Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии

Соња Геговска-Зајкова, Катерина Хаџи-Велкова Санева,
Елена Хаџиева, Марија Кујумџиева-Николоска,
Анета Бучковска, Билјана Јолевска-Тунеска
Билјана Начевска-Настовска, Весна Андова,
Сања Атанасова

# Вовед во математика за инженери

Скопје, 2017

**Издавач:**
Универзитет „Св. Кирил и Методиј” во Скопје
Бул. Гоце Делчев, бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

**Уредник за издавачка дејност на УКИМ:**
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

**Уредник на публикацијата:** С. Геговска-Зајкова, К. Хаџи-Велкова Санева,
Е. Хаџиева, М. Кујумџиева-Николоска, А. Бучковска, Б. Јолевска-Тунеска,
Б. Начевска-Настовска, В. Андова, С. Атанасова,
Факултет за електротехника и информациски технологии, Скопје

**Рецензенти:**
1. Д-р Боро Пиперевски, редовен професор во пензија
2. Д-р Лазо Димов, редовен професор во пензија

**Техничка обработка:** Авторите

**Лектура на македонски јазик:** Ленка Панчевска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски”, Скопје

51-74(075.8)(076)

ВОВЕД во математика за инженери / [автори Соња Геговска-Зајкова … и др.]. - Скопје : Универзитет „Св. Кирил и Методиј” во Скопје, 2018. - 302 стр. : илустр. ; 25 cm

Автори: Соња Геговска-Зајкова, Катерина Хаџи-Велкова Санева, Елена Хаџиева, Марија Кујумџиева-Николоска, Анета Бучковска, Билјана Јолевска-Тунеска, Билјана Начевска-Настовска, Весна Андова, Сања Атанасова

ISBN 978-9989-43-408-2
1. Геговска-Зајкова, Соња [автор] 2. Хаџи-Велкова Санева, Катерина [автор] 3. Хаџиева, Елена [автор] 4. Кујумџиева-Николоска, Марија [автор] 5. Бучковска, Анета [автор] 6. Јолевска-Тунеска, Билјана [автор] 7. Начевска-Настовска,Билјана [автор] 8. Андова, Весна [автор] 9. Атанасова, Сања [автор]
а) Математика - Инженерство - Високошколски учебници - Вежби
COBISS.MK-ID 107056138

# Предговор

Оваа збирка решени задачи е наменета за средношколци и студенти од техничките и природно-математичките факултети, но можат да ја користат и инженери и читатели кои имаат потреба и интерес од повторување и изучување на најголем дел од средношколската математика преку задачи.

Во збирката се обработени голем дел од областите кои се изучуваат во средношколските математички курсеви, а кои сметавме дека се најпотребни за успешно вклучување во наставата на идните студенти на техничките и природно-математичките факултети. Посебно внимание посветивме на основните функции: линеарна, квадратна, експоненцијална, логаритамска и тригонометриски функции, како и решавањето равенки, неравенки и системи од равенки и неравенки, кои сметаме дека се основа на голем број инженерски дисциплини.

При подготовката на збирката, се обидовме задачите да ги подредиме методолошки, а нивните решенија да ги изложиме детално, што ќе овозможи секој читател да ги совлада без поголеми тешкотии. Со цел успешно да се следат решенијата на задачите, на почетокот на секоја глава е даден краток преглед од теоријата, како што се дефиниции, особини и познати резултати. Покрај решените задачи, на крајот од секоја глава се дадени дополнителни нерешени задачи со конечни решенија или упатство за решавање, кои се наменети за самостојна работа на средношколците, студентите и читателите. Збирката содржи и голем број графици со цел да се олесни изучувањето на основните функции.

Им благодариме на рецензентите проф. д-р Боро Пиперевски и проф. д-р Лазо Димов кои со своите добронамерни сугестии и забелешки помогнаа во подобрувањето на оваа збирка задачи, како и на м-р Јасмина Ангелевска која со внимателното читање на материјалот придонесе за отстранување на некои грешки.

Однапред им благодариме на сите читатели кои со свои коментари, сугестии, посочување на евентуални грешки и пофалби ќе придонесат за подобрување на оваа збирка решени задачи при нејзиното преиздавање.

Скопје, април 2017 година

Авторите

# Содржина

# 1 Броеви

## 1.1 Реални броеви

### Природни броеви. Принцип на математичка индукција

Множеството природни броеви $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ се означува со $\mathbb{N}$, а множеството $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ се нарекува проширено множество природни броеви.

Броевите: $2, 4, 6, 8, \dots$ се парни броеви, а броевите: $3, 5, 7, 9, \dots$ се непарни броеви. Секој парен број може да се претстави во облик $2k$, $k \in \mathbb{N}$, а секој непарен број во облик $2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ или $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Производот од првите $n$ природни броеви го означуваме со $n!$ (се чита $n$ факториел), т.е.

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

По дефиниција, $0! = 1$.

Јасно е дека важи:

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1!.$$

Со *принципот на математичка индукција* може да се докаже точноста на едно математичко тврдење за секој природен број $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, ако:

1) се покаже дека тврдењето е точно за $n = n_0$;

2) од претпоставката дека тврдењето важи за $n = k$, $k > n_0$, се покаже дека важи и за $n = k + 1$.

### Цели, рационални и ирационални броеви

Множеството цели броеви $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ се означува со $\mathbb{Z}$.

Множеството рационални броеви ги содржи сите конечни децимални броеви и сите бесконечни периодични децимални броеви, т.е. броевите кои можат да се запишат во вид на дропка. Множеството рационални броеви се означува со $\mathbb{Q}$. Значи,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Во множеството рационални броеви се дефинира еднаквост, збир (разлика), производ и количник на следниов начин:

1) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$ ако и само ако $mq = np$, $n \neq 0$, $q \neq 0$;

2) $\dfrac{m}{n} \pm \dfrac{p}{n} = \dfrac{m \pm p}{n}$, $n \neq 0$;

3) $\dfrac{m}{n} \pm \dfrac{p}{q} = \dfrac{mq \pm np}{nq}$, $n \neq 0$, $q \neq 0$;

4) $\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{mp}{nq}$, $n \neq 0$, $q \neq 0$;

5) $\dfrac{m}{n} : \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{q}{p} = \dfrac{mq}{np}$, $n \neq 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Множеството ирационални броеви ги содржи сите бесконечни непериодични децимални броеви и се означува со $\mathbb{I}$. Притоа важи: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Множеството рални броеви се означува со $\mathbb{R}$ и ги содржи сите рационални и ирационални броеви, т.е. важи:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

За множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ важи:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

За операцијата собирање на реални броеви исполнети се следниве особини:

1) (комутативен закон) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$;

2) (асоцијативен закон) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) (постоење неутрален елемент)
$(\exists\, 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = 0 + x = x$;

4) (постоење на инверзен елемент)
$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})\ x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Нека $x$, $y$, $z, v \in \mathbb{R}$. Ако $x < y$ тогаш $x + z < y + z$. Исто така, ако $x < y$ и $z < v$ тогаш $x + z < y + v$.

За операцијата множење на реални броеви исполнети се следниве особини:

5) (комутативен закон) $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x$;

6) (асоцијативен закон) $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

7) (постоење неутрален елемент)
$(\exists\, 1 \in \mathbb{R})(\forall\, x \in \mathbb{R})\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;

8) (постоење на инверзен елемент)
$(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

За операциите собирање и множење на реални броеви важи и дистрибутивниот закон за множењето во однос на собирањето:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z \ \text{ и } \ x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z.$$

Исто така, за $x$, $y$, $z$, $v \in \mathbb{R}$ важи:

1) $-(-x) = x$; $\quad -0 = 0$;

   $-x = (-1)\cdot x$; $\quad -(x\cdot y) = (-x)\cdot y = x\cdot(-y)$;

   $(-x)\cdot(-y) = x\cdot y$; $\quad x\cdot 0 = 0\cdot x = 0$;

2) Ако $x\cdot y = 0$ тогаш $x = 0$ или $y = 0$;

3) Ако $x < y$ и $z > 0$ тогаш $x\cdot z < y\cdot z$;

4) Ако $x < y$ и $z < 0$ тогаш $x\cdot z > y\cdot z$;

5) Ако $x < y$ и $z = 0$ тогаш $x\cdot z = y\cdot z = 0$;

6) Ако $x < 0$ и $y < 0$ тогаш $x\cdot y > 0$;

7) Ако $x < 0$ и $y > 0$ тогаш $x\cdot y < 0$.

Множеството позитивни реални броеви го означуваме со $\mathbb{R}^+$, т.е.

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\},$$

додека множеството негативни реални броеви со $\mathbb{R}^-$, т.е.

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0\}.$$

### Апсолутна вредност на реален број

*Апсолутна вредност* на реалниот број $x$ се дефинира на следниов начин:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Нека $x, y \in \mathbb{R}$. Тогаш важат следниве својства:

1) $|xy| = |x||y|$;
2) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$;
3) $|x+y| \leq |x| + |y|$;
4) $|x-y| \geq ||x| - |y||$.

### Интервали и сегменти

Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Од посебен интерес се следниве подмножества од $\mathbb{R}$. Множеството од сите реални броеви $x$ кои го задоволуваат условот $a < x < b$ го означуваме со $(a, b)$ и го викаме *отворен интервал*, т.е.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

*Затворен интервал* (*сегмент, отсечка*) се вика множеството од сите реални броеви $x$ кои го задоволуваат условот $a \leq x \leq b$ и се означува со $[a, b]$, т.е.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Множествата:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

и

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

се викаат *полуотворени сегменти* или *полузатворени интервали*.

Исто така, ќе ги спомeнеме и следниве подмножества од $\mathbb{R}$ наречени *полуправи*:

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}; \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\};$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}; \qquad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

Интервалот $(-\infty, +\infty)$ ги содржи сите реални броеви, т.е. $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Множеството $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ се нарекува проширено множество од реални броеви.

Во задачите од 1.1 до 1.6, да се докаже точноста на равенствата за секој природен број $n$, применувајќи го принципот на математичка индукција.

**Задача 1.1.** $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$.

**Решение.** 1) Ја проверуваме точноста на равенството за $n = 1$:

$$1 = \frac{1(3-1)}{2}.$$

2) Претпоставуваме дека е точно за $n = k$, односно дека важи:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}.$$

Оваа претпоставка ја нарекуваме *индуктивна претпоставка*.

Ќе ја покажеме точноста за $n = k + 1$, односно ќе покажеме дека важи:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] = \frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2}.$$

Користејќи ја индуктивната претпоставка, добиваме:

$$1+4+7+\cdots+(3k-2)+[3(k+1)-2]=$$

$$=\quad \frac{k(3k-1)}{2}+(3k+1)=\frac{3k^2-k+6k+2}{2}=$$

$$=\quad \frac{(k+1)(3k+2)}{2}=\frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}.$$

Следува дека равенството е точно за секој природен број $n$.

**Задача 1.2.** $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

**Решение.** 1) Проверуваме дали равенството е точно за $n=1$:

$$1=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

2) Претпоставуваме дека равенството е точно за $n=k$, односно дека важи:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ќе ја покажеме точноста за $n=k+1$:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=$$

$$=\quad \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$$

$$=\quad \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=$$

$$=\quad \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Следува дека равенството е точно за секој природен број $n$.

**Задача 1.3.** $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

**Решение.** 1) Проверуваме дали равенството е точно за $n = 1$:

$$1 = 2! - 1.$$

2) Претпоставуваме дека равенството е точно за $n = k$, односно дека важи:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Ќе покажеме дека е точно и за $n = k+1$:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! \\ = \; & (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(k+1+1) - 1 \\ = \; & (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1 = ((k+1)+1)! - 1 \end{aligned}$$

Следува дека за секој природен број $n$ важи:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

**Задача 1.4.** $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \cdots + \dfrac{n}{2^{n-1}} = \dfrac{2^{n+1} - n - 2}{2^{n-1}}$.

**Решение.** 1) Проверуваме дали равенството е точно за $n = 1$:

$$1 = \frac{2^2 - 1 - 2}{2^0}.$$

2) Претпоставуваме точност на равенството за $n = k$, односно

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{2^{k-1}}.$$

Ќе покажеме дека е точно за $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{k}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^{(k+1)-1}} = \\ = \quad & \frac{2^{k+1} - k - 2}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^{k+1-1}} = \frac{2^{k+2} - 2k - 4}{2^k} + \frac{k+1}{2^k} = \\ = \quad & \frac{2^{k+2} - k - 3}{2^k} = \frac{2^{(k+1)+1} - (k+1) - 2}{2^{(k+1)-1}}. \end{aligned}$$

Следува дека тврдењето е точно за секој природен број $n$.

**Задача 1.5.**

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k^3 = -n^2(4n+3).$$

**Решение.** Треба всушност да покажеме дека

$$1 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (-1)^{2n+1}(2n)^3 = -n^2(4n+3).$$

1) Проверуваме дали равенството е точно за $n = 1$:

$$1 - 2^3 = -1(4+3).$$

2) Под претпоставка дека равенството е точно за $n = k$, односно важи:

$$1 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (-1)^{2k+1}(2k)^3 = -k^2(4k+3),$$

ќе покажеме дека е точно и за $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & 1 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (-1)^{2k+1}(2k)^3 + (2k+1)^3 - (2k+2)^3 = \\ = \quad & -k^2(4k+3) + (2k+1)^3 - (2k+2)^3 = -4k^3 - 15k^2 - 18k - 7 = \\ = \quad & -4k^3 - 7k^2 - 8k^2 - 14k - 4k - 7 = \\ = \quad & -k^2(4k+7) - 2k(4k+7) - (4k+7) = \\ = \quad & -(k+1)^2(4k+7) = -(k+1)^2(4(k+1)+3). \end{aligned}$$

**Задача 1.6.**

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},$$

каде што $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

**Решение.** 1) Проверуваме дали равенството е точно за $n = 1$:

$$1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2}.$$

2) Претпоставуваме дека равенството е точно и за $n = k$, односно важи:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + kx^{k-1} = \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{(x-1)^2}.$$

Ќе покажеме дека равенството е точно и за $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
& 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + kx^{k-1} + (k+1)x^k = \\
= \; & \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1}{(x-1)^2} + (k+1)x^k = \\
= \; & \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1 + (kx^k + x^k)(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} = \\
= \; & \frac{kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1 + kx^{k+2} - 2kx^{k+1} + kx^k + x^{k+2}}{(x-1)^2} + \\
& + \frac{-2x^{k+1} + x^k}{(x-1)^2} = \\
= \; & \frac{(k+1)x^{k+2} - (k+2)x^{k+1} + 1}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Следува дека тврдењето е точно за секој природен број $n$.

**Задача 1.7.** Кои од следниве броеви:

$$\sqrt{4}; \quad \sqrt{2}; \quad \pi; \quad -\frac{12}{11}; \quad 0,123111213212223\ldots; \quad 0,123(4)+\frac{\pi}{2}$$

се рационални, а кои ирационални?

**Решение.** Рационални се броевите $\sqrt{4}=2$ и $-\frac{12}{11}$.

Ќе покажеме дека бројот $\sqrt{2}$ не е рационален број. Да претпоставиме дека $\sqrt{2}$ е рационален број, т.е. може да се запише во вид на дропка $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, каде што $p$ и $q$ се заемно прости броеви и $q\neq 0$. Тогаш $2=\frac{p^2}{q^2}$, па добиваме $2q^2=p^2$. Значи 2 е делител на $p^2$.

Може да се покаже дека од $2|p^2$ следува дека $2|p$. Според тоа, постои природен број $p_1$ таков што $p=2p_1$. Тогаш $2q^2=4p_1^2$, т.е. $q^2=2p_1^2$. Оттука заклучуваме дека $2|q$.

Добивме дека $2|p$ и $2|q$, што е во контрадикција со претпоставката дека $p$ и $q$ се заемно прости броеви. Значи $\sqrt{2}$ не може да се запише како дропка, т.е. не е рационален број.

Броевите $0,123111213212223\ldots$ и $0,123(4)+\frac{\pi}{2}$ се бесконечни непериодични децимални броеви, т.е. ирационални броеви.

**Задача 1.8.** Подреди ги по големина следниве реални броеви:

$$-1,(45); \quad -\sqrt{2}; \quad -\frac{290}{200}; \quad \frac{10}{3}; \quad \pi; \quad 3,1(4).$$

**Решение.** Дадените броеви ги запишуваме на следниов начин:

$$-1,(45)=-1,454545\ldots; \quad -\frac{290}{200}=-1,45; \quad -\sqrt{2}=1,4142\ldots;$$

$$3,1(4)=3,14444\ldots; \qquad \pi=3,14159\ldots; \quad \frac{10}{3}=3,33333\ldots,$$

па за овие броеви важи:

$$-1,(45) < -\frac{290}{200} < -\sqrt{2} < \pi < 3,1(4) < \frac{10}{3}.$$

**Задача 1.9.** Следниве децимални броеви претстави ги во вид на дропка:

а) $3,111... = 3,(1)$; б) $2,235235\cdots = 2,(235)$;

в) $0,126767\cdots = 0,12(67)$; г) $-11,121314(16)$.

**Решение.** а) Нека означиме $x = 3,111...$. Тогаш, $10x = 31,11...$. Ако ги одземеме овие равенства ќе добиеме:

$$9x = 31,11... - 3,111...,$$

односно $9x = 28$, од каде следува дека $x = \dfrac{28}{9}$.

б) Нека $x = 2,235235...$. Тогаш, $1000x - x = 2235,235... - 2,235...$, односно $999x = 2233$, од каде се добива дека $x = \dfrac{2233}{999}$.

в) Нека означиме $x = 0,12676767...$. Тогаш, $100x = 12,676767...$ и $10000x = 1267,6767\ldots$, па ако овие равенства ги одземеме се добива $10000x - 100x = 1255$, односно $9900x = 1255$. За бараниот број се добива $x = \dfrac{1255}{9900} = \dfrac{251}{1980}$.

г) Слично како погоре, се добива $-11,121314(16) = -\dfrac{1101010102}{99 \cdot 10^6}$.

**Задача 1.10.** Да се пресмета вредноста на следниве изрази:

а) $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{7-4}{12+3\cdot 5} - \dfrac{1}{5}\left(3 + \dfrac{11}{4}\right)$; б) $\left(221 \cdot \dfrac{3}{16} - 2 - \dfrac{11}{2}\right) : \dfrac{0,55}{1,6}$.

**Решение.** а) $\frac{2}{3}\cdot\frac{7-4}{12+3\cdot 5}-\frac{1}{5}\left(3+\frac{11}{4}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{27}-\frac{1}{5}\cdot\frac{23}{4}=-\frac{581}{540}.$

б) $\left(221\cdot\frac{3}{16}-2-\frac{11}{2}\right):\frac{0,55}{1,6}=\left(\frac{663}{16}-\frac{15}{2}\right)\frac{160}{55}=\frac{543}{16}\cdot\frac{32}{11}=\frac{1086}{11}.$

**Задача 1.11.** Дали постои природен, цел, рационален или реален број $x$ за кој важи:

а) $2x=3$; б) $-4x-1=3$; в) $3x=\pi$; г) $\sqrt{3}x=9$?

**Решение.**

а) $x=\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. б) $x=-1\in\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

в) $x=\frac{\pi}{3}\in\mathbb{I}\subset\mathbb{R}$. г) $x=3\sqrt{3}\in\mathbb{I}\subset\mathbb{R}$.

**Задача 1.12.** Дали постои рационален или ирационален број $x$ за кој важи:

а) $x^2=2$; б) $x^2=4$; в) $x^2=-9$;

г) $x^2-1=\sqrt{\pi}$ д) $x^3=8$; ѓ) $x^3=-8$?

**Решение.** а) $x=\pm\sqrt{2}\in\mathbb{I}$.

б) $x=\pm 2\in\mathbb{Q}$.

в) не постои таков реален број.

г) $x=\pm\sqrt{\sqrt{\pi}+1}\in\mathbb{I}$.

д) $x=2\in\mathbb{Q}$.

ѓ) $x = \sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{Q}$.

**Задача 1.13.** Да се пресмета $|2-a| - |b+1| + |a+b|$ ако $a = 2$ и $b = -4$.

**Решение.** $|2-a| - |b+1| + |a+b| = |2-2| - |-4+1| + |2-4| =$

$$= |0| - |-3| + |-2| = 0 - 3 + 2 = -1.$$

**Задача 1.14.** Да се определи $|A|$ ако:

$$\text{а) } A = \sin\frac{3\pi}{2}; \qquad \text{б) } A = \sin\frac{\pi}{6} - 1.$$

**Решение.** а)$|A| = \left|\sin\frac{3\pi}{2}\right| = |-1| = 1$.

б)$|A| = \left|\sin\frac{\pi}{6} - 1\right| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

## 1.2 Комплексни броеви

Под комплексен број $z$ се подразбира подредениот пар $(x, y)$ од реални броеви $x$ и $y$. Множеството од комплексни броеви се означува со $\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{C} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$.

Во множеството комплексни броеви може да се дефинира еднаквост на комплексни броеви, а со помош на операциите во $\mathbb{R}$ може да се дефинираат и операциите собирање и множење на комплексни броеви.

Нека $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$.

1) $z_1 = z_2$ ако и само ако $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;

2) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$.

Од особините за собирање и множење кај реални броеви следува дека за операциите собирање и множење на комплексни броеви важи комутативниот и асоцијативниот закон. Понатаму, неутрален елемент за операцијата собирање е $(0,0)$, а за операцијата множење е $(1,0)$. Инверзен елемент на $(x,y)$ во однос на собирањето е $(-x,-y)$, а инверзен елемент на $(x,y)$, $x \neq 0$ или $y \neq 0$ во однос на множењето е $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, -\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$. Исто така важи и дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето. Од овде следува дека може да се дефинираат операциите одземање и делење на комплексни броеви на следниов начин:

Нека $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$.

4) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;

5) $z_1 : z_2 = \left(\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \dfrac{-x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$, $x_2 \neq 0$ или $y_2 \neq 0$.

Со идентификација на подредениот пар $(x,0)$ со реалниот број $x$, т.е. $(x,0) = x$, се добива дека множеството реални броеви $\mathbb{R}$ е вистинско подмножество од множеството на комплексни броеви $\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ја воведуваме имагинарната единица $i$ на следниов начин $(0,1) = i$. Според 3) имаме:

$$(0,y) = (y,0) \cdot (0,1) = y \cdot i,$$

од каде следува дека $(0,y)$ може да се запише како $yi$. Понатаму, од 2) и 3) добиваме:

$$(x,y) = (x,0) + (y,0) \cdot (0,1) = x + yi.$$

Значи комплексниот број $z = (x, y)$ можеме да го запишиме во облик $z = x + iy$. Овој облик на $z$ се вика *алгебарски облик*.

Од 3) за имагинарната единица добиваме:

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Според ова, за операциите собирање, одземање, множење и делење на комплексните броеви во алгебарски облик важи:

$$(x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i;$$

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i;$$

$$\frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (-x_1 y_2 + y_1 x_2)i}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2 \neq 0 \ \text{ или } \ y_2 \neq 0.$$

Забележуваме дека собирањето, одземањето и множењето на комплексни броеви во алгебарски облик, се извршува како што се собираат, одземаат и множат биноми соодветно, земајќи ја имагинарната единица како променлива и користејќи дека $i^2 = -1$.

Користејќи дека $i^2 = -1$ се добиваат следниве равенства за имагинарната единица $i$ и $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} i^{4k} &= 1, \\ i^{4k+1} &= i, \\ i^{4k+2} &= -1, \\ i^{4k+3} &= -i. \end{aligned}$$

Ако $y = 0$ тогаш комплексниот број $z$ е реален, а ако $x = 0$ тогаш велиме дека комплексниот број $z$ е чисто имагинарен број. Бројот $x$ се нарекува *реален дел*, а $y$ *имагинарен дел* на комплексниот број $z$ и тие се означуваат со $x = \mathrm{Re}z$, $y = \mathrm{Im}z$, соодветно.

Од 1) следува дека два комплексни броја се еднакви ако и само ако имаат еднакви реални и имагинарни делови.

*Конјугирано комплексен број* на бројот $z = x + iy$ е комплексниот број $x - iy$ кој се означува со $\bar{z}$ (поточно, за $z$ и $\bar{z}$ велиме дека се конјугирано комплексни броеви). Притоа важи:

$$\mathrm{Re}z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}z = \frac{z-\bar{z}}{2i}, \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

За $z$, $z_1$, $z_2 \in \mathbb{C}$ важат следниве својства:

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$;

2) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, $z_2 \neq 0$;

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$;

4) $\overline{\overline{z}} = z$.

На секоја точка $M(x, y)$ од Декартовиот правоаголен координатен систем во рамнина може да ѝ се придружи комплексен број $z = x + iy$, и обратно. Во тој случај, рамнината се вика *комплексна* (*Гаусова*) *рамнина*, при што $x$-оската е *реална оска*, а $y$-оската е *имагинарна оска*.

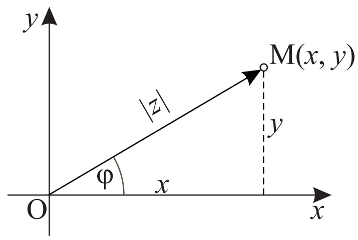
Реалниот број $\overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$ се нарекува *модул* на комплексниот број $z = x+iy$ и се означува со $|z|$ или $\rho$ (види слика 1.1). За модулот на секој комплексен број $z$ важи $|z| \geq 0$.

Ако $z = x \in \mathbb{R}$, тогаш $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ (модулот е апсолутна вредност).

Лесно се покажува дека важи:

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0;$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2;$$




**Слика 1.1.**

$$-|z| \le \mathrm{Re}z \le |z|,\ -|z| \le \mathrm{Im}z \le |z|;$$
$$|z| = |\bar{z}|.$$

Нека $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. За модулот на комплексен број важат следниве својства:

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \ne 0$;

4) $|z_1 - z_2| \ge \Big||z_1| - |z_2|\Big|$.

Аголот $\varphi$ што го зафаќа векторот $\overrightarrow{OM}$ со позитивниот дел на $x$-оската се вика *аргумент* на комплексниот број $z$. Од сликата 1.1. следува дека $x = |z|\cos\varphi$ и $y = |z|\sin\varphi$, од каде се добива:

$$z = x + yi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Овој облик на комплексниот број $z$ се вика *тригонометриски облик*.

Нека $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Операциите множење, делење и степенување на комплексни броеви во тригонометриски облик се извршуваат на следниов начин:

1) $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$, $z_2 \neq 0$;

3) $z_1^n = |z_1|^n \big(\cos(n\varphi_1) + i \sin(n\varphi_1)\big)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ако во последната формула 3) ставиме $|z_1| = 1$ и $\varphi_1 = \varphi$ се добива *Моавровата формула* (Abraham de Moivre, 1667-1754):

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \; n \in \mathbb{N}.$$

**Задача 1.15.** Да се одредат реалниот и имагинарниот дел на следниве комплексни броеви:

а) $z = 5 - 6i + \sqrt{2}$; б) $z = 7i$; в) $z = 12$.

**Решение.** а) $\mathrm{Re}z = 5 + \sqrt{2}$, $\mathrm{Im}z = -6$.

б) $\mathrm{Re}z = 0$, $\mathrm{Im}z = 7$.

в) $\mathrm{Re}z = 12$, $\mathrm{Im}z = 0$.

**Задача 1.16.** Дали постојат реални броеви $x$ и $y$ за кои важат следниве равенства:

а) $5x + 2y - 4xi = 9 + (y - 3)i$; б) $(2x + 3iy) + (6y + xi) = 0$?

**Решение.** а) Од еднаквоста на комплексните броеви го добиваме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ -4x = y - 3 \end{cases},$$

со чие решавање се добива $x = -1$ и $y = 7$.

б) Даденото равенство го запишуваме во облик

$$2x + 6y + (3y + x)i = 0 + 0 \cdot i,$$

од каде се добива системот линеарни равенки $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$.
Системот има бесконечно многу решенија, т.е. секоја подредена двојка од облик $(-3y, y)$, $y \in \mathbb{R}$ е решение на системот.

**Задача 1.17.** Даден е комплексниот број $z = 2 - 6i$. Да се пресмета:

а) $z + \bar{z}$; б) $z - \bar{z}$; в) $z \cdot \bar{z}$.

**Решение.** а) $z + \bar{z} = (2 - 6i) + (2 + 6i) = 4$.

б) $z - \bar{z} = (2 - 6i) - (2 + 6i) = -12i$.

в) $z \cdot \bar{z} = (2 - 6i) \cdot (2 + 6i) = 2^2 + 6^2 = 40$.

**Задача 1.18.** Да се пресмета:

а) $i^{20}$; б) $i^{33}$; в) $(-i)^{42}$; г) $(-i)^{47}$; д ) $\frac{1}{i^{77}}$.

**Решение.** а) $i^{20} = i^{4\cdot 5} = 1$.

б) $i^{33} = i^{4\cdot 8+1} = i$.

в) $(-i)^{42} = i^{42} = i^{4\cdot 10+2} = -1$.

г) $(-i)^{47} = -i^{47} = -i^{4\cdot 11+3} = -(-i) = i$.

д ) $\frac{1}{i^{77}} = \frac{1}{i^{4\cdot 19+1}} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

**Задача 1.19.** Да се извршат назначените операции работејќи со алгебарските облици на комплексните броеви:

а) $(1+i)+(2-3i)-(5-6i)$;

б) $(2+3i)\cdot(3-2i)$;

в) $(3-2i)^2$;

г) $\dfrac{1-i}{1+i}$;

д) $\dfrac{5-i}{i}$;

ѓ) $\dfrac{2i}{1+i}$;

е) $\dfrac{1+i}{2-i}\cdot(3+2i)$;

ж) $\dfrac{1-3i}{i+1}-\dfrac{i}{i+2}$.

**Решение.** а) $(1+i)+(2-3i)-(5-6i)=-2+4i$.

б) $(2+3i)\cdot(3-2i)=6-4i+9i-6i^2=12+5i$.

в) $(3-2i)^2=9-12i+4i^2=9-12i-4=5-12i$.

г) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{1-i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$.

д ) $\dfrac{5-i}{i}=\dfrac{5-i}{i}\cdot\dfrac{i}{i}=\dfrac{5i-i^2}{i^2}=\dfrac{5i+1}{-1}=-1-5i$.

ѓ) $\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{2i-2i^2}{1-i^2}=\dfrac{2i+2}{2}=1+i$.

е)
$$\frac{1+i}{2-i}\cdot(3+2i)=\frac{3+2i+3i+2i^2}{2-i}=\frac{1+5i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=$$
$$=\frac{2+i+10i+5i^2}{2^2+1^2}=\frac{-3+11i}{5}.$$

ж) $\dfrac{1-3i}{i+1}-\dfrac{i}{i+2}=\dfrac{(1-3i)(i+2)-i(i+1)}{(i+1)(i+2)}=\dfrac{i+2-3i^2-6i-i^2-i}{i^2+2i+i+2}=$

$$=\frac{6-6i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{6-18i-6i+18i^2}{1^2+3^2}=\frac{-12-24i}{10}=$$
$$=\frac{-6-12i}{5}.$$

**Задача 1.20.** Нека $z_1=\sqrt{7}+3i$ и $z_2=3-i\sqrt{7}$. Да се пресмета:

а) $|z_1+z_2|$; б) $|z_1-z_2|$; в) $|z_1\cdot z_2|$; г) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

**Решение.**

а) $|z_1+z_2|=\left|\sqrt{7}+3i+3-i\sqrt{7}\right|=\left|(\sqrt{7}+3)+(3-\sqrt{7})i\right|=$
$=\sqrt{(\sqrt{7}+3)^2+(3-\sqrt{7})^2}=$
$=\sqrt{7+6\sqrt{7}+9+9-6\sqrt{7}+7}=$
$=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$

б) $|z_1-z_2|=\left|\sqrt{7}+3i-(3-i\sqrt{7})\right|=\left|(\sqrt{7}-3)+(3+\sqrt{7})i\right|=$
$=\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2+(3+\sqrt{7})^2}=\sqrt{7-6\sqrt{7}+9+9+6\sqrt{7}+7}=$
$=4\sqrt{2}.$

в) $|z_1\cdot z_2|=\left|(\sqrt{7}+3i)\cdot(3-i\sqrt{7})\right|=\left|(\sqrt{7}+3i)\right|\cdot\left|(3-i\sqrt{7})\right|=$
$=\sqrt{7+9}\cdot\sqrt{9+7}=16.$

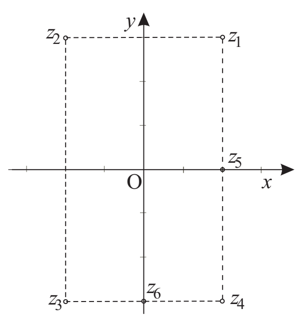
г) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{7}+3i}{3-i\sqrt{7}}\right|=\dfrac{|\sqrt{7}+3i|}{|3-i\sqrt{7}|}=\dfrac{\sqrt{7+9}}{\sqrt{9+7}}=1.$

**Забелешка.** Во задачата 1.20. под в) и г) може прво да се изврши множењето $z_1 \cdot z_2$ и соодветно делењето $\frac{z_1}{z_2}$, а потоа да се определи модулот на добиениот комплексен број.

**Задача 1.21.** Да се претставaт во иста комплексна рамнина следниве комплексни броеви:

$$z_1 = 2 + 3i; \qquad z_2 = -2 + 3i; \qquad z_3 = -2 - 3i;$$
$$z_4 = 2 - 3i; \qquad z_5 = 2; \qquad z_6 = -3i.$$

**Решение.** Забележуваме дека точката што одговара на реалниот број $z_5$ лежи на реалната оска ($x$-оската), а точката што одговара на чисто имагинарниот број $z_6$ лежи на имагинарната оска ($y$-оската).




**Слика 1.2.**

Точките што одговараат на конјугираните комплексни броеви $z_1$ и $z_4 = \bar{z}_1$ се симетрични во однос на $x$-оската, $z_1$ и $z_3 = -z_1$ се симетрични во однос на координатниот почеток, а $z_1$ и $z_2 = -\bar{z}_1$ се симетрични во однос на $y$-оската (види слика 1.2).

**Задача 1.22.** Да се определи геометриското место на точките во комплексната рамнина што одговараат на комплексните броеви $z$ за кои:

| | | |
|---|---|---|
| а) $\mathrm{Re}z = 3$; | б) $\mathrm{Im}z = -2$; | в) $\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z$; |
| г) $\mathrm{Re}z = -\mathrm{Im}z$; | д) $\mathrm{Re}z > 2$; | ѓ) $\mathrm{Im}z \leq -2$; |
| е) $\|z\| = 3$; | ж) $\|z\| \leq 3$; | з) $\|z\| > 1$; |
| ѕ) $\|z-1\| = 1$; | и) $\|z+i\| < 2$; | ј) $\|z-i+2\| \geq 3$. |

**Решение.** Нека $z = x + iy$, $\mathrm{Re}z = x$ и $\mathrm{Im}z = y$. Областа во која припаѓаат точките $z$ за кои важат соодветните равенства или неравенства се скицирани на сликите 1.3 и 1.4.

а) Точките $z$ за кои важи $\mathrm{Re}z = 3$ лежат на правата $x = 3$.

б) Точките лежат на правата $y = -2$.

в) Точките лежат на правата $y = x$.

г) Точките лежат на правата $y = -x$.

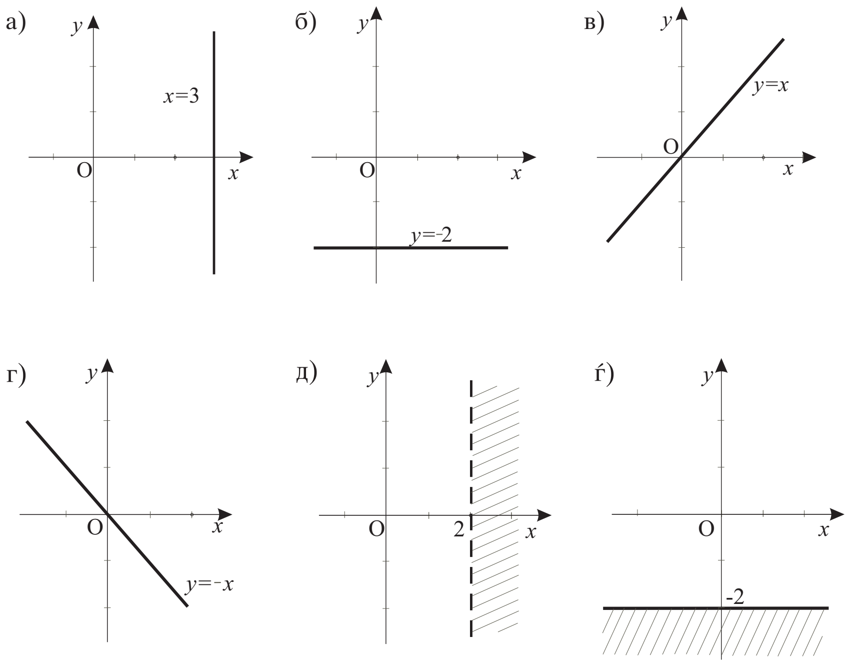
д) Точките лежат во полурамнината $x > 2$.

ѓ) Точките лежат во полурамнината $y \leq -2$.

е) Точките лежат на кружницата $x^2 + y^2 = 3^2$.

ж) Точките лежат на кружницата $x^2 + y^2 = 3^2$ и во нејзината внатрешност, т.е. во областа

$$x^2 + y^2 \leq 3^2.$$




**Слика 1.3.**

з) Точките лежат во надворешноста на кружницата $x^2+y^2=1$, т.е. во областа

$$x^2+y^2>1.$$

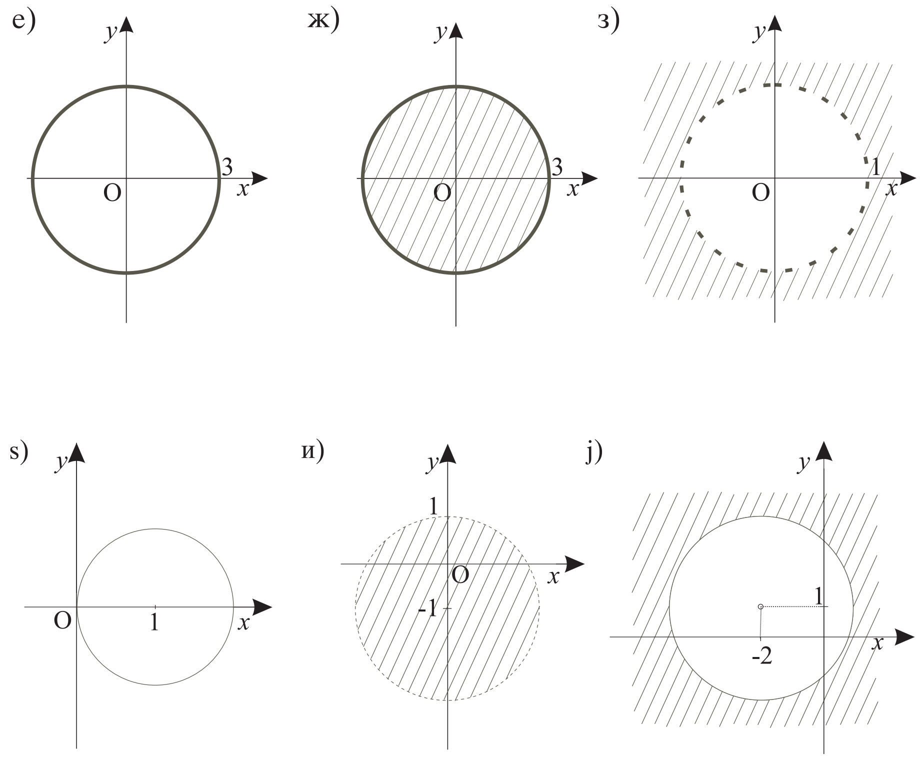
ѕ) Точките лежат на кружницата $(x-1)^2+y^2=1$.

и) Точките лежат во внатрешноста на кружницата $x^2+(y+1)^2=2^2$, т.е. во областа

$$x^2+(y+1)^2<2^2.$$

ј) Точките лежат на кружницата $(x+2)^2+(y-1)^2=3^2$ и надвор од неа, т.е. во областа

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 3^2.$$




**Слика 1.4.**

**Задача 1.23.** Да се претставаат во тригонометриски облик следниве комплексни броеви:

$z_1 = 1+i;\ z_2 = 2;\ z_3 = i;\ z_4 = -4;\ z_5 = -2+2i;\ z_6 = -3i;\ z_7 = 1-i\sqrt{3}.$

**Решение.** $|z_1| = \sqrt{2},\ \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4},\ z_1 = \sqrt{2}\big(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\big);$

$|z_2| = 2,\ \varphi_2 = 0,\ z_2 = 2(\cos 0 + i\sin 0);$

$|z_3| = 1,\ \varphi_3 = \dfrac{\pi}{2},\ z_3 = \big(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\big);$

$|z_4| = 4,\ \varphi_4 = \pi,\ z_4 = 4\big(\cos\pi + i\sin\pi\big);$

$|z_5| = 2\sqrt{2},\ \varphi_5 = \dfrac{3\pi}{4},\ z_5 = \sqrt{2}\big(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\big);$

$|z_6| = 3,\ \varphi_6 = \dfrac{3\pi}{2},\ z_6 = 3\big(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\big);$

$|z_7| = 2,\ \varphi_7 = \dfrac{5\pi}{3},\ z_7 = 2\big(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\big).$

**Задача 1.24.** Да се пресмета:

$$\text{а)}\ \frac{(1+i\sqrt{3})\cdot(-i)}{\sqrt{3}-3i};\quad \text{б)}\ (1+i)^5;\quad \text{в)}\ (1+i\sqrt{3})^{11};\quad \text{г)}\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{83}.$$

**Решение.** а) Множењето и делењето на комплексните броеви ќе го извршиме користејќи тригонометриски облик на комплексни броеви.

Комплексните броеви ги запишуваме во тригонометриски облик:

$$1+i\sqrt{3} = 2\big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\big),\qquad -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

и

$$\sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right).$$

Тогаш,

$$\begin{aligned}\frac{(1+i\sqrt{3})\cdot(-i)}{\sqrt{3}-3i} &= \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{2\sqrt{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)} = \\ &= \frac{\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}}{\sqrt{3}\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

Од тоа што

$$\cos\frac{13\pi}{6}=\cos(2\pi+\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad \sin\frac{13\pi}{6}=\sin(2\pi+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}$$

се добива:

$$\begin{aligned}\frac{(1+i\sqrt{3})\cdot(-i)}{\sqrt{3}-3i} &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}+i).\end{aligned}$$

б) Ако работиме со алгебарскиот облик на комлексниот број $1+i$, тогаш степенувањето ќе се изврши со користење на биномната формула

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Но, поедноставно е да го извршиме степенувањето претставувајќи го комплексниот број во тригонометриски облик:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Од Моавровата формула се добива:

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 = \\ &= (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Од тоа што

$$\cos\frac{5\pi}{4} = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} \text{ и } \sin\frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4}$$

имаме:

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\ &= -4-4i.\end{aligned}$$

в) Аналогно како под б) имаме:

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^{11} &= \Big(2\big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\big)\Big)^{11} = 2^{11}\big(\cos\frac{11\pi}{3} + i\sin\frac{11\pi}{3}\big) = \\ &= 2^{11}\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right) = 2^{11}\big(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\big) = \\ &= 2^{11}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{10}(1-\sqrt{3}\,i).\end{aligned}$$

г) Користејќи го резултатот добиен во задачата 1.19-г имаме:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{83} = (-i)^{83} = -i^{83} = -i^{4\cdot 20+3} = -i^3 = i.$$

### Задачи за вежбање

**Задача 1.25.** Со примена на методот на математичка индукција да се докаже точноста на следниве равенства за секој природен број $n$:

а) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

б) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

в) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

г) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$;

д) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

ѓ) $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^4} + \cdots + \dfrac{x^{2^n-1}}{1-x^{2n}} = \dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

**Задача 1.26.** Кои од следниве броеви:

$$\sqrt{3}-1,2; \quad \sqrt{16}; \quad 0,1212\ldots; \quad -\pi; \quad \frac{112}{-321}$$

се рационални, а кои ирационални?

**Одговор.** Рационални се броевите: $\sqrt{16}$; $0,1212\ldots$ и $\dfrac{112}{-321}$, а ирационални се броевите: $\sqrt{3}-1,2$ и $-\pi$.

**Задача 1.27.** Подреди ги по големина следниве реални броеви:

$$-2,(25); \quad 1-\sqrt{2}; \quad -\frac{190}{100}; \quad \frac{11}{3}; \quad \pi; \quad 3,1(41).$$

**Одговор.** $-2,(25) < -\frac{190}{100} < 1-\sqrt{2} < 3,1(41) < \pi < \frac{11}{3}$.

**Задача 1.28.** Претвори ги следниве децимални броеви во дропки:

$$\text{а) } -2,(12); \qquad \text{б) } 1,(131); \qquad \text{в) } 2,112(65).$$

**Одговор.** а) $-\frac{70}{33}$, б) $\frac{1130}{999}$, в) $\frac{209153}{99000}$.

**Задача 1.29.** Дали постои природен, цел, рационален или реален број $x$ за кој важи:

$$\text{а) } 2x+4=-1; \quad \text{б) } -3x-5=4; \quad \text{в) } \pi x = 13\pi - 1; \quad \text{г) } \sqrt{3}x = 2?$$

**Одговор.** а) $x=-2,5 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, б) $x=-3 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$,
в) $x = 13 - \frac{1}{\pi} \in \mathbb{R}$, г) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in \mathbb{R}$.

**Задача 1.30.** Дали постои рационален број $x$ за кој важи:

$$\text{а) } x^3 = 27; \qquad \text{б) } x^2 = -6; \qquad \text{в) } x^2 = \frac{10000}{121}?$$

Дали постои реален број $x$ за кој важат горните равенства?

**Одговор.** а) $x = 3 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, б) не постои, в) $x = \pm\frac{100}{11} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

**Задача 1.31.** Да се докажат равенствата:

$$\frac{a+|a|}{2} = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}; \qquad \frac{a-|a|}{2} = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Задача 1.32.** Претстави ги следниве множества на бројна оска:

а) $I_1 = [-3, 3)$; б) $I_2 = (1, 5]$; в) $I_3 = (-2, 3)$;

г) $I_4 = (-\infty, -2)$; д) $I_5 = [-\frac{17}{4}, +\infty)$; ѓ) $I_1 \cap I_2$;

е) $I_3 \cup I_4$; ж) $I_5 \cap I_1$; з) $I_3 \cap I_4$.

**Задача 1.33.** Дали постојат реални броеви $x$ и $y$ за кои важат следниве равенства:

а) $x - 1 - (3y + 2)i = 4$;

б) $x - 2y + (3x - 6y)i = 0$;

в) $3x - y + (9x - 3y)i = i$?

**Одговор.** а) $x = 5, y = -2/3$, б) $x = 2y, y \in \mathbb{R}$, в) не постојат.

**Задача 1.34.** Да се пресмета:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$; г) $\frac{7-i}{1-6i} + \frac{-1+7i}{2+i}$;

б) $\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4}i\right) - \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{4}i\right) + \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}i\right)$; д) $\frac{(1+i)^3}{1-i}$.

в) $2i(\frac{1}{2} + 5i) - (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i) \cdot (6 + \frac{15}{i})$;

**Одговор.** а) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}i$, б) $-1-\dfrac{5}{4}i$,

в) $-3+\dfrac{25}{2}i$, г) $\dfrac{50+152i}{37}$, д) $-2$.

**Задача 1.35.** Да се пресмета:

а) $i^{16}$; в) $i^{21}$; д) $i^{-38}$; е) $i^{-7}$;

б) $(-i)^{44}$; г ) $(-i)^{49}$; ѓ) $\dfrac{1}{i^{10}}$; ж) $\dfrac{1}{(-i)^{27}}$.

**Одговор.** а) 1, б) 1, в) $i$, г) $-i$, д) $-1$, ѓ) $-1$, е) $i$, ж) $-i$.

**Задача 1.36.** Нека $z_1 = 1-i$ и $z_2 = 2+3i$. Да се пресмета:

$$\left|z_1+\overline{z_2}-z_1z_2+\frac{z_1}{\overline{z_2}}\right|.$$

**Одговор.** $\dfrac{\sqrt{4537}}{13}$.

**Задача 1.37.** Да се претставаат во комплексна рамнина следниве комплексни броеви:

$$3;\ 2+i;\ 2i;\ -1+3i;\ -2;\ -2-i;\ -3i;\ 2-3i.$$

**Задача 1.38.** Да се определи геометриското место на точките во комплексната рамнина што одговараат на комплексните броеви $z$ за кои:

а) $\mathrm{Re}\, z = 0$; б) $\mathrm{Im}\, z = 0$; в) $\mathrm{Re}\, z < -1$;

г) $\mathrm{Im}\, z \geq 2$; д) $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z + 3$; ѓ) $\mathrm{Im}\, z > -\mathrm{Re}\, z - 1$;

е) $|z| \leq 2$; ж) $|z-3| \leq 1$; з) $|z-1-i| > 3$.

**Задача 1.39.** Користејќи тригонометриски облик на комплексен број да се пресмета:

а) $(-1+i\sqrt{3})^{60}$;

б) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}$;

в) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})(\cos\theta + i\sin\theta)}{(1+i)(\cos\theta - i\sin\theta)}$, $\theta$ е произволен агол.

**Одговор.** а) $2^{60}$, б) $\dfrac{1}{6^5 \cdot 4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)\right)$,
в) $\sqrt{2}\left(\cos(\dfrac{\pi}{12}+2\theta) + i\sin(\dfrac{\pi}{12}+2\theta)\right)$.

# 2 Алгебарски изрази

### Степен со показател цел број

Ако $a$ е реален број, $a \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ тогаш *$n$-ти степен на $a$* се дефинира со:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Бројот $a$ се вика *основа*, а $n$ *показател* (*експонент*) на степенот.

За секој реален број $a \neq 0$ се дефинира степен со показател нула и со показател цел негативен број на следниов начин:

$$a^0 = 1\,, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Притоа, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0\,.$

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $m, n \in \mathbb{Z}$. За степен со показател цел број важат следниве својства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

### Рационални изрази

Производот од некој број и степените од некои променливи со експонент природен број се вика *моном*. Степен на еден моном е збирот на експонентите (показателите) од степените на променливите во тој моном.

Збир од два монома се вика *бином*, а збир од три монома е *трином*. Општо, збир од конечен број мономи се вика *цел рационален израз* или *полином*. Најголемиот од степените на мономите што го сочинуваат полиномот се вика *степен на полиномот*.

Најголем заеднички делител (со ознака НЗД) на два или повеќе полинома е полиномот со највисок можен степен кој без остаток ги дели тие полиноми. Најмал заеднички содржател (со ознака НЗС) на два или повеќе полинома е полиномот со најмал можен степен кој е делив со тие полиноми.

Операциите со полиноми ќе ги илустрираме низ задачи.

Важат следниве формули за $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2; \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; \\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k},\ n \in \mathbb{N} \ \ \text{(биномна формула)}; \\
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc; \\
(a+b-c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc; \\
(a-b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-b-c)^2 &= a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc;\\
a^2-b^2 &= (a-b)(a+b);\\
a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab;\\
a^3\pm b^3 &= (a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);\\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1});\\
a^{2n+1}+b^{2n+1} &= (a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}).
\end{aligned}$$

Полиномот

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0, \tag{2.1}$$

каде што $a_n\neq 0$, $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$, се нарекува *полином од $n$-ти степен по променлива $x$*. Реалните броеви $a_0,a_1,\ldots,a_n$ се викаат коефициенти на полиномот $P_n(x)$.

За полиномот $P_n(x)$ велиме дека е во *нормален (стандарден) облик* ако експонентите на степените на $x$ се во опаѓачки редослед.

Ако $m<n$ тогаш $a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\cdot x^n+\cdots+0\cdot x^{m+1}+a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

За два полинома од облик (2.1) велиме дека се *еднакви* ако имаат еднакви коефициенти пред соодветните степени на променливата $x$.

Збир (разлика) на два полинома од ист степен

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

и

$$Q_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$$

е полиномот:

$$(a_n\pm b_n)x^n+(a_{n-1}\pm b_{n-1})x^{n-1}+(a_{n-2}\pm b_{n-2})x^{n-2}+\cdots+(a_1\pm b_1)x+(a_0\pm b_0).$$

Производ на два полинома од облик (2.1) од степен $m$ и $n$ е полином од степен $m+n$. Постапката на множење на два полинома ќе ја илустрираме во задачите.

Делење на полиномот $P(x)$ со полиномот $S(x)$, всушност значи определување на полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ такви што

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

при што степенот на $R(x)$ е барем за една единица помал од степенот на $S(x)$. Притоа, полиномот $Q(x)$ се вика количник, а полиномот $R(x)$ остаток. Во случај кога $R(x) = 0$ велиме дека полиномот $P(x)$ се дели без остаток со полиномот $S(x)$.

Бројот $c$ за кој $P_n(c) = 0$ се нарекува *корен* или *нула* на полиномот $P_n(x)$. Ако $c$ е нула на полиномот $P_n(x)$, тогаш $P_n(x)$ се дели без остаток со полиномот $x - c$ и може да се запише $P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x)$. Ако $P_n(x)$ се дели без остаток со $(x-c)^k$, но не се дели со $(x-c)^{k+1}$, тогаш велиме дека $x = c$ е *$k$-кратна нула* на полиномот $P_n(x)$.

Нека

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

е полином со рационални коефициенти, т.е. $a_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $q_i \neq 0$ за $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Тогаш важи:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ &= \frac{1}{A}\left(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0\right) = \\ &= \frac{1}{A}\, Q_n(x), \end{aligned}$$

каде што $A = \text{НЗС}(q_0, q_1, \ldots, q_n)$ и

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

е полином чии коефициенти се цели броеви. Јасно е дека полиномите $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ имаат исти корени.

Коефициентите на полиномот $Q_n(x)$ се цели броеви и за него важи следнава особина: ако полином со коефициенти цели броеви има рационален корен, тогаш тој корен е од облик $\pm\frac{q}{p}$, каде што $p$ е делител на коефициентот $b_n$, а $q$ е делител на коефициентот $b_0$.

Специјално, ако полиномот

$$Q_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0, \tag{2.2}$$

каде што $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$ има цел корен, тогаш тој корен е од облик $\pm q$, каде што $q$ е делител на коефициентот $b_0$.

Полиномот $P_n(x)$ има точно $n$ корени во множеството од комплексни броеви. Ако $n$ е непарен број, тогаш полиномот (2.1) има барем еден реален корен. Ако полиномот има комплексен корен $z$, тогаш и $\bar{z}$ е корен на дадениот полином, т.е ако $P_n(z) = 0$ тогаш $P_n(\bar{z}) = 0$.

Рационален израз во кој се јавува делење со израз кој содржи променлива се вика *дробно рационален израз*.

### Корен од реален број. Степен со показател рационален број. Степен со показател реален број

Ако $a \in \mathbb{R}^+$ и $n \in \mathbb{N}$, тогаш *$n$-ти корен од $a$* се дефинира на следниов начин:

$$x = \sqrt[n]{a} \iff x^n = a,\ x > 0.$$

Коренот $\sqrt[2n]{a}$ постои само за $a \geq 0$, а $\sqrt[2n-1]{a}$ постои за секој реален број $a$.

За секој реален број $a$ и природен број $n$ важи:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ е непарен број} \\ |a|, & n \text{ е парен број} \end{cases}. \tag{2.3}$$

Специјално за $n = 2$ се добива $\sqrt{a^2} = |a|$.

За коренување на производ и количник важи:

1) $\sqrt[2n-1]{a \cdot b} = \sqrt[2n-1]{a} \cdot \sqrt[2n-1]{b},\ a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N};$

2) $\sqrt[2n-1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n-1]{a}}{\sqrt[2n-1]{b}},\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ n \in \mathbb{N};$

3) $\sqrt[2n]{a \cdot b} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b},\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in \mathbb{N};$

4) $\sqrt[2n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}},\ a \geq 0,\ b > 0,\ n \in \mathbb{N}.$

За коренувањето на корен важи:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a},\ a \geq 0,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Постапката за ослободување од корен кој се јавува во именител на дропка се нарекува *рационализирање именител* и се изведува на следниов начин:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{a}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a};\\
\frac{1}{a \pm \sqrt{b}} &= \frac{1}{a \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{a \mp \sqrt{b}}{a \mp \sqrt{b}} = \frac{a \mp \sqrt{b}}{a^2 - b};\\
\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} &= \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b};\\
\frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a \pm b}.
\end{aligned}$$

Степен со показател рационален број се дефинира на следниов начин:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

Нека $a, b \in \mathbb{R}^+$ и $p, q \in \mathbb{Q}$. За степен со рационален показател важат следниве својства:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;

2) $a^p : a^q = a^{p-q}$;

3) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$;

4) $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Степенот со показател рационален број се проширува во степен со показател реален број. Ако $a$ и $b$ се позитивни реални броеви, а $x$ и $y$ кои било реални броеви, тогаш важи:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x; \qquad a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$a^0 = 1; \qquad a^1 = a; \qquad 1^x = 1.$$

**Задача 2.1.** Да се пресмета:

а) $\dfrac{3^{12} \cdot 3^6}{3^4 \cdot 3^5}$; б) $\dfrac{4^2 \cdot 25^2}{10^2}$.

**Решение.** а) $\dfrac{3^{12} \cdot 3^6}{3^4 \cdot 3^5} = \dfrac{3^{18}}{3^9} = 3^9$.

б) $\dfrac{4^2 \cdot 25^2}{10^2} = \left(\dfrac{4 \cdot 25}{10}\right)^2 = 10^2.$

**Задача 2.2.** Да се извршат назначените операции:

а) $\left(\dfrac{x^3 \cdot x \cdot x^7}{x^2 \cdot x^6}\right)^4;$

б) $(4x^4 - 3x^2 - x - 1) + (6x^3 - 12x^4 + x^5 - 2x - 11x^2 + 1);$

в) $7x^2y - 3xy \cdot (-2y) - 4xy^2 + 2xy \cdot (-3x) - 5x.$

**Решение.** а) Дадениот израз е дефиниран за $x \neq 0$.

$$\left(\frac{x^3 \cdot x \cdot x^7}{x^2 \cdot x^6}\right)^4 = \left(\frac{x^{11}}{x^8}\right)^4 = (x^3)^4 = x^{12}.$$

б) $(4x^4 - 3x^2 - x - 1) + (6x^3 - 12x^4 + x^5 - 2x - 11x^2 + 1) =$

$= 4x^4 - 3x^2 - x - 1 + 6x^3 - 12x^4 + x^5 - 2x - 11x^2 + 1 =$

$= x^5 + (4 - 12)x^4 + 6x^3 + (-3 - 11)x^2 + (-1 - 2)x - 1 + 1 =$

$= x^5 - 8x^4 + 6x^3 - 14x^2 - 3x.$

в) $7x^2y - 3xy \cdot (-2y) - 4xy^2 + 2xy(-3x) - 5x =$

$= 7x^2y + 6xy^2 - 4xy^2 - 6x^2y - 5x = x^2y + 2xy^2 - 5x.$

**Задача 2.3.** Да се пресмета:

а) $(2x^2) \cdot (3xy^5);$

б) $(-2x)\cdot(x^2+5x-6)$;

в) $(a-2b-3)\cdot(2a-b+1)$;

г) $(x^n+2)\cdot(x^{2n}-2x^n+4)$, $n\in\mathbb{N}_0$;

д) $(x^2+2ax+3)\cdot(x^3+2)\cdot(1+x^3+x)$;

ѓ) $(x^2+2x-3)\cdot(x^2+2x+3)$.

**Решение.** а) $(2x^2)\cdot(3xy^5)=2\cdot 3\cdot x^2\cdot x\cdot y^5=6x^3y^5$.

б) $(-2x)\cdot(x^2+5x-6)=-2x^3-10x^2+12x$.

в)
$$(a-2b-3)\cdot(2a-b+1)=2a^2-ab+a-4ab+2b^2-2b-6a+$$
$$+3b-3=2a^2-5ab-5a+2b^2+b-3.$$

г)
$$(x^n+2)(x^{2n}-2x^n+4)=x^{3n}-2x^{2n}+4x^n+2x^{2n}-4x^n+8=$$
$$=x^{3n}+8=x^{3n}+2^3.$$

д)
$$(x^2+2x+3)(x^3+2)(1+x^3+x)=$$
$$=[(x^2+2x+3)(x^3+2)](1+x^3+x)=$$
$$=(x^5+2x^2+2x^4+4x+3x^3+6)(1+x^3+x)=$$
$$=x^5+x^8+x^6+2x^5+2x^3+2x^4+2x^7+4x^4+3x^3+3x^6+3x^4+$$
$$+6+6x^3+6x=x^8+2x^7+4x^6+5x^5+9x^4+11x^3+6x^2+10x+6.$$

ѓ) $(x^2+2x-3)\cdot(x^2+2x+3)=(x^2+2x)^2-3^2=x^4+4x^3+4x^2-9$.

**Задача 2.4.** Да се упростат изразите:

а) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(ab+bc+ca)$;

б) $\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{2}{3}(2x-y)^2-\frac{2}{3}(x+2y)^2$;

в) $(x+y-z)^2+(x-y+z)^2-(x-y-z)^2$.

**Решение.**

а) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(ab+bc+ca)=$

$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2-2(ab+bc+ca)=$

$=2(a^2+b^2+c^2)-4(ab+bc+ca)$.

б) $\frac{1}{2}(x+y)^2-\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{2}{3}(2x-y)^2-\frac{2}{3}(x+2y)^2=$

$=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2)-\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)+\frac{2}{3}(4x^2-4xy+y^2)-$

$-\frac{2}{3}(x^2+4xy+4y^2)=2x^2-2y^2-\frac{10}{3}xy$.

в) $(x+y-z)^2+(x-y+z)^2-(x-y-z)^2=$

$=x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz+x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz-$

$-(x^2+y^2+z^2+2xy-2xz+2yz)=$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz-6yz$.

**Задача 2.5.** Да се најде количникот и остатокот од делењето на полиномот:

а) $7a^3b^4 - 9a^8b^6 + 2a^4b^5 - 6a^4b^3$ со $3a^3b^3$;

б) $3x^3 + 5x^5 - 4x^4 - 1 - 2x^2 + x$ со $x - 1 - x^2$;

в) $x^7 - 1$ со $x - 1$.

**Решение.**

а) $(7a^3b^4 - 9a^8b^6 + 2a^4b^5 - 6a^4b^3) : 3a^3b^3 = \dfrac{7}{3}b - 3a^5b^3 + \dfrac{2}{3}ab^2 - 2a$.
Значи количникот е:

$$Q(x) = \frac{7}{3}b - 3a^5b^3 + \frac{2}{3}ab^2 - 2a,$$

а остатокот е 0.

б) Прво двата полиноми (деленикот и делителот) ги подредуваме по степените на $x$, а потоа делиме.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(5x^5 & -4x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +x & -1) & : (-x^2 + x - 1) = -5x^3 - x^2 + x + 4\\
\pm 5x^5 & \mp 5x^4 & \pm 5x^3 & & & & \\
\cline{1-3}
 & +x^4 & -2x^3 & -2x^2 & +x & -1 & \\
 & \pm x^4 & \mp x^3 & \pm x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & -x^3 & -3x^2 & +x & -1 & \\
 & & \mp x^3 & \pm x^2 & \mp x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -4x^2 & +2x & -1 & \\
 & & & \mp 4x^2 & \pm 4x & \mp 4 & \\
\cline{4-6}
 & & & & -2x & +3 &
\end{array}
$$

Значи при делење на овие два полинома добивме количник $Q(x) = -5x^3 - x^2 + x + 4$ и остаток $R(x) = -2x + 3$.

в) Дадените полиноми може да се поделат со постапката илустрирана под б), но овде ќе ја примениме формулата:

$$a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a - b)(a^{2n} + a^{2n-1}b + \cdots + ab^{2n-1} + b^{2n}),$$

од која добиваме:

$$(x^7-1)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1).$$

Според тоа, бараниот количник е $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1$, а остатокот е нула.

**Задача 2.6.** Да се разложат следниве полиноми на множители:
а) $7x-7y-x^2+xy$;

б) $6x^2y^2-2axy-9ax^2y+3a^2x+3xy-a$.

**Решение.** а) $7x-7y-x^2+xy=7(x-y)-x(x-y)=(x-y)(7-x)$.

б) $6x^2y^2-2axy-9ax^2y+3a^2x+3xy-a=$

$=2xy(3xy-a)-3ax(3xy-a)+3xy-a=$

$=(3xy-a)(2xy-3ax+1)$.

**Задача 2.7.** Да се состави полином со реални коефициенти од најмал можен степен чии нули се:

а) $-1,-3,5$;

б) $0,1,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$;

в) $0,1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}$;

г) $1,\sqrt{2},-5$.

**Решение.** а) Бидејќи $-1,-3$ и $5$ се корени (нули) на бараниот полином, тој ќе биде делив (без остаток) со: $x+1$, $x+3$ и

$x-5$, од каде следува дека бараниот полином ќе биде делив со нивниот производ. Со оглед на тоа што бараме полином со најмал можен степен следува дека бараниот полином е

$$(x+1)(x+3)(x-5)=x^3-x^2-17x-15.$$

б) Бараниот полином е

$$x(x-1)\big(x-\frac{3}{2}\big)\big(x+\frac{1}{2}\big)=x^4-2x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x.$$

Добиениот полином е полином од најмал степен чии нули се: 0, 1, $\frac{3}{2}$ и $-\frac{1}{2}$. Ако сакаме да добиеме полином чии што коефициенти се цели броеви, добиениот полином ќе го помножиме со 4. Притоа, степенот на полиномот нема да се промени и тој ќе ги има истите корени. На тој начин се добиева полиномот $4x^4-8x^3+x^2+3x$.

в) $x(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})=x((x-1)^2-3)=x(x^2-2x-2)=x^3-2x^2-2x.$

г) $(x-1)(x-\sqrt{2})(x+5)=x^3+(4-\sqrt{2})x^2-(5+4\sqrt{2})x+5\sqrt{2}.$

**Задача 2.8.** Да се состави полином од четврти степен со коефициенти цели броеви, ако се знае дека $\frac{1}{2}$ е негова двократна нула, а комплексните броеви $1-i$ и $1+i$ се негови еднократни нули.

**Решение.** Бараниот полином е

$$\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2(x-1-i)(x-1+i)=\Big(x^2-x+\frac{1}{4}\Big)((x-1)^2-i^2)=$$

$$=\Big(x^2-x+\frac{1}{4}\Big)(x^2-2x+2)=x^4-3x^3+\frac{17}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Со цел да добиеме полином со коефициенти цели броеви добиениот полином можеме да го помножиме со 4. Во тој случај нема да се промени степенот на полиномот, ниту неговите нули. Значи бараниот полином е

$$4x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 10x + 2.$$

**Задача 2.9.** Да се утврди кратноста на нулата $x = 2$ за полиномот $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$, а потоа дадениот полином да се разложи на множители.

**Решение.** Нека $P_5(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$.

Проверуваме дека 2 е нула на полиномот $P_5(x)$, т.е. важи $P_5(2) = 0$. Во тој случај полиномот $P_5(x)$ е делив со $x - 2$ и количникот е $Q_4(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$, т.е

$$P_5(x) = (x-2)Q_4(x) = (x-2)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4).$$

Од тоа што $Q_4(2) = 0$ имаме $Q_4(x) = (x-2)R_3(x)$, каде што $R_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Сега повторно проверуваме дали 2 е корен на $R_3(x)$, односно дали $R_3(2) = 0$. Бидејќи овој услов е повторно исполнет добиваме $R_3(x) = (x-2)S_2(x) = (x-2)(x^2+1)$. Но, $S_2(2) = 5 \neq 0$ и постапката овде ја прекинуваме. Значи добивме:

$$\begin{aligned} P_5(x) &= (x-2)Q_4(x) = (x-2)^2 R_3(x) = \\ &= (x-2)^3 S_2(x) = (x-2)^3(x^2+1). \end{aligned}$$

Значи 2 е трикратна нула на дадениот полином.

**Задача 2.10.** Да се најде барем еден корен на полиномот

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18,$$

а потоа да се разложи на множители.

**Решение.** Можни рационални корени на дадениот полином се броевите од облик $\pm q$, каде што $q|18$, т.е. броевите од облик $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 6$, $\pm 9$ и $\pm 18$. Со директна проверка, заклучуваме дека 2, 3 и $-3$ се корени на полиномот $P_3(x)$ и бидејќи овој полином е од 3-ти степен ова се сите негови корени. Одовде добиваме дека

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x-2)(x-3)(x+3).$$

**Задача 2.11.** Да се разложат на множители полиномите $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ и $Q(x) = 2x^2 - 3 + x$, а потоа да се најде НЗД и НЗС на $P(x)$ и $Q(x)$.

**Решение.** Дадените полиноми ќе ги разложиме на множители со групирање на членовите, извлекување на заедннички множител и со примена на формулите за скратено множење. Добиваме:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = \\ &= (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^2 - 3 + x = 2x^2 - 2x + 2x + x - 3 = 2x(x-1) + 3x - 3 = \\ &= 2x(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(2x+3). \end{aligned}$$

Според тоа, имаме:

$$\text{НЗД}\big(P(x), Q(x)\big) = (x-1),$$

$$\text{НЗС}\big(P(x), Q(x)\big) = (x-1)(x-2)(x+2)(2x+3).$$

**Задача 2.12.** Да се упростат изразите:

а) $\dfrac{x-3}{x^2-4}-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{x+2}{x^2-4x+4}$;

б) $\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right):\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{y-x}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)$;

в) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$;

г) $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}:\dfrac{x^4-x}{x^3+1}+\dfrac{1}{x(x-1)^2}\right)\cdot\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-x+2}$.

**Решение.** а) Дадениот израз се трансформира на следниов начин:

$$\frac{x-3}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}+\frac{x+2}{x^2-4x+4}=\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}-\frac{2}{x-2}+\frac{x+2}{(x-2)^2}.$$

Овој израз е дефиниран за $x-2\neq 0$ и $x+2\neq 0$, т.е. за $x\neq 2$ и $x\neq -2$. Со сведување на ист именител се добива

$$\frac{(x-3)(x-2)-2(x-2)(x+2)+(x+2)^2}{(x-2)^2(x+2)},$$

односно

$$\frac{-x+18}{(x-2)^2(x+2)}.$$

б) Дадениот израз се трансформира во изразот:

$$\left(x+y-\frac{4xy}{x+y}\right):\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}-\frac{2xy}{(x-y)(x+y)}\right).$$

Овој израз е дефиниран за $x-y\neq 0$ и $x+y\neq 0$, т.е. за $x\neq y$ и $x\neq -y$. Со сведување на ист именител се добива:

$$\frac{(x+y)^2-4xy}{x+y}:\frac{x(x-y)+y(x+y)-2xy}{(x-y)(x+y)},$$

и повторно со средување се добива:

$$\frac{(x-y)^2}{x+y} : \frac{(x-y)}{(x+y)} = \frac{(x-y)^2}{x+y} \cdot \frac{(x+y)}{(x-y)} = x-y.$$

в) Дадениот израз се трансформира во изразот:

$$\frac{x}{x-y} - \frac{x(x-y)(x+y)}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{(x-y)(x+y)}\right).$$

Овој израз е дефиниран за $x-y \neq 0$, $x+y \neq 0$ и $x^2+y^2 \neq 0$, т.е. за $x \neq y$, $x \neq -y$, $x \neq 0$ или $y \neq 0$. Во областа на дефинираност имаме:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x-y} - \frac{x(x-y)(x+y)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)^2(x+y)} = \\ = \quad & \frac{x}{x-y} - \frac{x(x-y)(x+y)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{(x-y)^2(x+y)} = \\ = \quad & \frac{x}{x-y} - \frac{x}{x-y} = 0. \end{aligned}$$

г) Во областа на дефинираност ($x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$) дадениот израз се трансформира во изразот

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)} : \frac{x(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{x(x-1)^2}\right) \cdot \frac{x(x-1)^2}{x^2-x+2} = \\ = \quad & \left(\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{1}{x(x-1)^2}\right) \cdot \frac{x(x-1)^2}{x^2-x+2} = \\ = \quad & \left(\frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2} + \frac{1}{x(x-1)^2}\right) \cdot \frac{x(x-1)^2}{x^2-x+2} = \\ = \quad & \frac{x^2-x+1+1}{x(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)^2}{x^2-x+2} = \frac{x^2-x+2}{x(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)^2}{x^2-x+2} = 1. \end{aligned}$$

**Задача 2.13.** Да се упростат двојните дропки во областа на дефинираност:

$$\text{а) } \frac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}\,; \qquad \text{б) } \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}}\,.$$

**Решение.**

$$\text{а) } \frac{\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}} = \frac{\dfrac{x(x+1)-x(x-1)}{(x-1)(x+1)}}{\dfrac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}} = \frac{2x}{2x} = 1.$$

$$\text{б) } \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}} = \frac{\dfrac{x(x+1)+(x+1)-x}{x(x+1)}}{\dfrac{x(x-1)-(x-1)+x}{x(x-1)}} = \frac{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}}{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{x^3-1}{x^3+1}\,.$$

**Задача 2.14.** Да се упрости изразот во областа на дефинираност:

$$\frac{5x^{-5}}{2y^{-2}} \cdot \left(\frac{y}{5x^{-1}}\right)^{-1} : 10x^2y^{-3}\,.$$

**Решение.**

$$\frac{5x^{-5}}{2y^{-2}} \cdot \left(\frac{y}{5x^{-1}}\right)^{-1} : 10x^2y^{-3} = \frac{5y^2}{2x^5} \cdot \left(\frac{xy}{5}\right)^{-1} : \frac{10x^2}{y^3} =$$

$$= \frac{5y^2}{2x^5} \cdot \frac{5}{xy} \cdot \frac{y^3}{10x^2} = \frac{25y^5}{20x^8y} = \frac{5y^4}{4x^8}\,.$$

**Задача 2.15.** Да се пресмета:

а) $\sqrt{3^2}\,$; б) $\sqrt{(-3)^2}\,$; в) $\sqrt[3]{3^3}\,$; г) $\sqrt[3]{(-3)^3}\,$.

**Решение.** Според (2.3) добиваме:

а) $\sqrt{3^2}=3\,$, б) $\sqrt{(-3)^2}=3\,$, в) $\sqrt[3]{3^3}=3\,$, г) $\sqrt[3]{(-3)^3}=-3.$

**Задача 2.16.** Да се пресмета:

а) $a^{5,2}:a^2 \quad (a\neq 0)$;

б) $(7^{\frac{2}{3}}\cdot 7^{-\frac{8}{6}}):7^{-2}$;

в) $\dfrac{(ab)^{\sqrt{18}}:b^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{50}}:(ab)^{\sqrt{8}}} \quad (a\neq 0,\, b\neq 0).$

**Решение.** а) $a^{5,2}:a^2=a^{3,2}=a^{\frac{32}{10}}=a^{\frac{16}{5}}=\sqrt[5]{a^{16}}.$

б) $(7^{\frac{2}{3}}\cdot 7^{-\frac{8}{6}}):7^{-2}=7^{-\frac{2}{3}}:7^{-2}=7^{\frac{4}{3}}=7\cdot\sqrt[3]{7}.$

в) $\dfrac{(ab)^{\sqrt{18}}:b^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{50}}:(ab)^{\sqrt{8}}}=\dfrac{a^{3\sqrt{2}}\cdot b^{3\sqrt{2}}:b^{\sqrt{2}}}{a^{5\sqrt{2}}:(a^{2\sqrt{2}}b^{2\sqrt{2}})}=\dfrac{a^{3\sqrt{2}}\cdot b^{2\sqrt{2}}}{\dfrac{a^{3\sqrt{2}}}{b^{2\sqrt{2}}}}=b^{4\sqrt{2}}.$

**Задача 2.17.** Да се извршат назначените операции во областа на дефинираност на изразите:

а) $(\sqrt{x}+\sqrt{2x})\cdot(\sqrt{y}+\sqrt{2y})\,$; б) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt{ab^3}\,$;

в) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}\,$; г) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\,$;

д) $\sqrt{xy\sqrt[3]{x^2y}}\cdot\sqrt{xy^2\sqrt[3]{x^3y}}\,.$

**Решение.**

а) $$\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{y}+\sqrt{2y}\right) = \sqrt{xy}+\sqrt{2xy}+\sqrt{2xy}+\sqrt{4xy} =$$
$$= \sqrt{xy}+\sqrt{2xy}+\sqrt{2xy}+2\sqrt{xy} =$$
$$= 3\sqrt{xy}+2\sqrt{2xy} = (3+2\sqrt{2})\sqrt{xy}\,.$$

б) $$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^2b}\cdot\sqrt{ab^3} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^3b^4} = ab^2\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a} =$$
$$= ab^2\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^3} = ab^2\sqrt[6]{a^5}\,.$$

в) $$\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})} =$$
$$= \sqrt{x^2-(x^2-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

г) Ја користиме формулата $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, и добиваме:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= 1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6} =\\ &= 1+2+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6} =\\ &= 6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\,.\end{aligned}$$

д) $$\sqrt{xy\sqrt[3]{x^2y}}\cdot\sqrt{xy^2\sqrt[3]{x^3y}} = \sqrt{xy\sqrt[3]{x^2y}\,xy^2\sqrt[3]{x^3y}} =$$
$$= \sqrt{x^2y^3\sqrt[3]{x^5y^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^6y^9x^5y^2}} =$$
$$= \sqrt[6]{x^{11}y^{11}} = xy\sqrt[6]{x^5y^5}\,.$$

Да забележиме дека во задачите под б) и д) користиме: $|x| = x$, $|y| = y$ и $|a| = a$, бидејќи областите на дефинираност се определени од условите: $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, соодветно.

**Задача 2.18.** Да се рационализираат именителите на следниве дропки:

$$\text{а)}\ \frac{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}\,; \qquad \text{б)}\ \frac{a^3-ab^2}{\sqrt{a-\sqrt{ab}}}\,.$$

**Решение.**

а)
$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}} &= \frac{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(2\sqrt{7}+3\sqrt{2})^2}{4\cdot 7-9\cdot 2} = \frac{4\cdot 7+12\sqrt{14}+9\cdot 2}{10} = \\ &= \frac{46+12\sqrt{14}}{10} = \frac{23+6\sqrt{14}}{5}\,.\end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned}\frac{a^3-ab^2}{\sqrt{a-\sqrt{ab}}} &= \frac{a^3-ab^2}{\sqrt{a-\sqrt{ab}}}\cdot\frac{\sqrt{a-\sqrt{ab}}}{\sqrt{a-\sqrt{ab}}} = \\ &= \frac{a(a-b)(a+b)\sqrt{a-\sqrt{ab}}}{a-\sqrt{ab}} = \\ &= \frac{a(a-b)(a+b)\sqrt{a-\sqrt{ab}}}{a-\sqrt{ab}}\cdot\frac{a+\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}} = \\ &= \frac{a(a-b)(a+b)(a+\sqrt{ab})\sqrt{a-\sqrt{ab}}}{a^2-ab} = \\ &= \frac{a(a-b)(a+b)(a+\sqrt{ab})\sqrt{a-\sqrt{ab}}}{a(a-b)} = \\ &= (a+b)(a+\sqrt{ab})\sqrt{a-\sqrt{ab}}\,.\end{aligned}$$

**Задача 2.19.** Да се извршат назначените операции во областа на дефинираност на изразите:

а) $\left(\dfrac{1}{1-\sqrt{a}}-\dfrac{2\sqrt{a}}{1-a}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+1\right)$;

б) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)$.

**Решение.**

а) $$\left(\frac{1}{1-\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{1-a}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{1-\sqrt{a}}-\frac{2\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+1\right)=$$
$$=\frac{1+\sqrt{a}-2\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{1-\sqrt{a}}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}.$$

б) $$\frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x}\,\sqrt{y}}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x}\,\sqrt{y}}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{2x\sqrt{y}-2y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x}\,\sqrt{y}}=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{2\sqrt{x}\,\sqrt{y}\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x}\,\sqrt{y}}=x+y.$$

## Задачи за вежбање

**Задача 2.20.** Да се пресмета:

$$\text{а)}\ \frac{(2^4\cdot 2^5)^{10}}{(2^8\cdot 2)^2}; \qquad \text{б)}\ \frac{4^1\cdot 25^3}{(10^2\cdot 5)^4}.$$

**Одговор.** а) $2^{72}$, б) $\dfrac{1}{10^6}$.

**Задача 2.21.** Да се упростат изразите:

а) $5(x^2-4x+3)-2(x^2+x-4)-(x^2-7x+19)$;

б) $(2x^3-x^2-2x-4)\cdot(x^2+x^3+x+1)$;

в) $(x^2-6x+5)\cdot(-4x)+5x^2\cdot(2x-3)+x^3-2x^2+3$;

**Одговор.** а) $2x^2-15x+4$, б) $2x^6+x^5-x^4-5x^3-7x^2-6x-4$,
в) $7x^3+7x^2-20x+3$.

**Задача 2.22.** Да се упростат изразите:

а) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$;

б) $(x^n+2)(x^{2n}-2x^n+4)$;

в) $2x^m(x^n-x^2+x-3)+3x^m(x^n-x+1)$.

**Одговор.** а) $a^4-b^4$, б) $x^{3n}+8$, в) $5x^{m+n}-2x^{m+2}-x^{m+1}-3x^m$.

**Задача 2.23.** Да се извршат назначените операции во областа на дефинираност:

а) $\left(\frac{x^5 \cdot x^9 \cdot x}{x^2 \cdot x^6}\right)^4 : \frac{x^{12}}{x^2 \cdot x^1}$; б) $(x+2y)\cdot(x^3-2xy^2+4y)$;

в) $(8x^3y^2+2x^5y^3) : 4x^2y$; г) $(9x-5x^2+x^3-9) : (3+x^2-2x)$.

**Одговор.** а) $x^{19}$, б) $x^4-2x^2y^2+4xy+2x^3y-4xy^3+8y^2$,
в) $2xy+\frac{1}{2}x^3y^2$, г) $x-3$.

**Задача 2.24.** Да се најде количникот $Q(x)$ и остатокот $R(x)$ од делењето на полиномот:

а) $x^2+7x^3-2x^5+3$ со $x^2+x+1$;

б) $x^6$ со $x^2-x-5$;

в) $3x^4-9x^3y+17x^2y^2-33xy^3+22y^4$ со $x^2-3xy+2y^2$.

**Одговор.** а) $Q(x)=-2x^3+2x^2+7x-8$, $R(x)=r(x)=x+11$,
б) $Q(x)=x^4+x^3+6x^2+11x+41$, $R(x)=96x+205$,
в) $Q(x)=3x^2+11y^2$, $R(x)=0$.

**Задача 2.25.** Да се разложат следниве полиноми на множители:

а) $t^3+t-2$;

б) $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$;

в) $(3x-2)(3x+2)-(2x-3)^2-6(2x+1)-1$.

**Одговор.** а) $(t-1)(t^2+t+2)$

б) $(x-1)(x^4+x^2+1)=(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,

в) $5(x-2)(x+2)$.

**Задача 2.26.** Да се состави полином со целобројни коефициенти од најмал можен степен чии нули се: $1$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $i$ и $-i$.

**Одговор.** $(x-1)(x^2+1)(x^2-2)=x^5-x^4-x^3+x^2-2x-2$.

**Задача 2.27.** Да се најдат барем два корена на полиномот $P_6(x)=x^6-9x^4-8x^3+72x$, а потоа да се разложи на множители.

**Одговор.** Рационални корени на полиномот се: $-3$, $0$, $2$, и $3$. $P_6(x)=(x-3)(x-2)x(x+3)(x^2+2x+4)$.

**Задача 2.28.** Да се разложат на множители полиномите: $P(x)=2x^3+19x^2+37x+14$ и $Q(x)=x^5-4x^3+8x^2-32$, а потоа да се најде НЗД и НЗС на $P(x)$ и $Q(x)$.

**Одговор.** $P(x)=(x+2)(x+7)(2x+1)$,
$Q(x)=(x-2)(x+2)^2(x^2-2x+4)$, $\text{НЗД}\big(P(x),\ Q(x)\big)=x+2$,
$\text{НЗС}\big(P(x),\ Q(x)\big)=(x+2)^2(x-2)(x+7)(2x+1)(x^2-2x+4)$.

**Задача 2.29.** Да се упростат изразите во областа на дефинираност:

а) $\dfrac{a+x}{x}+\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{x^2}{x^2-ax}$;  б) $\dfrac{x}{2x^3-2x^2y}+\dfrac{4y}{x^2y+xy^2}-\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

**Одговор.** а) $\dfrac{x+a}{x}$, б) $\dfrac{7}{2x(x+y)}$.

**Задача 2.30.** Да се упростат двојните дропки во областа на дефинираност:

$$\text{а) } \frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{x^2-y^2}{2xy}}; \qquad \text{б) } \frac{1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}}{\dfrac{a}{a-1}+1}.$$

**Одговор.** а) $\dfrac{2}{x-y}$, б) $\dfrac{2a+1}{a+1}$.

**Задача 2.31.** Да се упростат изразите во областа на дефинираност:

а) $\dfrac{(a^5)^{-3}\cdot a^{-2}}{a^{-5}\cdot a}:\dfrac{(a\cdot a^{-6})^3}{a^{-1}}$;

б) $\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{2a}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right):(a+b)^{-1}$.

**Одговор.** а) $a$, б) $-1$.

**Задача 2.32.** Да се пресметаат следниве изрази во областа на дефинираност:

$$\text{а) } \left(\tfrac{1}{(-8)^2}\right)^{-\frac{1}{3}}; \qquad \text{б) } \left(\left(a^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}};$$

$$\text{в) } \sqrt{a^{-1}}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt{a^{-2}}; \qquad \text{г) } \sqrt{a\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}\cdot\sqrt[12]{a^5};$$

$$\text{д) } (\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})^3; \qquad \text{ѓ) } \sqrt{\frac{5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}}.$$

**Одговор.** а) 4, б)$\sqrt{a}$, в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$, г) $a\sqrt[24]{a^5}$,

д) $5+3\sqrt[3]{12}+3\sqrt[3]{18}$, ѓ) $5+2\sqrt{6}$.

**Задача 2.33.** Да се извршат назначените операции во областа на дефинираност на изразите:

а) $\left(\dfrac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}+\dfrac{2-\sqrt{a}}{a-1}\right):\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$;

б) $\left(\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}+\sqrt[3]{xy}\right):(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$.

**Одговор.** а) $\dfrac{2}{a-1}$, б) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$.

# 3 Линеарни равенки и неравенки Линеарна функција

## 3.1 Линеарни равенки. Системи од две линеарни равенки со две непознати

Равенката од облик

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

се нарекува *линеарна равенка со една непозната* $x$. *Решение* на равенката (3.1) е секој реален број $x$ кој идентички ја задоволува истата.

Ако $a \neq 0$, тогаш равенката (3.1) има единствено решение $x = -\dfrac{b}{a}$. Ако $a = 0$ и $b = 0$, тогаш равенката (3.1) има бесконечно многу решенија, т.е. секој реален број е нејзино решение. Ако пак $a = 0$ и $b \neq 0$, тогаш равенката (3.1) нема решение.

За две линеарни равенки велиме дека се *еквивалентни* ако имаат исто множество решенија.

Општ облик на систем од две линеарни равенки со две непознати е

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1x + b_1y & = c_1 \\ a_2x + b_2y & = c_2 \end{array} \right. , \tag{3.2}$$

каде што $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Под *решение* на системот (3.2) се подразбира секој пар реални броеви $(x, y)$ што го задоволува дадениот систем. За два система линеарни равенки со две непознати велиме дека се *еквивалентни*, ако имаат исто множество решенија. Најчесто, при решавање на системот (3.2) истиот го трансформираме во еквивалентен систем што е поедноставен за решавање.

Постојат повеќе начини за решавање на системот (3.2). Познати се: методот на замена, методот на спротивни коефициенти, методот на детерминанти и графичкиот метод.

Првите два метода ќе ги илустрираме низ задачи.

За методот на детерминанти дефинираме поим детерминанта на системот, $D$, детерминанта на променливата $x$, $D_x$, и детерминанта на променливата $y$, $D_y$, на следниов начин:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \\ D_x &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \\ D_y &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1. \end{aligned}$$

За решението на системот (3.2) се можни неколку случаи:

1) Ако $D \neq 0$ тогаш системот (3.2) има единствено решение и тоа: $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$ (Крамерови формули);

2) Ако $D = D_x = D_y = 0$, тогаш системот има бесконечно многу решенија;

3) Ако $D = 0$, но $D_x \neq 0$ или $D_y \neq 0$, тогаш системот нема решение.

Графичкиот метод се состои во скицирање на графиците на двете линеарни функции зададени со равенките од системот. Ако добиените прави се сечат, тогаш системот има единствено решение, а тоа е пресечна точка на правите. Ако правите се паралелни, тогаш системот нема решение, а ако правите се совпаѓаат, тогаш системот има бесконечно многу решенија.

**Задача 3.1.** За кои вредности на реалниот параметар $m$, дадениве равенки се еквивалентни?

а) $5x - 7 = 13$ и $5x - 7 = \frac{1}{m}$; б) $0.25x + 3 = m$ и $x = 8$.

**Решение.** а) $m = \frac{1}{13}$.
б) $m = 5$.

**Задача 3.2.** Да се решат следниве равенки:

а) $x + 5 = 3x - 7$; б) $x + 5 = \frac{3x + 15}{3}$;

в) $x + 5 = \frac{3x - 7}{3}$; г) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{8x}{x^2 - 9}$.

**Решение.** а) Дадената равенка е еквивалентна со равенката $12 = 2x$, од каде се добива $x = 6$.
б) Дадената равенка има бесконечно многу решенија бидејќи равенството

$$x + 5 = \frac{3x + 15}{3} \Longleftrightarrow x + 5 = x + 5$$

е точно за секој реален број $x$.
в) Дадената равенка нема решение бидејќи равенството

$$x + 5 = \frac{3x - 7}{3} \Longleftrightarrow x + 5 = x - \frac{7}{3},$$

не е точно за ниту еден реален број $x$.
г) Равенката е дефинирана за $x \neq \pm 3$, т.е. множество допуштени вредности за променливата $x$ е $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, +3\}$. Ако двете страни на равенката ги помножиме со $x^2 - 9$, ќе добиеме:

$$x^2 + 4x + 3 - (x^2 - 4x + 3) = 8x,$$

односно $0 \cdot x = 0$. Значи, множеството решенија на равенката е множеството $D$.

**Задача 3.3.** Да се дискутираат решенијата на равенката

$$\frac{x}{m+1} + \frac{x}{m} = \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

во зависност од реалниот параметар $m$.

**Решение.** Множество допуштени вредности за параметарот $m$ е $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Множејќи ја дадената равенка со $m(m+1)$, ја трансформираме во

$$mx + (m+1)x = 2m + 1 \Longleftrightarrow (2m+1)x = 2m + 1.$$

Заклучуваме дека за $m = -\frac{1}{2}$ равенката се сведува на $0 \cdot x = 0$ која има бесконечно многу решенија. За $m \notin \{-1, -\frac{1}{2}, 0\}$ равенката има единствено решение $x = 1$.

**Задача 3.4.** На еден патнички воз му се потребни 3 часа помалку да го помине растојанието помеѓу местата $A$ и $B$, отколку на еден товарен воз. На кое растојание се наоѓаат местата $A$ и $B$, ако брзината на товарниот воз е 50 $km/h$, а на патничкиот е 80 $km/h$?

**Решение.** Ја користиме формулата $s = v \cdot t$, каде што $s$, $v$ и $t$ означуваат изминат пат, брзина и време, соодветно. Нека $t$ е времето за кое товарниот воз го поминува патот од местото $A$ до местото $B$. Бидејќи патничкиот воз патува 3h помалку, ја добиваме равенката $50t = 80(t-3)$. Нејзиното решение е $t = 8$, од каде што се добива дека растојанието од $A$ до $B$ е $s = 50 \cdot 8 = 400$ km.

**Задача 3.5.** Еден програмер изработува програма за 4 дена, а друг за 6 дена. Колку време ќе биде потребно за изготвување на таа програма ако на неа истовремено работат двајцата програмери?

**Решение.** Ако првиот програмер ја изработува целата програма за 4 дена, тогаш за $x$ денови ќе изработи $\frac{x}{4}$ делови од програмата. Слично, за $x$ денови вториот програмер ќе изработи $\frac{x}{6}$ делови од програмата. За да ја изработат програмата, тие двајцата треба да работат заедно $x$ денови, од каде ја добиваме равенката

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 1.$$

Ако оваа равенка ја помножиме со 12 се добива:

$$3x + 2x = 12,$$

од каде $x = \frac{12}{5}$. Значи потребни им се $\frac{12}{5}$ денови или $2,4$ дена, за заеднички да ја завршат програмата.

**Задача 3.6.** Една четвртина од еден број е за 3 поголема од една шестина од истиот број. Кој е тој број?

**Решение.** Нека бараниот број го означиме со $x$. Тогаш од условите на задачата ја добиваме равенката

$$\frac{1}{4}x = 3 + \frac{1}{6}x$$

чие решение е $x = 36$. Значи бараниот број е 36.

**Задача 3.7.** Да се решат следниве равенки:

а) $|5x-6| = 7$;  б) $|2x-1| = |4x+3|$.

**Решение.** а) За апсолутната вредност што се јавува во равенката важи:

$$|5x-6| = \begin{cases} 5x-6\ , & \text{ако } 5x-6 \geq 0 \\ -(5x-6), & \text{ако } 5x-6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 5x-6, & \text{ако } x \geq 6/5 \\ 6-5x, & \text{ако } x < 6/5 \end{cases}.$$

Разгледуваме два случаи:

1) За $x \in \left(-\infty,\ \dfrac{6}{5}\right)$ ја добиваме равенката:

$$6 - 5x = 7.$$

Оваа равенка има решение $x = -\dfrac{1}{5}$, кое припаѓа на интервалот $\left(-\infty,\ \dfrac{6}{5}\right)$.

2) За $x \in \left[\dfrac{6}{5},\ \infty\right)$ добиваме:

$$5x - 6 = 7.$$

Нејзиното решение е $x = \dfrac{13}{5}$ и тоа припаѓа на разгледуваниот интервал.

Според тоа, множеството решенија на дадената равенка е $\left\{\dfrac{13}{5}, -\dfrac{1}{5}\right\}$.

б) За апсолутните вредности во равенката важи:

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1\ , & \text{ако } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1), & \text{ако } 2x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1, & \text{ако } x \geq 1/2 \\ 1-2x, & \text{ако } x < 1/2 \end{cases},$$

$$|4x+3| = \begin{cases} 4x+3\ , & \text{ако } 4x+3 \geq 0 \\ -(4x+3), & \text{ако } 4x+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x+3, & \text{ако } x \geq -3/4 \\ -4x-3, & \text{ако } x < -3/4 \end{cases}.$$

Го бараме решението на равенката во секој од следниве три интервала:

1) За $x \in \left(-\infty,\ -\dfrac{3}{4}\right)$ ја добиваме равенката

$$1-2x = -4x-3 \Longleftrightarrow 2x = -4.$$

Решението на оваа равенка е $x=-2$ и тоа припаѓа на интервалот $\left(-\infty,\ -\dfrac{3}{4}\right)$.

2) За $x \in \left[-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ добиваме:

$$1-2x = 4x+3 \Longleftrightarrow 6x = -2.$$

Нејзиното решение е $x = -\dfrac{1}{3}$ и тоа припаѓа на разгледуваниот интервал.

3) За $x \in \left[\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$ имаме:

$$2x-1 = 4x+3 \Longleftrightarrow 2x = -4.$$

Нејзиното решение $x=-2$ не припаѓа на интервалот $\left[\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$.

Значи, множеството решенија на дадената равенка е $\left\{-2, -\dfrac{1}{3}\right\}$.

**Задача 3.8.** Да се решат следниве системи линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 2x - \ \ y = 5 \\ \ \ x + 2y = 8 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x - \ \ y = 5 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$, в) $\begin{cases} 2x - \ \ y = 5 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$.

**Решение.** Системите ќе ги решаваме со метод на замена и со метод на детерминанти.

а)Непознатата $y$ ја изразуваме од првата равенка и ја заменуваме во втората равенка, при што ги добиваме следниве еквивалентни системи:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - \ \ y = 5 \\ \ \ x + 2y = 8 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2x - 5 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2x - 5 \\ 5x = 18 \end{array}\right. .$$

Добиваме дека дадениот систем има единствено решение

$$x = \frac{18}{5}, y = \frac{11}{5}.$$

Со методот на детерминанти добиваме:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

од каде што следува дека системот има единствено решение. Бидејќи,

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 18, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 11,$$

решението на системот е

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{5} \text{ и } y = \frac{D_y}{D} = \frac{11}{5}.$$

б) Во овој систем двете равенки се еквивалентни (ако првата равенка ја помножиме со 2, се добива втората равенка на системот), па дадениот систем има бесконечно многу решенија од облик $(x, 2x-5)$, $x \in \mathbb{R}$.

Истиот заклучок следува и со методот на детерминанти, бидејќи $D = D_x = D_y = 0$.

в) Од еквивалентноста на двата ситема:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = 5 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases},$$

следува дека системот нема решение, т.е. е противречен.

Истиот заклучок го добиваме и со методот на детерминанти, бидејќи $D = 0$, но $D_x \neq 0$.

**Задача 3.9.** Да се реши системот линеарни равенки

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 4x + \ \ y = 3 \end{cases}.$$

**Решение.** Системот ќе го решиме со методот на спротивни коефициенти. Ако втората равенка ја помножиме со $-2$, го добиваме еквивалентниот систем

$$\begin{cases} \ \ 5x + 2y = \ \ 9 \\ -8x - 2y = -6 \end{cases}.$$

Собирајќи ги двете равенки, ја добиваме равенката

$$5x + 2y - 8x - 2y = 9 - 6,$$

со чие решавање се добива $x = -1$. Ја заменувме оваа вредност во која било равенка од системот, со што добиваме $y = 7$. Значи, решение на системот е подредениот пар $(-1, 7)$.

Со методот на детерминанти се добива: $D = -3, D_x = 3$ и $D_y = -21$, од каде што, со примена на Крамеровите формули, се добива истото решение на системот.

## 3.2 Линеарни неравенки. Системи од две линеарни неравенки со една непозната

Неравенките од облик

$$ax < b, \quad ax \le b, \quad ax > b \quad \text{или} \quad ax \ge b, \tag{3.3}$$

каде што $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$ се нарекуваат *линеарни неравенки со непозната* $x$. Реалните броеви $x$ што ја задоволуваат линеарната неравенка, го сочинуваат нејзиното *решение*. Две линеарни неравенки кои имаат исто множество решенија се нарекуваат *еквивалентни* неравенки.

Нека е дадена линеарната неравенка

$$ax < b,\ a > 0.$$

Неравенки кои се еквивалентни на неа се следниве:

$$ax - b < 0, \quad x < \frac{b}{a}, \quad ax \pm c < b \pm c,$$

$$acx < bc, \text{ за } c > 0 \quad \text{и} \quad adx > bd, \text{ за } d < 0.$$

Слично се добива и за останатите типови линеарни неравенки.

Решението на линерна неравенка може да се добие аналитички и графички.

Решение на систем од две линеарни неравенки со една непозната е пресекот на множествата решенија на двете неравенки.

**Задача 3.10.** Да се решат следниве линеарни неравенки:

а) $x - (5 - x) \le 6x + 13$; б) $\dfrac{2x+1}{4} - \dfrac{x+1}{2} < \dfrac{x}{2}$; в) $\dfrac{3}{8} - \dfrac{x}{6} \le x$.

**Решение.** а) Со трансформации на дадената неравенка ги добиваме следниве еквивалентни неравенки:

$$x-(5-x)\leq 6x+13 \Longleftrightarrow -4x\leq 18 \Longleftrightarrow x\geq -4,5.$$

Значи, решение на дадената неравенка е интервалот $[-4,5;\infty)$.

б) Ако двете страни на неравенката $\dfrac{2x+1}{4}-\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{x}{2}$ ги помножиме со 4 добиваме:

$$2x+1-2x-2<2x \Longleftrightarrow -1<2x \Longleftrightarrow x>-\frac{1}{2}.$$

Решение на неравенката е интервалот $\left(-\dfrac{1}{2},\ \infty\right)$.

в) Ако дадената неравенка ја помножиме со 24, таа се трансформира во:

$$9-4x\leq 24x \Longleftrightarrow 9\leq 28x,$$

од каде што се добива $x\geq \dfrac{9}{28}$. Решение на неравенката е интервалот $\left[\dfrac{9}{28},\ \infty\right)$.

**Задача 3.11.** Да се решат следниве системи линеарни неравенки:

а) $\left\{\begin{array}{r} 2x+4>0 \\ -3x-5<0 \end{array}\right.$; б) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{6}-\dfrac{2x+1}{3}\leq\dfrac{x}{4}+2 \\ \\ 1+x<\dfrac{0,5(x+3)}{2}+\dfrac{2x-3,5}{-4} \end{array}\right.$.

**Решение.** а) Системот $\left\{\begin{array}{r} 2x+4>0 \\ -3x-5<0 \end{array}\right.$ е еквивалентен со следниов систем $\left\{\begin{array}{l} x>-2 \\ x>-\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$, од каде што следува дека $x\in\left(-\dfrac{5}{3},\ \infty\right)$.

б) Првата неравенка ја множиме со 12, а втората со 4, со што го добиваме еквивалентниот систем:

$$\begin{cases} 2x - 8x - 4 \leq 3x + 24 \\ 4x + 4 < x + 3 - 2x + 3,5 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -\dfrac{28}{9} \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Решението на овој систем е $x \in \left[-\dfrac{28}{9}, \dfrac{1}{2}\right)$.

**Задача 3.12.** За кои реални броеви $x$ важат следниве неравенства:

а) $1 < x - 2 < 2$; б) $-2 \leq -3x + 1 < 7$; в) $0 < 2 - x < 6$.

**Решение.** а) $1 < x - 2 < 2 \iff 3 < x < 4$, па решението е интервалот $(3, 4)$.

б) $-2 \leq -3x + 1 < 7 \iff -3 \leq -3x < 6 \iff -2 < x \leq 1$.

Да забележиме дека знаците на неравенставата се менуваат бидејќи делиме со $-3 < 0$. Значи, решението е $x \in (-2, 1]$.

в) Слично, $0 < 2 - x < 6 \iff -2 < -x < 4$. Множиме со $-1$ и добиваме $2 > x > -4$. Според тоа, $x \in (-4, 2)$.

**Задача 3.13.** Да се реши равенката $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$.

**Решение.** Равенството $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$ важи ако $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$.

Количникот на два броја е ненегативен број ако деленикот е ненегативен, а делителот позитивен број, или ако деленикот е непозитивен, а делителот негативен број. Затоа, ги разгледуваме следниве случаи:

1) $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq \phantom{-}1 \\ x > -1 \end{cases}$, од каде што се добива $x \in [1, \infty)$.

2) $\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq \phantom{-}1 \\ x < -1 \end{cases}$, односно $x \in (-\infty, -1)$.

Конечното решение е унија од добиените интервали,т.е. $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$.

**Задача 3.14.** Да се решат следниве неравенки:

а) $|2x-3| \leq 2x-3$; б) $|x+1| < x+3$.

**Решение.** а) Неравенството $|2x-3| \leq 2x-3$ е точно ако $2x-3 \geq 0$, односно за $x \in \left[\frac{3}{2}, \ \infty\right)$.

б) За апсолутната вредност во неравенката важи:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{ако } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{ако } x < -1 \end{cases}.$$

Ги разгледуваме следниве два случаи:

1) За $x \in (-\infty, -1)$ ја добиваме неравенката

$$-x-1 < x+3.$$

Решението на оваа неравенка е $x > -2$. Оттука, решението на неравенката во овој случај е интервалот $(-2, -1)$.

2) За $x \in [-1, \infty)$ ја добиваме неравенката

$$x+1 < x+3$$

која е точна за секоја вредност на $x$ од разгледуваниот интервал.

Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка е унија од интервалите добиени во двата случаи, т.е. $(-2, -1) \cup [-1, \infty) = (-1, \infty)$.

## 3.3 Линеарна функција

Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ зададена со

$$f(x)=ax+b, \quad a,b\in\mathbb{R} \tag{3.4}$$

се нарекува *линеарна функција.*

Дефинициона област (домен) на линеарната функција зададена со (3.4) е множеството реални броеви, т.е. $D_f=\mathbb{R}$.

Графикот на линеарна функција е права која може да се скицира ако се знаат барем две нејзини точки. Една точка низ која минува графикот на функцијата (3.4), е точката $(0,f(0))$, односно $(0,b)$ и таа е пресек на графикот на дадената функција со $y$-оската. Пресек на графикот на линеарната функција со $x$-оската е точката од облик $(x_0,0)$, каде што $x_0$ е решение на равенката $f(x)=0$ ($x_0$ се нарекува *нула на функцијата*). Специјално, ако $b=0$ графикот минува низ координатниот почеток $O(0,0)$.

Значи, нулите на функцијата (3.4) се решенија на линеарната равенка $ax+b=0$.

Ако $a\neq 0$ тогаш соодветната линеарна равенка има единствено решение $x_0$, а точката $(x_0,0)$ е пресечна точка на графикот на дадената функција со $x$-оската.

Ако $a=0$, а $b\neq 0$, тогаш $f(x)=b$ е константна функција и нејзиниот график претставува права паралелна со $x-$оската.

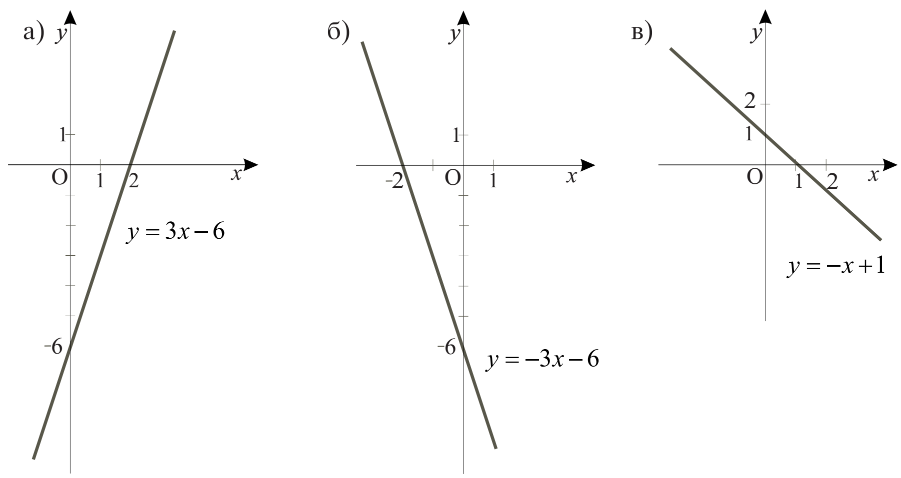
Специјално, ако $a=b=0$ тогаш $f(x)=0$ е нула функција, а нејзиниот график се совпаѓа со $x$-оската.

Во случај кога $a\neq 0$, множество вредности (кодомен) на функцијата е $V_f=\mathbb{R}$, а ако $a=0$ тогаш множество вредности на константната функција $f(x)=b$ е $V_f=\{b\}$.

Коефициентот $a$ се нарекува *коефициент на правец* на правата $y=ax+b$ и важи $a=\operatorname{tg}\alpha$, каде што $\alpha$ е аголот што го зафаќа правата со позитивниот дел на $x$-оската (види глава Аналитичка геометрија во рамнина).

За $a > 0$ линеарната функција зададена со (3.4) расте.

За $a < 0$ линеарната функција зададена со (3.4) опаѓа. (За потсетување, велиме дека функцијата $f(x)$ монотоно опаѓа ако од $x_1 < x_2$, каде што $x_1, x_2 \in D_f$ следува $f(x_1) > f(x_2)$, а монотоно расте ако од $x_1 < x_2$, каде што $x_1, x_2 \in D_f$ следува $f(x_1) < f(x_2)$.)



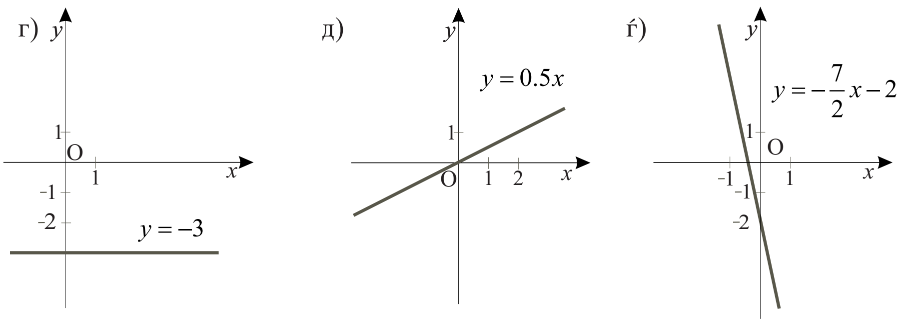

**Слика 3.1.**

**Задача 3.15.** Да се скицираат графиците на следниве функции, а потоа да се најдат нивните пресеци со координатните оски:

а) $y = 3x - 6$; б) $y = -3x - 6$; в) $y = -x + 1$;

г) $y = -3$; д) $y = 0,5x$; ѓ) $y = -\dfrac{7}{2}x - 2$.

**Решение.** Графиците на овие функции се правите прикажани на сликите 3.1 и 3.2. Тие можат да се добијат со поврзување на две произволни точки кои лежат на правата.




**Слика 3.2.**

а) Графикот на функцијата $y = 3x - 6$ ја сече $x$-оската во точката $(2, 0)$, а $y$-оската во точката $(0, -6)$.

б) Графикот на функцијата $y = -3x - 6$ ја сече $x$-оската во точката $(-2, 0)$, а $y$-оската во точката $(0, -6)$.

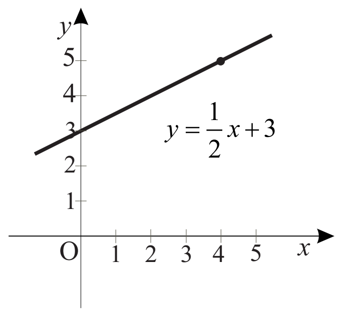
в) Графикот на функцијата $y = -x + 1$ ја сече $x$-оската во точката $(1, 0)$, а $y$-оската во точката $(0, 1)$.

г) Графикот на дадената функција $y = -3$ е права паралелна со $x$-оската, а нејзиниот пресек со $y$-оската е точката $(0, -3)$.
д) Пресек на графикот на функцијата $y = 0,5x$ со двете координатни оски е точката $(0, 0)$.

ѓ) Пресек на графикот на функцијата $y = -\dfrac{7}{2} - 2$ со $x$-оската е точката $\left(-\dfrac{4}{7},\ 0\right)$, а со $y$-оската е точката $(0, -2)$.

**Задача 3.16.** Да се скицира графикот на функцијата која минува низ точката $A(4, 5)$ и е од облик $f(x) = ax + 3$, $a \in \mathbb{R}$.

**Решение.** Ако замениме за $x = 4$ и $f(x) = 5$ во дадената равенка на линеарната функција $f(x) = ax+3$, се добива $a = \frac{1}{2}$. Графикот на функцијата $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ е даден на сликата 3.3.




**Слика 3.3.**

**Задача 3.17.** За кои вредности на реалниот параметар $m$ функцијата $f(x) = (m-3)x$ минува низ првиот и третиот квадрант?

**Решение.** Бидејќи $b = 0$, графикот на дадената функција минува низ координатниот почеток. За тој да минува низ првиот и третиот квадрант, потребно е функцијата $f(x)$ да биде растечка, односно коефициентот на правец да биде позитивен. Значи, барањето е задоволено за $m - 3 > 0$, односно за $m > 3$.

**Задача 3.18.** Да се најде вредноста на реалниот параметар $k$, така што графикот на функцијата $f(x) = (2k+1)x - 1 + k$ да биде паралелен со симетралата на вториот и четвртиот квадрант.

**Решение.** Графикот на функцијата $g(x) = -x$ е симетрала на вториот и четвртиот квадрант. За да бидат паралелни графиците на $f(x)$ и $g(x)$ треба нивните коефициенти на правец да бидат еднакви, т.е. да важи $2k + 1 = -1$ (види поглавје Аналитичка геометрија во рамнина). Добиваме $k = -1$, па бараната функција е $f(x) = -x - 2$.

### Задачи за вежбање

**Задача 3.19.** Да се решат следниве равенки:

а) $3x+1=3(x+1)$; б) $2x+\dfrac{1-2x}{2}=x+\dfrac{1}{2}$;

в) $2-5x=12$; г) $(x-2)^2-(x-1)^2=0$.

**Одговор.** а) нема решение, б) бесконечно многу решенија,

в) $x=-2$, г) $x=\dfrac{3}{2}$.

**Задача 3.20.** Да се решат следниве равенки:

а) $\dfrac{x-3}{x-1}=3$; б) $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{3}{x-2}=0$;

в) $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-3}{x+3}=2$; г) $\dfrac{3}{(1+x)^2}=\dfrac{5}{(1-x)^2}+\dfrac{2}{1-x^2}$.

**Одговор.** а) $x=0$, б) $x=-13$, в) $x=12$, г) $x=-\dfrac{1}{4}$.

**Задача 3.21.** Да се решат следниве равенки:

а) $|x-3|=7$; б) $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$.

**Одговор.** а) $x\in\{-4,10\}$, б) $x\in\{-2,1\}$.

**Задача 3.22.** За која вредност на реалниот параметар $a$ равенката $2ax-4=-2x+a$ нема решение?

**Одговор.** $a=-1$.

**Задача 3.23.** Дискутирај го решението на дадениве равенки во зависност од реалниот параметар $a$:

а) $\dfrac{3x-1}{x-1} = a$;  б) $\dfrac{x+1}{x-a} = \dfrac{a+3}{2}$.

**Одговор.** а) За $a = 3$ дадената равенка нема решение, а за $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ има единствено решение $x = \dfrac{1-a}{3-a}$,

б) За $a = -1$ равенката има бесконечно многу решенија, а за $a \neq -1$ има единствено решение $x = a + 2$.

**Задача 3.24.** Да се најде вредноста на $x$, за која вредноста на изразот $\dfrac{9x-7}{3x-2}$ е за 1 поголема од вредноста на изразот $\dfrac{4x-5}{2x-3}$.

**Одговор.** $x = 1$.

**Задача 3.25.** Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 12. Ако на тој број се додаде 18, се добива број напишан со истите цифри, но во обратен редослед. Кој е тој број?

**Одговор.** 57.

**Задача 3.26.** Збирот на два природни броја е 47. Ако поголемиот број го поделиме со помалиот, се добива количник 2 и остаток 5. Кои се тие броеви?

**Одговор.** 33 и 14.

**Задача 3.27.** Броителот на една дропка е за 2 помал од именителот. Ако броителот се намали за 1, а именителот се зголеми за 1, се добива $\dfrac{1}{2}$. Која е таа дропка?

**Одговор.** $\frac{5}{7}$.

**Задача 3.28.** Од местото $A$ кон местото $B$ тргнале два автомобила. Првиот автомобил тргнал еден час порано, а стигнал еден час подоцна од вториот. Да се најде растојанието од $A$ до $B$, ако првиот автомобил се движел со брзина 65 $km/h$, а вториот со брзина 75 $km/h$.

**Одговор.** $s = 975$ km.

**Задача 3.29.** Андреј е 3 години постар од Христијан. По 4 години збирот од нивните години ќе биде 33. Колку години има секој од нив сега?

**Одговор.** Андреј има 14, а Христијан има 11 години.

**Задача 3.30.** Да се решат следниве системи линеарни равенки:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ \\ x + \ \ y = 4 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = \ \ 5 \\ \\ 2x - \ \ y = -9 \end{cases}; \quad \text{в) } \begin{cases} 6x - 24y = -8 \\ \\ \frac{3}{4}x - \ \ 3y = -1 \end{cases}.$$

**Одговор.** а) $x = \dfrac{29}{8}$, $y = \dfrac{3}{8}$ б) нема решение,

в) бесконечно многу решенија од облик

$\left(-\dfrac{4}{3} + 4y,\ y\right),\ y \in \mathbb{R}$.

**Задача 3.31.** Во зависност од реалниот параметар $a$, да се определи пресечната точка на графиците на функциите:
$y = \dfrac{a+2}{a-2}$ и $y = x + 4$.

**Одговор.** Пресечната точка $S$ има координати
$$S\left(\frac{-3a+10}{a-2}, \frac{a+2}{a-2}\right), \text{ за } a \neq 2.$$

**Задача 3.32.** Да се решат следниве неравенки:

а) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{2+7x}{8} < 1 - \dfrac{5x}{6}$; б) $\dfrac{4x-3}{2} - x - \dfrac{2x+3}{5} \geq \dfrac{3}{2}$.

**Одговор.** а) $x < 6$, б) $x \geq 6$.

**Задача 3.33.** Да се решат следниве неравенки:

а) $\dfrac{3x-7}{2x+1} < 0$; б) $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$;

в) $\dfrac{1}{x-1} + 2 < \dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{2x+1}{5x-1} \geq 0$.

**Одговор.** а) $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{3}\right)$, б) $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$,

в) $x \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$, г) $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left(\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$.

**Задача 3.34.** Да се решат следниве системи неравенки, а потоа да се најдат сите цели броеви што ги задоволуваат истите:

а) $\begin{cases} 2x-1 > 3(1-x) \\ 5x-3(2-x) < 17 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - \dfrac{1+5x}{4} < x \\ \dfrac{x-1}{5} - x < 1 \end{cases}$.

**Одговор.** а) $x \in \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{23}{8}\right)$, а целобројни решенија се: 1 и 2,

б) $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$, а целобројни решенија се: $-1$ и 0.

**Задача 3.35.** Да се најдат нулите на дадените функции, а потоа да се скицираат нивните графици:

а) $y = 3(x+1) - 4$; б) $y = -\frac{1}{2}x + 2$;

в) $y = 6x$; г) $y = \frac{2}{3}x - 2$.

**Одговор.** а) $x = \frac{1}{3}$, б) $x = 4$, в) $x = 0$, г) $x = 3$.

**Задача 3.36.** Да се скицираат графиците на функциите и да се одреди нивната монотоност:

а) $y = -\frac{1}{3}(x+6)$; б) $y = \frac{1}{2}x - 2$;

в) $y = 6x$; г) $y = -\frac{1}{5}$.

**Одговор.** а) монотоно опаѓа, б) монотоно расте,
в) монотоно расте, г) константна функција.

**Задача 3.37.** За која вредност на реалниот параметар $k$ дадените функции се опаѓачки?

а) $y = -\frac{k}{3}(x+1)$; б) $y = \frac{1}{1-k}x - 2$;

в) $y = (k-1)x + \frac{1}{k+1}$; г) $y = -\frac{2-k}{k}x + \frac{k}{2}$.

**Одговор.** а) $k > 0$, б) $k > 1$,
в) $k < 1$, $k \neq -1$, г) $k \in (0, 2)$.

# 4 Квадратни равенки и неравенки Квадратна функција

## 4.1 Квадратни равенки. Системи од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати

Равенката од видот

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \; a \neq 0 \tag{4.1}$$

се нарекува *квадратна равенка со една непозната* $x$.

За $a = 0$ равенката се сведува на линеарна. Ако $b = 0$ или $c = 0$ тогаш равенката се нарекува *непотполна* квадратна равенка, а ако $b \neq 0$ и $c \neq 0$ тогаш равенката е *потполна* квадратна равенка.

Ако равенката (4.1) се подели со $a \neq 0$ се добива еквивалентната равенка

$$x^2 + px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

каде што $p = \dfrac{b}{a}, \;\; q = \dfrac{c}{a}$.

Потполната квадратна равенка е еквивалента со равенката

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0,$$

па оттука нејзините решенија (корени) се наоѓаат со формулата:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4.3}$$

Природата на решенијата на квадратната равенка зависи од бројот $D = b^2 - 4ac$ кој се нарекува *дискриминанта* на квадратната равенка (4.1):

- Ако $D > 0$, тогаш равенката има два реални и различни корени, кои се наоѓаат со формулата (4.3).
- Ако $D = 0$, тогаш равенката има два реални еднакви корени (двократен корен), т.е. $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Ако $D < 0$, тогаш равенката има конјугирано комплексни корени.

Од (4.3) следува дека за корените на квадратната равенка (4.1) важат *Виетовите правила* (Fransois Viete, 1540-1603):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \tag{4.4}$$

За корените на квадратната равенка од облик (4.2), Виетовите правила го имаат следниов облик:

$$x_1 + x_2 = -p\,, \quad x_1 \cdot x_2 = q\,.$$

Ако решенијата на квадратната равенка (4.1) се $x_1$ и $x_2$, тогаш квадратниот трином $ax^2 + bx + c$ може да се разложи на линеарни множители на следниов начин:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

**Задача 4.1.** Да се решат непотполните квадратни равенки:

$$\text{а) } 3x^2 = 0; \qquad \text{б) } x^2 - 2x = 0; \qquad \text{в) } x^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

**Решение.** а) $x_1 = x_2 = 0$.

б) Со извлекување $x$ пред заграда добиваме:

$$x(x-2) = 0,$$

од каде што следува дека $x = 0$ или $x - 2 = 0$. Оттука, решенијата на равенката се: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

в) Од дадената равенка се добива $x^2 = \frac{1}{4}$, па $x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$.

**Задача 4.2.** Да се решат квадратните равенки:

$$\text{а) } 3x^2 + 8x + 4 = 0; \qquad \text{б) } x^2 - 6x + 13 = 0; \qquad \text{в) } x^2 + 10x + 25 = 0.$$

**Решение.** а) $a = 3, b = 8, c = 4$. Дискриминантата $D = 16 > 0$, па равенката има две реални и различни решенија: $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = -2$.

б) $a = 1, b = -6, c = 13$. Дискриминантата $D = -16 < 0$, па равенката има конјугирано комплексни решенија: $x_1 = 3 + 2i$ и $x_2 = 3 - 2i$.

в) $a = 1, b = 10, c = 25$, па $D = 0$. Според тоа, равенката има едно реално решение $x_1 = x_2 = 5$.

**Задача 4.3.** За која вредност на реалниот параметар $a$, корените на равенката $ax^2 - 14x + 7 = 0$ се:
а) реални и различни;
б) конјугирано комплексни;
в) реални и еднакви.

**Решение.** Природата на решенијата на дадената равенка зависи од знакот на нејзината дискриминанта $D = 196 - 28a$.

а) За равенката да има реални и различни решенија потребно е $D > 0$, од каде што ја добиваме линеарната неравенка

$$196 - 28a > 0.$$

Нејзино решение е $a < 7$.

б) За равенката да има конјугирано комплексни решенија потребно е $D < 0$, од каде ја добиваме линеарната неравенка

$$196 - 28a < 0.$$

Нејзиното решение е $a > 7$.

в) За равенката да има реални и еднакви решенија потребно е $D = 196 - 28a = 0$. Решението на оваа равенка е $a = 7$.

**Задача 4.4.** Користејќи ги Виетовите формули, определи за која вредност на реалниот параметар $m$, корените на равенката $x^2 - 2mx + 1 = 0$ ја задоволуваат равенката $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$.

**Решение.** Коефициентите на дадената квадратна равенка се: $a = 1$, $b = -2m$ и $c = 1$. Од Виетовите формули имаме:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1. \tag{4.5}$$

Дадениот израз $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$ се трансформира во

$$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\,.$$

Од (4.5) ја добиваме равенката:

$$2m = (2m)^2 - 2\,,$$

т.е. $2m^2 - m - 1 = 0$, чиишто решенија се: $m_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $m_2 = 1$.

**Задача 4.5.** Да се состави квадратна равенка со реални коефициенти, чиишто решенија $x_1$ и $x_2$ се:

а) $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = 4\sqrt{3}$;

б) $x_1 = -2 + 5i$, $x_2 = -2 - 5i$ .

**Решение.** Квадратната равенка чиишто корени се $x_1$ и $x_2$ има облик

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

а) За дадените вредности на корените $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = 4\sqrt{3}$, се добива:

$$(x - \sqrt{3})(x - 4\sqrt{3}) = 0,$$

што по средувањето ја дава квардатната равенка

$$x^2 - 5\sqrt{3}x + 12 = 0.$$

б) Ако корените на равенката се $x_1 = -2 + 5i$ и $x_2 = -2 - 5i$, имаме:

$$(x + 2 - 5i)(x + 2 + 5i) = 0,$$

односно

$$x^2 + 4x + 29 = 0.$$

**Задача 4.6.** Да се разложат на линерни множители следниве триноми:

а) $2x^2 + 5x - 3$; б) $x^2 + 6x + 9$; в) $x^3 + 6x^2 - 7x$.

**Решение.** а) Решенија на соодветната квадратна равенка $2x^2 + 5x - 3 = 0$, се $x_1 = -3$ и $x_2 = \frac{1}{2}$. Коефициентот $a = 2$, па дадениот квадратен трином ќе се разложи на следниов начин:

$$2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 3)(2x - 1).$$

б) Соодветната квадратна равенка има едно двојно решение $x_1 = x_2 = -3$, а $a = 1$, па дадениот квадратен трином ќе се разложи на следниов начин:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3) = (x+3)^2.$$

в) Дадениот трином се разложува на следниов начин:

$$x^3 + 6x^2 - 7x = x(x^2 + 6x - 7) = x(x-1)(x+7).$$

**Задача 4.7.** Да се решат равенките:

а) $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{24-x^2}{x^2-4}$; б) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{6-2x} + \dfrac{1}{x^2-4x+3} = \dfrac{7}{6}$.

**Решение.** а) Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\frac{3}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{24-x^2}{(x-2)(x+2)}.$$

Нејзиното множество дозволени решенија е $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Со множење на равенката со $(x-2)(x+2)$ се добива следната равенка

$$3(x+2) - 5(x-2) = 24 - x^2,$$

со чие средување се добива квадратната равенка

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Нејзините решенија се $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$. Бидејќи $-2 \notin D$, следува дека дадената равенка има единствено решение $x = 4$.

б) Дадената равенката е еквивалентна со равенката

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(3-x)} + \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{7}{6},$$

т.е.
$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{7}{6}\,.$$
Нејзиното множество дозволени решенија е $D=\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$. Равенката се множи со $6(x-1)(x-3)$ и притоа се добива следната равенка
$$6(x-3)-3(x-1)+6=7(x-1)(x-3).$$
Со нејзино средување се добива квадратната равенка
$$7x^2-31x+30=0.$$
Нејзините решенија се $x_1=\dfrac{10}{7}$ и $x_2=3$. Бидејќи $3\notin D$ следува дека дадената равенка има единствено решение $x=\dfrac{10}{7}$.

**Задача 4.8.** Да се решат следниве равенки:
$$\text{а) } |x|=x^2+x-3; \qquad \text{б) } |x^2-1|-|x|=1.$$

**Решение.** а) За апсолутната вредност која се јавува во равенката важи: $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

Го бараме решението на равенката во секој од следниве два интервала:

1) За $x\in(-\infty,0)$, ја добиваме равенката
$$-x=x^2+x-3 \iff x^2+2x-3=0.$$
Квадратната равенка има решенија $x_1=-3$, $x_2=1$. Од нив, само $-3$ припаѓа на интервалот $(-\infty,0)$, па тоа е решение на почетната равенка.

2) За $x\in[0,\infty)$, ја добиваме равенката
$$x=x^2+x-3 \iff x^2=3.$$

Нејзините решенија се $x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$. Од нив, само $\sqrt{3}$ припаѓа на интервалот $[0, \infty)$.

Според тоа, дадената равенка има две решенија: $x = -3$ и $x = \sqrt{3}$.

б) За апсолутната вредност која се јавува во равенката важи:

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1\,, & x^2-1 \geq 0 \\ -(x^2-1), & x^2-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1, & x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \\ 1-x^2, & x \in (-1,1) \end{cases}.$$

Го бараме решението на равенката во секој од добиените четири интервала:

1) За $x \in (-\infty, -1]$, се добива равенката

$$x^2 - 1 - (-x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0,$$

која има решенија $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Од нив, само $x_1 = -2$ припаѓа на интервалот $(-\infty, -1]$.

2) За $x \in (-1, 0)$, се добива равенката

$$1 - x^2 - (-x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -x^2 + x = 0,$$

чиишто решенија се $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$. Двете решенија не припаѓаат на интервалот $(-1, 0)$.

3) За $x \in [0, 1)$, се добива равенката

$$1 - x^2 - x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + x = 0,$$

која има решенија $x_5 = 0$ и $x_6 = -1$. Од нив, само $x_5 = 0$ припаѓа на интервалот $[0, 1)$.

4) За $x \in [1, \infty)$, се добива равенката

$$x^2 - 1 - x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

Нејзините решенија се $x_7 = 2$ и $x_8 = -1$, а само $x_7 = 2$ припаѓа на разгледуваниот интервал.

Според тоа множеството решенија на дадената равенка е $\{-2, 0, 2\}$.

**Задача 4.9.** Да се решат системите равенки:

а) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 14 \end{cases}$.

**Решение.** а) Ова е систем од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати. Ако од линеарната равенка се изрази едната непозната, на пример $x = y - 1$ и се замени во квадратната равенка, ќе се добие равенката

$$(y-1)^2 + y^2 - 3y - 4 = 0,$$

со чие средување се добива квадратната равенка

$$2y^2 - 5y - 3 = 0\,.$$

Решенијата на оваа равенка се $y_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $y_2 = 3$. Заменувајќи ги овие вредности во $x = y - 1$, се добиваат соодветните решенија за непознатата $x$, односно $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ и $x_2 = 2$. Значи, решение на дадениот систем равенки се подредените двојки $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ и $(2, 3)$.

б) Системот може да се реши на два начина.

Првиот начин е да се примени постапка како во решението под а), т.е. со изразување на едната непозната од првата равенка, на пример $x = 9 - y$ и заменување во втората равенка. Со тоа се добива квадратна равенка со непозната $y$, со чие решавање се добиваат решенијата за $y$, а потоа со помош на овие вредности, се добиваат решенијата за $x$.

Вториот начин се базира на Виетовите формули. Може да се забележи дека во првата равенка е даден збирот, а во втората производот на непознатите $x$ и $y$. Значи, $p = -9$, а $q = 14$, па непознатите $x$ и $y$ се решенијата $t_1 = 2$ и $t_2 = 7$ на квадратната равенка $t^2 - 9t + 14 = 0$. Според тоа, решенијата на системот се подредените двојки $(2, 7)$ и $(7, 2)$.

## 4.2 Квадратна функција

Функцијата $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зададена со

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \tag{4.6}$$

се нарекува *квадратна функција*.

Ако $a = 0$ тогаш функцијата е линеарна функција.

Дефинициона област (домен) на оваа функција е множеството реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$.

Графикот на квадратната функција е парабола. За скицирање на графикот доволно е да се определат следниве карактеристични точки:

1) Темето на параболата $T(\alpha, \beta)$ чии координати се

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{4.7}$$

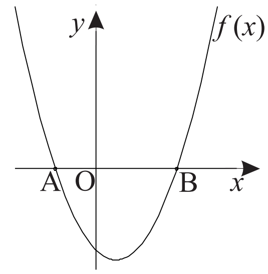
2) Пресечните точки на графикот (параболата) со $x$-оската се точките $A(x_1, 0)$ и $B(x_2, 0)$, каде што $x_1$ и $x_2$ се реалните нули на квадратната функција (доколку постојат). Реалните нули $x_1$ и $x_2$ на квадратната функција се добиваат како реални решенија на соодветната квадратна равенка

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

3) Пресечната точка на графикот (параболата) со $y$-оската е точката $C(0, c)$.

Знакот на квадратната функција (4.6) зависи од коефициентот $a$ и дискриминантата $D$ на соодветната квадратна равенка. Ќе ги разгледаме следните шест случаи:

1) Ако $a > 0$ и $D > 0$, тогаш параболата е отворена нагоре и $x$-оската ја сече во две точки $A(x_1, 0)$ и $B(x_2, 0)$, каде што $x_1$ и $x_2$ се нулите на квадратната функција. Од графикот даден на сликата 4.1 го определуваме знакот на квадратната функција:

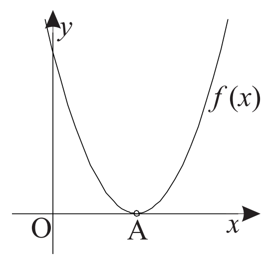



**Слика 4.1.**

$f(x) > 0,$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty);$

$f(x) < 0,$ за $x \in (x_1, x_2).$

2) Ако $a > 0$ и $D = 0$, тогаш параболата е отворена нагоре и $x$-оската ја допира во една точка $A(x_1, 0)$, бидејќи $x_1 = x_2$ е нула на квадратната функција (слика 4.2). Притоа важи:



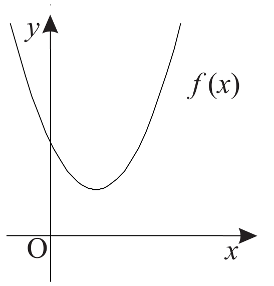

**Слика 4.2.**

$f(x) > 0,$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty).$

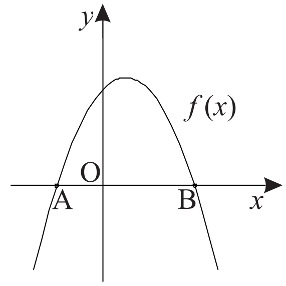
3) Ако $a > 0$ и $D < 0$, тогаш параболата е отворена нагоре и не ја сече $x$-оската. Од сликата 4.3 може да се види дека $f(x) > 0$ кога $x \in (-\infty, +\infty)$.

Да потсетиме дека со $T(\alpha, \beta)$ го означуваме темето на параболата, која е симетрична во однос на правата $x = \alpha$.

Ако $a > 0$, тогаш функцијата опаѓа на интервалот $(-\infty, \alpha)$, а расте на интервалот $(\alpha, +\infty)$. Функцијата достигнува минимум $y = \beta$ за $x = \alpha$. Во овој случај, множество вредности (кодомен) на функцијата е $V_f = [\beta, +\infty)$ (види слика 4.1, 4.2 и 4.3).




**Слика 4.3.**



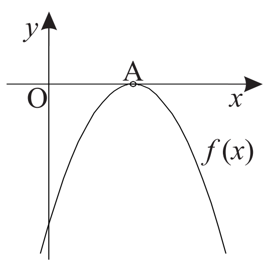

**Слика 4.4.**

4) Ако $a < 0$ и $D > 0$, тогаш параболата е отворена надолу и $x$-оската ја сече во две точки $A(x_1, 0)$ и $B(x_2, 0)$ (слика 4.4). Притоа,

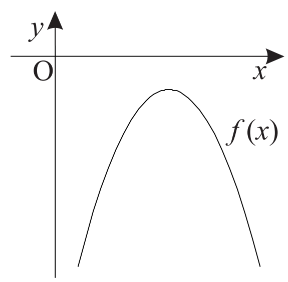
$$f(x) < 0, \text{ за } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty);$$

$$f(x) > 0, \text{ за } x \in (x_1, x_2).$$

5) Ако $a < 0$ и $D = 0$, тогаш параболата е отворена надолу и $x$-оската ја допира во една точка $A(x_1, 0)$. Графикот на ваквата функција е прикажан на сликата 4.5. Може да се забележи дека $f(x) < 0$, за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_1, +\infty)$.




**Слика 4.5.**




**Слика 4.6.**

6) Ако $a < 0$ и $D < 0$, тогаш параболата е отворена надолу и не ја сече $x$-оската. Може да се заклучи дека $f(x) < 0$, за секоја вредност на $x \in (-\infty, +\infty)$ (види слика 4.6).

Во случај кога $a < 0$, тогаш функцијата расте на интервалот $(-\infty, \alpha)$, а опаѓа на интервалот $(\alpha, +\infty)$. Функцијата достигнува максимум $y = \beta$ за $x = \alpha$. Во овој случај, множество вредности (кодомен) на функцијата е $V_f = (-\infty, \beta]$ (види слика 4.4, 4.5 и 4.6).

**Задача 4.10.** Да се најдат нулите на квадратната функција $f(x) = x^2 - 8x + 12$, а потоа да се скицира нејзиниот график. Да се определи нејзината екстремна вредност и интервалите на монотоност. Кое е множеството вредности на дадената функција?

**Решение.** Нулите на дадената функција се решенијата на соодветната равенка $x^2 - 8x + 12 = 0$. Тоа се $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$.

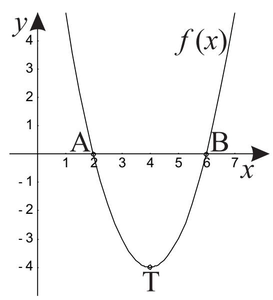
Значи, графикот на функцијата ја сече $x$-оската во точките $A(2,0)$ и $B(6,0)$ (слика 4.7).

Бидејќи $a = 1$, $b = -8$, $c = 12$, од (4.7), за координатите на темето на параболата добиваме:

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = 4\,, \qquad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = -4.$$

Функцијата достигнува минимум во темето $T$, т.е. за $x = 4$ функцијата има минимум кој изнесува $y = -4$. Функцијата опаѓа на интервалот $(-\infty, 4)$, а расте на интервалот $(4, \infty)$. Множеството вредности на дадената функција е

$$V_f = [-4, +\infty).$$




**Слика 4.7.**

**Задача 4.11.** Во која точка функцијата $f(x) = x^2 - 3x + 2$ има екстрем и каква е неговата природа?

**Решение.** За дадената функција $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$. Бидејќи $a = 1 > 0$, заклучуваме дека функцијата има минимум $y = \beta$ кој се достигнува за $x = \alpha$, каде што:

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{1}{4}.$$

**Задача 4.12.** За која вредност на реалниот параметар $k$, функцијата $f(x) = (k-1)x^2 - 2x + k$ има екстрем еднаков на 1?

**Решение.** За дадената функција $a = k - 1$, $b = -2$, $c = k$. Од тоа што функцијата има екстрем $y = \beta$ кој се достигнува за $x = \alpha$, каде што $\alpha$ и $\beta$ се координатите на темето $T$, добиваме $\frac{4ac - b^2}{4a} = 1$, односно

$$\frac{4(k-1)k - 4}{4(k-1)} = 1.$$

Оваа дробно-рационална равенка е определена за $k \neq 1$ и се трансформира во неполна квадратна равенка $k^2 - 2k = 0$ чии решенија се $k_1 = 0$ и $k_2 = 2$.

За $k_1 = 0$ функцијата има максимум 1, бидејќи $a = -1 < 0$, а за $k_2 = 2$ функцијата има минимум, бидејќи $a = 1 > 0$.

## 4.3 Квадратни неравенки. Системи неравенки со една непозната од кои барем една е квадратна

Неравенките од видот

$$ax^2 + bx + c > 0, \ ax^2 + bx + c < 0,$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \ ax^2 + bx + c \leq 0,$$

каде што $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, се нарекуваат *квадратни неравенки со непозната* $x$.

Квадратните неравенки најчесто се решаваат графички.

**Задача 4.13.** Да се решат квадратните неравенки:

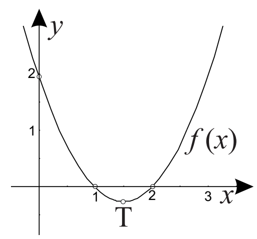
а) $x^2 - 3x + 2 < 0\,;$ б) $-x^2 + 3x - 2 \le 0\,.$

**Решение.** Го скицираме графикот на квадратната функција $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (слика 4.8). Решенија на квадратната равенка $x^2 - 3x + 2 = 0$ се $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, па пресечни точки на графикот на функцијата со $x$-оската се $A(1,0)$ и $B(2,0)$.

Од тоа што $a = 1 > 0$, заклучуваме дека параболата е отворена нагоре. Од графикот го определуваме знакот на квадратната функција, а со тоа и решението на дадените квадратни неравенки.

а) $x \in (1,2)$;

б) $x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)\,.$




**Слика 4.8.**

**Задача 4.14.** Да се реши равенката $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$.

**Решение.** Равенството $|A| = -A$, $A \in \mathbb{R}$ важи ако $A \le 0$. Оттука, решенијата на дадената равенка се всушност решенијата на квадратната неравенка

$$x^2 - 5x + 6 \le 0.$$

Квадратната равенка $x^2 - 5x + 6 = 0$ има решенија $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$, па $x^2 - 5x + 6 \le 0$ важи за $x \in [2,3]$.

**Задача 4.15.** Да се решат следниве неравенки:

а) $|x^2 + 7x + 12| > x^2 + 7x + 12;$ б) $|x| + \dfrac{1}{|x|} \ge 6.$

**Решение.** а) Неравенството $|x^2+7x+12| > x^2+7x+12$ важи ако $x^2+7x+12<0$. Равенката $x^2+7x+12=0$ има две решенија $x_1=-4$ и $x_2=-3$, што значи дека $x^2+7x+12<0$ за $x\in(-4,-3)$.

б) Дадената неравенка ќе ја трансформираме така што ќе ја помножиме со позитивниот број $|x|$, $x\neq 0$. Така се добива неравенката

$$x^2-6|x|+1\geq 0$$

и за неа се разгледуваат следниве два случаи:

1) Ако $x>0$, се добива квадратната неравенка

$$x^2-6x+1\geq 0.$$

Равенката $x^2-6x+1=0$ има корени $x_{1/2}=3\pm 2\sqrt{2}$, па решението на добиената неравенка е интервалот $\left(-\infty,3-2\sqrt{2}\,\right]\cup\left[3+2\sqrt{2},\infty\right)$. Конечното решение е пресек на оваа унија и интервалот $(0,\infty)$, односно интервалот $\left[3+2\sqrt{2},\infty\right)$.

2) Ако $x<0$, се добива квадратната неравенка

$$x^2+6x+1\geq 0.$$

Равенката $x^2+6x+1=0$ има корени $x_{3/4}=-3\pm 2\sqrt{2}$, па добиената неравенка има решение $\left(-\infty,-3-2\sqrt{2}\,\right]\cup\left[-3+2\sqrt{2},\infty\right)$. Решението во овој случај е пресек на овој интервал со интервалот $(-\infty,0)$, т.е. $\left(-\infty,-3-2\sqrt{2}\,\right]$.

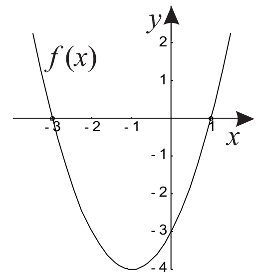
Конечното решение на почетната неравенка е унија од интервалите добиени како решенија во двата случаи, односно $\left(-\infty,-3-2\sqrt{2}\,\right]\cup\left[3+2\sqrt{2},\infty\right)$.

**Задача 4.16.** Да се решат системите неравенки:

$$\text{а)}\left\{\begin{array}{l} 2x+5\leq 0\\ x^2+2x-3<0\end{array}\right. ;\qquad \text{б)}\left\{\begin{array}{l} x^2-7x+10\leq 0\\ \dfrac{x^2+7}{2}>4x\end{array}\right. .$$

**Решение.** Решение на даден систем неравенки со една непозната е пресекот на интервалите добиени како решенија на двете неравенки.

а) Овој систем е систем од една линеарна и една квадратна неравенка со една непозната. Линеарната неравенка е еквивалентна со $x \leq -\frac{5}{2}$, па нејзино решение е интервалот $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$.




**Слика 4.9.**

Од графикот на квадратната функција $f(x) = x^2 + 2x - 3$, даден на сликата 4.9, го определуваме решението на квадратната неравенка, $x \in (-3, 1)$. Решенение на дадениот систем неравенки е пресекот на добиените интервали, т.е. $x \in \left(-3, -\frac{5}{2}\right]$.

б) Имаме систем од две квадратни неравенки со една непозната. Решението на првата неравенка е $x \in [2, 5]$. Втората неравенка на системот е еквивалентна со неравенката

$$x^2 - 8x + 7 > 0\,,$$

чиешто решение е $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$. Пресекот на добиените интервали е празно множество, па дадениот систем нема решение.

## Задачи за вежбање

**Задача 4.17.** Да се решат равенките:

а) $-\dfrac{1}{5}x^2 = 0\,;$ б) $3x^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{4}x = 0;$

в) $4x(5x+9) - 11(6x-1) = 11 - 30x;$ г) $2x^2 - 1 = 0;$

д) $(x+4)^2 + (x-6)^2 = 2(26-3x)$ ѓ) $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{x^2-2x}{3} - \dfrac{x}{6} = 0\,.$

**Одговор.** а) $0$, б) $x \in \left\{0, \dfrac{\sqrt{2}}{12}\right\}$, в) $0$, г) $x \in \left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$,
д) $x \in \{-1, 0\}$, ѓ) $x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

**Задача 4.18.** Да се решат равенките:

а) $x^2 - 7x + 11 = 3x - 10;$ б) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0;$

в) $\dfrac{1}{3}x^2 - 2x + 10 = 0;$ г) $\dfrac{(x+1)^2}{5} - \dfrac{x(x-3)}{10} = \dfrac{x+2}{2};$

д) $\dfrac{x^2}{\sqrt{10}} + 2x + \sqrt{10} = 0;$ ѓ) $(2x+1)^3 - (2x-1)^3 = (3x+2)^2 + 1\,.$

**Одговор.** а) $x \in \{3, 7\}$, б) $1/2$, в) $x \in \{3 \pm i\sqrt{21}\}$,
г) $x \in \{-4\,, 2\}$, д) $-\sqrt{10}$, ѓ) $x \in \{-1/5, 1\}$.

**Задача 4.19.** Да се решат следниве равенки:

а) $|x^2 + 2x| + |x^2 - 1| - |x| = 1;$ б) $|x^2 - 5x + 6| = -4x + 8;$

в) $x^2 - 3|x| - 70 = 0;$ г) $|x^2 - 1| = |x+1| + |x+1|^2.$

**Одговор.** а) $x \in \{-2, 0\}$, б) $x \in \{-1, 2\}$, в) $x \in \{-10, 10\}$,
г) $x \in \{-1, 2\}$.

**Задача 4.20.** За која вредност на реалниот параметар $k$ квадратната равенка:

а) $kx^2 - 4x + k = 0$ има два еднакви реални корени;

б) $kx^2 + 2(k+1)x + k + 3 = 0$ има два различни реални корени;

в) $kx^2 + (2k-3)x + k - 1 = 0$ има конјугирано комплексни корени.

**Одговор.** а) $k \in \{-2, 2\}$, б) $k \in (-\infty, 1)$, в) $k \in (9/8, \infty)$.

**Задача 4.21.** За која вредност на реалниот параметар $a$ квадратната равенка $x^2 - 8x + a + 5 = 0$ има:

а) два реални, позитивни и различни корени;

б) два реални корени со различен знак.

Дали дадената равенка може да има два реални негативни корени?

**Одговор.** а) $a \in (-5,\, 11)$, б) $a \in (-\infty, -5)$,
Не, бидејќи $x_1 + x_2 = 8 > 0$.

**Задача 4.22.** Да се пресмета вредноста на дадените изрази, каде што $x_1$ и $x_2$ се решенија на равенката $3x^2 - x + 5 = 0$, без таа да се решава.

а) $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$; б) $\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right)^2$.

**Одговор.** а) $-29/15$, б) $-59/25$.

**Задача 4.23.** Да се состави квадратна равенка, ако за нејзините корени $x_1$ и $x_2$ важи:

а) $x_1 + x_2 = -5$ и $x_1 \cdot x_2 = 6$;

б) $x_1 + x_2 = 3$ и $x_1 \cdot x_2 = 0$;

в) $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 \cdot x_2 = -4$.

**Одговор.** а) $x^2 + 5x + 6 = 0$, б) $x^2 - 3x = 0$,
в) $x^2 - 4 = 0$.

**Задача 4.24.** Да се состави квадратна равенка чии решенија се:

а) $x_1 = -\dfrac{3}{4}, \quad x_2 = -1\dfrac{2}{3}$;

б) $x_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$;

в) $x_1 = 4 - 2i, \quad x_2 = 4 + 2i$.

**Одговор.** а) $12x^2 + 29x + 15 = 0$, б) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0$,
в) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

**Задача 4.25.** Да се решат равенките:

а) $\dfrac{6}{4x^2 - 1} + \dfrac{3}{2x + 1} = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$;

б) $\dfrac{x + 1}{x - 2} - \dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x - 2} = \dfrac{4}{x^2 - 3x + 2}$.

**Одговор.** а) $x = 1$, б) $x = -1$.

**Задача 4.26.** Да се решат системите равенки:

$$\text{а)} \begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}, \qquad \text{б)} \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}.$$

**Одговор.** а) (0, 4), (3, 0), б) (−4, 1), (1, −4).

**Задача 4.27.** Да се скицира графикот на функцијата

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8.$$

Потоа, да се одреди дефиниционата област и множеството вредности на дадената функција. Кои се нејзините екстремни вредности? Да се одредат интервалите на монотоност на оваа функција.

За кои вредности на $x \in \mathbb{R}$ важи:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) > 0$; в) $f(x) < 0$.

**Одговор.** $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = (-\infty, 9]$,
$f$ има максимум за $x = 1$ кој изнесува $y = 9$,
$f$ расте на интервалот $(-\infty, 1)$,
а опаѓа на интервалот $(1, \infty)$,
а) $x \in \{-2, 4\}$, б) $x \in (-2, 4)$,
в) $x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.

**Задача 4.28.** Во ист координатен систем да се скицираат графиците на функциите:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2$;

б) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -3x^2$, $h(x) = -\dfrac{1}{3}x^2$.

**Задача 4.29.** Да се определи квадратна функција

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \;\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R},$$

ако точките $A(3,0)$, $B(-1,0)$ и $C(-3,6)$ припаѓаат на нејзиниот график.

**Одговор.** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

**Задача 4.30.** За која вредност на $x \in \mathbb{R}$ дропката:

а) $\dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ има најголема вредност;

б) $-\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 - 3x + 5}$ има најмала вредност.

**Одговор.** а) $x = 1$, б) $x = 3$.

**Задача 4.31.** Да се решат квадратните неравенки:

а) $\dfrac{2x^2 - 3}{2} - \dfrac{x^2 + 3}{4} > 3$; б) $\dfrac{1}{2}(x - 4) \leq (x + 1)^2$.

**Одговор.** а) $x \in (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, +\infty)$, б) $x \in \mathbb{R}$.

**Задача 4.32.** Да се решат системите неравенки:

а) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x > -1 \\ 3x^2 - 5x - 2 \geq 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x - 1)^2 > 2x - 3 \\ x(x - 3) \leq x + 5 \end{cases}$.

**Одговор.** а) $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{3}\right] \cup [2, \infty)$, б) $x \in [-1,\, 2) \cup (2, 5]$.

# 5 Ирационални равенки

Под *ирационална равенка* се подразбира равенка во која непознатата се јавува под знакот на барем еден корен.

Важно е да се напомене дека при решавање на ирационалните равенки, прво треба да се одреди областа на дефинираност на равенката (множеството допуштени вредности за непознатата). Притоа, се користи фактот дека коренот $\sqrt[2k]{f(x)}$, $k \in \mathbb{N}$ е дефиниран само за оние вредности на $x$ за кои важи $f(x) \geq 0$, додека коренот $\sqrt[2k+1]{f(x)}$, $k \in \mathbb{N}$ е дефиниран за секое $x \in \mathbb{R}$.

Овие равенки се решаваат така што се трансформираат во еквивалентни равенки. Постапката ќе ја илустрираме низ примери.

**Задача 5.1.** Да се решат следниве равенки:

а) $\sqrt{x+1} = 2$; б) $\sqrt{1-x} = -1$;

в) $\sqrt[3]{x-1} - 3 = 0$.

**Решение.** а) Дадената равенка е дефинирана за оние вредности на непознатата $x$ за кои важи $x + 1 \geq 0$, од каде се добива дека $x \in [-1, \infty)$. Со квадрирање ја добиваме равенката $x + 1 = 4$, односно $x = 3$, што припаѓа на интервалот $[-1, \infty)$. Заклучуваме дека $x = 3$ е бараното решение.
б) Оваа равенка нема решение бидејќи квадратниот корен на

левата страна е секогаш позитивен број, и не може да биде еднаков на негативниот број на десната страна.

в) Оваа равенка е дефинирана за секое $x \in (-\infty, +\infty)$ и е еквивалентна со равенката:

$$\sqrt[3]{x-1} = 3, \quad \iff \quad x - 1 = 27.$$

Решение на последната равенка е $x = 28$.

**Задача 5.2.** Да се решат равенките:

а) $\left(\sqrt[4]{2x+1}+5\right)^2 = 9$; б) $\left(\sqrt[4]{2x+1}+5\right)^2 = 36$;

в) $\left(\sqrt[4]{2x+1}+1\right)^3 = 27$; г) $\left(5-\sqrt[4]{2x+1}\right)^2 = 9$.

**Решение.** Сите дадени равенки се дефинирани за оние вредности на $x$ за кои важи неравенката $2x+1 \geq 0$, односно $x \geq -\dfrac{1}{2}$. Според тоа, област на дефинираност на дадените равенки е $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

а) Дадената равенка е еквивалентна со равенките:

$$\sqrt[4]{2x+1} + 5 = -3 \text{ и } \sqrt[4]{2x+1} + 5 = 3,$$

односно

$$\sqrt[4]{2x+1} = -8 \text{ и } \sqrt[4]{2x+1} = -2.$$

Последните две равенки немаат решение бидејќи корените на левата страна се позитивни броеви и за ниту една вредност на $x$ тие не може да бидат еднакви на $-8$, односно на $-2$. Според тоа, почетната равенка нема решение.

б) Оваа равенка е еквивалентна со равенките:

$$\sqrt[4]{2x+1} + 5 = -6 \text{ и } \sqrt[4]{2x+1} + 5 = 6,$$

односно
$$\sqrt[4]{2x+1}=-11 \text{ и } \sqrt[4]{2x+1}=1.$$

Првата равенка нема решение, а од втората се добива равенката $2x+1=1$, чие решение е $x=0\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$. Значи $x=0$ е решение на почетната равенка.

в) За $x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$, дадената равенка е еквивалентна со равенката
$$\sqrt[4]{2x+1}+1=3,$$
односно
$$\sqrt[4]{2x+1}=2.$$
Оттука се добива равенката $2x+1=16$, чие решение е $x=\frac{15}{2}$.

Бидејќи $x=\frac{15}{2}\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$, следува дека тоа е решение на дадената равенка.

г) Дадената равенка е еквивалентна со равенките:
$$5-\sqrt[4]{2x+1}=-3 \text{ и } 5-\sqrt[4]{2x+1}=3.$$

Од првата равенка се добива $\sqrt[4]{2x+1}=8$, т.е. $2x+1=8^4$, чие решение е $x=\frac{8^4-1}{2}=\frac{4095}{2}\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$.

Втората равенка е еквивалентна со $\sqrt[4]{2x+1}=2$, односно со $2x+1=16$, па решението е $x=\frac{15}{2}\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Заклучуваме дека задачата има две решенија:
$$x_1=\frac{4095}{2} \text{ и } x_2=\frac{15}{2}.$$

**Задача 5.3.** Да се реши равенката $\left(\sqrt[4]{2x+1}+1\right)^{\frac{1}{2}}=2$.

**Решение.** Дадената равенка е определена за $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Квадрирањето на двете страни од равенката дава:

$$\sqrt[4]{2x+1} + 1 = 4,$$

т.е. $\sqrt[4]{2x+1} = 3$. Од последната равенка се добива $2x + 1 = 81$, чие решение е $x = 20 \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

**Задача 5.4.** Да се реши равенката $\dfrac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = 2$.

**Решение.** Областа во која е дефинирана равенката е $x \in (0, \infty)$. Со множење на оваа равенка со $\sqrt{x}$ се добива равенката $3\sqrt{x} - 2 = 2\sqrt{x}$, односно $\sqrt{x} = 2$. Решението на последната равенка е $x = 4 \in (0, \infty)$.

**Задача 5.5.** Да се реши равенката $\sqrt{x^2 - 1} = 3$.

**Решение.** Областа во која е дефинирана равенката се добива со решавање на квадратната неравенка $x^2 - 1 \geq 0$, односно

$$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Со квадрирање на дадената равенка добиваме:

$$x^2 - 1 = 9,$$

односно $x^2 = 8$. Решенијата на последнава равенка $x_{1/2} = \pm 2\sqrt{2}$, припаѓаат во областа на дефинираност на почетната равенка, па тие се нејзините решенија.

**Задача 5.6.** Да се решат равенките:

а) $\dfrac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}$; б) $\dfrac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}$;

в) $\dfrac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}$.

**Решение.** а) Областа во која е дефинирана дадената равенка е $x \in [0, +\infty)$. Равенката ја трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \\ \iff \quad & (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \\ \iff \quad & (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \\ \iff \quad & \sqrt{x} = 1. \end{aligned}$$

Решението на последната равенка $x = 1$ припаѓа на областа на дефинираност на равенката.

б) Областа во која е дефинирана равенката е

$$x \in [0, 1) \cup (1, \infty).$$

Равенката ја трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} \\ \iff \quad & (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Ако во последната равенка воведеме замена $\sqrt{x} = t$, ја добиваме квадратната равенка

$$t^2 - 4t + 1 = 0,$$

чиишто решенија се:

$$t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Значи $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$ или $\sqrt{x} = 2 + \sqrt{3}$. Од равенката $\sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$ добиваме:

$$x_1 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3},$$

а од втората равенка $\sqrt{x}=2+\sqrt{3}$ имаме:

$$x_2=(2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}.$$

Двете добиени решенија припаѓаат во областа на дефинираност на равенката.

в) Равенката е дефинирана во областа $x\in[0,1)\cup(1,\infty)$. Множејќи ја со $\sqrt{x}-1$, добиваме:

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x}+1=(\sqrt{x})^2-\sqrt{x} \\ \iff \quad & (\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}-1=0. \end{aligned}$$

Слично како во претходната задача се добива дека

$$\sqrt{x}=2\pm\sqrt{5}.$$

Равенката $\sqrt{x}=2+\sqrt{5}$ има решение $x=(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}$. Равенката $\sqrt{x}=2-\sqrt{5}$ нема реални решенија, бидејќи $2-\sqrt{5}$ е негативен број. Бројот $x=9+4\sqrt{5}$ припаѓа во областа на дефинираност на равенката, па заклучуваме дека единственото решение на дадената равенка е $x=9+4\sqrt{5}$.

**Задача 5.7.** Да се реши равенката

$$\sqrt{x+1}+5\sqrt[4]{x+1}-6=0.$$

**Решение.** Равенката е дефинирана за секое $x\geq -1$. Воведуваме замена $\sqrt[4]{x+1}=t$ и ја добиваме квадратната равенка $t^2+5t-6=0$. Нејзините решенија се $t_1=-6$ и $t_2=1$. Од првото решение се добива

$$\sqrt[4]{x+1}=-6,$$

што не е можно бидејки $-6$ е негативен број, а од второто решение имаме

$$\sqrt[4]{x+1}=1,$$

од каде $x=0$. Ова решение припаѓа во областа на дефинираност на равенката.

**Задача 5.8.** Да се реши равенката $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$.

**Решение.** Коренот $\sqrt{x+5}$ е дефиниран за $x \geq -5$, а коренот $\sqrt{x}$ е дефиниран за $x \geq 0$, па множеството допуштени вредности за променливата е $[0, \infty)$ (пресекот на допуштените вредности на двата корена).

Равенката ја трансформираме во еквивалентната равенка

$$\sqrt{x+5}=1+\sqrt{x},$$

која потоа ја квадрираме. Така добиваме:

$$x+5=1+2\sqrt{x}+x,$$

од каде $\sqrt{x}=2$. Добиеното решение $x=4$ припаѓа во областа на дефинираност на равенката.

**Забелешка:** Равенката може да се реши и со директно квадрирање, или пак со воведување замена $\sqrt{x}=t$. Со оваа замена, почетната равенка ќе се сведе на равенка со еден корен

$$\sqrt{t^2+5}-t=1.$$

**Задача 5.9.** Да се реши равенката $\sqrt{a+x}=\sqrt{x}+\sqrt{a}$, $a>0$.

**Решение.** Множеството допуштени вредности за променливата $x$ е $[0,+\infty)$. Со квадрирање се добива равенката

$$a+x=x+2\sqrt{x}\sqrt{a}+a.$$

Оттука

$$\sqrt{xa}=0,$$

односно $xa=0$. Бидејќи $a>0$, единственото решение е $x=0$ кое припаѓа во областа на дефинираност на равенката.

**Задача 5.10.** Да се реши равенката $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$.

**Решение.** Коренот $\sqrt{x}$ е дефиниран за $x \geq 0$, коренот $\sqrt{x+3}$ е дефиниран за $x \geq -3$, а коренот $\sqrt{2x+7}$ е дефиниран за $x \geq -\frac{7}{2}$, па множеството допуштени вредности за променливата е $[0, +\infty)$.

Со квадрирање на дадената равенка добиваме:

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{x+3} + x + 3 = 2x + 7,$$

односно

$$\sqrt{x}\sqrt{x+3} = 2.$$

Со повторно квадрирање на последнава равенка се добива

$$x(x+3) = 4,$$

т.е. квадратната равенка

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Нејзините решенија се $x_1 = -4$ и $x_2 = 1$. Првото решение не припаѓа, а второто решение припаѓа во областа на дефинираност на равенката. Значи дадената равенка има едно решение $x = 1$.

**Задача 5.11.** Да се реши равенката

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{1+x}} = 0.$$

**Решение.** Множеството допуштени вредности на променливата $x$ е $[0, \infty)$.

Равенката ја трансформираме на следниов начин:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}{(\sqrt{x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})} = 0.$$

Последнава равенка е еквивалентна со равенката

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} = 0,$$

од која се добива $1 - 2x = 0$, т.е. $x = \frac{1}{2}$. Ако ова решение се замени во почетната равенка се добива идентитет, па заклучуваме дека $x = \frac{1}{2}$ е решение на почетната равенка.

### Задачи за вежбање

**Задача 5.12.** Да се реши равенката $\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+1}$.

**Одговор.** Равенката нема решение.

**Задача 5.13.** Да се реши равенката $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}=0$.

**Одговор.** $x=1$.

**Задача 5.14.** Да се реши равенката $\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2}$.

**Одговор.** $x_1=-1,\ x_2=1$.

**Задача 5.15.** Да се реши равенката $\sqrt{x+1}\,\sqrt{5+x}=2\sqrt{3}$.

**Одговор.** $x=1$.

**Задача 5.16.** Да се реши равенката $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2+x}=0$.

**Одговор.** $x=-1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

**Задача 5.17.** Да се реши равенката $\sqrt{a-x}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$, каде што $a\geq 0$.

**Одговор.** $x_1=0,\ x_2=a$.

# 6 Експоненцијални и логаритамски функции, равенки и неравенки

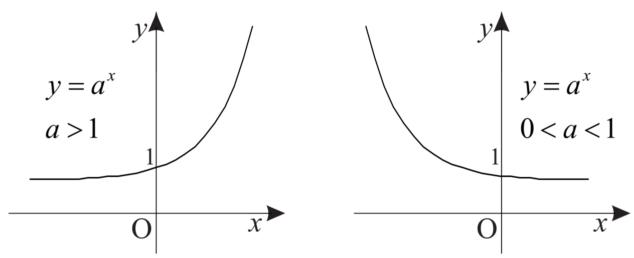
## 6.1 Експоненцијална функција

Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ зададена со

$$f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1,$$

се вика *експоненцијална функција*.

Дефинициона област (домен) на експоненцијалната функција е множеството реални броеви, т.е. $D_f=\mathbb{R}$.




**Слика 6.1.**

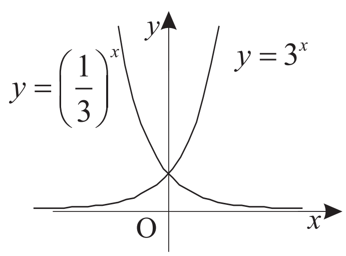
Множество вредности на експоненцијалната функција е $V_f=(0,+\infty)$, односно за секој реален број $x$ важи $y=a^x>0$.

За $a > 1$ функцијата $y = a^x$ монотоно расте, т.е. од $x_1 < x_2$ следува $a^{x_1} < a^{x_2}$ (слика 6.1. лево). За $0 < a < 1$ оваа функција монотоно опаѓа, т.е. од $x_1 < x_2$ следува $a^{x_1} > a^{x_2}$ (слика 6.1. десно).

**Задача 6.1.** Во ист координатен систем да се скицираат графиците на функциите $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

а) Во однос на која права се симетрични графиците на овие две функции?
б) Кои заеднички, а кои различни својства ги имаат овие функции?

**Решение.** а) Графиците на двете функции се прикажани на сликата 6.2. Може да се забележи дека тие се симетрични во однос на $y$-оската.




**Слика 6.2.**

б) Дадените функции имаат иста дефинициона област $D = \mathbb{R}$, исто множество вредности $V_f = (0, +\infty)$. Нивните графици поминуваат низ точката $(0, 1)$ и имаат иста хоризонтална асимптота, $x-$оската.

Функциите се разликуваат по тоа што функцијата $y = 3^x$ е растечка, а функцијата $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ е опаѓачка.

**Задача 6.2.** Користејќи го графикот на експоненцијалната функција, да се одреди колку решенија имаат равенките:

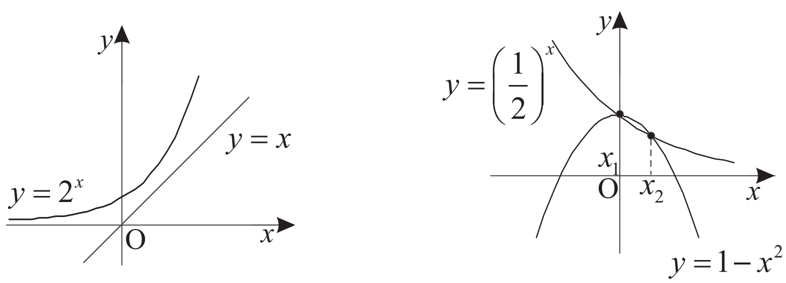
а) $2^x = x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 - x^2$.

**Решение.** а) Равенката $2^x = x$ нема решение бидејќи графиците на функциите $y = 2^x$ и $y = x$ немаат пресечни точки (види слика 6.3-лево).

б) Равенката $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 - x^2$ има две решенија, а тоа се апцисите на пресечните точки на графиците на функциите

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \text{и} \quad y = 1 - x^2,$$

односно $x_1 = 0$ и $x_2 \in (0, 1)$ (види слика 6.3-десно).




**Слика 6.3.**

**Задача 6.3.** а) Нека $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Дали е точно равенството $(f(x))^2 = f(x^2)$?

б) Нека $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, $a > 0$. Дали е точно равенството

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)?$$

**Решение.** а) Од една страна, $(f(x))^2 = (a^x)^2 = a^{2x}$, а од друга страна $f(x^2) = a^{x^2}$, што значи дека равенството не е точно.

б) $f(x + y) + f(x - y) = \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) + \frac{1}{2}(a^{x-y} + a^{-x+y}) =$

$$= \frac{1}{2}(a^x a^y + a^{-x} a^{-y} + a^x a^{-y} + a^{-x} a^y) = \frac{1}{2}\big(a^x(a^y + a^{-y}) + a^{-x}(a^{-y} + a^y)\big) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (a^x + a^{-x})(a^{-y} + a^y) = 2f(x)f(y).$$

Значи, даденото равенство е точно.

**Задача 6.4.** Да се определи дефиниционата област на следниве функции:

а) $y = a^{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y = a^{\frac{6}{5-x}}$; в) $y = a^{\sqrt[3]{x-5}}$; г) $y = \dfrac{1}{a^{x+1}}$;

каде што $a > 0$, $a \neq 1$.

**Решение.** а) Дефиниционата област на функцијата се наоѓа со решавање на неравенката $x^2 - 1 \geq 0$, од каде се добива $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
б) Функцијата е дефинирана за $5 - x \neq 0$, од каде следува дека $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.
в) $D_f = \mathbb{R}$.
г) $D_f = \mathbb{R}$.

## 6.2 Експоненцијални равенки и неравенки

Равенките (односно, неравенките) кај кои непознатата се наоѓа во степеновиот показател на барем еден степен со основа позитивен реален број, различен од нула, се викаат *експоненцијални равенки* (односно, *неравенки*).

При решавање, експоненцијалните равенки најчесто ги трансформираме во следниов облик:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0,\ a \neq 1.$$

Последнава равенка е еквивалентна со равенката

$$f(x) = g(x).$$

Аналогно, при решавање, експоненцијалните неравенки обично ги трансформираме во еден од следниве облици:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)};\; a^{f(x)} > a^{g(x)};\; a^{f(x)} \leq a^{g(x)};\; a^{f(x)} \geq a^{g(x)}, \quad a > 0,\, a \neq 1.$$

Потоа, за решавање, на пример, на неравенката $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ја користиме монотоноста на експоненцијалната функција:

1) Ако $a > 1$ тогаш $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) < g(x)$.

2) Ако $0 < a < 1$ тогаш $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Longleftrightarrow f(x) > g(x)$.

**Задача 6.5.** Да се решат експоненцијалните равенки:

а) $3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 21\,;$

б) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 3^{x-1} - 3^{x-2} + 3^{x-3}\,;$

в) $9^x + 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} + 3^{2x-1}\,;$

г) $5^{x-2} \cdot 8^{\frac{4x-12}{3}} = 20^{6-x}\,;$

д) $5^x - 3 = \sqrt{9 - 5^x}\,;$

ѓ) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0\,;$

е) $3^{|x+1|} = 27\,.$

**Решение.** Во равенките под а), б), в), г) и е) множеството допуштени вредности $D$ за променливата $x$ е $\mathbb{R}$.
а) Со еквивалентни трансформации на равенката добиваме:

$$\begin{aligned} & 3^x - 3^{x+1} + 3^{x+2} = 21 \\ \iff\quad & 3^x(1-3+9) = 21 \\ \iff\quad & 3^x \cdot 7 = 21 \,/ \,:7 \\ \iff\quad & 3^x = 3^1 \end{aligned}$$

од каде следува дека решение на дадената равенка е $x = 1$.

б) Равенката ја трансформираме во еквивалентни равенки на следниов начин:

$$\begin{aligned} & 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 3^{x-1} - 3^{x-2} + 3^{x-3} \\ \iff\quad & 2^x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 3^x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) \\ \iff\quad & 2^x \cdot \frac{7}{8} = 3^x \cdot \frac{7}{27} \\ \iff\quad & 2^{x-3} = 3^{x-3}. \end{aligned}$$

Ако последната равенка ја поделиме со $3^{x-3} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ја добиваме равенката $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} = 1$, т.е. равенката $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, од каде $x - 3 = 0$. Според тоа, решение на почетната равенка е $x = 3$.

в) Дадената експоненцијална равенка се трансформира на следниов начин:

$$
\begin{aligned}
& 9^x + 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} + 3^{2x-1} \\
\iff\quad & 3^{2x} - 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 2^{x+\frac{3}{2}-1} \\
\iff\quad & 3^{2x}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2^{x+\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right) \\
\iff\quad & 3^{2x-1} = 2^{\frac{2x-1}{2}} \ / : 2^{\frac{2x-1}{2}} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff\quad & \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2x-1} = 1,
\end{aligned}
$$

од каде $2x-1=0$, односно $x=\dfrac{1}{2}$.

г) За дадената равенка имаме:

$$
\begin{aligned}
& 5^{x-2} \cdot 8^{\frac{4x-12}{3}} = 20^{6-x} \\
\iff\quad & 5^{x-2} \cdot 2^{3\cdot\frac{4x-12}{3}} = (5\cdot 2^2)^{6-x} \\
\iff\quad & 5^{x-2} \cdot 2^{4x-12} = 5^{6-x} \cdot 2^{12-2x} \\
\iff\quad & 5^{2x-8} \cdot 2^{6x-24} = 1 \\
\iff\quad & (5^2 \cdot 2^6)^{x-4} = 1,
\end{aligned}
$$

од каде $x-4=0$, односно $x=4$.

д) Множеството допуштени вредности за променливата $x$ е решението на неравенката $9-5^x \geq 0$. Дадената равенка се трансформира на следниов начин:

$$
\begin{aligned}
& 5^x - 3 = \sqrt{9 - 5^x} \\
\iff\ & (5^x - 3)^2 = 9 - 5^x \\
\iff\ & 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 9 = 9 - 5^x \\
\iff\ & 5^{2x} - 5 \cdot 5^x = 0 \\
\iff\ & 5^x(5^x - 5) = 0.
\end{aligned}
$$

Бидејќи $5^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ имаме $5^x - 5 = 0$, од каде $x = 1$. Добиената вредност $x = 1$ припаѓа на множеството допуштени вредности за променливата, што значи дека $x = 1$ е решение на равенката.

ѓ) Множеството допуштени вредности за променливата $x$ е интервалот $[0, +\infty)$.

Воведуваме нова непозната $3^{2\sqrt{x}} = y$. Тогаш $3^{4\sqrt{x}} = y^2$ со што се добива квадратната равенка $y^2 - 4y + 3 = 0$, чии решенија се $y_1 = 1$ и $y_2 = 3$.

Ако се вратиме на почетната непозната $x$, од $y_1 = 1$ добиваме $3^{2\sqrt{x}} = 1$, па $2\sqrt{x} = 0$, т.е. $x_1 = 0$. Од второто решение $y_2 = 3$ добиваме $3^{2\sqrt{x}} = 3$, па $2\sqrt{x} = 1$, т.е. $x_2 = \dfrac{1}{4}$.

Двете добиени вредности $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{1}{4}$ припаѓаат во множеството допуштени вредности за променливата, што значи дека се решенија на равенката.

е) Дадената равенка е еквивалентна со равенката $3^{|x+1|} = 3^3$, од каде добиваме

$$|x + 1| = 3.$$

Значи, $x + 1 = -3$ или $x + 1 = 3$, т.е. решенија на дадената равенка се $x_1 = -4$ и $x_2 = 2$.

**Задача 6.6.** Да се решат експоненцијалните неравенки:

а) $2^{x(x+3)} \leq 16$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x^2-15x+13} < \left(\frac{1}{3}\right)^{4-3x}$;

в) $\dfrac{2}{3^{x+1}+7} \leq \dfrac{1}{3^x+5}$.

**Решение.** Во сите неравенки множеството допуштени вредности $D$ за променливата $x$ е $\mathbb{R}$.

а) Дадената неравенка се трансформира на следниов начин:

$$\begin{aligned} & 2^{x(x+3)} \leq 16 \\ \iff & 2^{x^2+3x} \leq 2^4 \\ \iff & x^2+3x \leq 4 \\ \iff & x^2+3x-4 \leq 0. \end{aligned}$$

Решение на последната квадратна неравенка е $x \in [-4, 1]$.

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x^2-15x+13} < \left(\frac{1}{3}\right)^{4-3x}$

$\iff \quad 4x^2-15x+13 > 4-3x$

$\iff \quad 4x^2-12x+9 > 0.$

Решение на добиената квадратна неравенка е

$$x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty).$$

в) Дадената неравенка ја трансформираме на следниов начин:

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{3^{x+1}+7} \leq \frac{1}{3^x+5} \\
\iff\ & \frac{3^{x+1}+7}{2} \geq \frac{3^x+5}{1} \ / \cdot 2 \\
\iff\ & 3^x \cdot 3 + 7 \geq 2 \cdot 3^x + 10 \\
\iff\ & 3^x \geq 3
\end{aligned}
$$

од каде се добива $x \geq 1$, т.е. решение на неравенката е $[1, +\infty)$.

## 6.3 Системи експоненцијални равенки и неравенки

Во следниве решени задачи ќе покажеме како се решава систем експоненцијални равенки со две непознати, како и систем експоненцијални неравенки со една непозната.

**Задача 6.7.** Да се реши системот експоненцијални равенки:

$$\left\{ \begin{array}{l} 9^{x+y} = 729 \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{array} \right. .$$

**Решение.** Двете равенки на дадениот систем се дефинирани за секое $x$ и $y$ од множеството реални броеви.

Секоја од равенките ја трансформираме во облик

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1$$

и го добиваме системот

$$\left\{ \begin{array}{r} 9^{x+y} = 9^3 \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{array} \right. .$$

Последниот систем е еквивалентен со системот линеарни равенки $\left\{ \begin{array}{r} x+y=3 \\ x-y-1=0 \end{array} \right.$, чие решение е $x = 2,\ y = 1$.

**Задача 6.8.** Да се реши системот експоненцијални неравенки:

$$\begin{cases} 3^{x^2-4x} > \frac{1}{243} \\ (0,5)^{x^2+5x} > \frac{1}{64} \end{cases}.$$

**Решение.** Двете неравенки од системот се дефинирани за секое $x$ и $y$ од множеството реални броеви. Дадениот систем се трансформира во системот

$$\begin{cases} 3^{x^2-4x} > \left(\frac{1}{3}\right)^5 \\ (0,5)^{x^2+5x} > \left(\frac{1}{2}\right)^6 \end{cases},$$

односно

$$\begin{cases} 3^{x^2-4x} > 3^{-5} \\ (0,5)^{x^2+5x} > (0,5)^6 \end{cases}.$$

Од првата неравенка ја добиваме неравенката $x^2 - 4x > -5$, а од втората $x^2 + 5x < 6$. Решение на првата квадратна неравенка се сите реални броеви, т.е. $x \in \mathbb{R}$, а решение на втората е $x \in (-6, 1)$. Решението на дадениот систем неравенки е пресекот од добиените решенија, т.е. интервалот $(-6, 1)$.

## 6.4 Логаритми. Логаритамска функција

Нека $b \in \mathbb{R}^+$ и $a > 0$, $a \neq 1$. Бројот $c \in \mathbb{R}$ се вика *логаритам* од бројот $b$ со основа $a$ ако важи $b = a^c$. Означуваме $\log_a b = c$.

Бројот $a$ се нарекува *основа*, а $b$ *логаритманд*.

Нека $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $c > 0$. За логаритмите важат следниве особини:

1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$;

2) $a^{\log_a b} = b, \log_a a^b = b$;

3) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;

4) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

5) $\log_a b^k = k \log_a b,\ k \in \mathbb{R}$;

6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c > 0,\ c \neq 1$;

7) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},\ b > 0,\ b \neq 1$;

8) $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n},\ m,\ n \in \mathbb{R},\ n \neq 0$.

Логаритам од $x$ со основа 10 се вика *декаден* и за него ја користиме ознаката $\lg x$ или $\log x$, а логаритамот од $x$ со основа $e$, каде што $e$ е Неперовиот број ($e \approx 2.7273$), се вика *природен логаритам* и се означува со $\ln x$.

Функцијата $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ зададена со

$$f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,$$

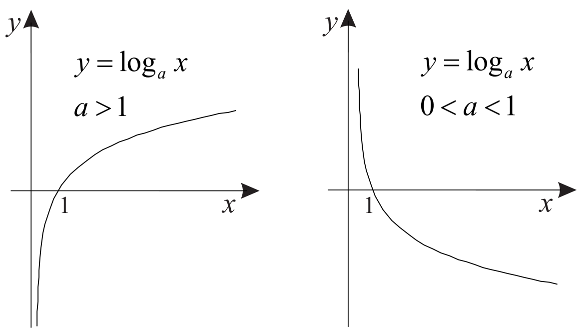
се вика *логаритамска функција*.

Дефинициона област (домен) на логаритамската функција е множеството позитивни реални броеви, т.е.

$$D_f = \mathbb{R}^+ = (0,\ +\infty).$$

Множество вредности (кодомен) на логаритамската функција е $V_f = \mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty)$.

За $a > 1$ функцијата монотоно расте, т.е. од $x_1 < x_2$ следува $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (слика 6.4. лево). За $0 < a < 1$ функцијата




**Слика 6.4.**

монотоно опаѓа, т.е. од $x_1 < x_2$ следува $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (слика 6.4. десно).

Ако $a > 1$ тогаш $\log_a x > 0$ за $x > 1$, $\log_a 1 = 0$ и $\log_a x < 0$ за $0 < x < 1$.

Ако $0 < a < 1$ тогаш $\log_a x < 0$ за $x > 1$, $\log_a 1 = 0$ и $\log_a x > 0$ за $0 < x < 1$.

**Задача 6.9.** Да се пресмета вредноста на изразите:

а) $\log_3 1$;

б) $\log_2(\log_4 2)$;

в) $\log_2(\log_2(\log_2 2^{16}))$;

г) $\log_4(\log_3(\log_2 8))$;

д) $\log_2 24 + \dfrac{1}{\log_{96} 2} - \log_2 192 - \dfrac{1}{\log_{12} 2}$.

**Решение.** а) $\log_3 1 = 0$.

б) $\log_2(\log_4 2) = \log_2 \dfrac{1}{2} = -1.$

в) $\log_2(\log_2(\log_2 2^{16})) = \log_2(\log_2 16) = \log_2(\log_2 2^4) = \log_2 4 = 2.$

г) $\log_4(\log_3(\log_2 8)) = \log_4(\log_3 3) = \log_4 1 = 0.$

д) $\log_2 24 + \dfrac{1}{\log_{96} 2} - \log_2 192 - \dfrac{1}{\log_{12} 2} =$

$= \log_2 24 + \log_2 96 - \log_2 192 - \log_2 12 =$

$= \log_2 24 \cdot 96 - \log_2 192 \cdot 12 =$

$= \log_2 \dfrac{24 \cdot 96}{192 \cdot 12} = \log_2 1 = 0.$

**Задача 6.10.** Да се пресмета:

а) $\log_{90} 120,$ ако $\log_5 2 = a,\ \log_5 3 = b;$

б) $\log_{30} 8,$ ако $\lg 5 = a,\ \lg 3 = b.$

**Решение.**

$$
\begin{aligned}
\text{а)}\ \log_{90} 120 &= \frac{\log_5 120}{\log_5 90} = \frac{\log_5 3 \cdot 2^3 \cdot 5}{\log_5 2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \\
&= \frac{\log_5 3 + 3\log_5 2 + \log_5 5}{\log_5 2 + 2\log_5 3 + \log_5 5} = \\
&= \frac{b + 3a + 1}{a + 2b + 1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{б)}\ \log_{30} 8 &= \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 30} = \frac{\lg 2^3}{\lg 3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3\lg 2}{\lg 3 + \lg 2 + \lg 5} = \\
&= \frac{3\lg \frac{10}{5}}{\lg 3 + \lg \frac{10}{5} + \lg 5} = \frac{3(\lg 10 - \lg 5)}{\lg 3 + \lg 10 - \lg 5 + \lg 5} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{3(1-a)}{b+1}.$$

**Задача 6.11.** Да се определи $x$ во областа на дефинираност на логаритмите:

а) $\log x = 2\log a - \frac{1}{2}\Big(\log b + \frac{2}{3}\log c\Big)$;

б) $\log x = \log a + \frac{1}{2}\Big(\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(a-b) + 2\log c\Big)$.

**Решение.**

а) $$\log x = 2\log a - \frac{1}{2}\Big(\log b + \frac{2}{3}\log c\Big) = \log a^2 - \frac{1}{2}\Big(\log b + \log c^{\frac{2}{3}}\Big) =$$
$$= \log a^2 - \frac{1}{2}\log\big(bc^{\frac{2}{3}}\big) = \log a^2 - \log\big(b^{1/2}c^{1/3}\big) =$$
$$= \log\frac{a^2}{b^{1/2}c^{1/3}},$$

од каде се добива $x = \dfrac{a^2}{\sqrt{b}\,\sqrt[3]{c}}$.

б) Слично како под а) се добива $x = \dfrac{ac\sqrt{a+b}}{\sqrt[6]{a-b}}$.

**Задача 6.12.** Да се докаже дека во областа на дефинираност на логаритмите важат следниве равенства:

а) $\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = 0$;

б) $\log_{a^k} b = \frac{1}{k}\log_a b$;

в) $\dfrac{1}{\log_a N} + \dfrac{1}{\log_b N} + \dfrac{1}{\log_c N} = \dfrac{1}{\log_{abc} N}$ .

**Решение.** а) $\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = \log_a b + \dfrac{\log_a b}{\log_a a^{-1}} = \log_a b + \dfrac{\log_a b}{-1} = 0.$

б) $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{\log_b a^k} = \dfrac{1}{k\log_b a} = \dfrac{1}{k}\log_a b.$

в) $\dfrac{1}{\log_a N} + \dfrac{1}{\log_b N} + \dfrac{1}{\log_c N} = \log_N a + \log_N b + \log_N c =$

$$= \log_N abc = \frac{1}{\log_{abc} N}.$$

**Задача 6.13.** Да се определи дефиниционата област на функциите:

а) $f(x) = \lg(-x)\,;$
б) $f(x) = \log_2 (x+2) + \log_2 |x|\,;$
в) $f(x) = \dfrac{3}{4-x^2} + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x)\,.$

**Решение.** а) Дефиниционата област на дадената функција е решението на неравенката $-x > 0$, т.е. $x < 0$. Значи,

$$D_f = (-\infty, 0).$$

б) Дефинициона област на функцијата $f_1(x) = \log_2(x+2)$ е решението на неравенката $x + 2 > 0$, од каде се добива $x > -2$. Значи, $D_{f_1} = (-2, +\infty)$.

Дефинициона област на функцијата $f_2(x) = \log_2 |x|$ е решението на неравенката $|x| > 0$, т.е. $D_{f_2} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Според тоа,

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = (-2, 0) \cup (0, +\infty).$$

в) Дефинициона област на функцијата $f_1(x) = \dfrac{3}{4-x^2}$ се сите реални броеви $x$ за кои важи неравенството $4 - x^2 \neq 0$, т.е. $x \neq \pm 2$. Оттука, $D_{f_1} = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$.

Дефинициона област на функцијата $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x)$ е решението на неравенката $x^2 - x > 0$, т.е.

$$D_{f_2} = (-\infty\,,\, 0) \cup (1\,,\, +\infty).$$

Според тоа,

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = (-\infty\,,\,-2) \cup (-2,0) \cup (1,2) \cup (2\,,\,+\infty).$$

**Задача 6.14.** Да се провери дали се растечки или опаѓачки следниве функции:

а) $f(x) = 2\lg x,\ x > 0\,;$ б) $f(x) = -4\log_3 x,\ x > 0\,;$

в) $f(x) = -4\log_{\frac{1}{3}} x,\ x > 0\,;$ г) $f(x) = \dfrac{1}{3}\ln(-x),\ x < 0.$

**Решение.** Ако $f(x)$ е растечка (односно, опаѓачка) функција, тогаш функциите $cf(x)$, $c < 0$ и $f(-x)$ се опаѓачки (односно, растечки) функции. Функцијата $cf(x)$, $c > 0$ има иста монотоност како и функцијата $f(x)$.

а) $f(x) = \lg x$ е растечка функција, според тоа и $2f(x) = 2\lg x$ е растечка функција.

б) $f(x) = \log_3 x$ е растечка функција, па $-4f(x) = -4\log_3 x$ е опаѓачка функција.

в) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ е опаѓачка функција, од каде следува дека функцијата $-4f(x) = -4\log_{\frac{1}{3}} x$ е растечка функција.

г) $f(x) = \ln x$ е растечка функција, па $f(-x) = \ln(-x)$ е опаѓачка функција. Значи, $\dfrac{1}{3}f(-x) = \dfrac{1}{3}\ln(-x)$ е опаѓачка функција.

## 6.5 Логаритамски равенки и неравенки

Равенката (односно, неравенката) во која непознатата се наоѓа во логаритмандот или во основата на барем еден логаритам се нарекува *логаритамска равенка* (односно, *неравенка*).

За да се решат, логаритамските равенки најчесто се трансформираат во обликот:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \text{ каде што } f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,$$

а потоа се користи еквивалентноста

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \iff f(x) = g(x).$$

Аналогно и логаритамските неравенки, за да се решат, најчесто се трансформираат во следниве облици:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x), \qquad \log_a f(x) > \log_a g(x),$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x), \qquad \log_a f(x) \geq \log_a g(x),$$

каде што $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Потоа ја користиме монотоноста на логаритамската функција, па при решавање, на пример, на неравенката $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ важи:

1) Ако $a > 1$ тогаш $\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff f(x) < g(x)$.

2) Ако $0 < a < 1$ тогаш $\log_a f(x) < \log_a g(x) \iff f(x) > g(x)$.

**Задача 6.15.** Да се решат логаритамските равенки:

а) $\lg x + \lg(7x-4) = \lg(2x+1) + \lg(3x-2)$;

б) $\dfrac{1}{5-\lg x} + \dfrac{2}{1+\lg x} = 1$;

в) $3^{2+\lg x} - 3^{1+\lg x} + 3^{\lg x} = 21$;

г) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$;

д) $\log_3 x + \log_5 x = \log_3 15$.

**Решение.** а) Множеството допуштени вредности $D$ за променливата $x$ се наоѓа како пресек на множествата решенија на следниве неравенки:

$$x > 0,\ \ 7x - 4 > 0,\ \ 2x + 1 > 0,\ \ 3x - 2 > 0,$$

од каде се добива $D = \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Почетната равенка ја трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned} & \lg x + \lg(7x - 4) = \lg(2x + 1) + \lg(3x - 2) \\ \iff\ & \lg[x(7x - 4)] = \lg[(2x + 1)(3x - 2)] \\ \iff\ & x(7x - 4) = (2x + 1)(3x - 2) \\ \iff\ & x^2 - 3x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Решенијата на добиената квадратна равенка, $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, припаѓаат во $D$, па според тоа се решенија на дадената логаритамска равенка.

б) Множеството допуштени вредности $D$ за променливата $x$ се наоѓа со решавање на неравенствата:

$$x > 0,\ \ 5 - \lg x \neq 0,\ \ 1 + \lg x \neq 0.$$

Според тоа, $D = \mathbb{R}^+ \backslash \{10^{-1}, 10^5\}$. Дадената равенка се трансформира на следниот начин:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1 \ / \ \cdot (5 - \lg x)(1 + \lg x) \\ \iff\ & 1 + \lg x + 10 - 2\lg x = 5 + 4\lg x - \lg^2 x \\ \iff\ & \lg^2 x - 5\lg x + 6 = 0\,. \end{aligned}$$

Воведуваме замена $\lg x = y$, па ја добиваме квадратната равенка $y^2 - 5y + 6 = 0$, чии решенија се $y_1 = 3$ и $y_2 = 2$. Значи,

$\lg x_1 = 3$, односно $\lg x_2 = 2$, од каде добивме:

$$x_1 = 1000 \in D\,, \quad x_2 = 100 \in D\,.$$

в) Множеството допуштени вредности за променливата $x$ е $D = (0\,,\,+\infty)$. Со еквивалентни трансформации на равенката добиваме:

$$\begin{aligned}
& 3^{2+\lg x} - 3^{1+\lg x} + 3^{\lg x} = 21 \\
\iff\ & 3^{\lg x}(3^2 - 3 + 1) = 21 \\
\iff\ & 3^{\lg x} \cdot 7 = 21 \\
\iff\ & 3^{\lg x} = 3,
\end{aligned}$$

од каде се добива $\lg x = 1$, па $x = 10 \in D$.

г) Множеството допуштени вредности за променливата $x$ е $D = (0\,,\,+\infty)$.

$$\begin{aligned}
& \log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5 \\
\iff\ & \log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 5,5 \\
\iff\ & \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = 5,5 \\
\iff\ & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\log_3 x = 5,5 \\
\iff\ & \frac{11}{6}\log_3 x = \frac{55}{10} \\
\iff\ & \log_3 x = 3,
\end{aligned}$$

од каде $x = 3^3 = 27 \in D\,$.

д) Множеството допуштени вредности за променливата $x$ е

$D = (0\,,\,+\infty)$.

$$\begin{aligned}
& \log_3 x + \log_5 x = \log_3 15 \\
\iff\quad & \log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 5} = \log_3 15 \ / \ \cdot \log_3 5 \neq 0 \\
\iff\quad & \log_3 x \cdot \log_3 5 + \log_3 x = \log_3 (5 \cdot 3) \cdot \log_3 5 \\
\iff\quad & \log_3 x(\log_3 5 + 1) = (\log_3 5 + 1) \cdot \log_3 5 / \ \ : (\log_3 5 + 1) \neq 0 \\
\iff\quad & \log_3 x = \log_3 5,
\end{aligned}$$

од каде $x = 5 \in D$.

**Задача 6.16.** Да се решат логаритамските неравенки:

а) $\log_{\frac{1}{5}}(2x^2 - 8) < \log_{\frac{1}{5}}(7x - 14)$; б) $\lg \dfrac{12}{x} \geq \lg (x - 1)$;

в) $\log_2 \dfrac{x-1}{x+1} > 2$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x-3}{x+3} > 0$;

д) $\log \left| \dfrac{x-1}{2x+1} \right| < 0.$

**Решение.** а) Множеството допуштени вредности за променливата $x$ го наоѓаме како пресек на множествата решенија на неравенките: $2x^2 - 8 > 0$ и $7x - 4 > 0$. Притоа, добиваме:

$$2x^2 - 8 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty),$$

$$7x - 4 > 0 \iff x \in \left(\frac{4}{7}, +\infty\right).$$

Според тоа, $D = (2, +\infty)$.

Дадената неравенка ја трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned}
& \log_{\frac{1}{5}}(2x^2 - 8) < \log_{\frac{1}{5}}(7x - 14) \\
\iff\quad & 2x^2 - 8 > 7x - 14 \\
\iff\quad & 2x^2 - 7x + 6 > 0.
\end{aligned}$$

Решение на добиената квадратна неравенка е $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty)$, па решението на почетната логаритамска неравенка е

$$D \cap \left( (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (2, +\infty) \right) = (2, +\infty).$$

б) Равенката е определена за оние вредности на $x$ за кои важи: $x > 0$ и $x - 1 > 0$. Според тоа, $D = (1\,, +\infty)$.

$$\begin{aligned} & \lg \frac{12}{x} \geq \lg (x-1) \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{12}{x} \geq x - 1 \ / \ \cdot x > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 12 \geq x^2 - x \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 - x - 12 \leq 0. \end{aligned}$$

Решение на последната квадратна неравенка е $[-3, 4]$, од каде за решението на почетната неравенка се добива:

$$[-3, 4] \cap D = (1, 4].$$

в) Множеството допуштени вредности за променливата $x$ се наоѓа со решавање на неравенката $\frac{x-1}{x+1} > 0$, од каде се добива $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, т.е. $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Дадената неравенка ја трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned}
&\log_2 \frac{x-1}{x+1} > 2 \\
\iff\quad &\log_2 \frac{x-1}{x+1} > \log_2 4 \\
\iff\quad &\frac{x-1}{x+1} > 4 \ / \ \cdot (x+1)^2 > 0 \\
\iff\quad &(x-1)(x+1) > 4(x+1)^2 \\
\iff\quad &x^2 - 1 > 4x^2 + 8x + 4 \\
\iff\quad &3x^2 + 8x + 5 < 0.
\end{aligned}$$

Решение на добиената квадратна неравенка е $\left(-\frac{5}{3}, -1\right)$, па решение на почетната неравенка е

$$\left(-\frac{5}{3}, -1\right) \cap D = \left(-\frac{5}{3}, -1\right).$$

г) Со решавање на неравенката

$$\frac{x-3}{x+3} > 0$$

се добива множеството допуштени вредности за променливата $x$, $D = (-\infty\,, -3) \cup (3\,, +\infty)$.

$$\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+3} > 0 \\
\iff\quad &\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+3} > \log_{\frac{1}{3}} 1 \\
\iff\quad &\frac{x-3}{x+3} < 1 \ / \ \cdot (x+3)^2 > 0 \\
\iff\quad &x^2 - 9 < x^2 + 6x + 9 \\
\iff\quad &-18 < 6x \\
\iff\quad &x > -3.
\end{aligned}$$

Решението на почетната неравенка е $(-3\,,\,+\infty)\cap D=(3\,,\,+\infty)$.

д) Множеството допуштени вредности $D$ за променливата $x$ се наоѓа со решавање на неравенствата

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|>0,\ 2x+1\neq 0,$$

од каде се добива дека $D=\mathbb{R}\setminus\Big\{-\dfrac{1}{2},1\Big\}$.

Дадената неравенка $\log\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right|<0$ е еквивалентна со неравенката

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<1,$$

односно $|x-1|<|2x+1|$.

Користејќи ја дефиницијата за апсолутна вредност имаме:

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1\end{cases},\ |2x+1|=\begin{cases} 2x+1, & x\geq -1/2\\ -(2x+1), & x<-1/2\end{cases}.$$

Реалната оска ја делиме на три подинтервали и го бараме решението на неравенката во секој од нив.

За $x\in(-\infty,-1/2)$, неравенката $|x-1|<|2x+1|$ го добива обликот $-(x-1)<-(2x+1)$, од каде имаме $x+2<0$, односно $x<-2$. Според тоа, решението на почетната неравенка кое се наоѓа во интервалот е $(-\infty,-1/2)$ е пресекот

$$(-\infty,-1/2)\cap(-\infty,-2)=(-\infty,-2).$$

Во случај кога $x\in[-1/2,1)$, се добива неравенката $-3x<0$, односно $x>0$. Тогаш решението е $(0,1)$.

За $x\in[1,\infty)$, се добива неравенката $-x-2<0$, односно $x>-2$. Пресекот на интервалите $[1,\infty)$ и $(-2,\infty)$ е $[1,\infty)$.

Бидејќи множеството допуштени вредности на променливата е $D=\mathbb{R}\setminus\Big\{-\dfrac{1}{2},1\Big\}$ добиваме дека решението на почетната неравенка е

$$D \cap \Big( (-\infty, -2) \cup (0,1) \cup [1, \infty) \Big) = (-\infty, -2) \cup (0,1) \cup (1, \infty).$$

**Задача 6.17.** Да се определи дефиниционата област на функцијата

$$f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x - x^2}{4}}\,.$$

**Решение.** Дефиниционата област на дадената функција се добива како пресек на множествата решенија на неравенките:

$$5x - x^2 > 0, \quad \ln \frac{5x - x^2}{4} \geq 0.$$

Решение на квадратната неравенка $5x - x^2 > 0$ е $[0, 5]$. За да ја решиме логаритамската неравенка $\ln \dfrac{5x - x^2}{4} \geq 0$, ја трансформираме на следниот начин:

$$\begin{aligned}
& \ln \frac{5x - x^2}{4} \geq 0 \\
\iff \quad & \ln \frac{5x - x^2}{4} \geq \ln 1 \\
\iff \quad & \frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \\
\iff \quad & 5x - x^2 \geq 4 \\
\iff \quad & -x^2 + 5x - 4 \geq 0.
\end{aligned}$$

Решение на последната квадратна неравенка е $[1, 4]$, од каде следува дека $D_f = [0, 5] \cap [1, 4] = [1, 4]$.

## 6.6 Системи равенки од кои барем една е логаритамска

**Задача 6.18.** Да се решат следниве системи:

а) $\begin{cases} \lg x + 2\lg y = -3 \\ \lg x^3 - \lg y^2 = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} xy = 16 \\ x^{\log_2 y} = 8 \end{cases}$.

**Решение.** а) Дефиниционата област на системот е определена со неравенките $x > 0$ и $y > 0$, т.е.

$$D = \{(x, y) \,|\, x,\, y \in \mathbb{R},\, x > 0,\, y > 0\}.$$

Користејќи ги правилата на логаритмирање, системот го трансформираме во следниов еквивалентен систем:

$$\begin{cases} \lg (xy^2) = -3 \\ \lg \dfrac{x^3}{y^2} = 7 \end{cases}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} xy^2 = 10^{-3} \\ \dfrac{x^3}{y^2} = 10^7 \end{cases}.$$

Од првата равенка добиваме $y^2 = \dfrac{1}{10^3 x}$. Ако ова го замениме во втората равенка од добиениот систем, имаме $x^4 = 10^4$, т.е. $x = \pm 10$.

Бидејќи системот е дефиниран само за $x > 0$, го земаме само решението $x = 10$. Тогаш за $y$ добиваме $y^2 = \dfrac{1}{10^4}$, од каде $y = \pm 10^{-2}$. Допуштени вредности за $y$ се исто така само позитивните реални броеви, па $y = 10^{-2}$.

Според тоа, добиеното решение $(10, 10^{-2})$ припаѓа во дефиниционата област $D$.

Покрај погоре опишаниот начин, дадениот систем може да се реши и на следниов начин: прво системот го трансформираме во еквивалентниот систем:

$$\begin{cases} \lg x + 2\lg y = -3 \\ 3\lg x - 2\lg y = 7 \end{cases},$$

а потоа со собирање на двете равенки од добиениот систем добиваме $4\lg x = 4$, од каде $x = 10$. Со заменување на добиеното решение за $x$ во која било од равенките на системот, се добива $y = 10^{-2}$.

б) Дефинициона област на системот ги содржи оние вредности на $x$ и $y$ за кои важи: $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$.

Ако ја логаритмираме втората равенка од системот добиваме:

$$\log_2 y \cdot \log_2 x = 3.$$

Според тоа, дадениот систем е еквивалентен со системот:

$$\begin{cases} xy = 16 \\ \log_2 y \cdot \log_2 x = 3 \end{cases}.$$

Од првата равенка имаме $x = \dfrac{16}{y}$, па заменувајќи во втората равенка добиваме:

$$\log_2 y \cdot \log_2 \frac{16}{y} = 3 \Longleftrightarrow \log_2 y(\log_2 16 - \log_2 y) = 3.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$\log_2 y(4 - \log_2 y) = 3.$$

Ако воведиме смена $\log_2 y = t$ ја добиваме квадратната равенка $t^2 - 4t + 3 = 0$, чии решенија се $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$. Значи, добиваме $\log_2 y = 1$ и $\log_2 y = 3$, од каде $y_1 = 2$ и $y_2 = 8$. Заменувајќи во равенката $x = \dfrac{16}{y}$ добиваме $x_1 = 8$ и $x_2 = 2$. Добиените решенија $(2, 8)$ и $(8, 2)$ припаѓаат во дефинициона област на системот.

### Задачи за вежбање

**Задача 6.19.** Да се решат експоненцијалните равенки:

а) $49^x + 6 \cdot 7^x + 5 = 0\,;$

б) $10^x + (0,1)^x = 10,1\,;$

в) $4^{x^2-2x} = 2^{x^2-2x+3}\,.$

**Одговор.** а) Нема решение, б) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$,
в) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

**Задача 6.20.** Да се решат експоненцијалните неравенки:

а) $(4^{x-1})^{x+1} < 64\,;$ б) $\dfrac{2}{3^{x+1}+7} \leq \dfrac{1}{3^x+5}\,.$

**Одговор.** а) $x \in (-2, 2)$, б) $x \in [1, +\infty)$.

**Задача 6.21.** Да се решат системите експоненцијални равенки:

а) $\begin{cases} 6^{x+2} = 36 \cdot 12^{y+5} \\ 6^x = 12^{2y-11} \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4^{2x} + 7^{y-4} = 305 \\ 2^{4x+1} + 7^{y-6} = 513 \end{cases}$.

**Одговор.** а) $(21 + 21\log_6 2, 16)$, б) $(2, 6)$.

**Задача 6.22.** Да се реши системот експоненцијални неравенки:

$$\begin{cases} 2^{x+1} > 8 \\ \\ (0,5)^{x-1} > \dfrac{1}{16} \end{cases}.$$

**Одговор.** $x \in (2,5)$.

**Задача 6.23.** Да се пресмета:

а) $\log_{\frac{1}{2}} 28$ ако $\log_7 2 = a$;  б) $\log_{16} 6$ ако $\log_{12} 2 = a$.

**Одговор.** а) $-\dfrac{1+2a}{a}$,  б) $\dfrac{1-a}{4a}$.

**Задача 6.24.** Да се најде $x$ во областа на дефинираност на логаритмите:

а) $\lg x = \dfrac{1}{5}\left(5\lg a + 2\lg b\right)$;

б) $\lg x = 3\left(\lg 4 + \dfrac{1}{3}\lg c - \lg(a-b)\right)$;

в) $\log_3 x = \log_9 a + \dfrac{1}{2}\left(\log_3 b^2 - \log_{27} c^3\right)$.

**Одговор.** а) $x = a\sqrt[5]{b^2}$,  б) $x = \dfrac{4^3 c}{(a-b)^3}$,  в) $x = \dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$.

**Задача 6.25.** Да се докаже дека

$$n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n-\text{корени}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Задача 6.26.** Графички да се определи колку решенија има равенката $\log_{\frac{1}{2}} |x| = x^2$, а потоа да се определат интервалите на кои припаѓаат тие решенија.

**Одговор.** Равенката има две решенија:

$x_1 \in (0, 1)$ и $x_2 \in (-1, 0)$.

**Задача 6.27.** Да се решат логаритамските равенки:

а) $\dfrac{1}{\lg x} = 2 + \lg \dfrac{1}{x}$;

б) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \dfrac{2}{3}$;

в) $\log_2(9^{x-1} - 1) = 2 + \log_2(3^x - 7)$;

г) $\log_x(9x^2) \cdot (\log_3 x)^2 = 4$;

д) $\dfrac{2}{3 - \lg x} - \dfrac{1}{1 + \lg x} = \dfrac{1}{2}$.

**Одговор.** а) $x = 10$, б) $x_1 = 9$, $x_2 = \dfrac{1}{9}$, в) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$,

г) $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{1}{9}$, д) $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-5}$.

**Задача 6.28.** Да се решат логаритамските неравенки:

а) $\log_{0,2}(2x^2 - 5x) < \log_{0,2}(x^2 - 4x + 2)$; б) $\log_4 \dfrac{x-4}{x+4} > 0$.

**Одговор.** а) $x \in (-\infty, -1) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$, б) $x \in (-\infty, -4)$.

**Задача 6.29.** Да се реши системот логаритамски равенки:

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x}{y} = 2 \\ \\ (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = 10 \end{cases}.$$

**Упатство.** Воведи нови променливи $a$ и $b$ на следниов начин: $\log_2 x = a,\ \log_2 y = b$.

**Одговор.** $(8, 2),\ \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}\right)$.

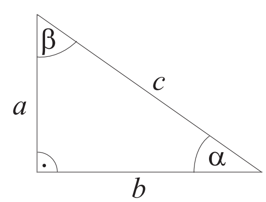
# 7 Тригонометрија

## Тригонометриски функции од остар агол

Да разгледаме два правоаголни слични триаголника $ABC$ и $A'B'C'$ со страни $a$, $b$, $c$ и $a'$, $b'$, $c'$, соодветно. Важат следниве равенства за односите помеѓу нивните страни:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}\,,\ \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}\,,\ \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}.$$

Ова покажува дека дадените односи не зависат од страните на слични правоаголни триаголници и можат да се доведат во врска со аглите на триаголниците. Затоа, за остриот агол $\alpha$ на триаголникот од сликата 7.1 може да се дефинираат следниве функции:




Слика 7.1.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,,\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,,\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Овие четири функции се викаат: *синус, косинус, тангенс* и *котангенс*, соодветно, или со заедничко име *тригонометриски функции* од остар агол. Од дефиницијата на овие функции и Питагоровата теорема се добиваат основните тригонометриски идентитети:

1) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

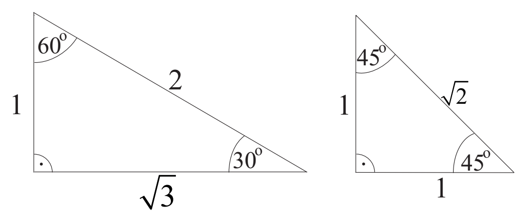
4) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

За аголот $\beta$ од триаголникот на сликата 7.1, аналогно се добива:

$$\sin\beta = \frac{b}{c},\ \cos\beta = \frac{a}{c},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}\,.$$

Споредувајќи ги овие резултати со оние за аголот $\alpha$ го имаме следното својство: Ако $\alpha$ и $\beta$ се два комплементни агли ($\alpha + \beta = 90^\circ$) тогаш важи:

$$\sin\alpha = \cos\beta\,,\quad \cos\alpha = \sin\beta\,,\quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta\,,\quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\,. \tag{7.1}$$




**Слика 7.2.**

Вредностите на тригонометриските функции за аглите 30°, 45° и 60° може да се определат преку карактеристичните триаголници прикажани на сликата 7.2. Овие вредности се дадени во табелата 7.1.

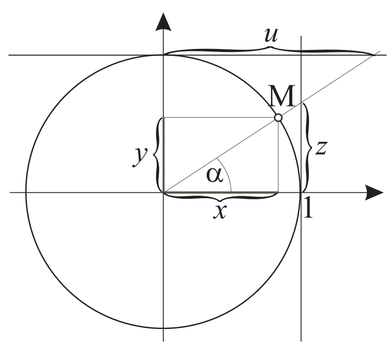
| Функција \ $\alpha$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**Табела 7.1.**

### Тригонометриски функции од произволен агол

Тригонометриските функции од произволен агол $\alpha$ се дефинираат преку *тригонометриска кружница*, односно кружница со центар во координатниот почеток и радиус 1.

Со произволно избрана точка $M$ на кружницата може да определиме агол $\alpha$ чии краци се позитивниот дел од $x$ оската и полуправата определена со координатниот почеток и точката $M$ (слика 7.3).




**Слика 7.3.**

На тој начин се воспоставува кореспонденција меѓу точките на кружницата и аглите $\alpha$. Ако $\alpha$ се менува од $0^\circ$ до

$360^\circ$, тогаш оваа кореспонденција е биекција.

Тригонометриските функции од произволен агол $\alpha$ ги дефинираме на следниов начин:

$$\cos\alpha = x\,, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = z,$$

$$\sin\alpha = y\,, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = u,$$

каде што $x$ и $y$ се апсцисата и ординатата на точката $M$, соодветно, а $z$ и $u$ се отсечоците на тангентите на кружницата во точките $(1,0)$ и $(0,1)$ што ги прави кракот $OM$, соодветно (слика 7.3).

При тоа, јасно е дека $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ се дефинирани за секој агол $0^\circ \le \alpha < 360^\circ$; функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ е дефинирана за секој $x \neq 0$ односно за $\alpha \neq 90^\circ$ и $\alpha \neq 270^\circ$; а функцијата $\operatorname{ctg}\alpha$ е дефинирана за секој $y \neq 0$ односно за $\alpha \neq 180^\circ$ и $\alpha \neq 360^\circ$.

| Функција \ $\alpha$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ | 0 |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $+\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

**Табела 7.2.**

Покрај степенот, како мерна единица за големина на агол, се користи и *радијан* (се означува со $rad$). Радијан е големината на централниот агол во кружница чиј кружен лак има должина еднаква со радиусот на кружницата. Според ова, големината на полн агол е $2\pi\, rad$ бидејќи $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Значи, ако $\alpha$ е големина на агол во степени, тогаш неговата големина во радијани е $\frac{\pi\alpha}{180}$. Ако пак, $\beta$ е големина на агол во радијани, тогаш неговата големина во степени е $\frac{180\beta}{\pi}$.

Во табелата 7.2. се дадени вредностите на тригонометриските функции од некои карактеристични агли изразени во степени и во радијани.

**Знак на тригонометриските функции**

Од тригонометриската кружница можат да се определат и знаците на тригонометриските функции:

1) За $\alpha \in [0, \pi]$, $\sin\alpha \geq 0$, а за $\alpha \in [\pi, 2\pi]$, $\sin\alpha \leq 0$.

2) За $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $\cos\alpha \geq 0$, а за $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha \leq 0$.

3) За $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\operatorname{tg}\alpha \geq 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha \geq 0$.

4) За $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $\operatorname{tg}\alpha \leq 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha \leq 0$.

### Некои поважни формули од тригонометрија

Нека $\alpha$ е остар агол. Важат следниве формули:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha\,; \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha\,;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\,; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha\,;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha\,; \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha\,;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha\,; \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha\,;$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\,; \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\,;$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\,; \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\,;$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha\,; \qquad \operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\,;$$

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha\,; \qquad \operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha\,;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha\,; \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha\,;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha\,; \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha\,;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha\,; \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha\,;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha\,; \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha\,;$$

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha\,; \qquad \sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha\,;$$

$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha\,; \qquad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha\,;$$

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha\,; \qquad \operatorname{tg}(2\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\,;$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha\,; \qquad \operatorname{ctg}(2\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Нека $\alpha$ и $\beta$ се произволни агли. Покрај досега спомнатите формули, важат и следниве формули:

- Тригонометриски функции од збир и разлика на два агли:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp 1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}.$$

- Тригонометриски функции од двоен и половина агол:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha; \qquad 2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha.$$

- Производ од тригонометриски функции:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right].$$

- Разлика и збир на тригонометриски функции:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha \pm \mathrm{tg}\ \beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

## Својства и графици на тригонометриските функции

1) $y = \sin x$

Дефинициона област е $D_f = \mathbb{R}$;
Множество вредности е $V_f = [-1, 1]$ бидејќи важи

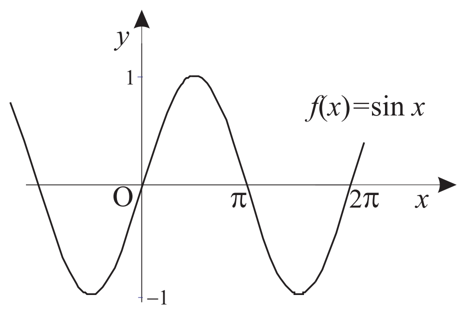
$$-1 \leq \sin x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R};$$

Функцијата е непарна бидејќи важи

$$\sin(-x) = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R};$$

Функцијата е периодична со основен период $T = 2\pi$, односно важи

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z};$$



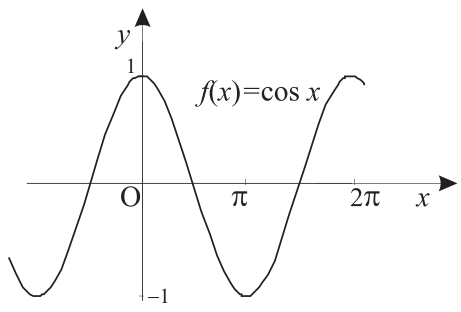

**Слика 7.4.**

Функцијата расте на интервалите $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, а опаѓа на интервалите $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;
Функцијата има максимум 1 во точките $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а

минимум $-1$ во точките $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
Нули на функцијата се точките $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Графикот на функцијата $y = \sin x$ е даден на сликата 7.4.

2) $y = \cos x$




**Слика 7.5.**

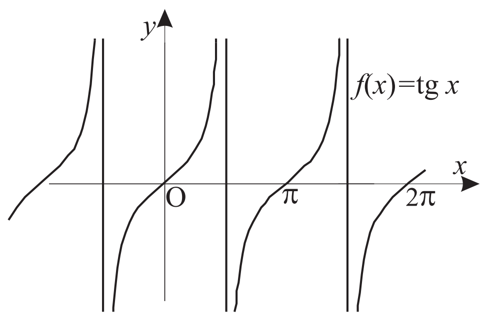
Дефинициона област $D_f = \mathbb{R}$;
Множество вредности $V_f = [-1, 1]$ $(-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R})$;
Парна функција $(\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R})$;
Периодична со основен период $T = 2\pi$, т.е. важи

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z};$$

Расте на интервалите $[-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}$, а опаѓа на интервалите $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}$;
Има максимум 1 во точките $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ и минимум $-1$ во точките $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
Нули се точките $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Графикот на функцијата $y = \cos x$ е даден на сликата 7.5.

3) $y = \operatorname{tg} x$




**Слика 7.6.**

Дефинициона област $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
Множество вредности $V_f = \mathbb{R}$;
Непарна функција $(\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\, \forall x \in D_f)$;
Периодична со основен период $T = \pi$, односно важи

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x,\, \forall x \in D_f,\, k \in \mathbb{Z};$$

Растечка функција на целата дефинициона област;
Нули на функцијата се точките $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
Има бесконечно многу вертикални асимптоти, тоа се правите $x = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Графикот на функцијата $y = \operatorname{tg} x$ е даден на сликата 7.6.

4) $y = \operatorname{ctg} x$

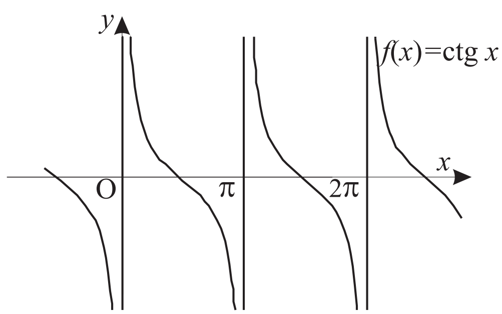
Дефинициона област $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$;
Множество вредности $V_f = \mathbb{R}$;

Непарна функција ($\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, $\forall x \in D_f$);
Периодична со основен период $T = \pi$, т.е. важи

$$\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x,\ \forall x \in D_f,\ k \in \mathbb{Z};$$

Опаѓачка функција на целата дефинициона област;
Нули на функцијата се точките $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$;
Има бесконечно многу вертикални асимптоти, тоа се правите $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Графикот на функцијата $y = \operatorname{ctg} x$ е даден на сликата 7.7.




**Слика 7.7.**

**Задача 7.1.** Да се пресмета вредноста на изразот

$$A = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 6 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha - 5 \cos \alpha},$$

ако $\sin \alpha = \dfrac{12}{13}$, а $\alpha$ е остар агол.

**Решение.** Бидејќи $\alpha$ е остар агол, сите тригонометриски функции од $\alpha$ се позитивни. Применувајќи ги основните тригонометриски идентитети добиваме:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \frac{5}{13},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{12}.$$

Тогаш $A = \dfrac{\frac{12}{5} - 6\cdot\frac{5}{12}}{\frac{12}{13} - 5\cdot\frac{5}{13}} = \dfrac{\frac{24-25}{10}}{\frac{12-25}{13}} = \dfrac{1}{10}.$

**Забелешка**. Во формулите:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

и

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

знакот го избираме според тоа во кој квадрант припаѓа аголот $\alpha$.

**Задача 7.2.** Да се определат $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, а потоа да се пресмета вредноста на изразот

$$B = \frac{2\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha},$$

ако $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{3}$, каде $\alpha$ е агол од третиот квадрант.

**Решение.** Бидејќи $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{3}$ имаме $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{9}$. Тогаш, $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{9}$, а оттука $9 - 9\sin^2\alpha = \sin^2\alpha$, или $\sin^2\alpha = \dfrac{9}{10}$. Значи, $\sin\alpha = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Бидејќи $\alpha$ е агол од третиот квадрант добиваме:

$$\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \text{ а } \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Користејќи ги овие вредности за $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ имаме:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{10} - \frac{9}{10} = -\frac{4}{5}.$$

Тогаш,

$$B = \frac{2\frac{3}{5} - 3\left(-\frac{4}{5}\right)}{4\frac{3}{5} + 5\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{\frac{6}{5} + \frac{12}{5}}{\frac{12}{5} - \frac{20}{5}} = -\frac{9}{4}.$$

**Задача 7.3.** Да се изведат формулите за синус и косинус од двоен агол.

**Решение.** Од формулата за синус од збир на два агли имаме:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Значи,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Слично, за $\cos 2\alpha$ добиваме:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

односно

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

**Задача 7.4.** Да се изведат формулите за синус и косинус од половина агол.

**Решение.** Од $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ следува

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Значи, $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.
Од друга страна,

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

од каде следува

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

т.е.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

**Забелешка**. При користење на формулите:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

знакот го избираме според тоа во кој квадрант припаѓа аголот $\alpha$.

**Задача 7.5.** Да се изведат формулите за трансформација на производ во збир и разлика од тригонометриски функции.

**Решение.** Познати се равенствата:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{7.2}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \tag{7.3}$$

Ако се соберат равенствата (7.2) и (7.3) се добива:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

односно

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)).$$

Познати се и следниве равенства:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{7.4}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \tag{7.5}$$

Ако се соберат равенствата (7.4) и (7.5) се добива:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

односно

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

Ако пак, се одземат равенствата (7.4) и (7.5) имаме:

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta,$$

односно

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)).$$

**Задача 7.6.** Да се пресмета:

а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$; б) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;

ако $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=-\frac{7}{25}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

**Решение.** Аголот $\alpha$ е од првиот квадрант, а аголот $\beta$ е од третиот квадрант. Тогаш,

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{5}, \qquad \cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\frac{24}{25}.$$

а) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)\cdot\frac{4}{5} = -\frac{56}{125}.$

б) $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) = -\frac{192}{125}.$

**Задача 7.7.** Да се пресмета $\sin 2\alpha$ ако

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0, \qquad \alpha \in \left(\pi\,,\ \frac{5\pi}{4}\right).$$

**Решение.** Ако воведиме замена $\operatorname{tg}\alpha = x$, ја добиваме квадратната равенка $2x^2 - 7x + 3 = 0$ чии решенија се $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{1}{2}$. Решението $x_1$ го отфрламе бидејќи $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$, па од тоа што $\operatorname{tg}\alpha$ е растечка функција следува $0 = \operatorname{tg}\pi < \operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Според тоа, $\operatorname{tg}\alpha = x_2 = \frac{1}{2}$, односно

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Оттука,

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{4} \implies 4 - 4\cos^2\alpha = \cos^2\alpha \implies \cos^2\alpha = \frac{4}{5}.$$

Бидејќи $\alpha \in \left(\pi\,,\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, а $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, па

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

**Задача 7.8.** Да се докажат идентитетите:

а) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$;

б) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

в) $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} = \dfrac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

**Решение.**

а) $$\begin{aligned}\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha &= \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \\ &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.\end{aligned}$$

б) $$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{0}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha} = 0.$$

в) $$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} - \frac{\sin\alpha + 1}{\cos\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)} = 0.$$

**Задача 7.9.** Да се покаже дека во областа на дефинираност на дадениот израз важи неравенството:

$$\frac{\sin x + \mathrm{tg} x}{\cos x + \mathrm{ctg}\, x} \geq 0.$$

**Решение.**

$$\frac{\sin x + \mathrm{tg}\, x}{\cos x + \mathrm{ctg}\, x} = \frac{\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\dfrac{\sin x(\cos x + 1)}{\cos x}}{\dfrac{\cos x(\sin x + 1)}{\sin x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x + 1}{\sin x + 1}.$$

Последниов израз е поголем или еднаков од 0 во областа на дефинираност, бидејќи $\sin^2 x \geq 0$, $\cos^2 x > 0$, $\cos x \geq -1$ и $\sin x > -1$.

**Задача 7.10.** Да се решат тригонометриските равенки:

а) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$; б) $\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$;

в) $\sin x = \sin 2x$; г) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$;

д) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$; ѓ) $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$.

**Решение.** Множеството допуштени вредности $D$ за променливата $x$ во сите дадени равенки е $\mathbb{R}$.
а) Воведуваме замена $\sin x = y$ и добиваме квадратна равенка $2y^2 + 3y + 1 = 0$ чии решенија се $y_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $y_2 = -1$. Од првото решение добиваме:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\; x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z},$$

а од второто:

$$\sin x = -1 \;\Rightarrow\; x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}.$$

б) Ја трансформираме равенката користејќи го основниот тригонометриски идентитет, т.е. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и добиваме:

$$\sqrt{2}(1 - \cos^2 x) + \cos x = 0,$$

или

$$-\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x + \sqrt{2} = 0.$$

Воведувајќи замена $\cos x = y$ добиваме квадратна равенка $-\sqrt{2}y^2 + y + \sqrt{2} = 0$ чии корени се $y_{1/2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2\sqrt{2}} = \dfrac{-1 \pm 3}{-2\sqrt{2}}$.
Од првото решение добиваме:

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\; x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z}.$$

За второто решение важи $y_2 = \dfrac{2}{\sqrt{2}} > 1$, па тоа не може да биде вредност за $\cos x$ за ниту еден реален број $x$.

в) Користејќи ја формулата за синус од двоен агол, ја трансформираме дадената равенка во облик

$$\sin x = 2\sin x\cos x,$$

или

$$\sin x(1 - 2\cos x) = 0.$$

Оваа равенка се сведува на две други равенки, $\sin x = 0$ и $1 - 2\cos x = 0$. Од првата равенка добиваме множество решенија

$$x_1 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

а од втората

$$x_{2/3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

г) Користејќи ја формулата за синус од двоен агол и квадрирајќи го изразот на десната страна, равенката ја трансформираме во облик

$$2\sin x\cos x = \cos^2 x - 2\cos x\sin x + \sin^2 x.$$

Средувајќи ја оваа равенка и применувајќи го основниот тригонометриски идентитет $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ добиваме:

$$4\sin x\cos x = 1,$$

односно

$$\sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Решенијата на ова равенка се:

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{т.е.} \quad x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{т.е.} \quad x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

д) Ги делиме двете страни од равенката со 2 и добиваме:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1.$$

Ова равенка може да се претстави во облик

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = 1,$$

или

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Решенијата на последнава равенка се

$$\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

односно

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}.$$

ѓ) Левата страна од равенката ја трансформираме во облик

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0.$$

Користејќи го основниот тригонометриски идентитет добиваме $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$, односно

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0.$$

Добиеното равенство ќе има вредност 0 ако $\cos x + \sin x = 0$ или

$\cos x - \sin x = 0$. Тогаш имаме:

$$\cos x + \sin x = 0 \ / \quad \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \cos x - \sin x = 0 \ / \quad \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0 \qquad\qquad \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$$

$$\iff \cos x \sin\frac{\pi}{4} + \sin x \cos\frac{\pi}{4} = 0 \qquad\qquad \iff \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = 0$$

$$\iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad\qquad \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\iff x + \frac{\pi}{4} = k\pi, \qquad\qquad \iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

т.е. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$, т.е. $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

**Забелешка.** Решението на задачата под ѓ) може да се добие и со користење на равенството $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Тогаш, равенката се сведува на равенката $\cos 2x = 0$ која има решение $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, односно $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

**Задача 7.11.** Да се решат тригонометриските равенки:

а) $\cos x + \sin x = 1$; б) $\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

**Решение.** Множеството допуштени вредности $D$ за променливата $x$ во дадените равенки е $\mathbb{R}$.

а) Еден начин за решавање на дадената равенка е со нејзино трансформирање, на следниов начин:

$$\cos x + \sin x = 1 \ / \quad : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \cos x \sin\frac{\pi}{4} + \sin x \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Од последната равенка добиваме:

$$x_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{и} \quad x_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

од каде $x_1 = 2k\pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{(4k+1)\pi}{2}$ , $k \in \mathbb{Z}$.

Друг начин е да ја квадрираме равенката, со што ќе се добие равенката

$$2\sin x \cos x = 0, \text{ т.е. } \sin 2x = 0, \tag{7.6}$$

чии решенија се $2x = k\pi$, т.е. $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Забележуваме дека множеството решенија на последната равенка (7.6) е

$$\left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

и тоа ги содржи и вредностите од облик $\frac{(4n+2)\pi}{2}$ и $\frac{(4n+3)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ кои не се решенија на почетната равенка. На пример, $x = \pi$ и $x = \frac{3\pi}{2}$ не се решенија на почетната равенка, а се содржани во множеството решенија на равенката (7.6).

Добивањето на дополнителни решенија со квадрирање на почетната тригонометриска равенка е поради фактот што со квадрирање се добива равенката $(\cos x + \sin x)^2 = 1$. Од оваа равенка се добиваат две равенки: $\cos x + \sin x = 1$ (почетната равенка) и $\cos x + \sin x = -1$. Затоа, добиеното множество решенија освен решенијата на почетната равенка ги содржи и решенијата на равенката $\cos x + \sin x = -1$, т.е. решенијата од облик $x_1 = \dfrac{(4n+2)\pi}{2}$ и $x_2 = \dfrac{(4n+3)\pi}{2}$.

б) Дадената равенка $\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ е еквивалентна на равенката

$$\cos x(\sin x + \cos x) = 0.$$

Од последната равенка се добиваат равенките: $\cos x = 0$ и $\sin x + \cos x = 0$. Решение на равенката $\cos x = 0$ е $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а решението на равенката $\sin x + \cos x = 0$ е $x_2 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (види го решението на задачата 7.10-ѓ).

Ако пак, дадената равенка прво се подели со $\cos x$, тогаш ќе се добие само равенката $\sin x + \cos x = 0$, т.е. само решението $x_2 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Со тоа ќе се изгуби решението $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ на почетната равенка.

**Забелешка.** Од последната задача заклучуваме дека, ако при решавање равенка истата се квадрира, тогаш добиената равенка најчесто не е еквивалентна со почетната. Поточно, добиеното множество решенија може да содржи решение кое не е решение на почетната равенка.

Ако пак, една равенка се подели со некоја функција, тогаш повторно добиената равенка може да не е еквивалентна со почетната, поточно добиеното множество решенија да не содржи некое решение на почетната равенка.

Затоа при решавање на равенките треба да се води сметка да не се „додадат" или пак, „изгубат" некои решенија. Оваа забелешка важи и при решавање други видови равенки.

**Задача 7.12.** Да се решат следниве тригонометриски неравенки:

а) $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $|\sin 2x| \le \dfrac{1}{2}$;

в) $\mathrm{tg} x < \sqrt{3}$; г) $\cos x - 1 > 0$;

д) $(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3})^x + 3(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{6})^x < 4$.

**Решение.** Во сите дадени неравенки множеството допуштени вредности $D$ за променливата $x$ е $\mathbb{R}$.

а) Поради вредностите на $\cos x$ дадената неравенка има решение

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) Дадената неравенка е еквивалентна со $-\dfrac{1}{2} \le \sin 2x \le \dfrac{1}{2}$, односно со $-\dfrac{\pi}{6} + k\pi \le 2x \le \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. Според тоа,

$$-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

в) Дадената неравенка има решение $-\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

г) Равенката нема решение, бидејќи $\cos x \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

д) Дадената неравенка ја трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3})^x + 3(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6})^x < 4 \\
\iff\ & (\sqrt{3})^x + 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x < 4\ /\cdot(\sqrt{3})^x \ne 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\
\iff\ & (\sqrt{3})^{2x} + 3 < 4(\sqrt{3})^x \\
\iff\ & (\sqrt{3})^{2x} - 4(\sqrt{3})^x + 3 < 0.
\end{aligned}$$

Ако ставиме смена $y = (\sqrt{3})^x$ ја добиваме квадратната неравенка $y^2 - 4y + 3 < 0$ чие решение е интервалот $(1, 3)$, т.е. $1 < y < 3$. Ако се вратиме на почетната смена добиваме $1 < (\sqrt{3})^x < 3$, од каде $3^0 < 3^{\frac{x}{2}} < 3^1$. Значи решение на почетната неравенка е интервалот $(0, 2)$.

**Задача 7.13.** Нека $f(x)$ е периодична функција со период $T$, т.е. постои реален број $T \neq 0$ така што за секое $x \in D_f$ важи $x + T \in D_f$ и $f(x + T) = f(x)$. Да се докаже дека:
а) $f(x - T) = f(x)$;

б) $f(x + kT) = f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$;

в) Функцијата $g(x) = af(x) + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, е периодична функција со период $T$.
г) Функцијата $r(x) = kf(ax + b) + n$, $a, b, k, n \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $k \neq 0$, е периодична со период $\dfrac{T}{|a|}$.

**Решение.** а) Од тоа што $f$ е периодична функција со период $T$ следува

$$f(x - T) = f((x - T) + T) = f(x - T + T) = f(x).$$

б) Ако се примени $k$ пати периодичноста на функцијата $f(x)$ се добива:

$$\begin{aligned}
f(x + kT) &= f(x + \underbrace{T + T + \cdots + T}_{k}) = \\
&= f(x + \underbrace{T + T + \cdots + T}_{k-1}) = \\
&\ \ \vdots \\
&= f(x + T + T) = \\
&= f(x + T) = \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

в) $g(x+T) = af(x+T) + b = af(x) + b = g(x)$.

г) Нека $a > 0$. Тогаш $|a| = a$.

$$\begin{aligned} r\left(x + \frac{T}{|a|}\right) &= kf\left(a\big(x + \frac{T}{a}\big) + b\right) + n = \\ &= kf(ax + b + T) + n = \\ &= kf(ax + b) + n = r(x). \end{aligned}$$

Ако пак, $a < 0$, тогаш $|a| = -a$. Од покажаното под а) имаме:

$$\begin{aligned} r\left(x + \frac{T}{|a|}\right) &= kf\left(a\big(x + \frac{T}{-a}\big) + b\right) + n = \\ &= kf(ax + b - T) + n = r(x). \end{aligned}$$

**Забелешка:** Нека $a, b, k, n \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $k \neq 0$. Од претходната задача под г) следува дека функциите

$$y = k\sin(ax + b) + n \ \text{ и } \ y = k\cos(ax + b) + n$$

се периодични функции со основен период $\dfrac{2\pi}{|a|}$, а периодичните функции

$$y = k\operatorname{tg}(ax + b) + n \ \text{ и } \ y = k\operatorname{ctg}(ax + b) + n$$

имаат основен период $\dfrac{\pi}{|a|}$.

**Задача 7.14.** Нека $f_1$ е периодична функција со период $T_1$, $f_2$ е периодична функција со период $T_2$ и $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$. Тогаш $f_1 \pm f_2$ е периодична функција со период $T$, каде што $T =$НЗС$(T_1, T_2)$.

**Решение.** Нека се исполнети условите на задачата. Познато е дака ако $T=$НЗС$(T_1,T_2)$ тогаш постојат цели броеви $k$ и $m$, т.ш. $T=kT_1=mT_2$.

Нека $F(x)=f_1(x)\pm f_2(x)$. Ќе покажеме дека $F$ е периодична функција со период $T$. Од задача 7.13-б имаме:

$$\begin{aligned} F(x+T) &= f_1(x+T)\pm f_2(x+T)=f_1(x+kT_1)\pm f_2(x+mT_2)= \\ &= f_1(x)\pm f_2(x)=F(x). \end{aligned}$$

**Задача 7.15.** Да се испита периодичност на дадените функции и во потврден случај да се определи нивниот основен период:

а) $y=\cos\dfrac{3x}{2}$; б) $y=2\sin\dfrac{x}{3}+1$; в) $y=\operatorname{tg}\left(-2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

г) $y=\sin\dfrac{x}{\sqrt{3}}$; д) $y=\sin^2 x$; ѓ) $y=\cos\dfrac{3x}{2}+\sin\dfrac{x}{3}$;

е) $y=\sin^2 3x-\cos 4x$; ж) $y=\operatorname{tg}3x+\operatorname{ctg}2x$.

**Решение.** а) Ќе ја испитаме периодичноста на дадената функција користејќи ја дефиницијата за периодична функција: $f(x)$ е периодична функција ако постои реален број $T\neq 0$, т.ш. $\forall x\in D_f$ важи $x+T\in D_f$ и $f(x+T)=f(x)$.

Нека $\forall x\in D_f=\mathbb{R}$ важи

$$f(x+T)-f(x)=\cos\frac{3}{2}(x+T)-\cos\frac{3x}{2}=0.$$

Понатаму, со еквивалентни трансформации добиваме:

$$-2\sin\frac{\frac{3x}{2}+\frac{3T}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{3x}{2}+\frac{3T}{2}-\frac{3x}{2}}{2}=0,$$

односно

$$\sin\left(\frac{3x}{2}+\frac{3T}{4}\right)\sin\frac{3T}{4}=0.$$

Бидејќи последната равенка важи за секој $x \in \mathbb{R}$ следува дека $\sin\frac{3T}{4} = 0$, т.е. $\frac{3T}{4} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Покажавме дека постои реален број $T = \frac{4k\pi}{3}$ за кој важи $f(x+T) = f(x)$. Според тоа, дадената функција е периодична со основен период $T = \frac{4\pi}{3}$.

Резултатот директно следува од забелешката на задачата 7.13, од каде добиваме дека дадената функција е периодична со основен период $T = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$.

Од истата забелешка заклучуваме дека функциите под б), в), г) и д) се периодични со следниве основни периоди.

б) $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

в) $T = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$.

г) $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}\pi$.

д) За дадената функција важи

$$y = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

од каде се добива дека нејзиниот основен период е $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

ѓ) Функцијата $y_1 = \cos\frac{3x}{2}$ е периодична со основен период $T_1 = \frac{4\pi}{3}$, а основен период на периодичната функција $y_2 = \sin\frac{x}{3}$ е $T_2 = 6\pi$. Бидејќи важи $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{9} \in \mathbb{Q}$ можеме да ја искористиме задачата 7.14 од која заклучуваме дека дадената функција е периодична со период

$$T = \text{НЗС}(T_1\,, T_2) = \text{НЗС}\left(\frac{4\pi}{3}\,, 6\pi\right).$$

За да го најдеме најмалиот заеднички содржател на $\frac{4\pi}{3}$ и $6\pi$, дропките $\frac{4\pi}{3}$ и $6\pi$ ги запишуваме со исти именител.

$$\begin{aligned} T &= \text{НЗС}\left(\frac{4\pi}{3}\,, 6\pi\right) = \text{НЗС}\left(\frac{4\pi}{3}\,, \frac{18\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{\pi}{3}\cdot \text{НЗС}(4, 18) = \frac{\pi}{3}\cdot 36 = 12\pi. \end{aligned}$$

е) $y = \sin^2 3x - \cos 4x = \dfrac{1-\cos 6x}{2} - \cos 4x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 6x - \cos 4x.$

Основен период на функцијата $y_1 = \cos 6x$ е $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, а на функцијата $y_2 = \cos 4x$ е $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Користејќи ја задачата 7.14 заклучуваме дека дадената функција е периодична со основен период

$$T = \text{НЗС}\left(\frac{\pi}{3}\,, \frac{\pi}{2}\right) = \text{НЗС}\left(\frac{2\pi}{6}\,, \frac{3\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}\cdot \text{НЗС}(2, 3) = \frac{\pi}{6}\cdot 6 = \pi.$$

ж) Основен период на функцијата $y_1 = \operatorname{tg} 3x$ е $T_1 = \frac{\pi}{3}$, а на функцијата $y_2 = \operatorname{ctg} 2x$ е $T_2 = \frac{\pi}{2}$. За основниот период на функцијата $y = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 2x$ имаме:

$$T = \text{НЗС}\left(\frac{\pi}{3}\,, \frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

## Задачи за вежбање

**Задача 7.16.** Дали е точно равенството

$$\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\,?$$

**Одговор.** Не.

**Задача 7.17.** Да се пресмета:

а) $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; б) $10\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{3}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}45^\circ}{2\cos^2 30^\circ - 1}$; г) $\dfrac{4\sin^2 45^\circ + 1}{\operatorname{ctg}30^\circ}$.

**Одговор.** а) $-2\sqrt{3}$, б) 6, в) 2, г) $\sqrt{3}$.

**Задача 7.18.** Да се пресметаат вредностите на останатите тригонометриски функции ако $\cos\alpha = 0,55$ и $\alpha$ е остар агол.

**Одговор.** $\sin\alpha \approx 0,835$, $\operatorname{ctg}\alpha \approx 0,659$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 1,518$.

**Задача 7.19.** Нека $\sin\alpha = 24/25$, каде што $\alpha$ е остар агол. Да се пресмета вредноста на изразот

$$A = \frac{5\sin\alpha - 10\cos\alpha}{7\operatorname{tg}\alpha - 12\operatorname{ctg}\alpha}.$$

**Одговор.** $A = \dfrac{4}{41}$.

**Задача 7.20.** Нека $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\alpha \in (\dfrac{\pi}{2}, \pi)$. Да се пресмета вредноста на изразот

$$B = \frac{\sin\alpha - 5\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - 6\operatorname{tg}\alpha}.$$

**Одговор.** $B = 50$.

**Задача 7.21.** Ако $\operatorname{tg}\alpha = 1/7$ и $\operatorname{ctg}\beta = 3$ да се пресмета вредноста на изразот $C = \cos 2\alpha \sin 2\beta$.

**Одговор.** $C = \dfrac{72}{125}$.

**Задача 7.22.** Да се изведат формулите:

а) $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$; б) $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$;

в) $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$; г) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

**Упатство.** Релациите може да се согледаат директно од тригонометриската кружница или пак да се искористат формулите за тригонометриски функции од збир и разлика на два агли. Така на пример,
а) $\sin(\alpha + \pi) = \sin\alpha\cos\pi + \cos\alpha\sin\pi = \sin\alpha\cdot(-1) + \cos\alpha\cdot 0 = -\sin\alpha$.

**Задача 7.23.** Во областа на допуштени вредности за $\alpha$, да се докажат идентитетите:

а) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)} - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)} = \sin\alpha - \cos\alpha$;

в) $\dfrac{\sin(\alpha+\pi)\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}+\dfrac{\cos(\alpha+\pi)\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)}{\sin(\alpha+\pi)}=\dfrac{4}{\sin^2 2\alpha}-2\,.$

**Задача 7.24.** Да се решат следниве тригонометриски равенки:

а) $\cos\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0;$ б) $\cos^2 x+\cos x=0;$

в) $\sin^2 x+\cos x-1=0;$ г) $\cos 2x=0,75-\sin^2 x;$

д) $4\sin^4 x-5\sin^2 x+1=0;$ ѓ) $\sin x+\cos\dfrac{x}{2}=0;$

е) $\dfrac{2}{\cos x}-\cos x=\dfrac{5}{2}\operatorname{tg} x.$

**Одговор.** а) $x=\left(3k+\dfrac{9}{4}\right)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z},$

б) $x_1=(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ x_2=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

в) $x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x_2=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

г) $x_1=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ x_2=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\quad x_3=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x_4=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

д) $x_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ x_2=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\quad x_3=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ x_4=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,$

$x_5=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi,\ x_6=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

ѓ) $x_1=\pi+2k\pi,\ x_2=\dfrac{7\pi}{3}+4k\pi,\quad x_3=-\dfrac{\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

е) $x_1=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

**Задача 7.25.** Нека $\operatorname{tg}\alpha=3^x$ и $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{3^{-x}}{\sqrt{3}}$. Да се определат $x$, $\alpha$ и $\beta$ ако:

а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2+\sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=2-\sqrt{3}$.

**Упатство.** а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, б) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

**Одговор.** а) $x_1=0,\ \alpha_1=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \beta_1=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,$

$x_2=-\dfrac{1}{2},\ \alpha_2=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ \beta_2=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$

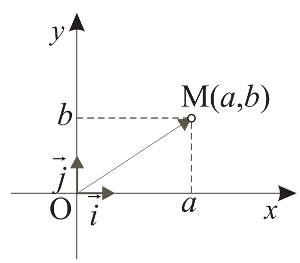
б) $x=0,\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ \beta=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

# 8 Аналитичка геометрија во рамнина

## 8.1 Декартов правоаголен координатен систем

*Декартовиот правоаголен координатен систем* во рамнина се состои од две меѓусебе нормални оски, означени со $x$ и $y$, со заеднички почеток $O$. Овој координатен систем ќе го означуваме со $xOy$. Заедничкиот почеток $O$ се вика *координатен почеток*, $x$-оската се вика *апцисна оска*, а $y$-оската е *ординатна оска*. Координатните оски ја делат рамнината на четири дела кои се викаат *квадранти*.

Положбата на една точка $M$ во рамнината во однос на правоаголен координатен систем $xOy$ може да се одреди со векторот $\overrightarrow{OM}$, каде што $O$ е координатниот почеток. Векторот $\overrightarrow{OM}$ се вика *радиус вектор* на точката $M$ или *вектор на положбата* на точката $M$ (слика 8.1).




**Слика 8.1.**

Векторот $\overrightarrow{OM}$ може да се запише како

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j},$$

каде што $a$ и $b$ се проекциите на радиус векторот $\overrightarrow{OM}$ врз

$x$-оската и $y$-оската, соодветно, а $\vec{i}$ и $\vec{j}$ се единечните вектори (ортови) на $x$-оската и $y$-оската, соодветно. Велиме дека векторот $\overrightarrow{OM}$ е разложен по единечните вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ во правоаголниот координатен систем $xOy$. Притоа, $a$ и $b$ се викаат *правоаголни координати* на радиус векторот $\overrightarrow{OM}$ и на точката $M$. Означуваме $\overrightarrow{OM} = \{a, b\}$ и $M(a, b)$. Координатата $a$ се вика *апсциса*, а $b$ се вика *ордината* на точката $M$.

*Должината* (*интензитетот*) на векторот $\overrightarrow{OM} = \{a, b\}$ се пресметува со

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Координатите на векторот $\overrightarrow{AB}$ чиј почеток е во точката $A(x_1, y_1)$, а крај во точката $B(x_2, y_2)$ се:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}.$$

Нека се дадени векторите $\vec{a} = \{a_1,\, a_2\}$ и $\vec{b} = \{b_1,\, b_2\}$. За операциите собирање на вектори, одземање на вектори и множење на вектор со скалар, како и за еднаквоста на вектори важи:

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1, a_2\} \pm \{b_1, b_2\} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2\};\\
&k \cdot \vec{a} = \{ka_1, ka_2\},\ \ k \in \mathbb{R};\\
&\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1,\, a_2 = b_2.
\end{aligned}$$

Растојанието $d$ меѓу точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ се определува со формулата

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координатите на точката $M(x,\, y)$ којашто ја дели отсечката $AB$ $[A(x_1, y_1);\, B(x_2, y_2)]$ во даден однос $\lambda \neq -1$, т.е. $\overline{AM} : \overline{MB} = \lambda$, се определуваат на следниот начин:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Специјално, ако точката $M(x,y)$ е средина на отсечката $AB$, тогаш $\lambda = 1$, па нејзините координати се определуваат со

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Плоштината на триаголникот $ABC$ со темиња $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се определува со формулата

$$P = \frac{1}{2}\,|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

**Задача 8.1.** Да се определи во кој квадрант може да се наоѓа точката $M(x,y)$ ако за нејзините координати важи:

| | |
|---|---|
| а) $xy > 0$; | б) $xy < 0$; |
| в) $x - y = 0$; | г) $x + y = 0$; |
| д) $x + y > 0$; | ѓ) $x + y < 0$; |
| е) $x - y > 0$; | ж) $x - y < 0$. |

**Решение.** а) $xy > 0 \Leftrightarrow \Big(x > 0, y > 0$ или $x < 0, y < 0\Big)$. Следува дека точката $M$ може да се наоѓа во првиот или во третиот квадрант.
б) $xy < 0 \Leftrightarrow \Big(x < 0,\ y > 0$ или $x > 0,\ y < 0\Big)$. Следува дека точката $M$ може да се наоѓа во вториот или во четвртиот квадрант.
в) $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$. Точката $M$ лежи на правата $y = x$, па заклучуваме дека таа може да се наоѓа во првиот или третиот квадрант.
г) $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$. Точката $M$ лежи на правата $y = -x$, од каде следува дека таа може да се наоѓа во вториот или четвртиот квадрант.
д) $x + y > 0 \Leftrightarrow y > -x$. Точката $M$ се наоѓа над правата $y = -x$, значи може да се наоѓа во првиот, вториот или во четвртиот

квадрант.
ѓ) $x + y < 0 \Leftrightarrow y < -x$. Точката $M$ се наоѓа под правата $y = -x$, па според тоа таа може да се наоѓа во вториот, третиот или во четвртиот квадрант.
е) $x - y > 0 \Leftrightarrow y < x$. Точката $M$ се наоѓа под правата $y = x$, значи може да се наоѓа во првиот, третиот или во четвртиот квадрант.
ж) $x - y < 0 \Leftrightarrow y > x$. Точката $M$ е во првиот, вториот или во четвртиот квадрант, поточно над правата $y = x$.

**Задача 8.2.** На $y$-оската да се определи точка која е еднакво оддалечена од точките $A(2, -4)$ и $B(6, -2)$.

**Решение.** Нека $C$ е бараната точка. Според условот на задачата $C$ лежи на $y$-оската, па $C(0, y)$. Од условот $\overline{AC} = \overline{BC}$ се добива равенката

$$\sqrt{2^2 + (-4 - y)^2} = \sqrt{6^2 + (-2 - y)^2}.$$

Со квадрирање на оваа равенка се добива

$$2^2 + (-4 - y)^2 = 6^2 + (-2 - y)^2,$$

од каде $y = 5$. Според тоа, бараната точка е $C(0, 5)$.

**Задача 8.3.** Дадени се две спротивни темиња на еден квадрат $A(3, 0)$ и $C(-4, 1)$. Да се определат другите две темиња на квадратот.

**Решение.** Нека $B(x, y)$. Од условот $\overline{AB} = \overline{BC}$ се добива равенката

$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 1)^2}.$$

Со квадрирање на оваа равенка се добива

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1,$$

од каде $y = 4 + 7x$.

Применувајќи ја Питагоровата теорема за правоаголниот рамнокрак триаголник $ABC$, за дијагоналата на квадратот $ABCD$ се добива $\overline{AC} = \sqrt{2}\,\overline{AB}$. Значи,

$$\sqrt{(3+4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2 + y^2},$$

т.е.

$$25 = x^2 - 6x + 9 + y^2.$$

Користејќи дека $y = 4 + 7x$ имаме $25 = x^2 - 6x + 9 + (4 + 7x)^2$. Последната равенка се трансформира во $x(x + 1) = 0$, чии решенија се $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$.

Двете добиени решенија $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$ се всушност апсцисите на бараните темиња, затоа што горните два услова зададени за темето $B$ ги задоволува и темето $D$. Бидејќи $y = 4 + 7x$ следува дека координатите на бараните темиња се $(0, 4)$ и $(-1, -3)$.

**Задача 8.4.** Да се определат координатите на краевите $A$ и $B$ на отсечката која со точките $P(2, 2)$ и $Q(1, 5)$ е поделена на три еднакви делови.

**Решение.** Нека $A(x, y)$ и $B(u, v)$. Од условот на задачата имаме $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2 = 0,5 = \lambda_1$, од каде се добива

$$2 = \frac{x + 0,5u}{1,5}, \quad 2 = \frac{y + 0,5v}{1,5},$$

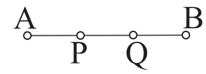
односно

$$x + 0,5u = 3, \qquad y + 0,5v = 3. \tag{8.1}$$

Од $\overline{AQ} : \overline{QB} = 2 : 1 = 2 = \lambda_2$ следува

$$1 = \frac{x + 2u}{3}, \quad 5 = \frac{y + 2v}{3},$$

Со решавање на равенките (8.1) и (8.2) се добива: $x = 3$, $y = -1$, $u = 0, v = 8$, односно $A(3,-1)$ и $B(0,8)$.




**Слика 8.2.**

односно

$$x + 2u = 3, \quad y + 2v = 15. \tag{8.2}$$

**Забелешка.** Задачата може да реши и ако се увиди дека точката $P$ е средина на отсечката $AQ$, а точката $Q$ е средина на отсечката $PB$.

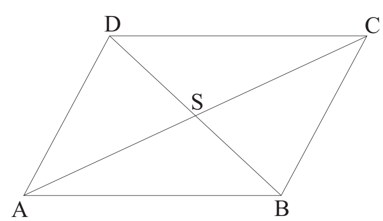
**Задача 8.5.** Дадени се три темиња на еден паралелограм $ABCD$: $A(2,3)$, $B(-2,5)$ и $C(0,1)$.
а) Да се одредат координатите на четвртото теме $D$ и на пресекот на дијагоналите $S$;
б) Да се пресмета периметарот и плоштината на паралелограмот $ABCD$;
в) Да се пресмета висината на $\triangle ABC$ спуштена кон основата $AB$.

**Решение.** а) Нека бараното теме е $D(x,y)$. Тогаш,

$$\overrightarrow{AB} = \{-4, 2\}, \ \overrightarrow{DC} = \{-x, 1-y\}.$$

Од условот $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (слика 8.3) добиваме:

$$-4 = -x, \ 2 = 1 - y,$$




**Слика 8.3.**

од каде $x = 4$ и $y = -1$. Значи, $D(4,-1)$.

Координатите на точката $S(s_1, s_2)$ се определуваат од условот точката $S$ да е средина на отсечката $AC$ $[A(2,3); C(0,1)]$:

$$s_1 = \frac{2+0}{2} = 1,\ s_2 = \frac{3+1}{2} = 2\,.$$

Значи, $S(1,\, 2)$.

б) За периметарот на паралелограмот $ABCD$ имаме

$$L = 2\,\overline{AB} + 2\,\overline{BC},$$

каде што

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

и

$$\overline{BC} = \sqrt{(0+2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{2}0 = 2\sqrt{5}.$$

Според тоа, $L = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$.

За плоштината на паралелограмот важи $P = 2P_1$, каде што $P_1$ е плоштината на триаголникот $ABC$.

$$P_1 = \frac{1}{2}\,|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| =$$

$$= \frac{1}{2}\,|2(5-1) - 2(1-3) + 0(3-5)| = 6.$$

Според тоа, плоштината на паралелограмот е $P = 2P_1 = 12$.

в) За плоштината на $P_1$ на триаголникот $ABC$ важи

$$P_1 = \frac{\overline{AB}\cdot h_c}{2},$$

каде што $h_c$ е висината на $\triangle ABC$ спуштена од темето $C$ кон основата $AB$.

Оттука, $h_c = \dfrac{2P_1}{\overline{AB}} = \dfrac{2\cdot 6}{2\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

## 8.2 Права

*Општиот облик* равенка на права е

$$Ax + By + C = 0, \quad A,\, B,\, C \in \mathbb{R},\ A \neq 0 \ \text{или} \ \ B \neq 0.$$

1) Ако $C = 0$, $A \neq 0$ и $B \neq 0$ тогаш $y = -\dfrac{A}{B}x$, па правата минува низ координатниот почеток $O(0,0)$;

2) Ако $B = 0$, $A \neq 0$ и $C \neq 0$ тогаш $x = -\dfrac{C}{A} = a$, па правата е паралелна со $y$-оската;

3) Ако $A = 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$ тогаш $y = -\dfrac{C}{B} = b$, па правата е паралелна со $x$-оската;

4) Ако $B = C = 0$, $A \neq 0$ тогаш се добива равенката $Ax = 0$, т.е. $x = 0$, а тоа е равенка на $y$-оската;

5) Ако $A = C = 0$, $B \neq 0$ тогаш $By = 0$, т.е. $y = 0$, а тоа е равенка на $x$-оската.

*Експлицитен облик* равенка на права е

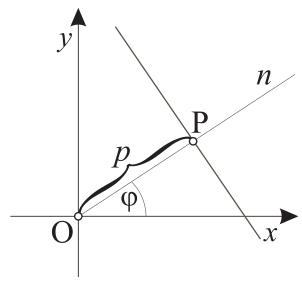
$$y = kx + n, \ \ k, n \in \mathbb{R},$$

каде што $k = \operatorname{tg}\alpha$ се нарекува *коефициент на правец*, $\alpha$ е аголот што го зафаќа правата со позитивниот дел на $x$-оската, а $n$ е ординатата на точката $B(0,n)$ во која правата ја сече $y$-оската (види слика 8.5).

*Нормален облик* или *Хесеов облик* равенка на права е

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,\ p \in \mathbb{R},$$

каде што $\varphi$ е аголот што го зафаќа нормалата $n$ спуштена од координатниот почеток кон правата со позитивниот дел на $x-$оската, а $p$ е должината на отсечката $OP$ ($P$ е пресечната точка на правата со нормалата $n$). Значи $p$ е растојанието од координатниот почеток до правата (слика 8.4).




**Слика 8.4.**

Ако правата е зададена во општ облик $Ax + By + C = 0$, $A \neq 0$ или $B \neq 0$, тогаш нормалниот облик на равенката на правата е

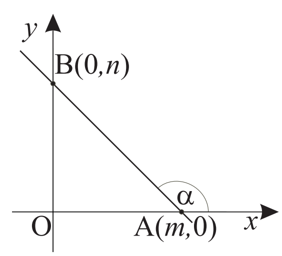
$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

каде што пред коренот во именителот се зема знак спротивен од знакот на коефициентот $C$.

*Сегментен облик* равенка на права е

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,\ m, n \in \mathbb{R},\ m \neq 0,\ n \neq 0,$$

каде што $m$ и $n$ се отсечоците на $x$ и $y$-оската, соодветно. Точките $A(m, 0)$ и $B(0, n)$ се пресечните точки на правата со $x$ и $y$-оската, соодветно.




**Слика 8.5.**

Равенката на права низ две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ е

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Равенката на права низ точката $M(x_1, y_1)$ со коефициент на правец $k$ е

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

**Заемен однос на точка и права**

Дадена точка $P(x_0, y_0)$ може да лежи или да не лежи на дадена права $p: Ax+By+C=0$. Ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, т.е. важи $Ax_0+By_0+C=0$, тогаш точката $P$ лежи на правата $p$ и означуваме $P \in p$. Во спротивно, $P$ не лежи на правата $p$ и означуваме $P \notin p$.

*Растојанието $d$ од точката $P(x_0, y_0)$ до правата $p: Ax+By+C=0$* се пресметува со формулата

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Заемен однос на две прави**

Нека $p_1$ и $p_2$ се две прави определени со равенките $y = k_1x+n_1$ и $y = k_2x+n_2$, соодветно. Овие две прави може да се сечат (имаат една заедничка точка), да се совпаѓаат (имаат бесконечно многу заеднички точки) или да се паралелни (немаат заеднички точки). Ако правите $p_1$ и $p_2$ се сечат, нивната пресечна точка се наоѓа како решение на системот

$$\begin{cases} y = k_1x + n_1 \\ y = k_2x + n_2 \end{cases}.$$

Ако $k_1 \neq k_2$ тогаш правите се сечат. Ако $k_1 = k_2$ и $n_1 \neq n_2$ тогаш правите се паралелни. Ако $k_1 = k_2$ и $n_1 = n_2$ тогаш правите се совпаѓаат.

*Аголот меѓу две прави* со коефициенти на правец $k_1$ и $k_2$ се пресметува со формулата

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

*Услов за нормалност* на две прави со коефициенти на правец $k_1$ и $k_2$:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

*Услов за паралелност* на две прави со коефициенти на правец $k_1$ и $k_2$:

$$k_1 = k_2.$$

**Задача 8.6.** Да се определи кои од точките $A(2,-1)$, $B(4,2)$ и $C(6,4)$ припаѓаат на правата $y = 1.5x - 4$.

**Решение.** Точките $A$ и $B$ припаѓаат на дадената права, бидејќи $-1 = 1.5 \cdot 2 - 4$ и $2 = 1.5 \cdot 4 - 4$. Координатите на точката $C$ не ја задоволуваат равенката на правата $(4 \neq 1.5 \cdot 6 - 4)$, па заклучуваме дека точката $C$ не лежи на дадената права.

**Задача 8.7.** Да се напишат во експлицитен облик и да се определи аголот кој го образуваат со позитивниот дел на $x$-оската, следниве прави:

а) $\sqrt{3}y - x - 3 = 0$; б) $y + 7 = 0$; в) $x - 2 = 0$.

**Решение.** а) Експлицитниот облик на правата $\sqrt{3}y - x - 3 = 0$ е $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}$. Правата зафаќа агол $\alpha = 30°$ со позитивниот дел на $x$-оската бидејќи $k = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Експлицитниот облик на дадената права е $y = -7$. Правата е паралелна со $x$-оската. Нејзиниот коефициент на правец е $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$, од каде $\alpha = 0°$.

в) Правата $x = 2$ е нормална на $x$-оската. Нејзиниот коефициент на правец е $k = \operatorname{tg}\alpha = +\infty$, од каде $\alpha = 90°$.

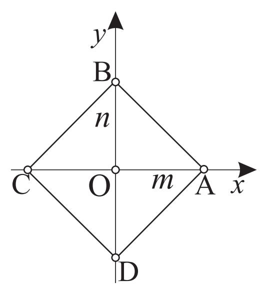
**Задача 8.8.** Да се напише равенка на права која минува низ координатниот почеток, а со позитивниот дел на $x$-оската зафаќа агол $30^\circ$.

**Решение.** Коефициентот на правец на бараната права е $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, па нејзината равенка е $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + n$. Од тоа што правата минува низ координатниот почеток $O(0,0)$ добиваме $0 = 0 + n$, од каде $n = 0$. Според тоа, бараната равенка е

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\,x\,.$$

**Задача 8.9.** Нека дијагоналите на квадрат со страна $a$ се координатните оски. Да се напишат равенките на правите на кои лежат страните на квадратот.

**Решение.** Јасно е дека триаголниците $OAB$, $OBC$, $OCD$ и $OAD$, кои ги формираат координатните оски со секоја од страните на квадратот, се складни. Тие се правоаголни триаголници со катети $m$ и $n$ и хипотенуза $a$. Бидејќи дијагоналите во квадратот се еднакви и се преполовуваат добиваме дека овие триаголници се и рамнокраки, т.е. $m = n$.



**Слика 8.6.**

Од Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник $OAB$ имаме:

$$a^2 = m^2 + m^2 = 2m^2,$$

односно $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. Равенките на страните на квадратот се прави чиј сегментен облик е

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1,$$

односно

$$\frac{\sqrt{2}x}{\pm a}+\frac{\sqrt{2}y}{\pm a}=1.$$

**Задача 8.10.** Во равенката на правата $(a-2)x-3y+a+3=0$ да се одреди реалниот параметар $a$ така што правата:
а) да ја сече $y$-оската во точката $(0,2)$;
б) да отсекува на $y$-оската отсечка со должина 2;
в) да зафаќа агол со позитивниот дел на $x$-оската од $45°$.

**Решение.** Експлицитниот облик на дадената права е

$$y=\frac{a-2}{3}x+\frac{a+3}{3}\,.$$

а) Од условот $n=2$ имаме $\dfrac{a+3}{3}=2$. Значи, $a=3$.
б) Од условот $n=\pm2$ следува $\dfrac{a+3}{3}=\pm2$. Се добива $a_1=3$ и $a_2=-9$.
в) Од условот $k=\mathrm{tg}45°=1$ имаме $\dfrac{a-2}{3}=1$, од каде $a=5$.

**Задача 8.11.** Да се напише равенка на права која минува низ точките $A(2,1)$ и $B(4,3)$. Колкав е аголот што го зафаќа добиената права со позитивниот дел на $x$-оската?

**Решение.** Равенката на права која минува низ дадените точки е:

$$y-1=\frac{3-1}{4-2}(x-2)$$

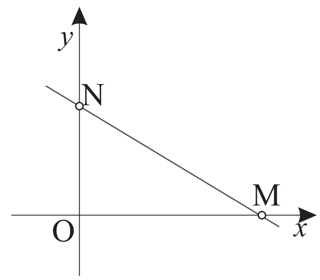
т.е. $y=x-1$. Тогаш $\mathrm{tg}\alpha=k=1$, па $\alpha=45°$.

**Задача 8.12.** Во равенката на правата $12x+By-60=0$, $B\neq0$, да се одреди реалниот параметар $B$ така што отсечката на дадената права меѓу координатните оски да има должина 13.

**Решение.** Равенката на правата ја доведуваме во сегментен облик:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{60}{B}}=1.$$

Пресечните точки на правата со координатните оски се $M(5,0)$ и $N\left(0,\frac{60}{B}\right)$.




**Слика 8.7.**

Од условот на задачата растојанието меѓу точките $M$ и $N$ е 13, од каде ја добиваме равенката:

$$\sqrt{(0-5)^2+\left(\frac{60}{B}-0\right)^2}=13.$$

Со квадрирање, равенката го добива обликот:

$$25+\left(\frac{60}{B}\right)^2=169,$$

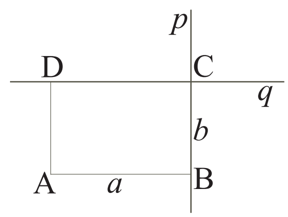
која се трансформира во $\left(\frac{60}{B}\right)^2=144$. Оттука, $\frac{60}{B}=\pm 12$, од каде за $B$ се добиваат две решенија: $B_1=5$ и $B_2=-5$.

**Задача 8.13.** Дадени се равенките на правите $p: 3x-2y-5=0$ и $q: 2x+3y+7=0$ на кои лежат две страни од еден правоаголник и едно негово теме $A(-2,1)$. Да се пресмета неговата плоштина.

**Решение.** Коефициентите на правец на дадените прави се $k_1=\frac{3}{2}$ и $k_2=-\frac{2}{3}$, што значи дека правите се заемно нормални. Координатите на дадената точка $A$ не ги задоволуваат равенките на дадените прави, од каде следува дека таа не лежи на ниту една од нив (слика 8.8).

Должините на страните на правоаголникот се наоѓаат како растојанија од точката $A$ до дадените прави:

$$a = \frac{|3\cdot(-2) - 2\cdot 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13},$$




**Слика 8.8.**

$$b = \frac{|2\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Конечно, за плоштината на правоаголникот се добива:

$$P = a \cdot b = \sqrt{13}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}} = 6\,.$$

**Задача 8.14.** Да се напише равенка на права која минува низ точката $M(7,4)$ и е:
а) паралелна со правата $2x + 5y - 1 = 0$;
б) нормална на правата $4x - 3y = 0$.

**Решение.** а) Од експлицитниот облик на дадената права $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ го определуваме нејзиниот коефициент на правец $k_1 = -\frac{2}{5}$. Од условот за паралелност имаме $k_1 = k_2 = -\frac{2}{5}$, па равенката на бараната права е

$$y - 4 = -\frac{2}{5}(x - 7),$$

односно $y = -\frac{2}{5}x + \frac{34}{5}$.
б) Од експлицитниот облик на дадената права $y = \frac{4}{3}x$ го определуваме нејзиниот коефициент на правец $k_1 = \frac{4}{3}$. Од условот

за нормалност имаме:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{3}{4},$$

па равенката на бараната права е

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 7),$$

односно $y = -\frac{3}{4}x + \frac{37}{4}$.

**Задача 8.15.** Да се напишат равенките на правите што минуваат низ темињата на триаголникот $\triangle ABC[A(-1,2),\ B(2,-2),\ C(-3,-4)]$, а се паралелни со нивните спротивни страни.

**Решение.** Нека $a : y = k_a x + n_a$ е права која минува низ точката $A$ и е паралелна на правата $BC$. Тогаш,

$$k_a = \frac{-4+2}{-3-2} = \frac{2}{5}.$$

Коефициентот $n_a$ ќе го одредиме од условот $A \in a$, од каде добиваме:

$$2 = \frac{2}{5}(-1) + n_a, \ \text{ т.е. } \ n_a = \frac{12}{5}\,.$$

Бараната права е

$$a:\ -2x + 5y - 12 = 0.$$

На сличен начин се добива правата $b$ која минува низ точката $B$ и е паралелна на $AC$,

$$b:\ -3x + y + 8 = 0,$$

како и правата $c$ која минува низ точката $C$ и е паралелна на $AB$,

$$c:\ 4x + 3y + 24 = 0.$$

**Задача 8.16.** Да се определи за кои реални вредности на $a$ и $b$ правата

$$(a+2b-3)x+(2a-b+1)y+6a+9=0$$

е паралелна со апсцисната оска, а ординатната оска ја сече во точката $(0,-3)$.

**Решение.** За правата да биде паралелна со $x$-оската, потребно е коефициентот пред $x$ да е нула, т.е. $a+2b-3=0$.

Од тоа што правата треба да минува низ точката $(0,-3)$ следува $(2a-b+1)(-3)=-6a-9$.

Од двете добиени равенки се добива $a=7$ и $b=-2$. Равенката на бараната права е $y=-3$.

**Задача 8.17.** Во равенката на правата

$$(3a-2b+5)x-(a-b)y+2a-5b+1=0,$$

да се определат реалните параметри $a$ и $b$ така што правата да биде симетрала на:

а) првиот; б) вториот квадрант.

**Решение.** а) Симетралата на првиот квадрант е права која минува низ координатниот почеток и со позитивниот дел на $x$-оската зафаќа агол од $45°$. Нејзината равенка е $y=x$. Оваа права е симетрала и на третиот квадрант.

Бараната права треба да зафаќа агол од $45°$ со позитивниот дел на $x$-оската, односно треба да важи $k=1$, од каде се добива равенката $3a-2b+5=a-b$. За правата да минува низ координатниот почеток треба $C=2a-5b+1=0$. Од овие равенки се добива $a=-3$ и $b=-1$.

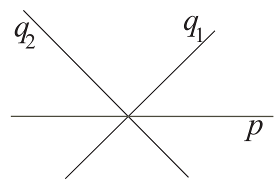
б) Симетралата на вториот квадрант е права која минува низ координатниот почеток и со позитивниот дел на $x$-оската зафаќа агол од $135°$. Нејзината равенка е $y=-x$. Оваа права е симетрала и на четвртиот квадрант.

Правата треба да зафаќа агол од $135^\circ$ со позитивниот дел на $x$-оската, односно треба да важи $k=-1$, од каде ја добиваме равенката $3a-2b+5=-(a-b)$. За да правата минува низ координатниот почеток треба $C=2a-5b+1=0$. Од овие равенки се добива $a=-\dfrac{11}{7}$ и $b=-\dfrac{3}{7}$.

**Задача 8.18.** Да се одреди вредноста на реалниот параметар $m\neq 0$ така што правите $p:\ x+3y+10=0$ и $q:\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{5}=1$ да зафаќаат агол $\alpha=45^\circ$.

**Решение.** Од дадените равенки ги определуваме нивните коефициенти на правец:

$$k_p=-\frac{1}{3} \text{ и } k_q=-\frac{5}{m}.$$




**Слика 8.9.**

Можни се два случаи:

1) $k_1=-\dfrac{5}{m}$ и $k_2=-\dfrac{1}{3}$. Тогаш,

$$1=\mathrm{tg}45^\circ=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{m}}{1-\dfrac{5}{m}\left(-\dfrac{1}{3}\right)}.$$

Со средување се добива равенката:

$$1=\frac{-m+15}{3m+5},$$

чие решение $m=\dfrac{5}{2}$ припаѓа во областа на нејзината дефинираност $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$.

2) $k_1 = -\dfrac{1}{3}$ и $k_2 = -\dfrac{5}{m}$. Тогаш,

$$1 = \mathrm{tg}45^\circ = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\dfrac{5}{m} + \dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{5}{m}\left(-\dfrac{1}{3}\right)}.$$

Со средување се добива равенката:

$$1 = \frac{-15 + m}{3m + 5}.$$

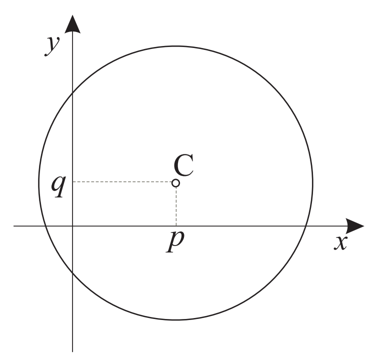
Во областа на нејзината дефинираност $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$, нејзиното решение е $m = -10$.

Според тоа, постојат две прави $q_1$ и $q_2$ кои со правата $p$ зафаќаат агол $\alpha = 45^\circ$ (слика 8.9).

## 8.3 Кружница

*Кружница* е геометриско место на точки во рамнината кои се еднакво оддалечени од една дадена точка.

Дадената точка се вика *центар* на кружницата и се означуваат со $C$, а растојанието на секоја точка до центарот $C$ се вика *радиус* на кружницата и се означува со $r$ $(r > 0)$. Кружницата $k$ со центар во точката $C(p, q)$, $p, q \in \mathbb{R}$ и радиус $r > 0$ која е




**Слика 8.10.**

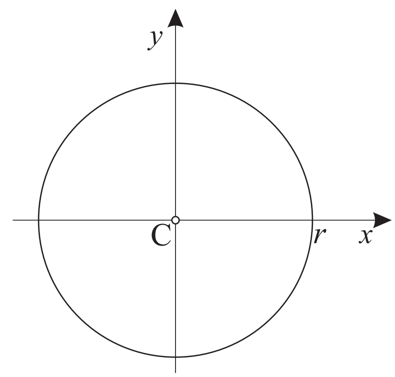
прикажана на сликата 8.10. има равенка:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2. \tag{8.3}$$

Специјално, кога $C(0,0)$, тогаш равенката (8.3) го добива обликот:

$$x^2+y^2=r^2. \tag{8.4}$$

Равенката (8.4) се вика *централна равенка* на кружница (слика 8.11).




**Слика 8.11.**

### Заемен однос на точка и кружница

Дадена точка може да лежи или на кружницата, или во нејзината внатрешност, или надвор од кружницата.

Точката $A(a,b)$ лежи на кружницата (8.3) ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на кружницата, т.е. ако важи $(a-p)^2+(b-q)^2=r^2$. Точката $A(a,b)$ лежи на кружницата (8.4) ако $a^2+b^2=r^2$.

Точката $A(a,b)$ лежи во внатрешноста на кружницата (8.3) ако важи неравенството $(a-p)^2+(b-q)^2<r^2$, односно во внатрешноста на кружницата (8.4) ако $a^2+b^2<r^2$.

Точката $A(a,b)$ лежи надвор од кружницата (8.3) ако $(a-p)^2+(b-q)^2>r^2$, односно надвор од кружницата (8.4) ако $a^2+b^2>r^2$.

### Заемен однос на права и кружница

Нека $s$ е правата $y = kx + n$. Ако системот

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x-p)^2 + (y-q)^2 & = & r^2 \\ y & = & kx + n \end{array} \right. \tag{8.5}$$

нема решение тогаш правата и кружницата немаат заеднички точки. Ако системот (8.5) има две решенија, тогаш правата и кружницата имаат две заеднички точки и велиме дека правата и кружницата се сечат (правата се вика *секанта* на кружницата). Ако системот (8.5) има едно решение, тогаш правата и кружницата имаат една заедничка точка и велиме дека правата е *тангента* на кружницата (заедничката точка се вика *допирна точка* на тангентата и кружницата).

Услов правата $s$ да биде тангента на кружницата (8.3) е

$$r^2(k^2+1) = (kp - q + n)^2,$$

а на кружницата (8.4):

$$r^2(k^2+1) = n^2.$$

Равенката на тангента на кружницата (8.3) во точката $M(x_0, y_0)$ од кружницата е

$$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2, \tag{8.6}$$

а равенката на тангента на кружницата (8.4) во точката $M(x_0, y_0)$ од кружницата е

$$x_0 x - y_0 y = r^2.$$

**Задача 8.19.** Да се напише равенка на кружница $k$ ако:
а) точката $C(2, 8)$ е центар на $k$ и $k$ минува низ точката $A(-2, 5)$;
б) отсечката $AB\,[A(1, -2);\ B(9, -6)]$ е дијаметар на $k$;
в) точката $C(2, 3)$ е центар на $k$ и правата $p:\ 5x + 12y + 6 = 0$ ја допира $k$.

**Решение.** а) Равенката на кружницата $k$ е

$$(x-2)^2+(y-8)^2=r^2\,.$$

Од условот точката $A$ да лежи на $k$ имаме:

$$(-2-2)^2+(5-8)^2=r^2,$$

од каде се добива $r=5$, па равенката на кружницата $k$ е

$$(x-2)^2+(y-8)^2=25\,.$$

б) Од условот отсечката $AB$ да е дијаметар на $k$ ги наоѓаме координатите на центарот $C(p,q)$ како средина на отсечката $AB$:

$$p=\frac{1+9}{2}=5\,,\qquad q=\frac{-2-6}{2}=-4\,.$$

Радиусот на $k$ го наоѓаме како растојание меѓу точките $A$ и $C$:

$$r=\sqrt{(5-1)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{20}\,.$$

Равенката на кружницата $k$ е

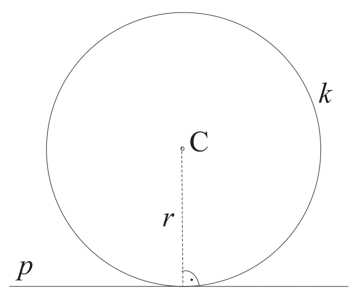
$$(x-5)^2+(y+4)^2=20\,.$$

в) Радиусот на $k$ го наоѓаме како растојание од точката $C$ до дадената права $p$:

$$r=\frac{|5\cdot 2+12\cdot 3+6|}{\sqrt{5^2+12^2}}=4\,.$$

Равенката на кружницата $k$ е

$$(x-2)^2+(y-3)^2=16\,.$$




**Слика 8.12.**

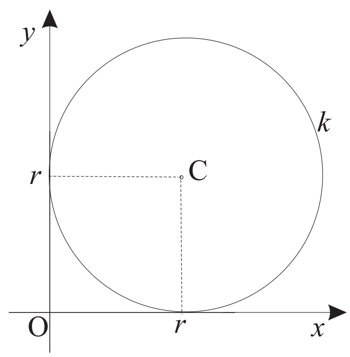
**Задача 8.20.** За која вредност на реалниот параметар $a$ кружницата

$$x^2 + y^2 + (a-6)x - (a+2)y + 3a - 2 = 0$$

ги допира координатните оски?

**Решение.** Ако равенката на кружницата ја доведеме во општ облик добиваме:

$$\left(x + \frac{a-6}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-6}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+2}{2}\right)^2 + 3a - 2 = 0\,.$$




**Слика 8.13.**

Од условот кружницата да ги допира координатните оски (слика 8.13) следува $p = q = r$, па добиваме:

$$-\frac{a-6}{2} = \frac{a+2}{2}\,.$$

Решението на последнава равенка е $a = 2$.

**Задача 8.21.** Да се напише равенка на кружница чиј центар лежи на правата $t:\ 2x + y = 0$ и ги допира двете паралелни прави $s_1:\ 4x - 3y - 30 = 0$ и $s_2:\ 4x - 3y + 10 = 0$.

**Решение.** Нека равенката на бараната кружница $k$ е

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\,.$$

Растојанието меѓу двете паралелни прави е дијаметарот на кружницата $k$ (слика 8.14). Него го наоѓаме како растојание од произволна точка $P$ од правата $s_1$ до правата $s_2$. За таа цел, ја избираме точката $P(0,-10)$ од правата $s_1$. Нејзиното растојание до правата $s_2$ е

$$d=\frac{|4\cdot 0-3\cdot(-10)+10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=8\,,$$

па $r=4$ .

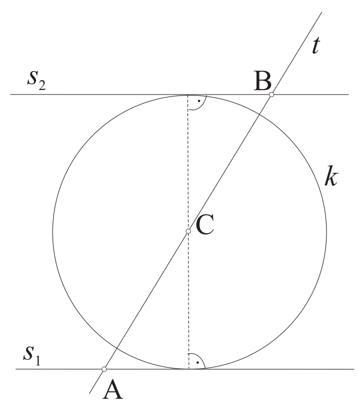
Останува да се определат координатите $p$ и $q$ на центарот $C$. Од условот $C(p,q)$ да лежи на правата $t:\ 2x+y=0$ добиваме:

$$2p+q=0. \tag{8.7}$$

Експлицитниот облик на равенката на правата $s_1$ е

$$y=\frac{4}{3}x-10.$$

Од условот $k$ да ја допира правата $s_1$ добиваме:




**Слика 8.14.**

$$r^2\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2+1\right)=\left(\frac{4}{3}p-q-10\right)^2\,. \tag{8.8}$$

Го решаваме системот составен од равенките (8.7) и (8.8). Ако во равенката (8.8) замениме $q = -2p$ и $r = 4$, ја добиваме следнава равенка:

$$16\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1\right) = \left(\frac{4}{3}p + 2p - 10\right)^2,$$

со чие средување се добива квадратната равенка:

$$p^2 - 6p + 5 = 0\,.$$

Нејзини решенија се $p_1 = 1$ и $p_2 = 5$. За $q$ се добиваат решенијата $q_1 = -2$ и $q_2 = -10\,.$

Според тоа, добиваме две точки $C_1(1, -2)$ и $C_2(5, -10)$. Се проверува дека само точката $C_1$ е на растојание $r = 4$ од правата $s_2$, што значи дека кружницата $k$ има равенка

$$k:\,(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

**Забелешка.** Центарот на бараната кружница може да се определи и како средина на отсечката $AB$, каде $A$ е пресечната точка на правите $t$ и $s_1$, а $B$ е пресечната точка на правите $t$ и $s_2$ (види слика 8.14).

**Задача 8.22.** Да се определат равенките на тангентите на кружницата $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ повлечени во точката:
а) $A(4,4)$; б) $B(1,5)$; в) $C(3,0)$.

**Решение.** Равенката на кружницата ја доведуваме во облик

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

а) Се проверува дека точката $A(4,4)$ лежи на кружницата бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката на дадената кружница. Тогаш, од (8.6) следува дека равенка на тангентата на кружницата во оваа точка е

$$(4-3)(x-3)+(4-2)(y-2)=5,$$

т.е. $x+2y=12$.

б) Се проверува дека точката $B(1,5)$ лежи надвор од кружницата бидејќи важи $(1-3)^2+(5-2)^2>5$. Тогаш, од оваа точка може да се повлечат две тангенти на кружницата.

Нека бараната тангента има равенка $y=kx+n$. Од тоа што точката $B$ лежи на оваа права следува

$$5=k\cdot 1+n. \tag{8.9}$$

Од условот правата $y=kx+n$ да е тангента на дадената кружница добиваме

$$5(k^2+1)=(3k-2+n)^2. \tag{8.10}$$

Од равенките (8.9) и (8.10) се добива систем од една линеарна и една квадратна равенка. Од линеарната равенка (8.9) имаме $n=5-k$. Ако ова го замениме во квадратната равенка (8.10) добиваме:

$$5(k^2+1)=(3k-2+5-k)^2.$$

Со средување на последната равенка се добива равенката $k^2-12k-4=0$ чии решенија се $k_{1/2}=6\pm 2\sqrt{10}$. За $n$ се добива $n_{1/2}=-1\mp 2\sqrt{10}$.

Бараните тангенти имаат равенки:

$$t_1:\ y=(6+2\sqrt{10})x-1-2\sqrt{10}$$

и

$$t_2:\ y=(6-2\sqrt{10})x-1+2\sqrt{10}.$$

в) Се проверува дека точката $C(3,0)$ лежи во внатрешноста на дадената кружница, па од неа не може да се повлече тангента на кружницата.

**Задача 8.23.** Да се определат равенките на тангентите на кружницата $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ повлечени во нејзините пресечни точки со правата $3x+y-6=0$.

**Решение.** Пресечните точки на правата и кружницата се наоѓаат како решение на системот равенки:

$$\begin{cases} 3x+y=6 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=5 \end{cases}.$$

Со замената $y=6-3x$ во квадратната равенка добиваме:

$$(x-3)^2+(6-3x-2)^2=5\,,$$

со чие средување се добива квадратната равенка:

$$x^2-3x+2=0\,.$$

Нејзини решенија се $x_1=1$ и $x_2=2$, а соодветните вредности на $y$ се $y_1=3$ и $y_2=0$. Според тоа, пресечни точки на правата и кружницата се точките $A(1,3)$ и $B(2,0)$.

Равенката на тангентата на кружницата во точката $A(1,3)$ е

$$(1-3)(x-3)+(3-2)(y-2)=5\,,$$

т.е. $-2x+y-1=0$, а равенката на тангентата на кружницата во точката $B(2,0)$ е

$$(2-3)(x-3)+(0-2)(y-2)=5\,,$$

т.е. $x+2y-2=0$.

**Задача 8.24.** Да се пресмета најкраткото растојание од точката $P(6,-8)$ до кружницата $x^2+y^2=9$.

**Решение.** Се проверува дека точката $P$ не лежи на кружницата $k$ (нејзините координати не ја задоволуваат равенката на кружницата). Центарот на дадената кружница е $C(0,0)$. Низ точките $C$ и $P$ поставуваме права $p$ (слика 8.15). Нејзината равенка е:

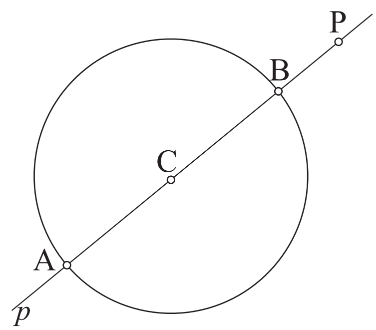
$$\frac{y-0}{-8-0}=\frac{x-0}{6-0},$$

т.е. $p: y=-\frac{4}{3}x$.

Ги определуваме пресечните точки $A$ и $B$ на правата $p$ со кружницата $k$.

Со замена на $y=-\frac{4}{3}x$ во равенката на кружницата добиваме:

$$x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2=9.$$



**Слика 8.15.**

Оваа равенка е еквивалентна на равенката $x^2=\frac{81}{25}$ чии решенија се: $x_1=-\frac{9}{5}$ и $x_2=\frac{9}{5}$. Тогаш, $y_1=\frac{12}{5}$ и $y_2=-\frac{12}{5}$, па бараните точки се $A\left(-\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$ и $B\left(\frac{9}{5},-\frac{12}{5}\right)$.

Растојанието на точката $P$ до точките $A$ и $B$ е

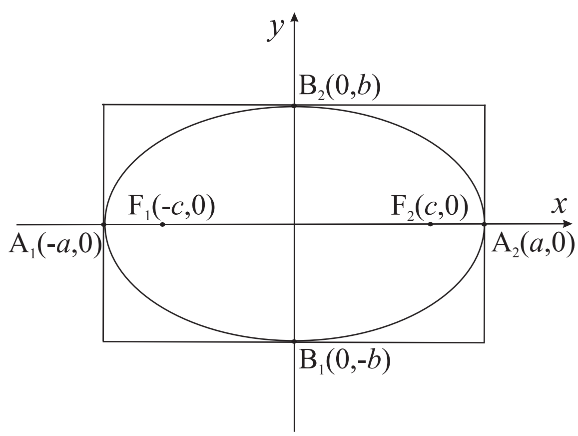
$$d(P,A)=\frac{1}{5}\sqrt{4225}=13,$$

$$d(P,B)=\frac{1}{5}\sqrt{1225}=7,$$

соодветно. Значи најкраткото растојание од $P$ до $k$ е 7, а најголемото растојание е 13.

## 8.4 Елипса

*Елипса* е геометриско место на точки во рамнината кои го имаат својството збирот од растојанијата на секоја од овие точки до две дадени точки е константен. Дадените точки се викаат *фокуси* на елипсата и се означуваат со $F_1$ и $F_2$. Нека константниот збир го означиме со $2a$, $a > 0$, а растојанието меѓу двата фокуси (*фокусно растојание*) го означиме со $2c$, $a > c$.




**Слика 8.16.**

Избираме правоаголен координатен систем, така што апсцисната оска да минува низ фокусите $F_1$ и $F_2$, а ординатната оска да се совпаѓа со симетралата на отсечката $F_1F_2$ (слика 8.16). Тогаш фокусите ќе имаат координати $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Ако $b > 0$ е таков што

$$a^2 - c^2 = b^2, \quad (\text{т.е.} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}),$$

тогаш *каноничната равенка* на елипсата го има обликот

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8.11}$$

Во општ случај, доволно е барем еден од $a$ и $b$ да е поголем од $c$.

Точките $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$ и $B_2(0, -b)$ се викаат *темиња* на елипсата. Отсечката $A_1A_2$ се вика *голема оска*, а отсечката $B_1B_2$ се вика *мала оска*; нивните должини се $2a$ и $2b$, соодветно.

Позитивните броеви $a$ и $b$ се викаат *голема и мала полуоска* на елипсата, соодветно. Притоа, $a > b$. Ако $b > a$ тогаш фокусите на елипсата се наоѓаат на $y$-оската. Ако $a = b$ тогаш се добива равенка на кружница, од каде заклучуваме дека кружницата е специјален случај на елипса, т.е. елипса со еднакви оски. Пресечната точка $O$ на оските се вика *центар* на елипсата.

Равенката на елипса со центар во точката $(p, q)$ и должини на оските $2a$ и $2b$ е

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

**Заемен однос на точка и елипса**

Дадена точка може да лежи или на елипсата, или во нејзината внатрешност или надвор од елипсата. Положбата на дадена точка во однос на елипса се испитува на ист начин како кај кружница.

### Заемен однос на права и елипса

Аналогно како кај кружница, за да се одреди положбата на правата $y = kx + n$ и елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ потребно е да се реши системот од нивните равенки:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = & 1 \\ y & = & kx + n \end{array} \right. . \tag{8.12}$$

Ако системот (8.12) нема решение тогаш правата и елипсата немаат заеднички точки. Ако системот (8.12) има две решенија, тогаш правата и елипсата имаат две заеднички точки и велиме дека правата и елипсата се сечат (правата се вика *секанта* на елипсата). Ако системот (8.12) има едно решение, тогаш правата и елипсата имаат една заедничка точка и велиме дека правата е *тангента* на елипсата (заедничката точка се вика *допирна точка* на тангентата и елипсата).

Услов правата $y = kx + n$ да биде тангента на елипсата (8.11) е

$$a^2k^2 + b^2 = n^2. \tag{8.13}$$

Равенката на тангентата на елипсата (8.11) повлечена во точката $M(x_0, y_0)$ од елипсата е:

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1. \tag{8.14}$$

**Задача 8.25.** Да се најдат должините на оските $2a$ и $2b$ и фокусното растојание $2c$ на елипсата

$$9x^2 + 16y^2 = 576.$$

Потоа, да се определат темињата и фокусите на елипсата.

**Решение.** Да ја претставиме дадената равенка во каноничен облик

$$9x^2 + 16y^2 = 576 \ / : 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Се добива дека $a^2 = 64$, $b^2 = 36$, односно $a = 8, b = 6$, па должините на оските се $2a = 16$, $2b = 12$. За $c$ добиваме:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$$

од каде фокусното растојание е $2c = 4\sqrt{7}$.

Темињата на елипсата се $A_1(-8, 0)$, $A_2(8, 0)$, $B_1(0, 6)$ и $B_2(0, -6)$, а фокусите се $F_1(-2\sqrt{7}, 0)$ и $F_2(2\sqrt{7}, 0)$.

**Задача 8.26.** Да се најде равенка на елипсата која минува низ точките $M(6, 4)$ и $N(-8, 3)$.

**Решение.** Нека равенката на бараната елипса е

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Непознатите $a$ и $b$ ќе ги добиеме од условот $M$ и $N$ да се точки од елипсата, од каде следува:

$$\frac{36}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{64}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1.$$

Од првата равенка добиваме:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{b^2 - 16}{36b^2}.$$

Заменувајќи го изразот за $\frac{1}{a^2}$ во втората равенка имаме:

$$64 \cdot \frac{b^2 - 16}{36b^2} + \frac{9}{b^2} = 1,$$

од каде се добива $b^2 = 25$. Следува $a^2 = 100$. Со тоа ја добиваме бараната равенка на елипса:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

**Задача 8.27.** Да се најдат пресечните точки на елипсата $3x^2 + 5y^2 = 120$ и правата:

а) $x + y = 8$; б) $x + 2y = 12$.

**Решение.** а) За наоѓање на пресечните точки на правата и елипсата го решаваме системот од нивните равенки:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 & = & 120 \\ x + y & = & 8 \end{cases}.$$

Од втората равенка имаме $x = 8 - y$. Ако ова го замениме во втората равенка добиваме:

$$3(8 - y)^2 + 5y^2 = 120.$$

Решение на последната квадратна равенка е двојниот корен $y_{1/2} = 3$. Следува $x_{1/2} = 5$.

Значи правата и елипсата имаат една пресечна точка, тоа е точката $(5, 3)$. Според тоа, правата е тангента на елипсата.

б) Од втората равенка на системот

$$\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 & = & 120 \\ x + 2y & = & 12 \end{cases}$$

имаме $x = 12 - 2y$. Ако ова го замениме во првата равенка, добиваме:

$$3(12 - 2y)^2 + 5y^2 = 120.$$

Со средување на последнава равенка се добива квадратната равенка
$$17y^2 - 144y + 312 = 0.$$
Последнава равенка има дискриминанта
$$D = 144^2 - 4 \cdot 17 \cdot 312 = -480 < 0,$$
од каде следува дека квадратната равенка нема решение во $\mathbb{R}$, па правата и елипсата немаат заеднички точки.

**Задача 8.28.** Да се определат равенките на тангентите на елипсата $9x^2 + 16y^2 = 144$ повлечени од точката:

а) $N(0,3)$; б) $M(1,4)$.

**Решение.** а) Се проверува дека точката $N$ лежи на дадената елипса, па од (8.18) следува дека равенка на тангентата на елипсата повлечена во точката $N$ е
$$9 \cdot 0 \cdot x + 16 \cdot 3 \cdot y = 144,$$
т.е. $y = 3$. Тангентата е права паралелна со $x$-оската.
б) Точката $M$ лежи надвор од дадената елипса бидејќи
$$9 \cdot 1^2 + 16 \cdot 4^2 > 144.$$

Нека $y = kx + n$ е права која минува низ точката $M$ и е тангента на елипсата. Од тоа што $M(1,4)$ лежи на правата добиваме $4 = k+n$, од каде $n = 4-k$. Од равенката на елипсата во каноничен облик
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$
се добива дека $a = 4$, $b = 3$.

Од условот (8.13) правата $y = kx + n$ да биде тангента на дадената елипса, се добива
$$16k^2 + 9 = (4-k)^2,$$

односно

$$15k^2 + 8k - 7 = 0.$$

Решенијата на оваа равенка се $k_1 = -1$ и $k_2 = \frac{7}{15}$. Со тоа ги добиваме $n_1 = 5$ и $n_2 = \frac{53}{15}$, па бараните тангенти се:

$$t_1 : x + y = 5 \quad \text{и} \quad t_2 : 7x - 15y + 53 = 0.$$

**Задача 8.29.** Да се определи центарот, должините на оските, темињата и фокусите на елипсата:

а) $x^2 + 4y^2 - 8y = 12$;   б) $4x^2 - 16x + 9y^2 + 36y = -16$.

**Решение.** а) Равенката на елипсата ја трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned} & x^2 + 4y^2 - 8y = 12 \\ \iff\ & x^2 + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) = 12 \\ \iff\ & x^2 + 4(y-1)^2 = 16 \\ \iff\ & \frac{x^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1, \end{aligned}$$

од каде $p = 0$, $q = 1$, $a = 4$ и $b = 2$.

Тогаш центарот на елипсата е $O(0, 1)$, должините на оските се $2a = 2 \cdot 4 = 8$, $2b = 2 \cdot 2 = 4$, а темињата се $A_1(-4, 1)$, $A_2(4, 1)$, $B_1(0, -1)$, $B_2(0, 3)$. Бидејќи $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{3}$, фокусите на елипсата се $F_1(-2\sqrt{3}, 1)$ и $F_2(2\sqrt{3}, 1)$.

б) Со трансформација на равенката на елипсата добиваме:

$$\begin{aligned}
& 4x^2 - 16x + 9y^2 + 36y = -16 \\
\iff\ & 4(x^2 - 4x + 4 - 4) + 9(y^2 + 4y + 4 - 4) = -16 \\
\iff\ & 4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \\
\iff\ & \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1,
\end{aligned}$$

од каде $p = 2$, $q = -2$, $a = 3$ и $b = 2$.

Центарот на елипсата е $O(2, -2)$, должините на оските се $2a = 2 \cdot 3 = 6$, $2b = 2 \cdot 2 = 4$, темињата се $A_1(-1, -2)$, $A_2(5, -2)$, $B_1(2, -4)$, $B_2(2, 0)$, а фокусите се $F_1(-\sqrt{5}, -2)$, $F_2(\sqrt{5}, -2)$.

## 8.5 Хипербола

*Хипербола* е геометриско место на точки во рамнината кои го имаат својството апсолутната вредност од разликата од растојанијата на секоја од овие точки до две дадени точки е константна. Дадените точки се викаат *фокуси* на хиперболата и се означуваат со $F_1$ и $F_2$. Нека апсолутната вредност од константната разлика ја означиме со $2a$, $a > 0$, а растојанието меѓу двата фокуси (*фокусно растојание*) го означиме со $2c$, $a < c$.

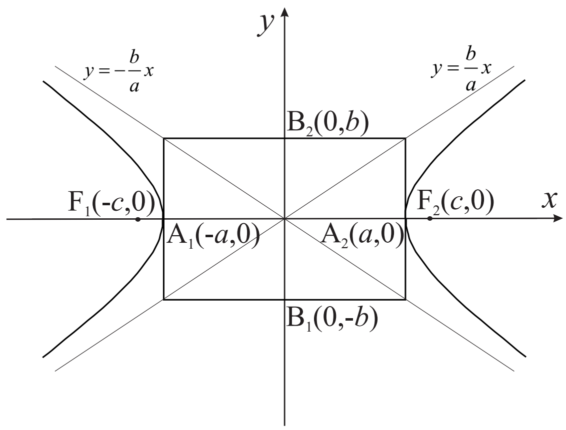
Избираме правоаголен координатен систем, така што апсцисната оска да минува низ фокусите $F_1$ и $F_2$, а ординатната оска да се совпаѓа со симетралата на отсечката $F_1F_2$. Тогаш фокусите ќе имаат координати $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (слика 8.17). Ако $b > 0$ е таков што

$$c^2 - a^2 = b^2, \quad (\text{т.е.} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}),$$

тогаш *каноничната равенка* на хиперболата го има обликот

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{8.15}$$

Точките $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ се викаат *темиња* на хиперболата.




**Слика 8.17.**

Отсечката $A_1A_2$ се вика *реална оска*, а отсечката $B_1B_2$ се вика *имагинарна оска*; нивните должини се $2a$ и $2b$, соодветно. Позитивните броеви $a$ и $b$ се викаат *полуоски* на хиперболата.

Пресечната точка $O$ на оските се вика *центар* на хиперболата. Правите $y = \pm\frac{b}{a}x$ ги викаме *асимптоти на хиперболата.*

Хиперболата има две гранки: *лева гранка* која ги содржи точките за кои $x \leq -a$ и *десна гранка* која ги содржи точките за кои $x \geq a$.

Ако фокусите на хиперболата се наоѓаат на $y$−оската, симетрично во однос на пресечната точка $O$, тогаш равенката на хиперболата е

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Во тој случај, $b$ е реалната полуоска, а $a$ е имагинарната полуоска на хиперболата.

Равенката на хипербола со центар во точката $(p, q)$ и должини на оските $2a$ и $2b$ гласи

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

**Заемен однос на права и хипербола**

За да се одреди положбата на правата $y = kx + n$ и хиперболата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ потребно е да се реши системот од нивните равенки:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \\ y = kx + n \end{cases} . \tag{8.16}$$

Ако системот (8.16) нема решение тогаш правата и хиперболата немаат заеднички точки. Ако системот (8.16) има две решенија, тогаш правата и хиперболата имаат две заеднички точки и велиме дека правата и хиперболата се сечат (правата се вика *секанта* на хиперболата). Ако системот (8.16) има едно решение, тогаш правата и хиперболата имаат една заедничка точка и велиме дека правата е *тангента* на хиперболата (заедничката точка се вика *допирна точка* на тангентата и хиперболата).

Услов правата $y = kx + n$ да биде тангента на хиперболата (8.15) е

$$a^2k^2 - b^2 = n^2. \tag{8.17}$$

Равенката на тангентата на хиперболата (8.15) во точката $M(x_0, y_0)$ од хиперболата е

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{8.18}$$

**Задача 8.30.** Дадена е хиперболата

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Да се определат точките од хиперболата кои се на растојание $\frac{9}{2}$ од десниот фокус.

**Решение.** Од равенката на хиперболата се добива дека $a = 8$, и $b = 6$. Оттука, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$. Значи фокуси на хиперболата се $F_1(-10, 0)$ и $F_2(10, 0)$.

Бараната точка $M(x_0, y_0)$ е точка од хиперболата, од каде се добива равенката

$$\frac{x_0^2}{64} - \frac{y_0^2}{36} = 1. \tag{8.19}$$

Оваа точка е на растојание $\frac{9}{2}$ од фокусот $F_2$, од каде следува

$$(x_0 - 10)^2 + y_0^2 = \frac{81}{4}. \tag{8.20}$$

Од равенката (8.20) добиваме:

$$y_0^2 = \frac{81}{4} - (x_0 - 10)^2 \tag{8.21}$$

и заменуваме во равенката (8.19),

$$\frac{x_0^2}{64} - \frac{1}{36}\left(\frac{81}{4} - (x_0 - 10)^2\right) = 1.$$

Се добива квадратна равенка со променлива $x_0$,

$$5x_0^2 - 64x_0 + 140 = 0,$$

која има две решенија $x_{0_1} = 10$ и $x_{0_2} = \frac{14}{5}$.

За вредноста $x_{0_2} = \frac{14}{5}$ десната страна на равенството (8.21) е негативна, а левата позитивна, па оваа вредност отпаѓа. За $x_{0_1} = 10$, од (8.21) се добиваат две вредности за $y_0$, тоа се $y_{0_1} = \frac{9}{2}$ и $y_{0_2} = -\frac{9}{2}$.

Според тоа, постојат две точки кои ги задоволуваат барањата на задачата, тоа се $\left(10, \frac{9}{2}\right)$ и $\left(10, -\frac{9}{2}\right)$.

**Задача 8.31.** Да се докаже дека производот на растојанијата од која било точка на хиперболата

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

до нејзините асимптоти е константа.

**Решение.** Нека $M_0(x_0, y_0)$ е произволна точка од хиперболата, што значи дека е задоволено равенството

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Растојанијата од $M_0$ до асимптотите $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ се соодветно

$$d_1 = \frac{bx_0 - ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{bx_0 + ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

За нивниот производ добиваме:

$$d_1 d_2 = \frac{bx_0 - ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{bx_0 + ay_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

**Задача 8.32.** Да се најдат равенките на тангентите на хиперболата $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ кои се нормални на правата $4x + 3y - 7 = 0$.

**Решение.** Коефициентот на правец на правата $4x + 3y - 7 = 0$ е $k_1 = -\frac{4}{3}$, а коефициентот на правец на нејзе нормална права е $k = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{4}$. Значи, бараните равенки на тангенти имаат равенка

$$y = \frac{3}{4}x + n.$$

Од условот (8.17), каде $a^2 = 20,\ b^2 = 5,\ k = \frac{3}{4}$, имаме:

$$20 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 5 = n^2.$$

За $n$ се добиваат две решенија $n_{1/2} = \pm\frac{5}{2}$. Равенките на тангентите се:

$$t_1 : y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \quad \text{и} \quad t_2 : y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2},$$

односно

$$t_1 : 3x - 4y + 10 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 : 3x - 4y - 10 = 0.$$

**Задача 8.33.** Да се определи центарот, должините на оските, темињата и фокусите на хиперболата:

а) $x^2 - 2x - y^2 - 6y = 17$; б) $25x^2 + 50x - 4y^2 - 32y = 139$.

**Решение.** а) Дадената равенка ја трансформираме на следниов начин:

$$\begin{aligned} & x^2-2x-y^2-6y=17 \\ \iff\ & x^2-2x+1-1-(y^2+6y+9-9)=17 \\ \iff\ & (x-1)^2-(y+3)^2=9 \\ \iff\ & \frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{9}=1, \end{aligned}$$

од каде $a=3$, $b=3$, $p=1$ и $q=-3$.

Според тоа, центарот на хиперболата е $O(1,-3)$, должините на оските се $2a=2\cdot 3=6$ и $2b=2\cdot 3=6$, а темињата се:

$$A_1(-2,-3),\ A_2(4,-3),\ B_1(1,-6) \text{ и } B_2(1,0).$$

Бидејќи $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, за фокусите добиваме:

$$F_1(-3\sqrt{2},-3) \text{ и } F_2(3\sqrt{2},-3).$$

б) Со трансформација на дадената равенка добиваме:

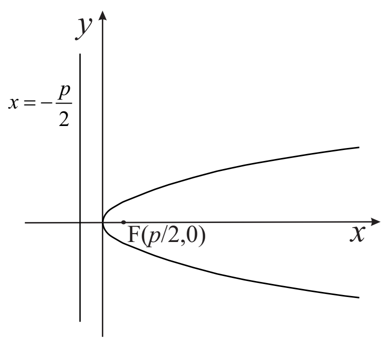
$$\begin{aligned} & 25x^2+50x-4y^2-32y=139 \\ \iff\ & 25(x^2+2x+1-1)-4(y^2+8y+16-16)=139 \\ \iff\ & 25(x+1)^2-4(y+4)^2=100 \\ \iff\ & \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y+4)^2}{25}=1, \end{aligned}$$

од каде $a=2$, $b=5$, $p=-1$ и $q=-4$.

Тогаш центарот на хиперболата е $O(-1,-4)$, должините на оските се $2a=2\cdot 2=4$ и $2b=2\cdot 5=10$, темињата се $A_1(-3,-4)$, $A_2(1,-4)$, $B_1(-1,-9)$ и $B_2(-1,1)$, а фокусите се $F_1(-\sqrt{29},-4)$ и $F_2(\sqrt{29},-4)$.

## 8.6 Парабола

*Парабола* е геометриско место на точки во рамнината такви што нивното растојание до една фиксна точка е еднакво со нивното растојание до една фиксна права. Фиксната точка се нарекува *фокус* на параболата и се означува со $F$, а фиксната права се нарекува *директриса* на параболата и се означува со $d$. По претпоставка дека фокусот не лежи на директрисата, нивното меѓусебно растојание се вика *параметар* на параболата и го означуваме со $p$, $p > 0$.




**Слика 8.18.**

Ако поставиме правоаголен координатен систем така што $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а директрисата има равенка $x = -\frac{p}{2}$ (слика 8.18), тогаш аналитички може да се дојде до *каноничната равенка* на параболата:

$$y^2 = 2px. \tag{8.22}$$

Пресекот на параболата со $x$-оската се нарекува *теме* на параболата, а $x$-оската е *оска на симетрија* на параболата. Во избраниот координатен систем, темето на параболата се совпаѓа со координатниот почеток.

Равенката (8.22) е равенка на парабола чиј фокус лежи на позитивниот дел од $x$-оската. Ако фокусот лежи на негативниот дел од $x$-оската (т.е. има координати $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, а директрисата има равенка $x = \frac{p}{2}$), тогаш каноничната равенка на параболата има облик

$$y^2 = -2px.$$

Ако пак, фокусот на параболата е $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ или $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ (т.е. лежи на позитивниот или негативниот дел од $y$-оската, соодветно), а директрисата има равенка $y = -\frac{p}{2}$ или $y = \frac{p}{2}$, соодветно (т.е. е паралелна со $x$-оската), тогаш каноничната равенка на параболата е

$$x^2 = 2py \text{ или } x^2 = -2py,$$

соодветно. Во овој случај темето на параболата е пресек на параболата со $y$-оската, а оска на симетрија на параболата е $y$-оската.

Да забележиме дека равенката $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е равенка на парабола чие теме има координати $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, а оска на симетрија е правата $x = -\frac{b}{2a}$ која е паралелна со $y$-оската (види глава 4). Оваа равенка на парабола може да се запише и во следниов вид

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

па нејзиниот график може да се добие со поместување на параболата $y = ax^2$ по должината на $x$ и $y$-оската (види глава 11).

### Заемен однос на права и парабола

За да се одреди заемната положба на правата $y = kx + n$ и параболата (8.22) потребно е да се реши системот од нивните равенки:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y \ = kx + n \end{cases} . \tag{8.23}$$

Ако системот (8.23) нема решение тогаш правата и параболата немаат заеднички точки. Ако системот (8.23) има две решенија, тогаш правата и параболата имаат две заеднички точки и велиме дека правата и параболата се сечат (правата се вика *секанта* на парабола). Ако системот (8.23) има едно решение, тогаш правата и параболата имаат една заедничка точка и велиме дека правата е *тангента* на параболата (заедничката точка се вика *допирна точка* на тангентата и параболата).

Услов правата $y = kx + n$ да биде тангента на параболата (8.22) е

$$p = 2kn. \tag{8.24}$$

Равенка на тангентата на параболата (8.22) во точката $M(x_0, y_0)$ од параболата е

$$y_0 y = p(x_0 + x). \tag{8.25}$$

**Задача 8.34.** Да се определи равенка на парабола со фокус $F(-7, 0)$ и директриса со равенка $x - 7 = 0$.

**Решение.** Бидејќи фокусот лежи на негативниот дел од $x$-оската, равенката на параболата ќе го има обликот

$$y^2 = -2px.$$

$p$ е растојанието од фокусот до директрисата, значи $p = 14$. Со тоа ја добивме равенката на хиперболата

$$y^2 = -28x.$$

**Задача 8.35.** Да се најдат равенките на тангентите на параболата $y^2 = 36x$ кои минуваат низ точката:

а) $A(1,6)$; б) $B(2,9)$.

**Решение.** Од равенката на параболата добиваме дека нејзиниот параметар $p = 18$.

а) Се проверува дека точката $A$ лежи на дадената парабола, па од равенката (8.25) следува

$$6y = 18(1+x),$$

односно равенката на тангентата е $y = 3x + 3$.

б) Точката $B$ не лежи на параболата, поточно таа лежи надвор од параболата бидејќи $9^2 > 36 \cdot 2$. Тогаш, од точката $B$ може да се повлечат две тангенти на параболата. Нека бараната тангента на параболата има равенка $y = kx + n$. Според условот на задачата, тангентите минуваат низ $B$, па добиваме:

$$9 = 2k + n.$$

Бидејќи $p = 18$, од условот (8.24) добиваме:

$$18 = 2kn.$$

Од последниве две равенки се добива квадратната равенка

$$2k^2 - 9k + 9 = 0,$$

која има две решенија $k_1 = 3$ и $k_2 = \frac{3}{2}$. Бидејќи $n = 9 - 2k$, за $n$ ги добиваме вредностите $n_1 = 3$ и $n_2 = 6$.

Според тоа, бараните равенки на тангенти се:

$$t_1 : 3x - y + 3 = 0 \quad \text{и} \quad t_2 : 3x - 2y + 12 = 0.$$

## Задачи за вежбање

**Задача 8.36.** Дадена е точката $M(x, y)$. Да се определат координатите на точката симетрична со неа во однос на:
а) $x$-оската;
б) $y$-оската;
в) координатниот почеток;
г) симетралата на првиот и третиот квадрант;
д) симетралата на вториот и четвртиот квадрант.

**Одговор.** а) $(x, -y)$, б) $(-x, y)$, в) $(-x, -y)$, г) $(y, x)$, д) $(-y, -x)$.

**Задача 8.37.** Дадени се две соседни темиња на еден паралелограм $A(-3, 5)$ и $B(1, 7)$ и пресечната точка на неговите дијагонали $S(1, 1)$. Да се определат координатите на другите темиња $C$ и $D$ .

**Одговор.** $C(5, -3)$, $D(1, -5)$.

**Задача 8.38.** Точката $S(-3, 1)$ ја дели отсечката $AB$ чии крајни точки се $A(a, 5)$ и $B(-1, b)$ во однос 3:2. Да се одредат непознатите координати на точките $A$ и $B$.

**Одговор.** $a = -6$, $b = -5/3$.

**Задача 8.39.** Користејќи ја особината дека тежиштето ја дели секоја тежишна линија во однос $2 : 1$, да се изведат следниве формули за координатите на тежиштето $T(x,\, y)$ на триаголник $ABC[\,A(x_1,\, y_1),\, B(x_2,\, y_2),\, C(x_3,\, y_3)]$:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

**Задача 8.40.** Точките $A(-2,4)$, $B(0,4)$ и $C(2,-2)$ се темиња на триаголникот $ABC$. Да се одредат координатите на неговото тежиште $T$, должините на неговите средни линии $s_1$, $s_2$ и $s_3$ и неговата плоштина.

**Одговор.** $T(0,2)$, $s_1 = 1$, $s_2 = \sqrt{13}$, $s_3 = \sqrt{10}$, $P = 6$.

**Задача 8.41.** Да се напишат во сегментен вид следниве прави:

а) $3x - 4y - 24 = 0$; б) $35x + 9y + 15 = 0$.

Потоа да се определат нивните отсечоци на координатните оски.

**Одговор.** а) $\dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{-6} = 1$, б) $\dfrac{x}{-\frac{3}{7}} + \dfrac{y}{-\frac{5}{3}} = 1$.

**Задача 8.42.** Да се напише равенка на права која минува низ точката $M(-1,3)$ и:
а) е паралелна на $x$-оската;
б) е паралелна на $y$-оската;
в) е нормална на правата $2x - 3y = 6$;
г) зафаќа агол $\dfrac{\pi}{3}$ со правата $y = 2$.

**Одговор.** а) $y = 3$, б) $x = -1$, в) $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$,
г) $y = \sqrt{3}x + 3 + \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3}$.

**Задача 8.43.** Дадени се точките $A(4,-2)$ и $B(-3,-4)$. Да се напише равенката на правата $AB$ во општ облик и да се определат нејзините отсечоци на координатните оски. Потоа да се напише равенката на симетралата $s$ на отсечката $AB$.

**Упатство.** Симетрала на отсечка е права која е нормална на неа и минува низ нејзината средина.

**Одговор.** $2x - 7y - 22 = 0$, $m = 11$, $n = -\dfrac{22}{7}$, $s : y = -\dfrac{7}{2}x - \dfrac{5}{4}$.

**Задача 8.44.** Точките $A(0, 2)$, $B(5, 7)$ и $C(3, -2)$ се темиња на триаголникот $ABC$. Да се пресмета висината $h_c$ на триаголникот спуштена од темето $C$ кон основата $AB$ и аголот при темето $A$.

**Одговор.** $h_c = 7\sqrt{2}/2$, $\operatorname{tg} \alpha = 7$.

**Задача 8.45.** Дадени се равенките на две соседни страни на еден паралелограм, $2x + y = 1$ и $8x + 3y + 1 = 0$, и равенката на една негова дијагонала $3x + 2y + 3 = 0$. Да се одредат координатите на пресечната точка $S$ на дијагоналите, како и периметарот и плоштината на паралелограмот.

**Одговор.** $S(3, -6)$, $L = 14\sqrt{5} + 2\sqrt{73}$, $P = 14$.

**Задача 8.46.** Да се одреди ортогоналната проекција $A'$ на точката $A\Big(1\dfrac{1}{6}, 2\dfrac{1}{4}\Big)$ врз правата $6x - 4y - 15 = 0$.

**Упатство.** Ортогоналната проекција на точката $A$ врз правата $p$ се добива како пресек на правата $p$ и нормалата спуштена од точката $A$ кон правата $p$.

**Одговор.** $A'\left(3\dfrac{5}{39}, \dfrac{49}{52}\right)$.

**Задача 8.47.** Да се определат координатите на центарот $C$ и радиусот $r$ на кружницата зададена со равенката

$$x^2 + y^2 + 6x - 9y = 2.$$

Потоа да се напише равенка на кружница која е концентрична со дадената кружница и минува низ координатниот почеток.

**Упатство.** Концентрични кружници се кружнициите кои имаат ист центар.

**Одговор.** $C\left(-3, \dfrac{9}{2}\right)$, $r = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$, $(x+3)^2 + \left(y - \dfrac{9}{2}\right)^2 = \dfrac{117}{4}$.

**Задача 8.48.** Да се напише равенка на опишаната кружница околу триаголникот со темиња $A(0,2)$, $B(0,-2)$ и $C(4,0)$.

**Одговор.** $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{25}{4}$.

**Задача 8.49.** Да се определат пресечните точки на правата $2x + y = 10$ и кружницата $x^2 + y^2 = 25$. Потоа да се напишат равенките на тангентите на дадената кружница во добиените пресечни точки.

**Одговор.** Правата ја сече кружницата во точките $A(5,0)$ и $B(3,4)$, $t_A : x = 5$, $t_B : 3x + 4y = 25$.

**Задача 8.50.** Каде лежи точката $M(2,0)$ во однос на кружницата $x^2 + (y-1)^2 = 1$? Да се напише равенка на тангентата повлечена од точката $M$ кон дадената кружница.

**Одговор.** Точката $M$ лежи надвор од кружницата.
Од точката $M$ може да се повлечат две тангенти на дадената кружница: $t_1 : 4x + 3y = 8,\ t_2 : y = 0$.

**Задача 8.51.** Две темиња на елипсата се $A_1(6, 0)$ и $A_2(-6, 0)$, а фокусите се $F_1(4, 0)$ и $F_2(-4, 0)$. Да се определи равенката на елипсата.

**Одговор.** $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$.

**Задача 8.52.** Да се определи $c$ во равенката $x + 2y = c$, така што дадената права да биде тангента на елипсата $x^2+2y^2 = 12$. Потоа да се определи растојанието $d$ од допирната точка до центарот на елипсата.

**Одговор.** $c = \pm 6,\ d = 2\sqrt{2}$.

**Задача 8.53.** Дадена е елипсата $x^2+3y^2 = 28$. Да се определат пресечните точки $M$ и $N$ на елипсата и правата $5x - 3y = 14$, а потоа да се определат тангентите на елипсата во точките $M$ и $N$.

**Одговор.** $M(4, 2)$, $N(1, -3)$, $t_M : 2x + 3y = 14$, $t_N : x - 9y = 28$.

**Задача 8.54.** Дадена е правата $y = \dfrac{5}{2}x + m$ и хиперболата

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Да се определи за кои реални вредности на $m$, правата
а) ја сече хиперболата;
б) ја допира хиперболата;
в) нема заеднички точки со хиперболата.

**Одговор.** а) $|m| > \frac{9}{2}$, б) $|m| = \frac{9}{2}$, в) $|m| < \frac{9}{2}$.

**Задача 8.55.** Да се пресмета плоштината на триаголникот образуван од асимптотите на хиперболата $9x^2 - 4y^2 = 36$ и правата $9x + 2y - 24 = 0$.

**Одговор.** $P = 12$.

**Задача 8.56.** Да се определат фокусот и равенката на директрисата на параболата $x^2 = -12y$.

**Одговор.** $F(0, -3)$, $y = 3$.

**Задача 8.57.** Колку заеднички точки имаат дадената права и парабола:
а) $x - y + 2 = 0,\ y^2 = 8x$;
б) $8x + 3y - 15 = 0,\ x^2 = -3y$;
в) $5x - y - 15 = 0,\ y^2 = -5x$?

**Одговор.** а) Една заедничка точка, б) Две заеднички точки,
в) Немаат заеднички точки.

**Задача 8.58.** Да се определи каква крива е зададена со дадените равенки и да се скицираат нивните графици:
а) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$;
б) $x^2 - 2x + 4y^2 - 3 = 0$;
в) $9x^2 - 18x = 4y^2 + 8y + 31$;
г) $5x^2 + 3x - y - 1 = 0$.

**Одговор.** а) кружница, $(x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{2}$,

б) елипса, $\dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2=1$,

в) хипербола, $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$,

г) парабола, $y=5\left(x+\dfrac{3}{10}\right)^2-\dfrac{29}{20}$.

# 9 Планиметрија и стереометрија

## 9.1 Планиметрија

Планиметрија е делот од геометријата кој ги проучува ограничените делови од рамнината, наречени геометриски слики.

Секоја геометриска слика има *периметар* и *плоштина*, што се означуваат со $L$ и $P$, соодветно. Периметарот (кој уште се нарекува обиколка), претставува збир од должините на страните на геометриската слика. Плоштината е мерка за големината на делот од рамнината затворен со геометриската слика. За различни геометриски слики, периметарот и плоштината се пресметуваат на различни начини.

Во ова поглавје ќе се задржиме на основните елементи и особини на најчесто користените геометриски слики.

### 1. Триаголник

Нека триаголникот ABC има страни $\overline{\mathrm{AB}} = c$, $\overline{\mathrm{BC}} = a$ и $\overline{\mathrm{CA}} = b$, висини $h_a = \overline{\mathrm{AA'}}$, $h_b = \overline{\mathrm{BB'}}$ и $h_c = \overline{\mathrm{CC'}}$ спуштени кон страните $a, b$ и $c$, соодветно и агли $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ при темето A, B и C, соодветно (слика 9.1). Збирот на аглите на триаголникот е 180°, т.е. важи:

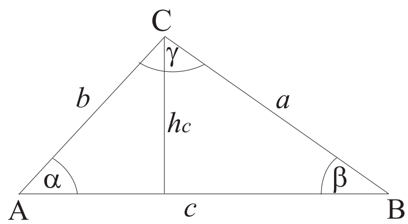
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Периметар и плоштина на триаголник се пресметуваат со формулите:

$$L = a + b + c\,,$$

$$P = \frac{a\,h_a}{2} = \frac{b\,h_b}{2} = \frac{c\,h_c}{2},$$

соодветно.




**Слика 9.1.**

Висините во даден триаголник се сечат во една точка што се вика *ортоцентар* на триаголникот и најчесто се означува со $H$.

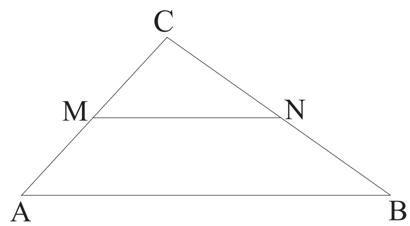
*Тежишна линија* во триаголник е отсечката што го поврзува темето на триаголникот со средината на спротивната страна. Сите тежишни линии на еден триаголник се сечат во една точка наречена *тежиште* на тој триаголник, која најчесто се означува со T. Познато е дека тежиштето ја дели секоја од тежишните линии во однос $2:1$.

Симетралите на страните во еден триаголник се сечат во една точка која е *центар на опишаната кружница* околу тој триаголник. Симетралите на аглите во триаголникот се сечат во една точка која е *центар на впишаната кружница* во тој триаголник.

*Средна линија* (*медијана*) е отсечка што поврзува средини на две страни во триаголникот. Таа е паралелна со третата страна и по должина е половина од неа.

На сликата 9.2 е прикажана средната линија $\overline{\mathrm{MN}}$ на триаголникот ABC. За неа важи:

$$\overline{\mathrm{MN}} \,||\, \overline{\mathrm{AB}} \text{ и } \overline{\mathrm{MN}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}.$$




**Слика 9.2.**

Некои поважни теореми, односно формули, кои важат за произволен триаголник се:

Херонова формула: $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \dfrac{a+b+c}{2}.$

Синусна теорема: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}.$

Косинусна теорема:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Плоштината на триаголникот може да се пресмета и со формулите:

$$P = \frac{ab\,\sin\gamma}{2} = \frac{bc\,\sin\alpha}{2} = \frac{ca\,\sin\beta}{2}.$$

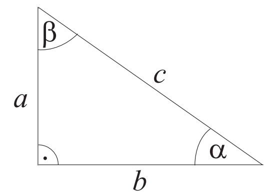
Радиусот на впишаната кружница во триаголник се пресметува со формулата
$$r = \frac{P}{s}.$$

Радиусот на опишаната кружница околу триаголник се пресметува со формулата

$$R = \frac{abc}{4P}.$$

### Правоаголен триаголник

Триаголникот кој има еден прав агол се вика правоаголен триаголник. Страните $a$ и $b$ кои зафаќаат прав агол се викаат *катети*, а страната $c$ која лежи наспроти правиот агол е *хипотенуза* (слика 9.3).




**Слика 9.3.**

За правоаголниот триаголник важи Питагоровата теорема:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Да забележиме дека во правоаголниот триаголник, двете катети имаат улога на основа и висина во триагоникот, па затоа основната формула за плоштина на правоаголниот триаголник го добива обликот $P = \frac{a\,b}{2}$.

### Рамнокрак триаголник

Аглите при основата кај рамнокракиот триаголник се еднакви, а неговите периметар и плоштина се пресметуваат со формулите:

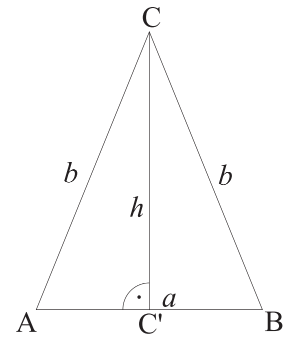
$$L = a + 2b, \qquad P = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

соодветно.

### Рамностран триаголник

Триаголникот кој има две еднакви страни се вика рамнокрак триаголник. Еднаквите страни $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}} = b$ се нарекуваат *краци*, а третата страна $\overline{\mathrm{AB}} = a$ е *основа* на триаголникот. Од правоаголниот триаголник ACC', за висината на рамнокракиот триаголник добиваме:

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$




**Слика 9.4.**

Триаголникот кај кој сите страни се еднакви се вика рамностран триаголник. Кај рамностраниот триаголник сите внатрешни агли и сите висини се еднакви меѓу себе. Висините се истовремено и тежишни линии, симетрали на аглите и симетрали на страните во овој триаголник, а ортоцентарот, тежиштето, центарот на впишаната и центарот на опишаната кружница се совпаѓаат. Ако страната на триаголникот е $a$, а висината $h$, тогаш важи:

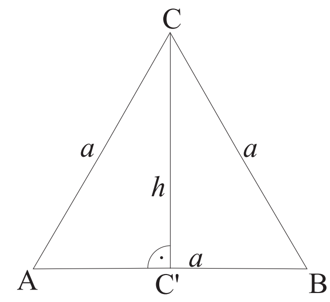
$$L = 3a, \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Радиусот на впишаната кружница во рамностран триаголник се пресметува со формулата

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

а радиусот на неговата опишана кружница со

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$




**Слика 9.5.**

## 2. Правилен многуаголник

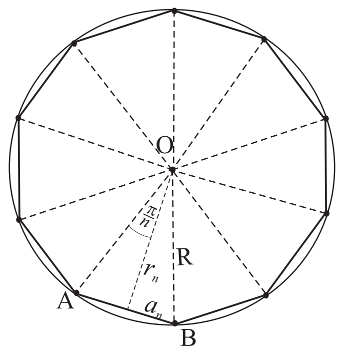
Многуаголникот кај којшто сите страни и сите агли се еднакви, се вика *правилен многуаголник* (слика 9.6). Триаголникот OAB се нарекува *карактеристичен триаголник.* Ако страната на многуаголникот е $a_n$, а висината на карактеристичниот триаголник спуштена од темето O кон страната AB е $r_n$, тогаш важи:

$$L_n = na_n, \quad P_n = \frac{1}{2}na_nr_n.$$

Во секој правилен многуаголник може да се впише и опише кружница. На сликата 9.6, со $r_n$ е означен радиусот на впишаната кружница, а со $R$ радиусот на опишаната кружница.

## 3. Паралелограм

Четириаголник што има два пара паралелни страни се вика *паралелограм.* Спротивните агли кај паралелограмот се еднакви меѓу себе, а соседните агли се суплементни (т.е. нивниот збир е 180°). Дијагоналите кај паралелограмот се преполовуваат.

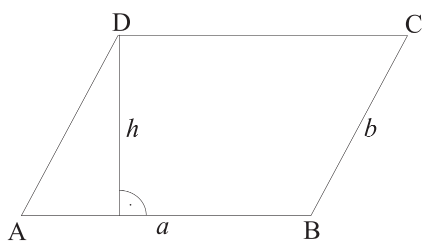



**Слика 9.6.**

Периметарот и плоштината на паралелограмот се пресметуваат со формулите:

$$L = 2(a + b), \quad P = a\,h,$$

соодветно.




**Слика 9.7.**

Дијагоналите на ромбот се заемно нормални, па од правоаголниот триаголник $ABS$ (види слика 9.8) важи:

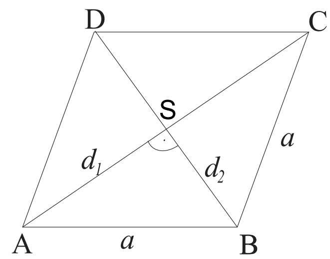
$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2.$$

Паралелограмот кој содржи прав агол се вика *правоаголник*. Дијагоналите во правоаголникот се еднакви меѓу себе

Паралелограмот што содржи пар соседни еднакви страни се вика *ромб*. За периметарот и плоштината на ромбот важи:

$$L = 4a\,, \quad P = \frac{d_1\,d_2}{2},$$

соодветно, каде што $d_1$ и $d_2$ се дијагоналите на ромбот.




**Слика 9.8.**

и се преполовуваат со нивната пресечна точка. Околу секој правоаголник може да се опише кружница чиј центар е во пресекот на неговите дијагонали. Плоштина на правоаголник се пресметува со формулата $P = a\,b$.

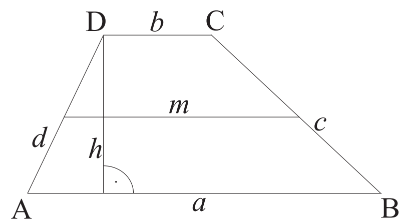
*Квадрат* е паралелограм што содржи прав агол и пар соседни еднакви страни (т.е. четириаголник на кој сите страни му се еднакви и сите агли му се прави). Дијагоналите на квадратот се еднакви и заемно нормални меѓу себе. Пресекот на дијагоналите на квадратот е центар на неговата впишана и опишана кружница. За периметарот и плоштината на квадратот важи $L = 4a$ и $P = a^2$.

Паралелограмот што не содржи пар соседни еднакви страни и не содржи прав агол се вика *ромбоид*.

### 4. Трапез

Четириаголник со еден пар паралелни страни се вика *трапез*. Паралелните страни се нарекуваат *основи* на трапезот и се означуваат со $a$ и $b$, а другите две страни се *краци* и се означуваат со $c$ и $d$. Средната линија во трапезот $m$ е отсечка која ги поврзува средините на краците (слика 9.9).

За периметарот и плоштината на трапезот важат следниве




**Слика 9.9.**

формули:

$$L = a + b + c + d, \quad m = \frac{a+b}{2}, \quad P = \frac{a+b}{2}h = mh,$$

каде што $h$ е висината на трапезот.

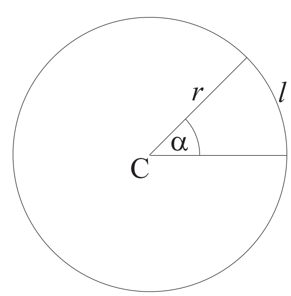
Трапезот со еднакви краци се нарекува *рамнокрак трапез.*

Четириаголникот кој нема паралелни страни е наречен *трапезоид.*

## 5. Круг

Како што беше наведено во глава 8, *кружница* претставува множеството точки во рамнината што се на еднакво растојание од дадена точка C.

Точката C е *центар* на кружницата, а константното растојание е *радиус* на кружницата и се означува со $r$. Множество од сите точки во рамнината чие растојание до дадена точка O не е поголемо од $r$ се вика *круг.*




**Слика 9.10.**

Периметарот на кружницата и плоштината на кругот се пресметуваат со формулите:

$$L = 2r\pi, \quad P = r^2\pi,$$

соодветно, каде што $r$ е радиусот на кружницата, односно кругот. Должината $l$ на кружниот лак што одговара на централниот агол $\alpha$ се пресметува со формулата

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}.$$

**Задача 9.1.** Нека $ABC$ е рамностран триаголник со страна $a$ и $O$ е произволна точка во триаголникот. Да се покаже дека збирот од растојанијата на точката $O$ до страните на триаголникот е еднаков на неговата висина.

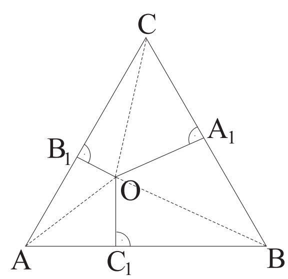
**Решение.** Треба да покажеме дека $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = h$ (види ја сликата 9.11). Плоштината на триаголникот $ABC$ може да се претстави како збир од плоштините на триаголниците $ABO$, $BCO$ и $CAO$.

За плоштината на овие триаголници добиваме:

$$P_{\triangle ABO} = \frac{a\,\overline{OC_1}}{2},$$

$$P_{\triangle BCO} = \frac{a\,\overline{OA_1}}{2},$$

$$P_{\triangle CAO} = \frac{a\,\overline{OB_1}}{2}.$$



**Слика 9.11.**

Оттука,

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABO} + P_{\triangle BCO} + P_{\triangle CAO} = \frac{a}{2}\left(\overline{OC_1} + \overline{OA_1} + \overline{OB_1}\right) = \frac{ah}{2},$$

па

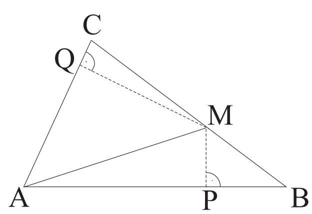
$$\overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1} = h.$$

**Задача 9.2.** На страната $BC$ од триаголникот $ABC$ е дадена точка $M$. Од неа се спуштени нормали на страните $AB$ и $AC$. Пресечните точки на овие нормали со страните $AB$ и $AC$ се $P$ и $Q$, соодветно. Ако $\overline{MP} = a\,\overline{MQ}$ и $a\,\overline{AB} + \overline{AC} = b$, да се изрази односот меѓу плоштината на триаголникот $ABC$ и должината на отсечката $\overline{MP}$ преку $a$ и $b$.

**Решение.** Плоштината на триаголникот $ABC$ може да се претстави како збир од плоштините на триаголниците $ABM$ и $AMC$:

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABM} + P_{\triangle AMC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{MP}}{2} + \frac{\overline{AC}\cdot\overline{MQ}}{2} =$$

$$= \frac{\overline{AB}\cdot\overline{MP} + \overline{AC}\cdot\frac{1}{a}\overline{MP}}{2} = \frac{\frac{1}{a}\overline{MP}(a\,\overline{AB} + \overline{AC})}{2} = \frac{\frac{1}{a}\overline{MP}\cdot b}{2} = \frac{b\,\overline{MP}}{2a}.$$



**Слика 9.12.**

Оттука,

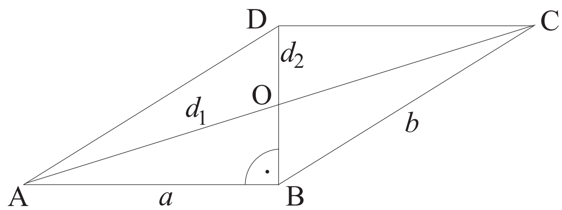
$$\frac{P_{\triangle ABC}}{\overline{MP}} = \frac{b\,\overline{MP}}{2a\,\overline{MP}} = \frac{b}{2a}.$$

**Задача 9.3.** Да се пресмета плоштината и едната страна на паралелограмот чии дијагонали се 26 и 10, а другата негова страна е 12.

**Решение.** Да ја означиме со $O$ пресечната точка на дијагоналите на паралелограмот. Дијагоналите кај паралелограмот се преполовуваат, па според тоа:

$$\overline{AO} = \overline{OC} = 13,\ \overline{BO} = \overline{OD} = 5.$$

Триаголникот $ABO$ е правоаголен со катети $\overline{AB}$ и $\overline{BO}$ и




**Слика 9.13.**

хипотенуза $\overline{AO}$, бидејќи неговите страни $\overline{AB} = 12$, $\overline{AO} = 13$ и $\overline{BO} = 5$ формираат Питагорова тројка (слика 9.13). Тогаш,

$$P = \overline{AB} \cdot \overline{BD} = 12 \cdot 10 = 120,$$

а

$$b = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{12^2 + 10^2} = 2\sqrt{61}.$$

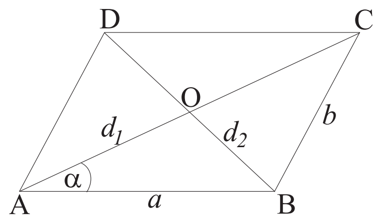
**Задача 9.4.** Страните на еден паралелограм се 13 и 19, а поголемата дијагонала е 24. Да се пресмета помалата дијагонала.

**Решение.** Нека $\overline{AB} = a = 13$, $\overline{BC} = b = 19$ и $\overline{AC} = d_1 = 24$ (види слика 9.14). Применувајќи ја косинусната теорема на триаголникот $ABO$ (слика 9.14), добиваме:

$$\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AO} \cos\alpha,$$

односно

$$\left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2 = \overline{AB}^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 - 2\overline{AB}\cdot\frac{\overline{AC}}{2}\cos\alpha. \tag{9.1}$$




**Слика 9.14.**

Ако пак ја примениме косинусната теорема на триаголникот $ABC$, имаме:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\alpha,$$

од каде што добиваме дека $\cos\alpha = \dfrac{8}{13}$.

Тогаш од (9.1) следува

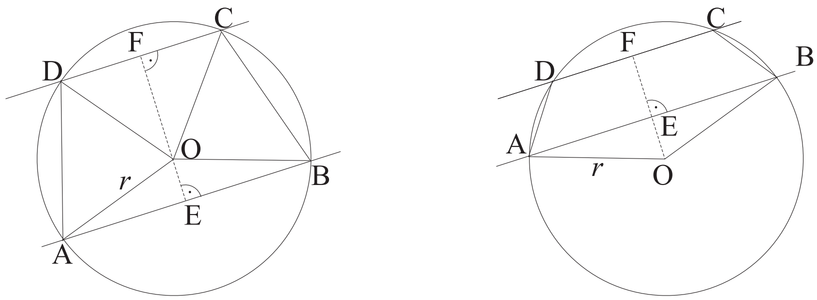
$$\left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2 = 13^2 + 12^2 - 13\cdot 12\cdot\frac{8}{13} = 121,$$

а оттука добиваме дека помалата дијагонала е $\overline{BD} = 11$.

**Задача 9.5.** Во круг со радиус 25 должините на две тетиви се 40 и 14. Да се пресмета плоштината на впишаниот трапез чиишто основи се дадените тетиви.

**Решение.** Нека $\overline{AB} = a = 40$ и $\overline{DC} = b = 14$. Плоштината на трапезот е

$$P = \frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}\cdot\overline{EF} = \frac{a+b}{2}\cdot\overline{EF}.$$




**Слика 9.15.**

Задачата има две решенија (слика 9.15): $\overline{EF} = \overline{OF} \pm \overline{OE}$.

Од правоаголните триаголници $AEO$ и $DFO$, соодветно, добиваме:

$$\begin{aligned} \overline{OE} &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15, \\ \overline{OF} &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24. \end{aligned}$$

Според тоа, $\overline{EF} = 39$, а $P = 1053$, односно $\overline{EF} = 9$, а $P = 243$.

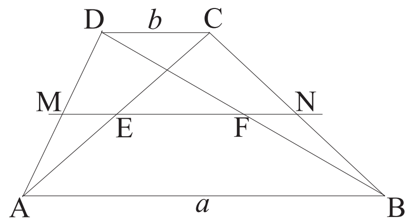
**Задача 9.6.** Нека основите на еден трапез се $a$ и $b$. Да се определи должината на отсечката што ги срзува средините на дијагоналите на трапезот.

**Решение.** Нека со $E$ и $F$ ги означиме средините на дијагоналите на трапезот, а со $M$ и $N$ средините на неговите краци (слика 9.16). Отсечката $\overline{MN}$ претставува средна линија на трапезот, т.е.

$$\overline{MN} = \overline{ME} + \overline{EF} + \overline{FN} = \frac{a+b}{2}. \tag{9.2}$$

Отсечката $\overline{ME}$ е средна линија на триаголникот $DCA$, а $\overline{FN}$ е средна линија на триаголникот $DCB$, па имаме:

$$\overline{ME} = \overline{FN} = \frac{b}{2}.$$




**Слика 9.16.**

Од (9.2) добиваме,

$$\overline{EF} = \overline{MN} - \overline{ME} - \overline{FN} = \frac{a+b}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

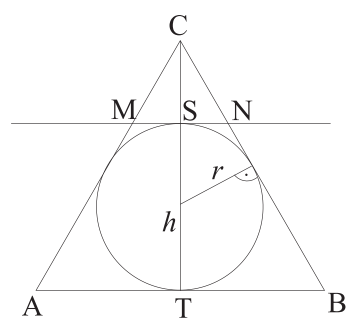
**Задача 9.7.** Во рамностран триаголник $ABC$ е впишана кружница и е повлечена тангента на кружницата паралелна со страната $AB$ која ги сече другите две страни од триаголникот во точките $M$ и $N$. Да се определат периметарот и плоштината на добиениот трапез $ABNM$.

**Решение.** Радиусот на впишаната кружница во рамностран триаголник е $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, а висината на триаголникот е $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, каде што $a$ е страната на триаголникот.

Очигледно е дека (слика 9.17)

$$\overline{ST} = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Не е тешко да се утврди дека триаголниците $ABC$ и $MNC$ се слични (и рамнострани), а оттука следува дека $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{CT}}{\overline{CS}}$.




**Слика 9.17.**

Тогаш,

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CS}}{\overline{CT}} = \frac{a(h-2r)}{h} = \frac{a}{3},$$

и уште $\overline{MC} = \overline{NC} = \frac{a}{3}$, а $\overline{BN} = \overline{MA} = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$.

Според тоа,

$$L = \overline{AB} + \overline{BN} + \overline{NM} + \overline{MA} = \frac{8a}{3},$$

$$P = \frac{a+b}{2}\overline{ST} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{9}.$$

**Задача 9.8.** Основите на еден трапез се $a = 30$ и $b = 13$, а неговите краци се $c = 13$, $d = 20$. Да се пресмета плоштината на трапезот.

**Решение.** Нека отсечката $DE$ е паралелна со страната $BC$, од каде следува дека четириаголникот $EBCD$ е паралелограм (види слика 9.18). Плоштината на трапез се пресметува со формулата $P = \frac{a+b}{2}h$.

Висината на трапезот е истовремено висина и на триаголникот $AED$ чиишто страни се $\overline{AE} = a - b$, $\overline{DE} = c$ и $\overline{AD} = d$. Плоштината на триаголникот $AED$ ќе ја определиме користејќи ја Хероновата формула:

$$P_{\triangle AED} = \sqrt{s\left(s - \overline{AE}\right)\left(s - \overline{DE}\right)\left(s - \overline{AD}\right)} = 20\sqrt{30},$$

каде што

$$s = \frac{\overline{AE} + \overline{DE} + \overline{AD}}{2} = \frac{a - b + c + d}{2} = 25.$$

Така, за плоштината на трапезот добиваме:

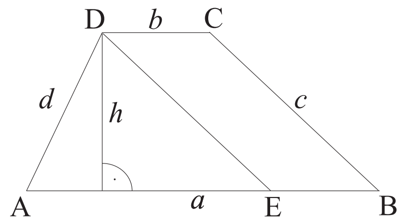
$$P = \frac{860\sqrt{30}}{17}.$$

Од друга страна

$$P_{\triangle AED} = \frac{\overline{AE} \cdot h}{2} = \frac{(a-b)h}{2},$$

од каде што

$$h = \frac{2P_{\triangle AED}}{a-b} = \frac{40\sqrt{30}}{17}.$$




**Слика 9.18.**

**Задача 9.9.** Во круг со радиус $R = 10$ се впишани правилен триаголник, правилен четириаголник и правилен шестаголник. Да се пресметаат периметарот на кружницата и плоштината на кругот, како и периметрите и плоштините на впишаните многуаголници.

**Решение.** Правилен триаголник е рамностраниот триаголник, а правилен четириаголник е квадратот. Нека со $L_k$ го означиме периметарот на кружницата, а со $P_k$ плоштината на кругот, со $L_3$, $L_4$ и $L_6$ периметрите, а со $P_3$, $P_4$ и $P_6$ плоштините на впишаниот триаголник, четириаголник и шестаголник, соодветно. Тогаш имаме:

$$L_k = 2R\pi = 20\pi, \qquad P_k = R^2\pi = 100\pi.$$

Карактеристичниот триаголник за квадратот е рамнокрак правоаголен триаголник (види слика 9.20), па од Питагоровата теорема се добива $a^2 = R^2 + R^2$. Оттука $a = R\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$, па

$$L_4 = 4a = 4 \cdot 10\sqrt{2} = 40\sqrt{2},$$
$$P_4 = a^2 = 200.$$

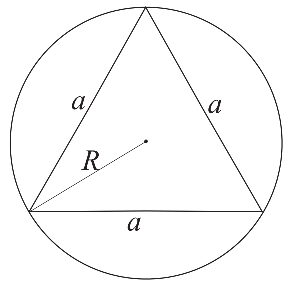
За впишаниот правилен шестаголник, карактеристичниот триаголник е рамностран триаголник (види слика 9.21), од каде се добива $a = R = 10$. Според тоа,

$$L_6 = 6a = 60,$$

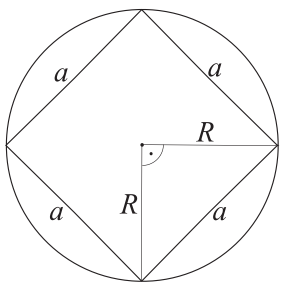
За радиусот на опишаната кружница околу рамностран триаголник важи $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, од каде $a = \sqrt{3}R = 10\sqrt{3}$. За периметарот и плоштината на впишаниот триаголник се добива:

$$L_3 = 3a = 3 \cdot 10\sqrt{3} = 30\sqrt{3},$$

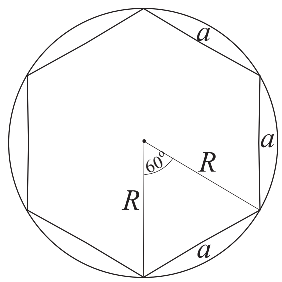
$$P_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{300\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3}.$$




**Слика 9.19.**




**Слика 9.20.**




**Слика 9.21.**

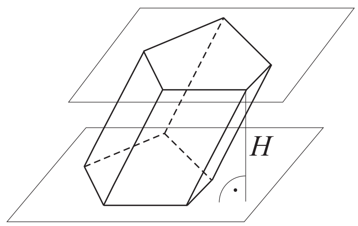
$$P_6 = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\frac{100\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}\,.$$

## 9.2 Стереометрија

Стереометрија е дел од геометријата кој ги проучува ограничените делови од просторот, наречени геометриски тела. Во ова поглавје ќе ги наведеме основните својства на најчесто користените геометриски тела.

## 1. Призма

*Призма* е полиедар составен од два меѓу себе складни многуаголници наречени *основи* (*бази*), кои лежат во две паралелни рамнини, а другите ѕидови се паралелограми кои имаат по една заедничка страна со секоја од основите и се нарекуваат *бочни ѕидови* на призмата (види слика 9.22).




**Слика 9.22.**

Плоштината на основите ќе ја обележуваме со $B$. Бочните ѕидови ја образуваат *бочната површина* на призмата чија плоштина ќе ја означуваме со $M$. Растојанието меѓу паралелните рамнини на основите се нарекува *висина* на призмата и ја означуваме со $H$. Плоштината $P$ и волуменот $V$ на призмата се пресметуваат со формулите:

$$P = 2B + M, \text{ односно } V = B\,H.$$

Во зависност од многуаголникот кој е основа на призмата, таа може да биде тристрана (триаголна), четиристрана (четириаголна) итн.

Призмата кај која бочните рабови се нормални на рамнините на основата се вика *права* призма. Во спротивно, призмата е *коса*. Кај правата призма бочниот раб е еднаков со висината на призмата.

Правата призма чијашто основа е правилен многуаголник се нарекува *правилна* призма.

Правата којашто минува низ центрите на впишаната и опишаната кружница на основите кај правилна призма се вика *оска* на призмата.

Отсечката која сврзува две темиња на призмата кои не лежат на ист ѕид се вика *просторна дијагонала* на призмата.

Пресекот на призмата со рамнина паралелна со рамнините на основите е многуаголник складен со основите на призмата и се нарекува *паралелен пресек.* Пресекот на призмата со рамнина која е нормална на рамнините на основите е многуаголник кој се нарекува *нормален пресек* на призмата. Пресекот на призмата со рамнина која содржи два бочни раба што не лежат на ист бочен ѕид на призмата е многуаголник кој се нарекува *дијагонален пресек* на призмата.

*Квадарот* (*паралелопипед*) е права призма со основа правоаголник (слика 9.23). Ако неговите рабови се $a$, $b$ и $c$, тогаш неговата плоштина и волумен се пресметуваат со формулите:

$$P = 2(ab + ac + bc), \qquad V = a\,b\,c,$$

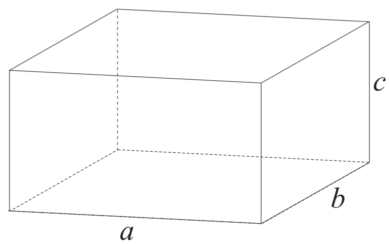
соодветно.

*Коцката* е правилна четириаголна призма кај која сите рабови имаат еднаква должина (слика 9.24). Ако нејзиниот раб е $a$, тогаш нејзината плоштина и волумен се пресметуваат со формулите:

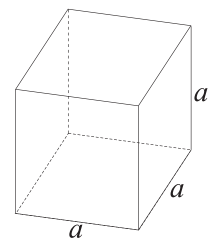
$$P = 6a^2, \text{ односно } V = a^3.$$

## 2. Пирамида и пресечена пирамида

*Пирамида* е полиедар составен од еден многуаголник наречен *основа* (*база*) и триаголници со заедничко теме и по една заедничка страна со основата наречени *бочни ѕидови* на пирамидата (слика 9.25). Заедничкото теме на бочните ѕидови




**Слика 9.23.**




**Слика 9.24.**

се вика *врв* на пирамидата. Растојанието од врвот на пирамидата до рамнината на основата е *висина* на пирамидата, а висината на кој било бочен ѕид е *бочна висина* (*апотема*) на пирамидата.

Плоштината на основата на пирамидата ја бележиме со $B$. Бочните ѕидови ја образуваат *бочната површина* на пирамидата која ја бележиме со $M$. За пресметување на плоштината и волуменот на пирамида имаме:

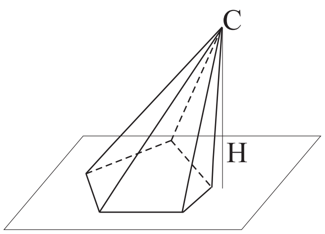
$$P = B + M, \qquad V = \frac{B\,H}{3},$$

соодветно.

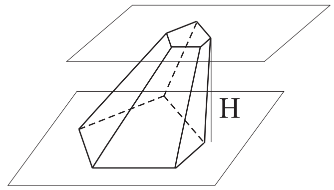
Во зависност од многуаголникот кој е основа на пирамидата таа може да биде: тристрана (триаголна), четиристрана (четириаголна) итн.

Ако основата е правилен многуаголник, тогаш пирамидата е правилна. *Тетраедар* е тристрана правилна пирамида во која сите рабови имаат еднаква должина.

Пресекот на пирамидата со рамнина што ги сече сите бочни рабови, а не минува низ нејзиниот врв се вика *бочен пресек*. Специјално, ако рамнината е паралелна со рамнината на основата на пирамидата, пресекот е многуаголник сличен на основата на пирамидата и се вика *паралелен пресек*.




**Слика 9.25.**




**Слика 9.26.**

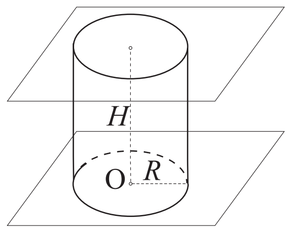
Делот од пирамида ограничен со нејзината основа и еден нејзин паралелен пресек се вика *пресечена пирамида* (слика 9.26) Ако со $B$ и $B_1$ ги означиме плоштините на основите на пресечената пирамида, со $M$ плоштината на бочната површина, а со $H$ нејзината висина, тогаш за плоштината и волуменот на пресечената пирамида ќе важат формулите:

$$P = B + B_1 + M, \qquad V = \frac{(B + \sqrt{BB_1} + B_1)H}{3},$$

соодветно.

## 3. Цилиндар

Телото што се добива со ротација на правоаголник околу оската која минува низ една негова страна се нарекува *прав цилиндар* (понатаму ќе го користиме само терминот цилиндар).




**Слика 9.27.**

Цилиндарот е составен од два складни круга, наречени *основи* или *бази*, кои лежат во две паралелни рамнини и ротациона површина која ја образува *бочната површина* на цилиндарот. Плоштината на основите ја означуваме со $B$. Радиусот $R$ на основите се нарекува *радиус на цилиндарот*, а растојанието $H$ меѓу паралелните рамнини во кои лежат основите е *висина* на цилиндарот (слика 9.27). Страната на правоаголникот која ротира се вика *изводница* или *генератриса* на цилиндарот и нејзината должина ја означуваме со $s$. Сите генератриси на правиот цилиндар се еднакви и паралелни меѓу себе и еднакви на неговата висина. Истовремено, тие се нормални на рамнините на основите. Бочната површина претставува правоаголник со страни $2R\pi$ и $H$ и нејзината плоштина ја означуваме со $M$.

Правата која минува низ центрите на основите на цилиндарот се вика *оска* на цилиндарот. Пресекот на цилиндарот со рамнина која е паралелна со рамнините на неговите основи се вика *паралелен пресек*. Паралелниот пресек е круг складен со основите на цилиндарот. Пресекот што се добива кога цилиндарот ќе се пресече со рамнина која не е паралелна со рамнините на основите, а ги сече сите негови генератриси се вика *кос пресек*. Пресекот што ја содржи оската на цилиндарот се вика *оскин пресек*. Оскиниот пресек е правоаголник чии страни се дијаметрите на основите и две генератриси на цилиндарот. Пресекот што се добива кога цилиндарот ќе го пресечеме со рамнина паралелна со неговата оска се вика *надолжен пресек*.

Цилиндарот кај кој оскиниот пресек е квадрат, т.е. висината е еднаква на дијаметарот на основата, се вика *рамностран цилиндар*.

Плоштината и волуменот на цилиндар може да се пресметаат со формулите:

$$P = 2B + M = 2R^2\pi + 2R\pi H, \qquad V = BH = R^2\pi H,$$

соодветно.

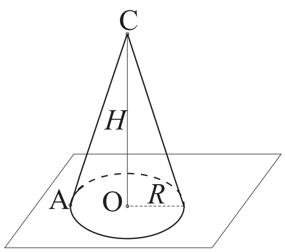
## 4. Конус и пресечен конус

Телото што се добива со ротација на правоаголен триаголник околу оската која минува низ една од катетите на триаголникот, се нарекува *прав кружен конус* (понатаму ќе го користиме терминот конус).

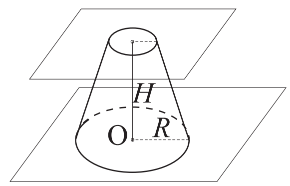
Конусот е составен од круг наречен *основа* или *база* и ротациона површина наречена *обвивка* или *бочна површина* на конусот. Плоштината на основата ја означуваме со $B$, а плоштината на бочната површина со $M$. Радиусот $R$ на основата се вика *радиус* на конусот. Точката $C$ се вика *врв* на конусот, а хипотенузата $AC$ е негова *генератриса* (слика 9.28). Сите генератриси на правиот конус се еднакви меѓу себе. Правата што минува низ центарот на основата и врвот на конусот се вика *оска*, а растојанието од врвот до рамнината на основата се вика *висина* на конусот. Генератрисата на конусот најчесто се означува со $s$, а висината со $H$.

Пресекот што се добива кога конусот ќе го пресечеме со рамнина паралелна со рамнината на основата на конусот се вика *паралелен пресек.* Паралелниот пресек на правиот конус е круг. Пресек на конусот со рамнина што ја содржи неговата оска се вика *оскин пресек.* Оскиниот пресек на конусот е рамнокрак триаголник чиишто краци се две генератриси на конусот, а основата на триаголникот е дијаметарот на основата на конусот.

Конусот чијшто оскин пресек е рамностран триаголник, т.е. генератрисата е еднаква со дијаметарот на неговата основа, се вика *рамностран конус.*



**Слика 9.28.**



**Слика 9.29.**

За пресметување плоштина и волумен на конус се користат формулите:

$$P = B + M = 2R^2\pi + R\pi s; \quad V = \frac{BH}{3} = \frac{R^2\pi H}{3},$$

соодветно.

Делот од конусот ограничен со неговата основа и еден негов паралелен пресек се вика *пресечен конус* (слика 9.29).

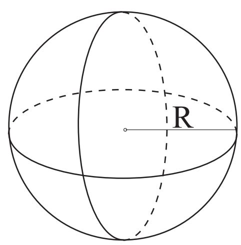
Ако со $B$ и $B_1$ ги означиме плоштините на основите на пресечениот конус, чии радиуси се $R$ и $R_1$ соодветно, со $M$ плоштината на бочната површина, а со $H$ неговата висина, тогаш за плоштината и волуменот на пресечениот конус ќе важат формулите:

$$P = B + B_1 + M = R^2\pi + R_1^2\pi + (R + R_1)\pi s, \qquad V = \frac{(R^2 + RR_1 + R_1^2)\pi H}{3},$$

соодветно.

## 5. Топка и сфера

Множеството од сите точки во просторот чиешто растојание до дадена точка $O$ е еднакво на $R$ се нарекува *сфера*. Точката $O$ се нарекува *центар*, а растојанието $R$ е *радиус* на сферата. Ако сферата се пресече со рамнина, добиениот пресек е кружница. Најголем радиус еднаков на $R$, има кружницата која се добива како пресек на сферата со рамнина која минува низ центарот на сферата. Оваа кружница е позната како *голема кружница*.




**Слика 9.30.**

Множеството од сите точки во просторот чие растојание до дадена точка $O$ не е поголемо од $R$ се нарекува *топка*.

Плоштината на сферата и волуменот на топката може да се пресметаат со формулите:

$$P = 4R^2\pi, \qquad V = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

**Задача 9.10.** Дијагоналата на правилна четириаголна призма е 3,5, а дијагоналата на бочниот зид е 2,5. Да се пресметаат волуменот и плоштината на призмата.

**Решение.** Нека $D$ е просторната дијагонала на призмата, а $d$ дијагоналата на бочниот ѕид (слика 9.31). Волуменот на призмата е

$$V = BH = a^2H,$$

каде што $a$ е работ на основата, а $H$ е нејзината висина. Користејќи ја Питагоровата теорема, за висината на призмата добиваме:

$$H^2 = D^2 - d_a^2, \quad H^2 = d^2 - a^2,$$

при што со $d_a$ ја означивме дијагоналата на основата на призмата за која важи $d_a^2 = 2a^2$. Изедначувајќи ги десните страни на горните две равенства добиваме $D^2 - 2a^2 = d^2 - a^2$, а оттука

$$a = \sqrt{D^2 - d^2} = \sqrt{3,5^2 - 2,5^2} = \sqrt{6}.$$

За висината на призмата имаме:

$$H = \sqrt{d^2 - a^2} = 0,5,$$

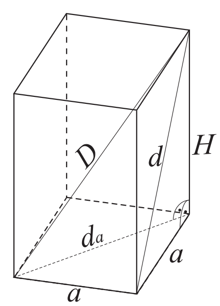
па волуменот е

$$V = a^2H = 3.$$

Плоштината на призмата е

$$P = 2B + M,$$

каде што $M = 4aH = 2\sqrt{6}$. Според тоа, $P = 2(6 + \sqrt{6})$.



**Слика 9.31.**

**Забелешка**: Равенството $a = \sqrt{D^2 - d^2}$ може да се добие директно, ако се има предвид дека триаголникот со страни $a$, $d$ и $D$ е правоаголен, при што $D$ е неговата хипотенуза.

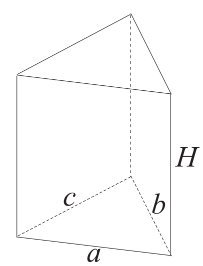
**Задача 9.11.** Висината на права триаголна призма е 5, а нејзиниот волумен е 480. Да се определат основните рабови на призмата, ако плоштините на нејзините бочни ѕидови се однесуваат како 4:13:15.

**Решение.** Волуменот на призмата е $V = BH$, па плоштината на основата ќе биде $B = \dfrac{V}{H} = 96$.

Ако со $a$, $b$ и $c$ ги означиме рабовите на основата на призмата, тогаш плоштините на бочните ѕидови ќе бидат $M_1 = aH$, $M_2 = bH$ и $M_3 = cH$.
Од условот на задачата имаме:

$$M_1 : M_2 : M_3 = 4 : 13 : 15,$$

од каде следува дека постои $k \in \mathbb{N}$, така што $a = 4k$, $b = 13k$, $c = 15k$.



**Слика 9.32.**

Оттука, $s = \dfrac{a+b+c}{2} = 16k$, па користејќи ја Хероновата формула, за плоштината на основата на призмата добиваме:

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{16k \cdot 12k \cdot 3k \cdot k} = 24k^2.$$

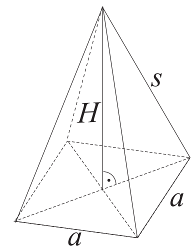
Значи, $24k^2 = 96$, од каде што добиваме дека $k = 2$. Според тоа, $a = 8$, $b = 26$ и $c = 30$.

**Задача 9.12.** Да се пресмета волуменот на правилна четириаголна пирамида чијашто висина е 7, а бочниот раб е за 1 поголем од работ на основата.

**Решение.** Ако со $s$ го означиме бочниот раб, а со $a$ основата на призмата, од условот на задачата имаме дека $s = a+1$. Од друга страна, според Питагоровата теорема, $s^2 = H^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2$, каде што $d$ е дијагоналата на основата и $d^2 = 2a^2$.

Според тоа $(a+1)^2 = H^2 + \frac{a^2}{2}$, од каде што се добиваат две вредности за $a$, $a_1 = -12$ и $a_2 = 8$. Негативната вредност за $a$ ја отфрламе, па заклучуваме дека $a = 8$, а бараниот волумен е

$$V = \frac{BH}{3} = \frac{448}{3}.$$

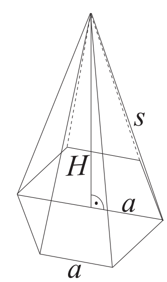


**Слика 9.33.**

**Задача 9.13.** Волуменот на правилна шестаголна пирамида е $V = 486\sqrt{3}$. Да се определи висината и бочниот раб на пирамидата, ако плоштината на пресекот со рамнина која минува низ два спротивни бочни раба е $Q = 108$.

**Решение.** Основата на пирамидата е правилен шестаголник чијашто плоштина е $B = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Волуменот на пирамидата е $V = \frac{BH}{3} = 486\sqrt{3}$, па оттука $a^2H = 972$.

Од друга страна, пресекот што се добива кога пирамидата ќе се пресече со рамнина која минува низ два спротивни бочни раба, е рамнокрак триаголник со основа еднаква на $2a$ и висина еднаква на висината на пирамидата. Според тоа, за плоштината на овој пресек важи $Q = \frac{2aH}{2} = aH = 108$.



**Слика 9.34.**

Така добивме систем од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} a^2H = 972 \\ aH = 108 \end{cases},$$

чиешто решение е $a = 9$, $H = 12$. За бочниот раб на пирамидата имаме

$$s = \sqrt{H^2 + a^2} = 15.$$

**Задача 9.14.** Плоштината на обвивката на правилна тристрана пирамида и плоштината на нејзината основа се однесуваат како $2 : \sqrt{3}$. Да се определи аголот што го зафаќа бочната страна на пирамидата со основата.

**Решение.** Основата на правилна тристрана пирамида е рамностран триаголник. Подножјето на висината е точка $O$, која претставува тежиште, ортоцентар и центар на впишаната и опишаната кружница околу рамностраниот триаголник.

Дадено е дека $M : B = 2 : \sqrt{3}$, при што

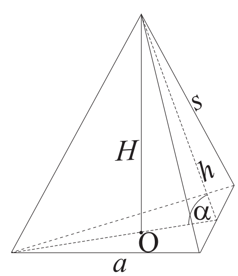
$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ а } M = 3\frac{ah}{2}.$$

Оттука добиваме дека $a = 3h$. Нека со $h_a$ ја означиме висината (тежишната линија) на основата.

Тогаш $h_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3h\sqrt{3}}{2}$, а за аголот што се бара имаме

$$\cos\alpha = \frac{\frac{h_a}{3}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Бараниот агол е $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

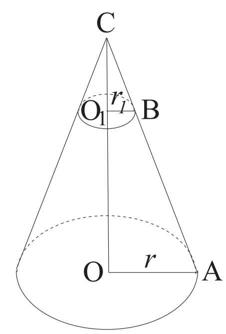


**Слика 9.35.**

**Задача 9.15.** Радиусот и висината на прав конус се 6 и 18, соодветно. Да се пресмета растојанието од основата до паралелниот пресек чијашто плоштина е $16\pi$.

**Решение.** Паралелниот пресек на конусот е круг чијашто плоштина е $B_1 = r^2\pi = 16\pi$. Според тоа, радиусот на овој круг е $r_1 = 4$.

Лесно се проверува дека триаголниците $ACO$ и $BCO_1$ се слични (нивните соодветни агли се еднакви: $\angle ACO$ е заеднички агол, $\angle AOC = \angle BO_1C = 90°$ и $\angle OAC = \angle O_1BC$, како агли со паралелни краци). Од сличноста следува пропорционалност на страните: $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{O_1B}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{CO_1}}$.



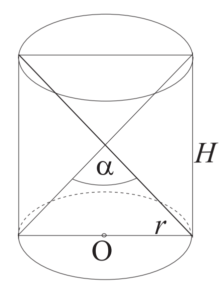
**Слика 9.36.**

Оттука $\overline{CO_1} = \dfrac{r_1 H}{r} = \dfrac{4 \cdot 18}{6} = 12$, па бараното растојание е

$$\overline{OO_1} = H - \overline{CO_1} = 6.$$

**Задача 9.16.** Плоштината на основата и плоштината на оскиниот пресек на прав цилиндар се однесуваат како $\pi : 4$. Да се пресмета аголот меѓу дијагоналите на пресекот.

**Решение.** Дадено е дека $\dfrac{B}{Q} = \dfrac{\pi}{4}$, каде што $B$ е плоштината на основате, а $Q$ е плоштината на оскиниот пресек. Од тоа што $B = r^2\pi$, а $Q = 2rH$ добиваме, дека $H = 2r$, па можеме да заклучиме дека оскиниот пресек е квадрат.



**Слика 9.37.**

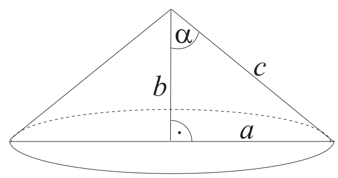
Знаејќи дека дијагоналите кај квадратот се сечат под прав агол, добиваме дека бараниот агол е $90°$.

**Задача 9.17.** Правоаголен триаголник со катета 5 и остар агол од 60°, што таа катета го зафаќа со хипотенузата, ротира околу дадената катета. Да се пресметаат плоштината и волуменот на добиеното тело.

**Решение.** Нека ја означиме дадената катета со $b$, а дадениот агол со $\alpha$ (слика 9.38). Плоштината на телото е $P = B + M$, каде што $B = r^2\pi = a^2\pi$, $M = \pi\, r\, s = \pi\, a\, c$, $a$ е другата катета, а $c$ е хипотенузата на триаголникот кој ротира. Тогаш,

$$c = \frac{b}{\cos\alpha} = 10,$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = 5\sqrt{3}.$$



**Слика 9.38.**

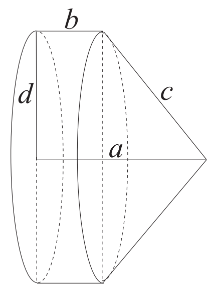
Оттука $B = 75\pi$, а $M = 50\pi\sqrt{3}$, па за плоштината и волуменот на телото добиваме:

$$P = 25(3 + 2\sqrt{3})\pi, \qquad V = \frac{B\,b}{3} = 125\pi.$$

**Задача 9.18.** Правоаголен трапез со поголема основа 20 и краци 10 и 8, ротира околу дадената основа. Да се пресмета плоштината и волуменот на добиеното тело.

**Решение.** Дадената основа ја означуваме со $a = 20$, а краците со $c = 10$ и $d = 8$. Телото што се добива е составено од цилиндар и конус кои имаат иста основа (слика 9.39). Значи

$$V = V_C + V_K = BH_C + \frac{BH_K}{3},$$



**Слика 9.39.**

каде што $V_C$ е волуменот на цилиндарот, а $V_K$ е волуменот на конусот.

Притоа $B = r^2\pi$, $r = d = 8$, висината на цилиндарот е

$$H_C = b = a - \sqrt{c^2 - d^2} = 14,$$

а висината на конусот е

$$H_K = \sqrt{c^2 - d^2} = 6.$$

Според тоа, $V = 896\pi + 128\pi = 1024\pi$.

Плоштината на телото е збир од плоштината на обвивката на конусот $M_C$, плоштината на обвивката на цилиндарот $M_C$ и плоштината на нивната основа $B$:

$$P = B + M_C + M_K = d^2\pi + 2d\pi\, b + \pi\, d\, c = 368\pi.$$

**Задача 9.19.** Во правилна еднакворабна четиристрана пирамида е впишана коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$, така што основата на коцката $ABCD$ лежи на основата на пирамидата, а темињата $A_1, B_1, C_1, D_1$ лежат на бочните рабови на пирамидата. Да се најде односот на волумените на пирамидата и коцката.

**Решение.** Нека со $a$ го означиме работ на пирамидата.


**Слика 9.40.**

Нејзиниот волумен ќе биде

$$V_P = \frac{BH}{3} = \frac{a^2H}{3}.$$

За висината на пирамидата имаме:

$$H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

каде што $h$ е висината на бочниот ѕид на пирамидата, па според тоа,

$$V_P = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Волуменот на коцката е $V_K = a_1^3$, каде што $a_1$ е работ на коцката. Него ќе го определиме користејќи ја сличноста на триаголниците $ABC$ и $A_1B_1C$ (види слика 9.40 десно, каде што е претставен еден нормален пресек што ја содржи висината на пирамидата):

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a_1}{2}} = \frac{H}{H - a_1}.$$

Оттука,

$$a_1 = \frac{aH}{a + H} = \frac{a^2\frac{\sqrt{2}}{2}}{a + \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}},$$

$$V_K = \frac{a^3\sqrt{2}}{10 + 7\sqrt{2}}.$$

На тој начин, за односот на волумените добиваме:

$$\frac{V_P}{V_K} = \frac{10 + 7\sqrt{2}}{6}.$$

### Задачи за вежбање

**Задача 9.20.** Во круг со радиус 2 е впишан рамностран триаголник. Да се определи:

а) должината на страната на триаголникот;
б) плоштината на триаголникот;
в) плоштината на делот од кругот што е надвор од триаголникот.

**Одговор.** а) $2\sqrt{3}$, б) $3\sqrt{3}$, в) $4\pi - 3\sqrt{3}$.

**Задача 9.21.** Дадени се должините на страните на триаголникот $ABC$ : $\overline{AB} = 11$, $\overline{BC} = 23$, $\overline{CA} = 20$. Да се пресмета должината на тежишната линија повлечена од темето $B$ кон страната $CA$.

**Одговор.** 15.

**Задача 9.22.** Да се пресмета периметарот на правоаголник чии страни се однесуваат како $3 : 7$, а неговата плоштина е 756.

**Одговор.** $L = 120$.

**Задача 9.23.** Да се пресмета плоштината на рамнокрак трапез со висина 20, крак 25 и поголема основа 50.

**Одговор.** $P = 700$.

**Задача 9.24.** Во кружница со радиус 8 е впишан и опишан правилен шестоаголник. Определи ја разликата на плоштините на овие два многуаголници.

**Одговор.** 56.

**Задача 9.25.** Основата на права призма е ромб со дијагонали 12 и 16. Колкава треба да биде висината на призмата, за нејзината плоштина и волумен да бидат бројно еднакви?

**Одговор.** $H = \dfrac{24}{7}$.

**Задача 9.26.** Апотемата и основните рабови на правилна четириаголна пресечена пирамида се однесуваат како $5 : 8 : 2$, а нејзиниот волумен е $\dfrac{7}{4}$. Да се пресмета плоштината на пресечената пирамида.

**Одговор.** $P = 10,5$.

**Задача 9.27.** Плоштината на еден цилиндар е $180\pi$. Да се пресмета неговиот волумен, ако разликата на висината и радиусот на цилиндарот е 3.

**Одговор.** $V = 32466\pi$.

**Задача 9.28.** Радиусите на основите на пресечен конус се 5 и 3. Генератрисата на конусот со поголемата основа зафаќа агол од $60°$. Да се пресмета плоштината на пресечениот конус.

**Одговор.** $P = 66\pi$.

**Задача 9.29.** Да се пресмета плоштината и волуменот на телото, што се добива со ротација на правилен шестаголник со страна 2 околу неговата страна.

**Одговор.** $P = 24\pi\sqrt{3}$, $V = 36\pi$.

**Задача 9.30.** Во конус со радиус $R$ и висина $H$ е впишана коцка. Да се пресмета волуменот на коцката.

**Одговор.** $\dfrac{2H^3R^3\sqrt{2}}{(H+R\sqrt{2})^2}$.

**Задача 9.31.** Од топка со дијаметар 5 е издлабен цилиндричен отвор по должината на дијаметарот на топката. Да се пресмета волуменот на делот од топката што останал, ако дијаметарот на цилиндричниот отвор е 3.

**Одговор.** $V = 34$.

# 10 Аритметичка и геометриска прогресија

За низата реални броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ велиме дека е *аритметичка прогресија* (*аритметичка низа*), ако почнувајќи од вториот член, разликата меѓу секој нејзин член и неговиот претходник е константа $d$, т.е.

$$a_{n+1} - a_n = d, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Константата $d$ се нарекува *разлика на аритметичката прогресија*. $n-$тиот член на аритметичката прогресија $a_n$ и сумата на првите $n$ членови $S_n$ се добиваат според формулите:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) \quad \text{или} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

За низата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ велиме дека е *геометриска прогресија* (*геометриска низа*), ако почнувајќи од вториот член, количникот меѓу секој нејзин член и неговиот претходник е константа $q$, т.е.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Константата $q$ се нарекува *количник на геометриската прогресија*, а $n-$тиот член на геометриската прогресија $a_n$ може да се определи на следниов начин:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Сумата $S_n$ на првите $n$ членови на геометриската прогресија, кога $q \neq 1$ е

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1},$$

т.е.

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}).$$

Ако последната равенка ја помножиме со $q - 1 \neq 0$ добиваме:

$$S_n(q-1) = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})(q-1),$$

односно

$$S_n(q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1).$$

Оттука,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \;\; q \neq 1.$$

**Задача 10.1.** Да се определи збирот на првите $n$ природни броеви.

**Решение.** Го бараме збирот $1 + 2 + \cdots + n$. Првиот член е $a_1 = 1$, а разликата е $d = 1$. Тогаш:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Значи,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Задача 10.2.** Да се определи збирот на првите $n$ парни природни броеви.

**Решение.** Го бараме збирот $2 + 4 + \cdots + 2n$. Првиот член е $a_1 = 2$, а разликата е $d = 2$. Тогаш:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2\right) = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = n(n+1).$$

Значи,

$$2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

**Забелешка:** Бараниот збир може да се пресмета користејќи ја задачата 10.1:

$$2 + 4 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + \cdots + n) = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

**Задача 10.3.** Да се определат $a_n$ и $S_n$, ако:

а) $a_1 = 4,\ d = 3,\ n = 31$;  б) $a_1 = 0,1,\ d = 0,2,\ n = k$.

**Решение.** а) За $n = 31$ имаме:

$$a_{31} = 4 + 30 \cdot 3 = 94,$$

$$S_{31} = \frac{31}{2}(2 \cdot 4 + 30 \cdot 3) = 1519.$$

б) За $n = k$ се добива:

$$a_k = 0,1 + (k-1) \cdot 0,2 = -0,1 + 0,2k,$$

$$S_k = \frac{k}{2}\left[2 \cdot 0,1 + (k-1) \cdot 0,2\right] = 0,1 \cdot k^2.$$

**Задача 10.4.** Дваесеттиот член на една аритметичка прогресија е $-113$, а триесеттиот член е $-173$. Да се најдат $a_1$ и $d$.

**Решение.** Од условот на задачата го добиваме системот:

$$\begin{cases} a_{20} = a_1 + 19d \\ a_{30} = a_1 + 29d \end{cases} \iff \begin{cases} -113 = a_1 + 19d \\ -173 = a_1 + 29d \end{cases}.$$

Ако од првата равенка ја одземеме втората, се добива

$$60 = -10d,$$

од каде следува дека $d = -6$. Заменувајќи ја оваа вредност на $d$ во која било од равенките на системот, добиваме:

$$a_1 = -113 - 19 \cdot (-6) = 1.$$

**Задача 10.5.** Меѓу броевите 38 и $-52$, да се вметнат 8 броеви коишто заедно со дадените броеви образуваат аритметичка прогресија.

**Решение.** Дадено е дека $a_1 = 38$ и $a_{10} = -52$. Од друга страна, $a_{10} = a_1 + 9d$. Оттука,

$$-52 = 38 + 9d.$$

Решението на оваа равенка е $d = -10$, а елементите на аритметичката прогресија се:

$$38,\ 28,\ 18,\ 8,\ -2,\ -12,\ -22,\ -32,\ -42,\ -52.$$

**Задача 10.6.** Познато е дека $n-$тиот член на една аритметичка прогресија е $a_n = 3n + 2$. Да се пресметаат $S_n$ и $S_{5n}$.

**Решение.** Првите два члена на дадената аритметичка прогресија се $a_1 = 3\cdot1+2 = 5$ и $a_2 = (3\cdot2+2)$. Оттука, за разликата добиваме:

$$d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3.$$

Бараните суми се:

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(2\cdot 5 + (n-1)\cdot 3) = \frac{n}{2}(7+3n),$$

$$S_{5n} = \frac{5n}{2}\,[2a_1 + (5n-1)d] = \frac{5n}{2}\,[2\cdot 5 + (5n-1)\cdot 3] = \frac{5n}{2}(7+15n).$$

**Задача 10.7.** Да се определи сумата на првите $n$ членови на една геометриска прогресија, ако:

а) $a_1 = 1,\ q = 4$; б) $a_n = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$.

**Решение.** а) Поаѓајќи од тоа дека $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$, добиваме:

$$S_n = 1 \cdot \frac{4^n - 1}{4-1} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

б) Количникот на геометриската прогресија е $q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2}$, а првиот член $a_1 = \frac{1}{2}$. Оттука,

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

**Задача 10.8.** Да се пресмета збирот:

а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$;

б) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

**Решение.** а) Првиот член на геометриската прогресија е $a_1 = 1$, а количникот е $q = 2$, па имаме:

$$S_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

б) Првиот член на геометриската прогресија е $a_1 = \frac{1}{3}$, а количникот е $q = \frac{1}{3}$, па добиваме:

$$S_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

**Задача 10.9.** Каква низа образуваат природните логаритми од членовите на геометриската прогресија

$$a,\, aq,\, aq^2,\, \dots,\, aq^{n-1},\, \dots,$$

каде што $a$ и $q$ се позитивни реални броеви?

**Решение.** Природните логаритми од членовите на дадената геометриска прогресија ја образуваат низата

$$\ln a,\, \ln a + \ln q,\, \ln a + 2\ln q,\, \dots,\, \ln a + (n-1)\ln q,\, \dots,$$

која е аритметичка прогресија со прв член $\ln a$ и разлика $\ln q$.

**Задача 10.10.** Ако броевите $a$, $b$ и $c$ образуваат геометриска прогресија, да се покаже дека важи идентитетот:

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

**Решение.** Нека $q$ е количникот на геометрискаta прогресија. Тогаш $b = qa$, а $c = q^2 a$. Оттука,

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a-b+c) &= (a+qa+q^2a)(a-qa+q^2a) = \\ &= a^2(1+q+q^2)(1-q+q^2) = a^2(1+q^2+q^4) = \\ &= a^2+(aq)^2+(aq^2)^2 = a^2+b^2+c^2.\end{aligned}$$

**Задача 10.11.** Ако $S_n = 2n^2 - 2n$, да се покаже дека броевите $b_n = S_n - S_{n-1}$ образуваат аритметичка прогресија.

**Решение.** $b_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2n - [2(n-1)^2 - 2(n-1)] =$

$$= 2n^2 - 2n - 2n^2 + 4n - 2 + 2n - 2 = 4n - 4.$$

Разликата меѓу $b_n$ и $b_{n-1}$ е

$$d = b_n - b_{n-1} = 4n - 4 - (4(n-1) - 4) = 4.$$

Заклучуваме дека за секој природен број $n \geq 2$ таа е константа, што значи дека броевите $b_n$ образуваат аритметичка прогресија.

**Задача 10.12.** Бројот на бактериите во млекото се удвојува секои три часа. Колку пати ќе се зголеми бројот на бактериите по половина денонокие (12 часа)?

**Решение.** Бројот на бактерии формира геометриска прогресија. Нека $a_1$ е почетниот број бактерии, а количникот $q = 2$. За бараниот член $a_5$ имаме:

$$a_5 = q^4 a_1 = 2^4 a_1 = 16 a_1.$$

Значи, по половина денонокие, бројот на бактерии ќе се зголеми 16 пати.

**Задача 10.13.** Еден човек вложил во банка 10 000 денари. Ако каматата на влогот е 10% месечно, колку пари ќе има тој на крајот на шестиот месец?

**Решение.** Ако $a_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ е сумата денари на крајот на $i-$ тиот месец, а $a_0$ е почетниот влог, тогаш:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 10\,000, \\
a_1 &= 10\,000 + \frac{10}{100} \cdot 10\,000 = \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot 10\,000, \\
a_2 &= \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot 10\,000 + \frac{10}{100} \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot 10\,000 = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 \cdot 10\,000, \\
&\vdots \\
a_6 &= \left(1 + \frac{1}{10}\right)^6 \cdot 10\,000 \approx 17\,716.
\end{aligned}
$$

На крајот на шестиот месец, човекот ќе има приближно 17 716 денари.

### Задачи за вежбање

**Задача 10.14.** Да се пресмета $n$ во аритметичка прогресија за која $a_1 = 2$, $d = 2$, $S_n = 930$.

**Одговор.** $n = 30$.

**Задача 10.15.** За една аритметичка прогресија важи:

$$a_1 = 3,\ a_8 - a_5 = 9.$$

Да се определи $S_{20}$.

**Одговор.** $S_{20} = 630$.

**Задача 10.16.** Ако збирот на третиот и петтиот член на аритметичка прогресија е 42, а збирот на четвртиот и седмиот член е 54, да се определат $a_{20}$ и $S_{20}$.

**Одговор.** $a_{20} = 85$, $S_{20} = 940$.

**Задача 10.17.** Збирот на првите 6 члена на геометриска прогресија е 21. Да се определи $a_1$, ако количникот $q = 2$.

**Одговор.** $a_1 = \dfrac{1}{3}$.

**Задача 10.18.** Нека е дадена геометриска прогресија од позитивни реални броеви $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Ако

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{25}, \quad a_5 = \frac{1}{125},$$

да се пресметаат $a_1$ и $S_5$.

**Одговор.** $a_1 = 5$, $S_5 = 6,24$.

**Задача 10.19.** Да се најдат првите три члена на геометриската прогресија, за која важи

$$a_4 - a_2 = 18, \quad a_5 - a_3 = 36.$$

**Одговор.** $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$.

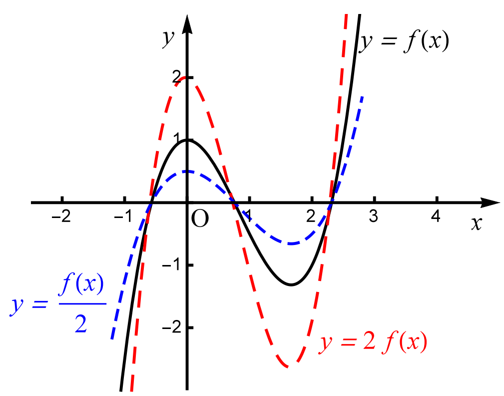
**Задача 10.20.** Првиот член на аритметичка и геометриска прогресија е ист и изнесува 3. Нивните трети членови се исто така еднакви, а вториот член на аритметичката прогресија е за 6 поголем од вториот член на геометриската прогресија. Да се одредат првите три члена на аритметичката и геометриската прогресија.

**Одговор.** Задачата има две решенија. Првото решение е $3,\, 15,\, 27$ и $3,\, 9,\, 27,$ а второто $3,\, 3,\, 3$ и $3,\, -3,\, 3$.

# 11 Скицирање графици на функции со помош на графиците на елементарните функции

Од графикот на функцијата $y = f(x)$ лесно може да се добијат графиците на некои други функции, како што се $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = f(x) + a$ и $y = f(x + a)$, каде што $a$ е константа.

Со комбинација на овие графици, може исто така да се добие графикот на функцијата $y = af(bx + c) + d$, каде што $a$, $b$, $c$ и $d$ се константи.

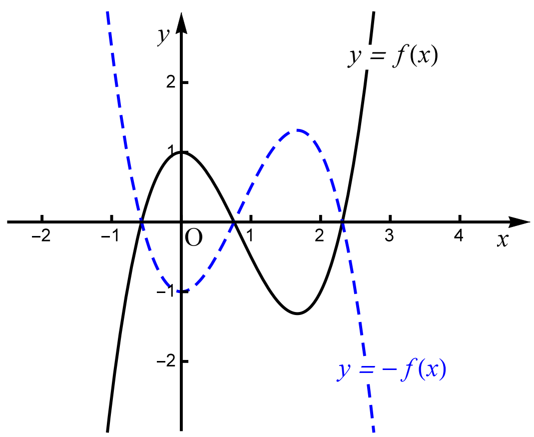



**Слика 11.1.**

Графикот на функцијата $y = af(x)$, $a > 1$ се добива со издолжување на графикот на функцијата $y = f(x)$ за коефициент $a$, во правец на $y$-оската.

Ако $0 < a < 1$, тогаш графикот на функцијата $y = af(x)$ се добива со скратување на графикот на функцијата $y = f(x)$ за коефициент $a$, во правец на $y$-оската.

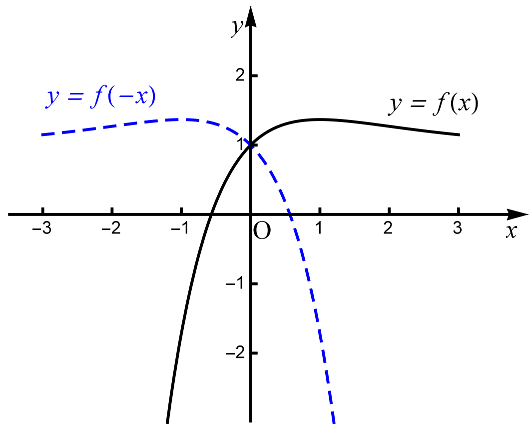
На пример, да ги разгледаме графиците на функциите $y = f(x)$, $y = 2f(x)$ и $y = \frac{1}{2}f(x)$. Кога функцијата $f(x)$ ја множиме со 2, вредноста на секоја $y$ координата се удвојува, со што графикот се издолжува во однос на $y$-оската. Множејќи ја функцијата $f(x)$ со $\frac{1}{2}$ вредноста на $y$ координатата се преполовува и со тоа графикот се скратува во однос на $y$-оската, како што е прикажано на сликата 11.1.




**Слика 11.2.**

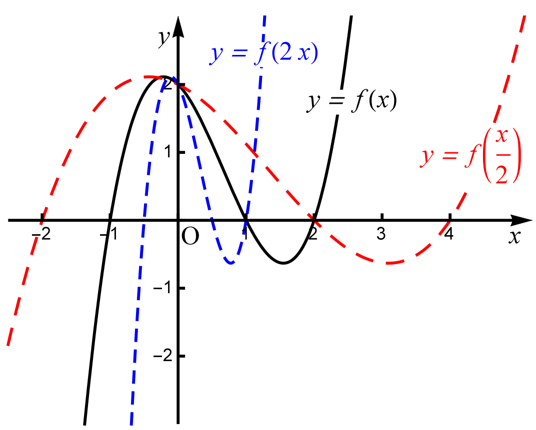
Графикот на функцијата $y = -f(x)$ е симетричен со графикот на функцијата $y = f(x)$ во однос на $x$-оската (види слика 11.2).

Графикот на функцијата $y = f(-x)$ е симетричен со графикот на функцијата $f(x)$ во однос на $y$-оската (види слика 11.3).




**Слика 11.3.**

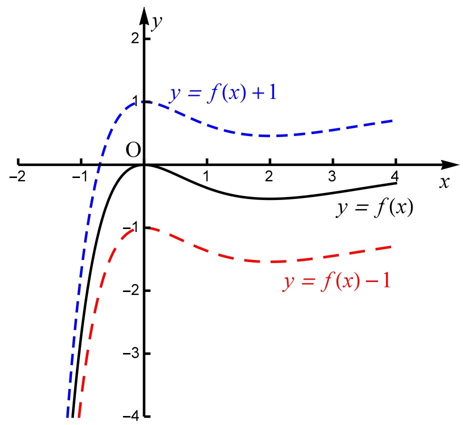
Графикот на функцијата $y = f(ax)$, $0 < a < 1$ може да се добие со проширување на графикот на функцијата $y = f(x)$ за коефициент $a$, во правец на $x$-оската.




**Слика 11.4.**

Ако $a > 1$, тогаш графикот на функцијата $y = f(ax)$ може да се добие со стеснување на графикот на функцијата $y = f(x)$ за коефициент $a$, во правец на $x$-оската.

На пример, да ги разгледаме графиците на функциите $y = f(x)$, $y = f(2x)$ и $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Кога аргументот на функцијата го множиме со 2, тогаш графикот на функцијата се стеснува во однос на $x$-оската, а кога аргументот го множиме со $\frac{1}{2}$ графикот се проширува во однос на $x$-оската, што може да се види на сликата 11.4.



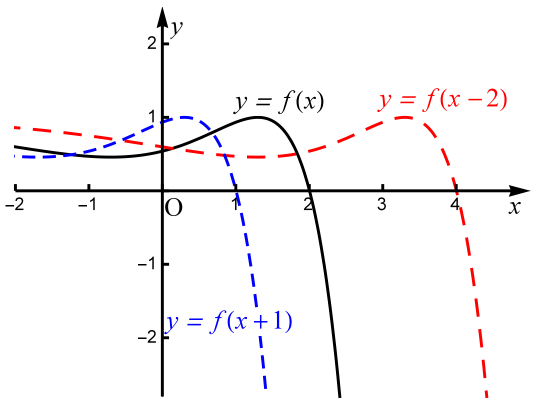

**Слика 11.5.**

Ако $a$ е позитивна константа, тогаш графикот на функцијата $y = f(x)+a$ може да се добие со транслација на графикот на функцијата $y = f(x)$ за $a$ единици нагоре во правец на $y$-оската, а графикот на функцијата $y = f(x) - a$ со транслација за $a$ единици надолу во правец на $y$-оската.

На сликата 11.5 се скицирани графиците на функциите $y = f(x)$, $y = f(x) - 1$ и $y = f(x) + 1$.

Графикот на функцијата $y = f(x + a)$, $a > 0$, се добива со транслација на графикот на $y = f(x)$ за $a$ единици лево во правец на $x$-оската, а графикот на функцијата $y = f(x - a)$ за

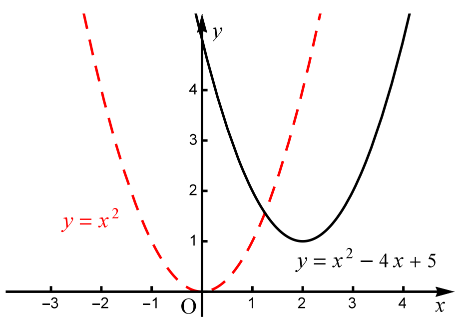
$a > 0$, се добива со транслација на графикот на $y = f(x)$ за $a$ единици десно во правец на $x$-оската.




**Слика 11.6.**

На сликата 11.6 се скицирани графиците на функциите $y = f(x)$, $y = f(x-2)$ и $y = f(x+1)$.

**Задача 11.1.** Користејќи го графикот на функцијата $y = x^2$, да се скицира графикот на функцијата $y = x^2 - 4x + 5$.




**Слика 11.7.**

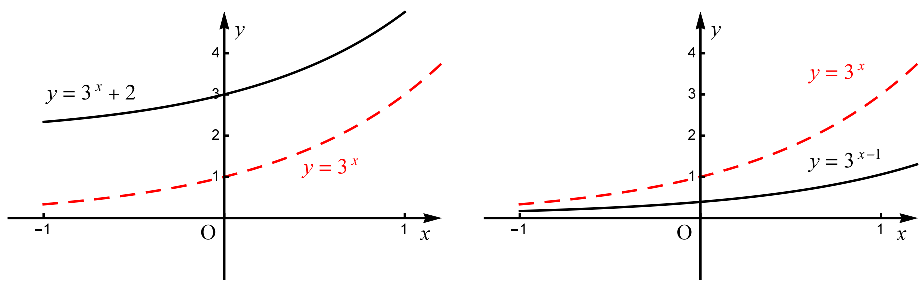
**Решение.** Бидејќи $y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, заклучуваме дека графикот на дадената функција може да се добие од графикот на функцијата $y = x^2$ со помош на две транслации: прво транслираме за 2 единици на десно во правец на $x$-оската, а потоа за 1 единица нагоре во правец на $y$-оската (слика 11.7).

**Задача 11.2.** Со помош на графикот на функцијата $y = 3^x$, да се скицираат графиците на следниве функции:

а) $y = 3^x + 2$; б) $y = 3^{x-1}$; в) $y = 1 - 3^x$;

г) $y = 3^{-x} - 3$; д) $y = 3^{3x+1}$; ѓ) $y = 2 \cdot 3^x - 1$.

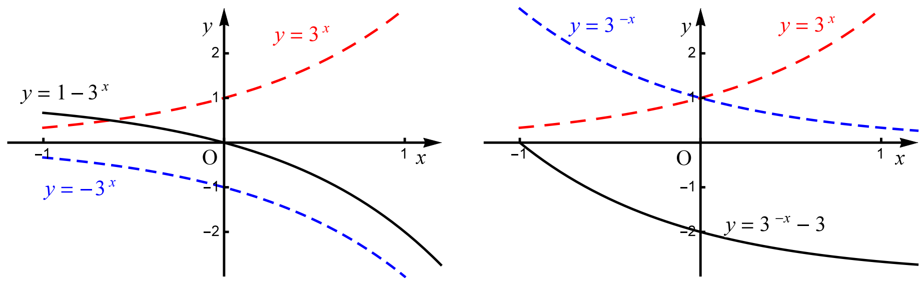
**Решение.** а) Прво се скицира графикот на функцијата $y = 3^x$, а потоа тој график се поместува за две единици нагоре во правец на $y$-оската, со што се добива графикот на функцијата $y = 3^x + 2$ (види слика 11.8 лево).




**Слика 11.8.**

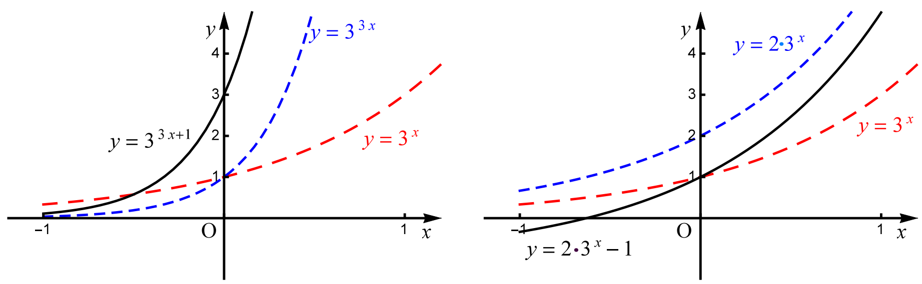
б) Со поместување на графикот на функцијата $y = 3^x$ за една единица во десно во правец на $x$-оската, се добива графикот на функцијата $y = 3^{x-1}$ (види слика 11.8 десно).

в) Со симетрично пресликување на графикот на функцијата $y = 3^x$ во однос на $x-$оската се добива графикот на функцијата $y = -3^x$. Ако последниов график се помести за една единица нагоре во правец на $y$-оската, се добива графикот на функцијата $y = -3^x + 1$ (види слика 11.9 лево).




**Слика 11.9.**

г) Со пресликување на графикот на функцијата $y = 3^x$ симетрично во однос на $y-$оската се добива графикот на функцијата $y = 3^{-x}$. Потоа, овој график се поместува за три единици надолу, со што се добива графикот на функцијата $y = 3^{-x} - 3$ (види слика 11.9 десно).




**Слика 11.10.**

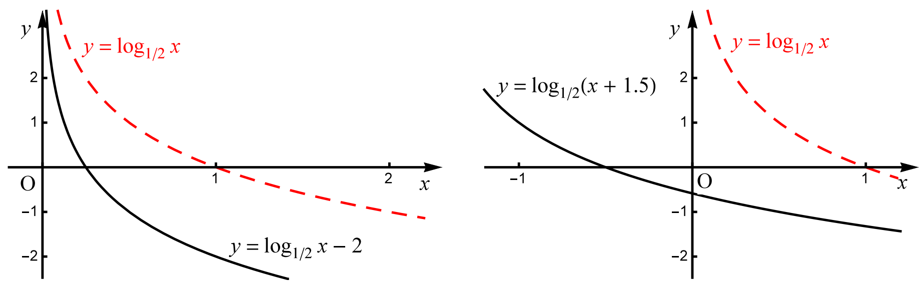
д) Графикот на функцијата $y = 3^x$ го стеснуваме со коефициент 3 во правец на $x$-оската, со што го добиваме графикот на функцијата $y = 3^{3x}$. Потоа, со транслација на овој график за една единица лево во правец на $x$-оската, се добива графикот на функцијата $y = 3^{3x+1}$ (види слика 11.10 лево).

ѓ) Прво го скицираме графикот на функцијата $y = 2 \cdot 3^x$, со издолжување на графикот на функцијата $y = 3^x$ со коефициент 2 во правец на $y$-оската, а потоа го поместуваме за 1 единица надолу (види слика 11.10 десно).

**Задача 11.3.** Да се скицираат графиците на функциите:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1,5)$;

в) $y = 2 + \log_4(-x)$; г) $y = \frac{1}{3}\log_4(x/2)$.

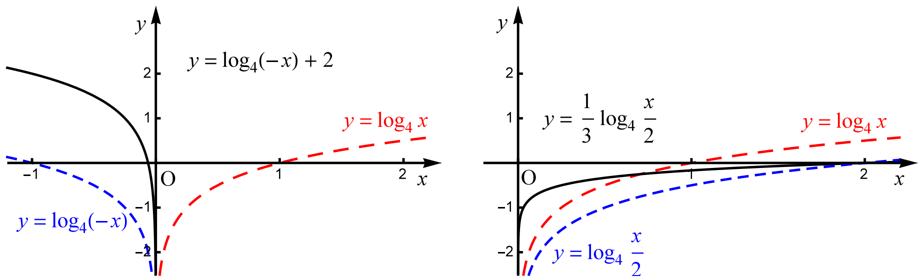



**Слика 11.11.**

**Решение.** Графиците на функциите под а) и б) се добиваат со поместување на графикот на функцијата $y = \log_{1/2} x$ за 2 единици надолу во правец на $y$-оската, односно 1,5 единици лево во правец на $x$-оската, соодветно (види слика 11.11).

Графикот на функцијата под в) се добива ако графикот на функцијата $y = \log_4 x$ се преслика симетрично во однос на $y$-оската и се транслира 2 единици нагоре во правец на $y$-оската (види слика 11.12 лево).

Графикот на функцијата под г) се добива со издолжување на графикот на функцијата $y = \log_4 x$ со коефициент $\frac{1}{2}$ во правец на $x$-оската и стеснување со коефициент $\frac{1}{3}$ во правец на $y$-оската (види слика 11.12 десно).

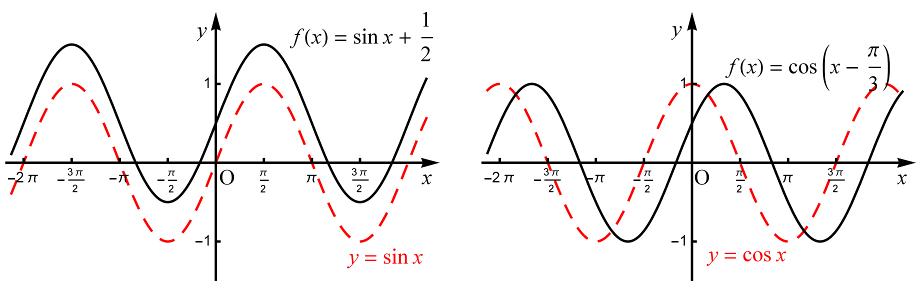



**Слика 11.12.**

**Задача 11.4.** Да се скицираат графиците на функциите:

а) $y = \sin x + \frac{1}{2}$; б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = 2\cos x$; г) $y = \sin\frac{x}{2}$.

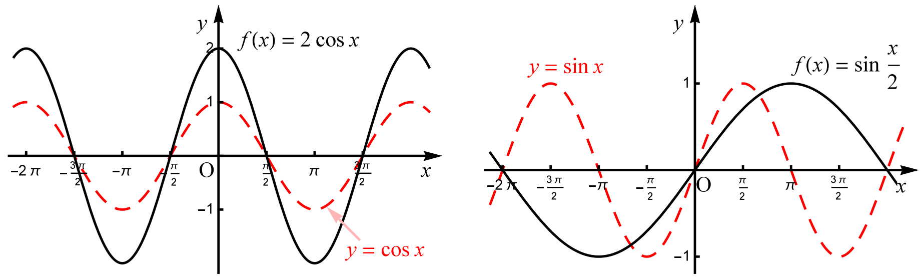
**Решение.** а) Графикот на функцијата $y = \sin x$ се меструва за 1/2 нагоре во правец на $y$-оската со што се добива графикот на бараната функција $y = \sin x + 1/2$ (види слика 11.13 лево).




**Слика 11.13.**

б) Прво се скицира графикот на функцијата $y = \cos x$, а потоа се поместува за $\pi/3$ надесно во правец на $x$-оската (види слика 11.13 десно).

в) Графикот на бараната функција се добива со издолжување на графикот на функцијата $y = \cos x$ со коефициент 2 во правец на $y$-оската. Периодот на функција $y = 2\cos x$ е $2\pi$, нулите се исти со нулите на функцијата $y = \cos x$ и важи $-2 \leq 2\cos x \leq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (види слика 11.14 лево).

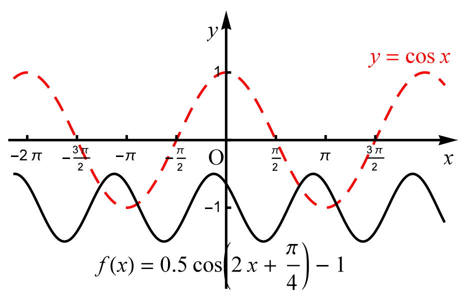



**Слика 11.14.**

г) Периодот на функцијата $y = \sin\frac{x}{2}$ е $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Нејзиниот график може да се добие со скратување на графикот на функцијата $y = \sin x$ со коефициент $\frac{1}{2}$ во правец на $x$-оската (види слика 11.14 десно).

**Задача 11.5.** Да се скицира графикот на функцијата

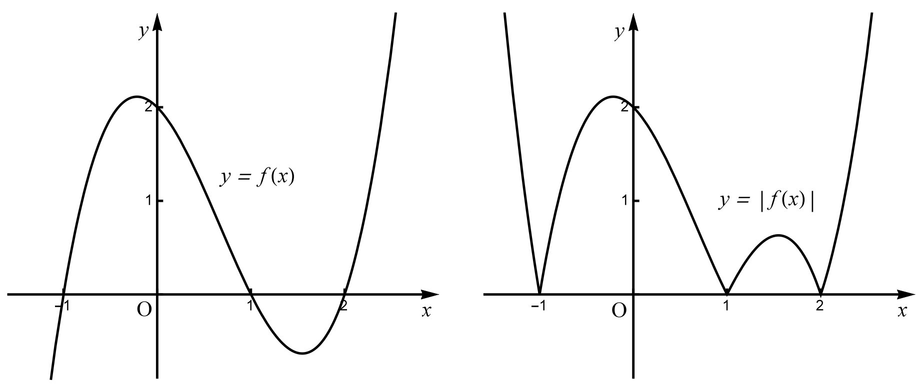
$$y = 0,5\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1.$$




**Слика 11.15.**

**Решение.** Прво го скицираме графикот на $2\pi$-периодичната функција $y = \cos x$. Функцијата што треба да ја скицираме е исто така периодична, со период $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Нејзиниот график ќе го добиеме со стеснување на графикот на функцијата $y = \cos x$ за коефициент 2 во правец на $x$-оската, скратување за коефициент $0,5$ во правец на $y$-оската, транслација за $\dfrac{\pi}{4}$ единици налево во правец на $x$-оската и транслација за една единица надолу во правец на $y$-оската, како што е прикажано на сликата 11.15.

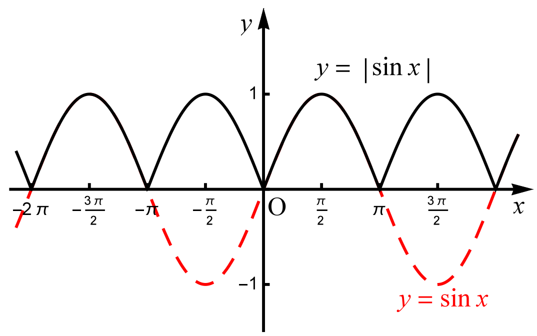
Графикот на функцијата $y = |f(x)|$ може да се добие од графикот на функцијата $y = f(x)$, така што сите точки од кривата кои се наоѓаат во долната полурамнина, т.е. под $x$-оската, се пресликуваат во горната полурамнина симетрично во однос на $x$-оската. На сликата 11.16. лево е прикажан графикот на функцијата $y = f(x)$, а на истата слика десно е скициран графикот на функцијата $y = |f(x)|$.




**Слика 11.16.**

**Задача 11.6.** Да се скицира графикот на функцијата $y = |\sin x|$.

**Решение.** Видовме дека функцијата $y = \sin x$ е $2\pi$-периодична функција. Таа има негативни вредности во интервалите $((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$. Во секој ваков интервал, го пресликуваме графикот на функцијата $y = \sin x$ симетрично во однос на $x$-оската. Бараната функција $y = |\sin x|$ има период $\pi$, а нејзиниот график е претставен на сликата 11.17.




**Слика 11.17.**

Нека $I_1, I_2, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $I_m \cap I_k = \emptyset$ кога $m \neq k$. Функцијата дефинирана на следниов начин:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1 \\ f_1(x), & x \in I_2 \\ & \vdots \\ f_n(x), & x \in I_n \end{cases},$$

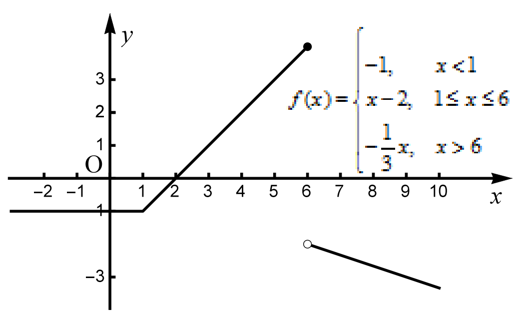
се нарекува **функција зададена по делови**. Таа е дефинирана на множеството $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$. Графикот на ваквата функција се добива со скицирање на графиците на функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ на интервалите $I_1$, $I_2$, $\ldots$, $I_n$, соодветно.

**Задача 11.7.** Да се скицира графикот на функцијата

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ x - 2, & 1 \le x \le 6 \\ -\dfrac{1}{3}x, & x > 6 \end{cases},$$

а потоа да се најдат интервалите на растење и опаѓање на функцијата (интервалите на монотоност).

**Решение.** Во интервалот $(-\infty, 1)$ функцијата е константа, а нејзиниот график е дел од правата $y = -1$. Во сегментот $[1, 6]$ функцијата расте бидејќи коефициентот $a = 1 > 0$ и нејзиниот график е дел од правата $y = x - 2$, додека во интервалот $(6, +\infty)$ функцијата опаѓа бидејќи коефициентот $a = -\dfrac{1}{3} < 0$, и нејзиниот график е дел од правата $y = -\dfrac{1}{3}x$. Графикот на функцијата $f(x)$ зададена по делови е претставен на сликата 11.18.



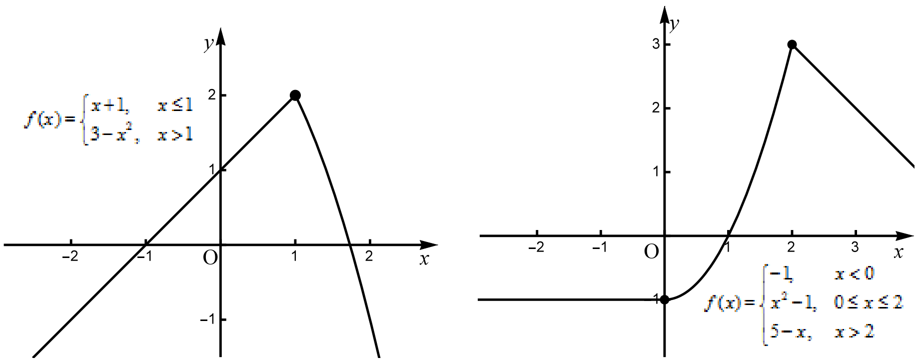

**Слика 11.18.**

**Задача 11.8.** Да се скицираат графиците на следниве функции:

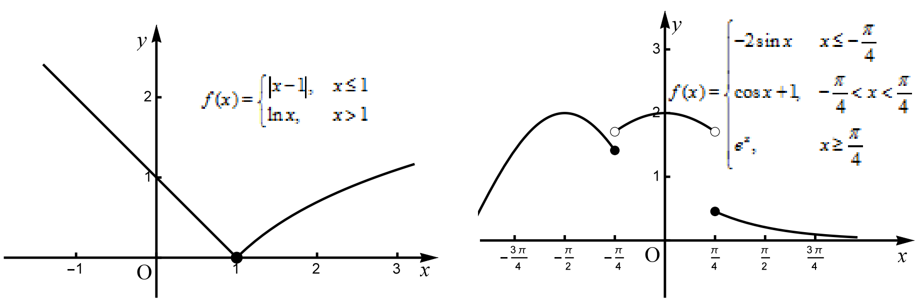
а) $y = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ 3-x^2, & x > 1 \end{cases}$ ; б) $y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x^2-1, & 0 \le x \le 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$ ;

в) $y) = \begin{cases} |x-1|, & x \le 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ; г) $y = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\frac{\pi}{4} \\ \cos x + 1, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \\ e^x, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ .

**Решение.** Графиците на функциите под а) и б) се прикажани на сликата 11.19, а на функциите под в) и г) на сликата 11.20.




**Слика 11.19.**




**Слика 11.20.**

## Задачи за вежбање

**Задача 11.9.** Да се скицира графикот на функцијата $y = x^2$, а потоа од нејзиниот график да се добијат графиците на следниве функции:

а) $y = x^2 + 3$; б) $y = x^2 - 3$; в) $y = (x + 3)^2$; г) $y = (x - 3)^2$;

д) $y = -x^2$; ѓ) $y = (-x)^2$; е) $y = 2x^2$; ж) $y = \frac{1}{2}x^2$;

з) $y = (3x)^2$; и) $y = \left(\frac{1}{3}x\right)^2$.

**Задача 11.10.** Со помош на графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ да се скицираат графиците на функциите:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$; б) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$; г) $y = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

**Задача 11.11.** Со помош на графикот на функцијата $y = 2^x$ да се скицираат графиците на функциите:

а) $y = 4^x$; б) $y = -2^{2x}$; в) $y = 4^{x+1}$;

г) $y = 4^x - 4$; д) $y = \frac{1}{2} \cdot 4^x$; ѓ) $y = 2^{2x-1}$.

**Задача 11.12.** Со помош на графикот на функцијата $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ да се скицираат графиците на функциите:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} |x|$; в) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$;

г) $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}(x - 2)\right|$; д) $y = \log_{\frac{1}{3}} 3x$; ѓ) $y = -1 + \log_{\frac{1}{3}} x$.

**Задача 11.13.** Да се скицираат графиците на следниве функции:

а) $y = \cos 2x$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y = \sin 4x$;

д) $y = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$;

ѓ) $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$;

е) $y = -\frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $y = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

Со одлуката бр. 02-1929/42 од 21.10.2015 година на Наставно-научниот совет на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје книгата е одобрена за објавување како универзитетско помагало.



Е-издание:
http://www.ukim.edu.mk/mk content.php?meni=53&glavno=41