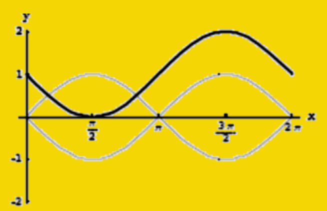
ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД МАТЕМАТИКА 1
ЗА СТУДЕНТИТЕ ОД
ТЕХНОЛОШКО-МЕТАЛУРШКИОТ ФАКУЛТЕТ

Бети Андоновиќ

Зоран Мисајлески

Томи Димовски



$$\rho = a(1-\sin\varphi), \quad a = 1$$

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“

Технолошко-металуршки факултет - Скопје

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД МАТЕМАТИКА 1
ЗА СТУДЕНТИТЕ ОД
ТЕХНОЛОШКО-МЕТАЛУРШКИОТ ФАКУЛТЕТ

Бети Андоновиќ
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

Рецензенти:

д-р Никита Шекутковски, редовен професор, ПМФ – Скопје, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“

д-р Татјана Атанасова Пачемска, редовен професор, Универзитет „Гоце Делчев“, Штип

Со одлука на Наставничкиот совет на Технолошко-металуршкиот факултет во Скопје под број 07-2477/1 од 12.09.2013 година се одобрува употребата на оваа книга како основно универзитетско учебно помагало.

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“
Технолошко-металуршки факултет - Скопје

ПРЕДГОВОР

Досега се напишани повеќе збирки со решени или нерешени задачи од областите кои ги опфаќа предметот *математика 1* на техничките факултети или *математичка анализа* на ПМФ – Скопје. Но оваа збирка е прва збирка со решени задачи која е наменета за студентите од Технолошко-металуршкиот факултет во Скопје, и како таква, фокусот е точно врз оние задачи и теми кои се изучуваат на тој факултет. Досега, истите студенти морале неизбежно да користат повеќе извори, бидејќи или не биле сите неопходни теми опфатени, или нивото на задачите не било прилагодено за нив.

Долгогодишниот начин на работа и искуство ги мотивираше авторите да ја изготват оваа збирка задачи. Содржината на збирката е структурирана во две големи тематски целини и еден додаток: *Функции, граници на функции, изводи и нивна примена,* и *Интеграли, неопределен и определен, и примена*. Додатокот се состои од список на задачи кои биле дадени во испитните сесии последниве десетина години.

Во *првиот дел* авторите ги опфатиле следниве теми: Скицирање графици со помош на елементарни функции, дефинициона област на функција, граница на функција, некои специјални граници, изводи, Лопиталово правило, тангента и нормала на крива, анализа на графици од дробно-рационални функции и примена на екстреми. Во *вториот дел* се опфатени следниве теми: Непределен интеграл, методи на решавање на неопределен интеграл – метод на замена и парцијална интеграција, интеграли со тригонометриска смена, интеграли од квадратен трином, интеграли од рационални функции, интеграли од ирационални функции, интеграли од тригонометриски функции, определен интеграл, примена на определен интеграл за одредување плоштина на рамнински лик и должина на лак на крива.

На почетокот на секое поглавје се дадени дефинициите на поимите кои се користат. За комплетна дефиниција на поимите авторите препорачуваат читателот да се упати на книгата од д-р Никита Шекутковски: *Математичка анализа 1. Низи, функции, лимеси, изводи, интеграли (II издание)*. [1]

Збирката, иако е првенствено наменета за студентите на прв циклус на Технолошко-металуршкиот факултет како основна литература за предметот *математика* 1, неа можат успешно да ја користат и студентите на сите други технички факултети во Република Македонија.

Од авторите

СОДРЖИНА

I дел

ГРАНИЦИ И ИЗВОДИ. ПРИМЕНА

ДЕФИНИЦИОНА ОБЛАСТ НА ФУНКЦИЈА

Дефиниција. Нека D и K се две дадени непразни множества. Ако на секој елемент x од D, според некој определен закон (правило) му е придружен точно еден елемент y од K, велиме дека е зададена функција од D во K.

Користиме ознака $f: D \to K$. Зависноста на y од x ја запишуваме како $y = f(x)$, каде $x \in D$ е независна променлива (аргумент), а $y \in K$ зависна променлива (слика на $x \in D$).

Множеството D го нарекуваме **дефинициона област** (домен) на функцијата f, а множеството K **кодомен**. Дефиниционата област на f ќе ја означуваме со D_f. Множеството $V_f = \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq K$ го нарекуваме **множество вредности** (ранг) на функцијата f. Функциите каде доменот и кодоменот се подмножества од множеството на реални броеви ги нарекуваме реални функции.

Нека $f: D_f \to \mathbf{R}$ и $g: D_g \to \mathbf{R}$ се дадени функции. Тогаш

1) За пресликувањата $h(x) = f(x) \pm g(x)$ и $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ е исполнето $D_h = D_f \cap D_g$;

2) За $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ е исполнето $D_h = D_f \cap D_{g'}$ каде што $D_{g'} = D_g \cap \{x \mid g(x) \neq 0\}$.

Подолу следуваат примери за дефиниционите области на некои од елементарните функции:

1) $f(x) = x^r,\ r \in \mathbf{R}_0^+,\ f(x) = x^r,\ r \in \mathbf{R}^-$.

И во двата случаи, интервалот $(0,\infty)$ се содржи во D_f .Se разбира за некои r дефиниционата област е поголема, како на пример за r=2, r = 1/3,... Тогаш $D_f = \mathbf{R}$.

За r = ½ , $D_f = [0,\infty)$.

2) $f(x) = a^x, a > 0,\ D_f = \mathbf{R}$;

3) $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1,\ D_f = (0, +\infty)$;

4) $f(x) = \sin x,\ D_f = \mathbf{R}$; $f(x) = \cos x,\ D_f = \mathbf{R}$;

5) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ D_f = \mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbf{Z}$; $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $D_f = \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$;

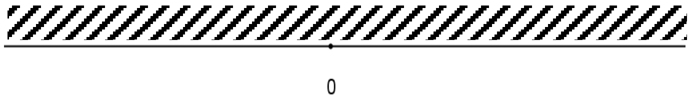
6) $f(x) = \arcsin x,\ D_f = [-1,1]$; $f(x) = \arccos x,\ D_f = [-1,1]$;

7) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ D_f = \mathbf{R}$; $f(x) = \operatorname{arcctg} x,\ D_f = \mathbf{R}$.

Во задачите 1 - 19 одреди ги дефиниционите области на зададените функции.

Задача 1. $f(x) = x^5 + 5x + 4$.

Решение. Полиномната функција е дефинирана за секој реален број, односно $D_f = \mathbf{R}$ или графички:

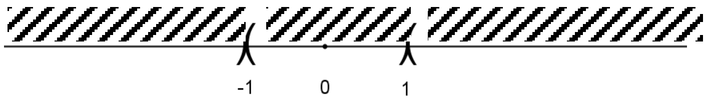


Задача 2. $f(x) = \dfrac{x^7 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

Решение. Функцијата е дефинирана за сите $x \in \mathbf{R}$ такви што $x^2 - 5x + 6 \neq 0$, односно за $x \neq 2$ и $x \neq 3$. Следува дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2,3\} = (-\infty,2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$. На реалната права дефиниционата област може да се претстави на следниот начин:

Задача 3. $f(x) = \dfrac{x^3}{|x| - 1}$.

Решение. Функцијата е дефинирана за сите $x \in \mathbf{R}$ такви што $|x| - 1 \neq 0$, односно за $|x| \neq 1$. Следува дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$. На реалната права дефиниционата област може да се претстави на следниот начин:



Задача 4. $f(x) = \sqrt{1 - x}$ **.**

Решение. Функцијата е дефинирана за сите $x \in \mathbf{R}$ такви што $1 - x \geq 0$, односно кога $x \leq 1$. Следува дека $D_f = (-\infty,1]$. На реалната права дефиниционата област може да се претстави на следниот начин:

Задача 5. $f(x) = \sqrt[3]{7x + 8}$.

Решение. $D_f = \mathbf{R}$.

Задача 6. $f(x) = \sin\left(x^2 + 3x + 1\right)$.

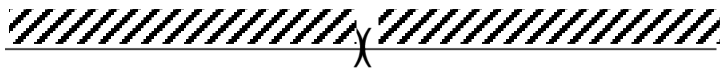
Решение. $D_f = \mathbf{R}$.

Задача 7. $f(x) = \sqrt{10^{x-1}}$.

Решение. Бидејќи $10^{x-1} > 0$ за секое $x \in \mathbf{R}$, следува дека $D_f = \mathbf{R}$.

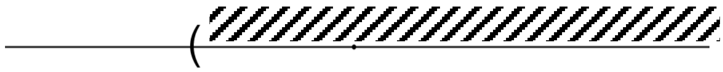
Задача 8. $f(x) = \dfrac{2x+1}{e^{\frac{\pi}{x}}}$.

Решение. Функцијата е дефинирана за сите $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Следува дека $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. На реалната права дефиниционата област може да се претстави на следниот начин:



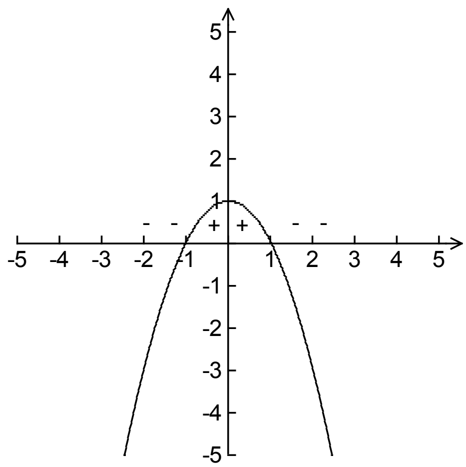
Задача 9. $f(x) = \ln(x+2)$.

Решение. Функцијата е дефинирана за сите $x \in \mathbf{R}$ такви што $x+2>0$, односно кога $x > -2$. Следува дека $D_f = (-2,+\infty)$. На реалната права дефиниционата област може да се претстави на следниот начин:

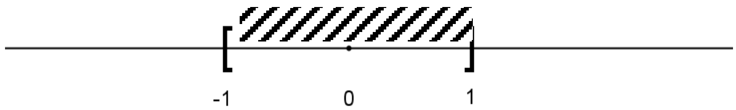


Задача 10. $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$.

Решение. Функцијата е дефинирана за сите $x \in \mathbf{R}$ за кои $1-x^2 \geq 0$. Од цртежот

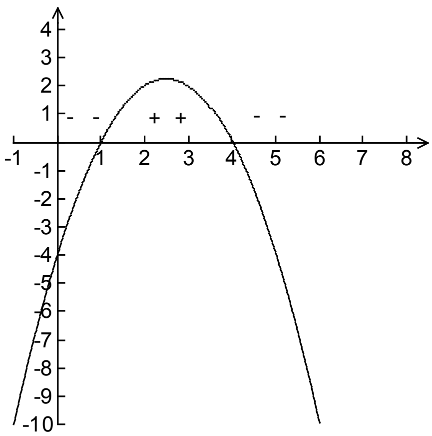


гледаме дека $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1]$. Следува дека $D_f = [-1,1]$. На реалната права дефиниционата област може да се претстави на следниот начин:

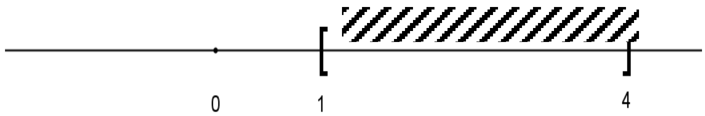


Задача 11. $f(x)=\sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}$ **.**

Решение. Функцијата е дефинирана за сите $x\in\mathbf{R}$ за кои $\ln\frac{5x-x^2}{4}\geq 0$, односно кога $\frac{5x-x^2}{4}\geq 1$. Очигледно е дека $\frac{5x-x^2}{4}\geq 1\Leftrightarrow -x^2+5x-4\geq 0$. Од цртежот



гледаме дека $-x^2+5x-4\geq 0\Leftrightarrow x\in[1,4]$. Следува дека $D_f=[1,4]$. На реалната права дефинициона област може да се претстави на следниот начин:



Задача 12. $f(x)=\sqrt{-1-x^2}$.

Решение. Бидејќи $-1-x^2=-(1+x^2)<0$ за секое $x\in\mathbf{R}$ следува дека функцијата не е дефинирана за ниеден реален број, односно $D_f=\varnothing$.

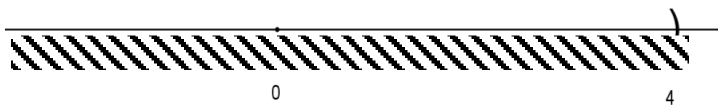
Задача 13. $f(x)=\arcsin\frac{x-3}{2}+\ln(4-x)$**.**

Решение. Нека $f_1(x) = \arcsin\frac{x-3}{2}$ и $f_2(x) = \ln(4-x)$. Тогаш $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$. Според тоа, потребно е да ги најдеме најпрво дефиниционите области на f_1 и f_2, а потоа и нивниот пресек.

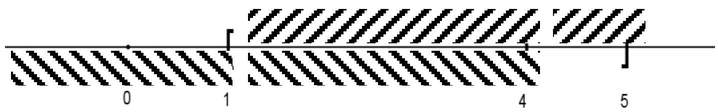
Функцијата f_1 е дефинирана кога важи:

$-1 \le \frac{x-3}{2} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le x-3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$. Следува дека $D_{f_1} = [1,5]$. На реалната права D_{f_1} може да се претстави на следниот начин:

Функцијата f_2 е дефинирана кога $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$. Следува дека $D_{f_2} = (-\infty,4)$. На реалната права D_{f_2} може да се претстави на следниот начин:



Според тоа, D_f се добива како делот од реалната права кој што е штрафиран и во двете насоки ако ги нанесеме двете дефинициони области на иста реална права.



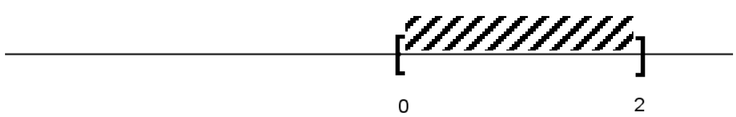
Следува дека $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [1,5] \cap (-\infty,4) = [1,4)$.

Задача 14. $f(x) = \arcsin(1-x) + \ln(\ln x)$.

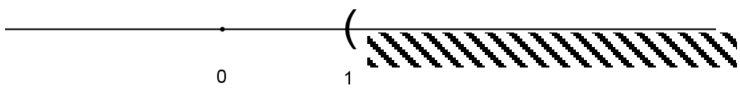
Решение. Нека $f_1(x) = \arcsin(1-x), f_2(x) = \ln(\ln x)$. Тогаш $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$.

Функцијата f_1 е дефинирана кога важи:

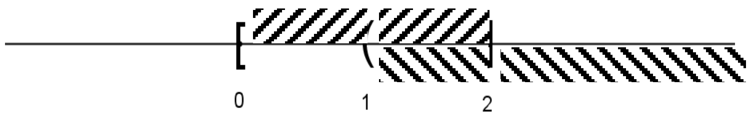
$-1 \le 1 - x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le -x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$. Следува дека $D_{f_1} = [0,2]$. На реалната права D_{f_1} може да се претстави на следниот начин:



Функцијата f_2 е дефинирана кога $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Следува дека $D_{f_2} = (1,+\infty)$. На реалната права D_{f_2} може да се претстави на следниот начин:



D_f се добива како делот од реалната права кој што е штрафиран и во двете насоки ако ги нанесеме двете дефинициони области на иста реална права.



Следува дека $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [0,2] \cap (1,\infty) = (1,2]$.

Задача 15. $f(x) = \arcsin\left(2+3^x\right)$.

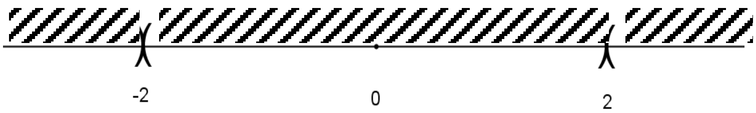
Решение. Бидејќи $-1 \le 2+3^x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3^x \le -1$, а $3^x > 0$ за секое $x \in \mathbf{R}$, следува дека функцијата не е дефинирана за ниеден рален број, односно $D_f = \emptyset$.

Задача 16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4} + \sqrt{x^2-1}$.

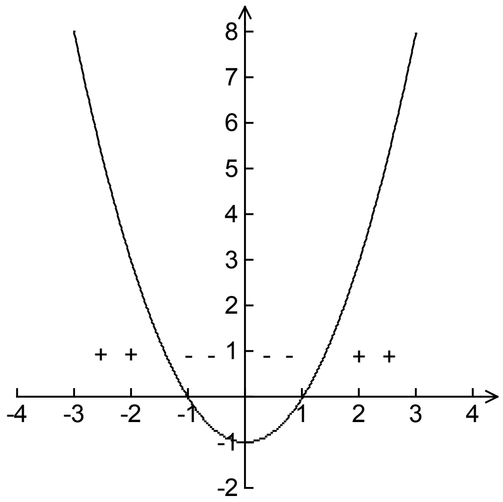
Решение. Нека $f_1(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$, $f_2(x) = \sqrt{x^2-1}$. Тогаш $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$.

Функцијата f_1 е дефинирана кога $x^2-4 \ne 0$, односно кога $x \ne -2$ и $x \ne 2$. Следува дека:

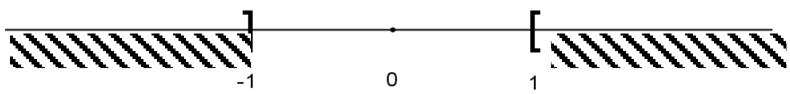
$D_{f_1} = \mathbf{R} \setminus \{-2,2\} = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$. На реалната права D_{f_1} може да се претстави на следниот начин:



Функцијата f_2 е дефинирана кога $x^2-1 \ge 0$. Од цртежот



следува дека $D_{f_2} = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$. На реалната права D_{f_2} може да се претстави на следниот начин:



D_f се добива како делот од реалната права кој што е штрафиран и во двете насоки ако ги нанесеме двете дефинициони области на иста реална права.

Следува дека

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = (-\infty,-2) \cup (-2,-1] \cup [1,2) \cup (2,+\infty]$.

Задача 17. $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{x-4}{x+2}} + \sqrt{4-3x-x^2}$ **.**

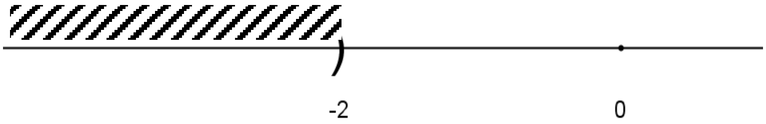
Решение. Нека $f_1(x) = \sqrt{\ln \dfrac{x-4}{x+2}}, f_2(x) = \sqrt{4-3x-x^2}$.

Функцијата f_1 е дефинирана кога важи:

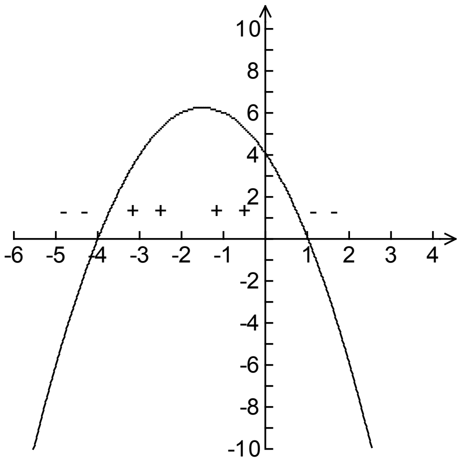
$$\ln \frac{x-4}{x+2} \geq 0, x \neq -2 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} \geq 1, x \neq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6}{x+2} \geq 0, x \neq -2 .$$

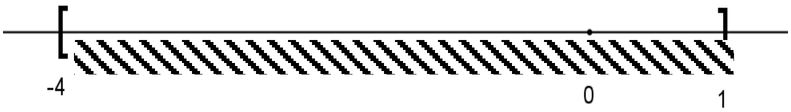
Според тоа, f_1 е дефинирана кога $x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2)$, односно $D_{f_1} = (-\infty,-2)$. На реалната права D_{f_1} може да се претстави на следниот начин:



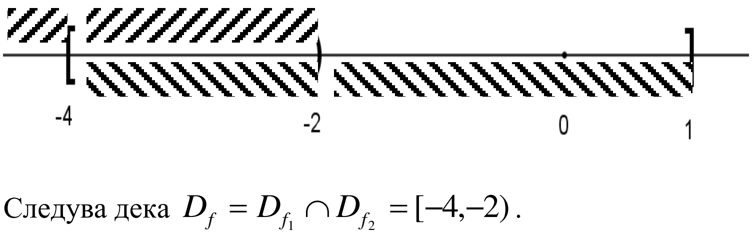
Функцијата f_2 е дефинирана кога $4-3x-x^2 \geq 0$. Од цртежот



гледаме дека $D_{f_2} = [-4,1]$. На реалната права D_{f_2} може да се претстави на следниот начин:



D_f се добива како делот од реалната права кој што е шрафиран и во двете насоки ако ги нанесеме двете дефинициони области на иста реална права.



Следува дека $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [-4,-2)$.

Задача 18. $f(x) = \ln\dfrac{x-3}{x+2} + \sqrt{16-x^2}$.

Решение. Нека $f_1(x) = \ln\dfrac{x-3}{x+2}$, $f_2(x) = \sqrt{16-x^2}$.

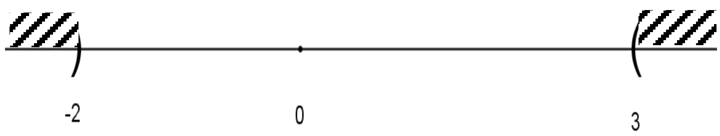
Дефинициона област

Функцијата f_1 е дефинирана кога важи:

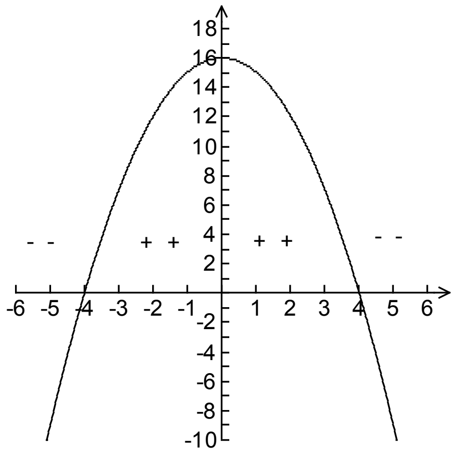
$$\frac{x-3}{x+2}>0, x\neq -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3>0, x+2>0 \\ x-3<0, x+2<0 \end{array}\right., x\neq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3, x>-2 \\ x<3, x<-2 \end{array}\right..$$

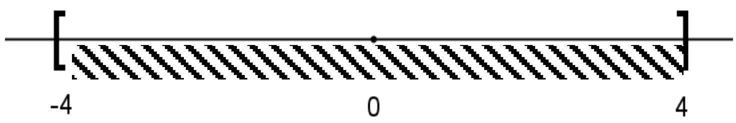
Според тоа, функцијата f_1 е дефинирана кога $x<-2$ или $x>3 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$, односно $D_{f_1}=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$. На реалната права D_{f_2} може да се претстави на следниот начин:



Функцијата f_2 е дефинирана кога $16-x^2\geq 0$. Од цртежот



гледаме дека $D_{f_2}=[-4,4]$. $D_{f_1}=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$. На реалната права D_{f_2} може да се претстави на следниот начин:



D_f се добива како делот од реалната права кој што е штрафиран и во двете насоки ако ги нанесеме двете дефинициони области на иста реална права.

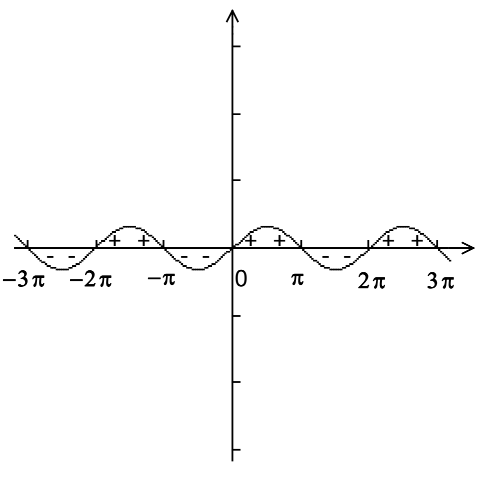
Следува дека $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [-4,-2) \cup (3,4]$.

Задача 19. $f(x) = \ln(x \sin x)$.

Решение. Функцијата е дефинирана за секое $x \in \mathbf{R}$ за кое $x \sin x > 0$.

$$x \sin x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Од цртежот

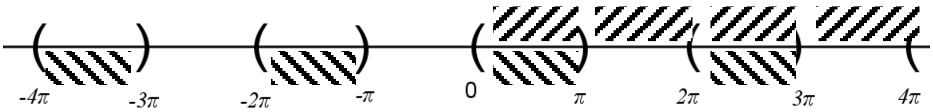


гледаме дека:

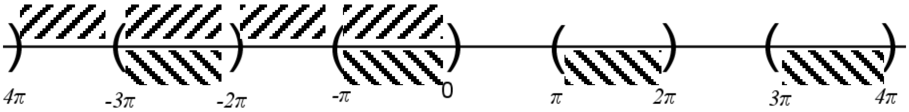
$\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(2k\pi, (2k+1)\pi\right), k \in \mathbf{Z}$ и

$\sin x < 0 \Leftrightarrow x \in \left((2k-1)\pi, 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$.

Графички $\begin{cases} x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$ може да се претстави на следниот начин:



Графички $\begin{cases} x<0 \\ \sin x<0 \end{cases}$ може да се претстави на следниот начин:

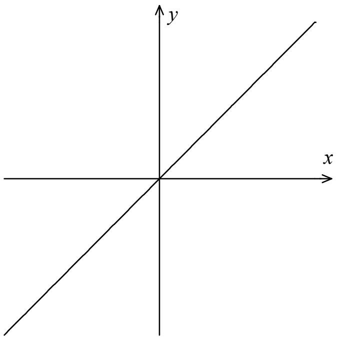


Од двата цртежи јасно се гледа дека дефиниционата област на f е унијата на: $...\cup(-5\pi,-4\pi)\cup(-3\pi,-2\pi)\cup(-\pi,0)\cup(0,\pi)\cup(2\pi,3\pi)\cup(4\pi,5\pi)\cup...$

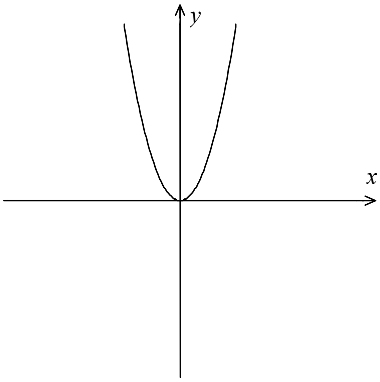
ПОСРЕДНА КОНСТРУКЦИЈА НА ГРАФИЦИ

Графиците на функциите: $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \ln x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ и др. ги сметаме за веќе познати и дадени се од 1. до 18.:

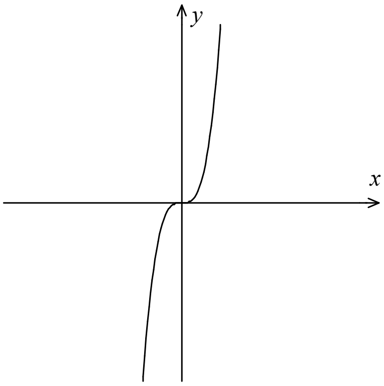
1. $f(x) = x, \quad D_f = V_f = \mathbb{R}$



2. $f(x) = x^2, \quad D_f = \mathbb{R},\ V_f = [0,+\infty)$

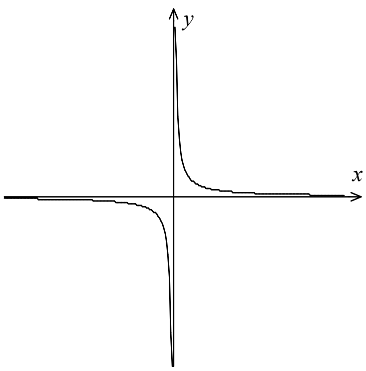


3. $f(x) = x^3, \quad D_f = V_f = \mathbb{R}$



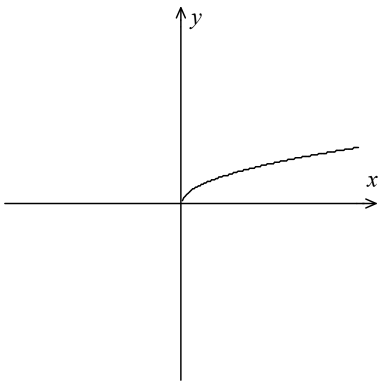
4. $f(x) = \dfrac{1}{x},$

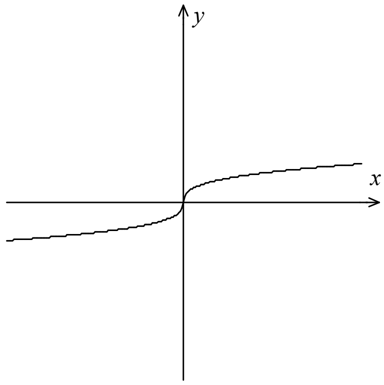
$D_f = V_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$



5. $f(x) = \sqrt{x}, \quad D_f = V_f = [0,+\infty)$

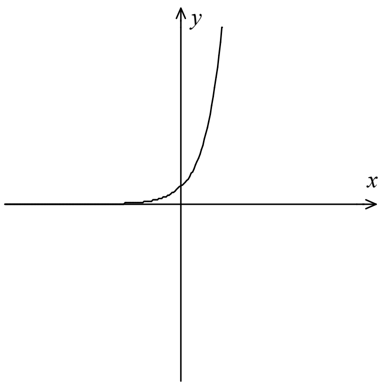
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad D_f = V_f = \mathbb{R}$

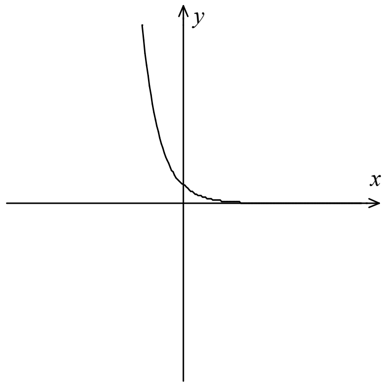




7. $f(x) = a^x,\ a > 0, a \neq 1,\ D_f = \mathbb{R},$
$V_f = (0,+\infty)$

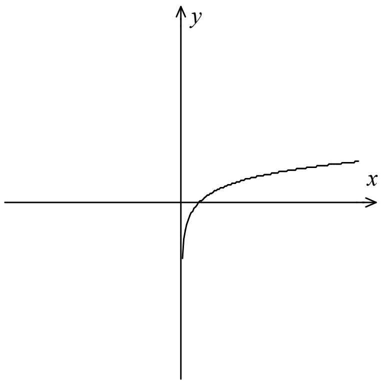
8. $f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1, \quad D_f = \mathbb{R},$
$V_f = (0,+\infty)$

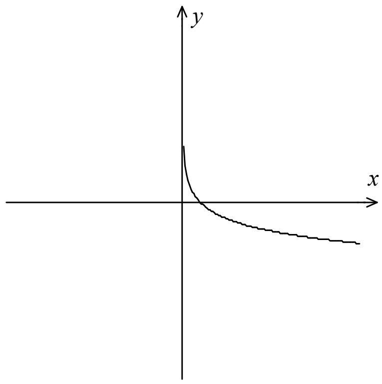




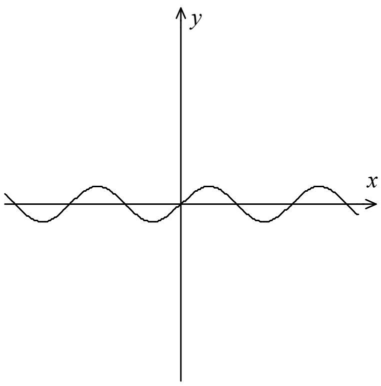
9. $f(x) = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1,$
$D_f = (0,+\infty),\ V_f = \mathbb{R}$

10. $f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1,$
$D_f = (0,+\infty), \quad V_f = \mathbb{R}$

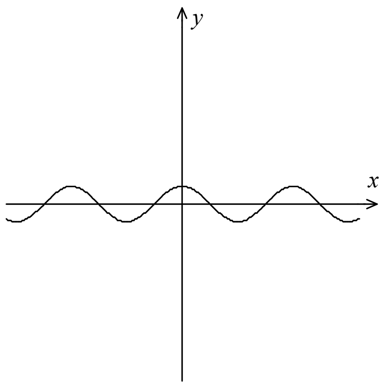




11. $f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = [-1,+1]$



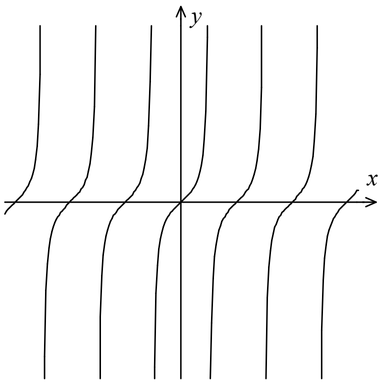
12. $f(x) = \cos x$, $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = [-1,+1]$

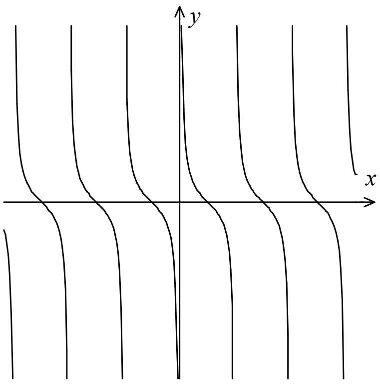


13. $f(x) = \text{tg}\, x$,
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$,
$k \in \mathbb{Z}$, $V_f = \mathbb{R}$

14. $f(x) = \text{ctg}\, x$,
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$,
$k \in \mathbb{Z}$, $V_f = \mathbb{R}$

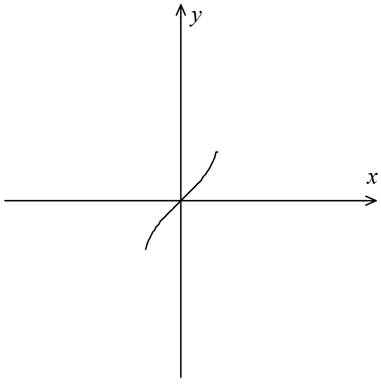
Посредна конструкција на графици

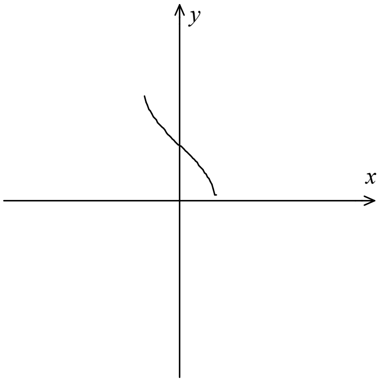




15. $f(x) = \arcsin x, \quad D_f = [-1,1],$
$V_f = [-\pi/2, +\pi/2]$

16. $f(x) = \arccos x, \quad D_f = [-1,1],$
$V_f = [0, +\pi]$

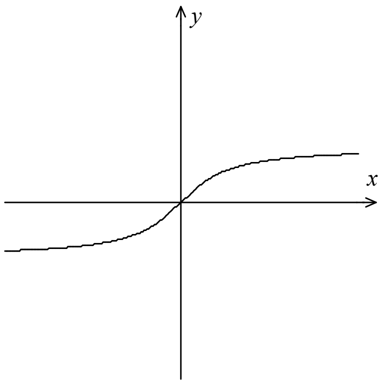


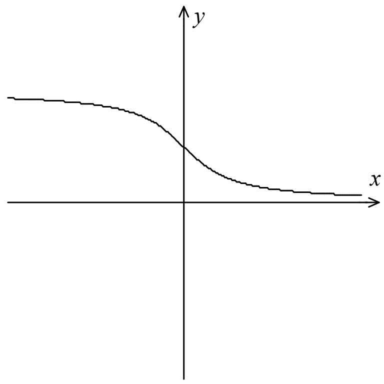


17. $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad D_f = (-\infty, \infty),$
$V_f = \left(-\pi/2, +\pi/2\right)$

18. $f(x) = \operatorname{arcctg} x, \quad D_f = (-\infty, \infty),$
$V_f = (0, +\pi)$

Посредна конструкција на графици





Посредната конструкција на графикот на функцијата $y = f(x)$ се состои во наоѓање врска меѓу дадената функција и функција чиј график е познат.

Нека ни се познати графиците на функците $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

График на $y = -f(x)$

Графикот на функцијата $y = -f(x)$ го добиваме ако и го смениме знакот на втората координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Значи графикот на функцијата $y = -f(x)$ е симетричен со графикот на функцијата $y = f(x)$ во однос на x-оската.

График на $y = f(-x)$

Графикот на функцијата $y = f(-x)$ го добиваме ако и го смениме знакот на првата координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Значи графикот на функцијата $y = f(-x)$ е симетричен со графикот на функцијата $y = f(x)$ во однос на y-оската.

График на $y = f(x) + c, \quad c \in \mathrm{R}$

Графикот на функцијата $y = f(x) + c, \quad c \in \mathrm{R}$ го добиваме ако ја зголемиме за c втората координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Значи графикот на функцијата $y = f(x) + c, \quad c \in \mathrm{R}$ го добиваме со поместување за c во правец на y-оската на графикот на функцијата $y = f(x)$. Притоа, ако $c > 0$ поместувањето е во позитивна насока на y-оската, а ако $c < 0$ поместувањето е во негативна насока на y-оската.

График на $y = f(x + c), \quad c \in \mathrm{R}$

Графикот на функцијата $y = f(x + c), \quad c \in \mathrm{R}$ го добиваме ако ја зголемиме за c првата координата на графикот на функцијата $y = f(x)$. Значи графикот на функцијата $y = f(x + c), \quad c \in \mathrm{R}$ го добиваме со поместување за c во правец на x-оската на графикот на функцијата $y = f(x)$. Притоа, ако $c > 0$ поместувањето е во негативна насока на x-оската, а ако $c<0$ поместувањето е во позитивна насока на x-оската.

График на $y=cf(x),\quad c>0$

Графикот на функцијата $y=cf(x),\quad c>0$ го добиваме ако ја помножиме со c втората координата на графикот на функцијата $y=f(x)$. Значи графикот на функцијата $y=cf(x),\quad c>0$ го добиваме со растегнување или стегање на графикот на фунцијата $y=f(x)$ во правец на y-оската во зависност од тоа дали $c>1$ или $0<c<1$.

График на $y=f(cx),\quad c>0$

Графикот на функцијата $y=f(cx),\quad c>0$ го добиваме ако ја помножиме со c првата координата на графикот на функцијата $y=f(x)$. Значи графикот на функцијата $y=f(cx),\quad c>0$ го добиваме со растегнување или стегање на графикот на фунцијата $y=f(x)$ во правец на x-оската во зависност од тоа дали $c>1$ или $0<c<1$.

График на функцијата $y=f(x)+g(x)$

Графикот на функцијата $y=f(x)+g(x)$ го добиваме ако ги собереме вторите координати на графиците на функциите $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

График на инверзна функција $y=f^{-1}(x)$

f и f^{-1} се взаемно инверзни ако е исполнето:

$f^{-1}\big(f(x)\big)=x,\quad$ за секој x од дефинициона та област на f

$f\big(f^{-1}(x)\big)=x,\quad$ за секој x од дефинициона та област на f^{-1}.

Пример. $f(x)=e^x$ и $f^{-1}(x)=\ln x$ се взаемно инверзни функции.

Графикот на функцијата $y=f^{-1}(x)$ го добиваме како осносиметричен на графикот на функцијата $y=f(x)$ во однос на правата $y=x$ (на подмножество од дефиниционата област каде што постои f^{-1}).

График на функцијата $y=|f(x)|$

Графикот на функцијата $y=|f(x)|$ го добиваме ако точките од графикот на функцијата $y=f(x)$ со негативна втора координата ги пресликаме симетрично во однос на x-оската.

Нацртај ги графиците на следните функции:

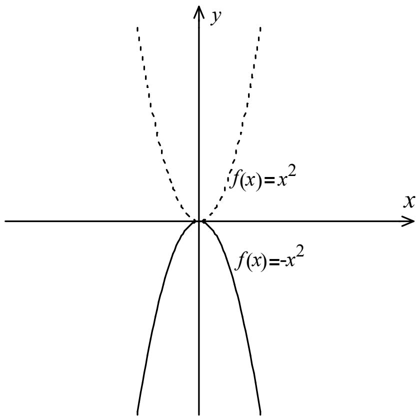
Задача 1. а) $f(x)=-x^2$; б) $f(x)=-5^x$;

в) $f(x)=-\cos x$; г) $f(x)=-\ln x$;

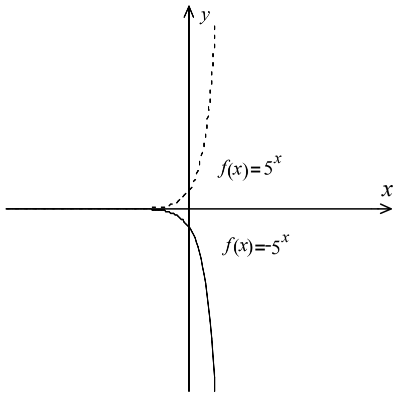
д) $f(x)=-x^3$; ѓ) $f(x)=-\operatorname{tg} x$.

Решение.

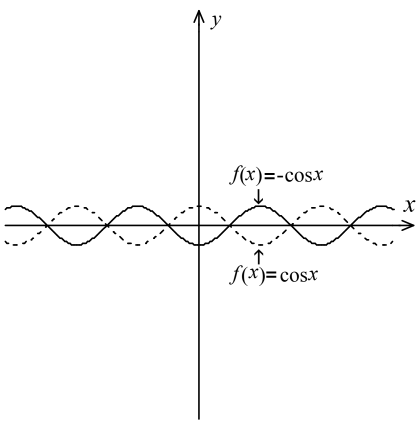
Посредна конструкција на графици



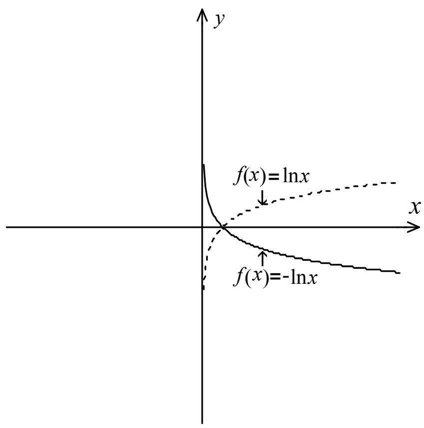
а)



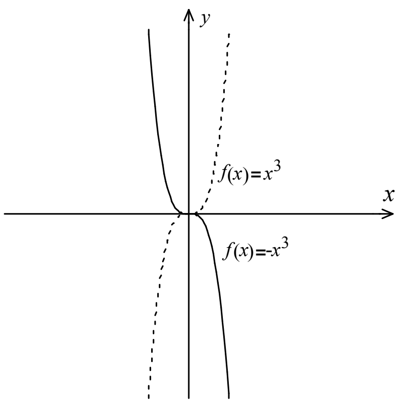
б)



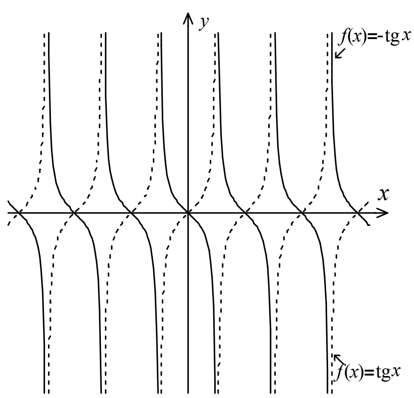
в)



г)



д)

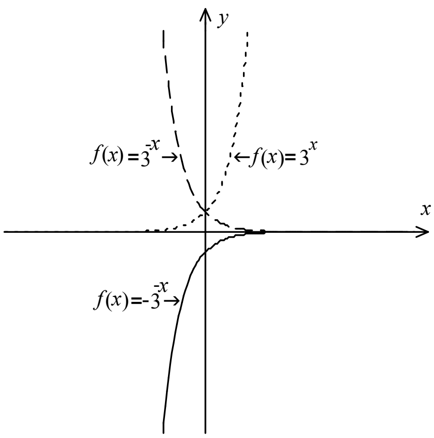


ѓ)

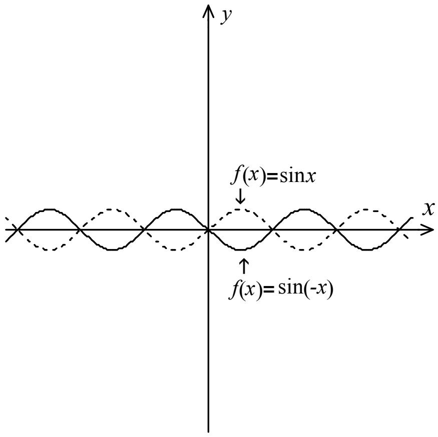
Задача 2. а) $f(x) = -3^{-x}$; б) $f(x) = \sin(-x)$;

в) $f(x) = 3^{x} + 1$; г) $f(x) = x^{4} + 2$.

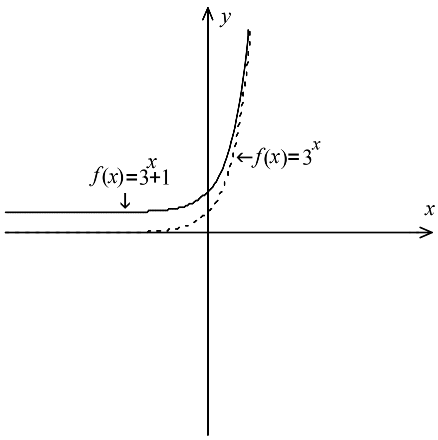
Решение.



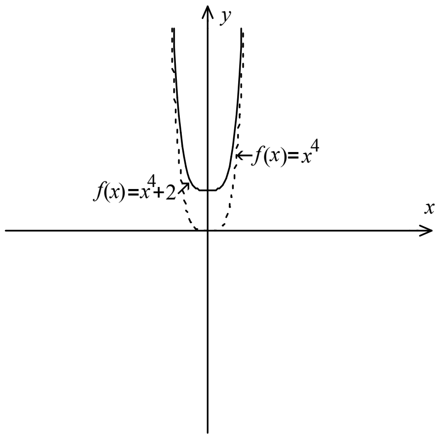
а)



б)



в)

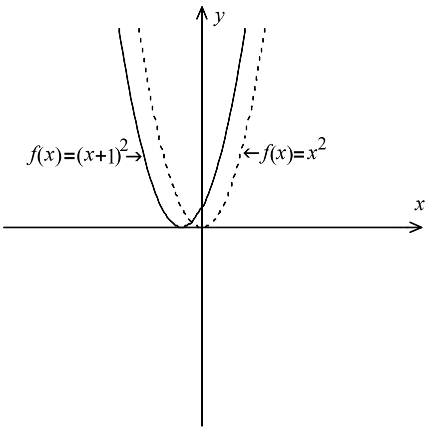


г)

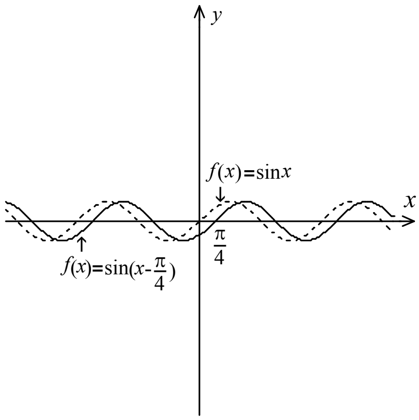
Задача 3. а) $f(x) = (x+1)^{2}$; б) $f(x) = \sin(x-2)$;

в) $f(x) = \dfrac{x^{2}}{2}$; г) $f(x) = 2x^{2}$.

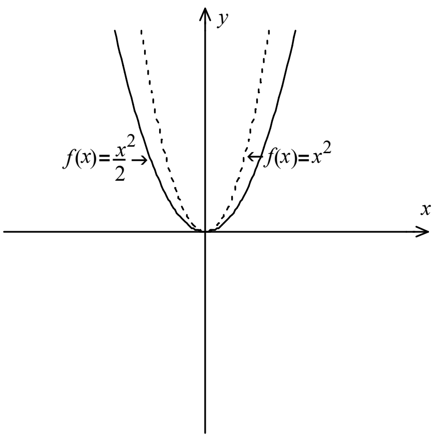
Решение.



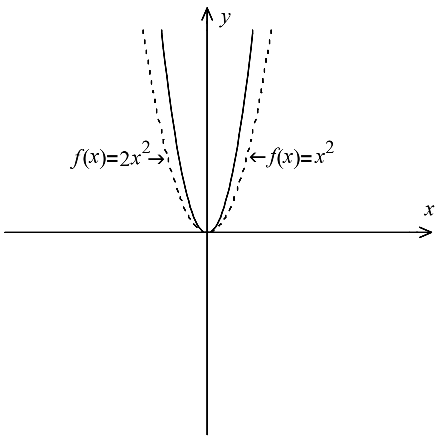
а)



б)



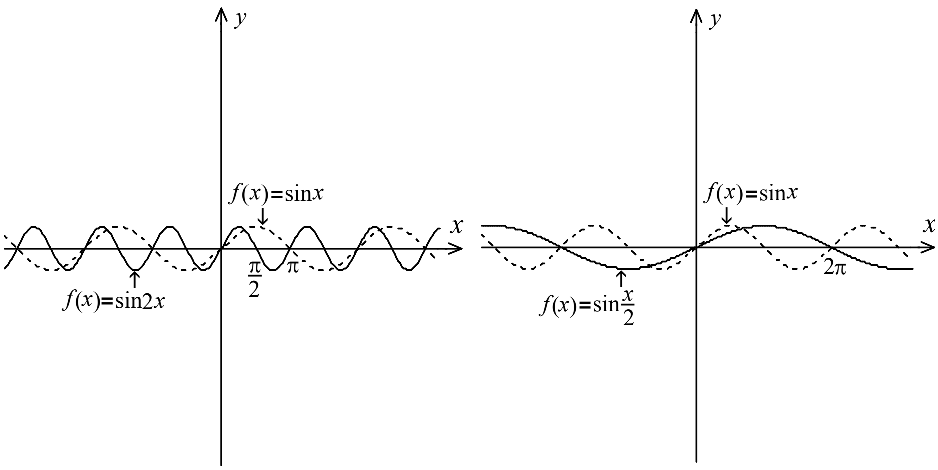
в)



г)

Задача 4. а) $f(x) = \sin 2x$; б) $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$.

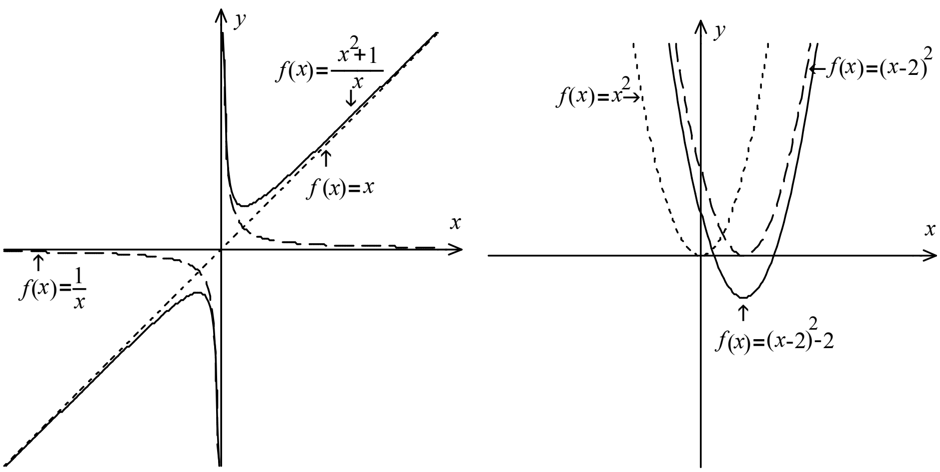
Решение.



а) б)

Задача 5. а) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$; б) $f(x)=x^2-4x+2$.

Решение.

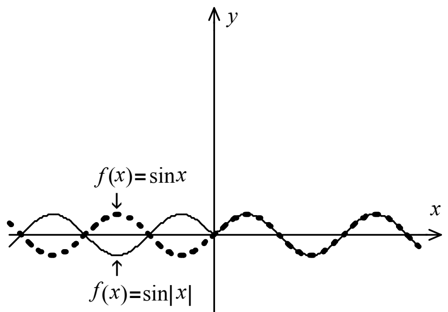


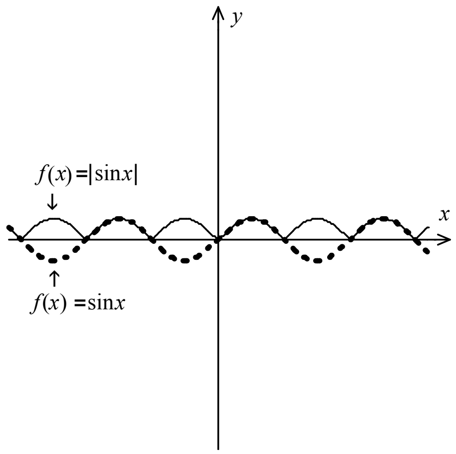
а) б) $f(x)=(x-2)^2-2$

Задача 6. а) $f(x)=\sin|x|$; б) $f(x)=|\sin x|$;

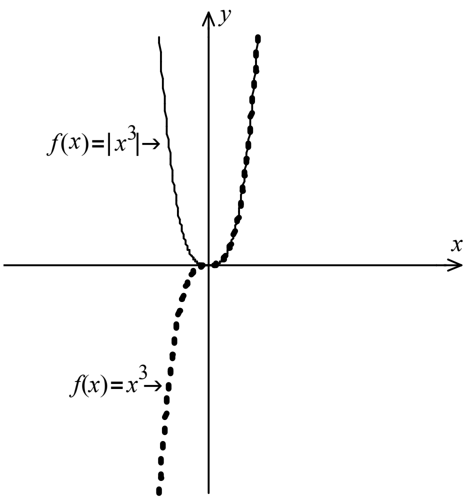
в) $f(x)=|x^3|$; г) $f(x)=|x^2-2x-3|$.

Решение.

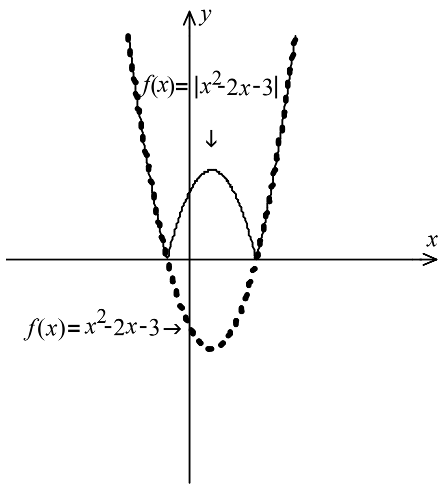




а) $f(x)=\begin{cases} -\sin x, & x<0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} -\sin x, & \sin x<0 \\ \sin x, & \sin x>0 \end{cases}$



г)



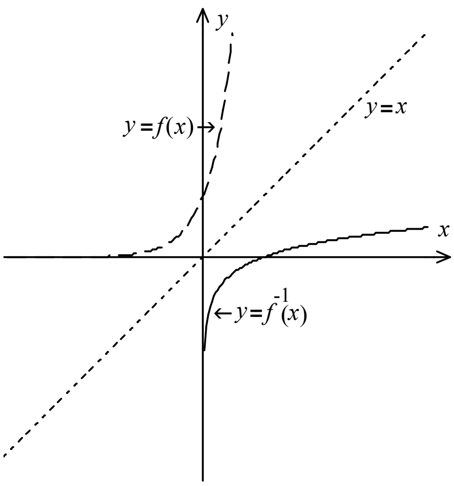
д)

Задача 7. Нацртај ги графиците на инверзните функции на функците:

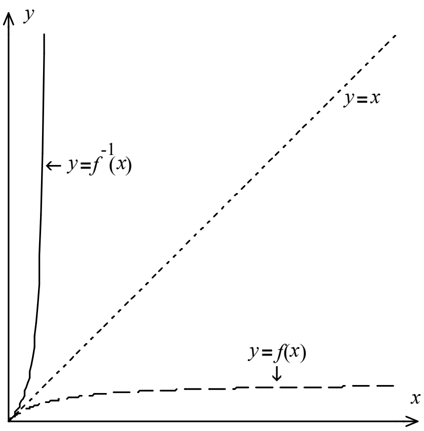
а) $f(x)=e^{x+1}$ б) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$. $f:\left(0,+\infty\right)\to(0,1)$.

Решение.



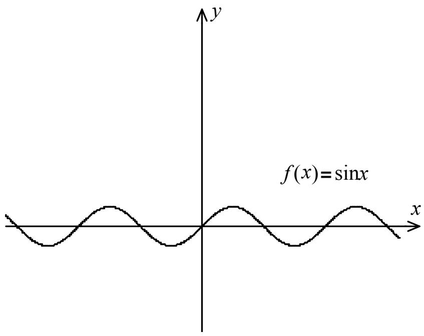
а)



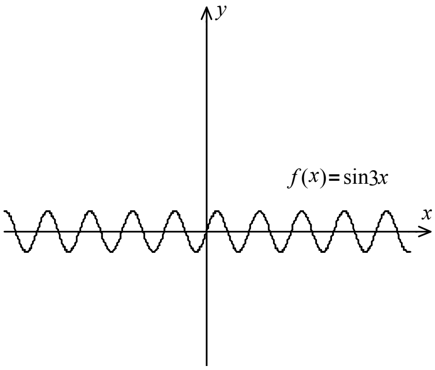
б)

Задача 8. Посредно нацртај го грификот на функцијата $y = 4\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$!

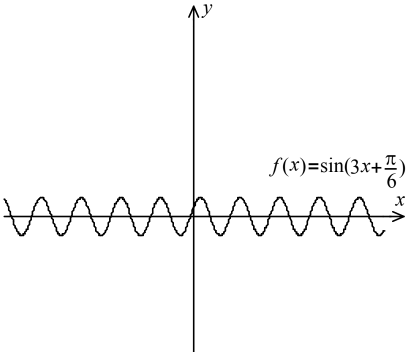
Решение.
Чекор 1. Го скицираме графикот на елементарната функција $y_1 = \sin x$.



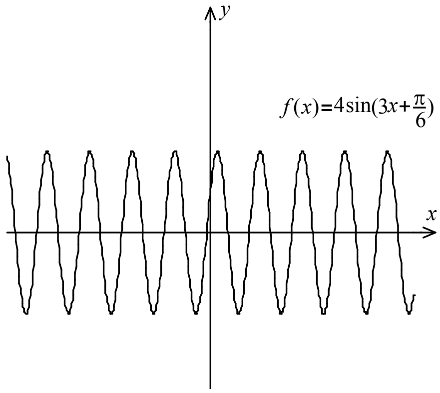
Чекор 2. Го скицираме графикот на функцијата $y_2 = \sin 3x$ на тој начин што првата координата на графикот $y_1 = \sin x$ ќе ја помножиме со 3. Така добиениот график на функцијата $y_2 = \sin 3x$ има основен период $\frac{2\pi}{3}$, односно е збиен во правец на y -оската во однос на графикот на функцијата $y_1 = \sin x$.



Чекор 3. Го скицираме графикот на функцијата $y_3 = \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3\left(x+\frac{\pi}{18}\right)\right)$ на тој начин што ќе го поместиме графикот на функцијата $y_2 = \sin 3x$ за $\frac{\pi}{18}$ налево.



Чекор 4. Графикот на функцијата $y = y_4 = 4\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ го добиваме кога втората координата на графикот на функцијата $y_3 = \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$ ќе ја помножиме со 4. Така добиениот график ги има истите нули како и графикот на функцијата $y_3 = \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$, а има амплитуда четири пати поголема од амплитудата на функцијата $y_3 = \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.



СКИЦИРАЊЕ ГРАФИЦИ НА ФУНКЦИИ ЗАДАДЕНИ СО ПАРАМЕТАРСКИ КООРДИНАТИ

Задача 1. Скицирај ги графиците на следните функции,

а) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ б) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

Решение.

а) $x = a\cos^3 t \quad y = a\sin^3 t$

Функциите $x = a\cos^3 t$ и $y = a\sin^3 t$ имаат заедничка периода $\omega = 2\pi$. Затоа за $t \in [0,2\pi]$, ќе бидат испишани сите точки од кривата $x = a\cos^3 t$, $y = a^3 \sin t$. Ако (x, y) е точка од графикот на кривата $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ добиена за некоја вредност на параметарот t, тогаш бидејќи

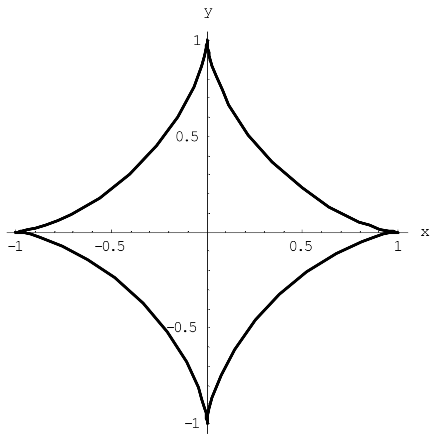
$$a\cos^3(-t + \pi) = a(-\cos^3 t) = -x,\ a\sin^3(-t + \pi) = a\sin^3 t = y$$

и

$$a\cos^3(-t) = a\cos^3 t = x\ ,\ a\sin^3(-t) = -a\sin^3 t = -y$$

и точките $(x,-y)$ и $(-x, y)$ се исто така точки од графикот на кривата. Значи кривата е симетрична во однос на x и y оските. Затоа доволно е да се нацрта нејзиниот график на интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, а потоа да се преслика симетрично во однос на x и y оските.

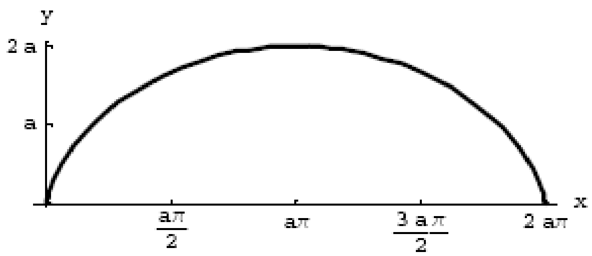
t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	0
y	0	$\frac{1}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	a



За $a = 1$

б) За да го нацртаме графикот на функцијата $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ најпрво определуваме неколку точки од графикот.

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$	$a\pi$	$a\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)$	$2a\pi$
y	0	a	$2a$	a	0



СКИЦИРАЊЕ ГРАФИЦИ НА ФУНКЦИИ ЗАДАДЕНИ СО ПОЛАРНИ КООРДИНАТИ

Задача 1. Скицирај ги графиците на функциите:

а) $\rho = \dfrac{a\pi}{\varphi}$ б) $\rho = a$

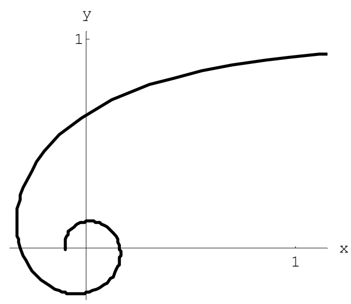
в) $\rho = a\sin 2\varphi$ г) $\rho = a(1-\sin\varphi)$

Решение.

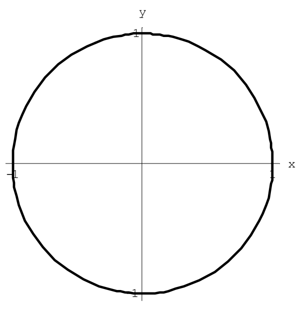
а) Формираме табела вредности за променливите φ и $\rho = \dfrac{a\pi}{\varphi}$.

φ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π	3π	4π
ρ	∞	3	2	$4/3$	1	$2/3$	$1/2$	$1/3$	$1/4$

Со нанесувањето и поврзувањето определените точки, во поларниот координатен систем за $a = 1$ се добива

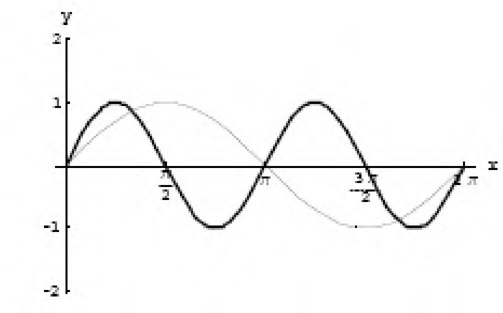


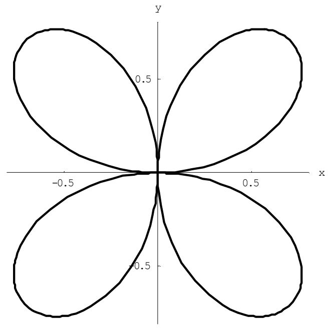
б) Графикот на функцијата $\rho = a$ претставува централна кружница со радиус a.



$a = 1$

в) Се црта најпрво графикот на функцијата $\rho = a\sin 2\varphi$ во декартови координати, а потоа за дадени вредности на φ се нанесуваат вреностите за ρ и за што подобра скица со што помалку точки се внимава на зависноста прикажана на првиот график.

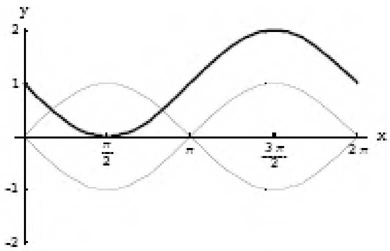




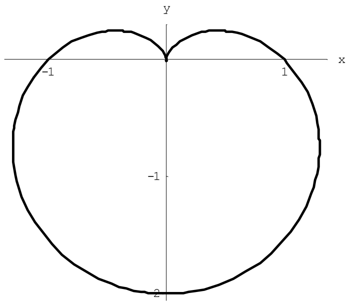
$a=1$

График на $y = a\sin 2x$

г) Се црта најпрво графикот на функцијата $\rho = a(1-\sin\varphi)$ во декартови координати, а потоа се нанесуваат точките во поларниот координатен систем. За брзо нанесување и избор на точките се има предвид зависноста на ρ и φ од претходниот график.



$a=1$



ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА
ОПРЕДЕЛУВАЊЕ ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА ПО ДЕФИНИЦИЈА

Граница на функција се разгледува само во точките x_0 за кои постои интервал $\left(x_0 - r, x_0 + r\right)$, $r > 0$ на кој функцијата е дефинирана. Функцијата може и да не биде дефинирана во точката x_0 !

Дефиниција. Реалната функција **има лимес** $y_0 \in \mathrm{P}$ **во точката** x_0, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, така што од

$$|x - x_0| < \delta$$

и $x \neq x_0$ да следува

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon .$$

Реалниот број y_0 го нарекуваме **лимес на функцијата** во точката x_0 и означуваме

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 ,$$

или $f(x) \to y_0$ кога $x \to x_0$ ($f(x)$ тежи кон y_0 кога x тежи кон x_0).

Дефиниција. Реалната функција **има лев лимес** $y_0 \in \mathrm{P}$ **во точката** x_0, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, така што за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ функцијата е определена и

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon .$$

Реалниот број y_0 го нарекуваме **лев лимес на функцијата** во точката x_0 и означуваме

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = y_0$$

Дефиниција. Реалната функција **има десен лимес** $y_0 \in \mathrm{P}$ **во точката** x_0, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, така што за секој $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ функцијата е определена и

$$| f(x) - y_0 | < \varepsilon .$$

Реалниот број y_0 го нарекуваме **десен лимес на функцијата** во точката x_0 и означуваме

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = y_0$$

Задача 1. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека $\lim\limits_{x \to 3}(-2x+3) = -3$.

Решение.

Прв чекор, погодување на вредноста за δ. Нека е даден позитивниот број ε. Сакаме да најдеме позитивен број $\delta = \delta(\varepsilon)$, таков што

$$|f(x) - A| = |-2x+3-(-3)| = |-2x+6| < \varepsilon ,$$

кога $0 < |x - x_0| = |-2x+6| < \delta$. Ја оценуваме разликата

$$|f(x) - A| = |-2x+3-(-3)| = |-2x+6| = |-2(x-3)| = 2|x-3| < 2\delta ,$$

Притоа за да го поврземе изразот $|-2x+6|$ со $|x-3|$, го искористивме равенството $|-2x+6| = 2|x-3|$. Неравенството $|x-3| < 2\delta$ ни сугерира да избереме $2\delta = \varepsilon$ односно $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Втор чекор, покажување дека избраниот број δ ги исполнува условите. Значи за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ таков што од $0 < |x-3| < \delta$ следува $|-2x+3-(-1)| < \varepsilon$.

Со тоа покажавме дека $\lim\limits_{x \to 2}(-2x+3) = -1$.

Задача 2. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^3 - 9x}{x-3} = 18$.

Решение.

Нека е даден позитивниот број ε. Треба да најдеме позитивен број δ таков што од $0 < |x - x_0| = | x - 3 | < \delta$ да следува $| f(x) - A | < \varepsilon$. Бидејќи

$$|f(x)-A|=|\frac{x^3-9x}{x-3}-18|=|\frac{x\left(x^2-9\right)}{x-3}-18|=|\frac{x(x-3)(x+3)}{x-3}-18|=|x(x+3)-18|=$$
$$|x^2+3x-18|=|x^2-3x+6x-18|=$$
$$|x(x-3)+6(x-3)|=|x+6||x-3|,$$

за да ја оцениме десната страна од равенствата избираме $\delta \leq 1$, односно $|x-18| \leq 1$, од каде $17 \leq x \leq 19$. Следува

$$|x+6||x-3|<25\delta .$$

Последното неравенство ни сугерира да избереме $25\delta=\varepsilon$, а бидејќи $\delta \leq 1$ избираме $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{25}\right\}$.

Значи за произволен позитивен број ε, најдовме позитивен број $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{25}\right\}$, таков што за секој $x \in D_f \setminus \{3\}$, за кој од $|x-3|<\delta$ следува $|\frac{x^3-9x}{x-3}-18|<\varepsilon$.

Следува 18 е граница на функцијата $f(x)=\frac{x^3-9x}{x-3}$ кога $x \to 3$.

Задача 3. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{2x}=\frac{1}{2}$.

Решение.

Функцијата $y=f(x)$ има граница реален број A кога $x \to -\infty$ ако за секој позитивен број ε, постои позитивен број K таков што $|f(x)-A|<\varepsilon$ кога $x<-K$.

Нека е даден позитивен број ε. Нека $x<-K<0$ и

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x-2}{2x}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-2-x}{2x}\right|=\left|-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}=\frac{1}{-x}<\frac{1}{K}=\varepsilon$$

занекој позитивен број K. Притоа од неравенството $x<-K$ следува $-x>K$ односно $\frac{1}{-x}<\frac{1}{K}$. Тогаш равенството $\frac{1}{K}=\varepsilon$ е исполнето за $K=\frac{1}{\varepsilon}$.

Значи за секој позитивен број ε, постои позитивен број $K=\dfrac{1}{\varepsilon}$ таков што $\left|\dfrac{x-2}{2x}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ кога $x<-K$. Следува $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

Задача 4. Користејќи ја дефиницијата за гранична вредност на функција докажи дека $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{2x}=\infty$.

Решение.

Границата $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$ ако за секој позитивен број M постои позитивен број K таков што $|f(x)|>M$ кога $x>K$.

Нека е даден позитивен број M. Ако важи $x>K$ и

$$|f(x)|=\left|\frac{x^2+2}{2x}\right|=\frac{x+\frac{2}{x}}{2}>\frac{x}{2}>\frac{K}{2}=M,$$

тогаш $K=2M$.

Значи за за секој позитивен број M постои позитивен број $K=2M$, таков што $|f(x)|>M$ кога $x>K$.

Со тоа покажавме дека $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{2x}=\infty$ **.**

ПРЕСМЕТУВАЊЕ ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

Задача 1. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+x+1\right)$ б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-11}{2x+5}$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^4-x\right)$ г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x^2-9}$

д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$ ѓ) $\lim\limits_{x\to -\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Решение.

а) Границата од збирот x^2+x+1, на функциите x^2, x, 1 е збир од границите на функциите, ако истите постојат. Затоа

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+x+1\right)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}1=2^2+2+1=7.$$

б) Границата од количникот $\dfrac{x^2-11}{2x+5}$ на функциите x^2-11 и $2x+5$, е количник од границите на функциите, ако границите постојат и количникот не е неопределен облик. Следува

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-11}{2x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 7}\left(x^2-11\right)}{\lim\limits_{x\to 7}\left(2x+5\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 7}x^2-\lim\limits_{x\to 7}11}{\lim\limits_{x\to 7}2x+\lim\limits_{x\to 7}5}=\frac{7^2-11}{19}=2.$$

в) Границата од разликата $3x^4-x$, на функциите $3x^4$ и x е разлика од границите на функциите. Затоа

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^4-x\right)=3\lim_{x\to 2}x^4-\lim_{x\to 2}x=3\cdot 2^4-2=46.$$

г) Кога $x\to -\infty$ именителот x^2-9 е позитивен и неограничено расте, па $\dfrac{2}{x^2-9}$ се стреми кон 0. Следува $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x^2-9}=\dfrac{2}{+\infty}=0$.

д) Границата од разликата $\sqrt{x^2-1}-x$ на функциите е разлика од границите на функциите $\sqrt{x^2-1}$ и x. Кога x неограничено опаѓа, тогаш x^2 неограничено расте. Следува и x^2-1 и $\sqrt{x^2-1}$ неограничено растат. Затоа

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-1}-\lim_{x\to -\infty}x=+\infty-\left(-\infty\right)=+\infty+\infty=+\infty.$$

ѓ) Аналогно како во претходниот случај имаме

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty} x\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left(\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\lim_{x\to-\infty} x\right)=$$
$$(-\infty)(+\infty-(-\infty))=(-\infty)(+\infty)=-\infty.$$

ГРАНИЦА ОД ДРОБНО-РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Задача 2. Пресметај ги границите

а) $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ б) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

в) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ г) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

Решение.

а) Граничните вредности на функциите во броителот и именителот се $\lim_{x\to3}\left(x^2-2x-3\right)=3^2-2\cdot3-3=0$ и $\lim_{x\to3}(x-3)=3-3=0$. За граничната вредност на количникот добиваме неопределен облик $\dfrac{0}{0}$. Во овој случај ги средуваме членовите во броителот и именителот, односно полиномот во броител го разложуваме на производ од линеарни множители $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$. Потоа броителот и именителот ги кратиме со членот $x-3$. Кратењето со $x-3$ е можно бидејќи $x\neq3$.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+1)=3+1=4.$$

б) И овде границите на функциите во броител и именител се нула. Ги сведуваме полиномите во броителот и именителот во каноничен вид, $x^2-2x+1=(x-1)^2$ и $x^3-x=x\left(x^2-1\right)=x(x-1)(x+1)$, и ги кратиме со членот $x-1$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{1-1}{1\cdot(1+1)}=0.$$

Аналогно како под а) и б) добиваме

в) $$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-3)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-3)=2-3=-1.$$

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$.

Задача 3. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-x\right)$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-5x+10}{3x^2-9x+6}$

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-5x+10}{3x^3-9x+6}$ г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-3)^2}{x^5+5}$

Решение.

а) Кога $x\to-\infty$ и $x^3\to-\infty$, па добиваме неопределен облик $(-\infty)-(-\infty)$. Со извлекување пред загради на членот x^3, добиваме

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{x}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=(-\infty)(1-0)=-\infty .$$

б) Кога $x\to+\infty$ броителот и именителот се бесконечно големи големини и нивниот количник е неопределен израз од облик $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Затоа го средуваме изразот.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-5x+10}{3x^2-9x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{9}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}{3-\frac{9}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{5}{3}.$$

в) Кога $x\to-\infty$ броителот се стреми кон $-\infty$, а именителот кон $+\infty$. Ако членовите во полиномите ги поделиме со x^3, бидејќи има помал степен од членот со најголем степен во броител, x^4, и членот со најголем степен во именител, x^3, имаме

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^4-5x+10}{3x^3-9x+6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5x^4}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{10}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{9x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-\frac{5}{x^2}+\frac{10}{x^3}}{3-\frac{9}{x^2}+\frac{6}{x^3}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5(-\infty)-0+0}{3-0+0}=-\infty.$$

г) Кога $x\to+\infty$ броителот и именителот се бесконечно големи големини и нивниот количник е неопределен израз од облик $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Полиномите во броител и именител имаат степен 5. Затоа изразот го трансформираме така што броителот ги делиме со x^5.

$$\frac{(2x+3)^3(3x-3)^2}{x^5+5}=\frac{\frac{(2x+3)^3(3x-3)^2}{x^3x^2}}{\frac{x^5+5}{x^5}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2x+3}{x}\right)^3\left(\frac{3x-3}{x}\right)^2}{1+\frac{5}{x^5}}=\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^3\left(3-\frac{3}{x}\right)^2}{1+\frac{5}{x^5}}.$$

Следува

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-3)^2}{x^5+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^3\left(3-\frac{3}{x}\right)^2}{1+\frac{5}{x^5}}==\lim_{x\to+\infty}\frac{(2+0)^3(3-0)^2}{1+0}=8\cdot 9=72.$$

Задача 4. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{2x^2+x}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x^2+7x}{x^4-x^3+5}$ г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-x+3}{3x^3+2x-4}$ д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^4-2x^3+x^2}{2x^3+x^2-3}$

Решение.

а) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{3x+2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}=\frac{2}{3}$$

б) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+1}{2x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2-3x+1}{x^2}}{\frac{2x^2+x}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

в) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-5x^2+7x}{x^4-x^3+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^4-5x^2+7x}{x^4}}{\frac{x^4-x^3+5}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^4}}=3.$$

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-x+3}{3x^3+2x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{5x^2-x+3}{x^3}}{\frac{3x^3+2x-4}{x^3}}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}}=\frac{0}{3}=0$$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^4-2x^3+x^2}{2x^3+x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{6x^4-2x^3+x^2}{x^3}}{\frac{2x^3+x^2-3}{x^3}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-2+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{+\infty}{2}=+\infty.$$

Задача 5. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{4}{x+2}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{x^2}{x^2+2}\right)$

Решение.

а) Кога $x\to-2$, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{4}{0}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{4}{0}=\infty$. Значи добиваме неопределеност од вид $\infty-(\infty)$. Во овој случај изразот најпрво го рационализираме, а потоа ги факторизираме полиномите во броител и именител.

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2}{x+2}-\frac{4}{x+2}\right)=(\infty-(\infty))=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to-2}(x-2)=-2-2=-4$$

б) Аналогно како под а) имаме

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2}==\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$\frac{1}{0-1}-\frac{1}{1+0}=-1-1=-2.$$

ГРАНИЦА ОД ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Задача 7. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-x}}{2x+3}$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x^2-3x+1}}{2\sqrt{x-4}+\sqrt[4]{x^2-5}}$ г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^5-2x^3+4}+3x-4}{\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{x^2-1}}$

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$ ѓ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x+1}$

Решение.

а) Бидејќи

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{1-\frac{2}{x}}=(+\infty)\sqrt{1-0}=+\infty$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty,$$

имаме неопределен облик $\frac{+\infty}{+\infty}$. Сакаме изразот во броител и имненител да го поделиме со x^α, така што границата во броител или именител да биде реален број. Тоа може да го направиме ако $\alpha=1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}{1+\dfrac{1}{x}} = 1 .$$

б) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-x}}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2-x}}{x}}{\dfrac{2x+3}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{2x+3}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}{2+\dfrac{3}{x}} = \frac{1+1}{2} = 1 .$$

в) Степенот на полиномот под коренот $\sqrt{x+3}$ е 1. Бидејќи коренот е квадратен, ако поделиме со $\sqrt{x}$ ќе добиеме количник чија граница е реален број кога $x \to +\infty$. Аналогно $\sqrt[4]{x^2-3x+1}$ може да се спореди со $x^{\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Истото важи и за членовите во именителот. Затоа броителот и именителот во ирационалната функција ги делиме со $\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x^2-3x+1}}{2\sqrt{x-4}+\sqrt[4]{x^2-5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{x^2-3x+1}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{2\sqrt{x-4}+\sqrt[4]{x^2-5}}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt[4]{x^2-3x+1}}{\sqrt[4]{x^2}}}{\dfrac{2\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt[4]{x^2-5}}{\sqrt[4]{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt[4]{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}+\sqrt[4]{1-\dfrac{5}{x^2}}} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3} .$$

г) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^5-2x^3+4}+3x-4}{\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[5]{x^5-2x^3+4}+3x-4}{x}}{\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2-4}+\sqrt{x^2-1}}{x}} =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt[5]{x^5-2x^3+4}}{\sqrt[5]{x^5}}+\frac{3x-4}{x}}{\frac{\sqrt[3]{x^3+x^2-4}}{\sqrt[3]{x^3}}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{1-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^5}}+3-\frac{4}{x}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1+3}{1+1}=\frac{4}{2}=2\,.$$

д) Членот $\sqrt{x^2+1}$ го споредуваме со x, $\sqrt{x}$ со $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x^3+x}$ со $\sqrt[4]{x^3}$ и x со x. Членот со најголем степен е x. Затоа броителот и именителот ги делиме со x. Имаме

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x^3+x}-x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}{\sqrt[4]{\frac{x^3+x}{x^4}}-\frac{x}{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{0}}{\sqrt[4]{0+0}-1}=-1\,.$$

ѓ) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{-\sqrt{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{1+\frac{1}{x}}=-1\,.$$

Задача 7. Пресметај ги границите

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$ г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$

Решение.

а) Изразот го дополнуваме до разлика од квадрати.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-3}\right)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}=0$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+(a+b)x+ab-x^2}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{(a+b)x+ab}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)+\dfrac{ab}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}}{\sqrt{x^2}}+\dfrac{x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)+\dfrac{ab}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{ab}{x^2}}+1}=\frac{a+b+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{a+b}{2}$$

в) Изразот го дополнуваме до разлика од кубови и го средуваме броителот.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}.$$

Бидејќи полиномите под третиот корен имаат степен 4, броителот и именителот ги делиме со $\sqrt[3]{x^4}$. Следува границата е еднаква на

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{4x}{\sqrt[3]{x^4}}}{\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{x^4}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}}{\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^4}}{\sqrt[3]{x^4}}+\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}}{\sqrt[3]{x^4}}+\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{x^4}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{4}{\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^4}{x^4}}+\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2(x-1)^2}{x^2x^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^4}{x^4}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}\frac{4}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{4}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{-\infty}}\frac{4}{\sqrt[3]{(1+0)^4}+\sqrt[3]{(1+0)^2(1-0)^2}+\sqrt[3]{(1-0)^4}}=0\,.$$

г) Со додавање и одземање на единица на броителот, границата ја сведуваме на разлика од граници кои се пресметуваат со дополнување до разлика од кубови и разлика од четврти степени.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}+1-1}{x+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1-\left(\sqrt[4]{1-2x}-1\right)}{x+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{1-2x}-1}{x+x^2}\,.$$

Првата граница од десна страна на равенствата е

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{\left(x+x^2\right)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^3-1^3}{x(1+x)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x(1+x)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\frac{0}{(1+0)\left(\sqrt[3]{\left(1+0^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+0^2}+1\right)}=0\,.$$

Втората граница е

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1-2x}-1\right)\left(\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1\right)}{\left(x+x^2\right)\left(\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^4-1^4}{x(1+x)\left(\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-1}{x(1+x)\left(\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(1+x)\left(\sqrt[4]{(1-2x)^3}+\sqrt[4]{(1-2x)^2}+\sqrt[4]{1-2x}+1\right)}=$$

$$=-\frac{2}{(1+0)\left(\sqrt[4]{(1-0)^3}+\sqrt[4]{(1-0)^2}+\sqrt[4]{1-0}+1\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\,.$$

Следува бараната граница е $0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ ГРАНИЦИ
ГРАНИЦИ ОД ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Во следните задачи ја користиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Задача 1. Определи ја границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$.

Решение.

Границата може ќе ја определиме со помош на границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1.$$

Задача 2. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)\sin 3x}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}kx}{x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

Решение.

а) Границата може да ја определиме со сведување до границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Затоа воведуваме смена $3x=t$, $x=\frac{t}{3}$ при која кога x се стреми кон нула, следува дека и t се стреми кон нула. Имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos(x)\lim_{x\to 0}3\frac{\sin 3x}{3x}=1\cdot 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=3.$$

Понатаму смената нема да ја запишуваме туку директно ќе користиме $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

б) Бидејќи кога x тежи кон 0, следува и αx и βx тежат кон 0, имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\beta\frac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x\cos kx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\frac{k}{\cos kx}=1\frac{k}{\cos 0}=k$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x\sin 5x}=\frac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{5x}{\sin 5x}\frac{1}{\cos 2x}=$
$=\frac{2}{5}1\cdot 1\cdot\frac{1}{\cos 0}=\frac{2}{5}$.

Задача 3. Определи ги границите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}$

Решение.

а) Најпрво ќе ја определиме границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$. За да оперираме со функцијата синус место со аркусинус, воведуваме смена $\arcsin x=t$, $x=\sin t$. Кога $x\to 0$, следува $t\to\arcsin 0=0$. Затоа

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

оттука

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{2x}=2.$$

б) Од слични причини како во претходната задача, воведуваме смена $arctgx=t$, $x=tgt$. Кога $x\to 0$, следува $t\to\arcsin 0=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{\cos t}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\lim_{t\to 0}\cos t=1\cdot\cos 0=1$$

Задача 4. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x^n}{\sin^m x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

Решение.

а) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^n}{\sin^m x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x^n}{x^n}}{\frac{\sin^m x}{x^m}}\frac{x^n}{x^m}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x^n}{x^n}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^m}x^{n-m}=\frac{1}{1}\lim_{x\to 0^+}x^{n-m}$$

Ако $n>m$, тогаш $n-m>0$, па $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{n-m}=0$. Ако $n=m$ имаме $n-m=0$ односно $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{n-m}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^0=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$. Најпосле ако $n<m$, односно $m-n>0$ важи $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{n-m}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{m-n}}=+\infty$. Затоа

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^n}{\sin^m x}=\begin{cases}0, \mathrm{n}>\mathrm{m}\\ 1, \mathrm{n}=\mathrm{m}\\ +\infty, \mathrm{n}<\mathrm{m}\end{cases}.$$

б) Со помош на формулата за двоен агол $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2==\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

в) Применувајќи ја формулата за разлика од кубови во броителот, добиваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x\cos(x)2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos(x)\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\left(\frac{1+\cos 0+\cos^2 0}{\cos(0)\cos 0}\right)=\frac{3}{4}.$$

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin 0+\cos 0}{\sin 0-\cos 0}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

Задача 5. Определи ги следниве граници:

а) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right)$ б) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

Решение.

а) Бидејќи кога $x\to 0$, $\frac{1}{\sin x}\to\frac{1}{0}=\infty$ и $\frac{1}{tgx}\to\frac{1}{0}=\infty$, имаме неопределен облик $\infty-\infty$. Во овој случај изразот најпрво го рационализираме, а потоа со тригонометриските релации за двоен агол, ги кратиме членовите што ја генерираат неопределеноста.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}tg\frac{x}{2}=tg0=0.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{x^3\cos x(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin^2 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=1^3\frac{1}{1\cdot(1+1)}=\frac{1}{2}$$

Задача 6. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$

в) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$ г) $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\mathrm{tg}\dfrac{\pi z}{2}$

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$ ѓ) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{4}-\sin\dfrac{x}{4}\right)}$

Решение.

а) Членот во именител $\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}$, асоцира членот во броител да го изразиме со помош на функцијата синус, со помош на формулата $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{\frac{(1-\sin^2 x)^3}{(1-\sin x)^4}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{\frac{(1-\sin x)^3(1+\sin x)^3}{(1-\sin x)^4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{\frac{(1+\sin x)^3}{1-\sin x}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{0^+}} = +\infty$$

Втор начин. Бидејќи сакаме границата да ја сведеме на граници од видот $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0} \dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$, логично е да ја воведеме смената $x-\dfrac{\pi}{2}=t$, од каде $x = t+\dfrac{\pi}{2}$. Притоа кога $x\to\dfrac{\pi}{2}$, следува $t\to 0$. По воведувањето на смената ги користиме тригонометриските идентитети $\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin t$, $\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos t$ и $1-\cos t = 2\sin^2\dfrac{t}{2}$ Имаме

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{\sqrt[3]{(1-\cos t)^2}} =$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{\sqrt[3]{\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2^{\frac{2}{3}}\sin^{\frac{4}{3}}\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}}{\sin^{\frac{4}{3}}\frac{t}{2}}\frac{\sin t}{t}\frac{2^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}}}}{\sin^{\frac{4}{3}}\frac{t}{2}}\frac{\sin t}{t}\frac{2^{\frac{4}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}=\frac{2^{\frac{2}{3}}}{0}=+\infty$$

б) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}=1.$$

в) Воведуваме смена $x-\pi=t$, од каде $x=t+\pi$ и $\frac{x}{\pi}=\frac{t}{\pi}+1$. Кога x тежи кон π, тогаш $t\to\pi-\pi=0$. Ја користиме трансформацијата $1-\frac{x^2}{\pi^2}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t+\pi)}{-\frac{t}{\pi}\left(\frac{t}{\pi}+2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{-\frac{t}{\pi}\left(\frac{t}{\pi}+2\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\frac{\pi}{\frac{t}{\pi}+2}==\frac{\pi}{0+2}=\frac{\pi}{2}.$$

г) $$\lim_{z\to 1}(1-z)\mathrm{tg}\frac{\pi z}{2}=\lim_{z\to 1}\frac{(1-z)\sin\frac{\pi z}{2}}{\cos\frac{\pi z}{2}}=\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{\cos\frac{\pi z}{2}}\lim_{z\to 1}\sin\frac{\pi z}{2}=$$

Некои специјални граници

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2}\right)}1=\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{\sin\frac{\pi}{2}(1-z)}=\lim_{z\to 1}\frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}(1-z)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-z)}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\lim\limits_{z\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-z)}{\frac{\pi}{2}(1-z)}}=\frac{2}{\pi}.$$

д) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

ѓ) $$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1}{1+\sin\frac{x}{2}}\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)\left(\cos\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{4}\right)}{2\left(\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}\right)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{4}\right)}{2\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 7. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\dfrac{x}{2}}$

Решение.

а) Со користење на формулата

$$\cos ax-\cos bx=-2\sin\frac{ax+bx}{2}\sin\frac{ax-bx}{2}.$$

имаме

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{ax+bx}{2}\sin\dfrac{ax-bx}{2}}{x^2}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x(a+b)}{2}}{x}\frac{\sin\dfrac{x(a-b)}{2}}{x}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{a+b}{2}\frac{\sin\dfrac{x(a+b)}{2}}{\dfrac{(a+b)x}{2}}\frac{a-b}{2}\frac{\sin x\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{\dfrac{a-b}{2}x}=-2\frac{a+b}{2}1\frac{a-b}{2}1=$$

$$=-2\frac{a^2-b^2}{4}=-\frac{a^2-b^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{4}}{2^2\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{4}}{2^2\sin^2\dfrac{x}{4}\cos^2\dfrac{x}{4}\cos^2\dfrac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4\cdot 1\cdot 1}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin x}\right)^2-\left(\sqrt{1-\sin x}\right)^2}{\frac{\sin x}{\cos x}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-1+\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\frac{x}{2}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\frac{x}{2}}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x}\right)^2-\left(\sqrt{\cos 2x}\right)^2}{\tan^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\tan^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+x\sin x-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(2\sin x+x)}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(2\sin x+x\right)}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}\left(\frac{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(2\sin x+x\right)}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}\left(4\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}}\right)=\frac{2}{2}\left(4+2\right)=6$$

Задача 8. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to B} \dfrac{\sin^2 x - \sin^2 B}{x^2 - B^2}$ г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x - \sin x} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} \dfrac{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}} =$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^4 x + \sin^2 x\cos^2 x}{x\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x\left(1+\cos^2 x\right) + \cos^2 x\left(1-\cos x\right)}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x\left(1+\cos^2 x\right) + \cos^2 x\sin^2 x}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)} = = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x\left(1+2\cos^2 x\right)}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

в) Најпрво ја користиме формулата за разлика од квадрати $\sin^2 x - \sin^2 B = (\sin x - \sin B)(\sin x + \sin B)$, а потоа адиционите формули,

$\sin x - \sin B = 2\sin\dfrac{x-B}{2}\cos\dfrac{x+B}{2}$ и $\sin x + \sin B = 2\sin\dfrac{x+B}{2}\cos\dfrac{x-B}{2}$,

и формулите за двоен агол, имаме

$$\lim_{x\to B}\frac{\sin^2 x-\sin^2 B}{x^2-B^2}=\lim_{x\to B}\frac{(\sin x-\sin B)(\sin x+\sin B)}{(x-B)(x+B)}=$$

$$=\lim_{x\to B}\frac{2\sin\frac{x-B}{2}\cos\frac{x+B}{2}2\sin\frac{x+B}{2}\cos\frac{x-B}{2}}{(x-B)(x+B)}=$$

$$=\lim_{x\to B}\frac{\left(2\sin\frac{x-B}{2}\cos\frac{x-B}{2}\right)\left(2\sin\frac{x+B}{2}\cos\frac{x+B}{2}\right)}{(x-B)(x+B)}==\lim_{x\to B}\frac{\sin(x-B)\sin(x+B)}{(x-B)(x+B)}=$$

$$\lim_{x\to B}\frac{\sin(x-B)}{(x-B)}\lim_{x\to B}\frac{\sin(x+B)}{x+B}==1\cdot\frac{\sin(B+B)}{B+B}=\frac{\sin 2B}{2B}.$$

г) Воведуваме смена $\sin t = x$. Притоа кога $x\to 0$, следува $t\to 0$. Затоа

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2t}{3\sin t}=\frac{2}{3}\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}}=\frac{2}{3}.$$

ГРАНИЦИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА ГРАНИЦАТА $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Задача 1. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^x$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^x$ г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

Решение.

а) Границата ќе ја пресметаме со помош на границата $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Ги трансформираме изразите $\frac{3}{x} = \frac{1}{\frac{x}{3}}$ и $x = \frac{x}{3}3$. Потоа воведуваме смена $\frac{x}{5} = t$.

Кога $x \to \infty$, следува $t \to \infty$. Оттука,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^3 = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^3 = e^3 .$$

Во следните задачи нема да ја испишуваме смената, туку ќе користиме

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e .$$

б) За да границата ја сведеме на $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e$, ја трансформираме степенската основа на границата, така што прво ќе додадеме и одземеме единица, а потоа сите членови, освен единицата, ќе ги рационализираме и запишеме во реципрочен вид.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3}{x+1}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^x =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-4}}\right)^{\frac{x+1}{-4}\left(\frac{-4x}{x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-a}{x-b}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{b-a}{x-b}\right)^x=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-b}{b-a}}\right)^{\frac{x-b}{b-a}\left(\frac{(b-a)x}{x-b}\right)}=e^{(b-a)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-b}}=e^{b-a}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(1-\frac{1}{\frac{3x+2}{6}}\right)^{\frac{3x+2}{6}\frac{6}{3x+2}\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{3x+2}{6}}\right)^{\frac{3x+2}{6}}\right]^{\frac{x+1}{3}\frac{6}{3x+2}}=\left(e^{-1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+6}{9x+6}}=\left(e^{-1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{6x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{9x}{x}+\frac{6}{x}}}=$$

$$=\left(e^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

Задача 2. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$ г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Решение.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2\frac{1}{x^2}x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}==e^0=1.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)^{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\frac{1}{x^2-1}2x^2}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}=e^2.$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1-x^2+4x-2}{x^2-4x+2}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}\frac{(2x-1)x}{x^2-4x+2}}=$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}} \right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}} \right]^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}} = e^2 .$$

Притоа не смееме да заборавиме дека равенствата се исполнети бидејќи $\frac{x^2-4x+2}{2x-1} \to \infty$, кога $x \to \infty$.

г) Воведуваме смена $\frac{1}{x} = t$, $x = \frac{1}{t}$. Кога $x \to \infty$ следува $t \to \frac{1}{\infty} = 0$.

Затоа

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e .$$

Задача 3. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ б) $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin \pi x)^{ctg \pi x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+tg^2 \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

Решение.

а) Имајќи предвид дека $\cos x - 1 \to 0$ кога $x \to 0$, за да ја сведеме границата на $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ го трансформираме изразот

$$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = (1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}} .$$

Потоа ја определуваме границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{1+\cos x} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2} .$$

Конечно

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to 0} (1+\cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{e}} .$$

б) Воведуваме смена $\sin \pi x = t$. Кога $x \to 1$ следува $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{ctg\pi x}=\left(1^{\infty}\right)=\left(\lim_{t\to 0}(1+\sin\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}}\right)^{\frac{1}{\sin\pi x}\cos\pi x}==\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x}=e^{\cos\pi}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

в) Бидејќи функцијата $tg^2\sqrt{x}\to tg^2\sqrt{0}=0$ кога $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}\cdot tg^2\sqrt{z}\cdot\frac{1}{tg^2\sqrt{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{tg^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}\right)^2}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}=e^{\frac{1}{2}\cdot 1^2}=e^{\frac{1}{2}}.$$

г) Задачата ќе ја решиме со сведување на границата $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{e^{\varphi(x)}-1}{\varphi(x)}=1$.

Имено

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}2\frac{e^{2x}-1}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2\cdot 1=2.$$

Задача 4. Определи ги следниве граници:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+3)-\ln x)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{10+x}{5+x}\right)$

Решение.

а) Со помош на логаритамските формули $\ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b}$ и $a\ln b=\ln b^a$, функцијата ја сведуваме во вид $\ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x=x\ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right)$. Потоа имајќи предвид дека логаритамската функција е непрекината, „влегуваме со границата во функцијата“.

$$\lim_{x\to\infty}x(\ln(x+3)-\ln x)=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+3}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^x=$$

$$= \ln \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{x} = \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3} = \ln e^{3} = 3\ln e = 3\,.$$

б) $$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{10+x}{5+x}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{5+5+x}{5+x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{5}{5+x}\right)^{x} =$$

$$= \ln \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5+x}{5}}\right)^{\frac{5+x}{5}\cdot\frac{5}{5+x}x} = \ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{5+x}} = \ln e^{5} = 5\ln e\,.$$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ

Дефиниција. Функцијата $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ е **диференцијабилна** (**има извод**) во точката $x_0\in(a,b)$ ако постои конечен лимес

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Овој реален број се нарекува извод на функцијата f во точката x_0 и се обележува со $f'(x_0)$. Според тоа

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

За функцијата $f(x)$ велиме дека е диференцијабилна на интервалот (a,b) ако има извод во секоја точка x од интервалот (a,b). Во тој случај функцијата $f'(x)$ се нарекува **извод** на функцијата $f(x)$, и таа е определена на интервалот P.

Се користи и ознаката:

$$y_u{}'=\frac{dy}{du}=f'(u) \text{ и } u_x'=\frac{du}{dx}=g'(x)$$

Ако функцијата $f'(x)$ има извод во точката x_0, тој се означува со $f''(x_0)$ и се нарекува втор извод на функцијата $f(x)$ во x_0. Ако $f(x)$ има извод $f''(x)$ во произволна точка $x\in(a,b)$, тогаш функцијата $f''(x)$ која е определена на интервалот (a,b) се нарекува втор извод на функцијата $f(x)$. Со $f^{(n)}(x)$ го означуваме n-тиот извод на $f(x)$.

1. Табела на основни изводи

1^0 $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1},\alpha\in\mathbf{R}$. Специјално $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и $(x)'=1$.

2^0 $(\sin x)'=\cos x$.

3^0 $(\cos x)'=-\sin x$.

4^0 $(\operatorname{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

5^0 $(\operatorname{ctg}x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

6^0 $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0$. Специјално $\left(e^x\right)' = e^x$.

7^0 $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, a \neq 1$. Специјално $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

8^0 $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9^0 $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10^0 $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

11^0 $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. Правила за диференцирање

Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции на интервалот (a,b) и $C = \text{const}$. Тогаш

I. $\left(C\right)' = 0$.

II. $\left(u+v\right)' = u' + v'$.

III. $\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Специјално $\left(C \cdot u\right)' = C \cdot u'$.

IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad v \neq 0$.

Во задачите 1-21 со користење на табелата на основни изводи и правилата за диференцирање најди ги изводите на дадените функции.

Задача 1. $y = x^7 - x^6 + 5x^5 - \dfrac{1}{2}x^4$.

Решение.

$$y' = \left(x^7\right)' - \left(x^6\right)' + 5\left(x^5\right)' - \frac{1}{2}\left(x^4\right) = 7 \cdot x^{7-1} - 6 \cdot x^{6-1} + 5 \cdot 5 \cdot x^{5-1} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^{4-1} =$$
$$= 7x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 2x^3.$$

Задача 2. $y = \left(1+x^3\right)^2$.

Решение. $y' = \left[\left(1+x^3\right)^2\right]' = \left(1 + 2x^3 + x^6\right)' = 6x^2 + 6x^5$.

Задача 3. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$.

Решение. $y' = \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)' = \left(1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}\right)' =$

$$= 0 + (-1) \cdot x^{-1-1} + (-2) \cdot x^{-2-1} + (-3) \cdot x^{-3-1} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}.$$

Задача 4. $y = 4\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x}$.

Решение. $y' = \left(4x^{\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{1}{3}}\right)' = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Задача 5. $y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[4]{x^3}$.

Решение.

$$y' = \left(2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}}.$$

Задача 6. $y = \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение.

$$y' = \left(4 \cdot x^{-\frac{1}{4}} + 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x^{-\frac{1}{4}-1} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3}-1} = -x^{-\frac{5}{4}} - x^{-\frac{4}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right).$$

Задача 7. $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}}\right)' = \left(\sqrt{x \cdot \sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}\right)' = \left(\sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}\right)' = \left(\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}\right)' = \left(x^{\frac{7}{8}}\right)' = \frac{7}{8}x^{\frac{7}{8}-1} =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x}}.$$

Задача 8. $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$ **.**

Решение.

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}}}\right)' = \left(\sqrt[3]{x^{\frac{11}{4}}}\right)' = \left(x^{\frac{11}{12}}\right)' = \frac{11}{12} \cdot x^{\frac{11}{12}-1} = \frac{11}{12} \cdot x^{-\frac{1}{12}} = \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{x}}.$$

Задача 9. $y = \cos x + \sin x$.

Решение. $y' = (\cos x)' + (\sin x)' = -\sin x + \cos x$.

Задача 10. $y = \arcsin x + \arccos x + x$.

Решение. $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 = 1$.

Задача 11. $y = 2^x + \ln x - 4\log_3 x$**.**

Решение. $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} - 4\frac{1}{x\ln 3}$.

Задача 12. $y = x\sin x$.

Решение. $y' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x\cos x$.

Задача 13. $y = x^n \ln x, \quad n \in \mathbf{N}$.

Решение. $y' = \left(x^n\right)' \ln x + x^n (\ln x)' = nx^{n-1} \cdot \ln x + x^n \cdot \frac{1}{x} = nx^{n-1} \cdot \ln x + x^{n-1}$.

Задача 14. $y = x \operatorname{arctg} x$.

Решение. $y' = (x)' \operatorname{arctg} x + x(\operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$.

Задача 15. $y = \sqrt{x} \log_2 x$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' \log_2 x + \sqrt{x}(\log_2 x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \log_2 x + \frac{\sqrt{x}}{x\ln 2} = \frac{1}{\sqrt{x}\ln 2}\left(\frac{\ln x}{2} + 1\right).$$

Задача 16. $y = x \cdot e^x \cdot \sin x$.

Решение. Нека $u = u(x)$, $v = v(x)$ и $w = w(x)$ се диференцијабилни функции. Тогаш:

$$(uvw)' = (u)' vw + u(vw)' = u'vw + u\left((v)' w + v(w)'\right) = u'vw + uv'w + uvw'.$$

$$y' = (x)' e^x \sin x + x\left(e^x\right)\sin x + xe^x (\sin x)' = e^x \sin x + xe^x \sin x + xe^x \cos x.$$

Задача 17. $y = \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot \operatorname{tg} x$.

Решение.

$$y = \left(\sqrt{x}\right)' \ln x \operatorname{tg} x + \sqrt{x}(\ln x)' \operatorname{tg} x + \sqrt{x} \ln x (\operatorname{tg} x)' =$$

$$= \frac{\ln x \operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} \operatorname{tg} x}{x} + \frac{\sqrt{x} \ln x}{\cos^2 x}.$$

Задача 18. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Решение. $y' = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$.

Задача 19. $y = \frac{5x-2}{4x+7}$.

Решение.

$$y' = \frac{(5x-2)'(4x+7) - (5x-2)(4x+7)'}{(4x+7)^2} = \frac{5(4x+7) - 4(5x-2)}{(4x+7)^2} = \frac{43}{(4x+7)^2}.$$

Задача 20. $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

Решение. $y' = \dfrac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} =$

$= \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$

$= \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{1 + 2\sin x \cos x} = \dfrac{2}{1 + \sin 2x}.$

Задача 21. $y = \dfrac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

Решение.

$$y' = \frac{(1 + \ln x)'(1 - \ln x) - (1 + \ln x)(1 - \ln x)'}{(1 - \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln x) - (1 + \ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln x)^2} =$$

$$= \frac{1 - \ln x + 1 + \ln x}{x(1 - \ln x)^2} = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}.$$

ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА И ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

Нека $y = f(u)$ и $u = g(x)$ се функции такви што композицијата $f(g(x))$ е дефинирана.

Нека изводите $y_u' = \dfrac{dy}{du} = f'(u)$ и $u_x' = \dfrac{du}{dx} = g'(x)$ постојат. Тогаш

$y_x' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} = y_u' \cdot u_x'$, односно

$$y_x' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Нека функцијата $x = g(y)$ е инверзна функција на $y = f(x)$ и $f'(x) \neq 0$. Тогаш

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Пример. Нека $y = f(x)$, каде $y = e^x$. Инверзната функција $x = g(y)$ е $x = \ln y$. Тогаш

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Диференцијално сметање

Во задачите 1- 10 со користење формулата за извод од сложена функција, табелата на основни изводи и правилата за диференцирање најди ги изводите на дадените функции.

Задача 1. $y=\sqrt[3]{3x^2-2x+4}$.

Решение.
$$y'=\left(\left(3x^2-2x+4\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=$$
$$=\frac{1}{3}\left(3x^2-2x+4\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(3x^2-2x+4\right)'=\frac{6x-2}{3\sqrt[3]{\left(3x^2-2x+4\right)^2}}.$$

Задача 2. $y=\ln\sin x$.

Решение. $y'=\left(\ln\sin x\right)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\left(\sin x\right)'=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg}x$.

Задача 3. $y=\ln\operatorname{tg}x$.

Решение. $y'=\left(\ln\operatorname{tg}x\right)'=\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\left(\operatorname{tg}x\right)'=\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$.

Задача 4. $y=\ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)$.

Решение. $y'=\left(\ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)\right)'=\frac{1}{\ln\left(\ln x\right)}\cdot\left(\ln\left(\ln x\right)\right)'=\frac{1}{\ln\left(\ln x\right)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\left(\ln x\right)'=$

$$=\frac{1}{\ln\left(\ln x\right)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}.$$

Задача 5. $y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$ **.**

Решение.
$$y'=\left(\ln\frac{x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{1-x^2}{x^2}\cdot\frac{2x\left(1-x^2\right)-x^2\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2}=$$
$$=\frac{1-x^2}{x^2}\cdot\frac{2x-2x^3-x^2\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{x^2}\cdot\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2}{x\left(1-x^2\right)}.$$

Задача 6. $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

Решение.
$$y'=\left(\ln\sin\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\left(\sin\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\operatorname{ctg}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Задача 7. $y=e^{\sin\sqrt{x}}$.

Решение.
$$y' = \left(e^{\sin\sqrt{x}}\right)' = e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \left(\sin\sqrt{x}\right)' = e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$
$$= e^{\sin\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Задача 8. $y = e^{\cos^2 x}$.

Решение. $y' = \left(e^{\cos^2 x}\right)' = e^{\cos^2 x} \cdot \left(\cos^2 x\right)' = e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)' =$
$= e^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) = -e^{\cos^2 x} \sin 2x$.

Задача 9. $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$.

Решение.
$$y' = \left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$
$$= -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Задача 10. $y = \sqrt{x+1} - \ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$.

Решение. $y' = \left(\sqrt{x+1} - \ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)\right)' = \left(\sqrt{x+1}\right)' - \left(\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)\right)' =$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\left(1 - \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \frac{1+\sqrt{1+x}-1}{1+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\left(1+\sqrt{1+x}\right)}.$$

ИЗВОД ОД ПАРАМЕТАРСКИ ЗАДАДЕНИ ФУНКЦИИ

Нека се дадени функциите $x = x(t),\ y = y(t)$, при што постои инверзна функција $t = t(x)$. Тогаш за функцијата зададена со $y = y(t(x))$, $t = t(x)$, точна е формулата:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Во задачите 1-6 пресметај го y'_x.

Задача 1. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Решение. $\dot{x}=-a\sin t$, $\dot{y}=b\cos t$, $y'_x=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

Задача 2. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$.

Решение. $\dot{x}=-3a\cos^2 t\sin t$, $\dot{y}=3a\sin^2 t\cos t$,

$$y'_x=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\operatorname{tg} t.$$

Задача 3. $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t} \end{cases}$.

Решение. $\dot{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $\dot{y}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$, $y'_x=\dfrac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}=\dfrac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{t^2}}$.

Задача 4. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$.

Решение. $\dot{x}=3a\cdot\dfrac{(t)'(1+t^3)-t(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=3a\cdot\dfrac{(1+t^3)-t3t^2}{(1+t^3)^2}=\dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$,

$$\dot{y}=3a\cdot\frac{(t^2)'(1+t^3)-t^2(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=3a\cdot\frac{2t(1+t^3)-t^2 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$y'_x=\frac{\dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Задача 5. $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$.

Решение. $\dot{x}=(e^t)'\sin t+e^t(\sin t)'=e^t(\sin t+\cos t)$,

$\dot{y}=(e^t)'\cos t+e^t(\cos t)'=e^t(\cos t-\sin t)$,

$$y'_x=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}.$$

Задача 6. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$.

Решение. $\dot{x} = a(t - \sin t)' = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a(1 - \cos t)' = a \sin t$,
$y'_x = \dfrac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

ИЗВОД ОД ИМПЛИЦИТНО ЗАДАДЕНИ ФУНКЦИИ

Во задачите 1-6 пресметај y'_x на имплицитно зададените функции.

Задача 1. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6} = 1$.

Решение. $y = y(x)$ па диференцираме по x.

$\left(\dfrac{x^2}{4}\right)'_x + \left(\dfrac{y^2}{6}\right)'_x = 0$ или $\dfrac{1}{4} \cdot 2x + \dfrac{1}{6} 2y \cdot y'_x = 0$.

Добиваме дека $y'_x = \dfrac{-\dfrac{x}{2}}{\dfrac{y}{3}} = -\dfrac{3x}{2y}$.

Задача 2. $x^3 + y^3 = a^3, a > 0$.

Решение. Тогаш $\left(x^3\right)'_x + \left(y^3\right)'_x = \left(a^3\right)'_x$ или $3x^2 + 3y^2 \cdot y'_x = 0$. Добиваме дека $y'_x = -\dfrac{3x^2}{3y^2} = -\dfrac{x^2}{y^2}$.

Задача 3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, a > 0$.

Решение. Тогаш $\left(\sqrt{x}\right)'_x + \left(\sqrt{y}\right)'_x = \left(\sqrt{a}\right)'_x$ или $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{y'_x}{2\sqrt{y}} = 0$. Добиваме дека

$$y'_x = -\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{y}}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Задача 4. $\ln y + \dfrac{y}{x} = 1$.

Решение. $(\ln y)'_x + \left(\dfrac{y}{x}\right)'_x = 0$. Добиваме $\dfrac{1}{y} y'_x + \dfrac{y'_x \cdot x - y}{x^2} = 0$, односно $y'_x = \dfrac{y^2}{x^2 + yx}$.

Задача 5. $y^2 \cos x + \sin x + x = 0$.

Решение. $\left(y^2\cos x\right)_x' + \left(\sin x\right)_x' + \left(x\right)_x' = 0$. Добиваме $2yy_x'\cos x - y^2\sin x + \cos x + 1 = 0$, односно $y_x' = \dfrac{y^2\sin x - \cos x - 1}{2y\cos x}$.

Задача 6. $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = 0$.

Решение. $\left(\dfrac{y}{x}\right)_x' + \left(\dfrac{x}{y}\right)_x' = 0$. Добиваме $\dfrac{y_x'\cdot x - y}{x^2} + \dfrac{y - x\cdot y_x'}{y^2} = 0$.

$y_x'\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}\right) = \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{y}$ од каде $y_x' = \dfrac{xy^2}{x^2 y} = \dfrac{y}{x}$.

ЛОГАРИТАМСКО ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

Нека $y = f(x) = g(x)^{h(x)}$ каде што $h(x) > 0$ на својата дефинициона област. Тогаш $f(x) = e^{h(x)\ln g(x)}$, од каде следува дека $y' = e^{h(x)\ln g(x)}\cdot\left(h'(x)\ln g(x) + \dfrac{h(x)}{g(x)}\cdot g'(x)\right)$.

Во задачите 1-4 со логаритамско диференцирање пресметај ги изводите на дадените функции.

Задача 1. $y = x^x$.

Решение. $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} \Rightarrow y' = e^{x\ln x}\left(x\ln x\right)' = x^x\left(\ln x + 1\right)$.

Задача 2. $y = x^{x^x}$.

Решение.

$$y = x^{x^x} = e^{\ln x^{x^x}} = e^{x^x\ln x} \Rightarrow y' = e^{x^x\ln x}\cdot\left(x^x\ln x\right)' = e^{x^x\ln x}\cdot\left(\left(x^x\right)'\ln x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

$$= e^{x^x\ln x}\left(x^x\left(\ln x + 1\right)\ln x + x^{x-1}\right) = x^{x^x}\left(x^x\left(\ln x + 1\right)\ln x + x^{x-1}\right).$$

Задача 3. $y = \left(\cos x\right)^{\sin x}$.

Решение.

$$y=(\cos x)^{\sin x}=e^{\ln(\cos x)^{\sin x}}=e^{\sin x\ln(\cos x)}\Rightarrow y'=e^{\sin x\cdot\ln(\cos x)}\cdot(\sin x\cdot\ln(\cos x))'=$$

$$=e^{\sin x\cdot\ln(\cos x)}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)+\frac{\sin x}{\cos x}(-\sin x)\right)=$$

$$=(\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

Задача 4. $y=(\sin x)^{\sin^2 x}$.

Решение.

$$y=(\sin x)^{\sin^2 x}=e^{\ln(\sin x)^{\sin^2 x}}=e^{\sin^2 x\cdot\ln(\sin x)}\Rightarrow y'=e^{\sin^2 x\cdot\ln(\sin x)}\cdot\left(\sin^2 x\cdot\ln(\sin x)\right)'=$$

$$=e^{\sin^2 x\cdot\ln(\sin x)}\cdot\left(2\sin x\cos x\cdot\ln(\sin x)+\sin^2 x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=$$

$$=(\sin x)^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x\left(\ln(\sin x)+\frac{1}{2}\right).$$

ПРИМЕНА НА ИЗВОДИ ОД ПОВИСОК РЕД ПРИ ДОКАЖУВАЊЕ ИДЕНТИТЕТИ

Задача 1. Да се покаже дека функцијата $y = A\sin(wt + wo) + B\cos(wt + wo)$, $(A, B, w, wo - const)$, ја задоволува релацијата: $\frac{d^2 y}{dt^2} + w^2 y = 0$.

Решение.

$$y = A\sin(wt + wo) + B\cos(wt + wo)$$

$$\frac{dy}{dt} = A\cos(wt + wo)w - B\sin(wt + wo)w$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A\sin(wt + wo)w^2 - B\cos(wt + wo)w^2$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + w^2 y =$$

$$-Aw^2\sin(wt + wo) - Bw^2\cos(wt + wo) + w^2(A\sin(wt + wo) + B\sin(wt + wo)) = 0$$

Задача 2. Да се покаже дека функцијата $a_1 e^{nx} + a_2 e^{-nx} + a_3\cos nx + a_4\sin nx$, $(a_1, a_2, a_3, a_4, n - const)$, ја задоволува релацијата: $\frac{d^4 y}{dx^4} = n^4 y$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = na_1 e^{nx} - a_2 ne^{-nx} - a_3 n\sin nx + a_4 n\cos nx$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n^2 a_1 e^{nx} + a_2 n^2 e^{-nx} - n^2 a_3\cos nx - a_4 n^2\sin nx$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = n^3 a_1 e^{nx} - a_2 n^4 e^{-nx} + a_3 n^3\sin nx - a_4 n^3\cos nx$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = n^4 a_1 e^{nx} + a_2 n^4 e^{-nx} + a_3 n^4\cos nx + a_4 n^4\sin nx$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = n^4\left[a_1 e^{nx} + a_2 e^{-nx} + a_3\cos nx + a_4\sin nx\right] = n^4 y$$

Задача 3. Да се пресмета $\frac{dy}{dx}$, каде y е зададена со параметарските равенки:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Решение.

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{3a\left(1+t^3\right)-3at3t^2}{\left(1+t^3\right)^2}=\frac{3a+3at^3-9at^3}{\left(1+t^3\right)^2}=\frac{3a-6at^3}{(1+t^3)^2}$$

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{6at(1+t^3)-3at^2 3t^2}{(1+t^3)^2}=\frac{6at+6at^4-9at^4}{(1+t^3)^2}=\frac{6at-3at^4}{(1+t^3)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6at-3at^4}{\left(1+t^3\right)^2}}{\frac{3a-6at^3}{(1+t^3)^2}}=\frac{6at-3at^4}{3a-6at^3}=\frac{3at\left(2-t^3\right)}{3a\left(1-2t^3\right)}=\frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}.$$

Задача 4. Да се докаже дека функцијата зададена со параметарските равенки:
$x=\frac{1+\ln t}{t^2}$, $y=\frac{3+2\ln t}{t}$, го задоволува равенството: $yy'=2xy'^2+1$.

Решение.

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{1}{t}\cdot t^2-\left(1+\ln t\right)2t}{t^4}=\frac{t-2t-2t\ln t}{t^4}=$$

$$=\frac{-t-2t\ln t}{t^4}=-\frac{t(1+2\ln t)}{t^4}=-\frac{1+2\ln t}{t^3}$$

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt}=\frac{2\cdot\frac{1}{t}\cdot t-(3+2\ln t)\cdot 1}{t^2}=\frac{2-3-2\ln t}{t^2}=\frac{-1-2\ln t}{t^2}=-\frac{1+2\ln t}{t^2}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1+2\ln t}{t^2}}{-\frac{1+2\ln t}{t^3}}=\frac{t^3}{t^2}=t$$

$$yy'=\frac{3+2\ln t}{t}\cdot t=3+2\ln t$$

$$2xy'^2+1=2\cdot\frac{1+\ln t}{t^2}\cdot t^2+1=2\left(1+\ln t\right)+1=2+2\ln t+1=3+2\ln t$$

Следува $L=yy'=2xy'^2+1=D$, каде L е левата, а D е десната страна во даденото равенство.

Задача 5. Да се докаже дека функцијата $y=y(x)$, зададена параметарски: $y=\sin 2t$, $x=\sin t$, ја задоволува релацијата: $(1-x^2)y''-xy'+4y=0$.

Решение.

$$\dot{y}=\cos 2t(2t)'=2\cos 2t$$

$$\dot{x}=\cos t(t)'=\cos t$$

$$y' = \frac{2\cos 2t}{\cos t}$$
$$\ddot{y} = -2\sin 2t(2t)' = -4\sin 2t$$
$$\ddot{x} = -\sin t$$
$$y'' = \frac{-4\sin 2t\cos t + 2\cos 2t\sin t}{\cos^3 t}$$
$$L = (1-\sin^2 t)\cdot\frac{-4\sin 2t\cos t + 2\cos 2t\sin t}{\cos^3 t} - \sin t\cdot\frac{2\cos 2t}{\cos t} + 4\sin 2t =$$
$$= \frac{-4\sin 2t\cos t + 2\cos 2t\sin t - 2\sin t\cos 2t + 4\sin 2t\cos t}{\cos t} = \frac{0}{\cos t} = 0 = D$$

Задача 6. Да се докаже дека функцијата зададена параметарски $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$, ја задоволува релацијата: $36y''(y - \sqrt{3x}) = x + 3$.

Решение.

$$\dot{y} = 3 - 3t^2, \qquad \dot{x} = 6t$$
$$\ddot{y} = -6t, \qquad \ddot{x} = 6$$
$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{-6t\cdot 6t - 6(3-3t^2)}{6^3\cdot t^3} = \frac{-36t^2 - 18 + 18t^2}{6^3 t^3} = \frac{-18t^2 - 18}{6^3 t^3} =$$
$$= \frac{-18(t^2+1)}{6^3 t^3} = \frac{-(t^2+1)}{12t^3}$$
$$36y''(y - \sqrt{3x}) = 36\cdot\frac{-(t^2+1)}{12t^3}\cdot(3t - t^3 - \sqrt{3\cdot 3t^2}\ ) =$$
$$= \frac{-3(t^2+1)}{t^3}(3t - t^3 - 3t) = \frac{(-3t^2-3)}{t^3}(-t^3) = -(-3t^2-3) = 3t^2 + 3$$
$$D = x + 3 = 3t^2 + 3 = L$$

Задача 7. Да се докаже дека функцијата $y = \sin(2\arcsin x)$ ја задоволува релацијата: $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$.

Решение.

$$y' = \cos(2\arcsin x)\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\cdot\frac{\cos(2\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$y'' = 2\cdot\frac{-\sin(2\arcsin x)\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - \cos(2\arcsin x)\dfrac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$
$$= \frac{\dfrac{-4\sqrt{1-x^2}\sin(2\arcsin x) + 2x\cos(2\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$=\frac{-4\sqrt{1-x^2}\,\sin(2\arcsin x)+2x\cos(2\arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$L=(1-x^2)\frac{-4\sqrt{1-x^2}\,\sin(2\arcsin x)+2x\cos(2\arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-$$

$$-\frac{2\cos(2\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}+4\sin(2\arcsin x)=$$

$$=\frac{-4\sqrt{1-x^2}\,\sin(2\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2x\cos(2\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}-$$

$$-\frac{2\cos(2\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}+4\sin(2\arcsin x)=0=D.$$

Задача 8. Покажи дека функцијата зададена параметарски, $\begin{cases} x=2t+3t^2 \\ y=t^2+2t^3 \end{cases}$ ја задоволува релацијата $y=y'^2+2y'^3$.

Решение.

$$\dot{x}=2+6t$$

$$\dot{y}=2t+6t^2$$

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{2t+6t^2}{2+6t}=\frac{t(2+6t)}{2+6t}=t$$

$$L=t^2+2t^3=t^2+2t^3=D$$

Задача 9. Провери дали функцијата зададена параметарски:

$$x=\frac{1+t}{t^3}$$

$$y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}$$

ја задоволува релацијата $xy'^3=1+y'$.

Решение.

$$\dot{x}=\left(\frac{1+t}{t^3}\right)'=\frac{t^3-(1+t)\cdot 3t^2}{t^6}=\frac{t^2(t-3-3t)}{t^6}=\frac{-2t-3}{t^4}$$

$$\dot{y}=\left(\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}\right)'=\left(\frac{3+4t}{2t^2}\right)'=\frac{4\cdot(2t^2)-(3+4t)\cdot 4t}{4t^4}=\frac{8t^2-12t-16t^2}{4t^4}=$$

$$=\frac{-8t^2-12t}{4t^4}=\frac{4t\cdot(-2t-3)}{4t^4}=\frac{-2t-3}{t^3}$$

$$y' = \frac{\dfrac{-2t-3}{t^3}}{\dfrac{-2t-3}{t^4}} = \frac{t^4}{t^3} = t$$

$$L = xy'^3 = \frac{1+t}{t^3} \cdot t^3 = 1+t = 1+y' = D$$

Задача 10. Да се покаже дека функцијата $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ ја задоволува релацијата $2y'^2 = (y-1)y''$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{x-3}{x+4}\right) = \frac{x+4-x+3}{(x+4)^2} = \frac{7}{(x+4)^2}$$

$$y'' = \left(\frac{7}{(x+4)^2}\right)' = \frac{(7)'(x+4)^2 - 7\cdot 2(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{-14(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{-14}{(x+4)^3}$$

$$L = 2y'^2 = 2\cdot\left(\frac{7}{(x+4)^2}\right)^2 = 2\cdot\frac{49}{(x+4)^4} = \frac{98}{(x+4)^4} \qquad *)$$

$$D = (y-1)y'' = \left(\frac{x-3}{x+4} - 1\right)\cdot\frac{-14}{(x+4)^3} =$$

$$= \frac{x-3-x-4}{x+4}\cdot\frac{-14}{(x+4)^3} = \frac{98}{(x+4)^4} \qquad **)$$

Од *) и **) следува равенството.

Задача 11. Да се покаже дека функцијата $y = \sqrt{2x-x^2}$ ја задоволува релацијата $y^3 y'' + 1 = 0$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}(2x-x^2)' = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x}}$$

$$y''=\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)'=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}\cdot(2-2x)}{2x-x^2}=$$

$$=\frac{\frac{-2x+x^2-(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}}}{\frac{2x-x^2}{1}}=$$

$$=\frac{-2x+x^2-1+2x-x^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}=\frac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}$$

$$L=y^3y''+1=\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3\cdot\frac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}+1=(-1)+1=0=D$$

Задача 12. Да се покаже дека функцијата $y=e^{4x}+2e^{-x}$ ја задоволува релацијата $y'''-13y'-12y=0$.

Решение.

$$y'=e^{4x}+2e^{-x}=e^{4x}\cdot(4x)'+2e^{-x}\cdot(-x)'=4e^{4x}-2e^{-x}$$

$$y''=4e^{4x}\cdot(4x)'-2e^{-x}\cdot(-x)'=16e^{4x}+2e^{-x}$$

$$y'''=16e^{4x}\cdot(4x)'+2e^{-x}\cdot(-x)'=64e^{4x}-2e^{-x}$$

$$y'''-13y'-12y=64e^{4x}-2e^{-x}-13\left(4e^{4x}-2e^{-x}\right)-12\left(e^{4x}+2e^{-x}\right)=$$

$$64e^{4x}-2e^{-x}-52e^{4x}+26e^{-x}-12e^{4x}-24e^{-x}=0$$

Задача 13. Да се покаже дека функцијата $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ ја задоволува релацијата $xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0$.

Решение.

$$y'=\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$y''=\left(\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\right)'=\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)'\cdot 2\sqrt{x}-\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot 2\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{4x}=$$

$$=\frac{\left[e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]\cdot 2\sqrt{x}-\left(e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x}=$$

$$=\frac{\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}-\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{\frac{4x}{1}}=$$

$$=\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}$$

$$L=xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=$$

$$=x\cdot\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{4}\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}-\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{4}=$$

$$=\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}-\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{4}$$

$$=\frac{\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x}-\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}=0=D.$$

Задача 14. Да се покаже дека функцијата $y=e^{a\arcsin x}$ ја задоволува релацијата $\left(1-x^2\right)y''-xy'-a^2y=0$.

Решение.

$$y'=\left(e^{a\arcsin x}\right)'=e^{a\arcsin x}a\cdot\left(\arcsin x\right)'=ae^{a\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{ae^{a\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y''=\left(\frac{ae^{a\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{a\frac{ae^{a\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-ae^{a\arcsin x}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{\frac{a^2e^{a\arcsin x}\sqrt{1-x^2}+axe^{a\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1-x^2}{1}}=\frac{a^2e^{a\arcsin x}\sqrt{1-x^2}+axe^{a\arcsin x}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

$$L=\left(1-x^2\right)y''-xy'-a^2y=$$

$$=\left(1-x^2\right)\frac{a^2e^{a\arcsin x}\sqrt{1-x^2}+axe^{a\arcsin x}}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}-x\frac{ae^{a\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}-a^2e^{a\arcsin x}=$$

$$=\frac{a^2e^{a\arcsin x}\sqrt{1-x^2}+axe^{a\arcsin x}-axe^{a\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}-a^2e^{a\arcsin x}=$$

$$=\frac{a^2e^{a\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}-a^2e^{a\arcsin x}=a^2e^{a\arcsin x}-a^2e^{a\arcsin x}=0=D\,.$$

Задача 15. Да се провери дека функцијата $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k$ ја задоволува релацијата $\left(1+x^2\right)y''+xy'-k^2y=0$.

Решение.

$$y'=k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=$$

$$=k\left(x+\sqrt{x^x+1}\right)^{k-1}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=k\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

$$y''=\frac{k\cdot k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{k-1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'\cdot\sqrt{x^2+1}-k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$$

$$=\frac{\frac{k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\left(x+\sqrt{x^x+1}\right)}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot\sqrt{x^2+1}-\frac{kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$$

$$=\frac{\frac{k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}-\frac{kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$$

$$=\frac{\frac{k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\sqrt{x^2+1}-kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x^2+1}{1}}=$$

$$=\frac{k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\sqrt{x^2+1}-kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$L=\left(1+x^2\right)y''+xy'-k^2y=$$

$$=\left(1+x^2\right)\cdot\frac{k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\sqrt{x^2+1}-kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}+$$

$$+x\frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}-k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k=$$

$$=\frac{k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\sqrt{x^2+1}-kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k+kx\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}-k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k=$$

$$=\frac{k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}-k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k=$$

$$=k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k-k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k=0=D.$$

Задача 16. Да се покаже дека функцијата $y=e^x\sin x$ ја задоволува релацијата $y''-2y'+2y=0$.

Решение.

$$y'=\left(e^x\right)'\sin x+e^x\left(\sin x\right)'=e^x\sin x+e^x\cos x$$

$$y''=\left(e^x\right)'\sin x+e^x\left(\sin x\right)'+\left(e^x\right)'\cos x+e^x\left(\cos x\right)'=$$

$$=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x=$$

$$=2e^x\cos x$$

$$L=y''-2y'+2y=2e^x\cos x-2\left(e^x\sin x+e^x\cos x\right)+2e^x\sin x=$$

$$=2e^x\cos x-2e^x\sin x-2e^x\cos x+2e^x\sin x=0=D.$$

РЕШАВАЊЕ ЛИМЕСИ СО ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

Нека $a \in \overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Изразот $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е неопределен од облик "$\dfrac{0}{0}$" во $x = a$ кога $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Изразот $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е неопределен од облик "$\dfrac{\infty}{\infty}$" во $x = a$ кога $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Нека функциите f и g се диференцијабилни во секоја точка од интервалот (c,d), освен можеби во точката $a \in (c,d)$. Ако $g'(x) \neq 0$ за $x \neq a$ и ако $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е неопределен израз од облик "$\dfrac{0}{0}$" или "$\dfrac{\infty}{\infty}$" во $x = a$, тогаш $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, доколку постои лимесот $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Лопиталовото правило важи и кога $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Со примена на Лопиталовото правило пресметај ги граничните вредности.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x} \overset{\text{ЛП}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{2x}-1\right)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}\cdot 2}{3} = \dfrac{2\cdot e^0}{3} = \dfrac{2\cdot 1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Задача 2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1} \overset{\text{ЛП}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(e^x-e)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} e^x = e^1 = e.$$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \overset{\text{ЛП}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\cdot 2x + \sin x}{2x} \overset{\text{ЛП}}{=}$

$$\overset{\text{ЛП}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}\cdot 2x + \sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x + 2e^x + \cos x}{2} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \overset{\text{ЛП}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^x}{\cos x} = \dfrac{1+1}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$.

Задача 5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x} \overset{\text{ЛП}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(e^{\sin 2x} - e^{\sin x})'}{(x)'} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}\cdot 2\cos 2x-e^{\sin x}\cdot\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(2\cos 2x-\cos x)}{1}=\frac{1\cdot 2-1\cdot 1}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Задача 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-e^{bx})'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}\cdot a-e^{bx}\cdot b}{1}=\frac{1\cdot a-1\cdot b}{1}=$

$=a-b$.

Задача 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\pi x+5\pi}{4x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x+\pi x+5\pi)'}{(4x)'}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x+\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

Задача 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{\cos x}}{e^{x}-e^{-x}}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(xe^{\cos x}\right)'}{\left(e^{x}-e^{-x}\right)'}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-xe^{\cos x}\sin x}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e}{2}.$$

Задача 9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^{x}-e^{\sin x}}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{\left(e^{x}-e^{\sin x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^{x}-e^{\sin x}\cos x}\overset{\text{ЛП}}{=}$$

$$\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(e^{x}-e^{\sin x}\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^{x}-e^{\sin x}\cos^{2}x+e^{\sin x}\sin x}\overset{\text{ЛП}}{=}$$

$$\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{\left(e^{x}-e^{\sin x}\cos^{2}x+e^{\sin x}\sin x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^{x}-e^{\sin x}\cos^{3}x+2e^{\sin x}\sin x\cos x+e^{\sin x}\cos x\sin x+e^{\sin x}\cos x}=1.$$

Задача 10. $a\neq 0\neq b$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos ax)'}{(\ln\cos bx)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-a\frac{\sin ax}{\cos ax}}{-b\frac{\sin bx}{\cos bx}}=$

$$=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}\overset{\text{ЛП}}{=}\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax}{\cos bx}=\left(\frac{a}{b}\right)^{2}.$$

Задача 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\cos 3x}{\sin 3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}\overset{\text{ЛП}}{=}$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(\sin 3x)'}=3\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\cos 3x}=1.$$

Задача 12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}\overset{\text{ЛП}}{=}3\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=$$

$$=6\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\overset{\text{ЛП}}{=}6\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(\sin x)'}=6\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=6\,.$$

Задеча 13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1-\ln x\right)'}{\left((x-1)\ln x\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)'}{\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\,.$$

Задача 14. $\lim\limits_{x\to 0}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^0=1\,.$$

Задача 15. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x=0\,.$

Задача 16. $b>0\,,\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^b}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{\left(x^b\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{bx^{b-1}}=\dfrac{1}{b}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^b}=\dfrac{1}{b}\cdot 0=0\,.$

Задача 17. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}\overset{\text{ЛП}}{=}2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x)'}{\left(e^x\right)'}=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=2\cdot 0=0\,.$

Задача 18.

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)}\cdot\frac{a}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{a}{x}\right)}=a.$$

Задача 19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(x\sin x)'}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\overset{\text{ЛП}}{=}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

Задача 20. Определи ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение.

а) Во овој случај имаме неопределеност од вид 0^0. Нека $y=x^x$. Тогаш $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(x^x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$ (задача 15).

Следува дека

$\ln\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=0$,

односно $\lim\limits_{x\to 0^+} y=1$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=e^0=1$;

б) Во овој случај имаме неопределеност од вид 1^∞. Нека $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$. Тогаш

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))'}{(x)'}\lim_{x\to 0}(-\operatorname{tg} x)=0.$$

Следува дека $\ln\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\ln y=0$, односно $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$;

в) Во овој случај имаме неопределеност од вид ∞^0. Нека $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.
Тогаш:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln\left((\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{ctg}x\ln(\operatorname{tg}x)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\overset{\text{ЛП}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\ln(\operatorname{tg}x))'}{(\operatorname{tg}x)'}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=0.$$

Следува дека

$\ln\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y=0$, односно $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=e^0=1$.

РАВЕНКА НА ТАНГЕНТА И НОРМАЛА

Нека е дадена кривата $y = f(x)$. Равенките на тангента и нормала на таа крива во точка $M(x_0, y_0)$ од кривата се

$$t: y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \text{ и}$$

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

соодветно.

Задача 1. За функцијата $f(x) = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ да се состават равенките на тангента и нормала во точка со апциса $x_0 = 2a$.

Решение. $y_0 = f(x_0)$,

$$y_0 = \frac{8a^3}{4a^2 + (2a)^2} = \frac{8a^3}{8a^2} = a.$$

Допирната точка $M(x_0, y_0)$ е $M(2a, a)$.

$$y' = \frac{-8a^3 \cdot 2x}{(4a^2 + x^2)^2} = -\frac{16a^3 x}{(4a^2 + x^2)^2}.$$

$$y'(x_0) = y'(2a) = -\frac{16a^3 \cdot 2a}{(4a^2 + 4a^2)^2} = -\frac{32a^4}{(8a^2)^2} = -\frac{32a^4}{64a^4} = -\frac{1}{2}.$$

Равенката на тангента во точката $M(2a, a)$ ќе биде

$t: y - a = -\dfrac{1}{2}(x - 2a)$, каде $k = -\dfrac{1}{2}$ е коефициентот на правец.

Равенката на нормала во точката $M(2a, a)$ ќе биде

$$n: y - a = -\frac{1}{-\frac{1}{2}}(x - 2a) = 2(x - 2a).$$

Задача 2. Да се состават равенките на тангента и нормала на кривата $y = x^3 + 2x$ во точката $M(1, y)$.

Решение. Јасно е дека $y' = 3x^2 + 2$, $y(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ и $y'(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$.

Равенката на тангентата во точката $M(1,3)$ е:

$y - 3 = 5(x - 1)$ или $5x - y - 2 = 0$.

Равенката на нормалата во точката $M(1,3)$ е:

$y - 3 = -\dfrac{1}{5}(x - 1)$ или $x + 5y - 16 = 0$.

Задача 3. Да се определи равенката на нормалата на кривата $y = \cos x$ во точката со апциса $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Решение. За $x_0 = \frac{\pi}{3}$ добиваме $y_0 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Точката од кривата низ која поминува нормалата е $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Од друга страна $y' = (\cos x)' = -\sin x$ и $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, равенката на нормалата е:

$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ или $y - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Задача 4. Да се најде точка од кривата $y = x^3 + 2x^2 - 1$ во која тангентата има коефициент на правец 4.

Решение. Нека $M(x, y)$ е точка од криата во која тангентата има коефициент на правец 4. Тогаш од $y' = 3x^2 + 4x$ следува $3x^2 + 4x = 4$, односно $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -2$. Според тоа, точките $M_1\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{27}\right)$ и $M_2(-2, -1)$ го исполнуваат бараниот услов.

Задача 5. Во која точка од кривата $y = x^3$ тангентата е:

а) паралелна на правата $y = 3x - 4$;

б) нормална на правата $3x + 4y - 5 = 0$.

Решение. а) Од $y' = 3x^2$ и $k = 3$ следува $3x^2 = 3$, односно $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Според тоа, точките $M_1(-1, -1)$ и $M_2(1, 1)$ го исполнуваат бараниот услов.

б) Нека $M(x, y)$ е точка која го исполнува бараниот услов. Тогаш нормалата на кривата во $M(x, y)$ паралелна на правата $3x + 4y - 5 = 0$. Коефициентот на правец на правата $3x + 4y - 5 = 0$ е $k = -\frac{3}{4}$. Од $y' = 3x^2$ следува $-\frac{1}{3x^2} = -\frac{3}{4}$, односно $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. . Според тоа, точките $M_1\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$ и $M_2\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}\right)$ го исполнуваат бараниот услов.

Задача 6. Во која точка од кривата $y = x^3 - 2x^2$ тангентата е:

а) паралелна на правата $y = 4x + 14$;

б) паралелна со симетралата на вториот квадрант.

Решение. а) Од $y' = 3x^2 - 4x$ и $k = 4$ следува $3x^2 - 4x = 4$, односно $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2$. Според тоа, точките $M_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{32}{27}\right)$ и $M_2(2,0)$ го исполнуваат бараниот услов.

б) Симетралата на вториот квадрант е правата $y = -x$. Од $y' = 3x^2 - 4x$ и $k = -1$ следува $3x^2 - 4x = -1$, односно $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1$. Значи точките $M_1\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}\right)$ и $M_2(1,-1)$ го исполнуваат бараниот услов.

Задача 7. Да се определат равенките на тангентата и нормалата на кривата $y = x^3 + 3x^2 + 5$ во точката со апциса $x_0 = -2$.

Решение. За $x_0 = -2$, добиваме

$y_0 = y(x_0) = x_0^3 + 3x_0^2 + 5 = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5 = 9$. Според тоа, допирната точка е $M(-2,9)$.

Од $y' = x^2 + 6x$ следува дека $k = y'(-2) = 0$.

Равенката на тангентата е:

$y - 9 = 0 \cdot (x + 2)$ или $y = 9$;

Равенката на нормалата е:

$x = -2$.

Задача 8. Да се најдат точките во кои тангентите на кривите $y = x^3 - 2x^2$ и $y = 2x^2 + 3x - 2$ меѓусебно се паралелни.

Решение. Тангентите на кривите се меѓусебно паралелни ако нивните коефициенти на правец се еднакви. Од $3x^2 - 4x = k_1 = k_2 = 4x + 3$, добиваме $3x^2 - 8x - 3 = 0$, т.е. $x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3}$. Значи точките кои го задоволуваат бараниот услов се $M_1(3,9)$, $T_1(3,25)$ и $M_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{27}\right), T_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{25}{9}\right)$ (Овде со M се означени точките од првата, а со T точките од втората крива).

Задача 9. Да се определат равенките на тангентата и нормалата на кривата $y = 2 + \sqrt[3]{x-1}$ во точката со апциса 1.

Решение. За $x_0 = 1$ добиваме $y_0 = y(x_0) = y(1) = 2 + \sqrt[3]{1-1} = 2$.

Од $y' = \left(1 + \sqrt[3]{x-1}\right)' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ следува дека $y'(1)$ не е определено за $x = 1$.

Користејќи ја дефиницијата за извод во точката $x_0 = 1$ добиваме:

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(1+\Delta x) - y(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 + \sqrt[3]{1 + \Delta x - 1} - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty .$$

Тоа значи дека равенката на тангентата на оваа крива во точката $M(1,2)$ е $x=1$ (вертикална тангента), а равенката на нормалата во истата точка е $y=2$ (хоризонталана нормала).

Задача 10. Да се покаже дека сумата на отсечките отсечени на координатните оски од тангентата повлечена во произволна точка од параболата $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ е еднаква со a.

Решение. Равенката на тангентата во точката $M(x_0, y_0)$ е $y-y_0=y_0'(x-x_0)$, каде што $y_0'=-\sqrt{\dfrac{y_0}{x_0}}$. Отсечките на оските O_x и O_y се $m=x_0+\sqrt{x_0 y_0}$ и $n=y_0+\sqrt{x_0 y_0}$ соодветно. Според тоа, $m+n=x_0+y_0+2\sqrt{x_0 y_0}=\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

Задача 11. Да се определи a, така што правата $y=x$ да биде тангента на $y=a^x$.

Решение. Од $x'=1$ и $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ следува дека $1=a^x\ln a$, каде што a е бараниот број, а x апцисата на допирната точка. Од друга страна $x=a^x$, од каде се добива $x=\dfrac{1}{\ln a}$. Од $0=\ln 1=\ln\left(a^x \ln a\right)=x\ln a+\ln\ln a$ следува $\ln\ln a=-1$. Тогаш $a=e^{\frac{1}{e}}$ и $x=e$. Според тоа, правата $y=x$ ја допира кривата $y=e^{\frac{x}{e}}$ во точката (e,e).

Задача 12. Да се определат равенките на тангентата и нормалата на кружницата $x^2+y^2=r^2$ во точката $M(x_0, y_0)$.

Решение. Функцијата $x^2+y^2=r^2$ е зададена во имплицитен облик, па за да го определиме изводот y' равенката на кружницата ја диференцираме член по член земајќи дека *y* е функција од *x*. Според тоа, добиваме:

$2x+2y\cdot y'=0$, од каде што $y'=-\dfrac{x}{y}$, а $y'(x_0)=-\dfrac{x_0}{y_0}$.

Равенката на бараната тангента е:

$y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$, од каде што се добива:

$xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2$,

односно $xx_0+yy_0=r^2$ (точката $M(x_0, y_0)$ лежи на кружницата).

Равенката на бараната нормала е:

$y-y_0=\dfrac{y_0}{x_0}(x-x_0)$, од каде што се добива $y=\dfrac{y_0}{x_0}x$.

Задача 13. Да се определат равенките на тангентата и нормалата на кривата $y^2 = 2px$ во точката со апциса x_0.

Решение. Точката $M(x_0, y_0)$ лежи на параболата, од каде добиваме дека ${y_0}^2 = 2px_0$. Функцијата $y^2 = 2px$ е зададена во имплицитен облик, па изводот y' го определуваме со тоа што равенката на параболата ја диференцираме член по член земајќи дека *y* е функција од *x*. Според тоа, добиваме:

$2y \cdot y' = 2p$, од каде што $y' = \dfrac{p}{y}$, а $y'(x_0) = \dfrac{p}{2px_0} = \dfrac{1}{2x_0}$.

Равенката на бараната тангента е:

$y - y_0 = \dfrac{1}{2x_0}(x - x_0)$, односно $yy_0 = p(x + x_0)$.

Равенката на бараната нормала е:

$y - y_0 = -2x_0(x - x_0)$, односно $p(y - y_0) + y_0(x - x_0) = 0$.

ГРАФИЦИ НА ДРОБНО РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Асимптоти

1) Нека функцијата $y=f(x)$ е дефинирана во околина на точката a. Ако е исполнет барем еден од условите $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, тогаш правата $x=a$ е вертикална асимптота на функцијата $y=f(x)$.

2) Нека функцијата $y=f(x)$ е дефинирана во $D=(a,+\infty)$ (или $D=(-\infty,a)$). Ако е исполнет условот $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$), тогаш правата $x=b$ е хоризонтална асимптота на функцијата $y=f(x)$.

3) Нека $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$. Тогаш може но не мора да постои права од облик $y=kx+n$ која не е паралелна со ниту една од координатните оски и неограничено се доближува до графикот на функцијата $y=f(x)$ кога $x\to-\infty$ или $x\to+\infty$. Таа права е коса асимптота. Ако $y=kx+n$ е коса асимптота на функцијата $y=f(x)$, тогаш $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$.

Монотоност

Нека функцијата $y=f(x)$ е диференцијабилна на интервалот (a,b). Тогаш

1) $f(x)$ монотоно расте на (a,b) ако $f'(x)>0$ за секое $x\in(a,b)$;

2) $f(x)$ монотоно опаѓа на (a,b) ако $f'(x)<0$ за секое $x\in(a,b)$.

Конвексност, конкавност и превојни точки

Дефиниција. Бројот A е **граница** на функцијата $y=f(x)$ кога x тежи кон x_0 (во точката x_0) ако за секој позитивен број ε, постои позитивен број δ, таков што за сите $x\neq x_0$ за кои $|x-x_0|<\delta$ да следува $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Означуваме $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ или $f(x)\to A$ кога $x\to x_0$.

Дефиниција. Функцијата $y=f(x)$ е **непрекината** во точката $x_0\in X$ ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Функцијата $y=f(x)$ е непрекината на X, ако е непрекината за секое $x_0\in X$.

Нека функцијата $y=f(x)$ е непрекината и постои $f''(x)$ за секое $x\in[a,b]$.

1) Ако за секој $x\in[a,b]$, $f''(x)>0$, тогаш графикот на $y=f(x)$ е конвексен $(\cup)$ на интервалот $[a,b]$.

2) Ако за секој $x\in[a,b]$, $f''(x)<0$, тогаш графикот на $y=f(x)$ е конкавен $(\cap)$ на интервалот $[a,b]$.

Точката $x_0\in[a,b]$ таква што $f''(x_0)=0$, за која $f''(x)>0$ за $x>x_0$ и $f''(x_0)<0$ за $x<x_0$ (или $f''(x)>0$ за $x<x_0$ и $f''(x_0)<0$ за $x>x_0$) ја нарекуваме превојна точка.

При испитувањето на текот и на конструкцијата на графикот на функцијата $y=f(x)$ одредуваме:

1) дефиниционата област;

2) пресечните точки на функцијата со кооординатните оски;

3) симетричните својства на функцијата (парност, непарност и периодичност);

4) асимптотите на функцијата (ако постојат);

5) екстремните вредности, нивната природа и интервалите на монотоност;

6) интервалите на конвексност и конкавност, превојни точки;

7) скицирање на графикот.

Во задачите 1-7 испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата.

Задача 1. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Решение. (*Прв начин*) 1) Функцијата е дефинирана за секое $x\in\mathbf{R}$ за кое $1-x^2\neq 0$, односно $x\neq\pm1$. Според тоа, $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.

2) Ако $x=0$, тогаш $y=1$. Следува дека пресечна точка на функцијата со y-оската е точката $A(0,1)$. Бидејќи $y\neq 0$ за секое $x\in D_f$, пресечни точки на функцијата со x-оската нема. Бидејќи $\dfrac{1}{1-x^2}>0$ за $x\in(-1,1)$, а $\dfrac{1}{1-x^2}<0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ следува дека $y>0$ за $x\in(-1,1)$ и $y<0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

3) Бидејќи $f(-x)=\dfrac{1}{1-(-x)^2}=\dfrac{1}{1-x^2}=f(x)$, функцијата е парна. Следува дека графикот на функцијата е симетричен во однос на y-оската. Според тоа, доволно е да се испитува графикот кога $x>0$. Функцијата не е периодична.

4) Точките $x=-1$ и $x=1$ се точки на прекин. Од симетричноста доволно е да го испитуваме однесувањето на функцијата само во околина на $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}=\dfrac{1}{h(2-h)}=+\infty$ (во лимесот е направена смена $x=1-h, h>0$ и $h\to 0$);

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{1}{(-h)(2+h)}=-\infty$ (во лимесот е направена смена $x=1+h, h>0$ и $h\to 0$). Следува дека $x=1$ и $x=-1$ се вертикални асимптоти.

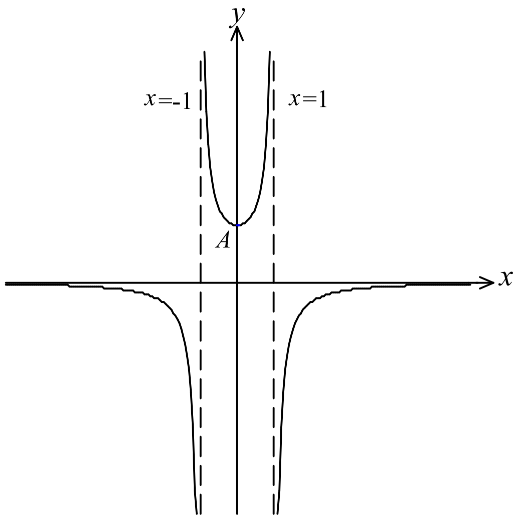
Од $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1-x^2}=0$ добиваме дека $y=0$ е хоризонтална асимптота.

5) Од $f'(x)=\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)'=\dfrac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$, добиваме дека $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Значи во точката $A(0,1)$ може да има екстрем. За $x<0$, $f'(x)<0$, односно $f(x)$ опаѓа за $(-\infty,-1)$ и $(-1,0)$ а за $x>0$, $f'(x)>0$, односно $f(x)$ монотоно расте на $(0,1)$ и $(1,\infty)$ Следува дека, точката $A(0,1)$ е минимум на функцијата.

6) $f''(x)=\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)''=\dfrac{2(3x^2+1)}{\left(1-x^2\right)^3}$. Јасно е дека $3x^2+1>0$ за секое $x\in\mathbf{R}$, што значи $f''(x)\neq 0$ за секое $x\in D_f$. Следува дека функцијата нема превојни точки.

Од $f''(x)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$ и $f''(x)<0 \Leftrightarrow 1-x^2<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, добиваме дека функцијата е конвексна $(\cup)$ на $(-1,1)$, односно конкавна $(\cap)$ за $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$.

7) График на функцијата:



Забелешка. На секој од трите интервали $(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)$, функцијата изгледа како конец (секоја непрекината функција изгледа така на својата дефинициона област).

(*Втор начин*) Дадената функција ќе ја скицираме со помош на елементарни графици: $y=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$.

Чекор 1. $y_1=\frac{1}{x}$ - елементарен график (цртеж 1).

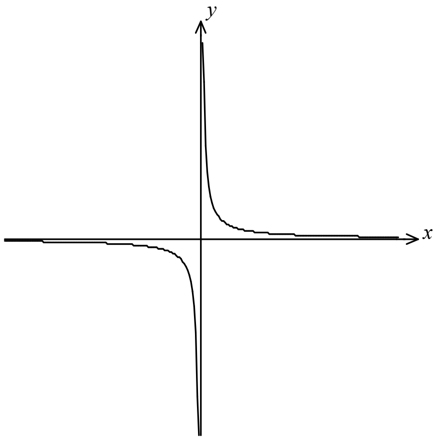
Чекор 2. $y_2=\frac{1}{1+x}$ - со поместување на графикот на y_1 налево за 1 (цртеж 2).

Чекор 3. $y_3=\frac{1}{1-x}$ - симетричен со графикот на функцијата y_2 во однос на y-оската (цртеж 3).

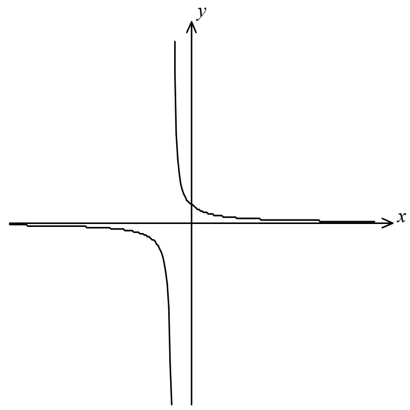
Чекор 4. $y_4=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$ - со собирање на вторите координати на графиците на функциите y_2 и y_3 (цртеж 4).

Чекор 5. $y_5=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$ - со множење на втората координата на графикот на функцијата y_4 со $\frac{1}{2}$, односно со стегање во правец на y-оската (цртеж 5).

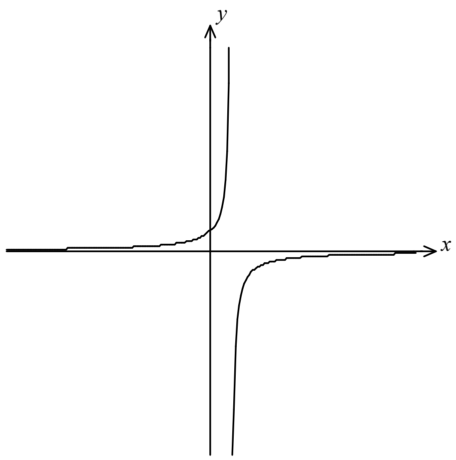
Графици на дробно-рационални функции



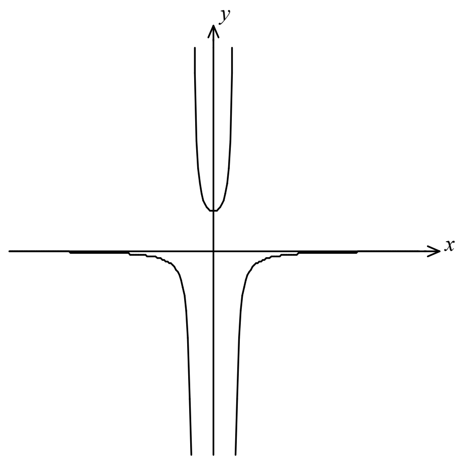
цртеж 1



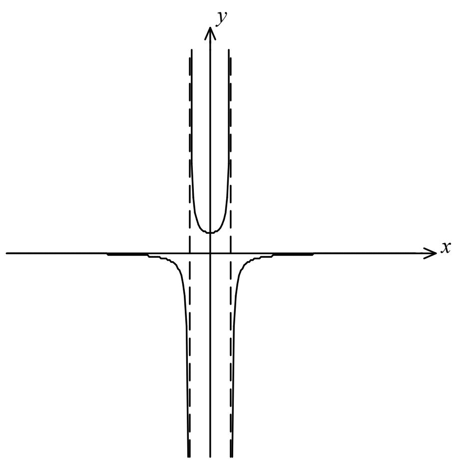
цртеж 2



цртеж 3



цртеж 4



цртеж 5

Задача 2. $y=\dfrac{x+1}{2x-3}$.

Решение. (*Прв начин*) 1) Функцијата е дефинирана за секое $x\in\mathbf{R}$ за кое $2x-3\neq 0$, односно $x\neq\dfrac{3}{2}$. Според тоа, $D_f=\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}=(-\infty,\dfrac{3}{2})\cup(\dfrac{3}{2},\infty)$.

2) Ако $x=0$, тогаш $y=-\dfrac{1}{3}$. Следува дека пресечна точка на функцијата со y-оската е точката $A(0,-\dfrac{1}{3})$. Ако $y=0$, тогаш $x=1$. Значи пресечна точка на функцијата со x-оската е $B(-1,0)$. $\dfrac{x+1}{2x-3}>0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(\dfrac{3}{2},+\infty)$ и $\dfrac{x+1}{2x-3}<0$ за $x\in(-1,\dfrac{3}{2})$. Значи $y>0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(\dfrac{3}{2},+\infty)$ и $y<0$ за $x\in(-1,\dfrac{3}{2})$.

3) Бидејќи $f(-x)=\dfrac{-x+1}{-2x-3}\neq\pm f(x)$, функцијата не е ни парна, ни непарна. Функцијата не е периодична.

4) Точката $x=\dfrac{3}{2}$ е точка на прекин. Го испитуваме однесувањето на функцијата во околина на $x=\dfrac{3}{2}$.

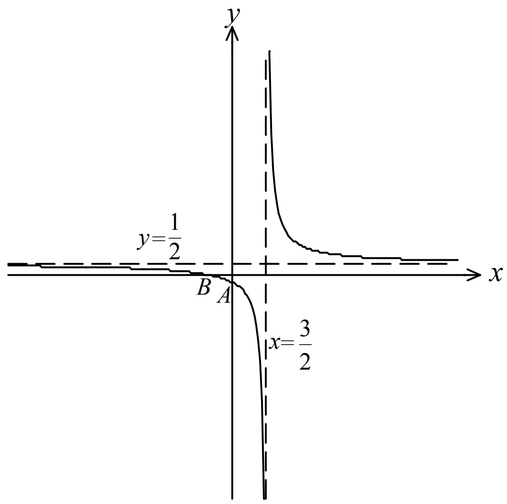
Од $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}\dfrac{x+1}{2x-3}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\dfrac{x+1}{2x-3}=+\infty$ следува дека $x=\dfrac{3}{2}$ е вертикална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{2x-3}=\dfrac{1}{2}$ добиваме дека $y=\dfrac{1}{2}$ е хоризонтална асимптота.

5) Бидејќи $f'(x)=\dfrac{-5}{(2x-3)^2}$, заклучуваме дека функцијата монотоно опаѓа на целата своја дефинициона област.

6) Од $f''(x)=\dfrac{20}{(2x-3)^3}$, добиваме дека $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2x-3>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$ и $f''(x)<0 \Leftrightarrow 2x-3<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$. Следува дека функцијата е конвексна $(\cup)$на $(-\infty,\dfrac{3}{2})$ и конкавна $(\cap)$ на $(\dfrac{3}{2},+\infty)$. Нема превојни точки.

7) График на функцијата:



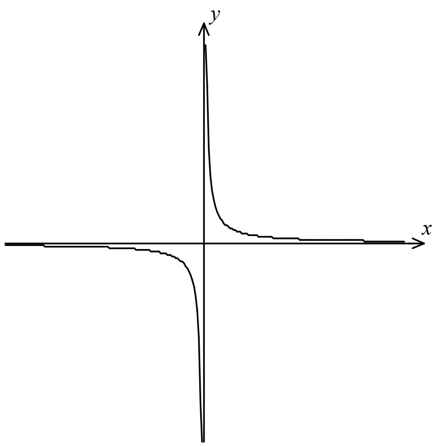
(*Втор начин*) Со помош на елементарни графици. $y=\dfrac{x+1}{2x-3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{4}\dfrac{1}{x-\frac{3}{2}}$.

Чекор 1. $y_1=\dfrac{1}{x}$ - елементарен график (цртеж 1).

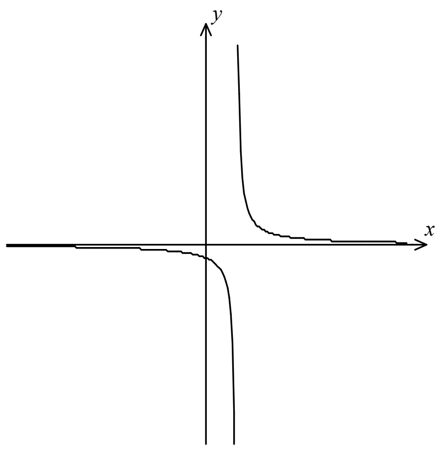
Чекор 2. $y_2=\dfrac{1}{x-\frac{3}{2}}$ - со поместување на графикот на y_1 надесно за $\dfrac{3}{2}$ (цртеж 2).

Чекор 3. $y_3=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{x-\frac{3}{2}}$ - со множење на втората координата на функцијата y_2 со $\dfrac{5}{4}$, односно со растегнување во правец на y-оската (цртеж 3).

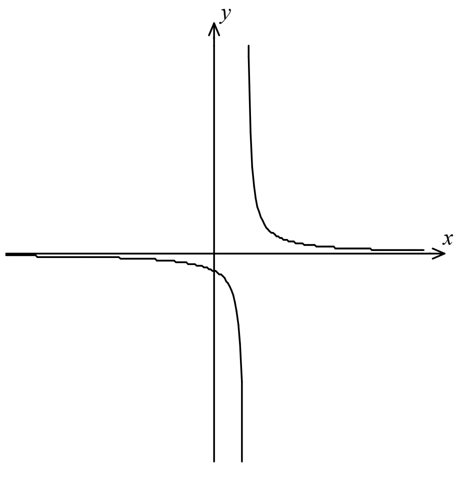
Чекор 4. $y_4 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x - \frac{3}{2}}$ - со зголемување на втората координата на графикот на функцијата y_3 за $\frac{1}{2}$ (цртеж 4).



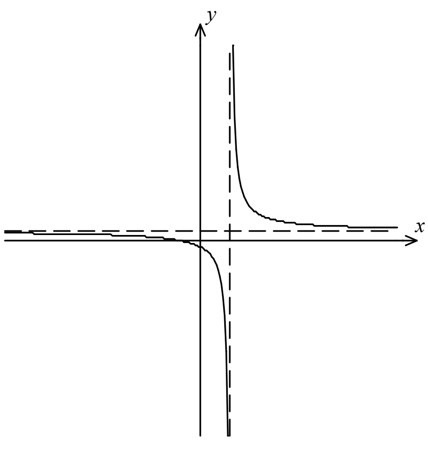
цртеж 1



цртеж 2



цртеж 3



цртеж 4

Задача 3. $y = \frac{4}{2 + x^2}$.

Решение. 1) Функцијата е дефинирана за секое $x \in \mathbf{R}$, односно $D_f = (-\infty, \infty)$.

2) Бидејќи $y > 0$ за секое $x \in D_f$, пресечна точка на функцијата со x-оската нема. За $x = 0$, добиваме $y = 2$, односно пресечна точка на функцијата со y-оската е $A(0,2)$.

3) Бидејќи $f(-x) = \dfrac{4}{2+(-x)^2} = \dfrac{4}{2+x^2} = f(x)$, функцијата е парна. Тоа значи дека нејзиниот график е симетричен во однос на y-оската. Според тоа, доволно е да се испитува графикот кога $x > 0$. Функцијата не е периодична.

4) Вертикална асимптота нема.

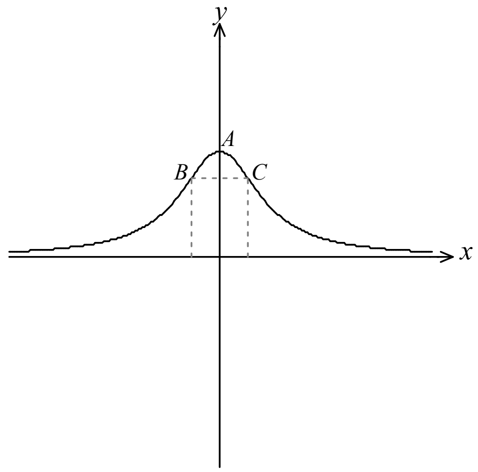
Од $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{2+x^2} = 0$ добиваме дека $y = 0$ е хоризонтална асимптота.

5) Од $f'(x) = \left(\dfrac{4}{2+x^2}\right)' = \dfrac{-8x}{\left(2+x^2\right)^2}$, добиваме дека $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Значи во точката $A(0,2)$ може да има екстрем. За $x < 0$, $f'(x) > 0$, односно $f(x)$ расте на $(-\infty,0)$, а за $x > 0$, $f'(x) < 0$, односно $f(x)$ монотоно опаѓа на $(0,\infty)$. Следува дека, точката $A(0,2)$ е максимум на функцијата.

6) Од $f''(x) = \dfrac{8(3x^2-2)}{\left(2+x^2\right)^3}$ добиваме дека $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \vee x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Бидејќи $f''(x) > 0$ за $x \in (-\infty,-\sqrt{\dfrac{2}{3}}) \cup (\sqrt{\dfrac{2}{3}},+\infty)$ и $f''(x) < 0$ за $x \in (-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}})$ добиваме дека функцијата е конвексна $(\cup)$ на $(-\infty,-\sqrt{\dfrac{2}{3}})$ и $(\sqrt{\dfrac{2}{3}},+\infty)$ и конкавна $(\cap)$ на $(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\sqrt{\dfrac{2}{3}})$. Превојни точки се $B(-\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{3}{2})$ и $C(\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{3}{2})$.

7) График на функцијата:



Задача 4. $y=\dfrac{1+x^2}{x}$.

Решение. 1) Функцијата е дефинирана за секое $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, односно $D_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

2) Нема пресечни точки со координатните оски. За $x>0$, $y>0$ и за $x<0$, $y<0$.

3) Бидејќи $f(-x)=\dfrac{1+(-x)^2}{(-x)}=-\dfrac{1+x^2}{x}=-f(x)$, функцијата е непарна. Значи графикот е централно симетричен во однос на координатниот почеток. Функцијата не е периодична.

4) Точката $x=0$ е точка на прекин. Го испитуваме однесувањето на функцијата во околина на $x=0$.

Од $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+x^2}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+x^2}{x}=+\infty$, следува дека $x=0$ е вертикална асимптота.

Бидејќи $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+x^2}{x}=\pm\infty$, хоризонтална асимптота не постои.

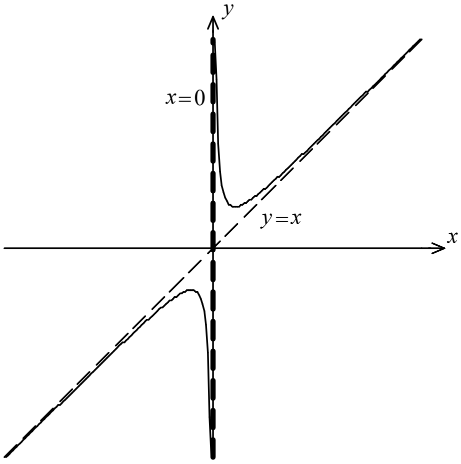
Од $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1+x^2}{x^2}=1$,

$n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$ следува дека $y=x$ е коса асимптота. Од $\dfrac{1+x^2}{x}-x=\dfrac{1}{x}$ гледаме дека за $x>0$ графикот е над асимптотата, а за $x<0$ графикот е под асимптотата.

5) Од $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, добиваме $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$. Од $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ и $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$ следува дека $f(x)$ монотоно расте на $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$, а монотоно опаѓа на $(-1,0)$ и $(0,1)$.

6) Од $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, добиваме дека функцијата $f(x)$ нема превојна точка. Од $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ и $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<0$ следува дека $f(x)$ е конвексна $(\cup)$ на $(0,+\infty)$ и конкавна $(\cap)$ на $(-\infty,0)$.

7) График на функцијата:



Задача 5. $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение. 1) Функцијата е дефинирана за секое $x\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, односно $D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

2) $y=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1-\sqrt{2} \vee x=-1+\sqrt{2}$. Значи, пресечни точки на функцијата $f(x)$ со *x*-оската се $A(-1-\sqrt{2},0)$ и $B(-1+\sqrt{2},0)$. Пресечни точки со *y*-оската нема. $y>0$ за $x\in(-1-\sqrt{2},0)\cup(-1+\sqrt{2},+\infty)$ и $y<0$ за $x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(0,-1+\sqrt{2})$.

3) Бидејќи $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+2(-x)-1}{(-x)}=\dfrac{x^2-2x-1}{x}\neq \pm f(x)$, функцијата не е ни парна ни непарна. Функцијата не е периодична.

4) Точката $x=0$ е точка на прекин. Го испитуваме однесувањето на функцијата во околина на $x=0$.

Од $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x-1}{x}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+2x-1}{x}=-\infty$, следува дека $x=0$ е вертикална асимптота.

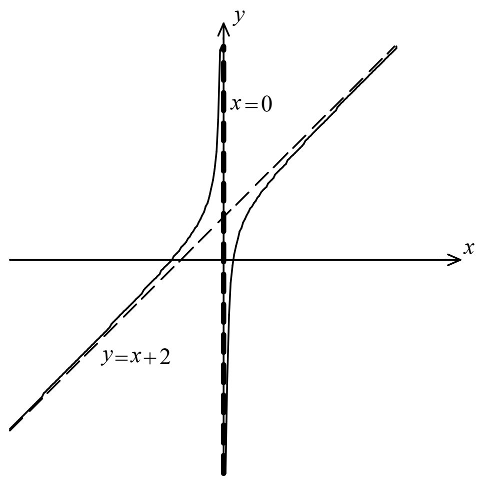
Бидејќи $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x}=\pm\infty$, хоризонтална асимптота не постои.

Од $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1$ и $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right]==\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$ следува дека $y=x+2$ е коса асимптота. Бидејќи $\frac{x^2+2x-1}{x}-(x+2)=-\frac{1}{x}$, за $x>0$ графикот е под асимптотата, а за $x<0$ графикот е над асимптотата.

5) $f'(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$. Според тоа, $f'(x)>0$ за секое $x\in D_f$, односно функцијата $f(x)$ монотоно расте на целата дефинициона област и нема екстреми.

6) $f''(x)=-\frac{2}{x^3}$. Бидејќи $f''(x)\neq 0$ за секое $x\in D_f$ функцијата $f(x)$ нема превојни точки. Од $f''(x)>0$ за $x<0$ и $f''(x)<0$ за $x>0$ следува дека $f(x)$ е конвексна $(\cup)$ на $(-\infty,0)$ и конкавна $(\cap)$ на $(0,+\infty)$.

7) График на функцијата:



Задача 6. $y=\frac{x^3}{x^2-3x+2}$.

Решение. 1) Бидејќи $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, функцијата е дефинирана за секое $x\in\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$, односно $D_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

2) $x=0\Leftrightarrow y=0$, односно единствена пресечна точка со координатните оски е координатниот почеток. $y>0$ за $x\in(0,1)\cup(2,+\infty)$ и $y<0$ за $x\in(-\infty,0)\cup(1,2)$.

3) Бидејќи $f(-x)=\dfrac{-x^3}{x^2+3x+2}\neq\pm f(x)$ функцијата $f(x)$ не е ни парна ни непарна. Функцијата не е периодична.

4) Точките $x=1$ и $x=2$ се точки на прекин.

Од $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}=+\infty$, следува дека правите $x=1$ и $x=2$ се вертикални асимптоти.

Бидејќи $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}=\pm\infty$, хоризонтална асимптота не постои.

Од

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-3x^2+2x}=1,$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^3-3x^2+2x}-x\right)=$$

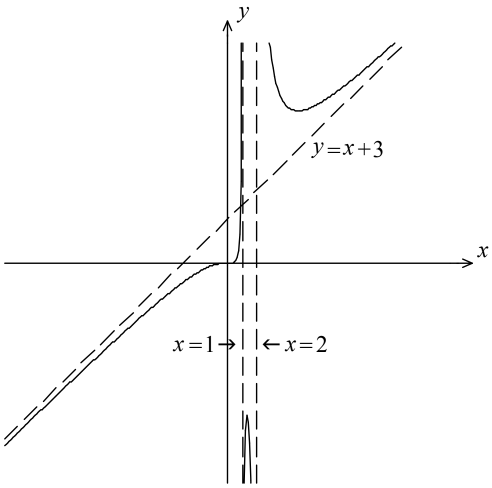
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}-x\right)=3+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x-6}{x^2-3x+2}=3$$, следува дека $y=x+3$ е коса асимптота.

5) $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-6x+6\right)}{\left(x^2-3x+2\right)^2}=\dfrac{x^2(x-x_1)(x-x_2)}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$, каде што $x_1=3-\sqrt{3}$ и $x_2=3+\sqrt{3}$. Од тука следува дека функцијата $f(x)$ е монотоно расте за $x<x_1$, односно на интервалите $(-\infty,1)$ и $(1,x_1)$; монотоно опаѓа за $x_1<x<x_2$, односно на интервалите $(x_1,2)$ и $(2,x_2)$; и монотоно расте за $x>x_2$, односно на интервалот $(x_2,+\infty)$. Значи, во точката x_1 функцијата $f(x)$ има локален максимум, а во точката x_2 функцијата $f(x)$ има локален минимум.

6) $f''(x)=\dfrac{2x\left(7x^2-18x+12\right)}{(x-1)^3(x-2)^3}$. Бидејќи $7x^2-18x+12>0$ за секое $x\in D_f$, заклучуваме дека $f''(x)>0$ за $x\in(0,1)\cup(2,+\infty)$ и $f''(x)<0$ за

$x \in (-\infty,0) \cup (1,2)$. Значи, $f(x)$ е конвексна $(\cup)$ на $(0,1)$ и $(2,+\infty)$, а конкавна $(\cap)$ на $(-\infty,0)$ и $(1,2)$. Координатниот почеток е единствена превојна точка.

7) График на функцијата:



Задача 7. $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$.

Решение. 1) Функцијата е дефинирана за секое $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, односно $D_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

2) Пресечни точки со y-оската нема.

3) Бидејќи $f(-x) \neq \pm f(x)$, функцијата не е ни парна ни непарна. Функцијата не е периодична.

4) Точката $x = 0$ е точка на прекин.

Од

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(-h)^3 + 2(-h)^2 + 7(-h) - 3}{2(-h)^2} = 1 - \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{7h+3}{2h^2} = -\infty \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h^3 + 2h^2 + 7h - 3}{2h^2} = 1 + \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{7h-3}{2h^2} = -\infty \quad \text{следува}$$

дека $x = 0$ е вертикална асимптота.

Од $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2} = \pm\infty$, следува дека нема хоризонтална асимптота.

Од $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$ и

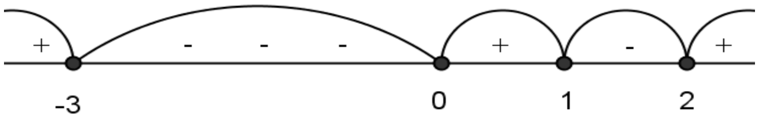
$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^3}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{7}{2x}-\frac{3}{2x^3}\right)=1$$

добиваме дека правата $y=\frac{1}{2}x+1$ е коса асимптота.

5) $f'(x)=\frac{x^3-7x+6}{2x^3}=\frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{2x^3}$. Според тоа,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Испитуваме за кои точки $f'(x)>0$, односно $f'(x)<0$. Добиваме:

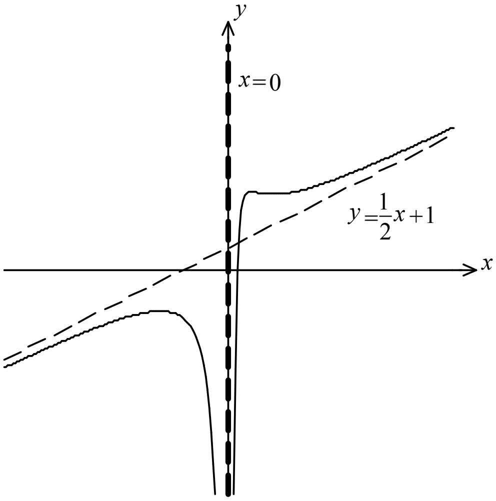


Од сликата гледаме дека $f'(x)>0$ за $x\in(-\infty,-3)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$ и $f'(x)<0$ за $x\in(-3,0)\cup(1,2)$, односно дека функцијата $f(x)$ монотоно расте на $(-\infty,-3),(0,1)$ и $(2,+\infty)$, а монотоно опаѓа на $(-3,0)$ и $(1,2)$. Според тоа, во точките $x=-3$ и $x=1$ функцијата $f(x)$ има максимум, а во точката $x=2$ минимум.

6) $f''(x)=\frac{7x-9}{x^4}$. Бидејќи $f''(x)>0$ кога $7x-9>0\Leftrightarrow x>\frac{9}{7}$ и $f''(x)<0$ кога $7x-9<0\Leftrightarrow x<\frac{9}{7}$, добиваме дека функцијата $f(x)$ е конвексна на $(\frac{9}{7},\infty)$ и е конкавна на $(-\infty,0)$ и $(0,\frac{9}{7})$. Точката $x=\frac{9}{7}$ е превојна точка.

7) График на функцијата:

Графици на дробно-рационални функции



ПРИМЕНА НА ЕКСТРЕМИТЕ ВО РЕШАВАЊЕ НА ПРОБЛЕМИ

За непрекината функција $f(x)$ дефинирана на затворен интервал $[a,b]$ секогаш постои максимум и минимум. Најголемиот и најмалиот од броевите $f(c_i), i=1,2,...,n$, $f(a)$ и $f(b)$, каде што $c_1, c_2, ..., c_n$ се сите нејзини стационарни точки во интервалот $[a,b]$ се максимум и минимум на функцијата $f(x)$.

Задача 1. Претстави го 120 како збир од два природни броеви таков што производот P на едниот од нив и квадратот на другиот е максимален.

Решение. Нека x е едниот, а $120-x$ е другиот број. Тогаш $P(x)=(120-x)x^2$ каде што $0 \le x \le 120$. Од $P'(x)=3x(80-x)$ следува дека единствени стационарни точки се $x=0$ и $x=80$. Бидејќи $P(0)=0, P(80)=256000$ и $P(120)=0$ добиваме дека максималната вредност на P се добива за $x=80$. Бараните броеви се 80 и 40.

Задача 2. Подели го бројот 36 на два собирока така што збирот на нивните квадрати да биде најмал.

Решение. Ако едниот од собироците го означиме со x, другиот собирок е $36-x$. Збирот на нивните квадрати ќе биде $S(x)=x^2+(36-x)^2$. Од $S'(x)=2x-2(36-x)=4x-72=0$ следува дека $x=18$ е единствена стационарна точка. Бидејќи $S''(x)=4>0$, следува дека за $x=18$ збирот S достигнува минимум. Бараните собироци се 18 и 18.

Забелешка. Испитувањето може да се изврши и како во претходната задача и тоа, $0 \le x \le 36$, $S(0)=S(36)=36^2 > S(18)=2\cdot 18^2$.

Задача 3. Од сите правоаголници со периметар 48cm одреди го оној со најголема плоштина.

Решение. Ако едната страна на правоаголникот ја означиме со x, тогаш другата е $48-x$. Неговата плоштината е $P(x)=x(48-x)=48x-x^2$. Од $P'(x)=48-2x=2(24-x)=0$ следува дека $x=24$ е единствена стационарна точка. Бидејќи $P''(x)=-2<0$, за $x=24$ производот P достигнува максимум. Бараните броеви се 24 и 24.

Задача 4. Цилиндричен контејнер со кружна основа потребно е да зафаќа $64\,m^3$. Најди ги димензиите на контејнерот така што количината на употребен метал (површина) е минимална

а) кога контејнерот е отворена чаша;

б) кога контејнерот е затворена конзерва.

Решение. Нека r и h се радиусот на основата и висината изразени во метри, соодветно. Нека A е количината на метал и V е волуменот на контејнерот.

а) Тогаш $V=\pi r^2 h=64$ и $A(r)=2\pi rh+\pi r^2$. Од првата равенка го изразуваме h и го заменуваме во втората, при што добиваме:

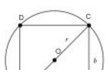
$$A(r)=2\pi r\frac{64}{\pi r^2}+\pi r^2=\frac{128}{r}+\pi r^2 \text{ и } A'(r)=-\frac{128}{r^2}+2\pi r=\frac{2(\pi r^3-64)}{r^2}.$$

Единствената стационарна точка е $r=\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$. Тогаш $h=\dfrac{64}{\pi r^2}=\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$. Според тоа, $r=h=\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$. Бидејќи $A'(r)>0$ за $r>\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ и $A'(r)<0$ за $r<\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, во $r=\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ функцијата A има локален минимум. Бидејќи нема други стационарни точки во $r=\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, A има минимум.

б) Во овој случај $V=\pi r^2 h=64$ и $A(r)=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r\dfrac{64}{\pi r^2}+2\pi r^2=\dfrac{128}{r}+2\pi r^2$. Тогаш од $A'(r)=-\dfrac{128}{r^2}+4\pi r=\dfrac{4(\pi r^3-32)}{r^2}$ добиваме дека $r=2\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$ е единствена стационарна точка и $h=\dfrac{64}{\pi r^2}=4\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}=2r$. Слично како под а) се покажува дека во $r=2\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$ функцијата A има максимум.

Задача 5. Во кружница со радиус r да се впише правоаголник со најголема плоштина.

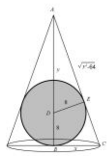
Решение. Плоштината на бараниот правоаголник е $P=ab$. Нека $a=x$.



Од ΔABC се добива дека $b^2 = (2r)^2 - a^2$, односно $b = \sqrt{4r^2 - x^2}$. Значи, $P(x) = x\sqrt{4r^2 - x^2}$. Од $P'(x) = \dfrac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0$ добиваме дека $x_1 = r\sqrt{2}$ и $x_2 = -r\sqrt{2}$. Второто решение го отфрламе бидејќи е негативно.

Бидејќи $P'(x) > 0$ лево од $x = r\sqrt{2}$ и $P'(x) < 0$ десно од $x = r\sqrt{2}$ добиваме дека P има максимум за $x = r\sqrt{2}$. Според тоа, правоаголникот со најголема плоштина е квадрат со страна $r\sqrt{2}$.

Задача 6. Најди ги димензиите на прав кружен конус со минимален волумен V во кој може да се впише сфера со радиус 8.

Решение. Нека x е радиусот на основата на конусот и $y+8$ е висината на конусот. 

Од сличноста на триаголниците ABC и AED имаме:

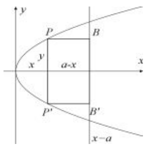
$$\frac{x}{8} = \frac{y+8}{\sqrt{y^2 - 64}} \text{ или } x^2 = \frac{64(y+8)^2}{y^2 - 64} = \frac{64(y+8)}{y-8} .$$

Исто така, $V(y) = \dfrac{(\pi x^2)(y+8)}{3} = \dfrac{64\pi(y+8)^2}{3(y-8)}$ и $V'(y) = \dfrac{64\pi(y+8)(y-24)}{3(y-8)^2}$.

Бидејќи $y > 0$, единствена стационарна точка е $y = 24$. Очигледно е дека за $y < 24$ е исполнето $V'(y) < 0$, а за $y > 24$ е исполнето $V'(y) > 0$. Следува дека за $y = 24$, радиусот на основата е $x = 8\sqrt{2}$, висината на конусот е 32 и V достигнува минимум.

Задача 7. Најди ги димензиите на правоаголникот со максимална плоштина A кој може да се впише во конечниот дел од рамнината заграден со параболата $y^2 = 4px$ и правата $x = a$.

Решение. Нека $PBB'P'$ е бараниот правоаголник и (x, y) се координатите на точката P.



Тогаш

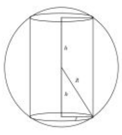
$$A(y) = 2y(a-x) = 2y\left(a - \frac{y^2}{4p}\right) = 2ay - \frac{y^3}{2p} \text{ и } A'(y) = 2a - \frac{3y^3}{2p}.$$

Од $A'(y) = 0$ добиваме дека постои единствена стационарна точка $y = \sqrt{\frac{4ap}{3}}$.

Бидејќи $A''(y) = -\frac{3}{p}y < 0$ и од единственоста на стационарната точка следува дека правоаголникот со страни $2y = \frac{4}{3}\sqrt{3ap}$ и $a - x = a - \frac{y^2}{4p} = \frac{2a}{3}$ има максимална плоштина.

Задача 8. Најди ја висината на прав кружен цилиндер со максимален волумен V што може да се впише во сфера со радиус R.

Решение. Нека r е радиусот на основата и $2h$ е висината на тој цилиндар.



Познато е дека $V(r)=2\pi r^2 h$ и $r^2+h^2=R^2$. Тогаш $V'(r)=2\pi\left(r^2\frac{dh}{dr}+2rh\right)$ и $2r+2h\frac{dh}{dr}=0$. Од последната релацијата добиваме $\frac{dh}{dr}=-\frac{r}{h}$, од каде $V'(r)=2\pi\left(-\frac{r^3}{h}+2rh\right)$. Кога V е максимален, $V'(r)=0$, од каде следува дека $r^2=2h^2$.

Тогаш $R^2=r^2+h^2=3h^2$, односно $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$ од каде добиваме дека висината на цилиндарот е $2h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Со помош на втор извод може да се покаже дека сме ја нашле максималната вредност на V.

Задача 9. Претстави бројот a како збир на два броја така што нивниот производ да биде максимален.

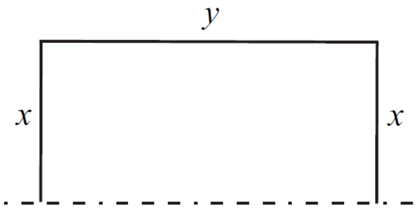
Решение. Да го претставиме бројот a како збир од два собирока, $a=x+y$. Следува $y=a-x$, од каде производот на собироците е $P=xy=x(a-x)$. Бидејќи производот зависи само од x, може да го разгледаме како функција $P(x)=x(a-x)$. Максималниот производ на собироците ќе го најдеме, ако ги најдеме екстремните вредности на функцијата. Првиот извод е $P'(x)=a-2x$ и има вредност нула за

$$P'(x)=0 \Leftrightarrow a-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{a}{2}.$$

За аргументите што се од лева страна во однос на $\frac{a}{2}$, важи $2x<a$ односно $a-2x>0$. За аргументите што се од десна страна во однос на $\frac{a}{2}$ важи $2x>a$ односно $a-2x<0$. Следува, според првиот критериум за екстрем, дека функцијата P има локален максимум во точката $x=\frac{a}{2}$. Да забележиме дека до истиот заклучок можеме да стигнеме, според вториот критериум за екстрем, ако покажеме дека вториот извод е негативен во точката $x=\frac{a}{2}$. Навистина $P''(x)=-2<0$, па специјално $P''\left(\frac{a}{2}\right)=-2$. Затоа бројот a треба да се претстави во вид $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$.

Задача 10. Фармер со 2400 единици жица сака да огради едно поле, во форма на правоаголник, кое се наоѓа покрај река. Притоа нема потреба да користи жица долж реката. Какви треба да бидат димензиите на правоаголникот за да оградениот дел има максимална површина?

Решение. Нека со x и y ги означиме димензиите на полето.



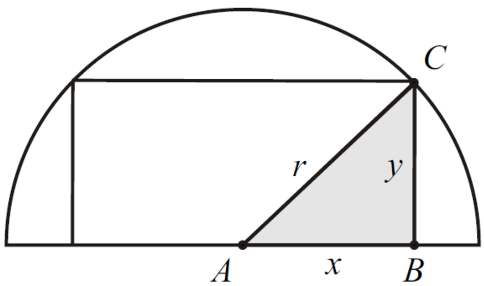
Бидејќи не треба да се користи жица вдолж реката, тогаш од условите на задачата имаме $2400 = 2x + y$ односно $y = 2400 - 2x$, а функцијата чија екстремна вредност се бара е плоштината на полето $P = xy = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$. Првиот извод по променливата x е $P' = 2400 - 4x$. Првиот извод се анулира за

$P' = 0 \Leftrightarrow 4(600 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 600$.

Бидејќи $P'' = -4 < 0$, единствената стационарна точка x =600 е точка на локален максимум. Следува најголема површина има правоаголникот со димензии $x = 600$ и $y = 2400 - 2 \cdot 600 = 1200$ единици.

Задача 11. Најди ја површината на најголемиот правоаголник впишан во полукруг со радиус r.

Решение. Нека со x и y ги означиме страните на правоаголникот.



Функцијата од која што бараме екстрем е $P = 2xy$. Од правоаголниот триаголник на цртежот цртежот забележуваме дека важи $x^2 + y^2 = r^2$ односно $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Оттука плоштината на правоаголникот $P = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$ може да се разгледа како функција од x. Бараме за која вредност функцијата ќе има максимум. Наоѓаме прв извод

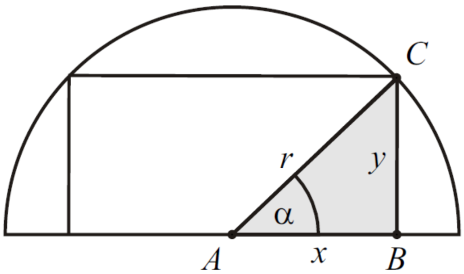
$$P' = 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r - \sqrt{2}x)(r + \sqrt{2}x)}{r + \sqrt{2}x}$$

и го прирамнуваме со нула,

$P'(x)=0 \Leftrightarrow r-\sqrt{2}x=0 \Leftrightarrow r=\sqrt{2}x \Leftrightarrow x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

Притоа имавме предвид дека радиусот на кружницата и страната на правоаголникот се позитивни, односно $r+\sqrt{2}x>0$. Со определување на знакот на првиот извод од лево и десно на точката $x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ добиваме дека функцијата има локален максимум во неа. Ако изразот за првиот извод е добро среден како во нашиот случај заклучокот е очигледен. Имено за аргументите што се помали од $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$, важи $r-\sqrt{2}x>0$, а за аргументите што се поголеми до $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ важи $r-\sqrt{2}x<0$. Останатите членови од производот $r+\sqrt{2}x$ и $r+\sqrt{2}x$ секогаш се позитивни. Следува за $x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$, $P\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)=2\dfrac{r}{\sqrt{2}}\dfrac{r}{\sqrt{2}}=r^2$ е површината на најголемиот впишан правоаголник.

Втор начин. Едноставно решение е можно ако се искористи аголот како променлива. Тогаш

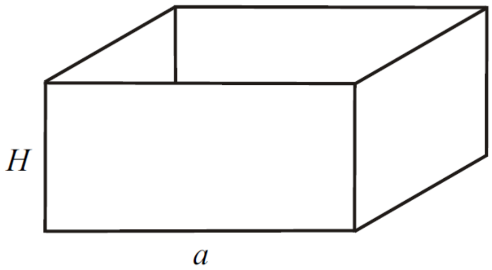


$P=2xy=2(r\cos\alpha)(r\sin\alpha)=r^2\sin 2\alpha$

Функцијата P ќе има најголема вредност ако $\sin 2\alpha=1$ односно $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ или $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 12. Определи ги димезиите на базен со квадратно дно и волумен V, така што за обложување на ѕидовите и подот на базенот да се потроши најмалку материјал.

Решение. Нека страната од квадратното дно е a, и висината на базенот е H.



Плоштината на базенот што треба да се обложи со некој материјал е $P = a^2 + 4aH$. Волуменот на базенот е $V = a^2 H$, од каде висината е $H = \frac{V}{a^2}$.

Следува плоштината на базенот $P = a^2 + 4a\frac{V}{a^2} = a^2 + \frac{4V}{a}$, е претставена како функција од страната a. Нејзиниот извод

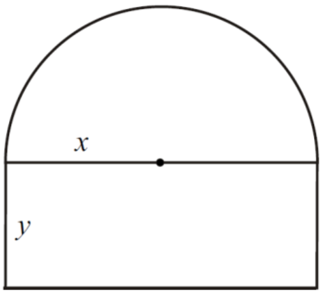
$$P' = 2a - \frac{4V}{a^2} = \frac{2a^3 - 4V}{a^2} = \frac{2(a^3 - 2V)}{a^2},$$

има вредност нула за $a^3 = 2V$, односно $a = \sqrt[3]{2V}$. Од $P'' = 2 + \frac{8V}{a^3}$ следува дека $P''(\sqrt[3]{2V}) = 6 > 0$, односно дека функцијата $P(a)$ во точката $a = \sqrt[3]{2V}$ има локален минимум. Значи базенот треба да е долг и широк $a = \sqrt[3]{2V}$ и висок

$$H = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

Задача 13. Прозорец има форма на полукруг надоврзан на правоаголник. При каков радиус x на полукругот во прозорецот ќе влегува најмногу светлина ако неговата должина е l.

Решение. Бидејќи радиусот на полукругот е x, должината на едната страна на правоаголникот е $2x$. Да ја означиме со y должината на другата страна.



Функцијата од која бараме екстрем $P = 2xy + \frac{x^2\pi}{2}$, овде е плоштината на прозорецот, затоа што најмногу светлина ќе влегува ако плоштината на прозорецот е најголема. Ако од должината на прозорецот $l = 2x + 2y + x\pi$ ја изразиме страната $y = \frac{1}{2}(l - 2x - x\pi)$ и ја заменеме во функцијата имаме $P = x(l - 2x - x\pi) + \frac{x^2\pi}{2} = lx - 2x^2 - \frac{x^2\pi}{2}$. Изводот на функцијата е

$P'(x) = l - 4x - \frac{2x\pi}{2} = l - x(4 + \pi)$.

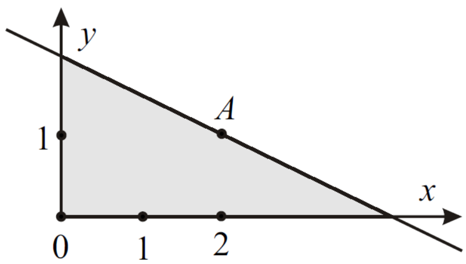
и има вредност нула за

$P'(x) = 0 \Leftrightarrow l = x(4 + \pi) \Leftrightarrow x = \frac{l}{4 + \pi}$.

Притоа $P''(x) = -(4 + \pi) < 0$, што значи дека функцијата има максимум. Следува за $x = \frac{l}{4 + \pi}$ во прозорецот ќе влегува најмногу светлина.

Задача 14. Низ точката $A(2,1)$ повлечи права која со координатните оски гради триаголник во прв квадрант со најмала плоштина.

Решение. Сегментната равенка на правата е $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, каде a и b се отсечоците на x-оската и y-оската.



Бидејќи триаголникот е во прв квадрант, важи $a > 0$, $b > 0$.
Правата ја содржи точката $A(2,1)$. Следува

$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b} = 1 - \frac{2}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{a-2}{a} \Leftrightarrow b = \frac{a}{a-2}$.

Плоштината на триаголникот што правата го гради со координатните оски е $P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\frac{a}{a-2} = \frac{1}{2}\frac{a^2}{a-2}$. За да ги најдеме стационарните точки на функцијата $P(a) = \frac{1}{2}\frac{a^2}{a-2}$, го определуваме

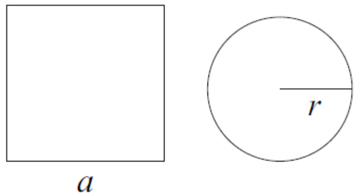
$P'(a) = \frac{1}{2}\frac{2a(a-2) - a^2}{(a-2)^2} = \frac{1}{2}\frac{2a^2 - 4a - a^2}{(a-2)^2} = \frac{1}{2}\frac{a^2 - 4a}{(a-2)^2} = \frac{1}{2}\frac{a(a-4)}{(a-2)^2}$

Притоа бидејќи $a > 0$, $P'(a) = 0$, ако $a - 4 = 0$ односно $a = 4$.

Значи равенката на правата е $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$.

Задача 15. Како треба да се исече жица со должина од 100 метри, за да од пресечените делови се направи квадрат и круг чиј збир на плоштини е најмал.

Решение. Збирот од плоштините на квадратот и кругот е $P=a^2+r^2\pi$.



Периметарот на квадратот е $4a$, а на кругот $2r\pi$. Од условот на задачата имаме

$$100=4a+2r\pi \Leftrightarrow 4a=100-2r\pi \Leftrightarrow a=25-\frac{\pi}{2}r.$$

Тогаш плоштината изразена како функција од радиусот е

$$P=a^2+r^2\pi=\left(25-\frac{\pi}{2}r\right)^2+r^2\pi=625-25\pi r+\frac{\pi^2}{4}r^2+r^2\pi.$$

Оттука

$$P'=-25\pi+\frac{\pi^2}{4}2r+2r\pi=-25\pi+\frac{\pi^2}{2}r+2r\pi.$$

Сега $P'=0$ ако

$$-25\pi+\frac{\pi^2}{2}r+2r\pi=0 \Leftrightarrow -25+\frac{\pi}{2}r+2r=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}+2\right)r=25$$

$$\Leftrightarrow r=\frac{25}{\frac{\pi}{2}+2} \Leftrightarrow r=\frac{50}{\pi+4}$$

Бидејќи $P''=\frac{\pi^2}{2}+2\pi>0$, плоштината ќе биде минимална. Значи едниот дел на жицата ќе има должина $l_2=2r\pi=2\pi\frac{50}{\pi+4}=\frac{100\pi}{\pi+4}$.

Задача 16. Определи ги екстремните вредности на функцијата $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

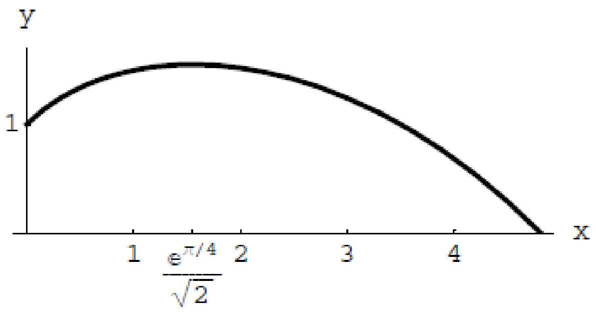
Решение. Изводите по параметарот t се

$$\dot{y}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$$
$$\dot{x}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$$

Првиот извод по променливата x, е $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$. Притоа

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow tgt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

Во интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ единствено решение е $t = \frac{\pi}{4}$ и функцијата $y'(x)$ го менува знакот од + кон – при премин низ $t = \frac{\pi}{4}$.



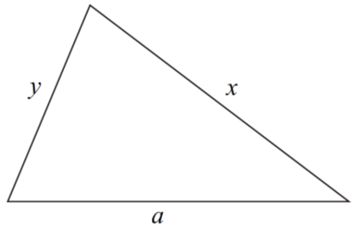
Следува за $t = \frac{\pi}{4}$, функцијата достигнува локален максимум

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$.

Апсолутниот максимум е најголемата вредност од локалните екстреми и вредностите на функцијата на границите. Бидејќи $y(0) = 1$ и $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $E\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ е точка на апсолутен максимум.

Задача 17. Од сите триаголници со страна a и периметар $2s$, одреди го оној што има најголема плоштина.

Решение. Нека x и y се останатите две страни на триаголникот.



Од условот на задачата имаме $2s = a + x + y$, односно $y = 2s - a - x$. Според Хероновата формула, плоштината на триаголникот е

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-x)(s-y)} = \sqrt{s(s-a)(s-x)(s-(2s-a-x))} =$$
$$= \sqrt{s(s-a)}\sqrt{(s-x)(a+x-s)}.$$

Тогаш

$$P' = \sqrt{s(s-a)}\frac{-(a+x-s)+s-x}{2\sqrt{(s-x)(a+x-s)}} = \sqrt{s(s-a)}\frac{2\left(s-x-\frac{a}{2}\right)}{2\sqrt{(s-x)(a+x-s)}} =$$
$$= \sqrt{s(s-a)}\frac{s-x-\frac{a}{2}}{\sqrt{(s-x)(a+x-s)}}.$$

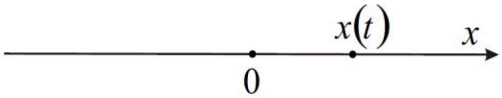
Притоа

$$P' = 0 \Leftrightarrow s - x - \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow x = s - \frac{a}{2}$$

и P' го менува знакот + кон – при премин низ $x = s - \frac{a}{2}$. Тогаш $y = 2s - a - \left(s - \frac{a}{2}\right) = s - \frac{a}{2}$. Следува најголема плоштина има рамнокракиот триаголник со основа a и крак $s - \frac{a}{2}$.

Задача 18. Точка се движи по x -оската по равенката $x(t) = \sin 2t + \cos 2t$. Која е максималната оддалеченост на точката од координатниот почеток.

Решение. Растојанието на точката од координатниот почеток за време t е $d = |x(t)|$.



Бидејќи

$$x'(t) = 2\cos 2t - 2\sin 2t,$$
$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2t - 2\sin 2t = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = \sin 2t \Leftrightarrow$$
$$tg\, 2t = 1 \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z,$$

и функцијата $x'(t)$ го менува знакот при премин низ $2t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$, за дадените вредности на параметарот t, функцијата $x(t)$ достигнува екстремни вредности. Во нив

$$d=|x(t)|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\right|=\left|\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{2}\,.$$

Следува максималната оддалеченост на точката од координатниот почеток е $\sqrt{2}$.

II дел

ИНТЕГРАЛИ. ПРИМЕНА

1. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ. ФОРМУЛИ

1.1 Дефиниција на неопределен интеграл.

Нека функцијата f е дефинирана на интервалот P. Функцијата F е примитивна функција на f на интервалот P ако важи $F'(x)=f(x)$ на P. Ако $F(x)$ е примитивна функција на f, тогаш и $F(x)+C$, каде C е произволна константа, е примитивна функција на f. Други примитивни функции на f на P, нема. Ако f има примитивна функција на интервалот P, тогаш f се нарекува интеграбилна функција на P.

Дефиниција 1. Множеството $F(x)+C$, C е произволна константа, од сите примитивни функции за функцијата f на P, се нарекува **неопределен интеграл** за функцијата f на P и се означува со $\int f(x)dx$. Функцијата f се нарекува подинтегрална функција или интегранд.
(1.1.1)

1.2 Основни својства на неопределен интеграл

Теорема 1.2.1. Ако функцијата f има примитивна функциија на интервалот P, тогаш и af, каде a е константа, има примитивна функција на P, и

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \qquad (1.2.1)$$

Теорема 1.2.2. Ако функциите f и g имаат примитивни функциии на интервалот P, тогаш и $f+g$ и $f-g$ имаат примитивни функции на P, и

$$\int \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int f(x)dx, \qquad (1.2.2)$$

Теорема 1.2.3. Ако F е една примитивна функција на f на интервалот P, тогаш

$$\int F'(x)dx = F(x)+C, \ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (1.2.3)$$

Неопределен интеграл. Формули

1.3 Смена на променливи

Теорема 1.3.1. Ако функцијата f непрекината на интервалот P, а φ има ранг P и е диференцијабилна, тогаш

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du\,. \tag{1.3.1}$$

Равенството се нарекува **формула за смена на променливи.**

Смена на променливи се користи кога подинтегралната функција содржи две функции f и g такви што g се разликува за константа од изводот на функцијата f. Тогаш воведуваме смена $f(x) = t$. Смена на променливи се користи и за запишување на подинтегралната функција во поелементарен вид.

Парцијална интеграција 4.

Теорема 1.4.1. Ако u и v се диференцијабилни функции на P и vu' има примитивна функција на P, тогаш и uv' има примитивна функција и

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\,. \tag{1.4.1}$$

Равенството се нарекува **формула за парцијална интеграција**.

Парцијална интеграција се користи ако подинтегралната функција може да се претстави како производ од две функции u и v, така што производот од изводот на u и интегралот на v, да е подинтегрална функција на решлив интеграл, или на интеграл кој што е пропорционален и различен од првобитниот. Ако тоа е случај со n-тиот извод на u и n-тиот интеграл на v, тогаш парцијалната интеграција се применува n-пати

Методот на парцијална интеграција уште се нарекува **интегрирање по делови**.

1.5 Таблица на основни интеграли.

Од таблицата за изводи на елементарни функции се добива следнава таблица на основни интеграли

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $a \neq -1$, $x > 0$ ($\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$, $x > 0$)
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$, $x \neq 0$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$. ($\int e^x dx = e^x + C$.)
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Неопределен интеграл. Формули

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$.
8. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$, $x \neq \pm a$. ($\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert + C$, $x \neq \pm 1$.)
9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$. ($\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.)
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, x \in (-a, a)$, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ x \in (-1,1) \end{cases}$.
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + k}\right\rvert + C$, $x \in R$ за $k > 0$, $x^2 > -k$ за $k < 0$.

1.6 Интеграли од квадратен трином

Следната шема покажува како се трансформира триномот во интегралот додека да се стигне до табличен интеграл или интеграли од видот $\int \sqrt{a^2 - t^2} dt$ $\int \sqrt{t^2 \pm a^2} dt$ кои се изведуваат.

Чекор	Облик на триномот $ax^2 + bx + c$
$\lvert a\rvert$ се вади пред триномот (може и a ако триномот не е под корен)	$\pm x^2 + ax + b$
Смена $t = x \pm \frac{a}{2}$	$t^2 \pm a , a - t^2$

Постапката и готовите формули се дадени со следниве дијаграми

$$\int \frac{dx}{(x^2+k)^n} = \frac{1}{k} \int \frac{x^2 + k - x^2}{(x^2+k)^n} dx = \frac{1}{k} \int \frac{dx}{(x^2+k)^{n-1}} - \frac{1}{k} \int \underset{u}{x} \underbrace{\frac{x}{(x^2+k)^n} dx}_{dv}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \int \frac{x^2 \pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \underset{u}{x} \underbrace{\frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}}_{dv} \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \underset{u}{x} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}}_{dv}$$

Следува

$$\int \sqrt{a^2 - t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\frac{t}{a} + t\sqrt{a^2 - t^2} \right) + C. \qquad (1.6.1)$$

$$\int \sqrt{t^2 + k}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2 + k} - \ln\left| t + \sqrt{t^2 + k} \right| \right) + C. \qquad (1.6.2)$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{\left(x^2 + 1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^{n-1}}. \qquad (1.6.3)$$

1.7 Интеграли од рационална функција

Интегрирањето на рационални функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ се сведува на сума од интеграли од облик $\int P(x)dx$ каде P е полином, $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+ax+b\right)^m}dx$ и $\int \frac{dx}{(x+a)^n}$ кои претходно ги изучивме. Имено:

1°. Ако $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, каде $\deg P(x)$ е степенот на полиномот $P(x)$, тогаш полиномите се делат и

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int P_1(x)dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}dx$ при што $\deg P_2(x) < \deg Q(x)$.

2° Полиномот $Q(x)$ се факторизира.

Значи $Q(x)$ се претставува како производ од константа, степени на различни биноми $x-a$ и триноми x^2+ax+b што немаат реални решенија. Членовите во производот се нарекуваат фактори.

3° Се декомпонира рационалната функција $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$

Значи на секој фактор на $Q(x)$ му соодветствува сумата

$$(x-a)^n \to \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_3}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \text{ и}$$

$$\left(x^2+ax+b\right)^k \to \frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+ax+b\right)} + \frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+ax+b\right)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+ax+b\right)^k}$$

Потоа $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ се претставува како збир од горните суми и се наоѓаат константите.

4° Се интегрира новата форма на рационалната функција

1.8 Интеграли од ирационална функција

Во $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$ се воведува смената $x = t^k$, $k =$ НЗС $(n, \ldots, s)$

Во $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ се воведува смената $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$

1.9 Интеграли од тригонометриски функции

Интегралите од тригонометриските функции $\int R(\sin x, \cos x)dx$, каде R е рационална функција, се сведуваат на интеграли од рационални функции со смената

$tg\,\frac{x}{2} = t$, од каде $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Имено од $\frac{x}{2} = arctgt$

следува $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ и од $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = 1 + tg^2\frac{x}{2}$ следува

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2tg\,\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad (1.9.1)$$

Смената $tg\,\frac{x}{2} = t$ некогаш доведува до сложена рационална функција. Кај некои подинтегрални функции со други смени може да се добие поедноставна рационална функција. Ако за подинтегралната функција важи $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ се воведува смена $tgx = t$. Следува $x = arctgt$ и $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогаш

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2+1}{t^2} \text{ од каде } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ и}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = t^2 + 1 \text{ од каде } \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}. \qquad (1.9.2)$$

Ако важи $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$ се воведува смена $\cos x = t$.

Ако важи $R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ се воведува смена $\sin x = t$.

Инструкциите за решавање на интегралите $\int \sin^m x \cos^n x dx,\ m, n \in Z$ се дадени во следнава табела. (1.9.3)

<table>
<tr><th>m, n</th><th>Смена</th><th>Корисен идентитет</th></tr>
<tr><td>n е непарен</td><td>$\sin x = t$</td><td>$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$</td></tr>
<tr><td>m е непарен</td><td>$\cos x = t$</td><td>$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$</td></tr>
<tr><td>n и m се парни</td><td>се смалува редот на n или m</td><td rowspan="2">$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$,
$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$</td></tr>
<tr><td>n и m се непарни и негативни</td><td>$tgx = t$</td></tr>
</table>

Интегралите $\int \sin^n xdx = \int \underbrace{\sin^{n-1}}_{u} \underbrace{\sin xdx}_{dv}$, и $\int \cos^n xdx = \int \underbrace{\cos^{n-1}}_{u} \underbrace{\cos xdx}_{dv}$, $n \in Z$, се пресметуваат според рекурентните релации

$$\int \sin^n xdx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} xdx \qquad (1.9.4)$$

$$\int \cos^n xdx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} xdx . \qquad (1.9.5)$$

Интегралите $\int \sin ax \cos bxdx,\ \int \sin ax \sin bxdx,\ \int \cos ax \cos bxdx$ се решаваат со помош на тригонометриските идентитети

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x) \qquad (1.9.6)$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x) \qquad (1.9.7)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) \qquad (1.9.8)$$

1.10 Интеграли што се решаваат со тригонометриски смени

$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ се решава со смената $x = a \sin t$ (или $x = a \cos t$)

(1.10.1)

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$ се решава со смената $x = atgt$ ($x = actg\ t$)

(1.10.2)

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ се решава со смената $x = \dfrac{a}{\cos t}$, ($x = \dfrac{a}{\sin t}$).

(1.10.3)

1.11 Интеграли од останати трансцедентни функции

Интегралите $\int \frac{1}{x} R(\ln x)dx$ се решаваат со смената $\ln x = t$, а интегралите $\int R\left(e^x\right)dx$ со смената $e^x = t$. (1.11.1)

НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Во задачите 1 – 42 со примена на таблицата на интеграли и основните правила за интегрирање пресметај ги дадените интеграли.

Задача 1. $\int\left(5x^4-3x^2+2x-1\right)dx$.

Решение. $\int\left(5x^4-3x^2+2x-1\right)dx=5\int x^4dx-3\int x^2dx+2\int xdx-\int dx=$

$=5\cdot\dfrac{x^5}{5}-3\cdot\dfrac{x^3}{3}+2\cdot\dfrac{x^2}{2}-x+C=x^5-x^3+x^2-x+C$.

Задача 2. $\int\dfrac{3x^3-x+2}{2}dx$.

Решение. $\int\dfrac{3x^3-x+2}{2}dx=3\int x^2dx-\int dx+2\int\dfrac{dx}{x}=3\cdot\dfrac{x^3}{3}-x+2\ln|x|+C=$

$=x^3-x+\ln x^2+C$.

Задача 3. $\int\left(x^2+2x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+3\right)dx$.

Решение.

а) $\int\left(x^2+2x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+3\right)dx=\int x^2dx+\int 2xdx+\int\dfrac{1}{x}dx+\int x^{-2}dx+\int 3dx=$

$=\dfrac{x^{2+2}}{2+1}+2\dfrac{x^{1+1}}{1+1}+\ln|x|+\dfrac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=\dfrac{x^3}{3}+x^2+\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$.

Задача 4. $\int(2x+1)(2x-1)dx$.

Решение. За да можеме да го пресметаме интегралот најпрво ја развиваме подинтегралната функција $(2x+1)(2x-1)=4x^2-1$. Следува дека

$$\int(2x+1)(2x-1)dx=\int\left(4x^2-1\right)dx=4\int x^2dx-\int dx=4\frac{x^3}{3}-x+C.$$

Задача 5. $\int\dfrac{4x^3\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. $\int \frac{4x^3\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}dx = 4\int x^3 \cdot x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}dx = 4\int x^{\frac{27}{10}}dx = \frac{40}{37}x^{\frac{37}{10}} + C$.

Задача 6. $\int \left(x^2 - 3x + 5\right)x^5 dx$.

Решение. $\int \left(x^2 - 3x + 5\right)x^5 dx = \int \left(x^7 - 3x^6 + 5x^5\right)dx = \frac{x^8}{8} - \frac{3x^7}{7} + \frac{5x^6}{6} + C$.

Задача 7. $\int -2\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$.

Решение. Ја запишуваме подинтегралната функција во степенски запис

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt{x\sqrt{xx^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{xx^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{x^{\frac{7}{4}}} = x^{\frac{7}{8}}.$$

Оттука

$$\int -2\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = -2\int x^{\frac{7}{8}}dx = -3\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C = -\frac{8}{5}\sqrt[8]{x^{15}} + C.$$

Задача 8. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{\left(\sqrt[5]{x} - 1\right)^2}{x}\right)dx$.

Решение. Најпрво члковите ги запишуваме во степенски облик,

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{-\frac{3}{4}} \text{ и } \frac{\left(\sqrt[5]{x} - 1\right)^2}{x} = \frac{x^{\frac{2}{5}} - 2x^{\frac{1}{5}} + 1}{x} = x^{-\frac{3}{5}} - 2x^{-\frac{4}{5}} + x^{-1}.$$

Следува

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{\left(\sqrt[5]{x} - 1\right)^2}{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{4}} + x^{-\frac{3}{5}} - 2x^{-\frac{4}{5}} + x^{-1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + \frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} - 2\frac{x^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + \ln|x| + C = = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 8\sqrt[4]{x} + \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} - 10\sqrt[5]{x} + \ln|x| + C.$$

Задача 9. $\int 2^x e^x dx$.

Решение. Со помош на трансформацијата $2^x e^x = (2e)^x$, интегралот го сведуваме до табличен.

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln 2e} + C = \frac{2^x e^x}{\ln 2 + \ln e} + C = \frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C .$$

Задача 10. $\int 2^{8x+5} dx$.

Решение. $\int 2^{8x+5} dx = 2^5 \int \left(2^8\right)^x dx = 2^5 \cdot \dfrac{2^{8x}}{\ln 2^8} + C$.

Задача 11. $\int 2^x 3^{-x} dx$.

Решение. $\int 2^x 3^{-x} dx = \int \dfrac{2^x}{3^x} dx = \int \left(\dfrac{2}{3}\right)^x dx = \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}{\ln \dfrac{2}{3}} + C = \dfrac{2^x}{3^x \ln \dfrac{2}{3}} + C$.

Задача 12. $\int \dfrac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$.

Решение. $\int \dfrac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx = \int \left(\dfrac{2 \cdot 2^x}{10^x} - \dfrac{5^x}{5 \cdot 10^x} \right) = \int \left(2\left(\dfrac{2}{10}\right)^x - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{5}{10}\right)^x \right) dx =$

$$= 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = 2\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)} - \frac{1}{5}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + C = -\frac{2}{5^x \cdot \ln 5} + \frac{1}{5 \cdot 2^x \cdot \ln 2} + C .$$

Задача 13.

$$\int 10^x \left(5^{-x} + 2^{-x} + 10^{-x}\right) dx = \int \left(5^x 2^x 5^{-x} + 5^x 2^x 2^{-x} + 10^x 10^{-x}\right) dx = \int \left(2^x + 5^x + 1\right) dx =$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^x}{\ln 5} + x + C .$$

Задача 14. $\int \dfrac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx = \int\left[3-2\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]dx = 3\int dx - 2\int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx = 3x - 2\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}} + C.$$

Задача 15. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$.

Решение. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx = \int (e^x-1)dx = e^x - x + C$.

Задача 16. $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}dx$.

Решение.

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}dx = \int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x}dx = \int (e^{2x}+e^x+1)dx = \int\left[(e^2)^x + e^x + 1\right]dx =$$

$$= \frac{e^{2x}}{\ln e^2} + e^x + x + C.$$

Задача 17. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$.

Решение. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \sin x dx = -\operatorname{ctg} x + \cos x + C$.

Задача 18. $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$.

Решение. $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \cos x dx = \operatorname{tg} x + \sin x + C$.

Задача 19. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

Решение. Изразот најпрво го квадрираме, а потоа ги користиме тригонометриските идентитети $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$ и $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$. Имаме

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$\int(1-\sin x)dx=x+\cos x+C.$$

Задача 20. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Решение.
$$\int \mathrm{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\mathrm{tg}\,x-x+C.$$

Задача 21. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$.

Решение.
$$\int \mathrm{ctg}^2 x dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx=-\mathrm{ctg}\,x-x+C.$$

Задача 22. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

Решение.
$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x+C.$$

Задача 23. $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$.

Решение.
$$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x-\mathrm{tg}\,x+C.$$

Задача 24. $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$.

Решение. $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}dx=$
$x+\sin x+C$.

Задача 25. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}}$.

Решение. Забележуваме дека интегралот $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}}$ пропорционален со табличниот интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Затоа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(1-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x + C .$$

Задача 26. $\int \frac{dx}{x^2-9}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \int \frac{dx}{x^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$.

Задача 27. $\int \frac{4xdx}{x^2-4}$.

Решение. $\int \frac{4xdx}{x^2-4} = 4\int \frac{xdx}{x^2-2^2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \ln\left|x^2-4\right| + C = 2\ln\left|x^2-4\right| + C$.

Задача 28. $\int \frac{2x+6}{x^2-9} dx$.

Решение.

$$\int \frac{2x+6}{x^2-9} dx = 2\int \frac{xdx}{x^2-9} + 6\int \frac{dx}{x^2-9} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln\left|x^2-9\right| + 6 \cdot \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C =$$
$$= \ln\left|x^2-9\right| + \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C .$$

Задача 29. $\int \frac{8xdx}{x^2+9}$.

Решение. $\int \frac{8xdx}{x^2+9} = 8\int \frac{dx}{x^2+9} = 8 \cdot \frac{1}{2} \ln\left|x^2+9\right| + C = 4\ln\left|x^2+9\right| + C$.

Задача 30. $\int \frac{2dx}{x^2+3}$.

Решение. $\int \frac{2dx}{x^2+3} = 2\int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

Задача 31. $\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx$.

Решение. $\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx = 2\int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \ln\left|x^2+1\right| + \operatorname{arctg} x + C$.

Задача 31. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$.

Решение. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}} = \sqrt{x^2+3} + C$.

Задача 33. $\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2-9}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2-9}}dx = 7\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} = 7\sqrt{x^2-9} + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right) + C.$$

Задача 34. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

Решение. Го трансформираме подинтегралниот израз

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Оттука

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Задача 35. $\int \frac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$.

Решение. Аналогно,

$$\int \frac{(1+x)^2}{x\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{\left(1+x^2\right)+2x}{x\left(1+x^2\right)}dx =$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C.$$

Задача 36. $\int\frac{x^2dx}{x^2+9}$.

Решение. $\int\frac{x^2dx}{x^2+9}=\int\frac{x^2+9-9}{x^2+9}dx=\int dx-9\int\frac{dx}{x^2+9}=x-3\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

Задача 37. $\int\frac{x^2+1}{x^2-9}dx$.

Решение.

$$\int\frac{x^2+1}{x^2-9}dx=\int\frac{x^2-9+10}{x^2-9}dx=\int dx+10\int\frac{dx}{x^2-9}=x+\frac{10}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C.$$

Задача 38. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}}dx$.

Решение.

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}}dx=2\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}}=2\sqrt{x^2+5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Задача 39. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$.

Решение. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\arcsin x+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$.

Задача 40. $\int\operatorname{th}^2 xdx$.

Решение. $\int\operatorname{th}^2 xdx=\int\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}dx=\int\frac{\operatorname{ch}^2 x-1}{\operatorname{ch}^2 x}dx=\int dx-\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=x-\operatorname{th}x+C$.

Задача 41. $\int\operatorname{cth}^2 xdx$.

Решение. $\int\operatorname{cth}^2 xdx=\int\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}dx=\int\frac{\operatorname{sh}^2 x+1}{\operatorname{sh}^2 x}dx=\int dx+\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=x-\operatorname{cth}x+C$

.

Задача 42. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

Решение. Бидејќи $x \in (-1,1)$, важи

$$\sqrt{1-x^4} = \sqrt{(1-x^2)(1+x^2)} = \sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1-x^2}$$

Следува

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$= \arcsin x + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C \,.$$

Задача 43. Определи ја равенката на кривата $y = f(x)$, која минува низ точката $M(1,0)$ и нејзиниот извод е $y' = 3x^2 + 1$.

Решение. Равенката на кривата е примитивна функција на функцијата $y' = 3x^2 + 1$. Следува $y = \int (3x^2+1)dx = 3\frac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C$. Интеграционата константа ќе ја определиме од условот кривата да минува низ точката M, $0 = 1^3 + 1 + C$ односно $C = -2$. Значи кривата е $y = x^3 + x - 2$.

МЕТОД НА ЗАМЕНА

Во првата задача имаме интеграли од облик $\int f(kx+n)dx$, каде $\int f(t)dt$ е табличен интеграл. Тие се решаваат со смената $kx+n=t$.

Задача 1. Пресметај ги интегралите:

а) $\int \cos 3x dx$ б) $\int e^{5x+2}dx$

в) $\int \sqrt{7x+9}dx$ г) $\int (2x+3)^5 dx$

д) $\int \frac{dx}{(x+1)^{15}}$ ѓ) $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}dx$

Решение.

а) За да го доведеме интегралот до табличниот интеграл (1.5.5), воведуваме смена $3x=t$, од каде следува дека $3dx=dt$. Затоа

$$\int \cos 3x dx = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x) + C .$$

б) Воведуваме смена $5x+2=t$, $5dx=dt$. Следува

$$\int e^{5x+2}dx = \int e^t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5}e^t + C = \frac{1}{5}e^{5x+2} + C .$$

в) Воведуваме смена $7x+9=t$, $7dx=dt$. Имаме

$$\int \sqrt{7x+9}dx = \int \sqrt{t}\frac{dt}{7} = \frac{1}{7}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{21}\sqrt{(7x+9)^3} + C .$$

г) Постапките што ги спроведуваме при воведувањето на смената може да ги запишеме во загради. Тогаш

$$\int (2x+3)^5\, dx = \begin{pmatrix} 2x+3=t \\ 2dx=dt \end{pmatrix} = \int t^5 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{12}(2x+3)^6 + C.$$

д) $$\int \frac{dx}{(x+1)^{15}} = \begin{pmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t^{15}} = \frac{t^{-14}}{-14} + C = -\frac{1}{14(x+1)^{14}} + C.$$

ѓ) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{5}x\right)^2}}\, dx = \begin{pmatrix} \sqrt{5}x=t \\ \sqrt{5}dx=dt \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin t + C = = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin\left(\sqrt{5}x\right) + C.$$

Задача 2. Најди го интегралот $\int f(kx+n)dx$, каде $\int f(t)dt = F(t) + C$.

Решение.

Воведуваме смена $kx+n=t$, $kdx=dt$. Следува

$$\int f(kx+n)dx = \int f(t)\frac{dt}{k} = \frac{1}{k}F(t) + C = \frac{1}{k}F(kx+n) + C,$$

Ако $\int f(x)dx$ е табличен интеграл, тогаш последната задача ни овозможува директно да го пресметаме $\int f(kx+n)dx$. На пример бидејќи $\int \cos x dx = \sin x + C$, тогаш $\int \cos(2x+1)dx = \dfrac{\sin(2x+1)}{2} + C$.

Во наредната задача подинтегралните функции во дадените интеграли содржат две функции f и g такви што g е пропорционална со изводот на функцијата f. Тогаш воведуваме смена $f(x)=t$.

Задача 3. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$ б) $\int x3^{x^2+1}dx$

в) $\int \frac{dx}{\left(\arcsin^2 x\right)\sqrt{1-x^2}}$ г) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}dx$

Решение.

а) Забележуваме дека диференцијалот на членот во именител $d\left(x^3+3x\right)=\left(3x^2+3\right)dx=3\left(x^2+1\right)dx$ е пропорционален со останатиот дел од подинтегралниот израз, $\left(x^2+1\right)dx$. Затоа воведуваме смена

$$x^3+3x=t\text{, од каде } 3\left(x^2+1\right)dx=dt.$$

Следува

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx=\int \frac{1}{t}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x\right|+C.$$

б) $\int x3^{x^2+1}dx=\begin{pmatrix} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \end{pmatrix}=\int 3^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\frac{3^t}{\ln 3}+C=\frac{3^{x^2+1}}{2\ln 3}+C.$

в) Воведуваме смена $\arcsin x=t$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt$. Следува

$$\int \frac{dx}{\left(\arcsin^2 x\right)\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\arcsin x}+C.$$

г) Забележуваме дека изводот на функцијата $\sin 2x+\cos 2x$ е $2\cos 2x-2\sin 2x=-2\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$, па ја воведуваме смената $\sin 2x+\cos 2x=t$, од каде $2\left(\cos 2x-\sin 2x\right)dx=dt$. Затоа

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x} dx = \int -\frac{1}{t}\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|\sin 2x + \cos 2x| + C .$$

Во следниве две задачи, ја воведуваме смената што ни овозможува да ја упростиме подинтегралната функција.

Задача 4. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{x^3}{1-x} dx$ б) $\int (x+3)(x-1)^5 dx$

в) $\int x^5 \sqrt{x^2+1} dx$ г) $\int \sqrt{4-\sqrt{x}} dx$

Решение.

а) Воведуваме смена $1-x=t$, од каде $x=1-t$ и $dx=-dt$. Тогаш

$$\int \frac{x^3}{1-x} dx = \int \frac{(1-t)^3}{t}(-dt) = -\int \frac{1-3t+3t^2-t^3}{t} dt =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{t} - 3 + 3t - t^2 \right) dt = = -\ln|t| + 3t - \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\ln|1-x| + 3(1-x) - \frac{3}{2}(1-x)^2 - \frac{(1-x)^3}{3} + C .$$

б) Задачата може да ја решиме и со развивање на биномот $(x-1)^5$, но поедноставно би ја решиле ако воведеме смена $x-1=t$, од каде следува дека $x=t+1$ и $dx=dt$.

$$\int (x+3)(x-1)^5 dx = \int (t+4)t^5 dt = \int (t^6+4t^5) dt =$$

$$= \frac{t^7}{7} + 4\frac{t^6}{6} + C = \frac{(x-1)^7}{7} + \frac{2(x-1)^6}{3} + C .$$

в) Коренската функција ја упростуваме со смената $\sqrt{x^2+1}=t$, од каде следува дека $x^2=t^2-1$ и $2xdx=2tdt$ односно $xdx=tdt$. За да ја замениме новата променлива, групираме еден фактор од x^5 со dx. Тогаш подинтегралниот израз добива форма $x^4\sqrt{x^2+1}\,xdx=\left(t^2-1\right)^2 t^2dt$. Следува

$$\int x^5\sqrt{x^2+1}dx=\int\left(t^2-1\right)^2t^2dt=\int\left(t^4-2t^2+1\right)t^2dt=\int\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt=$$
$$=\frac{t^7}{7}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{7}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^7-\frac{2}{5}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5+\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+C.$$

г) Ќе го упростиме коренскиот израз со смената $4-\sqrt{x}=t$, од каде $\sqrt{x}=4-t$ и $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=-dt$. Тогаш $dx=-2\sqrt{x}dt=2(t-4)dt$.

Следува

$$\int\sqrt{4-\sqrt{x}}dx=2\int t^{\frac{1}{2}}(t-4)dt=2\int\left(t^{\frac{3}{2}}-4t^{\frac{1}{2}}\right)dt=$$

$$=2\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-8\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C==\frac{4}{5}\sqrt{\left(4-\sqrt{x}\right)^5}-\frac{16}{3}\sqrt{\left(4-\sqrt{x}\right)^3}+C.$$

Задача 5. Пресметај го интегралот $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$.

Решение.

а) Бидејќи изводот на функцијата $\ln x$ се содржи во подинтегралниот израз, интегралот го решаваме со смената $\ln x = t$, $\frac{1}{x} dx = dt$. Имаме

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos(\ln x) + C .$$

Во наредната задача најпрво ја трансформираме подинтегралната функција, до облик во кој можеме да ја препознаеме смената.

Задача 6. Најди ги интегралите:

а) $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx$ б) $\int \operatorname{tg} x dx$

Решение.

а) Ја средуваме подинтегралната функција

$$\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} = \sqrt[5]{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)^3}}$$

и воведуваме смена $1-x=t$, $dx=-dt$. Следува

$$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx = \int \frac{-dt}{t^{\frac{3}{5}}} = -\int t^{\frac{-3}{5}} dt = -\frac{5}{2} t^{\frac{2}{5}} + C = -\frac{5}{2} \sqrt[5]{(1-x)^2} + C .$$

б) Ја изразуваме функцијата тангенс преку синус и косинус и воведуваме смена $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Ќе разгледаме интеграли од облик $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx$, што се решаваат со смената $\ln x = t$, $\frac{1}{x} dx = dt$, како и интеграли $\int f(e^x) dx$ што се решаваат со смената $e^x = t$, $e^x dx = dt$. Во зависност од функцијата f дадените типови на задачи ќе се појавуваат и во наредните поглавја.

Задача 7. Најди ги интегралите:

а) $\frac{\int e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$ б) $\int e^x(1-e^x)(1+e^x)^{10} dx$

Решение.

а) Воведуваме смена $e^x = t$, $e^x dx = dt$. Имаме

$$\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Првиот интеграл од десниот израз е табличен, додека вториот ќе го најдеме со смената $1-t^2 = k$, $-2tdt = dk$. Следува

$$\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arcsin t + \int \frac{dk}{-2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \arcsin e^x - \sqrt{k} + C = = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{-2x}} + C.$$

б) Воведуваме смена $1+e^x = t$, $e^x dx = dt$. Следува

$$\int e^x(1-e^x)(1+e^x)^{10}dx=\int(1-(t-1))t^{10}dt=\int(2-t)t^{10}dt=$$

$$=\int\left(2t^{10}-t^{11}\right)dt=2\frac{t^{11}}{11}-\frac{t^{12}}{12}+C=\frac{2(1+e^x)^{11}}{11}-\frac{(1+e^x)^{12}}{12}+C.$$

Во задачите 29 - 35 со метод на замена пресметај ги следните интеграли.

Задача 8. $\int x\sqrt[5]{3x^2+1}$.

Решение.

$$\int x\sqrt[5]{3x^2+1}=\left|\begin{array}{l}3x^2+1=t\\ 6xdx=dt\\ xdx=\dfrac{dt}{6}\end{array}\right|=\frac{1}{6}\int\sqrt[5]{t}dt=\frac{1}{6}\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C=\frac{5}{36}\sqrt[5]{\left(3x^2+1\right)^6}+C.$$

Задача 9. $\int\dfrac{dx}{9-13x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{9-13x}=\left|\begin{array}{l}9-13x=t\\ -13dx=dt\\ dx=-\dfrac{dt}{13}\end{array}\right|=-\frac{1}{13}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{13}\ln|t|+C=-\frac{1}{13}\ln|9-13x|+C.$$

Задача 10. $\int\sqrt[5]{(3-2x)^3}dx$.

Решение.

$$\int\sqrt[5]{(3-2x)^3}dx=\left|\begin{array}{l}3-2x=t\\ -2dx=dt\\ dx=-\dfrac{dt}{2}\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\sqrt[5]{t^3}dt=-\frac{5}{16}t^{\frac{8}{5}}+C=-\frac{5}{16}\sqrt[5]{(3-2x)^8}+C.$$

Задача 11. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{9x^2-7}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-7}} = \left| \begin{array}{l} 3x = t \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-7}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}} = \frac{1}{3}\ln\left(t+\sqrt{t^2-7}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(3x+\sqrt{9x^2-7}\right)+C.$$

Задача 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-9x^2}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-9x^2}} = \left| \begin{array}{l} 3x = t \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-t^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{7}}+C.$$

Задача 13. $\int \frac{dx}{5+7x^2}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{5+7x^2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{7}x = t \\ \sqrt{7}dx = dt \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{7}} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dt}{5+t^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{5}\right)^2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{5}}x\right)+C.$$

Задача 14. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x+1}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^3 t^{\frac{1}{2}}} = \int t^{-\frac{7}{2}}dx = -\frac{2}{5}t^{-\frac{5}{2}}+C = -\frac{2}{5}(x+1)^{-\frac{5}{2}}+C.$$

Задача 15. $\int \sin^2 x dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} 2x = t \\ 2dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{x}{2} - \frac{\sin t}{4} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C .$$

Задача 16. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

Решение.

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x}{2} = t \\ \dfrac{dx}{2} = dt \\ dx = 2dt \end{array} \right| = 2\int \cos^2 t dt = 2 \cdot \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \int dt + \int \cos 2t dt =$$

$$= x + \int \cos 2t dt = \left| \begin{array}{c} 2t = u \\ 2dt = du \\ dt = \dfrac{du}{2} \end{array} \right| = x + \frac{1}{2}\int \cos u du = x + \frac{\sin u}{2} + C = x + \frac{\sin x}{2} + C .$$

Задача 17. $\int \frac{3^x}{1+3^{2x}} dx$.

Решение.

$$\int \frac{3^x}{1+3^{2x}} dx = \left| \begin{array}{c} 3^x = t \\ 3^x \ln 3 dx = dt \\ 3^x dx = \dfrac{dt}{\ln 3} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg} 3^x + C .$$

Задача 18. $\int x^2 e^{-x^3} dx$.

Решение. $$\int x^2 e^{-x^3} dx = \left| \begin{array}{c} e^{-x^3} = t \\ -3x^2 e^{-x^3} dx = dt \\ x^2 e^{-x^3} dx = -\dfrac{dt}{3} \end{array} \right| = -\frac{1}{3}\int dt = -\frac{1}{3}t + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C .$$

Задача 19. $\int \frac{1}{x^2} a^{\frac{1}{x}} dx, \quad a > 0$.

Решение. $\int \frac{1}{x^2} a^{\frac{1}{x}} dx = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{dx}{x^2} = dt \\ \frac{dx}{x^2} = -dt \end{vmatrix} = -\int a^t dt = -\frac{a^t}{\ln a} + C = -\frac{a^{\frac{1}{x}}}{\ln a} + C$.

Задача 20. $\int \cos^3 x dx$.

Решение.

$$\int \cos^3 x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int \left(1 - t^2\right) dt = t - \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Задача 21. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$.

Решение. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \sin x dx = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\int \frac{1 - t^2}{t} dt =$

$$-\int \frac{dt}{t} + \int t dt = -\ln|t| + \frac{t^2}{2} + C = -\ln|\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + C.$$

Задача 22. $\int \frac{\ln^n x}{x} dx, \quad n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$.

Решение. $\int \frac{\ln^n x}{x} dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + C$.

Забелешка. За $n = -1$, се добива

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Задача 23. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \begin{vmatrix} \ln(\ln x) \\ \frac{dx}{x \ln x} = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$.

Забелешка. Интегралот може да се реши и со две смени.

Задача 24. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+1}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+1}dx = \left| \begin{array}{c} \sin^2 x+1=t \\ 2\sin x\cos x dx = dt \\ \sin 2x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\sin^2 x+1\right| + C .$$

Задача 25. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} 2\sqrt{x}=t \\ \frac{dx}{\sqrt{x}}=dt \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{2\sqrt{x}} + C$.

Задача 26. $\int \frac{dx}{a^x+a^{-x}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{a^x+a^{-x}} = \int \frac{dx}{\frac{a^{2x}+1}{a^x}} = \int \frac{a^x dx}{a^{2x}+1} = \left| \begin{array}{c} a^x = t \\ a^x \ln a dx = dt \\ a^x dx = \frac{dt}{\ln a} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\operatorname{arctg} t}{\ln a} + C =$$

$$= \frac{\operatorname{arctg} a^x}{\ln a} + C .$$

Задача 27. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx}_{I_2},$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx = \left| \begin{array}{c} \cos\frac{x}{2} = t \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}dx = dt \\ \sin\frac{x}{2}dx = -2dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C_1 = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C_1,$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx = \left| \begin{array}{c} \sin\frac{x}{2} = t \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = dt \\ \cos\frac{x}{2}dx = 2dt \end{array} \right| = \ln|t| + C_2 = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C_2,$$

од каде добиваме

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C_1 + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C_2 = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Задача 28. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{e^x-1} = t,\ e^x = 1+t^2 \\ \frac{e^x dx}{2\sqrt{e^x-1}} = dt \\ \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \frac{2dt}{e^x} \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg} t + C =$

$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C$.

ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

Задача 1. Најди го интегралот $\int x\sin xdx$

Решение.

а) Подинтегралната функција природно може да се раздели на два дела x и $\sin x$. Ако

$$u=x \qquad \text{и} \qquad dv=\sin xdx,$$

тогаш

$$du=dx \qquad \text{и} \qquad v=-\cos x.$$

Следствено, според методот за интеграција по делови, имаме

$$\int x\sin xdx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Коментар. При изборот, на функцијата u, важно е интегралот $\int udv$, да не биде потежок за интегрирање од првобитниот интеграл. На пример ако земевме $u=\sin x$, $dv=xdx$, тогаш $du=\cos xdx$, $v=\dfrac{x^2}{2}$ и

$$\int x\sin xdx=\frac{x^2}{2}\sin x-\int\frac{x^2}{2}\cos dx,$$

Притоа последниот интеграл е потежок за определување.

Задача 2. Најди го интегралот $\int\dfrac{x}{e^x}dx$

Решение.

а) Функцијата $\dfrac{x}{e^x}$ ќе ја запишеме во вид xe^{-x}. Последниов израз не насочува задачата да ја решиме со парцијална интеграција

$$u = x \quad \text{и} \quad dv = e^{-x}dx,$$

од каде

$$du = dx \quad \text{и} \quad v = -e^{-x}.$$

Тогаш

$$\int \frac{x}{e^x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C.$$

Задача 3. Најди ги интегралите

а) $\int \ln x dx$ б) $\int (x^2 + x)\ln(x+1)dx$

Решение.

а) Функцијата $\ln x$ ја разгледуваме како $(\ln x)\cdot 1$, односно како производ од функциите $\ln x$ и 1. Тогаш може да го примениме методот на парцијална интеграција земајќи $u = \ln x$ и $dv = dx$. Имаме

$$u = \ln x \quad \text{и} \quad dv = dx,$$

од каде

$$du = \frac{1}{x}dx \quad \text{и} \quad v = x.$$

Тогаш

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

б) За да го поедноставиме интегралот воведуваме смена $x+1=t$, од каде $dx = dt$ и $x = t-1$.

$$\int (x^2 + x)\ln(x+1)dx = \int (t^2 - 2t + 1 + t - 1)\ln t dt = \int (t^2 - t)\ln t dt.$$

Последниот интеграл го решаваме со парцијална интеграција

$$u=\ln t \qquad dv=(t^2-t)dt, \text{ од каде}$$

$$du=\frac{1}{t}dt \qquad v=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}.$$

Имаме,

$$\int(t^2-t)\ln t dt=\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\int\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{t}dt==\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\int\left(\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\ln t-\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{4}+C.$$

Затоа

$$\int\ln x dx=\left(\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}\right)\ln(x+1)-\frac{(x+1)^3}{9}+\frac{(x+1)^2}{4}+C.$$

Задача 4. Најди ги интегралите

а) $\int\arcsin x dx$ в) $\int \operatorname{arcctg} 2x dx$

Решение.

а) Овде немаме друг избор за u и v освен да земеме $u=\arcsin x$ и $dv=dx$. Меѓу операциите при примена на парцијалната интеграција можеме да ги запишеме во заграда.

Тогаш

$$\int\arcsin x dx=\begin{pmatrix} u=\arcsin x & dv=dx \\ du=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx & v=x \end{pmatrix}=$$

$$=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Новодобиениот интеграл го решаваме со смената $1-x^2=t$, $-2xdx=dt$. Имаме

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{-2}=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-x^2}+C$$

Значи, $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

в) $\int \operatorname{arcctg} 2x dx = \begin{pmatrix} u = \operatorname{arcctg} 2x & dv = dx \\ du = -\dfrac{2}{1+4x^2} dx & v = x \end{pmatrix} =$

$= x arcctg\, 2x + 2\int \dfrac{x}{1+4x^2} dx$.

Последниот интеграл го решаваме со смената $1+4x^2 = t$, $8xdx = dt$.

$$\int \frac{x}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\ln|t| + C = \frac{1}{8}\ln\left(1+x^2\right) + C .$$

Следува

$$\int \operatorname{arcctg} 2x dx = x \operatorname{arcctg} 2x + \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right) + C .$$

Задача 5. Со помош на парцијална интеграција најди ги следниве интеграли:

а) $\int e^x \sin x dx$ б) $\int e^x \cos 2x dx$

Решение.

а) Ако два пати ја интегрираме функцијата e^x, истата повторно ја добиваме како примитивна функција, а втор извод на $\sin x$ е $-\sin x$. Значи со двојна примена на парцијална интеграција ќе го добиеме интегралот $-\int e^x \sin x dx$, така што со прирамнување на најлевиот и најдесниот израз го добиваме решението на задачата. Имено

$$\underline{\int e^x \sin x dx} = \begin{pmatrix} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x dx & v = e^x \end{pmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

$$=\begin{pmatrix} u=\cos x & dv=e^x dx \\ du=-\sin x dx & v=e^x \end{pmatrix}= e^x \sin x-\left(e^x \cos x+\int e^x \sin x dx\right)$$

$$=\underline{e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x \sin x dx}.$$

Од првиот и последниот израз на равенствата, имаме

$$\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x \sin x dx$$

односно

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x-\cos x)+C$$

или

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

Коментар. Интегралот ќе го определевме и ако при парцијалната интеграција двапати земевме $u=e^x$. Треба само да внимаваме при двете интегрирања по делови, за u да ја земаме истата функција. Инаку би го добиле истиот интеграл.

б) $\int e^x \cos 2x dx = \begin{pmatrix} u=e^x & dv=\cos 2x \\ du=e^x dx & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{pmatrix}=$

$$=\frac{e^x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int e^x \sin 2dx=\begin{pmatrix} u=e^x & dv=\sin 2x \\ du=e^x dx & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{e^x}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx\right)=$$

$$=\frac{e^x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}e^x\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx.$$

Следува

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{4}\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x + C \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x\right) + C \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2}{5}e^x \sin 2x + \frac{1}{5}e^x \cos 2x + C .$$

Во задачите 6-11 со метод на парцијална интеграција реши ги интегралите.

Задача 6. $\int x\cos x dx$.

Решение.

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C .$$

Задача 7. $\int x \cdot 2^{-x} dx$.

Решение.

$$\int x \cdot 2^{-x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = 2^{-x} dx \\ du = dx & v = -\dfrac{2^{-x}}{\ln 2} \end{matrix} \right| = -x\frac{2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\int 2^{-x} dx = -x\frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln^2 2} + C .$$

Задача 8. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Решение.

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \\ dx = 2\sqrt{x} dt \end{matrix} \right| = 2\int te^t dt = \left| \begin{matrix} u = t & dv = e^t dt \\ du = dt & v = e^t \end{matrix} \right| = 2\left(te^t - \int e^t dt\right) =$$

$$= 2\left(te^t - e^t\right) + C = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C .$$

Задача 9. $\int \frac{\ln x}{x^n} dx, n \in \mathbf{Z} \setminus \{1\}$.

Решение. $\int \frac{\ln x}{x^n}dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & dv=\frac{dx}{x^n} \\ du=\frac{dx}{x} & v=\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \end{vmatrix} = \ln x\cdot\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \int \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$= \ln x\cdot\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\int x^{-n}dx = \ln x\cdot\frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}\cdot\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{x^{1-n}}{1-n}\left(\ln x - \frac{1}{1-n}\right) + C$

. **Забелешка.** За $n=1$, се добива

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{vmatrix} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Задача 10. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Решение. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \begin{vmatrix} u=x & dv=\frac{dx}{\sin^2 x} \\ du=dx & v=-\operatorname{ctg} x \end{vmatrix} = -x\operatorname{ctg} x + \underbrace{\int \operatorname{ctg} x dx}_{I}$,

$$I = \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C,$$

од каде добиваме

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$$

Задача 11. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. $\int \operatorname{arctg} x dx = \begin{vmatrix} u=\operatorname{arctg} x & dv=dx \\ du=\frac{1}{1+x^2} & v=x \end{vmatrix} = x\operatorname{arctg} x - \underbrace{\int \frac{xdx}{1+x^2}}_{I}$,

$I = \int \frac{xdx}{1+x^2} = \begin{vmatrix} 1+x^2 = t \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$, од каде

добиваме

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C.$$

ИНТЕГРАЛИ ШТО СЕ РЕШАВААТ СО ТРИГОНОМЕТРИСКИ СМЕНИ

Задача 1. Реши го интегралот $I=\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

Решение.

Интегралот припаѓа на класата $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ и го решаваме со смената $x=2\sin t$, $dx=2\cos dt$ каде $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Во тој случај $\cos t>0$, па $|\cos t|=\cos t$. Сега

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}=2\sqrt{\cos^2 t}=2|\cos t|=2\cos t$$

од каде

$$I=\int 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=16\int\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt=16\int\frac{\sin^2 2t}{4}dt=$$

$$=4\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=2\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 4\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C.$$

Втор начин. Воведуваме смена $x=2\cos t$, $dx=-2\sin t$ каде $t\in(0,\pi)$. Тогаш

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\cos^2 t}=2|\sin t|=2\sin t$$

и

$$I=\int 4\cos^2 t\cdot 2\sin t\cdot(-2\cos t)\,dt=-16\int\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt==-2\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+C=$$

$$-2\arccos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 4\left(\arccos\frac{x}{2}\right)+C.$$

Задача 2. Реши го интегралот $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$

Решение.

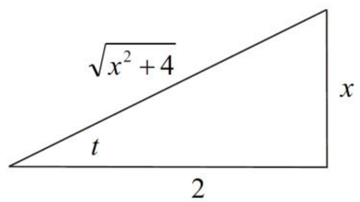
Интегралот припаѓа на класата $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ и го решаваме со смената $x=2tgt$, од каде $dx=\frac{2dt}{\cos^2 t}$ и $1+tg^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$.

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{4^3\left(1+tg^2t\right)^3}}\frac{2}{\cos^2 t}dt=2\int\frac{1}{\frac{8}{\sqrt{\cos^6 t}}}\frac{1}{\cos^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos tdt=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin\left(arctg\frac{x}{2}\right)+C\,.$$

*Ако сакаме примитивната функција да ја запишеме како ирационална функција, како што е запишана и подинтегралната функција, ја спроведуваме следнава постапка.

Прв начин. Поради равенството $tgt=\frac{x}{2}$, цртаме правоаголен триаголник со спротивна катета x и налегната катета 2, во однос на аголот t.



Тогаш хипотенузата има должина $\sqrt{x^2+4}$ и $\sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Следува

$$I=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+C\,.$$

Втор начин. Со помош на идентитетот $\sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}$ добиваме

$$I=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{1}{4}\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{tg\left(arctg\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1+tg^2arctg\frac{x}{2}}}+C=\frac{1}{4}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}+C=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+C\,.$$

Задача 3. Реши го интегралот $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

Решение.

Интегралот припаѓа на класата $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$. Затоа воведуваме смена $x=\frac{a}{\cos t}$ каде $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ или $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Оттука $dx=-\frac{a}{\cos^2 t}(-\sin t)dt=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}$. Го средуваме коренот

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=\sqrt{\frac{a^2-a^2\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\frac{a^2\left(1-\cos^2 t\right)}{\cos^2 t}}==\sqrt{\frac{a^2\sin^2 t}{\cos^2 t}}$$
$$=\sqrt{a^2tg^2t}=|atgt|=atgt\,.$$

Од $\cos t=\frac{a}{x}$, имаме $t=\arccos\frac{a}{x}$. Следува

$$I=\int\frac{1}{\frac{a}{\cos t}\,a\frac{\sin t}{\cos t}}\frac{a}{\cos^2 t}\sin t dt=\frac{1}{a}\int dt=\frac{1}{a}t+C=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C\,.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД КВАДРАТЕН ТРИНОМ

ИНТЕГРАЛ ОД ОБЛИК $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Задача 1. Најди ги интегралите:

а) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2}x^2+4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}}$, б) $I=\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$, в) $I=\int \frac{dx}{3-2x-4x^2}$

Решение.

а) Бидејќи $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(x^2+4x+4\right)=\sqrt{2}(x+2)^2$, следува

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{(x+2)^2}=\begin{pmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{t}\right)+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{x+2}+C.$$

б) Со помош на формулата $x^2\pm ax=\left(x\pm\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$, го трансформираме триномот $x^2+2x+3=(x+1)^2-1+3=(x+1)^2+2$, а потоа воведуваме смена $x+1=t$, $dx=dt$. Имаме

$$I=\int \frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

в) Бидејќи $3-2x-4x^2=-4\left(x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)=-4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{13}{16}\right)$,

следува

$$I=-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{13}{16}}=\begin{pmatrix} x+\frac{1}{4}=t \\ dx=dt \end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2}=$$

$$-\frac{1}{4}\frac{1}{2\frac{\sqrt{13}}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{13}}{4}}{t-\frac{\sqrt{13}}{4}}\right|+C=-\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{13}}{4}}{x+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{13}}{4}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{4x+1-\sqrt{13}}{4x+1+\sqrt{13}}\right|+C.$$

ИНТЕГРАЛ ОД ОБЛИК $\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n},\ n\in N$

Задача 1. Докажи ја рекурентната формула

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}=\frac{1}{2n-2}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}, \quad (1)$$

Решение.
Имаме,

$$\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}=\int\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^n}dx=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}-\int x\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}dx=$$

$$=\begin{pmatrix} u=x & dv=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^n}dx \\ du=dx & v=-\dfrac{1}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}}\end{pmatrix}=$$

$$=\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2n-2}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}-\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}.$$

Со прирамнување на левиот и десниот израз од равенствата ја добиваме формулата (1).

Задача 2. Најди го интегралот $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Решение.

Применувајќи ја рекурентната формула од минатата задача за $n=2$, добиваме

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{1}{2} arctgx + C .$$

.

6.4.2 ИНТЕГРАЛ ОД ОБЛИК $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

Задача 1. Најди го интегралот $I = \int \frac{3x+5}{x^2+4x+2}dx$.

Решение.

Најпрво го средуваме триномот $x^2+4x+2=(x+2)^2-2$ и воведуваме смена $x+2=t$, од каде $x=t-2$ и $dx=dt$. Имаме

$$I = \int \frac{3x+5}{(x+2)^2-2}dx = \int \frac{3(t-2)+5}{t^2-2}dt = = \int \frac{3t-1}{t^2-2}dt = 3\int \frac{t}{t^2-2}dt - \int \frac{1}{t^2-2}dt .$$

Интегралот $\int \frac{t}{t^2-2}dt$ го решаваме со смената $t^2-2=k$, $2tdt=dk$, а интегралот $\int \frac{1}{t^2-2}dt$ е табличен $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$. Значи

$$I = 3\int \frac{dk}{2}\frac{1}{k} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{3}{2}\ln|k| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|(x+2)^2-2\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right| + C .$$

Задача 2. Најди го интегралот $I = \int \frac{2x-3}{2x^2-3x+5}dx$

Решение.

Го трансформираме квадратниот трином

$$2x^2-3x+5=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right),$$

а потоа воведуваме смена $x-\frac{3}{4}=t$, од каде $x=t+\frac{3}{4}$ и $dx=dt$. Имаме

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2x-3}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2\left(t+\frac{3}{4}\right)-3}{t^2+\frac{31}{16}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{31}{16}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+\frac{31}{16}}dt-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{31}{16}}=\left(\begin{array}{c}t^2+\frac{31}{16}=k\\ 2tdt=dk\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dk}{k}-\frac{3}{4}\frac{4}{\sqrt{31}}arctg\,\frac{4t}{\sqrt{31}}=\frac{1}{2}\ln|k|-\frac{3}{\sqrt{31}}arctg\,\frac{4\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{31}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right|-\frac{3}{\sqrt{31}}arctg\,\frac{4x-3}{\sqrt{31}}+C.$$

ИНТЕГРАЛ ОД ОБЛИК $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Задача 2. Најди го интегралот $I=\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+10x+15}}$.

Решение.

Сакаме именителот да го доведеме до облик $\sqrt{t^2+k}$. Затоа триномот го групираме во вид

$$5x^2+10x+15=5\left(x^2+2x+3\right)=5\left((x+1)^2+2\right),$$

а потоа воведуваме смена $x+1=t$, $dx=dt$. Следува

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{5\left((x+1)^2+2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+C.$$

Задача 2. Најди го интегралот $I=\int\frac{dx}{\sqrt{7-2x-3x^2}}$

Решение.

Сакаме именителот да го доведеме до облик $\sqrt{a^2-t^2}$. Затоа триномот го групираме во вид

$$7-2x-3x^2=-3\left(-\frac{7}{3}+\frac{2}{3}x+x^2\right)=-3\left(-\frac{7}{3}+x+\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)=$$

$$=-3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{22}{9}\right)=3\left(\frac{22}{9}-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\right).$$

а потоа воведуваме смена $x+\frac{1}{3}=t$, од каде $dx=dt$ и $x=t-\frac{1}{3}$. Следува

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{22}{9}-\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{22}}{3}\right)^2-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{\frac{\sqrt{22}}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{22}}+C.$$

ИНТЕГРАЛ ОД ОБЛИК $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

Задача 1. Докажи ги формулите

$$\text{а) } \int \sqrt{t^2+k}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+k} - \ln\left|t+\sqrt{t^2+k}\right|\right) + C.$$

$$\text{б) } \int \sqrt{a^2-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\frac{t}{a} + t\sqrt{a^2-t^2}\right) + C.$$

Решение. Имаме

$$\text{а) } \underline{\int \sqrt{t^2+k}\,dt} = \int \frac{t^2+k}{\sqrt{t^2+k}}dt = \int t\frac{t}{\sqrt{t^2+k}}\,dt - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+k}} =$$

$$= \begin{pmatrix} u = t & dv = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+k}}\,dt \\ du = dt & v = \sqrt{t^2+k} \end{pmatrix} =$$

$$= t\sqrt{t^2+k} - \underline{\int \sqrt{t^2+k}\,dt - \ln\left|t+\sqrt{t^2+k}\right|}.$$

Ако ги изедначиме најлевиот и најдесниот израз во равенствата добиваме

$$\int \sqrt{t^2+k}\,dt = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+k} - \ln\left|t+\sqrt{t^2+k}\right|\right) + C.$$

б) Се докажува аналогно.

Задача 2. Најди го интегралот $I = \int \sqrt{2x^2+8x+6}\,dx$.

Решение.

Сакаме подинтегралниот израз да го доведеме до облик $\sqrt{t^2 \pm a^2}$. Затоа членот пред x^2 го вадиме пред коренот, а потоа триномот го групираме

$$2x^2+8x+6 = 2\left(x^2+4x+3\right) = 2\left((x+2)^2-1\right)$$

и воведуваме смена $x+2=t$, $dx=dt$. Имаме

$$I = \int \sqrt{2\left((x+2)^2-1\right)}dx = \sqrt{2}\int \sqrt{t^2-1}\,dt.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x+3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right| + C.$$

Задача 3. Најди го интегралот $I=\int\sqrt{-x^2-5x+3}dx$.

Решение.

Сакаме подинтегралниот израз да го доведеме до облик $\sqrt{a^2-t^2}$. Затоа триномот го групираме на следниов начин

$$-x^2-5x+3=-\left(x^2+5x-3\right)=-\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-3\right)=\frac{37}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2.$$

и воведуваме смена $x+\frac{5}{2}=t$, $dx=dt$. Имаме

$$I=\int\sqrt{\frac{37}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}dt=\int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2-t^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{37}{4}\arcsin\frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{37}}+\left(x+\frac{5}{2}\right)\sqrt{\frac{37}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}\right)+C=$$

$$=\frac{37}{8}\arcsin\frac{2x+5}{\sqrt{37}}+\frac{2x+5}{8}\sqrt{37-(2x+5)^2}+C.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ
6.5.1 ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМ, ФАКТОРИЗАЦИЈА НА ПОЛИНОМ И ДЕКОМПОЗИЦИЈА НА РАЦИОНАЛНА ФУНКЦИЈА

Пред да преминеме на интегрирање на рационални функции ќе го извежбаме процесот на делење на полином, факторизација на полином и декомпозиција на рационална функција.

Задача 1. Подели ги полиномите $2x^3+x^2+12$ со x^2-4 **Решение.**

$$2x^3+x^2+12 : x^2-4 = 2x+1+\frac{8x+16}{x^2-4}$$

$$\begin{array}{l} \pm 2x^3 \mp 8x \\ \hline \quad x^2+8x+12 \\ \quad\quad \pm x^2 \mp 4 \\ \hline \quad\quad 8x+16 \end{array}$$

Задача 2. Изврши факторизација на полиномите:

а) x^2+5x+6 б) $(x-1)(x^2-1)$

Решение.

а) Решението на равенката $x^2+5x+6=0$ е

$$x_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-5\pm1}{2} \Leftrightarrow x_1=-3,\ x_2=-2.$$

Оттука нормалниот облик на полиномот е $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$.

б) Полиномот ќе го сведеме во нормален вид со групирање

$$(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1).$$

Задача 3. Декомпонирај ја подинтегралната функција, без наоѓање на коефициентите $\int\frac{(1+x+x^2)dx}{(x+1)(x+2)^2(x^2+3)^3}dx$

Решение.

На членот $x+1$ му ја придружуваме дропката $\frac{A}{x+1}$, на членот $(x+2)^2$ сумата од прости дропки $\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$, и на членот $(x^2+3)^3$ сумата $\frac{Dx+E}{x^2+3}+\frac{Fx+G}{(x^2+3)^2}+\frac{Hx+I}{(x^2+3)^3}$. Следува

$$\frac{(1+x+x^2)dx}{(x+1)(x+2)^2(x^2+3)^3}=$$
$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+3}+\frac{Fx+G}{(x^2+3)^2}+\frac{Hx+I}{(x^2+3)^3}.$$

ИНТЕГРИРАЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Задача 1. Најди го интегралот $I=\int\frac{x^4+x^3-x^2+x+3}{x^3+2x^2+x}dx$.

Решение.

Прв чекор. Бидејќи степенот на полиномот во броител не е помал од степенот на полиномот во именител, ги делиме полиномите

$$(x^4+x^3-x^2+x+3):(x^3+2x^2+x)=x-1+\frac{2x+3}{x^3+2x^2+x}$$
$$\underline{\pm x^4 \pm 2x^3 \pm x^2}$$
$$-x^3-2x^2+x+3$$
$$\underline{\mp x^3 \mp 2x^2 \mp x}$$
$$2x+3$$

Следува

$$I=\int\left(x-1+\frac{2x+3}{x^3+2x^2+x}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{2x+3}{x^3+2x^2+x}dx.$$

Втор чекор. Го факторизираме именителот во правилната рационална функција.

$$x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2.$$

Трет чекор. Ја претставуваме рационалната функција како сума од прости дропки, имајќи предвид дека именителот има два различни фактори од кои вториот се јавува два пати.

$$\frac{2x+3}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}.$$

За да ги пресметаме константите A, B и C го множиме равенството со $x(x+1)^2$,

$$2x+3=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx \text{ (1)},$$
$$2x+3=A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx$$

и го запишуваме десниот полином во стандарден облик

$$2x+3=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A \text{ (2)}.$$

Горните полиноми се идентични, па нивните коефициенти мора да се еднакви. Коефициентот пред x^2 од левата страна е 0, а од десната $A+B$, коефициентот пред x од левата страна е 2, а од десната $2A+B+C$ и коефициентот пред слободниот член е од левата страна е 3, а од десната A. Така го добиваме системот равенки по A, B и C.

$$\begin{cases}0=A+B\\2=2A+B+C\\3=A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=-3\\C=-1\end{cases}.$$

Втор начин на определување на коефициентите. Ако во равенството (1) замениме $x=0$, добиваме $3=A$. За $x=-1$ имаме $-2+3=-C$, односно $C=-1$. Од членовите пред x^2 во (2) имаме $0=A+B$, од каде $B=-3$.

Четврт чекор. Ја интегрираме новодобиената форма на рационалната функција.

$$\int\frac{2x+3}{x^3+2x^2+x}dx=3\int\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx==3\ln|x|-3\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C=$$
$$3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Затоа

$$I=\frac{x^2}{2}-x+3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Задача 3. Најди го интегралот $I=\int \frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2}dx$.

Решение.

Бидејќи степенот на полиномот во броител е помал од степенот на полиномот во именител првиот чекор е исполнет. Го факторизираме именителот со групирање

$$\begin{aligned} x^3+x^2-2 &= x^3-1+x^2-1= \\ &=(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)=(x-1)(x^2+2x+2) \end{aligned}$$

Втор начин на факторизирање на именителот. Претходната постапка бара одредена вештина. Но факторизирањето може да го направиме и со помош на теоремата на Њутн, според која ако равенката $x^3+x^2-2=0$ има целоброен корен, тогаш тој е делив на слободниот член 2. Делители на 2 се ± 1 и ± 2. Со проверка се добива дека 1 е корен на равенката. Сега именителот го делиме со $x-1$,

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-2):(x-1)=x^2+2x+2 \\ \underline{\pm x^3 \mp x^2} \\ \quad 2x^2-2 \\ \quad \underline{\pm 2x^2 \mp 2x} \\ \qquad 2x-2 \\ \qquad \underline{\pm 2x \mp 2} \end{array}$$

од каде

$$x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2).$$

Да забележиме дека квадратната равенка е нередуцибилна бидејќи нејзината дискриминанта е $4-8=-4<0$. Значи истата не може да се факторизира како производ од линеарни фактори. Сега ја декомпонираме подинтегралната функција

$$\frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2},$$

од каде имаме

$$x^2+2x+7=A(x^2+2x+2)+B(x^2-x)+C(x-1)$$

Равенството е точно за секоја вредност на променливата x. Специјално за $x=1$ имаме $10=5A$ од каде $A=2$. За $x=0$ важи $7=2A-C$, од каде $C=-3$. Со прирамнување на коефициентите пред членот x^2, добиваме $1=A+B$, од каде $B=-1$. Следува

$$I = 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx .$$

Одделно ќе ги решиме двата интеграла:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C ,$$

и

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{(x+3)dx}{(x+1)^2+1} = \begin{pmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{t+2}{t^2+1}dt = \int \frac{t}{t^2+1}dt + 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = \begin{pmatrix} t^2+1=k \\ 2tdt=dk \end{pmatrix} = \int \frac{dk}{2k} + 2arctgt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln k + 2arctgt = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) + 2arctg(x+1) + C .$$

Конечно, за бараниот интеграл добиваме

$$I = 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - 2arctg(x+1) + C .$$

Задача 4. Најди го интегралот $I = \int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}$.

Решение.

Според методот за претставување на рационалната функција преку сума од прости дропки, добиваме

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2} .$$

од каде

$$1 = A\left(x^4+2x^2+1\right) + (Bx+C)\left(x^3+x\right) + (Dx+E)x \Leftrightarrow$$
$$1 = A\left(x^4+2x^2+1\right) + B\left(x^4+x^2\right) + C\left(x^3+x\right) + Dx^2 + Ex \Leftrightarrow$$
$$1 = (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A+B+D)x^2 + (C+E)x + A$$

Коефициентите A, B и C ги наоѓаме од системот равенки

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ C = 0 \\ 0 = 2A + B + D \\ 0 = C + E \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \\ D = -1 \\ E = 0 \end{cases}$$

Затоа

$$I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} \right) dx = \begin{pmatrix} x^2+1=t \\ 2xdx = dt \end{pmatrix} =$$

$$= \ln|x| - \int \frac{dt}{2t} - \int \frac{dt}{2t^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t} \right) = = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + C\,.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД ИРАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

ИНТЕГРАЛИ ОД ВИДОТ $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right)$

Задача 1. Најди го интегралот $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Решение.

Во изразот се појавува квадратен и кубен корен од x. Бидејќи $НЗС(2,3) = 6$, со смената $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, дадениот интеграл се сведува на интеграл од рационална функција

$$I = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = 6\int \frac{t^5}{t^2(t+1)} dt = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt \ .$$

Последниот интеграл може да го решиме со трансформација на броителот

$$\frac{t^3}{t+1} = \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} = \frac{(t+1)(t^2 - t + 1) - 1}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1},$$

од каде имајќи предвид дека $t = \sqrt[6]{x}$ решението е

$$I = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C =$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C .$$

Задача 2. Најди го интегралот $I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.

Решение.

Воведуваме смена $x = t^2$, $dx = 2tdt$. Тогаш

$$I = \int \frac{t}{t^2+1} 2tdt = 2\int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2+1} dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2(t - arctgt) + C =$$
$$= 2\left(\sqrt{x} - arctg\sqrt{x}\right) + C .$$

Задача 3. Најди го интегралот $I = \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx$.

Решение.

Затоа што $НЗС(2,3,4,6) = 12$, воведуваме смена $x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$. Тогаш

$$I=\int\frac{t^6+t^4}{t^{15}-t^{14}}12t^{11}dt=12\int\frac{t^4\left(t^2+1\right)}{t^{14}(t-1)}t^{11}dt=12\int\frac{t^3+t}{t-1}dt\,.$$

Рационалната функција најбрзо ќе ја решиме со смената $t-1=k$, од каде имаме $t=k+1$ и $dt=dk$. Следува

$$I=12\int\frac{(k+1)^3+k+1}{k}dk=12\int\frac{k^3+3k^2+3k+1+k+1}{k}dk=$$
$$=12\int\left(k^2+3k+4+\frac{2}{k}\right)dk=12\left(\frac{k^3}{3}+3\frac{k^2}{3}+4k+2\ln|k|\right)+C=$$
$$=12\left(\frac{\left(\sqrt[12]{x}-1\right)^3}{3}+3\frac{\left(\sqrt[12]{x}-1\right)^2}{3}+4\left(\sqrt[12]{x}-1\right)+2\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|\right)+C\,.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД ВИДОТ $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}},\ldots,\sqrt[n_n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_n}}\right)$

Задача 1. Најди го интегралот $I=\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+5}}$.

Решение.

Воведуваме смена $2x+5=t^3$, од каде $x=\frac{t^3-5}{2}$ и $dx=\frac{3t^2}{2}dt$. Следува

$$I=\int\frac{t^3-5}{2t}\frac{3t^2}{2}dt=\frac{3}{4}\int\left(t^3-5\right)tdt=\frac{3}{4}\int\left(t^4-5t\right)dt=\frac{3}{4}\int dt=$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}-5\frac{t^2}{2}\right)+C=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x+5)^5}-\frac{15}{8}\sqrt[3]{(2x+5)^2}+C\,.$$

Задача 3. Најди го интегралот $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Решение.

Со смената $x+1=t^6$, од каде $x=t^6-1$ и $dx=6t^5dt$, за решение на интегралот добиваме

$$I=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^4}=6\int \frac{t^5dt}{t^3(1+t)}=6\int \frac{t^2dt}{1+t}=6\int \frac{(t^2-1+1)dt}{1+t}=$$

$$=6\int \frac{((t-1)(t+1)+1)dt}{1+t}=6\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=6\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2}-\sqrt[6]{x+1}+\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right)\right)+C.$$

Задача 4. Најди го интегралот $I=\int \frac{\sqrt{2x-1}+2}{(2x-1)^2-\sqrt{2x-1}}dx$

Решение.

Воведуваме смена $2x-1=t^2$, од каде $2dx=2tdt$ или $dx=tdt$.

$$I=\int \frac{t+2}{t^4-t}tdt=\int \frac{t+2}{t(t^3-1)}tdt=\int \frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}dt.$$

Ја разложуваме рационалната функција

$$\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1},$$

од каде

$$t+2=A(t^2+t+1)+B(t^2-t)+C(t-1)$$

За $t=1$ важи $3A=3$ или $A=1$, за $t=0$ важи $2=A-C$ од каде $C=-1$ и од коефициентите пред x^2 важи $0=A+B$, од каде $B=-1$. Следува

$$I=\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{-t-1}{t^2+t+1}\right)dt=\ln|t-1|-\int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt,$$

каде

$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt = \int \frac{t+1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt = \begin{pmatrix} t+\frac{1}{2}=k \\ dt=dk \end{pmatrix} = \int \frac{k+\frac{1}{2}}{k^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dk =$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2k}{k^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dk+\frac{1}{2}\int \frac{2k}{k^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dk =$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(k^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2k}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

Следува

$$I=\ln\left|\sqrt{2x-1}-1\right|-\left(\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{2x-1}+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\ln\frac{\left|\sqrt{2x-1}-1\right|}{\sqrt{2x-1+\sqrt{2x-1}+1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

Задача 5*. Најди го интегралот $I=\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

Решение.

Воведуваме смена $\frac{x-1}{x+1}=t^2$. За експлицитно да го определиме x како функција од t, равенството го множиме со $x+1$, а потоа членовите што го содржат t ги ставаме од левата страна, а останатите членови од десната страна на равенството.

$$x-1=t^2x+t^2 \Leftrightarrow x-t^2x=1+t^2 \Leftrightarrow \left(1-t^2\right)x=1+t^2 \Leftrightarrow x=\frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Оттука

$$dx=\frac{2t\left(1-t^2\right)-\left(1+t^2\right)\left(-2t\right)}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt\,.$$

На овој начин го добиваме интегралот

$$I=\int \frac{1-t^2}{1+t^2}t\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt=\int \frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)\left(1-t\right)\left(1+t\right)}dt$$

Ќе ја декомпонираме подинтегралната функција

$$\frac{4t^2}{\left(1-t^2\right)\left(1-t\right)\left(1+t\right)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$$

и ќе ги најдеме коефициентите, A, B C и D,

$$4t^2=A\left(1+t+t^2+t^3\right)+B\left(1+t^2\right)\left(1-t\right)+\left(Ct+D\right)\left(1-t^2\right)$$
$$4t^2=A\left(1+t+t^2+t^3\right)+B\left(1-t+t^2-t^3\right)+C\left(t-t^3\right)+D\left(1-t^2\right)$$

За $t=1$ важи $4=4A$, односно $A=1$. За $t=-1$ важи $4=4B$, односно $B=1$. За $t=0$ важи $0=A+B+D$ од каде $D=-2$. Со прирамнување на коефициентите пред x^3, имаме $A-B-C=0$, од каде $C=0$.

Имајќи предвид дека $\int \frac{1}{1-t}dt=-\ln\left|1-t\right|+C$, добиваме

$$I=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}-\frac{2}{1+t^2}\right)dt=-\ln\left|1-t\right|+\ln\left|1+t\right|-2arctgt+C=$$
$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|-2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C\,.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

ИНТЕГРАЛИ ОД ОБЛИК $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Задача 1. Пресметај го интегралот $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

Најопшта смена со која сите интеграли од тригонометриските функции се сведуваат на интеграли од рационални функции е $tg\frac{x}{2} = t$ и се однесува на секој од интервалите $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in Z$. Оттука $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ и $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. За разгледуваниот интеграл имаме

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = = \ln|t| + C = \ln|tg\frac{x}{2}| + C .$$

Задача 2. Најди го интегралот $I = \int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)}$.

Решение.

Воведуваме смена $tg\frac{x}{2} = t$, од каде имаме дека $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Тогаш

$$I = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t(2+2t^2+1-t^2-4t)}dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t(t^2-4t+3)}dt = \int \frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)}dt .$$

Добивме интеграл од рационална функција кој ќе го решиме со декомпонирање на подинтегралната функција:

$$\frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3},$$

од каде важи

$$t^2+1 = A(t^2-4t+3) + B(t^2-3t) + C(t^2-t)$$

односно

$$\begin{cases} 1 = A + B + C \\ 0 = -4A - 3B - C \\ 1 = 3A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = -1 \\ C = \dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Па бараниот интеграл е

$$I = \int \frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)} dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} + \frac{5}{3}\int \frac{dt}{t-3} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| - \ln|t-1| + \frac{5}{3}\ln|t-3| + C = \frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| - \ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right| + \frac{5}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}-3\right| + C.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД ОБЛИК $R(\sin x, \cos x) \equiv R(-\sin x, -\cos x)$

Задача 1. Најди го интегралот $I = \int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx$.

Решение.

Бидејќи

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{2(-\sin x) + 3(-\cos x)}{(-\sin x)^2(-\cos x) + 9(-\cos x)^3} = \frac{-(2\sin x + 3\cos x)}{-(\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x)} =$$

$$\frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x} = R(\sin x, \cos x)$$

интегралот може да го решиме со смената смена $tgx = t$, од каде имаме дека $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Следува

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2} \frac{2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + 3\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t^2}{1+t^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 9\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)^3}}} = \int \frac{dt}{1+t^2} \frac{\frac{2t+3}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}(t^2+9)} =$$

$$= \int \frac{2t+3}{t^2+9} dt = 2\int \frac{t}{t^2+9} dt + 3\int \frac{dt}{t^2+9} = \ln|t^2+9| + 3\frac{1}{3} arctg\frac{t}{3} + C =$$

$$= \ln|tg^2 x + 9| + arctg\left(\frac{tgx}{3}\right) + C.$$

Задача 2. Реши го интегралот $I = \int \frac{dx}{1+tgx}$.

Решение.

Дадениот интеграл е од облик $\int R(tgx)dx$ и се решава со смената $tgx = t$. Со диференцирање на равенството $x = arctgt$, добиваме $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Следува $I = \int \dfrac{1}{1+t}\dfrac{dt}{1+t^2}$. Подинтегралната функција ја запишуваме во вид

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2},$$

од каде

$$1 = A(1+t^2) + B(t+t^2) + C(1+t).$$

За $t=-1$ важи $1=2A$ односно $A=\dfrac{1}{2}$. За $t=0$ важи $1=A+C$ од каде $C=\dfrac{1}{2}$.

Од коефициентите пред t^2, важи $0=A+B$ од каде $B=-\dfrac{1}{2}$. Следува

$$I = \int\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\frac{-t+1}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\int\frac{tdt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+t^2 = k \\ 2tdt = dk \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln\left|1+t^2\right| + \frac{1}{2}arctgt + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+tgx| - \frac{1}{4}\ln\left|1+tg^2x\right| + \frac{1}{2}x + C.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД ОБЛИК
$\int \sin ax\cos bxdx,\ \int \sin ax\sin bxdx,\ \int \cos ax\cos bxdx$

Задача 1. Реши го интегралот $I = \int \cos 3x\cos(-5x)dx$.

Решение.

Интегралот ќе го решиме со примена на тригонометрискиот идентитет $\cos ax\cos bx = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$ и $\sin(-x) = -\sin x$.

Имаме

$$I = \int\frac{1}{2}(\cos(-2x) + \cos 8x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sin(-2x)}{-2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 8x}{8} + C = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 8x}{16} + C.$$

Задача 2. Реши го интегралот $I = \int \sin 3x \cos(-5x) dx$

Решение.

Интегралот ќе го решиме со примена на тригонометриските идентитети $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$, $\cos(-x) = \cos x$. Имаме

$$I = \int \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos(-2x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin(-2x)}{-2}\right) + C = \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Задача 3. Реши го интегралот $I = \int \sin 5x \cos(-3x) dx$

Решение.

Интегралот ќе го решиме со примена на тригонометрискиот идентитет $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$. Имаме

$$I = \int \frac{1}{2}(\sin(-2x) + \sin 8x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(-2x)}{-2} - \frac{\cos 8x}{8}\right) + C = \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 8x}{16} + C.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД ОБЛИК $\int R(f(x))f'(x)dx$, $\int I(f(x))f'(x)dx$

Задача 1. Реши го интегралот $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx$.

Решение.

Го трансформираме членот $\cos^3 x = (1-\sin^2 x)\cos x$ и воведуваме смена $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. Тогаш

$$I = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx = \int \frac{1-t^2}{t^{\frac{4}{5}}} dt =$$

$$= \int \left(t^{\frac{1}{5}} - t^{\frac{6}{5}}\right) dt = \frac{5}{6} t^{\frac{6}{5}} - \frac{5}{11} t^{\frac{11}{5}} + C = \frac{5}{6}\sqrt[5]{\sin^6} - \frac{5}{11}\sqrt[5]{\sin^{11}} + C.$$

ИНТЕГРАЛИ ОД ОБЛИК $\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n \in \mathrm{Z}$.

Задача 1. Реши го интегралот $I = \int \cos^3 x dx$.

Решение.

Степеновиот показател на косинусот е непарен, па воведуваме смена $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. Понатаму со помош на идентитетот $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, подинтегралната функција без еден фактор косинус, ја изразуваме преку синус. Имено

$$\cos^3 x = \cos^2(x)\cos x = \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x$$

Следува

$$I = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x dx =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right)dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C .$$

Задача 2. Реши го интегралот $I = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Решение.

Степеновите показатели на функциите синус и косинус се парни. Со помош на тригинометриските идентитети

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ и } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

го снижуваме редот на функциите. Имено

$$\sin^2 x \cos^4 x = (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4}\frac{1 + \cos 2x}{2} = = \frac{1}{8}\frac{1 - \cos 4x}{2}(1 + \cos 2x) =$$

$$\frac{1}{16}(1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right) = = \frac{1}{16}\left(1 + \frac{\cos 2x}{2} - \cos 4x - \frac{\cos 6x}{2}\right).$$

Ако замениме во интегралот добиваме

$$I = \frac{1}{16}\int\left(1 + \frac{\cos 2x}{2} - \cos 4x - \frac{\cos 6x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{1}{2}\frac{\sin 6x}{6}\right) + C =$$

$$= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C .$$

РЕКУРЕНТНИ ФОРМУЛИ ЗА $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$.

Задача 1. Реши го интегралот $I = \int \sin^5 x dx$.

Решение.

Прв начин. Интегралот може да го решиме со помош на рекурентната формула

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx .$$

Бидејќи формулата е сложена за памтење истата пожелно е да знаеме да ја изведеме, или да ја спроведеме постапката за конкретна вредност на n.
За $n=5$ имаме

$$\int \sin^5 x dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\int \sin^3 x dx$$

и за $n=3$ имаме

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C .$$

Конечно за главниот интеграл добиваме

$$I = -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x\right) + C =$$
$$= -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x \cos x - \frac{8}{15}\cos x + C .$$

Втор начин. Степенот на синусот е непарен. Затоа воведуваме смена $\cos x = t$, $-\sin x dx$ од каде

$$I = \int \sin^4 x \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx = -\int \left(1-t^2\right) dt = = -\int \left(1-t^2\right)^2 dt =$$
$$= -\int \left(1-2t^2+t^4\right) dt = \int \left(-1+2t^2-t^4\right) dt = = -t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$
$$-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C .$$

2. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Нека е дадена непрекинатата функција $f(x) \geq 0$ на интервалот $[a,b]$.

Површината P на криволинискиот трапез во рамнината заграден со правите $x = a$, $x = b$, x-оската и графикот на непрекинатата функција $f(x) \geq 0$ т.е. множеството точки од рамнината определено со:
$\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ се нарекува определен интеграл на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ и се означува со

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

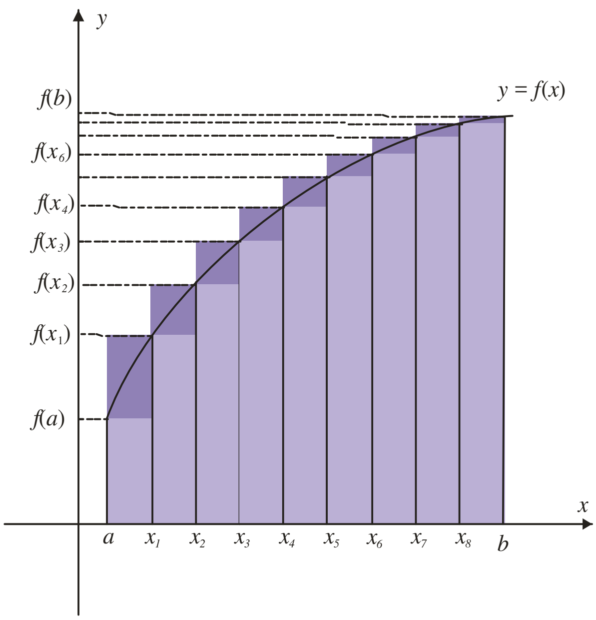
Нека $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ се конечен број точки од $[a,b]$. Воведуваме ознаки:

$$M_i = \max\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\},\ m_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

и

$$S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i\ ,\ s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i\ .$$

Сумите $S(T)$ и $s(T)$ ги нарекуваме ***горна и долна сума на Дарбу.***



Слика 1

На сл. 1 $f(x) \geq 0$ е непрекината функција на интервалот $[a, b]$, и $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ е разбивање на интервалот $[a, b]$. Горната интегрална сума $S(T)$ за разбивањето $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ е точно, површината на повисоката скалеста фигура претставена на цртежот, а долната интегрална сума $s(T)$ е површината на пониската скалеста фигура.

Ако бројот на точките се зголемува и растојанието меѓу две соседни се намалува, горната и долната интегрална сума се приближуваат кон површината P на криволинискиот трапез т.е. определениот интеграл. На овој начин може приближно да се пресмета вредноста на определениот интеграл на произволен број децимали.

2.2 Својства на определен интеграл

Теорема 2.2.1. Ако f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ тогаш f е интеграбилна и на секој интервал $[a_1, b_1]$ што се содржи во $[a,b]$.

Теорема 2.2.2. Ако f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ тогаш $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Теорема 2.2.3. Ако f е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и k е константа, тогаш и функцијата kf е интеграбилна на $[a,b]$ и

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 2.2.4. Ако f интеграбилна на интервалот што ги содржи точките a, b и c, тогаш $\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Теорема 2.2.5. Ако f и g се интеграбилни на интервалот $[a,b]$ тогаш и $f+g$ и $f-g$ се интеграбилни на $[a,b]$ и $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx$.

Теорема 2.2.6. Ако f е ненегативна на интервалот $[a,b]$, тогаш $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Теорема 2.2.7. Ако f и g се функции определени на $[a,b]$, такви што $f \geq g$ на $[a,b]$, тогаш $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Теорема 2.2.8. Ако f и g се разликуваат само во конечен број на точки на $[a,b]$, и f е интеграбилна на $[a,b]$, тогаш и g е интеграбилна на $[a,b]$.

Теорема 2.2.9. Ако f е монотона на $[a,b]$, тогаш f е интеграбилна на $[a,b]$.

Теорема 2.2.10. Ако f е непрекината на $[a,b]$, тогаш f е интеграбилна на $[a,b]$.

Теорема 2.2.11. Ако f е интеграбилна на $[a,b]$, тогаш $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 2.2.12. Ако f е интеграбилна и парна на $[a,b]$, тогаш $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Теорема 2.2.13. Ако f е интеграбилна и непарна на $[a,b]$, тогаш $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Теорема 2.2.14. Нека f е интеграбилна на секој затворен интервал што се содржи во P и $a \in P$. Тогаш функцијата $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е непрекината на P. Ако f е непрекината во $x_0 \in P$, тогаш $F(x)$ е диференцијабилна во x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Теорема за средна вредност 2.2.15. Нека функцијата f е непрекината на $[a,b]$. Тогаш постои точка $\xi \in (a,b)$ таква што $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Теорема 2.2.16. Нека f е непрекината на $[a,b]$ и F е една нејзина примитивна функција, тогаш $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Ова равенството се нарекува **формула на Њутн-Лајбниц. Оваа теорема ја дава врската помеѓу определениот и неопределениот интеграл.**

Теорема 2.2.17. Нека функцијата f непрекината на интервалот P, и $\varphi : [a,b] \to P$ има непрекинат извод на интервалот $[a,b]$. Тогаш

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du .$$

Равенството се нарекува **формула за смена на променливи**.

Теорема 2.2.18. Ако функциите u и v имаат непрекинат извод на $[a,b]$ тогаш $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b + \int_a^b v(x)u'(x)dx$.

Равенството се нарекува **формула за парцијална интеграција.**

Во случај кога функцијата g се разликува само во конечен број на точки од непрекинатата функција f на $[a,b]$, тогаш

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

ПРИМЕНА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

2.3 Плоштина на фигура

Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на $[a,b]$. Фигурата ограничена со правите $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графикот на функцијата $y = f(x)$ се нарекува криволиниски трапез. Фигура меѓу функциите $f(x)$ и $g(x)$ на $[a,b]$, е фигурата ограничена со правите $x = a$ и $x = b$ и графиците на функциите $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 2.3.1. Нека функцијата $y(x)$ е непрекината на $[a,b]$. Плоштината на фигурата ограничена со правите $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графикот на функцијата $y = f(x)$ е $P = \int_a^b |f(x)|dx$. Притоа ако $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, тогаш $P = \int_a^b f(x)dx$, а ако $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, тогаш $P = -\int_a^b f(x)dx$. Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на $[a,b]$. Плоштината на фигурата ограничена со правите $x = a$, $x = b$ и графиците на функциите $f(x)$ и $g(x)$ на $[a,b]$ е $P = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$. Притоа $P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ ако $f(x) \geq g(x)$ на $[a,b]$ и $P = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$ ако $f(x) \leq g(x)$ на $[a,b]$. Во пракса кога ја пресметуваме плоштината, најпрво ги наоѓаме пресечните точки на функциите $f(x)$ и $g(x)$, а потоа на секој подинтервал што го формираат истите, се ослободуваме од апсолутната вредност и го пресметуваме интегралот.

Теорема 2.3.2. Нека функцијата $x(y)$ е непрекината на $[a,b]$. Плоштината на фигурата ограничена со правите $y = a$, $y = b$, $x = 0$ и графикот на функцијата $x = x(y)$ е $P = \int_a^b |x(y)|dy$. Притоа ако $x(y) \geq 0$ на $[a,b]$, тогаш $P = \int_a^b x(y)dy$, а ако $x(y) \leq 0$ на $[a,b]$, тогаш $P = -\int_a^b x(y)dy$.

Нека функциите $x_1(y)$ и $x_2(y)$ се непрекинати на $[a,b]$. Плоштината на фигурата ограничена со правите $x = a$, $x = b$ и графиците на функциите $x_1(y)$ и $x_2(y)$ на $[a,b]$ е $P = \int_a^b |x_1(y) - x_2(y)|dy$. Притоа $P = \int_a^b (x_1(y) - x_2(y))dy$, ако $x_1(y) \geq x_2(y)$ на $[a,b]$.

Теорема 2.3.3. Плоштината на кривата зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a,b]$; каде $\dot{x}$ е непрекината на $[a,b]$, $y\dot{x}$ е ненегативна и кривата е опишана точно еднаш додека t расте од a до b, е

$$P = \int_a^b y\dot{x}dt .$$

Теорема 2.3.4. Плоштината на кривата зададена со поларни координати $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [a,b]$, $0 \leq b - a \leq 2\pi$ каде ρ е ненегативна и непрекината на $[a,b]$ е

$$P=\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2 d\varphi .$$

2.4 Должина на лак на крива

Теорема 2.4.1. Нека $y=y(x)$ има непрекинат извод на $[a,b]$. Тогаш должината на графикот на функцијата $y=y(x)$, $x\in[a,b]$ е

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx .$$

Теорема 2.4.2. Нека $x=x(y)$ има непрекинат извод на $[a,b]$. Тогаш должината на графикот на функцијата $x=x(y)$, $x\in[a,b]$ е

$$L=\int_a^b \sqrt{1+x'^2}\,dx .$$

Теорема 2.4.3. Должината на кривата зададена со параметарските равенки $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[a,b]$; каде $\dot{x}$ и $\dot{y}$ се непрекинати на $[a,b]$ и кривата е опишана точно еднаш додека t расте од a до b е

$$L=\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt .$$

Теорема 2.4.4. Должината на кривата зададена со поларни координати $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[a,b]$, $0\le b-a\le 2\pi$ каде ρ е ненегативна и има непрекинат извод на $[a,b]$ е

$$L=\int_a^b \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,dt .$$

ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Задача 1. Пресметај ги интегралите

а) $\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx$ б) $\int_0^\pi \cos^2 xdx$

Решение.

а) $\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^3 = -\left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}$.

б) $\int_0^\pi \cos^2 xdx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\pi - 0 + \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0)\right) = \frac{\pi}{2}$.

Задача 2. Пресметај го интегралот $I = \int_{-1}^2 |x-1|dx$.

Решение.

Бидејќи $|x-1| = x-1$ за $x \geq 1$ и $|x-1| = 1-x$ за $x \leq 1$ имаме

$$I = \int_{-1}^1 |x-1|dx + \int_1^2 |x-1|dx = \int_{-1}^1 (1-x) + \int_1^2 (x-1)dxdx =$$

$$= \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^1 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_1^2 = 1-(-1)-\frac{1}{2}(1-1)+\frac{1}{2}(4-1)-(2-1) = \frac{5}{2}.$$

Задача 3. Пресметај го интегралот $I = \int_0^\pi x|\cos x|dx$.

Решение.

За $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ важи $\cos x \geq 0$, па $|\cos x| = \cos x$. За $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ важи $\cos x \leq 0$, па $|\cos x| = -\cos x$. Затоа интегралот го претставуваме како збир од интегралите

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x|\cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x|\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos xdx .$$

Со методот на интегрирање по делови ќе го пресметаме неопределениот интеграл

$$\int x\cos xdx = \begin{pmatrix} u = x & dv = \cos x \\ du = dx & v = \sin x \end{pmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx = = x\sin x + \cos x + C .$$

Оттука според формулата на Њутн-Лајбниц за определениот интеграл добиваме

$$I = \left(x\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(x\sin x + \cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 - \left(\pi\sin\pi - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 - \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi .$$

Задача 4. $\int_0^{2\pi} |\sin x|dx$.

Решение. $\int_0^{2\pi} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} \sin xdx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)dx = \int_0^{\pi} \sin xdx + \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x-\pi)dx}_{I}$,

$$I = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x-\pi)dx = \left| \begin{array}{c} x - \pi = t \\ dx = dt \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \\ x = 2\pi \Rightarrow t = 2\pi \end{array} \right| = \int_0^{\pi} \sin tdt$$, од каде добиваме

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|dx = 2\int_0^{2\pi} \sin xdx = -2\cos x\Big|_0^{\pi} = -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = 4 .$$

Задача 5. $\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.

Решение. $\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \int_0^4 dx + \underbrace{\int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx}_{I}$,

$$I = \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x}{4}=t \\ dx = 4dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=1 \end{array} \right| = 4\int_0^1 e^t dt = 4e^t\Big|_0^1 = 4(e-1)$$, од каде добиваме

$$\int_0^4 \left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx = 4+4(e-1) = 4e.$$

Задача 6. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{array}{c} x+2=t \\ dx=dt \\ x=-2 \Rightarrow t=0 \\ x=-1 \Rightarrow t=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{dx}{t^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 7. $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 dx$.

Решение. $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 dx = \left| \begin{array}{c} e^x-1=t \\ e^x dx = dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=e-1 \end{array} \right| = \int_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5}$.

Задача 8. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Решение.

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left| \begin{array}{c} 1+\ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \\ x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=e^3 \Rightarrow t=4 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 = 2\left(\sqrt{4}-1\right) = 2 .$$

Задача 9. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

Решение. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{c} 1+\ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \\ x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=e \Rightarrow t=2 \end{array} \right| = \int_1^2 dt = t\Big|_1^2 = 2-1 = 1 .$

Задача 10. Покажи дека $2 \le \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \le \frac{8}{3}$.

Решение.

Имаме, $1 \le 1+x^4 \le 1+2x^2+x^4 = \left(1+x^2\right)^2$ од каде следува дека

$$1 \le \sqrt{1+x^4} \le \sqrt{\left(1+x^2\right)^2} = 1+x^2 .$$

Оттука

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \ge \int_{-1}^1 dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2$$

и

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \le \int_{-1}^1 \left(1+x^2\right) dx = \left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1-(-1)+\frac{1}{3}\left(1^3-(-1)^3\right) = \frac{8}{3} .$$

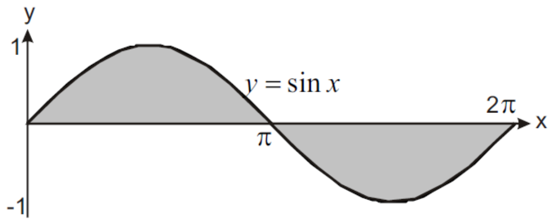
ПЛОШТИНА НА РАМНИНСКА ФИГУРА

Плоштина на фигура што лежи меѓу експлицитно зададени функции

Задача 1. Пресметај го ликот ограничен со x-оската и функцијата $y = \sin x$, $x \in [0,2\pi]$.

Решение.

Функцијата $y = \sin x$ е ненегативна на интервалот $[0,\pi]$. Затоа плоштината на делот од ликот на интервалот $[0,\pi]$ е определениот интеграл на функцијата $y = \sin x$ во граници од $x = 0$ до $x = \pi$. Функцијата $y = \sin x$ непозитивна на интервалот $[\pi,2\pi]$. Затоа плоштината на делот од ликот на интервалот $[\pi,2\pi]$ е спротивна на определениот интеграл на функцијата $y = \sin x$ во граници од $x = \pi$ до $x = 2\pi$.



Следува плоштината на бараниот лик е сума од $\int_0^{\pi} \sin x dx$ и $-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$, односно

$$P = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} - \left(-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) =$$
$$= -(\cos\pi - \cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi = 4.$$

Втор начин. Имајќи предвид дека плоштините на деловите од ликот на интервалите $[0,\pi]$ и $[\pi,2\pi]$ се еднакви, плоштината на ликот може да ја најдеме како удвоен производ од плоштината на делот од ликот на интервалот $[0,\pi]$, односно

$$P = 2\int_0^{\pi} \sin x dx = 2\left(-\cos x\Big|_0^{\pi}\right) = -2(\cos\pi - \cos 0) = 4.$$

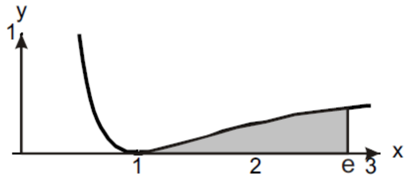
Задача 2. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y=\frac{\ln^2 x}{x}$, $x=e$, $y=0$.

Решение.

Апцисата на пресечната точка на кривата $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ со x-оската е решение на равенката

$$0=\frac{\ln^2 x}{x} \Leftrightarrow \ln^2 x \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$$

Кривите кои ја заградуваат фигурата, се прикажани на следниов цртеж.



Плоштината на фигурата ќе ја пресметаме по формулата $P=\int\limits_a^b y(x)dx$, каде $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ и $x\in[1,e]$. Воведуваме смена $t=\ln x$, $dt=\frac{dx}{x}$. За $x=1$, имаме $t=\ln 1=0$, и за $x=e$ следува $t=\ln e=1$. Следува

$$P=\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int\limits_0^1 t^2 dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Задача 3. Пресметај ја плоштината на ликот кој лежи меѓу кривите $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

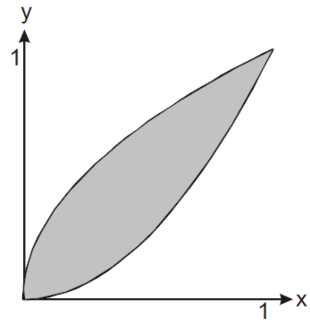
Решение.

Плоштината на ликот ќе ја пресметаме со формулата $P=\int\limits_a^b \left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx$.

Пресекот на двете криви е во точки кои се решение на системот равенки $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, односно чии x-координати се решение на равенката,

$$x^2=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^4=x, x>0 \Leftrightarrow x^4-x=0, x>0 \Leftrightarrow x\left(x^3-1\right)=0, x>0 \Leftrightarrow$$
$$x(x-1)(x^2+x+1)=0, x>0 \Leftrightarrow x=0,\ x=1.$$

На интервалот $[0,1]$, важи $\sqrt{x} \geq x^2$, односно графикот на функцијата $y = \sqrt{x}$ е погоре од графикот на $y = x^2$. Затоа $y_2(x) = \sqrt{x}$ и $y_1(x) = x^2$. Ја скицираме фигурата што лежи меѓу параболите $y = x^2$ и $x = y^2$.



Следува

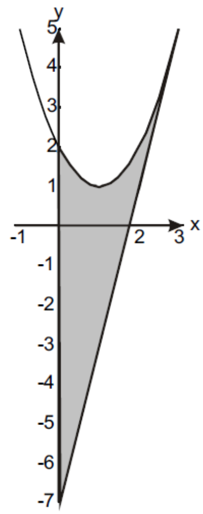
$$P = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Задача 4. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со параболата $y = x^2 - 2x + 2$, нејзината тангента во точката $M(3,5)$ и y - оската.

Решение.

Имајќи предвид дека првиот извод $y' = 2x - 2$ и $y'(3) = 4$, тангената на параболата во точката $M(3,5)$ има равенка

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0) \Leftrightarrow y - 5 = 4(x - 3) \Leftrightarrow y - 5 = 4x - 12 \Leftrightarrow y = 4x - 7.$$



Параболата ја сече y- оската во точка со апсциса $x=0$, а тангентата во точката со апсциса $x=3$. Според тоа, плоштината на фигурата се наоѓа меѓу графиците на функциите $y=x^2-2x+2$ и $y=4x-7$, за $x\in[0,3]$, од каде

$$P=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))dx=\int_0^3 \left(x^2-2x+2-(4x-7)\right)dx=\int_0^3 \left(x^2-6x+9\right)dx=$$

$$=\int_0^3 (x-3)^2\,dx=\begin{pmatrix} t=x-3 & x=0\Rightarrow t=-3 \\ dt=dx & x=3\Rightarrow t=0 \end{pmatrix}=\int_{-3}^0 t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_{-3}^0=-\frac{(-3)^3}{3}=9.$$

Задача 5. Пресметај ја плоштината на помалата фигура ограничена со параболата $y^2=2x$ и кружницата $x^2+y^2=8$.

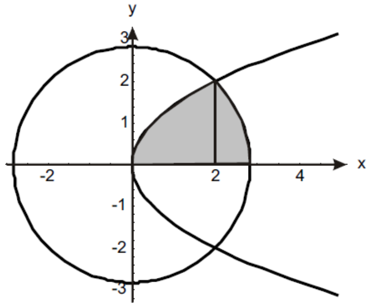
Решение.

Апцисите на пресечните точки на кривите $x^2+y^2=8$ и $y^2=2x$ ги исполнуваат условите $x\geq 0$ и

$$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm 6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=-4,\ x_2=2.$$

Значи пресечните точки имаат апциси $x=2$. Ја скицираме фигурата.



Фигурата е двапати поголема од делот што лежи во првиот квадрант. Плоштината на делот од фигурата за $x \in [0,2]$, е определениот интеграл на функцијата $y=\sqrt{2x}$, а плоштината на фигурата за $x \in [2, 2\sqrt{2}]$ е определениот интеграл на функцијата $y=\sqrt{8-x^2}$. Затоа плоштината на фигурата е

$$P = 2\int_a^b y(x)dx = 2\left(\int_0^2 \sqrt{2x}dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\,dx\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ll} x = 2\sqrt{2}\sin t, & x = 2 \Rightarrow 2 = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \\ dx = 2\sqrt{2}\cos t dt. & x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8}\sqrt{\cos^2 t}\sqrt{8}\cos t dt = \frac{4\sqrt{2}}{3}2\sqrt{2} + 2\cdot 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{16}{3} + 16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{16}{3} + 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{16}{3} + 8\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{16}{3} + 8\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} + 2\pi .$$

Плоштина на фигура ограничена со параметарски зададени криви

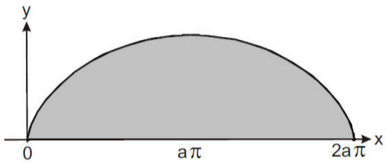
Задача 1. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со еден лак на циклоидата $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ и $x-$ оската.

Решение.

Имајќи предвид дека

$$y=0 \Leftrightarrow 1-\cos t=0 \Leftrightarrow \cos t=1 \Leftrightarrow t=2k\pi,\ k\in Z,$$

еден лак на циклоидата се добива за $t\in[0,2\pi]$. Притоа, најлевата точка на лакот на циклоидата се добива за $t=0$, а најдесната за $t=2\pi$. Фигурата е следна.



Следува

$$P=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)dt=\left(\dot{x}(t)=a(1-\cos t)\right)=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}dt-2a^2\int_0^{2\pi}\cos t dt+a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=$$

$$=a^2 t\Big|_0^{2\pi}-2a^2\sin t\Big|_0^{2\pi}+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=a^2 2\pi-2a^2(\sin 2\pi-\sin 0)+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}dt+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t dt=$$

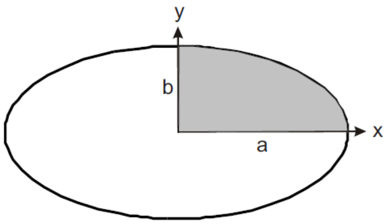
$$=2a^2\pi+\frac{a^2}{2}2\pi+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t dt=3a^2\pi+\frac{a^2}{2}\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=3a^2\pi+\frac{a^2}{4}(\sin 4\pi-\sin 0)=3a^2\pi\,.$$

Задача 2. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение.

Дадената крива е елипса. Ја скицираме елипсата.



Равенката на елипсата ќе ја запишеме во параметарски облик, $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. Плоштината на фигурата е 4 пати поголема од плоштината на делот на фигурата што се наоѓа во првиот квадрант. Пресечната точка на елипсата со y -оската ја добиваме за

$$0=a\cos t \Leftrightarrow \cos t=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2},$$

а со x -оската

$$0=a\sin t \Leftrightarrow \sin t=0 \Leftrightarrow t=0$$

Затоа долната граница на интеграција е $t=\frac{\pi}{2}$, а горната $t=0$. Тогаш плоштината на делот од рамнината ограничен со елипсата е

$$P=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot a(-\sin t)dt=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt==4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

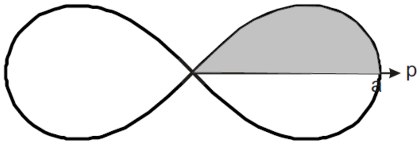
$$=2ab\left(\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=2ab\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)\right)=ab\pi.$$

Плоштина на фигура ограничена со криви зададени со поларни координати

Задача 1. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Решение.

Ја скицираме фигурата.



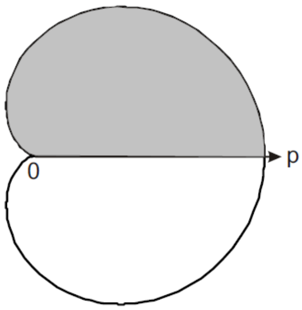
Според формулата $P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$, ќе ја пресметаме плоштината на делот од фигурата што ја добиваме за $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, и е 4 пати помала од плоштината на целата фигура. Тогаш

$$P = 4\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \sin\frac{\pi}{2} = a^2.$$

Задача 2. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Решение.

Дадената крива е кардиоида. Ја скицираме кривата.



Плоштината на фигурата е два пати поголема од делот што се наоѓа во горната полурамнина. Според тоа

$$P = 2\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

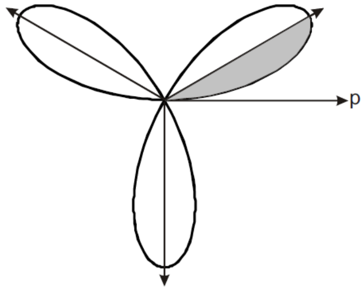
$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi = a^2\left(\left(\varphi+2\sin\varphi\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right) =$$

$$= a^2\left(\pi+\frac{1}{2}\left(\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}\right)\right) = = a^2\left(\pi+\frac{1}{2}\left(\pi+\frac{1}{2}\left(\sin 2\pi-\sin 0\right)\right)\right) = \frac{3a^2\pi}{2}.$$

Задача 3. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата $\rho = a\sin 3\varphi$.

Решение.

Дадената крива е тролисна детелина,



Бидејќи делот од ликот што се добива за $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$, е 6 пати помал од бараниот лик, неговата плоштина е

$$P = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\rho^2 d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\sin^2 3\varphi d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 6\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\left(\varphi-\frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{3a^2}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\left(\sin\pi-\sin 0\right)\right) = \frac{3a^2\pi}{12} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

ДОЛЖИНА НА ЛАК НА КРИВА

Должина на лак на крива од експлицитно зададени функции

Задача 1. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=\ln x-\frac{x^2}{8}$ за $x\in[1,2]$.

Решение.

Должината на лакот на кривата ќе ја пресметаме според формулата $l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$, каде $a=1$, $b=2$, изводот $y'=\frac{1}{x}-\frac{x}{4}$ и коренскиот израз е

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{16}}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x}{4}\right)+\left(\frac{x}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)^2}=\frac{1}{x}+\frac{x}{4}$$

Следува

$$l=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{4}\right)dx=$$

$$=\left(\ln x+\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=\ln 2+\frac{1}{8}(4-1)=\ln 2+\frac{3}{8}.$$

Задача 2. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y=2\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)$ од $x=0$ до $x=4$.

Решение.

Изводот на функцијата y е

$$y'=2\left(e^{\frac{x}{4}}\frac{1}{4}+e^{-\frac{x}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}}\right),$$

а подкореновиот израз

$$1+y'^2=1+\left(\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}}\right)\right)^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}-2+e^{-\frac{x}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}+2+e^{-\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)^2.$$

Оттука должината на лакот на кривата е

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^4\left(e^{\frac{x}{4}}+e^{-\frac{x}{4}}\right)dx==\frac{1}{2}\left(4e^{\frac{x}{4}}-4e^{-\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$2\left(e^{\frac{x}{4}}-e^{-\frac{x}{4}}\right)\Bigg|_0^4=2\left(e-1-\left(e^{-1}-1\right)\right)=2\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

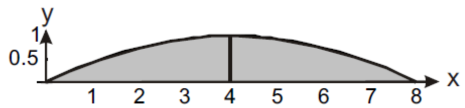
Задача 3. При скок во далечина атлетичарот се движи по формулата $y=-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{2},\quad x\in[0,8]$. Пресметај ја должината на лакот на кривата образувана додека атлетичарот е во скок.

Решение.

Од каноничната равенка на параболата

$$y=-\frac{1}{16}\left(x^2-8x\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{16}\left((x-4)^2-16\right)\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{16}(x-4)^2,$$

следува дека атлетичарот се движи по парабола со теме во точката $T(4,1)$.



Затоа должината на лакот на кривата е двапати поголема од должината на лакот на кривата што се добива додека променливата x се движи од 0 до 4. За да ја пресметаме должината на лакот потребен е првиот извод $y'=-\frac{x}{8}+\frac{1}{2}$. Оттука

$$l = 2\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx = 2\int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\right)^2}dx = = \left(\begin{matrix} \frac{x}{8}-\frac{1}{2}=t & x=0 \Rightarrow t=-\frac{1}{2} \\ \frac{dx}{8}=dt & x=4 \Rightarrow t=0 \end{matrix} \right) =$$

$$2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sqrt{1+t^2}\ 8dt =$$

$$=16\left(\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}\right) = =16\left(0-\frac{-1}{4}\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right|\right) =$$

$$=16\left(\frac{\sqrt{5}}{8}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) = 2\sqrt{5}-8\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Задача 4. Пресметај ја должината на кривата зададена со равенката $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$, каде $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Решение.

Изводот на функцијата y е $y' = \sqrt{\cos x}$. Должината на кривата во зададениот интервал ќе биде

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos\frac{x}{2}\right|dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}dx = \sqrt{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

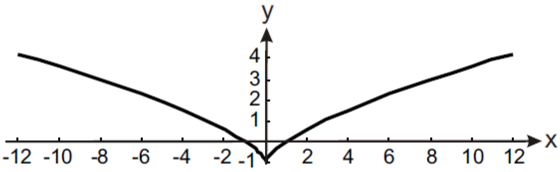
$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4.$$

Задача 5. Пресметај ја должината на лакот на кривата $x^2 = (y+1)^3$, $y \in [-1,4]$.

Решение.

Од $x^2 = (y+1)^3$ имаме дека $x = \pm (y+1)^{\frac{3}{2}}$, од каде $x' = \pm \frac{3}{2}(y+1)^{\frac{1}{2}}$.

Должината на лакот е 2 пати поголема од должината на делот од лакот што се добива за $x > 0$. Следува



$$l = 2\int_a^b \sqrt{1+x'^2}\,dy = 2\int_{-1}^{4} \sqrt{1+\frac{9}{4}(y+1)}\,dy = 2\int_{-1}^{4} \sqrt{\frac{9}{4}y+\frac{13}{4}}\,dy =$$

$$= \begin{pmatrix} t^2 = \frac{9}{4}y+\frac{13}{4}, t>0 & y=-1 \Rightarrow t^2 = -\frac{9}{4}+\frac{13}{4} \Rightarrow t=1 \\ 2tdt = \frac{9}{4}dy & y=4 \Rightarrow t^2 = \frac{36}{4}+\frac{13}{4} = \frac{49}{4} \Rightarrow t = \frac{7}{2} \end{pmatrix} = 2\int_1^{\frac{7}{2}} t\frac{8t}{9}\,dt = \frac{8}{9}\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\frac{7}{2}}$$

$$= \frac{16}{27}(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1) = \frac{16}{27}\frac{343-8}{8} = \frac{670}{27}.$$

Должина на лак на крива зададена со параметарски равенки

Задача 1. Пресметај ја должината на лакот на кривата $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$, $t \in [0,1]$.

Решение.

Изводите по параметарот t се $\dot{x} = t^5$ и $\dot{y} = -t^3$. Следува

$$l = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t^{10}+t^6}\,dt = \int_0^1 \sqrt{t^6(1+t^3)}\,dt = = \int_0^1 |t|^3\sqrt{1+t^4}\,dt =$$

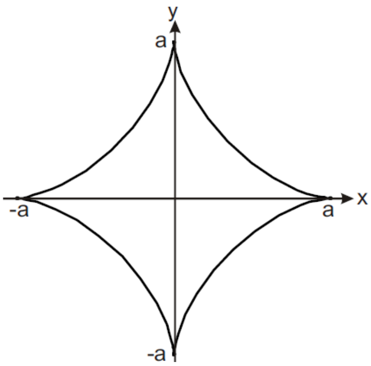
$$= \int_0^1 t^3\sqrt{1+t^4}\,dt = \begin{pmatrix} 1+t^4 = u & t=0 \Rightarrow u=1 \\ 4t^3dt = du & t=1 \Rightarrow u=1 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{4}\int_{1}^{2}\sqrt{u}du=\frac{1}{4}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Задача 2. Пресметај ја должината на лакот на астроидата $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Решение.

Должината на астроидата е 4 пати поголема од должината на делот од астроидата што се наоѓа во првиот квадрант, односно за $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.



Следува

$$l=4\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\begin{pmatrix}\dot{x}=-3a\cos^2 t\sin t\\ \dot{y}=3a\sin^2 t\cos t\end{pmatrix}=$$

$$=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\;dt=$$

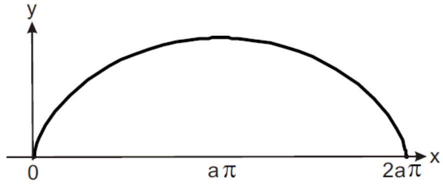
$$=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt=$$

$$=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}3a\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\;dt=12a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t\sin t\right|\,dt=12a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\;dt=$$

$$=12a\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2t}{2}\,dt=6a\left(\frac{-\cos 2t}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=-3a\left(\cos 2t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=-3a\left(\cos\pi-\cos 0\right)=6a.$$

Задача 3. Пресметај ја должината на еден лак на циклоидата $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$.

Решение.



Еден лак на циклоидата се добива ако $t \in [0,2\pi]$. За изводите на x и y имаме

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t),\ \dot{y}(t) = a\sin t .$$

Должината на еден лак на циклоидата е

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \begin{pmatrix} \dot{x} = a(1-\cos t) \\ \dot{y} = a\sin t \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a(-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}) =$$

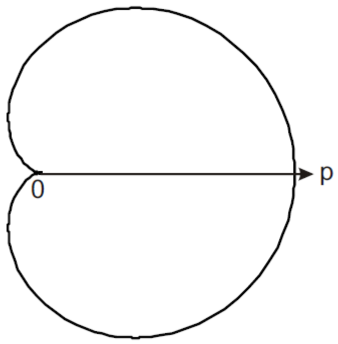
$$= -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a .$$

Должина на лак на крива зададена со поларни координати

Задача 1. Пресметај ја должината на лакот на кардиоидата $\rho = a(1 + \cos\varphi),\quad \varphi \in (0,2\pi),\quad a > 0$.

Решение.

Должината на лакот на кардиоидата е 2 пати поголема од делот на кардиоидата што се наоѓа во горната полурамнина, односно за $\varphi \in [0,\pi]$.



Следува должината е,

$$l = 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left(\sqrt{a^2(1+2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}\right) d\varphi = = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = 8a\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = 8a\,.$$

Задача 2. Пресметај ја должината на кружницата $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение.

Задачата може да се реши со премин во поларни координати $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогаш $x^2 + y^2 = \rho^2$, од каде равенката на кружницата во поларни координати е $\rho = a$. Оттука нејзината должина е

$$l = 4\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + 0}\, d\varphi = 4a\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a\pi\,.$$

ЗАДАЧИ ОД ИСПИТИ И КОЛОКВИУМИ ОД МАТЕМАТИКА 1, 2000 - 2013

Подолу следуваат задачите што биле давани за решавање на колоквиуми или испити, а подредени се по области.

Дефинициона област на функција

Во задачите 1 - 10 најди ја дефинициона област на функциите.

Задача 1. $f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$.

Задача 2. $f(x) = \ln\left(x^2 - 9\right)$.

Задача 3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 1}} + \sqrt[3]{x}$.

Задача 4. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(2 - x\right)$.

Задача 5. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Задача 6. $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x\right)$.

Задача 7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

Задача 8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \ln(9 - x^2)$.

Задача 9. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$.

Задача 10. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \ln(16 - x^2)$.

Скицирање елементарни функции

Во задачите 11 - 26 со помош на графиците на елементарните функции скицирај ги графиците на функциите.

Задача 11. $y = \begin{cases} -|\cos x| \ , & x < 0 \\ \ln(x+1) - 1 \ , & x \geq 0 \end{cases}$.

Задача 12. $y = \begin{cases} -2|\cos x| \ , & x < 0 \\ \ln(x+1) - 2 \ , & x \geq 0 \end{cases}$.

Задача 13. $y = \begin{cases} x^2 + 5, & x < 0 \\ 5\sin(x + \dfrac{\pi}{2}), & x \geq 0 \end{cases}$.

Задача 14. $y = \begin{cases} x^2 + 5, & x < 0 \\ 5\sin(x + \dfrac{\pi}{2}), & x \geq 0 \end{cases}$.

Задача 15. $y=\begin{cases} -x+\pi, & x<\pi \\ |2\sin 2x|, & x\geq \pi \end{cases}.$

Задача 16. $y=\begin{cases} \ln|x|+1, & x<1 \\ |x-2|, & x\geq 1 \end{cases}.$

Задача 17. $y=\begin{cases} |x^2+2x-3|, & x\leq 1 \\ 3^{x-1}-1, & x>1 \end{cases}.$

Задача 18. $y=\begin{cases} x^2+2x, & x\leq 0 \\ 2\sin 2x, & x>0 \end{cases}.$

Задача 19. $y=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x<0 \\ -x^2+2x, & 0\leq x<2 \\ -\ln(x-1), & x\geq 2 \end{cases}.$

Задача 20. $y=\left|1-3^x\right|.$

Задача 21. $y=|\ln x-1|.$

Задача 22. $y=\begin{cases} |-x-1|, & x\leq 0 \\ e^{-x}, & x>0 \end{cases}.$

Задача 23. $y=\begin{cases} x^3, & x\leq 0 \\ |x^2-4x|, & x>0 \end{cases}.$

Задача 24. $y=|\ln(2+x)|.$

Задача 25. $y=\begin{cases} |x^2-x|, & x<1 \\ -\ln x, & x\geq 1 \end{cases}.$

Задача 26. $y=\begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2}x, & x\leq 2 \\ |x^2-5x+6|, & x>2 \end{cases}.$

Лимес (гранична вредност) на функција

Во задачите 27 - 67 пресметај ги граничните вредности на дадените функции.

Задача 27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{tg}\,3x}.$

Задача 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{x^3}.$

Задача 29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^3-3}\right)^{x^2}$.

Задача 30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5\sin 2x}$.

Задача 31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$.

Задача 32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{x-1}$.

Задача 33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

Задача 34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

Задача 35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$.

Задача 36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Задача 37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Задача 38. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{4x-1}}{x+\sqrt{x^2-3}}$.

Задача 39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Задача 40. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

Задача 41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos ax}{e^{bx}-\cos bx}$.

Задача 42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

Задача 43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

Задача 44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Задача 45. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{3x^2-2}\right)^{x^2}$.

Задача 46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

Задача 47. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Задача 48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Задача 49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x}{1-2x}\right)^{\frac{-2x+1}{x}}$.

Задача 50. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Задача 51. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

Задача 52. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{5x}$.

Задача 53. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Задача 54. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Задача 55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Задача 56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$.

Задача 57. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

Задача 58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\operatorname{tg} 2x}$.

Задача 59. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+7}{x^2-3}\right)^{x^2}$.

Задача 60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

Задача 61. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(3+e^{2x})}{\ln(2x+e^{3x})}$.

Задача 62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(5x)}{\sin(8x)}$.

Задача 63. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

Задача 64. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

Задача 65. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(5x+e^{2x})}{\ln(1+e^{3x})}$.

Задача 66. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

Задача 67. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

Извод на функција

Во задачите 68 - 102 пресметај ги изводите на функциите.

Задача 68. $y = x\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$.

Задача 69. $y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Задача 70. $y = \cos^2 x\cos x^2$.

Задача 71. $y = \sin^2 x\sin x^2$.

Задача 72. $y = \sin\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

Задача 73. $y = \cos\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

Задача 74. $y = \operatorname{tg}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

Задача 75. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$.

Задача 76. $y = \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x}$.

Задача 77. $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{\sqrt{t-1}} \\ y = \dfrac{t^3}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases}$.

Задача 78. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$.

Задача 79. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln\left(1-t^2\right) \end{cases}.$

Задача 80. $\begin{cases} x = \dfrac{\sin t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{\cos t}{1+t^2} \end{cases}.$

Задача 81. $\begin{cases} y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \\ x = \dfrac{3at}{1+t^3} \end{cases}.$

Задача 82. $y = x^{\sqrt{x}}$.

Задача 83. $y = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$.

Задача 84. $y = (\operatorname{tg} x)^{x+\sin x}$.

Задача 85. $y = \left(3x^2+2\right)^{\sin x}$.

Задача 86. $y = x^{x+\sin x}$.

Задача 87. $y = (\cos x)^{x^2}$.

Задача 88. $y = (\sin x)^{x^2}$.

Задача 89. $y = \left(x^2+1\right)^{\sin x}$.

Задача 90. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Задача 91. $y = (\cos x)^{x}$.

Задача 92. $y = (\operatorname{arctg} x)^{x}$.

Задача 93. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$.

Задача 94. $y = (\cos x)^{\ln x}$.

Задача 95. $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$.

Задача 96. $y = x^{\ln x}$.

Задача 97. $y = (\sin x)^{\ln\cos x}$.

Задача 98. $y = x^{2\operatorname{tg} x}$.

Задача 99. $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

Задача 100. $y = x^{x^2}$.

Задача 101. $y = x^{e^x}$.

Задача 102. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

Извод од повисок ред

Во задачите 103 - 108 да се пресмета y''.

Задача 103. $\begin{cases} y = \sin 5t \\ x = \sin t \end{cases}$.

Задача 104. $\begin{cases} y = e^t \sin t \\ x = e^t \cos t \end{cases}$.

Задача 105. $\begin{cases} y = e^{-t} \cos e^{-t} \\ x = e^{-t} \sin e^{-t} \end{cases}$.

Задача 106. $\begin{cases} y = t - \operatorname{arctg} t \\ x = \ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$.

Задача 107. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln\left(1-t^2\right) \end{cases}$.

Задача 108. $\begin{cases} y = t\cos t \\ x = t\sin t \end{cases}$.

Тангента и нормала на функција

Задача 109. Да се состави равенка на тангента на кривата $y = x^3 + 3x^2 - 2$, која е нормална на правата $2x - 6y - 1 = 0$.

Задача 110. Да се состави равенка на тангента на кривата $y = x^3 + 3x^2 - 5$, која е нормална на правата $x - 3y + 3 = 0$.

Задача 111. Да се состават равенки на нормали на кривата $y = \sqrt{x}$ во точките на пресек со правата $y = x$.

Задача 112. Да се состави равенка на тангента на кривата $y = 2x \ln x$, која е паралелна на правата $2x - y + 3 = 0$.

Задача 113. Да се состават равенките на тангентите на кривата $y = \dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$, повлечени во точките во кои $y = 1$.

Задача 114. Да се напишат равенките на тангента и нормала во пресечните точки на параболата $y = x^2 - 4x + 5$ со правата $x - y + 1 = 0$.

Задача 115. Да се напишат равенките на тангента и нормала во пресечните точки на параболата $y = x^2 - 3x$ со $x -$ оската.

Задача 116. Состави ги равенките на тангентите на кривата $y = x - \dfrac{1}{x}$ во точките на пресек на оваа крива со $x -$ оската.

Задача 117. Состави ја равенката на онаа тангента на кривата $y = x^3 + 3x^2 - 5$, која е нормална на правата $2x - 6y + 1 = 0$.

Задача 118. Да се состави равенка на тангента на кривата $y = x\ln x$, која е паралелна на правата $2x - 2y + 3 = 0$.

Задача 119. За параболата $y = -x^2 + 3$, да се напишат равенката на тангентите и нормалите во нејзините пресечни точки со правата $y = -x + 1$.

Задача 120. За хиперболата $y = \dfrac{2}{x+1}$, да се напишат равенката на тангентите и нормалите во нејзините пресечни точки со правата $y = x$.

Задача 121. Тетива на параболата $y = x^2 - 2x + 5$ поврзува две точки чии апциси се $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Да се состави равенка на онаа тангента на параболата која е паралелна со тетивата.

Задача 122. Најди ги равенките на тангента и нормала на кривата $y = \dfrac{x-2}{4-x^2}$ во точката со апциса $x = 2$.

Задача 123. Најди ги равенките на тангента и нормала на кривата $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ во точката со апциса $x = 1$.

Задача 124. Најди ги равенките на тангента и нормала на кривата $y = x^2 - 3x - 10$ во пресечните точки на кривата со координатните оски.

Задача 125. Во која точка од кривата $y = x^3 - 2x^2$ тангентата е:

а) паралелна на правата $y = 4x + 14$;

б) паралелна со симетралата на првиот квадрант.

Задача 126. Најди ги равенките на тангента и нормала на кривата $y = \cos^2 x$ во точката со апциса $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 127. Најди ги равенките на тангента и нормала на кривата $y = \sin^2 x$ во точката со апциса $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 128. Најди ги равенките на тангента и нормала на кривата $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ во точката со апциса $x = 1$.

Задача 129. Најди ги равенките на тангента и нормала на кривата $y = \dfrac{x-a}{2a - x^2}$ во точката со апциса $x = a$.

Задача 130. Најди ги равенките на тангента и нормала на кривата $y = -x^2 + 5x - 6$ во пресечните точки на кривата со координатните оски.

Примена на изводи кај идентитети

Задача 131. Да се покаже дека функцијата $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ ја задоволува релацијата $y''' - 13y' - 12y = 0$.

Задача 132. Да се покаже дека функцијата $y=\cos e^{x}+\sin e^{x}$ ја задоволува релацијата $y''-y'-ye^{2x}=0$.

Задача 133. Да се покаже дека функцијата $y=\sqrt{2x-x^{2}}$ ја задоволува релацијата $y^{3}y''+1=0$.

Задача 134. Да се покаже дека функцијата $y=\frac{x-3}{x+4}$ ја задоволува релацијата $2(y')^{2}=(y-1)y''$.

Задача 135. Да се покаже дека функцијата $y=e^{-x}\sin x$ ја задоволува релацијата $y''+2y'+2y=0$.

Задача 136. Да се покаже дека функцијата $y=e^{\arcsin x}$ ја задоволува релацијата $(1-x^{2})y''-xy'-y=0$.

Задача 137. Да се покаже дека функцијата $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ ја задоволува релацијата $xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0$.

Задача 138. Докажи дека функцијата зададена параметарски $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\sin 4t \end{cases}$ ја задоволува равенката $(1-x^{2})y''-xy'+16y=0$.

Задача 139. Докажи дека функцијата зададена параметарски $\begin{cases} x=3t-t^{3} \\ y=3t^{2} \end{cases}$ ја задоволува равенката $36y''(y-\sqrt{3})=x+3$.

Задача 140. Покажи дека функцијата $y=\frac{1}{2}x^{2}e^{x}$ ја задоволува равенката $y''-2y'+y=e^{x}$.

Задача 141. Да се докаже дека функцијата $y=4e^{-x}+5xe^{-x}$ ја задоволува диференцијалната равенка $y''+2y'+y=0$.

Задача 142. Покажи дека функцијата $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}}$ ја задоволува диференцијалната равенка $(1-x^{2})y'-xy=1$.

Задача 143. Покажи дека функцијата $y=\ln\frac{1}{1+x}$ ја задоволува релацијата $xy'+1=e^{y}$.

Задача 144. Да се докаже дека функцијата $y=\sin(2\arcsin x)$ ја задоволува релацијата $(1-x^{2})y''-xy'+4y=0$.

Скицирање графици на дробно-рационални функции

Во задачите 145 - 174 испитај го текот и скицирај го графикот на функциите.

Задача 145. $y=\dfrac{x^2+1}{x-5}$.

Задача 146. $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Задача 147. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

Задача 148. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

Задача 149. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

Задача 150. $y=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

Задача 151. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

Задача 152. $y=\dfrac{2+x^2}{4-x}$.

Задача 153. $y=\dfrac{2+x^2}{4-x^2}$.

Задача 154. $y=\dfrac{3+x^2}{1-x^2}$.

Задача 155. $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$.

Задача 156. $y=\dfrac{x^2}{x^2-2}$.

Задача 157. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$.

Задача 158. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Задача 159. $y=\dfrac{3x^2-2}{x^2-1}$.

Задача 160. $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$.

Задача 161. $y=\dfrac{x^2}{x-4}$.

Задача 162. $y=\frac{x^2}{x-3}$.

Задача 163. $y=\frac{x^2}{2x-3}$.

Задача 164. $y=\frac{1}{x^2-4}$.

Задача 165. $y=\frac{2x+1}{3(x+1)^2}$.

Задача 166. $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

Задача 167. $y=\frac{(x-1)^2}{x+2}$.

Задача 168. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

Задача 169. $y=\frac{x^2}{9-x^2}$.

Задача 170. $y=\frac{x^2-4}{9-x^2}$.

Задача 171. $y=\frac{x^2-4}{1-x^2}$.

Задача 172. $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

Задача 173. $y=\frac{x^3}{1-2x}$.

Задача 174. $y=\frac{e^x}{x}$.

Интеграли. Неопределен интеграл

Во задачите 175 - 234 пресметај ги неопределените интеграли.

Задача 175. $\int\frac{dx}{x^2-2x+10}$.

Задача 176. $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.

Задача 177. $\int\frac{x^2-2}{x^2+1}dx$.

Задача 178. $\int\frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$.

Задача 179. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$.

Задача 180. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)(x-1)}$.

Задача 181. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)}$.

Задача 182. $\int \mathrm{tg}^2\, x dx$.

Задача 183. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+1}dx$.

Задача 184. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Задача 185. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

Задача 186. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

Задача 187. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

Задача 188. $\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Задача 189. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$.

Задача 190. $\int \frac{\ln x \sin(\ln x)}{x}dx$.

Задача 191. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

Задача 192. $\int x^n e^{ax}dx, n\in N, a\in \mathbf{Z}$.

Задача 193. $\int x \,\mathrm{arctg}\, x dx$.

Задача 194. $\int x^2 a^x dx, \quad a>0$.

Задача 195. $\int x\sin x^2 dx$.

Задача 196. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Задача 197. $\int e^{3x}\cos x\, dx$.

Задача 198. $\int x^3 \sin x dx$.

Задача 199. $\int e^{3x}\cos 5x\, dx$.

Задача 200. $\int x^3 e^{-x^2}dx$.

Задача 201. $\int e^x \cos 2x\, dx$.

Задача 202. $\int e^{x^2} x dx$.

Задача 203. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Задача 204. $\int e^{x^3} x^2 dx$.

Задача 205. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Задача 206. $\int \frac{xdx}{4+x^4}$.

Задача 207. $\int e^x \sin x dx$.

Задача 208. $\int x^3 e^x dx$.

Задача 209. $\int \arcsin x dx$.

Задача 210. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$.

Задача 211. $\int x \cos^2 x\, dx$.

Задача 212. $\int x \sin^2 x\, dx$.

Задача 213. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Задача 214. $\int x e^{\sqrt{x}} dx$.

Задача 215. $\int \ln^3 x\, dx$.

Задача 216. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{\cos^2 x - 1} dx$.

Задача 217. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$.

Задача 218. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

Задача 219. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Задача 220. $\int x \cos nx dx, \quad n \in \mathbf{N}$.

Задача 221. $\int \frac{xdx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

Задача 222. $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}, a,b \in \mathbf{R}$.

Задача 223. $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Задача 224. $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Задача 225. $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}$.

Задача 226. $\int x^n \ln x dx, n \neq -1$.

Задача 227. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 5)\cos^2 x}$.

Задача 228. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$.

Задача 229. $\int \frac{1}{(1-x)^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

Задача 230. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Задача 231. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Задача 232. $\int \sin \sqrt{x} dx$.

Задача 233. $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$.

Задача 234. $\int \frac{dx}{e^x \sqrt{1-e^{-2x}}}$.

Определен интеграл

Во задачите 235 - 258 пресметај ги определените интеграли.

Задача 235. $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

Задача 236. $\int_1^2 \ln^2 x dx$.

Задача 237. $\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$.

Задача 238. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

Задача 239. $\int_0^1 x e^x dx$.

Задача 240. $\int_1^2 \ln x\, dx$.

Задача 241. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x(1-x^2)}$.

Задача 242. $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Задача 243. $\int\limits_0^1 x^3 e^{-x} dx$.

Задача 244. $\int\limits_0^1 x^3 e^{x} dx$.

Задача 245. $\int\limits_1^2 x \ln x dx$.

Задача 246. $\int\limits_0^1 x \sin x dx$.

Задача 247. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

Задача 248. $\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x dx$.

Задача 249. $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

Задача 250. $\int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x dx$.

Задача 251. $\int\limits_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$.

Задача 252. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

Задача 253. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Задача 254. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$.

Задача 255. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$.

Задача 256. $\int\limits_{5}^{10} \frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Задача 257. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x} dx$.

Задача 258. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

Пресметување плоштина на рамнински лик со примена на определен интеграл

Задача 259. Да се пресмета плоштината на рамнинскиот дел ограничен со кривите $y=e^x$, $y=e^{-x}$ и $y=e$.

Задача 260. Да се пресмета плоштината на рамнинскиот дел ограничен со кривите $y=e^x$, $y=1$ и $x=1$.

Задача 261. Да се пресмета плоштината на рамнинскиот дел ограничен со кривите $y=2^x$, $y=2$ и $x=0$.

Задача 262. Да се пресмета плоштината на рамнинскиот дел ограничен со кривите $y=2x-x^2$ и правата $y=-x$.

Задача 263. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со правите $y=e, x=0$ и кривата $y=e^x$.

Задача 264. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривите $y=x^2-x$ и $y=1-4x^2$ (да се направи скица).

Задача 265. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривите $y=\frac{1}{1+x^2}$ и $y=\frac{x^2}{2}$ (да се направи скица).

Задача 266. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривите $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$ и правата $x=2$ (да се направи скица).

Задача 267. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривите $y=-3x^2$ и $y=-x^2+1$ (да се направи скица).

Задача 268. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ и x-оскта (да се направи скица).

Задача 269. Да се пресмета плоштината на ликот ограничен со кривите $y=\cos x$ и $y=-\cos x$ и правата $y=1$ (да се направи скица).

Задача 270. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со $y=x^2+x+1, x=0, x=1$ и $y=0$.

Задача 271. Направи скица и пресметај ја плоштината на ликот ограничен со параболата $y=x^2$ и правата $y=-x$.

Задача 272. Направи скица и пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите $y = x^2$ и $y = -\dfrac{x^3}{3}$.

Задача 273. Пресметај ја површината на рамнинскиот лик ограничен со кривите $y = -x^2 - 2x + 3$ и $y = x^2 - x - 2$.

Задача 274. Да се пресмета плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривите $y = 3x^2$ и $y = x^2 + 4$.

Задача 275. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик ограничен со правите: $y = x + 2, y = -x + 2$ и $y = 0$.

Задача 276. Да се пресмета плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривите $y = x^2 - 3x + 5$ и $y = -x^2 + 2x$.

Задача 277. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата $y = \ln x$ и правите $x = e$ и $y = 0$.

Задача 278. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите $y = x^2$ и $y = x^3$.

Задача 279. Да се пресмета плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривите $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$ (да се направи скица).

Задача 280. Пресметај ја површината на ликот ограничен со правите (делот со конечна плоштина): $y = 2x - 1, y = 5 - x$ и $5y + 5 = x$.

Задача 281. Пресметај ја површината на ликот ограничен со кривите (делот со конечна плоштина): $y = \dfrac{1}{x}$, $y = x$ и $x = 2$.

Задача 282. Пресметај ја површината на ликот ограничен со кривите (делот со конечна плоштина): $y = x^2$ и $y^2 = x$.

Задача 283. Пресметај ја плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривите $y = x^2$ и $y = 3x^2 - 2$. Направи скица.

Задача 284. Пресметај ја површината на ликот ограничен со кривата $y = x(x-1)^2$ и апцисата.

Задача 285. Да се пресмета плоштината на рамнинскиот лик ограничен со кривите $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и правата $y = 3$.

Задача 286. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 6x$.

Задача 287. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата $r = 1 - \sin\varphi$ дадена со поларни координати (φ, r).

Задача 288. Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривата $r = 1 + \cos\varphi$ дадена со поларни координати (φ, r).

Пресметување должина на лак на крива со примена на определен интеграл

Задача 289. Да се пресмета должината на кружница со радиус *r*.

Задача 290. Пресметај ја должината на елипсата $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ со определен интеграл.

Задача 291. Пресметај ја должината на кривата $y=\sqrt{x^3}$ од точката со апциса $x=a$ до точка со апциса $x=b$, каде што $0\le a<b$.

Задача 292. Пресметај ја должината на кривата $y=\ln x$ од точката до апциса $x_1=\sqrt{5}$ до точката со апциса $x_2=\sqrt{10}$.

Задача 293. Да се пресмета должината на лакот на кривата $y=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\ln x\right)$ од $x_1=1$ до $x_2=e$.

Задача 294. Да се пресмета должината на лакот на кривата $\begin{cases} x=R(\cos t+t\sin t) \\ y=R(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ од $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Задача 295. Да се пресмета должината на лакот на кривата $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ од $t_1=0$ до $t_2=2\pi$.

Задача 296. Да се пресмета должината на лакот на астроидата $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}, 0\le t\le 2\pi$.

Задача 297. Да се пресмета должината на лакот на кривата $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ од $x_1=1$ до $x_2=2$.

Задача 298. Да се пресмета должината на лакот на астроидата $r=a(1+\cos\varphi), a>0$.

Задача 299. Да се пресмета должината на лакот на кривата $r=a\cos\varphi, a>0$.

Задача 300. Да се пресмета должината на лакот на кривата $r=a\sin\varphi, a>0$.

****

Задача 301. Да се пресмета приближната вредност на $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

Задача 302. Да се најдат асимптотите на функциите:

а) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-1}$;   б) $f(x)=\frac{x^3-27}{x^2+3}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Шекутковски. *Математичка анализа 1. Низи, функции, лимеси, изводи, интеграли (II издание)*, Просветно дело АД, Скопје, 2008;

[2] G. N. Berman. *Zbirka zadataka iz matematičke analize,* Naučna knjiga, Beograd, 1974;

[3] B. P. Demidovič. *Zbornik zadač i uprežеnia po matematičeskomu analizu* (ruski), Nauka, Moskva, 1969;

[4] Л.Д. Кудрявцев. *Курс математического анализа, I*. Высшая школа, Москва, 1981;

[5] S. Kurepa. *Uvod u matematiku, Skupovi – strukture – brojevi*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1975;

[6] S. Kurepa. *Matematička analiza*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1984;

[7] И.И. Ляшко, А.К. Боячук, Я.Г. Гай, А.Ф. Калайда. *Математический анализ, I*. Вища школа, Киев, 1983;

[8] P. Miličić, M. Ušćumlić. *Zbirka zadataka iz više matematike I*, Naučna knjiga, Beograd, 1985;

[9] С.М. Николский. *Курс математического анализа, I*. Наука, Москва, 1975.