи:

$$a_j^0 = \exp(-\beta e_j - \mu\Gamma_j)\,. \qquad (***)$$

Најверојатната макросостојба $A_0 = (a_1^0, a_2^0, a_3^0, ..., a_M^0)$ која ги задоволува (*), (**), (***) може да се разгледува како нејзина распределба на веројатноста. Веројатноста дека ќе биде најдена честичка на местото j е:

$$p(j) = \frac{a_j^0}{N} \, ,$$

за $j = 1, 2, 3, ..., M$.

Кога еден систем ја има максималната можна енергија, дегенерираноста $\gamma(E)$ опаѓа додека енергијата го достигнува максимумот. Ова е феноменот на негативни температури: β, кој е изводот на ентропијата, во однос на енергијата е негативна.

Аналитички едноставен систем може да има партициска функција и дегенеративност точно пресметани. Но, постојат и системи (кои се помалку на број) доволно едноставни за да можат да се разберат на овој начин, кој не е аналитички решен (еден таков систем е тридимензионалниот систем на Исинг

(Ising)). Тој може да се најде нумерички: за сите N можни состојби на системот, се пресметуваат нејзините енергии и се зема нивната очекувана вредност (математичко очекување), односно:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N}\sum_{s} E(s) \,.$$

Овој алгоритам е едноставен за користење. Неговата непрактичност може брзо да се забележи со пресметување на бројот на сите различни конфигурации на некој систем. Основната работа во нумеричката симулација е тоа што не мора да се пресметаат сите. Законот на големи броеви покажува дека системот скоро сигурно ќе биде во една конфигурација (врв) од сите можни конфигурации и која било конфигурација далеку од врвот може да се игнорира без некоја поголема грешка.

Ако ги знаеме најверојатните состојби, нема да имаме потреба од наша оценка на најверојатната состојба. Потребно ни е репрезентивно избирање на состојби за кои математичкото очекување е еднакво на математичкото очекување на сите можни состојби на системот. Како се креира репрезентативен модел на избирање? На почетокот секогаш со почнува со погодување.

10.2. Детален баланс

Во состојба на рамнотежа веројатноста дека системот се наоѓа во состојба j, мора да биде:

$$\pi(j) = \frac{1}{Z}\exp(-\beta E_j)\,, \qquad (*)$$

каде што Z е партициска функција и фактор на нормализација, па: $\sum_j \pi(j) = 1$.

Детален баланс е принцип кој важи за кој било временско реверзибилен систем. Детален баланс имаме кога во статистичкиот еквилибриум честотата со која се појавува кој било процес е еднаква на честотата со која се појавува инверзниот процес на процесот кој го разгледуваме. Поедноставно кажано, веројатноста за премин од состојбата A во состојбата B е еднаква на веројатноста за премин од состојбата B во состојбата A. Во хемиски реакции, кои можеби даваат најдобра интуитивна претстава на ова својство, деталниот баланс значи дека честотата со која состојките се комбинираат за да формираат некој продукт е еднаква на честотата со која тој продукт се распаѓа на неговите состојки.

Нека $p_{A,B}$ е веројатноста со која состојбата A преминува во B. Веројатноста за набљудување на премин на состојбата A во состојбата B е производот $\pi(A)\times p_{A,B}$, односно веројатноста дека сме почнале со состојбата A и состојбата A преминала во состојбата B. За да се биде во детален баланс, значи за сите состојби A и B важи:

$$\pi(A)\,p_{A,B} = \pi(B)\,p_{B,A}.$$

Од последната равенка и од веројатноста на состојбите кои се појавуват од равенката (*), можеме да ја најдеме веројатноста за набљудување на преминот од состојбата A во состојбата B, преку веројатноста за набљудување на преминот од состојбата B во A. Главниот проблем е потоа да се конструира Марков ланец од состојбите кои се достигнуваат во овој детален баланс. Имаме:

$$\pi(A)\,p_{A,B} = \pi(B)\,p_{B,A},$$

од каде што:

$$p_{A,B} = p_{B,A}\,\frac{\pi(B)}{\pi(A)},$$

па,

$$p_{A,B} = p_{B,A}\,\frac{\frac{1}{Z}\exp\left(-\beta E(B)\right)}{\frac{1}{Z}\exp\left(-\beta E(A)\right)},$$

Односно:

$$p_{A,B} = p_{B,A}\exp\left(-\beta(E(B)-E(A))\right).$$

10.3. Правило на Метрополис

Изразот Монте Карло опишува множество од методи кои се базирани на веројатност. Идејата на самото име е да евоцира коцкање: кој било настан е непредвидлив, но математичкото очекување по сите настани е предвидливо. Користењето на статистички методи за да најдат одредени веројатности се случувало уште векови наназад. Најпознатиот и почетен пример е примерот на Буфон (Buffon) со иглата, во кој случајно се фрла игла во рамнина со паралелни прави поставени на еднакво растојание. Веројатноста дека иглата ќе пресече некоја од правите е пропорционална со растојанието помеѓу правите, должината на иглата и π. Од овој пример можеме да добиеме експериментален (но, неефикасен) начин за пресметување на π.

Модерните методи Монте Карло ги изучуваат проблемите од нумерички аспект и даваат нумерички квадратури на случајните прошетки, полимерен и кристален раст, неутрално мрежно растење и опаѓање. Некои техники со помош на овие методи даваат и решенија на диференцијални равенки. Методите Монте Карло (како и самото име) се дадени по 1944 година, кога почнале првите напори да се симулира дифузија на неутрони во материјали кои подложни на фисија.

Постојат многу техники, но класичниот пристап почнува со произволна состојба. Експериментално со прилагодува решението на проблемот, правејќи мали случајни промени. Чекорите кои го подобруваат решението ги прифаќаме, додека чекорите кои го влошуваат решението се отфрлаат со веројатност која зависи од тоа колку лоша е промената. Овој процес продолжува сѐ додека не се постигне детален баланс.

Правилото на Метрополис за Монте Карло, дадено од Николас Метрополис, А. Ресенблут, М. Росенблут, А. Телер и Е. Телер (N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. Teller) во 1953 година во научниот труд „Равенки на пресметки на состојба со брзо сметачки машини“ (“Equations of state calculations by fast computing machines”), е еден од најдобрите алгоритми во 20-тиот век.

Овој алгоритам е моќен и флексибилен: може да се користи за проблеми од апсорпција на неутроните од неутроните од атомското јадро сѐ до растот на кристали и проблемот на трговскиот патник.

Ќе го илустираме овој метод на проблеми со вртлози во флуиди. Почнуваме со состојба A. Типично, програмите Монте Карло ќе се обидат да променат што е можно помалку компоненти, на пример, со поместување на една честичка. Желбата да се променат што помалку променливи е остварлива за едноставни пресметки. Потребно е да ја пресметаме разликата во енергија (и другите големини) помеѓу новата состојба и старата состојба и помалку промени ги прават овие пресметки побрзи. Па, ја наоѓаме модифицираната состојба B. Тогаш, одлучуваме дали ќе ја прифатиме или отфрлиме новата состојба. Веројатноста за премин од состојбата A во состојбата B е $\exp(-\beta(E(B)-E(A)))$, па ја наоѓаме разликата во енергии $\Delta E = E(B)-E(A)$ и нашата инверзна температура β. Избираме случаен број r со униформна распределба на интервалот $[0,1]$. Ако $r<\exp(-\beta\Delta E)$, тогаш експериментот е прифатлив. Го повторуваме овој процес сѐ додека не е постигната рамнотежа (еквилибриум). Да забележиме дека, ако $\beta\Delta E<0$, тогаш промената секогаш се прифаќа. Интерпретацијата на ова е дека во овој случај веројатноста за премин од состојбата A во состојбата B е поголема од еден што не е можно.

Дека ова правило го задоволува деталниот баланс е прилично јасно: веројатноста дека процесот преминува од состојба A во состојба B е една итерација на $\pi(A)\exp\left(\beta(E(B)-E(A))\right)$.

Термодинамичките почетоци на статистичката механика ни даваат метафора за ставањето на системот во топлинска бања со инверзна температура β. Алгоритамот на Метрополис-Хастингс симулира што се случува ако на системот му се даде неограничен пристап до енергија, односно ако на системот се дава, односно одзема топлина. За системот составен од честички од гас, просечната кинетичка енергија во детален баланс е еднаква на просечната кинетичка енергија при температура $T=\dfrac{1}{k_B\beta}$ (каде k_B е Болцмановата константа). Постигнувањето статистички еквилибриум овде значи дека е постигнат термички еквилибриум.

Овде постојат и други критериуми кои можат да се применат: деталниот баланс е задоволен ако експериментите се прифаќаат секогаш кога r извлечено од $[0,1]$ е помало од $\dfrac{1}{\exp(\beta\Delta E+1)}$. Иако овој алтернативен критериум за прифаќање на експериментот ќе прифаќа и отфрла малку поразлични состојби во однос на горното правило, сепак, ќе имаме Марков ланец со слични својства.

Марковиот ланец е составен од неколку состојби кои се наоѓаат околу врвот, каде што производот на веројатноста и дегенерираноста достигнува максимум. При претпоставка β е позитивен, тогаш ако почнеме од состојба која има поголема енергија од најверојатната енергија ќе видиме дека која било состојба со енергија која се намалува ќе биде прифатлива, додека само неколку состојби со растечка енергија не се дозволени . Па, добиваме ланец од состојби, од вообичаено со опаѓачка енергија, секогаш кога се наоѓаме под најверојатната енергија.

Ако почнеме под најверојатната енергија, додека правилото на Метрополис-Хастингс ќе се обидува да ја намалува енергијата, дегенерираноста на овие состојби со мала енергија, толку мала што алгоритамот не може да најде многу такви состојби. Потези кои ја зголемуваат енергијата на системот се прифатливи. Единствената енергија, при која бројот на потези ја зголемуваат енергијата ќе биде еднаква на бројот на потези кои ја намалуваат енергијата, е состојбата на најверојатната енергија, што, всушност, е друг начин да се каже дека системот се смирува кога има детален баланс.

10.4. Повеќе канонични ограничувања

Досега разгледувавме системи во кои има неколку големини, како што се енергијата, циркулацијата, кои влијаат на разгледуваната миркосостојба. Кога веројатноста зависи само од нејзината енергија, нејзината веројатност за појавување при дадено β видовме дека е $\frac{1}{Z}\exp(-\beta E)$. Со неколку големини, E, Ω, инверзната температура β и хемиски потенцијал μ, веројатноста на микросостојбата A е дадена со:

$$\pi(A) = \frac{\exp\left(-\beta E(A) - \mu\Omega(A)\right)}{\sum_j \exp\left(-\beta E(j) - \mu\Omega(j)\right)},$$

каде што Z е партицискаta функција и сумата во именителот на $\exp(-\beta E(j) - \mu\Omega(j))$ е земена по сите можни микросостојби j.

Кинетичката теорија на гасови дефинира енталпија на систем како сума од енергијата и производот на притисокот и волуменот. Ќе ја модифицираме енталпијата како:

$$H(A) = E(A) + \frac{\mu}{\beta}\Omega(A),$$

каде што $\Omega(A)$ е новата канонична граница. Алгоритамот на Матрополлис-Хастингс ќе го презапишеме за енталпија на место на енергија.

Да ја имаме микросостојбата j. Генерираме нова микросостојба k и ја пресметуваме промената на енталпијата $\Delta H = \Delta E + \frac{\mu}{\beta}\Delta\Omega$. Избираме случаен број r со рамномерна распределба од интервалот $(0,1)$ и прифаќаме премин секогаш кога:

$$r \le \exp(-\beta\Delta H) = \exp(-\beta\Delta E - \mu\Delta\Omega),$$

а не го прифаќаме преминот, во спротивно кога не важи неравенството.

Оваа енталпија може да се прошири. Секоја нова конзервативна големина Θ, која има свој хемиски потенцијал, но алгоритамот останува истиот, при што:

$$H(A) = E(A) + \frac{\mu_1}{\beta}\Omega(A) + \frac{\mu_2}{\beta}\Theta(A)$$

и одлуката дали ќе го прифатиме преминот или не зависи од тоа дали за случајно избран број r важи:

$$r \le \exp(-\beta\Delta H) = \exp(-\beta\Delta E - \mu_1\Delta\Omega - \mu_2\Delta\Theta),$$

соодветно.

10.5. Средина на сите можни состојби

Со помош на Марков ланец од низи добиени со Метрополис-Хестингс за да се најде средната вредност на својството x. Со M состојби и $x(j)$ е мереното својство на состојба j, средната вредност на x е:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} x(j).$$

Овој број го апроксимира математичкото очекување на x, просекот на сите можни состојби. Знаејќи дека веројатноста на која било состојба j која се појавува при инверзна температура β е $\frac{1}{Z}\exp(-\beta H(j))$, тогаш очекуваната вредност, ако постои дискретно множество од N можни состојби, ќе биде:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{N} x(j)\exp(-\beta H(j))}{\sum_{j=i}^{N}\exp(-\beta H(j))},$$

или ако постојат недискретно (непрекинато) можни состојби, ќе биде:

$$\langle x \rangle = \frac{\int x(s)\exp(-\beta H(s))\,ds}{\int \exp(-\beta H(s))\,ds}.$$

Ергодичната хипотеза вели дека ако имаме еден систем и ако конструираме доволно долга низа од микросостојби, тогаш просекот (средината, аритметичката средина) на која било мерена големина земена над сите овие микросостојби ќе ја апроксимира средината на таа големина над фазниот простор. Делот од времето поминато во секоја макросостојба која се наоѓа во одреден опсег на енергии ќе биде пропорционален на делот од волуменот на фазниот простор кој се наоѓа во енергетскиот опсег на макросостојбата.

Да разгледаме нередуцибилен непериодичен Марков ланец. Оваа низа од состојби може да го истражи фазниот простор без да биде ланецот заробен во еден регион, бидејќи е нередуцибилен, па веројатноста за премин од една микросостојба во друга микросостојба никогаш не е нула. Можеме да се концентрираме на најверојатните микросостојби, бидејќи непериодичен ланец може да ја повтори својата позиција. Доволно долг ланец ќе го истражи фазниот простор и ќе помине приближно многу „време“ (ќе има доволно многу линкови) во секоја макросостојба.

За даден нередуцибилен непериодичен Марков ланец, $\pi(j)$ е веројатноста дека сегашната микросостојба е j и $M_{j,k}$ е веројатноста за премин во состојбата k, тогаш:

$$\pi(k) = \sum_{j} M_{j,k} \cdot \pi(j), \qquad (*)$$

кога е најдена распределбата на стабилната состојба и симулацијата е земена по сите микросостојби. Ако имаме непрекинато многу (недискретно) состојби, оваа сума станува интеграл. Ако е задоволено ова и дополнително $\pi(k) > 0$ и $\sum_k \pi(k) = 1$, тогаш:

$$\lim_{n\to\infty} M_{j,k}^{n} = \pi(k).$$

Изборот на j е ирелевантен: статистичкиот еквилибриум не зависи од почетната состојба. Можеме да најдеме еквилибриум дури со множење на M со самото себе, последователно. Секоја колона на M^n му се приближува на еквилибриумот (ако постои).

Пристапот на Метрополис е да се изгради транзитивна матрица P со елементи $p_{j,k}$ кои може да ја задоволуваат распределбата на еквилибриумот. Да претпоставиме: $p_{j,k} > 0$, за сите j и k и P е регуларна транзитивна матрица: $\sum_k p_{j,k} = 1$ и $p_{j,k} = p_{k,j}$. Знаеме дека релативната веројатност $\frac{\pi(j)}{\pi(k)}$ при еквилибриум е $\exp(-\beta(H(j) - H(k)))$. Па, со користење на ова можеме да ги запишеме елементите на транзитивната матрица M.

Ги дефинираме $M_{j,k}$ со правилото:

$$M_{j,k} = \begin{Bmatrix} p_{j,k} \cdot \dfrac{\pi(k)}{\pi(j)}, & ако \ \dfrac{\pi(k)}{\pi(j)} < 1 \\ p_{j,k}, & ако \ \dfrac{\pi(k)}{\pi(j)} \geq 1 \end{Bmatrix} \quad \text{ако } j \neq k \qquad (**)$$

$$M_{j,j} = p_{j,j} + \sum_k{}' p_{j,k}\left(1 - \frac{\pi(k)}{\pi(j)}\right),$$

каде што $\sum_k{}'$ означува дека сумирањето е по сите состојби k за кои важи: $\frac{\pi(k)}{\pi(j)} \geq 1$. Дополнително, со $\sum_k{}''$ ќе биде означено сумирањето по сите $k \neq j$ за кои $\frac{\pi(k)}{\pi(j)} \geq 1$. Сега, имаме:

$$\sum_j M_{j,k} = p_{j,j} + \sum_k{}' p_{j,k}\left(1 - \frac{\pi(k)}{\pi(j)}\right) + \sum_k{}' p_{j,k} \cdot \frac{\pi(k)}{\pi(j)} + \sum_k{}'' p_{j,k}$$

$$= p_{j,j} + \sum_k{}' p_{j,k} + \sum_k{}'' p_{j,k}$$

$$= p_{j,j} + \sum_{k \neq j} p_{j,k} = \sum_{j} p_{j,k} = 1,$$

што значи дека матрицата M е регуларна матрица со ненулти членови. Останува уште да покажеме дека равенката (*) важи и условите за Марковиот ланец и методот Монте Карло се исполнети.

Претпоставката за детален баланс значи дека веројатноста за набљудување на премин од состојбата j во состојбата k е еднаква на веројатноста за набљудување на обратното: $\pi(j)M_{j,k} = \pi(k)M_{k,j}$. Тврдиме дека ова е задоволено од оваа матрица. Да претпоставиме дека за состојбите j и k, важи $\pi(j) = \pi(k)$. Од (**) имаме:

$$M_{j,k} = p_{j,k} = p_{k,j} = M_{k,j},$$

односно:

$$\pi(j)M_{j,k} = \pi(k)M_{k,j},$$

што го задоволува деталниот баланс ако $\pi(j) = \pi(k)$. Ако тие не се еднакви, тогаш без губење на општоста, да претпоставиме дека: $\pi(k) < \pi(j)$. Тогаш од (**) и претпоставката $p_{j,k} = p_{k,j}$, имаме:

$$M_{j,k} = p_{j,k} \cdot \frac{\pi(k)}{\pi(j)} = p_{k,j} \cdot \frac{\pi(k)}{\pi(j)} = M_{k,j} \cdot \frac{\pi(k)}{\pi(j)}.$$

Слично го разгледуваме случајот ако $\pi(j) < \pi(k)$. Конечно,

$$\sum_{j} \pi(j)M_{j,k} = \sum_{j} \pi(k) \cdot M_{k,j}$$

$$\pi(k) \cdot \sum_{j} M_{k,j} = \pi(k) \cdot 1 = \pi(k),$$

со што ја добивме равенката (*).

Ова конечно го објаснува методот на правилото на Метрополис-Хастингс. Од која било микросостојба j е избрана некоја микросостојба k. Го прифаќаме или одбиваме преминот, со веројатност $\frac{\pi(k)}{\pi(j)}$ (всушност, веројатноста е $\min\left(1, \frac{\pi(k)}{\pi(j)}\right)$), вредност која може да се пресмета знаејќи ги само микросостојбите j и k. Добиениот ланец од состојби е распределен како што е распределен целиот фазен простор. Средините на сите состојби на доволно долг ланец ќе ја апроксимира средината на целиот фазен простор.

Нормално е да си го поставиме прашањето колку е долг доволно долгиот ланец. Математичкото очекување на разликата помеѓу средините на сите состојби и средината на Марковиот ланец за N состојби е пропорционално со $\sqrt{\frac{1}{N}}$. Оваа пропорција зависи од константа која се нарекува корелационо време, кое мери колку многу обиди за промени треба да се направат пред да имаме две независни состојби. Полошо, критично забавување надолу се појавува: корелационото време расте подолго ако β е блиску до инверзната температура на фазниот премин.

Со следење на вредностите на математичкото очекување на вредностите $f(i)$ и вредностите $f^2(i)$, можеме да го оцениме корелационото време, а оттука маргината на грешка на кое било мерење. Ако $f(N)$ е вредноста на мерената големина по N премини и $f(N+t)$ е вредноста по дополнителни t премини, тогаш имаме:

$$\frac{\left\langle f(N+t)f(N)\right\rangle}{\left\langle f^2\right\rangle-\left\langle f\right\rangle^2}\sim\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

каде што τ е корелационо време. Оценката на грешката на f по N премини е дадена со:

$$\Delta f\sim\sqrt{\left\langle f^2\right\rangle-\left\langle f\right\rangle^2}\cdot\sqrt{\frac{\tau}{N}}.$$

Бројот $\sqrt{\left\langle f^2\right\rangle-\left\langle f\right\rangle^2}$ се нарекува распон на f.

Многу често, добра практика е правење на неколку експерименти онолку колку е можно, со енергија (и други својства кои се занимливи за истражување) која ќе се мери често, за да се испита нивната еволуција. Ова ни дава чуство за корелационото време и колку симулации се потребни за растот на флуктуациите да е доволно мал.

11. Додаток

Овде ќе бидат дадени некои основни работи од математичката анализа и теоријата на мера и Лебегов интеграл. Генерално, се дадени работи кои се користат или се споменуваат во која било од претходните глави.

11.1. Функции

Дефиниција 1. За функцијата f велиме дека е непрекината во точката $t = t_0$ ако нараснувањето на f над мал интервал е мало, односно:

$$\Delta f(t) = f(t) - f(t_0) \to 0, \quad \text{кога} \quad \Delta t = t - t_0 \to 0 .$$

Ако функцијата f е непрекината во секоја точка од нејзиниот домен, тогаш за функцијата f велиме дека е непрекината функција.

Дефиниција 2. За функцијата f велиме дека е диференцијабилна во точката $t = t_0$ ако во таа точка важи:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = g'(t_0) .$$

Ако функцијата f е диференцијабилна во секоја точка од нејзиниот домен, тогаш за f велиме дека е диференцијабилна функција. Како важна примена на диференцијалниот калкулус е теоремата за средна вредност на Лагранж.

Теорема 1. (Теорема за средна вредност) Ако f е непрекината на интервалот $[a,b]$ и е диференцијабилна на (a,b), тогаш постои $c \in (a,b)$, така што:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) .$$

Јасно, диференцијабилноста на функцијата повлекува непрекинатост на функцијата, но обратната насока не важи, бидејќи непрекинатоста вели дека нараснувањето Δf конвергира кон нула заедно со Δt, додека диференцијабилноста вели дека оваа конвергенција е со иста брзина или побрза.

Пример 1. Функцијата $f(t)=\sqrt{t}$ не е диференцијабилна во 0, бидејќи:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{\Delta t}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}=\infty\,. ♦$$

Потои пример на непрекината функција која не е диференцијабилна во која било точка.

Пример 2. Пример на функција која е непрекината, но никаде диференцијабилна функција е даден од Вајерштрас во 1872 година: За $0\le t\le 2\pi$

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(3^n t)}{2^n}\,. ♦$$

Нема да дадеме доказ на тврдењето во примерот, но за непрекинатоста можеме да искористиме дека ако низа од непрекинати функции конвергира рамномерно, тогаш границата на таа низа е, исто така, непрекината функција. За да се види недиференцијабилноста на функцијата можеме да диференцираме почлено, при што ќе добиеме дивергентен ред.

Можеме да ја реформулираме дефиницијата за непрекината функција во контекст на непрекинатост на функција од лево или од десно.

Дефиниција 3. За функцијата f се вели дека е непрекината од десно во точката t_0 ако вредностите на функцијата $f(t)$ тежат кон $f(t_0)$, кога t тежи кон t_0 од десно, односно:

$$\lim_{t\to t_0^+} f(t)=f(t_0)\,.$$

За функцијата f се вели дека е непрекината од лево во точката t_0 ако вредностите на функцијата $f(t)$ тежат кон $f(t_0)$, кога t тежи кон t_0 од лево, односно:

$$\lim_{t\to t_0^-} f(t)=f(t_0)\,.$$

Ако f е непрекината, тогаш јасно таа е непрекината и од десно и од лево.

Непрекинатата верзија од лево на f, означена со $f(t^-)$, е дефинирана со земање на лева граница во секоја точка,

$$f(t^-) = \lim_{s \to t^-} f(s).$$

Непрекинатата верзија од десно на f, означена со $f(t^+)$, е дефинирана со земање на десна граница во секоја точка,

$$f(t^+) = \lim_{s \to t^+} f(s).$$

Од дефинициите имаме дека функцијата f е непрекината од лево ако $f(t) = f(t^-)$ и функцијата f е непрекината од десно ако $f(t) = f(t^+)$, за секоја точка t од доменот на f.

Дефиниција 4. За точката t велиме дека е точка на прекин од прв тип или точка на скок ако постојат и двете граници $f(t^+)$ и $f(t^-)$ и се различни. Скокот во точката t се дефинира како $\Delta f(t) = f(t^+) - f(t^-)$. Кој било друг прекин се нарекува прекин од втор ред.

Пример 3. Функцијата $f(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, за $t \neq 0$ и $f(t) = 0$ за $t = 0$ има прекин од втор ред во нулата, бидејќи граничните вредности од лево и десно не постојат. ♦

Многу важен резултат е дека која било функција може да има најмногу пребороиво многу скокови (прекини од прв ред).

Теорема 2. Функција дефинирана на интервалот $[a,b]$ не може да има повеќе од пребороиво многу скокови.

Се разбира, постои функција која има повеќе од непребороиво многу прекини, но не се сите прекини од прв тип (скокови). Друго тврдење е дека првиот извод не може да има прекини од прв тип (скокови).

Теорема 3. Ако f е диференцијабилна функција со конечен извод $f'(t)$ на некој интервал, тогаш во сите точки $f'(t)$ е или непрекината или има прекин од втор тип.

Доказ. Ако t е такво што $f'(t^+) = \lim_{s \to t^+} f'(s)$ постои (конечно или бесконечно), тогаш од теоремата за средна вредност се добива истата вредност со земање на извод од десно:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0^+,\, 0<c<\Delta t} f'(c) = f'(t^+).$$

Слично за изводот од лево, добиваме $f'(t) = f'(t^-)$. Следува, $f'(t)$ е непрекинато во t, од каде што следува тврдењето на теоремата.

Од оваа теорема имаме објаснување зошто функциите со непрекинати изводи се разгледувани како решенија на обични диференцијални равенки.

Функциите кои се разгледувани во стохастичкиот калкулус се функции без прекини од втор тип, односно функции кои ги имаат истовремено левите и десните граници во која било точка од доменот на функцијата и имаат еднострани гранични вредности на границата. Овие функции се нарекуваат регуларни функции. Две функции ќе бидат идентични ако тие имаат исти десни и леви гранични вредности во сите точки од доменот на функциите (тој е ист за двете функции).

Класата $D = D[0,T]$ од функции кои се непрекинати од десно на $[0,T]$ со леви граници се нарекуваат кадлаг (càdlàg) функции (назив кој доаѓа од францускиот јазик за „непрекинати функции од десно со леви граници“). Да забележиме дека оваа класа од функции ги содржи непрекинатите функции.

Нека $f \in D$ е кадлаг функција. По дефиниција, сите прекини на f се скокови. Овие функции немаат повеќе од преброиво многу прекини.

Во стохастичкиот калкулус $\Delta f(t)$ ја означува големината на скокот во точката t. Во стандардниот калкулус, $\Delta f(t)$ обично го означува нараснувањето на f на интервалот $[t, t+\Delta t]$, $\Delta f(t) = f(t+\Delta t) - f(t)$. Значењето на $\Delta f(t)$ ќе биде подетално објаснето со наредниов дел.

11.2. Варијација на функција

Дефиниција 1. Ако f е функција од реална променлива, нејзината варијација на интервалот $[a,b]$ е дефинирана со:

$$V_f([a,b]) = \sup \sum_{i=1}^{n} | f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n) |, \qquad (*)$$

каде штп супремумот е земен по сите разбивања

$$a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = b .$$

Јасно, од неравенството на триаголник, сумите во (*) се зголемуваат кога ќе бидат додадени нови точки во разбивањата.

Дефиниција 2. Варијацијата на функцијата f е дадена со:

$$V_f([a,b]) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} | f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n) |,$$

каде што: $\delta_n = \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1})$. Ако $V_f([a,b])$ е конечно, тогаш за f се вели дека е функција со конечна варијација на $[a,b]$.

Ако $t \ge 0$ и f е функција, тогаш варијацијата на функцијата на f, како функција од t е дефинирана со:

$$V_f(t) = V_f([0,t]).$$

Јасно, $V_f(t)$ е неопаѓачка функција од t.

Дефиниција 3. За функцијата f велиме дека е со конечна варијација ако $V_f(t) < \infty$ за сите t. За функцијата f велиме дека е со ограничена варијација ако $\sup_t V_f(t) < \infty$, односно за сите t, $V_f(t) < C$, каде што C е независна од t.

Пример 1. Ако $f(t)$ е растечка функција, тогаш за секое i, $f(t_i) > f(t_{i-1})$, од каде што се добива телескопска сума, каде што сите членови, освен првиот и последниот член, се поништуваат, па се добива:

$$V_f(t) = f(t) - f(0).$$

Ако $f(t)$ е опаѓачка функција, тогаш слично како претходно, добиваме:

$$V_f(t) = f(0) - f(t). \blacklozenge$$

Пример 2. Ако $f(t)$ е диференцијабилна функција со непрекинат извод $f'(t)$, $f(t) = \int_0^t g'(s)\,ds$ и $\int_0^t | g'(s) |\,ds < \infty$, тогаш:

$$V_f(t) = \int_0^t | g'(s) |\,ds.$$

Ова може да се покаже со помош на дефиницијата и теоремата за средна вредност. Имаме:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(s)\,ds = f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

за некое $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Следува:

$$\left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(s)\,ds \right| = | f'(\xi_i) | (t_i - t_{i-1})$$

и:

$$V_f(t) = \lim \sum_{i=1}^{n} | f(t_i) - f(t_{i-1}) | = \lim \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} g'(s)\,ds \right|$$

$$= \sup \sum_{i=1}^{n} | g'(\xi_i) | (t_i - t_{i-1}) = \int_0^t | g'(s) |\,ds .$$

Последното равенство е резултат на тоа дека последната сума е Риманова сума за последниот интеграл.

Алтернативно, овој резултат може да се добие преку декомпозиција на изводот на позитивни и негативни делови:

$$f(t) = \int_0^t f'(s)\,ds = \int_0^t [f'(s)]^+\,ds - \int_0^t [f'(s)]^-\,ds .$$

Да забележиме дека $[f'(s)]^-$ е нула кога $[f'(s)]^+$ е позитивно и обратно. Користејќи го ова, можеме да видиме дека тоталната варијација на f е дадена преку сума од варијацијата на горните интеграли. Но, овие интеграли се монотони функции со вредност нула во нулата. Следува:

$$V_f(t) = \int_0^t [f'(s)]^+\,ds + \int_0^t [f'(s)]^-\,ds$$

$$= \int_0^t \left([f'(s)]^+ + [f'(s)]^- \right) ds = \int_0^t | f'(s) |\,ds . \blacklozenge$$

Пример 3. (Варијација на функција со чист скок) Ако f е регуларна непрекината функција од десно (кадлаг) или регуларна непрекината од десно (кадлаг) функција и нејзината вредност се менува само преку скокови, односно:

$$f(t) = \sum_{0 \le s \le t} \Delta f(s) .$$

Тогаш, лесно од дефиницијата на функцијата, имаме дека:

$$V_f(t) = \sum_{0 \le s \le t} |\Delta f(s)|. \blacklozenge$$

Пример 4. Функцијата $f(t) = t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, за $t > 0$ и $f(0) = 0$ е непрекината функција на $[0,1]$, диференцијабилна во сите точки. освен во нула, но има бесконечна варијација на кој било интервал кој ја содржи 0. Земајќи ја партицијата: $\dfrac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$, $\dfrac{1}{k\pi - \frac{\pi}{2}}$, $k = 1, 2, \ldots$. ♦

Следната теорема ни ги дава потребните и доволните услови за некоја функција да има конечна варијација.

Теорема 1. (Жорданова декомпозиција) Која било функција $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ со конечна варијација може да се запише како разлика од две растечки функции:

$$f(t) = a(t) - b(t).$$

Една таква декомпозиција е дадена со:

$$a(t) = V_f(t), \quad b(t) = V_f(t) - f(t).$$

Лесно може да се провери дека $b(t)$ е растечка, а $a(t)$ е јасно растечка. Репрезентацијата на функција со конечна варијација, како разлика на две растечки функции, не е единствена. Друга декомпозиција е:

$$f(t) = \frac{1}{2}(V_f(t) + f(t)) - \frac{1}{2}(V_f(t) - f(t)).$$

Сумата, разликата и производот на функции со конечна варијација се, исто така, функции со конечна варијација. Ова, исто така, важи и за количникот на две функции со конечна варијација, при што модулот на именителот е поголем од позитивна константа.

Теорема 2. Функција со конечна варијација не може да има повеќе од преброиво многу прекини. Уште повеќе, сите прекини се скокови.

Доказ. Доволно е да го докажеме резултатот за монотони функции, бидејќи функција со конечна варијација е разлика од две монотони функции.

Монотоната функција има леви и десни граници во која било точка, па кој било прекин е скок. Бројот на скокови со големина поголема или еднаква на $\frac{1}{n}$, не е поголем од $(f(b) - f(a))n$. Множеството од сите скокови е унија од множествата на скок точки со големина на скоковите поголеми или еднакви на $\frac{1}{n}$. Бидејќи секое такво множество е конечно, вкупниот број на скокови е најмногу преброив. ■

Доволен услов за непрекината функција да биде со конечна варијација е даден во следната теорема.

Теорема 3. Ако f е непрекината функција, f' постои и $\int |f'(t)|dt < \infty$, тогаш f е со конечна варијација.

Теорема 4. [Теорема на Банах (Banach)] Нека $f(t)$ е непрекината функција на $[0,1]$ и нека го означиме со $s(a)$ бројот на вредности на t, за кои $g(t) = a$. Тогаш, варијацијата на f е: $\int_{-\infty}^{\infty} s(a)\,da$.

Нека $f(t),\ t \geq 0$ е непрекината од десно растечка функција. Тогаш, оваа функција може да има најмногу преброиво многу скокови и сумата на скоковите е конечна на конечни временски интервали. Го дефинираме прекинатиот дел f^p на f со:

$$f^p(t) = \sum_{s \leq t} (f(s) - f(s^-)) = \sum_{0<s\leq t} \Delta f(s)$$

и непрекинатиот дел f^c на f со:

$$f^c(t) = f(t) - f^p(t).$$

Јасно, f^p се менува само со скокови, f^c е непрекината и $f(t) = f^c(t) + f^p(t)$. Бидејќи функција со конечна варијација е разлика од две растечки функции, горната декомпозиција важи за функции со конечна варијација. Иако репрезентацијата, како разлика од две растечки функции, не е единствена, оваа декомпозиција е есенцијално единствена, во смисла дека кои било две вакви декомпозиции се разликуваат за константа. Навистина, ако постои друга ваква декомпозиција $f(t) = h^c(t) + h^d(t)$, тогаш:

$$h^c(t) - f^c(t) = f^p(t) - h^p(t),$$

од каде што добиваме дека $h^p - f^p$ е непрекинато. Следува, h^p и f^p имаат исто множество на скокови, па следува дека $h^p(t) - f^p(t) = c$, за некоја константа c.

Дефиниција 4. Нека f е реална функција. Квадратната варијација на функцијата f над интервалот $[0,t]$ е граничната вредност (ако постои):

$$[f](t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n) \right)^2 ,$$

каде што граничната вредност е земена по разбивањата $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t$, каде што $\delta_{nn} = max_{1 \le i \le n} (t_i^n - t_{i-1}^n)$.

Слично на концептот на варијација, постои концепт на Φ-варијација на функција. Ако $\Phi(u)$ е позитивна функција, која расте монотоно, тогаш Φ-варијацијата на f на интервалот е:

$$V_\Phi[f] = \sup \sum \Phi\left(| f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n) | \right),$$

каде што супремумот е земен по сите разбивања на интервалот $[0,t]$. Функциите со конечна Φ-варијација на $[0,t]$, ја формираат класата V_Φ. За $\Phi(u) = u$ ја добиваме класата од функции со конечна варијација, а за $\Phi(u) = u^p$ ја добиваме класата од функции од p-та варијација. Ако $1 \le p < q < \infty$, тогаш конечна p-та варијација повлекува конечна q-та варијација.

Дефиницијата за квадратна варијација во стохастичкиот калкулус е различна на класичната за $p = 2$ (додека за класичната (прва) варијација $p = 1$, тие се еднакви). Во стохастичкиот калкулус горната гранична вредност е земена по сите стеснувачки разбивања, каде што $\delta_n = \max_{1 \le i \le n} (t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$, а не по сите можни разбивања. Во главниот дел од книгата е користена оваа дефиниција.

Квадратната варијација игра важна улога во стохастичкиот калкулус, а многу ретко се среќава во класичниот калкулус бидејќи глатките (бесконечно диференцијабилни) функции имаат нула квадратна варијација.

Теорема 4. Ако f е непрекината и има конечна варијација, тогаш нејзината квадратна варијација е нула.

Доказ. Имаме:

$$[f](t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n) \right)^2$$

$$\le \lim_{\delta_n \to 0} \max_i | f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n) | \sum_{i=0}^{n-1} | f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n) |$$

$$\le \lim_{\delta_n \to 0} \max_i | f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n) | V_f(t).$$

Бидејќи f е непрекината функција, таа е рамномерно непрекината на $[0,t]$, па следува:

$$\lim_{\delta_n \to 0} \max_i | f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n) | = 0,$$

па следува тврдењето на теоремата. ■

Да забележиме дека постојат функции со квадратна варијација нула и бесконечна варијација. Овие функции ги нарекуваме функции со нула енергија.

Дефиниција 5. Квадратна коваријација (или кратко коваријација) на f и g на интервалот $[0,t]$ е дефинирана со следнава гранична вредност (ако постои):

$$[f,g](t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_{i+1}^n) - f(t_i^n) \right) \left(g(t_{i+1}^n) - g(t_i^n) \right),$$

при што граничната вредност е земена по разбивањата $\{t_i^n\}$ на интервалот $[0,t]$ и $\delta_n = \max_i (t_{i+1}^n - t_i^n)$. Сега, ја имаме следнава теорема:

Теорема 5. Нека f е непрекината функција и g е функција со конечна варијација.Тогаш, нивната коваријација е нула, односно: $[f,g](t) = 0$.

Нека f и g се такви што нивната квадратна коваријација е дефинирана. Со помош на елементарната алгебра, можеме да го покажеме следниот поларизационен идентитет.

Теорема 6. (Поларизационен идентитет) Важи:

$$[f,g](t) = \frac{1}{2}\left([f+g, f+g](t) - [f,f](t) - [g,g](t) \right).$$

Јасно е дека коваријацијата е симетрична, односно важи: $[f,g](t) = [g,f](t)$. Од поларизациониот идентитет добиваме дека коваријацијата е линеарна, односно за кои било константи α и β, важи:

$$[\alpha f + \beta g, h](t) = \alpha [f,h](t) + \beta [g,h](t).$$

Како резултат на симетријата, коваријацијата е билинеарна, односно таа е линеарна по двата аргумента. Следува, квадратната варијација на збир може да се разгледува слично како множењето на збировите

$(\alpha_1 f + \beta_1 g)(\alpha_2 h + \beta_2 k)$. Од дефиницијата за квадратна варијација следува дека таа е неопаѓачка функција по t, па според тоа и е со конечна варијација. Од поларизациониот идентитет, коваријацијата е со конечна варијација.

11.3. Риманов и Стилтјесов интеграл

Дефиниција 1. Римановиот интеграл на функцијата f над интервалот $[a,b]$ се дефинира како гранична вредност на Римановите суми:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^n)(t_i^n - t_{i-1}^n),$$

каде што $\{t_i^n\}$ се разбивања на интервалот,

$$a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = b\,,\quad \delta = \max_{1\le i\le n}(t_i^n - t_{i-1}^n) \ \text{ и } \ t_{i-1}^n \le \xi_i^n \le t_i^n\,.$$

Може да се докаже дека Римановиот интеграл е добро дефиниран за непрекинати функции и со делење на интервалот, Римановиот интеграл може да се прошири на функции кои се прекинати во конечно многу точки. Наредната теорема го дава начинот на пресметување на Римановиот интеграл, користејќи примитивна функција, позната како основна теорема во интегралното сметање.

Теорема 1. (Теорема на Њутн-Лајбниц) Ако f е диференцијабилна функција на $[a,b]$ и f' е Риманова интеграбилна функција на $[a,b]$, тогаш:

$$\int_a^b f'(s)\,ds = f(b) - f(a)\,.$$

Во општа ситуација, кога имаме функции кои имаат прекин, оваа теорема не може да се примени. За функции кои имаат прекин од прв тип, во формулата мора да се додаде уште еден член, поврзан со скокот.

Пример 1. Нека $f(t) = 2$, за $1 \le t \le 2$, $f(t) = 1$, за $0 \le t < 1$. Тогаш, $f'(t) = 0$ во сите точки за кои $t \ne 1$. Па, $\int_0^t f'(s)\,ds = 0 \ne f(t)$. Функцијата f е непрекината и диференцијабилна во сите точки, освен во една, изводот е интеграбилен, но функцијата не е еднаква на интегралот од нејзиниот извод. ♦

Само да напоменеме дека главни алатки за пресметување на Римановите интеграли се промена на променливите и парцијална интеграција.

Стилтјесовиот интеграл е интеграл со облик $\int_a^b f(t)\,dg(t)$, каде што g е функција со конечна варијација. Бидејќи функција со конечна варијација е разлика од две растечки функции, доволно е да се дефинира интегралот во однос на монотони функции.

Дефиниција 2. Стилтјесовиот интеграл на функцијата f во однос на монотона фунцкија g, над интервалот $(a,b]$ е дефиниран со:

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f(t)\,dg(t) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i^n)\left(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)\right),$$

каде што разбивањето, произволните точки ξ_i^n и дијаметарот на поделбата се дефинирани исто како во дефиницијата на Римановиот интеграл.

Овој интеграл е генерализација на Римановиот интеграл, кој се добива од горната дефиниција со ставање $g(t) = t$. Затоа, овој интеграл во некоја литература е познат и како Риман-Стилтјесов интеграл.

Ако $g'(t)$ постои и $g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)\,ds$, тогаш може да се докаже дека:

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)\,dt .$$

Ако $g(t) = \sum_{k=1}^{[t]} h(k)$ (a е цел број и $[t]$ е цел дел на t) тогаш:

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = \sum_a^b f(k)h(k) .$$

Ова својство ни овозможува сумите да ги претставуваме како интеграли.

Пример 2. Нека $g(t) = t^2$. Тогаш,

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = 2\int_a^b t\,f(t)\,dt .$$

Сега, нека:

$$g(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 2, & 0\le t<1\\ 3, & 1\le t<2\\ 5, & t\ge 2\end{cases}.$$

Тогаш,

$$\int_{-\infty}^{+ki} f(t)\,dg(t)=2f(0)+f(1)+2f(2).$$

Ако на пример, $f(t)=t$, тогаш: $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dg(t)=5$. Ако $f(t)=(t+1)^2$, тогаш:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(t+1)^2\,dg(t)=2+4+18=24\,. \blacklozenge$$

Нека g е функција со конечна варијација и нека:

$$g(t)=a(t)-b(t),$$

каде што $a(t)=V_g(t)$, $b(t)=V_g(t)-g(t)$, кои се неопаѓачки функции. Ако:

$$\int_0^t |f(s)|\,da(s)=\int_0^t |f(s)|\,dV_g(s):=\int_0^t |f(s)||\,dg(s)|<\infty,$$

тогаш f е Стилтјес интеграбилна во однос на g и интегралот е дефиниран како:

$$\int_{(0,t]} f(s)\,dg(s)=\int_{(0,t]} f(s)\,da(s)-\int_{(0,t]} f(s)\,db(s).$$

Да забележиме дека беше користена следнава нотација:

$$\int_a^b f(s)\,dg(s)=\int_{(a,b]} f(s)\,dg(s).$$

Уште,

$$\int_{(0,t]} dg(s)=g(t)-g(0) \text{ и } \qquad \int_{(0,t)} dg(s)=g(t^-)-g(0).$$

Ако f е Стилтјес интеграбилна во однос на функцијата g со конечна варијација, тогаш варијацијата на интегралот е:

$$V(t)=\int_0^t |f(s)||\,dg(s)|=\int_0^t |f(s)|\,dV_g(s).$$

Во стохастичкиот калкулус се разгледуваат Стилтјесови интеграли во однос на функции на бесконечна варијација. Такви функции, на пример, се појавуваат во моделите за цени на берзата. Интегралите во однос на функција со бесконечна варијација, не можат да се дефинираат на стандардниот начин преку граничина вредност на апроксимирачките суми.

Теорема 2. Нека со $\delta_n = \max_i (t_i^n - t_{i-1}^n)$ е означена големината на најголемиот интервал во разбивањето на интервалот $[a,b]$. Ако:

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}^n)\left(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n)\right)$$

постои за која било непрекината функција f, тогаш g мора да биде со конечна варијација на $[a,b]$.

Од оваа теорема имаме дека ако g има конечна варијација, тогаш граничната вредност на апроксимирачките суми не постои за некои функции f.

Во продолжение, ќе ја дадеме формулата за парцијална интеграција. Нека f и g се функции со конечна варијација. Нека означиме: $\Delta g(s) = g(s) - g(s^-)$. Тогаш (со интеграли на $(a,b]$), имаме:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(s^-)\,dg(s) + \int_a^b g(s^-)\,df(s) + \sum_{a<s\le b} \Delta f(s)\Delta g(s)$$

$$= \int_a^b f(s^-)\,dg(s) + \int_a^b g(s)\,df(s).$$

Последната равенка е добиена со ставање на сумите од скоковите заедно со еден од интегралите.

Да забележиме дека, иако во последната равенка сумата е по непреброиво многу вредности $a < s \le b$, таа има најмногу преброиво многу ненулти членови. Ова важи бидејќи функција со конечна варијација може да има најмногу преброив број на скокови.

Ако g е непрекината функција, така што $g(s^-) = g(s)$, за сите s, тогаш формулата за парцијална интеграција добива поедноставен облик и ја добиваме класичната формула за парцијална интеграција кај Стилтјесовиот интеграл:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(s)\,dg(s) + \int_a^b g(s)\,df(s).$$

Пример 3. Нека $g(s)$ е функција со конечна варијација, $g(0)=0$ и да го разгледаме $g^2(s)$. Со помош на парцијална интеграција за $f=g$, имаме:

$$g^2(t)=2\int_0^t g(s^-)\,dg(s)+\sum_{s\le t}(\Delta g(s))^2 .$$

Со други зборови,

$$\int_0^t g(s^-)\,dg(s)=\frac{g^2(t)}{2}-\frac{1}{2}\sum_{s\le t}(\Delta g(s))^2 .$$

Сега, со помош на формулата за парцијална интеграција, имаме:

$$\int_0^t g(s)\,dg(s)=g^2(t)-\int_0^t g(s^-)\,dg(s)=\frac{g^2(t)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{s\le t}(\Delta g(s))^2 .$$

Оттука,

$$\int_0^t g(s^-)\,dg(s)\le\frac{g^2(t)}{2}\le\int_0^t g(s)\,dg(s). \blacklozenge$$

Понатаму, ќе ја разгледаме смената на променливи кај Стилтјесовиот интеграл.

Нека f е непрекинато диференцијабилна функција и нека g е непрекината и со конечна варијација функција, тогаш:

$$f(g(t))-f(g(0))=\int_0^t f'(g(s))\,dg(s)=\int_{g(0)}^{g(t)} f'(u)\,du .$$

Ако функцијата g со конечна варијација има скокови и е непрекината од десно, тогаш:

$$f(g(t))-f(g(0))=\int_0^t f'(g(s^-))\,dg(s)$$

$$+\sum_{0<s\le t}\Big(f(g(s))-f(g(s^-))-f'(g(s^-))\Delta g(s)\Big),$$

каде што $\Delta g(s)=g(s)-g(s^-)$ го означува скокот на функцијата g во точката s. Во стохастичкиот калкулус ова беше познато како Итова формула.

Пример 4. Нека $f(x)=x^2$. Тогаш:

$$g^2(t)-g^2(0)=2\int_0^t g(s^-)\,dg(s)+\sum_{s\le t}(\Delta g(s))^2 . \blacklozenge$$

Да забележиме дека за непрекината функција f и функција g со конечна варијација на $[0,t]$, апроксимирачките суми конвергираат кога $\delta = \max_i (t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0$, односно:

$$\sum_{i=1}^{n} f(g(t_i^n))(g(t_{i+1}^n) - g(t_i^n)) \to \int_0^t f(g(s^-))\,dg(s),$$

кога дијаметарот на поделбата конвергира кон нула.

Една карактеристика на Римановиот или Стилтјесовиот интеграл е дека не го задржуваат својството на монотона конвергенција, односно за низа од функции $f_n \uparrow f$, не мора да следува соодветната конвергенција на нивните интеграли. Лебеговиот (или Лебег-Стилтјесов) интеграл го задржува ова својство.

11.4. Мера и Лебегов интеграл

Римановите суми се конструирани со поделба на доменот на интеграција на x-оската, интервалот $[a,b]$, на помали подинтервали. Лебеговите суми се конструирани со поделба на сликата на функцијата на y-оската, интервалот $[c,d]$ на помали подинтервали $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_k < \ldots < y_n = d$ и се формираат сумите:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m(\{t : y_k \leq f(t) < y_{k+1}\}),$$

каде што со m е означена во овој случај мерата $m([a,b])$, која е должината на интервалот $[a,b]$. Лебеговиот интеграл е гранична вредност на горните суми кога бројот на точки во разбивањето расте. Лебеговиот интеграл е погенерален од Римановиот интеграл и ја задржува конвергенцијата. Овој пристап дозволува интеграција на функции во апстрактен простор на веројатност погенерален од просторите $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^n$.

Забелешка. Малку послободна споредба во однос на Римановиот интеграл и Лебеговиот интеграл е дадена преку следнава аналогија: Да замислиме дека имаме расфрлани пари низ еден ходник. Со Римановиот интеграл, ги собираме парите како се движиме низ ходникот. Со Лебеговиот интеграл ги собираме парите прво банкнотите со 2000 денари секаде низ ходникот, па банкнотите со 1000 денари секаде низ ходникот, па банкнотите со 500 денари насекаде низ ходникот итн.

Дефиниција 1. Нека $X \neq \emptyset$ и $P(X)$ е партитивното множество. Тополоогијата τ на множеството X е фамилија на множества $\tau \subseteq P(X)$ со особините:

а) $\emptyset, X \in \tau$

б) $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$

в) $U_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Дефиниција 2. σ- алгебра (или σ-алгебра) на X е фамилија на множества $\mathbf{M} \subseteq P(X)$ со следниве особини:

а) $X \in \mathbf{M}$

б) $A \in \mathbf{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathbf{M}$

в) $A_n \in \mathbf{M},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbf{M}$.

Множеството X со σ-алгебрата $\mathbf{M}$ го нарекуваме простор со σ-алгебра и го означуваме со $(X, \mathbf{M})$.

Дефиниција 3. Нека $(X, \mathbf{M})$ е простор со σ-алгебра и (Y, τ) е тополошки простор. Функцијата $X \to Y$, која ќе ја означуваме и со $f : (X, \mathbf{M}) \to (Y, \tau)$ е мерлива ако $f^{-1}(\omega) \in \mathbf{M}$, за секое $\omega \in \tau$.

Многу честа во литературата е и следнава дефиниција за мерливост на функција:

Дефиниција 4. Функцијата $f : (X, \mathbf{M}) \to (Y, \mathbf{N})$, каде што $(Y, \mathbf{N})$ е простор со σ-алгебра $\mathbf{N}$ е мерлива ако $f^{-1}(U) \in \mathbf{M}$, за секое $U \in \mathbf{N}$.

Следнава теорема ќе ја дадеме без доказ:

Теорема 1. Нека $(X, \mathbf{M})$ е простор со σ-алгебра и нека (Y, ν) и (Z, τ) се тополошки простори. Ако $f : (X, \mathbf{M}) \to (Y, \nu)$ е мерлива функција, $g : (Y, \nu) \to (Z, \tau)$ е непрекината функција, тогаш $g \circ f$ е мерлива функција.

Да забележиме дека збир на две мерливи функции, производ на скалар со мерлива функција, производ на две мерливи функции и количник на две мерливи функции, при што функцијата во именител е позитивна функција, е мерлива функција.

Дефиниција 5. Нека $(X,\mathbf{M})$ е простор со σ-алгебра. Мера μ на $\mathbf{M}$ е функцијата $\mu:\mathbf{M}\to[0,\infty]$ за која важи:

Ако $A_i\in\mathbf{M}$, $i\in\mathbb{N}$, дисјунктна фамилија на множества, тогаш:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\ (\sigma\text{-адитивност}).$$

$(X,\mathbf{M},\mu)$ се нарекува мерлив простор или простор со мера. Елементите на σ-алгебрата $\mathbf{M}$ се нарекуваат мерливи множества.

Мерата μ е нетривијална ако за барем едно $A\in\mathbf{M}$, $\mu(A)<\infty$.

Мерата μ е конечна, ако за секое $A\in\mathbf{M}$, $\mu(A)<\infty$.

Мерата μ е σ-конечна ако е X преброива унија од мерливи множества, така што секое од нив има конечна мера.

Во продолжение, ќе дадеме некои примери на мера, кои често се среќаваат во математичката литература.

Пример 1. Нека $X\neq\varnothing$ и $\mathbf{M}=P(X)$ е партитивното множество. Нека $\mu(A)=\infty$, $\varnothing\neq A\subseteq X$, $\mu(\varnothing)=0$. За оваа мера велиме дека е тривијална мера на $(X,P(X))$. ♦

Пример 2. (Веројатностна мера) Мерата μ на $(X,P(X))$ која има својство $\mu(X)=1$ (особина на нормалност на мерата) се нарекува веројатностна мера или мера на веројатност. ♦

Пример 3. (Диракова мера концентрирана во x_0) Нека $(X,\mathbf{M})$ е простор со σ-алгебра и $x_0\in X$. За $A\in\mathbf{M}$ дефинираме:

$$\mu(A)=\begin{cases}1, & x_0\in A\\ 0, & x_0\notin A\end{cases},\quad A\in\mathbf{M}.$$

Функцијата μ е ненегативна и за $A_i\in\mathbf{M}$, $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$ и важи:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i).$$

Ова, следува од фактот дека $x_0\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ ако и само ако постои точно еден индекс i_0, така што $x_0\in A_{i_0}$, па и на левата и десната страна имаме вредност 1. ♦

Пример 4. (Мера на пребројување) Нека $(X,\mathbf{M})$ е простор со σ-алгебра. За $A\in\mathbf{M}$ дефинираме:

$$\mu(A)=\begin{cases} \text{број на елементи во } A, & A \text{ е конечно} \\ \infty, & A \text{ е бесконечно} \end{cases}.$$

Со едноставна проверка се утврдува дека μ е мера. Овде, посебно интересен случај е $X=\mathbb{N}$, $\mathbf{M}=P(X)$. ♦

Пример 5. (Полнење) Нека $(X,\mathbf{M})$ е простор со σ-алгебра и ν пресликување $\nu:\mathbf{M}\to\mathbb{R}$ (да забележиме дека не е $\mathbb{R}_+$) со својствата:

1) $\nu(\varnothing)=0$

2) Ако $A_i\in\mathbf{M}$, $i\in\mathbb{N}$ се дисјунктни, тогаш важи:

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_i),$$

што вклучува безусловна конвергенција на редот на десната страна. Тогаш за ν велиме дека е мера на полнење (charge) или мера со предзнак. Вака дефинираната мера на полнење е конечна за сите мерливи множества. ♦

Нека $(X,\mathbf{M},\mu)$ е простор со мера μ на σ-алгебрата $\mathbf{M}$. Нека $s:X\to[0,\infty]$ е мерлива проста функција, односно има облик:

$$s=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\kappa_{A_i}\quad(\alpha_i\neq\alpha_j,\ A_i\in\mathbf{M}).$$

Лебеговиот интеграл на функцијата s на $E\in\mathbf{M}$ се дефинира со:

$$\int_E s\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E\cap A_i). \qquad (*)$$

Дефиниција 6. Нека $f:X\to[0,\infty]$ е мерлива функција и $E\in\mathbf{M}$. Лебеговиот интеграл на функцијата f на E е:

$$\int_E f\,d\mu=\sup_{0\le s\le f}\int_E s\,d\mu,$$

каде што супремумот се зема по сите прости мерливи функции $s:X\to[0,\infty]$ со својството $0\le s\le f$ и $\int_E s\,d\mu$ е дадено со (*).

Диференцијалот $df(t)$ на диференцијабилна функција f во t е дефиниран како линеарен по делот Δt на нараснувањето во t, $f(t+\Delta t)-f(t)$. Ако диференцијалот на независната променлива е означен со $dt = \Delta t$, тогаш $f(t+dt) - f(t) = df(t) +$ некои членови од помал ред и од постоењето на изводот во t, добиваме:

$$df(t) = f'(t)\,dt\,.$$

Ако g е, исто така, диференцијабилна функција по t, тогаш $f(g(t))$ е диференцијабилна и:

$$df(g(t)) = f'(g(t))g'(t)\,dt = f'(g(t))\,dg(t)\,,$$

е равенство кое е познато и како диференцијал од сложена функција.

Диференцијалниот калкулус е важен во апликациите бидејќи многу физички проблеми може да се формулираат преку диференцијални равенки. Главната релација помеѓу интегралите и диференцијалите (изводите) е претходно дадена со фундаменталната теорема (теорма на Њутн-Лајбниц) на интегралното сметање.

За диференцијабилни функции, диференцијалните равенки од обликот:

$$df(t) = \varphi(t)\,d\omega(t)$$

можат да се запишат во интегрална форма:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \varphi(s)\,d\omega(s)\,.$$

Во стохастичкиот калкулус диференцијалите не постојат формално и случајните функции $\omega(t)$ не се диференцијабилни во која било точка. Со воведувањето нов (стохастички Итов) интеграл, стохастичките диференцијални равенки се дефинирани и по дефиниција, решенијата на овие равенки беа дадени со решенијата на соодветните стохастички интегрални равенки.

11.5. Тејлорова формула

Овде ќе бидат дадени Тејлоровата формула и условите кои се претпоставени на функциите кои беа користени во диференцијалните равенки.

Ако го разгледуваме нараснувањето на функцијата $f(x) - f(x_0)$ на интервалот $[x_0, x]$, тогаш под услов да постои $f'(x_0)$, диференцијалот во x_0 е линеарниот дел по $(x - x_0)$ на нараснувањето и ја дава првата апроксимација на нараснувањето. Тејлоровата формула дава подобра апроксимација со земање повисоки степени на $(x-x_0)$, при претпоставка дека постојат изводите од повисок ред на f во x_0. Ако f е функција по x со непрекинати изводи со до ред $n+1$, тогаш:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x,x_0),$$

каде што R_n е остатокот и $f^{(n)}$ е првиот извод на $f^{(n-1)}$. Остатокот може да се запише во обликот:

$$R_n(x,x_0)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_n)(x-x_0)^{n+1},$$

за некоја точка $\theta_n\in(x_0,x)$.

Најчесто, во апликациите на оваа формула, во главниот дел на книгата, се користи формулата со првите два члена:

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\theta)(x-x_0)^2,$$

за некоја точка: $\theta\in(x_0,x)$.

Слично, како еднодимензионалниот случај, Тејлоровата формула дава последователни апроксимации на нараснувањето на некоја функција. Функција со n реални променливи $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ е диференцијабилна во точката $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ако нараснувањето во оваа точка може да се апроксимира со линеарен дел, кој е диференцијал на функцијата f во $\mathbf{x}$. Имаме:

$$\Delta f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}C_i\Delta x_i+o(\rho),$$

кога:

$$\rho=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}\quad \text{и} \qquad \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0.$$

Ако f е диференцијабилна во $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, тогаш функцијата f е диференцијабилна како функција по која било променлива x_i во таа точка, кога сите други координати се фиксни. Изводот во однос на x_i се нарекува парцијален извод и се означува со $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. За разлика од еднодимензионалниот случај, постоењето на сите парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ во точката $\mathbf{x}$, е потребен, но не и доволен услов за диференцијабилноста на функцијата f во $\mathbf{x}$. Но, ако сите парцијални изводи постојат и се непрекинати во таа точка, тогаш f е диференцијабилна во таа точка, уште повеќе C_i во горната равенка се дадени со вредноста на $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ во точката $\mathbf{x}$. Ако го дефинираме диференцијалот на независна променлива да биде неговото нараснување $dx_i = \Delta x_i$, тогаш ја имаме следнава теорема:

Теорема 1. За f да биде диференцијабилна во некоја точка, потребно е функцијата f да има парцијални изводи во таа точка, а доволен услов е да сите парцијални изводи од прв ред да бидат непрекинати во таа точка. Ако f е диференцијабилна во точката $\mathbf{x}$, тогаш нејзиниот диференцијал е даден со:

$$df(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_i \ .$$

Првата апроксимација на нараснувањето на диференцијабилната функција е диференцијалот:

$$\Delta f(\mathbf{x}) \approx df(\mathbf{x}).$$

Ако f ги има парцијалните изводи од повисок ред, тогаш можна е понатамошна апроксимација и таа е дадена со Тејлоровата формула за функција со повеќе променливи. Во стохастичкиот калкулус, оваа апркосимација игра многу важна улога.

Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е двапати непрекинато диференцијабилна функција, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} = (x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n)$, тогаш со разгледување на функцијата со една променлива $g(t) = f(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x})$, за $0 \le t \le 1$, ја добиваме следнава формула:

$$\Delta f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, .., x_n)\, dx_i$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1 + \theta\Delta x_1, ..., x_n + \theta\Delta x_n)\, dx_i dx_j \ ,$$

каде што, како и во случајот на една променлива вторите изводи, се земени во некоја „средна“ точка, $(x_1 + \theta\Delta x_1, ..., x_n + \theta\Delta x_n)$ за некое $\theta \in (0,1)$ и $dx_i = \Delta x_i$.

11.6. Липшицови и Холдерови услови

Липшицовите и Холдеровите услови ги опишуваат поткласите од непрекинати услови. Тие се појавуваат како услови за коефициентите во резултатите кои беа посветени на постоење и единственост на решенијата на обичните и стохастичките диференцијални равенки.

Дефиниција 1. За функцијата f велиме дека го задоволува Холдеровиот услов [велиме дека е уште и Холдер (Hölder) непрекината] од ред α, $0 < \alpha \le 1$ на $[a,b]$ ($\mathbb{R}$) ако постои константа $K > 0$, така што за сите $x, y \in [a,b]$ ($\mathbb{R}$), важи:

$$| f(x) - f(y) | \le K | x - y |^{\alpha}.$$

Липшицовиот (Lipschitz) услов (Липшиц непрекината) е Холдеров услов за $\alpha = 1$,

$$| f(x) - f(y) | \le K | x - y |.$$

Лесно може да се забележи дека функциите кои се Холдер непрекинати со ред α на $[a,b]$ се, исто така, Холдер непрекинати од кој било ред помал од α.

Пример 1. Функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0,\infty)$ е Холдер непрекината со ред $\alpha = \frac{1}{2}$, но не е Липшиц непрекината, бидејќи нејзиниот извод е неограничен во околина на нула. За да покажеме дека функцијата го задоволува Холдеровиот услов, доволно е да покажеме дека за сите $x, y \ge 0$, следниов количник е ограничен:

$$\frac{| \sqrt{x} - \sqrt{y} |}{\sqrt{| x - y |}} \le K.$$

При претпоставка дека $y \ne 0$ (ако $y = 0$, тогаш границата е очигледна) со делење на броителот и именителот на количникот од левата страна со $\sqrt{y}$ и примена на Лопиталовото правило се добива ограниченоста на количникот. Слично, $f(x) = |x|^r$, $0 < r < 1$ го задоволува Холдеровиот услов со ред r. ♦

Едноставен доволен услов за една функција да биде Липшиц непрекината е да биде непрекината и по делови глатка.

Дефиниција 2. Функцијата f е глатка на интервалот $[a,b]$ ако има непрекинат извод f' на (a,b) така што граничните вредности $f'(a^+)$ и $f'(b^-)$ постојат.

Дефиниција 3. Функцијата f е по делови непрекината на интервалот $[a,b]$ ако е непрекината на интервалот $[a,b]$ освен можеби во конечен број на точки во кои десните и левите гранични вредности постојат.

Дефиниција 4. Функцијата f е по делови глатка на интервалот $[a,b]$ ако таа е по делови непрекината на интервалот $[a,b]$ и f' постои и е по делови непрекинат на $[a,b]$.

Во продолжение ќе дадеме некои елементарни факти поврзани со условите за раст кои беа користени во главниот дел на книгата.

Линеарниот услов за раст се појавуваше во делот за постоење и единственост на решенијата на стохастичките диференцијалните равенки.

Дефиниција 5. Функцијата $f(x)$ го задоволува линеарниот услов за раст ако:

$$|f(x)| \leq K(1+|x|).$$

Овој услов го опишува растот на функцијата за големи вредности на x и вели дека f е ограничена за мали вредности на x.

Пример 2. Може да се покаже дека ако $f(0,t)$ е ограничена функција по t, $|f(0,t)| \leq C$ за сите t и $f(x,t)$ го задоволува Липшицовиот услов по x, рамномерно по t, односно:

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq K|x-y|,$$

тогаш $f(x,t)$ го задоволува линеарниот услов за раст по x, односно важи:

$$|f(x,t)| \leq K_1(1+|x|). \;\blacklozenge$$

Дефиниција 6. Полиномен раст на функцијата f е условот:

$$| f(x)| \le K(1+|x|^m), \quad \text{за некои } K, m > 0.$$

Теорема 1. [Неравенство на Гронвал (Gronwall)] Нека $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ се ненегативни функции на интервалот $[0,T]$ и за сите $0 \le t \le T$ важи:

$$f(t) \le g(t) + \int_0^t h(s)\, f(s)\, ds.$$

Тогаш, за $0 \le t \le T$, важи:

$$f(t) \le g(t) + \int_0^t h(s) g(s) \exp\left(\int_s^t h(u)\, du \right) ds.$$

Во продолжение, ќе дадеме некои елементарни факти поврзани со барањето на решението на линеарните диференцијални равенки од прв ред.

Линерарните диференцијални равенки, по дефиниција, се линеарни по непознатата функција и нејзините изводи. Диференцијалната равенка од прв ред, во која коефициентот на $\dfrac{dx(t)}{dt}$ е различен од нула, може да се запише во обликот:

$$\frac{dx(t)}{dt} + g(t)x(t) = k(t).$$

Овие равенки се решаваат со користење на методот на интегрален множител. Интегрирален множител е функцијата $e^{G(t)}$, каде што $G(t)$ е избрана, така што $G'(t) = g(t)$. По множењето на двете страни од равенката со $e^{G(t)}$, со интегрирање и решавање за $x(t)$, имаме:

$$x(t) = e^{-G(t)} \int_0^t \left(e^{G(s)} k(s) \right) ds + x(0) e^{G(0)-G(t)}.$$

Интегриралниот множител $G(t)$ е определен со точност од константа, но од горната равенка за општото решение на линеарната диференцијална равенка од прв ред, добиваме дека општото решение $x(t)$ останува исто.

11.7. Забелешки за интеграција на функции

Дадените резултати овде се користени како факти во главниот дел на книгата. Некои од овие резултати вклучуваат и бараат знаење на множества со Лебегова мера која е нула. Да споменеме дека кое било преброиво множество има Лебегова мера нула, но, исто така, постојат непроброиви множества кои имаат Лебегова мера нула.

Теорема 1. [Теорема на Лебег (Lebesgue)] Функцијата g со конечна варијација на интервалот $[a,b]$ е диференцијабилна скоро секаде на $[a,b]$.

Во продолжение се дадени доволни услови за една функција да го задоволува Липшицовиот услов или да не го задоволува Липшицовиот услов:

1) Ако f е непрекинато диференцијалбилна на конечен интервал $[a,b]$, тогаш таа го задоволува Липшицовиот услов. Навистина, бидејќи f' е непрекината функција на $[a,b]$, таа е ограничена и $|f'|\leq K$. Па,
$$|f(x)-f(y)|=\left|\int_x^y f'(t)\,dt\right|\leq\int_x^y |f'(t)|\,dt\leq K\,|x-y|.$$
2) Ако f е непрекината и по делови глатка функција, тогаш таа го задоволува Липшицовиот услов, а доказот за ова тврдење е сличен како за претходното.
3) Липшицова функција не мора да биде диференцијабилна. На пример, $f(x)=|x|$ е Липшицова функција (го задоволува Липшицовиот услов), но не е диференцијабилна во нула.
4) Следува, од дефиницијата на Липшицовиот услов, дека ако една функција е диференцијабилна, тогаш изводот е ограничен со K.
5) Липшицова функција (функција која го задоволува Липшицовиот услов) има конечна варијација на конечни интервали, бидејќи за кое било разбивање $\{x_i\}$ на конечниот интервал $[a,b]$, важи:
$$\sum|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leq K\sum(x_{i+1}-x_i)=K(b-a).$$
6) Функциите со конечна варијација имаат изводи скоро секаде (во однос на Лебеговата мера) и Липшицова функција е диференцијабилна скоро секаде. Да забележиме дека функциите со конечна варијација имаат изводи кои се интеграбилни во однос на

Лебеговата мера, но произволната функција не мора да биде еднаква на интегралот од изводот.

7) Липшицова функција помножена со константа или збир од две Липшицови функции е Липшицова функција. Производот на две ограничени Липшицови функции е Липшицова функција.
8) Ако f е Липшицова функција на интервалот $[0,N]$ за кое било $N>0$, но со константа K која зависи од N, тогаш таа се нарекува локално Липшицова функција. На пример, $f(x)=x^2$ е Липшицова функција на $[0,N]$, за секое конечно N, но не е Липшицова функција на $[0,+\infty)$, бидејќи нејзиниот извод е неограничен.
9) Ако f е функција со две променливи $f(x,t)$ и го задоволува Липшицовиот услов по x, за сите t, $0\le t\le T$, со истата константа K независна од t, тогаш велиме дека f го задоволува Липшицовиот услов за x рамномерно по t, $0\le t\le T$.

Потребен и доволен услов за да некоја функција f биде Риман интеграбилна се наоѓа во наредната теорема, која била дадена од Лебег.

Теорема 2. Потребен и доволен услов за функција f да биде Риман интеграбилна на конечен затворен интервал $[a,b]$ е f е ограничена на интервалот $[a,b]$ и скоро секаде непрекината на $[a,b]$, односно функцијата е непрекината во сите точки, освен можеби на множество со Лебегова мера нула.

11.8. Случајни променливи

Да претпоставиме дека кај еден експеримент, кој е дефиниран со некои претпоставки, еден сигурен настан Ω може да се претстави како множество од преброиво многу елементарни настани ω_i, односно:

$$\Omega=\{\omega_i : i\in\mathbb{N}\}.$$

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ е простор на веројатност, каде што $\mathcal{F}$ е σ-алгебра од настани. Бидејќи Ω е сигурен настан, имаме:

$$p\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\omega_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}p(\omega_i)=p(\Omega)=1.$$

Да ја разгледаме функцијата дефинирана на Ω, со вредности во $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, односно:

$$X:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}.$$

Дефиниција 1. Пресликувањето $X:\Omega\to B$ е дискретна случајна променлива ако за секој $x_k\in B$ множеството $A_k=\{\omega\in\omega:\ X(\omega)=x_k\}$ е настан. Означуваме:

$$p_k=p(A_k)=p(X=x_k).$$

За овие броеви важи: $p_k>0$, $\sum_k p_k=1$.

Законот на распределба на случајната променлива X се состои од вредностите кои ги прима заедно со соодветните веројатности. Запишувам:

$$X:\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & \dots\\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots\end{pmatrix}.$$

Бидејќи реализацијата или нереализацијата на елементарниот настан ω_i е од случајна природа (се реализира или не) и X ги прима вредностите x_i на случаен начин, оваа променлива ја нарекуваме случајна променлива.

На пример, кај фрлањето на една коцка, нека со X го означиме бројот на точки кои се појавиле на горната страна на коцката. Тогаш X е случајна променлива која ги прима вредностите $\{1,2,3,4,5,6\}$ со еднакви веројатности $\frac{1}{6}$. Овие шест настани формираат множество од сите можни елементарни настани, а збирот на нивните веројатности е еднаков на 1. Бидејќи X ги прима целите вредности од 1 до 6, ќе велиме дека претставува една прекината случајна променлива.

Кај фрлањето паричка, можеме да земеме дека X прима вредности 0, ако падне писмо и 1 ако падне глава, при што соодветните веројатности се $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Множеството од сите можни елементарни настани се да се падне глава и да се падне писмо, а збирот на соодветните веројатности е еднаква на 1. Овде, исто така, X е прекината случајна променлива.

Кога ќе се реализира настанот ω_i, можеме да кажеме дека се реализирал настанот $(X = \omega_i)$, бидејќи овие два настана се исти, па можеме да запишеме:

$$\omega_i \equiv (X = \omega_i).$$

Поради тоа, запишуваме стандардно:

$$p(\omega_i) = p(X = \omega_i) = p_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Имајќи ја предвид втората аксиома на веројатноста,

$$\bigcup_{i=1}^{k} \omega_i \equiv X \in \{x_1, x_2, ..., x_k\} \ ,$$

од каде што:

$$p(X \in \{x_1, x_2, ..., x_k\}) = p\big((X = x_1) + (X = x_2) + ... + (X = x_k)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i \ ,$$

бидејќи елементарните настани помеѓу себе се инкомпатибилни.

Ако настанот A може да се разложи на елементарни настани $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k$, а со S_A го означуваме множеството од вредности кои одговараат на случајната променлива X, тогаш можеме да запишеме:

$$p(A) = p(X \in S_A) = \sum_{i=1}^{k} p_i \ .$$

Јасно, имаме:

$$p(X \in S_\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Дефиниција 2. Нека $(\Omega,\ \mathcal{F},\ p)$ е простор на веројатност. Пресликувањето $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ќе го нарекуваме случајна променлива ако за секој $x \in \mathbb{R}$, множеството:

$$A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$$

е настан, односно е елемент од алгебрата $\mathcal{F}$.

Множеството $\{\omega \in \omega : X(\omega) < x\}$ кратко ќе го означуваме со $\{X < x\}$.

Дефиниција 3. Функцијата на распределба на случајната променлива X е функцијата $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ дефинирана со формулата:

$$F(x) = p(\{X < x\}).$$

Функцијата на распределба, заедно со нејзиниот извод, ќе биде еден од најважните поими кои ќе бидат сврзани со изучувањето на непрекинатите случајни променливи. Знаејќи ја функцијата на распределба, можеме во целост да ја опишеме случајната променлива.

Во наредната теорема, дадени се основните својства на функцијата на распределба.

Теорема 1. Нека F е функција на распределба на случајната променлива X. Тогаш,

а) $p(\{x_1 \leq X < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$

б) F е неопаѓачка, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

г) Функцијата F е непрекината од лево:

$F(x-0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(x-\varepsilon) = F(x)$, за сите $x \in \mathbb{R}$.

Доказ.

а) Нека $x_1 < x_2$. Тогаш важи:

$$\begin{aligned} F(x_2) = p(\{X < x_2\}) &= p(\{X < x_1\} \cup \{x_1 \leq X < x_2\}) \\ &= p(\{X < x_1\}) + p(\{x_1 \leq X < x_2\}) \\ &= F(x_1) + p(\{x_1 \leq X < x_2\}), \end{aligned}$$

од каде што следува тврдењето:

б) Нека важи $x_1 < x_2$. Бидејќи важи $\{X < x_1\} \subset \{X < x_2\}$, тврдењето следува од монотоноста на веројатноста.

в) Нека (x_n) е произволно избрана опаѓачка низа од реални броеви и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Нека ставиме $A_n = \{X < x_n\}$. Тогаш, низата од множества (A_n) е опаѓачка низа, т.е. важи: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и важи: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Од непрекинатоста на веројатноста, добиваме:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} p(A_n) = 0.$$

Сосема аналогно се докажува и другото тврдење.

г) Тврдењето следува повторно од непрекинатоста на веројатноста. Навистина, ако (ε_n) е опаѓачка низа од позитивни броеви која тежи кон 0. Тогаш со $A_n = \{X < x - \varepsilon_n\}$ е дефинирана растечка низа од множества за која важи: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < x\}$, па тврдењето следува од непрекинатоста на веројатноста, односно:

$$F(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x-\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} F(x-\varepsilon_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} p(A_n) = p(A) = F(x)\text{, за сите } x \in \mathbb{R}\,. \ \blacksquare$$

Дефиниција 4. За случајната променлива X велиме дека е непрекината случајна променлива ако постои ненегативна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така што:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Функцијата f се нарекува густина на распределбата на веројатноста на случајната променлива X. Оваа функција не е секогаш непрекината, но во точките на непрекинатост на f важи:

$$f(x) = F'(x)\,.$$

Функцијата на распределба на непрекината случајна променлива е и сама непрекината, бидејќи таа е функција од горната граница на определениот интеграл. Од ова, имаме: $p(X = x) = F(x+0) - F(x) = 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Според тоа, сите настани: $\{x_1 < X < x_2\}$, $\{x_1 \le X < x_2\}$, $\{x_1 < X \le x_2\}$, $\{x_1 \le X \le x_2\}$ се еднакво веројатни. Нивната веројатност се смета, како:

$$p(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\,.$$

Функцијата на густината на распределба е позитивна функција, за која важи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1\,.$$

Дефиниција 5. Случајните променливи $X, Y : \Omega \to B$ се независни ако за сите $x_k, y_j \in B$ е исполнето:

$$p(X = x_k, Y = y_j) = p(X = x_k) \cdot p(Y = y_j)\,.$$

Најважните карактеристики на една случајна променлива се математичко очекување и дисперзија.

Дефиниција 6. а) Нека случајната променлива X има закон на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Математичкото очекување на случајната променлива X е дефинирано со:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \ ,$$

при услов горниот ред да е конвергентен, т.е. важи: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k < \infty$.

б) Нека X непрекината случајна променлива со густина на распределба f. Математичко очекување на случајната променлива X се дефинира со формулата:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx ,$$

под услов интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ да конвергира, т.е. да важи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx < \infty .$$

Теорема 2. Нека X и Y се случајни променливи дефинирани на ист простор на веројатност. Тогаш за математичкото очекување важи:

а) $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$, за секои реални броеви α и β

б) Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш важи: $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Доказ. Својството $E(\alpha X) = \alpha E(X)$ следува директно од дефиницијата на математичкото очекување. Навистина,

$$E(\alpha X) = \sum_k (\alpha x_k) p_k = \alpha \sum_k x_k p_k = \alpha E(X) .$$

За да го докажеме тврдењето под а) доволно е да докажеме дека важи: $E(X+Y) = E(X) + E(X)$. Нека е даден законот на распределба на случајниот вектор (X, Y) даден со следнава табела:

X / Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	p_2

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	

Случајната променлива $X+Y$ ги прима вредностите $x_j + y_k$ со веројатност p_{jk}, каде што $j=1,2,...,n$ и $k=1,2,...,m$. Во согласност со ова, добиваме:

$$E(X+Y)=\sum_{k,j}(x_j+y_k)p_{kj}=\sum_{k,j}x_j p_{kj}+\sum_{k,j}y_k p_{kj}$$

$$=\sum_j x_j\cdot\sum_k p_{kj}+\sum_k y_k\cdot\sum_j p_{kj}=\sum_j x_j p_j+\sum_k y_k q_k=E(X)+E(Y).$$

б) Случајните променливи X и Y се независни, па важи: $p_{jk}=p_j q_k$, за сите $j=1,2,...,n$ и $k=1,2,...,m$. Па,

$$E(XY)=\sum_{j,k}x_j y_k p_{jk}=\sum_{j,k}x_j y_k p_j q_k$$

$$=\left(\sum_j x_j p_j\right)\cdot\left(\sum_k y_k q_k\right)=E(X)\cdot E(Y)\,.\ \blacksquare$$

Дефиниција 7. а) Нека е дадена случајната променлива X со закон на распределба:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

и нека n е природен број. Дефинираме момент од n-ти ред на случајната променлива со формулата:

$$E(X^n)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^{\,n}p_k\ ,$$

под услов горниот ред да конвергира, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^{\,n}p_k<\infty$.

Централниот момент μ_n од ред n, се дефинира со формулата:

$$\mu_n=E[(X-E(X)^n]=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^n p_k\ ,$$

под услов горниот ред да конвергира, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-E(X))^n p_k<\infty$.

Дефиниција 8. а) Дисперзија (расејување, варијанса) на дискретната случајна променлива X се дефинира со формулата:

$$D(X) = E[(X - E(X))^2].$$

Овој израз, најчесто се пресметува на следниов начин:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

односно:

$$D(X) = \sum_k x_k{}^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k \right)^2$$

б) Дисперзијата на случајната променлива X, се пресметува со формулата:

$$D(X) = E[X - E(X))^2],$$

ако постои горното математичко очекување.

Имајќи ја предвид формулата за математичко очекување, за формулата за дисперзија имаме:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (E(X))^2.$$

Ова следува од самата дефиниција на дисперзија. Навистина,

$$E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2]$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Теорема 3. Нека X и Y се случајни променливи и α е реален број. Тогаш,

а) $D(\alpha X) = \alpha^2 D(X)$

б) Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш:

$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Доказ. За да ги докажеме својствата на дисперзијата на случајната променлива, ќе ги користиме својствата на математичкото очекување.

а) Овде, имаме:

$$D(\alpha X) = E[(\alpha X)^2] - [E(\alpha X)]^2 = E(\alpha^2 X^2) - [\alpha E(X)]^2$$

$$= \alpha^2 E(X^2) - \alpha^2 [E(X)]^2 = \alpha^2 D(X).$$

б) Ако X и Y се независни случајни променливи, имаме:

$$D(X + Y) = E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2$$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 = D(X) + D(Y) . \blacksquare$$

Дефиниција 9. Коваријациски момент на случајните променливи X и Y се дефинира со формулата:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y) .$$

Коефициентот на корелација се дефинира со формулата:

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} .$$

Коефициентот на корелација ни дава информација за меѓусебната зависност на случајните променливи X и Y. За независните случајни променливи секогаш важи $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, па со тоа и $\rho(X,Y) = 0$. Обратното не важи. Случајните променливи кои не корелираат не мораат да бидат независни.

Нека a е реален број. Законот на распределба на случајната променлива $X - a$ е познат, ако е познат законот на распределба на случајната променлива X. Да забележиме дека важи:

$$E(X - a) = E(X) - a, \qquad\qquad D(X - a) = D(X) .$$

Што се случува во овој случај, па немаме промена во дисперзијата? Наједноставно е да гледаме на константата a како случајна променлива која секогаш прима вредност a. Таа случајна променлива е независна од X, а нејзината дисперзија е нула. Поради тоа,

$$D(X - a) = D(X) + D(a) = D(X) .$$

При транслација не се менува ниту коваријацискиот момент:

$$\operatorname{cov}(X - a, Y - b) = E[((X - a) - E(X - a))((Y \_ b)E(Y - b))]$$
$$= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = \operatorname{cov}(X,Y) ,$$

па можеме да заклучиме дека не се менува коваријацискиот момент, а оттука не се менува ниту коефициентот на корелација.

Ако избереме $a = E(X)$, тогаш случајната променлива $X - E(X)$ ја означуваме со $\breve{X}$. За неа важи $E(\breve{X}) = 0,\ D(\breve{X}) = D(X)$. За случајната променлива велиме дека е центрирана.

Математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $aX + b$ е:

$$E(aX + b) = aE(X) + b ,$$
$$D(aX + b) = a^2 D(X) .$$

Особено важен случај на избор на константите a и b, кога математичкото очекување е нула, а дисперзијата е единица. Нека $m = E(X)$, $\sigma^2 = D(X)$. За случајната променлива:

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma}$$

велиме дека е нормализирана случајна променлива и е добиена со нормализирање на случајната променлива X. Важи:

$$E(X^*) = \frac{1}{\sigma} E(X - m) = 0 ,$$

$$D(X^*) = \frac{1}{\sigma^2} D(X - m) = \frac{1}{\sigma^2} D(X) = 1 .$$

Важно е да забележиме дека коефициентот на корелација не се менува со нормирање. Навистина, важи $E(X^*) = E(Y^*) = 0$ и $\sigma_{X^*} = \sigma_{Y^*} = 1$, па добиваме:

$$\rho(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y} \right) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho(X, Y) .$$

11.9. Филтрација и стохастички процеси

Дефиниција 1. Филтрација $\mathbf{F}$ е колекција од алгебри (полиња),

$$\mathbf{F} = \{ \mathcal{F}_0 \, , \mathcal{F}_1 \, , \dots , \mathcal{F}_t , \dots , \mathcal{F}_T \; \} \qquad \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1} \; .$$

Филтрацијата $\mathbf{F}$ се користи како модел за тек на информации. Како поминува времето, набљудувачот знае повеќе и подетални информации, односно, пофини и пофини партиции од Ω. Во примерот со цена на берза, $\mathbf{F}$ опишува како информацијата за цените се открива на инвеститорите.

Пример 1. $\mathbf{F} = \{ \; \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_A , \; 2^{\Omega} \}$ е пример на филтрација . ♦

Ако Ω е конечен простор на сите елементарни настани, тогаш функцијата X дефинирана на Ω и се придружени вредности за секое $\omega \in \Omega$. Бидејќи Ω е конечен, X прима само конечно многу вредности x_i, $i = 1, 2, \dots, k$.

Ако алгебрата од настани $\mathcal{F}$ е позната, тогаш кое било множество се нарекува мерливо множество. Ако $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, тогаш кое било подмножество од Ω е мерливо.

Дефиниција 2. За функција X на Ω се вели дека е $\mathcal{F}$ –мерлива или случајна променлива на $(\Omega, \mathcal{F})$ ако сите множества $\{X = x_i\}$, $i = 1,2,...,k$ се членови на $\mathcal{F}$.

Ова значи дека, ако имаме информација опишана со $\mathcal{F}$, односно знаеме кој настан во $\mathcal{F}$ се појавил , тогаш знаеме која вредност на X се појавила. Да забележиме дека, ако $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, тогаш која било функција на Ω е случајна променлива.

Пример 2. Да разгледаме модел за тргување на берза, $t = 1,2$, каде што во кој било момент берзата може да оди нагоре со фактор u или да оди надолу со фактор d. $\Omega = \{\omega_1 = (u,u), \omega_2 = (u,d), \omega_3 = (d,u), \omega_4 = (d,d)\}$. Да земеме $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, кој е, всушност, настанот во $t = 1$ и берзата оди нагоре. Нека $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$ и $\mathcal{F}_2 = 2^{\Omega}$ ги содржи сите 16 подмножества од Ω. Да ги разгледаме следниве функции дефинирани на Ω. $X(\omega_1) = X(\omega_2) = 1,5$, $X(\omega_3) = X(\omega_4) = 0,5$. Функцијата X е случајна променлива на $\mathcal{F}_1$. Навистина, множеството $\{\omega : X(\omega) = 1,5\} = \{\omega_1, \omega_2\} = A \in \mathcal{F}_1$. Исто, $\{\omega : X(\omega) = 0,5\} = \overline{A} \in \mathcal{F}_1$. Ако $Y(\omega_1) = (1,5)^2$, $Y(\omega_2) = 0,75$, $Y(\omega_3) = 0,75$ и $Y(\omega_4) = (0,5)^2$, тогаш Y не е случајна променлива на $\mathcal{F}_1$, односно не е $\mathcal{F}_1$-мерлива. Навистина, $\{\omega : Y(\omega) = 0,75\} = \{\omega_2, \omega_3\} \notin \mathcal{F}_1$. Y е $\mathcal{F}_2$ – мерлива. ♦

Па, можеме да ја дадеме дефиницијата, која веќе и претходно беше дадена.

Дефиниција 3. Стохастички процес е колекција на случајни променливи $\{X(t)\}$. За кое било фиксно t, $t = 0,1,2,...,T$, $X(t)$ е случајна променлива на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.

За стохастичкиот процес велиме дека е адаптиран на филтрацијата $\mathbf{F}$ ако за сите $t = 0,1,2,...,T$, $X(t)$ е случајна променлива на $\mathcal{F}_t$, односно ако $X(t)$ е $\mathcal{F}_t$- мерливо.

Пример 3. (продолжува од пример 2) $X_1 = X$, $X_2 = Y$ е стохастички процес адаптиран на филтрацијата $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$. Овој процес ги претставува цените на берзата во момент t при претпоставка дека берзата може да расте или паѓа за 50% за единица време. ♦

Во продолжение, ќе дадеме некои основни работи за филтрацијата која е генерирана од стохастичкиот процес. Нека е дадено $(\Omega, \mathcal{F})$ и стохастички процес $\{X(t)\}$. Нека $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X_s : 0 \le s \le t\})$ е дадена алгебра генерирана од случајните променливи X_s, $s = 0,1,\dots,t$. Тоа се сите информации кои се достапни на набљудувачот на процесот сѐ до момент t. Јасно, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$, па овие алгебри формираат филтрација. Оваа филтрација се нарекува природна филтрација на процесот $\{X(t)\}$.

Ако $A \in \mathcal{F}_t$ тогаш со разгледување на процесот од 0 до t, знаеме дали во момент t состојбата на системот припаѓа или не припаѓа на A. Ова ќе биде илустрирано на еден пример од финансии.

Пример 4. Земаме $T = 3$ и претпоставуваме дека за секое време на тргување, берзата може да оди нагоре со фактор u или надолу со фактор d.

$$\begin{array}{cccc}
 & \boxed{\begin{array}{ccc} u & u & u \\ u & u & d \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc} d & u & u \\ d & u & d \end{array}} & \bar{B} \\
\Omega = & \boxed{\begin{array}{ccc} u & d & u \\ u & d & d \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc} d & d & u \\ d & d & d \end{array}} & B \\
 & A & \bar{A} &
\end{array}$$

Да ги разгледаме множествата генерирани со информации за S_1. Ова е партиција на Ω, $\{A, \overline{A}\}$. Заедно со празното множество и целото множество, ова е алгебрата $\mathcal{F}_1$. Множествата генерирани со информации за S_2 се B и $\overline{B}$. Следува дека множествата формирани со информациите за S_1 и S_2 формираат партиција на Ω и се состојат од сите пресеци на горните множества. Заедно со празното множество и целото множество тоа е алгебрата

$\mathcal{F}_2$. Јасно, кое било множество во $\mathcal{F}_1$ е, исто така, и во $\mathcal{F}_2$. На пример, $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Слично, ако додадеме информација за S_3, ги добиваме сите елементарни настани, односно сите подмножества од Ω,
$\mathcal{F}_3 = 2^{\Omega}$. Всушност, ќе ја знаеме вистинската состојба на системот кога
$T = 3$. Имаме:

$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$ е филтрацијата која е генерирана од цена процесот $\{S_t = S(t) : t = 1, 2, 3\}$. ♦

Во контекст на филтрација, иако беа претходно споменати, ќе ги споменеме повторно предвидливите процеси и времиња на стопирања.

Да претпоставиме дека филтрацијата $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_t, ..., \mathcal{F}_T)$ е дадена.

Дефиниција 4. За процесот $H(t)$ велиме дека е предвидлив (во однос на филтрацијата $\mathbf{F}$) ако за секое t, $H(t)$ е $\mathcal{F}_{t-1}$- мерливо, односно вредноста на процесот H во момент t е определена од информациите сѐ до моментот (вклучувајќи го и него) $t-1$.

На пример, бројот на поделби направени во момент t е определен врз основа на информацијата за направените поделби сѐ до момент $t-1$. Следува, овој процес е предвидлив во однос на филтрацијата генерирана од цените на берзата.

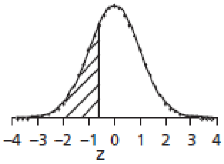
Дефиниција 5. За τ велиме дека е случјано време ако е ненегативна случајна променлива, која може да прими и бесконечна вредност на $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Да претпоставиме дека филтрацијата $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_t, ..., \mathcal{F}_T)$ е дадена. За τ велиме дека е време на стопирање во однос на оваа филтрација ако за секое $t = 0, 1, ..., T$ важи:

$$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ова значи дека со набљудување на информацијата која се содржи во $\mathcal{F}_t$, ние можеме да одлучиме дали настанот $\{\tau \le t\}$ се појавил или не се појавил. Ако филтрацијата $\mathbf{F}$ е генерирана со $\{S(t)\}$, тогаш со набљудување на процесот сѐ до момент t, $S_0, S_1, ..., S_t$, можеме да одлучиме дали настанот $\{\tau \le t\}$ се појавил или не се појавил.

Содржина

Табели на некои од основните распределби

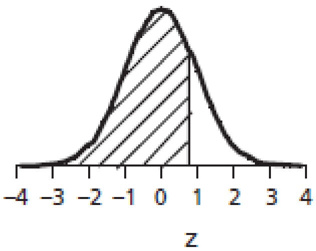


Нормална распределба

$\Phi(z) = p(Z < z)$

$\Delta z =$ / z_0	–0.09	–0.08	–0.07	–0.06	–0.05	–0.04	–0.03	–0.02	–0.01	–0.00	z_0
–3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	–3.7
–3.6	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	–3.6
–3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	–3.5
–3.4	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	–3.4
–3.3	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005	–3.3
–3.2	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	–3.2
–3.1	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0010	–3.1
–3.0	0.0010	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0013	0.0013	–3.0
–2.9	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019	–2.9
–2.8	0.0019	0.002	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026	–2.8
–2.7	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035	–2.7
–2.6	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045	0.0047	–2.6
–2.5	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060	0.0062	–2.5
–2.4	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080	0.0082	–2.4
–2.3	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104	0.0107	–2.3
–2.2	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136	0.0139	–2.2
–2.1	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.017	0.0174	0.0179	–2.1
–2.0	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222	0.0228	–2.0
–1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.025	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281	0.0287	–1.9
–1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351	0.0359	–1.8
–1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446	–1.7
–1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537	0.0548	–1.6
–1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.063	0.0643	0.0655	0.0668	–1.5
–1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0808	–1.4
–1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0968	–1.3
–1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151	–1.2
–1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357	–1.1
–1.0	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587	–1.0
–0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814	0.1841	–0.9
–0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090	0.2119	–0.8
–0.7	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327	0.2358	0.2389	0.2420	–0.7
–0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709	0.2743	–0.6
–0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050	0.3085	–0.5
–0.4	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409	0.3446	–0.4
–0.3	0.3483	0.352	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783	0.3821	–0.3
–0.2	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168	0.4207	–0.2
–0.1	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562	0.4602	–0.1
–0.0	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960	0.5000	–0.0

$\Phi(z) = p(Z < z)$



$\Delta z =$ / z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z_0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	**0.0**
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	**0.1**
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	**0.2**
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517	**0.3**
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	**0.4**
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224	**0.5**
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	**0.6**
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	**0.7**
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	**0.8**
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389	**0.9**
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	**1.0**
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	**1.1**
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	**1.2**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	**1.3**
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	**1.4**
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441	**1.5**
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	**1.6**
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	**1.7**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706	**1.8**
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767	**1.9**
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	**2.0**
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857	**2.1**
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989	**2.2**
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	**2.3**
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	**2.4**
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	**2.5**
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	**2.6**
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	**2.7**
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	**2.8**
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	**2.9**
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990	**3.0**
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	**3.1**
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	**3.2**
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	**3.3**
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	**3.4**
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	**3.5**
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	**3.6**
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	**3.7**
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	**3.8**

Литература

1. E. Allen, Modeling with Itô Stochastic Differential Equations, Springer, Dordrecht, 2007.
2. M. S. Bartlett, An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications, University of Manchester, Manchester, 1953.
3. R. Bhattacharya, E. C. Waymire, A Basic Course in Probability Theory, Springer International Publishing AG, Cham, 2016.
4. S. Bochner, The Annals of Mathematics, 2nd Series, Vol.48, No.4, (1947), 1014-1061.
5. A. N. Borodin, P. Salminen, Handbook of Brownian Motion, Birkhäuser, Basel, 2002.
6. L. Breiman, Probability, Addison-Wesley, Reading, 1968.
7. O. Calin, An Informal Introduction to Stochastic Calculus with applications, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2015.
8. V. Capassco, D. Bakstein, An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes, Birkhäuser, Boston, 2012.
9. K. L. Chung, Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1960.
10. K. L. Chubg, Lectures from Markov Processes to Brownian Motion, Springer-Verlag, New York, 1982.
11. K. L. Chung, R.J. Williams, Introduction to Stochastic Integration, Birkhäuser, Boston, 1990.
12. E. Çinlar, Probability and Stochastics, Springer Science + Business Media, LLC, New York, 2011.
13. E. Çinlar, Seminar on Stochastic Processes 1990, Springer Science+Business Media,LLC, New York, 1991.
14. D. A. Dawson, Measure-valued Markov Processes, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1993.
15. J. L. Doob, Stochastic Calculus, John Wiley & Sons, New York, 1990.
16. P. Doukhan, Stochastic Models for Time Series, Springer International Publishing AG, Cham, 2018.

17. R. M. Dudley, Real Analysis and Probability, Wadsworth, USA, 1989.
18. R. Durret, Brownian Motion and Martingales in Analysis, Wadsworth, USA, 1984.
19. R. Durret, Probability: Theory and Examples, Wadsworth, USA, 1991.
20. E. B. Dynkin, Markov Processes, Vol.1, Springer-Verlag, Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1965.
21. N. Elezović, Vjerojatnost i statistika: Diskretna vjerojatnost, Element, Zagreb, 2007.
22. N. Elezović, Vjerojatnost i statistika: Slučajne varijable, Element, Zagreb,2007.
23. N. Elezović, Vjerojatnost i statistika: Matematička statistika, Stohastički procesi, Element, Zagreb, 2007.
24. S. N. Ethier, T.G. Kurtz, Markov Processes, John Wiley & Sons, 1986.
25. W. Feller, An Introduction to Probability and Its Applications, Vol.2, John Wiley & Sons, New York, 1971.
26. D. Freedman, Brownian Motion and Diffusion, Springer-Verlag, New York, 2012.
27. A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications, Vol.1, Academic Press, New York, 1975.
28. A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications, Vol.2, Academic Press, New York, 1976.
29. J-P. Fouque, G. Papanicolaou, K. R. Sircar, Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility, Cambridge University Press, USA, 2000.
30. T. C. Gard, Introduction to Stochastic Differential Equations, New York, NY, 1988.
31. W. A. Gardner, Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems, Macmillan Publishing Company, New York, 1986.
32. I. I. Gihman, A. V. Skorohod, Controlled Stochastic Processes, Springer-Verlag, New York, 1979.
33. G. Grimmet, D. Stirzaker, Probability and Random Processes, Oxford University Press, New York, 1987.

34. P. G. Hoel, S. C. Port, C. J. Stone, Introduction to Stochastic Processes, Houghton Mifflin Company, Boston, 1972.
35. K. Ito, H. P. McKean, Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
36. J. Jacob, P. Protter, Probability Essentials, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
37. J. Jacod, A. N. Shiryaev, Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.
38. E. P. C. Kao, An Introduction to Stochastic Processes, Wadsworth Publishing Company, USA, 1997.
39. G. Kallianpur, Stochastic Filtering theory, Springer-Verlag, New York, 1980.
40. D. Kannan, An Introduction to Stochastic Processes, Elsevier North Holland, Inc., New York, 1979.
41. I. Karatzas, S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer Science + Business Media, LLC, New York, 1998.
42. S. Karlin, H. M. Taylor, A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, San Diego, 1975.
43. S. Karlin, H. M. Taylor, A Second Course in Stochastic Processes, Academic Press, San Diego, 1981.
44. G. Kersting, F. C. Klebaner, Explosions in Markov Jump processes and submartingale convergence, Lecture Notes in Statistics 114, 127-136, Springer-Verlag, New York, 1996.
45. R. Z. Khasminskii, Stochastic Stability of Differential Equations Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.
46. F. C. Klebaner, Introduction to Stochastic Calculus with Applications, Imperial College Press, London, 2005.
47. V. Krishnan, Nonlinear Filtering and Smoothing: An Introduction to Martingales, Stochastic Integrals, and Estimation, John Wiley & Sons, New York, 1984.
48. H.-H. Kuo, Introduction to Stochastic Integration, Springer Science + Business Media, Inc., New York, 2006.
49. D. Lamberton, B. Lapeyre, Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1996.
50. G. F. Lawler, Introduction to Stochastic Processes, Chapman & Hall, USA, 1995.

51. J.-F. Le Gall, Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.
52. D. S. Lemons, An Introduction to Stochastic Processes in Physics, The Johns Hopkins University Press, USA, 2002.
53. C. Lim, J. Nebus, Vorticity, Statistical Mechanics, and Monte Carlo Simulation, Springer Science+Buiness Media, LLC, New York, 2007.
54. R. S. Lipster, A. N. Shiryayev, Theory of Martingales, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
55. R. S. Lipster, A. N. Shiryayev, Statistics of Random Processes I and II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.
56. M. Loeve, Probability Theory I and II, Springer-Verlag, New York, 1978.
57. M. E. J. Newman, G. T. Barkema, Monte Carlo Methods in Statistical Physics, Clarendon Press, Oxford, 1999.
58. J. Neveu, Discrete-parameter Martingales, North-Holland, Amsterdam, 1975.
59. B. Øksendal, Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
60. A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic processes, McGraw-Hill, USA, 1991.
61. S. Pilipović, D. Seleši, Mera i integral: fundamenti teorije verovatnoće, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.
62. R. Pinsky, Positive Harmonic Functions and Diffusion, Cambridge Press, Cambridge, 1995.
63. D. Pollard, Convergence of Stochastic Processes, Springer-Verlag, New York, 1984.
64. N. U. Prabhu, Stochastic Processes, Macmillan, New York, 1965.
65. P. E. Protter, Stochastic Integration and Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.
66. D. Revuz, M. Yor, Continuous martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
67. L. C. G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol.1. Foundations, John Wiley & Sons, New York, 1994.

68. L. C. G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol.2. Foundations, John Wiley & Sons, New York, 1990.
69. G. Samorodnitsky, Stochastic Processes and Long Range Dependence, Springer International Publishing AG, Cham, 2016.
70. A. N. Shiryaev, Essentials of Stochastic Finance, World Scientific, Singapore, 1999.
71. T. T. Soong, Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1973.
72. J. M. Steele, Stochastic Calculus and Financial Applications, Springer-Verlag, New York, 2000.
73. D. W. Stroock, An Introduction to Markov Processes, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
74. D. Stroock, S. R. S. Varadhan, Multidimensional Diffusion Processes, Springer-Verlag, 1979.
75. J. Vrbik, Topics in Stochastic Processes and Models, Online Lecture Notes, Brock University.
76. H. von Welzsäcker, G. Winkler, Stochastic Integrals: An Introduction, Springer Fachmedien, Wiesbaden, 1990.
77. D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

Е-издание:
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41