Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИЧКИ НАУКИ И КОМПЈУТЕРСКО ИНЖЕНЕРСТВО

ВЕРИЦА Д. БАКЕВА

ВЕРОЈАТНОСТ

Скопје, 2016 година
Република Македонија

Рецензенти: д-р Магдалена Георгиева
редовен професор(во пензија)
Природно-математички факултет
Универзитет "Св.Кирил и Методиј" - Скопје

д-р Жанета Попеска
редовен професор
Факултет за информатички науки и компјутерско инженерство
Универзитет "Св.Кирил и Методиј" - Скопје

Лектор: Бисерка Токовска-Стевчевска

Содржина

Наместо предговор

Зачетоците на теоријата на веројатност датираат од седумнаесеттиот век со преписките помеѓу двајцата големи француски математичари Блез Паскал (Blaise Pascal) и Пјер де Ферма (Pierre de Fermat) околу два проблема поврзани со игрите на среќа. Основите на теоријата на веројатност ги поставува рускиот математичар Андреј Колмогоров во 1933 година со аксиомите со кои се поставува просторот на веројатност.

Овој учебник е наменет, пред сѐ, за предметот Веројатност, како и за дел од предметот Веројатност и статистика за студиите од прв циклус на Факултетот за информатички науки и компјутерско инженерство. Но, исто така, може да се користи и за сите предмети од техничките студии од прв и втор циклус, во кои се изучуваат избрани поглавја од теоријата на веројатноста. На крајот од учебникот е даден и додаток во кој се дадени докази на некои потешки теореми, па затоа учебникот може да се користи и за соодветен предмет на студии по математика.

Учебникот се состои од четири глави: Простор на веројатност, Случајни променливи, Бројни карактеристики на случајни променливи и Гранични теореми.

На почетокот на првата глава се дефинираат поимите експеримент и случаен настан и се дава статистичката дефиниција на веројатност. Се дефинира множество на случајни настани и операции со случајните настани. Потоа, се воведува аксиоматиката на Колмогоров и се дефинира простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, каде што Ω е множество елементарни настани, $\mathcal{F}$ е σ-алгебра од подмножества од Ω, а P е функција на веројатност. Се дефинира дискретен простор на веројатност, се дава класична дефиниција на веројатност, геометриска дефиниција на веројатност, условна веројатност, независност на настани и Бернулиева шема.

Во втората глава од учебникот е дефиниран поимот случајна променлива. Посебно се разгледани случајните променливи од дискретен и апсолутно-непрекинат тип. Се дефинираат и случајните вектори како повеќедимензионали случајни променливи, и нивни карактеристики, маргинални распределби. Се воведува поимот независност на случајни променливи, како и функции од случајни променливи.

Во третата глава се дефинираат некои основни бројни карактеристики на случајни променливи, и тоа: математичко очекување, дисперзија, моменти на случајни променливи и случајни вектори.

Во четвртата глава, најпрво се воведува карактеристична функција на случајна променлива. Потоа, се дефинираат неколку видови на конвергенција на случајни променливи. На крај се дадени неколку теореми кои го претставуваат законот на големите броеви и централната гранична теорема (теоремата на Линдерберг-Леви).

На крајот од учебникот е даден Прилог во кои се дадени докази на некои потешки теореми кои не се предаваат во курсот по веројатност и кои се пред сè наменети за подобрите студенти кои сакаат самостојно да го продлабочуваат своето знаење.

Би сакала да ја искажам мојата голема благодарност до рецензентите за деталното читање на трудот и корисните забелешки кои се составен дел на овој учебник.

Од авторот

Глава 1

Простор на веројатност

1.1 Експерименти и настани

Секоја реализација на множество услови S се нарекува *опит* или *експеримент*. Ваквото определување на поимот експеримент наполно одговара и за таканаречените пасивни експерименти (во кои човекот не влијае) и за таканаречените активни експерименти (кои човекот ги организира и спроведува со одредена цел).

Пример 1.1 Да ги разгледаме следниве примери на експерименти.
а) Една монета се фрла во воздух и по нејзиното паѓање на земја, на горната страна од монетата може да се појави „петка“ или „глава“. Со фрлањето на монетата сме извршиле еден експеримент и како резултат на тој експеримент може да се добие еден од следниве исходи: „на горната страна од монетата се појави петка“ или „на горната страна од монетата се појави глава“.
б) Ако вода се загрева на 100 $^\circ C$, тогаш таа ќе почне да врие. Овде е извршен еден експеримент (загревање на вода) и како резултат на тој експеримент се јавува исходот – „водата врие“.
в) Ако се проверува исправноста на производите во една фабрика, то-

гаш се зема по еден производ, се проверува неговиот квалитет и се утврдува дали е исправен или не. Значи, експериментот е проверка на квалитетот, а можни исходи се: „производот е исправен“ и „производот не е исправен“.
г) Се спроведува тест за да се провери знаењето на учениците. Оценувањето на тестот се прави со поени од 0 до 100. Тогаш експериментот е оценување на еден ученик, а можни исходи се – „ученикот освои i поени“, каде што $i = 0, 1, \ldots, 100$.

Секој резултат (исход) од експериментот S се нарекува *настан* во врска со експериментот S. Настаните се обележуваат со големи печатни букви од латиницата: A, B, C, ... Еден експеримент може да биде детерминистички и недетерминистички. Ако исходот на еден експеримент е однапред познат, тогаш тој експеримент е детерминистички, во спротивно, ако исходот не може со сигурност да се знае однапред, тој експеримент е недетерминистички. На пример, експериментот со загревање на вода е детерминистички. Имено, познато е дека ако вода се загрева, таа ќе почне да врие на $100\,^\circ C$. Од друга страна, останатите експерименти во пример 1.1 се недетерминистички. Така, ако се фрла монета во воздух, тогаш не може со сигурност да се каже кој ќе биде исходот на тој експеримент.

При подлабоко проучување на природните и општествените појави се забележува дека постојат сосема малку закони кои се строго детерминистички. Најголем дел од експериментите во себе го вклучуваат елементот на случајност. Во теоријата на веројатноста се наоѓаат законитостите за настаните кои се резултат на експериментите кои имаат нееднозначен исход. Имено, и кај експериментите со нееднозначен исход се воочуваат одредени законитости.

Пример 1.2 Да го разгледаме повторно експериментот фрлање монета и настанот A: „падна петка“. Ако експериментот се изведува еднаш, тогаш не може со сигурност да се каже кој ќе биде неговиот исход. Затоа, нека се изведени 8 серии од по 1000 експерименти под еднакви услови.

Со $n_i(A)$ се означува бројот на експериментите од i - тата серија во кои се појавил настанот A. Резултатите од овие осум серии се претставени во табела дадена десно. Во последната колона се дадени вредностите на количникот $\frac{n_i(A)}{n}$, каде што n е бројот на изведените експерименти во една серија. Во нашиот случај, $n = 1000$. Може да се воочи дека сите вредности во оваа колона се блиску до 0.5. Притоа, ако бројот на експериментите во една серија се зголемува, тогаш тој количник се приближува сѐ повеќе до 0.5.

i	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{n}$
1	502	0.502
2	504	0.504
3	492	0.492
4	500	0.500
5	510	0.510
6	490	0.490
7	493	0.493
8	509	0.509

Настанот A во врска со експериментот S се нарекува *случаен настан*, ако се исполнети следните два услова:

1° Експериментот S може да се повтори при исти услови колку што сакаме пати;

2° Релативните фреквенции на настанот А, во секоја од повеќе изведени серии експерименти, се броеви кои се приближно еднакви. Тоа значи дека ако се изведат серии од по n_1, n_2,..., n_k експерименти, тогаш:

$$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx \cdots \approx \frac{n_k(A)}{n_k}.$$

Релативната фреквенција $\frac{n(A)}{n}$ во една серија експерименти е приближна објективна мерка за можноста за појавување на настанот A. Меѓутоа, релативните фреквенции за различни серии експерименти се разликуваат помеѓу себе. Но, сепак тие се натрупуваат околу некој реален број. Реалниот број околу кој се натрупуваат релативните фреквенции на настанот A се нарекува *статистичка* (или *емпириска*) веројатност на настанот A.

Условот 2° обезбедува статистичка стабилност (непроменливост) на релативните фреквенции, а условот 1° обезбедува проверка на условот 2°. Во практиката, случајни настани се настаните за кои се исполнети условите 1° и 2°, а нивните веројатности се определуваат, во општ случај, со статистички методи. Постојат многу малку видови на експерименти кои овозможуваат определување на веројатноста со строго математички методи.

За секој експеримент S може да се разгледаат два специјални настана.

Сигурен настан во врска со даден експеримент е настанот кој се појавува при секоја реализација на тој експеримент. *Невозможен настан* во врска со даден експеримент е настан што не се појавува никогаш при реализација на дадениот експеримент.

Пример 1.3 Да ги разгледаме следните експерименти и настаните во врска со нив.

а) Нека експериментот е фрлање коцка. Се разгледуваат настаните:

A_1: падна број од 1 до 6, A_2: падна бројот 7.

б) Експериментот е извлекување на топче од кутија во која има 5 бели топчиња. Се разгледуваат настаните:

B_1: извлечено е бело топче, B_2: извлечено е црно топче.

в) Експериментот е оценување на случајно избран ученик. Се разгледуваат настаните:

C_1 : ученикот доби оценка од 1 до 5,
C_2 : ученикот доби оценка 12.

Настаните A_1, B_1 и C_1 се јавуваат при секоја реализација на соодветниот експеримент, па тие се сигурни настани. Од друга страна, настаните A_2, B_2 и C_2 не се појавуваат никогаш при реализација на соодветниот експеримент, што значи дека тие се невозможни настани.

Ако експериментот S се изведува n пати, тогаш сигурниот настан ќе се појави n пати, а невозможниот се појавува 0 пати. Оттука, релативната зачестеност на сигурниот настан е $\frac{n}{n} = 1$, а на невозможниот настан $\frac{0}{n} = 0$. Ова важи за секоја серија експерименти S. Така, сигурниот и невозможниот настан ги задоволуваат условите 1° и 2°, што значи дека и тие се случајни настани.

1.2 Множество елементарни настани. Случајни настани

Пример 1.4 Да го разгледаме експериментот фрлање коцка. Некои од можните настани во врска со овој експеримент се следниве:

A: падна парен број;	E_3: падна бројот 3;
B: падна број делив со 3;	E_4: падна бројот 4;
E_1: падна бројот 1;	E_5: падна бројот 5;
E_2: падна бројот 2;	E_6: падна бројот 6.

Да воочиме дека настанот A се појавува ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6, а настанот B се појавува ако се појави настанот E_3 или ако се појави E_6. Значи, настанот A може да се разложи на настаните E_2, E_4 и E_6, а настанот B може да се разложи на настаните E_3 и E_6.

Од друга страна, настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 не може да се разложат на други настани. Затоа, тие настани ги нарекуваме елементарни настани. Елементарните настани ќе ги означуваме со симболот E со индекс 1,2,...

Дефиниција 1.1

Елементарен настан во врска со даден експеримент е секој логички исход кој не може да се разложи на други настани. Притоа, при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден елементарен настан.
Множеството од сите вакви настани во врска со еден експеримент се нарекува *множество елементарни настани* и се означува со Ω.

Пример 1.5 Експериментот се состои во фрлање коцка. При секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6. Затоа множеството елементарни настани во врска со овој експеримент е

$$\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}.$$

Пример 1.6 Експериментот се состои во фрлање на две монети. При фрлање на една монета, можен исход е „падна петка“ или „падна глава“ (ќе пишуваме кратко „петка“ или „глава“). Но, експериментот се состои од фрлање на двете монети заедно, па можните исходи ќе бидат подредени парови, каде што првиот елемент ќе го означува исходот на првата монета, а вториот елемент – исходот на втората монета. Со други зборови, множеството елементарни настани е следново:

$$\Omega = \{(\text{глава, глава}), (\text{глава, петка}), (\text{петка, глава}), (\text{петка, петка})\}.$$

Пример 1.7 Нека експериментот е фрлање монета сè додека не се појави петка. Множеството елементарни настани е од облик $\Omega = \{E_1, E_2, \dots\}$, каде што $E_1 =$ (петка), $E_2 =$ (глава, петка), итн. Во општ случај, за фиксно $i = 2, 3, \ldots$, елементарниот настан

$$E_i = (\underbrace{\text{глава, глава,} \ldots, \text{ глава}}_{i-1}, \text{петка})$$

и тој се појавува ако во првите $i-1$ фрлања на монетата се појави глава, а во i-тото фрлање се појави петка. Во овој случај, множеството елементарни настани е бесконечно пребројливо множество, бидејќи теоретски експериментот може никогаш да не заврши.

Пример 1.8 Се набљудува времето на непрекината работа на некоја машина. Елементани настани за овој експеримент се:

$$E_t : \text{машината работи време } t, \qquad t \in [0, T],$$

каде што T е максималниот (гарантиран) век на работа на набљудуваната машина. Оттука, множеството елементарни настани за овој експеримент е:

$$\Omega = \{E_t | t \in [0, T]\}.$$

Во овој случај, Ω е бесконечно непребројливо множество.

Од претходните примери можеме да воочиме дека зависно од експериментот, множеството елементарни настани може да биде конечно, бесконечно пребројливо или бесконечно непребројливо множество.

Во Пример 1.4 заклучивме дека настанот A се појавува ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6, а настанот B се појавува ако се појави еден од настаните E_3 или E_6. Оттука, настаните A и B може да се запишат на следниов начин: $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$. Да воочиме дека настаните A и B се претставени како подмножества од множеството елементарни настани Ω.

Дефиниција 1.2

Случаен настан е произволно подмножество од множеството елементарни настани Ω.
Ќе велиме дека се појавил настанот A, ако се појавил некој од елементарните настани кои припаѓаат на подмножеството елементарни настани соодветно на настанот A.

Пример 1.9 Нека експериментот е фрлање на две монети. Да се опише настанот C: барем еднаш падна петка.

Решение: Настанот C ќе се појави ако на една од монетите падне петка, а на другата глава или ако на двете монети падне петка, т.е.

$$C = \{(\text{глава, петка}), (\text{петка, глава}), (\text{петка, петка})\}.$$

□

Пример 1.10 Експериментот се состои во фрлање на две коцки. Да се опише множеството елементарни настани и следниве случајни настани:

A: на двете коцки падна парен број;

B: на првата коцка падна парен, а на втората непарен број.

Решение: Множеството елементарни настани за овој експеримент ќе се состои од подредени парови (x, y), каде што x е исходот на првата коцка, а y - исходот на втората коцка, $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Оттука,

$$\Omega = \{(x, y)|x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

За настанот A се добива следново: $A = \{(x, y)|x, y \in \{2, 4, 6\}\}$ или во развиена форма

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\},$$

а за настанот B имаме: $B = \{(x,y)|x \in \{2,4,6\}, y \in \{1,3,5\}\}$ или

$$B = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}.$$

□

Сигурниот настан се појавува секогаш кога се реализира експериментот, т.е. секој елементарен настан доведува до негово појавување. Затоа, тој се означува со Ω. Невозможниот настан, пак, не се појавува никогаш кога се реализира експериментот, односно ниеден елементарен настан не доведува до негово појавување. Оттука, невозможниот настан ќе го означуваме со $\emptyset$.

Дефиниција 1.3

Производ на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават и двата настана A и B. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е пресек од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B. Производот на два настана A и B се означува со $A \cap B$ или AB.

Пример 1.11 Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:

A: падна број помал или еднаков на 3;

B: падна број делив со 3;

C: падна број поголем од 4.

Да се определи производот на настаните A и B и производот на настаните A и C.

Решение: Настаните A, B и C се опишуваат на следниов начин:

$$A = \{E_1, E_2, E_3\}, \quad B = \{E_3, E_6\}, \quad C = \{E_5, E_6\}.$$

Настанот $A \cap B$ означува дека се појавил број кој е помал или еднаков на 3 и делив со 3, па така $A \cap B = \{E_3\}$. Настанот $A \cap C$ означува дека се појавил број кој е помал или еднаков на 3 и поголем од 4, што е невозможно. Значи, настаните A и C не може да се појават истовремено, т.е. $A \cap C = \emptyset$. □

Дефиниција 1.4

Ако два настана A и B не може да се појават истовремено тогаш тие се нарекуваат *дисјунктни настани*. Нивниот производ е невозможен настан, т.е. $A \cap B = \emptyset$.

Дефиниција 1.5

Збир на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A или B. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е унија од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B.
Збирот на два настана A и B, во општ случај, се означува со $A \cup B$. Доколку настаните A и B се дисјунктни, тогаш нивниот збир ќе го означуваме со $A + B$.

Кога се вели дека се појавил барем еден од настаните A или B, тогаш се подразбира дека се појавил или само настанот A или само настанот B или и двата настана истовремено.

Ако настаните A и B се дисјунктни, тогаш истовремено појавување на двата настана е невозможно, па појавување на настанот $A \cup B$ подразбира дека ќе се појави или само настанот A, или само настанот B. Затоа, во овој случај, за збир на два настана се користи ознаката $A + B$. Значи, $A + B = A \cup B$, ако $AB = \emptyset$.

Пример 1.12 Определи го збирот на настаните A и B; како и на настаните A и C, ако A, B и C се настаните дефинирани во пример 1.11.

Решение: Настаните A, B и C се определени со: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$, $C = \{E_5, E_6\}$. Настанот $A \cup B$ означува дека ќе се појави број помал од 3 или број делив со 3, и тој може да се опише на следниов начин:

$$A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_6\}.$$

Настанот $A \cup C$ означува дека ќе се појави број кој не е поголем од 3 или број кој е поголем од 4. Исто така, во пример 1.11 воочивме дека настаните A и C се дисјунктни. Оттука, за нивниот збир се добива $A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6\}$. □

Дефиниција 1.6

Спротивен настан на настанот A е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога не се појавува настанот A. Овој настан се означува со $\overline{A}$. Множеството елементарни настани на настанот $\overline{A}$ е комплемент на множеството елементарни настани соодветни на настанот A во однос на Ω. За секој настан A важи:

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, \qquad A \cup \overline{A} = \Omega.$$

Пример 1.13 Определи ги спротивните настани на настаните A и B од пример 1.11.

Решение: Настанот A нема да се појави, ако се појави еден од настаните E_4, E_5 или E_6, па затоа $\overline{A} = \{E_4, E_5, E_6\}$. Соодветно, $\overline{B} = \{E_1, E_2, E_4, E_5\}$. □

Дефиниција 1.7

Разлика на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави настанот A, а не се појавува настанот B. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е разлика од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B.

Да воочиме дека согласно со претходните ознаки, разликата на настаните A и B е, всушност, настанот $A\overline{B}$.

Пример 1.14 Во пример 1.11, разликата на настаните A и B е определена со $A\overline{B} = \{E_1, E_2\}$.

Дефиниција 1.8

Настанот A го повлекува настанот B (пишуваме $A \subseteq B$), ако секогаш кога се појавува настанот A се појавува и настанот B.

Пример 1.15 Да го разгледаме повторно експериментот фрлање на две монети. Нека

A : падна точно една глава; B : падна барем една глава.

Може да се воочи дека секогаш кога ќе се појави настанот A се појавува и настанот B, т.е. $A \subseteq B$.

Дефиниција 1.9

Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тогаш за настаните A и B велиме дека се *еднакви*.

Бидејќи случајните настани се подмножества од множеството елементарни настани во врска со еден експеримент, за операциите со настани важат истите закони како за операциите со множества. Некои од нив, кои ќе ги користиме во понатамошните излагања се следниве.

Дистрибутивните закони:	Де Моргановите закони:
$A(B \cup C) = AB \cup AC$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$(A \cup B)C = AC \cup BC$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Понатаму, ќе ги обопштиме дефинициите за збир и производ на повеќе од два настана.

Дефиниција 1.10

Збир на настаните A_1, A_2,..., A_n е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A_1, A_2,..., A_n. Овој настан се означува со $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, а неговото множество елементарни настани е унија од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните A_1, A_2,..., A_n.

Дефиниција 1.11

Производ на настаните A_1, A_2,..., A_n е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават истовремено сите настани A_1, A_2,..., A_n. Овој настан се означува со $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ (или $A_1 A_2 \ldots A_n$), а неговото множество елементарни настани е пресек од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните A_1, A_2,..., A_n.

Забелешка 1.1 Дефинициите за збир и производ на настани може да се обопштат и за пребројливо многу настани. Имено, збир на настаните A_1, A_2,... е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A_1, A_2,..., а нивен производ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават истовремено сите настани A_1, A_2,...

Пример 1.16 Во цел се стрела три пати. Се разгледуваат настаните A_1, A_2 и A_3 кои означуваат погодување на целта во првото, второто и третото стрелање, соодветно. Со помош на овие настани, да се опишат следниве случајни настани:

B: постигнати се три погодоци;
C: целта е три пати промашена;
D: постигнат е барем еден погодок;
E: постигнато е барем едно промашување;
F: постигнати се не повеќе од два погодока;
G: до третото стрелање немало погодок.

Решение: Настанот B ќе се појави ако се појават сите три настани A_1, A_2 и A_3, истовремено. Оттука, $B = A_1A_2A_3$.

Настанот C ќе се појави ако не се појави ниеден од настаните A_1, A_2 и A_3, т.е. ако се појават нивните спротивни настани, па $C = \overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3$.

Настанот D ќе се појави ако се појави барем еден од настаните A_1, A_2 и A_3, па $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ Соодветно, $E = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$.

Да воочиме дека ако се постигнати најмногу два погодока, тогаш мора да има барем едно промашување. Оттука, настанот F ќе се појави ако се појави настанот E, и обратно, појавувањето на настанот F го повлекува појавувањето на настанот E. Значи, $F = E$.

Настанот G ќе се појави ако не се појават настаните A_1 и A_2, па $G = \overline{A}_1\ \overline{A}_2$. □

Пример 1.17 Експеримент се состои во фрлање монета сè додека не падне петка. Нека

$$A_n: \quad \text{во } n\text{-тото по ред фрлање падна петка}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Со помош на настаните A_n, да се опишат следниве настани:

B_5: експериментот се изведува точно 5 пати;

C: експериментот заврши;

D: експериментот нема да заврши.

Решение: Настанот B_5 ќе се појави ако во првите четири експерименти не се појави петка, т.е. се појавува глава, а во петото фрлање се појави петка. Оттука,

$$B_5 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5.$$

Со B_n го означуваме настанот „експериментот ќе заврши во n-тото фрлање“. Тој ќе се појави, ако петка се појави за прв пат точно во n-тото фрлање, т.е. $B_n = \overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{n-1}A_n$. Сега,

$$C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

Настанот D ќе се појави, ако петка не се појави воопшто, т.е. во сите експерименти се појавува глава. Така,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A}_n.$$

□

Пример 1.18 Нека $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n,\ldots$ е пребројлива низа од случајни настани. Да се опише настанот D: се појавија бесконечно многу настани од низата $A_1,\ A_2,\ldots$

Решение: Настанот $\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i$ означува дека се појавува барем еден настан од $A_1,\ A_2,\ldots$ Тогаш

$$D = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i.$$

□

Дефиниција 1.12

Нека A_1, $A_2, \ldots$, A_n се настани во врска со еден експеримент, така што $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Тогаш за настаните A_1, $A_2, \ldots$, A_n велиме дека се *дисјунктно разложување на* Ω, т.е. Ω *е дисјунктна сума* на настаните A_1, $A_2, \ldots$, A_n.

Забелешка 1.2 Множеството елементарни настани Ω може да се претстави и како дисјунктна сума на пребројливо многу настани A_1, $A_2, \ldots$, ако $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega$

Пример 1.19 Експериментот се состои во трикратно фрлање на монета. Ако со 0 се означи исходот „падна петка“, а со 1 - исходот , ,падна глава“, тогаш множеството елементарни настани за овој експеримент е

$$\Omega = \{(x, y, z) | x, y, z \in \{0, 1\}\}.$$

Со A_i го означуваме настанот „глава падна i пати“, $i = 0, 1, 2, 3$. Тогаш

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{(0, 0, 0)\} \\
A_1 &= \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \\
A_2 &= \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \\
A_3 &= \{(1, 1, 1)\}
\end{aligned}$$

Јасно е дека настаните A_i, $i = 0, 1, 2, 3$ се дисјунктни и $A_0+A_1+A_2+A_3 = \Omega$, т.е. A_0, A_1, A_2 и A_3 се дисјунктно разложување на Ω.

1.3 Аксиоматика на Колмогоров

Нека $\mathcal{F}$ е фамилија подмножества од множеството елементарни настани Ω, т.е. $\mathcal{F}$ е фамилија случајни настани во врска со дадениот експеримент.

Дефиниција 1.13

Фамилијата $\mathcal{F}$ се нарекува σ-алгебра од подмножества од Ω, ако ги задоволува следниве три услови:

σ.1. $\Omega \in \mathcal{F}$;

σ.2. Ако $A \in \mathcal{F}$, тогаш $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

σ.3. Ако $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, тогаш $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$;

Елементите на σ-алгебрата се нарекуваат случајни настани. Од σ.1 следува дека Ω е случаен настан, кој се нарекува сигурен настан. Од σ.2 следува дека ако A е случаен настан, тогаш и $\overline{A}$ е случаен настан, а од σ.3 следува дека ако $A_1, A_2, \ldots$ се случајни настани, тогаш и нивниот пребројлив збир е случаен настан.

Теорема 1.1

За секоја σ-алгебра $\mathcal{F}$ се точни следниве својства:

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

ii) Ако $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, тогаш $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$;

iii) Ако $A, B \in \mathcal{F}$, тогаш $A \cup B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Доказ: *i*) Со користење на дефиниција 1.13, σ.1 и σ.2, се добива.

$$\Omega \in \mathcal{F} \quad \stackrel{\sigma.2}{\Longrightarrow} \quad \emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{F},$$

т.е. невозмножниот настан е исто така, случаен настан.

ii) Ако $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, тогаш од

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i},$$

се добива следново:

$$A_i \in \mathcal{F},\ i=1,2, \quad \stackrel{\sigma.2}{\Longrightarrow} \quad \overline{A}_i \in \mathcal{F},\ i=1,2, \quad \stackrel{\sigma.3}{\Longrightarrow} \quad \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i \in \mathcal{F}$$
$$\stackrel{\sigma.2}{\Longrightarrow} \quad \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i} \in \mathcal{F}.$$

iii) Ако во $\sigma.3$ ставиме $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_i = \emptyset$, $i = 3, 4, \dots$, тогаш се добива:

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Ако пак, во тврдењето *ii*) од оваа теорема се стави $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_i = \Omega$, $i = 3, 4, \dots$, тогаш се добива дека $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = A \cap B \in \mathcal{F}$. □

Од претходното може да се заклучи дека секоја σ-алгебра ги содржи $\emptyset$ и Ω и затворена е во однос на операциите комплемент, конечна и пребројлива унија и конечен и пребројлив пресек. Затоа во продолжение, ќе претпоставуваме дека работиме во σ-алгебра што ќе обезбедува затвореност на овие операции на настани.

Нека $\mathcal{A}$ е дадена фамилија подмножества од дадено непразно множество Ω. Во следната теорема чиј доказ е даден во прилог А.1 на овој учебник, се покажува дека постои најмала σ-алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ од подмножества од Ω, која ја содржи фамилијата $\mathcal{A}$.

Теорема 1.2

Нека Ω е произволно непразно множество и $\mathcal{A}$ е произволна фамилија од подмножества од Ω. Тогаш постои најмала σ-алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ од подмножества од Ω, која ја содржи фамилијата $\mathcal{A}$. $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ се нарекува *σ-алгебра генерирана од фамилијата $\mathcal{A}$*.

Во следната дефиниција, ќе дефинираме две специјални σ-алгебри, генерирани од множеството полусегменти $\mathcal{A} = \{[a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$, т.е. од множеството $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2 \dots, x_n) \mid a_i \leq x < b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$.

Дефиниција 1.14

i) Нека $\mathcal{A} = \{[a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$ е дадена фамилија од полусегменти од облик $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. σ-алгебрата генерирана од фамилијата $\mathcal{A}$ се нарекува *Борелова σ-алгебра* и се означува со $\mathcal{B}_1$.
ii) Ако $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2 \dots, x_n) \mid a_i \leq x < b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$, тогаш σ-алгебрата $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ генерирана од $\mathcal{A}$ се нарекува *n-димензионална Борелова σ-алгебра* и се означува со $\mathcal{B}_n$.

Следната дефиниција е, всушност, дефиниција на веројатност на случајни настани.

Дефиниција 1.15

Нека $\mathcal{F}$ е σ-алгебра од подмножества од Ω. Пресликувањето $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, каде $\mathbb{R}$ е множеството реални броеви се нарекува *веројатност*, ако се задоволени следниве три услови:

P.1. $P(A) \geq 0$, за секој настан $A \in \mathcal{F}$

P.2. $P(\Omega) = 1$.

P.3. Ако $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, и $A_i A_j = \emptyset$, за $i \neq j$, тогаш

$$P\big(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

Подредената тројка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, каде што Ω е произволно непразно множество, $\mathcal{F}$ е σ-алгебра од подмножества од Ω и P е веројатност (над $\mathcal{F}$) што ги задоволува аксиомите P1, P2 и P3 се нарекува *простор на веројатност*. Оваа конструкција која ги вклучува дефинициите 1.13 и 1.15 е предложена од Колмогоров 1933 и се нарекува **аксиоматика на Колмогоров**.

1.4 Својства на веројатноста

Основните својства на веројатноста се дадени во следнава теорема.

Теорема 1.3

Веројатноста P ги има следниве својства:

i) $P(\emptyset) = 0$;

ii) $P\big(\sum_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

iii) Ако $A \subseteq B$, тогаш $P(A) \leq P(B)$;

iv) За секој $A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$;

v) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Доказ: *i)* Од P.1 следува дека $P(\emptyset) \geq 0$. Сега, Ω може да се претстави во облик:

$$\Omega = \Omega + \emptyset + \emptyset + \dots$$

Од P.3 добиваме:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\ &= P(\Omega) + \sum_{i=1}^{+\infty} P(\emptyset). \end{aligned}$$

Оттука, добиваме дека $\sum_{i=1}^{+\infty} P(\emptyset) = 0$. Бидејќи $P(\emptyset)$ е ненегативно, последниот збир ќе биде 0 ако и само ако $P(\emptyset) = 0$.
ii) Нека $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$. Тогаш од *i)* и од P.3 следува дека

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

iii) Бидејќи $A \subseteq B$, настанот B може да се запише во облик:

$$B = \Omega B = (A + \overline{A})B = AB + \overline{A}B = A + \overline{A}B.$$

Сега, со примена на својството *ii*), добиваме:

$$P(B) = P(A) + P(\overline{A}B) \geq P(A),$$

бидејќи $P(\overline{A}B) \geq 0$.

iv) За секој настан A, точно е дека $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$. Сега, од својството *iii*), следува дека $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$, т.е. $0 \leq P(A) \leq 1$.

v) Од равенството $\Omega = A + \overline{A}$ и од *ii*) следува дека $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$, т.е. $1 = P(A) + P(\overline{A})$. Оттука, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

vi) Настанот $A \cup B$ може да се претстави во облик:

$$A \cup B = A + \overline{A}B,$$

од каде што со примена на *ii*), се добива:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B). \tag{1.1}$$

Од друга страна, од равенството

$$B = \Omega B = (A + \overline{A})B = AB + \overline{A}B,$$

со примена на *ii*), се добива:

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B).$$

Оттука, $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$. Со замена на последниот израз во (1.1), се добива дека $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. $\square$

Теорема 1.4 (Лема за покривање)

За произволни $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$ точно е следново неравенство:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

Доказ: Настанот $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ ќе го претставиме како дисјунктен збир на настани на следниов начин:

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 + A_2\overline{A}_1 + A_3\overline{A}_2\overline{A}_1 + \dots$$

Сега, од Р.3 се добива:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{+\infty} P(A_i\overline{A}_{i-1}\dots\overline{A}_2\overline{A}_1). \tag{1.2}$$

Бидејќи $A_i\overline{A}_{i-1}\dots\overline{A}_2\overline{A}_1 \subseteq A_i$, од својството *iii*) следува дека

$$P(A_i\overline{A}_{i-1}\dots\overline{A}_2\overline{A}_1) \leq P(A_i), \qquad i = 2, 3, \dots.$$

Со замена во (1.2), го добиваме неравенството:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

□

Теорема 1.5 (Теорема за непрекинатост на веројатноста)

Нека $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$.

а) Ако $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$, тогаш $P\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.

б) Ако $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$, тогаш $P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Доказ: а) Настанот $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ ќе го претставиме како дисјунктен збир на настани, имајќи предвид дека $A_i \subseteq A_{i+1}$, за секој $i = 1, 2, \dots$

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_2A_3 + \dots = A_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \overline{A}_{k-1}A_k.$$

Со примена на P.3 се добива:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = P(A_1) + \sum_{k=2}^{+\infty} P(\overline{A}_{k-1}A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\overline{A}_{k-1}A_k), \quad \text{каде што} \quad A_0 = \emptyset.$$

Сега,

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(\overline{A}_{k-1}A_k) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{A}_{k-1}A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

б) Од $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \dots$ следува дека $\overline{A}_1 \subseteq \overline{A}_2 \subseteq \cdots \subseteq \overline{A}_n \subseteq \dots$, па од тврдењето а) и Де Моргановите закони добиваме:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i.$$

Оттука, со примена на тврдењето под а) во оваа теорема, добиваме:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) = 1 - P\Big(\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i}\Big) = 1 - P\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A}_i\Big) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

□

1.5 Дискретен простор на веројатност

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е даден простор на веројатност. Ако множеството елементарни настани Ω е дискретно (конечно или пребројливо) множество, а $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, тогаш $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ се нарекува *дискретен простор на веројатност*.

1.5.1 Конечен простор на веројатност

Најпрво ќе го разгледаме случајот кога $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ е конечно множество. Нека p_1, $p_2, \dots$, p_n се реални броеви такви што

$p_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Нека $p_i = P(E_i),\ i = 1,2,\ldots,n$. Дефинираме функција $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ на следниов начин:

$$P(A) \overset{def.}{=} \sum_{r=1}^{k} P(E_{i_r}) = \sum_{r=1}^{k} p_{i_r}, \quad \text{каде што} \quad A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}\} \in \mathcal{F}. \quad (1.3)$$

Ќе покажеме дека вакадефинираната функција P е веројатност, т.е. ги задоволува својствата P.1-P.3.

P.1. $P(A) = \sum_{r=1}^{k} p_{i_r} \geq 0$, бидејќи $p_{i_r} \geq 0$, за секој $r = 1,2,\ldots,k$.

P.2. $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

P.3. Нека $A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}\}$, $B = \{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_m}\}$ и A и B се дисјунктни настани, т.е. $AB = \emptyset$. Тогаш

$$A + B = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}, E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_m}\}.$$

Сега, со примена на дефиницијата (1.3), се добива:

$$P(A+B) = \sum_{r=1}^{k} p_{i_r} + \sum_{r=1}^{m} p_{j_r} = P(A) + P(B).$$

Да напоменеме дека во P.3. не може да се земат пребројливо многу дисјунктни настани од Ω, бидејќи Ω е конечно множество и бројот на дисјунктни подмножества е конечен.

Пример 1.20 Еден кошаркар изведува две слободни фрлања. Притоа се можни следниве елементарни настани:

E_1: погодок во првото и погодок во второто фрлање;
E_2: погодок во првото и промашување во второто фрлање;
E_3: промашување во првото и погодок во второто фрлање;
E_4: промашување во првото и промашување во второто фрлање.

Веројатностите на елементарните настани се следниве: $P(E_1) =$

0.49, $P(E_2) = P(E_3) = 0.21$ и $P(E_4) = 0.09$. Да се определи веројатноста на следниве настани:

A: играчот ќе постигне погодок во првото фрлање;

B: играчот ќе постигне погодок во второто фрлање;

C: играчот ќе постигне погодок во двете фрлања;

D: играчот ќе постигне барем еден погодок во двете фрлања.

Решение: Настаните A, B и C може да се претставaт како $A = \{E_1, E_2\}$, $B = \{E_1, E_3\}$, $C = \{E_1\}$, $D = \{E_1, E_2, E_3\}$. Оттука, за нивната веројатност се добива:

$$\begin{aligned} P(A) &= p_1 + p_2 = 0.49 + 0.21 = 0.7, \\ P(B) &= p_1 + p_3 = 0.49 + 0.21 = 0.7, \\ P(C) &= p_1 = 0.49, \\ P(D) &= p_1 + p_2 + p_3 = 0.49 + 0.21 + 0.21 = 0.91. \end{aligned}$$

□

Пример 1.21 Една нехомогена коцка за играње е направена така што честотата да се појави определена страна (по случајно фрлање на коцката) е пропорционална со бројот на точките на неа. Да се определи веројатноста на настанот A: падна парен број.

Решение: Познато е дека за овој експеримент $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. Нека $p_1 = P(E_1) = x$. Тогаш $p_i = P(E_i) = i \cdot x$, $i = 1, \ldots, 6$. Од условот $\sum\limits_{i=1}^{6} p_i = 1$, се добива:

$$x(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1, \qquad \text{т.е.} \quad x = \frac{1}{21}.$$

Оттука, $p_i = \dfrac{i}{21}$. Сега, $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, па

$$P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}.$$

□

Ќе разгледаме еден специјален случај на претходно дефинираната веројатност.

Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ е дадено конечно множество елементарни настани и нека сите овие елементарни настани имаат иста веројатност да се појават, т.е. $p_i = p_j$, за $i, j = 1, 2, \dots, n$. Од условот $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, следува дека $p_i = \dfrac{1}{n}$, за сите $i = 1, 2, \dots, n$. Оттука, ако е даден настан $A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k}\}$, за неговата веројатност се добива дека

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k} = \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{k \text{ пати}} = \frac{k}{n}.$$

Дефиниција 1.16 (Класична дефиниција на веројатност)

Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ е дадено конечно множество елементарни настани и нека секој од нив има иста веројатност да се појави, т.е. $P(E_i) = \dfrac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ако A е случаен настан во врска со дадениот експеримент во кој се содржат k елементарни настани, тогаш веројатноста на настанот A се определува со:

$$P(A) = \frac{k}{n}. \tag{1.4}$$

Да воочиме дека n е вкупниот број на елементарни настани, т.е. бројот на елементи во Ω. Ќе означиме $n = |\Omega|$. Секој елементарен настан може да го толкуваме како „можен случај“ во врска со даден експеримент. Од друга страна, k е бројот на елементарни настани кои се содржат во настанот A, т.е. $k = |A|$ и секој елементарен настан од A ќе го толкуваме како „поволен случај“ за појавување на настанот A. Согласно со класичната дефиниција, веројатноста на даден случаен настан A е еднаква на количникот од бројот на поволни случаи за појавување на настанот A и бројот на сите можни случаи за дадениот експеримент, т.е.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Пример 1.22 Да се определи веројатноста при фрлање на хомогена коцка да се добие парен број.

Решение: Ако експериментот е фрлање коцка, множеството елементарни настани $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, каде што E_i е настанот „се појави бројот i", $i = 1, 2, \ldots, 6$. Настанот A: падна парен број, може да се опише со $A = \{E_2, E_4, E_6\}$. Значи, бројот на поволни можности за појавување на настанот A е 3, а вкупниот број на можности при реализација на експериментот е 6. Оттука, според класичната дефиниција на веројатност, за веројатноста на настанот A се добива:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

Пример 1.23 Во една кутија има 5 бели и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња наеднаш. Да се определи веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение: Го означуваме настанот A: извлечени се две бели топчиња. Бројот на можни исходи на експериментот, т.е. вкупниот број на елементарни настани е $C_9^2 = \binom{9}{2} = 36$, а бројот на поволни можности за да се појави настанот A е $C_5^2 = \binom{5}{2} = 10$. Значи, веројатноста за појавување на настанот A е

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

□

Пример 1.24 На една полица, според случаен редослед, се наредени

40 книги, меѓу кои и еден роман во три тома. Да се најде веројатноста дека овие три тома ќе бидат наредени во растечки редослед (1,2,3).

Решение: Постојат вкупно 40! различни распореди, т.е. $|\Omega| = 40!$. Го означуваме со A настанот „трите тома се наредени во растечки редослед“. Сега, на C_{40}^3 начини може да се изберат трите позиции (од вкупно 40) на кои ќе се фиксираат трите тома во растечки редослед. Останатите книги може да се распореда на 37! начини. Оттука, бројот на поволни можности за појава на настанот A, т.е. бројот на елементарни настани во настанот A е:

$$|A| = C_{40}^3 \cdot 37!,$$

па според класичната дефиниција за веројатноста на A добиваме:

$$P(A) = \frac{C_{40}^3 \cdot 37!}{40!} = \frac{1}{6}.$$

□

Пример 1.25 Група од n луѓе ($n \geq 2$), на случаен начин се распоредени на кружна маса. Меѓу нив само двајца се познаници. Да се најде веројатноста тие двајца да седат еден до друг.

Решение: Вкупниот број на елементарни настани е, всушност, бројот на сите циклични пермутации со n елементи, т.е. $|\Omega| = (n-1)!$. Нека A е настанот „познаниците седат еден до друг“. Тогаш $|A| = 2(n-2)!$. Имено, при секое распоредување, познаниците се третираат како еден човек, а се распоредуваат $n-1$ луѓе. Бројот на такви циклучни пермутации е $(n-2)!$. Но, при секој распоред, познаниците може да седат едниот десно од другиот или обратно (што дава различен распоред), па оттука множителот 2 во $|A|$. Сега,

$$P(A) = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}.$$

□

1.5.2 Пребројлив простор на веројатност

Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots\}$ е пребројливо множество. Дефиницијата на веројатноста P е со обопштување на дефиницијата (1.3) на следниов начин. Се избира низа од реални броеви $p_1,\ p_2, \ldots$, такви што $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$. Ако $p_i = P(E_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, тогаш дефинираме:

$$P(A) \overset{def.}{=} \sum_{i: E_i \in A} p_i. \tag{1.5}$$

Слично како кај конечен простор на веројатност се покажува дека вака дефинираната функција ги задоволува P.1-P.3, т.е. P е веројатност.

Пример 1.26 Експериментот се состои во фрлање монета сè додека не се појави „глава“.

а) Да се определи множеството елементарни настани Ω и да се најде веројатноста за појавување на секој од елементарните настани.

б) Да се определи веројатноста на настанот A: експериментот ќе се изведува помалку од 5 пати.

Решение: а) Множеството елементарни настани може да се претстави во облик:

$$\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\},$$

каде што E_n означува дека се изведени n фрлања до појавување на глава. E_n може да се запише како

$$E_n = (\underbrace{\Pi, \Pi, \ldots, \Pi}_{n-1}, \Gamma), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Настанот E_1 означува дека глава се појавува во првото фрлање. Оттука, според класичната дефиниција на веројатноста:

$$p_1 = P(E_1) = \frac{1}{2}.$$

Ако експериментот се изведува двапати (т.е. ако монетата се фрла двапати), можни исходи се: (П, П), (П, Г), (Г, П) и (Г, Г). Значи имаме вкупно 4 можни исходи, од кои само еден е поволен, а тоа е $E_2 = (\text{П}, \text{Г})$. Повторно според класичната дефиниција на веројатност, се добива дека:

$$p_2 = P(E_2) = \frac{1}{4}.$$

Ако експериментот се изведува три пати, тогаш можни исходи има 8 и тоа: (П, П, П), (П, П, Г), (П, Г, П), (Г, П, П), (П, Г, Г), (Г, П, Г), (Г, Г, П) и (Г, Г, Г), а поволен е само еден, а тоа е $E_3 = (\text{П}, \text{П}, \text{Г})$. Значи,

$$p_3 = P(E_3) = \frac{1}{8}.$$

За произволно фиксно n, ако експериментот се изведува n пати, тогаш можни исходи има вкупно 2^n, а поволен е само еден, па

$$p_n = P(E_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Притоа,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

б) Експериментот ќе се изведува помалку од 5 пати, ако се падне „ глава“ или во првото или во второто или во третото или во четвртото фрлање. Затоа, $A = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, па

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

□

1.6 Геометриска веројатност

Нека просторот на елементарни настани Ω е бесконечен непребројлив, но допушта геометриска интерпретација и притоа, соодветната фигура (која ја означуваме со Ω) има конечна мера $m(\Omega)$ (должина на Ω или плоштина на Ω или волумен на Ω, итн.). Имено, ако Ω е дел од крива, тогаш $m(\Omega)$ е нејзината должина, ако Ω е дел од рамнина, $m(\Omega)$ е нејзината плоштина, ако Ω е дел од просторот, тогаш $m(\Omega)$ е нејзиниот волумен, итн. Во сите случаи, претпоставуваме дека $m(\Omega)$ постои и е конечно.

Случајни настани по дефиниција се сите подмножества од Ω, кои поради конечната мера на Ω, исто така, имаат конечна мера. Тогаш веројатноста на даден случаен настан A се определува со:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Претпоставката за ваквото определување на веројатноста на настанот A се должи на претпоставката за еднаква веројатност на сите елементарни настани (од класична дефиниција), што овде значи дека веројатноста да се појави која било точка од A е пропорционална на $m(A)$.

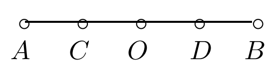
Пример 1.27 На отсечката $\overline{AB} = a$ случајно се фрла една точка. Да се најде веројатноста дека точката:

а) ќе падне поблиску до средината отколку до точката A;

б) ќе падне поблиску до средината отколку до еден од краевите на отсечката;

в) ќе погоди еден од краевите на отсечката.

Решение:



Слика 1.1.

а) Нека S е настанот „случајно избраната точка ќе биде поблиску до средината O на отсечката отколку до точката A“. S ќе се појави ако точката падне на отсечката CB, а $\overline{CB} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ (слика 1.1). Така,

$$P(S) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}.$$

б) Го дефинираме настанот T: случајно избраната точка ќе биде поблиску до O отколку до еден од краевите на отсечката. Настанот T ќе се појави ако точката падне на отсечката CD. Притоа, $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (слика 1.1), па

$$P(T) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}.$$

в) Веројатноста да се погоди еден од краевите на отсечката е 0, бидејќи мерата на секоја поединечна точка од отсечката е 0, па и мерата на точките A и B е 0. □

Пример 1.28 Две лица се договориле да се сретнат на одредено место помеѓу 8 и 9 часот. Моментите на нивното доаѓање на договореното место се меѓу себе независни и случајни. Секој од нив доаѓа на договореното место, чека точно 20 минути и ако не се сретне со другиот, заминува. Да се определи веројатноста дека тие ќе се сретнат.

Решение: Множеството елементарни настани може да се претстави како

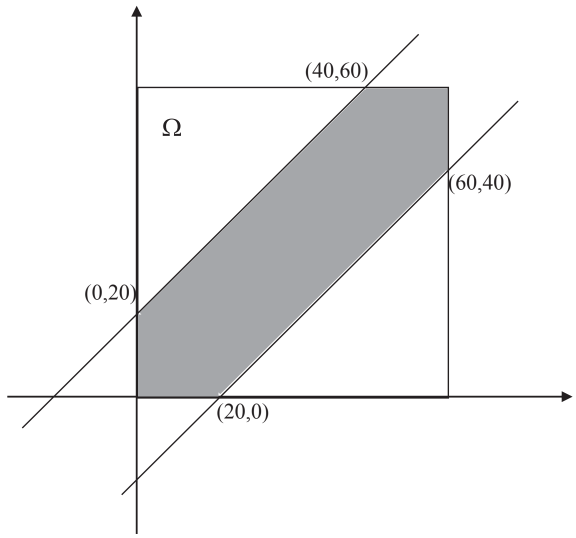
$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 60\},$$

каде што x е момент на доаѓање на првото, а y на второто лице во разгледуваниот час помеѓу 8 и 9 часот. Мерата на Ω е всушност, неговата плоштина (плоштина на квадрат со страна 60), па $m(\Omega) = 60^2 = 3600$. Нека S е настанот дека лицата ќе се сретнат. Тогаш

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 60,\ |x - y| \leq 20\}.$$

Графички претставено S е затемнетата површина на слика 1.2. Тоа е делот од квадратот Ω што е помеѓу правите $x - y = 20$ и $x - y = -20$.

Пресечни точки на правите $x - y = 20$ и $x - y = -20$ со квадратот



Слика 1.2.

кој ја определува Ω се $(20,0)$, $(60,40)$, $(0,20)$ и $(40,60)$. Плоштината на S е $m(S) = 60^2 - 40^2 = 3600 - 1600 = 2000$. Сега, веројатноста да се појави настанот S е

$$P(S) = \frac{m(S)}{m(\Omega)} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

□

1.7 Условна веројатност

Често се случува веројатноста за појавување на еден настан да зависи од тоа дали ќе се појави или не друг настан. Да ги разгледаме следниве настани:

A : ќе врне $\qquad$ B : на небото има облаци.

Јасно е дека веројатноста за појава на настанот A зависи од тоа дали ќе се појави или не настанот B. Имено, информацијата дека се појавил настанот B, ја зголемува веројатноста на појавување на настанот A.

Затоа, се јавува потребата за дефинирање на таканаречена условна веројатност. Условната веројатност на настанот A при услов B е веројатноста да се појави настанот A, ако се појавил настанот B.

Мотивот за тоа како да се дефинира условната веројатност доаѓа од релативната фреквенција како мерка на можноста за појавување на одреден настан. Имено, нека се изведуваат n експерименти во кои може да се појават настаните A и B. Нека $n(B)$ е бројот на експерименти во кои се појавил настанот B, а $n(AB)$ е бројот на експерименти во кои се појавил настанот AB. Тогаш $\dfrac{n(AB)}{n(B)}$ е релативната честота на појавување на настанот A, ако се појавил настанот B. Добиваме,

$$\frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{\frac{n(AB)}{n}}{\frac{n(B)}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Последното приближување важи за големи вредности на n и колку n е поголемо, приближувањето е подобро.

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е даден простор на веројатност и нека $B \in \mathcal{F}$ има позитивна веројатност, т.е. $P(B) > 0$. Врз основа на претходното, се наметнува идејата за разгледување на функција $P_B : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ која се дефинира со:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad A \in \mathcal{F}. \tag{1.6}$$

Ќе покажеме дека функцијата дефинирана на овој начин е веројатност. Тоа е тврдењето на следната теорема.

Теорема 1.6

Пресликувањето $P_B : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ дефинирано со (1.6) е веројатност дефинирана на $\mathcal{F}$ и притоа, $P_B(B) = 1$.

Доказ: За да покажеме дека P_B е веројатност треба да покажеме дека ги задоволува условите P.1-P.3 од дефиниција 1.15.

P.1. Бидејќи $P(AB) \geq 0$ и $P(B) > 0$, следува дека $P_B(A) \geq 0$, за секој $A \in \mathcal{F}$.

P.2. Од $B \subseteq \Omega$, следува дека $\Omega B = B$. Затоа,

$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

P.3. Нека $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots$ и притоа $A_i A_j = \emptyset$, за $i \neq j$. Тогаш $A_i B \cap A_j B = \emptyset$, за $i \neq j$. Сега,

$$\begin{aligned} P_B\Big(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) &= \frac{P\Big(\Big(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i\Big)B\Big)}{P(B)} = \frac{P\Big(\sum_{i=1}^{+\infty} A_i B\Big)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{+\infty} P_B(A_i). \end{aligned}$$

Првото равенство во вториот ред е точно, затоа што P е веројатност на просторот $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Значи, функцијата P_B ги задоволува условите P.1-P.3 од дефиниција 1.15, па P_B е веројатност.

На крај,

$$P_B(B) = \frac{P(BB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

$\square$

Веројатноста P_B се нарекува *условна веројатност* при услов B. Понатаму, ќе означуваме

$$P(A|B) = P_B(A),$$

па оттука

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad A \in \mathcal{F}. \tag{1.7}$$

Пример 1.29 Експериментот се состои во фрлање коцка. Да се определи веројатноста дека паднал парен број, ако е познато дека паднал број кој е помал или еднаков на 3.

Решение: Да ги означиме следниве настани:

A : се појавил парен број; B : се појавил број помал или еднаков на 3.

Во тој случај, настанот AB означува дека се појавил парен број кој е најмногу 3. Веројатноста на настаните B и AB е:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(AB) = \frac{1}{6}.$$

На крајот, веројатноста $P(A|B)$ според (1.7), ќе биде:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Аналогно, според дефиницијата за условна веројатност дадена со равенството (1.7), условната веројатност на настанот B при услов A (ако $P(A) > 0$) се определува со формулата:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.8}$$

Сега, од равенствата (1.7) и (1.8) може да се изрази веројатноста за производ на два настана:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{1.9}$$

Пример 1.30 Во една кутија има 4 бели и 3 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња едно по едно, без враќање. Да се определи веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение: Да ги означиме настаните

A_1 : во првото извлекување е добиено бело топче,
A_2 : во второто извлекување е добиено бело топче.

Ја бараме веројатноста на настанот A_1A_2. Според равенствата (1.9) имаме дека $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$. Притоа, $P(A_1) = \frac{4}{7}$, а веројатноста $P(A_2|A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, бидејќи ако се извлече бело топче во првото извлекување, во кутијата остануваат 6 топчиња од кои 3 се бели. Оттука,

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}.$$

□

Формулата за веројатност на производ на два настана може да се обопшти за производ на n настани со следнава теорема.

Теорема 1.7

За произволни n настани $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, веројатноста на нивниот производ може да се определи со формулата:

$$P(A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_2A_1). \tag{1.10}$$

Доказ: Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција. За $n = 2$, добиваме $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$, што следува директно од равенството (1.9).

Да претпоставиме дека тврдењето важи за $k = n - 1$.

За $k = n$ добиваме:

$$\begin{array}{lcl} P(A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n) & = & P((A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1})A_n) \\ \text{според (1.9)} & = & P(A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1})P(A_n|A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}). \end{array}$$

Со примена на индуктивната претпоставка за $P(A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1})$, се добива:

$$P(A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_2A_1).$$

□

Пример 1.31 Во една кутија има 4 бели и 5 црни топчиња. Играчот извлекува по едно топче од кутијата, без враќање, сè додека не извлече бело топче. Да се определи веројатноста дека тој ќе извлекува точно 4 пати.

Решение: Играчот ќе извлекува точно 4 пати, ако во првите 3 обиди извлече црно топче, а во четвртиот обид - бело. Ако A_i е настанот дека играчот ќе извлече бело топче во i-тото извлекување, $i = 1, 2, 3, 4$, тогаш ја бараме веројатноста на настанот $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4$. Според равенството (1.10), имаме:

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_2\overline{A}_1)P(A_4|\overline{A}_3\overline{A}_2\overline{A}_1).$$

Притоа, $P(\overline{A}_1) = \dfrac{5}{9}$. Ако во првото извлекување е извлечено црно топче, тогаш во кутијата останале 4 црни од вкупно 8 топчиња, па

$$P(\overline{A}_2|\overline{A}_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ако во првите две извлекувања се добиени две црни топчиња, во кутијата ќе има 3 црни од вкупно 7 топчиња, па

$$P(\overline{A}_3|\overline{A}_2\overline{A}_1) = \frac{3}{7},$$

и на крајот, по 3 извлечени црни топчиња, во кутијата има 2 црни и 4 бели топчиња, па

$$P(A_4|\overline{A}_3\overline{A}_2\overline{A}_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Оттука,

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) = \frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{63}.$$

□

1.8 Независност на настани

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е даден простор на веројатност и $A, B \in \mathcal{F}$ така што $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. За настанот A велиме дека е *независен* од настанот B, ако

$$P(A|B) = P(A). \tag{1.11}$$

Тоа значи, дека појавувањето на настанот B не ја менува веројатноста да се појави настанот A.

Ако настанот A е независен од настанот B, тогаш со примена на (1.11), имаме:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \stackrel{(1.11)}{=} \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B),$$

а тоа значи дека и настанот B е независен од настанот A. Тогаш за A и B велиме дека се *независни настани*. Во тој случај,

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B). \tag{1.12}$$

Обратно, ако (1.12) е исполнето, тогаш

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \stackrel{(1.12)}{=} \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A),$$

што значи дека A е независен од B, па според претходното A и B се независни настани. Со ова е докажана следнава теорема.

Теорема 1.8

Настаните A и B се независни ако и само ако

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Во некои случаи независноста може да се согледа од самите услови на задачата. На пример, ако се фрлаат две коцки и се набљудуваат настаните

$$A: \text{на првата коцка падна шестка}, \quad B: \text{на втората коцка падна петка},$$

тогаш е јасно дека A и B се независни настани, бидејќи исходот на едната не влијае врз исходот на другата коцка. Но, во некои случаи неопходно е да се провери условот за независност со користење на последната теорема.

Пример 1.32 Од шпил со 52 карти се извлекува една карта. Да ги разгледаме следниве настани:

$$\begin{aligned} A: &\quad \text{извлечена е карта на која е бројот пет}, \\ B: &\quad \text{извлечената карта е лист}. \end{aligned}$$

Провери дали настаните A и B се независни.

Решение:

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P(AB) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(A)P(B).$$

Значи, условот за независност е исполнет, па A и B се независни настани, иако интуитивно тоа не изгледа така (помеѓу картите со знак лист има петка и помеѓу четирите петки има петка лист). $\square$

Пример 1.33 Двајца стрелци стрелаат во една мета независно еден од друг. Веројатноста првиот од нив да ја погоди метата е 0.7, а вториот 0.9. Да се определи веројатноста дека метата ќе биде погодена барем еднаш.

Решение: Ги означуваме настаните

$$\begin{aligned} A: &\quad \text{првиот стрелец ја погодил метата}, \\ B: &\quad \text{вториот стрелец ја погодил метата}. \end{aligned}$$

Од условите на задачата е јасно дека A и B се независни настани бидејќи двајцата стрелци стрелаат независно еден од друг. Притоа, $P(A) = 0.7$, а $P(B) = 0.9$. Ја бараме веројатноста на настанот $P(A \cup B)$. Добиваме:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.7 + 0.9 - 0.7 \cdot 0.9 = 0.97. \end{aligned}$$

□

Пример 1.34 За настаните A и B од пример 1.32, утврдивме дека се независни. Провери ја независноста на паровите настани A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; како и $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Решение: Од Пример 1.32, имаме дека

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Настанот $A\overline{B}$ означува дека е извлечена карта со бројот 5 која не е лист. Постојат 3 поволни можности за овој настан, па

$$P(A\overline{B}) = \frac{3}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{3}{4} = P(A)P(\overline{B}).$$

Значи, A и $\overline{B}$ се независни настани.

Соодветно, $\overline{A}B$ е настанот: извлечена е карта со знакот лист на која е број што е различен од 5. Има 12 поволни можности за овој настан. Оттука,

$$P(\overline{A}B) = \frac{12}{52} = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(\overline{A})P(B),$$

т.е. и настаните $\overline{A}$ и B се независни.

На крајот, $\overline{A}\ \overline{B}$ е настанот: извлечена е карта која не е петка и не е лист. Поволни можности има 36, па

$$P(\overline{A}\ \overline{B}) = \frac{36}{52} = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{4} = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

Оттука, и $\overline{A}$ и $\overline{B}$ се независни настани. □

Ќе покажеме дека резултатите од претходниот пример важат и во општ случај.

Теорема 1.9

Ако A и B се независни настани, тогаш независни се и паровите: A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; како и $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Доказ: Ако A и B се независни настани, тогаш $P(AB) = P(A)P(B)$. Сега, $A = A\Omega = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$, па за веројатноста на A се добива:

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}).$$

Од претпоставката за независност на A и B имаме:

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A\overline{B}),$$

па

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}).$$

Од последното равенство заклучуваме дека A и $\overline{B}$ се независни настани. Независноста на $\overline{A}$ и B следува заради симетрија, а независноста на $\overline{A}$ и $\overline{B}$ е последица од независноста на претходните два пара настани. $\square$

Теорема 1.10

Ако се независни паровите настани A и B_1, како и A и B_2 и ако $B_1B_2 = \emptyset$, тогаш независни се и настаните A и $B_1 + B_2$.

Доказ: Од $B_1B_2=\emptyset$ следува дека $AB_1\cap AB_2=\emptyset$, па

$$\begin{aligned}P(A(B_1+B_2)) &= P(AB_1+AB_2)=P(AB_1)+P(AB_2)\\ &= P(A)P(B_1)+P(A)P(B_2)\\ &= P(A)(P(B_1)+P(B_2))\\ &= P(A)P(B_1+B_2),\end{aligned}$$

што значи дека A и B_1+B_2 се независни настани. □

Во продолжение, ќе го обопштиме поимот за независност на произволен (конечен) број случајни настани.

Дефиниција 1.17

За настаните A_1, $A_2,\ldots$, A_n велиме дека се *независни во целина*, ако за произволен k $(2\leq k\leq n)$ и за кој било избор на индекси $i_1<i_2<\cdots<i_k$ важи:

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}).$$

Дефиниција 1.18

За настаните A_1, $A_2,\ldots$, A_n велиме дека се *независни по парови*, ако за произволни $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ $(i\neq j)$, A_i и A_j се независни настани, т.е. важи:

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j).$$

Да воочиме дека A_1, $A_2,\ldots$, A_n се независни во целина, тогаш за $k=2$ и за кој било избор на индекси $i<j$, настаните A_i и A_j се независни. Оттука, следува дека независност во целина повлекува независнот по парови. Обратното тврдење во општ случај не важи. Тоа ќе го покажеме со следниот пример.

Пример 1.35 Страните на еден правилен хомоген тетраедар се обоени на следниов начин: едната е бела, втората црвена, третата сина, а на четвртата ги има сите три бои. Тетраедарот се фрла на рамнина и се набљудува страната што лежи на рамнината. Ги означуваме настаните:

A_1 : на страната што се набљудува има бела боја;
A_2 : на страната што се набљудува има црвена боја;
A_3 : на страната што се набљудува има сина боја.

За веројатностите на овие настани се добива:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Сега,

$$P(A_1A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2), \quad \text{па } A_1 \text{ и } A_2 \text{ се независни настани.}$$

$$P(A_1A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A_1)P(A_3), \quad \text{па } A_1 \text{ и } A_3 \text{ се независни настани.}$$

$$P(A_2A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A_2)P(A_3), \quad \text{па } A_2 \text{ и } A_3 \text{ се независни настани.}$$

Значи, настаните A_1, A_2 и A_3 се независни по парови.

Од друга страна,

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

т.е. овие настани не се независни во целина.

Овој пример е доволен да потврди дека во општ случај, независност по парови не повлекува независност во целина.

Следната теорема на некој начин е обопштување на теорема 1.9.

Теорема 1.11

Ако настаните $A_1,\ A_2,\dots,\ A_n,\ B_1,\ B_2,\dots,B_m$ се независни во целина тогаш независни во целина се и настаните $A_1,\ A_2,\dots,\ A_n,\ \overline{B}_1,\ \overline{B}_2,\dots,\ \overline{B}_m$.

Доказ: Доволно е да се покаже дека $A_1,\ A_2,\dots,\ A_n,\ \overline{B}_1$ се независни во целина. За произволни $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ $(k \leq n)$, имаме:

$$\begin{aligned} A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k} &= A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\Omega = A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}(B_1+\overline{B}_1) \\ &= A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}B_1 + A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\overline{B}_1 \end{aligned}$$

Сега,

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}B_1) + P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\overline{B}_1),$$

па од независноста на $A_1,\ A_2,\dots,\ A_n,\ B_1$, следува дека

$$\begin{aligned} P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\overline{B}_1) &= P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}) - P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}B_1) \\ &= P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k}) - P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})P(B_1) \\ &= P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})(1-P(B_1)) \\ &= P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})P(\overline{B}_1). \end{aligned}$$

Со ова покажавме дека настаните $A_1,\ A_2,\dots,\ A_n,\ \overline{B}_1$ се независни во целина. Со индукција, тврдењето на теоремата следува директно.

□

1.9 Формула за тотална веројатност и Бејесови формули

Во следните две теореми ќе дадеме формули кои во одредени случаи се многу корисни при пресметување на веројатност на настани.

Теорема 1.12 (Формула за тотална веројатност)

Нека $H_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots n$, $H_i H_j = \emptyset$, за $i \neq j$ и нека $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Тогаш за произволен случаен настан $A \in \mathcal{F}$ е точна следнава формула:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i).$$

Доказ: Од $H_i H_j = \emptyset$ следува дека $AH_i \cap AH_j = \emptyset$. Користејќи го тој факт, добиваме:

$$A = A\Omega = A\Big(\sum_{i=1}^{n} H_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} AH_i.$$

Сега,

$$P(A) = P\Big(\sum_{i=1}^{n} AH_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i).$$

$\square$

Случајните настани $H_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \dots, n$, во формулата за тотална веројатност се нарекуваат *хипотези*. Нивните веројатности $P(H_i)$, директно пресметани, се нарекуваат *априорни веројатности* (или *веројатности априори*). Често пати се јавува потребата за пресметување на условните веројатности $P(H_j|A)$, $j = 1, 2, \dots,$ т.е. да се проценат веројатностите на хипотезите откако ќе заврши експериментот и ќе се појави настанот A. Тие условни веројатности се нарекуваат *апостериорни веројатности*, т.е. *веројатности апостериори* и се определуваат со следнава теорема.

Теорема 1.13 (Бејесови формули)

При услови како во теорема 1.12, точни се следните формули:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)}, \quad j = 1, 2, \dots n$$

Доказ:

$$P(H_j|A) = \frac{P(AH_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)}.$$

□

Забелешка 1.3 Формулата за тотална веројатност и Бејесовите формули важат и во бесконечен случај, т.е. ако H_1, $H_2, \dots$ е пребројливо дисјунктно разложување на Ω, тогаш веројатноста на произволен настан A може да се пресмета со:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i),$$

а апостериорните веројатности на хипотезите се определуваат со:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P(A|H_j)}{\sum\limits_{i=1}^{+\infty} P(H_i)P(A|H_i)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Пример 1.36 Во една кутија се наоѓаат 2 бели и 3 црни, а во друга 4 бели и 3 црни топчиња.

а) Ако случајно се избере една кутија и од неа се извлече едно топче, да се определи веројатноста дека извлеченото топче е црно. Се смета дека изборот на кутиите е еднакво веројатен.

б) Ако е констатирано дека е извлечено црно топче, да се определи веројатноста дека извлекувањето е направено од првата кутија.

Решение: Нека H_i го означува настанот дека е избрана i-тата кутија, $i = 1, 2$. Тогаш $H_1 + H_2 = \Omega$ и $H_1 H_2 = \emptyset$. Бидејќи изборот на кутиите е еднаквоверојатен, добиваме дека $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$.
а) Нека A: извлечено е црно топче. Тогаш, $P(A|H_1) = 3/5$, а $P(A|H_2) = 3/7$. Согласно формулата за тотална веројатност, добиваме:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{7}\right) = \frac{18}{35}.$$

б) Според Бејесовата формула:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{7}{12}.$$

□

Пример 1.37 Една компјутерска програма се состои од два модула. Првиот модул содржи грешка со веројатност 0.2. Вториот модул содржи грешка со веројатност 0.4, независно од првиот модул. Грешка само во првиот модул ја блокира програмата со веројатност 0.5. За вториот модул, таа веројатност е 0.8. Ако има грешка во двата модула, програмата блокира со веројатност 0.9. Да претпоставиме дека програмата блокирала. Да се определи веројатноста дека се појавила грешка во двата модула.

Решение: Ги означуваме следниве настани:

A : Првиот модул содржи грешка;
B : Вториот модул содржи грешка;
C : Програмата блокира;
H_1 : Само првиот модул содржи грешка;
H_2 : Само вториот модул содржи грешка;
H_3 : Двата модула содржат грешка;
H_4 : Ниеден модул не содржат грешка.

Јасно е дека $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = \Omega$ и $H_i H_j = \emptyset$, за $i \neq j$, т.е. H_1, H_2, H_3

и H_4 е дисјунктно разложување на Ω. Од условите на задачата $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ и A и B се независни настани. Од нивната независност, можеме да ги определиме веројатностите на хипотезите:

$$\begin{aligned}
P(H_1) &= P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12 \\
P(H_2) &= P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32 \\
P(H_3) &= P(AB) = P(A)P(B) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08 \\
P(H_4) &= P(\overline{A}\ \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0.8 \cdot 0.46 = 0.48.
\end{aligned}$$

Од условите на задачата имаме дека:

$$P(C|H_1) = 0.5, \qquad P(C|H_2) = 0.8, \qquad P(C|H_3) = 0.9, \qquad P(C|H_4) = 0.$$

Согласно формулата за тотална веројатност,

$$P(C) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(C|H_i) = 0.12 \cdot 0.5 + 0.32 \cdot 0.8 + 0.08 \cdot 0.9 + 0.48 \cdot 0 = 0.388.$$

Се бара веројатноста,

$$P(H_3|C) = \frac{P(H_3)P(C|H_3)}{P(C)} = \frac{0.08 \cdot 0.9}{0.388} = 0.185567.$$

□

1.10 Бернулиева шема

Бернулиева шема од n експерименти е серија од n независни и еднакви експерименти во кои се набљудува само појавувањето (или не појавувањето) на одреден настан A.

Нека p е веројатноста за појавување на настанот A во секој експеримент, а $q = 1 - p = P(\overline{A})$. За фиксен број k $(0 \leq k \leq n)$, го означиме настанот:

$B_k:$ во Бернулиева шема од n експерименти настанот A ќе се појави точно k пати.

Нека $P_n(k)$ е веројатноста на овој настан, т.е. $P_n(k) = P(B_k)$. Значи, настанот B_k ќе се појави, ако во Бернулиева шема од n експерименти, настанот A се појави k пати, а останатите $(n-k)$ пати се појави настанот $\overline{A}$. Поради независноста на експериментите еден од друг, веројатноста настанот A да се појави во првите k експерименти, а $\overline{A}$ во последните $n-k$ експерименти, е $p^k q^{n-k}$. Но, настанот B_k ќе се појави при било кој распоред на k појавувања на настанот A и $n-k$ појавувања на $\overline{A}$. Бројот на такви распореди е $\binom{n}{k}$. Затоа,

$$P_n(k) = P(B_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Пример 1.38 Коцка се фрла 8 пати. Колкава е веројатноста дека бројот два ќе се појави три пати во тие 8 фрлања?

Решение: Во секој од 8-те експерименти се набљудува појавувањето или непојавувањето на настанот A: при фрлање на коцката ќе се појави бројот два. Притоа, $p = P(A) = \frac{1}{6}$, а $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Се бара веројатноста

$$P_8(3) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.10419.$$

□

За настаните B_k, дефинирани претходно, може да се воочи дека $B_i B_j = \emptyset$, за $i \neq j$ и $B_0 + B_1 + \cdots + B_n = \Omega$, т.е. B_0, B_1, ..., B_n е дисјунктно разложување на Ω.

Веројатноста во Бернулиева шема со n експерименти, настанот A да се појави најмалку m пати, каде m е даден број $(0 \leq m \leq n)$, ќе ја означиме со $P_n(k \geq m)$. Поради дисјунктноста на B_i, $i = m, \ldots, n$, таа веројатност се определува на следниов начин:

$$P_n(k \geq m) = \sum_{k=m}^{n} P_n(k) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{1.14}$$

Пример 1.39 Испит се состои од 6 прашања. На секое прашање има по 4 можни одговори. Студент доаѓа неподготвен на испитот, па нема друг избор освен да ги погодува одговорите случајно. Тој ќе го положи испитот, ако ги погоди точно одговорите на барем три прашања. Колкава е веројатноста дека тој ќе положи?

Решение: Поставениот проблем може да се разгледува како Бернулиева шема со 6 експерименти. Во секој од нив се набљудува појавувањето на настанот A: студентот ќе го погоди точниот одговор. Притоа, $p = P(A) = \dfrac{1}{4}$, а $q = 1 - p = \dfrac{3}{4}$. Студентот ќе го положи испитот со веројатност

$$\begin{aligned} P_6(k \geq 3) &= P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) \\ &= \binom{6}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{6}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= 0.169434. \end{aligned}$$

□

1.10.1 Највероjатен број

Се разгледува Бернулиева шема со n експерименти и во секој од нив се набљудува појавувањето на настанот A. Нека $p = P(A)$, а $q = 1 - p$. Целта е од сите веројатности $P_n(k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, да се најде најголемата. Бројот k за кој веројатноста $P_n(k)$ е најголема се нарекува *највероjатен број* или *мода*.

Од $P_n(k+1) = \binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}$ и $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, се добива:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\,\frac{p}{q}. \tag{1.15}$$

Нека k е даден природен број, $0 \leq k \leq n$. Тогаш можни се три случаи:

i) Ако $np - q > k$, тогаш

$$np - q > k(p + q)$$

$$(n - k)p > (k + 1)q$$

Сега, од (1.15)

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n-k}{k+1}\ \frac{p}{q} > 1,$$

па $P_n(k+1) > P_n(k)$.
ii) Ако $np - q = k$, тогаш исто како и претходно добиваме дека $P_n(k+1) = P_n(k)$.
iii) Ако пак, $np - q < k$, тогаш $P_n(k+1) < P_n(k)$.

Ќе разгледаме два случаја.
I. Нека $np - q = k_0$ е природен број, т.е $k_0 \in \mathbb{N}$. Ако $k < k_0$, тогаш $k = k_0 - r$, каде $r > 0$, па ќе ги добиеме следниве подредувања:

$$k < k + 1 < k + 2 < \cdots < k + r - 1 < k + r = k_0 = np - q.$$

Со последователна примена на *i*), имаме дека

$$P_n(k) < P_n(k+1) < P_n(k+2) < \cdots < P_n(k + r - 1) < P_n(k_0).$$

Добивме дека $P_n(k_0)$ е најголема од сите веројатности $P_n(k)$, за $k < k_0$.

Од друга страна, од *ii*) следува дека $P_n(k_0) = P_n(k_0 + 1)$.

Нека сега, $k > k_0 + 1$, т.е. $k - j = k_0$, за $j > 1$. Тогаш, можеме да запишеме:

$$k - 1 > k - 2 > \cdots > k - j + 1 > k - j = k_0 = np - q.$$

Со последователна примена на iii), добиваме:

$$P_n(k) < P_n(k-1) < \cdots < P_n(k-j+2) < P_n(k-j+1) = P_n(k_0+1) = P_n(k_0).$$

Значи, $P_n(k_0)$ е најголема веројатност и од сите веројатности $P_n(k)$, за $k > k_0 + 1$.

Според претходното добивме дека ако $np-q = k_0$ е природен број, тогаш

$$P_n(k_0) = P_n(k_0+1)$$

и овие се најголеми од сите веројатности $P_n(k)$, за $k = 0, 1, \ldots, n$, т.е. k_0 и $k_0 + 1$ се два најверојатни броја на појавувања на настанот A.

II. Нека $np - q$ не е природен број и нека k_0 е најмалиот природен број што е поголем од $np - q$. Тоа значи дека

$$k_0 = [np-q] + 1,$$

каде што $[\cdot]$ означува цел дел од даден број, т.е. $k_0 - 1 < np - q < k_0$. Ако $k < k_0$, тогаш за даден природен број r може да се запише:

$$k < k+1 < k+2 < \cdots < k+r-1 = k_0 - 1 < np - q < k_0.$$

Слично како и претходно, со последователна примена на i), се добива:

$$P_n(k) < P_n(k+1) < P_n(k+2) < \cdots < P_n(k+r-1) < P_n(k_0).$$

Ако, пак $k > k_0$, тогаш за некој природен број j, може да се запише низата подредувања:

$$k-1 > k-2 > \cdots > k-j = k_0 > np - q,$$

па со последователна примена на iii), се добива дека:

$$P_n(k) < P_n(k-1) < \cdots < P_n(k-j+2) < P_n(k-j) = P_n(k_0).$$

Значи, ако $np-q$ не е природен број, тогаш од сите веројатности $P_n(k)$ $(k=0,1,\ldots,n)$, најголема е $P_n(k_0)$, т.е. k_0 е најверојатен број на појавувања на настанот A.

Со ова е покажана следнава теорема.

Теорема 1.14

Нека p е веројатноста на случајниот настан A во Бернулиева шема со n експерименти и нека $q=1-p$. Тогаш:

I. Ако $np-q=k_0$ е природен број, тогаш k_0 и k_0+1 се најверојатни броеви (моди) за настапување на настанот A во целата серија од n експерименти.

II. Ако $np-q$ не е природен број, најверојатен број за појавување на настанот A во серијата од n експерименти е најмалиот природен број k_0 што е поголем од $np-q$.

Пример 1.40 Веројатноста дека еден кошаркар ќе постигне погодок при слободно фрлање изнесува 0.4 за секое исфрлување на топката. Да се определи најверојатниот број на погодоци, како и неговата веројатност, ако кошаркарот 10 пати изведува слободни фрлања.

Решение: Бројот на изведени експерименти е $n=10$, веројатноста за погодок при едно фрлање $p=0.4$, а $q=1-p=0.6$. Се определува вредноста на следниов израз:

$$np-q = 10\cdot 0.4 - 0.6 = 3.4.$$

3.4 не е природен број, па најверојатен број на погодоци е најмалиот природен број што е поголем од него, т.е. најголема е веројатноста дека при 10 фрлања, кошаркарот ќе постигне 4 погодоци. Веројатноста дека ќе се случи тоа е:

$$P_{10}(4) = \binom{10}{4} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 = 0.25.$$

$\square$

Пример 1.41 Во една градина биле насадени 28 садници со иста веројатност за развивање на секоја од нив. Колкава е таа веројатност, ако 17 и 18 се најверојатни броеви за успешно развиени садници?

Решение: Бидејќи постојат два последователни броја на успешно развиени садници (17 и 18), може да се заклучи дека $np-q = 28p-(1-p) = 29p-1$ е природен број и уште $29p-1 = 17$. Оттука, бараната веројатност е $p = 18/29$. $\square$

Пример 1.42 Колку пати треба да се фрли коцка за да најверојатниот број на „шестки“ биде 10?

Решение: Веројатноста за добивање „шестка“ во еден експеримент е $p = 1/6$, па $q = 1-p = 5/6$. Најверојатен број на појавени шестки е 10 и тоа е најмалиот природен број што е поголем од $np-q$. Значи,

$$9 < np - q < 10.$$

Со замена на p и q, се добива:

$$9 < \frac{n}{6} - \frac{5}{6} < 10$$

$$54 < n - 5 < 60,$$

т.е. $59 < n < 65$. $\square$

1.10.2 Асимптотски формули за определување на веројатностите $P_n(k)$ во Бернулиева шема

При пресметувањето на веројатностите $P_n(k)$ според формулата

(1.13), се соочуваме со сериозни технички тешкотии, ако вредноста на n е голема. Да го разгледаме следниов пример.

Пример 1.43 Веројатноста дека еден телевизор ќе биде произведен со дефект изнесува 0.002. Веројатноста дека во едно произволно множество од 1000 телевизори ќе има 502 дефектни е:

$$P_{1000}(502) = \binom{1000}{502} 0.002^{502} \cdot 0.998^{498}.$$

Самиот израз покажува дека прво биномниот коефициент е многу голем, а при пресметување на степенот 0.002^{502} ќе се јави многу мала вредност, многу блиска до 0. Затоа, за големи вредности на n не е секогаш едноставно да се определат веројатностите $P_n(k)$ според формулата (1.13).

Оттука, се јавува потребата за определување на асимптотски формули кои со доволен степен на точност ќе овозможат определување на приближни вредности на тие веројатности. Во продолжение, ќе бидат дадени три теореми за таа намена. Доказите на овие три теореми се дадени во прилог A.2. Првата од нив дава формула за приближно определување на веројатноста $P_n(k)$, за дадено k $(0 \leq k \leq n)$.

Теорема 1.15 (Локална теорема на Муавр-Лаплас)

Нека $p = P(A)$ во Бернулиева шема и нека $0 < p < 1$. Тогаш, при $n \to +\infty$ важи следното:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-x^2/2}, \qquad \text{каде} \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.16}$$

Пример 1.44 Нов вирус напаѓа 200 датотеки во една папка. Секоја датотека може да биде оштетена со веројатност 0.15 независно од останатите датотеки. Колкава е веројатноста дека ќе бидат оштетени 20 датотеки?

Решение: Бројот на изведени експерименти „напад на датотеки“ е $n = 200$, а веројатноста да се појави настанот „датотеката е оштетена“ е $p = 0.15$. Се бара веројатноста $P_{200}(20)$. Според (1.15), добиваме:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 200 \cdot 0.15}{\sqrt{200 \cdot 0.15 \cdot 0.85}} = -1.9803.$$

Сега,

$$P_{200}(20) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\ e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 200 \cdot 0.15 \cdot 0.85}}\ e^{-(-1.9803)^2/2} = 0.0111194.$$

□

Втората теорема дава гранична формула на веројатноста дека во Бернулиева шема од n експерименти, настанот A ќе се појави помеѓу r и m пати, кога $n \to +\infty$. Оваа веројатност ќе ја означиме со

$$P_n(r \leq k \leq m) = \sum_{k=r}^{m} P_n(k).$$

Теорема 1.16 (Интегрална теорема на Муавр-Лаплас)

Нека $p = P(A)$ во Бернулиева шема и нека $0 < p < 1$. Тогаш, за $n \to +\infty$ важи следното:

$$P_n(r \leq k \leq m) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_r}^{x_m} e^{-t^2/2} dt, \tag{1.17}$$

каде $x_r = \dfrac{r - np}{\sqrt{npq}}$, $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Според интегралната теорема на Муавр-Лаплас, за големи вредности на n следува дека:

$$P_n(r \leq k \leq m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_r}^{x_m} e^{-t^2/2} dt.$$

На крајот од овој учебник во прилог A.9, дадени се таблици во кои се табелирани вредностите на функции од облик:

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Со користење на овие функции, може да запишеме дека:

$$P_n(r \leq k \leq m) \approx \Phi(x_m) - \Phi(x_r).$$

Пример 1.45 При услови како во Пример 1.44, да се определи веројатноста дека бројот на оштетени датотеки е помеѓу 20 и 50.

Решение: Се бара веројатноста $P_{200}(20 \leq k \leq 50)$. Определуваме:

$$x_{20} = \frac{20 - 200 \cdot 0.15}{\sqrt{200 \cdot 0.15 \cdot 0.85}} = -1.9803, \quad x_{50} = \frac{50 - 200 \cdot 0.15}{\sqrt{200 \cdot 0.15 \cdot 0.85}} = 3.96059.$$

Сега, од таблицата за функцијата $\Phi(x)$ наоѓаме дека $\Phi(-1.9803) = 0.0239$, а $\Phi(3.96059) = 1$. Оттука,

$$P_{200}(20 \leq k \leq 50) \approx \Phi(3.96059) - \Phi(-1.9803) = 1 - 0.0239 = 0.9761.$$

□

Ќе разгледаме едно обопштување на Бернулиева шема, кое се нарекува шема на Пуасон. Таа се состои во следново: Се разгледува една низа од серии од независни експерименти во која n-тиот член од низата се состои од n независни и еднакви експерименти:

$$\begin{array}{l} S_{11} \\ S_{21}, S_{22} \\ S_{31}, S_{32}, S_{33} \\ \ldots \\ S_{n1}, S_{n2}, \ldots, S_{nn} \end{array}$$

Во секој од експериментите се разгледува еден настан A и во секој од експериментите од n-тата серија тој настапува со иста веројатност $p_n = P(A)$, $n = 1, 2, \ldots$

Теорема 1.17 (Теорема на Пуасон)

За веројатноста $P_n(k)$ дека настанот A ќе настапи k пати во n-тата серија во Пуасонова шема, ако $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, важи:

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}.$$

Според оваа теорема, формулата за Пуасонова апроксимација на $P_n(k)$, за големи вредности на n, гласи:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Забелешка 1.4 Теоремата на Поасон дава добра апроксимација, ако A е од таканаречените ретки настани, т.е. ако бројот на експерименти n е голем, а веројатноста p за појавување на настанот A е мала. Во практиката, најчесто се зема $n \geq 100$, а $np \leq 10$. Во сите останати случаи, теоремите на Муавр-Лаплас даваат подобро приближување.

Пример 1.46 Веројатноста дека еден телевизор ќе биде произведен со дефект изнесува 0.002. Колкава е веројатноста дека во едно произволно множество од 500 телевизори ќе има:

а) 2 телевизора произведени со дефект;
б) барем еден телевизор произведен со дефект?

Решение: Бројот на изведени експерименти „производство на телевизор" е $n = 500$, а веројатноста да се појави настанот „телевизорот е дефектен" е $p = 0.002$. Притоа, $\lambda = np = 1 \leq 10$, па согласно теоремата на Пуасон:

а) $P_{500}(2) \approx \dfrac{1^2}{2!}e^{-1} = 0.184$
б) $P_{500}(k \geq 1) = 1 - P_{500}(0) \approx 1 - \dfrac{1^0}{0!}e^{-1} = 0.632$

Да напоменеме дека постои таблица од која при Пуасонова апроксимација, може директно да се прочитаат веројатностите $P_n(k)$, за дадено n и за дадено k. $\square$

Глава 2

Случајни променливи

2.1 Дефиниција на случајна променлива. Функција на распределба

Поимот случајна променлива е еден од основните поими во теоријата на веројатност. Многу често се случува на секој елементарен настан да му се придружи некој број. Еве неколку примери.

Пример 2.1 Ако експериментот е фрлање коцка, тогаш множеството елементарни настани е $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, каде што елементарниот настан E_i означува дека на горната страна на коцката се појавиле i точки. Во врска со овој експеримент може да се разгледува функција X од множеството елементарни настани Ω во множеството реални броеви $\mathbb{R}$ зададена со:

$$X(E_i) = i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Оваа функција може да се опише како број на точки појавени на горната страна на коцката.

Пример 2.2 Нека експериментот се состои во фрлање на монета сѐ додека не се појави „глава“. Множеството елементарни настани за овој експеримент е $\Omega = \{E_1, E_2, \dots, \}$, каде што E_n означува дека се изведени n фрлања, $n = 1, 2, \dots$ Во врска со овој експеримент може да се разгледува функција $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, дефинирана со $Y(E_n) = n$, $n = 1, 2, \dots$ Оваа функција може да се опише како број на фрлања до првото појавување на глава.

Пример 2.3 Нека експериментот се состои во набљудување на времето на непрекината работа на една машина. Соодветното множество елементарни настани е $\Omega = \{E_t | t \in [0, T]\}$, каде што T е максималниот век на работа на машината. За овој експеримент може да се дефинира функција $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ со $Z(E_t) = t$, за $E_t \in \Omega$, која означува време на непрекината работа на набљудуваната машина.

Да воочиме дека сите горедефинирани функции се реални функции дефинирани на множеството елементарни настани Ω. Тие се нарекуваат случајни променливи, се означуваат со латиничните букви $X, Y, Z, \dots$ и се дефинираат на следниов начин:

Дефиниција 2.1

Случајна променлива X дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е функција $X : \Omega \to \mathbb{R}$ која е $\mathcal{F}$-измерлива, т.е.

$$\{E | X(E) < x\} \in \mathcal{F}, \quad \text{за секој } x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Може да се воочи дека секоја случајна променлива е реална функција со својство за секој $x \in \mathbb{R}$, множеството $\{E | X(E) < x\}$ да е случаен настан, т.е. да припаѓа на σ-алгебрата $\mathcal{F}$. Оттаму доаѓа и терминот случајна променлива. Вообичаено е за настанот $\{E | X(E) < x\}$ да се користат ознаките $\{X < x\}$ или $\{X \in (-\infty, x)\}$ или $X^{-1}(-\infty, x)$.

Ако Ω е конечно множество и $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, тогаш секоја функција од Ω во $\mathbb{R}$ е случајна променлива, бидејќи во овој случај $\mathcal{F}$ ги содржи сите подмножества од Ω, па и оние за кои важи условот (2.1).

Нека X е случајна променлива дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Согласно претходната дефиниција, множествата $\{E|X(E) < x\}$, за сите $x \in \mathbb{R}$ се случајни настани, па за нив е дефинирана веројатност. Токму тоа овозможува да се дефинира поимот за *функција на распределба* на случајната променлива X.

Дефиниција 2.2

Функција на распределба на случајната променлива X е функцијата $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$F(x) = P\{E|X(E) < x\} = P\{X < x\}, \quad \text{за секој } x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Понекогаш, функцијата на распределба на случајната променлива X се означува со $F_X(x)$. Тоа се прави најчесто ако во некој контекст се спомнуваат повеќе случајни променливи, така што треба да се разграничи на која случајна променлива се однесува одредена функција на распределба.

Теорема 2.1

Ако $F(x)$ е функција на распределба на случајната променлива X, тогаш

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

Доказ: Интервалот $(-\infty, b)$ може да се претстави како дисјунктна унија на следниов начин:

$$(-\infty, b) = (-\infty, a) + [a, b).$$

Оттука, за множествата од слики на функцијата X ќе важи:

$$P\{X \in (-\infty, b)\} = P\{X \in (-\infty, a)\} + P\{X \in [a, b)\},$$

$$P\{X < b\} = P\{X < a\} + P\{X \in [a, b)\},$$

т.е.

$$F(b) = F(a) + P\{X \in [a, b)\},$$

од каде што следи тврдењето. $\square$

Основните својства кои ги има функцијата на распределба на една случајна променлива се дадени со следнава теорема.

Теорема 2.2

Функцијата на распределба на една случајна променлива е:
F1) монотоно неопаѓачка;
F2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1;$
F3) непрекината од лево во секоја точка $x_0 \in \mathbb{R}$.

Доказ: F1) Нека $x_1 < x_2$. Тогаш настанот $\{X < x_1\}$ го повлекува настанот $\{X < x_2\}$, т.е. $\{X < x_1\} \subset \{X < x_2\}$. Според основните својства на веројатност следува дека $P\{X < x_1\} \leq P\{X < x_2\}$, т.е. $F(x_1) \leq F(x_2)$.
F2) Нека $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ е растечка низа од реални броеви и нека $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Ги разгледуваме случајните настани $A_n = \{X < x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Јасно е дека за овие настани ќе важат следниве релации:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

Оттука, со користење на теоремата за непрекинатост на веројатноста, следува дека

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n),$$

т.е.

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{X<x_n\}\Big)=\lim_{n\to+\infty}P\{X<x_n\}=\lim_{n\to+\infty}F(x_n)=\lim_{x\to+\infty}F(x).$$

Од друга страна,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{X<x_n\}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{E|X(E)<x_n\}=\{E|X(E)<+\infty\}=\Omega,$$

па

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{X<x_n\}\Big)=P(\Omega)=1.$$

Значи, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

Сега, нека $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ е опаѓачка низа од реални броеви и нека $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=-\infty$. Ги означуваме случајните настани $B_n=\{X<y_n\}$, $n=1,2,\ldots$ Јасно е дека за овие настани ќе важат следниве релации:

$$B_1\supset B_2\supset B_3\supset\ldots$$

Повторно, со користење на теоремата за непрекинатост на веројатноста, се добива дека

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\Big)=\lim_{n\to+\infty}P(B_n),$$

т.е.

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\{X<y_n\}\Big)=\lim_{n\to+\infty}P\{X<y_n\}=\lim_{n\to+\infty}F(y_n)=\lim_{y\to-\infty}F(y).$$

Од друга страна,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty}\{X<y_n\}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\{E\mid X(E)<y_n\}=\emptyset,$$

па
$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\{X<y_n\}\Big)=P(\emptyset)=0.$$
Добивме дека $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.
F3) Нека x_0 е произволен реален број и нека $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ е растечка низа од реални броеви таква што $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$. Треба да покажеме дека
$$\lim_{x\to x_0^-}F(x)=F(x_0),$$
од каде што ќе следува дека $F(x)$ е непрекината од лево во x_0. Ги разгледуваме случајните настани $A_n=\{X<x_n\}$, $n=1,2,\ldots$ Исто како и претходно, за овие настани ќе важат следниве релации:
$$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots,$$
па според теоремата за непрекинатост на веројатноста,
$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\Big)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n),$$
т.е.
$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{X<x_n\}\Big)=\lim_{n\to+\infty}P\{X<x_n\}=\lim_{n\to+\infty}F(x_n)=\lim_{x\to x_0^-}F(x).$$
Од друга страна,
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{X<x_n\}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{E\mid X(E)<x_n\}=\{X<x_0\},$$
па
$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{X<x_n\}\Big)=P\{X<x_0\}=F(x_0).$$
Значи, $\lim\limits_{x\to x_0^-}F(x)=F(x_0)$, т.е. функцијата $F(x)$ е непрекината од лево во точката x_0. Од произволноста на x_0 следува дека $F(x)$ е непрекината од лево во секоја точка $x\in\mathbb{R}$. $\square$

Следната теорема дава потребни и доволни услови за една функција да биде функција на распределба на една случајна променлива.

Теорема 2.3

Функцијата $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ е функција на распределба на една случајна променлива X ако и само ако ги задоволува својствата F1), F2) и F3).

Потребниот услов на ова тврдење следува директно од теорема 2.2, а обратното тврдење го даваме без доказ.

На крај, да воочиме дека едноелементното множество $\{x_0\}$ може да се претстави како пребројлив пресек од случајни настани на следниов начин:

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [x_0, x_0 + \frac{1}{n}).$$

Оттука,

$$\{X = x_0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n})\}.$$

Ги означуваме настаните $B_n = \{X \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n})\}$, $n = 1, 2, \dots$ и слично како и претходно за нив важат следниве релации:

$$B_1 \supset B_2 \supset B_2 \supset \dots$$

Сега, со користење на теоремата за непрекинатост на веројатноста се добива:

$$\begin{aligned}
P\{X = x_0\} &= P\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} P\{X \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n})\} \\
&= \lim_{n+\infty} P\{x_0 \le X < x_0 + \frac{1}{n}\} = \lim_{n\to+\infty} \Big[F\Big(x_0 + \frac{1}{n}\Big) - F(x_0)\Big] \\
&= \lim_{x\to x_0^+} F(x) - F(x_0). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Од тука директно следува доказот на следната теорема.

Теорема 2.4

Нека X е произволна случајна променлива и $F(x)$ е нејзината функција на распределба. Ако x_0 е точка на прекин на $F(x)$, тогаш $P\{X = x_0\} > 0$. Ако $F(x)$ е непрекината функција во x_0, тогаш $P\{X = x_0\} = 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

Доказ: Ако $F(x)$ е непрекината функција во x_0, тогаш $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, па и $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$. Со замена во (2.3), се добива:

$$P\{X = x_0\} = \lim_{x \to x_0^+} F(x) - F(x_0) = F(x_0) - F(x_0) = 0.$$

Ако $F(x)$ има прекин во x_0, тогаш тој прекин е од десно ($F(x)$ е непрекината од лево во секоја точка од $\mathbb{R}$). Затоа, $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) \neq F(x_0)$, а бидејќи $F(x)$ е монотоно неопаѓачка функција, следува дека $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) > F(x_0)$. Со замена во (2.3), имаме:

$$P\{X = x_0\} = \lim_{x \to x_0^+} F(x) - F(x_0) > F(x_0) - F(x_0) = 0.$$

□

Забелешка 2.1 Во литературата, се среќава и дефиниција на случајна променлива од следниов облик:
Случајна променлива X дефинирана на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е функција $X : \Omega \to \mathbb{R}$ која е $\mathcal{F}$-измерлива, т.е.

$$\{E | X(E) \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \text{за секој } x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Ако вака се дефинира случајна променлива, тогаш $\{E | X(E) \leq x\} \in \mathcal{F}$, за секој $x \in \mathbb{R}$, па функција на распределба се дефинира со равенството:

$$F(x) = P\{X \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

За вака дефинираната функција на распределба важат својствата F1) и F2) од теорема 2.2, но својството F3) добива облик:
F3′) $F(x)$ е непрекината од десно во секоја точка $x_0 \in \mathbb{R}$.

2.2 Случајни променливи од дискретен тип

За случајната променлива X велиме дека е од дискретен тип (или дискретна случајна променлива), ако множеството вредности (т.е. рангот) на функцијата X е конечно или пребројливо. Притоа, ако X прима вредности од множеството $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (или $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$) со веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, тогаш $\sum_i p_i = 1$ и $P\{X \in R_X^C\} = 0$.

Множеството вредности на случајната променлива X, заедно со соодветните веројатности p_i, $i = 1, 2, \ldots$ го определуваат *законот на распределба на случајната променлива.* Ако множеството вредности на случајната променлива содржи мал број елементи, вообичаено е законот на распределба на X да се запише на следниов начин:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \end{pmatrix}.$$

Воочуваме дека во првиот ред се запишуваат вредностите кои ги прима случајната променлива X, а во вториот ред - соодветните веројатности.

Законот на распределба наполно ја определува случајната променлива. Ќе покажеме дека ако е зададен законот на распределба, од него може еднозначно да се определи функцијата на распределба на случајната променлива и обратно.

Најпрво, нека е зададена случајната променлива X со нејзиниот закон на распределба, т.е. со множеството вредности $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и веројатностите p_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Претпоставуваме дека елементите во R_X се индексирани така што $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Ќе ја определиме функцијата на распределба на X согласно со дефиницијата (2.2).

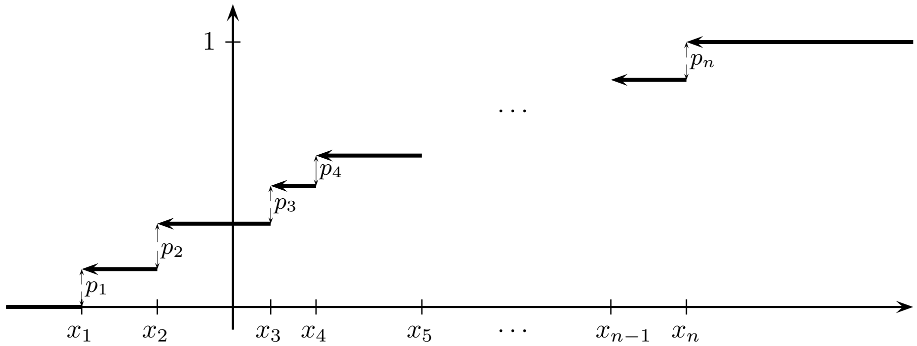
$$\begin{array}{rl}
x \le x_1: & F(x) = P\{X < x\} = P(\emptyset) = 0 \\
x_1 < x \le x_2: & F(x) = P\{X < x\} = P\{X = x_1\} = p_1 \\
x_2 < x \le x_3: & F(x) = P\{X < x\} = P\{X \in \{x_1, x_2\}\} = p_1 + p_2 \\
x_3 < x \le x_4: & F(x) = P\{X < x\} = P\{X \in \{x_1, x_2, x_3\}\} = p_1 + p_2 + p_3 \\
\dots & \\
x_{n-1} < x \le x_n: & F(x) = P\{X < x\} = P\{X \in \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}\} = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} \\
x > x_n: & F(x) = P\{X < x\} = P\{X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1
\end{array}$$

Значи, функцијата на распределба на случајната променлива X го има следниов облик:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \le x_4 \\ \dots & \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n \\ 1, & x > x_n \end{cases}, \quad \text{или кратко} \quad F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i. \tag{2.5}$$

Графикот на функцијата на распределба на случајната променлива X има скалеста форма со скокови во точките $x_i \in R_X$. Висината на скокот во точката x_i е $p_i = P\{X = x_i\} = \lim\limits_{x \to x_i^+} F(x) - F(x_i)$ (слика 2.1). Стрелките на графикот означуваат дека функцијата не ги прима тие вредности во соодветните точки.

Пример 2.4 Нека случајната променлива X е зададена со законот на



Слика 2.1. Функција на распределба на дискретна случајна променлива

распределба:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Според (2.5), функцијата на распределба на случајната променлива X има облик:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0.1, & 1 < x \leq 3 \\ 0.4, & 3 < x \leq 4 \\ 0.5, & 4 < x \leq 7 \\ 1, & x > 7 \end{cases}.$$

Обратно, ако случајната променлива X од дискретен тип е зададена со нејзината функција на распределба, од неа веднаш може да се определи законот на распределба на X. Имено, во множеството вредности R_X се оние реални броеви x_i во кои графикот на $F(x)$ има скок, а соодветната веројатност p_i е всушност висината на тој скок, т.е. се определува со формулата

$$p_i = P\{X = x_i\} = \lim_{x \to x_i^+} F(x) - F(x_i).$$

Пример 2.5 Функцијата на распределба на случајната променлива Y е зададена со:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 0.2, & -2 < x \leq 1 \\ 0.7, & 1 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}.$$

Може да се воочи дека $F(x)$ има прекин во точките -2, 1, 5, па множеството вредности на случајната променлива Y е $R_Y = \{-2, 1, 5\}$. За соодветните веројатности се добива:

$$\begin{aligned} P\{X = -2\} &= \lim_{x \to -2^+} F(x) - F(-2) = 0.2 - 0 = 0.2 \\ P\{X = 1\} &= \lim_{x \to 1^+} F(x) - F(1) = 0.7 - 0.2 = 0.5 \\ P\{X = 5\} &= \lim_{x \to 5^+} F(x) - F(5) = 1 - 0.7 = 0.3 \end{aligned}$$

Значи, законот на распределба на случајната променлива X е:

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Примери на познати распределби од дискретен тип

Индикатор на настан A. Нека A е даден настан, така што $P(A) = p$ и нека $q = 1 - p$. Дефинираме случајна променлива I_A како број на појавувања на настанот A во еден изведен експеримент. Јасно е дека $R_{I_A} = \{0, 1\}$, бидејќи во еден експеримент настанот A може да се појави еднаш или ниеднаш. Значи дека оваа случајна променлива прима вредност 0, ако не се појави настанот A, или вредност 1, ако се појави настанот A. Оттука,

$$\begin{aligned} P\{I_A = 0\} &= P(\overline{A}) = 1 - p = q, \\ P\{I_A = 1\} &= P(A) = p, \end{aligned}$$

т.е.

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Случајната променлива I_A се нарекува *индикатор на настанот* A или случајна променлива со *Бернулиева распределба*.

Биномна распределба. Нека случајната променлива X означува број на појавувања на настанот A во Бернулиева шема со n експерименти, каде што $p = P(A)$, а $q = 1 - p$. Оттука, множеството вредности R_X на случајната променлива X ќе биде $R_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, а веројатноста

$$p_i = P\{X = i\} = P_n(i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, \quad i \in R_X.$$

Притоа,

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1.$$

За вака дефинираната случајна променлива X велиме дека има *биномна распределба* со параметри n и p и означуваме $X \sim B(n, p)$.

Да воочиме дека Бернулиевата распределба е специјален случај на биномната распределба што се добива за $n = 1$, т.е. $B(1, p)$ е всушност Бернулиева распределба.

Рамномерна распределба. За случајната променлива X која прима вредности од конечно множество $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ со еднакви веројатности $p_i = P\{X = x_i\} = \dfrac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, велиме дека има *рамномерна распределба* на множеството R_X и пишуваме $X \sim U(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$.

Хипергеометриска распределба. Нека во дадено множество од n различни објекти, m објекти поседуваат одредено својство A ($m < n$). Од даденото множество од n објекти, случајно се избираат k ($k < n$). Нека случајната променлива X означува број на објекти од избраните k кои го поседуваат својството A. Тогаш

$R_X = \{\max\{0, m+k-n\}, \ldots, \min\{m,k\}\}$. За соодветните веројатности се добива:

$$p_i = P\{X=i\} = \frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}}, \quad i \in R_X.$$

Притоа, $\sum_{i=0}^{r} p_i = 1$. За случајната променлива X велиме дека има *хипергеометриска распределба* со параметри n, m, k.

Геометриска распределба. Се изведува серија од независни и еднакви експерименти сѐ додека не се појави настанот A. Притоа, $p = P(A)$ и $q = 1-p$. Нека случајната променлива X означува број на изведени експерименти од предходно опишаната серија. Бројот на изведени експерименти до појавување на настанот A може да биде 1 или 2 или 3 или .... Оттука, $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ќе ги означиме со A_i настаните: во i-тиот по ред експеримент се појави настанот A, $i = 1, 2, \ldots$ Овие настани се независни, поради независноста на експериментите и $P(A_i) = p$, за секој $i = 1, 2, \ldots$ Настанот $\{X = i\}$ ќе се појави, ако во првите $i-1$ изведување на експериментот не се појавува настанот A, т.е. се појавува настанот $\overline{A}$, а во последниот (i-тиот) експеримент се појавува настанот A. Затоа,

$$\begin{aligned} p_i = P\{X=i\} &= P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{i-1} A_i) \\ &\overset{\text{нез.}}{=} P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \ldots P(\overline{A}_{i-1}) P(A_i) \\ &= q^{i-1} p, \quad i \in R_X. \end{aligned}$$

Притоа, користејќи формула за пресметување на збир на геометриски ред, наоѓаме дека

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} p = \frac{p}{1-q} = 1.$$

За случајната променлива X велиме дека има *геометриска распределба* со параметар p и пишуваме $X \sim Geo(p)$.

Негативна биномна распределба. Се изведува серија од независни и еднакви експерименти сѐ до појавување на настанот A точно k пати. Исто како и претходно, $p = P(A)$ и $q = 1 - p$. Нека случајната променлива X означува број на изведени експерименти од предходно опишаната серија. Оттука, $R_X = \{k, k+1, k+2, \dots\}$ и

$$\begin{aligned} P\{X = n\} &= P\left\{ \begin{array}{c} \text{во првите } n-1 \text{ експерименти, настанот } A \text{ се појави} \\ k-1 \text{ пати и } A \text{ се појави во последниот } n\text{-ти експеримент} \end{array} \right\} \\ &= \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{n-k}p^k. \end{aligned}$$

За случајната променлива велиме дека има негативна биномна распределба со параметри k и p и пишуваме: $X \sim NB(k, p)$.

Пуасонова распределба. Случајната променлива X има *Пуасонова распределба*, ако $R_X = \{0, 1, 2 \dots\}$ и

$$p_i = P\{X = i\} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda},$$

каде што $\lambda > 0$ е дадена константа. За сумата на веројатностите се добива:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1,$$

т.е. p_i, $i = 0, 1, \dots$ навистина определуваат закон на распределба. Означуваме $X \sim P(\lambda)$ и X може да се опише како број на независни настани кои се појавуваат во единица време.

2.3 Случајни променливи од апсолутно-непрекинат тип

Нека случајната променлива X ги прима сите вредности од интервалот (a, b) (може $a = -\infty$ или $b = +\infty$ или е двете) и нека нејзината функција на распределба е непрекината на (a, b). Тогаш според теорема 2.4, $P\{X = x_0\} = \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) - F(x_0) = 0$, за секој $x_0 \in (a, b)$. Според тоа, X не може да биде определена со веројатностите со кои X прима точно одредени вредности. Затоа треба да се најде друга карактеристика која ќе биде аналогна на законот на распределба во дискретен случај.

Нека $x, x + \Delta x \in (a, b)$ и нека $\Delta x > 0$. Ако постои границата

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \leq X < x + \Delta x\}}{\Delta x},$$

тогаш $p(x)$ се нарекува *густина на распределба на веројатностите* на случајната променлива X (или кратко, *густина* на X). Ако случајната променлива X е зададена со нејзината функција на распределба, тогаш според теорема 2.1, густината на X може да се изрази на следниов начин:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \tag{2.6}$$

Ако $p(x)$ е интеграбилна функција, тогаш од горното равенство следува дека

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt, \tag{2.7}$$

при што земаме дека $p(x) = 0$, за $x \leq a$ или $x \geq b$.

Дефиниција 2.3

Ако постои интеграбилна функција $p(x)$, таква што за функцијата на распределба на случајната променлива X е точно равенството (2.7), тогаш за случајната променлива X велиме дека е од *апсолутно-непрекинат тип.*

Својствата на густината на една случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип се дадени во следната теорема.

Теорема 2.5

Нека X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип со густина на распределба $p(x)$. Тогаш:

i) $p(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$;

ii) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$;

iii) $P\{a < X < b\} = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$

Доказ: *i)* Бидејќи $p(x) = F'(x)$, а функцијата на распределба $F(x)$ е неопаѓачка функција, следува дека $F'(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$, т.е. $p(x) \geq 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

ii) Од $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ и равенството (2.7), следува дека

$$1 = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt.$$

iii) Случајната променлива X е од апсолутно непрекинат тип, па $P\{X = a\} = 0$. Оттука,

$$P\{a < X < b\} = P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)dx = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx.$$

$\square$

Пример 2.6 Времето (во минути) потребно да се стартува еден систем е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип зададена со густина:

$$p(x) = \begin{cases} C(10-x)^2, & 0 < x < 10 \\ 0, & \text{во останатите случаи} \end{cases}$$

а) Да се определи константата C;

б) Да се определи веројатноста дека времето на стартување е помеѓу 1 и 2 минути.

Решение: а) Константата C ќе ја определиме од условот $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$. Добиваме:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{0}^{10} C(10-x)^2 dx = \left[-C\frac{(10-x)^3}{3}\right]_0^{10} = 0 + C\frac{10^3}{3}.$$

Оттука,

$$C = \frac{3}{1000}.$$

б)

$$\begin{aligned} P\{1 < X < 2\} &= \int\limits_{1}^{2} p(x)dx = \int\limits_{1}^{2} \frac{3}{1000}(10-x)^2 dx = -\frac{3}{1000}\left[\frac{(10-x)^3}{3}\right]_1^2 \\ &= -\frac{3}{1000}\left[\frac{(10-2)^3}{3} - \frac{(10-1)^3}{3}\right] = \frac{217}{1000} = 0.217. \end{aligned}$$

□

Пример 2.7 Случајната променлива X од апсолутно-непрекинат тип е зададена со нејзината функција на распределба

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ k(x-1)^2, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

а) Да се определи константата k и густината на распределба на случајната променлива X.

б) Колкава е веројатноста дека случајната променлива X во резултатите од експериментот ќе прими вредности од интервалот $(1, 2)$.

Решение: а) X е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип, па нејзината функција на распределба мора да биде непрекината функција.

Токму од тој услов ќе ја определиме непознатата константа k. $F(x)$ може да има прекин во $x = 1$ или во $x = 3$. Притоа, $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} k(x-1)^2 = 0 = F(1)$, за која било вредност на k. Од друга страна, $F(3) = k(3-1)^2 = 4k$, а $\lim\limits_{x\to 3^+} F(x) = 1$, па $F(x)$ ќе биде непрекината во $x = 3$, ако $4k = 1$, т.е. $k = 1/4$. Значи,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{4}(x-1)^2, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Густината на распределба на X, ќе ја определиме од равенството $p(x) = F'(x)$. Така,

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x-1), & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{во останатите случаи} \end{cases}.$$

б)

$$P\{1 < X < 2\} = P\{1 \leq X < 2\} = F(2) - F(1) = \frac{1}{4}(2-1)^2 - 0 = \frac{1}{4}.$$

□

Примери на познати распределби од апсолутно-непрекинат тип

Рамномерна распределба на интервал (a, b). За случајната променлива X велиме дека има *рамномерна распеделба* на интервал (a, b) (и означуваме $X \sim U(a, b)$), ако нејзината густина е константна на овој интервал, а е еднаква на 0, надвор од него, т.е.

$$p(x) = \begin{cases} C, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

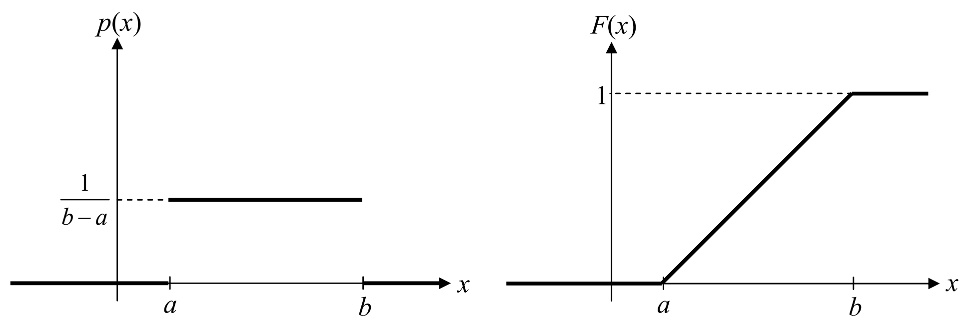
Константата C ќе ја определиме од условот *ii*) од теорема 2.5:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{a}^{b} Cdx = C(b-a).$$

Оттука,

$$C = \frac{1}{b-a}, \qquad \text{па} \qquad p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases} \tag{2.8}$$

Густината на случајна променлива $X \sim U(a,b)$ е претставена на слика 2.2 а).



а) б)

Слика 2.2. Густина и функција на $U(a,b)$ распределба

Со користење на (2.7), функцијата на распределба на случајната променлива X со рамномерна распределба на (a,b) се определува на следниов начин:

$$\begin{aligned} x \le a: \quad & F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dx = 0, \\ a < x \le b: \quad & F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0\ dx + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, \qquad , \\ x > b: \quad & F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0\ dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} + \int_{b}^{x} 0\ dx = 1, \end{aligned}$$

т.е.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}. \tag{2.9}$$

Функцијата на рамномерна распределба е претставена на Слика 2.2 б).

Експоненцијална распределба. За случајната променлива X велиме дека има *експоненцијална распределба* со параметар λ и пишуваме $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, ако нејзината густина е зададена со:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}. \tag{2.10}$$

Со користење на (2.7), за функцијата на распределба на X се добива:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}. \tag{2.11}$$

Гама распределба. За случајната променлива X велиме дека има *гама распределба* со параметри α и β и пишуваме $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, ако нејзината густина е зададена со:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\, e^{-x/\beta}, & x \geq 0 \end{cases}, \tag{2.12}$$

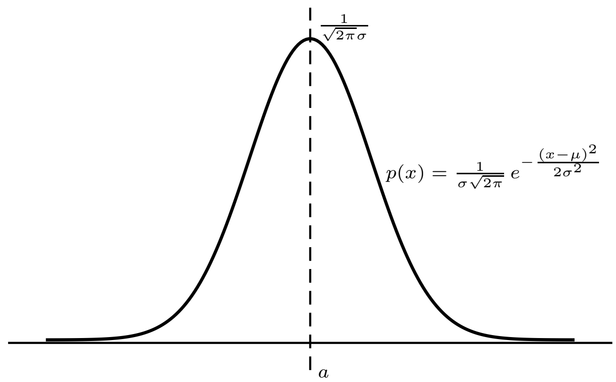
каде што $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ е гама функција и за природен број α, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$.

Да воочиме дека ако во (2.12) ставиме $\alpha = 1$, а $\beta = 1/\lambda$, тогаш густината на гама распределбата добива облик (2.10). Тоа значи дека експоненцијалната $\mathcal{E}(\lambda)$ е специјален случај на гама распределба која се добива за $\alpha = 1$ и $\beta = 1/\lambda$.

Нормална (или Гаусова) распределба. Случајната променлива X има *нормална (или Гаусова) распределба* со параметри a и σ^2, означуваме $X \sim N(a, \sigma^2)$, ако нејзината густина е зададена со:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2.13}$$

каде што $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ се дадени константи (слика 2.3).



Слика 2.3. Густина на $N(a, \sigma^2)$

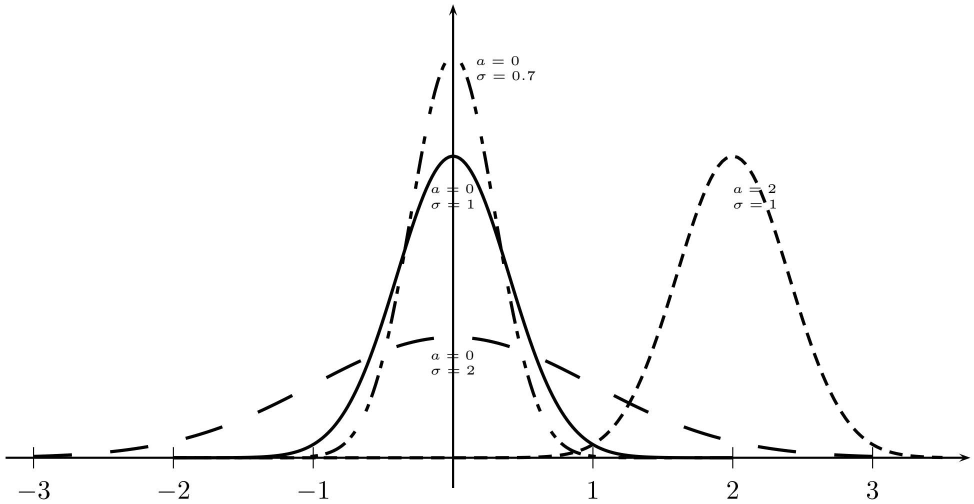
Бидејќи $e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \leq 1$, функцијата $p(x)$ ќе има максимум, ако $e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 1$, т.е. ако $x = a$. Тој максимум е $p(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. Јасно е дека, ако σ расте, максимумот $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ се намалува и обратно, ако σ опаѓа, максимумот на функцијата $p(x)$ се зголемува. Исто така, за $r \in \mathbb{R}$,

$$p(a+r) = p(a-r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}},$$

што значи дека $x = a$ е оска на симетрија на графикот на функцијата $p(x)$. Значи, првиот параметар a ја определува положбата на графикот на $p(x)$, т.е. правата во однос на која тој график е симетричен, а вториот параметар σ го определува обликот на графикот, т.е. висината на максимумот. Графици за густината $p(x)$ за различни вредности на параметрите a и σ се дадени на слика 2.4.

Кошиева распределба. Случајната променлива X има *Кошиева распределба*, ако нејзината густина е зададена со:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \tag{2.14}$$



Слика 2.4. Густини на нормална распределба со различни параметри

2.4 Случајни вектори

2.4.1 Дефиниција на случаен вектор

Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се случајни променливи дефинирани на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогаш на секој $E \in \Omega$ одговара една подредена n-торка од реални броеви $(X_1(E), X_2(E), \ldots, X_n(E)) \in \mathbb{R}^n$. На тој начин се добива една функција $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ од Ω во $\mathbb{R}^n$ определено со n-торката $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ која се нарекува *случаен вектор* или *повеќедимензионална случајна променлива.*

Доказот на следната теорема е даден во прилог А.3.

Теорема 2.6

Функцијата $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ од Ω во $\mathbb{R}^n$ е n-димензионална случајна променлива дефинирана на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ако и само ако за секое n-димензионално Борелово множество $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}) \in \mathcal{F}$.

Пример 2.8 (Полиномна распределба) Нека $A_1, A_2, \ldots, A_k$ се настани кои определуваат дискретно разложување на Ω, т.е $A_iA_j = \emptyset$, за $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{k} A_i = \Omega$. Разгледуваме серија од N независни и еднакви експерименти чие множество елементарни настани е Ω. Ги дефинираме случајните променливи:

X_i - број на експерименти од изведените N во кои се појавил настанот A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

На тој начин е дефиниран k-димензионален случаен вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, каде што $R_{X_i} = \{0, 1, \ldots, N\}$, за $i = 1, 2, \ldots, k$. Нека $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$ и n_i е бројот на појавување на настанот A_i во серијата од N експерименти. Тогаш,

$$P\{X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k\} = \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k},$$

каде што $p_i = P(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Ако $n_1 + n_2 + \cdots + n_k \neq N$, тогаш

$$P\{X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k\} = 0.$$

За случајниот вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ велиме дека има полиномна распределба.

Во понатамошниот дел од курсот ќе работиме само со дводимензионални случајни вектори (X, Y). Сите поими што ќе се воведат за дводимензионални случајни вектори може да се обопштат и за n-димензионални вектори $(n > 2)$, но тоа нема да се прави во овој учебник.

2.4.2 Функција на распределба на случаен вектор

Функцијата на распределба на случаен вектор се дефинира со обопштување на поимот за функција на распределба на една случајна променлива.

Дефиниција 2.4

Функција на распределба на случајниот вектор (X, Y) е функцијата $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$F(x, y) = P(\{X < x\} \cap \{Y < y\}) = P\{X < x, Y < y\}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Теорема 2.7

Ако $F(x, y)$ е функција на распределба на дводимензионалниот случаен вектор (X, Y), тогаш за $a < b$ и $c < d$, точно е равенството:

$$P\{a \leq X < b, c \leq Y < d\} = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c). \tag{2.15}$$

Доказ:

$$\begin{aligned} P\{a \leq X < b, c \leq Y < d\} &= P\{X < b, Y < d\} - P\{X < b, Y < c\} \\ &\quad - P\{X < a, Y < d\} + P\{X < a, Y < c\} \\ &= F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c). \end{aligned}$$

$\square$

Ако $F(x, y)$ е функција на распределба на случајниот вектор (X, Y), тогаш F ги има следниве својства:

FR1) $F(x, y)$е монотоно неопаѓачка по секоја од променливите;

FR2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0, \qquad \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0;$

$\lim\limits_{(x,y) \to (+\infty, +\infty)} F(x, y) = 1;$

FR3) $F(x, y)$е непрекината од лево по секоја од променливите.

Доказот на овие својства е сличен како доказот на теорема 2.2, па затоа тука нема да биде даден. Но, треба да се воочи следното: Условите F1, F2 и F3 се потребни и доволни (теорема 2.3) за една функција $F(x)$ да биде функција на распределба на една случајна променлива. Но, за дводимензионална функција условите FR1, FR2 и FR3 се потребни, но не и доволни за таа да биде функција на распределба на еден случаен вектор (X, Y). Тоа најдобро ќе биде илустрирано со следниов пример.

Пример 2.9 Функцијата

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0 \text{ или } x + y \leq 1 \\ 1, & \text{во останатите случаи} \end{cases}$$

ги задолува условите FR1, FR2 и FR3. Но, ако претпоставиме дека $F(x, y)$ е функција на распределба, тогаш од (2.15) добиваме дека

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{2} \leq X < 1, \frac{1}{2} \leq Y < 1\right\} &= F(1,1) - F(\frac{1}{2},1) - F(1,\frac{1}{2}) + F(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ &= 1 - 1 - 1 + 0 = -1, \end{aligned}$$

што е контрадикција бидејќи веројатноста не може да биде негативна.

За да се постигне и доволност на условите FR1, FR2 и FR3, потребно е да се додаде и условот за ненегативност на изразот од десната страна на (2.15), со што се добива следната теорема која ја даваме без доказ.

Теорема 2.8

Функцијата $F(x, y)$ е функција на распределба на дводимензионален случаен вектор (X, Y) ако и само ако се исполнети следниве четири услови:

FR1) $F(x, y)$ е монотоно неопаѓачка по секоја од променливите;

FR2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = 0, \qquad \lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0;$

$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} F(x, y) = 1;$

FR3) $F(x, y)$ е непрекината од лево по секоја од променливите.

FR4) $F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geq 0.$

2.5 Случајни вектори од дискретен и од апсолутно- непрекинат тип

Исто како кај случајни променливи и кај случајни вектори ќе дефинираме два типа на случајни вектори: од дискретен и од апсолутно-непрекинат тип. Тие се дефинираат со природно обопштување на дефиницијата за случајни променливи од дискретен, т.е. апсолутно-непрекинат тип.

2.5.1 Случајни вектори од дискретен тип

Дефиниција 2.5

Случајниот вектор (X, Y) *е од дискретен тип, ако постои дискретно (конечно или пребројливо) множество* $R_{(X,Y)} \subseteq \mathbb{R}^2$ *така што* $P\{(X, Y) \in R^C_{(X,Y)}\} = 0$.

Случајниот вектор (X, Y) од дискретен тип е наполно определен со неговиот *закон на распределба*, т.е. со множеството вредности $R_{(X,Y)}$ и веројатностите

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\},$$

за сите $(x_i, y_j) \in R_{(X,Y)}$. Притоа, $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1$.

Ако множеството вредности $R_{(X,Y)}$ е конечно, т.е. $R_{(X,Y)} = \{(x_i, y_j) \mid i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$, посебно во случај кога бројот на елементи во ова множество е мал, вообичаено е законот на распределба на случајниот вектор (X, Y) да се претстави со табела од следниов облик:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_m
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{m1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{m2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_n	p_{1n}	p_{2n}	$\dots$	p_{mn}

Исто како и кај случајни променливи и кај случајни вектори, ако е познат законот на распределба на еден случаен вектор од дискретен тип, еднозначно може да се определи неговата функција на распределба и обратно. Имено, нека случајниот вектор (X, Y) е зададен со неговиот закон на распределба. За неговата функција на распределба се добива следново:

Ако $x \leq x_1$ или $y \leq y_1$, тогаш

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = P(\emptyset) = 0.$$

Ако $x_i < x \leq x_{i+1}$, $y_j < y \leq y_{j+1}$, тогаш

$$\begin{aligned} F(x,y) &= P\{X < x, Y < y\} = P\{X \in \{x_1, \dots, x_i\}, Y \in \{y_1, \dots, y_j\}\} \\ &= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j} P\{X = x_r, Y = y_s\} = \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j} p_{rs}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Може да се воочи дека ако $x_i < x \leq x_{i+1}$, $y_j < y \leq y_{j+1}$, тогаш вредноста на $F(x, y)$ се добива со собирање на сите веројатности од претходната табела со законот на распределба, кои се лево од колоната соодветна на $x = x_{i+1}$ и над редицата соодветна $y = y_{j+1}$ (без нив).

Пример 2.10 Една програма се состои од два модула. Законот на распределба на случајниот вектор (X, Y), каде што X е бројот на грешки во првиот, а Y - бројот на грешки во вториот модул, е зададен со следната табела.

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0.2	0.1	0.1
2	0.15	0.25	0.2

Согласно (2.16) и претходната дискусија за функцијата на распределба на векторот (X, Y) се добива:

$Y \backslash X$	$x \leq 1$	$1 < x \leq 2$	$2 < x \leq 3$	$x > 3$
$y \leq 1$	0	0	0	0
$1 < y \leq 2$	0	0.2	0.3	0.4
$y > 2$	0	0.35	0.7	1

Обратно, нека случајниот вектор (X, Y) од дискретен тип е зададен со функција на распределба $F(x, y)$. Тогаш множеството вредности $R_{(X,Y)}$ се состои од оние парови точки (x_i, y_j) во кои функцијата на распределба има прекин (скок). За веројатностите со кои случајниот вектор ги прима тие парови вредности, се добива:

$$\begin{aligned} P\{X = x_i, Y = y_j\} &= \lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0^+,0^+)} P\{x_i \leq X < x_i + \varepsilon_1, y_j \leq Y < y_j + \varepsilon_2\} \\ &= \lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0^+,0^+)} [F(x_i + \varepsilon_1, y_j + \varepsilon_2) - F(x_i + \varepsilon_1, y_j) - F(x_i, y_j + \varepsilon_2) + F(x_i, y_j)] \end{aligned} \tag{2.17}$$

Може да се воочи дека кога се пресметува $P\{X = x_i, Y = y_j\}$, тогаш во табелата за функцијата на распределба $F(x, y)$ се разгледува квадратот формиран од четирите келии соодветни на колоните $\{x_{i-1} \leq X < x_i\}$, $\{x_i \leq X < x_{i+1}\}$ и редиците $\{y_{j-1} \leq Y < y_j\}$, $\{y_j \leq Y < y_{j+1}\}$, и од збирот на елементите по главна дијагонала се одзема збирот на елементите по споредна дијагонала.

Пример 2.11 Функцијата на распределба на случајниот вектор (X, Y) е зададена со следната табела.

$Y \backslash X$	$x \leq 0$	$0 < x \leq 2$	$x > 2$
$y \leq 1$	0	0	0
$1 < y \leq 3$	0	0.2	0.4
$3 < y \leq 5$	0	0.35	0.7
$y > 5$	0	0.4	1

Согласно претходната дискусија, множеството вредности на случајниот вектор е

$$R_{(X,Y)} = \{(x,y)|x \in \{0,2\}, y \in \{1,3,5\}\} = \{(0,1),(0,3),(0,5),(2,1),(2,3),(2,5)\},$$

а за веројатностите, според (2.17), се добива следната табела.

$Y \backslash X$	0	2
1	0.2	0.2
3	0.15	0.15
5	0.05	0.25

2.5.2 Случајни вектори од апсолутно-непрекинат тип

Дефиниција 2.6

Случајниот вектор (X,Y) е од апсолутно- непрекинат тип, ако постои ненегативна интеграбилна функција $p(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$, таква што

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(t_1,t_2)dt_2dt_1. \tag{2.18}$$

Функцијата $p(x,y)$ се нарекува *густина на распределба* на случајниот вектор (X,Y). Бидејќи $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} F(x,y)=1$, добиваме дека

$$1=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} F(x,y)=\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} p(t_1,t_2)dt_2dt_1,$$

т.е

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dydx=1. \tag{2.19}$$

Од друга страна, од (2.18), се добива:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=p(x,y),$$

ако мешаниот извод на $F(x,y)$ постои во точката (x,y).

Примери на познати распределби на случајни вектори од апсолутно-непрекинат тип

Дводимензионална нормална распределба. Случајниот вектор (X,Y) со дводимензионална нормална распределба со параметри $m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$ и ρ се задава со густина

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2\rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}.$$

Означуваме $(X,Y)\sim N_2(m_X,m_Y,\sigma_X^2,\sigma_Y^2,\rho)$.

Рамномерна распределба на област G. Случајниот вектор (X,Y) има рамномерна распределба на област $G\subseteq\mathbb{R}^2$, ако густината е зададена со

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m(G)}, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}, \tag{2.20}$$

каде што $m(G)$ е плоштината на областа G. Означуваме $(X,Y)\sim U(G)$. Ако G е круг со центар во $(0,0)$ и радиус r, т.е. $G=\{(x,y)|x^2+y^2\le r^2\}$, тогаш плоштината на G е $m(G)=r^2\pi$, па за густината на рамномерна распределба на случајниот вектор (X, Y) на областа G се добива:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2\pi}, & (x,y) \in G \\ 0, & (x,y) \notin G \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2\pi}, & x^2+y^2 \leq r^2 \\ 0, & x^2+y^2 > r^2 \end{cases}.$$

Пример 2.12 Нека случајниот вектор (X, Y) има рамномерна распределба на правоаголникот $(a, b) \times (c, d)$. Плоштината на правоаголникот е $(b-a)(d-c)$. Согласно (2.20), густината на (X, Y) е зададена со:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a < x < b,\ c < y < d \\ 0, & \text{во останатите случаи} \end{cases}.$$

По дефиниција, согласно (2.19), функцијата на распределба на случајниот вектор (X, Y) од апсолутно непрекинат тип е:

$$F(x,y) = P\{X < x,\ Y < y\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(t_1,t_2)dt_2dt_1.$$

За $x \leq a$ или $y \leq c$, се добива дека $F(x,y) = 0$, бидејќи $p(x,y) = 0$. Нека $a < x \leq b$ и $c < y \leq d$. Тогаш, имаме:

$$F(x,y) = \int_{a}^{x}\int_{c}^{y} \frac{1}{(b-a)(d-c)}dt_2dt_1 = \frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}.$$

За $a < x \leq b$, а $y > d$, се добива:

$$F(x,y) = \int_{a}^{x}\int_{c}^{d} \frac{1}{(b-a)(d-c)}dt_2d_1 = \frac{(x-a)(d-c)}{(b-a)(d-c)} = \frac{x-a}{b-a}.$$

За $x > b$ и $c < y \leq d$, имаме:

$$F(x,y)=\int\limits_a^b\int\limits_c^y \frac{1}{(b-a)(d-c)}dt_2dt_1=\frac{(b-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}=\frac{y-c}{d-c}.$$

На крај, за $x>b$ и $y>d$:

$$F(x,y)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d \frac{1}{(b-a)(d-c)}dt_2dt_1=\frac{(b-a)(d-c)}{(b-a)(d-c)}=1.$$

Значи, за функцијата на распределба на случајниот вектор (X,Y) се

доби следново:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le a \text{ или } y\le c \\ \dfrac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}, & a<x\le b,\ c<y\le d \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\ y>d \\ \dfrac{y-c}{d-c}, & x>b,\ c<y\le d \\ 1, & x>b,\ y>d \end{cases}.$$

Пократко, оваа функција на распределба може да се запише во следниов облик:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le a \text{ или } y\le c \\ \min\left\{\dfrac{x-a}{b-a},1\right\}\cdot\min\left\{\dfrac{y-c}{d-c},1\right\}, & x>a,\ y>c. \end{cases}.$$

2.6 Маргинални распределби

Во овој дел ќе видиме како ако случајниот вектор (X,Y) е зададен со својата распределба ќе може да се определи распределбата на секоја од променливите X и Y, поединечно. Тие распределби ќе ги нарекуваме *маргинални распределби* на променливите X и Y, соодветно.

Најпрво, нека случајниот вектор (X,Y) е зададен со својата функција на распределба $F(x,y)$. Ќе ја определиме маргиналната функција на распределба $F_X(x)$ на променливата X, а потоа и маргиналната функција на распределба $F_Y(y)$ на променливата Y. Добиваме:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X<x\} = P\{X<x, \underbrace{Y<+\infty}_{\Omega}\} = \lim_{y\to+\infty} F(x,y) \\ F_Y(y) &= P\{Y<y\} = P\{\underbrace{X<+\infty}_{\Omega}, Y<y\} = \lim_{x\to+\infty} F(x,y). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Притоа користиме дека настаните $\{X<+\infty\}$ и $\{Y<+\infty\}$ се сигурни настани, т.е. се еднакви на Ω. Значи, утврдивме дека маргинална функција на распределба на една од променливите во векторот (X,Y) се добива како лимес од заедничката функција на распределба $F(x,y)$ кога се пушти аргументот, соодветен на другата променлива, да тежи кон $+\infty$.

Пример 2.13 Случајниот вектор (X,Y) е зададен со неговата функција на распределба дадена во следната табела.

Y \ X	$x\le 0$	$0<x\le 2$	$x>2$
$y\le 1$	0	0	0
$1<y\le 3$	0	0.2	0.4
$3<y\le 5$	0	0.35	0.7
$y>5$	0	0.4	1

Согласно (2.21), за функциите на распределба на X и Y се добива:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.4, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}, \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ 0.4, & 1 < y \leq 3 \\ 0.7, & 3 < y \leq 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}.$$

Да воочиме дека случајот $y \to +\infty$ соодветствува на $y > 5$, па вредностите на маргиналната функција на распределба на X се, всушност, вредностите од последната редица на табелата во која е дадена заедничката функција на распределба на случајниот вектор (X, Y). Аналогно, случајот $x \to +\infty$ соодветствува на $x > 2$, па вредностите на маргиналната функција на распределба на Y се, всушност, вредностите од последната колона на табелата во која е дадена заедничката функција на распределба на случајниот вектор (X, Y).

Пример 2.14 Нека случајниот вектор (X, Y) има рамномерна распределба на правоаголникот $(a, b) \times (c, d)$. Како што утврдивме во пример 2.12, функцијата на распределба на (X, Y) е зададена со:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ или } y \leq c \\ \dfrac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}, & a < x \leq b,\ c < y \leq d \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b,\ y > d \\ \dfrac{y-c}{d-c}, & x > b,\ c < y \leq d \\ 1, & x > b,\ y > d \end{cases}.$$

Согласно равенствата (2.21), се добива следново:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases},$$

како и

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq c \\ \dfrac{y-c}{d-c}, & c < y \leq d \\ 1, & y > d \end{cases}$$

Значи, случајните променливи X и Y имаат еднодимензионална рамномерна распределба, и тоа $X \sim U(a,b)$, а $Y \sim U(c,d)$.

Во продолжение, ќе ги разгледаме посебно случаите кога случајниот вектор е од дискретен и кога случајниот вектор е од апсолутно-непрекинат тип, и ќе видиме како се определува маргиналниот закон, т.е. маргиналната густина на секоја од променливите.

Нека (X,Y) е случаен вектор од дискретен тип зададен со закон на распределба $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $(x_i, y_j) \in R_{(X,Y)}$. За маргиналниот закон на распределба на случајната променлива X се добива:

$$p_i = P\{X = x_i\} = P\{X = x_i, \underbrace{Y \in R_Y}_{\Omega}\} = \sum_{y_j \in R_Y} P\{X = x_i, Y = y_j\}, \qquad (2.22)$$

за секој $x_i \in R_X$. Ако законот на распределба на (X,Y) е зададен со табела, тогаш согласно (2.22), веројатноста $p_i = P\{X = x_i\}$ е сума на сите веројатности во колоната соодветна на настанот $\{X = x_i\}$.

Аналогно, за маргиналниот закон на распределба на Y се добива:

$$q_j = P\{Y = y_j\} = P\{\underbrace{X \in R_X}_{\Omega}, Y = y_j\} = \sum_{x_i \in R_X} P\{X = x_i, Y = y_j\}, \qquad (2.23)$$

за секој $y_j \in R_Y$, т.е. q_j е сума на веројатностите во редицата соодветна на настанот $\{Y = y_j\}$.

Пример 2.15 Нека случајниот вектор (X, Y) од дискретен тип е зададен со законот на распределба даден во следната табела.

$Y \backslash X$	0	2
1	0.3	0.1
3	0.15	0.15
5	0.05	0.25

Според (2.22) и (2.23), за определување на маргиналните закони на распределба на случајните променливи X и Y треба да се пресмета сума по сите редици и сите колони на дадената табела. Оттаму, се добива:

$Y \backslash X$	0	2	Σ
1	0.3	0.1	0.4
3	0.15	0.15	0.3
5	0.05	0.25	0.3
Σ	0.5	0.5	1

Значи, за маргиналните закони на случајните променливи X и Y се добива:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad Y : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Нека (X, Y) е случаен вектор од апсолутно непрекинат тип зададен со густината на распределба $p(x, y)$. За да ја определиме маргиналната густина на распределба на X постапуваме на следниот начин. За функцијата на распределба на X се добива следново:

$$F_X(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x, y) = \lim_{y\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(t_1, t_2) dt_2 dt_1 = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t_1, t_2) dt_2 dt_1.$$

Од друга страна,

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(t_1)dt_1.$$

Од последните две равенства, следува дека

$$p_X(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t_1,t_2)dt_2,$$

т.е.

$$p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy. \tag{2.24}$$

Аналогно, за маргиналната густина на Y се добива:

$$p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx. \tag{2.25}$$

Значи, ако се бара маргиналната густина на една од променливите, тогаш заедничката густина на векторот (X,Y) се интегрира по аргументот соодветен на другата променлива.

Пример 2.16 Нека случајниот вектор $(X,Y) \sim N_2(m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$. Согласно (2.24), за маргиналната густина на X се добива:

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} + \rho^2\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}\right]\right\} \\
&\qquad \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(1-\rho^2)\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}\right\}dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} - \rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right]^2\right\}dy
\end{aligned}$$

За решавање на последниот интеграл ја воведуваме смената

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} - \rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right],$$

од каде што се добива дека $dt = \dfrac{dy}{\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$. Со воведување на смената во интегралот, се добива:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2}. \end{aligned}$$

Притоа, искористивме дека $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = 1$, како интергал од густина на нормална нормирана распределба од $-\infty$ до $+\infty$.

Значи, добивме дека маргиналата густина на X е густина на еднодимензионална нормална распределба со параметри m_X и σ_X^2, т.е. $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Од причини на симетрија $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y^2)$.

2.7 Условна распределба

Нека $S \in \mathcal{B}_1$ и нека настанот $\{Y \in S\}$ има позитивна веројатност, т.е. $P\{Y \in S\} > 0$. Функцијата на условна распределба на X при услов $\{Y \in S\}$ се дефинира со помош на формулата за условна веројатност на случајни настани, на следниов начин:

$$F_X(x|\{Y \in S\}) = P(\{X < x\}|\{Y \in S\}) = \frac{P\{X < x, Y \in S\}}{P\{Y \in S\}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Нека (X, Y) е дводимензионален случаен вектор од дискретен тип зададен со закон на распределба $p(x_i, y_j) = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, за $(x_i, y_j) \in R_{(X,Y)}$ и нека маргиналните закони на распределба на X и на Y се означени со $p_X(x_i) = P\{X = x_i\}$, $x_i \in R_X$ и $p_Y(y_j) = P\{Y = y_j\}$, $y_j \in R_Y$, соодветно. Аналогно како и претходно, законот на условна распределба на случајната променлива X при услов $\{Y = y_j\}$, каде што $P\{Y = y_j\} > 0$, се изразува со помош на формулата за условна веројатност на настани:

$$p_X(x_i|y_j) = P\big(\{X = x_i\}|\{Y = y_j\}\big) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}, \quad x_i \in R_X.$$

На ист начин, за законот на условна распределба на случајната променлива Y при услов $\{X = x_i\}$, каде што $P\{X = x_i\} > 0$, се добива следново:

$$p_Y(y_j|x_i) = P\big(\{Y = y_j\}|\{X = x_i\}\big) = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}, \quad y_j \in R_Y.$$

Дефиниција 2.7

Законот на условна распределба на случајната променлива X при услов $\{Y = y_j\}$, каде што $P\{Y = y_j\} > 0$, се дефинира со:

$$p_X(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}, \quad x_i \in R_X. \tag{2.26}$$

Аналогно, за законот на условна распределба на случајната променлива Y при услов $\{X = x_i\}$, каде што $P\{X = x_i\} > 0$, ја имаме следната формула:

$$p_Y(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}, \quad y_j \in R_Y. \tag{2.27}$$

□

Пример 2.17 Законот на распределба на случајниот вектор (X, Y) е зададен со следната табела.

$Y \backslash X$	1	2	3	Σ
1	0.2	0.1	0.1	0.4
2	0.15	0.25	0.2	0.6
Σ	0.35	0.35	0.3	1

За условните веројатности на X при услов $\{Y = 1\}$, се добива следново:

$$p_X(1|1) = \frac{p(1,1)}{p_Y(1)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

$$p_X(2|1) = \frac{p(2,1)}{p_Y(1)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

$$p_X(3|1) = \frac{p(3,1)}{p_Y(1)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

Значи, закон на условна распределба на X при услов $\{Y = 1\}$ е следниов:

$$X_{|\{Y=1\}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Може да се воочи дека веројатностите на овој закон на условна распределба се добиваат со делење на веројатностите од првата редица (која соодветствува на настанот $\{Y = 1\}$) од табелата за заедничкиот закон на распределба, со збирот на елементите од таа редица, што е всушност $P\{Y = 1\}$. По таа аналогија, законот на условна распределба на X при услов $\{Y = 2\}$ ќе се добие со делење на веројатностите од втората редица со збирот на елементите во таа редица, што е $P\{Y = 2\}$, па се добива следново:

$$X_{|\{Y=2\}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/4 & 5/12 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

За условните веројатности на Y при услов $\{X = 1\}$, се добива следното:

$$p_Y(1|1) \;\; = \;\; \frac{p(1,1)}{p_X(1)} = \frac{0.2}{0.35} = 4/7$$

$$p_Y(2|1) \;\; = \;\; \frac{p(1,2)}{p_X(1)} = \frac{0.15}{0.35} = 3/7$$

Значи, законот на условна распределба на Y при услов $\{X = 1\}$ е следниов:

$$Y_{|\{X=1\}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}.$$

Може да се воочи дека веројатностите при овој закон на условна распределба се добиваат со делење на веројатностите од првата колона (која соодветствува на настанот $\{X = 1\}$) од табелата за заедничкиот закон на распределба, со збирот на елементите од таа колона, што е всушност $P\{X = 1\}$. Оттука, за закон на условна распределба на Y при услов $\{X = 2\}$ и за законот на условна распределба на Y при услов $\{X = 3\}$, се добива:

$$Y_{|\{X=2\}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/7 & 5/7 \end{pmatrix}, \qquad\qquad Y_{|\{X=3\}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Меѓутоа, ако (X, Y) е случаен вектор од апсолутно-непрекинат тип, тогаш условната распределба на X при услов $\{Y = y\}$ не може да се дефинира со формулата (2.26), бидејќи $P\{Y = y\} = 0$. Овде ќе дадеме дефиниција за густина на условна распределба на X при услов $\{Y = y\}$, поаѓајќи од следните претпоставки. Нека (X, Y) е случаен вектор од апсолутно-непрекинат тип зададен со густина $p(x, y)$ и нека y е точка во која маргиналната густина на распределба на Y е позитивна, т.е. $p_Y(y) > 0$. Ќе претпоставиме дека $p(x, y)$ и $p_Y(y)$ се непрекинати секаде каде што тоа е потребно при изведувањето. За условната функција на распределба на X при услов $\{y \leq Y < y+h\}$, за $h > 0$, се добива следново:

$$\begin{aligned}
F_X(x|\{y \leq Y < y+h\}) &= \frac{P\{X < x, y \leq Y < y+h\}}{P\{y \leq Y < y+h\}} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{y}^{y+h} p(u,v)dvdu}{\int\limits_{y}^{y+h} p_Y(v)dv} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\int\limits_{y}^{y+h} p(u,v)dv}{\int\limits_{y}^{y+h} p_Y(v)dv} du
\end{aligned}$$

Во двата интеграла што се јавуваат во интеграндот на надворешниот интеграл ќе ја примениме теоремата за средна вредност на интегралното сметање, која гласи:

Нека f е непрекината функција на интервал $[a,b]$. Тогаш постои $c \in [a,b]$, така што $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)$, или еквивалентното тврдење дека постои $0 \leq c_1 \leq 1$, така што $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(a + c_1(b-a))(b-a)$.

Ако се примени оваа теорема во $\int\limits_{y}^{y+h} p(u,v)dv$, разгледувајќи ја функцијата $p(u,v)$ како функција од v (u се третира како константа), тогаш постои c_1 $(0 < c_1 < 1)$ така што $y + c_1 h \in [y, y+h)$, па $\int\limits_{y}^{y+h} p(u,v)dv = p(u, y + c_1 h)h$. Аналогно, за $\int\limits_{y}^{y+h} p_Y(v)dv$, од теоремата за средна вредност на интегралното сметање постои c_2 $(0 < c_2 < 1)$, така што $y+c_2 h \in [y, y+h)$

и $\int\limits_{y}^{y+h} p_Y(v)dv = p_Y(y+c_2h)h.$ Со замена во претходниот израз за условната функција на распределба на X при услов $\{y \leq Y < y+h\}$ се добива:

$$F_X(x|\{y \leq Y < y+h\}) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{p(u, y+c_1h)}{p_Y(y+c_2h)}du.$$

Ако се стави $h \to 0^+$, се доаѓа до дефиниција на функција на условна распределба на X при услов $\{Y = y\}$, за $p_Y(y) > 0$:

$$F_X(x|y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{p(u, y)}{p_Y(y)}du, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Последниот израз сугерира густината на условната распределба (или кратко условната густина) да се дефинира на следниов начин.

Дефиниција 2.8

Условна густина на случајната променлива X од апсолутно-непрекинат тип, при услов $\{Y = y\}$, за $p_Y(y) > 0$, се дефинира со изразот:

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Од равенството (2.29), јасно е дека $p_X(x|y) \geq 0$, а од (2.28) и (2.29), може да се види дека

$$F_X(x|y) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(u|y)du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Исто така,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x|y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx}{p_Y(y)} = \frac{p_Y(y)}{p_Y(y)} = 1.$$

Последните равенства укажуваат дека условната густина на X при услов $\{Y = y\}$, ги задоволува условите од теорема 2.5, што покажува дека и условната густина е густина на распределба.

Аналогно, условна густина на Y при услов $\{X = x\}$, за $p_X(x) > 0$, се дефинира со равенството:

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}, \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

Пример 2.18 Нека $(X, Y) \sim N_2(m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$. Ќе ја определиме условната распределба на Y при услов $\{X = x\}$. Притоа, користиме дека маргиналната распределба на X е нормална $N(m_X, \sigma_X^2)$. Од равенството (2.30), се добива следново:

$$\begin{aligned}
p_Y(y|x) &= \frac{p(x,y)}{p_X(x)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\dfrac{x-m_X}{\sigma_X}\dfrac{y-m_Y}{\sigma_Y} + \dfrac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\dfrac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_Y^2} \times \right. \\
&\qquad \left. \times \left[(y-m_Y)^2 - 2\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(y-m_Y)(x-m_X) + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}(x-m_X)^2 - \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}(1-\rho^2)(x-m_X)^2\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_Y^2} \times \right. \\
&\qquad \left. \times \left[(y-m_Y)^2 - 2\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(y-m_Y)(x-m_X) + \rho^2\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}(x-m_X)^2\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_Y^2}\left[y - m_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)\right]^2\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)}\left[y - \left(m_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)\right)\right]^2\right\}.
\end{aligned}$$

Како што може да се воочи од последниот израз, условната распределба на Y при услов $\{X = x\}$ е нормална $N\left(m_Y + \rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2)\right)$ распределба.

Првиот параметар на оваа распределба можеме да го набљудуваме како функција од x:

$$y = m_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X).$$

Последната равенка е равенка на права низ точката (m_X, m_Y) со коефициент на правец $\rho\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ и се нарекува *права на регресија* на y по x и истата може да се запише во облик:

$$\frac{y - m_Y}{\sigma_Y} = \rho\frac{x - m_X}{\sigma_X}.$$

Од причини на симетрија, условната распределба на X при услов $\{Y = y\}$ е нормална $N\left(m_X + \rho\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_Y), \sigma_X^2(1-\rho^2)\right)$ распределба, а првиот параметар разгледуван како функција од y ја дава соодветната права на регресија на x по y:

$$\frac{x - m_X}{\sigma_X} = \rho\frac{y - m_Y}{\sigma_Y}.$$

Правите на регресија имаат големо значење и примена во статистика.

2.8 Независност на случајни променливи

Независност на случајни променливи се дефинира преку независност на случајни настани.

Дефиниција 2.9

Случајните променливи $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни, ако за произволни $S_i \in \mathcal{B}_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, случајните настани $\{X_1 \in S_1\}$, $\{X_2 \in S_2\}, \ldots$, $\{X_n \in S_n\}$ се независни во целина, т.е.

$$P\big(\{X_1 \in S_1\} \cap \{X_2 \in S_2\} \cap \cdots \cap \{X_n \in S_n\}\big) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in S_i\} \tag{2.31}$$

Ако $n = 2$, тогаш дефиниција 2.9 и условот (2.31) го добиваат следниот облик.

Дефиниција 2.10

Случајните променливи X и Y се независни, ако за произволни $S_1 \in \mathcal{B}_1$ и $S_2 \in \mathcal{B}_1$, случајните настани $\{X \in S_1\}$, $\{Y \in S_2\}$ се независни, т.е.

$$P\big(\{X \in S_1\} \cap \{Y \in S_2\}\big) = P\{X \in S_1\} \cdot P\{Y \in S_2\} \tag{2.32}$$

Ако $S_1 = (-\infty, x)$, тогаш настанот $\{X \in S_1\}$ може да се запише во следниов облик:

$$\{X \in S_1\} = \{X \in (-\infty, x)\} = \{X < x\}.$$

Аналогно, ако $S_2 = (-\infty, y)$, тогаш $\{Y \in S_2\} = \{Y < y\}$. За вака избрано S_1 и S_2, равенството (2.32) може да се запише во облик:

$$P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\},$$

т.е.

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y). \tag{2.33}$$

Значи, ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш заедничката функција на распределба на векторот (X,Y) може да се претстави како производ на маргиналните функции на распределба на случајните променливи X и Y.

Од друга страна, се покажува дека важи и обратното тврдење, т.е. ако за случајниот вектор (X,Y) важи равенството (2.33), тогаш X и Y се независни случајни променливи. Всушност, точна е следнава теорема.

Теорема 2.9

Случајните променливи X и Y се независни ако и само ако заедничката функција на распределба на векторот (X,Y) може да се претстави како производ на маргиналните функции на распределба на случајните променливи X и Y, т.е.

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Доказот на ова тврдење е даден во Прилог А.4.

Условот за независност (2.33), зависно од типот на случајниот вектор (X,Y) може да се запише во некој од следниве облици:

- Ако (X,Y) е случаен вектор од дискретен тип, тогаш потребниот и доволен услов за независност на случајните променливи X и Y може да се зададе со:

$$P\{X=x, Y=y\} = P\{X=x\}P\{Y=y\}, \qquad \text{за сите } (x,y) \in R_{(X,Y)}. \tag{2.34}$$

- Ако (X,Y) е случаен вектор од апсолутно-непрекинат тип зададен со густина на распределба $p(x,y)$, тогаш потребниот и доволен услов за независност на случајните променливи X и Y може да се зададе со:

$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y), \qquad x,y \in \mathbb{R}. \tag{2.35}$$

Пример 2.19 Законот на распределба на случајниот вектор (X, Y) е зададен со следната табела.

$Y \backslash X$	1	2	3	Σ
1	0.2	0.1	0.1	0.4
2	0.15	0.25	0.2	0.6
Σ	0.35	0.35	0.3	1

За маргиналните закони на распределба на X и на Y се добива:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.35 & 0.35 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

За независност на случајните променливи X и Y потребно е условот (2.34) да важи за $(x, y) \in R_{(X,Y)}$. Но,

$$P\{X = 1, Y = 1\} = 0,2 \neq 0,35 \cdot 0,4 = P\{X = 1\}P\{Y = 1\},$$

од каде што следува дека X и Y не се независни случајни променливи.

Пример 2.20 Нека $(X, Y) \sim N_2(m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$. Да се определи потребен и доволен услов за независност на случајните променливи X и Y.

Решение: Заедничката густина на распределба на (X, Y) е зададена со:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} - 2\rho\frac{x-m_X}{\sigma_X}\frac{y-m_Y}{\sigma_Y} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}.$$

Покажавме претходно дека X и Y имаат исто така нормална распределба и тоа $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y^2)$. Оттука,

$$\begin{aligned} p_X(x)p_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}e^{-(y-m_Y)^2/2\sigma_Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Притоа, јасно е дека $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ ако и само ако $\rho = 0$. Значи, потребен и доволен услов за независност на нормално распределените случајни променливи X и Y е параметарот $\rho = 0$. $\square$

Нека X и Y се независни случајни променливи од дискретен тип, тогаш за условниот закон на распределба на X при услов $\{Y = y_j\}$ се добива:

$$p_X(x_i|y_j) = \frac{p(x_i,y_j)}{p_Y(y_j)} \overset{\text{нез.}}{=\!=} \frac{p_X(x_i)p_Y(y_j)}{p_Y(y_j)} = p_X(x_i),$$

за сите $x_i \in R_X$, т.е. условната распределба на X при услов $\{Y = y_j\}$ се совпаѓа со безусловната распределба на X. Аналогно, за условниот закон на распределба на Y при услов $\{X = x_i\}$ се добива:

$$p_Y(y_j|x_i) = \frac{p(x_i,y_j)}{p_X(x_i)} \overset{\text{нез.}}{=\!=} \frac{p_X(x_i)p_Y(y_j)}{p_X(x_i)} = p_Y(y_j),$$

за сите $y_j \in R_Y$, т.е. условната распределба на Y при услов $\{X = x_i\}$ се совпаѓа со безусловната распределба на Y.

Ако пак, X и Y се независни случајни променливи од апсолутно непрекинат тип, тогаш за условната густина на X при услов $\{Y = y\}$ се добива:

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \overset{\text{нез.}}{=\!=} \frac{p_X(x)p_Y(y)}{p_Y(y)} = p_X(x),$$

т.е. условната густина на X при услов $\{Y = y\}$ се совпаѓа со безусловната густина на X. Аналогно, за условната густина на Y при услов $\{X = x\}$ се добива:

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} \overset{\text{нез.}}{=\!=} \frac{p_X(x)p_Y(y)}{p_X(x)} = p_Y(y),$$

т.е. условната густина на Y при услов $\{X = x\}$ се совпаѓа со безусловната густина на Y.

Забелешка 2.2 Условот за независност (2.33) може да се обопшти и на повеќе од две променливи. Имено, случајните променливи X_1, X_2,..., X_n се независни ако и само ако заедничката функција на распределба на векторот $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ може да се претстави како производ на маргиналните функции на распределба на случајните променливи X_1, X_2,..., X_n, т.е.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdot F_{X_n}(x_n).$$

Значи, функцијата на распределба на случајниот вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ од произволен ред е наполно определена со функциите на распределба на случајните променливи X_1, X_2,..., X_n. Уште повеќе, ако сите овие случајни променливи се еднакво распределени со функција на распределба $F(x)$, тогаш за распределбата на случајниот вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ се добива:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i).$$

Последното равенство е многу битно во статистика при определување на распределба на еден случаен примерок.

2.9 Функции од случајни променливи

Дефиниција 2.11

Функцијата $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ се нарекува *Борелова функција*, ако $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}_n$, за секое $S \in \mathcal{B}_1$.

Имено, ако f е Борелова функција, тогаш инверзна слика на Борелово множество од $\mathcal{B}_1$ е Борелово множество во $\mathcal{B}_n$. Да напоменеме дека функциите кои се непрекинати или непрекинати по делови се Борелови функции, но во општ случај, обратното не важи. Така, на пример,

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^n, \ n \in \mathbb{Z}, \quad h(x) = cx \ (c = \text{const}),$$

се Борелови функции од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$, а

$$f(x, y) = x + y, \quad g(x, y) = x - y, \quad h(x, y) = xy, \quad r(x, y) = x/y$$

се Борелови функции од $\mathbb{R}^2$ во $\mathbb{R}$, итн. Се покажува дека ако $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е случаен вектор, а $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е Борелова функција, тогаш пресликувањето $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ дефинирано со:

$$Y(E) = f(X_1(E), X_2(E), \ldots, X_n(E))$$

или кратко $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е случајна променлива. Имено, точна е следнава теорема чиј доказ е даден во Прилог А.5.

Теорема 2.10

Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е Борелова функција, а $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е даден случаен вектор. Тогаш $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е случајна променлива.

2.9.1 Функции од една случајна променлива

Нека X е дадена случајна променлива со позната распределба и нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е Борелова функција. Според теорема 2.10, $Y = f(X)$ е случајна променлива. Наша цел е да се определи нејзината распределба. Типот на оваа распределба зависи од типот на распределба на случајната променлива X.

Прво, нека X е случајна променлива од дискретен тип зададена со множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ (множеството вредности може да е конечно или преброjливо) и веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за $x_i \in R_X$.

Тогаш случајната променлива Y прима вредности од $R_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$, каде што $y_i = f(x_i)$ при што веројатностите со кои Y ги прима одделните вредности се определуваат во зависност од тоа кој од следниве два случаја е задоволен:

- Ако f е инјективна функција, т.е.

  $$x_i \neq x_j \quad \Rightarrow \quad f(x_i) \neq f(x_j),$$

  тогаш за секој $y_i \in R_Y$, постои единствен $x_i \in R_X$, така што $f(x_i) = y_i$, па

  $$P\{Y = y_i\} = P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

- Нека f не е инјективна функција. Тогаш за $y_i \in R_Y$ може да постојат повеќе $x_{i_r} \in R_X$ кои со f се пресликуваат во y_i, т.е.

  $$f(x_{i_1}) = y_i, \quad f(x_{i_2}) = y_i, \quad \dots, \quad f(x_{i_k}) = y_i.$$

  Оттука следува дека настанот $\{Y = y_i\}$ ќе се појави ако и само ако се појави еден од настаните $\{X = x_{i_r}\}$, $r = 1, \dots, k$ кои се дисјункни помеѓу себе, па затоа

  $$P\{Y = y_i\} = \sum_{r=1}^{k} P\{X = X_{i_r}\} = \sum_{r=1}^{k} p_{i_r}.$$

Пример 2.21 Нека случајната променлива X е зададена со:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 1/2 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Ќе ја определиме распределбата на случајната променлива $Y = X^2$.

Најпрво да воочиме дека функцијата $y = x^2$, за $x \in \{1, 2, 3\}$ е инјективна функција. Множеството вредности на Y е $R_Y = \{1, 4, 9\}$, бидејќи

$1 = 1^2$, $4 = 2^2$ и $9 = 3^2$. Согласно претходното наоѓаме:

$$\begin{aligned} P\{Y=1\} &= P\{X^2=1\} = P\{X=1\} = 1/8; \\ P\{Y=4\} &= P\{X^2=4\} = P\{X=2\} = 1/2; \\ P\{Y=9\} &= P\{X^2=9\} = P\{X=3\} = 3/8. \end{aligned}$$

Значи, законот на распределба на Y е од следниов облик:

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1/8 & 1/2 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.22 Ќе ја определиме распределбата на случајната променлива $Y = X^2$, каде што

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Да воочиме дека во овој случај, функцијата $y = x^2$ не е инјективна бидејќи $x^2 = 1$ за две вредности од R_X, т.е. за $x = -1$ и $x = 1$. Множеството вредности на Y е $R_Y = \{1, 4\}$, а за соодветните веројатности наоѓаме:

$$\begin{aligned} P\{Y=1\} &= P\{X^2=1\} = P\{X=-1\} + P\{X=1\} = 1/4 + 1/4 = 1/2; \\ P\{Y=4\} &= P\{X^2=4\} = P\{X=2\} = 1/2. \end{aligned}$$

Значи, законот на распределба на Y е:

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \text{т.е.} \quad Y \sim U(\{1, 4\}).$$

Нека, сега, X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип зададена со густина $p_X(x)$. Следната теорема покажува како може да се определи густината на распределба на случајната променлива $Y = f(X)$, во случај кога f е строго монотона функција и има непрекинат извод над множеството вредности на X.

Теорема 2.11

Нека X е случајна променлива од апсолутно непрекинат тип која прима вредности од интервалот (a,b) (може $a=-\infty$ или $b=+\infty$ или и двете). Ако f е строго монотона функција и има непрекинат извод на (a,b), тогаш густината на распределба на $Y=f(X)$ се определува со:

$$p_Y(x) = p_X(f^{-1}(x))|(f^{-1})'(x)|. \tag{2.36}$$

Доказ: Прво, нека f е строго монотоно растечка на (a,b). Тогаш и f^{-1} е строго монотоно растечка на интервалот $(f(a),f(b))$, па $(f^{-1})'(x)>0$, т.е. $|(f^{-1})'(x)| = (f^{-1})'(x)$, за $x\in(f(a),f(b))$. Сега, за функцијата на распределба на случајната променлива Y се добива:

$$F_Y(x) = P\{Y<x\} = P\{f(X)<x\} = P\{X<f^{-1}(x)\} = F_X(f^{-1}(x)).$$

Со диференцирање на последниот израз ќе ја добиеме густината на распределба на случајаната променлива Y. Имено,

$$p_Y(x) = F_Y'(x) = p_X(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = p_X(f^{-1}(x))|(f^{-1})'(x)|,$$

при што во последното равенство е искористено дека изводот на $(f^{-1})'$ е позитивен на $(f(a),f(b))$.

Ако f е строго монотоно опаѓачка на (a,b), тогаш и f^{-1} е строго монотоно опаѓачка на $(f(b),f(a))$. Оттука, $(f^{-1})'(x)<0$, т.е. $|(f^{-1})'(x)| = -(f^{-1})'(x)$, за $x\in(f(b),f(a))$. Користејќи го претходното, за функцијата на распределба на Y, добиваме:

$$F_Y(x) = P\{Y<x\} = P\{f(X)<x\} = P\{X>f^{-1}(x)\} = 1-F_X(f^{-1}(x)).$$

Сега, со диференцирање за густината на распределба на Y се добива:

$$p_Y(x) = F_Y'(x) = -p_X(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = p_X(f^{-1}(x))|(f^{-1})'(x)|,$$

бидејќи изводот на f^{-1} е негативен на $(f(b), f(a))$. □

Пример 2.23 Да се определи густината на распределба на случајната променлива Y, ако:

а) $Y = \dfrac{X-a}{\sigma}$, каде што $X \sim N(a, \sigma^2)$, $\sigma > 0$;
б) $Y = \sigma X + a$, каде што $\sigma > 0$ и $X \sim N(0,1)$.

Решение: а) Бидеќи $X \sim N(a, \sigma^2)$, густината на X е зададена со:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}. \tag{2.37}$$

Од $f(x) = \dfrac{x-a}{\sigma}$, наоѓаме дека $f^{-1}(x) = \sigma x + a$, па $(f^{-1})'(x) = \sigma > 0$. Сега, со примена на равенството (2.36), за густината на распределба на Y се добива:

$$p_Y(x) = p_X(f^{-1}(x))|(f^{-1})'(x)| = p_X(\sigma x + a)|\sigma| = \sigma \cdot p_X(\sigma x + a).$$

Со замена на p_X од (2.37), се добива:

$$p_Y(x) = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-(\sigma x + a - a)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-x^2/2},$$

т.е. $Y \sim N(0,1)$.

Значи, со примена на трансформацијата $Y = \dfrac{X-a}{\sigma}$ на случајна променлива X која има нормална $N(a, \sigma^2)$ распределба, се добива случајна променлива $Y \sim N(0,1)$. Оваа распределба се нарекува нормална нормирана (или стандардизирана) распределба. Затоа, ваквата трансформација се нарекува *нормирање на случајната променлива* X.

б) Од $f(x) = \sigma x + a$, наоѓаме дека $f^{-1}(x) = \dfrac{x-a}{\sigma}$, па $(f^{-1})'(x) = 1/\sigma > 0$.

Со замена во (2.36), се добива:

$$p_Y(x) = p_X(f^{-1}(x))|(f^{-1})'(x)| = p_X\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\left|\frac{1}{\sigma}\right| = \frac{1}{\sigma}\cdot p_X\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Користејќи дека $X \sim N(0,1)$, добиваме:

$$p_Y(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

т.е. $Y \sim N(a,\sigma^2)$. $\square$

Забелешка 2.3 Да воочиме дека во доказот на теорема 2.11, најпрво ја определивме функцијата на распределба на Y, а потоа со нејзино диференцирање ја најдовме и соодветната густина на распределба. Оттука, при определување на густина на распределба на случајната променлива $Y = f(X)$ може да се користи истата оваа постапка, без да се користи равенството (2.36). Тоа ќе го направиме во следните примери.

Пример 2.24 Нека случајната променлива X има функција на распределба $F(x)$. Ќе ја определиме функцијата на распределба на случајната променлива $Y = F(X)$. Водејќи сметка дека $F(x)$ е функција на распределба, т.е. е монотоно неопаѓачка и прима вредности од интервалот $[0,1]$, за функцијата на распределба на Y се добива следново:
за $y \leq 0$, $\quad F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{F(X) < y\} = 0$;
за $0 < y \leq 1$,

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{F(X) < y\} = P\{X < F^{-1}(y)\} = F_X(F^{-1}(y)) = y;$$

за $y > 1$, $\quad F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{F(X) < y\} = 1$.
Значи,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y, & 0 < y \leq 1 \\ 1, & y > 1. \end{cases},$$

т.е. $Y \sim U(0,1)$.

Пример 2.25 Нека $Y \sim U(0,1)$ и $X = F^{-1}(Y)$, каде што $F(x)$ ги задоволува условите за функција на распределба. Ќе покажеме дека функцијата на распределба на X е $F(x)$. Имено, за функцијата на распределба на X се добива:

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{F^{-1}(Y) < x\} = P\{Y < F(x)\} = F_Y(F(x)) = F(x),$$

бидејќи Y има рамномерна $U(0,1)$ распределба и $0 \leq F(x) \leq 1$, за секое x.

Напомена: Оваа задача овозможува генерирање на случајни броеви со дадена распределба. Имено, ако треба да се генерира низа броеви од распределба зададена со функција на распределба $F(x)$ (која треба да е инверзибилна функција), тогаш се постапува на следниов начин:
1) се генерира низа со рамномерна распределба на интервалот $(0,1)$;
2) на добиената низа се применува трансформација $F^{-1}(x)$ и се добива низа со бараната распределба.

2.9.2 Функции од две случајни променливи

Нека (X,Y) е случаен вектор од ред 2 и нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Повторно, според теорема 2.10 следува дека $Z = f(X,Y)$ е случајна променлива. Затоа, ќе велиме дека случајната променлива Z е функција од случајниот вектор (X,Y) од ред 2, т.е. е функција од две случајни променливи X и Y. Треба да се определи распределбата на случајната променлива $Z = f(X,Y)$. Типот на оваа распределба зависи од типот на распределба на случајниот вектор (X,Y).

Најпрво, нека (X,Y) е случаен вектор од дискретен тип зададен со неговиот закон на распределба $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $(x_i, y_j) \in R_{(X,Y)}$. За законот на распределба на Z се добива следново:

$$P\{Z = z\} = P\{f(X,Y) = z\} = \sum_{\substack{(x_i,y_j) \in R_{(X,Y)} \\ f(x_i,y_j) = z}} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{\substack{(x_i,y_j) \in R_{(X,Y)} \\ f(x_i,y_j) = z}} p_{ij}.$$

Пример 2.26 Една програма се состои од два модула. Нека случајната променлива X го означува бројот на грешки во првиот, а случајната променлива Y - бројот на грешки во вториот модул. Законот на распределба на случајниот вектор (X, Y) е зададен со следната табела:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0.2	0.1	0.1
2	0.15	0.25	0.2

Ќе ја определиме распределбата на случајната променлива Z - вкупен број грешки во програмата. Јасно е дека $Z = X+Y$. Од $R_{(X,Y)} = \{1,2,3\} \times \{1,2\}$, наоѓаме дека множеството вредности на случајната променлива Z е $R_Z = \{2,3,4,5\}$. За соодветните веројатности се добива:

$$\begin{aligned}
P\{Z=2\} &= P\{X+Y=2\} &&= P\{X=1, Y=1\} = 0.2 \\
P\{Z=3\} &= P\{X+Y=3\} &&= P\{X=1, Y=2\} + P\{X=2, Y=1\} \\
& &&= 0.15 + 0.1 = 0.25 \\
\\
P\{Z=4\} &= P\{X+Y=4\} &&= P\{X=2, Y=2\} + P\{X=3, Y=1\} \\
& &&= 0.25 + 0.1 = 0.35 \\
P\{Z=5\} &= P\{X+Y=5\} &&= P\{X=3, Y=2\} = 0.2
\end{aligned}$$

Значи, законот на распределба на Z е од облик:

$$Z : \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.25 & 0.35 & 0.2 \end{array} \right).$$

Во продолжение, ќе го разгледаме случајот кога (X, Y) е случаен вектор од апсолутно-непрекинат тип зададен со густина на распределба $p(x, y)$ и нека $Z = f(X, Y)$. Густината на Z се определува на следниов начин. Прво, се воведува помошна случајна променлива U која наједноставно е да биде идентична случајна променлива. Значи, $U = X$ или $U = Y$. Без губење на општоста, нека $U = X$. На тој начин, добиваме систем од две случајни променливи Z и U кои се функции од случајните променливи X и Y. Во термини на обични променливи, трансформацијата со која од (X,Y) се добива векторот (Z,U) е зададана со системот равенства:

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ u = x \end{cases} . \tag{2.38}$$

Инверзната трансформација на претходно дадената се добива ако x и y се изразат преку z и u, се добива:

$$\begin{cases} x = g_1(z,u) \\ y = g_2(z,u) \end{cases} , \tag{2.39}$$

за некои функции g_1 и g_2 од $\mathbb{R}^2$ во $\mathbb{R}$.

Нека $S_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ со трансформацијата зададена со (2.38) се пресликува во множество $S_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, т.е.

$$S_2 = \{(z,u) | z = f(x,y), u = x, (x,y) \in S_1\}.$$

Јакобијанот на инверзната трансформација (2.39) е

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} .$$

Сега, согласно правилото за смена во двоен интеграл, имаме:

$$\begin{aligned} P\{(Z,U) \in S_2\} = P\{(X,Y) \in S_1\} &= \iint\limits_{S_1} p(x,y)dxdy \\ &= \iint\limits_{S_2} p(g_1(z,u), g_2(z,u))|J|dzdu. \end{aligned}$$

Оттука, за густината на случајниот вектор (Z,U) се добива:

$$p_{ZU}(z,u) = p(g_1(z,u), g_2(z,u))|J|. \tag{2.40}$$

На крај, распределбата на случајната променлива Z се наоѓа како маргинална распределба од распределбата на случајниот вектор (Z, U).

Пример 2.27 Случајниот вектор (X, Y) е зададен со густината на распределба $p(x, y)$. Ќе ја определиме распределбата на случајната променлива $Z = X + Y$. За таа цел, воведуваме помошна случајна променлива $U = X$. На тој начин е зададена трансформацијата:

$$\begin{cases} z = x + y \\ u = x \end{cases},$$

чија инверзна трансформација е:

$$\begin{cases} x = u \\ y = z - u \end{cases}.$$

Јакобијанот на инверзната трансформација е:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Со замена во (2.40), се добива:

$$p_{ZU}(z,u) = p(u, z-u)|J| = p(u, z-u).$$

Оттука, за маргиналната распределба на Z се добива:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{ZU}(z,u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, z-u)du. \tag{2.41}$$

Пример 2.28 Случајниот вектор (X, Y) е зададен со густината на распределба $p(x, y)$. Ќе ја определиме распределбата на случајната променлива $Z = XY$. Исто како и претходно, воведуваме идентична случајна променлива $U = X$. Добиената трансформација е:

$$\begin{cases} z = xy \\ u = x \end{cases},$$

а нејзината инверзна трансформација е:

$$\begin{cases} x = u \\ y = z/u \end{cases}$$

Јакобијанот на оваа трансформација е:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{u} & -\dfrac{z}{u^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u}.$$

Согласно (2.40), добиваме:

$$p_{ZU}(z, u) = p_{XY}(u, z/u)|J| = p(u, z/u)\frac{1}{|u|}.$$

На крај, маргиналната распределба на Z ќе се добие од заедничката распределба на (Z, U), со:

$$p_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{ZU}(z, u)du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u, z/u)\frac{1}{|u|}du.$$

Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш густината на Z добива облик:

$$p_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(u)p_Y(z/u)\frac{1}{|u|}du. \tag{2.42}$$

На крај од оваа глава, ќе ја формулираме теоремата (чиј доказ е даден во прилог А.5) според која функции од независни случајни променливи се, исто така, независни случајни променливи.

Теорема 2.12

Нека X и Y се независни случајни променливи, а f и g се Борелови функции од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$. Тогаш и случајните променливи $f(X)$ и $g(Y)$ се независни.

Глава 3

Бројни карактеристики на случајни променливи

Распределбата на една случајна променлива или на еден случаен вектор содржи комплетна информација за однесувањето на таа случајна променлива, т.е. на случајниот векор. Овие детални информации може да се сумираат во неколку значајни карактеристики како што се средната вредност, отстапувањето од неа, вредноста која се појавува со најголема веројатност и сл. Најчесто користени бројни карактеристики се математичкото очекување, дисперзијата, стандардната девијација, коваријансата и коефициентот на корелација, кои ќе бидат воведени во оваа глава.

3.1 Математичко очекување

Математичкото очекување на случајната променлива X е нејзина средна вредност. Го означуваме со EX. Но, кога велиме средна вредност, тогаш се мисли на тежинска средина, а не на обична аритметичка средина на вредностите на една случајна променлива. Да ги разгледаме следните примери.

Пример 3.1 Нека случајната променлива X е индикатор на настан A, каде што $P(A) = 0.5$, т.е.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Ако експериментот се повторува голем број пати и се набљудува вредноста што ја прима случајната променлива X, тогаш вредноста $X = 0$ ќе се појави приближно во половина од набљудувањата, а вредноста $X = 1$ во останатате набљудувања. Затоа, разумно е да се земе дека средната вредност ќе биде блиску до 0.5, па разумно е да се земе дека $EX = 0.5$.

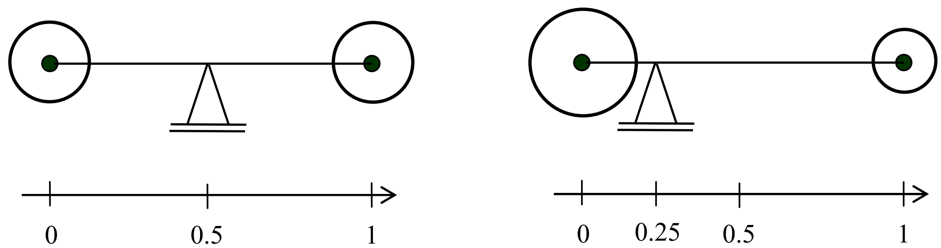
Пример 3.2 Ќе ја разгледаме сега случајната променлива X која е повторно индикатор на настан A, но $P(A) = 0.25$, т.е.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

При голем број повторувања на експериментот, вредноста $X = 1$ се појавува приближно во 1/4 од случаите, а во сите останати се појавува вредноста $X = 0$. Ако некој добива еден денар за секое појавување на вредноста $X = 1$, тогаш тој ќе добива еден денар приближно на секои 4 изведувања на експериментот, т.е. по 0.25 денари по експеримент. Затоа, во овој случај, $EX = 0.25$.

Физичкиот модел на овие два примера е претставен на слика 3.1. Се стават две еднакви маси од по 0.5 кг во точките 0 и 1, и тие се поврзат со еден тврд, но бестежински лост. Масите ги претставуваат веројатностите $P\{X = 0\}$ и $P\{X = 1\}$. Се бара точката во која системот ќе биде во рамнотежа. Бидејќи станува збор за симетричен систем, точката на рамнотежа, т.е. центарот на гравитација е во средината 0.5.

За вториот пример, се поставуваат маси 0.75 и 0.25 во точките 0 и 1, соодветно. Точката на рамнотежа, т.е. центарот на гравитација, во овој случај ќе биде 0.25.



Слика 3.1.

Ако множеството вредности на случајна променлива има повеќе од две, но конечно многу вредности, тогаш со слична дискусија како претходно, се доаѓа до заклучок дека центарот на рамнотежа е во точката определена со равенството (3.1). Оттука, математичко очекување се дефинира на следниов начин.

Дефиниција 3.1

Математичко очекување на дискретна случајна променлива X со конечно множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ е бројот

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \in R_X} x_i p_i. \tag{3.1}$$

Пример 3.3 Нека случајната променлива X е зададена со законот на распределба

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Според формулата (3.1), за математичкото очекување на X добиваме:

$$EX = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.4 = 2.7.$$

Дефиниција 3.2

Нека X е дискретна случајна променлива со пребројливо множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и веројатности $p_n = P\{X = x_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ Математичко очекување на случајната променлива X е бројот

$$EX = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n P\{X = x_n\} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n, \tag{3.2}$$

под услов редот да е апсолутно конвергентен. т.е. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n| p_n < +\infty$.

Пример 3.4 Стрелец стрела во мета и веројатноста да погоди во едно стрелање е 0.7. Стрелецот стрела сè додека не ја погоди целта. Да се определи математичкото очекување на случајната променлива X - број на стрелања во целта.

Решение: Случајната променлива $X \sim Geo(0.7)$, т.е. $R_X = \{1, 2, 3, \dots\}$ и $p_n = P\{X = n\} = 0.3^{n-1} \cdot 0.7$, за $n = 1, 2, \dots$ Согласно формулата (3.2), за математичкото очекување на X се добива:

$$EX = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 0.3^{n-1} \cdot 0.7$$

$$= 0.7 \cdot \left[(1 + 0.3 + 0.3^2 + \dots) + (0.3 + 0.3^2 + \dots) + (0.3^2 + 0.3^3 + \dots) + \dots\right]$$

$$= 0.7 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} 0.3^{i-1} = 0.7 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0.3^{n-1}}{1 - 0.3} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0.3^{n-1} = \frac{1}{1 - 0.3} = \frac{1}{0.7} = \frac{10}{7}.$$

Сумите кои се јавуваат во пресметката на математичкото очекување се, всушност, геометриски редови, па се користи дека

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ar^k = \frac{a}{1-r},$$

ако $|r| < 1$. □

Дефиниција 3.3

Нека X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип зададена со густина $p(x)$. Математичко очекување на случајната променлива X се дефинира со:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx, \tag{3.3}$$

под услов интегралот да е апсолутно конвергентен, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p(x)dx < +\infty$.

Пример 3.5 Нека случајната променлива X има густина на распределба

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 2 < x < 4 \\ 0, & \text{во останатите случаи} \end{cases}$$

Според (3.3), за математичкото очекување на случајната променлива X се добива:

$$EX = \int_{2}^{4} x \cdot \frac{x}{6} dx = \frac{1}{6} \int_{2}^{4} x^2 dx = \frac{1}{6} \frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = \frac{1}{18}(4^3 - 2^3) = \frac{28}{9}.$$

Теорема 3.1

Математичкото очекување ги има следниве својства:

i. $Ec = c$, каде што c е дадена константа;

ii. $|EX| \leq E|X|$;

iii. Ако $P\{a \leq X \leq b\} = 1$, тогаш $a \leq EX \leq b$;

iv. $E(cX) = cEX$, ако EX постои;

v. $E(X+Y) = EX + EY$, ако EX и EY постојат;

vi. Ако X и Y се независни случајни променливи и EX и EY постојат тогаш

$$E(XY) = EX \cdot EY;$$

vii. $E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i EX_i$, каде што c_i, $i = 1, \dots, n$ се дадени константи;

viii. Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ се независни случајни променливи, тогаш

$$E\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} EX_i.$$

Доказот на теорема 3.1 е даден во прилог А.6.

Пример 3.6 Нека X и Y се независни случајни променливи зададени со следниве закони на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Тогаш за математичките очекувања на X и Y се добива:

$$\begin{aligned} EX &= 1 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.3 = 2.8 \\ EY &= 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7 = 1.7 \end{aligned}$$

Според својството *v.* од претходната теорема за математичкото очекување на случајната променлива $X + Y$ се добива:

$$E(X + Y) = EX + EY = 2.8 + 1.7 = 4.5.$$

Од независноста на X и Y и својството *vi.*, пак, се определува математичкото очекување на производот XY со:

$$E(XY) = EX \cdot EY = 2.8 \cdot 1.7 = 4.76.$$

3.2 Дисперзија

Пред да го воведеме поимот за дисперзија, да го загледаме примерот во продолжение.

Пример 3.7 Нека случајната променлива X е зададена со законот на распределба:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix},$$

а случајната променива Y е константа и $P\{Y = 3\} = 1$. За математичките очекувања на X и Y се добива:

$$EX = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.2 = 3, \qquad EY = 3 \cdot 1 = 3.$$

Да воочиме дека двете случајни променливи имаат исто математичко очекување, иако нивната распределба се разликува. Имено, првата случајна променлива прима 5 вредности со еднаква веројатност, а втората е константна. Оттука, ако не е позната распределбата на една случајна променлива, а се знае само нејзиното математичко очекување, може да се извлече заклучок само за бројот кој е тежинска средина на вредностите на случајната променлива, но не и какво е отстапувањето од таа средина.

Затоа се јавува потребата од воведување на нова карактеристика која ќе го определува отстапувањето на вредностите на една случајна променлива од нејзиното математичко очекување. Таа карактеристика се нарекува дисперзија на случајната променлива.

Дефиниција 3.4

Дисперзија (или *варијанса*) на случајната променлива X е средноквадратно отстапување на вредностите на една случајна променлива од нејзиното математичко очекување, т.е. тоа е бројот

$$DX = E(X - EX)^2 \tag{3.4}$$

Со развивање на изразот за определување на дисперзијата и применување на својствата на математичкото очекување се добива следното:

$$\begin{aligned} DX &= E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) \\ &= EX^2 - 2EX \cdot EX + (EX)^2 \\ &= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 \\ &= EX^2 - (EX)^2 \end{aligned}$$

Значи,

$$DX = EX^2 - (EX)^2. \tag{3.5}$$

Ако случајната променлива X е од дискретен тип зададена со множество вредности R_X и веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за $x_i \in R_X$, тогаш дисперзијата на X се определува со:

$$DX = \sum_{x_i \in R_X} (x_i - EX)^2 p_i,$$

а

$$EX^2 = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 p_i.$$

Ако пак, X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип зададена со густина $p(x)$, тогаш

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 p(x) dx,$$

а

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx.$$

Пример 3.8 Нека случајната променлива X е зададена со законот на распределба

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Во пример 3.3 определивме $EX = 2.7$. Сега, според претходните формули определуваме:

$$EX^2 = 1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.5 + 4^2 \cdot 0.4 = 8.5,$$

па за дисперзијата на X се добива:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 8.5 - (2.7)^2 = 1.21.$$

Пример 3.9 Нека случајната променлива X има густина на распределба

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6}, & 2 < x < 4 \\ 0, & \text{во останатите случаи} \end{cases}$$

Во пример 3.5, определивме дека $EX = \dfrac{28}{9}$. Според претходната формула за EX^2, за случајна променлива X од апсолутно-непрекинат тип, добиваме:

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \int_2^4 x^2 \cdot \frac{x}{6} dx = \frac{1}{6} \int_2^4 x^3 dx = \frac{1}{6} \frac{x^4}{4} \Big|_2^4 = \frac{1}{24}(4^4 - 2^4) = 10,$$

па

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 10 - \left(\frac{28}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}.$$

Теорема 3.2

Дисперзијата ги има следниве својства:

i. $DX \geq 0$. Притоа, $DX = 0$ ако и само ако $P\{X = c\} = 1$, каде што $c = const$;

ii. $D(X + c) = DX$, за произволна константа c;

iii. $D(cX) = c^2 DX$;

iv. Ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш
$$D(X + Y) = DX + DY;$$

v. Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се по парови независни случајни променливи, а c_1, $c_2, \ldots$, c_n се дадени константи, тогаш
$$D(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n) = c_1^2 DX_1 + c_2^2 DX_2 + \cdots + c_n^2 DX_n.$$

vi. $E(X - c)^2 \geq E(X - EX)^2$, за произволна константа c.

Доказот на теорема 3.2 е даден во прилог А.6.

3.3 Математичко очекување и дисперзија за некои значајни распределби

Индикатор на настан A**.** Нека A е даден настан и $P(A) = p$, а $q = 1 - p$. Тогаш индикаторот на настан A е

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

За математичкото очекување на I_A се добива:

$$EI_A = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Сега,

$$EI_A^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p,$$

па за дисперзијата на I_A се добива:

$$DI_A = EI_A^2 - (EI_A)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Биномна распределба. Нека $X \sim B(n,p)$. Тогаш X означува број на појавувања на настанот A во Бернулиева шема со n експерименти. Затоа, X може да се запише во облик $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, каде $X_i = I_A$ и покажува дали се појавил или не настанот A во i-тата серија од експериментот, $i = 1, 2, \ldots, n$. Исто така, X_i се независни случајни променливи, бидејќи се поврзани за независни експерименти. Сега, согласно претходно изведеното, $EX_i = EI_A = p$, а $DX_i = DI_A = pq$. Според својството *vii.* од теорема 3.1, за математичкото очекување на X се добива:

$$EX = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n = np,$$

а од независноста на X_i и својството *v.* од Теорема 3.2, ја определуваме дисперзијата на X со:

$$DX = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \overset{\text{нез.}}{=\!=} DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n = npq.$$

Рамномерна распределба на конечно множество. Нека $X \sim U(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$. Тогаш $p_i = P\{X = x_i\} = \dfrac{1}{n}$, за $i = 1, 2, \ldots, n$. Сега, за математичкото очекување на X се добива:

$$EX = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \overline{x}_n,$$

т.е. математичкото очекување на X е аритметичка средина на елементите од множеството $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Понатаму,

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_n)^2 = s_n^2,$$

т.е. дисперзијата на X е дисперзија на множеството вредности $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Геометриска распределба. Нека $X \sim Geo(p)$. Тогаш множеството вредности на X е $R_X = \{1, 2, \dots\}$ и

$$p_i = P\{X = i\} = q^{i-1}p, \qquad i \in R_X.$$

За полесно пресметување на сумите при определување на математичко очекување и дисперзија кај геометриска распределба, се воведува функцијата:

$$\Psi(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i z^i, z \in (0,1).$$

Првите два извода на оваа функција се:

$$\Psi'(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} i p_i z^{i-1}, \qquad \Psi''(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} i(i-1) p_i z^{i-2}.$$

Сега,

$$\Psi'(1) = \sum_{i=1}^{+\infty} i p_i = EX,$$

а

$$\Psi''(1) = \sum_{i=1}^{+\infty} i(i-1) p_i = EX^2 - EX.$$

Оттука,

$$EX = \Psi'(1), \qquad EX^2 = \Psi''(1) + \Psi'(1). \tag{3.6}$$

Значи, определувањето на математичкото очекување и дисперзијата на случајната променлива X се сведува на определување изводи на функцијата $\Psi(z)$. Определуваме:

$$\Psi(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} p z^i = pz \sum_{i=1}^{+\infty} (qz)^{i-1} = \frac{pz}{1 - qz},$$

како сума на геометриски ред со прв член 1 и количник qz. Првите два извода на оваа функција се:

$$\Psi'(z) = \frac{p}{(1-qz)^2}, \qquad \Psi''(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}$$

и

$$\Psi'(1) = \frac{1}{p}, \qquad \Psi''(1) = \frac{2q}{p^2}.$$

Согласно, претходно утврдените равенства (3.6), наоѓаме:

$$\begin{aligned} EX &= \Psi'(1) = \frac{1}{p} \\ EX^2 &= \Psi''(1) + \Psi'(1) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{1+q}{p^2} \\ DX &= EX^2 - (EX)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

Забелешка 3.1 Математичкото очекување на X може да се определи и на начин како во пример 3.4. Имено,

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=1}^{+\infty} ip_i = \sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1}p \\ &= p[(1+q+q^2+\dots) + (q+q^2+\dots) + (q^2+q^3+\dots) + \dots] \\ &= p\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=n}^{+\infty} q^{i-1} = p\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{n-1}}{1-q} = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Пуасонова распределба. Нека $X \sim P(\lambda)$. Тогаш $R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ и

$$p_i = P\{X = i\} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \qquad i \in R_X.$$

За математичкото очекување на X наоѓаме:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=0}^{+\infty} ip_i = \sum_{i=0}^{+\infty} i\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{r!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda, \end{aligned}$$

бидејќи $\sum\limits_{r=0}^{+\infty}\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} = 1$, како сума на веројатности кај Пуасонова $P(\lambda)$ распределба.

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{i=0}^{+\infty} i^2 p_i = \sum_{i=0}^{+\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{+\infty} i \frac{\lambda^i}{(i-1)!}e^{-\lambda} \\ &= \sum_{r=0}^{+\infty}(r+1)\frac{\lambda^{r+1}}{r!}e^{-\lambda} \\ &= \lambda\sum_{r=0}^{+\infty} r\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} + \lambda\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} = \lambda^2+\lambda, \end{aligned}$$

бидејќи $\sum\limits_{r=0}^{+\infty} r\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} = \lambda$, како математичко очекување на разгледуваната распределба. Сега, за дисперзијата на X се добива следново:

$$DX = EX^2 - EX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Значи, кај Пуасонова $P(\lambda)$ распределба, математичкото очекување и дисперзијата се еднакви на параметарот λ.

Рамномерна распределба на интервал. Нека $X \sim U(a,b)$. X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип, зададена со густината:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$$

Тогаш, математичкото очекување на X е:

$$EX = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{2(b-a)}\ x^2\Big|_b^a = \frac{a+b}{2}\ .$$

За EX^2 се добива:

$$EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} \; x^3 \Big|_b^a = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \; ,$$

а дисперзијата на X е од облик:

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Нормална распределба. Густината на случајната променлива $X \sim N(m, \sigma^2)$ е од облик:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

Математичкото очекување на X се определува на следниот начин:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

За решавање на последниот интеграл се воведува смена:

$$\frac{x-m}{\sigma} = t, \quad \text{од каде што} \quad x = \sigma t + m \quad \text{и} \quad dx = \sigma \; dt.$$

Сега,

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + m) e^{-t^2/2} \cdot \sigma \; dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2/2} + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} = m,$$

бидејќи $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2/2} = 0$, како интеграл од непарна функција на симетричен интервал, а $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} = 1$, како интеграл од густина на нормална $N(0,1)$ распределба.

При определување на дисперзијата, се добива:

$$\begin{aligned} DX &= E(X-EX)^2 = E(X-m)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx. \end{aligned}$$

Со воведување на истата смена како и претходно, имаме:

$$DX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 e^{-t^2/2} \cdot \sigma\ dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}.$$

Последниот интеграл го решаваме со парцијална интеграција.

$$\begin{aligned} DX &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dx \qquad \left(\begin{array}{c} \text{Парцијална интеграција:} \\ u = t,\ dv = te^{-t^2/2}dt \\ du = dt, \quad v = -e^{-t^2/2} \end{array} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(-te^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \right) = \sigma^2, \end{aligned}$$

бидејќи $\lim\limits_{t\to+\infty}(-te^{-t^2/2}) = 0$, $\lim\limits_{t\to-\infty}(-te^{-t^2/2}) = 0$ и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = 1$, како интеграл од густина на нормална нормирана распределба. Значи, кај нормална $N(m, \sigma^2)$ распределба, математичкото очекување е еднакво на првиот параметар m, а дисперзијата на вториот параметар σ^2.

Експоненцијална распределба. Нека $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Тогаш

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Сега, со примена на парцијална интеграција, определуваме:

$$EX = \int\limits_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

$$EX^2 = \int\limits_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2},$$

па

$$DX = EX^2 - EX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Гама распределба Нека $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Густината на X е определена со:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-x/\beta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} EX &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-x/\beta} dx \quad \left(\text{Смена: } \frac{x}{\beta} = t, \quad dx = \beta dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} \beta^{\alpha} t^{\alpha} e^{-t} \beta dt \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \alpha \Gamma(\alpha) = \alpha\beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-x/\beta} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} \beta^{\alpha+1} t^{\alpha+1} e^{-t} \beta dt \\ &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2) = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) = \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2. \end{aligned}$$

Сега, $DX = EX^2 - (EX^2) = \alpha\beta^2$.

Да напоменеме дека во горното изведување е користено дека $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ и $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Кошиева распределба. Нека случајната променлива X има Кошиева распределба, зададена со густината

$$p(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2}.$$

Ќе покажеме дека математичко очекување, па оттука и дисперзија, на X не постои. За да постои EX потребно е да конвергира интегралот

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx.$$

Во овој случај,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \qquad \big(\text{Смена:}\ \ 1+x^2 = t\big) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{1}^{k} \frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{k\to+\infty} \ln t|_1^k = \frac{1}{\pi} \lim_{k\to+\infty} (\ln k - \ln 1) = +\infty.
\end{aligned}$$

Значи, интегралот не е апсолутно конвергентен, па EX не постои.

3.4 Моменти на случајни променливи

Во претходните лекции видовме дека математичкото очекување е средна вредност на една случајна променлива, а дисперзијата е мерка за расејувањето на вредностите на случајната променлива од нејзиното математичко очекување. Но, во некои случаи, посебно во статистика, за добивање подобра претстава за една случајна променлива, пожелно е да се знаат и други карактеристики, кои покажуваат симетричност на вредностите на случајната променлива, закривеност на распределбата и сл. Затоа, се дефинираат таканаречени моменти од повисок ред.

Дефиниција 3.5

Почетен момент од ред k на случајната променлива X е бројот $\nu_k = EX^k$. Притоа, ако X е дискретна случајната променлива, тогаш
$$\nu_k = \sum_{x_i \in R_X} x_i^k P\{X = x_i\},$$
а ако X е апсолутно-непрекината случајна променлива со густина $p(x)$, тогаш
$$\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx.$$

Дефиниција 3.6

Централен момент од ред k на случајната променлива X е бројот $\mu_k = E(X - EX)^k$. Притоа,

$$\mu_k = \sum_{x_i \in R_X} (x_i - EX)^k P\{X = x_i\} \quad \text{(во дискретен случај)}$$
$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^k p(x) dx \qquad \text{(во апсолутно-непрекинат случај)}$$

Од претходните дефиниции може да се воочи дека математичкото очекување на една случајна променлива е почетен момент од прв ред, а дисперзијата е централен момент од втор ред.

Почетни моменти на нормална нормирана распределба. Нека $X \sim N(0,1)$. Ако k е непарен број ($k = 2n+1$, $n = 0, 1, \dots$), тогаш

$$\nu_k = EX^k = EX^{2n+1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} p_X(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0,$$

како интеграл од непарна функција на симетричен интервал. За k парен број, моментот од ред k ќе го изведеме индуктивно. Најпрво,

$$\begin{aligned}
\nu_2 = EX^2 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \qquad \begin{pmatrix} \text{Парцијална интеграција:} \\ u = x,\ dv = xe^{-x^2/2}dx \\ du = dx, \quad v = -e^{-x^2/2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-xe^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_4 = EX^4 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \qquad \begin{pmatrix} \text{Парцијална интеграција:} \\ u = x^3,\ dv = xe^{-x^2/2}dx \\ du = 3x^2dx, \quad v = -e^{-x^2/2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x^3e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2/2} dx \right) \\
&= 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2/2} dx \\
&= 3EX^2 = 3 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Индуктивната претпоставка е следнава:

$$\nu_{2k} = EX^{2k} = (2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1 = (2k-1)!!.$$

Сега,

$$\begin{aligned}
\nu_{2k+2} = EX^{2k+2} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \qquad \begin{pmatrix} \text{Парцијална интеграција:} \\ u = x^{2k+1},\ dv = xe^{-x^2/2}dx \\ du = (2k+1)x^{2k}dx, \quad v = -e^{-x^2/2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-x^{2k+1}e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (2k+1)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}e^{-x^2/2} dx \right) \\
&= (2k+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}e^{-x^2/2} dx \\
&= (2k+1)EX^{2k} = (2k+1)(2k-1)!! = (2k+1)!!,
\end{aligned}$$

со што тврдењето е покажано.

Централни моменти на $N(m,\sigma^2)$ распределба. Според пример 2.23 а), ако $Y \sim N(m,\sigma^2)$, тогаш $X = \dfrac{Y-m}{\sigma} \sim N(0,1)$. Од трансформацијата, пак, наоѓаме дека $Y - EY = Y - m = \sigma X$. Оттука, за k непарен број,

$$\mu_k = E(Y - EY)^k = E(\sigma X)^k = \sigma^k EX^k = 0,$$

бидејќи $EX^k = 0$. Ако $k = 2n$ е парен број, тогаш

$$\mu_k = E(Y - EY)^{2n} = E(\sigma X)^{2n} = \sigma^{2n} EX^{2n} = \sigma^{2n}(2n-1)!!.$$

3.5 Моменти на случајни вектори

Дефиниција 3.7

Математичко очекување на случајниот вектор (X,Y) е подредениот пар реални броеви (EX, EY), а дисперзија на (X,Y) е подредениот пар (DX, DY).

Пример 3.10 Нека случајниот вектор (X,Y) е зададен со законот на распределба:

$Y \backslash X$	1	2	Σ
2	0.3	0.1	0.4
4	0.2	0.4	0.6
Σ	0.5	0.5	1

За маргиналните распределби на X и Y се добива:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad Y : \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Сега,

$$\begin{aligned} EX &= 1\cdot 0.5 + 2\cdot 0.5 = 1.5 \\ EY &= 2\cdot 0.4 + 4\cdot 0.6 = 3.2. \end{aligned}$$

Оттука, $E(X,Y) = (1.5, 3.2)$. Од друга страна,

$$\begin{aligned} EX^2 &= 1^2\cdot 0.5 + 2^2\cdot 0.5 = 2.5 \\ EY^2 &= 2^2\cdot 0.4 + 4^2\cdot 0.6 = 11.2, \end{aligned}$$

така што

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 2.5 - 1.5^2 = 0.25, \qquad DY = EY^2 - (EY)^2 = 11.2 - 3.2^2 = 0.96,$$

т.е $(DX, DY) = (0.25, 0.96)$.

Дефиниција 3.8

i) *Почетен момент од ред* (r,s) за случајниот вектор (X,Y) е бројот

$$\nu_{r,s} = EX^rY^s.$$

ii) *Централен момент од ред* (r,s) за случајниот вектор (X,Y) е бројот

$$\mu_{r,s} = E((X-EX)^r(Y-EY)^s).$$

Ако (X,Y) е случаен вектор од дискретен тип со множество вредности $R_{(X,Y)}$ тогаш почетниот момент од ред (r,s) се определува со:

$$\nu_{r,s} = \sum_{(x_i,y_j)\in R_{(X,Y)}} x_i^r y_j^s P\{X = x_i, Y = y_j\},$$

а централниот момент од ред (r,s) со:

$$\mu_{r,s} = \sum_{(x_i,y_j)\in R_{(X,Y)}} (x_i - EX)^r (y_j - EY)^s P\{X = x_i, Y = y_j\}.$$

Ако, пак, (X, Y) е случаен вектор од апсолутно-непрекинат тип зададен со густина $p(x, y)$, тогаш почетниот момент од ред (r, s) се определува со:

$$\nu_{r,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r y^s p(x, y) dx dy,$$

а централниот момент од ред (r, s) со:

$$\mu_{r,s} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^r (y - EY)^s p(x, y) dx dy.$$

Матрицата составена од централните моменти од ред (r, s), за $r + s = 2$:

$$\begin{bmatrix} \mu_{2,0} & \mu_{1,1} \\ \mu_{1,1} & \mu_{0,2} \end{bmatrix}$$

се нарекува *дисперзиска матрица* или *матрица на варијанси и коваријанси* за векторот (X, Y). Името доаѓа од таму што $(\mu_{2,0}, \mu_{0,2}) = (DX, DY)$, а бројот

$$\mu_{1,1} = E((X - EX)(Y - EY))$$

се нарекува *коваријанса* на X и Y и се означува со $cov(X, Y)$. Значи,

$$cov(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)).$$

Со основни пресметки и примена на својствата на математичкотоо очекување, се добива:

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= E(XY - X \cdot EY - Y \cdot EX + EX \cdot EY)) \\ &= E(XY) - EX \cdot EY - EY \cdot EX + EX \cdot EY \\ &= E(XY) - EX \cdot EY. \end{aligned} \tag{3.7}$$

За две случајни променливи велиме дека се *некорелирани*, ако $cov(X, Y) = 0$. Сега, од (3.7), директно следува точноста на следната теорема.

Теорема 3.3

Ако две случајни променливи се независни, тогаш тие се и некорелирани.

Во општ случај, обратното тврдење не важи. Тоа ќе го покажеме со следниов пример.

Пример 3.11 Нека (X,Y) има рамномерна распределба на круг со радиус R. Тогаш

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{R^2\pi}, & x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{во останатите случаи} \end{cases}.$$

Сега,

$$p_X(x) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{R^2\pi} dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{R^2\pi}, \quad -R \leq x \leq R.$$

Од причини на симетрија,

$$p_Y(y) = \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{R^2\pi}, \quad -R \leq y \leq R.$$

Јасно е дека, $p(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$, т.е. X и Y не се независни случајни променливи.

Од друга страна, $EX = \int\limits_{-R}^{R} x \cdot \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{R^2\pi} dx = 0$, како интеграл од непарна функција на симетричен интервал. Од исти причини и $EY = 0$.

За $E(XY)$ се добива:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x,y)dxdy \\
&= \iint\limits_{x^2+y^2<R^2} xy\frac{1}{R^2\pi}dxdy \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Смена во поларни координати:}\\ x = r\cdot\cos\varphi, \quad y = r\cdot\sin\varphi;\ J = r\end{array}\right) \\
&= \frac{1}{R^2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\cdot\cos\varphi\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot rd\varphi dr \\
&= \frac{1}{R^2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\cos\varphi\sin\varphi drd\varphi \\
&= \frac{1}{2R^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R d\varphi \\
&= \frac{1}{2R^2\pi}\frac{R^4}{4}\left[\frac{-\cos 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{R^2}{8\pi}(-1+1) = 0.
\end{aligned}$$

Добивме дека $cov(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY = 0$. Значи, X и Y се некорелирани, но не се независни случајни променливи.

Дефиниција 3.9

Бројот

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}} = \frac{E((X-EX)(Y-EY))}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}} \tag{3.8}$$

се нарекува *коефициент на корелација* помеѓу случајните променливи X и Y.

Својствата на коефициентот на корелација се дадени во следната теорема.

Теорема 3.4

i) За кои било две случајни променливи X и Y, $|\rho_{XY}| \leq 1$.
ii) $|\rho_{XY}| = 1$ ако и само ако $P\{Y = aX + b\} = 1$, за $a \neq 0$.

Доказот на оваа теорема е даден во прилог А.7.

Теоремата покажува дека коефициентот на корелација е секогаш во границите помеѓу -1 и 1 и ако тој коефициент по апсолутна вредност е 1, тогаш помеѓу X и Y постои линеарна зависност. Оттука, следува дека коефициентот на корелација е мерка за линеарната зависност помеѓу X и Y. Колку тој коефициент е поблиску до 1 (по апсолутна вредност), толку линеарната зависност помеѓу X и Y е посилна. Кога коефициентот на корелација се доближува до 0, тогаш како што утврдивме претходно X и Y се некорелирани.

Пример 3.12 Случајниот вектор (X,Y) е даден со следниот закон на распределба:

$Y \setminus X$	1	3	5	$\sum$
1	0.12	0.18	0.10	0.4
2	0.10	0.11	0.39	0.6
$\sum$	0.22	0.29	0.49	1

Оттука, за законот на распределба на X и Y се добива:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.22 & 0.29 & 0.49 \end{pmatrix} \qquad Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Математичките очекувања и дисперзиите на X и Y се определуваат на стандарден начин:

$$\begin{aligned}
EX &= 1\cdot 0.22 + 3\cdot 0.29 + 5\cdot 0.49 = 3.54,\\
EY &= 1\cdot 0.4 + 2\cdot 0.6 = 1.6,\\
EX^2 &= 1^2\cdot 0.22 + 3^2\cdot 0.29 + 5^2\cdot 0.49 = 15.08,\\
EY^2 &= 1^2\cdot 0.4 + 2^2\cdot 0.6 = 2.8,\\
DX &= EX^2 - (EX)^2 = 2.55,\\
DY &= EY^2 - (EY)^2 = 0.24,
\end{aligned}$$

а почетниот момент од ред (1,1) за векторот (X, Y) е:

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j P\{X = x_i, Y = y_j\}\\
&= 1\cdot 1\cdot 0.12 + 3\cdot 1\cdot 0.18 + 5\cdot 1\cdot 0.10 + 1\cdot 2\cdot 0.10 + 3\cdot 2\cdot 0.11\\
&\quad +5\cdot 2\cdot 0.39\\
&= 5.92.
\end{aligned}$$

Сега, за коваријансата на X и Y се добива:

$$cov(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY = 0.256,$$

а коефициентот на корелација помеѓу X и Y е:

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}} = 0.32.$$

Пример 3.13 Ќе го определиме коефициентот на корелација помеѓу случајните променливи X и Y, ако $(X,Y) \sim N_2(m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$. Претходно покажавме дека $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$, а $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y^2)$, па оттука за дводимензионална нормална распределба: $EX = m_X$, $EY = m_Y$, $DX = \sigma_X^2$ и $DY = \sigma_Y^2$. Најпрво, ќе ја определиме коваријансата на X и Y:

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E((X - EX)(Y - EY)) = E((X - m_X)(Y - m_Y))\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y)p(x,y)dxdy,
\end{aligned}$$

каде што $p(x,y)$ е густина на дводимензионална нормална распределба, т.е.

$$
\begin{aligned}
&p(x,y)\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-2\rho\frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

За да се реши интегралот за определување на коваријансата ја воведуваме следната смена на променливи:

$$\frac{x-m_X}{\sigma_X}=u \qquad \frac{y-m_Y}{\sigma_Y}=v.$$

Оттука, $x=\sigma_X u+m_X$, $y=\sigma_Y v+m_Y$, а Јакобијанот на трансформацијата е:

$$J=\begin{vmatrix}\sigma_X & 0\\ 0 & \sigma_Y\end{vmatrix}=\sigma_X\sigma_Y.$$

Добиваме:

$$
\begin{aligned}
&cov(X,Y)\\
&=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_X u\sigma_Y v\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2-2\rho uv+v^2\right]\right\}\sigma_X\sigma_Y dvdu\\
&=\frac{\sigma_X\sigma_Y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\int_{-\infty}^{+\infty}v\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2\right]\right\}dvdu\\
&=\frac{\sigma_X\sigma_Y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\int_{-\infty}^{+\infty}ve^{-(v-\rho u)^2/2(1-\rho^2)}e^{-u^2/2}dvdu.
\end{aligned}
$$

Во внатрешниот интеграл, воведуваме смена:

$$\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}=t \quad\Rightarrow\quad v=t\sqrt{1-\rho^2}+\rho u, \qquad dv=\sqrt{1-\rho^2}dt.$$

Сега,

$$
\begin{aligned}
&cov(X,Y)\\
&= \frac{\sigma_X\sigma_Y}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sqrt{1-\rho^2}+\rho u)e^{-t^2/2}\sqrt{1-\rho^2}dtdu\\
&= \frac{\sigma_X\sigma_Y}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2/2}\sqrt{1-\rho^2}\ dtdu + \frac{\rho\sigma_X\sigma_Y}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dtdu\\
&= \frac{\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2/2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2/2}\ dt\right] du\\
&\qquad + \frac{\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2/2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt\right] du\\
&\quad = \frac{\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2/2}du\\
&\quad = \rho\sigma_X\sigma_Y.
\end{aligned}
$$

Притоа, користиме дека $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2/2} = EZ = 0$, а $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2/2}du = EZ^2 = DZ = 1$, каде што Z е случајна променлива со $N(0,1)$.

На крај,

$$
\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{\rho\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X\sigma_Y} = \rho.
$$

Значи, кај дводимензионална нормална распределба, петтиот параметар ρ е точно коефициентот на корелација помеѓу случајните променливи X и Y.

Според претходното, ако $\rho = 0$, тогаш нормално распределените случајни променливи X и Y се некорелирани. Но, во Пример 2.20, покажавме дека ако $(X,Y) \sim N_2(m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho)$, тогаш X и Y се независни ако и само ако $\rho = 0$. Оттука, следува точноста на следната теорема.

Теорема 3.5

Нормално распределените случајни променливи X и Y се независни ако и само ако тие се некорелирани.

Оваа теорема има големо практично значење. Имено, ако знаеме дека X и Y имаа нормална распредеба, тогаш проверката на нивната независност се сведува на определување на коефициент на корелација и проверка дали тој е 0. Всушност доволно е само да се провери дали коваријанса помеѓу овие две променливи е 0. Тоа е секако многу поедноставна задача од проверката дали $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$.

Глава 4

Гранични теореми

4.1 Карактеристична функција

Покрај реалните случајни променливи со кои работевме досега, сега се појавува потреба од разгледување на комплексни случајни променливи. Ако X и Y се реални случајни променливи, тогаш $Z = X + iY$ е комплексна случајна променлива и нејзиното математичко очекување го дефинираме со

$$EZ = EX + iEY. \tag{4.1}$$

Дефиниција 4.1

Нека X е реална случајна промелива. *Карактеристична функција* на X е комплексната функција

$$f(t) = Ee^{itX},$$

каде што i е имагинарната единица.

Имајќи ја предвид Ојлеровата формула

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

и формулата (4.1) од дефиниција на математичкото очекување на комплексна случајна променлива, добиваме:

$$f(t) = Ee^{itX} = E(\cos(tX) + i\sin(tX)) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX)). \tag{4.2}$$

Притоа, ако X е дискретна случајна променлива, тогаш

$$E(\cos tX) = \sum_{x_j \in R_X} \cos(tx_j)P\{X = x_j\}, \quad E(\sin tX) = \sum_{x_j \in R_X} \sin(tx_j)P\{X = x_j\},$$

а ако X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип зададена со густина $p(x)$, тогаш

$$E(\cos tX) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)p(x)dx, \quad E(\sin tX) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)p(x)dx.$$

Ќе определиме карактеристични функции на некои поважни распределби.

Константна случајна променлива. Нека $P\{X = a\} = 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} E(\cos(tX)) &= \cos(ta) \\ E(\sin(tX)) &= \sin(ta), \end{aligned}$$

па според (4.2), добиваме:

$$f(t) = \cos(ta) + i\sin(ta) = e^{ita}.$$

Индикатор на настан A**.** Нека $p = P(A)$ и

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Определуваме:

$$\begin{aligned} E(\cos(tX)) &= \sum_{j=0}^{1} \cos(tj) P\{X = j\} = q + p\cos t \\ E(\sin(tX)) &= \sum_{j=0}^{1} \sin(tj) P\{X = j\} = p\sin t, \end{aligned}$$

па од (4.2) определуваме:

$$f(t) = q + p\cos t + i(p\sin t) = q + p(\cos t + i\sin t) = q + pe^{it}.$$

Теорема 4.1

За произволна случајна променлива X, нејзината карактеристична функција во 0 има вредност 1, т.е $f(0) = 1$.

Доказ:

$$f(0) = E(\cos(0 \cdot X)) + iE(\sin(0 \cdot X)) = E(1) + iE(0) = 1.$$

□

Нормална распределба $N(0,1)$ Случајната променлива X е зададена со густината

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Сега,

$$E(\cos(tX)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(tx)e^{-x^2/2}dx,$$

а

$$E(\sin(tX)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(tx)e^{-x^2/2}dx = 0$$

како интеграл од непарна функција на симетричен интервал. Оттука, според (4.2), за карактеристичната функција на X се добива:

$$f_X(t) = E(cos(tX)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(tx)e^{-x^2/2}.$$

Со диференцирање на последното равенство и решавање на добиениот интеграл со парцијална интеграција, се добива:

$$\begin{aligned} f'_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-\sin(tx))xe^{-x^2/2}dx \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Парцијална интеграција:}\\ u=\sin(tx),\ dv = xe^{-x^2/2}dx\\ du = t\cos(tx)dx, \quad v = -e^{-x^2/2}\end{array}\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\sin(tx)e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(tx)e^{-x^2/2}\right]\\ &= -tf_X(t), \end{aligned}$$

бидејќи $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(tx)e^{-x^2/2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin(tx)}{e^{-x^2/2}} = 0$, а аналогно и $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin(tx)e^{-x^2/2} = 0$. Добивме диференцијална равенка со раздвоиви променливи од облик:

$$f'_X(t) = -tf_X(t),$$

т.е.

$$\frac{df_X(t)}{f_X(t)} = -tdt.$$

Со интегрирање се добива дека:

$$\ln f_X(t) = -\frac{t^2}{2} + \ln C, \qquad \text{т.е.} \qquad f_X(t) = Ce^{-t^2/2}.$$

Константата C ќе ја определиме од условот $f_X(0) = 1$, од каде што следува дека $C = 1$, т.е. карактеристичната функција на нормална $N(0,1)$ распределба е

$$f_X(t) = e^{-t^2/2}. \tag{4.3}$$

Во следните теореми се дадени основните својства на карактеристичните функции.

Теорема 4.2

Карактеристична функција на збир на две независни случајни променливи е производ од карактеристичните функции на тие променливи, т.е. ако X и Y се независни случајни променливи, тогаш карактеристичната функција на $X + Y$ е:

$$f_{X+Y}(t) = f_X(t) f_Y(t).$$

Доказ: $f_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX}e^{itY}) \stackrel{\text{нез.}}{=} E(e^{itX})E(e^{itY}) = f_X(t)f_Y(t)$. Притоа, користиме дека e^{itX} и e^{itY} се независни случајни променливи како функциии од независните случајни променливи X и Y. $\square$

Последица 4.1

Ако $Y = aX + b$, каде што a и b се дадени константи, тогаш

$$f_Y(t) = e^{itb} f_X(at).$$

Доказ: $f_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{itaX}e^{itb}) = e^{itb}E(e^{itaX}) = e^{itb}f_X(at)$. $\square$

Пример 4.1 Нека $Y \sim N(m, \sigma^2)$. Сакаме да определиме карактеристична функција на Y. Нека $X \sim N(0,1)$. Како што покажавме во пример 2.23 б), $Y = \sigma X + m \sim N(m, \sigma^2)$. Со користење на последица 4.1, за карактеристичната функција на Y, наоѓаме:

$$f_Y(t) = Ee^{itY} = Ee^{it(\sigma X+m)} = e^{itm}Ee^{it\sigma X} = e^{itm}f_X(\sigma t).$$

Со замена на 4.3, се добива:

$$f_Y(t) = e^{imt}\ e^{-\sigma^2 t^2/2}. \tag{4.4}$$

Следната теорема покажува како со помош на изводи на карактеристична функција на една случајна променлива може да се определат почетните моменти на таа случајна променлива.

Теорема 4.3

Нека за случајната променлива X постои апсолутен почетен момент од ред n ($E|X|^n < +\infty$). Тогаш карактеристичната функција $f(t)$ на X е n пати диференцијабилна и за $k \leq n$ важи:

$$f^{(k)}(0) = i^k EX^k.$$

Доказот на ова тврдење е даден во прилог А.8

Следната теорема која ќе ја наведеме без доказ, покажува зошто е значајна карактеристичната функција на една случајна променлива.

Теорема 4.4

Функцијата на распределба $F(x)$ на дадена случајна променлива X е еднозначно определена од нејзината карактеристична функција $f(t)$.

Значи, ако е позната карактеристичната функција на една случајна променлива, може да се определи еднозначно нејзиниот закон на распределба (во дискретен случај) или нејзината густина (во апсолутно-непрекинат случај), иако мора да се напомене дека таа постапка не е секогаш едноставна.

Теорема 4.5 (Директна гранична теорема)

Ако низата $\{F_n(x)\}$ од функции на распределба конвергира кон $F(x)$, тогаш соодветната низа $\{f_n(t)\}$ од карактеристични функции конвергира кон карактеристична функција $f(t)$ соодветна на функцијата на распределба $F(x)$, при што оваа конвергенција е рамномерна на секој конечен интервал.

Теорема 4.6 (Обратна гранична теорема)

Ако низата $\{f_n(t)\}$ од карактеристични функции конвергира кон функцијата $f(t)$ која е непрекината за $t = 0$, тогаш соодветната низа $\{F_n(x)\}$ од функции на распределба конвергира кон функцијата на распределба $F(x)$ чија карактеристична функција е $f(t)$.

4.2 Видови конвергенција на случајни променливи

Во теоријата на веројатност се среќаваат повеќе видови на конвергенција. Овде ќе дефинираме четири од нив.

Дефиниција 4.2

За низата случајни променливи X_1, X_2,... велиме дека *конвергира по веројатност* кон случајна променлива X, ако за кој било реален број $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1.$$

Ќе пишуваме $X_n \xrightarrow{\text{в}} X$.

Дефиниција 4.3

Низата случајни променливи X_1, X_2,... *конвергира скоро сигурно* (или *конвергира со веројатност* 1) кон случајна променлива X, ако

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(E) = X(E), \text{ за } E \in \Omega \setminus N,$$

каде што $P(N) = 0$ (можно е и $N = \emptyset$), или

$$P\{E \mid X_n(E) \to X(E), n \to +\infty\} = 1.$$

Ќе пишуваме $X_n \xrightarrow{\text{с.с.}} X$.

Дефиниција 4.4

За низата случајни променливи X_1, X_2,... велиме дека *конвергира по распределба* кон случајна променлива X, ако

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x),$$

во секоја точка на непрекинатост на $F(x)$, при што $F_n(x)$ е функција на распределба на X_n, $n = 1, 2, \dots$, а $F(x)$ е функција на распределба на случајната променлива X. Ќе пишуваме $X_n \xrightarrow{\text{р}} X$.

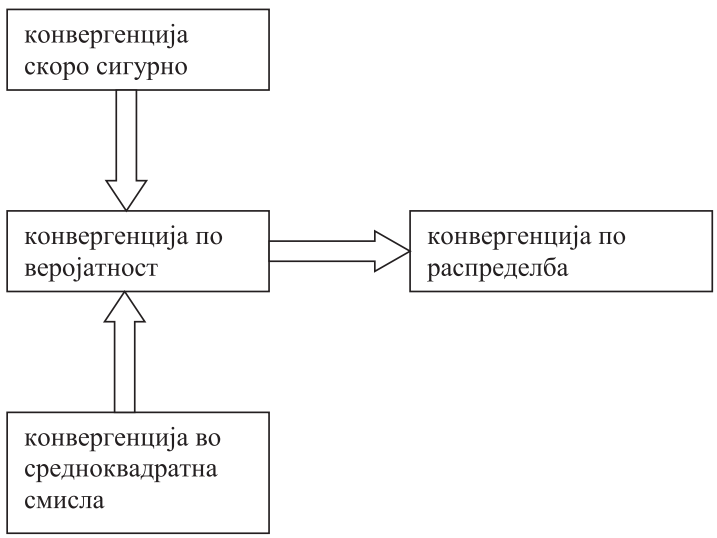
Дефиниција 4.5

Низата случајни променливи X_1, X_2,... *конвергира во средноквадратна смисла* кон случајна променлива X, ако

$$EX_n^2 < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

и $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n - X)^2 = 0$. Ќе пишуваме $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$.

Врските помеѓу овие четири вида на конвергенција се дадени на слика 4.1.



Слика 4.1.

Како што може да се види од сликата погоре, ако низата X_1, X_2,... конвергира скоро сигурно кон случајна променлива X, тогаш таа конвергира и по веројатност кон X. Ако низата X_1, X_2,... конвергира во средноквадратна смисла кон случајна променлива X, тогаш таа конвергира по веројатност кон X. Ако, пак, низата X_1, X_2,... конвергира по веројатност кон X, тогаш таа конвергира и по распределба кон X.

Да напоменеме дека во општ случај, помеѓу конвергенција скоро сигурно и конвергенција во средноквадратна смисла не постои врска.

4.3 Закон на големите броеви

Нека $X_1,\ X_2, \ldots$ е низа независни случајни променливи. Се разгледува низата аритметички средини:

$$X_1,\ \frac{X_1+X_2}{2},\ \frac{X_1+X_2+X_3}{3}, \ldots, \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \ldots$$

и се проверува дали оваа низа случајни променливи конвергира во некоја смисла кон некој број, поточно кон бројот $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$. Имено, се проверува дали

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i.$$

Ако конвергенцијата е по веројатност, тогаш велиме дека за низата независни случајни променливи $X_1,\ X_2, \ldots$ важи *слабиот закон на големите броеви*. Ако, пак, конверегенцијата е скоро сигурно, тогаш велиме дека важи *строгиот закон на големите броеви*.

Овде ќе се задржиме само на оние теореми кои обезбедуваат услови за слабиот закон на големите броеви.

Најпрво, ќе покажеме две леми во кои се дадени две неравенства кои се доста значајни во теоријата на веројатност и статистиката.

Теорема 4.7 (Основно неравенство на Чебишев)

Нека X е ненегативна случајна променлива. Тогаш за кој било позитивен реален број $\alpha > 0$ важи неравенството:

$$P\{X \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} EX \tag{4.5}$$

Доказ: Најпрво, нека X е случајна променлива од дискретен тип со множество вредности R_X и со веројатности $p_n = P\{X = x_n\}$, $x_n \in R_X$. Од ненегативноста на X следува дека $x_n \geq 0$, за секој n. Тогаш,

$$EX = \sum_{x_n \in R_X} x_n p_n \geq \sum_{x_n : x_n \geq \alpha} x_n p_n \geq \sum_{x_n : x_n \geq \alpha} \alpha p_n = \alpha \sum_{x_n : x_n \geq \alpha} p_n = \alpha P\{X \geq \alpha\}.$$

Ако, пак, X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип зададена со густина $p(x)$, тогаш се добива:

$$EX = \int_0^{+\infty} xp(x) \geq \int_\alpha^{+\infty} xp(x) \geq \int_\alpha^{+\infty} \alpha p(x) = \alpha \int_\alpha^{+\infty} p(x) = \alpha P\{X \geq \alpha\}.$$

□

Теорема 4.8 (Класично неравенство на Чебишев)

За која било случајна променлива X со конечна дисперзија DX и за кој било реален број $\varepsilon > 0$, точно е следново неравенство:

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}, \tag{4.6}$$

т.е. за веројатноста на спротивниот настан важи:

$$P\{|X - EX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}. \tag{4.7}$$

Доказ: Со користење на основното неравенство на Чебишев за ненегативна случајна променлива, добиваме:

$$\begin{aligned} P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} &= P\{(X - EX)^2 \geq \varepsilon^2\} \\ &\leq \frac{E(X - EX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

□

Пример 4.2 (Правило на три сигми) Ќе ја оцениме веројатноста дека апсолутното отстапување на произволна случајна променлива X од нејзиното математичко очекување е помало 3σ, каде што $\sigma^2 = DX$. Според (4.7), добиваме:

$$P\{|X - EX| < 3\sigma\} \geq 1 - \frac{DX}{(3\sigma)^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Последното неравенство може да се запише во облик:

$$P\{EX - 3\sigma < X < EX + 3\sigma\} > \frac{8}{9} \approx 0.8889,$$

и тоа покажува дека ако експериментот се повторува голем број пати и ако се определува вредноста на X во секој од тие експерименти, тогаш приближно 89% од реализациите на X ќе бидат во интервал $(EX - 3\sigma, EX + 3\sigma)$.

Во следните теореми се дадени потребни услови за низата X_1, X_2,... да важи слабиот закон на големите броеви.

Теорема 4.9 (Теорема на Чебишев)

Нека X_1, X_2,... се независни случајни променливи кои имаат конечни дисперзии ограничени од горе со некоја константа C. Тогаш за секој реален број $\varepsilon > 0$ важи слабиот закон на големите броеви, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty} P\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\Big| < \varepsilon\Big\} = 1.$$

Доказ: Нека $Y_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Тогаш

$$EY_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i,$$

а од независноста на X_i, $i = 1, 2, \ldots$ и ограниченоста од горе на нивните дисперзии со константата C, следува дека

$$DY_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} C = \frac{C}{n}.$$

Со користење на неравенството (4.7), добиваме:

$$\begin{aligned} P\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\Big| < \varepsilon\Big\} &= P\{|Y_n - EY_n| < \varepsilon\} \\ &\geq 1 - \frac{DY_n}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1. \end{aligned}$$

□

Теорема 4.10

Ако X_1, X_2,... се независни и еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување $EX_i = a$ и $DX_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$, тогаш за нив важи слабиот закон на големите броеви, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty} P\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\Big| < \varepsilon\Big\} = 1.$$

Доказ:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = \frac{1}{n} na = a,$$

па тврдењето следува директно од теорема 4.9. □

Резултатот од претходната теорема има големо практично значење во статистика. Имено, многу често не е позната распределбата на некоја случајна променлива, на пример распределбата на некоја големина што се мери. Прашањето е како во тој случај да се оцени очекуваната вредност на таа големина. Според претходната теорема $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{в}} a = EX$, па затоа за оценка на очекуваната вредност на големината може да се земе $a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, каде што x_i се измерените вредности на големината. Колку n е поголемо, таа оценка ќе биде поточна.

Во поглавјето 1.1, ја дефиниравме статистичката веројатност на настан A како реален број околу кој се натрупуваат релативните фреквенции на настанот A во повеќе серии од изведени експерименти. Следната теорема ја дава оправданоста на статистичката дефиниција на веројатност.

Теорема 4.11

Нека Y_n е случајна променлива со биномна распределба $B(n,p)$. Тогаш за произволен $\varepsilon > 0$, важи:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказ: Бидејќи $Y_n \sim B(n,p)$, Y_n може да се разгледува како број на појавувања на настанот A во Бернулиева шема од n експерименти ($p = P(A)$). Оттука, Y_n може да се претстави како

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

каде што $X_i = I_A$, $i = 1, 2, \ldots$ и X_i се независни случајни променливи. Всушност, X_1, $X_2, \ldots$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со $EX_i = EI_A = p$ и $DX_i = DI_A = pq$. Сега, тврдењето следува директно од теорема 4.10. $\square$

Да воочиме дека во претходната теорема, Y_n може да се набљудува како фреквенција на појавување на настанот A, а $\dfrac{Y_n}{n}$ како релативна фреквенција на појавување настанот A во серијата од n експерименти. Теорема 4.11 покажува дека кога $n \to +\infty$, релативната фреквенција на настанот A тежи кон неговата веројатност $p = P(A)$. Оттука, оправдана е статистичката дефиниција на веројатност преку релативните фреквенција.

4.4 Централна гранична теорема

Најпрво ќе се потсетиме на интегралната теорема на Муавр-Лаплас. Според неа, во Бернулиева шема со n експерименти, веројатноста дека настанот A ќе се појави помеѓу k и m пати, тежи кон $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_k}^{x_m} e^{-t^2/2}dt$, кога $n \to +\infty$, каде што $x_i = \frac{i-np}{\sqrt{npq}}$, за $i = k, m$, т.е.

$$\sum_{j=k}^{m} P_n(j) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_k}^{x_m} e^{-t^2/2}dt = \Phi(x_m) - \Phi(x_k),$$

каде што $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ е функција на распределба за $N(0,1)$ распределба. Со Y_n ја означуваме случајната променлива која означува број на појавувања на настанот A во Бернулиева шема со n експерименти. Тогаш $Y_n \sim B(n,p)$ и

$$\sum_{j=k}^{m} P_n(j) = P\{k \le Y_n \le m\}.$$

Од друга страна, Y_n може да се претстави како сума $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, каде што $X_i = I_A$ се индикатори на настанот A и X_i се независни случајни променливи. Притоа,

$$EY_n = np, \qquad DY_n = npq.$$

Сега, имаме:

$$\begin{aligned}
P\{k \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le m\} &= P\Big\{\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}}\Big\}\\
&= P\Big\{\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \sum\limits_{i=1}^{n} EX_i}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}}\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad P\Big\{x_k \leq \Big(\overset{*}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\Big) \leq x_m\Big\} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_k}^{x_m} e^{-t^2/2}dt = \Phi(x_m)-\Phi(x_k),
\end{aligned}
$$

каде што $\overset{*}{X}$ означува нормирана случајна променлива X, т.е $\overset{*}{X} = \dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$. Значи, ако X_i се индикатори на настан A, тогаш распределбата на нивната нормирана сума тежи кон нормална нормирана распределба кога $n \to +\infty$. Според ова, станува збор за конвергенција по распределба. Се поставува прашање дали ваквиот вид на конвергенција важи само за сума на индикатори на даден настан A? Одговорот на ова прашање е даден во следнава теорема.

Теорема 4.12 (Централна гранична теорема, Линдерберг-Леви)

Нека $X_1,\ X_2, \ldots$ се независни и еднакво распределени случајни променливи со математичко очекување m и дисперзија σ^2. Тогаш

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt = \Phi(x).$$

Доказ: Нека $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Тогаш

$$\overset{*}{Z}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - E\big(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\big)}{\sqrt{D\big(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\big)}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-a}{\sigma}.$$

Нека $Y_i = \dfrac{X_i-a}{\sigma}$, за $i=1,2,\ldots$. Тогаш

$$EY_i = \frac{EX_i-a}{\sigma} = 0, \qquad DY_i = \frac{DX_i}{\sigma^2} = 1$$

и Y_i се независни случајни променливи како функции од независните случајни променливи X_i. Нека $f(t)$ е карактеристичната функција на Y_i, за секое $i = 1, 2, \ldots$ Ако се искористи теорема 4.3 за врската помеѓу изводите на карактеристичната функција и моментите на случајната променлива Y_i, наоѓаме:

$$f'(0) = i \cdot EY_i = 0, \qquad f''(0) = i^2 EY_i^2 = -DY_i = -1.$$

Функцијата $f(t)$ може да се развие во Маклоренов ред од следниот облик:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + o(t^2),$$

па со замена на претходно добиените вредности на изводите, добиваме дека

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Сега, $\overset{*}{Z}_n$ може да се запише во облик:

$$\overset{*}{Z}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - a}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sqrt{n}},$$

па за карактеристичната функција на $\overset{*}{Z}_n$ се добива:

$$f_{\overset{*}{Z}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i/\sqrt{n}}(t) = \left[f\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\Big(\frac{t^2}{n}\Big)\right]^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2/2}.$$

Значи, низата карактеристични функции $\{f_{\overset{*}{Z}_n}(t)\}$ конвергира кон функцијата $f_N(t) = e^{-t^2/2}$ која е карактеристична функција на $N(0,1)$ распределба и $f_N(t)$ е непрекината во $t = 0$. Според обратната гранична теорема, следува дека низата функции на распределба $\Big\{F_{\overset{*}{Z}_n}(x)\Big\}$ конвергира кон функција на нормална нормирана распределба, т.е.

$$F_{\overset{*}{Z}_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(x),$$

или

$$P\{\overset{*}{Z}_n(x) < x\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

$\square$

Според Централната гранична теорема може да констатираме дека распределбата на нормирана сума од независни и еднакво распределени случајни променливи со произволна распределба се стреми кон $N(0,1)$ распределба, за доволно големо n.

Теоремите кои ги даваат условите за конвергенција на нормирана сума на случајни променливи кон нормална нормирана распределба имаат големо теориско и практично значење. Имено, тие даваат теориско објаснување на фактот дека нормалната распределба е најчеста распределба на реалните величини, а во практиката овозможуваат распределбата на нормирана сума на случајни променливи, при мошне општи услови, да се апроксимира со нормална нормирана распределба.

Пример 4.3 (Простор на диск) На еден диск има слободен простор од $330MB$. Дали е тоа доволен простор за сместување на 300 независни фотографии, ако секоја фотографија има очекувана должина од $1MB$ со дисперзија од $0.25MB$?

Решение: Според условите на задачата имаме $n = 300$, $a = EX = 1$, $\sigma^2 = DX = 0.25$, па $\sigma = 0.5$. Бројот на фотографии n е доволно голем, па може да се примени Централната гранична теорема. Ако го означиме со A настанот дека на дискот има доволно простор, тогаш,

$$\begin{aligned} P(A) &= P\Big\{\sum_{i=1}^{300} X_i \leq 330\Big\} = P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{300} X_i - 300\cdot 1}{0.5\sqrt{300}} \leq \frac{330 - 300\cdot 1}{0.5\sqrt{300}}\right\} \\ &\approx \Phi(3.46) = 0.9997. \end{aligned}$$

Значи, може да се заклучи дека е голема веројатноста дека на дискот ќе има доволно простор за сместување на 300 фотографии. $\square$

Прилог А

Докази на некои теореми

А.1 Аксиоматика на Колмогоров

Теорема 1.2 Нека Ω е произволно непразно множество и $\mathcal{A}$ е произволна фамилија од подмножества од Ω. Тогаш постои најмала σ-алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ од подмножества од Ω, која ја содржи фамилијата $\mathcal{A}$. $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ се нарекува *σ-алгебра генерирана од фамилијата $\mathcal{A}$.*

Доказ: Нека $\mathcal{A}$ е дадена фамилија од подмножества од Ω и нека $\mathbf{\Phi} = \{\mathcal{F}_i | i \in I\}$ е фамилијата од сите σ-алгебри над Ω кои ја содржат фамилијата $\mathcal{A}$. Фамилија $\mathbf{\Phi}$ не е празна, бидејќи Булеанот $\mathcal{B}(\Omega)$ на Ω сигурно е σ-алгебра што ја содржи фамилијата $\mathcal{A}$. Означуваме

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i.$$

Ќе покажеме дека $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ е σ-алгебра, т.е. условите σ.1, σ.2 и σ.3 од дефиниција 1.13 се исполнети.

σ.1. $\Omega \in \mathcal{F}_i, i \in I \quad \Longrightarrow \quad \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}(\mathcal{A}).$

σ.2. Нека $A \in \mathcal{F}(\mathcal{A}) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Тогаш $A \in \mathcal{F}_i$, за секој $i \in I$. Бидејќи

$\mathcal{F}_i$ е σ-алгебра, се добива дека $\overline{A} \in \mathcal{F}_i$, за секој $i \in I$. Оттука,

$$\overline{A} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}(\mathcal{A}).$$

$\sigma.3.$ Нека $A_j \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$, $j = 1, 2, \dots$. Тогаш $A_j \in \mathcal{F}_i$, $j = 1, 2, \dots$, за секој $i \in I$. $\mathcal{F}_i$ е σ-алгебра, па се добива дека $\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{F}_i$, за секој $i \in I$. Конечно,

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}(\mathcal{A}).$$

Со тоа покажавме дека $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ е σ-алгебра која ја содржи фамилијата $\mathcal{A}$. Останува да се покаже дека таа е најмалата σ-алгебра која ја содржи $\mathcal{A}$.

Нека $\mathcal{G}$ е произволна σ-алгебра која ја содржи $\mathcal{A}$. Според дефиницијата на $\mathbf{\Phi}$ следува дека $\mathcal{G} \in \mathbf{\Phi}$, па $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$, бидејќи $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ е подмножество од секоја σ-алгебра во $\mathbf{\Phi}$. Значи, навистина $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ е најмалата σ-алгебра која ја содржи $\mathcal{A}$. $\square$

A.2 Асимптотски формули за определување на веројатностите $P_n(k)$ во Бернулиева шема

Теорема 1.15 (Локална теорема на Муавр-Лаплас) Нека $p = P(A)$ во Бернулиева шема и нека $0 < p < 1$. Тогаш, при $n \to +\infty$ важи следново:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\ e^{-x^2/2}, \qquad \text{каде што} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}. \tag{A.1}$$

Доказ: Од $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, за конечно x, добиваме:

$$k = np + x\sqrt{npq} \ \to \ +\infty, \quad \text{кога } n \to +\infty.$$

$$n - k = nq - x\sqrt{npq} \ \to \ +\infty, \quad \text{кога } n \to +\infty.$$

Ќе ја разгледаме Стирлинговата формула за факториел, а тоа е:

$$m! \approx \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m}, \quad \text{кога } m \to +\infty.$$

Добиваме:

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n! p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} p^k q^{n-k}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi (n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Од друга страна,

$$\begin{aligned} \frac{k(n-k)}{n} &= \frac{(np + x\sqrt{npq})(nq - x\sqrt{npq})}{n} \\ &= n\left(p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \approx npq, \quad \text{за } n \to +\infty \end{aligned} \tag{A.3}$$

Да ставиме $A_n = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$. Со логаритмирање на A_n добиваме:

$$\begin{aligned} \ln A_n &= -k \ln\left(\frac{k}{np}\right) - (n-k)\ln\left(\frac{n-k}{nq}\right) \\ &= -(np + x\sqrt{npq})\ln\left(\frac{np + x\sqrt{npq}}{np}\right) - (nq - x\sqrt{npq})\ln\left(\frac{nq - x\sqrt{npq}}{nq}\right), \end{aligned}$$

т.е.

$$\ln A_n = -(np + x\sqrt{npq})\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (nq - x\sqrt{npq})\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

Ќе ја искористиме Маклореновата формула за $\ln(1+t)$:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

т.е.

$$\ln(1+t) \approx t - \frac{t^2}{2}.$$

Со примена на оваа формула, се добива дека:

$$\begin{aligned}\ln A_n &\approx -(np + x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2}{2}\frac{q}{np}\right)\\ &\quad -(nq - x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq}\right)\\ &\to -\frac{x^2}{2}, \quad \text{кога } n \to +\infty.\end{aligned}$$

Значи,

$$\ln A_n \to -\frac{x^2}{2}, \quad \text{т.е.} \quad A_n \to e^{-x^2/2} \tag{A.4}$$

Со замена на (A.3) и (A.4) во (A.2), се добива:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\ e^{-x^2/2}, \qquad \text{кога} \quad n \to +\infty.$$

$\square$

Теорема 1.16 (Интегрална теорема на Муавр-Лаплас) Нека $p = P(A)$ во Бернулиева шема и нека $0 < p < 1$. Тогаш, за $n \to +\infty$ важи следното:

$$P_n(r \le k \le m) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_r}^{x_m} e^{-t^2/2} dt, \tag{A.5}$$

каде што $x_r = \dfrac{r - np}{\sqrt{npq}}$, $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Доказ: За дадено n означуваме:

$$x_{nj} = \frac{j - np}{\sqrt{npq}}, \quad j = r, \ldots, m.$$

Множеството $\{x_{nr}, \ldots, x_{nm}\}$ може да се разгледува како партиција на интервалот $[x_r, x_m]$. Должината на соодветните интервали ќе биде:

$$\Delta x_j = x_{n(j+1)} - x_{nj} = \frac{j + 1 - np}{\sqrt{npq}} - \frac{j - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Со примена на Локалната теорема на Муавр-Лаплас, се добива:

$$\begin{aligned} P_n(r \le k \le m) = \sum_{k=r}^{m} P_n(k) &\approx \sum_{k=r}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x_{nj}^2/2} \\ &= \sum_{k=r}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_{nj}^2/2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \\ &= \sum_{k=r}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_{nj}^2/2} \Delta x_j. \end{aligned}$$

Последната сума е Риманова сума за функцијата $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ на интервал $[x_r, x_m]$. Оттука, за $n \to +\infty$,

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(r \le k \le m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_r}^{x_m} e^{-t^2/2} dt.$$

$\square$

Теорема 1.17 (Теорема на Пуасон) За веројатноста $P_n(k)$ дека настанот A ќе настапи k пати во n-тата серија во Пуасонова шема, ако $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda$, важи:

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda}.$$

Доказ: Од $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda$ следува дека за големи вредности на n, $np_n \approx \lambda$, т.е. $p_n \approx \dfrac{\lambda}{n}$. Сега, за n-тата серија во Пуасонова шема се добива:

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \binom{n}{k} p_n^k q_n^{n-k} \\ &\approx \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Сега,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda},$$

а

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1.$$

Оттука,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\ e^{-\lambda}.$$

□

A.3 Случајни вектори

Теорема 2.6 *Функцијата* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ *од* Ω *во* $\mathbb{R}^n$ *е* n*-димензионална случајна променлива дефинирана на* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ако и само ако за секое* n*-димензионално Борелово множество* $\mathbf{B}$*,* $\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}) \in \mathcal{F}$*.*

Доказ: Нека $I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_i \le x_i < b_i,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots\}$ е n-димензионален паралопипед. Бидејќи X_i се случајни променливи, $i = 1, 2, \dots, n$, множествата $\{E | a_i \le X_i(E) < b_i\} \in \mathcal{F}$, за секој $i = 1, 2, \dots, n$, па

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{-1}(I_n) &= \{E \mid a_i \le X_i(E) < b_i,\ i = 1, 2, \dots, n\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{E \mid a_i \le X_i(E) < b_i\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}([a_i, b_i)) \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Со оглед на тоа што n-димензионалната σ-алгебра $\mathcal{B}_n$ е генерирана од n-димензионалните паралопипеди, добиваме дека $\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}) \in \mathcal{F}$, т.е. $\{E \mid \mathbf{X}(E) \in \mathbf{B}\} \in \mathcal{F}$.

Обратно, нека за секое n-димензионално Борелово множество $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}) \in \mathcal{F}$. Ќе покажеме дека во тој случај, X_i е случајна променлива, за секој $i = 1, 2, \ldots, n$. За фиксно i, означуваме

$$\mathbf{B}_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid a_i \le x_i < b_i\}.$$

Всушност, $\mathbf{B}_i = \mathbb{R}^{i-1} \times [a_i, b_i) \times \mathbb{R}^{n-i}$. Сега,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}_i) &= \{E \mid a_i \le X_i(E) < b_i, -\infty \le X_j(E) < +\infty,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ j \ne i\} \\
&= \{E \mid a_i \le X_i(E) < b_i\} \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \{E \mid -\infty \le X_j(E) < +\infty\} \\
&= X_i^{-1}([a_i, b_i)),
\end{aligned}$$

бидејќи $\{E \mid -\infty \le X_j(E) < +\infty\} = \Omega$. Според претпоставката $\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}_i) \in \mathcal{F}$, па и $X_i^{-1}([a_i, b_i)) = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}_i) \in \mathcal{F}$, од каде што следува дека X_i е случајна променлива, за секој $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е случаен вектор. $\square$

A.4 Независност на случајни променливи

Теорема 2.9 *Случајните променливи X и Y се независни ако и само ако заедничката функција на распределба на векторот (X, Y) може да се претстави како производ на маргиналните функции на распределба на случајните променливи X и Y, т.е*

$$F(x, y) = F_X(x) F_Y(y). \tag{A.6}$$

Доказ: Нека X и Y се независни случајни променливи. Тогаш за произволни $S_1 \in \mathcal{B}_1$ и $S_2 \in \mathcal{B}_1$, случајните настани $\{X \in S_1\}$, $\{Y \in S_2\}$ се независни, т.е.

$$P\big(\{X \in S_1\} \cap \{Y \in S_2\}\big) = P\{X \in S_1\} \cdot P\{Y \in S_2\}.$$

Ако $S_1 = (-\infty, x)$ и $S_2 = (-\infty, y)$, тогаш претходното равенство го добива обликот:

$$P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\},$$

од каде што следува (A.6).

Обратно, нека важи равенството (A.6). Тогаш според (2.15) и со користење на (A.6), добиваме:

$$\begin{aligned}
P\big(\{a_1 \le X < b_1\} \cap \{a_2 \le Y < b_2\}\big) &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) \\
&= F_X(b_1)F_Y(b_2) - F_X(a_1)F_Y(b_2) - F_X(b_1)F_Y(a_2) + F_X(a_1)F_Y(a_2) \\
&= F_X(b_1)\big[F_Y(b_2) - F_Y(a_2)\big] - F_X(a_1)\big[F_Y(b_2) - F_Y(a_1)\big] \\
&= \big[F_X(b_1) - F_X(a_1)\big]\big[F_Y(b_2) - F_Y(a_2)\big] \\
&= P\{a_1 \le X < b_1\} \cdot P\{a_2 \le Y < b_2\}.
\end{aligned}$$

Бидејќи σ-алгебрата $\mathcal{B}_1$ е генерирана од класата $\{[a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$, следува дека за сите S_1 и S_2 од $\mathcal{B}_1$ важи:

$$P\big(\{X \in S_1\} \cap \{Y \in S_2\}\big) = P\{X \in S_1\} \cdot P\{Y \in S_2\},$$

т.е. X и Y се независни случајни променливи. □

A.5 Функции од случајни променливи

Теорема 2.10 *Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е Борелова функција, а $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е даден случаен вектор. Тогаш $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е случајна променлива.*

Доказ: За да се покаже дека Y е случајна променлива треба да се покаже дека таа е $\mathcal{F}$ - измерлива, т.е. $\{Y \in S\} \in \mathcal{F}$, за секој $S \in \mathcal{B}_1$. Добиваме:

$$\{Y \in S\} = \{f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in S\} = \{(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \underbrace{f^{-1}(S)}_{\in \mathcal{B}_n}\} \in \mathcal{F},$$

бидејќи $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е случаен вектор. □

Теорема 2.12 *Нека X и Y се независни случајни променливи, а f и g се Борелови функции од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$. Тогаш и случајните променливи $f(X)$ и $g(Y)$ се независни.*

Доказ: Според (2.32), треба да покажеме дека за произволни $S_1 \in \mathcal{B}_1$ и $S_2 \in \mathcal{B}_1$, случајните настани $\{f(X) \in S_1\}$, $\{g(Y) \in S_2\}$ се независни, т.е. важи равенството

$$P\big(\{f(X) \in S_1\} \cap \{g(Y) \in S_2\}\big) = P\{f(X) \in S_1\} \cdot P\{g(Y) \in S_2\}.$$

Имено,

$$\begin{aligned} P\big(\{f(X) \in S_1\} \cap \{g(Y) \in S_2\}\big) &= P\big(\{X \in f^{-1}(S_1)\} \cap \{Y \in g^{-1}(S_2)\}\big) \\ \text{(од независноста на } X \text{ и } Y) &= P\{X \in f^{-1}(S_1)\}P\{Y \in g^{-1}(S_2)\} \\ &= P\{f(X) \in S_1\} \cdot P\{g(Y) \in S_2\}. \end{aligned}$$

□

А.6 Математичко очекување и дисперзија

Теорема 3.1 *Математичкото очекување ги има следните својства:*

i. $Ec = c$, *каде што* c *е дадена константа;*

ii. $|EX| \leq E|X|$;

iii. *Ако* $P\{a \leq X \leq b\} = 1$, *тогаш* $a \leq EX \leq b$;

iv. $E(cX) = cEX$, *ако* EX *постои;*

v. $E(X+Y) = EX + EY$, *ако* EX *и* EY *постојат;*

vi. *Ако* X *и* Y *се независни случајни променливи и* EX *и* EY *постојат тогаш*

$$E(XY) = EX \cdot EY;$$

vii. $E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i EX_i$, *каде што* c_i, $i = 1, \ldots, n$ *се дадени константи;*

viii. Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се независни случајни променливи, тогаш

$$E\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} EX_i.$$

Доказ: *i.* Константата c може да се разгледува како дискретна случајна променлива која прима само една вредност c со веројатност 1, т.е. $P\{X = c\} = 1$. Затоа,

$$Ec = EX = cP\{X = c\} = c \cdot 1 = c.$$

ii. Нека X е дискретна случајна променлива со множество вредности R_X и веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за $x_i \in R_X$. Тогаш со користење на неравенството на триаголник за апсолутна вредност од сума, добиваме:

$$|EX| = \Big|\sum_{x_i \in R_X} x_i p_i\Big| \le \sum_{x_i \in R_X} |x_i| p_i = E|X|.$$

iii. Нека $P\{a \le X \le b\} = 1$, т.е. сите вредности на случајната променлива X се поголеми или еднакви на a и помали или еднакви на b. Тогаш за дискретна случајна променлива X добиваме:

$$EX = \sum_{x_i \in R_X} x_i p_i \ge \sum_{x_i \in R_X} a p_i = a \sum_{x_i \in R_X} p_i = a$$

и

$$EX = \sum_{x_i \in R_X} x_i p_i \le \sum_{x_i \in R_X} b p_i = b \sum_{x_i \in R_X} p_i = b,$$

т.е. $a \le EX \le b$.

Ако пак X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип, тогаш имаме:

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b xp(x)dx \ge \int_a^b ap(x)dx = a \int_a^b p(x)dx = a$$

и

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b xp(x)dx \leq \int_a^b bp(x)dx = b\int_a^b p(x)dx = b,$$

па и во овој случај, $a \leq EX \leq b$.

iv. Ако $c = 0$, тогаш $cX = 0 \cdot X = 0$, па $E(0 \cdot X) = E(0) = 0 = 0 \cdot EX$. Затоа, нека $c \neq 0$.

Прво, нека X е случајна променлива од дискретен тип со множество вредности $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и веројатности $p_i = P\{X = x_i\}$, за $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогаш случајната променлива $Y = cX$ ќе прима вредности од множеството $R_Y = \{cx_1, cx_2, \ldots, cx_n\}$, со веројатности $P\{Y = cx_i\} = P\{cX = cx_i\} = P\{X = x_i\} = p_i$, за $i = 1, 2, \ldots, n$, па

$$EY = \sum_{i=1}^{n} cx_i P\{Y = cx_i\} = \sum_{i=1}^{n} cx_i P\{X = x_i\} = c\sum_{i=1}^{n} x_i P\{X = x_i\} = cEX.$$

Во случај, кога R_X е пребројливо множество, доказот е аналоген, само што сумите ќе одат до $+\infty$ наместо до n.

Нека, сега X е случајна променлива од апсолутно-непрекинат тип зададена со густина $p_X(x)$ и нека $Y = cX$. Ако означиме $f(x) = cx$, добиваме дека $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{c}$, па $(f^{-1}(y))' = \dfrac{1}{c}$. Со примена на равенството (2.36), добиваме:

$$p_Y(y) = p_X(f^{-1}(y))|(f^{-1})'(y)| = p_X\left(\frac{y}{c}\right)\frac{1}{|c|}.$$

Ако $c > 0$, тогаш $p_Y(y) = \dfrac{1}{c}p_X\left(\dfrac{y}{c}\right)$, па за математичкото очекување на Y

се добива:

$$\begin{aligned} EY &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\frac{1}{c}p_X\left(\frac{y}{c}\right)dy \qquad \begin{pmatrix} \text{Смена: } t=\frac{y}{c},\ dy=cdt \\ y=-\infty:\ \ t=-\infty \\ y=+\infty:\ \ t=+\infty \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} ctp_X(t)cdt \\ &= c\int_{-\infty}^{+\infty} tp_X(t)dt \\ &= cEX. \end{aligned}$$

Ако, пак $c<0$, тогаш $p_Y(y)=-\frac{1}{c}p_X\left(\frac{y}{c}\right)$, па за математичкото очекување на Y добиваме:

$$\begin{aligned} EY &= -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} yp_X\left(\frac{y}{c}\right)dy \qquad \begin{pmatrix} \text{Смена: } t=\frac{y}{c},\ dy=cdt \\ y=-\infty:\ \ t=+\infty \\ y=+\infty:\ \ t=-\infty \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{c}\int_{+\infty}^{-\infty} ctp_X(t)cdt \\ &= c\int_{-\infty}^{+\infty} tp_X(t)dt \\ &= cEX. \end{aligned}$$

v. Нека X и Y се дискретни случајни променливи така што X прима вредности од множеството R_X, а Y прима вредности од множествот R_Y. Тогаш случајната променлива $X+Y$ ќе прима вредности од множеството $R_{X+Y}=\{x_i+y_j \mid x_i\in R_X, y_j\in R_Y\}$ и нека $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$. Да воочиме дека $P\{X=x_i\}=\sum\limits_{y_j\in R_Y} p_{ij}$, за $x_i\in R_X$ и $P\{Y=y_j\}=\sum\limits_{x_i\in R_X} p_{ij}$, за $y_j\in R_Y$, според равенствата за определување на маргинални распределби од заедничката распределба на две случајни променливи. Со примена на овие равенства добиваме:

$$\begin{aligned} EX+EY &= \sum_{x_i\in R_X} x_i P\{X=x_i\} + \sum_{y_j\in R_Y} y_j P\{Y=y_j\} \\ &= \sum_{x_i\in R_X} x_i \sum_{y_j\in R_Y} p_{ij} + \sum_{y_j\in R_Y} y_j \sum_{x_i\in R_X} p_{ij} \\ &= \sum_{x_i\in R_X} \sum_{y_j\in R_Y} (x_i+y_j)p_{ij} \\ &= E(X+Y) \end{aligned}$$

Сега, ќе го разгледаме случајот кога (X, Y) е случаен вектор од апсолутно-непрекинат тип зададен со густина на распределба $p(x, y)$. Во (2.41) е определена густината на случајната променлива $Z = X+Y$:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, z-u)du.$$

Исто така, да се потсетиме дека маргиналните густини на X и Y се добиваа од нивната заедничка густина со:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy \qquad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx.$$

Сега, за математичкото очекување на случајната променлива $Z = X+Y$ се добива:

$$\begin{aligned} EZ &= \int_{-\infty}^{+\infty} zp_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} z \int_{-\infty}^{+\infty} p(u, z-u)dudz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} zp(u, z-u)dzdu \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Смена во внатрешниот интеграл:}\\ t = z-u,\ dt = dz\end{array}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (u+t)p(u,t)dtdu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EZ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} up(u,t)dtdu + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} tp(u,t)dtdu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u \int_{-\infty}^{+\infty} p(u,t)dtdu + \int_{-\infty}^{+\infty} t \int_{-\infty}^{+\infty} p(u,t)dudt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} up_X(u)du + \int_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)dt \\
&= EX + EY.
\end{aligned}$$

vi. Нека X и Y се независни дискретни случајни променливи зададени исто како во *v*. Случајната променлива XY ќе прима вредности од множеството $R_{XY} = \{x_i y_j \mid x_i \in R_X, y_j \in R_Y\}$ и нека, исто како и претходно, $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$. Од независноста на X и Y,

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},$$

за сите $x_i \in R_X$ и $y_j \in R_Y$. Тогаш,

$$\begin{aligned}
EX \cdot EY &= \sum_{x_i \in R_X} x_i P\{X = x_i\} \cdot \sum_{y_j \in R_Y} y_j P\{Y = y_j\} \\
&= \sum_{x_i \in R_X}\sum_{y_j \in R_Y} x_i y_j \underbrace{P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}}_{p_{ij}} \\
&= \sum_{x_i \in R_X}\sum_{y_j \in R_Y} x_i y_j p_{ij} \\
&= E(XY)
\end{aligned}$$

Останува да го разгледаме случајот кога (X, Y) е случаен вектор од апсолутно-непрекинат тип зададен со густина на распределба $p(x, y)$. Во (2.42) е определена густината на случајната променлива $Z = XY$:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(u)p_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)\frac{1}{|u|}du.$$

Сега, за математичкото очекување на $Z = XY$ се добива:

$$EZ=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zp_Z(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(u)p_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)\frac{1}{|u|}dudz.$$

Најпрво, двојниот интеграл ќе го претставиме како сума од два интеграла за да се ослободиме од апсолутната вредност, а потоа во двата двојни интеграла ќе го смените редоследот на интегрирање по променливите:

$$\begin{aligned}
EZ &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\int\limits_{-\infty}^{0} p_X(u)p_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)\frac{1}{u}dudz+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\int\limits_{0}^{+\infty} p_X(u)p_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)\frac{1}{u}dudz\\
&= -\int\limits_{-\infty}^{0} p_X(u)\frac{1}{u}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zp_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)dzdu+\int\limits_{0}^{+\infty} p_X(u)\frac{1}{u}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zp_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)dzdu\\
&= I_1+I_2,
\end{aligned}$$

каде што

$$I_1=-\int\limits_{-\infty}^{0} p_X(u)\frac{1}{u}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zp_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)dzdu,$$

а

$$I_2=\int\limits_{0}^{+\infty} p_X(u)\frac{1}{u}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zp_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)dzdu.$$

И во двата двојни интеграла I_1 и I_2 како внатрешен се јавува $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zp_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)dz$, кој се решава со воведување на смената $\frac{z}{u}=t$. Оттука, $dz=udt$. Притоа, треба да се внимава на воведување на смената во границите на интеграција. При решавање на I_1, $u<0$, па за границите добиваме:

$$\begin{aligned}
z=-\infty: &\quad t=+\infty\\
z=+\infty: &\quad t=-\infty,
\end{aligned}$$

па интегралот се сведува на

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zp_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)dz = \int\limits_{+\infty}^{-\infty} utp_Y(t)udt = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)u^2dt.$$

Сега,

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int\limits_{-\infty}^{0} p_X(u)\frac{1}{u}\Big[-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)u^2dt\Big]du \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} up_X(u)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)dtdu. \end{aligned}$$

Од друга страна, при воведување на претходната смена во решавањето на внатрешниот интеграл во I_2, каде што $u > 0$, за границите се добива:

$$z = -\infty : \quad t = -\infty$$
$$z = +\infty : \quad t = +\infty,$$

па интегралот се сведува на

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} zp_Y\Big(\frac{z}{u}\Big)dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} utp_Y(t)udt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)u^2dt.$$

Така,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{0}^{+\infty} p_X(u)\frac{1}{u}\Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)u^2dt\Big]du \\ &= \int\limits_{0}^{+\infty} up_X(u)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)dtdu. \end{aligned}$$

На крај,

$$
\begin{aligned}
EZ &= I_1 + I_2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} up_X(u) \int_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)dtdu + \int_{0}^{+\infty} up_X(u) \int_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)dtdu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} up_X(u) \int_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)dtdu \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} up_X(u)du\right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} tp_Y(t)dt\right] \\
&= EX \cdot EY.
\end{aligned}
$$

vii. Следува индуктивно од тврдењата *iv.* и *v.*

viii. Следува индуктивно од тврдењето *vi.* □

Теорема 3.2 *Дисперзијата ги има следните својства:*

i. $DX \geq 0$. *Притоа,* $DX = 0$ *ако и само ако* $P\{X = c\} = 1$*, каде што* $c = const$*;*

ii. $D(X + c) = DX$*, за произволна константа* c*;*

iii. $D(cX) = c^2 DX$*;*

iv. Ако X *и* Y *се независни случајни променливи, тогаш*

$$D(X + Y) = DX + DY;$$

v. Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *се по парови независни случајни променливи, а* c_1, c_2,..., c_n *се дадени константи, тогаш*

$$D(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n) = c_1^2DX_1 + c_2^2DX_2 + \cdots + c_n^2DX_n.$$

vi. $E(X - c)^2 \geq E(X - EX)^2$*, за произволна константа* c*.*

Доказ: *i.* Случајната променлива $(X - EX)^2$ е ненегативна, па од својството *iii.* од теорема 3.1, нејзиното математичко очекување е ненегативно. Оттука, $DX = E(X - EX)^2 \geq 0$.

Сега, нека $P\{X = c\} = 1$, тогаш $Ec = c$. Оттука, $Dc = E(c - Ec)^2 = E(c - c)^2 = E(0) = 0$. Обратно, нека $0 = DX = E(X - EX)^2$. Бидејќи $(X - EX)^2$ е ненегативна случајна променлива, нејзиното математичко очекување ќе биде 0 само ако $P\{(X - EX)^2 = 0\} = 1$, т.е. $P\{X = EX\} = 1$. Оттука, $X = c = EX$ со веројатност 1.

ii. Ова својство покажува дека со транслација на сите вредности на една случајна променлива X за некоја константа c, нејзината дисперзија нема да се промени.

$$\begin{aligned} D(X + c) &= E(X + c - E(X + c))^2 = E(X + c - EX - c)^2 \\ &= E(X - EX)^2 = DX \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} D(cX) &= E(cX - E(cX))^2 = E(cX - cEX)^2 \\ &= E(c^2(X - EX)^2) = c^2E(X - EX)^2 = c^2DX \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= E(X + Y - E(X + Y))^2 \\ &= E((X - EX) + (Y - EY))^2 \\ &= E(X - EX)^2 + 2E((X - EX)(Y - EY)) + E(Y - EY)^2 \\ &= DX + 2E((X - EX)(Y - EY)) + DY \qquad \text{(A.7)} \end{aligned}$$

Од независноста на случајните променливи X и Y следува независност и на случајните променливи $X - EX$ и $Y - EY$, како функции од независни случајни променливи (теорема 2.12), па оттука,

$$E((X - EX)(Y - EY)) = E(X - EX)E(Y - EY)) = (EX - EX)(EY - EY) = 0.$$

Со замена на последниот резултат во (A.7), добиваме:

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

$$
\begin{aligned}
v.\ D\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\Big) &= E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i - E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\Big)\Big)^2 \\
&= E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i (X_i - EX_i)\Big)^2 \\
&= E\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 (X_i - EX_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_i c_j (X_i - EX_i)(X_j - EX_j)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 E(X_i - EX_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_i c_j E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 DX_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_i c_j E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j)) \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

Слично како и претходно, за кои било $i \neq j$, X_i и X_j се независни случајни променливи, па според теорема 2.12, $X_i - EX_i$ и $X_j - EX_j$ се исто така независни, како функции од независни случајни променливи. Затоа,

$$E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j)) = E(X_i - EX_i)E(X_j - EX_j) = (EX_i - EX_i)(EX_j - EX_j) = 0,$$

па со замена во (A.8), се добива дека

$$D\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 DX_i.$$

$$
\begin{aligned}
vi. \qquad E(X - c)^2 &= E((X - EX) + (EX - c))^2 \\
&= E(X - EX)^2 + 2(EX - c)E(X - EX) + (EX - c)^2 \\
&= DX + 2(EX - c)(EX - EX) + (EX - c)^2 \\
&= DX + (EX - c)^2 \\
&\geq DX,
\end{aligned}
$$

бидејќи $(EX - c)^2 \geq 0$. Последното неравенство покажува дека средноквадратното отстапување на случајна променлива од нејзиното математичко очекување (т.е. дисперзијата на случајната променлива) е помало од средноквадратното отстапување на таа случајна променлива од која било друга константа. □

А.7 Моменти на случајни вектори

Теорема 3.4

i) За кои било две случајни променливи X и Y, $|\rho_{XY}| \leq 1$.

ii) $|\rho_{XY}| = 1$ ако и само ако $P\{Y = aX + b\} = 1$, за $a \neq 0$.

Доказ: *i*) Ги воведуваме ознаките $\sigma_1 = \sqrt{DX}$ и $\sigma_2 = \sqrt{DY}$ и ја разгледуваме случајната променлива

$$Z = \sigma_2 X \pm \sigma_1 Y.$$

Притоа, во дефинирањето на Z се зема знак „+“, ако $cov(X,Y) < 0$, а знак „−“, ако $cov(X,Y) > 0$. Ако $cov(X,Y) = 0$, добиваме дека $\rho_{XY} = 0$, па тврдењето е точно.

За дисперзијата на Z се добива:

$$\begin{aligned}
DZ &= D(\sigma_2 X \pm \sigma_1 Y) \\
&= E(\sigma_2 X \pm \sigma_1 Y)^2 - [E(\sigma_2 X \pm \sigma_1 Y)]^2 \\
&= E(\sigma_2^2 X^2 \pm 2\sigma_1\sigma_2 XY + \sigma_1^2 Y^2) - [\sigma_2 EX \pm \sigma_1 EY]^2 \\
&= \sigma_2^2 EX^2 \pm 2\sigma_1\sigma_2 E(XY) + \sigma_1^2 EY^2 - \sigma_2^2 (EX)^2 \mp 2\sigma_1\sigma_2 EX \cdot EY - \sigma_2^2 (EY)^2 \\
&= \sigma_2^2 (EX^2 - (EX)^2) + \sigma_1^2 (EY^2 - (EY)^2) \pm 2\sigma_1\sigma_2 (E(XY) - EX \cdot EY) \\
&= \sigma_2^2 DX + \sigma_1^2 DY \pm 2\sigma_1\sigma_2 cov(X,Y) \\
&= 2\sigma_1^2\sigma_2^2 \pm 2\sigma_1\sigma_2 cov(X,Y) \\
&= 2[\sigma_1^2\sigma_2^2 \pm \sigma_1\sigma_2 cov(X,Y)].
\end{aligned}$$

Бидејќи $DZ \geq 0$, добиваме дека и

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 \pm \sigma_1\sigma_2 cov(X,Y) \geq 0. \tag{A.9}$$

Ако $cov(X,Y) > 0$, тогаш (A.9) добива облик:

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 cov(X,Y) \geq 0.$$

Оттука,

$$\sigma_1\sigma_2 \geq cov(X,Y),$$

т.е.

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2} \leq 1.$$

Од друга страна, ако $cov(X,Y) < 0$, од (A.9) се добива:

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 cov(X,Y) \geq 0.$$

Оттука,

$$-\sigma_1\sigma_2 \leq cov(X,Y),$$

па

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2} \geq -1.$$

Заклучуваме дека $|\rho_{XY}| \leq 1$, што требаше и да се докаже.

ii) Прво, нека $Y = aX + b$. Тогаш за коваријансата помеѓу X и Y се добива:

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E((X-EX)(Y-EY)) \\ &= E((X-EX)(aX+b-E(aX+b))) \\ &= E((X-EX)(aX+b-aEX-b))) \\ &= E((X-EX)a(X-EX)) \\ &= aE(X-EX)^2 \\ &= aDX, \end{aligned}$$

а дисперзијата на Y е:

$$DY = D(aX+b) = a^2DX.$$

Сега, за коефициентот на корелација помеѓу случајните променливи X и Y, се добива следново:

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{aDX}{\sqrt{DX}\sqrt{a^2DX}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}.$$

Со ова покажавме дека ако $Y = aX + b$ тогаш $|\rho_{XY}| = 1$.

Обратно, нека $|\rho_{XY}| = 1$. Да ги разгледаме случајни променливи X^* и Y^*, дефинирани со:

$$X^* = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \qquad\qquad Y^* = \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}}.$$

За математичкото очекување и дисперзијата на X^* се добива:

$$EX^* = E\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right) = \frac{E(X - EX)}{\sqrt{DX}} = \frac{EX - EX}{\sqrt{DX}} = 0$$

$$DX^* = E(X^*)^2 = E\left(\frac{(X - EX)^2}{DX}\right) = \frac{E(X - EX)^2}{DX} = \frac{DX}{DX} = 1$$

Аналогно, се добива дека $EY^* = 0$ и $DY^* = E(Y^*)^2 = 1$, а коваријансата помеѓу X^* и Y^* ќе биде:

$$\begin{aligned} cov(X^*, Y^*) &= E(X^*Y^*) - E(X^*)E(Y^*) = E(X^*Y^*) \\ &= E\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \cdot \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}}\right) = \rho_{XY}. \end{aligned}$$

Нека $\rho_{XY} = -1$. Ја разгледуваме случајната променлива $X^* + Y^*$. Тогаш $E(X^* + Y^*) = EX^* + EY^* = 0$, а за дисперзијата на оваа случајна променлива се добива следново:

$$\begin{aligned} D(X^* + Y^*) &= E(X^* + Y^*)^2 - [\underbrace{E(X^* + Y^*)}_{0}]^2 \\ &= E((X^*)^2 + 2X^*Y^* + (Y^*)^2) \\ &= E(X^*)^2 + 2E(X^*Y^*) + E(Y^*)^2 \\ &= 2 + 2cov(X^*, Y^*) \\ &= 2(1 + \rho_{XY}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Добивме дека $D(X^* + Y^*) = 0$, па од Теорема 3.2 i), заклучуваме дека $X^* + Y^* = C$, каде што $C = const$, т.е. помеѓу X^* и Y^*, па оттука и помеѓу X и Y постои линеарна зависност.

Ако, пак $\rho_{XY} = 1$, тогаш се разгледува случајната променлива $X^* - Y^*$ и со постапка слична на претходната, се покажува дека $D(X^* - Y^*) = 2(1 - \rho_{XY}) = 0$. Оттука, $X^* - Y^* = C$, каде што C е некоја константа, па исто како и претходно следува дека помеѓу X и Y постои линеарна зависност. $\square$

A.8 Карактеристична функција

Теорема 4.3 *Нека за случајната променлива X постои апсолутен почетен момент од ред n ($E|X|^n < +\infty$). Тогаш карактеристичната функција $f(t)$ на X е n пати диференцијабилна и за $k \leq n$ важи:*

$$f^{(k)}(0) = i^k EX^k.$$

Доказ: Маклореновиот ред на функцијата e^{itx} е следниов:

$$e^{itx} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(itx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k x^k}{k!} t^k.$$

Сега,

$$f(t) = Ee^{itX} = E\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k X^k}{k!} t^k\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k EX^k}{k!} t^k.$$

Од друга страна,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

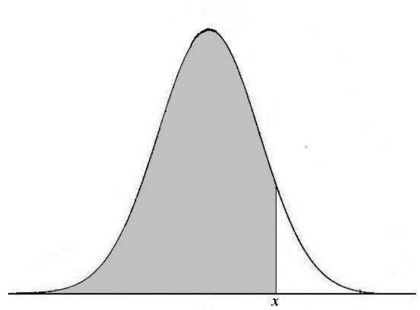
Со изедначување на коефициентите во последните два реда, се добива дека:

$$f^{(k)}(0) = i^k EX^k,$$

за секој $k = 1, 2, \ldots$ $\square$

A.9 Таблица на нормална нормирана распределба

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx$$



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003
-3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
-3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
-3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
-3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
-3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
-3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
-3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
-3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
-3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
-2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
-2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
-2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
-2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
-2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
-2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
-2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
-2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
-2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
-2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
-1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
-1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
-1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
-1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
-1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
-1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
-1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08691	0.08534	0.08379	0.08226
-1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
-1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
-1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
-0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
-0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
-0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
-0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
-0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
-0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
-0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
-0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
-0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
-0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414

Продолжение на таблицата на нормална нормирана распределба

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Литература

[1] Baron, M.(2007) *Probability and Statistics for Computer Scientists*, Chapman&Hall/CRC.

[2] Glišić, Z., Peruničić, P. (1989) *Zbirka rešenih zadataka iz verovatnoće i matematičke statistike*, Naučna knjiga, Beograd.

[3] Ivković, Z.(1980) *Teorija verovatnoće sa matematičkom statistikom*, Gragjevinska knjiga, Beograd.

[4] Mendenhall, B. (1991) *Introduction to Probability and Statistics*, PWS-KENT Publishing Company.

[5] Mendenhall, B., Sincich, T. (1992) *Statistics for Engineering and the Sciences*, Dellen Publishing Company.

[6] Moore,D.S., McCabe,G.P. (1989) *Introduction to the Practice of Statistics*, W.H.Freeman and Company.

[7] Papoulis, A. (1965) *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, Inc., New York.

[8] Pauše, Ž. (1978) *Vjerojatnost, informacija, stohastički proces*, Školska knjiga, Zagreb.

[9] Бакева, В., Миладиновиќ, Б. (2004) *Математика*, за IV година гимназиско образование, АЛБИ, Скопје