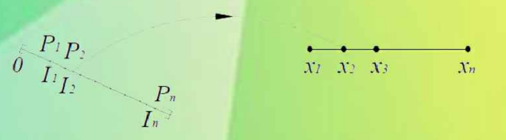
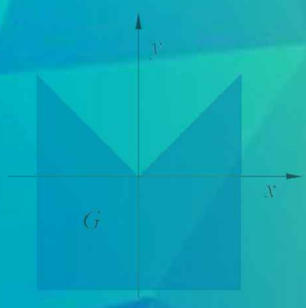
Универзитет “Св. Кирил и Методиј”
Градежен факултет - Скопје



ТЕОРИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ ЗА ИНЖЕНЕРИ



Велинов Даниел

Теорија на веројатност за инженери

Даниел Велинов

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј" во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
Даниел Велинов, Градежен факултет-Скопје

Рецензенти
1. проф. д-р Сања Атанасова
Вонреден професор на ФЕИТ, УКИМ, Скопје
2. проф. д-р Павел Димовски
Вонреден професор на ТМФ, УКИМ, Скопје
3. проф. д-р Зоран Кракутовски
Редовен професор на ГФ, УКИМ, Скопје

Техничка обработка
Даниел Велинов

Лектура на македонски јазик:
ас. м-р Цутка Јованоска
асистент на ДУТ, Тетово

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

519.2-7:62(075.8)

ВЕЛИНОВ, Даниел
Теорија на веројатност за инженери [Електронски извор] / Даниел Велинов. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Градежен факултет, 2021

Начин на пристапување (URL):
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41. - Текст во PDF формат, содржи 469 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 29.06.2021. - Библиографија: стр. 467-469

ISBN 978-9989-43-458-7

а) Теорија на веројатност -- Примена -- Инженерство -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 54228741

ПРЕДГОВОР

Овој учебник е наменет првенствено за студентите на првиот и на вториот циклус студии на Градежниот факултет во Скопје за предметите: „Основи на веројатност и статистика“, „Веројатност и статистика“ и „Одбрани поглавја од математиката“, како и за студентите од другите технички факултети на кои во своите наставни програми ја содржат теоријата на веројатност.

Улогата на теоријата за веројатност е да направи мост помеѓу математиката и остатокот од светот. Навистина, теоријата на веројатност ни овозможува да се формулираат математички модели на различни феномени кои се појавуваат и во природните и во социолошките науки. Основен објект на теоријата на веројатност е случајноста и неопределеноста поврзана со незнаењето. Знаејќи го ова, парадоксален е фактот што природните науки поставуваат сѐ повеќе прашања пред теоријата на веројатност. Меѓутоа, овој парадокс е само привиден. Во природата постојат многу малку точни, детерминирани количествени закони. Еден пример е законот за зависност на притисокот на гасот од температурата. Овој закон е, всушност, резултат на веројатносниот карактер на бројот на удари на честичките во ѕидовите на садот и нивните брзини. Па, случајноста ни се јавува како резултат на недоволноста на нашите знаења, а е принципиелна појава и одраз на природата на материјата.

Учебникот има 11 глави.

Во првата глава е дадена елементарна теорија на множества и комбинаторика.

Втората глава е посветена на просторот на веројатност, на неговото аксиоматско воведување. Разгледани се дискретниот простор и непрекинатиот простор на веројатност.

Во третата глава изучувана е условната веројатност на настани. Дадена е формулата за тотална веројатност и Бејесовите формули, како и серија од независни експерименти.

Четвртата и петтата глава се посветени на случајните променливи, т.е. дискретни и непрекинати случајни променливи, соодветно. Дефинирани и дадени се својствата на основните бројни карактеристики. Разгледувани се и дводимензионални случајни променливи.

Во шестата глава се дадени примери на дискретни и непрекинати случајни променливи, соодветно.

Во седмата и осмата глава се изучувани случајни вектори и функции од случајни вектори.

Во деветтата глава е даден законот за големи броеви и централната гранична теорема.

Во десеттата глава е дадена елементарната теорија на Маркови ланци. Овде има доста примери кои служат за илустрација на теоријата.

Во последната глава се дадени некои елементи од математичката анализа, потребни за подобро разбирање на изнесената теорија во главниот дел.

На крајот од секоја глава се дадени решени задачи од соодветната глава, како би се илустрирала претходно изложената теорија и помагнало на студентите за подобро совладување на материјалот. Дел од решените задачи се познати проблеми и тие ќе бидат посебно означени. Дадени се и нерешени задачи кои биле на испитите од Веројатност и статистика, кои можат да послужат за подобро совладување на материјалот.

Авторот сака да изрази посебна благодарност на рецезентите на овој учебник, кои со своите забелешки значително придонесоа во подобрувањето на неговата содржина.

За идејното решение на корицата на учебникот, авторот изразува посебна благодарност на Ана Иванова.

Авторот ќе биде особено благодарен на сите читатели, кои со своите забелешки и сугестии ќе придонесат за подобрување на квалитетот на учебникот.

Скопје, ноември 2020 Авторот

1. Вовед

Теоријата на веројатноста ги проучува и анализира математичките модели на експериментите чиишто исходи не се еднозначно определени од условите што го дефинираат експериментот. Она што теоријата на веројатност ја разликува од другите природно-математички науки е тоа што исходот на еден ист експеримент, доколку се повтори при исти услови, не е секогаш ист. Во сите останати науки, која било законитост тврди дека при определени услови, резултатите од еден ист експеримент се секогаш исти. Наједноставен пример е фрлањето на паричка. Фрлајќи ја истата паричка, под исти услови, може да се падне или петка или глава, но никогаш со сигурност не можеме да кажеме кој ќе биде крајниот исход од фрлањето. Ваквиот пример (експеримент) и уште многу други биле мотив да се појави нова наука во рамките на математиката, која ќе се занимава со изучување на ваквите појави и нивните законитости. Почетоците се забележани во XVII век.

1.1. Множества

Множество е основен поим во математиката и не се дефинира. Обично се опишува како збир од елементи кои најчесто имаат некоја заедничка карактеристика, но тоа не мора да биде случај секогаш. Пример за множество е множество од сите денови во неделата. Друг пример на множество е множеството од сите непарни броеви. Пример за множество е и сите точки од кружницата. Да забележиме дека едно множество е добро зададено ако точно се знаат кои се неговите елементи. На пример, множество од студенти во прва година. Бидејќи не е означено дека станува збор за сите суденти од прва година, кое било множество од студенти од прва година ќе биде разгледуваното множество. Тоа значи дека множеството не е добро зададено, односно не е еднозначно определено.

Најчесто множествата ќе ги означуваме со големи латински букви: $A, B, C, \ldots$. Објектите од кои се состои едно множество се нарекуваат елементи на тоа множество и нив ќе ги означуваме со мали букви од латиницата: $x, y, z, \ldots$. Ако елементот a се содржи во множеството A, (уште велиме дека елементот a припаѓа на множеството A), означуваме $a \in A$. Во спротивно, ако a не припаѓа на множеството A, означуваме $a \notin A$.

Множеството кое не содржи ниту еден елемент се нарекува празно множество и се означува со $\varnothing$. Празното множество е единствено такво множество. Единственоста ќе биде покажана подолу.

Во однос на бројот на елементи, множествата се делат на два типа: конечни и бесконечни множества. Ако постои природен број p, кој е еднаков на бројот на елементи на множеството, тогаш за тоа множество велиме дека е конечно множество. Во спротивно, велиме дека множеството е бесконечно. Бесконечните множества се делат на бесконечни преброиви и бесконечни непреброиви множества.

Множество може да биде зададено:

а) со набројување, односно со запишување на сите негови елементи помеѓу две големи загради;

б) преку посочување на карактеристичното својство кое го имаат сите елементи на тоа множество;

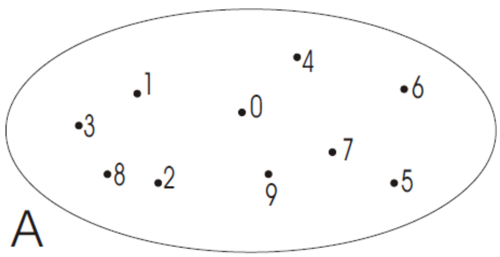
в) графички со помош на Венов дијаграм.

Пример 1. Нека A е множество од сите едноцифрени броеви. Тогаш, во согласност со претходната дискусија множеството A можеме да го запишеме како:

а) $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

б) $A=\{x:0\leq x\leq 9\}$;

в)



♦

Очигледно, кога множеството е бесконечно не може да се запише со набројување или со Венов дијаграм.

Пример 2. Да се напишат сите членови на следниве множества:

а) множеството на сите делители на бројот 60;

б) множеството на сите самогласки во македнонската азбука;

в) множеството на сите цели броеви x, за кои важи:

$$x^2(x^2+x-2)=3(x^2+x-2);$$

г) множеството на сите реални броеви x, што се решенија на равенката од в);

д) множеството од сите збирови на точките што можат да се појават при фрлање на две коцки за играње.

Решение.

а) Нека со A го означиме множеството од сите делители на бројот 60. Тогаш:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}.$$

б) Нека со B го означиме множеството од сите самогласки од македонската азбука. Имаме, $B = \{а, о, у, е, и\}$.

в) Со средување на почетната равенка $x^2(x^2 + x - 2) = 3(x^2 + x - 2)$, добиваме:

$$(x^2 - 3)(x^2 + x - 2) = 0,$$

од каде што за нејзините решенија имаме:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}\ ,\ x_3 = -2 \text{ и } x_4 = 1.$$

Ако со C го означиме множеството од сите цели решенија на почетната равенка, тогаш имаме:

$$C = \{-2, 1\}.$$

г) Со согласност со в), ако со D го означиме множеството од сите реални решенија на равенката од в), имаме:

$$D = \{-2, -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}.$$

д) Ако со E го означиме множеството од сите можни збирови на точките кои се паднале при фрлање на две коцки за играње, имаме:

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}. \ \blacklozenge$$

Множеството од сите природни броеви ќе го означуваме со $\mathbb{N}$, множеството од сите цели броеви ќе го означуваме со $\mathbb{Z}$, множеството од сите рационални броеви со $\mathbb{Q}$ и множеството од сите реални броеви со $\mathbb{R}$.

Бројот на елементи на едно множество е важна карактеристика. Ако помеѓу две множества може да се дефинира пресликување кое е бијекција, тогаш тие две множества имаат ист број на елементи.

Множеството од природни броеви е бесконечно преброиво множество. Тоа значи дека природен број има следбеник, односно можеме да ги броиме елементите на множеството на природните броеви. Следствено на ова, кое било множество со кое може да се воспостави бијекција со множеството на природни броеви е преброиво множество. Преброивите множества имаат ист број на елементи како множеството од природни броеви. Кардиналниот број на множеството на природни броеви е χ_0 (алеф нула). Ако од дадено бесконечно множество не постои бијекција во множеството природни броеви, тогаш тоа множество е бесконечно непреброиво множество. Пример за бесконечно непреброиво множество е множеството од реални броеви. Кардиналниот број на множеството на реални броеви е c (континуум). Јасно, важи: $\chi_0 < c$.

Пример 3. Множеството на сите парни природни броеви е преброиво множество, односно има ист кардинален број како множеството на природни броеви. Нека со $2\mathbb{N}$ го означиме множеството од сите парни природни броеви. Тогаш, пресликувањето $\phi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, дефинирано со $\phi(n) = 2n$ е бијекција помеѓу $2\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. ♦

Пример 4. Множеството од сите цели броеви $\mathbb{Z}$ е преброиво множество. Навистина,

$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, дефинирано со $\varphi(z) = \begin{cases} 1-2z, & z \le 0 \\ 2z, & z > 0 \end{cases}$ е бијекција од $\mathbb{Z}$ во $\mathbb{N}$.

♦

Пример 5. Множеството од сите рационални броеви $\mathbb{Q}$ е преброиво множество. ♦

Пример 6. Интервалот $[0,1]$ е непреброиво множество. ♦

Пример 7. Множеството од сите ирационални броеви е непреброиво множество. ♦

За множеството A велиме дека е подмножество од множеството B, означуваме $A \subseteq B$, ако и само ако секој елемент на A е елемент и на B. Велиме дека множеството A е вистинско подмножество од B, ако и само ако секој елемент од A е елемент и на B и дополнително постои елемент од B кој не е елемент на A. Означуваме, $A \subset B$. Да забележиме дека $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ е еквивалентно со $A = B$.

Празното множество е подмножество од секое подмножество. Овде ќе докажеме дека празното множество е единствено множество со вакво својство. Нека постојат две празни подмножества и нека ги означиме со $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$. Имајќи предвид дека празното множество е подмножество од секое множество, имаме: $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ и $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. Оттука, $\varnothing_1 = \varnothing_2 = \varnothing$, што значи дека празното множество е единствено такво множество.

Партитивно множество на множеството A, кое ќе го означуваме со $P(A)$, е множество чии елементи се сите подмножества од множеството A, односно:

$$P(A)=\{X : X \subseteq A\}.$$

Пример 8. Најди го партитивното множество на множеството $A=\{1,2,3\}$.

Партитивното множество на множеството A е:

$$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$ ♦

Универзално множество е множество кое ги содржи сите множества кои во даден момент се разгледуваат. Ознаката U, најчесто ќе ја користиме за универзално множество. Универзалното множество зависи од задачата или проблемот што се разгледува.

Во продолжение ќе дадеме дефиниција и ќе ги наведеме некои од основните својства на операциите со множества.

Пресек на две множества A и B е множеството кое ги содржи сите оние елементи кои припаѓаат и на множеството A и на множеството B. Пресекот на множествата A и B го означуваме со $A\cap B$. Всушност, $A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}$.

Унија на множествата A и B е множеството кое се состои од сите елементи кои припаѓаат на A или припаѓаат на B, а ја означуваме со $A\cup B$, односно $A\cup B=\{x: x\in A\vee x\in B\}$.

Пример 9. Нека се дадени множествата $A=\{x\in\mathbb{N}: 7\,|\,x\}$ и $B=\{x\in\mathbb{N}: 2\,|\,x\}$.

Тогаш, нивниот пресек и унија на множествата A и B се:

$$A\cap B=\{x\in\mathbb{N}: 14\,|\,x\} \text{ и}$$

$$A\cup B=\{x\in\mathbb{N}: 2\,|\,x \vee 7\,|\,x\}.$$ ♦

Пример 10. Студентите Лидија, Билјана, Никола, Виктор и Јован сакале да направат една зедничка фотографија, така што сите да стојат во еден ред и да бидат подредени девојчињата и момчињата наизменично. Да се одреди множеството од сите можности. Потоа, да се најде:

а) множеството на тие можности при коишто Билјана и Виктор да стојат еден до друг;

б) множеството на сите можности при коишто Лидија е меѓу Никола и Јован;

в) множеството на сите можности при коишто Виктор е во центарот;

г) множеството на сите можности при коишто момчињата се на краевите.

Каков е односот помеѓу гореспоменатите множества?

Решение. За поедноставни ознаки, ќе ја користиме првата буква на секој од студентите кои се наоѓаат на фотографијата. Нека со U го означиме множеството од сите можни распореди на студентите на фотографијата. Тогаш

$$U = \{НЛВБЈ, НБВЛЈ, НЛЈБВ, НБЈЛВ, ВЛНБЈ, ВБНЛЈ,$$
$$ВЛЈБН, ВБЈЛН, ЈЛВБН, ЈБВЛН, ЈБНВЛ, ЈЛНБВ\}.$$

а) Во овој случај за множеството од сите можности имаме:

$$A = \{НЛВБЈ, НБВЛЈ, НЛЈБВ, ВБЈЛН, ЈЛВБН, ЈБВЛН, ЈЛНБВ, ВБНЛЈ\}.$$

б) Овде,

$$B = \{НЛЈБВ, ВБНЛЈ, ВБЈЛН, ЈЛНБВ\}.$$

в) Од условот, имаме:

$$C = \{НЛВБЈ, НБВЛЈ, ЈЛВБН, ЈБВЛН\}.$$

г) Од условот на барањето јасно е дека: $D = U$.

За односот помеѓу горните множества, имаме:

$$A, B, C, D \subseteq U,\ C \subseteq A,\ B \subseteq A. \blacklozenge$$

Пропозиција 1. Нека A, B и C се произволни множества. Тогаш:

а) (Идемпотентност) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;

б) (Комутативност) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;

в) (Асоцијативност) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

г) (Дистрибутивни закони) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доказот на пропозицијата го оставаме за вежба на читателот (види го делот со решени задачи на крајот од оваа глава).

Пресекот на две множества или унијата на две множества може да се обопшти на пресек или унија на конечен број на множества. Дефинираме пресек, односно унија на множествата $A_1, A_2, ..., A_n$ со:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{x : x \in A_i \text{ за секој } i = 1, 2, ..., n\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{x : \text{ постои } i \text{ така што } x \in A_i,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

За множествата A и B велиме дека се дисунктни ако нивниот пресек е празно множество, т.е. $A \cap B = \varnothing$. За множествата $A_1, A_2, ..., A_n$ велиме дека се попарно дисјунктни, ако за секои i, j, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, каде што: $i, j = 1, 2, ..., n$.

Нека множествата $A_1, A_2, ..., A_n$ се подмножества од множеството P, такви што важи: $A_i \cap A_j = \varnothing$, за секои i, j, $i \neq j$, каде $i, j = 1, 2, ..., n$ и дополнително $P = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Велиме дека множеството P е запишано како разбивање од множествата: $A_1, A_2, ..., A_n$.

Пример 11. Нека е дадено множеството $M = \{a, b, c, x, y, s, p, k, t\}$. Едно разбивање на множеството е дадено преку множествата: $A_1 = \{k, t\}$, $A_2 = \{s, p\}$, $A_3 = \{a, b, c, x, y\}$. Друго разбивање е дадено преку множествата: $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b, c\}$, $A_3 = \{x, y, s\}$, $A_4 = \{p, k, t\}$. ♦

Пример 12. Множеството од сите природни броеви $\mathbb{N}$ можеме да го запишеме како разбивање од множествата $\mathbb{N}_i$, $0 \leq i \leq k-1$ каде што $\mathbb{N}_i$ се состои од сите природни броеви кои при делење со однапред даден број k даваат остаток i. Важи $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathbb{N}_i$. Јасно е дека $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_j = \varnothing$, $i \neq j$, $0 \leq i, j \leq k-1$. ♦

Разликата на множествата A и B, ја означуваме со $A \setminus B$, се состои од сите елементи кои припаѓаат на A, а не припаѓаат B, т.е. $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$.

Во општ случај, $A \setminus B$ не се совпаѓа со $B \setminus A$.

Комплемент на множеството A е множеството од сите x кои не припаѓаат на A. Запишуваме: $A^c = \{x : x \notin A\} = U \setminus A$.

Пример 13. Нека множеството A е множеството од сите парни природни броеви, каде што за универзално множество го земаме множеството од сите природни броеви. Тогаш, $A^c = \mathbb{N} \setminus A$, односно A^c е множеството од сите непарни природни броеви. ♦

Пропозиција 2. Нека A и B се произволни множества и U е универзално множество. Тогаш:

а) $A \cup A^c = U$;

б) $A \cap A^c = \varnothing$;

в) $U^c = \varnothing$, $\varnothing^c = U$;

г) $(A^c)^c = A$;

д) $A \setminus B = A \cap B^c$;

ѓ) (Де Morганови закони) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Доказ. Тврдењата а), б), в), г) и д) следуваат директно од дефиницијата на комплемент на множество и дефиницијата на разлика на две множества. Ќе го докажеме првото тврдење од ѓ). Второто тврдење се докажува аналогно. Нека $x \in (A \cup B)^c$. Ова е еквивалентно со $x \notin (A \cup B)$, што е еквивалентно на $x \notin A \wedge x \notin B$. Последното тврдење е еквивалентно со $x \in A^c \wedge x \in B^c$, односно на $x \in A^c \cap B^c$, од каде што добиваме дека $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. ■

Дефинираме симетрична разлика на множествата A и B со $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

Користејќи го принципот на математичка индукција можеме да докажеме дека важи:

Пропозиција 3. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$, B се произволни множества. Важи:

а) $B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$;

б) $B \cup \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (B \cup A_i)$;

в) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$;

г) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$.

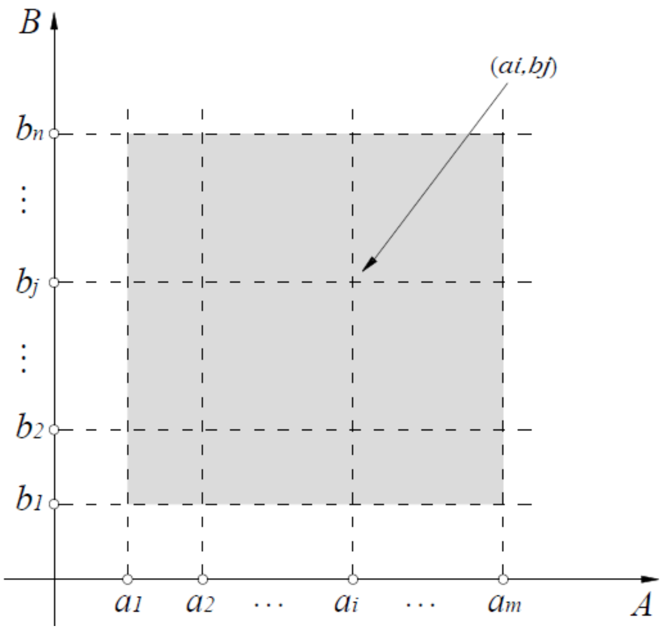
Пример 14. Во една населба живеат 50 фамилии. Една телекомуникациска компанија ги нуди своите услуги во таа населба. Во населбата 35 фамилии имаат претплата за кабловска телевизија, 20 имаат претплата за интернет и 15 фамилии имаат претплата за мобилна телефонија на таа компанија. Дополнително, се знае дека 15 фамилии истовремено имаат претплата за кабловска телевизија и интернет, 10 фамилии имаат претплата за кабловска телевизија и мобилна телефонија и 12 фамилии имаат претплата за интернет и мобилна телевизија. Само 8 фамилии имаат претплата за сите три услуги. Колку фамилии од населбата не се претплатени на ниту една услуга на компанијата?

Нека со A го означиме множеството од сите фамилии кои имаат претплата за кабловска телевизија, со B множеството од сите фамилии кои имаат претплата за интернет, со C множеството од сите фамилии кои имаат претплата за мобилна телефонија и со U множеството од сите фамилии во населбата. Тогаш, $|U|=50$, $|A|=35$, $|B|=20$, $|C|=15$, $|A\cap B|=15$, $|A\cap C|=10$, $|B\cap C|=12$ и $|A\cap B\cap C|=8$. Бројот на фамилии во населбата кои не користат ниту една услуга на компанијата е:

$$|U\setminus(A\cup B\cup C)|==|(A\cup B\cup C)^c|=|A^c\cap B^c\cap C^c|=$$
$$50-(35+20+15)+(15+10+12)-8=50-70+37-8=87-78=9.$$

Да забележиме дека може да се даде и поедноставно решение на задачата со користење на Венов дијаграм, кое ќе биде препуштено на читателот за вежба. ♦

Декартов производ (директен производ) на непразните множества A и B се состои од сите подредени парови (x,y), каде штп $x\in A$ и $y\in B$, т.е. $A\times B=\{(x,y):x\in A, y\in B\}$.



Пример 15. Нека се дадени множествата $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{a,b\}$. Декартовиот производ на множествата A и B е:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\},$$

додека Декартовиот производ на множествата B и A е:

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

Јасно можеме да забележиме дека во општ случај $A\times B\neq B\times A$. ♦

Дефинираме $A^2=A\times A$, кое ќе го нарекуваме Декартов квадрат на A.

Декартовиот производ на две множества може да се обопшти на Декартов производ од n множества.

Нека $A_1,A_2,...,A_n$ се произволни непразни множества. Декартовиот производ на множествата $A_1,A_2,...,A_n$ се дефинира со:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1\times A_2\times ...\times A_n=\{(x_1,x_2,...,x_n) : x_i\in A_i,\ i=1,2,...,n\}.$$

Ако важи $A=A_1=A_2=...=A_n$, тогаш за Декартовиот производ $A\times A\times...\times A$ велиме дека е n- ти степен на множеството A.

Пропозиција 4. Нека множествата A,B и C се произволни. Следниве тврдења се точни:

а) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

б) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

в) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$;

$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

Доказ. Според дефиницијата за еднаквост на две множества, треба да покажеме дека левата страна е подмножество од десната страна и обратно, дека десната страна е подмножество на левата страна. Овде, двете инклузии ќе ги покажеме истовремено. Ќе го докажеме првото тврдење од а). Нека $(x,y)\in(A\cap B)\times C$. Ова е еквивалентно со $x\in A\cap B$ и $y\in C$, еквивалентно на $x\in A\wedge x\in B$ и $y\in C$. Последново е еквивалентно на $(x,y)\in A\times C\wedge(x,y)\in B\times C$, односно со $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times C)$. Со ова покажавме дека:

$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C).$$

Од тврдењето б) ќе го докажеме второто тврдење. Нека $(x,y)\in A\times(B\cup C)$. Еквивлентно, $x\in A\wedge y\in B\cup C$, односно

$x \in A \wedge y \in B$ или $x \in A \wedge y \in C$. Ова значи дека $(x,y) \in A \times B$ или $(x,y) \in A \times C$, односно $(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Значи,

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) .$$

Од тврдењето в), ќе го докажеме првото тврдење. Нека $(x,y) \in (A \setminus B) \times C$. Ова е еквивалентно со $x \in A \setminus B$ и $y \in C$, односно $x \in A \wedge x \notin B$ и $y \in C$. Ова значи дека, $(x,y) \in A \times C$ и $(x,y) \notin B \times C$, па $(x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$. Оттука,

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C) .$$

Останатите недокажани тврдења ги оставаме за вежба на читателот. ■

Последнава пропозиција може да се обопшти кога во Декартовиот производ влегуваат n множества.

Пример 16. Во една кутија има бели, црни и сини топчиња и барем по три од секоја боја. Се извлекуваат, едно по друго, три топчиња. Да се најде множеството од сите можни исходи.

Резултатот при едно извлекување може да биде $Б$ за извлечено бело топче, $Ц$ за извлечено црно топче и $С$ за извлечено сино топче. Резултатот од извлекувањето може да се прикаже како подредена тројка од симболите $B, Ц$ и C. Во согласност со ова, множеството од сите елеметарни настани е:

$$\begin{gathered}\Omega = \{(Б,Б,Б),(Б,Б,Ц),(Б,Б,С),(Б,Ц,Б),(Б,Ц,Ц),(Б,Ц,С),\\ (Б,С,Б),(Б,С,Ц),(Б,С,С),(Ц,Б,Б),(Ц,Б,Ц),(Ц,Б,С),\\ (Ц,Ц,Б),(Ц,Ц,Ц),(Ц,Ц,С),(Ц,С,Б),(Ц,С,Ц),(Ц,С,С),\\ (С,Б,Б),(С,Б,Ц),(С,Б,С),(С,Ц,Б),(С,Ц,Ц),(С,Ц,С),\\ (С,С,Б),(С,С,Ц),(С;С;С)\} . \ \blacklozenge\end{gathered}$$

Пропозиција 5. Нека множеството A има m -елементи и множеството B има n -елементи. Тогаш Декартовиот производ $A \times B$ има mn -елементи.

Доказ. Ќе ја докажеме точноста на пропозицијата со користење на математичка индукција по бројот на елементи на множеството B. Нека $n = 1$. Тоа значи дека $B = \{b\}$. Тогаш, $A \times B = \{(a_i, b) : i = 1,2,...,m\}$, па Декартовиот производ има $m = m \cdot 1 = mn$-елементи. Да претпоставиме дека тврдењето на пропозицијата важи за $n = k$, односно ако $|B| = k$, тогаш $|A \times B| = mk$. Нека сега B има $k+1$ елементи. Множеството B можеме да го запишеме како:

$$B = \{b_1, b_2, ..., b_k, b_{k+1}\} = \{b_1, b_2, ..., b_k\} \cup \{b_{k+1}\} = B_k \cup \{b_{k+1}\}.$$

Со користење на дистрибутивноста на Декартовиот производ во однос на унијата имаме:

$$A \times B = A \times (B_k \cup \{b_{k+1}\}) = (A \times B_k) \cup (A \times \{b_{k+1}\}).$$

Множествата $A \times B_k$ и $A \times \{b_{k+1}\}$ немаат заеднички елементи, па затоа бројот на елементи на $A \times B$ е еднаков на збирот на бројот на елементи на множествата $A \times B_k$ и $A \times \{b_{k+1}\}$, односно:

$$|A \times B| = |A \times B_k| + |A \times \{b_{k+1}\}| = m \cdot k + m \cdot 1 = m(k+1).$$

Од принципит на математичка индукција имаме дека тврдењето важи за секој природен број n, односно важи тврдењето на пропозицијата. ■

Пропозиција 6. Нека: $|A_1| = k_1,\ |A_2| = k_2,\ |A_3| = k_3, ..., |A_n| = k_n$. Тогаш:

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot ... \cdot |A_n| = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot ... \cdot k_n.$$

Доказ. Тврдењето на пропозицијата ќе го докажеме со помош на претходната пропозиција и принципот на математичка индукција по бројот на множества. За $n = 2$ множества тврдењето е докажана во претходната пропозиција. Да претпоставиме дека тврдењето важи за $n = p$, односно: $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_p| = k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_p$. За $n = p + 1$ имаме:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_p \times A_{p+1}| = |(A_1 \times A_2 \times ... \times A_p) \times A_{p+1}|$$
$$= (k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_p) \cdot k_{p+1} = k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_p \cdot k_{p+1},$$

при што беше искористена претходната пропозиција. Сега од принципот на математичка индукција имаме дека тврдењето важи за секој природен број n, односно важи тврдењето на пропозицијата. ■

1.2. Комбинаторика

Нека е дадено множеството $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Можеме да го поставиме следново прашање: Колку подредени k -торки можат да се формираат од елементите од множеството S ?

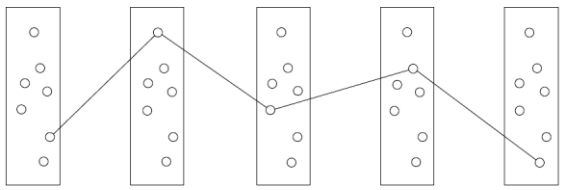
Јасно е дека станува збор за бројот на елементи во Декартовиот производ на k -множества со исти елементи, т.е. $A \times A \times ... \times A$. Нивниот број е n^k.

Дефиниција 1. Варијација со повторување од k -та класа од n -елементи е секој елемент (секоја подредена k -торка) од Декартовиот производ на k -те n -елементни множества $A\times A\times\ldots\times A=A^k$.

Бројот на сите варијации со повторување од k -та класа од n елементи ќе го означуваме со $\overline{V_n^k}$. Овој број е еднаков на бројот на елементи во Декартовиот производ A^k:

$$\overline{V_n^k}=|A\times A\times\ldots\times A|=|A|^k=n^k.$$

Изборот на подредена k -торка, $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ одредува еден пат, кој ги поврзува избраните елементи од поединечните множества. Тоа е илустрирано на цртежот подолу.



Пример 1. Напиши ги сите варијации со повторување од втора класа од множеството $A=\{1,2,3,4\}$. ♦

Решение. Имајќи ја предвид формулата од погоре за варијации со повторување од k -та класа од n -елементи за бројот на варијации со повторување од втора класа од множеството A , каде $|A|=4$, е: $\overline{V_n^k}=\overline{V_4^2}=4^2=16$. Навистина,

$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{matrix}\ . \ \blacklozenge$$

Од причини на поедноставен запис во горниот пример, а и многу често понатаму ќе запишуваме ab наместо (a,b).

Пример 2. Колкав е бројот на подмножества од множеството A кое има n -елементи (овде се вклучени и празното множество и множеството A)?

Решение. На секој елемент од множеството A можеме да му припишеме број 0 или 1 со следново значење:

0 : тој елемент не се зема за во подмножеството,

1: тој елемент се зема во подмножеството.

На овој начин добиваме низа со должина n, која се состои од нули и единици, а со која е опишано подмножеството.

На пример, ако $A=\{a,b,c,d,e\}$, тогаш низата $1,0,0,0,1,1$ го одредува подмножеството $\{a,d,e\}$, низата $0,0,1,0,0$ го одредува подмножеството $\{c\}$, а низата $0,0,0,0,0$ го одредува празното множество, додека низата $1,1,1,1,1$ го одредува целото множество.

Со ова, покажавме дека бројот на подмножества е еднаков на бројот на низи со должина n, кои се состојат само од нули и единици. На првата позиција на низата имаме множност да ставиме две цифри (0 или 1), на втората позиција можеме да ставиме, исто така, две цифри (0 или 1) и така натаму, сѐ до n-тата позиција на која можеме да ставиме, исто така, две цифри (0 или 1). Па, вкупниот број на различни низи во оваа ситуација е 2^n. Оттука, можеме да заклучиме дека и вкупниот број на подмножества од едно множество е $\overline{V}_2^n = 2^n$, ако множеството има n-елементи. ♦

Со ова ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. Нека е дадено множеството A, за кое важи $|A|=n$. Тогаш, за неговото партитивно множество $P(A)$ важи: $|P(A)|=2^n$.

Броењето на елементи во Декартовиот производ може да се обопшти на случај кога имаме броење на број на елементи во некои негови подмножества.

Пример 3. Најди го бројот на сите двоцифрени броеви со различни цифри.

Решение. Првата цифра ја избираме од множеството $A_1=\{1,2,...,9\}$, а другата цифра ја избираме од множеството $A_2=\{0,1,2,...,9\}$, но, притоа, треба да внимаваме да не избереме иста цифра како првата цифра. Затоа, изборот ќе биде подредениот пар (a_1,a_2), каде што $a_1 \neq a_2$. Со ова е одредено некое подмножество од Декартовиот производ, кое во посложени примери не е така едноставно да се опише. Меѓутоа, бројот на негови елементи многу лесно може да се определи. Првата цифра може да ја избереме слободно од множеството A_1, па за овој избор имаме 9 можности. Без разлика која цифра сме ја одбрале како прва цифра, втората цифра треба да ја избереме помеѓу деветте преостанати цифри од множеството A_2, која е различна од првата цифра. Нивниот избор зависи од изборот на првата цифра, но бројот на можни избори не зависи. Па, вкупниот број на можни избори, односно бројот на сите двоцифрени броеви со различни цифри е: $V_{10}^2 - \frac{1}{10}V_{10}^2 = 9 \cdot 9 = 81$. ♦

Пример 4. Колку петцифрени броеви, со различни цифри, може да се напишат од цифрите $0,1,2,3,4,5,6$ ако нулата не смее да биде на првото или последното место?

Решение. Бројот на броевите кај кои нулата не е на прво место е $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, бидејќи првата цифра мора да биде различна од 0, втората различна од претходната итн. Некои од овие броеви ќе имаат нула на последното место. Ќе го најдеме бројот на вакви броеви. Кај нив првата цифра можеме да ја одредиме на шест начини, втората на пет начини, третата на четири начини, четвртата на три начини. Петтата цифра е 0. Вкупно има $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ броеви. Според тоа, има вкупно $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1800$ броеви кои го задоволуваат условот на примерот. ♦

Досега во примерите од овој дел користевме начин на рамислување, кој можеме да го формулираме како: Ако елементот a_1 можеме да го избереме од множеството A_1 на n_1 начини, после тоа независно на изборот на претходниот елемент, елементот a_2 од множеството A_2 можеме да го избереме од n_2 начини, потоа елементот a_3 можеме да го избереме од множеството A_3 на n_3 начини итн. Тогаш, вкупниот број на можности на кои може да се направи изборот на k-торката $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k)$ е еднаков на $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$.

Доколку редоследот на елементите не е важен, тогаш при примена на овој принцип на пребројување мораме да бидеме многу внимателни.

Пример 5. Колку дијагонали има правилен n-аголник?

Решение. Дијагоналата е определена со две несоседни темиња. Првото теме можеме да го избереме на n начини. За второто теме имаме $(n-3)$ можности (не можеме да ги избереме претходно избраното теме и двете негови соседни темиња). Па, вкупниот број на парови кои определуваат дијагонала се $n(n-3)$. Но, овој број на темиња е двапати помал од бројот на дијагоналите во n-аголнкот, бидејќи на една дијагонала AB ѝ одговараат паровите од темиња (A,B) и (B,A). Според ова, вкупниот број на дијагонали во n-аголникот е $\frac{1}{2}n(n-3)$. ♦

Пример 6. Еден шпил од карти се состои од 52 карти. На колку начини можеме да избереме две карти со ист знак? Да забележиме дека имаме по 13 карти од секој знак.

Решение. Бојата можеме да ја избереме на четири начини. Првата карта можеме да ја избереме на 13 начни. По изборот на првата карта, остануваат 12 можности за избор на знакот на втората карта. Ова можеме да го направиме со сите знаци (четири на број). Па, вкупниот број на избори на двете карти е $4\cdot 13\cdot 12\cdot\frac{1}{2}=312$. Да забележиме дека овде поделивме со 2, бидејќи редоследот на избраните карти не е важен. ♦

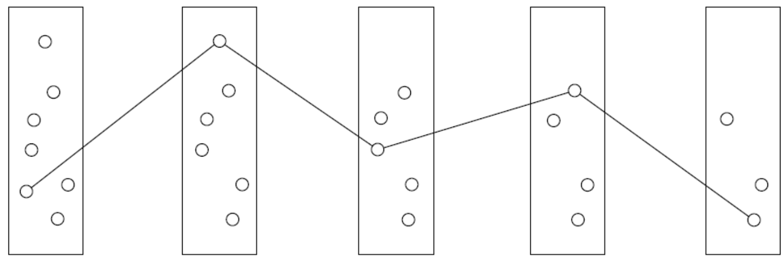
Дефиниција 2. Подредена k-торка од различни елементи од исто множество $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ се нарекува варијација без повторување од k-та класа од n елементи. Притоа, мора да важи $k\le n$.

Бројот на сите варијации без повторување од k-та класа од n елементи ќе го означуваме со V_n^k.

Во продолжение, ќе ја изведеме формулата за бројот на варијации без повторување од k-та класа од n елементи со помош на горниот принцип споменат после Пример 4. Првиот елемент може да се избере на n начини. По изборот на првиот елемент, вториот елемент можеме да го избереме на $n-1$ начини, па потоа третиот елемент на $n-2$ елементи и продолжувајќи на истиот начин последниот k-тиот елемент на $n-(k-1)=n-k+1$ начини. Па,

$$V_n^k=n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Кај варијациите без повторување од k-та класа од n елементи првиот елемент го избираме произволно, вториот елемент го избираме да биде различен од првиот и продолжуваме на истиот начин сè до изборот на последниот елемент. Подолу е дадена илустрација на изборот.



Пример 7. На колку различни начини може да се подели златен, сребрен и бронзен медаљон на осум натпреварувачи?

Решение. Овде имаме варијации од трета класа од осум елементи. Оттука, вкупниот број на можности за поделба на медалите е:

$$V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336\,.\ ♦$$

Пример 8. Нашата азбука има 31 буква, од кои 5 се самогласки. На колку начини може да се напише збор од пет букви ако:

а) сите букви во зборот мора да бидат различни;

б) буквите во зборот се менуваат наизменично согласка - самогласка, почнувајќи од согласка;

в) сите букви во зборот се различни и буквите се менуваат согласка - самогласка, почнувајќи од согласка?

Решение.

а) Бидејќи сите букви мораат да бидат различни, за вкупниот број на можности на кој може да се запише бројот се:

$$V_{31}^5 = 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27 = 20389320\,.$$

б) Од условот имаме $\overline{V_5^2}\cdot\overline{V_{26}^3} = 26\cdot 5\cdot 26\cdot 5\cdot 26 = 439400$ можности за да го запишеме зборот.

в) Имаме вкупно $V_5^2\cdot V_{26}^3 = 26\cdot 5\cdot 25\cdot 4\cdot 24 = 312000$ можности да го запишеме зборот според условот на задачата. ♦

Дефиниција 3. Пермутација без повторување на множеството $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ од n различни елементи е подредена n -торка од сите негови челнови.

Пример 9. Напиши ги пермутациите на множеството $A=\{1,2,3\}$.

Решение. Пермутациите на множеството A се:

$$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\,.$$

Да забележиме дека нивниот број е 6. ♦

Бројот на сите пермутации без повторување на множество од n-елементи ќе го означуваме со P_n. Формулата за P_n ја изведуваме на следниов начин: првиот елемент можеме да го избереме на n-начини, вториот елемент можеме да го избереме на $n-1$ начини и продолжувајќи понатаму претпоследниот елемент можеме да го избереме на два начина и на крај последниот елемент можеме да го избереме на еден начин. Сега, користејќи го истиот принцип за пребројување по Пример 4, добиваме дека:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 = n!.$$

Од последново можеме да забележиме дека пермутациите без повторување се, всушност, специјален случај на варијациите без повторување, односно пермутациите без повторување се варијации без повторување од n-та класа од n-елементи.

Пример 10. Колку различни зборови од шест букви можат да се формираат од буквите А, Л, У, М, Н,И , така што:

а) буквите можеме да ги ставаме произволно;

б) согласките и самогласките се менуваат наизменично, почнувајќи од согласките?

Решение.

а) Секој распоред на буквите одредува една пермутација. Па, вкупниот број на зборови кои можат да се состават е: $P_6 = 6! = 720$.

б) Бидејќи од понудените букви имаме три согласки и три самогласки, согласките треба да се наоѓаат на првото, третото и петтото место, додека самогласките треба да се наоѓаат на второто, четвртото и шестото место. Следува дека вкупниот број на можни избори, користејќи го принципот за пребројување е: $3!\cdot 3! = 6\cdot 6 = 36$. ♦

Во продолжение наша цел ќе биде да го пресметаме бројот на пермутации од n елементи помеѓу кои има и еднакви елементи. Јасно, нивниот број би бил помал од бројот на сите пермутации без повторување.

Пример 11. Од цифрите $0,1,2,3,4$ формирани се сите петцифрени броеви. Колкав е нивниот број?

Решение. Јасно е дека 0 не може да биде на првата позиција. Бројот на сите петцифрени броеви ќе го најдеме откако од сите распореди на цифрите (вклучувајќи ја и нулата на прво место) ќе го одземеме бројот на распореди во кои нулата се наоѓа на првото место. Имаме:

$$P(5)-(4) = 5! - 4! = 120 - 24 = 96. \ ♦$$

Пример 12. Околу кружна маса се наредени n-столчиња. На колку начини можат n луѓе да седнат на n-столчиња околу кружната маса?

Решение. Овде јасно треба да користиме пермутации. Имајќи предвид дека n-луѓе можат да се распоредат на $n!$ - начини на n-столчиња наредени во редица и имајќи предвид дека на сите вакви распореди на n-елементи во редица одговара на еден ист кружен распоред, се добива дека бараниот број на начини е : $\frac{n!}{n}=(n-1)!$. ♦

Пример 13. На колку начини може да се запишат броевите $1,2,3,...,2n$, така што сите парни броеви се наоѓаат на парни места?

Решение. На парните места треба да се распоредат n-броеви на n-позиции, па вкупниот број на распореди е $n!$. Исто важи и за непарните броеви, односно тие на непарни позиции можат да се распоредат на $n!$ начини. Значи, вкупниот број на распореди е $n!\cdot n!=(n!)^2$. ♦

Пример 14. На колку начини n-луѓе можат да се наредат во еден ред, а притоа две однапред определени особи да не бидат еден до друг?

Решение. Нека тие особи се a и b. Најпрво ќе го определиме бројот на распореди (пермутации) во кои a и b се еден до друг. Во овој случај постојат две можности: особата a да е лево од b и особата a да е десно од b. Во двата случаја бројот на распореди е $(n-1)!$. Значи, вкупниот број на распореди во кои лицата a и b не се еден до друг е $n!-2(n-1)!=(n-1)!(n-2)$. ♦

Пример 15. Да се најдат сите пермутации кои можат да се добијат од буквите А, Л, А.

Решение. Бараните пермутации се АЛА, ЛАА, ААЛ. Значи, вкупниот број на овие пермутации е 3.

За да направиме споредба на овие пермутации каде што имаме повторување со пермутациите без повторување нека, наместо А, Л, А, ставиме сите букви да се различни, т.е. $А_1$, Л, $А_2$. Тогаш, сите пермутации се: $А_1ЛА_2$, $А_1А_2Л$, $А_2А_1Л$, $А_2ЛА_1$, $ЛА_1А_2$, $ЛА_2А_1$. Значи, бројот на сите пермутации во овој случај е 6.

Нека со P го означиме бројот на различни пермутации на буквите А, Л, А. Во секоја од нив се појавуваат двете букви А, кои не се разликуваат, па таа пермутација е иста. При ставањето на индексите на А, тогаш добивме $2!$ различни пермутации. Па, во овој случај имаме $2!\cdot P=P_3$, од каде што:

$$P=\frac{3!}{2!}=3\,.\ ♦$$

Пример 16. Напиши ги сите пермутации од буквите Б, А, Б, А.

Решение. Имаме шест пермутации вкупно. Тие се: БАБА, ББАА, БААБ, АБАБ, ААББ, АББА. Да забележиме дека со разликување на буквите А и Б од сите овие пермутации би добиле $2!\cdot 2!=4$ пати повеќе пермутации, кои сега се пермутации без повторување. Во согласност со ова, имаме $2!\cdot 2!\cdot P=P_4$, од каде што:

$$P=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6\,.\ ♦$$

Дефиниција 4. Нека во низата од елементи $a_1,a_2,\ldots,a_n$ постои едно множество од k_1 идентични елементи, второ множество од k_2 идентични елементи, ... r -то множество од k_r идентични елементи, при што важи $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$. Кое било разместување на овие елементи го нарекуваме пермутација од n елементи со повторување.

Нивниот вкупен број, ќе го означуваме со: $P_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(n)$.

Сосема аналогни разгледувања како во претходните два примера можеме да направиме и во општа ситуација и да го добиеме следниов резултат: Нека важат условите од дефиницијата за пермутации со повторување. Тогаш, за вкупниот број на пермутации со повторување имаме:

$$P_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(n)=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}\,.$$

Пример 17. Секој распоред на разнобојни знаменца одредува еден сигнал. Дали може да се формираат повеќе сигнали од три бели, две црвени и три сини знаменца или од две бели, две црвени, две сини и едно жолто знаменце?

Решение. Од првата низа на знаменца можат да се формираат:

$$P_{3,2,3}(8)=\frac{8!}{3!2!3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!2!3!}=8\cdot 7\cdot 5\cdot 2=560 \text{ сигнали.}$$

Од втората низа на знаменца можат да се формираат:

$$P_{2,2,2,1}(7)=\frac{7!}{2!2!2!1!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2!2!2!1!}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 3=630 \text{ сигнали.}$$

Од овде можеме да заклучиме дека повеќе сигнали можат да се формираат од втората низа од знаменца. ♦

Во многу проблеми од пребројувањето редоследот на елементите не е важен. На пример, кога има излекување на ЛОТО 7 од 39, не е важен редоследот на извлечените елементи, туку само кои се елементите. Исто така, при избор на помала група на луѓе која треба да претставува поголема група на луѓе, редоследот на изборот на членовите не е важен, туку важен е составот на групата. Овде ќе дадеме одговор на прашањето: На колку начини може да се изберат k -елементи од множество со n -елементи, притоа нивниот редослед на избор не е важен?

Дефиниција 5. Комбинација без повторување од k -та класа од n елементи е секој избор на k -различни елементи од множеството $A=\{a_1,a_2,...a_n\}$, при што редоследот на избор не е важен.

Всушност, комбинација без повторување од k -та класа од n -елементи, е k-елементно подмножество со различни елементи од множество со n елементи. Со C_n^k ќе го означуваме бројот на сите комбинации без повторување од k -та класа од n -елементи. Во продолжение, ќе ја определиме формулата за C_n^k. Како што веќе беше споменато, C_n^k е, всушност, бројот од сите различни подмножества со k -елементи од множество со n-различни елементи. Изборот на едно такво подмножество е определен со низа од нули и единици со должина n, при што во таа низа има точно k - единици.

Пример 18. Напиши ги сите двоелементни подмножества од множеството $A=\{a,b,c,d\}$ и напиши ги соодветните низи од нули и единици. Колку е нивниот број?

Решение. Паралелно ќе ги напишеме низите од нули и единици и соодветните двоелементни единици:

$$\begin{array}{ll} 1,1,0,0, & a,b \\ 1,0,1,0 & a,c \\ 1,0,0,1 & a,d \\ 0,1,1,0 & b,c \\ 0,1,0,1 & b,d \\ 0,0,1,1 & c,d \end{array}.$$

Бројот на сите начини е еднаков на бројот на сите пермутации на $1,1,0,0$, кој е:

$$P_{2,2}(4)=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{24}{4}=6\,. \blacklozenge$$

Во општа ситуација, бројот C_n^k е еднаков на бројот на пермутации на низа од нули и единици со должина n, во која има k -единици и $n-k$ -нули, односно:

$$C_n^k = P_{k,n-k}(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Да забележиме дека доказ на последново тврдење можеме да дадеме користејќи варијации од k -та класа од n -елементи и пермутации без повторување од n -елементи. Подетално, нека имаме множество од n -елементи $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Нека избереме едно k -елементно подмножество од A. Нека тоа множество го означиме со $B=\{a_{i_1},a_{i_2},...a_{i_k}\}$. Бројот на сите варијации од k-та класа од n - елементи е еднаков на производот на бројот на сите комбинации од k-та класа од n-елементи и бројот на пермутации на множеството B. Тоа значи дека:

$$V_n^k = P_k \cdot C_n^k,$$

од каде што повторно добиваме дека:

$$C_n^k = P_{k,n-k}(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Пример 19. Во една рамнина има десет точки, при што кои било од нив не се колинеарни. Колку прави се определени од точките? Колку тираголници можат да се формираат со темиња од дадените точки?

Решение. Секоја права е определена со две точки. Па, вкупниот број, на начини на кои можат од десет точки да се изберат две точки, е:

$$C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45 \text{ начини.}$$

Бидејќи секој триаглник е еднозначно определен од три неколинеарни точки, бројот на триаголници кои можат да се формираат е вкупниот број на избори на три од десет елемента, без да е важен редоследот, односно:

$$C_{10}^3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120 .\ \blacklozenge$$

Пример 20. На колку начини може да се извлечат седум броеви и еден дополинителен број од 39 броеви? Ова е познатиот модел на ЛОТО 7/39.

Решение. Седум броеви од 39 можат да се извлечат на C_{39}^7, односно

$$C_{39}^{7}=\binom{39}{7}=\frac{39!}{7!\cdot 32!}=\frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{1\cdot\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}=15380937\,.$$

По извлекувањено на седумте броеви, се извлекува уште еден број, а тоа може да се направи на 32 начина. Па, вкупниот број на можни извлекувања е:

$$32\cdot\binom{39}{7}=492189984\,.\ ♦$$

Пример 21. Еден кошаркарски тим располага со три центра, четири крила и пет бека. Натпреварот го започнува еден центар, две крила и два бека. На колку начини може тренерот да ја формира почетната петорка?

Решение. Центарот може да се избере на $\binom{3}{1}=3$ начини, двете крила може да се изберат на $\binom{4}{2}=6$ начина, два бека на $\binom{5}{2}=10$ начина. Бројот на различни почетни петорки се добива со помош на принципот за пребројување кој веќе го користевме, па тој број е $C_3^1\cdot C_4^2\cdot C_5^2=3\cdot 6\cdot 10=180$. ♦

Пример 22. На една кружница се избрани n-точки и секои две од нив се споени со тетива. Дополнително, не постојат три тетиви кои поминуваат низ иста точка во внатрешноста на кругот.

а) Колку тетиви се повлечени?

б) Колку се точките кои се добиени како пресек во внатрешноста на кругот?

Решение.

а) Бидејќи секоја тетива е определена со своите крајни точки, а кои било три точки кои лежат на кружницата не се колинеарни, вкупниот број на повлечени тетиви е, всушност, вкупниот број на комбинации од n-елементи од втора класа без повторување. Па, вкупниот број на тетиви е $C_n^2=\binom{n}{2}$.

б) Со изборот на четири точки се определува една точка во внатрешноста на кругот, која е добиена како пресек две тетиви, определени од двете тетиви. Па, вкупниот број пресечни точки во внатрешноста на кругот е: $C_n^4=\binom{n}{4}$. ♦

Пример 23. Нека имаме еден стандарден шпил од 52 карти. На колку начини може да се изберат:

а) две карти со ист знак,

б) две карти со различен знак,

в) две карти со иста бројна вредност и

г) две карти со различна бројна вредност?

Решение.

а) Знак на карта можеме да избереме на четири начина, а две карти од веќе избраниот знак можеме да избереме на C_{13}^{2} начини. Во согласност со ова, вкупниот број на можности за избор на две карти со ист знак е:

$$4\cdot\binom{13}{2}=4\cdot\frac{13!}{2!\cdot 11!}=312\ .$$

Алтернативно може да размислуваме на следниов начин: Првата карта можеме да ја избереме на 52 начина, додека втората карта може да ја избереме од 12 карти, бидејќи претходно со изборот на првата карта, веќе е избран и знакот на двете карти. Тоа, значи дека вкупниот број на можности на кои може да се изберат две карти со ист знак е: $\frac{52\cdot 12}{2}=312$. Овде поделивме со 2 бидејќи, при овој избор на прва и втора карта, имаме подреден пар, додека од самата формулација на задачата, јасно ни е дека редоследот на изборот не е важен.

б) Два знака на картите можеме да избереме на C_{4}^{2}, а по една карта од секоја боја на 13 начина. Па, вкупниот број на можни избори е:

$$\binom{4}{2}\cdot 13\cdot 13=1014\ .$$

в) Бидејќи картите треба да имаат иста бројна вредност, имаме 13 различни вредности. Кога веќе вредноста е фиксирана, имаме четири карти со различни знаци од таа врдност. Во согласност со ова, вкупниот број на можности е:

$$13\cdot\binom{4}{2}=\frac{52\cdot 3}{2}=78\ .$$

г) Во оваа ситуација избираме две различни вредности од 13 бројни вредности, а потоа, за секоја од избраните вредности имаме четири можности во однос на знакот. Оттука, вкупниот број на можности е $\binom{13}{2}\cdot 4\cdot 4=1248$. ♦

Пример 24. Во покер се добиваат 5 карти од еден шпил од 52 карти. Нивниот редослед не е важен. На колку различни начини може да се добијат 5 карти кои содржат:

а) еден пар (пример $KKJ63$),

б) два пара (пример $DD338$),

в) три карти со иста бројна вредност (пример $555K2$) и

г) три карти со иста бројна вредност и еден пар (пример 33388)?

Решение.

а) Две карти со иста бројна вредност може да се изберат на $13\cdot\binom{4}{2}=13\cdot 6=78$ начини. Третата карта ја избираме од преостанатите 48 карти, четвртата карта ја избираме од преостанатите 44 карти и петтата карта ја избираме од преостанатите 40 карти. Множејќи ги овие броеви ќе ги добиеме пермутациите на преостанатите три карти, па затоа бројот на комбинации на последните три карти е $3!$ пати помалку и изнесува $\frac{48\cdot 44\cdot 40}{3!}$. Множејќи ги овие да броја добиваме дека вкупниот број на можности е:

$$78\cdot\frac{48\cdot 44\cdot 40}{3!}=1098\,240\,.$$

Овде, логично можеме да си го поставиме прашањето дали овде со множењето не сме вклучиле повторно пермутации во броењето? Одговорот е не. Ова е вака бидејќи броењето на овие комбинации од пет карти е така што прво ги истакнуваме двете карти кои го сочинуваат парот, а потоа трите преостанати карти.

б) Размислувајќи на ист начин, имаме $13\cdot\binom{4}{2}$ начини да се избере првиот пар. По неговото избирање, имаме $12\cdot\binom{4}{2}$ начини за избор на вториот пар. Меѓутоа, вкупниот број на начини за да се изберат првите четири карти е двојно помал од производот на овие два броја, бидејќи првиот и вториот пар може да ги гледаме како подреден пар, па во овие избори се броени два пати. По изборот на првите четири карти, петтата карта можеме да ја избереме на 44 начини. Следува:

$$\frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot 12\cdot\binom{4}{2}}{2!}\cdot 44.$$

в) Оваа ситуација е многу слична како ситуацијата под а). Овде за изборот на трите карти имаме вкупно:

$$13\cdot\binom{4}{3}\text{ начини.}$$

Четвртата карта може да се избере на 48 начина, а петтата карта може да се избере на 44 начина. Бидејќи при изборот на четвртата карта и петтата карта изборот е гледан како подреден пар, вкупниот број на можности за избор на четвртата и петтата карта е поделен со 2, односно $\frac{48\cdot 44}{2}$. Кончено, вкупниот број на можности за избор на петте карти е:

$$13\cdot\binom{4}{3}\cdot\frac{48\cdot 44}{2}.$$

г) Групите од три карти и две карти имаат различни својства. Според тоа вкупниот можен број на избори е:

$$13\binom{4}{3}\cdot 12\cdot\binom{4}{2}.\ ♦$$

Поделбата на предмети на различни особи е многу интересен проблем за комбинаториката. Во продолжение ќе дадеме неколку примери на некои типични ситуации.

Пример 25. На колку начини десет исти предмети може да се поделат на четири лица (можно е некое лице да не добие предмет)?

Решение. Бидејќи предметите се еднакви можеме да ги означиме со кружници. На цртежот подолу е даден пример на една таква поделба.

○ ○ | ○ ○ ○ ○ | | ○ ○ ○ ○

Овде заедно со кружниците сме распоределе и три црти. Цртите го означуваат начинот на делење: првото лице добива два предмета, второто четири предмета, третото ниту еден, четвртото четири предмета. Различни распореди има колку и пермутации од 13 елемента меѓу кои се две множества од десет и три еднакви елементи. Во согласност со ова,

$$P_{10,3}(13)=\frac{13!}{10!\cdot 3!}=286$$

е бројот на начини на кои може да се изврши поделбата.

Во општа ситуација, ако треба да поделиме n еднакви предмети на k-лица, тогаш постапуваме на идентичен начин. Различни распореди има онолку колку и пермутации со повторување од $n+k-1$ елементи, меѓу кои има n-кружници и $k-1$ црти:

$$P_{n,k-1}(n+k-1)=\frac{(n+k-1)!}{n!\cdot(k-1)!}.$$

Ист резултат, ќе добиеме ако се запрашаме на колку различни начини може да се поставаат $k-1$ црта на расположливи $n+k-1$ места:

$$C_{n+k-1}^{k-1}=\binom{n+k-1}{k-1}.$$

На пример, десет предмети на три особи може да се поделат на

$$\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66 \text{ начина.}$$

Два предмети на десет лица можат да се поделат на:

$$\binom{2+10-1}{10-1}=\binom{11}{9}=\binom{11}{2}=55 \text{ начина.} ♦$$

Пример 26. На колку начини десет еднакви предмети може да се поделат на четири лица, така што секое лице да добие барем еден предмет?

Решение. Нека повторно ги означиме предметите со кружници. Ги подредуваме и помеѓу нив поставуваме три црти, но така што две црти не смее да бидат една до друга. Пример за еден таков распоред е даден на сликата подолу, каде што првото лице добива три предмета, второто добива два предмета, третото добива еден предмет и четвртото добива четири предмета.

$$\circ\ \circ\ \circ \mid \circ\ \circ \mid \circ \mid \circ\ \circ\ \circ\ \circ$$

Цртите мора да се стават на три од девет можни места помеѓу кружниците. Бројот на можни начини е:

$$\binom{10-1}{4-1}=\binom{9}{3}=84.$$

Ако n-предмети делиме на k-лица, но така што секое лице да мора да добие барем еден предмет, тоа можеме да го разгледуваме на следниов начин: $k-1$ црти треба да ги поставиме на $n-1$ места помеѓу кружниците. Бројот на различни начини е:

$$C_{n-1}^{k-1}=\binom{n-1}{k-1}.$$

Во согласност со ова, за нашиот конкретен пример имаме дека поделбата може да се направи на $\binom{9}{3}$ начина. ♦

Пример 27. На колку начини може осум различни предмети може да се поделат на четири лица, така што секое лице да добие по два предмета?

Решение. Два предмета кои ќе припаднат на првото лице може да се изберат на $\binom{8}{2}$ начина. Потоа, два предмета кои ќе припаднат на второто лице може да се изберат на $\binom{6}{2}$ начина. Продолжувајќи на истиот начин, два предмета кои ќе припаднат на третото лице може да се направи на $\binom{4}{2}$ начина, и на крај, има само еден начин за двата предмета кои ќе припаднат на четвртата особа. Според тоа, вкупниот број на поделби е:

$$\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=28\cdot 15\cdot 6\cdot 1=2520.$$

Да забележиме дека една поделба е определена со пермутација на низата: $1,1,2,2,3,3,4,4$. Така на пример, низата $2,4,1,1,3,2,3,4$ одговара на поделбата во која првото лице го добива третиот и чевртиот, второто лице првиот и шестиот, третото лице петтиот и седмиот, а четвртото лице вториот и осмиот предмет. Вакви пермутации има:

$$P_{2,2,2,2}(8)=\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}=2520.$$ ♦

Да го разгледаме општиот проблем: n различни предмети треба да се поделат на k-особи, така што првото лице добие n_1-предемти, втората n_2-предемти, ..., последната n_k-предемти, а притоа важи $n=n_1+n_2+\ldots n_k$. Бројот на различни начини на кои може тоа да се направи е:

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n_{k-1}+n_k}{n_{k-1}}\cdot\binom{n_k}{n_k}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Да претпоставиме дека избираме елементи од некое множество, при што имаме можност исти елемент да се избере повеќе пати. Овде ќе дадеме одговор на прашањето на колку начини може да се изберат k-елементи од множество од n меѓусебно различни елементи, ако секој елемент може да се избира повеќе пати, а редоследот на избраните елементи не е важен. Пример за ваков проблем имаме кога имаме една кутија во која се наоѓаат n-топчиња означени со броеви од 1 до n, притоа извлекуваме k-топчиња, едно по едно, така што по секое извлекување, топчето се враќа во кутијата. Редоследот на избраните броеви не е важен.

Дефиниција 6. Комбинација со повторување од k-та класа од n-елементи е секој избор на k-елементи, кои може да се повторуваат, од множеството $A=\{a_1,a_2,...a_n\}$, при што редоследот на избор не е важен.

Вкупниот број на комбинации со повторување од k-та класа од n елементи се означува со $\overline{C_n^k}$.

Пример 28. Напиши ги сите комбинации со повторување од:

а) 2-та класа на множеството $A=\{1,2,3,4\}$,

б) 3-та класа на множеството $A=\{1,2,3\}$,

в) 4-та класа на множеството $A=\{1,2\}$,

г) 4-та класа на множеството $A=\{1,2,3\}$.

Решение.

а) Имаме, $11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 22,\ 23,\ 24,\ 33,\ 34,\ 44$. Нивниот вкупен број е: $\overline{C_4^2}=10$.

б) Имаме, $111,\ 112,\ 113,\ 122,\ 123,\ 133,\ 222,\ 223,\ 233,\ 333$, па нивниот вкупен број е: $\overline{C_3^3}=10$.

в) Имаме, $1111,\ 1112,\ 1122,\ 1222,\ 2222$, па нивниот вкупен број е: $\overline{C_2^4}=5$.

г) Овде, $1111, 1112,\ 1113,\ 1122,\ 1123,\ 1133,\ 1222, 1223,\ 1233,$

$1333,\ 2222,\ 2223,\ 2233,\ 2333,\ 3333$. Тогаш, $\overline{C_3^4}=15$. ♦

Во продолжение ќе ја дадеме формулата за вкупниот број на комбинации со повторување од k-та класа од n-елементи.

Ќе ја направиме следнава трансформација: на вториот елемент во горните комбинации го додаваме бројот 1, на третиот број го додаваме бројот

2 , на четвртиот број го додаваме бројот 3 итн. Па, во оваа ситуација комбинациите со повторување ќе преминат во комбинации без повторување на поголемо множество. Тогаш горниве примери ќе преминат во:

а) 2-та класа на множеството $A=\{1,2,3,4,5\}$

$$12 \;\; 13 \;\; 14 \;\; 15 \;\; 23 \;\; 24 \;\; 25 \;\; 34 \;\; 35 \;\; 45,$$

б) 3-та класа на множеството $A=\{1,2,3,4,5\}$

$$123 \;\; 124 \;\; 125 \;\; 134 \;\; 135 \;\; 145 \;\; 234 \;\; 235 \;\; 245 \;\; 345,$$

в) 4-та класа на множеството $A=\{1,2,3,4,5\}$

$$1234 \;\; 1235 \;\; 1245 \;\; 1345 \;\; 2345,$$

г) 4-та класа на множеството $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$1234 \;\; 1235 \;\; 1236 \;\; 1245 \;\; 1246 \;\; 1256 \;\; 1345 \;\; 1346 \;\; 1356 \;\; 1456$$
$$2345 \;\; 2346 \;\; 2356 \;\; 2456 \;\; 3456.$$

Од ова можеме да забележиме дека со оваа трансформација множеството од сите комбинации со повторување од k-та класа од n-елементи се трансформира во множество од сите комбинации без повторување од од k-та класа од $n+k-1$ елементи. Во согласност со ова,

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ако оваа формула ја примениме во горните примери имаме:

а) $\overline{C_4^2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$

б) $\overline{C_3^3} = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$

в) $\overline{C_2^4} = \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$

г) $\overline{C_3^4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$.

Пример 29. Од шпил со 52 карти извлекуваме две карти, така што по извлекувањето на секоја карта ја запишуваме нејзината вредност, а потоа ја враќаме во шпилот. На колку начини може да се извлечат:

а) две карти со исти знак и

б) две карти со иста бројна вредност?

Решение.

а) Знакот на картата можеме да го избереме на четири начина. Две карти со исти знак може да се извлечат на $\overline{C_{13}^2}$ начина. Па, тоа е можно на:

$$4\binom{13+2-1}{2}=4\binom{14}{2}.$$

б) Бројната вредност на картата можеме да ја изберме на 13 начина, а две карти со таа бројна вредност може да се извлечат на $\overline{C_4^2}$ начина. Следува, вкупниот број на можности за извлекување е: $13\cdot\binom{4+2-1}{2}=13\cdot\binom{5}{2}$. ♦

1.3. Решени задачи

Задача 1. Најди ги множествата $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, ако:

а) $A=\{x:2<x<4\}$, $B=\{x:3\le x\le 5\}$,

б) $A=\{x:2<x\le 4\}$, $B=\{x:3\le x<5\}$.

Решение.

а) Имаме $A=\{3\}$, $B=\{3,4,5\}$. Оттука,

$$A\cup B=\{3,4,5\},\ A\cap B=\{3\},\ A\setminus B=\varnothing,\ B\setminus A=\{4,5\}.$$

б) Овде, $A=\{3,4\}$, $B=\{3,4\}$. Тогаш,

$$A\cup B=\{3,4\},\ A\cap B=\{3,4\} \text{ и } A\setminus B=B\setminus A=\varnothing.$$

Задача 2. Најди го партитивното множество на множеството $A=\{3,\{1,2\}\}$.

Решение. Партитивното множество на множеството A е:

$$P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{1,2\}\},\{3,\{1,2\}\}\}.$$

Задача 3. Нека A,B,C се произволни множества. Докажи дека важи:

а) $(A\setminus B)\cap B=\varnothing$ б) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Решение.

а) Нека $x\in(A\setminus B)\cap B$. Ова е еквивалентно со $x\in(A\setminus B)\wedge x\in B$, односно $(x\in A\wedge x\notin B)\wedge x\in B$. Од последново можеме да заклучиме дека не постои таков x за кој важи $x\notin B$ и $x\in B$, односно заклучуваме дека: $(A\setminus B)\cap B=\varnothing$.

б) Нека $x\in A\setminus(B\cup C)$. Ова е еквивалентно со $x\in A\wedge(x\notin(B\cup C))$, односно $x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)$, т.е.

$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$. Последново е еквивалентно со $x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C$, односно со $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Заклучуваме дека $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Ова тврдење можеме да го докажеме и на друг начин со користење на својствата на операции со множества. Имаме:

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = \\ = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Задача 4. Нека A, B, C се произволни множества. Докажи дека важи:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

в) $(A = B \cup C \wedge B \cap C = \varnothing) \Rightarrow (A \setminus B = C)$.

Решение.

а) Нека $x \in A \cup (B \cap C)$. Последново тврдење е еквивалентно со: $x \in A \vee (x \in B \cap C)$, односно $x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$, односно $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$, т.е. $(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$, што е еквивалентно на: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Заклучуваме дека:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

б) Нека $x \in A \cap (B \cup C)$. Еквивалентно тврдење е $x \in A \wedge (x \in B \cup C)$, односно $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$, т.е. $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$, т.е. $x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$, што е еквивалентно со $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Оттука, можеме да заклучиме дека:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

в) Нека $A = B \cup C$ и $B \cap C = \varnothing$. Имаме:

$$A \setminus B = (B \cup C) \setminus B = (B \cup C) \cap B^c = (B \cap B^c) \cup (C \cap B^c) = C \cap B^c = C.$$

Задача 5. Дали важи: $(A \setminus B = C) \Rightarrow (A = B \cup C)$?

Решение. Тврдењето не важи. Нека $A \setminus B = C$, односно $A \cap B^c = C$. Тогаш,

$$B \cup C = B \cup (A \cap B^c) = (A \cup B) \cap (B \cup B^c) = A \cup B.$$

Па, тврдењето не важи во општ случај.

Задача 6. Пет стрелци стрелаат едно по друго во осум мети по свој избор. Да се најде бројот на:

а) сите можни исходи (резултати) од нивното стрелање;

б) сите исходи при кои барем двајца стрелци стрелаат во иста мета;

в) сите исходи при кои првите двајца стрелаат во иста мета;

г) сите исходи при кои првите двајца стрелаат во иста мета, а останатите тројца во различна мета.

Решение. Нека ги нумерираме метите со броевите: $1,2,3,4,5,6,7,8$. Тогаш, секој исход (резултат) може да биде регистриран со подредена петорка од броевите 1 до 8.

а) Вкупниот број на сите можни исходи е еднаков на: $\overline{V_8^5} = 8^5 = 32768$.

б) Бројот на исходи при кои барем двајца стрелаат во иста мета, се добива кога од сите можни исходи се одзема бројот на оние, при кои сите пет стрелци стрелале во различни мети. Па, имаме:

$$\overline{V_8^5} - V_8^5 = 8^5 - \frac{8!}{3!} = 8^5 - 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 25958.$$

в) За избор на метата во која стрелаат првите двајца стрелци постојат осум можности, додека останатите тројца можат да стрелаат во која било од осумте мети. Па, за бројот на сите исходи, при кои првите двајца стрелаат во иста мета, добиваме:

$$8\cdot \overline{V_8^3} = 8^4 = 4096.$$

г) Во овој случај, бројот на исходи е:

$$8\cdot V_7^3 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680.$$

Задача 7. Нека се дадени цифрите: $1,2,3,4,5,6$.

а) Колку различни шестцифрени броеви можат да се формираат од горните цифри, така што секоја цифра е употребена само еднаш?

б) Колку од формираните броеви се парни броеви, а колку се деливи со 3?

в) Колку од нив се деливи со 4?

Решение.

а) Бројот на шестцифрени броеви кои можат да се формираат од горните цифри е:

$$P(6) = 6! = 720.$$

б) Од формираните броеви, парни се оние кои завршуваат на некој од броевите: $2,4$ или 6. Оттука, за цифрата на единици постојат три различни можности за пополнување, а останатите 5 места можат да се пополнат на $5!$ начина, со останатите пет цифри. Па, бројот на парни броеви од формираните броеви под а) е $3\cdot 5! = 360$. Сите броеви што се пермутација на цифрите $1,2,3,4,5,6$ се деливи со 3, бидејќи збирот на нивните цифри е делив со 3.

в) Од цифрите $1,2,3,4,5,6$ можат да се формираат осум двоцифрени броеви деливи со 4 (тоа се броевите $12,16,24,32,36,52,56,64$), па цифрите на десетките и единиците можат да бидат пополнети на осум начини. Откако се избрани две цифри, останатите четири цифри се избираат од преостанатите четири цифри. На овој начин, добиваме дека вкупниот број на четирицифрени броеви деливи со 4 е $8\cdot 4!=192$.

Задача 8. Докажи дека $V_{n+1}^{k}=(n+1)\cdot n\cdot V_{n-1}^{k-2}$.

Решение. Имаме:

$$V_{n+1}^{k}=\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}=(n+1)\cdot n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1-k+2)!}$$
$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n+1-k)!}=(n+1)\cdot n\cdot V_{n-1}^{k-2}.$$

Задача 9. Колку различни зборови можат да се формираат од буквите М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К, А?

Решение. Низата од букви можеме да ја презапишеме како А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Следствено, вкупниот број на зборови кои можат да се формираат е:

$$P_{3,1,1,1,2,2}(10)=\frac{10!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!}.$$

Задача 10. Определи го x, ако збирот на бројот на варијации без повторување од втор ред од $(x-2)$ елементи и бројот на комбинации без повторување од ред $x-2$ од x елементи е 101.

Решение. Од условот на задачата имаме:

$$V_{x-2}^{2}+C_{x}^{x-2}=101.$$

Користејќи ги соодветните формули за пресметување на варијации и комбинации без повторување, добиваме:

$$\frac{(x-2)!}{(x-4)!}+\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}=101,$$

што е еквивалентно со:

$$(x-2)(x-3)+\frac{x(x-1)}{2}=101,$$

од каде што $x=10$.

Задача 11. Докажи дека:

а) $C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k}$

б) $C_{n}^{k}=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}$

в) $\overline{V_{n}^{k}}=\binom{k}{0}\overline{V_{n-1}^{k}}+\binom{k}{1}\overline{V_{n-1}^{k-1}}+\ldots+\binom{k}{k}\overline{V_{n-1}^{0}}$.

Решение. Доказот на сите тврдења може да се докаже со користење на формулите за вкупен број на комбинации од n-елементи од k-та класа без повторување и варијации од n-елементи од k-та класа со повторување. Овде решението секое од трите тврдења ќе биде дадено комбинаторно, односно ќе покажеме дека множествата чии броеви на елементи се наоѓаат лево и десно на равенствата се еквивалентни. Нека $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

а) За секое k и за секоја комбинација $B_k=\{a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_k}\}$ еднозначно е определена комбинацијата $A\setminus B_k$ од класа $n-k$ од n-елементи на множеството A. На тој начин е воспоставена биекција помеѓу комбинациите без повторување од класа k од елементите на A и комбинациите без повторување од класа $n-k$ од множеството A. Заклучуваме дека: $C_n^k=C_n^{n-k}$.

б) Нека a_j е еден од елементите на множеството A. Множеството на сите комбинации без повторување од класа k од елементите на A е дисјунктна унија на множеството на комбинации од класа k кои го содржат елементот a_j и множеството на комбинации од класа k кои не го содржат елементот a_j. Вкупниот број на комбинации од класа k кои не го содржат елементот a_j е C_{n-1}^k, додека вкупниот број на комбинации од класа k кои го содржат елементот a_j е C_{n-1}^{k-1} (бидејќи еден елемент е a_j, а останатите $k-1$ елементи треба да бидат избрани од $n-1$ елементи). Па, $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

в) Нека a_j е еден од елементите на множеството на A. Множеството на варијации со повторување од класа k може да се претстави како дисјунктна унија на множествата B_m на варијациите во кои a_j се јавува m пати, $m=0,1,2,...,k$. Во продолжение ќе најдеме колку варијации има секое од множествата B_m. m-те места на кои се наоѓа елементот a_j можат да се изберат на $C_k^m=\binom{k}{m}$ различни начини. За секој распоред на m-те елементи a_j, можни се $\overline{V_{n-1}^{k-m}}$ начини за пополнување на останатите $k-m$ места со некои од останатите $n-1$ елементи. Затоа бројот на варијации содржани во B_m е еднаков на $\binom{k}{m}\overline{V_{n-1}^{k-m}}$, а бројот на сите варијации со повторување од класа k од n-елементи ќе биде еднаков на збирот на броевите на елементи на сите B_m, $m = 0,1,2,...,k$, од каде што го добиваме тврдењето кое требаше да се докаже.

Задача 12. Четири брачни парови сочинуваат множество од 8 лица. На колку различни начини може да се избере трочлена комисија од тоа множество ако:

а) во комисијата влезат кои било три лица од 8-те лица,

б) комисијата треба да се состои од две жени и еден маж,

в) во комисијата не може истовремено да бидат маж и жена.

Решение.

а) Јасно е дека вкупниот број на можни избори е вкупниот број на комбинации од 8 елементи од 3-та класа, односно вкупниот број на можни избори е: $C_8^3 = \binom{8}{3} = 56$.

б) Вкупниот број на можни избори е: $C_4^2 \cdot C_4^1 = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 6 \cdot 4 = 24$.

в) Во комисијата треба да има претставници од три брачни пара. Од четири брачни пара, три брачни пара можат да се изберат на:

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = 4 \text{ начина.}$$

При таков избор, секој член на комисијата може да се избере на два начина (внатре во брачниот пар). Па, бараниот број на начини е $\binom{4}{3} \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$ начина.

Задача 13. На колку начини од множество од 17 луѓе може да се изберат 12 луѓе, ако две дадени лица не може да бидат избрани истовремено?

Решение. Вкупниот број на избори на 12 луѓе од 17 луѓе е: $\binom{17}{12}$, додека вкупниот број на избори во кој тие две лица учествуваат е: $\binom{15}{10}$. Па, бараниот број на начини е: $\binom{17}{12} - \binom{15}{10}$.

Задача 14. Сакаме да избереме шест лица од осум лица, при што ако го избереме лицето A, мора да го избереме и лицето B. На колку начини може да се направи тоа?

Решение. Ако не го избереме лицето A, тогаш помеѓу преостанатите 7 лица можеме да избереме 6 лица на $\binom{7}{6}$ начина. Ако го избереме лицето A, мораме да го избереме и лицето B, од преостанатите 6 лица треба да избереме уште 4 лица, а тоа може да се направи на $\binom{6}{4}$ начина. Значи, вкупниот број на начини е $\binom{7}{6}+\binom{6}{4}=22$ начина.

Задача 15. Во една група од 20 шахисти има 5 велемајстори. На колку начина може да се формираат две екипи од по 10 шахисти, така што во една група да бидат два велемајстори, а во другата три велемајстори?

Решение. Да забележиме дека со изборот на составот во едната група, веќе е избран и составот на другата група. Затоа, бројот на сите можни начини на избор на составот на едната група е вкупниот број за можни избори на составите во двете групи од по десет шахисти.

Во согласност со ова, вкупниот број на избори е: $\binom{15}{8}\cdot\binom{5}{2}$ начина.

Задача 16. На колку начини може 10 различни банкноти да се распоредат во два џеба?

Решение. Изборот на банкноти во еден џеб, го определува и изборот на банкноти и во другиот џеб. Изборот на банкноти само за еден џеб, кога во него има 0 банкноти или 1 банкнота или 2 банкноти или ... или 10 банкноти може да се направи на:

$$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=2^{10}\text{ начина.}$$

Задача 17. На колку начини од $3n$ последователни цели броеви може да се изберат три броја, така што нивниот збир да е делив со 3?

Решение. Постојат две можности кои можат да се случат при изборот на трите броја. Првата можност е сите три броја да имаат ист остаток при делење со 3, односно остатокот при делење со 3 да биде 0 или 1 или 2. Бидејќи имаме $3n$ последователни броеви, n од нив се деливи со 3, n од нив при делење со 3 даваат остаток 1 и n од нив даваат остаток 2, при делење со 3. Во согласност со ова, во првата можност, вкупниот број на начини на кој можат да се изберат трите броја е:

$$C_n^3 + C_n^3 + C_n^3 = 3C_n^3 = 3\binom{n}{3}.$$

Втората можност е ако сите три броеви имаат различен остаток при делење со 3 (друга можност различна од овие две не постои), односно остатоците се $0,1$ и 2 . Во согласност со ова, добиваме дека во втората можност вкупниот број на начини на избор на трите броеви е:

$$C_n^1 \cdot C_n^1 \cdot C_n^1 = (C_n^1)^3.$$

Вкупниот број на можности на избор на трите цели броеви е збирот на начините од двете можности, односно:

$$3 \cdot C_n^3 + (C_n^1)^3 = 3 \cdot \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} + n^3 = \frac{3n(n-1)(n-2)}{6} + n^3$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + n^3 = \frac{n}{2}\left(3n^2 - 3n + 2\right).$$

Задача 18. Да се најде бројот на n-торките во систем со основа 3, кои се со:

а) нула на прво место,

б) $k+2$ нули, од кои две се на краевите,

в) k-единици.

Решение. Да забележиме дека бидејќи системот е со основа 3 , цифрите кои се користат за запишување на n-торките во овој броен систем се елементи на множеството $A = \{0,1,2\}$.

а) Бидејќи имаме нула на прво место, на останатите $(n-1)$ позиции имаме произволен избор на цифри од множеството A. Во согласност со ова, имаме дека бројот на n-торки е $\overline{V_3^{n-1}} = 3^{n-1}$.

б) Бидејќи на краевите имаме нули, остануваат да се распоредат k нули на $(n-2)$ места. Според ова, бројот на n-торки е:

$$C_{n-2}^k \cdot \overline{V_2^{n-2-k}} = \binom{n-2}{k} \cdot 2^{n-2-k}, \text{ при } 0 \le k \le n-2.$$

в) Во овој случај имаме дека треба да распоредиме k-единици на n-места. Па, имаме дека:

$$C_n^k \cdot \overline{V_2^{n-k}} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}, \text{ при } 0 \le k \le n.$$

2. Простор на веројатност

2.1. Алгебра на настани

Исходот на секој експеримент ќе го нарекуваме елементарен настан. Во некој експеримент бројот на елементарни настани кои може да настанат, може да биде конечен или бесконечен. На пример, ако експериментот е фрлање коцка, можниот исход односно бројот на елементарни настани кои може да се случат е конечен, додека ако експериментот е избор на точка од отсечка, бројот на елементарни настани кои можат да се случат е бесконечен. При секој експеримент, даден настан може да се случи или да не се случи. На пример, при фрлање паричка може да се случи да падне или да не падне глава. Дали некој настан ќе се случи или не, ние на секој од тие настани можеме да му придружиме одредена веројатност за тој да се случи. Колку е поверојатно некој настан да се случи толку веројатноста на тој настан ќе биде поблиску до единица. Настаните кои се помалку веројатни ќе имаат веројатност поблиску до нулата. Калкулусот со елементарните настани и веројатности мора да биде според одредени правила.

Елементарните настани ќе ги означуваме со ω. Множеството од сите елементарни настани ќе го означуваме со Ω. Множеството Ω, кое може да се разгледува и како настан, се остварува при секое изведување на експериментот. Според тоа го нарекуваме сигурен настан. Неговата спротивност е невозможен настан, кој при изведувањето на експериментот не може да се случи никогаш. Невозможниот настан ќе го означуваме со $\varnothing$. Обично, другите настани кои се врзани со даден експеримент, ќе бидат означени со големите латински букви: $A, B, C, \ldots$. Тие во општ случај се составени од одреден број елементарни настани. Тоа значи дека настаните се подмножества од множеството од сите елементарни настани Ω.

Пример 1. Се фрлаат две коцки. Најди го просторот од сите елементарн настани.

Решение. За просторот од сите елементарни настани имаме дека:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}. \ \blacklozenge$$

Пример 2. Се фрлаат една коцка и една монета. Најди го просторот од сите елементарни настани.

Решение. Просторот од сите елементарни настани е:

$$\Omega = \{(1,\mathit{П}),(1,\mathit{Г}),(2,\mathit{П}),(2,\mathit{Г}),(3,\mathit{П}),(3,\mathit{Г}),(4,\mathit{П}),$$

$$(4,\Gamma),(5,\Pi),(5,\Gamma),(6,\Pi),(6,\Gamma)\}\,.\ \blacklozenge$$

Пример 3. Во една кутија има четири ливчиња со броевите $1,2,3,4$. На случаен начин од кутијата се извлекува по едно ливче без враќање сѐ додека не се извлече ливче со непарен број. Определи го просторот на елементарни настани и опиши ги настаните:
A- извлечено е ливчето со број 2, B- збирот на броевите на извлечените ливчиња е парен број и C- ливчето со број 2 е извлечено второ по ред.

Решение. Просторот од елементарни настани е:

$$\Omega=\{(1),(3),(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(2,4,1),(2,4,3),(4,2,1),(4,2,3)\}.$$

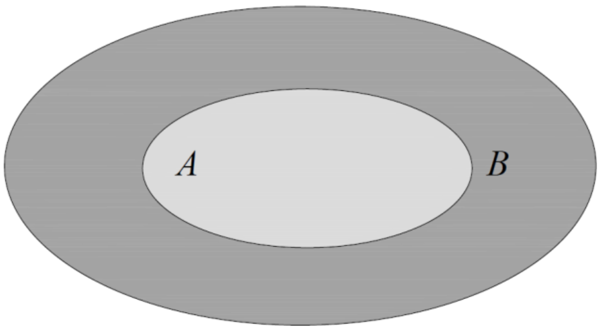
Настаните A,B и C соодветно се:

$$A=\{(2,1),(2,3),(2,4,1),(2,4,3),(4,2,1),(4,2,3)\}$$

$$B=\varnothing$$

$$C=\{(4,2,1),(4,2,3)\}\,.\ \blacklozenge$$

Велиме дека настанот A го повлекува настанот B, ако од реализацијата на настанот A следува реализација на настанот B. Тоа значи дека настанот B ги содржи сите елементарни настани кои ги содржи настанот A. Во согласност со теоријата на множествата запишуваме: $A\subset B$. Многу често се користи и записот $A\Rightarrow B$ или настанот B следи од настанот A или настанот A е специјален случај на настанот B, A е доволен услов за B, B е потребен услов за A. На следната слика, со помош на множества е претставена ситуација кога настанот A го повлекува настанот B.



Пример 4. Нека фрламе две коцки. Нека ги означиме настаните:
$A=\{$ двата броја се поголеми или еднакви на $5\}$,
$B=\{$ збирот на броевите на коцките е поголем од $10\}$.
Дали $A\subset B$?

Решение. Нека со ω_i , $i=1,2,...,6$ е елементарниот настан: бројот кој се паднал на фрлената коцка е i , $i=1,2,...,6$. Тогаш,

$$A=\{(\omega_5,\omega_5),(\omega_5,\omega_6),(\omega_6,\omega_5),(\omega_6,\omega_6)\}$$

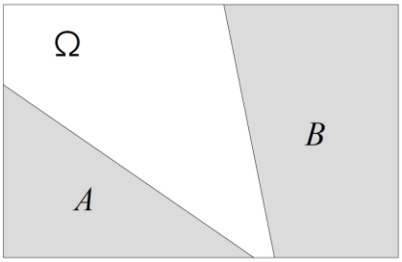
и:

$$B=\{(\omega_5,\omega_6),(\omega_6,\omega_5),(\omega_6,\omega_6)\}.$$

Значи, не важи $A\subset B$, но важи $B\subset A$. ♦

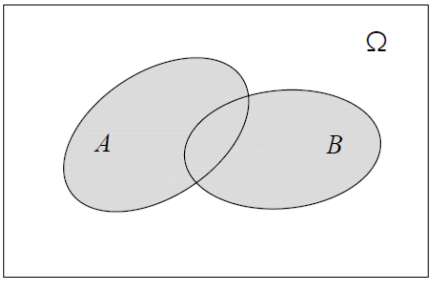
Слично како и во теоријата на множества ако важи $A\subset B$ и $B\subset A$, тогаш $A=B$, односно настаните A и B се еднакви.

Настаните A и B се дисјунктни ако не може да се случат и настанот A и настанот B истовремено. Велиме дека настаните A и B меѓусебно се исклучуваат. На пример настаните при фрлање на коцка $A-$се паднал непарен број и $B-$се паднала шестка се дисунктни настани.

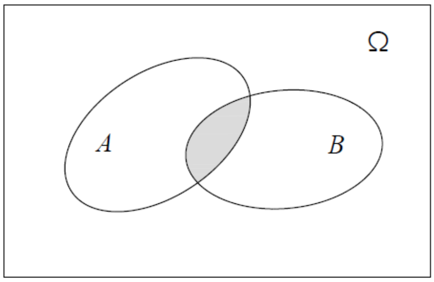


Настанот кој за да се реализира доволно е да се реализираат барем еден од настаните A и B се нарекува унија на настаните A и B или збир на настаните A и B и се означува со $A\cup B$ или $A+B$.

Настанот кој за да се реализираат и двата настана A и B се нарекува пресек на настаните A и B или производ на настаните A и B и се означува со $A\cap B$ или AB .



$A \cup B$



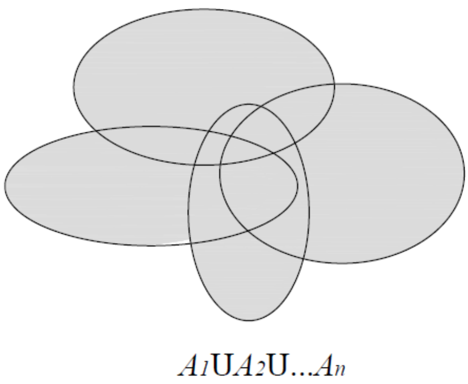
$A \cap B$

Пример 5. Нека при фрлање на коцка ги имаме настаните $A-$се паднал непарен број и $B-$се паднал број помал од 4. Тогаш пресекот и унијата на настаните A и B е:
$A\cup B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_5\}$, $A\cap B=\{\omega_1,\omega_3\}$, каде ω_i, $i=1,2,...,6$ е елементарниот настан: бројот кој се паднал на фрлената коцка е: i, $i=1,2,...,6$. ♦

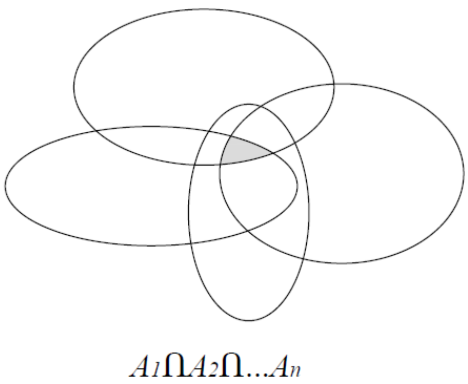
Исто како и кај теоријата на множества, операцијата на унија и пресек на настаните A и B може да се обопшти за повеќе (конечен) број на множества.
Унијата од n-настани е настан $A=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$ кој се реализира ако барем еден од настаните $A_1,A_2,...,A_n$ се реализирал.
Пресекот од n-настани е настан $A=A_1\cap A_2\cap...\cap A_n$ кој се реализира ако секој од настаните $A_1,A_2,...,A_n$ се реализирал.

Настанот кој се настапува ако настапил настанот A, а настанот B не настапил, го нарекуваме разлика на настаните A и B и ја означуваме со $A\setminus B$ или $A-B$.

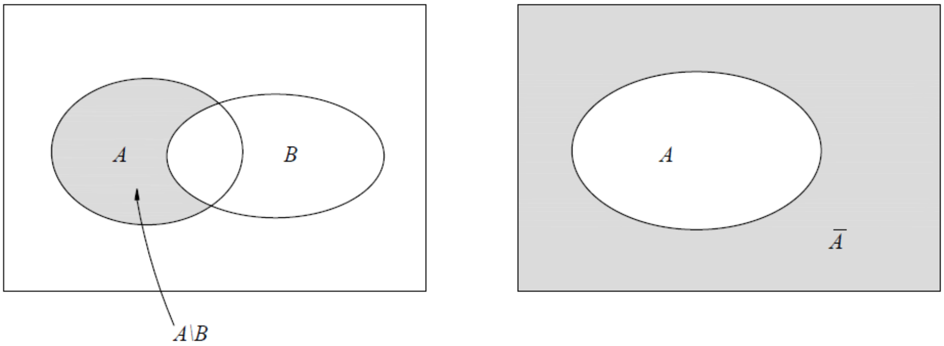
Настанот $\Omega\setminus A$ го нарекуваме комплементарен или спротивен настан на настанот A. Овој настан се реализира ако и само ако настанот A не се реализирал. Обично комплементарниот настан го означуваме со $\overline{A}$ или A^c.
Јасно е дека: $A\setminus B=A\cap\overline{B}=A\overline{B}$ и $\overline{\overline{A}}=A$.



$A_1 \cup A_2 \cup ... A_n$



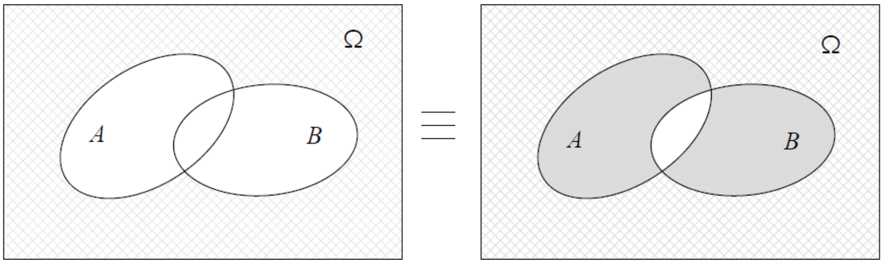
$A_1 \cap A_2 \cap ... A_n$



Аналогно, како и кај множествата можеме и овде да ги формулираме Де Моргановите закони за настаните A и B.
Де Морганови закони за настаните A и B гласат:
За произволни настани A и B важи:

$$(\overline{A\cup B}) = \overline{A}\cap\overline{B}$$

$$(\overline{A\cap B}) = \overline{A}\cup\overline{B}.$$



$\overline{A \cup B}$ $\qquad$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

Доказот е идентичен како и кај Де Моргановите закони за множества.
Нека ω е елементарен настан кои припаѓа на $\overline{A\cup B}$. Од дефиницијата на комплементарен настан: $\omega\notin A\cup B$, што е еквивалентно со: $\omega\notin A$ и $\omega\notin B$. Последново е еквивалентно со: $\omega\in\overline{A}$ и $\omega\in\overline{B}$. Тоа значи дека: $\omega\in\overline{A}\cap\overline{B}$, односно докажавме дека: $(\overline{A\cup B}) = \overline{A}\cap\overline{B}$.
Вториот Де Морганов закон може да се докаже на ист начин и како што беше докажан првиот Де Морганов закон. Но, може $(\overline{A\cap B}) = \overline{A}\cup\overline{B}$ да се докаже користејќи го веќе докажаниот Де Морганов закон и $\overline{\overline{A}} = A$. Навистина,

$$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}} = \overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}} = A\cap B,$$

па:

$$\overline{A\cap B} = \overline{\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}} = \overline{A}\cup\overline{B},$$

што и требаше да се докаже.

Пристапот којшто досега го користевме во дефинирањето и разгледувањето на настаните беше интуитивен, како што беше на пример дефинирањето на пресек, унија и комплемент на елементарни настани. Потребно е доколку сакаме да разгледуваме строго дефинирана математичка теорија овие поими да бидат построго дефинирани. На пример, јасно е дека сите настани се подмножества од Ω. Обратното тврдење дека секое подмножество од Ω е настан, во општ случај не е секогаш точно. Многу поопшто, постојат ситуации кога настаните нема да бидат сите подмножества од Ω.

За да бидат избегнати некои парадокси, настаните ќе ги дефинираме како елементи на алгебра од настани.

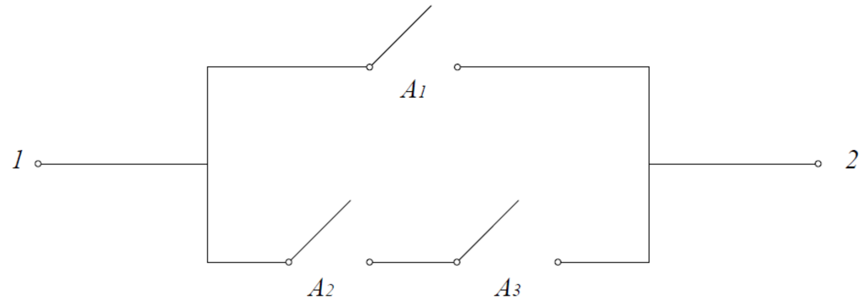
Алгебра од настани е секоја фамилија F од подмножества од Ω на кои е дефинирана операција унија $F\times F\to F$ и операција комплементирање со својствата:

1) $\Omega\in F$, $\varnothing\in F$;
2) $A\in F\Rightarrow\overline{A}\in F$;
3) $A,B\in F\Rightarrow A\cup B\in F$.

Елементите на алгебрата F ги нарекуваме настани.

Да забележиме дека доволно е да претпоставиме дека $\Omega\in F$, бидејќи $\varnothing=\overline{\Omega}$, па од второто својство припаѓа на алгебрата F. Понатаму, ако A и B се настани, тогаш и $\overline{A}$ и $\overline{B}$ припаѓаат на алгебрата F, па тогаш припаѓа и нивната унија $\overline{A}\cup\overline{B}$. Па,
$A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\in F$. Значи, пресекот е повторно настан. Исто така, и разликата на два настана A и B е настан. Навистина за $A,B\in F$, важи $A\setminus B=A\cap\overline{B}\in$ F.

Пример 6. Нека е дадено струјното коло на сликата. Нека настанот A_i означува прекин на делот i, каде што $i=1,2,3$. Најди го изразот за настанот $A-$уредот престанал со работа и неговиот комплементарен настан $\overline{A}$.



Решение. Уредот ќе престане со работа ако настане настанот A_1 или барем еден од настаните A_2 и A_3. Значи настанот A е даден со:

$$A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = A_1(A_2 + A_3).$$

За да го најдеме комплементарниот настан на A, ќе ги искористиме Де Моргановите правила. Имаме:

$$\overline{A} = \overline{A_1(A_2 + A_3)} = \overline{A_1} + \overline{A_2 + A_3} = \overline{A_1} + \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}.$$

2.2. Класичен простор на веројатност

Веројатност е пресликувањето $p\colon \mathrm{F} \to [0,1]$ дефинирано на алгебрата од настани F, со својствата:

1) $p(\Omega) = 1$, $p(\varnothing) = 0$;
2) Ако $A \subseteq B$, тогаш важи $p(A) \le p(B)$;
3) Ако A и B се дисјунктни настани, тогаш $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Бројот $p(A)$ се нарекува веројатност на настанот A.

Во продолжение ќе ги дадеме некои од основните својства на веројатноста.

Нека A е произволен настан.

а) За веројатноста на спротивниот настан на настанот A имаме: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Доказ. Настаните A и $\overline{A}$ се дисјунктни и важи: $A \cup \overline{A} = \Omega$. Од својствата 1) и 3) имаме: $p(\Omega) = 1$ и $p(\Omega) = (A + \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$, од каде што добиваме дека: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$. ■

б) За секој случаен настан A важи: $0 \le p(A) \le 1$.

Доказ. Јасно важи $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$. Од 1) и 2) имаме дека $p(\varnothing) \le p(A) \le p(\Omega)$, односно:

$0 \le p(A) \le 1$. ■

в) За веројатноста на сумата на два произволни настани A и B важи: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Доказ. Настаните $A \cup B$ и B може да ги запишеме како суми на дисјунктни настани на следниов начин:

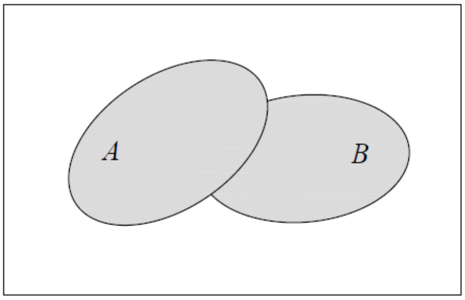
$$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B).$$

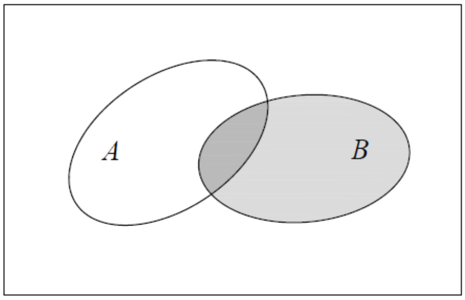
Тогаш според 3) имаме:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(\overline{A} \cap B)$$

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B),$$



$A\ U\ B = A\ U\ B\overline{A}$



$B{=}AB\ U\ B\overline{A}$

па, имаме:

$$p(\overline{A} \cap B) = p(A \cup B) - p(A)$$

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B).$$

Оттука,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B). \ ■$$

г) Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се случајни настани, попарно дисјунктни, односно важи: $A_i \cap A_j = \varnothing$, за $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. Тогаш важи:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n).$$

Доказ. Оваа формула претставува обопштување на 3). Доказот е со користење на својството 3) и принципот на математичка индукција. За $n = 2$ тврдењето е точно тврдењето во 3). Да претпоставиме точност на тврдењето за $n = k$, односно важи:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_k).$$

За $n = k + 1$, притоа користејќи го 3) имаме:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}) = p\left((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}\right) =$$

$$= p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) + p(A_{k+1}) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k) + p(A_{k+1}) .$$

Во согласност со принципот на математичка индукција тврдењето е точно за секој природен број n. ■

Пример 1. Во една продавница има 10 чоколади, од кои 6 се со одличен квалитет. Чоколадите не се разликуваат помеѓу себе по надворешен изглед и се еднакво достапни на купувачот. Најди ја веројатноста дека купувач кој купил 5 чоколади ќе купи барем 3 чоколади со одличен квалитет.

Решение. Нека со A го означиме настанот дека купувачот купил 3 чоколади со одличен квалитет. Тогаш тој е дисјунктна сума од настаните $A_3 -$ купувачот купил точно 3 чоколади со одличен квалитет, $A_4 -$ купувачот купил точно 4 чоколади со одличен квалитет, $A_5 -$ купувачот купил точно 5 чоколади со одличен квалитет. Значи,

$$p(A) = p(A_3 \cup A_4 \cup A_5) = p(A_3) + p(A_4) + p(A_5) =$$

$$= \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{186}{252} = 0,738 . \ ♦$$

Пример 2. Нека A и B се произволни настани, за кои важи $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,6$, $p(AB) = 0,1$. Пресметај $p(A \cup B), p(\overline{A}), p(A\overline{B})$.

Решение. Од претходните својства имаме:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB) = 0,4 + 0,6 - 0,1 = 0,9 ,$$

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6 ,$$

$$p(A\overline{B}) = p(A) - p(AB) = 0,4 - 0,1 = 0,3 . \ ♦$$

Пример 3*. Нека A, B, C се произволни настани. Најди ги веројатностите $p(AB)$ и $p(\overline{A}\overline{B})$ ако не е можна истовремена реализација на настаните A, B и C, $p(A) = p(B) = 0,7$ и $p(C) = 0,6$.

Решение. Од $P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB)$ и $p(A \cup B) \leq 1$, имаме дека:

$$p(AB) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,7 + 0,7 - p(A \cup B) \geq 0,4 .$$

Дополнително, од:

$$AB = ABC + AB\overline{C} , \ p(ABC) = 0 \text{ и } AB\overline{C} \subseteq \overline{C} ,$$

добиваме дека:

$$p(AB\overline{C}) \leq p(\overline{C}).$$

Сега,

$$p(AB) = P(ABC) + p(AB\overline{C}) = p(AB\overline{C}) \leq p(\overline{C}) = 1 - p(C)$$
$$= 1 - 0,6 = 0,4.$$

Комбинирајќи ги последните две неравенства, добиваме дека: $p(AB) = 0,4$.

Уште,

$$P(\overline{A}\overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - p(A) - p(B) + p(AB)$$
$$= 1 - 0,7 - 0,7 + 0,4 = 0. \blacklozenge$$

Веројатностниот простор Ω кој има конечно многу елементарни настани го нарекуваме конечен простор на веројатност. Нека неговите елементи ги означиме со $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Настан во оваа ситуација е секое подмножество од елементарни настани од Ω. Веројатноста на кој било настан може да ја најдеме ако ја знаеме веројатноста на сите елементарни настани кои доведуваат до реализација на тој настан или кажано во контекст на множества ако ги знаеме веројатностите на сите елементарни настани ω_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ кои се елементи на тоа множество, т.е. ако ги знаеме вредностите:

$$p_1 = p(\{\omega_1\}), p_2 = (\{\omega_2\}), ..., p_n = p(\{\omega_n\}).$$

За овие броеви важи:

$$p_1 > 0, p_2 > 0, ..., p_n > 0 \text{ и } p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Навистина, нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ и елементарните настани се меѓусебно дисјунктни, па:

$$1 = p(\Omega) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + ... + p(\{\omega_n\}).$$

Нека $A \in \mathrm{F}$ е произволен настан. Овој настан се состои од неколку елементарни настани:

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\}.$$

Веројатноста на настанот A ја пресметуваме така што ги собираме веројатностите на елементарните настани, т.е.:

$$p(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_k}.$$

Пример 4. Фрламе паричка сѐ додека не се појави писмо, но бројот на фрлања е најмногу четири. Опиши го просторот на веројатност. Колкава е веројатноста на следниве настани:
$A = \{$писмо се појавило во првите две фрлања$\}$;
$B = \{$писмо се појавило по второто фрлање$\}$?

Решение. Множеството Ω се состои од пет елементарни настани, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, каде $\omega_1 = П$, $\omega_2 = ГП$, $\omega_3 = ГГП$, $\omega_4 = ГГГП$ и $\omega_5 = ГГГГ$, со соодветни веројатности:

$$p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{4},\ p_3 = \frac{1}{8},\ p_4 = \frac{1}{16} \text{ и } p_5 = \frac{1}{16}.$$

Тогаш, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ и $B = \{\omega_3, \omega_4\}$. Па,

$$p(A) = p_1 + p_2 = \frac{3}{4} \text{ и } p(B) = p_3 + p_4 = \frac{3}{16}. \blacklozenge$$

Во продолжение, ќе дадеме неколку примери на едноставни конечни простори на веројатност.

а) Паричка. Имаме два елементарни настана: $\omega_1 = П$, $\omega_2 = Г$. Ако паричката е хомогена и правилно се фрла, тогаш природно е да претпоставиме дека веројатностите за појавување на секој од двата елементарни настани се:

$$p_1 = p(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2} \text{ и } p_2 = p(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}.$$

б) Нехомогена паричка. Овде постојат, пак, двата елементарни настана: $\omega_1 = П$, $\omega_2 = Г$. Но, поради нехомогеноста на паричката или поради нејзиното фрлање, една нејзина страна, на пример $П$, се појавува почесто од другата. Па, во оваа ситуација $p_1 > p_2$.

в) Коцка. За хомогена коцка јасно земаме $p_i = p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$, за $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Ги имаме следниве примери:

$$p(\{се\,паднал\,парен\,број\}) = p(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(\{се\,паднал\,број\,поголем\,од\,2\}) = p(\{3,4,5,6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

г) Фрлање на две парички. Во овој случај имаме четири елементарни настана, иако на прв поглед постојат три различни исходи: две писма, писмо и глава и две глави:

Настан	**Прва паричка**	**Втора паричка**
ω_1	*П*	*П*
ω_2	*П*	*Г*
ω_3	*Г*	*П*
ω_4	*Г*	*Г*

За да можеме лесно да ги разгледуваме елементарните настани ω_2 и ω_3 и можеме да замислиме дека фрламе две различни парички или дека една паричка е фрлена два пати.

д) Втор модел на фрлање на две парички. По некои од документите, големиот француски математичар и енциклопедист D'Alembert во овој пример поставил само три елементарни настана:

ω_1 ={се паднале две писма},

ω_2 ={се паднале едно писмо и една глава},

ω_3 ={се паднале две глави}.

На овој принцип можеме да гледаме како правилен пристап. Меѓутоа, веројатностите на овие елементарни настани не се еднакви, односно:

$$p(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}, \qquad p(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}, \qquad p(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}.$$

ѓ) Фрлање на две коцки. Постојат 36 елементарни настани. За да ги разликуваме елементарните настани $(2,5)$ и $(5,2)$, можеме да замислиме дека коцките се обоени во различни бои или, пак, наместо фрлање на две коцки истовремено, фрламе една коцка два пати, така што знаеме кој е разултатот на првата, а кој е резултатот на втората коцка. Ако коцките се хомогени и се фрлаат правилно, природно е да претпоставиме дека сите елементарни настани се еднакво веројатни.

Пример 5. Случајно извлекуваме карта од шпил со 52 карти. Која е веројатноста дека сме извлекле двојка? Која е веројатноста дека нејзиниот знак е срце? Која е веројатноста дека извлечената карта е двојка или има знак срце?

Решение. Нека со A и B ги означиме настаните:

$A =$ {извлечената карта е двојка},

$B =$ {извлечената карта има знак срце}.

Бидејќи постојат четири двојки во шпилот, па веројатноста на настанот A е $p(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Од целиот шпил, бројот на карти кои имаат знак срце е 13, па веројатноста на настанот B е $p(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$. Третиот настан ќе го означиме со C и притоа важи $C=A\cup B$. Веројатноста на настанот AB, т.е. пресекот на настаните A и B е $p(AB)=\frac{1}{52}$. Дополнително, да забележиме дека настаните A и B не се дисјунктни настани. Па, според тоа веројатноста на настанот C е:

$$p(C)=p(A\cup B)=P(A)+p(B)-p(AB)=\frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52}=\frac{4}{13}. \blacklozenge$$

Пример 6. Една екипа има 10 спортисти. Се играат три натпревари последователно. Во секој од натпреварите учествуваат по 6 спортисти. Која е веројатноста дека во секој натпревар ќе има различен состав ако случајно се избираат спортистите?

Решение. Нека со A го означиме настанот: во секој натпревар составот е различен. Тогаш за бројот на елементарни настани кои доведуваат до реализација на настанот A е $|A|=C_{10}^{6}\cdot(C_{10}^{6}-1)\cdot(C_{10}^{6}-2)$. Уште, бројот на сите елементарни настани е: $|\Omega|=\left(C_{10}^{6}\right)^{3}$. За веројатноста на настанот A имаме:

$$p(A)=\frac{C_{10}^{6}\cdot(C_{10}^{6}-1)\cdot(C_{10}^{6}-2)}{\left(C_{10}^{6}\right)^{3}}. \blacklozenge$$

Пример 7. Колкава е веројатноста дека играч кој заокружил една комбинација во играта ЛОТО 7 од 39 ќе ги погоди сите седум броеви, т.е. ќе добие седумка? Колкави се веројатностите за преостанатите добивки (точно погодени 4, 5 или 6 броја)?

Решение. Вкупниот број на различни комбинации е: $|\Omega|=\binom{39}{7}$.

Поволна за главната награда (седумка) е $|A_7|=1$ комбинација. Па, веројатноста играчот да добил седумка на ЛОТО е:

$$p=\frac{|A_7|}{|\Omega|}=\frac{1}{\binom{39}{7}}=\frac{1}{15380937}=0,000000065.$$

Настаните и со многу поголема веројатност ги сметаме како малку веројатни! Но, поради големиот број на исполнети комбинации овој настан понекогаш и се остварува.

Шест броеви помеѓу извлечените седум броеви може да се изберат на $\binom{7}{6}$ начина. Еден број од преостанатите броеви може да се извлече на $\binom{32}{1}=32$ начина. Ако играчот заокружи некои од овие $A_6=\binom{7}{6}\cdot 32$ комбинации, играчот ќе има шест погодоци. Во согласност со ова, веројатноста дека играчот ќе погоди шест од извлечените седум броеви е:

$$p=\frac{|A_6|}{|\Omega|}=\frac{\binom{7}{6}\cdot 32}{\binom{39}{7}}=\frac{224}{15\ 380\ 937}=0,0000146.$$

Пет броеви помеѓу извлечените седум може да се изберат $\binom{7}{5}$ начина, а два броја од множество на 32 броја кои не се извлечени на $\binom{32}{2}$ начина. Затоа, веројатноста за добивка од пет погодоци е:

$$p=\frac{|A_5|}{|\Omega|}=\frac{\binom{7}{5}\cdot\binom{32}{2}}{\binom{39}{7}}=\frac{10\ 416}{15\ 380\ 937}=0,000677.$$

Веројатноста дека играчот ќе погоди четири погодоци е:

$$p=\frac{|A_4|}{|\Omega|}=\frac{\binom{7}{4}\cdot\binom{32}{3}}{\binom{39}{7}}=\frac{173\ 600}{15\ 380\ 937}=0,0113.$$

Веројатноста играчот да не погоди ниту еден број е:

$$p = \frac{|A_0|}{|\Omega|} = \frac{\binom{32}{7}}{\binom{39}{7}} = 0,219 . \blacklozenge$$

Пример 8. Нека a и b $(a > b)$ се должини на две страни на триаголник. Должината на третата страна c се избира случајно од интервалот $(a-b, a+b)$. Која е веројатноста добиениот триаголник да е остроаголен?

Решение. Просторот од сите елементарни настани во овој пример е даден со $\Omega = \{c : a-b < c < a+b\}$, па $|\Omega| = (a+b)-(a-b) = 2b$. Нека со A го означиме настанот: добиениот триаголник е остроаголен. Тогаш, имаме:

$$A = \{c : \sqrt{a^2 - b^2} < c < \sqrt{a^2 + b^2}\}, \text{ па } |A| = \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2} .$$

Конечно, за веројатноста на настанот A, имаме дека:

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}{2b} . \blacklozenge$$

Пример 9. Во една пратка која се состои од n-произоди има m-неисправни, каде што $m, n \in \mathbb{N}$ и $m \leq n$. Од пратката случјано се избира примерок од k-производи. Ако помеѓу нив се најдат барем l неисправни, пратката се враќа. Колкава е веројатноста дека пратката ќе се врати? Пресметај за $n = 1000$, $m = 20$, $k = 20$, $l = 1$.

Решение. Да ги означиме настаните

$$A = \{\text{пратката не е вратена}\},$$

$$A_i = \{\text{во пратката се пронајдени } i \text{ неисправни производи}\}$$

Па, во нашата ситуација имаме дека настаните A_i, $i = 0,1,2,...,l$ се дисјунктни и:

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_{l-1} .$$

Па, $p(A) = \sum_{i=0}^{l-1} p(A_i)$. Бидејќи:

$$p(A_i) = \frac{\binom{n-m}{k-i}\binom{m}{i}}{\binom{n}{k}}, \text{ за } i = 0,1,2,...l-1, \text{ имаме:}$$

$$p(A)=\sum_{i=0}^{l-1}\frac{\binom{n-m}{k-i}\binom{m}{i}}{\binom{n}{k}}.$$

За нашиов конкретен пример, со замена на вредностите за m, n, k и l, добиваме:

$$p(A)=\frac{\binom{980}{20}\cdot\binom{20}{0}}{\binom{1000}{20}}=0,66. \ \blacklozenge$$

Забелешка. При пресметување на $n!$ за поголеми вредности на n, како и на биномните коефициенти се користи Стирлинговата формула:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

или поточно важи:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}}<n!<\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Пример 10. Нека a_k, $k=1,2,...,n$ се случајно избрани броеви од множеството $A=\{-1,0,1\}$. Најди ја веројатноста на настаните B-производот $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ е различен од нула и C-збирот $\sum_{k=1}^{n}(1+a_k)$ е различен од нула.

Решение. Просторот од сите елементарни настани е $\Omega=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_k\in\{-1,0,1\}, k=1,2,...,n\}$. Имаме дека: $|\Omega|=\overline{V_3^n}=3^n$. За настанот B имаме дека $B=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_k\in\{0,1\},\ k=1,2,...,n\}$, па $|B|=\overline{V_2^n}=2^n$. Ќе го разгледаме спротивниот настан на настанот C. Имаме $\overline{C}=\{(a_1,a_2,...,a_n): a_k=-1, k=1,2,...,n\}$, од каде што јасно е: $|\overline{C}|=1$. Во согласност со ова, бараните веројатности се:

$$p(B)=\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{и} \quad p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{1}{3^n}. \ \blacklozenge$$

Формулата за веројатност за унија на два настана е обопштена на унија од три настана со следнава формула:

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)$$
$$-p(BC)-p(AC)+p(ABC).$$

Општо, пресметувањето на веројатноста на унија од настани е посложено од пресметувањето на веројатност од производ (пресек) на настани. Во продолжение, ќе ја дадеме општата формула за пресметување на унија на n-настани, која уште се нарекува и Силвестерова формула.

Теорема 1. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се настани во просторот на веројатност (Ω,F, p). Тогаш:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)-\sum_{i<j}p(A_iA_j)+\sum_{i<k<k}p(A_iA_jA_k)$$
$$-...+(-1)^{n+1}p(A_1A_2A_3\cdot...\cdot A_n).$$

Доказ. Доказот ќе го изведеме со индукција по n. За $n=2$ тврдењето го имаме веќе докажано. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за фамилија од најмногу $n-1$ настани. Нека означиме:

$$B=\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i, \qquad C_i=A_i\cap A_n,\ i<n.$$

Сега користејќи ја индуктивната претпоставка, имаме:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=p(B\cup A_n)=p(B)+p(A_n)-p(B\cap A_n).$$

Бидејќи:

$$B\cap A_n=\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\cap A_n=\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)=\bigcup_{i=1}^{n-1}C_i,$$

имаме:

$$p(B)=\sum_{i<n}p(A_i)-\sum_{i<j<n}p(A_i\cap A_j)+...+(-1)^n p\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i\right),$$

од каде што:

$$p(B\cap A_n)=\sum_{i<n}p(C_i)-\sum_{i<j<n}p(C_i\cap C_j)+...+(-1)^n p\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}C_i\right)$$
$$=\sum_{i<n}p(A_i\cap A_n)-\sum_{i<j<n}p(A_i\cap A_j\cap A_n)+...$$
$$+(-1)^n p(A_1\cap A_2\cap...\cap A_n),$$

што и требаше да се докаже. ■

Пример 11. а) n-луѓе ги фрлаат своите шешири во воздух. Секој потоа го фатил првиот шешир на кој му бил најблиску. Која е веројатноста дека барем еден го добил својот шешир?

б) Еден збунет професор напишал n-писма, ги ставил во n-коверти (по едено писмо во коверт) и ги затворил ковертите. Потоа ги напишал адресите на ковертите. Колкава е веројатноста дека барем едно писмо отишло на права адреса?

Решение. И во двата случаја имаме идентитчен проблем, па ќе го дадеме решението само под б). Да означиме со:

$$A_i = \{ i\text{-тото писмо стигнало на права адреса} \}.$$

Очигледно е дека $p(A_i) = \dfrac{1}{n}$. Понатаму, за $i \neq j$ имаме,

$$p(A_i A_j) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Две писма ќе стигнат на точната адреса, ако се оствари една половина од $n \cdot (n-1)$-можности, на кои двете писма ќе бидат пратени. Слично,

$$p(A_i A_j A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \text{ за } i \neq j \neq k \neq i \quad \text{итн.}$$

Нека A е бараниот настан, т.е. $A = \{$барем едно писмо стигнало на правата адреса$\}$. Тогаш, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Од Силвестеровата формула, добиваме:

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_i p(A_i) - \sum_{i<j} p(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} p(A_i A_j A_k) - \dots \\ &= n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Оваа вредност, за конкретна вредност на пример за $n = 10$, горниот збир многу брзо тежи кон бројот:

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2,71828} = 0,632121, \text{ што е и бараната веројатност. } \blacklozenge$$

2.3. Бесконечен простор на веројатност

Давајќи ги својствата на веројатност, можеме да кажеме дека веќе имаме некоја елементарна претстава за просторот на веројатност, но, сепак, постојат многу прашања на кои допрва ќе треба да одговориме, дури и кога тие прашања се поврзани со многу едноставни веројатносни модели. На пример, ако фрламе паричка сѐ додека не се појави глава, колкава е веројатноста дека глава нема никогаш да се појави. Друг пример е да се најде веројатноста дека при случајно избран број од интервалот $[0,1]$ сме го избрале бројот $0,5$.

Она што можеме да го забележиме како заедничко својство во овие два примера е тоа дека множеството од сите елементарни настани Ω е бесконечно. Во првиот случај бројот на фрлања на паричката во кои глава може да се појави е кој било природен број, па елементарните настани се пребоиво многу. Во вториот пример, бројот на елементарни настани е непреброиво многу, бидејќи секој елементарен настан е определен со еден реален број од интервалот $[0,1]$.

Ако интуитивно размислуваме за веројатностите на овие настани, би можеле да заклучиме дека и во двата случаја веројатноста да се случат настаните е нула. Тоа би значело дека овие настани се невозможни, но „здравата логика“ ни кажува дека, сепак, овие настани можат да се случат. Всушност, од овие примери се гледа дека при разгледување на модели каде што просторот на елементарни настани е бесконечен имаме логички потешкотии. За да овие логички потешкотии бидат отстранети, мораме да бидеме прецизни во дефинирањето на својствата на алгебрата од настани и соодветните веројатности.

Овде алгебрата ќе ја прошириме на унија од пребороиво многу настани. Исто така, адитивноста ќе важи и за унија од дисјунктни настани. Па, ја имаме следнава претпоставка:

Ако множеството Ω е бесконечно, тогаш бараме алгебрата од елементарни настани F биде σ-алгебра, односно за неа да важи:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathrm{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathrm{F}.$$

Веројатноста p на σ-алгебрата F мора да го задоволува условот за σ-адитивноста (пребороива адитивност):

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n) \text{ , ако } A_n A_m = \varnothing \text{, за сите } n \neq m.$$

Од монотоноста на веројатноста знаеме дека важи:

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \Rightarrow p(A_1) \le p(A_2) \le ... \le p(A_n) .$$

Нека сега (A_n) е низа од растечки настани:

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ... .$$

Според условот за σ-адитивност, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ е елемент од алгебрата F. Овој настан го означуваме и како:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n .$$

Сосема природно е да очекуваме дека веројатноста на настаните A_n да тежи кон веројатноста на настанот A. Ќе покажеме дека овие тврдења се еквивалентни при услов σ-адитивност на веројатноста p.

Теорема 1. (Непрекинатост на веројатноста) Нека p е веројатност дефинирана на σ-алгебрата F. Веројатноста p е σ-адитивна ако и само ако важи:

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(A_n) = p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Доказ. Нека (A_n) е растечка низа од настани. Дефинираме:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ &\vdots \\ B_n &= A_n \setminus A_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Множествата $B_1, B_2, ...$ се дисјунктни и за секој $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n .$$

Следува: $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ако p е σ-адитивна, тогаш важи:

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_n) .$$

Од друга страна, имаме:

$$p(A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) .$$

Оттука,

$$\lim_{n\to\infty} p(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_n),$$

па, p е непрекината.

Сега, ќе ја покажеме обратната насока. Нека $B_1, B_2, \ldots$ е низа од дисјунктни настани. Ставаме:

$$A_1 = B_1,$$
$$A_2 = B_1 \cup B_2,$$
$$\vdots$$
$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n,$$
$$\vdots$$

Бидејќи $B_1, B_2, \ldots$ се дисјунктни настани, за секој $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$p(A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).$$

Со ова добивме низа (A_n) од растечки настани за кои важи:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Ако p е непрекината, тогаш важи:

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = p(A) = \lim_{n\to\infty} p(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(B_i),$$

па, веројатноста p е σ-адитивна. ■

Последица 1. Ако (A_n) е низа од опаѓачки настани и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, тогаш важи:

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} p(A_n).$$

Доказ. Ова тврдење е директна последица на горната теорема на настаните $\overline{A_n}$, кои формираат растечка низа од настани. ■

Да претпоставиме дека Ω е бесконечно преброиво множество, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Сега, алгебрата од сите настани ќе биде $\mathcal{F} = P(\Omega)$, односно множество од сите подмножества од Ω. За нејзе секогаш важи:

$$A \in \mathrm{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathrm{F},$$

така што F е σ-адитивна.

Веројатноста p на алгебрата F мора да го задоволува условот на преброива адитивност:

$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n), \text{ ако важи } A_n A_m = \varnothing, \text{ за сите } n \neq m.$$

Како и претходно, фунцкијата на веројатност е дадена, ако се дадени броевите $p_i = p(\omega_i) > 0$. Притоа,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = p(\Omega) - 1.$$

Но, сите елементарни настани ω_i, $i = 1, 2, \ldots$ не мораат де бидат еднакво веројатни, па овде класичната дефиниција за веројатност не функционира.

Пример 1. Паричка се фрла сѐ додека не се појави петка. Опиши го просторот на веројатност. Пресметај ја веројатноста на настаните:

а) $A =$ {петка се појавила во првите пет фрлања},

б) $B =$ {не се појавила петка воопшто}.

Решение. Множеството од сите елементарни настани е бесконечно и преброиво множество. Поточно, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, каде што:

$$\omega_1 = П,\quad \omega_2 = ГП,\quad \omega_3 = ГГП, \ldots, \omega_n = Г\ldots ГП, \ldots$$

со соодветни веројатности:

$$p(\omega_1) = \frac{1}{2},\ p(\omega_2) = \frac{1}{4},\ p(\omega_3) = \frac{1}{8},\ \ldots, p(\omega_n) = \frac{1}{2^n}, \ldots\ .$$

Да ги одредиме настаните A и B и нивните веројатности соодветно:

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \qquad p(A) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2^i} = \frac{31}{32}.$$

За да ја одредиме веројатнста на настанот B, најпрво ги дефинираме настаните:

$A_n =$ {петка се појавила во првите n фрлања},

$B_n =$ {петка не се појавила во првите n фрлања}.

Јасно, $B_n = \overline{A_n}$. Па,

$$p(A_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n},$$

$$p(B_n) = 1 - p(A_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Очигледно важи:

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots \text{ и } B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n .$$

Па, од непрекинатоста на веројатноста имаме:

$$p(B) = \lim_{n\to\infty} p(B_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 . \blacklozenge$$

Пример 2. Во една кутија се наоѓаат две бели и четири црни топчиња. Две момчиња извлекуваат случајно наизменично по едно топче. Победува оној кој прв ќе извлече бело топче. Опиши го просторот на веројатност. Најди ја веројатноста на следниве настани:

$A = \{$победило момчето кое прво извлекувало$\}$,

$B = \{$победило момчето кое второ извлекувало$\}$,

$C = \{$извлекувањето завршило во првите четири извлекувања$\}$

во секоја од следниве ситуации:

а) по извлекувањето топчињата се враќаат во кутијата и

б) извлечените топчиња не се враќаат во кутијата.

Решение.

а) Просторот на веројатност е бесконечен и преброив. Елементарните настани се сите конечни низи од обликот:

$$\omega_1 = Б,\ \omega_2 = ЦБ,\ \omega_3 = ЦЦБ,\ \ldots,\ \omega_n = \underbrace{ЦЦ\ldots Ц}_{n-1} Б,$$

со соодветни веројатности:

$$p(\omega_1) = \frac{1}{3},\ \ p(\omega_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3},\ \ p(\omega_3) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3},\ \ldots,\ p(\omega_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Веројатностите на настаните A, B и C се:

$$p(A) = p(\omega_1 + \omega_3 + \omega_5 + \ldots) = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5},$$

$$p(B) = 1 - p(A) = \frac{2}{5},$$

$$p(C) = p(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{65}{81}.$$

б) Во овој случај просторот на веројатност е конечен. Тој се состои од следниве елементарни настани:

$$\omega_1 = Б, \quad \omega_2 = ЦБ, \quad \omega_3 = ЦЦБ, \quad \omega_4 = ЦЦЦБ, \quad \omega_5 = ЦЦЦЦБ,$$

со соодветни веројатности:

$$p(\omega_1) = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}, \qquad p(\omega_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15},$$

$$p(\omega_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{15},$$

$$p(\omega_4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}, \qquad p(\omega_5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{15}.$$

Според тоа, веројатностите за настаните A, B и C се:

$$p(A) = p(\omega_1 + \omega_3 + \omega_5) = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{5},$$

$$p(B) = 1 - p(A) = \frac{2}{5},$$

$$p(C) = 1 - p(\omega_5) = \frac{14}{15}. \ ♦$$

Пример 3. Нека $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ и $p(\{\omega_n\}) = c \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$, $n = 1, 2, ...$. Одреди ја вредноста на константата c.

Решение. Овде ќе го искористиме својството на веројатноста дека $p(\Omega) = 1$. Од условот на задачата, добиваме:

$$p(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} p(\{\omega_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n = c \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + ... + \left(\frac{4}{5}\right)^n + ...\right)$$

$$= c \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 4c.$$

Сега, од $4c = 1$, добиваме дека: $c = \frac{1}{4}$. ♦

2.4. Геометриска веројатност

Мал проблем кога зброуваме за дефинирањето на веројатноста во недискретен простор се појавува кога Ω е бесконечно и непреброиво множество. Да го разгледаме следниов пример.

Пример 1. Ана замислила некој број од интервалот $[0,1]$. Благица треба да го погоди бројот кој го замислила Ана. Колкава е веројатноста дека Благица ќе го погоди бројот кој го замислила Ана?

Решение. Веројатноста Благица дека ќе го погоди бројот кој го замислила Ана е нула. Меѓутоа, од тоа што досега го знаеме за веројатноста, ако веројатноста на еден настан е 0, тоа значи дека овој настан е невозможен. Но, сепак, овој настан не е невозможен. Па, како го објаснуваме ова? Бидејќи просторот на сите елементарни настани е непребоиво множество, додека множеството од настани кое доведува до реализиацијa на настанот: „Благица го погодила бројот кој го замислила Ана" има само еден елемент, односно конечно множество, веројатноста е нула. Ова можеме да го погледнеме и од агол на изведување на експеримент: Нека експериментот се состои во погаѓање на бројот кој го замислила Ана. Нека тој експеримент се повторува 10^9 пати. Нека бројот кој го замислила Ана е $0,21532602$. Во сите тие една милијарда на погаѓања, Благица бројот кој го замислила Ана може да се случи да го погоди еднаш или ниеднаш (што е многу поверојатно), па веројатноста дека бројот ќе биде погоден е многу мала. Дополнително, таа ќе биде многу помала ако го зголемиме бројот на експерименти, односно бројот на погаѓања на Благица. Значи, со зголемување на бројот на погаѓања на Благица, веројатноста ќе станува сѐ помала и помала. Интуитивно е јасно дека за непреброиви множества, кога оваа граница би конвергирала, таа би конвергирала кон 0. ♦

Од ова можеме да заклучиме дека единствен модел кој би можел да функционира во недискретен случај е на секој елементарен настан да му се додели веројатност 0. Од друга страна, при повторувањето на ваков тип експерименти се случуваат елементарни настани, па логично каде е веројатноста? Решението на оваа ситуација е (ненулта) веројатност да се доделува на области, а не на поединечни настани. Но, ако еден интервал има ненулта веројатност, а секој број (елементарен настан) во него има веројатност 0, дали во оваа ситуација би имале проблем со третата аксиома на веројатност? Но, третата аксиома вели дека веројатноста на пребоива сума од дисјунктни настани е еднаква на сумата од нивните поединечни веројатности. Во оваа аксиома нема никакво тврдење што се случува со непребоива сума на дисјунктни настани (како што се реалните броеви во интервалите). Во вакви случаи, непреброивоста многу често води кон случаи спротивни на интуицијата. Да напомeнеме дека за непреброивите множества од елементарни настани, дефинирањето на конзистентна мера (како што е веројатноста) на сите подмножества не е можно. Поради ова, се испуштаат дел од подножествата на кој се дефинира веројатноста, односно се дефинира σ-алгебра.

Ќе ја воведеме геометриската веројатност како пандан на класичниот простор на веројатност, во непрекинат простор на веројатност. Нека Ω е бесконечно и непреброиво множество и претставува некој геометриски објект. Тоа може да биде реалната оска ако Ω е еднодимензионален геометриски објект; може да биде рамнината ако станува збор за дводимензионален објект; просторот ако станува збор за тродименизионален објект и најопшто да биде просторот $\mathbb{R}^n$ ако станува збор за n-димензионален објект.

Дефиниција 1. Нека $A \subseteq \Omega$. Геометриската веројатност на A е бројот $p(A)$, каде што:

$$p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

каде што со $m(\cdot)$, означуваме мера на множество.

Поимот мера во математичката анализа е еден од централните поими. Да забележиме дека мера не може да се дефинира на секое множество и за тоа како се дефинира постојат одредени правила. Во случаите со кои ние ќе работиме под мера ќе подразбираме должина, ако множеството е еднодимензионално, плоштина, ако множеството е дводимензионално, волумен ако множеството е тридимензионално.

Во продолжение ќе дадеме неколку примери, како би го илсутрирале претходно изложеното.

Пример 2. Избираме случајно точка во внатрешноста на квадрат со страна со должина a. Колкава е веројатноста таа точка да падне во внатрешноста на кругот кој е впишан во тој квадрат?

Решение. Нека со A го означиме настанот „избраната точка е во внатрешноста на кругот“, а со Ω да го означиме множеството од сите елементарни настани во овој случај. Плоштината на квадратот е $m(\Omega) = a^2$, додека плоштината на кругот е:

$$m(A) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{a^2}{4}\pi .$$

Во согласност со ова, бараната веројатност на настанот A е:

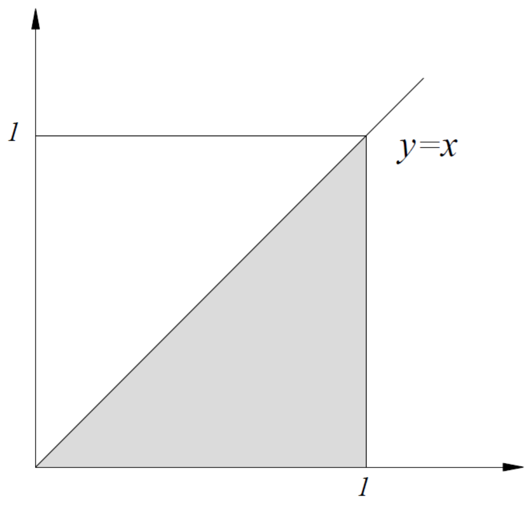
$$p(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\frac{a^2}{4}\pi}{a^2}=\frac{\pi}{4}. \ \blacklozenge$$

Пример 3. Во интервалот $[0,1]$ случајно се избираат два броја x и y. Најди ја веројатноста на случајните настани:

а) $A=\{x>y\}$ б) $B=\{x+y<\frac{3}{2}\}$ в) $C=\{x=y\}$.

Решение. Изборот на два броја x и y во внатрешноста на интервалот $[0,1]$, одговара на избор на една точка (x,y) во единечниот квадрат $[0,1]\times[0,1]$. Тој квадрат е, всушност, множеството на сите елементарни настани и ќе го означиме со Ω. За да ја одредиме веројатноста на секое од барањата, мора да ја пресметаме плоштината на подмножествата од Ω, кои одговараат на овие настани.

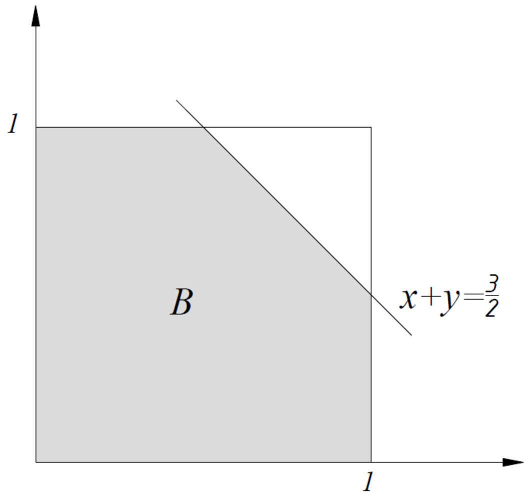
а) Нека со A го означиме и истоименото подмножество: множество од сите точки од единечниот квадрат за кои $x>y$.



Тогаш, имаме:

$$p(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{1}{2}\ .$$

б) Нека: $B=\{(x,y): x+y<\frac{3}{2}\}$.



Имаме:

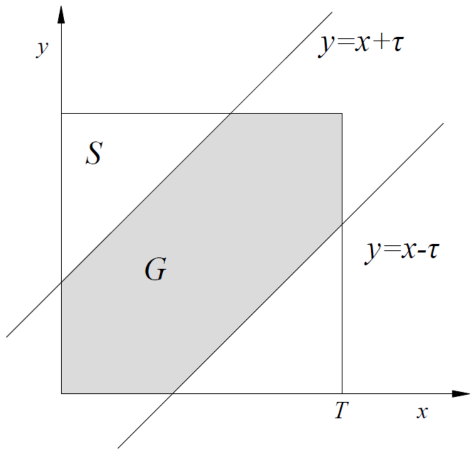
$$p(B)=\frac{m(B)}{m(\Omega)}=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1}=\frac{7}{8}.$$

в) Множеството од сите точки (x,y) за кои $x=y$ е дијагоналата на квадратот. Плоштината на тоа множество е 0. Затоа и $p(C)=0$. ♦

Забелешка. Овој проблем е ист како проблемот: да се најде веројатноста дека два случајно избрани броја во интервалот $[0,1]$ ќе бидат еднакви. Оваа веројатност е нула. Како што дискутиравме претходно, тоа не значи дека овој настан е невозможен, бидејќи во непреброив простор на веројатност се разликуваат поимите на невозможен настан и настан со веројатност нула. Како последица на оваа дискусија, настаните $\{x<y\}$ и $\{x\le y\}$ имаат еднаква веројатност.

Пример 4. Моментот во кој даден сигнал ќе стигне до приемникот е случајно избрано време кое се наоѓа во интервалот $[0,T]$. Приемникот нема да регистрира втор сигнал, доколку временската разлика помеѓу два последователни сигнала е помала од t, каде што $0<t<T$. Одреди ја веројатноста дека приемникот нема да регистрира втор сигнал.

Решение. Ако x е времето на прием на првиот сигнал, а y е времето на прием на вториот сигнал. Тогаш вториот сигнал нема да биде регистриран ако $|x-y|<t$. Вредностите x и y се случајни броеви во интервалот $[0,T]$.

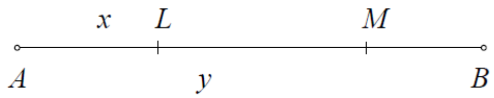


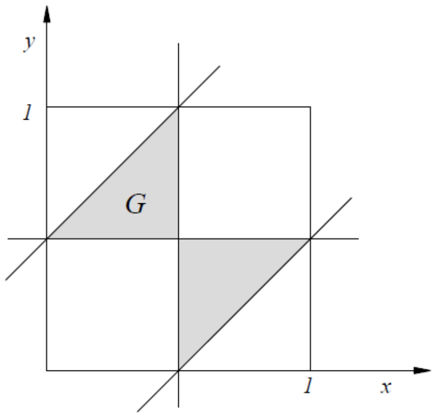
Тогаш,

$$p\{|x-y|<t\}=p\{x-t<y<x+t\}=p\{(x,y)\in G\}$$
$$=\frac{m(G)}{m(\Omega)}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}\,.\ \blacklozenge$$

Пример 5. Во внатрешноста на интервалот $[0,1]$ случајно се избрани две точки кои го делат на три дела. Колкава е веројатноста дека од тие делови може да се состави триаголник?

Решение. Нека ги означиме со x и y должините на отсечките $\overline{AL}$ и $\overline{AM}$.





Постојат две можности:

а) Нека $x<y$. Тогаш должините на отсечките се: x, $y-x$ и $1-y$. За да од нив може да се состави триаголник, мора секоја од нив да биде помала

од збирот на должините на останатите две отсечки, односно мора да биде помала од $\frac{1}{2}$. Тогаш добиваме:

$$x < \frac{1}{2}, \qquad y - x < \frac{1}{2},$$
$$1 - y < \frac{1}{2}.$$

б) Нека $y > x$. Тогаш должините на отсечките се y, $x - y$ и $1 - x$. Па, ги добиваме во согласност со дискусијата под а), следниве услови:

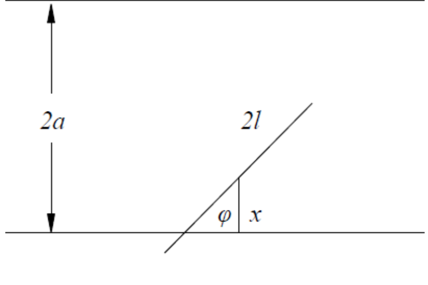
$$y < \frac{1}{2}, \qquad x - y < \frac{1}{2},$$
$$1 - x < \frac{1}{2}.$$

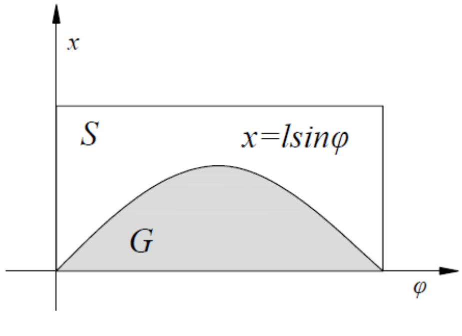
Овие услови ја одредуваат областа G. Па,

$$p = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{1}{4}. \blacklozenge$$

Пример 6. (Buffon-ов проблем) Рамнината е поделена со паралелни прави кои се на меѓусебно растојание $2a$. На таа рамнина случајно се фрла игла со должина $2l$, каде што $l < a$. Пресметај ја веројатноста иглата да пресекува некоја од правите.

Решение. Нека со x ја означиме оддалеченоста на средината на иглата до најблиската права, а со φ го означуваме помалиот агол кој иглата го зафаќа со таа права. Фрлањето на иглата случајно, всушност, значи дека се избираат x и φ случајно од интервалите $[0, a]$ и $[0, \pi]$, соодветно, независно една од друга. Положбата на иглата е еднозначно определена со изборот на парот (x, φ).





Парот (x,φ) го избираме од внатрешноста на правоаголникот S. Иглата ќе ја сече правата ако $x < l\sin\varphi$. Нека:

$$G = \{(x,\varphi) : x < l\sin\varphi\}.$$

Тогаш, имаме:

$$p = \frac{m(G)}{m(\Omega)} = \frac{\int_0^{\pi} l\sin\varphi \, d\varphi}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}. \quad \blacklozenge$$

Забелешка. Користејќи го овој резултат, повеќе математичари се обиделе да го пресметаат бројот π. Навистина, од овој резултат можеме да го изразиме бројот π, односно $\pi = \dfrac{2l}{ap}$. При голем број на фрлања, веројатноста p може да се апроксимира со релативната фрекфенција. Така се добива дека $\pi \approx \dfrac{2l \cdot \mathrm{n}}{am}$, каде што n е бројот на фрлања на иглата, додека m е бројот на тоа колку пати иглата сечела некоја од правите.

2.5. Решени задачи

Задача 1. Горан на една хомогена коцка за играње избришал една точка на страната на коцката на која имало пет точки, а доцртал две точки на страната на коцката која имало една точка, па така новодобиената коцка ги имала следниве броеви на страните: $2,3,3,4,4,6$. Која е вредноста на следниве настани, ако ја фрламе оваа коцка:

$A = \{$се појавил парен број$\}$,

$B = \{$се појавил број поголем од $2\}$,

$C = \{$се појавил бројот $5\}$.

Решение. Фрлањето на коцката има четири можни исхода:

$$\omega_1 = 2,\ \omega_2 = 3,\ \omega_3 = 4,\ \omega_4 = 6.$$

Бидејќи коцката е хомогена, тогаш секој од горните настани ги има веројатностите:

$$p_1 = p(\{\omega_1\}) = \frac{1}{6}, \quad p_2 = p(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3},$$

$$p_3 = p(\{\omega_3\}) = \frac{1}{3}, \quad p_4 = p(\{\omega_4\}) = \frac{1}{6}.$$

Многу важна забелешка овде е тоа дека овие вредности не можеме математички да ги докажеме. Ние овие вредности на елементарните настани можеме да ги зададеме по сопствена волја, а со тоа и добиваме математички модел за фрлање на овие коцки. Но, ако распределбата на веројатностите ги избереме на овој начин, ќе можеме да очекуваме дека моделот е добар и дека ќе добиеме добар опис на фрлањето на оваа коцка.

На настанот A одговараат следниве елементарни настани: $A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}$, па:

$$p(A)=p_1+p_3+p_4=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

На настанот B одговараат следниве елементарните настани: $B=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, па:

$$p(B)=p_2+p_3+p_4=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

Веројатноста на спротивниот настан на настанот B, односно $\overline{B}=\{\omega_1\}$ е:

$$p(B)=1-p(\overline{B})=1-p_1=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

Настанот C за оваа коцка е невозможен, односно: $p(C)=0$.

Задача 2. Случајно е избран некој природен број. Определи ја веројатноста последните две цифри на неговиот квадрат да бидат 11.

Решение. Веројатноста на овој настан е 0, бидејќи квадратот на ниту еден природен број не завршува на 11.

Задача 3. Имаме 5 отсечки со должини $2,4,5,7,9$. Одреди ја веројатноста да од три случајно избрани отсечки од дадените отсечки се конструира триаголник.

Решение. Бројот на сите елементарни настани во овој проблем е: $|\Omega|=\binom{5}{3}=10$. Нека со A го означиме настанот: од избраните отсечки може да се формира триаголник. Следниве триаголници можат да се формираат од дадените отсечки (за да се формира триаголник за должините на избраните отсечки a,b,c мора да важи:

$$a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b):$$

$$2,4,5;\ \ 4,5,7;\ \ 5,7,9;\ \ 4,7,9,$$

па: $|A|=4$. За веројатноста на настанот A, имаме дека:

$$p(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

Задача 4. Во една кутија се наоѓаат идентични по форма k бели, k сини и k црвени топчиња.Одреди ја веројатноста во првите две извлекувања да се извлечат две сини топчиња.

Решение. Нека со A го означиме настанот дека се извлечени две сини топчиња во првите две извлекувања, а со Ω го означиме просторот од сите елементарни настани. Тогаш имаме: $|\Omega|=\binom{3k}{2}$ и $|A|=\binom{k}{2}$. Оттука,

$$p(A)=\frac{\binom{k}{2}}{\binom{3k}{2}}.$$

Задача 5. Во блок од 10 влезници за фудбалски натпревар има 5 карти по 100 денари, 3 карти по 300 денари и 2 карти по 500 денари. Колкава е веројатноста ако случајно се извлечат три карти така што:

а) барем две извлечени карти имаат иста вредност,

б) вредноста на сите три извлечени карти имаат иста вредност.

Решение.

а) Нека со A го означиме настанот: барем две карти имаат иста вредност. Ќе ја пресметаме веројатноста на настанот $\overline{A}$. Таа е:

$$p(\overline{A})=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{4},$$

па, веројатноста на настанот A е:

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75\ .$$

б) Нека со B го означиме настанот: вредноста на сите три извлечени карти изнесува 700 денари. Вредноста на сите три извлечени карти може да се постигне ако имаме две карти по 300 денари и една карта по 100 денари или со една карта од 500 денари и две карти од 100 денари. Во согласност со ова, за веројатноста на настанот B, имаме:

$$p(B)=\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}+\frac{\binom{2}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{15}{120}+\frac{20}{120}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}.$$

Задача 6. Најди ја веројатноста дека случајно избран четирицифрен број со различни цифри, формиран од цифрите $0,1,3,5,7,8$ не е делив со 18.

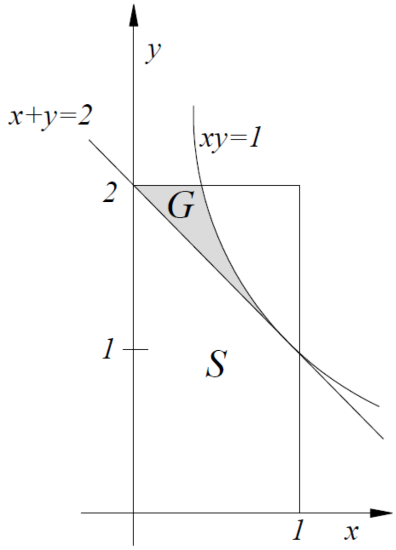
Решение. За просторот на сите елементарни настани имаме дека $|\Omega|=V_5^1\cdot V_5^3=5\cdot\dfrac{5!}{(5-3)!}=5\cdot 60=300$. Нека со A го означиме настанот: четирицифрениот број со различни цифри формиран со горните цифри не е делив со 18. Ќе ја најдеме веројатноста на $\bar{A}$. Нека четирицифрениот број го означиме со $\overline{abcd}$. За да $18\,|\,\overline{abcd}$, мора $2\,|\,\overline{abcd}$, па $d\in\{0,8\}$. Ако $d=0$, тогаш $a,b,c\in\{1,3,5,7,8\}$ и имајќи предвид дека $9\,|\,\overline{abcd}$, мора $9\,|\,(a+b+c+0)$. Ова е можно само ако $\overline{abcd}\in\{3580,3850,5830,5380,8350,8530\}$. Ако $d=8$, тогаш: $a,b,c\in\{0,1,3,5,7\}$, при што $a\neq 0$. Во овој случај мора $9\,|\,\overline{abcd}$, па мора $9\,|\,(a+b+c+8)$. Ова е можно само ако: $\overline{abcd}\in\{3078,3708,7038,7308\}$. Во согласност со претходната дискусија, имаме дека: $|\bar{A}|=10$. Сега, $p(\bar{A})=\dfrac{10}{300}=\dfrac{1}{3}$, од каде што:

$$p(A)=1-p(\bar{A})=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}\approx 0,9667.$$

Задача 7. Случајно се избира број x од интервалот $[0,1]$, а потоа се избира втор број y од интервалот $[0,2]$. Пресметај ја веројатноста дека збирот $x+y$ е поголем од 2, а производот е помал од 1.

Решение. За бараната веројатност имаме:

$$p=p\{x+y>2,\ xy<1\}=p\{(x,y)\in G\}=\frac{m(G)}{m(S)}.$$



Па,

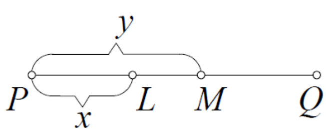
$$m(G) = \int_1^2 \left(\frac{1}{y} - 2 + y \right) dy = \left(\ln y - 2y + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

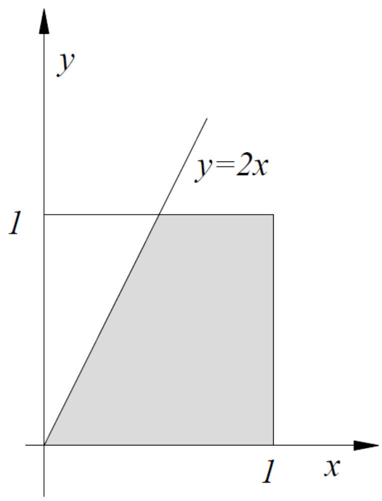
Оттука,

$$p = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} = 0,097 .$$

Задача 8. На отсечката $\overline{PQ}$ со должина 1 случајно се избираат две точки L и M. Најди ја веројатноста дека точката L е поблиска до точката M отколку до точката P.

Решение.





Нека означиме $x = d(P, L)$ и $y = d(P, M)$. Тогаш, $d(L, M) = | y - x |$. На бараниот настан му одговара множеството од точки (x, y) за кои важи $| y - x | < x$, односно:

$$-x < y - x < x,$$

што е еквивалентно со: $0 < y < 2x$. Па,

$$p\{d(L,M) < d(P,L)\} = p\{| y - x | < x\} = p\{0 < y < 2x\}$$

$$= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{4}.$$

Задача 9. Во внатрешноста на отсечката со должина $a = 5$ см, случајно се избрани две точки. Пресметај ја веројатноста дека секоја од трите новодобиени отсечки е пократка од $b = 2$ см.

Решение. Нека со x ја означиме должината на првата отсечка, а со y должината на третиот дел.

Изборот на двете точки L и M одговара на изборот на една точка со координати (x, y) во внатрешноста на областа:

$$\{(x, y) : x > 0, y > 0, \ x + y < a\}.$$

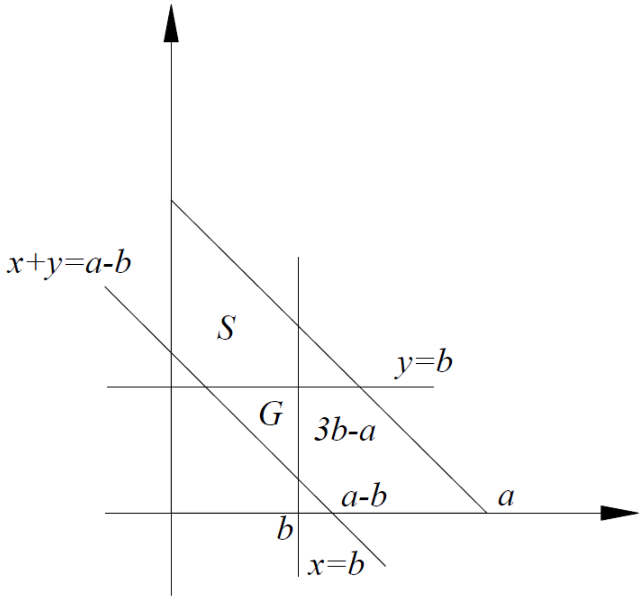
Ја бараме веројатноста на настанот:

$$G = \{0 < x < b, 0 < y < b, a - b < x + y < a\}.$$

Разликуваме два случаја:

а) $b < \frac{a}{2}$. Тогаш,

$$p(G) = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{(3b - a)^2}{a^2}.$$



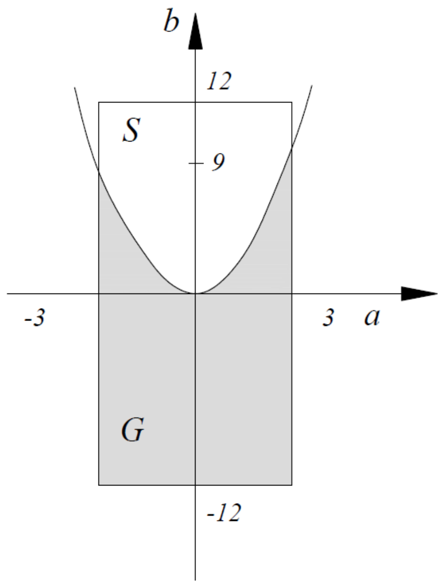
б) $b > \frac{a}{2}$. Имаме:

$$p(G) = \frac{b^2 - \frac{1}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{2}(2b-a)^2}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{6ab - 2a^2 - 3b^2}{a^2}.$$

Па, во конкретниот случај, $a = 5$, $b = 2$, имаме: $p(G) = \frac{1}{25}$.

Задача 10. Најди ја веројатноста дека корените на квадратната равенка $x^2 + 2ax + b = 0$ се реални, ако еднакво веројатни се вредностите за коефициентите $|a| < 3$, $|b| < 12$.

Решение.



Имајќи ги предвид условите на задачата, множеството од сите елементарни настани е:

$$S = \{(a,b) : -3 < a < 3, -12 < b < 12\}.$$

За да корените бидат реални, мора да важи: $4a^2 - 4b \geq 0$, односно $b \leq a^2$.

Имаме,

$$m(G) = \int_{-3}^{3} da \int_{-12}^{a^2} db = 90.$$

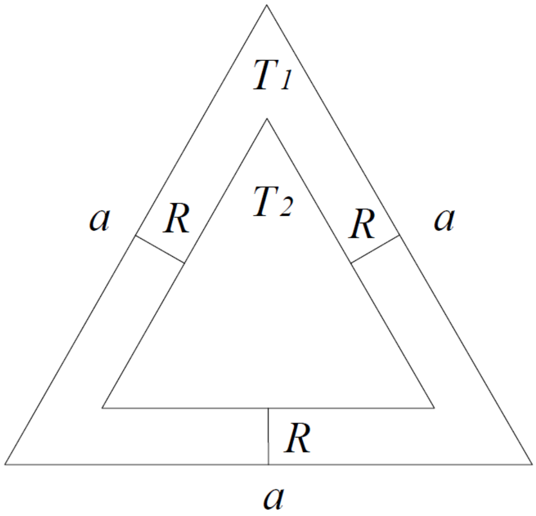
Па,

$$p\{b \leq a^2\} = p\{(a,b) \in G\} = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{90}{144} = \frac{5}{8}.$$

Задача 11. На под составен од рамнострани триаголници со страна a, случајно се фрла монета со страна R. Најди ја веројатноста дека монетата не ја сече границата на ниеден од триаголниците.

Решение. Нека го означиме со O центарот на монетата. Множеството од сите елементарни настани се состои од сите точки на рамностраниот триаголник T_1 со страна a, настанот A кој е даден со: монетата не ја сече границата на ниту еден од триаголниците, се реализира кога центарот на монетата ќе падне во рамностраниот триаголник T_2 кој се наоѓа во рамностраниот триаголник T_1, на растојание R од неговите страни. Настанот

A (геометриски) се состои од сите точки во внатрешниот триаголник T_2, чија страна изнесува: $a_1 = a - 2R\sqrt{3}$.



Сега, бидејќи:

$$|\Omega| = m(T_1) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

и:

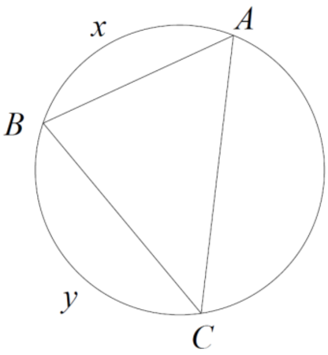
$$|A| = m(T_2) = \frac{(a-2R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

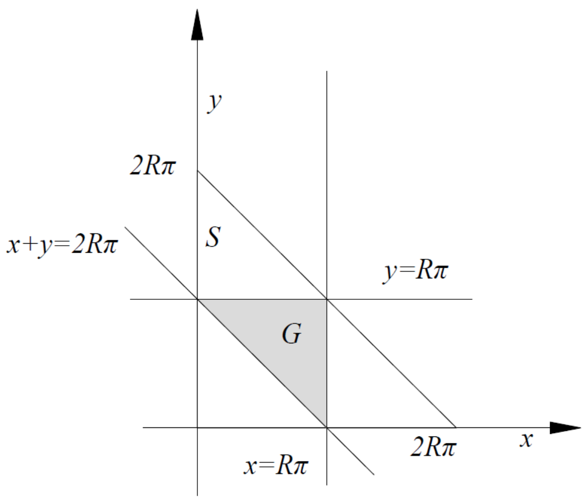
За веројатноста на настанот A, имаме:

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(a-2R\sqrt{3})^2}{a^2}.$$

Задача 12. На кружница со радиус R, случајно се избрани три точки A, B и C. Најди ја веројатноста да такадобиениот триаголник е остроаголен.

Решение.





Можеме да претпоставиме дека положбата на точката A на кружницата е фиксна. Со x ја означуваме должината на лакот AB, а со y ја означуваме должината на лакот BC. Со изборот на точките B и C, еднозначно се одредени броевите x и y, за кои важи:

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 2R\pi .$$

Со овие неравенства е определен просторот од сите елементарни настани S. Обратно, изборот на кои било точки $(x, y) \in S$, еднозначно ги определува точките B и C. Триаголникот ќе биде остроаголен ако важи:

$$x < R\pi, \quad y < R\pi, \quad x + y > R\pi .$$

Со овие услови е определена областа G. Па, бараната веројатност е:

$$p = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{\frac{1}{2}R^2\pi^2}{2R^2\pi^2} = \frac{1}{4} .$$

3. Условна веројатност

3.1. Условна веројатност

Многу често се јавува потребата за пресметка на веројатност за настанување на некој настан B, кога веќе се знае дека се случил претходно некој друг настан A. Не би било правилно да сметаме дека веројатноста за настанување на настанот B е иста каква што би била кога би требало да биде кога би ја гледале веројатноста за настанување само на настанот B, односно дека настанувањето на настанот A не влијае на настанувањето на настанот B. На пример, при фрлање на една коцка, веројатноста да се појави бројот 6 е еднаква на $\frac{1}{6}$. По фрлањето на коцката, ние со сигурност знаеме дали тој настан се реализирал или не. Но, да претпоставиме дека некој видел кој број се појавил на коцката и рекол: на коцката се паднал парен број. Колкава е веројатноста дека на неа се појавил бројот 6? Јасно е дека оваа веројатност сега е променета, односно таа веројатност е сега $\frac{1}{3}$. Друг пример е фрлањето на две коцки. Нека ги разгледаме настаните A и B со $A=\{$на првата коцка се паднал бројот $2\}$, $B=\{$збирот на броевите на двете коцки е $6\}$. Од вкупно 36 елементарни настани, настаните A и B се дадени со:

$$A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

$$B=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

Па, имаме:

$$p(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \text{ и } p(B)=\frac{5}{36}.$$

Колкава е веројатноста на настанот A, ако се знае дека се реализирал настанот B? Во овој случај, доволно е да се разгледаат елементарните настани кои доведуваат до реализација на настанот B и помеѓу нив се бараат оние кои доведуваат до настанување на настанот A. Со ова ги бараме елементарните настани кои доведуваат до реализација на производот на настаните A и B, односно AB. Оваа веројатност зависи од настанот B, па нејзе ќе ја нарекуваме условна веројатност и ќе ја означуваме со $p(A|B)$. Ќе ја читаме: веројатност на настанот A при услов B, или веројатност за настанување на настанот A, ако знаеме дека претходно се случил настанот B. Да забележиме дека во некои книги се користи и алтернативна ознака за

$p(A\,|\,B)$, а таа е $p_B(A)$. Во нашиов случај, имаме дека: $p(A\,|\,B)=\frac{1}{5}$, бидејќи само елементарниот настан $(2,4)$ е поволен за настанување на настанот A. За да дојдеме до формулата за условна веројатност, да забележиме дека во броителот се наоѓа бројот на сите елементарни настани кои доведуваат до реализација на настанот A и настанот B. Од претходната дискусија, $AB=\{(2,4)\}$. Па, според ова:

$$p(A\,|\,B)=\frac{1}{5}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{p(AB)}{p(B)}.$$

Дефиниција 1. Нека $B\in \mathrm{F}$, $p(B)>0$. Условна веројатност при услов B е функција $p(\cdot\,|\,B):\mathrm{F}\to[0,1]$, дефинирана со формулата:

$$p(A\,|\,B)=\frac{p(AB)}{p(B)},\qquad \forall A\in \mathrm{F}.$$

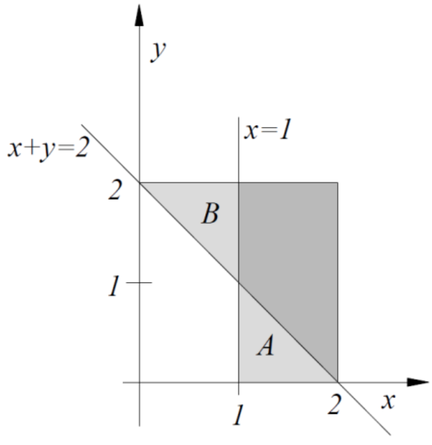
Со горнава формула, е добро дефинирана функција на веројатност. Навистина,

$$p(\Omega\,|\,B)=\frac{p(B\Omega)}{p(B)}=\frac{p(B)}{p(B)}=1.$$

Слично важи и за $p(\varnothing)$, за монотоноста и адитивноста.

Пример 1. Два броја x и y се случајно избрани од интервалот $[0,2]$. Колкава е веројатноста дека $x>1$, ако е познато дека важи: $x+y>2$?

Решение. Нека означиме: $A=\{x>1\}$ и $B=\{x+y>2\}$. Во согласност со барањата на задачата, треба да определиме: $p(A\,|\,B)$.



Точка со координати (x, y) е случајно избрана во квадрат Ω, со страна 2. Ќе ги пресметаме веројатностите на настаните B и AB:

$$p(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$p(AB) = \frac{m(AB)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}.$$

Па,

$$p(A \mid B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}. \ \blacklozenge$$

Веројатноста на производот на настаните AB се пресметува со формулата:

$$p(AB) = p(B) p(A \mid B).$$

Ако ги замениме улогите на настаните A и B (двата настани имаат позитивна веројатност), ја добиваме формулата:

$$p(AB) = p(A) p(B \mid A).$$

Пример 2. Нека настаните A и B се произволни настани, при што $p(A) > 0$. Докажи дека: $p(\overline{B} \mid A) = 1 - p(B \mid A)$.

Решение. Да забележиме дека за настаните A и B важи: $A = A\overline{B} + AB$, па $p(A) = p(A\overline{B}) + p(AB)$. Сега, имаме:

$$p(\overline{B} \mid A) = \frac{p(A\overline{B})}{p(A)} = \frac{p(A) - p(AB)}{p(A)}$$

$$= \frac{p(A)}{p(A)} - \frac{p(AB)}{p(A)} = 1 - p(B \mid A). \ \blacklozenge$$

Пример 3. Во една кутија се наоѓаат шест бели и четири црни топчиња. Колкава е веројатноста дека првите две топчиња кои ќе ги извлечеме ќе бидат бели? Извлекувањето е едно по едно топче.

Решение. Нека A и B се настани дефинирани на следниов начин:

$$A = \{\text{првото извлечено топче е бело}\},$$

$$B = \{\text{второто извлечено топче е бело}\}.$$

Тогаш веројатноста на настанот AB е онаа веројатност која се бара. Очигледно е дека: $p(A) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

По извлекувањето на првото топче, во кутијата останале девет топчиња, од кои пет се бели. Според тоа, $p(B \mid A) = \frac{5}{9}$, па имаме:

$$p(AB) = p(A)p(B \mid A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} . \blacklozenge$$

Слично, може да се пресметува и веројатноста на производот на повеќе настани. На пример,

$$p(ABC) = p(A)p(B \mid A)p(C \mid AB) .$$

Да забележиме дека комбинацијата на множителите на десната страна, не е еднозначно определена и многу често зависи од проблемот кој го решаваме.

Пример 4. Колкава е веројатноста дека три случајно избрани карти една по друга од шпил од 52 карти, имаат знак срце?

Решение. Нека со A го означиме настанот чија веројатност се бара и нека со A_i ги означиме настаните A_i, каде A_i ={извлечената i-та карта има знак срце}, $i = 1, 2, 3$. Според условот на задачата имаме $A = A_1 A_2 A_3$, па:

$$p(A) = p(A_1)p(A_2 \mid A_1)p(A_3 \mid A_1 A_2) .$$

Поединечните веројатности се:

$p(A_1) = \frac{13}{52}$, бидејќи во шпилот има 13 карти со знак срце;

$p(A_2 \mid A_1) = \frac{12}{51}$, бидејќи по извлекувањето на првата карта остануваат 51 карта, од кои 12 имаат знак срце;

$p(A_3 \mid A_1 A_2) = \frac{11}{50}$, бидејќи по извлекувањето на втората карта остануваат 50 карти, од кои 11 имаат знак срце.

Конечно,

$$p(A) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = 0,013 . \blacklozenge$$

Пример 5. Еден студент треба да одговара на 25 прашања, од кои тој знае 20. Тој случајно извлекува три прашања. Која е веројатноста дека студентот го положил испитот, ако се знае дека испитот се смета за положен ако студентот одговори точно на најмалку две прашања?

Решение. Нека со A го означиме настанот: студентот го положил испитот, а со A_i го означиме настанот: студентот одговорил точно на i-тото извлечено прашање, каде што $i=1,2,3$. Од условот во формулацијата имаме: $A = A_1A_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$.

Сега,

$$p(A_1A_2A_3) = p(A_1)\cdot p(A_2 \mid A_1)\cdot p(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23},$$

$$p(A_1A_2\overline{A}_3) = p(A_1)\cdot p(A_2 \mid A_1)\cdot p(\overline{A}_3 \mid A_1A_2) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{5}{23},$$

$$p(A_1\overline{A}_2A_3) = p(A_1)\cdot p(\overline{A}_2 \mid A_1)\cdot p(A_3 \mid A_1\overline{A}_2) = \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{19}{23},$$

$$p(\overline{A}_1A_2A_3) = p(\overline{A}_1)\cdot p(A_2 \mid \overline{A}_1)\cdot p(A_3 \mid \overline{A}_1A_2) = \frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\cdot\frac{19}{23}.$$

Па, за веројатноста на настанот A, добиваме:

$$P(A) = p(A_1A_2A_3) + p(A_1A_2\overline{A}_3) + p(A_1\overline{A}_2A_3) + p(\overline{A}_1A_2A_3) \approx 0,909\,.\ \blacklozenge$$

Во продолжение, ќе разгледаме независност на настани. Да го разгледаме следниов пример:

Пример 6. Во една кутија се наоѓаат шест бели и четири црни топчиња. Извлекуваме едно по едно, две топчиња. Колкава е веројатноста дека второто извлечено топче ќе биде бело, ако првото извлечено топче е бело? Колкава е веројатноста ако првото извлечено топче е црно? Да се пресметаат овие две веројатности во следниве две ситуации:

а) првото топче по извлекувањето не се враќа во кутијата;

б) првото топче по извлекувањето се враќа во кутијата.

Решение. Да ги означиме настаните со A и B:

$A=$ {првото извлечено топче е бело};

$B=$ {второто извлечено топче е бело}.

Во нашиов случај се бараат условните веројатности $p(B\,|\,A)$ и $p(B\,|\,\overline{A})$. Очигледно,

$$p(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad p(\overline{A}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

а) По извлекувањето на првото топче, во кутијата има едно топче помалку. Па,

$$p(B\,|\,A) = \frac{5}{9}, \qquad p(B\,|\,\overline{A}) = \frac{6}{9}.$$

б) Ако топчето по извлекувањето се враќа назад во кутијата, пред извлекувањето на втората кутија ја имаме истата ситуација како на почетокот:

шест бели и четири црни топчиња, без никакво влијание дали се реализирал или не се реализирал настанот A. Имаме:

$$p(B \mid A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad p(B \mid \overline{A}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}. \blacklozenge$$

Од последниот пример, од ситуацијата б), реализацијата на настанот A, не влијае на реализацијата на настанот B. Всушност, овие примери нѐ наведуваат да го воведеме терминот независнот на настани.

Нека настаните A и B имаат позитивна веројатност. Нека $p(B \mid A) = p(B)$, т.е. веројатноста на настанот B не се менува, по реализацијата на настанот A. Тогаш велиме за настаните A и B дека се независни настани.

Во овој случај важи:

$$p(AB) = p(A)p(B \mid A) = p(A)p(B).$$

Обратно, ако е исполнето последното равенство имаме:

$$p(B \mid A) = \frac{p(AB)}{p(A)} = \frac{p(A)p(B)}{p(A)} = p(B)$$

$$p(A \mid B) = \frac{p(AB)}{p(B)} = \frac{p(A)p(B)}{p(B)} = p(A).$$

Дефиниција 2. За настаните A и B велиме дека се независни ако важи кое било од равенствата: $p(A \mid B) = p(A)$ или $p(B \mid A) = p(B)$.

Од претходната дискусија потребен и доволен услов за независност на настаните A и B е:

$$p(AB) = p(A)p(B).$$

Пример 7. Ако настаните A и B се независни, тогаш и нивните комплементарни настани $\overline{A}$ и $\overline{B}$ се независни.

Решение. Ова тврдење ќе го докажеме користејќи ја независноста на настаните A и B. Па,

$$p(\overline{A})p(\overline{B}) = (1 - p(A))(1 - p(B)) = 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B)$$

$$= 1 - p(A) - p(B) + p(AB) = 1 - p(A \cup B) = p(\overline{A \cup B}) = p(\overline{A}\overline{B}).$$

Добивме дека $p(\overline{A}\overline{B}) = p(\overline{A})p(\overline{B})$, па можеме да заклучиме дека настаните $\overline{A}$ и $\overline{B}$ се независни. ♦

Пример 8. Фрламе две коцки. Колкава е веројатноста дека бројот кој се паднал на првата коцка ќе биде непарен, а на другата коцка ќе биде помал од 2?

Решение. Бројот кој се паднал на првата коцка е независен од тоа што се паднало на втората коцка. Веројатноста дека на првата коцка се паднал непарен број на првата коцка е $\frac{1}{2}$, а веројатноста дека бројот кој се паднал на втората коцка е помал од 2 е $\frac{1}{6}$. Па, веројатноста на бараниот настан е:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \ \blacklozenge$$

Независноста на повеќе настани се дефинира на следниов начин:

Дефиниција 3. Настаните $A_1, A_2, ..., A_n$ се независни ако за секое k, $2 \leq k \leq n$ и за секој избор на неколку од овие настани $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ важи:

$$p(A_{i_1} A_{i_2} \cdot ... \cdot A_{i_k}) = p(A_{i_1}) p(A_{i_2}) \cdot ... \cdot p(A_{i_k}).$$

Нека A, B и C се независни настани. Тогаш, на пример важи $p(AB) = p(A)p(B)$, па настаните A и B се попарно независни. Значи од ова можеме да заклучиме дека кое било подмножство од множество од независни настани е множество од независни настани. Па, на пример, за условната веројатност $p(A \mid BC)$ имаме:

$$p(A \mid BC) = \frac{p(ABC)}{p(BC)} = \frac{p(A)p(B)p(C)}{p(B)p(C)} = p(A).$$

Ако A, B и C се произволни настани, тогаш:

$$p(ABC) = p(A)p(B \mid A)p(C \mid AB).$$

Независноста на настаните значи дека сите условни веројатности кои можат да се појават при трите настани се еднакви на безусловните веројатности. На пример, $p(B \mid A) = p(B)$, $p(C \mid AB) = p(C)$. Па, според тоа, за независните настани A, B и C важи:

$$P(ABC) = p(A)p(B)p(C).$$

Овде, само да напоменеме дека обратните тврдења не се точни: Ако имаме три настана A, B и C кои се попарно независни, не следува независност на настаните A, B и C.

Пример 9. На една рамнина се фрла хомоген тетраедар чии страни се обоени, така што: една е бела, друга е црвена, трета е сина, а на четвртата страна ги има сите три бои. Нека со A_1 е означен настанот: страната на која лежи тетраедарот има бела боја, со A_2 е означен настанот: страната на која лежи тетраедарот има црвена боја, со A_3 е означен настанот: страната на која лежи тетраедарот има сина боја. Провери дали настаните се независни по парови и независни во целина.

Решение. Бидејќи тетраедарот е хомоген можеме да ја применуваме класичната дефиниција за веројатност. Па, така имаме:

$$p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = \frac{1}{2},$$

$$p(A_1A_2) = P(A_2A_3) = p(A_1A_3) = \frac{1}{4}.$$

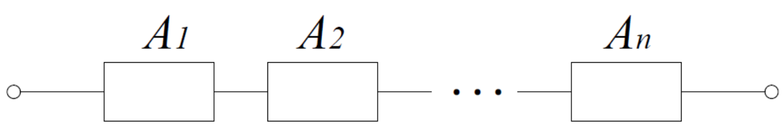
Бидејќи важи: $p(A_iA_j) = p(A_i)\cdot p(A_j)$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, можеме да заклучиме дека настаните A_1, A_2, A_3 се независни по парови. Во продолжение, ќе ја испитаме независноста на трите настани во целина. Имаме:

$$p(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \qquad \text{и} \qquad p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Заклучуваме дека не важи: $p(A_1A_2A_3) = p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)$, односно настаните A_1, A_2, A_3 не се независни во целина. ♦

Пример 10. Производството на некој апарат е организирано на трака, која се состои од n-делови, од кој секој од нив работи независно од другите. Ако барем еден од овие делови престане да работи, престанува да работи целиот апарат. Веројатноста дека k-тиот дел нема да престане да работи во текот на еден ден е еднаква на p_k. Колкава е веројатноста дека еден апарат ќе престане да работи во текот на денот?

Решение.



Нека со A_k го означиме настанот $A_k = \{k$-тиот дел не престанал да работи$\}$ и нека $A = \{$целиот производ не престанал да работи$\}$. Настанот A ќе се реализира ако се реализираат сите настани $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Па,

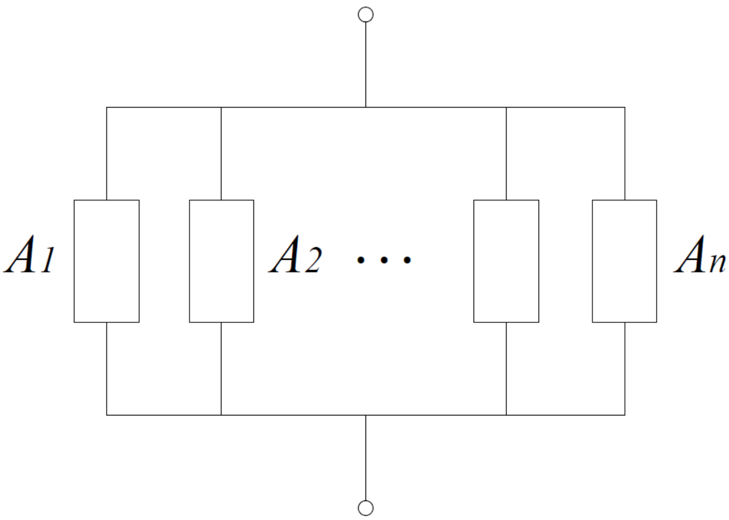
$$A = A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n.$$

Поради независноста на настаните имаме дека:

$$p(A) = p(A_1)p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n) = p_1 p_2 \cdot\ldots\cdot p_n \,.\, \blacklozenge$$

Пример 11. Нека го имаме истиот случај како во претходниот пример со таа разлика што апаратот ќе продолжи да работи ако барем еден од неговите n-делови работи. Колкава е веројатноста дека еден апарат ќе престане да работи во текот на денот?

Решение. Проблемот можеме да го претставиме графички со сликата подолу.



Во оваа ситуација апаратот ќе продолжи да работи ако работи барем еден негов дел. Поради тоа, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$. Да споменеме, генерално, кога треба да пресметаме директно веројатност од унија на повеќе настани не е воопшто едноставна работа. Во вакви случаи работиме со спротивните настани. Да го разгледаме настанот $\overline{A}$: апаратот престанал да работи во текот на денот. Очигледно, овој настан ќе се реализира ако се реализираат сите настани $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$. Од ДеМоргановите закони имаме:

$$\overline{A} = \overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}\,.$$

Во еден од претходните примери докажавме дека настаните $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ се независни настани. Па, $p(\overline{A}) = p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot p(\overline{A_n})$, односно:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = (1 - p(A_1))(1 - p(A_2))\cdot\ldots\cdot(1 - p(A_n))$$
$$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\cdot\ldots\cdot(1 - p_n)\,,$$

па:

$$p(A) = 1-(1-p_1)(1-p_2)\cdot\ldots\cdot(1-p_n)\,.\ \blacklozenge$$

Пример 12. Најди ја веројатноста дека случајно избрана дропка $\frac{a}{b}$, $(a,b\in\mathbb{N})$ не може да се скрати.

Решение. Нека $k\in\mathbb{N}$, со A_k го означиме настанот: бројот a е делив со k; со B_k го означиме настанот: бројот b е делив со k; со C_k го означиме настанот: дропката $\frac{a}{b}$ може да се скрати со k. Да забележиме дека важи $C_k = A_k B_k$ и настаните A_k и B_k се меѓусебно независни. Сега, $p(A_k) = p(B_k) = \frac{1}{k}$, од каде што:

$$p(C_k) = p(A_k B_k) = p(A_k)\cdot p(B_k) = \frac{1}{k^2}\,.$$

Нека со D го означиме настанот: дропката $\frac{a}{b}$ не може да се скрати. Нека p е најголемиот прост број помал или еднаков на помалиот од броевите a и b. Тогаш:

$$\begin{aligned} p(D) &= p(\overline{C}_2\overline{C}_3\overline{C}_5\cdot\ldots\cdot\overline{C}_p) = p(\overline{C}_2)\cdot p(\overline{C}_3)\cdot p(\overline{C}_5)\cdot\ldots\cdot p(\overline{C}_p) \\ &= (1-p(C_2))\cdot(1-p(C_3))\cdot(1-p(C_5))\cdot\ldots\cdot(1-p(C_p)) \\ &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}\right).\ \blacklozenge \end{aligned}$$

3.2. Тотална веројатност. Бејесови формули

Формулата за тотална веројатност овозможува пресметка на неусловните веројатности преку условните. При пресметување на веројатноста понекогаш многу често сите можни исходи ги делиме во различни класи. Да го разгледаме следниов пример:

Пример 1. Една продавница набавува леб од две пекари. Од првата пекара набавува 60% од лебот, додека од втората пекара набавува 40% од лебот. 15% од лебот од првата пекара е од втора класа, додека 25% од лебот од втората пекара е од втора класа. Колкава е веројатноста дека случајно купен леб е од втора класа?

Решение. Нека случајно е купен леб од продавницата. Можни се два случаја:

$$H_1 = \{\text{купен е леб од првата пекара}\},$$

$$H_2 = \{\text{купен е леб од втората пекара}\}.$$

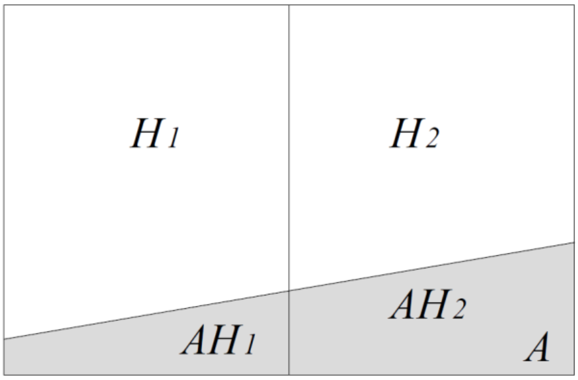
Веројатностите дека ќе се оствари некој од овие настани се:

$p(H_1) = 0,6$, $\qquad p(H_2) = 0,4$

Нека со A го означиме настанот:

$$A = \{\text{купен е леб од втора класа}\}.$$

Оваа ситуација можеме да ја дадеме со следнава слика:



Настанот A може да се подели на два дисјунктни настана:

$AH_1 = \{$купен е леб од втора класа од првата пекара$\}$ и

$AH_2 = \{$купен е леб од втора класа ов втората пекара$\}$.

Па,

$$p(A) = p(AH_1) + p(AH_2).$$

Веројатностите на десната страна може да се пресметаат како:

$$p(AH_1) = p(H_1)p(A \mid H_1), \quad p(AH_2) = p(H_2)p(A \mid H_2).$$

Веројатноста дека купениот леб од првата пекара е од втора класа е: $p(A \mid H_1) = 0,15$, додека веројатноста дека купениот леб од втората пекара е: од втора класа е: $p(A \mid H_2) = 0,25$.

Па, имаме:

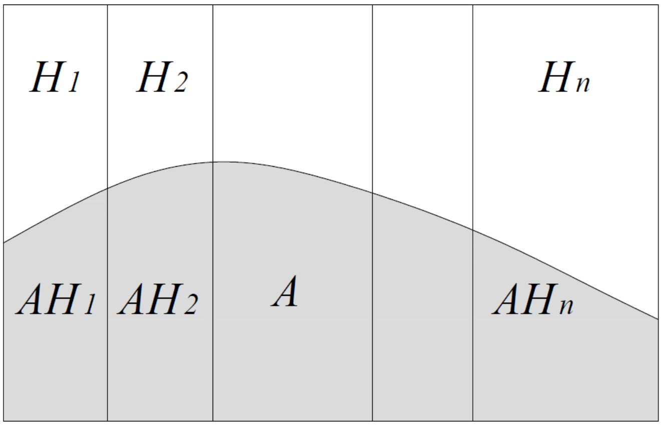
$$p(A) = p(AH_1) + p(AH_2) = p(H_1)p(A \mid H_1)$$
$$+ p(H_2)p(A \mid H_2) = 0,09 + 0,10 = 0,19. \ ♦$$

Врз основа на овој пример, ќе извлечеме заклучок за многу поопшта ситуација.

Да претпоставиме дека множеството од сите елементарни настани може да се запише како дисјунктна унија од n-настани, односно:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n ,$$

при што $H_i \cap H_j = \varnothing$, $i \neq j$ и важи $p(H_i) > 0$, за секое $i = 1, 2, \ldots, n.$ На овој начин правиме партиција на просторот на веројатност. Нека $A \subset \Omega$ е произволен настан.



Со настаните $H_1, H_2, \ldots, H_n$, настанот A е разбиен на настаните:

$$A = AH_1 \cup AH_2 \cup \ldots \cup AH_n .$$

Бидејќи настаните $H_1, H_2, \ldots, H_n$ се меѓусебно дисјунктни, имаме дека и настаните $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ се меѓусебно независни. Па,

$$p(A) = p(AH_1) + p(AH_2) + \ldots + p(AH_n)$$
$$= p(H_1)p(A \mid H_1) + p(H_2)p(A \mid H_2) + \ldots + p(H_n)p(A \mid H_n) .$$

Со ова, ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. (Формула за тотална веројатност) Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ се настани за кои важи: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ и $H_i \cap H_j = \varnothing$, за $i \neq j$. За секој настан $A \subset \Omega$ важи:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i) p(A \mid H_i) .$$

Понатаму, настаните $H_1, H_2, ..., H_n$ ќе ги нарекуваме хипотези. При реализација на еден експеримент се појавува точно една од хипотезите $H_1, H_2, ..., H_n$.

Пример 2. Нека имаме две кутии. Во првата кутија се наоѓаат три бели и две црни топчиња, додека во втората кутија се наоѓаат четири бели и две црни топчиња. Случајно избираме едно топче од првата кутија и го префрламе во втората кутија. Колкава е веројатноста дека топчето случајно извлечено од втората кутија ќе биде црно?

Решение. Веројатноста за изборот на црно топче од втората кутија, по префрлање на случајно извлечено топче од првата кутија во втората кутија, зависи од тоа каква е бојата на топчето кое е префрлено од првата во втората кутија. Затоа, ги поставуваме следниве хипотези:

$$H_1 = \{\text{извлеченото топче од првата кутија е бело}\},$$

$$H_2 = \{\text{извлеченото топче од првата кутија е црно}\}.$$

Па, $p(H_1) = \frac{3}{5}$ и $p(H_2) = \frac{2}{5}$. Нека со A го означиме настанот чија веројатност се бара, т.е. $A = \{\text{извлеченото топче од втората кутија е црно}\}$. Ако се случи првата хипотеза, тогаш во втората кутија имаме пет бели и две црни топчиња. Па, $p(A | H_1) = \frac{2}{7}$. Ако се случи втората хипотеза, тогаш во втората кутија се наоѓаат четири бели топчиња и три црни топчиња. Следствено, $p(A | H_2) = \frac{3}{7}$. Користејќи ја формулата за тотална веројатност, имаме:

$$p(A) = p(H_1)p(A | H_1) + p(H_2)p(A | H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35}. \ \blacklozenge$$

Пример 3. Од еден шпил карти во кој недостасуваат три карти се влече една карта. Колкава е веројатноста дека извлечената карта има знак треф?

Решение. Нека со A го означиме настанот: $A = \{$извлечената карта има знак треф$\}$. Веројатноста со која ќе се реализира настанот A, зависи од тоа колку карти со знак треф има во шпилот. Па, врз основа на оваа констатација ќе ги формираме хипотезите. Нека со H_i ги означиме хипотезите: $H_i = \{$недостасуваат i карти со знак треф$\}$, каде $i = 0, 1, 2, 3$. Па,

$$p(H_i)=\frac{\binom{13}{i}\binom{39}{3-i}}{\binom{52}{3}}, \text{ за } i=0,1,2,3,$$

односно:

$$p(H_0)=0,4135\ ,\ p(H_1)=0,4359\ ,\ p(H_2)=0,1377,$$
$$p(H_3)=0,0129.$$

Сега, според формулата за тотална веројатност добиваме:

$$p(A)=p(H_0)p(A\,|\,H_0)+p(H_1)p(A\,|\,H_1)$$
$$+p(H_2)p(A\,|\,H_2)+p(H_3)p(A\,|\,H_3)$$
$$=0,4135\frac{13}{49}+0,4359\frac{12}{49}+0,1377\frac{11}{49}+0,0129\frac{10}{49}=0,25.\ \blacklozenge$$

Познато е дека:

$$p(AB)=p(A)p(B\,|\,A)=p(B)p(A\,|\,B),$$

па, можеме да запишеме:

$$p(B\,|\,A)=\frac{p(B)p(A\,|\,B)}{p(A)}.$$

Оваа формула се користи кога настанот B е една од хипотезите $H_1,H_2,...,H_n$ со кои е разбиено множеството Ω. Па,

$$p(H_i\,|\,A)=\frac{p(H_i)p(A\,|\,H_i)}{p(A)}, \text{ за } i=1,2,...,n.$$

Притоа, веројатноста $p(A)$ најчесто се пресметува со формулата за тотална веројатност. На овој начин се добиваат Бејесовите формули.

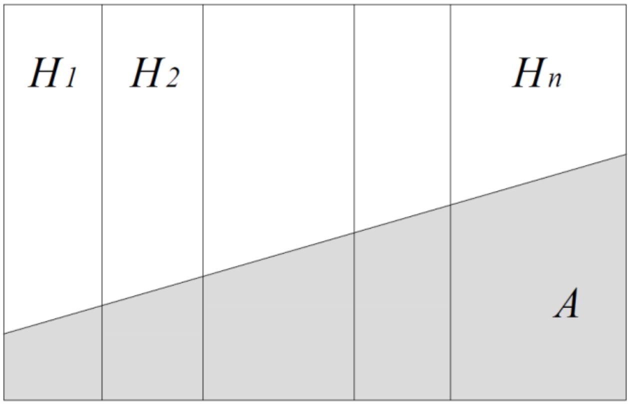
Теорема 2. (Бејесови формули, Thomas Bayes) Важи:

$$p(H_i\,|\,A)=\frac{p(H_i)p(A\,|\,H_i)}{\sum_{i=1}^{n}p(H_i)p(A\,|\,H_i)}, \text{ за } i=1,2,...,n.$$

Бејесовите формули ги користиме за пресметување на апостериорните веројатности на хипотезите. Пред почетокот на експериментот, секоја хипотеза има своја веројатност на реализација, дадена со: $p(H_i)$, $i=1,2,...,n$. По реализацијата на експериментот, ако знаеме кој елементарен настан се реализирал, тогаш со појавува прашањето: која од хипотезите $H_1, H_2, ..., H_n$ се реализирала, додека за останатите со сигурност не се реализирале.

Нека претпоставиме дека не е познато кој од елементарните настани (хипотези) се реализирал, но знаеме дека се реализирал настанот $A \subset \Omega$. Во овој, случај не знаеме точно која од хипотезите $H_1, H_2, ..., H_n$ се реализирала, но дополнителна информација за реализиација на настанот A ги менува априорните веројатности на хипотезите. Со помош на Бејесовите формули ги пресметуваме условните веројатности $p(H_1 \mid A), p(H_2 \mid A), ..., p(H_n \mid A)$, кои ги нарекуваме апостериорни веројатности на хипотезите.

На сликата подолу е интерпретирана ситуација кога сите априорни веројатности на сите хипотези се еднакви. По реализацијата на настанот A (делот означен со сиво) веројатностите на хипотезите се менуваат.



Пример 4. Нека фрламе хомогена коцка и нека се дадени хипотезите

$$H_1 = \{\text{се паднал парен број}\},$$

$$H_2 = \{\text{се паднал непарен број}\}.$$

При фрлањето на коцките веројатностите (априорните) на хипотезите се: $p(H_1) = \frac{1}{2}$ и $p(H_2) = \frac{1}{2}$. При фрлањето на коцката е соопштено дека се реализирал настанот $A = \{\text{се паднал број поголем од } 3\}$, односно $A = \{4, 5, 6\}$. Очигледно, сега хипотезата H_1 станува поверојатна од хипотезата H_2, бидејќи настанот A содржи две парни и еден непарен број. Новите, апостериорни веројатности се:

$$p(H_1 \mid A) = \frac{p(H_1)p(A \mid H_1)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$p(H_2 \mid A) = \frac{p(H_2)p(A \mid H_2)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ако е познато дека се реализирал настанот $B = \{$коцката се паднала на $5\}$, тогаш:

$$p(B \mid H_1) = 0, \qquad p(B \mid H_2) = \frac{1}{3},$$

$$p(B) = \frac{1}{6}.$$

Бејесовите формули го даваат очекуваниот резултат:

$$p(H_1 \mid B) = 0, \qquad p(H_2 \mid B) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 1,$$

бидејќи со сигурност, имајќи ја информацијата за реализацијата на настанот B, знаеме дека се реализирала хипотезата H_2. ♦

Пример 5. Студентите на Градежниот факултет можат да презапишат само една цела година од $1, 2, 3$ студиска година. Веројатноста дека еден студент ќе ја повторува $1, 2, 3$ студиска година е $0,25$; $0,5$; $0,25$, соодветно. Веројатноста дека студентот кој ја повторувал прва година ќе го заврши студирањето е $0,4$, веројатноста дека студентот кој ја повторувал втора година ќе го заврши студирањето е $0,5$ и веројатноста дека студентот кој ја повторува трета година ќе го заврши студирањето е $0,9$. Најди ја веројатноста:

а) случајно избран студент кој повторувал една од годините (повторувач) го завршил студирањето;

б) ако студентот повторувач го завршил студирањето, која е веројатноста дека ја повторувал трета година:

в) ако студентот повторувач го завршил студирањето, кој година најверојатно ја повторувал?

Решение. Нека со A_i ги означиме настаните: студентот ја повторувал i-тата година, каде $i = 1,2,3$ и нека со B го означиме настанот: студентот повторувач го завршил студирањето. Од условот имаме: $p(A_1) = 0,25$, $p(A_2) = 0,5$, $p(A_3) = 0,25$. За априорните веројатности, од условот имаме:

$$p(B \mid A_1) = 0,4,\ p(B \mid A_2) = 0,5 \text{ и } p(B \mid A_3) = 0,9.$$

а) Веројатноста дека случајно избран студент повторувач, го завршил студирањето е:

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1)p(B \mid A_1) + p(A_2)p(B \mid A_2) + p(A_3)p(B \mid A_3) \\ &= 0,25 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,25 \cdot 0,9 = 0,575. \end{aligned}$$

б) Веројатноста дека студентот повторувач кој го завршил студирањето, ја повторувал трета година е:

$$p(A_3 \mid B) = \frac{p(A_3)p(B \mid A_3)}{p(B)} = \frac{0,25 \cdot 0,9}{0,575} \approx 0,391.$$

в) Вредностите на другите две апостериорни веројатности $p(A_1 \mid B)$ и $p(A_2 \mid B)$ се:

$$p(A_1 \mid B) = \frac{p(A_1)p(B \mid A_1)}{p(B)} \approx 0,174$$

$$p(A_2 \mid B) = \frac{p(A_2)p(B \mid A_2)}{p(B)} \approx 0,435.$$

Значи, $p(A_2 \mid B) > p(A_3 \mid B) > p(A_1 \mid B)$, па заклучуваме дека студентот повторувач, најверојатно ја повторувал втора година. ♦

Пример 6. Во една кутија се наоѓаат три топчиња кои се бели и црни по боја. Точниот број на топчиња обоени во црно или бело не е познат и претпоставуваме дека бројот на бели и црни топчиња е еднакво можен. Нека ставиме:

$$H_i = \{\text{во кутијата се наоѓаат } i \text{ бели топчиња}\}, \quad i = 0,1,2,3.$$

По претпоставка,

$$p(H_0) = p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = \frac{1}{4}.$$

Случајно избираме едно топче од кутијата. Извлеченото топче е бело. Што можеме да кажеме сега за веројатностите на секоја од хипотезите? Хипотезата H_0 станува невозможна, но и веројатностите на останатите хипотези, исто така, се менуваат. Ќе забележиме дека расте веројатноста на оние хипотези кои претпоставуваат поголем број на бели топчиња. Во продолжение ќе ги дадеме нивните квантни големини. Лесно се согледува дека:

$$p(A\,|\,H_0)=0,\quad p(A\,|\,H_1)=\frac{1}{3},\quad p(A\,|\,H_2)=\frac{2}{3},\quad p(A\,|\,H_3)=1\,.$$

Користејќи ја формулата за тотална веројатност, имаме:

$$p(A)=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{2}\,.$$

Сега, со помош на Бејесовите формули, имаме:

$$p(H_0\,|\,A)=0,\quad p(H_1\,|\,A)=\frac{1}{6},\quad p(H_2\,|\,A)=\frac{1}{3},\quad p(H_3\,|\,A)=\frac{1}{2}\,. \blacklozenge$$

Пример 7. Во една продавница на една полица се наоѓаат 7 леба, а на другата полица се наоѓаат 5 леба. На секоја од полиците има по еден леб со поминат рок. Од првата полица случајно се избира еден леб и се става на втората полица. Потоа во продавницата влегува купувач и случајно избира леб од втората полица. Колкава е веројатноста дека купувачот избрал леб со поминат рок?

Решение. Со A_i нека ги означиме настаните: од i-тата полица е избран леб со поминат рок, $i=1,2$ и со B го означиме настанот: купувачот избрал леб со поминат рок. Од условот на задачата имаме: $p(A_1)=\frac{6}{7}$, $p(A_2)=\frac{1}{7}$, $p(B\,|\,A_1)=\frac{1}{6}$, $p(B\,|\,A_2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Од формулата за тотална веројатност имаме дека :

$$\begin{aligned}p(B)&=p(A_1)p(B\,|\,A_1)+p(A_2)p(B\,|\,A_2)\\&=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}+\frac{1}{21}=\frac{4}{21}\,. \blacklozenge\end{aligned}$$

Пример 8. Три исти кутии ја имаат следнава содржина:

I кутија: 5 бели и 5 црвени топчиња,

II кутија: 4 бели и 8 црвени топчиња,

III кутија: 9 бели и 3 црвени топчиња.

Што е поверојатно: од втората кутија да се извлече бело топче или да се извлече бело топче без ограничување на кутиите?

Решение. Веројатноста на настанот A: извлечено е бело топче од втората кутија е: $p(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Нека сега со A_i ги означиме настаните:

избрана е i-тата кутија, $i=1,2$ и со B го означиме настанот: извлечено е бело топче. Тогаш, $p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=\frac{1}{3}$. Уште,

$$p(B\,|\,A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\quad p(B\,|\,A_2)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},\quad p(B\,|\,A_3)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

Веројатноста дека е извлечено бело топче без ограничување на кутиите е:

$$p(B)=p(A_1)p(B\,|\,A_1)+p(A_2)p(B\,|\,A_2)+p(A_3)p(B\,|\,A_3)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{19}{36}.$$

Можеме да заклучиме дека веројатноста да извлечеме бело топче без ограничување на кутиите е поголема од веројатноста да извлечеме бело топче од втората кутија. ♦

3.3. Серии од независни експерименти

Ако некој експеримент се повторува n-пати, при што се реализира при исти услови и секоја наредна реализација не зависи од претходната имаме серија од n-независни експерименти. При секоја реализација на експериментот мериме дали се реализирал настанот A или не се реализирал. Главен проблем овде ќе биде да ја пресметаме веројатноста, дека при n-независни експерименти, настанот A се реализирал k-пати.

Теорема 1. (Шема на Бернули). Нека (Ω, F, p) е простор на веројатност и нека имаме серија од n-независни експерименти. Веројатноста за реализација на настанот A е p и нека $q=1-p$. Веројатноста да се реализира настанот A, _пати, во серија од n-независни експерименти е:

$$P_{n,k}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

Доказ. Нека при изведувањето на серијата од n-независни експерименти, настанот A се реализирал k-пати. Формулацијата на теоремата ќе ја промениме на следниов начин: Кога настанот A се реализирал во m-тото изведување, на m-тата позиција запишуваме 1, а доколку не се реализирал запишуваме 0, при што $m=1,2,\dots,n$. Бидејќи при секое изведување на серијата од n-независни експерименти, k-пати се реализира настанот A, а $n-k$ пати не се реализира настанот A. Во согласност со ова, веројатноста за еден распоред на реализација и нереализација на настанот A е еднаква на $p^k(1-p)^{n-k}=p^kq^{n-k}$. Сега доказот на теоремата се сведува на производот на бројот на сите k-елементни подмножества можат да се формираат од множество со n-елементи со p^kq^{n-k}. Значи,

$$P_{n,k}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}. \blacksquare$$

Пример 1. Една коцка се фрла 10 пати. Најди ја веројатноста бројот 2 да се падне барем еднаш при тие фрлања.

Решение. Овде, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$ и $n=10$. Нека со A го означиме настанот чија веројатност се бара. Бараната веројатност, ќе ја најдеме како комплементарна веројатност на настанот $\bar{A}$: при фрлања на коцка 10 пати, бројот 2 не се паднал ниту еднаш. Во согласност со ова, имаме:

$$p(A)=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}. \blacklozenge$$

Пример 2. Ако веројатноста дека стрелец ќе ја погоди метата е еднаква на $0,7$, колкава е веројатноста дека со три истрели, три пати ќе ја погоди метата?

Решение. Имаме дека: $p=0,7$, $q=0,3$, $n=3$, $k=3$. Тогаш, бараната веројатност е:

$$P_{3,3}=\binom{3}{3}(0,7)^3\cdot(0,3)^0=(0,7)^3. \blacklozenge$$

Пример 3. Што е поверојатно: при пет фрлања на хомогена монета да се добијат точно три писма или при осум фрлања на хомогена монета да се добијат четири писма?

Решение. Овде во двата случаја е: $p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$. Во првиот случај $n=5$, $k=3$, а во вториот случај $n=8$, $k=4$. Сега, за првиот случај имаме:

$$P_{5,3}=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{5}{2^4},$$

а, за вториот случај имаме:

$$P_{8,4}=\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{2^7}.$$

Оттука, поверојатно е при пет фрлања на хомогена монета да се добијат точно три писма. ♦

Пример 4. Хомогена коцка се фрла n-пати. Колкава е веројатноста дека ќе се падне единица k-пати, $0 \le k \le n$?

Решение. Веројатноста дека ќе се падне единица при секое од фрлањата е: $p = \frac{1}{6}$. Веројатноста на настанот дека во сите n-фрлања единица ќе се појави точно k-пати е:

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \frac{5^{n-k}}{6^n}. \ ♦$$

Пример 5. Во секој од n-те независни експерименти изведувани под исти услови настанот A се реализира со веројатност p.

а) Најди ја веројатноста дека настанот A ќе се реализира барем два пати, ако се знае дека $n > 2$.

б) Колку треба да биде најмалиот n за да со веројатност не помала со $\alpha \in (0,1)$ може да се тврди дека настанот A ќе се реализира барем еднаш?

Решение. а) Од Бернулиевата шема имаме дека веројатностите настанот A да не се случи ниту еднаш и се случи само еднаш се: $\binom{n}{0} p^0 q^n = (1-p)^n$ и $\binom{n}{1} p^1 q^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$, соодветно. Според тоа, веројатноста која се бара е:

$$1-(P_{n,0}+P_{n,1}) = 1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}.$$

б) Веројатноста дека настанот A ќе се реализира барем еднаш е:

$$1-P_{n,0} = 1-(1-p)^n,$$

па, затоа n го определуваме од неравенството:

$$1-(1-p)^n \ge \alpha,$$

од каде што се добива дека:

$$n \ge \log_{1-p}(1-\alpha). \ ♦$$

Пример 6. За кое k веројатноста во биномната распределба на настанот $P_{n,k}$ е најголема?

Решение. Нека со $p(A_j)$ ја означиме веројатноста на настанот: при реализација на n-независни експерименти, настанот A (кој се реализира со веројатност p во еден експеримент) се појавил k-пати, $0 \le 1 \le n$. Од Бернулиевата шема имаме:

$$p(A_k)-p(A_{k-1})=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}-\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}-\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}p^{k-1}q^{n-k+1}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}\left(\frac{p}{k}-\frac{q}{n-k+1}\right)$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}\cdot\frac{np-pk+p-qk}{k(n-k+1)}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k+1)!}p^{k-1}q^{n-k}\left((n+1)p-k\right).$$

Можни се два случаја.

Прв случај. Ако $(n+1)p$ е цел број, тогаш за $k<(n+1)p$ важи:

$$p(A_k)>p(A_{k-1}),$$

односно веројатностите растат и за $k=(n+1)p$ важи $p(A_k)=p(A_{k-1})$ и потоа веројатностите опаѓаат. Според тоа, во овој случај имаме две вредности на k за кои веројатноста во Бернулиевата шема на настанот A_k е најголема.

Втор случај. Ако $(n+1)p$ не е цел број, тогаш до $k=[(n+1)p]$ веројатностите растат, најголема веројатност има настанот A_k, $k=[(n+1)p]$, а потоа веројатностите опаѓаат. ♦

Пример 7. Во една серија од производи 6% се неисправни. Колку треба да биде голема серијата, па веројатноста, дека во неа ќе се најде неисправен производ, да не биде помала од $0,95$?

Решение. Овде $p=0,06$, $\alpha=0,95$. Треба да важи: $1-(1-p)^n\geq\alpha$, односно $(1-p)^n\leq 1-\alpha$. Од овде следува дека:

$$n\log(1-p)\leq\log(1-\alpha),$$

па:

$$n\geq\frac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}=\frac{\log 0,05}{\log 0,94}=48,42.$$

Значи, серијата треба да има најмалку 49 елементи. ♦

Пример 8. При прегледот на еден пациент, според симптомите можни се три болести A,B и C, со веројатности:

$$p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{6},\quad p_3 = \frac{1}{3},$$

соодветно. За да се утврди вистинската дијагноза направена е нова анализа, која дава позитивен резултат со веројатност: $0{,}1$ во случај на болеста A, $0{,}2$ во случај на болеста B и $0{,}9$ во случај на болеста C. Анализата е извршена пет пати и притоа четири пати е добиен позитивен резултат. Која е веројатноста дека пациентот има некоја од болестите A, B и C?

Решение. Од Бернулиевата шема, во случај на болеста A, имаме $p = 0{,}1$ и $q = 0{,}9$, па веројатноста дека анализата потврдува дека пациентот ја има болеста A е:

$$q_1 = \binom{5}{4} 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^1.$$

Сосема аналогно за болестите B и C, имаме:

$$q_2 = \binom{5}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8$$

и:

$$q_3 = \binom{5}{4} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1,$$

соодветно. Сега, со примена на Бејесовите формули за веројатноста дека пациентот ја има болеста A, добиваме:

$$p(A) = \frac{p_1 q_1}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1} \approx 0{,}002.$$

На ист начин, за веројатноста дека пациентот ја има болеста B, наоѓаме:

$$p(B) = \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1} \approx 0{,}01.$$

Аналогно, веројатноста дека пациентот ја има болеста C е:

$$p(C) = \frac{p_3 q_3}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,9^4 \cdot 0,1}{\frac{1}{2} \cdot 0,1^4 \cdot 0,9 + \frac{1}{6} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8 + \frac{1}{3} \cdot 0,9^4 \cdot 0,1} \approx 0,988.$$

Во согласност со ова, по извршената анализа, веројатноста $p(C)$ е многу блиска до 1, па затоа логично е лекарот да заклучи дека пациентот ја има болеста C. ♦

3.4. Решени задачи

Задача 1. Од еден шпил карти случајно се извлекува една карта. Дали настаните:

$$A = \{\text{извлечена е двојка}\},$$

$$B = \{\text{извлечена е карта која има знак срце}\},$$

се независни настани?

Решение. Настанот AB, е дефиниран како:

$$AB = \{\text{извлечена е двојка срце}\}.$$

Па, за веројатностите имаме:

$$p(A) = \frac{4}{52}, \; p(B) = \frac{13}{52} \text{ и } p(AB) = \frac{1}{52}.$$

Сега,

$$P(AB) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = p(A) \cdot p(B),$$

од каде што добиваме дека настаните A и B се независни настани.

Задача 2. Нека A и B се дисјунктни настани, такви што $p(A \cup B) \neq 0$. Докажи дека:

$$p(A \mid A \cup B) = \frac{p(A)}{p(A) + p(B)}.$$

Решение. Бидејќи настаните се дисјунктни, имаме дека $p(AB) = 0$. Од формулата за условна веројатност, добиваме:

$$p(A \mid A \cup B) = \frac{p(A(A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{p(A)}{p(A) + p(B) - p(AB)} = \frac{p(A)}{p(A) + p(B)}.$$

Задача 3. Двајца стрелци независно еден од друг гаѓаат во една иста цел. Веројатноста дека првиот од нив ќе ја погоди целта е $0,7$, а веројатноста вториот да ја погоди целта е $0,9$. Најди ја веројатноста дека целта е погодена барем еднаш.

Решение. Нека со A_i ги означиме настаните: i-тиот стрелец ја погодил целта, $i=1,2$ и со A го означиме настанот: целта е погодена барем еднаш. Да забележиме дека настаните A_1 и A_2 се независни и $A = A_1 \cup A_2$.

Па, за веројатноста на настанот A, имаме дека:

$$p(A) = p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1A_2)$$
$$= 0,7 + 0,9 - 0,7 \cdot 0,9 = 0,97.$$

Задача 4. Контролата на производите се врши на тој начин што случајно се избираат пет производи. Ако се пронајде барем еден неисправен производ целокупната количина ќе биде вратена. Колкава е веројатноста произведената количина да биде вратена ако 5% од производите отстапуваат од стандардниот квалитет?

Решение. Нека со A_i ги означиме настаните: случајно избраниот i-ти производ е со добар квалитет, $i=1,2,3,4,5$. Произведената количина ќе биде примена ако се оствари настанот $A_1A_2A_3A_4A_5$. Веројатноста за да се реализира овој настан е:

$$p(A_1A_2A_3A_4A_5) = p(A_1)\cdot p(A_2 \mid A_1)\cdot$$
$$\cdot p(A_3 \mid A_1A_2)\cdot P(A_4 \mid A_1A_2A_3)\cdot p(A_5 \mid A_1A_2A_3A_4)$$
$$= \frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96} = 0,77.$$

Веројатноста, произведената количина да биде вратена е:

$$p(\overline{A_1A_2A_3A_4A_5}) = 1 - p(A_1A_2A_3A_4A_5) = 1 - 0,77 = 0,23.$$

Задача 5. За предупредување од настанување на пожар се инсталирани три сигнализатора, кои независно еден од друг, со веројатност од $0,9$ предупредуваат за појава на пожар. Колкава е веројатноста пожарот да биде забележан навреме?

Решение. Нека со A_i ги означиме настаните: пожарот е забележан од i-тиот сигнализатор. Пожарот ќе биде забележан навреме ако се оствари настанот $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Веројатноста да се појави овој настан, односно пожарот да биде забележан е:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - p(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)p(\overline{A}_3) = 1 - (0,1)^3 = 0,999.$$

Задача 6. Две фабрики произведуваат ист производ. Во првата фабрика при неговото производтво се применуваат три технолошки операции последователно и при нив се добива оштетен производ со веројатност $0,2$; $0,3$; $0,1$, соодветно. Во втората фабрика за неговото производство се применуваат две технолошки операции последователно и при нив се добива оштетен производ со веројатност $0,4$; $0,4$, соодветно. Определи која технологија обезбедува поголема веројатност за добивање на првокласен производ, ако во првиот случај има 90% првокласни производи, а во вториот случај има 95% првокласни производи.

Решение. Нека ги означиме со A_i настаните: добиен е оштетен производ при i-тата операција во првата фабрика, $i=1,2,3$, со B_i настаните: добиен е оштетен производ при i-тата операција во втората фабрика $i=1,2$, со D_1 настанот: добиен е првокласен производ во првата фабрика, со D_2 настанот: добиен е првокласен производ во втората фабрика. Веројатноста дека технологијата во првата фабрика дава првокласен производ е:

$$p(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3D_1)=0,8\cdot 0,7\cdot 0,9\cdot 0,9=0,4536,$$

додека веројатноста дека технологијата во втората фабрика дава првокласен производ е:

$$p(\overline{B}_1\overline{B}_2D_2)=0,6\cdot 0,6\cdot 0,95=0,3420 .$$

Следува дека првата фабрика има технологија која обезбедува поголема веројатност за добивање на првокласен производ.

Задача 7. Двајца играчи X и Y наизменично фрлаат коцка, така што прв почнува играчот X. Тие ја фрлаат коцката сѐ додека X не добие 3-ка или додека Y не добие 2-ка или 6-ка. Најди ја веројатноста дека играчот X ќе биде последен што ќе ја фрла коцката.

Решение. Нека ги означиме настаните A_i: играчот X добил 3-ка при i-тото фрлање, $i=2k-1$ и со B_i настаните: играчот Y добил 2-ка или 6-ка при i-тото фрлање, $i=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Јасно, $p(A_i)=\dfrac{1}{6}$, $i=2k-1$ и $p(B_i)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$, $i=2k$, $k\in\mathbb{N}$. Нека со C го означиме настанот: играчот X последен ја фрлил коцката. Тогаш

$$C=A_1+\overline{A}_1\overline{B}_2A_3+\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3\overline{B}_4A_5+\dots .$$

Бидејќи сите овие настани $A_i,B_j,\overline{A}_i,\overline{B}_j$, $i=2k$, $j=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$ се независни во целина, за веројатноста на настанот C, добиваме:

$$p(C)=p(A_1)+p(\overline{A}_1\overline{B}_2A_3)+p(\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{A}_3\overline{B}_4A_5)+\dots$$

$$= p(A_1) + p(\bar{A}_1)\cdot p(\bar{B}_2)\cdot p(A_3) + p(\bar{A}_1)\cdot p(\bar{B}_2)\cdot p(\bar{A}_3)\cdot p(\bar{B}_4)\cdot p(A_5) + \ldots$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \ldots$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{6} + \ldots$$

$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{9}\right)^3\cdot\frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{3}{8}.$$

Задача 8. Во секоја од n-кутии се сместени x бели и y црни топчиња. Од првата кутија се извлекува едно топче и се става во втората кутија, потоа од втората кутија се извлекува едно топче и се става во третата кутија итн., од n-тата кутија се извлекува едно топче и се става во првата кутија. Да се најде веројатноста дека по сите префрлања од првата кутија, ќе се извлече бело топче.

Решение. Нека ги означиме со A_i настаните: за време на префрлањата од i-тата кутија е извлечено бело топче, $i = 1, 2, \ldots, n$, а со A нека го означиме настанот: по сите префрлања од првата кутија е извлечено бело топче. Тогаш, имаме:

$$p(A_1) = \frac{x}{x+y}$$

$$p(A_2) = p(A_1)p(A_2 \mid A_1) + p(\bar{A}_1)p(A_2 \mid \bar{A}_1)$$

$$= \frac{x}{x+y}\cdot\frac{x+1}{x+y+1} + \frac{y}{x+y}\cdot\frac{x}{x+y+1} = \frac{x}{x+y}$$

$$p(A_3) = p(A_2)p(A_3 \mid A_2) + p(\bar{A}_2)p(A_3 \mid \bar{A}_2)$$

$$= \frac{x}{x+y}\cdot\frac{x+1}{x+y+1} + \frac{y}{x+y}\cdot\frac{x}{x+y+1} = \frac{x}{x+y}$$

$$\vdots$$

$$p(A_n) = p(A_{n-1})p(A_n \mid A_{n-1}) + p(\bar{A}_{n-1})p(A_n \mid \bar{A}_{n-1})$$

$$= \frac{x}{x+y}\cdot\frac{x+1}{x+y+1} + \frac{y}{x+y}\cdot\frac{x}{x+y+1} = \frac{x}{x+y}.$$

Па, бараната веројатност е:

$$P(A) = p(A_1)p(A \mid A_1) + p(\bar{A}_1)p(A \mid \bar{A}_1)$$

$$= p(A_1)\big(p(A_n)p(A \mid A_1A_n) + p(\bar{A}_n)p(A \mid A_1\bar{A}_n)\big)$$

$$++p(\bar{A}_1)\cdot\left(p(A_n)p(A\,|\,\bar{A}_1A_n)+p(\bar{A}_n)p(\bar{A}_1\bar{A}_n)\right)$$

$$=\frac{x}{x+y}\cdot\left(\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}\cdot\frac{x-1}{x+y}\right)$$

$$+\frac{y}{x+y}\cdot\left(\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x+1}{x+y}+\frac{y}{x+y}\cdot\frac{x}{x+y}\right)=\frac{x}{x+y}.$$

Задача 9. Да го разгледаме следниов алгоритам за избирање на природен број: Дадени се 11 симболи: цифрите $0,1,2,\dots,9$ и знакот $*$. Во првото избирање случајно избираме една цифра помеѓу цифрите $1,2,\dots,9$. Во следните избирања избираме кој било од 11-те симболи. Алгоритамот завршува кога ќе се избере знакот $*$. Така, на пример низата $1,2,0,8,*$ го означува бројот 1208. Пресметај ја веројатноста на следниве настани:

а) избран е даден n-цифрен број,

б) избран е број кој во својот запис не ја содржи цифрата 0,

в) избран е број кој во својот запис не ја содржи цифрата 3,

г) алгоритамот нема никогаш да заврши.

Решение.

а) Нека $x=a_1a_2\dots a_n$ е дадениот број. Изборот на секоја наредна цифра е независен од изборот на претходната цифра. Следува:

$$p=p(a_1)\cdot p(a_2)\cdot\ldots\cdot p(a_n)\cdot p(*)=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^n.$$

б) Нека x е избраниот број. Тогаш, тој мора да има облик $x=a_1a_2\dots a_n$, при што n е кој било број и важи $a_i\neq 0,*$. Па,

$$p=\sum_{n=1}^{\infty}p(a_1)\cdot p(a_2)\cdot\ldots\cdot p(a_n)p(*)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}1\cdot\left(\frac{9}{11}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{11}=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{11}}=\frac{1}{2}.$$

в) Слично како во претходниот случај, важи $x=a_1a_2\dots a_n$, при што n е кој било природен број и $a_i\neq 3,*$. Тогаш:

$$p=\sum_{n=1}^{\infty}p(a_1)\cdot p(a_2)\cdot\ldots\cdot p(a_n)p(*)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{9}{11}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{11}=\frac{8}{99}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{11}}=\frac{4}{9}.$$

г) Нека со A го означиме настанот:

$A=\{$ алгоритамот нема да заврши$\}=\{$знакот $*$ нема да се појави$\}$

$$=\bigcap_{n=2}^{\infty}\{*\text{ нема да се појави во првите } n \text{ избирања}\}=\bigcap_{n=2}^{\infty}A_n .$$

Важи:

$$A_2\supset A_3\supset\ldots,\qquad p(A_n)=\left(\frac{10}{11}\right)^{n-1},$$

па,

$$p(A)=\lim_{n\to\infty}p(A_n)=0.$$

Задача 10. Нека се дадени три идентични по изглед кутии. Во првата кутија се наоѓаат четири бели и пет црни топчиња, во другата кутија се наоѓаат три бели и шест црни топчиња и во третата кутија се наоѓаат пет бели и осум црни топчиња. Колкава е веројатноста дека при извлекување на две топчиња по случаен избор на кутија, ќе бидат извлечени две црни топчиња?

Решение. Нека со A го означиме настанот A, како:

$$A=\{\text{извлечени се две црни топчиња}\},$$

$$H_i=\{\text{топчињата се извлечени од } i\text{-тата кутија}\},\ i=1,2,3.$$

Бидејќи изборот на кутија е случаен, имаме: $p(H_i)=\dfrac{1}{3}$, за $i=1,2,3.$

За условните веројатности имаме:

$$p(A\,|\,H_1)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{18},\qquad p(A\,|\,H_2)=\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12},$$

$$p(A\,|\,H_3)=\frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{39}.$$

Користејќи ја формулата за тотална веројатност, добиваме:

$$p(A)=p(H_1)p(A\,|\,H_1)+p(H_2)p(A\,|\,H_2)+p(H_3)p(A\,|\,H_3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{18}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{14}{39}=0,351.$$

Задача 11. Осигурач во електрично коло откажува (настан R) при: краток спој во електричната лампа со веројатност $p(R\,|\,A)=0,5$, спој во намотката на трансформаторот со веројатност $p(R\,|\,B)=0,6$, пробив на кондензаторот со веројатност $p(R\,|\,C)=0,7$, други причини со веројатност

$p(R\,|\,D)=0,9$. Априорните веројатности на настаните A,B,C,D се: $0,35$; $0,3$; $0,25$; $0,1$. Одреди ја најверојатната причина за откажување на осигурачот.

Решение. Тоталната веројатност за настанот R е:

$$p(R)=p(A)p(R\,|\,A)+p(B)p(R\,|\,B)+p(C)p(R\,|\,C)+p(D)p(R\,|\,D)$$

$$=0,35\cdot 0,5+0,3\cdot 0,6+0,25\cdot 0,7+0,1\cdot 0,9=0,62\,.$$

Апостериорните веројатности се:

$$p(A\,|\,R)=\frac{p(A)p(R\,|\,A)}{p(R)}=\frac{0,35\cdot 0,5}{0,62}=0,282$$

$$p(B\,|\,R)=\frac{p(B)p(R\,|\,B)}{p(R)}=\frac{0,3\cdot 0,6}{0,62}=0,290$$

$$p(C\,|\,R)=\frac{p(C)p(R\,|\,C)}{p(R)}=\frac{0,25\cdot 0,7}{0,62}=0,282$$

$$p(D\,|\,R)=\frac{p(D)p(R\,|\,D)}{p(R)}=\frac{0,1\cdot 0,9}{0,62}=0,145\,.$$

Па, најверојатно е да има откажување во спојот во намотката на трансформаторот.

Задача 12. Една цел се гаѓа од три топа. Топовите ја погаѓаат целта независно еден од друг со веројатност $0,4$. Ако еден топ ја погоди целта тој ја уништува со веројатност $0,3$, ако два топа ја погодат целта, тогаш таа е уништена со веројатност $0,7$, а ако целта ја погодат сите три топа, тогаш целта е уништена со веројатност $0,9$. Најди ја веројатноста дека целта е уништена.

Решение. Нека со A, го означиме настанот:

$A=\{$целта е уништена$\}$.

Дали целта ќе биде уништена зависи од тоа колку од топовите кои гаѓаат кон неа ја погодиле. Токму ова, е клучен аргумент за изборот на хипотезите:

$H_i=\{\,i$ топови ја погодиле целта$\}$, каде $i=1,2,3$.

Тогаш,

$$p(H_0)=\left(\frac{6}{10}\right)^3=\frac{27}{125},\ p(H_1)=\binom{3}{1}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{54}{125},$$

$$p(H_2)=\binom{3}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{36}{125}\ \text{и}\ p(H_3)=\left(\frac{4}{10}\right)^3=\frac{8}{125}.$$

Дополнително, условните веројатности се:

$$p(A\,|\,H_0)=0,\ p(A\,|\,H_1)=0{,}3,\ p(A\,|\,H_2)=0{,}7\ \text{и}\ p(A\,|\,H_3)=0{,}9\,.$$

Оттука,

$$p(A)=p(H_0)p(A\,|\,H_0)+p(H_1)p(A\,|\,H_1)+p(H_2)p(A\,|\,H_2)+p(H_3)p(A\,|\,H_3)$$

$$p(A)=\frac{243}{625}=0{,}389\,.$$

Задача 13. Во една кутија се наоѓаат две бели и четири црни топчиња, а во друга кутија се наоѓаат три бели и две црни топчиња. Од првата кутија случајно се извлекуваат две топчиња и се префрлаат во другата кутија. Колкава е веројатноста дека извлеченото топче, после префрлањето на двете топчиња, од кутијата е бело?

Решение. Нека го означиме со A, настанот:

$$A=\{\text{извлеченото топче од втората кутија е бело}\}.$$

При префрлање на двете топчиња од првата во втората кутија можат да настанат следниве три случаја, кои во нашиов случај се хипотези:

$$H_0=\{\text{ниту едно од топчињата не е бело}\},$$

$$H_1=\{\text{едно топче е бело}\},$$

$$H_2=\{\text{двете топчиња се бели}\}.$$

Соодветните веројатности на горните хипотези се:

$$p(H_0)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5},\qquad p(H_1)=2\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5},\qquad p(H_3)=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}.$$

За условните веројатности имаме:

$$p(A\,|\,H_0)=\frac{3}{7},\qquad p(A\,|\,H_1)=\frac{4}{7},\qquad p(A\,|\,H_2)=\frac{5}{7}.$$

Од формулата за тотална веројатност имаме:

$$p(A)=p(H_0)p(A\,|\,H_0)+p(H_1)p(A\,|\,H_1)+p(H_2)p(A\,|\,H_2)$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{30}+\frac{4}{7}\cdot\frac{16}{30}+\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{30}=\frac{11}{21}.$$

Задача 14. Некој извор емитира пораки кои се состојат од знаковите 0 и 1. Веројатноста за емитирање на знакот 1 е $0{,}6$, а веројатноста за емитирање на знакот 0 е 0,4. На излезот од каналот 10% од знаковите се интерпретираат погрешно. Ако примената порака е 101, колкава е веројатноста дека тоа е почетно испратената порака?

Решение. Нека ги означиме настаните:

$$A = \{\text{примен е знак } 0\},$$

$$B = \{\text{примен е знак } 1\},$$

$$H_0 = \{\text{пратен е знак } 0\},$$

$$H_1 = \{\text{пратен е знак } 1\},$$

$$D = \{\text{пратена е порака } 101\text{, ако е примена порака } 101\}.$$

Тогаш,

$$p(H_0) = 0,4\,,\; p(H_1) = 0,6\,,$$

па, од формулата за тотална веројатност имаме:

$$p(A) = p(H_0)p(A \mid H_0) + p(H_1)p(A \mid H_1) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,1 = 0,42\,,$$

$$p(B) = 1 - p(A) = 0,58\,.$$

Сега, ќе ја пресметаме веројатноста дека поединечни знакови се правилно примени.

$$p(H_0 \mid A) = \frac{p(H_0)p(A \mid H_0)}{p(A)} = \frac{0,36}{0,42} = 0,857\,,$$

$$p(H_1 \mid B) = \frac{p(H_1)p(B \mid H_1)}{p(B)} = \frac{0,54}{0,58} = 0,931\,.$$

Приемите на поединечните сигнали се независни настани, па:

$$p(D) = p(H_1 \mid B)p(H_0 \mid A)p(H_1 \mid B) = 0,931 \cdot 0,857 \cdot 0,931 = 0,743\,.$$

Задача 15. На еден испит имало дест прашања. Студентот положува ако точно одговори на две случајно извлечени прашања или ако точно одговори на едно прашање, а потоа одговори и на третото дополнително извлечено прашање. На колку прашања студентот треба да го знае одговорот за да со веројатност од $0,8$ го положи испитот.

Решение. Нека n е бројот на прашања на кои студентот го знае одговорот. Ги имаме следниве хипотези:

$$H_1 = \{\text{студентот одговорил точно на првите две прашања}\},$$

$$H_2 = \{\text{студентот одговорил точно на едно прашање}\},$$

$$H_3 = \{\text{студентот не одговорил на ниту едно прашање}\}$$

и нека го означиме настанот ,

$$A = \{\text{студентот го положил испитот}\}.$$

Тогаш, имаме:

$$p(H_1)=\frac{n}{10}\cdot\frac{n-1}{9},\qquad p(H_2)=\frac{n}{10}\cdot\frac{10-n}{9}+\frac{10-n}{10}\cdot\frac{n}{9},$$

$$p(H_3)=\frac{10-n}{10}\cdot\frac{9-n}{9}.$$

За условните веројатности, имаме:

$$p(A\,|\,H_1)=1,\qquad p(A\,|\,H_2)=\frac{n-1}{8},$$

$$p(A\,|\,H_3)=0.$$

Од формулата за тотална веројатност, добиваме:

$$p(A)=1\cdot\frac{n(n-1)}{90}+\frac{n-1}{8}\cdot\frac{2n(10-n)}{90}=\frac{n(n-1)(14-n)}{360}=f(n).$$

Со замена на вредности за n, добиваме:

$f(5)=0,5$, $f(6)=0,67$, $f(7)=0,82$, $f(8)=0,93$, $f(9)=1$ и

$f(10)=1$.

Задача 16. Помеѓу броевите $1,2,\dots,n$ избираме два броја. Колкава е веројатноста дека разликата помеѓу првиот и вториот број ќе биде барем m, $(0<m<n)$.

Решение. Нека x_1 е првиот број и нека x_2 е вториот број. Бидејќи можеме да го избреме кој било број од броевите $1,2,\dots,n$, хипотезите ќе бидат:

$$H_i=\{x_1=i\},\ i=1,2,\dots,n.$$

Па, $p(H_i)=\dfrac{1}{n}$. Нека бараниот настан го означиме со:

$$A=\{x_1-x_2\ge m\}.$$

Тогаш,

$$p(A\,|\,H_i)=0,\ \text{за}\ i=1,2,\dots,m,$$

$$p(A\,|\,H_i)=\frac{i-m}{n-1},\ \text{за}\ i=m+1,\dots,n,$$

па, затоа користејќи ја формулата за тотална веројатност:

$$p(A)=\sum_{i=m+1}^{n}\frac{i-m}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}\big(1+2+\dots+(n-m)\big)=\frac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}.$$

Така, на пример, за $m=1$, настанот A е:

$$A=\{\text{првиот број е поголем од другиот}\},$$

а неговата веројатност е: $p(A)=\dfrac{1}{2}$.

Задача 17. Двајца стрелци гаѓаат во иста мета, со по еден истрел. Веројатноста дека првиот стрелец ќе ја погоди метата е $0,8$, а веројатноста дека вториот стрелец ќе ја погоди метата е $0,4$. После гаѓањето, забележано е дека метата е погодена само еднаш. Одреди ја веројатноста дека метата ја погодил првиот стрелец.

Решение. Нека го означиме настанот:

$$A = \{\text{метата е погодена еднаш}\}.$$

Со оглед на тоа дека при гаѓањето на метата може првиот стрелец да ја погоди или промаши, а истото е можно и за вториот стрелец, хипотезите се:

$$H_0 = \{\text{ниту еден стрелец не ја погодил метата}\},$$

$$H_1 = \{\text{само првиот стрелец ја погодил метата}\},$$

$$H_2 = \{\text{само вториот стрелец ја погодил метата}\},$$

$$H_3 = \{\text{двата стрелци ја погодиле метата}\}.$$

Тогаш, важи:

$$p(H_0) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12, \; p(H_1) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48,$$

$$p(H_2) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 \text{ и } p(H_3) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32.$$

За условните веројатности имаме:

$$p(A \mid H_0) = 0, \qquad p(A \mid H_1) = 1, \qquad p(A \mid H_2) = 1,$$

$$p(A \mid H_3) = 0.$$

По Бејесовата формула, веројатноста дека првиот стрелец ја погодил метата (по тоа што знаеме дека метата е погодена само со еден истрел) изнесува:

$$p(H_1 \mid A) = \frac{p(H_1)p(A \mid H_1)}{p(A)} = \frac{0,48}{0,56} = 0,857.$$

Задача 18. Четири стрелци стрелаат во една мета. Веројатноста за погодок на стрелците изнесува $0,6; 0,7; 0,8; 0,9$, соодветно. Пресметај ја веројатноста дека барем три стрелци ја погодиле метата. Ако метата е погодена со три истрели, пресметај ја веројатноста дека погодиле и првиот и вториот стрелец.

Решение. Да ги означиме настаните:

$$B_i = \{ i\text{-тиот стрелец ја погодил метата}\}, \; i = 1,2,3,4,$$

$$B = \{\text{метата е погодена од барем три стрелци}\}.$$

Од условот на задачата:

$$p(B_1)=0,6\,,\qquad p(B_2)=0,7\,,\qquad p(B_3)=0,8\,,$$
$$p(B_4)=0,9\,.$$

Тогаш:

$$B=B_1B_2B_3B_4+\overline{B_1}B_2B_3B_4+B_1\overline{B_2}B_3B_4+B_1B_2\overline{B_3}B_4+B_1B_2B_3\overline{B_4}\,,$$

а, бидејќи B_i се независни, па со замена добиваме дека: $p(B)=0,743$.

Сега, нека го означиме настанот:

$A=\{$метата е погодена со точно три истрели$\}$.

Ги поставуваме следниве хипотези:

$$H_1=B_1B_2\,,\qquad H_2=B_1\overline{B_2}\,,\qquad H_3=\overline{B_1}B_2\qquad \text{и}\qquad H_4=\overline{B_1}\,\overline{B_2}\,,$$

со соодветни веројатности:

$$p(H_1)=0,42,\qquad p(H_2)=0,18,\qquad p(H_3)=0,28,\qquad p(H_4)=0,12$$

.

За условните веројатности, имаме:

$$p(A\,|\,H_1)=0,8\cdot 0,1+0,2\cdot 0,9=0,26$$
$$p(A\,|\,H_2)=0,8\cdot 0,9=0,72$$
$$p(A\,|\,H_3)=0,8\cdot 0,9=0,72$$
$$p(A\,|\,H_4)=0\,.$$

Со помош на формулата за тотална веројатност, добиваме:

$$p(A)=p(H_1)p(A\,|\,H_1)+p(H_2)P(A\,|\,H_2)$$
$$+p(H_3)P(A\,|\,H_3)+p(H_4)P(A\,|\,H_4)=0,44\,.$$

Со помош на Бејесовата формула, имаме:

$$p(H_1\,|\,A)=\frac{p(H_1)p(A\,|\,H_1)}{p(A)}=0,248\,.$$

Задача 19. Во кутија во која се наоѓаат n-топчиња, случајно се извлекува едно топче. Колкава е веројатноста дека тоа топче ќе биде бело, ако сите претпоставки за бројот на бели топчиња се еднакво веројатни? По извлекувањето на бело топче, колкава е веројатноста дека сите топчиња во кутијата се бели?

Решение. Природно ги поставуваме следниве хипотези:

$H_i=\{$во кутијата се наоѓаат i бели топчиња$\}$, $\qquad i=0,1,\ldots,n$.

Од претпоставката во условоте на задачата, јасно е дека: $p(H_i)=\dfrac{1}{n+1}$ и $p(A\,|\,H_i)=\dfrac{i}{n}$, каде што: $i=0,1,2,\ldots,n$, при што настанот A е дефиниран како:

$$A = \{\text{извлечено е бело топче}\}.$$

Користејќи ја формулата за тотална веројатност и Бејесовите формули, имаме:

$$p(A) = \sum_{i=0}^{n} p(H_i)p(A \mid H_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{i}{n}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{2},$$

$$p(H_n \mid A) = \frac{p(H_n)p(A \mid H_n)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{n}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{n+1}.$$

Задача 20. Во едно складиште сите производи се квалитетни, а во друго складиште има 25% неквалитетни производи. Случјано е избран производ од некое складиште. Пресметај ја веројатноста дека вториот производ извлечен од истото складиште е неквалитетен.

Решение. Нека ги означиме настаните:

$$H_1 = \{\text{извлечен е производ од првото складиште}\},$$

$$H_2 = \{\text{извлечен е производ од второто складиште}\},$$

$$A = \{\text{првиот извлечен производ е добар}\},$$

со соодветни веројатности:

$$p(H_1) = 0,5, \quad p(H_2) = 0,5$$

$$p(A) = p(H_1)p(A \mid H_1) + p(H_2)p(A \mid H_2) = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,75 = 0,875.$$

По тоа што е извлечен квалитетен производ, веројатностите на хипотезите се менуваат. Апостериорните веројатности на хипотезите се:

$$p(H_1 \mid A) = \frac{p(H_1)p(A \mid H_1)}{p(A)} = \frac{0,5 \cdot 1}{0,875} = 0,571$$

$$p(H_2 \mid A) = 1 - p(H_1 \mid A) = 0,429.$$

Сега поставуваме нови хипотези. Поконкретно,

$$H'_1 = H_1 \mid A = \{\text{квалитетен производ е извлечен од првото складиште}\},$$

$$H'_2 = H_2 \mid A = \{\text{квалитетен производ е извлечен од второто складиште}\}.$$

Нека со B го означиме настанот:

$$B = \{\text{второизвлечениот производ е неквалитетен}\}.$$

Да претпоставиме дека бројот на производи е голем, па процентот не се променил ако сме го извлекле првиот производ од, на пример, второто складиште. Тогаш, имаме:

$$p(B) = p(H'_1)p(B \mid H'_1) + p(H'_2)p(B \mid H'_2)$$
$$= 0,571 \cdot 0 + 0,429 \cdot 0,25 = 0,107.$$

Задача 21. Која е веројатноста дека при осум фрлања на хомогена коцка, бројот еден да се појави точно три пати?

Решение. Од условот на задачата имаме: $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 8$, $k = 3$.

Тогаш, за бараната веројатност имаме:

$$P_{8,3} = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,1042.$$

4. Дискретни случајни променливи

При реализација на некој експеримент се случува елементарен настан $\omega \in \Omega$. Многу често е причина за мерење на некои нумерички величини чии вредности зависат од реализацијата на тој елементарен настан. Едноставен пример е моделот на фрлање на коцка. Природно е на секој елементарен настан да му го придружиме бројот кој паднал на коцката. Со тоа е дефинирано пресликување од множеството Ω, од сите елементарни настани во множеството $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ од сите можни исходи. Ова пресликување се вика случајна променлива.

Во еден стохастички експеримент може да бидат вклучени и повеќе случајни променливи. Така на пример, ако фрламе две коцки, тогаш како случајни променливи придружени на тој експеримент може да се земат: збир на коцките, нивната разлика, помалиот од броевите кои се паднале, поголемиот од броевите кои се паднале итн.

Веројатноста на реалните случајни променливи е некое подмножество од $[0,1]$. При изучувањето на случајните променливи ќе направиме поделба и ќе издвоиме две класи на случајни променливи: дискретни и непрекинати случајни променливи. Дискретните случајни променливи своите вредности ги примаат од дискретно множество (обично природни и цели броеви), а непрекинатите случајни променливи примаат вредности кои било реални броеви или вредности во некој интервал. Оваа поделба е направена врз основа на математичкиот апарат кој се користи. Кај дискретните случајни променливи математичкиот апарат кој е поврзан со нивното изучување се низи и редови од реални броеви и матрици, додека математичкиот апарат кој се користи за изучување на непрекинатите случајни променливи се заснова на математичката анализа, т.е. диференцијално и интегрално сметање.

4.1. Дискретни случајни променливи

Нека $B = \{x_1, x_2, ...\}$ е конечно или бесконечно преброиво множество без точка на натрупување. Обично тоа е подмножество од множеството на природните или целите броеви. Ќе ги разгледаме случајните променливи кои на секој елементарен настан му придружуваат некоја вредност од B. Нека X е пресликување од множеството Ω од сите елементарни настани во множеството B. Логично е да си го поставиме прашањето: „Колкава е веројатноста случајната променлива да прима некоја вредност x_k од множеството B?“. Да го означиме со A_k множеството од сите елементарни настани кои се пресликуваат во x_k:

$$A_k = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}.$$

За да можеме да одговориме на горното прашање, множеството A_k мора да биде настан, односно елемент од σ-алгебрата F од сите настани. Кога овој услов е исполнет, за пресликувањето X ќе велиме дека е случајна променлива.

Дефиниција 1. Пресликувањето $X : \Omega \to B$ е дискретна случајна променлива ако за секој $x_k \in B$ множеството $A_k = \{\omega \in \omega : X(\omega) = x_k\}$ е настан. Означуваме:

$$p_k = p(A_k) = p(X = x_k).$$

За овие броеви важи: $p_k > 0$, $\sum_k p_k = 1$.

Законот на распределба на случајната променлива X се состои од вредностите кои ги прима заедно со соодветните веројатности. Запишуваме:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Една паричка се фрла три пати. Нека X е случајната променлива, која е дефинирана со X: број на паднати петки. Најди го законот на распределба на оваа случајна променлива.

Решение. Просторот на веројатност се состои од осум елементарни настани. Ќе ги напишеме заедно со вредноста која ја прима случајната променлива X. Имаме:

$$\omega_1 = ГГГ,\ \omega_2 = ГГП,\ \omega_3 = ГПГ,\ \omega_4 = ГПП,\ \omega_5 = ПГГ,\ \omega_6 = ПГП,$$

$$\omega_7 = ППГ,\ \omega_8 = ППП,$$

при што:

$$X(\omega_1) = 0,\ \ X(\omega_2) = 1,\ \ X(\omega_3) = 1,\ \ X(\omega_4) = 2,$$

$$X(\omega_5) = 1,\ \ X(\omega_6) = 2,\ \ X(\omega_7) = 2,\ \ X(\omega_8) = 3.$$

Можеме да забележиме дека случајната променлива X ги прима вредностите од множеството $\{0,1,2,3\}$, а соодветните веројатности се:

$$p_1 = p(X = 0) = p(\omega_1) = \frac{1}{8},$$

$$p_2 = p(X = 1) = p((\omega_2, \omega_3, \omega_5)) = \frac{3}{8},$$

$$p_3 = p(X = 2) = p((\omega_4, \omega_6, \omega_7)) = \frac{3}{8},$$

$$p_4 = p(X = 3) = p(\omega_8) = \frac{1}{8}.$$

Следствено, законот на распределба на случајната променлива X е:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}. \blacklozenge$$

Пример 2. Еден човек има осум еднакви по големина и облик клучеви. Од сите нив само еден ја отвора вратата од неговиот стан. Тој се обидува да ја отвори вратата така што испробува еден по еден клуч, така што по секој обид клучот со кој се обидел да ја отвори вратата го трга на страна, односно го вади од купчето со клучеви. Да се најде законот на распределба на случајната променлива X : број на обиди додека човекот не ја отвори вратата од својот стан.

Решение. Нека со A_i ги означиме настаните: во i-тиот обид човекот го избрал вистинскиот клуч, односно ја отворил вратата од својот стан, $i = 1, 2, ..., 8$. Па, за случајната променлива X имаме дека $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, а нејзиниот закон на распределба на веројатноста е:

$$p(X = 1) = p(A_1) = \frac{1}{8} = 0{,}125,$$

$$p(X = 2) = p(\bar{A}_1 A_2) = p(\bar{A}_1) p(A_2 \mid \bar{A}_1) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = 0{,}125,$$

$$p(X = 3) = p(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = p(\bar{A}_1) p(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) p(A_3 \mid \bar{A}_1 \bar{A}_2) = \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}125.$$

Сосема аналогно, добиваме дека:

$$p(X = 4) = p(X = 5) = p(X = 6) = p(X = 7) = p(X = 8) = \frac{1}{8} = 0{,}125,$$

односно добиваме дека X има рамномерна распределба на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, односно:

$$p(X = k) = \frac{1}{8} = 0{,}125, \qquad k = 1, 2, ..., 8. \blacklozenge$$

Пример 3. Нека p е веројатноста за реализација на настанот A. Еден експеримент под исти услови го повторуваме сѐ додека не се појави настанот A. Нека X е случајна променлива дефинирана со X: број на изведувања на експериментот сѐ до појавување на настанот A. Тогаш за X велиме дека има геометриска распределба со параметар p. Најди го законот на распределба на случајната променлива X.

Решение. Ќе ги напишеме сите елементарни настани, вредностите кои ги прима случајната променлива и соодветните веројатности во овој пример. Имаме:

$$\omega_1 = A,\ \omega_2 = \overline{A}A,\ \omega_3 = \overline{A}\overline{A}A, \dots, \omega_n = \underbrace{\overline{A}\overline{A}\dots\overline{A}}_{n-1}A, \dots,$$

при што, $X(\omega_1) = 1,\ X(\omega_2) = 2, X(\omega_3) = 3, \dots, X(\omega_n) = n, \dots$,

со соодветни веројатности:

$$p(\omega_1) = p,\ p(\omega_2) = qp,\ p(\omega_3) = q^2 p, \dots, p(\omega_n) = q^{n-1} p, \dots,$$

каде што: $q = 1 - p$.

Законот на распределба на случајната променлива X е:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ p & qp & q^2 p & \dots & q^{n-1} p & \dots \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Веројатноста да се појави настанот A при некое испитување е p, каде што: $0 < p < 1$. Испитувањата се вршат независно сѐ додека не се појави комбинацијата $A\overline{A}$. Нека со Y ја дефинираме случајната променлива: број на изведени испитувања за да комбинацијата $A\overline{A}$ се појави по прв пат. Најди го законот на распределба на веројатноста на случајната променлива Y.

Решение. Вредностите кои може да ги прими случајната променлива Y се: $Y \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}$. Соодветните веројатности се:

$$p(Y = 2) = p(A\overline{A}) = p(1 - p) = pq,$$

каде што: $q = 1 - p$.

$$p(Y = 3) = p(A\overline{A} + \overline{A}A\overline{A}) = p^2 q + pq^2 = pq(p + q) = pq.$$

Продолжувајќи на истиот начин, за $k \in \mathbb{N}$, $k = 2, 3, 4, \dots$ добиваме:

$$p(Y = k) = p(\underbrace{AA\dots A}_{k-1}\overline{A} + \overline{A}\,\underbrace{AA..A}_{k-2}\overline{A} + \overline{A}\overline{A}\underbrace{AA\dots A}_{k-3}\overline{A} + \dots + \underbrace{\overline{A}\overline{A}\dots\overline{A}}_{k-2}A\overline{A})$$

$$= p^{k-1}q + p^{k-2}q^2 + p^{k-3}q^3 + \ldots + pq^{k-1} = q^k \cdot \frac{p}{q}\left(1+\frac{p}{q}+\left(\frac{p}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p}{q}\right)^{k-2}\right),$$

за $k = 2,3,4,\ldots$.

Ги имаме следниве две ситуации:

а) Нека: $p = \frac{1}{2}$.Тогаш, $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Сега,

$$p(Y=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k-1}) = (k-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k, k = 2,3,4,\ldots \ .$$

б) Нека: $p \neq \frac{1}{2}$ и $q \neq \frac{1}{2}$. Сега,

$$p(Y=k) = q^k \cdot \frac{p}{q}\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}}{1-\frac{p}{q}}\right) = pq\cdot\frac{q^{k-1}-p^{k-1}}{q-p},\ k = 2,3,4,\ldots \ . \blacklozenge$$

Да разгледаме еден експеримент во кој коцка се фрла два пати. Нека X е случајна променлива која е зададена со X: бројот кој се паднал при првото фрлање, а Y е случајна променлива која е зададена со Y: бројот кој се паднал при второто фрлање. Сосема природно е да се претпостави дека резултатите од првото и второто фрлање не зависат еден од друг. Така на пример,

$$p(X=3, Y=5) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = p(X=3)\cdot p(Y=5),$$

Слично, имајќи ги предвид елементарните настани кои доведуваат до реализација на настаните чија веројатност ја разгледуваме, имаме:

$$p(X \le 2, Y \ge 4) = \frac{6}{36} = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} = p(X \le 2)\cdot p(Y \ge 4)\ . \blacklozenge$$

Па, можеме да ја дадеме следнава дефиниција:

Дефиниција 2. Случајните променливи $X, Y : \Omega \to B$ се независни ако за сите $x_k, y_j \in B$ е исполенето:

$$p(X = x_k, Y = y_j) = p(X = x_k)\cdot p(Y = y_j)\ . \qquad (*)$$

Можеме да дадеме и друга дефиниција за независност на случајни променливи:

Случајните променливи $X, Y : \Omega \to B$ се независни ако за сите $A_1, A_2 \subset B$ важи:

$$p(X \in A_1, Y \in A_2) = p(X \in A_1) \cdot p(Y \in A_2). \qquad (**)$$

Ќе докажеме дека овие две дефиниции се еквивалентни. Јасно е дека од (**) следува (*). Ќе покажеме дека од (*) следува (**). Нека:

$$A_1 = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, \qquad A_2 = \{y_1, y_2, ..., y_m\}.$$

Тогаш, важи:

$$\begin{aligned} p(X \in A_1, Y \in A_2) &= p(X \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}, Y \in \{y_1, y_2, ..., y_m\}) \\ &= p\left(\bigcup_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le j \le m}} (X = x_k, Y = y_j) \right) \\ &= \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le j \le m}} p(X = x_k, Y = y_j) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le j \le m}} p(X = x_k) \cdot p(Y = y_j) \\ &= \sum_{1 \le k \le n} p(X = x_k) \cdot \sum_{1 \le j \le m} p(Y = y_j) \\ &= p\left(\bigcup_{1 \le k \le n} (X = x_k) \right) \cdot p\left(\bigcup_{1 \le j \le m} (Y = y_j) \right) \\ &= p(X \in A_1) \cdot p(Y \in A_2). \end{aligned}$$

Оваа дефиниција за независност на две случајни променливи може да се прошири на конечно многу и бесконечно преброиво многу случајни променливи.

Дефиниција 3. Нека случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се дефинирани на ист простор на веројатност (Ω,F, p). Ако за сите $A_1, A_2, ..., A_n \subset B$ важи:

$$p(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, ..., X_n \in A_n) = p(X_1 \in A_1) \cdot p(X_2 \in A_2) \cdot ... \cdot p(X_n \in A_n),$$

тогаш за случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ велиме дека се независни.

Случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни ако за секој $k \in \mathbb{N},\ 1 < k < n$, случајните променливи $X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_k}$, за секој избор на различни индекси $i_1, i_2, ..., i_k$.

Пример 5. Фрламе една коцка сѐ додека не се појави број помал од 5. Нека X е случајната променлива дадена со X: број на фрлања на коцката, додека Y е случајна променлива дадена со Y: фрлање во кое се паднал бројот 6 ($Y=0$ ако бројот 6 воопшто не се појавил). Најди го законот на распределба на случајните променливи X и Y.

Решение. Нека означиме со X_i: резултатот при i-тото фрлање. Тие се независни случајни променливи, кои имаат ист закон на распределба и секоја од нив прима вредности од множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ со еднаква веројатност.

Случајната променлива X ги прима вредностите од множеството $\{1,2,3,\ldots\}$. Имаме:

$$\begin{aligned} p(X=n) &= p(X_1 \geq 5, X_2 \geq 5, \ldots, X_{n-1} \geq 5, X_n \leq 4) \\ &= p(X_1 \geq 5) \cdot p(X_2 \geq 5) \cdot \ldots \cdot p(X_{n-1} \geq 5) \cdot p(X_n \leq 4) \\ &= \left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{3^n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Случајната променлива Y прима врдности од множеството $\{0,1,2,3,\ldots\}$. Имаме:

$$p(Y=n) = p(X_1 = 5) \cdot p(X_2 = 5) \cdot \ldots \cdot p(X_{n-1} = 5) \cdot p(X_n = 6) = \frac{1}{6^n},$$

$$n \geq 1,$$

$$p(Y=0) = p(X_1 \leq 4) + p(X_1 = 5, X_2 \leq 4) + p(X_1 = 5, X_2 = 5, X_3 \leq 4) + \ldots$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} + \ldots = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{4}{5}.$$

Законите на распределба на случајните променливи X и Y се:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \ldots & \frac{2}{3^n} & \ldots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n & \ldots \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{6} & \ldots & \frac{1}{6^n} & \ldots \end{pmatrix}. \ \blacklozenge$$

Нека X е дискретна случајна променлива со познат закон на распределба, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дадена функцијата и важи $Y = \psi(X)$. Ако:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

е законот на распределба, тогаш:

$$Y:\begin{pmatrix} \psi(x_1) & \psi(x_2) & \psi(x_3) & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

е закон на распределба на случајната променлива Y. Овој закон на распределба можеме да го запишеме и како:

$$Y:\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots \end{pmatrix},$$

каде што $y_1, y_2, y_3, \dots$ се различни вредности од множеството $\{\psi(x_1), \psi(x_2), \psi(x_3), \dots\}$. Ако $y_i = \psi(x_{i_1}) = \psi(x_{i_2}) = \dots$, тогаш:

$$q_i = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots \,.$$

Пример 6. Случајната променлива X има закон на распределба:

$$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Најди го законот на распределба на случајната променлива $Y = X^2$.

Решение. Имајќи ја предвид дискусијата пред примерот, имаме:

$$Y:\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}. \blacklozenge$$

Пример 7. Од множеството $\{1,2,\dots,n\}$, $n \geq 2$ случајно се избираат истовремено два броја x и y. Нека дадена случајната променлива: $Z = \max\{x, y\}$.

а) Да се најде законот на распределба на случајната променлива X,

б) Да се најдат веројатностите $p(0,5 < Z \leq 3,56)$ и $p(Z > 2,6)$.

Решение. Множеството на сите елементарни настани за овој експеримент е: $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Оттука, $|\Omega| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

а) Случајната променлива Z ги прима вредностите $Z \in \{2, 3, \dots, n\}$, а нејзиниот закон на распределба е:

$$p(Z = k) = p((x, k) : x \in \{1, 2, \dots, k-1\}\} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}, \; k = 2, 3, \dots, n.$$

б) За бараните веројатности се добива:

$$p(0,5 < Z \leq 3,56) = p(Z = 2) + p(Z = 3) = \frac{2 \cdot (2-1)}{n(n-1)} + \frac{3 \cdot (3-1)}{n(n-1)} = \frac{8}{n(n-1)},$$

$$p(Z>2,6)=1-p(Z\le 2,6)=1-p(Z=2)=1-\frac{2\cdot(2-1)}{n(n-1)}=\frac{n^2-n-2}{n(n-1)}\,.\ \blacklozenge$$

4.2. Дводимензионални случајни променливи

Нека случајната променлива X ги прима вредностите $\{x_1,x_2,...,x_n\}$, а случајната променлива Y ги прима вредностите $\{y_1,y_2,...,y_m\}$. Законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) е позната ако ги знаеме веројатностите:

$$p_{ij}=p(X=x_i,Y=y_j)\,,$$

при што мора да важи: $\sum_{i,j}p_{ij}=1$. Законот на распределба на случајниот вектор го запишуваме и со табела:

X/Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

Нека означиме со:

$p_i=\sum_j p_{ij}=\sum_j p(X=x_i,Y=y_j)$, (сума на веројатносите од i-тиот ред),

$q_j=\sum_i p_{ij}=\sum_i p(X=x_i,Y=y_j)$, (сума на веројатностите од j-тиот ред).

Јасно, важи:

$$\sum_j p(X=x_i,Y=y_j)=p(X=x_i)\,,$$

така што со собирање на елементите од некоја редица од оваа таблица го добиваме законот на распределба на случајната променлива X. Сосема слично, со собирање на елементите од колоните ќе го добиеме законот на распределба на случајната променлива Y. Овие распределби ги запишуваме на маргините на табелата, па затоа ќе ги нарекуваме маргинални закони на рапределба на веројатностите (маргинални веројатности) на компонентите на случајниот вектор:

$X\,/\,Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	
	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	

Маргиналните закони на распределба на случајните променливи X и Y се:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \qquad Y:\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Ако ги знаеме маргиналните распределби, распределбата на случајниот вектор не е определена, односно со помош на маргиналните веројатности не можеме да ја реконструираме таблицата на веројатност, т.е. законот на распределба за случајниот вектор (X,Y). Единствена ситуација во која е можно е ако компонентите на случајниот вектор се независни, бидејќи тогаш важи дека:

$$p_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j) = p(X = x_i)p(Y = y_j) = p_i p_j .$$

Пример 1. Фрламе две коцки. Нека X е бројот на првата коцка, Y е поголемиот од двата броја на коцките. Најди ја распределбата на векторот (X,Y). Пресметај ги законите на маргиналните распределби на X и Y.

Решение. Постојат 36 елементарни еднакво веројатни настани. За секој од нив можеме да ги одредиме веројатностите на случајните променливи X и Y. При тоа, некоја вредност може да се појавува во повеќе елементарни настани. Го добиваме следниов закон на распределба на случајниот вектор (X,Y):

$X\,/\,Y$	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$ $\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$		$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Маргиналните распределби се:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}. \blacklozenge$$

Пример 2. Даден е законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) со следнава табела:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{a}{6}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{12}$

а) Пресметај ја вредноста на a;

б) Најди ги маргиналните распределби на X и Y, соодветно;

в) Пресметај ги веројатностите $p(X=1,Y<1)$, $p(X<2,Y>1)$ и $p(X<0,Y>0)$.

Решение.

а) Имајќи предвид дека збирот на сите веројатности мора да биде 1, добиваме:

$$\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{1}{36}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{a}{6}+\frac{1}{9}+\frac{a}{3}+\frac{a}{12}=1,$$

од каде што добиваме дека $a=\frac{1}{3}$. Оттука, табелата со која е даден законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) е:

$X\setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

б) За маргиналната распределба на случајната променлива X имаме:

$$p(X=1)=p(X=1,Y\in\{0,1,2\})=p(X=1,Y=0)+p(X=1,Y=1)$$
$$+p(X=1,Y=2)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{2},$$
$$p(X=0)=p(X=0,Y\in\{0,1,2\})=p(X=0,Y=0)+p(X=0,Y=1)$$
$$+p(X=0,Y=2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4},$$
$$p(X=2)=p(X=2,Y\in\{0,1,2\})=p(X=2,Y=0)+p(X=2,Y=1)$$
$$+p(X=2,Y=2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4}.$$

Конечно, за маргиналната распределба на случајната променлива X, добиваме:

X	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Сосема аналогно, за маргиналната распределба на случајната променлива Y, имаме:

Y	0	1	2
p	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

в) За веројатностите кои се бараат во овој дел, имаме:

$$p(X=1,Y<1)=p(X=1,Y=0)=\frac{2}{9},$$

$$p(X<2,Y>1)=p(X\in\{0,1\},Y=2)$$

$$=p(X=0,Y=2)+p(X=1,Y=2)=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}=\frac{1}{12},$$

$$p(X<0,Y>0)=p(X\in\varnothing,Y\in\{1,2\})=0\,.\ \blacklozenge$$

Условната распределба на настанот $\{X=x_i \mid Y=y_j\}$ е дадена со:

$$p(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{p(X=x_i,Y=y_j)}{p(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{q_j}\,.$$

Множеството од сите такви веројатности за сите i ја даваат условната распределба на случајната променлива X, при услов $Y=y_j$:

$$X \mid Y=y_j : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ \frac{p_{1j}}{q_j} & \frac{p_{2j}}{q_j} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Оваа распределба се чита од j-тата колона од законот на распределба на случајниот вектор (X,Y), а потоа елементите на оваа колона се делат со соодветната маргина. Сосема аналогно, можеме да ја пресметаме условната распределба на случајната променлива Y, при услов $X=x_i$

$$Y \mid X=x_i : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots \\ \frac{p_{i1}}{p_i} & \frac{p_{i2}}{p_i} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Фрламе две коцки. Нека X е случајна променлива дефинирана со $X:$ помалиот од двата броја кои се паднале на коцките, додека случајната променлива Y е дефинирана со $Y:$поголемиот од двата броја кои се паднале на коцките. Најди ја распределбата на случајниот вектор (X,Y), маргиналните распределби, условната веројатност на X, при услов $Y=4$. Пресметај ја веројатноста на настаните $A=\{X\geq 2|Y=4\}$ и $B=\{Y=4\,|\,X\geq 2\}$.

Решение. Постојат 36 еднакво веројатни настани. Го имаме следниот закон на распределба за случајниот вектор (X,Y)

$X\,/\,Y$	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Маргиналните распределби на случајните променливи X и Y се вредностите од последната редица и последната колона:

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36}\end{pmatrix},$$

$$Y:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36}\end{pmatrix}.$$

Условната распределба на $X\,|\,Y=4$ е:

$$p(X=1\,|\,Y=4)=\frac{p(X=1,Y=4)}{p(Y=4)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{7}{36}}=\frac{2}{7}$$

и продолжувајќи слично за останатите вредности на случајната променлива X за законот на условната распределба $X\,|\,Y=4$, имаме:

$$X\,|\,Y=4:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Дополнително, за останатите барања во условот на задачата имаме:

$$p(A)=\frac{p(X\ge 2,Y=4)}{p(Y=4)}=\frac{\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}}{\frac{7}{36}}=\frac{5}{7},$$

$$p(B)=\frac{p(X\ge 2,Y=4)}{p(X\ge 2)}=\frac{\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}}{\frac{9}{36}+\frac{7}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}}=\frac{1}{5}.\ \blacklozenge$$

Пример 4. Независните случајни променливи X_1 и X_2 имаат ист закон на распределба:

$$X_1,X_2:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Најди го законот на распределба на случајните променливи:

а) $Y=X_1+X_2$,

б) $Z=X_1X_2$.

Решение.

а) Случајната променлива ги прима вредностите $\{0,1,2,3,4\}$ со веројатности:

$$p(Y=0)=p(X_1=0,X_2=0)=0,3\cdot 0,3=0,09,$$

$$p(Y=1)=p(X_1=0,X_2=1)+p(X_1=1,X_2=0)=2\cdot 0,3\cdot 0,5=0,3,$$

$$p(Y=2)=p(X_1=1,X_2=1)+p(X_1=0,X_2=2)+p(X_1=2,X_2=0)=0,37$$

$$p(Y=3)=p(X_1=1,X_2=2)+p(X_1=2,X_2=1)=0,2,$$

$$p(Y=4)=p(X_1=2,X_2=2)=0,04.$$

Во согласност со ова, законот на распределба на случајната променлива Y е:

$$Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,09 & 0,3 & 0,37 & 0,2 & 0,04 \end{pmatrix}.$$

б) Случајната променлива ги прима вредностите $\{0,1,2,4\}$ со веројатности:

$$p(Z=0)=p(X_1=0)+p(X_1\neq 0, X_2=0)=0,3+0,7\cdot 0,3=0,51,$$

$$p(Z=1)=p(X_1=1, X_2=1)=0,25,$$

$$p(Z=2)=p(X_1=1, X_2=2)+p(X_1=2, X_2=1)=0,2,$$

$$p(Z=4)=p(X_1=2, X_2=2)=0,04.$$

Па, за законот на распределба на случајната променлива Z имаме:

$$Z:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0,51 & 0,25 & 0,2 & 0,04 \end{pmatrix}. \blacklozenge$$

4.3. Математичко очекување. Дисперзија

Случајните променливи најлесно се опишуваат со помош на своите нумерички карактеристики. Едни од најважните карактеристики на една случајна променлива се математичко очекување и дисперзија.

Дефиниција 1. Нека случајната променлива X има закон на распределба:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Математичкото очекување на случајната променлива X е дефинирано со:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad ,$$

при услов горниот ред да е конвергентен, т.е. важи: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k < \infty$.

Во некои случаи математичкото очекување се означува и со $M(X)$, $\overline{x}$ или m_X, во зависност од литературата која се користи.

Пример 1. Дадена е случајната променлива X, со закон на распределба:

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Најди го нејзиното математичко очекување.

Решение. Во согласност со дефиницијата на математичко очекување на дискретна случајна променлива, имаме:

$$E(X) = -1\cdot 0,2 + 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,1 + 2\cdot 0,3 + 3\cdot 0,1 = 0,8. \ \blacklozenge$$

Од примерот можеме да забележиме дека математичкото очекување на случајната променлива не мора да биде еднакво на некоја од можните вредности на случајната променлива. Математичкото очекување не мора да биде еднакво ниту на вредноста која се реализира со најголема веројатност. Тоа се гледа од следниов пример:

Пример 2. Најди го математичкото очекување на случајната променлива X, дадена со законот на распределба:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 5 & 100 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имаме:

$$E(X) = 1\cdot 0,8 + 5\cdot 0,1 + 100\cdot 0,1 = 11,3. \ \blacklozenge$$

Геометриската интерпретација на математичкото очекување е следнава: Ако замислиме дека во точките со апциси $x_1, x_2, \ldots$ ставиме тегови со маса $p_1, p_2, \ldots$, тогаш тежиштето на овој систем ќе биде во точка со апциса $\bar{x}$.

Математичкото очекување не мора да постои. Да го разгледаме следниов пример.

Пример 3. Дадена е случајната променлива X, со закон на распределба:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \ldots & 2^{n-1} & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \ldots & \frac{1}{2^n} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Најди го математичкото очекување на случајната променлива X.

Решение. За математичкото очекување на случајната променлива X, имаме:

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{8}+...+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}+...=+\infty .$$

Од овде, можеме да заклучиме дека случајната променлива X нема математичко очекување. ♦

Во наредната теорема се дадени некои од основните својства на математичкото очекување.

Теорема 1. Нека X и Y се случајни променливи дефинирани на ист простор на веројатност. Тогаш, за математичкото очекување важи:

а) $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$, за секои реални броеви α и β;

б) Ако случајните променливи X и Y се независни, тогаш важи: $E(XY)=E(X)E(Y)$.

Доказ. Својството $E(\alpha X)=\alpha E(X)$ следува директно од дефиницијата на математичко очекување. Навистина,

$$E(\alpha X)=\sum_k(\alpha x_k)p_k=\alpha\sum_k x_k p_k=\alpha E(X).$$

За да го докажеме тврдењето под а) доволно е да докажеме дека важи $E(X+Y)=E(X)+E(X)$. Нека е даден законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) даден со следнава табела:

X/Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	$\cdots$	q_m	

Случајната променлива $X+Y$ ги прима вредностите x_j+y_k со веројатност p_{jk}, каде што $j=1,2,...,n$ и $k=1,2,...,m$. Во согласност со ова, добиваме:

$$E(X+Y)=\sum_{k,j}(x_j+y_k)p_{kj}=\sum_{k,j}x_j p_{kj}+\sum_{k,j}y_k p_{kj}$$

$$=\sum_j x_j\cdot\sum_k p_{kj}+\sum_k y_k\cdot\sum_j p_{kj}=\sum_j x_j p_j+\sum_k y_k q_k=E(X)+E(Y).$$

б) Случајните променливи X и Y се независни, па важи: $p_{jk} = p_j q_k$, за сите $j = 1, 2, \ldots, n$ и $k = 1, 2, \ldots, m$. Па,

$$E(XY) = \sum_{j,k} x_j y_k p_{jk} = \sum_{j,k} x_j y_k p_j q_k$$

$$= \left(\sum_j x_j p_j \right) \cdot \left(\sum_k y_k q_k \right) = E(X) \cdot E(Y). \ \blacksquare$$

Нека Y е случајна променлива, која е функција од случајната променлива X, дадена со формулата $Y = f(X)$. Како би го одредиле математичкото очекување на Y?

Пример 4. Нека $Y = X^2$, каде X е случајна променлива, со закон на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Најди го математичкото очекување на случајната променлива Y.

Решение. Случајната променлива Y има закон на распределба:

$$Y : \begin{pmatrix} (-2)^2 & (-1)^2 & 0^2 & 1^2 & 2^2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Па,

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Да забележиме дека овде $E(X) = 0$, па важи $E(X^2) \neq (E(X))^2$.

Друг начин за пресметување на математичко очекување на функција на случајна променлива, чиј закон на распределба го знаеме, е со помош на формулата:

$$E(f(X)) = \sum_k f(x_k) p_k .$$

До оваа формула се доаѓа слично како во горниот пример, со тоа што не го сведуваме законот на распределба на случајната променлива Y, туку математичкото очекување го пресметуваме од несредениот облик. Од:

$$Y = X^2 : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

добиваме:

$$E(Y) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \ \blacklozenge$$

Дефиниција 2. Нека е дадена случајната променлива X со закон на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

и нека n е природен број. Дефинираме момент од n-ти ред на случајната променлива со формулата:

$$E(X^n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k{}^n p_k \ ,$$

под услов горниот ред да конвергира, т.е.: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k{}^n p_k < \infty$.

Централниот момент μ_n од ред n, се дефинира со формулата:

$$\mu_n = E[(X - E(X)^n] = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - E(X))^n p_k \ ,$$

под услов горниот ред да конвергира, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - E(X))^n p_k < \infty$.

Дефиниција 3. Дисперзија (расејување, варијанса) на случајната променлива X се дефинира со формулата:

$$D(X) = E[(X - E(X))^2].$$

Овој израз, најчесто се пресметува на следниов начин:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

односно:

$$D(X) = \sum_k x_k{}^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k \right)^2.$$

Ова следува од самата дефиниција на дисперзија. Навистина:

$$E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2]$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Во следнава теорема се дадени основните својства на дисперзијата.

Теорема 2. Нека X и Y се случајни променливи и α е реален број. Тогаш:

а) $D(\alpha X) = \alpha^2 D(X)$,

б) Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Доказ. За да ги докажеме својствата на дисперзијата на случајната променлива, ќе ги користиме својствата на математичкото очекување.

а) Овде, имаме:

$$D(\alpha X) = E[(\alpha X)^2] - [E(\alpha X)]^2 = E(\alpha^2 X^2) - [\alpha E(X)]^2$$
$$= \alpha^2 E(X^2) - \alpha^2 [E(X)]^2 = \alpha^2 D(X).$$

б) Ако X и Y се независни случајни променливи, имаме:

$$D(X+Y) = E[(X+Y)^2] - [E(X+Y)]^2$$
$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2$$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 = D(X) + D(Y). \blacksquare$$

Пример 5. Нека X и Y се независни случајни променливи кои имаат идентичен закон на распределба со математичко очекување a и дисперзија σ^2. Најди ја дисперзијата на случајната променлива $X + 2Y$! Колкаво е математичкото очекување, а колкава е дисперзијата на случајната променлива $X - Y$?

Решение. Во првата ситуација имаме дека:

$$D(X+2Y) = 1^2 D(X) + 2^2 D(Y) = 5\sigma^2.$$

Во втората ситуација, имаме:

$$E(X-Y) = E(X) - E(Y) = a - a = 0,$$
$$D(X-Y) = 1^2 D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y) = 2\sigma^2. \blacklozenge$$

Да забележиме дека, дисперзијата е секогаш ненегативна. Оваа забелешка е очигледна и следува директно од дефиницијата. Навистина,

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_k (x_k - E(X))^2 p_k \geq 0.$$

Наредно, дали дисперзијата може да биде нула? Ова е можно ако $x_k = E(X)$, за секој $k = 1, 2, \ldots$ или ако случајната променлива е константа, односно не е повеќе „случајна“.

Дефиниција 4. Величината $\sigma = \sqrt{D(X)}$ се нарекува стандардна девијација (отстапување) на случајната променлива X.

Пример 6. Пресметај го математичкото очекување и дисперзијата на случајните променливи:

$$X:\begin{pmatrix} -4 & 6 & 10 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}, \qquad Y:\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Пресметај го $E(X+2Y)$, а потоа под претпоставка дека X и Y се независни, пресметај ги: $E(XY)$ и $D(X-2Y)$.

Решение. Да ги пресметаме $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$. Имаме:

$$E(X) = -4\cdot 0,2 + 6\cdot 0,3 + 10\cdot 0,5 = 6,$$

$$E(X^2) = 16\cdot 0,2 + 36\cdot 0,3 + 100\cdot 0,5 = 64,$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 64 - 36 = 28,$$

$$E(Y) = -1\cdot 0,4 + 4\cdot 0,6 = 2,$$

$$E(Y^2) = 1\cdot 0,4 + 16\cdot 0,6 = 10,$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 10 - 4 = 6.$$

Од линеарноста на математичкото очекување, добиваме:

$$E(X+2Y) = E(X) + 2E(Y) = 10.$$

Ако случајните променливи X и Y се независни, важи: $E(XY) = E(X)\cdot E(Y) = 12$ и

$$D(X-2Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + 4D(Y) = 52. \ \blacklozenge$$

Пример 7. Фрламе две коцки. Дефинирани се следниве случајни променливи:

X : апсолутната разлика на броевите кои се паднале на коцката,

Y : помалиот од двата броја ако се различни, нула ако броевите кои се паднале на коцката се еднакви.

Докажи дека X и Y имаат ист закон на распределба. Најди го нивното математичко очекување и дисперзија.

Решение. Просторот на веројатност се состои од 36 еднакво веројатни елементарни настани. Да ги најдеме вредностите на случајните променливи X и Y.

X	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3

4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Y	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	1	1
2	1	0	2	2	2	2
3	1	2	0	3	3	3
4	1	2	3	0	4	4
5	1	2	3	4	0	5
6	1	2	3	4	5	0

Можеме да забележиме дека случајните променливи X и Y примаат различни вредности за поедини елементарни настани, но нивните закони на распределба се еднакви. Навистина,

$$X,Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}.$$

Тогаш,

$$E(X)=E(Y)=0\cdot\frac{6}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{8}{36}+4\cdot\frac{4}{36}+5\cdot\frac{2}{36}=\frac{70}{36},$$

$$D(X)=D(Y)=0\cdot\frac{6}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+4\cdot\frac{8}{36}+9\cdot\frac{6}{36}+16\cdot\frac{4}{36}$$

$$+25\cdot\frac{2}{36}-\left(\frac{70}{36}\right)^2=2,052.\ \blacklozenge$$

Некои информации за меѓусебната зависност на две случајни променливи може да се добие врз основа на следниве нумерички карактеристики:

Дефиниција 5. Коваријациски момент (коваријанса) на случајните променливи X и Y се дефинира со формулата:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y).$$

Коефициент на корелација се дефинира со формулата:

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}.$$

Коефициентот на корелација ни дава информација за меѓусебната зависност на случајните променливи X и Y. За независните случајни променливи секогаш важи $\text{cov}(X,Y)=0$, па со тоа и $\rho(X,Y)=0$. Обратното не важи. Случајните променливи кои не корелираат не мораат да бидат независни.

Нека a е реален број. Законот на распределба на случајната променлива $X-a$ е познат, ако е познат законот на распределба на случајната променлива X. Да забележиме дека важи:

$$E(X-a)=E(X)-a, \qquad D(X-a)=D(X).$$

Што се случува во овој случај, па немаме промена во дисперзијата? Наједноставно е да гледаме на константата a како случајна променлива која секогаш прима вредност a. Таа случајна променлива е независна од X, а нејзината дисперзија е нула. Поради тоа,

$$D(X-a)=D(X)+D(a)=D(X).$$

При транслација не се менува ниту коваријацискиот момент:

$$\text{cov}(X-a,Y-b)=E[((X-a)-E(X-a))((Y\_b)E(Y-b))]$$
$$=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=\text{cov}(X,Y),$$

па можеме да заклучиме дека не се менува коваријацискиот момент, а оттука не се менува ниту коефициентот на корелација.

Ако избереме $a=E(X)$, тогаш случајната променлива $X-E(X)$ ја означуваме со $\breve{X}$. За неа важи $E(\breve{X})=0,\ D(\breve{X})=D(X)$. За случајната променлива велиме дека е центрирана.

Математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива $aX+b$ е:

$$E(aX+b)=aE(X)+b,$$
$$D(aX+b)=a^2D(X).$$

Особено важен случај на избор на константите a и b, кога математичкото очекување е нула, а дисперзијата е единица. Нека $m=E(X)$, $\sigma^2=D(X)$. За случајната променлива:

$$X^*=\frac{X-m}{\sigma}$$

велиме дека е нормализирана случајна променлива и е добиена со нормализирање на случајната променлива X. Важи:

$$E(X^*) = \frac{1}{\sigma} E(X - m) = 0,$$

$$D(X^*) = \frac{1}{\sigma^2} D(X - m) = \frac{1}{\sigma^2} D(X) = 1.$$

Важно е да забележиме дека коефициентот на корелација не се менува со нормирање. Навистина, важи: $E(X^*) = E(Y^*) = 0$ и $\sigma_{X^*} = \sigma_{Y^*} = 1$, па добиваме:

$$\rho(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho(X, Y).$$

За случајните променливи кои не се независни, јасно важи: $D(X+Y) \neq D(X) + D(Y)$. Точната зависност ќе ја дадеме во наредната теорема.

Теорема 3. Дисперзијата на случајната променлива $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ е дадена со формулата:

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(X_i, X_j) .$$

Доказ. Јасно важи: $E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$, па:

$$D(Y) = E[(Y - E(Y))^2] = E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i))\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (E(X_i - E(X_i))^2 + \sum_{i \neq j} E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(X_i, X_j) . \blacksquare$$

Теорема 4. За коефициентот на корелација секогаш е исполнето: $|\rho(X, Y)| \leq 1.$

Еднаквоста $\rho(X, Y) = \pm 1$ важи ако и само ако $Y = aX + b$ за некои константи a и b.

Доказ. Нека X^* и Y^* се нормализирани случајни променливи кои одговараат на случајните променливи X и Y. Тогаш,

$$D(X^* \pm Y^*) = D(X^*) + D(Y^*) \pm 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*) = 2(1 \pm \rho(X, Y)).$$

Левата страна е секогаш позитивна, па затоа мора да биде позитивна и десната страна. Оттука,

$$|\rho(X,Y)|\leq 1.$$

Понатаму, еднаквоста $\rho(X,Y)=1$ важи само кога $D(X^* - Y^*) = 0$. Ова е можно само кога случајната променлива $X^* - Y^*$ е константа. Па, заклучуваме дека мора:

$$\frac{Y-E(Y)}{\sigma_Y} - \frac{X-E(X)}{\sigma_X} = c,$$

односно:

$Y = aX + b$, при што $a = \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ и b е произволен реален број.

Сосема, аналогно се заклучува и кога: $\rho(X,Y) = -1$. ■

Пример 8. Една паричка се фрла три пати. Нека X го означува бројот на појавени глави, а Y најдолгата низа на последователно појавување на глави. Одреди го законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) и коефициентот на корелација $\rho(X,Y)$.

Решение. Постојат осум еднакво веројатни елементарни настани. За секој од овие елементарни настани ќе ги одредиме вредностите на случајните променливи X и Y, а потоа ќе го дадеме законот на распределба на случајниот вектор (X,Y).

	X	Y
ППП	0	0
ППГ	1	1
ПГП	1	1
ГПП	1	1
ПГГ	2	2
ГПГ	2	1
ГГП	2	2
ГГГ	3	3

X/Y	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
1	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$

3	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Да ги пресметаме $\operatorname{cov}(X,Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$.

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{12}{8},$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{4}{8}+2\cdot\frac{2}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{11}{8},$$

$$E(XY)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{2}{8}+9\cdot\frac{1}{8}=\frac{22}{8},$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{22}{8}-\frac{12}{8}\cdot\frac{11}{8}=\frac{44}{64},$$

$$D(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+9\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{12}{8}\right)^2=\frac{48}{64},$$

$$D(Y)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{4}{8}+4\cdot\frac{2}{8}+9\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{47}{64},$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\frac{\frac{44}{64}}{\sqrt{\frac{48}{64}\cdot\frac{47}{64}}}=\frac{44}{\sqrt{47\cdot 48}}=0,926\,. \blacklozenge$$

Интегралните трансформации се многу важна алатка во математичката анализа. Ќе докажеме дека со нивна помош успешно може да се решаваат и многу проблеми од теоријата на веројатност. Она што е Фуриевата и Лапласовата трансформација во анализата, овде ќе бидат карактеристичната функција и функција изводница.

Дефиниција 6. Карактеристична функција на случајната променлива X се дефинира со формулата:

$$\vartheta_X(t)=E(e^{itX}),$$

односно:

$$\vartheta_X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k e^{itx_k}\,.$$

Карактеристичната функција постои за секоја случајна променлива, бидејќи математичкото очекување за случајната променлива X е секогаш конечно.

Во продолжение ќе ги дадеме некои од основните својства, без доказ, на карактеристичната функција.

Теорема 5.

а) Карактеристичната функција еднозначно го определува законот на распределба: два различни закона на распределба не може да имаат иста карактеристична функција.

б) Ако $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни, тогаш:

$$\vartheta_{X_1+X_2+...+X_n}(T) = \vartheta_{X_1}(t) + \vartheta_{X_2}(t) + ... + \vartheta_{X_n}(t)$$
.

в) Важи:

$$E(X^r) = \frac{\vartheta^{(r)}(0)}{i^r}, \qquad r = 1, 2, ...,$$

ако постои погоре математичкото очекување. Дополнително,

$$E(X) = -i\vartheta'(0),$$

$$D(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2.$$

За дискретните случајни променливи, кои примаат некои вредности од множеството $\{0, 1, 2, ...\}$, многу често поедноставно е наместо карактеристична функција да користиме функција изводница ψ_X, која се дефинира како:

$$\psi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = E(z^X).$$

Овој ред конвергира на областа $|z| < 1$, бидејќи $p_k \leq 1$, за секој $k = 1, 2, ...$.

Знаењето на функцијата изводница, многу често ни овозможува едноставно да го определиме законот на распределба на случајните променливи, бидејќи важи:

$$p_n = \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ова тврдење следува од тоа што функцијата изводница преку сопствениот Маклоренов ред, па за коефициентите на редот мора да важи горната формула.

4.4. Решени задачи

Задача 1. Веројатноста лицето A да ја погоди целта е $0,5$, а за лицето B да ја погоди целта е $0,7$. Да се одреди законот на распределба на вкупниот број на погодоци, ако двете лица двапати стрелаат во целта?

Решение. Нека X е случајната променлива, која го означува бројот на погодоци. Вредностите на случајната променлива се: $X \in \{0,1,2,3,4\}$. Соодветните веројатности се:

$$p(X=0)=(0,5)^2\cdot(0,3)^2=0,0225$$

$$p(X=1)=2\cdot(0,5)^2\cdot(0,3)^2+2\cdot(0,5)^2\cdot 0,3\cdot 0,7=0,15$$

$$p(X=2)=(0,5)^2\cdot(0,3)^2+(0,5)^2\cdot(0,7)^2+4\cdot(0,5)^2\cdot 0,3\cdot 0,7=0,355$$

$$p(X=3)=2\cdot(0,5)^2\cdot 0,3\cdot 0,7+2\cdot(0,5)^2\cdot(0,7)^2=0,35$$

$$p(X=4)=(0,5)^2\cdot(0,7)^2=0,1225\ .$$

Во согласност со ова, за законот на распределба на случајната променлива X, имаме:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,0225 & 0,15 & 0,355 & 0,35 & 0,1225 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Еден автомобил се движи по пат на кој има пет семафора. Веројатноста да се помине семафорот без да се застане е $\frac{1}{4}$, (спротивната веројатност е $\frac{3}{4}$). Опиши ја случајната променлива X : бројот на изминатите семафори до првото сопирање.

Решение. Вредностите на случајната променлива се: $X \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Од условот на задачата, за веројатностите на соодветните веројатности на случајната променлива X, имаме:

$$p(X=0)=\frac{3}{4}$$

$$p(X=1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$$

$$p(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$$

$$p(X=3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{256}$$

$$p(X=4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{1024}$$

$$p(X=5)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4096}.$$

За законот на распределба на случајната променлива X, имаме:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{16} & \frac{3}{64} & \frac{3}{256} & \frac{3}{1024} & \frac{3}{4096} \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Од кутија која има 50 производи, меѓу кои има и 10 производи со лош квалитет, оддеднаш се извлекуваат 4 производа. Најди го законот на распределба на случајната променлива X: број на неисправни производи во примерокот.

Решение. Вредностите на случајната променлива X се $X\in\{0,1,2,3,4\}$. За веројатностите на соодветните вредности на случајната променлива X, имаме:

$$p(X=0)=\frac{\binom{10}{0}\binom{40}{4}}{\binom{50}{4}}=0,397,$$

$$p(X=2)=\frac{\binom{10}{2}\binom{40}{2}}{\binom{50}{4}}=0,152$$

$$p(X=1)=\frac{\binom{10}{1}\binom{40}{3}}{\binom{50}{4}}=0,429,$$

$$p(X=3)=\frac{\binom{10}{3}\binom{40}{1}}{\binom{50}{4}}=0,0211$$

$$p(X=4)=\frac{\binom{10}{4}\binom{40}{0}}{\binom{50}{4}}=0,0009.$$

За законот на распределба на случајната променлива X, имаме:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,397 & 0,429 & 0,152 & 0,0211 & 0,0009 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Една метална монета се фрла 5 пати. Нека X е број на паднати писма. Да се одреди:

а) законот на распределба на веројатноста,

б) функцијата на распределба,

в) веројатноста на случајниот настан $(X>2)$,

г) веројатноста на случајниот настан ,$(X>6)$

д) веројатноста на случајниот настан $(2\le X<5)$.

Решение. Нека X е случајната променлива која го означува бројот на паднати писма при фрлање на монета 5 пати. Вредностите кои може да ги прими случајната променлива X се: $X\in\{0,1,2,3.4,5\}$.

а) Веројатностите со кои случајната променлива X, ги прима соодветните вредности се:

$$p(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$p(X=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$p(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$p(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$p(X=4)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$p(X=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

Па, законот на распределба на случајната променлива X е:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

б) За функцијата на распределба имаме:

$$F(x)=p(X<x)=p(X<0)=0,\ x\le 0$$

$$F(x)=p(X<1)=p(X=0)=\frac{1}{32},\ 0<x\le 1$$

$$F(x)=p(X<2)=p(X=0)+p(X=1)=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{6}{32},\ 1<x\le 2$$

$$F(x)=p(X<3)=p(X=0)+P(X=1)+p(X=2)=\frac{16}{32},\ 2<x\le 3$$

$$F(x)=p(X<4)=p(X=0)+p(X=1)$$
$$+p(X=2)+p(X=3)=\frac{26}{32},\ 3<x\le 4$$

$$F(x)=p(X<5)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$$
$$+p(X=3)+p(X=4)=\frac{31}{32},\ 4<x\le 5$$

$$F(x)=p(X>5)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)$$
$$+p(X=4)+p(X=5)=1,\ x>5.$$

Па, функцијата на распределба на случајната променлива X е дадена со:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{1}{32}, & 0<x\le 1 \\ \frac{6}{32}, & 1<x\le 2 \\ \frac{16}{32}, & 2<x\le 3 \\ \frac{26}{32}, & 3<x\le 4 \\ \frac{31}{32}, & 4<x\le 5 \\ 1, & x>5 \end{cases}.$$

в) За веројатноста на настанот $(X>2)$, имаме:

$$p(X>2)=p(X=3)+p(X=4)+p(x=5)=0,5.$$

г) Во овој случај, имаме: $p(X > 6) = 0$.

д) Веројатноста на настанот $(2 \leq X < 5)$ е:

$$p(2 \leq X < 5) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{25}{32}.$$

Задача 5. Дадени се две случајни променливи:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Најди го законот на распределба на случајните променливи Z и T, ако:

а) $Z = X + Y$,

б) $T = XY$.

Решение.

а) Вредностите кои ги прима случајната променлива Z се: $Z \in \{0,1,2\}$, со соодветни веројатности, дадени во продолжение:

$$p(Z = 0) = p(X = 0) \cdot p(Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$p(Z = 1) = p(X + 1) \cdot p(Y = 0) + p(X = 0) \cdot p(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

$$p(Z = 2) = p(X = 1) \cdot p(Y = 1) = \frac{1}{6}.$$

Па, за законот на распределба на случајната променлива Z, имаме:

$$Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

б) Овде $T \in \{0,1\}$. Веројатностите со кои случајната променлива T ги прима овие вредности се:

$$p(T = 0) = p(X = 0) \cdot p(Y = 0) + p(X = 0) \cdot p(Y = 1) + p(X = 1) \cdot p(Y = 0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$p(T = 1) = p(X = 1) \cdot p(Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Законот на распределба на случајната променлива T е:

$$T:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Даден е законот на распределба на веројатноста за дискретните променливи X и Y, односно $X:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $Y:\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

а) Да се одреди законот на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$;

б) Да се определи $E(Z)$ и $D(Z)$.

Решение.

а) Вредностите кои ги прима случајната променлива Z се: $Z \in \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, со соодветни веројатности:

$$p(Z=-3) = p(X=-2)\cdot p(Y=-1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$p(Z=-1) = p(X=0)\cdot p(Y=-1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$p(Z=0) = p(X=1)\cdot p(Y=-1) + p(X=-2)\cdot p(Y=2) = \frac{1}{3}$$

$$p(Z=2) = p(X=0)\cdot p(Y=2) = \frac{1}{6}$$

$$p(Z=3) = p(X=1)\cdot p(Y=2) = \frac{1}{3}.$$

Законот на распределба на веројатноста на случајната променлива Z е:

$$Z:\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

б) За математичкото очекување на случајната променлива Z, имаме:

$$E(Z) = (-3)\cdot\frac{1}{12} + (-1)\cdot\frac{1}{12} + 0\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{3}{12} - \frac{1}{12} + \frac{2}{6} + 1 = 1.$$

Дисперзијата на случајната променлива Z ја пресметуваме со формулата: $D(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$.

Бидејќи,

$$E(Z^2)=(-3)^2\cdot\frac{1}{12}+(-1)^2\cdot\frac{1}{12}+0^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{9}{12}+\frac{1}{12}+\frac{4}{6}+\frac{9}{3}=\frac{54}{12},$$

за дисперзијата на случајната променлива Z, добиваме:

$$D(Z)=\frac{54}{12}-1^2=3,5.$$

Задача 7. Нека со X го означиме резултатот од фрлањето на хомогена коцка за играње. Најди го математичкото очекување за случајната променлива X и за случајната променлива $Y=2X+1$.

Решение. Законот на распределба на веројатноста на случајната променлива X е:

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Математичкото очекување на случајната променлива X е:

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3,5.$$

Математичкото очекување на случајната променлива Y е

$$E(Y)=E(2X+1)=E(2X)+1=2E(X)+1=2\cdot3,5+1=8.$$

Задача 8. Во две кутии се наоѓаат по 3 ливчиња, така што во првата кутија се ливчињата на кои се напишани броевите $0,1,2$, а во втората кутија се ливчињата на кои се напишани броевите $0,-1,-2$. На случаен начин од секоја од кутиите се извлекува по едно ливче. Нека X е производ на извлечените ливчиња, а Y е збир на броевите од извлечените ливчиња. Најди ја распределбата на веројатноста на случајниот вектор (X,Y) и маргиналните закони на распределба на веројатноста на X и Y. Провери дали X и Y се независни случајни променливи.

Решение. Вредностите кои ги прима случајната променлива X се $X\in\{-4,-2,-1,0\}$, додека вредностите кои ги прима случајната променлива Y се $Y\in\{-2,-1,0,1,2\}$. Просторот од сите елементарни настани е:

$$\Omega=\{(0,0),(0,-1),(0,-2),(1,0),(1,-1),(1,-2),(2,0),(2,-1),(2,-2)\}.$$

Сега,

$$p(X=0,Y=-2)=p((0,-2))=\frac{1}{9},\quad p(X=0,Y=0)=p((0,0))=\frac{1}{9},$$

$$p(X=0,Y=2)=p((2,0))=\frac{1}{9},\quad p(X=0,Y=-1)=p((0,-1))=\frac{1}{9},$$

$$p(X=0,Y=1)=p((1,0))=\frac{1}{9},\ p(X=-1,Y=-2)=0,$$

$$p(X=-1,Y=-1)=0,\quad p(X=-1,Y=0)=p((1,-1))=\frac{1}{9},$$

$$p(X=-1,Y=1)=0,\ p(X=-1,Y=2)=0,$$

$$p(X=-2,Y=-2)=0,\ p(X=-2,Y=-1)=p((1,-2))=\frac{1}{9},$$

$$p(X=-2,Y=0)=0,\ p(X=-2,Y=1)=p((2,-1))=\frac{1}{9},$$

$$p(X=-4,Y=-2)=0,\ p(X=-4,Y=-1)=0,$$

$$p(X=-4,Y=0)=p((2,-2))=\frac{1}{9},\ p(X=-4,Y=1)=0,$$

$$p(X=-4,Y=2)=0.$$

Конечно, за законот на распределба на веројатноста на случајниот вектор, добиваме:

$X \setminus Y$	–2	–1	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
–1	0	0	$\frac{1}{9}$	0	0
–2	0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0
–4	0	0	$\frac{1}{9}$	0	0

Маргиналните закони на распределба на веројатноста на случајните променливи X и Y се дадени со:

X	0	–1	–2	–4
p	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Y	–2	–1	0	1	2
p	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Важи,

$$p(X=0,Y=-2)=\frac{1}{9}\neq\frac{5}{81}=p(X=0)\cdot p(Y=-2),$$

па можеме да заклучиме дека X и Y не се независни случајни променливи.

Задача 9. Двајца стрелци гаѓаат независно еден од друг по 2 истрела во една мета и притоа првиот стрелец ја погодува метата со веројатност $0,8$, а вториот стрелец ја погодува метата со веројатност $0,6$. Нека X е бројот на погодоци на првиот стрелец, а Y е вкупниот број на погодоци на метата. Најди го законот на распределба на веројатноста на случајниот вектор (X,Y). Најди ја веројатноста дека двајцата стрелци имаат еднаков број на погодоци во метата.

Решение. Секој од стрелците гаѓа во метата по двапати, па ако X е број на погодоци на првиот стрелец, тогаш $X\in\{0,1,2\}$, а ако Y е вкупниот број на погодоци на метата на вториот стрелец, тогаш: $Y\in\{0,1,2,3,4\}$. Од Бернулиевата шема, добиваме:

$$p(X=0)=\binom{2}{0}(0,8)^0\cdot(0,2)^2=0,04,$$

$$p(X=1)=\binom{2}{1}(0,8)^1\cdot(0,2)^1=0,32,$$

$$p(X=2)=\binom{2}{2}(0,8)^2\cdot(0,2)^0=0,64.$$

Ако со X_1 ја означиме случајната променлива: број на погодоци на вториот стрелец, тогаш $X_1\in\{0,1,2\}$. Уште,

$$p(X_1=0)=\binom{2}{0}(0,6)^0\cdot(0,4)^2=0,16,$$

$$p(X_1=1)=\binom{2}{1}(0,6)^1\cdot(0,4)^1=0,48,$$

$$p(X_1=2)=\binom{2}{2}(0,6)^2\cdot(0,4)^0=0,36.$$

Стрелците гаѓаат независно, па:

$$p(Y=0)=p(X=0)\cdot p(X_1=0)=0,0064,$$

$$p(Y=1)=p(X=1)\cdot p(X_1=0)+p(X=0)\cdot p(X_1=1)=0,0704,$$

$$p(Y=2)=p(X=1)\cdot p(X_1=1)+p(X=2)\cdot p(X_1=0)$$
$$+p(X=0)\cdot p(X_1=2)=0,2704,$$
$$p(Y=3)=p(X=2)\cdot p(X_1=1)+p(X=1)\cdot p(X_1=2)=0,4224,$$
$$p(Y=4)=p(X=2)\cdot p(X_1=2)=0,2304.$$

Уште,

$$p(X=0,Y=0)=p(X=0,X_1=0)=p(Y=0)=0,0064,$$
$$p(X=0,Y=1)=p(X=0,X_1=1)=0,0192,$$
$$p(X=0,Y=2)=p(X=0,X_1=2)=0,144,$$
$$p(X=0,Y=3)=p(X=0,Y=4)=0,$$
$$p(X=1,Y=0)=0,$$
$$p(X=1,Y=1)=p(X=1,X_1=0)=0,0512,$$
$$p(X=1,Y=2)=p(X=1,X_1=1)=0,1536,$$
$$p(X=1,Y=3)=p(X=1,X_1=2)=0,1152,$$
$$p(X=1,Y=4)=0,$$
$$p(X=2,Y=0)=p(X=2,Y=1)=0,$$
$$p(X=2,Y=2)=p(X=2,X_1=0)=0,1024,$$
$$p(X=2,Y=3)=p(X=2,X_1=1)=0,3074,$$
$$p(X=2,Y=4)=p(X=2,X_1=2)=0,2304.$$

Конечно, за законот на распределба на веројатноста на случајниот вектор (X,Y), добиваме:

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4
0	0,0064	0,0192	0,144	0	0
1	0	0,0512	0,1536	0,1152	0
2	0	0	0,1024	0,3074	0,2304

Нека со A го означиме настанот: стрелците имаат еднаков број на погодоци. Во овој случај $Y=2X$. За веројатноста на настанот A, се добива:

$$p(A)=p(X=0,Y=0)+p(X=1,Y=2)+p(X=2,Y=4)=0,3904.$$

Задача 10. Една монета се фрла три пати. Ако при секое од трите фрлања падне иста страна, монетата се фрла уште еднаш. Ги дефинираме случајните променливи X : број на паднати „петки“ и Y : број на фрлања. Да се најде законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) и маргиналните распределби на X и Y, соодветно.

Решение. Нека ставиме 1 ако се паднал „грб“ при фрлањето на монетата и нека ставиме 0 ако се паднала „петка“. Тогаш просторот на сите елементарни настани при овој експеримент е:

$$\Omega=\{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1,),(1,0,0),(1,0,1),$$
$$(1,1,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}.$$

Да забележиме дека овие елементарни настани не се еднакво веројатни. Вредностите кои можат да ги примат случајните променливи X и Y се $X\in\{0,1,2,3,4\}$ и $Y\in\{3,4\}$. Сега,

$$p(X=0,Y=3)=0,$$

$$p(X=0,Y=4)=p((0,0,0,0))=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{16},$$

$$p(X=1,Y=3)=p((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8},$$

$$p(X=1,Y=4)=p((0,0,0,1))=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8},$$

$$p(X=2,Y=3)=p((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8},$$

$$p(X=2,Y=4)=0,$$
$$p(X=3,Y=3)=0,$$

$$p(X=3,Y=4)=p((1,1,1,0))=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16},$$

$$p(X=4,Y=3)=0,$$

$$p(X=4,Y=4)=p((1,1,1,1)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}.$$

Во согласност со ова, табелата со која е даден законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) е:

$X \setminus Y$	3	4
0	0	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{16}$
4	0	$\frac{1}{16}$

За маргиналната распределба на случајната променлива X, имаме:

$$p(X=0)=p(X=0,Y=3)+p(X=0,Y=4)=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16},$$

$$p(X=1)=p(X=1,Y=3)+p(X=1,Y=4)=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16},$$

$$p(X=2)=p(X=2,Y=3)+p(X=2,Y=4)=0+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}=\frac{6}{16},$$

$$p(X=3)=p(X=3,Y=3)+p(X=3,Y=4)=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16},$$

$$p(X=4)=p(X=4,Y=3)+p(X=4,Y=4)=0+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}.$$

За маргиналната распределба на случајната променлива X ја имаме следнава табела:

X	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Сосема аналогно, ја добиваме следнава табела со која е дадена маргиналната

Y	3	4
p	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

распределба на случајната променлива Y.

Задача 11. Даден е законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) со табелата:

$X\setminus Y$	1	3	10
2	$\frac{3}{47}$	$\frac{2}{47}$	$\frac{9}{47}$
4	$\frac{7}{47}$	$\frac{8}{47}$	$\frac{5}{47}$
5	$\frac{1}{47}$	$\frac{4}{47}$	$\frac{8}{47}$

а) Најди ги маргиналните закони на распределба на X и Y;

б) Најди ги условните закони на распределба на Y и X, соодветно;

в) Најди ги веројатностите: $p(X \leq 4 \,|\, Y = 3)$, $p(Y > 1 \,|\, X > 2)$.

Решение.

а) Сосема аналогно како во претходната задача, маргиналните распределби на случајните променливи X и Y, можеме да ги дадеме преку следниве табели:

X	2	4	5
p	$\frac{14}{47}$	$\frac{20}{47}$	$\frac{13}{47}$

Y	1	3	10
p	$\frac{11}{47}$	$\frac{14}{47}$	$\frac{22}{47}$

б) За условните распределби, имаме:

$$p(X = 2 \,|\, Y = 1) = \frac{p(X = 2, Y = 1)}{p(Y = 1)} = \frac{\frac{3}{47}}{\frac{11}{47}} = \frac{3}{11},$$

$$p(X = 4 \,|\, Y = 1) = \frac{p(X = 4, Y = 1)}{p(Y = 1)} = \frac{\frac{7}{47}}{\frac{11}{47}} = \frac{7}{11},$$

$$p(X=5\mid Y=1)=\frac{\frac{1}{47}}{\frac{11}{47}}=\frac{1}{11}.$$

Во согласност со ова, го имаме следниов закон на распределба за $\{X\mid Y=1\}$.

$X\mid Y=1$	2	4	5
p	$\frac{3}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{1}{11}$

Сосема аналогно, за останатите условни распределби добиваме:

$X\mid Y=3$	2	4	5
p	$\frac{2}{14}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{5}{14}$

$X\mid Y=10$	2	4	5
p	$\frac{9}{22}$	$\frac{5}{22}$	$\frac{8}{22}$

$Y\mid X=2$	1	3	10
p	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{9}{14}$

$Y\mid X=4$	1	3	10
p	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{5}{20}$

$Y\mid X=5$	1	3	10
p	$\frac{1}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{8}{13}$

в) За веројатностите кои се бараат овде, имаме:

$$p(X\le 4\mid Y=3)=p(X\in\{2,4\}\mid Y=3)$$

$$=p(X=2\mid Y=3)+p(X=4\mid Y=3)=\frac{2}{14}+\frac{8}{14}=\frac{5}{7},$$

$$p(Y>1\mid X>2)=p(Y\in\{3,10\}\mid X\in\{4,5\})$$

$$=p(Y=3\mid X\in\{4,5\})+p(Y=10\mid X\in\{4,5\})$$

$$= \frac{p(Y=3, X \in \{4,5\})}{p(X \in \{4,5\})} + \frac{p(Y=10, X \in \{4,5\})}{p(X \in \{4,5\})}$$

$$= \frac{\frac{8}{47}+\frac{4}{47}}{\frac{20}{47}+\frac{13}{47}} + \frac{\frac{5}{47}+\frac{8}{47}}{\frac{20}{47}+\frac{13}{47}} = \frac{12}{33} + \frac{13}{33} = \frac{25}{33}.$$

Задача 12. Стрелец ја погодува целта со веројатност p, $(0<p<1)$ при секое независно гаѓање. Тој има n-куршуми и гаѓа во целта сѐ додека не ја погоди или не ги потроши куршумите. Најди го очекуваниот број на гаѓања?

Решение. Нека X : број на гаѓања во целта. Овде треба да определиме колку е EX. Вредностите кои ги прима случајната променлива X се: $X \in \{1,2,...,n\}$. Веројатностите со кои ги прима овие вредности случајната променлива X се:

$$p(X=1)=p,$$
$$p(X=2)=(1-p)p=qp,$$
$$\vdots$$
$$p(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p = q^{k-1}\cdot p,\ k=1,2,...,n-1,$$
$$\vdots$$
$$p(X=n)=(1-p)^{n-1}\cdot p+(1-p)^n.$$

Па, математичкото очекување на случајната променлива X е:

$$EX = \sum_{k=1}^{n} k\cdot p(X=k) = 1\cdot p + 2\cdot pq + 3\cdot pq^2 + ... + k\cdot pq^{k-1}$$
$$+..+(n-1)\cdot pq^{n-2} + n\cdot pq^{n-1} + n\cdot q^n.$$

Со помош на принципот на математичка индукција, добиваме:

$$EX = 1+q+q^2+...+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{p}.$$

Задача 13. Една мета се состои од круг број 1 и два концентрични прстена со кругот 2 и 3. Погодокот на кругот со број 1, донесува 10 поени, погодувањето на 2, донесува 5 поена, погодувањето на 3 донесува 1 поен. Веројатностите стрелецот да ги погоди $1,2,3$ се $0,5$; $0,3$; $0,2$, соодветно. Нека со X ја означиме случајната променлива: број на добиени поени при три погодувања на метата. Најди ги EX и DX.

Решение. Нека со X_i ги означиме бројот на добиени поени при i-тото погодување на метата, $i = 1,2,3$. Тогаш,

X_i	1	5	10
p	$0,2$	$0,3$	$0,5$

Јасно, $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Имаме,

$$E(X_i) = 1\cdot 0,2 + 5\cdot 0,3 + 10\cdot 0,5 = 6,7\,,\ i = 1,2,3.$$

Па, $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3\cdot 6,7 = 20,1$.

Бидејќи X_1, X_2, X_3 се независни случајни променливи, важи:

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + X_3) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3).$$

Важи: $D(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2$. Сега,

$$E(X_i^2) = 1^2\cdot 0,2 + 5^2\cdot 0,3 + 10^2\cdot 0,5 = 57,7\,,$$

па: $D(X_i) = 12,81,\quad i = 1,2,3$.

Конечно,

$$D(X) = 3\cdot 12,81 = 38,43.$$

Задача 14. Најди ја очекуваната вредност на производот $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$, каде што $k = 1,2,3,...,n$ се случајно избрани броеви од множеството $A = \{-1,0,1\}$.

Решение. Случајната променлива X : вредноста на $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)$, може да ги прими следниве вредности $X \in \{0,1,2,2^2,...,2^n\}$.

За $p(X=0) = 1 - \dfrac{\overline{V}_2^n}{\overline{V}_3^n} = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n}$.

Останатите вредности на случајната променлива се степени на 2. Па, за нив имаме дека важи:

$$p(X = 2^k) = \frac{C_n^k\cdot \overline{V}_1^{n-k}}{\overline{V}_3^n} = \frac{n!}{k!(n-k)!\cdot 3^n}\,,\ k = 0,1,2,...,n.$$

Тогаш за математичкото очекување на X, ќе добиеме дека:

$$E(X) = 0\cdot p(X=0) + \sum_{k=0}^{n} 2^k\cdot p(X = 2^k)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!3^n} = \frac{n!}{3^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!(n-k)!}.$$

Задача 15. Конечната случајна променлива X прима две вредности x_1 и x_2, $x_2 > x_1$. Веројатноста X да ја прими вредноста x_1 е $0,6$. Најди го законот на распределба на X, ако $E(X)=1,4$ и $D(X)=0,24$.

Решение. Нека X е случајна променлива која прима две вредности $X \in \{x_1, x_2\}$, при што $x_1 > x_2$. Според тоа имаме дека важи $p(X=x_1)+p(X=x_2)=1$. Дополнително знаеме дека $p(X=x_1)=0,6$, па $p(X=x_2)=1-p(X=x_1)=1-0,6=0,4$. Бидејќи $E(X)=1,4$ и $D(X)=0,24$, имаме:

$$\begin{cases} E(X)=x_1 p(X=x_1)+x_2 \cdot p(X=x_2 0 \\ D(X)=E(X^2)-(E(X))^2 \end{cases},$$

односно:

$$\begin{cases} x_1 \cdot 0,6 + x_2 \cdot 0,4 = 1,4 \\ x_1^2 \cdot 0,6 + x_2^2 \cdot 0,4 = 0,24 + (1,4)^2 \end{cases}.$$

Од првата равенка на системот, добиваме:

$$x_1 = \frac{1,4 - x_2 \cdot 0,4}{0,6},$$

од каде што со заменување во втората равенка од системот се добива квадратната равенка:

$$0,56 \cdot x_2^2 - 1,12 x_2 - 0,24 = 0.$$

Решенијата на оваа квадратна равенка се:

$x_{2_{1,2}} = 1 \pm 1,19523$, од каде добиваме дека:

$$\begin{matrix} x_1' = 0,86987 & & x_1'' = 2,46349 \\ x_2' = 2,19523, & & x_2'' = -0,19523. \end{matrix}$$

Но, за x_1'' и x_2'' не важи $x_2'' > x_1''$, па нив ги отфрламе. Значи вредностите на случајната променлива X се $0,86987$ и $2,19523$. Оттука, за законот на распределба на случајната променлива X добиваме:

X	$0,86987$	$2,19523$
p	$0,6$	$0,4$

Задача 16. Нека законот на распределба на случајниот вектор (X,Y) е даден со табелата:

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

Најди ја коваријансата $\operatorname{cov}(X,Y)$ и коефицентот на корелација $\rho(X,Y)$ на X и Y.

Решение. Формулата за пресметување на коваријансата на на X и Y е:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y).$$

Имаме,

$$E(X) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1,$$

$$E(Y) = 0\cdot\frac{4}{9} + 1\cdot\frac{4}{9} + 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$E(XY) = \sum_i\sum_j x_i y_j\, p(X = x_i)\cdot p(Y = y_j)$$

$$= 0\cdot 0\cdot\frac{1}{9} + 0\cdot 1\cdot\frac{1}{9} + 0\cdot 2\cdot\frac{1}{36} + 1\cdot 0\cdot\frac{2}{9} + 1\cdot 1\cdot\frac{2}{9} + 1\cdot 2\cdot\frac{1}{18} + 2\cdot 0\cdot\frac{1}{9}$$

$$+2\cdot 1\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot 2\cdot\frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Сега,

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{2}{3} - 1\cdot\frac{2}{3} = 0,$$

од каде што добиваме дека: $\rho(X,Y) = 0$.

Имајќи предвид дека $\rho(X,Y) = 0$, добиваме дека случајните променливи X и Y се независни случајни променливи.

5. Непрекинати случајни променливи

Во оваа глава ќе ги проучуваме случајните променливи, чие множество на вредности е ограничено или не е ограничено. Овие случајни променливи можат да ја примат секоја вредност од овој интервал. Со оглед на тоа дека можни вредности има непреброиво многу, веројатноста за реализација на секоја од овие вредности секогаш ќе биде нула. Според ова, овие (апсолутно непрекинати случајни променливи или кратко непрекинати случајни променливи) случајни променливи се разликуваат од дискретните случајни променливи, каде што во ваков случај веројатноста би била некој позитивен број помал од 1.

Главен апарат за проучување на овој тип на случајни променливи ќе биде апаратот кој го нуди математичката анализа. Низите од броеви кои задаваат распределба како кај дискретните случајни променливи, ќе бидат заменети со реални функции, а наместо сумирање ќе се користат техники од интегрално и диференцијално сметање.

5.1. Случајни променливи и распределби

Овој дел ќе го започнеме со дефиниција на поимот на случајна променлива. Оваа дефиниција многу малку се разликува од дефиницијата на дискретна случајна променлива. Всушност, оваа дефиниција внатре во себе ја содржи дефиницијата за дискретна случајна променлива, или на оваа дефиниција може да се гледа како на обопштување на дефиницијата во дискретен случај.

Дефиниција 1. Нека $(\Omega,\ \mathrm{F},\ p)$ е простор на веројатност. Пресликувањето $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ќе го нарекуваме случајна променлива ако за секој $x\in\mathbb{R}$, множеството:

$$A_x=\{\omega\in\Omega: X(\omega)<x\}$$

е настан, односно е елемент од алгебрата F.

Множеството $\{\omega\in\omega : X(\omega)<x\}$ кратко ќе го означуваме со $\{X<x\}$.

Дефиниција 2. Функцијата на распределба на случајната променлива X е функцијата $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ е дефинирана со формулата:

$$F(x)=p(\{X<x\}).$$

Функцијата на распределба, заедно со нејзиниот извод, се едни од најважните поими кои се поврзани со изучувањето на непрекинатите случајни променливи. Знаејќи ја функцијата на распределба, можеме во целост да ја опишеме случајната променлива.

Во наредната теорема, дадени се основните својства на функцијата на распределба.

Теорема 1. Нека F е функција на распределба на случајната променлива X. Тогаш:

а) $p(\{x_1 \leq X < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$

б) F е неопаѓачка, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

г) Функцијата F е непрекината од лево:

$$F(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x-\varepsilon) = F(x) \text{ , за сите } x \in \mathbb{R}.$$

Доказ.

а) Нека $x_1 < x_2$. Тогаш важи:

$$\begin{aligned} F(x_2) = p(\{X < x_2\}) &= p(\{X < x_1\} \cup \{x_1 \leq X < x_2\}) \\ &= p(\{X < x_1\}) + p(\{x_1 \leq X < x_2\}) \\ &= F(x_1) + p(\{x_1 \leq X < x_2\}), \end{aligned}$$

од каде што следува тврдењето:

б) Нека важи $x_1 < x_2$. Бидејќи важи $\{X < x_1\} \subset \{X < x_2\}$, тврдењето следува од монотоноста на веројатноста.

в) Нека (x_n) е произволно избрана опаѓачка низа од реални броеви и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$. Нека ставиме $A_n = \{X < x_n\}$. Тогаш, низата од множества (A_n) е опаѓачка низа, т.е. важи $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и важи $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. Од непрекинатоста на веројатноста, добиваме:

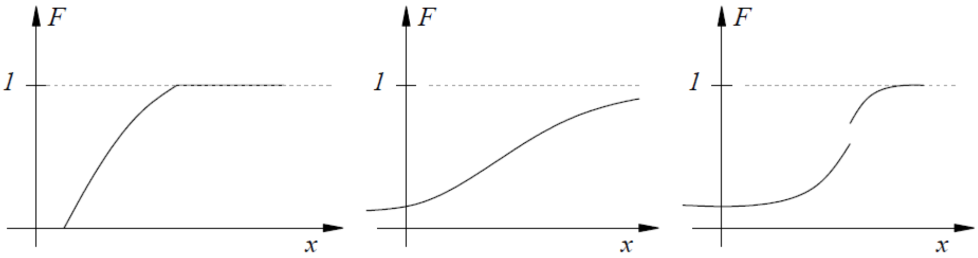
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} p(A_n) = 0.$$

Сосема аналогно се докажува и другото тврдење.

г) Тврдењето следува повторно од непрекинатоста на веројатноста. Навистина, ако (ε_n) е опаѓачка низа од позитивни броеви која тежи кон 0. Тогаш со $A_n = \{X < x - \varepsilon_n\}$ е дефинирана растечка низа од множества за која важи: $\bigcup_{n1}^{\infty} A_n = \{X < x\}$, па тврдењето следува од непрекинатоста на веројатноста, односно:

$$F(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x-\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} F(x-\varepsilon_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} p(A_n) = p(A) = F(x), \text{ за сите } x \in \mathbb{R}. \blacksquare$$

Подолу, дадени се примери на функции на распределба на случајна променлива.



Пример 1. Нека една случајна променлива X ги прима вредностите $-1, 0, 1$ со веројатности $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, соодветно. Најди ја функцијата на распределба на дискретната случајна променлива X и да се нацрта нејзиниот график.

Решение. Нека $x \le -1$. Тогаш настанот $\{X < x\}$ има веројатност 0, па $F(x) = 0$ за сите $x \le -1$. За $-1 < x \le 0$ имаме:

$$p(X < x) = p(X = -1) = \frac{1}{4}.$$

За $0 < x \le 1$, имаме:

$$p(X < x) = p(X = -1) + p(X = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

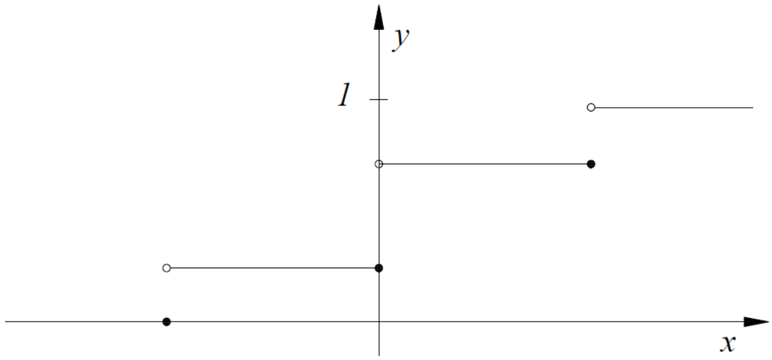
За $x > 1$, имаме:

$$p(X < x) = p(X = -1) + p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

Конечно, ја имаме функцијата на распределба на дискретната случајна променлива:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{1}{4}, & -1<x\le 0\\ \dfrac{3}{4}, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

и нејзиниот график:

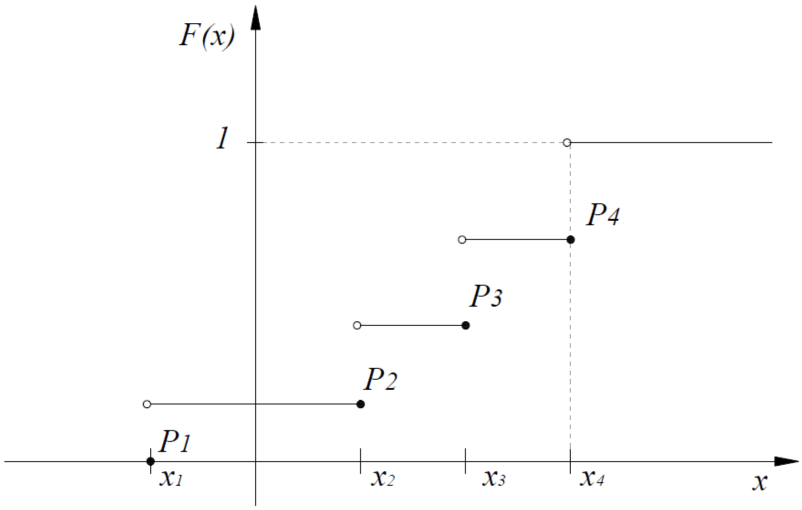


♦

Општо, функцијата на распределба на дискретна случајна променлива со закон на распределба:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

е степенеста функција со скокови во точките $x_1, x_2, x_3, \dots$. Големините на тие скокви се веројатностите $p_1, p_2, p_3, \dots$



Наредната дефиниција е дефиниција за непрекината случајна променлива, која суштински се разликува од дискретните случајни променливи.

Дефиниција 3. За случајната променлива X велиме дека е непрекината случајна променлива ако постои ненегативна функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ така што:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt .$$

Функцијата f се нарекува густина на распределбата на веројатноста на случајната променлива X . Оваа функција не е секогаш непрекината, но во точките на непрекинатост на f важи:

$$f(x)=F'(x).$$

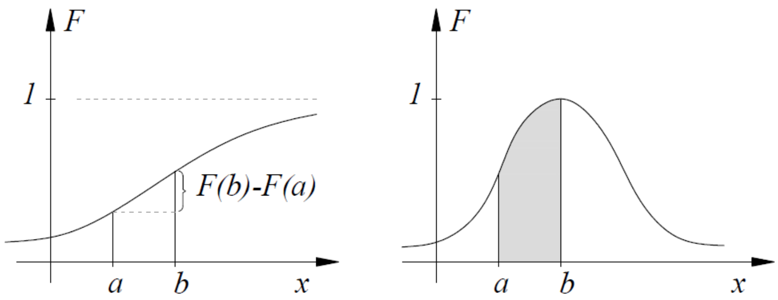
Функцијата на распределба на непрекината случајна променлива е и сама непрекината, бидејќи таа е функција од горната граница на определениот интеграл. Од ова, имаме: $p(X=x)=F(x+0)-F(x)=0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Според тоа, сите настани: $\{x_1<X<x_2\}$, $\{x_1\le X<x_2\}$, $\{x_1<X\le x_2\}$, $\{x_1\le X\le x_2\}$ се еднакво веројатни. Нивната веројатност се пресметува, со формулата:

$$p(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt .$$

Функцијата на густината на распределба е позитивна функција за која важи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Подолу се дадени некои функции на распределба и означен дел на веројатноста дека X случајната променлива ќе прими вредности во одреден интервал. Кај функцијата на густина таа веројатност е означена со површина под графикот на функцијата.



Знаеме дека функцијата на распределба е неопаѓачка функција со вредности во интервалот $[0,1]$. Во согласност со ова, некогаш формулата на функцијата на распределба ќе ја запишуваме во скратен облик. На пример, на место на записот:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases},$$

ќе пишуваме кратко:

$$F(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < 1,$$

бидејќи е јасно дека: $F(x) = 0$, за $x \le 0$ и $F(x) = 1$, за $x \ge 1$.

Исто така, ако густината на распределба е дефинирана на некој интервал, тогаш надвор од тој интервал, по дефиниција густината на распределба е еднаква на нула.

Во продолжение ќе дадеме пример на рамномерната распределба. Нека имаме дадено случајна променлива X која прима вредности од множеството $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, кое е дискретно множество. Случајна променлива, која прима вредности од множеството B со еднакви веројатности, го опишува експериментот случаен избор на елемент од множеството B. Тогаш, веројатноста за реализација на настанот $\{X = x_k\}$, имаме:

$$p(X = x_k) = \frac{1}{n}, \text{ за секој } k = 1, 2, ..., n.$$

Забелешка. Овде јасно е дека ако го зголемуваме бројот на елементи во множеството B, веројатноста погоре ќе тежи кон нула. Ако на пример множеството B е множеството од сите природни броеви, можеме да си го поставиме следново прашање: Дали постои алгоритам, кој со еднаква веројатност ќе избира некој природен број? Одговорот на ова прашање е негативен, односно таков алгоритам не постои. Јасно е дека веројатноста за избор на кој било природен број мора да биде нула, па поради својството на σ-адитивност на веројатноста p и веројатноста на изборот на кое било подмножество од множеството на природни броеви е еднакво на нула.

Да претпоставиме дека: $B = [a,b]$. Во овој интервал има бесконечно (непреброиво) многу точки.

Велиме дека случајно избираме број од интервалот $[a,b]$, ако веројатноста дека случајно ќе избереме број во некој подинтервал е пропорционална со должината на тој подинтервал.

За случајната променлива која прима вредност која е избрана на начинот опишан погоре, велиме дека има рамномерна (униформна) распределба на интервалот $[a,b]$.

Нека X ја означува оваа случајна променлива. Да ја определиме нејзината функција на распределба. Од дефиницијата, мора да важи:

$$F(x) - F(a) = p(a \le X < x) = I(x - a).$$

Случајната променлива прима вредности од интервалот $[a,b]$. Во согласност со тоа,

$$p(X < a) = 0 = F(a),$$

$$1 = p(a \le X < b\} = F(b) - F(a) = I(b - a),$$

од каде што добиваме дека:

$$I = \frac{1}{b-a}.$$

Во согласност со горнава дискусија ја имаме следнава дефиниција:

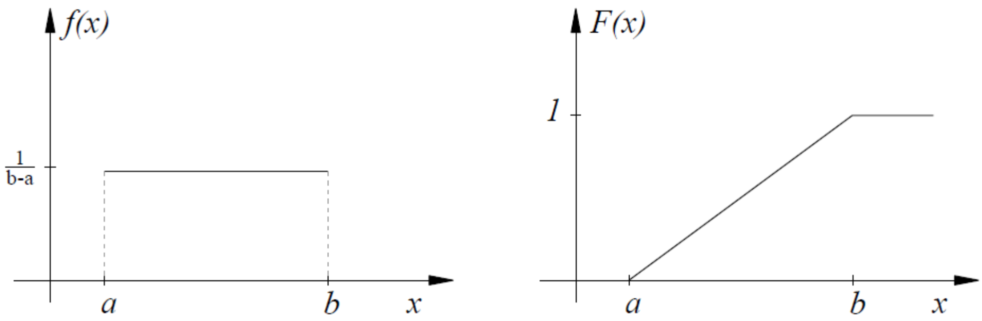
Дефиниција 4. За случајната променлива X велиме дека е рамномерно (униформно) распределена на интервалот $[a,b]$, ако е зададена со функцијата на распределба, односно функцијата на густина:

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}, \qquad a\le x\le b,$$

$$f(x)=\frac{1}{b-a}, \qquad a\le x\le b.$$

За случајната променлива ќе ја користиме ознаката $X:U(a,b)$.

Графикот на функцијата на густина и функцијата на распределба се дадени подолу на сликите.



Пример 2. Функцијата на густина на распределба на случајната променлива X е дадена со**:**

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\in[0,3] \\ 0, & x\notin[0,3] \end{cases}.$$

а) Најди ја константата a;

б) Најди ја функцијата на распределба на случајната променлива X;

в) Најди ја веројатноста на настанот $\{1\le X\le 2\}$.

Решение.

а) Имаме:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{3} f(x)\,dx+\int_{3}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{3} ax^2\,dx+\int_{3}^{+\infty} 0\cdot dx=0+a\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3+0=a\left(\frac{3^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)=9c,$$

од каде што добиваме дека: $c=\frac{1}{9}$.

Значи, функцијата на густина на распределба на случајната променлива X е:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}\cdot x^2, & x\in[0,3]\\ 0, & x\notin[0,3]\end{cases}.$$

б) Функцијата на распределба на случајната променлива X е:

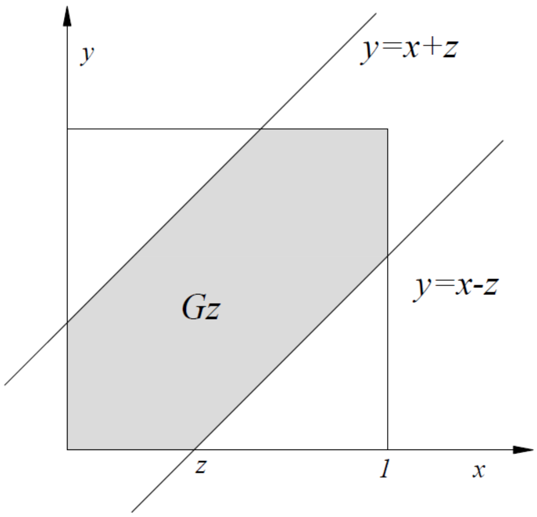
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ F(x)=\int_0^x \frac{1}{9}t\,dt=\frac{1}{9}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{19}, & x\in(0,3)\\ F(x)=1, & x\ge 3\end{cases}.$$

в) За бараната веројатност имаме:

$$p(1\le X\le 2)=\int_2^2 f(x)\,dx=\frac{1}{9}\int_1^2 x^2\,dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{1}{9}\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)=\frac{7}{27}.\ \blacklozenge$$

Пример 3. Две точки случајно се избрани во внатрешноста на интервал со должина 1. Нека е дефинирана случајна променлива Z, со Z растојанието помеѓу двете избрани точки. Најди ја функцијата на распределба на случајната променлива.

Решение. Случајниот избор на две точки x и y во внатрешноста на интервалот $[0,1]$ е еквивалентен на изборот на една точка (x,y) во квадрат со должина 1. За случајната променлива Z, имаме $Z=|x-y|$ и таа ги прима вредностите од внатрешноста на интервалот $[0,1]$.



Притоа, важи:

$$|x-z|< z \quad \Leftrightarrow \quad x-z< y< x+z\,.$$

Затоа, неравенството $|x-y|< z$ ќе важи кога ќе избереме точка (x,y) во внатрешноста на подрачјето G_z, дадено на цртежот погоре. Следствено,

$$F(z)=p(Z<z)=m(G_z)=2z-z^2, \qquad 0\le z\le 1\,. \blacklozenge$$

Поимот за независност на случајни променливи веќе беше дефиниран во случај на дискретни случајни променливи. Сосема, аналогна дефиниција ќе важи и во оваа ситуација.

Дефиниција 5. Велиме дека случајните променливи X и Y се независни, ако за сите интервали од реални броеви A и B, важи:

$$p(X\in A, Y\in B)=p(X\in A)\cdot p(Y\in B)\,.$$

5.2. Математичко очекување и дисперзија на непрекинати случајни променливи

Нека X е непрекината случајна променлива со густина на распределба f. Нејзиното математичко очекување е дадено во следнава дефиниција:

Дефиниција 1. Нека X непрекината случајна променлива со густина на распределба $f(x)$. Математичкото очекување на случајната променлива X се дефинира со формулата:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx\,,$$

под услов интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ да конвергира, т.е. да важи: $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx<\infty\,.$

Дисперзијата на случајната променлива X, се дефинира исто како и во случајот на дискретна случајна променлива.

Дефиниција 2. Дисперзијата на случајната променлива X, се пресметува со формулата:

$$D(X)=E[X-E(X))^2]\,,$$

ако постои горното математичко очекување.

Имајќи ја предвид формулата за математичко очекување, за формулата за дисперзија имаме:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,dx-(E(X))^2.$$

Во следнава теорема, која ќе ја дадеме без доказ, ќе бидат дадени основните својства на математичкото очекување и дисперзија на непрекинатите случајни променливи.

Теорема 1. Нека X и Y се две случајни променливи и нека $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Тогаш:

а) $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$,

б) $D(\alpha X)=\alpha^2 D(X)$,

в) Ако случајните променливи X и Y се независни случајни променливи, тогаш:

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$$
$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Пример 1. Пресметај го математичкото очекување на случајната променлива: $X:U(a,b)$.

Решение. Да ја разгледаме најпрво, случајната променлива $X:U(0,1)$. Тогаш, густината на распределба е $f(x)=1$ и уште:

$$E(X)=\int_0^1 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2},$$

$$D(X)=\int_0^1 x^2\,dx-\frac{1}{4}=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

Ако случајната променлива Y има рамномерна распределба на интервалот $[a,b]$, тогаш случајната променлива:

$$X=\frac{Y-a}{b-a}$$

има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$. Обратно, ако X има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$, тогаш:

$$Y=(b-a)X+a$$

има рамномерна распределба на интервалот $[a,b]$. Математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива Y, имајќи ја предвид претходната теорема се:

$$E(Y) = E[(b-a)X + a] = (b-a)E(X) + a$$

$$= (b-a)\cdot\frac{1}{2} + a = \frac{a+b}{2},$$

$$D(Y) = D[(b-a)X + a] = (b-a)^2 D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \ \blacklozenge$$

Пример 2. Случајната променлива X има функција на густина на распределба:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6, & x \in (2,4) \\ 0, & x \notin (2,4) \end{cases}.$$

Најди го математичкото очекување на случајната променлива X.

Решение. За математичкото очекување на случајната променлива X, имаме:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_2^4 x\left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6\right)dx = 3. \ \blacklozenge$$

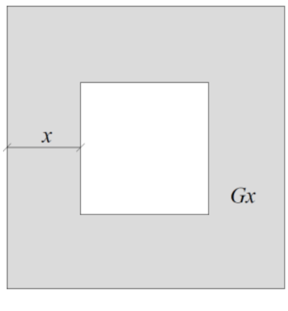
Пример 3. Случајно е избрана точка A во внатрешноста на квадрат со страна 2. Нека вредноста на случајната променлива X е најкраткото растојание, од растојанијата до сите четири страни. Најди ја функцијата на распределба и математичкото очекување на случајната променлива.

Решение. Најпрво, да ја одредиме функцијата на распределба:

$$F(x) = p(X < x\} = p(A \in G_x\}$$

$$= \frac{m(G_x)}{m(\Omega)} = \frac{4-(2-2x)^2}{4}$$

$$= 2x - x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$



Густината на распределба на случајната променлива X е:

$$f(x) = F'(x) = 2 - 2x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Во согласност со ова и формулата за математичко очекување, имаме:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 x(2-x)\,dx = \frac{1}{3}. \ ♦$$

Пример 4. Нека случајната променлива X има функција на распределба:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \ge c \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{c}\right), & |x| < c, \\ 0, & x \le -c \end{cases}$$

каде што c е константа и $c > 0$. Да се најде:

а) функцијата на густина на распределба на случајната променлива X,

б) веројатноста на настанот $\{-\frac{c}{2} < X \le \frac{c}{2}\}$.

Решение.

а) Од $f(x) = F_X'(x)$ и:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{c}\right)\right)' = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}},$$

добиваме дека:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-c, c) \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}, & x \in (-c, c) \end{cases}.$$

б) Овде, за веројатноста на настанот $\{-\frac{c}{2} < X \le \frac{c}{2}\}$ имаме:

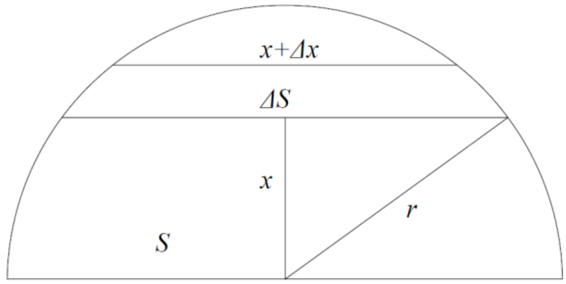
$$p\left(-\frac{c}{2} < X \le \frac{c}{2}\right) = F_X\left(\frac{c}{2}\right) - F_X\left(-\frac{c}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{\frac{c}{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} acr\sin\left(\frac{-\frac{c}{2}}{c}\right)\right) = \frac{2}{\pi} ar\sin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}. \ ♦$$

Пример 5. Случајно се избира точка во внатрешноста на полукруг со радиус R. Нека со X ја означиме случајната променлива X: оддалеченост на точката до дијаметарот. Најди го математичкото очекување на случајната променлива X.

Решение. Овде нема да ја бараме функцијата на распределба, туку директно ќе ја определиме функцијата на густина на распределба. Па,

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$



За мали Δx, важи:

$$f(x)\Delta x = p(x < X < x + \Delta x) = \frac{m(\Delta S)}{m(\Omega)} = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2 \Delta x}}{\frac{1}{2}R^2\pi}.$$

Од овде добиваме дека функцијата на густина на распределба на случајната променлива X е:

$$f(x) = \frac{4}{R^2\pi}\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad 0 \le x \le R.$$

Конечно, за математичкото очекување на случајната променлива имаме:

$$E(X) = \int_0^R \frac{4x}{R^2\pi}\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \frac{4R}{3\pi}. \ \blacklozenge$$

Пример 6. Скалата на еден аналоген термометар е вообичаена (со цртички кои наоѓаат на меѓусебно растојание од $0,2$ mm). При секое читање на температурата се врши заокружување на најблиската цртичка. Ја дефинираме случајната променлива X: грешка која се прави при заокружувањето. Таа има рамномерна распределба. Најди ја веројатноста да се направи грешка поголема од $0,025°C$. Најди ја распределбата на случајната променлива Y: апсолутна грешка направена при заокружувањето.

Решение. Бидејќи секоја цртичка на термометарот одговара на $0,1°C$, ова е исто како да сме направиле должинска грешка поголема од $0,05$ mm. Сега, случајната променлива има рамномерна распределба на интервалот $(-0,05;0,05)$. Па, функцијата на распределба и функцијата на густина на распределба се:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le -0,05 \\ \dfrac{x+0,05}{0,1}, & -0,05<x<0,05 \\ 1, & x\ge 0,05 \end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases} 5, & x\in(-0,05;\ 0,05) \\ 0, & x\notin(-0,05;0,05) \end{cases}.$$

Врјатноста да се направи грешка поголема од $0,025°C$ е:

$$p(X>0,025)=1-p(X\le 0,025)=1-F_X(0,025)=1-\frac{0,025+0,05}{0,1}=0,25.$$

Случајната променлива $Y=|X|$ има рамномерна распределба на интервалот $(0;0,05)$, односно важи: $U:(0;0,05)$.♦

На секоја случајна променлива X можеме да ѝ придружиме карактеристична функција.Тоа е функција со реален аргумент, со комплексни вредности, односно $\vartheta_X:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, зададена со формулата:

$$\vartheta_X(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF(x).$$

Без доказ, ќе ги наведеме основните својства на карактеристичната функција на случајната променлива X. Тврдењата се директна последица на својствата на Риман-Стилтјесовиот интеграл.

Теорема 2.

а) Карактеристичната функција еднозначно ја определува распределбата на случајната променлива: две различни распределби не може да имаат иста карактеристична функција.

б) Ако $X_1,X_2,...,X_n$ се независни случајни променливи, тогаш:

$$\vartheta_{X_1+X_2+...+X_n}(t)=\vartheta_{X_1}(t)\cdot\vartheta_{X_2}(t)\cdot...\cdot\vartheta_{X_n}(t).$$

в) Важи формулата:

$$E(X^s) = \frac{\vartheta^{(s)}(0)}{i^s}, \qquad s = 1, 2, \dots ,$$

ако постои математичкото очекување на случајната променлива X^s.
Специјално,

$$E(X) = -i \cdot \vartheta'(0),$$

$$D(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 .$$

Да забележиме дека ако ϑ_X е карактеристична функција за случајната променлива X, тогаш случајната променлива $Y = a + bX$ има карактеристична функција $e^{ita}\vartheta_X(bt)$.

Пример 7. Најди ја карактеристичната функција на непрекинатата случајна променлива X која има рамномерна распределба на интервалот $[a,b]$, $X : U(a,b)$.

Решение. Густината на распределба на оваа случајна променлива е: $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, за $a \le x \le b$. Па,

$$\vartheta_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-q}\,dx = \frac{e^{itb} - e^{-ita}}{(b-a)it}.$$

Кога го имаме симетричниот интервал $[-a,a]$, карактеристичната функција го добива обликот:

$$\vartheta_X(t) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{(a+a)it} = \frac{\sin at}{at}. \blacklozenge$$

Ако X е непрекината случајна променлива со функција на густина на распределба f, тогаш нејзината карактеристична функција е:

$$\vartheta_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx .$$

Ова е, всушност, Фуриева трансформација на функцијата f. Па, ако за ϑ_X важи условот:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\vartheta_X(t)\,|\,dt < \infty ,$$

тогаш важи инверзната формула:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_X(t) e^{-itx}\, dt .$$

Пример 8. Одреди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива X определена со карактеристичната функција:

$$\vartheta_X(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Решение. Оваа функција е апсолутно интеграбилна, па функцијата на густина на распределба ќе биде определена со инверзната формула. Имаме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \vartheta_X(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-|t|}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-itx} e^{t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-itx} e^{-t}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left. \frac{e^{(-ix+1)t}}{-ix+1} \right|_{-\infty}^{0} + \left. \frac{e^{(-ix-1)t}}{-ix-1} \right|_{0}^{+\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-ix+1} + \frac{1}{ix+1} \right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} . \blacklozenge$$

За случајната променлива која ја има оваа густина на распределба велиме дека е случајна променлива која има Кошиева распределба. Од ова и од единственоста на карактеристичната функција за случајна променлива, можеме да заклучиме дека функцијата $f(t) = e^{-|t|}$ е карактеристична функција за случајна променлива која има Кошиева распределба.

5.3. Функции од непрекинати случајни променливи

Композицијата на случајната променлива X и реалната функција $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е повторно случајна променлива:

$$Y = \psi(X) : \Omega \to \mathbb{R} .$$

Случајот кога случајната променлива X е од дискретен тип веќе го имаме разгледано, па овде ќе го разгледаме случајот кога X е непрекината случајна променлива со густина на распределба f и функција на распределба F. Ќе ја најдеме густината на распределба g (ако постои) и функцијата на распределба G на случајната променлива $Y = \psi(X)$. Имаме:

$$G(y) = p(Y < y) = p(\psi(X) < y)$$
$$= p(X \in \psi^{-1}((-\infty, y))) = p(X \in A_y).$$

Па, настанот $\{Y < y\}$ се остварува ако и само ако се остварува настанот $X \in A_y$. Овде $\psi^{-1}(A)$ е ознака за оригиналот на множеството A:

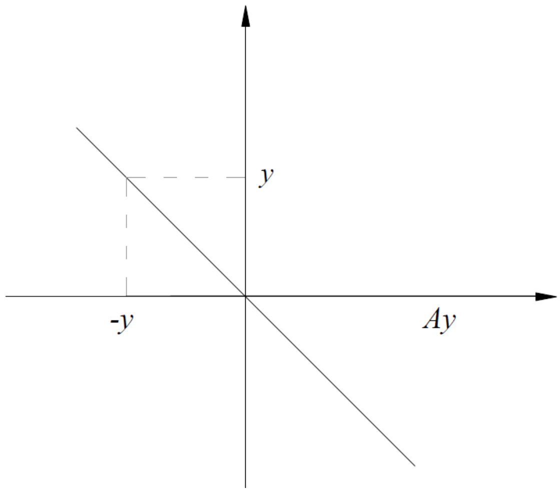
$$\psi^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \in A\}.$$

Пример 1. Нека F е функција на распределба на некоја случајна променлива X. Определи ја функцијата на распределба на случајната променлива $-X$.

Решение. Имаме:

$$G(y) = p(Y < y) = p(X \in A_y)$$
$$= p(X > -y) = 1 - F(-y).$$

За случајната променлива X, велиме дека е симетрична, ако X и $-X$ се идентично дистрибуирани.

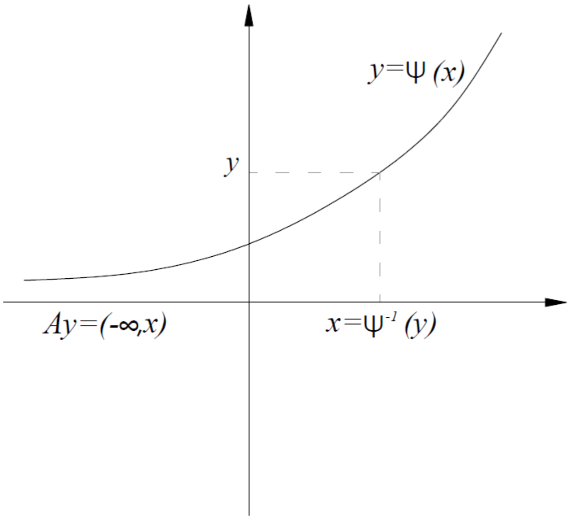


Тогаш:

$$F(x) = F_X(x) = F_{-X}(x) = 1 - F(-x),$$

Од каде штп со барање извод добиваме дека: $f(x) = f(-x)$. Функцијата на густина на распределба на симетричните случајни променливи е парна функција. ♦

Нека ψ е монотоно растечка функција.



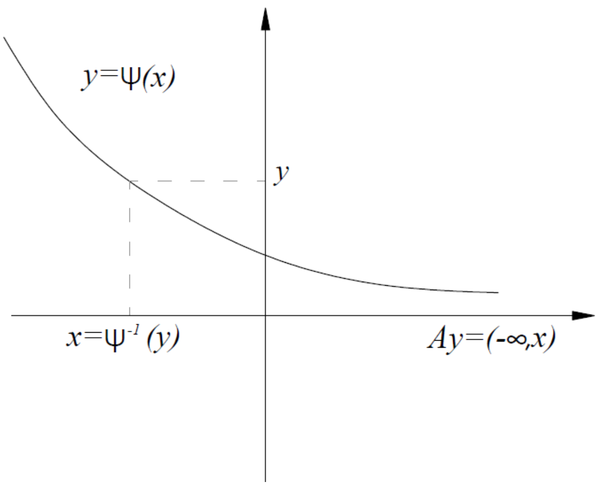
$$A_y = \psi^{-1}((-\infty, y)) = (-\infty, \psi^{-1}(y)) = (-\infty, x) .$$

Оттука,

$$G(y) = p(X \in A_y) = p(X \in (-\infty, x)) = p(X < x) = F_X(x) ,$$

$$g(y) = \frac{d}{dy} G(y) = \frac{d}{dx} F(x) \cdot \frac{dx}{dy} = f(x) \cdot \frac{dx}{dy} .$$

Нека сега ψ е монотоно опаѓачка функција.



$$A_y = \psi^{-1}((-\infty, y)) = (\psi^{-1}(y), +\infty) = (x, +\infty) ,$$

$$G(y) = p(X \in A_y) = p(X \in (x, +\infty)) = p(X > x) = 1 - F(x) ,$$

$$g(y)=\frac{d}{dv}G(y)=\frac{d}{dx}[1-F(x)]\frac{dx}{dy}=-f(x)\frac{dx}{dy}.$$

Со ова ја докажавме следнава теорема.

Теорема 1. Нека $Y=\psi(X)$. Ако ψ е растечка или опаѓачка функција, тогаш важи:

$$g(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|, \qquad y=\psi(x),$$

т.е.:

$$g(y)=f(\psi^{-1}(y))\left|\frac{d\psi^{-1}(y)}{dy}\right|.$$

Поопшто, оваа формула важи за секоја инјективна функција ψ.

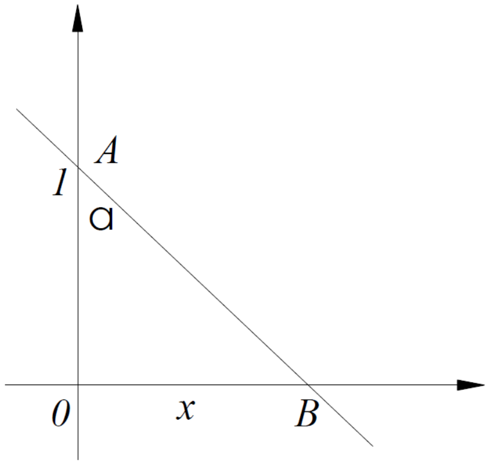
Доколку е потребно само да се определат математичкото очекување или моментите на функцијата од случајната променлива, тогаш не е потребно да се пресметува нејзината функција на густина на распределба. Тогаш, ја применуваме формулата:

$$E(Y^k)=E(\psi(X)^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)^k f(x)\,dx.$$

Пример 2. Низ точката $A(0,1)$ е повлечена права која ја сече x-оската во точка B. Аголот α, што го зафаќа правата со y-оската е случајна променлива со рамномерна распределба на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Нека X е случајна променлива, дадена со X: е апциса на точката B. Одреди ја функцијата на густината на распределба на случајната променлива X.

Решение. Функцијата на густина на распределба на случајната променлива α е:

$$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}, \qquad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$



Од условот, имаме дека: $X = tg\alpha$ и имајќи предвид дека функцијата $y = tgx$ е инјективна (растечка) на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Затоа, функцијата на густина на распределба на случајната променлива X е:

$$g(x) = f(\alpha)\left|\frac{d\alpha}{dx}\right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d(arctg\, x)}{dx} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} . \blacklozenge$$

За случајната променлива X, велиме дека има Кошиева распределба.

Пример 3. Случајната променлива X има Кошиева распределба, со функција на густина на распределба:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} .$$

Одреди ја функцијата на густина на распределба и функцијата на распределба на случајните променливи:

а) $Y = X^2$

б) $Y = \frac{1}{X}$.

Решение.

а) Функцијата на распределба F на случајната променлива е:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t)^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx .$$

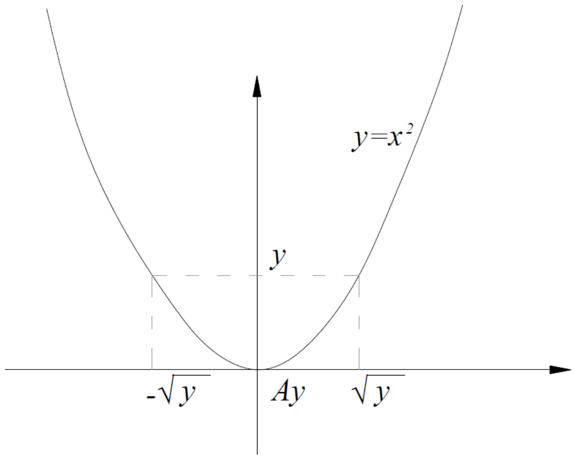
Затоа, имаме:

$$G(y) = p(Y < y) = p(X \in A_y) = p(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$$

$$= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = \frac{2}{\pi} arctg\sqrt{y}\,, \quad y > 0\,,$$

$$g(y) = G'(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}\,, \qquad y > 0\,.$$

Овде функцијата на густина на распределба можеме да ја добиеме и на друг начин. Функцијата $y = x^2$, е инјективна на интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$:



За $x < 0$: $g_1(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}(1+y)}$, $y > 0$.

За $x > 0$: $g_2(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{y}(1+y)}$, $y > 0$.

Функцијата g е збир на овие две функции, па:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}\,, \quad y > 0\,.$$

б) Функцијата $y = \frac{1}{x}$ е инјективна, па затоа:

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}\,,$$

односно и случајната променлива Y има Кошиева распределба. ♦

Пример 4. Нека $Y = \dfrac{1}{X}$, каде $X > 0$. Да се изрази функцијата на густина на распределба на случајната променлива Y преку функцијата на густина на распределба на случајната променлива X.

Решение. Бидејќи случајната променлива X е позитивна, имаме дека $Y \in (0,\infty)$. Оттука, за $y < 0$ имаме дека $F_Y(y) = 0$.

За $y > 0$, се добива:

$$F_Y(y) = p(Y \le y) = p\left(\frac{1}{X} \le y\right) = p\left(X \ge \frac{1}{y}\right) = 1 - p\left(X < \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right).$$

Во согласност со ова, функцијата на распределба на случајната променлива Y е:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - F_X\left(\dfrac{1}{y}\right), & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}.$$

Бидејќи:

$$\left(1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)\right)' = -f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{f_X\left(\dfrac{1}{y}\right)}{y^2},$$

функцијата на густина на распределба на случајната променлива Y е дадена со:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} f_X\left(\dfrac{1}{y}\right), & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}. \blacklozenge$$

Еден од поважните начини на испитување на стохастички законитости, особено во нивното моделирање, се остварува преку генерирање на случајни променливи кои се вклучени во експериментот. Во практика, доволно е да се има генератор на случајни броеви, со чија помош може да се моделира некоја распределба. Генераторот на случајни броеви ја дава веројатноста на рамномерна распределба на однапред избран интервал или конечно множество.

Може да го поставиме следново прашање: Како со помош на генератор со рамномерна распределба да добиеме вредности на која било случајна променлива со позната функција на распределба F?

Овој проблем е обратен од оној кој го решивме во претходниот пример. Таму почнавме од случајна променлива X со функција на распределба F и добивме случајна променлива U со рамномерна распределба. Функционалната врска помеѓу овие две случајни променливи е: $U = F(X)$.

Од ова, можеме да извлечеме заклучок дека обратниот проблем може да се реши со користење на инверзна функција. Ако U има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$, тогаш случајната променлива X дефинирана со формулата $X = F^{-1}(U)$ треба да има функција на распределба опишана со функцијата на распределба F.

Да го провериме ова во едноставен случај кога функцијата F поседува инверзна функција F^{-1}. Со оглед на тоа дека функцијата F е неопаѓачка функција, нејзината инверзна функција ќе постои кога случајната променлива X нема атоми - точка со позитивна веројатност. Во тој случај,

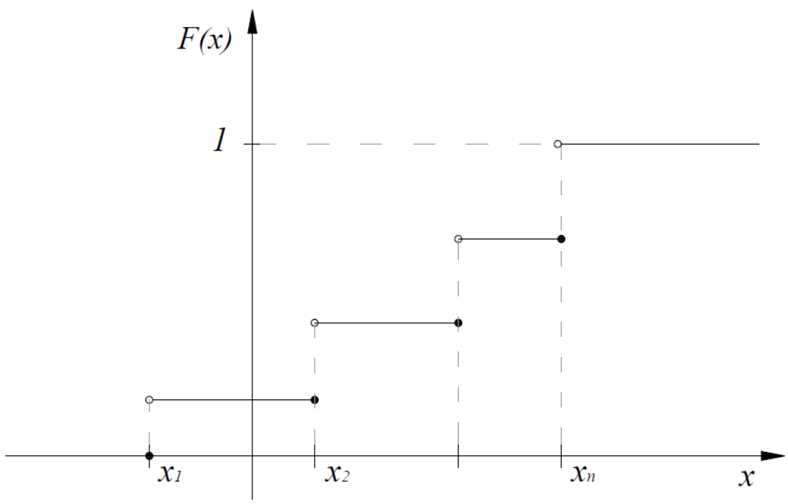
$$p(X < x) = p(F^{-1}(U) < x) = p(U < F(x)) = F(x),$$

па, функцијата F навистина е функција на распределба на случајната променлива X.

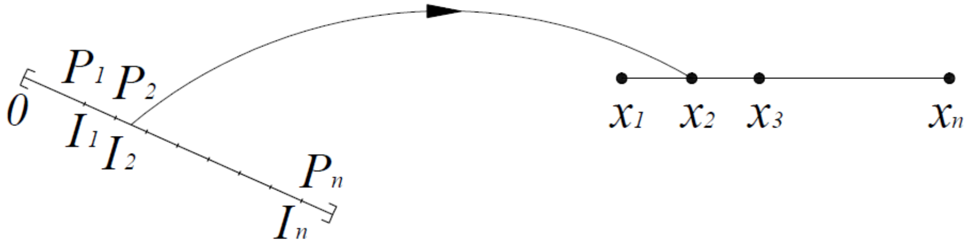
Моделирањето на дискретните случајни променливи може, исто така, да се опише со помош на нивната функција на распределба. Нека:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Функцијата на распределба го има графикот даден подолу на сликата.



Обликот на оваа функција ни кажува на кој начин треба да ги генерираме вредностите на случајната променливи: интревалот $[0,1]$ треба да го поделиме на делови $I_1, I_2, ..., I_n$ на кои должините им се пропорционални со веројатностите $p_1, p_2, ..., p_n$. Ако рамномерната распределба прима вредност во внатрешноста на интервалот I_j, тогаш за вредност на случајната променлива X ја земаме x_j.

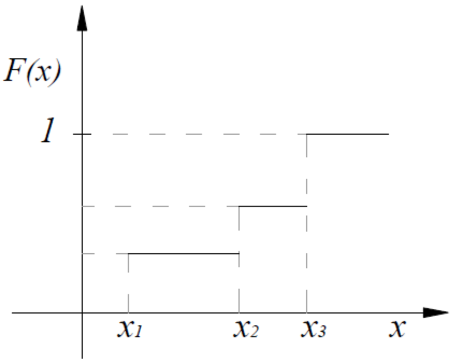


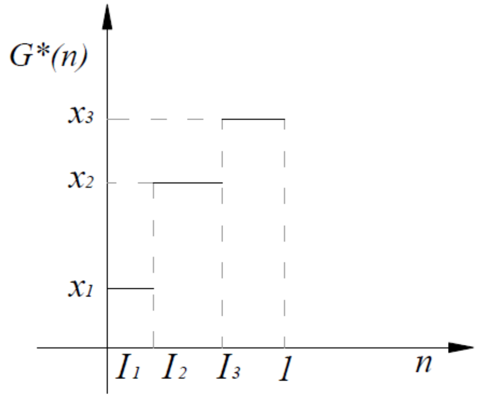
Оваа постапка може математички да се опише со помош на обопштени инверзни функции. Нека:

$$G^*(u) = \inf\{x : F(x) > u\}, \qquad 0 \le u < 1.$$

Тогаш, $X = G^*(U)$ има функција на распределба опишана со функцијата F. Ако F има инверзна функција, тогаш $G^* = F^{-1}$. Ако F има скок во точката x_j, со големина p_j, тогаш функцијата G^* е константа на интервалот I_j со должина p_j, а нејзината вредност на тој интервал изнесува x_j.

На следнава слика е даден графикот на распределба на случајната променлива X, која прима три дискретни вредности, односно графикот на функцијата G^* со која таа случајна променлива може да се генерира од рамномерната распределба.





5.4. Решени задачи

Задача 1. Дадена е случајната променлива X со функција на густина на распределба:

$$f(x)=\begin{cases} a-x, & x\in(0,a) \\ 0, & x\notin(0,a) \end{cases}.$$

а) Најди ја вредноста на константата $a>0$;

б) Најди ја функцијата на распределба на случајната променлива X;

в) Најди ја веројатноста $p(\frac{\sqrt{2}}{2}<X<\sqrt{2})$;

г) Најди го математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X.

Решение.

а) Имајќи предвид дека: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$, за вредноста на константата a, добиваме:

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{a}(a-x)\,dx+\int\limits_{a}^{+\infty} 0\cdot dx=\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}.$$

Бидејќи $a>0$, од $a^2=2$, добиваме дека $a=\sqrt{2}$. Па, функцијата на густина на распределба на случајната променлива X е:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}-x, & x\in(0,\sqrt{2})\\ 0, & x\notin(0,\sqrt{2})\end{cases}.$$

б) Функцијата на распределба на случајната променлива X е:

За $x\le 0$, $F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0$.

За $0<x<\sqrt{2}$, добиваме дека:

$$F_X(x)=\int\limits_0^x\left(\sqrt{2}-t\right)dt=\left(\sqrt{2}\,t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^x=\sqrt{2}\,x-\frac{x^2}{2}.$$

За $x\ge\sqrt{2}$, за функцијата на распределба на X, добиваме:

$$F_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-t\right)dt+\int\limits_{\sqrt{2}}^{x}0\cdot dt=1.$$

Во согласност со ова, функцијата на распределба на случајната променлива X е:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sqrt{2}\,x-\frac{x^2}{2}, & 0<x<\sqrt{2}\\ 1, & x\ge\sqrt{2}\end{cases}.$$

в) Бараната веројатност е:

$$p\left(\frac{\sqrt{2}}{2}<X<\sqrt{2}\right)=F_X(\sqrt{2})-F_X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

г) За математичкото очекување на случајната променлива X, имаме:

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\int\limits_0^{\sqrt{2}}x\left(\sqrt{2}-x\right)dx=\left(\frac{\sqrt{2}\,x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

.

Дисперзијата на случајната променлива X е:

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9},$$

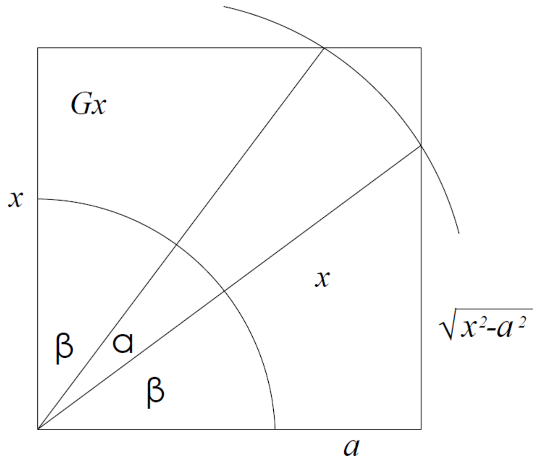
каде што:

$$E(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx=\int\limits_0^{\sqrt{2}}x^2\left(\sqrt{2}-x\right)dx=\left(\frac{\sqrt{2}\,x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}.$$

Задача 2. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со страна a случајно се избира точка. Вредноста на случајната променлива X е оддалеченоста на така избраната точка од темето A. Најди ја функцијата на распределба на случајната променлива X .

Решение. Нека со Ω го означиме дадениот квадрат. Тогаш, $m(\Omega)=a^2$. Имаме:

$$F_X(x)=p(X<x)=\frac{m(G_x)}{m(\Omega)}=\frac{m(G_x)}{a^2}.$$



Ги разликуваме следниве два случаја.

1) $0\le x\le a$. Во оваа ситуација, областа G_x е четвртина од кругот и важи:

$$m(G_x)=\frac{1}{4}x^2\pi .$$

2) $a\le x\le a\sqrt{2}$. В оваа ситуација, областа G_x е составена од два триаголника и кружен исечок. Нека α е аголот на тој кружен исечок, $\alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta$. Важи:

$$\cos\beta=\frac{a}{x}, \text{ од каде } \alpha=\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{a}{x}.$$

Следува:

$$m(G_x)=a\sqrt{x^2-a^2}+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{\pi}{2}-2\arccos\frac{a}{x}\right).$$

Конечно, добиваме:

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4a^2}\cdot x^2, & 0 \le x \le a \\ \sqrt{\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - 1} + \dfrac{\pi}{4a^2}\cdot x^2 - \dfrac{x^2}{a^2}\arccos\dfrac{a}{x}, & a \le x \le a\sqrt{2} \end{cases}.$$

Задача 3. Случајната променлива X е дадена со функцијата на густина на распределба:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

Напиши ја функцијата на распределба на случајната променлива X. Пресметај го математичкото очекување и дисперзија на случајната променлива X.

Решение. Функцијата на распределба на случајната променлива ја наоѓаме со фомулата:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt .$$

Ако $x \le 0$, интегралот е:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (t+1)\,dt = \frac{1}{2}(x+1)^2 .$$

Специјално, $F(0) = \dfrac{1}{2}$. За $0 \le x \le 1$ имаме:

$$F(x) = F(0) + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2 .$$

За математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X, имаме:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = 0,$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}.$$

.

Задача 4. Непрекинатата случајна променлива X е дадена со функција на густина на распределба:

$$f(x) = C\cos 2x, \qquad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

Одреди ја константата C, функцијата на распределба F и веројатноста на настанот: $\{0 < X < \frac{\pi}{8}\}$.

Решение. Константата C ќе ја определиме од условот:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} C\cos 2x\,dx = C \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = C .$$

Функцијата на распределба е еднаква на нула за $x < -\frac{\pi}{4}$, едининица за $x > \frac{\pi}{4}$. За $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, важи:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{x} \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}(\sin 2x + 1) .$$

Веројатноста на настанот $\{0 < X < \frac{\pi}{8}\}$ може да се пресмета со помош на функцијата на распределба. Имаме:

$$p\left(0 < X < \frac{\pi}{8}\right) = F\left(\frac{\pi}{8}\right) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{4} .$$

Задача 5. Во внатрешноста на правоаголникот $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$ случајно е избрана точка во координати (X,Y). Ја дефинираме случајната променлива $Z = \max\{X,Y\}$. Одреди и нацртај ја функцијата на распределба на случајната променлива Z, а потоа пресметај ја веројатноста на настанот $\{Z \le \frac{1}{2}\}$.

Решение. Да забележиме дека:

$$p\big((X,Y) : G\big) = \frac{m(G)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2} m(G) ,$$

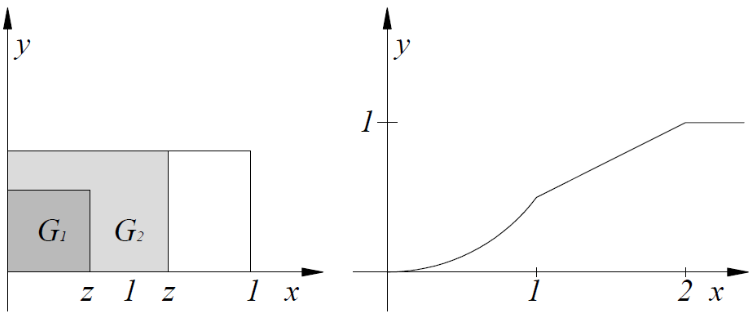
бидејќи точката (X,Y) се избира случајно во правоаголникот Ω. Во зависност од тоа дали $z \le 1$ или $1 < x \le 2$, множеството G, ќе има различни облици. Во согласност со ова, разликуваме два случаја:

$$F(z)=p(Z<z)=\begin{cases}\frac{1}{2}m(G_1), & 0\le z\le 1\\ \frac{1}{2}m(G_2), & 1<z\le 2\end{cases}=\begin{cases}\frac{z^2}{2}, & 0\le z\le 1\\ \frac{z}{2}, & 1<z\le 2\end{cases}.$$

Па, случајната променлива Z е непрекината случајна променлива. Следува:

$$p\left(Z\le\frac{1}{2}\right)=p\left(Z<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}.$$

На сликата се нацртани областите G_1 и G_2 и графикот на функцијата F.



Задача 6. Нека X е непрекината случајна променлива со функција на распределба $F_X(x)$. Докажи дека случајната променлива:

а) $Y=F(X)$ има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$,

б) $Y=-\ln\left(F(X)\right)$ има експоненцијална распределба со параметар $\lambda=1$.

Решение.

а) Бидејќи $F_X(x)$ е функција на распределба, таа е монотоно растечка и прима вредности од интервалот $[0,1]$. Од условот на задачата таа е непрекината, па од монотноста, таа е и биекција, односно постои инверзна функција $F_Y^{-1}(y)$. Па,

$$F_Y(y)=p(Y<y)=p(F_X(X)<y)$$
$$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ p(X<F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y, & y\in(0,1]\\ 1, & y>1\end{cases}.$$

Јасно $F_Y(y)$ е функција на распределба на случајната променлива Y, која има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$.

Друг начин да го докажеме тврдењето е со примена на теоремата за трансформација на густина. За трансформацијата $Y = F(X)$ инверзната трансформација е $X = F^{-1}(Y)$. Од формулата за извод на инверзна функција имаме:

$$(F^{-1}(y))' = \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} = \frac{1}{f_X(F^{-1}(y))}.$$

Оттука,

$$f_Y(y) = f_X(F^{-1}(y)) \cdot |(F^{-1}(y))'| = 1, \text{ за } y \in [0,1],$$

што е функција на густина на распределба на случајна променлива со $U(0,1)$ распределба.

б) Сосема аналогно, користејќи дека $y = -\ln x$ е монотоно опаѓачка функција, добиваме:

$$F_Y(y) = p(Y < y) = p(-\ln(F(X)) < y) = p(F(X) > e^{-y})$$
$$= 1 - p(F(X) \le e^{-y}) = 1 - e^{-y}, \text{ за } y > 0.$$

Овде го користевме резултатот од а) дека $F(X) : U(0,1)$. Па, функцијата $F_Y(y)$ е функција на распределба на случајна променлива која има експоненцијална распределба $E(1)$.

Задача 7. Нека случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(-1, \sqrt{3})$. Најди ја функцијата на густина и функцијата на распределба на случајната променлива $Y = arctgX$.

Решение. Функција на густина за случајната функција X е:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}, & x \in (-1, \sqrt{3}) \\ 0, & \notin (-1, \sqrt{3}) \end{cases}.$$

Функцијата $y = arctg\, x$ има инверзна функција $x = tgy$. Изводот на оваа функција е $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$. Интервалот $(-1, \sqrt{3})$ со функцијата $y = arctgx$ се пресликува во интервалот $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$. Па, функцијата на густина за случајната променлива Y е:

$$f_Y(y) = f_X(tgy)\,|\,x'\,| = \begin{cases} \dfrac{1}{(\sqrt{3}+1)\cos^2 y}, & y \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) \\ 0, & y \notin \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}.$$

Функцијата на распределба е дадена со: $F_Y(y) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{y} f_Y(y)\,dy$, од каде што добиваме дека:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le -\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{1+\sqrt{3}}(1+tgy), & y \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right) \\ 1, & y > \dfrac{\pi}{3} \end{cases}.$$

Задача 8. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$. Да се најдат функцијата на густина на распределба и функцијата на распределба на случајната променлива: $Y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^X$.

Решение. За функцијата на распределба на случајната променлива Y, имаме:

$$F_Y(y) = p(Y \le y) = p\left(\left(\frac{1}{2}\right)^X \le y\right) = p(X \ge \log_{\frac{1}{2}} y)$$

$$= 1 - p(X < \log_{\frac{1}{2}} y) = 1 - F_X(\log_{\frac{1}{2}} y)$$

$$= 1 - \begin{cases} 0, & \log_{\frac{1}{2}} y \le 0 \\ \log_{\frac{1}{2}} y, & 0 < \log_{\frac{1}{2}} y < 1 \\ 1, & \log_{\frac{1}{2}} y \ge 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1, & y \ge 1 \\ 1-\log_{\frac{1}{2}} y, & \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0, & y \le \frac{1}{2} \end{cases}.$$

За функцијата на густина на распределба, имаме:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\ln 2}, & y \in \left(\frac{1}{2},1\right) \\ 0, & y \notin \left(\frac{1}{2},1\right) \end{cases}.$$

Задача 9. Најди ги функцијата на густина на распределба и функцијата на распределба на случајната променлива $Y = e^X$, каде што случајната променлива X има функција на распределба:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{2}\,x - \frac{x^2}{2}, & 0 \le x < \sqrt{2} \\ 1, & x \ge \sqrt{2} \end{cases}.$$

Решение. За функцијата на распределба $F_Y(y)$ на случајната променлива Y, имаме:

$$F_Y(y) = p(Y \le y) = p(e^X \le y) = p(X \le \ln y) = F_X(\ln y)$$

$$= \begin{cases} 0, & \ln y < 0 \\ \sqrt{2}\ln y - \frac{\ln^2 y}{2}, & 0 \le \ln y < \sqrt{2} \\ 1, & \ln y \ge \sqrt{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < y < 1 \\ \sqrt{2}\ln y - \frac{\ln^2 y}{2}, & 1 \le y < e^{\sqrt{2}} \\ 1, & y \ge e^{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Бидејќи $f_Y(y) = F_Y'(y)$, за функцијата на густина на распределба на случајната променлива Y имаме:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}-\ln y}{y}, & y\in(1,e^{\sqrt{2}})\\ 0, & y\notin(1,e^{\sqrt{2}})\end{cases}.$$

Задача 10. На отсечката $[0,T]$ случајно се избрани две точки кои ја делат на три дела. Најди ја функцијата на распределба за секој од тие три дела.

Решение. Ако ги споиме краевите на отсечката, наместо отсечка можеме да разгледуваме кружница со иста должина. Изборот на двете точки во внатрешноста на интервалот е еквивалентен со избор на три точки во внатрешноста на кружницата, од кои една, на пример првата, го определува местото на спојување на отсечката. Заради симетрија јасно е дека должината на секој дел ќе има идентична распределба.

Да го разгледаме повторно интервалот и да ја означиме со X, должината на првиот дел. Ќе ја најдеме функцијата на распределба на случајната променлива X :

$$F(x)=p(X<x)=1-p(X\geq x).$$

За да се случи настанот $\{X\geq x\}$ двете точки мора да бидат во интервалот $[x,T]$. Веројатноста на тој настан е: $\left(\dfrac{T-x}{T}\right)^2$. Па,

$$F(x)=1-\left(\frac{T-x}{T}\right)^2, \qquad 0\leq x\leq T.$$

Задача 11. Нека е дадена случајната променлива X со функција на распределба:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 1-\cos x, & 0<x\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 1, & \dfrac{\pi}{2}<x\end{cases}.$$

Најди ја функцијата на густина и функцијата на распределба на случајната променлива: $Y=2X+1$.

Решение. Бидејќи:

$$F_Y(y)=p(Y<y)=p(2X+1<y)=p\left(X<\frac{y-1}{2}\right)=F_X\left(\frac{y-1}{2}\right),$$

за функцијата на распределба $F_Y(y)$ имаме:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 1 \\ 1 - \cos\left(\dfrac{y-1}{2}\right), & 1 < y \le \pi + 1, \\ 1, & \pi + 1 < y \end{cases}$$

па, за функцијата на густина на распределба на случајната променлива Y имаме:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{y-1}{2}\right), & 1 < y \le \pi + 1 \\ 0, & y \notin (1, \pi + 1] \end{cases}.$$

Задача 12. Нека случајната променлива X има функција на густина на распределба дадена со:

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}, \quad \text{каде } \alpha > 0.$$

Докажи дека случајната променлива $Y = \dfrac{1}{X}$ има функција на густина на распределба дадена со:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\alpha\pi\left(y^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)}.$$

Решение. Функцијата $x = \dfrac{1}{y}$ е инверзна функција на функцијата $y = \dfrac{1}{x}$. Дополнително, првиот извод $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$. Сега, имаме:

$$f_Y(y) = f_X(y) \cdot |x'| = f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left|-\frac{1}{y^2}\right| = \frac{\dfrac{\pi}{\alpha\left(\left(\dfrac{1}{y}\right)^2 + \alpha^2\right)}}{y^2}$$

$$= \frac{\alpha\pi}{\alpha^2 y^2 + 1} = \frac{1}{\alpha\pi\left(y^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)}.$$

Задача 13. Докажи дека за секоја случајна променлива X, со конечно математичко очекување важи:

$$\lim_{x \to \infty} x[1 - F(x)] = 0.$$

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избран. Бидејќи математичкото очекување $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)$ постои, следува дека $\int_{M}^{+\infty} x\,dF(x) < \varepsilon$ за доволно големо M. Важи:

$$M(1-F(M)) = M\int_{M}^{+\infty} dF(x) \le \int_{M}^{+\infty} x\,dF(x) < \varepsilon .$$

Па, важи дека $M(1-F(M)) < \varepsilon$, за доволно големо M и заради произволноста на ε, следува:

$$\lim_{x\to\infty} x(1-F(x)) = 0 .$$

Задача 14. Нека F е функција на распределба на позитивна непрекината случајна променлива X. Докажи дека важи:

$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} (1-F(x))\,dx .$$

Решение. Имаме:

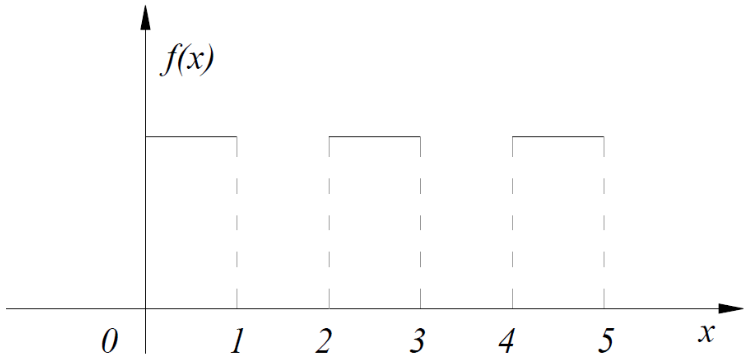
$$E(X) = \int_{0}^{+\infty} x\,dF(x) = -\int_{0}^{+\infty} x(1-F(x))'\,dx$$

$$= -x(1-F(x))\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} (1-F(x))\,dx$$

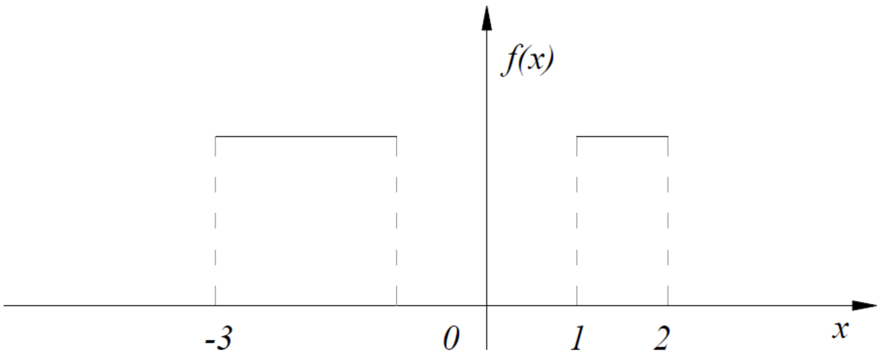
$$= -\lim_{x\to+\infty} x(1-F(x)) + \int_{0}^{+\infty} (1-F(x))\,dx = \int_{0}^{+\infty} (1-F(x))\,dx ,$$

Каде што во лимесот беше искористен резултатот од претходната задача.

Задача 15. Функцијата на густина на распределба на случајната променлива X е дадена со сликата подолу. Најди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива $Y = X^2$.



а)



б)

Решение.

а) Во овој случај функцијата $y = x^2$ е инјективна. Па, важи:

$$f(x) = \frac{1}{3}, \qquad x \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5],$$

$$x = \sqrt{y}, \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Променливата y прима вредности во множеството $[0,1] \cup [4,9] \cup [16,25]$.

Конечно,

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{6\sqrt{y}}, \qquad y \in [0,1] \cup [4,9] \cup [16,25].$$

б) Функцијата $y = x^2$ сега не е инјективна. Сега областа ќе ја поделиме на два дела, на кои горната функција ќе биде инјективна:

$$x \in [-3,1]: \;\; g_1(y) = \frac{1}{6\sqrt{y}}, \qquad y \in [1,9],$$

$$x \in [1,2]: \quad g_2(y) = \frac{1}{6\sqrt{y}}, \qquad y \in [1,4].$$

Сега, $g(y) = g_1(y) + g_2(y)$, но мора да бидеме внимателни на различините области на дефинираност на горниве формули. Па, затоа:

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\sqrt{y}} + \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & y \in [1,4] \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & y \in [4,9] \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & y \in [1,4] \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & y \in [4,9] \end{cases}.$$

Задача 16. Случајната променлива X има густина на распределба:

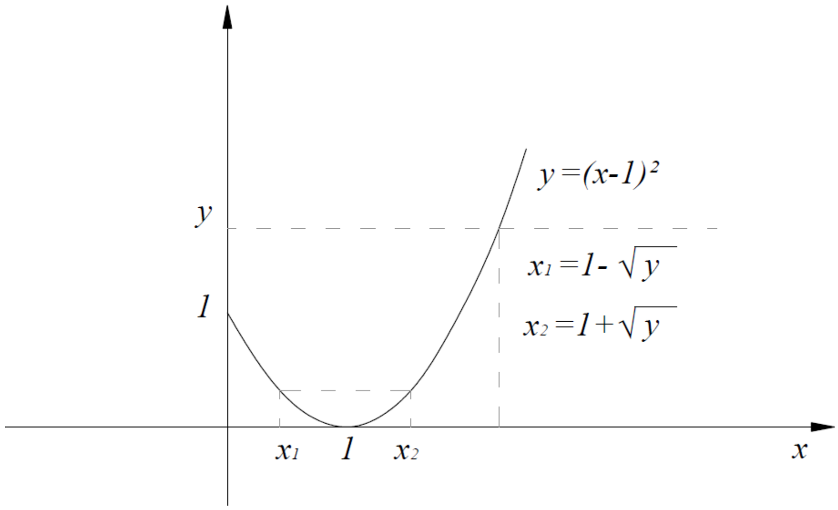
$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Најди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива:

$$Y = (X-1)^2.$$

Решение. Функцијата на распределба на случајната променлива X е:

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0.$$



Разликуваме три случаја:

1) $y \le 0$: $G(y) = 0$,

2) $0 < y \le 1$: $G(y) = F(1+\sqrt{y}) - F(1-\sqrt{y})$

$$= e^{-1+\sqrt{y}} - e^{-1-\sqrt{y}},$$

3) $1 < y \ : G(y) = F(1+\sqrt{y}) = 1 - e^{-1-\sqrt{y}}$.

Па,

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2e\sqrt{y}}\left(e^{\sqrt{y}} + e^{-\sqrt{y}}\right), & 0 < y \le 1 \\ \dfrac{1}{2e\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & 1 < y \end{cases}.$$

Задача 17. Случајна променлива X е зададена со функцијата на густина на распределба:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Најди ја, а потоа нацртај ја функцијата на распределба на случајната променлива $Y = \psi(X)$, каде што:

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Решение. Функцијата на распределба на случајната променлива X е:

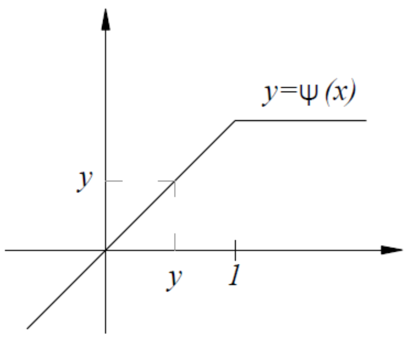
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx.$$

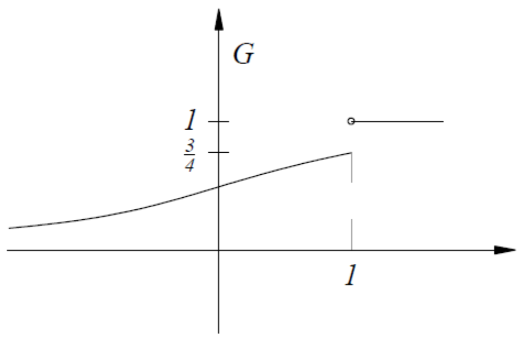
Случајната променлива Y има вредности во интервалот $(-\infty, 1]$. Според тоа, за $y > 1$, важи $G(y) = 1$. Ако $y \le 1$,

$$G(y) = p(Y < y) = p(X < y) = F(y).$$

Па,

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} arctg\, y, & y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}.$$



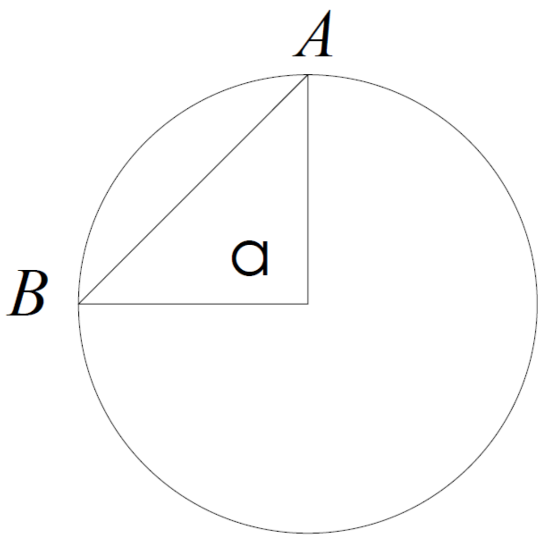


Задача 18. Одреди го математичкото очекување на должината на секантата која спојува фиксна точка A од кружницата со радиус R и случајно избрана точка B на кружницата.

Решение. Нека со α го означиме централниот агол на помалиот лак од лакот AB. Тоа е случајна променлива со рамномерна распределба на интервалот $[0,\pi]$. Имаме:

$$X = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = \psi(\alpha),$$

каде што X е случајна променлива, која е зададена со X : должина на секантата $\overline{AB}$.



Нејзиното математичко очекување изнесува:

$$E(X) = \int_0^{\pi} \psi(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{\pi} 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\pi} d\alpha = \frac{4R}{\pi} \quad .$$

Задача 19. Случајната променлива X, која прима само позитивни вредности, е дадена со функцијата на густина на распределба f. Најди ја густината (законот) на распределба на случајните променливи:

а) $Y = X^2$,

б) $Y = \sqrt{X}$,

в) $Y = [X]$, каде што со $[x]$, е означен цел дел од x, односно најголемиот цел број помал или еднаков од x.

Решение. Функциите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ се инјективни на интервалот $(0,\infty)$. Поради тоа,

а) $g(y) = f(x)\left|\dfrac{dx}{dy}\right| = f(\sqrt{y})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

б) $g(y) = f(x)\left|\dfrac{dx}{dy}\right| = f(y^2)\cdot 2y$.

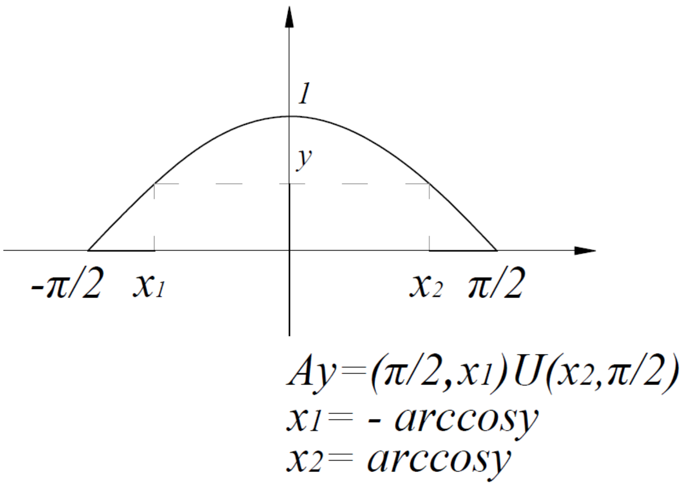
в) Во овој случај Y е дискретна случајна променлива која прима вредности од множеството $\{0,1,2,...\}$ со веројатности:

$$p_k = p(Y = k) = p(k \le X < k+1) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx .$$

Задача 20. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Одреди ја функцијата на густина на случајната променлива $Y = \cos X$.

Решение. I начин. Случајната променлива Y прима вредности во интервалот $[0,1]$. Функцијата на густина на случајната променлива X е:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$



Поради тоа,

$$G(y) = p(Y < y) = p(X \in A_y)$$

$$= p\left(-\frac{\pi}{2} \le X < x_1\right) + p\left(x_2 < X < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y} dx + \frac{1}{\pi}\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} dx = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos y .$$

Оттука,

$$g(y) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad 0 \le y < 1 .$$

II начин. Функцијата $y = \cos x$, не е инјективна на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Затоа, овој интервал ќе го поделиме на два дела, така што функцијата $y = \cos x$ ќе биде инјективна на соодветните интервали. Сега, за секој дел, ќе ја определиме функцијата на густина на распределба на случајната променлива Y:

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad x = \arccos y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

1) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$: $g_1(y) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad 0 \le y < 1$

2) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $g_2(y) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad 0 \le y < 1.$

Горните функции имаат ист домен, од каде што за функцијата на густина на распределба на случајната променлива Y добиваме:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad 0 \le y < 1.$$

Задача 21. Дадена е случајна променлива X со рамномерна распределба на интервалот $U(0,1)$. Најди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива $Y = -\frac{\ln X}{a}$, каде што $a > 0$ е дадена константа.

Решение. Функцијата на густина на распределба за случајната променлива X е:

$f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1)\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$. Функцијата $y=-\dfrac{\ln x}{a}$ има инверзна функција и таа е $x=e^{-ay}$. Изводот на оваа функција е $\dfrac{dx}{dy}=-ae^{-ay}$.

Интервалот $x\in(0,1)$ со функцијата $y=-\dfrac{\ln x}{a}$, $a>0$, се пресликува во интервалот $y\in(0,\infty)$. Па,

$$f_Y(y)=f_X(e^{ay})\,|-ae^{-ay}|=ae^{ay}\text{, за } y>0.$$

Па, случајната променлива Y има експоненцијална распределба со параметар a, т.е. $Y:E(a)$.

6. Некои стандардни распределби на случајните променливи

6.1. Дискретни распределби

Во овој дел ќе ги разгледаме најважните и најчесто срекаваните дискретни случајни променливи. Ќе ги опишеме законите на распределба, ќе објасниме во кои модели се појавуваат, ќе ги пресметаме нивните карактеристични функции и соодветните нумерички карактеристики.

6.1.1. Рамномерна распределба

Во овој дел ќе дадеме некои елементарни информации поврзани со дискретни случајни променливи кои имаат рамномерна распределба.

Нека n е природен број. Нека случајната променлива X е дискретна случајна променлива која прима вредности $i = 1, 2, \ldots, n$ со веројатности:

$$p(X = j) = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Да забележиме дека:

$$\sum_{j=1}^{n} p(X = j) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

За вака дефинираната случајна променлива ќе велиме дека има рамномерна распределба на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ја имаме следнава теорема.

Теорема 1. Нека дискретната случајна променлива X има рамномерна распределба на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$. Математичкото очекување на случајната променлива X е:

$$E(X) = \frac{N+1}{2},$$

додека дисперзијата е:

$$D(X) = \frac{N^2 - 1}{12}.$$

Доказ. За математичкото очекување на дискретната случајна променлива X, со рамномерна распределба на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ имаме:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot p(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Дополнително, имаме:

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2 p(X=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

За дисперзијата на случајната променлива X, која има рамномерна распределба е:

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}.\ ■$$

6.1.2. Геометриска распределба

Нека при изведување на некој експеримент, нека веројатноста за реализација на настанот A е p. Го повторуваме овој експеримент во истите услови сѐ до прва реализација на настанот A. Нека случајната променлива X е дадена со X: број на обиди до кој дошло до реализација на настанот A. Тогаш велиме дека X има геометриска распределба со параметар p и запишуваме: $X:G(p)$.

Да го определиме законот на распределба на оваа случајна променлива. Вредностите кои ги прима оваа случајна променлива се вредности од множеството $\{1,2,3,...\}$. Ќе ја одредиме веројатноста:

$$p_k=p(X=k).$$

Ако се реализирал настанот $\{X=k\}$, тоа значи дека настанот A не се реализирал во првите $k-1$ експерименти, а се реализирал во k-тиот експеримент. Во согласност со ова,

$$p_k=P(X=k)=(1-p)^{k-1}p=q^{k-1}p,$$

каде што $q=1-p$. Да забележиме дека важи:

$$p(X>k)=(1-p)^k=q^k,$$

бидејќи настанот A не се реализирал во првите k-експерименти.

Во продолжение, ќе ја најдеме карактеристичната функција на случајната променлива X, која има геометриска распределба:

$$\vartheta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{itk}\cdot pq^{k-1}=pe^{it}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(qe^{it})^k=\frac{p}{1-qe^{it}}.$$

Ќе ја искористиме оваа функција за да го пресметаме математичкото очекување на оваа случајна променлива. Важи:

$$\vartheta'(t) = \frac{ipe^{it}}{(1-qe^{it})^2},$$

па, важи:

$$E(X) = -i\vartheta'(0) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Па, можеме да кажеме дека математичкото очекување е еднакво на реципрочна вредност на параметарот p. Овој резултат е во согласност и со нашето искуство. При фрлање коцка, веројатноста да се појави 6 е еднаква на $p = \frac{1}{6}$. Бројот на фрлања на коцката, сѐ до појава на шестка, го мери случајната променлива X. Очекуваниот број е еднаков на: $E(X) = \frac{1}{p} = 6$.

Пример 1. Колкава е веројатноста дека шестка ќе се појави во првите шест фрлања?

Решение. Одговорот на прашањето е:

$$p(X \le 6) = 1 - p(X > 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,665. \blacklozenge$$

Теорема 1. Случајната променлива X која ги прима вредностите $\{1,2,3,...\}$ има геометриска распределба ако и само ако за сите $k, n \ge 1$

$$p(X = k+m | X > k) = p(X = m). \qquad (*)$$

Доказ. Нека X има геометриска распределба, тогаш:

$$p(X = k+m \mid X > k) = \frac{p(X = k+m, X > k)}{p(X > k)} = \frac{p(X = k+m)}{p(X > k)}$$

$$= \frac{pq^{k+m-1}}{q^k} = pq^{m-1} = p(X = m).$$

Обратна насока. Од условот (*) имаме дека со собирање на сите неедначкости од природни броеви поголеми од m, добиваме:

$$p(X > k+m \mid X > k) = p(X > m).$$

Условната веројатност на левата страна може да се запише во обликот:

$$p(X > k+m \mid X > k) = \frac{p(X > k+m, X > k)}{p(X > k)} = \frac{p(X > k+m)}{p(X > k)}.$$

Така добиваме:

$$p(X > k+m) = p(X > k)\cdot p(X > m).$$

Тоа значи дека функцијата $P(k) = p(X > k)$ ја задоволува функционалната равенка:

$$P(k+m) = P(k)\cdot P(m), \text{ за сите } k,m \ge 0.$$

Дополнително, важи: $P(0) = p(X > 0) = 1$,

$P(1) = p(X > 1) = 1 - p = q$. Ставајќи $k = 1$ во функционалната равенка, добиваме:

$$P(m+1) = P(1)\cdot P(m) \ \Rightarrow P(m+1) = q\cdot Q(m).$$

Со помош на математичка индукција, лесно можеме да покажеме дека:

$$P(k) = q^k\cdot Q(0) = q^k.$$

Па, $p(X > k) = q^k$. Следува:

$$p(X = k) = p(X > k-1) - p(X > k) = q^{k-1} - q^k = (1-q)q^{k-1} = pq^{k-1}. \ ■$$

Зошто е важна оваа теорема? Случајната променлива X го мери бројот на повторувања на експерементот до појавување на настанот A. Ако го разгледуваме фрлањето на коцка и шестка не се појавила во првите пет фрлања, колкава е веројатноста дека шестка ќе се појави во следниве две фрлања? Колкав е очекуваниот број на фрлања до појава на шестка во тој момент?

Одговорите на овие прашања се исти како и на почетокот на фрлањата. Не се менуваат веројатностите, ниту се менува очекуваниот број на фрлања. Ако шестка не се појавила во првите пет фрлања, очекуваниот број на нови фрлања до појава на шестка повторно е еднаков на 6. Со други зборови, велиме дека геометриската распределба „не памети“.

Сега да претпоставиме дека изведуваме некој експеримент, при непроменети услови, сè додека не дојде до реализација на еден од двата независни настана - A_1 и A_2.

Ќе го опишеме овој експеримент со помош на случајни променливи. Нека случајната променлива X_1 го следи појавувањето на настанот A_1. Оваа случајна променлива има геометриска распределба со параметар $p_1 = p(A_1)$. На ист начин, случајната променлива го следи појавувањето на настанот A_2 кој има геометриска распределба со параметар $p_2 = p(A_2)$. Овие две случајни променливи се независни, бидејќи настаните A_1 и A_2 се независни. Случајната променлива која го регистрира првото појавување на кои било настани може да се запише со формулата: $X = \min(X_1, X_2)$. Ќе докажеме дека и оваа случајна променлива има геометриска распределба и ќе го најдеме нејзиниот параметар.

Поради назависноста на случајните променливи, важи:

$$p(X > k) = p(X_1 > k, X_2 > k) = p(X_1 > k) \cdot p(X_2 > k)$$
$$= q_1^{\,k} q_2^{\,k} = q^k,$$

каде што: $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$ и $q = q_1 q_2$.

Следува:

$$p(X = k) = p(X > k-1) - p(X > k)$$
$$= q^{k-1} - q^k = pq^{k-1},$$

односно X има геометриска распределба со параметар: $p = 1 - q = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$. Ќе ја пресметаме веројатноста на настанот $A = A_1 \cup A_2$ и ќе ја споредиме со горниот резултат.

Пример 2. Една телефонска централа има n-линии. Во еден момент, сите линии се зафатени. Должината на разговорот, мерена во единица време, има геометриска распределба со очекување μ. Пресметај го очекуваното време до првата слободна линија.

Решение. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се должините на разговорите преку секоја од линиите, соодветно. Тогаш, $X = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Ако p е параметарот на геометриската распределба, тогаш, важи: $\mu = \frac{1}{p}$, т.е. $p = \frac{1}{\mu}$. Случајната променлива X има геометриска распределба (општата ситуација на горнава дискусија, исто така, важи) со параметар $1 - q^n$. Нејзиното очекување е:

$$E(X) = \frac{1}{1 - q^n} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^n}.$$

Да забележиме дека за големо μ, приближната вредност на ова математичко очекување е: $\frac{\mu}{n}$. ♦

При интерпретацијата на овој резултат треба да бидеме многу внимателни. Не е сеедно во кои единици се мери времето. Да земеме на пример, нека $\mu = 120\,s$, ќе добиеме целосно различни резултати во однос ако претпоставиме дека $\mu = 2\min$. Во прилог е табела за вредностите на математичкото очекување $E(X)$ во однос на вредностите на бројот n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu = 120\,s$	120	60,3	40,3	30,4	24,4	20,4	17,6	15,4	13,8	12,5
$\mu = 2\min$	2	1,33	1,14	1,07	1,03	1,02	1,01	1	1	1

6.1.3. Биномна распределба

Ова е една од најважните распределби кај дискретните случајни променливи.

Нека p е веројатноста да се појави настанот A. Да претпоставиме дека имаме експеримент кој го повторуваме, при непроменети услови, n-пати, при што ја следиме реализацијата на настанот A. Нека случајната променлива X го мери бројот на појавувања на настанот A. Тогаш велиме дека случајната променлива X има биномна распределба со параметри n и p и ја користиме ознаката $X : B(n, p)$.

Случајната променлива X ги прима вредностите од множеството $\{0,1,2,...,n\}$. Ќе ја одредиме веројатноста $p_k = p(X = k)$. Ако се реализирал настанот $\{X = k\}$ тоа значи дека при n-изведувања на експериментот, настанот A се реализирал точно k-пати, а $n-k$ пати не се реализирал. Бројот на различни можности за избор на експериментите во кои се реализирал настанот A е: $\binom{n}{k}$. Следува:

$$p_k = p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

каде што: $q = 1 - p$.

Дефиниција 1. За случајната променлива X велиме дека има биномна распределба со параметри n и p (запишуваме $X : B(n, p)$), ако X прима вредности од множеството $\{0,1,2,...,n\}$ со веројатности:

$$p_k = p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Пример 1. Што е поверојатно во игра со рамноправен противник: да се добијат 3 партии од 4 партии или 5 партии од 8 партии? Играта нема нерешени исходи.

Решение. Бројот на добиени партии е случајна променлива која има биномна распределба. Во првиот случај, случајната променлива има закон на распределба $B(4,\frac{1}{2})$, а во вториот случај има закон на распределба $B(8,\frac{1}{2})$.

Оттука,

$$p(\text{ 3 партии од 4}) = \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{32},$$

$$p(\text{ 5 партии од 8}) = \binom{8}{5} \cdot \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{7}{32}.$$

Од овде можеме да заклучиме дека поверојатно е да се добијат 3 партии од 4 партии. ♦

Пример 2. Еден експеримент се состои од фрлање на три коцки. Пресметај ја веројатноста дека во 10 независни изведувања на овој експеримент 4 пати се појавиле точно 2 единици.

Решение. Нека го означиме со A настанот, $A = \{$при фрлање на три коцки се појавиле точно две единици$\}$. Бројот на појавувања на единици е биномна случајна променлива со закон на распределба $B(3,\frac{1}{6})$, бидејќи се фрлаат три коцки, а веројатноста за појавување на единица е $\frac{1}{6}$. Затоа, веројатноста за настанот A е:

$$p = p(A) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}.$$

Бројот на појавување на настанот A, при изведување на 10 експерименти е биномна случајна променлива со закон на распределба $B(10, p)$. Веројатноста дека настанот A ќе се појави точно 4 пати е:

$$p = \binom{10}{4} p^4 q^6 = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{5}{72}\right)^4 \cdot \left(\frac{67}{72}\right)^6 = 0,00317. \; ♦$$

Сега, ќе ја определиме карактеристичната функција на случајна променлива со биномна распределба. Нека $X : B(n, p)$. Тогаш:

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} p_k = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it} + q)^n .$$

Имаме:

$$\vartheta'(t) = n(pe^{it} + q)^{n-1} pe^{it} i ,$$

$$\vartheta'(0) = n(p+q)^{n-1} pi = npi ,$$

од каде што добиваме дека: $E(X) = np$.

За дисперзијата на случајната променлива, имаме:

$$\vartheta''(0) = n(n-1)p^2 i^2 + npi^2 = -n(n-1)p^2 - np ,$$

од каде што:

$$D(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2$$

$$= np - np^2 = np(1-p) = npq .$$

Значи, можеме да заклучиме дека математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива со биномна распределба $X : B(n, p)$ се: $E(X) = np$ и $D(X) = npq$.

Нека $X_1 : B(n_1, p)$ и $X_2 : B(n_2, p)$ се независни случајни променливи. Тогаш и случајната променлива $X_1 + X_2$ има биномна распределба.

Важи $\vartheta_{X_1}(t) = (q + pe^{it})^{n_1}$, $\vartheta_{X_2}(t) = (q + pe^{it})^{n_2}$. Имајќи ја предвид независноста на случајните променливи X_1 и X_2, важи:

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \vartheta_{X_2}(t) = (q + pe^{it})^{n_1+n_2} ,$$

а тоа е карактеристична функција за биномната распределба $B(n_1 + n_2, p)$. Овој резултат е природен, бидејќи ние разгледуваме ист експеримент, со тоа што сме го поделиле на два дела: во првиот дел експериментот сме го извеле n_1-пати, а во другиот дел експериментот сме го повториле n_2-пати. Бројот на реализација на настанот A е збир од бројот на реализации во двата дела.

Наједноставен пример на случајна променлива која има биномна распределба е Бернулиевата распределба (индикаторска). Оваа распределба прима само две вредности 1 со веројатност p и 0 со веројатност $q=1-p$. Таа ја бележи реализацијата на настанот A, по извршен само еден експеримент.

Ако X_i се Бернулиеви независни случајни променливи со ист параметар p, тогаш нивниот збир $X_1+X_2+...+X_n$ е случајна променлива со биномна распределба $B(n,p)$. Ова е точно заради претходната дискусија.

Врз основа на ова, лесно ќе можеме да ги пресметаме математичкото очекување и дисперзијата на биномната случајна променлива, т.е. за $X:B(n,p)$. За индикаторската случајна променлива имаме:

$$E(X_i)=0\cdot q+1\cdot p=p \text{ и } D(X_i)=0^2\cdot q+1^2\cdot p-p^2=pq,$$

за секој $i=1,2,...,n$. Од независноста на $X_1,X_2,...,X_n$, добиваме:

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)=np,$$

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)=npq.$$

Следниов пример е доста карактеристичен пример и се однесува за најверојатниот број на реализации на настанот A, при изведување на серија од n-независни експерименти.

Пример 3. Случајната променлива X има биномна распределба $B(n,p)$. Кој е најверојатниот број на реализација на случајната променлива X ?

Решение. Најверојатниот број е вредност за k за која веројатноста:

$$p_k=p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

е најголема. Тогаш, ќе важи:

$$p_0\le p_1\le...\le p_k \qquad \text{и} \qquad p_k\ge p_{k+1}\ge...\ge p_n.$$

Поради ова, доволно е да ги разгледуваме двете неравенства $p_{k-1}\le p_k$ и $p_k\ge p_{k+1}$ и да најдеме за кое k овие неравенства се исполнети. Оттука,

$$\frac{p_k}{p_{k+1}}=\frac{\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}}=\frac{q}{p}\cdot\frac{k+1}{n-k},$$

па овој коефициент е поголем од 1 ако $q(n-k)\ge p(k+1)$, од каде што добиваме $k\ge(n+1)p-1$. Сосема аналогно, од првото неравенство, имаме:

$$\frac{p_k}{p_{k-1}}=\frac{\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}}=\frac{q}{p}\cdot\frac{n-k+1}{k}\geq 1,$$

од каде што добиваме: $k\leq(n+1)p$.

Според тоа, наверојатен број на реализација на случајната променлива $X : B(n,p)$ е целиот број кој се наоѓа помеѓу $(n+1)p-1$ и $(n+1)p$. Ако $(n+1)p$ е цел број, постојат две такви вредности. ♦

Пример 4. Колку пати мораме да фрлиме коцка за да најверојатниот број на појавување на шестка биде 10?

Решение. Нека n е бројот на фрлања на коцката. Бројот на појавувања на шестката во n-фрлања е биномна случајна променлива $B(n,\frac{1}{6})$. Врз основа на претходниот пример, мора да важи:

$$(n+1)\frac{1}{6}-1\leq 10\leq(n+1)\frac{1}{6}.$$

Следува: $n+1\leq 66$ и $n+1\geq 60$, па $59\leq n\leq 65$. ♦

Пример 5. Веројатноста за појава на пукнатина во една бетонска контрукција во текот на една година е p. Доколку во бетонската конструкција се појавиле m-пукнатини, веројатноста дека таа конструкција ќе се реставрира е: $P(m)=1-\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^m$, каде што ω е параметар кој е карактеристичен за овој тип на конструкции. Докажи дека веројатноста дека бетонската конструкција ќе мора да биде реставрирана после n-години е еднаква на:

$$p_n=1-\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^n.$$

Решение. Нека $p_{n,m}$ е веројатноста дека во текот на n-години на бетонската конструкција ќе се појават m-пукнатини. Од формулата за тотална веројатност, добиваме:

$$p_n=\sum_{m=0}^{n}p_{n,m}P(m).$$

Веројатноста за пукнатина во текот на секоја година е p. Бројот на пукнатини во текот на n-години е случајна променлива која има биномна распределба. Затоа, веројатноста $p_{n,m}$ е дадена со:

$$p_{n,m} = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}.$$

Со замена во горната формула, добиваме:

$$p_n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\omega} \right)^m \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} - \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left(p - \frac{p}{\omega} \right)^m q^{n-m}$$

$$= 1 - \left(p - \frac{p}{\omega} + 1 - p \right)^n = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega} \right)^n . \blacklozenge$$

6.1.4. Поасонова распределба

Поасоновата распределба може да се добие како граничен случај на биномната распределба, кога бројот на обиди неконтролирано расте. Улогата на веројатноста p за настанување на еден настан го заменува интензитетот λ на појавување на настанот.

Пример 1. Во смеса од која треба да се испечат $m = 25$ леба, ставени се $n = 100$ сончогледови зрна. Нека X е случајна променлива која е дадена со $X:$ број на сончогледови зрна во еден леб. Кој е законот на распределба на случајната променлива X ?

Решение. Да претпоставиме дека секое зрно независно од другите со еднаква веројатност во кој било леб. Веројатноста дека едно зрно ќе се најде во еден избран леб е: $p = \frac{1}{m}$. Бројот на зрна во тој леб е биномна случајна променлива со параметри n и $\frac{1}{m}$. Да забележиме дека очекуваниот број на зрна во еден леб е: $E(X) = np = \frac{n}{m}$. Ќе ја означиме таа величина со λ. Тој го означува интензитетот (бројот) на зрна во некој леб. ♦

Модел сличен на овој се појавува при разгледување на бројот на повици кои ќе стигнат на некоја телефонска централа во некоја единица време. Ако за $m = 25\min$ во централата стигнат во просек $n = 100$ повици, така што бројот на повици за една минута е биномна распределба со параметри $n = 100$, $p = \frac{1}{25}$. Забележуваме дека очекуваниот број на повици е $\lambda = 4$.

Разликата помеѓу овој пример и горниот пример е во тоа што бројот на зрна е однапред познат и ограничен од горе. Вкупниот број на повици во вториот пример не е познат, туку е даден како статистичка величина. Сосема е во ред да се претпостави, барем во теорија, дека тој број не е ограничен одозгора.

Во продолжение ќе дадеме теорема која е апроксимација на биномната формула и е позната како Теорема на Поасон.

Теорема 1. Нека n е голем, а p е многу мал. Нека означиме $\lambda = np$, тогаш важи апроксимацијата:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Доказ. Нека означиме $m = \frac{1}{p}$ и го трансформираме изразот од лево:

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}.$$

Сега, $\lambda = np = \frac{n}{m}$. Пуштаме: $n \to \infty$:

$$\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \cdot \lambda^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \lambda^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\to \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}. \blacksquare$$

Грешката која се појавува при оваа апроксимација е:

$$r_n(k) = \frac{k - (k-np)^2}{2n} + \frac{kp^2}{2}.$$

Доказот на горново тврдење ќе биде скокнат.

Дефиниција 1. Велиме дека случајната променлива X има Поасонова рапределба со параметар $\lambda > 0$, означуваме $X : P(\lambda)$, ако таа прима вредности од множеството $\{0,1,2,3,...\}$ со веројатности:

$$p_k = p(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

За математичкото очекување и дисперзијата на оваа случајна променлива важи:

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda.$$

Да ја одредиме карактеристичната функција која одговара на Поасоновата распределба $P(\lambda)$:

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Оттука, врз основа на врската помеѓу карактеристичната функција и математичкото очекување и дисперзија на случајната променлива, лесно се добива дека:

$$E(X) = \lambda \qquad \text{и} \qquad D(X) = \lambda.$$

Пример 2. Во една телефонска централа во текот на еден час биле регистрирани 240 повици. Одреди ја веројатноста дека во текот на една минута:

а) не бил регистриран ниту еден повик,

б) биле регистрирани барем два повика.

Решение. Нека X е случајна променлива, дадена со X: број на повици (во која било) минута. Случајната променлива има Поасонова распределба со интензитет λ, кој е еднаков на очекуваната вредност, $\lambda = \frac{240}{60} = 4$. Во согласност со ова, имаме:

а) $p(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-4} = 0,018.$

б) $p(X > 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 0,908.$ ♦

Нека $X_1 : P(\lambda_1)$ и $X_2 : P(\lambda_2)$ се независни случајни променливи. Тогаш $X_1 + X_2$ е случајна променлива која има Поасонова распределба. Во продолжение ќе го докажеме ова тврдење и ќе го најдеме параметарот на оваа распределба.

Карактеристичната функција на Поасоновата распределба е:

$$\vartheta_{X_k}(t) = e^{\lambda_k(e^{it}-1)}, \text{ за } k = 1,2,$$

па, од независноста на случајните променливи X_1 и X_2, следува:

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)},$$

што е карактеристична функција за случајната променлива која има Поасонова распределба $P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Последново разгледување е како да имаме две случајни променливи X_1 и X_2, каде што:

X_1: број на повици на првиот телефон во претпријатието,

X_2: број на повици на вториот телефон во претпријатието.

Од претходната дискусија, заклучуваме дека вкупниот број на повици во претпријатието има, исто така, Поасонова распределба.

Пример 3. Според расположливите податоци на еден мејл сервер X, во просек пет корисници креираат нова електронска адреса во рок на една минута. Ако претпоставиме дека корисниците креираат мејлови независно еден од друг и со иста веројатност во текот на една минута, колкава е веројатноста дека на серверот има :

а) три корисници,

б) повеќе од седум корисници

кои сакаат да креираат нова електронска адреса.

Решение. Бројот на корисниците кои во текот на една минута креираат електронски адреси е дискретна случајна променлива која има Поасонова распределба со параметар $\lambda = 5$, односно:

$$P(k) = \frac{5^k}{k!}e^{-5}, \quad k = 0,1,2,3,\dots .$$

Во согласност со ова, за бараните веројатности имаме:

а) $P(3) = \dfrac{5^3}{3!}e^{-5} \approx 0{,}14037$

и:

б) $p(X > 7) = 1 - \sum_{k=0}^{7} P(k) \approx 1 - 0{,}8666 = 0{,}1334$. ♦

Пример 4. Нека X_1 и X_2 се независни случајни променливи со закони на распределба $P(\lambda_1)$ и $P(\lambda_2)$. Познато е дека нивниот збир $X_1 + X_2$

ја примил вредноста n. Докажи дека тогаш вредностите од X_1 имаат биномна распределба со параметри n и $p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, т.е.:

$$p(X_1=k \mid X_1+X_2=n)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

Решение. Имаме:

$$p(X_1=k \mid X_1+X_2=n)=\frac{p(X_1=k, X_2=n-k)}{p(X_1+X_2=n)}$$

$$=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-\lambda_1}}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}. \blacklozenge$$

Пример 5. Централата на една компанија има два телефонски броја. На првиот стигнуваат околу 20% повици повеќе отколку на другиот број. Ако во минатата минута стигнале 5 повика, колкава е веројатноста дека почесто е повикуван првиот број?

Решение. Повиците на двата телефонски броја се независни случајни променливи кои имаат Поасонова распределба со параметри λ_1 и λ_2, соодветно, при што $\lambda_1=1,2\lambda_2$. Ќе го искористиме претходниот пример, па законот на распределба на случајната променлива X_1, при услов $X_1+X_2=5$ е биномна со параметри $n=p$ и:

$$p=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{6}{11}.$$

Оттука,

$$p(X_1\geq 3 \mid X_1+X_2=5)=\binom{5}{3}\left(\frac{6}{11}\right)^3\left(\frac{5}{11}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{6}{11}\right)^4\left(\frac{5}{11}\right)+\left(\frac{6}{11}\right)^5=0,585.$$

♦

Пример 6. Производите од некоја поголема серија, која содржи $0,7\%$ неквалитетни производи, се пакуваат во кутии по 100 производа. Колкав процент од кутиите ќе биде без ниту еден неквалитетен производ, а колку со два или повеќе неквалитетни производи?

Решение. Бројот на неквалитетни производи во една кутија е случајна променлива која ја означуваме со X. Оваа случајна променлива има биномна распределба $B(100, 0,007)$. Оттука,

$$p(X = 0) = \binom{100}{0} \cdot (0,007)^0 \cdot (0,993)^{100} = 0,4954,$$

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$$

$$= 1 - (0,993)^{100} - \binom{100}{1} \cdot (0,007) \cdot (0,993)^{99} = 0,1554.$$

Горниве веројатности можеме да ги апроксимираме со Поасонова распределба, односно можеме да земеме $X \approx P(0,7)$. Сега, добиваме:

$$p(X = 0) = e^{-0,7} = 0,4966,$$

$$p(X \geq 2) = 1 - e^{-0,7} - 0,7e^{-0,7} = 0,1558. \blacklozenge$$

Пример 7. На еден борбен авион е стрелано со 5000 куршуми. Веројатноста за погодок на секој куршум е $0,001$. Ако авионот е погоден, веројатноста дека куршумот ќе предизвика пад на авионот е $0,05$. Пресметај ја веројатноста дека авионот ќе биде срушен.

Решение. Нека X е случајна променлива, која е дефинирана со X : број на куршуми кои го погодиле авионот. Тогаш $X : B(5000; 0,001)$. Нека означиме:

$$H_k = \{\text{авионот е погоден со } k\text{-куршуми}\},$$

$$A = \{\text{авионот е срушен}\}.$$

Оттука,

$$p(A) = \sum_{k=1}^{5000} p(A \mid H_k) p(H_k).$$

Притоа,

$$p(A \mid H_k) = 1 - p(\overline{A} \mid H_k) = 1 - 0,95^k.$$

Уште,

$$p(H_k) = p(X = k) = \binom{5000}{k} \cdot (0,001)^k \cdot (0,999)^{5000-k},$$

што е практично невозможно да се пресмета. Затоа, ќе направиме апроксимација на $B(5000; 0,001)$ со $P(5)$, (да забележиме дека $\lambda = np = 5000 \cdot 0,001 = 5$). Па,

$$p(H_k) = \frac{5^k}{k!} e^{-5}.$$

Сега,

$$p(A)=\sum_{k=1}^{5000}(1-0,95^k)\cdot\frac{5^k}{k!}e^{-5}$$

$$=e^{-5}\left(\sum_{k=1}^{5000}\frac{5^k}{k!}-\sum_{k=1}^{5000}\frac{4,75^k}{k!}\right)$$

$$=e^{-5}(e^5-e^{4,75})=0,22\,.\ \blacklozenge$$

6.1.5. Хипергеометриска распределба

Нека имаме n-објекти, од кои m се означени како поволни елементи. Случајно избираме s објекти од n-те објекти. Да ја разгледаме случајната променлива X : број на поволни објекти. Тогаш, законот на распределба на случајната променлива X е даден со:

$$p(X=k)=\frac{\binom{s}{k}\cdot\binom{n-s}{m-s}}{\binom{n}{m}}, \qquad (*)$$

каде што $k=0,1,2,3,...,m$.

Пример 1. При замена на четири стари идентични дела во една машина, тие се помешани со новите четири дела кои требало да ги заменат старите делови. Колкава е веројатноста дека при случаен избор на четири дела, барем два ќе бидат нови делови?

Решение. Во нашиот случај, во согласност со претходно воведените ознаки, имаме: $n=8$, $m=4$, $s=4$. Овде потребни ни се вредностите на распределбата за $k=2,3,4$, или поедноставно, ќе ја разгледаме спротивната веројатност. Па,

$$p(X\geq 2)=1-p(X=0)-p(X=1)$$

$$=1-\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{4}{4}}{\binom{8}{4}}-\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{3}}{\binom{8}{4}}=0,757\,.\ \blacklozenge$$

Без доказ ќе ја дадеме наредната теорема која се однесува на математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X, која има хипергеометриска распределба.

Теорема 1. Нека случајната променлива X има хипергеометриска распределба, односно случајната променлива X има закон на распределба (*). Тогаш математичкото очекување е:

$$E(X) = \frac{mk}{n}$$

и дисперзијата е:

$$D(X) = \frac{mk(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}.$$

6.1.6. Паскалова распределба

Да претпоставиме дека настанот A со изведување на секој експеримент се реализира со иста веројатност $p(A) = p > 0$. Претпоставуваме дека експериментот може да се повторува произволно многу пати и резултатите од изведувањето на експериментот се независни. Нека експериментот се повторува сѐ додека настанот A не се реализира k-пати. Нека со X го означиме бројот на потребните експерименти за настанот A да биде реализиран k-пати. Во овој случај X прима некоја од вредностите од множеството $\{k, k+1, k+2, \ldots\}$. Во продолжение ќе дадеме одговор на прашањето која е распределбата на случајната променлива X. Ако експериментот треба да се повтори n-пати, тоа значи дека во претходните $n-1$ експерименти настанот A се појавил (реализирал) $k-1$ пати. Користејќи ја Бернулиевата шема, треба да ја најдеме веројатноста настанот A да се реализира $k-1$ пати при изведување на $n-1$ независни експерименти. Таа е:

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{n-k},$$

при што: $q = 1 - p$.

Имајќи предвид дека:

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$$

и множејќи го последниот израз со p (тоа е веројатноста во последното изведување на експериментот да се реализира настанот A), се добива:

$$p(n)=\binom{n-1}{n-k}p^k q^{n-k}, \qquad n=k,k+1,k+2,k+3,\dots \ .$$

Претходно споменавме дека X е случајна променлива. Во продолжение, ќе покажеме дека навистина X е дискретна случајна променлива со вредности на множеството: $\{k,k+1,k+2,k+3,\dots\}$.

Од делот на математичка анализа, теорија на степенски редови, за $x\in(0,1)$, важи:

$$\frac{1}{(1-x)^k}=\binom{k}{0}x^0+\binom{k}{1}x+\binom{k+1}{2}x^2+\binom{k+2}{3}x^3+\dots . \qquad (*)$$

Бидејќи $q=1-p\in(0,1)$, добиваме:

$$\sum_{n=k}^{\infty}p(n)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n-1}{n-k}p^k q^{n-k}=p^k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n-1}{n-k}q^{n-k}$$

$$=p^k(1+\binom{k}{1}q+\binom{k+1}{2}q^2+\dots)=p^k\cdot\frac{1}{(1-q)^k}=1 .$$

Сега, за дискретната случајна променлива X која има закон на распределба:

$$p(n)=\binom{n-1}{n-k}p^k q^{n-k}, \qquad n=k,k+1,k+2,k+3,\dots,$$

велиме дека има Паскалова распределба со параметри k и p.

Ја имаме следнава теорема која се однесува на математичкото очекување на случајната променлива X која има Паскалова распределба.

Теорема 1. Нека случајната променлива X има Паскалова распределба, дадена претходно во овој дел. Нејзиното математичко очекување е:

$$E(X)=\frac{k}{p}.$$

Доказ. Од степенски редови (со диференцирање на (*)), за $x\in(0,1)$ имаме дека:

$$\frac{k}{(1-x)^{k+1}}=\binom{k}{1}x^0+2\binom{k+1}{2}x+3\binom{k+2}{3}x^2+4\binom{k+3}{4}x^3+\dots,$$

а со диференцирање на последниот степенски ред за $x \in (0,1)$ се добива:

$$\frac{k(k+1)}{(1-x)^{k+2}} = 2\binom{k+1}{2}x^0 + 3\binom{k+2}{3}x + 4\binom{k+3}{4}x^2 + \dots \, . \qquad (**)$$

Ставајќи, $x = q$ во (*) и (**), добиваме изрази кои ќе можеме да ги искористиме за наоѓање на математичкото очекување на дискретната случајна променлива X . Имаме:

$$E(X) = \sum_{n=k}^{\infty} np(n) = \sum_{n=k}^{\infty} n\binom{n-1}{n-k} p^k q^{n-k}$$

$$= p^k \left(k + (k+1)\binom{k}{1}q + (k+2)\binom{k+1}{2}q^2 + (k+3)\binom{k+2}{3}q^3 + \dots \right)$$

$$= kp^k (1 + \binom{k}{1}q + \binom{k+1}{2}q^2 + \binom{k+2}{3}q^3 + \dots) +$$

$$+ qp^k (\binom{k}{1} + 2\binom{k+1}{2}q + 3\binom{k+2}{3}q^2 + \dots)$$

$$= kp^k \frac{1}{(1-q)^k} + qp^k \frac{1}{(1-q)^{k+1}}$$

$$= kp^k \frac{1}{p^k} + qp^k \frac{1}{p^{k+1}} = k\left(1 + \frac{q}{p}\right) = \frac{k}{p} \, . \ \blacksquare$$

Пример 1. Сакаме да произведеме 500 тениски топчиња на машина, која при производството дава 10% дефектни производи. Бидејќи веројатноста дека ќе биде произведен дефектен производ е релативно голема, контрола се врши на секој производ непосредно по неговата изработка. Кога ќе биде произведено 300-тото топче, производството запира. Колкава ќе биде просечната големина на серијата (во серијата се вклучени и квалитетните и дефектните производи)?

Решение. Нека со A го означиме настанот: произведено е квалитетно тениско топче. Со X го означуваме бројот на производите на една серија. Оттука, X е случајна променлива која има Паскалова распределба со параметри $p = 0,9$ и $k = 500$. Од теоремата 1, имаме дека: $E(X) = \frac{500}{0,9} = 555,555$. Во согласно со ова, за да се произведат 500 квалитетни тениски топчиња, потребно е во просек да произведеме 556

тениски топчиња. Овде, ќе спомeнеме дека 556 е само просек, а бројот на тениски топчиња може да биде $550, 551, 552, 553, \ldots$. ♦

6.1.7. Полиномна распределба

Една генерализација на Бернулиевата шема е полиномната шема или полиномна распределба. Нека имаме серија од n-независни експерименти. Во секој експеримент може да се реализира еден од r попарно независните настани. Со $A_{n_1 n_2 .. n_r}$ е настанот: во n-независни експерименти имаме точно по n_k k-ти исходи, при што $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Веројатноста на настанот $A_{n_1 n_2 .. n_r}$ е дадена со формулата:

$$p(A_{n_1 n_2 .. n_r}) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}, \qquad (*)$$

каде што: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Всушност, веројатностите $p(A_{n_1 n_2 .. n_r})$ се членовите на развојот на полиномот:

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_r)^n,$$

па:

$$\sum_{n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r} p(A_{n_1 n_2 .. n_r}) = \sum_{n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} = 1.$$

Оттука, со (*) е даден закон на распределба. Случајната променлива X, која го има законот на распределба (*), велиме дека има полиномна распределба. Специјално, за $r = 2$ полиномната распределба е биномна распределба.

Пример 1. При изведувањето на еден експеримент може да се реализираат само независните настани A_1, A_2 и A_3 со веројатности p_1, p_2 и p_3, каде што $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Нека со X го означиме бројот на појавување на настанот A_1 и со Y бројот на појавувања на настанот A_2. При изведување на серија од n-независни експерименти, настанот A_1 се случил k-пати и настанот A_2 се случил m-пати. Најди го законот на распределба на дводимензионалната случајна променлива (X, Y).

Решение. Во оваа серија од n-независни експерименти, настанот A_3 се случил $n-k-m$, при што $k+m\leq n$. Законот на распределба на дводимензионалната случајна променлива (X,Y) е даден со формулата:

$$p(k,m)=\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!}p_1^k p_2^m(1-p_1-p_2)^{n-k-m},$$

каде што случајните променливи X и Y можат да примат вредности $k,m=0,1,2,...,n$, при што $k+m\leq n$. ♦

6.2. Некои непрекинати распределби

Овде, слично како и во делот каде што подетално ги изучувавме дискретните случајни променливи, ќе наведеме некои од најчесто користените и најважните распределби на непрекинатите случајни променливи.

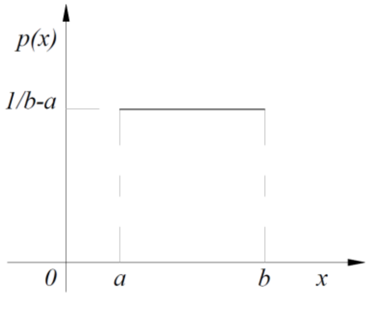
6.2.1. Рамномерна распределба

За една случајна променлива X велиме дека има рамномерна распределба на интервалот $[a,b]$ (означуваме $U(a,b)$), ако нејзината функција на густина на распределба има облик:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leq x\leq b\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}.$$

Навистина, X е непрекината случајна променлива. Важи:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b dx=\frac{b-a}{b-a}=1.$$



За функцијата на распределба на случајната променлива X, имаме:

$$F(x)=p(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\,dt=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^x dt, & a<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}.$$

Ја имаме следнава теорема која се однесува на математичкото очекување и дисперзијата на непрекинатата случајна променлива X која има рамномерна распределба на интервалот $[a,b]$.

Теорема 1. Нека X е непрекината случајна променлива која има рамномерна распределба на интервалот $[a,b]$, т.е. $X:U(a,b)$. Тогаш, математичкото очекување на случајната променлива X е еднакво на:

$$E(X)=\frac{a+b}{2},$$

а дисперзијата на случајната променлива X е еднаква на:

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}\ .$$

Доказ. Имаме:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Дополнително,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Па, за дисперзијата за непрекинатата случајна променлива X, имаме:

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}. \blacksquare$$

Овде, веројатноста на изразот $(x_1\le X\le x_2)$ е дадена со формулата:

$$p(x_1\le X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_{x_1}^{x_2}dx=\frac{x_2-x_1}{b-a}.$$

Имајќи го предвид последното равенство, имаме дека ако $[x_1,x_2]\subseteq[a,b]$, тогаш веројатноста $p(x_1\le X\le x_2)$ зависи од должината на интервалот, но не и неговата положба внатре во интервалот $[a,b]$. Ова важи како резултат на рамномерната распределба на веројатноста.

Пример 1. Нека е дадена непрекината случајна променлива X која има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$. Најди ја функцијата на распределба на случајната променлива:

$$Y=\begin{cases} X, & 0\le X<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\le X<\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}X-\frac{1}{2}, & \frac{2}{3}\le X\le 1 \end{cases}.$$

Решение. Бидејќи случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$, нејзината функција на густина на распределба е:

$$p(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ 0, & x\notin[0,1] \end{cases}.$$

За функцијата на распределба на случајната променлива Y имаме:

За $y<0$,

$$F_Y(y)=p(Y\le y)=0.$$

За $0\le y<\frac{1}{2}$, имаме:

$$F_Y(y)=p(Y\le y)=p(X\le y)=\int_{-\infty}^{y}p(x)\,dx=\int_0^y dx=y.$$

За $y=\frac{1}{2}$, имаме:

$$p(Y=\frac{1}{2})=p(\frac{1}{2}\le X<\frac{2}{3})=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{6}.$$

За $\frac{1}{2}<y\le 1$, важи:

$$F_Y(y)=p(Y\le y)=p(\frac{3}{2}X-\frac{1}{2}\le y)$$

$$=p(X\le\frac{2}{3}(y+\frac{1}{2}))=\frac{2}{3}(y+\frac{1}{2}).$$

За $y>1$, имаме:

$F_Y(y)=1.$

Во согласност со ова, за функцијата на распределба на случајната променлива Y, добиваме:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \le y < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}\left(y + \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases} . \blacklozenge$$

6.6.2. Експоненцијална распределба

Експоненцијалната распределба се јавува во проблемите поврзани со време на работа на некој уред чии карактеристики се менуваат со текот на времето: времето на работа поради топење на некој уред, време до прв повик (помеѓу два повика) во телефонска централа, време до прв улов, време до појава на несреќа, и најопшто време до појава на некоја настан, чија веројатност во мал временски интервал е еднакво на должината на интервалот.

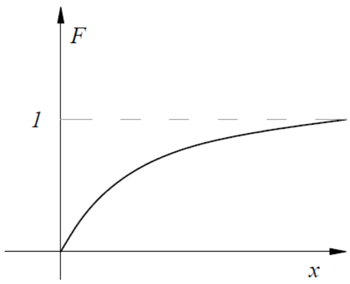
Дефиниција 1. Велиме дека случајната променлива X има експоненцијална распределба со параметар $\lambda > 0$ ако таа прима позитивни вредности со густина:

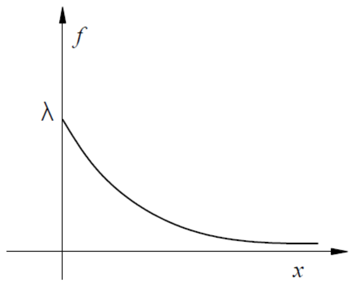
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Означуваме $X : E(\lambda)$. Нејзината функција на распределба е:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Подолу се дадени функцијата на распределба и функцијата на густина на распределба на случајната променлива X која има експоненцијална распределба, со параметар λ, т.е. $X : E(\lambda)$.





Нека X е случајна променлива, која е дадена со X: работење на некој уред . На таа променлива можеме да гледаме како на поминато време сѐ до расипување на уредот. Моделот во кој се појавува експоненцијална распределба, мора да исполнува некои услови.

Теорема 1. Да претпоставиме дека условната веројатност за појавување на некој настан во многу краток интервал $(x, x+\Delta x)$, при услов дека настанот не се појавил до моментот x, пропорционална со должината на тој подинтервал и не зависи од вредноста на x:

$$p(X < x+\Delta x : X > x) = \lambda\Delta x + r\,, \quad \frac{r}{\Delta x} \to 0\,, \text{ кога } \Delta x \to 0\,.$$

Тогаш, случајната променлива X има експоненцијална распределба $E(\lambda)$.

Доказ. По формулата за условна веројатност можеме да напишеме:

$$p(X > x+\Delta x) = p(X > x)\cdot p(X > x+\Delta x : X > x)\,.$$

Бидејќи:

$$p(X > x+\Delta x | X.x) = 1 - p(X < x+\Delta x \,|\, X.x) = 1 - \lambda\Delta x - r\,,$$

добиваме:

$$p(X > x) = p(X > x)\cdot(1-\lambda\Delta x - r)\,.$$

Ја дефинираме функцијата:

$$Q(x) = p(X > x) = 1 - F(x)\,.$$

За оваа функција важи:

$$Q(x+\Delta x) - Q(x) = Q(x)[-\lambda\Delta x - r]\,,$$

па:

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Q(x+\Delta x)-Q(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} Q(x)[-\lambda - \frac{r}{\Delta x}] = -\lambda Q(x)\,.$$

Решение на оваа диференцијална равенка е:

$$Q(x) = Ce^{-\lambda x}\,.$$

Константата C, ќе ја определиме од условот:

$$Q(0) = p(X > 0) = 1.$$

Следува: $C = 1$, па затоа:

$$F(x) = 1 - Q(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

односно X има навистина експоненцијална распределба со параметар λ, т.е. $X : E(\lambda)$. ■

Нека Поасоновата распределба на случајната променлива Z го мери бројот на појавувања за некоја единица изминато време. Нека го означиме параметарот на таа распределба со λ. Овој параметар е еднаков на очекуваниот број на реализација на случајната променлива Z во тој единечен интервал.

Поопшто, нека случајната променлива Z_x го мери бројот на реализации на настанот во интервалот $[0, x]$. Случајната променлива Z_x има Поасонова распределба со математичко очекување λx.

Да дефинираме случајна променлива X, дадена со X: време до првото појавување на настанот. Ќе покажеме дека случајната променлива X има експоненцијална распределба.

Нека x е фиксно време по почетокот, изразено во единица време. Случајната променлива X ќе прими вредност помала од x, ако во интервалот $[0, x]$ се реализира барем еден настан, односно ако Z_x има вредност поглема од 0:

$$p(X < x) = p(Z_x > 0) = 1 - p(Z_x = 0) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Оттука, се гледа дека случајната променлива X има експоненцијална распределба со параметар λ.

Во продолжение ќе ја определиме Лапласовата трансформација, карактеристичната функција, математичкото очекување, дисперзијата и централните моменти на случајна променлива која има експоненцијална распределба.

Лапласовата трансформација на случајна променлива со експоненцијалната распределба $E(\lambda)$ е:

$$f^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda)x} dx = -\frac{\lambda}{s+\lambda} e^{-(s+\lambda)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{s+\lambda}.$$

Карактеристичната функција на случајна променлива со експоненцијална распределба може да се напише користејќи ја формулата $\vartheta_X(t) = f^*(-it)$:

$$\vartheta_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Математичкото очекување на случајна променлива со експоненцијална распределба може да се пресмета на следниов начин:

$$E(X) = -f^{*\prime}(0) = -\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)'\Bigg|_{s=0} = \frac{1}{\lambda}.$$

Моментот од n-ти ред на случајна променлива која има експоненцијална распределба е:

$$E(X^n) = (-1)^n f^{*(n)}(0) = (-1)^n \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{(n)}\Bigg|_{s=0}$$

$$= \frac{n!\lambda}{(s+\lambda)^{n+1}}\Bigg|_{s=0} = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Оттука, за диспрезијата на оваа случајна променлива, добиваме:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Од горнава дискусија, можеме да заклучиме дека математичкото очекување на случајна променлива која има експоненцијална распределба е реципрочно од нејзиниот параметар: колку параметарот на распределбата е поголем, толку математичкото очекување е помало. Веројатноста за реализација на случајната променлива пред вредноста на нејзиното математичко очекување не зависи од параметарот на распределбата. Навистина,

$$p(X < E(X)) = p(X < \frac{1}{\lambda}) = F\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\lambda\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = 1 - e^{-1}.$$

Пример 1. Нека еден апарат во текот на една година имал десет пати дефект. Колкава е веројатноста дека во првиот месец на следната година ќе работи без дефект?

Решение. Нека со X, ја означиме случајната променлива X : време до првиот дефект. Случајната променлива X има експоненцијална распределба. Од условот на задачата, имаме дека $E(X) = \frac{12}{10}$, па параметарот на распределбата е реципрочен на математичкото очекување, па $\lambda = \dfrac{1}{E(X)} = \dfrac{10}{12}$. Тогаш:

$$p(X > 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{10}{12}\cdot 1}\right)$$

$$= e^{-\frac{5}{6}} = 0,435 \,. \ ♦$$

Пример 2. Времето на работа на еден апарат (појава на дефект) е случајна променлива која има експонецијална распределба со математичко очекување 2 месеци. Колкава е веројатноста дека апаратот ќе се појави дефект во текот на:

а) првиот месец;

б) вториот месец;

в) вториот месец, ако е познато дека во текот на првиот месец не престанал да работи.

Решение. Од условот, имаме $X : E\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Тогаш:

а) $p(X < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0,393$;

б) $p(1 < X < 2) = (1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 2}) - (1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} = 0,239$;

в) $p(1 < X < 2 \mid X > 1) = \dfrac{p(1 < X < 2, X > 1)}{p(X > 1)}$;

$$= \frac{p(1 < X < 2)}{p(X > 1)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}}{e^{-\frac{1}{2}}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0,393 \,. \ ♦$$

Забележуваме дека овде веројатностите под а) и в) се еднакви. Ова може да се обопшти на следниов начин:

За сите $x, t > 0$, важи:

$$p(X < x + t \mid X > t) = p(X < x) \,.$$

Од ова можеме да заклучиме дека експоненцијалната распределба нема меморија. На пример, ако очекуваното време до улов на првата риба е еден саат и ако првите 50 минути поминале без никаков улов, тогаш очекуваното време до уловена прва риба и натаму останува еден саат, без оглед на веќе поминатото време.

Ова својство ја карактеризира експонецијалната распределба.

Теорема 2. Нека е дадена случајната променлива X која прима само позитивни вредности за сите позитивни x и t, така што важи:

$$p(X < x+t \quad X > t) = p(X < x)| .$$

Тогаш случајната променлива X има експоненцијална распределба.

Доказ. Нека означиме $Q(x) = p(X > x) = 1 - F(x)$, каде што F е бараната функција на распределба. По претпоставка, $Q(0) = p(X > 0) = 1$. Важи $Q'(x) = -f(x) < 0$ за $x > 0$. Да означиме $Q'(0) = -\lambda$. Од условот на теоремата,

$$1 - p(X > x+t \mid X > t) = 1 - p(X > x),$$

односно:

$$\frac{p(X > x+t, X > t)}{p(X > t)} = p(X > x),$$

т.е.:

$$p(X > x+t) = p(X > t) \cdot p(X > x).$$

На овој начин ја добиваме функционалната равенка:

$$Q(x+t) = Q(t)Q(x), \text{ за секој } x,t > 0 .$$

Случајната променлива ја бараме во класата на непрекинати случајни променливи. Со диференцирање (претпоставуваме диференцијабилност) на горната фукционална равенка по променлива t добиваме:

$$Q'(x+t) = Q'(t)Q(x).$$

Заменувајќи, $t = 0$, добиваме:

$$Q'(x) = Q'(0)Q(x) = -\lambda Q(x),$$

од каде што добиваме $Q(x) = Ce^{-\lambda x}$. Бидејќи $Q(0) = 1$, добиваме $C = 1$. Па,

$$F(x) = 1 - Q(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

од каде што заклучуваме дека случајната променлива X има експоненцијална распределба. ■

Пример 3. Времето на работа без дефект на еден електричен апарат е дадено со случајна променлива која има експонецијална распределба со параметар λ. Во време $x = T$, доаѓа до струен удар. Веројатноста дека апаратот нема да го „преживе“ овој удар (ако до тој момент е сè уште исправен) е еднаква на p. Потоа, времето на понатамошна работа без дефект ќе биде со експоненцијална распределба, со можеби променет параметар μ.

а) Најди и нацртај ја функцијата на распределба на оваа случајна променлива:

б) Пресметај го нејзиното математичко очекување.

Решение.

а) На интервалот $0 \le x < T$ важи:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Вредноста на оваа функција во моментот T изнесува $F(T) = 1 - e^{-\lambda T}$. Спротивната веројатност, $e^{-\lambda T}$ е веројатност дека апаратот е сѐ уште без дефект, непосредно пред струјниот удар. Веројатноста дека апаратот ќе биде без дефект по струјниот удар е еднаква на производот:

$$(1-p)e^{-\lambda T},$$

бидејќи „преживувањето“ на струјниот удар е независен настан од „преживувањето“ во нормални услови. Па, во точката T важи:

$$F(T) = 1 - (1-p)e^{-\lambda T}.$$

Следува,

$$p(X > T) = 1 - F(T) = (1-p)e^{-\lambda T}.$$

Нека оваа веројатност ја означиме со r. За $x > T$, можеме да напишеме:

$$1 - F(x) = p(X > x) = p(X > x \mid X > T) \cdot p(X > T).$$

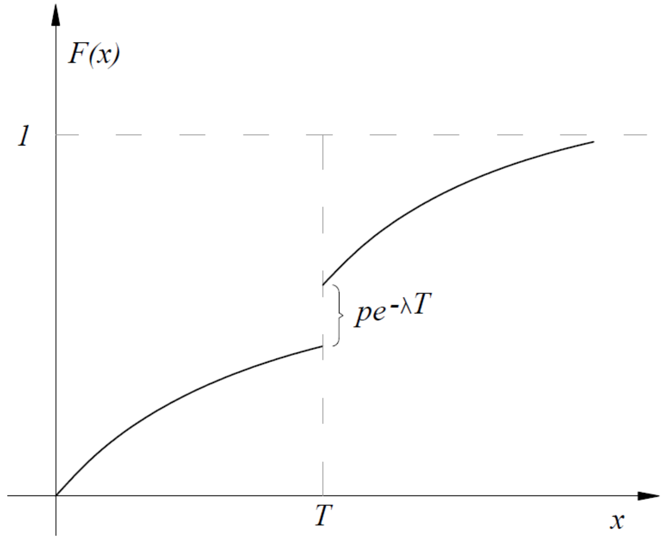
Поради отсуство на меморија, после време T, за условната веројатност, имаме:

$$p(X > x \mid X > T) = p(X > x - T) = e^{-\mu(x-T)}.$$

Конечно, за $x > T$,

$$F(x) = 1 - e^{-\mu(x-T)} \cdot (1-p)e^{-\lambda T} = 1 - (1-p)e^{-\lambda T - \mu(x-T)}.$$

Графикот на функцијата на распределба е даден подолу на сликата.



Износот на скокот во точката T изнесува: $pe^{-\lambda T}$.

б) Случајната променлива ќе има густина на распределба која има δ - удар во точката T:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 0\le x<T\\ pe^{-\lambda T}\delta(x-T), & x=T\\ \mu(1-p)e^{-\lambda T}e^{-\mu(x-T)}, & x>T\end{cases}.$$

Математичкото очекување на случајната променлива X е:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\frac{1}{\lambda}-\frac{e^{-\lambda T}}{\lambda}+\frac{(1-p)e^{-\lambda T}}{\mu}.$$

Математичкото очекување може да се запише и на следниов начин:

$$E(X)=\left(\frac{1}{\lambda}-e^{-\lambda T}\left(\frac{1}{\lambda}+T\right)\right)+\left(pTe^{-\lambda T}\right)+\left((1-p)e^{-\lambda T}\left(\frac{1}{\mu}+T\right)\right).$$

Првиот собирок е придонес во математичкото очекување на случајната променлива до моментот T, вториот собирок е придонесот на струјниот удар, а третиот собирок е придонесот во математичкото очекување на случајната променлива после моментот T . ♦

Функцијата на распределба на случајна променлива со експоненцијлна распределба е монотоно растечка функција на интервалот $[0,\infty)$, па можеме да заклучиме дека постои инверзна функција на F, односно:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}=y \Rightarrow x=F^{-1}(y)=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y).$$

Според тоа, ако U е случајна променлива со рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$, тогаш случајната променлива $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ ќе има ескпоненцијална распределба со параметар λ.

6.2.3. Нормална распределба

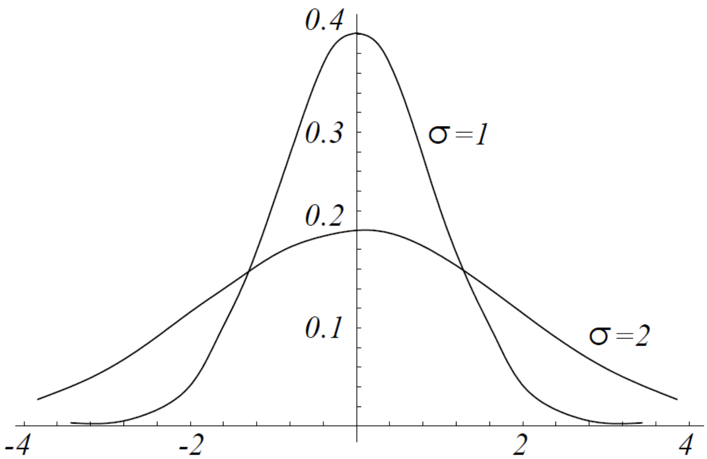
Нормалната распределба (Гаусова) е најважната непрекината распределба, ако се има предвид нејзината честота на појавување и важноста на моделите во кои таа се појавува. Причината е тоа што оваа распределба се појавува како гранична во многу ситуации, кога случајната променлива е добиена како збир на голем број на меѓусебно независни случајни променливи.

Дефиниција 1. Случајната променлива X има нормална распределба со параметри $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$ ако X е непрекината случајна променлива со функција на густина:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Означуваме, $X : N(a,\sigma^2)$.

Графикот на оваа функција се нарекува Гаусова крива.



Ако ги избереме параметрите $a=0$ и $\sigma=1$, добиваме случајна променлива со распределба $N(0,1)$, која се нарекува единечна нормална распределба. Нејзината функција на густина на распределба е:

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

За функцијата на распределба на случајната променлива X која има единечна нормална распределба Φ имаме:

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

Овој интеграл не е елементарен, па не може да се изрази со помош на елементарни функции.

Функцијата ϕ е парна функција, па ги има следниве својства:

$$\int_{-\infty}^{0}\phi(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\,dt=\frac{1}{2},$$

$$\int_{0}^{x}\phi(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\phi(t)\,dt.$$

Сега можеме да напишеме:

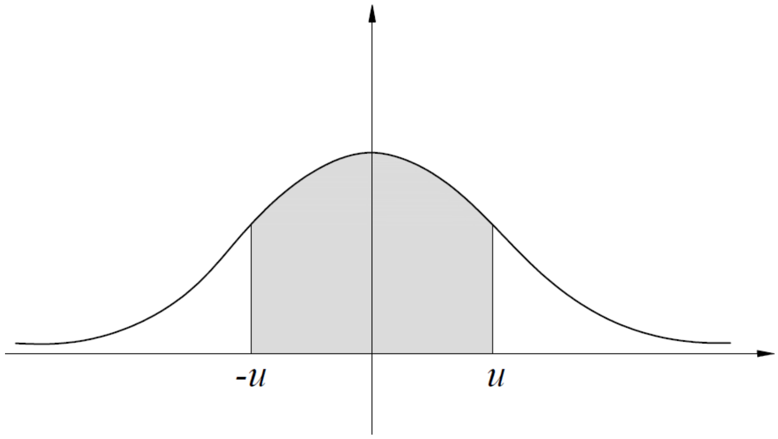
$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0}\phi(t)\,dt+\int_{0}^{x}\phi(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\phi(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(1+\Phi*(x)\right).$$

Па, функцијата на распределба Φ може да се прикаже со помош на функцијата:

$$\Phi*(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u}^{u}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

На следнава слика е дадено дека вредноста на функцијата $\Phi*$ е еднаква на плоштината на површината под графикот на функцијата над интервалот $[-u,u]$.



Овде ќе ги користиме вредностите на функцијата Φ^* , кои ќе бидат отчитувани од табела, која е дадена на крајот од оваа книга. Оваа функција е непарна, па доволно е да ги знаеме нејзините вредности за позитивен аргумент.

Нека X единечна нормална распределба, a кој било реален број и σ позитивен реален број. Ја дефинираме случајната променлива:

$$Y = a + \sigma X .$$

Ќе ја најдеме функцијата на густина на распределба на случајната променлива. За g имаме:

$$y = a + \sigma x , \qquad x = \frac{y-a}{\sigma} ,$$

$$g(y) = \phi(x) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{y-a}{\sigma} \right).$$

Па, добиваме:

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

Според ова, случајната променлива Y има нормална распределба со параметри: a и σ^2, т.е. $Y : N(a,\sigma^2)$.

Потполно аналогно може да се добие и обратната врска. Ако појдеме од случајната променлива $X : N(a,\sigma^2)$, тогаш случајната променлива дефинирана со:

$$Y = \frac{X-a}{\sigma}$$

има единечна нормална распределба. Значи,

единечната и општата нормална распределба може да се добијат една од друга со линеарна трансформација:

$$X : N(0,1) \quad \Rightarrow a+\sigma X : N(a,\sigma^2),$$

$$X : N(a,\sigma^2) \quad \Rightarrow \frac{X-a}{\sigma} : N(0,1).$$

Сега ќе ја одредиме карактеристичната функција на случајната променлива: $X : N(a,\sigma^2)$.

Најпрво, ќе ја одредиме карактеристичната функција на случајна променлива која има единечна нормална распределба $N(0,1)$.

Важи:

$$\vartheta_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{itx}\,dx.$$

Со барање извод на оваа функција, а потоа со примена на парцијална интеграција, добиваме:

$$\vartheta_X'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx}\,dx$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} it\,e^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \right)$$

$$= -t\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = -t\,\vartheta_X(t).$$

Според тоа, функцијата ϑ_X е решение на диференцијалната равенка:

$$\frac{d\vartheta_X(t)}{dt} = -t\vartheta_X(t),$$

со почетен услов $\vartheta_X(0)=1$, кој важи за секоја карактеристична функција. Па,

$$\frac{d\vartheta_X(t)}{\vartheta_X(t)} = -tdt \quad \Rightarrow \quad \vartheta_X(t) = \vartheta_X(0)e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Ако X е случајна променлива со единечна нормална распределба, т.е. $X : N(0,1)$, тогаш $a+\sigma X : N(a,\sigma^2)$ и ја добиваме карактеристичната функција на случајната променлива $a+\sigma X$ која има нормална распределба со параметри a и σ^2, т.е. $a+\sigma X : N(a,\sigma^2)$:

$$\vartheta_{a+\sigma X}(t) = e^{ita}\vartheta_X(\sigma t) = e^{ita}\, e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} .$$

Во продолжение, ќе ги пресметаме математичкото очекување, дисперзијата на случајната променлива X која има нормална распределба со параметри a и σ^2, односно $X : N(a,\sigma^2)$. Важи:

$$\vartheta_X(t) = e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2},$$

$$\vartheta_X'(t) = (ia-\sigma^2 t)e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \qquad \vartheta_X'(0) = ia,$$

$$\vartheta_X''(t) = \left(-\sigma^2 + (ia-\sigma^2 t)^2\right)e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \qquad \vartheta_X''(0) = -\sigma^2 - a^2 .$$

Следува:

$$E(X) = -i\vartheta_X'(0) = a,$$

$$D(X) = -\vartheta_X''(0) + \vartheta_X'(0)^2 = \sigma^2 .$$

Со ова ги имаме одредено и значењата на параметрите кај нормалната распределба: параметарот a е еднаков на математичкото очекување на случајната променлива која има нормална распределба, додека параметарот σ^2 ја означува дисперзијата на случајната променлива која има нормална распределба. Корен од дисперзијата е σ, кој се нарекува стандардна девијација или стандардно отстапување на случајната распределба која има нормална распределба $N(a,\sigma^2)$.

Сега, ќе покажеме како се пресметува веројатноста дека случајната променлива X , која има единечна нормална распределба, да прими одредени вредности, поточно ќе ги пресметаме веројатностите $p(x_1 < X < x_2)$ и $p(|X| < x)$, а потоа и кога случајната променлива X има нормална распределба со параметри a и σ^2, т.е. $X : N(a,\sigma^2)$.

За случајната променлива X, која има единечна нормална распределба, односно $X : N(0,1)$ важи:

$$p(x_1 < X < x_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(x_2) - \Phi^*(x_1)\right).$$

Специјално, во случај кога имаме симетричен интервал:

$$p(|X| < x) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(x) - \Phi^*(-x)\right) = \Phi^*(x) .$$

Пример 1. Нека X е случајна променлива која има единечна распределба, т.е. $X : N(0,1)$. Најди ги веројатностите на следниве настани:

а) $\{0 < X < 1\}$ б) $\{-2 < X < 0\}$ в) $\{-1 < X < 2\}$

г) $\{1 < X < 2\}$ д) $\{X < 1\}$ ѓ) $\{X > 1\}$.

Решение.

а) $p(0 < X < 1) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(1) - \Phi^*(0)\right) = \frac{1}{2}\Phi^*(1) = 0{,}341$,

б) $p(-2 < X < 0) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(0) - \Phi^*(-2)\right) = \frac{1}{2}\Phi^*(2) = 0{,}477$,

в)

$$p(-1 < X < 2) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(2) - \Phi^*(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(2) + \Phi^*(1)\right) = 0{,}819,$$

г) $p(1 < X < 2) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(2) - \Phi^*(1)\right) = 0{,}136$,

д) $p(X < 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi^*(1) = 0{,}841$,

ѓ) $p(X > 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*(1) = 0{,}159$. ♦

Сега, нека $X : N(a,\sigma^2)$. Тогаш важи: $\frac{X-a}{\sigma} : N(0,1)$ и функцијата на распределба F на случајната променлива X, можеме да ја изразиме со помош на функцијата Φ. Имаме:

$$F(x) = \Phi(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi^*(t)\right), \qquad t = \frac{x-a}{\sigma}.$$

Сега, пресметуваме:

$$p\left(x_1 < X < x_2\right) = p\left(\frac{x_1 - a}{\sigma} < \frac{X-a}{\sigma} < \frac{x_2 - a}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right).$$

Пример 2. Нека $X : N(2,4)$. Најди ја веројатноста на настаните:

а) $\{0 < X < 4\}$ б) $\{2 < X < 6\}$ в) $\{X > 4\}$.

Решение. Ако случајната променлива X има општа нормална распределба, тогаш со X ќе ја означуваме случајната променлива која има единечна (стандардна) нормална распределба:

$$\tilde{X} = \frac{X-a}{\sigma}.$$

а) $p(0 < X < 4) = p\left(\frac{0-2}{2} < \frac{X-2}{2} < \frac{4-2}{2}\right)$

$$= p(-1 < \tilde{X} < 1) = \Phi^*(1) = 0,683.$$

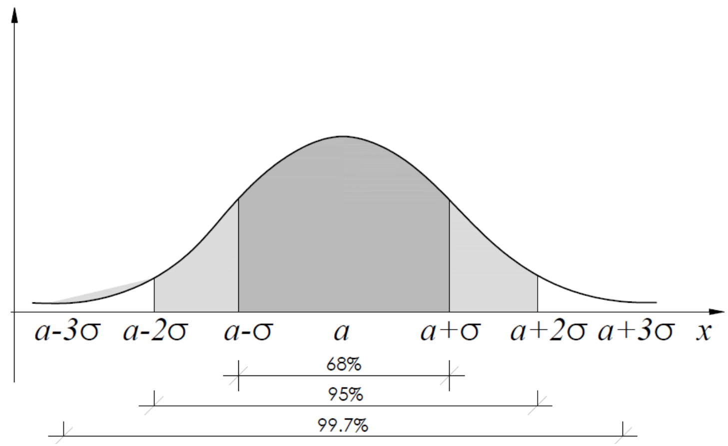
б) $p(2 < X < 6) = p\left(\frac{2-2}{2} < \frac{X-2}{2} < \frac{6-2}{2}\right)$

$$= p(0 < \tilde{X} < 2) = \frac{1}{2}\Phi^*(2) = 0,477.$$

в) На ист начин, $p(X > 4) = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi^*(1)\right) = 0,158$.

Нека $X : N(a, \sigma^2)$. Ќе пресметаме:

$$p(|X - a| < k\sigma),\ \text{за}\ k = 1,2,3.$$



Имаме:

$$p(|X - a| < k\sigma) = p(-k\sigma < X - a < k\sigma) = p(-k < \tilde{X} < k) = \Phi^*(k).$$

Важи $\Phi^*(1) = 0,6827,\ \Phi^*(2) = 0,9545,\ \Phi^*(3) = 0,9973$. Па, со веројатност од $99,73\%$ (скоро сигурно) случајната променлива X со нормална распределба прима вредности во интервалот $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Ова правило се нарекува правило на три сигми. ♦

Пример 3. Систематска грешка во одржувањето на авион на дадена висина е $100m$, а случајна грешка е случајна променлива со нормална распределба со отстапување $200m$. Одреди ја веројатноста дека:

а) авионот лета низ коридор со ширина $500m$, б) авионот лета над коридорот,

ако авионот е насочен да лета на средината на коридорот.

Решение. Да ја означиме со X, случајната променлива зададена со X : отстапување на авионот од средината на коридорот. Тогаш, X е случајна грешка заради систематската и случајната грешка, за која важи : $X : N(100, 200^2)$.

а) $p(-250 < X < 250) = p\left(\frac{-250-100}{200} < \frac{X-100}{200} < \frac{250-100}{200}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi^*\left(\frac{3}{4}\right) - \Phi^*\left(-\frac{7}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\big(\Phi^*(0,75) + \Phi^*(1,75)\big) = 0,733 .$$

б) $p(X < 250) = p\left(\frac{250-100}{200} < \frac{X-100}{200}\right)$

$$= \frac{1}{2}\big(1 - \Phi^*(0,75)\big) = 0,5 - 0,273 = 0,227 . \blacklozenge$$

Досега ја разгледавме стабилноста кај Биномна и Поасоновата распределба, каде што збирот од независни променливи има иста распределба како и секоја од распределбата на случајните променливи. Нормалната распределба има исто таква стабилност, за која можеме да кажеме и дека е посилна.

Теорема 1. Нека X_1 и X_2 се независни случајни променливи со нормална распределба:

$$X_1 : N(a_1, \sigma_1{}^2), \qquad X_2 : N(a_2, \sigma_2{}^2) .$$

За кои било реални броеви s_1, s_2 важи:

$$s_1 X_1 + s_2 X_2 : N(s_1 a_1 + s_2 a_2, s_1{}^2 \sigma_1{}^2 + s_2{}^2 \sigma_2{}^2) .$$

Доказ. Карактеристичните функции на случајните променливи X_1 и X_2 се:

$$\vartheta_{X_k}(t) = e^{a_k t - \frac{1}{2}\sigma_k{}^2 t^2}, \quad k = 1,2 .$$

Тогаш:

$$\vartheta_{s_k X_k}(t) = e^{s_k a_k t - \frac{1}{2} s_k{}^2 \sigma_k{}^2 t^2}, \qquad k = 1,2 ,$$

па, добиваме:

$$\vartheta_{s_1X_1+s_2X_2}(t)=e^{(s_1a_1+s_2a_2)t-\frac{1}{2}\left(s_1^{\,2}\sigma_1^{\,2}+s_2^{\,2}\sigma_2^{\,2}\right)},$$

што е карактеристична функција за случајната променлива $s_1X_1+s_2X_2$ што има нормална распределба: $N(s_1a_1+s_2a_2, s_1^{\,2}\sigma_1^{\,2}+s_2^{\,2}\sigma_2^{\,2})$. ■

Да забележиме дека нормалната распределба е единствена која е стабилна на линеарни комбинации од независни случајни променливи.

Пример 4. Масата (во kg) на еден производ A има нормална распределба со параметри $a_1=40$ и $\sigma_1=5$, а масата на производот B има нормална распределба со параметри $a_2=100$ и $\sigma_2=10$. На една палета се пакуваат два производа A и два производа B. Најди ја веројатноста дека масата на така формираната група ќе се движи помеѓу 270 и 300, при што масата на палетата е занемарена.

Решение. Нека X_A и X_B се случајни променливи кои ја опишуваат масата на производот A и B, соодветно. Од условот:

$$X_A : N(40,5^2), \qquad\qquad X_B : N(100,10^2).$$

Да ја означиме со Y, случајната променлива која ја означува масата на целата група. Тогаш, можеме да запишеме $Y=2X_A+2X_B$. Но, овој запис не е целосно прецизен. Причината за оваа констатација е дека ние не ја земаме двоструката маса на производите, туку збир на две маси кои се независни една од друга, а имаат иста распределба. Затоа, попрецизно (правилно) е да се напише:

$$Y=X'_A+X''_A+X'_B+X''_B,$$

каде што X'_A и X''_A се независни копии на случајната променлива X_A, па тие се независни случајни променливи кои имаат иста распределба како и случајната променлива X_A. Истата констатација важи и за X'_B и X''_B.

Па, од горната теорема имаме:

$$Y : N(40+40+100+100, 25+25+100+100)=N(280,250).$$

Сега, според задачата, од нас се бара да ја пресметаме веројатноста:

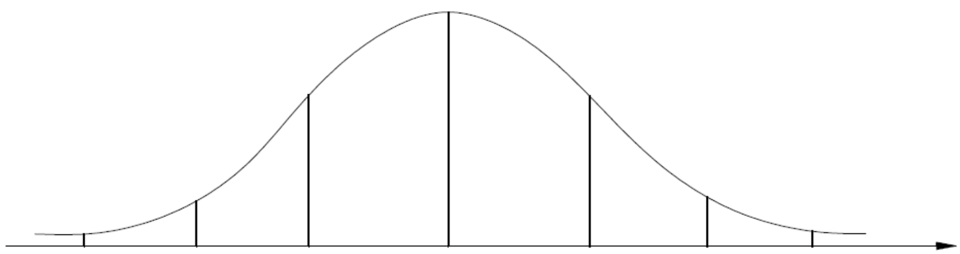
$$p\left(\frac{270-280}{\sqrt{250}}<\tilde{Y}<\frac{300-280}{\sqrt{250}}\right)=p(-,632<\tilde{Y}<1,265)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Phi^*(1,265)-\Phi^*(0,632)\right)=\frac{1}{2}(0,794+0,473)=0,634\,.\ \blacklozenge$$

Во продолжение, ќе зборуваме за апроксимација на биномната распределба со нормална распределба.

Нека X е случајна променлива со биномна распределба, т.е. $X : B(n,p)$. Распределбата на оваа случајна променлива за големи n, наликува на функцијата на густина на распределба на случајна променлива Y која има нормална распределба $Y : N(np,npq)$. Да забележиме дека за фиксирано n, квалитетот на апроксимацијата е подобар, колку повеќе p е поблиску до $0,5$.

Подолу е дадена слика на која се споредени распределбата на веројатноста на случајна променлива со биномна распределба и случајна променлива која има густина на распределба која одговара на нормална распределба.



Да ја означиме со f функцијата на густина на случајната променлива Y. Тогаш, ја имаме следнава теорема:

Теорема 2. (Теорема на Моавр-Лаплас, локална) Веројатноста за реализација на случајна променлива која има биномна распределба $B(n,p)$ може да се апроксимира со помош на функцијата на густина на распределба на нормалната распределба $N(np,npq)$:

$$p(X=m)\approx p\left(m-\frac{1}{2}<Y<m+\frac{1}{2}\right)\approx f(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}\,.$$

Пример 5. Една паричка е фрлена 40 пати. Кој е најверојатниот број на појавување на петки? Која е веројатноста?

Решение. Бројот на појавени петки е случајна променлива X со распределба $X : B(40, \frac{1}{2})$. Најверојатен број на реализации е бројот 20. По теоремата на Моавр-Лаплас, вредноста $p(X = 20)$ може да се апроксимира со формулата:

$$p(X = 20) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} e^{-\frac{(20-40\cdot\frac{1}{2})^2}{2\cdot 40\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} = 0{,}12616.$$

Со помош на сметачки уред, можеме да ја пресметаме вистинската вредност, која е:

$p(X = 20) = \binom{40}{20} \cdot \frac{1}{2^{40}} = 0{,}12537$, со што можеме да забележиме дека апроксимираната вредност е доста блиску до вистинската вредност. ♦

Еден од најважните закони на природата, кој воведува некаков ред во хаосот, е централната гранична теорема.

Нека X е случајна променлива која има биномна распределба, $X : B(n, p)$. Математичкото очекување на оваа случајна променлива е np, а дисперзијата е npq. Па, случајната променлива $\frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ има математичко очекување 0 и дисперзија 1.

Теорема 3. (Теорема на Моавр-Лаплас, интегрална) За големо n распределбата на случајната променлива $\frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ може да се апроксимира со единечната нормална распределба:

$$p\left(x_1 < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < x_2 \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

Запишуваме, $B(n, p) \approx N(np, npq)$, за доволно големо n.

Апроксимацијата е добра дури и за многу мали вредности на бројот n, на пример за $n \geq 10$. Дополнително, апроксимацијата е подобра (поточна и за помали вредности од n), колку вредноста на параметарот p е поблиску до $0{,}5$.

Пример 6. Пресметај ја веројатноста дека во $10\,000$ фрлања на паричка, бројот на петки се наоѓа помеѓу 4950 и 5100.

Решение. Нека со означиме со X, бројот на појавени петки. Тогаш, $X : B(10\,000, \frac{1}{2})$. Но, веројатноста на настанот $\{4950 < X < 5100\}$ не можеме едноставно да ја пресметаме, бидејќи пресметувањето на биномниот коефициет бара доста пресметки. Па, користејќи ја горната теорема, случајната променлива X ја апроксимираме со нормалната распределба $N(5000, 2500)$. Бидејќи $n = 10\,000$ е многу голема, апроксимацијата ќе биде добра.

$$p(4950 < X < 5100) = p\left(\frac{4950-5000}{\sqrt{2500}} < \frac{X-5000}{\sqrt{2500}} < \frac{5100-5000}{\sqrt{2500}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Phi^*(2) + \Phi^*(1)\right) = 0,477 + 0,341 = 0,818. \ ♦$$

Пример 7. Веројатноста да се роди машко дете е $0,515$. Колкава е веројатноста дека помеѓу $10\,000$ новородени деца, ќе бидат повеќе девојчиња?

Решение. Бројот на новородени машки деца е случајна променлива $X : B(10\,000, 0,515)$. Распределбата на случајната променлива ќе ја апроксимираме со нормална распределба со параметри $a = 10\,000 \cdot 0,515 = 5150$, $\sigma^2 = 10\,000 \cdot 0,515 \cdot 0,485 = 2497,75$, односно $X : N(51150, 2497,75)$. Ја бараме веројатноста на настанот $\{X < 5000\}$:

$$p(X < 5000) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi^*\left(\frac{5000-5150}{\sqrt{2497,75}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi^*(3,01)\right) = 0,0013. \ ♦$$

Пример 8. Од сите редовни студенти на Градежниот факултет во Скопје 70% редовно ја следат наставата. Колкава е веројатноста дека помеѓу 1000 случајно избрани анкетирани студенти бројот на студентите кои редовно ја следат наставата е помеѓу 654 и 737?

Решение. Значи, треба да ја пресметаме веројатноста $p(654 \le X \le 737)$. Бидејќи бројот на анкетирани студенти е 1000, односно доволно голем (обично кога n е релативно помал, тогаш ја користиме формулата: $p(a \le X \le b) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{npq}}\right)\right)$. Овде, $n = 1000$, $p = 0,7$, $q = 0,3$, $a = 654$, $b = 737$.

Имаме:

$$p(654 \le X \le 737) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(-3,20\right)-\Phi(2,59)\right)$$

$$= 0,49520 + 0,49931 = 0,99451. \ ♦$$

Пример 9. Како се определува веројатноста за раѓање на деца? По податоците, во една земја во текот на десет години се родиле $1359\,671$ машки деца и 1285086 женски деца. Одреди го интервалот во кој со веројатност од $0,997$, веројатноста дека се родило машко дете е p .

Решение. Како вредност на веројатноста p ја земаме релативната фрекфенција на раѓање на машко дете:

$$p = \frac{m}{n} : N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right).$$

Нека означиме $\sigma = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$. По правилото на три сигми, важи:

$$p(| p - p_0 | < 3\sigma) = 0,997.$$

Да, забележиме дека секогаш важи: $p_0 q_0 < \frac{1}{4}$. Според тоа,

$$3\sigma = 3\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} \le \frac{3}{3\sqrt{4n}} = 0,00013.$$

Па, добиваме:

$$0,5132 < p < 0,5160,$$

со веројатност од барем $0,997$. ♦

Пример 10. Веројатноста за појавување на еден настан во еден обид е еднаква на $0,3$. Со која веројатност може да се тврди дека при изведување на 100 обиди, настанот ќе се реализира помеѓу 20 и 40 пати?

Решение. Бројот на појавувања на настанот во 100 обиди (експерименти) е случајна променлива која има биномна распределба, $X : B(100, 0,3)$, која може да се апроксимира со нормална распределба $N(30, 21$. Па,

$$p(20 \le X \le 40) = p\left(\frac{19,5-30}{\sqrt{21}} < \frac{X-30}{\sqrt{21}} < \frac{40,5-30}{\sqrt{21}}\right)$$

$$= \Phi^*\left(\frac{10,5}{\sqrt{21}}\right) = \Phi^*(2,29) = 0,978.$$

За да ја зголемиме точноста на овој резултат, кога имаме апроксимација на дискретна случајна променлива со непрекината случајна променлива, долната граница ја намалуваме од 20 на $19,5$, а горната граница од 40 ја зголемуваме на $40,5$. Оваа корекција се применува за релативно мали вредности на n.

Поопшто, настанот $\{X = k\}$ за дискретната случајна променлива X одговара настанот $\{k - \frac{1}{2} < X < k + \frac{1}{2}\}$ кај апроксимацијата со непрекината случајна променлива. ♦

Пример 11. Случајната променлива X има биномна распределба, $X : B(100, p)$, каде што p е непознато. Определи го p, ако е познато дека $p(X \ge 20) = 0,841$.

Решение. Биномната распределба $X : B(100, p)$ може да се апроксимира со нормална распределба, т.е. $X : N(100p, 100pq)$. Па,

$$p(X \ge 20) = p\left(\frac{X-100p}{10\sqrt{pq}} > \frac{19,5-100p}{10\sqrt{pq}}\right) = 0,841 .$$

Важи дека $19,5-100p < 0$. Според тоа,

$$\Phi^*\left(\frac{100p-19,5}{10\sqrt{pq}}\right) = 2\left(0,841-\frac{1}{2}\right) = 0,682 = \Phi^*(1),$$

па, добиваме:

$$100p-19,5 = 10\sqrt{p(1-p)} \;\Rightarrow\; 101p^2 - 40p + 3,8025 = 0 .$$

Последната равенка има решенија:

$$p_1 = 0,2376, \qquad\qquad p_2 = 0,1585,$$

од кои само решение го задоволува условот на задачата. ♦

6.2.4. Гама распределба

Гама функцијата е дефинирана со сингуларниот интеграл:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \qquad \alpha>0.$$

Овој интеграл може да се дефинира за сите комплексни броеви кои имаат позитивен реален ден.

Теорема 1. Важат следниве формули:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),$$

$$\Gamma(n+1)=n!, \text{ за сите } n\in\mathbb{N},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1.$$

Доказ. Со парцијална интеграција добиваме дека:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} x^{a}e^{-x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1),$$

од каде што следува дека: $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

Од претходно докажаното, имаме:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=n!\Gamma(1).$$

Бидејќи:

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=1,$$

па, добиваме: $\Gamma(n+1)=n!$.

За докажување на третото својство, ќе го искористиме својството на функцијата на густина на распределба на случајна променлива која има единечна нормална распределба:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx=\left(x=\frac{1}{2}t^2,\ x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{2}\,dt\right)$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\sqrt{2}\,dt=\sqrt{\pi}\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt=\sqrt{\pi}.$$

Користејќи го првото и третото својство, имаме:

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)=\ldots=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}\ . \ \blacksquare$$

Со помош на гама функцијата можеме да ги запишеме моментите на случајните променливи кои имаат нормална распределба. Бидејќи важи $E(X^n)=0$ за секој непарен природен број. Ќе ја изведеме општата формула за моментите на случајната променлива $|X|$. Нека $X : N(0,\sigma^2)$. Тогаш, имаме:

$$E(|X|^n)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^n\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}dx$$

$$=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}dx=\left(\begin{array}{c} t=\dfrac{x^2}{2\sigma^2} \\ dx=\dfrac{\sigma}{\sqrt{2t}}dt\end{array}\right)$$

$$=\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}(2\sigma^2)^{\frac{1}{2}n}t^{\frac{1}{2}n}\frac{\sigma}{\sqrt{2t}}e^{-t}\,dt$$

$$=\frac{\sigma^n}{\sqrt{\pi}}2^{\frac{1}{2}n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{n-1}{2}}e^{-t}\,dt=\frac{2^{\frac{1}{2}n}\sigma^n}{\sqrt{n}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Така, на пример, важи:

$$E(|X|^5)=\frac{2^{\frac{5}{2}}\sigma^5}{\sqrt{\pi}}\Gamma(3)=8\sigma^5\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,,$$

$$E(|X|^6)=\frac{2^{\frac{6}{2}}\sigma^6}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{8\sigma^6}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=30\sigma^6.$$

Нека $\alpha>0,\ \lambda>0$. За непрекинатата случајна променлива X со функција на густина на распределба:

$$f_X(x)=\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x},\ \text{за}\ x\geq 0$$

и:

$f_X(x) = 0$, за $x < 0$, каде што $\Gamma(\alpha)$ е гама функцијата, велиме дека е непрекината случајна променлива која има гама распределба, со параметри $\alpha, \lambda > 0$.

Навистина, X е непрекината случајна променлива. Имаме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\,dx = 1.$$

Сега, ја имаме следнава теорема која се однесува на математичкото очекување и дисперзија на непрекината случајна променлива која има гама распределба со параметри $\alpha, \lambda > 0$.

Теорема 2. Нека X е непрекината случајна променлива која има гама распределба со параметри $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$. Математичкото очекување на случајната променлива X е дадено со:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda},$$

а дисперзијата на случајната променлива X е дадена со:

$$D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Доказ. За математичкото очекување на случајната променлива X имаме дека:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^\alpha e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

при што беше воведена смена: $y = \lambda x$, од каде $dx = \frac{1}{\lambda} dy$.

За вториот момент на случајната променлива X, имаме:

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha+1} e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

.

Конечно, за дисперзијата на случајната променлива X, имаме:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \blacksquare$$

Да ја одредиме карактеристичната функција на случајната променлива која има гама распределба:

$$\vartheta_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x(\lambda - it)}\, dx .$$

Ќе ставиме смена: $x(\lambda - tt) = z$.

$$\vartheta_X(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{\lambda - it} \right)^{\alpha-1} e^{-z} \frac{dz}{\lambda - it}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} z^{\alpha-1} e^{-z}\, dz = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{\alpha} .$$

Оттука, лесно можеме да го определиме математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива која има гама распределба:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} .$$

Ќе докажеме дека збир од две независни случајни променливи кои имаат гама распределба, тогаш и нивниот збир има гама распределба. Попрецизно, ако X_1 и X_2 се независни случајни променливи кои имаат гама распределба со параметри (α_1, λ) и (α_2, λ), соодветно, тогаш случајната променлива $X_1 + X_2$ има гама распределба со параметри $\alpha_1 + \alpha_2$ и λ .

Карактеристичната функција на збирот $X_1 + X_2$ е еднаква на производот на карактеристичните функции на X_1 и X_2 , односно:

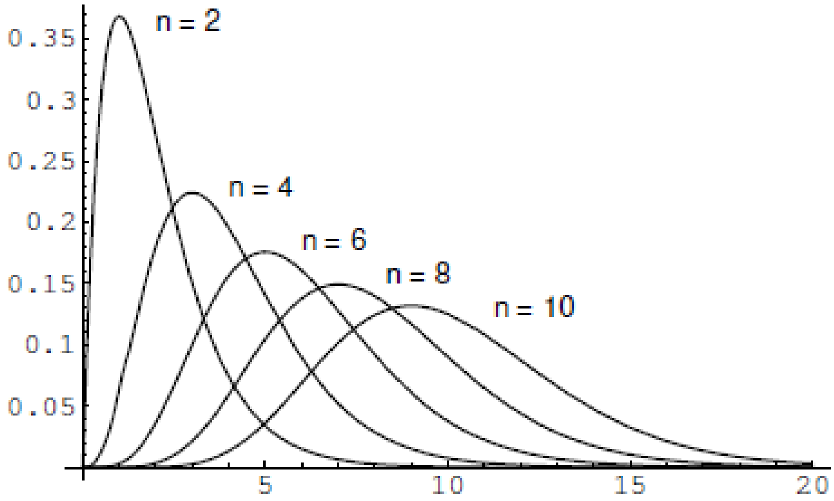
$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{\alpha_2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^{\alpha_1+\alpha_2} .$$

Оваа функција е карактеристична функција на случајна променлива која има гама распределба со параметри $\alpha_1 + \alpha_2$ и λ, што и требаше да докажеме.

Експоненцијалната распределба, воедно е и гама распределба со параметар $\alpha = 1$. Збирот на n-независни случајни променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ со експоненцијална распределба има гама распределба со параметри λ и n. Оваа распределба уште ја нарекуваме и Ерлангова распределба. Нејзината функција на густина на распределба е:

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, \quad x > 0 .$$

Подолу е дадена слика на која се дадени графици на функции на густина на Ергланова распределба за првите неколку вредности на n .



Ако X е случајна променлива која има единечна нормална распределба, тогаш случајната променлива $Y = X^2$ има гама распределба со параметри $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

За $x \le 0$, важи $F_Y(y) = 0$, За $x > 0$, важи:

$$F_Y(y) = p(X^2 < y) = p(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx .$$

Затоа,

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}y},$$

а тоа е функција на густина на распределба на случајна променлива која има гама распределба: $X : G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

6.2.5. χ_n^2 - распределба

Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи со единечна нормална распределба. Тогаш, за случајната променлива χ_n^2 дефинирана со:

$$\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$$

има χ_n^2- распределба (хи квадрат распределба) со n-степени на слобода. Функцијата на густина на распределба е:

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Математичкото очекување и дисперзија на случајната променлива X која има χ_n^2-распределба е:

$$E(\chi_n^n) = n, \qquad D(\chi_n^2) = 2n.$$

Ќе го докажеме ова тврдење. Претходно, покажавме дека X_k^2 има гама распределба со параметри $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Поради независноста на случајните променливи, збирот $X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ има гама распределба со параметри $\left(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}\right)$. Според тоа, функцијата на густина на распределба на χ_n^2-распределбата е дадена со:

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Да забележиме дека ако во равенката на функцијата на густина на распределба на случајната променлива X ставиме $\lambda = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{k}{2}$ за $k \in \mathbb{N}$, ја добиваме функцијата на густина на распределба на случајната променлива која има χ^2 -распределба со k степени на слобода. Многу често таа функција ќе ја означуваме со χ_k^2. Оваа функција игра многу важна улога во статистиката. Следната теорема е директна последица на теоремата 2, за: $\lambda = \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{k}{2}$ за $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. Нека непрекинатата случајната променлива X има χ_k^2 распределба. Математичкото очекување и дисперзија на случајната променлива X се:

$$E(X) = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}} = k \qquad \text{и} \qquad D(X) = \frac{\frac{k}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2k\,.$$

Ќе ја нацртаме функцијата на густина на распределба на случајната променлива χ_n^2 за првите неколку вредности на n.

Ќе ги определиме тие функции на густина на распределба, при што ќе ги користиме својствата на гама функцијата, односно ќе користиме дека

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,,\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,,\ \Gamma(2) = 1.$$

$n = 1$: $\qquad f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x > 0$

$n = 2$: $\qquad f_2(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x > 0$

$n = 3$: $\qquad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x > 0$

$n = 4$: $\qquad f_4(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x > 0$.

Важи:

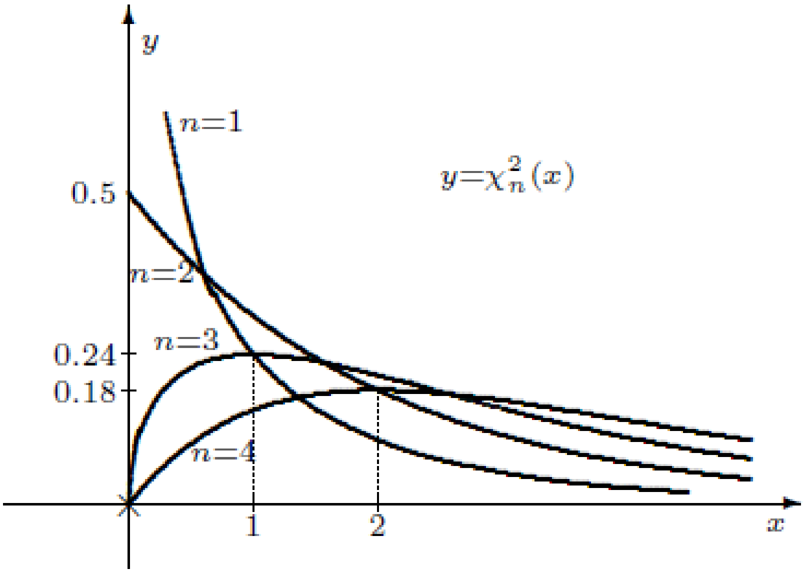
$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = 0, \quad k \geq 1$$

$$\lim_{x\to 0} f_k(x) = \begin{cases} \infty, & k = 1 \\ \frac{1}{2}, & k = 2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}.$$

Сега ќе ги одредиме екстремите. Важи:

$$\left(x^{-\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{2}x}\right)' = x^{\frac{1}{2}n-2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{n}{2}-1-\frac{x}{2}\right)=0,$$

за $x=n-2$. Затоа f_n има локален максимум во $x=n-2$. Конечно,



χ -распределба ја нарекуваме случајната променлива

$$\chi=\sqrt{\chi_n^{\ 2}}=\sqrt{X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}+\ldots+X_n^{\ 2}},$$

каде што X_i, $i=1,2,\ldots,n$ се независни случајни променливи кои имаат единечна нормална распределба.

Ќе ја одредиме функцијата на густина на распределба на случајната променлива χ. $\chi_n^{\ 2}$-распределба е дадена со функцијата на густина на распределба:

$$f_{\chi^2}(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{2}x}, \qquad x>0.$$

Оттука, функцијата на густина на распределба на случајната променлива χ е дадена со:

$$f_\chi(x) = f_{\chi^2}(x^2)\cdot 2x = \frac{2x^{n-1}}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Ќе ги скицираме графиците на функциите на густини на распределба на случајните променливи кои имаат χ_n-распределба, за $n=1,2,3$.

Најпрво, ќе ги напишеме равенките на соодветните функции на густини на распределба:

$n=1$: $\quad f_1(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x>0$

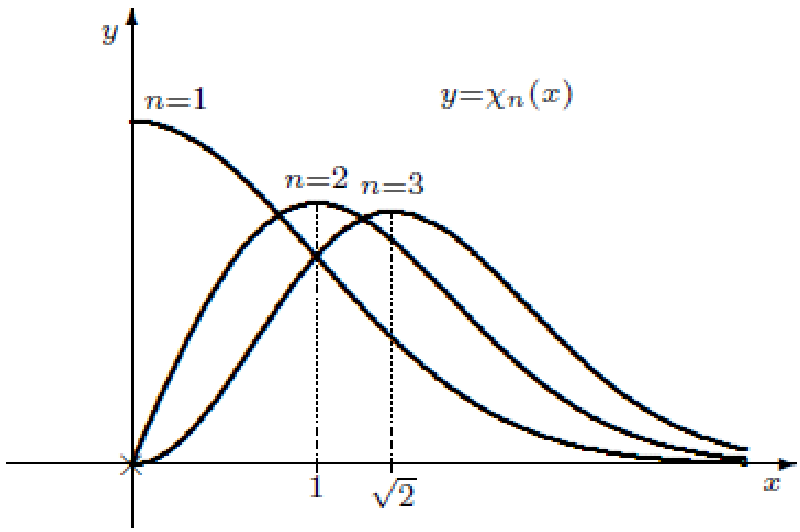
$n=2$: $\quad f_2(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x>0$ (Рејлеигхова распределба)

$n=3$: $\quad f_3(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x>0$. (Максвелова распределба)

Важи:

$$\left(x^{n-1}e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{2}x^2}x^{n-2}(n-1-x^2) = 0,$$

па, f_{χ_n} има локален максимум во $x=\sqrt{n-1}$. Конечно, имаме:



6.2.6. Бета распределба

Пред да дефинираме случајна променлива која има бета распределба, ќе ја дефинираме бета функцијата.

Дефиниција 1. За функцијата $\mathrm{B}: (0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ дадена со:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\,,$$

велиме дека е бета функција.

Да забележиме дека важи:

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi\,.$$

Во следната лема, која ќе ја дадеме без доказ, дадени се некои елементарни тврдења поврзани со бета функцијата, кои подоцна ќе бидат користени во наредната лема.

Лема 1. Следнива тврдења важат:

а) $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\mathrm{B}(\beta,\alpha)$, за секои $\alpha>0$, $\beta>0$;

б) $\mathrm{B}(\alpha,1)=\dfrac{1}{\alpha}$, за секое $\alpha>0$ и $\mathrm{B}(1,\beta)=\dfrac{1}{\beta}$ за секое $\beta>0$;

в) $\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ за секои $\alpha>0$ и $\beta>0$;

г) $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ за секои $\alpha>0$ и $\beta>0$.

Нека $\alpha>0$ и $\beta>0$. За непрекинатата случајна променлива X која има функција на густина на распределба дадена со:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases},$$

велиме дека е непрекината случајна променлива која има бета распределба.

Да забележиме дека со X е дефинирана непрекината случајна променлива. Навистина, $f_X(x)\geq 0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \cdot \mathrm{B}(\alpha,\beta) = 1 .$$

Ја имаме следнава теорема:

Теорема 1. Математичкото очекување и дисперзијата на непрекинатата случајна променлива која има бета распределба се дадени со:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

и:

$$D(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} .$$

Доказ. За математичкото очекување на случајната променлива X која има бета распределба, имаме:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \mathrm{B}(\alpha+1,\beta) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \mathrm{B}(\beta,\alpha+1)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \mathrm{B}(\beta,\alpha) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} .$$

Вториот момент на случајната променлива X е:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+2-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \mathrm{B}(\alpha+2,\beta) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \mathrm{B}(\beta,\alpha+2)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \frac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta} \mathrm{B}(\beta,\alpha+1)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} \frac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\beta,\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+1+\beta)} .$$

Сега,

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+1+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} . \blacksquare$$

6.2.7. Студентова t-распределба

Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи кои имаат единечна нормална распределба. Тогаш, велиме дека случајната променлива дадена со:

$$t = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + ... + X_n^{\ 2}}{n}}}$$

има Студентова распределба со n-степени на слобода. Многу често ќе пишуваме t_n на место на t. Оваа распределба се вика уште и t-распределба.

Ќе ја одредиме функцијата на густина на распределба на случајната променлива која има Студентова распределба. Случајната променлива $\sqrt{X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + ... + X_n^{\ 2}}$ има χ-распределба, па функцијата на густина на распределба на случајната променлива:

$$Z = \sqrt{\frac{X_1^{\ 2} + X_2^{\ 2} + ... + X_n^{\ 2}}{n}}$$

е дадена со:

$$f_Z(x) = \frac{2(\sqrt{n}x)^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}nx^2} .$$

Па, функцијата на густината на распределба на случајната променлива $t = \dfrac{X}{Z}$, е дадена со:

$$f_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(xy) f_Z(y) \,|\, y \,|\, dy$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2y^2} \frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n}y)^{n-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1}{2}ny^2} y\, dy$$

$$= \frac{2(\sqrt{n})^n}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n+x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{n+x^2}}{\sqrt{2\pi}} y^n e^{-\frac{1}{2}y^2(n+x^2)} dy .$$

Овој интеграл е $E(|Y|^n)$, каде што $Y : N(0, \frac{1}{n+x^2})$, па од теоремата 1 од овој дел, имаме дека последниот интеграл е еднаков на:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(n+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Па,

$$f_X(x)=\frac{2(\sqrt{n})^n}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n+x^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(n+x^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

каде што $\Gamma(\alpha)$ е гама функцијата, велиме дека е случајна променлива која има Студентова t-распределба со параметар $n\in\mathbb{N}$.

Да забележиме дека со X е дефинирана непрекината случајна променлива. Навистина, $f_X(x)\geq 0$ и:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx=1.$$

Последното равенство се добива со воведување на смената:

$1+\frac{x^2}{n}=t$, од каде што $dx=\frac{\sqrt{n}}{2}\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$

и користејќи ја дефиницијата на бета функцијата го добиваме равенството:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx=\sqrt{n}\int_0^1 s^{\frac{n}{2}-1}(1-s)^{\frac{1}{2}-1}ds=\sqrt{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sqrt{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}=\sqrt{n\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Теорема 1. Нека случајната променлива X има Студентова t-распределба со $n\in\mathbb{N}$ степени на слобода. Математичкото очекување на случајната променлива X е дадено со:

$$E(X)=0$$

и дисперзијата за $n>2$ е дадена со:

$$D(X)=\frac{n}{n-2}\ .$$

Доказ. За математичкото очекување на случајната променлива $|X|$ имаме:

$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f_X(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty}x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$$

$$=\frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}d\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$$

$$=\frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left.\frac{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{-\frac{n+1}{2}}\right|_{0}^{+\infty}=\frac{2n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

од каде што добиваме постоење на $E(X)$. Па,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx=0\,,$$

бидејќи подинтегралната функција е непарна функција.

Сега, нека $n>2$. Ќе ја определиме дисперзијата на Студентовата t-распределба, која бидејќи математичкото очекување е еднакво на нула, се совпаѓа со вториот момент на случајната променлива X. Па, имаме:

$$D(X)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx\,.$$

Ставајќи ги, последователно, смените:

$$1+\frac{x^2}{n}=t\,,\text{ од каде } x=\sqrt{n}\sqrt{t-1}\,,\text{ па } dx=\frac{\sqrt{n}}{2}\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$$

и:

$$y=\frac{1}{t}\,,\text{ од каде } dt=-\frac{dy}{y^2}$$

и користејќи ги својствата на бета функцијата од лемата 1 од претходниот дел, имаме:

$$D(X)=\frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{+\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx=\frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{1}^{+\infty} t^{-\frac{n+1}{2}}(t-1)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$=\frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 y^{\left(\frac{n}{2}-1\right)-1}(1-y)^{\frac{3}{2}-1}\,dy=\frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2}-1,\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1+\frac{3}{2}\right)}=\frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1+1\right)}$$

$$=\frac{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}=\frac{n}{n-2}.$$

Да забележиме дека за $n=1$ и $n=2$, интегралот: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$ дивергира, па можеме да заклучиме дека дисперзијата на случајната променлива X која има Студентова t-распределба постои само кога $n>2$ и:

$$D(X)=\frac{n}{n-2}. \blacksquare$$

На крајот од овој дел, да забележиме дека Студентовата t-распределба тежи кон нормалната распределба $N(0,1)$, кога $n\to\infty$.

6.2.8. Фишерова распределба

Нека $p,q\in\mathbb{N}$. За непрекинатата случајна променлива X која има функција на густина на распределба дадена со:

$$f_X(x)=p^{\frac{p}{2}}q^{\frac{q}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(q+px)^{\frac{p+q}{2}}},\ x\geq 0$$

и $p(x)=0$, за $x<0$, каде $\Gamma(\alpha)$ е гама функцијата, велиме дека се случајна променлива која има Фишерова F_{pq} -распределба со параметри p и q.

Да забележиме дека со X е дефинирана непрекината случајна променлива. Навистина, $f_X(x)\geq 0$ и:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx=p^{\frac{p}{2}}q^{\frac{q}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int_0^{+\infty}x^{\frac{p}{2}-1}(q+px)^{-\frac{p+q}{2}}\,dx=1.$$

Последново тврдење следува од:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,dx=p^{\frac{p}{2}}q^{\frac{q}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int_0^{+\infty}x^{\frac{p}{2}-1}(q+px)^{-\frac{p+q}{2}}\,dx$$

$$=p^{\frac{p}{2}}q^{-\frac{p}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int_0^{+\infty}x^{\frac{p}{2}-1}\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{-\frac{p+q}{2}}\,dx,$$

со воведување на смената:

$$y=\frac{1}{t},\text{ од каде } dt=-\frac{dy}{y^2}$$

и користење на својствата на гама и бета функцијата. Поконкретно, имаме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_{1}^{+\infty} (t-1)^{\frac{p}{2}-1} t^{-\frac{p+q}{2}}\,dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_{0}^{1} y^{\frac{q}{2}-1} (1-y)^{\frac{p}{2}-1}\,dy$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \mathrm{B}\left(\frac{q}{2},\frac{p}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)} = 1.$$

Теорема 1. Нека непрекинатата случајна променлива X има Фишерова распределба со параметри p и q $(X : F_{pq})$. За $q > 2$, математичкото очекување на случајната променлива е:

$$E(X) = \frac{q}{q-2},$$

а за $q \geq 5$ дисперзијата на случајната променлива X е дадена со:

$$D(X) = \frac{2q(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)}.$$

Доказ. Нека $q > 2$. За математичкото очекување на непрекинатата случајна променлива која има Фишерова F_{pq} распределба, имаме:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\frac{p}{2}}}{(q+px)^{\frac{p+q}{2}}}\,dx$$

$$= p^{\frac{p}{2}} q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{p}{2}} \left(1+\frac{p}{q}x\right)^{-\frac{p+q}{2}} dx.$$

Со воведување на смените:

$$t^2 = px, \text{ од каде што } dx = \frac{2t\,dt}{p},$$

$$z = 1 + \frac{t^2}{q} \text{, од каде што } qdz = 2t\,dt$$

и:

$$y = \frac{1}{z} \text{, од каде што } dz = -\frac{dy}{y^2}$$

една по друга и со користење на својствата на бета и гама функцијата се добива:

$$E(X) = p^{\frac{p}{2}} q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2}{p}\right)^{\frac{p}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{q}\right)^{-\frac{p+q}{2}} 2t\,dt$$

$$= q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^p \left(1 + \frac{t^2}{q}\right)^{-\frac{p+q}{2}} 2t\,dt$$

$$= q^{-\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \sqrt{q^p}\,\sqrt{(z-1)^p}\, z^{-\frac{p+q}{2}} q\,dz$$

$$= \frac{q\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_1^{+\infty} (z-1)^{\frac{p}{2}} z^{-\frac{p+q}{2}} dz$$

$$= \frac{q\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_1^{0} \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{1}{y}\right)^{-\frac{p+q}{2}} \cdot \frac{-1}{y^2} dy$$

$$= \frac{q\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_0^{1} (1-y)^{\frac{p}{2}} y^{\frac{q}{2}-2} dy$$

$$=\frac{q\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\int y^{\left(\frac{q}{2}-1\right)-1}(1-y)^{\left(\frac{p}{2}+1\right)-1}\,dy$$

$$=\frac{q\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\mathrm{B}\left(\frac{q}{2}-1,\frac{p}{2}+1\right)=\frac{q\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}-1+\frac{p}{2}+1\right)}$$

$$=\frac{q\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}=\frac{q\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)\frac{p}{2}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\left(\frac{q}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}-1\right)}=\frac{q}{q-2}.$$

Да забележиме дека за $q=1$ и $q=2$ интегралот:

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{p}{2}}\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{-\frac{p+q}{2}}dx$$

дивергира , па во овие два случаи случајната променлива X , која има Фишерова распределба нема математичко очекување (математичкото очекување не постои). Сосема аналогно се покажува и дека за $q\geq 5$ дисперзијата на случајната променлива X постои и е дадена со равенката:

$$D(X)=\frac{2q(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)}.\ \blacksquare$$

6.3. Решени задачи

Задачи 1. Нека е дадена случајната променлива X со закон на распределба:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \end{pmatrix}.$$

Определи го законот на распределба на случајната променлива:

$$Y=\cos(\pi X).$$

Решение. Случајната променлива прима само две вредности -1 и 1.

Имаме $Y=-1$, за $X=1,3,5,.....$.

Имаме $Y=1$, за $X=2,4,6,......$.

За соодветните веројатности имаме:

$$q_1=p(Y=-1)=p_1+p_3+p_5+...=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+...=\frac{2}{3},$$

$$q_2=p(Y=1)=p_2+p_4+p_6+...=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...=\frac{1}{3}.$$

Конечно,

$$Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Од серија од готови производи која се состои од 10000 производи, познато е дека 6000 производи се од прва класа. Одреди ја веројатноста дека во примерок од 100 производи 70 ќе бидат првокласни.

Решение. Да забележиме дека веројатноста на настанот A: избран е производ од прва класа, е $p=p(A)=\frac{6000}{10000}=0,6$ и $q=1-p=1-0,6=0,4$. Од условот, јасно е и дека $n=100$ и $k=60$. Користејќи ја локалната теорема на Моавр-Лаплас, добиваме:

$$B_{100,60}=\frac{\phi(t)}{\sqrt{npq}}\approx\frac{0,0498}{4,9}\approx 0,0102,$$

при што беше искористено дека: $t=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\approx\frac{70-60}{4,9}=2,04.$

Задача 3. Веројатноста дека еден дел ќе се расипе за време на испитувањето е $0,05$. Колкава е веројатноста дека за време на испитувањето на 100 делови:

а) ќе се расипат не помалку од пет производа (делови);

б) ќе се расипат помалку од пет производа (делови);

в) од 5 до 10 делови ќе се расипат.

Решение. Да забележиме дека $n=100$, $p=0,05$, $q=1-p=0,95$. Во оваа задача ќе ја користиме интегралната теорма на Моавр-Лаплас. Имаме:

а) $$p(X \geq 5) = p(5 \leq X \leq 100) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{100-5}{\sqrt{4,75}}\right) - \Phi\left(\frac{5-5}{\sqrt{4,75}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Phi(43,6)-\Phi(0)\right) = 0,5\,.$$

б) $$p(X < 5) = p(0 \leq X < 5) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{5-5}{\sqrt{4,75}}\right) - \Phi\left(\frac{0-5}{\sqrt{4,75}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Phi(0)-\Phi(2,29)\right) = 0,489\,.$$

в)

$$p(5 \leq X \leq 10) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{10-5}{\sqrt{4,75}}\right) - \Phi\left(\frac{5-5}{\sqrt{4,75}}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot 0,9780 = 0,489\,.$$

Задача 4. Ако се знае дека 98% од студентите на еден факултет пишуваат со десна рака, а 2% пишуваат со лева, да се најде веројатноста дека од случајно избрани 200 студенти:

а) точно 196 пишуваат само со десна рака;

б) не помалку од 4 пишуваат со лева рака.

Решение.

а) Од условот на задачата заклучуваме дека 98% од студентите на факултетот пишуваат само со десна рака, односно ако означиме настан A: студентот пишува само со десна рака, тогаш: $p = P(A) = 0,98$. Имаме Бернулиева шема со $n=200$, каде што се разгледува реализацијата на настанот $\overline{A}$ чијашто веројатност е: $q = p(\overline{A}) = 0,02$. За пресметување (приближно) на бараната веројатност ја користиме теоремата на Поасон. Имаме:

$$p(B_4) \approx \frac{(200\cdot 0,02)^4}{4!}e^{-200\cdot 0,02} = \frac{4^4}{4!}e^{-4} \approx 0,195\,.$$

б) Со користење на теоремата на Поасон, приближно можеме да ја пресметаме бараната веројатност. Добиваме:

$$p(B_{k\geq 4})=1-p(B_{k<4})=1-\left(p(B_0)+p(B_1)+p(B_2)+p(B_3)\right)$$

$$\approx 1-\frac{4^0}{0!}e^{-4}-\frac{4^1}{1!}e^{-4}-\frac{4^2}{2!}e^{-4}-\frac{4^3}{3!}e^{-4}\approx 0,5665.$$

Задача 5. Во една кутија има две бели и три црни топчиња. Се изведуваат пет извлекувања на по едно топче со враќање. По секое непарно извлекување се додава по едно бело топче, а по секое парно извлекување се додава по едно црно топче. Што е поверојатно: Во третото извлекување да се извлече бело топче или бело топче да биде извлечено три пати?

Решение. При сите пет извлекувања се разгледува реализацијата на настанот A: извлечено е бело топче, чија веројатност во првото извлекување е $p_1=\frac{2}{3}$, во второто извлекување е $p_2=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, во третото извлекување е $p_3=\frac{3}{7}$, во четвртото извлекување е $p_4=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ и во петтото извлекување веројатноста е $p_5=\frac{4}{9}$. Всушност, се формира Поасонова шема со $n=5$ и веројатности p_i, $i=1,2,3,4,5$ и нека k е бројот на извлечени бели топчиња.

Се бара да се споредат веројатностите на настаните B: во третото извлекување извлечено е бело топче и C: бело топче е извлечено три пати при петте извлекувања.

Веројатноста на настанот B е: $p(B)=p_3=\frac{3}{7}\approx 0,43$.

Веројатноста на настанот C е коефициентот пред x^3 во развојот на степените на x во полиномот $R(x)=\prod_{i=1}^{5}(p_i x+q_i)$, каде што $q_i=1-p_i$, $i=1,2,3,4,5$. Со замена на веројатностите се добива:

$$R(x)=\frac{1}{1260}(24x^5+146x^4+353x^3+424x^2+253x+60),$$

од каде што веројатноста на настанот C е: $p(C)=p(k=3)=\frac{353}{1260}\approx 0,28$.

Значи, поверојатно е во третото извлекување да се извлече бело топче отколку во трипати да биде извлечено бело топче.

Задача 6. Во просек 90% од производите во една фабрика се од прва класа.

а) Колкава е веројатноста дека најмалку 160 артикли во примерокот од 200 артикли се од прва класа?

б) Во кои граници треба со веројатност $0,995$ да очекуваме дека се движи бројот на првокласни артикли во примерок од 150 артикли?

Решение.

а) Веројатноста дека во примерок од 200 производи, k да бидат првокласни е: $\binom{200}{k}(0,9)^k\cdot(01,)^{200-k}$, па затоа $p=\sum_{k=160}^{200}\binom{200}{k}(0,9)^k\cdot(0,1)^{200-k}$ е веројатноста барем 160 артикли бидат првокласни. Приближната вредност на оваа веројатност, ќе ја најдеме со помош на интегралната теорема на Моавр-лаплас. Имаме:

$$p(160\le X\ \le 200)\approx\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{160-200\cdot 0,9}{\sqrt{200\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)-\Phi\left(\frac{200-200\cdot 0,9}{\sqrt{200\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right)\right)=0,7232$$

.

б) Од условот на задачата, добиваме дека:

$$p\left(\left|\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right|\le b\right)=0,995.$$

Со заменување, во горниот услов, добиваме:

$$p\left(\left|\frac{k-150\cdot 0,9}{\sqrt{150\cdot 0,9\cdot 0,1}}\right|\le b\right)=0,995.$$

Добиваме дека: $b=281$, па $k=135\pm 12,2\cdot 0,3\cdot 2,81$, односно: $k=135\pm 10,3$, т.е. $125\le k\le 145$.

Задача 7. Колку независни експерименти треба да се извршат за да со веројатност $0,8$ ќе се појави настанот A (чија веројатност тој да се појави во еден експеримент е $p=p(A)=0,05$) не помалку од пет пати?

Решение. Од условот на задачата имаме: $p=0,05$, $q=1-p=0,95$, $k=5$.

Имаме:

$$p(X \geq 5) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{n-0,05n}{\sqrt{0,05\cdot 0,95\cdot n}}\right)-\Phi\left(\frac{5-0,05n}{\sqrt{0,05\cdot 0,95\cdot n}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\Phi(4,36\sqrt{n})-\Phi\left(\frac{5-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}\right)\right).$$

Од условот $p(X \geq 5)=0,8$ и имајќи предвид дека $\Phi(4,36\sqrt{n})=1$, за секој природен број n, добиваме:

$$\frac{1}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{5-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}\right)\right)\approx 0,8,$$

односно:

$$\Phi\left(\frac{5-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}\right)=-0,6,$$

па, вредноста која одговара на аргументот на функцијата $\Phi(x)$ е: $x=-0,8416$, па со решавање на равенката $\dfrac{5-0,05n}{\sqrt{0,0475n}}=-0,8416$, добиваме дека: $n=144$.

Задача 8. Телефонска станица опслужува 1000 корисници. Веројатноста дека еден корисник ќе телефонира во текот на еден час е $0,005$. Најди ја веројатноста дека во текот на еден час еден корисник се јави на 4 корисници, како и веројатноста дека нема да се јави на повеќе од 20 корисници.

Решение. Овде ќе ја користиме теоремата на Поасон. Нека со X ја означиме случајната променлива: број на јавувања на корисникот. Од условот на задачата, имаме:

$$a=np=1000\cdot 0,005=5.$$

Веројатноста дека еден корисник ќе се јави на 4 корисници е:

$$p(X=4)\approx\frac{a^4}{4!}e^{-a}=\frac{5^4}{4!}e^{-5}\approx 0,175467.$$

Веројатноста дека корисникот нема да се јави на повеќе од 20 корисници е:

$$p(X\leq 20)\approx\sum_{k=0}^{20}\frac{5^k}{k!}e^{-5}\approx 0,999999.$$

Задача 9. Една телефонска централа добива просечно по 90 повици во еден час. Системот во централата бил во дефект една минута. Најди ја веројатноста дека за тоа време нема да има повеќе од два повика.

Решение. Природно е да се разгледува дека на една минута просечно ќе има „$1,5$" повици, односно ќе сметаме дека $a = np = 1,5$. Па, затоа:

$$p(X \leq 2) = p_0 + p_1 + p_2 = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$$

$$= \frac{(1,5)^0}{0!} e^{-1,5} + \frac{(1,5)^1}{1!} e^{-1,5} + \frac{(1,5)^2}{2!} e^{-1,5} = 3,625 \cdot e^{-1,5}.$$

Задача 10. Еден мобилен телефон се состои од 1000 електроелементи. Веројатноста дека еден елемент во текот на една година ќе се расипе е $p = 0,001$ и на неговиот дефект не влијае некој од останатите електроелементи. Најди ја веројатноста дека ќе откажат два и не помалку од две електроелементи во текот на една година.

Решение. Нека со X ја означиме случајната променлива: број на електроелементи кои се расипани. Ќе ја користиме теоремата на Поасон, односно:

$$p(X = m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \text{ каде } a = np = 1000 \cdot 0,001 = 1.$$

Веројатноста дека точно два електроелементи ќе се расипат е:

$$p(X = 2) \approx \frac{a^2}{2!} e^{-a} = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2e} = 0,184.$$

Веројатноста дека не помалку од два електроелементи ќе се расипат е:

$$p(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{1000} p(X = k) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1))$$

$$= 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{1!}\right) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0,264.$$

Задача 11. Дадена е распределбата на случајниот вектор (X, Y):

$$p(X = -1, Y = -1) = p(X = 0, Y = -1) = p(X = 1, Y = -1) = \frac{1}{6},$$

$$p(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{4}, \; p(X = 0, Y = 1) = p(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{8}.$$

Определи ги маргиналните распределни на случајните променливи X и Y, законот на распределба на случајните променливи $Z = X + Y$, $W = XY$.

Решение. Да ја напишеме распределбата на случајниот вектор (X, Y):

X/Y	-1	1	
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{10}{24}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{24}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Според ова, маргиналните распределби се:

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{24} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}, \qquad Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Случајната променлива $Z = X + Y$ има закон на распределба:

$$Z:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Случајната променлива W ги прима вредностите $-1, 0, 1$:

$$p(W=-1) = p(X=-,Y=1) + p(X=1,Y=-1) = \frac{5}{12},$$

$$p(W=0) = p(X=0) = \frac{7}{24},$$

$$p(W=1) = p(X=-1,Y=-1) + p(X=1,Y=1) = \frac{7}{24}.$$

Значи за законот на распределба на случајната променлива, имаме:

$$W:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{10}{24} & \frac{7}{24} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}.$$

Задача 12. Најди го законот на распределба на случајниот вектор (W,Z) од претходната задача.

Решение. Векторот (W,Z) ги прима следниве вредности:

$$p(Z=-2,W=1) = p(X=-1,Y=-1) = \frac{1}{6},$$

$$p(Z=-1,W=0)=p(X=0,Y=-1)=\frac{1}{6},$$

$$p(Z=0,W=-1)=p(X=-1,Y=1)+p(X=1,Y=-1)=\frac{5}{12},$$

$$p(Z=1,W=0)=p(X=0,Y=1)=\frac{1}{8},$$

$$p(Z=2,W=1)=p(X=1,Y=1)=\frac{1}{8}.$$

На тој начин, го добиваме законот на распределба на случајниот вектор (W,Z):

W/Z	-2	-1	0	1	2	
-1	0	0	$\frac{5}{12}$	0	0	$\frac{5}{12}$
0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{7}{24}$
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Задача 13. Адресите на n-писма се случајно напишани. Нека X_n е бројот на писма кои отишле на точна адреса. Пресметај ги $E(X_n)$ и $D(X_n)$.

Решение. Ќе ги пресметаме $E(X_n)$ и $D(X_n)$, без да го бараме законот на распределба на случајната распределба X_n. Случајната променлива X_n може да се запише во облик $X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$, каде што:

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{ако } k-\text{тото писмо точно адресирано} \\ 0, & \text{во спротивен случај} \end{cases},$$

за секој $k=1,2,...,n$. Сите случајни променливи Y_k, $k=1,2,...,n$ имаат иста распределба:

$$Y_k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix},$$

но, меѓусебно не се независни. Нивното математичко очекување е $E(Y_k)=\frac{1}{n}$. Според тоа, $E(X_n)=\sum_{k=1}^{n}E(Y_k)=1$. Исто така, важи $D(Y_k)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$. За да го определиме $D(X_n)$, потребно е да го знаеме $E(Y_kY_l)$, за $k\neq l$. Бидејќи случајната променлива Y_k, $k=1,2,...,n$ ги прима само вредностите 0 и 1, доволно е да го определиме $p(Y_kY_l=1)=\frac{1}{n(n-1)}$, па: $E(Y_kY_l)=\frac{1}{n(n-1)}$..

Конечно, добиваме:

$$D(X_n)=\sum_{k=1}^{n}D(Y_k)+2\sum_{k<l}\operatorname{cov}(Y_k,Y_l)=\frac{n-1}{n}+2\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2(n-1)}=1.$$

Задача 14. Фрламе две коцки. Ги дефинираме случајните променливи:

$X=$ поголемиот од броевите на коцките,

$Y=$ помалиот од броевите на коцките,

$Z=$ збирот на броевите на коцките.

Определи го законот на распределба, математичкото очекување и диспрезијата на овие случајни променливи.

Решение. Вредностите на случајната променлива X на елементарните настани се:

X	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Законот на распределба на случајната променлива X е:

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36}\end{pmatrix}.$$

Сега добиваме:

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=4,47$$

$$D(X)=1\cdot\frac{1}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+9\cdot\frac{5}{36}+16\cdot\frac{7}{36}+25\cdot\frac{9}{36}+36\cdot\frac{11}{36}-4,47^2=1,97\ .$$

Законот на распределба на случајната променлива Y го добиваме на ист начин како кај случајната променлива X , па имаме:

$$Y:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36}\end{pmatrix},$$

па:

$$E(Y)=2,53 \text{ и } D(Y)=1,97\ .$$

Законот на распределба на случајната променлива Z, по запишувањето на сите 36 можни исходи, е:

$$Z:\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36}\end{pmatrix}.$$

Сега,

$$E(Z)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+...+12\cdot\frac{1}{36}=7,$$
$$D(Z)=5,83$$

Математичкото очекување и дисперзијата можеме да ги определиме и на алтернативен начин, кој е поедноставен во овој случај. Ги дефинираме независните случајни променливи:

X_1 = број кој се паднал на првата коцка,

X_2 = број кој се паднал на втората коцка.

Очигледно, X_1 и X_2 се рамномерно дистрибуирани, но и независни случајни променливи, со закон на распределба:

$$X_1,X_2:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

Да ги пресметаме математичкото очекување и дисперзијата на случајните променливи:

$$E(X_1)=E(X_2)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+...+6\cdot\frac{1}{6}=3,5,$$

$$D(X_1) = D(X_2) = 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + ... + 36\cdot\frac{1}{6} - 3{,}5^2 = 2{,}92\,.$$

Бидејќи $Z = X_1 + X_2$, добиваме:

$$E(Z) = E(X_1) + E(X_2) = 7\,,$$

$$D(Z) = D(X_1) + D(X_2) = 5{,}83\,.$$

Задача 15. Случајната променлива X прима само цели позитивни вредности. Докажи дека важи:

$$E(X) \geq \sum_{n=1}^{\infty} p(X \geq n)\,.$$

Решение. Имаме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} p(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} p(X = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kp(X = k) = E(X)\,.$$

Задача 16. Паричка се фрла сѐ додека не се појави глава по втор пат. Нека случајаната променлива X го означува бројот на фрлања. Пресметај го $E(X)$ и веројатноста дека фрлањето ќе се заврши во првите пет фрлања.

Решение. Можните исходи и соодветните веројатности се:

$$ГГ \qquad X = 2, \qquad p(X = 2) = \frac{1}{4},$$

$$\begin{cases} ГПГ \\ ПГГ \end{cases}, \qquad X = 3, \qquad p(X = 3) = 2\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} ГП...ПГ \\ ПГ...ПГ \\ \quad\vdots \\ ПП...ГГ \end{cases}, \qquad X = n, \qquad p(X = n) = (n-1)\cdot\frac{1}{2^n}.$$

Според тоа, математичкото очекување е:

$$E(X) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{1}{2^n}\,.$$

За да го сумираме овој ред, нека ја дефинираме функцијата:

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = \frac{x^2}{2^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x^2}{2(2-x)}, \quad -2 < x < 2.$$

Овој ред конвергира рамномерно на секој затворен подинтервал од интервалот $(-2,2)$, па тука можеме да диференцираме:

$$f'(x) = \frac{4x - x^2}{2(2-x)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{2^n},$$

$$f''(x) = \frac{4}{(2-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{x^{n-2}}{2^n}.$$

Добиените редови се конвергентни на интервалот $(-2,2)$. Заменувајќи $x=1$, добиваме:

$$f''(1) = 4 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{1}{2^n} = E(X).$$

Веројатноста, дека фрлањето ќе се заврши во првите пет фрлања е:

$$p(X \le 5) = \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{32} = \frac{13}{16}.$$

Задача 17. Две момчиња фрлаат наизменично паричка сѐ додека не се појави писмо. Победникот го добива сума која е еднаква на бројот на фрлања. Дали е подобро да се биде прв или втор кој ја фрла паричката?

Решение. Нека X_1: добивка на првото момче, X_2: добивка на второто момче. Ќе ги најдеме нивните математички очекувања.

Овој експеримент се состои од преброиво многу елементарни настани. Ќе ја одредиме веројатноста на секој од нив и вредностите на случајните променливи:

$$П, \qquad p = \frac{1}{2}, \qquad X_1 = 1,\ X_2 = 0,$$

$$ГП, \qquad p = \frac{1}{4}, \qquad X_1 = 0,\ X_2 = 2,$$

$$ГГП, \qquad p = \frac{1}{8}, \qquad X_1 = 3,\ X_2 = 0,$$

$$ГГГП, \qquad p = \frac{1}{16}, \qquad X_1 = 0,\ X_2 = 4$$

$$\vdots$$

Законите на распределба на случајните променливи X_1 и X_2 се:

$$X_1 : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^5} & \dots \end{pmatrix},$$

$$X_1 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots \\ \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{pmatrix}.$$

Математичкото очекување на првото момче е $E(X_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{1}{2^{2n+1}}$. Дефинираме:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{2x}{4 - x^2}, \quad -2 < x < 2.$$

За $|x| < 2$, можеме да диференцираме по членови:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{x^{2n}}{2^{2n+1}} = \frac{2(4+x^2)}{(4-x^2)^2}.$$

Заменувајќи $x = 1$, имаме:

$$f'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^{2n+1}} = \frac{10}{9} = E(X_1).$$

Сосема, аналогно можеме да пресметаме:

$$E(X_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{2^{2n}} = \frac{8}{9}.$$

Според ова, подобро е да се биде прв кој ја фрла паричката.

Задача 18. Докажи дека функцијата $\vartheta = \frac{3+\cos t}{4}$ е карактеристична функција и одреди го нејзиниот закон на распределба.

Решение. Имаме:

$$\frac{3+\cos t}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{8} e^{-it} + \frac{3}{4} e^{it0} + \frac{1}{8} e^{it}.$$

Па, ϑ е карактеристична фунцкија на дискретната случајна променлива X, која има закон на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Задача 19. Фрламе една коцка 80 пати. Кој е најверојатен број на појавување на единицата? Која е веројатноста притоа?

Решение. Бројот на појавување на единицата X е случајна променлива која има биномна распределба, $X : B(80,\frac{1}{6})$. Најверојатниот број на реализација на оваа променлива е 13. Од локалната теорема на Моавр-Лаплас, имаме дека вредноста $p(X=13)$, можеме да ја апроксимираме со формулата:

$$p(X=13)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 80\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}e^{-\frac{(13-80\cdot\frac{1}{6})^2}{2\cdot 80\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}=0,119085.$$

Точната вредност изнесува $0,119506$, така што за горната вредност можеме да кажеме дека е доста добра апроксимација.

Задача 20. Еден тест се состои од 40 прашања. За секое прашање има понудено пет одговори од кој само еден е точен. Точниот одговор носи 15 поени, а за неточен одговор се одземаат 4 поени. Пресметај ја веројатноста дека при случајно одговарање на сите поставени прашања, студентот ќе има повеќе од 135 поени.

Решение. Да ја означиме случајната променлива X, дадена со X: точниот број на одговори, а случајната променлива Z нека е дадена со Z: број на добиени бодови. Тогаш:

$$Z=15X-4(40-X)=19X-160.$$

Ја бараме веројатноста на настанот $\{Z\geq 135\}$, односно $\{19X-160\geq 135\}$, т.е. $\{X\geq 16\}$. Случајната променлива X има биномна распределба, $X : B(40,\frac{1}{5})$. Овде законот на распределба на дискретната случајна променлива X, ќе го апроксимираме со функцијата на густина на распределба на непрекинатата случајна променлива $N(8;6,4)$:

$$p(X\geq 16)=p\left(\frac{X-8}{\sqrt{6,4}}>\frac{15,5-8}{\sqrt{6,4}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Phi^*(2,96)=0,0016.$$

Задача 21. Колкав е бројот на независни експерименти кои мораме да ги изведеме за да веројатноста дека настанот A, ќе се појави барем 15 пати е $0,8$, ако веројатноста за појавување на настанот A во еден експеримент е $0,2$?

Решение. Нека X е случајна променлива зададена со X : број на појавувања на настанот A во n-независни експерименти. Тогаш, $X : B(n, p),$ па можеме да направиме апроксимација со нормална распределба, т.е. $X : N(np, npq)$. Во нашиов случај, $p = 0,2$ и $pq = 0,16$. Па, имаме:

$$p(15 \le X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*\left(\frac{14,5 - 0,2n}{\sqrt{0,16n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi^*\left(\frac{0,2n - 14,5}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,8.$$

Оттука,

$$\Phi^*\left(\frac{0,2n - 14,5}{0,4\sqrt{n}}\right) = 0,6.$$

Отчитувајќи од таблицата, имаме $\Phi^*(0,841) = 0,59965$, $\Phi^*(0,842) = 0,60021$. Со интерполација, ќе заклучиме дека $\Phi^*(0,84164) = 0,6$. Па,

$$\frac{0,2n - 14,5}{0,4\sqrt{n}} = 0,84164,$$

од каде што со средување добиваме дека:

$$0,2n - 0,33666\sqrt{n} - 14,5 = 0.$$

Со решавање на последната равенка, добиваме:

$\sqrt{n} = 9,4$, од каде решението е $n = 88,31$.

Заклучуваме дека експериментот, мораме да го повториме 89 пати.

Задача 22. Една игла која е фрлена 3408 пати во 1356 пресекла некои од паралелните прави (овој проблем го имавме во делот кај геометриска веројатност), со што е дадена апроксимација за π, односно добиено е дека $\pi \approx 3,1415929$. Колкава е веројатноста дека некој, кој ќе го повтори целиот експеримент, ќе го добие истиот резултат?

Решение. Бројот на експерименти во кои иглата, ќе пресече некоја од паралелните прави, кои се наоѓаат на еднакво растојание помеѓу себе е случајна променлива X која има биномна распределба со параметри 3408 и $p = \frac{2l}{a\pi} = 0,397887$ (види го примерот кај делот за геометриска веројатност). Ја бараме веројатноста за настанот $\{X = 1356\}$, со помош на локалната теорема на Моавр-Лаплас:

$$p(X = 1356) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3408 \cdot p \cdot q}} e^{-\frac{(1356-3408p)^2}{2\cdot 3408\cdot p\cdot q}} = 0,01396 .$$

Задача 23. Случајната променлива X има нормална распределба со математичко очекување $a_1 = 3$ и стандрадно отстапување $\sigma_1 = 10$. Најди ја линеарната трансформација која случајната променлива X ја трансформира во случајна променлива Y, која има нормална распределба со математичко очекување $a_2 = 5$ и стандардно отстапување $\sigma_2 = 20$.

Решение. Познато е дека случајната променлива $X : N(a,\sigma^2)$ со линеарната трансформација $Y = mX + n$ се трансформира во случајна променлива $Y : N(ma+n, m^2\sigma^2)$. Според ова, потребно е да ги најдеме броевите m и n така што важи:

$$3m + n = 5, \quad m^2 \cdot 10^2 = 20^2.$$

Од втората равенка добиваме дека:

$|m| \cdot 10 = 20$, односно $m = \pm 2$, од каде што добиваме дека $n = -1$ и $n = 11$. Во согласност со ова, постојат две линеарни трансформации кои го задоволуваат условот во задачата:

$$Y = 2X - 1 \qquad \text{и} \qquad Y = -2X + 11.$$

Задача 24. Нека случајната променлива има нормална распределба $N(a,\sigma^2)$ и нека $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Најди го x кое е решение на равенката:

$$p(a \le X \le a + x) = \alpha .$$

Дали последната равенка има решение за: $\alpha \ge \frac{1}{2}$?

Решение. Да забележиме дека случајната променлива $X^* = \frac{X-a}{\sigma}$ има нормална $N(0,1)$ распределба. Па, равенката:

$$p(a \le X \le a + x) = \alpha$$

е еквивалентна со:

$$p(0 \le X^* \le \frac{x}{\sigma}) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi(0) = \alpha ,$$

односно:

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \alpha + \frac{1}{2},$$

каде што Φ е функција на распределба на нормалната $N(0,1)$ распределба.

Бидејќи за секое $t \in \mathbb{R}$, $0 < \Phi(t) < 1$, па равенката има смисла само за $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Во овој случај,

$$x = \sigma \cdot \Phi^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

е решение. За $\alpha \geq \frac{1}{2}$ равенката нема решенија.

7. Случајни вектори

Во некој стохастички експеримент може да разгледуваме повеќе од една случајна променлива. На пример, при изборот на едно лице од поголема популација, случајните променливи можат да бидат нејзината висина, маса, коефициент на интелегенција, години итн. Секоја од овие случајни променливи има своја распределба. Ако ги знаеме овие распределби, сами по себе не се од некоја особена важност. Но, ако ги разгледуваме во целина, тогаш можеме да извлечеме некои заклучоци во однос на тоа дали се меѓусебно зависни, па знаејќи некоја од нив, со мала или поголема веројатност ќе можеме да извлечеме заклучок и за останатите случајни променливи.

За да можеме да донесуваме вакви и слични заклучоци за меѓусебна зависност на две или повеќе случајни променливи, мораме да развиеме математички апарат кои ќе ги проучува повеќедимензионалните случајни променливи од непрекинат тип.

7.1. Случајни вектори и густина на распределба

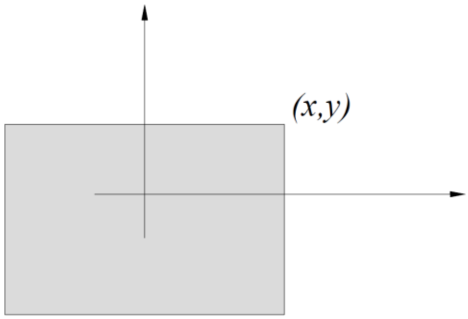
Дефиниција 1. n-димезионален случаен вектор е подредена n-торка од случајни променливи $X=(X_1, X_2, ..., X_n):\Omega \to \mathbb{R}^n$. Функцијата на распределба на случајниот вектор се дефинира на аналоген начин, како и кај еднодимензионалниот случај:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = p(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n), \qquad (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n .$$

Во дводимензионален случај ќе користиме поедноставни ознаки. Дводимензионалниот вектор, обично ќе го означуваме со (X,Y). Функцијата на распределба во овој случај ќе ја дефинираме со формулата:

$$F(x,y) = p(X < x, Y < y).$$

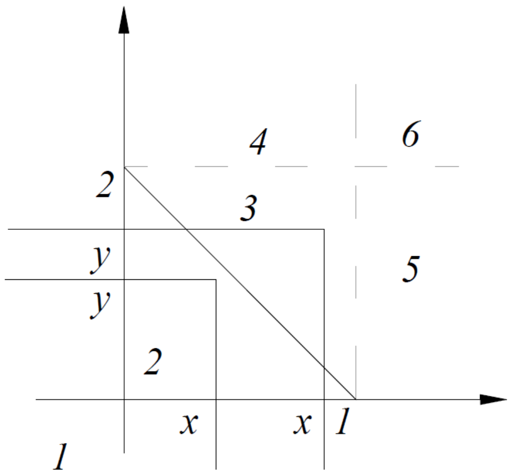
Вредноста на функцијата на распределба во точката (x,y) е еднаква на веројатноста дека случајниот вектор ќе прими вредност во правоаголникот со теме (x,y), како што е дадено на цртежот подолу.



Определувањето на функција на распределба не е така едноставно како во еднодимензионалнот случај.

Пример 1. Точка случајно се избира во внатрешноста на триаголникот $\{(x,y): x>0, y>0, x+y<1\}$. Нека (X,Y) се правоаголните координати на таа точка. Определи ја функцијата на распределба на овој случаен вектор.

Решение. Рамнината мораме да ја запишеме како дисјунктна унија од шест области, како на цртежот подолу.



На првиот дел, важи:

$$F(x,y) = p(X < x, Y < y) = 0\,.$$

Во внатрешноста на триаголникот, на делот 2, важи:

$$F(x,y) = xy\,.$$

На делот 3, имаме:

$$F(x,y) = 1-(1-x)^2-(1-y)^2\,.$$

Над триаголникот, во делот 4, имаме:

$$F(x,y) = 1-(1-x)^2 .$$

Оваа формула, се добива од претходната формула, со заменување $y = 1$. На оваа област важи: $p(X < x, Y < y) = p(X < x, Y < 1)$. Сосема слично, на областа 5, добиваме:

$$F(x,y) = 1-(1-y)^2 .$$

На областа 6, имаме:

$$F(x,y) = 1 .$$

Според, тоа добиваме дека:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0 \text{ или } y \le 0 \\ xy, \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x+y \le 1 \\ 1-(1-x)^2-(1-y)^2, \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x+y \ge 1 \\ 1-(1-x)^2, \quad 0 \le x \le 1, y \ge 1 \\ 1-(1-y)^2, \quad 0 \le y \le 1, x \ge 1 \\ 1, \quad x \ge 1, y \ge 1 \end{cases} . \blacklozenge$$

Овде треба да нагласиме уште една многу важна разлика во однос на еднодимензионалните случајни променливи. Со функцијата на распределба и овде е определен случајниот вектор во целост, но со помош на тие вредности не можеме на едноставен начин да дадеме одговор на прашањето: Колкава е веројатноста дека случаен вектор ќе прими вредност во внатрешноста на некоја област G ?

Директен одговор на ова прашање е можен само ако областа е квадратна или област која лесно може да се прикаже како унија или пресек на такви квадрати. Но, најчесто областите немаат таков облик (имаат облик на круг, триаголник и други посложени геометриски форми).

Така доаѓаме до тоа дека за проучување на случајните вектори главна улога има функцијата на густина на распределба на случаен вектор.

Дефиниција 2. За случајниот вектор $(X_1, X_2, ..., X_n)$ велиме дека е непрекинат ако постои функција $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, така да за сите $x_1, x_2, ..., x_n$ важи:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, ..., t_n)\, dt_1 dt_2 ... dt_n .$$

Функцијата f ја нарекуваме функција на густина на распределба на случајниот вектор. Во област каде функцијата F е диференцијалбилна, важи:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}.$$

Од горната дефиниција, имаме дека можеме да запишеме:

$$p(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t, s)\, dt\, ds.$$

Оттука,

$$p(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Според тоа, за правоаголникот:

$$G = \{(x, y) : x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2\}$$

важи формулата:

$$p((X, Y) \in G) = \iint_G f(x, y)\, dx\, dy.$$

Секоја доволно добра област може да се запише како дисјунктна унија од (во најлош случај) бесконечна унија од правоаголници. Користејќи ги својствата на адитивност и непрекинатост на интегралот, можеме да ја дадеме следнава поопшта формула:

За секое мерливо множество $G \subset \mathbb{R}^n$ важи:

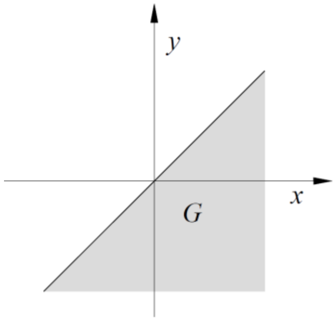
$$p((X_1, X_2, ..., X_n) \in G) = \int_G ... \int f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n.$$

Пример 2. Случајниот вектор (X, Y) има функција на густина на распределба f. Да се пресметаат веројатностите на следниве настани:

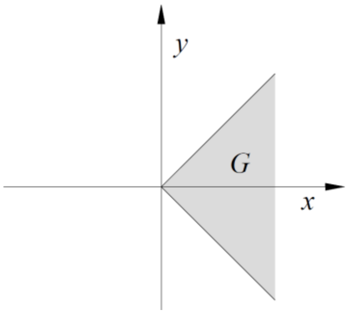
а) $\{X > Y\}$ б) $\{X > |Y|\}$

в) $\{|X| < Y\}$ д) $Y - X > 1$.

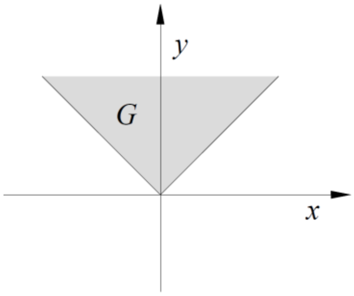
Решение. Важи $p((X, Y) \in G) = \iint_G f(x, y)\, dxdy$.



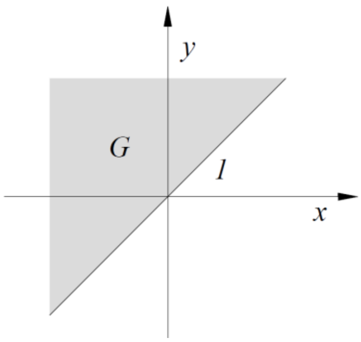
а) $$p(X > Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dy \,.$$



б) $$p(X > |Y|) = \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-x}^{x} f(x, y)\, dy \,.$$



в) $$p(|X| < Y) = \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-y}^{y} f(x, y)\, dx \,.$$



г) $$p(Y - x > 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x+1}^{+\infty} f(x, y)\, dy \,. \blacklozenge$$

Пример 3. Случајниот вектор (X,Y) е рамномерно распределен во триаголникот ограничен со правите $x=0$, $y=0$ и $x+y=a$, $a>0$. Да се најде:

а) функцијата на густина на распределба $f_{XY}(x,y)$ на случајниот вектор (X,Y);

б) функцијата на распределба $F_{XY}(x,y)$ на случајниот вектор (X,Y);

в) маргиналните густини на распределба на X и Y, соодветно;

г) функциите на распределба $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ на X и Y, соодветно

д) веројатноста на настанот.

Решение.

а) Бидејќи распределбата на случајниот вектор (X,Y) е рамномерна, имаме дека:

$$f_{XY}=\begin{cases}\dfrac{1}{m(A)}, & (x,y)\in A\\ 0, & (x,y)\notin A\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}, & (x,y)\in A\\ 0, & (x,y)\notin A\end{cases},$$

каде што A е областа која е огранчена со правите во условот на примерот.

б) Сега, за функцијата на распределба, користејќи дека:

$$F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,du\,dv,$$

имаме:

За $x<0$ или $y<0$, $F_{XY}(x,y)=0$.

За $0\le x<a$ и $0\le y<a-x$, добиваме:

$$F_{XY}(x,y)=\int_0^x\int_0^y \frac{2}{a^2}\,du\,dv=\int_0^x \frac{2y}{a^2}\,du=\frac{2xy}{a^2}.$$

За $0\le x<a$ и $y\ge a-x$, добиваме:

$$F_{XY}(x,y)=\int_0^x\int_0^{a-x} \frac{2}{a^2}\,dudv=\int_0^x \frac{2(a-x)}{a^2}\,du=\frac{2(a-x)x}{a^2}.$$

За $x\ge a$, $a\le y<a-x$, добиваме:

$$F_{XY}(x,y)=\int_0^a\int_0^y \frac{2}{a^2}\,dudv=\int_0^a \frac{2y}{a^2}\,du=\frac{2y}{a}.$$

За $x \geq a$, $y \leq a-x$, добиваме:

$$F_{XY}(x,y)=\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{2}{a^2}dudv=\int_0^a\frac{2(a-x)}{a^2}du=\frac{2(a-x)}{a}.$$

Конечно, функцијата на распределба $F_{XY}(x,y)$ на случајниот вектор е:

$$F_{XY}(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \;\; или \;\; y<0\\ \dfrac{2xy}{a^2}, & 0\leq x<a,\; 0\leq y<a-x\\ \dfrac{2(a-x)x}{a^2}, & 0\leq x<a,\; y\geq a-x\\ \dfrac{2y}{a}, & x\geq a,\; 0\leq y<a-x\\ \dfrac{2(a-x)}{a}, & x\geq a,\; y\geq a-x\end{cases}.$$

в) За маргиналните распределби на случајните променливи X и Y, соодветно, имаме:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)\,dy=\int_0^{a-x}\frac{2}{a^2}dy=\frac{2(a-x)}{a^2},\quad x\geq 0,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(x,y)\,dx=\int_0^a\frac{2}{a^2}dx=\frac{2}{a},\quad y\geq 0.$$

г) За функцијата на распределба $F_X(x)$ на случајната променлива X имаме:

За $x<0$, добиваме $F_X(x)=0$.

За $0\leq x<a$, добиваме:

$$F_X(x)=\int_0^x\frac{2(a-u)}{a^2}du=\frac{2}{a^2}\int_0^x(a-u)\,du=\frac{2}{a^2}\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{2x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^2.$$

За $x\geq a$, добиваме:

$$F_x(x)=\int_0^a\frac{2(a-u)}{a^2}du=\frac{2}{a^2}\int_0^a(a-u)\,du=\frac{2}{a^2}\left(a^2-\frac{a^2}{2}\right)=1.$$

Па, функцијата на распределба $F_X(x)$ за случајната променлива X е:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{2x}{a} - \left(\dfrac{x}{a}\right)^2, & 0 \le x < a \\ 1, & x \ge a \end{cases}.$$

Сосема, аналогно добиваме дека функцијата на распределба $F_Y(y)$ за случајната променлива Y е:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \dfrac{2y}{a}, & 0 \le y < a - x \\ \dfrac{2(a-x)}{a}, & y \ge a - x \end{cases}.$$

д) За бараната веројатност, имаме:

$$p\left((X,Y) \ : \ X^2 + Y^2 \le \frac{a^2}{4} \right) = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{a^2}{4}} f_{XY}(x,y)\,dxdy = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{a^2}{4}} \frac{2}{a^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a^2} \rho\, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{a^2}\Big|_0^{\frac{a}{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4} = \frac{\pi}{2}. \ ♦$$

Ако ни е позната распределбата на векторот $(X_1, X_2, ..., X_n)$, така што можеме да ја определиме распределбата на секоја негова компонента X_i, $i = 1, 2, ..., n$. Таквата распределба се нарекува маргинална распределба на случајниот вектор. Важи:

$$p(X_i < x_i) = p(X_1 < +\infty, ..., X_i < x_i, ..., X_n < +\infty).$$

Тоа значи дека вредноста на маргиналната функција може да се добие така што се пресметува гранична вредност по бесконечност по сите променливи, освен по оние со индекс i. Ова, кратко може да се запише како:

$$F_i(x_i) = F(+\infty, +\infty, ..., x_i, ..., +\infty).$$

Во практика, ние секогаш ќе работиме со функции на густина на распределба. Поради тоа, врската помеѓу функцијата на распределба и функцијата на густина на распределба за маргиналната густина на случајната променлива X_i, $i = 1, 2, ..., n$ е

$$f_i(x_i) = \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} = \int \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \ .$$

За дводимензионалниот случаен вектор (X,Y), ќе користиме поедноставни ознаки. За густината важи:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y},$$

а за маргиналните распределби:

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx,$$

$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\, dy,$$

при што маргиналните густини се:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx.$$

Компонентите $X_1, X_2, \dots, X_n$ на случајниот вектор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ се случајни променливи. Тие може, но и не мораат да бидат независни помеѓу себе. Од порано, случајните променливи $X_1, X_2, \dots, X_n$ се независни ако важи

$$p(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = p(X_1 \in A_1). p(X_2 \in A_2) \cdot \dots \cdot p(X_n \in A_n),$$

за сите мерливи множества $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$. Нека ставиме $A_i = (-\infty, x_i)$. Тогаш:

$p(X_i \in A_i) = p(X_i < x_i) = F_i(x_i)$, $i = 12,\dots,n$. Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ се независни, тогаш заклучуваме дека важи:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n), \text{ за сите } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Можеме да ја дадеме следнава теорема, за независност на непрекинати случајни вектори, теорема која независноста ја дава преку нивните функции на густини на распределба.

Теорема 1. Компонентите $X_1, X_2, \dots, X_n$ на непрекинатиот случаен вектор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ се независни ако и само ако важи:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n), \text{ за сите } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Доказ. Поради едноставност ќе ја докажеме ситуацијата кога непрекинатиот случаен вектор е дводимензионален. Ако компонентите на случајниот вектор (X,Y) се независни, тогаш тврдењето следува од дискусијата пред теоремата со диференцирање по x и y.

Обратна насока. Нека A и B се интервали, односно подмножества од реалните броеви, и $G = A \times B$ е правоаголник. Тогаш важи:

$$p(X \in A, Y \in B) = p((X,Y) \in G) = \iint_G f(x,y)\,dxdy\,.$$

Од условот во теоремата, имаме:

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)\,,$$

па, добиваме:

$$p(X \in A, Y \in B) = \iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_G f_X(x) f_Y(y)\,dxdy$$

$$= \int_A f_X(x)\,dx \cdot \int_B f_Y(y)\,dy = p(X \in A) \cdot p(Y \in B)\,.$$

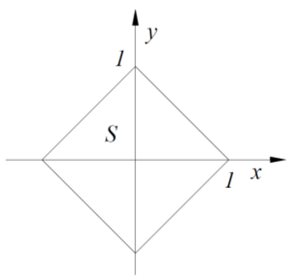
Заклучуваме дека X и Y се независни. ■

Пример 4. Случајниот вектор (X,Y) има густина:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \notin S \end{cases},$$

каде што S е квадратот на сликата. Најди ги маргиналните густини на случајните променливи X и Y. Дали овие променливи се независни?

Решение. Бидејќи густината е различна од нула на област која нема форма на правоаголник со страни паралелни со координатните оски, компонентите на векторот мора да бидат зависни. Да ги пресметаме маргиналните густини:

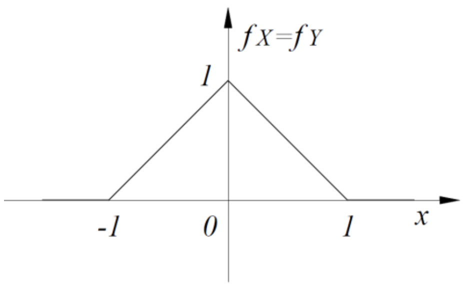


$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} x \le -1: & \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot dy = 0 \\ -1 \le x \le 0: & \int_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2} dy = 1 + x \\ 0 \le x \le 1; & \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2} dy = 1 - x \\ 1 < x: & \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot dy = 0 \end{cases},$$

односно:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

.



Сосема, аналогно добиваме:

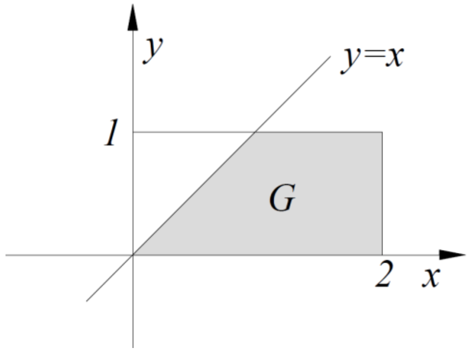
$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+y, & -1 \le y \le 0 \\ 1-y, & 0 \le y \le 1 \end{cases}.$$

Лесно се проверува дека:

$f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, односно дека X и Y се зависни случајни променливи. ♦

Пример 5. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $[0,2]$, а случајната променлива Y функција на густина на распределба $f_Y(y) = 2y$, $0 \le y \le 1$. Под претпоставка дека X и Y се независни, пресметај ја веројатноста дека Y, ќе прими вредност помала од X.

Решение. Поради независноста на X и Y важи $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$.



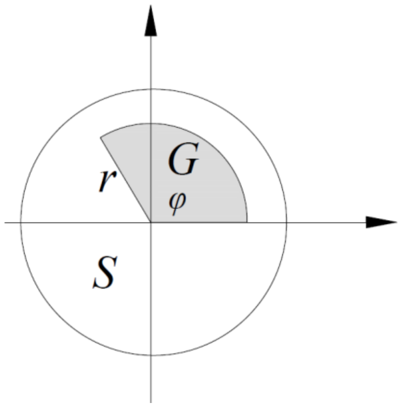
Настанот $\{Y \le X\}$, чија веројатност се бара, може да за запише во обликот $\{(X,Y) \in G\}$, каде што G е областа дадена на сликата погоре. Па,

$$p(Y \le X) = p((X < Y) \in G) = \iint_G f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_G \frac{1}{2} \cdot 2y\,dxdy = \int_0^1 y\,dy \int_y^2 dx = \frac{2}{3}. \blacklozenge$$

Пример 6. Точка се избира случајно во внатрешноста на круг со радиус единица. Нека (R,ϕ) се поларните координати на таа точка. Најди ја функцијата на густина на случајниот вектор (R,ϕ). Дали компонентите R и ϕ се независни?

Решение. Поларните координати знаат да бидат некогаш поповолни од правоаголните Декартови координати. Иако овде кај правоаголните координати функцијата на густина на распределба е константна, равенките на таа област се комплицирани. Па, според тоа и преминот во поларни координати е оправдан. Функцијата на густина на распределба во случај кога имаме поларни координати нема да биде константна, но сите компоненти, за разлика од случајот со правоаголни координати, ќе бидат независни.



Нека S е единечниот круг, а T е случајно избрана точка и G е областа која е означена на цртежот. Од дефиницијата на функцијата на распределба, имаме:

$$F(r,\varphi) = p(R < r, \phi < \varphi) = p(T \in G) = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{r^2\varphi}{2\pi}.$$

Со барање на парцијални изводи по r и φ, добиваме:

$$f(r,\varphi) = \frac{\partial^2 F(r,\varphi)}{\partial r\,\partial\varphi} = \frac{r}{\pi}.$$

Оваа густина може да се факторизира. Бидејќи R прима вредности во интервалот $[0,1]$, а ϕ прима вредности во интервалот $[0,2\pi]$, (наместо да пресметуваме маргинални распределби) ќе напишеме:

$$f(r,\varphi) = 2r \cdot \frac{1}{2\pi}, \qquad 0 < r < 1,\;\; 0 < \varphi < 2\pi.$$

Според тоа, R и ϕ се независни. Случајната променлива R има густина на распределба $f_R(r) = 2r$, $0 < r < 1$, додека ϕ има рамномерна распределба на интервалот $[0,2\pi]$. ♦

Сега, ќе докажеме некои својства на математичкото очекување и дисперзија на случајните променливи.

Теорема 2. За секои случајни променливи $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, важи:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш:

$$E(XY) = E(X)\cdot E(Y).$$

Доказ. Ова тврдење веќе го имаме докажано за дискретни случајни променливи. Ќе го дадеме (прошириме) доказот за непрекинати случајни променливи. Имаме:

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = E(X) + E(Y).$$

Нека претпоставиме сега дека X и Y се независни случајни променливи. Тогаш за функцијата на густина на распределба ќе важи $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, па:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)\,f_Y(y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\,dy = E(X)\cdot E(Y)\,. \blacksquare$$

Всушност, од ова својство можеме да заклучиме дека за кои било две функции од случајни променливи, важи:

$$E(\psi(X)\chi(Y)) = E(\psi(X))\cdot E(\chi(Y))\,.$$

Доказот на ова тврдење е идентичен како доказот на претходната теорема. Да забележиме дека ако ставиме $\psi(x) = e^{itx}$, тогаш $E(\psi(X))$ е карактеристична функција на случајната променлива X. Со ова, како последица ја имаме следнава теорема.

Теорема 3. Ако X и Y се независни случајни променливи, за карактеристичната функција на нивниот збир важи:

$$\vartheta_{X+Y}(t) = \vartheta_X(t)\cdot\vartheta_Y(t)\,.$$

За случаен вектор $(X_1, X_2, ..., X_n)$ дефинираме коваријациска и корелациска матрица со:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix},$$

со елементи:

$$k_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)\,,$$

$$r_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{D(X_i)D(X_j)}}\,.$$

Доколку компонетите на случајниот вектор се некорелирани, тогаш коваријациската матрица е дијагонална.

Дисперзијата на збирот на две независни случајни променливи е збирот од дисперзиите на тие случајни променливи, односно важи:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)\,.$$

Условот за независнот во овој случај е пресилен, односно доказот за адитивност кај дискретните случајни променливи го користеше соодветното својство на математичко очекување на независни случајни променливи, а ова својство важи и за некорелирани случајни променливи. Ќе ја докажеме следната теорема.

Теорема 4. Ако $X_1, X_2, ..., X_n$ се некорелирани случајни променливи, тогаш важи:

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n).$$

Доказ. Левата и десната страна не се менуваат, ако од случајната променлива го одземеме математичкото очекување, па затоа можеме да претпоставиме дека $E(X_k) = 0$, $k = 1,2,...,n$. Сега,

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_j X_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_j X_k) = \sum_{k=1}^{n} E({X_k}^2) + \sum_{j\neq k} E(X_j E_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E({X^2}_k) + \sum_{j\neq k} E(X_j)E(X_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k). \blacksquare$$

Пример 7. Во внатрешноста на интервалот е фиксирана точка a. Случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$. Одреди го коваријацискиот момент помеѓу случајните променливи X и $Y = |X - a|$: оддалеченост на точката X до точката a. За која вредност на бројот a, X и Y се некорелирани?

Решение. Имаме:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2},$$

$$E(Y) = \int_0^1 |x - a| dx = \int_0^a (a - x) dx + \int_a^1 (x - a) dx = a^2 - a + \frac{1}{2},$$

$$E(XY) = E(X \mid X - a \mid) = \int_0^1 x \mid x - a \mid dx$$

$$= \int_0^a x(a - x) dx + \int_a^1 x(x - a) dx = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.$$

Па, $\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{12}$, а само за $a=\frac{1}{2}$, $\mathrm{cov}(X,Y)=0$.
Ова не значи дека X и Y се независни. ♦

7.2. Условна распределба. Условно очекување

Една точка случајно се избира во внатрешноста на единечниот круг $\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$. Распределбата на векторот (X,Y) е константна на оваа област.

Ако е познато дека случајната променлива Y, примила вредност $\frac{1}{2}$, што можеме да кажеме за случајната променлива X? Кои вредности може да ги прими таа во овој случај и со кои веројатности?

Овие прашања, поточно нивните одговори, нѐ водат до поимот условна распределба.

Дефиниција 1. Нека $f(x,y)$ е функција на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y). Ако е позната реализацијата $Y=y$ на случајната променлива Y, тогаш условната густина на случајната променлива X, при услов $Y=y$ е дефинирана со формулата:

$$f_{X|Y=y}(x)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy}.$$

Најчесто, ќе пишуваме $f(x\,|\,y)$ на местото на $f_{X|Y=y}(x)$.

Користењето во пресметувањето на условната веројатност ни го олеснува пресметувањето на веројатноста, функцијата на густина на распределба, математичкото очекување во случај кога реализацијата на некој настан или некоја случајна променлива зависи од некоја друга случајна променлива. Овде условните густини играат улога слична како условните веројатности и хипотезите во формулата за тотална веројатност. Така ги добиваме и аналогните формули. Од горната дефиниција, можеме да запишеме:

$$f(x,y)=f(x\,|\,y)\,f_Y(y)$$
$$f(x,y)=f(y\,|\,x)\,f_X(x).$$

Маргиналните густини се добиваат со интеграција на двете страни на горните равенства, по y и x, соодветно:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x \mid y) f_Y(y)\, dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y \mid x) f_X(x)\, dx.$$

Условните густини, може да се искористат и за пресметување на математичкото очекување на случајните променливи, како и на веројатноста на некои настани кои зависат од можната реализација на случајните променливи:

$$E(X) = \int E(X \mid Y = y) f_Y(y)\, dy,$$

а за веројатноста на настанот A, кој зависи од реализацијата на случајната променлива X, имаме:

$$p(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(A \mid X = x) f_X(x)\, dx.$$

Пример 1. Избираме случајно број од интервалот $[0,1]$. Нека избраниот број е случајната променлива Y, а потоа случајно избираме број од интервалот $[0,Y]$, кој ќе ни биде случајна променлива X. Пресметај ја функцијата на густина на распределба и математичкото очекување на случајната променлива X.

Решение. Ќе ја користиме формулата:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x \mid y) f_Y(y)\, dy,$$

каде што f_y е густината која е рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$, т.е. $U(0,1)$:

$$f_Y(y) = 1, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Функцијата $f(x \mid y)$ е густината која е рамномерна распределба на интервалот $[0, y]$, т.е. $U(0, y)$:

$$f(x \mid y) = \frac{1}{y}, \quad 0 \le x \le y.$$

Па, имаме:

$$f_X(x) = \int f(x \mid y) f_Y(y)\, dy = \int_x^1 \frac{1}{y} dy = -\ln x, \qquad 0 < x \le 1,$$

од каде што добиваме:

$$E(X) = \int_0^1 x(-\ln x)\,dx = \left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Математичкото очекување, можеме да го добиеме полесно и со формулата:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \mid Y = y) f_y(y)\,dy,$$

каде што $E(X \mid Y = y)$ е условното очекување на случајната променлива X, при услов $Y = y$:

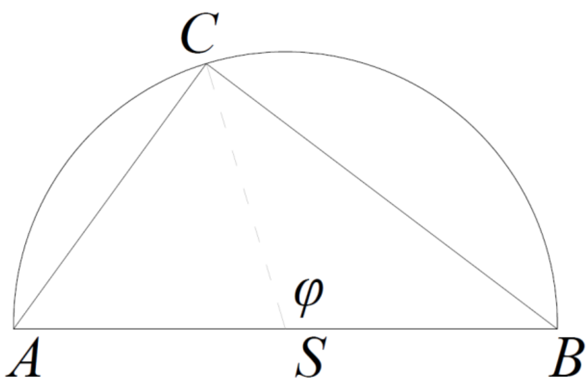
$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x \mid y)\,dx = \int_0^y x \cdot \frac{1}{y}\,dx = \frac{y}{2},$$

па,

$$E(X) = \int_0^1 \frac{y}{2}\,dy = \frac{1}{4}. \ \blacklozenge$$

Пример 2. Даден е полукруг со дијаметар AB и радиус R. Нека C е точка која случајно е избрана на полукружницата. Колкава е веројатноста дека случајно избрана точка T во внатрешноста на полукругот, лежи во внатрешноста на триаголникот ABC?

Решение. Нека S е центар на полукружницата и нека означиме $\varphi = \angle CSB$. Изборот на аголот е еднозначно определен со изборот на точката C и обратно. Бидејќи C е случајно избрана на лакот на полукружницата, имаме дека случајната променлива φ има рамномерна распределбана интервалот $[0, \pi]$.



Нека D е настанот дефиниран со:

$D = \{$точката T лежи во внатрешноста на триаголникот $ABC\}$.

Плоштината на триаголникот ABC е:

$$m(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \cdot R^2 \sin\varphi + \frac{1}{2} R^2 \sin(\pi - \varphi) = R^2 \sin\varphi .$$

За фиксна вредност на случајната променлива φ, веројатноста на бараниот настан D е:

$$p(D\,|\,\varphi) = \frac{m(\Delta ABC)}{m(\Omega)} = \frac{R^2 \sin\varphi}{\frac{1}{2} R^2 \pi} = \frac{2}{\pi} \sin\varphi .$$

Бидејќи, функцијата на густина на распределба на φ е дадена со:

$$f(\varphi) = \frac{1}{\pi}, \quad 0 < \varphi < \pi ,$$

па, имаме:

$$p(D) = \int_0^{\pi} p(D\,|\,\varphi) f(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \sin\varphi \cdot \frac{1}{\pi} d\varphi = -\frac{2\cos\varphi}{\pi^2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi^2} . \blacklozenge$$

7.3. Дводимензионална нормална распределба

Дефиниција 1. Векторот (X,Y) има дводимензионална нормална распределба ако неговата функција на густина на распределба е дадена со:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right).$$

.

Означуваме: $(X,Y) : N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$.

Ќе покажеме дека оваа дефиниција е добра, односно функцијата f ги има сите својства на функција на густина на распределба.

Функцијата f е позитивна. Ќе покажеме дека:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dxdy = 1.$$

За да го докажеме ова, ќе ги воведеме смените:

$$u = \frac{x-a_1}{\sigma_1}, \qquad v = \frac{y-a_2}{\sigma_2},$$

при што $dxdy = \sigma_1\sigma_2\, dudv$. Добиваме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}(u^2 - 2ruv + v^2)\right)dudv$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left((u-rv)^2 + (1-r^2)v^2\right)\right)dudv.$$

Ставаме, уште една смена:

$$w = \frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}, \quad z = v,$$

со јакобијан на смената:

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(w,z)} = \begin{vmatrix} \sqrt{1-r^2} & r \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1-r^2}.$$

На овој начин, добиваме:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left((u-rv)^2 + (1-r^2)v^2\right)\right)dudv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w^2}{2}}\,dw \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 1.$$

Нека векторот (X,Y) има нормална распределба $(X,Y) : N(a_1, a_2, \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, r)$. Ќе покажеме дека тогаш и случајните променливи X и Y имаат нормална распределба, односно: $X : N(a_1, \sigma_1{}^2)$ и $Y : N(a_2{}^2, \sigma_2{}^2)$.

Функцијата на густина на распределба на векторот (X,Y), може да се запише како:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1{}^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{y-a_2}{\sigma_2} - r\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right]^2\right) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - r^2\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}\right]\right)$$

$$= f_1(x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

Со замена:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2} - r\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right),$$

добиваме дека:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x,y)\,dy = 1,$$

за секој x бидејќи подинтегралната функција е функција на густина на нормална распоределба. Затоа,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right),$$

односно X има нормална распределба $N(a_1,\sigma_1^2)$. Од причини на симетрија, можеме да го донесеме истиот заклучок и за случајната променлива Y, односно дека важи: $Y : N(a_2,\sigma_2^2)$.

Сега ќе дадеме одговор на прашањето: Кое е значењето на бројот r?

Ќе докажеме дека r е коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y. Нека $(X,Y) : N(a_1,a_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$.

Најпрво, ќе го пресметаме коваријацискиот момент. Имаме:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X-a_1)(Y-a_2)) - E(X-a_1)\cdot E(Y-a_2) = E((X-a_1)(Y-a_2))$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\iint_{\mathbb{R}^2}(x-a_1)(y-a_2)e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}\,dxdy,$$

каде што:

$$Q(x,y)=\frac{1}{1-r^2}\left(\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right).$$

Ги воведуваме смените:

$$u=\frac{x-a_1}{\sigma_1\sqrt{1-r^2}}, \qquad v=\frac{y-a_2}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}},$$

$$dxdy=\sigma_1\sigma_2(1-r^2)\,dudv .$$

Тогаш, следува:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}uv\,e^{-\frac{1}{2}(u^2-2ruv+v^2)}dudv$$

$$=\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}v\,e^{-\frac{1}{2}v^2(1-r^2)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(u-rv)^2}\,du\right)dv .$$

Интегралот во заградата можеме да го сфатиме како математичко очекување на случајна променлива со нормална распределба $N(rv,1)$ и тоа изнесува rv. Тогаш:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=r(1-r^2)\sigma_1\sigma_2\int_{-\infty}^{+\infty}v^2\,\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}v^2(1-r^2)}\,dv .$$

Овој интеграл е дисперзија на случајната променлива со нормална распределба $N(0,\frac{1}{1-r^2})$ и изнесува $\frac{1}{1-r^2}$. Според тоа,

$$\operatorname{cov}(X,Y)=r\sigma_1\sigma_2,$$

па, затоа:

$$r=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\,D(Y)}}=r(X,Y),$$

што и требаше да се покаже.

Случајниот вектор (X,Y), кој има нормална распределба го поседува следново својство, кое не е вообичаено, за други распределби: компонентите X и Y се независни ако и само ако се некорелирани.

Ако X и Y се независни, тогаш тие се и некорелирани, бидејќи ова тврдење важи за случајни променливи со произволна распределба.

Ако, пак, X и Y се некорелирани, тогаш $r=r(X,Y)=0$ и функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y):

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1{}^2}-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2{}^2}\right),$$

може да се факторизира како производ $f_X(x)f_Y(y)$, односно X и Y се независни случајни променливи.

Пример 1. Нека (X,Y) е случаен вектор кој има нормална распределба, при што $a_1=a_2=0$ и нека (ρ,φ) се поларни координати на точката со правоаголни координати (x,y). Најди ја функцијата на густина на распределба на векторот (R,Φ), а потоа и маргиналната густина на случајната променлива Φ.

Решение. Воведуваме смени:

$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi,$$

при што јакобијанот на смената е:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

Со ова пресликување рамнината $\mathbb{R}^2$ се пресликува во правоаголникот $[0,\infty)\times[0,2\pi)$. Јакобијанот на смената не го менува знакот, па затоа:

$$g(\rho,\varphi)=f(x,y)\cdot\rho=f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho$$

$$=\frac{\rho}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2(1-r^2)}\left[\frac{\cos^2\varphi}{\sigma_1{}^2}-2r\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\sin^2\varphi}{\sigma_2{}^2}\right]\right).$$

Бидејќи:

$$\int_0^{+\infty}\rho e^{-\frac{1}{2}C\rho^2}\,d\rho=\frac{1}{C},$$

ја добиваме маргиналната густина на случајната променлива φ:

$$g_\Phi=\int_0^{+\infty}g(\rho,\varphi)\,d\rho=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\frac{\sqrt{1-r^2}}{\dfrac{\cos^2\varphi}{\sigma_1{}^2}-2r\dfrac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{\sin^2\varphi}{\sigma_2{}^2}}.$$

Ако $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ и $r=0$, односно ако важи $(X,Y):N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$, тогаш функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (R,Φ) може да се факторизира:

$$g(\rho,\varphi)=\frac{\rho}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)=g_\Phi(\varphi)\cdot g_R(\rho).$$

Во овој случај случајните променливи R и Φ се независни, R има Рејлегхова распределба со функција на густина на распределба:

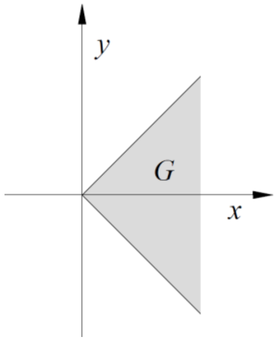
$$h(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right), \quad \rho \geq 0\,,$$

а Φ има рамномерна распределба на интервалот $[0, 2\pi)$. ♦

Пример 2. Нека X и Y се независни случајни променливи со нормална распределба $N(0,\sigma^2)$. Одреди ја веројатноста на настаните:

а) $\{|Y| < X\}$ б) $\{Y < X\}$ в) $\{Y < |X|\}$.

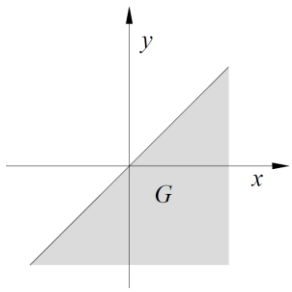
Решение. Бидејќи случајниот вектор (X,Y) има нормална распределба $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$, од претходниот пример, случајните променливи R и Φ се независни.



а)

Имаме:

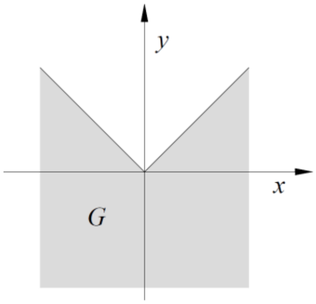
$$p((X,Y)\in G) = p(R\in[0,\infty), \Phi\in[0,\frac{\pi}{4}]) = p(\Phi\in[0,\frac{\pi}{4}]) = \frac{1}{4}.$$



б)

Во овој случај, сосема аналогно, како во делот а), имаме:

$$p((X,Y)\in G) = p(R\in[0,\infty), \Phi\in[0,\frac{\pi}{4}]) = 1 - p(\Phi\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]) = \frac{1}{2}.$$



в)

Исто, како во претходните два случаја, имаме:

$$p((X,Y)\in G)=p(R\in[0,\infty),\Phi\in[0,\frac{\pi}{4}])=1-p(\Phi\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}])=\frac{3}{4}.\ \blacklozenge$$

Пример 3. Нека (X_1, X_2) е случаен вектор со нормална распределба со очекување $a_1 = a_2 = 0$ и нека:

$$y_1 = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha$$

$$y_2 = -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha$$

е ротација на координатниот систем за агол α. Докажи дека случајниот вектор (Y_1, Y_2) има нормална распределба и пресметај ја функцијата на густина на распределба. Дали аголот α може да се избере така што Y_1 и Y_2 бидат независни?

Решение. Инверзната врска помеѓу (x_1, x_2) и (y_1, y_2) е дадена со:

$$x_1 = y_1\cos\alpha - y_2\sin\alpha,$$

$$x_2 = y_1\sin\alpha + y_2\cos\alpha$$

па, затоа јакобијанот на пресликувањето е:

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=1.$$

Јакобијанот не го менува знакот, па според тоа густината на случајниот вектор (Y_1, Y_2) е:

$$g(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)=f(y_1\cos\alpha-y_2\sin\alpha, y_1\sin\alpha+y_2\cos\alpha).$$

По заменувањето и средување, имаме:

$$g(y_1,y_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}(Ay_1^2-2By_1y_2+Cy_2^2)\right),$$

каде што:

$$A=\frac{\cos^2\alpha}{\sigma_1^{\ 2}}-2r\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\sin^2\alpha}{\sigma_2^{\ 2}},$$

$$B=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1^{\ 2}}-r\frac{\sin^2\alpha-cos^2\alpha}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_2^{\ 2}},$$

$$C=\frac{\sin^2\alpha}{\sigma_1^{\ 2}}-2r\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\cos^2\alpha}{\sigma_2^{\ 2}}.$$

Со ова, покажавме дека случајниот вектор (Y_1,Y_2) има, исто така, нормална распределба. Неговите компоненти ќе бидат независни ако се корелирани, односно ако коефициентот B е еднаков на нула. Според ова,

$$\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sigma_1\sigma_2}r=\cos\alpha\sin\alpha\frac{\sigma_2^{\ 2}-\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}\sigma_2^{\ 2}},$$

односно:

$$\frac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^{\ 2}-\sigma_2^{\ 2}}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=tg2\alpha,$$

па, мора да важи:

$$\alpha=\frac{1}{2}arctg\frac{2r\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^{\ 2}-\sigma_2^{\ 2}}. \blacklozenge$$

Да претпоставиме дека случајниот вектор (X_1,X_2) има нормална распределба $N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$. Тогаш, X_1 и X_2 се независни случајни променливи со нормални распределби, $X_1 : N(0,\sigma^2)$ и $X_2 : N(0,\sigma^2)$. Според горниов пример, векторот (Y_1,Y_2) дефиниран со:

$$y_1=x_1\cos\alpha+x_2\sin\alpha,$$
$$y_2=-x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha,$$

има функција на функција на густина на распределба:

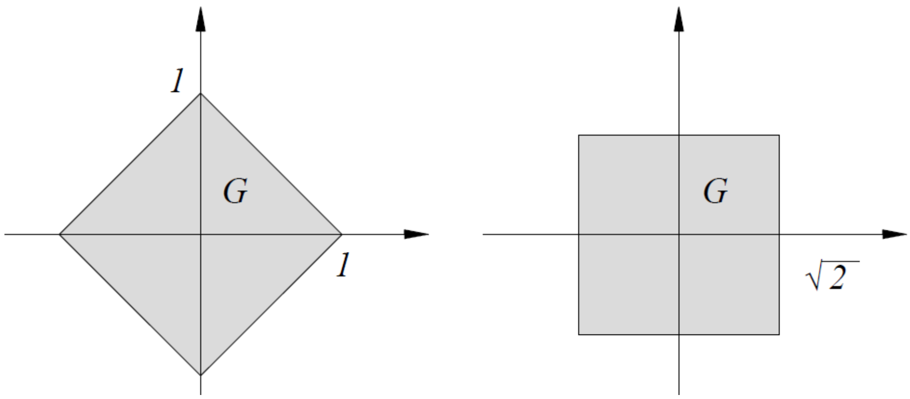
$$g(y_1,y_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{y_1^{\ 2}}{\sigma^2}-\frac{y_2^{\ 2}}{\sigma^2}\right),$$

па затоа, $Y_1 : N(0,\sigma^2)$ и $Y_2 : N(0,\sigma^2)$ и Y_1 и Y_2 се независни. Со други зборови, случајните променливи Y_1 и Y_2, добиени со ротација на координатниот систем имаат иста распределба.

Ова својство на инваријантност на ротацијата се користи при одредување на веројатноста дека случајниот вектор (X,Y), кој има нормална распределба, прима вредности во внатрешноста на некоја област во рамнината.

Пример 4. Нека X и Y се независни случајни променливи кои имаат нормална распределба. Пресметај ја веројатноста на настанот: $\{|X|+|Y|\leq 1\}$.

Решение. Множеството $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\leq 1\}$ е квадрат со врвови во точките: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$.



Ќе го ротираме координатниот систем за агол $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ при што, областа G се трансформира во областа G', која е квадрат со страни паралелни со координатните оски. Распределбата на случајниот вектор (X,Y), останува непроменета и во новата ситуација:

$$p((X,Y)\in G)=p((X,Y)\in G')=p(|X|\leq\frac{\sqrt{2}}{2},|Y|\leq\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=p\left(|X|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot p\left(|Y|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\Phi*\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\Phi*\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0,271.\ \blacklozenge$$

Нека (X,Y) е нормален вектор со нормална распределба $N(a_1,a_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$.

Во продолжение ќе покажеме дека условната распределба на случајната променлива Y, при услов реализација $X = x$ е, исто така, нормална распределба и важи:

$$Y \mid X = x : N(a_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1), \sigma_2^{\,2}(1-r^2)) .$$

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] - \frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^{\,2}} \right).$$

Изразот, кој го имаме во експонент е полн квадрат:

$$f(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{y-a_2}{\sigma_2} - r\frac{x-a_1}{\sigma_1} \right]^2 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^{\,2}(1-r^2)}[y-a_2-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)]^2 \right),$$

со што тврдењето е докажано.

Од причини на симетрија, условната распределба на случајната променлива X, при услов да се реализирал настанот $Y = y$ е, исто така, нормална:

$$X \mid Y = y : N(a_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2), \sigma_1^{\,2}(1-r^2)) .$$

Да забележиме дека дводимензионалната нормална распределба може да се обопшти на n-димензионална распределба. Во продолжение, ќе ги дадеме дефинициите на единечна и општа нормална распределба, без да навлегуваме во детали. Генерално, важат слични тврдења како и кај дводимензионалната нормална распределба.

Дефиниција 2. За случајниот вектор $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ зададен со функцијата на густина на распределба:

$$f(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\|\vec{X}\|^2},$$

каде што: $\|\vec{X}\| = \sqrt{X_1^{\,2} + X_2^{\,2} + ... + X_n^{\,2}}$, велиме дека има единечна нормална распределба во $\mathbb{R}^n$.

Означуваме: $\vec{X} : N(0,I)$.

Нека е дадена матрица $R=[r_{ij}]_{n\times n}$. За нејзе ќе велиме дека е позитивно дефинитна ако матрицата R е симетрична и за секој вектор $\vec{x}$ важи:

$$(\vec{x}\,|\,R\vec{x})=\vec{x}^T R\vec{x}=[x_1,...,x_n]\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}x_i x_j \geq 0.$$

Дефиниција 3. Нека матрицата R е несингуларна, позитивно дефинитна матрица и $\vec{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ е даден вектор. Велиме дека векторот $\overrightarrow{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ има n-димензионална нормална распределба со математичко очекување $\vec{a}$ и коваријациска матрица R ако неговата функција на густина на распределба е дефинирана со:

$$f(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|R|}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T R^{-1}(\vec{x}-\vec{a})\right).$$

Означуваме: $X : N(\vec{a},R)$.

7.4. Решени задачи

Задача 1. Случајниот вектор (X,Y,Z) има функција на густина на распределба:

$$f_{XYZ}(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\pi}, & x^2+y^2+z^2<1 \\ 0, & инаку\end{cases}.$$

Најди ги веројатностите:

а) $p\left(-\frac{1}{2}\leq X\leq\frac{1}{2}\right)$;

б) $p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq X\leq\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq Y\leq\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq Z\leq\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

в) $p\left(X^2+Y^2+Z^2\leq\frac{1}{2}\right)$.

Решение.

а) Маргиналната функција на густина на распределба на X е:

$$f_X(x) = \iint\limits_{y^2+z^2<1-x^2} \frac{3}{4\pi} dydz = \frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \rho\, d\rho = \frac{3}{4}(1-x^2),$$

$$-1 \le x \le 1.$$

Па, за бараната веројатност добиваме:

$$p\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{33}{48} = 0,6875.$$

б) Во овој случај, имаме:

$$p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \le X \le \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \le Y \le \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \le Z \le \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dy \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f_{XYZ}(x,y,z)\,dz = \frac{3}{4\pi}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dy \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} dz = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0,367.$$

.

Да забележиме дека интегралот беше пресметан на овој начин бидејќи коцката $\{(x,y,z): -\frac{1}{\sqrt{3}} \le x,y,z \le \frac{1}{\sqrt{3}}\}$ е целосно сместена во топката $x^2+y^2+z^2 \le 1.$

в) Во овој случај,

$$(X^2+Y^2+Z^2 \le \frac{1}{2}) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\frac{1}{2}} f_{XYZ}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\rho \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-\rho^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-\rho^2}} \rho\, dz = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Задача 2. Дадена е функцијата на густина на рапределба на случајниот вектор (X,Y):

$$f_{XY}(x,y) = 2x^2y, \qquad 0<x<1,\ 0<y<1.$$

Дали случајните променливи X и Y се независни? Одреди ја веројатноста на настанот:

$$\{0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < Y < 2\}.$$

Решение. Функцијата на густина на распределба $f(x,y)$ може да се факторизира:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y), \qquad \text{за сите } (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

каде што:

$$f_X(x) = 3x^2, \qquad 0 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = 2y, \qquad 0 < y < 1,$$

се маргинални густини на распределба на случајните променливи X и Y. Затоа X и Y се независни. Сега,

$$p\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < Y < 2\right) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

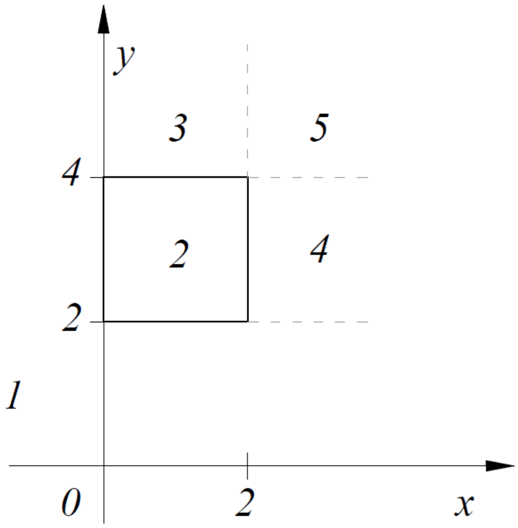
$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1} 6x^2 y\,dxdy = \frac{3}{32}.$$

Задача 3. Функцијата $f_{XY}(x,y) = \frac{1}{8}(6-x-y)$, $0 < x < 2$, $2 < y < 4$ е функција на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y). Одреди ја функцијата на распределба и маргиналните густини. Дали компонентите на векторот (X,Y) се независни?

Решение. Од формулата за функција на распределба:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

јасно ќе биде дека ќе имаме делови од рамнината во кои функцијата на густина е нула, па ќе мораме рамнината да ја поделиме на пет области, како на сликата подолу. На секоја од овие области, функцијата на распределба ќе има различна формула.



На областа 1, важи $f_{XY}(x,y)=0$, па $F(x,y)=0$.

На областа 2, имаме:

$$F(x,y)=\frac{1}{8}\int_0^x\int_2^y(6-u-v)\,dudv=\frac{1}{16}x(y-2)(10-x-y).$$

На областа 3, имаме:

$$F(x,y)=\frac{1}{8}\int_0^x\int_2^4(6-u-v)\,dudv=\frac{1}{8}x(6-x).$$

На областа 4, имаме

$$F(x,y)=\frac{1}{8}\int_0^2\int_2^y(6-u-v)\,dudv=\frac{1}{8}(8-y)(y-2).$$

На областа 5, имаме:

$$F(x,y)=1.$$

Следува:

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0 \ \text{или} \ y\le 2\\ \frac{1}{16}x(y-0(10-x-y), & 0<x\le 2,\ 2<y\le 4\\ \frac{1}{8}x(6-x), & 0<x\le 2,\ 4<y\\ \frac{1}{8}(8-y)(y-2), & 2<x,\ 2<y\le 4\\ 1, & 2<x,\ 4<y\end{cases}.$$

Маргиналните густини се:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\frac{1}{8}\int_2^4(6-x-y)\,dy=\frac{1}{4}(3-x), \qquad 0<x<2 \ ,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx=\frac{1}{8}\int_0^2(6-x-y)\,dx=\frac{1}{4}(5-y), \qquad 2<y<4 \ .$$

Бидејќи $f_{XY}(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$, случајните променливи X и Y се зависни.

Задача 4. Положбата на точката (X,Y) е еднакво можна во секоја точка во внатрешноста на кругот $x^2+y^2\le R^2$.

а) Провери дали случајните променливи X и Y се независни.

б) Најди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива $Z=X^2+Y^2$.

Решение. Нека со K ја означиме внатрешноста на кругот $x^2+y^2\le R^2$. Бидејќи случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на овој круг, имаме:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{m(K)}, & (x,y)\in K\\ 0, & (x,y)\notin K\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{R^2\pi}, & (x,y)\in K\\ 0, & (x,y)\notin K\end{cases}.$$

а) Маргиналните функции на густина на распределба на случајните променливи X и Y се:

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{R^2\pi}dy, & |x|\le R\\ 0, & |x|>R\end{cases}=\begin{cases}\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{R^2\pi}, & |x|\le R\\ 0, & |x|>R\end{cases},$$

$$f_Y(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{1}{R^2\pi}dx, & |y|\le R\\ 0, & |y|>R\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{R^2\pi}, & |y|\le R\\ 0, & |y|>R\end{cases}.$$

Бидејќи $f_{XY}(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$, имаме дека X и Y се независни случајни променливи.

б) Функцијата на распределба за случајната променлива $Z=X^2+Y^2$ може да се најде со примена на геометриската дефиниција на веројатност (ова може да се примени бидејќи (X,Y) има рамномерна распределба во внатрешноста на кругот $x^2+y^2\le R^2$). Па,

$$F_Z(z)=p(Z<z)=p(X^2+Y^2<z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \dfrac{m(K_1)}{m(K)}, & z\in(0,R^2]\\ 1, & z>R^2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \dfrac{z}{R^2}, & z\in(0,R^2],\\ 1, & z>R^2\end{cases}$$

каде што со K_1 е означена внатрешноста на кругот $x^2+y^2\le R^2$ која има плоштина $m(K_1)=z\pi$.

Па, функцијата на густина на распределба на случајната променлива Z е:

$$f_Z(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-z}^{z}\frac{1}{R^2\pi\sqrt{z-x^2}}dx=\frac{1}{R^2}, & z\in[0,R^2]\\ 0, & z\notin[0,R^2]\end{cases}.$$

Задача 5. Нека $f_{XYZ}(x,y,z)=\dfrac{1}{8}e^{-|x|-|y|-|z|}$, за $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ е функција на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y,Z). Да се определи условната функција на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y), при услов $Z=z$ и условната функција на распределба на случајната променлива X при услов $(Y,Z)=(y,z)$. Дали X,Y и Z се независни случајни променливи?

Решение. Условната функција на густина на распределба на (X,Y), при услов $Z=z$ е:

$$f(x,y\,|\,z)=\frac{f(x,y,z)}{f_Z(z)}.$$

За маргиналната функција на густина на распределба на Z, имаме:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)\,dy=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|-|y|-|z|}\,dy$$

$$=\frac{1}{8}e^{-|z|}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}\,dx\right)^2=\frac{1}{8}e^{-|z|}\cdot 2^2=\frac{1}{2}e^{-|z|},\ \text{за}\ z\in\mathbb{R}.$$

Оттука,

$$f(x,y\,|\,z)=\frac{\frac{1}{8}e^{-|x|-|y|-|z|}}{\frac{1}{2}e^{-|z|}}=\frac{1}{4}e^{-|x|-|y|},\ \text{за}\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Условната функција на густина на распределба на случајната променлива X, при услов $(Y,Z)=(y,z)$ е:

$$f(x\,|\,y,z)=\frac{f(x,y,z)}{f_{YZ}(y,z)}.$$

Маргиналната функција на густина на распределба на случајниот вектор (Y,Z) е:

$$f_{YZ}(y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)\,dx=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|-|y|-|z|}\,dx=\frac{1}{8}e^{-|y|-|z|}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}dx$$

$$=\frac{1}{8}e^{-|y|-|z|}\cdot 2=\frac{1}{4}e^{-|y|-|z|},\ \text{за}\ (y,z)\in\mathbb{R}^2.$$

Сега,

$$f(x\,|\,y,z)=\frac{\frac{1}{8}e^{-|x|-|y|-|z|}}{\frac{1}{4}e^{-|y|-|z|}}=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ \text{за}\ x\in\mathbb{R}.$$

Бидејќи:

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)\cdot f_Z(z)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\cdot\frac{1}{2}e^{-|y|}\cdot\frac{1}{2}e^{-|z|}=\frac{1}{8}e^{-|x|-|y|-|z|}=f_{XYZ}(x,y,z)$$

,

па, X,Y и Z се независни случајни променливи.

Задача 5. Дводимензионалниот случаен вектор (X,Y) е даден со функцијата на густина на распределба:

$$f(x,y) = C\sin(x+y), \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ \ 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

Пресметај ја константата C. Одреди ги маргиналните распределби на компонентите X и Y.

Решение. Константата C ја одредуваме од тоа дека интегралот по областа на која е дефинирана функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) мора да биде еднаков на единица. Па,

$$1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} C\sin(x+y)\,dxdy = C\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx = 2C \quad ,$$

па, $C = \dfrac{1}{2}$. Да ја определиме функцијата на распределба на случајниот вектор (X,Y):

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^{x}\int_0^{y} \sin(x+y)\,dxdy = -\frac{1}{2}\int_0^{x} \big(\cos(x+y) - \cos x\big)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\big(\sin x + \sin y - \sin(x+y)\big), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

Маргиналните распределби се:

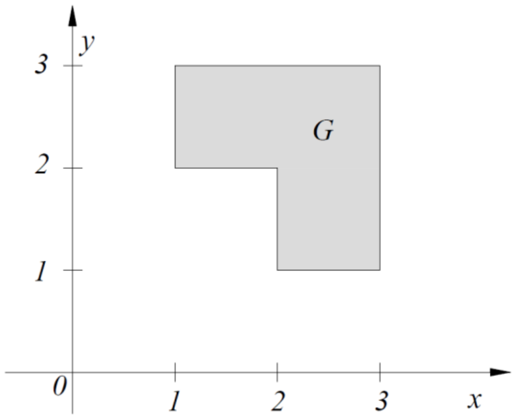
$$F_X(x) = F(x,\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \sin x - \cos x),$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x),$$

$$F_Y(y) = F(\frac{\pi}{2},y) = \frac{1}{2}(1 + \sin y - \cos y),$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(\sin y + \cos y).$$

Задача 6. Дадена е функцијата на распределба $F(x,y)$ на непрекинатиот случаен вектор (X,Y). Одреди ја веројатноста дека векторот ќе прими вредност во областа дадена на сликата подолу.



Решение. Најпрво, ќе ја одредиме веројатноста за правоаголник од облик $[a,b]\times[c,d]$. Имаме:

$$p(a<X<b,\ c<Y<d)=p(X<b,c<Y<d)-p(X\le a,c<Y<d)$$
$$=p(X<b,Y<d)-p(X<b,Y\le c)-p(X\le a,Y<d)+p(X\le a,Y\le c)$$
$$=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c).$$

Множеството G, може да се запише како унија на два правоаголника, на пример, како: $\left([1,3]\times[2,3]\right)\cup\left([2,3]\times[1,2]\right)$. Така добиваме:

$$p((X,Y)\in G)=F(3,3)-F(3,2)-F(1,3)+F(1,2)+F(3,2)-F(3,1)-$$
$$-F(2,2)+F(2,1)=F(3,3)-F(1,3)+F(1,2)-F(3,1)-F(2,2)+F(2,1)$$
.

Задача 7. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба во внатрешноста на триаголникот со темиња $A(0,0)$, $B(3,0)$ и $C(2,1)$. Најди ја функцијата на условна распределба на случајната променлива Y, при услов $X\in(1,2)$ и случајната променлива Y при услов $X\in(2,3)$. Пресметај ја веројатноста $p(X\ge 1,Y\ge\frac{1}{2})$.

Решение. Нека со S ја означиме областа од рамнината која е ограничена со триаголникот од задачата. Тогаш,

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(S)}, & (x,y)\in S\\ 0, & (x,y)\notin S\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{3} & (x,y)\in S\\ 0, & (x,y)\notin S\end{cases}.$$

Маргиналната функција на густина на распределба на случајната променлива X е:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{2}{3}dy, & 0\le x<2\\ \int_0^{3-x}\frac{2}{3}\,dy, & 2\le x<3\end{cases}=\begin{cases}\frac{x}{3}, & 0\le x<2\\ \frac{2}{3}(3-x), & 2\le x<3\end{cases}.$$

.

Уште, $f_X(x)=0$, за $x<0$ или $x\ge 3$.

За условната распределба на случајната променлива Y, при услов $X\in(1,2)$, имаме:

$$f_Y(y\mid X\in(1,2))=\begin{cases}\dfrac{\int_1^2 f_{XY}(x,y)\,dx}{\int_1^2 f_X(x)\,dx}, & 0\le y<\frac{1}{2}\\ \dfrac{\int_{2y}^2 f_{XY}(x,y)\,dx}{\int_1^2 f_X(x)\,dx}, & \frac{1}{2}\le y<1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{\int_1^2 \frac{2}{3}dx}{\int_1^2 \frac{x}{3}dx}, & 0\le y<\frac{1}{2}\\ \dfrac{\int_{2y}^2 \frac{2}{3}dx}{\int_1^2 \frac{x}{3}dx}, & \frac{1}{2}\le y<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{3}, & 0\le y<\frac{1}{2}\\ \frac{8}{3}(1-y), & \frac{1}{2}\le y<1\end{cases}.$$

Уште, $f_Y(y\mid X\in(1,2))=0$, за $y<0$ или $y\ge 1$.

Аналогно, за функцијата на густина на условна распределба на случајната променлива Y, при услов $X\in(2,3)$, имаме:

$$f_Y(y\mid X\in(2,3))=\begin{cases}\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx}{\int_2^3 f_X(x)\,dx}, & 0\le y<1\\ 0, & y<0 \text{ или } y\ge 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\int\limits_{2}^{3-y}\frac{2}{3}dx}{\int\limits_{2}^{3}\frac{2}{3}(3-x)\,dx}, & 0\le y<1\\ 0, & y<0 \quad или \quad y\ge 1\end{cases}=\begin{cases}2(1-y), & 0\le y<1\\ 0, & y<0 \quad или \quad y\ge 1\end{cases}.$$

Веројатноста која се бара е:

$$p\left(X\ge 1, Y\ge\frac{1}{2}\right)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int\limits_{2y}^{3-y}\frac{2}{3}dx=\frac{1}{4}.$$

Задача 8. Нека случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на множеството $\{(x,y): 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 1\}$. Да се најдат функциите на распределби на случајните променливи $Z=\min\{X,Y\}$ и $V=\max\{X,Y\}$.

Решение. Бидејќи случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на множеството $\{(x,y): 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 1\}$, функција на густина на распределба на случајниот вектор (X,y) е:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 1\\ 0, & инаку\end{cases}.$$

Функција на распределба на случајната променлива Z е:

$$F_Y(z)=p(Z<z)=p(\min\{X,Y\}\le z)$$

$$=1-p(\max\{X,Y\}>z)=1-p(X>z,Y>z)=1-\int\limits_{z}^{+\infty}dx\int\limits_{z}^{+\infty}f_{XY}(x,y)\,dy$$

$$=\begin{cases}1-\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{4}dy, & z<-1\\ 1-\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{z}^{1}\frac{1}{4}dy, & -1\le z<0\\ 1-\int\limits_{z}^{2}dx\int\limits_{z}^{1}\frac{1}{4}dy, & 0\le z<1\\ 1-\int\limits_{z}^{+\infty}dx\int\limits_{z}^{+\infty}0\cdot dy, & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z<-1\\ 1-\frac{1}{2}(1-z), & -1\le z<0\\ 1-\frac{1}{4}(2-z)(1-z), & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}.$$

Оттука, функцијата на густина на распределба на случајната променлива Z е:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1 \le z < 0 \\ \dfrac{1}{4}(3-2z), & 0 \le z < 1 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

За функцијата на распределба $F_V(z)$ на случајната променлива V имаме:

$$F_V(z) = p(V \le z) = p(\max\{X,Y\} \le z) = p(X \le z, Y \le z)$$

$$= \int_{-\infty}^{z} dx \int_{-\infty}^{z} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_{-\infty}^{z} dx \int_{-\infty}^{z} 0 \cdot dy, & z < 0 \\ \int_{0}^{z} dx \int_{-1}^{z} \frac{1}{4} dy, & 0 \le z < 1 \\ \int_{0}^{z} dx \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} dy, & 1 \le z < 2 \\ \int_{0}^{2} dx \int_{-}^{1} \frac{1}{4} dy, & z \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{4} z(z+1), & 0 \le z < 1 \\ \frac{1}{2} z, & 1 \le z < 2 \\ 1, & z \ge 2 \end{cases}.$$

Сега, за функција на густина на распределба на случајната променлива V, имаме:

$$f_V(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(2z+1), & 0 \le z < 1 \\ \dfrac{1}{2}, & 1 \le z < 2 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Задача 9. Најди ја константата C во зависност од параметрите α и λ, така што функцијата:

$$f(x) = \begin{cases} Cx^{\alpha} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

Дефинира функција на густина на распределба на случајна променлива X. Потоа, одреди ја функцијата на распределба на случајната променлива $Y = X^2 - 2X$.

Решение. Бидејќи $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, добиваме:

$$C\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-\lambda x}\,dx = 1,$$

од каде што добиваме дека:

$$C = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Функцијата $y = x^2 - 2x$ е парабола и има нули во точките $x = 0$ и $x = 2$ и минимум во точката $x = 1$, кој изнесува $y = -1$. Го разгледуваме само делот $x \geq 0$. Постојат две инверзни гранки, односно $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+y}$.

Ќе ја најдеме функцијата на распределба за случајната променлива Y.

За $y \leq -1$, $F_Y(y) = 0$.

За $-1 < y \leq 0$,

$$F_Y(y) = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{1-\sqrt{1+y}}^{1+\sqrt{1+y}} x^{\alpha} e^{-\lambda x}\,dx.$$

За $y > 0$,

$$F_Y(y) = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{0}^{1+\sqrt{1+y}} x^{\alpha} e^{-\lambda x}\,dx.$$

Задача 10. Еден стап со должина L случајно се крши на два дела.

а) Најди ја очекуваната вредност на должината на пократкиот дел.

б) Најди ја очекуваната вредност на пропорцијата помеѓу пократкиот и подолгиот дел.

Решение.

а) Точката на кршење е со еднаква веројатност во левата или десната половина на стапот. Да забележиме дека веројатноста дека стапот ќе се скрши точно на средина е нула. Да претпоставиме дека пократкиот дел од стапот е оној кој се наоѓа на лево, односно за случајната променлива X која е дадена со: должината на пократкиот дел од стапот, важи дека има рамномерна распределба на интервалот $\left(0, \frac{L}{2}\right)$. Па, $E(X) = \frac{L}{4}$.

б) Бараната веројатност е:

$$E\left(\frac{X}{L-X}\right)=\int_{0}^{\frac{L}{2}}\frac{x}{L-x}\cdot\frac{2}{L}\,dx=-1+2\ln 2=0{,}386\,.$$

Задача 11. Функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) е дадена со:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}2e^{-x-y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

Најди ги маргиналните функции на густини на распределба за случајните променливи X и Y, најди на коваријансата $\operatorname{cov}(X,Y)$. Провери дали случајните променливи X и Y се независни.

Решение. Маргиналните функции на густини на распределба на случајните променливи X и Y се:

$$f_X(x)=\int_{x}^{+\infty}2e^{-x-y}\,dy=2e^{-2x},\quad x\geq 0\,,$$

$$f_Y(y)=\int_{0}^{y}2e^{-x-y}\,dx=2e^{-y}(1-e^{-y}),\quad y\geq 0\,,$$ соодветно.

Математичките очекувања на случајните променливи X и Y се:

$$E(X)=\int_{0}^{+\infty}x\cdot 2e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}\,,$$

$$E(Y)=\int_{0}^{+\infty}y\cdot 2e^{-y}(1-e^{-y})\,dy=\frac{3}{2}$$

и:

$$E(XY)=\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{x}^{+\infty}xy\cdot 2e^{-x-y}\,dy\right)dx=1\,.$$

Сега, за коваријансата $\operatorname{cov}(X,Y)$ имаме дека:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}\,.$$

Бидејќи $\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$ следува дека X и Y се зависни случајни променливи.

Задача 12. Нека $X_1,X_2,\dots,X_n$ се независни случајни променливи со единечна нормална распределба. Докажи дека случајните променливи:

$$Y=\sum_{k=1}^{n}a_kX_k\,,\qquad\qquad Z=\sum_{k=1}^{n}b_kX_k\,,$$

се независни случајни променливи ако и само ако важи $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$.

Решение. Од својствата на случајните променливи кои имаат нормална распределба, добиваме дека Y и Z се случајни променливи со нормална распределба, $Y : N(0, a_1^2 + ... + a_n^2)$, $Z : N(0, b_1^2 + ... + b_n^2)$. Случајните променливи Y и Z се независни ако и само ако се некорелирани. Го пресметуваме корелацискиот момент:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y,Z) &= E(YZ) - E(Y)\cdot E(Z) = E(YZ)\\ &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right)\right]\\ &= E\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k b_j X_k X_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k b_j E(X_k X_j).\end{aligned}$$

Случајните променливи X_k и X_j се независни за $k \neq j$ со математичко очекување $E(X_k) = 0$ за секое $k = 1,2,...,n$ и дисперзија $D(X_k) = E(X_k^2) = 1$. Следува:

$$E(X_k X_j) = E(X_k^2)\delta_{kj} = \delta_{kj},$$

па, затоа:

$$E(YZ) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k .$$

Па, важи:

$$\operatorname{cov}(Y,Z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0,$$

што и требаше да се покаже.

Задача 13. Случајните променливи X и Y се независни со нормална распределба, $X : N(a,\sigma^2)$ и $Y : N(b,\sigma^2)$. Одреди го радиусот R на кругот S со центар во точката (a,b) за кој важи $p((X,Y) \in S) = 0,6$.

Решение. Јасно:

$$0,6 = p((X,Y)\in S) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_S \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-a)^2 + (y-b)^2\right)\right)dxdy$$

.

Ја воведуваме смената:

$$x = a + \sigma\rho\cos\varphi,$$
$$y = b + \sigma\rho\cos\varphi,$$

$dxdy = \sigma^2 \rho\, d\rho d\varphi$. Оттука, добиваме:

$$0,6 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{R}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho\, d\rho = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}},$$

па,

$$e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} = 0,4, \text{ од каде што добиваме } R = 1,35\sigma.$$

Задача 14. Нека случајниот вектор (X,Y) има функција на густина на распределба дадена со:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x(y-x)e^{-y}, & 0 \le x \le y < \infty \\ 0, & \textit{инаку} \end{cases}.$$

а) Најди ги условните функции на густина на распределба: $f_{X|Y=y}(x \mid y)$ и $f_{Y|X=x}(y \mid x)$;

б) Докажи дека: $E(X \mid Y) = \frac{1}{2}Y$ и $E(Y \mid X) = X + 2$.

Решение.

а) Маргиналните функции на густина на распределба се:

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_x^{+\infty} x(y-x)e^{-y}\,dy = xe^{-x},\ x \ge 0,$$

$$f_Y(y) = \int_0^{y} f_{XY}(x,y)\,dx = \int_0^{y} x(y-x)e^{-y}\,dx = \frac{1}{6}y^3e^{-y},\ y \ge 0.$$

Условните функции на густина на распределба се:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = 6x(y-x)y^{-3},\ 0 \le x \le y,$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = (y-x)e^{x-y},\ 0 \le x \le y < +\infty.$$

б) Бараните математички очекувања се:

$$E(X \mid Y = y) = \int_0^{y} x \cdot f_{X|Y}(x \mid y)\,dx = \int_0^{y} 6x^2(y-x)y^{-3}\,dx = \frac{1}{2}y,\ y \ge 0,$$

$$E(Y \mid X = x) = \int_x^{+\infty} y \cdot f_{Y|X}(y \mid x)\,dy = \int_x^{+\infty} y(y-x)e^{y-x}\,dy = x + 2,\ x \ge 0.$$

Оттука, следува дека:

$$E(Y \mid X) = \frac{1}{2}Y \qquad \text{и} \qquad E(Y \mid X) = X + 2.$$

Задача 15. Случајниот вектор (X,Y) има функција на густина на распределба дадена со:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}.$$

Пресметај ги $E(Y \mid X)$, $E(X \mid Y)$ и коефициентот на корелација ρ_{XY}.

Решение. Маргиналните функции на густини на распределба се:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,dy, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases} = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}.$$

Сосема аналогно, добиваме дека:

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}.$$

Условните функции на густина на распределба:

$$f_{Y|X=x}(y \mid x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x+\frac{1}{2}}, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}, \text{ за } x \in (0,1),$$

$$f_{X|Y=y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{x+y}{y+\frac{1}{2}}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}, \text{ за } y \in (0,1).$$

Сега, за математичкото очекување $E(Y \mid X = x)$, имаме:

$$E(Y \mid X = x) = \begin{cases} \int_0^1 y \cdot f(y \mid x)\,dy = \int_0^1 y \cdot \dfrac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\,dy = \dfrac{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{2}}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}.$$

Сосема аналогно, добиваме дека:

$$E(X\,|\,Y=y)=\begin{cases}\dfrac{\frac{y}{2}+\frac{1}{3}}{y+\frac{1}{2}}, & y\in(0,12)\\ 0, & y\notin(0,1)\end{cases}.$$

Оттука,

$$E(Y\,|\,X)=\frac{\frac{X}{2}+\frac{1}{3}}{X+\frac{1}{2}} \qquad \text{и} \qquad E(X\,|\,Y)=\frac{\frac{Y}{2}+\frac{1}{3}}{Y+\frac{1}{2}}.$$

Дополнително, важи:

$$E(X)=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{7}{12}=E(Y),$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{5}{12}=E(Y^2),$$

$$D(X)=\frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144}=D(Y),$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{3}.$$

Коефициентот на корелација е:

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{1}{11}.$$

8. Функции од случајни вектори

8.1. Функции од случајни вектори

Нека $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е даден n-димензионален случаен вектор и $\Psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и еднозначно пресликување кое е биекција. Сликата на случајниот вектор X при пресликувањето Ψ е случајниот вектор $Y=\Psi(X)$. Нека $f(x_1,x_2,...,x_n)$ е функција на густина на распределба на векторот $(X_1,X_2,...,X_n)$, а $g(x_1,x_2,...,x_n)$ е функција на густина на распределба на векторот $(Y_1,Y_2,...,Y_n)$. Логичното прашање кое можеме да си го поставиме овде е: Која е врската помеѓу овие две функции?

Ќе прикажеме како пресликувањето Ψ , пресликува по компоненти:

$$\begin{gathered} y_1=\psi_1(x_1,x_2,...,x_n) \\ \vdots \\ y_n=\psi_n(x_1,x_2,...,x_n) \quad . \end{gathered}$$

Од претпоставката дека пресликувањето Ψ е биекција, при што постои инверзно пресликување, по координати:

$$\begin{gathered} x_1=\chi_1(y_1,y_2,...,y_n) \\ \vdots \\ x_n=\chi_n(y_1,y_2,...,y_n). \end{gathered}$$

Јакобијанот на инверзното пресликување се дефинира со формулата:

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial(y_1,y_2,...,y_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Нека G е област во $\mathbb{R}^n$ и G' е сликата на тоа подрачје при пресликувањето Ψ . Тогаш, важи:

$$p((X_1,X_2,...,X_n)\in G)=p((Y_1,Y_2,...,Y_n)\in G'),$$

$$\int\underset{G}{...}\int f(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_1dx_2...dx_n=\int\underset{G}{...}\int g(y_1,y_2,...,y_n)\,dy_1dy_2...dy_n \ .$$

Ќе ја искористиме познатата формула за смена на променливи во повеќекратен интеграл:

$$\int_G \cdots \int f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n = \int_{G'} \cdots \int f(x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, J \,|\, dy_1 dy_2 ... dy_n .$$

.

Одовде, можеме да заклучиме дека постои врска помеѓу функциите на густина на распределба:

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \left| \frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)} \right| .$$

Горедобиениот резултат ќе го илустираме со пример на трансформација на правоаголни координати во поларни координати.

Нека f е функција на густина на распределба на случајниот вектор (X, Y) и нека (R, Φ) е случајниот вектор кој одговара на поларните координати на векторот (X, Y). Ќе ја изведеме формулата за функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (R, Φ). Врската помеѓу координатите е:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

и јакобијанот на пресликувањето изнесува:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r .$$

Па, бараната функција на густина на распределба за случајниот вектор (R, Φ) е:

$$r(r, \varphi) = f(x, y) \cdot |\, J \,| = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r .$$

Пример 1. Функцијата на густина на случајниот вектор (X, Y) е:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right).$$

Нека е даден случајниот вектор (R, Φ), каде што (R, Φ) се поларните координати на точката (X, Y). Пресметај ја функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (R, Φ), а потоа маргиналните густини на случајните променливи R и Φ. Дали овие случајни променливи се независни?

Решение. Случајниот вектор (R,Φ) прима вредности во областа $[0,\infty)\times[0,2\pi)$. Од претходната формула имаме:

$$g(r,\varphi)= f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\cdot r\,,$$

и:

$$g(r,\varphi)=g_R(r)\cdot g_\Phi(\varphi)\,.$$

Оттука, случајните променливи R и Φ се независни случајни променливи. Случајната променлива R има Рејлигхова распределба со функција на густина на распределба:

$$g_R(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \qquad r\geq 0\,,$$

а, случајната променлива φ има рамномерна распределба на интервалот $[0,2\pi]$. ♦

Пример 2. Случајниот вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ е зададен со функијата на густина на распределба f. Нека A е несингуларна матрица од ред n. Најди ја функцијата на густина на распределба на случајниот вектор Y, даден со $Y=AX$.

Решение. Бидејќи матрицата A е несингуларна, пресликувањето $\vec{y}=A\vec{x}$ е бијективно. Да го најдеме неговиот јакобијан. За i-тата компонента на векторот Y важи:

$$y_i=\sum_j a_{ij}x_j\,,$$

па, затоа:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=a_{ij}\,.$$

Според тоа, јакобијанот на пресликувањето: $\vec{y}=A\vec{x}$ е

$$\frac{\partial(y_1,y_2,...,y_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=|A|\,,$$

односно јакобијанот на пресликувањето $\vec{y} = A\vec{x}$ е детерминантата на матрицата A. Јакобијанот на инверзното пресликување: $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ е $J = \dfrac{1}{|A|}$.

Густината на векторот Y е:

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot |J| = f(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \left| \frac{1}{|A|} \right| . \blacklozenge$$

Во продолжение, ќе разгледаме поедноставна ситуација, каде што $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и ја имаме случајната променлива Z, дадена со:

$$Z = \Psi(X_1, X_2, ..., X_n) .$$

Ќе дадеме одговор на прашањето: Која е функцијата на густина на распределба на случајната променлива Z ?

Поради едноставност во записот, ќе ја разгледаме дводимензионалната ситуација, односно:

$$Z = \Psi(X, Y) .$$

Да претпоставиме дека е позната функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X, Y).

Пресликувањето $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ќе го прошириме до пресликување од $\mathbb{R}^2$ до $\mathbb{R}^2$, со што би можеме да ги користиме претходно добиените резултати во овој дел. Наједноставен начин да се направи ова е првата компонента на векторот да се остави непроменента, односно:

$$x = x ,$$
$$z = \psi(x, y) .$$

Нека го имаме инверзното пресликување на ова пресликување, дадено со:

$$x = x ,$$
$$y = \chi(x, z) .$$

Јакобијанот на пресликувањето е:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial z} .$$

Според тоа, функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X,Z) е:

$$g(x,z) = f(x,y)\cdot\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|.$$

Функцијата на густина на распределба g_Z на случајната променлива Z можеме да ја добиеме преку маргиналната густина на овој вектор. Па, имаме:

Функцијата на густина на распределба на случајната променлива $Z = \Psi(X,Y)$ се добива со формулата:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\cdot\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| dx,$$

каде што f е функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y).

Пример 3. Нека $f(x,y)$ е функција на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y). Одреди ја функцијата на густина на случајната променлива Z, ако:

а) $Z = X+Y$, б) $Z = Y-X$,

в) $Z = XY$, г) $Z = \dfrac{Y}{X}$.

Решение. Имајќи ја предвид формулата пред овој пример, имаме:

а) $y = z-x$, $\quad g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$

б) $y = z+x$, $\quad g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z+x)\,dx$

в) $y = \dfrac{z}{x}$, $\quad g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\dfrac{z}{x})\left|\dfrac{1}{x}\right| dx$

г) $y = zx$, $\quad g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,zx)|x|\,dx$. ♦

Пример 4. Случајниот вектор (X,Y) има функција на густина на распределба дадена со:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x,y\geq 0\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

Најди ја функцијата на густина на распределба и функцијата на распределба за случајната променлива $Z=X+Y$.

Решение. Го разгледуваме системот од трансформации $X=X$, $Z=X+Y$. Системот од инверзни трансформации е $X=X$, $Y=Z-X$, со јакобијан $|J|=1$. Па,

$$f_{XZ}(x,z)=f_{XY}(x,z-x)=\frac{1}{2}(x+z-x)e^{-(x+z-z)}=\frac{z}{2}e^{-z},\ (x,y)\in K.$$

Областа $x\geq 0$, $y\geq 0$ се пресликува во $x\geq 0$, $0\leq y=z-x$, односно:

$$K=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\leq x\leq z\}.$$

Маргиналната функција на густина на распределба за случајната променлива Z е:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XZ}(x,z)\,dx=\int_0^z\frac{z}{2}e^{-z}\,dx=\frac{z^2}{2}e^{-z},\ \text{за}\ z\geq 0.$$

Функцијата на распределба на случајната променлива Z е:

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}f_Z(u)\,du=\begin{cases}0, & z\leq 0\\ \int_0^z\frac{u^2}{2}e^{-u}\,du=1-\frac{z^2+2z+2}{2}e^{-z}, & z>0\end{cases}. \ ♦$$

Досега покажавме дека во случај кога случајните променливи кои имаат биномна, Поасонова или нормална распределба, збирот на две или повеќе независни случајни променливи од ист тип (некои од претходно наведените) е повторно случајна променлива од истиот тип. Но, во општа ситуација ова не важи. Ќе дадеме општа врска помеѓу функцијата на густина на распределба на независните случајни променливи и функцијата на густина на распределба на нивниот збир.

Ако случајните променливи X и Y се независни и $f(x,y)$ е функцијата на густина на случајниот вектор (X,Y), па таа функција може да се факторизира како производ на маргиналните густини:

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

За функцијата на густина на распределба на збирот $Z = X + Y$, важи (види го претходниот пример):

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx\,.$$

Овде забележуваме дека имаме конволуција на функциите на густини на распределба на случајните променливи X и Y. Со последователна примена на овој резултат, ја добиваме следнава теорема.

Теорема 1. Ако случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни, тогаш функцијата на густина на распределба на нивниот збир $Z = X_1 + X_2 + ... + X_n$ е дадена со конволуцијата:

$$g_Z(z) = f_{X_1} * f_{X_2} * ... * f_{X_n}\,.$$

Пример 5. Случајните променливи X_1, X_2 и X_3 се независни и имаат рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$. Одреди ја функцијата на густина на распределба g_Z на случајната променлива:

а) $Y = X_1 + X_2$ б) $Z = X_1 + X_2 + X_3$.

Решение. Густината на случајната променлива X_i, $i = 1,2,3$ е $f(x) = 1,\ 0 < x < 1$.

а) Функцијата на густина на распределба на случајната променлива Y е дадена со конволуцијата:

$$g_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) f(x-u)\,du\,.$$

Пресметувањето на интегралот зависи од вредноста на аргументот. Функцијата на густина на распределба g_Y е различна од нула за $0 < x < 2$. Областа на интеграција се сведува на областа во која аргументот на функцијата е во граници од 0 до 1, бидејќи надвор од таа област, функцијата на густина на распределба е нула. Според тоа, мора:

$0 < u < 1$ и $0 < x - u < 1$. Па, мора да важи:

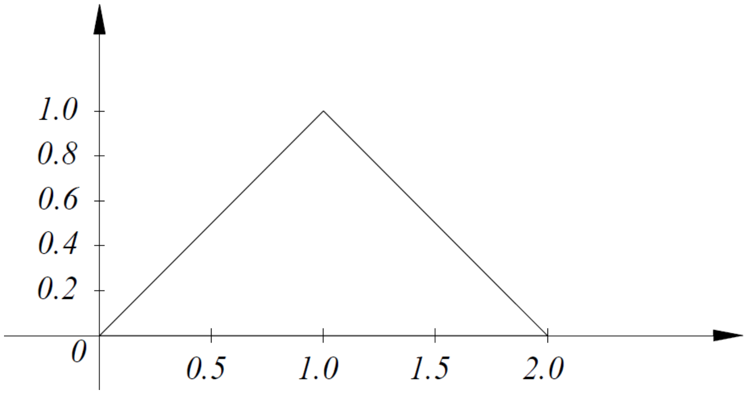
$$\begin{cases} 0 < u < 1 \\ x - 1 < u < x \end{cases}.$$

1) За $0 < x \le 1$ и двата услови се исполнети ако: $0 < u < x$:

$$g_Y(x) = \int_0^x f(u)\, f(x-u)\, du = \int_0^x du = x\,.$$

2) За $1 < x < 2$, мора да важи: $x-1 < u < 1$:

$$g_Y(x) = \int_{x-1}^{1} f(u)\, f(x-u)\, du = \int_{x-1}^{1} du = 2 - x\,.$$



б) Во оваа ситуација, пресметките како во претходниот случај се покомплицирани. Па, затоа запишуваме:

$$f(x) = u(x) - u(x-1),$$

каде што u е единечната степенеста функција. Лапласовата трансформација на функцијата на густина на распределба е:

$$f^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}\,.$$

Овде кај Лапласовата трансформација, на конволуцијата одговара множење. Па,

$$g_Z{}^*(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right)^3 = \frac{1}{s^3}\left(1 - 3e^{-s} + 3e^{-2s} - e^{-3s}\right).$$

Оригиналот на оваа функција, (инверзна Лапласова трансформација на функцијата $g_Z{}^*$), ја дава бараната функција на густина на распределба:

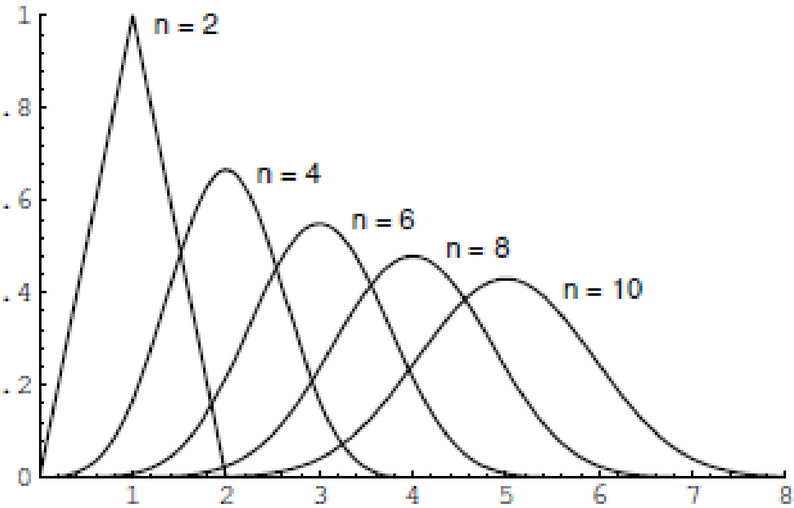
$$g_Z(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}(x-1)^2 u(x-1) + \frac{3}{2}(x-2)^2 u(x-2) - \frac{1}{2}(x-3)^2 u(x-3)$$

.

На тој начин, ја добиваме функцијата на густина на распределба на случајната променлива Z:

$$g_Z(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\le x\le 1\\ -x^2+3x-\frac{3}{2}, & 1\le x\le 2\\ \frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}, & 2\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}.$$

Во прилог е дадена слика на која се дадени графиците на функции на густина на распределба на случајни променливи кои се збир на n-независни случајни променливи со рамномерна распределба.



♦

Пример 6. Случајниот вектор (X,Y) има функција на густина на распределба дадена со функцијата:

$$f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right),$$

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

а) Докажи дека случајните променливи X и $Z=\dfrac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$ се независни случајни променливи, секоја од нив со нормална распределба:

б) Пресметај ја веројатноста: $p(X>0,\ Y>\rho X)$.

Решение.

а) Нека го разгледаме системот од трансформации $x=x$, $z=\dfrac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}$. Системот има инверзни трансформации $x=x$, $y=\rho x+z\sqrt{1-\rho^2}$, па јакобијанот на трансформацијата е:

$$|J|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \rho & \sqrt{1-\rho^2}\end{vmatrix}=\sqrt{1-\rho^2}.$$

Функцијата на густина на распределба за случајниот вектор (X,Z) е:

$$f_{XZ}(x,z)=f_{XY}(x,\rho x+z\sqrt{1-\rho^2})\cdot\sqrt{1-\rho^2},\ (x,z)\in\mathbb{R}^2.$$

Имаме:

$$f_{XZ}(x,z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(1-\rho^2)(x^2+z^2)\right)\cdot\sqrt{1-\rho^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+z^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}=f_X(x)\cdot f_Z(z),$$

каде што X и Z се независни случајни променливи со нормална $N(0,1)$ распределба.

б) Врз основа на дискусијата под а), имаме:

$$p(X>0,Y>\rho X)=p(X>0,Z>0)=p(X>0)\cdot p(Z>0)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.\ \blacklozenge$$

Пример 7. Со ракета се гаѓа некоја цел, за која е претпоставено дека се наоѓа во центарот на еден правоаголен координатен систем. Ракетата ја погаѓа точката со координати (X,Y), каде што X и Y се независни случајни променливи со нормална распределба $X,Y:N(0,1)$. Најди ја функцијата на густина на распределба на растојанијата на погодокот до координатниот почеток.

Решение. Бидејќи X и Y се независни случајни променливи, имаме дека:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Растојанието до погодокот е дадено со случајата променлива $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$. Го разгледуваме системот од трансформации $X=X$, $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$. Системот на инверзни трансформации е $X=X$, $Y=\pm\sqrt{Z^2-X^2}$. Јакобијанот на инверзната трансформација е $J=\pm\dfrac{z}{\sqrt{z^2-x^2}}$. Оттука, добиваме:

$$\begin{aligned} f_{XZ}(x,z) &= f_{XZ}(x,\sqrt{z^2-x^2})\left|\frac{z}{\sqrt{z^2-x^2}}\right| + f_{XZ}(x,-\sqrt{z^2-x^2})\left|-\frac{z}{\sqrt{z^2-x^2}}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+z^2-x^2)}\frac{z}{\sqrt{z^2-x^2}} + \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(X^2+z^2-x^2)}\frac{z}{\sqrt{z^2-x^2}} \\ &= \frac{z}{\pi\sqrt{z^2-x^2}}e^{-\frac{1}{2}z^2},\ z\ge 0,\ |x|<|z|. \end{aligned}$$

Маргиналната функција на густина на распределба за случајната променлива Z е дадена со:

$$f_Z(z)=0,\ z<0$$

и:

$$f_Z(z)=\int_{-z}^{z}\frac{z}{\pi\sqrt{z^2-x^2}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dx = \frac{z}{\pi}e^{-\frac{1}{2}z^2}\int_{-z}^{z}\frac{1}{\sqrt{z^2-x^2}}\,dx = ze^{-\frac{1}{2}z^2},\ z\ge 0. \ \blacklozenge$$

Пример 8. Да разгледаме призма чија основа е квадрат со должина на страна X и висина Y. Случајните променливи X и Y се независни случајни променливи и имаат рамномерна $U(1,2)$ и $U(2,3)$, распределба, соодветно.

а) Најди ја функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (B,Y), каде што B е плоштината на основата:

б) Колкав е очекуваниот волумен на призмата?

Решение.

а) Функцијата на густина на распределба на случајната променлива X е дадена со:

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in(1,2)\\ 0, & x\notin(1,2)\end{cases}.$$

Плоштината на основата е $B = X^2$. Инверзната трансформација од $b = x^2$ на интервалот $(1,2)$ е $x = +\sqrt{b}$. Нејзиниот извод е $x' = \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$.

Интервалот $(1,2)$ со квадратната функција $b = x^2$ се пресликува во интервалот $(1,4)$. Тогаш:

$$f_{BY}(b) = f_X(\sqrt{b})\,|\,x'\,| = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{b}}, & b \in (1,4) \\ 0, & b \notin (1,4) \end{cases}.$$

Бидејќи X и Y се независни случајни променливи, тогаш и B и Y се независни случајни променливи, па:

$$f_{BY}(b, y) = f_B(b) \cdot f_Y(y).$$

Од условот на задачата, имаме дека:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in (2,3) \\ 0, & y \notin (2,3) \end{cases}.$$

Па,

$$f_{BY}(b, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{b}}, & b \in (1,4) \text{ } и \text{ } y \in (2,3) \\ 0, & b \notin (1,4) \text{ } или \text{ } b \notin (2,3) \end{cases}.$$

б) Волуменот на призмата се пресметува со формулата $V = B \cdot Y$. Тогаш:

$$E(V) = \int_{\mathbb{R}^2} by \cdot f_{BY}(b, y)\, db\, dy = \int_1^4 \int_2^3 by \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}}\, db\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{b}\, db \int_2^3 y\, dy = 5{,}8\,. \ \blacklozenge$$

Пример 9. Нека X и Y се независни случајни променливи со единечна (стандардна) нормална распределба. Најди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива: $Z = \dfrac{Y}{X}$.

Решение. За функцијата на густина на распределба на случајната променлива Z имаме:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, zx)\,|\,x\,|\,dx\,.$$

Поради независноста на случајните променливи X и Y, имаме: $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$. Па,

$$g(z) = -\int_{-\infty}^{0} x f_X(x) f_Y(zx)\,dx + \int_{0}^{+\infty} x f_X(x) f_Y(zx)\,dx,$$

каде што:

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Па,

$$g(z) = -\int_{-\infty}^{0} x\cdot\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)}\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)}\,x\,dx = -\frac{1}{\pi(1+z^2)} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+z^2)}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}.$$

Според ова, количникот на две независни случајни променливи кои имаат единечна нормална распределба, е случајна променлива која има Кошиева распределба.

Ако $X : N(0,\sigma_1{}^2)$ и $Y : N(0,\sigma_2{}^2)$, тогаш важи:

$$g(z) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot\frac{1}{\pi\left(1+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}z\right)^2\right)}. \blacklozenge$$

Кога пресликувањата не се инјективни, но и кога е непрактично да се користат горниве формули, функцијата на густина на распределба на случајната променлива Z се наоѓа со помош на функција на распределба:

$$F_Z(z) = p(\Psi(X,y) < z) = \iint_{G_Z} f(x,y)\,dxdy,$$

каде што:

$$G_Z = \{(x,y) : \psi(x,y) < z\}.$$

Пример 10. Случајниот вектор (X,Y) има функција на густина на распределба:

$$f(x,y) = x + y, \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$$

Одреди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива:

$$Z = X + Y\,.$$

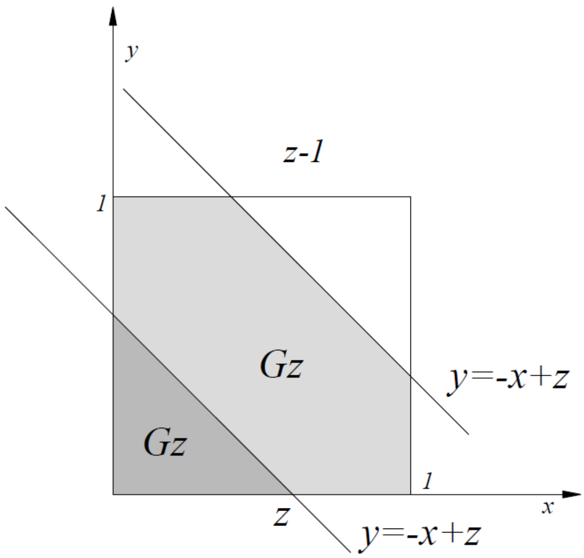
Решение. Случајната променлива Z прима вредности на интервалот $[0,2]$. Имаме,

$$F_Z(z) = p(Z < z) = p((X,Y) \in G_Z) = \iint\limits_{G_Z} f(x,y)\,dxdy\,,$$

каде што:

$$G_Z = \{(x,y) : x + y < z\}$$

е подрачјето означено на сликата.



Разликуваме два случаја:

1) $0 \le z \le 1,\quad F_Z(z) = \int\limits_0^z dx \int\limits_0^{z-x} (x+y)\,dy = \dfrac{z^3}{3}$

2) $1 \le z \le 2,\quad F_Z(z) = 1 - \int\limits_{z-1}^{1} dx \int\limits_{z-x}^{1} (x+y)\,dx = \dfrac{1}{3}(-z^3 + 3z^2 - 1)\,.$

Па,

$$g_Z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 \le z \le 1 \\ 2z - z^2, & 1 \le z \le 2 \end{cases}.$$

Овој резултат може да се добие и со претходната формула:

$$g_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx\,.$$

Променливата x, прима вредности во внатрешноста на интервалот $[0,1]$, односно важи за $x \notin [0,1]$, $f(x,y)=0$. Па,

$$g_Z(z)=\int_0^1 f(x,z-x)\,dx.$$

Втората променлива на функцијата y, исто така, мора да биде во внатрешноста на интервалот $[0,1]$. Разликуваме два случаја:

1) $0 \le z \le 1$. Тогаш, $z-x \le 1$, па избираме x да биде таков што $z-x \ge 0$, т.е. $x \le z$:

$$g_Z(z)=\int_0^z f(z,z-x)\,dx=\int_0^z (x+z-x)\,dx=z^2.$$

2) $1 \le z \le 2$. Сега важи $z-x \ge 0$, но мора да важи и $z-x \le 1$, т.е. $x \ge z-1$:

$$g_Z(z)=\int_{z-1}^1 f(x,z-x)\,dx=\int_{z-1}^1 (x+z-x)\,dx=2z-z^2. \blacklozenge$$

Пример 11. Независните случајни променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ имаат експоненцијална распределба со параметри $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Докажи дека случајната променлива $Y=\min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ има исто така експоненцијална распределба, со параметар:

$\lambda=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$.

Решение. Важи:

$$F_Y(y)=p(Y<y)=1-p(Y \ge y)$$
$$=1-p(\min\{X_1, X_2, ..., X_n\} \ge x)=1-p(X_1 \ge x, X_2 \ge x, ..., X_n \ge x\}.$$

Поради независноста на случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$, добиваме:

$$F_Y(x)=1-p(X_1 \ge x)\cdot p(X_2 \ge x)\cdot ... \cdot p(X_n \ge x)$$
$$=1-e^{-\lambda_{11}x}e^{-\lambda_2 x}\cdot ... \cdot e^{-\lambda_n x}=1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)x},$$

односно: $Y : E(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n)$.

Резултатот од овој пример ја има следнава интерпретација: во еден систем во кој има n-сериски поврзани компоненти, од кои секоја од нив има очекувано време на работа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, очекуваното време на работа на целиот систем λ е дадено со формулата:

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}. \blacklozenge$$

8.2. Решени задачи

Задача 1. Нека случајната променлива X има нормална $N(0,1)$ распределба, а случајната променлива Y има рамномерена $U(-1,1)$ распределба. Најди ја функцијата на густина на распределба за случајната променлива $Z=X+Y$, ако знаеме дека X и Y се независни случајни променливи.

Решение. Функцијата на густина на распределба на случајната променлива X е дадена со:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x\in\mathbb{R},$$

додека функцијата на густина на распределба на случајната променлива Y е:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in(-1,1)\\ 0, & y\notin(-1,1)\end{cases}.$$

Бидејќи случајните променливи X и Y се независни случајни променливи важи:

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, & x\in\mathbb{R},\ y\in(-1,1)\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

Да го разгледаме системот од трансформации $X=X$, $Z=X+Y$. Јакобијанот на инверзните трансформации е $J=1$, од каде што добиваме дека:

$$f_{XZ}(x,z)=f_{XY}(x,z-x)\cdot|J|$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, & x\in\mathbb{R},\quad x-1<z<x+1\\ 0, & \text{инаку}\end{cases}.$$

Па, маргиналната функција на густина на распределба за случајната променлива Z е дадена со:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{z-1}^{z+1} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \frac{1}{2}\big(\Phi(z+1) - \Phi(z-1)\big), \;\; z \in \mathbb{R},$$

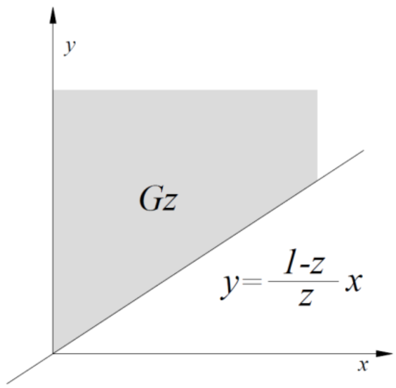
каде што $\Phi(z)$ е функција на распределба за нормалната распределба $N(0,1)$.

Задача 2. Нека X и Y се независни случајни променливи со експоненцијална распределба $E(\lambda)$. Најди ја функцијата на распределба на случајната променлива:

$$Z = \frac{X}{X+Y}.$$

Решение. Бидејќи X и Y се позитивни, следува дека: $0 < Z < 1$. Функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) е:

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, \qquad x, y > 0.$$



Така, имаме:

$$F_Z(z) = p\left(\frac{X}{X+Y} < z\right) = p\left(Y > \frac{1-z}{z}X\right) = p((X,Y) \in G_Z)$$

$$= \iint_{G_Z} f(x,y)\, dxdy = \int_0^{+\infty} dx \int_{\frac{1-z}{z}x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\, dy$$

$$= \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx \int_{\frac{1-z}{z}x}^{+\infty} e^{-\lambda y}\, dy = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda x}{z}}\, dx = z.$$

Според тоа, случајната променлива Z има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$.

Задача 3. Независните случајни променливи X и Y се зададени со своите функции на густини на распределба:

$$f_X(x) = e^{-x}, \qquad x > 0,$$

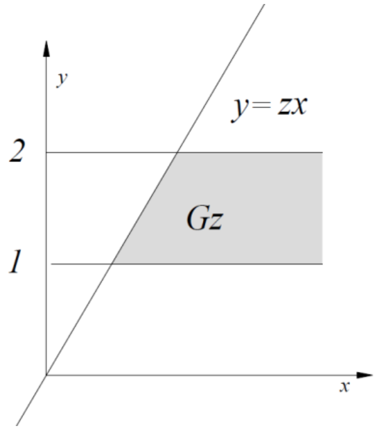
$$f_Y(y) = 1, \qquad 1 \le y \le 2.$$

Најди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива: $Z = \dfrac{Y}{X}$.

Решение. Од независноста на случајните променливи X и Y, имаме:

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = e^{-x},$$

на областа $x > 0, 1 \le y \le 2$.



Затоа,

$$F_Z(z) = p\left(\frac{Y}{X} < z\right) = p((X,Y) \in G_Z) = \iint_{G_Z} f_X(x) f_Y(y)\,dxdy$$

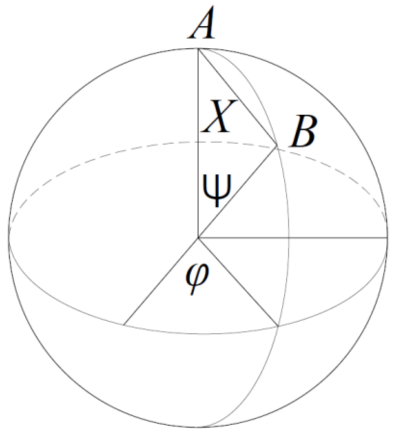
$$= \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{z}}^{+\infty} e^{-x}\,dx = -z(e^{-\frac{2}{z}} - e^{-\frac{1}{z}}), \qquad z > 0.$$

Добиваме:

$$g_Z(z) = F_Z'(z) = e^{-\frac{1}{z}} - e^{-\frac{2}{z}} + \frac{1}{z}e^{-\frac{1}{z}} - \frac{2}{z}e^{-\frac{2}{z}}, \qquad z > 0.$$

Задача 4. На сфера со радиус R избрани се случајно две точки A и B. Најди ја функцијата на распределба и пресметај го математичкото очекување на растојанието помеѓу нив.

Решение. Нека ја фиксираме точката A, во северната полусфера, по нејзиниот избор. Точката B има рамномерна распределба на сферата. Да ги означиме со (R,Φ,Ψ) сферните координати. Бидејќи првата координата е константна, доволно е да се најде функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (Φ,Ψ).



Нека dS е елемент од површината на сферата. Бидејќи точката B се избира случајно, имаме:

$$p(B\in dS)=\frac{dS}{4\pi R^2}=\frac{R^2\sin\psi d\Psi d\varphi}{4\pi R^2}\ ,$$

па,

$$f(\psi,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\sin\psi,\qquad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\psi\le\pi$$

е функција на густина на распределба на векторот (Ψ,Φ). За случајната променлива X, која е оддалеченоста помеѓу точките A и B, важи:

$$X=2R\sin\frac{\Psi}{2}.$$

Ќе ја определиме функцијата на распределба на случајната променлива X:

$$F(x)=p\left(2R\sin\frac{\psi}{2}<X\right)=P\left(\psi<2\arcsin\frac{x}{2R}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\arcsin\frac{x}{2R}} \frac{1}{4\pi}\sin\psi\, d\psi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2\arcsin\frac{x}{2R}\right)$$

$$= \sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2R}\right) = \left(\frac{x}{2R}\right)^2.$$

Па,

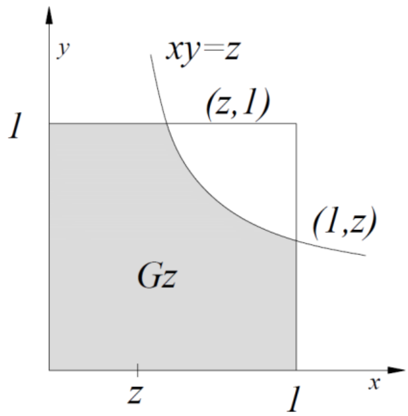
$$f(x) = \frac{x}{2R^2}, \qquad 0 \le x \le 2R.$$

Оттука,

$$E(X) = \int_0^{2R} x \cdot \frac{x}{2R^2}\, dx = \frac{4}{3}R.$$

Задача 5. Случајниот вектор (X,Y) има функција на густина на распределба $f(x,y) = 4xy$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Најди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива $Z = XY$, а потоа нејзиното математичко очекување.

Решение. Случајната променлива Z прима вредности во интервалот $[0,1]$.



Сега,

$$F_Z(z) = p(Z < z) = p(XY < z) = \iint_{G_Z} f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_0^z dx \int_0^1 4xy\, dy + \int_z^1 dx \int_0^{\frac{z}{x}} 4xy\, dy = z^2 - 2z^2 \ln z, \quad 0 \le z \le 1.$$

Следува:

$$g_Z(z) = -2z\,lnz^2\,, \qquad\qquad 0 \le z \le 1.$$

Математичкото очекување можеме да го пресметаме на повеќе начини:

1) Со помош на веќе пресметаната функција на густина на распределба на случајната променлива Z:

$$E(Z) = -\int_0^1 2z^2 \ln z^2\, dz = -4\int_0^1 z^2 \ln z = \frac{4}{9}.$$

2) Директно,

$$E(Z) = E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} zf(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 4xy\cdot xy\,dxdy = \frac{4}{9}.$$

3) Случајните променливи X и Y се независни, бидејќи $f(x,y) = 4xy = 2x\cdot 2y = f_X(x)\cdot f_Y(y)$, па важи:

$$E(X) = E(Y) = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

$$E(Z) = E(X)\cdot E(Y) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Задача 6. Нека е даден случајниот вектор (X,Y). Одреди ја функцијата на густина на распределба g на случајната променлива $Z = \max\{X,Y\}$, ако е позната:

а) функцијата на густина на распределба f на случајниот вектор (X,Y);

б) функциите на густини на распределба f_X и f_Y, ако X и Y се независни случајни променливи;

в) функцијата на густина на распределба $x \mapsto f(x)$, ако X и Y се независни случајни променливи со иста распределба.

Решение. Нека F е функција на распределба на случајниот вектор (X,Y).

Тогаш,

$$F_Z(z) = p(Z < z) = p(\max\{X,Y\} < z) = p(X < z, Y < z)$$

$$= F(z,z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f(x,y)\,dxdy.$$

а) Во овој случај:

$$g_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f(x,y)\,dx\,dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{z} f(z,y)\,dy + \int_{-\infty}^{z} f(x,z)\,dx .$$

б) Бидејќи X и Y се независни, важи: $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$. Заменувајќи во формулата, добиваме:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_X(x) f_Y(y)\,dy + \int_{-\infty}^{z} f_X(x) f_Y(y)\,dx$$

$$= f_X(z)\int_{-\infty}^{z} f_Y(y)\,dy + f_Y(z)\int_{-\infty}^{z} f_X(x)\,dx$$

$$= f_X(x) F_Y(z) + f_Y(z) F_X(z) .$$

в) Сега важи: $f_X = f_Y = f$ и $F_X = F_Y = F$, па добиваме:

$$g_Z(z) = 2 f(z) F(z) .$$

Задача 7. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи со експоненцијална распределба со параметар λ. Најди ја функцијата на распределба на случајната променлива:

$$Y = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\} .$$

Решение. Имаме:

$$F_Y(x) = p\left(\max\{X_1, X_2, ..., X_n\} < x\right) = p(X_1 < x, X_2 < x, ..., X_n < x)$$

$$= p(X_1 < x)\cdot p(X_2 < x)\cdot ...\cdot p(X_n < x) = (1 - e^{-\lambda x})^n .$$

Задача 8. Функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) е:

$$f(x,y) = \frac{2}{\pi}(1 - x^2 - y^2), \qquad x^2 + y^2 \le 1 .$$

Одреди ја функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (R,Φ), каде R и Φ се поларните координати на точката (X,Y).

Решение. Со формулите:

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = arctg\,\dfrac{y}{x} \end{matrix}$$

е дефинирано бијективно пресликување на кругот $\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$ во правоаголникот $\{(r,\varphi): 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Затоа,

$$g(r,\varphi) = f(x,y) \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-r^2)r, \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi .$$

Задача 9. Нека се дадени независните случајни променливи со експоненцијална распределба, $X : E(\lambda)$ и $Y : E(\mu)$.

а) Најди ја функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (U,V), каде што:

$$U = X + Y, \qquad V = \frac{X}{X+Y};$$

б) Најди ја маргиналната распределба за случајната променлива V.

Решение.

а) Бидејќи $X : E(\lambda)$, $Y : E(\mu)$ се независни случајни променливи, функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (X,Y) е дадена со:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y}, & x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 0, & \textit{инаку} \end{cases}.$$

Системот на трансформации $u = x + y$, $v = \dfrac{x}{x+y}$ има инверзен систем на трансформации $x = uv$, $y = u(1-v)$, чиј јакобијан на трансформацијата е: $|J| = \begin{vmatrix} u & v \\ -u & 1-v \end{vmatrix} = u$. Областа $x \ge 0$, $y \ge 0$ се пресликува во областа $u \ge 0$, $v \ge 0$, $v \le 1$. Па, функцијата на густина на распределба за случајниот вектор (U,V) е:

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(uv, u(1-v))\,|J|$$

$$= \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda uv} e^{-\mu u(1-v)} u, & u \ge 0,\ v \in [0,1] \\ 0, & \textit{инаку} \end{cases}.$$

б) Маргиналната функција на густина на распределба за случајната променлива V е дадена со:

$$f_V(v) = 0, \ v \notin [0,1]$$

и:

$$f_V(v)=\int_0^{+\infty}\lambda\mu e^{-\lambda uv}e^{-\mu u(1-v)}u\,du=\frac{\lambda\mu}{(\lambda v+\mu(1-v))},\ v\in[0,1].$$

Задача 10. Случајниот вектор (X,Y,Z) има функција на густина на распределба:

$$f(x,y,z)=(y-z)e^{-x},\qquad x\ge 0,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le y.$$

Најди ја функцијата на густина на распределба на случајната променлива $W=X-Y+Z$.

Решение. Надополнуваме до пресликување $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases}u=x\\ v=y\\ w=x-y+z\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=u\\ y=v\\ z=-u+v+w\end{cases}.$$

Јакобијанот на ова пресликување гласи:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=1$$

и функцијата на густина на распределба на случајниот вектор (U,V,W) е дадена со:

$$g(u,v,w)=f(x,y,z)\cdot 1=f(u,v,-u+v+w)=(u-v)e^{-w}.$$

Меѓутоа, мораме да ја одредиме областа на која функцијата g е дефинирана:

$$\begin{matrix}0\le x\\ 0\le y\le x\\ 0\le z\le y\end{matrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{matrix}0\le u\\ 0\le v\le u\\ u-v\le w\le u\end{matrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{matrix}0\le w\\ w\le u\\ u-w\le v\le u\end{matrix}.$$

Сега,

$$g_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}g(u,v,w)\,dv=\int_{w}^{+\infty}du\int_{u-v}^{u}(u-v)e^{-w}\,dv$$

$$=\int_{w}^{+\infty}w(u-w)e^{-u}\,du=we^{-w},\qquad w\ge 0.$$

Задача 11. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни случајни променливи со рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$. Ја дефинираме дискретната случајна променлива V со:

$$V = \min\{n : X_1 + X_2 + ... + X_n > 1\}.$$

Докажи дека $E(V) = e$.

Решение. Нека означиме $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Ќе пресметаме $F_n(x) = p(S_n \le x)$, за $x \le 1$. За $n = 1$, важи:

$$F_1(x) = p(X_1 \le x) = x.$$

За $n = 2$,

$$F_2(x) = p(X_1 + X_2 \le x) = \iint\limits_{\{x_1 + x_2 \le x\}} dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^x dx_2 \int_0^{x - x_2} dx_1 = \int_0^x (x - x_2)\, dx_2 = \frac{x^2}{2}.$$

Тврдиме дека $F_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Со помош на математичка индукција, се докажува дека:

$$F_{n+1}(x) = p(X_1 + X_2 + ... + X_n + X_{n+1} \le x)$$

$$= \int_0^x dx_{n+1} \iint\limits_{\{x_1 + x_2 + ... + x_n \le x - x_{n+1}\}} dx_1 \cdot ... \cdot dx_n$$

$$= \int_0^x F_n(x - x_{n+1})\, dx_{n+1} = \int_0^x \frac{(x - x_{n+1})^n}{n!} dx_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Сега,

$$p(V > n) = p(X_1 + X_2 + ... + X_n \le 1) = F_n(1) = \frac{1}{n!}, \qquad n \ge 2.$$

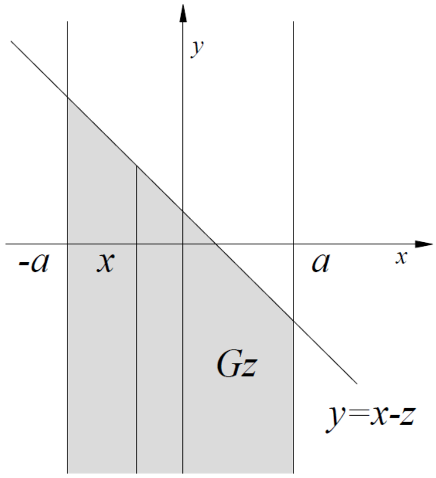
$$p(V = n) = p(V > n-1) - p(V > n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-2)!}.$$

Па,

$$E(V) = \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n(n-2)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} = e.$$

Задача 12. Најди ја функцијата на распределба на збирот на две независни случајни променливи, од кои една има рамномерна распределба на интервалот $[-a, a]$, а другата е зададена со функција на распределба F.

Решение. Нека првата случајна променлива ја означиме со X, а втората случајна променлива ја означиме со Y и нека $Z = X + Y$.



Тогаш,

$$F_Z(z) = p(X + Y < z) = p((X,Y) \in G_Z)$$

$$= \int_{-a}^{a} p(Y < z - x) f_X(x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} F_Y(z - x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{z-a}^{z+a} F(t)\,dt\,.$$

Задача 13. Дадени се три отсечки со должини кои се три случајно избрани броеви од интервалот $[0,a]$. Пресметај ја веројатноста дека од овие три отсечки може да се состави триаголник.

Решение. Нека X, Y, Z се случајни променливи кои ги означуваат трите должини на отсечките. Од нив ќе може да се состави триаголник ако важи:

$$X + Y \geq Z,\; X + Z \geq Y,\; Y + Z \geq X\,.$$

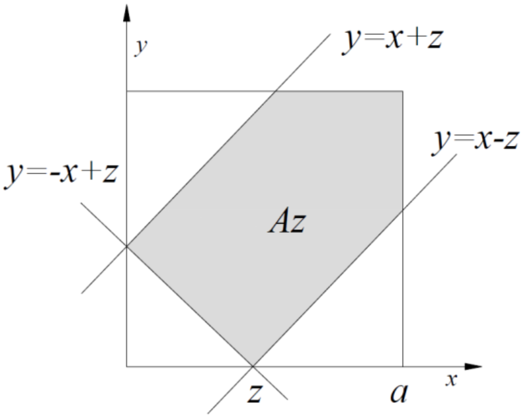
Според ова, задачата може да се реши користејќи ги техниките кај геометриска веројатност. Изборот на случајниот вектор (X, Y, Z) одговара на случајниот избор на точка во внатрешноста на коцка со страна a, поставена во прворот октант. Горните услови, од коцката отсекуваат дел, кој одговара на бараниот настан. Овде е малку тешко да се забележи во кој дел се дели коцката. Па, ќе се повикаме на условните веројатности. Ја бараме веројатноста на настанот:

$$A = \{X + Y \geq Z,\; Z + X \geq Y,\; Y + Z \geq X\}.$$

Ќе ја фиксираме вредноста на случајната променлива Z. Тогаш, горните услови, преминуваат во:

$$\{A \mid Z = z\} = \{X + Y \geq z,\ X - Y \geq -z,\ X - Y \leq z\}$$
$$= \{|\ X - Y\ | \leq z,\ X + Y \geq z\} = A_z.$$

Множеството A_z е подмножество од квадратот со страна a во xOy-рамнината дадена на сликата подолу.



Веројатноста која одговара на ова множество е:

$$p(A_z) = \frac{2az - \frac{3}{2}z^2}{a^2}.$$

Функцијата на густина на распределба на случајната променлива Z е: $f_Z(z) = \frac{1}{a}$, $0 < z < a$. Затоа, имаме:

$$p(A) = \int_0^a p(A \mid Z = z)\, f_Z(z)\, dz = \int_0^a \frac{1}{a^2}\left(2az - \frac{3}{2}z^2\right) \cdot \frac{1}{a} dz = \frac{1}{2}.$$

Задача 14. Нека $X : E(\lambda)$, $Y : E(\mu)$ и $Z : E(\nu)$ се независни случајни променливи со експоненцијална распределба. Најди ја веројатноста: $p(X < Y < Z)$.

Решение. Бидејќи $X : E(\lambda)$, $Y : E(\mu)$ и $Z : E(\nu)$ се независни случајни променливи, имаме:

$$f_{XYZ}(x, y, z) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z)$$

$$= \begin{cases} \lambda\mu\nu e^{-\lambda x-\mu y-\nu z}, & x, y, z \geq 0 \\ 0, & x < 0 \ \text{или} \ y < 0 \ \text{или} \ z < 0 \end{cases}.$$

Па,

$$p(X < Y < Z) = \int_{0}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty}\int_{y}^{+\infty} \lambda\mu\nu e^{-\lambda x-\mu y-\nu z}\, dx\, dy\, dz = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu+\nu)(\mu+\nu)}.$$

Задача 15. Нека $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ се независни случајни променливи, така што секоја од нив има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$.

а) Најди ја веројатноста дека од стапови со должини X_1, X_2 и X_3 може да се конструира триаголник.

б) Обопшти го решението под а) и најди ја веројатноста дека од n-стапови може да се конструира n-аголник.

Решение.

а) Имајќи предвид дека случајните променливи се независни, функцијата на густина на распределба за случајниот вектор (X_1, X_2, X_3) е дадена со:

$$f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ 0, & \text{инаку} \end{cases},$$

каде што $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ е единечна коцка во $\mathbb{R}^3$. Од условот, за да може да се конструира триаголник, мора да важи: $X_1 + X_2 > X_3$, $X_1 + X_3 > X_2$, $X_2 + X_3 > X_1$. Па, за бараната веројатност имаме:

$$p = p(X_1 + X_2 > X_3, X_1 + X_3 > X_2, X_2 + X_3 > X_1)$$

$$= \iiint_A f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_A dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

каде што:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega : x_1 + x_2 > x_3,\ x_1 + x_3 > x_2,\ x_2 + x_3 > x_1\}.$$

За да го пресметаме овој интеграл во $\mathbb{R}^3$ (волуменот на областа A), преоѓаме на спротивната веројатност:

$$p = 1 - (p(X_1 + X_2 \leq X_3) + p(X_1 + X_3 \leq X_2) + p(X_2 + X_3 \leq X_1))$$

$$= \iiint_K f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

каде што K е множество во $\mathbb{R}^3$ кое се добива од коцката Ω кога ќе се отстранат трите триедри со заедничко теме во координатниот почеток. Во согласност со ова,

$$p(X_1 + X_2 \le X_3) = \iiint\limits_V f_{X_1X_2X_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_{x_1+x_2}^{1} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{1}{6}.$$

Од причини на симетрија,

$$p(X_2 + X_3 \le X_1) = p(X_1 + X_3 \le X_2) = \frac{1}{6}.$$

Конечно, бараната веројатност е:

$$p - 1 - 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

б) За да може да се конструира n-аголник, мора да бидат задоволени следниве n-услови:

$$X_1 > X_2 + X_3 + \ldots + X_n,\ X_2 > X_1 + X_3 + \ldots X_n, \ldots,$$

$$X_n > X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}.$$

Бараната веројатност ја добиваме на тој начин што од волуменот на n-димензионалната коцка (чиј „волумен“ е 1) го одземаме n-пати волуменот на n-димензионалниот тетраедар. Аналогно, како во случајот во а), волуменот на еден таков тетраедар е:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \ldots \int_0^{1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{n!}.$$

Па, бараната веројатност е:

$$p = 1 - \frac{1}{(n-1)!}.$$

Задача 16. Познато е дека ако случајно се избере некој број од книга (број на страна или број во текстот), првите две цифри на тој број X и Y имаат заеднички закон на распределба, која уште се нарекува Бенфордова распределба:

$$p(X=x,\, Y=y)=\log_{10}\left(1+\frac{1}{10x+y}\right),$$
$$x\in\{1,2,...,9\},\; y\in\{01,2,...,9\}.$$

а) Најди ги маргиналните функции на густини на распределба за случајните променливи X и Y. Дали X и Y се независни случајни променливи?

б) Најди го коефициентот на корелација ρ_{XY}.

Решение.

а) Маргиналната функција на густина на распределба на случајната променлива X е дадена со:

$$P(X=x)=\sum_{y=0}^{9}p(X=x,Y=y)=\sum_{y=0}^{9}\log_{10}\left(1+\frac{1}{10x+y}\right)$$
$$=\log_{10}\prod_{y=0}^{9}\left(1+\frac{1}{10x+y}\right)=\log_{10}\left(1+\frac{1}{x}\right),$$
$$\text{за } x=1,2,3,4,5,6,7,8,9.$$

Маргиналната функција на распределба на случајната променлива Y е дадена со:

$$p(Y=y)=\sum_{x=1}^{9}p(X=x,Y=y)$$
$$=\log_{10}\prod_{x=1}^{9}\left(1+\frac{1}{10x+y}\right),$$

за $y=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

Случајните променливи не се независни. На пример, за $x=1$, $y=0$, важи:

$$p(X=1,Y=0)=0,0414\neq p(X=1)\cdot p(Y=0)=0,036.$$

б) Коефициентот на корелација ρ_{XY} се пресметува со формулата:

$$\rho_{XY}=\frac{E(X)E(Y)-E(XY)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Бидејќи,

$$E(X)=\sum_{x=1}^{9}x\cdot\log_{10}\left(1+\frac{1}{x}\right)=3,44,$$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{9} y \cdot \log_{10} \prod_{x=1}^{9} \left(1 + \frac{1}{10x+y}\right) = 4{,}19\,,$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{9} x^2 \cdot \log_{10} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 17{,}89\,,$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=0}^{9} y^2 \cdot \log_{10} \prod_{x=1}^{9} \left(1 + \frac{1}{10x+y}\right) = 25{,}79\,,$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 6{,}06\,,$$

$$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 8{,}25\,,$$

$$E(XY) = \sum_{x=1}^{9} \sum_{y=0}^{9} xy \cdot \log_{10} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \log_{10} \prod_{x=1}^{9} \left(1 + \frac{1}{10x+y}\right) = 14{,}4\,,$$

за коефициентот на корелација на случајните променливи X и Y добиваме:

$$\rho_{XY} = \frac{E(X)E(Y) - E(XY)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} \approx 0\,,$$

што значи дека случајните променливи X и Y се некорелирани.

9. Закон на големи броеви и централна гранична теорема

Два најважни закона во теоријата на веројатност се законот на големи броеви и централната гранична теорема. Овие два закона го објаснуваат граничното однесување на низа од случајни променливи. Овде ќе ги дадеме и докажеме овие закони со едноставни претпоставки за случајните променливи.

9.1. Закон на големи броеви

На почетокот од развојот на теоријата на веројатност, овој дел е сметан за дел од физиката. Ако некој експеримент може да се изведува во непроменети услови неограничен број пати, веројатноста на настанот се дефинира како $\frac{m}{n}$, односно неговата релативна фреквенција на појавување.

Денес на оваа физичка дефиниција на веројатноста се гледа како на едноставна примена на законот за големи броеви.

Ќе го опишеме детално експериментот кој води кон оваа дефиниција. Со негова помош ќе ни биде поедноставно да ги разбереме различните дефиниции на конвергенција.

Нека A е настан, кој го разгледуваме и нека $p = p(A)$ е веројатноста на настанот кој го разгледуваме. Индикаторска случајна променлива ги прима вредностите: 1 ако тој настан се реализирал и 0, ако настанот не се реализирал. Нека I_k е индикаторска случајна променлива која го следи реализирањето на настанот A, во k независни експерименти. Тогаш сите случајни променливи $I_1, I_2, \dots$ имаат идентична распределба, меѓусебно се независни:

$$I_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Математичкото очекување на оваа случајна променлива е p, а дисперзијата е pq.

Ако се експериментот се изведува n-пати, тогаш бројот на реализации на настанот A е еднаков на збирот $I_1 + I_2 + \dots + I_n$. Со тоа е дефинирана случајната променлива $X_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$. За оваа случајна променлива знаеме дека има биномна распределба со параметри n и p.

Ако ја видиме дефиницијата на индикаторската случајна променлива, нејзината распределба е $B(1, p)$. Збирот на независни копии од овие случајни променливи, има, исто така, биномна распределба со параметри n и p.

Релативната фреквенција на појавување на настанот A во n-независни експерименти изнесува:

$$\frac{I_1 + I_2 + ... + I_n}{n} = \frac{X_n}{n}.$$

За да ја оправдаме физичката дефиниција на веројатноста, мораме да покажеме дека разликата:

$$\left| \frac{X_n}{n} - p \right| < \varepsilon ,$$

за произволно мало $\varepsilon > 0$. Оваа разлика е случајна променлива, па мораме да утврдиме на кој начин ќе ја мериме нејзината големина. Во граничниот случај, ќе пишуваме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = p ,$$

со тоа што најпрво мораме да утврдиме што е гранична вредност на случајна променлива.

Конвергенцијата на низа од случајни променливи не е еднозначен поим, бидејќи постојат различни дефиниции за конвергенција.

Дефиниција 1. Низата (X_n) конвергира по веројатност кон случајната променлива Y, ако за секој $\varepsilon > 0$, важи:

$$\lim_{n\to\infty} p(| X_n - Y |> \varepsilon) = 0 .$$

Означуваме: $X_n \xrightarrow{p} Y$.

Во оваа дефиниција за конвергенција, веројатноста на отстапување служи како мерка за блискост на две случајни променливи. Формулата во горната дефиниција може да се запише и како:

$$\lim_{n\to\infty} p(| X_n - Y |< \varepsilon) = 1 .$$

Овде, ќе ги дадеме неравенствата на Марков и Чебишев.

Теорема 1. (Неравенство на Марков) Ако X прима ненегативни вредности, тогаш за секој $\varepsilon > 0$, важи:

$$p(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}.$$

(L^p-неравенство) За секоја случајна променлива X со математичко очекување $E(X)$, важи:

$$p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X - E(X)|^p)}{\varepsilon^p}.$$

(Неравенство на Чебишев) Специјално, за $p = 2$, важи:

$$p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Доказ. Неравенството на Марков, следува од оценката на интегралот:

$$p(X \geq a) = \int_{x \geq a} dF(x) \leq \int_{x \geq a} \frac{x}{a} dF(x) \leq \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} x\, dF(x) = \frac{1}{a} E(X).$$

Ако ја примениме оваа оценка на позивната случајна променлива $|X - E(X)|$. Имаме, за секој $p > 0$:

$$p(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = p(|X - E(X)|^p \geq \varepsilon^p) \leq \frac{E(|X - E(X)|^p)}{\varepsilon^p}.$$

Со замена за $p = 2$, во горното неравенство, го добиваме неравенството на Чебишев. ■

Сега, ќе го формулираме и докажеме прввиот закон за големи броеви во теоријата на веројатност.

Дефиниција 2. Велиме дека низата $X_1, X_2, \ldots$ од случајни променливи го задоволува слабиот закон на големи броеви ако:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) \to 0, \text{ кога } n \to \infty,$$

по веројатност, т.е. за секој $\varepsilon > 0$ важи:

$$\lim_{n \to \infty} p\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - E(X_k)) \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Во следната теорема, ќе ги дадеме доволните услови за слабиот закон на големи броеви.

Теорема 2. Ако случајните променливи $X_1, X_2, \ldots$ го задоволуваат условот:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=0,$$

тогаш тие го задоволуваат законот на големи броеви.

Овој услов ќе биде исполнет, ако на пример:

1) $X_1, X_2, ...$ се некорелирани, со ограничени варијации;

2) $X_1, X_2, ...$ се независни со иста варијација σ;

3) $X_1, X_2, ...$ се независни со иста дистрибуција и конечна варијација.

Доказ. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Од неравевството на Чебишев, важи:

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{\varepsilon^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\to 0, \text{ кога } n\to\infty,$$

што и требаше да се докаже.

Да претпоставиме сега дека важи 1). Бидејќи случајните променливи се некорелирани, дисперзијата од збирот на случајните променливи е еднаква на збирот на дисперзиите на случајните променливи, поединечно. Ако сите се ограничени со бројот M, тогаш важи:

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)\le\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot M=\frac{M}{n}\to 0.$$

Условот 2) е специјален случај од 1), а условот 3) е специјален случај од 2). ■

Да забележиме дека индикаторските случајни променливи I_k го задоволуваат условот 3) од горната теорема. За таа низа важи слабиот закон на големи броеви. При тоа, $E(I_k)=p$, па важи:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_1+I_2+...+I_n}{n}=p.$$

Овој закон ќе го интерпретираме во наједноставната ситуација, кога се во прашање индикаторските случајни променливи. Нека $X_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$. Тогаш случајната променлива X_n го мери бројот на појавувања на настанот A, во n-независни експерименти. Од слабиот закон на големи броеви, важи:

$$p\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Ако избереме $\varepsilon=0,1$. Важи $p(1-p)\leq\frac{1}{4}$, па добиваме:

$$p\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<0,1\right)>1-\frac{1}{0,04n}.$$

Со повторување на експериментот, ќе ја одредиме веројатноста p. Според оваа оцена, ако експериментот го повториме $n=1000$ пати, веројатноста дека релативната грешка ќе биде помала од $0,1$ изнесува:

$$p\left(\left|\frac{X_{1000}}{1000}-p\right|<0,1\right)>0,975.$$

Што означува овој резултат? Да речеме дека експериментот се состои од фрлање на паричка 1000 пати. Во сто вакви експерименти барем 970 пати отстапувањето на веројатноста од релативната фрекфенција ќе биде помало од $0,1$.

Оваа оцена е многу груба. Во продолжение ќе видиме дека во практика, отстапувањето е неспоредливо помало. Друго, слабиот закон на големи броеви, не кажува ништо за резултатите при еден опис. Во секое поединечно повторување на фрлањето паричка, врз основа на овој закон, немаме гаранција дека релативната фреквенција во тие фрлања ќе тежи кон веројатноста. Слабиот закон на големи броеви е од статистичка природа. Тој може да се интерпретира само врз основа на голем број изведени експерименти. Но, од практика знаеме дека природата се однесува поинаку. Кога фрламе паричка, во секој обид релативната фреквенција тежи кон $\frac{1}{2}$. За ова говори, силниот закон на големи броеви.

Нека (X_n) е низа од случајни променливи. За секој $\omega\in\Omega$, е одредена низа од реални броеви $(X_n(\omega))$. Па, можеме да си го поставиме прашањето: Има ли оваа низа гранична вредност? Ако оваа гранична вредност постои, тој зависи од изборот на елементарниот настан ω, па оттука и самата граница претставува гранична променлива.

Како можеме да ја опишеме конвергенцијата на низата од случајни променливи (X_n) кон случајната променлива Y? Нека означиме:

$$K=\{\omega\in\Omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=Y(\omega)\}.$$

Ова множество K ги претставува сите елементарни настани за кои низата од реални броеви $(X_n(\omega))$ ќе конвергира кон реалниот број $Y(\omega)$.

Множеството K не мора да припаѓа на алгебрата од настани. Тоа значи дека ова множество не мора да има веројатност. Но, ние овде ќе ги разгледуваме само оние случаи кога ова множество има веројатност и таа изнесува 1.

Дефиниција 2. Низата (X_n) конвергира скоро сигурно кон случајната променлива X, ако важи:

$$p(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

Означуваме, $X_n \xrightarrow{s.s.} X$ или $X_n \to X$, с.с.

Дефиниција 3. За низата (X_n) велиме дека конвергира средно квадратно кон случајната променлива X, ако важи $E(X_n^2) < \infty$, за сите $n \in \mathbb{N}$ и:

$$E(|X_n - X|^2) \to 0 \text{ , кога } n \to \infty.$$

Означуваме, $X_n \xrightarrow{s.k.} X$ или $X_n \to X$, с.к.

Врската помеѓу конвергенцијата скоро сигурно и конвергенцијата по веројатност е дадена во наредната теорема.

Теорема 3. Ако низата од случајни променливи (X_n) конвергира скоро сигурно кон случајната променлива Y, тогаш таа низа конвергира кон истата случајна променлива и по веројатност.

Доказ. Да означиме:

$$A_k(\varepsilon) = \{\omega : |X_k(\omega) - Y| > \varepsilon\}.$$

Ова множество ги опфаќа елементарните настани кај кои случајната променлива X_k значително се разликува од граничната вредност.

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k\ge n} A_k(\varepsilon).$$

Множеството $B_n(\varepsilon)$ ги опфаќа сите елементарни настани кај кои ова се случува за барем една случајна променлива X_k, со индекс поголем од n. Да забележиме дека $B_n(\varepsilon)$ е опаѓачка низа од настани. Нивната гранична вредност нека ја означиме со:

$$A(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon).$$

Елементарниот настан ω ќе припаѓа на ова множество ако секогаш може да се најде доволно големо k за кое ќе важи $|X_k(\omega)-Y(\omega)|>\varepsilon$. За такви ε, низата $(X_k(\omega))$ сигурно нема да конвергира кон $Y(\omega)$.

Сега заклучуваме дека за да конвергенцијата биде скоро сигурна мора да биде исполнето:

$$p\left(\bigcup_{\varepsilon>0} A(\varepsilon)\right)=0.$$

Во овој случај мора да важи $p(A(\varepsilon))=0$, за секој ε. Поради непрекинатоста на веројатноста, важи:

$$\lim_{n\to\infty} p(B_n(\varepsilon))=0.$$

Бидејќи $A_n(\varepsilon)\subset B_n(\varepsilon)$, заклучуваме дека:

$$\lim_{n\to\infty} p(A_n(\varepsilon))=0,$$

односно:

$$\lim_{n\to\infty} p(|X_n-Y|>\varepsilon)=0.$$

Ова значи дека низата (X_n) конвергира кон Y, по веројатност. ■

Пример 1. При изработка на серија од еднакви производи со должина $l=10$ mm производот се смета дека е исправен ако $\Delta l=\pm 0{,}1$ mm. Оценете ја веројатноста дека случајно избран производ е неисправен, ако $\sigma^2=0{,}0025$.

Решение. Нека X е должината на производот. Според условот $E(X)=10$, $x=0{,}1$ и $D(X)=0{,}0025$. Треба да ја оцениме веројатноста $p(|X-10|>0{,}1)$. Од неравенството на Чебишев, имаме:

$$p(|X-10|>0{,}1)\le\frac{0{,}0025}{(0{,}1)^2}=0{,}25. \blacklozenge$$

Сега, без доказ, ќе го дадеме силниот закон за големи броеви.

Теорема 4. Нека $X_1, X_2, \ldots$ се независни случајни променливи со иста рапределба и со конечно математичко очекување $E(X_1)=\ldots E(X_n)=\ldots=m$. Тогаш, важи:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to m \text{ с.с.}$$

Овој закон ќе го интерпретираме во ситуација кога $X_1, X_2, \ldots$ се индикаторски случајни променливи. Тогаш математичкото очекување m е еднакво на веројатноста за реализација на p-настани. Силниот закон тврди дека скоро при секое повторување на експериментите релативната фрекфенција тежи кон веројатноста, што го потврдува и практиката.

Конвергенцијата скоро сигурно повлекува конвергенција по веројатност. Затоа силниот закон за големи броеви го повлекува слабиот закон за големи броеви. Но, да забележиме дека овде претпоставките на случајните променливи се построги, бидејќи се бара да бидат независни и со иста распределба. Исто така, во силниот закон за големи броеви не мора да имаме ограниченост на варијацијата, туку само постоење на математичкото очекување.

Теорема 5. Ако низата (X_n) од случајни променливи конвергира кон случајната променлива X по веројатност, тогаш таа конвергира и по дистрибуција.

Доказ. Нека x е точка во која функцијата F_X е непрекината. За секој $\varepsilon > 0$ важи:

$$F_{X_n}(x) = p(X_n < x) = p(X_n < x, X < x+\varepsilon) + p(X_n < x, X_n \geq x+\varepsilon)$$

$$\leq p(X < x+\varepsilon) + p(X - X_n > \varepsilon)$$

$$\leq F_X(x+\varepsilon) + p(| X_n - X |> \varepsilon) .$$

Нека пуштиме $n \to \infty$ и ја искористиме претпоставката. Вториот збир тежи кон нула, па важи:

$$\limsup F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon) .$$

На сличен начин добиваме:

$$F_X(x-\varepsilon) = p(X < x-\varepsilon) = p(X < x-\varepsilon, X_n < x) + p(X < x-\varepsilon, X_n \geq x)$$

$$\leq p(X_n < x) + p(X_n - X > \varepsilon)$$

$$\leq F_{X_n}(x) + p(| X_n - X |> \varepsilon) .$$

Оттука, следува:

$$F_X(x-\varepsilon) \leq \liminf F_{X_n}(x) .$$

Лимес инфериор секогаш е помал од лимес супериор, па имаме:

$$F_X(x-\varepsilon) \leq \liminf F_{X_n}(x) \leq \limsup F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon) .$$

Функцијата F_X од претпоставката е непрекината во точката x. Нека пуштиме $\varepsilon \to 0$. Во граничниот случај, неравенството преминува во равенство. Затоа, $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)$ постои и еднаков на $F_X(x)$. ■

Пример 2. Дадена е низа (X_n) од независни случајни променливи со функција на густина на распределба:

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \qquad n = 1,2,3,...$$

Испитај ги сите четири типа на конвергенција на низата (X_n) кон нула, кога $n \to \infty$.

Решение. Да ја испитаме прво средно квадратната конвергенција. Случајната променлива X_n има Кошиева распределба со параметар $\frac{1}{n}$. Бидејќи за дисперзијата на случајната променлива X_n, која има Кошиева распределба важи $D(X_n) = \infty$, $n \in \mathbb{N}$, следува дека низата не конвергира во средно квадратна смисла.

Сега, да ја испитаме, конвергенцијата по веројатност. Нека $\varepsilon > 0$ е фиксно. Тогаш:

$$p(|X_n| \geq \varepsilon) = 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}dx = 1 - \frac{2}{\pi}arctg(n\varepsilon) \to 0,$$

кога $n \to \infty$, па низата конвергира кон нула (нулта случајна променлива) по веројатност.

Во продолжение ќе ја разгледаме конвергенцијата по распределба (дистрибуција). Од конвергенцијата по веројатност, следува конвергенција по распределба. Но, оваа распределба може да се покаже и директно. Карактеристичната функција за случајната променлива $X_n : K\left(\frac{1}{n}\right)$ е

$f_n(t) = e^{-\frac{1}{n}|t|}$, па кога ќе пуштиме $n \to \infty$, добиваме $f_n(t) = 1$, што е карактеристична функција на нула (нултата случајна променлива). Можеме да ја разгледаме и функцијата на распределба:

$$F_n(x) = \int_{-ki}^{x} f_n(y)\,dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctg(nx) \to \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

што е функција на распределба на нула (нулта случајна променлива).

Ни остана уште да ја разгледаме конвергенцијата скоро сигурно. Користејќи дека:

$$\frac{\pi}{2} - artg(y) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right),$$

добиваме:

$$p(|X_n| \geq \varepsilon) = 1 - \frac{2}{\pi} arctg(n\varepsilon) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2\varepsilon^2}}\right) \sim \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n\varepsilon}.$$

Овде, го искористивме однесувањето на функцијата $y = \arcsin x$ во околина на нулата: $\arcsin x \sim x,\ x \to 0$. Бидејќи редот:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(|X_n| \geq \varepsilon) \sim \frac{2}{\pi n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

е дивергентен и случајните променливи $X_n,\ n \in \mathbb{N}$ се независни, следува дека редот не конвергира скоро сигурно (втора Борел-Кантелиева лема). ♦

9.2. Конвергенција по дистрибуција и карактеристични функции

Во примената многу често се користи уште еден вид конвергенција, а тоа е конвергенција по дистрибуција. Често пресметувањето на веројатноста на настанот $\{X \in A\}$ се прави така што се пресметува веројатноста на некоја друга случајна променлива Y, која е многу блиску до случајната променлива X. Тогаш очекуваме дека ќе важи $p(X \in A) \approx p(Y \in A)$. Ставаме, $A = (-\infty, x)$, па овие веројатности може да се изразуваат преку функции на распределба на овие случајни променливи.

Дефиниција 1. Низата (X_n) конвергира по дистрибуција кон случајната променлива X ако за одговарачката низа од функции на распределба важи:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

во секоја точка x каде F_X е непрекината.

Означуваме, $X_n \xrightarrow{d} X$.

Имајќи ја предвид оваа дефиниција и претходните дефиниции за конвергенција на низи од случајни променливи, можеме да го заклучиме следново:

- Скоро сигурна конвергенција повлекува конвергенција по веројатност;
- Средно квадратна конвергенција повлекува конвергенција по веројатност;
- Конвергенција по веројатност повлекува конвергенција по дистрибуција (распределба).

Пример 1. Нека X_n е дискретна случајна променлива која поприма вредности $\frac{i}{n}$, $i=1,2,...,n$ со веројатност $\frac{1}{n}$. Докажи дека оваа случајна променлива тежи по дистрибуција кон случајната променлива X, која има рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$.

Решение. За секој $x \in [0,1]$, важи $F_X(x) = x$. За случајната променлива X_n важи, пак:

$$F_{X_n}(x) = p(X, x) = \sum_{\frac{i}{n}<x} \frac{1}{n}.$$

Сумата е по сите броеви $i=1,2,...$ кои се помали од nx. Затоа, таа е поголема или еднаква од $x-\frac{1}{n}$, а помала од x. Па, важи:

$$x-\frac{1}{n} \le F_{X_n}(x) < x = F_X(x).$$

Од овде следува:

$$\lim_{n\to\infty} F_X(x) = F_X(x). \ ♦$$

Следната теорема, ќе ја дадеме без доказ, а дава врска помеѓу конвергенцијата на случајните променливи и аналитичкиот апарат на карактеристични функции.

Теорема 1. Низата (X_n) од случајни променливи конвергира по дистрибуција кон случајната променлива X ако и само ако низата од карактеристични функции (ϑ_n) на случајните променливи X_n конвергира (по точки) кон карактеристичната функција ϑ на случајната променлива.

Оваа теорема ќе ја илустрираме со некои интересни примери.

Во овој пример ќе видиме апроксимација на биномната распределба со Поасонова распределба. Нека $X_{n,p}$ е случајна променлива со биномна распределба $B(n,p)$. Ако $p \to 0$ и $n \to \infty$, така да $np \to \lambda$, ќе докажеме дека $(X_{n,p})$ конвергира по дистрибуција кон Поасонова распределба со параметар λ.

Ќе ја користиме горната теорема. Мора да покажеме дека карактеристичната функција на случајната променлива со биномна распределба $B(n,p)$ тежи, при горните услови, кон карактеристичната функција на случајна променлива со Поасонова распределба $P(\lambda)$. Имаме:

$$\vartheta_{X_{n,p}}(t) = (q + pe^{it})^n = \left(1 + p(e^{it} - 1)\right)^{\frac{1}{p} \cdot pn}.$$

Изразот $\left(1 + p(e^{it} - 1)\right)^{\frac{1}{p}} \to e^{e^{it}}$, кога $p \to 0$, а бидејќи $pn \to \lambda$, важи:

$$\lim_{\substack{p \to 0 \\ np \to \lambda}} \vartheta_{X_{n,p}}(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)},$$

а тоа е, всушност, карактеристичната функција на случајната променлива со распределба $P(\lambda)$.

Нека X е случајна променлива која има Поасонова распределба со параметар λ. Ќе докажеме дека за големи λ распределбата $P(\lambda)$ може да се апроксимира со нормална распределба $N(\lambda, \lambda)$, односно да важи:

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \to N(0,1), \text{ кога } \lambda \to \infty,$$

по дистрибуција.

Ќе покажеме дека карактеристичната функција ϑ_λ на случајната променлива $\dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ тежи кон карактеристичната функција:

$$\vartheta(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

на случајна променлива која има единечна нормална распределба, кога $\lambda \to \infty$. Карактеристичната функција на случајната променлива која има Поасонова распределба е:

$$\vartheta_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}.$$

Бидејќи важи $\vartheta_{a+bX}(t)=e^{iat}\vartheta_X(bt)$, карактеристичната функција на $\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}=-\sqrt{\lambda}+\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}X$ е дадена со:

$$\vartheta(t)=e^{-\sqrt{\lambda}\,t}e^{\lambda(\frac{it}{\sqrt{\lambda}}-1)}=\exp\left(\lambda(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1)-i\sqrt{\lambda}\,t\right)$$

$$=\exp\left(\lambda\left(1+\frac{it}{\sqrt{\lambda}}+\frac{i^2t^2}{2\lambda}+\frac{i^3t^3}{6\lambda\sqrt{\lambda}}+\ldots-1\right)-i\sqrt{\lambda}\,t\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{it^3}{6\lambda}+\ldots\right)\to\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

кога $\lambda\to\infty$, што и требаше да се докаже.

Нека $X_1,X_2,\ldots$ е низа од независни случајни променливи кои ги примаат вредностите ±1 со веројатност $\frac{1}{2}$. Дефинираме:

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}X_k\,.$$

Ќе докажеме дека низата (Y_n) тежи по дистрибуција кон случајната променлива Y која има рамномерна распределба на $[-1.1]$.

Ќе ја одредиме карактеристичната функција на случајната променлива X_k:

$$\vartheta_{X_{k2}}(t)=\frac{1}{2}e^{-it}+\frac{1}{2}e^{it}=\cos t\,,$$

$$\vartheta_{\frac{1}{2^k}X_k}(t)=\cos\left(\frac{1}{2^k}t\right).$$

Поради независноста на случајните променливи $X_1,X_2,\ldots$ карактеристичната функција на случајните променливи Y_n е еднаква на производот на карактеристичните функции:

$$\vartheta_{Y_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \ldots$$

$$= \frac{\sin t}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \to \frac{\sin t}{t} = \vartheta_Y(t)\ .$$

Функцијата $\frac{\sin t}{t}$ е карактеристична функција на случајна променлива која има рамномерна распределба на интервалот $[-1,1]$. Па, важи $\vartheta_{Y_n}(t) \to \vartheta_Y(t)$ и затоа $Y_n \xrightarrow{d} Y$.

Пример 2. а) Дадена е низа (X_n) од случајни променливи со биномна распределба $X_n : B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека низата (X_n) конвергира по распределба кон случајна променлива со Поасонова распределба кога $n \to \infty$;

б) Дадена е низа (X_n) од случајни променливи со геометриска распределба $X_n : \left(\frac{\lambda}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека низата (X_n) конвергира по распределба кон случајна променлива со експоненцијална распределба.

Решение.

а) Ќе докажеме дека низата од соодветните карактеристични функции конвергира кон карактеристичната функција на Поасоновата распределба. Бидејќи $X_n : B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, следува дека:

$$f_{X_n}(t) = E\left(e^{itX_n}\right) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{it}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right)^n \to e^{\lambda(e^{it}-1)}, \quad n \to \infty\ .$$

Па, граничната вредност има Поасонова $P(\lambda)$ распределба.

б) Ќе докажеме дека низата од соодветните карактеристични функции конвергира кон карактеристичната функција на експоненцијалната распределба. Бидејќи $X_n : G\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ следува дека:

$$f_{\frac{X_n}{n}}(t) = f_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{\frac{\lambda}{n}e^{\frac{it}{n}}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)e^{\frac{it}{n}}} \sim \frac{\frac{\lambda}{n}\left(1+\frac{it}{n}\right)}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\frac{it}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lambda + \frac{\lambda it}{n}}{\lambda - it + \frac{\lambda it}{n}} \to \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad n \to \infty.$$

Овде беше искористено дека: $e^x \sim 1 + x$, $x \to 0$.

Па, граничната вредност има експоненцијална $E(\lambda)$ распределба. ♦

9.3. Централна гранична теорема

Централната гранична теорема тврди дека збирот на случајните променливи, со некои услови на нивните распределби, асимптотски се однесува како нормална распределба. Не постои, потребен и доволен услов за опис на распределбата на случајните променливи при кои ќе важи централната гранична теорема. Некои од доволните услови вклучуваат и случаи на слаби зависности помеѓу случајните променливи.

Наредната теорема е позната како централна гранична теорема.

Теорема 1. Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи кои имаат иста распределба со математичко очекување $m = E(X)$ и дисперзија $D(X) = \sigma^2$. Тогаш за нормираниот збир важи:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Доказ. Нормирањето на збирот на левата страна значи дека математичкото очекување и дисперзијата на случајните променливи на лево се 0 и 1, соодветно.

Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $m = 0$. Во спротивно, случајните променливи X_n, можеме да ги замениме со центрирани $X_n - m$, кои имаат иста дисперзија.

Сите случајни променливи имаат иста распределба, па и нивните карактеристични функции им се еднакви. Нека ϑ е карактеристичната функција на тие случајни променливи. Поради независноста на собироците, карактеристичната функција на збирот е еднаква на производот на карактеристичните функции:

$$\vartheta_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = \vartheta(t)^n.$$

Нека означиме $Z_n = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Карактеристичната функција на оваа случајна променлива е еднаква на:

$$\vartheta_{Z_n}(t) = \vartheta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n.$$

Функцијата ϑ ќе ја прикажеме со помош на Тејлоров ред:

$$\vartheta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + R_2.$$

Остатокот R_2, е неспоредливо помал во однос на t^2. За секоја карактеристична функција имаме $c_0 = \vartheta(0) = 1$. Другите два коефициенти се:

$$c_1 = \vartheta'(0) = iE(X_1) = im = 0,$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\vartheta''(0) = -\frac{1}{2}E(X_1{}^2) = -\frac{1}{2}\sigma^2.$$

На тој начин добиваме:

$$\vartheta_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \frac{t^2}{\sigma^2 \cdot n} + R_2\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + R_2\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}. \blacksquare$$

Пример 1. Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни случајни променливи кои имаат Кошиева распределба со параметар β.

а) Докажи дека $Z = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ има исто така Кошиева распределба со параметар β;

б) Објасни зошто резултатот под а) не е во контрадикција со централната гранична теорема.

Решение.

а) Карактеристичната функција за случајната променлива X_i, $i=1,2,...,n$, Кошиевата распределба има облик $f_{X_i}(t)=e^{-\beta|t|}$. Бидејќи променливите $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни, следува дека за случајната променлива $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$, карактеристичната функција е дадена со:

$$f_Y(t)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t)=(e^{-\beta|t|})^n=e^{-n\beta|t|}.$$

Па,

$$f_Z(t)=f_{\frac{1}{n}Y}(t)=f_Y\left(\frac{t}{n}\right)=e^{-n\beta\left|\frac{t}{n}\right|}=e^{-\beta n},$$

што значи дека случајната променлива Z има Кошиева распределба.

б) Ова не противречи на централната гранична теорема, бидејќи за Кошиевата распределба не постои конечно математичко очекување, односно $E(X_i)=\infty$, $i\in\mathbb{N}$. ♦

Сега можеме да ја докажеме теоремата за апроксимација на биномната распределба со нормална распределба.

Теорема 2. (Теорема на Моавр-Лаплас) Нормалната биномна распределба тежи по дистрибуција кон единечната нормална распредлба:

$$\frac{B(n,p)-np}{\sqrt{npq}}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

Доказ. Овде доволно е да ја примениме централната гранична теорема на низата (I_k) од индикаторски случајни променливи. Математичкото очекување на овие случајни променливи е p, а дисперзијата е pq. Тогаш:

$$\sum_{k=1}^{n}(I_k-p)=X-np,$$

при што случајната променлива X има биномна распределба $B(n,p)$. Сега, тврдењето на теоремата следува директно од централната гранична теорема. ■

Пример 1. Собираме $10\,000$ броеви кои сме ги заокружиле на m-децимали. Пресметај го интервалот, во кој со веројатност од $0,99$, ќе се наоѓа грешката поради заокружувањето. Да претпоставиме дека грешките на заокружување на поединечните броеви се независни случајни променливи, рамномерно дистрибуирани на интервалот:

$$\left(-\frac{1}{2}10^{-m}, \frac{1}{2}10^{m}\right).$$

Решение. Да означиме $n = 10\ 000$. Нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се случајните променливи кои се грешките при заокружувањето на секој од n-те броеви. Овие случајни променливи се независни и имаат иста распределба, со очекување $E(X_k) = 0$ и дисперзија:

$$D(X_k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot 10^{-m} + \frac{1}{2}\cdot 10^{m}\right)^2}{12} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2m}.$$

Тогаш $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ е грешката која настанала поради заокружувањето на тие броеви. Од централната гранична теорема имаме:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{\frac{10^{-2m}}{12}n}} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

односно $X \approx \left(0, \frac{10^{-2m}n}{12}\right) = N\left(0, \frac{1}{12}\cdot 10^{-2m+4}\right)$. Бараме таков t за кое важи:

$p(|X| < t) \geq 0,99$. Имаме:

$$p(|X| < t) = p\left(\left|\frac{X}{\frac{10^{-m+2}}{\sqrt{12}}}\right| < \frac{t}{\frac{10^{-m+2}}{\sqrt{12}}}\right) = 0,99 = \Phi^*(2,577),$$

па, оттука:

$$t = \frac{2,577}{\sqrt{12}}\cdot 10^{-m+2} = 74,4\cdot 10^{m}.$$

Според тоа, грешката на заокружувањето, со веројатност од $0,99$, се наоѓа во интервалот $(-74,4\cdot 10^{-m}; 74,4\cdot 10^{-m})$. ♦

Пример 2. Во просек секој трети производ е од прва класа. Нека S_n е бројот на производи кои треба да се прегледаат се додека не се пронајдат 100

примерока од прва класа. Најди ја распределбата на таа променлива. Пресметај ја веројатноста на настанот $\{S_{100} > 400\}$.

Решение. Нека X_k е бројот на производи кои е потребно да се прегледаат за да се пронајде производ од прва класа, откако веќе се пронајдени $k-1$ производи од прва класа. Тогаш, имаме:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

Случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n$ се независни и имаат иста распределба. Тие имаат геометриска распределба:

$$p_j = p(X_k = j) = \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \cdot \frac{1}{3}.$$

Важи, $E(X_k) = 3$, $D(X_k) = 9$.

Иако, ни е позната распределбата на сите случајни променливи X_k, распределбата на нивниот збир не можеме да ја определиме лесно. Па, поради тоа ја користиме централната гранична теорема. Имаме:

$$\frac{S_n - 3n}{\sqrt{9n}} \to N(0,1),$$

односно: $S_n \approx N(3n, 9n)$.

Бараната веројатност изнесува:

$$p(S > 350) = p\left(N > \frac{-300 + 350}{\sqrt{900}}\right) = p(N > 1,666) = 0,097. \blacklozenge$$

9.4. Решени задачи

Задача 1. Дадена е низа (X_n) од независни случајни променливи дадена со:

$$X_n : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{n^2} & 1 - \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2}\right) & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Испитај ги сите четири типови на конвергенција на дадената низа.

Решение. Ќе ја испитаме конвергенцијата на оваа низа кон 0. Бидејќи

$$X_n^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}\right) & \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

следува дека: $E(X_n^2) = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3} \to 0$, кога $n \to \infty$, па низата конвергира средно квадратно. Средно квадратната конвергенција имплицира конвергенција по веројатност и конвергенција по распределба. Дополнително, важи:

$$p(A_n^\varepsilon) = p(|X_n| \geq \varepsilon) = p(X_n = -1) + p(X_n = 1)$$
$$= \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}$$

и:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(A_n^\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty .$$

Па, добиваме и скоро сигурна конвергенција.

Задача 2. Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи од кои секоја има Поасонова распределба, со параметри $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ конвергира по распределба, ако и само ако бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ конвергира.

Решение. Нека $k \in \mathbb{N}$ е фиксно. Знаеме дека $Y_k = \sum_{n=1}^{k} X_n$ има Поасонова $P(a_k)$ распределба, каде $a_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n$.

Нека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ конвергира. Тоа значи дека постои $a = \lim_{k\to\infty} a_k$. Ќе докажеме дека низата од парцијални суми Y_k конвергира по распределба (дистрибуција), кога $k \to \infty$ кон случајната променлива Y, каде Y има $P(a)$ распределба, односно

$$p(Y = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \ m = 0, 1, 2, \dots .$$

Сега, имаме:

$$F_Y(y) = p(Y < y) = p(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < y) = p\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < y)\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} p(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < y) = \lim_{k\to\infty} p(Y_k < y) \qquad (*)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{y-1} \frac{a_k^j}{j!} e^{-a_k} = \sum_{j=0}^{y-1} \frac{a^j}{j!} e^{-a} ,$$

што е функција на распределба на случајната променлива која има Поасонова $P(a)$ распределба. Во делот кој е означен со (*) беше искористено дека низата од настани $A_k = (\sum_{n=}^{k} X_n < y)$ е опаѓачка, односно:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots,$$

па,

$$p(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} p(A_k) .$$

Да претпоставиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ дивергира. Бидејќи броевите λ_n се позитивни, имаме дека низата a_k е монотоно растечка, па $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$. Тогаш,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{y-1} \frac{a_k^j}{j!} e^{-a_k} = 0 ,$$

за секое $y \in \mathbb{N}$. Меѓутоа, бидејќи функцијата $F_Y \equiv 0$ не е функција на распределба на ниту една случајна променлива, па следува дека низата Y_k не конвергира по распределба (дистрибуција).

Задача 3. Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи со иста распределба која е рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$ и $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ е непрекината функција. Докажи дека важи:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \to \int_0^1 f(u)\,du , \qquad \text{кога } n \to \infty .$$

Решение. Случајните променливи $f(X_k)$ имаат иста распределба и имаат математичко очекување:

$$a = E(f(X_k)) = \int_0^1 f(u)\,du .$$

Па, од силниот закон за големи броеви, имаме:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \to \int_0^1 f(u)\,du, \qquad \text{кога } n \to \infty, \text{ скоро сигурно.}$$

Задача 4. Нека (X_n) е низа од независни случајни променливи кои имаат иста распределба која е рамномерна распределба на интервалот $[0,1]$. Докажи дека:

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} \to \frac{1}{e}, \qquad \text{кога } n \to \infty \text{ скоро сигурно.}$$

Решение. Случајните променливи $\ln X_1, \ln X_2, \ldots$ се независни, со иста распределба и математичко очекување:

$$E(\ln X_k) = \int_0^1 \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1$$

и конечна варијација, па се задоволени условите од силниот закон за големи броеви, од каде што:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln X_k \to -1, \qquad \text{скоро сигурно,}$$

односно:

$$\frac{1}{n}\ln(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) \to -1, \quad \text{скоро сигурно,}$$

т.е.:

$$\sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n} \to e^{-1} = \frac{1}{e}, \ \text{скоро сигурно.}$$

Задача 5. Времето на работа без дефект на некој потрошен дел во некоја машина е случајна променлива, со математичко очекување $T_0 = 100$ часа и отстапување $\sigma = 60$ часа. Колку такви делови треба да се обезбедат за да со веројатност од $0,95$ машината ќе работи во текот на $t = 8000$ часа? Што може да се каже ако таа случајна променлива има експоненцијална распределба?

Решение. Да ја означиме со X_t случајната променлива: бројот на делови кои ќе бидат употребени до моментот t. Таа случајна променлива може да се поврзе со времињата T_k за работа на делот без дефект на секој од деловите. Имено, важи:

$$\{X_t \le n\} = \{T_1 + T_2 + \ldots + T_n \ge t\}.$$

Оваа еднаквост може да се објасни како: до моментот t ќе биде доволно n-делови ако и само ако вкупното време на работа без дефект на првите n-потрошени делови е поголемо од t.

Случајните променливи $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ се независни и имаат еднаква, но непозната распределба. Од централната гранична теорема имаме:

$$T_1 + T_2 + ... + T_n \approx N(na, n\sigma^2) \approx N(100n, 3600n).$$

Да ја означиме оваа случајна променлива која има нормална распределба со Y. Од условот $p(Y \geq t) = 0,95$, имаме:

$$p\left(\tilde{Y} \geq \frac{t - 100n}{60\sqrt{n}}\right) = 0,95 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\Phi^*\left(\frac{100n - t}{60\sqrt{n}}\right) = 0,45.$$

Оттука,

$$\frac{100n - t}{60\sqrt{n}} = 1,65,$$

па, имаме: 89.

Да забележиме дека очекуваниот број на резервни делови е 80, па со 10%, поголема количина имаме 95% сигурност за работа без дефект.

Доколку не ни е позната дисперзијата σ, можеме да постапиме на следниов начин: Да претпоставиме дека случајните променливи T_k имаат експоненцијална распределба со параметар λ. Тогаш, $E(T_k) = \frac{1}{\lambda} = 100$, па со тоа случајната променлива X_t има точно Поасонова распределба, $X_t \sim P(\lambda t) \sim P(80)$. Па, мораме да го определиме n од условот $p(X_t \geq n) \leq 0,05$. Меѓутоа, дури и сега е оправдано да ја замениме распределбата на случајната променлива X_t со нормална распределба, бидејќи нејзиниот параметар е доволно голем. Важи $P(80) \approx N(80,80) = Z$. Условот, сега преминува во:

$$p(Z \geq n) \leq 0,05 \quad \Rightarrow \quad p\left(\tilde{Z} \geq \frac{n - 80}{\sqrt{80}}\right) \leq 0,05.$$

Оттука, $\Phi^*\left(\frac{n-80}{\sqrt{80}}\right) \geq 0,9$, односно $n - 80 \geq \sqrt{80} \cdot 1,645 = 14,7$.

Оттука, $n \geq 95$. Во овој случај добивме поголема веројатност од горната, бидејќи претпоставивме поголема дисперзија од горезададената.

Задача 6. а) Одреди ја веројатноста дека помеѓу 200 избрани артикли од една серија, каде што процентот на првокласни артикли е 80%, бројот на првокласни артикли не отстапува од најверојатниот нивен број за повеќе од 6 артикли.

б) Одреди ја веројатноста дека фреквенцијата на првокласни артикли во 200 избрани артикли отстапува од веројатноста да се одбере еден артикал не повеќе од $0,03$ по апсолутна големина.

Решение. Од условот на задачата имаме дека $n = 200$, $p = 0,8$, $q = 0,2$, $\varepsilon = 6$.

Па, имаме:

$$p(|X - np| \leq 6) = p(|X - 160| \leq 6) = p(154 \leq X \leq 166)$$

$$= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{200 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = \Phi(1,06) = 0,7109.$$

б) Овде $\varepsilon = 0,03$. Па, имаме:

$$p\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,03\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi(1,676) = 0,9067.$$

Задача 7. Случајната променлива X е аритметичка средина на n независни случајни променливи со иста распределба, со математичко очекување 20 и диспрезија 4. Пресметај ја веројатноста дека случајната променлива X прима вредности во интервалот $(19,9; 20,1)$.

Решение. Да ги означиме случајните променливи со X_k, $k = 1,2,\ldots,n$. Важи:

$$E(X_k) = 20 \text{ и } D(X_k) = 4, \; X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k .$$

Од централната гранична теорема, имаме:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n \cdot 20}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \qquad \text{кога } n \to \infty.$$

Затоа, важи:

$$\frac{X - 20}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1),$$

односно: $X \approx N\left(20, \frac{4}{n}\right)$. Затоа,

$$p(19,9 < X < 20,1) = p\left(\frac{19,9-20}{\frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{X-20}{\frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{20,1-20}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi^*\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right).$$

За $n > 3600$, оваа веројатност е практично еднаква на единица.

Задача 8. Докажи дека за голем број n, случајната променлива χ_n^2 може да се апроксимира со нормална распределба $N(n,2n)$, т.е. попрецизно:

$$\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Решение. По дефиниција случајната променлива χ_n^2 важи: $\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$, каде X_k се случајни променливи кои имаат единечна (стандардна) нормална распределба. Но, тогаш X_k^2 има гама распределба со параметри $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Нивното математичко очекување е 1, а дисперзијата е 2. Сега, исполнети се сите услови од централната гранична теорема, па:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k^{e} - n\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}} = \frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Задача 9. Случајната променлива X има гама распределба дадена со функција на густина на распределба:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$

Користејќи го методот на карактеристични функции докажи дека случајната променлива:

$$Y = \frac{\beta X - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$$

конвергира по распределба кон случајната променлива Z која има нормална $N(0,1)$ распределба, кога $\alpha \to \infty$.

Решение. Карактеристичната функција за дадената гама функција е: $f_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$. Користејќи ги својствата на карактеристичната функција добиваме:

$$f_Y(t) = f_{\frac{\beta X}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}}(t) = e^{-it\sqrt{\alpha}} f_X\left(\frac{\beta X}{\sqrt{\alpha}}\right) = e^{-it\sqrt{\alpha}}\left(1 - \frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-\alpha}.$$

Користејќи го развојот на функцијата $y = \ln(1+x)$ во околина на точката $x = 0$, добиваме:

$$\ln f_Y(t) = it\sqrt{\alpha} - \alpha \ln\left(1 - \frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$= -it\sqrt{\alpha} - \alpha\left(-\frac{it}{\sqrt{\alpha}} + \frac{t^2}{2\alpha} + o\left(\frac{t^2}{2\alpha}\right)\right)$$

$$= -it\sqrt{\alpha} + it\sqrt{\alpha} - \frac{t^2}{2} - \alpha o\left(\frac{t^2}{2\alpha}\right) \to -\frac{t^2}{2}, \quad \alpha \to \infty.$$

Па, $f_Y(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\alpha \to \infty$. Бидејќи $e^{-\frac{t^2}{2}}$ е карактеристична функција на нормалната распределба, од каде што се добива тврдењето на задачата.

10. Маркови ланци

10.1. Хомогени Маркови ланци

Дефиниција 1. За два настана велиме дека се дисјунктни (инкомпатибилни) или велиме дека се исклучуваат помеѓу себе, ако не може да се појават и двата настана истовремено.

Да изведеме една низа од експерименти. Резултатот од секој експеримент е множество од инкомпатибилните настани:

$$\mathbf{A} = \{E_1, E_2, ...\}.$$

$\mathbf{A}$ е една поделба на исходите E, бидејќи се задоволени следниве услови:

а) за секој $E_i \in \mathbf{A} \Rightarrow E_i \neq \varnothing$;

б) за секој $E_i,\ E_j \in \mathbf{A}$ и $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = E_i E_j = \varnothing$;

в) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i = E$.

Нека овој експеримент сме го повториле $(n+1)$-пати. Веројатноста дека ќе добиеме низа од резултати $E_{j_0}, E_{j_1}, E_{j_2}, ..., E_{j_n}$ се одредува преку формулата:

$$p(E_{j_0} E_{j_1} E_{j_2} ... E_{j_n}) = p(E_{j0}) \cdot \prod p(E_{j_k} \mid E_{j_0} E_{j_1} ... E_{j_{k-1}}). \qquad (1)$$

Дефиниција 2. Ако резултатот на k-тиот експеримент зависи само од резултатот на претходниот $(k-1)$-от експеримент, односно за секој k, $k \in \{1, 2, ..., n\}$ следува:

$$p(E_{j_k} \mid E_{j_0} E_{j_1} ... E_{j_{k-1}}) = p(E_{j_k} \mid E_{j_{k-1}}),$$

тогаш велиме дека низата од настани $E_{j_0}, E_{j_1}, ..., E_{j_n}$ образува Марков ланец. Во овој случај велиме дека се појавува ланчана зависност од ранг 1.

Формулата (1), во овој случај се сведува на:

$$p(E_{j_0} E_{j_1} ... E_{j_n}) = p(E_{j_0}) \cdot \prod_{k=1}^{n} p(E_{j_k} \mid E_{j_{k-1}}).$$

Ставајќи:

$$a_{j_0} = p(E_{j_0})$$

$$p_{j_{k-1}j_k}^{(k)} = p(E_{j_k} \mid E_{j_{k-1}}), \quad k \in \{1,2,...,n\},$$

тогаш:

$$p(E_{j_0} E_{j_1} ... E_{j_n}) = a_{j_0} p_{j_0 j_1}^{(1)} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1} j_n}^{(n)}. \tag{2}$$

Бидејќи a_{j_0} е веројатноста дека во почетниот (нултиот) експеримент ќе се случи настанот E_{j_0}, оваа веројатност ќе ја нарекуваме почетна (иницијална) веројатност. Множеството од сите можни настани кое одговара на почетниот (иницијалниот) распоред на веројатностите е:

$$\mathbf{P} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Условната веројатност $p_{ij}^{(k)}$ ја означува веројатноста дека во k-тиот експеримент ќе се појави настанот E_j, под услов во $(k-1)$-от експеримент се појавил настанот E_i.

Дефиниција 3. Ако за секој $n \in \mathbb{N}$, $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$, тогаш за ланецот велиме дека е хомоген.

Кај хомогениот Марков ланец формулата (2) се сведува на:

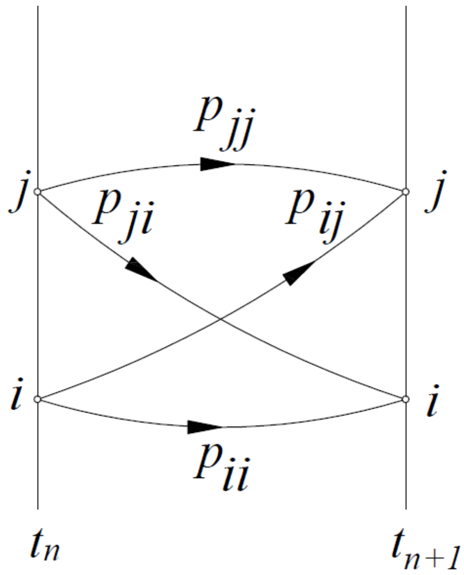
$$p(E_{j_0} E_{j_1} ... E_{j_n}) = a_{j_0} \cdot \prod_{k=1}^{n} p_{j_{k-1} j_k}.$$

Многу често во теоријата на Маркови ланци се користи терминологија од физика. На пример, кога настанот E_j се реализирал во k-тиот експеримент, се вели дека во k-тиот момент разгледуваниот систем се наоѓал во состојба E_j.

Условната веројатност p_{jk} се нарекува транзитивна веројатност и кај хомогениот Марков ланец таа претставува веројатност дека системот во кој било момент ќе се најде во состојба E_k, под услов во претходниот момент се наоѓал со состојба E_j. Се користи и ознаката:

$$p(E_k \mid E_j) = p_{jk} = p(E_j \to E_j).$$

На нареднава слика е даден приказ на транзитивни веројатности кај Марков ланец.



Матрицата чии елементи се транзитивните веројатности се нарекува транзитивна матрица. Оваа матрица се означува со M_1, односно:

$$M_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Бидејќи p_{ij} се веројатности, имаме дека сите елементи на транзитивната матрица се ненегативни.

Да претпоставиме дека системот во еден момент се наоѓал во состојба E_j. Во следниот момент, системот или ќе ја задржи состојбата E_j или ќе премине на која било друга состојба од сите можни состојби од множеството **А**. Затоа,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} = 1, \quad j = 1, 2, \dots .$$

Според тоа збирот на сите веројатности, од секој ред на транзитивната матрица, е еднаков на единица.

До овој заклучок можеме да дојдеме и ако имаме предвид дека сите настани се помеѓу себе инкомпатибилни и втората аксиома:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jk} = \sum_{k=1}^{\infty} p(E_k \mid E_j) = p\left(\bigcup_{E_k \in \mathbf{A}} E_k \mid E_j \right) = p(E \mid E_j) = p(E) = 1.$$

Да забележиме дека некои автори транзитивната матрица ја нарекуваат стохастичка матрица.

Почетниот распоред на веројатносите **P** и транзитивната матрица M_1, целосно дефинираат еден хомоген Марков ланец.

Пример 1. Во секоја од три разгледувани кутии K_1, K_2, K_3 се наоѓаат топчиња од три категории E_1, E_2 и E_3 со пропорции дадени во табелата,

	E_1	E_2	E_3
K_1	α_1	β_1	γ_1
K_2	α_2	β_2	γ_2
K_3	α_3	β_3	γ_3

така што:

$$\begin{aligned} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 &= 1 \\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 &= 1. \\ \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 &= 1 \end{aligned}$$

Случајно избираме една кутија и од неа извлекуваме едно топче, кое веднаш потоа го враќаме во кутијата. Ако извлеченото топче припаѓа на категоријата E_j, следното извлекување го вршиме од кутијата K_j. Која е веројатноста дека во вториот експеримент ќе се извлече топче од категорија E_2?

Решение. Почетните веројатности се:

$$a_1 = p(E_1) = p(K_1E_1 + K_2E_1 + K_3E_1) = \frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$

$$a_2 = p(E_2) = p(K_1E_2 + K_2E_2 + K_3E_2) = \frac{1}{3}(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$$

$$a_3 = p(E_3) = p(K_1E_3 + K_2E_3 + K_3E_3) = \frac{1}{3}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3).$$

Веројатноста дека во еден експеримент ќе биде извлечено топче од категорија E_1, под услов дека во претходниот експеримент било извлечено топче од категорија E_1, всушност, е веројатноста дека од кутијата K_1 ќе биде извлечено топче од категорија E_1, односно таа е α_1.

Веројатноста дека во еден експеримент ќе биде извлечено топче од категорија E_2, под услов да во претходниот експеримент е извлечено топче од категорија E_1, всушност, е веројатноста дека од кутијата K_1 е извлечено топче од категорија E_2, односно таа е β_1. Продолжувајќи на ист начин, можеме да ја добиеме транзитивната матрица (која е идентична со горната табела):

$$M_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix},$$

која со почетните веројатности го дефинира Марковиот ланец кој одговара на овој проблем.

Според ова, веројатноста дека во вториот експеримент ќе се извлече топче од категорија E_2 е:

$$p(E_1E_2 + E_2E_2 + E_3E_2) = a_1 p_{12} + a_2 p_{22} + a_3 p_{32},$$

односно:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{3} E_i E_2\right) = \frac{1}{3}\left(\beta_1 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i + \beta_2 \sum_{i=1}^{3} \beta_i + \beta_3 \sum_{i=1}^{3} \gamma_i\right).$$

Ако експериментите помеѓу себе се меѓусебно независни, тогаш:

$$p(E_k \mid E_j) = p(E_k) = a_k.$$

Во овој случај сите редови на транзитивната матрица ќе бидат еднакви, односно:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Пример 2. Во една кутија се наоѓаат бели и црни топчиња со веројатности за извлекување p и $q = 1 - p$, соодветно. Да го означиме со A настанот: извлечено е бело топче, а со $\overline{A}$ настанот: извлечено е црно топче. Ако во n-тиот експеримент се реализирал настанот $\overline{A}$, велиме дека системот во n-тиот момент се наоѓал во состојба E_0. Ако во $(n-k)$-иот експеримент се реализирал настанот $\overline{A}$, а во следните последователни k експерименти се реализирал настанот A, велиме дека се реализирал настанот E_k, $k \in \mathbb{N}$. Најди ја веројатноста на настанот $E_0E_1E_2$.

Решение. Непосредно можеме да констатираме дека имаме хомоген Марков ланец, со можни состојби $\mathbf{A}=\{E_0, E_1, ...\}$. Почетните (иницијални) веројатности се следниве:

$$a_0 = p(E_0) = p(\overline{A} + A\overline{A} + AA\overline{A} + ...) =$$

$$= q + pq + p^2 q + ... = q\frac{1}{1-p} = 1.$$

Настаните $E_1 \subseteq E_2, ...$ не можат да се најдат на прво место, бидејќи по дефиниција следуваат по настанот E_0. Затоа, за секој $j \in \mathbb{N}$ следува $a_j = 0$. Во согласност со ова, почетниот распоред на веројатности е:

$$\mathbf{P} = \{1, 0, 0, ...\}.$$

Транзитивните веројатности ги имаат следниве вредности:

$$p_{jk} = \begin{cases} q, & k = 0 \\ p, & k = j+1 \\ 0, & k \notin \{0, j+1\} \end{cases},$$

за секој $j \in \mathbb{N}$.

Па, транзитивната матрица ќе биде:

$$M_1 = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & ... \\ q & 0 & p & 0 & ... \\ q & 0 & 0 & p & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}.$$

Конечно, веројатноста дека ќе се реализира настанот $E_0E_1E_2$ е:

$$p(E_0E_1E_2) = a_0 p_{01} p_{12} = 1 \cdot p \cdot p = p^2. \ ♦$$

Пример 3. (Ехренфестов дифузен модел на гасови) Нека имаме $2R$ топчиња, кои се означени со броевите од 1 до $2R$ и два сада во кои се распоредени овие топчиња. Една операција во системот се состои во случаен избор на еден од броевите од множеството $\{1, 2, ..., 2R\}$: На пример, со случајно извлекување на едно ливче од друг сад со $2R$ нумерирани ливчиња со броевите од 1 до $2R$, го избираме топчето со извлечениот број и го префрламе од едниот сад, каде се наоѓа, во другиот сад. Најди го почетниот распоред на веројатности и транзитивната матрица на овој систем.

Решение. Да ставиме дека системот се наоѓа во состојба E_j, ако во првиот сад се наоѓаат j топчиња, а во вториот сад се наоѓаат $2R - j$ топчиња.

Бидејќи $a_j = 1$ и $a_i = 0$, за $i \neq j$, распоредот на почетни веројатности ќе биде:

$$\mathrm{P} = \{\begin{matrix} 0, & 0, & \ldots & 1, & \ldots & 0 \\ (1) & (2) & \ldots & (j) & \ldots & (2R) \end{matrix}\} .$$

Транзитивните веројатности се:

$$p_{j,j+1} = p(E_j \to E_{j+1}) = \frac{2R-j}{2R}, \quad j \in \{1,2,\ldots,2R-1\}$$

$$p_{j,j-1} = p(E_j \to E_{j-1}) = \frac{j}{2R}, \quad j \in \{2,\ldots,2R\}$$

$$p_{j,k} = 0, \quad j \in \{1,2,\ldots,2R\} \text{ и } k \notin \{j-1, j+1\} .$$

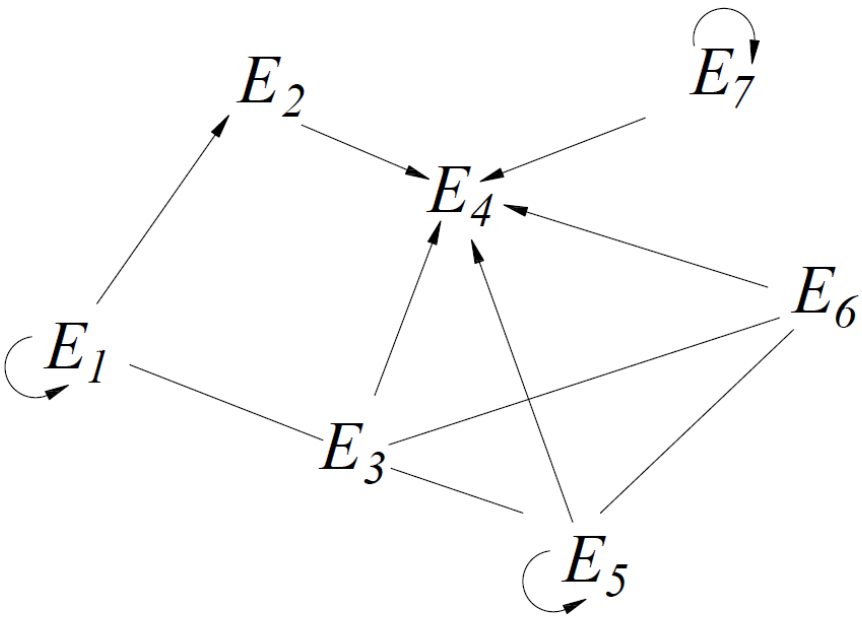
Па, транзитивната матрица е:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2R} & 0 & \frac{2R-1}{2R} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2R} & 0 & \frac{2R-2}{2R} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} . \blacklozenge$$

Кај упростениот Ехренфестов модел, топчињата не се нумерирани, туку се обоени со две бои, на пример црвено и сино, а наместо извлекувааање на ливче се фрла паричка. Ако падне глава, од првиот сад преместуваме едно сино топче во вториот сад, а ако падне писмо, од вториот сад преместуваме црвено топче во првиот сад.

10.2. Транзитивни веројатности од повисок ред

Ако во транзитивната матрица елементот p_{jk} е различна од нула, значи дека е можен премин од системот со состојба E_j во систем со состојба E_k. Множеството од сите можни премини, може да биде претставено со граф, како на сликата подолу.



Присуството на стрелки помеѓу две состојби ни дава информација дека соодветната транзитивна веројатност е различна од нула. Ако помеѓу состојбите E_j и E_k има стрелки во двата правци, тоа значи дека состојбата може да премине во двата правци, односно $E_j \to E_k$ и $E_k \to E_j$. Алката кај една состојба E_j означува дека системот во наредниот момент може да остане во иста состојба, односно $E_j \to E_j$.

Да забележиме дека преминот $E_j \to E_k$, може да се претстави и со подредениот пар (E_j, E_k), кој е елемент на Декартовиот производ $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Бидејќи секој подреден пар (E_j, E_k) одговара една одредена вредност на веројатноста p_{jk}, односно на тој начин, елементите на транзитивната матрица се функција од $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.

Нека премините се вршат по релација (правило) R. Множеството од сите премини G, односно множеството од сите подредени парови (E_j, E_k), чија веројатност е $p_{jk} > 0$, претставува еден граф на производот $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Ова можеме да се запише и на следниов начин:

$$G \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{A}$$
$$(E_j, E_k) \in G \;\Rightarrow\; p_{jk} > 0.$$

На граф, на сликата погоре се гледа дека од состојбата E_1 на системот може да се премине во состојбата E_4 на системот, на повеќе начини:

а) во една етапа: $E_1 \to E_4$,

б) во две етапи: $E_1 \to E_2 \to E_4$ или $E_1 \to E_3 \to E_4$ или $E_1 \to E_1 \to E_4$.

в) во три етапи: $E_1 \to E_3 \to E_6 \to E_4$ или $E_1 \to E_1 \to E_2 \to E_4$ или $E_1 \to E_1 \to E_3 \to E_4$ или $E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_4$.

г) во четири етапи: $E_1 \to E_3 \to E_6 \to E_5 \to E_4$ или $E_1 \to E_1 \to E_3 \to E_6 \to E_4$ или $E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_2 \to E_4$ или $E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_3 \to E_4$ или $E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_4$ итн.

Во општа ситуација, нека преминот од состојба E_j во состојба E_k се врши во n етапи, односно:

$$E_j \to E_{j_1} \to E_{j_2} \to ... \to E_{j_{n-1}} \to E_k .$$

Веројатноста за овој премин е $p_{jj_1} p_{j_1 j_2} p_{j_2 j_3} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1} j_k}$. Меѓутоа, од E_j можеме да стигнеме до E_k преку n-етапи и по некој друг пат. Земајќи ги предвид сите можни патишта, може да се одреди веројатноста за преминот $E_j \to E_k$ во n-етапи. Нека ја означиме оваа веројатност со $p_{jk}(n)$.

За две етапи, оваа веројатност ќе биде:

$$p_{jk}(2) = \sum_{\nu} p_{j\nu} p_{\nu k} . \tag{1}$$

Бидејќи преминот $E_j \to E_k$ во n-етапи може да се врши со преминот $E_j \to E_{j_{n-1}}$ во $(n-1)$ етапа, а потоа со директен премин $E_{j_{n-1}} \to E_k$, имаме:

$$p_{jk}(n) = \sum_{\nu} p_{j\nu}(n-1) \cdot p_{\nu k} . \tag{2}$$

Формулите (1) и (2) претставуваат рекурзивни формули за одредување на веројатноста $p_{jk}(n)$.

Генерално преминот $E_j \to E_k$ може да се разложи на премин во две етапи: $E_j \to E_{j_m}$ во m етапи $(m < n)$ и $E_{j_m} \to E_k$ во $(n-m)$ етапи, така што:

$$p_{jk}(n) = \sum_{\nu} p_{j\nu}(m) \cdot p_{\nu k}(n-m) .$$

Транзитивните веројатности $p_{jk}(n)$, образуваат транзитивна матрица со ранг n:

$$M_n = \begin{bmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & p_{13}(n) & \dots \\ p_{21}(n) & p_{22}(n) & p_{23}(n) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Имајќи ги предвид (1) и (2), непосредно, користејќи ја дефиницијата за множење на матрици добиваме:

$$M_2 = M_1 \cdot M_1 ,$$

или погенерално:

$$M_n = M_1^{\ n} .$$

Пример 1. Во една кутија се наоѓаат бели и црни топчиња со веројатности за извлекување p и $q = 1 - p$, соодветно. Да го означиме со A настанот: извлечено е бело топче, а со $\overline{A}$ настанот: извлечено е црно топче. Ако во n-тиот експеримент се реализирал настанот $\overline{A}$, велиме дека системот во n-тиот момент се наоѓал во состојба E_0. Ако во $(n-k)$-от експеримент се реализирал настанот $\overline{A}$, а во следните последователни k експерименти се реализирал настанот A, велиме дека се реализирал настанот E_k, $k \in \mathbb{N}$. Пресметај ја транзитивната матрица од ранг n на овој систем.

Решение. Транзитивната матрица на овој систем е:

$$M_1 = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Оттука,

$$M_n = M_1^{\ n} = \begin{bmatrix} q & pq & \dots & p^{n-1}q & p^n & 0 & 0 & \dots \\ q & pq & \dots & p^{n-1}q & 0 & p^n & 0 & \dots \\ q & pq & \dots & p^{n-1}q & 0 & 0 & p^n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

До оваа транзитивна матрица се доаѓа преку n последователни множења на транзитивната матрица M_1 со M_1. Оваа постапка во општа ситуација не е практична и многу често е гломазна. Па, се поставува прашањето дали постои директен начин за одредување на транзитивни матрици од повисок ред. Во продолжение ќе биде даден друг начин, кој е многу попрактичен.

Да претпоставиме дека имаме конечен хомоген Марков ланец со можни состојби $E_1, E_2, ..., E_m$ и транзитивна матрица $M_1 = [p_{jk}]$. Нека M_1 има прости сопствени вредности, односно нека сите корени $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ на карактеристичната равенка:

$$\det(M_1 - \lambda I) = 0,$$

се меѓусебно различни. Нека ги означиме со:

$$\overrightarrow{x_j} = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{y_j} = \begin{bmatrix} y_{j1} & y_{j2} & \dots & y_{jm} \end{bmatrix},$$

за $j \in \{1, 2, ..., m\}$ се левиот и десниот сопствен вектор на транзитивната матрица M_1, кои одговараат на сопствената вредност $\lambda = \lambda_j$. Познато е дека овие вектори се добиваат со решавање на хомогените системи линеарни равенки $M_1 \overrightarrow{x_j} = \lambda_j \overrightarrow{x_j}$ и $\overrightarrow{y_j} M_1 = \lambda_j \overrightarrow{y_j}$, кои имаат решенија различни од тривијалното (нултиот вектор), при што λ_j е сопствена вредност на матрицата M_1. Бидејќи:

$$\overrightarrow{y_j} M_1 = \lambda_1 \overrightarrow{y_j} \text{ и } M_1 x_k = \lambda_k \overrightarrow{x_k} \Rightarrow y_j = \lambda_1 \overrightarrow{y_j} M_1^{-1} \text{ и}$$

$$\lambda_k \overrightarrow{y_j} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{y_j} M_1 \overrightarrow{x_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_k \overrightarrow{y_j} \overrightarrow{x_k} = \lambda_k \overrightarrow{y_j} M_1^{-1} M_1 \overrightarrow{x_k} \Rightarrow (\lambda_k - \lambda_j) \overrightarrow{y_j} \overrightarrow{x_k} = 0.$$

За $j \neq k$, претпоставуваме дека $\lambda_j \neq \lambda_k$. Па, за секои $j, k \in \{1, 2, ..., m\}$ и $j \neq k$ имаме:

$$\overrightarrow{y_j} \overrightarrow{x_k} = 0.$$

Една сопствена вредност λ_j одговара на бесконечно многу леви и десни сопствени вектори. Нека $\overrightarrow{\alpha_j}$ и $\overrightarrow{\beta_j}$ се произволни лев и десен сопствен вектор за $\lambda = \lambda_j$. Ги формираме векторите:

$$\overrightarrow{x_j} = \frac{\overrightarrow{\alpha_j}}{\sqrt{\sum_i \beta_{ji}\alpha_{ij}}} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{y_j} = \frac{\overrightarrow{\beta_j}}{\sqrt{\sum_i \beta_{ji}\alpha_{ij}}},$$

така што:

$$\overrightarrow{y_j}\,\overrightarrow{x_k} = \begin{cases} 0, & j \notin k \\ 1, & j = k \end{cases}. \tag{3}$$

Ако $\overrightarrow{\alpha_j}$ и $\overrightarrow{\beta_j}$ се сопствени вектори, тогаш и векторите $\overrightarrow{x_j}$ и $\overrightarrow{y_j}$ се сопствени вектори за $\lambda = \lambda_j$, а од (3), имаме дека матриците:

$$H = \begin{bmatrix} \overrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_2} & \dots & \overrightarrow{x_m} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{y_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{y_m} \end{bmatrix}$$

се инверзни.

Сега низата од системи:

$$M_1\overrightarrow{x_j} = \lambda_j \overrightarrow{x_j} \text{ за } j = \{1, 2, \dots, m\}$$

можеме да го запишеме во матричен облик:

$$M_1 H = HD,$$

каде што D е дијагонална матрица, чии елементи на главната дијагонала се сопствените вредности на матрицата M_1, односно:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Ако двете страни на горната матрична равенка ги помножиме со H^{-1}, ќе добиеме:

$$M_1 = HDH^{-1}.$$

Бидејќи:

$$M_2 = M_1^{\,2} = HDH^{-1}HDH^{-1} = HD^2H^{-1},$$

продолжувајќи на сличен начин добиваме дека за транзитивната матрица од ранг n, важи:

$$M_n = HD^nH^{-1}, \qquad (4)$$

каде што:

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m^{\,n} \end{bmatrix}.$$

Формулата (4) може да се запише и во скаларен облик:

$$p_{ik}(n) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{\,n} x_{ij} y_{jk} \,.$$

Бидејќи почнавме од два произволни сопствени вектора $\overrightarrow{\alpha_j}$ и $\overrightarrow{\beta_j}$ (лев и десен сопствен вектор), добиваме:

$$p_{ik}(n) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j^{\,n} \alpha_{ij} \beta_{jk}}{\sum_{\nu=1}^{m} \beta_{j\nu} \alpha_{\nu j}},$$

за $\{i,k\} \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$.

Останува да го разгледаме уште случајот кога M_1 има сопствени вредности со кратност поголема од еден. Нека имаме m-состојби и $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$, и нека имаме r ($r \le m$) различни сопствени вредности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, со кратности $m_1, m_2, \ldots, m_r$, соодветно. Во овој случај

$$M_1 = HD_rH^{-1},$$

каде што:

$$D_r = \begin{bmatrix} A_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{m_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{m_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}.$$

Партитивните дијагонални елементи се матрици од облик:

$$A_{m_j}(\lambda_j)=\begin{bmatrix}\lambda_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j\end{bmatrix},$$

за $j=1,2,...,r$, а нивните степени се од облик:

$$A_{m_j}^n(\lambda_j)=\begin{bmatrix}\lambda_j^n & \binom{n}{1}\lambda_j^{n-1} & \dots & \binom{n}{m_j-1}\lambda_j^{n-m_j+1}\\ 0 & \lambda_j^n & \dots & \binom{n}{m_j-2}\lambda_j^{n-m_j+2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j^n\end{bmatrix}.$$

Бараната транзитивна матрица од n-ти ред ќе биде од облик:

$$M_n=HD_r^{\,n}H^{-1},$$

каде што:

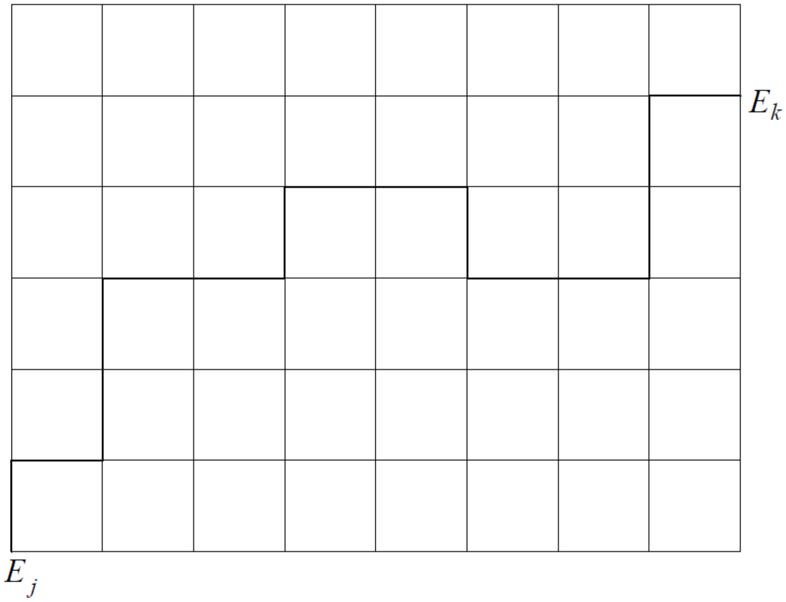
$$D_r^n=\begin{bmatrix}A_{m_1}^n(\lambda_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & A_{m_2}^n(\lambda_2) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & A_{m_r}^n(\lambda_r)\end{bmatrix}.$$

На сличен начин може да се определи и матрицата M_n, во случај кога бројот на можни состојби е неограничен.

10.3. Неразложливи ланци

Од состојба E_j на системот може да се премине во состојба E_k, ако постои барем еден природен број n за кој $p_{jk}(n)>0$. Ова може и да се запише како: Ако $(E_j\to E_k)$, тогаш постои природен број n така што $p_{jk}(n)>0$.

Оваа дефиниција за премин не бара да преминот $E_j \to E_k$ да се изврши во еден потег. Така, ако преминот се врши по должина на една правоаголна мрежа, тогаш преминот $E_j \to E_k$ не може да секогаш да се изврши во еден потег. (види слика).



Да го разгледаме сега случајот кога транзитивната матрица може да се разложи на повеќе транзитивни матрици, како на пример:

$$M_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

каде што подматриците A_1 и B_1 (кои се квадратни) се повторно транзитивни матрици:

$$A_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p_{r+1,r+1} & p_{r+1,r+2} & \cdots \\ p_{r+2,r+1} & p_{r+2,r+2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Јасно е дека множеството од сите можни состојби **A** е поделено на две подмножества:

$$\mathbf{A}_1 = \{E_1, E_2, ..., E_r\} \text{ и } \mathbf{A}_2 = \{E_{r+1}, E_{r+2}, ...\},$$

кои се непразни, дисјунктни и комплементни во однос на **A**.

Од (1), од една состојба на множеството $\mathbf{A}_1$ не можеме да преминеме со еден потег во некој состојба од $\mathbf{A}_2$, односно:

$$E_j \in \mathbf{A}_1 \text{ и } E_k \in \mathbf{A}_2 \Rightarrow p_{jk} = 0 .$$

Дефиниција 1. За едно множество од состојби $\mathbf{A}_i$ велиме дека е затворено ако од ниту една негова состојба во некоја друга состојба која не припаѓа на $\mathbf{A}_i$, односно:

$$\text{за секоја } E_j \in \mathbf{A}_i \text{ и за секоја } E_k \notin \mathbf{A}_i \Rightarrow p_{jk} = 0 .$$

Ако целото множество од состојби **A** на Марковиот ланец е затворено, за ланецот велиме дека е неразложлив (иредуктибилен).

Имајќи ја предвид горната дефиниција ако еден Марков ланец со множество од состојби **A** е неразложлив, тогаш важи:

$$\text{за секоја } E_j \in \mathbf{A} \text{ и за секоја } E_k \notin \mathbf{A} \Rightarrow p_{jk}(2) = \sum_{\nu} p_{j\nu} p_{\nu k} = 0 .$$

Со индукција, еден Марков ланец со множество од состојби **A** е неразложлив е еквивалентно со:

$$\text{за секој } n \in \mathbb{N} \text{ и за секоја } E_j \in \mathbf{A} \text{ и } E_k \notin \mathbf{A} \Rightarrow p_{jk}(n) = 0 .$$

Од ова заклучуваме дека не постојат никакви можности да од една состојба од затворено множество $\mathbf{A}_i$ да се премине во некоја состојба надвор од тоа множество. Затоа веројатноста дека во некој од следниве потези ќе останеме во $\mathbf{A}_i$ е:

$$\sum_{\nu} p_{j\nu}(n) = 1, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} .$$

Ако во M_n ги избришеме сите редици и колони кои одговараат на состојбите $E_j \notin \mathbf{A}_i$, ја добиваме матрицата кај која важат релациите:

$$p_{jk}(n) = \sum_{\nu} p_{j\nu}(n-1) \cdot p_{\nu k} ,$$

$$p_{jk}(n) = \sum_{\nu} p_{j\nu}(m) \cdot p_{\nu k}(n-m) .$$

На овој начин добиваме Марков ланец дефиниран на затворено множество $\mathbf{A}_i$ и овој ланец може да се проучува независно од останатите состојби.

Може да се случи една состојба E_k да образува едно затворено множество. Тогаш, очигледно е $p_{kk} = 1$. За E_k велиме дека претставува апсорбирачка состојба на разгледуваниот систем.

Дефиниција 2. Ланецот кај кој постојат две или повеќе затворени множества се нарекува разложлив ланец.

Пример 1. Нека е дадена транзитивната матрица

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Транзитивната матрица од n-ти ред да се разложи на две транзитивни матрици.

Решение. Кај транзитивната матрица M_1 со бришење на втората и четвртата редица и втората и четвртата колона, ја добиваме подматрицата:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

која претставува една транзитивна матрица. Значи, состојбите E_1 и E_3 образуваат едно затворено множество.

Од друга страна, со бришење на првата и третата редица, односно првата и третата колона, ќе добиеме уште една транзитивна подматрица:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

што значи дека состојбите E_2 и E_4 формираат второ затворено множество.

Ако состојбите ги подредиме по следниот редослед: E_1, E_3, E_2, E_4, ќе добиеме:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}.$$

Лесно се проверува дека:

$$M_1^n = \begin{bmatrix} A_1^n & 0 \\ 0 & B_1^n \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

10.4. Регуларни Маркови ланци

Дефиниција 1. Неусловната веројатност дека во моментот n, системот ќе се најде во состојба E_k, која изнесува:

$$a_k(n) = \sum_j a_j p_{jk}(n),$$

се нарекува апсолутна веројатност.

Едно од главните својства на Марковите ланци е асимптотското однесување на неговите условни веројатности $p_{jk}(n)$, кога $n \to \infty$.

Интуитивно може да се очекува дека влијанието на почетната состојба постепено опаѓа кога n расте, па така за големо n, веројатноста $p_{jk}(n)$ нема повеќе да зависи од состојбата во која системот се наоѓал на почетокот. Тогаш, важи:

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}(n) = u_k,$$

а за Марковиот ланец велиме дека е регуларен. Веројатностите u_k се нарекуваат ергодични веројатности.

Теорема 1. (Ергодична теорема) Нека $M_1 = [p_{jk}]$ е транзитивна матрица на хомогениот Марков ланец со конечен број на можни состојби во системот $\mathbf{A} = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$. Ако постои $r \in \mathbb{N}$ така што за секој $k \in \{k_1, k_2, ..., k_s\}$, $\min_j p_{jk}(r) = \delta > 0$, каде $s \le m$, а $p_{jk}(r)$ е елемент од $M_r = M_1^r$, тогаш важи:

а) $\lim_{n\to\infty} p_{jk}(n) = u_k$, $k \in \{1, 2, ..., m\}$

б) $u_k \ge \delta$, за секој $k \in \{k_1, k_2, ..., k_s\}$

в) $\sum_k u_k = 1$

г) $| p_{jk}(n) - u_k | \le (1 - s\delta)^{\frac{n}{r}-1}$.

Доказ.

а) Поаѓаме од транзитивната матрица M_ν на разгледуваниот Марков ланец:

$$M_\nu = \begin{bmatrix} p_{11}(\nu) & ... & p_{1k}(\nu) & ... & p_{1m}(\nu) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ p_{j1}(\nu) & ... & p_{jk}(\nu) & ... & p_{jm}(\nu) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ p_{m1}(\nu) & ... & p_{mk}(\nu) & ... & p_{mm}(\nu) \end{bmatrix}.$$

Нека ги означиме со $b_k(\nu)$ односно $B_k(\nu)$ елементите со најмала односно најголема вредности во k-тата колона од M_ν, односно:

$$b_k(\nu) = \min_j p_{jk}(\nu)$$

$$B_k(\nu) = \max_j p_{jk}(\nu).$$

Со воведување на овие ознаки во Марковиот модел:

$$p_{jk}(\nu + 1) = \sum_i p_{ji} p_{ik}(\nu),$$

добиваме:

$$b_k(\nu+1) = \min_j \sum_i p_{ji} p_{ik}(\nu) \ge \min_i \sum_i p_{ji} b_k(\nu) = b_k(\nu) \cdot \min_j \sum_i p_{ji},$$

односно:

$$b_k(\nu+1) \ge b_k(\nu).$$

Сосема аналогно, добиваме дека:

$$B_k(\nu+1) \le B_k(\nu).$$

Имајќи ги предвид воведените ознаки и претходните две неравенства, можеме да ја дадеме следнава монотоно неопаѓачка низа:

$$b_k(1) \le b_k(2) \le ... \le B_k(2) \le B_k(1)\,. \qquad (*)$$

Нека матрицата M_r содржи вкупно s-колони, во кои сите членови се нули, односно:

$$\min_j p_{jk}(r) = \delta > 0\,, \quad k \in \{k_1, k_2, ..., k_s\}\,.$$

Да ги разгледаме i-тата и j-тата редица. Нивните збирови на елементите од тие редици се единици, бидејќи M_r е транзитивна матрица. Затоа од:

$$\sum_k p_{ik}(r) = \sum_k p_{jk}(r) = 1$$

следува:

$$\sum_k \left(p_{ik}(r) - p_{jk}(r) \right) = 0\,.$$

Нека со $\sum_k^{+}$ го означиме збирот на позитивните разлики од збирот $\sum_k$, а со $\sum_k^{-}$ збирот на сите негативни разлики од збирот $\sum_k$. Па, последниот израз можеме да го запишеме како:

$$\sum_k^{+} \left(p_{ik}(r) - p_{jk}(r) \right) + \sum_k^{-} \left(p_{ik}(r) - p_{jk}(r) \right) = 0\,. \qquad (1)$$

Нека $n > r$ и ја разгледуваме разликата:

$$B_k(n) - b_k(n) = \max_i p_{ik}(n) - \min_j p_{jk}(n)$$

$$= \max_i \sum_\nu p_{i\nu}(r) \cdot p_{\nu k}(n-r) - \min_j \sum_\nu p_{j\nu}(r) \cdot p_{\nu k}(n-r)$$

$$= \max_{i,j} \sum_\nu \left(p_{i\nu}(r) - p_{j\nu}(r) \right) \cdot p_{\nu k}(n-r)$$

$$\le \max_{i,j} \left(\sum_\nu^{+} \left(p_{i\nu}(r) - p_{j\nu}(r) \right) B_k(n-r) + \sum_\nu^{-} \left(p_{i\nu}(r) - p_{j\nu}(r) \right) \cdot b_k(n-r) \right).$$

Користејќи го (1), добиваме:

$$B_k(n) - b_k(n)$$

$$\le \max_{i,j}\left(\sum_{\nu}^{+}\left(p_{i\nu}(r)-p_{j\nu}(r)\right)\cdot B_k(n-r)-\sum_{\nu}^{+}\left(p_{i\nu}(r)-p_{j\nu}(r)\right)b_k(n-r)\right)$$

,

односно:

$$B_k(n)-b_k(n)\le\left(B_k(n-r)-b_k(n-r)\right)\cdot\max_{i,j}\sum_{\nu}^{+}\left(p_{i\nu}(r)-p_{j\nu}(r)\right). \quad (2)$$

Од условот на теоремата, сите елементи во s-колоната од M_r се позитивни. Од друга страна, во збирот $\sum_{\nu}^{+}$ учествуваат само оние колони кај кои се разликите позитивни. Нека α е број на колони со позитивни членови кои учествуваат во тој збир. Очигледно е дека $\alpha \le s$. Па,

$$p_{jk}(r)\ge\delta>0, \quad \text{за секој } k\in\{k'_1,k'_2,...,k'_\alpha\},$$

Односно:

$$-\sum_{k}^{+}p_{jk}(r)\le-\alpha\delta.$$

Кај $s-\alpha$ колони, кои учествуваат во збирот $\sum_{k}^{-}$ имаме:

$$p_{ik}(r)\ge\delta>0, \quad \text{за секој } k\in\{k'_1,k'_2,...,k'_{s-\alpha}\},$$

така што:

$$1=\sum_{k}p_{ik}(r)=\sum_{k}^{+}p_{ik}(r)+\sum_{k}^{-}p_{ik}(r)$$

$$\ge\sum_{k}^{+}p_{ik}(r)+(s-\alpha)\delta,$$

или:

$$\sum_{k}^{+}p_{ik}(r)+(s-\alpha)\delta\le1.$$

Сега, имаме:

$$\sum_{\nu}^{+}\left(p_{i\nu}(r)-p_{j\nu}(r)\right)\le1-s\delta .$$

Имајќи ги предвид (2) и последното неравенство, добиваме:

$$B_k(n)-b_k(n)\le(1-s\delta)\left(B_k(n-r)-b_k(n-r)\right).$$

За $n>2r$, на аналоген начин добиваме дека:

$$B_k(n) - b_k(n) \le \left(B_k(n-2r) - b_k(n-2r) \right) \max_{i,j} \sum_{\nu}{}^{+} \left(p_{i\nu}(2r) - p_{j\nu}(2r) \right)$$

,

односно:

$$B_k(n) - b_k(n) \le (1 - s\delta)^2 \left(B_k(n-2r) - b_k(n-2r) \right).$$

Ако $n > \left[\frac{n}{r} \right] \cdot r$, добиваме:

$$B_k(n) - b_k(n) \le (1 - s\delta)^{\left[\frac{n}{r}\right]} \left(B_k\left(n - \left[\frac{n}{r} \right] \cdot r \right) - b_k\left(n - \left[\frac{n}{r} \right] \cdot r \right) \right). \qquad (3)$$

Бидејќи:

$$\delta > 0 \qquad \text{и} \qquad s \ge 1,$$

имаме:

$$0 \le 1 - s\delta < 1.$$

Од (*) имаме дека низите $(b_k(n))$ и $(B_k(n))$ конвергираат, додека од (3) добиваме дека соодветните гранични вредности се еднакви помеѓу себе, однсно:

$$\lim_{n\to\infty} \max_j p_{jk}(n) = \lim_{n\to\infty} \min_j p_{jk}(n) = u_k .$$

б) Од условот на теоремата, од тврдењето а) и (*), имаме дека за секој $k \in \{k_1, k_2, ..., k_s\}$, важи:

$$\delta = \min_j p_{jk}(r) = b_k(r) \le b_k(r+1) \le u_k ,$$

односно:

$$u_k \ge \delta \text{, за } k \in \{k_1, k_2, ..., k_s\} .$$

в) Збирот на ергодичните веројатности е еднаков на единица, односно:

$$\sum_k u_k = \sum_k \lim_{n\to\infty} \min_j p_{jk}(n) = \lim_{n\to\infty} \min_j \sum_k p_{jk}(n) = 1.$$

г) Бидејќи:

$$b_k(n) \le p_{jk}(n) \le B_k(n), \text{ за } k \in \{k_1, k_2, ..., k_s\} \text{ и}$$

$$b_k(n) \le u_k \le B_k(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

односно:

$$| p_{jk}(n) - u_k | \le B_k(n) - b_k(n). \qquad (4)$$

Веројатностите $B_k(n)$ и $b_k(n)$ не можат да бидат поголеми од единица и уште важи $B_k(n) \ge b_k(n)$. Оттука,

$$0 \le B_k(n) - b_k(n) \le 1.$$

Од последното неравенство и (3), добиваме:

$$B_k(n) - b_k(n) \le (1 - s\delta)^{\left[\frac{n}{r}\right]}.$$

Бидејќи:

$$\frac{n}{r} - 1 \le \left[\frac{n}{r}\right] \le \frac{n}{r} \qquad \text{и} \qquad 1 - s\delta < 1,$$

добиваме:

$$B_k(n) - b_k(n) \le (1 - s\delta)^{\frac{n}{r} - 1}.$$

Последното тврдење заедно со (4), го дава тврдењето:

$$| p_{jk}(n) - u_k | \le (1 - s\delta)^{\frac{n}{r} - 1}. \ \blacksquare$$

Горнава теорема служи за испитување на постоењето на ергодичните веројатности u_k. Од претходно, знаеме дека важи:

$$p_{jk}(n) = \sum_{\nu} p_{j\nu}(n-1) \cdot p_{\nu k}.$$

Доколку ергодичните веројатности постојат, овие релации се сведуваат на систем од m-хомогени линеарни равенки:

$$u_k = \sum_{\nu=1}^{m} p_{\nu k} u_k \,, \ \text{за} \ k \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

при што непознатите u_k го задоволуваат условот:

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = 1.$$

На овој начин може да ги одредиме ергодичните веројатности $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Пример 1. Транзитивната матрица M на Марковиот ланец со две состојби $\{1, 2\}$ е:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

а) Ако системот во почетниот момент бил во состојба 1, одреди ја веројатноста за состојбите на системот после неколку чекори.

б) Одреди ја транзитивната матрица по неколку чекори.

в) Постои ли $\lim_{n\to\infty} M^n$? Колку е стационарната веројатност?

Решение.

а) Во моментот t_0 системот бил во состојба 1. Тоа значи дека функцијата на распределба на случајната променлива X_0 е еднаква на $p(0)=(1,0)$. Веројатноста во наредните моменти е:

$$p(1)=p(0)M=(1,0)\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right),$$

$$p(2)=p(1)M=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right),$$

$$p(3)=p(2)M=\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\left(\frac{9}{16},\frac{7}{16}\right).$$

Ако во моментот t_0, почетната состојба е 2, односно $p(0)=(0,1)$, тогаш на ист начин добиваме дека:

$$p(1)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\qquad p(2)=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right),$$

$$p(3)=\left(\frac{7}{16},\frac{9}{16}\right),\ \ldots .$$

Да забележиме дека со време се губи влијанието на почетната состојба.

б) Овде, за транзитивните матрици после неколку чекори имаме:

$$M=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix},\qquad M^2=\begin{bmatrix}\frac{5}{8} & \frac{3}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8}\end{bmatrix},\qquad M^3=\begin{bmatrix}\frac{9}{16} & \frac{7}{16}\\ \frac{7}{16} & \frac{9}{16}\end{bmatrix},$$

$$\ldots .$$

в) Со принципот на математичка индукција се добива дека:

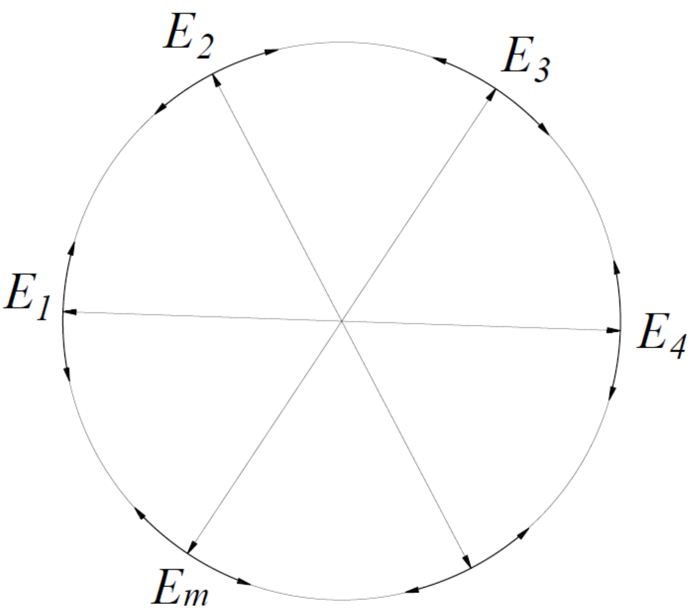
$$M^n = \begin{bmatrix} \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}} & \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}} \\ \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}} & \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}} \end{bmatrix}.$$

Па, имаме дека:

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Секоја редица на оваа матрица претставува вектор од стационарни веројатности. Имаме: $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \dfrac{1}{2}, \quad j = 1,2$. ♦

Пример 2. Нека $\mathbf{A} = \{E_0, E_1, E_2, ..., E_m\}$ е множество од сите можни состојби на системот Σ . Можни се следниве премини (види слика):



$$E_0 \to E_0 \;\text{ и }\; E_0 \to E_k \text{, за сите } k \in \{1,2,...,m\},$$

$$E_1 \to E_m \;\text{ и }\; E_k \to E_{k-1} \text{, за сите } k \in \{1,2,...,m\},$$

$$E_m \to E_1 \text{ и } E_k \to E_{k+1}, \text{ за сите } k \in \{1,2,...,m\},$$

со соодветни транзитивни веројатности:

$$p_{00} = \frac{1}{2} \text{ и } p_{0k} = \frac{1}{2m}, \text{ за сите } k \in \{1,2,...,m\},$$

$$p_{1m} = \frac{1}{2} \text{ и } p_{k,k-1} = \frac{1}{2}, \text{ за сите } k \in \{1,2,...,m\},$$

$$p_{m1} = \frac{1}{2} \text{ и } p_{k,k+1} = \frac{1}{2}, \text{ за сите } k \in \{1,2,...,m\}.$$

Провери ја регуларноста на ланецот за $m=2$ и $m=3$.

Решение. Нека ставиме $m=2$, па можни состојби се E_0, E_1 и E_2. Матрицата од транзитивни веројатности, која одговара на овој систем е:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицата од транзитивни веројатности од n-ти ред е:

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) \end{bmatrix}.$$

Лесно се забележува дека ако ставиме $n \to \infty$, нема сите елементи на матрицата да тежат кон одредени гранични вредности така да ланецот не е регуларен.

За $m=3$, матрицата од транзитивните веројатности е:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицата од транзитивните веројатности од n-ти ред е:

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\ 0 & \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{(-2)^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{(-2)^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{(-2)^n}\right) \\ 0 & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{(-2)^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{(-2)^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{(-2)^n}\right) \\ 0 & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{(-2)^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{(-2)^n}\right) & \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{(-2)^n}\right) \end{bmatrix}.$$

Ако ставиме $n \to \infty$, имаме:

$$M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

До елементите на оваа матрица може да се дојде и со директно решавање на системот:

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ \frac{u_0}{2} = u_0 \\ \frac{u_0}{6} + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{2} = u_1 \\ \frac{u_0}{6} + \frac{u_1}{2} + \frac{u_3}{2} = u_2 \end{cases}. \blacklozenge$$

За да испитаме дали еден хомоген Марков ланец со конечен број на можни состојби е регуларен или не, ќе почнеме од карактеристичната равенка на транзитивната матрица:

$$\det(M_1 - \lambda I) = 0.$$

Ако бројот на можни состојби е m, тогаш горната равенка е равенка од m-ти ред.

Едно решение на карактеристичната равенка е секогаш 1. Навистина, ако во детерминантата, на првата колона ги додадеме сите останати колони и имаме предвид дека $\sum_k p_{jk} = 1,\ \ j = 1, 2, ..., m$, добиваме:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \sum_j p_{1j} - \lambda & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \sum_j p_{2j} - \lambda & p_{22} - \lambda & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_j p_{mj} - \lambda & p_{m2} & \cdots & p_{mm} - \lambda \end{vmatrix},$$

односно:

$$D(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ 1 & p_{22} - \lambda & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & p_{m2} & \cdots & p_{mm} - \lambda \end{vmatrix},$$

од каде што заклучуваме дека: $D(1) = 0$.

Аналогно може да се докаже дека модулите на сите решенија на карактеристичната равенка не се поголеми од единица, односно за секој $i \in \{1, 2, ..., m\}$ ако $D(\lambda_i) = 0$, тогаш $|\lambda_i| \le 1$.

Теорема 2. (Теорема за регуларност) Ако карактеристичната равенка нема ниту еден корен со модул еднаков на 1, освен $\lambda_1 = 1$, тогаш соодветниот хомоген Марков ланец е регуларен.

Доказ. Претходно покажавме дека $\lambda_1 = 1$ е секогаш корен на карактеристичната равенка. Да претпоставиме дека тој е единствениот корен со модул еднаков на 1. Тогаш:

$$p_{ik}(n) = \frac{\alpha_{i1}\beta_{1k}}{\sum_\nu \beta_{1\nu}\alpha_{\nu 1}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{\lambda_j^n \alpha_{ij}\beta_{jk}}{\sum_\nu \beta_{i\nu}\alpha_{\nu j}},$$

за $i, k \in \{1, 2, ..., m\}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Освен тоа, да забележиме дека за $\lambda_1 = 1$, соодветниот систем на равенки:

$$M_1 \overrightarrow{\alpha_1} = \overrightarrow{\alpha_1}$$

ќе биде задоволен за $\alpha_{11} = \alpha_{21} = ... = \alpha_{m1}$. Па, горниот израз можеме да го запишеме во облик:

$$p_{ik}(n) = \frac{\beta_{1k}}{\sum_{\nu} \beta_{1\nu}} + \sum_{j=2}^{m} \frac{\lambda_j^n \alpha_{ij} \beta_{jk}}{\sum_{\nu} \beta_{j\nu} \alpha_{\nu j}}.$$

Од нашата претпоставка дека $|\lambda_j| < 1$ за $j \in \{2, 3, ..., m\}$, имаме дека:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ik}(n) = \frac{\beta_{1k}}{\sum_{\nu} \beta_{1\nu}},$$

односно ланецот е регуларен.

Сега, да претпоставиме дека карактеристичната равенка има покрај единечниот корен, уште корени чиј модул е единица. Ако е само еден корен со вредност $\lambda_2 = -1$, тогаш горниот израз се сведува на:

$$p_{ik}(n) = \frac{\beta_{ik}}{\sum_{\nu} \beta_{1\nu}} + (-1)^n \frac{\alpha_{i2} \beta_{2k}}{\sum_{\nu} \beta_{2\nu} \alpha_{\nu 2}} + \sum_{j=3}^{m} \frac{\lambda_j^n \alpha_{ij} \beta_{jk}}{\sum_{\nu} \beta_{j\nu} \alpha_{\nu j}},$$

каде што $|\lambda_j| < 1$, за $j \in \{3, 4, ..., m\}$.

Поради вториот собирок во изразот на десната страна, горниот израз нема гранична вредност кога $n \to \infty$, па ланецот не е регуларен.

Ако $\lambda_1 = 1$ е корен со кратност m_1 на карактеристичната равенка, тогаш матрицата $A_{m_1}^n(1)$ го добива обликот:

$$A_{m_1}^n(1) = \begin{bmatrix} 1 & \binom{n}{1} & ... & \binom{n}{m_1 - 1} \\ 0 & 1 & ... & \binom{n}{m_1 - 1} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Сите нејзини елементи над главната дијагонала ќе растат неограничено, кога $n \to \infty$, па ланецот нема да биде регуларен.

Исто така, до ист заклучок се доаѓа ако $\lambda = -1$ е корен на карактеристичната равенка со кратност поголема од единица. Со ова теоремата е докажана. ■

10.5. Класификација на состојби

Нека во еден момент системот Σ, се наоѓал во состојба E_i. Да го означиме овој момент со $t=0$, односно сметаме дека е почетен момент на нашето разгледување. Да претпоставиме дека во момент $t=n$, системот првпат повторно ќе се најде во состојбата E_j, односно:

$$t: \begin{array}{ccc} 0 & \underbrace{1\ 2\ 3 \ldots n-1} & n \\ E_j & E_k \neq E_j & E_j \end{array},$$

при што состојбите E_k во моментите $t=1,2,\ldots,n-1$ не мора да бидат различни помеѓу себе.

Да ја означиме со $f_j(n)$ веројатноста дека системот Σ, кој во почетниот момент се наоѓал во состојба E_j, повторно по првпат ќе се најде во таа состојба во момент $t=n$. Очигледно, важи:

$$f_j(1) = p_{ij}.$$

Со користење на втората аксиома на веројатноста, добиваме дека веројатноста на системот во моментите $t=0$ и $t=n$ се наоѓа во состојба E_j, односно веројатноста $p_{ij}(n)$, е еднаква на веројатноста дека системот, кој во моментот $t=0$ се наоѓал во состојба E_j, повторно по првпат ќе се најде во таа состојба во еден од моментите $t \in \{1,2,\ldots,n\}$, а во моментот $t=n$, исто така, ќе се најде во состојба E_j, односно:

$$p_{ij}(n) = \sum_{m=1}^{n} f_j(m)\, p_{jj}(n-m).$$

На овој начин доаѓаме до општата рекурентна формула за веројатноста на $f_j(n)$:

$$f_j(n) = p_{jj}(n) - f_j(1)p_{jj}(n-1) - f_j(2)p_{jj}(n-2) - \ldots - f_j(n-1)p_{jj}.$$

Збирот:

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n)$$

претставува веројатноста дека системот Σ од почетната состојба E_j, повторно ќе се врати во таа состојба.

Ако $f_j = 0$, враќањето на системот во состојба E_j е невозможно.

Ако $f_j = 1$, системот сигурно ќе се врати повторно во почетната состојба E_j.

Кога системот еднаш ќе се врати во состојбата E_j, почетната состојба повторно е воспоставена, па така можеме да сметаме дека целиот процес почнува од почеток. Затоа, враќањето во E_j е рекурентен настан.

Ако $f_j = 1$, рекурентниот настан е сигурен, а изразот:

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j(n)$$

претставува средно рекурентно време.

Според досега даденото, класификацијата на состојбите во еден Марков ланец би можела да се направи на следниов начин:

Состојбата E_j е рекурентна ако враќањето повторно во таа состојба е сигурно, односно $f_j = 1$. Средното рекурентно време μ_j на рекурентната состојба може да биде конечно или бесконечно, во зависнот од тоа дали горниот израз за μ_j конвергира или не конвергира.

Состојбата E_j е нулта состојба ако е рекурентна и има бесконечно големо средно време ($\mu_j = \infty$).

Состојбата E_j е нестабилна ако враќањето на системот во E_j е неизвесно, односно ако $f_j < 1$. Кај нестабилната состојба рекурентното време е секогаш бесконечно, односно $\mu_j = \infty$.

Состојбата E_j е периодична со период t ако враќањето во E_j е невозможно, освен можеби во моменти kt, $k,t \in \mathbb{N}$, $t > 1$. Тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ и n не е деливо со t, имаме $p_{jj}(n) = 0$.

Рекурентната состојба $(f_j = 1)$ кое не е ни нулта $(\mu_j < \infty)$, ни периодична $(t = 1)$ се нарекува ергодична состојба.

Нека $\mathbf{A}_0$ е множество од сите нестабилни состојби, а $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ се затворени множества од рекурентни состојби во еден хомоген Марков ланец. Од една состојба од $\mathbf{A}_0$ може да се премине во некоја состојба од $\mathbf{A}_i$, $(i \in \mathbb{N})$, а од $\mathbf{A}_i$ не може да се премине во $\mathbf{A}_0$. Имено, од една рекурентна состојба од $\mathbf{A}_i$, системот може да премине единствено во рекурентна состојба од $\mathbf{A}_i$.

Исто така, од нулта состојба, системот може да премине во нулта состојба, од периодична состојба во периодична состојба и од нестабилна во нестабилна состојба.

Од овде можеме да заклучиме дека ако ланецот е неразложлив, неговото множество на состојби $\mathbf{A}$ е множество од истородни состојби.

10.6. Апсолутна веројатност

Од претходно, апсолутната веројатност е неусловна веројатност дека во моментот $t = n$, системот Σ ќе се најде во состојба E_k, односно:

$$a_k(n) = \sum_j a_j p_{jk}(n),$$

каде што a_j се почетни веројатности. Од горната формула, можеме да ја изведеме и следнава рекурентна формула за апсолутна веројатност:

$$a_k(n) = \sum_j a_j(n-1) \cdot p_{jk} \ .$$

Дефиниција 1. Хомогениот Марков ланец за кој важи $a_k(1) = a_k$, за секој $k \in \mathbb{N}$, се нарекува стационарен ланец, а веројатностите $a_k(n)$ се нарекуваат стационарни апсолутни веројатности.

Очигледно е дека стационарните апсолутни веројатности се еднакви на почетните веројатности, односно:

$$a_k(n) = a_k, \text{ за секои } k, n \in \mathbb{N}.$$

Рекурентната формула кај апсолутните веројатности, кај стационарните апсолутни веројатности се сведува на:

$$a_k = \sum_j a_j p_{jk} , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Да претпоставиме дека бројот на сите можни состојби на еден стационарен хомоген Марков ланец е конечен и е еднаков на m. Ако овој ланец е и регуларен, тогаш ергодичните веројатности u_k, постојат и важи:

$$a_k = u_k, \text{ за сите } k \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Според тоа, ако почетните веројатности a_k се еднакви на ергодичните веројатности u_k, за сите $k \in \{1,2,...,m\}$, тогаш $a_k(n) = u_k$, независно од n, па ланецот ќе биде стационарен.

10.7. Решени задачи

Задача 1. Напиши ја транзитивната матрица при фрлање на паричка.

Решение. При фрлањето на паричка, можни се две состојби E_1 и E_2 со почетни веројатности $a_1 = p(E_1) = \frac{1}{2}$ и $a_2 = p(E_2) = \frac{1}{2}$. Бидејќи фрлањата се независни, имаме:

$$p_{11} = p(E_1 \mid E_1) = p(E_1) = \frac{1}{2}$$

$$p_{12} = p(E_2 \mid E_1) = p(E_2) = \frac{1}{2}$$

$$p_{21} = p(E_1 \mid E_2) = p(E_1) = \frac{1}{2}$$

$$p_{22} = p(E_2 \mid E_2) = p(E_2) = \frac{1}{2}.$$

Во согласност со ова, транзитивната матрица е:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Задача 2. Нека имаме n означени кутии $U_1, U_2, ..., U_n$ (празни на почеток) и n-ливчиња на кои се напишани броевите од 1 до n (на секое ливче е напишан само еден број). Случајно извлекуваме едно ливче и го враќаме назад. Најди ја транзитивната матрица и почетниот распоред на веројатностите при изведување на овој систем.

Решение. Ако извлеченото ливче има број s, каде што $1 \le s \le n$, во кутијата U_s ставаме едно топче. По r извлекувања, ќе има најмногу

r непразни кутии. Да претпоставиме дека има точно k, $(k \le r)$ непразни кутии. Веројатноста, дека по наредното извлекување, ќе ставиме топче во празна кутија е: $\dfrac{n-k}{n}$.

Транзитивните веројатности ги имаат следниве вредности:

$$p_{kj} = \begin{cases} 1 - \dfrac{n-k}{n} = \dfrac{k}{n}, & j = k \\ \dfrac{n-k}{n}, & j = k+1 \\ 0, & j \notin \{k, k+1\} \end{cases},$$

за секој $j \in \mathbb{N}$. Па, транзитивната матрица е:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dfrac{1}{n} & \dfrac{n-1}{n} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{n} & \dfrac{n-2}{n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Распоредот на почетните веројатности е $\mathbf{P} = \{1, 0, 0, \dots\}$, што е очигледно, бидејќи после првото извлекување сигурно ќе биде окупирана една и само една кутија.

Задача 3. Нека е дадена транзитивната матрица:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

на еден хомоген Марков ланец со три можни состојби. Најди ја транзитивната матрица од n-ти ред.

Решение. Карактеристичната равенка на матрицата M_1 е:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} - \lambda & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решенијата на оваа равенка се: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ и $\lambda_3 = 1$. Со решавањето на трите хомогени системи од три линеарни равенки:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \alpha_{3j} \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \alpha_{3j} \end{bmatrix}, \text{ каде } j = 1, 2, 3,$$

ги добиваме следниве решенија:

За $\lambda_1 = 1$: $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31}$.

За $\lambda_2 = \frac{1}{2}$: $\alpha_{12}, \alpha_{22} = \alpha_{32} = 0$.

За $\lambda_3 = -1$: $\alpha_{13} = 0$, $\alpha_{23} = -\alpha_{33}$.

Со решавање на системот:

$$\begin{bmatrix} \beta_{j1} & \beta_{j2} & \beta_{j3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_j \cdot \begin{bmatrix} \beta_{j1} & \beta_{j2} & \beta_{j3} \end{bmatrix},$$

каде што: $j = 1, 2, 3$,

ги добиваме решенијата:

За $\lambda_1 = 1$: $\beta_{11} = 0$, $\beta_{12} = \beta_{13}$.

За $\lambda_2 = \frac{1}{2}$: β_{12}, $\beta_{22} = \beta_{23}$.

За $\lambda_3 = -1$: $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = -\beta_{33}$.

Водејќи сметка за овие врски, ги избираме нумеричките вредности α_{ij} и β_{ij}:

$\overrightarrow{\alpha_1}$	$\overrightarrow{\alpha_2}$	$\overrightarrow{\alpha_3}$
$\alpha_{11} = 1$	$\alpha_{12} = 1$	$\alpha_{13} = 0$
$\alpha_{21} = 1$	$\alpha_{22} = 0$	$\alpha_{23} = 1$
$\alpha_{31} = 1$	$\alpha_{32} = 0$	$\alpha_{33} = -1$

$\overrightarrow{\beta_1}$	$\overrightarrow{\beta_2}$	$\overrightarrow{\beta_3}$
$\beta_{11}=0$	$\beta_{12}=-1$	$\beta_{31}=0$
$\beta_{12}=1$	$\beta_{22}=1$	$\beta_{32}=1$
$\beta_{13}=1$	$\beta_{23}=1$	$\beta_{33}=-1$

Сега, на пример:

$$p_{11}(n)=1^n\cdot\frac{\alpha_{11}\beta_{11}}{\sum_{\nu}\beta_{1\nu}\alpha_{\nu 1}}+\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\alpha_{12}\beta_{21}}{\sum_{\nu}\beta_{2\nu}\alpha_{\nu 2}}+(-1)^n\frac{\alpha_{13}\beta_{31}}{\sum_{\nu}\beta_{3\nu}\alpha_{\nu 3}},$$

односно:

$$p_{11}(n)=\frac{1}{2}.$$

Слично, добиваме:

$$p_{22}(n)=1^n\cdot\frac{\alpha_{21}\beta_{12}}{\sum_{\nu}\beta_{1\nu}\alpha_{\nu 1}}+\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\alpha_{22}\beta_{22}}{\sum_{\nu}\beta_{2\nu}\alpha_{\nu 2}}+(-1)^n\cdot\frac{\alpha_{23}\beta_{32}}{\sum_{\nu}\beta_{3\nu}\alpha_{\nu 3}},$$

односно:

$$p_{22}(n)=\frac{1}{2}+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}.$$

Продолжувајќи со оваа постапка ја добиваме транзитивната матрица од n-ти ред:

$$M_n=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^n} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)\\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right)\end{bmatrix}.$$

Задача 4. (Преносен канал со шум) Еден канал е составен од n-независни сериски споени преносни системи од кој секој пренесува две можни пораки. Веројатноста за точна интерпретација на секој знак во секој преносен систем е $\alpha=\beta=0,995$.

а) Колку преносни системи смее да има тој канал за да веројатноста за да биде примен точен сигнал е поголема од $0,95$?

б) Ако каналот има 5 преносни системи, колкава смее да биде веројатноста на погрешен прием на секој знак на преносниот систем, за да би добиле иста сигурност на точен примем за целиот канал, т.е. точен прием со веројатност $0,95$?

в) Што ќе се случи ако бројот на преносни системи стане бесконечен?

Решение.

а) Преносот на знакови е опишан со Марков ланец со две состојби $\{0,1\}$ и транзитивна матрица на веројатности:

$$M = \begin{bmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,005 & 0,995 \end{bmatrix}.$$

Веројатноста за погрешна интерпретација по поминување на n преносни системи е:

$$p_{01}(n) = \frac{(1-\alpha)-(1-\alpha)(\alpha+\beta-1)^n}{2-\alpha-\beta} = \frac{1}{2}(1-(2\alpha-1)^n) = \frac{1}{2}(1-0,99^n)$$

$$p_{10}(n) = \frac{(1-\beta)-(1-\beta)(\alpha+\beta-1)^n}{2-\alpha-\beta} = \frac{1}{2}(1-0,99^n).$$

Да забележиме дека ова се растечки функции од n: веројатноста за грешка расте со бројот на преносни системи. Од условот на задачата, n може да се одреди од условот:

$$\frac{1}{2}(1-0,995^n) < 0,05,$$

од каде што: $n \le 10$.

б) Овде треба да ја решиме неравенката:

$$p_{01}(n) = p_{10}(n) = \frac{1}{2}(1-(2\alpha-1)^n) < 1-p,$$

од каде што добиваме дека:

$$\alpha > \frac{1}{2}\left(1+\sqrt[n]{1-2(1-p)}\right).$$

За $p = 0,95$ и $n = 5$, добиваме дека $\alpha > 0,9896$.

в) Ако пуштиме $n \to \infty$, тогаш се губи сигурноста, односно $p_{ij}(n) \to \frac{1}{2}$, за сите i, j.

Задача 5. Три бели и три црни топчиања се распоредени во две кутии, по три топчиња во секоја кутија. Состојбата на системот е опишана со бројот на бели топчиња во првата кутија. Во секој чекор случајно избираме по едно топче од двете кутии и им ги заменуваме местата (кутиите). Најди ја транзитивната матрица на веројатности и стационарните веројатности.

Решение. Постојат четири можни состојби на системот, односно $S=\{0,1,2,3\}$. Нека го означиме со A_j настанот: во првата кутија има j бели топчиња (односно системот се наоѓа во состојба j). Транзитивните веројатности се:

$$p_{jj} = p(\text{извлечени се топчиња со различна боја} \mid A_j) = 2\cdot\frac{j(3-j)}{9}$$

,

$$p_{j,j+1} = p(\text{извлечено е црно топче од првата и бело топче од втората кутија} \mid A_j) = \frac{(3-j)^2}{9},$$

$$P_{J,J-1} = P(\text{извлечено е бело топче од првата кутија и црно топче од втората кутија} \mid A_j) = \frac{j^2}{9}.$$

Сите останати веројатности се 0. Транзитивната матрица на веројатности е:

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Во три чекори можно е да се стигне од која било состојба на системот до друга произволна положба на системот. Затоа, матрицата M^3 има само позитивни елементи. Стационарните веројатности постојат. Важи:

$$\lambda I - M=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \lambda-\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{9} & \lambda-\frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Стационарните веројатности се пресметуваат со формулата:

$$\pi_j = \frac{M_{jj}(1)}{\sum_{k=1}^{m} M_{kk}(1)}.$$

Минорите се:

$$M_{00}(1)=M_{33}(1)=\begin{vmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{4}{81},$$

$$M_{11}(1)=M_{22}(1)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{36}{81}.$$

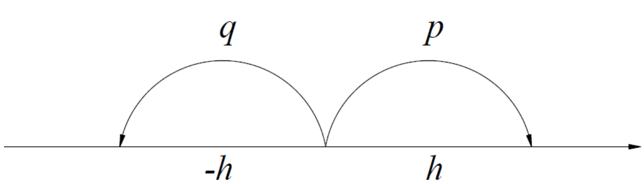
Оттука,

$$\pi_0=\frac{\frac{4}{81}}{2\cdot\frac{4}{81}+2\cdot\frac{36}{81}}=\frac{1}{20}=\pi_3,$$

$$\pi_1=\frac{\frac{36}{81}}{2\cdot\frac{4}{81}+2\cdot\frac{36}{81}}=\frac{9}{20}=\pi_2.$$

Задача 6. (Случајно поместување како Марков ланец) Честичка која поаѓа од некоја од точките $\{0,1,2,...,m\}$, на десно со веројатност p, а на лево со веројатност $q=1-p$. Ако честичката стигне до некоја од крајните точки, тогаш таа трајно останува таму. Напиши ја матрицата на транзитивните веројатности. Најди ги стационарните веројатности.

Решение. Ланецот е хомеген и е Марков ланец. Транзитивните веројатности не зависат од моментот, туку само од позицијата на честичката.



Важи:

$$p_{00}=p(X_n=0\mid X_{n-1}=0)=1,$$

$$p_{mm}=p(X_n=m\mid X_{n-1}=m)=1,$$

$$p_{i,i+1} = p(X_n = i+1 \mid X_{n-1} = i) = p,\ 1 \le i \le m-1,$$

$$p_{i,i-1} = p(X_n = i-1 \mid X_{n-1} = i) = q,\ \ 1 \le i \le m-1$$

и $p_{ij} = 0$ за сите останати i, j. Па матрицата на транзитивни веројатности е:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Стационарните вредности не постојат. Навистина, порано или покасно, честичката ќе заврши во една од крајните точки, така што $\lim_{n\to\infty} p(n)$ ќе биде од облик $(\alpha, 0, ..., 0, 1-\alpha)$. Меѓутоа, α зависи од почетната состојба. На пример, ако честичката почнува од 0, тогаш во неа и трајно останува, односно $\alpha = 1$. Ако почнува од точката k, може да се докаже дека важи:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}.$$

Задача 7. (Пример на случајно поместување) Честичката може да се наоѓа во некоја од состојбите $\{1, 2, ..., m\}$. Ако се наоѓа во состојбата i, $i > 1$, тогаш со веројатност 1, се враќа во состојбата $i-1$. Од состојбата 1, со еднаква веројатност преоѓа во која било состојба $1, 2, ..., m$. Најди ја матрицата на транзитивните веројатности. Најди ги стационарните веројатности.

Решение. Од условот на задачата можеме да ја напишеме матрицата на транзитивните веројатности. Имаме:

$$M=\begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицата M^m има елементи кои се само позитивни. Навистина, во m-чекори може да се стигне од една состојба во друга состојба, односно $p_{ij}(m)>0$, па постојат стационарните веројатности. Имаме:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \\ \pi_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \\ \pi_m \end{bmatrix}.$$

Оттука,

$$\pi_1=\frac{1}{m}\pi_1+\pi_2$$

$$\pi_2=\frac{1}{m}\pi_1+\pi_3$$

$$\vdots$$

$$\pi_{m-1}=\frac{1}{m}\pi_1+\pi_m$$

$$\pi_m=\frac{1}{m}\pi_1.$$

Со решавање на системот, добиваме:

$$\pi_{m-1}=2\pi_m,\ \pi_{m-1}=3\pi_m,\ \dots,\ \pi_1=m\pi_m.$$

Бидејќи, $\pi_1+\pi_m=1$, имаме:

$$\big(m+(m-1)+\dots+2+1\big)\pi_m=1,$$

од каде што:

$$\pi_m = \frac{2}{m(m+1)}.$$

Па, стационарните веројатности се:

$$\pi_j = \frac{2(m-j+1)}{m(m+1)}, \quad j = 1, 2, ..., m.$$

Задача 8. (Случајно поместување на одбивање од рабните точки) Честичка поаѓа од една од точките $\{0, 1, 2, ..., m\}$, на десно со веројатност p и на лево со веројатност $q = 1 - p$. Ако дојде до крајната лева точка, честичката останува во неа со веројатност q, а во десната крајна точка честичката останува со веројатност p. Најди ја матрицата на транзитивните веројатности. Најди ги стационарните веројатности.

Решение. Од условот на задачата, матрицата на транзитивните веројатности е:

$$M = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q & p \end{bmatrix}.$$

Лесно се гледа за големи n, после n-чекори од секоја произволна состојба може да се дојде во друга произволна состојба. Ова значи дека матрицата M^n има позитивни елементи за доволно големо n. Сега, како во претходната задача имаме:

$$\begin{gathered} q\pi_1 + q\pi_2 = \pi_1 \\ p\pi_1 + q\pi_3 = \pi_2 \\ p\pi_2 + q\pi_4 = \pi_3 \\ \vdots \\ p\pi_{n-2} + q\pi_n = \pi_{n-1} \\ p\pi_{n-1} + q\pi_n = \pi_n . \end{gathered}$$

Од првата равенка, следува дека: $\pi_2 = \frac{p}{q}\pi_1$. Заменувајќи ја оваа вредност за π_1 во втората равенка, добиваме дека: $\pi_3 = \frac{p}{q}\pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi_1$.

Сега, јасно за секој j, важи:

$$\pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} \pi_1 .$$

Понатаму, бидејќи важи $\sum \pi_j = 1$, ја наоѓаме вредноста на π_1 од условот:

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m = 1,$$

односно:

$$\pi_1 \left(1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} \right) = 1 .$$

Оттука,

$$\pi_1 = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m},$$

од каде што:

$$\pi_j = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} .$$

Задача 9. Нека $E_0, E_1, \ldots, E_m$ се можни состојби во кои може да се најде еден систем. Можните премини се:

$$E_0 \to E_0 \text{ и } E_0 \to E_k \text{, за сите } k \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

$$E_m \to E_1 \text{ и } E_k \to E_{k+1} \text{, за сите } k \in \{1, 2, \ldots, m-1\},$$

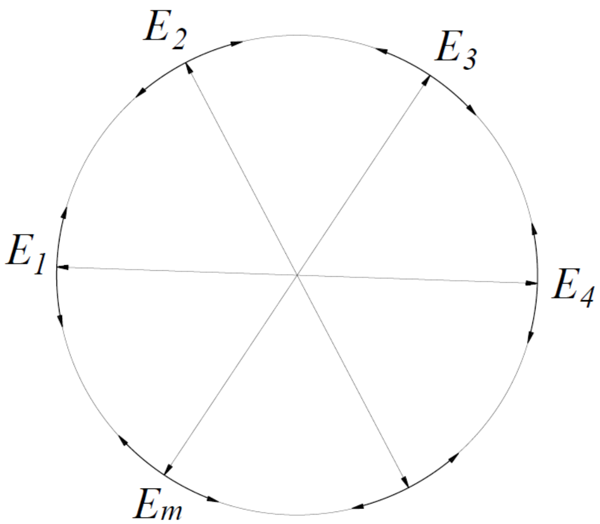
$$E_k \to E_k \text{, за сите } k \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

кои ги имаат соодветните веројатности:

$$p_{00} = \frac{1}{2} \text{ и } p_{0k} = \frac{1}{2m}, \text{ за сите } k \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

$$p_{m1}=\frac{1}{2} \text{ и } p_{k,k+1}=\frac{1}{2}, \text{ за сите } k\in\{1,2,...,m-1\},$$

$$p_{kk}=\frac{1}{2}, \text{ за сите } k\in\{1,2,...,m\}.$$



Провери ја регуларноста на ланецот за $m=2$ и $m=3$, а потоа најди ја M_∞.

Решение. Од сликата веднаш се забележува дека **A**, може да се разложи на две множества од состојби: на множество со состојба E_0 и на затворено множество со m состојби $E_1, E_2, ..., E_m$.

За $m=2$, транзитивната матрица е од облик:

$$M_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

а карактеристичната равенка е:

$$\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2-\frac{1}{4}\right)=0.$$

Нејзините решенија се $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ и $\lambda_3 = 1$, па заклучуваме дека ланецот е регуларен.

Транзитивната матрица од n-ти ред е:

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

и:

$$M_\infty = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

За $m = 3$, транзитивната матрица е:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

а, корените на карактеристичната равенка се:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}.$$

Ланецот е регуларен.

Транзитивната матрица од n-ти ред е:

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos\left(n+1\right)\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n+1)\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n+1)\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\cos n\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

и одговарачка гранична матрица:

$$M_\infty = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

.

11. Додаток

11.1. Риман-Стилтјесов интеграл

Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е монотоно растечка фунцкија, која е непрекината од лево. Нека $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ е ограничена функција.

Со изборот на точките $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, за кои важи $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ е дефинирано едно разбивање на интервалот $[a,b]$, кое ќе го означиме со K. Сега, ја дефинираме интегралната сума:

$$S_n(K, g, f) = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})).$$

Со $\Delta = \max|x_i - x_{i-1}|$, ќе го означуваме дијаметарот на разбивањето K.

Дефиниција 1. За функцијата g велиме дека е Риман-Стилтјес интеграбилна во однос на функцијата f, ако за кое било разбивање K на интервалот $[a,b]$ и за произволен избор на точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ постои граничната вредност:

$$S = \lim_{\Delta\to 0} S_n = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})).$$

Оваа гранична вредност ќе ја нарекуваме Риман-Стилтјесов интеграл, а ќе ја користиме ознаката:

$$\int_a^b g(x)\,df(x).$$

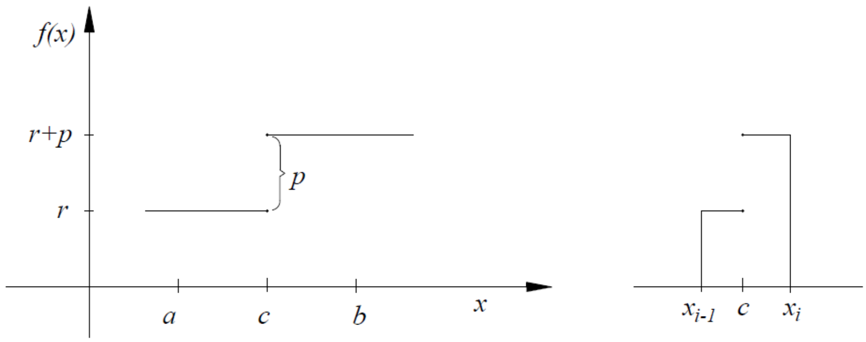
Да забележиме дека ставјаќи $f(x) = x$, Риман-Стилтјесовиот интеграл станува Риманов интеграл.

Во продолжение, ќе ја дадеме врската помеѓу Риман-Стилтјесовиот интеграл и Римановиот (определен) интеграл.

Нека F е по делови константна функција на интервалот $[a,b]$, со скок со големина p во точка c, во внатрешноста на овој интервал:

$$F(x) = \begin{cases} r, & x \le c \\ r + p, & x > c \end{cases}.$$

Ќе го пресметаме $\int_a^b g(x)\,dF(x)$, за некоја функција g, непрекината на интервалот $[a,b]$.



За која било партиција важи $F(x_i)-F(x_{k-1})=0$ за секој индекс i, освен за оној за кој важи $x_{i-1}\le c<x_i$, бидејќи функцијата F е константна лево и десно од точката c.

Токму поради тоа во интегралната сума на Риман-Стилтјесовиот интеграл ќе има само еден член:

$$S_n(K,g,F)=g(\xi_i)(F(x_i)-F(x_{i-1}))=g(\xi_i)\cdot p.$$

Кога ќе пуштиме $\Delta\to 0$, точката $\xi_i\to c$. Оттука,

$$\int_a^b g(x)\,dF(x)=g(c)\cdot p.$$

Општо, ако F има скокови со големина p_i во точките c_i, $i=1,2,\ldots,n,$ за Риман-Стилтјесовиот интеграл важи:

$$\int_a^b g(x)\,dF(x)=\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\cdot p_i\,.$$

Нека сега f е непрекинато диференцијалбилна функција на интервалот $[a,b]$. Тогаш, од теоремата за средна вредност, применета на интервалот $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$, имаме $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$, за некоја точка $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. За интегралната сума имаме:

$$S_n(K,g,f)=\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\,.$$

Граничната вредност на оваа интегрална сума кога $\Delta \to 0$, дефинира Риманов интеграл:

$$\int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx\,.$$

Со ова ја докажавме следнава теорема.

Теорема 1. Ако F има скокови со големина p_i во точките c_i, $i=1,2,...,n$, за Риман-Стилтјесовиот интеграл важи:

$$\int_a^b g(x)\,dF(x)=\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\cdot p_i\,.$$

Ако f е непрекинато диференцијабилна функција, тогаш важи:

$$\int_a^b g(x)\,df(x)=\int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx\,.$$

Според тоа, со користење на Риман-Стилтјесовиот интеграл, истовремено ќе се покриваат двете класи случајни променливи, дискретни и непрекинати случајни променливи. Така, на пример, математичкото очекување на некоја случајна променлива може да се изрази преку формулата:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,df(x)\,,$$

а дисперзијата преку формулата:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,df(x)-(E(X))^2\,.$$

Пример 1. Пресметај го математичкото очекување на случајната променлива чија функција на распределба е дадена со формулата:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{4}x, & 0<x\le 1\\ \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}, & 1<x\le 2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}.$$

Решение. Функцијата F има скокови, кои изнесуваат $\frac{1}{4}$, во точките $x=1$ и $x=2$.

Оттука,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)$$

$$=\int_0^1 xF'(x)\,dx+1\cdot\frac{1}{4}+\int_1^2 xf'(x)\,dx+2\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\int_0^1 \frac{x}{4}dx+\frac{1}{4}+\int_1^2 \frac{x}{4}dx+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}.\ \blacklozenge$$

11. 2. Лапласова трансформација

Карактеристичната функција за случајна променлива X е Фуриевата трансформација на густината на распределбата на случајната променлива X. При избор на трансформации на густината на позитивна случајна променлива можеме да користиме и Лапласова трансформација. Ако F е функција на распределба на случајната променлива X, тогаш нејзината Лаплас-Стилтјесова трансформација е:

$$f^*(s)=E(e^{-sX})=\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dF(x).$$

Ако случајната променлива X е непрекината со густина на распределба f, тогаш f^* е вообичаена Лапласова трансформација на функцијата f:

$$f^*(s)=\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx.$$

Ако X е дискретна случајна променлива која прима вредностите од множеството $\{0,1,2,3,\ldots\}$, тогаш Лапласовата трансформација гласи:

$$f^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk}p_k=\psi_X(e^{-s}).$$

Во овој случај, дискретната Лапласова трансформација се совпаѓа со функцијата изводница во која аргументот z е заменет со e^{-s}.

Со извод на интегралот по параметарот, добиваме:

$$\frac{d}{ds} f^*(s) = \int_0^{+\infty} (-x)e^{-sx}\, dF(x)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} f^*(s) = \int_0^{+\infty} (-x)^2 e^{-sx}\, dF(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n}{ds^n} f^*(s) = \int_0^{+\infty} (-x)^n e^{-sx}\, dF(x).$$

Ставајќи овде $s = 0$, добиваме:

$$E(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n\, dF(x) = (-1)^n \left.\frac{d^n f^*(s)}{ds^n}\right|_{s=0}.$$

11.3. Сингуларни случајни променливи

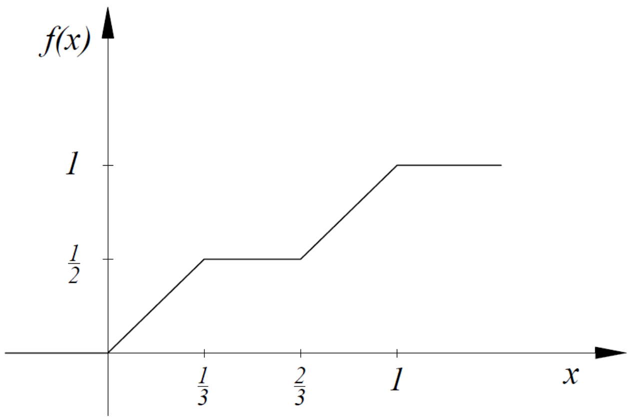
Во главниот дел од книгата беа разгледувани дискретни и непрекинати случајни променливи. Овде ќе споменеме дека постои и трета класа од таканаречени сингуларни случајни променливи, чија функција на распределба е непрекината, но немаат функција на густина на распределба. Кај таква случајна променлива, функцијата на распределба не може да се запише во облик $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$. Класата на сингуларни случајни променливи не се среќава во примена, бидејќи нивната функција на распределба не може експлицитно да се изрази со помош на ограничен број на елементарни функции (овде се исклучени граничните процеси).

Дефинираме на интервалот $[0,1]$, функција $F_1(x)$ за која:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}, \text{ за } \frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3}, \qquad F_1(0) = 0, \qquad F_1(1) = 1.$$

Функцијата F_1 е непрекината и афина на интервалите $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3},1\right)$.

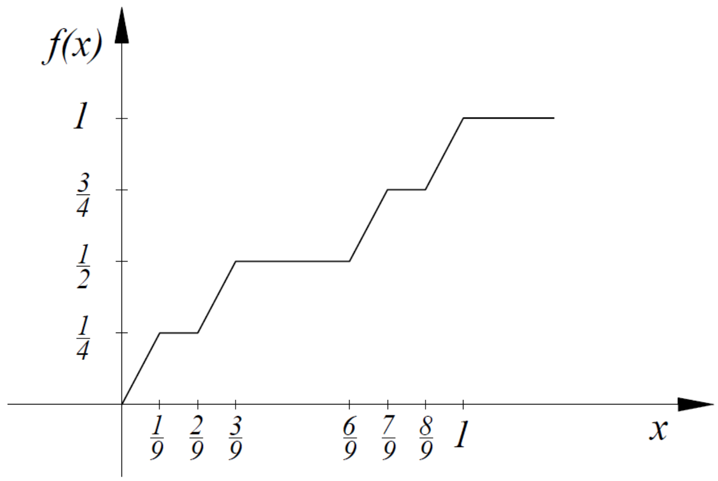
Графикот на функцијата F_1 е даден на сликата подолу.



Во вториот чекор секој од интервалите $[0,\frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3},1]$ го делиме на три дела и ја дефинираме непрекинатата функција F_2:

$$F_2(0)=0,\qquad F_2(1)=1,\qquad F_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x\in[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]\\ \frac{1}{2}, & x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\\ \frac{3}{4}, & x\in[\frac{7}{9},\frac{8}{9}]\end{cases}.$$

На останатите интервали ја дефинираме функцијата F_2, така што да биде непрекината и афина функција. Подолу е даден нејзиниот график.



Ја продолжуваме оваа постапка. Низата од функции (F_n) тежи кон функцијата F, која е непрекината, неопаѓачка, со вредности во $[0,1]$. Притоа, важи $F(0)=0$, $F(1)=1$ и F претставува функција на распределба на некоја случајна променлива X. Изводот на оваа функција е еднаков на нула секаде каде што оваа функција е константна. Должината на овие интервали со секоја интерација се зголемува. Должината на овие интервали за функцијата F_n е:

$$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{27}+\ldots=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1,$$

односно $F'(x)=0$ скоро секаде и F не може да се напише во обликот $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Според ова, не постои густината на распределба за случајната променлива X.

На крајот, да забележиме дека секоја функција на распределба F може да се запише како: $F=p_1F_1+p_2F_2+p_3F_3$, каде што: $p_k\geq 0$, $p_1+p_2+p_3=1$, а F_1,F_2,F_3 се функции на распределба на дискретна, непрекината и сингуларна случајна променлива, соодветно.

Задачи од испити

1. Во прва година на Градежен факултет се запишани 250 студенти, од кои 140 се момчиња. Од сите студенти, 210 редовно ги следат предавањата, при што 20 девојки не ги следат предавањата. Колку студенти машки ги следат предавањата?

2. Докажи дека: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

3. Нека A,B и C се множества. Докажи дека: $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

4. Докажи дека: $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$.

5. Нека A,B и C се множества. Докажи дека: $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

6. Нека A,B и C се множества. Докажи дека: $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.

7. Нека A,B и C се множества. Докажи дека: $A\times(B/C)=(A\times B)/(A\times C)$.

8. Нека A,B и C се множества. Докажи дека: $(A/B)\times C=(A\times C)/(B\times C)$.

9. Од колку елементи можат да се направат 55 комбинации од втора класа со повторување на елементите?

10. На колку различни начини можат да се распоредат буквите A,D,E,C,R на пет места, така што ниту една буква не се јавува двапати.

11. Колку четирицифрени броеви можат да се формираат од цифрите $1,2,\ldots,9$ ако:

а) во секој број цифрите се различни,
б) во секој број цифрите можат и да бидат еднакви.

12. Изведи ја формулата за вкупниот број на дијагонали на правилен n-аголник.

13. Колку петцифрени броеви, со различни цифри, може да се напишат од цифрите $0,1,2,3,4,5,6$ ако нулата не смее да биде на првото или последното место?

14. На колку начина можат да се запишат броевите $1,2,\ldots,n$ во редица, така што на сите непарни места бидат непарни броеви?

15. На колку начини може да се прикаже производот $a^3b^2c^2$ како производ од a, b и c?

16. Четири брачни пара формираат множество од 8 лица. На колку различни начини може да се избере трчлена комисија од тоа множество ако во комисијата не можат да бидат маж и жена од ист брачен пар?

17. Во рамнина има n-точки, така што ниту една тројка од точки не лежи на иста права.
а) Колку различни прави можат да се формираат од овие точки?
б) Колку различни триаголници можат да се формираат од овие точки?

18. На колку начини можат да се распореди група од 10 луѓе во две училници, така што лицата A и B да не бидат во иста просторија.

19. На колку начини од група од 10 луѓе може да се изберат 6 луѓе, ако две дадени лица не може да бидат избрени истовремено?

20. Стрелец гаѓа во мета сѐ додека не ја погоди двапати или не ја промаши трипати. Да се опише просторот од елементарни настани Ω и настаните:
A: стрелецот ја погодил метата во последното гаѓање;
B: стрелецот ја промашил метата во второто гаѓање;

C : стрелецот ја промашил метата точно двапати;
D : стрелецот ја промашил метата барем двапати.

21. Во една кутија се наоѓаат k идентични по форма бели, црвени и сини топчиња. Одреди ја веројатноста во првите две извлекувања да се извлечат две сини топчиња.

22. Да се пресмета веројатноста дека при извлекување на три карти една по друга, ќе бидат извлечени три десетки.

23. Од еден шпил на карти во кој недостасуваат три карти се влече една карта. Колкава е веројатноста дека извлечената карта има знак треф?

24. Од еден шпил се извлекуваат 6 карти.
а) Најди ја веројатноста да помеѓу извлечените карти биде десетка срце.
б) Најди ја веројатноста да помеѓу извлечените карти има претставници од сите знаци на картите (4 знаци).

25. Нека имаме еден стандарден шпил од 52 карти. На колку начини може да се изберат две карти со иста бројна вредност?

26. Од шпил со 52 карти произволно одеднаш се извлекуваат три карти. Пресметај ја веројатноста на настанот A: во извлечените карти има барем една петка.

27. Случајно извлекуваме карта од шпил со 52 карти. Која е веројатноста дека извлечената карта е двојка или има знак срце?

28. Во блок од 10 влезници за фудбалски натпревар има 5 карти по 100 денари, 3 карти по 200 денари и 2 карти по 300 денари. Колкава е веројатноста ако случајно се извлечат 3 карти, нивната вкупна вредност ќе биде 500 денари?

29. Од 20 предложени кандидати, од кои 14 се мажи треба да се избере комисија составена од 4 члена. Колкава е веројатноста:
а) сите избрани членови да бидат мажи,
б) барем двајца од избраните членови да бидат мажи.

30. Една коцка се фрла 8 пати. Најди веројатноста бројот 5 да се падне барем еднаш при тие фрлања.

31. Фрламе две коцки. Колкава е веројатноста дека бројот кој се паднал на првата коцка биде непарен, а на другата коцка биде помал од 2?

32. На маса се фрлени две коцки за играње. Колкава е веројатноста збирот на точките од двете коцки да биде непарен?

33. На три картички се запишани броевите 1, 2 и 3. Произволно се извлекуваат и подредуваат, една по друга, трите картички. Да се најде веројатноста дека барем една картичка ќе го заземе местото што и одговара на цифрата запишана на картичката.

34. Ако важи: $p(A)=0,4$, $p(B)=0,7$ и $p(A\cap B)=,03$, колку е: $p(A\cup B)$?

35. Нека настаните A и B се независни, $P(A)=0,4$, $p(B)=0,2$. Пресметај $p(AB)$.

36. На еден испит постојат 30 прашања. Студентот го положува испитот, ако одговори на трите првоизвлечени прашања или ако знае две од тие прашања и одговори на дополнителното извлечено прашање. Колкава е веројатноста испитот да го положи студентот што знае 20 од прашањата?

37. Во една продавница на полица се наредени десет исти производи, меѓу кои 4 се со послаб квалитет. Да се најде веројатноста дека купувач кој купил четири производи, барем еден од производите кои ги купил ќе биде со послаб квалитет.

38. Прачка со должина l е скршена на две места. Одреди ја веројатноста дека од добиените делови може да се состави триаголник.

39. Две лица со иста веројатност можат да стигнат на одредено место во временски интервал од 2 часа. Одреди ја веројатноста дека лицето кое ќе стигне прво нема да чека повеќе од 1 час.

40. Во рамностран триаголник со страна 2 впишана е кружница. Произволно се фрла точка во триаголникот. Која е веројатноста дека точката паднала во кругот?

41. Една комисија има три члена. Членовите на комисијата донесуваат одлуки независно еден од друг. Два члена од комисијата донесуваат правилна одлука со веројатност $0,8$, а третиот член од комисијата донесува правилна одлука со веројатност $0,6$. Конечната одлука комисијата ја донесува со мнозинство гласови. Пресметај ја веројатноста дека конечната одлука на комисијата е правилна.

42. Во кутија има 6 бели и 4 црни топчиња. Играчите A и B извлекуваат по едно топче, еден по еден по тој редослед. Победник е играчот кој прв ќе извлече црно топче. Да се определи веројатноста да победи играчот B, ако после секое извлекување топчето не се враќа во кутијата.

43. Двајца стрелци гаѓаат во една цел по еднаш. Веројатноста дека првиот од нив ќе ја погоди целта е $0,7$, а веројатноста дека вториот ќе ја погоди целта е $0,8$. Најди ја веројатноста дека целта ќе биде погодена барем еднаш.

44. Тројца стрелци стрелаат во една мета. Секој од нив погодува, со еден истрел, независно од другите, со веројатност $0,8$, $0,7$ и $0,6$ соодветно. Да се пресмета веројатноста дека метата:

а) не е погодена;

б) погодена е точно еднаш;

в) погодена е барем еднаш.

45. Една коцка се фрла 6 пати. Најди ја веројатноста бројот 4 да се падне барем еднаш при тие фрлања.

46. Паричка се фрла 9 пати. Која е веројатноста дека шестка се паднала 4 пати?

47. Веројатноста за изработка на висококвалитетни предмети на една машина е $0,7$.

Колкава е веројатноста дека меѓу 24 случајно избрани предмети 15 се висококвалитетни производи?

48. Во книга од 500 страници, случајно се распоредени 500 печатни грешки. Колкава е веројатноста на случајно одбрана страница да има барем три грешки?

49. Од сите запишани студенти на Градежниот факултет 84% ги завршуваат студиите. Колкава е веројатноста дека од 200 запишани студенти, бројот на студенти кои ќе го завршат студирањето ќе биде помеѓу 151 и 172?

50. Од една серија на производи која се состои од 10000 производи, 9000 се од прва класа. Колкава е веројатноста дека при испитувањето на 90 производи, бројот на производи кои се прва класа ќе биде помеѓу 80 и 95?

51. Од една серија на производи која се состои од 20000 производи, 18000 се од прва класа. Колкава е веројатноста дека при испитувањето на 80 производи, бројот на производи кои се прва класа ќе биде помеѓу 70 и 75?

52. Од една серија на производи која се состои од 20000 производи, 12000 се од прва класа. Колкава е веројатноста дека при испитувањето на 80 производи, бројот на производи кои се прва класа ќе биде помеѓу 47 и 52?

53. По линија на врска се пренесуваат 1500 знаци. Секој знак може неправилно да биде примен, независно од останатите со веројатност

$p = 0,001$. Да се пресмета приближно веројатноста дека неправилно ќе бидат примени не повеќе од три знаци.

54. Веројатноста дека еден телевизор ќе биде произведен со дефект е $0,002$. Колкава е веројатноста дека од случајно избрани 500 телевизори, точно два ќе бидат со дефект?

55. Во една кутија има 3 бели и 4 црни топчиња, а во друга 5 бели и 3 црни. Сите топчиња се разликуваат само по бојата. Од црната кутија случајно се извлекуваат 2 топчиња, а од втората кутија едно топче. Извлечените топчиња, без гледање, се ставаат во трета кутија, а на крајот од неа се извлекува случајно едно топче. Колкава е веројатноста извлеченото топче да биде бело?

56. Тројца ловци L_1, L_2, L_3 независно еден од друг гаѓале зајак. Еден куршум го погодил зајакот. Одреди ја веројатноста дека зајакот бил погоден од ловецот L_2, ако е познато дека ловецот L_1 погаѓа во 60% од случаите, ловецот L_2 погаѓа во 75% од случаите и ловецот L_3 погаѓа во 90% од случаите. Кој најверојатно го погодил зајакот?

57. Две фабрики произведуваат ист производ. Во првата фабрика при неговото производство се применуваат три технолошки операции последователно и при нив се добива оштетен производ со веројатност $0,2;\ 0,3;\ 0,1$, соодветно. Во втората фабрика за неговото производство се применуваат две технолошки операции последователно и при нив се добива оштетен производ со веројатност $0,4\ ;\ 0,5$, соодветно. Определи која технологија обезбедува поголема веројатност за добивање на првокласен производ, ако во првиот случај има 90% првокласни производи, а во вториот случај има 95% првокласни производи.

58. На студентите од еден факултет им е дозволено да повторуваат само една од $1,2,3$ година. Веројатноста еден студент да ја повторува $1,2,3$ година е $0,25; 0,5; 0,25$, соодветно. Веројатноста дека студентот кој ја повторувал прва година ќе го заврши студирањето е

$0,4$, за студентот кој ја повторувал втора година веројатноста е $0,5$, а со повторување на трета година веројатноста дека студентот ќе го заврши студирањето е $0,9$. Најди ја веројатноста дека случајно избран студент повторувач ќе го заврши студирањето. Ако студентот повторувач го завршил студирањето, која е веројатноста студентот да ја повторувал трета година?

59. Три машини изработуваат некој ист производ, и тоа, првата машина покрива 25%, втората 35% и третата 40% од производството. Веројатноста дека е произведен неквалитетен производ на првата машина е $0,05$, на втората $0,04$ и на третата $0,02$.

а) Колкава е веројатноста дека случајно избраниот производ е неквалитетен?

б) Ако случајно избраниот производ е неквалитетен, колкава е веројатноста дека е произведен на втората машина?

60. Во една продавница на една полица се наоѓаат 7 леба, а на втора 5 леба. На секоја од полиците има по еден леб со поминат рок. Од првата полица случајно се избира еден леб и се става на втората полица. Потоа во продавницата влегува купувач и случајно избира леб од втората полица. Колкава е веројатноста дека купувачот избрал леб со поминат рок?

61. Во една фабрика се произведуваат еден вид на производи на три машини. Првата машина произведува 50%, втората произведува 20% а третата машина произведува 30% од сите производи. Процентот на дефекти во нивното производство е 4%, 2% и 2% соодветно. Колкава е вероатноста дека случајно избран производ од фабриката е дефектен? Ако случајно избраниот производ е дефектен, која е веројатноста дека тој е произведен на првата машина?

62. Првата серија од производи од една фабрика е спакувана во 15 кутии. Во секоја кутија заедно со производите од прва класа се и 1% производи од втора класа. Втората серија на производи е спакувана во 25 кутии. Во секоја од кутиите заедно со производите од прва класа се и 5% производи од втора класа. Најди ја веројатноста дека од случајно избрана кутија извлечен е производ од втора класа, а потоа

веројатноста дека ако е извлечен производ од втора класа, тој производ да е од втората серија.

63. Еден случајно избран чип може да припаѓа на три серии (различни) S_1, S_2, S_3 и е составен дел од еден систем, каде $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,4$, $p = 0,2$, при што p_j е веројатноста чипот да припаѓа на серијата S_j, $j = 1,2,3$. Веројатноста дека ако чипот е од првата серија нема да настане дефект е $0,1$, ако чипот е од втората серија дека нема да настане дефект е $0,3$, а ако чипот е од третата серија веројатноста дека нема да настане дефект е $0,3$. Одереди ја веројатноста дека при случајно избран чип нема да настане дефект во системот. Ако знаеме дека настанал дефект, тоа да е чипот од втората серија S_2.

64. Дадени се случајните променливи: $X:\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$ и $Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$.

а) Најди го законот на распределба на случајната променлива $Z = X + 2Y$;

б) Најди на функцијата на распределба на случајната променлива Z;

в) Пресметај ја веројатноста $p\{Z \geq 3\}$;

г) Пресметај ги EZ и DZ.

65. Дадени се случајните променливи: $X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$ и $Y:\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 0,4 \end{pmatrix}$.

а) Определи го a во законот на распределба на случајната променлива Y

б) Најди го законот на распределба на случајната променлива $Z = 2X - Y$;

в) Најди на функцијата на распределба на случајната променлива Z;

г) Пресметај ја веројатноста $p\{Z \geq 0\}$;

д) Пресметај ја веројатноста $p\{0 \leq Z \leq 2\}$;

ѓ) Пресметај ги EZ и DZ.

66. Дадени се случајните променливи: $X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ и $Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

а) Најди го законот на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$.

б) Најди на функцијата на распределба на случајната променлива Z.

в) Пресметај ја веројатноста $p\{Z \geq 2\}$.

г) Пресметај ги EZ и DZ.

67. Дадени се две случајни променливи: $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$ и $Y:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$.

а) Најди го законот на распределба на случајната променлива $Z = XY$.

б) Најди на функцијата на распределба на случајната променлива Z.

в) Пресметај ја веројатноста $p\{Z \geq 1\}$.

г) Пресметај ги EZ и DZ.

68. Дадени се случајните променливи: $X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$ и $Y:\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 0,9 \end{pmatrix}$.

а) Определи го a во законот на распределба на случајната променлива Y.

б) Најди го законот на распределба на случајната променлива $Z = X + Y$.

в) Пресметај ја веројатноста . $p\{0 \leq Z \leq 2\}$

г) Пресметај ги EZ и DZ.

69. Дадени се случајните променливи: $X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$ и $Y:\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ a & 0,7 \end{pmatrix}$.

а) Определи го a во законот на распределба на случајната променлива Y.

б) Најди го законот на распределба на случајната променлива $Z = X + 2Y$.

в) Најди на функцијата на распределба на случајната променлива Z.

г) Пресметај ја веројатноста $p\{Z \geq 0\}$.

д) Пресметај ја веројатноста $p\{1 \leq Z \leq 3\}$.

ѓ) Пресметај ги EZ и DZ.

70. Нека е дадена случајната променлива X со закон на распределба $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots \end{pmatrix}$.

а) Определи го законот на распределба на случајната променлива $Y = \cos(\pi X)$.

б) Да се најде функцијата на распределба на случајната променлива Y.

в) Да се пресмета EY и DY.

71. Еден автомобил се движи по пат по кој има шест семафори. Веројатноста да се помине семафорот без да се застане е $\frac{1}{3}$ (спротивната веројатност е $\frac{2}{3}$). Опиши ја случајната променлива X - број на изминати семафори до првото запирање.

72. Фрламе две коцки. Ги дефинираме случајните променливи:

$X =$ поголемиот од броевите на коцките,

$Y =$ помалиот од броевите на коцките,

$Z =$ збирот на броевите на коцките.

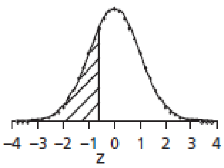
Определи го законот на распределба и математичкото очекување на овие случајни променливи.

73. Фрламе две коцки. Дефинирани се следниве случајни променливи
X : апсолутната разлика на броевите кои се паднале на коцката,
Y : помалиот од двата броја ако се различни, нула ако броевите кои се паднале на коцката се еднакви.

Докажи дека X и Y имаат ист закон на распределба. Најди го нивното математичко очекување и дисперзија.

Табели на некои од основните распределби

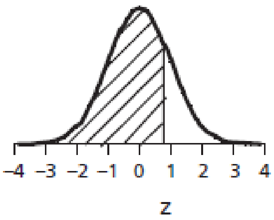
Нормална распределба



$$\Phi(z) = p(Z < z)$$

$\Delta z =$ — z_0	–0.09	–0.08	–0.07	–0.06	–0.05	–0.04	–0.03	–0.02	–0.01	–0.00	— z_0
–3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	**–3.7**
–3.6	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	**–3.6**
–3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	**–3.5**
–3.4	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	**–3.4**
–3.3	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005	**–3.3**
–3.2	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007	**–3.2**
–3.1	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0010	**–3.1**
–3.0	0.0010	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0013	0.0013	**–3.0**
–2.9	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019	**–2.9**
–2.8	0.0019	0.002	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026	**–2.8**
–2.7	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035	**–2.7**
–2.6	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045	0.0047	**–2.6**
–2.5	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060	0.0062	**–2.5**
–2.4	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080	0.0082	**–2.4**
–2.3	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104	0.0107	**–2.3**
–2.2	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136	0.0139	**–2.2**
–2.1	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.017	0.0174	0.0179	**–2.1**
–2.0	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222	0.0228	**–2.0**
–1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.025	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281	0.0287	**–1.9**
–1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351	0.0359	**–1.8**
–1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446	**–1.7**
–1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537	0.0548	**–1.6**
–1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.063	0.0643	0.0655	0.0668	**–1.5**
–1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0808	**–1.4**
–1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0968	**–1.3**
–1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151	**–1.2**
–1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357	**–1.1**
–1.0	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587	**–1.0**
–0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814	0.1841	**–0.9**
–0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090	0.2119	**–0.8**
–0.7	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327	0.2358	0.2389	0.2420	**–0.7**
–0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709	0.2743	**–0.6**
–0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050	0.3085	**–0.5**
–0.4	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409	0.3446	**–0.4**
–0.3	0.3483	0.352	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783	0.3821	**–0.3**
–0.2	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168	0.4207	**–0.2**
–0.1	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562	0.4602	**–0.1**
–0.0	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960	0.5000	**–0.0**

$$\Phi(z) = p(Z < z)$$



$\Delta z =$ — z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	— z_0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359	**0.0**
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753	**0.1**
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141	**0.2**
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517	**0.3**
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879	**0.4**
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224	**0.5**
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549	**0.6**
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852	**0.7**
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133	**0.8**
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389	**0.9**
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621	**1.0**
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830	**1.1**
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015	**1.2**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177	**1.3**
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319	**1.4**
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441	**1.5**
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545	**1.6**
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633	**1.7**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706	**1.8**
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767	**1.9**
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817	**2.0**
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857	**2.1**
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989	**2.2**
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916	**2.3**
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936	**2.4**
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952	**2.5**
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964	**2.6**
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	**2.7**
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981	**2.8**
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986	**2.9**
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990	**3.0**
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993	**3.1**
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	**3.2**
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997	**3.3**
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	**3.4**
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	**3.5**
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	**3.6**
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	**3.7**
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	**3.8**

Табела на поважни дискретни распределби

Распределба	**Закон на распределба**	**Услов на парамерите**	$E(X)$	$D(X)$
Дискретна рамномерна	$p_k = \frac{1}{n}$, $k = 1,2,3,\dots,n$	$n \in \mathbb{N}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Бернулиева (индикаторска) $X : B(1,p)$	$p_k = p^k q^{1-k}$, $k \in \{0,1\}$	$p \in (0,1)$, $q = 1-p$	p	pq
Биномна $X : B(n,p)$	$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $k = 0,1,2,\dots,n$	$p \in (0,1)$, $q = 1-p$, $n \in \mathbb{N}$	np	npq
Поасонова $X : P(\lambda)$	$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$	$\lambda > 0$	λ	λ
Геометриска $X : G(p)$	$p_k = q^{k-1} p$, $k \in \mathbb{N}$	$p \in (0,1)$, $q = 1-p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

Табела на поважни непрекинати распределби

Распределба	**Функција на густина и нејзин носач**	**Услов на парамери те**	$E(X)$	$D(X)$
Рамномерна $X : U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$, $x \in (a,b)$	$a,b \in \mathbb{R}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Нормална $X : N(a,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	a	σ^2
Логнормална $X : LN(a,\sigma^2)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}}$ $x > 0$	$a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	$e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2a+2\sigma^2} - e^{2a+\sigma^2}$

Експоненцијална $X : E(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$	$\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Гама $X : \Gamma(\lambda,\alpha)$	$\frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$, $x>0$	$\lambda>0$, $\alpha>0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Студентова $X = t_n$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$ $x\in\mathbb{R}$	$n\in\mathbb{N}$	0	$\frac{n}{n-2}$, $n>2$
Хи-квадрат $X = \chi_n^2$	$\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $x>0$	$n\in\mathbb{N}$	n	$2n$
Кошиева $X : K(\alpha)$	$\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}$	$\alpha>0$	не посто и	не постои

Табела на карактеристични функции на поважни дискретни распределби

Дискретна рамномерна	Бернулиева (индикаторска) $X : B(1,p)$	Биномна $X : B(n,p)$	Поасонова $X : P(\lambda)$	Геометриска $X : G(p)$
$\frac{e^{it}-e^{itn}}{n(1-e^{it})}$	$q+pe^{it}$	$(q+pe^{it})^n$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$

Табела на карактеристични функции на поважни непрекинати распределби

Рамно-мерна $X : U(a,b)$	Нормална $X : N(a,\sigma^2)$	Експоне н-цијална $X : E(\lambda)$	Гама $X : \Gamma(\lambda,\alpha)$	Хи-квадр ат $X = \chi_n^2$	Кошиева $X : K(\alpha)$
$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$	$e^{ita-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^{\alpha}$	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$	$e^{-\alpha\|t\|}$

Содржина

1. Вовед 5
1.1. Множества 5
1.2. Комбинаторика 16
1.3. Решени задачи 35

2. Простор на веројатност 43
2.1. Алгебра на настани 43
2.2. Класичен простор на веројатност 49
2.3. Бесконечен простор на веројатност 61
2.4. Геометриска веројатност 67
2.5. Решени задачи 73

3. Условна веројатност 83
3.1. Условна веројатност 83
3.2. Тотална веројатност. Бејесови формули 92
3.3. Серии од независни експерименти 101
3.4. Решени задачи 106

4. Дискретни случајни променливи 120
4.1. Дискретни случајни променливи 120
4.2. Дводимензионални случајни променливи 128
4.3. Математичко очекување. Дисперзија 135
4.4. Решени задачи 148

5. Непрекинати случајни променливи 166
5.1. Случајни променливи и распределби 166
5.2. Математичко очекување и дисперзија на непрекинати случајни променливи 175
5.3. Функции од непрекинати случајни променливи 182
5.4. Решени задачи 191

6. Некои стандардни распределби на случајните променливи 210
6.1. Дискретни распределби 210
6.1.1. Рамномерна распределба 210
6.1.2. Геометриска распределба 211
6.1.3. Биномна распределба 215
6.1.4. Поасонова распределба 220
6.1.5. Хипергеометриска распределба 226
6.1.6. Паскалова распределба 227
6.1.7. Полиномна распределба 230
6.2. Непрекинати распределби 231
6.2.1. Рамномерна распределба 231

6.6.2. Експоненцијална распределба 234
6.2.3. Нормална распределба 242
6.2.4. Гама распределба 256
6.2.5. χ_n^2-распределба 261
6.2.6. Бета распределба 265
6.2.7. Студентова t-распределба 267
6.2.8. Фишерова распределба 272
6.3. Решени задачи 276

7. Случајни вектори 293
7.1. Случајни вектори и густина на распределба 293
7.2. Условна распределба. Условно очекување 308
7.3. Дводимензионална нормална распределба 311
7.4. Решени задачи 321

8. Функции од случајни вектори 339
8.1. Функции од случајни вектори 339
8.2. Решени задачи 354

9. Закон на големи броеви и централна гранична теорема 370
9.1. Закон на големи броеви 370
9.2. Конвергенција по дистрибуција и карактеристични функции 379
9.3. Централна гранична теорема 384
9.4. Решени задачи 388

10. Маркови ланци 396
10.1. Хомогени Маркови ланци 396
10.2. Транзитивни веројатности од повисок ред 402
10.3. Неразложливи ланци 409
10.4. Регуларни Маркови ланци 413
10.5. Класификација на состојби 425
10.6. Апсолутна веројатност 427
10.7. Решени задачи 428

11. Додаток 442
11.1. Риман-Стилтјесов интеграл 442
11.2. Лапласова трансформација 445
11.3. Сингуларни случајни променливи 446

Задачи од испити 449

Табели на некои од основните распределби 461

Литература 467

Литература

1. M. T. Barlow, D. Nualart, Lectures on Probability Theory and Statistics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
2. В. Д. Бакева, Веројатност, УКИМ, Скопје, 2016.
3. D. P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis, Introduction to Probability, Lecture Notes, Massachusetts, 2000.
4. А. Бучковска. К. Хаџи-Велкова Санева, С. Атанасова, Вовед во веројатност за инжинери, ФЕИТ, Скопје, 2018.
5. M. Baron, Probability and Statistics for Computer Scientists, Chapman & Hall, USA, 2007.
6. R. Bhattacharya, E. C. Waymire, A Basic Course in Probability Theory, Springer International Publishing AG, Cham, 2016.
7. K. L. Chung, A Course in Probability Theory, Academic Press, San Diego, 2001.
8. М. Георгиева, Веројатност и нејзина примена во теоријата на случајни грешки, Скопје, 1982.
9. М. Георгиева, Теорија на веројатност со елементи на статистика, Скопје, 1982.
10. М. Георгиева, Случајни грешки, Скопје, 1982.
11. М. Георгиева, Б. Трпеновски, Теорија на веројатностите, скипта, Скопје, 1993.
12. М. Георгиева, Веројатност и статистика, скрипта, УКИМ, Скопје, 2011.
13. G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker, One Thousand Exercises in Probability, Oxford University Press Inc., New York, 2001.
14. A. Gut, Probability: A Graduate Course, Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2005.
15. H. M. DeGroot, Probability and Statistics, Addison-Wesley, Reading, 1989.
16. F. M. Dekking, C. Kraaikamp, H. P. Lopuhaä, L. E. Meester, A Modern Introduction to Probability and Statistics, Springer-Verlag, London, 2005.
17. J. L. Devore, Probability and Statistics for Engineering and the Sciences, Brook/Cole, Boston, 2012.
18. N. Elezović, Vjerojatnost i statistika: Diskretna vjerojatnost, Element, Zagreb, 2007.
19. N. Elezović, Vjerojatnost i statistika: Slučajne varijable, Element, Zagreb,2007.
20. N. Elezović, Vjerojatnost i statistika: Matematička statistika, Stohastički procesi, Element, Zagreb, 2007.

21. W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley & Sons, New York, 1968.
22. R. A. Fisher, Statistical Methods and Scientific Inference, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956.
23. C. M. Grinstead, J. L. Snell, Introduction to Probability, American Mathematical Society, 1991.
24. Z. Glišić, P. Peruničić, Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
25. К. Хаџи-Велкова Санева, С. Атанасова, А. Бучковска, Збирка решени задачи од веројатност, УКИМ, Скопје, 2016.
26. H. P. Hsu, Theory and Problems of Probability. Random Variables and Random Processes. McGraw-Hill, New York, 1997.
27. Z. Ivković, Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1975.
28. Z. Ivković, Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
29. Z. Ivkovič, Matematička Statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
30. J. Jacob, P. Protter, Probability Essentials, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
31. E. T. Jaynes, Probability Theory: The Logic of Science, Cambridge University Press, New York, 2003.
32. V. Krishnan, Probability and Random Processes, John Wiley & Sons Inc., USA, 2006.
33. A. Klenke, Probability Theory: A Comprehensive Course, Springer-Verlag, London, 2014.
34. Z. Lozanov-Crvenković, D. Rajter, Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i statistike, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1999.
35. J. D. Mališić, Zbirka zadataka iz teorije verovatnoće sa primenama, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.
36. Р. Малчески, Вовед во теоријата на веројатност, Алфа ’94, Скопје, 2008.
37. Р. Малчески, В. Малческа, Теорија на Веројатност, Армаганка, 2019.
38. W. Mendenhal, T. Sincich, Statistics for Engineering and the Sciences, Maxwel Macmillan Int. Ed., New York, 1992.
39. J. S. Milton, J. C. Arnold, Introduction to Probability and Statistics, McGraw-Hill, USA, 1990.
40. D. Moore, The Basic Practice of Statistics, W. H. Freeman and Company, New York, 2010.
41. D. C. Montogomery, G.C. Runger, Applied Statistics and Probability for Engineers, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2003.
42. П. Младеновиќ, Вероватноћа и статистика, Веста-Математички факултет, Београд, 1995.

43. J. Neyman, First Course in Probability and Statistics, Henry Holt and Company, Inc., New York, 1953.
44. A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic processes, McGraw-Hill, USA, 1991.
45. Ž. Pauše, Uvod u Matematičku statistiku, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
46. Ž. Pauše, Vjerojatnost, Školska knjiga, Zagreb, 1978.
47. A. Renyi, Probability Theory, North-Holland, Amsterdam, 1970.
48. S. M. Ross, Introduction to Probability Models, Academic Press, San Diego, 1997.
49. N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
50. D. Seleši, Rešeni ispitni zadaci iz Verovatnoće i Statistike za student informatike, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2013.
51. M. J. Schervish, Theory of Statistics, Springer-Verlag, New York, 1995.
52. T. T. Soong, Fundamentals of Probability and Statistics for engineers, John Wiley & Sons Ltd., Hoboken, NJ, 2004.
53. A. Spanos, Probability Theory and Statistical Inference: Econometric Modeling with Observational Data, Cambridge University Press, New York, 1999.
54. R. Tosić, Kombinatorika, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1999.
55. Б. Трпеновски, Елементарен увод во теоријата на веројатноста, Математички институт со нумерички центар при Универзитетот "Св. Кирил и Методиј"- Скопје, Скопје, 1969.
56. M. P. Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematika II, Nauka, Beograd, 1998.
57. Д. Чакмаков, Веројатност и статистика за инженери, УКИМ, Скопје, 2015.
58. А. Н. Ширяев, Вероятностй, Наука, Москва, 1989.

Е-издание:
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41