



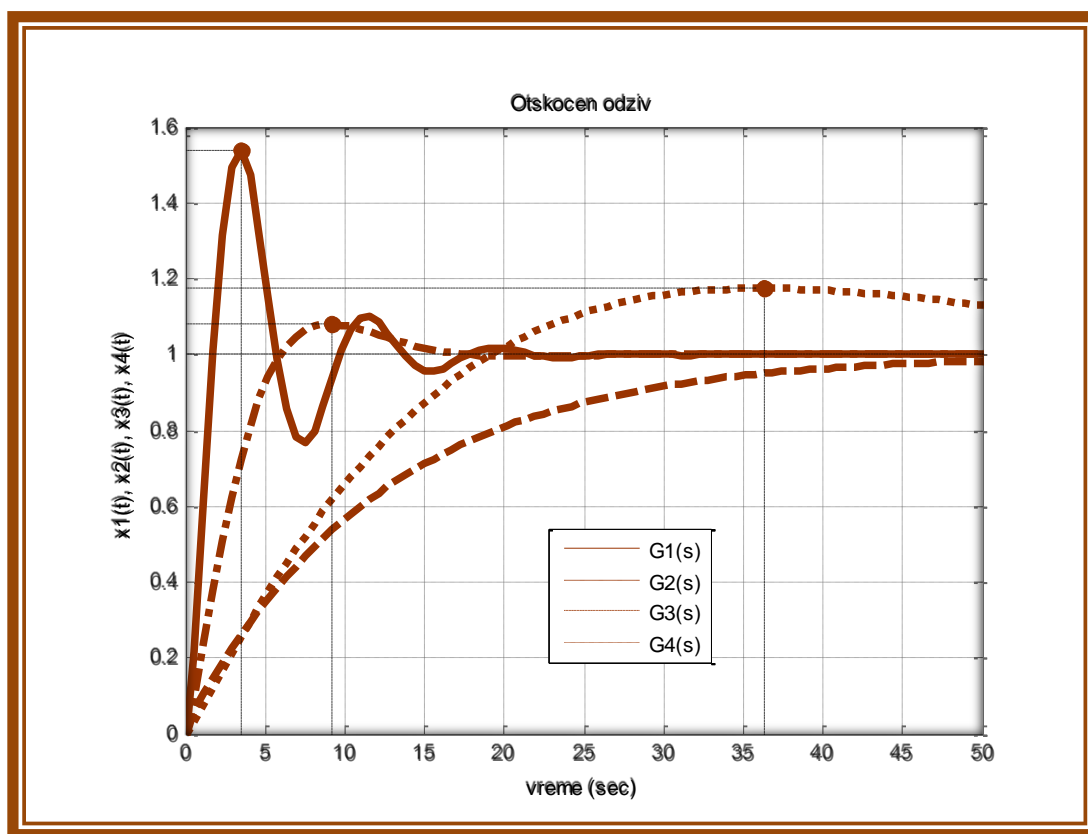
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ -
Скопје

Факултет за електротехника и
информациски технологии - Скопје



ЕЛИЗАБЕТА ЛАЗАРЕВСКА

**ЗБИРКА НА ОДБРАНИ РЕШЕНИ ЗАДАЧИ
ОД ОБЛАСТА НА СИНТЕЗАТА НА СИСТЕМИ
НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ**



Скопје, 2016

Автор

Д-р Елизабета Лазаревска, редовен професор на Факултетот за електротехника и информатички технологии – Скопје

Наслов

ЗБИРКА НА ОДБРАНИ РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД ОБЛАСТА НА СИНТЕЗАТА НА СИСТЕМИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ

Рецензенти

Д-р Миле Станковски, редовен професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

Д-р Стојче Дескоски, редовен професор на Техничкиот факултет во Битола (во пензија)

Издавач

Универзитет Свети Кирил и Методиј – Скопје

Електронско издание

*Good, better, best. Never let it rest. Till your good is better,
and your better is best.*

St. Jerome

Добро, подобро, најдобро. Никогаш немој да се откажеш, сè
додека твоето добро не биде подобро и твоето подобро не стане
најдобро.

Книгата е посветена на моите родители,

Елизабета Лазаревска

ПРЕДГОВОР

Книгата во прв ред е наменета за студентите од трета година на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, кои на насоката за компјутерско системско инженерство и автоматика го слушаат предметот проектирање на системи на автоматско управување. Меѓутоа, таа успешно ќе им послужи и на сите останати студенти од техничките факултети кои го изучуваат или се сретнуваат со проблеми од широкото подрачје на синтеза на затворени системи на автоматско управување како, на пример, на студентите од машинските, технолошките и металуршките факултети. Несомнено, корисни примери и информации во книгата ќе најдат и сите оние кои веќе работат во областа на синтезата на затворените системи на автоматско управување или само се интересираат за неа.

Системите на автоматско управување имаат многу широка примена во индустријата, техниката и нашето секојдневие, поаѓајќи од авионите и вселенските летала, па преку роботите и индустриските процеси, до апаратите што ги користиме во нашиот секојдневен живот. Знаењето на еден инженер автоматичар нема да биде комплетно, ако покрај анализата, тој не ја владее и синтезата на овие системи. Како што анализата му овозможува да ги разбере системите на автоматско управување и нивните својства, така синтезата му овозможува истите да ги проектира односно направи. Генерално земено, тоа е крајната цел на секој еден инженер автоматичар.

Извонредно важната и сложена проблематика на синтезата на затворени системи на автоматско управување (САУ) во книгата е поделена на шест поглавја и е изложена преку голем број од околу двестотини решени примери. Во првата глава се дефинирани показателите на квалитет на поведението на еден затворен САУ. Основна цел при проектирањето на секој еден САУ е исполнување на проектните барања кои го опишуваат саканото поведение на проектираниот систем. Тие проектни барања се сведуваат на ограничување на вредностите од параметрите на одделните карактеристики на системот, какви што се: пропусниот опсег, резонантниот врв, времето на смирување на отскочниот одсвив, максималниот прескок во отскочниот одсвив итн. Општо земено, без оглед дали се искажани преку параметрите на карактеристиките на проектираниот систем во фреквентен или временски домен, проектните барања ги специфицираат следните три важни својства на еден САУ: брзината на одсвив, релативната стабилност и грешката на системот. Во првата глава е покажано како се пресметуваат одделните параметри на проектираните системи и нивното влијание врз особините и поведението на тие системи.

Втората глава е посветена на аналитичката синтеза на затворените САУ. За разлика од многубројните показатели на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во преоден режим, какви што се: времето на прескок, максималниот прескок, времето на пораст и времето на смирување на преодниот одсвив, пропусниот опсег, резонантниот врв, резервите на засилување и фаза и др., сигналот на грешка е единствен показател на сите битни динамички карактеристики на еден систем - резервата на стабилност и брзината на одсвив на системот. Затоа тој може да се искористи како критериум за

синтеза на еден затворен САУ. Целта на синтезата во овој случај е да се одбере таква структура и такви вредности на променливите параметри на системот (параметри кои можат да се нагудуваат), што грешката во системот, која се дефинира како разлика помеѓу саканиот и стварниот одзив на системот, во секој миг на време да биде минимална. Во втората глава, повторно низ решени примери, се прикажани различните аналитички критериуми за синтеза на затворените САУ кои го користат сигналот на грешка, и нивната практична примена.

Во третата глава е воведен поимот за синтеза на затворените САУ по пат на компензација и прикажани различните видови компензации и компензатори. Преку голем број решени задачи се прикажани својствата на основните три типа компензатори – диференцијален, интегрален и интегро-диференцијален и нивното влијание врз поведението на некомпензираниот систем.

Во четвртата глава станува збор за фреквентна синтеза на затворените САУ со помош на Најквистовата крива на соодветниот отворен систем за проектираниот затворен систем. Затоа оваа синтеза многу често популарно се нарекува Најквистова фреквентна синтеза. Решените примери ја третираат Најквистовата синтеза на еден затворен САУ со компензација на засилувањето, со примена на диференцијален компензатор, со примена на интегрален компензатор и со примена на интегро-диференцијален компензатор.

Петтата глава е посветена на фреквентната синтеза на затворените САУ со помош на Бодевите дијаграми на соодветниот отворен систем за проектираниот затворен систем. Тоа е веројатно една од најпопуларните постапки за синтеза во праксата, заради фактот дека фреквентните карактеристики на еден систем се добиваат мошне едноставно и по експериментален пар. Повторно низ решени примери е прикажана Бодевата синтеза со компензација на засилувањето, со примена на диференцијален компензатор, со примена на интегрален компензатор и со примена на интегро-диференцијален компензатор.

Во шестата глава се дадени решени примери од областа на синтеза на затворените САУ со помош на постапката на геометриско место на корени. За таа цел низ соодветни примери најнапред е опишана самата постапка на добивањето на геометриското место на корени на еден затворен САУ, а потоа е илустрирана и нејзината примена во синтезата на затворените САУ по пат на компензација со диференцијален, интегрален и интегро-диференцијален компензатор.

Авторот најискрено им се заблагодарува на рецензентите за многу полезните сугестии кои допринесоа кон подобрување на содржината на ова издание.

Од авторот,

Скопје, мај 2016

СОДРЖИНА

1.	ПОКАЗАТЕЛИ НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН САУ	1
2.	АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ	53
3.	СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ	99
4.	ФРЕКВЕНТНА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА НАЈКВИСТОВА КРИВА	167
5.	ФРЕКВЕНТНА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА БОДЕОВИ ДИЈАГРАМИ	211
6.	СИНТЕЗА СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ	299
	ЛИТЕРАТУРА	395

1. ПОКАЗАТЕЛИ НА КВАЛИТЕТОТ НА ПОВЕДЕНИЕТО НА ЕДЕН САУ

Врз основа на карактеристиките на еден систем на автоматско управување (САУ), било во временски било во фреквентен домен, се дефинираат одредени параметри, кои се користат како показатели на квалитетот на поведението на набљудуваниот систем. Овие показатели можат да се поделат во четири групи:

1. Показатели на точноста на работа на системот во стационарен режим, кои служат за оценка на големината на грешката на системот во стационарен режим
2. Показатели на резервата на стабилност на набљудуваниот систем, кои служат како мерка за оддалеченоста на набљудуваниот систем од неговата граница на стабилност
3. Показатели на брзината на дејствување на системот, кои служат како мерка за брзината на одзив на набљудуваниот систем на различни влезни возбуди и пореметувања
4. Интегрални показатели, кои го карактеризираат преодниот режим на системот

Првата група показатели го карактеризираат стационарниот режим на работа на еден САУ, додека останатите го карактеризираат неговиот преоден режим.

Како мерка за оценка на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во стационарен режим, кога соодветниот отворен систем $G_0(\bullet)$ има астатизам од нулти ред, се употребува константата на положба K_p :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) \quad \text{— за континуални системи} \tag{1.1}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) \quad \text{— за дискретни системи}$$

Како мерка за оценка на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во стационарен режим, кога соодветниот отворен систем $G_0(\bullet)$ има астатизам од прв ред, служи брзинската константа K_v :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) \quad \text{— за континуални системи} \tag{1.2}$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) \quad \text{— за дискретни системи}$$

Квалитетот на поведението на еден затворен САУ во стационарен режим, кога неговиот отворен систем $G_0(\bullet)$ има астатизам од втор ред, се оценува преку константатата на забрзување K_a :

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) \quad - \quad \text{за континуални системи} \quad (1.3)$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z) \quad - \quad \text{за дискретни системи}$$

Точноста на работата на еден затворен континуален САУ во стационарен режим, за различни референтни влезни сигнали $y(t)$ и различен ред на астатизам на соодветниот отворен систем $G_0(s)$ се прикажани во Таблица 1.1.

Таблица 1.1. Стационарната грешка на затворен континуален САУ за различен референтен влезен сигнал и отворен систем со различен ред на астатизам

влез астатизам	$y(t) = c_0 h(t)$	$y(t) = v_0 t h(t)$	$y(t) = \frac{a_0 t^2}{2} h(t)$
$r = 0$	$e(\infty) = \frac{c_0}{1 + K_p}$	$e(\infty) = \infty$	$e(\infty) = \infty$
$r = 1$	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{v_0}{K_v}$	$e(\infty) = \infty$
$r = 2$		$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{a_0}{K_a}$
$r = 3$		$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = 0$

Точноста на работата на еден затворен дискретен САУ во стационарен режим, за различни референтни влезни сигнали $y(k)$ и различен ред на астатизам на соодветниот отворен систем $G_0(z)$ се прикажани во Таблица 1.2.

Таблица 1.2. Стационарната грешка на затворен дискретен ДСАУ за различен референтен влезен сигнал и отворен систем со различен ред на астатизам

влез астатизам	$y(k) = c_0 h(k)$	$y(k) = v_0 k h(k)$	$y(k) = \frac{a_0 k^2}{2} h(k)$
$r = 0$	$e(\infty) = \frac{c_0}{1 + K_p}$	$e(\infty) = \infty$	$e(\infty) = \infty$
$r = 1$	$e(\infty) = 0$	$e(\infty) = \frac{v_0 T}{K_v}$	$e(\infty) = \frac{a_0 T^2}{K_a}$
$r = 2$		$e(\infty) = 0$	
$r = 3$			$e(\infty) = 0$

Карактерот на преодниот процес во еден систем зависи од неговите динамички својства: брзината на одсв и степенот на релативна стабилност. Оценката на овие својства се врши врз основа на бројните вредности на параметрите на системот кои го карактеризираат неговиот одсв на типична влезна возбуда – најчесто отскочен или простопериодичен сигнал. Со други зборови, динамичките својства на еден систем можат да се утврдат врз основа на неговиот отскочен или фреквентен одсв.

Параметрите кои го опишуваат отскочниот одзив на еден затворен САУ се:

τ - **период на осцилациите** во отскочниот одсв. Се дефинира како временско растојание помеѓу два соседни максимуми на отскочниот одсв.

M_p - **прескок**. Се дефинира како разлика помеѓу првиот максимум и стационарната вредност на отскочниот одсв на системот. Најчесто се изразува во % од стационарната вредност на одсвот и служи за одредување на динамичката грешка на системот (грешката во преоден режим), односно како мерка за точноста на работата на системот во преоден режим. Исто така се користи како мерка за степенот на релативна стабилност на системот.

T_p - **време на пораст на одсвот**. Се дефинира како време потребно отскочниот одсв на системот да порасне од 10% на 90% од својата стационарна вредност. Величината на овој параметар ја карактеризира брзината на одсв на системот, како и неговата

способност за што поверна репродукција на влезните сигнали. Притоа, што е поголемо времето на пораст T_p , тоа се поголеми изобличувањата на влезните сигнали. Кај системите со прескок помал од 10% важи една битна и многу едноставна емпириска релација помеѓу времето на пораст и ширината на пропусниот опсег ω_0 , изразена во Херци:

$$T_p f_0 = 0.30 \div 0.40 \quad (1.4)$$

T_d - **време на доцнење**. Тоа е времето потребно отскочниот одзив да достигне половина од својата стационарна вредност. Величината на овој параметар покажува со колкаво задоцнување по моментот на возбудување на системот на неговиот излез ќе се појави значителен сигнал и, следствено, служи како мерка за брзината на одзив на системот.

T_s - **време на смирување на осцилациите**. Тоа е времето потребно амплитудата на осцилациите во отскочниот одзив да падне под одредена вредност, на пример, под 2% или 5% од вредноста на одзивот во стационарен режим. По времето T_s , за практични цели, преодниот процес во набљудуваниот систем може да се занемари.

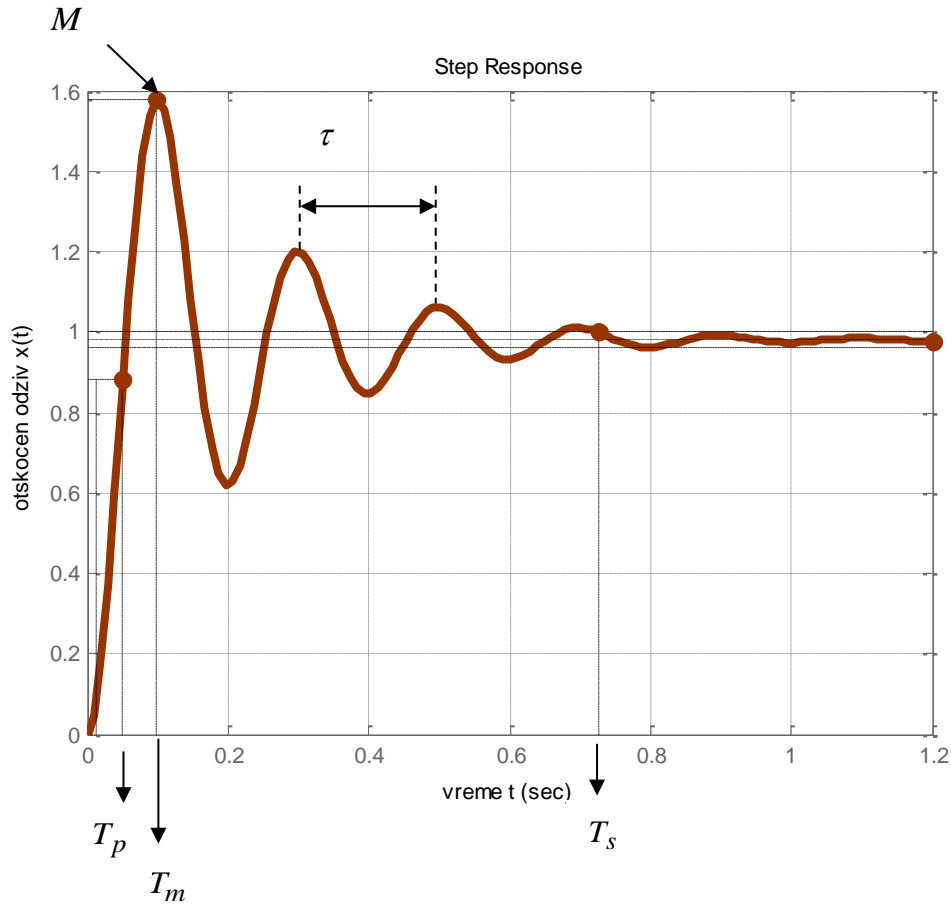
T_m - **доминантна временска константа** на системот. Се дефинира како време потребно амвелопата на амплитудите од преодниот процес да опадне на 37% од својата почетна вредност. Како и времето на смирување T_s , се користи за оцена на времетраењето на преодниот режим. Кај стабилните линеарни динамички системи од прв и втор ред амплитудите на преодниот процес исчезнуваат по експоненцијален закон одреден со членот $e^{-\sigma t}$, $\sigma > 0$. Тогаш, доминантната временска константа кај овие системи се одредува како времето за кое експонентот $\sigma \cdot t$ ќе биде еднаков на 1, па:

$$T_m = \frac{1}{\sigma} \quad (1.5)$$

Кај системите од повисок ред T_m се проценува врз основа на положбата од доминантните полови на системот во s – комплексната рамнина. Доминантни полови за еден систем од повисок ред се оние полови кои имаат доминантно влијание врз преодниот одзив на системот (компонента на одзивот на системот која го карактеризира неговиот преоден режим на работа), а тоа е конјугирано комплексниот пар полови од преносната функција на системот, кои се наоѓаат најблизу до имагинарната оска во s – комплексната рамнина. Нивната положба во s – рамнината е определена со непридушуваната фреквенција на системот ω_n и факторот на релативно придушување ζ , па во ваков случај:

$$T_m = \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad (1.6)$$

Еден таков типичен отскочен одзив е прикажан на Слика 1.1.



Слика 1.1. Типичен отскочен одзив на еден континуален САУ

За систем од втор ред опишан со преносната функција:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.7)$$

временските показатели на квалитет се определуваат по формулите:

$$T_p = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}; 0.3 \leq \zeta \leq 0.8 \quad (1.8)$$

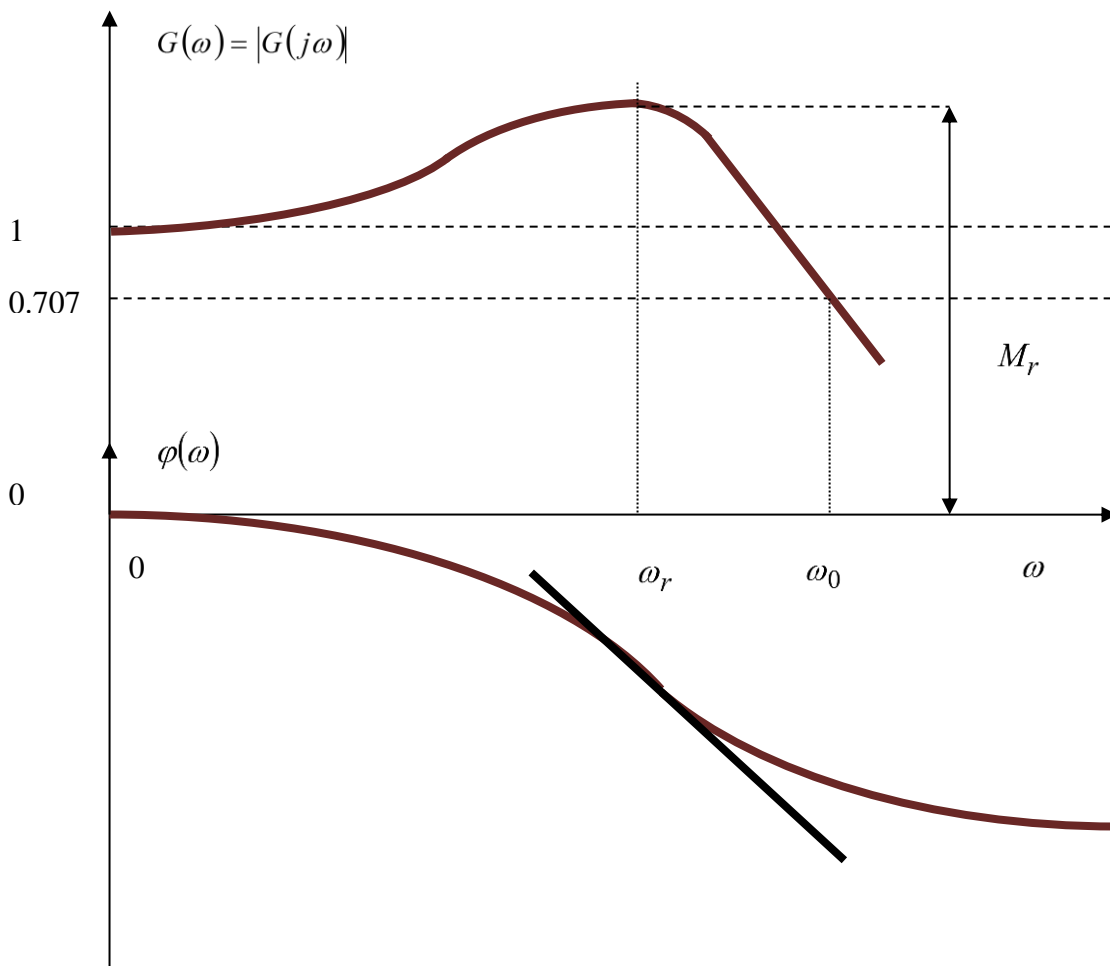
$$T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1.9)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (1.10)$$

$$M = 1 + e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (1.11)$$

$$M^0 /_0 = 100e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (1.12)$$

Параметрите M_r , ω_r , ω_0 и T_d , кои го одредуваат изгледот на фреквентните карактеристики на еден затворен САУ од Слика 1.2, се користат за оценка на брзината на одзив на системот, неговите карактеристики како филтер и квалитетот на репродукција на влезните сигнали.



Слика 1.2. Типичен изглед на фреквентните карактеристики на еден затворен САУ

Тие се дефинираат на следниот начин:

M_r - вредност на максимумот на амплитудно-фреквентната карактеристика на затворениот систем:

$$M_r = \max_{\omega \geq 0} |G(j\omega)| = \max_{\omega \geq 0} G(\omega) \quad (1.13)$$

Се нарекува уште **резонантен врв** и се користи за оценка на степенот на релативна стабилност (резерва на стабилност) на набљудуваниот систем.

ω_r - **резонантна фреквенција**. Се дефинира како фреквенција при која настапува резонантниот врв M_r и служи за оценка на резервата на стабилност на набљудуваниот систем.

ω_0 - **пропусен опсег**. Понекогаш, кога амплитудно-фреквентната карактеристика $G(\omega)$ има резонантен врв, ω_0 се дефинира како фреквенција при која карактеристиката $G(\omega)$ повторно поприма вредност 1 по резонантниот врв. Меѓутоа, најчесто ω_0 се дефинира како фреквенција при која амплитудно-фреквентната карактеристиката $G(\omega)$ поприма вредност 0.707 или $-3dB$. Фреквенцијата ω_0 ја одредува широчината на пропусниот опсег на набљудуваниот систем, од која што зависат неговите филтерски својства и брзината на одзив. Може да се покаже дека брзината на одзив на еден систем е директно пропорционална со големината на неговиот пропусен опсег. Што се однесува до филтерските карактеристики на системот, треба да се има на ум дека пречките и шумовите што го напаѓаат системот често имаат фреквентни спектри концентрирани на многу тесен опсег фреквенции. Следствено, ако системот има соодветни филтерски својства, кои го спречуваат преносот на сигнали токму во опсегот фреквенции на кој дејствуваат шумовите, а го овозможуваат надвор од тој опсег, тој ќе биде во состојба да го отстрани влијанието на пречките и шумовите врз управуваната променлива.

T_d - **време на доцнење**. Се дефинира како наклон на фазната фреквентна карактеристика на набљудуваниот систем:

$$T_d = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (1.14)$$

и служи како мерка за инерцијата односно брзината на одзив на системот. За квалитетна репродукција на влезните сигнали, фазно фреквентната карактеристика $\varphi(\omega)$ треба да биде линеарна функција од ω на целиот опсег од фреквентниот спектар на влезниот сигнал.

Селективност. Се дефинира како величина на наклонот на амплитудно фреквентната карактеристика $G(\omega)$ во околина на фреквенцијата ω_0 и служи како мерка за способноста на системот да ги елиминира пречките и шумовите, чиј фреквентен спектар

паѓа во доменот фреквенции непосредно на или зад ω_0 . Селективноста секогаш може да се изрази како целоброен производ од факторот $-20dB/dec$. Така селективноста може да изнесува $-20dB/dec$, $-40dB/dec$ итн.

За оценка на степенот на релативна стабилност, односно резервата на стабилност на еден затворен САУ, наместо фреквентните карактеристики на самиот затворен систем, многу често се користи фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем $G_0(s)$. Една таква карактеристика $G_0(j\omega)$ е прикажана на Слика 1.3. Фреквентната карактеристика $G_0(j\omega)$ уште се нарекува **Најквистова крива** и служи за оцена на стабилноста на затворениот систем. Така, под претпоставка на стабилен отворен систем, набљудуваниот затворен систем ќе биде стабилен доколку критичната точка $(-1, j0)$ се наоѓа надвор од карактеристиката $G_0(j\omega)$. Колку критичната точка $(-1, j0)$ е подалеку од карактеристиката $G_0(j\omega)$, толку затворениот систем ќе биде постабилен. Како мерка за оддалеченоста на затворениот систем од неговата граница на стабилност се користат параметрите d и φ_r , кои се дефинираат на следниот начин:

φ_r - **резерва на фаза**. Ако со ω_1 се означи фреквенцијата за која $|G_0(j\omega_1)| = 1$, резервата на фаза φ_r може да се претстави како збир од аргументот на $G_0(j\omega)$ и 180° :

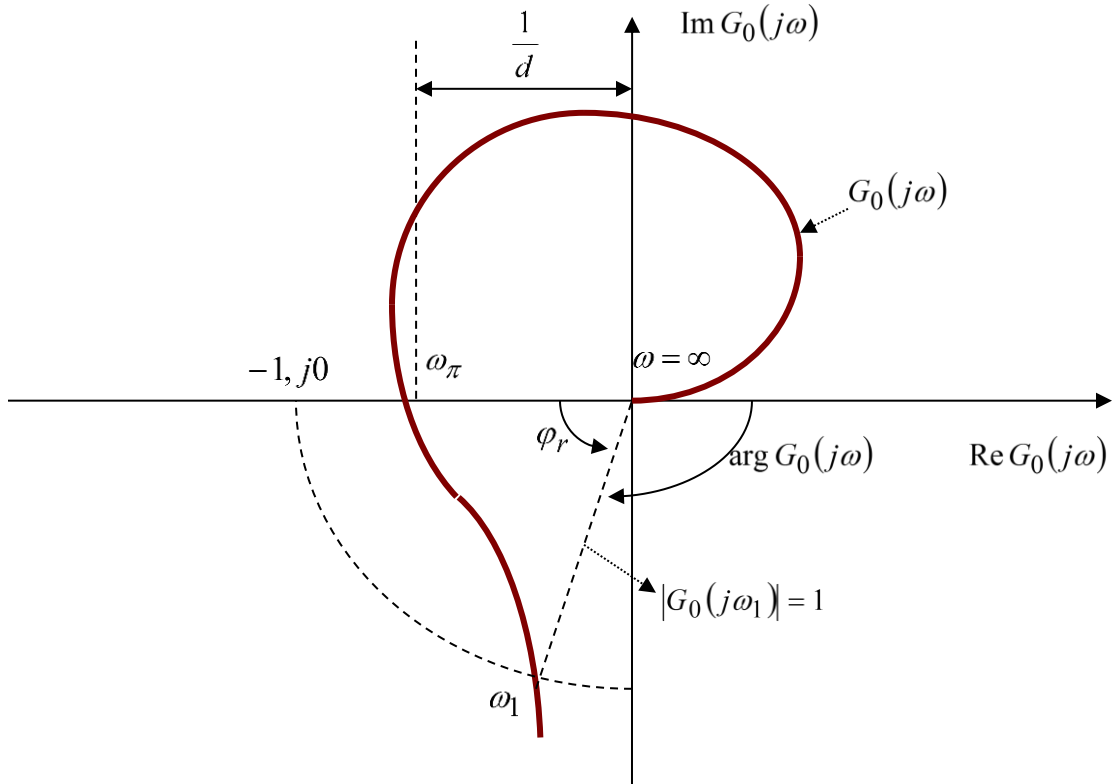
$$\varphi_r = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] \quad \text{во степени} \quad (1.15)$$

при што ω_1 се нарекува **пресечна фреквенција на засилување**. Кај стабилните системи резервата на фаза е позитивен агол, кај нестабилните е негативен. Ако $\varphi_r = 0$, системот е на граница на стабилност. Еден систем ќе има дотолку поголема резерва на стабилност, доколку φ_r е поголемо.

d - **резерва на засилување**. Ако со ω_π се означи фреквенцијата за која $\arg[G_0(j\omega_\pi)] = -\pi$, резервата на засилување d може да се претстави како реципрочна вредност од модулот на фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ за $\omega = \omega_\pi$:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} \quad (1.16)$$

при што ω_π се нарекува **пресечна фреквенција на фаза**. Кај стабилните системи $d > 1$, додека кај нестабилните $d < 1$. Ако $d = 1$, системот се наоѓа на границата на стабилност. Резервата на стабилност на еден систем е дотолку поголема, доколку d е поголемо од 1.



Слика 1.3. Илустрација на резервите на засилување и фаза на еден затворен САУ

Поведението на еден затворен линеарен дискретен систем на автоматско управување во временски домен може да се карактеризира преку истите временски показатели како и поведението на еден континуален САУ, ако се примени смената:

$$z = e^{sT} \quad (1.17)$$

Исто така, за анализа на поведението на еден затворен линеарен дискретен систем на автоматско управување во фреквентен домен можат да се користат истите фреквентни показатели како и за континуалните САУ, ако се примени билинеарната трансформација:

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (1.18)$$

Притоа се применува следната постапка:

1. Замена на комплексната променлива z во преносната функција $G_0(z)$ на соодветниот отворен систем со смената (1.18)

2. Замена на комплексната променлива s од преносната функција $G_0(s)$, добиена во претходниот чекор, со смената $s = j\omega_s$ и генерирање на соодветните фреквентни карактеристики преку $G_0(j\omega_s)$
3. Одредување на пресечните фреквенции на засилување и фаза, резервите на засилување и фаза, ширината на пропусниот опсег и сите други фреквентни показатели на квалитетот на поведението на генерираниот систем $G_0(s)$
4. Трансформација на критичните фреквенции одредени во претходниот чекор од фреквентното подрачје во s – комплексната рамнина во фреквентното подрачје во z – комплексната рамнина според формулата

$$\omega T_0 = 2 \arctg \omega_s \quad (1.19)$$

Што се однесува до интегралните критериуми за оценка на квалитетот на поведението на еден САУ, нив им е посветена следната глава од збирката, а овде само ќе биде наведено дека овие показатели се во вид на интеграл во кој подинтегралната функција за аргумент го има сигналот на грешката:

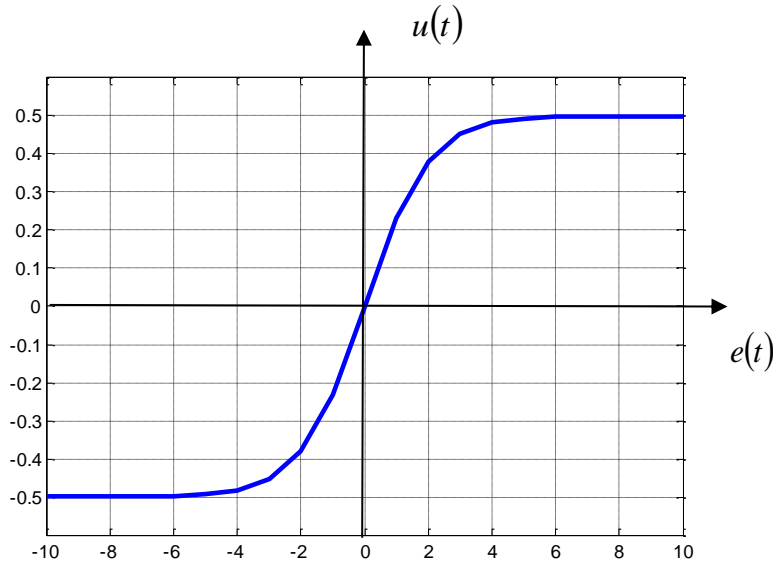
$$J = \int_0^{\infty} F[e(t)] dt \quad (1.20)$$



1.1. На Слика 1.4 е прикажана влезно - излезната карактеристика на засилувач во улогата на регулатор во еден затворен систем на автоматско управување, чии останати компоненти се сите линеарни. Кој е линеарниот опсег на грешката $e(t)$ во вака дефинираниот затворен САУ?

Решение: Бараниот опсег на грешката $e(t)$ во набљудуваниот затворен САУ е определен со линеарниот дел од карактеристиката на Слика 1.4:

$$-2 \leq e(t) \leq 2 \quad (1.21)$$



Слика 1.4. Влезно - излезна карактеристика на регулаторот во еден затворен САУ

1.2. Да се определи времето на доцнење T_d за еден континуален динамички систем, чиј отскочен одзив има облик:

$$x(t) = 1 - e^{-t}, t \geq 0 \quad (1.22)$$

Решение: Трајната вредност $x(\infty)$ на отскочниот одзив $x(t)$ на набљудуваниот систем е:

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t}) = 1 \quad (1.23)$$

па од дефиницијата на времето на доцнење T_d следува:

$$x(T_d) = 1 - e^{-T_d} = 0.5x(\infty) \quad (1.24)$$

Оттука за T_d се добива:

$$1 - e^{-T_d} = 0.5 \Rightarrow 0.5 = e^{-T_d} \Rightarrow T_d = \ln 2 = 0.693 \quad (1.25)$$

1.3. Да се определи времето на пораст T_p на отскочниот одсив на системот од претходната задача.

Решение: Времето за кое отскочниот одсив на набљудуваниот систем достигнува 10% од својата трајна вредност изнесува:

$$x(t_1) = 1 - e^{-t_1} = 0.1x(\infty) \Rightarrow t_1 = \ln \frac{10}{9} = 0.104 \text{ sec.} \quad (1.26)$$

додека времето за кое истиот достигнува 90% од својата трајна вредност е:

$$x(t_2) = 1 - e^{-t_2} = 0.9x(\infty) \Rightarrow t_2 = \ln 10 = 2.302 \text{ sec.} \quad (1.27)$$

Следствено:

$$T_p = t_2 - t_1 = 2.302 - 0.104 = 2.198 \text{ sec.} \quad (1.28)$$

1.4. Да се определи времето на пораст T_p за отскочниот одсив на еден дискретен динамички систем со преносна функција:

$$G(z) = \frac{1-a}{z-a}, \quad |a| < 1 \quad (1.29)$$

Решение: Отскочниот одсив на набљудуваниот дискретен динамички систем е:

$$\begin{aligned} x(kT) &= Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\{G(z)H(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1-a}{z-a} \cdot \frac{z}{z-1}\right\} = \\ &= (1-a)Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-a)(z-1)}\right\} = 1 - a^k, \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

а неговата стационарна вредност изнесува:

$$x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - a^k) = 1 \quad (1.31)$$

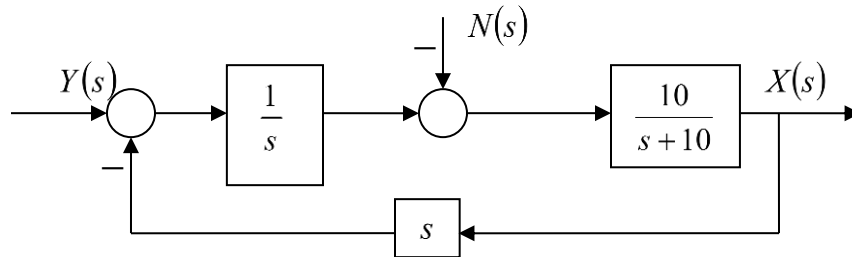
Како дискретен сигнал, тој не мора да ги има точните вредности 0.1 и 0.9, па се усвојуваат вредностите ≤ 0.1 и ≥ 0.9 :

$$x(k_1T) = 1 - a^{k_1} \leq 0.1x(\infty) \Rightarrow k_1 \geq \frac{\ln 0.9}{\ln a} \quad (1.32)$$

$$x(k_2T) = 1 - a^{k_2} \geq 0.9x(\infty) \Rightarrow k_2 \leq \frac{\ln 0.1}{\ln a} \quad (1.33)$$

$$T_p = k_2T - k_1T = \left(\frac{\ln 0.1}{\ln a} - \frac{\ln 0.9}{\ln a}\right)T = T \frac{\ln \frac{1}{9}}{\ln a} \quad (1.34)$$

1.5. Да се определи времето на смирување на отскочниот одсвиг на затворениот систем од Слика 1.5, ако во системот дејствуваат само единични отскочни пореметувања $n(t)$. (Упатство: времето на смирување на отскочниот одсвиг да се дефинира како време за кое амплитудите на одсвигот ќе отстапуваат за помалку од 2% од неговата стационарна вредност.)



Слика 1.5. Илустрација кон Задача 1.5

Решение: Под претпоставка дека $y(t) \equiv 0$:

$$G(s) = \frac{X(s)}{N(s)} = -\frac{\frac{10}{s+10}}{1 + \frac{10}{s+10}} = -\frac{10}{s+20} \quad (1.35)$$

па, за одсвигот на набљудуваниот систем се добива:

$$X(s) = G(s)N(s) = -\frac{10}{s(s+20)} \quad (1.36)$$

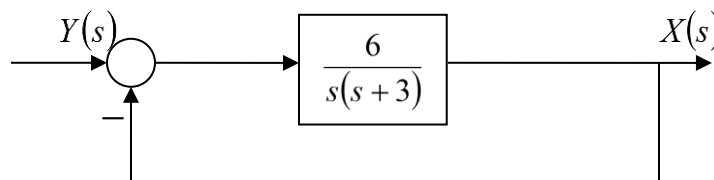
или, во просторот на оригиналите:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{-\frac{10}{s(s+20)}\right\} = L^{-1}\left\{-\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+20)}\right\} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-20t}, t \geq 0 \quad (1.37)$$

Од дефиницијата на времето на смирување на еден систем следува:

$$x(T_s) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-20T_s} = 0.02x(\infty) = -\frac{1}{2} \Rightarrow T_s = -\frac{1}{20} \log(0.98) = 0.001 \text{ sec.} \quad (1.38)$$

1.6. Да се определи процентуалниот износ од максималниот прескок на отскочниот одсвиг за системот од Слика 1.6.



Слика 1.6. Илустрација кон Задача 1.6

Решение: Од Слика 1.6 непосредно следува:

$$G_0(s) = \frac{6}{s(s+3)} \quad (1.39)$$

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{6}{s^2 + 3s + 6} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.40)$$

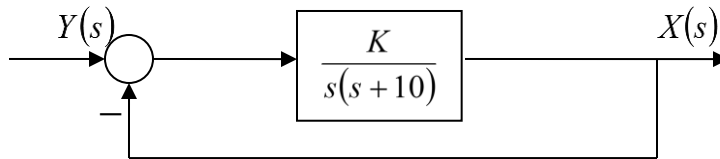
Оттука:

$$\omega_n^2 = 6 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{6} \quad (1.41)$$

$$2\zeta\omega_n = 3 \Rightarrow \zeta = \frac{3}{2\omega_n} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \quad (1.42)$$

$$M\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\pi} = 8.7732\% \approx 9\% \quad (1.43)$$

1.7. Да се определи вредноста на максималниот прескок во отскочниот одзив на системот од долната слика, ако $K = 9$.



Слика 1.7. Илустрација кон Задача 1.7

Решение: Преносната функција на набљудуваниот затворен систем е:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+10)}}{1 + \frac{K}{s(s+10)}} = \frac{K}{s^2 + 10s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.44)$$

Оттука:

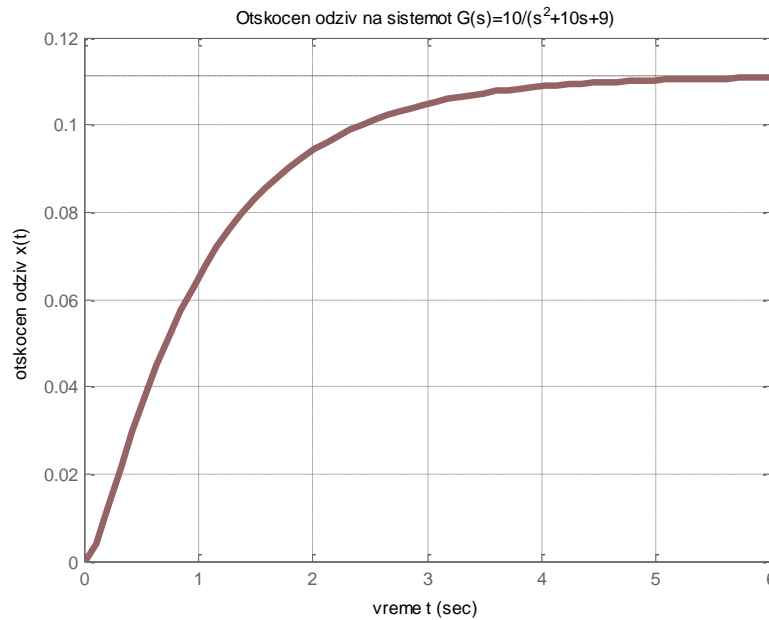
$$\omega_n^2 = K \Rightarrow \omega_n = \sqrt{K} = 3 \quad (1.45)$$

$$\zeta\omega_n = 5 \Rightarrow \zeta = \frac{5}{\omega_n} = \frac{5}{3} \quad (1.46)$$

Бидејќи $\zeta = 5/3 > 1$, може да се заклучи дека отскочниот одзив на набљудуваниот систем нема прескок. Навистина, за $K = 9$, системот од Слика 1.7 има пар прости реални полови во точките $s_1 = -1$ и $s_2 = -9$, па неговиот отскочен одзив е апериодичен и од облик:

$$x(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{10}{s(s+1)(s+9)} \right\} = \frac{10}{9} - \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{5}{36}e^{-9t}, t \geq 0 \quad (1.47)$$

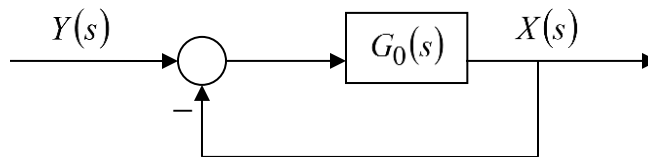
Истиот е прикажан на Слика 1.8.



Слика 1.8. Графички приказ на отскочниот одзив на системот од Задача 1.7

1.8. Да се определи времето на пораст, времето на смирување, времето на максимален прескок и самиот максимален прескок на отскочниот одзив на затворениот систем од долната слика, ако:

$$G_0(s) = \frac{2}{s(s+2)} \quad (1.48)$$



Слика 1.9. Илустрација кон Задача 1.8

Решение: Од изразот за преносната функција $G(s)$ на набљудуваниот затворен систем непосредно следува:

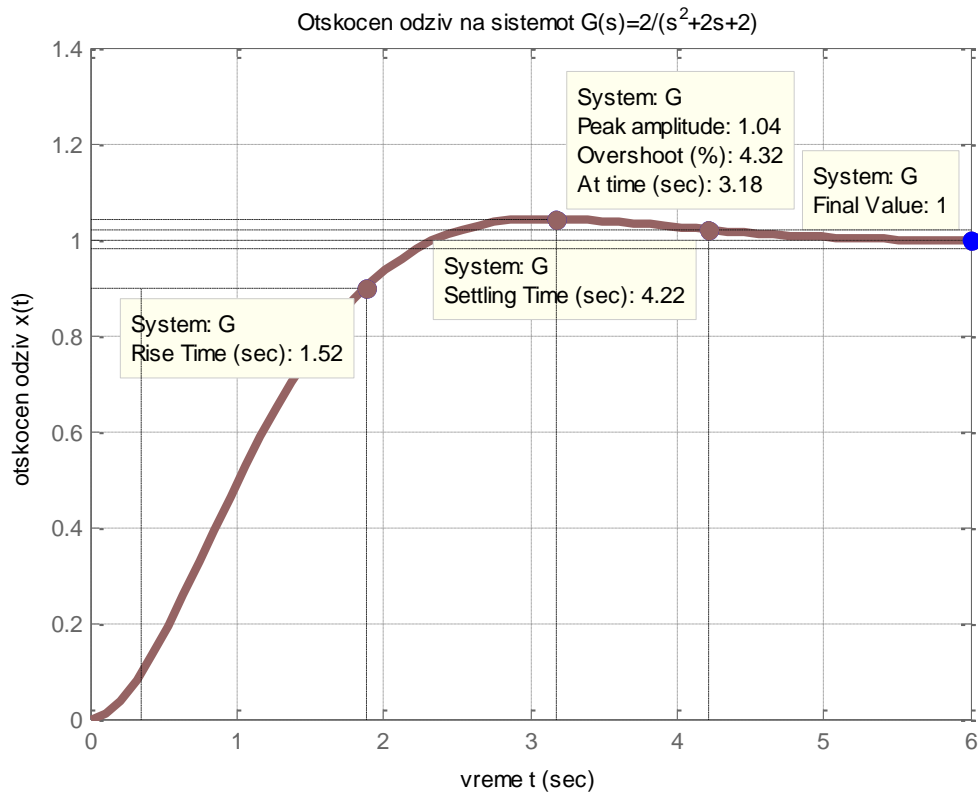
$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.49)$$

$$\omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{2} \quad (1.50)$$

$$\zeta\omega_n = 1 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.51)$$

$$T_p = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n} = \frac{2.16 \frac{1}{\sqrt{2}} + 0.60}{\sqrt{2}} = \frac{2.16 + 0.60\sqrt{2}}{2} = 1.50 \quad (1.52)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{1} = 4 \text{ sec.} \quad (1.53)$$

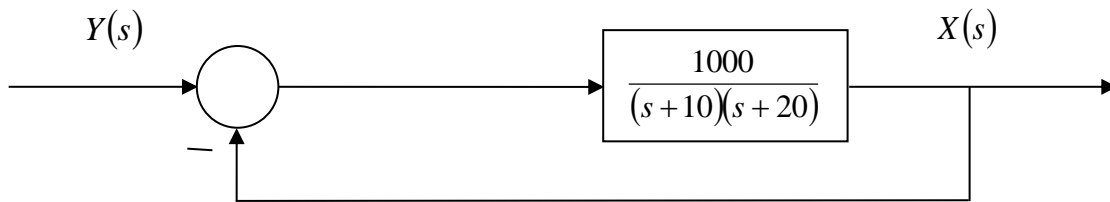


Слика 1.10. Графички приказ на отскочниот одзив на затворениот систем од Задача 1.8

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \pi = 3.14 \text{ sec.} \quad (1.54)$$

$$M\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\pi} = 4.32\% \quad (1.55)$$

1.9. На Слика 1.11 е прикажан затворен систем за автоматско управување со брзината на движење на возило. Да се пресмета максималниот прескок и стационарната грешка на брзината на возилото за единична отскочна влезна возбуда.



Слика 1.11. Илустрација кон Задача 1.9

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем е:

$$G_0(s) = \frac{1000}{(s+10)(s+20)} \quad (1.56)$$

па, за преносната функција на затворениот систем од Слика 1.11 се добива:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{1000}{s^2 + 30s + 1200} \quad (1.57)$$

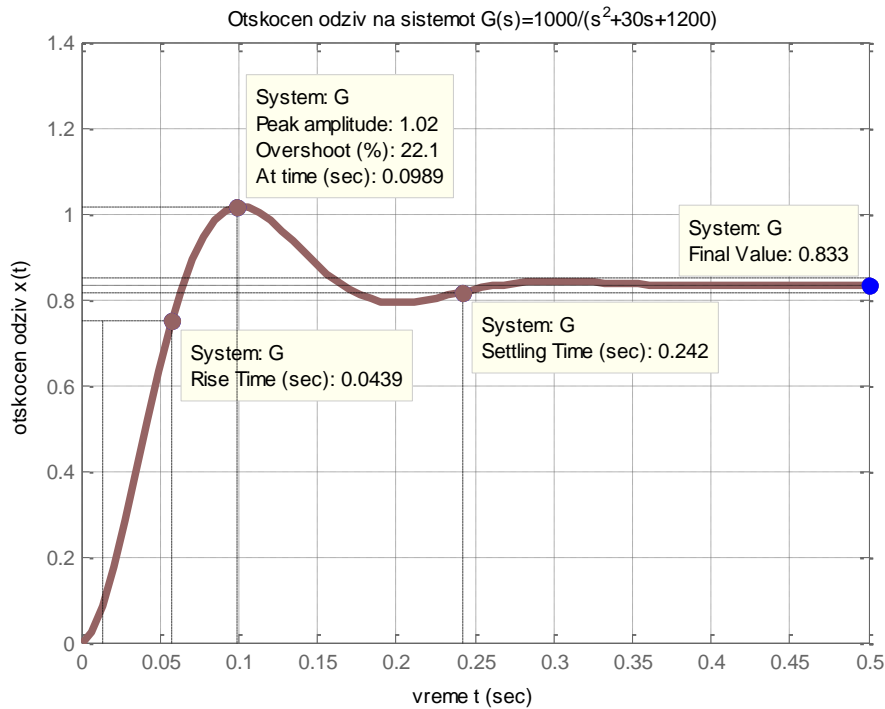
Оттука:

$$\omega_n^2 = 1200 \Rightarrow \omega_n = 20\sqrt{3} \quad (1.58)$$

$$2\zeta\omega_n = 30 \Rightarrow \zeta = \frac{15}{\omega_n} = \frac{15}{20\sqrt{3}} = \frac{3}{4\sqrt{3}} \quad (1.59)$$

$$M\% = 100e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{4\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}}} = 22.10\% \quad (1.60)$$

Отскочниот одзив на набљудуваниот затворен систем од Слика 1.11 е прикажан на Слика 1.12.



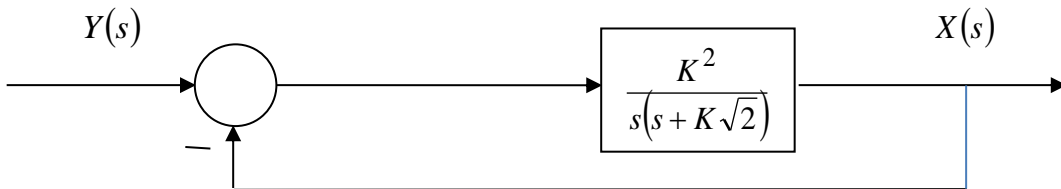
Слика 1.12. Графички приказ на отскочниот одзив на затворениот систем од Задача 1.9

Неговата стационарна грешка може да се определи со помош на втората гранична теорема на Лапасовата трансформација:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{1000}{(s+10)(s+20)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{(s+10)(s+20)}{(s+10)(s+20)+1000} \cdot \frac{1}{s} \quad (1.61)$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+10)(s+20)}{(s+10)(s+20)+1000} = \frac{200}{1200} = \frac{1}{6} \quad (1.62)$$

1.10. Да се определи времето на смирување и максималниот прескок на отскочниот одзив на затворениот систем од долната слика. За која вредност на неопределениот параметар K времето на смирување ќе биде помало од 1 sec.?



Слика 1.13. Илустрација кон Задача 1.10

Решение:

$$G_0(s) = \frac{K^2}{s(s + K\sqrt{2})} \quad (1.63)$$

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K^2}{s^2 + Ks\sqrt{2} + K^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.64)$$

$$\omega_n^2 = K^2 \Rightarrow \omega_n = K \quad (1.65)$$

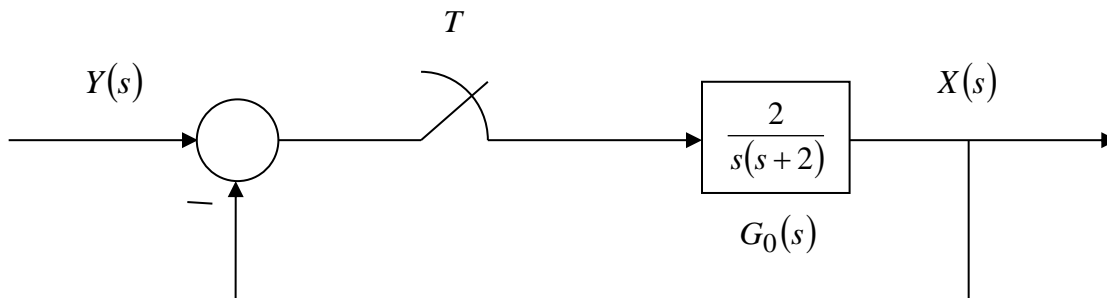
$$2\zeta\omega_n = K\sqrt{2} \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1.66)$$

$$T_s = \frac{8}{K\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow K > \frac{8}{\sqrt{2}} = 5.65 \quad (1.67)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}K} = \frac{8}{K\sqrt{2}} \text{ sec.} \quad (1.68)$$

$$M\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\pi} = 4.32\% \quad (1.69)$$

1.11. Да се пресмета времето на смирување и максималниот прескок на отскочниот одзив на затворениот дискретен систем од долната слика, ако: $T = 0.02\text{sec.}$, $T = 0.2\text{sec.}$ и $T = 1\text{sec.}$



Слика 1.14. Илустрација кон Задача 1.11

Решение: За да се определи дискретен модел на затворениот систем од Слика 1.14, најнапред треба да се определи дискретниот еквивалент на континуалниот систем $G_0(s)$, под претпоставка за форматор од нулти ред на неговиот влез:

$$\begin{aligned} G_0(z) &= Z \left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} G_0(s) \right\} = Z \left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{2}{s(s+2)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{2}{s^2(s+2)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{zT}{(z-1)^2} - \frac{z}{2(z-1)} + \frac{z}{2(z-e^{-2T})} \right\} = \frac{(e^{-2T} + 2T - 1)z + (1 - e^{-2T} - 2Te^{-2T})}{2(z-1)(z - e^{-2T})} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Оттука, карактеристичниот полином $a(z)$ на дискретната преносна функција $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$ ќе биде:

$$\begin{aligned} a(z) &= 2(z-1)(z - e^{-2T}) + (e^{-2T} + 2T - 1)z + (1 - e^{-2T} - 2Te^{-2T}) = \\ &= 2z^2 + (2T - 3 - e^{-2T})z + (1 + e^{-2T} - 2Te^{-2T}) \end{aligned} \quad (1.71)$$

За $T = 0.02$ сек. $a(z)$ има конкретен облик:

$$a(z) = 2z^2 - 3.9208z + 1.9224 \quad (1.72)$$

и нули во точките:

$$z_{1,2} = 0.98 \pm j0.02 \quad (1.73)$$

Со смената $z = e^{sT}$, половите (1.73) на дискретниот модел $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$ се пресликуваат во следните точки во s -комплексната рамнина:

$$s_{1,2} = \frac{1}{T} \ln z_{1,2} = -0.9997 \pm j1.0203 \quad (1.74)$$

кои претставуваат полови на соодветниот континуален еквивалент. Карактеристичниот полином $a(s)$ на тој континуален еквивалент е:

$$a(s) = (s + s_1)(s + s_2) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (1.75)$$

од каде што непосредно следува:

$$\zeta = 0.6999 \quad (1.76)$$

$$\omega_n = 1.4284 \quad (1.77)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4.0012 \text{ sec.} \quad (1.78)$$

$$M\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\pi} = 4.6044\% \quad (1.79)$$

За $T = 0.2 \text{ sec.}$:

$$a(z) = 2z^2 - 3.27z + 1.4 \quad (1.80)$$

$$z_{1,2} = 0.8175 \pm j0.1780 \quad (1.81)$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{T} \ln z_{1,2} = -0.8917 \pm j1.0720 \quad (1.82)$$

$$\zeta = 0.6395 \quad (1.83)$$

$$\omega_n = 1.3944 \quad (1.84)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4.4858 \text{ sec.} \quad (1.85)$$

$$M\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 7.3299\% \quad (1.86)$$

За $T = 1 \text{ sec.}$:

$$a(z) = 2z^2 - 1.1353z + 0.8647 \quad (1.87)$$

$$z_{1,2} = 0.2838 \pm j0.5931 \quad (1.88)$$

$$s_{1,2} = \frac{1}{T} \ln z_{1,2} = -0.4193 \pm j0.5931 \quad (1.89)$$

$$\zeta = 0.3494 \quad (1.90)$$

$$\omega_n = 1.2001 \quad (1.91)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 9.5397 \text{ sec.} \quad (1.92)$$

$$M\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 30.9924\% \quad (1.93)$$

На крај добиените резултати треба да се споредат со параметрите на континуалниот систем кој се добива кога од шемата на Слика 1.14 се исфрлат дискретизаторот и форматорот од нулти ред. Тој е идентичен со системот од Задача 1.8 и неговата структурна блок - шема е прикажана на Слика 1.9. Следствено, за него важи:

$$\omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{2} \quad (1.94)$$

$$\zeta \omega_n = 1 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.95)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{1} = 4 \text{ sec.} \quad (1.96)$$

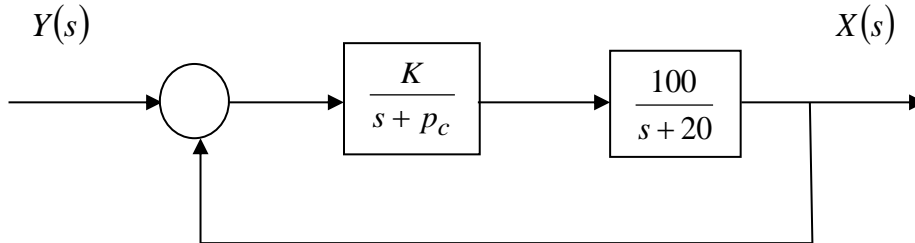
$$M\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\pi} = 4.32\% \quad (1.97)$$

Како што може да се забележи од долната таблица, со зголемувањето на периодот на дискретизација T , параметрите на дискретниот модел сè повеќе отстапуваат од параметрите на континуалниот систем. Во праксата се смета дека при изборот на T е сосема задоволително да се усвои фреквенција на дискретизација која е 20 пати поголема од пропусниот опсег ω_0 на системот. Меѓутоа, понекогаш е потребно дискретизацијата да се изведува побавно, односно со поголем период T . Тогаш квалитетот на динамичкиот одзив на дискретниот модел се намалува заради зголеменото доцнење што го внесува форматорот од нулти ред пропорционално со T и зголеменото влијание на пречките.

Таблица 1.3. Параметри на изворниот континуален систем и неговите дискретни модели

	Континуален систем	Дискретен модел со $T = 0.02 \text{ sec.}$	Дискретен модел со $T = 0.2 \text{ sec.}$	Дискретен модел со $T = 1 \text{ sec.}$
T_s	4 sec.	4.0012 sec.	4.4858 sec.	9.5397 sec.
$M\%$	4.32%	4.6044%	7.3299%	30.9924%

1.12. Даден е затворениот систем од долната слика. Да се определи коефициентот на засилување K и полот p_c на компензаторот $G_c(s)$, така што отскочниот одзив на системот ќе има максимален прескок од 8.08% и време на смирување $t_s = 0.32s$. при критериумот од 2%. Потоа по пат на симулација на отскочниот одзив да се провери добиениот резултат.



Слика 1.15. Илустрација кон Задача 1.12

Решение: Од условот за максималниот прескок се добива:

$$\begin{aligned}
 M &= e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.0808 \Rightarrow -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(0.0808) = -2.5158 \\
 \Rightarrow \frac{\pi^2\zeta^2}{1-\zeta^2} &= (2.5158)^2 = 6.3292 \\
 \Rightarrow \left(1 + \frac{\pi^2}{6.3292}\right)\zeta^2 &= 1 \Rightarrow 2.5594\zeta^2 = 1 \Rightarrow \zeta^2 = \frac{1}{2.5594} = 0.3907 \Rightarrow \zeta = 0.625 \quad (1.98)
 \end{aligned}$$

Од условот за времето на смирување следува:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.32 \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} = \frac{4}{(0.625)(0.32)} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (1.99)$$

Преносната функција на затворениот систем од Слика 1.15 е:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{G_c(s)P(s)}{1 + G_c(s)P(s)} = \frac{\frac{K}{s + p_c} \cdot \frac{100}{s + 20}}{1 + \frac{K}{s + p_c} \cdot \frac{100}{s + 20}} = \frac{100K}{s^2 + (20 + p_c)s + (20p_c + 100K)} = \\
 &= \frac{100K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.100)
 \end{aligned}$$

па, оттука, непосредно следуваат релациите:

$$2\zeta\omega_n = 20 + p_c \quad (1.101)$$

$$\omega_n^2 = 20p_c + 100K \quad (1.102)$$

со чие решавање се добива:

$$p_c = 5, \quad K = 3 \quad (1.103)$$

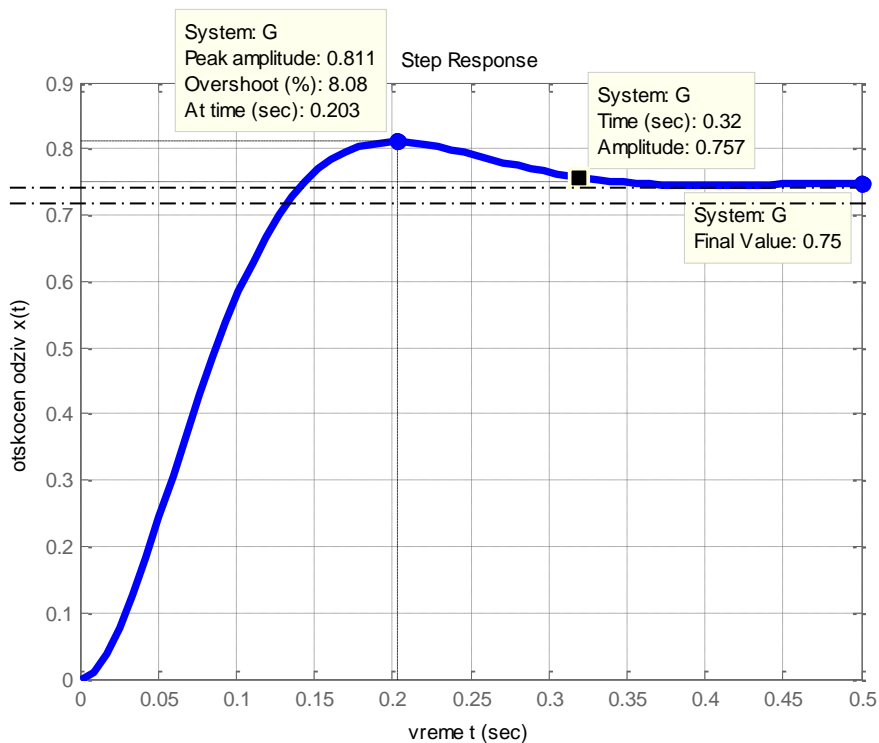
Добиениот резултат може да се провери со симулација на отскочниот одзив на затворениот систем од Слика 1.15, чија што преносна функција $G(s)$ за компензаторот:

$$G_c(s) = \frac{K}{s + p_c} = \frac{3}{s + 5} \quad (1.104)$$

изнесува:

$$G(s) = \frac{G_c(s)P(s)}{1 + G_c(s)P(s)} = \frac{300}{s^2 + 25s + 400} \quad (1.105)$$

Овој отскочен одзив е прикажан на Слика 1.16.



Слика 1.16. Отскочен одзив на затворениот систем од Слика 1.12

1.13. Да се определи пропусниот опсег ω_0 на еден затворен континуален САУ, чија преносна функција е:

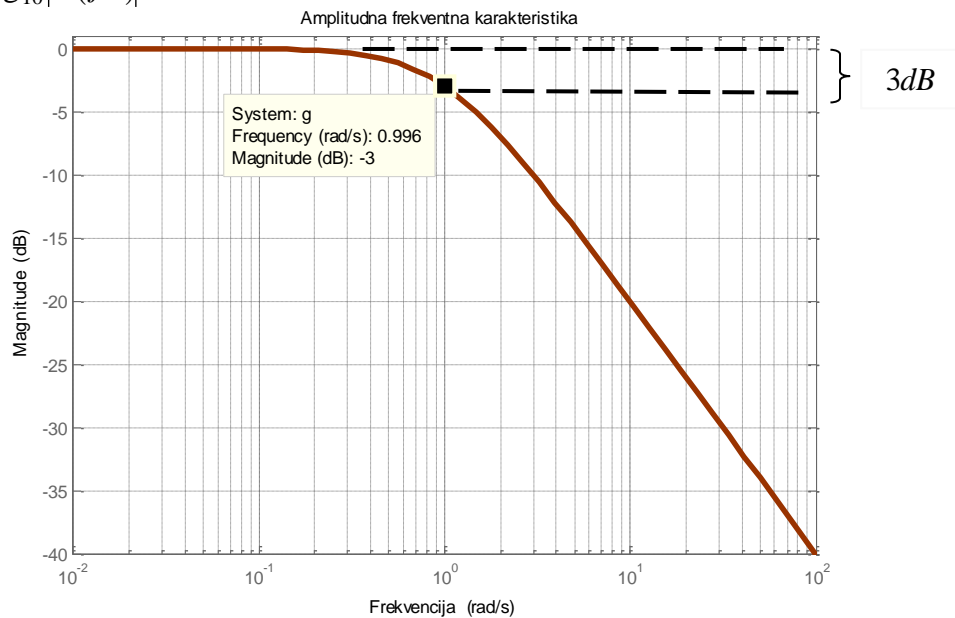
$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (1.106)$$

Решение: Амплитудно - фреквентната карактеристика на набљудуваниот систем е:

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad (1.107)$$

и таа е прикажана графички на Слика 1.17.

$$G(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$



Слика 1.17. Амплитудно - фреквентна карактеристика на системот од Задача 1.13

По дефиниција:

$$G(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_0^2}} = 0.707 \quad (1.108)$$

па за пропусниот опсег на набљудуваниот систем се добива:

$$\sqrt{1+\omega_0^2} = \frac{1}{0.707} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1+\omega_0^2 = 2 \Rightarrow \omega_0 = 1 \text{ rad} \quad (1.109)$$

1.14. Да се определат резонантниот врв M_r и резонантната фреквенција ω_r за континуалниот систем со преносна функција:

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} \quad (1.110)$$

Решение: Фреквентната преносна функција на набљудуваниот систем е:

$$G(j\omega) = \frac{5}{5 - \omega^2 + j2\omega} \quad (1.111)$$

а нејзиниот модул изнесува:

$$|G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \frac{5}{\sqrt{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}} \quad (1.112)$$

Резонантниот врв M_r е дефиниран како најголема вредност на $|G(j\omega)|$, која се постига за фреквенција ω_r , па ω_r се добива од условот за екстрем на функцијата $|G(j\omega)|$:

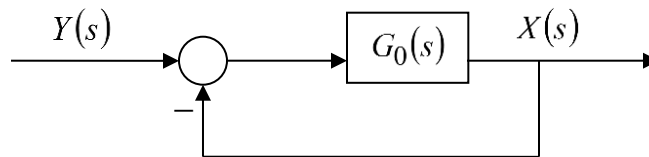
$$\frac{d}{d\omega} |G(j\omega)| = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{5}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}} \right] = \frac{-10\omega(\omega^2 - 3)}{(\omega^4 - 6\omega^2 + 25)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{3} \quad (1.113)$$

додека:

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{5}{\sqrt{\omega_r^4 - 6\omega_r^2 + 25}} = \frac{5}{4} = 1.25 \quad (1.114)$$

1.15. Даден е затворениот континуален систем со единична негативна повратна врска од Слика 1.18. Преносната функција на соодветниот отворен систем е:

$$G_0(s) = \frac{(6s + 1)}{(2s + 1)(4s + 1)} \quad (1.115)$$



Слика 1.18. Илустрација кон Задача 1.15

Да се определат пресечната фреквенција на засилување и резервата на фаза за овој систем.

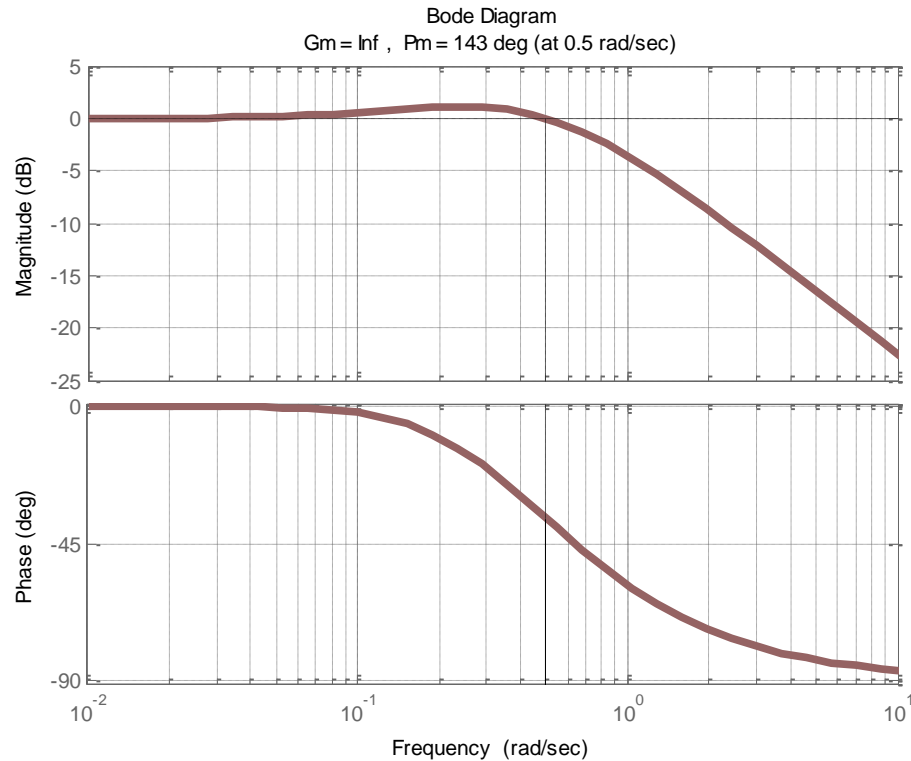
Решение: Фреквентната преносна функција на отворениот систем (1.115) е:

$$G_0(j\omega) = \frac{(1 + j6\omega)}{(1 + j2\omega)(1 + j4\omega)} \quad (1.116)$$

со модул и аргумент определени со следните изрази:

$$|G_0(j\omega)| = \frac{|1 + j6\omega|}{|1 + j2\omega||1 + j4\omega|} = \frac{\sqrt{1 + 36\omega^2}}{\sqrt{1 + 4\omega^2}\sqrt{1 + 16\omega^2}} \quad (1.117)$$

$$\arg[G_0(j\omega)] = \arctg(6\omega) - \arctg(2\omega) - \arctg(4\omega) \quad (1.118)$$



Слика 1.19. Бодови дијаграми на отворениот систем од Задача 1.15

Оттука, по дефиниција, за пресечната фреквенција на засилување се добива:

$$|G_0(j\omega)| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + 36\omega^2}}{\sqrt{1 + 4\omega^2}\sqrt{1 + 16\omega^2}} = 1 \Rightarrow 1 + 36\omega^2 = (1 + 4\omega^2)(1 + 16\omega^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 36\omega^2 = 1 + 20\omega^2 + 64\omega^4 \Rightarrow 16\omega^2 = 64\omega^4 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2} \quad (1.119)$$

па, резервата на фаза на набљудуваниот затворен систем ќе биде:

$$\varphi_r = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^\circ + \arctg 3 - \arctg 1 - \arctg 2 = 143.1306^\circ \quad (1.120)$$

Овие вредности можат да се прочитаат и од Бодевите дијаграми на отворениот систем, прикажани на Слика 1.19.

1.16. Да се определи резервата на засилување d на еден затворен континуален САУ, ако соодветниот отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (1.121)$$

Решение: По дефиниција:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} \quad (1.122)$$

каде што:

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^3} \quad (1.123)$$

е фреквентната преносна функција на отворениот систем $G_0(s)$. Од условот:

$$\arg[G_0(j\omega_\pi)] = -3\arctg \omega_\pi = -\pi \quad (1.124)$$

следува дека пресечната фреквенција на фаза ω_π на набљудуваниот систем е:

$$\omega_\pi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 1.732 \quad (1.125)$$

па за резервата на засилување се добива:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{\frac{1}{|(1+j\omega_\pi)^3|}} = (1 + \omega_\pi^2)^{\frac{3}{2}} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[1 + (\sqrt{3})^2\right]^{\frac{3}{2}} = 8 \quad (1.126)$$

1.17. Да се определи резервата на фаза φ_r на системот од претходната задача.

Решение: Од условот:

$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{1}{|(1 + j\omega_1)^3|} = \frac{1}{(1 + \omega_1^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 \quad (1.127)$$

следува дека пресечната фреквенција на засилување на набљудуваниот систем изнесува:

$$\omega_1 = 0 \quad (1.128)$$

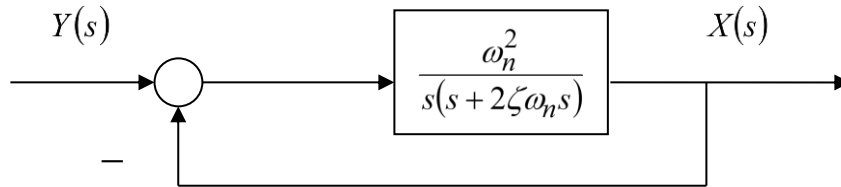
Следствено, по дефиниција:

$$\varphi_r = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^\circ - 3\arctg 0^0 = 180^\circ = \pi \text{ rad} \quad (1.129)$$

1.18. Да се определи врската помеѓу резервата на фаза и факторот на релативно придушување на затворениот систем од втор ред со преносна функција:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.130)$$

Решение: Затворениот систем (1.130) може да се претстави со структурната шема од Слика 1.20.



Слика 1.20. Илустрација кон Задача 1.18

Фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ на соодветниот отворен систем $G_0(s)$ за набљудуваниот затворен систем е од облик:

$$G_0(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} \quad (1.131)$$

и таа има модул еднаков на 1 за фреквенцијата ω_1 :

$$|G_0(j\omega_1)| = \left| \frac{\omega_n^2}{-\omega_1^2 + j2\zeta\omega_n\omega_1} \right| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_1^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_1^2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_1^2 - \omega_n^4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} = \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2 \quad (1.132)$$

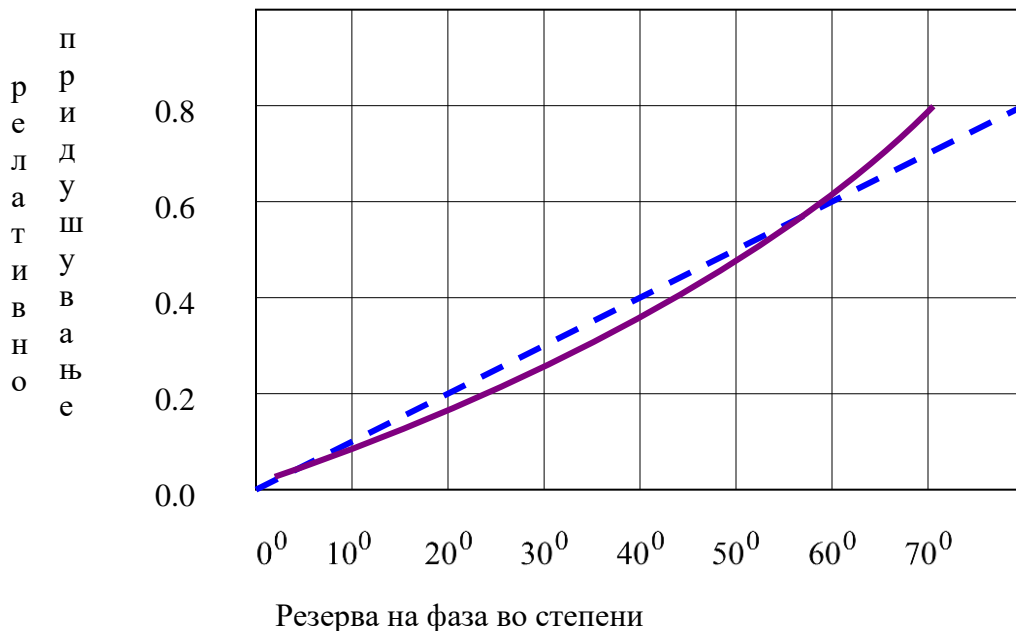
Резервата на фаза на набљудуваниот систем, по дефиниција, е:

$$\begin{aligned} \varphi_{rf} &= 180^0 - 90^0 - \arctg \frac{\omega_1}{2\zeta\omega_n} = \\ &= 90^0 - \arctg \frac{1}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} = \\ &= \arctg \frac{2}{2\sqrt{\sqrt{4 + \frac{1}{\zeta^4}} - 2}} \end{aligned} \quad (1.133)$$

Релацијата (1.133) ја дава врската помеѓу резервата на фаза и факторот на релативно пригушување на системот (1.130) и таа графички е прикажана на Слика 1.21. Едновременно, релацијата (1.133) ја дефинира врската помеѓу фреквентниот и временскиот одзив на набљудуваниот систем. Реалната крива од Слика 1.21 може да се апроксимира со права, прикажана на Слика 1.21 со испрекинатата линија, опишана со изразот:

$$\zeta = 0.01\varphi_{rf} \quad (1.134)$$

Апроксимацијата е задоволително точна за $\zeta \leq 0.7$.



Слика 1.21. Врска помеѓу резервата на фаза и факторот на релативно придушување кај системот (1.130)

1.19. Да се определи средната вредност на временската константа на доцнење T_d во фреквентниот опсег $0 \leq \omega \leq 10$ на еден затворен САУ, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{s}{s+1} \quad (1.135)$$

Решение: Фреквентната преносна функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$G_0(j\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega} = \frac{\omega^2 + j\omega}{1 + \omega^2} \quad (1.136)$$

од каде што следува дека фазно - фреквентната карактеристика на отворениот систем ќе биде:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{1}{\omega} \quad (1.137)$$

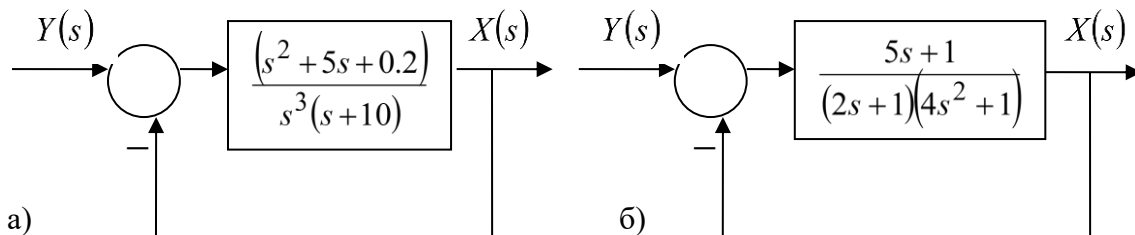
Имајќи ја на ум дефиницијата на константата на доцнење на еден континуален САУ:

$$T_d = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (1.138)$$

за бараната средна вредност се добива:

$$\begin{aligned} (T_d)_{\text{средно}} &= \frac{1}{10} \int_0^{10} T_d(\omega) d\omega = \frac{1}{10} \int_0^{10} -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} d\omega = -\frac{1}{10} \int_0^{10} d\varphi(\omega) = \\ &= -\frac{1}{10} \varphi(\omega) \Big|_0^{10} = -\frac{1}{10} [\varphi(10) - \varphi(0)] = \frac{1}{10} [\varphi(0) - \varphi(10)] = \\ &= \frac{1}{10} \left[\text{arctg}(\infty) - \text{arctg} \frac{1}{10} \right] = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{10} \text{arctg} \frac{1}{10} = 0.147 \text{ sec} \end{aligned} \quad (1.139)$$

1.20. Да се определи редот на астатизам на отворениот систем за дадените затворени системи од Слика 1.22, како и нивната стационарна грешка за единичен отскочен влез.



Слика 1.22. Илустрација кон Задача 1.20

Решение: а) Преносната функција на отворениот систем за затворениот систем од Слика 1.22.а) е:

$$G_0(s) = \frac{(s^2 + 5s + 0.2)}{s^3(s+10)} \quad (1.140)$$

и таа има трикратен пол во точката $s = 0$. Следствено, отворениот систем има астатизам од трет ред.

Грешката на набљудуваниот затворен систем во комплексното подрачје е дадена со изразот:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} Y(s) \quad (1.141)$$

па, за нејзината стационарна вредност се добива:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_0(s)} Y(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} = 0 \end{aligned} \quad (1.142)$$

бидејќи:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^2 + 5s + 0.2)}{s^3(s+10)} = \infty \quad (1.143)$$

б) Преносната функција на отворениот систем за затворениот систем од Слика 1.22.б) е:

$$G_0(s) = \frac{5s + 1}{(2s + 1)(4s^2 + 1)} \quad (1.144)$$

и таа нема полови во точката $s = 0$. Следствено, отворениот систем има астатизам од нулти ред.

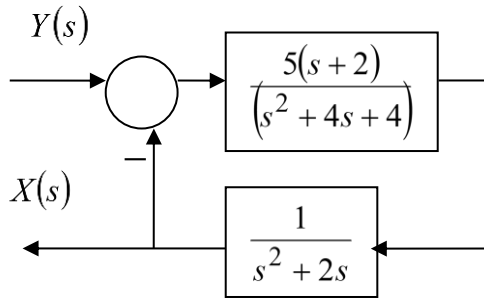
Стационарната грешка на набљудуваниот затворен систем изнесува:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (1.145)$$

бидејќи:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s + 1}{(2s + 1)(4s^2 + 1)} = 1 \quad (1.146)$$

1.21. Да се определи редот на астатизам на отворениот систем за затворениот систем од Слика 1.23, како и неговата стационарна грешка за линейно растечки влез $y(t) = 5th(t)$.



Слика 1.23. Илустрација кон Задача 1.21

Решение: Преносната функција на отворениот систем за затворениот систем од Слика 1.23 е:

$$G_0(s) = \frac{5(s+2)}{(s^2+4s+4)} \cdot \frac{1}{s^2+2s} = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2 s(s+2)} = \frac{5}{s(s+2)^2} \quad (1.147)$$

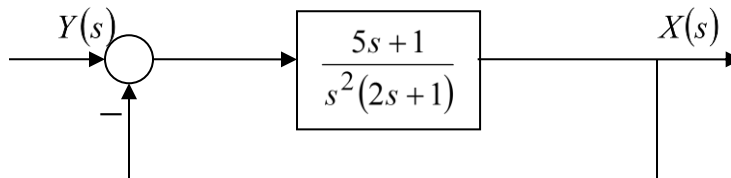
и таа има прост пол во точката $s = 0$. Следствено, отворениот систем има астатизам од прв ред и неговата стационарна грешка изнесува:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} Y(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{5}{s^2} = \frac{5}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s)} = 4 \end{aligned} \quad (1.148)$$

бидејќи:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{s(s+2)^2} = \frac{5}{4} \quad (1.149)$$

1.22. Да се определи стационарната грешка во затворениот систем од Слика 1.24 за влезна возбуда од облик $y(t) = 5t^2h(t)$.



Слика 1.24. Илустрација кон Задача 1.22

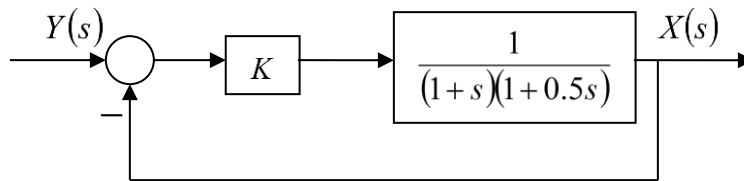
Решение:

$$\begin{aligned}
 e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} Y(s) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{10}{s^3} = \frac{10}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s)} = 10
 \end{aligned} \tag{1.150}$$

бидејќи:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{5s+1}{s^2(2s+1)} = 1 \tag{1.151}$$

1.23. Да се определи стационарната вредност на грешката во затворениот САУ од Слика 1.25.



Слика 1.25. Илустрација кон Задача 1.23

Решение: Со оглед на тоа дека:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(1+s)(1+0.5s)} = K \tag{1.152}$$

за стационарната грешка на затворениот систем од Слика 1.25 за единичен отскочен влез се добива:

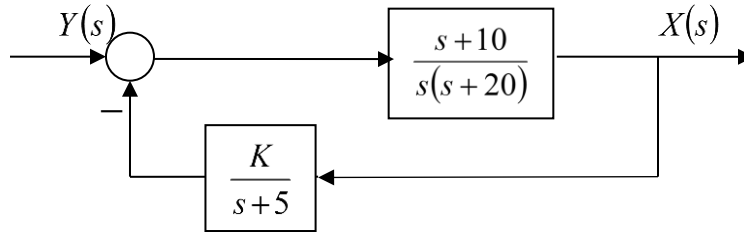
$$\begin{aligned}
 e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} Y(s) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} = \frac{1}{1+K}
 \end{aligned} \tag{1.153}$$

1.24. Да се определи вредноста на параметарот K во затворениот САУ од Слика 1.26, за која стационарната грешка за единичен отскочен влез ќе изнесува 0.01.

Решение:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K} = 0.01 \Rightarrow 1+K = 100 \Rightarrow K = 99 \tag{1.154}$$

1.25. Да се определи стационарната грешка на отскочниот одсив во затворениот САУ од долната слика. За која вредност на променливиот параметар K таа грешка ќе биде нулева?



Слика 1.26. Илустрација кон Задача 1.25

Решение:

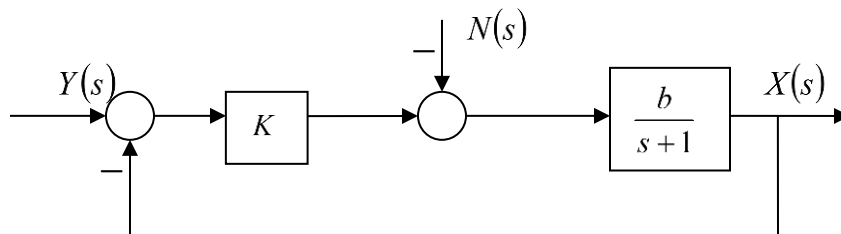
$$G(s) = \frac{\frac{s+10}{s(s+20)}}{1 + \frac{s+10}{s(s+20)} \cdot \frac{K}{s+5}} = \frac{(s+5)(s+10)}{s(s+5)(s+10) + K(s+10)} \quad (1.155)$$

$$E(s) = [1 - G(s)]Y(s) = \frac{s(s+5)(s+10) + K(s+10) - (s+5)(s+10)}{s(s+5)(s+10) + K(s+10)} Y(s) \quad (1.156)$$

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+5)(s+10) + K(s+10) - (s+5)(s+10)}{s(s+5)(s+10) + K(s+10)} Y(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+5)(s+10) + K(s+10) - (s+5)(s+10)}{s(s+5)(s+10) + K(s+10)} = \frac{10K - 50}{10K} \end{aligned} \quad (1.157)$$

$$e(\infty) = \frac{10K - 50}{10K} = 0 \Rightarrow K = 5 \quad (1.158)$$

1.26. Да се определи најмалата вредност на параметарот K во стабилниот затворен САУ од Слика 1.27, за која стационарната грешка на системот предизвикана од единични отскочни пореметувања $n(t)$ ќе биде помала од 10%. Под претпоставка, $b > 0$.



Слика 1.27. Илустрација кон Задача 1.26

Решение: Со оглед на тоа дека набљудуваниот затворен систем од Слика 1.27 има два влеза, референтниот влез $y(t)$ и пречките $n(t)$, неговиот одзив $x(t)$ ќе има две компоненти:

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{b}{s+1} \{-N(s) + K[Y(s) - X(s)]\} = -\frac{b}{s+1}N(s) + \frac{bK}{s+1}[Y(s) - X(s)] = \\
 &= -\frac{b}{s+1}N(s) + \frac{bK}{s+1}Y(s) - \frac{bK}{s+1}X(s) \\
 \left(1 + \frac{bK}{s+1}\right)X(s) &= -\frac{b}{s+1}N(s) + \frac{bK}{s+1}Y(s) \\
 \frac{s+1+bK}{s+1}X(s) &= -\frac{b}{s+1}N(s) + \frac{bK}{s+1}Y(s) \\
 X(s) &= -\frac{b}{s+1+bK}N(s) + \frac{bK}{s+1+bK}Y(s) \tag{1.159}
 \end{aligned}$$

Аналогно, и грешката во системот $e(t) = y(t) - x(t)$ ќе има две компоненти:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= Y(s) - X(s) = Y(s) - \frac{bK}{s+1+bK}Y(s) + \frac{b}{s+1+bK}N(s) = \\
 &= Y(s) - X(s) = \frac{s+1}{s+1+bK}Y(s) + \frac{b}{s+1+bK}N(s) = E_y(s) + E_n(s) \tag{1.160}
 \end{aligned}$$

Карактеристичниот полином на затворениот систем $a(s)$ е:

$$a(s) = s + 1 + bK \tag{1.161}$$

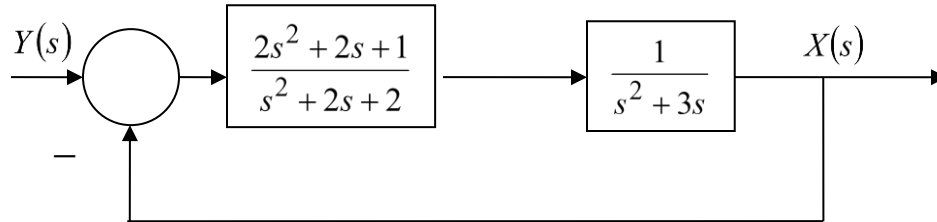
и тој ќе биде Хурвицов s -полином за секое $K > \frac{-1}{b}$. Тогаш, за стационарната грешка $e_n(\infty)$ се добива:

$$e_n(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_n(s) = \frac{b}{1+bK} \tag{1.162}$$

и таа ќе биде помала од 10% за секое $K > 10 - \frac{1}{b}$:

$$e_n(\infty) = \frac{b}{1+bK} < 0.1 \Rightarrow K > 10 - \frac{1}{b} \tag{1.163}$$

1.27. Да се определат константите на грешка за затворениот систем од Слика 1.28 и да се пресмета стационарната грешка на системот кога на неговиот влез е доведен единичен отскочен, линеарно растечки и параболичен влез.



Слика 1.28. Илустрација кон Задача 1.27

Решение: Бараните константи на грешка се:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{1}{s^2 + 3s} = \infty \quad (1.164)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{2s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{1}{s^2 + 3s} \right] = \frac{1}{6} \quad (1.165)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left[\frac{2s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 2} \cdot \frac{1}{s^2 + 3s} \right] = 0 \quad (1.166)$$

Стационарната грешка на набљудуваниот систем од Слика 1.28 за единичен отскочен влез е:

$$e_y(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} = 0 \quad (1.167)$$

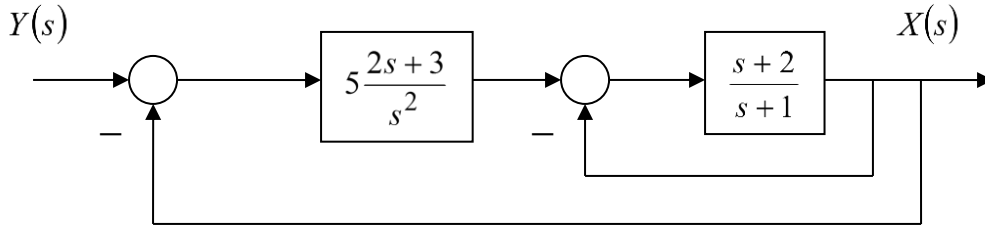
за променлив влез со константна брзина на промена $v_0 = 1$ таа изнесува:

$$e_y(\infty) = \frac{1}{K_v} = 6 \quad (1.168)$$

додека за променлив влез кој се менува по параболичен закон со константно забрзување $a_0 = 2$ има вредност:

$$e_y(\infty) = \frac{2}{K_a} = 0 \quad (1.169)$$

1.28. За затворениот систем од Слика 1.29 да се определат константите на грешка K_p , K_v и K_a .



Слика 1.29. Илустрација кон Задача 1.28

Потоа да се определи стационарната грешка на системот, доколку на неговиот влез е доведен референтен сигнал:

$$y(t) = (2 + 3t + 5t^2)h(t) \quad (1.170)$$

Решение: Преносната функција на отворениот систем $G_0(s)$ за набљудуваниот затворен систем од Слика 1.29 е:

$$G_0(s) = 5 \frac{2s+3}{s^2} \cdot \frac{s+1}{1 + \frac{s+2}{s+1}} = 5 \frac{2s+3}{s^2} \cdot \frac{s+1}{s+1+s+2} = 5 \frac{2s+3}{s^2} \cdot \frac{s+1}{2s+3} = 5 \frac{s+1}{s^2} \quad (1.171)$$

па за константите на грешка се добива:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 5 \frac{s+1}{s^2} = \infty \quad (1.172)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[5 \frac{s+1}{s^2} \right] = \infty \quad (1.173)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left[5 \frac{s+1}{s^2} \right] = 5 \quad (1.174)$$

Ако влезот (1.170) се претстави на следниот начин:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \quad (1.175)$$

каде што:

$$y_1(t) = 2h(t) \quad (1.176)$$

$$y_2(t) = 3th(t) \quad (1.177)$$

$$y_3(t) = 5t^2h(t) \quad (1.178)$$

стационарната грешка $e(\infty)$ во набљудуваниот систем може да се претстави како збир од стационарните грешки предизвикани од влезните компоненти $y_1(t)$, $y_2(t)$ и $y_3(t)$, одделно:

$$e(\infty) = e_1(\infty) + e_2(\infty) + e_3(\infty) \quad (1.179)$$

Притоа:

$$e_1(\infty) = \frac{c_0}{1 + K_p} = \frac{2}{1 + \infty} = 0 \quad (1.180)$$

$$e_2(\infty) = \frac{v_0}{K_v} = \frac{3}{\infty} = 0 \quad (1.181)$$

$$e_3(\infty) = \frac{a_0}{K_a} = \frac{10}{10} = 1 \quad (1.182)$$

Така, за $e(\infty)$ се добива:

$$e(\infty) = e_1(\infty) + e_2(\infty) + e_3(\infty) = 1 \quad (1.183)$$

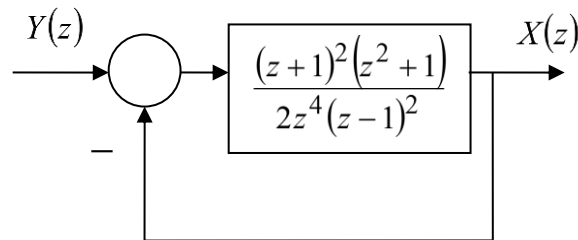
1.29. Да се определат константите на грешка и стационарната грешка за затворениот дискретен систем од сл.1.30, ако на неговиот влез дејствуваат сигналите:

$$y_1(kT) = \frac{1}{2}h(kT) \quad (1.184)$$

$$y_2(kT) = \frac{1}{2}kTh(kT) \quad (1.185)$$

$$y_3(kT) = \frac{1}{2}(kT)^2h(kT) \quad (1.186)$$

соодветно.



Слика 1.30. Илустрација кон Задача 1.29

Решение: За влезот (1.184), со Z-слика:

$$Y_1(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1}, |z| > 1 \quad (1.187)$$

стационарната грешка во системот од Слика 1.30 е:

$$\begin{aligned} e_1(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_1(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} Y_1(z) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1 + \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z^5(z-1)^2}{2z^4(z-1)^2 + (z+1)^2(z^2+1)} \right] = \frac{0}{8} = 0 \end{aligned} \quad (1.188)$$

Ако на влезот од системот дејствува референтниот сигнал (1.185), чија што Z-слика е:

$$Y_2(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{zT}{(z-1)^2}, |z| > 1 \quad (1.189)$$

за неговата стационарна грешка се добива:

$$\begin{aligned} e_2(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_2(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} Y_2(z) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1 + \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{zT}{(z-1)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z^5 T (z-1)}{2z^4(z-1)^2 + (z+1)^2(z^2+1)} \right] = \frac{0}{8} = 0 \end{aligned} \quad (1.190)$$

Конечно, стационарната грешка во системот од Слика 1.30, кога на неговиот влез дејствува референтниот сигнал (1.186), со Z-слика:

$$Y_3(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{zT^2(z+1)}{(z-1)^3}, |z| > 1 \quad (1.191)$$

е:

$$\begin{aligned} e_3(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} e_3(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_3(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1+G_0(z)} Y_3(z) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{1}{1 + \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{zT^2(z+1)}{(z-1)^3} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z^5 T^2 (z+1)}{2z^4 (z-1)^2 + (z+1)^2 (z^2+1)} \right] = \frac{2T^2}{2^2 \cdot 2} = \frac{T^2}{4} \end{aligned} \quad (1.192)$$

Грешките (1.188), (1.190) и (1.192) можат да се определат и преку константите на грешка K_p , K_v и K_a , кои изнесуваат:

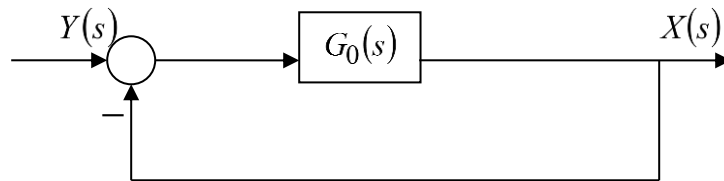
$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} = \infty \quad (1.193)$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left[\frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} \right] = \infty \quad (1.194)$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \left[\frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4} = 4 \quad (1.195)$$

1.30. Да се определи стационарната грешка во затворениот систем од Слика 1.31, доколку на влезот од системот дејствува референтен сигнал од облик: $y(t) = (5 - t + 0.5t^2)h(t)$, а преносната функција на соодветниот отворен систем е:

$$G_0(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)} \quad (1.196)$$



Слика 1.31. Илустрација кон Задачата 1.30

Решение: Константите на стационарната грешка за набљудуваниот затворен систем од Слика 1.31 се:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)} = \infty \quad (1.197)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{10(s+1)}{s^2(s+5)} \right] = \infty \quad (1.198)$$

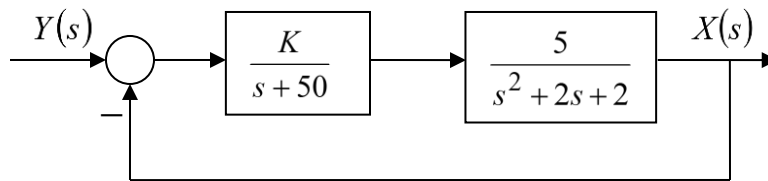
$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left[\frac{10(s+1)}{s^2(s+5)} \right] = 2 \quad (1.199)$$

Следствено, за самата грешка се добива:

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1+G_0(s)} Y(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} \left[\frac{5}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \right] = \\ &= \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{5}{s} - \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s^3} \end{aligned} \quad (1.200)$$

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} Y(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{5}{s} - \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s^3} \right] = \\ &= \frac{5}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} - \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s)} + \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s)} = \\ &= \frac{5}{1 + K_p} - \frac{1}{K_v} + \frac{1}{K_a} = 0.5 \end{aligned} \quad (1.201)$$

1.31. Даден е затворениот САУ од Слика 1.32. Да се определи приближниот модел од втор ред за неговиот отворен систем. Потоа, за вака апроксимирианиот затворен систем, да се определи вредноста на параметарот K за која стационарната вредност на грешката на неговиот отскочен одсив ќе изнесува приближно 10% од трајната вредност на одсивот.



Слика 1.32. Илустрација кон Задача 1.31

Решение: Преносната функција $G_0(s)$ на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 1.32 е:

$$G_0(s) = \frac{5K}{(s+50)(s^2+2s+2)} \quad (1.202)$$

и таа има три пола во точките:

$$s_{1,2}^* = -1 \pm j, s_3^* = -50 \quad (1.203)$$

Следствено, отворениот систем е од трет ред. Меѓутоа, бидејќи полот $s_3^* = -50$ се наоѓа многу далеку од имагинарната оска во левата полурамнина од s -комплексната рамнина во споредба со останатите два пола $s_{1,2}^* = -1 \pm j$, неговото влијание врз поведението на системот е занемарливо, па може да се испушти од моделот на отворениот систем. Така се добива апроксимативниот модел на отворениот систем:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{\tilde{K}}{s^2+2s+2}; \quad \tilde{K} = \frac{K}{10} \quad (1.204)$$

во кој новата вредност на коефициентот на засилување \tilde{K} е одбрана така што апроксимативниот модел (1.204) да има ист стационарен отскочен одсив како и изворниот систем (1.202).

Отскочниот одсив на затворениот систем од Слика 1.32, со апроксимираниот модел на отворениот систем $\tilde{G}_0(s)$, е:

$$X(s) = \frac{\tilde{G}_0(s)}{1 + \tilde{G}_0(s)} Y(s) = \frac{\frac{\tilde{K}}{s^2+2s+2}}{1 + \frac{\tilde{K}}{s^2+2s+2}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\tilde{K}}{s^2+2s+2+\tilde{K}} \cdot \frac{1}{s} \quad (1.205)$$

па, неговата стационарна вредност $x(\infty)$ изнесува:

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tilde{K}}{s^2+2s+2+\tilde{K}} = \frac{\tilde{K}}{2+\tilde{K}} \quad (1.206)$$

Од друга страна, грешката на системот за отскочна влезна возбуда е:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \tilde{G}_0(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{\tilde{K}}{s^2+2s+2}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2+2s+2}{s^2+2s+2+\tilde{K}} \cdot \frac{1}{s} \quad (1.207)$$

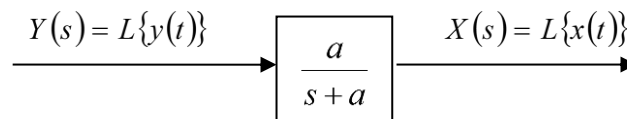
и нејзината стационарна вредност ќе изнесува 10% од трајната вредност $x(\infty)$ за $K = 200$:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2+2s+2}{s^2+2s+2+\tilde{K}} = \frac{2}{2+\tilde{K}} = 0.1 \frac{\tilde{K}}{2+\tilde{K}} \Rightarrow \tilde{K} = 20 \quad (1.208)$$

1.32. Даден е линеарниот стационарен континуален динамички систем од прв ред со еден влез $y(t)$ и еден излез $x(t)$, чија влезно-излезна динамика е опишана со преносната функција:

$$G(s) = \frac{a}{s+a}, \quad a = \text{const.} > 0 \quad (1.209)$$

- а) Да се определи аналитички и графички отскочниот одзив на набљудуваниот систем
- б) Да се определи временската константа на системот
- в) Да се определи времето на пораст на отскочниот одзив на набљудуваниот систем
- г) Да се определи времето на смирување на отскочниот одзив на системот.
- д) Да се определи ширината на пропусниот опсег на системот.

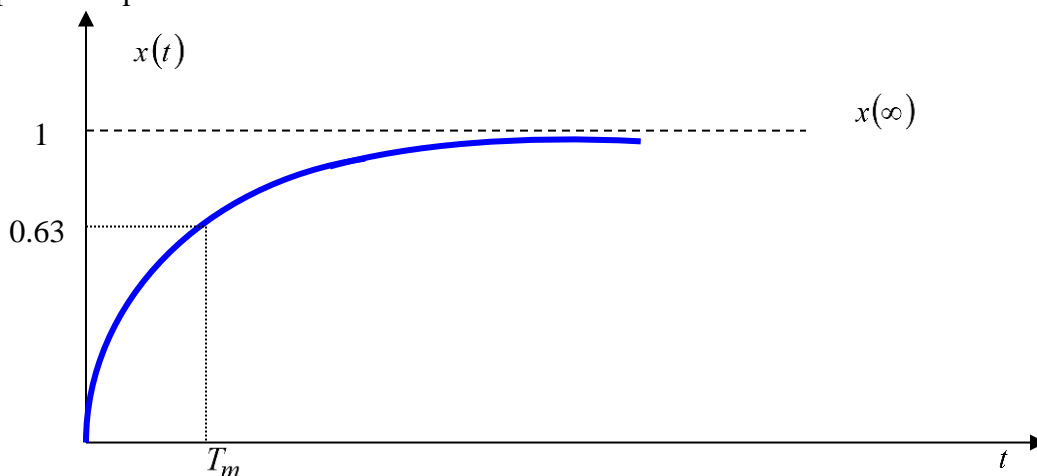


Слика 1.33. Симболичен приказ на линеарниот стационарен континуален систем од Задача 1.32

Решение: а) Отскочниот одзив на набљудуваниот систем е опишан со аналитичкиот израз:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{G(s)Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{a}{s+a} \cdot \frac{1}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right\} = (1 - e^{-at})h(t) \quad (1.210)$$

и графички е прикажан на Слика 1.34.



Слика 1.34. Графички приказ на отскочниот одзив на системот од Слика 1.33

б) Преносната функција на набљудуваниот систем може да се запише во облик:

$$G(s) = \frac{a}{s+a} = \frac{1}{\frac{s}{a}+1} = \frac{1}{T_m s+1} \quad (1.211)$$

од каде се гледа дека временската константа на системот е:

$$T_m = \frac{1}{a} \text{ (sec.)} \quad (1.212)$$

Временската константа T_m може да се опише како време за кое отскочниот одзив на набљудуваниот систем прикажан на Слика 1.34, ќе порасне до 63% од својата трајна односно стационарна вредност:

$$x(t) = 1 - e^{-at}, t \geq 0 \Rightarrow x(T_m) = 1 - e^{-aT_m} = 1 - e^{-1} \approx 1 - 0.37 = 0.63 \quad (1.213)$$

в) По дефиниција:

$$T_p = t_2 - t_1 = \frac{1}{a} \ln 10 - \frac{1}{a} \ln \frac{10}{9} = \frac{1}{a} \ln 9 = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a} \quad (1.214)$$

каде што времето t_1 се одредува од условот:

$$x(t_1) = 1 - e^{-at_1} = 0.1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{10}{9} = \frac{0.11}{a} \quad (1.215)$$

а времето t_2 од условот:

$$x(t_2) = 1 - e^{-at_2} = 0.9 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{a} \ln 10 = \frac{2.31}{a} \quad (1.216)$$

г) Ако времето на смирување се дефинира како време за кое амплитудите на одзивот ќе отстапуваат за 2% или помалку од својата стационарна вредност, тогаш тоа ќе изнесува:

$$x(t) = 1 - e^{-at} \geq 0.98x(\infty) \Rightarrow T_s \geq -\frac{1}{a} \ln 0.02 = \frac{1}{a} \ln 50 = \frac{3.9}{a} \quad (1.217)$$

д) Фреквентната преносна функција на системот од Слика 1.33 е:

$$G(j\omega) = \frac{a}{a + j\omega} \quad (1.218)$$

а нејзиниот модул изнесува:

$$|G(j\omega)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad (1.219)$$

Широчината на фреквентниот опсег ω_0 на набљудуваниот систем се определува од условот:

$$|G(j\omega_0)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} = 0.707 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.220)$$

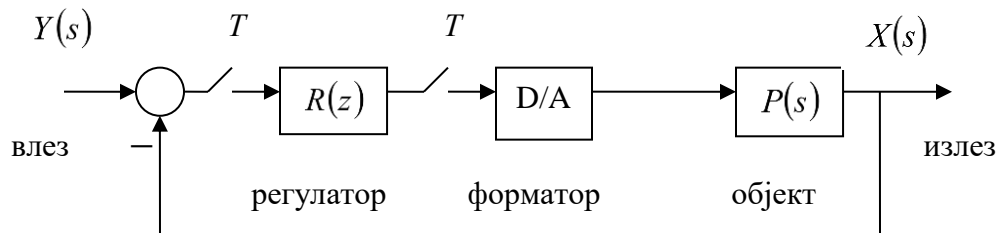
и изнесува:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{a^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 + \frac{\omega_0^2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{\omega_0^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \omega_0^2 = a^2 \Rightarrow \omega_0 = a \quad (1.221)$$

1.33. Да се проектира затворен ДСАУ како на Слика 1.35, во кој континуалниот објект на управување, под претпоставка, има преносна функција:

$$P(s) = \frac{K_0}{T_0s + 1} \quad (1.222)$$

така што неговиот излез (управуваната големина) во стационарен режим ќе има константна вредност c_0 .



Слика 1.35. Структурна блок-шема на типичен затворен ДСАУ со еден референтен влез $y(t)$ и еден излез $x(t)$

1. Да се дефинира референтниот влез $y(t)$.
2. Да се одреди видот на дискретниот регулатор односно соодветниот управувачки закон со кој ќе се оствари поставената цел.
3. Да се оцени точноста на работа на вака проектираниот систем во стационарен режим.

4. Да се оцени точноста на работа на проектираниот ДСАУ во стационарен режим кога на неговиот влез се доведе променлив сигнал со константна брзина на промена v_0 .
5. Колку изнесува најмалата вредност на стационарната грешка во случајот под 4.

Решение: 1. Саканиот излез на проектираниот ДСАУ се задава преку отскочниот референтен влез:

$$y(t) = c_0 h(t) \quad (1.223)$$

2. ДСАУ од Слика 1.35 ќе биде во состојба идеално да следи отскочен референтен влез во стационарен режим само доколку соодветниот отворен систем има астатизам од прв ред. Бидејќи објектот на управување $P(s)$ нема полови во $s = 0$ (има астатизам од нулти ред), потребниот астатизам на отворениот систем мора да се обезбеди преку дискретниот регулатор $R(z)$, кој мора да има прост пол во точката $z = 1$. Затоа за управувачки закон се одбира дискретниот еквивалент на И-регулатор:

$$R(z) = c_1 \frac{z}{z-1} \quad (1.224)$$

3. Дискретната преносна функција на континуалниот објект на управување $P(s)$, кога се земе предвид и форматорот од нулти ред, е:

$$\begin{aligned} P(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right\} = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{K_0}{T_0 s + 1} \right\} = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left\{ \frac{K_0}{s} - \frac{K_0}{s + \frac{1}{T_0}} \right\} = \\ &= K_0 \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}} \right) = K_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_0}}}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}}, \quad |z| > e^{-\frac{T}{T_0}} \end{aligned} \quad (1.225)$$

додека отворениот систем има преносна функција:

$$G_0(z) = R(z)P(z) = \frac{c_1 z}{z-1} \cdot K_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_0}}}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}}, \quad |z| > 1 \quad (1.226)$$

Оттука:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{c_1 z}{z-1} \cdot K_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_0}}}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}} = \infty \quad (1.227)$$

$$e(\infty) = \frac{c_0}{1 + K_p} = 0 \quad (1.228)$$

па проектираниот ДСАУ идеално ќе го следи референтниот влез $y(t) = c_0 h(t)$, односно:

$$x(\infty) = c_0 \quad (1.229)$$

4. Брзинската константа на проектираниот ДСАУ изнесува:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{c_1 z}{z-1} \cdot K_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_0}}}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}} = K_0 c_1 \quad (1.230)$$

а неговата стационарна грешка за линеарно променлив влез е:

$$e(\infty) = \frac{v_0 T}{K_v} = \frac{v_0 T}{K_0 c_1} \quad (1.231)$$

5. Оваа грешка може да се намалува преку зголемување на вредноста на параметарот c_1 на регулаторот $R(z)$, при што треба да се внимава на стабилноста на затворениот систем. Карактеристичниот полином на затворениот ДСАУ од Слика 1.35 е:

$$a(z) = 1 + G_0(z) = 1 + \frac{c_1 z}{z-1} \cdot K_0 \frac{1 - e^{-\frac{T}{T_0}}}{z - e^{-\frac{T}{T_0}}} = 0 \Rightarrow$$

$$a(z) = 1 + G_0(z) = z^2 - \left(1 + e^{-\frac{T}{T_0}}\right)z + e^{-\frac{T}{T_0}} + K_0 c_1 z \left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}}\right) \quad (1.232)$$

а неговата параметарска област на стабилност се добива од условите:

$$1 - \left(1 + e^{-\frac{T}{T_0}}\right) + e^{-\frac{T}{T_0}} + K_0 c_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}}\right) = K_0 c_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}}\right) > 0 \Rightarrow K_0 c_1 > 0 \quad (1.233)$$

$$1 - e^{-\frac{T}{T_0}} > 0 \quad (1.234)$$

$$2 \left(1 + e^{-\frac{T}{T_0}}\right) - K_0 c_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}}\right) > 0 \Rightarrow K_0 c_1 < 2 \frac{1 + e^{-\frac{T}{T_0}}}{1 - e^{-\frac{T}{T_0}}} \quad (1.235)$$

и е дадена со неравенството:

$$0 < K_0 c_1 < 2 \frac{1 + e^{-T/T_0}}{1 - e^{-T/T_0}} \quad (1.236)$$

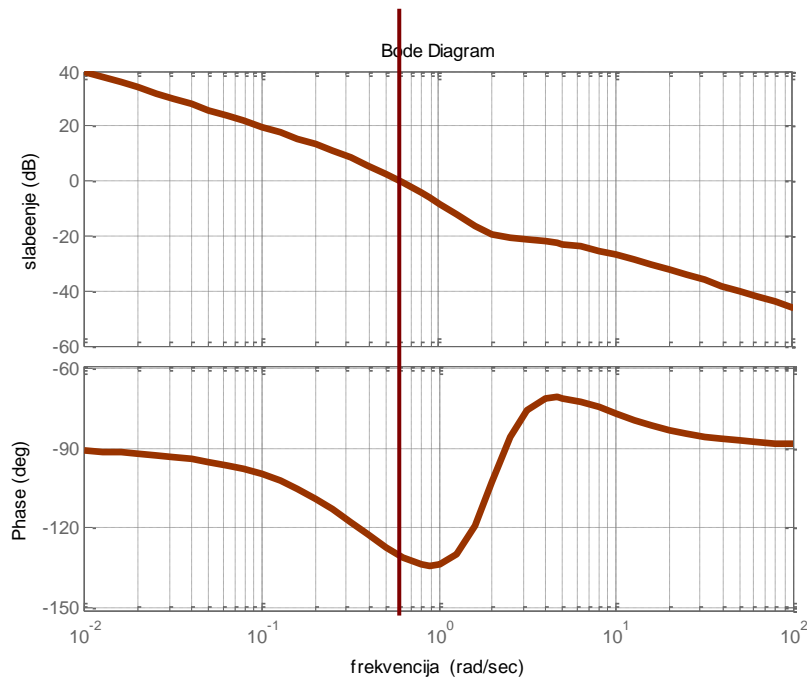
Следствено, вредноста на параметарот c_1 на регулаторот $R(z)$ не смее да биде поголема од вредноста одредена со горната граница на параметарската област на стабилност.

1.34. Даден е затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска. Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на соодветниот отворен систем се прикажани на Слика 1.36. Да се определат пресечната фреквенција на засилување, пресечната фреквенција на фаза, резервата на засилување и резервата на фаза за набљудуваниот систем, ако фреквентната преносна функција на отворениот систем е:

$$G_0(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{2} + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{j\omega \left(1 + j\frac{\omega}{0.5}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{4}\right)} \quad (1.237)$$

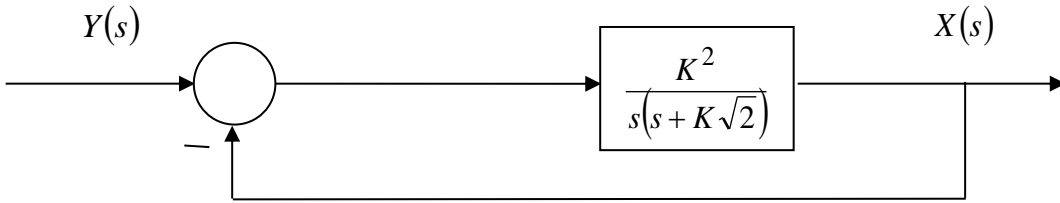
Решение: Бидејќи дијаграмот на фаза никогаш не минува низ правата -180° , пресечната фреквенција на фаза не може да се определи. Следствено, не може да се определи ни резервата на засилување. Пресечната фреквенција на засилување е $\omega_1 = 0.6 \text{ sec}^{-1}$, а резервата на фаза изнесува:

$$180^\circ + \arg[G_0(j0.62)] = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ \quad (1.238)$$



Слика 1.36. Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на соодветниот отворен систем од Задача 1.34

1.35. Да се определи времето на смирување и максималниот прескок на отскочниот одзив на затворениот систем од долната слика. За која вредност на неодредениот параметар K времето на смирување ќе биде помало од 1sec.?



Слика 1.37. Илустрација кон Задача 1.35

Решение:

$$G_0(s) = \frac{K^2}{s(s + K\sqrt{2})} \quad (1.239)$$

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K^2}{s^2 + Ks\sqrt{2} + K^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.240)$$

$$\omega_n^2 = K^2 \Rightarrow \omega_n = K \quad (1.241)$$

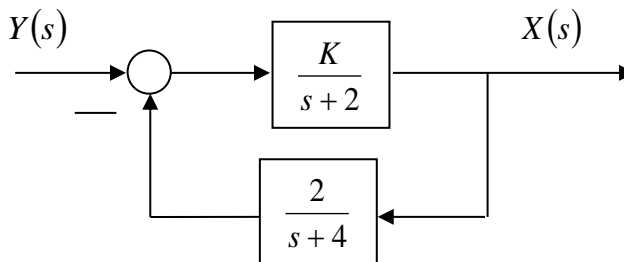
$$2\zeta\omega_n = K\sqrt{2} \Rightarrow \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1.242)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}K} = \frac{8}{K\sqrt{2}} \text{ sec.} \quad (1.243)$$

$$T_s = \frac{8}{K\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow K > \frac{8}{\sqrt{2}} = 5.65 \quad (1.244)$$

$$M\% = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\pi} = 4.32\% \quad (1.245)$$

1.36. Да се определи стационарната грешка во затворениот систем од долната слика. За која вредност од променливиот параметар на системот K таа грешка ќе биде нулева?



Слика 1.38. Илустрација кон Задача 1.36

Решение:

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{\frac{K}{s+2}}{1 + \frac{K}{s+2} \cdot \frac{2}{s+4}} = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+4) + 2K} \quad (1.246)$$

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[Y(s) - X(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} s[Y(s) - G(s)Y(s)] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - G(s)]Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - G(s)] \frac{1}{s} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1 - G(0) = 1 - \frac{4K}{2 \cdot 4 + 2K} = \\ &= 1 - \frac{4K}{8 + 2K} = 1 - \frac{2K}{4 + K} = \frac{4 - K}{4 + K} \Rightarrow K = 4 \end{aligned} \quad (1.247)$$

2. АНАЛИТИЧКА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ

За разлика од многубројните показатели на квалитетот на поведението на еден затворен САУ во преоден режим, какви што се: времето на прескок, максималниот прескок, времето на пораст и времето на смирување на преодниот одзив, пропусниот опсег, резонантниот врв, резервите на засилување и фаза и др., сигналот на грешка е единствен показател на сите битни динамички карактеристики на еден систем - резервата на стабилност и брзината на одзив на системот. Затоа тој може да се искористи како критериум за синтеза на затворените САУ. Целта на синтезата во овој случај е да се одбере таква структура и такви вредности на променливите параметри на системот (параметри кои можат да се нагодуваат), што грешката во системот, која се дефинира како разлика помеѓу саканиот и стварниот одзив на системот, во секој миг на време да биде минимална.

Критериумите за синтеза на затворените САУ, кои го користат сигналот на грешка, се искажуваат во вид на интегрални, во кои подинтегралната функција за аргумент го има токму сигналот на грешката. Такви се:

$$J_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (2.1)$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (2.2)$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (2.3)$$

$$J_4 = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^N c_i [e^{(i)}(t)]^2 dt \quad (2.4)$$

Кај стабилните системи $e(t) \rightarrow 0$ кога $t \rightarrow \infty$, па интегралот (2.1) има конечна вредност, еднаква со површината опфатена помеѓу кривата $e(t)$ и временската оска t . Очигледно е дека оваа површина ќе биде дотолку помала, доколку се помали прескокот и времето на смирување на преодниот одзив на набљудуваниот систем.

Вредноста на интегралот (2.1) може лесно да се пресмета:

$$J_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) \quad (2.5)$$

и таа зависи од параметрите на проектираниот систем, па задачата на синтеза се сведува на одредување на оние вредности на променливите параметри од системот, за кои интегралот (2.1) има минимална вредност.

За жал, критериумот (2.2) не е лесно (доколку воопшто е) аналитички решлив, па затоа не наоѓа примена во праксата.

Интегралот (2.3) се пресметува според формулата:

$$J_3 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds \quad (2.6)$$

и за случаите кога $E(s)$ претставува дробно рационална функција од комплексната променлива s има решение во аналитички облик. Решенијата на (2.6) за случаите кога именителот на дробно рационалната функција $E(s)$ е полином од прв, втор, трет, четврт и петти степен се дадени во Прилогот 1 на крајот од оваа збирка.

Во рамките на оваа збирка нема да биде користен директно интегралот J_4 , туку само следната негова варијанта:

$$J_{41} = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(t) + [e'(t)]^2 \right\} dt \quad (2.7)$$

чие решение е дадено со формулата:

$$J_{41} = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(t) + [e'(t)]^2 \right\} dt = J_3 + \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt \quad (2.8)$$

Интегралот $\int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt$ на десната страна од (2.8) може да се пресмета на ист начин

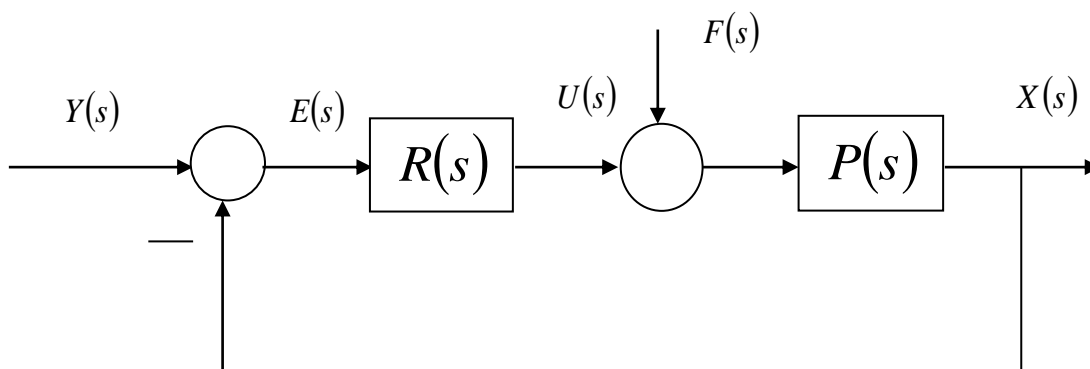
како и интегралот J_3 , ако се воведат смената $e_1(t) = e'(t)$:

$$\int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} e_1^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E_1(s)E_1(-s) ds \quad (2.9)$$

При аналитичката синтеза на затворените континуални САУ со помош на интегралните критериуми (2.1) – (2.4), се набљудува типичен систем како на Слика 2.1, при што се претпоставува дека системот е стабилен.

Во многу случаи максималната вредност и другите вредности на пречната големина $f(t)$ се значително помали од соодветните вредности на референтниот влез $y(t)$. Тогаш влијанието на пречките во системот се занемарува и синтезата се врши само врз основа на референтниот влез $y(t)$. Ваквата синтеза уште се нарекува **синтеза на управувањето**. Битно е да се уочи дека при синтезата на управувањето ефикасно се компензира само компонентата на грешката предизвикана од $y(t)$, додека компонентата на грешката предизвикана од влијанието на пречките $f(t)$ се занемарува, бидејќи е значително помала од претходната. Следствено, грешката која се минимизира при оваа синтеза е дадена со изразот:

$$E(s) = E_y(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) \quad (2.10)$$



Слика 2.1. Типична структура на затворен САУ

За разлика од синтезата на управувањето, при **синтезата со компензација на пречната големина**, се настојува да се елиминира или барем минимизира влијанието на пречките $f(t)$ во системот. Затоа при оваа синтеза системот на автоматско управување се набљудува како да е само под влијание на пречките, додека референтниот влез се занемарува. Грешката која се минимизира на овој начин е дадена со изразот:

$$E(s) = E_f(s) = -\frac{P(s)}{1 + R(s)P(s)} F(s) \quad (2.11)$$

Во случаите кога се настојува едновременно да се компензира влијанието и на референтниот сигнал $y(t)$ и на пречките $f(t)$, станува збор за тн. **комбинирана**

синтеза. Грешката на проектираниот систем со постапката на комбинирана синтеза има две компоненти и е претставена со изразот:

$$E(s) = E_y(s) + E_f(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) - \frac{P(s)}{1 + R(s)P(s)} F(s) \quad (2.12)$$

Аналитичката синтеза на дискретните САУ со минимизација на грешката во системот може да се изврши на сличен начин како и кај континуалните САУ, со тоа што интегралите во соодветните критериуми ќе се заменат со суми, а изводите со конечни разлики. Така на пример, критериумот (2.1) за случајот на еден дискретен САУ ќе добие облик:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} E(z) \quad (2.13)$$

додека критериумот (2.3) ќе гласи:

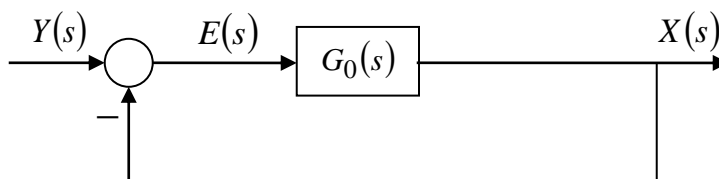
$$I_3 = \sum_{k=0}^{\infty} e^2(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} z^{-1} E(z) E(z^{-1}) dz \quad (2.14)$$

Читателот треба да има на ум дека изразите (2.13) и (2.14) важат и се аналитички решливи само доколку набљудуваниот дискретен САУ е стабилен и $E(z)$ е дробно рационална функција од комплексната променлива z .

2.1. Со помош на интегралниот критериум:

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt, \quad e(t) = y(t) - x(t) \quad (2.15)$$

да се изврши синтеза на управувањето во затворениот систем од долната слика за единичен отскочен влез.



Слика 2.2. Илустрација кон Задача 2.1

Под претпоставка:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 4)} \quad (2.16)$$

Решение: Синтезата на управувањето подразбира дека во системот дејствува само референтниот влез $y(t)$, па, во тој случај, грешката во системот ќе биде:

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1+G_0(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s^2 + 4s + 4)}} \cdot \frac{1}{s} = \\ &= \frac{s^2 + 4s + 4}{s^3 + 4s^2 + 4s + K} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вредноста на интегралниот критериум (2.15) зависи од вредноста на неодредениот параметар на набљудуваниот систем K :

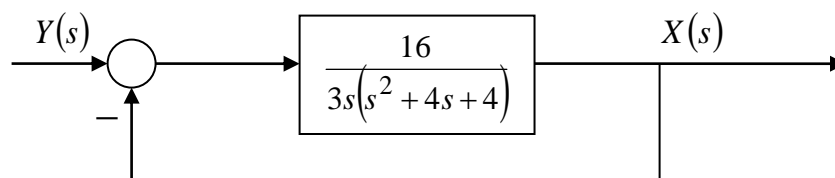
$$J = \frac{a_0a_1b_2^2 + a_0a_3(b_1^2 - 2b_0b_2) + a_2a_3b_0^2}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)} = \frac{6K + 32}{K(16 - K)} \quad (2.18)$$

и нејзиниот минимум се добива за две вредности на овој параметар:

$$\frac{dJ}{dK} = \frac{6K(16 - K) - (6K + 32)(16 - 2K)}{K^2(16 - K)^2} = \frac{6K^2 + 64K - 512}{K^2(16 - K)^2} \quad (2.19)$$

$$\frac{dJ}{dK} = 0 \Rightarrow 3K^2 + 32K - 256 = 0 \Rightarrow K_1 = -16, K_2 = \frac{16}{3} \quad (2.20)$$

Меѓутоа, од добиените две решенија K_1 и K_2 , прифатливо е само второто, зошто само тоа припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот затворен систем $0 < K < 16$. Следствено, проектираниот систем ќе биде како на Слика 2.3.



Слика 2.3. Решение на Задача 2.1

2.2. Да се изврши синтеза на затворениот систем на автоматско управување од долната слика, ако објектот на управување е опишан со преносната функција:

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 16} \quad (2.21)$$

а за управувач е употребен идеален И-регулатор:

$$R(s) = \frac{K}{s} \quad (2.22)$$

Синтезата да се изврши за отскочен референтен влез според критериумот $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$.



Слика 2.4. Илустрација кон Задача 2.2

Решение: Грешката во проектираниот затворен систем зависи од вредноста на параметарот K :

$$E(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s^2 + 10s + 16)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 10s + 16}{s^3 + 10s^2 + 16s + K} \quad (2.23)$$

а таа се определува од условот за минимум на усвоениот критериум J :

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{42K + 1280}{K(160 - K)}$$

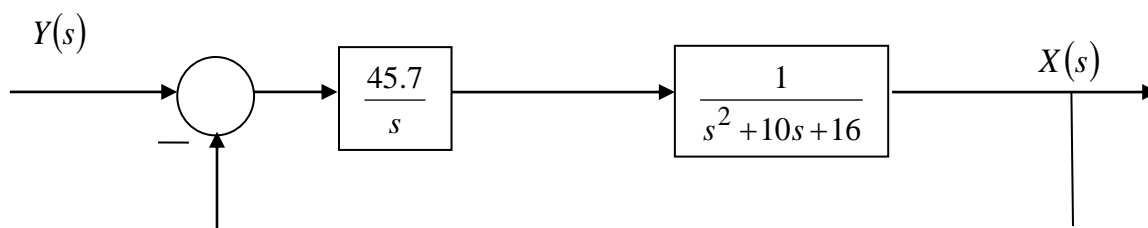
$$\frac{dJ}{dK} = \frac{42K^2 + 2,560K - 204,800}{K^2(160 - K)^2} = 0$$

$$K_1 = -100.67, K_2 = 45.7 \quad (2.24)$$

Бидејќи параметарската област на стабилност на проектираниот затворен систем е:

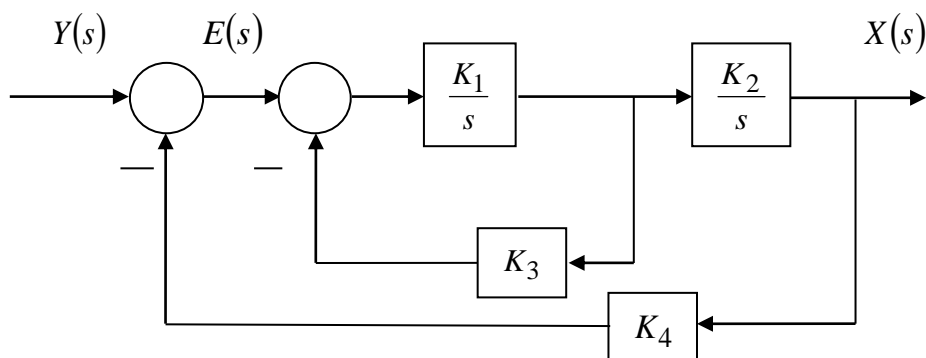
$$0 < K < 160 \quad (2.25)$$

прифатливо е само решението $K_2 = 45.7$, па проектираниот систем ќе биде како на Слика 2.5.



Слика 2.5. Решение на Задача 2.2

2.3. По пат на минимизација на интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt$, да се определи параметарот K_3 во затворениот систем на автоматско управување од долната слика, ако $y(t) = h(t)$ и $K_1, K_2, K_4 > 0$.



Слика 2.6. Илустрација кон Задача 2.3

Решение: Поаѓајќи од L -сликата $X(s)$ на одзивот во проектираниот систем:

$$X(s) = \frac{\frac{\frac{K_1}{s}}{1 + \frac{K_1 K_3}{s}} \cdot \frac{K_2}{s}}{1 + \frac{\frac{s}{K_1} \cdot \frac{K_2 K_4}{1 + \frac{K_1 K_3}{s}}}{s}} Y(s) = \frac{\frac{\frac{K_1 K_2}{s^2}}{s + K_1 K_3}}{1 + \frac{\frac{s^2}{K_1 K_2 K_4}}{s + K_1 K_3}} Y(s) = \frac{\frac{K_1 K_2}{s(s + K_1 K_3)}}{1 + \frac{K_1 K_2 K_4}{s(s + K_1 K_3)}} Y(s) =$$

$$= \frac{K_1 K_2}{s(s + K_1 K_3) + K_1 K_2 K_4} Y(s) \quad (2.26)$$

за L -сликата $E(s)$ на грешката во системот се добива:

$$\begin{aligned} E(s) &= Y(s) - K_4 X(s) = Y(s) - \frac{K_1 K_2 K_4}{s(s + K_1 K_3) + K_1 K_2 K_4} Y(s) = \\ &= \frac{s(s + K_1 K_3)}{s(s + K_1 K_3) + K_1 K_2 K_4} Y(s) = \frac{s(s + K_1 K_3)}{s(s + K_1 K_3) + K_1 K_2 K_4} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Оттука, вредноста на интегралниот критериум J во конкретниот случај е:

$$J = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{K_1 K_2 K_4 + K_1^2 K_3^2}{2K_1^2 K_2 K_3 K_4} = \frac{K_2 K_4 + K_1 K_3^2}{2K_1 K_2 K_3 K_4} \quad (2.28)$$

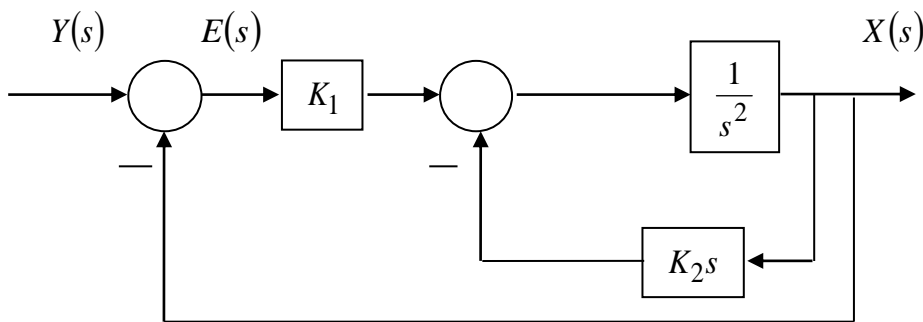
па, за неговиот минимум следува:

$$\frac{dJ}{dK_3} = 0 \Rightarrow K_1 K_3^2 - K_2 K_4 = 0 \Rightarrow K_3 = \sqrt{\frac{K_2 K_4}{K_1}} \quad (2.29)$$

Вредноста $K_3 = \sqrt{K_2 K_4} / \sqrt{K_1}$ претставува решение на задачата на синтеза на набљудуваниот систем на автоматско управување според критериумот J .

2.4. Со примена на интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$, да се определи параметарот

K_2 во затворениот систем на автоматско управување од долната слика, кој ќе обезбеди минимална грешка на управувањето. Да се претпостави дека $y(t) = h(t)$ и $K_1, K_2 > 0$. Потоа да се определи временскиот тек на таа грешка.



Слика 2.7. Илустрација кон Задача 2.4

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од задачата е:

$$G_0(s) = K_1 \frac{\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{K_2 s}{s^2}} = \frac{K_1}{s(s + K_2)} \quad (2.30)$$

Оттука, грешката на управување во системот ќе изнесува:

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1 + G_0(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{s(s + K_2)}} Y(s) = \\ &= \frac{s(s + K_2)}{s(s + K_2) + K_1} Y(s) = \frac{s + K_2}{s^2 + K_2 s + K_1} Y(s) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Со минимизација на интегралот:

$$J = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{K_1 + K_2^2}{2K_1 K_2} \quad (2.32)$$

за решение на синтезата се добива:

$$\frac{dJ}{dK_2} = 0 \Rightarrow K_2^2 - K_1 = 0 \Rightarrow K_2 = \sqrt{K_1} \quad (2.33)$$

Временскиот тек на грешката во проектираниот затворен систем на автоматско управување е:

$$\begin{aligned} e(t) &= L^{-1}\{E(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s + \sqrt{K_1}}{s^2 + \sqrt{K_1}s + K_1}\right\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{s + \sqrt{K_1}}{\left(s + \sqrt{K_1}/2 + j\sqrt{3K_1}/2\right)\left(s + \sqrt{K_1}/2 - j\sqrt{3K_1}/2\right)}\right\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1/\sqrt{2} - j1/\sqrt{6}}{\left(s + \sqrt{K_1}/2 + j\sqrt{3K_1}/2\right)} + \frac{1/\sqrt{2} + j1/\sqrt{6}}{\left(s + \sqrt{K_1}/2 - j\sqrt{3K_1}/2\right)}\right\} = \\ &= e^{-\frac{t\sqrt{K_1}}{2}} \left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3K_1}}{2}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3} \sin\left(\frac{t\sqrt{3K_1}}{2}\right) \right] h(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.5. Да се проектира затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска како на Слика 2.8, во кој за управувач е усвоен идеален И-регулатор:

$$R(s) = \frac{K}{s} \quad (2.35)$$

а објектот на управување е систем од втор ред, опишан со следната преносна функција:

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \quad (2.36)$$

Синтезата на управувањето да се изврши за отскочен референтен влез најнапред според критериумот $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$, а потоа и според критериумот

$$J_2 = \int_0^{\infty} \{e^2(t) + [e'(t)]^2\} dt.$$



Слика 2.8. Илустрација кон Задача 2.5

Решение: За грешката во проектираниот затворен систем на автоматско управување се добива:

$$E(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s^2 + 2s + 5)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s + K} \quad (2.37)$$

Оттука:

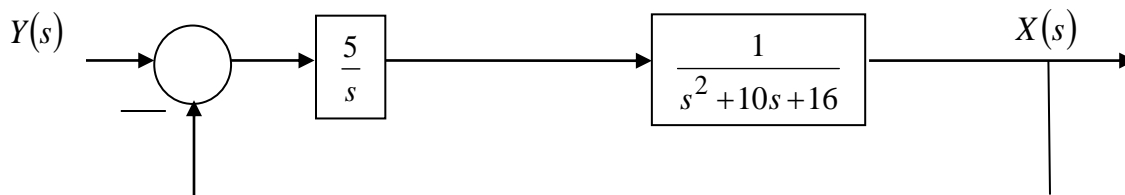
$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{50 - K}{2K(10 - K)} \quad (2.38)$$

$$\frac{dJ}{dK} = 0 \Rightarrow K^2 - 100K + 500 = 0 \Rightarrow K_1 = 95, K_2 = 5 \quad (2.39)$$

Од добиените две решенија според критериумот J , само второто припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот систем :

$$0 < K < 10 \quad (2.40)$$

Следствено, проектираниот систем ќе биде како на Слика 2.9.



Слика 2.9. Решение на Задача 2.5 според критериумот J

Вредноста на интегралниот критериум J_2 може да се определи на следниот начин:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\infty} \{e^2(t) + [e'(t)]^2\} dt = \int_0^{\infty} e^2(t) dt + \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt = \\ &= J + \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt = J + \int_0^{\infty} e_1^2(t) dt = J + J_1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

каде што:

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{50 - K}{2K(10 - K)} \quad (2.42)$$

а J_1 се пресметува со помош на коефициентите на сликата:

$$\begin{aligned} E_1(s) &= L\{e_1(t)\} = L\{e'(t)\} = sE(s) - e(0) = \\ &= s \frac{s^2 + 2s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s + K} - \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^2 + 2s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s + K} = \\ &= \frac{s^3 + 2s^2 + 5s}{s^3 + 2s^2 + 5s + K} - 1 = \frac{-K}{s^3 + 2s^2 + 5s + K} = \frac{\tilde{b}_2 s^2 + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_3 s^3 + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0} \end{aligned} \quad (2.43)$$

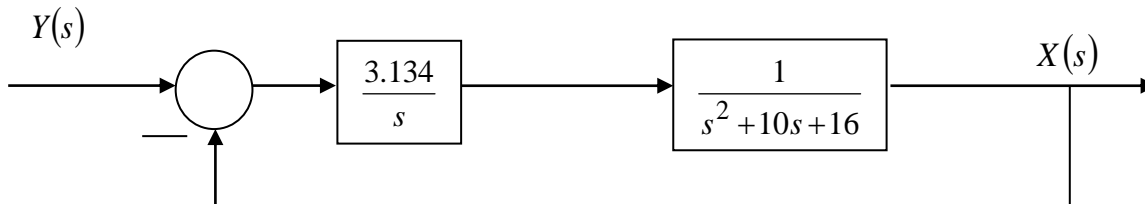
Оттука:

$$J_1 = \frac{\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{b}_2^2 + \tilde{a}_0 \tilde{a}_3 (\tilde{b}_1^2 - 2\tilde{b}_0 \tilde{b}_2) + \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{b}_0^2}{2\tilde{a}_0 \tilde{a}_3 (\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_0 \tilde{a}_3)} = \frac{2K^2}{2K(10 - K)} \quad (2.44)$$

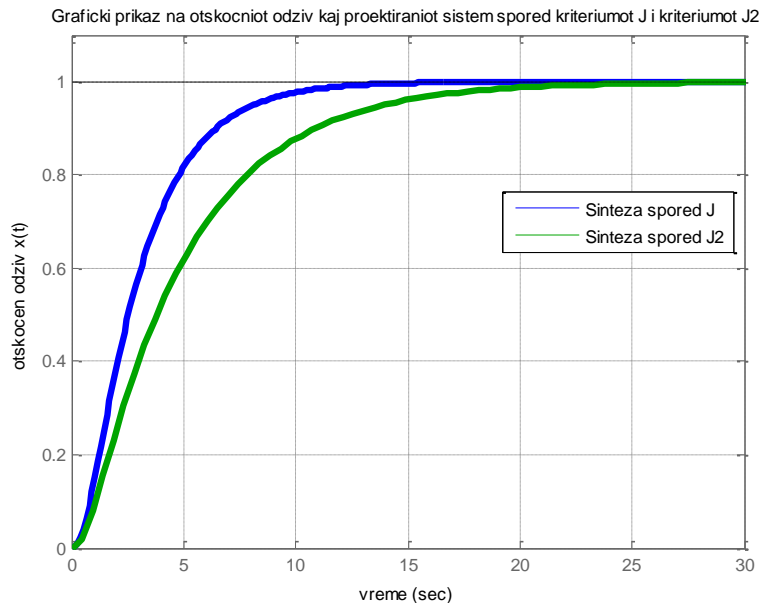
$$J_2 = J + J_1 = \frac{50 - K}{2K(10 - K)} + \frac{2K^2}{2K(10 - K)} = \frac{2K^2 - K + 50}{2K(10 - K)} \quad (2.45)$$

$$\frac{dJ_2}{dK} = 0 \Rightarrow 19K^2 + 100K - 500 = 0 \Rightarrow K_1 = 3.134, K_2 = -8.397 \quad (2.46)$$

Од добиените две решенија според критериумот J_2 , од интерес е само позитивното $K_1 = 3.134$, кое припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот систем, па, тој ќе биде како на Слика 2.10. Синтезата според интегралниот критериум J_2 се одликува со помало максимално регулационо отстапување и подолго регулационо време, за разлика од синтезата според критериумот J , која се одликува со покусо регулационо време, но поголемо максимално регулационо отстапување. Ова може убаво да се уочи од графичкиот приказ на грешката, односно регулационото отстапување во системите од Слика 2.9 и Слика 2.10.



Слика 2.10. Решение на Задача 2.5 според критериумот J_2



Слика 2.11. Графички приказ на отскачниот одзив на затворените САУ од Слика 2.8 и Слика 2.9

2.6. Да се изврши синтеза на управувањето во затворениот систем од Слика 2.11, во кој објектот на управување од втор ред:

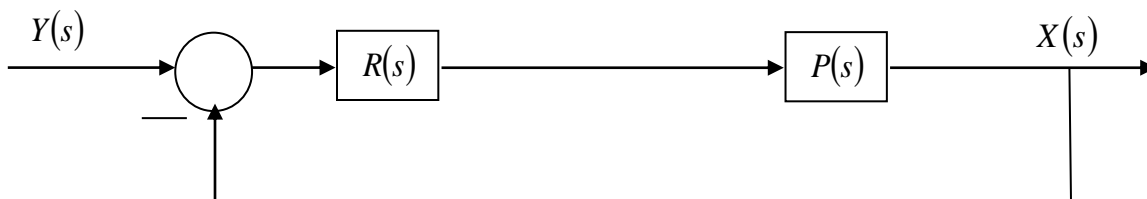
$$P(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (2.47)$$

е регулиран со идеален И-регулатор:

$$R(s) = \frac{K}{s} \quad (2.48)$$

Синтезата да се изврши за отскочен референтен влез според критериумот $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$

и критериумот $J_2 = \int_0^{\infty} \{e^2(t) + [e'(t)]^2\} dt$.



Слика 2.12. Илустрација кон Задача 2.6

Решение: За грешката во проектираниот затворен систем на автоматско управување и нејзиниот прв извод се добива:

$$E(s) = \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s^2 + s + 1)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + s + K} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.49)$$

$$E_1(s) = L\{e_1(t)\} = L\{e'(t)\} = sE(s) - e(0) =$$

$$= s \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + s + K} - \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s^2 + s + K} =$$

$$= \frac{s^3 + s^2 + s}{s^3 + s^2 + s + K} - 1 = \frac{-K}{s^3 + s^2 + s + K} = \frac{\tilde{b}_2 s^2 + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_3 s^3 + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0} \quad (2.50)$$

Оттука:

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{1}{2K(1-K)} \quad (2.51)$$

$$J_1 = \frac{\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{b}_2^2 + \tilde{a}_0 \tilde{a}_3 (\tilde{b}_1^2 - 2\tilde{b}_0 \tilde{b}_2) + \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{b}_0^2}{2\tilde{a}_0 \tilde{a}_3 (\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_0 \tilde{a}_3)} = \frac{K^2}{2K(1-K)} \quad (2.52)$$

$$J_2 = J + J_1 = \frac{1}{2K(1-K)} + \frac{K^2}{2K(1-K)} = \frac{K^2 + 1}{2K(1-K)} \quad (2.53)$$

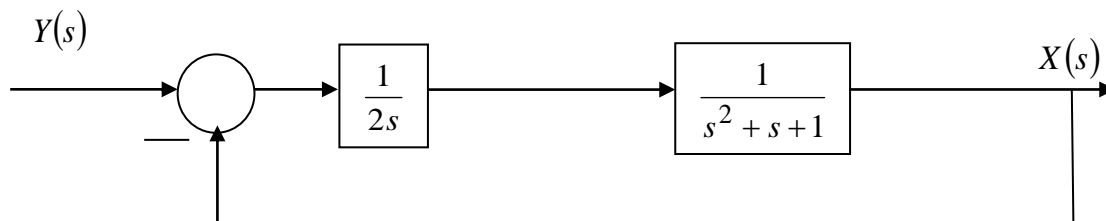
$$\frac{dJ}{dK} = 0 \Rightarrow 1 - 2K = 0 \Rightarrow K = 0.5 \quad (2.54)$$

$$\frac{dJ_2}{dK} = 0 \Rightarrow K^2 + 2K - 1 = 0 \Rightarrow K_1 = \sqrt{2} - 1, \quad K_2 = -\sqrt{2} - 1 \quad (2.55)$$

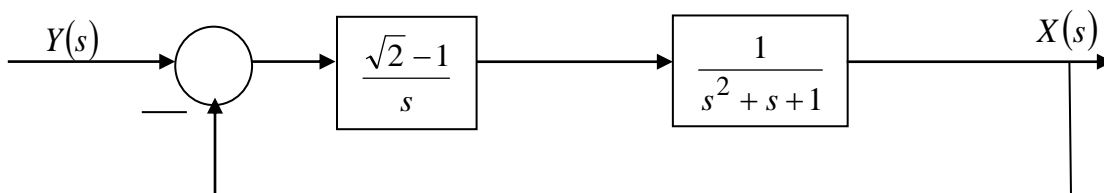
Решението на синтезата според интегралниот критериум J припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот систем:

$$0 < K < 1 \quad (2.56)$$

додека од добиените две решенија според критериумот J_2 , само второто припаѓа на оваа област. Следствено, проектираниот систем според критериумот J ќе биде како на Слика 2.13, додека проектираниот систем според критериумот J_2 е прикажан на Слика 2.14.

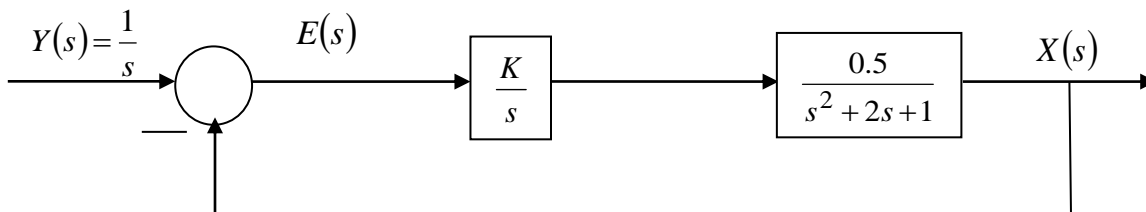


Слика 2.13. Решение на Задача 2.6 според критериумот J



Слика 2.14. Решение на Задача 2.6 според критериумот J_2

2.7. Со минимизација на интегралот $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$ да се определи параметарот K на затворениот систем на автоматско управување од долната слика. Потоа постапката на синтеза да се спроведе според интегралниот критериум $J_2 = \int_0^{\infty} \{e^2(t) + [e'(t)]^2\} dt$.



Слика 2.15. Илустрација кон Задача 2.7

Решение: За грешката во проектираниот затворен систем на автоматско управување се добива:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{0.5K}{s(s^2 + 2s + 1)}} = \\
 &= \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + s^2 + s + 0.5K} = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

Оттука:

$$J = \frac{a_0a_1b_2^2 + a_0a_3(b_1^2 - 2b_0b_2) + a_2a_3b_0^2}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)} = \frac{3K + 4}{K(4 - K)} \quad (2.58)$$

$$\frac{dJ}{dK} = 0 \Rightarrow 3K(4-K) - (3K+4)(4-2K) = 0 \Rightarrow K_1 = -4, K_2 = \frac{4}{3} \quad (2.59)$$

Параметарската област на стабилност на проектираниот систем е:

$$0 < K < 4 \quad (2.60)$$

па, очигледно, решението на синтезата според критериумот J е $K = \frac{4}{3}$, односно:

$$R(s) = \frac{4}{3s} \quad (2.61)$$

За изводот на грешката во проектираниот затворен систем на автоматско управување се добива:

$$\begin{aligned} E_1(s) &= L\{e_1(t)\} = L\{e'(t)\} = sE(s) - e(0) = \\ &= s \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5K} - \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5K} = \\ &= \frac{s^3 + 2s^2 + s}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5K} - 1 = \frac{-0.5K}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5K} = \frac{\tilde{b}_2 s^2 + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_3 s^3 + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Оттука:

$$J_1 = \frac{\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{b}_2^2 + \tilde{a}_0 \tilde{a}_3 (\tilde{b}_1^2 - 2\tilde{b}_0 \tilde{b}_2) + \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{b}_0^2}{2\tilde{a}_0 \tilde{a}_3 (\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_0 \tilde{a}_3)} = \frac{K}{4-K} \quad (2.63)$$

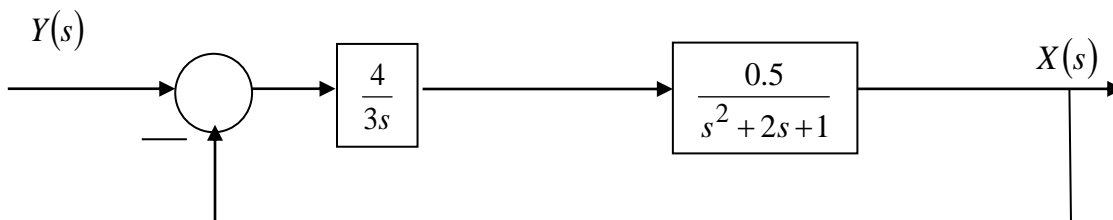
$$J_2 = J + J_1 = \frac{3K+4}{2K(4-K)} + \frac{2K^2}{2K(4-K)} = \frac{K^2 + 3K + 4}{2K(4-K)} \quad (2.64)$$

$$\frac{dJ_2}{dK} = 0 \Rightarrow 7K^2 + 8K - 16 = 0 \Rightarrow K_1 = \frac{4(2\sqrt{2}-1)}{7}, K_2 = -\frac{4(2\sqrt{2}+1)}{7} \quad (2.65)$$

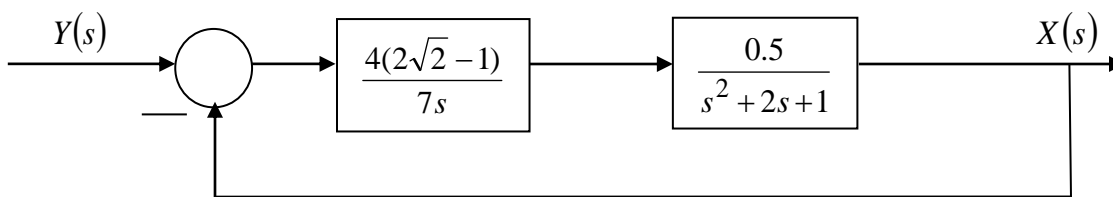
Решението на синтезата според интегралниот критериум J_2 , кое припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот систем е $K_1 = \frac{4(2\sqrt{2}-1)}{7}$, односно:

$$R(s) = \frac{4(2\sqrt{2}-1)}{7s} \quad (2.66)$$

Проектираните системи според двата критериума се прикажани на Слика 2.16 и Слика 2.17.

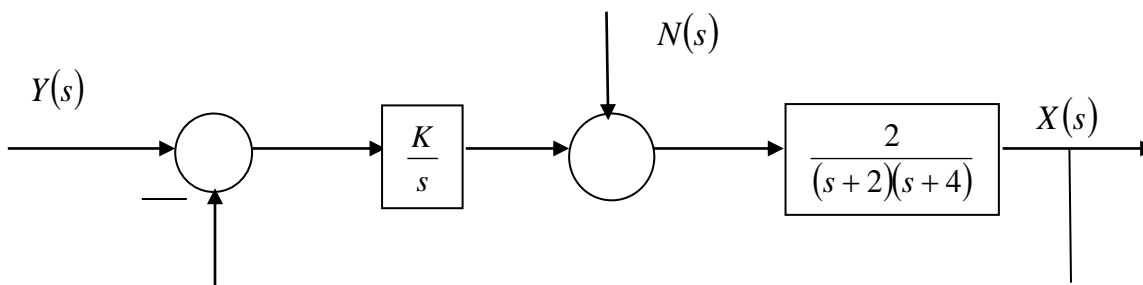


Слика 2.16. Решение на Задача 2.7 според критериумот J



Слика 2.17. Решение на Задача 2.7 според критериумот J_2

2.8. Со помош на интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt$ да се изврши синтеза на затворениот систем на автоматско управување од долната слика, така што ќе се обезбеди минимално влијание на пречките. Синтезата да се изврши под претпоставка на отскочен влез.



Слика 2.18. Илустрација кон Задача 2.8

Решение: Синтезата со минимизација на влијанието на пречките подразбира дека во системот дејствуваат само пречките $n(t)$, па, во тој случај, грешката во системот ќе биде:

$$E(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)} N(s) = \frac{2s}{s^3 + 6s^2 + 8s + 2K} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + 8s + 2K} \quad (2.67)$$

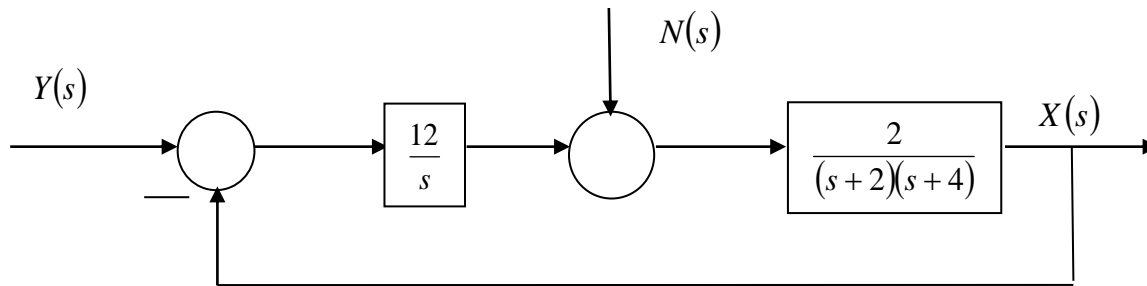
Вредноста на зададениот интегрален критериум во конкретниот случај изнесува:

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{3}{K(24 - K)} \quad (2.68)$$

и неговиот минимум се добива за $K = 12$:

$$\frac{dJ}{dK} = -\frac{24 - 2K}{K^2(24 - K)^2} = 0 \Rightarrow K = 12 \quad (2.69)$$

Решението $K = 12$ припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот затворен систем $0 < K < 24$, па, системот ќе биде како на Слика 2.19.



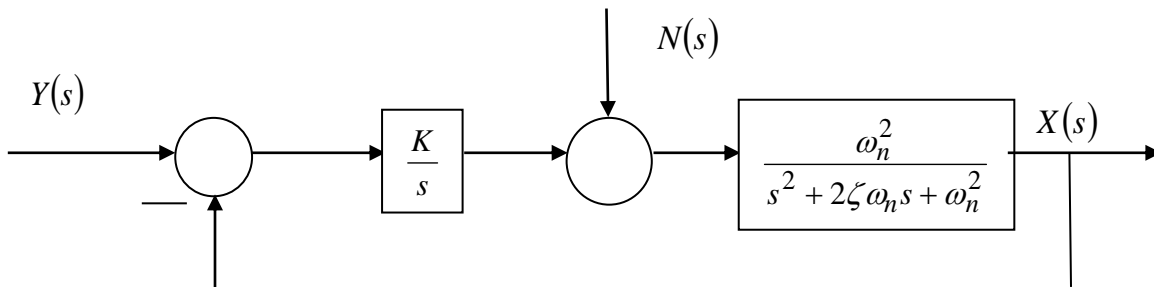
Слика 2.19. Решение на Задача 2.8

2.9. Да се изврши синтеза на затворениот систем на автоматско управување од долната слика, во кој објектот на управување од втор ред $P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ е управуван

со идеален И-регулатор $R(s) = \frac{K}{s}$. Синтезата да се изврши со минимизација на

влијанието на пречките $n(t)$ според интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$. Притоа да

се претпостави дека $n(t) = h(t)$.



Слика 2.20. Илустрација кон Задача 2.9

Решение: Компонентата на грешката во набљудуваниот затворен систем на автоматско управување од Слика 2.20, предизвикана од влијанието на пречките $n(t)$, во s -комплексното подрачје е дадена со сликата:

$$\begin{aligned}
 E_n(s) &= \frac{-\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}{1 + \frac{K\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}} N(s) = \frac{-s\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + K\omega_n^2} N(s) = \\
 &= \frac{-\omega_n^2}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + K\omega_n^2} \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

Оттука, за интегралот $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$ се добива:

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{\zeta \omega_n}{K(2\zeta \omega_n - K)} \quad (2.71)$$

Бараната вредност на параметарот K на И-регулаторот, која ќе обезбеди минимално влијание на пречките во проектираниот систем, се пресметува од условот за минимум на функцијата (2.71):

$$\frac{dJ}{dK} = 0 \Rightarrow \zeta \omega_n - K = 0 \Rightarrow K = \zeta \omega_n \quad (2.72)$$

2.10. На долната слика е прикажана структурната блок-шема на еден затворен систем на автоматско управување, каде што:

$$R(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} \quad (2.73)$$

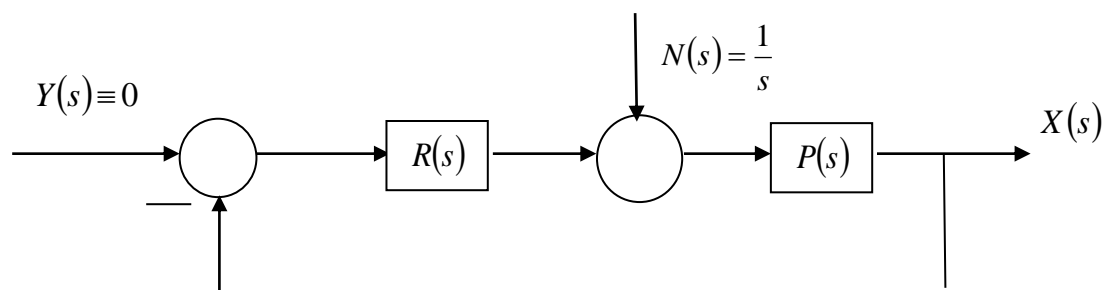
е преносната функција на идеален ПИ-регулатор, а:

$$P(s) = \frac{0.5}{s^2 + s + 1} \quad (2.74)$$

е преносната функција на управуваниот објект. Да се определат вредностите на параметрите на регулаторот K_1 и K_2 кои го минимизираат интегралот

$$J_2 = \int_0^{\infty} \{e^2(t) + [e'(t)]^2\} dt$$

и притоа обезбедуваат оптимална синтеза во поглед на пречките $n(t)$. Да се претпостави дека $n(t) = h(t)$.



Слика 2.21. Илустрација кон Задача 2.10

Решение: Компонентата на грешката во набљудуваниот затворен систем на автоматско управување од Слика 2.21, предизвикана од влијанието на пречките $n(t)$, во s – комплексното подрачје е дадена со сликата:

$$E_n(s) = \frac{-P(s)}{1 + P(s)R(s)} N(s) = \frac{-0.5}{s^3 + s^2 + (1 + 0.5K_1)s + 0.5K_2} = E(s) \quad (2.75)$$

додека за L – сликата на нејзиниот прв извод се добива:

$$\begin{aligned} E_1(s) &= L\{e_1(t)\} = L\{e'(t)\} = sE(s) - e(0) = \\ &= s \frac{-0.5}{s^3 + s^2 + (1 + 0.5K_1)s + 0.5K_2} - \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{-0.5}{s^3 + s^2 + (1 + 0.5K_1)s + 0.5K_2} = \\ &= \frac{-0.5s}{s^3 + s^2 + (1 + 0.5K_1)s + 0.5K_2} = \frac{\tilde{b}_2 s^2 + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_3 s^3 + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Оттука:

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{0.5}{K_2(2 + K_1 - K)} \quad (2.77)$$

$$J_1 = \frac{\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{b}_2^2 + \tilde{a}_0 \tilde{a}_3 (\tilde{b}_1^2 - 2\tilde{b}_0 \tilde{b}_2) + \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{b}_0^2}{2\tilde{a}_0 \tilde{a}_3 (\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_0 \tilde{a}_3)} = \frac{0.25}{(2 + K_1 - K)} \quad (2.78)$$

$$J_2 = J + J_1 = \frac{0.5}{K_2(2 + K_1 - K)} + \frac{0.25K_2}{K_2(2 + K_1 - K)} = \frac{0.25K_2 + 0.5}{K_2(2 + K_1 - K)} \quad (2.79)$$

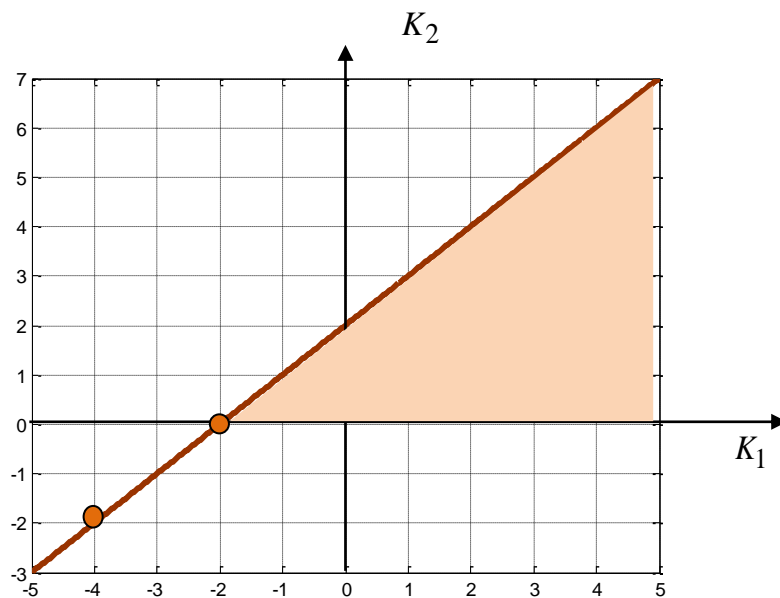
$$\frac{\partial J_2}{\partial K_1} = 0 \Rightarrow -(0.25K_2 + 0.5)K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = 0, K_2 = -2 \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial K_2} = 0 \Rightarrow 0.5K_2^2 + 2K_2 - 2 - K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = -2, K_1 = -4 \quad (2.81)$$

Параметарската област на стабилност на проектираниот систем на автоматско управување е:

$$\begin{aligned} -2 < K_1 \\ 0 < K_2 < K_1 + 2 \end{aligned} \quad (2.82)$$

и таа е прикажана на Слика 2.22. Бидејќи ни едно од решенијата $(K_1, K_2) = (-2, 0)$ и $(K_1, K_2) = (-4, -2)$ не припаѓаат на оваа област, може да се заклучи дека во конкретниот случај не може да се изврши синтеза според интегралниот критериум J_2 .



Слика 2.22. Параметарска област на стабилност на затворениот САУ од Слика 2.21

2.11. Да се изврши синтеза со компензација на влијанието на пречките $n(t)$ на затворен систем на автоматско управување како на сл.2.21, ако:

$$R(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} \quad (2.83)$$

$$P(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1} \quad (2.84)$$

Синтезата да се изврши за стандарден отскочен влез според интегралниот критериум

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt.$$

Решение:

$$\begin{aligned} E_n(s) &= \frac{-P(s)}{1+P(s)R(s)} N(s) = \frac{-1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + (1+K_1)s + K_2} = \\ &= \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = E(s) \end{aligned} \quad (2.85)$$

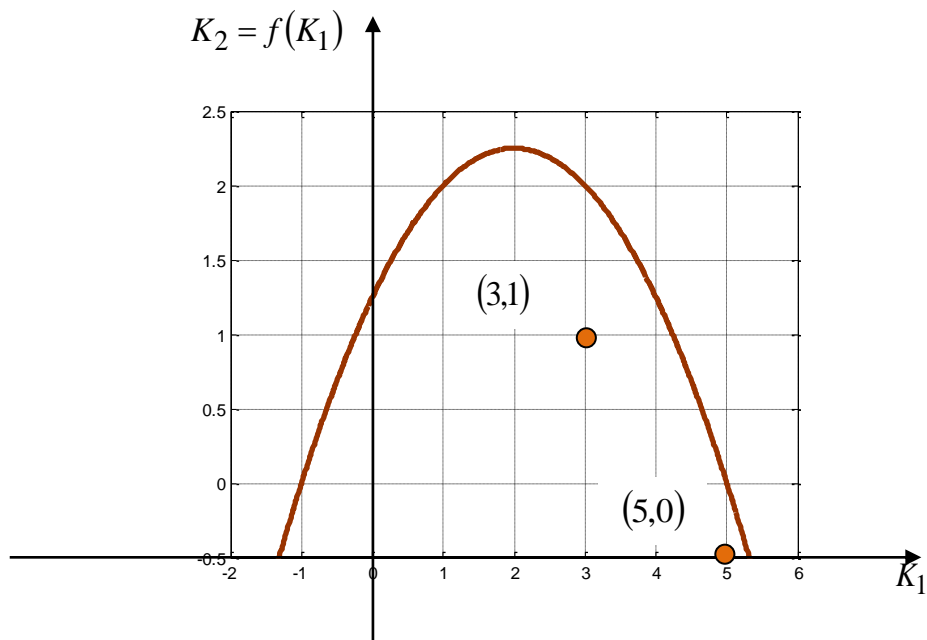
$$\begin{aligned} J &= \frac{b_3^2(a_0a_1a_2 - a_0^2a_3) + a_0a_1a_4(b_2^2 - 2b_1b_3) + a_0a_3a_4(b_1^2 - 2b_0b_2)}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)} + \\ &+ \frac{(a_2a_3a_4 - a_1a_4^2)b_0^2}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)} = \frac{5 - K_1}{2K_2(5 + 4K_1 - K_1^2 - 4K_2)} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial J}{\partial K_1} = 0 \Rightarrow 25 - 10K_1 + K_1^2 - 4K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{25 - 10K_1 + K_1^2}{4} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial J}{\partial K_2} = 0 \Rightarrow (5 - K_1)(5 + 4K_1 - K_1^2 - 8K_2) = 0 \Rightarrow K_1 = 5, K_2 = \frac{5 + 4K_1 - K_1^2}{8} \quad (2.88)$$

$$(K_1, K_2) = (5, 0) \quad (2.89)$$

$$(K_1, K_2) = (3, 1) \quad (2.90)$$



Слика 2.23. Параметарска област на стабилност на затворениот САУ од Задача 2.11

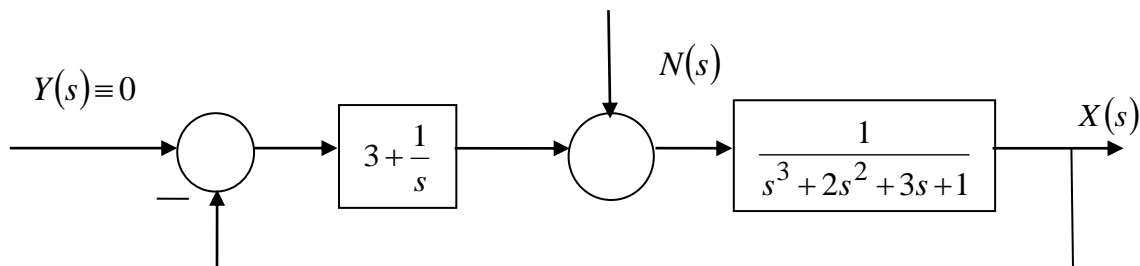
Од досега кажаното, на читателот сигурно му е сосема јасно дека одредувањето параметарска област на стабилност на проектираниот систем е неодминлив и важен чекор во синтезата. Добиените решенија на синтезата, за да бидат прифатливи, мора да припаѓаат на оваа област. Параметарската област на стабилност на проектираниот систем во овој случај е:

$$-1 < K_1 < 5$$

$$0 < K_2 < \frac{5 + 4K_1 - K_1^2}{4} \tag{2.91}$$

и неа ѝ припаѓа само точката $(K_1, K_2) = (3, 1)$, додека точката $(K_1, K_2) = (5, 0)$ лежи на нејзината граница. Следствено, решението на синтезата е:

$$R(s) = 3 + \frac{1}{s} \tag{2.92}$$



Слика 2.24. Решение на Задача 2.11 според критериумот J

2.12. Со помош на интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt$, да се проектира затворен систем на автоматско управување како на сл.2.21, ако објектот на управување има динамика од четврти ред од облик:

$$P(s) = \frac{1}{4s^3 + 9s^2 + 2s + 1} \quad (2.93)$$

додека за управувач е употребен идеален ПИ-регулатор:

$$R(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} \quad (2.94)$$

Синтезата има за цел да се минимизира влијанието на пречките во системот.

Решение: Компонентата на грешката во набљудуваниот систем предизвикана од влијанието на пречките $n(t)$ во просторот на L-сликите е:

$$\begin{aligned} E_n(s) &= \frac{-P(s)}{1 + P(s)R(s)} N(s) = \frac{-1}{4s^4 + 9s^3 + 2s^2 + (1 + K_1)s + K_2} = \\ &= \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = E(s) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Следствено, зададениот интегрален критериум ќе има вредност:

$$\begin{aligned} J &= \frac{b_3^2(a_0a_1a_2 - a_0^2a_3) + a_0a_1a_4(b_2^2 - 2b_1b_3) + a_0a_3a_4(b_1^2 - 2b_0b_2)}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)} + \\ &+ \frac{(a_2a_3a_4 - a_1a_4^2)b_0^2}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)} = \frac{7 - 2K_1}{K_2(14 + 10K_1 - 4K_1^2 - 81K_2)} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Таа вредност ќе биде минимална за следните вредности на коефициентите K_1 и K_2 на системот:

$$\frac{\partial J}{\partial K_1} = 0 \Rightarrow 49 - 28K_1 + 4K_1^2 - 81K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{49 - 28K_1 + 4K_1^2}{81} \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial J}{\partial K_2} = 0 \Rightarrow (7 - 2K_1)(14 + 10K_1 - 4K_1^2 - 162K_2) = 0 \Rightarrow K_1 = \frac{7}{2}, K_2 = \frac{7 + 5K_1 - 2K_1^2}{81} \quad .98)$$

$$(K_1, K_2) = \left(\frac{7}{2}, 0\right) \quad (2.99)$$

$$(K_1, K_2) = \left(2, \frac{1}{9}\right) \quad (2.100)$$

Параметарската област на стабилност на проектираниот систем аналитички е определена со неравенствата:

$$-1 < K_1 < 3.5 \quad (2.101)$$

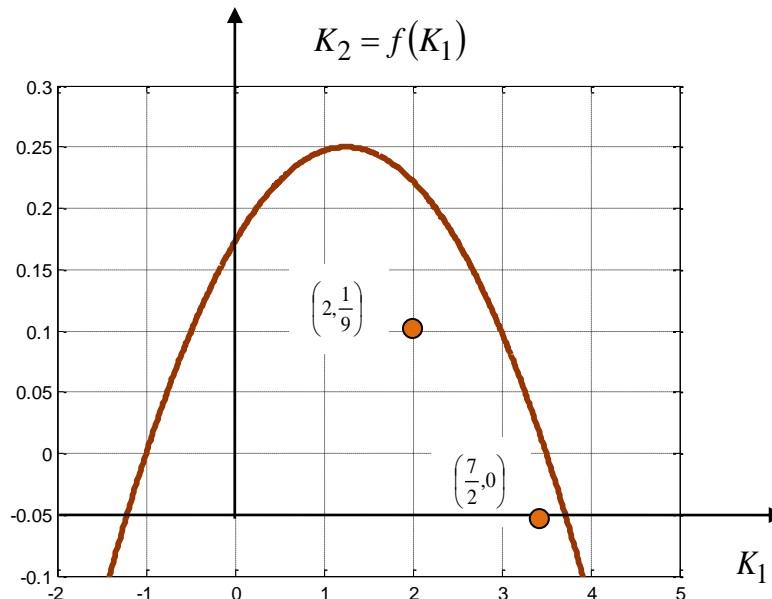
$$0 < K_2 < \frac{14 + 10K_1 - 4K_1^2}{81} \quad (2.102)$$

и истата графички е прикажана на Слика 2.25. Неа ѝ припаѓа само точката $(K_1, K_2) = \left(2, \frac{1}{9}\right)$, додека точката $(K_1, K_2) = (3.5, 0)$ лежи на нејзината граница.

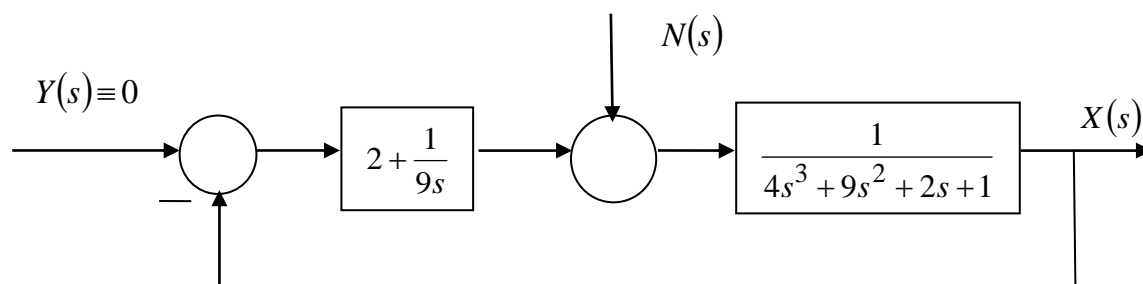
Следствено, решението на синтезата е:

$$R(s) = 2 + \frac{1}{9s} \quad (2.103)$$

и тоа е прикажано на Слика 2.26.

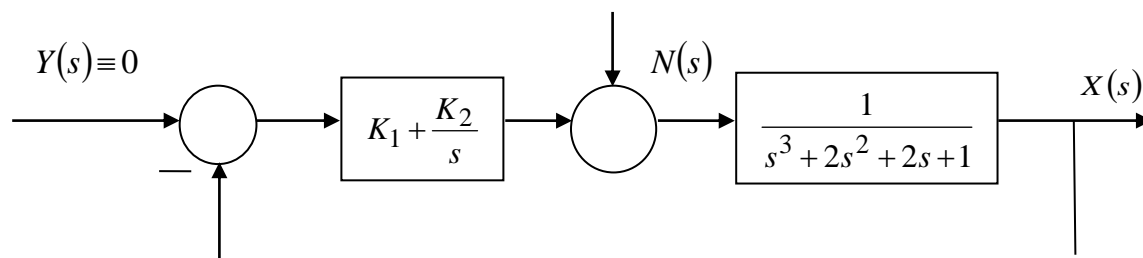


Слика 2.25. Параметарска област на стабилност на затворениот систем на автоматско управување од Задача 2.12



Слика 2.26.Решение на Задача 2.12 според критериумот J

2.13. Да се изврши синтеза со компензација на влијанието на пречките $n(t)$ на затворениот систем на автоматско управување од долната слика, Синтезата да се изврши за стандарден отскочен сигнал $n(t) = h(t)$, најнапред според критериумот J , а потоа и според критериумот J_2 .



Слика 2.27. Илустрација кон Задача 2.13

Решение: Сигналот на грешката во затворениот систем од Слика 2.27, предизвикана од влијанието на пречките во системот $n(t)$, во s - комплексното подрачје е опишан со сликата:

$$\begin{aligned}
 E(s) = E_n(s) = -X_n(s) &= \frac{-\frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}}{1 + \left(K_1 + \frac{K_2}{s}\right) \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}} \cdot \frac{1}{s} = \\
 &= \frac{-1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (1 + K_1)s + K_2} = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (2.104)
 \end{aligned}$$

Оттука, за вредноста на интегралниот критериум J се добива:

$$J = \frac{b_3^2(a_0a_1a_2 - a_0^2a_3) + a_0a_1a_4(b_2^2 - 2b_1b_3) + a_0a_3a_4(b_1^2 - 2b_0b_2)}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)} +$$

$$+ \frac{(a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2) b_0^2}{2 a_0 a_4 (a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4)} = \frac{3 - K_1}{2 K_2 (3 + 2 K_1 - K_1^2 - 4 K_2)} \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial J}{\partial K_1} = 0 \Rightarrow 9 - 6 K_1 + K_1^2 - 4 K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{9 - 6 K_1 + K_1^2}{4} \quad (2.106)$$

Минимизацијата на функцијата $J(K_1, K_2)$ ги дава следните решенија:

$$\frac{\partial J}{\partial K_2} = 0 \Rightarrow (3 - K_1)(3 + 2 K_1 - K_1^2 - 8 K_2) = 0 \Rightarrow K_1 = 3, K_2 = \frac{3 + 2 K_1 - K_1^2}{8} \quad (2.107)$$

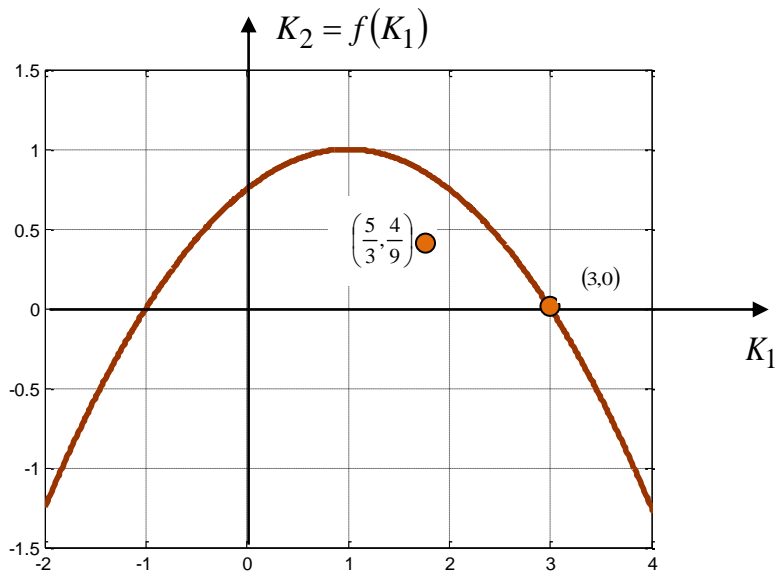
$$(K_1, K_2) = (3, 0) \quad (2.108)$$

$$(K_1, K_2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{9}\right) \quad (2.109)$$

Параметарската област на стабилност на проектираниот систем од Слика 2.27 е:

$$\begin{aligned} -1 < K_1 < 3 \\ 0 < K_2 < \frac{3 + 2 K_1 - K_1^2}{4} \end{aligned} \quad (2.110)$$

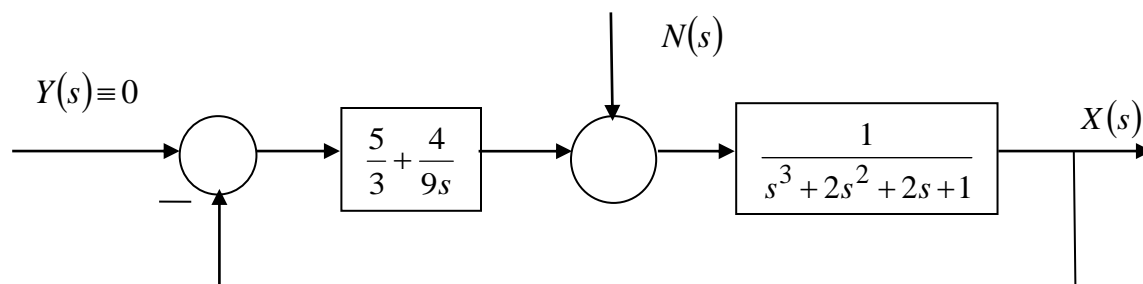
и истата е прикажана на Слика 2.28.



Слика 2.28. Параметарска област на стабилност на затворениот САУ од Слика 2.27

Од двете решенија (2.108) и (2.109), само второто припаѓа на оваа област. Следствено, решението на синтезата според интегралниот критериум J е:

$$R(s) = \frac{5}{3} + \frac{4}{9s} \quad (2.111)$$



Слика 2.29. Решение на Задача 2.13 според критериумот J

Имајќи на ум дека L – сликата на првиот извод од грешката (2.104) е:

$$\begin{aligned} E_1(s) &= L\{e_1(t)\} = L\{e'(t)\} = sE(s) - e(0) = \\ &= s \frac{-1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (1 + K_1)s + K_2} - \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{-1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (1 + K_1)s + K_2} = \\ &= \frac{-s}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + (1 + K_1)s + K_2} = \frac{\tilde{b}_3 s^3 + \tilde{b}_2 s^2 + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_4 s^4 + \tilde{a}_3 s^3 + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0} \end{aligned} \quad (2.112)$$

за вредноста на интегралниот критериум J_2 се добива:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\tilde{b}_3^2 (\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_0^2 \tilde{a}_3) + \tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_4 (\tilde{b}_2^2 - 2\tilde{b}_1 \tilde{b}_3) + \tilde{a}_0 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 (\tilde{b}_1^2 - 2\tilde{b}_0 \tilde{b}_2)}{2\tilde{a}_0 \tilde{a}_4 (\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 - \tilde{a}_0 \tilde{a}_3^2 - \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_4)} + \\ &+ \frac{(\tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 - \tilde{a}_1 \tilde{a}_4^2) \tilde{b}_0^2}{2\tilde{a}_0 \tilde{a}_4 (\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 - \tilde{a}_0 \tilde{a}_3^2 - \tilde{a}_1^2 \tilde{a}_4)} = \frac{2K_2}{2K_2 (3 + 2K_1 - K_1^2 - 4K_2)} \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$J_2 = J + J_1 = \frac{3 - K_1 + 2K_2}{2K_2 (3 + 2K_1 - K_1^2 - 4K_2)} \quad (2.114)$$

Од условите за минимум на функцијата $J_2(K_1, K_2)$ следува:

$$\frac{\partial J_2}{\partial K_1} = 0 \Rightarrow 9 - 6K_1 + K_1^2 - 4K_1 K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = \frac{9 - 6K_1 + K_1^2}{4K_1} \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial K_2} = 0 \Rightarrow K_1^3 - 5K_1^2 + 3K_1 + 9 = 8K_2^2 - 8K_1K_2 + 24K_2 \quad (2.116)$$

Системот равенки (2.115) – (2.116) има пет решенија:

$$(K_1, K_2) = (-3, -3) \quad (2.117)$$

$$(K_1, K_2) = (-1, -4) \quad (2.118)$$

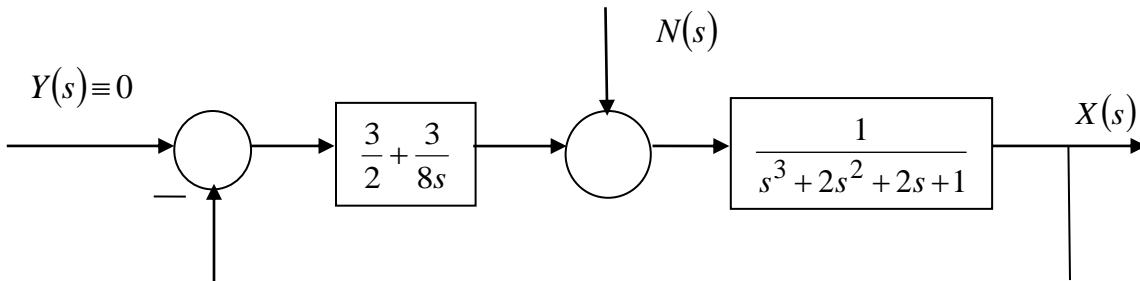
$$(K_1, K_2) = (3, 0) \quad (2.119)$$

$$(K_1, K_2) = (3, 0) \quad (2.120)$$

$$(K_1, K_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right) \quad (2.121)$$

од кои само решението $(K_1, K_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$ припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот систем. Следствено, решението на синтезата според критериумот J_2 е:

$$R(s) = \frac{3}{2} + \frac{3}{8s} \quad (2.122)$$



Слика 2.30. Решение на Задача 2.13 според критериумот J_2

2.14. Со помош на интегралниот критериум:

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (2.123)$$

да се изврши комбинирана синтеза на затворениот систем на автоматско управување од Задачата 2.8. Синтезата да се изврши за отскочни влезни возбуди.

Решение: Комбинираната синтеза подразбира едновременно присуство и на референтниот влез $y(t)$ и на пречките $n(t)$, па, во тој случај, грешката во системот ќе биде:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{2K}{s(s+2)(s+4)}} Y(s) - \frac{\frac{2}{(s+2)(s+4)}}{1 + \frac{2K}{s(s+2)(s+4)}} N(s) =$$

$$= \frac{s(s+2)(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 8s + 2K} \cdot \frac{1}{s} - \frac{2s}{s^3 + 6s^2 + 8s + 2K} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 6s + 6}{s^3 + 6s^2 + 8s + 2K} \quad (2.124)$$

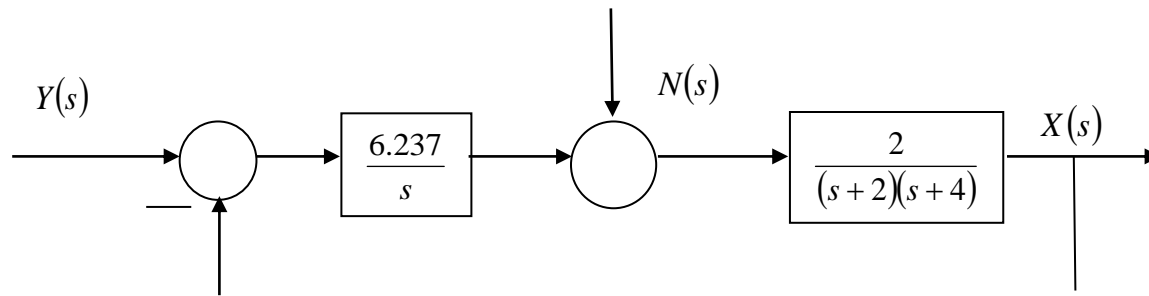
Вредноста на интегралниот критериум J во овој случај изнесува:

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{8K + 27}{K(24 - K)} \quad (2.125)$$

и неговиот минимум се добива за две вредности на параметарот K :

$$\frac{dJ}{dK} = \frac{8K^2 + 54K - 648}{K^2(24 - K)^2} = 0 \Rightarrow K_1 = -12.987, K_2 = 6.237 \quad (2.126)$$

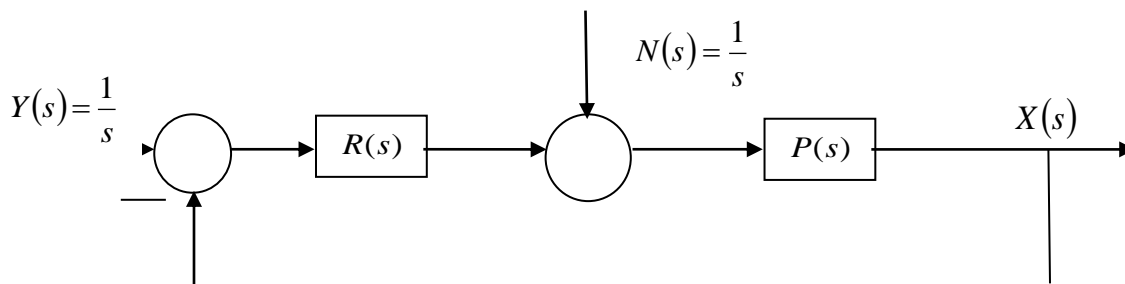
Од двете решенија K_1 и K_2 , само второто припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот затворен систем $0 < K < 24$, па, системот ќе биде како на Слика 2.31.



Слика 2.31. Решение на Задача 2.14

2.15. Да се изврши комбинирана синтеза на затворениот систем на автоматско управување прикажан на долната слика, во кој објектот на управување $P(s) = \frac{1}{s+2}$

е управува со неидеален И-регулатор $R(s) = \frac{K}{s(s+1)}$. Синтезата да се изврши според интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt$.



Слика 2.32. Илустрација кон Задача 2.15

Решение: Врз основа на L -сликата на грешката во набљудуваниот систем:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)}} Y(s) - \frac{\frac{1}{(s+2)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)}} N(s) =$$

$$= \frac{s(s+1)(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} \cdot \frac{1}{s} - \frac{s(s+1)}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} \quad (2.127)$$

се пресметува вредноста на интегралниот критериум J :

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{3K + 4}{2K(6 - K)} \quad (2.128)$$

со чија минимизација се добива:

$$\frac{dJ}{dK} = 0 \Rightarrow 3K(6 - K) - (3K + 4)(6 - 2K) = 0 \Rightarrow K_1 = -4.46, K_2 = 1.79 \quad (2.129)$$

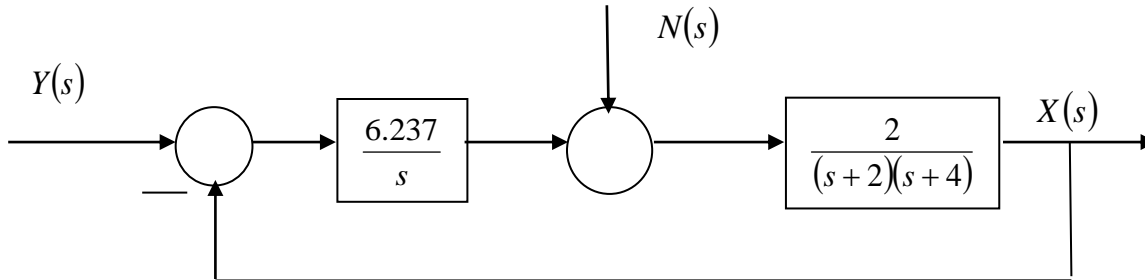
Бидејќи параметарската област на стабилност на проектираниот систем е:

$$0 < K < 6 \quad (2.130)$$

решението на синтезата ќе биде:

$$R(s) = \frac{1.79}{s(s+1)} \quad (2.131)$$

Проектираниот систем е прикажан на Слика 2.33.

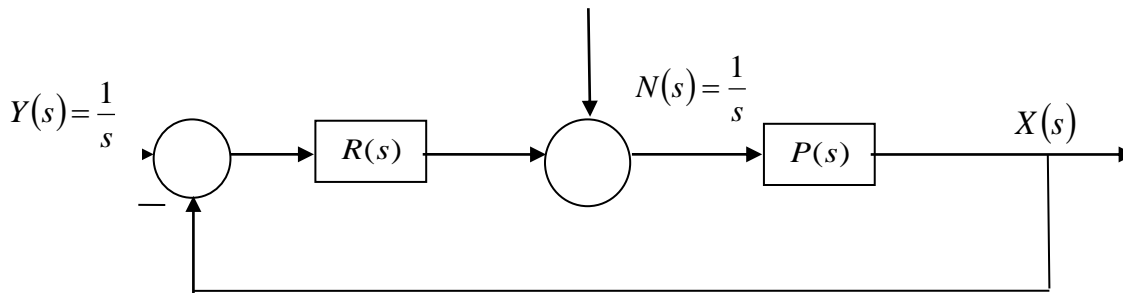


Слика 2.33. Решение на Задача 2.15

2.16. Даден е затворениот систем на автоматско управување од долната слика, во кој објектот на управување $P(s) = \frac{4}{s+6}$ е управуван со неидеален И-регулатор

$R(s) = \frac{K}{s(s+4)}$. Да се изврши комбинирана синтеза на овој систем според

интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^{2t} dt$.



Слика 2.34. Илустрација кон Задача 2.16

Решение: L -сликата на грешката во системот е:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{4K}{s(s+4)(s+6)}} Y(s) - \frac{\frac{4}{(s+6)}}{1 + \frac{4K}{s(s+4)(s+6)}} N(s) =$$

$$= \frac{s(s+4)(s+6)}{s^3+10s^2+24s+4K} \cdot \frac{1}{s} - \frac{4s(s+4)}{s^3+10s^2+24s+4K} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s^2+6s+8}{s^3+10s^2+24s+4K} \quad (2.132)$$

па, за интегралниот критериум се добива:

$$J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \frac{11K + 40}{2K(60 - K)} \quad (2.133)$$

$$\frac{dJ}{dK} = 0 \Rightarrow 11K^2 + 80K - 2400 = 0 \Rightarrow K_1 = -18.85, \quad K_2 = 11.58 \quad (2.134)$$

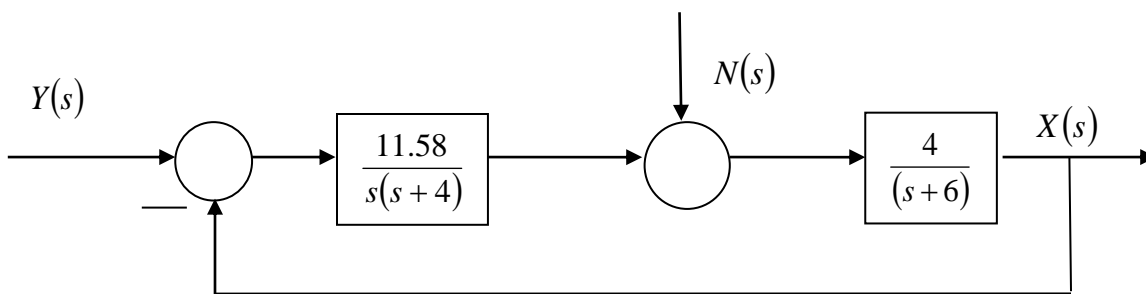
Бидејќи параметарската област на стабилност на проектираниот систем е:

$$0 < K < 60 \quad (2.135)$$

решението на синтезата ќе биде:

$$R(s) = \frac{11.58}{s(s+4)} \quad (2.136)$$

и тоа е прикажано графички на долната слика.



Слика 2.35. Решение на Задача 2.16

2.17. Да се определи вредноста на интегралот од сигналот на грешката:

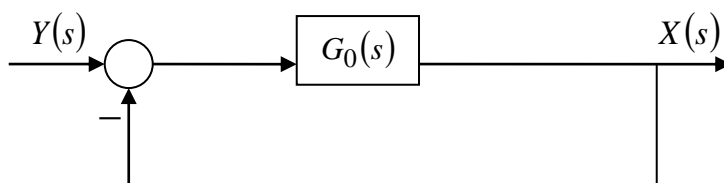
$$J = \int_0^{\infty} e(t) dt, \quad e(t) = y(t) - x(t) \quad (2.137)$$

за системот на автоматско управување со структурна блок-шема како на долната слика, и преносна функција:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{(b_1s+1)(b_2s+1)\cdots(b_ms+1)}{(a_1s+1)(a_2s+1)\cdots(a_ns+1)}; \quad m \leq n \quad (2.138)$$

во функција од параметрите на системот $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ и $b_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$, ако на влезот од системот дејствува единичен отскочен влез $y(t) = h(t)$, а a_i и b_j се реални и/или во парови конјугирано-комплексни броеви. (Упатство: да се искористи равенството:

$$J = \int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e(t) e^{-st} dt \quad (2.139)$$



Слика 2.36. Илустрација кон Задача 2.17

Решение:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [R(s) - C(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [R(s) - G(s)R(s)] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [1 - G(s)]R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{(b_1s+1)(b_2s+1)\cdots(b_ms+1)}{(a_1s+1)(a_2s+1)\cdots(a_ns+1)} \right] R(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{(a_1s+1)(a_2s+1)\cdots(a_ns+1) - (b_1s+1)(b_2s+1)\cdots(b_ms+1)}{s(a_1s+1)(a_2s+1)\cdots(a_ns+1)} \right] = \frac{0}{0} \end{aligned} \quad (2.140)$$

За да се определи горната гранична вредност, мора да се примени Л`опиталовото правило, кое го дава резултатот:

$$J = \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{j=1}^m b_j \quad (2.141)$$

2.18. Со помош на интегралниот критериум:

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(t) + \tau [e'(t)]^2 \right\} dt \quad (2.142)$$

каде што $e(t) = y(t) - x(t)$ е разликата помеѓу саканата вредност $y(t) = h(t)$ и стварната вредност $x(t)$ на одзивот на еден систем на автоматско управување со преносна функција $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2cs + 1}, c > 0 \quad (2.143)$$

да се определи вредноста на параметарот c на системот, за која интегралниот критериум J ќе има минимална вредност и да се определи таа вредност.

Решение:

$$E(s) = Y(s) - X(s) = [1 - G(s)]Y(s) = \left[1 - \frac{1}{s^2 + 2cs + 1}\right] \frac{1}{s} = \frac{s + 2c}{s^2 + 2cs + 1} \quad (2.144)$$

$$E_1(s) = sE(s) - e(0) = \frac{s^2 + 2cs}{s^2 + 2cs + 1} - 1 = \frac{-1}{s^2 + 2cs + 1} \quad (2.145)$$

$$J = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{1 + 4c^2}{4c} \quad (2.146)$$

$$J_1 = \frac{\tilde{a}_0 \tilde{b}_1^2 + \tilde{a}_2 \tilde{b}_0^2}{2\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2} = \frac{1}{4c} \quad (2.147)$$

$$J_2 = J + J_1 = \frac{1 + 4c^2}{4c} + \frac{\tau}{4c} \quad (2.148)$$

$$\frac{dJ_2}{dc} = 0 \Rightarrow 4c^2 - \tau - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{\tau + 1}}{2} \quad (2.149)$$

$$J_2 = J + J_1 = \frac{1 + (\tau + 1) + \tau}{2\sqrt{\tau + 1}} = \sqrt{\tau + 1} \quad (2.150)$$

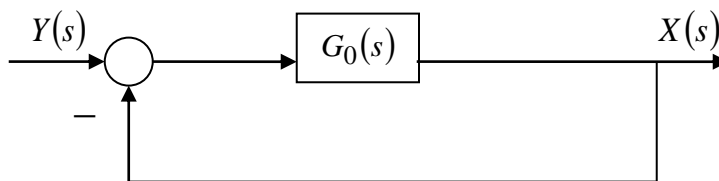
2.19. Со помош на интегралниот критериум:

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ e^2(t) + T^2 [e'(t)]^2 \right\} dt \quad (2.151)$$

каде што T е однапред зададен, константен параметар, да се определи вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем со преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(T_0 s + 1)}, T_0 = const. > 0 (\in \mathfrak{R}) \quad (2.152)$$

за дадениот затворен систем на автоматско управување од долната слика.



Слика 2.37. Илустрација кон Задача 2.19

Решение:

$$E(s) = L\{e(t)\} = \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot R(s) = \frac{T_0 s + 1}{T_0 s^2 + s + K} \quad (2.153)$$

$$e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T_0 s^2 + s}{T_0 s^2 + s + K} = 1 \quad (2.154)$$

$$E_1(s) = L\{e'(t)\} = sE(s) - e(0) = s \frac{T_0 s + 1}{T_0 s^2 + s + K} - 1 = \frac{-K}{T_0 s^2 + s + K} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \{e^2(t) + T^2 [e'(t)]^2\} dt = \int_0^{\infty} e^2(t) dt + T^2 \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt = \\ &= \frac{KT_0^2 + T_0}{2KT_0} + T^2 \frac{T_0 K^2}{2KT_0} \end{aligned} \quad (2.156)$$

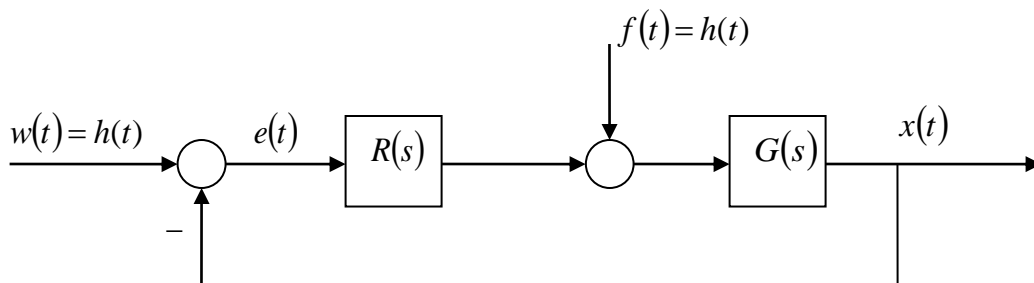
$$\frac{dJ}{dK} = \frac{d}{dK} \left[\frac{KT_0^2 + T_0 + T^2 T_0 K^2}{2KT_0} \right] = T^2 T_0 K^2 - T_0 = 0 \Rightarrow T^2 K^2 - 1 = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{T} \quad (2.157)$$

2.20. Со помош на интегралниот критериум: $J = \int_0^{\infty} [e(t) + e'(t)]^2 dt$, да се определи

вредноста на параметарот K на затворениот линеарен стационарен континуален систем на автоматско управување од долната слика, ако:

$$R(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (2.158)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad (2.159)$$



Слика 2.38. Илустрација кон Задача 2.20

Решение: Станува збор за комбинирана синтеза (во присуство и на референтен влез $w(t)$ и на пречки $f(t)$ за кои се усвојува дека се стандардни отскочни сигнали), па L -сликата $E(s)$ на грешката $e(t)$ на овој систем ќе има две компоненти:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= L\{e(t)\} = E_w(s) + E_f(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} W(s) - \frac{G(s)}{1 + R(s)G(s)} F(s) = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s+2}} \cdot \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{K}{s(s+1)} \cdot \frac{1}{s+2}} \cdot \frac{1}{s} = \\
 &= \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} - \frac{s+1}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} \tag{2.160}
 \end{aligned}$$

а нејзината почетна вредност ќе биде:

$$e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} = 1 \tag{2.161}$$

Вредноста на интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} [e(t) + e'(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} u^2(t) dt$ се пресметува со помош на формулата $J = \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)}$, каде што $a_i, b_i (i = 0, 1, 2, 3)$ се коефициентите на L -сликата $U(s) = L\{u(t)\}$:

$$\begin{aligned}
 U(s) &= L\{u(t)\} = L\{e(t) + e'(t)\} = E(s) + [sE(s) - e(0)] = \\
 &= (s+1)E(s) - e(0) = \frac{s+1-K}{s^3 + 3s^2 + 2s + K} \tag{2.162}
 \end{aligned}$$

и таа изнесува:

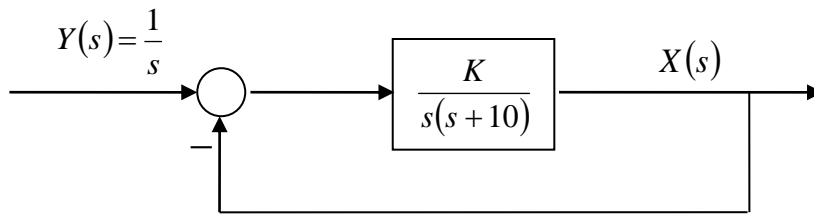
$$\begin{aligned}
 J &= \frac{a_0 a_1 b_2^2 + a_0 a_3 (b_1^2 - 2b_0 b_2) + a_2 a_3 b_0^2}{2a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} = \\
 &= \frac{K \cdot 1 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \cdot (1 - K)^2}{2 \cdot K \cdot 1 (2 \cdot 3 - 1 \cdot K)} = \frac{K + 3(1 - K)^2}{2K(6 - K)} = J(K)
 \end{aligned} \tag{2.163}$$

Нејзиниот минимум е одреден со условот:

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ}{dK} &= \frac{d}{dK} \left[\frac{K + 3(1 - K)^2}{2K(6 - K)} \right] = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow &(6K - 5)(6 - K)K - (6 - 2K)[K + 3(1 - K)^2] = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow &13K^2 + 6K - 18 = 0 \Rightarrow K_{1,2} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{27}}{13} \Rightarrow K_1 = -1.43, K_2 = 0.97
 \end{aligned} \tag{2.164}$$

и тој дава две можни вредности за непознатиот параметар на проектираниот затворен систем на автоматско управување K . Меѓутоа, од овие две вредности, само вредноста $K_2 = 0.97$ припаѓа на параметарската област на стабилност на набљудуваниот систем $K \in (0, 6)$. Следствено, таа е бараното решение за K .

2.21. Со помош на интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt + \int_0^{\infty} [e'(t)]^2 dt$ да се определи оптималната вредност на непознатиот параметар K во затворениот систем од долната слика.



Слика 2.39. Илустрација кон Задача 2.21

Решение:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+10)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s+10}{s^2 + 10s + K} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{2.165}$$

$$\begin{aligned}
 E_1(s) &= L\{e_1(t)\} = L\{e'(t)\} = sE(s) - e(0) = \\
 &= s \frac{s+10}{s^2+10s+K} - \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s+10}{s^2+10s+K} = \\
 &= \frac{-K}{s^2+10s+K} = \frac{\tilde{b}_1 s + \tilde{b}_0}{\tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0}
 \end{aligned} \tag{2.166}$$

$$J = \frac{a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{K+100}{20K} \tag{2.167}$$

$$J_1 = \frac{\tilde{a}_0 \tilde{b}_1^2 + \tilde{a}_2 \tilde{b}_0^2}{2\tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2} = \frac{K^2}{20K} \tag{2.168}$$

$$J_2 = J + J_1 = \frac{K+100}{20K} + \frac{K^2}{20K} = \frac{K^2 + K + 100}{20K} \tag{2.169}$$

$$\frac{dJ_2}{dK} = 0 \Rightarrow K^2 - 100 = 0 \Rightarrow K = 10 \tag{2.170}$$

2.22. Да се изврши синтеза на затворениот систем на автоматско управување од долната слика според интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$. Еден математички модел на објектот $P(s)$ во просторот на состојби е:

$$\underline{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \underline{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{2.171}$$

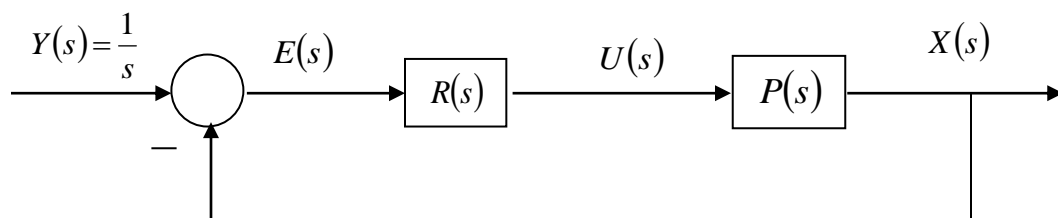
$$x(t) = [1 \quad 0] \underline{v}(t) \tag{2.172}$$

додека регулаторот $R(s)$ е опишан со равенките:

$$w_1'(t) = -2w_1(t) + e(t) \tag{2.173}$$

$$w_2'(t) = w_1(t) \tag{2.174}$$

$$u(t) = Kw_2(t) \tag{2.175}$$



Слика 2.40. Илустрација кон Задача 2.22

Решение: Преносните функции на објектот на управување и регулаторот се:

$$P(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{[1 \quad 0]}{s^2 + s + 2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + s + 2} \quad (2.176)$$

$$R(s) = [0 \quad K] \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{[0 \quad K]}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{K}{s(s+2)} \quad (2.177)$$

па, за грешката во системот се добива:

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1 + R(s)P(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(s+2)} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 2}} \cdot \frac{1}{s} = \\ &= \frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s + K} = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \end{aligned} \quad (2.178)$$

Интегралот J зависи од неодредениот параметар на регулаторот K :

$$\begin{aligned} J &= \frac{b_3^2(a_0a_1a_2 - a_0^2a_3) + a_0a_1a_4(b_2^2 - 2b_1b_3) + a_0a_3a_4(b_1^2 - 2b_0b_2)}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)} + \\ &+ \frac{(a_2a_3a_4 - a_1a_4^2)b_0^2}{2a_0a_4(a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4)} = \frac{32 + 21K - 3K^2}{32K - 9K^2} \end{aligned} \quad (2.179)$$

и минимизацијата на функцијата $J(K)$ ги дава следните решенија:

$$\frac{dJ}{dK} = 0 \Rightarrow 93K^2 + 576K_2 - 1024 = 0 \Rightarrow K_1 = -7.6356, \quad K_2 = 1.4420 \quad (2.180)$$

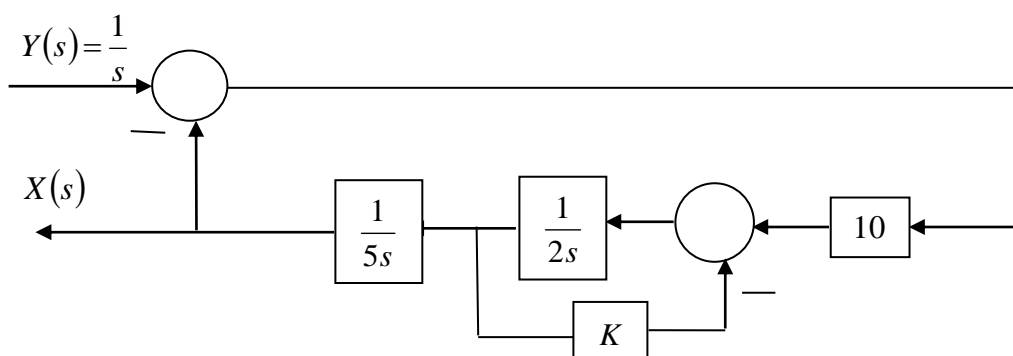
Од нив, прифатливо е само решението $K_2 = 1.4420$, бидејќи единствено тоа припаѓа на параметарската област на стабилност на проектираниот систем:

$$0 < K < \frac{32}{9} = 3.55 \quad (2.181)$$

Следствено, решението на синтезата според критериумот J е:

$$R(s) = \frac{1.44}{s(s+2)} \quad (2.182)$$

2.23. Даден е затворениот систем на автоматско управување од долната слика. Со помош на интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt$ да се определи непознатиот параметар на системот K , кој го исполнува условот $K < 4$.



Слика 2.41. Илустрација кон Задача 2.23

Решение: Интегралниот критериум $J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt$ може да се определи и аналитички. За таа цел најнапред се определува грешката во проектираниот систем:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{5s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{2s+K}} \cdot 10} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5s} \cdot \frac{1}{\frac{2s+K}{2s}} \cdot 10} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{2s+K}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s(2s+K)}{s(2s+K)+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2s+K}{2s^2+Ks+2} = \frac{s+\tilde{K}}{s^2+\tilde{K}s+1}; \quad \tilde{K} = \frac{K}{2} \quad (2.183)$$

$$s^2 + \tilde{K}s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-\tilde{K} \pm \sqrt{\tilde{K}^2 - 4}}{2} =$$

$$= \frac{-\tilde{K}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{K}}{2}\right)^2 - 1} = -c \pm j\sqrt{1-c^2}; \quad c = \frac{\tilde{K}}{2} < 1 \quad (2.184)$$

$$\begin{aligned} e(t) &= L^{-1}\{E(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+\tilde{K}}{s^2+\tilde{K}s+1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+\tilde{K}}{(s+c+j\sqrt{1-c^2})(s+c-j\sqrt{1-c^2})}\right\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}-\frac{c}{j2\sqrt{1-c^2}}}{(s+c+j\sqrt{1-c^2})} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{c}{j2\sqrt{1-c^2}}}{(s+c-j\sqrt{1-c^2})}\right\} = \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{c}{j2\sqrt{1-c^2}}\right)e^{-ct}e^{-jt\sqrt{1-c^2}} + \left(\frac{1}{2}+\frac{c}{j2\sqrt{1-c^2}}\right)e^{-ct}e^{jt\sqrt{1-c^2}} = \\ &= e^{-ct}\cos(t\sqrt{1-c^2}) + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}e^{-ct}\sin(t\sqrt{1-c^2}) \end{aligned} \quad (2.185)$$

$$\begin{aligned} e^2(t) &= e^{-2ct}\cos^2(t\sqrt{1-c^2}) + \frac{c^2}{1-c^2}e^{-2ct}\sin^2(t\sqrt{1-c^2}) + \\ &+ \frac{2c}{\sqrt{1-c^2}}e^{-2ct}\sin(t\sqrt{1-c^2})\cos(t\sqrt{1-c^2}) = \\ &= e^{-2ct}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t\sqrt{1-c^2})\right] + \frac{c^2}{1-c^2}e^{-2ct}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t\sqrt{1-c^2})\right] + \\ &+ \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}e^{-2ct}\sin(2t\sqrt{1-c^2}) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c^2}{1-c^2}\right)e^{-2ct} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{1-c^2}\right)e^{-2ct}\cos(2t\sqrt{1-c^2}) + \\ &+ \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}e^{-2ct}\sin(2t\sqrt{1-c^2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-c^2}\right)e^{-2ct} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1-2c^2}{1-c^2}\right)e^{-2ct}\cos(2t\sqrt{1-c^2}) + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}e^{-2ct}\sin(2t\sqrt{1-c^2}) \end{aligned} \quad (2.186)$$

и потоа се пресметува вредноста на интегралот J :

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-c^2} \right) \int_0^{\infty} e^{-2ct} dt + \frac{1}{2} \left(\frac{1-2c^2}{1-c^2} \right) \int_0^{\infty} e^{-2ct} \cos(2t\sqrt{1-c^2}) dt + \\
 &+ \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \int_0^{\infty} e^{-2ct} \sin(2t\sqrt{1-c^2}) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-c^2} \right) I_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-2c^2}{1-c^2} \right) I_1 + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} I_2 \quad (2.187)
 \end{aligned}$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-2ct} dt = -\frac{e^{-2ct}}{2c} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2c} \quad (2.188)$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\infty} e^{-2ct} \cos(2t\sqrt{1-c^2}) dt = \\
 &= \frac{1-c^2}{2\sqrt{1-c^2}} e^{-2ct} \sin(2t\sqrt{1-c^2}) \Big|_0^{\infty} - \frac{c}{2} e^{-2ct} \cos(2t\sqrt{1-c^2}) \Big|_0^{\infty} = \frac{c}{2} \quad (2.189)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{\infty} e^{-2ct} \sin(2t\sqrt{1-c^2}) dt = \\
 &= \frac{-(1-c^2)}{2\sqrt{1-c^2}} e^{-2ct} \cos(2t\sqrt{1-c^2}) \Big|_0^{\infty} - \frac{c}{2} e^{-2ct} \sin(2t\sqrt{1-c^2}) \Big|_0^{\infty} = \frac{1-c^2}{2\sqrt{1-c^2}} \quad (2.190)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-c^2} \right) \frac{1}{2c} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-2c^2}{1-c^2} \right) \frac{c}{2} + \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \cdot \frac{1-c^2}{2\sqrt{1-c^2}} = \\
 &= \frac{1}{4c(1-c^2)} + \frac{c}{4} \left(\frac{1-2c^2}{1-c^2} \right) + \frac{c(1-c^2)}{2(1-c^2)} = \frac{1+3c^2-4c^4}{4c(1-c^2)} \quad (2.191)
 \end{aligned}$$

кој има минимум за две вредности на K :

$$\frac{dJ}{dc} = \frac{(6c-16c^3)c(1-c^2) - (1+3c^2-4c^4)(1-3c^2)}{16c^2(1-c^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c^6 - 9c^4 + 6c^2 - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1, \quad c^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 1, \quad c = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{K} = 1, \quad \tilde{K} = 2 \Rightarrow K = 2, \quad K = 4 \quad (2.192)$$

Решението на задачата на синтеза е $K = 2$, бидејќи само тоа го задоволува условот од задачата $K < 4$.

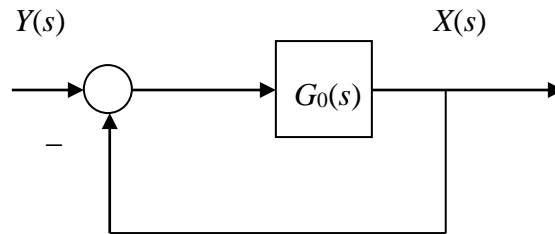
2.24. Со помош на интегралниот критериум:

$$J = \int_0^{\infty} [e(t) + \tau e'(t)]^2 dt; \quad \tau > 0 \quad (2.193)$$

каде што $e(t) = y(t) - x(t)$ е разликата помеѓу саканата вредност $y(t) = h(t)$ и стварната вредност $x(t)$ на одзивот на набљудуваниот систем на автоматско управување од долната слика, а τ е однапред зададен константен параметар, да се определи вредноста на факторот на засилување K на отворениот систем, чија преносна функција има облик:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(T_0s + 1)}, \quad T_0 = \text{const.} > 0 (\in \mathfrak{R}) \quad (2.194)$$

така што J ќе има минимум во K . Упатство: $J = \frac{a_0b_1^2 + a_2b_0^2}{2a_0a_1a_2}$



Слика 2.42. Затворен систем на автоматско управување од Задача 2.24

Решение: L -сликата $E(s)$ на грешката $e(t) = y(t) - x(t)$ во затворениот систем од сликата е дадена со изразот:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} Y(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s(Ts + 1)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K} \cdot \frac{1}{s} = \frac{Ts + 1}{Ts^2 + s + K} \quad (2.195)$$

а нејзината почетна вредност е:

$$e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{Ts + 1}{Ts^2 + s + K} = 1 \quad (2.196)$$

$$J = \int_0^{\infty} [e(t) + \tau e'(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s)F(-s) ds \quad (2.197)$$

$$f(t) = e(t) + \tau e'(t) \quad (2.198)$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{e(t) + \tau e'(t)\} = L\{e(t)\} + \tau L\{e'(t)\} = E(s) + \tau[sE(s) - e(0)] =$$

$$= \frac{Ts+1}{Ts^2+s+K} + \tau \left(s \frac{Ts+1}{Ts^2+s+K} - 1 \right) = \frac{Ts+1}{Ts^2+s+K} + \tau \frac{Ts^2+s-Ts^2-s-K}{Ts^2+s+K} =$$

$$= \frac{Ts+1}{Ts^2+s+K} - \frac{\tau K}{Ts^2+s+K} = \frac{Ts+1-\tau K}{Ts^2+s+K} = \frac{b_1s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0} \quad (2.199)$$

$$J = \frac{a_0b_1^2 + a_2b_0^2}{2a_0a_1a_2} \quad (2.200)$$

$$= \frac{KT^2 + T(1-\tau K)^2}{2TK} = \frac{KT + (1-\tau K)^2}{2K} = J(K) \quad (2.201)$$

$$\frac{dJ(K)}{dK} = \frac{TK - 2\tau K(1-\tau K) - KT - (1-\tau K)^2}{2K^2} = 0 \Rightarrow$$

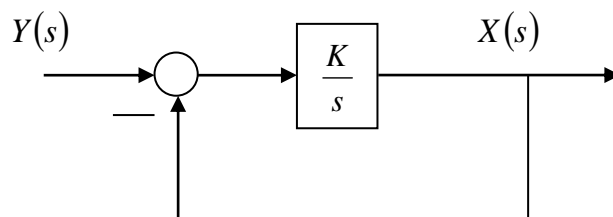
$$\tau^2 K^2 - 1 = 0 \Rightarrow \tau^2 K^2 = 1 \Rightarrow K^2 = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow K = \frac{1}{\tau} \quad (2.202)$$

2.25. Даден е затворениот систем од Слика 2.43. Да се претпостави дека на неговиот влез дејствува отскочен сигнал со амплитуда A и системот има во себе акумулирано енергија пред почетниот миг на набљудување $t = t_0 = 0$. Соодветниот ненулев почетен услов е $x(0) = Q$. Треба да се определи соодветна вредност за променливиот параметар на системот K , таква што ќе ја минимизира грешката во системот $e(t) = y(t) - x(t)$. За таа цел да се употреби интегралниот критериум за синтеза $J_0 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$. Да се покаже

дека вредноста на интегралот J_0 е функција од амплитудата на влезот A , почетниот услов на излезот Q и променливиот параметар на системот K и изнесува $J_0 = \frac{(A-Q)^2}{2K}$. Да се определи соодветната вредност за K за која интегралот J_0 ќе има минимум. Каква е таа вредност? Да се усвои практична вредност за K и да се пресмета соодветната вредност на J_0 .

Решение:

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{s}} Y(s) \Rightarrow (s + K)E(s) = sY(s) \Rightarrow e'(t) + Ke(t) = y'(t) \quad (2.203)$$



Слика 2.43. Илустрација кон Задача 2.25 – затворен систем со единична повратна врска

За ненулеви почетни услови:

$$\begin{aligned} L\{e'(t)\} + KL\{e(t)\} &= L\{y'(t)\} \Rightarrow sE(s) - e(0) + KE(s) = sY(s) - y(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (s + K)E(s) &= sY(s) - y(0) + e(0) \Rightarrow (s + K)E(s) = sY(s) - y(0) + y(0) - x(0) \Rightarrow \\ \Rightarrow E(s) &= \frac{s}{s + K} Y(s) - \frac{1}{s + K} x(0) \Rightarrow E(s) = \frac{A - Q}{s + K} \end{aligned} \quad (2.204)$$

$$J_0 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1} = \frac{(A - Q)^2}{2K} \quad (2.205)$$

$$\frac{dJ_0}{dK} = -\frac{(A - Q)^2}{2K^2} = 0 \Rightarrow K = \infty \quad (2.206)$$

Добиената вредност за K не е реална и физички остварлива. Затоа за K се усвојува некоја практична вредност, како, на пример, $K = 1000$. Тогаш:

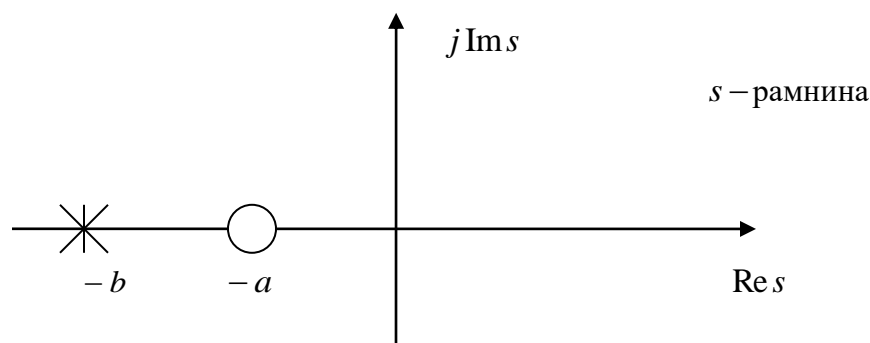
$$J_0 = \frac{(A - Q)^2}{2000} \quad (2.207)$$

3. СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Преносната функција на еден континуален диференцијален компензатор има облик:

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{s}{a} + 1}{\frac{s}{b} + 1}; \quad 0 < a < b \quad (3.1)$$

Тој има реална нула во точката $s = -a$ и реален пол во точката $s = -b$, кои се наоѓаат во левата полурамнина од s -комплексната рамнина, при што нулата е поблиску до имагинарната оска. Истите се прикажани на Слика 3.1.



Слика 3.1. Положба на нулите и половите на еден диференцијален компензатор во s -комплексната рамнина

Фреквентната преносна функција на диференцијалниот компензатор (3.1) е:

$$G_d(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega + b} = \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\sqrt{\omega^2 + b^2}} e^{j\left(\arctg \frac{\omega}{a} - \arctg \frac{\omega}{b}\right)} \quad (3.2)$$

од каде следува дека аналитичкиот опис на неговите логаритамски фреквентни карактеристики на слабеење и фаза е:

$$\begin{aligned} |G_d(j\omega)|_{db} &= 20 \log |G_d(j\omega)| = 20 \log \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\sqrt{\omega^2 + b^2}} = \\ &= 20 \log \sqrt{\omega^2 + a^2} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + b^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\arg[G_d(j\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{b} \quad (3.4)$$

Изразите (3.3) и (3.4) ги претставуваат реалните логаритамски карактеристики на слабеење и фаза, додека асимптотските карактеристики се опишани со изразите:

$$|G_d(j\omega)|_{db} = 20 \log \sqrt{\omega^2 + a^2} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + b^2} \approx \begin{cases} 20 \log \frac{a}{b}, & \omega < a \\ 20 \log \frac{\omega}{b}, & a < \omega < b \\ 0, & \omega > b \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\arg[G_d(j\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{b} \approx \begin{cases} 0, & \omega < a \\ \frac{\pi}{2}, & a < \omega < b \\ 0, & \omega > b \end{cases} \quad (3.6)$$

На Слика 3.2 е прикажан асимптотскиот логаритамски дијаграм на слабеење на еден диференцијален компензатор за различни вредности на односот $\frac{a}{b}$, додека на Слика 3.3 се прикажани неговите реални логаритамски дијаграми на слабеење и фаза за исти вредности на односот $\frac{a}{b}$.

Од дијаграмите на Слика 3.3 се гледа дека диференцијалниот компензатор при ниски фреквенции внесува слабеење еднакво на односот $\frac{a}{b}$, додека слабеењето при високи фреквенции е занемарливо. Фазното поместување што го внесува диференцијалниот компензатор е секогаш позитивно и значајна вредност има само при ниски и средни фреквенции. При многу ниски и при високи фреквенции ова фазно поместување е занемарливо. Фреквенцијата ω_m при која фазното поместување на диференцијалниот компензатор има максимална вредност се одредува од условот за екстрем на функцијата (3.6):

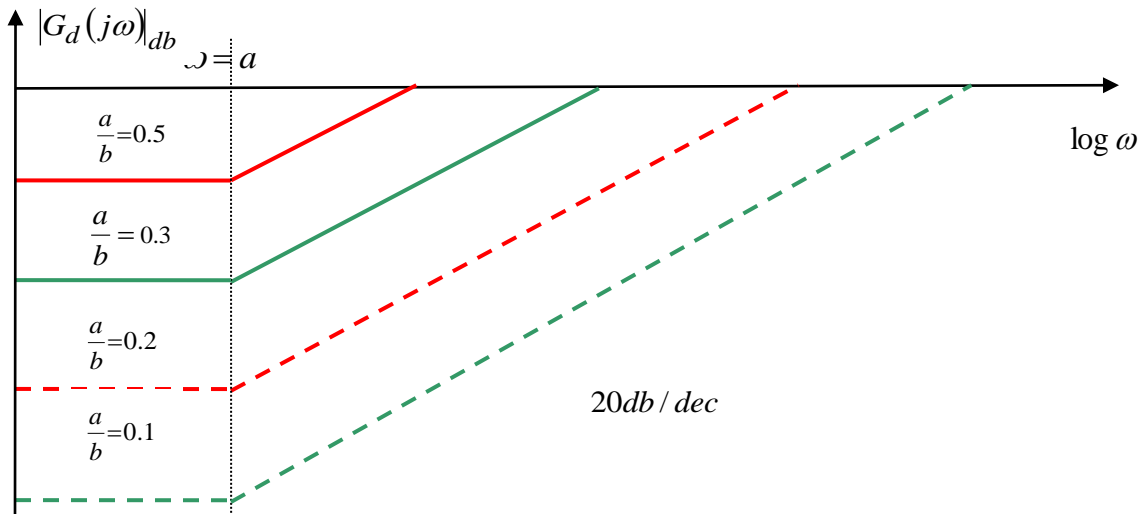
$$\frac{d}{d\omega} \{ \arg [G_d(j\omega)] \} = \frac{d}{d\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{b} \right) = \frac{a}{\omega^2 + a^2} - \frac{b}{\omega^2 + b^2} = 0 \quad (3.7)$$

и изнесува:

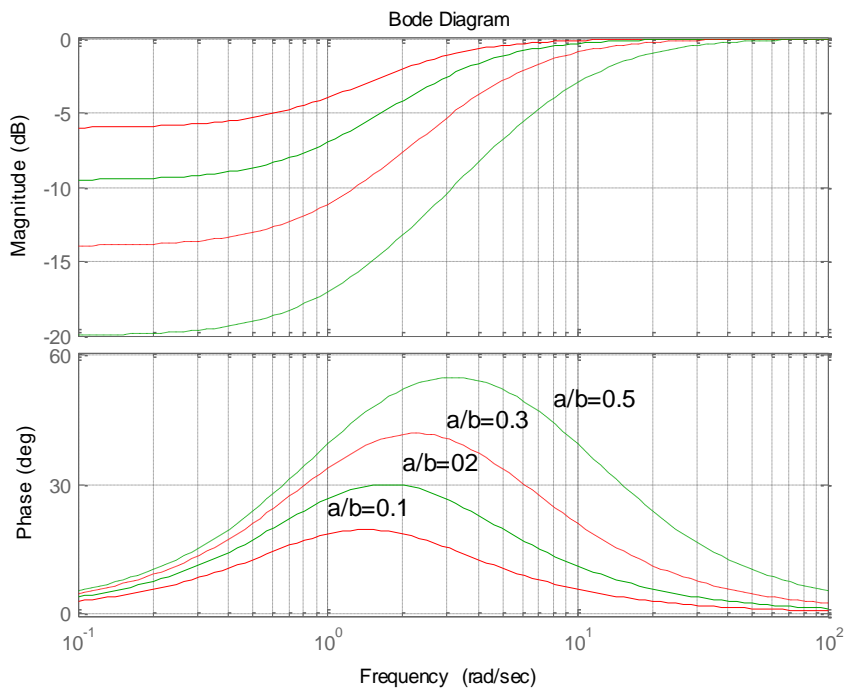
$$\omega_m = \sqrt{ab} \quad (3.8)$$

а самото максимално фазно поместување е:

$$\varphi_m = \varphi(\omega_m) = \arctg \frac{\sqrt{ab}}{a} - \arctg \frac{\sqrt{ab}}{b} = \arctg \sqrt{\frac{b}{a}} - \arctg \sqrt{\frac{a}{b}} = 90^0 - 2\arctg \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (3.9)$$



Слика 3.2. Асимптотски логаритамски дијаграм на слабеење на еден диференцијален компензатор за различно a/b



Слика 3.3. Реални Бодевски дијаграми на слабеење и фаза на еден диференцијален компензатор за различно a/b

Примената на диференцијалниот компензатор се засновува врз неговата особина да внесува позитивно фазно поместување и се користи секогаш кога треба да се зголеми резервата на стабилност и ширината на пропусниот опсег (брзината на одсив) на еден систем.

При пресметките, поудобно е преносната функција на диференцијалниот компензатор (3.1) да се претстави во облик:

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b} = \frac{s + \frac{1}{\alpha T_c}}{s + \frac{1}{T_c}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha T_c s + 1}{T_c s + 1} \quad (3.10)$$

каде што $T_c = \frac{1}{b}$ и $b = \alpha a$. Тогаш фреквенцијата (3.8) при која настапува максималното фазно поместување на диференцијалниот компензатор може да се изрази како:

$$\omega_m = \sqrt{ab} = \frac{1}{T_c \sqrt{\alpha}} \quad (3.11)$$

Бидејќи фазното поместување на диференцијалниот компензатор сега може да се претстави на следниот начин:

$$\varphi(\omega) = \arg[G_d(j\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{\alpha \omega T_c - \omega T_c}{1 + \alpha (\omega T_c)^2} \quad (3.12)$$

самото максимално фазно поместување (3.9) ќе биде:

$$\varphi(\omega_m) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha \omega_m T_c - \omega_m T_c}{1 + \alpha (\omega_m T_c)^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \quad (3.13)$$

Ако од (3.13) се изрази:

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega_m) = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \quad (3.14)$$

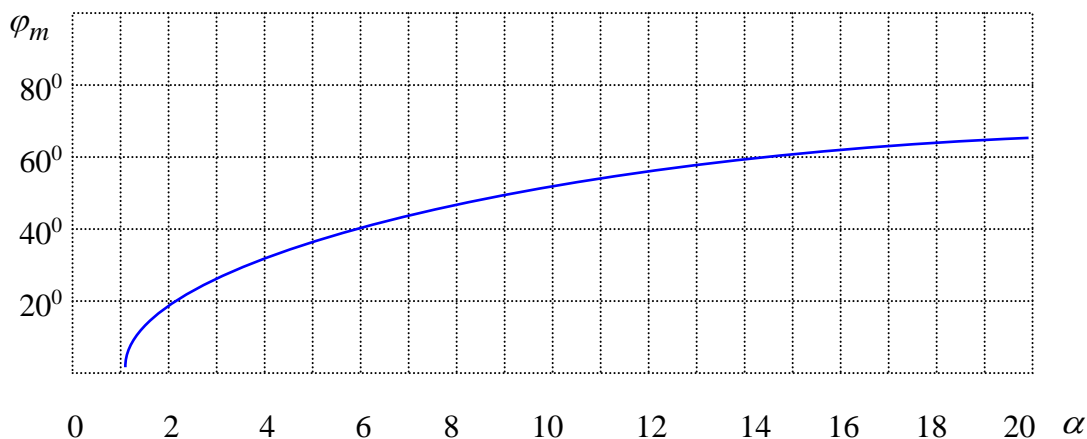
и се примени тригонометриската смена:

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \quad (3.15)$$

ќе се добие:

$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (3.16)$$

Изразот (3.16) е многу корисен при одредувањето на односот помеѓу полот и нулата на диференцијалниот компензатор, со цел да се обезбеди саканото максимално фазно поместување. Од графичкиот приказ на односот $\varphi_m(\alpha)$ на Слика 3.4 се гледа дека со диференцијалниот компензатор (3.1) односно (3.10) може да се постигне фазно поместување не многу поголемо од 70° . Ова ограничување на аголот φ_m се должи на ограничувањето во однос на максималната остварлива вредност за α , кое е наметнато од реалните можни вредности на параметрите на компензаторот. Следствено, ако треба да се оствари фазно поместување поголемо од 70° , се користат два или повеќе диференцијални компензатори во сервиска врска.



Слика 3.4. Графички приказ на зависноста $\varphi_m(\alpha)$

Општиот облик на преносната функција на дискретниот еквивалент од диференцијалниот компензатор е:

$$G_d(z) = \frac{K_d(z - z_c)}{z - p_c}; \quad z_c > p_c \quad (3.17)$$

Тој има реална нула во точката $z = z_c$ и реален пол во $z = p_c$, при што нулата е подалеку од координатниот почеток во z -комплексната рамнина. Вредноста на преносната функција (3.17) за $z = 1$ се нарекува **стационарно засилување** и изнесува:

$$G_d(1) = K_d \frac{1 - z_c}{1 - p_c} \quad (3.18)$$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Коефициентот на засилување K_d служи за нагудување на засилувањето на компензаторот при одредена фреквенција.

Преносната функција на дискретниот еквивалент на диференцијалниот компензатор може да се добие од преносната функција на континуалниот диференцијален компензатор:

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b}; \quad b > a \quad (3.19)$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Така, нулата $s = -a$ на континуалниот диференцијален компензатор $G_d(s)$ со смената $z = e^{sT}$ се пресликува во нулата $z_c = e^{-aT}$, додека полот $s = -b$ се пресликува во полот $p_c = e^{-bT}$. Како резултат се добива:

$$G_d(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}; \quad z_c = e^{-aT} > e^{-bT} = p_c \quad (3.20)$$

Коефициентот K_d во (3.20) може да се одбере од условот стационарното засилување на дискретниот компензатор $G_d(z)$ да биде еднакво со стационарното засилување на изворниот диференцијален компензатор $G_d(s)$:

$$G_d(z)_{z=1} = K_d \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} = G_d(s)_{s=0} = \frac{a}{b} \Rightarrow K_d = \frac{a}{b} \cdot \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} \quad (3.21)$$

па, за преносната функција $G_d(z)$ дефинитивно се добива:

$$G_d(z) = \frac{a}{b} \cdot \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} \cdot \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}} \quad (3.22)$$

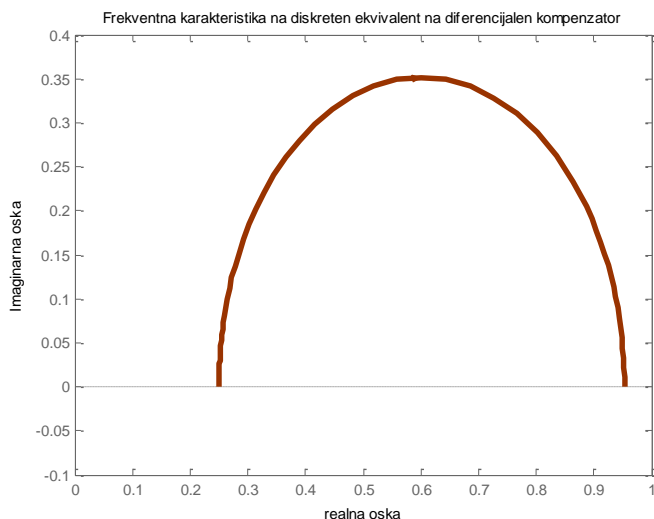
Преносната функција (3.22) претставува само една од можните реализации на дискретниот еквивалент на диференцијалниот компензатор.

Преносната функција на еден континуален интегрален компензатор има облик:

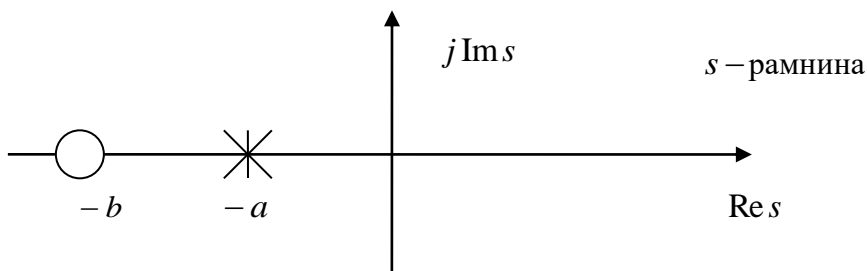
$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a} = \frac{\frac{s}{b} + 1}{\frac{s}{a} + 1}; \quad 0 < a < b \quad (3.23)$$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Тој има реална нула во точката $s = -b$ и реален пол во точката $s = -a$, кои се наоѓаат во левата полурамнина од s -комплексната рамнина, при што полот е поблизу до имагинарната оска. Истите се прикажани на Слика 3.6.



Слика 3.5. Фреквентна карактеристика на дискретниот компензатор (3.22) за $z_c = 0.82$ и $p_c = 0.45$



Слика 3.6. Положба на нулите и половите на еден интегрален компензатор во s -комплексната рамнина

Фреквентната преносна функција на интегралниот компензатор (3.23) е:

$$G_i(j\omega) = \frac{a}{b} \cdot \frac{j\omega + b}{j\omega + a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} e^{j\left(\arctg \frac{\omega}{b} - \arctg \frac{\omega}{a}\right)} \quad (3.24)$$

од каде следува дека аналитичкиот опис на неговите логаритамски фреквентни карактеристики на слабеење и фаза е:

$$\begin{aligned}
 |G_i(j\omega)|_{db} &= 20 \log |G_i(j\omega)| = 20 \log \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = \\
 &= 20 \log \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{b}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + 1}} = 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{b}\right)^2 + 1} - 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + 1} \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

$$\arg[G_i(j\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{b} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} \quad (3.26)$$

Изразите (3.25) и (3.26) ги претставуваат реалните логаритамски карактеристики на слабеење и фаза, додека асимптотските карактеристики се опишани со изразите:

$$|G_i(j\omega)|_{db} = 20 \log \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2} + 1} - 20 \log \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} + 1} \approx \begin{cases} 0, & \omega < a \\ -20 \log \frac{\omega}{a}, & a < \omega < b \\ -20 \log \frac{b}{a}, & \omega > b \end{cases} \quad (3.27)$$

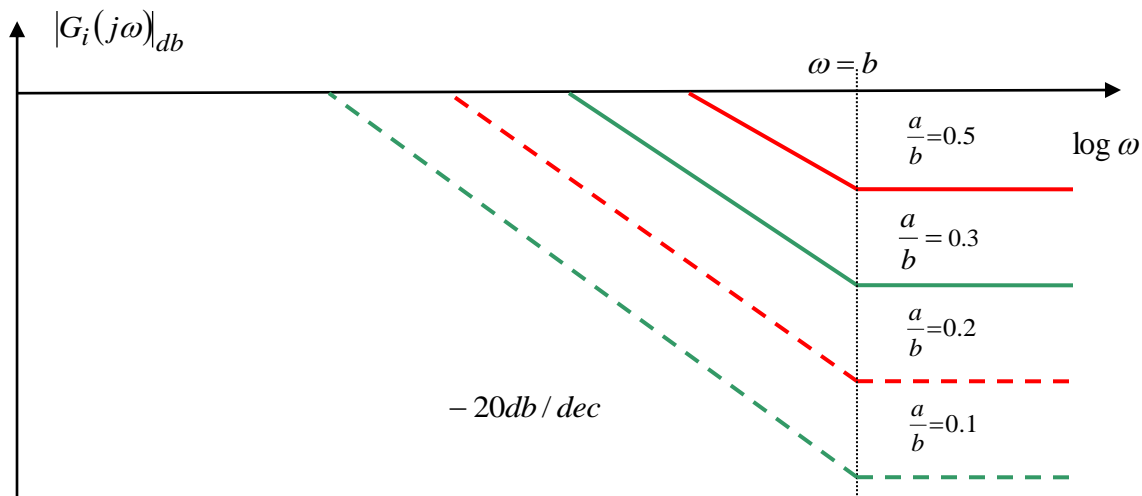
$$\arg[G_i(j\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{b} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} \approx \begin{cases} 0, & \omega \ll a \\ -\frac{\pi}{2}, & a < \omega < b \\ 0, & \omega > b \end{cases} \quad (3.28)$$

На Слика 3.7 е прикажан асимптотскиот логаритамски дијаграм на слабеење на еден интегрален компензатор за различни вредности на односот $\frac{a}{b}$, додека на Слика 3.8 се

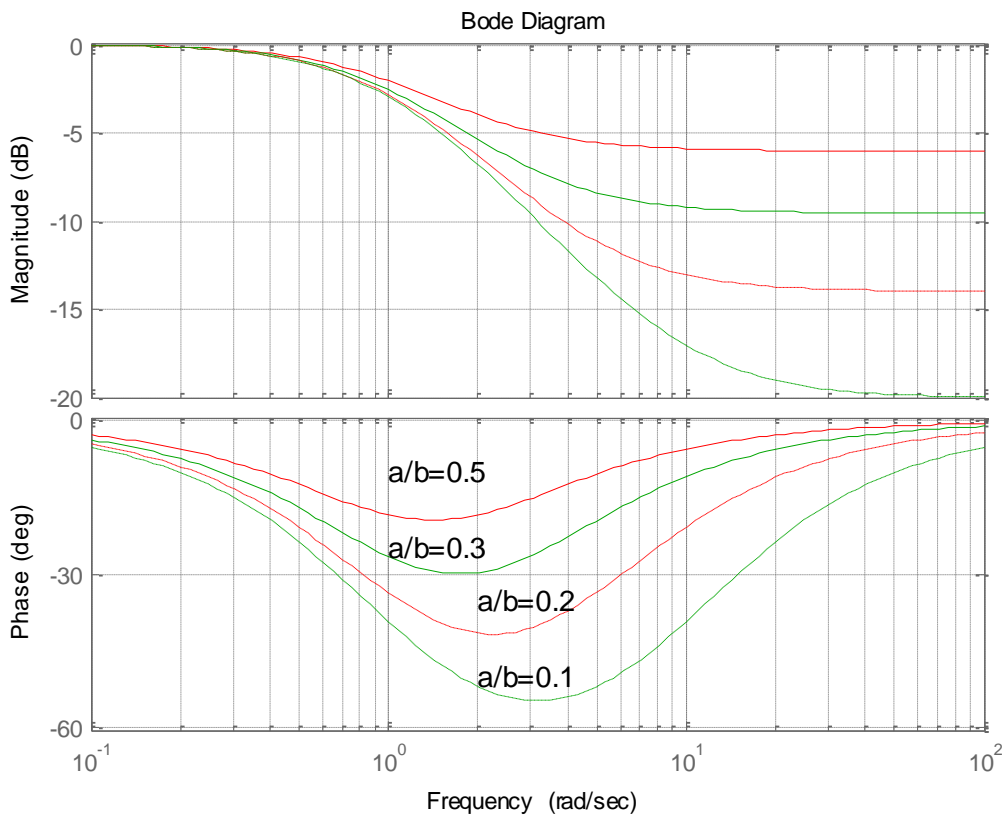
прикажани неговите реални логаритамски дијаграми на слабеење и фаза за истите $\frac{a}{b}$.

Од дијаграмите на Слика 3.8 се гледа дека слабеењето што го внесува интегралниот компензатор при ниски фреквенции е занемарливо, додека слабеењето при високи фреквенции е еднакво на односот $\frac{a}{b}$. Фазното поместување на интегралниот

компензатор е секогаш негативно и значајна вредност има само при ниски и средни фреквенции. При многу ниски и при високи фреквенции ова фазно поместување е занемарливо. Фреквенцијата ω_m при која фазното поместување на интегралниот компензатор има минимална вредност се одредува од условот за екстрем на функцијата (3.28):



Слика 3.7. Асимптотски логаритамски дијаграм на слабеење на еден интегрален компензатор за различно a/b



Слика 3.8. Реални Бодев дијаграми на слабеење и фаза на еден интегрален компензатор за различно a/b

$$\frac{d}{d\omega} \{ \arg[G_i(j\omega)] \} = \frac{d}{d\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{\omega}{b} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a} \right) = \frac{b}{\omega^2 + b^2} - \frac{a}{\omega^2 + a^2} = 0 \quad (3.29)$$

и изнесува :

$$\omega_m = \sqrt{ab} \quad (3.30)$$

а самото минимално фазно поместување изнесува:

$$\begin{aligned} \varphi_m = \varphi(\omega_m) &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{ab}}{b} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{ab}}{a} = \\ &= \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{b}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}} = -90^0 + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Примената на интегралниот компензатор се засновува врз неговата особина да внесува слабење и занемарливо фазно поместување при високи фреквенции. Ова слабење предизвикува намалување на пропусниот опсег од компензираниот систем, што пак значи намалување на брзината на одсив на системот. Затоа интегралниот компензатор се користи само тогаш кога брзината на одсив на проектираниот систем не е од интерес. Интегралниот компензатор се користи секогаш кога треба да се намали влијанието на шумовите и пречките, чиј фреквентен спектар се наоѓа во областа фреквенции на границата од пропусниот опсег на некомпензираниот систем и кога треба да се зголеми точноста на работа на системот во стационарен режим. При пресметките, поудобно е преносната функција (3.23) на интегралниот компензатор да се претстави во облик:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a} = \frac{\frac{1}{\alpha T_c}}{\frac{1}{T_c}} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_c}}{s + \frac{1}{\alpha T_c}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_c s + 1}{\alpha T_c s + 1}; \quad 0 < a < b; \quad \alpha = \frac{b}{a} \quad (3.32)$$

Преносната функција на дискретниот еквивалент на еден интегрален континуален компензатор има општ облик:

$$G_i(z) = \frac{1 - p_c}{1 - z_c} \cdot \frac{z - z_c}{z - p_c}; \quad z_c < p_c \quad (3.33)$$

Овој компензатор има нула во точката $z = z_c$ и пол во точката $z = p_c$, при што $z_c < p_c$. Неговиот коефициент на засилување во стационарна состојба изнесува:

$$G_i(1) = 1 \quad (3.34)$$

Коефициентот на засилување $K_i = \frac{1-p_c}{1-z_c}$ служи да обезбеди стационарното засилување на дигиталниот компензатор $G_i(z)$ да биде еднакво со стационарното засилување на континуалниот компензатор $G_i(s)$.

Преносната функција на дискретниот еквивалент на еден континуален интегрален компензатор може да се добие од неговата преносна функција:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a}; \quad b > a \quad (3.35)$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Така, нулата $s = -b$ на континуалниот интегрирачки компензатор $G_i(s)$ со смената $z = e^{sT}$ се пресликува во нулата $z_c = e^{-bT}$, додека полот $s = -a$ пресликува во полот $p_c = e^{-aT}$. Како резултат се добива:

$$G_i(z) = K_i \cdot \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}; \quad z_c = e^{-bT} > e^{-aT} = p_c \quad (3.36)$$

и, кога коефициентот K_i се одбере така што да важи $G_i(z)_{z=1} = G_i(s)_{s=0}$, односно стационарното засилување на дигиталниот компензатор $G_i(z)$ да биде еднакво со стационарното засилување на континуалниот компензатор $G_i(s)$, преносната функција (3.37) дефинитивно се добива:

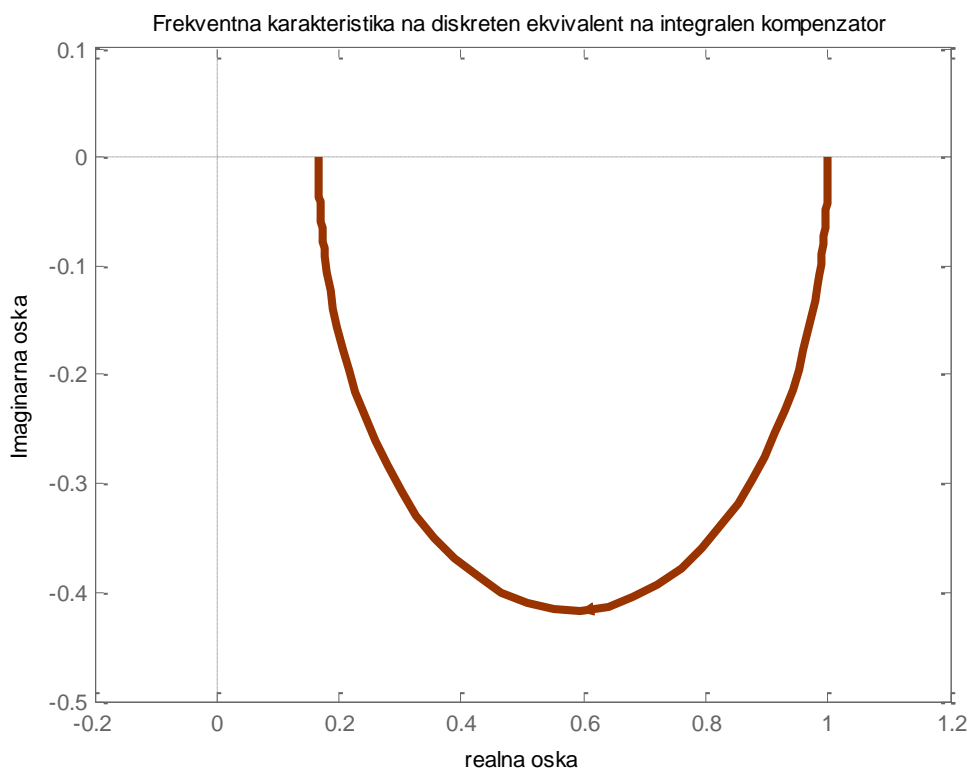
$$G_i(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}} \cdot \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}} \quad (3.37)$$

Може да се потврди дека вредноста на функцијата (3.37) за $z = 1$ е $G_i(1) = 1$.

Фреквентната карактеристика на дискретниот еквивалент на еден континуален интегрален компензатор за $z_c = 0.2$ и $p_c = 0.8$ е прикажана на Слика 3.9.

Предностите на еден диференцијален компензатор се:

- остварување на саканата резерва на стабилност
- зголемување на пропусниот опсег



Слика 3.9. Фреквентна карактеристика на дискретниот компензатор (3.33) за $z_c = 0.2$ и $p_c = 0.8$

Недостатоци на диференцијалниот компензатор се:

- засилување на брзо променливите сигнали
- чувствителност на проектираниот систем на шумови и пречки, кои обично припаѓаат во опсегот на високи фреквенции

Позитивни особини на интегралниот компензатор се:

- мала чувствителност на шумови и пречки
- точност во работата во стационарен режим

Главните недостатоци на интегралниот компензатор се:

- премногу мал пропусен опсег на компензираниот систем и, следствено, недозволно големо време на пораст и смирување на одзивот на системот, што значи мала брзина на одзив

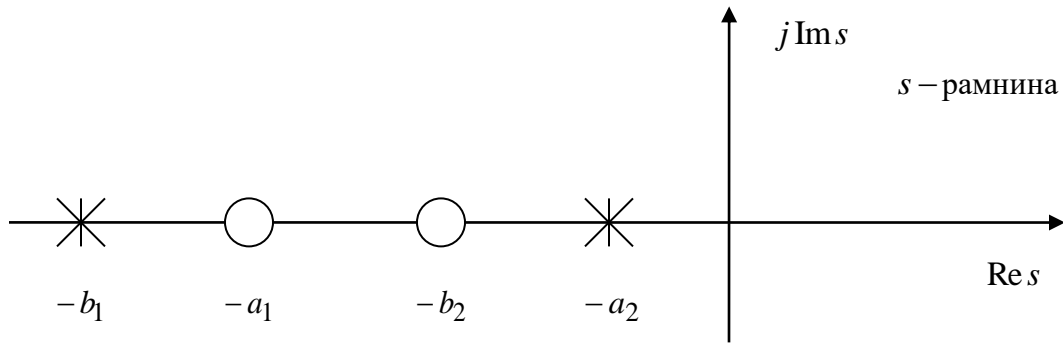
Недостатоците на синтезата само со диференцијален или само со интегрален компензатор можат да се надминат ако се примени нивната комбинација.

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Преносната функција на еден интегро - диференцијален компензатор е:

$$G_{di}(s) = \frac{(s + a_1)(s + b_2)}{(s + b_1)(s + a_2)} \quad (3.38)$$

Тој има две реални нули во точките $s = -a_1$ и $s = -b_2$ и два реални пола во точките $s = -a_2$ и $s = -b_1$, при што $a_2 < b_2 < a_1 < b_1$. Истите се прикажани на Слика 3.10.



Слика 3.10. Положба на нулите и половите на еден интегро - диференцијален компензатор во s - комплексната рамнина

Фреквентната преносна функција на интегро - диференцијалниот компензатор е:

$$G_{di}(j\omega) = \frac{(j\omega + a_1)(j\omega + b_2)}{(j\omega + b_1)(j\omega + a_2)} \quad (3.39)$$

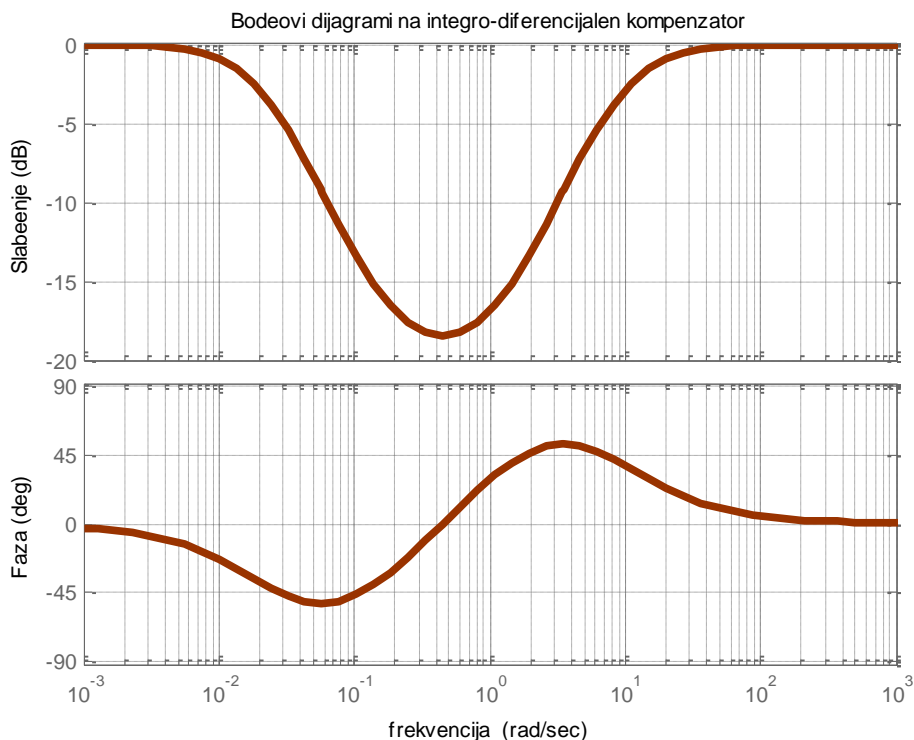
па неговите логаритамски фреквентни дијаграми на слабеење и фаза се опишани со изразите:

$$\begin{aligned} |G_{di}(j\omega)|_{db} &= 20 \log \left| \frac{(j\omega + a_1)(j\omega + b_2)}{(j\omega + b_1)(j\omega + a_2)} \right| = \\ &= 20 \log \sqrt{\omega^2 + a_1^2} + 20 \log \sqrt{\omega^2 + b_2^2} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + b_1^2} - 20 \log \sqrt{\omega^2 + a_2^2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\arg[G_{di}(j\omega)] = \arctg \frac{\omega}{a_1} + \arctg \frac{\omega}{b_2} - \arctg \frac{\omega}{b_1} - \arctg \frac{\omega}{a_2} \quad (3.41)$$

Истите графички се прикажани на Слика 3.11 за интегро-диференцијален компензатор со преносна функција:

$$G_{di}(s) = \frac{(s+1)(5s+1)}{(0.1s+1)(50s+1)} \quad (3.42)$$



Слика 3.11. Бодеови дијаграми на интегро-диференцијалниот компензатор (3.42)



3.1. Да се проектира затворен систем на автоматско управување како на долната слика, во кој објектот на управување е опишан со следната преносна функција:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \quad (3.43)$$

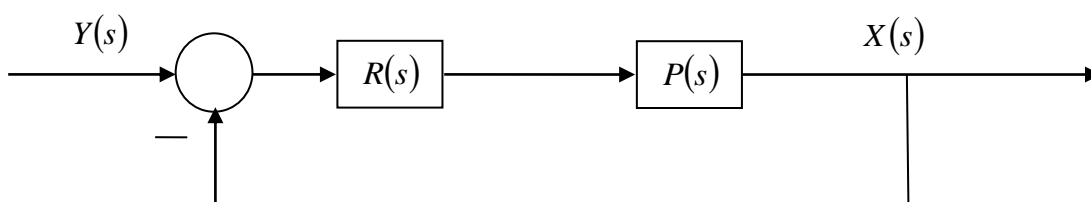
Проектираниот систем треба да има максимален прескок не поголем од 20% и брзинска константа $K_v \geq 10$. Кој од долу наведените компензатори:

$$R_1(s) = \frac{160(10s+1)}{200s+1} \quad (3.44)$$

$$R_2(s) = \frac{24(s+1)}{s+4} \quad (3.45)$$

$$R_3(s) = \frac{s+4}{s+1} \quad (3.46)$$

ќе ги оствари поставените проектни барања?



Слика 3.12. Илустрација кон Задача 3.1

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, за секој од дадените компензатори е:

$$G_{01}(s) = P(s)R_1(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot \frac{160(10s+1)}{200s+1} \quad (3.47)$$

$$G_{02}(s) = P(s)R_2(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot \frac{24(s+1)}{s+4} \quad (3.48)$$

$$G_{03}(s) = P(s)R_3(s) = \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot \frac{s+4}{s+1} \quad (3.49)$$

Оттука, за брзинската константа K_v во трите случаи на компензација се добива:

$$K_{v1} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot \frac{160(10s+1)}{200s+1} = 10 \quad (3.50)$$

$$K_{v2} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{02}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot \frac{24(s+1)}{s+4} = \frac{3}{8} \quad (3.51)$$

$$K_{v3} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{03}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot \frac{s+4}{s+1} = \frac{1}{4} \quad (3.52)$$

Очигледно, само првиот компензатор го исполнува проектното барање $K_v \geq 10$, додека преостанатите два компензатори обезбедуваат значително помали вредности за брзинската константа, а со тоа и многу поголема стационарна грешка. Останува уште да се провери дали првиот компензатор го задоволува и преостанатото проектно барање $M\% \leq 20\%$. Преносната функција на затворениот систем со првиот компензатор е:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_{01}(s)}{1+G_{01}(s)} = \frac{\frac{160(10s+1)}{s(200s+1)(s+4)^2}}{1+\frac{160(10s+1)}{s(200s+1)(s+4)^2}} = \\ &= \frac{160(10s+1)}{200s^4 + 1601s^3 + 3208s^2 + 1616s + 160} \end{aligned} \quad (3.53)$$

и таа има исклучиво реални полови:

$$s_1 = -5.2250, \quad s_2 = -2.0876, \quad s_3 = -0.5607, \quad s_4 = -0.1308 \quad (3.54)$$

што значи дека отскочниот одзив е апериодичен и не содржи никаков прескок.

3.2. Треба да се проектира затворен систем на автоматско управување како на Слика 3.13, во кој објектот на управување е опишан со преносната функција:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+15)} \quad (3.55)$$

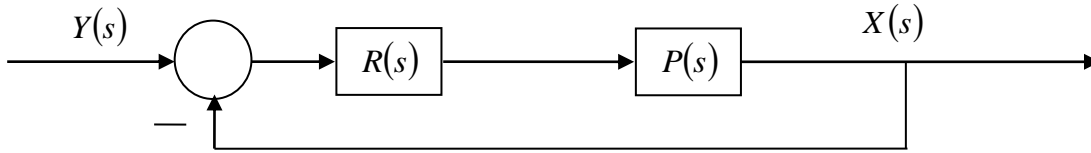
Проектираниот систем треба да има стационарна грешка помала од 10% при линеарно растечки влез $y(t) = th(t)$ и фактор на релативно придушување за доминантниот пар полови $\zeta \approx 0.707$. Кој од наведените компензатори:

$$R_1(s) = \frac{10}{s+1} \quad (3.56)$$

$$R_2(s) = \frac{100(s+1)(s+5)}{(s+10)(s+50)} \quad (3.57)$$

$$R_3(s) = \frac{2850(s+1)}{(10s+1)} \quad (3.58)$$

ќе ги исполни поставените проектни барања?



Слика 3.13. Илустрација кон Задача 3.2

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, за секој од дадените компензатори е:

$$G_{01}(s) = P(s)R_1(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+15)} \cdot \frac{10}{s+1} \quad (3.59)$$

$$G_{02}(s) = P(s)R_2(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+15)} \cdot \frac{100(s+1)(s+5)}{(s+10)(s+50)} \quad (3.60)$$

$$G_{03}(s) = P(s)R_3(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+15)} \cdot \frac{2850(s+1)}{(10s+1)} \quad (3.61)$$

Оттука, за брзинската константа K_v во трите случаи на компензација се добива:

$$K_{v1} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+10)(s+15)} \cdot \frac{10}{s+1} = \frac{1}{15} \quad (3.62)$$

$$K_{v2} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{02}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+10)(s+15)} \cdot \frac{100(s+1)(s+5)}{(s+10)(s+50)} = \frac{1}{150} \quad (3.63)$$

$$K_{v3} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{03}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+10)(s+15)} \cdot \frac{2850(s+1)}{(10s+1)} = \frac{285}{15} = 19 \quad (3.64)$$

Бидејќи стационарната грешка на затворениот систем за линеарно растечки влез од обликот $y(t) = th(t)$ зависи обратно пропорционално од брзинската константа, јасно е дека првиот и вториот компензатор не можат да го исполнат проектното барање $e(\infty) < 10\%$, додека третиот компензатор обезбедува грешка од приближно 5%:

$$e_1(\infty) = \frac{1}{K_{v1}} = 15 \quad (3.65)$$

$$e_2(\infty) = \frac{1}{K_{v2}} = 150 \quad (3.66)$$

$$e_3(\infty) = \frac{1}{K_{v3}} = \frac{1}{19} \approx 0.05 = 5\% \quad (3.67)$$

Останува уште да се провери дали третиот компензатор го задоволува и второто проектно барање. Преносната функција на затворениот систем со третиот компензатор е:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{G_{03}(s)}{1 + G_{03}(s)} = \frac{\frac{2850(s+1)}{s(s+10)(s+15)(10s+1)}}{1 + \frac{2850(s+1)}{s(s+10)(s+15)(10s+1)}} = \\ &= \frac{2850(s+1)}{s^4 + 251s^3 + 1525s^2 + 3000s + 2850} \end{aligned} \quad (3.68)$$

и нејзиниот пар доминантни полови се:

$$s_{1,2} = -1.2348 \pm j1.2334 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (3.69)$$

Оттука:

$$\zeta\omega_n = 1.2348 \quad (3.70)$$

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.2334 \quad (3.71)$$

па, со решавање на горниот систем равенки се добива дека доминантниот пар полови навистина има фактор на релативно придушување $\zeta \approx 0.707$:

$$\omega_n = \frac{1.2348}{\zeta} \Rightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{1.2348}{\zeta}\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \frac{1-\zeta^2}{\zeta^2} = 0.9977 \approx 1 \Rightarrow \zeta \approx 0.707 \quad (3.72)$$

3.3. Да се проектира затворен систем на автоматско управување како на Слика 3.14, во кој објектот на управување е опишан со преносната функција:

$$P(s) = \frac{1}{s\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)} \quad (3.73)$$

Проектираниот систем треба да има брзинска константа $K_v \geq 100$, резерва на засилување $d \geq 10dB$, резерва на фаза $\varphi_{rf} \geq 45^0$ и пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 10 \frac{rad}{sec}$. Кој од наведените компензатори:

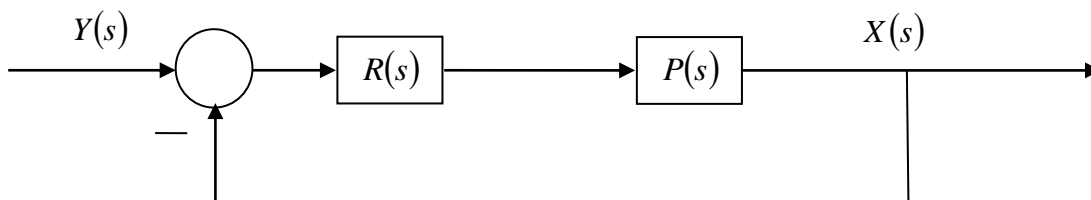
$$R_1(s) = \frac{100s+1}{120s+1} \quad (3.74)$$

$$R_2(s) = \frac{(s+1)(20s+1)}{\left(\frac{s}{0.01}+1\right)\left(\frac{s}{50}+1\right)} \quad (3.75)$$

$$R_3(s) = 100 \quad (3.76)$$

$$R_4(s) = \frac{100(s+1)\left(\frac{s}{5}+1\right)}{\left(\frac{s}{0.1}+1\right)\left(\frac{s}{50}+1\right)} \quad (3.77)$$

ги исполнува поставените проектни барања?



Слика 3.14. Илустрација кон Задача 3.3

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, за секој од дадените компензатори е:

$$G_{01}(s) = P(s)R_1(s) = \frac{100s+1}{s\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)(120s+1)} \quad (3.78)$$

$$G_{02}(s) = P(s)R_2(s) = \frac{(s+1)(20s+1)}{s\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{0.01}+1\right)\left(\frac{s}{50}+1\right)} \quad (3.79)$$

$$G_{03}(s) = P(s)R_3(s) = \frac{100}{s\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)} \quad (3.80)$$

$$G_{04}(s) = P(s)R_4(s) = \frac{100(s+1)\left(\frac{s}{5}+1\right)}{s\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{0.1}+1\right)\left(\frac{s}{50}+1\right)} \quad (3.81)$$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Оттука, очигледно е дека само третиот и четвртиот компензатор го исполнуваат проектното барање $K_v \geq 100$, додека преостанатите два компензатори обезбедуваат значително помали вредности за брзинската константа, а со тоа и многу поголема стационарна грешка:

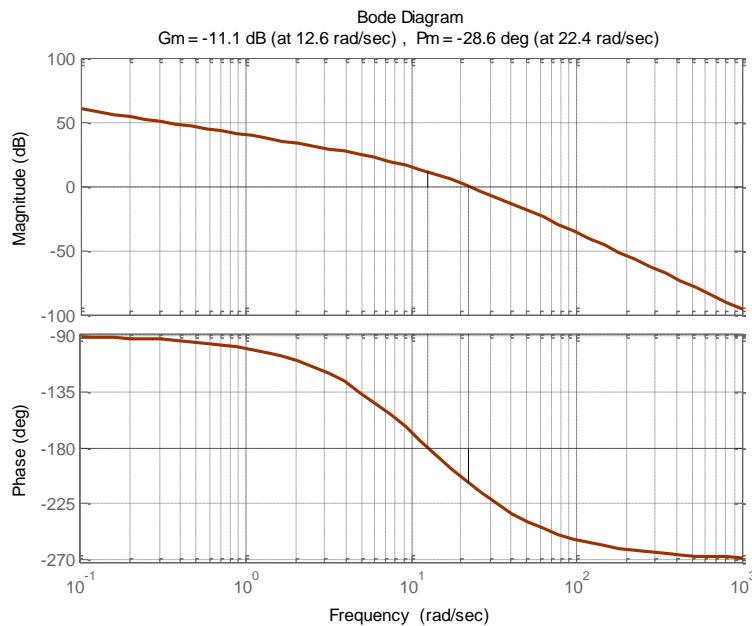
$$K_{v1} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s \left(\frac{s}{8} + 1 \right) \left(\frac{s}{20} + 1 \right)} \cdot \frac{100s + 1}{120s + 1} = 1 \quad (3.82)$$

$$K_{v2} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{02}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s(s+4)^2} \cdot \frac{24(s+1)}{s+4} = 1 \quad (3.83)$$

$$K_{v3} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{03}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s \left(\frac{s}{8} + 1 \right) \left(\frac{s}{20} + 1 \right)} \cdot 100 = 100 \quad (3.84)$$

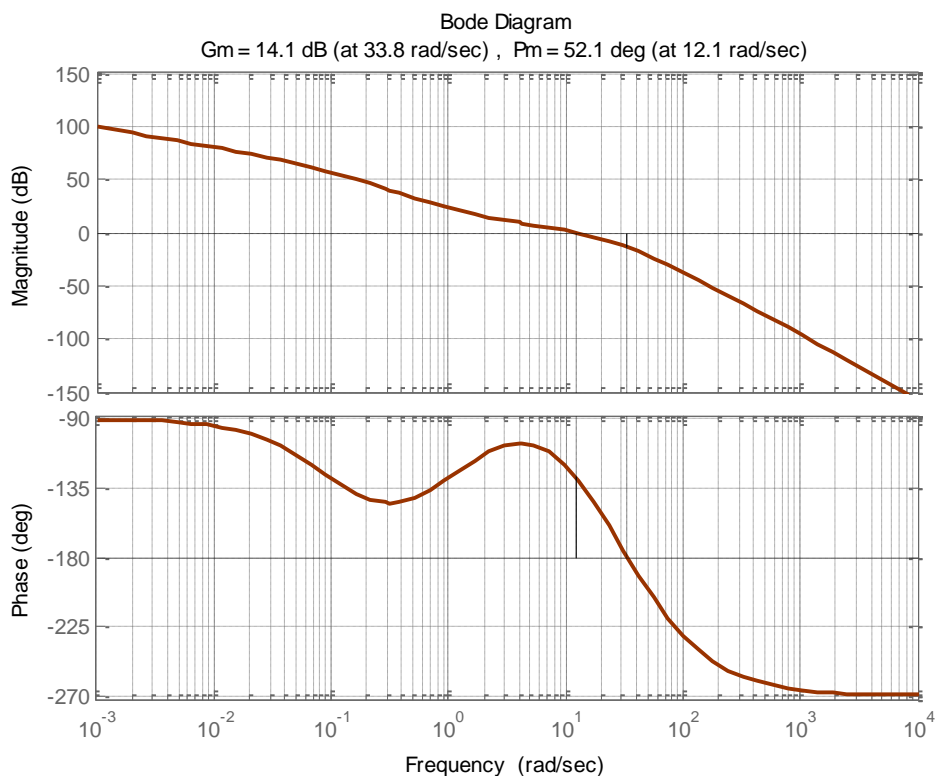
$$K_{v4} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{04}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s \left(\frac{s}{8} + 1 \right) \left(\frac{s}{20} + 1 \right)} \cdot \frac{100(s+1) \left(\frac{s}{5} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{0.1} + 1 \right) \left(\frac{s}{50} + 1 \right)} = 100 \quad (3.85)$$

Останува да се провери кој од компензаторите $R_3(s)$ и $R_4(s)$ ги задоволува и останатите проектни барања. За таа цел, на Слика 3.15 и Слика 3.16 се прикажани Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на набљудуваниот систем, кога во него е употребен компензаторот $R_3(s)$ и компензаторот $R_4(s)$, соодветно.

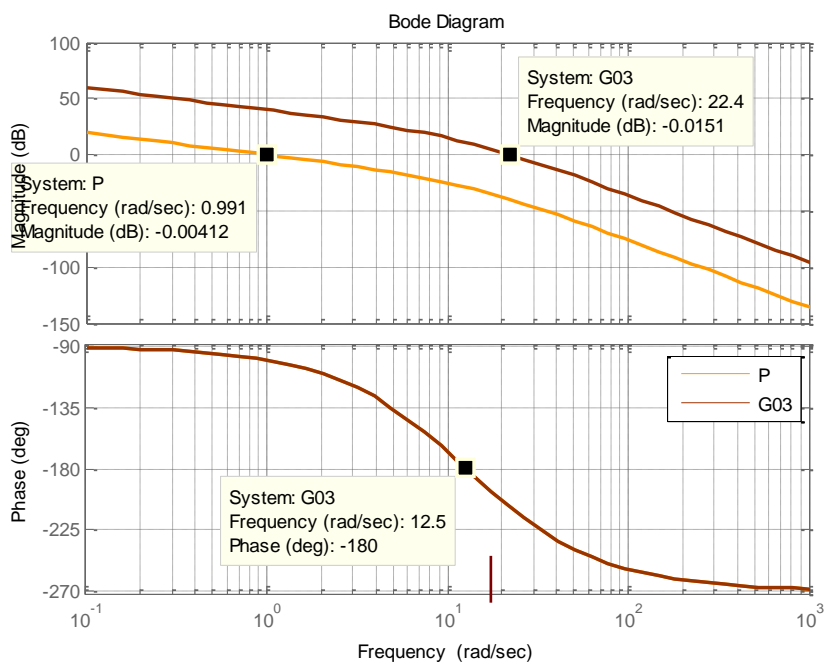


Слика 3.15. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на системот $G_{03}(s)$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ



Слика 3.16. Бодеови дијаграми на слабеење и фаза на системот $G_{04}(s)$



Слика 3.17. Бодеови дијаграми на објектот на управување $P(s)$ и сервиската врска од објектот на управување $P(s)$ и компензаторот $R_3(s)$ од Задача 3.3

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Од дијаграмите на Слика 3.15 и Слика 3.16 се гледа дека само компензаторот $R_4(s)$ ги задоволува сите проектни барања. Имено, диференцијалниот компензатор $R_4(s)$ обезбедува брзинска константа $K_v = 100$, резерва на засилување $d \approx 14dB \geq 10dB$, резерва на фаза $\varphi_{rf} \approx 52^\circ \geq 45^\circ$ и пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 \approx 12 \frac{rad}{sec} > 10 \frac{rad}{sec}$.

Забелешка: Компензаторот $R_3(s)$, кој има само пропорционално дејство, влијае само врз Бодеовиот дијаграм на слабеење на набљудуваниот систем, додека воопшто не влијае врз неговиот Бодеоов дијаграм на фаза. Ова може да се уочи од долната слика, на која се прикажани Бодеоовите дијаграми на објектот на управување и сериската врска од објектот на управување и компензаторот $R_3(s)$. Саканата резервата на фаза на проектираниот систем $\varphi_{rf} \geq 45^\circ$ може да се оствари само со помош на диференцијален компензатор, кој внесува позитивно фазно поместување.

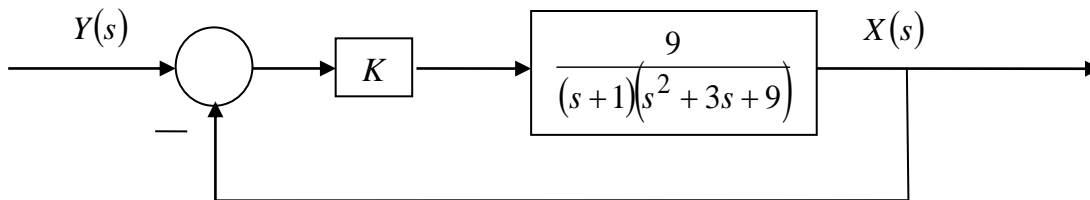
3.4. Даден е затворениот систем на автоматско управување од долната слика, во кој објектот на управување $P(s)$:

$$P(s) = \frac{9K}{(s+1)(s^2+3s+9)} \quad (3.86)$$

е управуван со П-регулатор $R(s)$:

$$R(s) = K \quad (3.87)$$

Со помош на Најквистовиот критериум да се определи вредноста на параметарот на регулаторот K за која затворениот систем ќе биде на границата на стабилност.

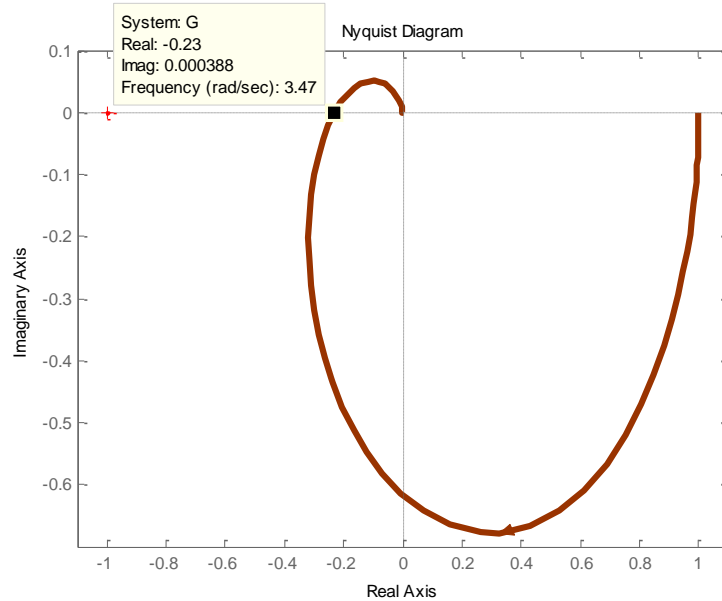


Слика 3.18. Илустрација кон Задача 3.4

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$G_0(s) = P(s)R(s) = \frac{9K}{(s+1)(s^2+3s+9)} \quad (3.88)$$

На долната слика е прикажана фреквентната карактеристика на отворениот систем за $K=1$, од каде се гледа дека таа ја сече реалната оска во точката $(-0.23; j0)$.



Слика 3.19. Фреквентна карактеристика на отворениот систем од Задача 3.4 за $K = 1$

Затворениот систем од Слика 3.19 ќе биде на границата на стабилност, доколку фреквентната карактеристика на неговиот отворен систем минува низ критичната точка $(-1; j0)$. Оттука следува дека бараната критична вредност на коефициентот K ќе биде $K = 4.35$:

$$\frac{1}{K} = 0.23 \Rightarrow K = \frac{1}{0.23} \approx 4.35 \quad (3.89)$$

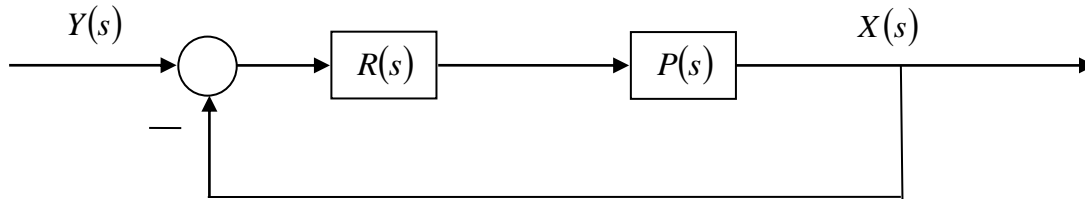
3.5. Даден е затворениот континуален систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска од Слика 3.20. Преносната функција на објектот, под претпоставка, е:

$$P(s) = \frac{e^{-0.2s}}{(s+5)} \quad (3.90)$$

а регулаторот е опишан со преносната функција:

$$R(s) = K \quad (3.91)$$

Да се определи вредноста на засилувањето K за која затворениот систем ќе биде на границата на стабилност. Потоа да се определи вредноста на засилувањето K за која резервата на фаза на системот ќе биде $\varphi_{rf} = 50^\circ$. Колку изнесува резервата на засилување на системот за така пресметаната вредност на K .



Слика 3.20. Илустрација кон Задача 3.5

Решение: Фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ на отворениот систем, која зависи од непознатиот параметар K , е:

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{Ke^{-j0.2\omega}}{5+j\omega} \cdot \frac{5-j\omega}{5-j\omega} = \frac{Ke^{-j0.2\omega}(5-j\omega)}{25+\omega^2} = \\ &= \frac{K[\cos(0.2\omega) - j\sin(0.2\omega)](5-j\omega)}{25+\omega^2} = \\ &= \frac{K[5\cos(0.2\omega) - \omega\sin(0.2\omega)] - jK[5\sin(0.2\omega) + \omega\cos(0.2\omega)]}{25+\omega^2} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Нејзиниот реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

$$U_0(\omega) = \frac{K[5\cos(0.2\omega) - \omega\sin(0.2\omega)]}{25+\omega^2} \quad (3.93)$$

$$V_0(\omega) = \frac{-K[5\sin(0.2\omega) + \omega\cos(0.2\omega)]}{25+\omega^2} \quad (3.94)$$

Пресекот на фреквентната карактеристика на отворениот систем со реалната оска се добива за $V_0(\omega) = 0$:

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

$$V_0(\omega) = -K \frac{5 \sin(0.2\omega) + \omega \cos(0.2\omega)}{25 + \omega^2} = 0 \Rightarrow 5 \sin(0.2\omega) + \omega \cos(0.2\omega) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \operatorname{tg}(0.2\omega) + \omega = 0 \Rightarrow \omega = -5 \operatorname{tg}(0.2\omega) \quad (3.95)$$

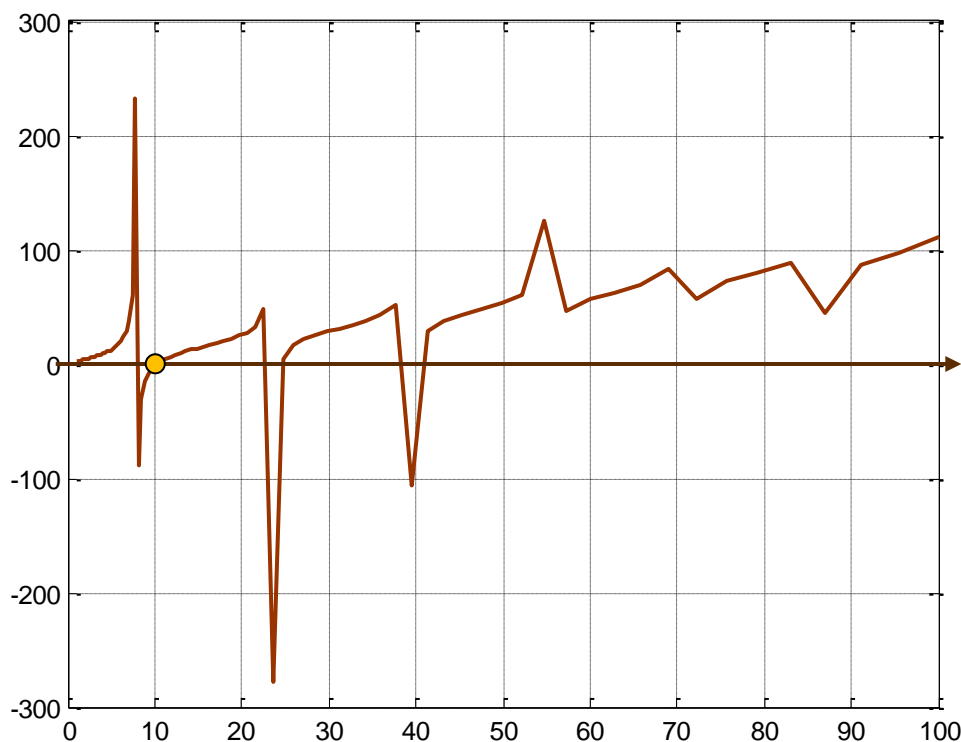
Решението на равенката $\omega = -5 \operatorname{tg}(0.2\omega)$ може да се определи графички, бидејќи тоа е претставено со пресекот на функцијата $5 \operatorname{tg}(0.2\omega) + \omega$ со оската $\omega = 0$. Така, од Слика 3.21 се гледа дека бараното решение приближно изнесува $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

Бараната вредност на коефициентот на засилување K на отворениот систем, за која затворениот систем ќе биде на границата на стабилност, се определува од условот:

$$U_0(10) = \frac{K[5 \cos(2) - 10 \sin(2)]}{25 + (10)^2} = -1 \quad (3.96)$$

од каде непосредно следува:

$$K = 11.3 \quad (3.97)$$



Слика 3.21. Графичко решение на равенката $5 \operatorname{tg}(0.2\omega) + \omega = 0$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

За проверка, на Слика 3.22 е прикажан дел од Најквистовата крива за набљудуваниот систем, од која се гледа дека за $K = 11.3$ кривата навистина минува низ критичната точка $(-1, j0)$, што значи дека затворениот систем навистина се наоѓа на границата на стабилност.

Пресечната фреквенција на засилување на набљудуваниот систем се добива од условот:

$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{|K|}{\sqrt{25 + \omega_1^2}} = 1 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{K^2 - 25}, \quad K \geq 5 \quad (3.98)$$

па, со воведување на резултатот (3.98) во изразот за резервата на фаза се добива:

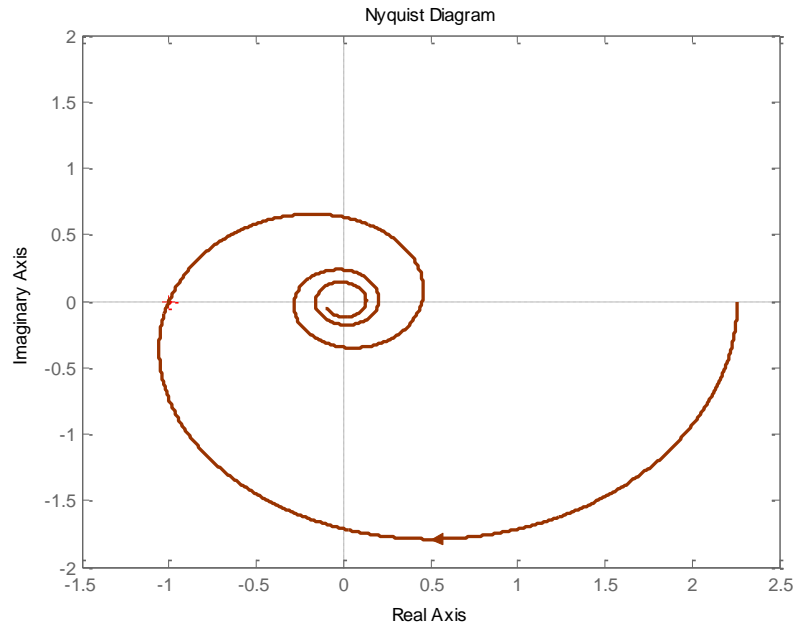
$$\varphi_{rf} = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^\circ - 0.2\omega_1 - \arctg(0.2\omega_1) = 50^\circ \quad (3.99)$$

$$-0.2\omega_1 - \arctg(0.2\omega_1) = -0.2\sqrt{K^2 - 25} - \arctg(0.2\sqrt{K^2 - 25}) = -130^\circ \quad (3.100)$$

$$0.2\sqrt{K^2 - 25} + \arctg(0.2\sqrt{K^2 - 25}) - 2.2689 = 0 \quad (3.101)$$

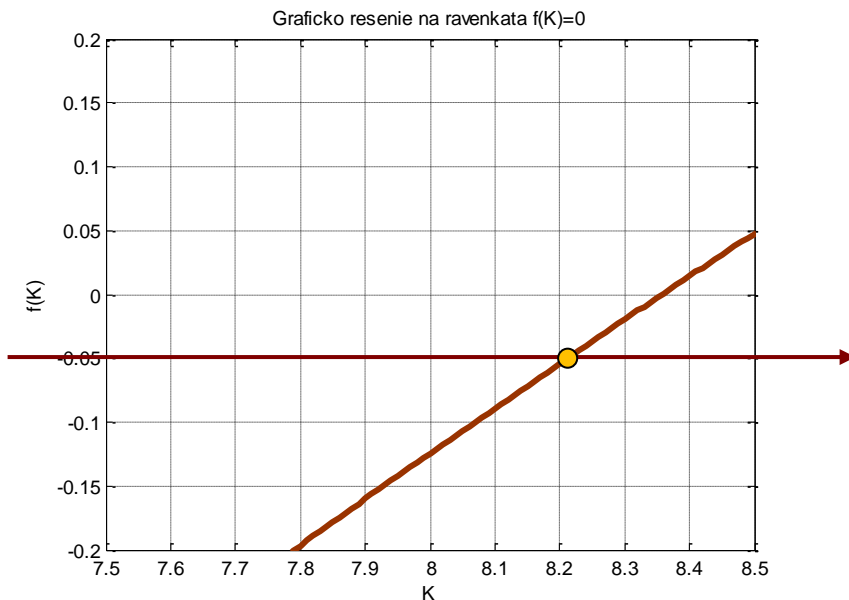
$$K = 8.35 \quad (3.102)$$

На Слика 3.23 е прикажано графичкото решение на равенката (3.101).



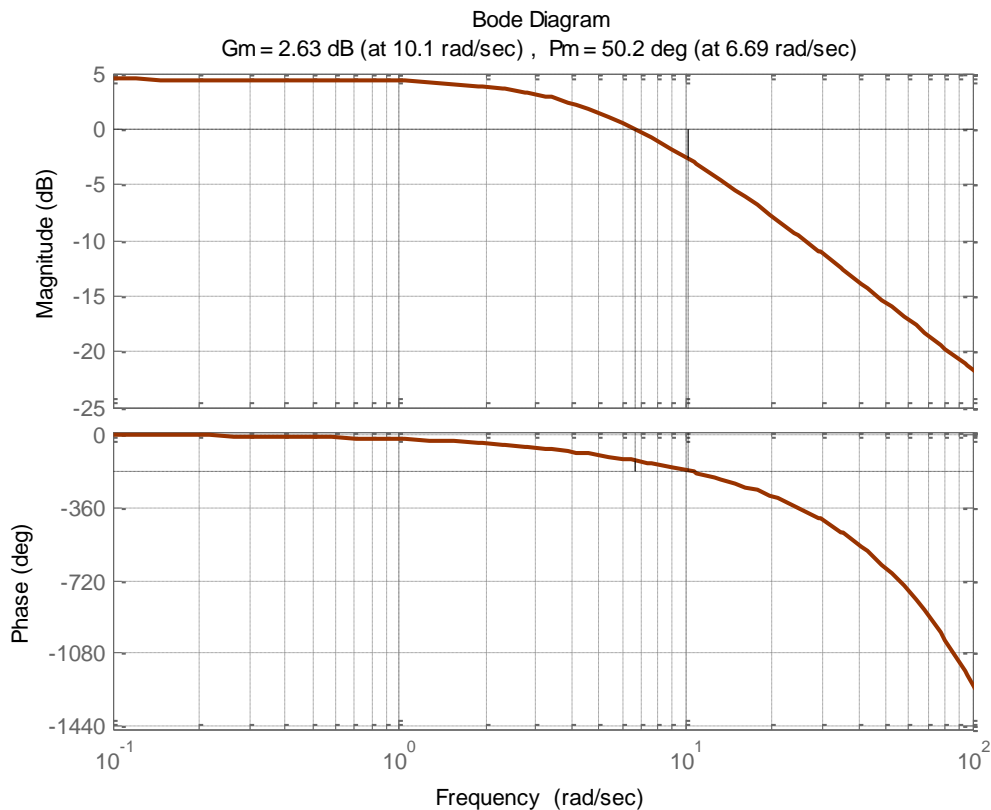
Слика 3.22. Најквистова крива за системот од Задачата 3.8 за $K = 11.3$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ



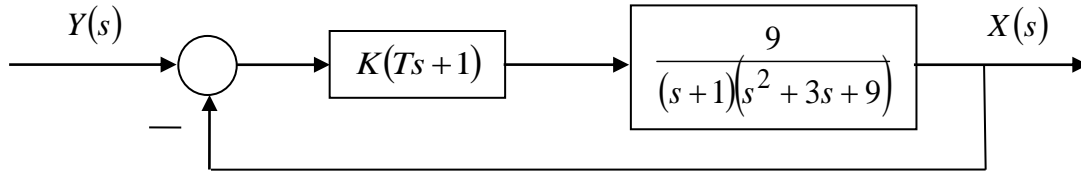
Слика 3.23. Графичко решение на равенката (3.101)

На Слика 3.24 се прикажани Бодевите дијаграми на проектираниот затворен систем за $K = 8.35$, од каде се гледа дека резервата на засилување изнесува $d = 2.63\text{dB}$.



Слика 3.24. Бодевите дијаграми на проектираниот систем од Задача 3.5

3.6. Даден е затворениот систем на автоматско управување од Задачата 3.5, во кој објектот на управување $P(s)$, наместо со П-регулатор, е управуван со ПД-регулатор $R(s)$. Да се определат резервите на засилување и фаза на овој систем, ако за K се усвои вредноста пресметана во Задачата 3.5 и $T = 0.2$.

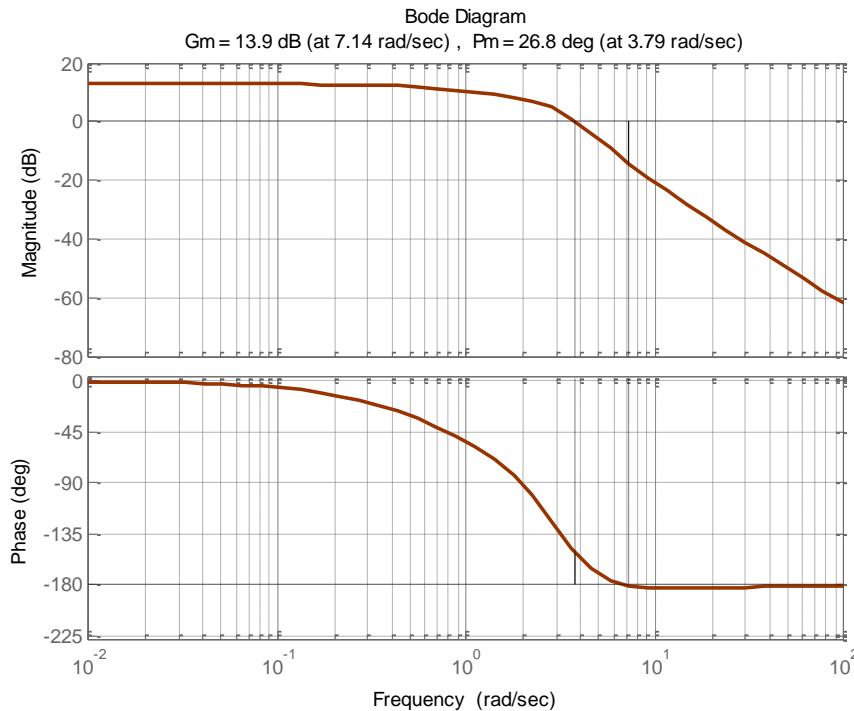


Слика 3.25. Илустрација кон Задача 3.6

Решение: Преносната функција на отворениот систем за проектираниот затворен систем е:

$$G_0(s) = P(s)R(s) = \frac{9K(Ts + 1)}{(s + 1)(s^2 + 3s + 9)} \quad (3.103)$$

На Слика 3.26 се прикажани Бодевите дијаграми на отворениот систем за $K = 4.35$ и $T = 0.2$, од каде се гледа дека резервата на засилување на проектираниот систем изнесува приближно $d = 14dB$, а резервата на фаза е $\varphi_{rf} = 27^\circ$.



Слика 3.26. Бодевите дијаграми на отворениот систем (3.103) за $K = 4.35$ и $T = 0.2$

3.7. Да се покаже дека колото со преносна функција:

$$G_c(s) = K \frac{s + z_1}{s + p_1}, \quad |z_1| < |p_1| \quad (3.104)$$

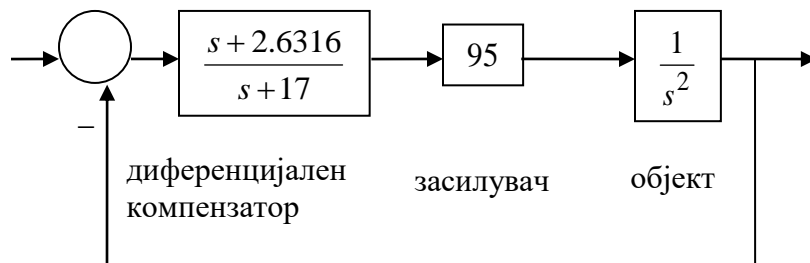
се однесува како диференцијатор.

Решение: Ако влијанието на полот p_1 е занемарливо, $|p_1| \gg |z_1|$, а нулата z_1 се наоѓа во координатниот почеток од s – комплексната рамнина, $z_1 = 0$, преносната функција (3.104) ќе добие облик:

$$G_c(s) \Big|_{a=0, b \gg a} \approx K \frac{s}{p_1} \quad (3.105)$$

што претставува преносна функција на диференцијатор.

3.8. Затворениот линеарен стационарен континуален систем на автоматско управување од Слика 3.27, кој содржи и диференцијален компензатор и засилувач, е стабилен, со фактор на релативно пригушување $\zeta = 0.7$ и доминантна временска константа $T_d \approx 0.2857$ сек. Да се изврши повторна синтеза на овој систем, така што континуалниот регулатор ќе биде заменет со дискретен и да се определи дискретниот модел на набљудуваниот затворен систем на автоматско управување, кој треба да има приближно исти динамички карактеристики како и континуалниот систем.



Слика 3.27. Илустрација кон Задача 3.8

Решение: Природната фреквенција ω_n на набљудуваниот систем се определува од равенката:

$$T_d \leq \frac{1}{\zeta \omega_n} \quad (3.106)$$

и изнесува приближно:

$$\omega_n \approx \frac{1}{\zeta T_d} = \frac{1}{(0.7)(0.2857)} = 5 \text{sec}^{-1} \quad (3.107)$$

Фреквенцијата на дискретизација мора да биде доволно голема (односно периодот на дискретизација доволно мал) за да не се изгуби информација во процесот на дискретизација. Следствено, за систем со природна фреквенција $\omega_n \approx 5 \text{sec}^{-1}$, фреквенцијата на дискретизација мора да изнесува барем $\omega_0 \approx 20\omega_n = 100 \text{sec}^{-1} = \frac{2\pi}{T_0} \text{sec}^{-1}$. Оттука, за период на дискретизацијата може да се избере $T_0 = 0.0628 \text{sec}$. Во продолжение, континуалниот диференцијален компензатор се заменува со неговиот дискретен еквивалент:

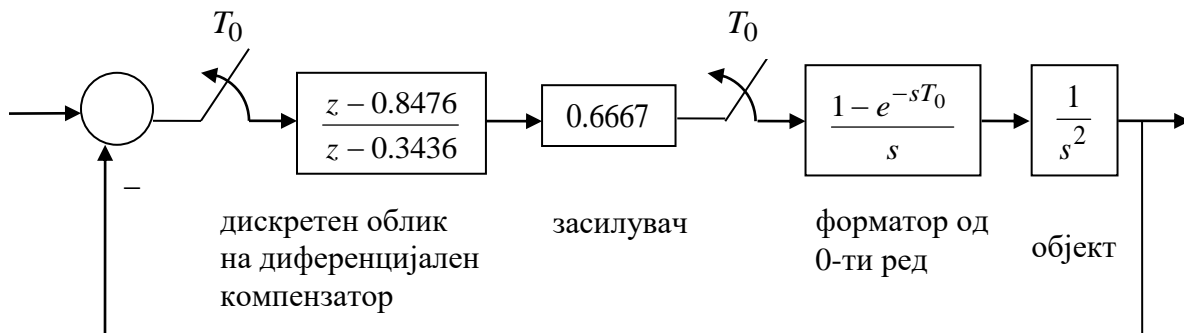
$$G_c(z) = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right) \left(\frac{z-e^{-aT}}{z-e^{-bT}}\right) \cong 0.6667 \frac{z-0.8476}{z-0.3436} \quad (3.108)$$

каде што $a = 2.6316$, $b = 17$.

Конечно, дискретната преносна функција на објектот на управување е:

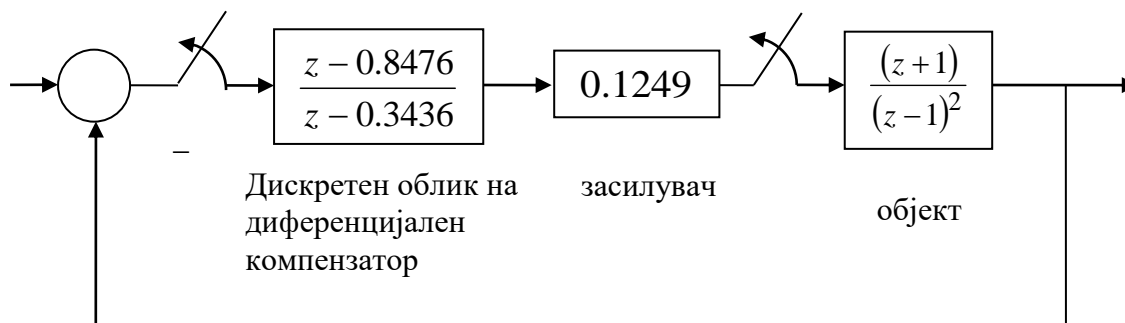
$$G_{ob}(z) = Z \left\{ \frac{1-e^{-sT_0}}{s} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{T_0^2}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)^2} \quad (3.109)$$

Соодветниот затворен дискретен систем на автоматско управување е прикажан на Слика 3.29. Со анализа може да се заклучи дека дискретниот систем од Слика 3.29 е исто така стабилен и има Најквистова крива многу слична со онаа на системот од Слика 3.27. Најквистовите криви за двата система се прикажани на Слика 3.30.

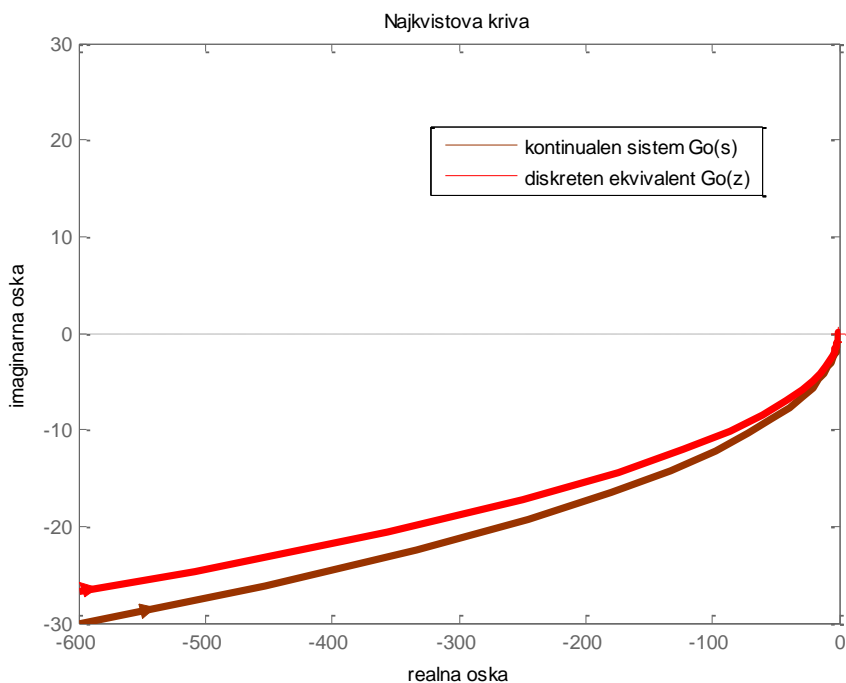


Слика 3.28. Системот на автоматско управување од Слика 3.27 со дискретен управувачки дел

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ



Слика 3.29. Дискретен модел на системот на автоматско управување од Слика 3.27

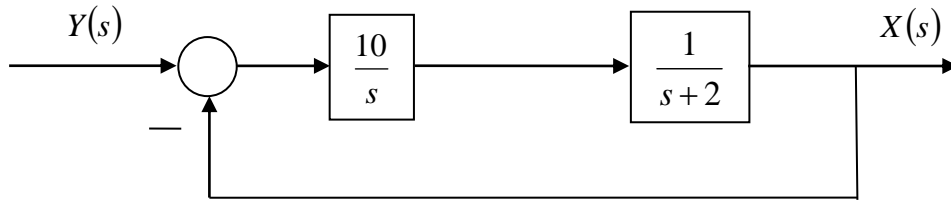


Слика 3.30. Најквистова крива на континуалниот отворен систем од Слика 3.127 и неговиот дискретен еквивалент од Слика 3.30

3.9. Даден е затворениот систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска од долната слика, во кој објектот на управување $P(s)$ е управуван со И-регулатор $R(s)$. Да се определат вредностите на резонантниот врв M_r и факторот на релативно пригушување ζ за набљудуваниот систем ако:

$$P(s) = \frac{1}{s+2} \tag{3.110}$$

$$R(s) = \frac{10}{s} \tag{3.111}$$



Слика 3.31. Илустрација кон Задачата 3.9

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем, за набљудуваниот затворен систем, е:

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad (3.112)$$

а карактеристичниот полином $a(s)$ на затворениот систем се добива како броител на изразот:

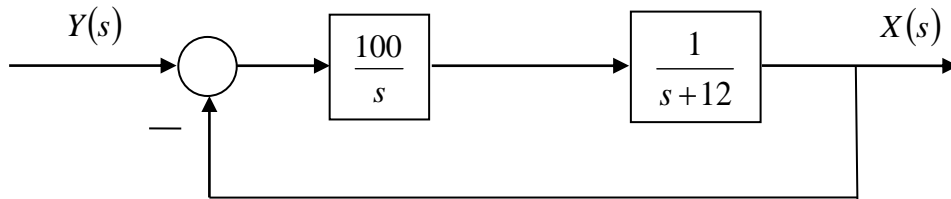
$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{10}{s(s+2)} = \frac{s^2 + 2s + 10}{s(s+2)} \quad (3.113)$$

$$a(s) = s^2 + 2s + 10 \quad (3.114)$$

Затворениот систем има пар конјугирано-комплексни полови $s_{1,2} = -1 \pm j3$ со природна фреквенција $\omega_n = 3.1623$ и фактор на релативно придушување $\zeta = 0.3162$
Оттука:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{5}{3} = 1.6667 \quad (3.115)$$

3.10. Да се определат резонантната фреквенција и пропусниот опсег за затворениот систем на автоматско управување од долната слика.



Слика 3.32. Илустрација кон Задача 3.10

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем, за набљудуваниот затворен систем, е:

$$G_0(s) = \frac{100}{s(s+12)} \quad (3.116)$$

а карактеристичниот полином $a(s)$ на затворениот систем гласи:

$$a(s) = s^2 + 12s + 100 \quad (3.117)$$

Затворениот систем има пар коњугирано-комплексни полови $s_{1,2} = -6 \pm j8$ со природна фреквенција $\omega_n = 10 \text{sec}^{-1}$ и фактор на релативно пригушување $\zeta = 0.6$. Следствено:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \approx 5.2915 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (3.118)$$

По дефиниција, пропусниот опсег на набљудуваниот систем е одреден со фреквенцијата ω_0 при која модулот од неговата фреквентна преносна функција е еднаков на $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Оттука:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{100}{s^2 + 12s + 100} \quad (3.119)$$

$$G(j\omega) = \frac{100}{100 - \omega^2 + j12\omega} \quad (3.120)$$

$$|G(j\omega_0)| = \frac{100}{\sqrt{(100 - \omega^2)^2 + (12\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.121)$$

$$(100 - \omega^2)^2 + (12\omega)^2 = 2 \cdot 10^4 \quad (3.122)$$

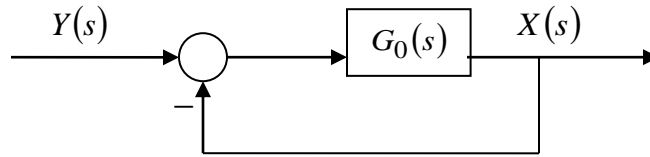
$$\omega_0 = 11.4824 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (3.123)$$

3.11. Даден е затворениот континуален систем со единична негативна повратна врска од Слика 3.33. Преносната функција на соодветниот отворен систем е:

$$G_0(s) = \frac{K(2s + \sqrt{12})}{s^2} \quad (3.124)$$

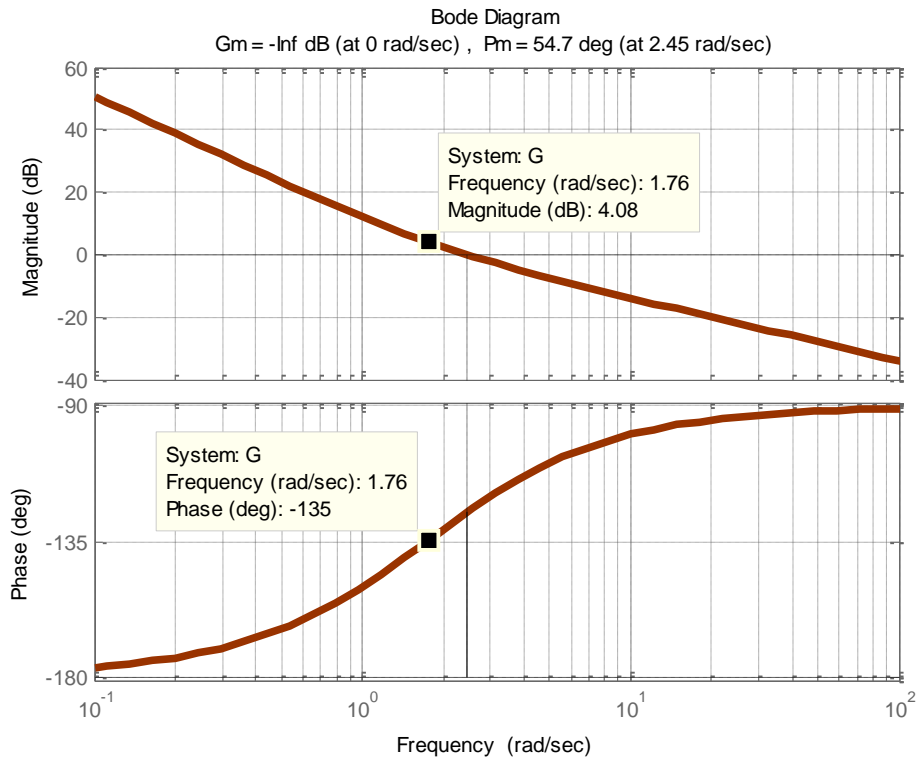
СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Да се определи вредноста на засилувањето K за која резервата на фаза на системот изнесува $\varphi_{rf} = 45^0$.



Слика 3.33. Илустрација кон Задача 3.11

Решение: Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем од Слика 3.33 се прикажани на Слика 3.34. Оттаму се гледа дека затворениот систем на автоматско управување има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 54.7^0$ при пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 2.45 \frac{rad}{sec}$.



Слика 3.34. Бодевите дијаграми на отворениот систем од Слика 3.32

За да се обезбеди саканата резерва на фаза на набљудуваниот затворен систем, пресечната фреквенција на засилување треба да се намали на вредност $\omega_1 = 1.76 \frac{rad}{sec}$, а

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

тоа се постига со спуштање на дијаграмот на слабеење за приближно $4.08dB$. Имено, ако Бодеовиот дијаграм на слабеење од Слика 3.34 се спушти за $4.08dB$, тогаш тој ќе минува низ оската $0dB$ при фреквенција $\omega_1 = 1.76 \frac{rad}{sec}$. Оттука, коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем (3.124) треба да се одбере така што:

$$20 \log K = -4.08dB \quad (3.125)$$

Оттука:

$$K^{-1} = 1.5996 \approx 1.6 \Rightarrow K = 0.625 \quad (3.126)$$

3.12. Нека е даден затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска како на Слика 3.22, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{s+3}{s^2(s+5)} \quad (3.127)$$

Да се провери дали системот е стабилен и во потврден случај да се пресметаат неговите резерви на засилување и фаза. Што ќе се случи со резервите на засилување и фаза на набљудуваниот затворен систем ако во директната гранка се приклучи диференцијален компензатор со преносна функција:

$$G_d(s) = \frac{s+2}{s+4} \quad (3.128)$$

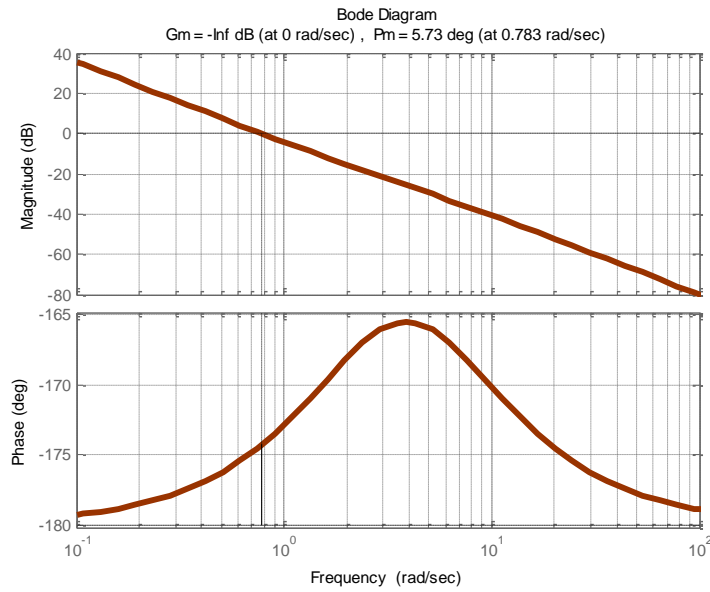
Решение: Со проверка според Рут-Шуровиот критериум лесно се заклучува дека набљудуваниот затворен систем е стабилен:

$$a(s) = s^3 + 5s^2 + s + 3 \quad (3.129)$$

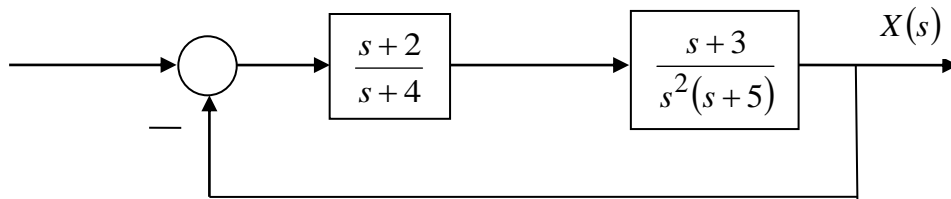
1	$\begin{array}{c} \text{---} 5 \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \end{array}$	1	$\begin{array}{c} \text{---} 3 \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \end{array}$	$c_1 = \frac{1}{5} = 0.2$
-1	0	-0.6	0	
0	5	0.4	3	

Бодеоите дијаграми на отворениот систем (3.127) се прикажани на Слика.3.35. Ако во директната гранка од набљудуваниот затворен систем се приклучи диференцијалниот компензатор (3.128), системот ќе добие изглед како на Слика 3.36, а неговите Бодеои дијаграми се прикажани на Слика 3.37.

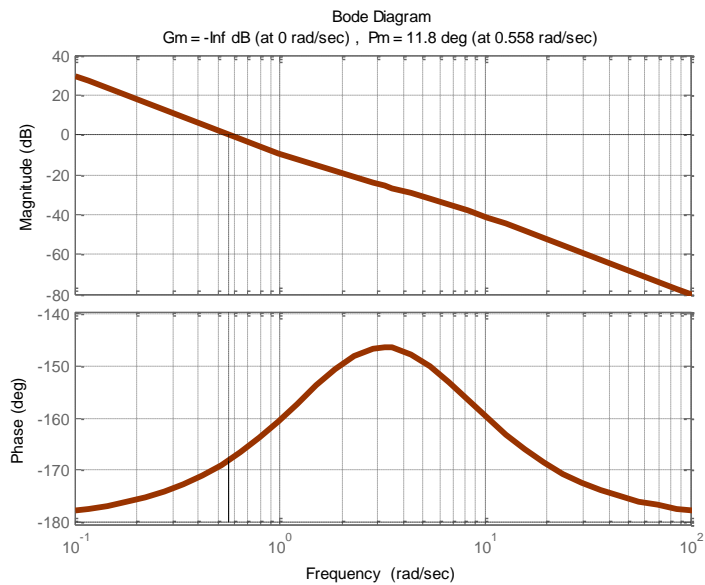
СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ



Слика 3.35. Бодев дијаграми на отворениот систем (3.82)



Слика 3.36. Илустрација кон Задача 3.12



Слика 3.37. Бодев дијаграми на отворениот систем од Слика 3.36

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Од Слика 3.37 се гледа дека резервата на фаза на затворениот систем се зголемила за приближно 2 пати.

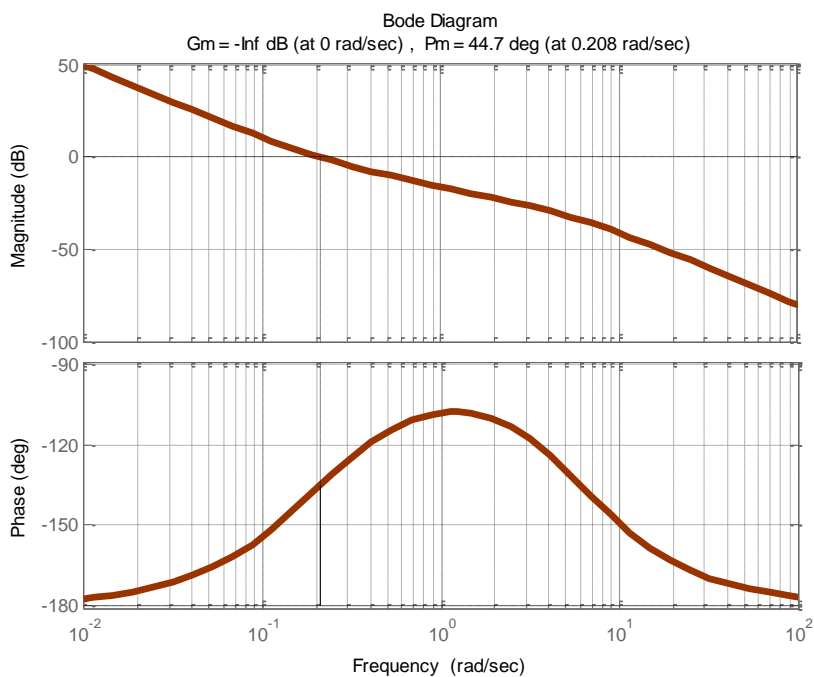
3.13. Што ќе се случи со резервите на засилување и фаза на затворениот систем од Слика 3.36, ако наместо дадениот диференцијален компензатор, се приклучи диференцијален компензатор со следната преносна функција:

$$\tilde{G}_d(s) = \frac{s + 0.2}{s + 4} \quad (3.130)$$

Решение: Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{s + 0.2}{s + 4} \cdot \frac{s + 3}{s^2(s + 5)} \quad (3.131)$$

се прикажани на Слика 3.38. Оттаму се гледа дека резервата на фаза на затворениот систем значително се зголемува со поместувањето на нулата на диференцијалниот компензатор кон имагинарната оска.



Слика 3.38. Бодевите дијаграми на отворениот систем (3.86)

3.14. Да се определи резервата на засилување и фаза на затворениот систем на автоматско управување со структурна блок-шема како на Слика 3.20, во кој објектот на управување $P(s)$ е компензиран со диференцијален компензатор $R(s)$. Под претпоставка:

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

$$P(s) = \frac{50}{(s+1)(s+5)(s+10)} \quad (3.132)$$

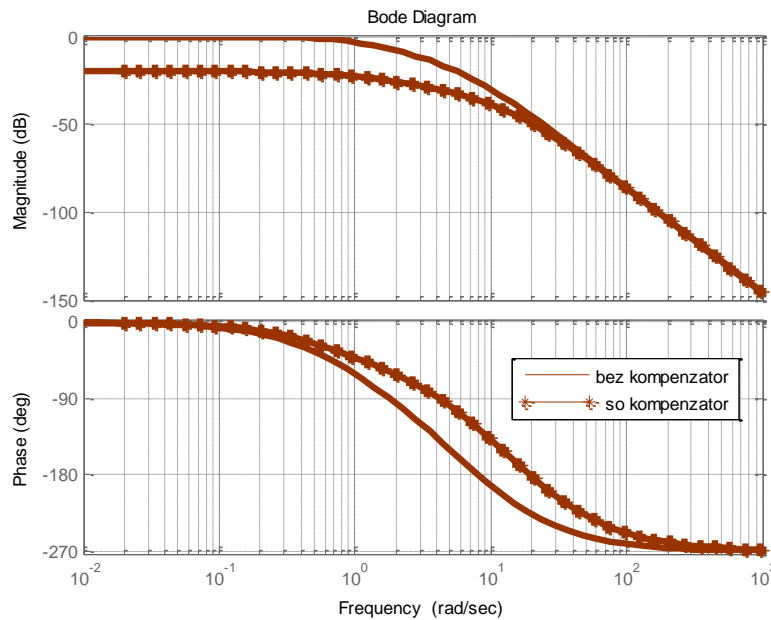
$$R(s) = \frac{s+2.5}{s+25} \quad (3.133)$$

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$G_0(s) = P(s)R(s) = \frac{50}{(s+1)(s+5)(s+10)} \cdot \frac{s+2.5}{s+25} \quad (3.134)$$

а неговите логаритамски фреквентни дијаграми се прикажани на Слика 3.39. Оттаму може да се прочита дека:

$$d = 48.6dB, \varphi_{rf} = \infty \quad (3.135)$$



Слика 3.39. Бодев дијаграми на отворениот систем од Задача 3.14

3.15. Даден е затворен систем со единична негативна повратна врска како на Слика 3.33, во кој објектот на управување $P(s)$ е опишан со преносната функција:

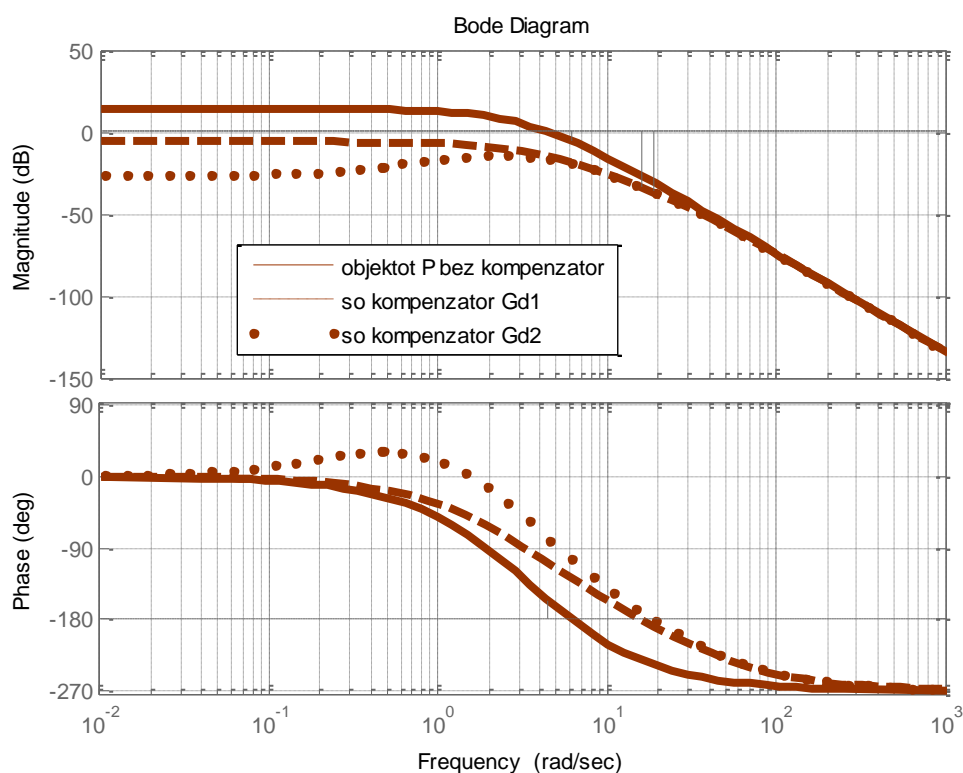
$$P(s) = \frac{200}{(s+2)s(s+4)(s+5)} \quad (3.136)$$

Што се случува со пропусниот опсег на набљудуваниот затворен систем, ако во серија со објектот се приклучи диференцијален компензатор со преносна функција:

$$G_{d1}(s) = \frac{s+3}{s+30} \quad (3.137)$$

$$G_{d2}(s) = \frac{s+0.3}{s+30} \quad (3.138)$$

Решение: Пропусниот опсег на набљудуваниот затворен систем без компензација е $\omega_0 = 1.535 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Со додавање на диференцијален компензатор, пропусниот опсег на системот се зголемува. Така, за компензација со диференцијалниот компензатор (3.137) тој изнесува $\omega_{01} = 1.98 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, а за компензација со диференцијалниот компензатор (3.138) пропусниот опсег изнесува $\omega_{02} = 12.31 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Следствено, може да се заклучи дека пропусниот опсег на набљудуваниот стабилен затворен систем се зголемува со намалување на односот $\frac{a}{b}$ помеѓу големината на нулата и полот на диференцијалниот компензатор.



Слика 3.40. Бодевите дијаграми на затворениот систем од Задача 3.15 без компензација и со компензација со Д- компензаторите $G_{d1}(s)$ и $G_{d2}(s)$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

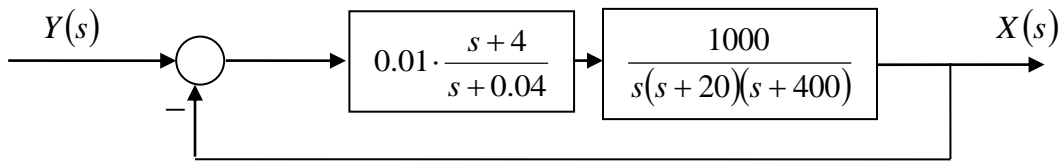
3.16. На Слика 3.41 е прикажана структурната блок-шема на затворен систем во кој објектот на управување $P(s)$ е опишан со преносната функција

$$P(s) = \frac{1000}{s(s+20)(s+400)}.$$

Со цел да се обезбеди дополнително пригушување во

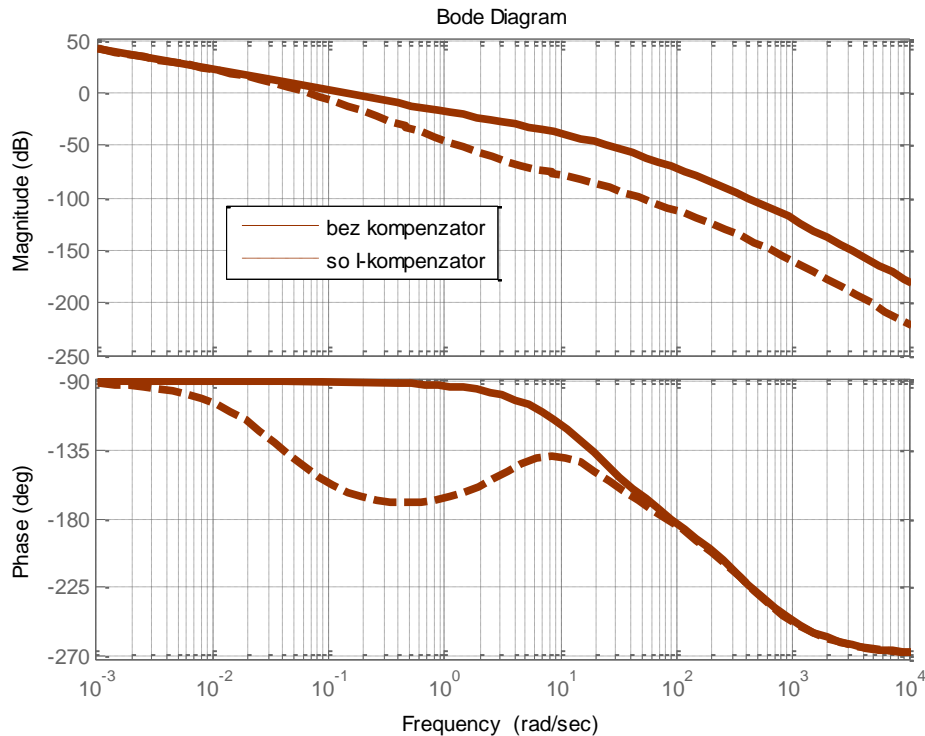
подрачјето на високите фреквенции, во серија со објектот $P(s)$ е поврзан интегрален компензатор со преносна функција $R(s) = \frac{s+4}{s+0.04}$. Што е точно од следното: (а)

Интегралниот компензатор ја намалува резервата на засилување на компензираниот затворен систем во однос на некомпензираниот; (б) Интегралниот компензатор го зголемува фазното задоцнување во подрачјето на средни фреквенции; (в) Интегралниот компензатор обезбедува дополнително придушување при високите фреквенции.



Слика 3.41. Илустрација кон Задача 3.16

Решение: (а) Погрешно. (б) Точно. (в) Точно.



Слика 3.42. Бодови дијаграми за системот од Задача 3.16 без и со компензатор

3.17. За да се компензира поведението на еден затворен систем со единична негативна повратна врска како на Слика 3.33, во која објектот има преносна функција:

$$P(s) = \frac{1500}{s(s+10)(s+15)(s+20)} \quad (3.139)$$

е употребен интегрален компензатор. Кој од долу наведените компензатори ги задоволува следните проектни барања: максимален прескок $M_p \leq 10\%$ и време на пораст $T_r \leq 5 \text{ sec}$.

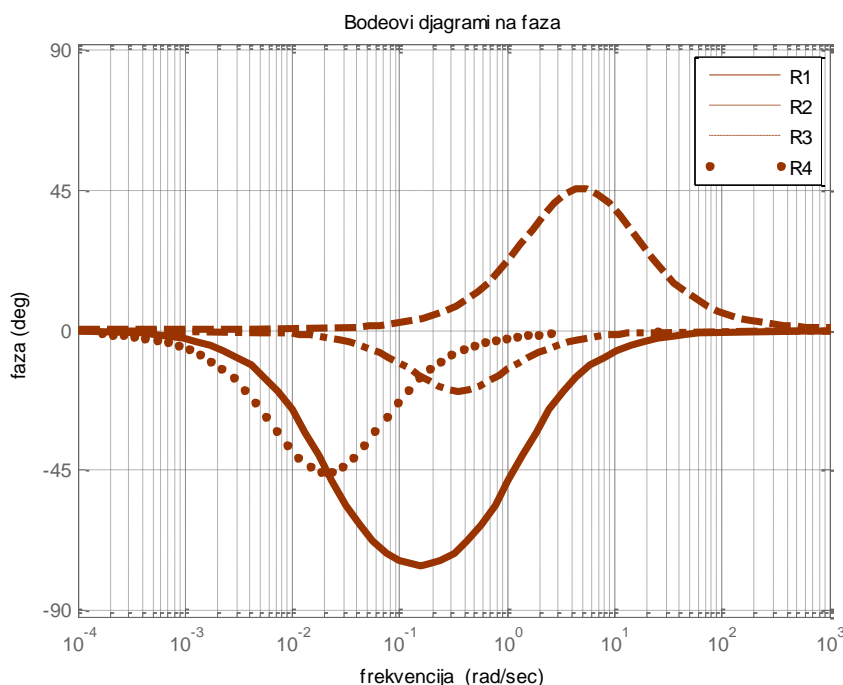
$$R_1(s) = \frac{s+1.2}{s+0.02} \quad (3.140)$$

$$R_2(s) = \frac{s+2}{s+12} \quad (3.141)$$

$$R_3(s) = \frac{2s+1}{4s+1} \quad (3.142)$$

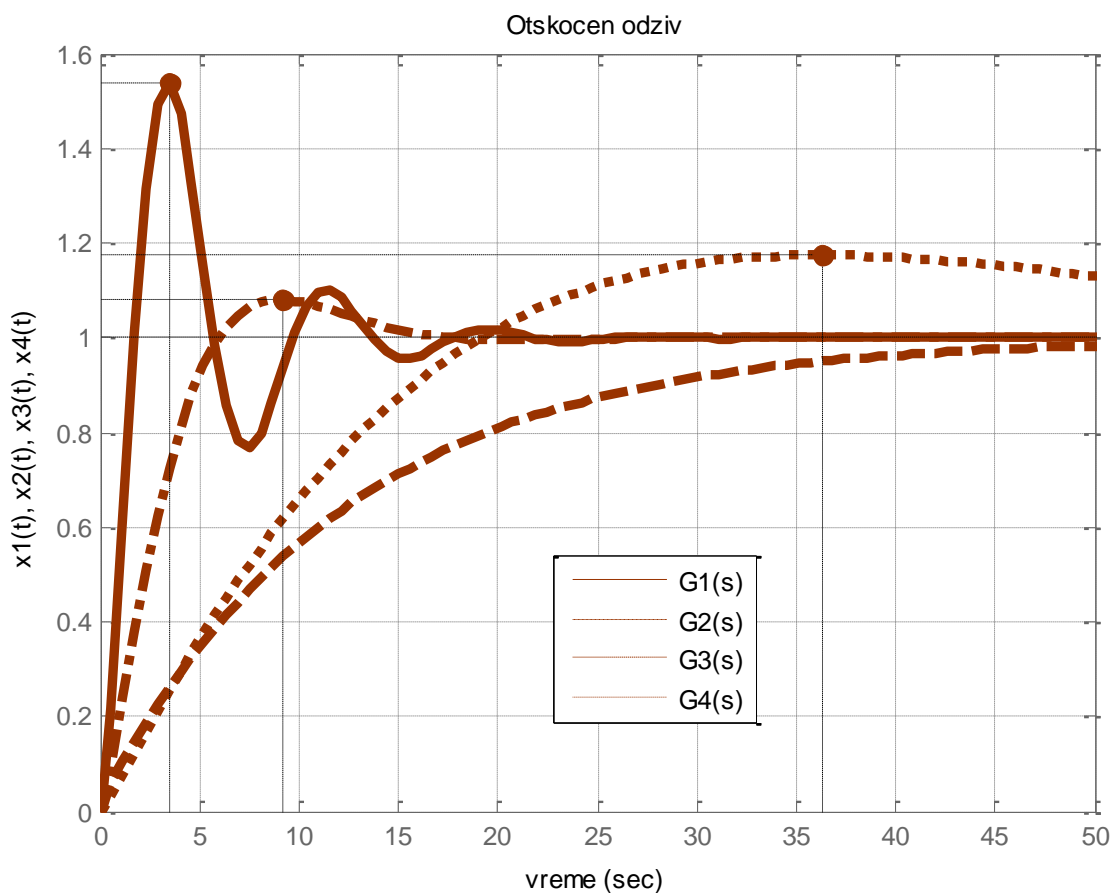
$$R_4(s) = \frac{20s+1}{120s+1} \quad (3.143)$$

Решение:



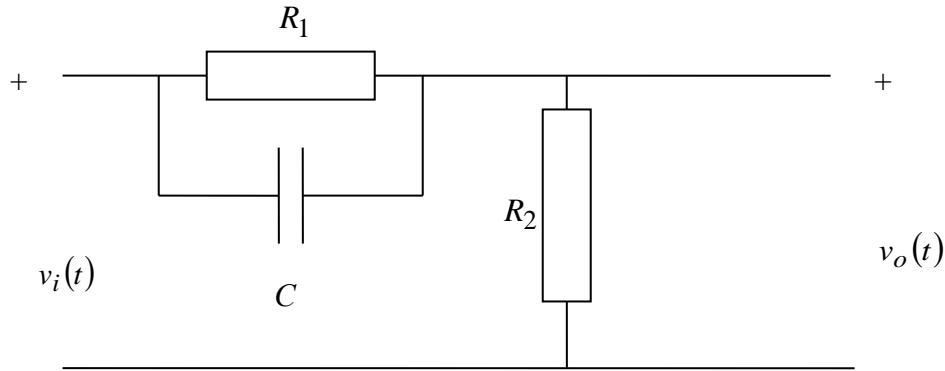
Слика 3.43. Бодев дијаграми на фаза на компензаторите од Задача 3.17

Од Бодевите дијаграми на фаза прикажани на Слика 3.43 лесно се забележува дека $R_2(s)$ не претставува интегрален компензатор. Оттука, останува да се проверат компензаторите $R_1(s)$, $R_3(s)$ и $R_4(s)$, односно нивното влијание врз набљудуваниот затворен систем. Од Слика 3.44 се гледа дека најмал прескок има отскочниот одзив на затворениот систем во кој е употребен компензаторот $R_3(s)$ и тој изнесува 8%. Најкусо време на пораст има отскочниот одзив на затворениот систем со компензаторот $R_1(s)$, меѓутоа тој има неприфатливо голем максимален прескок, додека времето на пораст на отскочниот одзив на затворениот систем со компензаторот $R_3(s)$ е нешто поголемо, но го исполнува второто проектно барање. Следствено, компензаторот $R_3(s)$ ги задоволува и двете проектни барања.



Слика 3.44. Отскочен одзив на затворениот САУ со компензаторите од Задача 3.17

3.18. Да се определи преносната функција на RC -колото од Слика 3.45. Каков вид компензатор реализира дадената електрична шема? Да се определат нулите и половите на дадениот компензатор преку неговите параметри.



Слика 3.45. Илустрација кон Задача 3.18

Решение: Диференцијаната равенка на динамичко поведење на набљудуваното електрично коло е:

$$C \frac{d}{dt} [v_i(t) - v_o(t)] + \frac{1}{R_1} [v_i(t) - v_o(t)] = \frac{1}{R_2} v_o(t) \quad (3.144)$$

а бараната преносна функција се добива со Лапласова трансформација на (3.144):

$$Cs[V_i(s) - V_o(s)] + \frac{1}{R_1} [V_i(s) - V_o(s)] = \frac{1}{R_2} V_o(s) \quad (3.145)$$

$$G_d(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Cs + \frac{1}{R_1}}{Cs + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{C}} = \frac{s+a}{s+b} \quad (3.146)$$

Од изразот (3.146) следува дека набљудуваното коло има нула во точката $s = -a$ и пол во точката $s = -b$, каде што:

$$a = \frac{1}{R_1 C}, \quad b = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{C} \quad (3.147)$$

Лесно се забележува дека $a < b$, што значи дека колото од Слика 3.44 претставува диференцијален компензатор.

3.19. Преносната функција на еден дискретен водечки (lead) компензатор може да се добие од преносната функција на континуалниот диференцијален компензатор:

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b}; \quad b > a \quad (3.148)$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Во што се пресликуваат нулата $s = -a$ и полот $s = -b$ во z – комплексната рамнина со помош на дадената смена и како изгледа преносната функција $G_d(z)$ на дискретниот еквивалент на континуалниот диференцијален компензатор $G_d(s)$?

Решение: Преносната функција на еден дискретен водечки компензатор има општ облик:

$$G_d(z) = K_d \frac{z - z_c}{z - p_c}; \quad z_c > p_c \quad (3.149)$$

Овој компензатор има нула во точката $z = z_c$ и пол во точката $z = p_c$, при што $z_c > p_c$. Неговиот коефициент на засилување во стационарна состојба изнесува:

$$G_d(1) = K_d \frac{1 - z_c}{1 - p_c} \quad (3.150)$$

Коефициентот на засилување K_d има улога за нагудување на коефициентот на засилување на компензаторот на одредена вредност при одредена фреквенција.

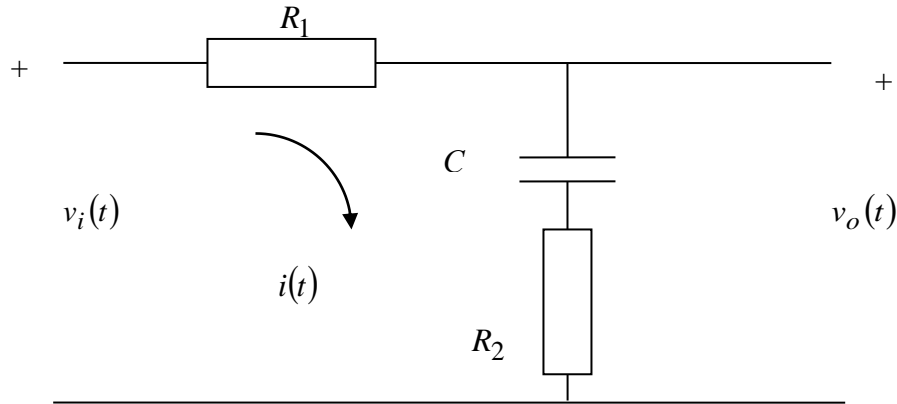
Преносната функција на еден дискретен водечки компензатор може да се добие од преносната функција на континуалниот диференцијален компензатор:

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b}; \quad b > a \quad (3.151)$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Така, нулата $s = -a$ на континуалниот диференцијален компензатор $G_d(s)$ со смената $z = e^{sT}$ се пресликува во нулата $z_c = e^{-aT}$, додека полот $s = -b$ пресликува во полот $p_c = e^{-bT}$. Така се добива:

$$G_d(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}; \quad z_c > p_c \quad (3.152)$$

3.20. Да се определи преносната функција на RC -колото од Слика 3.46. Каков вид компензатор реализира дадената електрична шема? Да се определат нулите и половите на дадениот компензатор преку неговите параметри.



Слика 3.46. Илустрација кон Задача 3.20

Решение: Диференцијалната равенка на динамичко поведение на набљудуваното електрично коло е:

$$R_1 i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + R_2 i(t) = v_i(t) \quad (3.153)$$

а бараната преносна функција се добива со Лапласова трансформација на равенката (3.153):

$$R_1 I(s) + \frac{1}{Cs} I(s) + R_2 I(s) = \left(R_1 + \frac{1}{Cs} + R_2 \right) I(s) = V_i(s) \quad (3.154)$$

$$V_o(s) = \left(R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I(s) \quad (3.155)$$

$$G_i(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{s + \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}} = \frac{a(s + b)}{b(s + a)}; \quad (3.156)$$

Од изразот (3.156) следува дека набљудуваното коло има нула во точката $s = -b$ и пол во точката $s = -a$, каде што:

$$a = \frac{1}{(R_1 + R_2)C}, \quad b = \frac{1}{R_2 C} \quad (3.157)$$

Бидејќи $a < b$, колото од Слика 3.46 претставува интегрален компензатор.

3.21. Преносната функција на дискретниот еквивалент на континуалниот интегрирачки компензатор може да се добие преку неговата преносна функција $G_i(s)$:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a}; \quad b > a \quad (3.158)$$

со помош на смената $z = e^{sT}$. Во што се пресликуваат нулата $s = -b$ и полот $s = -a$ на преносната функција $G_i(s)$ во z – комплексната рамнина со помош на дадената смена и како изгледа преносната функција $G_i(z)$ на дискретниот еквивалент на континуалниот интеграционен компензатор $G_i(s)$?

Решение: Преносната функција на дискретниот еквивалент на еден интегрирачки континуален компензатор има општ облик:

$$G_i(z) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c}; \quad z_c < p_c \quad (3.159)$$

Овој компензатор има нула во точката $z = z_c$ и пол во точката $z = p_c$, при што $z_c < p_c$. Неговиот коефициент на засилување во стационарна состојба изнесува:

$$G_i(1) = 1 \quad (3.160)$$

Коефициентот на засилување $K_i = \frac{1-p_c}{1-z_c}$ има улога за нагудување на коефициентот на засилување на дигиталниот компензатор $G_i(z)$ во стационарна состојба на вредност $G_i(1) = 1$, аналогно на вредноста на коефициентот на засилување кај континуалниот компензатор во стационарна состојба.

Преносната функција на дискретниот еквивалент на континуалниот интегрирачки компензатор може да се добие од неговата преносна функција:

$$G_i(s) = \frac{a}{b} \cdot \frac{s+b}{s+a}; \quad b > a \quad (3.161)$$

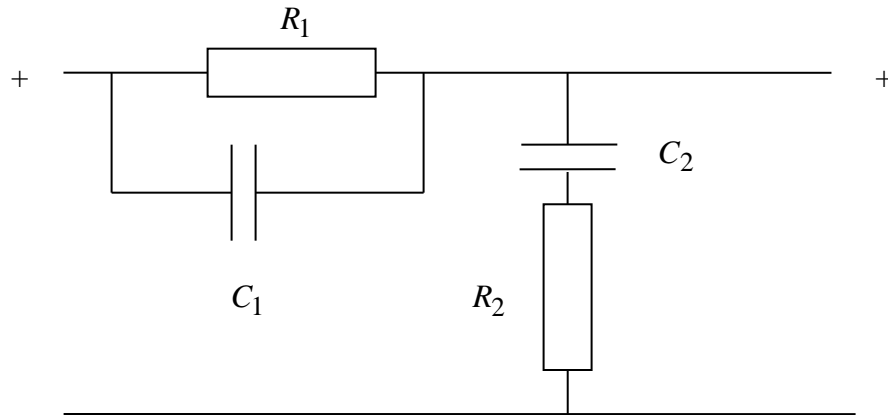
со помош на смената $z = e^{sT}$. Така, нулата $s = -b$ на континуалниот интегрирачки компензатор $G_i(s)$ со смената $z = e^{sT}$ се пресликува во нулата $z_c = e^{-bT}$, додека полот $s = -a$ пресликува во полот $p_c = e^{-aT}$. Така се добива:

$$G_i(z) = \frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-bT}} \cdot \frac{z-e^{-bT}}{z-e^{-aT}}; \quad z_c > p_c \quad (3.162)$$

Може да се забележи дека:

$$G_i(1) = 1 \quad (3.163)$$

3.22. Да се определи преносната функција на RC -колото од Слика 3.47. Каков вид компензатор реализира дадената електрична шема? Да се определат нулите и половите на дадениот компензатор преку неговите параметри.



Слика 3.47. Илустрација кон Задача 3.22

Решение:

$$C_1 \frac{d}{dt} [v_i(t) - v_o(t)] + \frac{1}{R_1} [v_i(t) - v_o(t)] = i(t) \quad (3.164)$$

$$\frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau + R_2 i(t) = v_o(t) \quad (3.165)$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + C_1 s \right) [V_i(s) - V_o(s)] = \frac{V_o(s)}{R_2 + \frac{1}{Cs}} \quad (3.166)$$

$$G_{di}(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2} \right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} = \frac{(s + a_1)(s + b_2)}{(s + b_1)(s + a_2)}; \quad (3.167)$$

$$a_1 = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad b_1 a_2 = a_1 b_2, \quad b_1 + a_2 = a_1 + b_2 + \frac{1}{R_2 C_1}, \quad b_2 = \frac{1}{R_2 C_2} \quad (3.168)$$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

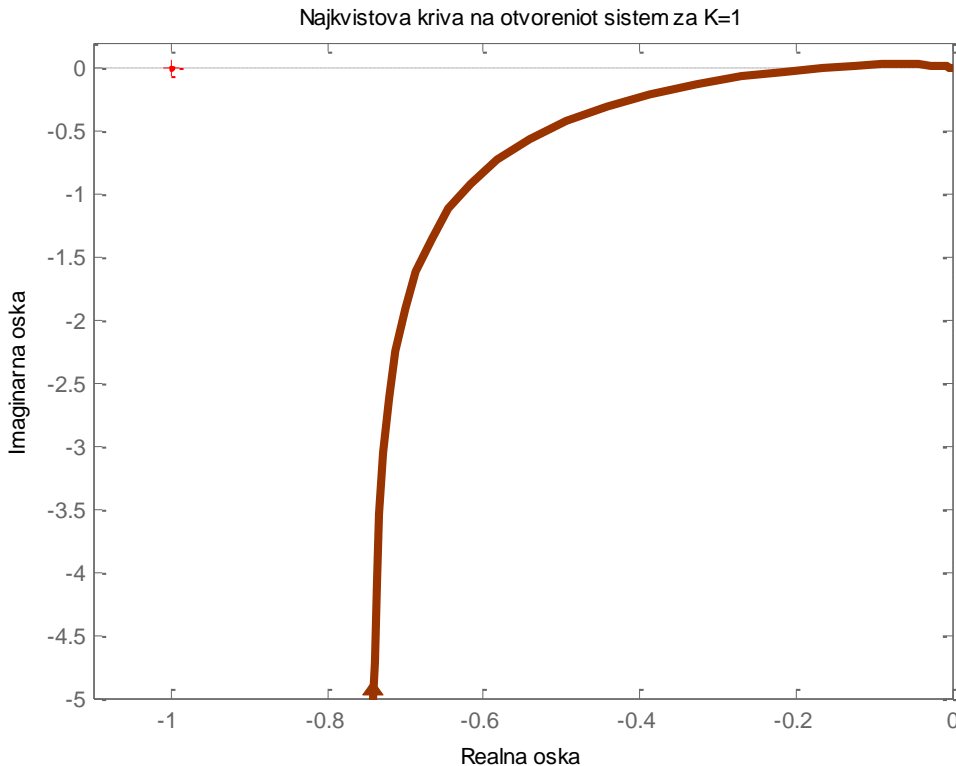
Електричната шема од Слика 3.47 реализира диференцијално - интегрирачки компензатор.

3.23. Да се нацртаат фреквентните карактеристики на соодветниот отворен систем за дадениот затворен систем со единична негативна повратна врска за неколку вредности $K_3 > K_2 > K_1$ на коефициентот на засилување K , ако преносната функција на отворениот систем $G_0(s)$ е од облик:

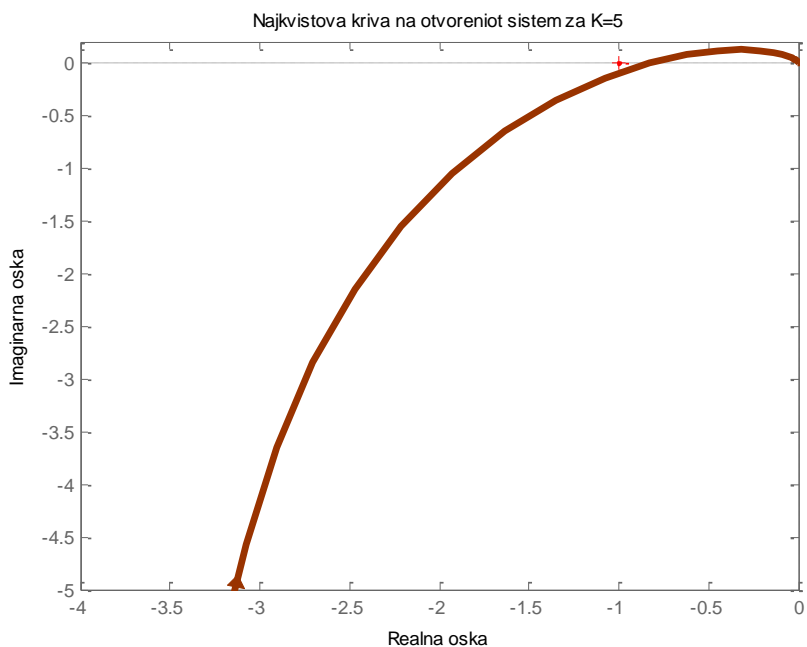
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s + p_1)(s + p_2)}; \quad K, p_1, p_2 > 0 \quad (3.169)$$

Што може да се забележи – дали зголемувањето на вредноста на коефициентот на засилување K влијае врз стабилноста на затворениот систем? (Упатство: Графиците да се цртаат, на пример, за $K = 1, 5, 10$ и $p_1 = 1, p_2 = 2$.)

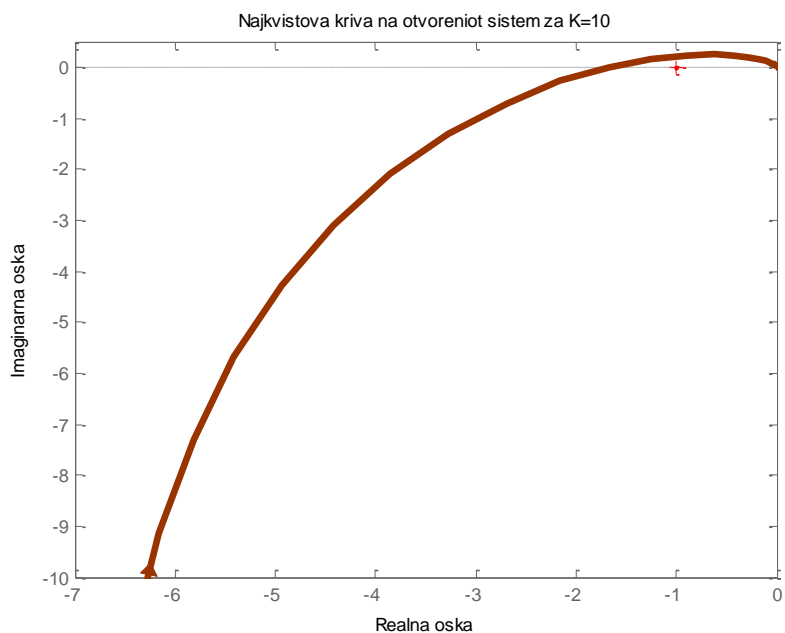
Решение: Бидејќи соодветниот отворен систем нема полови во десната полурамнина од s -комплексната рамнина, следува дека затворениот систем ќе биде стабилен доколку Најквистовата крива не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$. Од дијаграмите добиени за $K_3 = 10 > K_2 = 5 > K_1 = 1$ се гледа дека со зголемувањето на вредноста за K во одреден момент фреквентната карактеристика на отворениот систем ќе ја опфати критичната точка, што значи дека затворениот систем ќе стане нестабилен.



Слика 3.48. Најквистова крива за $K = 1$ - затворениот систем е стабилен



Слика 3.49. Најквистова крива за $K = 5$ - затворениот систем е стабилен



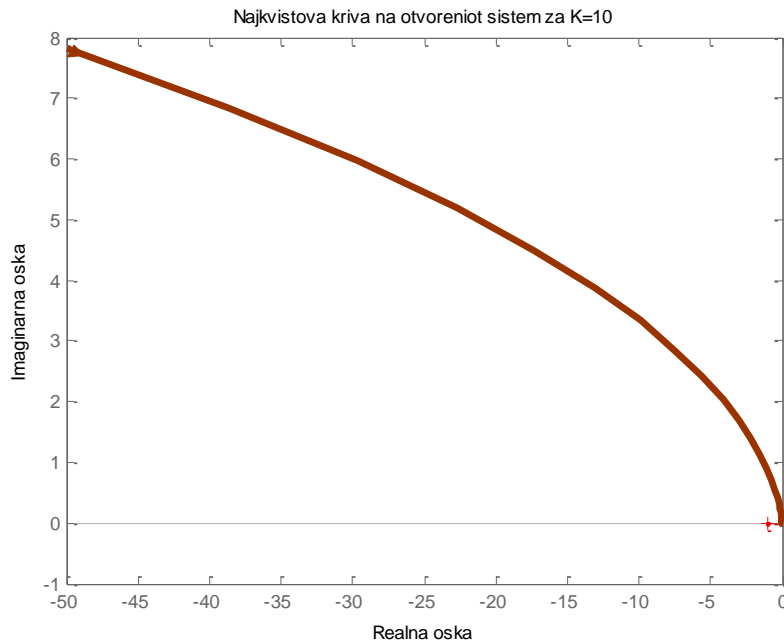
Слика 3.50. Најквистова крива за $K = 10$ - затворениот систем е нестабилен

3.24. Да се нацрта фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем за дадениот затворен систем со единична негативна повратна врска, ако преносната функција на отворениот систем $G_0(s)$ е од облик:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2(s + p_1)}; K, p_1 > 0 \quad (3.170)$$

Што може да се каже за стабилноста на затворениот систем? Дали промената на вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем влијае врз стабилноста на затворениот систем? (Упатство: Графикот да се црта со помош на МАТЛАБ, на пример, за $K = 10$ и $p_1 = 2$.)

Решение: Не, Затворениот систем е нестабилен за секое K . Затворениот систем е суштински нестабилен, бидејќи не постои вредност на K за која тој би станал стабилен. Ова се должи на фактот дека за $0 < \omega < \infty$ фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем постојано се наоѓа над реалната оска.



Слика 3.51. Најквистова крива - затворениот систем е нестабилен за секое K

3.25. Со кој вид компензација може да се стабилизира системот од Задачата 3.24? Да се објасни.

Решение: Зададениот затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција $G_0(s)$ од облик:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2(s + p_1)}; K, p_1 > 0 \quad (3.171)$$

е нестабилен за секое K . Следствено, не постои вредност за K за која системот би се стабилизираше. Од (во основа) иста причина, системот не може да се стабилизира ни по пат на сериска компензација со интегрирачки компензатор.

Набљудуваниот затворен систем може да се стабилизира по пат на сериска компензација со диференцијален компензатор. За да се илустрира ова, употребени се три диференцијални компензатори:

$$R_1(s) = \frac{s+1}{s+1.5}; \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad (3.172)$$

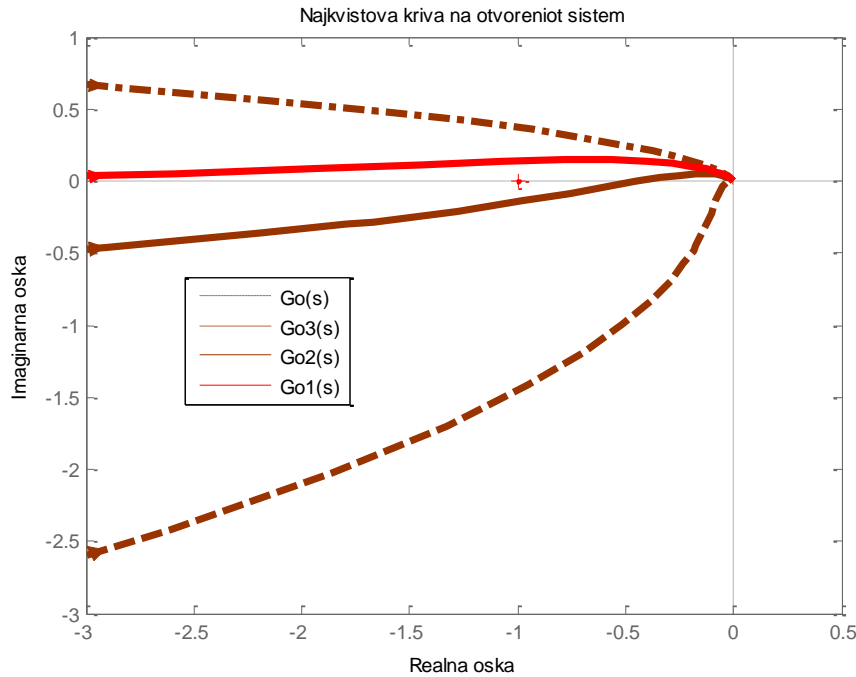
$$R_2(s) = \frac{s+1}{s+2.5}; \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2.5} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad (3.173)$$

и:

$$R_3(s) = \frac{s+0.1}{s+10}; \quad \frac{a}{b} = \frac{0.1}{10} = 0.01 \quad (3.174)$$

во серија со објектот $G_0(s)$, а соодветните отворени системи се означени со $G_{01}(s)$, $G_{02}(s)$ и $G_{03}(s)$. На Слика 3.51 се прикажани фреквентните карактеристики на сите три отворени системи $G_0(s)$, $G_{01}(s)$, $G_{02}(s)$ и $G_{03}(s)$. Лесно може да се забележи дека диференцијалниот компензатор со своето влијание ја свиткува фреквентната карактеристика на отворениот систем надолу и тоа дотолку повеќе, доколку е помал односот $\frac{a}{b}$ на параметрите на компензаторот. Така во одреден момент критичната точка $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$ ќе се најде лево од фреквентната карактеристика на компензираниот отворен систем и истиот ќе стане стабилен. Од неа се гледа дека Најквистовата крива на некомпензираниот систем ја опфаќа критичната точка $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$ за секое K . Сериската компензација со диференцијален компензатор обезбедува Најквистовата крива на компензираниот систем да не ја опфаќа критичната точка $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$ за одредени вредности на K . Конечно, сериската компензација со интегро-диференцијален компензатор обезбедува Најквистовата крива на компензираниот систем да не ја опфаќа критичната точка $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$ за одредени вредности на K . Проблем може да се јави ако компензираниот систем треба да има помал пропусен опсег од опсегот кој може да се постигне со диференцијалниот компензатор. Во тие случаи се применува сериска компензација со интегро-диференцирачки компензатор. Сериската компензација со интегро-диференцирачки компензатор обезбедува

задоволително поведење на стабилниот компензиран систем како во преодниот така и во стационарниот режим и потесен пропусен опсег отколку опсегот кој би се добил ако се примени само диференцијален компензатор. Решението на поставената задача е илустрирано на Слика 3.51 за $K = 10$ и $p_1 = 4$. Параметрите на употребениот дискретен регулатор се $a = 0.1$ и $b = 10$.



Слика 3.52. Најквистовата крива на отворениот систем (3.171) без компензатор и со диференцијален компензатор

3.26. Да се нацрта фреквентната карактеристика на дискретниот еквивалент на диференцијалниот компензатор:

$$G_d(z) = \frac{a}{b} \cdot \frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}} \cdot \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}; \quad a < b \quad (3.175)$$

(Упатство: Да се усвои $a = 1, b = 2$.)

Решение: Фреквентната преносна функција на дадениот дискретен компензатор е:

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-T}} \cdot \frac{e^{j\omega T_0} - e^{-T}}{e^{j\omega T_0} - e^{-2T}} \quad (3.176)$$

За да се нацрта неговата фреквентна карактеристика, треба да се определат нејзините карактеристични точки – почетокот за $\omega = 0$, крајот за $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, пресеците со координатните оски и, евентуално, нејзините екстреми. Притоа, со T_0 е означен периодот на дискретизација, а со ω_0 соодветната фреквенција на дискретизација.

Од изразот за $G_d(j\omega)$, за $\omega = 0$ се добива:

$$G_d(j0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-T}} \cdot \frac{1 - e^{-T}}{1 - e^{-2T}} = \frac{1}{2} \quad (3.177)$$

што значи дека бараната фреквентна карактеристика започнува во точката $\left(\frac{1}{2}, j0\right)$ на

реалната оска, додека за $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ се добива:

$$G_d\left(j\frac{\omega_0}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-T}} \cdot \frac{-1 - e^{-T}}{-1 - e^{-2T}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-T}} \cdot \frac{1 + e^{-T}}{1 + e^{-2T}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + e^{-T})^2}{1 + e^{-2T}} \quad (3.178)$$

што значи дека фреквентната карактеристика на набљудуваниот дискретен компензатор исто така завршува во конечна точка на реалната оска во $G_d(j\omega)$ -

рамнината. Тоа е точката $\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + e^{-T})^2}{1 + e^{-2T}}, j0\right]$ која за $T=1$, на пример, изнесува

(0.824, j0).

Од изразите за реалниот и имагинарниот дел на фреквентната преносна функција $G_d(j\omega)$, може да се заклучи дека бараната фреквентна карактеристика нема пресеци со координатните оски, што значи дека ќе се наоѓа исклучиво во десната полурамнина од комплексната $G_d(j\omega)$ -рамнина:

$$U(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-T}} \cdot \frac{(1 + e^{-3T}) - e^{-T}(1 + e^{-T})\cos \omega T_0}{1 - 2e^{-2T}\cos \omega T_0 + e^{-4T}} = 0 \quad (3.179)$$

Равенката (3.179) нема реално решение.

$$V(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-T}} \cdot \frac{e^{-T}(1 - e^{-T})\sin \omega T_0}{1 - 2e^{-2T}\cos \omega T_0 + e^{-4T}} = 0 \quad (3.180)$$

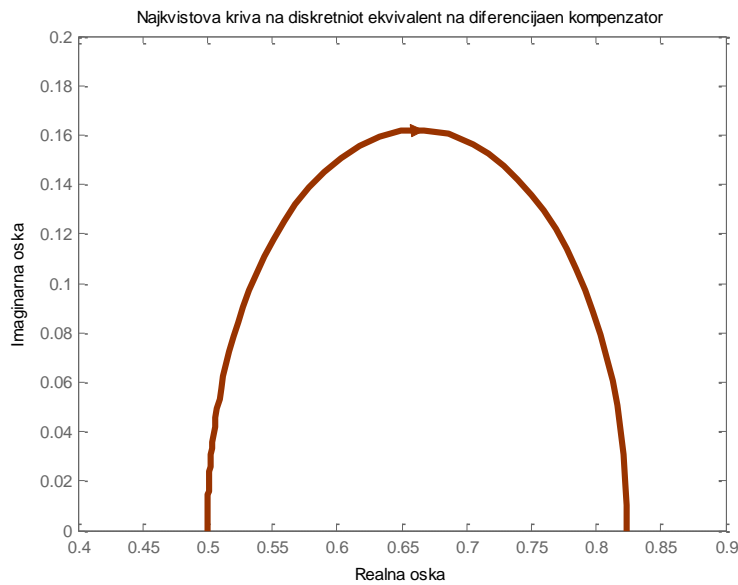
СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Равенката (3.180) нема реално решение. Решенијата за $\omega T_0 = 0$ и $\omega T_0 = \pi$ ги дефинираат почетната и крајната точка на карактеристиката.

Останува уште да се определи квадрантот во кој се наоѓа фреквентната карактеристика на зададениот дискретен компензатор, што се прави врз основа на знакот на реалниот и имагинарниот дел на фреквентната преносна функција $G_d(j\omega)$. Имено, за $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$ изразот за $U(\omega)$ и $V(\omega)$ никогаш не е негативен:

$$U(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-T}} \cdot \frac{(1 + e^{-3T}) - e^{-T}(1 + e^{-T}) \cos \omega T_0}{1 - 2e^{-2T} \cos \omega T_0 + e^{-4T}} > 0 \quad \forall \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2} \quad (3.181)$$

$$V(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-T}} \cdot \frac{e^{-T}(1 - e^{-T}) \sin \omega T_0}{1 - 2e^{-2T} \cos \omega T_0 + e^{-4T}} \geq 0 \quad \forall \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2} \quad (3.182)$$



Слика 3.53. Квалитативен приказ на фреквентната карактеристика на дискретниот компензатор од
Задача 3.26

Следствено, бараната фреквентна карактеристика се наоѓа во првиот квадрант од $G_d(j\omega)$ -комплексната рамнина и квалитативно изгледа како што е прикажано на Слика 3.53.

3.27. Да се нацрта фреквентната карактеристика на дискретниот аналог на интегрирачкиот компензатор:

$$G_i(z) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{z-z_c}{z-p_c}; \quad z_c < p_c \quad (3.183)$$

за $z_c = 0.86$; $p_c = 0.97$.

Решение: Фреквентната преносна функција на зададениот дискретен компензатор е:

$$G_i(j\omega) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{e^{j\omega T} - z_c}{e^{j\omega T} - p_c} = \frac{0.03}{0.14} \cdot \frac{e^{j\omega T} - 0.86}{e^{j\omega T} - 0.97} \quad (3.184)$$

Почетокот на бараната фреквентна карактеристика се добива за $\omega = 0$:

$$G_i(j0) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{1-z_c}{1-p_c} = 1 \quad (3.185)$$

и тој се наоѓа во точката $(1, j0)$ на реалната оска.

Фреквентната карактеристика на набљудуваниот дискретен компензатор завршува за

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} :$$

$$G_i\left(j \frac{\omega_0}{2}\right) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{-1-z_c}{-1-p_c} = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{1+z_c}{1+p_c} = \frac{(1-z_c p_c) - (p_c - z_c)}{(1-z_c p_c) + (p_c - z_c)} \approx 0.2 \quad (3.186)$$

повторно на реалната оска во точката $(0.2, j0)$.

Равенката:

$$U(\omega) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{(1+z_c p_c) - (z_c + p_c) \cos \omega T_0}{1 - 2p_c \cos \omega T_0 + p_c^2} = 0 \quad (3.187)$$

нема реални решенија, што значи дека бараната фреквентна карактеристика нема пресеци со имагинарната оска, додека единствените решенија на равенката:

$$V(\omega) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{(z_c - p_c) \sin \omega T_0}{1 - 2p_c \cos \omega T_0 + p_c^2} = 0 \quad (3.188)$$

за $\omega T_0 = 0$ и $\omega T_0 = \pi$ ги дефинираат крајните точки на карактеристиката, што значи дека таа нема пресеци ни со реалната оска. Останува да се определи квадрантот во кој се наоѓа бараната фреквентна карактеристика, врз основа на знакот на реалниот и имагинарниот дел на фреквентната преносна функција $G_i(j\omega)$. Со мала анализа се

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

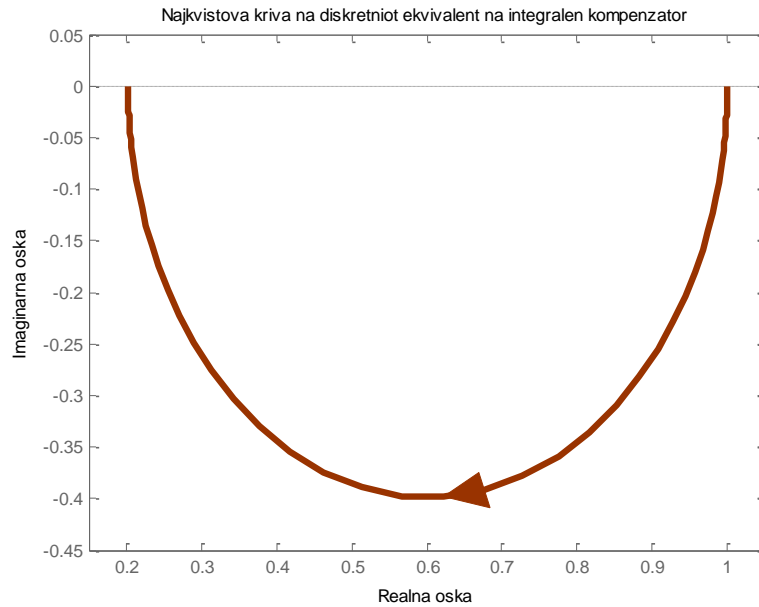
заклучува дека имагинарниот дел $V(\omega)$ на фреквентната преносна функција $G_i(j\omega)$ никогаш не е позитивен:

$$V(\omega) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{(z_c-p_c)\sin \omega T_0}{1-2p_c \cos \omega T_0 + p_c^2} \leq 0 \quad \forall \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2} \quad (z_c - p_c < 0) \quad (3.189)$$

додека реалниот дел $U(\omega)$ на фреквентната преносна функција $G_i(j\omega)$ секогаш е позитивен:

$$U(\omega) = \frac{1-p_c}{1-z_c} \cdot \frac{(1+z_c p_c) - (z_c + p_c)\cos \omega T_0}{1-2p_c \cos \omega T_0 + p_c^2} > 0 \quad \forall \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2} \quad (3.190)$$

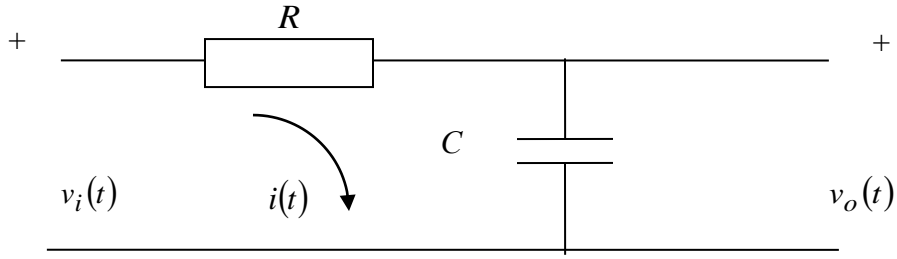
Следствено, бараната фреквентна карактеристика ќе се наоѓа во третиот квадрант и нејзиниот квалитативен изглед е прикажан на Слика 3.54.



Слика 3.54. Квалитативен приказ на фреквентната карактеристика на дискретниот компензатор од Задача 3.26

3.28. Да се определи преносната функција на електричното коло од долната слика. За каков компензатор станува збор? Потоа, преку Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза, да се испита и објасни влијанието на компензаторот врз објектот со преносна функција $P(s) = \frac{1}{s+1}$, за три вредности на временската константа $T = RC$ на даденото електрично коло: $T_1 = 1s$, $T_2 = 10s$ и $T_3 = 100s$.

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

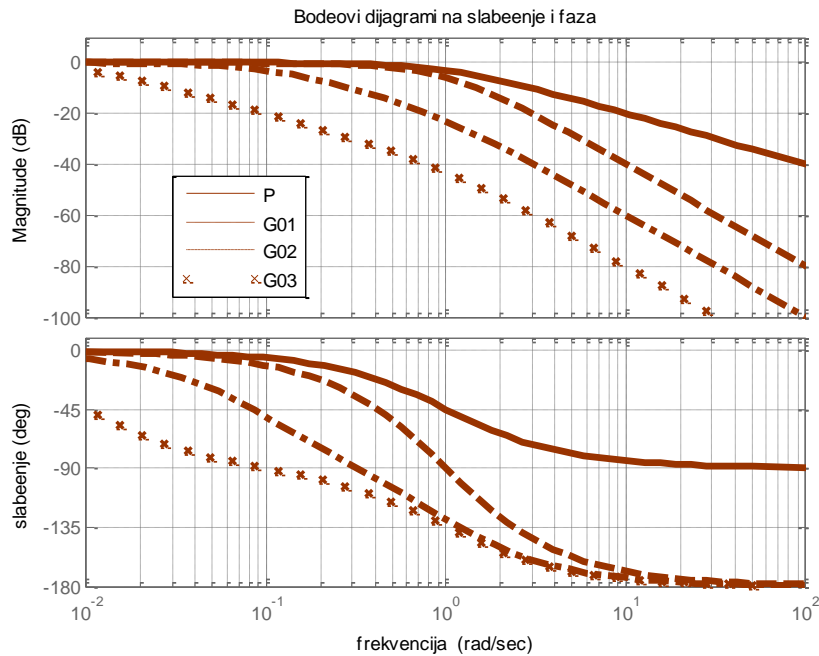


Слика 3.55. Илустрација кон Задача 3.28

Решение: Се работи за специјален случај на И-компензатор, кој нема конечна нула:

$$R(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (3.191)$$

Соодветните отворени системи кои се добиваат по компензација на објектот $P(s)$ со интегралните компензатори $R_1(s) = \frac{1}{s+1}$, $R_2(s) = \frac{1}{10s+1}$ и $R_3(s) = \frac{1}{100s+1}$ се $G_{01}(s)$, $G_{02}(s)$ и $G_{03}(s)$, соодветно. Нивните Бодевите дијаграми се прикажани на Слика 3.56, од каде се гледа дека интегралните компензатори го стеснуваат пропусниот опсег на некомпензираниот систем и тоа пропорционално на големината на временската константа $T = RC$, а со тоа ја намалуваат неговата брзина на одзив, додека стабилноста на затворениот систем останува непроменета.



Слика 3.56. Решение на Задача 3.28

3.29. Да се дефинира синтезата (без реализација) на затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска, кој ќе ги исполни следните барања:

1. Резерва на фаза $\cong 45^{\circ}$
2. Брзинска константа $K_v = 50$
3. Пропусниот опсег на компензираниот систем мора да биде еднаков или не многу поголем од пропусниот опсег на некомпензираниот систем
4. Доминантната временска константа на компензираниот систем мора да остане приближно еднаква со доминантната временска константа на некомпензираниот систем

ако преносната функција на соодветниот отворен систем е од облик:

$$G_0(s) = \frac{2000}{s(s+5)(s+10)} \quad (3.192)$$

Решение: Со едноставни пресметки може да се утврди дека некомпензираниот систем е нестабилен (на пример, со примена на Рут-Шуровиот критериум за испитување на стабилноста на еден линеарен стационарен континуален динамички систем). Следствено, компензацијата на зададениот систем е неопходна.

Брзинската константа на некомпензираниот систем е:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2000}{s(s+5)(s+10)} = 40 \quad (3.193)$$

па вториот услов од задачата може да се оствари ако во директната гранка од системот се додаде засилување од $\frac{5}{4}$, така што засилувањето на компензираниот отворен систем би било 2500. Меѓутоа, зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем води кон дополнително зголемување на нестабилноста на затворениот систем. Оттука, потребна е дополнителна компензација со некој вид компензатор. Со оглед на третиот услов од задачата, примената на диференцијален компензатор најверојатно е несоодветна, додека примената на интегрирачки компензатор е несоодветна заради последното проектно барање. Оттука, поставените проектни барања (односно поставените услови на синтеза) можат да се реализираат само со сериска компензација со помош на интегро-диференцирачки компензатор. Интегрирачкиот дел од компензаторот ќе обезбеди задоволување на третото проектно барање, додека диференцирачкиот дел од компензаторот ќе обезбеди исполнување на првото и четвртото проектно барање. Вториот услов од задачата се реализира со нагудување на коефициентот на засилување на отворениот систем, како што беше дискутирано погоре.

3.30. Да се изврши компензација на дадениот отворен дискретен систем со преносна функција:

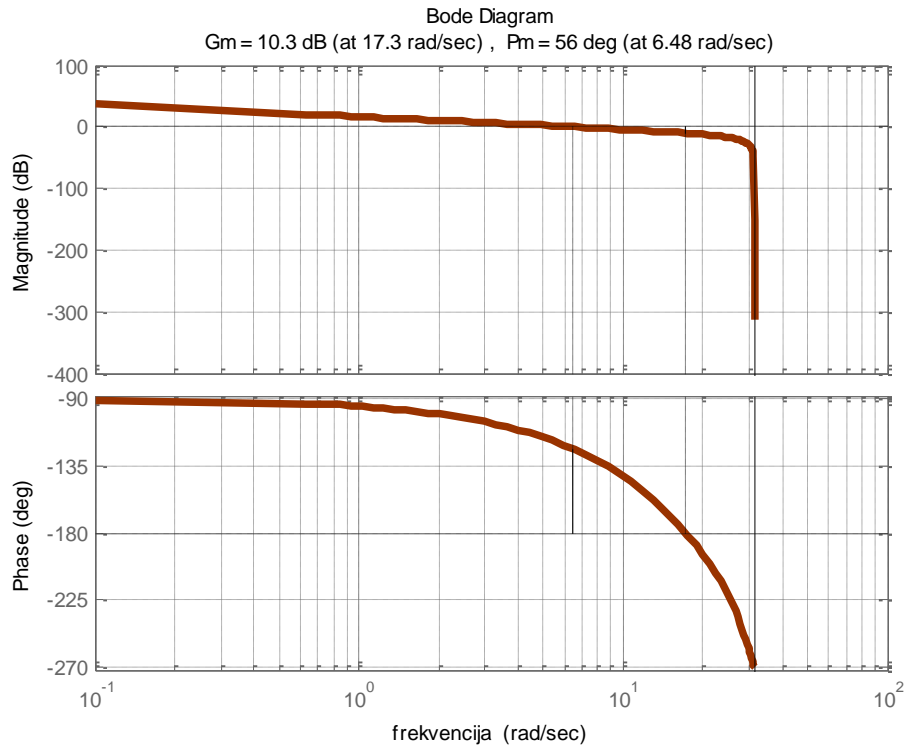
$$G_0(z) = K \cdot \frac{(z+1)(z+1/3)}{z(z+1/2)}; \quad K = \frac{3}{8}; \quad T_0 = 0.1 \text{ sec} \quad (3.194)$$

така што компензираниот затворен дискретен систем ќе има: а) стационарна грешка за единичен линеарно растечки влез не поголема од 0.02, б) резерва на фаза од најмалку 30° и в) пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 \geq 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

Решение: Отворениот систем на зададениот затворен систем има астатизам од нулти ред, односно нема полови во точката $z = 1$. Следствено, некомпензираниот затворен систем не е во состојба да следи линеарно растечки влез. Неговата стационарна грешка за ваква влезна возбуда е бесконечно голема. Оттаму, компензаторот мора да обезбеди дополнителен пол на отворениот систем во точката $z = 1$, па преносната функција на вака компензираниот отворен систем ќе биде:

$$G_{01}(z) = \frac{3}{8} \cdot \frac{(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)} \quad (3.195)$$

Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на компензираниот отворен систем $G_{01}(z)$ се прикажани на Слика 3.57.



Слика 3.57. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза за системот $G_{01}(z)$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

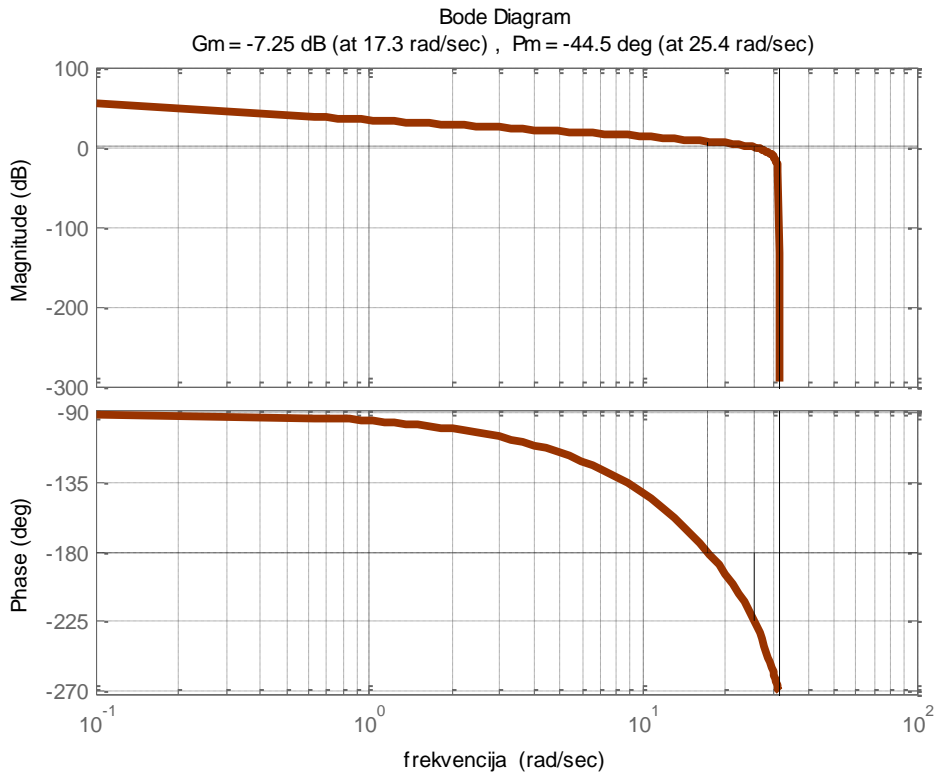
Стационарната грешка на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција $G_{01}(z)$ е:

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_{01}(z)} = 0.15 \quad (3.196)$$

и за да таа се намали на вредност 0.02, коефициентот на засилување на отворениот систем треба да се зголеми 7.5 пати или за 17.5dB. Од Бодевите дијаграми на Слика 3.57 се гледа дека пресечната фреквенција на засилување на проектираниот систем, во кој нема компензација на засилувањето на отворениот систем, изнесува $\omega_1 = 6.48 \frac{rad}{sec}$,

додека неговата резерва на фаза изнесува 56^0 . По компензацијата на засилувањето на отворениот систем односно неговото зголемување за 7.5 пати, пресечната фреквенција на засилување ќе се зголеми на вредност $\omega_1 = 25.4 \frac{rad}{sec}$, а резервата на фаза ќе стане

негативна и еднаква на -44.5^0 , Слика 3.58. Оттука, компензацијата на засилувањето на отворениот систем не е соодветниот избор за синтеза на набљудуваниот затворен систем, бидејќи го дестабилизира системот.



Слика 3.58. Бодевите дијаграми на отворениот систем $G_{01}(z)$ со компензирано засилување $K_1 = 7.5K$

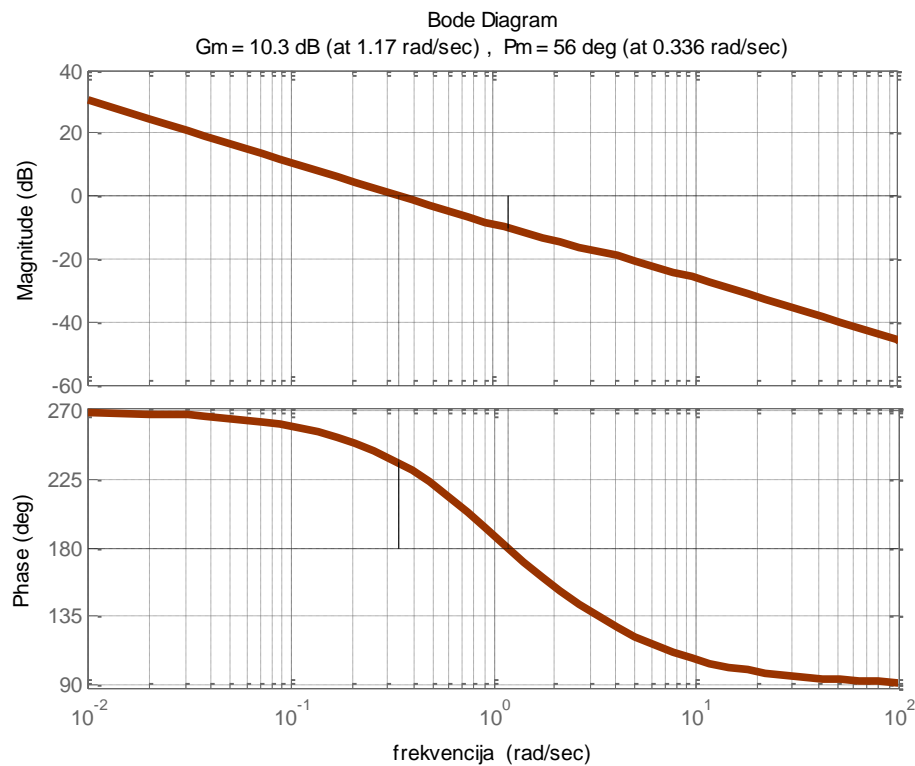
СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

За да се изврши синтеза на набљудуваниот затворен систем според поставените проектни барања, со смената $z = \frac{1+w}{1-w}$ се врши пресликување на преносната функција

$G_{01}(z)$ од z - во w -комплексната рамнина:

$$G_{01}(w) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-w) \left(1 + \frac{w}{2}\right)}{w(1+w) \left(1 + \frac{w}{3}\right)} \quad (3.197)$$

Бодеовите дијаграми на системот $G_{01}(w)$ се прикажани на Слика 3.59.



Слика 3.59. Бодеови дијаграми на слабеење и фаза за системот $G_{01}(w)$

Проектното барање за пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 \geq 10 \frac{rad}{sec}$, во w -комплексната рамнина гласи:

$$\omega_{w1} = tg \frac{\omega_1 T_0}{2} \geq tg \frac{1}{2} = 0.55 \frac{rad}{sec} \quad (3.198)$$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

додека од Бодеовиот дијаграм на слабеење на Слика 3.59 се гледа дека пресечната фреквенција на засилување на проектираниот систем е $\omega_{w1} = \operatorname{tg} \frac{0.648}{2} = 0.336 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{sec}}$. Следствено, пресечната фреквенција на засилување на проектираниот систем да се зголеми од вредноста $\omega_{w1} = 0.336 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{sec}}$ на вредноста $\omega_{w1} = 0.55 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{sec}}$, потребно е коефициентот на засилување на отворениот систем да се зголеми за околу $4.3\operatorname{dB}$. Од друга страна, проектните барања пресечната фреквенција на засилување да изнесува најмалку $0.55 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{sec}}$ и фазата на отворениот систем при оваа фреквенција да биде $\leq -150^\circ$, имплицираат дека при фреквенцијата $\omega_{w1} = 0.55 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{sec}}$ во проектираниот

систем може да се внесе фазно доцнење од најмногу 6.5° . Тоа може да се постигне со помош на еден интегрирачки компензатор, кај кој односот нула/пол е $\frac{b}{a} = 5$. Односот $\frac{b}{a} = 5$ обезбедува придрушување од приближно $14\operatorname{dB}$ при високи фреквенции, па ако коефициентот на засилување на отворениот систем се зголеми за околу $18.3\operatorname{dB}$, резултантното засилување при новата пресечна фреквенција $\omega_{w1} = 0.55 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{sec}}$ ќе изнесува приближно $4.3\operatorname{dB}$. Од друга страна, ваквото засилување го задоволува барањето за големината на стационарната грешка.

Параметарот a на компензаторот се одбира така да биде задоволено проектното барање во однос на резервата на фаза. Од условот фазното доцнење што го внесува компензаторот да не може да биде поголемо од 6.5° при фреквенција $\omega_{w1} = 0.55 \frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{sec}}$ следува:

$$\begin{aligned} \arg[G_i(j\omega_{w1})] &= -6.5^\circ = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{w1}T}{b} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_{w1}T}{a} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{0.55}{5a} - \operatorname{arctg} \frac{0.55}{a} \Rightarrow a = 0.0157 \end{aligned} \quad (3.199)$$

Од сите решенија за a се одбира најмалото, односно она кое е најблиску до имагинарната оска. Така, ако во конкретниот случај се усвои $a = 0.015$, фазното доцнење на интегрирачкиот компензатор ќе биде 6.2° и неговата преносна функција ќе гласи:

$$G_i(w) = \frac{0.015}{0.075} \cdot \frac{w + 0.075}{w + 0.015} \quad (3.200)$$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

Со смената $w = \frac{z-1}{z+1}$, компензаторот $G_i(w)$ се трансформира назад во z -комплексната рамнина, каде што неговата преносна функција ќе гласи:

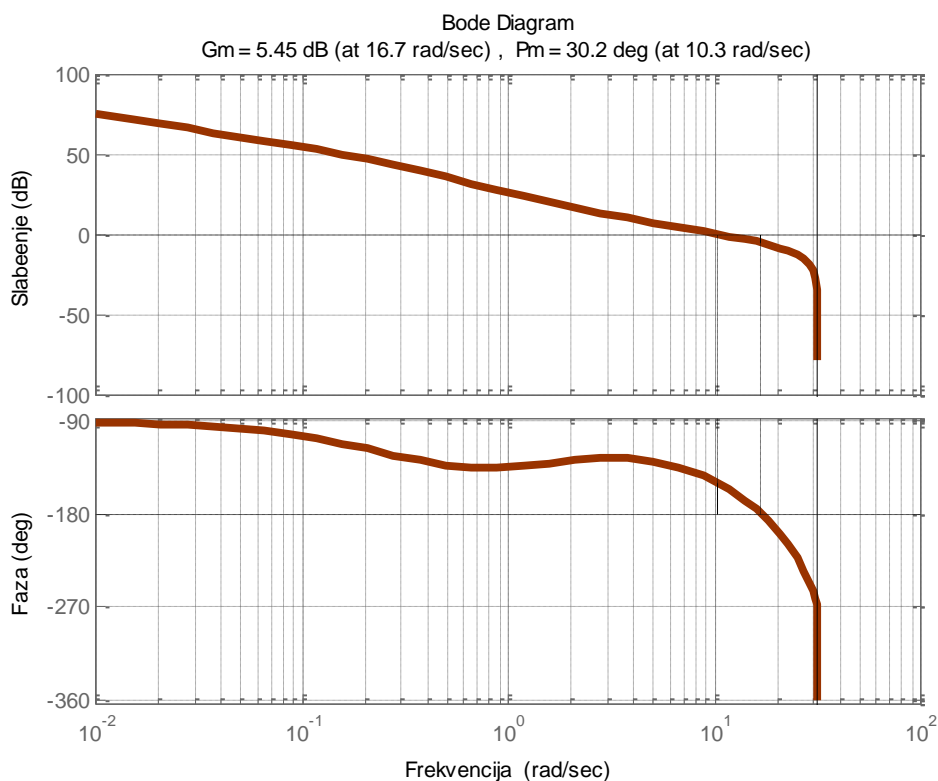
$$G_i(z) = 0.21182 \cdot \frac{z - 0.86046}{z - 0.97044} \quad (3.201)$$

Кога кон преносната функција (3.201) се додаде и полот во $z=1$ и засилувањето од $18.3dB$ (фактор од 8.22), таа го добива дефинитивниот облик:

$$G_i(z) = 1.7417 \cdot \frac{z - 0.86046}{(z-1)(z-0.97044)} \quad (3.202)$$

На Слика 3.59 се прикажани Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем $G_0(z)$ по компензацијата со интегралниот компензатор $G_i(z)$, од каде се гледа дека проектираниот систем ги задоволува проектните барања 2) и 3). Тој го задоволува и проектното барање 1), бидејќи:

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \frac{T_0}{K_v} = 0.018 \quad (3.203)$$



Слика 3.60. Бодевите дијаграми на отворениот систем $G_0(z)$ компензиран со И- компензаторот $G_i(z)$

3.31. Како може да се стабилизира затворениот линеарен стационарен дискретен динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{1}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad (3.204)$$

Решение: Затворениот линеарен стационарен дискретен динамички систем е нестабилен, што лесно може да се провери со некој од критериумите за испитување на стабилноста. Имено, карактеристичниот полином на затворениот систем е:

$$a(z) = 2z^2 - 3z + 3 = a_0z^2 + a_1z + a_2 \quad (3.205)$$

и тој не ги задоволува условите за стабилност според методот на билинеарната трансформација:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &> 0 \\ a_0 - a_2 &> 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 &> 0 \end{aligned} \quad (3.206)$$

Бидејќи затворениот линеарен стационарен дискретен динамички систем со отворен систем од општ облик:

$$G_0(z) = \frac{K}{(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \quad (3.207)$$

е нестабилен за секое $K \geq \frac{1}{2}$, следува дека набљудуваниот затворен систем може да се стабилизира преку нагодување на коефициентот на засилување $K=1$ на соодветниот отворен систем и тоа така што вредноста на овој коефициент ќе се намали за фактор помал од $\frac{1}{2}$. Така, на пример, ако $K=1$ се намали за четири пати, карактеристичниот полином на компензираниот систем ќе биде:

$$\tilde{a}(z) = 4z^2 - 6z + 3 \quad (3.208)$$

и очигледно:

$$4 - 6 + 3 > 0$$

$$\begin{aligned} 4 - 3 &> 0 \\ 4 + 6 + 3 &> 0 \end{aligned} \quad (3.209)$$

3.32. Даден е затворениот САУ како на Слика 3.20. Објектот на управување е опишан со преносната функција:

$$P(s) = \frac{5}{s(s+1)(0.4s+1)} \quad (3.210)$$

Кој од подолу наведените интегрални компензатори $R(s)$ ќе обезбеди резерва на фаза од 30^0 ?

$$R(s) = \frac{1+s}{1+106s} \quad (3.211)$$

$$R(s) = \frac{1+106s}{1+118s} \quad (3.212)$$

$$R(s) = \frac{1+26s}{1+115s} \quad (3.213)$$

Решение: За да се одговори на прашањето, најнапред треба да се определи резервата на фаза на некомпензираниот систем. Фреквентната преносна функција на некомпензираниот објект $P(s)$ изнесува:

$$P(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+j\omega)(1+j0.4\omega)} \quad (3.214)$$

Пресечната фреквенција на засилување на некомпензираниот систем се добива од условот:

$$\begin{aligned} |P(j\omega)| &= \left| \frac{5}{j\omega(1+j\omega)(1+j0.4\omega)} \right| = \\ &= \frac{|5|}{|j\omega||1+j\omega||1+j0.4\omega|} = \frac{5}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.16\omega^2}} = 1 \end{aligned} \quad (3.215)$$

и таа изнесува $\omega_1 = 1.8784 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Слествено, некомпензираниот систем има резерва на фаза:

$$\varphi_{rf} = 180^0 + \arg[P(j\omega_1)] = 180^0 - 90^0 - \arctg(\omega_1) - \arctg(0.4\omega_1) = -8.89^0 \quad (3.216)$$

Како што може да се забележи, некомпензираниот систем има негативна резерва на фаза, што значи дека е нестабилен. Од друга страна, интегралниот компензатор секогаш внесува негативно фазно поместување, што значи дека со примена на интегрален компензатор не може да се стабилизира набљудуваниот затворен систем. Оттаму, ниеден од наведените И- компензатори не е во состојба да обезбеди компензираниот систем да има резерва на фаза од 30^0 .

3.33. Проектните барања при синтезата на затворен САУ со единична негативна повратна врска како на Слика 3.20, и објект на управување:

$$P(s) = \frac{1000}{(s+8)(s+14)(s+20)} \quad (3.217)$$

се: 1) максимален прескок $M_p \leq 5\%$, 2) време на пораст $T_p \leq 30\text{sec}$ и стационарна грешка за отскочен влез $K_p \geq 6$. Кој од долу наведените компензатори ги остварува поставените услови? Во системот, под претпоставка, е употребен интегрален компензатор.

$$R_1(s) = \frac{s+0.074}{s+1} \quad (3.218)$$

$$R_2(s) = \frac{s+1}{s+0.074} \quad (3.219)$$

$$R_3(s) = 20 \quad (3.220)$$

$$R_4(s) = \frac{20s+1}{100s+1} \quad (3.221)$$

Решение: Бидејќи нулата на интегралниот компензатор мора да се наоѓа во левата полурамнина од s – комплексната рамнина подалеку од имагинарната оска во однос на неговиот пол, следува дека $R_1(s)$ и $R_3(s)$ не претставуваат интегрални компензатори. Навистина, $R_1(s)$ е диференцијален компензатор, додека $R_3(s)$ е обичен засилувач. Останува да се проверат компензаторите $R_2(s)$ и $R_4(s)$, кои се интегрални компензатори. Константата на положба на компензираниот систем со компензаторот $R_4(s)$ е:

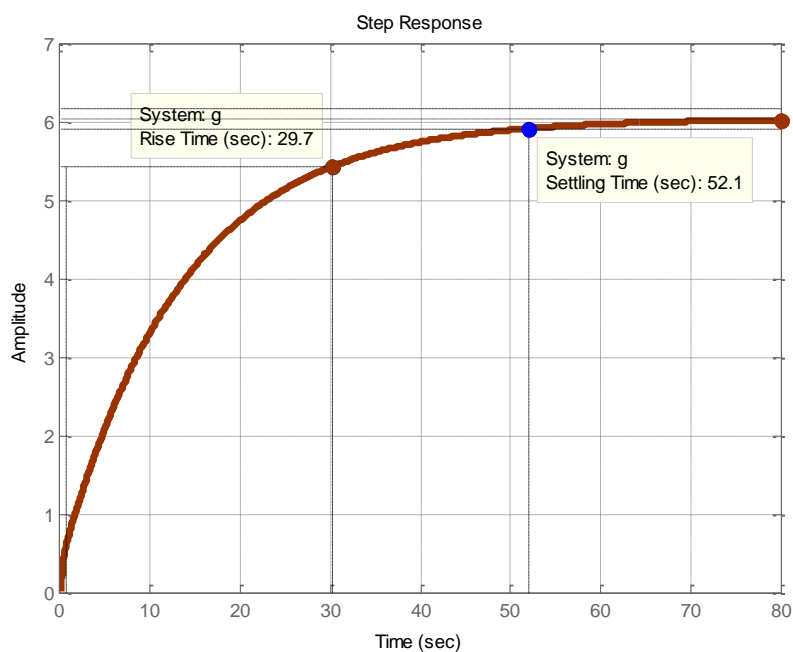
$$\begin{aligned} K_{p4} &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{04}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} P(s)R_4(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1000}{(s+8)(s+14)(s+20)} \cdot \frac{20s+1}{100s+1} = P(0)R_4(0) = \frac{1000}{8 \cdot 14 \cdot 20} \cdot 1 = \frac{25}{56} = 0.4464 \end{aligned} \quad (3.222)$$

СИНТЕЗА СО КОМПЕНЗАЦИЈА И КОМПЕНЗАТОРИ

додека константата на положба на компензириот систем со компензаторот $R_2(s)$ е поголема за факторот 13.5135:

$$\begin{aligned} K_{p2} &= \lim_{s \rightarrow 0} G_{02}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} P(s)R_2(s) = \\ &= P(0)R_2(0) = \frac{1000}{8 \cdot 14 \cdot 20 \cdot 0.074} = \frac{25}{56} (13.5135) = 6.0328 \end{aligned} \quad (3.223)$$

На долната слика е прикажан отскочниот одсив на проектираниот затворен систем со компензаторот $R_2(s)$, од каде се гледа дека тој има време на пораст $T_r = 29.7 \text{ sec.}$ и нема прескок.



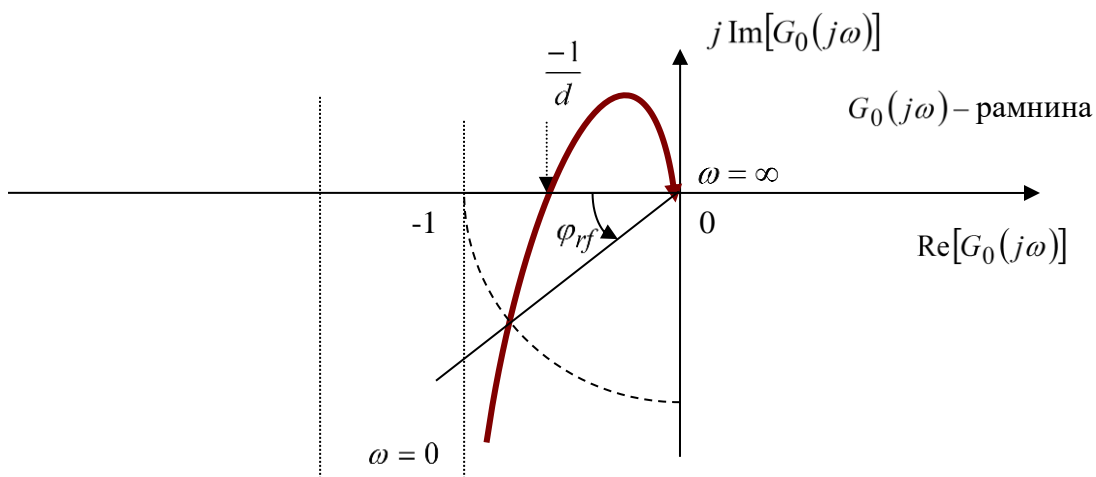
Слика 3.61. Отскочен одсив на проектираниот затворен систем од Задачата 3.33

4. ФРЕКВЕНТНА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИТЕ САУ СО ПОМОШ НА НАЈКВИСТОВАТА КРИВА

Фреквентната синтеза со помош на Најквистовата крива се врши на ист начин како и кај другите фреквентни постапки: во директната или повратната гранка од набљудуваниот систем се внесуваат соодветни компензатори кои значително го менуваат поведението на некомпензираниот систем. Преку избор на параметрите на тие компензатори се менува фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем (Најквистовата крива) сè додека не се реализираат поставените проектни барања. Синтезата се врши со постапката на проба и грешка, што значи дека се повторува сè додека не се постигне саканото поведење на компензираниот систем.

Со помош на Најквистовата крива се дефинирани два показатели на стабилноста на еден затворен систем – резервата на засилување и резервата на фаза. Системите кои имаат поголеми резерви на стабилност, можат да издржат поголеми промени на своите параметри пред да станат нестабилни. На одреден начин може да се воспостави врска помеѓу показателите на стабилност и половите на еден затворен систем. Имено, системите чии полови се наоѓаат подалеку од имагинарната оска, имаат поголем степен на стабилност.

Резервата на засилување и резервата на фаза можат да се определат графички од Најквистовата крива на следниот начин. Нека на Слика 4.1 е прикажана фреквентната карактеристика односно Најквистовата крива на отворениот систем за некој затворен систем. Нека, под претпоставка, отворениот систем нема полови во десната полурамнина од s – комплексната рамнина. Тогаш, набљудуваниот затворен систем ќе биде стабилен, доколку фреквентната карактеристика на отворениот систем не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$, како што е прикажано на Слика 4.1. Оддалеченоста



Слика 4.1. Фреквентна карактеристика на отворен систем

на точката $-1/d$, во која фреквентната карактеристика на отворениот систем ја сече реалната оска, од критичната точка $(-1, j0)$, одредува колку е блиску затворениот систем до тоа да стане нестабилен. Така, ако фреквентната преносна функција на отворениот систем се помножи со d , неговата фреквентна карактеристика ќе помине низ критичната точка $(-1, j0)$. Затоа за d се вели дека е резерва на засилување на набљудуваниот систем и најчесто се изразува во децибели, $20 \log_{10} d$. Може да се забележи дека d е реципрочната вредност од растојанието на точката $\left(-\frac{1}{d}, j0\right)$ до имагинарната оска.

Ако низ точката $(-1, j0)$ се нацрта круг со центар во координатниот почеток $(0, j0)$, неговиот пресек со фреквентната карактеристика на отворениот систем претставува точка во која амплитудата на фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ има вредност 1. Тогаш аголот φ_{rf} што го зафаќа векторот $G_0(j\omega)$ што минува низ оваа точка со негативниот дел од реалната оска покажува колку затворениот систем е блиску до тоа да стане нестабилен. Имено, со промена на фазата на отворениот систем за φ_{rf} степени, неговата фреквентна карактеристика ќе помине низ критичната точка $(-1, j0)$ и затворениот систем ќе се најде на границата на стабилност. Затоа φ_{rf} се нарекува резерва на фаза. Помеѓу резервата на фаза φ_{rf} и факторот на релативно придушување ζ постои одредена врска за која ќе стане збор во продолжение.

4.1. Со помош на Најквистовата крива, да се определат резервите на засилување и фаза на затворениот систем на автоматско управување, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{2}{s+1} \quad (4.1)$$

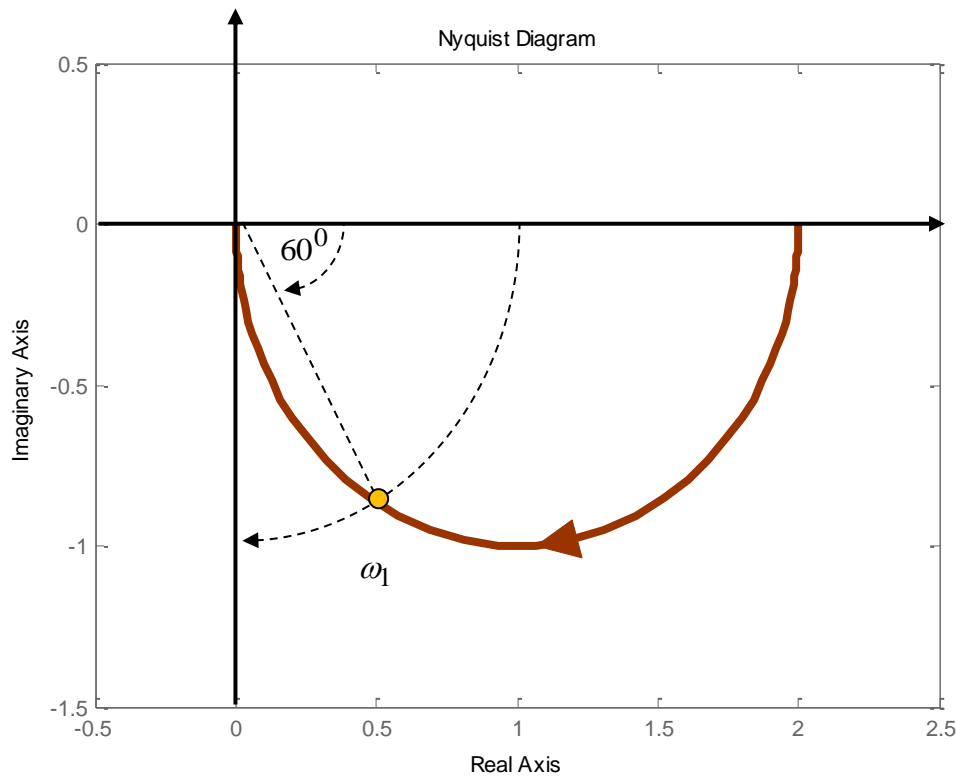
Решение: На Слика 4.2 е прикажана фреквентната карактеристика на отворениот систем (4.1). Пресечната фреквенција на засилување ω_1 е онаа фреквенција што одговара на пресечната точка од Најквистовата крива и кружницата со радиус еднаков на единица и центар во точката $(0,0)$. Резервата на фаза е еднаква на разликата помеѓу 180^0 и аголот кој правата повлечена низ оваа точка и координатниот почеток го зафаќа со негативниот дел од реалната оска. Оттука:

$$\varphi_{rf} = 180^0 + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^0 - 60^0 = 120^0 \quad (4.2)$$

Пресечната фреквенција на фаза ω_π е онаа фреквенција, при која Најквистовата крива ја сече хоризонталната оска и од дијаграмот на Слика 4.2 се гледа дека тоа е

фреквенцијата $\omega_\pi = \infty$. За оваа фреквенција модулот на фреквентната преносна функција на отворениот систем изнесува 0, бидејќи Најквистовата крива минува низ координатниот почеток. Оттука:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{0} = \infty \quad (4.3)$$

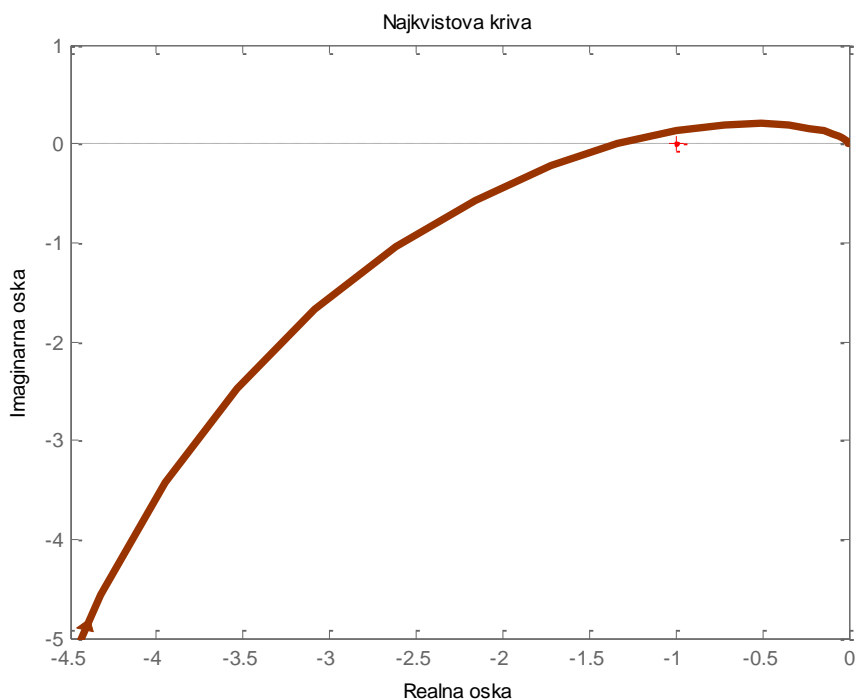


Слика 4.2. Илустрација кон Задача 4.1

4.2. Да се определат резервите на засилување и фаза на затворениот систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)\left(s + \frac{1}{2}\right)} \quad (4.4)$$

Решение: Бараните показатели на резервата на стабилност на затворениот систем од задачата можат да се определат по графички пат од Најквистовата крива на соодветниот отворен систем (4.4), како во претходната задача. Оваа фреквентна карактеристика е прикажана на Слика 4.3. Меѓутоа, тие можат да се пресметаат и по аналитички пат, како што е покажано во продолжение.



Слика 4.3. Најквистова крива на отворениот систем од Задача 4.2

Фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ на отворениот систем $G_0(s)$ е дадена со изразот:

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)} \quad (4.5)$$

додека нејзиниот модул $|G_0(j\omega)|$ и аргумент $\arg[G_0(j\omega)]$ се:

$$|G_0(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{\frac{1}{4}+\omega^2}} \quad (4.6)$$

$$\arg[G_0(j\omega)] = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega - \arctg 2\omega \quad (4.7)$$

Оттука, и врз основа на соодветната дефиниција, за пресечната фреквенција на фаза ω_π се добива:

$$\begin{aligned} \arg[G_0(j\omega_\pi)] &= -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega_\pi - \arctg 2\omega_\pi = -\pi \Rightarrow \arctg \frac{3\omega_\pi}{1-2\omega_\pi^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3\omega_\pi}{1-2\omega_\pi^2} &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty \Rightarrow 1-2\omega_\pi^2 = 0 \Rightarrow \omega_\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

додека за пресечната фреквенција на засилување ω_1 следува:

$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{1}{\omega_1 \sqrt{1+\omega_1^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \omega_1^2}} = 1 \Rightarrow \omega_1 = 0.82 \quad (4.9)$$

Во согласност со дефиницијата, резервата на засилување е реципрочната вредност од модулот на фреквентната преносна функција (4.5) при пресечната фреквенција на фаза (4.8) и таа изнесува:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{\left|G_0\left(j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \quad (4.10)$$

додека резервата на фаза е еднаква со аргументот на фреквентната преносна функција (4.5) при пресечната фреквенција на засилување (4.9) зголемен за 180° :

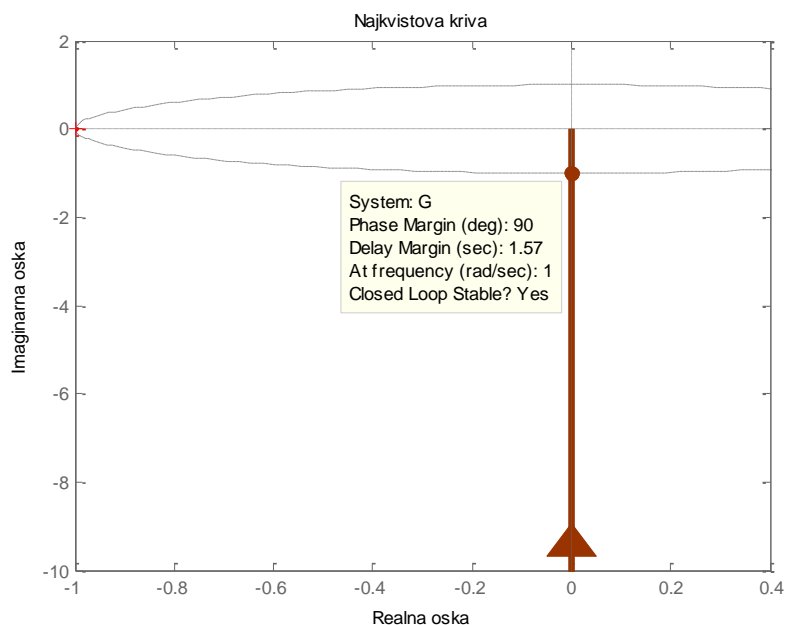
$$\begin{aligned} \varphi_{rf} &= 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^\circ - 90^\circ - \arctg(0.82) - \arctg(1.64) = \\ &= 180^\circ - 187.8^\circ = -7.8^\circ \end{aligned} \quad (4.11)$$

Негативната резерва на фаза значи дека затворениот систем не е стабилен.

4.3. Да се определат резервите на засилување и фаза на затворениот систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{1}{s} \quad (4.12)$$

Решение: Фреквентната карактеристика на отворениот систем $G_0(s)$ е прикажана на Слика 4.4. Таа никогаш не ја сече реалната оска. Следствено, резервата на засилување за набљудуваниот систем не е дефинирана. Резервата на фаза изнесува $\varphi_{rf} = 90^\circ$. Затворениот систем е стабилен.



Слика 4.4. Најквистова крива на отворениот систем од Задача 4.3

4.4. Да се определат резервите на засилување и фаза на затворениот систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{6}{(s^2 + 2s + 2)(s + 2)} \quad (4.13)$$

Решение: Фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ на отворениот систем $G_0(s)$ е дадена со изразот:

$$G_0(j\omega) = \frac{24(1 - \omega^2) - j6\omega(6 - \omega^2)}{16(1 - \omega^2)^2 + \omega^2(6 - \omega^2)^2} \quad (4.14)$$

Пресечната фреквенција на фаза ω_π е онаа фреквенција, при која фреквентната карактеристика на отворениот систем ја сече реалната оска. Оттука:

$$\text{Im}[G_0(j\omega_\pi)] = \frac{-6\omega_\pi(6 - \omega_\pi^2)}{16(1 - \omega_\pi^2)^2 + \omega_\pi^2(6 - \omega_\pi^2)^2} = 0 \Rightarrow \omega_\pi = \sqrt{6} \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (4.15)$$

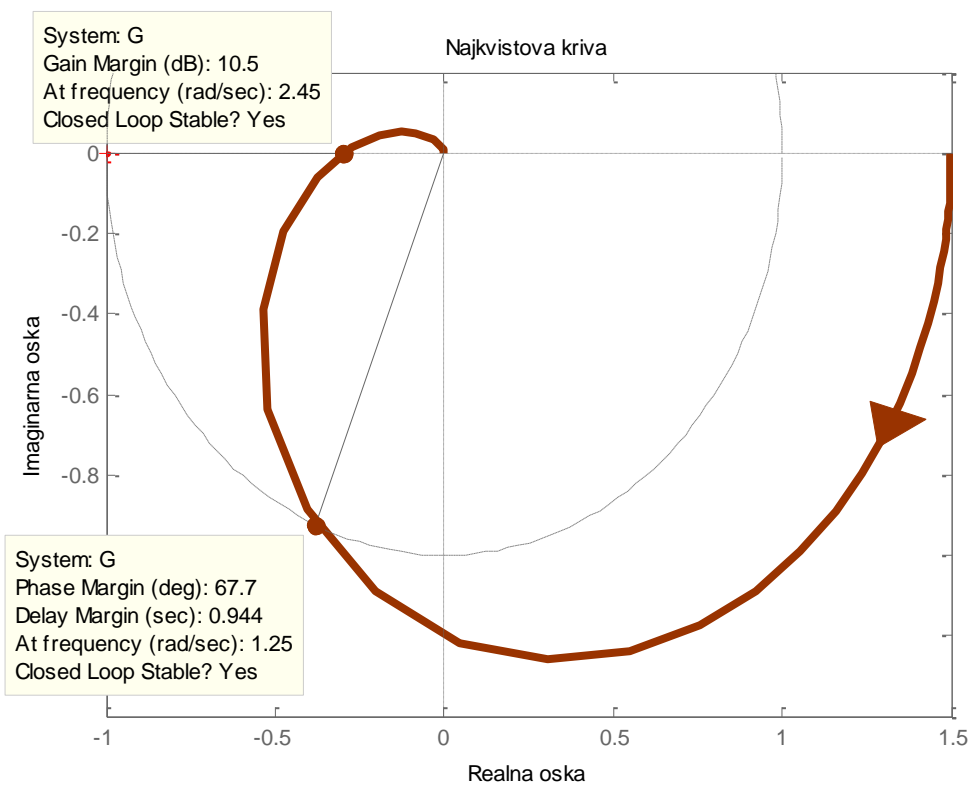
За оваа фреквенција:

$$\operatorname{Re}[G_0(j\omega_\pi)] = \frac{24(1 - \omega_\pi^2)}{16(1 - \omega_\pi^2)^2 + \omega_\pi^2(6 - \omega_\pi^2)^2} = \frac{24(1 - 6)}{16(1 - 6)^2 + 6(6 - 6)^2} = -0.3 \quad (4.16)$$

Следствено:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{|G_0(j\sqrt{6})|} = \frac{1}{0.3} = 3.33 \quad (4.17)$$

Од друга страна, $\omega_1 = 1.253 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ и $\arg[G_0(j\omega_1)] = -112.3^\circ$, па, $\varphi_{rf} = 67.7^\circ$.

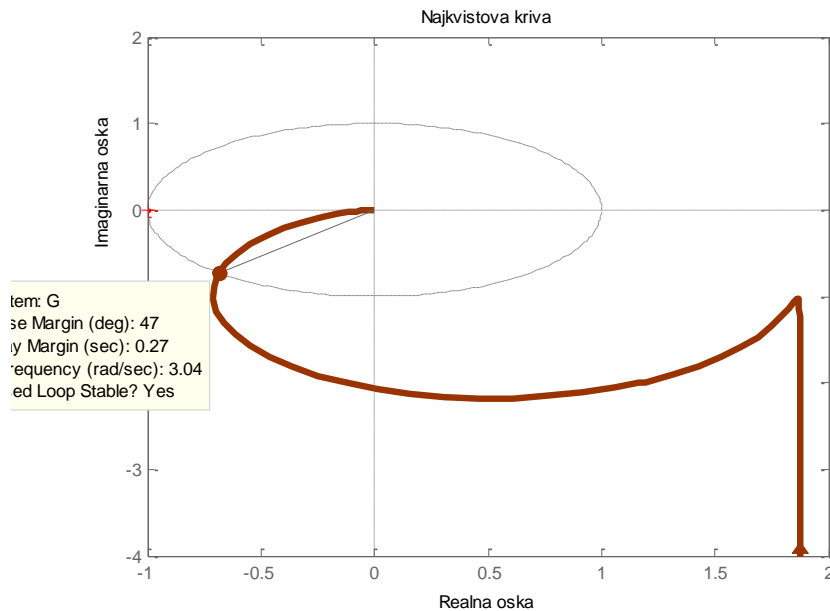


Слика 4.5. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.13)

4.5. Да се определат резервите на засилување и фаза на затворениот систем од Слика 4.6, ако отворениот систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{8s + 1}{s(s^2 + 2s + 4)} \quad (4.18)$$

Решение: $d = \infty \text{dB}$, $\varphi_{rf} = 47^\circ$

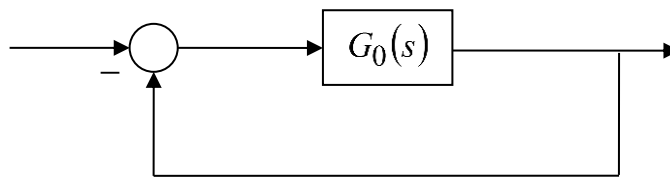


Слика 4.6. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.18)

4.6. Нека соодветниот отворен систем за затворениот систем со структурна блок -шема како на Слика 4.7 е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)^2} \tag{4.19}$$

Да се определи резервата на засилување на затворениот систем.

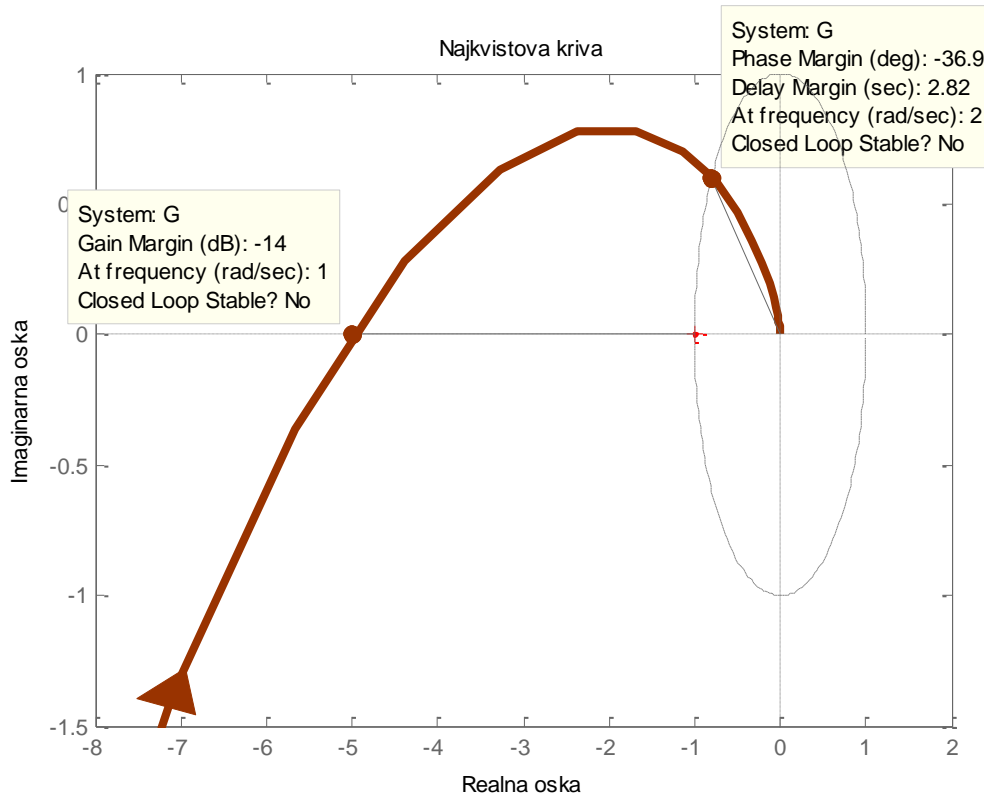


Слика 4.7. Илустрација кон Задача 4.6

Решение: Фреквентната преносна функција на отворениот систем (4.19) е:

$$G_0(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)^2} = \frac{-20}{1+2\omega^2+\omega^4} + j \frac{10(\omega^2-1)}{\omega(1+2\omega^2+\omega^4)} \tag{4.20}$$

а соодветната фреквентна карактеристика е прикажана на Слика 4.8. За $\omega = 0$ таа има асимптота во точката $U_0 = -20$ и завршува во вториот квадрант во координатниот почеток.



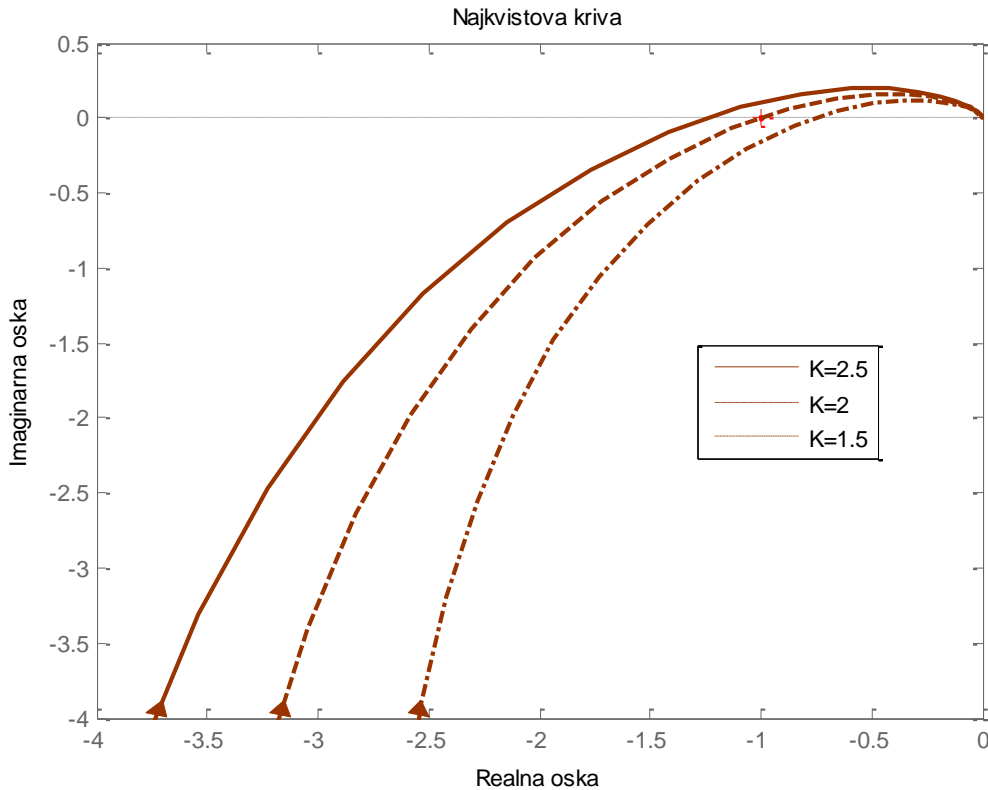
Слика 4.8. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.19)

Фреквентната карактеристика од Слика 4.8 има само еден пресек со координатните оски во $G_0(j\omega)$ -рамнината и тоа со реалната оска. Пресекот се одредува од условот

$$V_0(\omega) = \text{Im}[G_0(j\omega)] = 0 \text{ и настапува при фреквенција } \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \text{ кога :}$$

$$U_0(1) = \text{Re}[G_0(j1)] = -5 \tag{4.21}$$

Бидејќи $-5 < -1$, фреквентната карактеристика ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$, па набљудуваниот затворен систем не е стабилен. Еден начин тој да се направи стабилен е преку компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем $K = 10$. На Слика 4.9 се прикажани фреквентните карактеристики на отворениот систем (4.19) за три различни вредности на коефициентот на засилување K : $K = 2.5$, $K = 2$ и $K = 1.5$. За $K = 2.5$ затворениот систем е нестабилен, за $K = 2$ затворениот систем е на границата на стабилност и за $K = 1.5$ тој е стабилен.



Слика 4.9. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.19) за $K = 2.5$, $K = 2$ и $K = 1.5$

4.7. Нека соодветниот отворен систем за затворениот систем со структурна блок -шема како на Слика 4.7 е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (4.22)$$

Да се анализира стабилноста на затворениот систем во функција од коефициентот на засилување на отворениот систем K .

Решение: Фреквентната преносна функција на отворениот систем (4.22) е:

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)} = \\ &= \frac{-K(T_1 + T_2)}{1 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2} + j \frac{K(\omega^2 T_1 T_2 - 1)}{\omega[1 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2]} \end{aligned} \quad (4.23)$$

а соодветната фреквентна карактеристика квалитативно е прикажана на Слика 4.10. За $\omega = 0$ таа има асимптота во точката $U_0 = -K(T_1 + T_2)$ и завршува во вториот квадрант во координатниот почеток. Фреквентната карактеристика од Слика 4.10 има само еден пресек со координатните оски во $G_0(j\omega)$ -рамнината и тоа со реалната оска. Пресекот се одредува од условот $V_0(\omega) = \text{Im}[G_0(j\omega)] = 0$ и настапува при фреквенција $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$

, кога :

$$U_0\left(\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right) = \text{Re}\left[G_0\left(j\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)\right] = \frac{-KT_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad (4.24)$$

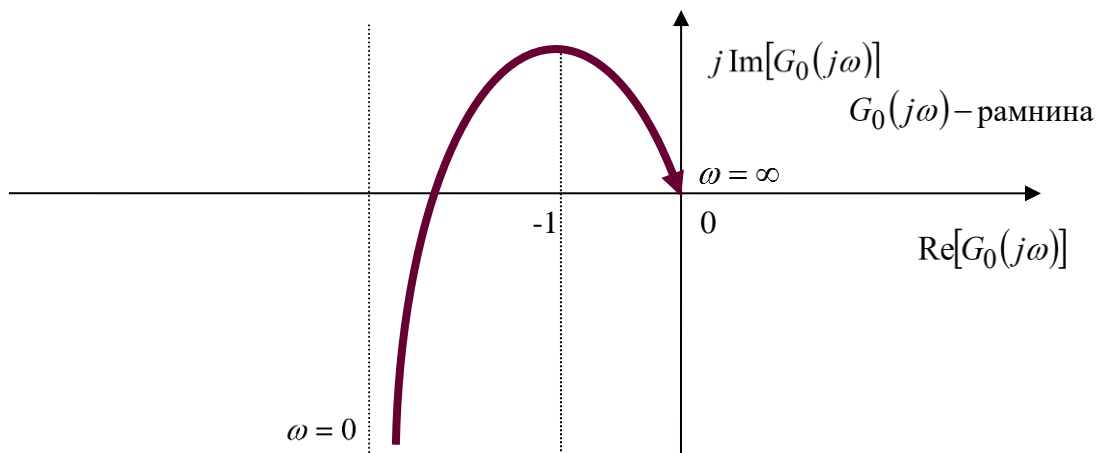
Следствено, набљудуваниот затворен систем ќе биде стабилен доколку:

$$\frac{-KT_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1 \quad (4.25)$$

односно:

$$K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \quad (4.26)$$

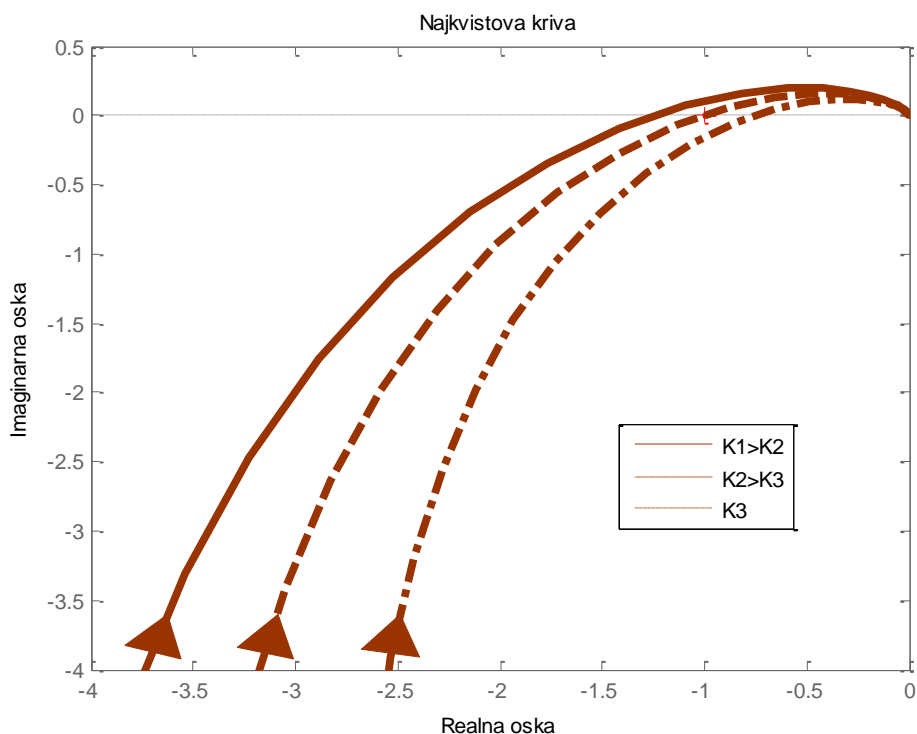
Во специјален случај кога $T_1 = T_2 = 1$, условот (4.26) се сведува на $K < 2$.



Слика 4.10. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.22)

На Слика 4.11 се прикажани фреквентните карактеристики на отворениот систем (4.22) за три различни вредности на коефициентот на засилување K : $K_1 > K_2 > K_3$. За K_1

затворениот систем е нестабилен, за K_2 затворениот систем е на границата на стабилност и за K_3 тој е стабилен.



Слика 4.11. Фреквентни карактеристики на отворениот систем (4.22) за $K_1 > K_2 > K_3$

Како што може да се забележи од Слика 4.11, со намалување на коефициентот на засилување на отворениот систем, неговата фреквентна карактеристика при ниските фреквенции се свиткува кон имагинарната оска, додека во подрачјето на високите фреквенции останува практично непроменета.

По дефиниција, резервата на засилување на затворениот систем од задачата е:

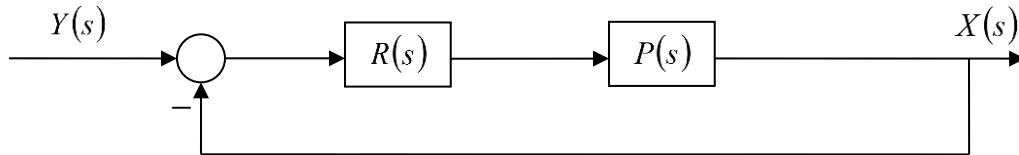
$$\frac{1}{d} = \frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|} = \frac{1}{\left| G_0 \left(j \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \right) \right|} = \frac{T_1 + T_2}{K T_1 T_2} \quad (4.27)$$

и таа може да се искаже во децибели:

$$20 \log \frac{1}{d} = -20 \log d = -20 \log \frac{K T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad (4.28)$$

За специјалниот случај кога $T_1 = T_2 = 1$ и, на пример, $K = 0.5$, резервата на засилување на затворениот систем изнесува $\frac{1}{d} = 4$ или $20 \log 4 = 12dB$. Резервата на засилување од $12dB$ значи дека засилувањето на отворениот систем може да се зголеми до 4 пати (или за $12dB$) пред затворениот систем да се најде на границата од стабилност.

4.8. Даден е затворениот континуален систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска од Слика 4.12.



Слика 4.12. Илустрација кон Задача 4.8

Преносната функција на објектот е:

$$P(s) = \frac{1}{(0.2s + 1)(0.5s + 1)} \quad (4.29)$$

а регулаторот е опишан со преносната функција:

$$R(s) = \frac{s + 0.04}{s + 1} \quad (4.30)$$

Со помош на Најквистовиот критериум, да се испита стабилноста на овој систем.

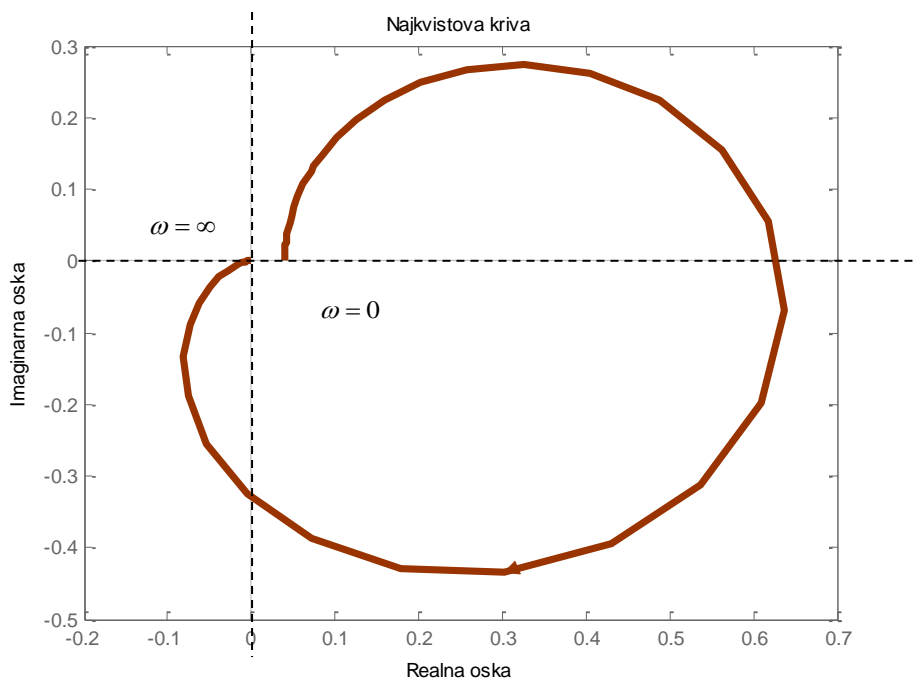
Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е дадена со изразот:

$$G_0(s) = P(s)R(s) = \frac{(s + 0.04)}{(0.2s + 1)(0.5s + 1)(s + 1)} \quad (4.31)$$

Неговата фреквентна карактеристика претставува графички приказ на фреквентната преносна функција:

$$G_0(j\omega) = \frac{(0.04 + j\omega)}{(1 + j0.2\omega)(1 + j0.5\omega)(1 + j\omega)} \quad (4.32)$$

и истата е прикажана Слика 4.13.



Слика 4.13. Најквистова крива на соодветниот отворен систем за затворениот систем од Задача 4.8

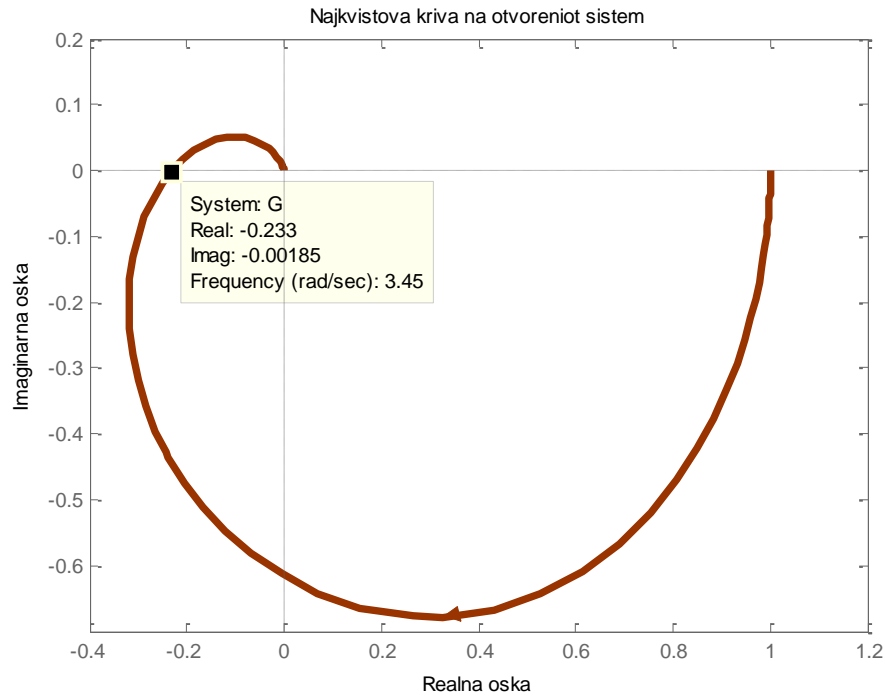
Фреквентната карактеристика од Слика 4.13 започнува во точката $(0.04, j0)$, се одвива во негативна насока и завршува во точката $(0, j0)$, не опфаќајќи ја критичната точка $(-1, j0)$. Бидејќи отворениот систем нема полови во десната полурамнина од s -комплексната рамнина, затворениот систем ќе биде стабилен доколку фреквентната карактеристика на отворениот систем не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$, што е исполнето во конкретниот случај. Следствено, набљудуваниот затворен систем е стабилен.

4.9. Даден е затворениот линеарен континуален систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{9K}{(s+1)(s^2+3s+9)} \quad (4.33)$$

Со помош на Најквистовиот критериум да се определи граничната вредност на коефициентот на засилување K , за која набљудуваниот затворен систем е стабилен.

Решение: Најквистовата крива за отворениот систем $\tilde{G}_0(s) = \frac{G_0(s)}{K}$ е прикажана на Слика 4.14. Од неа се гледа дека таа ја сече реалната оска во точката $(-0.233, j0)$.



Слика 4.14. Најквистова крива на отворениот систем $\tilde{G}_0(s)$ од Задача 4.9

Бидејќи отворениот систем $G_0(s)$ нема полови во десната полурамнина од s -комплексната рамнина, затворениот систем ќе биде стабилен само доколку неговата фреквентна карактеристика не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$. Оттука следува и условот за стабилност на набљудуваниот затворен систем:

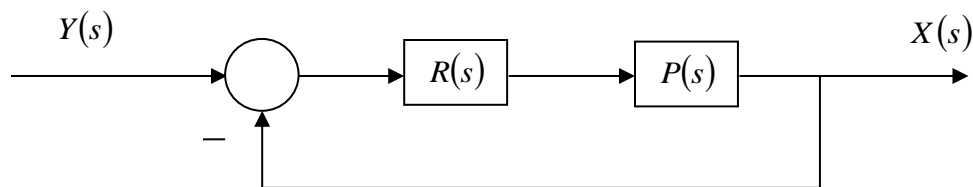
$$-1 < -0.233K \Rightarrow K < \frac{1}{0.233} = 4.29 \approx 4.3 \quad (4.34)$$

4.10. Да се стабилизира затворениот систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска од Слика 4.15, во кој објектот на управување:

$$P(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+4)} \quad (4.35)$$

е управуван со ПИ -регулатор:

$$R(s) = K \frac{s+1}{s} \quad (4.36)$$



Слика 4.15. Илустрација кон Задача 4.10

Решение: Преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$G_0(s) = P(s)R(s) = K \frac{(s+1)(s-2)}{s(s-1)(s+4)} = K \frac{s^2 - s - 2}{s(s^2 + 3s - 4)} \quad (4.37)$$

На Слика 4.16 е прикажана фреквентната карактеристика на отворениот систем за неколку вредности на неопределениот параметар K . Кога K расте ($K = 2, 5, 10$), оваа Најквистова крива се оддалечува од имагинарната оска во комплексната рамнина. Кога K опаѓа ($K = 0.5, 0.2, 0.1$), Најквистовата крива се приближува до имагинарната оска во комплексната рамнина. Меѓутоа, без оглед на вредноста на K , таа останува во десната полурамнина од комплексната рамнина.

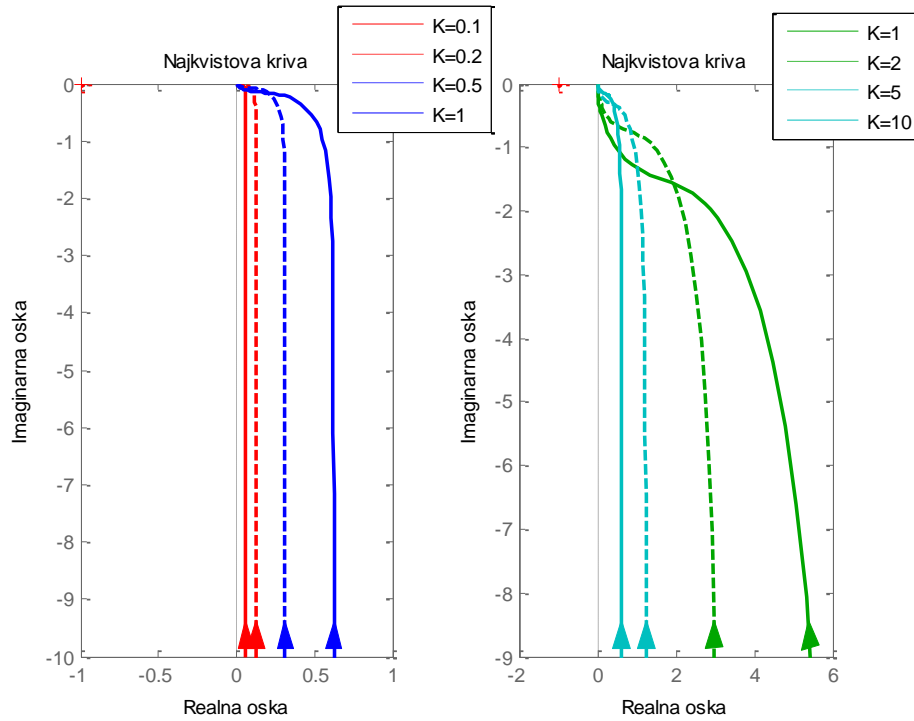
Бидејќи отворениот систем има астатизам од прв ред, Најквистовата крива се дополнува со соодветниот лак на астатизам, кој има бесконечно голем радиус, започнува на позитивниот дел од реалната оска, се одвива во негативна насока и завршува на самата крива. Следствено, за ниедна вредност на K , фреквентната карактеристика на отворениот систем не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$ и за секое K важи:

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg[F(j\omega)] = 0 \quad (4.38)$$

Од друга страна, според Најквистовиот критериум за стабилност, бидејќи отворениот систем (4.37) има еден пол во десната полурамнина од s -комплексната рамнина, затворениот систем ќе биде стабилен само доколку фреквентната карактеристика на отворениот систем ја опфати критичната точка, односно доколку:

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \infty} \arg[F(j\omega)] = \pi \quad (4.39)$$

Оттаму, затворениот систем не може да се стабилизира за ниедна вредност на неопределениот параметар K .



Слика 4.16. Најквистовата крива на отворениот систем (4.37) за различни вредности на K

4.11. Со помош на Најквистовиот критериум, да се определи вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем, за која затворениот систем ќе биде на границата на стабилност.

$$G_0(s) = \frac{Ke^{-0.1s}}{s+5} \quad (4.40)$$

Решение: Фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ на отворениот систем, која зависи од непознатиот параметар K , е:

$$\begin{aligned} G_0(j\omega) &= \frac{Ke^{-j0.1\omega}}{5+j\omega} \cdot \frac{5-j\omega}{5-j\omega} = \frac{Ke^{-j0.1\omega}(5-j\omega)}{25+\omega^2} = \\ &= \frac{K[\cos(0.1\omega) - j\sin(0.1\omega)](5-j\omega)}{25+\omega^2} = \\ &= \frac{K[5\cos(0.1\omega) - \omega\sin(0.1\omega)] - jK[5\sin(0.1\omega) + \omega\cos(0.1\omega)]}{25+\omega^2} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Нејзиниот реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

$$U_0(\omega) = \frac{K[5 \cos(0.1\omega) - \omega \sin(0.1\omega)]}{25 + \omega^2} \quad (4.42)$$

$$V_0(\omega) = \frac{-K[5 \sin(0.1\omega) + \omega \cos(0.1\omega)]}{25 + \omega^2} \quad (4.43)$$

Пресекот на фреквентната карактеристика на отворениот систем со реалната оска се добива за $V_0(\omega) = 0$:

$$\begin{aligned} V_0(\omega) &= -K \frac{5 \sin(0.1\omega) + \omega \cos(0.1\omega)}{25 + \omega^2} = 0 \Rightarrow 5 \sin(0.1\omega) + \omega \cos(0.1\omega) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5 \operatorname{tg}(0.1\omega) + \omega = 0 \Rightarrow \omega = -5 \operatorname{tg}(0.1\omega) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Решението на равенката:

$$\omega = -5 \operatorname{tg}(0.1\omega) \quad (4.45)$$

може да се определи графички, бидејќи тоа е претставено со пресекот на функцијата:

$$5 \operatorname{tg}(0.1\omega) + \omega \quad (4.46)$$

со оската $\omega = 0$. Така, од Слика 4.17 се гледа дека едно решение приближно изнесува $\omega = 18.3693 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Бараната вредност на коефициентот на засилување K на отворениот систем, за која затворениот систем ќе биде на границата на стабилност, се определува од условот:

$$U_0(18.3693) = \frac{K[5 \cos(1.83693) - 18.3693 \sin(1.83693)]}{25 + (18.3693)^2} = -1 \quad (4.47)$$

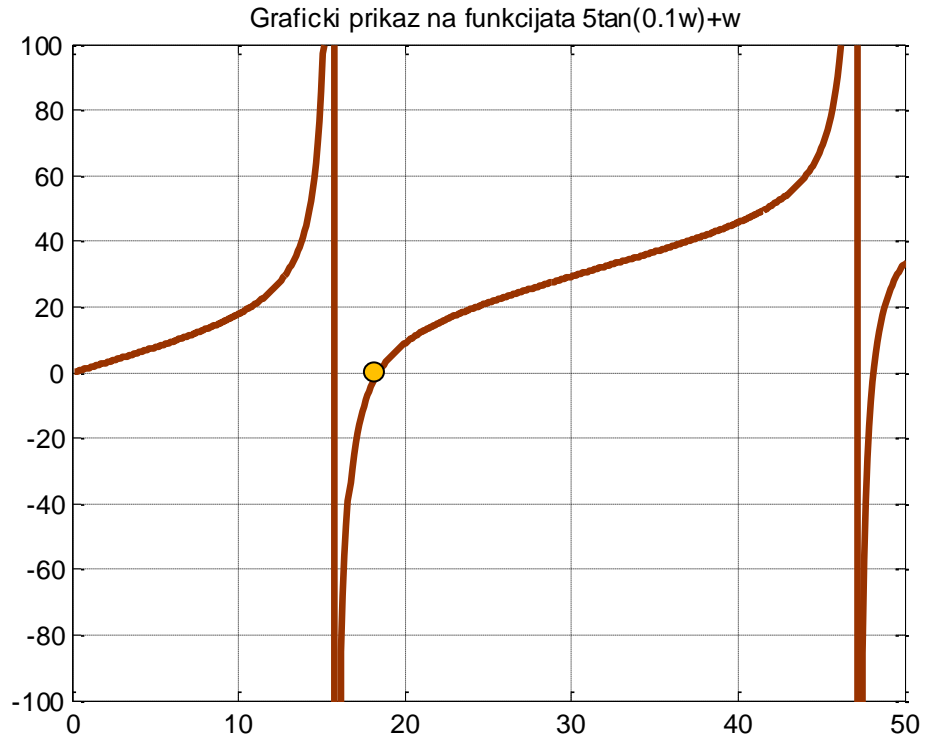
од каде непосредно следува:

$$-0.0525K = -1 \quad (4.48)$$

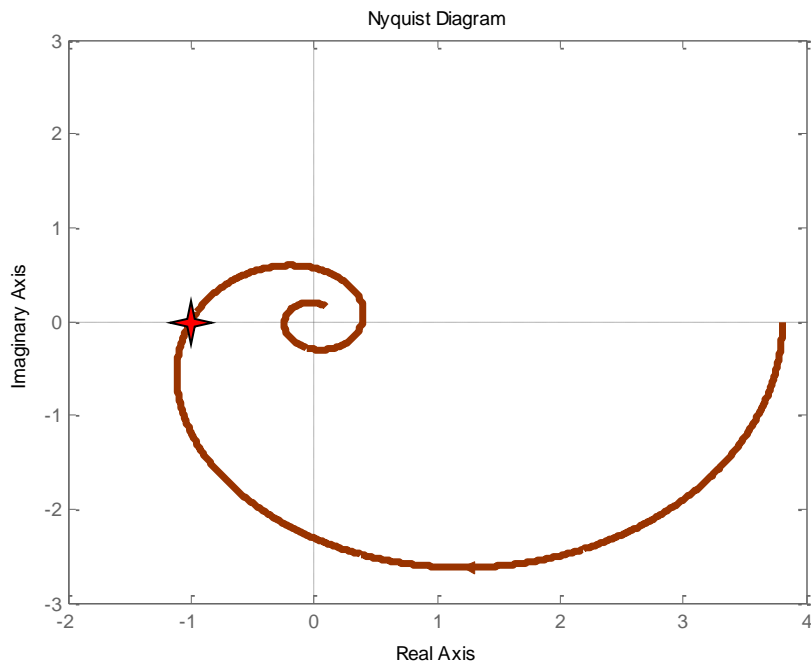
односно:

$$K = 19.0376 \quad (4.49)$$

За проверка, на Слика 4.18 е прикажан дел од Најквистовата крива за набљудуваниот систем, од која се гледа дека за $K = 19.0376$ кривата минува низ критичната точка $(-1, j0)$, што значи дека затворениот систем навистина се наоѓа на границата на стабилност.



Слика 4.17. Графичко решение на равенката $5tg(0.1\omega) + \omega = 0$



Слика 4.18. Најквистова крива на компензираниот отворен систем од Задача 4.11

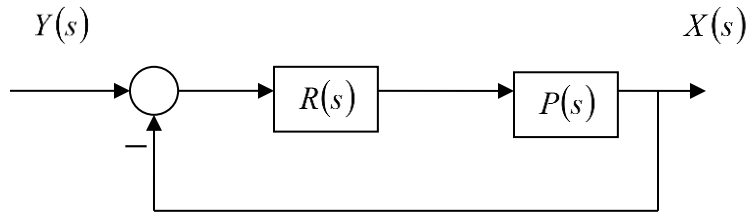
4.12. Даден е затворениот САУ од Слика 4.19. Преносната функција на објектот е:

$$P(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)} \quad (4.50)$$

додека $R(s)$ претставува интегрален компензатор со преносна функција:

$$R(s) = \frac{1+0.25s}{1+2s} \quad (4.51)$$

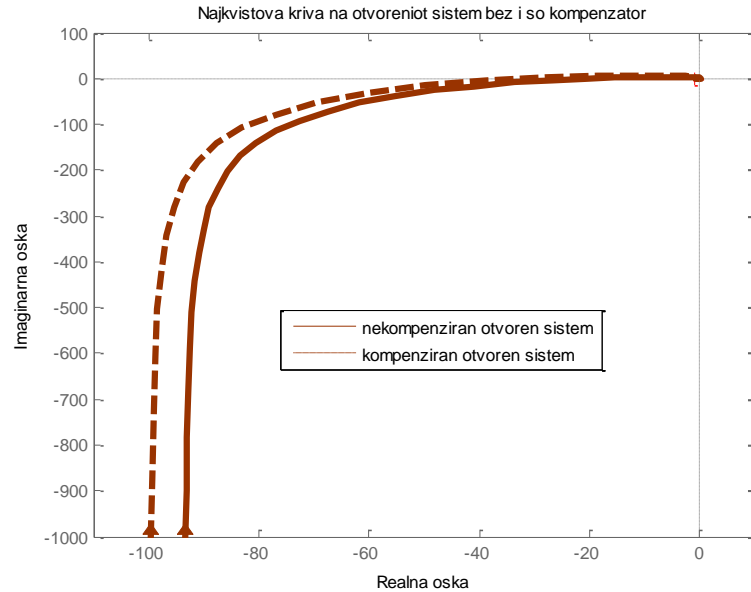
Да се определи фазното доцнење во близина на пресечната фреквенција на засилување, резервата на засилување и слабењето на високите фреквенции во однос на некомпензираниот систем.



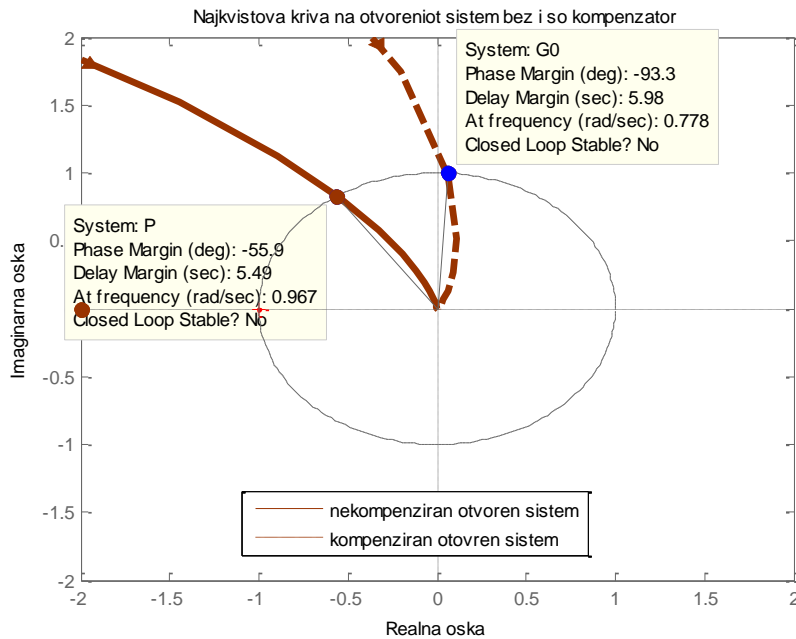
Слика 4.19. Илустрација кон Задача 4.12

Решение: На Слика 4.20 се прикажани Најквистовите криви за некомпензираниот отворен систем односно објектот на управување $P(s)$ и компензираниот отворен систем односно сериската врска $P(s)R(s)$, добиени со помош на програмскиот пакет MATLAB. На Слика 4.21 се прикажани истите карактеристики, само во околина на критичната точка $(-1, j0)$. Оттука се гледа дека некомпензираниот затворен систем има резерва на фаза од -55.9° при фреквенција од $\omega_1 = 0.967 \frac{rad}{sec}$, додека компензираниот затворен систем има резерва на фаза од -93.3° при фреквенција од $\omega_{1c} = 0.778 \frac{rad}{sec}$. Следствено, фазното доцнење на некомпензираниот отворен систем во близина на пресечната фреквенција на засилување $\omega_1 = 0.967 \frac{rad}{sec}$ изнесува приближно -236° , додека фазното доцнење на компензираниот отворен систем во близина на пресечната фреквенција на засилување $\omega_{1c} = 0.778 \frac{rad}{sec}$ изнесува приближно -273° . Добиениот резултат е сосема разбирлив, ако се има на ум дека $R(s)$ е интегрален компензатор, кој внесува секогаш негативно фазно поместување и ја намалува резервата на стабилност на еден систем пропорционално на односот помеѓу величините на неговата нула и пол. Едновремено го стеснува пропусниот опсег на компензираниот систем и ја намалува

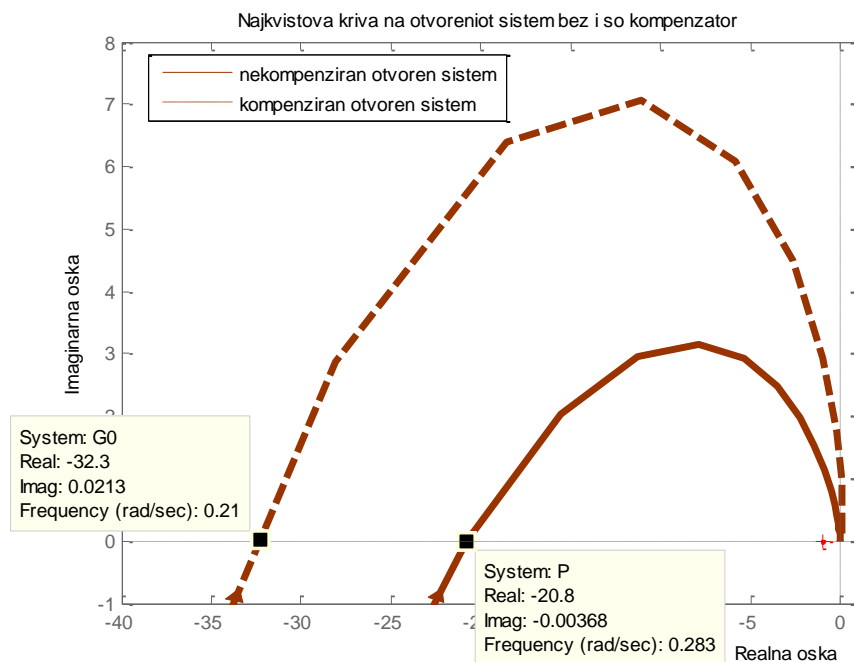
брзината на неговиот одзив. Оттаму $\arg[G_0(j\omega_{1c})] < \arg[P(j\omega_1)]$ и

$$\omega_{1c} = 0.778 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} < \omega_1 = 0.967 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}.$$


Слика 4.20. Најквистови криви на некомпензираниот и компензираниот отворен систем од Задача 4.12



Слика 4.21. Најквистови криви на некомпензираниот и компензираниот отворен систем од Задача 4.12 во околина на критичната точка $(-1, j0)$



Слика 4.22. Одредување на резервите на засилување на некомпензираниот и компензираниот затворен систем од Задача 4.12 преку фреквентните карактеристики на соодветните отворени системи

За испитување на стабилноста на затворениот систем со помош на Најквистовиот критериум, фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем се надополнува со лак на астатизам, кој во конкретниот случај почнува на позитивниот дел од реалната оска, се одвива во негативна насока и завршува на фреквентната карактеристика на отворениот систем, при што има бесконечно голем радиус и опфаќа централен агол од $-\frac{\pi}{2} rad$. Бидејќи и двете фреквентните карактеристики од Слика 4.20 ја опфаќаат критичната точка $(-1, j0)$, што е понагледно прикажано на Слика 4.22, следува дека и некомпензираниот и компензираниот затворен систем се нестабилни.

Резервата на засилување на некомпензираниот затворен систем d и на компензираниот затворен систем d_c можат да се определат со помош на Слика 4.22. Имено, бидејќи d е реципрочна вредност од растојанието на пресечната точка на фреквентната карактеристика на отворениот систем со реалната оска до имагинарната оска, следува:

$$-\frac{1}{d} = -20.8 \Rightarrow d = 0.0479 \Rightarrow 20 \log_{10} d \approx 20 \log(0.0479) = -26.36 dB \quad (4.52)$$

$$20 \log_{10} d_c \approx 20 \log(1/32.3) = -30.2 dB \quad (4.53)$$

4.13. За затворениот САУ со структура како на Слика 4.19 се дадени следните проектни барања:

1. $K_v \geq 100$
2. резерва на засилување $\geq 10dB$
3. резерва на фаза $\geq 45^\circ$
4. пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 \geq 10 \frac{rad}{sec}$

Ако објектот на управување има преносна функција:

$$P(s) = \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{s}{20}\right)} \quad (4.54)$$

кој од подолу наведените компензатори:

$$R_1(s) = \frac{1 + 100s}{1 + 120s} \quad (4.55)$$

$$R_2(s) = \frac{(1 + s)(1 + 20s)}{\left(1 + \frac{s}{0.01}\right) \left(1 + \frac{s}{50}\right)} \quad (4.56)$$

$$R_3(s) = 100 \quad (4.57)$$

$$R_4(s) = \frac{100(1 + s) \left(1 + \frac{s}{5}\right)}{\left(1 + \frac{s}{0.1}\right) \left(1 + \frac{s}{50}\right)} \quad (4.58)$$

ги обезбедува поставените услови?

Решение: Бидејќи објектот $P(s)$ има астатизам од прв ред, затворениот систем идеално ќе следи константна влезна возбуда, додека променлива влезна возбуда со константна брзина на промена $v_0 = const.$ ќе следи со одредена грешка, обратно пропорционална со брзинската константа K_v :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{8}\right) \left(1 + \frac{s}{20}\right)} R(s) = R(0) \quad (4.59)$$

Бидејќи:

$$R_1(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + 100s}{1 + 120s} = 1 \quad (4.60)$$

$$R_2(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1+s)(1+20s)}{\left(1 + \frac{s}{0.01}\right)\left(1 + \frac{s}{50}\right)} = 1 \quad (4.61)$$

$$R_3(0) = \lim_{s \rightarrow 0} 100 = 100 \quad (4.62)$$

$$R_4(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100(1+s)\left(1 + \frac{s}{5}\right)}{\left(1 + \frac{s}{0.1}\right)\left(1 + \frac{s}{50}\right)} = 100 \quad (4.63)$$

следува дека само $R_3(s)$ и $R_4(s)$ го задоволуваат проектното барање $K_v \geq 100$. Останува да се провери кој од овие два компензатори ги задоволува и преостанатите проектни барања, при што $R_3(s)$ реализира само компензација на засилувањето на објектот, додека $R_4(s)$ претставува интегро - диференцијален компензатор. За таа цел со помош на соодветни МАТЛАБ наредби се исцртани Најквистовите криви на некомпензираниот објект, компензираниот објект со компензација само на засилувањето и компензираниот објект компензиран со интегро -диференцијален компензатор, и истите се прикажани на Слика 4.23.

Од Слика 4.23 лесно може да се воочи дека компензаторот $R_3(s)$, заради големиот коефициент на засилување, го прави компензираниот систем нестабилен. Следствено, како можно решение на синтезата останува само интегро -диференцијалниот компензатор $R_4(s)$. Најквистовата крива на компензираниот систем со интегро -диференцијалниот компензатор $R_4(s)$ е посебно прикажана на Слика 4.24. На сликата е обележена пресечната фреквенција на засилување $\omega_1 = 12.1 \frac{rad}{sec}$, која очигледно го

исполнува проектното барање $\omega_1 = 12.1 \frac{rad}{sec} \geq 10 \frac{rad}{sec}$, а со помош на координатите на точката А може да се пресмета и резервата на фаза на компензираниот систем:

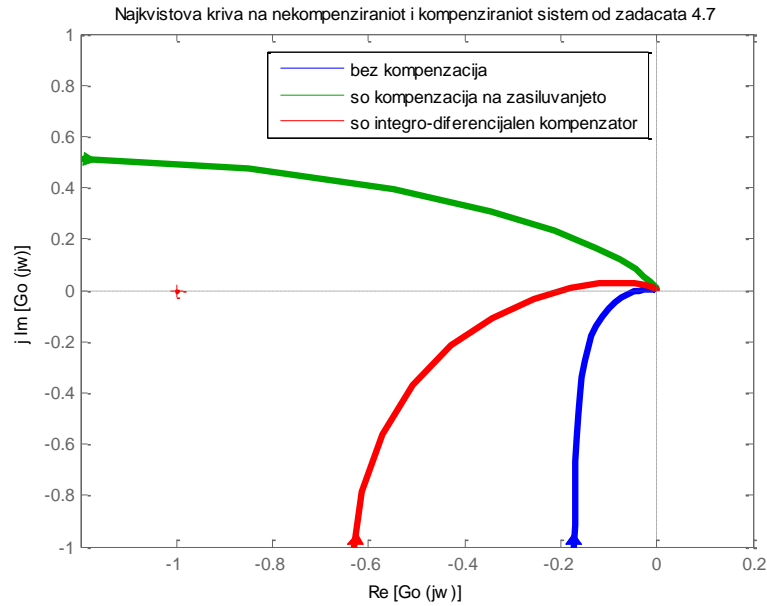
$$\varphi_{rf} = \arctg\left(\frac{\text{Im } A}{\text{Re } A}\right) = \arctg \frac{0.788}{0.614} = 52.07^\circ \quad (4.64)$$

која го задоволува проектното барање $\varphi_{rf} = 52.1^\circ \geq 45^\circ$.

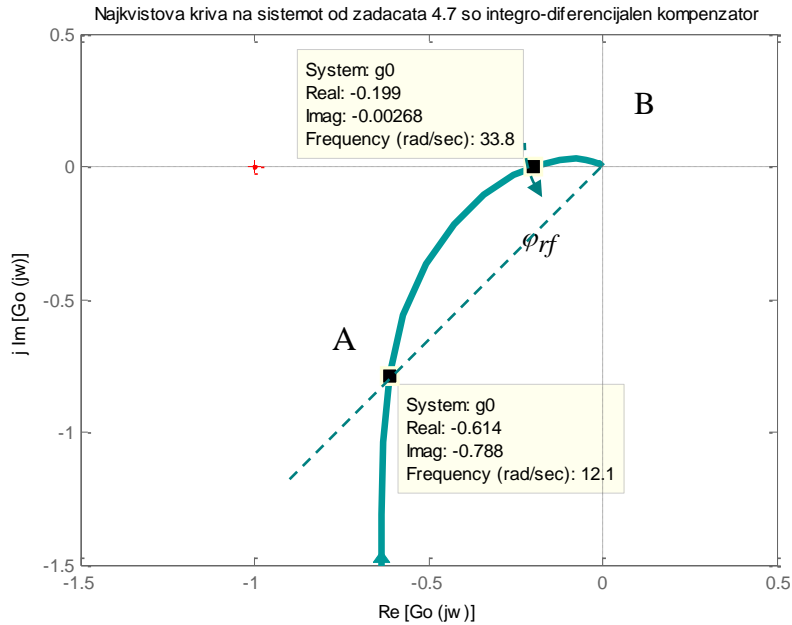
Конечно, резервата на засилување на компензираниот систем се определува со помош на реалната координата од точката В:

$$20 \log_{10} d = 20 \log_{10} \frac{1}{\text{Re } B} = 20 \log_{10} \frac{1}{0.199} = 14dB \quad (4.65)$$

и тоа го исполнува последното проектно барање $d_{dB} \geq 10dB$.



Слика 4.23. Најквистови криви на некомпензираниот објект, објектот со компензација на засилувањето и објектот компензиран со интегро -диференцијален компензатор



Слика 4.24. Најквистова крива на компензираниот систем со интегро -диференцијален компензатор од Задача 4.13

4.14. Во затворениот САУ со структурна блок-шема како на Слика 4.19, во серија со објектот на управување:

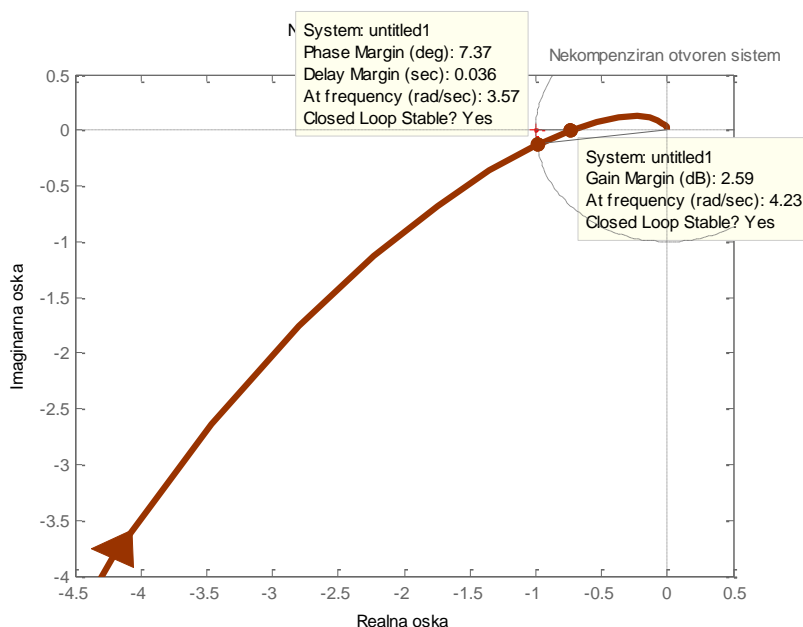
$$P(s) = \frac{500}{s(s+1)(s+5)(s+10)} \quad (4.66)$$

е употребен диференцијален компензатор со преносна функција:

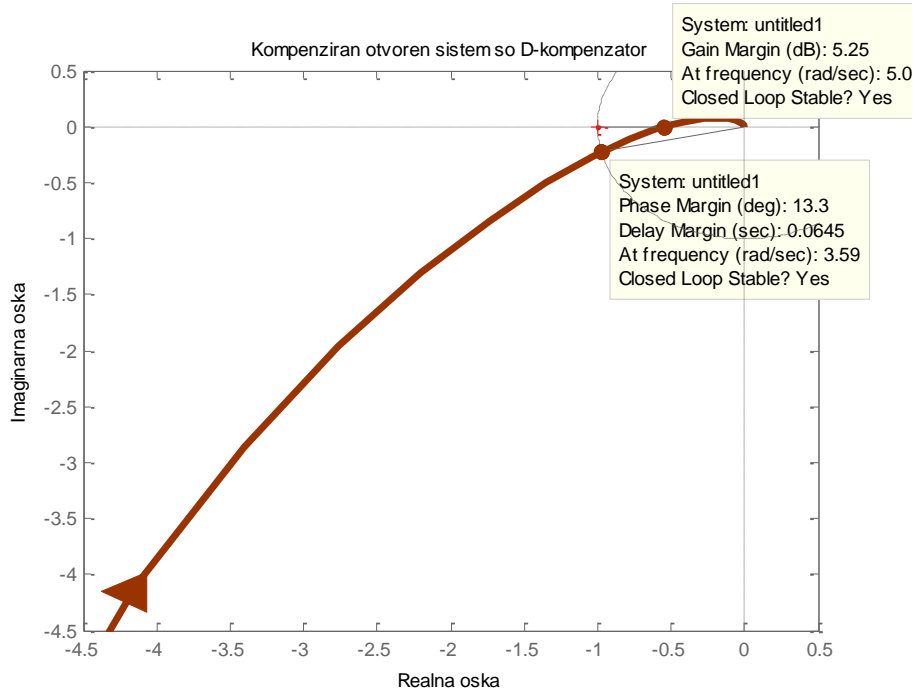
$$R(s) = \frac{1 + 0.4s}{1 + 0.04s} \quad (4.67)$$

Да се определат резервите на засилување и фаза на компензираниот систем. Што треба да се направи за да се зголеми резервата на фаза на овој систем до околу 45^0 ?

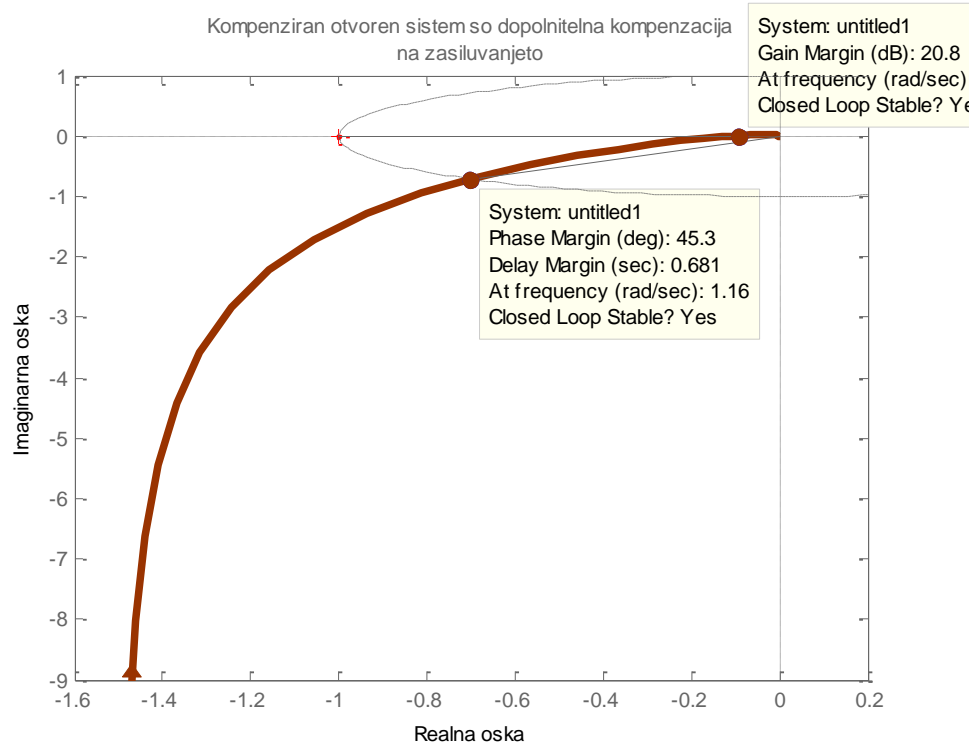
Решение: Фреквентната карактеристика на некомпензираниот објект $P(s)$ е прикажана на Слика 4.25, од каде се гледа дека некомпензираниот затворен систем има резерва на засилување од $d = 2.59dB$ и резерва на фаза од $\varphi_{rf} = 7.37^0$. Фреквентната карактеристика на компензираниот отворен систем со дадениот Д-компензатор е прикажана на Слика 4.26, од каде се гледа дека резервите на стабилност на компензираниот затворен систем се зголемиле на $d = 5.25dB$ и $\varphi_{rf} = 13.3^0$. Меѓутоа, оваа резерва на фаза сè уште е далеку од бараната. За да се зголеми резервата на фаза на затворениот систем на вредност од околу 45^0 , може да се избере дополнителна компензација на засилувањето на отворениот систем. Така, ако коефициентот на засилување на компензираниот отворен систем $P(s)R(s)$ се намали за 6 пати, неговата фреквентна карактеристика ќе изгледа како на Слика 4.27. Од неа се гледа дека сега затворениот систем ќе има резерва на засилување од $d = 20.8dB$ и резерва на фаза од $\varphi_{rf} = 45.3^0$.



Слика 4.25.Најквистова крива на некомпензираниот отворен систем од Задача 4.14



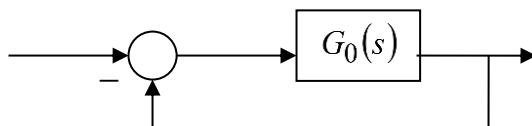
Слика 4.26.Најквистова крива на компензираниот отворен систем од Задача 4.14



Слика 4.27.Најквистова крива на компензираниот отворен систем од Задача 4.14 со дополнителна компензација на засилувањето

4.15. Да се нацрта фреквентната карактеристика на отворениот систем за затворениот линеарен стационарен континуален систем од прв ред прикажан на Слика 4.28, ако соодветниот отворен систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{1}{4s+1} \quad (4.68)$$



Слика 4.28. Илустрација кон Задача 4.15

Дали затворениот систем е стабилен? Колку изнесува неговата стационарна грешка и што треба да се направи таа да се намали?

Решение: Фреквентната преносна функција на отворениот систем (4.68) е:

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{j4\omega+1} = \frac{1-j4\omega}{1+16\omega^2} = \frac{1}{1+16\omega^2} + j \frac{-4\omega}{1+16\omega^2} = U_0(\omega) + jV_0(\omega) \quad (4.69)$$

а нејзиниот реален и имагинарен дел покажуваат дека таа се наоѓа во IV квадрант од комплексната рамнина:

$$U_0(\omega) = \frac{1}{1+16\omega^2} > 0 \forall \omega \quad (4.70)$$

$$V_0(\omega) = -\frac{4\omega}{1+16\omega^2} \leq 0 \forall \omega \quad (4.71)$$

Карактеристиката почнува за $\omega = 0$ во точката $[U_0(0), jV_0(0)] = [1, j0]$:

$$U_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{1+16\omega^2} = 1 \quad (4.72)$$

$$V_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-4\omega}{1+16\omega^2} = 0^- \quad (4.73)$$

завршува за $\omega = \infty$ во точката $[U_0(\infty), jV_0(\infty)] = [0, j0^-]$:

$$U_0(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{1+16\omega^2} = 0 \quad (4.74)$$

$$V_0(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-4\omega}{1+16\omega^2} = 0^- \quad (4.75)$$

и нема пресеци со координатните оски. Карактеристиката аналитички е опишана со релацијата:

$$\left[U_0(\omega) - \frac{1}{2} \right]^2 + V_0^2(\omega) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \quad (4.76)$$

која се добива од равенките (4.70) и (4.71) со елиминација на параметарот ω и заедно со истите дефинира полукружница со центар во точката $\left[\frac{1}{2}, j0 \right]$ и радиус еднаков на $\frac{1}{2}$.

Нејзиниот изглед е прикажан на Слика 4.29. Затворениот систем од Слика 4.28 е стабилен, бидејќи Најквистовата крива од Слика 4.29 не ја опфаќа критичната точка $[-1, j0]$.

Со оглед на тоа дека отворениот систем е без астатизам, затворениот систем е во состојба да следи само отскочен референтен влез $y(t) = r_0 h(t)$ и тоа со одредена грешка, односно отстапување. Таа грешка изнесува:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{r_0}{s} = \\ &= \frac{r_0}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)} = \frac{r_0}{1 + K_p} \end{aligned} \quad (4.77)$$

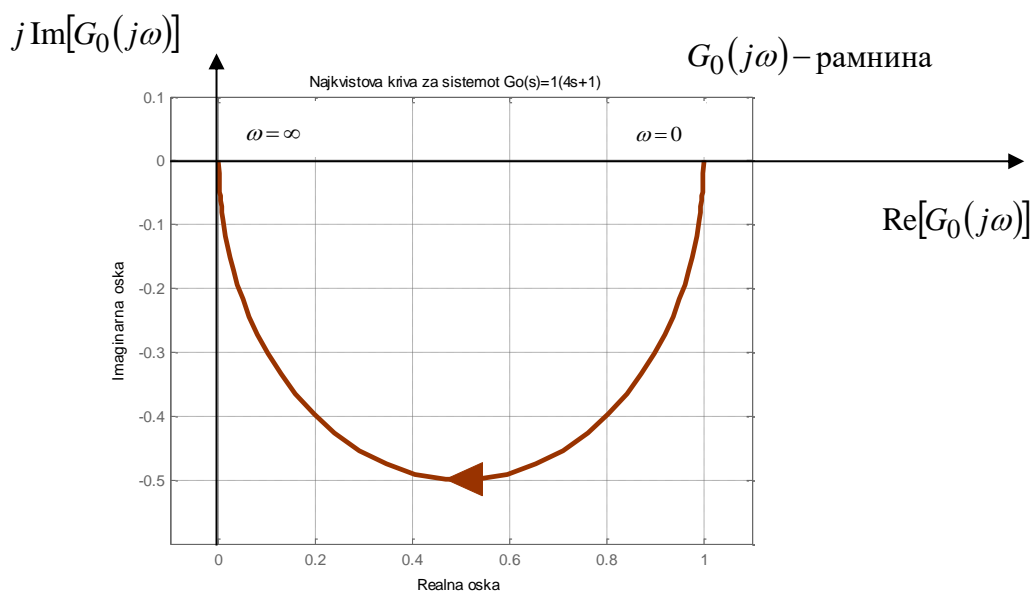
и зависи од вредноста на константата на положба K_p :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4s+1} = 1 \quad (4.78)$$

Оттука:

$$e(\infty) = \frac{r_0}{1 + K_p} = \frac{r_0}{2} \quad (4.79)$$

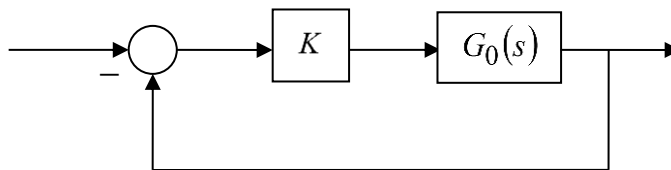
Стационарна грешка од 50% е многу голема грешка и укажува на мала точност во работата на набљудуваниот затворен систем. Затоа таа треба да се намали, преку зголемување на вредноста на константата на положба K_p .



Слика 4.29. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.68)

Ако во директната гранка од затворениот систем на Слика 4.28 се приклучи засилувач со непознато засилување K , ќе се добие компензираниот систем од Слика 4.30, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_{02}(s) = \frac{K}{4s + 1} \quad (4.80)$$



Слика 4.30. Компензиран системот од Слика 4.28

Константата на положба на компензираниот систем е:

$$K_{p2} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{02}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{4s + 1} = K \quad (4.81)$$

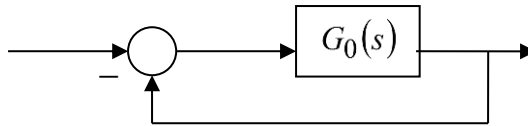
а неговата стационарна грешка изнесува:

$$e(\infty) = \frac{r_0}{1 + K_{p2}} = \frac{r_0}{1 + K} \quad (4.82)$$

За различни вредности на $K > 1$ се добиваат различни вредности за грешката (4.82). Така, за $K = 49$ грешката (4.82) ќе изнесува само 2%, додека за $K = 99$ таа ќе изнесува еден процент.

4.16. Да се нацрта Најквистовата крива за затворениот линеарен стационарен континуален систем од втор ред, прикажан на Слика 4.31, ако соодветниот отворен систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+3)} \quad (4.83)$$



Слика 4.31. Илустрација кон Задача 4.16

Дали затворениот систем е стабилен? Колку треба да изнесува засилувањето на отворениот систем, па стационарната грешка на затворениот систем да се намали за 50%? За колку се променила резервата на фаза на компензираниот систем во однос на некомпензираниот?

Решение: Фреквентната преносна функција на отворениот систем е:

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+3)} = \frac{-\omega - j3}{\omega(9 + \omega^2)} = -\frac{1}{9 + \omega^2} + j\frac{-3}{\omega(9 + \omega^2)} = U_0(\omega) + jV_0(\omega) \quad (4.84)$$

а нејзиниот реален и имагинарен дел покажуваат дека таа се наоѓа во III квадрант од комплексната рамнина:

$$U_0(\omega) = -\frac{1}{9 + \omega^2} < 0 \quad \forall \omega \quad (4.85)$$

$$V_0(\omega) = -\frac{3}{\omega(9 + \omega^2)} < 0 \quad \forall \omega \quad (4.86)$$

Карактеристиката почнува за $\omega = 0$ во точката $[U_0(0), jV_0(0)] = [-1/9, -j\infty]$:

$$U_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-1}{9 + \omega^2} = -\frac{1}{9} \quad (4.87)$$

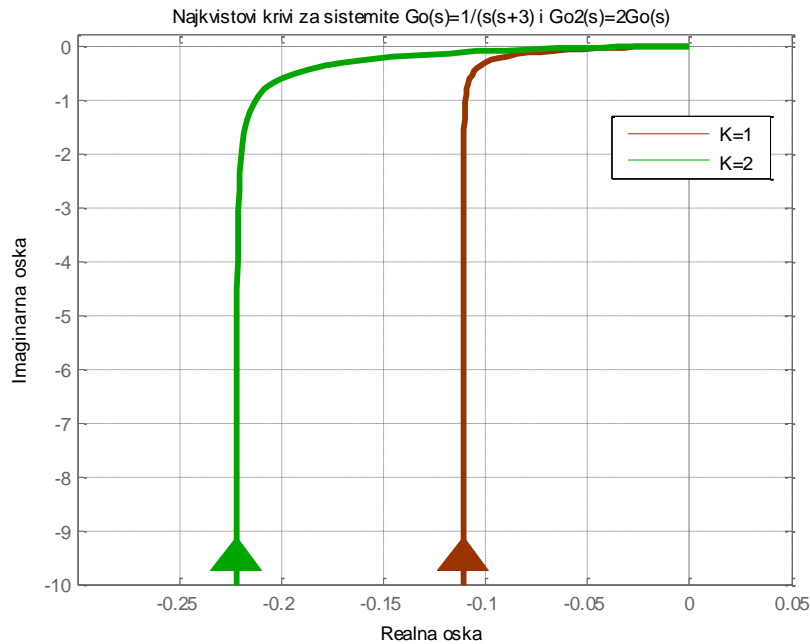
$$V_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -\frac{3}{\omega(9 + \omega^2)} = -\infty \quad (4.88)$$

завршува за $\omega = \infty$ во точката $[U_0(\infty), jV_0(\infty)] = [0^-, j0^-]$:

$$U_0(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{-1}{9 + \omega^2} = 0^- \quad (4.89)$$

$$V_0(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_0(\omega) = - \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{3}{\omega(9 + \omega^2)} = 0^- \quad (4.90)$$

и нема пресеци со координатните оски. Нејзиниот изглед е прикажан на Слика 4.32. Затворениот систем од Слика 4.31 е стабилен, бидејќи Најквистовата крива од Слика 4.32 не ја опфаќа критичната точка $[-1, j0]$.



Слика 4.32. Најквистови криви за некомпензираниот и компензираниот отворен систем од Задача 4.16

Со оглед на тоа дека отворениот систем има астатизам од прв ред, затворениот систем е во состојба идеално да следи отскочен референтен влез $y(t) = r_0 h(t)$, додека променлив влез со константна брзина на промена $y(t) = v_0 t h(t)$ може да следи само со одредена грешка, односно отстапување. Таа грешка изнесува:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Y(s)}{1 + G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_0(s)} \cdot \frac{v_0}{s^2} = \\ &= \frac{v_0}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s)} = \frac{v_0}{K_v} \end{aligned} \quad (4.91)$$

и зависи од вредноста на брзинската константа K_v :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3} \quad (4.92)$$

Грешката (4.91) ќе се намали за 50%, доколку засилувањето на отворениот систем се зголеми 2 пати. Тогаш отворениот систем за компензираниот затворен систем ќе има преносна функција:

$$G_{02}(s) = \frac{2}{s(s+3)} \quad (4.93)$$

па стационарната грешка на затворениот систем ќе биде:

$$e(\infty) = \frac{3v_0}{2} = 1.5v_0 \quad (4.94)$$

За споредба, фреквентната карактеристика на компензираниот систем за $v_0 = 1$ е исто така прикажана на Слика 4.32.

Резервите на фаза на некомпензираниот и компензираниот затворен систем можат да се определат графички од соодветните фреквентни карактеристики прикажани на Слика 4.32 или, пак, со помош на некој програмски пакет како, на пример, МАТЛАБ. Така се утврдува дека резервата на фаза на некомпензираниот затворен систем изнесува 83.7° , додека резервата на фаза на компензираниот затворен систем е 77.7° . Со зголемување на коефициентот на засилување на некомпензираниот систем се намалува неговата резерва на фаза.

4.17. Даден е затворениот систем со единична негативна повратна врска, во кој објектот на управување со преносна функција $P(s)$ од облик:

$$P(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}; \quad K > 0 \quad (4.95)$$

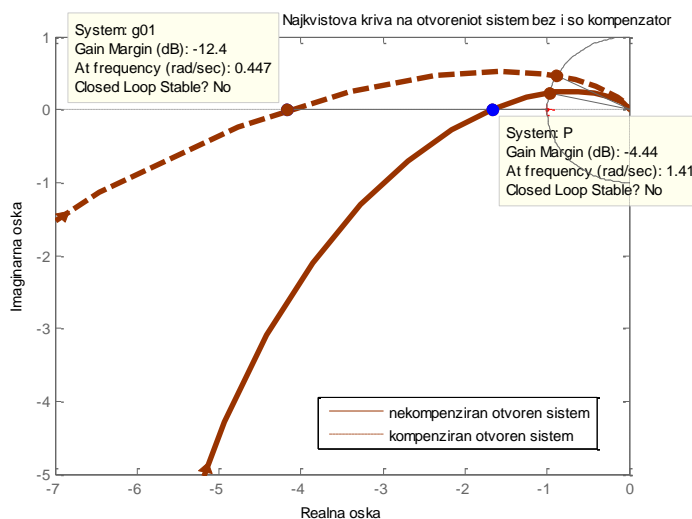
е компензиран со И- компензатор со преносна функција:

$$R_1(s) = \frac{0.5s+1}{5s+1} \quad (4.96)$$

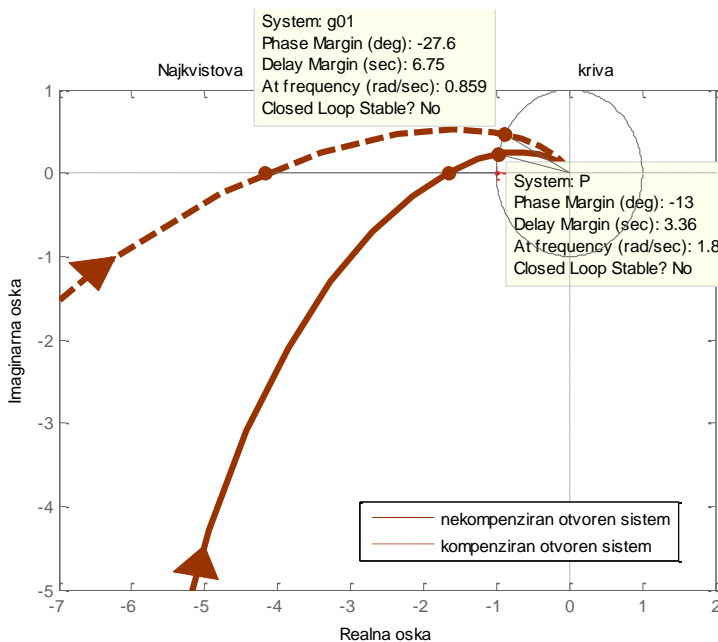
Како влијае компензаторот врз својствата на некомпензираниот систем?

Решение: На Слика 4.33 се прикажани Најквистовите криви на отворениот систем пред и по компензацијата со дадениот И – компензатор, од каде може да се забележи дека присуството на И – компензаторот има за последица оддалечување на фреквентната карактеристика од имагинарната оска во подрачјето на ниските фреквенции, додека во

подрачјето на високите фреквенци таа останува скоро непроменета. И-компензаторот ја намалува резервата на стабилност на проектираниот затворен систем и неговата брзина на одзив, што може да се заклучи и од резервите на засилување на системот пред и по компензацијата со И-компензаторот: $d_c = -12.4dB < -4.44dB = d$. Слично нешто се заклучува и за резервата на фаза, која пред компензацијата изнесува $\varphi_{rf} = -13^0$, а по компензацијата $\varphi_{rf} = -27.6^0$. Ова се должи на фактот дека И-компензаторот внесува секогаш негативно фазно поместување, па со помош на И-компензатор не е можно да се стабилизира нестабилен систем.

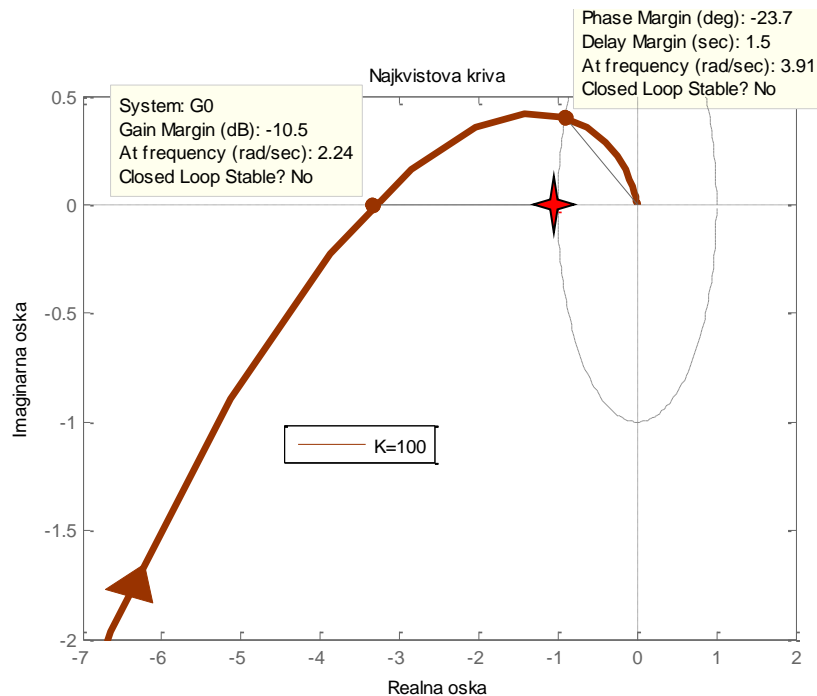


Слика 4.33. Најквистови криви на отворениот систем од Задача 4.17 пред и по И – компензација



Слика 4.34. Најквистови криви на отворениот систем од Задачата 4.17 пред и по И - компензација

4.18. На Слика 4.35 е прикажана Најквистовата крива на некомпензираниот отворен систем на еден затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска.



Слика 4.35. Фреквентна карактеристика на отворениот систем $G_0(s)$ од Задача 4.18

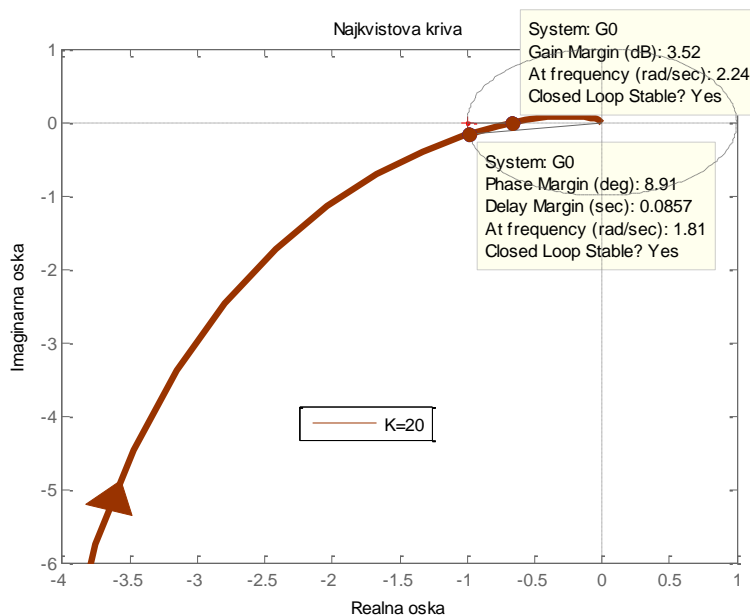
Отворениот систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+5)} \quad (4.97)$$

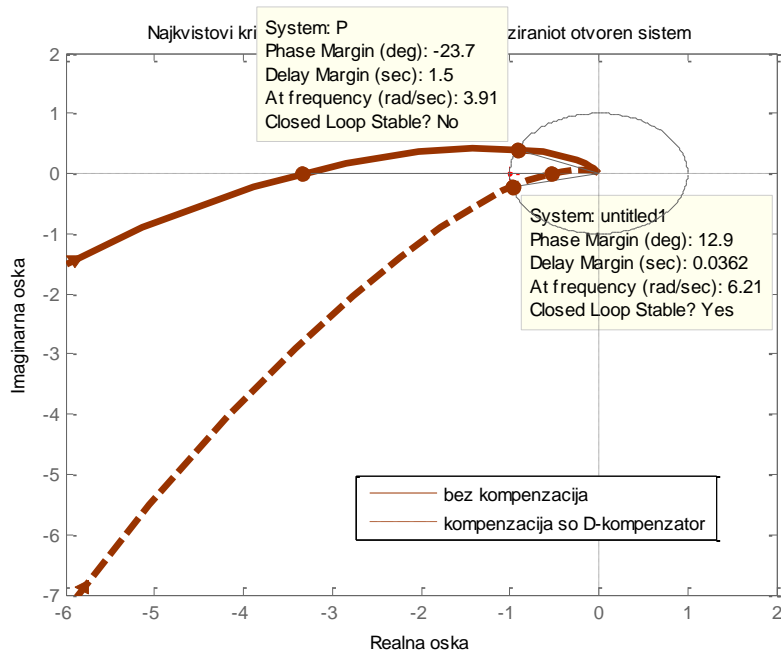
Дали набљудуваниот затворен систем е стабилен за конкретната вредност $K = 100$ на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем $G_0(s)$? Како може да се промени неговата стабилност? Да се разгледаат сите можни случаи на компензација: компензација на засилувањето на отворениот систем, компензација со Д – компензатор и компензација со И – компензатор.

Решение: За конкретната вредност $K = 100$ на коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем $G_0(s)$, затворениот систем $G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$ е нестабилен, затоа што фреквентната карактеристика на отворениот систем ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$. Затворениот систем може да се направи стабилен со намалување на вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем, така што критичната точка $(-1, j0)$ ќе се најде лево и надвор од фреквентната карактеристика на

отворениот систем. Нека, на пример, коефициентот на засилување K на отворениот систем се намали за петпати. Неговата фреквентна карактеристика за оваа вредност на K е прикажана на Слика 4.36, од каде се гледа дека затворениот систем е стабилен, бидејќи карактеристиката не ја опфаќа повеќе критичната точка $(-1, j0)$. Натомашното намалување на вредноста на K нема да ја промени стабилноста на затворениот систем.



Слика 4.36. Фреквентна карактеристика на отворениот систем од Задача 4.18 по компензацијата на засилувањето за $K = 20$



Слика 4.37. Најквистова крива на отворениот систем $G_0(s)$ од Задача 4.18 по Д - компензација

Набљудуваниот затворен систем може да се стабилизира и по пат на компензација со Д – компензатор. Фреквентната карактеристика на отворениот систем, кога е применет компензатор со преносна функција:

$$R(s) = \frac{s+2}{5s+20} \quad (4.98)$$

е прикажана на Слика 4.37. Од неа се гледа дека компензираниот затворен систем е стабилен. Преносната функција на вака компензираниот отворен систем е:

$$G_{0c}(s) = 10 \cdot \frac{100}{s(s+1)(s+5)} \cdot \frac{s+2}{5s+20} \quad (4.99)$$

Бидејќи Д- компензаторот секогаш внесува дополнително слабеење при ниските фреквенции, за да не се промени поведението на компензираниот систем во стационарен режим, засилувањето на сериската врска $P(s)R(s)$ е зголемено за $\frac{b}{a} = \frac{20}{2} = 10$ пати.

Заради негативното фазно поместување, компензацијата со И- компензатор нема да доведе до стабилизација на набљудуваниот затворен систем.

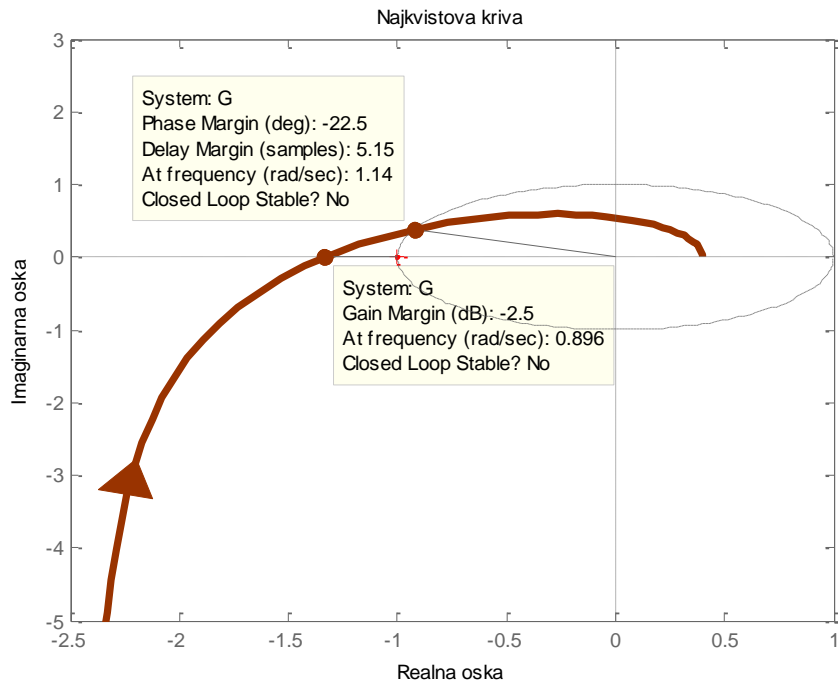
4.19. Даден е затворен дискретен систем со единична негативна повратна врска и отворен систем опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.25)} \quad (4.100)$$

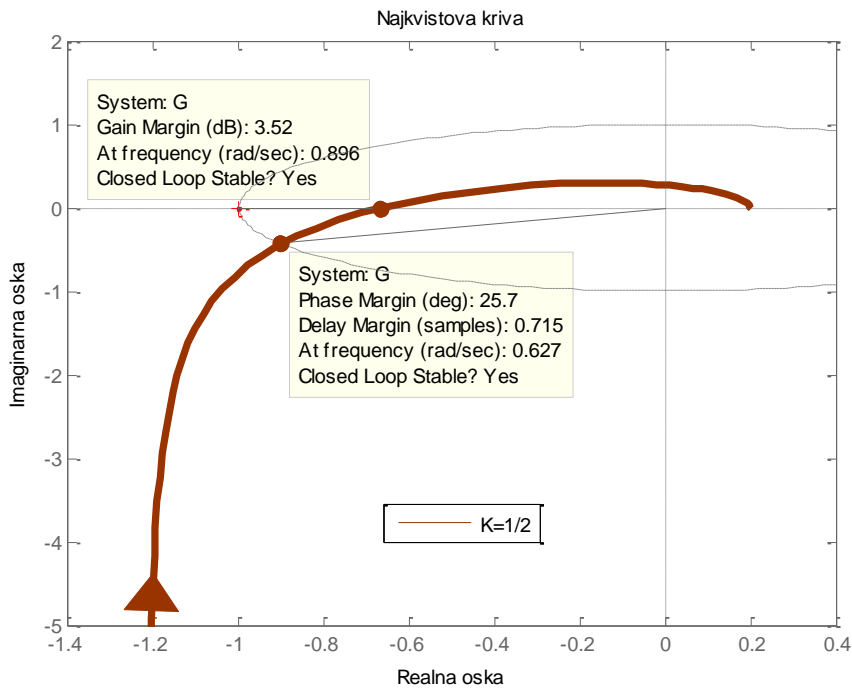
Да се провери стабилноста на затворениот систем и во негативен случај да се стабилизира по пат на компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем (4.100). Синтезата да се реализира со помош на Најквистовата крива на отворениот систем.

Решение: Најквистовата крива на отворениот систем за набљудуваниот затворен дискретен систем е прикажана на Слика 4.38, од каде се гледа дека затворениот систем е нестабилен. Стабилизацијата на системот може да се реализира со намалување на вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем, на пример, за двапати. Фреквентната карактеристика на компензираниот отворен систем е прикажана на Слика 4.39, од каде се гледа дека е остварена саканата стабилизација на затворениот систем, кој сега има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 25.7^\circ$. Преносната функција на компензираниот отворен систем е:

$$G_0(z) = \frac{0.5}{(z-1)(z-0.25)} \quad (4.101)$$



Слика 4.38.Најквистова крива на отворениот систем за $K = 1$



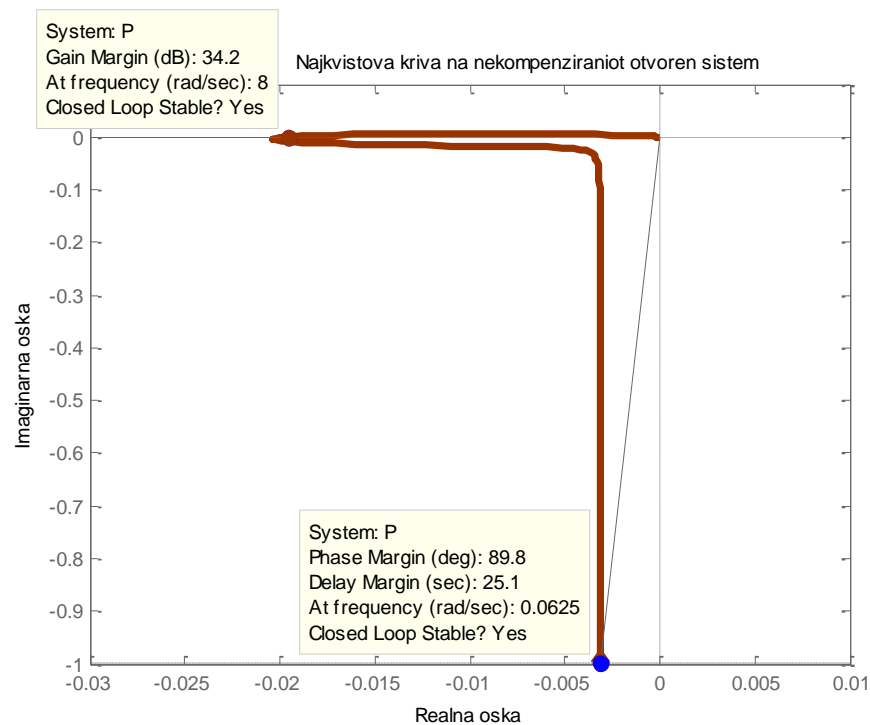
Слика 4.39.Најквистова крива на отворениот систем за $K = 1/2$

4.20. Треба да се проектира затворен систем на автоматско управување со структурна блок - шема како на Слика 4.19. Да се определи видот компензатор кој ќе обезбеди резерва на фаза од приближно 30^0 ако преносната функција на објектот е:

$$P(s) = \frac{4}{s(s^2 + 3.2s + 64)} \quad (4.102)$$

Притоа, одзивот на компензираниот систем при високи фреквенции треба да остане приближно еднаков на одзивот на некомпензираниот систем во истото фреквентно подрачје.

Решение: Фреквентната карактеристика на објектот $P(s)$ е прикажана Слика 4.40. Како што може да се забележи, таа е многу блиску до имагинарната оска за сите вредности на фреквенцијата.



Слика 4.40. Најквистова крива на некомпензираниот објект од Задача 4.20

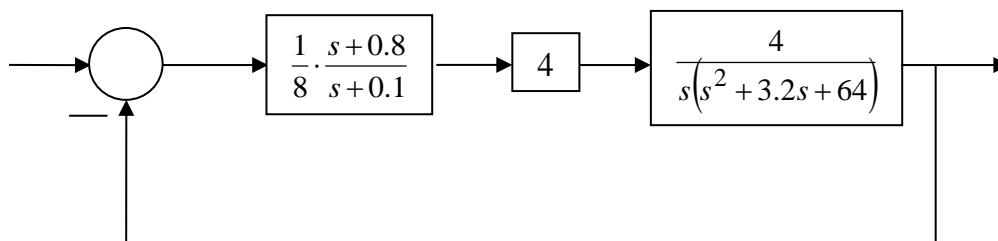
Резервата на фаза на објектот е приближно 90^0 , па поставената задача од гледиште на стабилноста може да се реши било со зголемување на факторот на засилување на објектот, било преку сериска компензација со интегрирачки компензатор. Бидејќи интегрирачкиот компензатор обезбедува пригушување во подрачјето на високите фреквенции, а неговото влијание врз фазата е во подрачјето на ниски фреквенции, со оглед на вториот услов од задачата, најдобро е поставениот проблем да се реши со комбинација на двете постапки на синтеза – преку нагудување на коефициентот на

засилување на отворениот систем и со воведување на интегрирачки компензатор. Се разбира, ова не е единственото решение на поставениот проблем. Постојат многу други решенија (различни мрежи и преносни функции), кои исто така можат да обезбедат реализација на поставените проектни барања. Меѓутоа, интегрирачкиот компензатор и засилувачот имаат предност заради нивната стандардизација, достапноста и едноставноста на самата постапка на синтеза.

Во конкретниот случај, задачата на синтеза е решена со примена на засилувач со засилување $K = 4$ и интегрален компензатор со преносна функција:

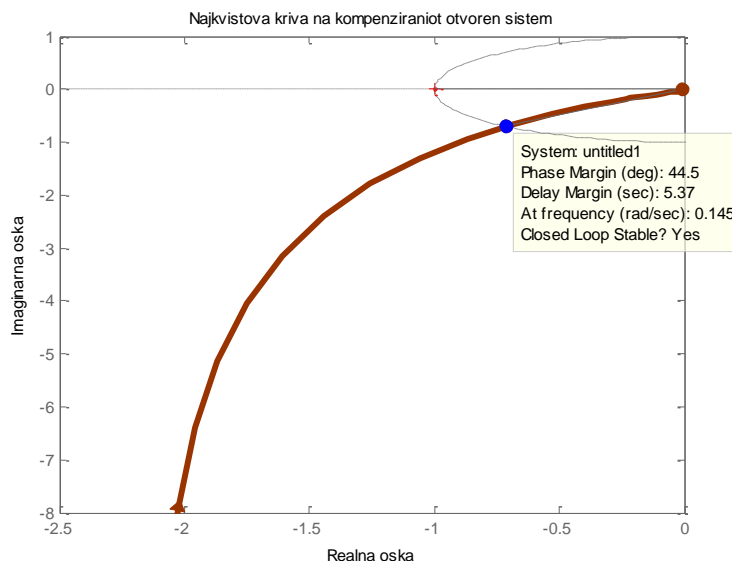
$$R(s) = \frac{1}{8} \cdot \frac{s+0.8}{s+0.1} \tag{4.103}$$

така што проектираниот затворен систем има структура како на Слика 4.41.



Слика 4.41. Структурна блок -шема на компензираниот затворен систем

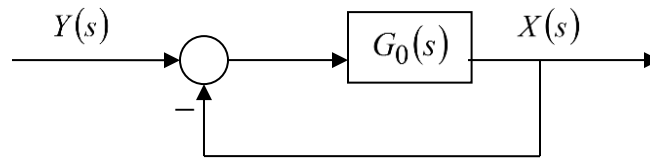
Фреквентната карактеристика на компензираниот отворен систем е прикажана на Слика 4.41, од каде се гледа дека затворениот систем има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 44.5^0 \approx 45^0$, со што е задоволен поставениот проектен услов.



Слика 4.42. Најквистова крива на компензираниот отворен систем од Слика 4.41

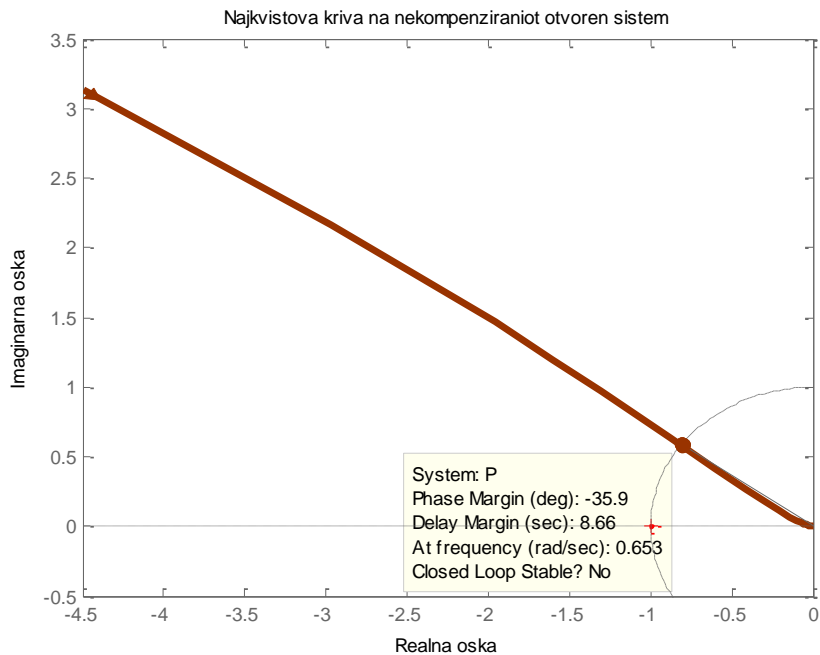
4.21. Да се определи дали затворениот систем од Слика 4.43 е стабилен и во таков случај да се пресметаат неговите резерви на засилување и фаза. Доколку набљудуваниот затворен систем не е стабилен, да се стабилизира, така што ќе биде во состојба да следи параболичен влез со грешка не поголема од 0.01.

$$G_0(s) = \frac{s+1}{s^2(4s+1)} \quad (4.104)$$



Слика 4.43. Илустрација кон Задача 4.21

Решение: Од Најквистовата крива на некомпензираниот отворен систем (4.104), прикажана на Слика 4.44, се гледа дека набљудуваниот затворен систем е нестабилен.



Слика 4.44. Најквистова крива на некомпензираниот отворен систем (4.104)

За да се стабилизира, употребен е диференцијален компензатор со преносна функција:

$$R(s) = \frac{s+0.1}{s+10} \quad (4.105)$$

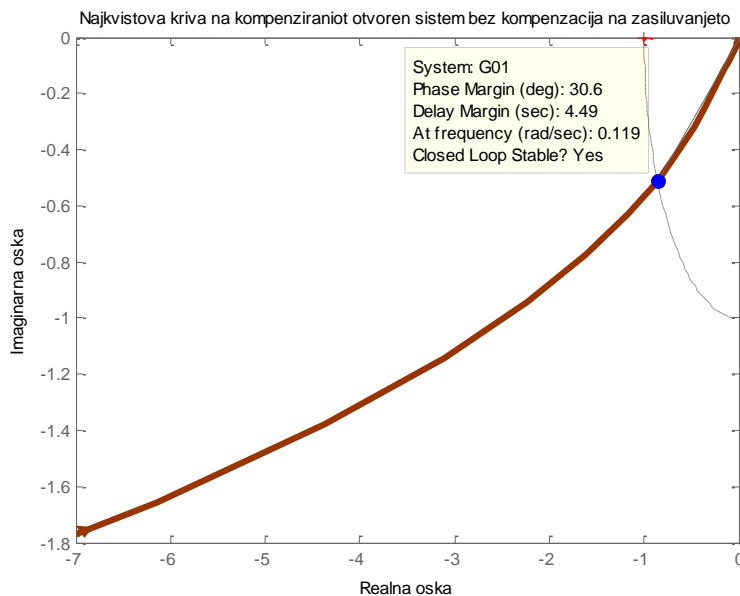
Најквистовата крива на вака компензираниот отворен систем со преносна функција:

$$G_{01}(s) = R(s)G_0(s) = \frac{s+0.1}{s+10} \cdot \frac{s+1}{s^2(4s+1)} \quad (4.106)$$

е прикажана на Слика 4.45, од каде се гледа дека компензираниот затворен систем е стабилен, со резерва на фаза од приближно 31° . Останува уште да се провери точноста на работа на системот во стационарен режим.

Константата на забрзување на компензираниот систем е:

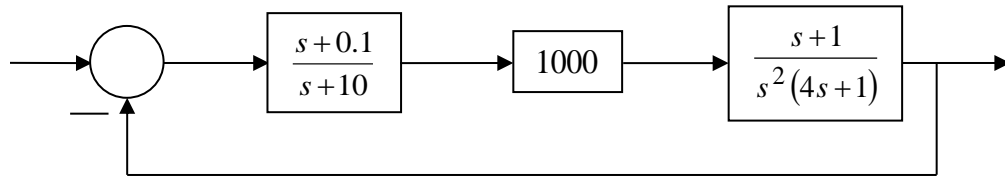
$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+0.1}{s+10} \cdot \frac{s+1}{s^2(4s+1)} = \frac{0.1}{10} = 0.01 \quad (4.107)$$



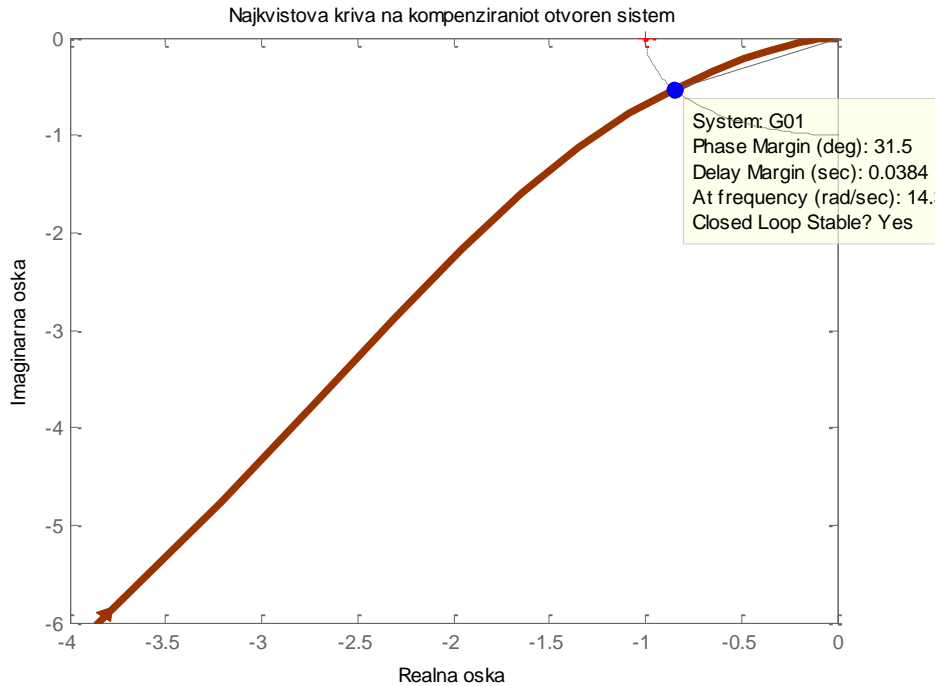
Слика 4.45. Најквистова крива на компензираниот отворен систем (4106) без компензација на засилувањето

и таа има неприфатлива вредност. Затоа коефициентот на засилување на компензираниот отворен систем (4.106) се зголемува 1000 пати. Структурната блок - шема на вака компензираниот затворен систем е прикажана на Слика 4.46, а фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем $G_{012}(s) = 1000G_{01}(s)$ е прикажана на Слика 4.47. Брзинската константа на затворениот систем од Слика 4.46 сега има прифатлива вредност, која ја обезбедува саканата точност на проектираниот затворен систем во стационарен режим:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 1000 \cdot \frac{s+0.1}{s+10} \cdot \frac{s+1}{s^2(4s+1)} = 1000 \cdot \frac{0.1}{10} = 100 \Rightarrow e(\infty) = 0.01 \quad (4.108)$$

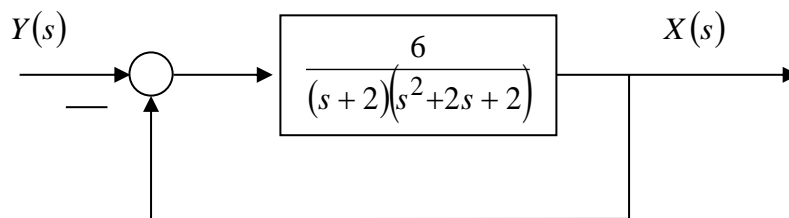


Слика 4.46. Структурна блок -шема на компензираниот затворен систем (4.106)



Слика 4.47. Најквистова крива на компензираниот отворен систем (4.106) со компензација на засилувањето

4.22. Да се определат резервите на засилување и фаза за затворениот систем од Слика 4.48. (Упатство: да се искористи фактот дека едно реално решение на равенката $x^3 + 4x^2 + 4x - 20 = 0$ е $x = 1.25$).



Слика 4.48. Илустрација кон Задача 4.22

Решение: Најнапред се определува пресекот на фреквентната карактеристика на отворениот систем за набљудуваниот затворен систем со реалната оска:

$$G_0(s) = \frac{6}{(s+2)(s^2+2s+2)} \quad (4.109)$$

$$G_0(j\omega) = \frac{6}{(2+j\omega)(2-\omega^2+j2\omega)} = 6 \frac{4(1-\omega^2) + j\omega(\omega^2-6)}{(\omega^2+4)(\omega^4+4)} \quad (4.110)$$

$$\text{Im}[G_0(j\omega)] = \frac{6\omega(\omega^2-6)}{(\omega^2+4)(\omega^4+4)} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{6} \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (4.111)$$

$$\text{Re}[G_0(j\sqrt{6})] = \left. \frac{24(1-\omega^2)}{(\omega^2+4)(\omega^4+4)} \right|_{\omega=\sqrt{6}} = \frac{24(-5)}{(10)(40)} = -0.3 \quad (4.112)$$

Следствено, фреквентната карактеристика на отворениот систем $G_0(s)$ ја сече реалната оска во точката $(-0.3, j0)$, па по дефиниција, резервата на засилување d изнесува:

$$d = \frac{1}{|G_0(j\sqrt{6})|} = \frac{1}{0.3} = 3.33 \quad (4.113)$$

или:

$$20 \log d = 20 \log 3.33 = 10.45 \text{dB} \quad (4.114)$$

Со изедначување на модулот од фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ со 1 се добива:

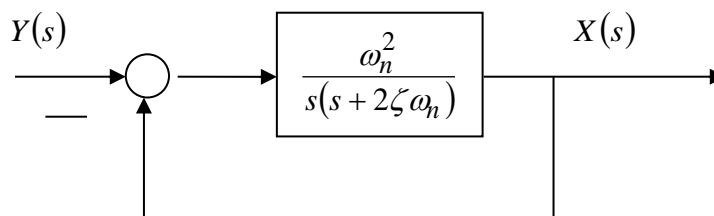
$$|G_0(j\omega)| = \frac{6}{\sqrt{\omega^2+4}\sqrt{\omega^4+4}} = 1 \Rightarrow 36 = (\omega^2+4)(\omega^4+4) \Rightarrow \omega^6 + 4\omega^4 + 4\omega^2 - 20 = 0 \Rightarrow \omega = 1.25 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (4.115)$$

$$\arg[G_0(j1.25)] = -\arctg \frac{\omega}{2} - \arctg \frac{2\omega}{2-\omega^2} \Big|_{\omega=1.25} = -112.33^\circ \quad (4.116)$$

Следствено:

$$\varphi_{rf} = -180^0 + 112.33^0 = 67.7^0 \quad (4.117)$$

4.23. Даден е затворениот систем од Слика 4.49. Да се определи врската помеѓу факторот на релативно придушување на одсивот на затворениот систем и соодветната резерва на фаза.



Слика 4.49. Илустрација кон Задача 4.23

Решение: За да се определи резервата на фаза, најнапред треба да се определи фреквенцијата при која модулот од фреквентната преносна функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем има вредност 1:

$$G_0(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)} \quad (4.118)$$

$$|G_0(j\omega_1)| = \left| \frac{\omega_n^2}{j\omega_1(j\omega_1 + 2\zeta\omega_n)} \right| = \frac{\omega_n^2}{\omega_1 \sqrt{\omega_1^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\omega_n^2 = \omega_1 \sqrt{\omega_1^2 + 4\zeta^2\omega_n^2} \Rightarrow \omega_1^2(\omega_1^2 + 4\zeta^2\omega_n^2) = \omega_n^4 \quad (4.119)$$

$$\omega_1^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_1^2 - \omega_n^4 = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_n^2 \left[-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4} \right] \quad (4.120)$$

$$\omega_1 = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}} \quad (4.121)$$

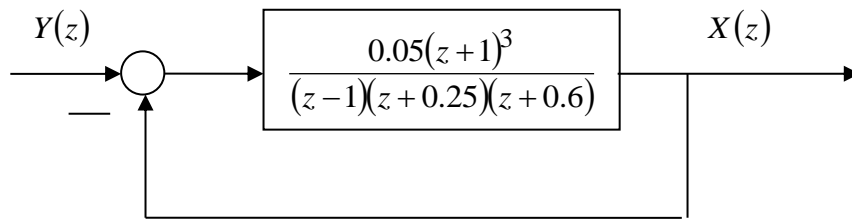
Аргументот на $G_0(j\omega)$ при оваа фреквенција изнесува:

$$\arg[G_0(j\omega_1)] = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega_1}{2\zeta_n\omega_n} = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}{2\zeta_n} \quad (4.122)$$

а резервата на фаза, по дефиниција е:

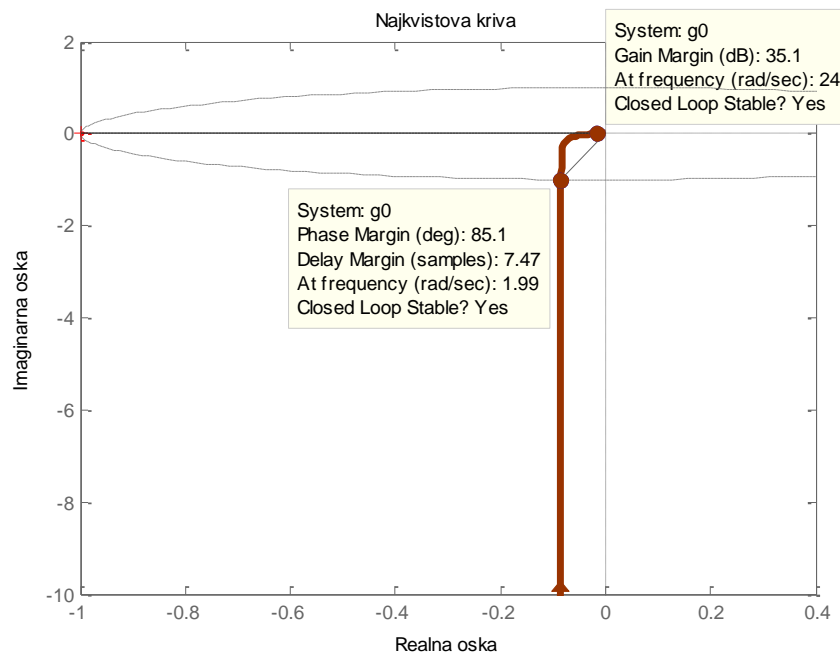
$$\begin{aligned} \varphi_{rf} &= 180 + \arg[G_0(j\omega_1)] = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}{2\zeta_n} = \arctg \frac{2\zeta_n}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} \end{aligned} \quad (4.123)$$

4.24. Да се испита влијанието на коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем врз поведението на дадениот затворен дискретен систем од Слика 4.50.

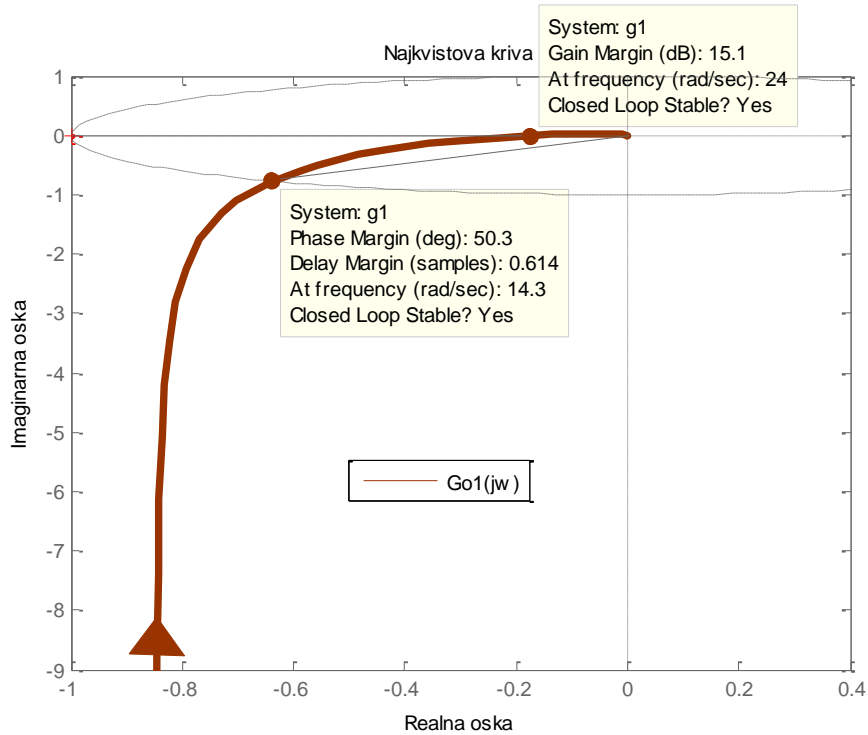


Слика 4.50. Илустрација кон Задача 4.24

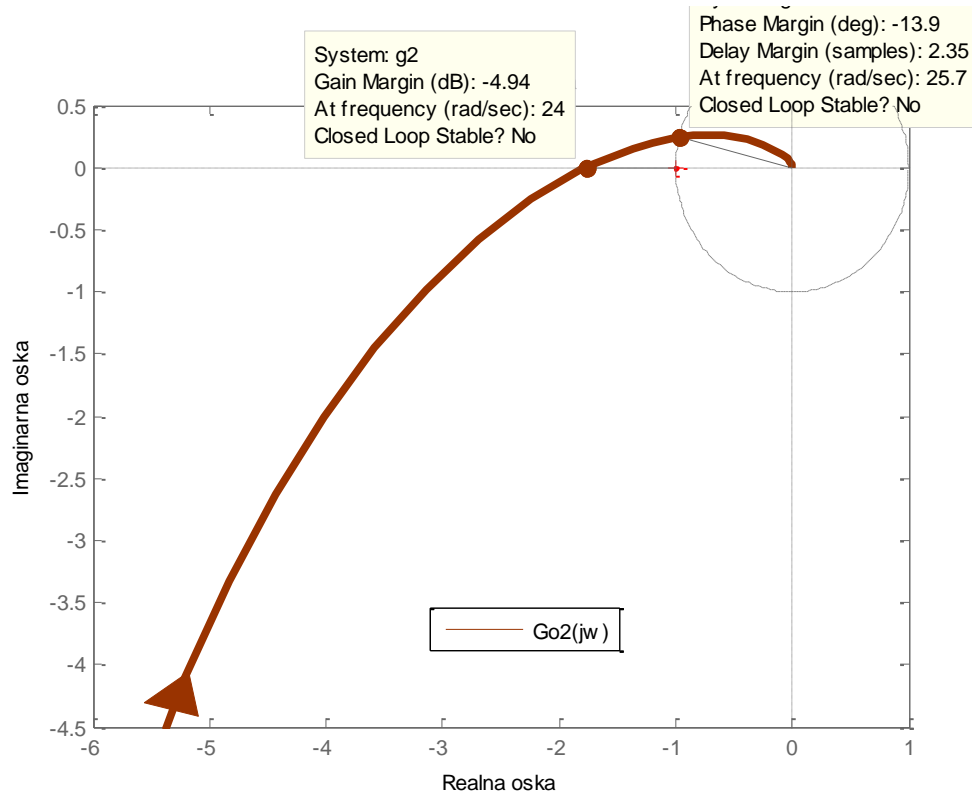
Решение: На Слика 4.51, Слика 4.52 и Слика 4.53 е прикажана Најквистовата крива на отворениот систем $G_0(j\omega)$ со $K = 0.05$, $K = 0.5$ и $K = 5$.



Слика 4.51. Најквистова крива на отворениот систем $G_0(j\omega)$ од Задача 4.24



Слика 4.52.Најквистова крива на отворениот систем $G_{01}(j\omega) = 10G_0(j\omega)$



Слика 4.53.Најквистова крива на отворениот систем $G_{01}(j\omega) = 100G_0(j\omega)$

Од нив се гледа дека со зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем (во конкретниот случај за 10 и 100 пати), неговата фреквентна карактеристика се оддалечува од имагинарната оска за ниски фреквенции и се подига нагоре при средни и високи фреквенции, така што во одреден момент ќе ја пресече реалната оска и ќе ја опфати критичната точка $(-1, j0)$. Со тоа затворениот систем, кој првобитно бил стабилен, ќе стане нестабилен. Оттука, со зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем, се намалува резервата на стабилност на затворениот систем и во одреден момент тој станува нестабилен. Едновремено, може да се заклучи дека пресечната фреквенција на фаза е постојано иста, $\omega_{\pi} = 24 \frac{rad}{sec}$ што се должи на фактот

дека промената на коефициентот на засилување на отворениот систем не влијае врз доцнењето на системот. Зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем има за резултат и зголемување на пресечната фреквенција на засилување, а со тоа и на пропусниот опсег на затворениот систем.

5. ФРЕКВЕНТНА СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА БОДЕОВИ ДИЈАГРАМИ

Бодевата постапка користи два дијаграми – амплитудната логаритамска фреквентна карактеристика или Бодевият дијаграм на слабеење и фазната полу-логаритамска фреквентна карактеристика или Бодевият дијаграм на фаза. И двата дијаграми се прикажуваат во функција од фреквенцијата ω дадена во логаритамски размер; модулот на фреквентната преносна функција исто така е прикажан во логаритамски размер, додека аргументот на фреквентната преносна функција на отворениот систем не се прикажува во логаритамски размер. Бодевите дијаграми многу јасно ја прикажуваат релативната стабилност на затворениот систем. Од нив многу едноставно се отчитуваат вредностите на резервите на засилување и фаза, кои се квантитативни показатели на степенот на релативна стабилност на еден затворен САУ.

Кога се користи Бодевата постапка за фреквентна анализа и синтеза на еден континуален САУ, пожелно е преносната функција на отворениот систем да се доведе на соодветен тн. **Бодев облик**:

$$\begin{aligned}
 G_0(s) &= K \frac{(s+z_1)^{K_1} \dots (s+z_\eta)^{K_\eta} (s^2+2\xi_1\omega_{n_1}s+\omega_{n_1}^2)^{L_1} \dots (s^2+2\xi_\mu\omega_{n_\mu}s+\omega_{n_\mu}^2)^{L_\mu}}{s^q (s+p_1)^{M_1} \dots (s+p_\nu)^{M_\nu} (s^2+2\zeta_1w_{n_1}s+w_{n_1}^2)^{N_1} \dots (s^2+2\zeta_\nu w_{n_\nu}s+w_{n_\nu}^2)^{N_\nu}} = \\
 &= K_B \frac{\left(\frac{s}{z_1}+1\right)^{K_1} \dots \left(\frac{s}{z_\eta}+1\right)^{K_\eta} \left(\frac{s^2}{\omega_{n_1}^2} + \frac{2\xi_1}{\omega_{n_1}}s+1\right)^{L_1} \dots \left(\frac{s^2}{\omega_{n_\mu}^2} + \frac{2\xi_\mu}{\omega_{n_\mu}}s+1\right)^{L_\mu}}{s^q \left(\frac{s}{p_1}+1\right)^{M_1} \dots \left(\frac{s}{p_\nu}+1\right)^{M_\nu} \left(\frac{s^2}{w_{n_1}^2} + \frac{2\zeta_1}{w_{n_1}}s+1\right)^{N_1} \dots \left(\frac{s^2}{w_{n_\nu}^2} + \frac{2\zeta_\nu}{w_{n_\nu}}s+1\right)^{N_\nu}} = \\
 &= \frac{K_B (T_{11}s+1)^{K_1} \dots (T_{1\eta}s+1)^{K_\eta} (T_{21}^2s^2+2\xi_1T_{21}s+1)^{L_1} \dots (T_{2\mu}^2s^2+2\xi_\mu T_{2\mu}s+1)^{L_\mu}}{s^q (T_{31}s+1)^{M_1} \dots (T_{3\nu}s+1)^{M_\nu} (T_{41}^2s^2+2\zeta_1T_{41}s+1)^{N_1} \dots (T_{4\nu}^2s^2+2\zeta_\nu T_{4\nu}s+1)^{N_\nu}} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

каде што K_B е тн. **Бодово засилување**:

$$K_B = K \frac{\prod_{i=1}^{\eta} (z_i)^{K_i} \prod_{i=1}^{\mu} (\omega_{n_i}^2)^{L_i}}{\prod_{i=1}^{\nu} (p_i)^{M_i} \prod_{i=1}^{\nu} (w_{n_i}^2)^{N_i}} \quad (5.2)$$

Факторизираниот облик на фреквентната преносна функција на еден дискретен систем не е така едноставен како кај континуалните системи:

$$G_0(e^{j\omega T_0}) = K \frac{(e^{j\omega T_0} + z_1)^{K_1} \dots (e^{j\omega T_0} + z_n)^{K_n} \dots}{(e^{j\omega T_0} - 1)^q (e^{j\omega T_0} + p_1)^{M_1} \dots (e^{j\omega T_0} + p_v)^{M_v} \dots} \quad (5.3)$$

и не постојат едноставни асимптоти или апроксимации за одделните членови во (5.3). Затоа наједноставен начин да се добијат Бодеовите дијаграми на еден дискретен систем е со помош на дигитален пресметувач, односно некој програмски пакет. Битно е да се истакне дека кај дискретните системи и модулот и фазата на фреквентната преносна функција се периодични функции од фреквенцијата ω , со период $\frac{2\pi}{T_0}$:

$$e^{j\omega T_0} = e^{j\left(\omega + \frac{2k\pi}{T_0}\right)T_0} = e^{j\omega T_0} e^{j2k\pi} \quad (5.4)$$

Следствено, доволно е Бодеовите дијаграми да се нацртаат за $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_0}$.

Одредувањето на релативната стабилност за континуалните и дискретните затворени САУ со помош на Бодеовите дијаграми се врши на следниот начин. Најнапред се определуваат пресечните фреквенции на засилување и фаза. По дефиниција, пресечната фреквенција на засилување ω_1 е онаа фреквенција за која модулот на фреквентната преносна функција на соодветниот отворен систем има вредност $|G_0(j\omega_1)| = 1$. Бидејќи $20 \log|G_0(j\omega_1)| = 0$, следува дека тоа е онаа фреквенција за која Бодеовиот дијаграм на слабење ја сече хоризонталната оска. Од друга страна, пресечната фреквенција на фаза е онаа фреквенција, за која аргументот на фреквентната преносна функција на отворениот систем има вредност -180° . Следствено, тоа е онаа фреквенција при која Бодеовиот дијаграм на фаза ја сече правата $\varphi = -180^\circ$. Откако еднаш се определат пресечните фреквенции на засилување и фаза, резервите на засилување и фаза се определуваат мошне едноставно. Резервата на засилување е еднаква со бројот децибели за кои $|G_0(j\omega_\pi)|_{dB}$ се наоѓа под хоризонталната оска, додека резервата на фаза е еднаква со бројот степени за кои $\arg[G_0(j\omega_1)]$ се наоѓа над оската -180° .

Синтезата на затворените континуални системи на автоматско управување со помош на Бодеовите дијаграми се сведува на нагудување на Бодеовите дијаграми на слабење и фаза на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, сè додека не бидат задоволени поставените проектни барања. Тоа нагудување се врши со додавање на сериски или паралелни компензатори и претставува релативно едноставна постапка,

затоа што Бодевите дијаграми кај континуалните системи се добиваат многу едноставно.

Понекогаш поставените проектни барања можат да се задоволат само преку нагудување на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем. Со зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем, Бодевите дијаграми на слабеење на отворениот систем се подига нагоре и пресечната фреквенција на засилување се поместува надесно. Аналогно, со намалување на коефициентот на засилување на отворениот систем, Бодевите дијаграми на слабеење се спушта надолу, и пресечната фреквенција на засилување се поместува налево. Следствено, со зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем се постига зголемување на пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем, а со негово намалување се остварува намалување на пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем. Меѓутоа, зголемувањето на засилувањето на отворениот систем има за резултат намалување на резервата на фаза на затворениот систем, што може негативно да се одрази врз неговата стабилност. Оттаму, саканата резерва на фаза не може секогаш да се оствари преку коефициентот на засилување на отворениот систем. Инаку, Бодевата синтеза со компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем се остварува со следните чекори:

1. Најнапред се цртаат Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на некомпензираниот отворен систем (објектот на управување), од каде се констатираат конкретните вредности на резервите на засилување и фаза на некомпензираниот затворен систем, како и соодветните пресечни фреквенции на засилување и фаза
2. Потоа зададените проектни барања, кои најчесто се изразени преку саканиот максимален прескок во отскочниот одзив на затворениот систем, се претвораат во соодветните фреквентни показатели, најчесто како резерва на фаза која треба да ја поседува проектираниот затворен систем.
3. На Бодевите дијаграми на фаза на некомпензираниот отворен систем се наоѓа онаа фреквенција $\tilde{\omega}_1$, при која затворениот систем ќе ја има саканата резерва на фаза. Тоа ќе биде пресечната фреквенција на засилување на компензираниот затворен систем.
4. Од Бодевите дијаграми на слабеење на некомпензираниот отворен систем се отчитува слабеењето на отворениот систем при фреквенцијата $\tilde{\omega}_1$. За $\tilde{\omega}_1$ да биде нова пресечна фреквенција на засилување на компензираниот систем, треба Бодевите дијаграми на слабеење на отворениот систем да минува низ) при оваа фреквенција. Оттаму, Бодевите дијаграми на слабеење на некомпензираниот отворен систем, треба да се спушти за онолку децибели, за колку што се наоѓа над оската $0dB$ при фреквенцијата $\tilde{\omega}_1$, односно да се крене за онолку децибели за колку се наоѓа под оската $0dB$ при истата фреквенција $\tilde{\omega}_1$. Ова поместување

се постига преку компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем, кој се зголемува кога Бодеоовиот дијаграм на слабеење треба да се подигне, односно се намалува кога Бодеоовиот дијаграм на слабеење треба да се спушти.

5. На крајот за проверка се исцртуваат Бодеоовите дијаграми на слабеење и фаза на компензираниот отворен систем за да се провери дали компензираниот затворен систем ги задоволува поставените проекти барања.

На ова место треба да се наспомене дека промената на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем не влијае врз пресечната фреквенција на фаза.

Бодеоовата фреквентна синтеза со примена на диференцијален компензатор се состои од следните чекори:

1. Најнапред зададените проектни барања, кои најчесто се претставени преку временските показатели на отскочниот одсив на проектираниот затворен систем какви што се времето на смирување, времето на максимален прескок и времето на пораст, се трансформираат во соодветните фреквентни показатели какви што се пропусниот опсег, резервата на фаза и сл.
2. Потоа се врши проверка на особините на некомпензираниот затворен систем, со цел да се утврди дали истиот ги задоволува проектните барања во поглед на величината на резервата на фаза и соодветните константи на грешка. За таа цел се исцртуваат Бодеоовите дијаграми на слабеење и фаза на некомпензираниот отворен систем од набљудуваниот затворен систем и се пресметуваат константите на грешка на затворениот систем.
3. Бидејќи диференцијалниот компензатор има занемарливо влијание врз поведението на целиот систем при ниски фреквенции, најнапред се врши нагудување на стационарниот режим на проектираниот затворен систем. Ова нагудување се остварува преку нагудување на коефициентот на засилување на отворениот систем со цел да се постигне саканата точност на работа на затворениот систем во стационарен режим, односно саканата величина на стационарната грешка, која се задава преку соодветните вредности на константите на грешка.
4. По компензацијата на коефициентот на засилување на отворениот систем, повторно се исцртуваат неговите фреквентни дијаграми на слабеење и фаза, со цел да се утврди резервата на фаза на затворениот систем во кој веќе е извршена компензација на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем.
5. Следен чекор е одредување на потребното фазно поместување φ_m што треба да го обезбеди диференцијалниот компензатор за да се реализираат проектните

барања во поглед на резервата на стабилност на проектираниот затворен систем и неговиот максимален дозволен прескок.

6. Врз основа на пресметаното максимално фазно поместување на диференцијалниот компензатор, се пресметува вредноста на факторот α , кој го дефинира односот помеѓу величините на нулата и полот на диференцијалниот компензатор.
7. За нова пресечна фреквенција на засилување на компензираниот систем $\tilde{\omega}_1$ се определува онаа фреквенција при која системот има слабеење од $-10 \log_{10}(\alpha) \text{ dB}$ и при која, едновременно, настапува максималното фазно поместување на диференцијалниот компензатор φ_m .
8. Со помош на пресметаните вредности за $\tilde{\omega}_1$ и α , се пресметуваат полот и нулата на диференцијалниот компензатор според релациите $b = \tilde{\omega}_1 \sqrt{\alpha}$ и $a = \frac{b}{\alpha}$.
9. Вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем се променува за фактор $\frac{1}{\alpha}$, со цел да се компензира дополнителното слабеење што го внесува диференцијалниот компензатор.
10. На крајот се врши проверка на особините на компензираниот затворен систем по компензацијата со диференцијалниот компензатор и постапката сè додека не се добие задоволително решение.

Синтезата со диференцијален компензатор по правило се користи за нагудување на преодниот режим на проектираниот систем. Меѓутоа, кај најголемиот дел системи за автоматско управување, од примарен интерес е точноста на работа во стационарен режим. Оваа точност треба да биде што е можно поголема, што значи дека системот треба да има што е можно помала стационарна грешка. Второ барање е отскачниот одзив на системот да биде во одредени граници. Точноста на работата на еден затворен САУ со единична негативна повратна врска во стационарен режим може да се зголеми со зголемување на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем. Меѓутоа, преодниот одзив на затворениот систем, по компензацијата на засилувањето на отворениот систем, може да биде сосема неприфатлив; вака компензираниот затворен систем може да биде дури и нестабилен. Затоа, по компензацијата на засилувањето на отворениот систем, најчесто е потребно во системот да се изврши и дополнителна компензација со внесување соодветен интегрален компензатор. Интегралните компензатори, по правило, се користат за нагудување на стационарниот режим на проектираниот систем, бидејќи тие ја обезбедуваат саканата стационарна грешкана системот. Притоа, нулата и полот од интегралниот компензатор се одбираат да бидат по величина многу помали од најмалиот пол на некомпензираниот отворен систем, што значи дека фазното поместување што го внесува интегралниот компензатор при

пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем ќе биде занемарливо. Ова се прави затоа што интегралниот компензатор во постапката на синтеза со интегрална компензација се применува не заради неговото негативно фазно поместување, туку заради слабењето што го внесува. На тој начин, интегралниот компензатор генерално ја намалува пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем во однос на некомпензираниот, што при пониските пресечни фреквенции обично има за резултат зголемување на резервата на фаза на системот. Постапката на Бодеова фреквентна синтеза преку компензација со интегрален компензатор се состои од следните чекори:

1. Компензација на засилувањето на отворениот систем за дадениот затворен систем со цел да се обезбеди саканото поведење на системот во стационарен режим.
2. Пресметување на резервата на фаза на затворениот систем по извршената компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем K .
3. Определување на новата пресечна фреквенција на засилувањето $\tilde{\omega}_1$, при која Бодеовиот дијаграм на отворениот систем со компензирано засилување ја сече хоризонталната оска, односно неговото слабење изнесува 0 dB .
4. Избор на нулата на интегралниот компензатор една декада под новата пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1$
5. Определување на факторот α , кој го дефинира односот помеѓу величините на нулата и полот на интегралниот компензатор, од условот слабењето што го внесува компензаторот при фреквенцијата $\tilde{\omega}_1$ да биде $-20 \log \alpha$.
6. Определување на полот од интегралниот компензатор

Бидејќи во случајот на дискретните системи не можат да се дефинираат едноставни асимптотски логаритамски дијаграми, наредувањето на Бодеоите дијаграми на слабење и фаза кај дискретните системи не е ниту така едноставно, ниту така интуитивно како кај континуалните системи. За среќа, постапките за анализа и синтеза на затворените линеарни континуални системи на автоматско управување преку Бодеоите дијаграми на слабење и фаза на соодветниот отворен систем се директно применливи и кај дискретните системи со помош на билинеарната трансформација:

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (5.5)$$

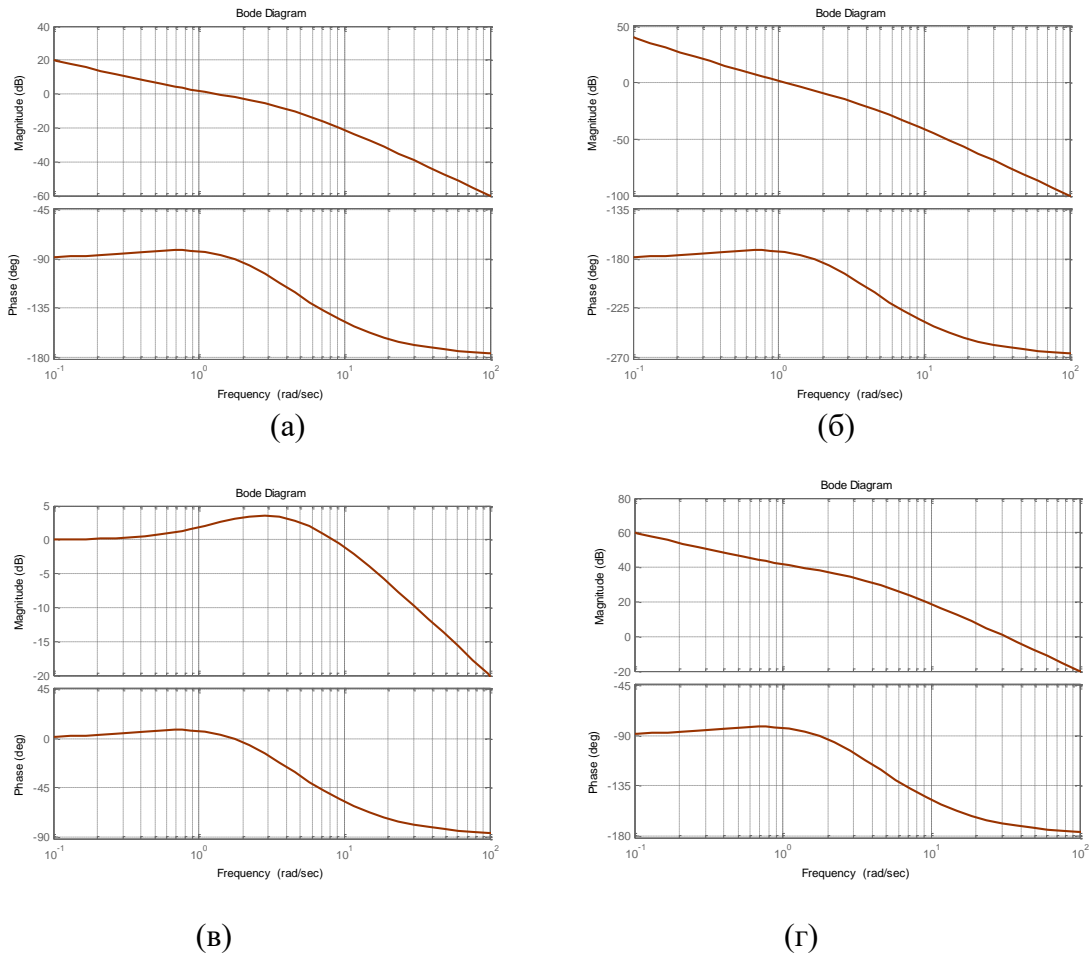
Така, при анализата и синтезата на еден затворен дискретен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска и соодветен отворен систем $G_0(z)$ се применува следната постапка:

1. Замена на комплексната променлива z во преносната функција $G_0(z)$ на соодветниот отворен систем со смената (5.5)
2. Замена на комплексната променлива s од преносната функција $G_0(s)$, добиена во претходниот чекор, со смената $s = j\omega_s$ и генерирање на Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза за $G_0(j\omega_s)$
3. Анализа на релативната стабилност на затворениот систем преку Бодеовите дијаграми на $G_0(j\omega_s)$, што подразбира одредување на пресечните фреквенции на засилување и фаза, резервите на засилување и фаза, ширината на пропусниот опсег и сите други фреквентни показатели на квалитетот на поведението на проектираниот систем од интерес
4. Трансформација на критичните фреквенции одредени во претходниот чекор од фреквентното подрачје во s – комплексната рамнина во фреквентното подрачје во z – комплексната рамнина според формулата $\omega T_0 = 2 \arctg \omega_s$.
5. Обично билинеарната трансформација $z = \frac{1+s}{1-s}$ не се користи во фреквентната анализа на затворените дискретни системи на автоматско управување со помош на Бодеовите дијаграми, бидејќи постојат програмски пакети кои ја овозможуваат нивната анализа директно во z -комплексното подрачје. Затоа пак е многу полезна при фреквентната синтеза на истите со помош на Бодеовите дијаграми.



5.1. Да се определи кои од Бодеовите дијаграми прикажани на Слика 5.1 припаѓаат на отворениот систем, чија преносна функција има облик:

$$G_0(s) = R(s)P(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)(s+5)} \quad (5.6)$$



Слика 5.1. Илустрација кон задача 5.1

Решение: Бидејќи:

$$G_0(j\omega) = \frac{10(1 + j\omega)}{j\omega(2 + j\omega)(5 + j\omega)} \quad (5.7)$$

Бодеовиот дијаграм на фаза на набљудуваниот систем:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(\omega) - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{5}\right) \quad (5.8)$$

при многу ниски фреквенции ќе има вредност:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}, \omega \ll 1 \quad (5.9)$$

па, очигледно, ниту дијаграмите на Слика 5.1 под б), ниту дијаграмите на Слика 5.1 под в) не можат да бидат Бодеоови дијаграми на зададениот отворен систем. Од друга страна, бидејќи:

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |G_0(j\omega)| &= 20 \log_{10} \frac{10|1+j\omega|}{|j\omega||2+j\omega||5+j\omega|} = \\ &= 20 \log_{10}(10) + 20 \log_{10} \sqrt{1+\omega^2} - 20 \log_{10}(\omega) - \\ &- 20 \log_{10} \sqrt{4+\omega^2} - 20 \log_{10} \sqrt{25+\omega^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} &20 \log_{10}(10) + 20 \log_{10} \sqrt{1+(10^{-1})^2} - 20 \log_{10}(10^{-1}) - \\ &- 20 \log_{10} \sqrt{4+(10^{-1})^2} - 20 \log_{10} \sqrt{25+(10^{-1})^2} \approx \\ &\approx 20 \log_{10}(10) + 20 \log_{10}(1) - 20 \log_{10}(10^{-1}) - 20 \log_{10}(2) - 20 \log_{10}(5) = \\ &= -20 \log_{10}(10^{-1}) = 20 \text{dB} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ниту дијаграмите на Слика 5.1 под г) не можат да бидат Бодеоови дијаграми на зададениот отворен систем. Следствено, неговите Бодеоови дијаграми се прикажани на Слика 5.1.а).

5.2. Да се определи пресечната фреквенција на засилување и фазата на отворениот систем од претходната задача за оваа фреквенција.

Решение: Пресечната фреквенција на засилување е онаа фреквенција ω_1 при која фреквентната преносна функција $G_0(j\omega)$ има модул еднаков на единица. Следствено, таа се добива како решение на равенката:

$$|G_0(j\omega)| = \frac{10|1+j\omega|}{|j\omega||2+j\omega||5+j\omega|} = \frac{10\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{25+\omega^2}} = 1 \quad (5.12)$$

која се сведува на изразот:

$$\omega^6 + 29\omega^4 - 100 = (\omega^2)^3 + 29(\omega^2)^2 - 100 = 0 \quad (5.13)$$

Равенката (5.13) има три решенија:

$$\omega^2 = -28.88 \quad (5.14)$$

$$\omega^2 = -1.92 \quad (5.15)$$

$$\omega^2 = 1.80 \quad (5.16)$$

од кои е прифатливо само третото, па за бараната фреквенција се добива:

$$\omega_1 = \sqrt{1.80} \approx 1.3423 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (5.17)$$

Фазата на отворениот систем (5.6) при пресечната фреквенција на засилување ω_1 е:

$$\arg[G_0(j\omega_1)] = \text{arctg}(\omega_1) - \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - \text{arctg}\left(\frac{\omega_1}{5}\right) = -85.58^\circ \quad (5.18)$$

5.3. Отворениот систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = R(s)P(s) = \frac{100}{s^2 + 18s + 80} \quad (5.19)$$

Да се пресметаат фреквенциите на прекршување на асимптотскиот Бодев дијаграм на слабеење на овој систем.

Решение: Преносната функција $G_0(s)$ има пар прости полови во точките $s_1 = -8$ и $s_2 = -10$, па може да се запише во следниот факторизиран облик:

$$G_0(s) = \frac{100}{s^2 + 18s + 80} = \frac{100}{(s+8)(s+10)} = \frac{100}{80\left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)} = \frac{5}{4(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad (5.20)$$

Оттука, фреквенциите на прекршување на асимптотскиот Бодев дијаграм на слабеење на овој систем се:

$$\omega_{p1} = \frac{1}{T_1} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (5.21)$$

$$\omega_{p2} = \frac{1}{T_2} = 10 \frac{rad}{sec} \quad (5.22)$$

5.4. Да се пресмета наклонот на асимптотскиот Бодев дијаграм на слабеење на отворениот систем од претходната задача при многу ниски $\omega \ll 1$ и многу високи фреквенции $\omega \gg 10$.

Решение: Врз основа на Таблицата 5.1 се заклучува дека за $\omega < \omega_{p1} = 8$ наклонот на асимптотскиот логаритамски дијаграм на слабеење е $0dB/dec$, за $\omega_{p1} = 8 \leq \omega < 10 = \omega_{p2}$ тој изнесува $-20dB/dec$ и за $\omega \geq 10 = \omega_{p2}$ е $-40dB/dec$. Следствено, наклонот на асимптотскиот Бодев дијаграм на слабеење на отворениот систем од претходната задача при многу ниски фреквенции $\omega \ll 1$ изнесува $0dB/dec$, додека при многу високи фреквенции $\omega \gg 10$ тој е $-40dB/dec$.

Таблица 5.1.

$W_i(s)$	T_i	$\omega_{pi} \left[\frac{rad}{sec} \right]$	Наклон	фаза
$W_0(s) = 1.25$	/	/	$0dB/dec$	0
$W_1(s) = \frac{1}{\frac{s}{8} + 1}$	$T_1 = \frac{1}{8}$	$\omega_{p1} = 8$	$-20dB/dec$	$-\frac{\pi}{2}$
$W_2(s) = \frac{1}{\frac{s}{10} + 1}$	$T_2 = \frac{1}{10}$	$\omega_{p2} = 10$	$-20dB/dec$	$-\frac{\pi}{2}$

5.5. Да се провери на кој од системите:

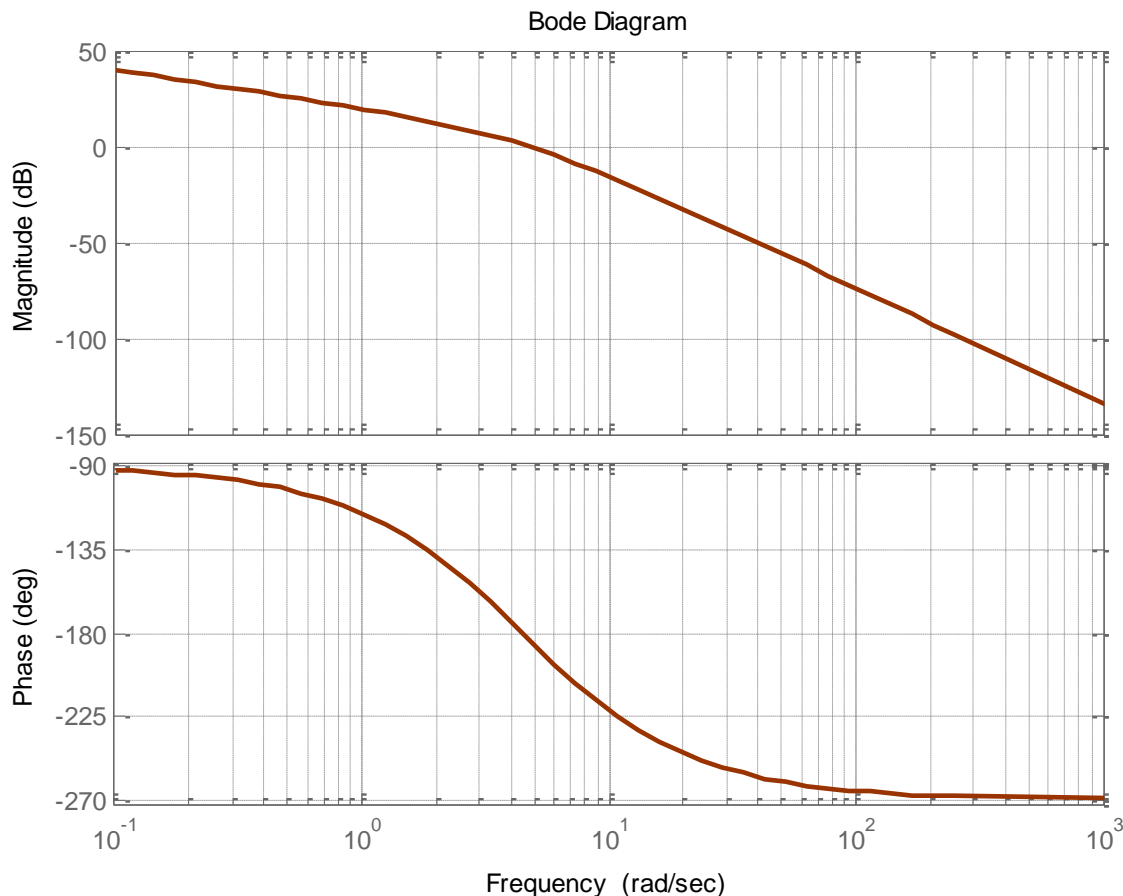
$$G(s) = \frac{200}{s(s+4)(s+5)} \quad (5.23)$$

$$G(s) = \frac{200}{s^2(s+4)(s+5)} \quad (5.24)$$

$$G(s) = \frac{200}{(s+4)(s+5)} \quad (5.25)$$

$$G(s) = \frac{20000}{s(s^2+9s+20)} \quad (5.26)$$

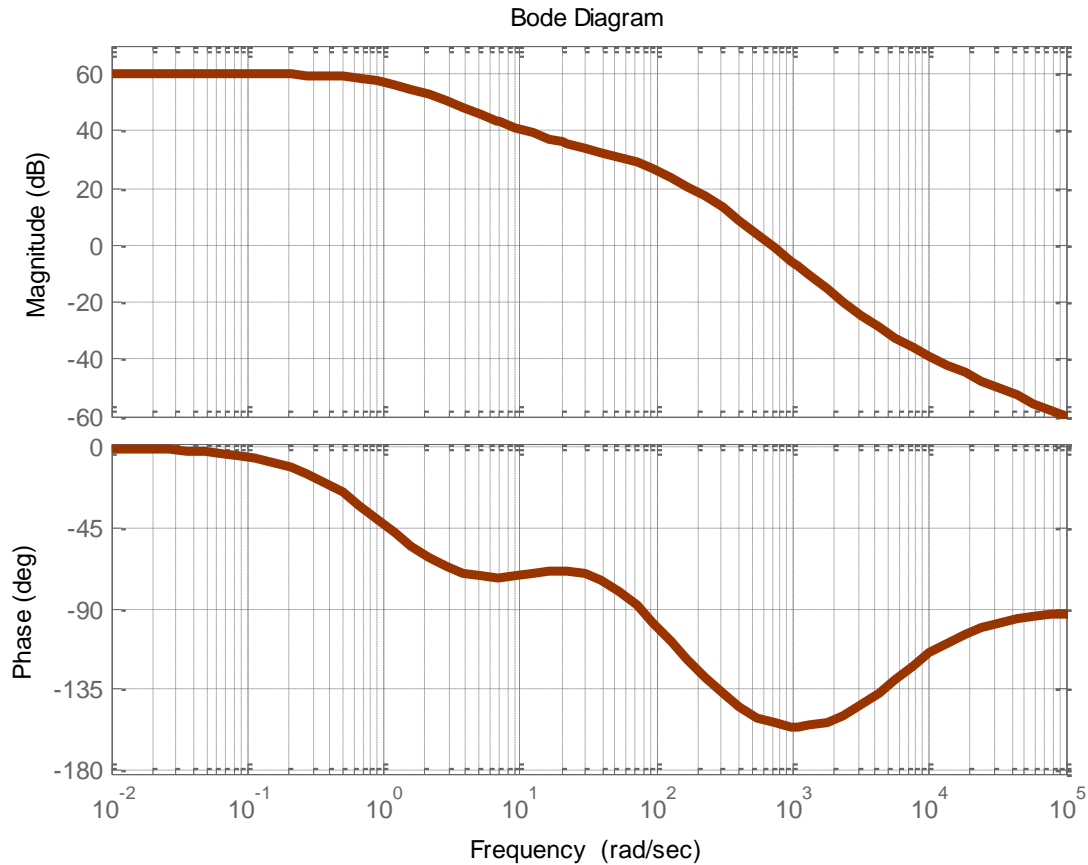
припаѓаат Бодеовите дијаграми од Слика 5.2.



Слика 5.2. Илустрација кон Задача 5.5

Решение: Бодеовите дијаграми прикажани на Слика 5.2 не можат да припаѓаат на системите опишани со преносните функции (5.24) и (5.25), бидејќи фазата на овие системи при многу мали фреквенции е еднаква на $-\pi$ и 0, соодветно. Од друга страна, засилувањето на системот (5.23) при фреквенција $\omega = 10^{-1} \text{ rad/sec}$ изнесува $(20 \log_{10} 10 - 20 \log_{10} 10^{-1}) \text{ dB} = 40 \text{ dB}$, додека при истата фреквенција системот (5.26) има засилување од $(20 \log_{10} 10^3 - 20 \log_{10} 10^{-1}) \text{ dB} = 80 \text{ dB}$. Следствено, Бодеовите дијаграми од Слика 5.2 припаѓаат на преносната функција (5.23).

5.6. Да се определи редот на астатизам на системот, чии Бодеови дијаграми се прикажани на Слика 5.3.



Слика 5.3. Илустрација кон Задача 5.6

Решение: Ако системот има астатизам од произволен ред ($r > 0$), неговиот логаритамски дијаграм на фаза при многу ниски фреквенции ќе изнесува $-r \frac{\pi}{2}$. Бидејќи Бодеоовиот дијаграм на фаза од Слика 5.3 при ниски фреквенции има вредност 0, се заклучува дека редот на астатизмот на системот е 0.

5.7. Да се провери на кој од системите:

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+50)(s+200)} \quad (5.27)$$

$$G(s) = \frac{100(s+20)(s+5000)}{(s+1)(s+50)(s+200)} \quad (5.28)$$

$$G(s) = \frac{100(s+10)(s+5000)}{s(s+1)(s+50)(s+200)} \quad (5.29)$$

$$G(s) = \frac{500}{(s+1)(s+50)} \quad (5.30)$$

припаѓаат Бодеовите дијаграми од Слика 5.3.

Решение: Во согласност со заклучокот од претходната задача, Бодеовите дијаграми од Слика 5.3 не припаѓаат на преносната функција (5.29), која има астатизам од прв ред. Од друга страна, засилувањето на преносната функција (5.27) при многу ниски фреквенции е негативно и изнесува $20 \log_{10}(10^{-2}) dB = -40 dB$, додека засилувањето на преносната функција (5.30) при многу ниски фреквенции е многу помало од $60 dB$ и изнесува $20 \log_{10}(10) dB = 20 dB$. Следствено, Бодеовите дијаграми од Слика 5.3 припаѓаат на преносната функција (5.28), чие засилување при многу ниски фреквенции изнесува $20 \log_{10}(1000) dB = 60 dB$.

5.8. Со помош на Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза, да се определат резервите на засилување и фаза на затворениот систем на автоматско управување, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{10}{s+2} \quad (5.31)$$

Решение: Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на набљудуваниот систем се прикажани на Слика 5.4.

Пресечната фреквенција на засилување ω_1 е онаа фреквенција при која Бодеовиот дијаграм на слабеење ја сече оската $0 dB$. Од дијаграмот на Слика 5.4 се гледа дека тоа е фреквенцијата $\omega_1 = 9.8 \frac{rad}{sec}$. Резервата на фаза φ_{rf} е еднаква на аголот за кој Бодеовиот дијаграм на фаза при $\omega_1 = 9.8 \frac{rad}{sec}$ се наоѓа над оската $\varphi = -180^0$, а тој агол е 102^0 .

Следствено:

$$\omega_1 = 9.8 \frac{rad}{sec}, \quad \varphi_{rf} = 102^0 \quad (5.32)$$

Бидејќи во конкретниот случај Бодеовиот дијаграм на фаза никогаш не ја сече оската $\varphi = -180^0$, следува дека $\omega_\pi = \infty$, па резервата на засилување $d = \infty$. Добиениот резултат може да се потврди и аналитички:

$$G_0(j\omega) = \frac{10}{2 + j\omega} \quad (5.33)$$

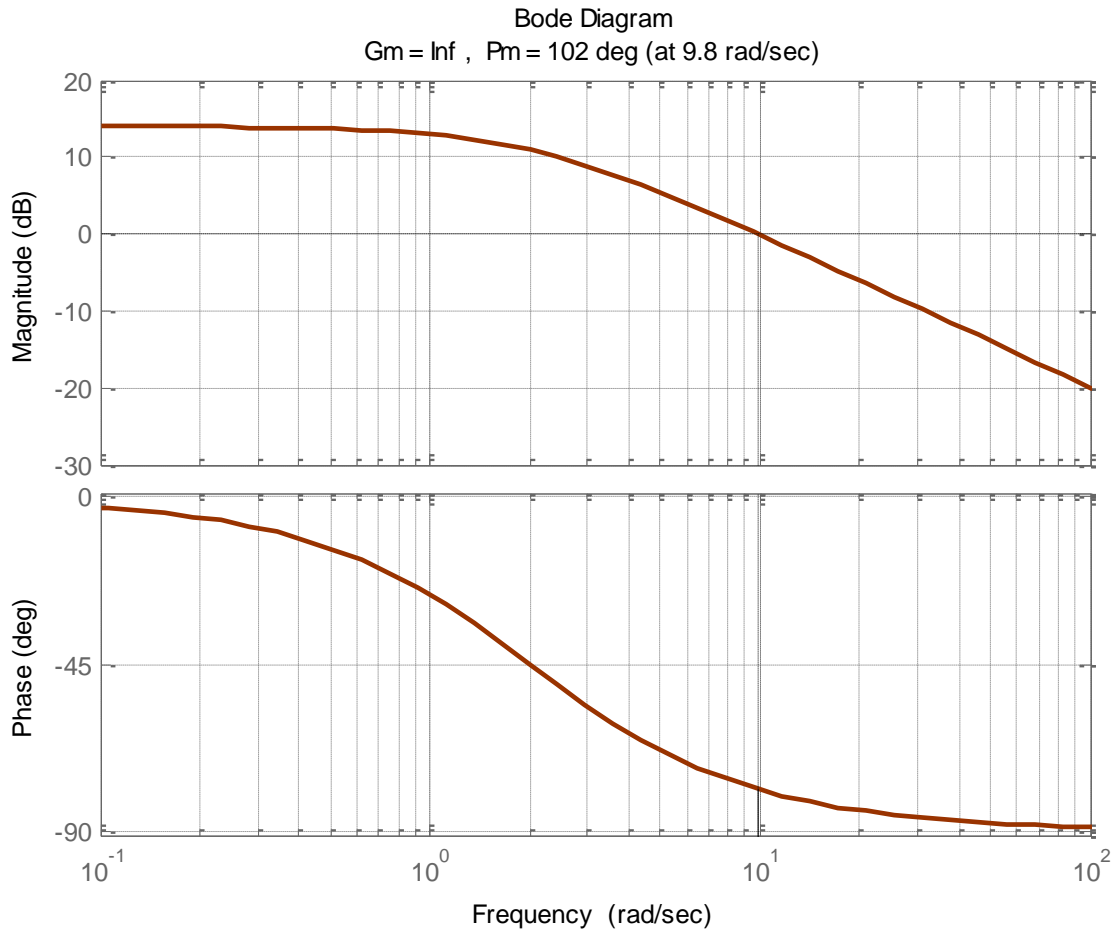
$$|G_0(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{4 + \omega^2}} \quad (5.34)$$

$$\varphi(\omega) = \arg[G_0(j\omega)] = -\arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.35)$$

$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{10}{\sqrt{4 + \omega_1^2}} = 1 \Rightarrow$$

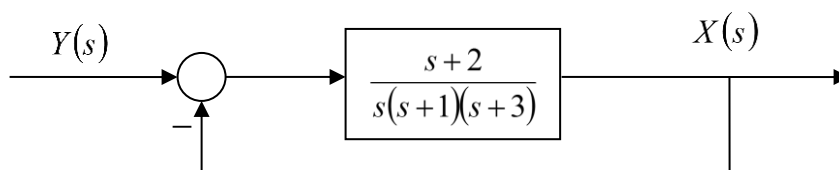
$$4 + \omega_1^2 = 100 \Rightarrow \omega_1^2 = 96 \Rightarrow \omega_1 = 9.7980 \approx 9.8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (5.36)$$

$$\varphi_{rf} = 180^0 + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^0 - \arctg\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \approx 180^0 - 78^0 = 102^0 \quad (5.37)$$



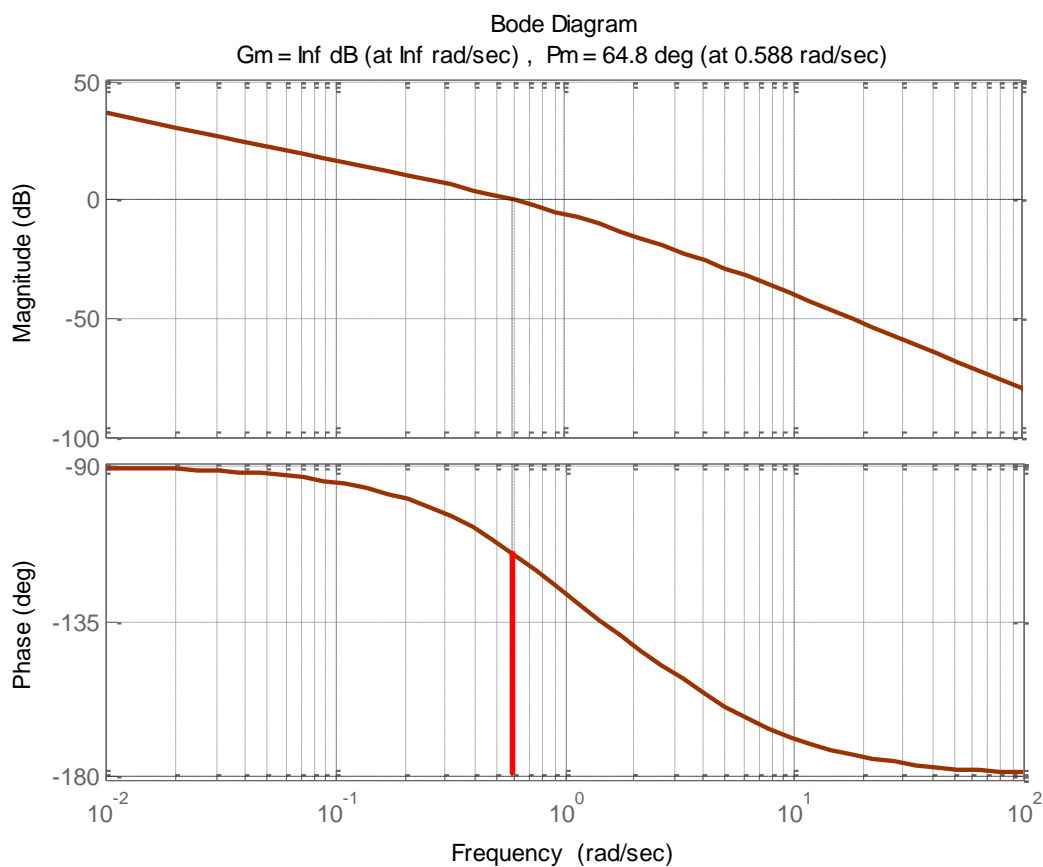
Слика 5.4. Илустрација кон Задача 5.8

5.9. Да се определат резервите на засилување и фаза за затворениот систем од долната слика.



Слика 5.5. Илустрација кон Задача 5.9

Решение: Бодевите дијаграми на отворениот систем од Слика 5.5 се прикажани на Слика 5.6.

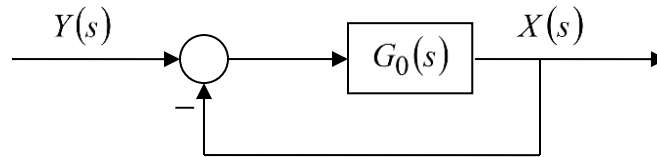


Слика 5.6. Бодевите дијаграми на отворениот систем од Слика 5.5

Оттука се гледа дека резервата на фаза на затворениот систем изнесува приближно 65^0 , додека резервата на засилување е ∞ , бидејќи Бодевите дијаграм на фаза на отворениот систем воопшто не ја сече правата -180^0 .

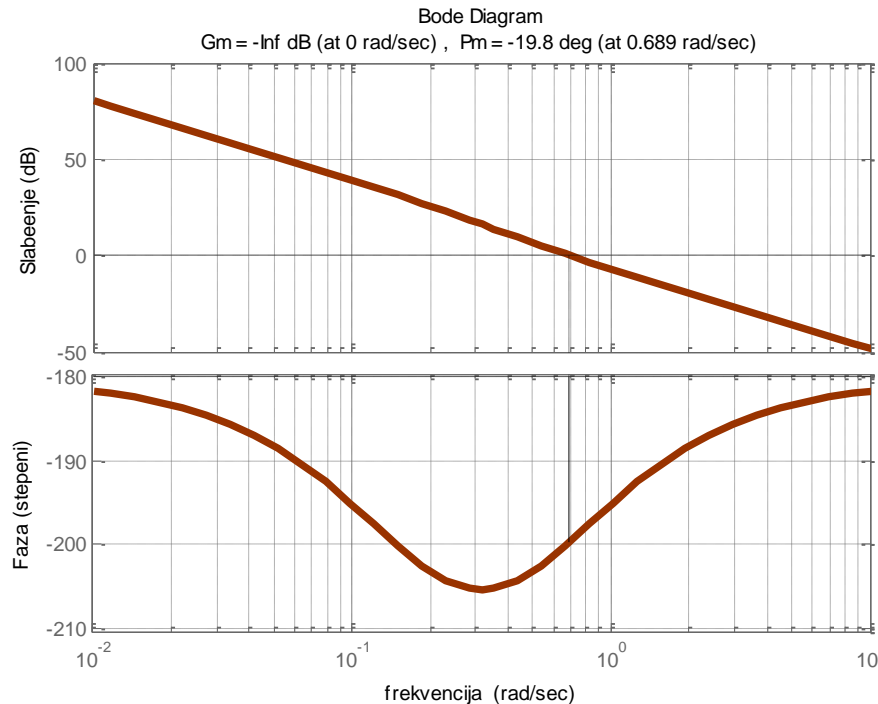
5.10. Да се испита стабилноста на затворениот систем од Слика 5.7 и да се пресметаат неговите резерви на засилување и фаза.

$$G_0(s) = \frac{2s+1}{s^2(5s+1)} \quad (5.38)$$



Слика 5.7. Илустрација кон Задачата 5.10

Решение: Бодеовите дијаграми на отворениот систем (5.38), добиени со помош на MATLAB се прикажани на Слика 5.8. Од нив се гледа дека затворениот систем е нестабилен, бидејќи има негативна резерва на фаза.



Слика 5.8. Бодеови дијаграми на отворениот систем (5.38)

Бараното решение може да се добие и по аналитички пат:

$$G_0(j\omega) = \frac{1+j2\omega}{-\omega^2(1+j5\omega)}, \quad |G_0(j\omega)| = \frac{|1+j2\omega|}{|-\omega^2||1+j5\omega|}, \quad \arg[G_0(j\omega)] = \arctg(2\omega) - \pi - \arctg(5\omega)$$

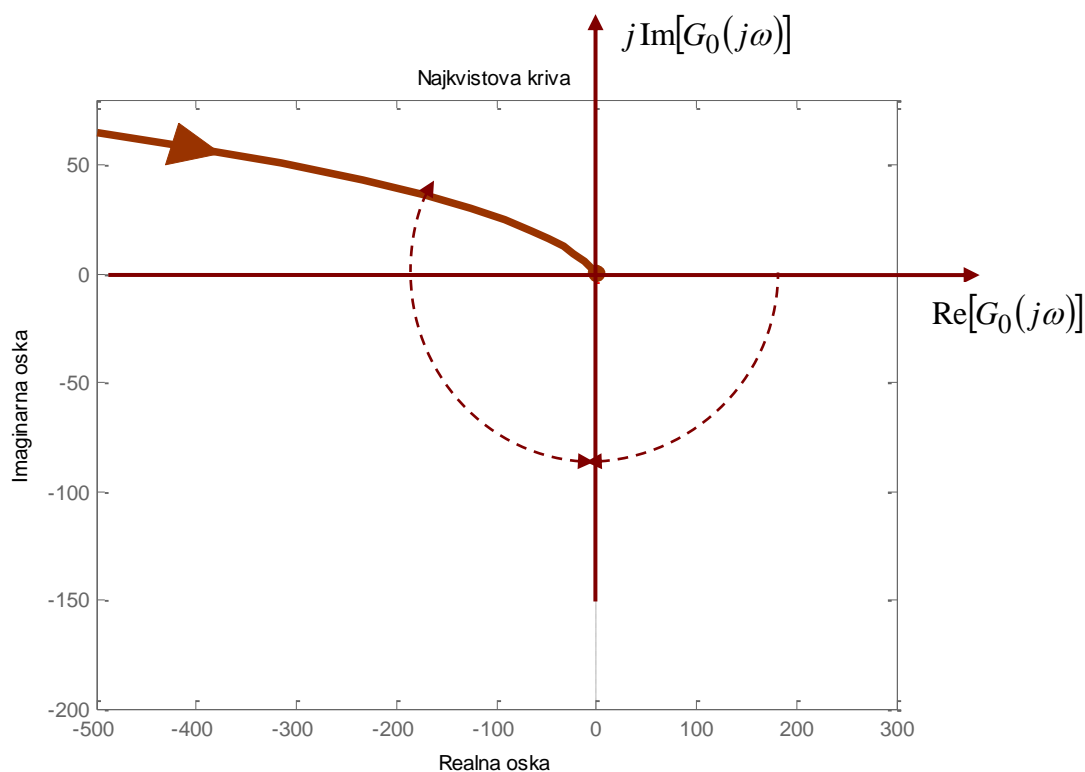
$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{|1 + j2\omega_1|}{|-\omega_1^2| |1 + j5\omega_1|} = \frac{\sqrt{1 + 4\omega_1^2}}{\omega_1^2 \sqrt{1 + 25\omega_1^2}} = 1$$

$$25\omega_1^6 + \omega_1^4 - 4\omega_1^2 - 1 = 25(\omega_1^2)^3 + (\omega_1^2)^2 - 4(\omega_1^2) - 1 = 0$$

$$\omega_1^2 = 0.4746, \quad \omega_1^2 = -0.2573 \pm j0.1344 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{0.4746} = 0.6889 \approx 0.689 \quad (5.39)$$

$$\arg[G_0(j\omega_1)] = \arctg(2\omega_1) - \pi - \arctg(5\omega_1) = 199.78^\circ \approx -199.8^\circ \quad (5.40)$$

$$\varphi_{rf} = 180^\circ + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^\circ - 199.8^\circ = -19.8^\circ \quad (5.41)$$



Слика 5.9. Најквистова крива на отворениот систем (5.38)

Стабилноста на набљудуваниот затворен систем може да се испита и со помош на Најквистовиот критериум за испитување на стабилноста. За таа цел, на Слика 5.9 е прикажана Најквистовата крива на отворениот систем (5.38), надополнета со соодветниот лак на астатизам. Бидејќи отворениот систем нема полови во десната полурамнина од s -комплексната рамнина, а неговата Најквистова крива ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$, според Најквистовиот критериум за стабилност може да се заклучи дека затворениот систем од Слика 5.7 е нестабилен.

5.11. Да се определат и означат на дијаграмите пресечната фреквенција на засилување, пресечната фреквенција на фаза, резервата на засилување и резервата на фаза на соодветниот затворен дискретен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносна функција:

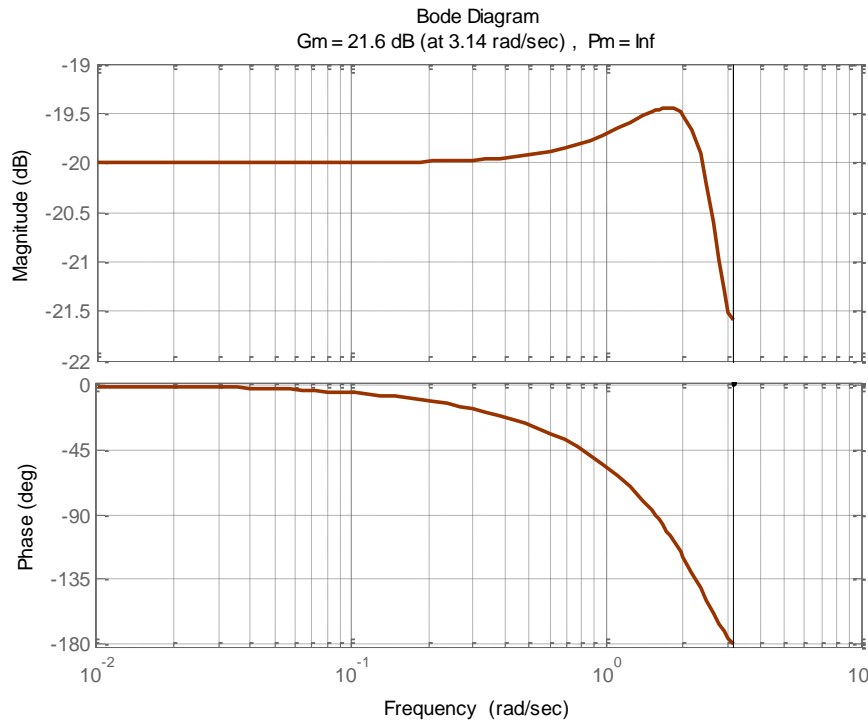
$$G_0(z) = \frac{(2z+1)}{(4z+1)(5z+1)} \quad (5.42)$$

Решение: Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.42) се прикажани на Слика 5.10. Оттука се гледа дека дека затворениот систем има резерва на засилување од $21.6dB$ при фреквенција $\omega_\pi = 3.14 \frac{rad}{sec}$ и бесконечна резерва на фаза, бидејќи дијаграмот на слабење никогаш не ја сече хоризонталата $(G_0)_{dB} = 0dB$.

До истиот резултат се доаѓа и со смената $z = \frac{1+s}{1-s}$, со која проблемот се префрла од z -комплексната рамнина во s -комплексната рамнина. Така се добива преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{(1-s)(3+s)}{(5+3s)(6+4s)} \quad (5.43)$$

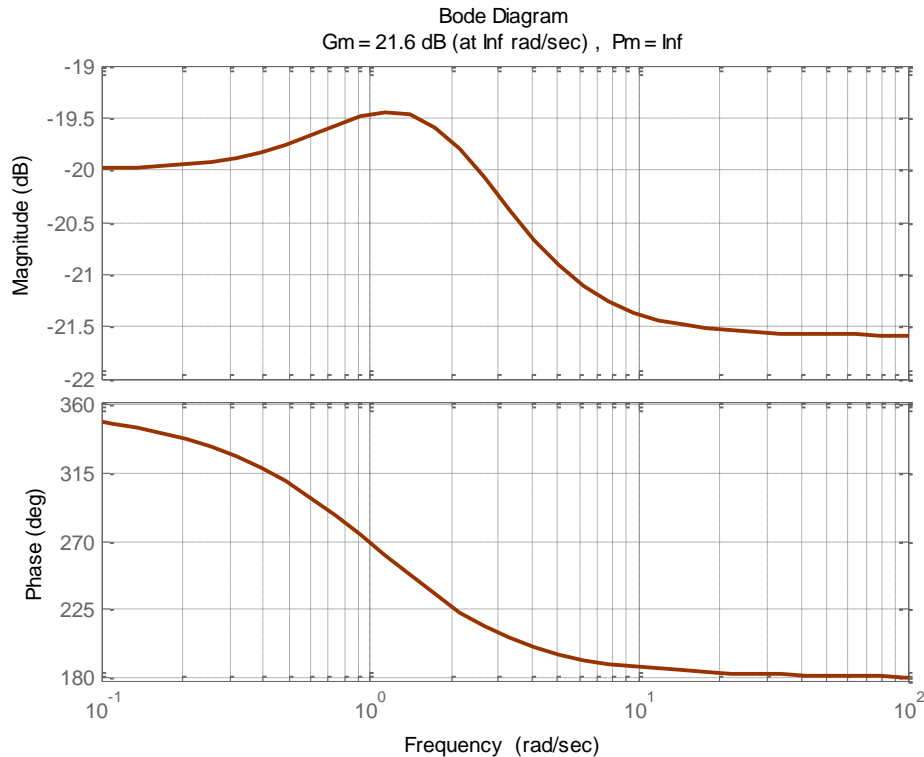
чиј Бодевите дијаграми се прикажани на Слика 5.11.



Слика 5.10. Бодевите дијаграми на слабење и фаза на отворениот систем $G_0(z)$ од Задача 5.11

Од Слика 5.10 се гледа дека континуалниот систем (5.43) има резерва на засилување од $21.6dB$ при пресечната фреквенција на фаза $(\omega_s)_\pi = \infty \frac{rad}{sec}$. Оваа фреквенција треба да се прслика назад во z -комплексното подрачје со смената $(\omega_z)_\pi = \frac{2}{T} \arctg(\omega_s) \frac{rad}{sec}$, па така за пресечната фреквенција на фаза на дискретниот систем (5.42) се добива:

$$(\omega_z)_\pi = \frac{2}{T} \arctg(\omega_s)_\pi \frac{rad}{sec} = 2 \arctg(\infty) \frac{rad}{sec} = 2\pi \frac{rad}{sec} = 3.14 \frac{rad}{sec} \quad (5.44)$$



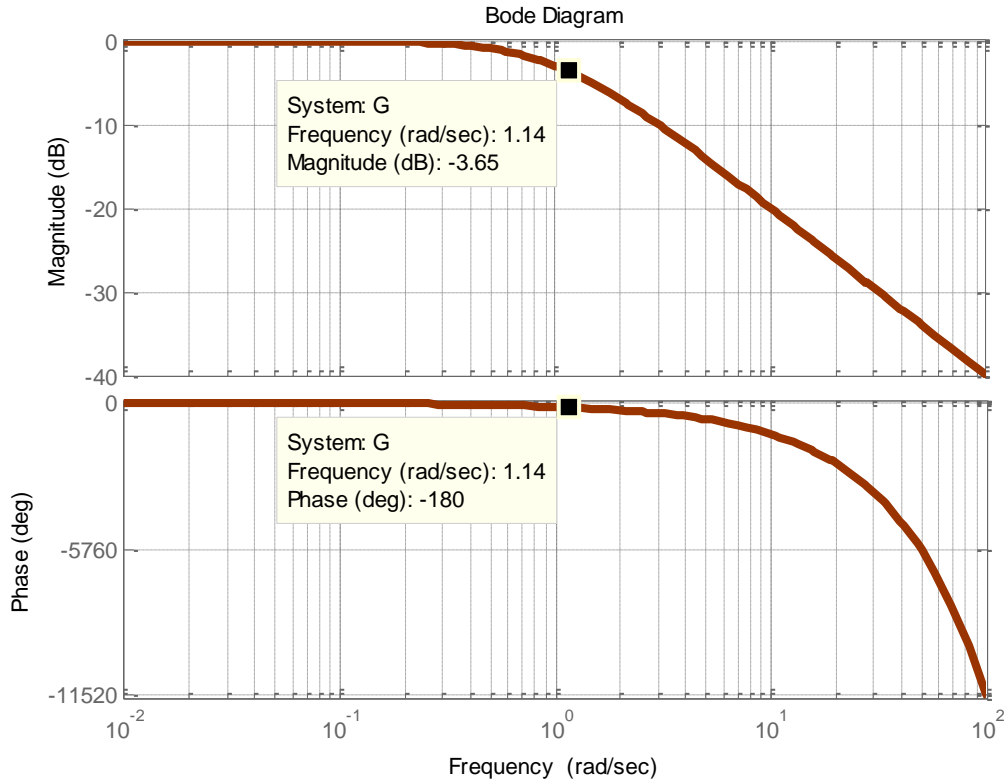
Слика 5.11. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем $G_o(s)$ од Задача 5.11

5.12. Затворениот систем на автоматско управување се состои од сериска врска на П-регулатор $R(s) = K$ и објект на управување со преносна функција $P(s) = \frac{e^{-2s}}{s+1}$, опфатени со единична негативна повратна врска. Со помош на Бодевите дијаграми да се определи вредноста на коефициентот K на П-регулаторот, за која затворениот систем ќе се најде на границата на стабилност.

Решение: Преносната функција на отворениот систем за набљудуваниот затворен систем е:

$$G_0(s) = R(s)P(s) = K \frac{e^{-2s}}{s+1} \quad (5.45)$$

Неговите Бодеови дијаграми на слабење и фаза за $K=1$ се прикажани на Слика 5.12.



Слика 5.12. Бодеови дијаграми на отворениот систем (5.45)

Од нив се гледа дека пресечната фреквенција на фаза изнесува $\omega_\pi = 1.14 \frac{rad}{sec}$, додека слабењето на системот $G_0(\omega)_{dB} = 20 \log_{10} |G_0(j\omega)|$ при оваа фреквенција изнесува $G_0(\omega_\pi)_{dB} = -3.65 dB$. Критичната вредност на коефициентот K се добива од условот $G_0(\omega_\pi)_{dB} = 20 \log_{10} |G_0(j\omega_\pi)| = 0$. Со други зборови, тоа е онаа вредност на K за која Бодеовиот дијаграм на слабење од Слика 5.12 ќе се подигне така што ќе минува низ нулата за $\omega = \omega_\pi = 1.14 \frac{rad}{sec}$:

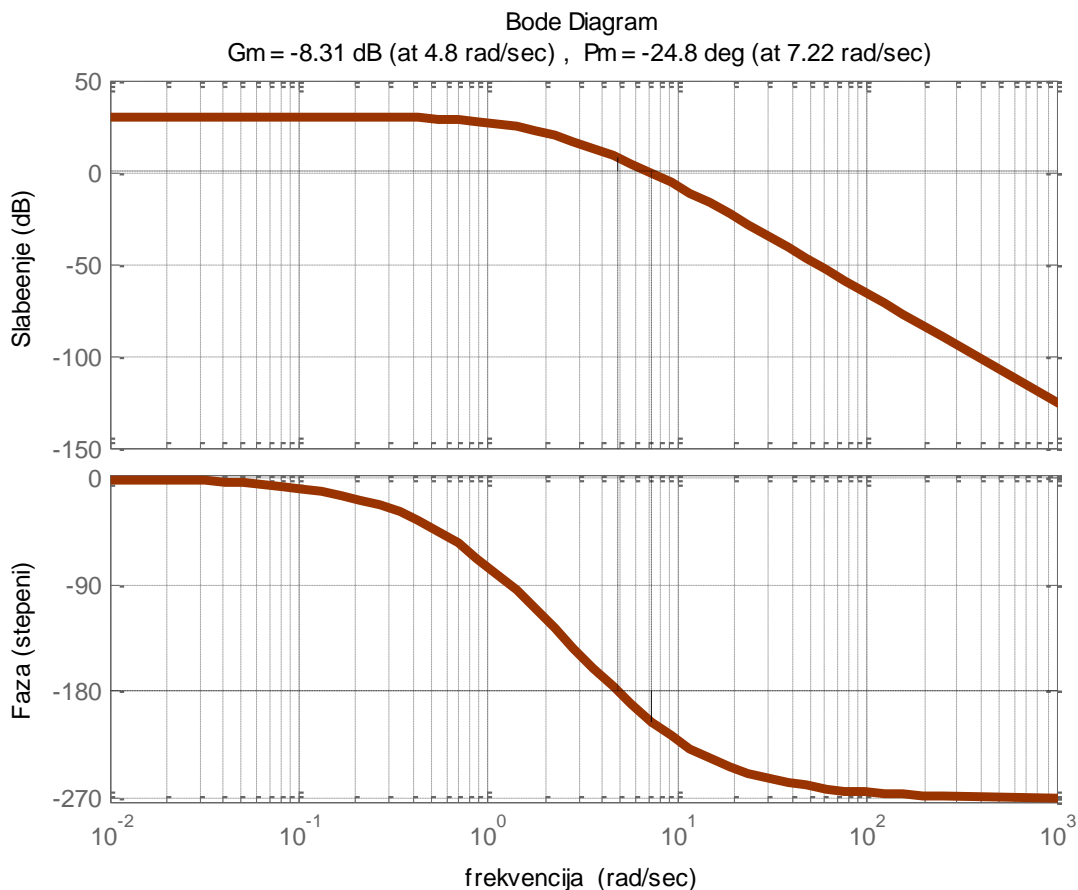
$$20 \log_{10} K + 20 \log_{10} |G_0(j\omega_\pi)| = K_{dB} - 3.65 dB = 0 \Rightarrow$$

$$20 \log_{10} K = K_{dB} = 3.65 dB \Rightarrow K = 10^{0.1825} \approx 10^{0.2} \quad (5.46)$$

5.13. Со помош на Бодевите дијаграми на соодветниот отворен систем, да се определи интервалот вредности на неговиот параметар K , за кои затворениот динамички систем со единична негативна повратна врска ќе биде стабилен. Динамиката на отворениот систем е опишана со следната преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{500}{(s+1)(s+3)(s+5)} \quad (5.47)$$

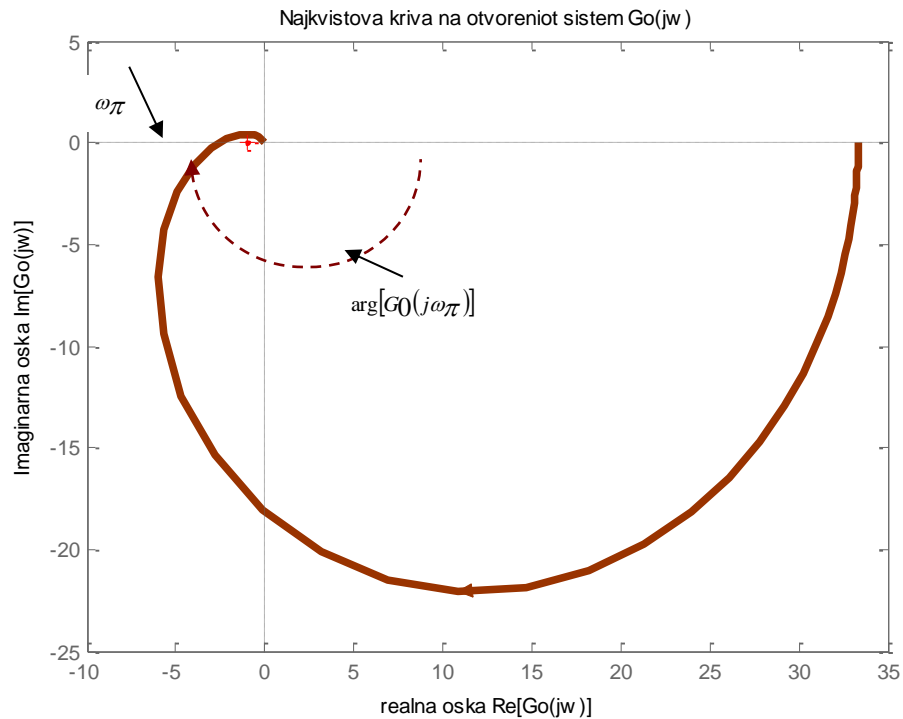
Решение: Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.47) се прикажани на Слика 5.13.



Слика 5.13. Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.47)

Отворениот систем $G_0(s)$ има три прости реални негативни полови во точките $s_1 = -1$, $s_2 = -3$ и $s_3 = -5$. Бидејќи сите негови полови лежат во левата полурамнина од s -комплексната рамнина, со сигурност може да се заклучи дека тој е стабилен. Тогаш, според Најквистовиот критериум за стабилност, набљудуваниот затворен систем ќе биде стабилен доколку фреквентната карактеристика на отворениот систем $G_0(j\omega)$ не ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$. Ова ќе биде исполнето доколку $|G_0(j\omega_\pi)| < 1$, каде што ω_π е фреквенцијата за која Најквистовата крива на отворениот систем ја сече

реалната оска $\text{Re}[G_0(j\omega)]$. Едновременно, тоа е фреквенцијата при која $\arg[G_0(j\omega_\pi)] = -180^\circ$. Меѓутоа, од Најквистовата крива на отворениот систем прикажана на Слика 5.14, може да се забележи дека не е исполнет ни еден од овие услови. Имено, Најквистовата крива на отворениот систем ја опфаќа критичната точка $(-1, j0)$ и $|G_0(j\omega_\pi)| > 1$.

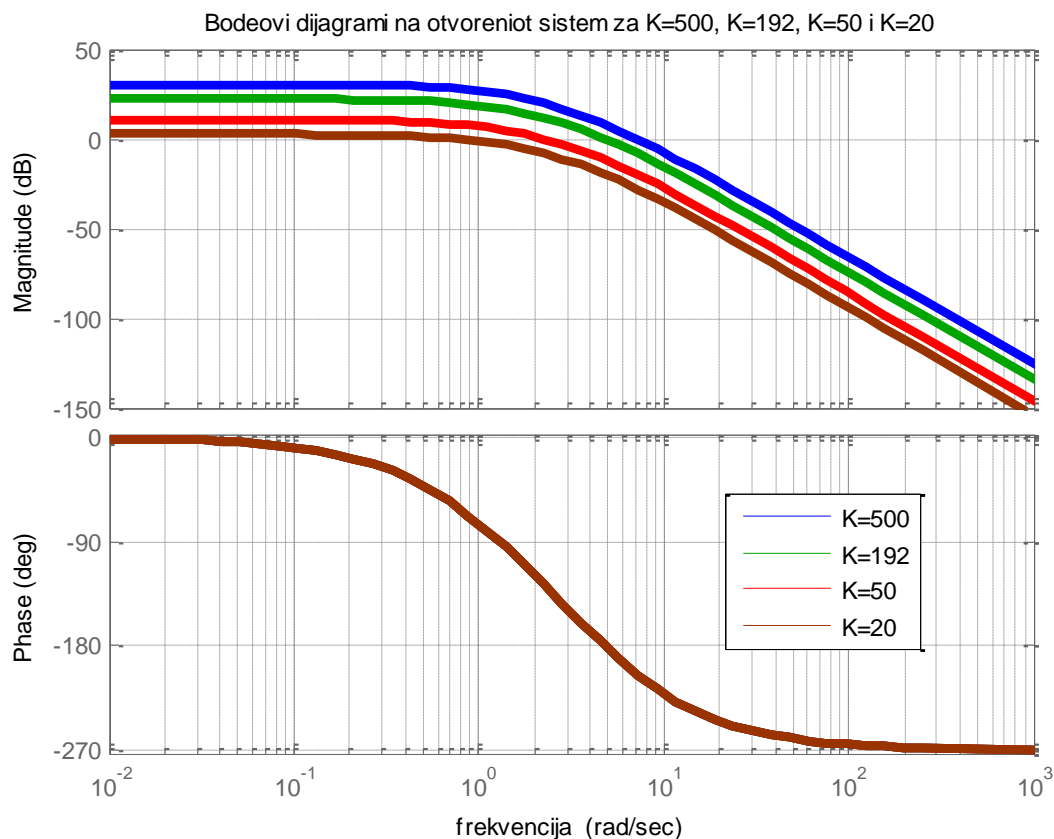


Слика 5.14. Најквистова крива на отворениот систем (5.47)

За дадената вредност на коефициентот на засилување $K = 500$ на отворениот систем, затворениот систем има негативна резерва на фаза, $\varphi_{rf} = -24.8^\circ$, и резерва на засилување помала од единица, $d = 0.3839$, па со сигурност може да се заклучи дека е нестабилен. Од Бодеовите дијаграми прикажани на Слика 5.13, се гледа дека Бодеовиот дијаграм на фаза на отворениот систем ја сече правата $\varphi = -180^\circ$ при фреквенција $\omega_\pi = 4.8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, додека засилувањето на отворениот систем при оваа фреквенција изнесува $|G_0(j\omega_\pi)| = 8.31 \text{dB}$. Следствено, Бодеовиот дијаграм на слабеење на отворениот систем треба да се спушти најмалку за 8.31dB , пред затворениот систем да стане стабилен. Тоа се постига со намалување на коефициентот на засилување на отворениот систем за $20 \log_{10} \lambda \leq -8.31 \text{dB}$, односно $\lambda \leq 0.3839$ пати. Оттаму, дозволиениот интервал вредности за K е:

$$0 < K < 192 \quad (5.48)$$

На Слика 5.15 се прикажани Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.47) за неколку вредности на коефициентот на засилување K : $K = 500$ ($\lambda = 1$), $K = 192$ ($\lambda = 0.3839$), $K = 50$ ($\lambda = 0.1$) и $K = 20$ ($\lambda = 0.04$).



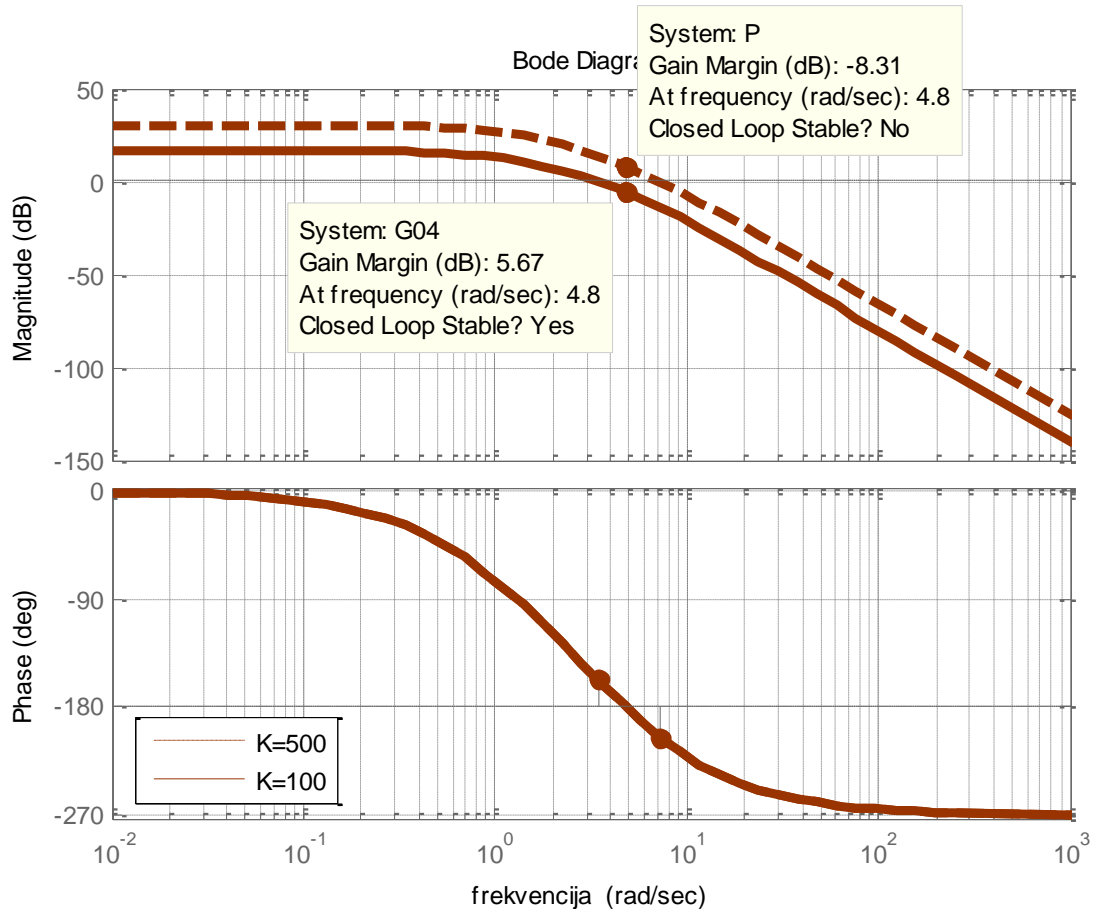
Слика 5.15. Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.47) за неколку вредности на коефициентот на засилување K

5.14. Да се определат резервите на засилување и фаза на затворениот систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{100}{(s+1)(s+3)(s+5)} \quad (5.49)$$

Решение: Ако се уочи дека преносната функција на отворениот систем од задачата е иста со преносната функција на отворениот систем од претходната задача, само со 5 пати помало засилување, за анализа можат да се искористат Бодевите дијаграми од

Слика 5.13, без да се цртаат Бодевите дијаграми на системот (5.49). Имено, 5 пати помалото засилување на отворениот систем (5.49) значи дека неговиот логаритамски дијаграм на слабеење ќе биде вертикално спуштен за $20 \log_{10} 5 \approx 14dB$ во однос на дијаграмот на слабеење на отворениот систем (5.47), додека логаритамскиот дијаграм на фаза ќе биде идентичен, затоа што промената на коефициентот на засилување на еден систем не влијае врз неговата фаза (Слика 5.16).

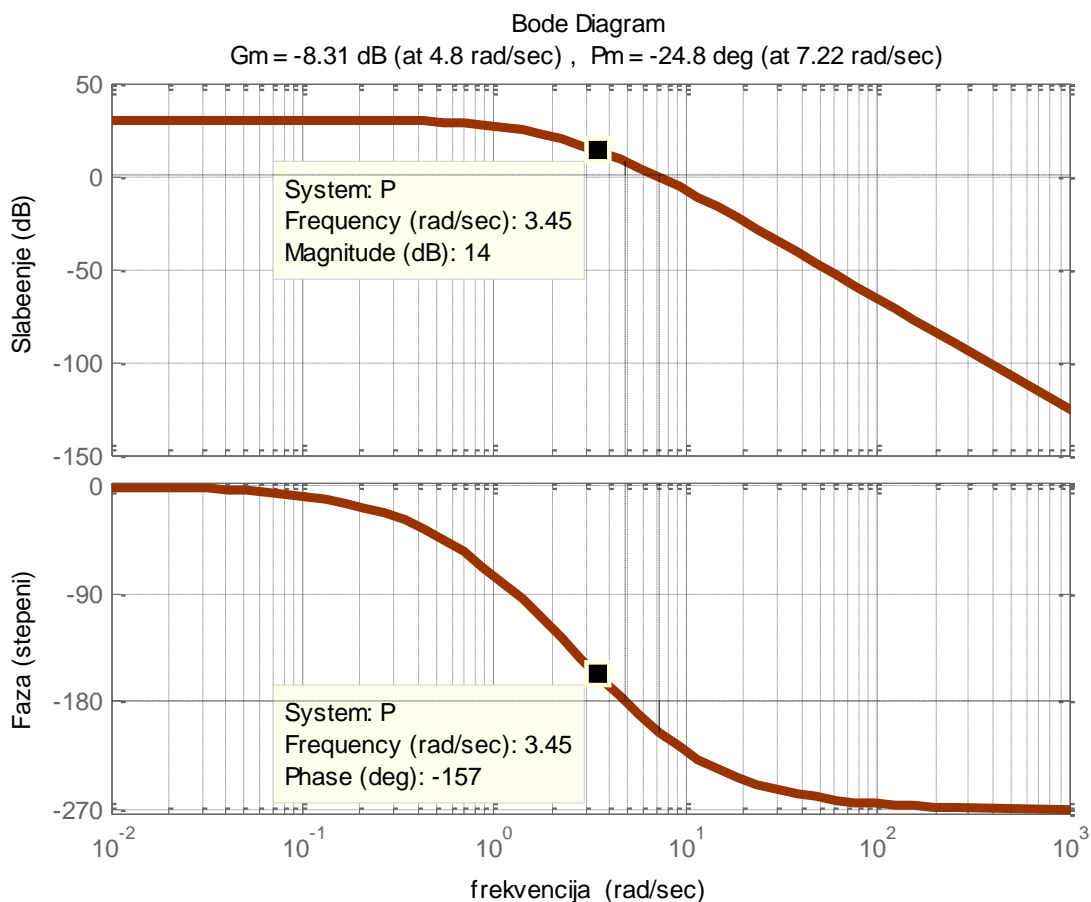


Слика 5.16. Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.47) за $K = 500$ и $K = 100$

Пресечната фреквенција на фаза на отворениот систем (5.47), а и на отворениот систем (5.49), е $\omega_\pi = 4.8 \frac{rad}{sec}$. Засилувањето на отворениот систем (5.47) при оваа фреквенција е приближно $8.31dB$, а засилувањето на отворениот систем (5.49) ќе биде помало за $14dB$ и ќе изнесува приближно $8.31dB - 14dB = -5.69dB \approx -5.7dB$. Следствено, резервата на засилување на отворениот систем (5.49) ќе изнесува приближно $5.7dB$. Резервата на фаза се пресметува за фреквенција ω_1 , при која дијаграмот на слабеење на отворениот систем ја сече хоризонталната оска $|G_0(j\omega)|_{dB} = 0dB$. Меѓутоа, со оглед на фактот дека во анализата на стабилноста на зададениот затворен систем се користат

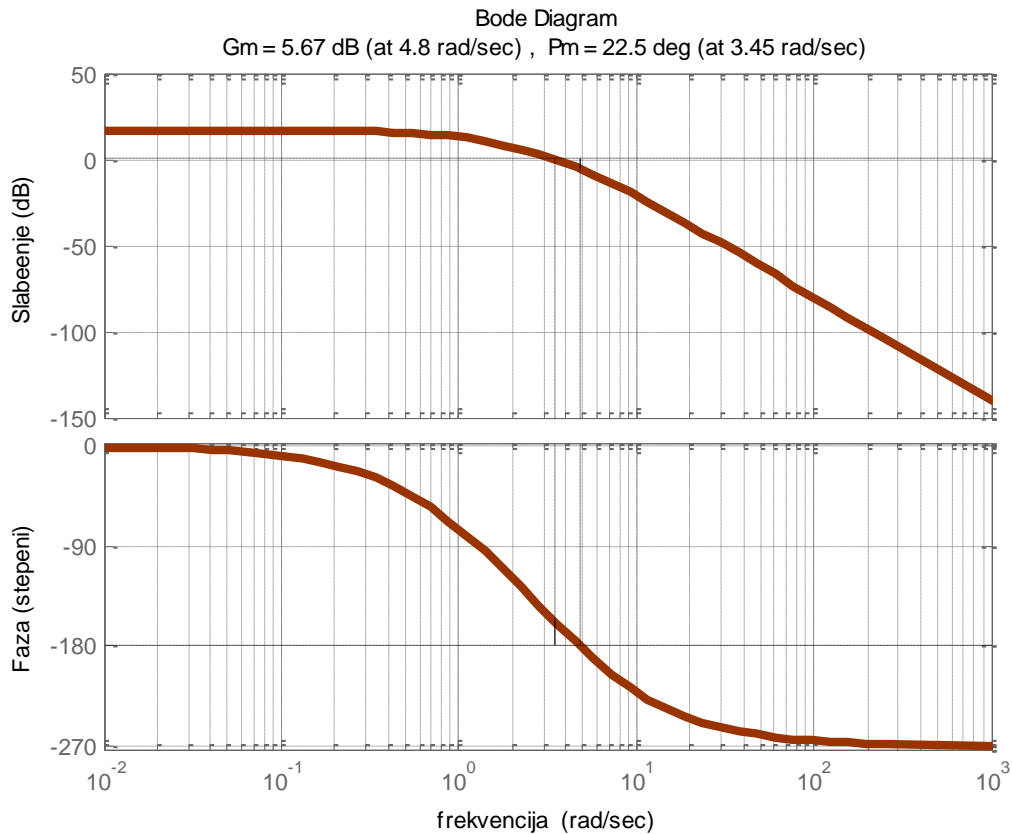
Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.47), а не на отворениот систем (5.49), и имајќи на ум дека дијаграмот на слабеење на системот (5.49) е спуштен за $14dB$ во однос на дијаграмот на слабеење на системот (5.47), на Слика 5.13 се отчитува онаа фреквенција при која засилувањето на отворениот систем (5.47) изнесува $14dB$ наместо $0dB$ (Слика 5.17). Тоа е фреквенцијата $3.45 \frac{rad}{sec}$, при која фазата на отворениот систем изнесува -157^0 . Следствено, резервата на фаза на затворениот систем од задачата приближно изнесува:

$$\varphi_{rf} = 180^0 + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^0 - 157^0 = 23^0 \quad (5.50)$$



Слика 5.17. Пресметување на пресечната фреквенција на засилување за $K = 100$

Се разбира, до истиот резултат ќе се дојде и ако се нацртаат Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.49), кои се прикажани на Слика 5.18.



Слика 5.18. Бодеои дијаграми на отворениот систем (5.49)

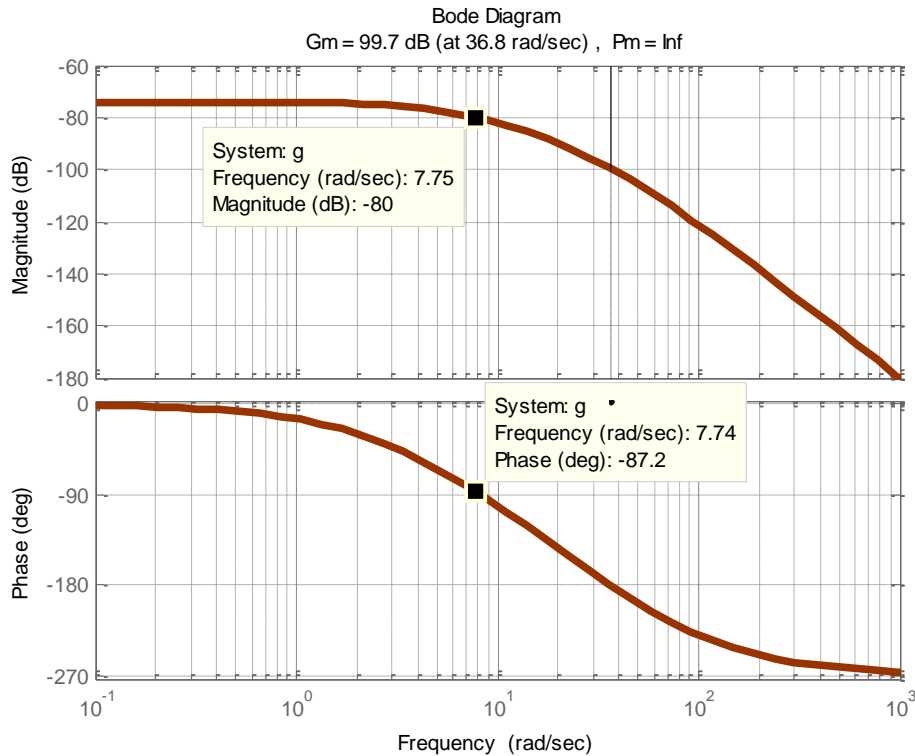
5.15. Даден е затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{(s+5)(s+20)(s+50)} \quad (5.51)$$

Да се определи интервалот дозволени вредности на коефициентот K , за кои затворениот систем ќе биде стабилен. Потоа да се определат резервите на засилување и фаза на истиот систем, ако $K = 10000$.

Решение: Бодеоите дијаграми на засилување и фаза на отворениот систем (5.51) за $K = 1$ се прикажани на Слика 5.19. Од нив се гледа дека пресечната фреквенција на фаза, при која дијаграмот на фаза ја сече правата $\varphi = -180^\circ$, е приближно $\omega_\pi = 36.8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, а засилувањето на отворениот систем при оваа фреквенција изнесува приближно -99.67 dB . Следствено, резервата на засилување на затворениот систем од задачата е $d = 99.67 \text{ dB}$. Засилувањето на отворениот систем може да се зголемува се до вредност

$20\log_{10} K = K_{dB} = 99.6dB$ или $K = 96272$, кога затворениот систем ќе се најде на границата на стабилност. Оттука, набљудуваниот затворен систем ќе биде стабилен за секое $0 < K < 96272$.

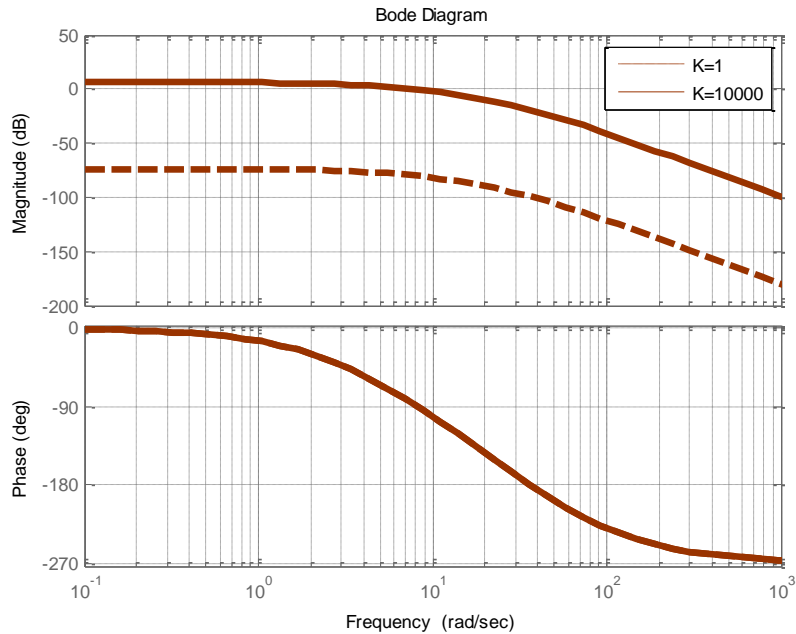


Слика 5.19. Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.51) за $K = 1$

За $K = 10000$ Бодевите дијаграм на слабеење од Слика 5.19 ќе се подигне нагоре за $20\log_{10} 10000 = 80_{dB}$, додека дијаграмот на фаза ќе остане непроменет (да се види Слика 5.20). Засилувањето на отворениот систем при пресечната фреквенција на фаза ќе се зголеми за 80_{dB} и ќе изнесува $-99.67dB + 80dB = -19.67dB$, па резервата на засилување на затворениот систем за $K = 10000$ ќе биде $19.67dB$. Оттука може да се заклучи дека со зголемувањето на коефициентот на засилување на отворениот систем се намалува неговата резерва на засилување, што значи се намалува неговата резерва на стабилност.

Пресечната фреквенција на засилување се одредува како фреквенција при која слабеењето на отворениот систем од Слика 5.19 има вредност -80_{dB} , а тоа е фреквенцијата $\omega_1 = 7.75 \frac{rad}{sec}$. Фазата на отворениот систем при оваа фреквенција изнесува $\arg[G_0(j\omega_1)] = -87.2^{\circ}$. Следствено, затворениот систем ќе има резерва на фаза:

$$\varphi_{rf} = 180^{\circ} + \arg[G_0(j\omega_1)] = 180^{\circ} - 87.2^{\circ} = 92.8^{\circ} \quad (5.52)$$



Слика 5.20. Бодеои дијаграми на отворениот систем (5.51) за $K = 1$ и $K = 10^4$

5.16. Даден е затворен континуален систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

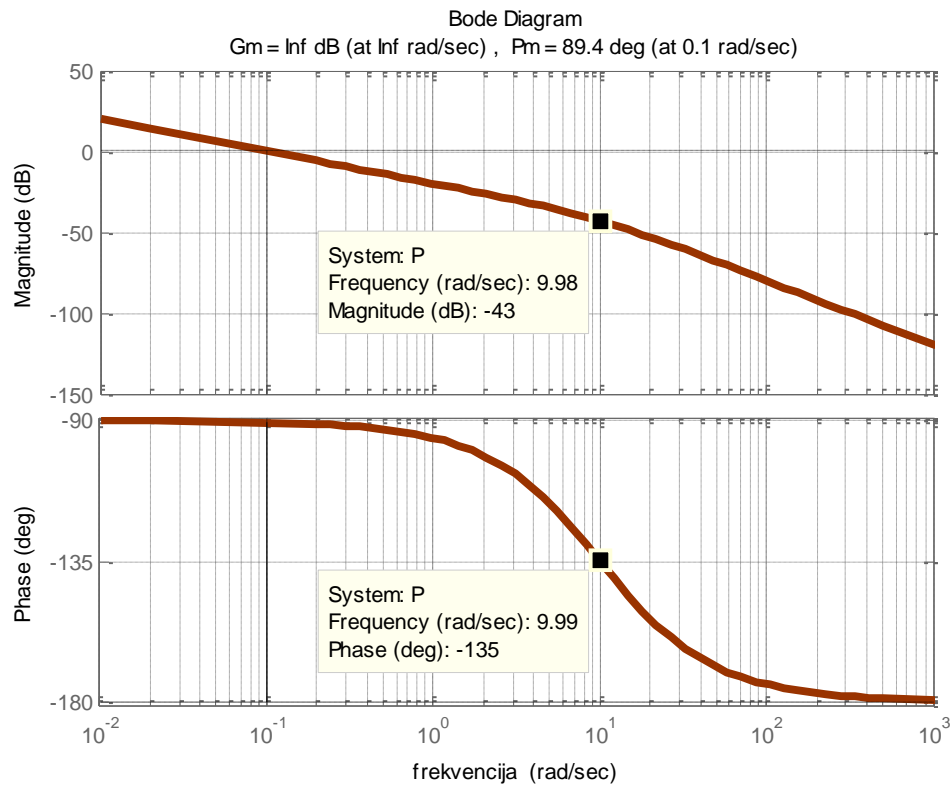
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+10)} \quad (5.53)$$

Да се определи максималната вредност за која може да се зголеми коефициентот на засилување на отворениот систем K , со цел да се подобри поведението на затворениот систем во стационарен режим, а неговата резерва на фаза да не се намали под 45° .

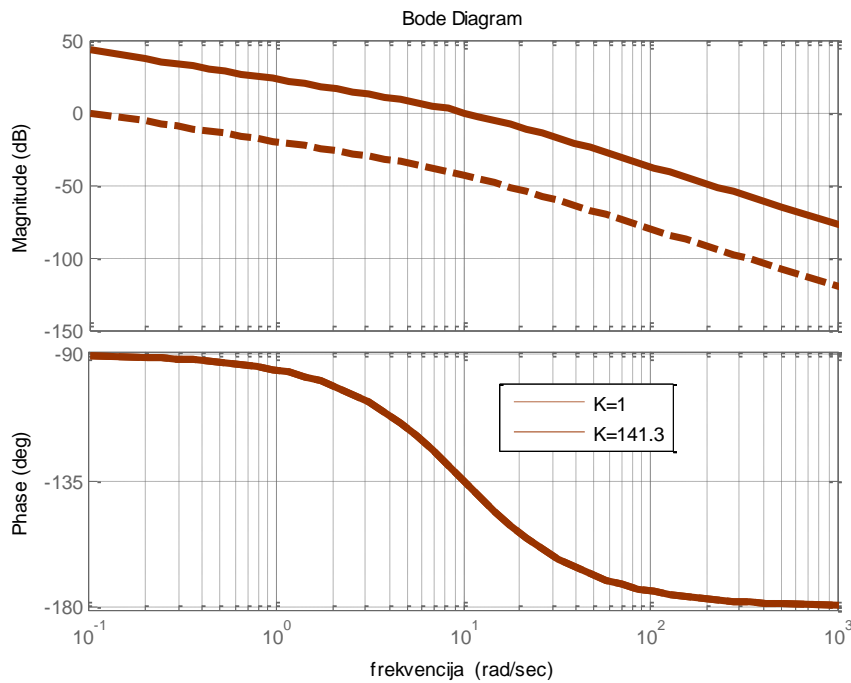
Решение: Бодеоите дијаграми на системот (5.53) за $K = 1$ се прикажани на Слика 5.21. Од нив се гледа дека резервата на фаза на проектираниот затворен систем ќе биде $\varphi_{rf} \geq 45^\circ$ ако пресечната фреквенција на засилувањето е $\omega_1 < 10 \frac{rad}{sec}$. Од друга страна,

засилувањето на отворениот систем при фреквенција $\omega = \omega_1 \approx 10 \frac{rad}{sec}$ е

$G_0(j\omega)_{dB} = -43dB$, што значи дека дијаграмот на слабење на отворениот систем може да се подигне најмногу за $43dB$, што се постига со зголемување на вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем K за $43dB$ или за фактор $\lambda = 141.2538$. Бодеоите дијаграми на отворениот систем по компензацијата на коефициентот на засилување K се прикажани на Слика 5.22. Од дијаграмите на Слика 5.22 се гледа дека компензацијата на коефициентот на засилување K не влијае и не го менува Бодеоиот дијаграм на фаза.



Слика 5.21. Бодевони дијаграми на отворениот систем (5.53) за $K = 1$



Слика 5.22. Бодевони дијаграми на отворениот систем (5.53) $K = 1$ и за $K = 141.2538$

5.17. Да се определи максималната вредност на коефициентот на засилување K на отворениот систем, опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+5)^2} \quad (5.54)$$

која ќе гарантира резерва на засилување од најмалку 6dB и резерва на фаза од најмалку 45° за соодветниот затворен систем со единична негативна повратна врска.

Решение: Фреквентната преносна функција на отворениот систем е:

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega(5+j\omega)^2} \quad (5.55)$$

и неговите Бодеови дијаграми за $K = 1$ се прикажани на Слика 5.23. Оттука се гледа дека резервата на фаза на проектираниот затворен систем ќе биде $\varphi_{rf} \geq 45^\circ$ ако пресечната

фреквенција на засилувањето е $\omega_1 \leq 2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Од друга страна, засилувањето на

отворениот систем при фреквенција $\omega = \omega_1 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ е $G_0(j2)_{dB} = -35.6 \text{ dB}$, што значи

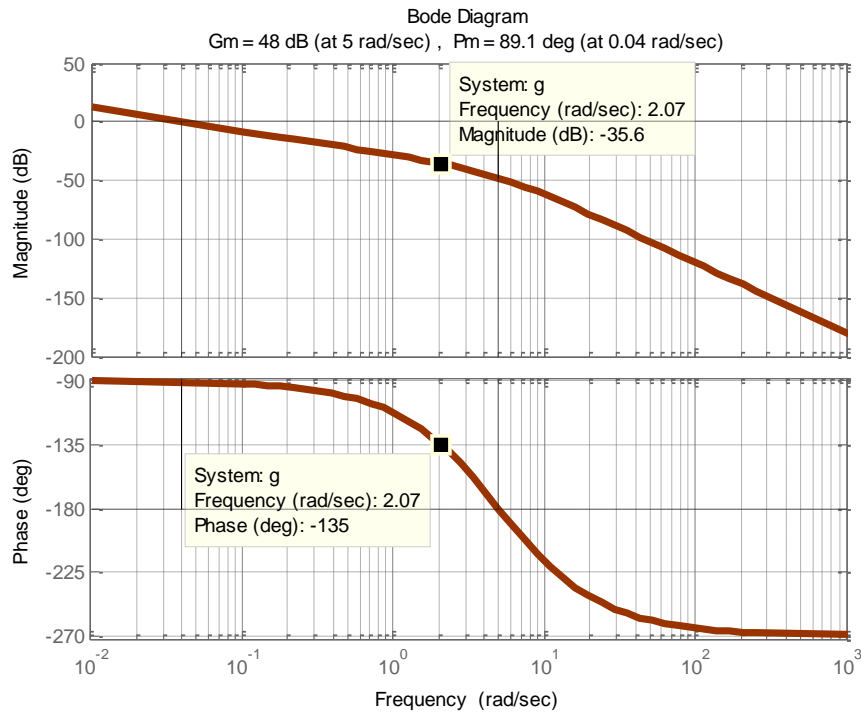
дека дијаграмот на слабеење на отворениот систем може да се подигне најмногу за 35.6 dB , што се постига со зголемување на вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем K за 35.6 dB или за фактор $\lambda = 60$. Следствено, максималната вредност K_{\max} на коефициентот на засилување K на отворениот систем, која ќе гарантира резерва на засилување од најмалку 6dB и резерва на фаза од најмалку 45° за соодветниот затворен систем, е $K_{\max} = 60$.

Бодеовите дијаграми на отворениот систем по компензацијата на коефициентот на засилување K се прикажани на Слика 5.24, заедно со Бодеовите дијаграми на отворениот систем пред компензацијата. Компензираниот затворен систем со $K = 60$

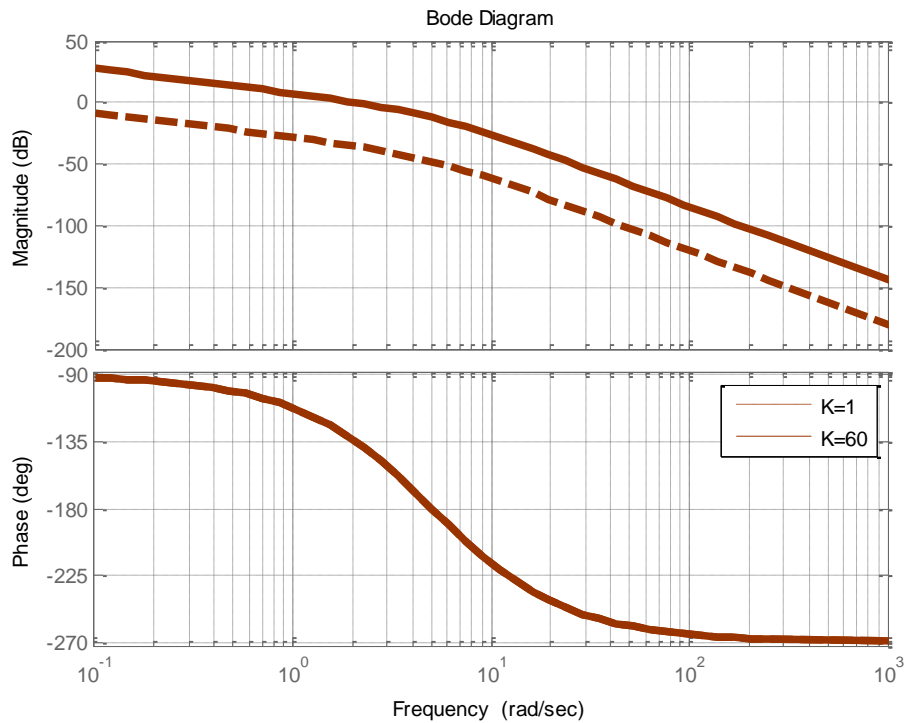
има резерва на засилување од 12.4 dB $\left(\omega_\pi = 5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right)$ и резерва на фаза од 45.3°

$\left(\omega_1 = 2.05 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right)$. Од дијаграмите на Слика 5.24 се гледа дека со зголемувањето на

коефициентот на засилување на отворениот систем се влошуваат условите за стабилност на затворениот систем, односно се намалуваат неговите резерви на стабилност.



Слика 5.23. Бодевони дијаграми на отворениот систем (5.55) за $K = 1$



Слика 5.24. Бодевони дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.54) пред и по компензацијата на коефициентот на засилување

5.18. Даден е затворен континуален систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

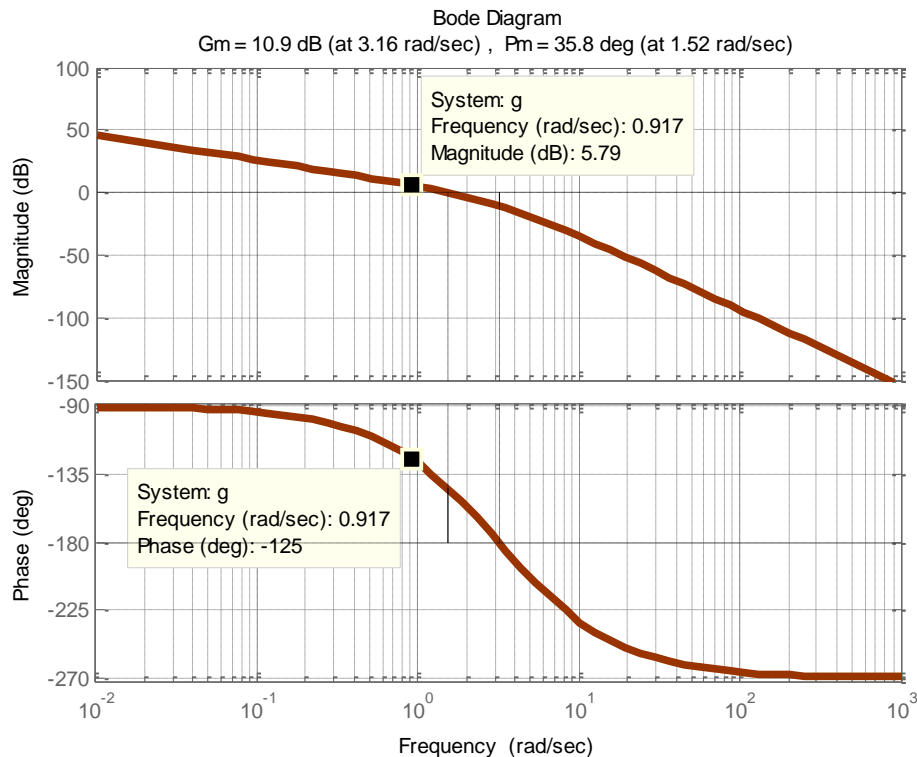
$$G_0(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+5)} \quad (5.56)$$

Да се изврши компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем K , така што затворениот систем ќе има резерва на фаза од 55° .

Решение: Фреквентната преносна функција на отворениот систем (5.56) е:

$$G_0(j\omega) = \frac{20}{j\omega(2+j\omega)(5+j\omega)} \quad (5.57)$$

а неговите Бодеови дијаграми на слабеење и фаза се прикажани на Слика 5.25. Од нив може да се отчита дека резервата на фаза на некомпензираниот затворен систем изнесува 35.8° , што не е доволно.



Слика 5.25. Бодеови дијаграми на отворениот систем (5.56)

Фреквенцијата при која набљудуваниот затворен систем ќе има резерва на фаза од 55° се определува од условот:

$$\varphi(\omega) = \arg[G_0(j\omega)] = \arg \frac{-7\omega - j(10 - \omega^2)}{\omega(4 + \omega^2)(25 + \omega^2)} = \arctg \frac{10 - \omega^2}{7\omega} = (55 - 180)^\circ = -125^\circ \quad (5.58)$$

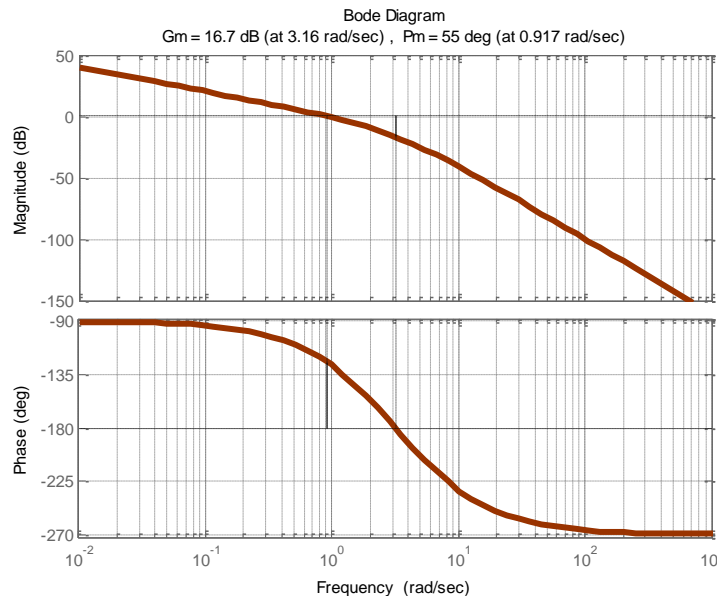
Оттука:

$$\frac{10 - \omega^2}{7\omega} = \operatorname{tg} \left(-125 \frac{2\pi}{360} \right) = 1.4281 \Rightarrow \omega^2 + 10\omega - 10 = 0 \Rightarrow \omega \approx 0.917 \quad (5.59)$$

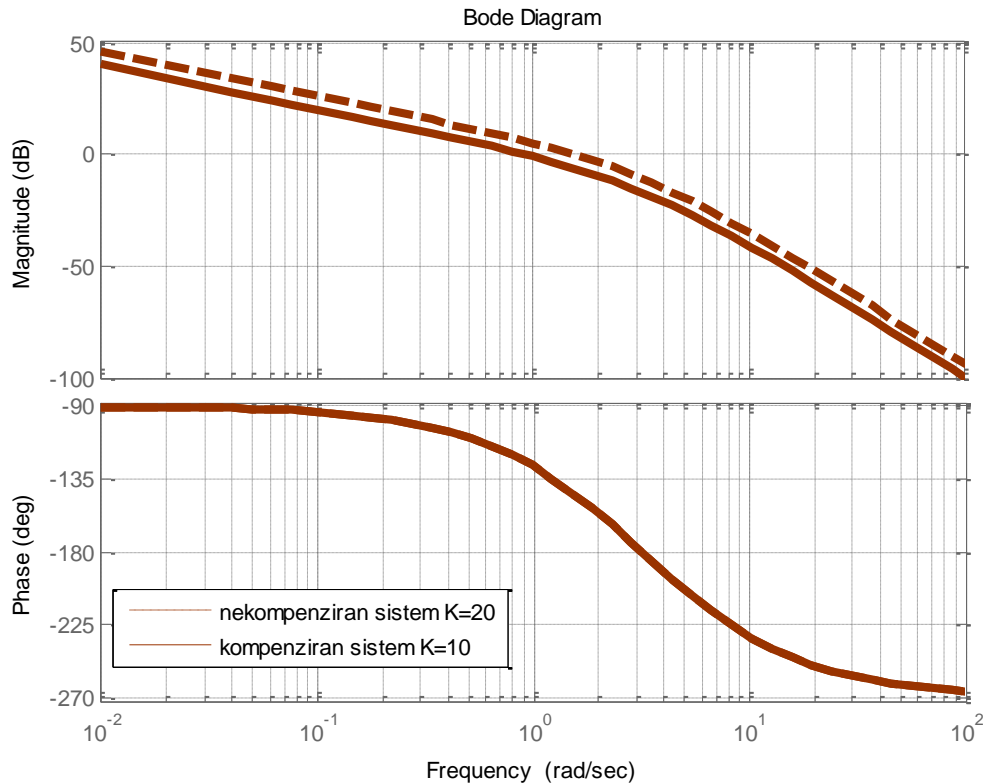
па, пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем треба да изнесува $\tilde{\omega}_1 = 0.917 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Истата вредност може да се отчита и од Бодевитиот дијаграм на фаза на отворениот систем од Слика 5.25. Бидејќи засилувањето на некомпензираниот отворен систем при фреквенција $\tilde{\omega}_1 = 0.917 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ изнесува:

$$|G_0(j\tilde{\omega}_1)|_{dB} = 20 \log \frac{20}{\tilde{\omega}_1 \sqrt{4 + \tilde{\omega}_1^2} \sqrt{25 + \tilde{\omega}_1^2}} \approx 5.8dB \quad (5.60)$$

Бодевитиот дијаграм на слабеење на отворениот систем (5.56) треба да се спушти за приближно $5.8dB$, за да при фреквенција $\tilde{\omega}_1 = 0.917$ тој ја сече хоризонталата $|G_0(j\omega)|_{dB} = 0dB$, а тоа се постига така што неговиот коефициент на засилување K ќе се намали за $5.8dB$, односно за фактор 1.95. Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем со новата вредност за коефициентот на засилување $K = 10.26$ се прикажани на сл.5.26. Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.56) пред и по компензацијата се прикажани на Слика 5.27.

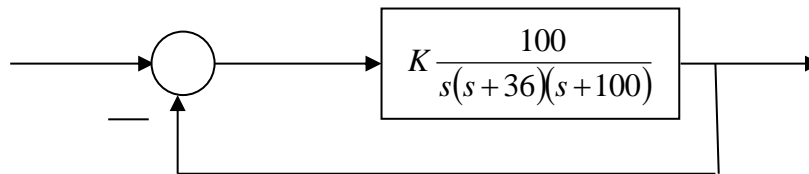


Слика 5.26. Бодевити дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.56) по компензацијата на коефициентот на засилување K на вредност 10.26



Слика 5.27. Бодевеви дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.56) пред и по компензацијата на неговиот коефициент на засилување K

5.19. Даден е затворениот систем од долната слика. Со помош на постапките за фреквентна синтеза преку Бодевите дијаграми да се определи вредноста на коефициентот на засилување K за која отскочниот одсив на системот ќе има максимален прескок од 9.5% .



Слика 5.28. Илустрација кон Задачата 5.19

Решение: Бидејќи станува збор за фреквентна синтеза, проектниот услов од задачата, кој е зададен преку соодветен временски показател, треба најнапред да се искаже преку еквивалентен фреквентен показател. За таа цел, прво се воспоставува врската помеѓу максималниот прескок на отскочниот одсив во проценти $M\%$ и коефициентот на релативно придушување ζ , од каде произлегува дека за максимален прескок од 9.5% проектираниот систем треба да има фактор на релативно придушување $\zeta = 0.6$:

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{M\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{M\%}{100}\right)}} = \frac{-\ln(0.095)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.095)}} = 0.6 \quad (5.61)$$

а потоа се воспоставува врската помеѓу факторот на релативно придушување ζ и резервата на фаза φ_{rf} , од каде произлегува дека за фактор на релативно придушување $\zeta = 0.6$ проектираниот систем треба да има резерва на фаза од 59.2^0 :

$$\varphi_{rf} = \arctg\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}\right) = 1.0330\text{rad} = 59.1865^0 \approx 59.2^0 \quad (5.62)$$

Следствено, зададената проектна задача се сведува на следното: по пат на компензација на коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем со помош на Бодеовите дијаграми, да се проектира затворениот систем од Слика 5.28, така што тој ќе има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 59.2^0$. Меѓутоа, пред да се пристапи кон каква и да било синтеза, треба да се испита поведението на некомпензираниот систем, за да се види колку е тој близу (или далеку) од поставеното проектно барање, односно саканото поведење. Затоа се исцртуваат Бодеовите дијаграми на слабеење и фаза на некомпензираниот отворен систем:

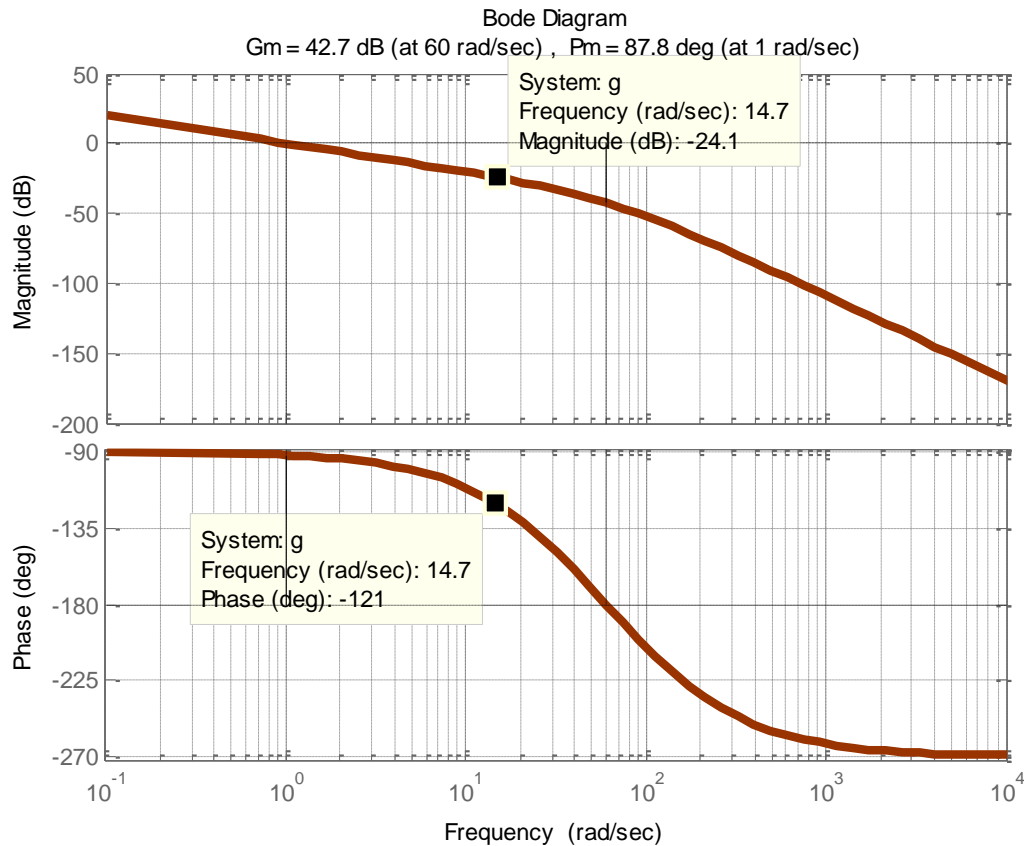
$$G_0(s) = K \frac{100}{s(s+36)(s+100)} \quad (5.63)$$

за некоја соодветна вредност на K . Најчесто се усвојува $K=1$, но може да се одбере и друга вредност, доколку сакаме дијаграмот на слабеење да минува низ одредена точка. Така, во конкретниот случај од задачата, за K може да се усвои вредноста 36, со што ќе се обезбеди Бодеовиот дијаграм на слабеење на отворениот систем (5.63) да ја сече хоризонталата 0dB при фреквенција $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. (Треба да се има на ум дека вредностите

за K не влијаат врз фазата на отворениот систем, па Бодеовиот дијаграм на фаза не се менува со промената на K). Бодеовите дијаграми на отворениот систем (5.63) за $K=36$ се прикажани на Слика 5.26, од каде се гледа дека затворениот систем од Слика 5.28 ќе има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 59.2^0$ при фреквенција $\omega_1 = 14.7 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Тоа е онаа фреквенција при која фазата на отворениот систем изнесува приближно -121^0 :

$$\varphi_{rf} = 180^0 + \arg[G_0(j\omega_1)] = 59.2^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arg[G_0(j\omega_1)] = 59.2^0 - 180^0 = -120.8^0 \approx -121^0 \quad (5.64)$$



Слика 5.29. Бодевони дијаграми на отворениот систем (5.63) за $K = 36$

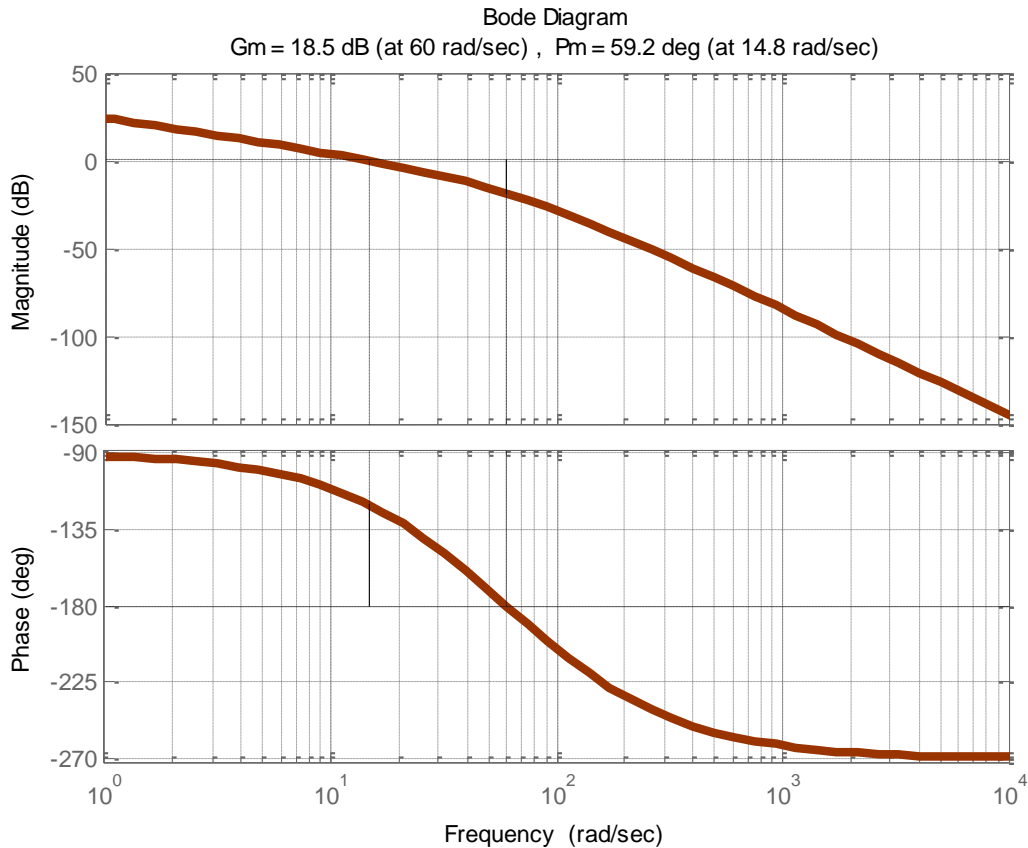
Оттука, $\omega_1 = 14.8 \frac{rad}{sec}$ е пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем (пресечната фреквенција на засилување на некомпензираниот систем е $\omega = 1 \frac{rad}{sec}$) и за таа да се реализира, треба Бодевониот дијаграм на слабење на некомпензираниот отворен систем од Слика 5.29, кој при $\omega_1 = 14.8 \frac{rad}{sec}$ има вредност $-24.2dB$ да се подигне вертикално за $24.2dB$. Тоа се постига со зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем $K_{dB} = 20 \log_{10}(36) = 31.126dB$ за $24.2dB$, па компензираната вредност на K ќе изнесува:

$$(K_c)_{dB} = (31.126 + 24.2)dB = 55.126dB \Rightarrow K_c = 583.86 \quad (5.65)$$

Тогаш компензираниот отворен систем ќе има преносна функција:

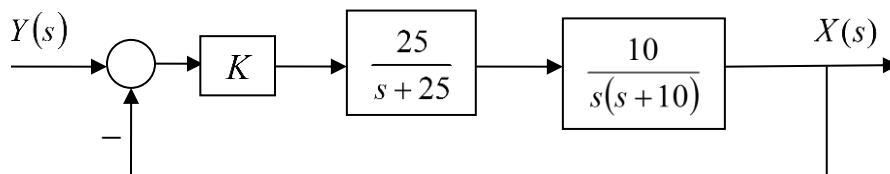
$$G_{0c}(s) = K_c \frac{100}{s(s+36)(s+100)} = \frac{58386}{s(s+36)(s+100)} \quad (5.66)$$

а неговите Бодеови дијаграми се прикажани на Слика 5.30, од каде се гледа дека компензираниот затворен систем има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 59.2^\circ$.



Слика 5.30. Бодеови дијаграми на компензираниот отворен систем (5.66) со $K_c = 583.86$

5.20. Даден е затворениот систем од Слика 5.31. Да се определи вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем, за која затворениот систем ќе има максимален прескок во отскочниот одсив од приближно 24% .



Слика 5.31. Некомпензиран затворен систем од Задача 5.20

Решение: Максимален прескок од 24% значи фактор на релативно пригушување $\zeta = 0.42$:

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{M\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{M\%}{100}\right)}} = 0.42 \quad (5.67)$$

а фактор на релативно пригушување $\zeta = 0.42$ значи резерва на фаза $\varphi_{rf} = 45^\circ$:

$$\varphi_{rf} = \arctg\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}\right) = 45^\circ \quad (5.68)$$

Бодевите дијаграми на некомпензираниот отворен систем $G_0(s)$ за $K = 1$:

$$G_0(s) = \frac{250}{s(s+10)(s+25)} \quad (5.69)$$

се прикажани на Слика 5.32, од каде се гледа дека некомпензираниот затворен систем за $K = 1$ има резерва на засилување $d = 30.9dB$ и резерва на фаза $\varphi_{rf} = 82^\circ$. За да се постигне саканата резерва на фаза, фазата на отворениот систем треба да изнесува -135° , а тоа настапува при фреквенција од $6.03 \frac{rad}{sec}$. Следствено, $6.03 \frac{rad}{sec}$ треба да биде пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем, а за тоа да се постигне, Бодевите дијаграм на слабеење на некомпензираниот отворен систем треба да се подигне вертикално приближно за $17.2dB$. Подигањето на Бодевите дијаграм на слабеење на отворениот систем се реализира преку коефициентот на засилување K , кој треба да го задоволи условот:

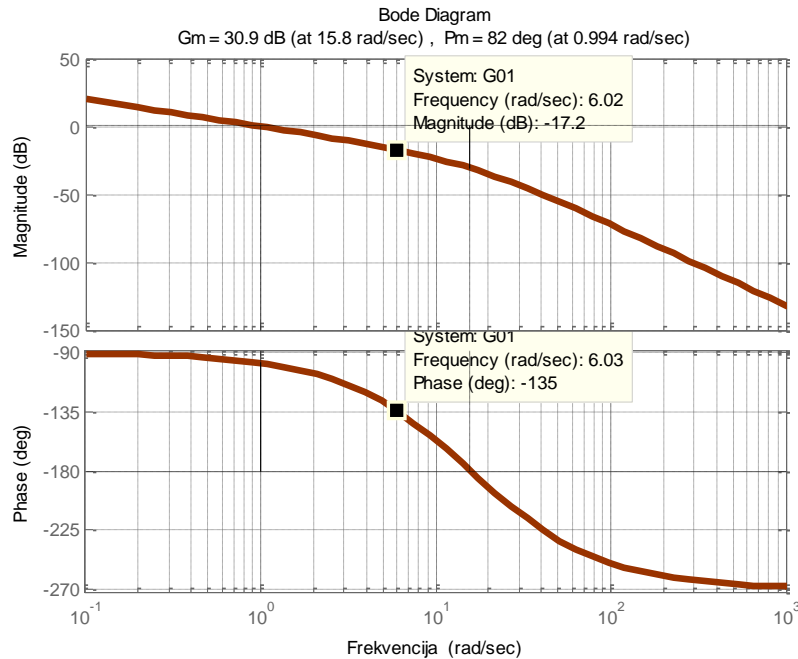
$$20 \log_{10} K = 17.2dB \quad (5.70)$$

Оттука следува:

$$K = 7.2 \quad (5.71)$$

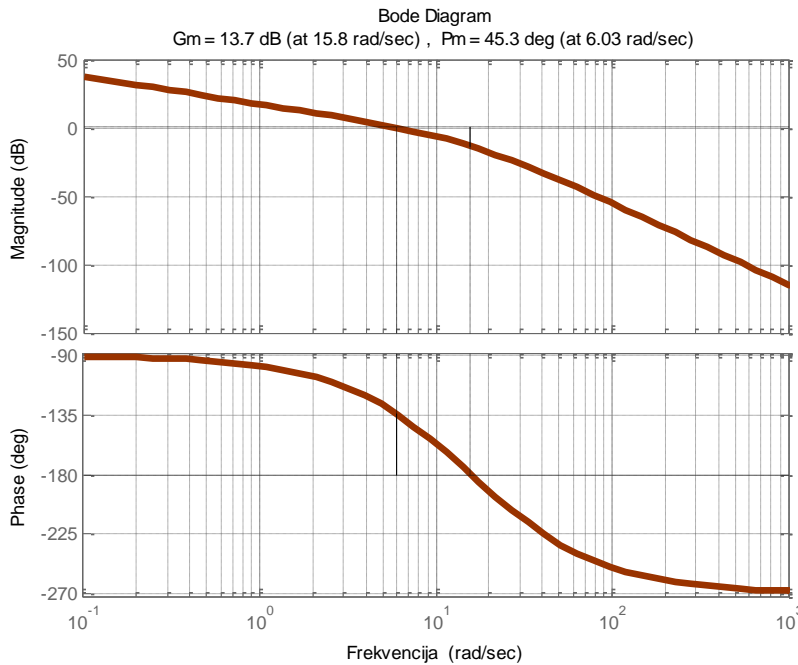
а преносната функција на компензираниот отворен систем ќе биде:

$$G_{0c}(s) = \frac{1811}{s(s+10)(s+25)} \quad (5.72)$$



Слика 5.32. Бодевите дијаграми на некомпензираниот отворен систем (5.69) за $K = 1$

На Слика 5.33 се прикажани Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем со $K = 7.2$ од каде се гледа дека резервата на фаза на компензираниот затворен систем навистина е $\varphi_{rf} = 45^0$.



Слика 5.33. Бодевите дијаграми на некомпензираниот отворен систем (5.69) за $K = 7.2$

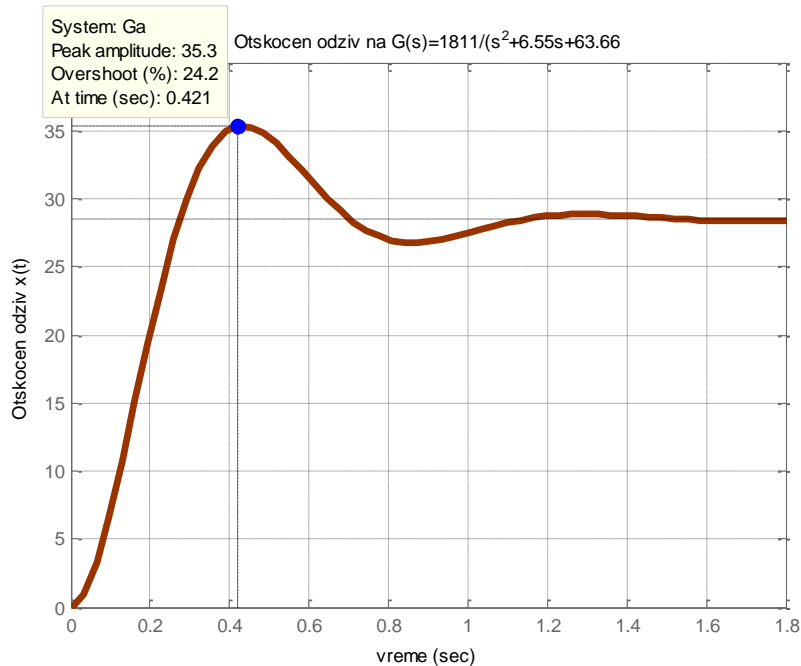
Компензираниот затворен систем има преносна функција:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1811}{s^3 + 35s^2 + 250s + 1811} = \\
 &= \frac{1811}{(s + 28.4503)(s + 3.2479 + j7.2755)(s + 3.2479 - j7.2755)} = \\
 &= \frac{1811}{(s + 28.4503)(s^2 + 6.55s + 63.66)} \quad (5.73)
 \end{aligned}$$

но, како што може да се забележи, реалниот пол $s_1 = -28.4503$ е многу далеку од имагинарната оска во однос на доминантниот пар конјугирано-комплексни полови $s_{2,3} = -3.2479 \pm j7.2755$, па неговото влијание врз отскочниот одзив на системот може да се занемари. Оттаму, проектираниот затворен систем од трет ред, може да се апроксимира со систем од втор ред:

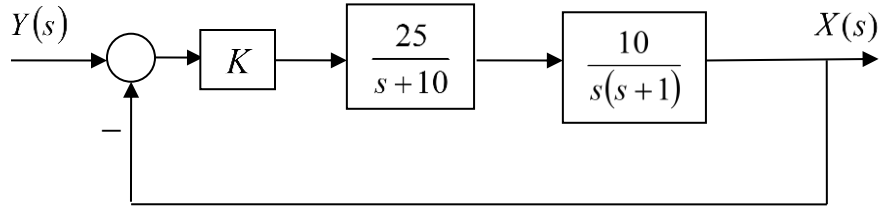
$$G_a(s) = \frac{1811}{(s^2 + 6.55s + 63.66)} \quad (5.74)$$

чиј отскочен одзив е прикажан на Слика 5.34. Како што може да се забележи, овој отскочен одзив го има очекуваниот максимален прескок од приближно 24% .



Слика 5.34. Отскочен одзив на апроксимативниот затворен систем од втор ред $G_a(s)$

5.21. Даден е затворениот систем од долната слика. Да се определи вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем, за која затворениот систем ќе има максимален прескок во отскочниот одзив не поголем од 20% .



Слика 5.35. Некомпензиран затворен систем од Задача 5.21

Решение: Максимален прескок од 20% значи фактор на релативно пригушување $\zeta \approx 0.45$:

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{M\%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{M\%}{100}\right)}} = 0.4559 \approx 0.45 \quad (5.75)$$

а фактор на релативно придушување $\zeta = 0.45$ значи резерва на фаза $\varphi_{rf} \approx 48^\circ$:

$$\varphi_{rf} = \arctg\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}\right) = 48.1477^\circ \approx 48^\circ \quad (5.76)$$

Бодевите дијаграми на некомпензираниот отворен систем $G_0(s)$ за $K = 1$:

$$G_0(s) = \frac{250}{s(s+1)(s+10)} \quad (5.77)$$

се прикажани на Слика 5.36, од каде се гледа дека некомпензираниот затворен систем за $K = 1$ има резерва на засилување $d = -7.13dB$ при пресечна фреквенција на фаза $\omega_\pi = 3.16 \frac{rad}{sec}$ и резерва на фаза $\varphi_{rf} = -13.2^\circ$ при пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 4.7 \frac{rad}{sec}$. За да се постигне саканата резерва на фаза на набљудуваниот затворен систем од Слика 5.35, фазата на отворениот систем треба да изнесува -132° , а тоа настапува при фреквенција од $0.771 \frac{rad}{sec}$. Следствено, $0.771 \frac{rad}{sec}$ треба да биде

пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем, а за тоа да се постигне, Бодеоовиот дијаграм на слабење на некомпензираниот отворен систем треба да се спушти вертикално приближно за $28.2dB$. Спуштањето на Бодеоовиот дијаграм на слабење на отворениот систем се реализира преку коефициентот на засилување K , кој треба да го задоволи условот:

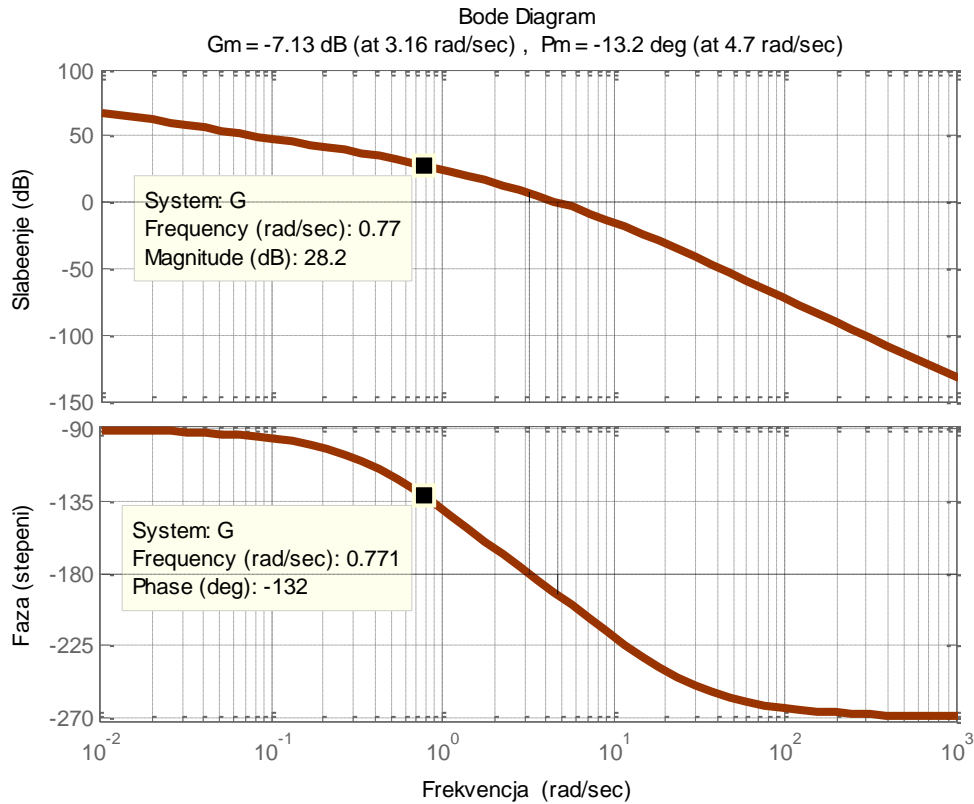
$$20\log_{10} K = -28.2dB \quad (5.78)$$

Оттука следува:

$$K = 0.0389 \approx 0.04 \quad (5.79)$$

а преносната функција на компензираниот отворен систем ќе биде:

$$G_{0c}(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)} \quad (5.80)$$



Слика 5.36. Бодеоови дијаграми на некомпензираниот отворен систем (5.77) за $K = 1$

На Слика 5.37 се прикажани Бодеоовите дијаграми на компензираниот отворен систем со $K = 0.04$ од каде се гледа дека резервата на фаза на компензираниот затворен систем навистина е $\varphi_{rf} \approx 48^{\circ}$.

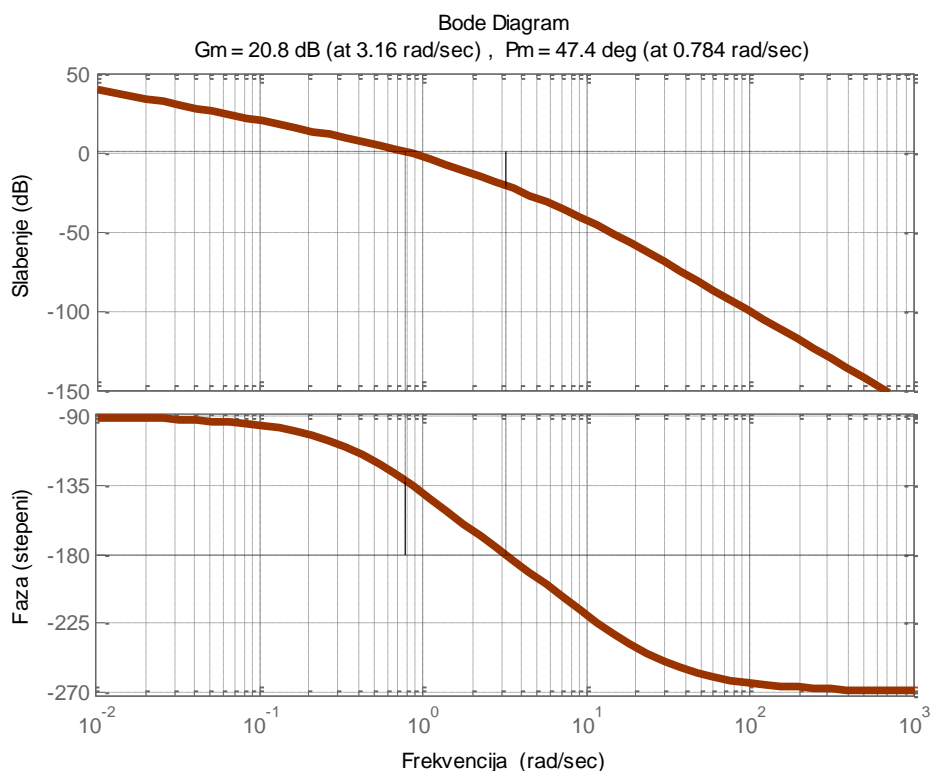
Компензираниот затворен систем има преносна функција:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{10}{s^3 + 11s^2 + 10s + 10} = \\
 &= \frac{10}{(s + 10.1086)(s + 0.4457 + j0.8892)(s + 0.4457 - j0.8892)} = \\
 &= \frac{10}{(s + 10.1086)(s^2 + 0.8914s + 0.9893)} \quad (5.81)
 \end{aligned}$$

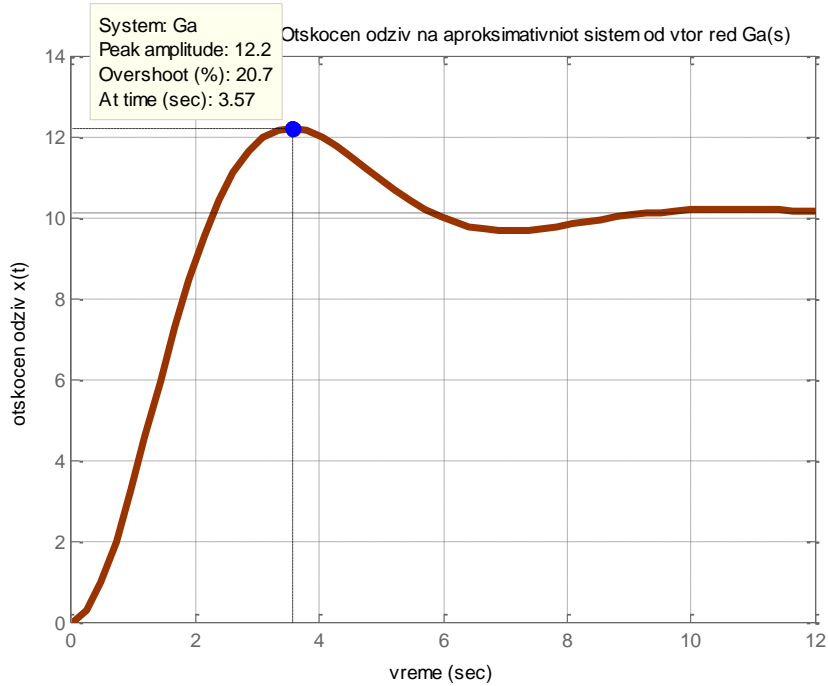
но, како што може да се забележи, реалниот пол $s = -10.0468$ е далеку од имагинарната оска, па неговото влијание врз отскочниот одзив на системот може да се занемари. Оттаму, проектираниот затворен систем од трет ред, може да се апроксимира со систем од втор ред:

$$G_a(s) = \frac{10}{(s^2 + 0.8914s + 0.9893)} \quad (5.82)$$

чиј отскочен одзив е прикажан на Слика 5.38. Како што може да се забележи, овој отскочен одзив има максимален прескок од приближно 20% .



Слика 5.37. Бодев дијаграми на компензираниот отворен систем (5.80) за $K = 0.04$

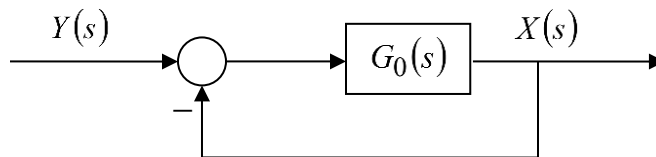


Слика 5.38. Отскочен одзив на апроксимативниот затворен систем од втор ред $G_a(s)$

5.22. Даден е затворениот систем од Слика 5.39, каде што:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+10)} \quad (5.83)$$

Да се изврши компензација на поведението на овој систем, така што компензираниот систем, за влез $y(t) = th(t)$, ќе има стационарна грешка не поголема од 5% од брзината на промена на влезот, и ќе има резерва на фаза од најмалку 45° .



Слика 5.39. Некомпензиран затворен систем од Задача 5.22

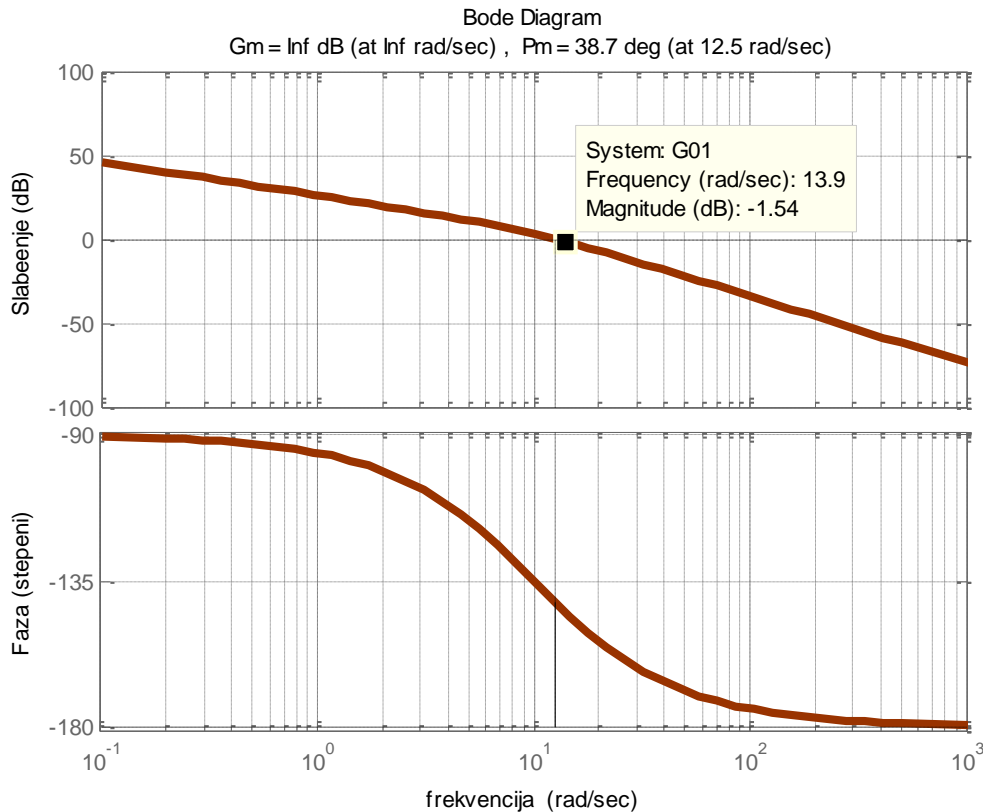
Решение: Бидејќи стационарната грешка на зададениот систем за влезот $y(t) = th(t)$ изнесува:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1+G_0(s)} Y(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1+G_0(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \right] = \frac{10}{K} = \frac{1}{K_v} \quad (5.84)$$

од условот:

$$e(\infty) = \frac{10}{K} \leq 0.05 \Rightarrow K \geq 200 \quad (5.85)$$

слеува дека отворениот систем мора да има засилување $K \geq 200$. Неговите Бодеве дијаграми за $K = 200$ се прикажани на Слика 5.40, од каде се гледа дека некомпензираниот затворен систем има резерва на фаза од 38.7° .



Слика 5.40. Бодеве дијаграми на слабење и фаза на отворениот систем (5.83) за $K = 200$

Понекогаш, како во овој случај, резервата на фаза на набљудуваниот затворен систем може едноставно да се определи и аналитички:

$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{200}{\omega_1 \sqrt{\omega_1^2 + 100}} = 1 \Rightarrow \omega_1^4 + 100\omega_1^2 - 40000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 156.1553 \Rightarrow \omega_1 = 12.4962 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \approx 12.5 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad (5.86)$$

$$\varphi(\omega_1) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{2} = -141.3^\circ \Rightarrow \varphi_{rf} = 180^\circ - 141.3^\circ = 38.7^\circ \quad (5.87)$$

Резервата на фаза на набљудуваниот затворен систем може да се зголеми со помош на диференцијален компензатор, кој ќе внесе дополнително максимално фазно поместување во системот од $45^\circ - 38.7^\circ = 6.3^\circ$. Меѓутоа, додавањето диференцијален компензатор значи и поголема пресечна фреквенција на засилување на компензираниот систем во однос на некомпензираниот, што значи дека брзината на одзив на некомпензираниот систем е помала од брзината на одзив на компензираниот систем. Изразено преку инерцијата или доцнењето на одзивот, некомпензираниот систем има поголема инерција односно поголемо доцнење на одзивот од компензираниот систем. За да се компензира разликата во овие доцнења, се одбира диференцијален компензатор кој ќе има поголемо максимално фазно поместување од потребното, на пример, $6.3^\circ + 3.7^\circ = 10^\circ$. Тогаш односот помеѓу нулата и полот на диференцијалниот компензатор ќе биде:

$$\alpha = \frac{1 + \sin 10^\circ}{1 - \sin 10^\circ} = 1.42 \quad (5.88)$$

а слабењето што тој го внесува при ω_m ќе изнесува $10 \log(\alpha) = 1.52 \text{ dB}$. За нова пресечна фреквенција на засилување на компензираниот систем се одбира фреквенцијата при која слабењето на некомпензираниот систем е еднакво по вредност и спротивно по знак со слабењето на диференцијалниот компензатор при ω_m . Следствено, новата пресечна фреквенција на засилување е $\omega_1 = \omega_{\max} = 13.9 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, при која некомпензираниот отворен систем има слабење од -1.52 dB . Тогаш за нулата и полот од диференцијалниот компензатор се пресметува:

$$a = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = \frac{13.9}{\sqrt{1.42}} = 11.75, \quad b = \omega_m \sqrt{\alpha} = 13.9 \sqrt{1.42} = 16.68 \quad (5.89)$$

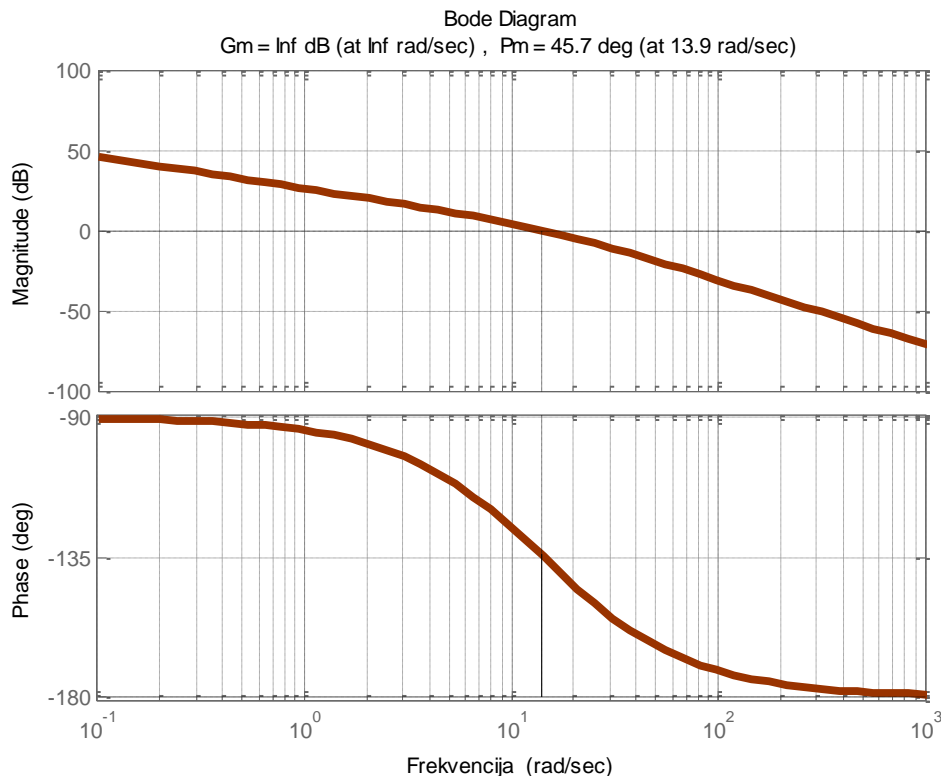
па преносната функција на проектираниот компензатор ќе биде:

$$G_d(s) = \frac{s + 11.75}{s + 16.68} \quad (5.90)$$

На крајот од постапката на синтеза ќе мора да се компензира и слабењето на диференцијалниот компензатор $G_d(0) = \frac{a}{b} = \frac{11.75}{16.68} = \frac{1}{1.42} = \frac{1}{\alpha}$, за да не се промени проектираното поведение на затворениот систем во стационарен режим, односно да не се промени веќе проектираната стационарна грешка. Така, преносната функција на компензираниот отворен систем ќе биде:

$$G_{0c}(s) = 1.42 \cdot \frac{s + 11.75}{s + 16.68} \cdot \frac{200}{s(s + 10)} \quad (5.91)$$

а неговите логаритамски дијаграми се прикажани на Слика 5.41.



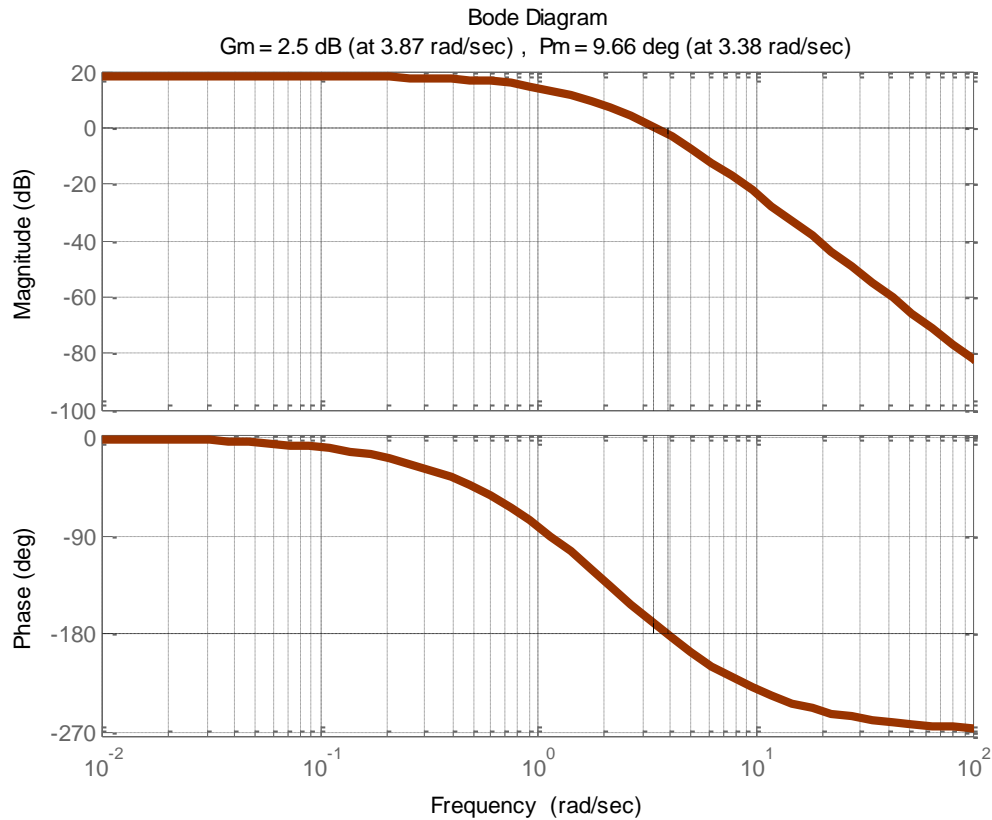
Слика 5.41. Бодевите дијаграми на отворениот систем (5.83) со диференцијален компензатор (5.90) и засилувач со $\lambda = 1.42$

5.23. Да се изврши компензација на поведението на затворениот систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{72}{(s + 1)(s + 3)^2} \quad (5.92)$$

така што компензираниот систем ќе има приближно иста пресечна фреквенција на засилување ω_1 (што практично значи ист пропусен опсег) и резерва на фаза $\varphi_{rf} \approx 45^\circ$.

Решение: Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.92) се прикажани на Слика 5.42. Од нив се гледа дека некомпензираниот систем има резерва на фаза од приближно 10° , што не е доволно, и пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 3.38 \frac{rad}{sec}$.



Слика 5.42. Бодеои дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.92)

Поставеното проектно барање за резерва на фаза од 45^0 може да се реализира со помош на диференцијален компензатор и соодветен засилувач. Така се одбира диференцијален компензатор со максимално фазно поместување од $45^0 - 10^0 = 35^0$, кое настапува при фреквенција $\omega_m = \omega_1 = 3.38 \frac{rad}{sec}$. Тогаш:

$$\frac{b}{a} = \alpha = \frac{1 + \sin 35^0}{1 - \sin 35^0} = 3.69 \quad (5.93)$$

$$a = \frac{3.38}{\sqrt{3.69}} = 1.76,$$

$$b = 3.38\sqrt{3.69} = 6.50 \quad (5.94)$$

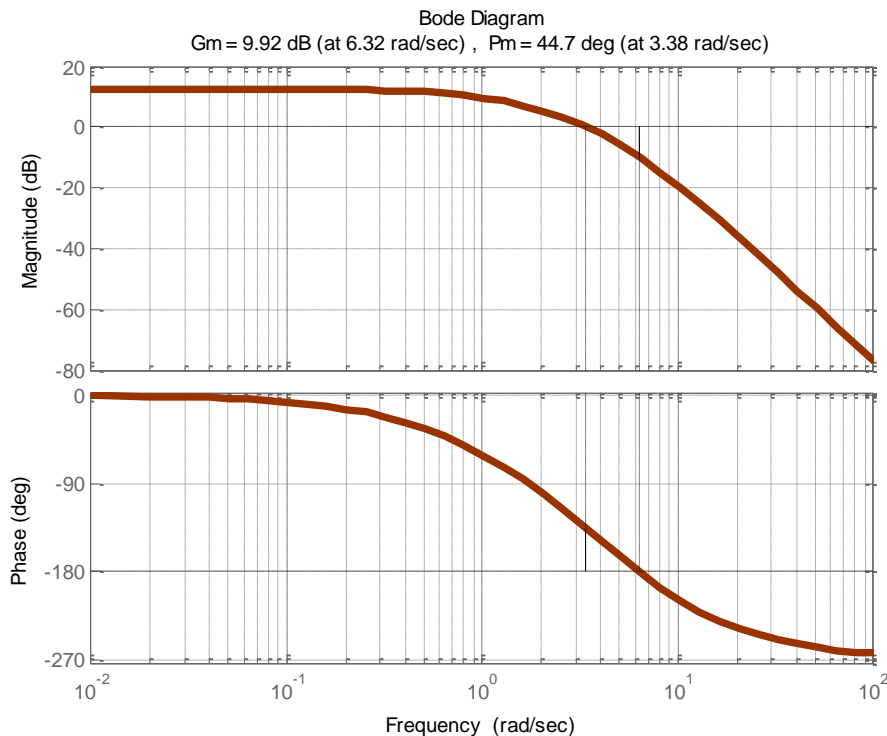
па диференцијалниот компензатор ќе има преносна функција:

$$G_d(s) = \frac{s + 1.76}{s + 6.50} \quad (5.95)$$

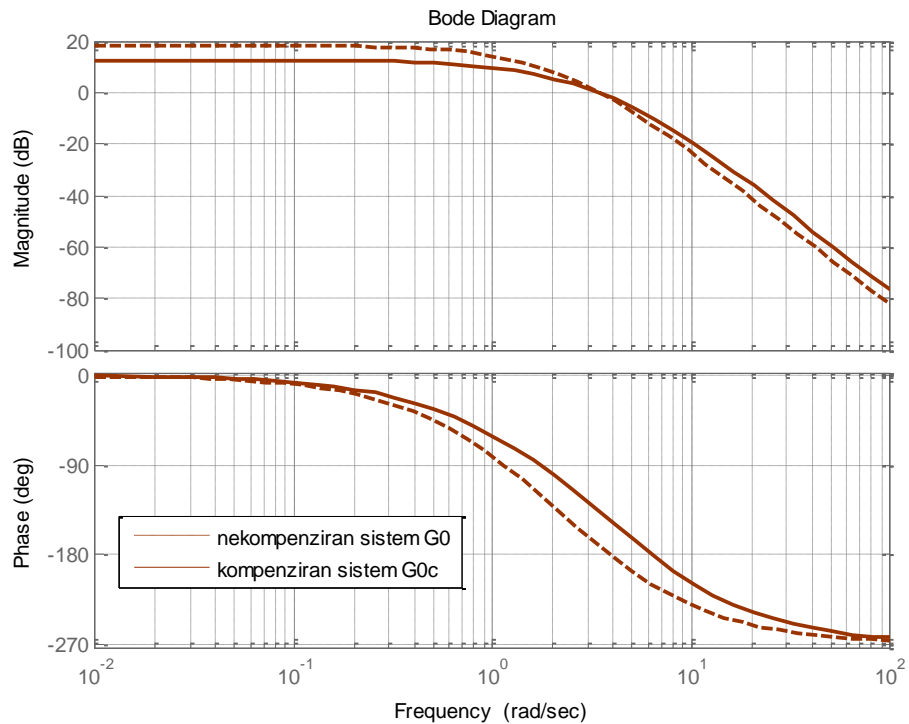
Слабењето што го внесува одбраниот диференцијален компензатор при фреквенција $\omega_m = \omega_1 = 3.38 \frac{rad}{sec}$ изнесува $-20 \log \sqrt{3.69} = -5.67 dB$, па пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем да остане на вредност $\omega_1 = 3.38 \frac{rad}{sec}$, треба да се додаде и засилувач со засилување од $20 \log \sqrt{3.69} = 5.67 dB$, кој засилувањето на отворениот систем (5.92) ќе го зголеми $\lambda = \sqrt{3.69}$ пати. Оттука, преносната функција на отворениот систем (5.92) по компензацијата ќе биде:

$$G_{0c}(s) = \sqrt{3.69} \cdot \frac{s+1.76}{s+6.50} \cdot \frac{72}{(s+1)(s+3)^2} \quad (5.96)$$

и тој ќе има Бодеови дијаграми на слабење и фаза како на Слика 5.43. Од нив се гледа дека компензираниот затворен систем ги поседува саканите особини зададени со поставените проектни барања – резерва на фаза од приближно 45^0 и иста пресечна фреквенција на засилување како и пред компензацијата, $\omega_1 = 3.38 \frac{rad}{sec}$. На Слика 5.44 заедно се прикажани Бодеовите дијаграми на отворениот систем за набљудуваниот затворен систем пред и по компензацијата, за да се види како воведувањето на диференцијален компензатор во директната гранка од затворениот систем ги менува Бодеовите дијаграми на соодветниот отворен систем.



Слика 5.43. Бодеови дијаграми на слабење и фаза на отворениот систем (5.96)

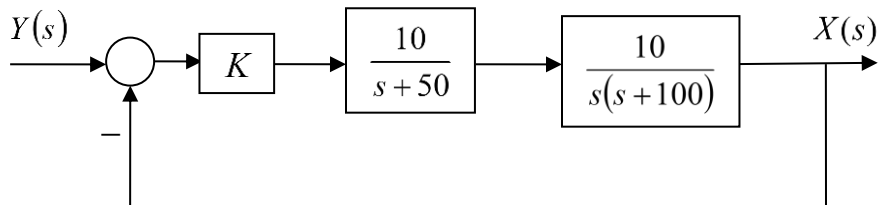


Слика 5.44. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.92) пред и по компензацијата со диференцијалниот компензатор (5.96)

5.24. Даден е затворениот систем од долната слика, во кој објектот на управување $P(s)$ е опишан со преносната функција:

$$P(s) = \frac{100}{s(s+50)(s+100)} \quad (5.97)$$

Да се изврши компензација на поведението на набљудуваниот систем, така што компензираниот затворен систем ќе има максимален прескок од 20%, време на максимален прескок $t_m = 0.1 \text{ sec}$ и брзинска константа $K_v = 40$.



Слика 5.45. Некомпензиран затворен систем од Задача 5.24

Решение: Од условот за брзинската константа на набљудуваниот систем се добива:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} KP(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{100K}{s(s+50)(s+100)} \right] = 40 \Rightarrow K = 2000 \quad (5.98)$$

Преносната функција на отворениот систем по компензацијата на коефициентот на засилување е:

$$G_{01}(s) = KP(s) = \frac{200000}{s(s+50)(s+100)} \quad (5.99)$$

и неговите Бодеови дијаграми се прикажани на Слика 5.46. Максималниот дозволен прескок од 20% значи фактор на релативно придушување $\zeta = 0.456$ и резерва на фаза $\varphi_{rf} = 48.1477^\circ \approx 48.2^\circ$. Од Бодеовите дијаграми на Слика 5.46 се гледа дека некомпензираниот систем има резерва на фаза од $\varphi_{rf} = 39.6^\circ$ при пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 32.1 \frac{rad}{sec}$. Следствено, диференцијалниот компензатор треба да внесе максимално фазно поместување од $\varphi_m = 48.2^\circ - 39.6^\circ = 8.6^\circ$. За да се компензира влијанието на диференцијалниот компензатор во системот, вредноста за φ_m се зголемува за одредена вредност, најчесто 10° , па во конкретниот случај се усвојува $\varphi_m = 18.6^\circ$.

За пресечна фреквенција на засилување на компензираниот затворен систем се усвојува онаа фреквенција, при која отворениот некомпензиран систем има слабеење од $-3dB$ и тоа е фреквенцијата $\tilde{\omega}_1 = 40.5 \frac{rad}{sec}$. За усвоената вредност на φ_m се добива дека $\alpha = 0.52$, па нулата и полот на диференцијалниот компензатор ќе бидат одредени со $z_c = 29$ и $z_c = 56.4$. Преносната функција на вака проектираниот диференцијален компензатор е:

$$R(s) = 1.94 \frac{s+29}{s+56.4} \quad (5.100)$$

а на компензираниот отворен систем ќе има облик:

$$G_{02}(s) = R(s)G_{01}(s) = 1.94 \frac{s+29}{s+56.4} \cdot \frac{200000}{s(s+50)(s+100)} \quad (5.101)$$

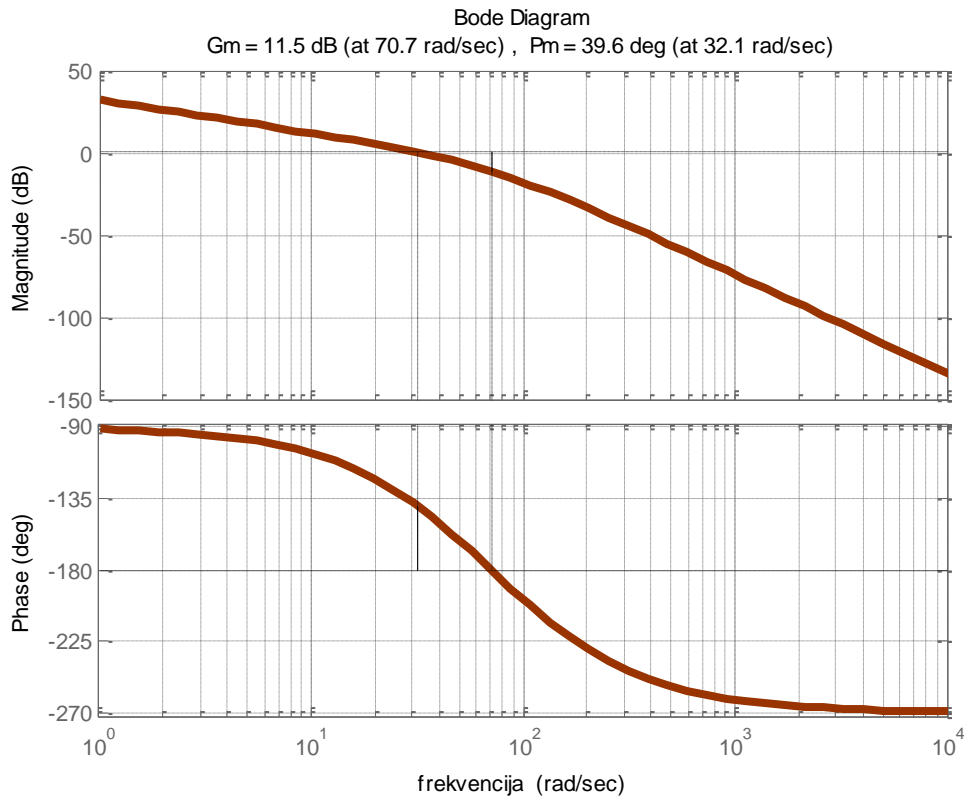
Бодеовите дијаграми на компензираниот отворен систем $G_{02}(s) = KP(s)R(s)$ се прикажани на Слика 5.47, од каде се гледа дека компензираниот затворен систем има

резерва на фаза од приближно $\varphi_{rf} = 48^0$ при пресечна фреквенција на засилување од приближно $\tilde{\omega}_1 = 40 \frac{rad}{sec}$. Останува да се провери дали компензираниот затворен систем ги задоволува и останатите проектни барања.

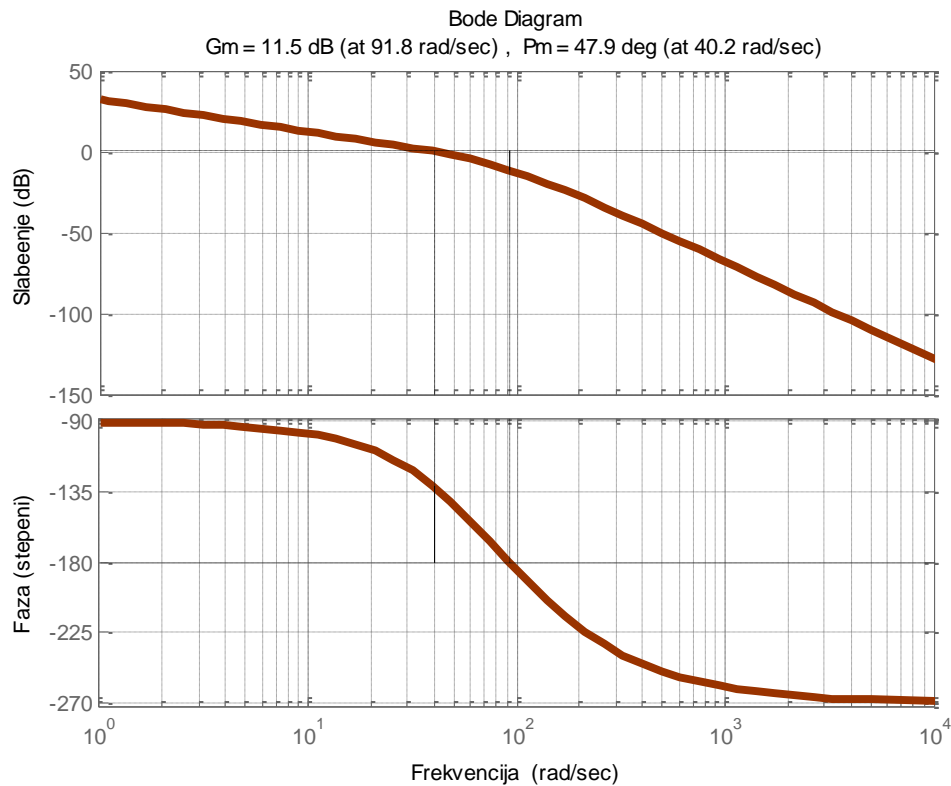
Преносната функција на компензираниот затворен систем е:

$$G(s) = \frac{G_{02}(s)}{1 + G_{02}(s)} = \frac{387280(s + 29)}{(s + 140.4)(s + 25.38)(s^2 + 40.58s + 3164)} \quad (5.102)$$

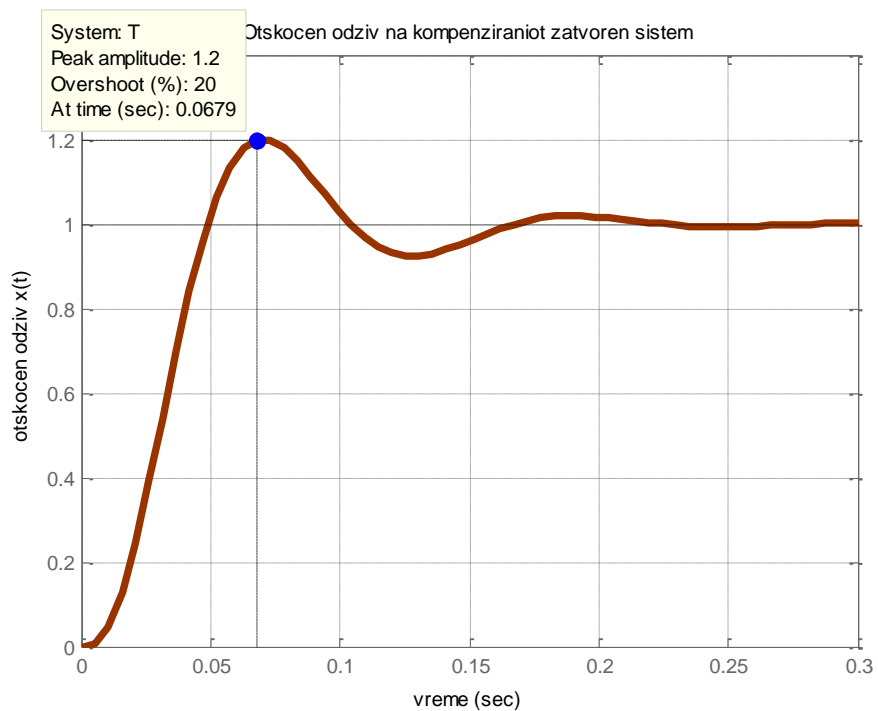
и неговиот отскочен одзив е прикажан на Слика 5.48, од каде се гледа дека истиот има максимален прескок од 20% и време на максимален прескок $t_m = 0.07 sec$. Сите овие вредности се многу блиску до поставените проектни барања и како такви се сосема прифатливи. Пропусниот опсег на компензираниот систем е $\omega_0 \approx 79 \frac{rad}{sec}$ и е поголем од бараниот. Може да се забележи дека по компензацијата со диференцијален компензатор, доаѓа до зголемување на резервата на фаза, пресечната фреквенција на фаза и пропусниот опсег на некомпензираниот систем.



Слика 5.46. Бодови дијаграми на отворениот систем $G_{01}(s) = KP(s)$



Слика 5.47. Бодеве дијаграми на отворениот систем $G_{02}(s) = KP(s)R(s)$

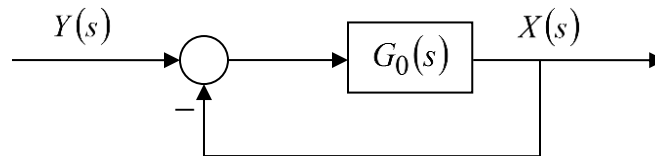


Слика 5.48. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем од Задача 5.24

5.25. Да се изврши компензација на поведението на затворен систем со единична негативна повратна врска, прикажан на Слика 5.49, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{32}{s(s+2)(s+8)} \quad (5.103)$$

така што компензираниот систем ќе има: стационарна грешка $e_v(\infty) \leq \frac{\pi}{10}$, при влез $y(t) = 10\pi t h(t)$; резерва на фаза $\varphi_{rf} = 45^\circ \pm 5^\circ$; пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 \geq 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.



Слика 5.49. Некомпензиран затворен систем од Задача 5.25

Решение: Бидејќи отворениот систем (5.103) има астатизам од прв ред, затворениот систем е во состојба идеално да следи отскочна влезна возбуда, додека линеарно растечки влез следи со одредено конечно отстапување, кое зависи од величината на неговата брзинска константа. За влез $y(t) = v_0 t h(t) = 10\pi t h(t)$, брзинската константа на некомпензираниот систем изнесува:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{32}{s(s+2)(s+8)} \right] = 2 \quad (5.104)$$

а стационарната грешка е:

$$e_v(\infty) = \frac{v_0}{K_v} = \frac{10\pi}{2} = 5\pi > \frac{\pi}{10} \quad (5.105)$$

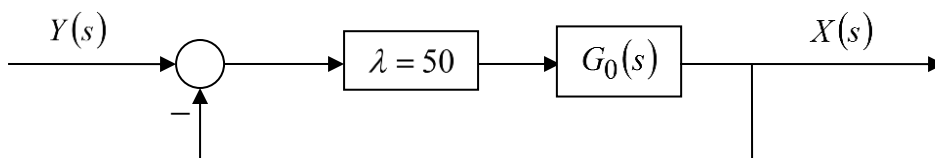
Потребната величина на коефициентот на засилување на отворениот систем (5.103), за која стационарната грешка на затворениот систем при линеарно растечки влез $y(t) = v_0 t h(t) = 10\pi t h(t)$ ќе го исполнува првото проектно барање, се определува од условот:

$$e_v(\infty) = \frac{v_0}{K_v} = \frac{10\pi}{K_v} \leq \frac{\pi}{10} \quad (5.106)$$

од каде следува:

$$\frac{10\pi}{K_v} \leq \frac{\pi}{10} \Rightarrow K_v = \frac{K}{16} \geq 100 \Rightarrow K \geq 1600 \quad (5.107)$$

Новата вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем се постига со воведување на засилувач со засилување $\lambda = 50$ во директната гранка од набљудуваниот затворен систем. Со тоа е реализирано проектното барање во поглед на квалитетот односно точноста на работата на проектираниот затворен систем во стационарен режим.



Слика 5.50. Затворениот систем од Слика 5.49 по компензацијата на коефициентот на засилување на отворениот систем $G_0(s)$

Преносната функција на отворениот систем за затворениот систем од Слика 5.47 е:

$$G_{01}(s) = \lambda G_0(s) = 50G_0(s) = \frac{1600}{s(s+2)(s+8)} \quad (5.108)$$

а неговите Бодеови дијаграми се прикажани на Слика 5.51. Од нив се гледа дека затворениот систем има резерва на засилување од $-20dB$ при пресечна фреквенција на фаза $\omega_\pi = 10.8 \frac{rad}{sec}$ и резерва на фаза од -43° при пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 4 \frac{rad}{sec}$. Бидејќи резервата на фаза е негативна, може да се заклучи дека затворениот систем е нестабилен, што значи дека, со зголемувањето на коефициентот на засилување на некомпензираниот систем за 50 пати, се нарушила неговата стабилност.

За зголемување на резервите на засилување и фаза на еден затворен систем, како и проширување на неговиот пропусен опсег, по правило се користи диференцијален компензатор. Во конкретниот случај, потребен е диференцијален компензатор кој ќе внесе многу големо фазно поместување $\varphi_d = 45^\circ + 43^\circ = 88^\circ$. Од друга страна, воведувањето диференцијален компензатор секогаш значи и потреба од дополнително зголемување на засилувањето на системот еднакво со односот $\alpha = \frac{b}{a}$ на компензаторот, со цел да се компензира слабењето на компензаторот при ниски фреквенции. Крајниот ефект од ова е зголемување на засилувањето на системот при средни и високи

фреквенции, а со тоа и зголемување на пресечната фреквенција на засилување ω_1 . Следствено, резервата на фаза од $45^0 \pm 5^0$ треба да се обезбеди при повисоки фреквенции, што значи дека е потребно уште поголемо фазно поместување од споменато. За да се реализира вака големо фазно поместување, соодветно е наместо еден, да се употреби сериска врска од два идентични диференцијални компензатори. Така, во конкретниот случај употребена е сериска врска од два диференцијални компензатори, од кои секој внесува максимално фазно поместување $\varphi_m = 60^0$.

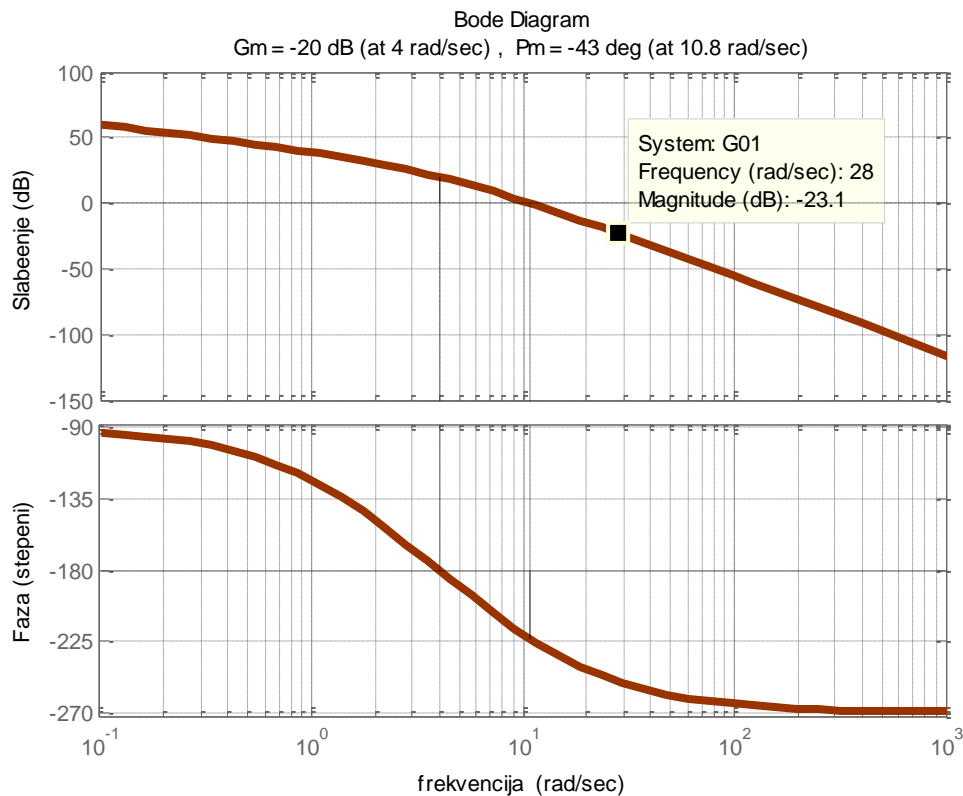
Преносната функција на диференцијалниот компензатор може да се претстави во облик:

$$G_d(s) = \frac{s+a}{s+b} = \frac{s+a}{s+\alpha a} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{s}{a}+1}{\frac{s}{\alpha a}+1}; \alpha = \frac{b}{a} \quad (5.109)$$

каде што параметарот α се определува од условот $\varphi_m = 60^0$:

$$\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \Rightarrow \alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = 13.9282 \approx 13.93 \quad (5.110)$$

Тогаш вкупното максимално фазно поместување што го внесува сериската врска од два идентични диференцијални компензатори $G_d(s)$:



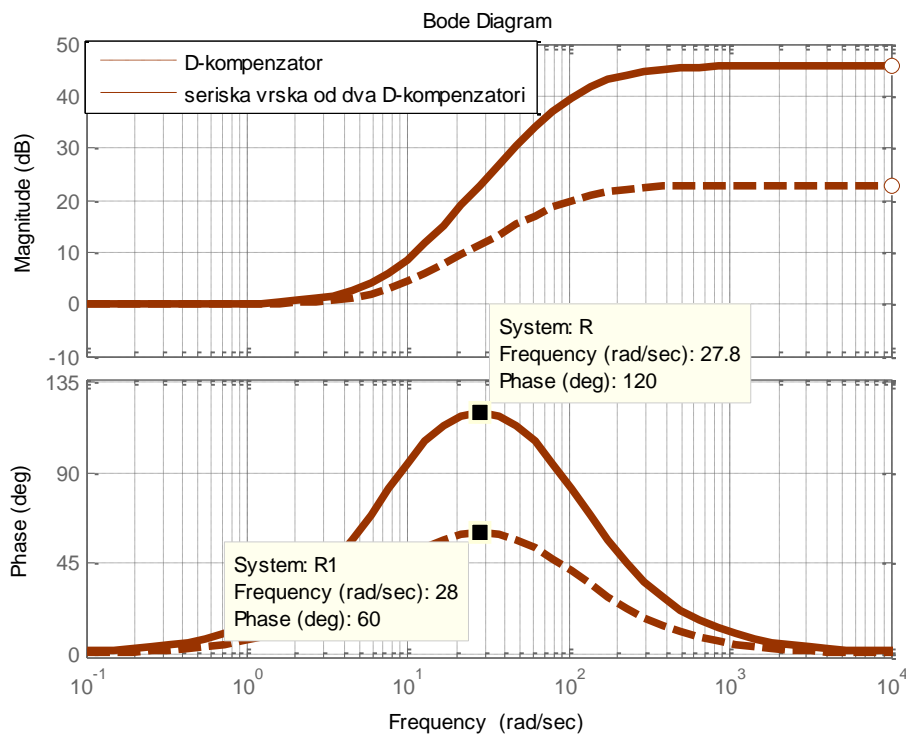
Слика 5.51. Бодев дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.108)

$$G_c(s) = [G_d(s)]^2 = \left[\frac{s+a}{s+b} \right]^2 = \left[\frac{s+a}{s+\alpha a} \right]^2 = \left[\frac{s+a}{s+7a} \right]^2 = \left[\frac{1}{13.93} \cdot \frac{\frac{s}{a} + 1}{\frac{s}{7a} + 1} \right]^2 \quad (5.111)$$

ќе изнесува:

$$\varphi_{\max} = 2\varphi_m = 2 \left(\arctg \frac{\omega}{a} - \arctg \frac{\omega}{\alpha a} \right) = 2 \left(\arctg \frac{\omega}{a} - \arctg \frac{\omega}{7a} \right) = 120^\circ \quad (5.112)$$

Секој од диференцијалните компензатори внесува одредено слабеење во компензираниот систем кое, на фреквенцијата ω_m при која настапува максималното фазно поместување φ_m , изнесува $-10 \log \alpha = -10 \log 13.93 = -11.5 \text{ dB}$, па вкупното слабеење што во компензираниот систем го внесува сериската врска од двата идентични диференцијални компензатори ќе биде $-20 \log \alpha = -20 \log 13.93 = -23 \text{ dB}$. На Слика 5.52 се прикажани Бодевите дијаграми на единичниот диференцијален компензатор $G_d(s)$ и сериската врска од два исти такви диференцијални компензатори $G_c(s) = [G_d(s)]^2$, од каде можат да се видат споменатите максимални фазни поместувања, слабеења и фреквенцијата при која тие настануваат.



Слика 5.52. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на диференцијалниот компензатор (5.109) и сериската врска од два исти такви диференцијални компензатори (5.111)

Параметарот a на диференцијалниот компензатор (5.109) се определува од условот пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем ω_{1c} да биде еднаква со фреквенцијата ω_m при која настапува максималното фазно поместување од компензаторите, $\omega_{1c} = \omega_m$, или, поинаку кажано, компензаторите да го внесуваат максималното фазно поместување во близина на пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем. Тоа е онаа фреквенција при која Бодеоовиот дијаграм на слабеење на некомпензираниот отворен систем има вредност еднаква со слабеењето од сериската врска на диференцијалните компензатори при фреквенцијата ω_m , односно $-23dB$ и таа се отчитува од Бодеоовиот дијаграм на слабеење на отворениот систем без диференцијални компензатори, прикажан на Слика 5.51. Ако за ω_m се усвои

$\omega_m = 28 \frac{rad}{sec}$, за параметарот a на диференцијалниот компензатор се добива:

$$\omega_m = a\sqrt{\alpha} \Rightarrow a = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = \frac{28}{13.93} = 7.5 \quad (5.113)$$

Следствено, преносната функција на диференцијалниот компензатор ќе биде:

$$G_d(s) = \frac{s + 7.5}{s + 104.5} \quad (5.114)$$

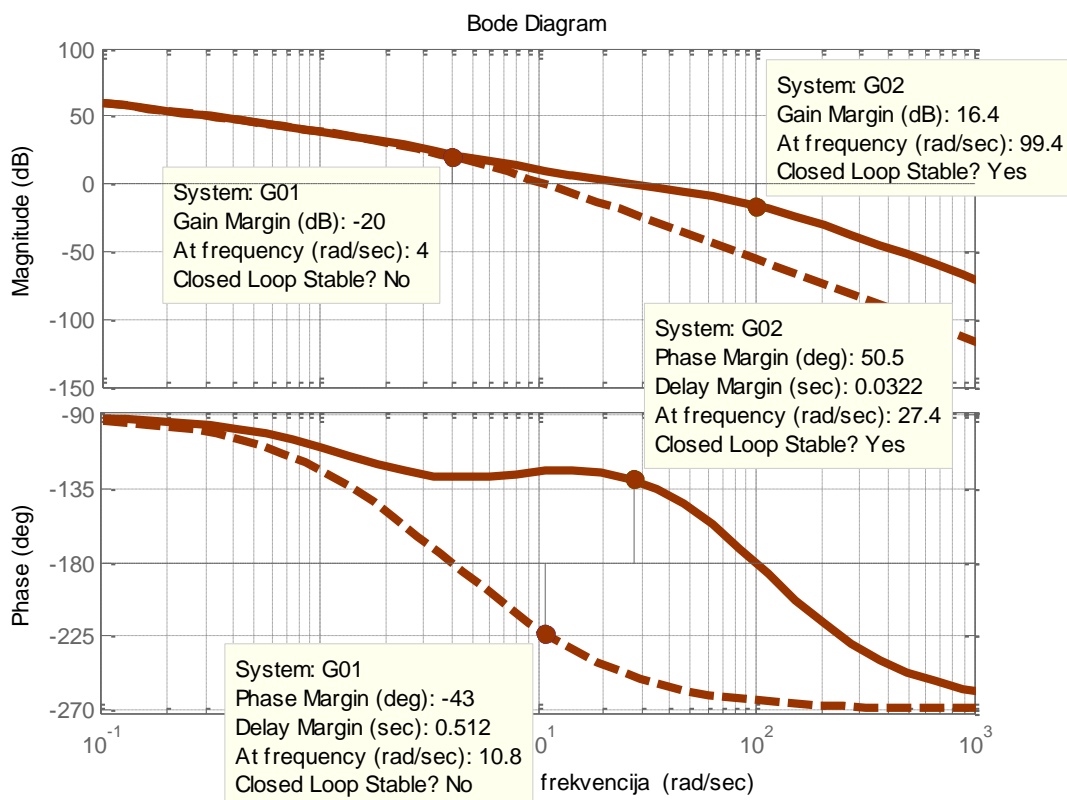
Бидејќи секој од диференцијалните компензатори при ниски фреквенции внесува слабеење од $20 \log \frac{a}{b} = 20 \log \frac{1}{13.93} = -23dB$, вкупното слабеење од нивната сериска врска што се јавува во компензираниот систем при ниски фреквенции ќе биде $40 \log \frac{a}{b} = 40 \log \frac{1}{13.93} = -46dB$, па за тоа да се компензира, треба да се изврши повторна корекција на коефициентот на засилување на отворениот систем за фактор 194. Така, преносната функција на отворениот систем за компензираниот затворен систем дефинитивно ќе има облик:

$$G_{0c}(s) = 194G_c(s)\lambda G_0(s) = 194 \left[\frac{s + 7.5}{s + 104.5} \right]^2 \frac{1600}{s(s + 2)(s + 8)} \quad (5.115)$$

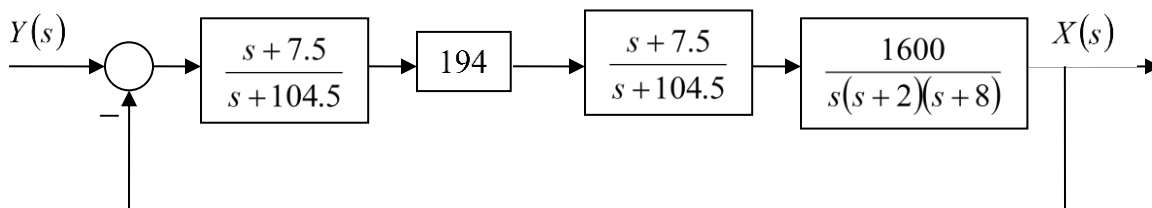
Бодеоовите дијаграми на слабеење и фаза за компензираниот отворен систем се прикажани на Слика 5.53 едновременно со Бодеоовите дијаграми на слабеење и фаза на некомпензираниот отворен систем. Од Слика 5.53 убаво се гледа како компензацијата на слабеењето што го внесува диференцијалниот компензатор за краен ефект има зголемување на засилувањето на отворениот систем при средни и високи фреквенции (во подрачјето на овие фреквенции Бодеоовиот дијаграм на слабеење на компензираниот отворен систем е подигнат во однос на неговиот дијаграм на слабеење пред

компензацијата со диференцијални компензатори). Исто така се гледа пресечната фреквенција на засилување $\omega_1 = 27.4 \frac{rad}{sec}$, која е значително поголема од поставеното

проектно барање, што значи дека компензираниот затворен систем ќе има многу побрз одзив отколку бараниот. Структурната блок-шема на компензираниот затворен систем е прикажана на Слика 5.54. Засилувачот, кој ја обезбедува целата потребна компензација на засилувањето на отворениот систем, е сместен помеѓу двата диференцијални компензатори, за да го елиминира влијанието на оптоварувањето од вториот компензатор врз првиот.



Слика 5.53. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем од Задача 5.25 пред и по компензацијата со сервиска врска од два диференцијални компензатори



Слика 5.54. Компензираниот затворен систем од Задача 5.25

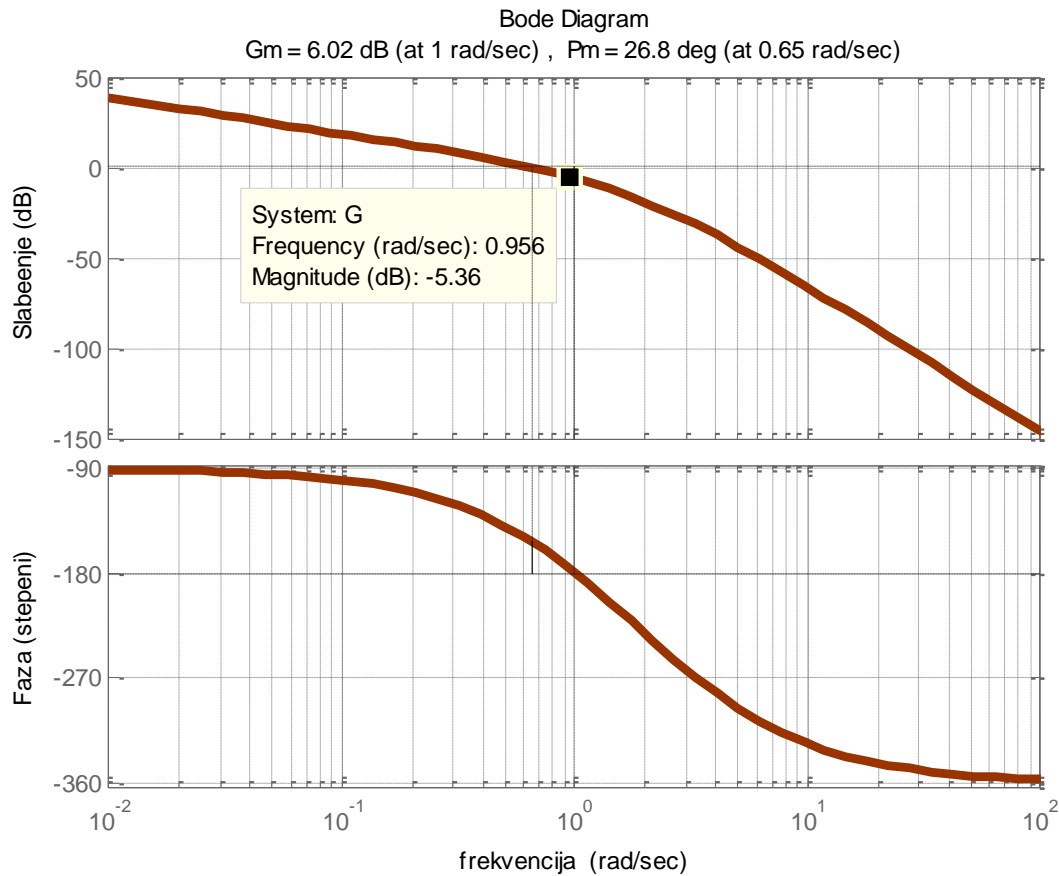
5.26. Да се изврши синтеза на затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска, кој ќе има резерва на фаза од 50° . Објектот на управување, под претпоставка, има преносна функција:

$$P(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (5.116)$$

Решение: На Слика 5.55 се прикажани Бодевите дијаграми на објектот на управување (5.116), од каде се гледа дека некомпензирианиот затворен систем има резерва на засилување $d = 6dB$ и резерва на фаза $\varphi_{rf} = 26.8^{\circ}$ при пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 0.65 \frac{rad}{sec}$.

Саканата резерва на фаза може да се постигне со помош на диференцијален компензатор, кој ќе внесе максимално позитивно фазно поместување од:

$$\varphi_m = 50^{\circ} + 10^{\circ} - 26.8^{\circ} = 33.2^{\circ} \quad (5.117)$$



Слика 5.55. Бодевите дијаграми на објектот на управување од Задача 5.26

каде што 50^0 е саканата резерва на фаза, 26.8^0 е резервата на фаза на некомпензираниот систем, а дополнителната фаза од 10^0 се додава со цел да се компензира промената на резервата на фаза која настанува како резултат на промената на пресечната фреквенција на засилување при компензацијата со диференцијален компензатор. Врз основа на пресметаната вредност за максималното фазно поместување од диференцијалниот компензатор, може да се пресмета вредноста на α , која го претставува односот помеѓу нулата и полот на диференцијалниот компензатор:

$$\sin(\varphi_m) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sin(\varphi_m)}{1 + \sin(\varphi_m)} = 0.292 \quad (5.118)$$

Заради неидеалната природа на диференцијалниот компензатор, пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем нема повеќе да биде $\omega_1 = 0.65 \frac{rad}{sec}$, туку ќе се помести во десно. Бидејќи при $\omega_1 = 0.65 \frac{rad}{sec}$ слабеењето на компензираниот систем како резултат на влијанието од диференцијалниот компензатор изнесува $-10 \log_{10}(\alpha) = 5.35dB$, за нова пресечна фреквенција на засилување се избира фреквенцијата при која некомпензираниот систем има слабеење од $-5.35dB$, а тоа е фреквенцијата $\tilde{\omega}_1 = 0.957 \frac{rad}{sec}$. За вака одбраните α и $\tilde{\omega}_1$, нулата и полот на потребниот диференцијален компензатор ќе бидат:

$$z_c = \tilde{\omega}_1 \sqrt{\alpha} = 0.957 \sqrt{0.292} = 0.517 \quad (5.119)$$

$$p_c = \frac{z_c}{\alpha} = \frac{0.517}{0.292} = 1.77 \quad (5.120)$$

и тој ќе ја има следната преносна функција:

$$R_1(s) = \frac{1}{0.292} \cdot \frac{s + 0.517}{s + 1.77} \quad (5.121)$$

За да се провери дали проектираниот затворен систем ги задоволува поставените проектни барања во поглед на резервата на фаза, нацртани се Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем:

$$G_{01}(s) = \frac{1}{0.292} \cdot \frac{s + 0.517}{s + 1.77} \cdot \frac{5}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (5.122)$$

и истите се прикажани на Слика 5.56. Оттука се гледа дека пресечната фреквенција на засилување на компензираниот систем навистина е $\tilde{\omega}_1 = 0.957 \frac{rad}{sec}$, но неговата резерва на фаза изнесува само 36.2^0 наместо саканите 50^0 . Ова се должи на фактот дека фазата на некомпензираниот систем помеѓу првата и втората пресечна фреквенција се променила за 23.8^0 , а не за 10^0 , како што е претпоставено при пресметувањето на

потребното максимално фазно поместување на диференцијалниот компензатор. Затоа постапката на синтеза треба да се повтори, и сега максималното фазно поместување на диференцијалниот компензатор да се пресмета според формулата:

$$\varphi_m = 50^0 + 30^0 - 26.8^0 = 53.2^0 \quad (5.123)$$

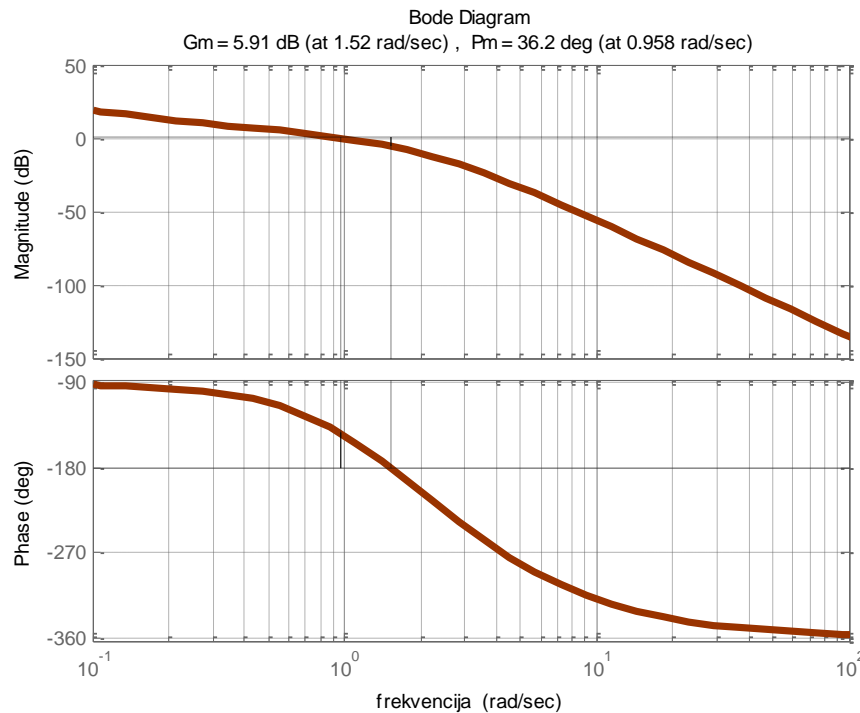
За новата вредност на φ_m соодветната вредност на α изнесува $\alpha = 0.1107$, а новата пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1 = 1.24 \frac{rad}{sec}$ е онаа фреквенција, при која некомпензираниот отворен систем има слабеење од $10 \log_{10}(\alpha) = -9.65 dB$. Нулата и полот на новиот диференцијален компензатор се:

$$z_c = 1.24 \sqrt{0.11} = 0.4126 \quad (5.124)$$

$$p_c = \frac{0.412}{0.11} = 3.7272 \quad (5.125)$$

и тој ќе ја има следната преносна функција:

$$R_2(s) = \frac{1}{0.1107} \cdot \frac{s + 0.4126}{s + 3.7272} \quad (5.126)$$

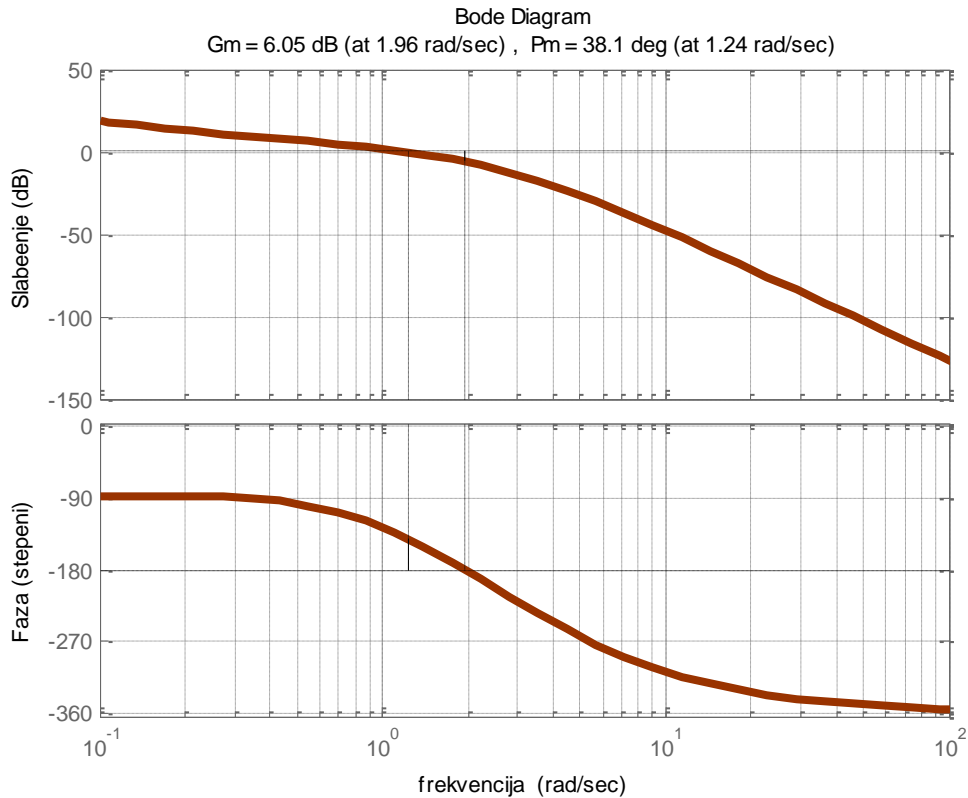


Слика 5.56. Бодеови дијаграми на компензираниот отворен систем $G_{01}(s)$

Преносната функција на вака компензираниот отворен систем ќе биде:

$$G_{02}(s) = \frac{1}{0.1107} \cdot \frac{s + 0.4126}{s + 3.7272} \cdot \frac{5}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (5.127)$$

и неговите фреквентни дијаграми се прикажани на Слика 5.57.



Слика 5.57. Бодев дијаграми на компензираниот отворен систем $G_{02}(s)$

Како што може да се забележи, постигнатата резерва на фаза изнесува само 38° и сè уште е далеку од саканите 50° . Ова се должи на фактот дека новата вредност за α предизвикува уште поголемо поместување на пресечната фреквенција на засилување во десно, па пресметаното максимално фазно поместување на диференцијалниот компензатор $\varphi_m = 53.2^\circ$ сè уште не е доволно да ја обезбеди саканата резерва на фаза. Имено, фазата на отворениот систем станува понегативна многу побрзо отколку што диференцијалниот компензатор може тоа да го компензира.

Теоретски, за максималното фазно поместување на диференцијалниот компензатор може да се усвои и поголема вредност, на пример:

$$\varphi_m = 50^\circ + 60^\circ - 26.8^\circ = 83.2^\circ \quad (5.128)$$

меѓутоа, вака големо фазно поместување реално може да се оствари само со сериска врска од два диференцијални компензатори. Тогаш, секој од компензаторите ќе внесува фазно поместување од $\varphi_m = 83.2^\circ / 2 = 41.6^\circ$, па соодветната вредност за α во конкретниот случај ќе изнесува $\alpha = 0.202$. Слабењето на ваквиот диференцијален компензатор при пресечната фреквенција на засилување на некомпензираниот систем ќе биде $-10\log_{10}(\alpha) = 13.9\text{dB}$, па за новата пресечна фреквенција на засилување се добива $\tilde{\omega}_1 = 1.56 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Нулата и полот на секој од диференцијалните компензатори во сериската врска се:

$$z_c = 1.56\sqrt{0.202} = 0.701 \quad (5.129)$$

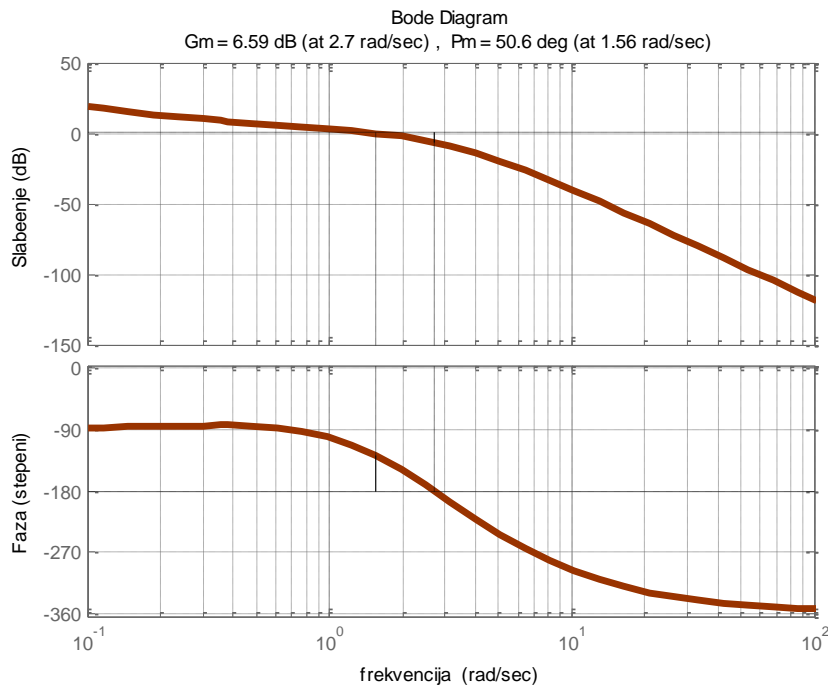
$$p_c = \frac{0.701}{0.202} = 3.47 \quad (5.130)$$

и тие ќе ја имаат следната преносна функција:

$$R_3(s) = \frac{1}{0.202} \cdot \frac{s + 0.701}{s + 3.47} \quad (5.131)$$

додека преносната функција на компензираниот отворен систем ќе гласи:

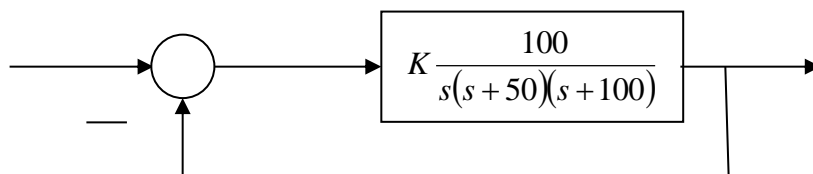
$$G_{03}(s) = \left(\frac{1}{0.202} \cdot \frac{s + 0.701}{s + 3.47} \right)^2 \cdot \frac{5}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (5.132)$$



Слика 5.58. Бодев дијаграми на компензираниот отворен систем $G_{03}(s)$

Неговите фреквентни дијаграми се прикажани на Слика 5.58, од каде се гледа дека компензириот систем со сервиската врска од два диференцијални компензатори ја има саканата резерва на фаза. Треба да се истакне дека прикажаната ситуација не настанува кај секој затворен систем што се проектира по пат на компензација со диференцијален компензатор. Тоа зависи од наклонот на дијаграмот на фаза во околина на пресечната фреквенција на засилување. Ако тој наклон е многу голем и негативен, лесно може да настане прикажаниот проблем. Алтернативно, задачата може да се реши со примена на интегро -диференцијален компензатор.

5.27. Да се изврши синтеза на затворениот систем од Слика 5.59 по пат на компензација со интегрирачки компензатор, така што неговата стационарна грешка ќе биде 10-пати помала од стационарната грешка постигната со компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем, при ист максимален прескок од 10% .



Слика 5.59. Илустрација кон Задача 5.27

Решение: За максимален прескок од 10% , затворениот систем треба да има резерва на фаза од приближно 59^0 , што може да се постигне со коефициент на засилување на отворениот систем $K_c = 1000$. Брзинската константа на вака компензириот затворен систем е:

$$K_v = \frac{100000}{5000} = 20 \quad (5.133)$$

а неговата стационарна грешка изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{20} = 0.05 \quad (5.134)$$

Стационарната грешка на затворениот систем може да се намали 10-пати, ако за исто толку се зголеми неговата брзинска константа, што се постига преку зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем за 10-пати. Следствено, новата вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем ќе биде $\tilde{K}_c = 10000$, новата вредност за брзинската константа ќе изнесува $\tilde{K}_v = 200$ и затворениот систем ќе има стационарна грешка $\tilde{e}(\infty) = 0.005$. Преносната функција на отворениот систем со компензиран коефициент на засилување ќе биде:

$$\tilde{G}_0(s) = \tilde{K} \frac{100}{s(s+50)(s+100)} = \frac{1000000}{s(s+50)(s+100)} \quad (5.135)$$

и неговите логаритамски фреквентни дијаграми се прикажани на Слика 5.60. Од нив се гледа дека затворениот систем има негативна резерва на фаза, што значи дека е нестабилен. Меѓутоа, според проектните услови, тој треба да има резерва на фаза од приближно 59^0 . Затоа од Бодевите дијаграми на Слика 5.60 се одредува фреквенцијата $\tilde{\omega}_1$ при која фазата на отворениот систем ќе изнесува $\arg[G_0(j\tilde{\omega}_1)] = (59^0 + 10^0) - 180^0 \approx -111^0$. Корекцијата на резервата на фаза е направена со цел да се компензира дополнителното фазно задоцнување што го внесува интегралниот компензатор при новата пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1$, за која се утврдува дека изнесува $12.65 \frac{rad}{sec}$. При оваа фреквенција Бодевите дијаграм на слабење на компензираниот отворен систем мора да минува низ хоризонталата $0dB$, а од Слика 5.60 се гледа дека тој има засилување од $24dB$ при $\tilde{\omega}_1 = 12.65 \frac{rad}{sec}$, па интегралниот компензатор мора да обезбеди слабење од $-24dB$ при истата фреквенција. Потребниот интегрален компензатор се проектира како што е покажано на Слика 5.61. Најнапред се повлекува асимптотата од дијаграмот на слабење на компензаторот за високи фреквенции со вредност $-24dB$. Фреквенцијата на прекршување на дијаграмот за високите фреквенции се одбира произволно да биде 10-пати пониска од новата пресечна фреквенција на засилување $\tilde{\omega}_1$:

$$a = \frac{\tilde{\omega}_1}{10} \approx 1.265 \frac{rad}{sec} \quad (5.136)$$

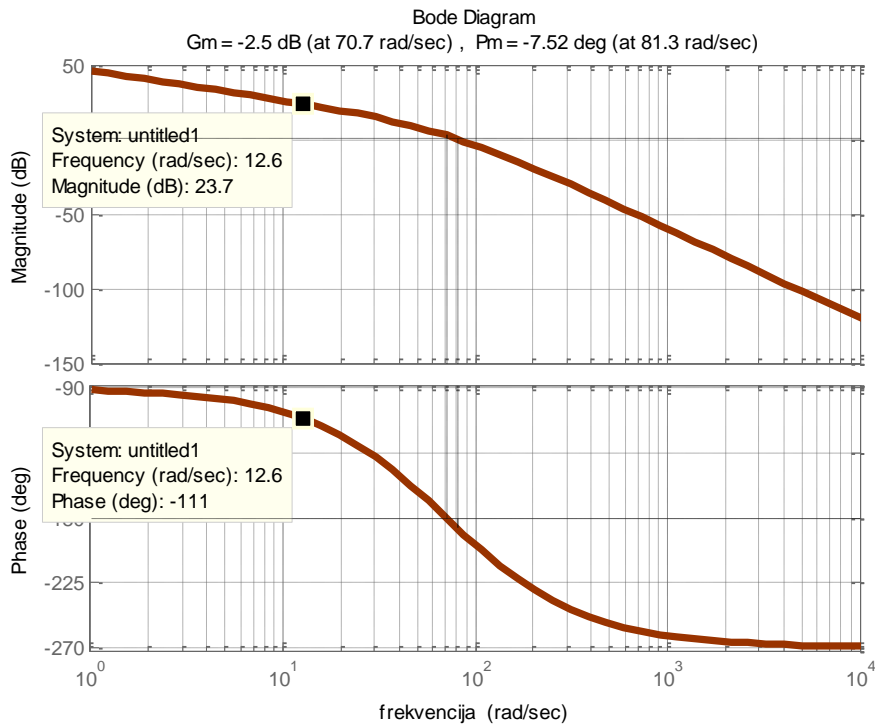
Потоа низ точката од дијаграмот која одговара на оваа фреквенција се повлекува права со наклон од $-20 \frac{dB}{dec}$ сè до нејзиниот пресек со оската $0dB$, кој ја одредува точката на прекршување на дијаграмот при ниски фреквенции $b \approx 0.0832 \frac{rad}{sec}$. Следствено, проектираниот интегрален компензатор треба да има преносна функција:

$$G_c(s) = \frac{b}{a} \cdot \frac{s+a}{s+b} = 0.0658 \frac{s+1.265}{s+0.0832} \quad (5.137)$$

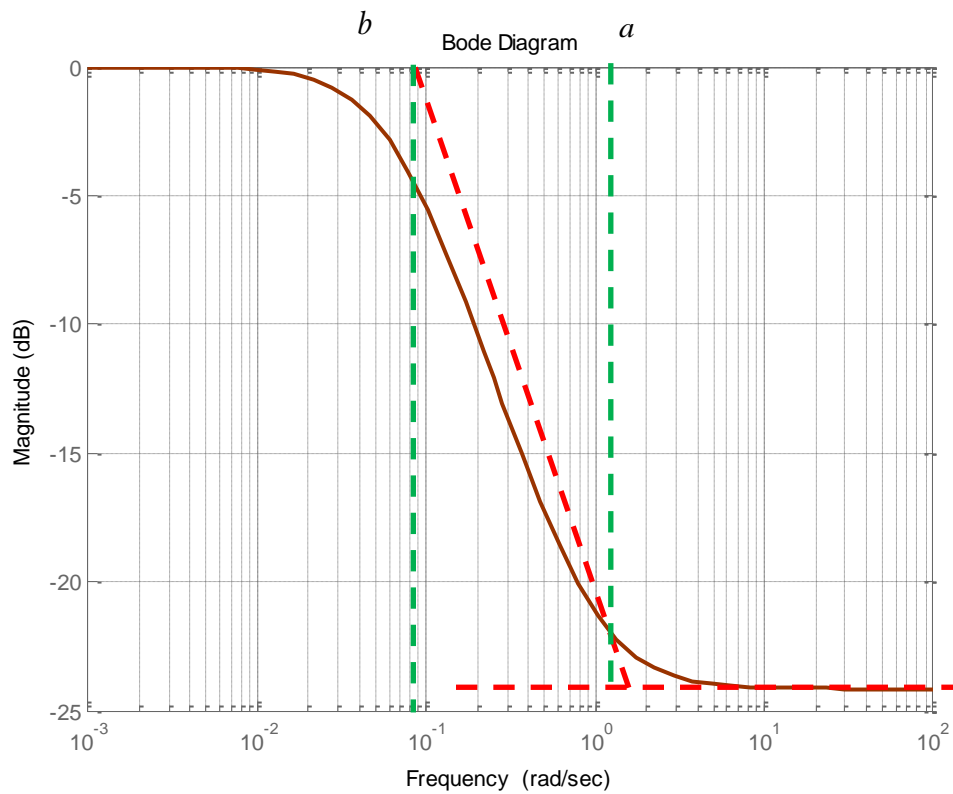
Преносната функција на отворениот систем компензиран со интегралниот компензатор (5.137) е:

$$G_{0c}(s) = \tilde{G}_0(s)G_c(s) = 0.0658 \frac{s+1.265}{s+0.0832} \cdot \frac{1000000}{s(s+50)(s+100)} \quad (5.138)$$

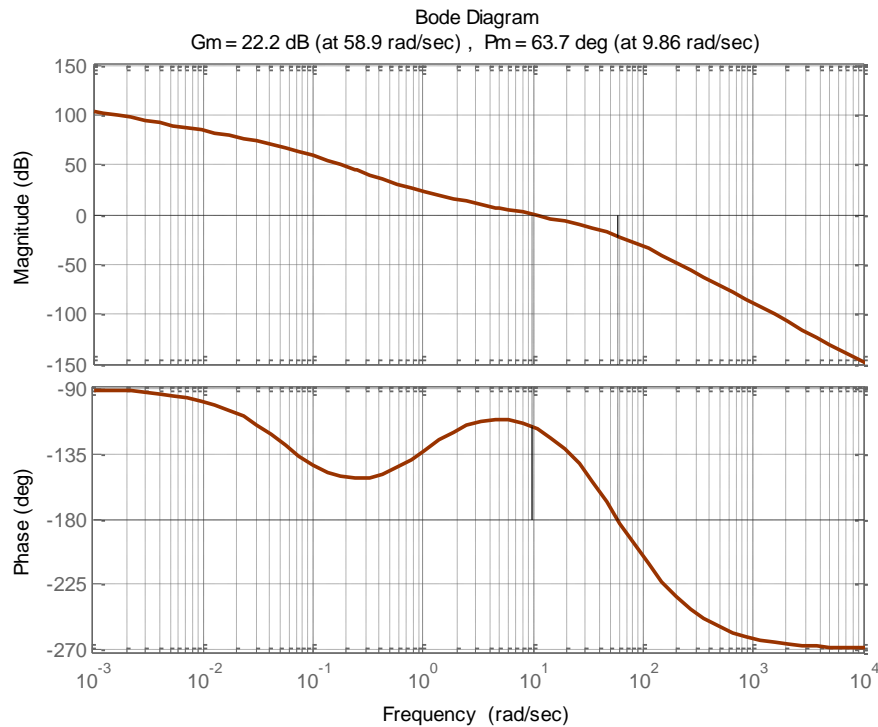
и неговите логаритамски фреквентни дијаграми се прикажани на Слика 5.62.



Слика 5.60. Бодевеви дијаграми на отворениот систем (5.135)



Слика 5.61. Проектирање на Бодевевиот дијаграм на слабење на интегралниот компензатор



Слика 5.62. Бодеве дијаграми на отворениот систем (5.138)

5.28. Да се изврши компензација на поведението на еден затворен САУ со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+20)^2} \quad (5.139)$$

така што компензираниот систем ќе има брзинска константа $K_v = 40$ и фактор на релативно пригушување за доминантните полови $\zeta = 0.707$.

Решение: Од условот $K_v = 40$ следува дека засилувањето на отворениот систем (5.139) треба да изнесува 2000:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{K}{s(s+20)^2} \right] = \frac{K}{400} = 40 \Rightarrow K = 16000 \quad (5.140)$$

Меѓутоа, за $K = 16000$, затворениот систем од задачата ќе се најде на границата на стабилност, што лесно може да се провери со некој од критериумите за испитување на стабилноста кај линеарните континуални системи, на пример, Рут-Шуровиот:

$$a(s) = s^3 + 40s^2 + 400s + 16000 \quad (5.141)$$

Табела 5.2. Испитување на стабилноста на затворениот систем од Задача 5.28

1	40	400	16000	$c_1 = \frac{1}{40}$
-1		-400		
	40	0	16000	

Отворениот систем (5.139) за $K = 16000$ има пар конјугирано комплексни полови на имагинарната оска $s_{1,2} = \pm j20$ и реален пол во $s_3 = -40$, што значи дека поседува сопствена фреквенција и никакво придушување. Неговите Бодеови дијаграми на слабење и фаза се прикажани на Слика.5.63.

Саканото придушување $\zeta = 0.707$ значи дека компензираниот затворен систем треба да има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 65^\circ$, па за негова пресечна фреквенција на засилување се одредува онаа фреквенција при која некомпензираниот отворен систем има фаза $\varphi(\omega_{1c}) = (65^\circ + 5^\circ) - 180^\circ = -110^\circ$. Тоа е фреквенцијата $\omega_{1c} = 3.5 \frac{rad}{sec}$ и засилувањето на некомпензираниот отворен систем на оваа фреквенција изнесува приближно $21dB$. Следствено, интегралниот компензатор треба да внесе исто толкаво слабење при $\omega_{1c} = 3.5 \frac{rad}{sec}$. Под овие услови, нулата на компензаторот се одбира да биде 10-пати

помала од новата пресечна фреквенција на засилување $\omega_{1c} = 3.5 \frac{rad}{sec}$, а односот помеѓу величината на нулата и полот од интегралниот компензатор се пресметува од условот:

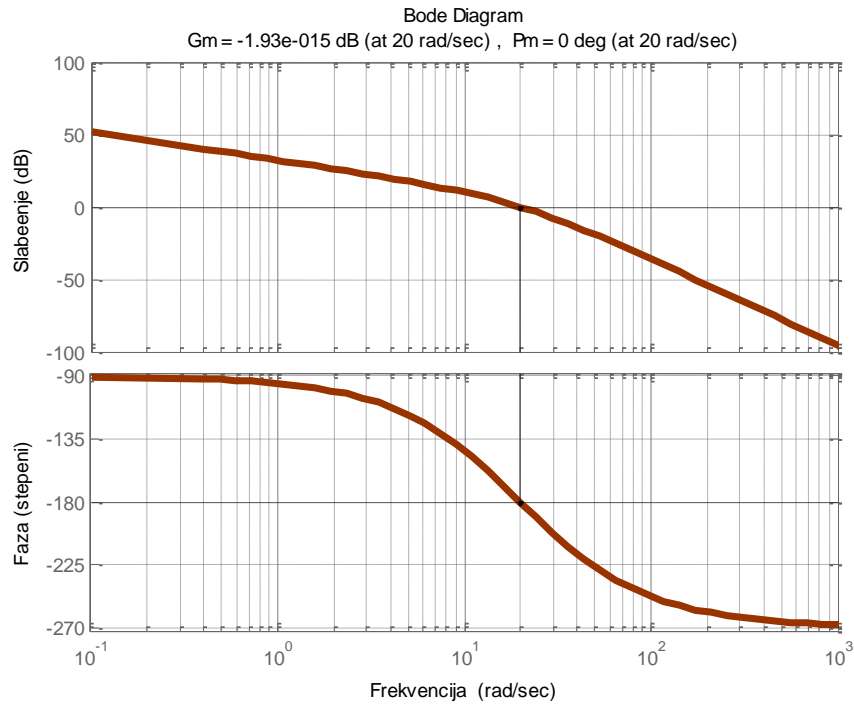
$$20 \log \alpha = 21 \Rightarrow \alpha = 11.1 \tag{5.142}$$

Оттука:

$$b = \frac{3.5}{10} = 0.35, \quad a = \frac{b}{\alpha} = \frac{0.35}{11.1} = 0.0315 \tag{5.143}$$

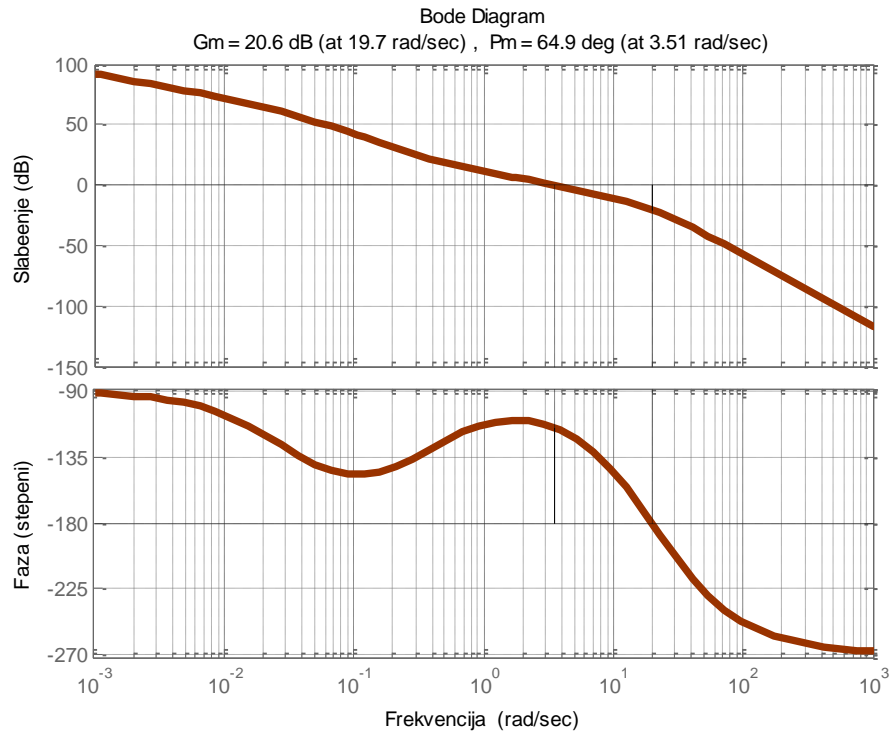
Останува уште да се компензира слабењето од компензаторот при ниски фреквенции кое е дадено со односот $\alpha = \frac{b}{a}$, па за преносната функција на компензираниот отворен систем се добива:

$$G_{0c}(s) = \frac{1}{11.1} \cdot \frac{s + 0.35}{s + 0.0315} \cdot \frac{16000}{s(s + 20)^2} \tag{5.144}$$



Слика 5.63. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.139) за $K = 16000$

Неговите Бодевите дијаграми се прикажани на Слика 5.64.



Слика 5.64. Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на отворениот систем (5.139) по соодветната компензација со интегрален компензатор

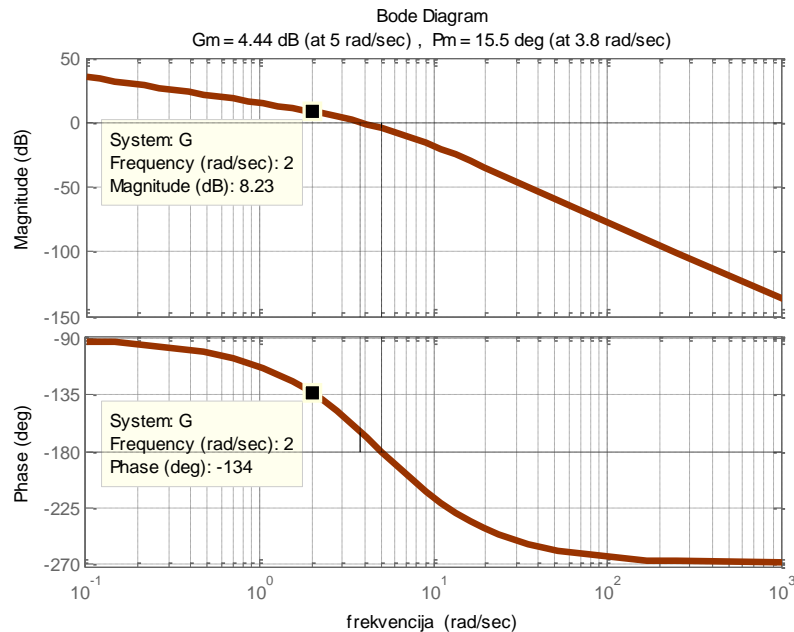
5.29. Даден е затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+5)^2} \quad (5.145)$$

Да се изврши компензација на поведението на овој систем со помош на интегрален компензатор, така што компензираниот затворен систем ќе ги задоволува следните проектни барања:

- резерва на засилување од најмалку 6dB
- резерва на фаза од најмалку 45°
- пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 \leq 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
- брзинска константа $K_v > 5$

На долната слика се прикажани Бодевите дијаграми на отворениот систем $G_0(s)$ за $K=1$.



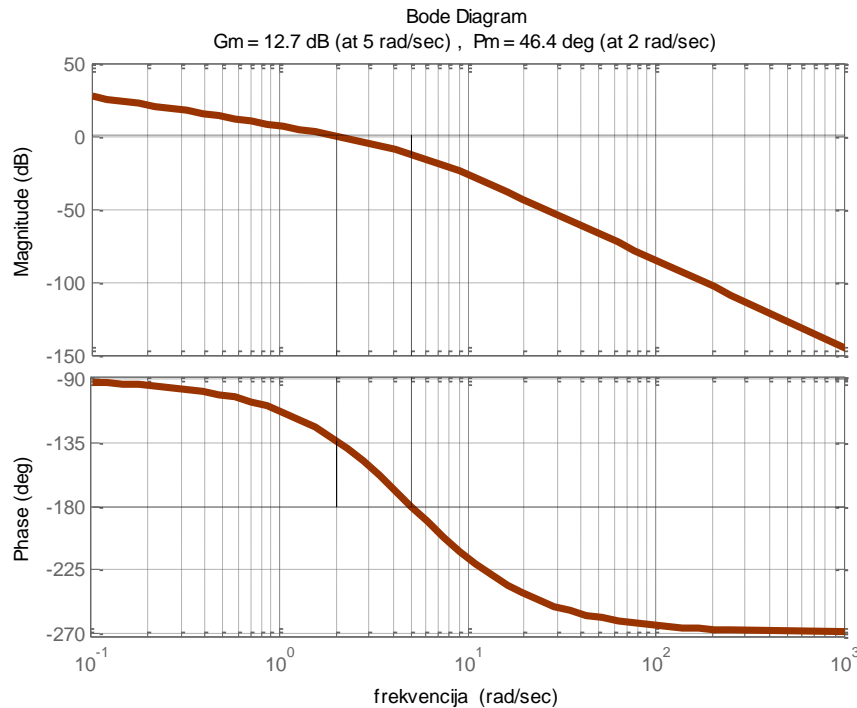
Слика 5.65. Бодевите дијаграми на отворениот систем од Задача 5.29 за $K=1$

Решение: Од прикажаните Бодевите дијаграми на отворениот систем $G_0(s)$ се гледа дека резервата на фаза на проектираниот затворен систем ќе биде $\varphi_{rf} \geq 45^\circ$ ако пресечната фреквенција на засилување е $\omega_1 \leq 2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Од друга страна, засилувањето на отворениот

систем при фреквенција $\omega = \omega_1 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ е $G_0(j2)_{dB} = -35.3dB$, па за да биде

$\omega = \omega_1 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ пресечна фреквенција на засилување на затворениот систем, треба

Бодеоовиот дијаграм на слабење на отворениот систем (5.145) да се подигне за $G_0(j2)_{dB} = -35.3dB$. Тоа се реализира преку коефициентот на засилување на отворениот систем K , кој се одбира според условот $20\log_{10} K = 35.3dB$. Бодеоовите дијаграми на отворениот систем (5.145) за $K = 58.2$ се прикажани на Слика 5.66, од каде се гледа дека затворениот систем ги задоволува првите две проектни барања. Меѓутоа, тој не го задоволува третото и четвртото проектно барање.

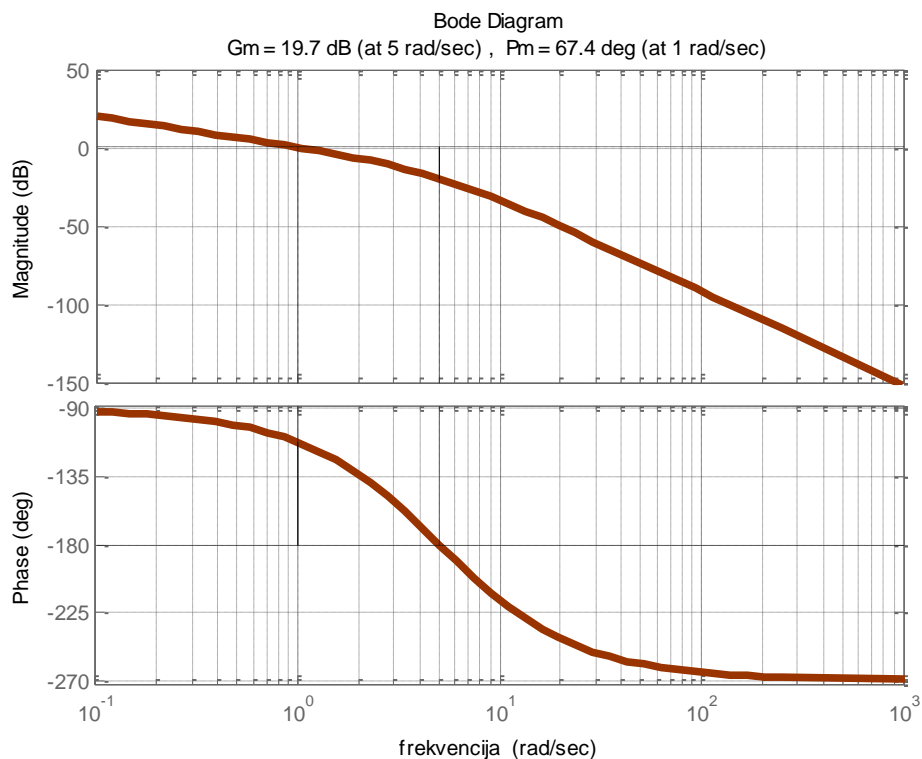


Слика 5.66. Бодеоови дијаграми на отворениот систем од Задача 5.28 за $K = 58.2$

Ако за нова пресечна фреквенција на засилување се усвои фреквенцијата $\omega_1 \leq 1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ лесно може да се определи потребната вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем K :

$$|G_0(j\omega_1)| = \frac{K}{\omega_1^2(\omega_1^2 + 25)} = \frac{K}{1(1 + 25)} = \frac{K}{26} = 1 \Rightarrow K = 26 \quad (5.146)$$

На Слика 5.67 се прикажани Бодеоовите дијаграми на отворениот систем за $K = 26$ од каде се гледа дека затворениот систем ги исполнува првите три проектни барања.



Слика 5.67. Бодеови дијаграми на отворениот систем од Задача 5.29 за $K = 26$

Останува да се провери дали е исполнето последното проектно барање:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \frac{K}{25} > 5 \Rightarrow K > 125 \quad (5.147)$$

Очигледно, за $K = 26$, брзинската константа на затворениот систем изнесува $K_v = \frac{26}{25} < 5$. Ако се усвои интегрален компензатор со $\frac{b}{a} = 5$, брзинската константа на компензираниот систем ќе се зголеми за 5-пати во однос на некомпензираниот, и ќе го исполни последниот проектен услов, не нарушувајќи ги претходните. Имено, по компензацијата:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{s+b}{s+a} \cdot \frac{K}{s(s+5)^2} \quad (5.148)$$

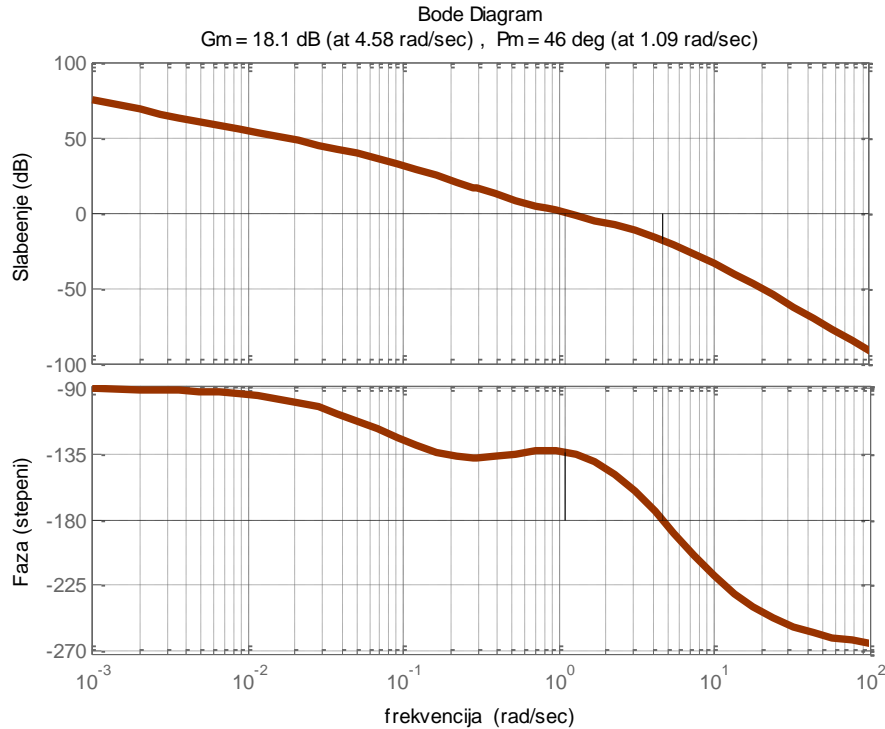
$$\tilde{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{G}_0(s) = \frac{K}{25} \cdot \frac{b}{a} = \frac{K}{25} \cdot 5 = \frac{26}{25} \cdot 5 = 5.2 > 5 \quad (5.149)$$

Произволно се усвојува $a = 0.1$, па бараниот компензатор ќе има преносна функција:

$$G_c(s) = \frac{s + 0.5}{s + 0.1} \quad (5.150)$$

На Слика 5.68 се прикажани Бодевите дијаграми на слабеење и фаза на компензираниот отворен систем:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{s + 0.5}{s + 0.1} \cdot \frac{K}{s(s + 5)^2} \quad (5.151)$$



Слика 5.68. Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем (5.151)

5.30. Соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s + 8)(s + 30)} \quad (5.152)$$

Да се изврши компензација на дадениот систем со помош на интегро -диференцијален компензатор, така што соодветниот затворен компензиран систем ќе се одликува со одзив со максимален прескок од 10%, време на пораст $T_p = 0.6$ sec и брзинска константа $K_v = 10$.

Решение: На максимален прескок од 10% одговара фактор на релативно придушување:

$$\zeta = -\frac{\ln\left(\frac{M_p \%}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{M_p \%}{100}\right)}} = 0.591 \quad (5.153)$$

а, на фактор на релативно придушување $\zeta = 0.591$ одговара резерва на фаза :

$$\varphi_{rf} = \arctg \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}} = 58.6^0 \quad (5.154)$$

Оттука, проектираниот затворен систем треба да поседува резерва на фаза $\varphi_{rf} = 58.6^0$ при новата пресечна фреквенција на засилување ω_{1c} , а ширината на неговиот пропусен опсег треба да изнесува:

$$\omega_o = \frac{\pi}{T_p \sqrt{1-\zeta^2}} \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} = 7.53 \text{ sec}^{-1} \quad (5.155)$$

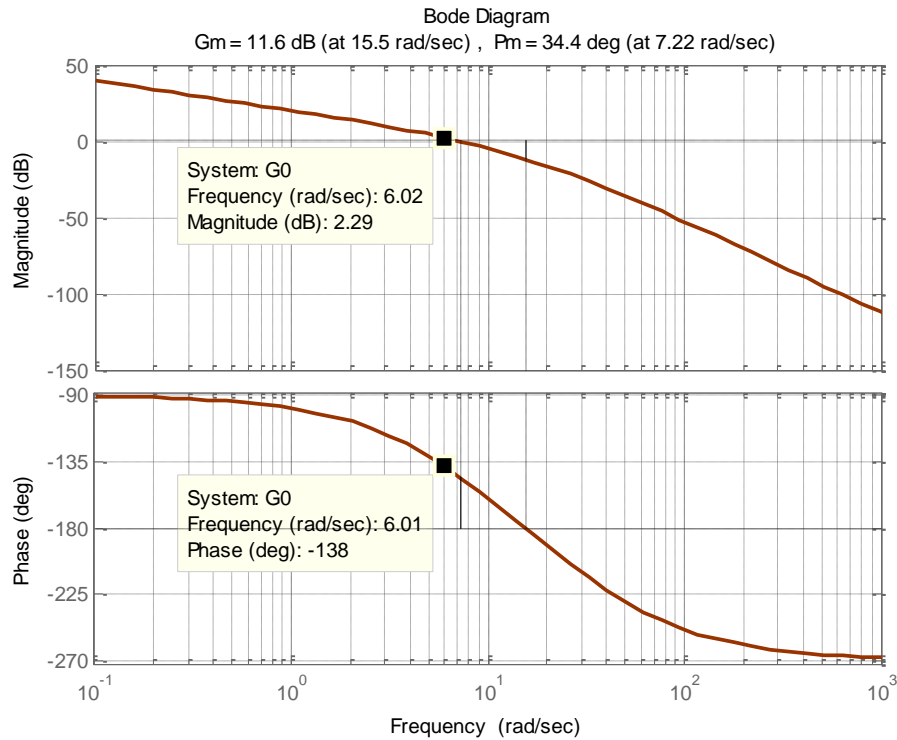
Од условот за стационарната грешка следува:

$$K_v = 10 = \frac{K}{8 \cdot 30} \Rightarrow K = 2400 \quad (5.156)$$

На Слика 5.69 се прикажани Бодеовите дијаграми за некомпензираниот отворен систем со $K = 2400$.

Ако новата пресечна фреквенција на засилување се одбере да биде $\omega_{1c} = 0.8\omega_o = 6.02 \text{ sec}^{-1}$, од дијаграмите на Слика 5.69 се отчитува дека при оваа фреквенција некомпензираниот отворен систем има фаза $\arg[G_0(j\omega_{1c})] = -138^0$ па, при истата фреквенција, диференцијалниот компензатор треба да внесе максимално фазно поместување од $\varphi_m = [63.6^0 - (180 - 138)^0] = 21.6^0$, што значи дека соодносот помеѓу неговата нула и пол мора да изнесува:

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\varphi_m)}{1 + \sin(\varphi_m)} = 0.456 \quad (5.157)$$



Слика 5.69. Бодевони дијаграми на некомпензираниот отворен систем (5.152) за $K = 2400$

Ако нулата на диференцијалниот компензатор се одбере во точката $z_{cd} = -a_d$:

$$a_d = \omega_{1c} \sqrt{\alpha} = 6.02 \sqrt{0.456} \approx 4.05 \quad (5.158)$$

неговиот пол ќе биде во точката $p_{cd} = -b_d$:

$$b_d = \frac{a_d}{\alpha} = \frac{4.05}{0.456} = 8.88 \quad (5.159)$$

Нулата на интегралниот компензатор се одбира да биде 10-пати помала од новата пресечна фреквенција на засилување $\omega_{1c} = 0.8\omega_o = 6.02 \text{ sec}^{-1}$, па $z_{ci} = -a_i$:

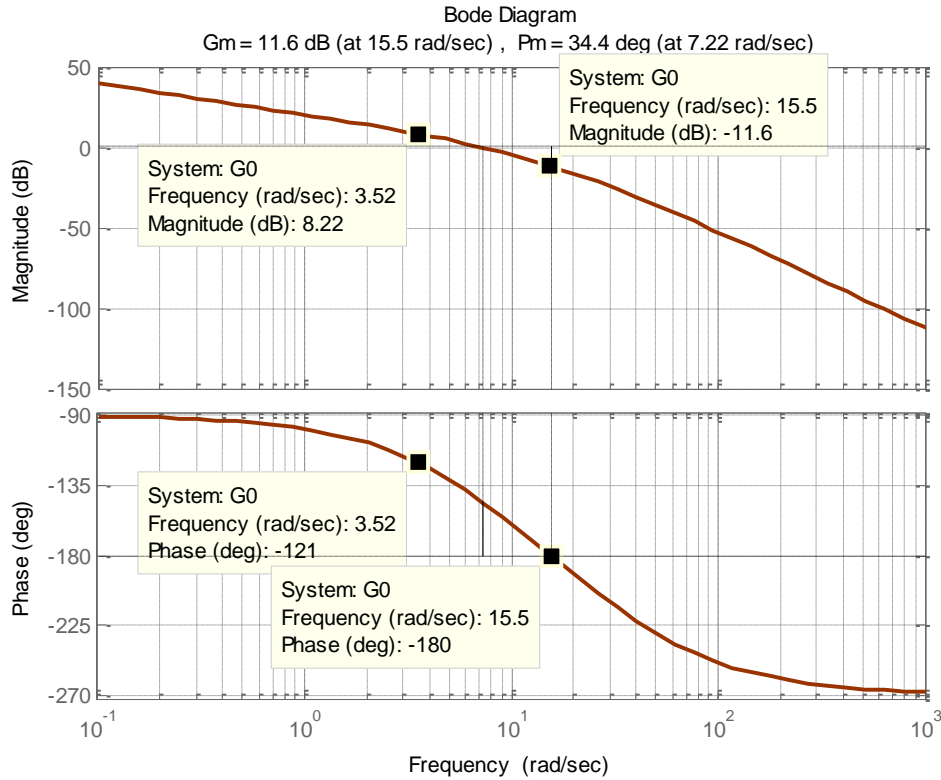
$$a_i = 0.1\omega_{1c} = 0.602 \quad (5.160)$$

додека неговиот пол ќе биде во точката $p_{ci} = -b_i$:

$$b_i = a_i \alpha = 0.602 \cdot 0.456 = 0.2745 \quad (5.161)$$

Така преносната функција на проектираниот интегро -диференцијален компензатор ќе биде:

$$G_c(s) = G_d(s)G_i(s) = \frac{b_d}{a_d} \cdot \frac{s+a_d}{s+b_d} \cdot \frac{b_i}{a_i} \cdot \frac{s+a_i}{s+b_i} = 2.19 \cdot \frac{s+4.05}{s+8.88} \cdot 0.456 \cdot \frac{s+0.602}{s+0.2745} \quad (5.162)$$



Слика 5.70. Бодеови дијаграми на компензираниот отворен систем (5.163)

Бодеовите дијаграми на компензираниот отворен систем:

$$G_{0c}(s) = K_c G_c(s)G_0(s) = 2.19 \cdot \frac{s+4.05}{s+8.88} \cdot 0.456 \cdot \frac{s+0.602}{s+0.2745} \cdot 2400 \cdot \frac{1}{s(s+8)(s+30)} \quad (5.163)$$

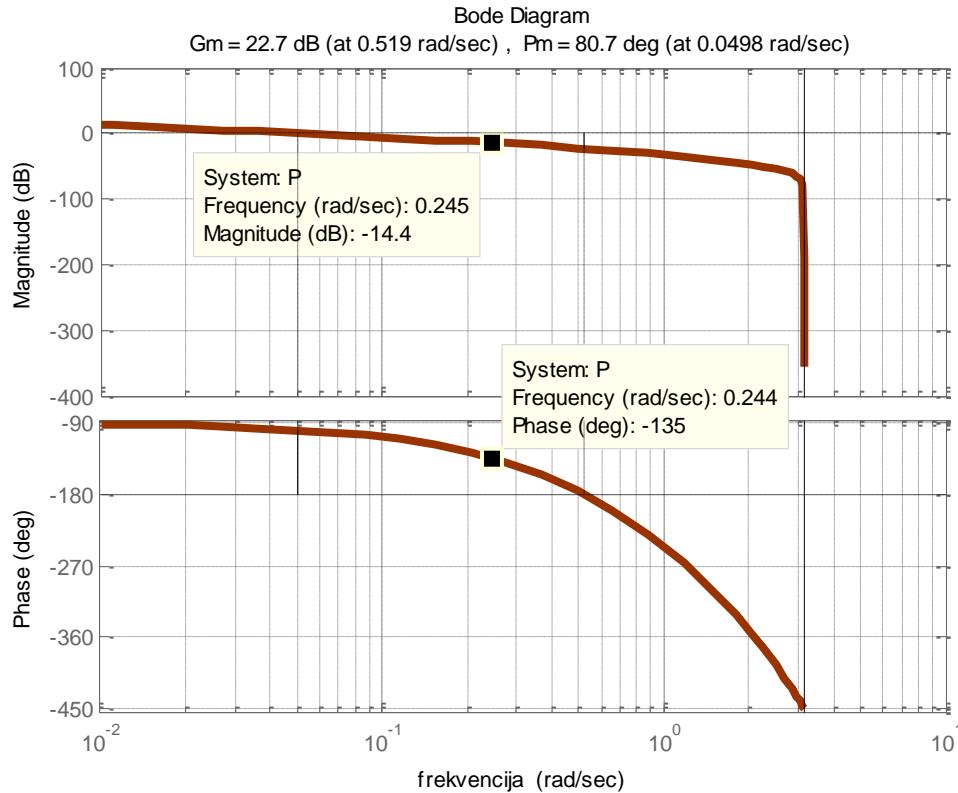
се прикажани на Слика 5.70.

5.31. Даден е затворен дискретен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = 0.01 \frac{z+1}{(z-1)(z-0.2)(z-0.5)}; T = 1s. \quad (5.164)$$

Да се изврши компензација на поведението на овој систем, така што компензираниот систем ќе има резерва на фаза од околу 45^0 и резерва на засилување $5dB \leq d \leq 10dB$.

Решение: Задачата може да се реши преку компензација на коефициентот на засилување на отворениот систем (5.164). Бодеовите дијаграми на некомпензираниот отворен систем се прикажани на Слика 5.71.



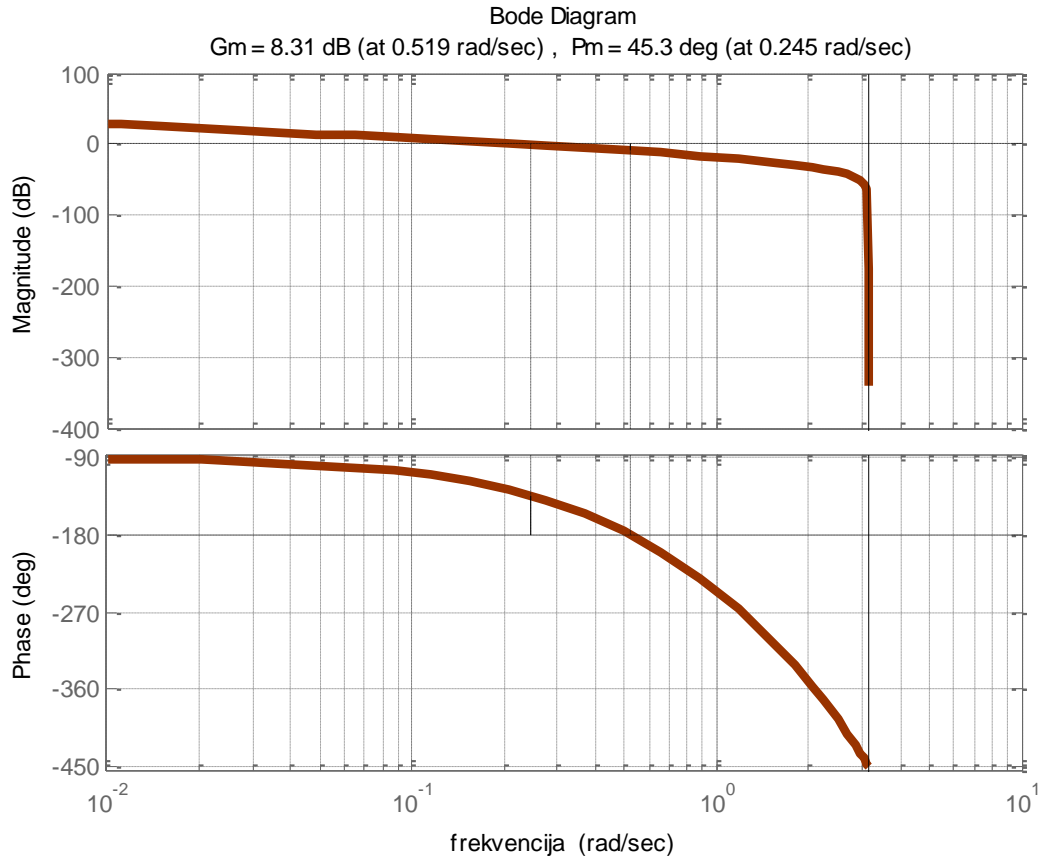
Слика 5.71. Бодеови дијаграми на некомпензираниот отворен систем (5.164)

Оттука се гледа дека некомпензираниот затворен систем има резерва на фаза $\varphi_{rf} = 80.7^0$ при пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = 0.0498 \approx 0.05 \frac{rad}{sec}$. Ако оваа фреквенција

се зголеми на вредност $\tilde{\omega}_1 = 0.244 \frac{rad}{sec}$, резервата на фаза на затворениот систем ќе се сведе на саканата вредност $\tilde{\varphi}_{rf} = 45^0$. Затоа Бодеовиот дијаграм на слабеење на отворениот систем треба да се подигне за онолку dB , колку што изнесува неговото слабеење при фреквенцијата $\tilde{\omega}_1 = 0.244 \frac{rad}{sec}$. Од нацртаните Бодеови дијаграми на Слика

5.71 се гледа дека слабеењето на отворениот систем на фреквенција $\tilde{\omega}_1 = 0.244 \frac{rad}{sec}$ изнесува приближно $-14.4dB$, па за тој да се подигне за $14.4dB$, новата вредност на

коэффициентот на засилување на отворениот систем треба да изнесува $20\log_{10} \tilde{K} = 14.4dB$ или $\tilde{K} = 5.25$. Тоа значи дека коэффициентот на засилување на компензираниот отворен систем е 525 пати поголем од коэффициентот на засилување на некомпензираниот отворен систем. Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем се прикажани на Слика 5.72. Од нив се гледа дека компензираниот затворен систем ги исполнува поставените проектни барања.



Слика 5.72. Бодевите дијаграми на компензираниот отворен систем со $\tilde{K} = 5.25$

5.32. Даден е затворен линеарен дискретен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(z) = \frac{(z - 0.5)(z - 0.6)}{z(z - 0.2)}; T = 0.1s. \quad (5.165)$$

Да се изврши компензација на поведението на затворениот систем, така што компензираниот затворен систем ќе следи влезна возбуда од обликот $y(t) = th(t)$ со стационарна грешка $e(\infty) \leq 0.02$, ќе поседува резерва на засилување $d = 10dB$ и резерва на фаза $\varphi_{rf} \approx 45^\circ$.

Решение: Со оглед на тоа дека отворениот систем има астатизам од нулти ред, односно не поседува полови во точката $z=1$, затворениот систем не е во состојба да следи линеарно растечки влез (влез со константна брзина на промена). Затоа најнапред треба во отворениот систем да се воведат поли во точката $z=1$, па преносната функција на вака компензираниот отворен систем ќе биде:

$$G_{01}(z) = \frac{(z-0.5)(z-0.6)}{z(z-1)(z-0.2)}; T = 0.1s. \quad (5.166)$$

Затворениот систем чиј отворен систем е $G_{01}(z)$, може да следи влез од обликот $y(t) = th(t)$ со одредена константна грешка, која зависи од периодот на дискретизација $T = 0.1s$ и брзинската константа K_v :

$$K_{v1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_{01}(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-0.5)(z-0.6)}{z(z-0.2)} = \frac{(0.5)(0.4)}{0.8} = \frac{1}{4} \quad (5.167)$$

$$e_1(\infty) = \frac{T}{K_{v1}} = 0.4 \quad (5.168)$$

За да биде исполнето првото проектно барање, потребно е:

$$e_2(\infty) = \frac{T}{K_{v2}} = 0.02 \quad (5.169)$$

од каде што следува дека брзинската константа на системот треба да изнесува:

$$K_{v2} = \frac{T}{e_2(\infty)} = 5 \quad (5.170)$$

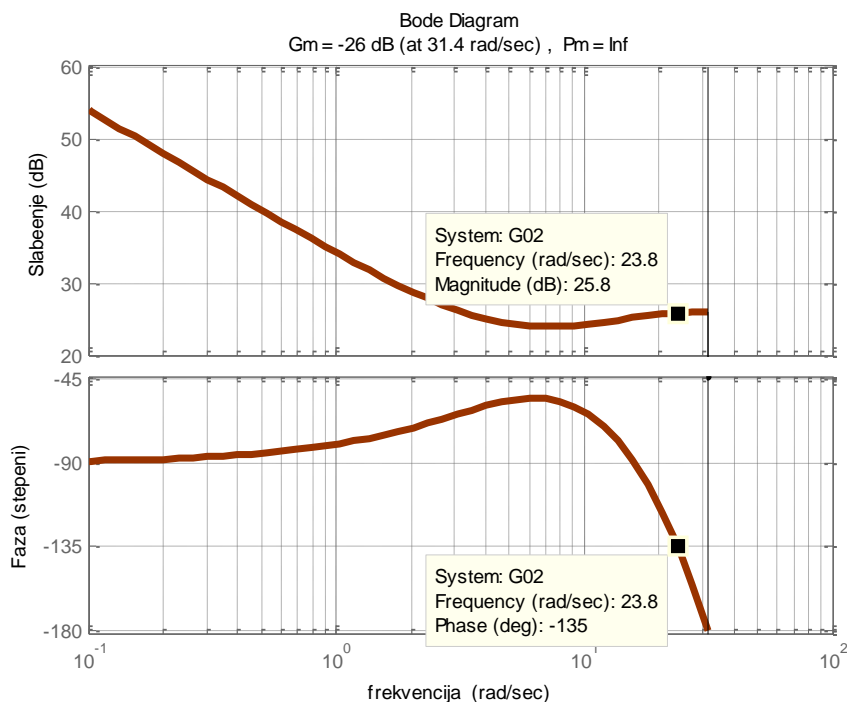
Оваа вредност на брзинската константа се постига со зголемување на засилувањето на отворениот систем $G_{01}(z)$ за 20 пати:

$$K_{v2} = \frac{T}{e_2(\infty)} = 5 \quad \lambda K_{v1} = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 20 \quad (5.171)$$

па неговата преносна функција по оваа компензација ќе биде:

$$G_{02}(z) = 20G_{01}(z) = 20 \frac{(z-0.5)(z-0.6)}{z(z-1)(z-0.2)}; T = 0.1s. \quad (5.172)$$

Бодевите дијаграми на отворениот систем се прикажани на Слика 5.73, од каде се гледа дека компензираниот затворен систем има резерва на засилување $d = -26dB$ при пресечна фреквенција на фаза $\omega_\pi = 31.4 \frac{rad}{sec}$ и резерва на фаза $\varphi_{ff} = \infty$ при пресечна фреквенција на засилување $\omega_1 = \infty \frac{rad}{sec}$ (Бодевитиот дијаграм на слабеење на отворениот систем $G_{02}(z)$ не ја сече оската $0dB$). Следствено, затворениот систем е нестабилен.

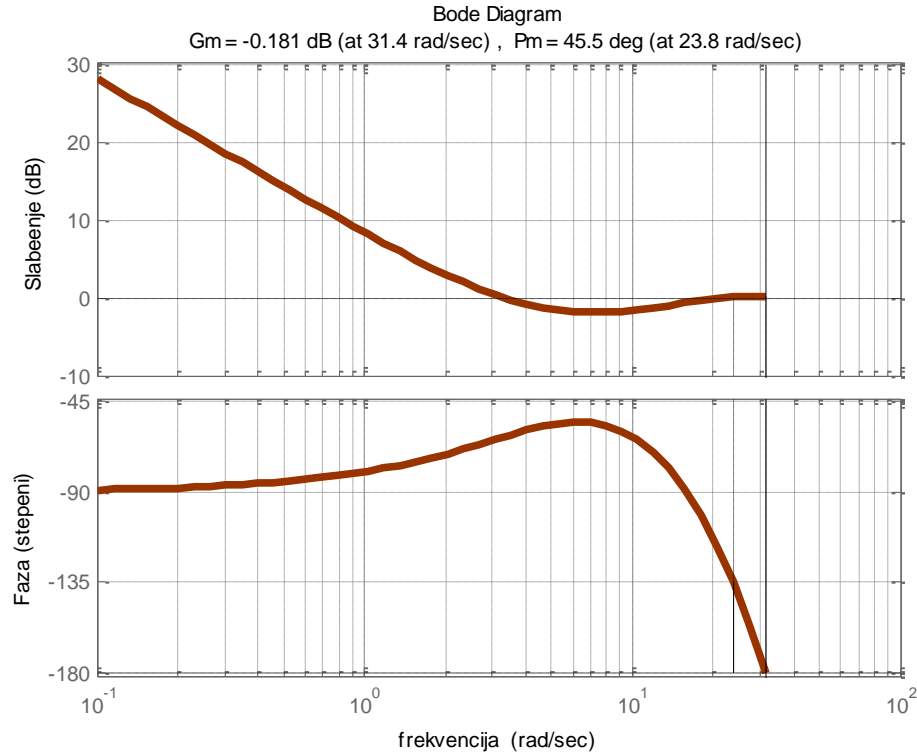


Слика 5.73. Бодевити дијаграми на отворениот систем $G_{02}(z)$

Од Бодевити дијаграми на Слика 5.73 се гледа дека затворениот систем ќе има резерва на фаза $\varphi_{ff} \approx 45^\circ$ при фреквенција $\tilde{\omega}_1 = 23.8 \frac{rad}{sec}$, па еден начин ова да се постигне е преку намалување на коефициентот на засилување на отворениот систем $G_{02}(z)$. Новата вредност на коефициентот на засилување на отворениот систем $G_{02}(z)$ се добива од условот неговиот Бодевитиот дијаграм на слабеење да минува низ нулата при фреквенцијата $\tilde{\omega}_1 = 23.8 \frac{rad}{sec}$. Бидејќи за $\omega = \tilde{\omega}_1 = 23.8 \frac{rad}{sec}$ слабеењето на отворениот систем $G_{02}(z)$ изнесува $|G_{02}(j23.8)|_{dB} = 25.8dB$, $\omega = \tilde{\omega}_1 = 23.8 \frac{rad}{sec}$ ќе биде новата пресечна фреквенција ако дијаграмот на слабеење се спушти за $25.8dB$, па, оттука:

$$|\lambda_2|_{dB} = 20 \log_{10} \lambda_2 = -25.8dB \Rightarrow \lambda_2 = 0.0511 \quad (5.173)$$

Бодевите дијаграми на отворениот систем $\lambda_2 G_{02}(z)$ се прикажани на Слика 5.74, од каде се гледа дека компензираниот затворен систем ги задоволува првото и второто проектно барање, но е нестабилен. Затоа компензацијата на коефициентот на засилување на отворениот систем не е решение во овој случај на синтеза.

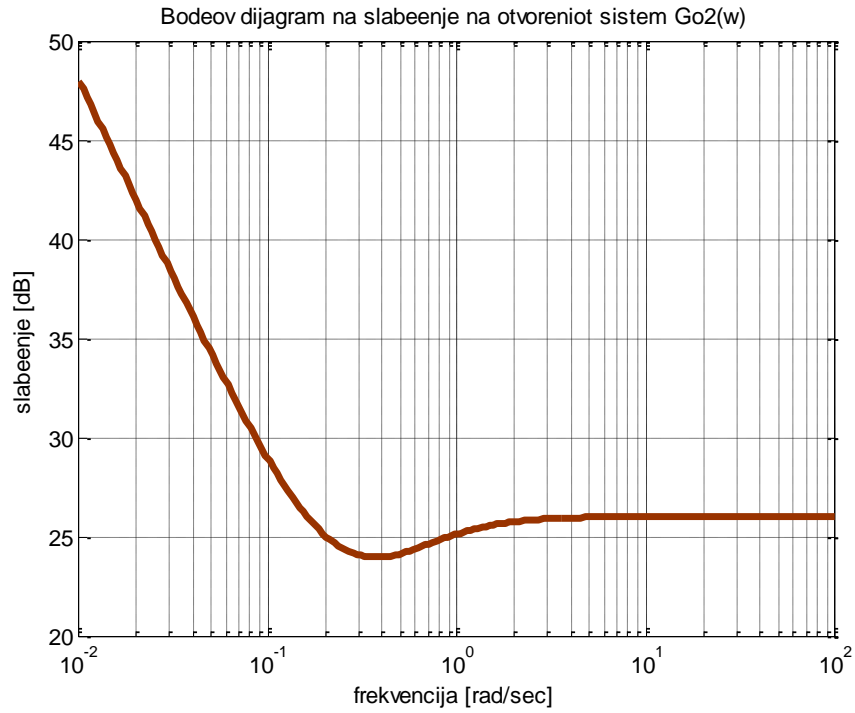


Слика 5.74. Бодевите дијаграми на отворениот систем $\lambda_2 G_{02}(z)$

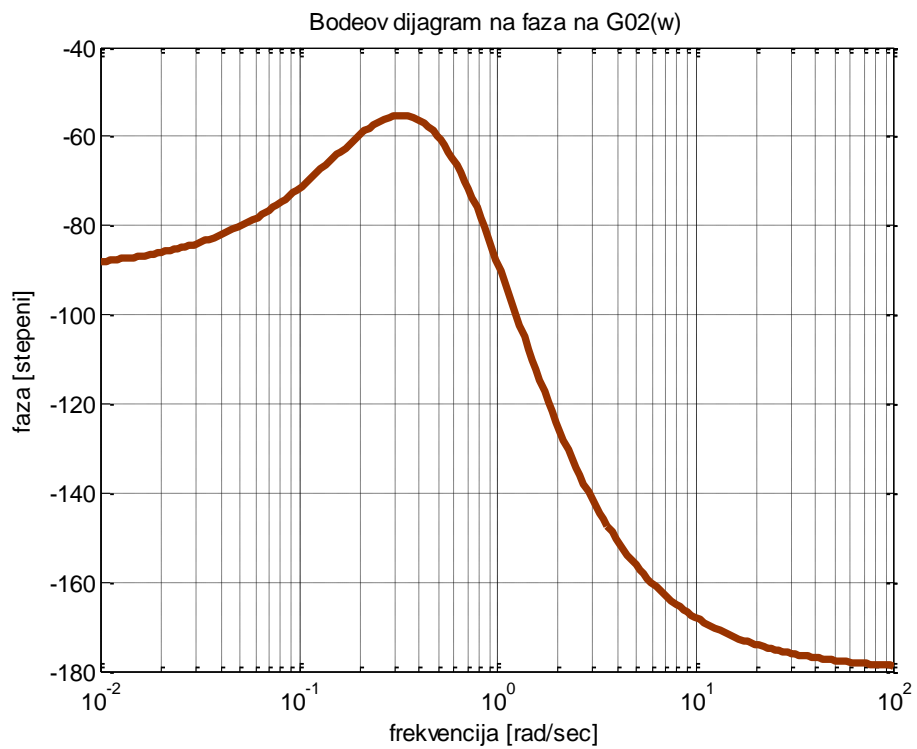
Наместо со компензација на коефициентот на засилување, задачата може да се реши со помош на интегрален компензатор. За таа цел, синтезата се префрла од z во w -комплексното подрачје со смената $z = \frac{1+w}{1-w}$. Така преносната функција $G_{02}(z)$ се трансформира во преносната функција $G_{02}(w)$:

$$G_{02}(w) = G_{02}\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = 20 \frac{\left(w + \frac{1}{3}\right)\left(w + \frac{1}{4}\right)(1-w)}{w(w+1)\left(w + \frac{2}{3}\right)} \quad (5.174)$$

чии Бодевите дијаграми се прикажани на Слика 5.75 и Слика 5.76. Оттука се гледа дека пресечната фреквенција на засилување и резервата на фаза за $G_{02}(w)$ е иста како и за $G_{02}(z)$.



Слика 5.75. Бодев дијаграм на слабење на отворениот систем $G_{02}(w)$

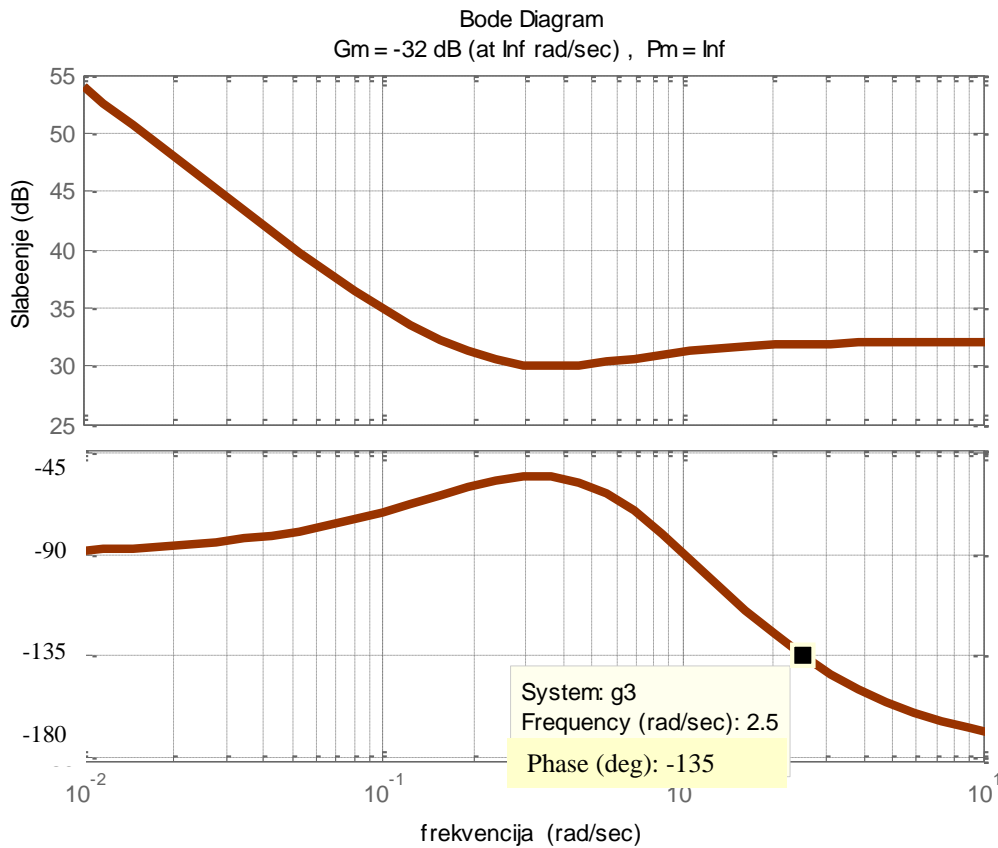


Слика 5.76. Бодев дијаграм на фаза на отворениот систем $G_{02}(w)$

За да биде задоволено проектното барање во поглед на точноста на работа на затворениот систем во стационарен режим, неговата брзинска константа треба да изнесува $K_{v3} = 5$ поради што коефициентот на засилување на отворениот систем $G_{02}(w)$ треба да се зголеми двапати:

$$G_{03}(w) = 2G_{02}(w) = 40 \frac{\left(w + \frac{1}{3}\right)\left(w + \frac{1}{4}\right)(1-w)}{w(w+1)\left(w + \frac{2}{3}\right)} \Rightarrow K_{v3} = 40 \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = 5 \quad (5.175)$$

Бодевите дијаграми на отворениот систем $G_{03}(w)$ се прикажани на Слика 5.77. Оттука се гледа дека затворениот систем има резерва на засилување $d = -32dB$ и резерва на фаза $\varphi_{rf} = \infty$, додека и двете пресечни фреквенции се ∞ . Тоа значи дека Бодевият дијаграм на слабеење на отворениот систем $G_{03}(w)$ никогаш не ја сече оската $0dB$ и постојано се наоѓа над неа, додека Бодевият дијаграм на фаза никогаш не ја сече оската -180^0 и постојано се наоѓа над неа.



Слика 5.77. Бодевите дијаграми на отворениот систем $G_{03}(w)$

За да затворениот систем има резерва на засилување од $10dB$, треба неговиот фреквентен дијаграм на слабеење да се спушти под хоризонталата $0dB$ за $10dB$, што значи дека интегралниот компензатор при високите фреквенции треба да внесе слабеење од $(32+10)dB$. Оттука произлегува дека односот α помеѓу неговата нула и пол ќе произлезе од условот:

$$20\log_{10} \alpha = 42dB \Rightarrow \alpha = 127.35 \quad (5.176)$$

Нулата на интегралниот компензатор се одбира така што ќе биде задоволено проектното барање во поглед на резервата на фаза. Од Бодеовиот дијаграм на фаза на Слика 5.77 се гледа дека затворениот систем ќе има резерва на фаза $\varphi_{ff} = 45^0$ при фреквенција $\tilde{\omega}_1 = 2.5 \frac{rad}{sec}$, па нулата на И-компензаторот се одбира да биде 10 пати помала од оваа фреквенција. Следствено:

$$z_c = 0.25; p_c = \frac{z_c}{\alpha} = 0.002; K_c = \frac{1}{\alpha} = 0.0079 \quad (5.177)$$

и преносната функција на И-компензаторот ќе биде од облик:

$$R(w) = \frac{p_c}{z_c} \cdot \frac{w + z_c}{w + p_c} = 0.0079 \frac{w + 0.25}{w + 0.002} \quad (5.178)$$

Компензираниот отворен систем има преносна функција:

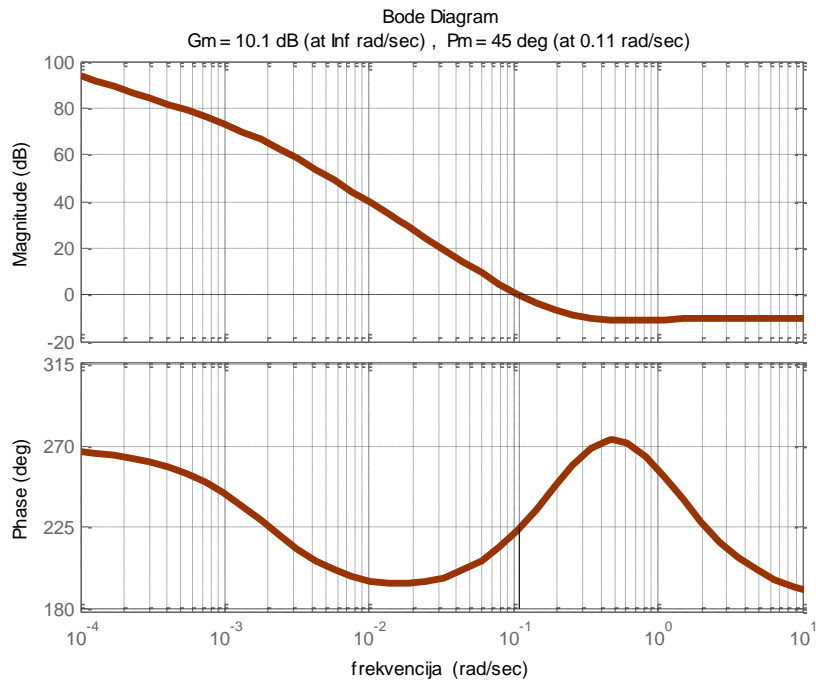
$$G_{04}(w) = R(w)G_{03}(w) = 0.314 \frac{\left(w + \frac{1}{3}\right)\left(w + \frac{1}{4}\right)(1-w)(w+0.25)}{w(w+1)\left(w + \frac{2}{3}\right)(w+0.002)} \quad (5.179)$$

и неговите фреквентни дијаграми на слабеење и фаза се прикажани на Слика 5.78. Оттаму се гледа дека компензираниот затворен систем ги задоволува сите поставени проектни барања.

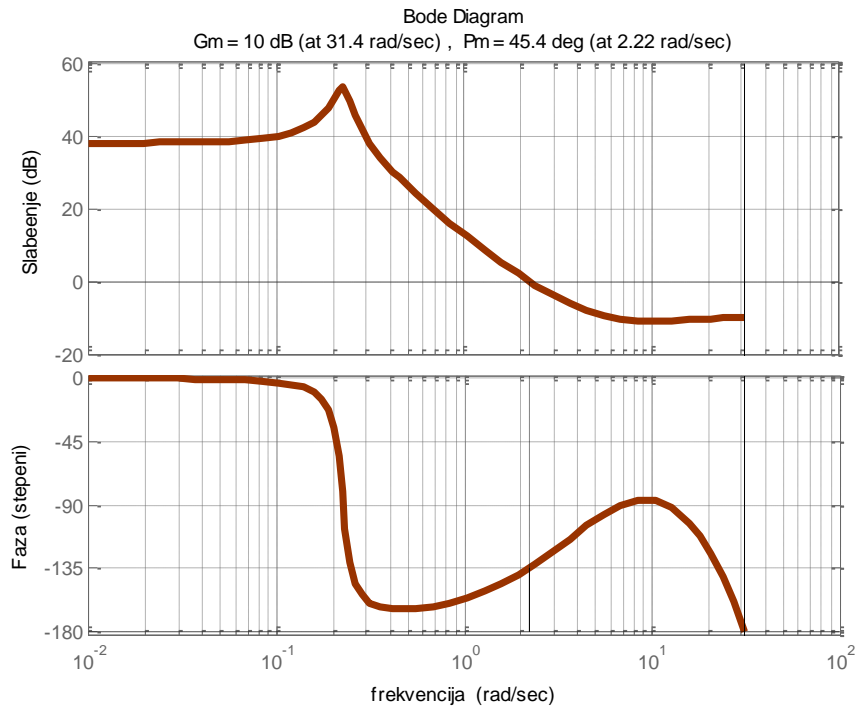
На крајот резултатот треба да се преслика назад во z -комплексното подрачје со смената $w = \frac{z-1}{z+1}$:

$$G_{04}(z) = \frac{0.02(z-0.6)}{(z-1)} \cdot \frac{20(z-0.5)(z-0.6)}{z(z-1)^2(z-0.2)} = 0.4 \frac{(z-0.5)(z-0.6)^2}{z(z-1)^2(z-0.2)}; T = 0.1s. \quad (5.180)$$

Бодевите дијаграми на отворениот дискретен систем $G_{04}(z)$ се прикажани на Слика 5.79.



Слика 5.78. Бодевите дијаграми на отворениот систем $G_{04}(w)$



Слика 5.79. Бодевите дијаграми на отворениот систем $G_{04}(z)$

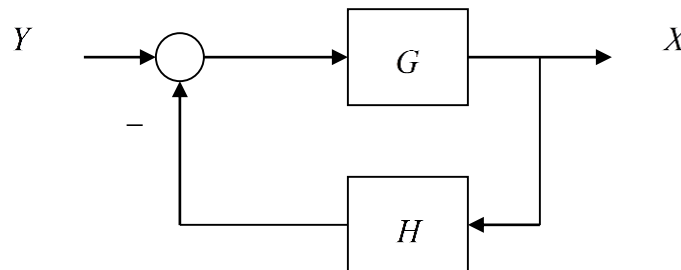
Врската помеѓу пресечните фреквенции на засилување во w – и z – подрачјето е дадена со релацијата:

$$\omega_{1w} = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_{1z}T_0}{2}\right) \quad (5.181)$$

и лесно може да се провери дека $\omega_{1w} = 0.11 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ (Слика 5.78) одговара на $\omega_{1z} = 2.2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ (Слика 5.79).

6. СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Постапката овозможува одредување на половите на еден затворен систем, каков што е системот од Слика 6.1, во функција од коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем GH . Притоа, доволно е да се познаваат само половите и нулите на отворениот систем, а не е потребно да се врши факторизација на карактеристичниот полином на затворениот систем. Постапката геометриско место на корени е подеднакво применлива како кај континуалните, така и кај дискретните линеарни динамички системи. Таа не само што дава информации за фреквентниот одзив на набљудуваниот затворен систем, туку овозможува и прецизно одредување на преодниот одзив на системот.



Слика 6.1. Структурна блок - шема на затворен линеарен динамички систем

Преносната функција на затворениот систем од Слика 6.1 е дадена со изразот:

$$\frac{X}{Y} = \frac{G}{1 + GH} \quad (6.1)$$

Ако преносната функција на соодветниот отворен систем се означи со:

$$GH = K \frac{B}{A} \quad (6.2)$$

каде што N и D се полиноми од комплексната променлива s за континуални системи, односно полиноми од комплексната променлива z за дискретни системи, а K е коефициент на засилување на отворениот систем, за преносната функција на набљудуваниот затворен систем се добива:

$$\frac{X}{Y} = \frac{G}{1 + K \frac{B}{A}} = \frac{GA}{A + KB} \quad (6.3)$$

Половите на затворениот систем се корени на карактеристичната равенка:

$$A + KB = 0 \tag{6.4}$$

и нивната положба во комплексната рамнина зависи од коефициентот на засилување K на отворениот систем. Графичкиот приказ на геометриското место на корени на равенката (6.4) во комплексната рамнина (s - рамнината за континуални и z - рамнината за дискретни системи) во функција од коефициентот K на отворениот систем се нарекува **геометриско место на корени** (ГМК) на набљудуваниот затворен систем.

Геометриското место корени на затворениот систем секогаш поаѓа од половите на соодветниот отворен систем и завршува во нулите на отворениот систем.

Ако гранка од геометриското место на корени на затворениот систем минува низ некоја точка p_1 во комплексната рамнина, тоа значи дека таа точка претставува корен на карактеристичната равенка (6.4), односно пол на набљудуваниот затворен систем, за некоја реална вредност на $K > 0$. Со други зборови, важи:

$$A(p_1) + KB(p_1) = 0 \tag{6.5}$$

односно:

$$G_0(p_1) = GH(p_1) = \frac{KB(p_1)}{A(p_1)} = -1 \tag{6.6}$$

Секоја точка p_1 од геометриското место на корени на еден затворен систем го исполнува тн. **критериум на аргументот**, кој за $K > 0$ може да се искаже на следниот начин:

$$\arg GH(p_1) = 180^0 + 360^0 l = (2l + 1)\pi \text{ радиани}; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{6.7}$$

Критериумот на аргумент може да се прошири и за $K < 0$ на следниот начин:

$$\arg GH(p_1) = \begin{cases} (2l + 1)\pi \text{ радиани}, & K > 0 \\ 2l\pi \text{ радиани}, & K < 0 \end{cases}; l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{6.8}$$

Ако точката p_1 претставува пол на набљудуваниот затворен систем, тогаш таа мора, освен критериумот на аргумент, да го задоволува и тн. **критериум на модулот** кој се искажува на следниот начин:

$$\left| GH(p_1) \right| = \left| K \frac{B(p_1)}{A(p_1)} \right| = 1 \tag{6.9}$$

што значи дека вредноста на K ќе биде дадена со изразот:

$$K = \frac{|A(p_1)|}{|B(p_1)|} \quad (6.10)$$

Благодарение на овие два критериуми, геометриското место на корени за даден затворен систем може да се конструира рачно, така што ќе се поврзат сите точки во комплексната рамнина кои го задоволуваат критериумот на аргумент, а потоа критериумот на модул се користи за да се определи конкретната вредност на K за секоја од тие точки. Меѓутоа, денес постојат готови компјутерски програми со помош на кои се избегнува рачното цртање на геометриското место корени за еден систем.

Бројот гранки во геометриското место на корени на еден затворен систем одговара на бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$ – по една гранка за секој пол на отворениот систем.

Деловите од геометриското место на корени на затворениот систем кои лежат на реалната оска во комплексната рамнина се определуваат во зависност од знакот на коефициентот на засилување на отворениот систем K врз основа на следните две правила:

1. Сите точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од непарен број конечни нули и полови на отворениот систем припаѓаат на геометриското место на корени на затворениот систем за $K > 0$. Доколку нема точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од непарен број конечни нули и полови на отворениот систем за $K > 0$, тогаш ни една гранка од геометриското место на корени на затворениот систем не лежи на реалната оска.
2. Сите точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од парен број конечни нули и полови на отворениот систем припаѓаат на геометриското место на корени на затворениот систем за $K < 0$. Доколку нема точки од реалната оска кои се наоѓаат лево од парен број конечни нули и полови на отворениот систем за $K < 0$, тогаш ни една гранка од геометриското место на корени на затворениот систем не лежи на реалната оска.

На големи растојанија од координатниот почеток во комплексната рамнина, гранките на геометриското место на корени се приближуваат кон одредени асимптоти. Овие асимптоти поаѓаат од точка во комплексната рамнина која се наоѓа на реалната оска и се нарекува **центар на асимптотите** σ_c . Центарот на асимптотите се пресметува според формулата:

$$\sigma_c = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (6.11)$$

каде што $-p_i$ се половите, $-z_i$ се нулите, n е бројот полови, а m е бројот нули на отворениот систем $G_0 = GH$. Аголот што овие асимптоти го зафаќаат со реалната оска се пресметува според формулата:

$$\beta = \begin{cases} \frac{(2l+1)\pi}{n-m}, & K > 0 \\ \frac{2l\pi}{n-m}, & K < 0 \end{cases}; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-m-1 \quad (6.12)$$

Од (6.12) следува дека бројот асимптоти е $n-m$.

Точка на раздвојување односно составување σ_b е точка на реалната оска од која поаѓаат, односно во која се сретнуваат, две или повеќе гранки на геометриското место на корени на еден затворен систем. Точката на раздвојување односно составување на две или повеќе гранки од геометриското место на корени на еден затворен систем се определува како решение на следната равенка:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_b + p_i} \right) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{\sigma_b + z_i} \right) \quad (6.13)$$

каде што $-p_i$ се половите, а $-z_i$ се нулите на отворениот систем G_0 . Решението на равенката (6.13) претпоставува одредување на нулите на полином по непознатата σ_b од произволен степен $n+m-1$. Оттаму, точката на раздвојување односно составување на гранките од геометриското место на корени на еден затворен систем може да се определи аналитички само во случаите кога отворениот систем има релативно едноставна преносна функција. Во другите случаи положбата на оваа точка се определува приближно било интуитивно, било со примена на компјутерски програми.

Аголот под кој геометриското место на корени се оддалечува од еден комплексен пол се определува според формулата:

$$\theta_D = 180^\circ + \arg G_0' \quad (6.14)$$

каде што $\arg G_0'$ е фазниот агол на G_0 пресметан во комплексниот пол, со занемарување на влијанието на самиот пол.

Аголот под кој геометриското место на корени се приближува до една комплексна нула се определува според формулата:

$$\theta_A = 180^\circ - \arg G_0'' \quad (6.15)$$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

каде што $\arg G_0''$ е фазниот агол на G_0 пресметан во комплексната нула, со занемарување на влијанието на самата нула.

Постапката за скицирање на геометриското место на корени се состои во следното:

- 1) Најнапред се определува делот односно деловите од геометриското место корени кои лежат на реалната оска од комплексната рамнина.
- 2) Потоа се определува центарот и аглиите на асимптотите и истите се исцртуваат на дијаграмот.
- 3) Во продолжение, се определуваат аглиите на приближување кон комплексните нули и оддалечување од комплексните полови, доколку такви постојат, и истите се означуваат на дијаграмот.
- 4) На крајот се скицираат гранките од геометриското место на корени, така што секоја гранка завршува во некоја конечна нула од отворениот систем или се стреми кон бесконечност долж некокоја од асимптотите. Прецизноста на исцртувањето на геометриското место корени, се разбира, се зголемува со искуството на цртачот.

Точноста на скицираното геометриско место на корени се подобрува ако се определат точките на раздвојување односно спојување на неговите гранките и ако се примени принципот на аргумент за одредени точки од гранките. Принципот на модул се користи за определување на вредноста на коефициентот K на отворениот систем која одговара на конкретна точка од геометриското место на корени.

Бидејќи коефициентите на полиномите во броителот и именителот на преносната функција од набљудуваниот затворен систем се реални броеви, неговите комплексни полови се јавуваат во конјугирано - комплексни парови, па геометриското место на корени е симетрично во однос на реалната оска.

Преносната функција на затворениот систем $\frac{X}{Y}$ може лесно да се определи од неговото геометриско место на корени за конкретна вредност на факторот на засилување K на соодветниот отворен систем. Ако се работи за затворен систем со единична негативна повратна врска, преносната функција на објектот во директната гранка G е едновременно и преносна функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, па $\frac{X}{Y}$ и G ќе имаат исти нули, но различни полови:

$$\frac{X}{Y} = \frac{G}{1+G} = \frac{K \frac{B}{A}}{1 + K \frac{B}{A}} = \frac{KB}{A + KB} \quad (6.16)$$

Половите на затворениот систем (6.16) се определуваат директно од неговото геометриско место на корени за секоја дадена вредност на K .

Резервата на засилување на еден затворен систем може да се определи од неговото геометриско место на корени според формулата:

$$\text{резерва на засилување} = \frac{\text{вредност на } K \text{ на границата на стабилност}}{\text{конструктивна вредност на } K} \quad (6.17)$$

За потсетување, границата на стабилност за континуалните системи е имагинарната оска во s -комплексната рамнина, додека границата на стабилност за дискретните системи е единичната кружница во z -комплексната рамнина. Ако геометриското место на корени не ја минува границата на стабилност, резервата на засилување на затворениот систем е бесконечно голема.

Резервата на фаза на еден затворен систем исто така може да се определи од неговото геометриско место на корени. За таа цел најнапред треба да се определи точка ω_1 на границата на стабилност за која $|GH| = 1$ за изведбената (конструктивна) вредност K на коефициентот на засилување на отворениот систем. Тогаш резервата на фаза на набљудуваниот систем се определува според формулата:

$$\text{резерва на фаза} = 180^0 + \arg[GH(\omega_1)] \quad (6.18)$$

Коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем за еден затворен систем од втор ред без конечни нули, кој одговара на конкретна вредност на факторот на релативно придушување ζ на системот, може лесно да се определи од неговото геометриско место на корени. За таа цел низ координатниот почеток се повлекува права, која со негативниот дел од реалната оска зафаќа агол:

$$\theta = \arccos \zeta \quad (6.19)$$

Оваа права претставува права на константен фактор на релативно придушување. Коефициентот на засилување K кој одговара на пресечната точка на правата (6.19) со геометриското место на корени на набљудуваниот систем е бараната вредност за K .

Постапката може да се примени за произволен пар конјугирано - комплексни полови на еден затворен континуален систем од втор или повисок ред. Меѓутоа, кога се работи за системи од повисок ред, определениот фактор на придушување за конкретен пар комплексни полови не мора да го претставува придушувањето на самиот систем (доминантната временска константа).

Постапката геометриско место на корени дава графичка информација за преодниот одзив и стабилноста на набљудуваниот затворен систем. Геометриското место на корени за даден систем може да се скицира релативно брзо и едноставно, со што се добива општ увид во промените во преодниот одзив, кои ги предизвикува промената на

коефициентот на засилување K на соодветниот отворен систем. За да се добијат потребните квантитативни информации за синтеза на набљудуваниот систем, одделни точки од геометриското место на корени можат да се определат и прецизно.

Геометриското место на корени овозможува да се одбере соодветна вредност за коефициентот на засилување K на отворениот систем, која ќе обезбеди затворениот систем да го има саканото поведење во преодниот режим, односно ќе ги оствари поставените проектни барања во поглед на преодниот одзив на проектираниот затворен систем. Со изборот на конкретна вредност за коефициентот на засилување K на отворениот систем, всушност се избира доминантниот пар конјугирано - комплексни полови на затворениот систем кои го дефинираат неговото поведење во преодниот режим. Кога K се менува, се менува и преодниот одзив, зошто на различни вредности за K одговараат различни точки од геометриското место корени на затворениот систем, односно различни полови на затворениот систем. Меѓутоа, во секој случај, типот на преодниот одзив на затворениот систем е ограничен со неговото геометриско место на корени, односно со половите кои се дефинирани со тоа геометриско место на корени.

Преодниот одзив на еден затворен линеарен стационарен динамички систем може да се дефинира, односно зададе, преку соодветен избор на неговите полови, односно нивната положба во комплексната рамнина. Доколку саканите полови се наоѓаат на геометриското место корени од системот, сè што треба да се направи за да се постигне саканиот преоден одзив е да се избере соодветната вредност за коефициентот на засилување K на отворениот систем. Со други зборови, синтезата на преодниот одзив на затворениот систем се изведува преку нагудување на коефициентот на засилување на отворениот систем. Доколку саканите полови не се наоѓаат на геометриското место корени од набљудуваниот систем, потребно е преку компензација да се измени преносната функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, така што новото геометриско место на корени ќе минува низ саканите точки, односно саканите полови на компензираниот систем ќе лежат на новото геометриско место на корени. Компензацијата генерално се состои во додавање нули и полови кон преносната функција на соодветниот отворен систем, а додавањето дополнителна нула кон оваа преносна функција има за резултат зголемување на брзината на одзив на компензираниот систем во однос на некомпензираниот, односно намалување на времето на смирување.

Додавањето нула кон преносната функција на соодветниот отворен систем, во случајот на континуални системи, може да се претстави преку компензатор со следната преносна функција:

$$G_c(s) = s + z_c \quad (6.20)$$

кој претставува идеален диференцирачки компензатор. Еден идеален диференцирачки компензатор може да се реализира со помош на активни електрични мрежи и се користи за подобрување на преодниот одзив на компензираниот систем. За оваа цел често се

користат идеални електромеханички компензатори како, на пример, тахометрите, бидејќи тие на погоден начин се поврзуваат со објектот. Заради обликот на преносната функција (6.20), идеалниот диференцијален компензатор се нарекува уште **пропорционално-диференцирачки регулатор** или накусо **ПД – регулатор**. Примената на чист диференцијатор ја зголемува брзината на одзив на компензираниот во однос на некомпензираниот систем.

Идеалниот диференцијален компензатор може да се апроксимира со пасивна диференцирачка мрежа и тогаш претставува неидеален диференцијален компензатор. Со помош на пасивна диференцирачка мрежа не може да се реализира само нула – како резултат се добива компензатор со нула и пол. Меѓутоа, доколку полот на компензаторот се наоѓа подалеку од имагинарната оска во однос на неговата нула, аргументот на компензаторот сè уште ќе биде позитивен и компензаторот може да апроксимира идеален диференцијален компензатор.

Предностите на пасивната диференцирачка мрежа (неидеален диференцијален компензатор) во однос на идеалниот диференцијален компензатор (ПД – регулатор) се:

- нема потреба од дополнителни извори на енергија,
- шумот што секогаш го следи диференцирањето е послаб по интензитет. Меѓутоа, за разлика од идеалниот диференцијален компензатор, неидеалниот не го намалува бројот гранки од геометриското место корени на компензираниот систем кои ја сечат имагинарната оска и минуваат во десната полурамнина од s -комплексната рамнина.

Постојат бесконечно многу решенија кои го задоволуваат проектното барање за карактерот на саканиот преоден режим, одреден со доминантниот пар полови на компензираниот систем. Овие решенија се разликуваат по слободниот избор на положбата на нулата од компензаторот, вредноста за која се намалува стационарната грешка на некомпензираниот систем, вредноста на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем, која одговара на доминантниот пар полови од компензираниот систем, положбата на третиот и четвртиот пол од компензираниот систем на реалната оска, како и нивното влијание врз поведението на компензираниот систем, кое се оценува врз основа на оддалеченоста на дополнителните полови на компензираниот систем од неговите доминантни полови, или врз основа на кратењето на дополнителните полови со дополнителни нули на компензираниот систем.

Синтезата по пат на сериска компензација со диференцијален компензатор со помош на методот геометриско место на корени може да се резимира во следните неколку чекори:

1. Искажување на сите проектни барања во поглед на саканиот преоден режим преку положбата од доминантните полови на компензираниот систем во s -комплексната рамнина

2. Скицирање на геометриското место на корени од некомпензираниот систем со цел да се утврди дали тој може да ги задоволи поставените проектни барања без соодветна компензација
3. Доколку синтезата бара компензација со диференцијален компензатор, неговата нула се одбира непосредно под саканиот доминантен пол од компензираниот систем, или лево од првите два реални полови
4. Положбата на полот од компензаторот се определува со помош на принципот на аргументот, кој треба да го задоволува саканиот доминантен пол од компензираниот систем
5. Определување на коефициентот на засилување на компензираниот систем врз основа на принципот на модулот, кој треба да го задоволува саканиот доминантен пол од компензираниот систем
6. Пресметување на константите на грешка за компензираниот систем
7. Постапката се повторува доколку стационарната грешка на компензираниот систем не задоволува

При изборот на нулата од диференцијалниот компензатор треба да се внимава таа да не ја промени доминацијата на саканите полови. Од тие причини, нулата се одбира лево од првите два реални пола на отворениот систем од некомпензираниот затворен систем; таа не смее да се одбере помеѓу двата реални пола на отворениот систем (не смее да биде поблизу до имагинарната оска од вториот реален пол), зошто во спротивно во затворениот систем ќе се јави пол близу до координатниот почеток, кој ќе има доминантно влијание врз одзивот на системот. Бидејќи во конкретниот случај саканиот пол на компензираниот систем се наоѓа непосредно над вториот реален пол од отворениот систем, нулата од компензаторот се одбира малку полево од реалниот пол.

Полот од диференцијалниот компензатор се определува од критериумот на аргументот, кој мора да го задоволува доминантниот пол од компензиранот систем. Тоа значи дека збирот од аглиите, кои со реалната оска од s – комплексната рамнина ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на отворениот систем и нулата и полот на диференцијалниот компензатор до саканиот пол од компензираниот систем, мора да биде еднаков на 180^0 .

На крајот, од критериумот на модулот, се определува коефициентот на засилување K на отворениот систем, кој одговара на доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем и се пресметува соодветната константа на грешка. Доколку нејзината вредност ја обезбедува саканата точност на работа на компензираниот систем во стационарен режим, постапката на синтеза тука завршува; во спротивно, се повторува.

Секогаш треба да се има на ум дека поведението на компензираниот систем не е одредено само од неговите доминантни полови, туку зависи од сите негови нули и полови. Затоа на крајот од постапката на синтеза потребно е, со симулација, да се провери поведението на проектираниот систем.

При нагодувањето на преодниот одсив на еден затворен систем, по пат на компензација на коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем, во принцип доаѓа до зголемување на стационарната грешка на компензираниот систем. Ова се должи на фактот дека и преодниот одсив и стационарната грешка зависат од коефициентот на засилување на отворениот систем. Колку е поголема вредноста на овој коефициент, толку е помала стационарната грешка, но, од друга страна, поголем е и максималниот прескок на преодниот одсив. Намалувањето, пак, на вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем, со цел да се обезбеди преоден одсив на затворениот систем со помал максимален прескок, има за резултат зголемување на стационарната грешка кај затворениот систем. Овој проблем се избегнува со примената на интегрален компензатор.

Интегралните компензатори по правило се користат за подобрување на стационарната грешка на еден затворен САУ. Притоа, компензаторите кои користат чиста интеграција за остварувањето на својата задача, се нарекуваат **идеални интегрални компензатори**. Тие се реализираат со помош на активни мрежи како, на пример, операциони засилувачи. Основна предност на идеалните интегрални компензатори е што обезбедуваат нулева стационарна грешка, а основен недостаток – цената на чинење и потребата од дополнителни извори на енергија.

Неидеалните интегрални компензатори се реализираат со помош на пасивни елементи и мрежи како, на пример, електрични отпорници и кондензатори. Нивна предност е што се поевтини од идеалните и за своето работење не бараат дополнителни извори на енергија, а основен недостаток им е што не можат да обезбедат нулева стационарна грешка. Неидеалниот интегрален компензатор внесува дополнителна нула и дополнителен пол во отворениот систем за компензираниот затворен систем. За да не влијаат значително врз преодниот одсив на проектираниот систем, тие се одбираат близу до координатниот почеток од s – комплексната рамнина. Иако неидеалниот интегрален компензатор не го зголемува редот на астатизам на отворениот систем, тој ја подобрува стационарната грешка на компензираниот затворен систем. Меѓутоа, за да остане ист преодниот одсив на некомпензираниот систем и по компензацијата, нулата и полот од компензаторот се одбираат блиску еден до друг. Тогаш, единствен начин да се обезбеди голем по величина однос z_c/p_c , кој ќе има за резултат значително намалување на стационарната грешка на компензираниот систем, и едновременно, нулата и полот од компензаторот да се постават близу еден до друг, што значи практично непроменет преоден одсив по компензацијата, е тие да се сместат во близина на координатниот почеток од s – комплексната рамнина. Така, на пример, кај компензатор со нула во $s = -z_c = -0.01$ и пол во $s = -p_c = -0.001$, односот z_c/p_c изнесува 10, што значи дека стационарната грешка од компензираниот систем ќе биде десет пати помала од стационарната грешка кај некомпензираниот систем. Во исто време, тие се доволно близу еден до друг, така што нивното влијание врз положбата од доминантниот пар полови е занемарливо.

6.1. Да се нацрта геометриското место на корени на затворениот линеарен континуален динамички систем, чиј што отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = G(s)H(s) = K \frac{B(s)}{A(s)} = K \frac{s+1.5}{s^2+3s} = K \frac{s+1.5}{s(s+3)}; \quad K > 0 \quad (6.21)$$

Решение: За $H(s)=1$ (кога затворениот систем е со единична негативна повратна врска), преносната функција на затворениот систем ќе биде:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K(s+3)}{s^2+3s+K(s+1.5)} = \frac{K(s+1.5)}{s^2+(K+3)s+1.5K} \quad (6.22)$$

а нејзините полови се:

$$p_1 = -\frac{1}{2}(3+K) - \frac{1}{2}\sqrt{9+K^2} \quad (6.23)$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(3+K) + \frac{1}{2}\sqrt{9+K^2} \quad (6.24)$$

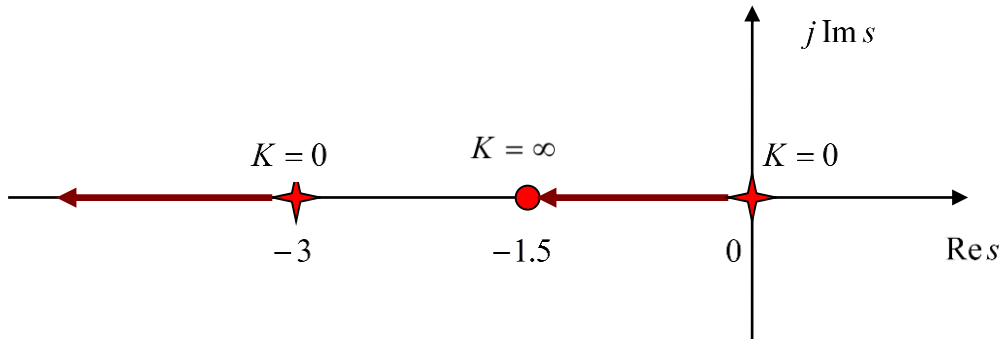
За $K=0$, полот p_1 ќе биде во точката $p_1 = -\frac{1}{2}(3) - \frac{1}{2}(3) = -3$, додека полот p_2 ќе се наоѓа во точката $p_2 = -\frac{1}{2}(3) + \frac{1}{2}(3) = 0$. Овие точки одговараат на половите на отворениот систем (6.21). Кога K станува многу големо, (под претпоставка, $K > 0$) полот p_1 ќе тежи кон вредноста $-\infty$:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} p_1 = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}(3+K) - \frac{K}{2} \sqrt{1 + \frac{9}{K^2}} \right] = -\infty \quad (6.25)$$

додека полот p_2 ќе тежи кон -1.5 :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} p_2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2}(3+K) + \frac{K}{2} \sqrt{1 + \frac{9}{K^2}} \right] = -\frac{3}{2} = -1.5 \quad (6.26)$$

Овие вредности одговараат на конечната нула на отворениот систем (6.21) во -1.5 и бесконечната нула во $-\infty$. Очигледно, положбата на половите на набљудуваниот затворен систем зависи од коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем и таа зависност графички е прикажана на Слика 6.2. Геометриското место на корени за набљудуваниот затворен систем има две гранки, по една за секој пол на отворениот систем и тие гранки лежат на реалната оска во s - комплексната рамнина.



Слика 6.2. Геометриско место на корени на затворениот систем од Задача 6.1

6.2. Преносната функција на соодветниот отворен систем е:

$$\text{а) } G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + 2s} = \frac{K(s+1)}{s(s+2)} \quad (6.27)$$

$$\text{б) } G_0(z) = \frac{K(z-0.2)}{z^2(z-0.4)} \quad (6.28)$$

$$\text{в) } G_0(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2 + 2s + 2)(s+4)} \quad (6.29)$$

$$\text{г) } G_0(s) = \frac{K(s+3)}{s^2(s+4)(s+5)} \quad (6.30)$$

$$\text{д) } G_0(z) = \frac{K(z+1)(z+0.5)}{z(z^2 + z - 2)} \quad (6.31)$$

Колку гранки има геометриското место на корени на затворениот систем?

Решение: а) Две, бидејќи отворениот систем има два пола:

$$s_1^* = 0, \quad s_2^* = -2 \quad (6.32)$$

б) Три, бидејќи отворениот систем има три пола:

$$z_{1,2}^* = 0, \quad z_3^* = 0.4 \quad (6.33)$$

в) Четири, бидејќи отворениот систем има четири пола:

$$s_1^* = 0, \quad s_{2,3}^* = -1 \pm j, \quad s_4^* = -4 \quad (6.34)$$

г) Четири, бидејќи отворениот систем има четири пола:

$$s_{1,2}^* = 0, \quad s_3^* = -4, \quad s_4^* = -5 \quad (6.35)$$

д) Три, бидејќи отворениот систем има три пола:

$$z_1^* = 0, \quad z_2^* = -2, \quad z_3^* = 1 \quad (6.36)$$

6.3. Зошто бројот гранки во геометриското место на корени на затворениот систем мора да одговара на бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$?

Решение: Секоја гранка од геометриското место на корени на затворениот систем претставува по еден пол на затворениот систем. Следствено, геометриското место на корени на затворениот систем мора да има онолку гранки, колку што затворениот систем има полови. Бидејќи бројот полови на затворениот систем е еднаков со бројот полови на соодветниот отворен систем за $m \leq n$, следува дека бројот гранки на геометриското место на корени на затворениот систем одговара на бројот полови на отворениот систем.

6.4. Преносната функција на соодветниот отворен систем е:

а) $G_0(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 4s} = \frac{K(s+2)}{s(s+4)} \quad (6.37)$

б) $G_0(z) = \frac{K(z+0.8)}{z^2(z+0.4)} \quad (6.38)$

в) $G_0(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^2 + 2s + 2)(s+2)} \quad (6.39)$

г) $G_0(s) = \frac{K(s+3)}{s^2(s+6)} \quad (6.40)$

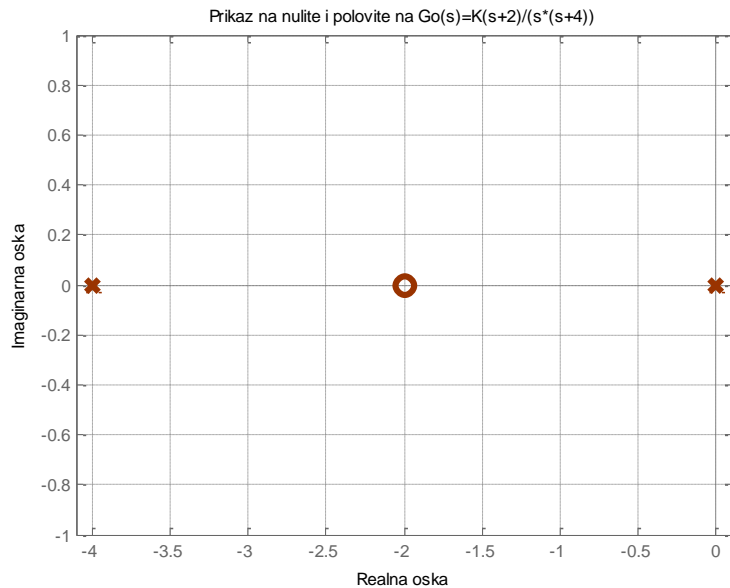
д) $G_0(z) = \frac{K(z+0.2)(z+0.4)}{z(z^2 + 0.6z + 0.18)} = \frac{K(z+0.2)(z+0.4)}{z(z+0.3+j0.3)(z+0.3-j0.3)} \quad (6.41)$

Да се прикажат нулите и половите во комплексната рамнина и да се определат деловите од геометриското место на корени на соодветниот затворен систем, кои лежат на реалната оска од комплексната рамнина.

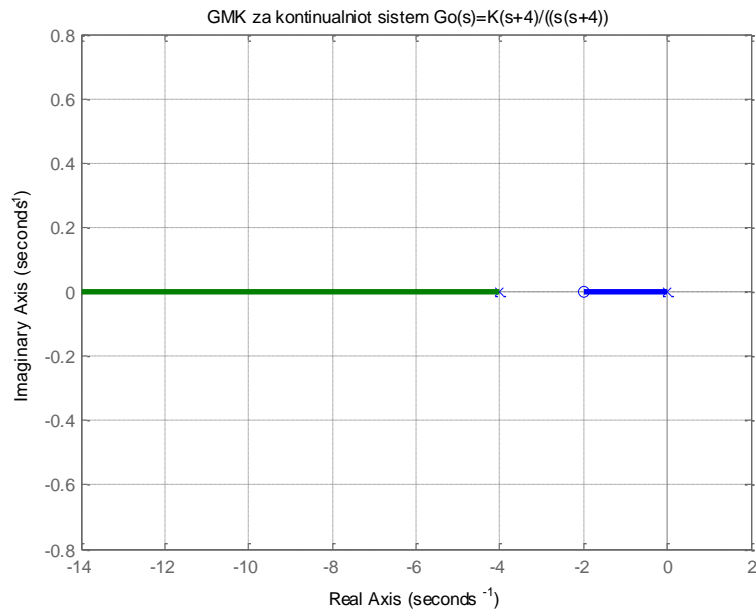
Решение: а) Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.37) во комплексната рамнина е прикажана графички на Слика 6.3. Делот од реалната оска помеѓу точките -2 и 0 се наоѓа лево од непарен број (еден) конечни полови и нули на отворениот систем (6.37). Следствено, тој припаѓа на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$. Исто така, делот од реалната оска помеѓу точките $-\infty$ и -4 се наоѓа лево од непарен број конечни полови и нули (три) на

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

отворениот систем (6.37). Следствено, и тој припаѓа на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$. Геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.37), е прикажано на Слика 6.4. На неа се гледаат двете гранки на геометриското место на корени на затворениот систем за $K > 0$, кои лежат на реалната оска.



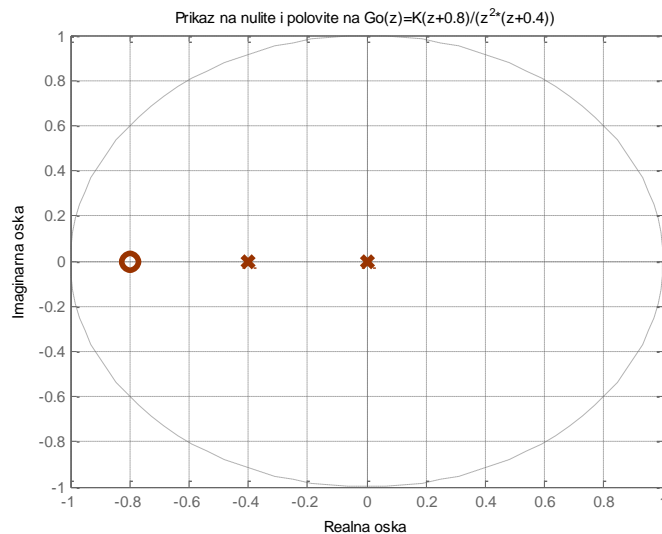
Слика 6.3. Графички приказ на нулите и половите на отворениот систем (6.37) во s — комплексната рамнина



Слика 6.4. Графички приказ на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.37)

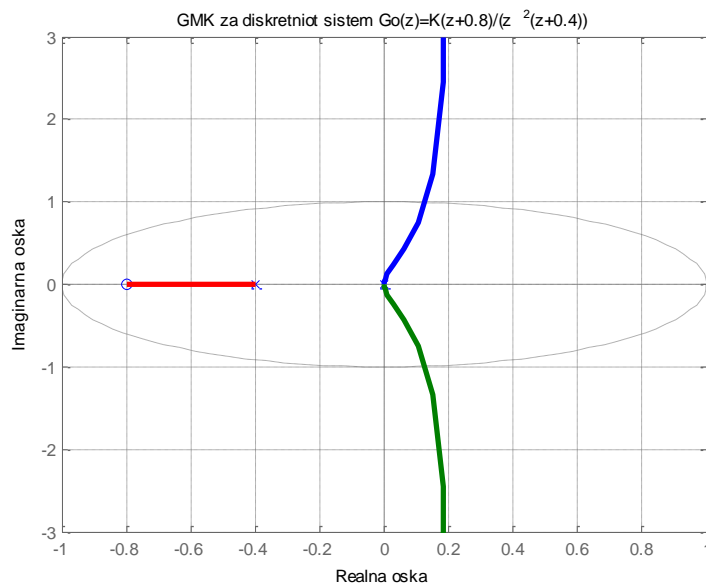
СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

б) Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.38) во комплексната рамнина е прикажана графички на Слика 6.5.



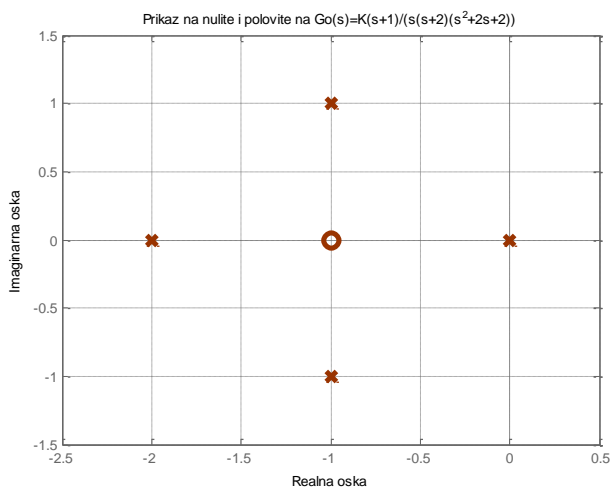
Слика 6.5. Нулите и половите на отворениот систем (6.38) во z -комплексната рамнина

Делот од реалната оска помеѓу точките -0.8 и -0.4 се наоѓа лево од непарен број (три) конечни полови и нули на отворениот систем (6.38). Следствено, тој припаѓа на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$. Геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.38), е прикажано на Слика 6.6. На неа се гледа едната гранки на геометриското место на корени на затворениот систем за $K > 0$ која лежи на реалната оска.



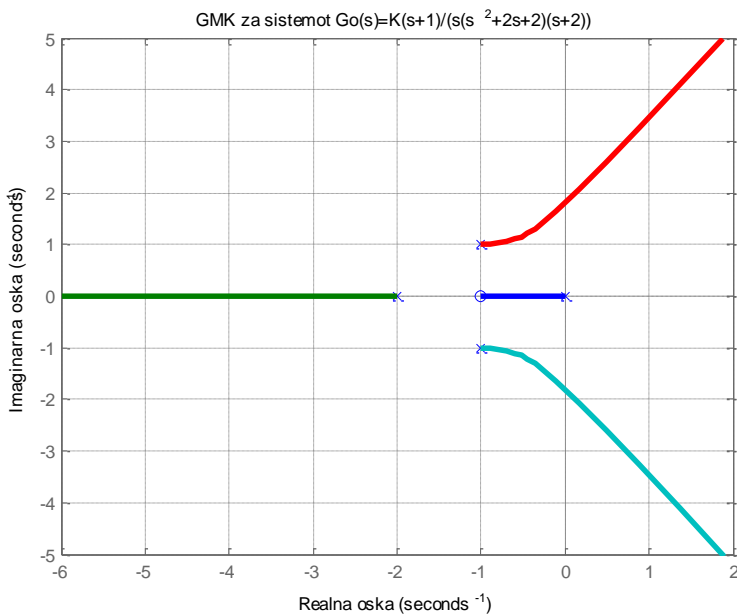
Слика 6.6. Графички приказ на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.37)

в) Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.39) во комплексната рамнина е прикажана графички на Слика 6.7. Делот од реалната оска помеѓу точките -1 и 0 се наоѓа лево од непарен број (еден) конечни полови и нули на отворениот систем (6.39). Исто така, делот од реалната оска помеѓу точките $-\infty$ и -2 се наоѓа лево од непарен број конечни полови и нули (пет) на отворениот систем (6.39). Следствено, тие припаѓаат на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$.



Слика 6.7. Нулите и половите на отворениот систем (6.39) во s – комплексната рамнина

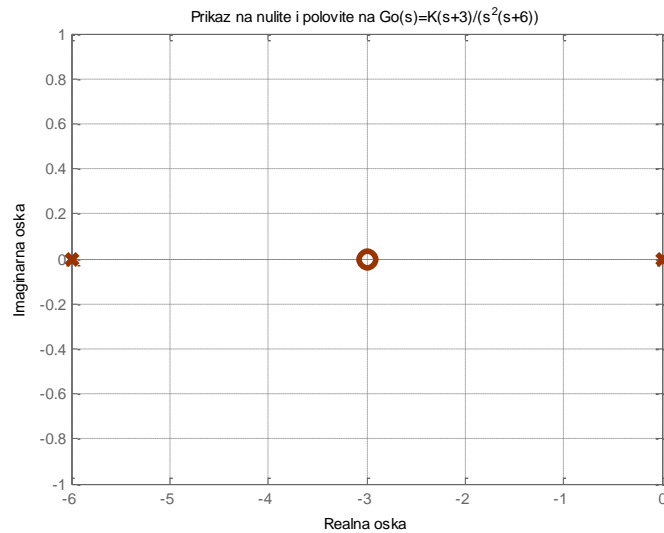
ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.39), е прикажано на Слика 6.8. На неа се гледаат двете гранки на ГМК за $K > 0$, кои лежат на реалната оска.



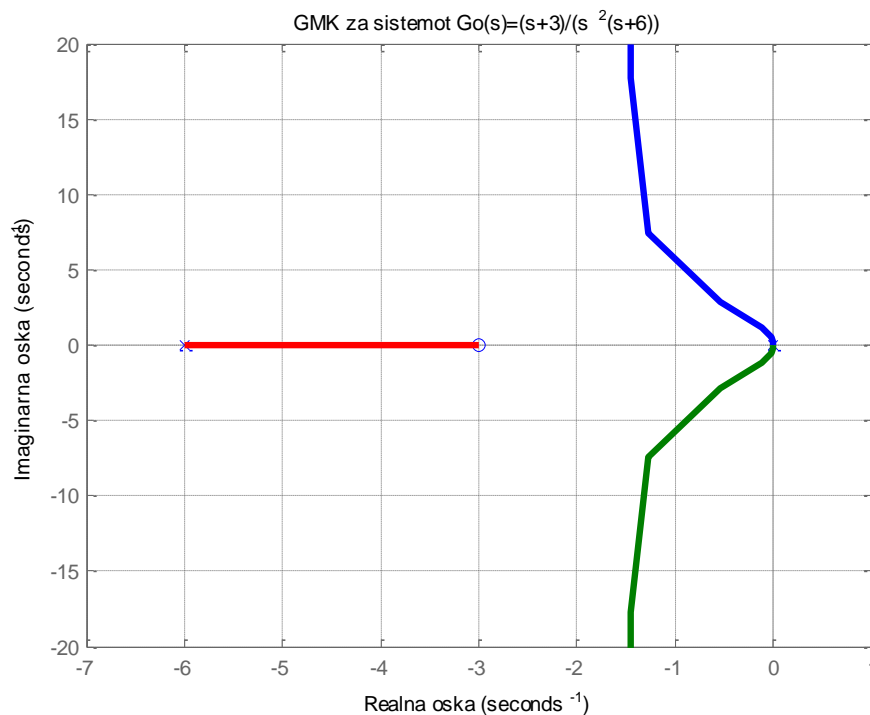
Слика 6.8. ГМК на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.39)

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

г) Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.40) во комплексната рамнина е прикажана графички на Слика 6.9. Делот од реалната оска помеѓу точките -6 и -3 се наоѓа лево од непарен број (три) конечни полови и нули на отворениот систем (6.40). Следствено, тој припаѓа на геометриското место корени на соодветниот затворен систем за $K > 0$.



Слика 6.9. Нули и полови на отворениот систем (6.40) во s – комплексната рамнина

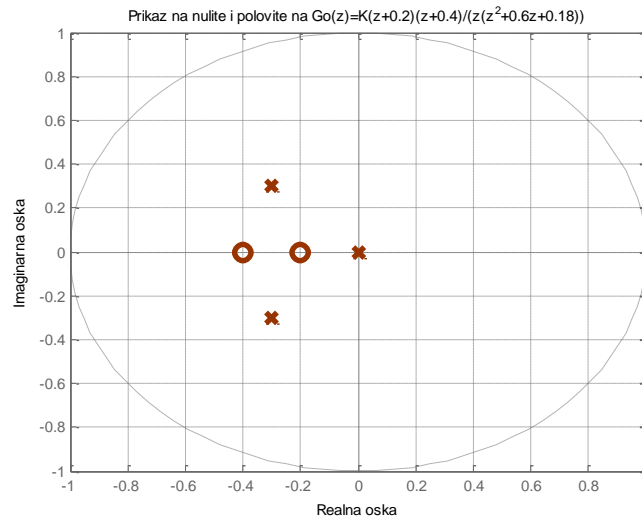


Слика 6.10. Графички приказ на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.40)

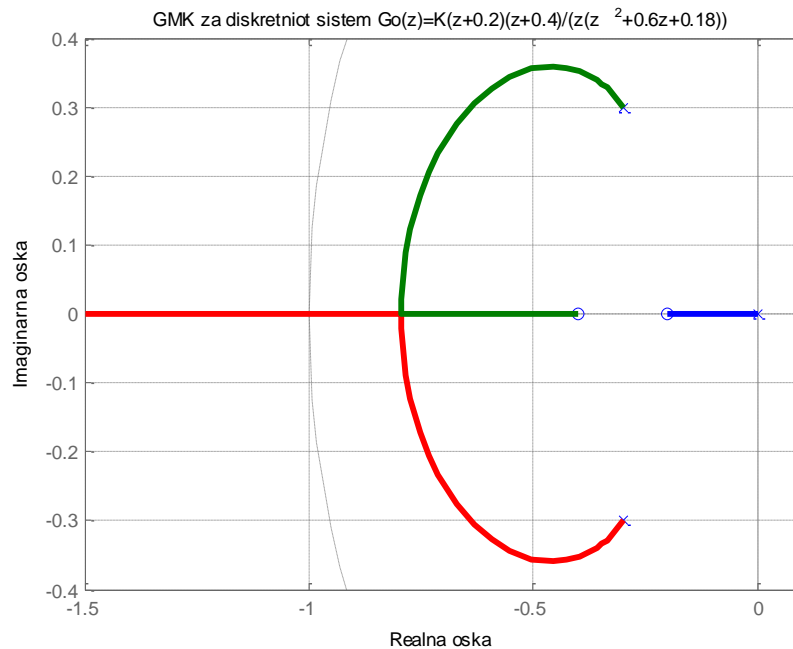
СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.40), е прикажано на Слика 6.10. На неа се гледа едната гранка на геометриското место на корени на затворениот систем за $K > 0$, која лежи на реалната оска.

д) Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.41) во комплексната рамнина е прикажана графички на Слика 6.11.



Слика 6.11. Графички приказ на нулите и половите на отворениот систем (6.41) во z -комплексната рамнина



Слика 6.12. GMK на затворениот систем со отворен систем со преносна функција (6.41)

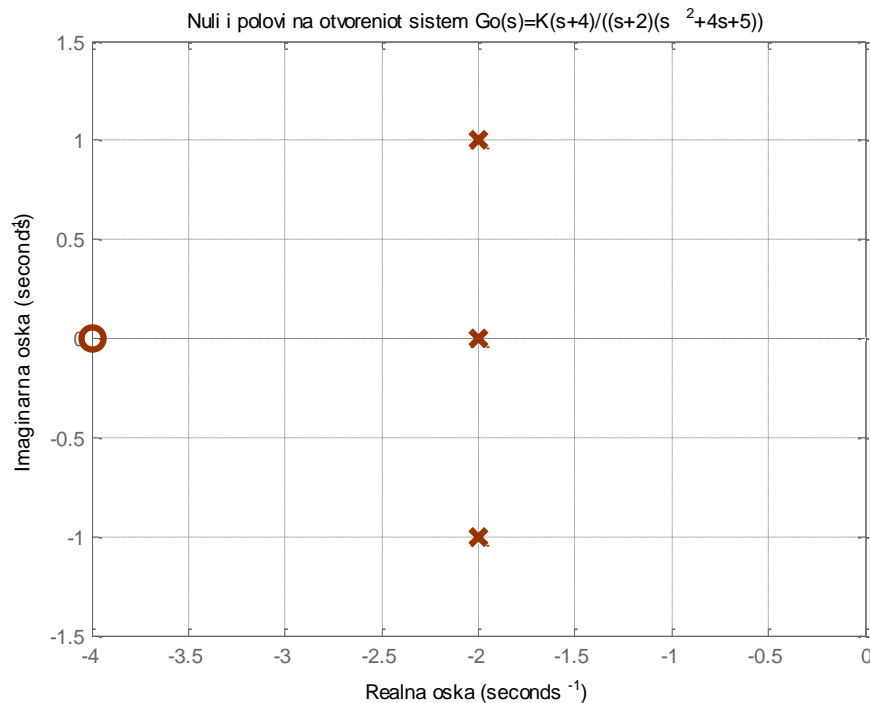
СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Делот од реалната оска помеѓу точките -0.2 и 0 се наоѓа лево од непарен број (еден) конечни полови и нули на отворениот систем (6.41). Исто така, делот од реалната оска помеѓу точките $-\infty$ и -0.4 се наоѓа лево од непарен број конечни полови и нули (пет) на отворениот систем (6.41). Следствено, тие припаѓаат на ГМК на соодветниот затворен систем за $K > 0$. ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.41), е прикажано на Слика 6.12. На неа се гледаат двете гранки на ГМК на затворениот систем за $K > 0$, кои лежат на реалната оска.

6.5. Кој дел од реалната оска припаѓа на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција:

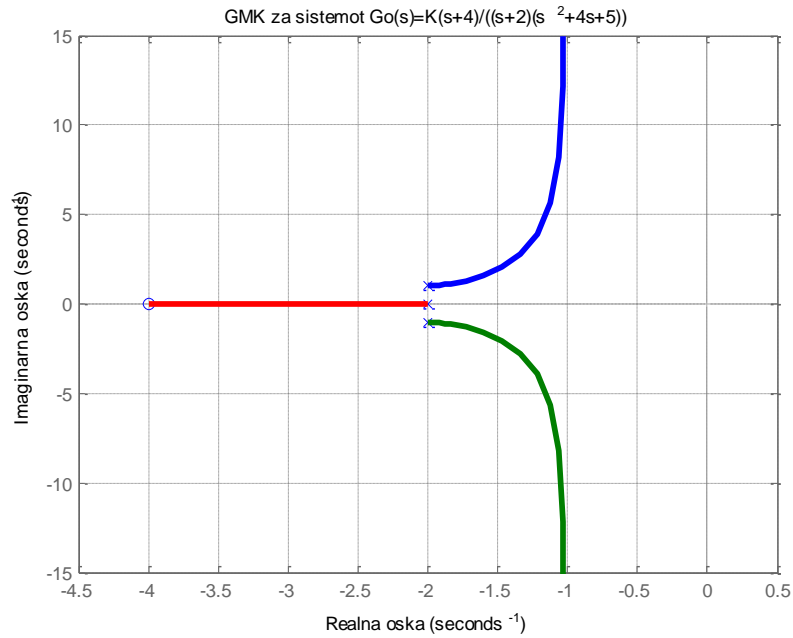
$$G_0(s) = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s^2+4s+5)} = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+2-j)(s+2+j)}, K > 0 \quad (6.42)$$

Решение: Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.42) во комплексната рамнина е прикажана графички на Слика 6.13. Делот од реалната оска помеѓу точките -4 и -2 се наоѓа лево од непарен број (три) конечни полови и нули на отворениот систем (6.42). Следствено, тој припаѓа на ГМК на соодветниот затворен систем за $K > 0$. ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.42), е прикажано на Слика 6.14. На неа се гледа едната гранки на ГМК на затворениот систем за $K > 0$, која лежи на реалната оска.



Слика 6.13. Графички приказ на нулите и половите на отворениот систем (6.42) во s -рамнината

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

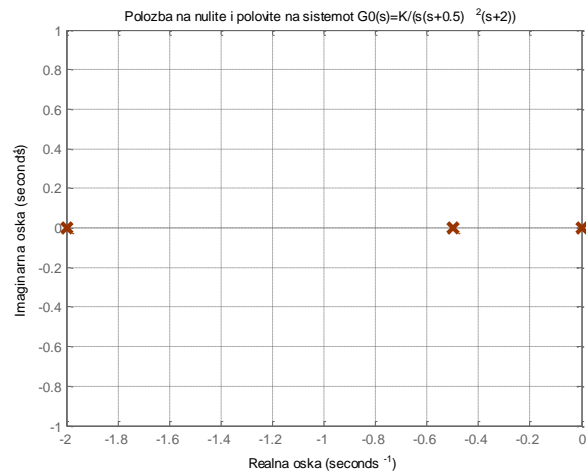


Слика 6.14. Геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.42)

6.6. Кој дел од реалната оска припаѓа на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција:

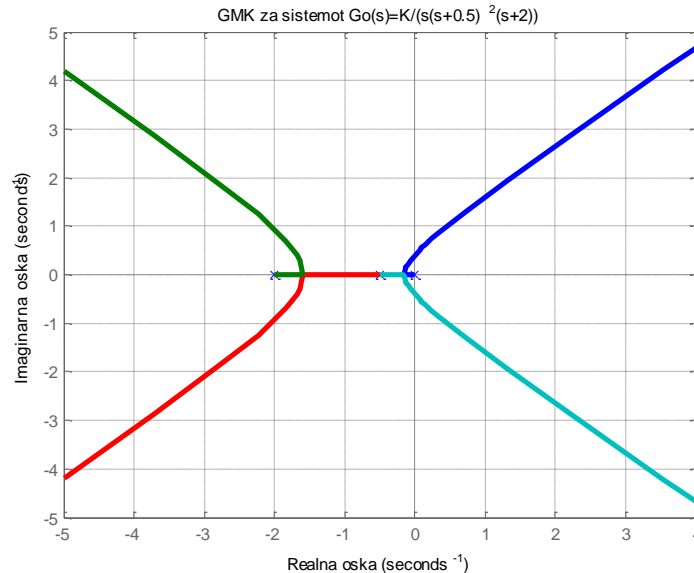
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+0.5)^2(s+2)}, \quad K > 0 \quad (6.43)$$

б) Положбата на нулите и половите на отворениот систем (6.43) во комплексната рамнина е прикажана графички на Слика 6.15.



Слика 6.15. Нулите и половите на отворениот систем (6.43) во s – комплексната рамнина

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



Слика 6.16. Графички приказ на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.43)

Делот од реалната оска помеѓу точките -0.5 и 0 се наоѓа лево од непарен број (еден) конечни полови и нули на отворениот систем (6.43). Исто така, делот од реалната оска помеѓу точките -2 и -0.5 се наоѓа лево од непарен број (три) конечни полови и нули на отворениот систем (6.43). Следствено, тие припаѓаат на ГМК на затворениот систем за $K > 0$. ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.43), е прикажано на Слика 6.16. На неа се гледаат двете гранки на ГМК за затворениот систем за $K > 0$, кои лежат на реалната оска.

6.7. Да се определи центарот на асимптотите на геометриското место на корени за затворените системи, чии отворени системи се опишани со преносните функции:

$$\text{а) } G_0(s) = \frac{K(s+0.1)}{s^2 + 0.2s} = \frac{K(s+0.1)}{s(s+0.2)} \quad (6.44)$$

$$\text{б) } G_0(z) = \frac{K(z-0.2)}{z^2(z-0.4)} \quad (6.45)$$

$$\text{в) } G_0(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2 + 2s + 2)(s+4)} \quad (6.46)$$

$$\text{г) } G_0(s) = \frac{K(s+3)}{s^2(s+4)(s+5)} \quad (6.47)$$

$$\text{д) } G_0(z) = \frac{K(z+1)(z+0.5)}{z(z^2 + z - 2)} \quad (6.48)$$

$$\text{f)} \quad G_0(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s^2+6s+10)} = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3-j)(s+3+j)}, K > 0 \quad (6.49)$$

$$\text{e)} \quad G_0(s) = \frac{K}{z(z+1)^2(z+2)}, K > 0 \quad (6.50)$$

Решение: а) Бидејќи $n - m = 2 - 1 = 1$, бројот асимптоти е еднаков на еден. Центарот на оваа асимптота е во точката σ_c :

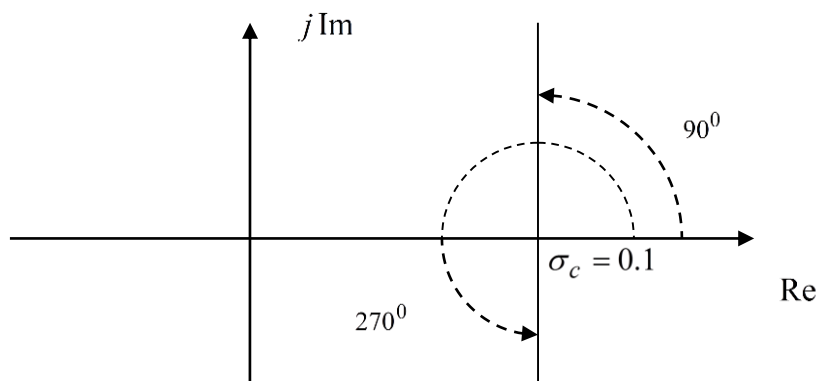
$$\sigma_c = -\frac{0.2 - 0.1}{2 - 1} = -0.1 \quad (6.51)$$

За $K > 0$, асимптотата зафаќа агол од $\beta = \pi$ радијани со реалната оска.

б) Бидејќи $n - m = 3 - 1 = 2$, бројот асимптоти е еднаков на два. Центарот на овие асимптоти е во точката σ_c :

$$\sigma_c = \frac{0.4 - 0.2}{3 - 1} = \frac{0.2}{2} = 0.1 \quad (6.52)$$

За $K > 0$, асимптотите зафаќаат агол од $\beta_1 = \pi/2$ и $\beta_2 = 3\pi/2$ радијани со реалната оска.



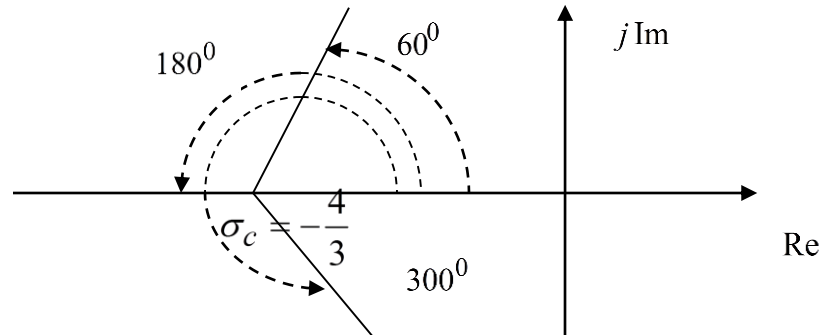
Слика 6.17. Графички приказ на асимптотите на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.45)

в) Бидејќи $n - m = 4 - 1 = 3$, бројот асимптоти е еднаков на три. Центарот на овие асимптоти е во точката:

$$\sigma_c = -\frac{1 + j + 1 - j + 4 - 2}{4 - 1} = -\frac{4}{3} \quad (6.53)$$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

За $K > 0$, асимптотите зафаќаат агол од $\beta_1 = \pi/3$, $\beta_2 = \pi$ и $\beta_3 = 5\pi/3$ радијани со реалната оска.

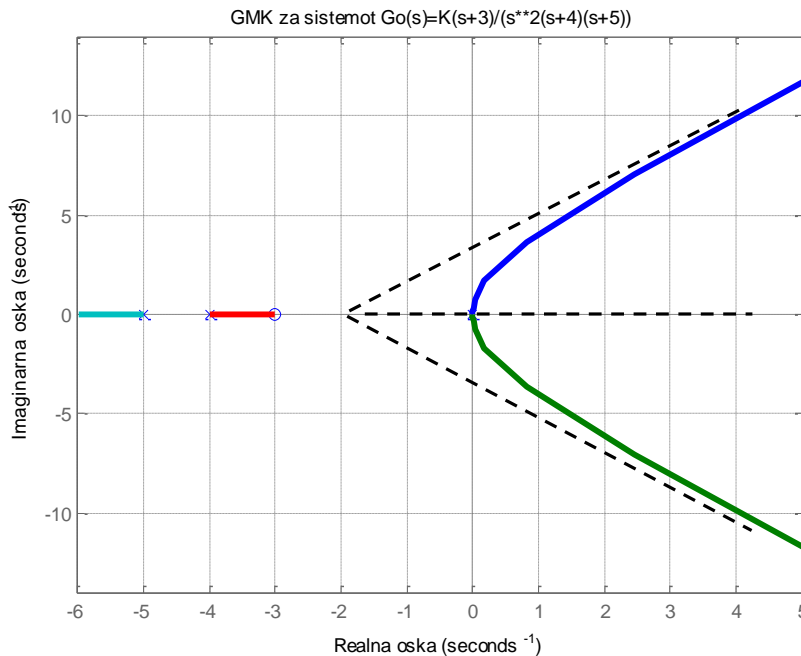


Слика 6.18. Графички приказ на асимптотите на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.46)

г) Бидејќи $n - m = 4 - 1 = 3$, бројот асимптоти е еднаков на три. Центарот на овие асимптоти е во точката:

$$\sigma_c = -\frac{4+5-3}{4-1} = -2 \quad (6.54)$$

За $K > 0$, асимптотите зафаќаат агол од $\beta_0 = \pi/3$, $\beta_1 = \pi$ и $\beta_3 = 5\pi/3$ радијани со реалната оска.

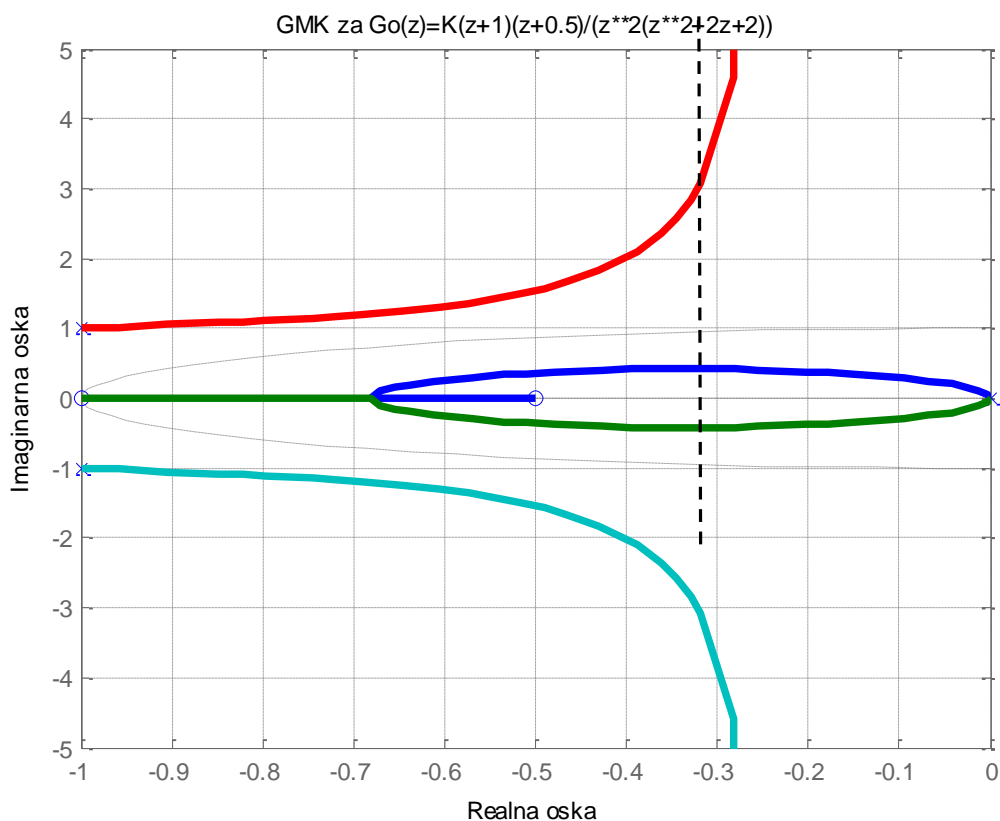


Слика 6.19. Асимптоти на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.47)

д) Бидејќи $n - m = 4 - 2 = 2$, бројот асимптоти е еднаков на два. Центарот на овие асимптоти е во точката:

$$\sigma_c = \frac{-1 - j - 1 + j + 1 + 0.5}{4 - 2} = -0.25 \quad (6.55)$$

За $K > 0$ асимптотите зафаќаат агол од $\beta_0 = \pi/2$ и $\beta_1 = 3\pi/2$ радијани со реалната оска.

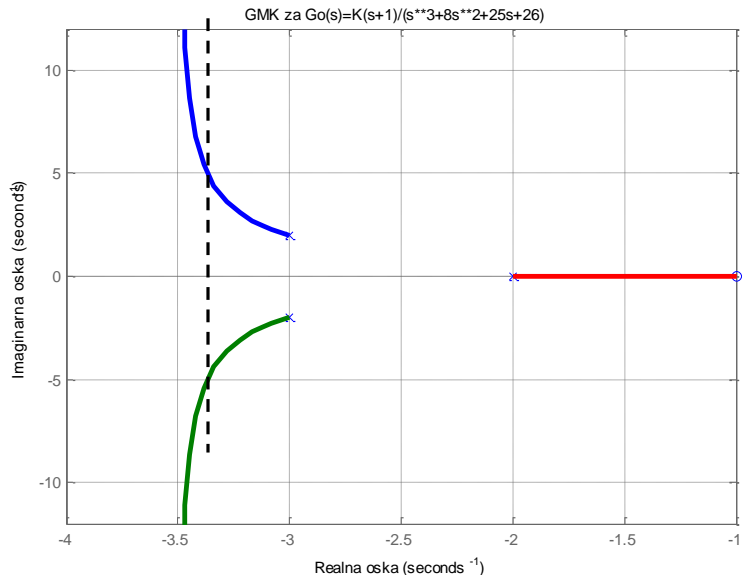


Слика 6.20. Асимптоти на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.48)

ѓ) Бидејќи $n - m = 3 - 1 = 2$, бројот асимптоти е еднаков на два. Центарот на овие асимптоти е во точката:

$$\sigma_c = \frac{-2 - 3 - j2 - 3 + j2 + 1}{3 - 1} = -3.5 \quad (6.56)$$

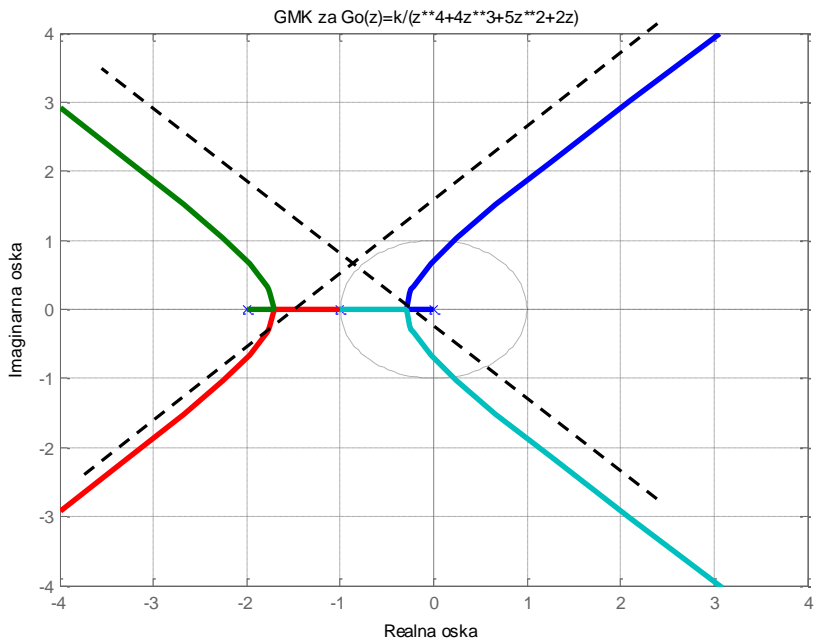
СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



Слика 6.21. Асимптоти на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.49)

За $K > 0$, асимптотите зафаќаат агол од $\beta_0 = \pi/2$ и $\beta_1 = 3\pi/2$ радијани со реалната оска. За $K < 0$, асимптотите зафаќаат агол од $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = \pi$ радијани со реалната оска.

е) Бидејќи $n - m = 4 - 0 = 4$, бројот асимптоти е еднаков на четири.



Слика 6.22. Асимптотите на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.50) за $K > 0$

Центарот на овие асимптоти е во точката:

$$\sigma_c = -\frac{0+1+1+2}{4-0} = -1 \quad (6.57)$$

За $K > 0$, асимптотите зафаќаат агол од $\beta_1 = \pi/4$, $\beta_2 = 3\pi/4$, $\beta_3 = 5\pi/4$ и $\beta_4 = 7\pi/4$ радијани со реалната оска. За $K < 0$, асимптотите зафаќаат агол од $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi/2$, $\beta_3 = \pi$ и $\beta_4 = 3\pi/2$ радијани со реалната оска.

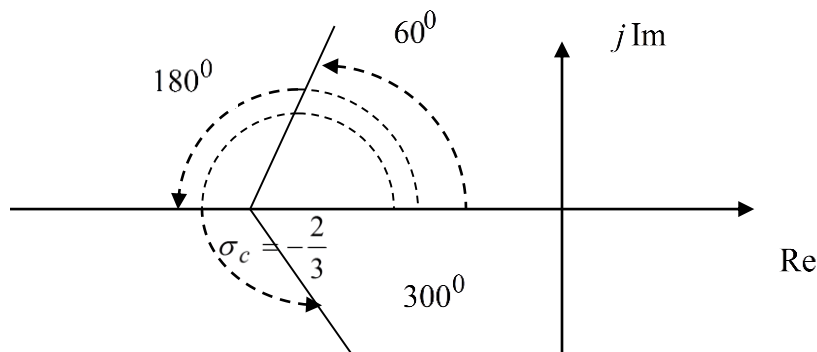
6.8. Да се определи центарот и аглите на асимптотите на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K(s+5)}{(s+2)(s+3)(s+1+j4)(s+1-j4)}, \quad K > 0 \quad (6.58)$$

Решение: Центарот на асимптотите е во точката:

$$\sigma_c = -\frac{2+3+1+j4+1-j4-5}{4-1} = -\frac{2}{3} \quad (6.59)$$

Геометриското место на корени на затворениот систем има три асимптоти, кои, за $K > 0$, со реалната оска зафаќаат агли $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$ и $\beta_3 = 300^\circ$. Тие се прикажани на Слика 6.23.



Слика 6.23. Асимптоти на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.58)

6.9. Да се определи центарот и аглите на асимптотите на геометриското место на корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

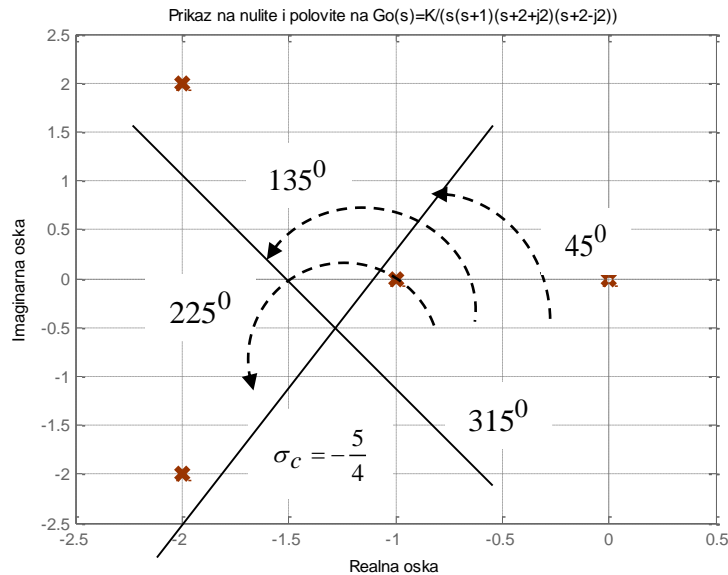
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2+j2)(s+2-j2)} \quad (6.60)$$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

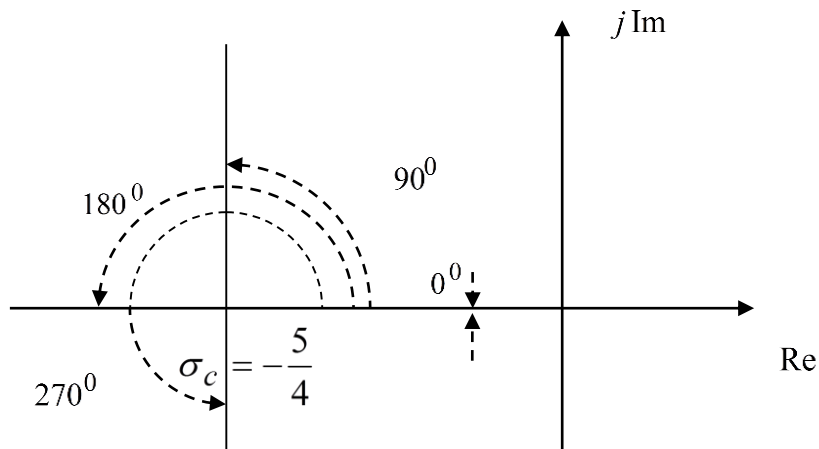
Решение: Центарот на асимптотите е во точката:

$$\sigma_c = -\frac{0+1+2+j2+2-j2}{4-0} = -\frac{5}{4} \quad (6.61)$$

Геометриското место на корени на затворениот систем има три асимптоти, кои за $K > 0$ зафаќаат агли $\beta_1 = \pi/4$, $\beta_2 = 3\pi/4$, $\beta_3 = 5\pi/4$ и $\beta_4 = 7\pi/4$ со реалната оска. Тие се прикажани на Слика 6.24. За $K < 0$, асимптотите зафаќаат агли од $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi/2$, $\beta_3 = \pi$ и $\beta_4 = 3\pi/2$ радијани со реалната оска и се прикажани на Слика 6.24.



Слика 6.24. Асимптоти на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.60), $K > 0$



Слика 6.25. Асимптоти на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.60) за $K < 0$

6.10. Да се определат точките на раздвојување односно спојување на гранките од ГМК на затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+2)} \quad (6.62)$$

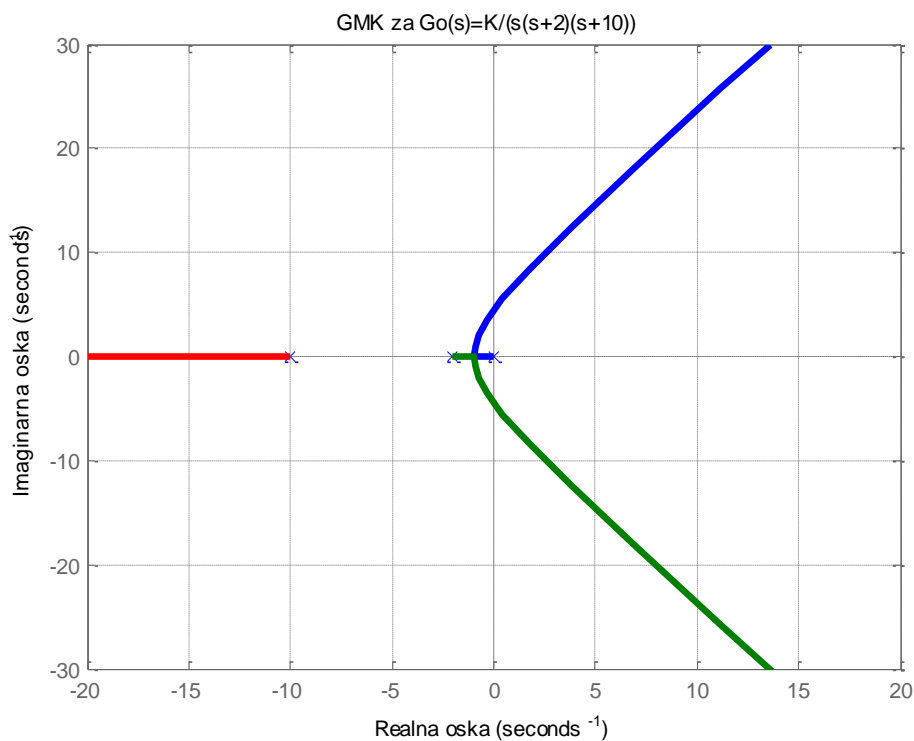
Решение: За да се определат бараните точки, треба да се реши равенката:

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b + 10} + \frac{1}{\sigma_b + 2} = 0 \quad (6.63)$$

односно равенката:

$$(\sigma_b + 10)(\sigma_b + 2) + \sigma_b(\sigma_b + 2) + \sigma_b(\sigma_b + 10) = 3\sigma_b^2 + 24\sigma_b + 20 = 0 \quad (6.64)$$

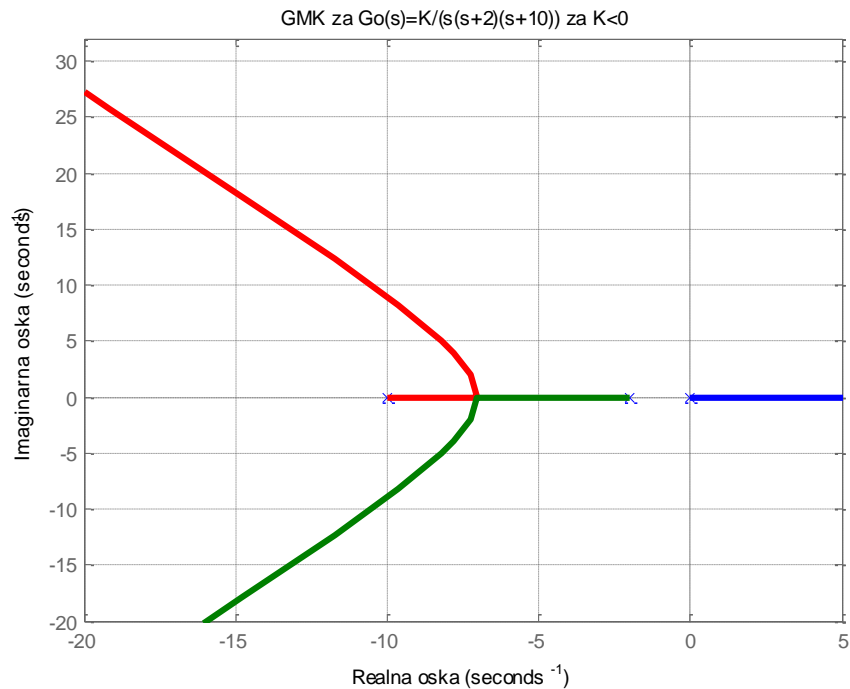
Корените на оваа равенка се $\sigma_b = -1$ и $\sigma_b = -7$. Имајќи на ум дека за $K > 0$ само точката $\sigma_b = -1$ припаѓа на ГМК на набљудуваниот затворен систем, може да се заклучи дека таа претставува точка на раздвојување на гранките од ГМК, како што е прикажано на Слика 6.26.



Слика 6.26. Графички приказ на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.62)

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Точката $\sigma_b = -7$ претставува точка на раздвојување на гранките од ГМК на набљудуваниот затворен систем за $K < 0$.



Слика 6.27. Графички приказ на точката на спојување на гранките од ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.62) за $K > 0$

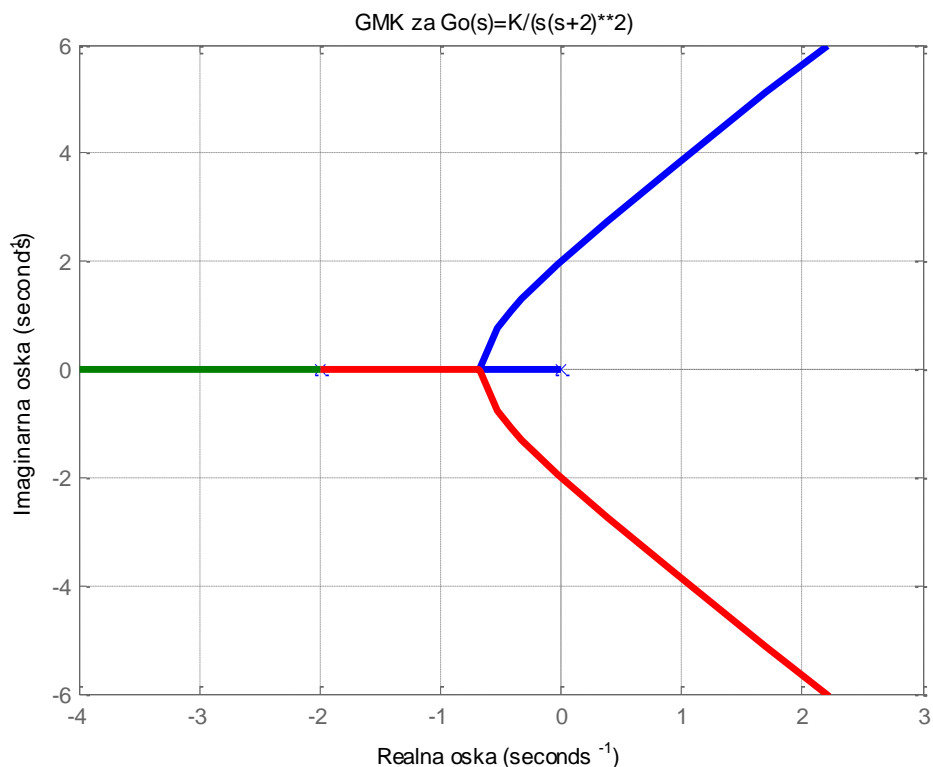
6.11. Да се определат точките на раздвојување односно спојување на гранките од геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+2)^2} \quad (6.65)$$

Решение: За да се определат бараните точки, треба да се реши равенката:

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b + 2} + \frac{1}{\sigma_b + 2} = 0 \Rightarrow \sigma_b^2 - \sigma_b - 2 = 0 \quad (6.66)$$

Единствениот корен на оваа равенка е $\sigma_b = -1$. Имајќи на ум дека за $K > 0$ делот од реалната оска помеѓу точките -2 и 0 и помеѓу точките $-\infty$ и -2 припаѓа на геометриското место корени на набљудуваниот затворен систем, може да се заклучи дека $\sigma_b = -1$ претставува точка на раздвојување на гранките од геометриското место на корени, како што е прикажано на Слика 6.28.



Слика 6.28. ГМК затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.65)

6.12. Да се определат точките на спојување односно раздвојување на гранките на ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K(s + 2.5)}{(s + 3 + j\sqrt{6})(s + 3 - j\sqrt{6})} \quad (6.67)$$

Решение: Од равенката (6.67) и (6.13) непосредно следува:

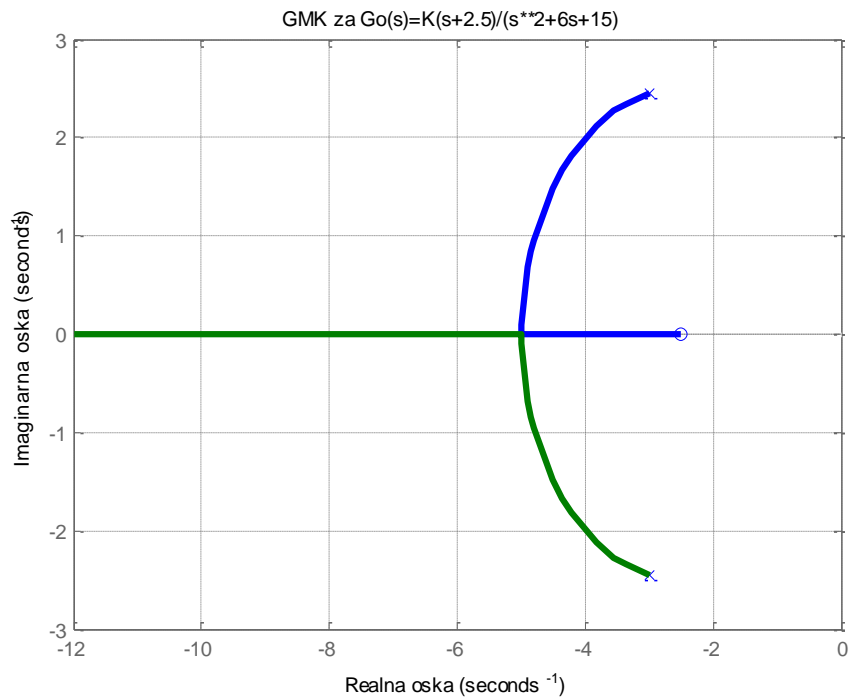
$$\frac{1}{\sigma_b + 3 + j\sqrt{6}} + \frac{1}{\sigma_b + 3 - j\sqrt{6}} = \frac{1}{\sigma_b + 2.5} \quad (6.68)$$

па бараните точки се решенијата на равенката:

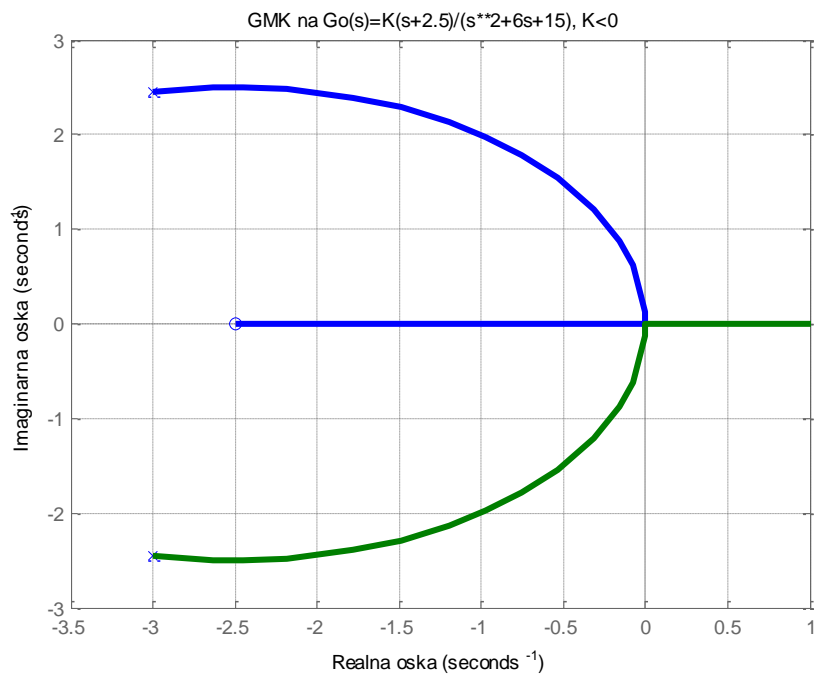
$$\sigma_b(\sigma_b + 5) = 0 \quad (6.69)$$

Точката $\sigma_b = -5$ е точка на спојување на гранките на ГМК на затворениот систем за $K > 0$, како што се гледа од Слика 6.29. Точката $\sigma_b = 0$ е точка на спојување на гранките на ГМК на затворениот систем за $K < 0$, како што е покажано на Слика 6.30.

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



Слика 6.29. Графички приказ на точката на спојување на гранките од ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.67) за $K > 0$



Слика 6.30. Графички приказ на точката на спојување на гранките од ГМК за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со (6.67) за $K < 0$

6.13. Да се определи аголот на оддалечување од комплексниот пол $s = -1 + j2$ на геометриското место на корени на затворениот систем, чиј отворен систем е:

$$G_0(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}, K > 0 \quad (6.70)$$

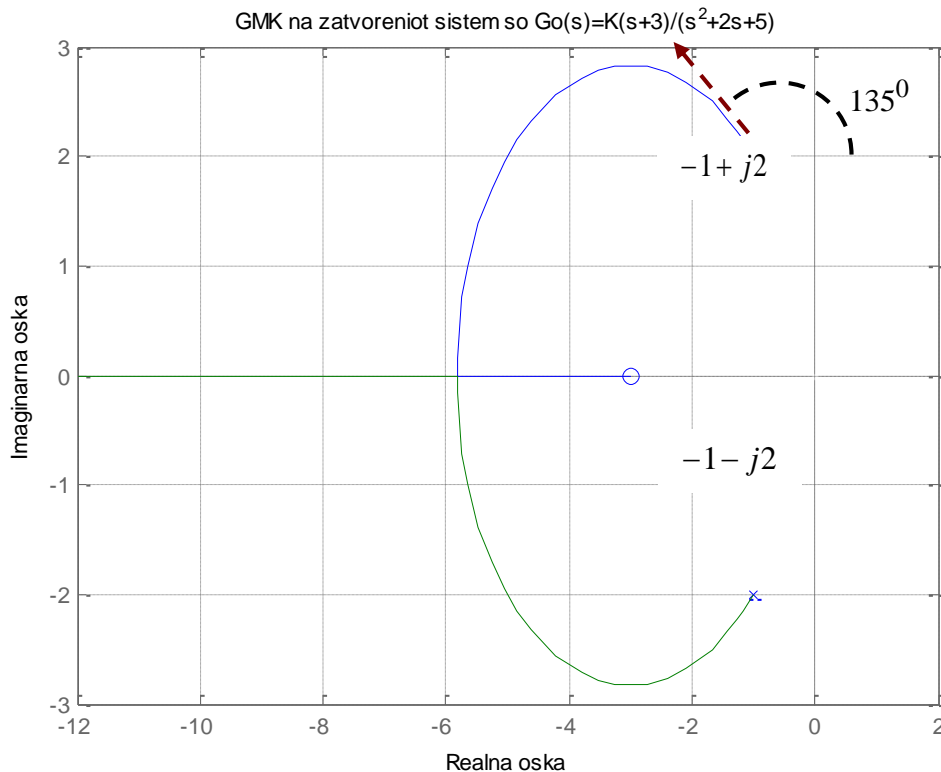
Решение: Аргументот на $G_0(s)' = \lim_{s \rightarrow -1+j2} (s+1-j2)G_0(s)$ е:

$$\arg[G_0(-1+j2)'] = \arg \frac{K(-1+j2+3)}{(-1+j2+1+j2)} = \arg K \left(\frac{1-j}{2} \right) = \operatorname{arctg}(-1) = -45^\circ \quad (6.71)$$

Оттука, аголот на оддалечување на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем од комплексниот пол $s = -1 + j2$ е:

$$\theta_D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \quad (6.72)$$

како што е покажано на Слика 6.31.



Слика 6.31. Графички приказ на аголот на оддалечување на ГМК за затворениот систем од Задача 6.13 од комплексниот пол $s = -1 + j2$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

6.14. Да се определи аголот на приближување до комплексната нула $z = j\sqrt{3}$ на геометриското место на корени на затворениот дискретен систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

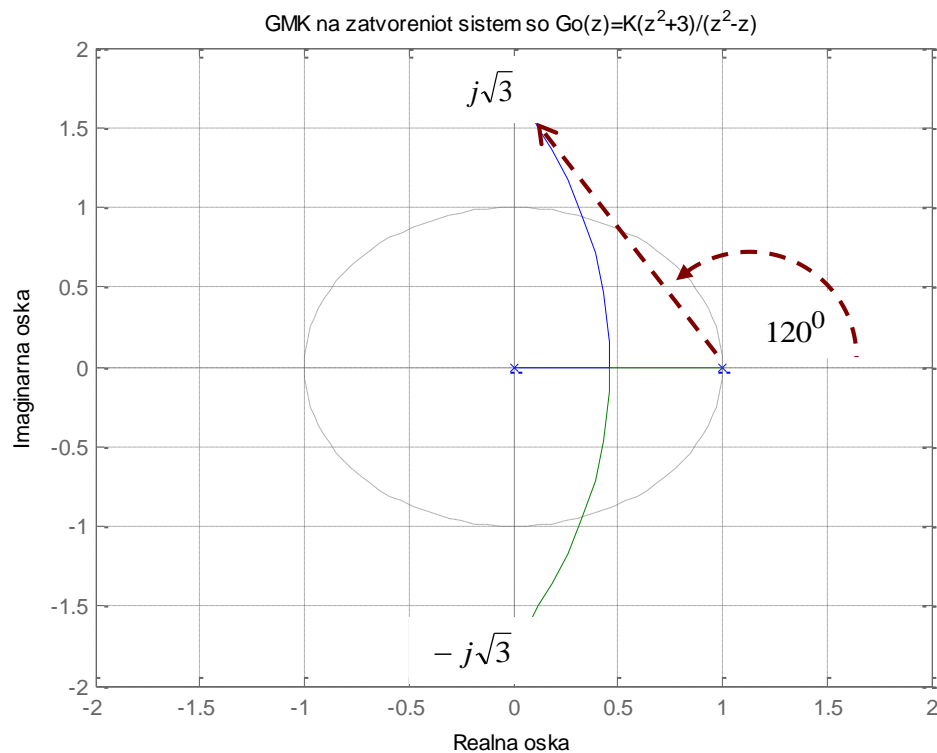
$$G_0(z) = \frac{K(z - j\sqrt{3})(z + j\sqrt{3})}{z(z-1)}, \quad K > 0 \quad (6.73)$$

Решение: Аргументот на $G_0(z)$ е $\lim_{z \rightarrow j\sqrt{3}} \frac{G_0(z)}{(z - j\sqrt{3})}$ е:

$$\arg[G_0(j\sqrt{3})] = \arg \frac{K(j\sqrt{3} + j\sqrt{3})}{j\sqrt{3}(j\sqrt{3} - 1)} = \arg \left(K \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} \right) = \text{arctg}(\sqrt{3}) = 60^\circ \quad (6.74)$$

Оттука, аголот на приближување на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем кон комплексната нула $z = j\sqrt{3}$ е:

$$\theta_A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad (6.75)$$



Слика 6.32. Графички приказ на аголот на приближување до комплексната нула $z = j\sqrt{3}$ на ГМК за затворениот дискретен систем, чиј отворен систем е (6.73)

6.15. Да се нацрта геометриското место корени на затворениот линеарен континуален динамички систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+6)(s+12)}, \quad K > 0 \quad (6.76)$$

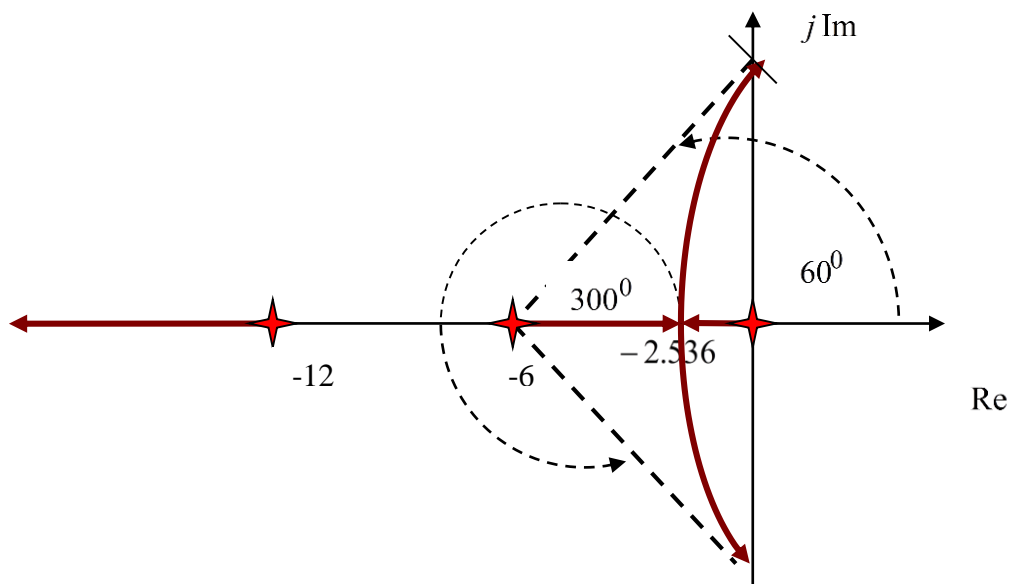
Решение: Деловите од реалната оска помеѓу 0 и -6 и помеѓу -12 и $-\infty$ припаѓаат на геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем за $K > 0$. Центарот на асимптотите се определува според (6.11) и се наоѓа во точката:

$$\sigma_c = -\frac{6+12}{3} = -6 \quad (6.77)$$

Геометриското место на корени за набљудуваниот затворен систем има три асимптоти и тие зафаќаат агол со реалната оска $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$ и $\beta_3 = 300^\circ$, соодветно. Бидејќи две гранки од геометриското место на корени се составуваат односно раздвојуваат на реалната оска помеѓу 0 и -6 , на тој дел мора да постои точка на раздвојување односно составување, која претставува решение на равенката:

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b + 6} + \frac{1}{\sigma_b + 12} = 0 \Rightarrow \sigma_b^2 + 12\sigma_b + 24 = 0 \Rightarrow \sigma_b = -2.536, \sigma_b = -9.464 \quad (6.78)$$

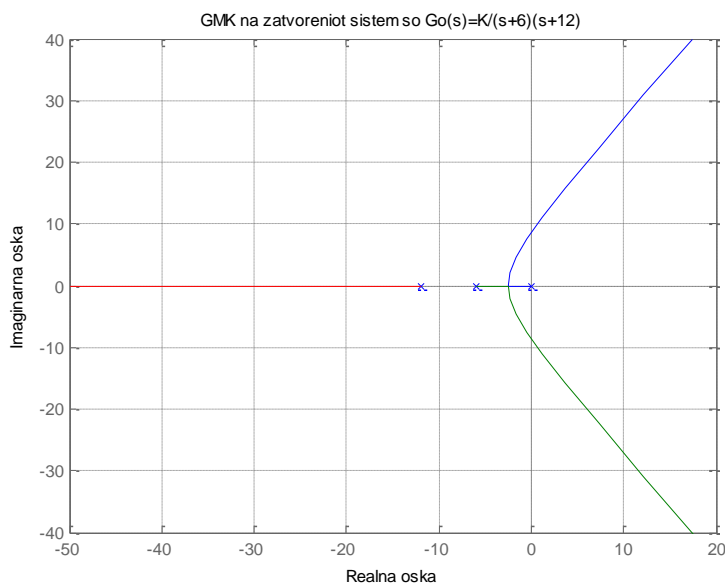
Тоа е точката $\sigma_b = -2.536$ (второто решение на (6.78) за σ_b не припаѓа на интервалот $(-6, 0)$). Бараното геометриско место на корени е скицирано на Слика 6.33.



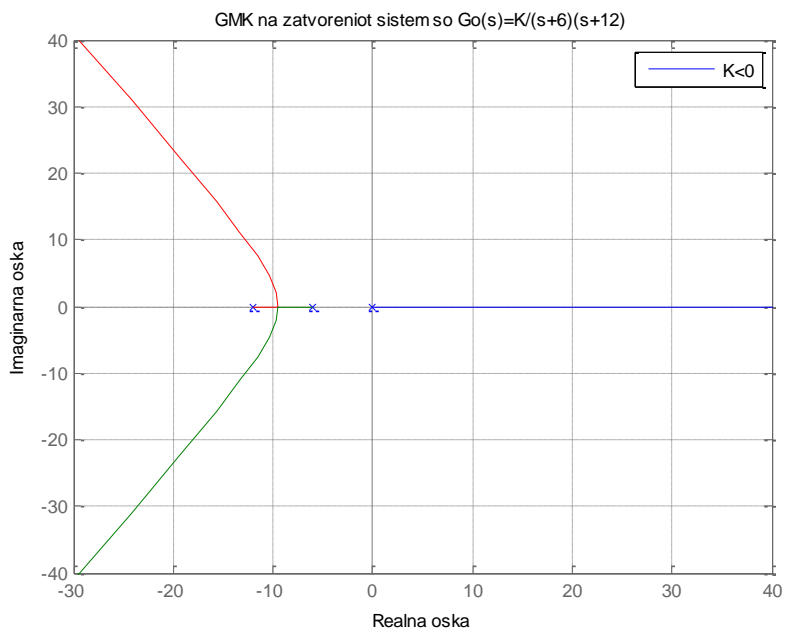
Слика 6.33. Графички приказ на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.76)

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

ГМК за $K < 0$ се црта на сличен начин. Во овој случај на ГМК припаѓа делот од реалната оска помеѓу точките 0 и ∞ и точките -6 и -12 . Точката на раздвојување односно спојување на гранките е $\sigma_b = -9.464$, а трите асимптотите зафаќаат агол со реалната оска од $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_2 = 120^\circ$ и $\beta_3 = 240^\circ$, соодветно. ГМК за набљудуваниот систем за $K < 0$ е прикажано на Слика 6.35.



Слика 6.34. Геометриското место корени од Слика 6.33 добиено со помош на МАТЛАБ



Слика 6.35. Графички приказ на геометриското место корени за затворениот систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција (6.75), за $K < 0$

6.16. Даден е затворениот линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s+2)^2}; K > 0 \quad (6.79)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на Слика 6.36. Да се определи преносната функција на затворениот систем.

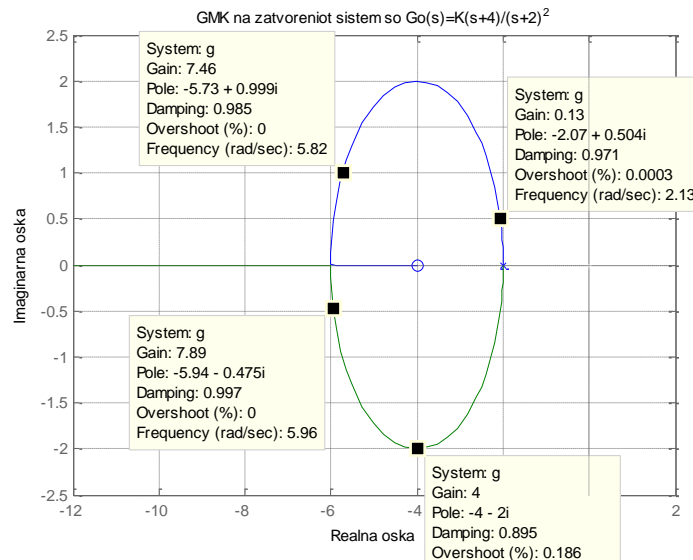
Решение: На Слика 6.36 се прикажани половите на затворениот систем за неколку вредности на коефициентот K . Така, за $K = 4$ затворениот систем има полови во точките: $s_{1,2} = -4 \pm j2$, па неговата преносна функција ќе биде од облик:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{4(s+4)}{(s+4+j2)(s+4-j2)} \quad (6.80)$$

Кога затворениот систем, чија преносна функција се одредува, не е со единична негативна повратна врска, туку има преносна функција од општ облик:

$$\frac{X}{Y} = \frac{G}{1+GH} \quad (6.81)$$

каде што H е преносната функција во повратната гранка, неговите полови се определуваат непосредно од геометриското место на корени, но неговите нули мора да се определат посебно од изразот (6.81).



Слика 6.36. Геометриско место на корени на затворениот систем од Задача 6.16

6.17. Даден е затворениот линеарен стационарен континуален динамички систем, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+4)}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2}; K > 0 \quad (6.82)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на Слика 6.36. Да се определи преносната функција на затворениот систем.

Решение: Со воведување на конкретните изрази (6.82) во изразот (6.81), за преносната функција на затворениот систем се добива:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\frac{K(s+4)}{s+2}}{1 + \frac{K(s+4)}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2}} = \frac{K(s+4)(s+2)}{(s+2)^2 + K(s+4)} = \frac{K(s+2)(s+4)}{(s+s_1)(s+s_2)} \quad (6.83)$$

Оттука, затворениот систем (6.83) има нули во точките $z_1 = -2$ и $z_2 = -4$ и тие се разликуваат од нулите на соодветниот отворен систем. Бидејќи геометриското место на корени на затворениот систем (6.83) е исто со геометриското место на корени на системот од претходниот пример, тој ќе ги има истите полови за конкретни вредности на коефициентот K . Така, за $K = 4$ затворениот систем (6.83) има полови во точките: $s_{1,2} = -4 \pm j2$, па неговата преносна функција ќе биде од облик:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{2(s+2)(s+4)}{(s+4+j2)(s+4-j2)} \quad (6.84)$$

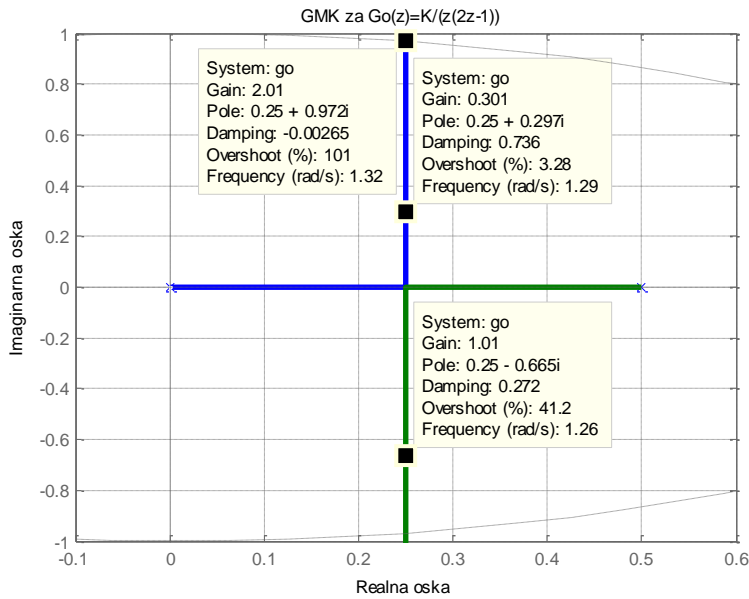
6.18. Даден е затворениот линеарен стационарен дискретен динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G(z) = \frac{K}{z(2z-1)}; K > 0 \quad (6.85)$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на Слика 6.37. Да се определи преносната функција на затворениот систем.

Решение: На Слика 6.37 се прикажани половите на затворениот систем за неколку вредности на коефициентот K . Така, за $K = 0.3$ затворениот систем има полови во точките $z_{1,2} = 0.25 \pm j0.3$, па неговата преносна функција ќе биде од облик:

$$\frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{0.3}{z^2 - 0.5z + 0.15} \quad (6.86)$$

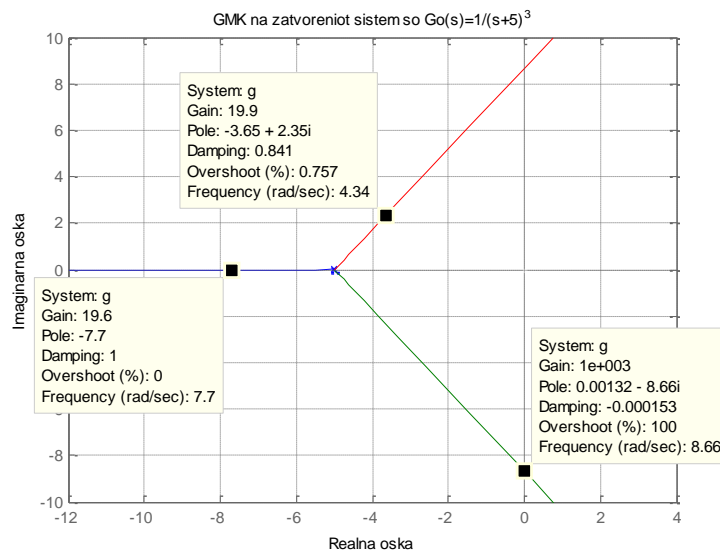


Слика 6.37. Геометриско место на корени на затворениот систем од Задача 6.18

6.19. Даден е линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{20}{(s+5)^3} \tag{6.87}$$

а неговото геометриско место на корени е прикажано на Слика 6.38.



Слика 6.38. Геометриско место на корени на затворениот систем од Задача 6.19

Решение: Од Слика 6.38 може да се утврди дека вредноста на коефициентот на засилување K која одговара на пресекот од геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем со имагинарната оска е 1000, додека конструктивната односно изведбена вредност на овој коефициент е 20. Следствено, резервата на засилување на набљудуваниот затворен систем од примерот е:

$$\text{резерва на засилување} = \frac{1000}{20} = 50 \quad (6.88)$$

6.20. Да се определи резервата на засилување на затворениот дискретен систем од Задачата 6.18.

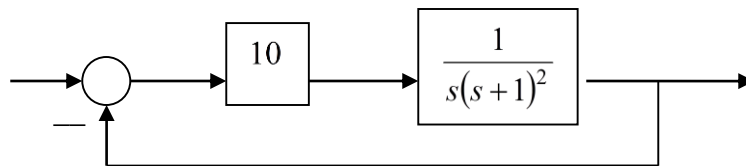
Решение: Од Слика 6.38 се гледа дека геометриското место на корени на набљудуваниот систем ја сече единичната кружница за $K = 2$. Следствено, неговата резерва на засилување ќе биде:

$$d = \frac{2}{0.3} = 6.7 \quad (6.89)$$

Резервата на фаза на еден затворен систем исто така може да се определи од неговото геометриско место на корени. За таа цел најнапред треба да се определи точка ω_1 на границата на стабилност за која $|GH| = 1$ за изведбената (конструктивна) вредност K на коефициентот на засилување на отворениот систем. Тогаш резервата на фаза на набљудуваниот систем се определува според формулата:

$$\text{резерва на фаза} = 180^0 + \arg[GH(\omega_1)] \quad (6.90)$$

6.21. Даден е затворениот линеарен стационарен континуален систем од Слика 6.39, а неговото геометриско место на корени е прикажано на Слика 6.40. Да се определи резервата на фаза на набљудуваниот систем.



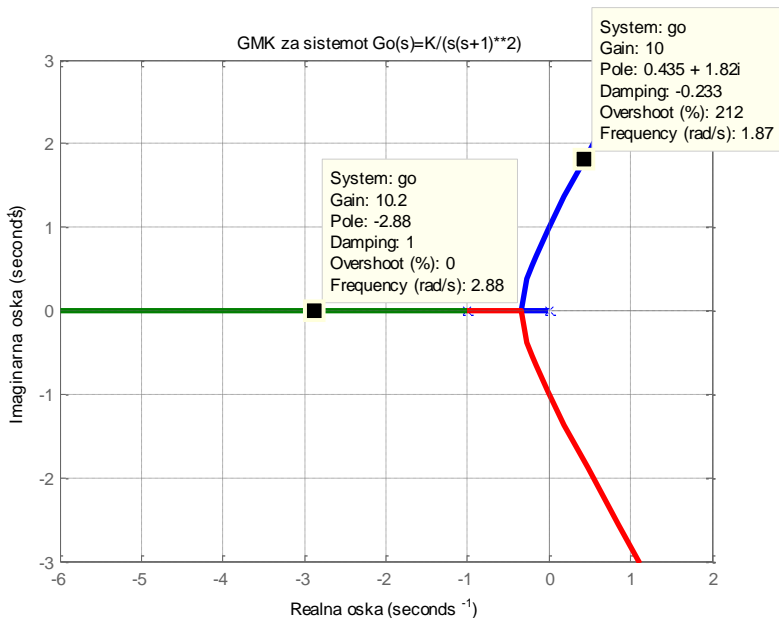
Слика 6.39. Структурна блок - шема на затворениот систем од Задача 6.21

Решение: Решението на равенката:

$$|GH(\omega_1)| = \left| \frac{10}{j\omega_1(j\omega_1 + 1)^2} \right| = 1 \quad (6.91)$$

е $\omega_1 = 2$ и тоа ја одредува точката на имагинарната оска во s -комплексната рамнина за која $|GH| = 1$. Аргументот на $GH(2)$ е -217° , па резервата на фаза на набљудуваниот затворен систем е:

$$\varphi_{rf} = 180^\circ - 217^\circ = 37^\circ \quad (6.92)$$



Слика 6.40. Геометриско место на корени на затворениот систем од Задача 6.21

6.22. Да се определи факторот на релативно придушување на затворениот систем од трет ред од Задачата 6.21.

Решение: Ако се повлече права од координатниот почеток низ точката на геометриското место на корени на набљудуваниот систем, која одговара коефициент на засилување $K = 10$, тоа ќе биде правата на факторот на релативно придушување ζ кој одговара на парот доминантни конјугирано - комплексни полови на системот и тој се определува по формулата:

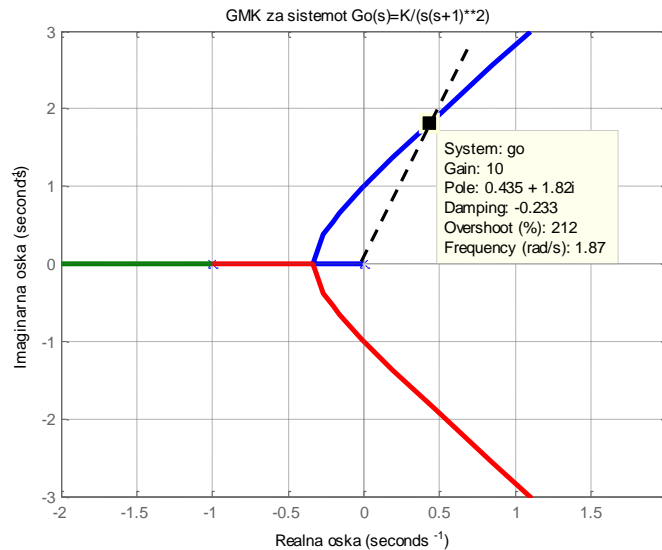
$$\zeta = \cos \theta \quad (6.93)$$

каде што θ е аголот што го зафаќа правата на бараниот фактор на релативно придушување со негативниот дел од реалната оска. Во конкретниот случај $\theta = 76.57^\circ$, па:

$$\zeta = \cos \theta = \cos 76.57^\circ = 0.233 \quad (6.94)$$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

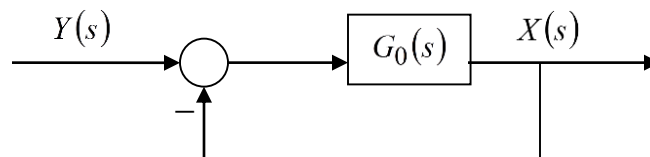
Определената вредност за ζ претставува добра апроксимација на факторот на придушување на набљудуваниот затворен систем од трет ред, затоа што неговите комплексни полови имаат доминантно влијание врз неговото поведење.



Слика 6.41. Геометриско место на корени на затворениот систем од Задача 6.21

6.23. Даден е затворениот систем со единична негативна повратна врска од Слика 6.42, чиј отворен систем е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{K(s^2 + 10s + 74)}{s^2(s + 4)} \quad (6.95)$$



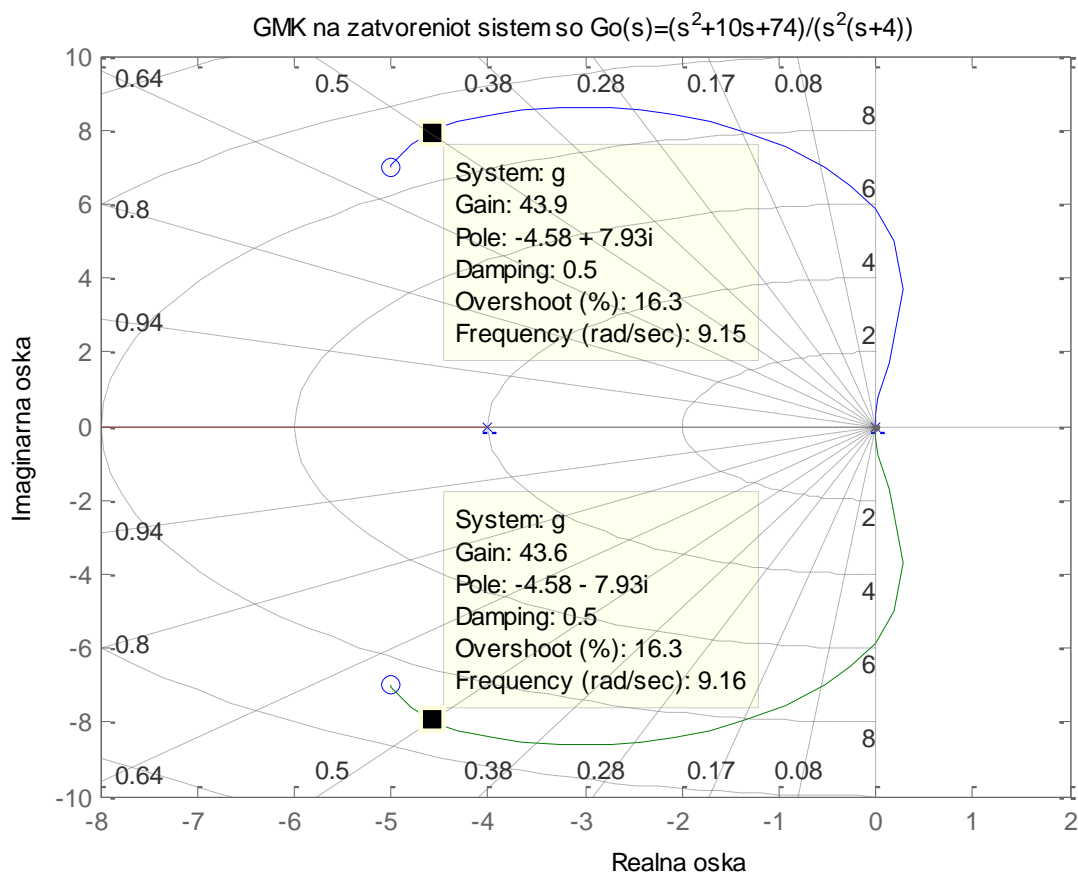
Слика 6.42. Илустрација кон Задачата 6.23

Со помош на методот геометриско место на корени, да се определи вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем за која, доминантниот пар полови на затворениот систем ќе има фактор на релативно придушување $\zeta = 0.512$.

Решение: Најнапред се црта геометриското место на корени на набљудуваниот затворен систем. Потоа во согласност со (6.19) се пресметува аголот θ кој одговара на саканиот фактор на релативно придушување на неговиот доминантен пар полови $\zeta = 0.5$. Од

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

координатниот почеток на комплексната рамнина во која е претставено ГМК на набљудуваниот затворен систем, се повлекува права која со негативниот дел од реалната оска зафаќа агол θ . Тоа е права на константен фактор на релативно придушвање $\zeta = 0.5$, што значи дека сите точки од комплексната рамнина што лежат на оваа права имаат ист фактор на релативно придушвање. Следствено, точката од ГМК на затворениот систем која лежи на оваа права, го претставува доминантниот пар полови на затворениот систем со саканиот фактор на релативно придушвање $\zeta = 0.5$. Останува уште да се пресмета коефициентот на засилување на отворениот систем K кој одговара на овој пар полови. Тој се определува врз основа на принципот на аргументот (6.9), од каде следува (6.10). Меѓутоа, до истиот резултат може да се дојде многу полесно со помош на програмскиот пакет MATLAB. На Слика 6.43 е прикажано геометриското место на корени на зададениот затворен систем од Слика 6.42. Оттаму се гледа дека пресечната точка на ГМК со правата на константен фактор на релативно придушвање $\zeta = 0.5$ го дефинира доминантниот пар полови на затворениот систем $s_{1,2} = -4.58 \pm j7.93$, на кој одговара коефициентот на засилување на отворениот систем $K = 43.9$.



Слика 6.43. ГМК на затворениот систем од Слика 6.42

6.24. Преносната функција на еден затворен систем е:

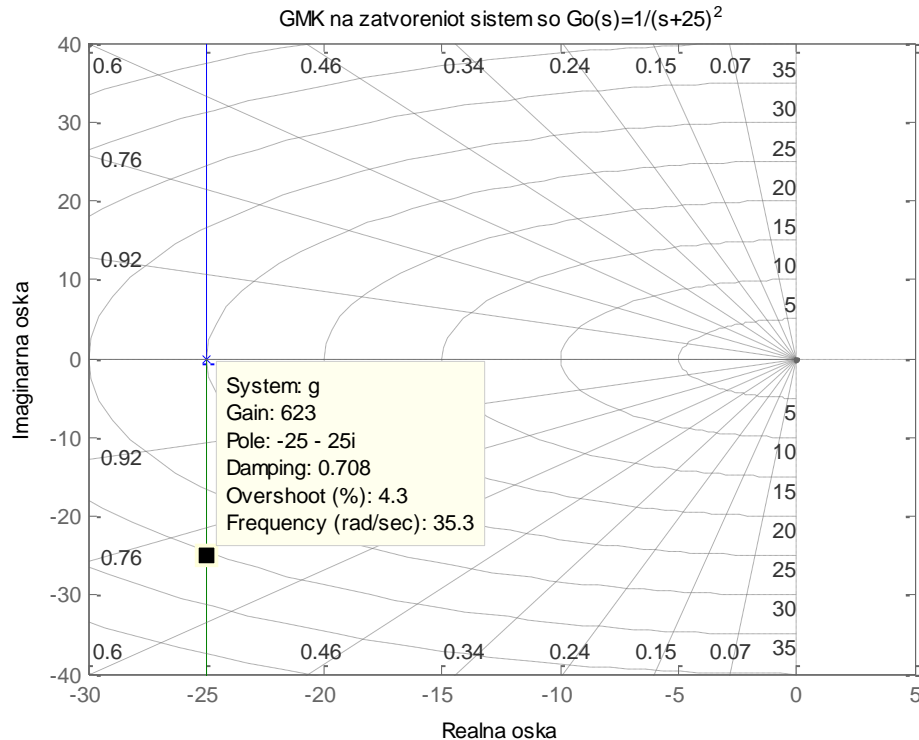
$$G(s) = \frac{K}{(s+25)^2 + K} \quad (6.96)$$

Со помош на методот геометриско место на корени да се определи вредноста на коефициентот на засилување K , така што доминантниот пар полови на системот ќе има фактор на релативно придушување $\zeta = 0.707$.

Решение: За преносната функција на соодветниот отворен систем се добива:

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \Rightarrow G_0(s) = \frac{G(s)}{1-G(s)} = \frac{K}{(s+25)^2} \quad (6.97)$$

Геометриското место на корени на зададениот затворен систем (6.96) добиено со помош на програмскиот пакет MATLAB е прикажано на Слика 6.44. Оттаму се гледа дека пресечната точка на ГМК со правата на константен фактор на релативно придушување $\zeta = 0.707$ го дефинира доминантниот пар полови на затворениот систем $s_{1,2} = -25 \pm j25$, на кој одговара коефициентот на засилување на отворениот систем $K = 625$.



Слика 6.44. ГМК на затворениот систем од Задача 6.23

6.25. Даден е затворен систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{(s+a)}{s(s^2+2s+4)} \quad (6.98)$$

Со помош на методот ГМК да се определи вредноста на параметарот a , за која затворениот систем ќе биде гранично стабилен.

Решение: Изворно, постапката ГМК била развиена за испитување на зависноста на половите на затворениот систем од коефициентот на засилување на соодветниот отворен систем. Меѓутоа, постапката може да се употреби и за испитување на зависноста на половите на затворениот систем (нивната положба во комплексната рамнина) и од останатите параметри на отворениот систем. Тоа е илустрирано на конкретниот пример од оваа задача.

Карактеристичната равенка на набљудуваниот затворен систем е следната:

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{(s+a)}{s(s^2+2s+4)} = \frac{s(s^2+2s+4) + (s+a)}{s(s^2+2s+4)} = 0 \quad (6.99)$$

па неговиот карактеристичен полином $a(s)$ ќе има облик:

$$a(s) = s^3 + 2s^2 + 5s + a \quad (6.100)$$

За да се испита влијанието на параметарот a врз половите на затворениот систем, се набљудува карактеристичната равенка:

$$1 + \frac{a}{s^3 + 2s^2 + 5s} = 0 \quad (6.101)$$

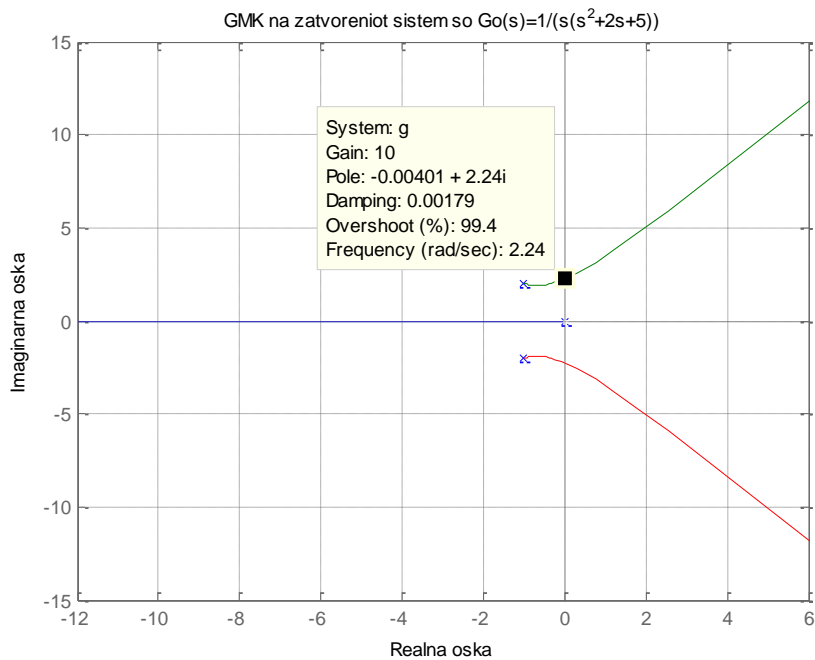
каде што:

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{\tilde{K}}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{a}{s(s^2 + 2s + 5)} \quad (6.102)$$

е новиот отворен систем со помош на кој се определува ГМК за соодветниот затворен систем $\tilde{G}(s)$. Овој затворен систем има исти полови како и оригиналниот затворен систем $G(s)$, па наместо да се испитува условот за гранична стабилност на затворениот систем $G(s)$ во функција од неопределениот параметар a , се испитува условот за гранична стабилност на затворениот систем $\tilde{G}(s)$.

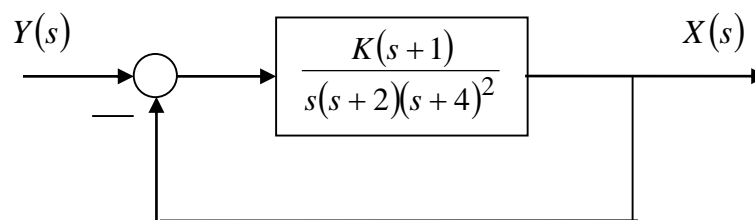
СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

ГМК на затворениот систем $\tilde{G}(s)$ добиено со помош на MATLAB е прикажано на Слика 6.45 и оттаму може да се прочита дека критичната вредност на параметарот a за која тој ќе биде гранично стабилен е $a = 10$. Имено, критичната вредност на коефициентот на засилување \tilde{K} за која набљудуваниот затворен систем $\tilde{G}(s)$ ќе биде гранично стабилен односно на границата на стабилност, е онаа вредност на \tilde{K} која одговара на пресечната точка на ГМК со имагинарната оска. Во конкретниот случај, тоа е вредноста $\tilde{K} = a = 10$. Решението може да се добие и со помош на специјална наредба на MATLAB.



Слика 6.45. ГМК на затворениот систем $\tilde{G}(s)$ со определена гранична вредност на параметарот a за која тој ќе биде на границата на стабилност

6.26. Да се нацрта ГМК за затворениот систем од Слика 6.46. Што може да се каже за неговата стабилност?



Слика 6.46. Илустрација кон Задача 6.26

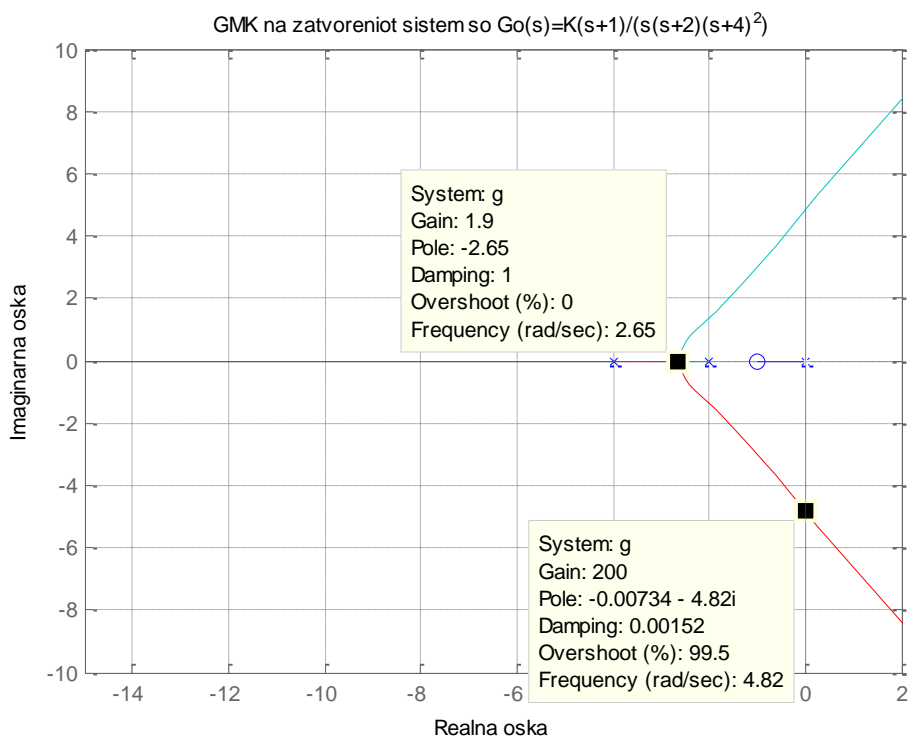
Решение: Отворениот систем има 4 полови: $s_1^* = 0$, $s_2^* = -2$, $s_{3,4}^* = -4$ и нула во $s_2^0 = -1$. Бараното ГМК ќе има четири гранки, кои поаѓаат од половите на отворениот систем и завршуваат во неговите нули (отворениот систем има само една конечна нула). Деловите од реалната оска што припаѓаат на бараното ГМК се наоѓаат помеѓу 0 и -1, помеѓу -2 и -4 и помеѓу -4 и $-\infty$. ГМК на набљудуваниот затворен систем има $4-1=3$ асимптоти со центар во точката: $\sigma_A = -\frac{0+2+4+4-1}{4-1} = -\frac{9}{3} = -3$ и наклони кон реалната оска:

$\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$ и $\beta_3 = 300^\circ$, соодветно. Точката на раздвојување на гранките од ГМК се добива на следниот начин:

$$\frac{1}{\sigma_d} + \frac{1}{\sigma_d + 2} + \frac{1}{\sigma_d + 4} + \frac{1}{\sigma_d + 4} = \frac{1}{\sigma_d + 1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma_d} + \frac{1}{\sigma_d + 2} + \frac{1}{\sigma_d + 4} + \frac{1}{\sigma_d + 4} = \frac{1}{\sigma_d + 1} \Rightarrow \sigma_{d1} = -2.7, \sigma_{d2} = -7.53 \quad (6.103)$$

Од двете решенија (6.103), само решението $\sigma_d = -2.7$ припаѓа на ГМК на набљудуваниот затворен систем за $K > 0$. Бараното ГМК е прикажано на Слика 6.48.



Слика 6.47. ГМК за затворениот систем од Слика 6.46

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

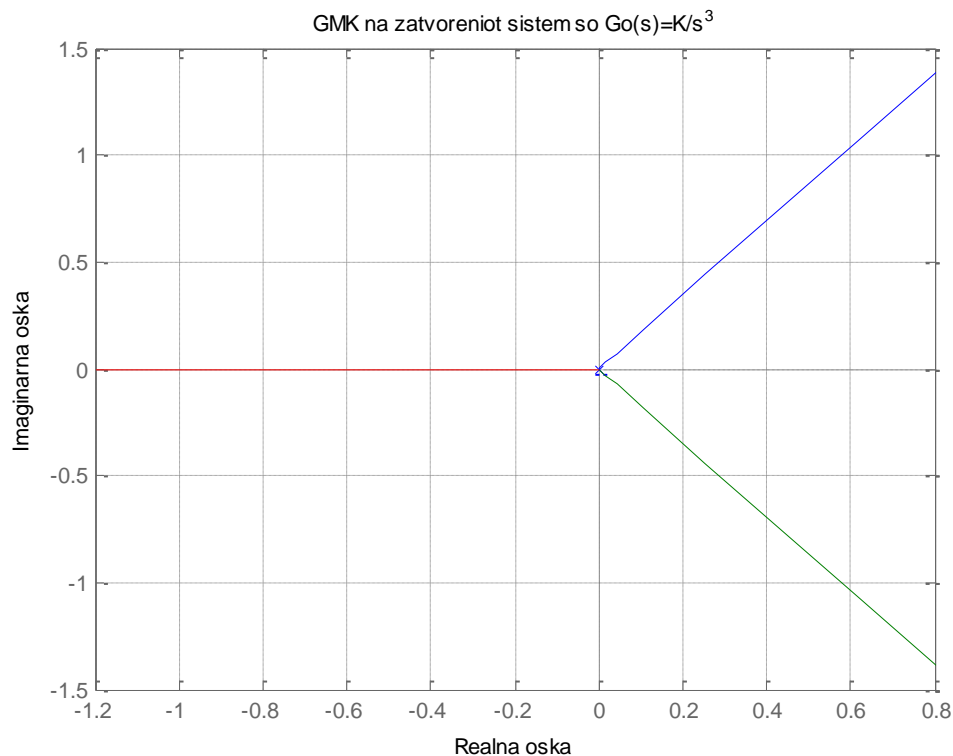
Оттука се гледа дека за релативно мали вредности на K ($K < 200$), затворениот систем е стабилен (ГМК се наоѓа лево од имагинарната оска), додека при големи вредности на K ($K > 200$) тој станува нестабилен (одделни гранки на ГМК ја сечат имагинарната оска и поминуваат во десната полурамнина).

6.27. Што може да се каже за стабилноста на затворениот систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем претставува интегратор од трет ред врз основа на неговото ГМК?

Решение: Отворениот систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^3}, K > 0 \quad (6.104)$$

ГМК на набљудуваниот затворен систем е прикажано на Слика 6.48. Врз основа на него може да се заклучи дека затворениот систем е суштински нестабилен, бидејќи само еден негов пол лежи во левата полурамнина од s – комплексната рамнина; останатите два се наоѓаат во десната полурамнина од s – комплексната рамнина за секое $K > 0$. Имено, две гранки од ГМК се наоѓаат десно од имагинарната оска за секое $K > 0$

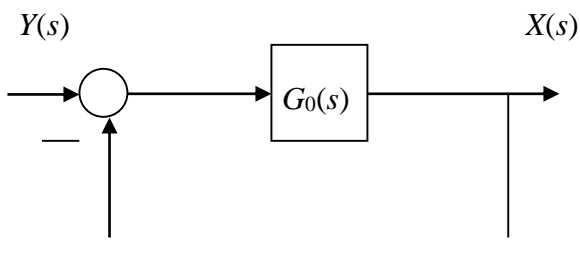


Слика 6.48. ГМК на затворениот систем од Задача 6.27

6.28. Со помош на постапката геометриско место на корени, да се определи вредноста на коефициентот на засилување K на отворениот систем со преносна функција:

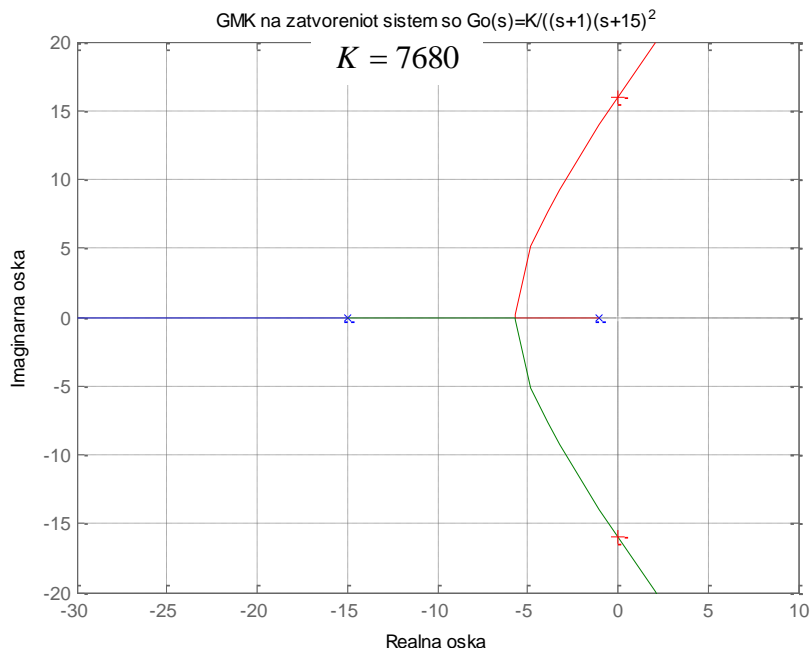
$$G_0(s) = \frac{K}{(s+1)(s+15)^2} \quad (6.105)$$

за која затворениот систем со единична негативна повратна врска ќе има константа на положба $K_p \geq 20$ и резерва на засилување $d \geq 1.5$.



Слика 6.49. Илустрација кон Задача 6.28

Решение: Геометриското место на корени за затворениот систем од задачата е прикажано на Слика 6.50.



Слика 6.50. Геометриско место на корени за затворениот систем од Задача 6.28

Од условот за константата на положба следува:

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(s+1)(s+15)^2} = \frac{K}{225} \geq 20 \Rightarrow K \geq 4500 \quad (6.106)$$

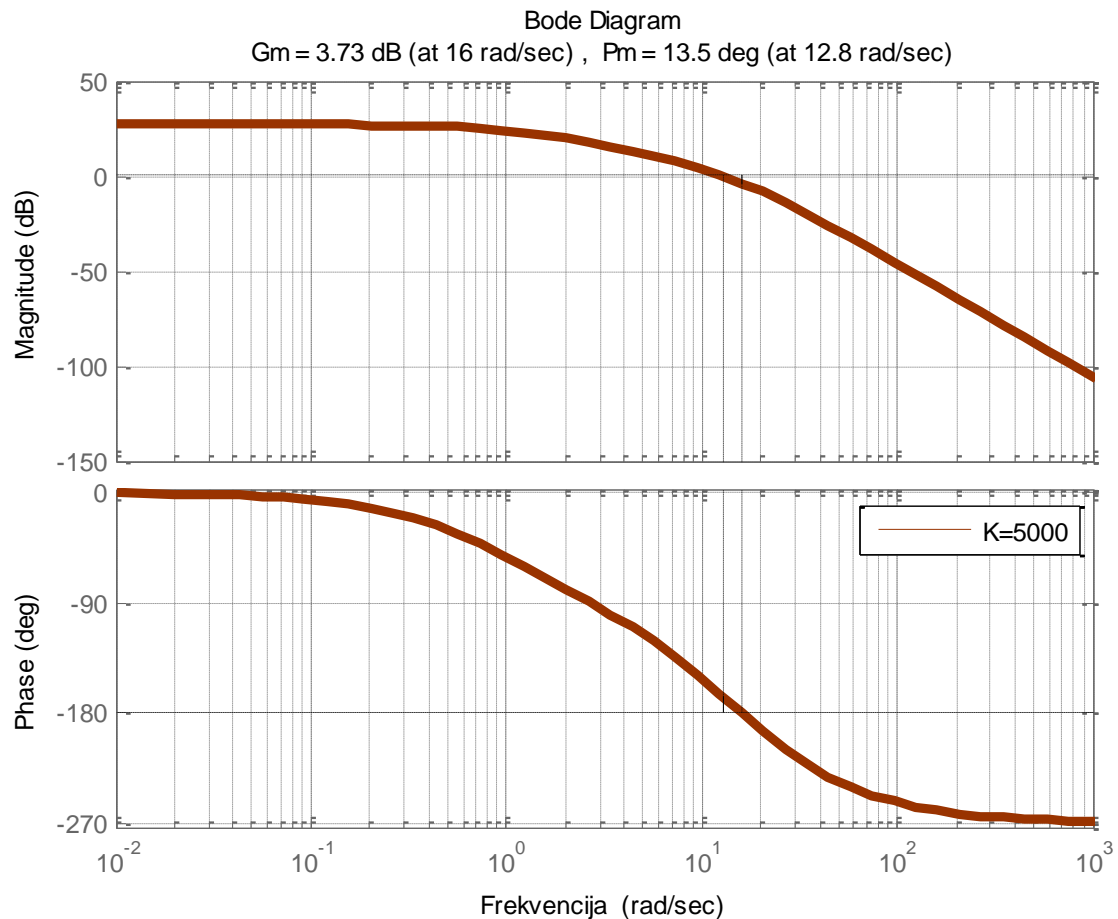
додека од условот за резервата на засилување се добива:

$$d = \frac{K_{gr}}{K} = \frac{7680}{K} \geq 1.5 \Rightarrow K \leq \frac{7680}{1.5} = 5120 \quad (6.107)$$

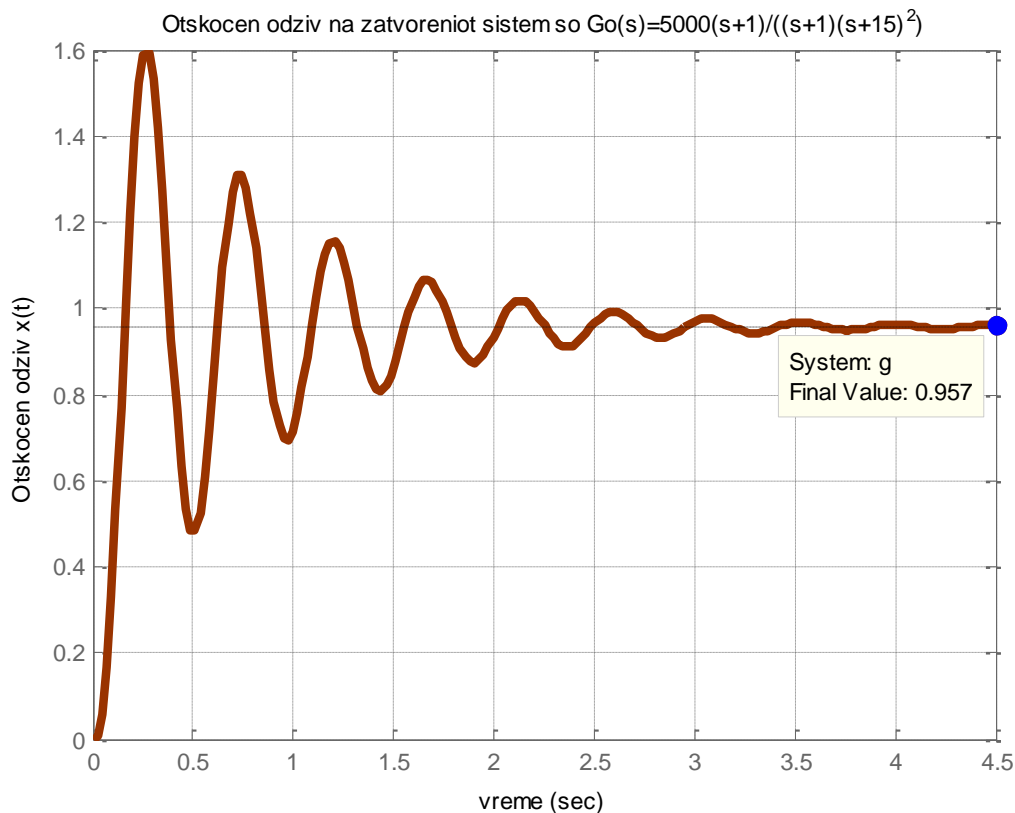
Следствено:

$$4500 \leq K \leq 5120 \quad (6.108)$$

Една вредност на K која го задоволува горниот услов е, на пример, $K = 5000$. На Слика 6.51 се прикажани Бодевите дијаграми на отворениот систем (6.105) за $K = 5000$, од каде се гледа дека затворениот систем навистина има резерва на засилување $d > 1.5$, додека на Слика 6.52 е прикажан отскочниот одзив на затворениот систем од каде се гледа дека неговата стационарна грешка е помала од 5%.



Слика 6.51. Бодевите дијаграми на отворениот систем (6.105) за $K = 5000$

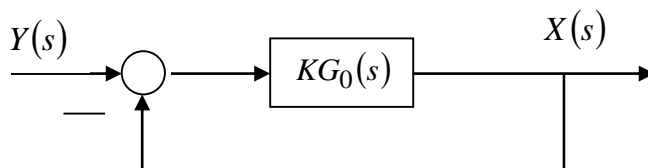


Слика 6.52. Отскочен одзив на затворениот систем од Задача 6.28

6.29. Даден е затворен систем со единична негативна повратна врска како на Слика 6.54. Преносната функција на соодветниот отворен систем е:

$$G_0(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 4s + 5} \quad (6.109)$$

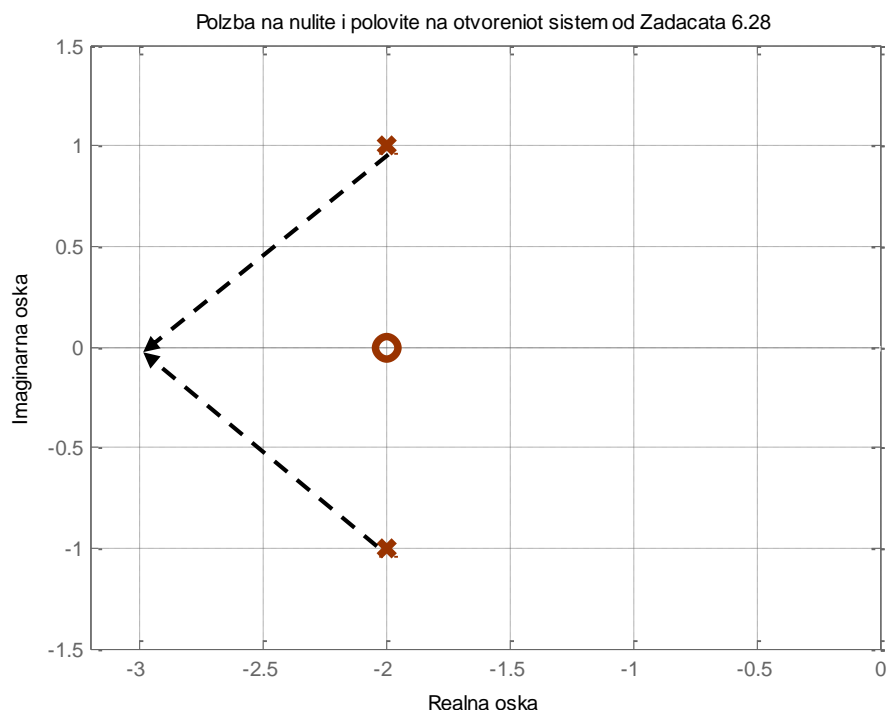
Да се определи вредноста на $\arg[G_0(j\omega)]$ во точката $s = -3 + j0$. Дали оваа точка се наоѓа на ГМК за набљудуваниот затворен систем? Во случај на потврден одговор, да се пресмета соодветната вредност на коефициентот K .



Слика 6.53. Илустрација кон Задача 6.29

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Решение: Вредноста на $\arg[G_0(j\omega)]$ во точката $s = -3 + j0$ се пресметува така што ќе се пресмета алгебарскиот збир од аглиите што со реалната оска ги зафаќаат векторите повлечени од нулите и половите на отворениот систем до таа точка. За таа цел најнапред се претставуваат нулите и половите на отворениот систем $G_0(s)$ во s -комплексната рамнина и потоа се цртаат векторите од овие точки до зададената точка $s = -3 + j0$.



Слика 6.54. Полови и нули на отворениот систем за затворениот систем од Слика 6.53

Од дијаграмот на Слика 6.54 непосредно следува:

$$\sum \text{агли} = 180^\circ - \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-1}\right) = 180^\circ \quad (6.110)$$

што значи дека точка $s = -3 + j0$ го задоволува принципот на аргументот па со сигурност може да се констатира дека таа се наоѓа на ГМК за набљудуваниот затворен систем, односно претставува негов пол. Тогаш, соодветната вредност за K се пресметува според принципот на модулот:

$$|KG_0(s)| = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{|G_0(s)|} \quad (6.111)$$

односно според формулата:

$$K = \frac{\prod_i |s + p_i|}{\prod_j |s + z_j|} = \frac{\prod_i L_i}{\prod_j L_j} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2}}{1} = 2 \quad (6.112)$$

каде што L_i се должините на векторите од половите на отворениот систем до набљудуваниот пол на затворениот систем, а L_j се должините на векторите од нулите на отворениот систем до набљудуваниот пол на затворениот систем.

6.30. Нека отворениот систем за набљудуваниот затворен систем како на Слика 6.53 е опишан со преносната функција:

$$G_0(s) = \frac{20}{s(s+10)^2} \quad (6.113)$$

Да се намали стационарната грешка на затворениот систем за 100 пати, без значително да се промени неговиот преоден режим, ако на влезот од системот дејствува влезна возбуда од облик:

$$y(t) = th(t) \quad (6.114)$$

Решение: Бидејќи отворениот систем $G_0(s)$ има астатизам од прв ред, набљудуваниот затворен систем идеално ќе следи константен влез, додека линеарно променлив влез со константна брзина на промена ќе следи со одредена грешка, која зависи од величината на неговата брзинска константа K_v , односно од вредноста на коефициентот на засилување на отворениот систем K . Во конкретниот случај $K = 20$ и:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{20}{s(s+10)^2} = \frac{20}{100} = 0.2 \quad (6.115)$$

па стационарната грешка на затворениот систем за дадениот влез $y(t) = th(t)$ ќе изнесува:

$$e_v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_v(s) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0.2} = 5 \quad (6.116)$$

За да се намали оваа грешка за фактор $\lambda = 100$, треба брзинската константа на затворениот систем да се зголеми исто толку пати, што значи дека коефициентот на засилување на компензираниот отворен систем треба да изнесува $K_{comp} = 2000$.

Меѓутоа, ова проектно барање не може да се оствари само со едноставно зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем, бидејќи ќе дојде до значителна промена на преодниот режим на компензираниот затворен систем, што е спротивно на второто проектно барање. Затоа задачата се решава со помош на И – компензатор, чи нула и пол се доволно близу до координатниот почеток, така што практично нема да имаат никакво влијание врз поведението на системот во преодниот режим. Овој компензатор има преносна функција од облик:

$$R(s) = \frac{s+b}{s+a} \quad (6.117)$$

при што односот $\frac{b}{a}$ треба да биде еднаков на $\lambda = 100$. Ако произволно се усвои $b = 0.1$, И – компензаторот ќе има преносна функција:

$$R(s) = \frac{s+0.1}{s+0.001} \quad (6.118)$$

а преносната функција на компензираниот отворен систем ќе биде:

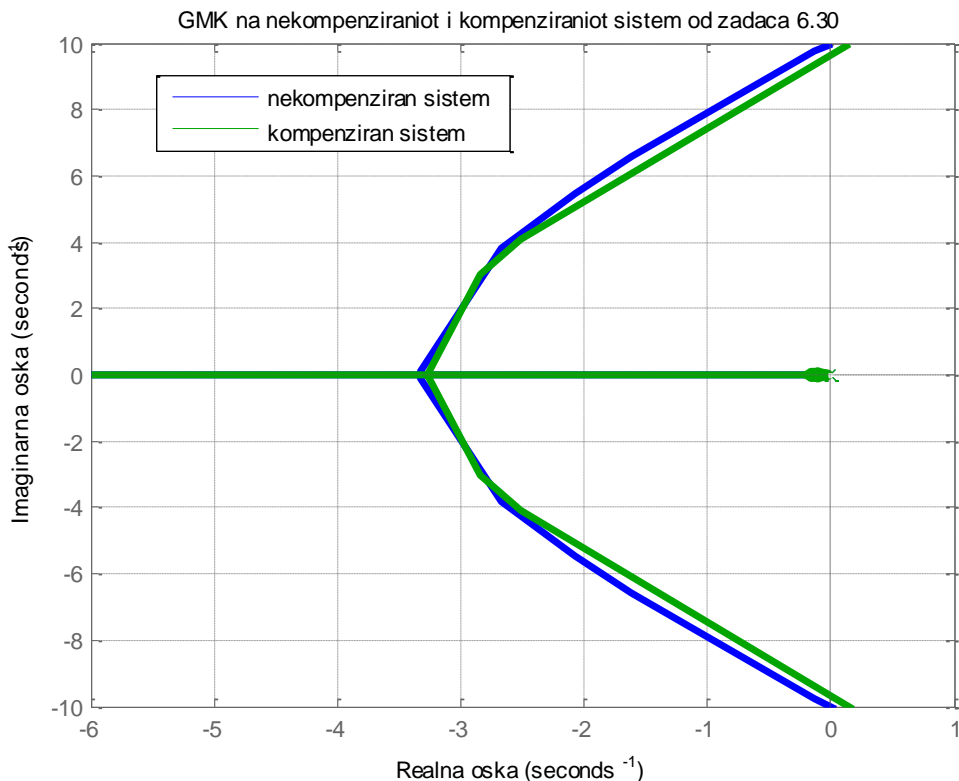
$$G_{0c}(s) = R(s)G_0(s) = \frac{s+0.1}{s+0.001} \cdot \frac{20}{s(s+10)^2} \quad (6.119)$$

Со проверка лесно може да се утврди дека компензираниот затворен систем ги задоволува поставените проектни барања. Имено:

$$K_{v_{comp}} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{0c}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{s+0.1}{s+0.001} \cdot \frac{20}{s(s+10)^2} \right] = \frac{0.1}{0.001} \cdot \frac{20}{100} = 20 \quad (6.120)$$

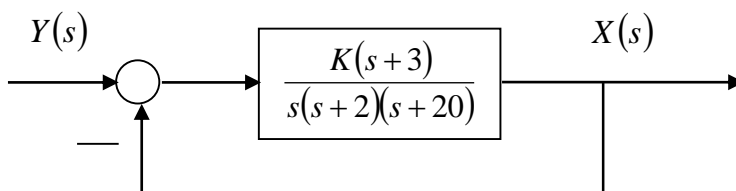
$$e_{v_{comp}}(\infty) = \frac{1}{K_{v_{comp}}} = \frac{1}{20} = 0.05 \quad (6.121)$$

ГМК на некомпензираниот и компензираниот затворен систем се прикажани на Слика 6.55. Оттаму се гледа дека постои мала разлика помеѓу нив во подрачјето на ниските фреквенции, заради воведувањето на ниско фреквентниот пар нула – пол на И – компензаторот, додека во подрачјето на високите фреквенции двете ГМК практично се поклопуваат, што значи дека И – компензаторот не влијае врз поведението на затворениот систем во подрачјето на високите фреквенции, бидејќи ниско фреквентната нула и пол на компензаторот практично се поништуваат.



Слика 6.55. Геометриско место на корени на затворениот систем од Задача 6.30 пред и по компензацијата со И - компензатор

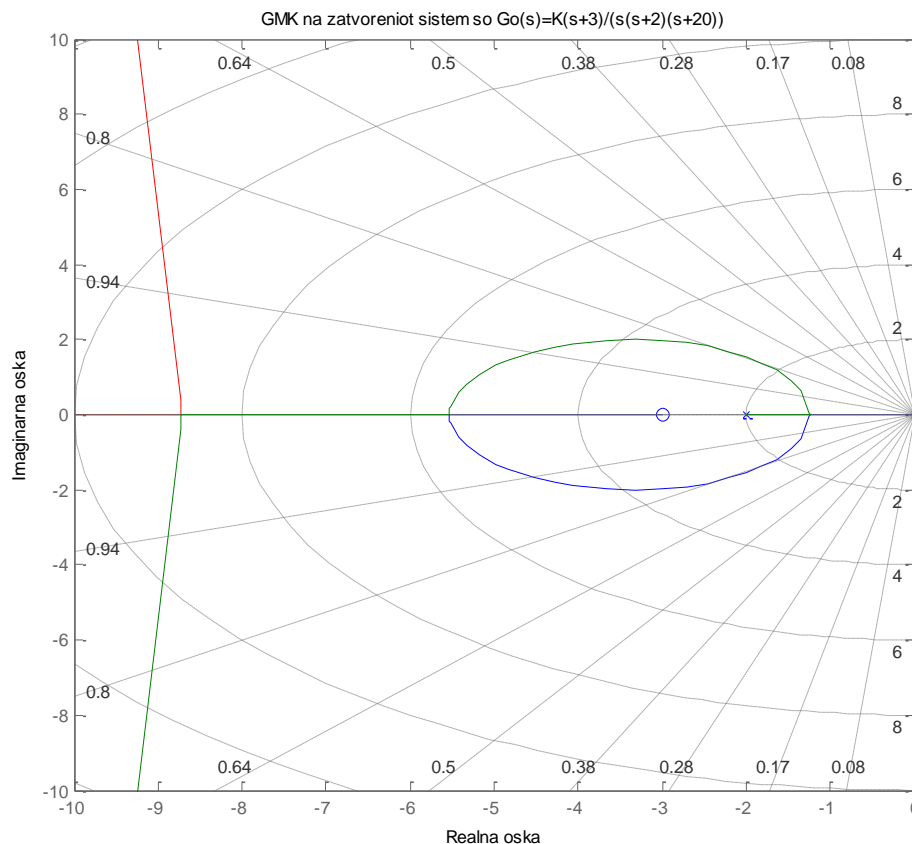
6.31. Даден е затворениот систем од Слика 6.56. Да се проектира засилувањето на отворениот систем K , така што затворениот систем ќе има максимален прескок $M\% \leq 1.5\%$.



Слика 6.56. Илустрација кон Задача 6.31

Решение: На максимален прескок $M\% \leq 1.5\%$ одговара фактор на релативно придрушување $\zeta = 0.8$. Следствено, коефициентот на засилување на отворениот систем треба да се проектира така што затворениот систем ќе има доминантен пар полови со фактор на релативно придрушување $\zeta = 0.8$. За да се најдат овие полови, се црта ГМК на затворениот систем, кое е прикажано на Слика 6.57.

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



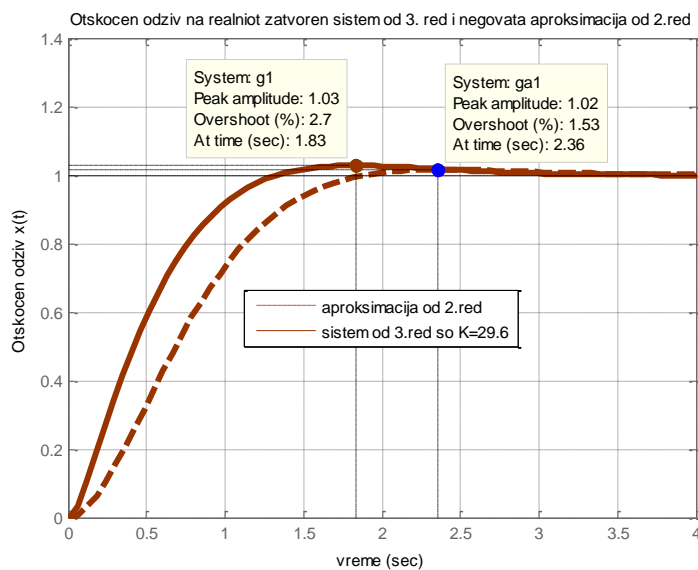
Слика 6.57. Геометриско место на корени на затворениот систем од Задачата 6.30

Може да се забележи дека условот го задоволуваат три парови точки: $s_{1,2}^{(1)} = -1.75 \pm j1.32$ со $K = 29.6$, $s_{1,2}^{(2)} = -2.40 \pm j1.80$ со $K = 51.6$ и $s_{1,2}^{(3)} = -9.20 \pm j6.80$ со $K = 157$. Овие точки лежат во пресекот на ГМК и правата со константен фактор на придушување $\zeta = 0.8$, што значи дека се полови на затворениот систем (лежат на неговото ГМК) со фактор на релативно придушување $\zeta = 0.8$ (лежат на правата $\zeta = 0.8$). Меѓутоа, одредените точки го претставуваат само парот доминантни полови на проектираниот затворен систем. Како што може да се забележи од Слика 6.57, отворениот систем е од трет ред, па, следствено, ист ред има и затворениот систем. Оттаму, треба да се определи и третиот реален пол на проектираниот систем. Тој се определува од условот дека мора да лежи на реалната гранка од ГМК и да има коефициент на засилување еднаков со доминантниот пар полови. Така се добиваат половите $s_3^{(1)} = -18.5$, $s_3^{(2)} = -17.2$ и $s_3^{(3)} = -3.6$. Резултатот на синтезата е прикажан во долната таблица.

Таблица 6.1.

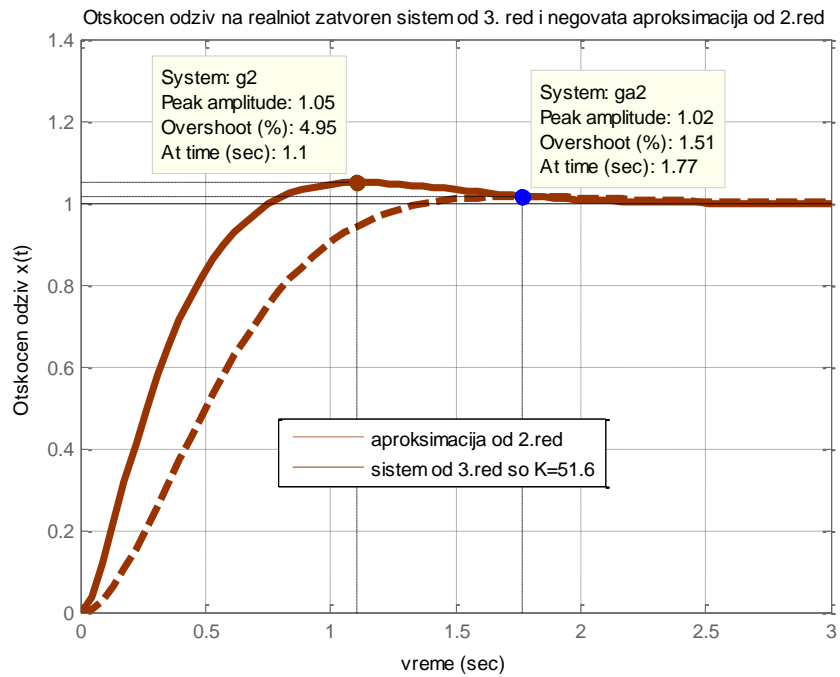
Отворен систем	$\frac{29.6(s+3)}{s(s+2)(s+20)}$	$\frac{51.6(s+3)}{s(s+2)(s+20)}$	$\frac{157(s+3)}{s(s+2)(s+20)}$
Коефициент на засилување на отворениот систем	$K = 29.6$	$K = 51.6$	$K = 157$
Максимален прескок	2.7%	5%	9.5%
Брзинска константа	$K_v = 2.22$	$K_v = 3.87$	$K_v = 11.78$
Стационарна грешка	0.45	0.26	0.085
Доминантен пар полови на затворениот систем	$s_{1,2}^{(1)} = -1.75 \pm j1.32$	$s_{1,2}^{(2)} = -2.4 \pm j1.8$	$s_{1,2}^{(3)} = -9.2 \pm j6.8$
Трет пол на затворениот систем	$s_3^{(1)} = -18.5$	$s_3^{(2)} = -17.2$	$s_3^{(3)} = -3.6$
Нула на затворениот систем	$s = -3$	$s = -3$	$s = -3$
Апроксимација со систем од втор ред	не	не	да

Со промената на коефициентот на засилување на отворениот систем, се менува и неговата стационарна грешка. Тоа значи дека со нагудување на преодниот режим преку компензација на засилувањето на отворениот систем, се менува и стационарниот режим на затворениот систем. Така од таблицата се гледа дека со зголемување на коефициентот на засилување на отворениот систем, се зголемува брзинската константа на затворениот систем, а со тоа се намалува неговата стационарна грешка. Оттаму, во поглед на стационарната грешка, најдобро поведење покажува третиот затворен систем за кој $K = 157$, бидејќи тој има најмала стационарна грешка од само 8.5%. На Слика 6.58, Слика 6.59 и Слика 6.60 е прикажан отскочниот одсив на секој од проектираните затворени системи од трет ред, спореден со отскочниот одсив на неговата апроксимација од втор ред.

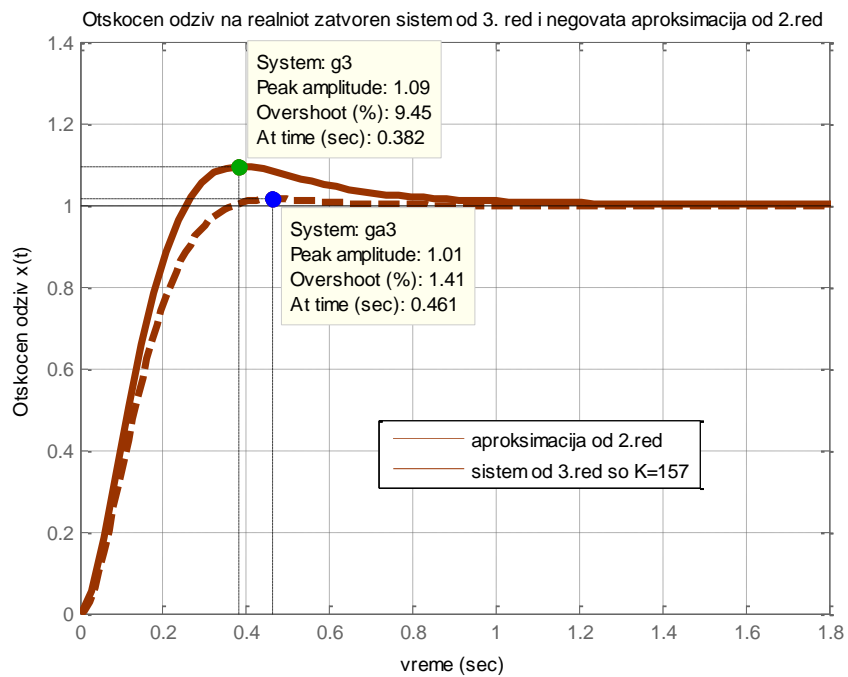


Слика 6.58. Графички приказ на отскочните одсиви на проектираниот затворен систем од 3.ред и неговата апроксимација од 2.ред за $K = 29.6$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



Слика 6.59. Графички приказ на отскочните одзиви на проектираниот затворен систем од 3.ред и неговата апроксимација од 2.ред за $K = 51.6$



Слика 6.60. Графички приказ на отскочните одзиви на проектираниот затворен систем од 3.ред и неговата апроксимација од 2.ред за $K = 157$

Проектирањето е извршено под претпоставка дека затворениот систем може да се апроксимира со систем од втор ред. Затоа на крајот од секоја постапка на синтеза, треба да се провери важноста на направената претпоставка. Од Таблицата 6.1 може да се види дека првиот и вториот проектиран систем имаат трет пол кој се наоѓа многу далеку на негативниот дел од реалната оска во однос на неговата нула. Затоа дејството на тој пол не може да се поништи со нулата на проектираниот систем, па тој е дефинитивно систем од трет ред. Оттаму, апроксимацијата со систем од втор ред генерално не би била валидна. Меѓутоа, исто така може да се забележи дека третиот пол е многу далеку од имагинарната оска и координатниот почеток, односно од доминантниот пар полови на проектираниот систем. Затоа неговото влијание врз поведението на системот и не е толку големо, што може убаво да се воочи од Сликата 6.58 и Слика 5.59. Што се однесува до третиот проектиран затворен систем, неговиот трет пол е многу близу до неговата нула, па нивното дејство взаемно се поништува. Оттаму, третиот проектиран систем без проблем може да се апроксимира со систем од 2.ред, односно апроксимацијата со систем од 2.ред за него е сосема валидна. Од Слика 6.60 се гледа дека отскочниот одсив на проектираниот затворен систем само незначително отстапува од отскочниот одсив на апроксимативниот систем од втор ред, и тоа околу точката на максимален прескок.

6.32. Да се нацрта геометриското место корени на затворениот систем со единична негативна повратна врска, чиј отворен систем има преносна функција:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+5)}, K > 0 \quad (6.122)$$

Потоа да се изврши компензација со интегрален компензатор, така што стационарната грешка на затворениот систем за линеарно растечки влез ќе изнесува 2% од брзината на промена на влезот и доминантниот пар полови на затворениот систем ќе има фактор на релативно придрушување $\zeta = 0.592$.

Решение: Отворениот систем има само два пола, во $s_1 = 0$ и $s_2 = -5$, и нема конечни нули. Затворениот систем исто така ќе има само два пола, па неговото геометриско место на корени ќе има две гранки. За $K > 0$, делот од реалната оска помеѓу точките $s_2 = -5$ и $s = 0$ ќе припаѓа на геометриското место корени на затворениот систем, кое има две асимптоти во точката $s = -2.5$ на реалната s – оска:

$$\sigma_c = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = -\frac{\sum_{i=1}^2 p_i}{2 - 0} = -\frac{0 + 5}{2} = -2.5 \quad (6.123)$$

Аглите што овие асимптоти ги зафаќаат со реалната s – оска се:

$$\beta_1 = \frac{180^0}{2} = 90^0, \quad \beta_2 = \frac{3 \cdot 180^0}{2} = 270^0 \quad (6.124)$$

Точката $s = -2.5$ воедно е и точка на раздвојување σ_b на гранките од геометриското место на корени, која се определува од формулата:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_b + p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_b + z_i}$$

$$\sum_{i=1}^2 \frac{1}{\sigma_b + p_i} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b + 5} = 0 \Rightarrow \sigma_b + 5 + \sigma_b = 0 \Rightarrow \sigma_b = -2.5 \quad (6.125)$$

Геометриското место на корени на некомпензираниот затворен систем е прикажано на Слика 6.61. Од таму може да се прочита дека доминантниот пар полови со фактор на релативно придушување $\zeta = 0.592$ е $s_{1,2} = -2.5 \pm j3.4$ и него му одговара коефициент на засилување $K = 17.8$. Овој пар полови е определен со пресечната точка на геометриското место на корени и правата на константен фактор на релативно придушување $\zeta = 0.592$, која со негативниот дел од реалната оска зафаќа агол $\theta = \arccos(\zeta) = \arccos(0.592) = 53.7^0$. Брзинската константа на некомпензираниот систем за вака пресметаниот доминантен пар полови $s_{1,2} = -2.5 \pm j3.4$ и коефициент на засилување $K = 17.8$ изнесува:

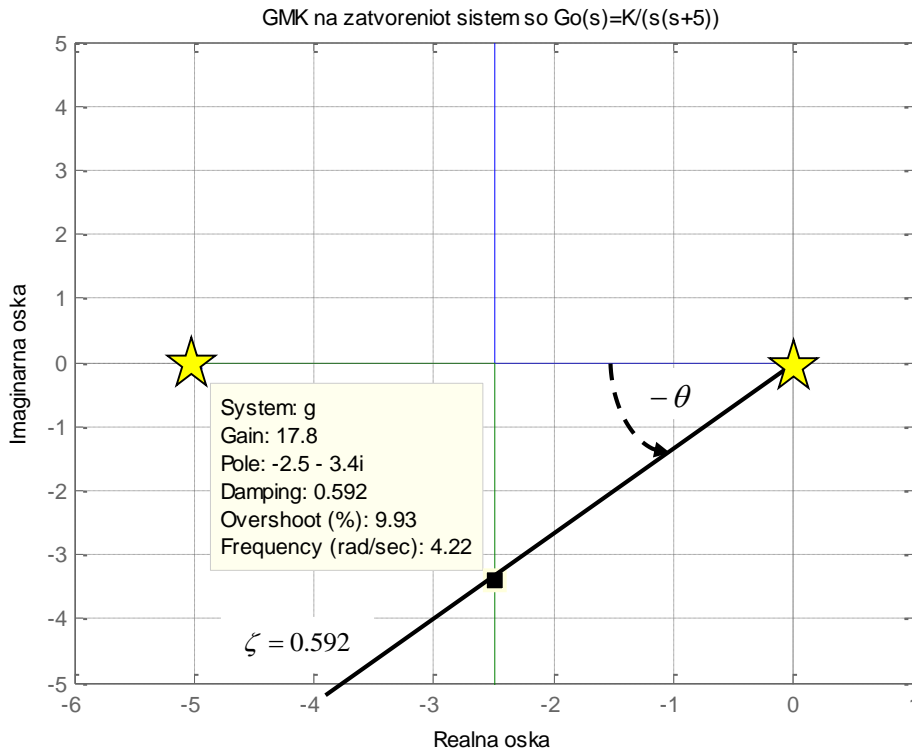
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \frac{K}{5} = \frac{17.8}{5} = 3.56 \quad (6.126)$$

и таа значи неприфатлива стационарна грешка при линеарно растечки влез:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{3.56} = 0.28 \gg 0.02 \quad (6.127)$$

Оттаму, неопходна е компензација на поведението на набљудуваниот затворен систем во стационарен режим, а да не се наруши значително неговото поведение во преодниот режим. Со други зборови, поведението на компензираниот систем во преодниот режим треба да остане приближно исто како и пред компензацијата. Оваа проектна задача по правило се остварува со помош на интегрален компензатор, како што е покажано во продолжение.

За да компензираниот затворен систем при линеарно растечки влез има стационарна грешка не поголема од 2% од брзината на промена на влезот, неговата брзинска константа треба да изнесува најмалку:



Слика 6.61. ГМК на затворениот систем од Задача 6.32

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{K_{vcomp}} \leq 0.02 \Rightarrow K_{vcomp} \geq 50 \quad (6.128)$$

што значи дека коефициентот на засилување на компензираниот отворен систем не смее да биде помал од 250:

$$K_{vcomp} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{0c}(s) = \frac{K_{comp}}{5} \geq 50 \Rightarrow K_{comp} \geq 250 \quad (6.129)$$

Оттука, потребниот сооднос α помеѓу величините на нулата $z_c = -b$ и полот $p_c = -a$ на интегралниот компензатор се определува според формулата:

$$\alpha = \frac{b}{a} = \frac{K_{vcomp}}{K_{v_necomp}} = \frac{50}{3.56} = 14 \quad (6.130)$$

Ако нулата од компензаторот се избере произволно во близина на имагинарната оска така што ќе се усвои $b = 0.1$, тогаш неговиот пол треба да се наоѓа во точката одредена со $a = \frac{0.1}{\alpha} = \frac{0.1}{14} = 0.007$, па преносната функција на интегралниот компензатор ќе гласи:

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА
КОРЕНИ

$$G_c(s) = \frac{1}{14} \cdot \frac{(s+0.1)}{(s+0.007)} \quad (6.131)$$

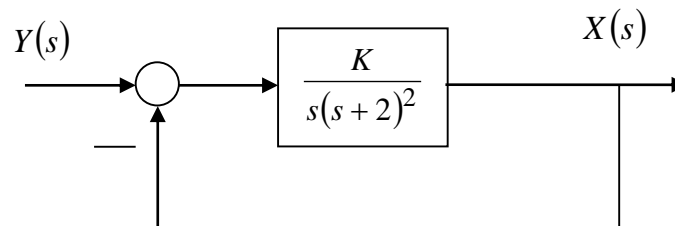
а компензираниот отворен систем ќе има преносна функција:

$$G_{0c}(s) = \frac{17.8(s+0.1)}{s(s+5)(s+0.007)} \quad (6.132)$$

каде што:

$$\frac{K_{comp}}{\alpha} = 17.8, \quad K_{comp} = 250 \quad (6.133)$$

6.33. Даден е затворен систем со единична негативна повратна врска како на Слика 6.62. Нека, под претпоставка, за $K = 3$ затворениот систем има задоволително поведение во преодниот режим. Што може да се каже за поведението на системот во стационарен режим при дадената вредност за $K = 3$? Што може да се направи за стационарната грешка на системот да се намали 50 пати?



Слика 6.62. Илустрација кон Задача 6.33

Решение: Отворениот систем за набљудуваниот затворен систем има астатизам од прв ред, што значи дека затворениот систем е во состојба идеално да следи отскочен влез. Променлив влез со константна брзина на промена затворениот систем следи со одредена грешка, која зависи од брзинската константа:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+2)^2} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad (6.134)$$

и изнесува:

$$e_s = \frac{1}{K_v} = \frac{4}{3} \quad (6.135)$$

За да се намали оваа грешка 50 пати, коефициентот на засилување на отворениот систем треба да се зголеми 50 пати:

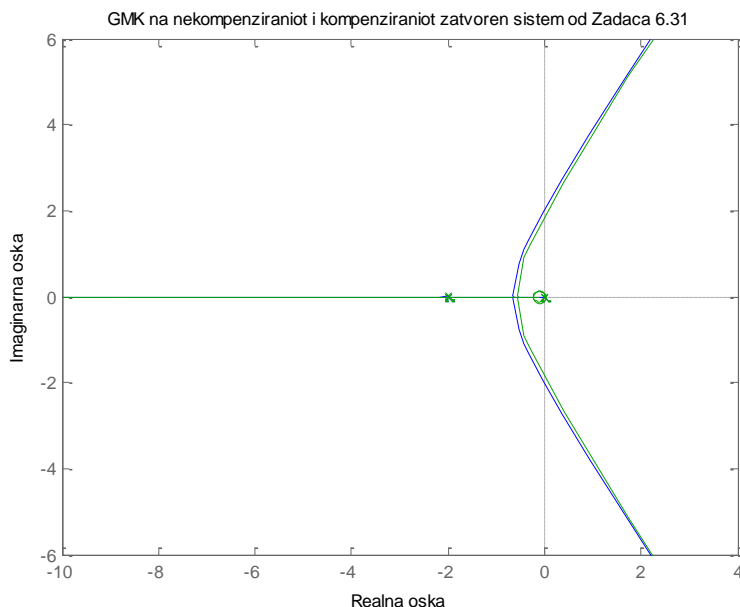
$$\tilde{e}_s = \frac{e_s}{50} = \frac{1}{\tilde{K}_v} \Rightarrow \tilde{K}_v = \frac{50(3)}{4} = 37.5 \quad (6.136)$$

Тогаш:

$$\tilde{e}_s = \frac{e_s}{50} = 0.015 \quad (6.137)$$

Меѓутоа, при ваква компензација се нарушува преодниот режим. Затоа вистинското решение на проблемот е со примена на И - компензатор. Ако се одбере И- компензатор, со однос помеѓу неговата нула и пол $\alpha = \frac{z_c}{p_c} = 50$ и нула, на пример, во точката

$-z_c = -0.1$, брзинската константа K_{vc} на компензираниот систем ќе биде 50 пати поголема и неговата стационарна грешка 50-пати помала. Од друга страна, бидејќи нулата и полот од компензаторот се наоѓаат многу близу до координатниот почеток во s -комплексната рамнина, нивното влијание е занемарливо, па преодниот режим на компензираниот систем многу малку ќе се разликува од преодниот режим на некомпензираниот систем.

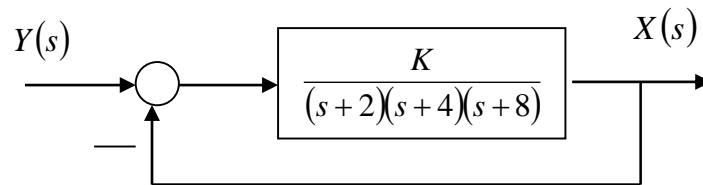


Слика 6.63. Геометриско место на корени на некомпензираниот и компензираниот затворен систем од Задача 6.33

На Слика 6.63 заедно се прикажани ГМК на некомпензираниот и компензираниот затворен систем, од каде посредно се гледа дека преодниот режим е приближно ист, затоа што компензираниот систем има нула и пол многу блиску еден до друг и до координатниот почеток, така што нивното влијание се поништува.

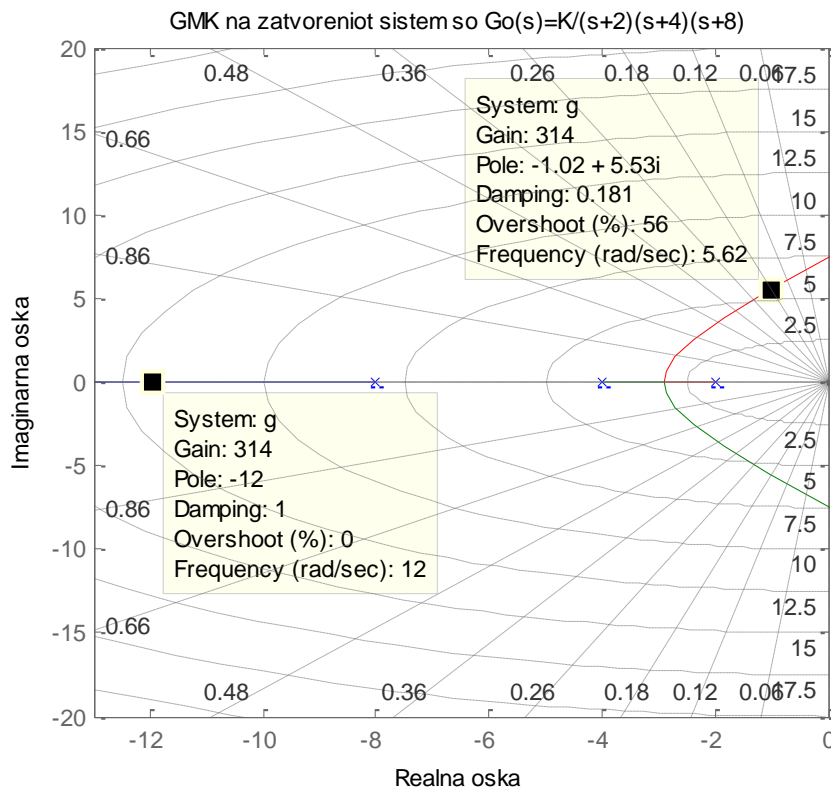
СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

6.34. Даден е затворениот систем од Слика 6.64. Под претпоставка, доминантниот пар полови на затворениот систем има фактор на релативно придушување $\zeta = 0.18$. По пат на компензација со соодветен компензатор, да се обезбеди нулева стационарна грешка на системот, без значително да се промени останатото негово поведење.



Слика 6.64. Илустрација кон Задача 6.34

Решение: Најнапред се анализира поведението на некомпензираниот затворен систем. Неговото ГМК е прикажано на Слика 6.65. Релативен фактор на пригушување $\zeta = 0.18$ значи дека доминантниот пар полови на затворениот систем се наоѓа во пресекот на правата $\theta = \arccos(\zeta) = \arccos(0.18)$ и ГМК, па од Слика 6.65 може да се прочита дека тоа се точките $s_{1,2} = -1.02 \pm j5.53$. Ним им одговара вредноста $K = 314$.



Слика 6.65. Геометриско место на корени на некомпензираниот затворен систем од Задача 6.34

Бидејќи соодветниот отворен систем има астатизам од нулти ред, очигледно е дека затворениот систем не е во состојба идеално да следи отскочен влез, туку го следи со одредено отстапување, кое зависи од неговата константа на положба. Константата на положба изнесува:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \frac{314}{(s+2)(s+4)(s+8)} = \frac{314}{64} = 4.9 \quad (6.138)$$

па за стационарната грешка се добива:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0.17 \quad (6.139)$$

За да може затворениот систем идеално да следи отскочен влез, потребно е неговиот отворен систем да има астатизам барем од прв ред. Затоа бараната синтеза се реализира со помош на идеален И-компензатор, чија преносна функција гласи:

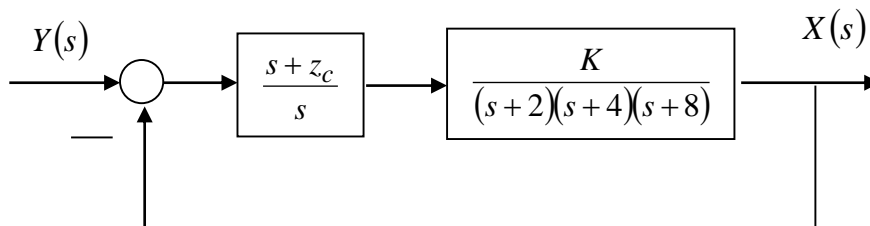
$$R(s) = \frac{s+z_c}{s} \quad (6.140)$$

Овој компензатор го зголемува редот на астатизам на отворениот систем за еден, па со проверка лесно се констатира дека компензираниот затворен систем од Слика 6.66 има нулева стационарна грешка:

$$e_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G_{01}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+R(s)G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+(s+z_c)G_0(s)} = 0 \quad (6.141)$$

Останува уште да се одбере нулата на И-компензаторот од вториот проектен услов. Така, ако се усвои $z_c = -0.05$, преносната функција на И-компензаторот ќе гласи:

$$R(s) = \frac{s+0.05}{s} \quad (6.142)$$



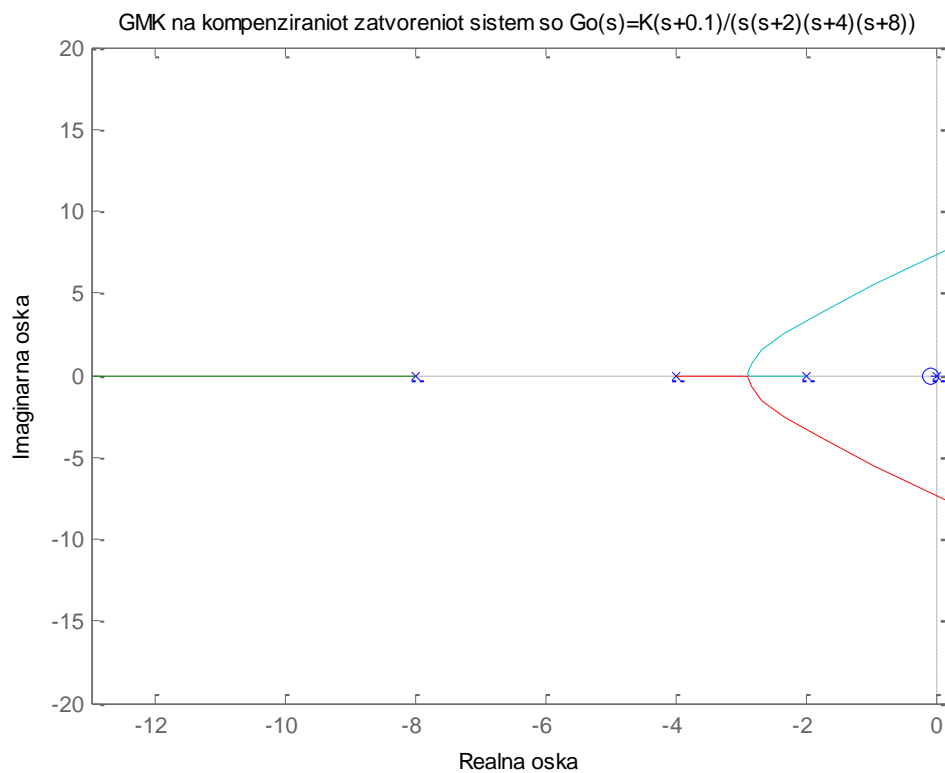
Слика 6.66. Илустрација кон Задачата 6.34

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

па компензираниот затворен систем, чиј отворен систем сега има преносна функција:

$$G_{0c} = \frac{s + 0.05}{s} \cdot \frac{314}{(s + 2)(s + 4)(s + 8)} \quad (6.143)$$

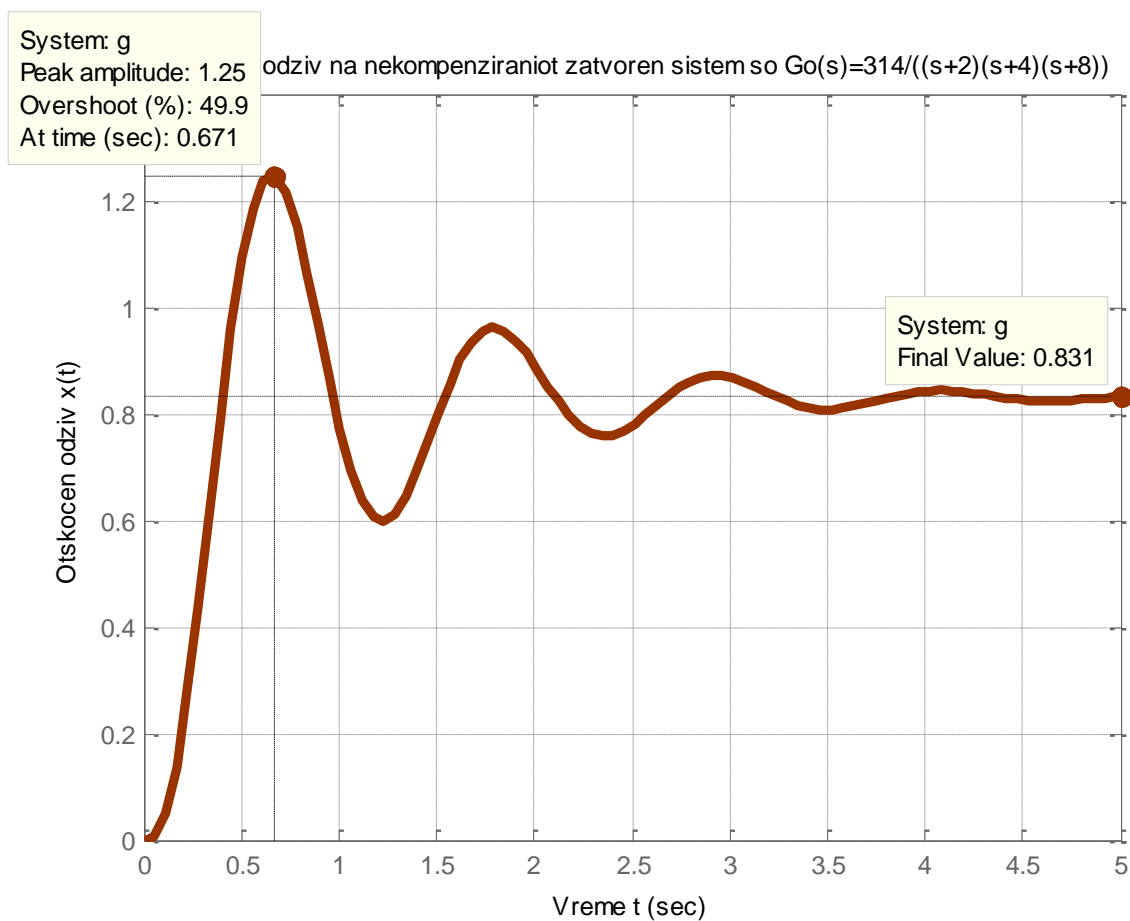
ќе има ГМК како на Слика 6.67. Резултатот од синтезата е прикажан во Таблица 6.2. Како што може да се забележи од Таблицата 6.2, некомпензираниот затворен систем има и трет пол, така што апроксимацијата со систем од втор ред не е остварена. Меѓутоа, третиот пол се наоѓа многу далеку од доминантниот пар полови и далеку од имагинарната оска, па неговото влијание врз поведението на системот не е значајно. Компензираниот затворен систем, пак, има и четврт пол, но тој се наоѓа многу близу до нулата на отворениот систем, па нивното дејство вземно се поништува. Исто така, може да се забележи дека доминантниот пар полови и третиот пол на компензираниот затворен систем се приближно еднакви по половите на некомпензираниот систем, што значи дека присуството на идеалниот И - компензатор нема значително да го промени поведението на набљудуваниот систем. Тоа се воочува и од нивните отскочни одсиви прикажани на Слика 6.68 и Слика 6.69, освен што компензираниот затворен систем има нулева стационарна грешка и значително помал прескок. Времето на пораст и максимален прескок на некомпензираниот и компензираниот затворен систем се исто така многу блиски.



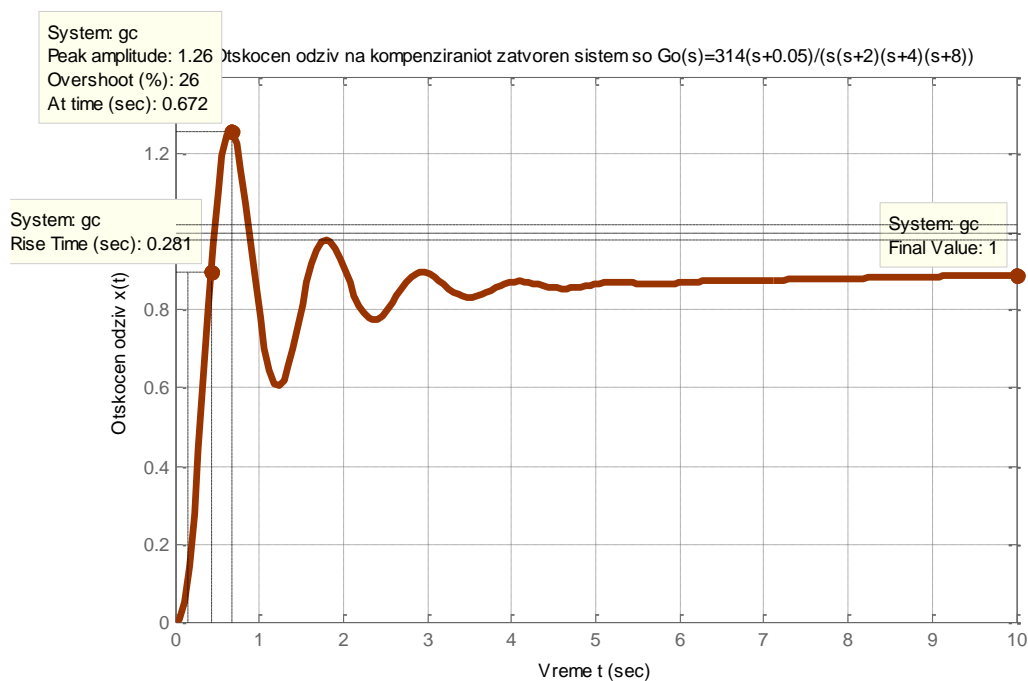
Слика 6.67. Геометриско место на корени на компензираниот затворен систем од Задача 6.34

Таблица 6.2.

	Некомпензиран систем	Компензиран систем
Отворен систем	$\frac{K}{(s+2)(s+4)(s+8)}$	$\frac{s+0.05}{s} \cdot \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+8)}$
Коефициент на засилување на отворениот систем K	314	314
Максимален прескок	49.9%	27.4%
Константа на положба K_p	4.9	∞
Стационарна грешка	0.17	0
Доминантен пар полови на затворениот систем	$s_{1,2} = -1.02 \pm j5.53$	$s_{1,2} = -1 \pm j5.5$
Трет пол на затворениот систем	$s_3 = -11.96$	$s_3 = -11.95$
Четврт пол на затворениот систем	нема	$s_3 = -0.04$
Нула на затворениот систем	нема	$s = -0.05$
Апроксимација со систем од втор ред	не	не



Слика 6.68. Отскочен одзив на некомпензираниот затворен систем за $K = 314$



Слика 6.69. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем (6.143)

6.35. По пат на компензација со неидеален И-компензатор да се намали стационарната грешка на затворениот систем од претходната задача за 10-пати.

Решение: Стационарната грешка на некомпензираниот затворен систем од Задача 6.33 изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0.17 \quad (6.144)$$

Десет пати помала стационарна грешка значи дека константата на положба на системот треба да изнесува:

$$e_{comp}(\infty) = \frac{e(\infty)}{10} = \frac{0.17}{1+K_{p_{comp}}} = 0.017 \Rightarrow K_{p_{comp}} = 57.82 \quad (6.145)$$

Односот помеѓу новата вредност на константата на положба $K_{p_{comp}} = 57.82$ и старата $K = 4.9$ го дефинира односот помеѓу нулата и полот на потребниот И-компензатор, чија преносна функција гласи:

$$R(s) = \frac{s + z_c}{s + p_c} \quad (6.146)$$

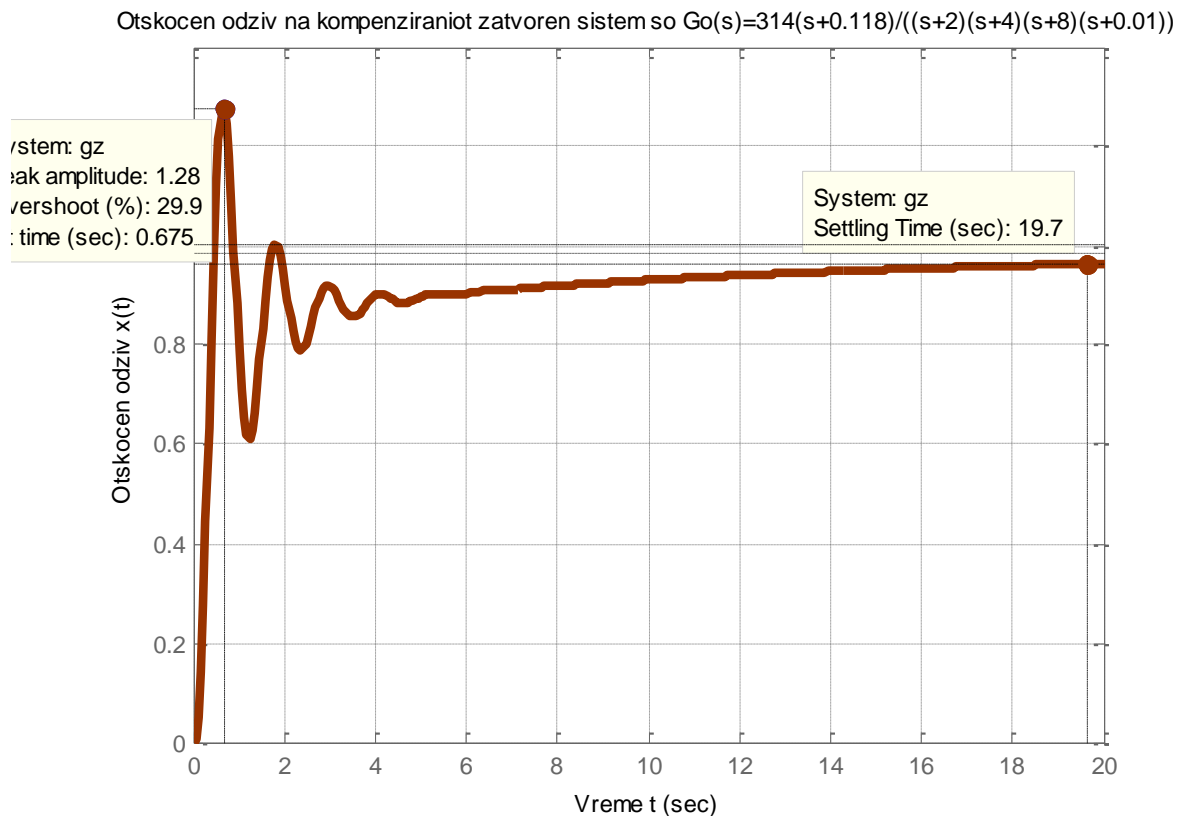
па ако за неговиот пол произволно се усвои $p_c = 0.01$, ќе се добие:

$$p_c = 0.01; \quad \frac{z_c}{p_c} = \frac{K_{comp}}{K} = 11.8 \Rightarrow z_c = 0.118 \quad (6.147)$$

Преносната функција на компензираниот затворен систем е:

$$G_{0c} = \frac{s + 0.118}{s + 0.01} \cdot \frac{314}{(s + 2)(s + 4)(s + 8)} \quad (6.148)$$

а резултатите од синтезата се прикажани во Таблица 6.3. Оттука се гледа дека компензираниот затворен систем има трет пол $s_3 = -11.94$, но тој се наоѓа многу далеку од доминантниот пар полови $s_{1,2} = -0.984 \pm j5.502$, па неговото влијание врз поведението на затворениот систем е незначително. Затворениот систем има и четврт пол $s_3 = -0.1010$, но тој е многу близу до нулата на затворениот систем $s = -0.118$, па нивното влијание взаимно се поништува. Отскочниот одзив на компензираниот затворен систем, чиј отворен систем има преносна функција (6.148) е прикажан на Слика 6.70.



Слика 6.70. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем (6.148)

Таблица 6.3.

	Некомпензиран систем	Компензиран систем
Отворен систем	$\frac{K}{(s+2)(s+4)(s+8)}$	$\frac{s+0.118}{s+0.01} \cdot \frac{K}{(s+2)(s+4)(s+8)}$
Коефициент на засилување на отворениот систем K	314	308
Максимален прескок	49.9%	29.9%
Константа на положба K_p	4.9	56.79
Стационарна грешка	0.17	0.0173
Доминантен пар полови на затворениот систем	$s_{1,2} = -1.02 \pm j5.53$	$s_{1,2} = -1 \pm j5.46$
Трет пол на затворениот систем	$s_3 = -11.96$	$s_3 = -11.94$
Четврт пол на затворениот систем	нема	$s_3 = -0.101$
Нула на затворениот систем	нема	$s = -0.118$
Апроксимација со систем од втор ред	не	не

6.36. Преносната функција на соодветниот отворен систем за даден затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска е дадена со изразот:

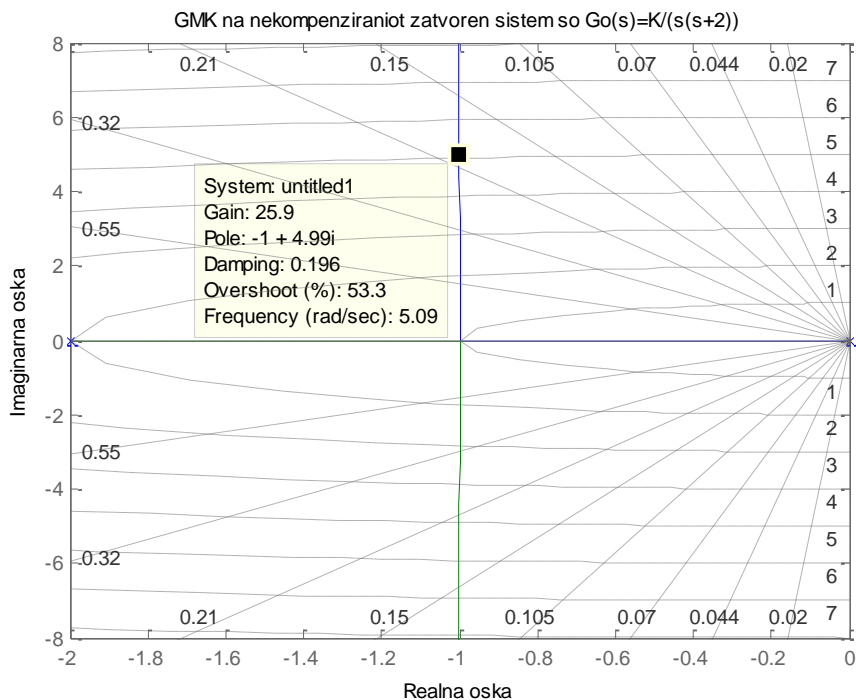
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+2)} \quad (6.149)$$

Отскочниот одзив на затворениот систем се одликува со максимален прескок од 53.3%.

- а) Да се определи времето на смирување на отскочниот одзив на затворениот систем.
- б) Да се определи стационарната грешка на одзивот на затворениот систем на единичен линеарно растечки влез.
- в) Да се проектира интегрален компензатор со помош на кој стационарната грешка за единичен линеарно растечки влез ќе се намали на вредност 0.01.
- г) Да се оцени точноста на направената апроксимација со систем од втор ред.

Решение: а) ГМК на некомпензираниот затворен систем е прикажано на Слика 6.71. На максимален прескок од 53.3% одговара фактор на релативно пригушување на доминантниот пар полови $\zeta = 0.197 \approx 0.2$. Со пребарување долж линијата на константен максимален прескок од 53.3%, односно константен фактор на релативно пригушување $\zeta = 0.197$, се утврдува дека доминантниот пар полови на затворениот систем се наоѓа во точките $s_{1,2} = -1 \pm j5$ за $K = 26$. Оттука, времето на смирување на отскочниот одзив на некомпензираниот затворен систем е:

$$T_s = \frac{4}{1} = 4 \text{ sec} \quad (6.150)$$



Слика 6.71. ГМК на некомпензираниот затворен систем (6.149)

б) Брзинската константа на некомпензираниот затворен систем е:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s+2} = \frac{26}{2} = 13 \quad (6.151)$$

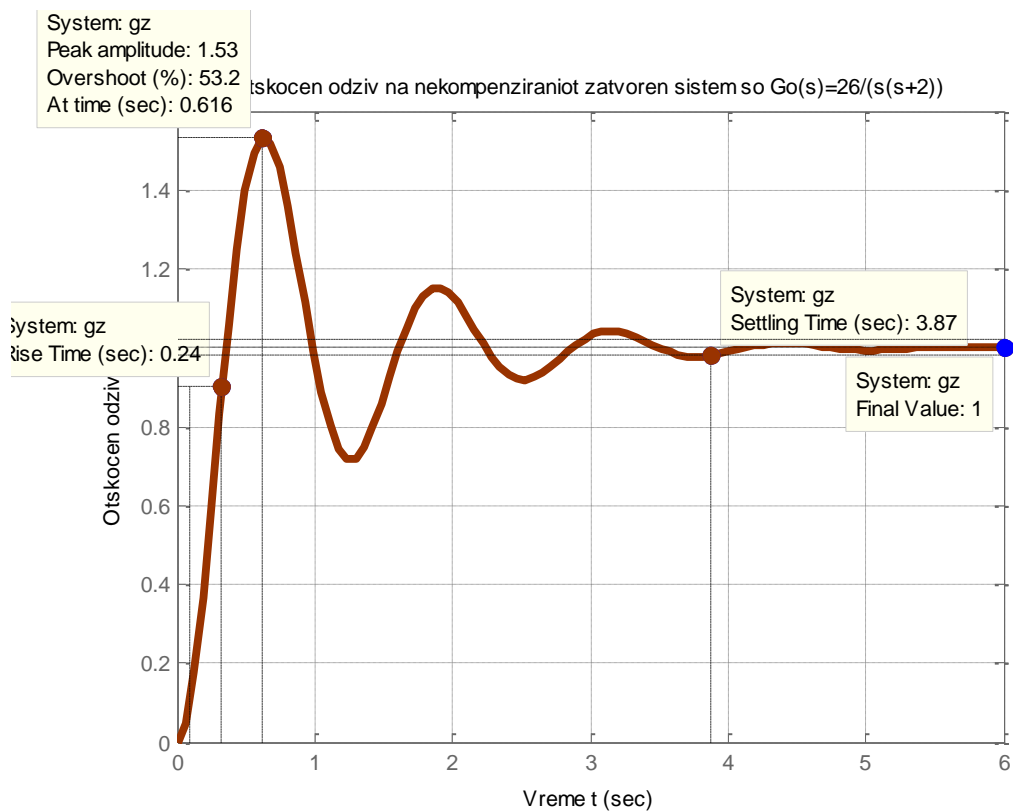
па стационарната грешка на одзивот на овој систем за единичен линеарно растечки влез изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{13} = 0.077 \quad (6.152)$$

Отскочниот одзив на некомпензираниот затворен систем за $K = 26$ е прикажан на Слика 6.73.

в) За стационарната грешка на одзивот на компензираниот систем на единичен линеарно растечки влез да биде λ пати помала во однос на одзивот на некомпензираниот систем на истиот влез, брзинската константа на компензираниот систем треба да биде λ пати поголема од брзинската константа на некомпензираниот систем. Следствено, интегрирачкиот компензатор треба да обезбеди корекција на брзинската константа $K_v = 13$ за фактор λ :

$$\lambda = \frac{0.077}{0.01} = 7.7 \approx 8 \quad (6.153)$$



Слика 6.72. Отскочен одзив на некомпензираниот затворен систем за $K = 26$

Тоа значи дека нулата на интегрирачкиот компензатор треба да биде λ пати подалеку од имагинарната оска во однос на нејзиниот пол, па може да се усвои:

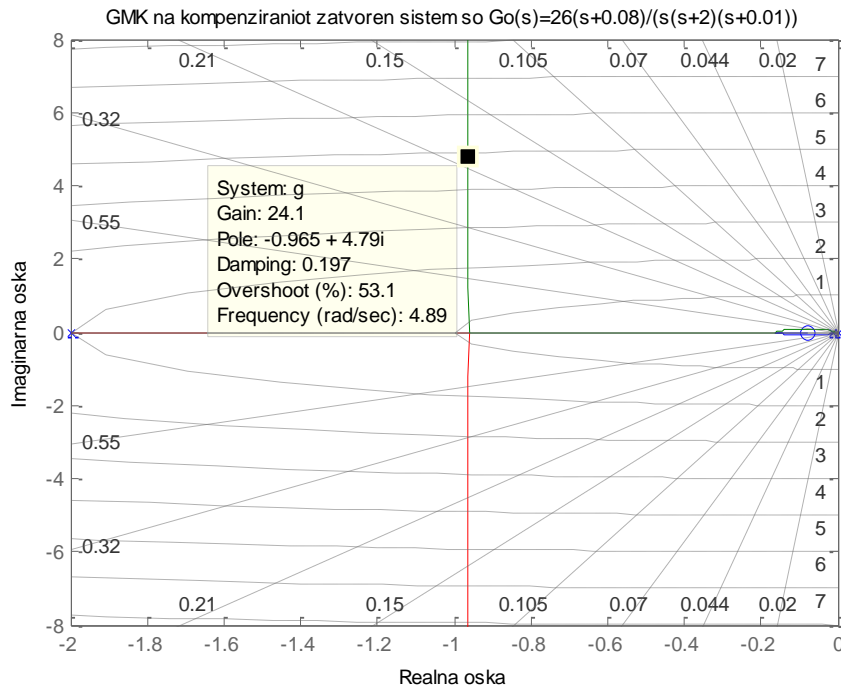
$$R(s) = \frac{s + 0.08}{s + 0.01} \quad (6.154)$$

По додавањето на интегралниот компензатор (6.154), преносната функција на компензираниот отворен систем ќе гласи:

$$G_{0comp}(s) = \frac{26(s + 0.08)}{s(s + 2)(s + 0.01)} \quad (6.155)$$

ГМК на компензираниот затворен систем е прикажано на Слика 6.73. Со пребарување долж линијата на константен фактор на релативно пригушување $\zeta = 0.197 \approx 0.2$, за доминантниот пар полови на компензираниот систем се добива $s_{1,2} = -0.965 \pm j4.8$ при $\tilde{K} = 24.1$.

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



Слика 6.73. ГМК на компензираниот затворен систем со $G_{0_{comp}}(s) = \frac{26(s+0.08)}{s(s+2)(s+0.01)}$

г) Резултатите од синтезата се прикажани во Таблица 6.4.

Таблица 6.4.

	Некомпензиран систем	Компензиран систем
Отворен систем	$\frac{K}{s(s+2)}$	$\frac{26(s+0.08)}{s(s+2)(s+0.01)}$
Коефициент на засилување на отворениот систем K	26	24.1
Максимален прескок	53.3%	55.2%
Брзинска константа K_v	13	96.4
Стационарна грешка	0.077	0.0104
Доминантен пар полови на затворениот систем	$s_{1,2} = -1 \pm j5$	$s_{1,2} = -0.965 \pm j4.8$
Трет пол на затворениот систем	нема	$s_3 = -0.0804$
Нула на затворениот систем	нема	$s = -0.08$
Апроксимација со систем од втор ред	да	да

За брзинската константа на компензираниот затворен систем се добива:

$$K_{v_{comp}} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{0_{comp}}(s) = \frac{(24.1)(0.08)}{2(0.01)} = 96.4 \quad (6.156)$$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

па неговата стационарна грешка ќе изнесува:

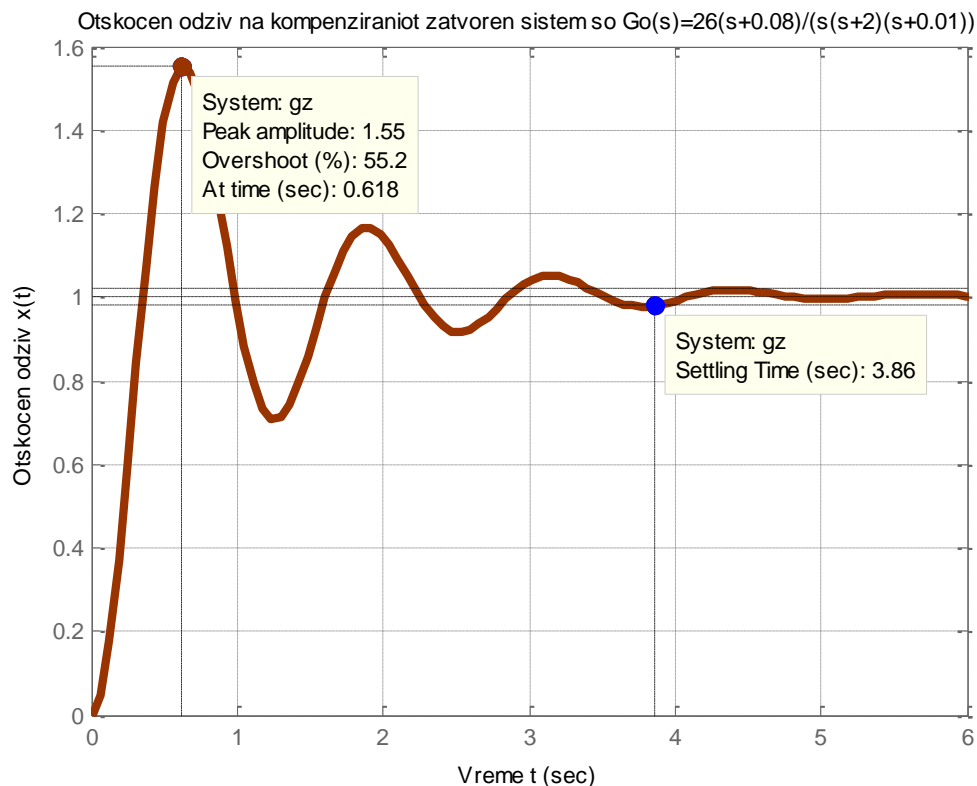
$$e_{comp}(\infty) = \frac{1}{K_{vcomp}} = \frac{1}{96.4} = 0.0104 \quad (6.157)$$

Затворениот компензиран систем има дополнителен пол во $s_3 = -0.0804$ и реална нула во $s = -0.08$, меѓутоа нивното дејство взаемно се поништува, па апроксимацијата со систем од втор ред е валидна.

Односот:

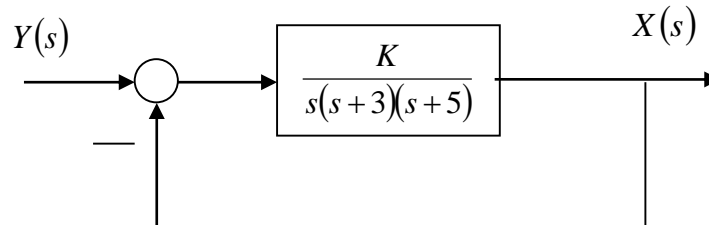
$$\frac{e(\infty)}{e_{comp}(\infty)} = \frac{0.077}{0.0104} = 7.4 \quad (6.158)$$

покажува дека со синтезата е постигнато подобрување на стационарната грешка од 7.4 пати. Отскочниот одзив на компензираниот затворен систем е прикажан на Слика 6.74.



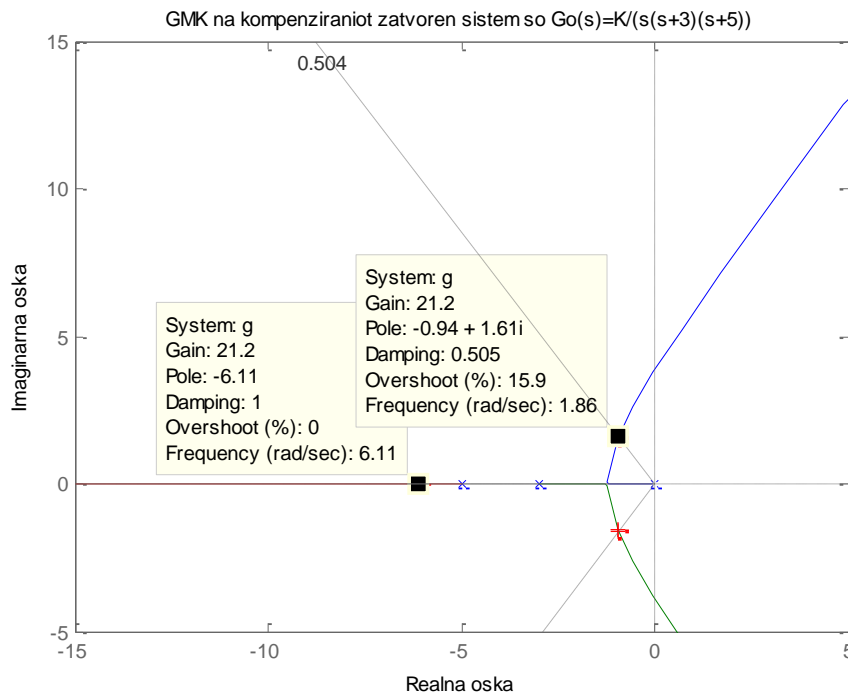
Слика 6.74. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем со $G_{0,comp}(s) = \frac{26(s+0.08)}{s(s+2)(s+0.01)}$

6.37. Даден е затворениот систем од Слика 6.75. По пат на компензација со идеален диференцирачки компензатор, да се обезбеди компензираниот затворен систем да има максимален прескок од $M = 16\%$ и четирипати покусо време на смирување на отскочниот одсив.



Слика 6.75. Илустрација кон Задача 6.37

Решение: Најнапред се анализира поведението на некомпензираниот затворен систем. Максимален прескок $M = 16\%$ значи дека доминантниот пар полови на затворениот систем треба да има фактор на релативно придушување $\zeta = 0.504$. Неговото ГМК е прикажано на Слика 6.76. Доминантниот пар полови на затворениот систем се наоѓа во пресекот на правата $\theta = \arccos(\zeta) = \arccos(0.504)$ и ГМК, па од Слика 6.76 може да се отчита дека тоа се точките $s_{1,2} = -0.94 \pm j1.61$. Ним им одговара вредноста $K = 21.2$.



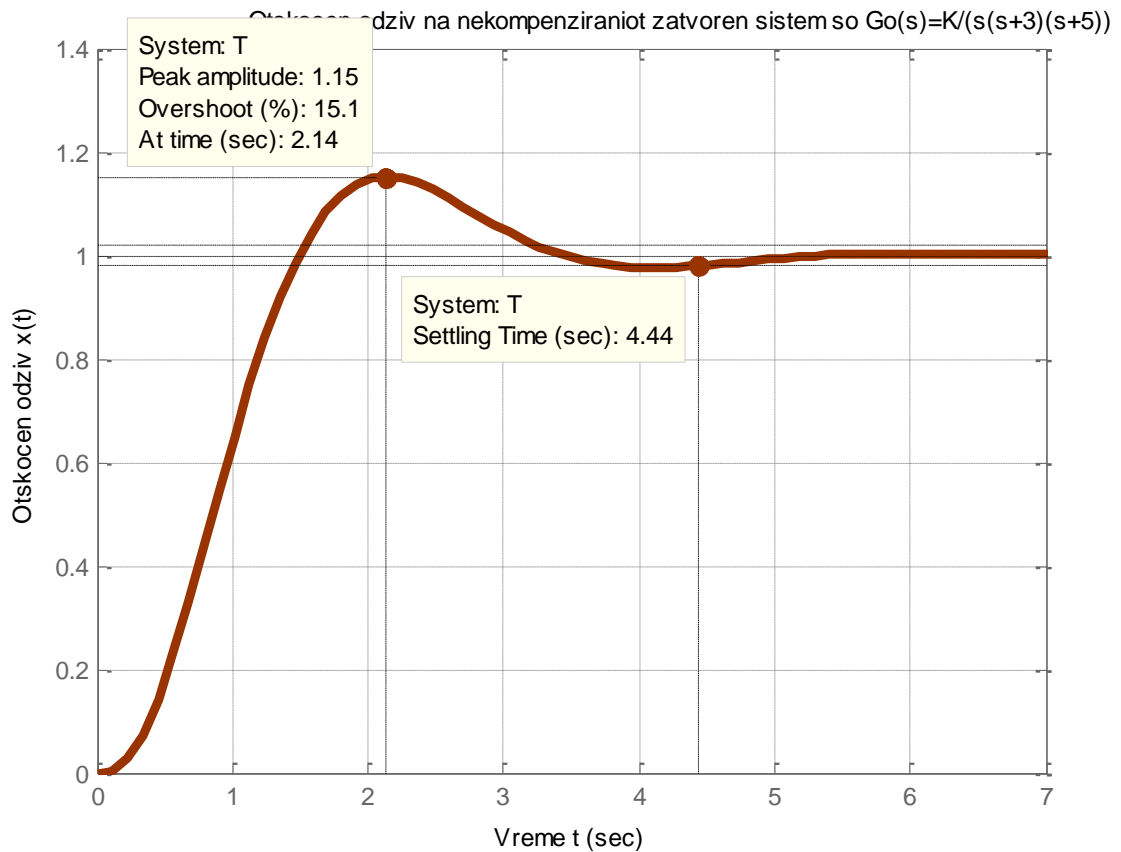
Слика 6.76. Геометриско место на корени на некомпензираниот затворен систем од Задача 6.37

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Времето на смирување на отскочниот одзив на некомпензираниот затворен систем е:

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.94} = 4.25 \text{ sec} \quad (6.159)$$

Бидејќи проценката на максималниот прескок и времето на смирување на отскочниот одзив е заснована врз апроксимација на затворениот систем со систем од втор ред, треба да се провери валидноста на оваа апроксимација. Затоа со пребарување долж реалната гранка од ГМК лево од точката $s = -5$ се бара и третиот пол на некомпензираниот затворен систем на кој му одговара $K = 21.2$. Тој се наоѓа во точката $s_3 = -6.12$. Бидејќи третиот пол на затворениот систем е подалеку од имагинарната оска за повеќе од 6-пати во однос на доминантниот пар полови, може да се смета дека неговото влијание врз поведението на затворениот систем нема значајно влијание, па направената апроксимација со систем од втор ред може да се смета за валидна. Параметрите кои го карактеризираат преодниот и стационарниот режим на некомпензираниот затворен систем се дадени во Таблица 6.5, а неговиот отскочен одзив е прикажан на Слика 6.77.



Слика 6.77. Отскочен одзив на некомпензираниот затворен систем со $G_0(s) = \frac{21.2}{s(s+3)(s+5)}$

Таблица 6.5.

	Некомпензиран систем	Компензиран систем
Отворен систем	$\frac{K}{s(s+3)(s+5)}$	$\frac{K}{(s+3)(s+5)}$
Коефициент на засилување на отворениот систем K	21.2	21.2
Максимален прескок	16%	6.1%
Брзинска константа K_v	1.41	0
Брзинска стационарна грешка	0.71	∞
Доминантен пар полови на затворениот систем	$-0.94 \pm j1.61$	$-4 \pm j4.5$
Трет пол на затворениот систем	$s_3 = -6.12$	нема
Нула на затворениот систем	нема	нема
Апроксимација со систем од втор ред	не	да

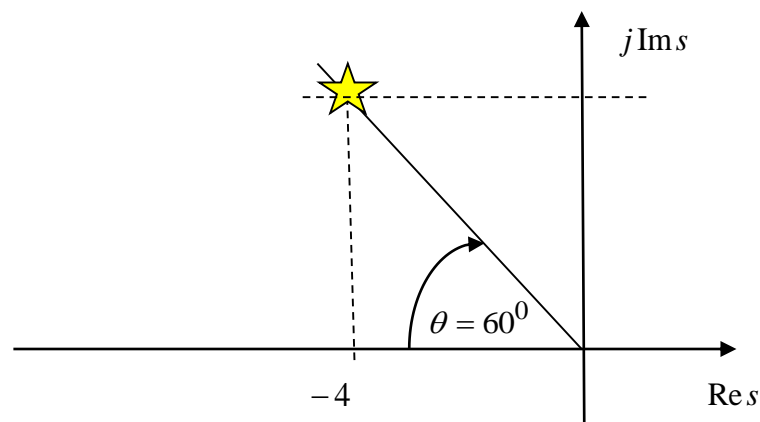
За да компензираниот затворен систем има 4 пати покусо време на смирување на отскочниот одзив, реалниот дел на неговиот доминантен пар полови треба да изнесува:

$$T_{s_{comp}} = \frac{4}{(\zeta \omega_n)_{comp}} = \frac{4.25}{4} = 1.06 \approx 1 \text{ sec} \Rightarrow (\zeta \omega_n)_{comp} = 4 \Rightarrow \text{Re } s_{1,2_{comp}} = -4 \quad (6.160)$$

Имагинарниот дел од доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем се определува врз основа на Слика 6.78.

$$\text{Im } s_{1,2_{comp}} = \text{Re } s_{1,2_{comp}} \arctg[\arccos(0.504)] = -4\sqrt{3} = -6.85 \quad (6.161)$$

Следствено, доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем треба да се наоѓа во точките $s_{1,2} = -4 \pm j6.85$.



Слика 6.78. Геометриско определување на доминантниот пар полови на затворениот систем од
Задача 6.37

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Нулата на идеалниот диференцирачки компензатор кој има преносна функција $R(s) = s + z_c$ се определува од условот точките $s_{1,2} = -4 \pm j6.85$ да го задоволуваат принципот на аргумент. Имено, преносната функција на компензираниот отворен систем, кога е употребен идеалниот диференцијален компензатор, ќе гласи:

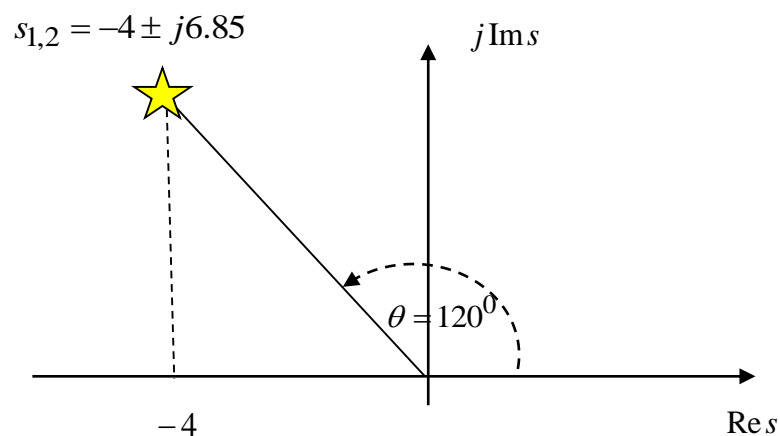
$$G_{0c}(s) = (s + z_c) \cdot \frac{K}{s(s+3)(s+5)} \quad (6.162)$$

па за да $s_{1,2} = -4 \pm j6.85$ бидат полови на соодветниот затворен систем, мора збирот од аглиите што ги зафаќаат правите повлечени од сите нули и полови на отворениот систем (6.162) до овие точки да изнесува целоброен производ од 180° (принцип на аргументот). Придонесот на половите на отворениот систем кон аргументот на затворениот систем најлесно се пресметува програмски, и во конкретниот случај изнесува $\theta_{s=0} + \theta_{s=-3} + \theta_{s=-5} = -59.7^\circ \approx -60^\circ$, па мора да биде исполнето:

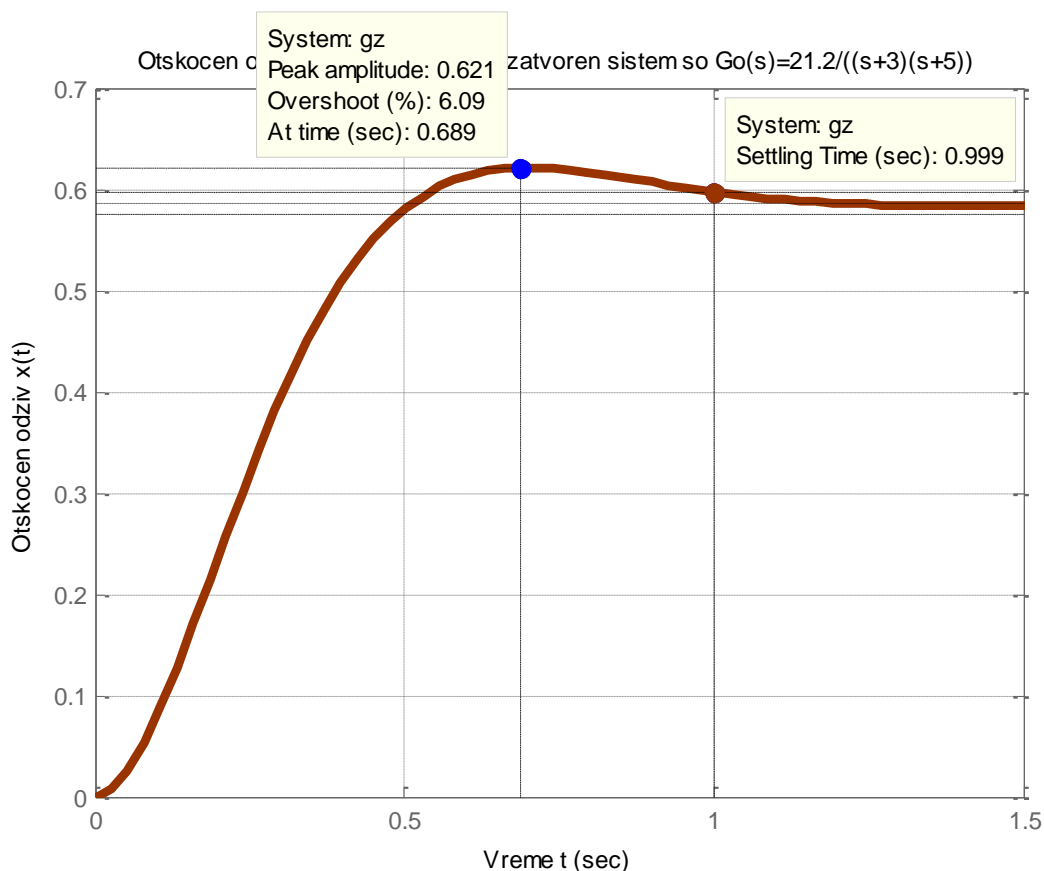
$$\theta_{z_c} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = \theta_{z_c} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta_{z_c} = 120^\circ \quad (6.163)$$

Оттука нулата на идеалниот диференцијален компензатор ќе биде во пресекот на правата повлечена под агол $\theta_{z_c} = 120^\circ$ од доминантниот пол $s_{1,2} = -4 + j6.85$ и негативниот дел од реалната оска, како што е прикажано на Слика 6.79. Во конкретниот случај $z_c = 0$, па компензираниот отворен систем ќе има преносна функција:

$$G_{0c}(s) = \frac{21.2}{(s+3)(s+5)} \quad (6.164)$$



Слика 6.79. Геометриско определување на нулата на идеалниот диференцијален компензатор од Задача 6.37



Слика 6.80. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем од Задача 6.37

6.38. Преносната функција на соодветниот отворен систем за даден затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска е дадена со изразот:

$$G_0(s) = \frac{64}{s(s+0.8)} \quad (6.165)$$

а) Да се определи времето на смирување T_s на отскочниот одзив на затворениот систем

б) Да се определи стационарната грешка на одзивот на затворениот систем на единичен линеарно растечки влез.

в) Да се проектира диференцијален компензатор со помош на кој времето на смирување на отскочниот одзив на компензираниот затворен систем ќе се намали барем за 5 пати во однос на времето на смирување на некомпензираниот затворен систем. Нулата на компензаторот да се одбере во точката $s = -1$.

(г) Синтезата треба така да се изведе, да максималниот прескок на отскочниот одзив на компензираниот затворен систем не надминува 15%, а неговата стационарна грешка се движи околу 15% од брзината на линеарно растечки влез.

д) Да се оцени точноста на направената апроксимација со систем од втор ред.

Решение: а) Доминантниот пар полови на затворениот систем се наоѓа во точките $s_{1,2} = -0.4 \pm j7.99$ за $K = 64$. Оттука, времето на смирување на отскочниот одзив на некомпензираниот затворен систем е:

$$T_s = \frac{4}{0.4} = 10 \text{sec} \quad (6.166)$$

б) Брзинската константа на некомпензираниот систем е:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{64}{s(s+0.8)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{64}{s+0.8} = 80 \quad (6.167)$$

па стационарната грешка на одзивот на овој систем за единичен линеарно растечки влез изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{80} = 0.0125 \quad (6.168)$$

в) За времето на смирување на отскочниот одзив на компензираниот затворен систем да биде 5 пати покусо од времето на смирување на некомпензираниот затворен систем, доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем треба да биде $s_{1,2_{comp}} = 5(-0.4 \pm j7.99) = -2 \pm j39.95$. Збирот на аглите што ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на отворениот систем и нулата на диференцирачката компонента на компензаторот во $s = -1$ до доминантниот пол во $s = -2 + j39.95$ изнесува -93.15° , па правата повлечена од полот на диференцијалниот компензатор до доминантниот пол на компензираниот систем во $s = -2 + j39.95$ со реалната оска мора да зафаќа агол од $180^\circ - 93.15^\circ = 86.85^\circ$. Оттаму, за полот на диференцијалниот компензатор се добива:

$$\frac{39.95}{-p_c + 2} = \text{tg}(86.85^\circ) \Rightarrow p_c = -4.2 \quad (6.169)$$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Пресметувањето на аглие што ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на компензираниот отворен систем до доминантниот пол во $s = -2 + j39.95$ е прикажано на Слика 6.81.

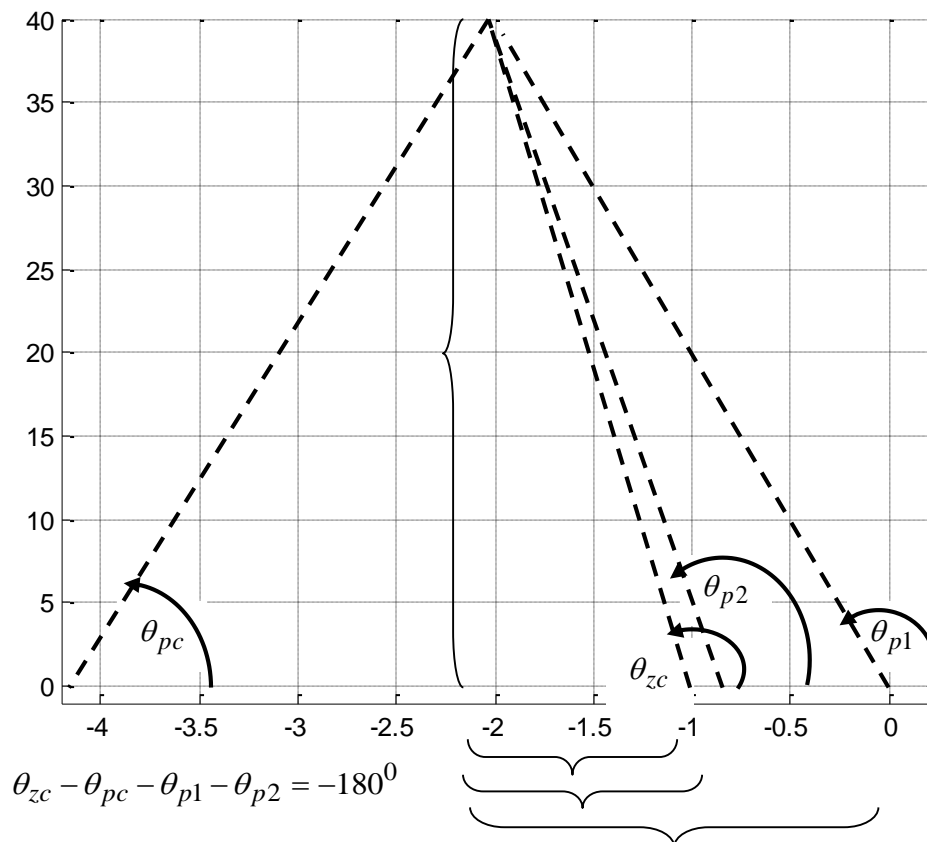
Преносната функција на диференцијалниот компензатор е:

$$R(s) = \frac{s+1}{s+4.2} \quad (6.170)$$

додека преносната функција на компензираниот отворен систем ќе биде:

$$\tilde{G}_0(s) = R(s)G_0(s) = \frac{s+1}{s+4.2} \cdot \frac{64}{s(s+0.8)} \quad (6.171)$$

Резултатот од синтезата е прикажан во Таблица 6.6.

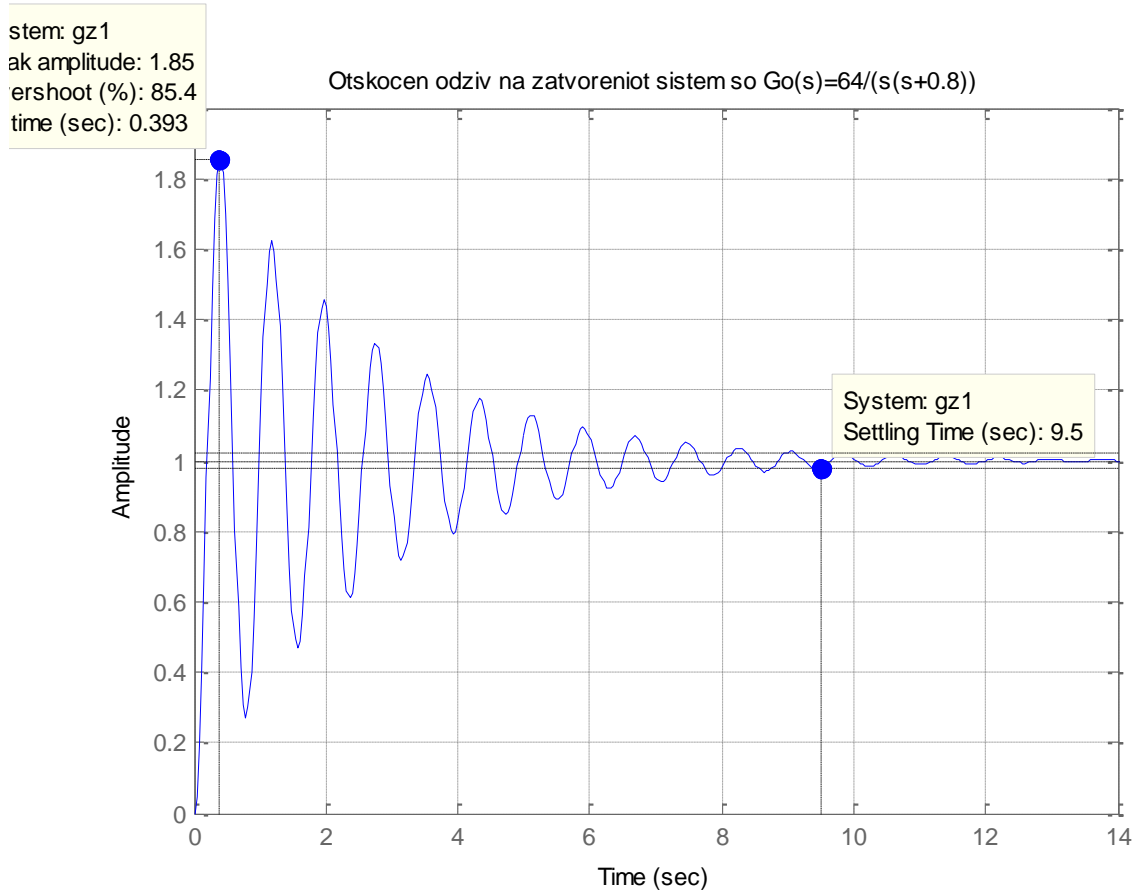


Слика 6.81. Пресметувањето на аглие што ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на компензираниот отворен систем до доминантниот пол во $s = -2 + j39.95$

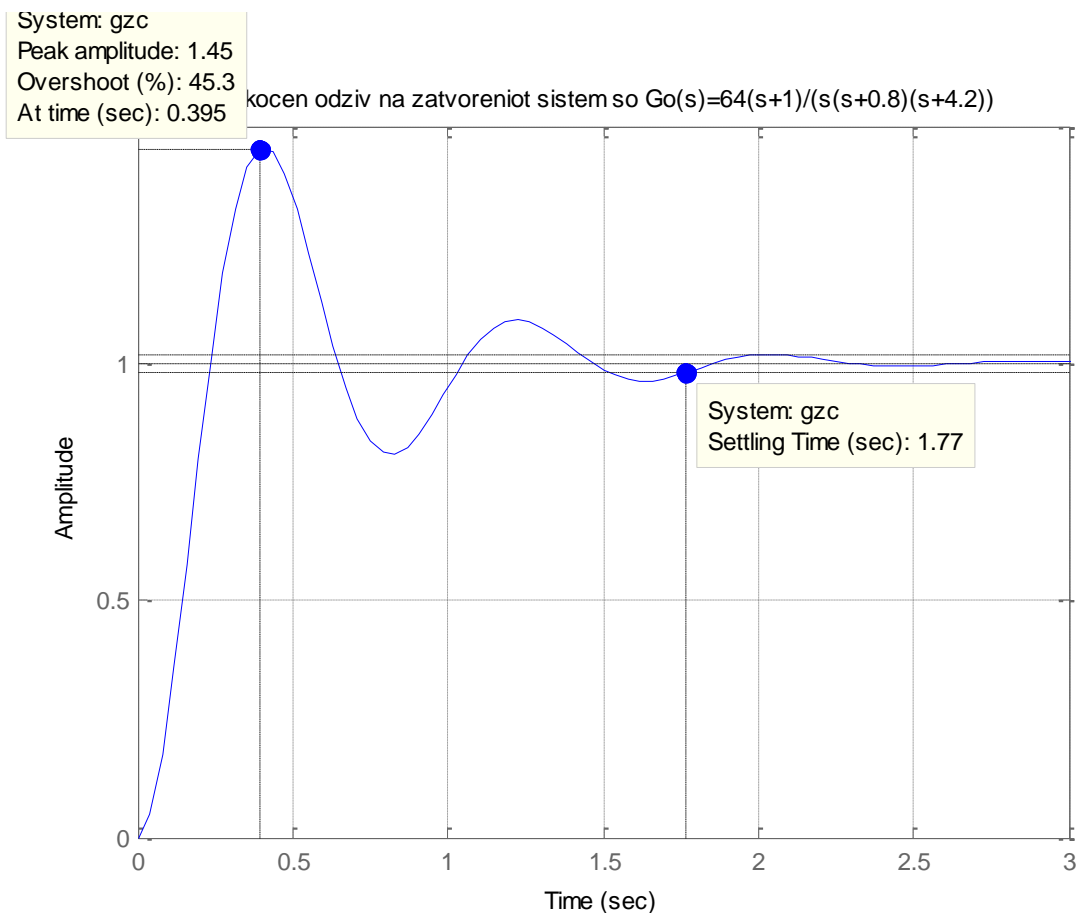
СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Таблица 6.6.

	Некомпензиран систем	Компензиран систем	Компензиран систем
Отворен систем	$\frac{64}{s(s+0.8)}$	$\frac{s+1}{s+4.2} \cdot \frac{64}{s(s+0.8)}$	$\frac{s+1}{s+10} \cdot \frac{64}{s(s+0.8)}$
Коефициент на засилување K	64	64	64.2
Максимален прескок	85.4%	45.3%	11%
Брзинска константа K_v	80	19	8
Брзинска стационарна грешка	0.0125	0.0526	0.125
Време на смирување T_s	9.5	1.77	0.854
Доминантен пар полови на затворениот систем	$-0.4 \pm j7.99$	$-2 \pm j7.7$	$-4.88 \pm j6.17$
Трет пол на затворениот систем	Нема	-1.011	-1.034
Нула на затворениот систем	Нема	-1	-1
Апроксимација со систем од втор ред	да	да	да



Слика 6.82. Отскочен одзив на некомпензираниот затворен систем од Задача 6.38



Слика 6.83. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем од Задача 6.38 со (6.171)

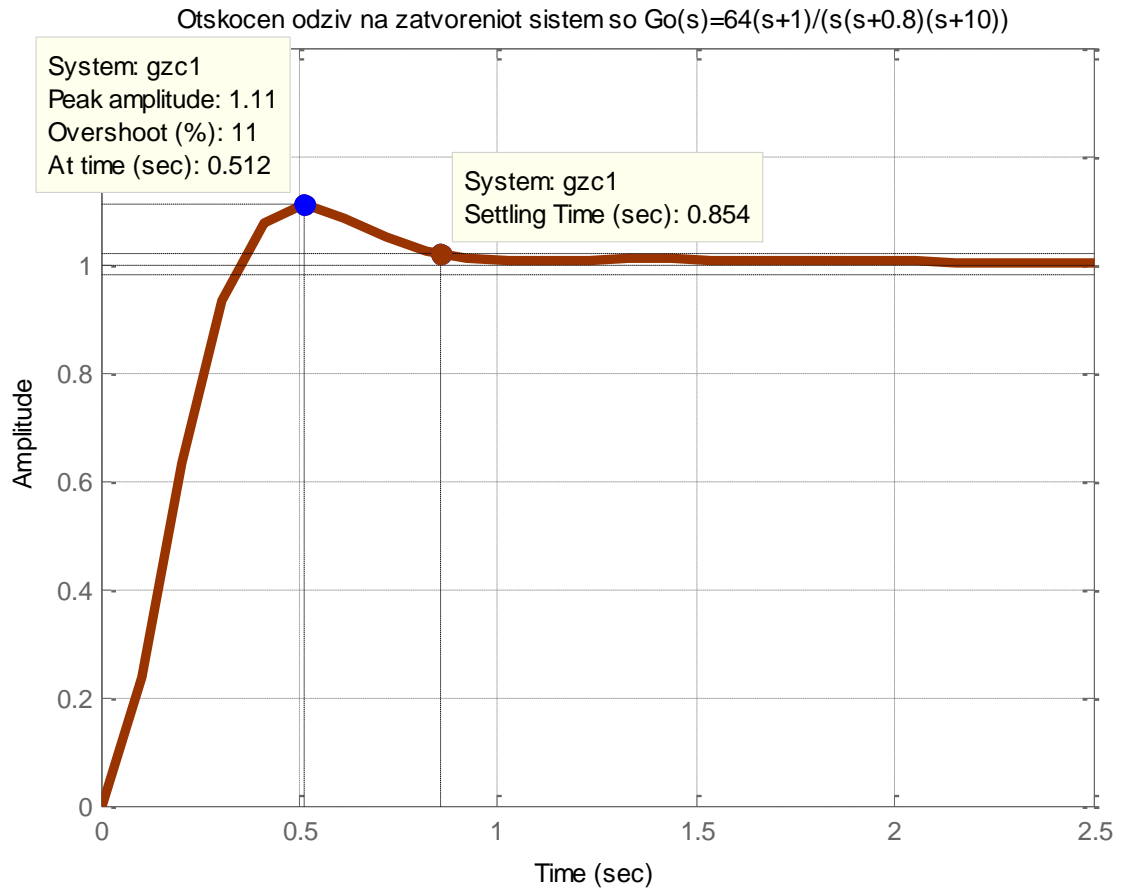
Како што може да се забележи од граfiците на Слика 6.83 и Слика 6.84, компензираниот систем има 5 пати покусо време на смирување на отскочниот одзив и приближно двапати помал максимален прескок, но тој сè уште е многу голем и во многу случаи како таков е неприфатлив. Затоа, наместо (6.170), се одбира диференцијален компензатор со преносна функција:

$$R(s) = \frac{s+1}{s+10} \quad (6.172)$$

Тогаш преносната функција на компензираниот отворен систем ќе биде:

$$G_{0_{comp}}(s) = R(s)G_0(s) = \frac{s+1}{s+10} \cdot \frac{64}{s(s+0.8)} \quad (6.173)$$

а отскочниот одзив на компензираниот затворен систем е прикажан на Слика 6.84. Оттука се гледа дека затворениот систем има максимален прескок од 11%, што сосема го задоволува поставеното проектно барање.

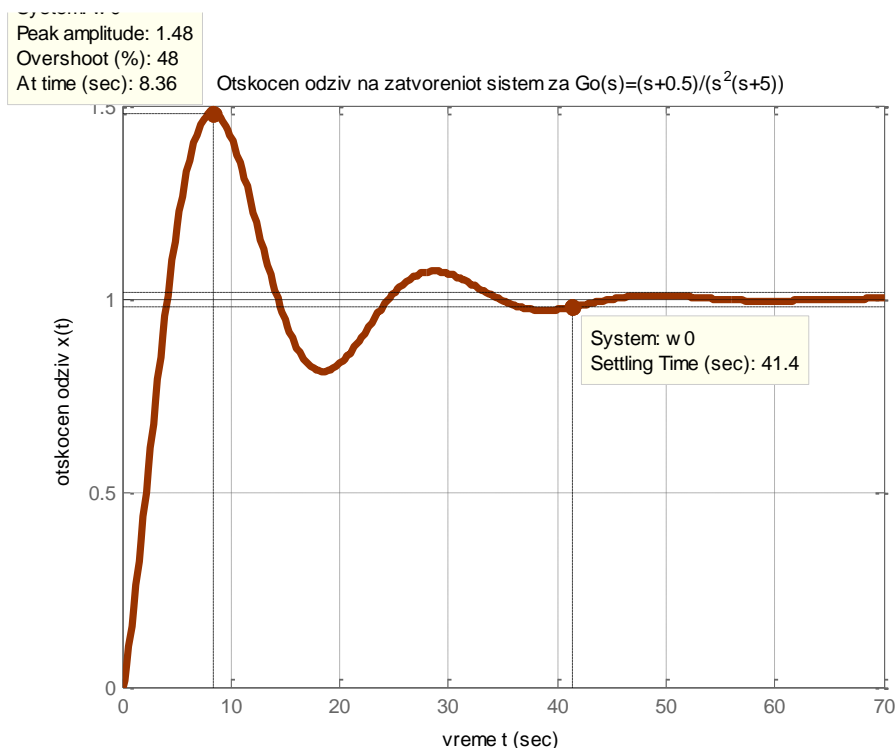


Слика 6.84. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем од Задача 6.38 со (6.173)

6.39. Да се изврши синтеза на затворен систем на автоматско управување со единична негативна повратна врска по пат на компензација со диференцијален компензатор, така што компензираниот систем ќе има време на смирување на отскочниот одзив $T_s \leq 10\text{sec}$ и максимален прескок $M\% \leq 20\%$. Нека објектот на управување има преносна функција:

$$P(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^2(s+5)} \quad (6.174)$$

Решение: На Слика 6.85 е прикажан отскочниот одзив на некомпензираниот затворен систем, од каде се гледа дека се работи за стабилен систем со максимален прескок $M\% = 48\%$ и време на смирување $T_s = 41.4\text{sec}$.



Слика 6.85. Отскочен одзив на некомпензираниот затворен систем од Задача 6.39

На максимален прескок од $M\% = 20\%$ одговара фактор на релативно пригушување $\zeta = 0.4559 \approx 0.456$, што значи дека доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем треба да има фактор на релативно пригушување $\zeta \geq 0.456$. Од вториот проектен услов следува реалниот и имагинарниот дел на доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем:

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 10 \text{sec} \Rightarrow \text{Re } s_{1,2} = -\zeta \omega_n \leq -0.4$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 10 \text{sec} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = 0.8774 \Rightarrow \text{Im } s_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \leq 0.7808 \quad (6.175)$$

Следствено, доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем може да се одбере во точките $s_{1,2} = -0.5 \pm j0.5$.

Нулата на диференцијалниот компензатор се одбира непосредно под доминантниот пол во полурамнината на позитивната имагинарна оска, односно во точката $s = -0.5$, додека неговиот пол се одбира врз основа на критериумот за аргументот. За таа цел се повлекуваат прави од сите полови и нули на компензираниот отворен систем освен од полот на компензаторот до доминантниот пол на компензираниот затворен систем во полурамнината на позитивната имагинарна оска и се пресметува нивниот збир:

$$-\theta_{p_1} - \theta_{p_2} + \theta_{z_c} + \theta_{z_1} - \theta_{p_3} = -135^0 - 135^0 + 90^0 + 90^0 - 6.34^0 = -96.34^0 \quad (6.176)$$

Од условот:

$$-\theta_{p_1} - \theta_{p_2} + \theta_{z_c} + \theta_{z_1} - \theta_{p_3} - \theta_{pc} = -180^0 \Rightarrow \theta_{pc} = 180^0 - 96.34^0 = 83.66^0 \quad (6.177)$$

следува дека правата повлечена од полот на компензаторот до доминантниот пол во полурамнината на позитивната имагинарна оска ја сече негативната реална оска под агол од 83.66^0 , па полот на компензаторот ќе се наоѓа во точката $s = -1.53$. Оттука, преносната функција на диференцијалниот компензатор ќе биде:

$$R(s) = \frac{s+0.5}{s+1.53} \quad (6.178)$$

додека компензираниот отворен систем ќе има преносна функција:

$$G_{0_{comp}}(s) = R(s)G_0(s) = \frac{s+0.5}{s+1.53} \cdot \frac{K(s+0.5)}{s^2(s+5)} \quad (6.179)$$

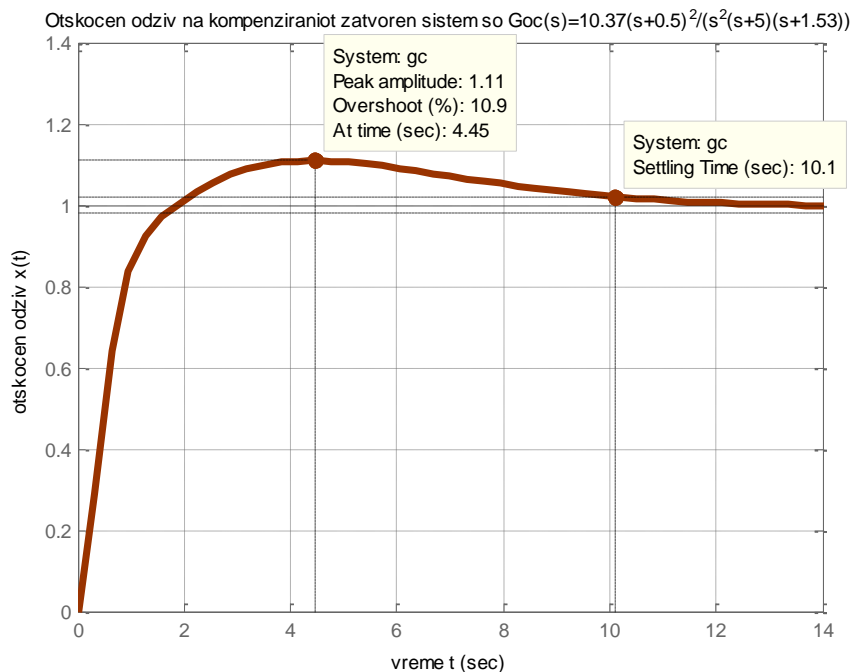
Останува уште да се пресмета коефициентот на засилување K на компензираниот отворен систем, кој е претставен со количникот од производот на должините на векторите од сите полови на отворениот систем до доминантниот пол $s_1 = -0.5 + j0.5$ и производот од должините на векторите од сите нули на отворениот систем до доминантниот пол $s_1 = -0.5 + j0.5$:

$$K = \frac{\sqrt{0.5^2 + 0.5^2} \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} \sqrt{0.5^2 + 4.5^2} \sqrt{0.5^2 + 1.03^2}}{0.5^2} = 10.3729 \quad (6.180)$$

Отскочниот одзив на компензираниот затворен систем, чија преносна функција е:

$$G_{comp}(s) = \frac{10.3729(s+0.5)^2}{(s^2 + 0.666s + 0.186) \cdot (s^2 + 5.864s + 13.93)} \quad (6.181)$$

е прикажан на Слика 6.86, од каде се гледа дека тој ги задоволува поставените проектни барања.



Слика 6.86. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем од Задачата 6.39

6.40. Преносната функција на соодветниот отворен систем за даден затворен линеарен стационарен континуален динамички систем со единична негативна повратна врска е дадена со изразот:

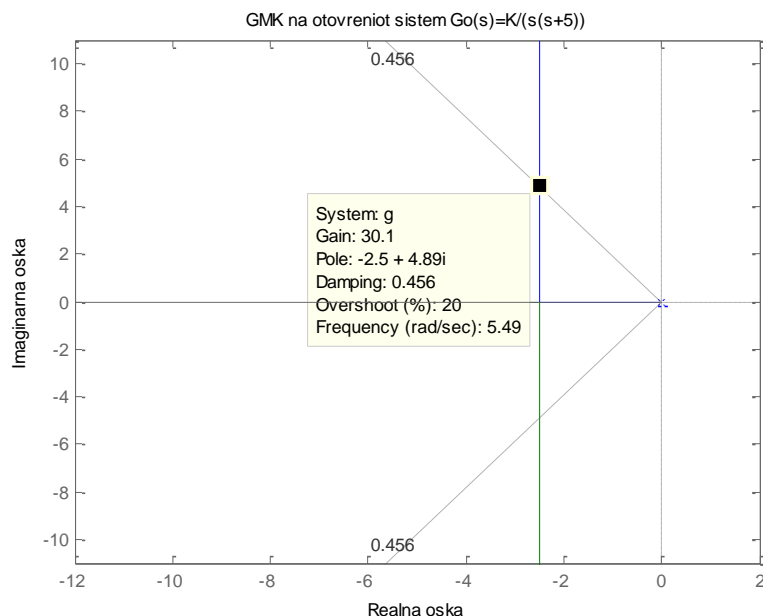
$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+5)} \quad (6.182)$$

Отскочниот одзив на затворениот систем треба да се одликува со максимален прескок од 20%.

- Да се определи времето на смирување на отскочниот одзив на затворениот систем T_s
- Да се определи стационарната грешка на одзивот на затворениот систем на единичен линеарно растечки влез
- Да се проектира интегро-диференцијален компензатор со помош на кој времето на смирување на отскочниот одзив на компензираниот систем ќе се намали за 2 пати во однос на времето на смирување на некомпензираниот систем, а стационарната грешка за единичен линеарно растечки влез ќе се намали за 10 пати
- Да се оцени точноста на направената апроксимација со систем од втор ред.

Решение: а) Геометриското место на корени на некомпензираниот отворен систем (6.182) е прикажано на Слика 6.87.

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



Слика 6.87. Геометриско место на корени на некомпензираниот затворен систем од Задача 6.40

Со пребарување долж линијата на константен максимален прескок од 20%, се утврдува дека доминантниот пар полови на затворениот систем се наоѓа во точките $s_{1,2} = -2.5 \pm j4.9$ за $K = 30$. Оттука, времето на смирување на отскочниот одзив на некомпензираниот систем е:

$$T_s = \frac{4}{2.5} = 1.6 \text{ sec} \quad (6.183)$$

б) Брзинската константа на некомпензираниот систем е:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+5)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{30}{s+5} = 6 \quad (6.184)$$

па стационарната грешка на одзивот на овој систем за единичен линейрно растечки влез изнесува:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{6} = 0.167 \quad (6.185)$$

в) За времето на смирување на отскочниот одзив на компензираниот систем да биде двапати покусо од времето на смирување на некомпензираниот систем, доминантниот пар полови на компензираниот систем треба да биде:

$$s_{1,2_{comp}} = 2(-2.5 \pm j4.9) = -5 \pm j9.8 \approx -5 \pm j10 \quad (6.186)$$

Нулата на диференцирачката компонента на компензаторот се одбира лево од двата реални пола на некомпензираниот систем во точката $s = -6$. Збирот на аглите што ги зафаќаат правите повлечени од нулите и половите на отворениот систем и нулата на диференцирачката компонента на компензаторот во -6 до доминантниот пол во $s_1 = -5 + j10$ изнесува -122° , па правата повлечена од полот на диференцирачката компонента на компензаторот до доминантниот пол на компензираниот систем во $s_1 = -5 + j10$ со реалната оска мора да зафаќа агол од $180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$. Така, за полот на диференцирачката компонента на компензаторот се добива:

$$\frac{10}{-p_c - 5} = \operatorname{tg}(58^\circ) \Rightarrow p_c = -17.6341 \quad (6.187)$$

па соодветната преносна функција ќе биде:

$$R_d(s) = \frac{s+6}{s+17.6} \quad (6.188)$$

Коефициентот на засилување \tilde{K} на компензираниот отворен систем изнесува $K_d = 179$, па преносната функција на отворениот систем компензиран само со диференцијален компензатор е:

$$G_{01}(s) = \frac{s+6}{s+17.6} \cdot \frac{179}{s(s+5)} \quad (6.189)$$

Оттука, брзинската константа на компензираниот затворен систем ќе изнесува:

$$\tilde{K}_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{01}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_d}{s(s+5)} \cdot \frac{s+6}{s+17.6} = \frac{(179) \cdot (6)}{(5) \cdot (17.6)} = 12.2 \quad (6.190)$$

а неговата стационарна грешка:

$$\tilde{e}(\infty) = \frac{1}{\tilde{K}_v} = \frac{1}{12.2} = 0.082 \quad (6.191)$$

Брзинската константа на некомпензираниот систем е $K_v = 6$, додека брзинската константа на компензираниот систем само со диференцирачката компонента на компензаторот е $\tilde{K}_v = 12.2$. За стационарната грешка на одзивот на компензираниот

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

систем на единичен линеарно растечки влез да биде 10 пати помала во однос на одзивот на некомпензираниот систем на истиот влез, брзинската константа на компензираниот систем треба да биде 10 пати поголема од брзинската константа на некомпензираниот систем. Следствено, интегрирачката компонента на компензаторот треба да обезбеди корекција на брзинската константа $\tilde{K}_v = 12.2$ за фактор:

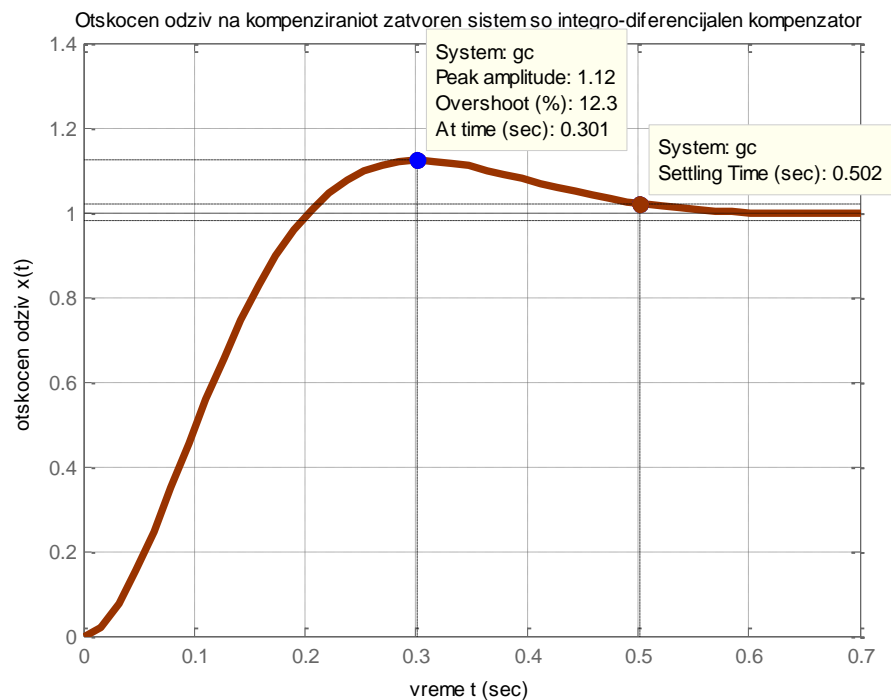
$$\lambda = \frac{(6) \cdot (10)}{12.2} \approx 5 \quad (6.192)$$

Тоа значи дека нулата на интегрирачката компонента од компензаторот треба да биде 5 пати подалеку од имагинарната оска во однос на нејзиниот пол, па за интегрирачката компонента на компензаторот може да се одбере:

$$R_i(s) = \frac{s + 0.05}{s + 0.01} \quad (6.193)$$

Така, конечно, за преносната функција на соодветниот отворен систем за компензираниот затворен систем се добива:

$$G_{0c}(s) = \frac{s + 6}{s + 17.6} \cdot \frac{s + 0.05}{s + 0.01} \cdot \frac{179}{s(s + 5)} \quad (6.194)$$



Слика 6.88. Отскочен одзив на компензираниот затворен систем од Задача 6.40

Со проверка лесно може да се утврди дека вака компензираниот затворен систем ги задоволува поставените проектни барања. Тој има 10 пати помала стационарна грешка за линеарно растечки влез:

$$K_{v_{comp}} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{0c}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{179}{s(s+5)} \cdot \frac{s+6}{s+17.6} \cdot \frac{s+0.05}{s+0.01} = \frac{(179) \cdot (6) \cdot (0.05)}{(5) \cdot (17.6) \cdot (0.01)} = 61 \quad (6.195)$$

$$e_{v_{comp}}(\infty) = \frac{1}{K_{v_{comp}}} = \frac{1}{61} = 0.0164 \quad (6.196)$$

повеќе од 2 пати покусо време на смирување на отскочниот одсвиг и максимален прескок помал од 20%.

г) Преносната функција на компензираниот затворен систем гласи:

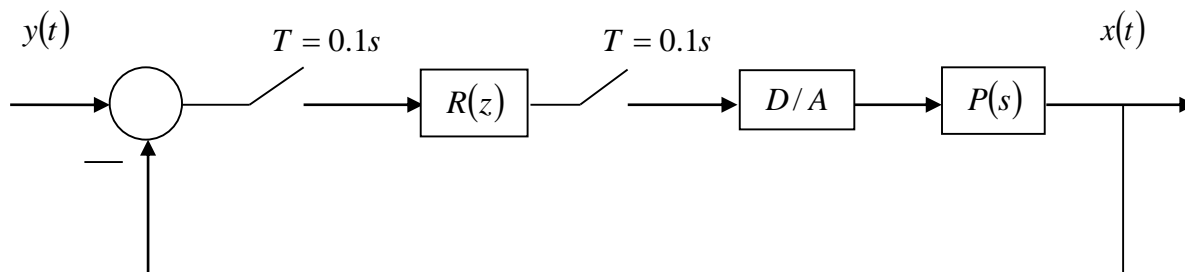
$$G_{comp}(s) = \frac{179(s+6)(s+0.05)}{(s+6.7)(s+0.05)(s^2+15.86s+160)} \quad (6.197)$$

па очигледно се работи за систем од четврти ред. Меѓутоа, полот во $s = -0.05$ се крати со соодветната нула, а полот во $s = -6.7$ е доволно близу до нулата во $s = -6$ за да нивното дејство взаемно се поништува, па направената апроксимација при синтезата со систем од втор ред е валидна.

6.41. Нека е даден затворениот дискретен систем од Слика 6.89, во кој објектот на управување $P(s)$ е опишан со преносната функција:

$$P(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (6.198)$$

Да се проектира дискретен компензатор кој ќе обезбеди доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем да има фактор на релативно придрушување $\zeta = 0.5$ и непридрушувана природна фреквенција $\omega_n = 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Каков е тој компензатор?



Слика 6.89. Илустрација кон Задача 6.41

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

Потоа да се обезбеди 10 пати поголема точност на работа на затворениот систем во стационарен режим.

Решение: Дискретната преносна функција на објектот на управување е:

$$\begin{aligned}
 P(z) &= Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} P(s)\right\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right\} = \frac{z-1}{z} KZ\left\{\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} KZ\left\{\frac{1}{2s^2} - \frac{3}{4s} + \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{4(s+2)}\right\} = \frac{z-1}{z} K\left\{\frac{zT}{2(z-1)^2} - \frac{3z}{4(z-1)} + \frac{z}{(z-e^{-T})} - \frac{z}{4(z-e^{-2T})}\right\} = \\
 &= K\left\{\frac{T}{2(z-1)} - \frac{3}{4} + \frac{z-1}{(z-e^{-T})} - \frac{z-1}{4(z-e^{-2T})}\right\} = K\left\{\frac{0.1}{2(z-1)} - \frac{3}{4} + \frac{z-1}{(z-e^{-0.1})} - \frac{z-1}{4(z-e^{-0.2})}\right\} = \\
 &= K\left\{\frac{0.1}{2(z-1)} - \frac{3}{4} + \frac{z-1}{(z-0.9048)} - \frac{z-1}{4(z-0.8187)}\right\} = \\
 &= K \frac{0.00015473(z+0.2484)(z+3.465)}{(z-1)(z-0.8187)(z-0.9048)} \tag{6.199}
 \end{aligned}$$

и тоа е дискретната преносна функција на некомпензираниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем, чие геометриско место на корени е прикажано на Слика 6.90.

$$G_0(z) = P(z) = K \frac{0.00015473(z+0.2484)(z+3.465)}{(z-1)(z-0.8187)(z-0.9048)} \tag{6.200}$$

Положбата на доминантниот пар полови на компензираниот затворен систем во z -комплексната рамнина се определува на следниот начин:

$$\operatorname{Re} z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \cos\left(\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}\right) = 0.3929 \tag{6.201}$$

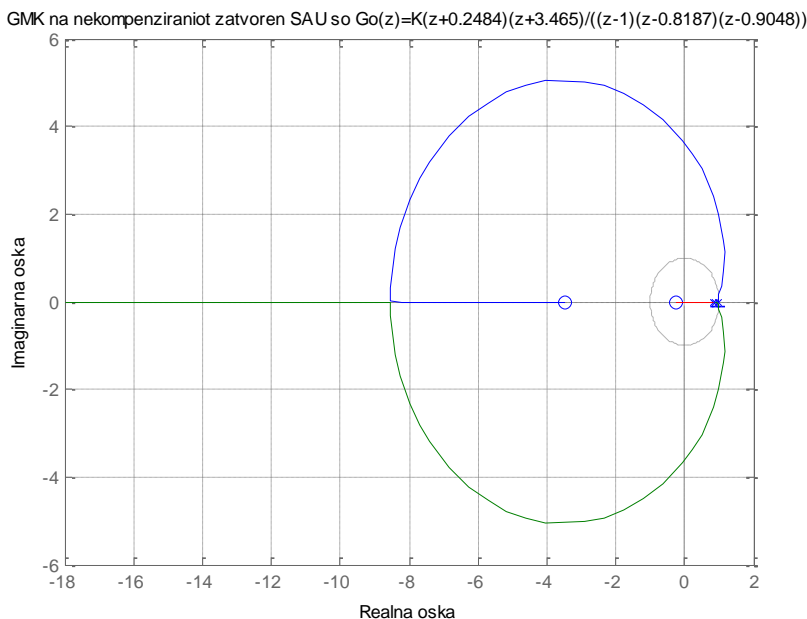
$$\operatorname{Im} z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T} \sin\left(\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}\right) = 0.4620 \tag{6.202}$$

Од Слика 6.90 лесно може да се забележи дека саканиот доминантен пар полови на компензираниот затворен систем $z_{1,2} = 0.3929 \pm j0.4620$ се наоѓа далеку од ГМК на некомпензираниот систем, заради присуството на половите на отворениот систем $G_0(z)$ во точките $z = 0.8187$ и $z = 0.9048$, кои се наоѓаат многу блиску до точката $z = 1$. Затоа треба да се изврши компензација со соодветен компензатор, кој ќе обезбеди ГМК на

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

компензираниот затворен систем да минува низ точките $z_{1,2} = 0.3929 \pm j0.4620$. Компензаторот може да се одбере така што ќе ги елиминира споменатите полови на отворениот систем, па неговата преносна функција треба да биде од облик:

$$R_1(z) = \frac{(z - 0.8187)(z - 0.9048)}{(z - p_{c1})(z - p_{c2})} \quad (6.203)$$



Слика 6.90. Геометриско место на корени на некомпензираниот затворен систем од Задача 6.41

Тогаш преносната функција на компензираниот отворен систем ќе гласи:

$$G_{0c}(z) = R_1(z)P(z) = K \frac{0.00015473(z + 0.2484)(z + 3.465)}{(z - 1)(z - p_{c1})(z - p_{c2})} \quad (6.204)$$

Едниот пол на компензаторот може да се одбере да ја поништи нулата на отворениот систем во точката $z = -0.2484$, а вториот се определува врз основа на принципот на аргументот. Имено, тој се наоѓа во пресекот со реалната оска на правата повлечена низ доминантниот пол $z_1 = 0.3929 + j0.4620$ под агол:

$$-\theta_{p_{c1}} - \theta_{p_{c2}} - \theta_{p_1} + \theta_{z_1} + \theta_{z_2} = -180^\circ \Rightarrow -\theta_{p_{c2}} - \theta_{p_1} + \theta_{z_2} = -180^\circ$$

$$\theta_{p_{c2}} = 180^\circ + 6.83^\circ - 142.73^\circ = 44.1^\circ \quad (6.205)$$

и изнесува $p_{c2} = -0.0838$. Така конечно за преносната функција на компензаторот и компензираниот отворен систем се добива:

$$R_1(z) = \frac{(z - 0.8187)(z - 0.9048)}{(z + 0.2484)(z + 0.0838)} \quad (6.206)$$

$$G_{0c}(z) = R_1(z)P(z) = K \frac{0.00015473(z + 3.465)}{(z - 1)(z + 0.0838)} \quad (6.207)$$

На крај останува уште да се определи коефициентот на засилување на компензираниот отворен систем, кој изнесува 0.1303, па:

$$G_{0c}(z) = R_1(z)P(z) = \frac{0.1303(z + 3.465)}{(z - 1)(z + 0.0838)} \quad (6.208)$$

додека преносната функција на компензираниот затворен систем изнесува:

$$G_c(z) = \frac{G_{0c}(z)}{1 + G_{0c}(z)} = \frac{0.1303(z + 3.465)}{(z^2 - 0.7858z + 0.3678)} \quad (6.209)$$

Геометриското место на корени на компензираниот затворен систем е прикажано на Слика 6.91. Лесно може да се провери дека тоа минува низ точките $z_{1,2} = 0.3929 \pm j0.4620$. На Слика 6.93 е прикажан само дел од ГМК на компензираниот затворен систем и приближно е одредена точката $z_1 = 0.3929 + j0.4620$.

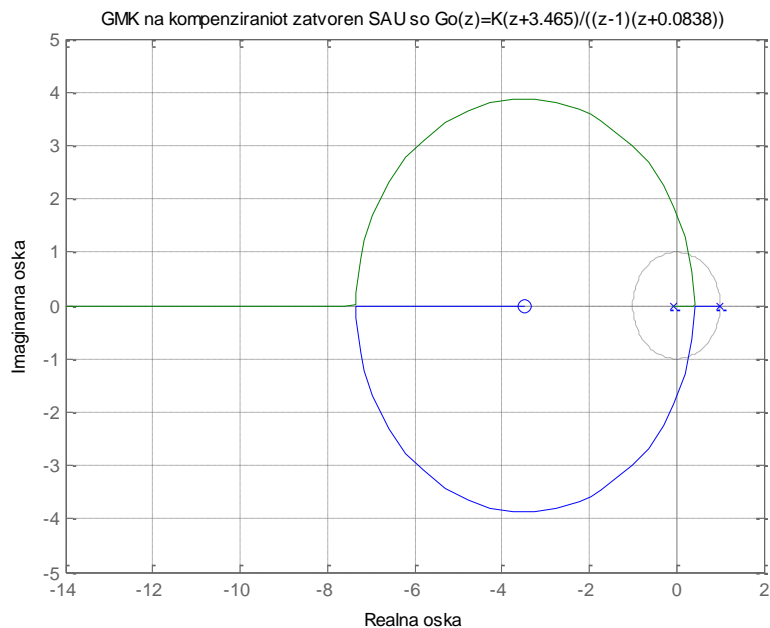
Со тоа е завршена постапката на синтеза на преодниот режим на затворениот систем од Слика 6.89, при што синтезата е извршена со компензација со дискретен еквивалент на диференцијален компензатор. Останува уште да се изврши синтеза на стационарниот режим на набљудуваниот затворен систем. Со проверка може да се утврди дека проектираниот затворен систем (6.209) идеално следи отскочен влез, додека линеарно растечки влез следи со константна грешка определена со неговата брзинска константа:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{0.1303(z + 3.465)}{(z - 1)(z + 0.0838)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.1303(z + 3.465)}{(z + 0.0838)} = 0.5368 \Rightarrow e(\infty) = 0.1863 \quad (6.210)$$

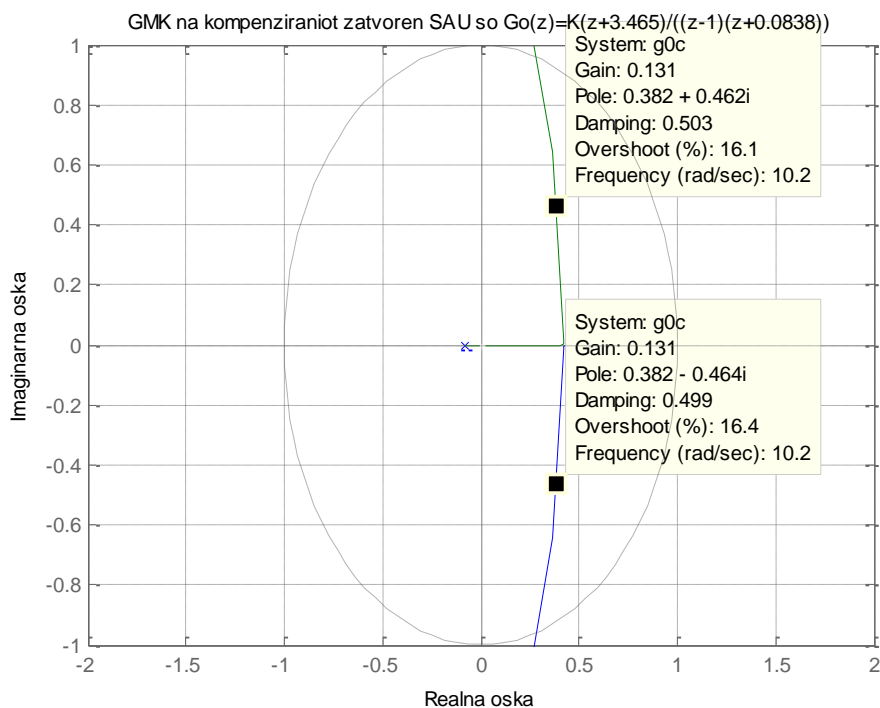
Саканото поведение на затворениот систем во стационарен режим може да се постигне со додавање на дискретен еквивалент на интегрален компензатор со преносна функција од облик:

$$R_2(z) = \frac{(z + z_c)}{(z - p_c)} \quad (6.211)$$

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ



Слика 6.91. Геометриско место на корени на компензираниот затворен систем од Задача 6.41



Слика 6.92. Сегмент од геометриско место на корени на компензираниот затворен систем од Задача 6.41 со прикажани доминантните полови

СИНТЕЗА НА ЗАТВОРЕНИ САУ СО ПОМОШ НА ГЕОМЕТРИСКО МЕСТО НА КОРЕНИ

чиј пол се усвојува многу близу до точката $z = 1$, на пример, $p_c = 0.992$. Тогаш неговата нула се одредува од условот:

$$e_{nova}(\infty) = 0.1e(\infty) = \frac{T}{K_{v_{nova}}} = 0.01863 \Rightarrow K_{v_{nova}} = \frac{T}{0.01863} = 5.3677 \quad (6.212)$$

каде што:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.1303(z+3.465)(z+z_c)}{(z-1)(z+0.0838)(z-0.992)} = 5.3677 \Rightarrow \quad (6.213)$$

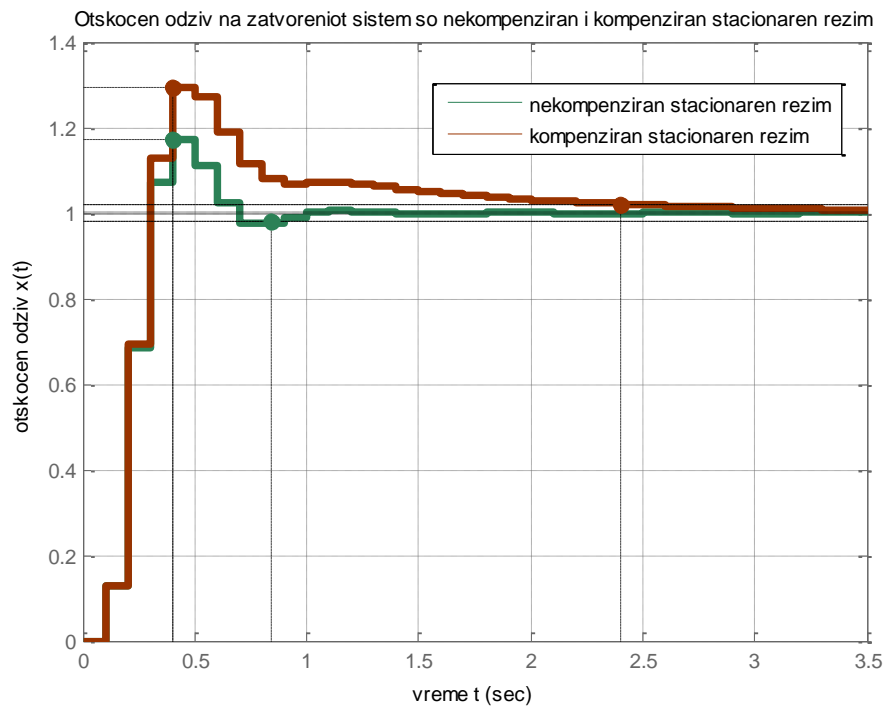
$$\Rightarrow z_c = \frac{5.3677(1.0838)(1.992)}{0.1303(4.465)} - 1 = 0.92 \quad (6.214)$$

Следствено, компензаторот $R_2(z)$ ќе има преносна функција:

$$R_2(z) = \frac{(z-0.92)}{(z-0.992)} \quad (6.215)$$

додека преносната функција на компензираниот отворен систем ќе има облик:

$$G_{0c}(z) = R_1(z)R_2(z)P(z) = \frac{0.1303(z+3.465)}{(z-1)(z+0.0838)} \frac{(z-0.92)}{(z-0.992)} \quad (6.216)$$



Слика 6.93. Графички приказ на отскокениот одзив на затворениот систем од Слика 6.40 со компензиран преоден режим и а) некомпензиран и б) компензиран стационарен режим

Бидејќи нулата и полот на компензаторот $R_2(z)$ се многу близу до точката $z = 1$, тие нема да влијаат значително врз преодниот режим на проектираниот затворен систем, што значи дека доминантниот пар полови на системот ќе се наоѓаат приближно на истото место $z_{1,2} = 0.3929 \pm j0.4620$, а сепак, системот ќе има многу помала стационарна грешка за линеарно растечки влез. На Слика 6.93 е прикажан отскочниот одзив на затворениот систем од задачата со компензиран преоден режим и со: а) некомпензиран и б) компензиран стационарен режим

ЛИТЕРАТУРА

1. Норман С. Нисе, **Системи на автоматско управување** (5-то издание, превод на македонски*), Датапонс доел., Скопје, 2013.
2. R. C. Dorf, R. H. Bishop, **Modern Control Systems** (12-то издание на англиски), Prentice Hall, 2010.
3. G. F. Franklin, J. D. Powell, A. E. Naeini, **Feedback Control of Dynamic Systems** (6-то издание на англиски), Prentice Hall, 2009.
4. J. J. DiStefano III, A. R. Stubberud & I. J. Williams, **Feedback and Control Systems** (2-ро издание на англиски), Mc Graw-Hill Inc., New York, New York, 1994.
5. Милиќ Р. Стојик, **Континуални системи на автоматско управување** (на српски), Белград, Србија, (повеќе изданија), 1991.
6. Милиќ Р. Стојик, **Дигитални системи на управување** (на српски), Академска мисла, Белград, Србија, (повеќе изданија), 2004.
7. Трајко Б. Петровиќ, **Системи на автоматско управување – збирка решени задачи** (на српски), Белград, Србија, (повеќе изданија), 1990.
8. Б. Ковачевиќ и Ж. Ѓуровиќ, **Системи за автоматско управување – збирка решени задачи** (на српски), Наука, Белград, Србија, 1992.
9. Dean K. Frederick & Joe Chow, **Feedback Control Problems Using MATLAB & the Control System Toolbox** (на англиски), CL Engineering, 1999.

*) Издавањето на оваа книга е дел од проектот на Владата на Република Македонија “Преведување на 1000 стручни и научни книги и учебници од кои се учи на врвните и најреномираните универзитети во САД и Англија а од областа на правото во Франција и Германија“ спроведено преку Министерството за образование и наука на Република Македонија

