



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје  
Факултет за електротехника и информациски  
технологии - Скопје



**ЕЛИЗАБЕТА ЛАЗАРЕВСКА  
ВЕСНА ОЈЛЕСКА ЛАТКОСКА**

# **ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД ОБЛАСТА НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ**



**Скопје, 2016**

Автор

Д-р Елизабета Лазаревска, редовен професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

Д-р Весна Ојлеска Латкоска, доцент на факултетот за електротехника и информациски технологии - Скопје

Наслов

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД ОБЛАСТА НА ЛИНЕАРНИТЕ ДИСКРЕТНИ  
ДИНАМИЧКИ СИСТЕМИ

Рецензенти

Д-р Татјана Колемишевска – Гугуловска, редовен професор на Факултетот за електротехника и информатички технологии – Скопје (во пензија)

Д-р Стојче Дескоски, редовен професор на Техничкиот факултет во Битола (во пензија)

Издавач

Универзитет Свети Кирил и Методиј – Скопје

Електронско издание

# **СОДРЖИНА**

## **ПРЕДГОВОР**

<b>1. ДИСКРЕТНИ СИГНАЛИ И СИСТЕМИ</b>	<b>1</b>
<b>2. Z-ТРАНСФОРМАЦИЈА И НЕЈЗИНИ ОСОБИНИ</b>	<b>29</b>
<b>3. АНАЛИЗА НА ЛИНЕАРНИ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ</b>	<b>77</b>
<b>4. СТАБИЛНОСТ НА ЛИНЕАРНИ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ</b>	<b>145</b>
<b>5. ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ</b>	<b>229</b>
<b>5. ПРИЛОЗИ</b>	<b>281</b>
<b>6. ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>287</b>

## ПРЕДГОВОР

Книгата е подготвена како учебно помагало за предметот Теорија на автоматско управување 2, кој се слуша во IV семестар на додипломските студии на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, на насоката компјутерско системско инженерство, автоматика и роботика. Сообразно со тоа, таа го покрива целокупното градиво што во моментот е опфатено со споменатиот предмет. Меѓутоа, книгата може да им послужи корисно на сите останати инженери, кои се интересираат за дискретните системи или работат на ова подрачје.

Материјалот изложен во збирката е поделен во 5 целини: 1. Дискретни сигнали и системи, 2.  $Z$  – трансформацијата и нејзините особини, 3. Анализа на линеарните дискретни динамички системи, 4. Стабилност на линеарните дискретни динамички системи и 5. Дискретни системи во просторот на состојби. Првиот дел низ решени примери ги обработува основните поими врзани за дискретните динамички системи, кои се однесуваат на нивната дефиниција и начинот на претставување. Во вториот дел, повторно преку соодветни решени примери, се изложени основите на најчесто користениот математички апарат за анализа на дискретните системи, а тоа е директната и инверзната  $Z$  – трансформација со нивните особини. Третиот дел ги илустрира најбитните карактеристики на линеарните динамички системи, како во временско така и во фреквентно подрачје, и постапките за нивна анализа, повторно преку соодветно одбрани и решени примери. Четвртиот дел е посветен на фундаменталното прашање во теоријата на дискретните динамички системи, а тоа е прашањето за нивната стабилност. Прашањето за стабилноста на дискретните динамички системи е фундаментално, зошто во теоријата на автоматско управување нестабилен систем е неупотреблив систем. Одбраните решени примери во овој дел целосно ги илустрираат главните постапки за испитување на стабилноста на линеарните дискретни динамички системи и одредувањето на параметарските области на стабилност на истите. Конечно, петиот дел ги илустрира постапките за претставување и анализа на дискретните системи во просторот на состојби преку соодветно одбрани задачи. Секоја целина се состои од комплетно решени задачи, од кои најголемиот дел претставуваат испитни задачи по соодветниот предмет, а на почетокот од секоја целина е даден кус преглед на најважните поими, дефиниции, теореми, постапки и/или критериуми од соодветното подрачје во теоријата на дискретните динамички системи. На крајот од Збирката се дадени неколку корисни прилози, кои се состојат од таблица на особини на  $Z$  – трансформацијата, таблица на најчесто употребуваниите  $Z$  – трансформациони парови и правилата за дискретно еквивалентирање на континуални системи.

Авторот најискрено им се заблагодарува на рецензентите за нивните корисни забелешки и совети кои допринесоа кон подобрувањето на квалитетот на овој труд.

Авторот,

Скопје, мај 2016

*"I find that the harder I work, the more luck I seem to have. "*  
*- Thomas Jefferson (1743-1826)*

“Колку повеќе се трудам во она што го работам, толку повеќе ме служи среќата во тоа.“ – Томас Џеферсон (1743-1826)

Книгата е посветена на моите синови,

Елизабета Лазаревска



# 1. ДИСКРЕТНИ СИГНАЛИ И СИСТЕМИ

Независно променливата  $t_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), која може да поприма само конечен или преброиво бесконечен број вредности од даден интервал  $(a, b)$ , се нарекува **дискретна независно променлива**. Во специјален случај, точките  $t_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) се еквилистантни и тогаш можат да се претстават на следниот начин:

$$(1.1) \quad t_k = kT \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Зависно променливата, која е функција од дискретната независно променлива  $t_k = kT$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), го претставува следното множество дискретни вредности:

$$(1.2) \quad \{\dots, f(-kT), \dots, f(-2T), f(-T), f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots, f(kT), \dots\}$$

и се означува како  $f(kT)$ . Во теоријата на дискретните системи таа се нарекува **дискретен сигнал**.

**Левите конечни разлики** односно **диференции** за еден дискретен сигнал  $f(kT)$  се дефинираат на следниот начин:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \nabla f(k) &= f(k) - f(k-1) \\ \nabla^2 f(k) &= \nabla[\nabla f(k)] = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \nabla^n f(k) &= \nabla[\nabla^{n-1} f(k)] = \nabla^{n-1} f(k) - \nabla^{n-1} f(k-1) \end{aligned}$$

додека неговите **десни конечни разлики или диференции** се дадени со изразите:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \Delta f(k) &= f(k+1) - f(k) \\ \Delta^2 f(k) &= \Delta[\Delta f(k)] = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Delta^n f(k) &= \Delta[\Delta^{n-1} f(k)] = \Delta^{n-1} f(k+1) - \Delta^{n-1} f(k) \end{aligned}$$

Дискретните сигнали во праксата најчесто се добиваат по пат на **дискретизација по време** на континуалните сигнали. Оваа дискретизација се врши со уред кој вообичаено се нарекува **дискретизатор по време**. Дискретизацијата во општ случај може да биде неуниформна, но во праксата најчеста се применува тн. **униформна дискретизација**. Тогаш дискретизаторот по време може симболично да се прикаже со прекинувач, кој

мигновено се затвора секои  $T$ sec. и на својот излез генерира поворка од дискретни вредности  $\{f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots, f(kT), \dots\}$  на влезниот континуален сигнал  $f(t)$ .

Системи, чии што сигнали се сите дискретни, се нарекуваат **дискретни системи**. Математичкиот модел на еден дискретен динамички систем е **диферентна равенка**. За линеарен стационарен дискретен динамички систем од  $n$ -ти ред, со влез  $y(kT)$  и излез  $x(kT)$ , тоа е линеарна диферентна равенка од  $n$ -ти ред со константни коефициенти од општ облик:

$$(1.5) \quad A_n \Delta^n x(kT) + A_{n-1} \Delta^{n-1} x(kT) + \dots + A_1 \Delta x(kT) + A_0 \Delta^0 x(kT) = \\ = B_m \Delta^m y(kT) + B_{m-1} \Delta^{m-1} y(kT) + \dots + B_1 \Delta y(kT) + B_0 \Delta^0 y(kT); \quad m \leq n$$

Со помош на смените (1.4), равенката (1.5) секогаш може да се доведе на следниот еквивалентен облик:

$$(1.6) \quad a_n x((k+n)T) + a_{n-1} x((k+n-1)T) + \dots + a_1 \Delta x((k+1)T) + a_0 x(kT) = \\ = b_m y((k+m)T) + b_{m-1} y((k+m-1)T) + \dots + b_1((k+1)T) + b_0 y(kT); \quad m \leq n$$

Ограничувањето  $m \leq n$  произлегува од физичката остварливост на системот.

Дефиницијата за линеарност на еден дискретен систем  $\mathcal{S}[\cdot]$  е иста како и кај континуалните системи: системот е линеарен доколку неговиот одсив  $x(kT)$  на линеарна комбинација од конечен број  $N$  влезови е истата таа линеарна комбинација од одсивите  $x_i(kT)$  на одделните влезови  $y_i(kT)$ :

$$(1.7) \quad x(kT) = \mathcal{S} \left[ \sum_{i=1}^N c_i y_i(kT) \right] = \sum_{i=1}^N c_i x_i(kT)$$

Константите  $c_i$  се произволни комплексни броеви.

Дискретниот систем е стационарен, доколку за неговиот одсив важи:

$$(1.8) \quad x(kT, mT) = \mathcal{S}[y((k-m)T)] = x((k-m)T)$$



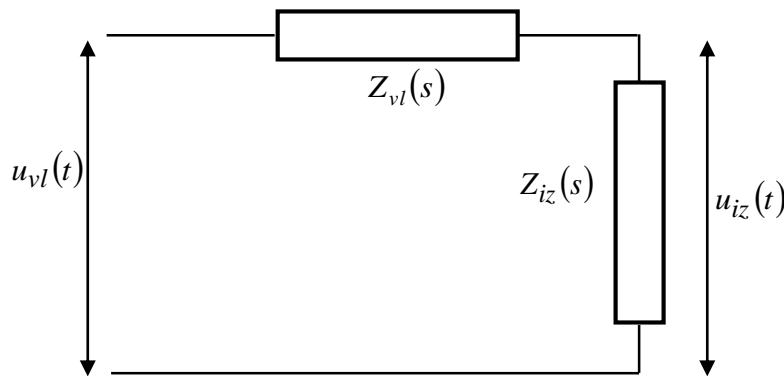


**Задача.1.1.** Да се определи кои од подолу наведените сигнали се дискретни, а кои се континуални:

- а) температурата во една индустриска печка
- б) температурата на човечкото тело
- в) температурата на еден пациент заведена во неговиот болнички лист
- г) излезниот напон на еден електричен генератор
- д) покажувањата на еден дигитален часовник
- ѓ) резултатите во текот на еден кошаркашки натпревар
- е) нивото на течност во еден резервоар со константен дотек
- ж) излезот од еден електричен гласноговорник

**Решение:** а) континуален, б) континуален, в) дискретен, г) континуален, д) дискретен, ѓ) дискретен, е) континуален, ж) континуален.

**Задача.1.2.** Дали напонскиот делител од Слика 1.1 претставува континуален или дискретен систем?



Слика 1.1. Електрично коло во функција на делител на напон

**Решение:** Очигледно, во задачата се работи за континуален електричен динамички систем, какви што се сите пасивни електрични мрежи составени само од отпорници, индуктивни елементи и кондензатори, затоа што сите сигнали во колото се дефинирани за секое време  $t \in (-\infty, \infty)$ , односно се континуални сигнали.

**Задача.1.3.** Дали радарскиот систем за следење со ротирачка антена, кој нормално прима сигнали (информации) еднаш во текот на секое завртување на антената, претставува континуален или дискретен систем?

**Решение:** Опишаниот радарски систем за следење е пример за суштински дискретен систем.

**Задача.1.4.** Каков вид систем на одлучување и оценување користи професорот при оценувањето на своите студенти на крајот од семестарот, ако оцената се заснова врз резултатите од тестовите, испитите и останатите облици на проверка на знаење?

**Решение:** Бидејќи сите информации врз основа на кои професорот ја заклучува оцената на студентот се дискретни (проверката на знаење се одвива во одредени термини), станува збор за дискретен систем.

**Задача.1.5.** Каков вид систем на управување и одлучување применува обичен купувач на берза на акции, чија основна цел е да оствари добивка од своите вложувања?

**Решение:** Купувачите односно тргувачите на берзите на акции состојбата на берзата (на пример, промената на цените на акциите), ја следат периодично. Тие можат да ги проверуваат цените на акциите и да откупуваат или продаваат акции секојдневно, еднаш неделно, еднаш месечно и сл. Заради ова периодично, а не континуално работење на берзата со акции, во примерот се работи за дискретен и тоа суштински дискретен систем, зошто промените и зделките на берзата на акции не се одвиваат непрекинато, туку прекинато, во одредени интервали.

**Задача.1.6.** Дали системот за контрола и опслужување една банкарска сметка е континуален или дискретен систем? Зошто: Да се претпостави дека на сметката има еднократно вложување на одреден износ и нема никакво подигање.

**Решение:** Ако вложениот износ на сметката не се менува заради засметувањето камата или одбивањето одредени банкарски трошоци поврзани со одржувањето и опслужувањето на сметката, системот може да се смета за континуален, зошто износот на сметката е константен и непроменлив. Меѓутоа, ако се земе предвид каматата на вложениот износ, која банките вообичаено ја пресметуваат периодично (еднаш дневно, еднаш месечно, на три месеци или еднаш годишно), тогаш системот е дискретен, бидејќи износот на сметката се менува периодично, односно во одредени дискретни интервали.

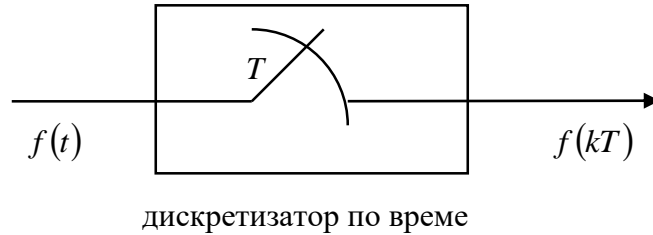
**Задача.1.7.** Влезот  $f(t)$  во еден дискретизатор по време, прикажан на Слика 1.2, е од облик:

$$(1.9) \quad f(t) = \sin(\omega t)h(t); \quad \omega = \pi \text{ rad}^{-1}$$

Каде што  $h(t)$  е единичната отскочна односно Хевисајдовата функција:

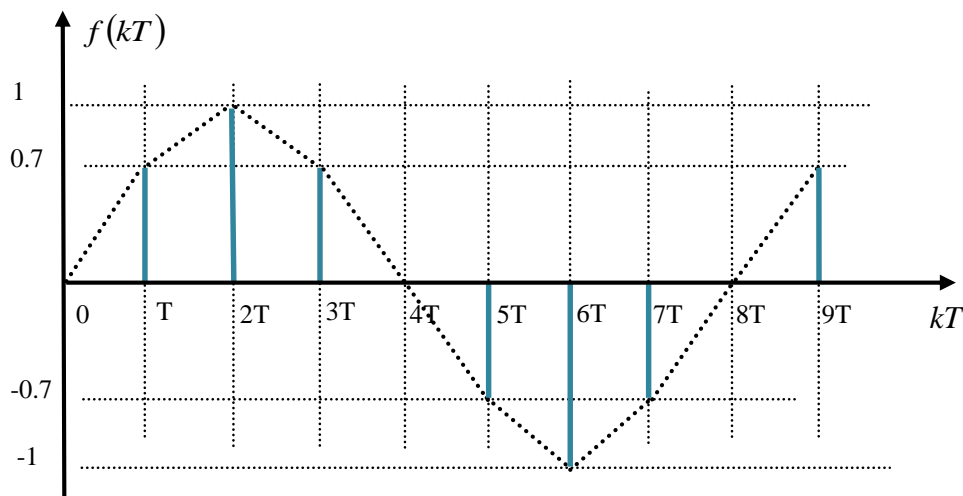
$$(1.10) \quad h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Да се прикаже графички излезот од дискретизаторот за период на дискретизација  $T = 0.25s$ .



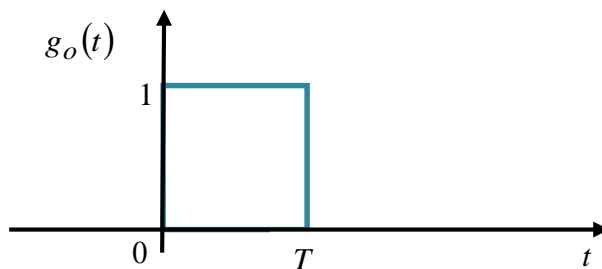
Слика 1.2. Символична претстава на идеален дискретизатор по време

**Решение:** Дискретизаторот е уред кој врши дискретизација на континуалниот сигнал доведен на неговиот влез и генерира дискретен сигнал на својот излез. Во зависност од видот на дискретизација на влезниот континуален сигнал, дискретизаторот може да биде дискретизатор по амплитуда или ниво, дискретизатор по време и дискретизатор и по ниво и по време. На Слика 1.2 симболично е претставен идеален дискретизатор по време, кој континуалниот сигнал  $f(t)$  од својот влез го претвора во дискретниот сигнал  $f(kT)$  на својот излез, така што на излезот пропушта само дискретни вредности од влезниот сигнал. Функцијата на дискретизаторот по време може да се претстави со идеален прекинувач, кој се затвора мигновено во одредени дискретни временски мигнови  $t = t_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ . Овие дискретни временски мигнови во специјален случај можат да бидат еквилистантни,  $t_k = kT (k = 0, 1, 2, \dots)$ , и тогаш станува збор за униформна дискретизација по време, при што  $T$  е позитивна реална константа, која претставува период на дискретизација. Се разбира дека реалните прекинувачи не се затвораат мигновено, туку се одликуваат со одредено, иако многу кусо, време на затворање на прекинувачот.



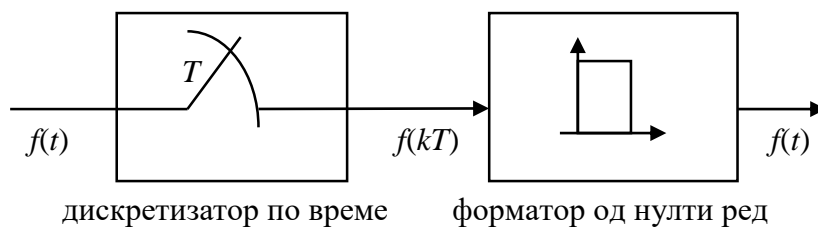
Слика 1.3. Графички приказ на излезот од идеалниот дискретизатор по време од Задача 1.7

**Задача.1.8.** Да се претпостави дека на излезот од дискретизаторот од Слика 1.2 е приклучен форматор од нулти ред, чија импулсна карактеристика има облик како што е прикажано на Слика 1.4.



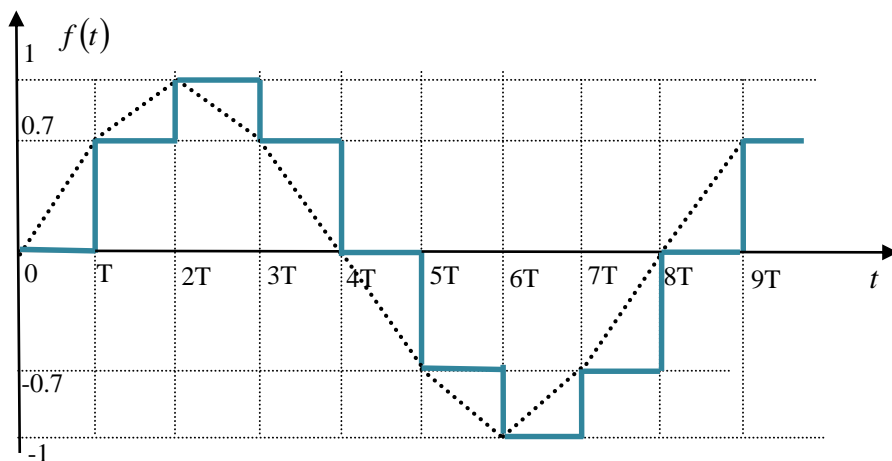
Слика 1.4. Графички приказ на импулсната карактеристика на форматор од нулти ред

Сериската врска од дискретизаторот по време и форматорот е прикажана на Слика 1.5. Да се прикаже графички излезот од форматорот.



Слика 1.5. Илустрација кон Задачата 1.8

**Решение:** Излезот од системот на Слика 1.5 е прикажан графички на Слика 1.6.



Слика 1.6. Графички приказ на излезот од форматорот од Слика 1.5

**Задача.1.9.** Да се определи аналитички дискретниот сигнал  $f(kT)$ , кој се добива со дискретизација на континуалниот сигнал  $f(t)$ :

$$(1.11) \quad f(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1-t; & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2; & 1 < t \leq 3 \\ 0; & 3 < t \end{cases}$$

ако за период на дискретизација се усвои  $T = 0.5s$ .

**Решение:** Дискретниот сигнал  $f(kT)$ , кој се добива со дискретизација на континуалниот сигнал  $f(t)$  со период на дискретизација  $T = 0.5s$ , претставува множество дискретни вредности:

$$(1.12) \quad \{f(kT)\} = \left\{ \dots, f(-1), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f\left(\frac{3}{2}\right), f(2), f\left(\frac{5}{2}\right), f(3), \dots \right\}$$

чиј елемент  $f(kT)$  е опишан со следниот аналитички израз:

$$(1.13) \quad f(kT) = \begin{cases} 0; & k < 0 \\ 1-kT; & 0 \leq k \leq 2 \\ (kT)^2; & 2 < k \leq 6 \\ 0; & 6 < k \end{cases} = \begin{cases} 0; & k < 0 \\ 1-\frac{1}{2}k; & 0 \leq k \leq 2 \\ \frac{k^2}{4}; & 2 < k \leq 6 \\ 0; & 6 < k \end{cases}$$

Меѓутоа, заради поголема едноставност во математичките записи и пресметки, дискретниот сигнал  $\{f(kT)\}$  вообичаено се претставува преку  $k$ -тиот елемент  $f(kT)$

**Задача.1.10.** Да се определи аналитички и графички дискретниот сигнал  $f(kT)$ , кој се добива со дискретизација по време на континуалниот сигнал  $f(t)$ :

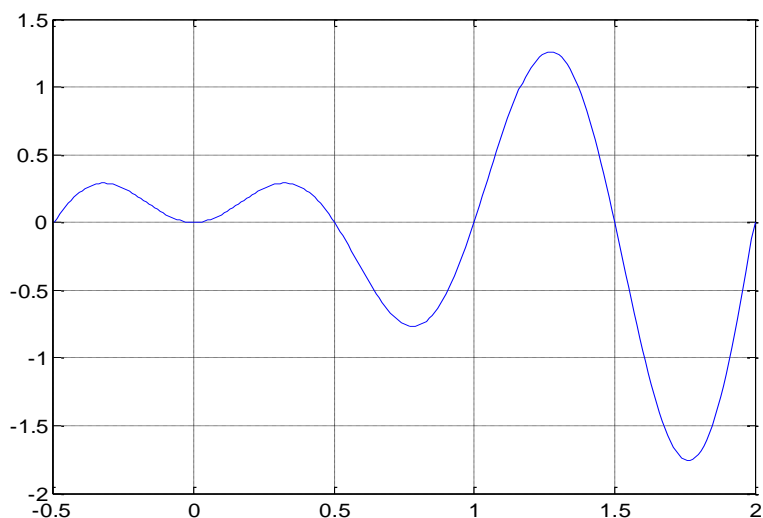
$$(1.14) \quad f(t) = \begin{cases} 0; & t < -0.5 \\ t \sin(2\pi t); & -0.5 \leq t \leq 2.0 \\ 0; & t > 2.0 \end{cases}$$

ако за период на дискретизација се усвои  $T = 0.25s$ .

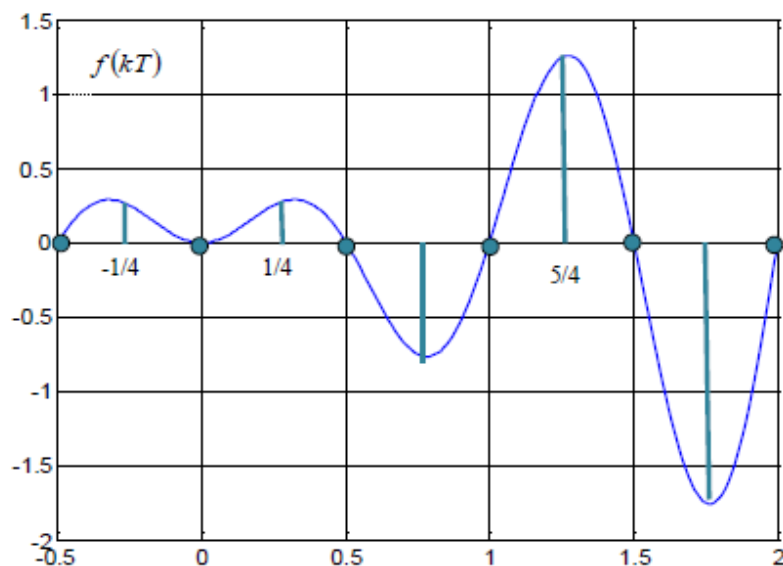
**Решение:** Континуалниот сигнал (1.14) графички е прикажан на Слика 1.7. Дискретниот еквивалент  $f(kT)$  на континуалниот сигнал  $f(t)$ , добиен при дискретизација со период на дискретизација  $T = 0.25s$ , е прикажан графички на Слика 1.8, и тој се состои од множеството дискретни вредности:

$$(1.15) \quad \{f(kT)\} = \{\dots, f(-2T), f(-T), f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots\}$$

$$\begin{aligned}
 & f(4T), f(5T), f(6T), f(7T), f(8T), \dots \} = \\
 = & \left\{ \dots, f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{4}\right), f(0), f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{4}\right), f(1), \right. \\
 & \left. f\left(\frac{5}{4}\right), f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{7}{4}\right), f(2), \dots \right\}
 \end{aligned}$$



Слика 1.7. Графички приказ на континуалниот сигнал (1.14)



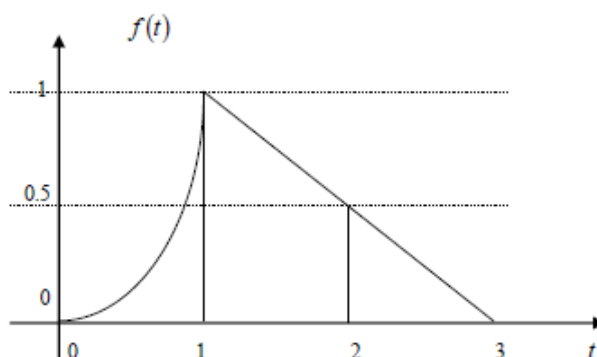
Слика 1.8. Дискретен еквивалент на континуалниот сигнал (1.14) за  $T = 0.25s$ .

**Задача.1.11.** Да се определи соодветниот дискретен сигнал  $f(kT)$ , добиен со дискретизација на континуалниот сигнал  $f(t)$ , кој е аналитички опишан со изразот:

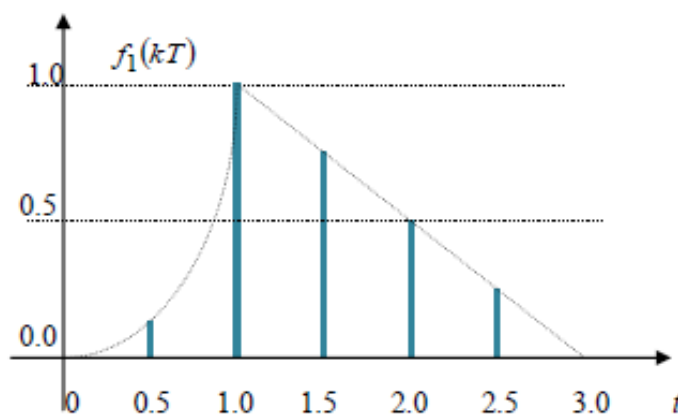
$$(1.16) \quad f(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ t^3; & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t; & 1 \leq t \leq 3 \\ 0; & t > 3 \end{cases}$$

ако за период на дискретизација се усвои: а)  $T = 0.5s$ . и б)  $T = 0.33s$ .

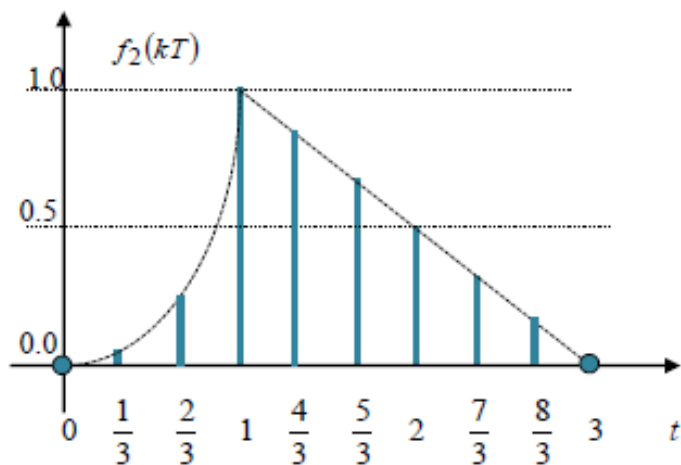
**Решение:** Континуалниот сигнал (1.16) графички е прикажан на Слика 1.9, а неговите дискретни еквиваленти за дадените вредности на  $T$  се прикажани на Слика 1.10 и Слика 1.11.



Слика 1.9. Графички приказ на континуалниот сигнал  $f(t)$  зададен со (1.16)



Слика 1.10. Графички приказ на дискретниот сигнал  $f_1(kT) = f(0.5k)$  со период  $T = 0.5s$ .



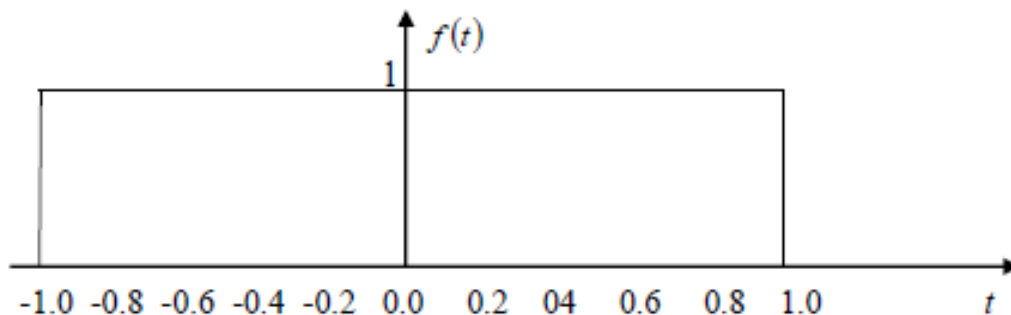
Слика 1.11. Дискретниот сигнал  $f_2(kT) = f(0.33k)$  со  $T = 0.33s$ .

**Задача.1.12.** Графички да се прикаже дискретниот сигнал добиен со униформна дискретизација на континуалниот сигнал:

$$(1.17) \quad f(t) = \begin{cases} 0; & t < -1 \\ 1; & -1 \leq t \leq 1 \\ 0; & 1 < t \end{cases}$$

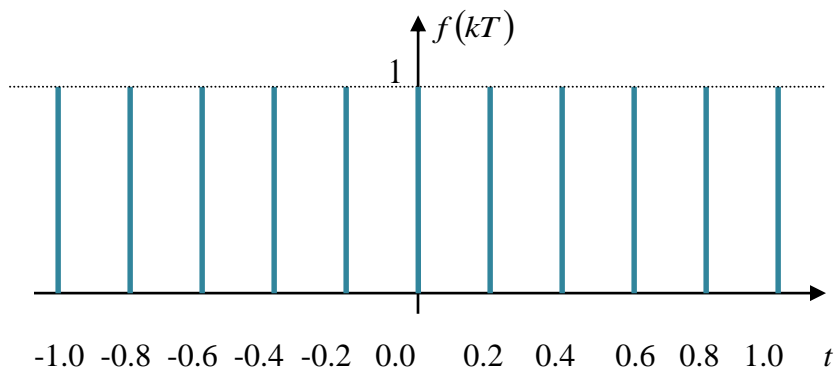
ако за период на дискретизација се усвои: а)  $T = 0.2s$ . и б)  $T = 0.45s$ . Како и зошто се разликуваат добиените резултати под а) и б)?

**Решение:** Континуалниот сигнал (1.17) графички е прикажан на Слика 1.12, а бараниот дискретен сигнал, добиен за двете различни вредности на периодот на дискретизација, е прикажан графички на Слика 1.13 и Слика 1.14, соодветно.

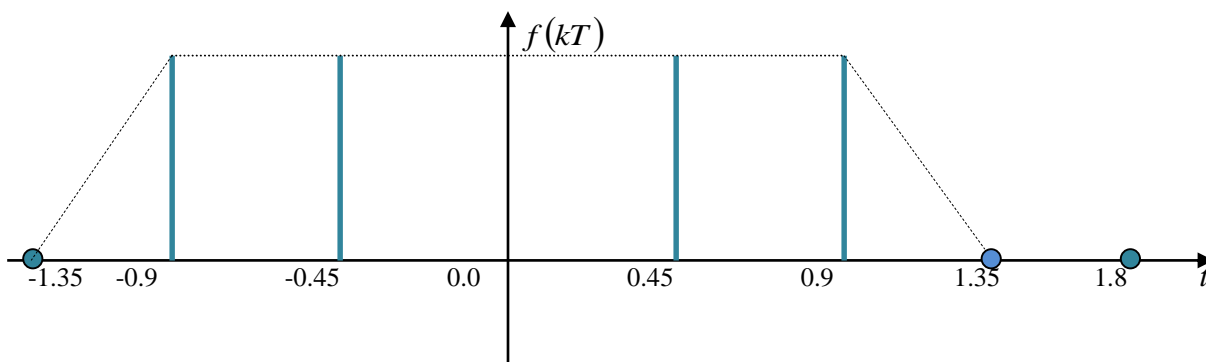


Слика 1.12. Графички приказ на континуалниот сигнал (1.17)





Слика 1.13. Дискретниот сигнал добиен со дискретизација на (1.17) со  $T = 0.2s$ .



Слика 1.14. Дискретен сигнал добиен со дискретизација на (1.17) со  $T = 0.45s$ .

Од граfiците на Слика 1.13 и Слика 1.14 лесно се забележува дека при мал период на дискретизација, дискретниот сигнал е многу близок до изворниот континуален сигнал и ја зачувува скоро сета информација што ја носи во себе континуалниот сигнал пред дискретизацијата. Меѓутоа, со зголемувањето на периодот на дискретизација  $T$ , се губи сè поголем дел од информацијата што ја носи во себе изворниот континуален сигнал.

**Задача.1.13.** Аналитички да се определи и графички да се прикаже дискретниот сигнал  $f(kT)$ , генериран со униформно дискретизирање на континуалниот сигнал  $f(t)$ :

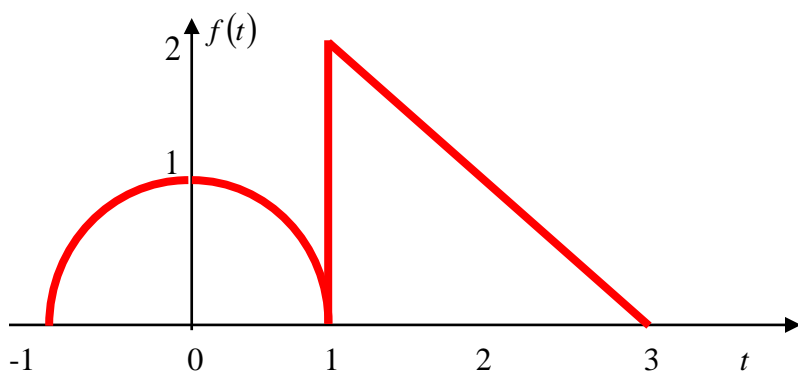
$$(1.18) \quad f(t) = \begin{cases} 0; & t < -1 \\ 1-t^2; & -1 \leq t < 1 \\ 3-t; & 1 \leq t \leq 3 \\ 0; & t > 3 \end{cases}$$

со период на дискретизација: а)  $T = 0.5s$ , б)  $T = 1.0s$  и в)  $T = 4.0s$ . Кој е најсоодветен избор на периодот на дискретизација  $T$  во наведените случаи под а), б) и в)?

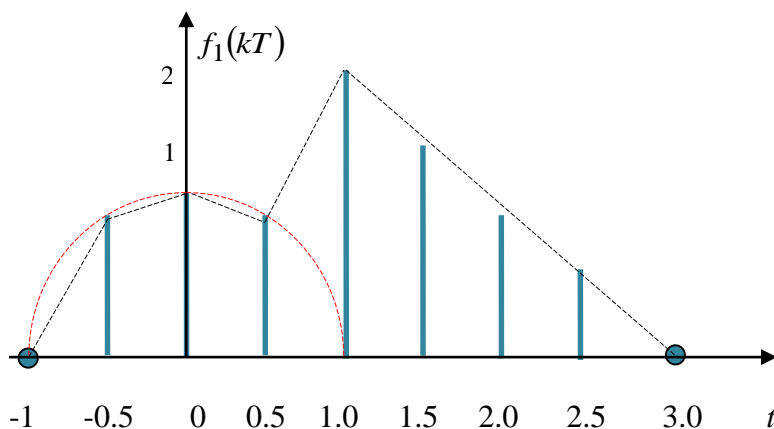
**Решение:** Континуалниот сигнал  $f(t)$ , аналитички зададен со изразот (1.18), графички е прикажан на Слика 1.15. Дискретниот сигнал  $f(kT)$ , што се добива со дискретизација на континуалниот сигнал  $f(t)$ , аналитички е опишан со изразот:

$$(1.19) \quad f(kT) = \begin{cases} 0; & kT < -1 \\ 1 - (kT)^2; & -1 \leq kT < 1 \\ 3 - kT; & 1 \leq kT \leq 3 \\ 0; & kT > 3 \end{cases}$$

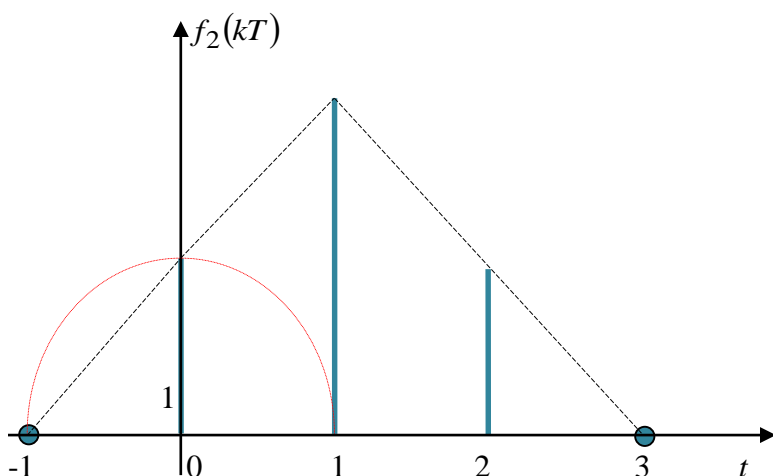
и графички е прикажан за трите зададени вредности на периодот на дискретизација  $T$  на Слика 1.16, Слика 1.17 и Слика 1.18, соодветно.



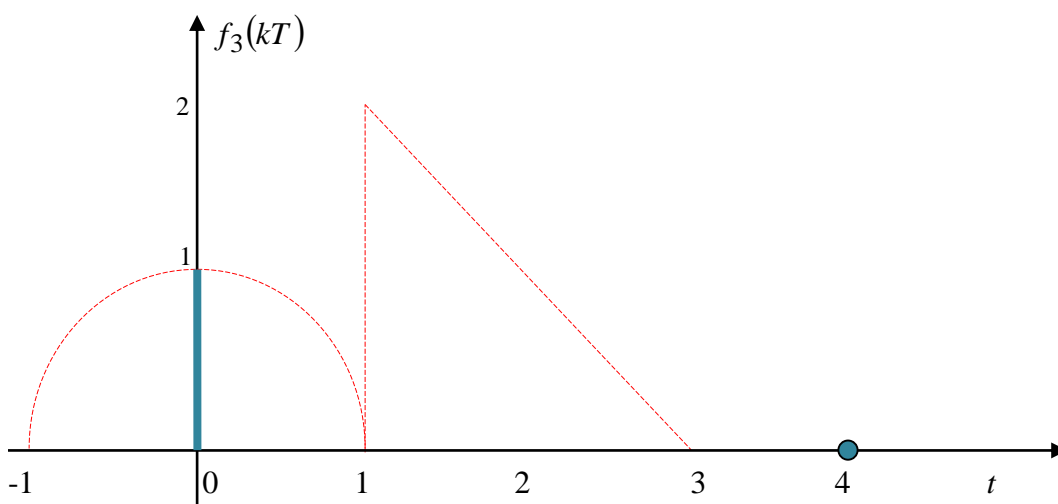
Слика 1.15. Графички приказ на континуалниот сигнал (1.18)



Слика 1.16. Графички приказ на сигналот (1.18) по дискретизацијата со  $T = 0.5s$ .



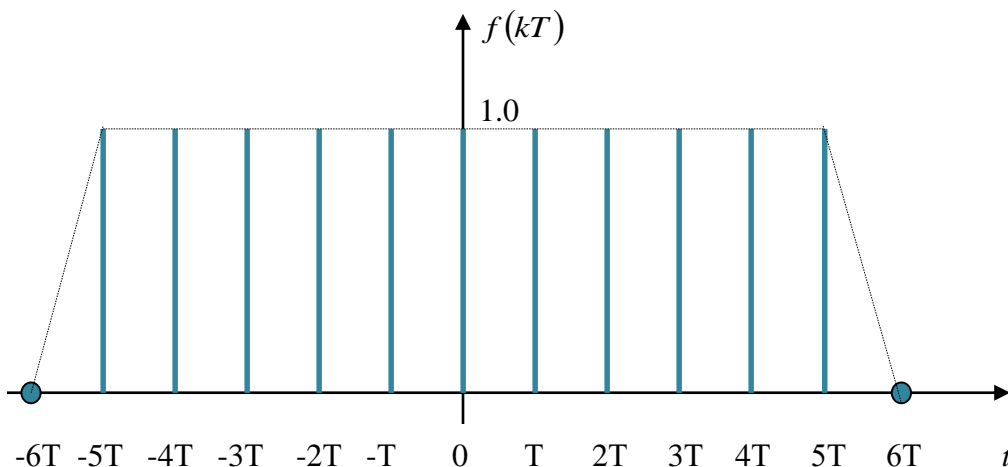
Слика 1.17. Графички приказ на сигналот (1.18) дискретизиран со  $T = 1.0s$ .



Слика 1.18. Графички приказ на сигналот (1.18) дискретизиран со  $T = 4.0s$ .

Од прикажаните графици очигледно дека најсоодветен избор за  $T$  е  $T = 0.5s$ , додека за  $T = 4.0s$  сосема е изгубена информацијата што во себе ја носи континуалниот сигнал (1.18), зошто добиениот дискретен сигнал  $f_3(kT) = f(4k) \equiv 0$  за секое  $k \neq 0$  и  $f_3(kT) = f(4k) = 1$  за  $k = 0$ .

**Задача.1.14.** Да се определат првата и втората десна конечна разлика на дискретниот сигнал  $f(kT)$ , прикажан графички на Слика 1.19, ако  $T = 0.2s$ .



Слика 1.19. Илустрација кон Задача 1.14

**Решение:** Дискретниот сигнал  $f(kT)$  од Слика 1.19 е опишан со следниот аналитички израз:

$$(1.20) \quad f(kT) = \begin{cases} 0; & k < -5 \\ 1; & -5 \leq k \leq 5 \\ 0; & 5 < k \end{cases}$$

и е претставен со множеството дискретни вредности:

$$(1.21) \quad \{f(kT)\} = \{\dots, f(-5T), f(-4T), f(-3T), f(-2T), f(-T), f(0), f(T), f(2T), f(3T), f(4T), f(5T), \dots\} = \{\dots, f(-1.0), f(-0.8), f(-0.6), f(-0.4), f(-0.2), f(0), f(0.2), f(0.4), f(0.6), f(0.8), f(1.0), \dots\}$$

Првата и втората десна конечна разлика на еден дискретен оригинал  $f(kT)$  се дефинирани на следниот начин:

$$(1.22) \quad \Delta f(kT) = f(kT + T) - f(kT)$$

$$(1.23) \quad \Delta^2 f(kT) = \Delta[\Delta f(kT)] = f(kT + 2T) - 2f(kT + T) + f(kT)$$

па, оттука, за  $f(kT)$  зададен со (1.20), се добива:

$$\begin{aligned}
 (1.24) \quad \Delta f(kT) &= f(kT+T) - f(kT) \equiv 0, \quad k < -6 \\
 \Delta f(kT) &= f(kT+T) - f(kT) = 1, \quad k = -6 \\
 \Delta f(kT) &= f(kT+T) - f(kT) \equiv 0, \quad -5 \leq k < 5 \\
 \Delta f(kT) &= f(kT+T) - f(kT) = -1, \quad k = 5 \\
 \Delta f(kT) &= f(kT+T) - f(kT) \equiv 0, \quad k > 5
 \end{aligned}$$

Имено:

$$\begin{aligned}
 (1.25) \quad f(-6T) - f(-7T) &= 0 - 0 = 0 \\
 f(-5T) - f(-6T) &= 1 - 0 = 1 \\
 f(-4T) - f(-5T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(-3T) - f(-4T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(-2T) - f(-3T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(-T) - f(-2T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(0) - f(-T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(T) - f(0) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(2T) - f(T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(3T) - f(2T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(4T) - f(3T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(5T) - f(4T) &= 1 - 1 = 0 \\
 f(6T) - f(5T) &= 0 - 1 = -1 \\
 f(7T) - f(6T) &= 0 - 0 = 0 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

На сличен начин, врз основа на дефиницијата (1.23), за вторите десни конечни разлики на дискретниот оригинал (1.20) се добива:

$$\begin{aligned}
 (1.26) \quad \Delta^2 f(kT) &= \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) \equiv 0 \vee k < -7 \\
 \Delta^2 f(kT) &= \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = 1, \quad k = -7 \\
 \Delta^2 f(kT) &= \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = -1, \quad k = -6 \\
 \Delta^2 f(kT) &= \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) \equiv 0 \vee k \in \langle -5, 3 \rangle \\
 \Delta^2 f(kT) &= \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = -1, \quad k = 4 \\
 \Delta^2 f(kT) &= \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) = 1, \quad k = 5 \\
 \Delta^2 f(kT) &= \Delta f(kT+T) - \Delta f(kT) \equiv 0 \vee k > 5
 \end{aligned}$$

**Задача.1.15.** Дискретниот сигнал  $f(kT)$  е опишан со следниот аналитички израз:

$$(1.27) \quad f(kT) = 5, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и го претставува множеството дискретни вредности:

$$(1.28) \quad \{f(kT)\} = \{\dots, f(-2T), f(-T), f(0), f(T), f(2T), \dots\} = \{\dots, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

Да се определат неговите десни конечни разлики од прв и втор ред.

**Решение:** Бараните конечни разлики на набљудуваниот дискретен сигнал  $f(kT)$  се идентички еднакви на нула за секое  $k$ , бидејќи оригиналот (1.27) претставува константен дискретен сигнал.

**Задача.1.16.** Да се определат десните и левите конечни разлики од прв и втор ред на дискретниот сигнал  $f(k)$ , опишан со следниот аналитички израз:

$$(1.29) \quad f(k) = 5k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Решение:** Набљудуваниот дискретен сигнал го претставува множеството дискретни вредности:

$$(1.30) \quad \{f(k)\} = \{\dots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), \dots\} = \\ = \{\dots, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$$

Следствено, неговите конечни разлики од прв ред ќе изнесуваат:

$$(1.31) \quad \Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = 5 \vee k \\ \nabla f(k) = f(k) - f(k-1) = 5 \vee k$$

додека конечните разлики од втор ред се нулеви:

$$(1.32) \quad \Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) \equiv 0 \vee k \\ \nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) \equiv 0 \vee k$$

**Задача.1.17.** Да се определат десните и левите конечни разлики од прв и втор ред на дискретниот каузален сигнал  $f(kT)$ ,  $T = 1s.$ , опишан со аналитичкиот израз:

$$(1.33) \quad f(k) = a^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad a = const. \in \mathfrak{R}$$

**Решение:** Во специјален случај, за еден дискретен оригинал може да се определи аналитички израз за конечните разлики од произволен ред. Така, во конкретниот случај се добива:

$$(1.34) \quad \Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = a^{k+1} - a^k = a^k(a-1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \nabla f(k) = f(k) - f(k-1) = a^k - a^{k-1} = a^{k-1}(a-1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) = a^{k+1}(a-1) - a^k(a-1) = a^k(a-1)^2, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) = a^{k-1}(a-1) - a^{k-2}(a-1) = a^{k-2}(a-1)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача.1.18.** Да се определат првата и втората десна конечна разлика на дискретните сигнали од Слика 1.16 и Слика 1.17.

**Решение:** Дискретниот сигнал од Слика 1.16 е опишан аналитички со изразот (1.19) за  $T = 0.5s$  :

$$(1.35) \quad f(kT) = \begin{cases} 0; & kT < -1 \\ 1 - (kT)^2; & -1 \leq kT < 1 \\ 3 - kT; & 1 \leq kT \leq 3 \\ 0; & kT > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0; & k < -2 \\ 1 - \frac{k^2}{4}; & -2 \leq k < 2 \\ 3 - \frac{k}{2}; & 2 \leq k \leq 6 \\ 0; & k > 6 \end{cases}$$

па за неговите десни конечни разлики од прв ред се добива:

$$(1.36) \quad \begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ k = -3: & \quad \Delta f(-3T) = f(-2T) - f(-3T) = 0 - 0 = 0 \\ k = -2: & \quad \Delta f(-2T) = f(-T) - f(-2T) = 0.75 - 0.0 = 0.75 \\ k = -1: & \quad \Delta f(-T) = f(0) - f(-T) = 1.00 - 0.75 = 0.25 \\ k = 0: & \quad \Delta f(0) = f(T) - f(0) = 0.75 - 1.00 = -0.25 \\ k = 1: & \quad \Delta f(T) = f(2T) - f(T) = 2.00 - 0.75 = 1.25 \\ k = 2: & \quad \Delta f(2T) = f(3T) - f(2T) = 1.5 - 2.0 = -0.5 \\ k = 3: & \quad \Delta f(3T) = f(4T) - f(3T) = 1.0 - 1.5 = -0.5 \\ k = 4: & \quad \Delta f(4T) = f(5T) - f(4T) = 0.5 - 1.0 = -0.5 \\ k = 5: & \quad \Delta f(5T) = f(6T) - f(5T) = 0.0 - 0.5 = -0.5 \\ k = 6: & \quad \Delta f(6T) = f(7T) - f(6T) = 0 - 0 = 0 \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

односно:

$$(1.37) \quad \Delta f(kT) = \begin{cases} 0; & k < -2, \quad k > 5 \\ -(2k+1)T^2; & -2 \leq k \leq 0 \\ \frac{5}{2}T; & k = 1 \\ -T; & 2 \leq k \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0; & k < -2, \quad k > 5 \\ -\frac{2k+1}{4}; & -2 \leq k \leq 0 \\ 1.25; & k = 1 \\ -0.5; & 2 \leq k \leq 5 \end{cases}$$

додека за вторите десни конечни разлики на дискретниот сигнал (1.35), врз основа на (1.37) и (1.23), се добива:

$$(1.38) \quad \begin{aligned} & \vdots \\ k = -4: & \quad \Delta^2 f(-4T) = \Delta f(-3T) - \Delta f(-4T) = 0 - 0 = 0 \\ k = -3: & \quad \Delta^2 f(-3T) = \Delta f(-2T) - \Delta f(-3T) = 0.75 - 0 = 0.75 \\ k = -2: & \quad \Delta^2 f(-2T) = \Delta f(-T) - \Delta f(-2T) = 0.25 - 0.75 = -0.5 \\ k = -1: & \quad \Delta^2 f(-T) = \Delta f(0) - \Delta f(-T) = -0.25 - 0.25 = -0.5 \\ k = 0: & \quad \Delta^2 f(0) = \Delta f(T) - \Delta f(0) = 1.25 + 0.25 = 1.5 \\ k = 1: & \quad \Delta^2 f(T) = \Delta f(2T) - \Delta f(T) = -0.5 - 1.25 = -1.75 \\ k = 2: & \quad \Delta^2 f(2T) = \Delta f(3T) - \Delta f(2T) = -0.5 + 0.5 = 0 \\ k = 3: & \quad \Delta^2 f(3T) = \Delta f(4T) - \Delta f(3T) = -0.5 + 0.5 = 0 \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

односно:

$$(1.39) \quad \Delta^2 f(kT) = \begin{cases} 0; & k < -3, \quad 2 \leq k \\ 0.75; & k = -3 \\ -0.5; & -2 \leq k \leq -1 \\ 1.5; & k = 0 \\ -1.75; & k = 1 \end{cases}$$

Дискретниот сигнал од Слика 1.17 е опишан со аналитичкиот израз (1.19) за  $T = 1.0s$ :

$$(1.40) \quad f(kT) = \begin{cases} 0; & k < -1 \\ 1 - (kT)^2; & -1 \leq k < 1 \\ 3 - kT; & 1 \leq k \leq 3 \\ 0; & k > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0; & k < -1 \\ 1 - k^2; & -1 \leq k < 1 \\ 3 - k; & 1 \leq k \leq 3 \\ 0; & k > 3 \end{cases}$$

па за неговите десни конечни разлики од прв ред се добива:

$$(1.41) \quad \begin{aligned} k = -1: & \quad \Delta f(-1) = f(0) - f(-1) = 1 - 0 = 1 \\ k = 0: & \quad \Delta f(0) = f(1) - f(0) = 2 - 1 = 1 \\ k = 1: & \quad \Delta f(1) = f(2) - f(1) = 1 - 2 = -1 \\ k = 2: & \quad \Delta f(2) = f(3) - f(2) = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$



За сите други вредности на  $k$  надвор од интервалот  $-1 \leq k \leq 2$ , првите десни конечни разлики на (1.40) се нулеви, односно:

$$(1.42) \quad \Delta f(k) = \begin{cases} 0; & k < -1, k > 2 \\ 1; & -1 \leq k \leq 0 \\ -1; & 1 \leq k \leq 2 \end{cases}$$

додека за вторите десни конечни разлики на дискретниот сигнал (1.40), врз основа на (1.23) и (1.42), се добива:

$$(1.43) \quad \begin{array}{l} \vdots \\ k = -3: \quad \Delta^2 f(-3) = \Delta f(-2) - \Delta f(-3) = 0 - 0 = 0 \\ k = -2: \quad \Delta^2 f(-2) = \Delta f(-1) - \Delta f(-2) = 1 - 0 = 1 \\ k = -1: \quad \Delta^2 f(-1) = \Delta f(0) - \Delta f(-1) = 1 - 1 = 0 \\ k = 0: \quad \Delta^2 f(0) = \Delta f(1) - \Delta f(0) = -1 - 1 = -2 \\ k = 1: \quad \Delta^2 f(1) = \Delta f(2) - \Delta f(1) = -1 + 1 = 0 \\ k = 2: \quad \Delta^2 f(2) = \Delta f(3) - \Delta f(2) = 0 + 1 = 1 \\ k = 3: \quad \Delta^2 f(3) = \Delta f(4) - \Delta f(3) = 0 - 0 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

односно:

$$(1.44) \quad \Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) = \begin{cases} 1; & k = \pm 2 \\ -2; & k = 0 \\ 0; & k \neq 0, \pm 2 \end{cases}$$

**Задача.1.19.** Да се определат левите и десните конечни разлики од произволен  $n$ -ти ред на дискретниот оригинал:

$$(1.45) \quad f(kT) = \begin{cases} 0; & k = -1, -2, \dots \\ a^{kT}; & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad a = \text{const.} > 0 \in \mathfrak{R}$$

**Решение:** Бараните конечни разлики на дискретниот оригинал (1.45) се:

$$(1.46) \quad \begin{array}{l} n = 1: \quad \Delta f(kT) = f(kT+T) - f(kT) = a^{(k+1)T} - a^{kT} = a^{kT}(a^T - 1); \quad k \geq 0 \\ n = 2: \quad \Delta^2 f(kT) = \Delta[\Delta f(kT)] = f(kT+2T) - 2f(kT+T) + f(kT) = \\ \quad = a^{(k+2)T} - 2a^{(k+1)T} + a^{kT} = a^{kT}(a^T - 1)^2; \quad k \geq 0 \\ n = 3: \quad \Delta^3 f(kT) = \Delta^2[\Delta f(kT)] = \Delta f(kT+2T) - 2\Delta f(kT+T) + \Delta f(kT) = \\ \quad = f(kT+3T) - 3f(kT+2T) + 3f(kT+T) - f(kT) = \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= a^{(k+3)T} - 3a^{(k+2)T} + 3a^{(k+1)T} - a^{kT} = a^{kT}(a^T - 1)^3; \quad k \geq 0 \\
 &\quad \vdots \\
 n: \quad &\Delta^n f(kT) = a^{kT}(a^T - 1)^n; \quad k \geq 0 \\
 n+1: \quad &\Delta^{n+1} f(kT) = \Delta[\Delta^n f(kT)] = \Delta^n f(kT+T) - \Delta^n f(kT) = \\
 &= a^{kT+T}(a^T - 1)^n - a^{kT}(a^T - 1)^n = \\
 &= a^{kT}(a^T - 1)^n(a^T - 1) = a^{kT}(a^T - 1)^{n+1}; \quad k \geq 0 \\
 (1.47) \quad n=1: \quad &\nabla f(kT) = f(kT) - f(kT-T) = a^{kT} - a^{kT-T} = a^{kT-T}(a^T - 1); \quad k \geq 0 \\
 n=2: \quad &\nabla^2 f(kT) = \nabla[\nabla f(kT)] = f(kT) - 2f(kT-T) + f(kT-2T) = \\
 &= a^{kT} - 2a^{(k-1)T} + a^{(k-2)T} = a^{kT-2T}(a^T - 1)^2; \quad k \geq 0 \\
 n=3: \quad &\nabla^3 f(kT) = \nabla^2[\nabla f(kT)] = \nabla f(kT) - 2\nabla f(kT-T) + \nabla f(kT-2T) = \\
 &= f(kT) - 3f(kT-T) + 3f(kT-2T) - f(kT-3T) = \\
 &= a^{kT} - 3a^{(k-1)T} + 3a^{(k-2)T} - a^{(k-3)T} = a^{kT-3T}(a^T - 1)^3; \quad k \geq 0 \\
 &\quad \vdots \\
 n: \quad &\nabla^n f(kT) = a^{kT-nT}(a^T - 1)^n; \quad k \geq 0 \\
 n+1: \quad &\nabla^{n+1} f(kT) = \nabla[\nabla^n f(kT)] = \nabla^n f(kT) - \nabla^n f(kT-T) = \\
 &= a^{kT-nT}(a^T - 1)^n - a^{(k-1)T-nT}(a^T - 1)^n = \\
 &= a^{kT-(n+1)T}(a^T - 1)^n(a^T - 1) = a^{kT-(n+1)T}(a^T - 1)^{n+1}; \quad k \geq 0
 \end{aligned}$$

**Задача.1.20.** Кои коефициенти во дадената диферентна равенка:

$$\begin{aligned}
 (1.48) \quad &a_4[x((k+3)T)]^2 + x((k+2)T)[a_2 + a_3x((k+1)T)] + \\
 &+ a_1x((k+1)T) + [a_0 + d_0(kT)^2]x(kT) = \\
 &= b_0y((k+3)T) + b_1y((k+1)T)
 \end{aligned}$$

треба да бидат еднакви на нула, за таа да претставува модел на реален линеарен и стационарен дискретен динамички систем со еден влез  $y(kT)$  и еден излез  $x(kT)$ ?

**Решение:** Ако се воведе:

$$(1.49) \quad d_0 = a_3 = a_4 = b_0 = 0$$

равенката (1.48) се трансформира во равенката:

$$(1.50) \quad a_2x((k+2)T) + a_1x((k+1)T) + a_0x(kT) = b_1y((k+1)T)$$

која што претставува линеарна диферентна равенка со константни коефициенти и како таква може да претставува модел на реален линеарен стационарен дискретен динамички систем со влез  $y(kT)$  и излез  $x(kT)$ . (Забелешка: за  $b_0 \neq 0$  равенката (1.48) не може да претставува модел на реален дискретен систем, зошто одзивот  $x(kT)$  нема да зависи само од тековната и минатите, туку и од идните вредности на влезот  $y(kT)$ , што значи ќе биде антиципативен систем – систем со можност за предвидување, а таквите системи се нереални системи.)

**Задача.1.21.** Дадена е диферентната равенка:

$$(1.51) \quad kTx((k+2)T) + x(kT) = y(kT)$$

каде што, под претпоставка,  $y(kT)$  претставува влез, а  $x(kT)$  е излез на некој дискретен систем. За каков систем станува збор?

**Решение:** Равенката (1.51) без проблем може да се претстави во следниот еквивалентен облик:

$$(1.52) \quad (k-2)Tx(kT) + x((k-2)T) = y((k-2)T)$$

Бидејќи (1.52) е диферентна равенка, очигледно се работи за модел на **дискретен** систем. Во продолжение, бидејќи тековната вредност на непознатата  $x(kT)$  зависи од мината вредност  $y((k-2)T)$  на познатата функција  $y(kT)$ , се работи за **динамички** дискретен систем **со одредена конечна меморија**, а бидејќи не зависи од идни вредности на влезот  $y(kT)$ , системот е **неантиципативен** (не поседува способност за предвидување). Ваквиот систем е **реален** (може да се реализира) и **каузален** (нема излез во отсуство на влез). Моделираниот систем е дискретен систем **со еден влез и еден излез**, зошто моделот му се состои од една диферентна равенка. Во спротивно, ако се работи за повеќевеличински дискретен систем, соодветниот модел ќе се состои од систем диферентни равенки, чиј број мора да одговара на бројот излези од повеќевеличинскиот систем. Дадената диферентна равенка е линеарна, па претставува модел на **линеарен** дискретен систем. Бидејќи коефициентот пред членот  $x(kT)$  во равенката (1.52) зависи експлицитно од независно променливата  $kT$ , што значи дека не сите коефициенти на равенката се константни броеви, следува дека таа опишува **нестационарен** дискретен систем. Конечно, редот на диферентната равенка (1.52) е два и тој одговара на редот на моделираниот дискретен систем. Следствено, дадената диферентна равенка (1.51) опишува линеарен нестационарен каузален дискретен динамички систем од втор ред со еден влез и еден излез.

**Задача.1.22.** Да се провери линеарноста на дискретниот модел:

$$(1.53) \quad x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) = y(k+1)$$

**Решение:** Нека  $x_1(k)$  е одзив на набљудуваниот систем (1.53) на влезот  $y_1(k)$ . Тогаш ќе важи:

$$(1.54) \quad x_1(k+2) - 2x_1(k+1) + x_1(k) = y_1(k+1)$$

Соодветно, ако  $x_2(k)$  е одзив на набљудуваниот систем (1.53) на влезот  $y_2(k)$ , ќе важи:

$$(1.55) \quad x_2(k+2) - 2x_2(k+1) + x_2(k) = y_2(k+1)$$

Одзивот на системот (1.53), на линеарна комбинација од влезовите  $y_1(k)$  и  $y_2(k)$  исто така се одредува од (1.53):

$$(1.56) \quad \begin{aligned} x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) &= y(k+1) \\ x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) &= c_1 y_1(k+1) + c_2 y_2(k+1) \\ x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) &= c_1 [x_1(k+2) - 2x_1(k+1) + x_1(k)] + \\ &\quad + c_2 [x_2(k+2) - 2x_2(k+1) + x_2(k)] \\ x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) &= [c_1 x_1(k+2) + c_2 x_2(k+2)] + \\ &\quad - 2[c_1 x_1(k+1) + c_2 x_2(k+1)] + [c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k)] \end{aligned}$$

Од (1.56) произлегува дека одзивот на набљудуваниот дискретен систем (1.53) на линеарна комбинација од влезови  $y(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$  е иста таква линеарна комбинација од одзивите на системот на одделните влезови:

$$(1.57) \quad x(k) = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k)$$

што значи дека системот е линеарен.

**Задача.1.23.** Да се провери линеарноста на дискретниот модел:

$$(1.58) \quad x(k) = a_1 y(k) + a_0; \quad a_0, a_1 = \text{const.} \in \mathfrak{R}$$

**Решение:** Бидејќи одзивот  $x(k)$  на набљудуваниот модел на линеарна комбинација од влезови  $y(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)$ ;  $c_1, c_2 = \text{const.}$  не е истата линеарна комбинација од одзивите на одделните влезови:

$$(1.59) \quad \begin{aligned} x(k) &= a_1 y(k) + a_0 = a_1 [c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)] + a_0 = \\ &= a_1 c_1 y_1(k) + a_1 c_2 y_2(k) + a_0 \neq a_1 c_1 y_1(k) + a_0 c_1 + a_1 c_2 y_2(k) + a_0 c_2 = \\ &= c_1 [a_1 y_1(k) + a_0] + c_2 [a_1 y_2(k) + a_0] = c_1 x_1(k) + c_2 x_2(k) \end{aligned}$$

може да се заклучи дека тој не е линеарен модел.

**Задача.1.24.** Да се испита стационарноста на линеарниот дискретен динамички систем опишан со следниот математички модел:

$$(1.60) \quad x(k) - x(k-1) = y(k)$$

**Решение:** Нека:

$$(1.61) \quad y_1(k) = y(k-n)$$

Тогаш, врз основа на (1.60) следува:

$$(1.62) \quad y_1(k) = y(k-n) = x(k-n) - x(k-n-1) = x_1(k) - x_1(k-1)$$

каде што:

$$(1.63) \quad x_1(k) = x(k-n)$$

Следствено:

$$(1.64) \quad x(k, n) = x(k-n)$$

па, може да се заклучи дека набљудуваниот дискретен систем е стационарен.

**Задача.1.25.** Нека, под претпоставка, одзивот на еден дискретен систем **S** на влезот  $y(k)$  е:

$$(1.65) \quad x(k) \equiv S[y(k)] = y(k^2)$$

каде што **S** е оператор, кој покажува како системот дејствува врз влезот  $y(k)$  за да го произведе соодветниот излез  $x(k)$ . Релацијата (1.65) значи дека одзивот на набљудуваниот систем во произволниот дискретен миг  $k$  е еднаков со влезот во мигот  $k^2$ . Да се испита стационарноста на овој систем.

**Решение:** Ако на влезот од набљудуваниот дискретен систем се доведе истиот сигнал  $y(k)$ , само задоцнет за  $n$  периоди, неговиот одзив, во согласност со (1.65) ќе биде:

$$(1.66) \quad x(k, n) \equiv S[y(k-n)] = y[(k-n)^2] = y(k^2 - 2kn + n^2) \neq y(k^2 - n) = x(k-n)$$

Следствено:

$$(1.67) \quad x(k, n) \neq x(k-n)$$

и може да се заклучи дека набљудуваниот дискретен систем не е стационарен.

**Задача.1.26.** Да се испита линеарноста и стационарноста на следните системи:

$$(1.68) \quad x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ y(k), & k \geq 0 \end{cases}$$

$$(1.69) \quad x(k) = \begin{cases} 0, & y(k) < 0 \\ y(k), & y(k) \geq 0 \end{cases}$$

**Решение:** Нека  $x_1(k)$  е одсив на набљудуваниот систем (1.68) на влезот  $y_1(k)$ . Тогаш ќе важи:

$$(1.70) \quad x_1(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ y_1(k), & k \geq 0 \end{cases}$$

Соодветно, ако  $x_2(k)$  е одсив на набљудуваниот систем (1.68) на влезот  $y_2(k)$ , ќе важи:

$$(1.71) \quad x_2(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ y_2(k), & k \geq 0 \end{cases}$$

Одсивот на системот (1.68), на линеарна комбинација од влезовите  $y_1(k)$  и  $y_2(k)$  исто така се одредува од (1.68):

$$(1.72) \quad x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ y_1(k) + y_2(k), & k \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ y_1(k), & k \geq 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & k < 0 \\ y_1(k), & k \geq 0 \end{cases}$$

и, како што лесно се забележува, претставува линеарна комбинација од одсивите (1.70) и (1.71):

$$(1.73) \quad x(k) = x_1(k) + x_2(k)$$

Следствено, системот (1.68) е линеарен. На сличен начин, за системот (1.69) важи:

$$(1.74) \quad x_1(k) = \begin{cases} 0, & y_1(k) < 0 \\ y_1(k), & y_1(k) \geq 0 \end{cases}$$

$$(1.75) \quad x_2(k) = \begin{cases} 0, & y_2(k) < 0 \\ y_2(k), & y_2(k) \geq 0 \end{cases}$$

$$(1.76) \quad x(k) = \begin{cases} 0, & y_1(k) + y_2(k) < 0 \\ y_1(k) + y_2(k), & y_1(k) + y_2(k) \geq 0 \end{cases} \neq \begin{cases} 0, & y_1(k) < 0 \\ y_1(k), & y_1(k) \geq 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & y_2(k) < 0 \\ y_2(k), & y_2(k) \geq 0 \end{cases}$$

што значи дека овој систем не е линеарен.

Системот (1.68) е нестационарен, бидејќи:

$$(1.77) \quad x(k, n) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ y(k-n), & k \geq 0 \end{cases} \neq \begin{cases} 0, & k-n < 0 \\ y(k-n), & k-n \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k < n \\ y(k-n), & k \geq n \end{cases} = x(k-n)$$

додека системот (1.69) е стационарен:

$$(1.78) \quad x(k, n) = \begin{cases} 0, & y(k-n) < 0 \\ y(k-n), & y(k-n) \geq 0 \end{cases} = x(k-n)$$

**Задача.1.27.** Да се состави математички модел на дискретен елемент кој внесува чисто доцнење во влезниот сигнал од  $m$  периоди на дискретизација  $T$ . Потоа, врз основа на добиениот модел, да се испита дали набљудуваниот елемент е: а) линеарен, б) каузален, в) стационарен и г) дали поседува меморија.

**Решение:** Фактот дека набљудуваниот дискретен елемент внесува чисто доцнење во влезниот сигнал од  $m$  периоди на дискретизација  $T$  значи дека тој ниту го засилува ниту го слабее влезниот сигнал, туку само го задоцнува за даденото време. Следствено, одзивот на ваков елемент е претставен со релацијата:

$$(1.79) \quad x(kT) = y((k-m)T)$$

(а) Врз основа на дефиницијата за линеарност, се добива:

$$(1.80) \quad \begin{aligned} x_1(kT) &= y_1((k-m)T) \\ x_2(kT) &= y_2((k-m)T) \\ x(kT) &= y((k-m)T) = c_1 y_1((k-m)T) + c_2 y_2((k-m)T) \\ x(kT) &= c_1 x_1(kT) + c_2 x_2(kT) \end{aligned}$$

Следствено, може да се заклучи дека набљудуваниот дискретен елемент е линеарен.

(б) Бидејќи одзивот на набљудуваниот дискретен систем не зависи од идни вредности на влезот, тој е каузален систем.

(в) Ако со  $x_1(kT)$  се означи одсивот на набљудуваниот систем на влезот  $y_1(kT) = y((k-n)T)$ , тогаш од дефиницијата за стационарност непосредно следува:

$$(1.81) \quad x_1(kT) = y_1((k-m)T) = y((k-m-n)T) = x((k-n)T)$$

Следствено, набљудуваниот систем е стационарен.

(г) Бидејќи одсивот на набљудуваниот дискретен систем во произволен миг  $k$  зависи од мината вредност на влезот во мигот  $k-m$ , тој е систем со меморија.

**Задача.1.28.** Да се испита дали дискретниот систем со еден влез  $y(kT)$  и еден излез  $x(kT)$ , чија влезно - излезна релација гласи:

$$(1.82) \quad x(kT) = ky(kT)$$

е: а) линеарен, б) каузален, в) стационарен и г) дали поседува меморија.

**Решение:** Нека  $x_1(kT)$  е одсивот на набљудуваниот систем на произволен влез  $y_1(kT)$ , додека  $x_2(kT)$  е одсивот на истиот систем на друг произволен влез  $y_2(kT)$ . Тогаш, врз основа на (1.82), за овие излези важи:

$$(1.83) \quad \begin{aligned} x_1(kT) &= ky_1(kT) \\ x_2(kT) &= ky_2(kT) \end{aligned}$$

Ако сега, на влезот од набљудуваниот систем се доведе линеарна комбинација од влезовите  $y_1(kT)$  и  $y_2(kT)$ :

$$(1.84) \quad y(kT) = c_1 y_1(kT) + c_2 y_2(kT)$$

на излезот ќе се добие:

$$(1.85) \quad \begin{aligned} x(kT) &= ky(kT) = k[c_1 y_1(kT) + c_2 y_2(kT)] = \\ &= ky(kT) = c_1 ky_1(kT) + c_2 ky_2(kT) = c_1 x_1(kT) + c_2 x_2(kT) \end{aligned}$$

што значи дека тој претставува иста таква линеарна комбинација од одсивите  $x_1(kT)$  и  $x_2(kT)$  на одделните влезови  $y_1(kT)$  и  $y_2(kT)$ ; следствено, набљудуваниот систем е линеарен.

(б) Бидејќи одсивот на набљудуваниот дискретен систем не зависи од идни вредности на влезот, тој е каузален систем.

(в) Ако со  $x_1(kT)$  се означи одсивот на набљудуваниот систем на влезот  $y_1(kT) = y((k-n)T)$ , тогаш од дефиницијата за стационарност непосредно следува:



$$(1.86) \quad x_1(kT) = ky_1(kT) = ky_1((k-n)T) \neq (k-n)y_1((k-n)T) = x_1((k-n)T)$$

Следствено, набљудуваниот систем не е стационарен.

(г) Бидејќи одзивот на набљудуваниот дискретен систем во произволен миг  $k$  зависи само од тековната вредност на влезот (во истиот тој миг  $k$ ), тој е систем без меморија.

**Задача.1.29.** Да се определи соодветната хомогена диферентна равенка преку која се генерираат следните дискретни оригинали:

$$(1.87) \quad f(kT) = A; \quad A = \text{const.}$$

$$(1.88) \quad f(kT) = at + b; \quad a, b = \text{const.}$$

$$(1.89) \quad f(kT) = at^2 + bt + c; \quad a, b, c = \text{const.}$$

**Решение:** Првата десна конечна разлика на дискретниот оригинал (1.87) е:

$$(1.90) \quad \Delta f(kT) = f(kT + T) - f(kT) = A - A = 0$$

Следствено, бараната хомогена диферентна равенка преку која се генерира функцијата (1.87) е:

$$(1.91) \quad \Delta f(kT) = 0; \quad f(0) = A$$

За дискретниот оригинал (1.88) важи:

$$(1.92) \quad \Delta f(kT) = f(kT + T) - f(kT) = [a(kT + T) + b] - [a(kT) + b] = aT$$

$$(1.93) \quad \Delta^2 f(kT) = \Delta[\Delta f(kT)] = f(kT + 2T) - 2f(kT + T) + f(kT) = aT - 2aT + aT = 0$$

Оттука, бараната хомогена диферентна равенка преку која се генерира функцијата (1.88) е:

$$(1.94) \quad \Delta^2 f(kT) = 0; \quad f(0) = b, f(T) = aT + b$$

На сличен начин, за дискретниот оригинал (1.89) се добива:

$$(1.95) \quad \Delta f(kT) = f(kT + T) - f(kT) = [a(kT + T)^2 + b(kT + T) + c] - [a(kT)^2 + b(kT) + c] = 2aT(kT) + T(aT + b)$$

$$(1.96) \quad \Delta^2 f(kT) = \Delta[\Delta f(kT)] = [2aT(kT + T) + T(aT + b)] - [2aT(kT) + T(aT + b)] = 2aT^2$$

$$(1.97) \quad \Delta^3 f(kT) = \Delta[\Delta^2 f(kT)] = 2aT^2 - 2aT^2 = 0$$

Оттука, тој може да се генерира преку хомогената диферентна равенка:

$$(1.98) \quad \Delta^3 f(kT) = 0; \quad f(0) = c, f(T) = aT^2 + bT + c, f(2T) = 4aT^2 + 2bT + c$$

со дадените почетни услови.

**Задача.1.30.** Со помош на рекурентната постапка, да се определат првите неколку дискретни вредности на решението на следната диферентна равенка:

$$(1.99) \quad \Delta^2 f(k) = A; \quad f(0) = f(1) = 0$$

**Решение:** Ако на левата страна од диферентната равенка (1.99) втората десна конечна разлика на дискретниот оригинал  $f(k)$  се замени со соодветниот израз, ќе се добие еквивалентната диферентна равенка:

$$(1.100) \quad f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = A$$

која може да се преуреди во облик:

$$(1.101) \quad f(k+2) = 2f(k+1) - f(k) + A$$

Оттука, за  $k = 0, 1, 2, 3$  се добиваат бараните вредности на решението  $f(k)$ :

$$(1.102) \quad \begin{aligned} k = 0: f(2) &= 2f(1) - f(0) + A = A \\ k = 1: f(3) &= 2f(2) - f(1) + A = 3A \\ k = 2: f(4) &= 2f(3) - f(2) + A = 6A \\ k = 3: f(5) &= 2f(4) - f(3) + A = 10A \end{aligned}$$

## 2. Z-ТРАНСФОРМАЦИЈА И НЕЈЗИНИ ОСОБИНИ

$Z$ -трансформацијата претставува математички апарат за изучување на линеарните стационарни дискретни динамички системи. Со нејзина помош, една функција од дискретната независно променлива  $k$  се трансформира во функција од комплексната променлива  $z$ . Аналогно, со помош на  $Z$ -трансформацијата, една линеарна диферентна равенка со константни коефициенти се трансформира во соодветна алгебарска равенка. Со тоа посложениот оригинален проблем на решавање диферентни равенки се сведува на поедноставниот проблем на решавање алгебарски равенки.

**Едностраната директна  $Z$ -трансформација** на функцијата  $f(kT)$  се дефинира како бесконечен степенски ред по негативните степени од комплексната променлива  $z$ , при што коефициенти на редот се дискретните вредности на функцијата  $f(kT)$ :

$$(2.1) \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots$$

**Двостраната  $Z$ -трансформација** на функцијата  $f(kT)$  е дефинирана со изразот:

$$(2.2) \quad \mathcal{F}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \dots + f(-kT)z^k + \dots + f(-T)z + f(0) + \\ + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots$$

и во општ случај  $\mathcal{F}(z) \neq F(z)$ . Меѓутоа, за **каузални сигнали** за кои важи:

$$(2.3) \quad f(kT) \equiv 0, \quad k < 0$$

едностраната и двостраната  $Z$ -трансформација се идентични. Бидејќи во рамките на овој труд ќе бидат третирали само каузални сигнали, во продолжение ќе стане збор само за едностраната  $Z$ -трансформација.

Едностраната  $Z$ -трансформација (2.1) симболично се запишува на следниот начин:

$$(2.4) \quad F(z) = Z\{f(kT)\}$$

каде што функцијата  $f(kT)$  се нарекува **дискретен оригинал**, а нејзината  $Z$ -трансформација  $F(z)$  се нарекува  $Z$ -**слика** на тој дискретен оригинал. Дискретниот оригинал и неговата  $Z$ -слика чинат еден  $Z$ -**трансформационен пар**. За дискретните оригинали кои се сретнуваат во овој труд, едностраната  $Z$ -трансформација  $F(z)$

секогаш претставува дробно - рационална функција од комплексната променлива  $z$  од општ облик:

$$(2.5) \quad F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, m \leq n$$

каде што ограничувањето  $m \leq n$  произлегува од фактот дека се работи за еднострана  $Z$ -трансформација. Нулите на полиномот  $b(z)$  претставуваат **нули** на дробно - рационалната функција  $F(z)$ , додека нулите на полиномот  $a(z)$  претставуваат **нејзини полови**. Преку своите нули и полови, дробно - рационалната функција  $F(z)$  секогаш може да се претстави во факторизиран облик на следниот начин:

$$(2.6) \quad F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (z - w_j)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)}; \quad K = \frac{b_m}{a_n}, \quad m \leq n$$

Во општ случај, едностраната  $Z$ -трансформација не е дефинирана во целата  $z$ -комплексна рамнина, туку само во надворешноста на круг со радиус  $R$  и центар во координатниот почеток од  $z$ -рамнината. Радиусот  $R$  се нарекува **радиус на апсолутна конвергенција** на сликата  $F(z)$ , додека надворешноста на кругот  $|z| \leq R$  се нарекува **област на апсолутна конвергенција** на сликата  $F(z)$ .

Директната  $Z$ -трансформација на еден дискретен оригинал секогаш може да се определи според дефиницијата (2.1). Меѓутоа, многу почесто попогодно е да се применат особините на  $Z$ -трансформацијата, кои се искажани во вид на соодветни теореми. Во продолжение се дадени некои од најважните особини на едностраната  $Z$ -трансформација, без да бидат приложени соодветните докази.

**1. Теорема за линеарност на  $Z$ -трансформацијата:** ако дискретните оригинали  $f_i(kT)$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) имаат свои  $Z$ -слики  $F_i(z) = Z\{f_i(kT)\}$ ,  $|z| > R_i$ , тогаш и

дискретниот оригинал  $g(kT) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(kT)$ , кој претставува линеарна комбинација од

дискретните оригинали  $f_i(kT)$ , ( $i=1,2,\dots,N$ ), ќе има своја  $Z$ -слика  $G(z) = Z\{g(kT)\}$ ,  $|z| > R$ , и за таа слика важи:

$$(2.7) \quad G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\left\{\sum_{i=1}^N c_i f_i(kT)\right\} = \sum_{i=1}^N c_i Z\{f_i(kT)\} = \sum_{i=1}^N c_i F_i(z), \quad |z| > R$$

Со други зборови,  $Z$ -сликата од линеарна комбинација на конечен број дискретни оригинали, е истата таа линеарна комбинација од  $Z$ -сликите на соодветните оригинали. Притоа,  $c_i \in \mathcal{C}$  се произволни константи, додека за  $R$  важи:

$$(2.8) \quad R = \max(R_1, R_2, \dots, R_N)$$

**2. Теорема за множење на дискретниот оригинал  $f(kT)$  со факторот  $a^{kT}$ , односно теорема за промена на  $z$ -скалата:** ако дискретниот оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| > R_f$ , тогаш и дискретниот оригинал  $g(kT) = a^{kT} f(kT)$  ќе има своја  $Z$ -слика  $G(z) = Z\{g(kT)\}$ ,  $|z| > R_g$ , и за таа слика важи:

$$(2.9) \quad G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{a^{kT} f(kT)\} = F(za^{-T}), \quad |z| > R_g = a^T R_f$$

**3. Теорема за множење на дискретниот оригинал  $f(kT)$  со произволен степен на дискретната независно променлива  $kT$  односно теорема за диференцирање на  $Z$ -сликата  $F(z)$ :** ако дискретниот оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| > R_f$ , тогаш и дискретниот оригинал  $g(kT) = (kT)^n f(kT)$  ќе има своја  $Z$ -слика  $G(z) = Z\{g(kT)\}$ ,  $|z| > R_g$ , и за таа слика важи:

$$(2.10) \quad G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{(kT)^n f(kT)\} = -zT \frac{d}{dz} [F_{n-1}(z)], \quad F_{n-1}(z) = Z\{(kT)^{n-1} f(kT)\}$$

**4. Теорема за делење на дискретниот оригинал  $f(kT)$  со дискретната независно променлива  $kT$  односно теорема за интегрирање на  $Z$ -сликата  $F(z)$ :** ако дискретниот оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| > R_f$  и ако постои граничната вредност  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(kT)}{kT}$ , тогаш и дискретниот оригинал  $g(kT) = \frac{f(kT)}{kT}$  ќе има своја  $Z$ -слика  $G(z) = Z\{g(kT)\}$ ,  $|z| > R_g$ , и за таа слика важи:

$$(2.11) \quad G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\left\{\frac{f(kT)}{kT}\right\} = \frac{1}{T} \int_z^{\infty} \frac{F(\omega)}{\omega} d\omega + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(kT)}{kT}$$

**5. Теорема за транслација на независно променливата  $kT$  во просторот на оригиналите односно теорема за множење на  $Z$ -слика  $F(z)$  со нејзиниот аргумент  $z$ :** ако дискретниот оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| > R_f$ , тогаш и дискретните оригинали  $g_1(kT) = f((k+n)T)$  и  $g_2(kT) = f((k-n)T)$ , каде што

$n$  е цел позитивен број, ќе имаат свои  $Z$ -слики  $G_1(z) = Z\{g_1(kT)\}$ ,  $|z| > R_{g_1}$  и  $G_2(z) = Z\{g_2(kT)\}$ ,  $|z| > R_{g_2}$ , соодветно, и за тие слики важи:

$$(2.12) \quad G_1(z) = Z\{g_1(kT)\} = Z\{f((k+n)T)\} = z^n \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right]$$

$$(2.13) \quad G_2(z) = Z\{g_2(kT)\} = Z\{f((k-n)T)\} = z^{-n} \left[ F(z) + \sum_{k=-n}^{-1} f(kT)z^{-k} \right]$$

**6. Теорема за  $Z$ -трансформација на конечните разлики:** ако дискретниот оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| > R_f$ , тогаш ќе постои и  $Z$ -сликата на неговата лева односно десна конечна разлика од произволен ред  $n$ , и за тие слики важи:

$$(2.14) \quad G_1(z) = Z\{g_1(kT)\} = Z\{\Delta^n f(kT)\} = (z-1)^n F(z) - z \sum_{m=0}^{n-1} (z-1)^{n-m-1} \Delta^m f(0)$$

$$(2.15) \quad G_2(z) = Z\{g_2(kT)\} = Z\{\nabla^n f(kT)\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^n F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{z-1}{z}\right)^{n-m-1} \nabla^m f(-T)$$

**7. Теорема за пресликување конечна сума  $\sum_{m=0}^k f(mT)$  од просторот на оригиналите:**

ако дискретниот оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| > R_f$ , тогаш ќе постои и  $Z$ -сликата на конечната сума  $g(kT) = \sum_{m=0}^k f(mT)$  и за таа слика важи:

$$(2.16) \quad G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\left\{\sum_{m=0}^k f(mT)\right\} = \left(\frac{z}{z-1}\right)F(z)$$

**8. Теорема за одредување на сумата на бесконечен конвергентен ред  $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)$ :** ако

дискретниот оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| \geq 1$ , тогаш

бесконечниот ред  $\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)$  е конвергентен, па неговата сума постои, е конечна и може

да се определи според изразот:

$$(2.17) \quad \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z)$$

**9. Теорема за почетната вредност на еден дискретен оригинал:** ако дискретен оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| > R_f$ , тогаш неговата почетна вредност  $f(0)$  може да се определи според формулата:

$$(2.18) \quad f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Со други зборови, теоремата тврди дека поведението на дискретен оригинал  $f(kT)$  во околина на нулата е еднакво со поведението на неговата  $Z$ -слика  $F(z)$  во бесконечност.

**10. Теорема за крајната (трајната) вредност на еден дискретен оригинал:** ако дискретен оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$ -слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ ,  $|z| > R_f$  и сликата  $(z-1)F(z)$  е аналитичка во областа  $|z| < 1$ , тогаш неговата трајна вредност  $f(\infty)$  може да се определи според формулата:

$$(2.19) \quad f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

Теоремата 9 и теоремата 10 со едно име се нарекуваат **гранични теорети на  $Z$ -трансформацијата**.

**11. Теорема за конволуција на дискретни оригинали или множење на  $Z$ -слики:** ако дискретните оригинали  $f_1(kT)$  и  $f_2(kT)$  имаат свои  $Z$ -слики  $F_1(z) = Z\{f_1(kT)\}$ ,  $|z| > R_{f_1}$  и  $F_2(z) = Z\{f_2(kT)\}$ ,  $|z| > R_{f_2}$ , соодветно, тогаш ќе постои и  $Z$ -сликата на дискретен оригинал  $g(kT) = f_1(kT) * f_2(kT)$ , кој претставува конволуција од дадените дискретни оригинали, и за таа слика важи:

$$(2.20) \quad G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{f_1(kT) * f_2(kT)\} = F_1(z)F_2(z), |z| > R_g$$

**12. Теорема за множење дискретни оригинали или конволуција на  $Z$ -слики:** ако дискретните оригинали  $f_1(kT)$  и  $f_2(kT)$  имаат свои  $Z$ -слики  $F_1(z) = Z\{f_1(kT)\}$ ,  $|z| > R_{f_1}$  и  $F_2(z) = Z\{f_2(kT)\}$ ,  $|z| > R_{f_2}$ , соодветно, тогаш ќе постои и  $Z$ -сликата на дискретен оригинал  $g(kT) = f_1(kT)f_2(kT)$ , кој претставува производ од дадените дискретни оригинали, и за таа слика важи:

$$(2.21) \quad G(z) = Z\{g(kT)\} = Z\{f_1(kT)f_2(kT)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F_1(\omega)F_2\left(\frac{z}{\omega}\right)}{\omega} d\omega, \quad R_1 < R < \frac{|z|}{R_2}$$

Одредувањето на дискретен оригинал  $f(kT)$ , кој припаѓа кон дадена  $Z$ -слика се нарекува **инверзна  $Z$ -трансформација** и симболично се означува на следниот начин:

$$(2.22) \quad f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}, \quad k \geq 0$$

Таа може да се определи на еден од следните начини:

1. Со примена на готови таблици на  $Z$  – трансформациони парови
2. Со развој на функцијата  $F(z)$  во степенски ред по негативните степени на комплексната променлива  $z$
3. Со бесконечно алгебарско делење на броителот и именителот од дробно рационалната функција  $F(z)$
4. Со развој на дробно рационалната функција  $F(z)$  во парцијални дробки
5. Со примена на интегралната формула за инверзна  $Z$  – трансформација

Наједноставен начин да се определи дискретниот оригинал  $f(kT)$  кон дадена  $Z$  – слика  $F(z)$  е со примена на готови таблици  $Z$  – трансформациони парови. Една таква таблица е дадена на крајот од овој труд. Главен недостаток на овој начин е што во таблиците се дадени само најчесто користените  $Z$  – трансформациони парови. Дискретниот оригинал  $f(kT)$  кон дадена  $Z$  – слика  $F(z)$  може да се определи и со развој на функцијата  $F(z)$  во Тајлоров ред во околина на точката  $u = z^{-1} = 0$  ( $z = \infty$ ):

$$(2.23) \quad F(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{a_n + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} =$$

$$= \frac{b_n + b_{n-1} u + \dots + b_1 u^{n-1} + b_0 u^n}{a_n + a_{n-1} u + \dots + a_1 u^{n-1} + a_0 u^n} = F(u)$$

$$(2.24) \quad F(u) = F(0) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 u + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right)_0 u^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}\right)_0 u^3 + \dots$$

$$(2.25) \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} = f(0) + f(T) z^{-1} + f(2T) z^{-2} + \dots + f(kT) z^{-k} + \dots =$$

$$= F(0) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 u + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right)_0 u^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}\right)_0 u^3 + \dots =$$

$$= F(0) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 z^{-1} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right)_0 z^{-2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3}\right)_0 z^{-3} + \dots$$

Главен недостаток на оваа постапка е што во општ случај дискретниот оригинал  $f(kT)$  не се добива во затворен аналитички облик, туку се добиваат само неговите дискретни вредности:



$$(2.26) \quad \begin{aligned} f(0) &= F(0) \\ f(T) &= \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)_0 \\ f(2T) &= \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right)_0 \\ f(3T) &= \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 F}{\partial u^3} \right)_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Со постапката за бесконечно алгебарско делење на броителот и именителот во дробно рационалната функција  $F(z)$ , повторно се добиваат само дискретните вредности на бараниот оригинал  $f(kT)$ , а не и неговиот затворен аналитички облик:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} f((m-n)T) &= \frac{b_m}{a_n} \\ f((m-n-1)T) &= \frac{1}{a_n} \left( b_{m-1} - a_{n-1} \frac{b_m}{a_n} \right) \\ f((m-n-2)T) &= \frac{1}{a_n} \left[ \left( b_{m-2} - a_{n-2} \frac{b_m}{a_n} \right) - \frac{a_{n-1}}{a_n} \left( b_{m-1} - a_{n-1} \frac{b_m}{a_n} \right) \right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Развојот на дробно рационалната функција  $F(z)$  во парцијални дробки по нејзините полови може да се претстави на следниот начин:

$$(2.28) \quad F(z) = \frac{b_n}{a_n} + F_1(z) + F_2(z) + \dots + F_N(z)$$

каде што  $F_i(z); i=1,2,\dots,N$  се елементарни  $Z$ -слики кои имаат пол во точката  $z = a^T$  со одредена кратност, а  $f_i(kT); i=1,2,\dots,N$  се нивните дискретни оригинали. Тогаш, дискретниот оригинал  $f(kT)$  кон  $Z$ -слика  $F(z)$  ќе биде:

$$(2.29) \quad f(kT) = \begin{cases} f(0) = \frac{b_n}{a_n}; & k=0 \\ f_1(kT) + f_2(kT) + \dots + f_N(kT); & k \geq 1 \end{cases}$$

Елементарните слики  $F_i(z); i = 1, 2, \dots, N$  и нивните дискретни оригинали  $f_i(kT); i = 1, 2, \dots, N$  се дадени на крајот од овој труд.

Најелегантен начин да се определи дискретниот оригинал  $f(kT)$  кон дадена  $Z$  – слика  $F(z)$ , е со примена на интегралната формула за инверзна  $Z$  – трансформација:

$$(2.30) \quad f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{k-1} dz, \quad k \geq 0$$

која што, во случајот на дробно рационалната функција  $F(z)$ , се сведува на пресметување на остатоците на функцијата  $F(z)z^{k-1}$  во сите нејзини различни полови.

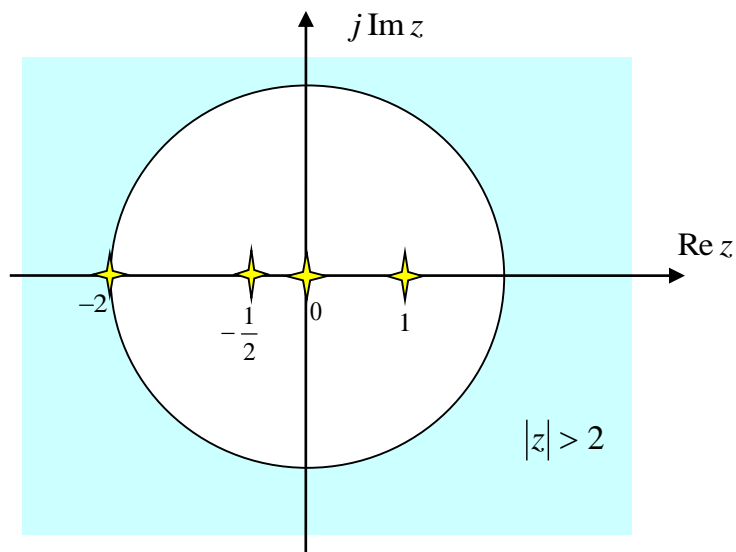
Во општ случај, не секој дискретен оригинал  $f(kT)$  има своја  $Z$  – слика  $F(z)$ , исто како што и за секоја функција  $F(z)$  не постои соодветен дискретен оригинал. Меѓутоа, за дискретните сигнали кои се сретнуваат во овој труд, секогаш ќе постои соодветна  $Z$  – слика и обратно, секоја функција  $F(z)$  ќе има свој дискретен оригинал.



**Задача.2.1.** Да се определи областа на апсолутна конвергенција на  $Z$  – сликата:

$$(2.31) \quad F(z) = \frac{20(z+4)}{z(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)^2(z+2)}$$

**Решение:** Област на апсолутна конвергенција на  $Z$  – сликата  $F(z)$  е надворешноста на круг во  $z$  – комплексната рамнина, со центар во координатниот почеток, кој ги опфаќа сите полови на дробно рационалната функција (2.31) и минува низ полот што се наоѓа најдалеку од координатниот почеток во  $z$  – рамнината. Функцијата  $F(z)$  има прости полови во точките  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = -2$  и двократен пол во точката  $z_{4,5} = -\frac{1}{2}$ . Од сите нив, полот  $z_3 = -2$  се наоѓа најдалеку од координатниот почеток во  $z$  – рамнината. Следствено, областа на апсолутна конвергенција на  $Z$  – сликата  $F(z)$ , зададена со (2.31), е надворешноста на круг во  $z$  – комплексната рамнина, со центар во координатниот почеток и радиус еднаков на 2. Таа е прикажана на Слика 2.1.

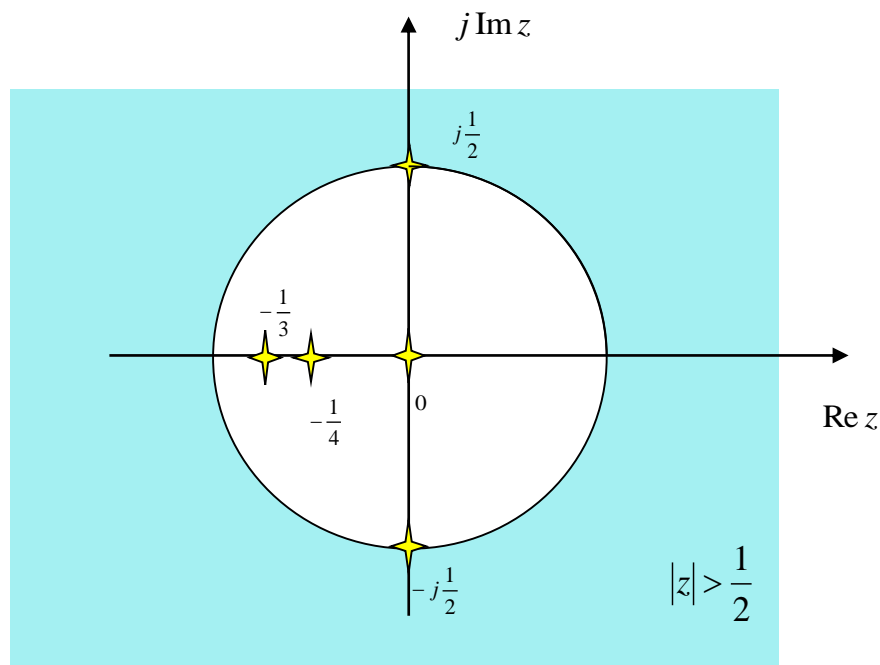


Слика 2.1. Графички приказ на областа на апсолутна конвергенција на  $Z$  – сликата (2.31)

**Задача.2.2.** Да се определи областа на апсолутна конвергенција на  $Z$  – сликата:

$$(2.32) \quad F(z) = \frac{1}{z(4z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z^2+\frac{1}{4}\right)}$$

**Решение:** Функцијата  $F(z)$  има прости реални полови во точките  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -\frac{1}{4}$ ,  $z_3 = -\frac{1}{3}$  и конјугирано комплексен пар полови во точките  $z_{4,5} = \pm j\frac{1}{2}$ . Од сите нив, половите  $z_{4,5} = \pm j\frac{1}{2}$  се наоѓаат најдалеку од координатниот почеток во  $z$ -рамнината. Следствено, областа на апсолутна конвергенција на  $Z$ -сликата  $F(z)$ , зададена со (2.32), е надворешноста на круг во  $z$ -комплексната рамнина, со центар во координатниот почеток и радиус еднаков на  $\frac{1}{2}$ . Таа е прикажана на Слика 2.2.



Слика 2.2. Графички приказ на областа на апсолутна конвергенција на  $Z$ -сликата (2.32)

**Задача.2.3.** Да се определи  $Z$ -сликата  $F(z)$  на дискретниот оригинал  $f(kT)$ , ако:

$$(2.33) \quad f(kT) = \sin(\omega kT)h(kT); \quad \omega = \text{const.} > 0 \in \mathfrak{R}$$

и, потоа, да се определат  $Z$ -сликите на дискретните оригинали:

$$(2.34) \quad f_1(kT) = A \sin(\omega kT)h(kT); \quad A = \text{const.} \in \mathfrak{R}$$

$$(2.35) \quad f_2(kT) = [A_1 \sin(\omega_1 kT) + A_2 \sin(\omega_2 kT)]h(kT); \quad A_1, A_2 = \text{const.} \in \mathfrak{R}$$

$$(2.36) \quad f_3(kT) = \sin(\omega(k-n)T)h((k-n)T); \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$(2.37) \quad f_4(kT) = \sin(\omega(k+n)T)h((k+n)T); \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$(2.38) \quad f_5(kT) = e^{-akT} \sin(\omega kT)h(kT); \quad a = \text{const.} \in \mathfrak{R}$$

ако:

$$(2.39) \quad h(kT) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

**Решение:**  $Z$  –сликата на синусната функција (2.33) е:

$$\begin{aligned} (2.40) \quad F(z) &= Z\{f(kT)\} = Z\{\sin(\omega kT)h(kT)\} = \\ &= Z\left\{\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}\right)h(kT)\right\} = \\ &= \frac{1}{2j}Z\left\{e^{j\omega kT}h(kT)\right\} - \frac{1}{2j}Z\left\{e^{-j\omega kT}h(kT)\right\} = \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}}\right) = \\ &= \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

Врз основа на резултатот (2.40) и со примена на особината на  $Z$  –трансформацијата за хомогеност, за  $Z$  –сликата на дискретниот оригинал (2.34) се добива:

$$\begin{aligned} (2.41) \quad F_1(z) &= Z\{f_1(kT)\} = Z\{A \sin(\omega kT)h(kT)\} = \\ &= Z\{Af(kT)\} = AZ\{f(kT)\} = \frac{Az \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

$Z$  –сликата на оригиналот (2.35) се определува едноставно ако се примени особината на  $Z$  –трансформацијата за линеарност, од каде и од (2.40) непосредно следува:

$$\begin{aligned} (2.42) \quad F_2(z) &= Z\{f_2(kT)\} = Z\{[A_1 \sin(\omega_1 kT) + A_2 \sin(\omega_2 kT)]h(kT)\} = \\ &= A_1 Z\{\sin(\omega_1 kT)h(kT)\} + A_2 Z\{\sin(\omega_2 kT)h(kT)\} = \\ &= \frac{A_1 z \sin(\omega_1 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_1 T) + 1} + \frac{A_2 z \sin(\omega_2 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_2 T) + 1}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

За одредување на  $Z$  –сликата на дискретниот оригинал (2.36) може да се примени особината на  $Z$  –трансформацијата за поместување на дискретниот оригинал долж временската оска. Тогаш, врз основа на оваа особина и резултатот (2.40), директно се добива:

$$(2.43) \quad F_3(z) = Z\{f_3(kT)\} = Z\{\sin(\omega(k-n)T)h((k-n)T)\} = \\ = Z\{f((k-n)T)\} = z^{-n}F(z) = \frac{z^{-n+1} \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}, \quad |z| > 1$$

Сосема аналогно како за дискретниот оригинал (2.36), за  $Z$  – сликата на дискретниот оригинал (2.37) се добива:

$$(2.44) \quad F_4(z) = Z\{f_4(kT)\} = Z\{\sin(\omega(k+n)T)h((k+n)T)\} = \\ = Z\{f((k+n)T)\} = z^n \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right] = \\ = \frac{z^{n+1} \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} + \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\omega T)z^{-k}, \quad |z| > 1$$

Конечно,  $Z$  – сликата на оригиналот (2.38) се определува со помош на особината на  $Z$  – трансформацијата за придушвање на дискретниот оригинал, од каде и врз основа на (2.40) непосредно следува:

$$(2.45) \quad F_5(z) = Z\{f_5(kT)\} = Z\{e^{-akT} \sin(\omega kT)h(kT)\} = F(z e^{aT}) = \\ = \frac{z e^{-aT} \sin(\omega T)}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos(\omega T) + e^{-2aT}}, \quad |z| > |e^{-aT}|$$

**Задача.2.4.** Со помош на  $Z$  – сликата  $F(z) = Z\{f(k)\}$  на оригиналот  $f(k) = kh(k)$ :

$$(2.46) \quad Z\{kh(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

да се определи  $Z$  – сликата  $G(z) = Z\{g(k)\}$  на оригиналот:

$$(2.47) \quad g(k) = (k-2)^2 h(k-2) = (k-2)f(k-2)$$

**Решение:** Врз основа на особините на  $Z$  – трансформацијата се добива:

$$(2.48) \quad F(z) = Z\{f(k)\} = Z\{kh(k)\} = -z \frac{d}{dz} Z\{h(k)\} = -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

$$(2.49) \quad U(z) = Z\{u(k)\} = Z\{kf(k)\} = -z \frac{d}{dz} F(z) = -z \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{(z-1)^2} \right] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, \quad |z| > 1$$

$$(2.50) \quad G(z) = Z\{g(k)\} = Z\{(k-2)f(k-2)\} = Z\{u(k-2)\} = z^{-2}U(z) = \frac{(z+1)}{z(z-1)^3}, |z| > 1$$

**Задача.2.5.** Да се определи  $Z$  – сликата  $F(z)$  на оригиналот  $f(t)$ , чија што  $L$  – слика е дадена со изразот:

$$(2.51) \quad F(s) = L\{f(t)\} = \frac{s+0.1}{(s+0.2)(s+0.4)(s+0.6)}; \quad \text{Re } s > -0.6$$

**Решение:**  $Z$  – сликата на дадениот континуален оригинал е еднозначно определена со следниот израз:

$$\begin{aligned} (2.52) \quad F(z) &= Z\{f(t)\} = Z\{f(kT)\} = Z\{L^{-1}[F(s)]\} = \\ &= Z\left\{L^{-1}\left[\frac{s+0.1}{(s+0.2)(s+0.4)(s+0.6)}\right]\right\} = \\ &= Z\left\{L^{-1}\left[-\frac{1.25}{s+0.2} + \frac{7.5}{s+0.4} - \frac{6.25}{s+0.6}\right]\right\} = \\ &= Z\left\{-1.25e^{-0.2t} + 7.5e^{-0.4t} - 6.25e^{-0.6t}\right\}h(t) = \\ &= -\frac{1.25z}{z-e^{-0.2T}} + \frac{7.5z}{z-e^{-0.4T}} - \frac{6.25z}{z-e^{-0.6T}} = \\ &= -z \frac{(6.25e^{-0.6T} - 7.5e^{-0.4T} + 1.25e^{-0.2T})z}{(z-e^{-0.2T})(z-e^{-0.4T})(z-e^{-0.6T})} - \\ &= -z \frac{(1.25e^{-T} - 7.5e^{-0.8T} + 6.25e^{-0.6T})}{2(z-e^{-0.2T})(z-e^{-0.4T})(z-e^{-0.6T})}; \quad |z| > |e^{-0.2T}| \end{aligned}$$

**Задача.2.6.** Да се определи  $Z$  – сликата  $F(z)$  на оригиналот  $f(t)$ , ако е позната неговата  $L$  – слика:

$$(2.53) \quad F(s) = \frac{4}{s(s^2+1)}, \quad \text{Re } s > 0$$

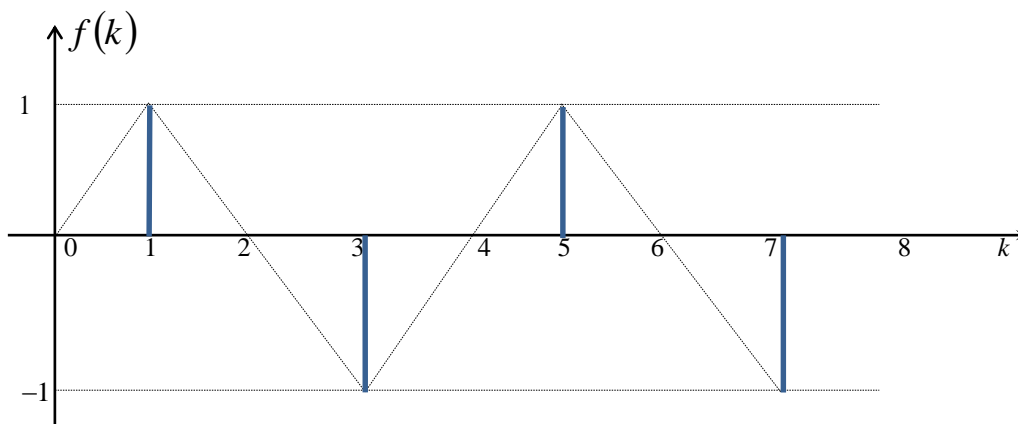
Да се усвои  $T = 1s$ .

**Решение:** Бараната  $Z$  – слика ќе биде:

$$(2.54) \quad F(z) = Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{4}{s(s^2+1)}\right\}\right\} = Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{4+4s^2-4s^2}{s(s^2+1)}\right\}\right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{4(s^2 + 1) - 4s^2}{s(s^2 + 1)} \right\} \right\} = Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{4}{s} - \frac{4s}{s^2 + 1} \right\} \right\} = \\
 &= Z \{ 4(1 - \cos t)h(t) \} = 4 \frac{z}{z-1} - 4 \frac{z(z - \cos T)}{z^2 - 2z \cos T + 1} = \\
 &= 4 \frac{z}{z-1} - 4 \frac{z(z - \cos 1)}{z^2 - 2z \cos 1 + 1} = \frac{4z(1 - \cos 1)(z + 1)}{(z-1)(z^2 - 2z \cos 1 + 1)}, \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

**Задача.2.7.** Да се определи  $Z$  – трансформацијата на дискретниот сигнал  $f(k)$ , кој е претставен графички на Слика 2.3.



Слика 2.3. Илустрација кон Задача 2.7

**Решение:** Врз основа на Слика 2.3 и дефиницијата на едностраната  $Z$  – трансформација,  $Z$  – сликата на дадениот сигнал ќе биде:

$$\begin{aligned}
 (2.55) \quad F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots = \\
 &= 0 + 1 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} - 1 \cdot z^{-3} + 0 \cdot z^{-4} + 1 \cdot z^{-5} - 0 \cdot z^{-6} - 1 \cdot z^{-7} + 0 \cdot z^{-8} + \dots = \\
 &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^9} - \frac{1}{z^{11}} + \frac{1}{z^{13}} - \frac{1}{z^{15}} + \frac{1}{z^{17}} - \dots = \\
 &= \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{1}{z^5} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{1}{z^9} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) + \dots = \\
 &= \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^9} + \frac{1}{z^{13}} + \frac{1}{z^{17}} + \dots \right) = \\
 &= \left( \frac{z^2 - 1}{z^3} \right) \left( 1 + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} + \frac{1}{z^{16}} + \dots \right) =
 \end{aligned}$$

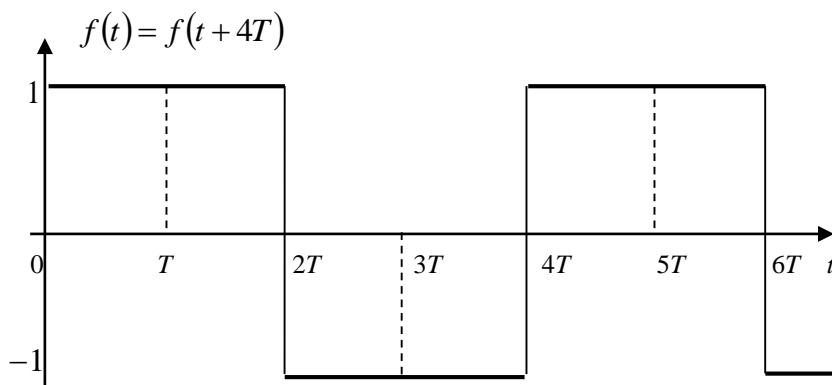


$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{z^2 - 1}{z^3} \right) \left[ 1 + \left( \frac{1}{z^4} \right) + \left( \frac{1}{z^4} \right)^2 + \left( \frac{1}{z^4} \right)^3 + \dots \right] = \\
 &= \left( \frac{z^2 - 1}{z^3} \right) \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{z^4}} \right) = \frac{z^2 - 1}{z^3} \cdot \frac{z^4}{z^4 - 1} = \frac{z}{z^2 + 1}; \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

Самиот дискретен оригинал  $f(k)$  аналитички може да се опише со следниот израз:

$$(2.56) \quad f(k) = \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача.2.8.** Да се определи  $Z$ -сликата на периодичниот сигнал, кој е графички прикажан на Слика 2.4.



Слика 2.4. Илустрација кон Задача 2.8

**Решение:**  $Z$ -сликата на периодичниот сигнал  $f(k)$ , со период кој претставува целоброен производ од периодот на дискретизација  $T$  и има општ облик:

$$(2.57) \quad f(t) = f(t + nT); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

може да се определи на следниот начин:

$$\begin{aligned}
 (2.58) \quad F(z) &= Z\{f(t)\} = Z\{f(t + nT)\} = Z\{f(kT + nT)\} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} + \sum_{k=n}^{\infty} f(kT)z^{-k} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} + \sum_{l=0}^{\infty} f(lT + nT)z^{-l-n} = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} + z^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} f(lT)z^{-l} = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} + z^{-n} F(z)
 \end{aligned}$$

Оттука, со решавање на (2.58) во однос на непознатата  $F(z)$ , се добива:

$$(2.59) \quad F(z) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}}{z^n - 1} z^n$$

Сигналот од Слика 2.4 претставува периодичен сигнал со период еднаков на  $4T$  па, ако во (2.59) се замени  $n = 4$ , и се земе предвид дека:

$$(2.60) \quad f(kT) = \begin{cases} 1; & k = 4n, 4n + 1 \\ -1; & k = 4n + 2, 4n + 3 \end{cases}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

од каде следува:

$$\begin{aligned}
 (2.61) \quad &f(0) = 1 \\
 &f(T) = 1 \\
 &f(2T) = -1 \\
 &f(3T) = -1 \\
 &f(4T) = 1 \\
 &f(5T) = 1 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

за  $Z$  –сликата на сигналот од Слика 2.4 се добива:

$$\begin{aligned}
 (2.62) \quad F(z) &= \frac{\sum_{k=0}^3 f(kT)z^{-k}}{z^4 - 1} z^4 = \frac{1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}}{z^4 - 1} z^4 = \\
 &= \frac{z^3 + z^2 - z - 1}{z^4 - 1} z = \frac{z^2(z+1) - (z+1)}{z^4 - 1} z = \\
 &= \frac{(z^2 - 1)(z+1)}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)} z = \frac{z(z+1)}{(z^2 + 1)}; \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

**Задача.2.9.** Да се определи  $Z$  – сликата  $F(z)$  на оригиналот:

$$(2.63) \quad f(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \frac{1}{k}, & k > 0 \end{cases}$$

и да се покаже дека истата конвергира односно дивергира за различни вредности на комплексната променлива  $z$  од границата помеѓу нејзината област на конвергенција и нејзината област на дивергенција.

**Решение:** Од дефиницијата на  $Z$  – трансформацијата следува:

$$(2.64) \quad F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^{-k}$$

а со диференцирање на сликата (2.64) по  $z$  се добива:

$$(2.65) \quad \frac{dF(z)}{dz} = -z^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} = -\frac{1}{z} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - 1 \right] = -\frac{1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - 1 \right) = -\frac{1}{z(z-1)}$$

или:

$$(2.66) \quad dF(z) = -\frac{1}{z(z-1)} dz$$

Ако сега се изврши интегрирање на последниот израз во границите од  $z$  до  $\infty$ , ќе се добие:

$$(2.67) \quad \int_z^{\infty} dF(\omega) = -\int_z^{\infty} \frac{1}{\omega(\omega-1)} d\omega$$

односно:

$$(2.68) \quad F(\omega) \Big|_z^{\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) - F(z) = [\ln \omega - \ln(\omega-1)] \Big|_z^{\infty} = \ln \frac{\omega}{\omega-1} \Big|_z^{\infty} = -\ln \frac{z}{z-1}$$

од каде што за бараната  $Z$  – слика непосредно следува:

$$(2.69) \quad F(z) = \ln \frac{z}{z-1} + \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \ln \frac{z}{z-1} + f(0) = \ln \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

Нека  $z = 1$ . Тогаш:

$$(2.70) \quad \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \infty$$

што значи дека за оваа вредност на променливата  $z$ , сликата  $F(z)$  дивергира. Ако, пак, се усвои  $z = -1$ , тогаш:

$$(2.71) \quad \lim_{z \rightarrow -1} F(z) = \ln \frac{1}{2} = -0.693147$$

што значи дека за оваа вредност на променливата  $z$ , сликата  $F(z)$  конвергира. Бидејќи и двете точки припаѓаат на кружницата  $|z| = 1$ , која претставува граница помеѓу областа на конвергенција и областа на дивергенција на набљудуваната слика, може да се заклучи дека таа, навистина, во некои точки од споменатата граница конвергира, а во некои дивергира.

**Задача.2.10.** Да се определи оригиналот  $f(k)$  што припаѓа кон сликата:

$$(2.72) \quad F(z) = \frac{z^2 - 0.5z + 0.06}{z^2 - 0.7z + 0.06}; \quad |z| > 0.6$$

а) по методот на бесконечно алгебарско делење и б) со примена на интегралната формула за инверзна  $Z$  – трансформација.

**Решение:** а) Со бесконечно алгебарско делење на полиномите во броителот и именителот на дадената  $Z$  – слика, се добива:

$$\begin{array}{r} (z^2 - 0.5z + 0.06) : (z^2 - 0.7z + 0.06) = 1 + 0.2z^{-1} + 0.14z^{-2} + 0.086z^{-3} + \dots \\ - z^2 + 0.7z - 0.06 \\ \hline 0.2z \\ - 0.2z + 0.14 - 0.012z^{-1} \\ \hline 0.14 - 0.012z^{-1} \\ - 0.14 + 0.098z^{-1} - 0.0084z^{-2} \\ \hline 0.086z^{-1} - 0.0084z^{-2} \\ \dots \end{array}$$

од каде што, врз основа на дефиницијата на  $Z$  – трансформацијата, непосредно следува:

$$(2.73) \quad \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 0.2 \\ f(2) &= 0.14 \\ f(3) &= 0.086 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Очигледно, бараното решение не се добива во затворен аналитички облик.

б) Со примена на интегралната формула за инверзна  $Z$  – трансформација, дискретниот оригинал  $f(k)$  се добива во затворен аналитички облик:

$$(2.74) \quad \begin{aligned} f(k) &= Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z^2 - 0.5z + 0.06}{z^2 - 0.7z + 0.06}\right\} = Z^{-1}\left\{1 + \frac{0.2z}{z^2 - 0.7z + 0.06}\right\} = \\ &= Z^{-1}\{1 + F_1(z)\} = \begin{cases} 1 + f_1(0), & k = 0 \\ f_1(k), & k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2.75) \quad f_1(k) = Z^{-1}\{F_1(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{0.2z}{z^2 - 0.7z + 0.06}\right\} =$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Re}_{z=0.1} F_1(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=0.6} F_1(z)z^{k-1} = \\ &= \begin{cases} 0; & k \leq 0 \\ -0.4(0.1)^k + 0.4(0.6)^k; & k = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

при што:

$$(2.76) \quad \operatorname{Re}_{z=0.1} F_1(z)z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow 0.1} \left[ (z-0.1) \frac{0.2z^k}{(z-0.1)(z-0.6)} \right] = -0.4(0.1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2.77) \quad \operatorname{Re}_{z=0.6} F_1(z)z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow 0.6} \left[ (z-0.6) \frac{0.2z^k}{(z-0.1)(z-0.6)} \right] = 0.4(0.6)^k; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Оттука:

$$(2.78) \quad f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k = 0 \\ -0.4(0.1)^k + 0.4(0.6)^k, & k > 0 \end{cases}$$

**Задача.2.11.** Да се определи дискретниот оригинал  $f(k)$  кон  $Z$  – сликата:

$$(2.79) \quad F(z) = \frac{2z^2 - 16z + 24}{z^2 - 12z + 35}, \quad |z| > 7$$

со: а) методот на бесконечно алгебарско делење, б) со развој на сликата  $F(z)$  во парцијални дробки, в) со развој на функцијата  $F(z)$  во Тајлоров ред во околина на точката  $z = \infty$  и г) со примена на интегралната формула за инверзна  $Z$ -трансформација.

**Решение:** а) Со бесконечно алгебарско делење на полиномите во броителот и именителот на дадената слика (2.79), се добива:

$$\begin{array}{r} (2z^2 - 16z + 24) : (z^2 - 12z + 35) = 2 + 8z^{-1} + 50z^{-2} + 320z^{-3} + \dots \\ - 2z^2 + 24z - 70 \\ \hline 8z - 46 \\ - 8z + 96 - 280z^{-1} \\ \hline 50 - 280z^{-1} \\ - 50 + 600z^{-1} - 1750z^{-2} \\ \hline 320z^{-1} - 1750z^{-2} \\ \dots \end{array}$$

Оттука и од дефиницијата на едностраната  $Z$ -трансформација непосредно следува:

$$(2.80) \quad \begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(1) &= 8 \\ f(2) &= 50 \\ f(3) &= 320 \\ &\vdots \end{aligned}$$

б) Со еднократно делење на полиномите во броителот и именителот на сликата  $F(z)$  се добива:

$$(2.81) \quad F(z) = 2 + \frac{8z - 46}{z^2 - 12z + 35} = F_1(z) + \tilde{F}(z)$$

а развојот на сликата  $\tilde{F}(z)$  во парцијални дробки по нејзините полови  $z_1 = 5$ ,  $z_2 = 7$  е:

$$(2.82) \quad \tilde{F}(z) = \frac{c_1}{z-5} + \frac{c_2}{z-7} = F_2(z) + F_3(z)$$

каде што:

$$(2.83) \quad c_1 = \lim_{z \rightarrow 5} \left[ (z-5) \frac{8z-46}{(z-5)(z-7)} \right] = 3$$

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow 7} \left[ (z-7) \frac{8z-46}{(z-5)(z-7)} \right] = 5$$

Оттука, дадената  $Z$  – слика може да се претстави како збир од три елементарни слики:

$$(2.84) \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z)$$

чии што соодветни оригинали се:

$$(2.85) \quad f_1(k) = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$(2.86) \quad f_2(k) = \begin{cases} 0, & k < 1 \\ 3 \cdot 5^{k-1}, & k \geq 1 \end{cases}$$

$$(2.87) \quad f_3(k) = \begin{cases} 0, & k < 1 \\ 5 \cdot 7^{k-1}, & k \geq 1 \end{cases}$$

Така, бараниот оригинал  $f(k)$  претставува збир од оригиналите (2.85)-(2.87), односно:

$$(2.88) \quad f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 2, & k = 0 \\ 3 \cdot 5^{k-1} + 5 \cdot 7^{k-1}, & k > 0 \end{cases}$$

в) Ако броителот и именителот на дадената  $Z$  – слика  $F(z)$  се поделат со најголемиот степен на комплексната променлива  $z$ , сликата  $F(z)$  може да се претстави како функција од нова променлива  $u = z^{-1}$ :

$$(2.89) \quad F(z^{-1}) = \frac{2 - 16z^{-1} + 24z^{-2}}{1 - 12z^{-1} + 35z^{-2}} = F(u) = \frac{24u^2 - 16u + 2}{35u^2 - 12u + 1}$$

чии што изводи во точката  $u = 0$  се:

$$(2.90) \quad F^{(0)}(0) = F(0) = 2$$

$$(2.91) \quad F'(0) = \left[ \frac{dF(u)}{du} \right]_{u=0} = \left[ \frac{272u^2 - 92u + 8}{(35u^2 - 12u + 1)^2} \right]_{u=0} = 8$$

$$(2.92) \quad F''(0) = \left[ \frac{d^2 F(u)}{du^2} \right]_{u=0} = \left[ \frac{(544u - 92)(35u^2 - 12u + 1)}{(35u^2 - 12u + 1)^3} - \frac{2(272u^2 - 92u + 8)(70u - 12)}{(35u^2 - 12u + 1)^3} \right]_{u=0} = 100$$

па нејзиниот развој во Тајлоров ред во околина на точката  $u = 0$  ќе биде:

$$(2.93) \quad F(u) = F(0) + F'(0)u + \frac{1}{2} F''(0)u^2 + \frac{1}{6} F'''(0)u^3 + \dots = 2 + 8u + 50u^2 + \dots$$

Со враќање на старата променлива  $z^{-1}$ , за  $Z$ -слика  $F(z)$  се добива:

$$(2.94) \quad F(z) = 2 + 8z^{-1} + 50z^{-2} + \dots$$

од каде што и од дефиницијата на едностраната  $Z$ -трансформација повторно се добива истиот резултат како под а) и б):

$$(2.95) \quad \begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(1) &= 8 \\ f(2) &= 50 \\ f(3) &= 320 \\ &\vdots \end{aligned}$$

г) Сликата  $F(z)$  може да се претстави на следниот начин:

$$(2.96) \quad F(z) = 2 + \frac{8z - 46}{z^2 - 12z + 35} = 2 + \tilde{F}(z)$$

па нејзиниот оригинал  $f(k)$  ќе биде определен со изразот:

$$(2.97) \quad f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 2 + \tilde{f}(k), & k = 0 \\ \tilde{f}(k), & k > 0 \end{cases}$$

каде што оригиналот  $\tilde{f}(k)$  кон  $Z$ -сликата  $\tilde{F}(z)$  може да се определи како сума од остатоците на функцијата  $\tilde{F}(z)z^{k-1}$  во сите нејзини различни полови, а тоа се точките:

$$(2.98) \quad \begin{aligned} z_1 &= 0, k = 0 \\ z_2 &= 5, k \geq 0 \\ z_3 &= 7, k \geq 0 \end{aligned}$$

Така:



$$(2.99) \quad \operatorname{Re}_z \tilde{F}(z)z^{k-1} = \operatorname{Re}_z \tilde{F}(z)z^{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z \frac{8z - 46}{z(z-5)(z-7)} \right] = -\frac{46}{35}$$

$$(2.100) \quad \operatorname{Re}_z \tilde{F}(z)z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow 5} \left[ (z-5) \frac{8z^k - 46z^{k-1}}{(z-5)(z-7)} \right] = 3 \cdot 5^{k-1}, k \geq 0$$

$$(2.101) \quad \operatorname{Re}_z \tilde{F}(z)z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow 7} \left[ (z-7) \frac{8z^k - 46z^{k-1}}{(z-5)(z-7)} \right] = 5 \cdot 7^{k-1}, k \geq 0$$

па, следствено:

$$(2.102) \quad \tilde{f}(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 3 \cdot 5^{k-1} + 5 \cdot 7^{k-1}, & k \geq 1 \end{cases}$$

Оттука:

$$(2.103) \quad f(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 2, & k = 0 \\ 3 \cdot 5^{k-1} + 5 \cdot 7^{k-1}, & k \geq 1 \end{cases}$$

**Задача.2.12.** Да се определи дискретниот оригинал  $f(k)$  што припаѓа кон  $Z$  – сликата:

$$(2.104) \quad F(z) = \frac{z-0.2}{(z-0.1)(z-0.3)}, \quad |z| > 0.3$$

Да се примени методот со развој на дробно рационалната функција  $F(z)$  во парцијални дробки по нејзините полови.

**Решение:** Бидејќи функцијата (2.104) има само два прости реални пола во точките  $z_1 = 0.1$  и  $z_2 = 0.3$ , нејзиниот развој во парцијални дробки ќе биде:

$$(2.105) \quad F(z) = \frac{z-0.2}{(z-0.1)(z-0.3)} = \frac{c_1}{z-0.1} + \frac{c_2}{z-0.3} = \frac{0.5}{z-0.1} + \frac{0.5}{z-0.3}$$

каде што коефициентите  $c_1$  и  $c_2$ , се определени на следниот начин:

$$(2.106) \quad c_1 = \left[ (z-0.1) \frac{z-0.2}{(z-0.1)(z-0.3)} \right]_{z=0.1} = \frac{0.1-0.2}{0.1-0.3} = \frac{-0.1}{-0.2} = \frac{1}{2}$$

$$(2.107) \quad c_2 = \left[ (z-0.3) \frac{z-0.2}{(z-0.1)(z-0.3)} \right]_{z=0.3} = \frac{0.3-0.2}{0.3-0.1} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}$$

Тогаш, бараниот дискретен оригинал  $f(k)$  може да се претстави и пресмета на следниот начин:

$$(2.108) \quad f(k) = Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-0.1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-0.3}\right\} = \\ = Z^{-1}\{F_1(z)\} + Z^{-1}\{F_2(z)\} = f_1(k) + f_2(k)$$

Бидејќи дискретните оригинали  $f_1(k)$  и  $f_2(k)$  се:

$$(2.109) \quad f_1(k) = Z^{-1}\{F_1(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{z-0.1}\right\} = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \frac{1}{2}(0.1)^{k-1}, & k > 0 \end{cases}$$

$$(2.110) \quad f_2(k) = Z^{-1}\{F_2(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{z-0.3}\right\} = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \frac{1}{2}(0.3)^{k-1}, & k > 0 \end{cases}$$

за дискретниот оригинал  $f(k)$  дефинитивно се добива:

$$(2.111) \quad f(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ \frac{1}{2}(0.1)^{k-1} + \frac{1}{2}(0.3)^{k-1}, & k > 0 \end{cases}$$

**Задача.2.13.** Со примена на постапката за развој на  $Z$  – сликата во парцијални дробки, да се определи дискретниот оригинал  $f(k)$  што припаѓа кон дробно-рационалната функција:

$$(2.112) \quad F(z) = \frac{z(z-1)}{(z-2)(z-3)}, \quad |z| > 3$$

**Решение:** Наместо дробно рационалната функција (2.112), во парцијални дробки може да се развие дробно рационалната функција:

$$(2.113) \quad \frac{F(z)}{z} = \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} = \frac{c_1}{z-2} + \frac{c_2}{z-3} = \frac{-1}{z-2} + \frac{2}{z-3}$$

каде што коефициентите  $c_1$  и  $c_2$ , се определени на следниот начин:

$$(2.114) \quad c_1 = \left[ (z-2) \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} \right]_{z=2} = \frac{2-1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$(2.115) \quad c_2 = \left[ (z-3) \frac{z-1}{(z-2)(z-3)} \right]_{z=3} = \frac{3-1}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

Тогаш,  $Z$  – сликата  $F(z)$  може да се претстави на следниот начин:

$$(2.116) \quad F(z) = \frac{z(z-1)}{(z-2)(z-3)} = \frac{-z}{z-2} + \frac{2z}{z-3} = F_1(z) + F_2(z)$$

па нејзиниот дискретен оригинал се определува преку оригиналите на парцијалните слики  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$ :

$$(2.117) \quad f(k) = \begin{cases} 0, k < 0 \\ f_1(k) + f_2(k), k \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, k < 0 \\ -1(2)^k + 2(3)^k, k \geq 0 \end{cases}$$

**Задача.2.14.** Со примена на интегралната формула за инверзна  $Z$  – трансформација, да се определи дискретниот оригинал  $f(k)$  кон  $Z$  – сликата:

$$(2.118) \quad F(z) = \frac{1}{z(z^2 - 2z\sqrt{3} + 3)(z^2 - z\sqrt{3} + 1)}, \quad |z| > \sqrt{3}$$

**Решение:** Половите на дробно рационалната функција (2.118) претставуваат решенија на равенките:

$$(2.119) \quad z = 0$$

$$(2.120) \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 3 = 0$$

$$(2.121) \quad z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$$

и тие се:

$$(2.122) \quad z_0 = 0$$

$$(2.123) \quad z_{1,2} = \sqrt{3}$$

$$(2.124) \quad z_{3,4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm j \frac{1}{2}$$

Освен овие полови, функцијата  $F(z)z^{k-1}$  има полови уште во координатниот почеток од  $z$  – комплексната рамнина и тоа двократен пол во  $z = 0$  за  $k = 0$  и прост пол во истата точка за  $k = 1$ . Оттука, остатоците на  $F(z)z^{k-1}$  во сите нејзини различни полови ќе бидат:

$$(2.125) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z=0, k=0} F(z)z^{k-1} &= \operatorname{Re}_{z=0} F(z)z^{-1} = \\ &= \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{1}{z^2(z-\sqrt{3})^2(z^2 - z\sqrt{3} + 1)} \right]_{z=0} = \frac{5\sqrt{3}}{9}; \quad k = 0 \end{aligned}$$

$$(2.126) \quad \operatorname{Re}_{z=0, k=1} z F(z) z^{k-1} = \operatorname{Re}_{z=0, k=1} F(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z \frac{1}{z(z-\sqrt{3})^2(z^2 - z\sqrt{3} + 1)} \right] = \frac{1}{3}; \quad k=1$$

$$(2.127) \quad \operatorname{Re}_{z=\sqrt{3}} z F(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow \sqrt{3}} \frac{d}{dz} \left[ (z-\sqrt{3})^2 \frac{z^{k-2}}{(z-\sqrt{3})^2(z^2 - z\sqrt{3} + 1)} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9} (k-5)(\sqrt{3})^k, \quad k \geq 0$$

$$(2.128) \quad \operatorname{Re}_{z=\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}} z F(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}} \left[ \frac{\left( z - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) z^{k-2}}{z(z-\sqrt{3}^2) \left( z - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) \left( z - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)} \right] =$$

$$= \frac{1}{j} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)^k = \frac{1}{j} e^{j\frac{k\pi}{6}}, \quad k \geq 0$$

$$(2.129) \quad \operatorname{Re}_{z=\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}} z F(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}} \left[ \frac{\left( z - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) z^{k-2}}{z(z-\sqrt{3}^2) \left( z - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) \left( z - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)} \right] =$$

$$= -\frac{1}{j} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right)^k = -\frac{1}{j} e^{-j\frac{k\pi}{6}}, \quad k \geq 0$$

а бараниот оригинал  $f(k)$  кон дадената  $Z$  – слика е:

$$(2.130) \quad f(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 4 \\ \frac{\sqrt{3}}{9} (k-5)(\sqrt{3})^k + 2 \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right), & k > 4 \end{cases}$$

**Задача.2.15.** Со примена на интегралната формула за инверзна  $Z$  – трансформација, да се определи дискретниот оригинал  $f(k)$  кон  $Z$  – сликата:

$$(2.131) \quad F(z) = \frac{100}{z(z^2 + 4z + 4)(z^2 + 2z + 5)}, \quad |z| > \sqrt{5}$$

**Решение:** Половите на дробно рационалната функција (2.131) претставуваат решенија на равенките:

$$(2.132) \quad z = 0$$

$$(2.133) \quad z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$(2.134) \quad z^2 + 2z + 5 = 0$$

и тие се:

$$(2.135) \quad z_0 = 0$$

$$(2.136) \quad z_{1,2} = -2$$

$$(2.137) \quad z_{3,4} = -1 \pm j2$$

Освен овие полови, функцијата  $F(z)z^{k-1}$  има полови уште во координатниот почеток од  $z$ -комплексната рамнина и тоа двократен пол во  $z = 0$  за  $k = 0$  и прост пол во истата точка за  $k = 1$ . Оттука, остатоците на  $F(z)z^{k-1}$  во сите нејзини различни полови ќе бидат:

$$(2.138) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z=0, k=0} F(z)z^{k-1} &= \operatorname{Re}_{z=0} F(z)z^{-1} = \\ &= \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{100}{z^2(z+2)^2(z^2+2z+5)} \right]_{z=0} = -7; \quad k = 0 \end{aligned}$$

$$(2.139) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z=0, k=1} F(z)z^{k-1} &= \operatorname{Re}_{z=0, k=1} F(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z \frac{100}{z(z^2+4z+4)(z^2+2z+5)} \right] = 5; \quad k = 1 \end{aligned}$$

$$(2.140) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z=-2} F(z)z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d}{dz} \left[ (z+2)^2 \frac{100z^{k-1}}{z(z+2)^2(z^2+2z+5)} \right] = \\ &= (7 - 2.5k)(-2)^k, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$(2.141) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z=-1-j2} F(z)z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow -1-j2} \left[ \frac{(z+1+j2)100z^{k-1}}{z(z+2)^2(z+1+j2)(z+1-j2)} \right] = \\ &= j(-1-j2)^k = \sqrt{5^k} e^{j(k \arctg 2 + \pi/2)}, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$(2.142) \quad \operatorname{Re}_{z=-1+j2} F(z)z^{k-1} = -j(-1+j2)^k = \sqrt{5^k} e^{-j(k \arctg 2 + \pi/2)}, \quad k \geq 0$$

а бараниот оригинал  $f(k)$  кон дадената  $Z$ -слика е:

$$(2.143) \quad f(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 4 \\ (-2.5k + 7)(-2)^k + 2\sqrt{5^k} \cos(k \arctg 2 + \frac{\pi}{2}), & k > 4 \end{cases}$$

**Задача.2.16.** Да се покаже дека:

$$(2.144) \quad Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\} = \frac{z-1}{z}Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$(2.145) \quad Z\left\{\frac{Ts+1}{Ts^2}(1-e^{-sT})^2G(s)\right\} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 Z\left\{\frac{Ts+1}{Ts^2}G(s)\right\}$$

**Решение:** а) Нека:

$$(2.146) \quad F(s) = \frac{G(s)}{s}$$

Тогаш сликата:

$$(2.147) \quad F(s)(1-e^{-sT})$$

има оригинал:

$$(2.148) \quad f(t) - f(t-T)$$

при што:

$$(2.149) \quad f(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Следствено:

$$(2.150) \quad Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\} = Z\left\{(1-e^{-sT})F(s)\right\} = Z\{f(t) - f(t-T)\} = \\ = F(z) - z^{-1}F(z) = \frac{z-1}{z}Z\{f(t)\} = \frac{z-1}{z}Z\left\{L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}$$

б) Аналогно со претходниот случај, нека:

$$(2.151) \quad W(s) = \frac{Ts+1}{Ts^2}G(s)$$

Тогаш, сликата:

$$(2.152) \quad W(s)(1-e^{-sT})^2$$

ќе има оригинал:

$$(2.153) \quad w(t) - 2w(t-T) + w(t-2T)$$

при што:

$$(2.154) \quad w(t) = L^{-1} \left\{ \frac{Ts+1}{Ts^2} G(s) \right\}$$

па за дадената  $Z$  – слика се добива:

$$\begin{aligned} (2.155) \quad Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{Ts+1}{Ts^2} (1 - e^{-sT})^2 G(s) \right\} \right\} &= Z \left\{ L^{-1} \left\{ (1 - e^{-sT})^2 W(s) \right\} \right\} = \\ &= Z \{ w(t) - 2w(t-T) + w(t-2T) \} = \\ &= W(z) - 2z^{-1}W(z) + z^{-2}W(z) = \\ &= \left( \frac{z-1}{z} \right)^2 W(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right)^2 Z \{ w(t) \} = \\ &= \left( \frac{z-1}{z} \right)^2 Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{Ts+1}{Ts^2} G(s) \right\} \right\} \end{aligned}$$

**Задача.2.17.** Да се определат почетните вредности  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$  на дискретниот оригинал  $f(k)$ , чија  $Z$  – слика  $F(z)$  е од облик:

$$(2.156) \quad F(z) = \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2}, |z| > 1$$

**Решение:**  $Z$  – сликата  $F(z)$  секогаш може да се претстави на следниот начин:

$$\begin{aligned} (2.157) \quad F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \\ &= f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + f(4)z^{-4} + \sum_{k=5}^{\infty} f(k)z^{-k} \end{aligned}$$

од каде што непосредно следува:

$$\begin{aligned} (2.158) \quad zF(z) &= zf(0) + f(1) + f(2)z^{-1} + f(3)z^{-2} + f(4)z^{-3} + \sum_{k=5}^{\infty} f(k)z^{-k+1} \\ \Rightarrow f(1) &= zF(z) - zf(0) - \sum_{k=2}^{\infty} f(k)z^{-k+1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} [zF(z) - zf(0)]$$

$$(2.159) \quad z^2 F(z) = z^2 f(0) + zf(1) + f(2) + \sum_{k=3}^{\infty} f(k)z^{-k+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2) = z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1) - \sum_{k=3}^{\infty} f(k)z^{-k+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1)]$$

$$(2.160) \quad z^3 F(z) = z^3 f(0) + z^2 f(1) + zf(2) + f(3) + \sum_{k=4}^{\infty} f(k)z^{-k+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(3) = z^3 F(z) - z^3 f(0) - z^2 f(1) - zf(2) - \sum_{k=4}^{\infty} f(k)z^{-k+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(3) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^3 F(z) - z^3 f(0) - z^2 f(1) - zf(2)]$$

$$(2.161) \quad z^4 F(z) = z^4 f(0) + z^3 f(1) + z^2 f(2) + zf(3) + f(4) + \sum_{k=5}^{\infty} f(k)z^{-k+4}$$

$$\Rightarrow f(4) = z^4 F(z) - z^4 f(0) - z^3 f(1) - z^2 f(2) - zf(3) - \sum_{k=5}^{\infty} f(k)z^{-k+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(4) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^4 F(z) - z^4 f(0) - z^3 f(1) - z^2 f(2) - zf(3)]$$

Следствено, за бараните почетни вредности  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$  на дискретниот оригинал  $f(k)$  кон  $Z$  – сликата (2.156) се добива:

$$(2.162) \quad f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} = 0$$

$$(2.163) \quad f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} [zF(z) - zf(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} = 0$$

$$(2.164) \quad f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1)] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$(2.165) \quad f(3) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^3 F(z) - z^3 f(0) - z^2 f(1) - zf(2)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ z^3 F(z) - \frac{1}{2} z \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{z^3(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} - \frac{1}{2} z \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z(z-1)^2} - \frac{1}{2} z \right] =$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{(z+1)^2(z^2+1) - z^2(z-1)^2}{2z(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{4z^3 + z^2 + 2z + 1}{2z(z-1)^2} \right] = 2 \\
 (2.166) \quad f(4) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ z^4 F(z) - \frac{1}{2} z^2 - 2z \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2(z-1)^2} - \frac{1}{2} z^2 - 2z \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{(z+1)^2(z^2+1) - z^2(z-1)^2 - 4z(z-1)^2}{2(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{9z^2 - 2z + 1}{2(z-1)^2} \right] = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

**Задача.2.18.** Да се определат почетните вредности  $f(0)$  и  $f(1)$  на дискретниот оригинал  $f(k)$ , чија што  $Z$  – слика има облик:

$$(2.167) \quad F(z) = \frac{(10z-1)(9z-1)}{(6z-1)(5z-1)}, \quad |z| > 0.2$$

**Решение:** Со примена на првата гранична теорема на  $Z$  – трансформацијата се добива:

$$\begin{aligned}
 (2.168) \quad f(0) &= \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(10z-1)(9z-1)}{(6z-1)(5z-1)} = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z \left(10 - \frac{1}{z}\right) z \left(9 - \frac{1}{z}\right)}{z \left(6 - \frac{1}{z}\right) z \left(5 - \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\left(10 - \frac{1}{z}\right) \left(9 - \frac{1}{z}\right)}{\left(6 - \frac{1}{z}\right) \left(5 - \frac{1}{z}\right)} = \frac{10 \cdot 9}{6 \cdot 5} = \frac{90}{30} = 3
 \end{aligned}$$

додека вредноста  $f(1)$  изнесува:

$$\begin{aligned}
 (2.169) \quad f(1) &= \lim_{z \rightarrow \infty} [zF(z) - zf(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ z \frac{(10z-1)(9z-1)}{(6z-1)(5z-1)} - 3z \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{90z^3 - 19z^2 + z - 90z^3 + 33z^2 - 3z}{30z^2 - 11z + 1} \right) = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{14z^2 - 2z}{30z^2 - 11z + 1} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{14 - \frac{2}{z}}{30 - \frac{11}{z} + \frac{1}{z^2}} \right) = \frac{14}{30}
 \end{aligned}$$

**Задача.2.19.** Да се определи трајната вредност на дискретниот сигнал  $f(kT)$ , чија  $Z$  – слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$ , освен полови во внатрешноста на единичниот круг  $|z| \leq 1$ , има пол во точката  $z = \sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2 = e^{j\pi/4}$ .

**Решение:** Ако  $Z$  – слика  $F(z) = Z\{f(kT)\}$  на набљудуваниот дискретен сигнал  $f(kT)$  има пол во точката  $z = \sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2 = e^{j\frac{\pi}{4}}$ , тогаш таа има пол и во точката  $z = \sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2 = e^{-j\frac{\pi}{4}}$ . Овие два прости пола чинат еден конјугирано комплексен пар и нивниот модул е еднаков на единица, што значи дека лежат на единичната кружница  $|z|=1$ . Сите компоненти на дискретниот оригинал  $f(kT)$ , кои произлегуваат од половите на неговата  $Z$  – слика што лежат во внатрешноста на единичниот круг  $|z| \leq 1$ , исчезнуваат со тек на времето. Следствено, трајната вредност на оригиналот  $f(kT)$  е одредена со трајната вредност на компонентата што произлегува од половите  $z = \sqrt{2}/2 \pm j\sqrt{2}/2 = e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$ , кои лежат на единичната кружница  $|z|=1$ :

$$\begin{aligned}
 (2.170) \quad \left( ce^{j\frac{\pi}{4}(k-1)} + \bar{c}e^{-j\frac{\pi}{4}(k-1)} \right) &= \left[ (a + jb)e^{j\frac{\pi}{4}(k-1)} + (a - jb)e^{-j\frac{\pi}{4}(k-1)} \right] = \\
 &= \left[ a \left( e^{j\frac{\pi}{4}(k-1)} + e^{-j\frac{\pi}{4}(k-1)} \right) + jb \left( e^{j\frac{\pi}{4}(k-1)} - e^{-j\frac{\pi}{4}(k-1)} \right) \right] = \\
 &= \left[ 2a \left( \frac{e^{j\frac{\pi}{4}(k-1)} + e^{-j\frac{\pi}{4}(k-1)}}{2} \right) - 2b \left( \frac{e^{j\frac{\pi}{4}(k-1)} - e^{-j\frac{\pi}{4}(k-1)}}{2j} \right) \right] = \\
 &= \left[ 2a \cos \frac{\pi}{4}(k-1) - 2b \sin \frac{\pi}{4}(k-1) \right] = 2 \cos \left[ \frac{\pi}{4}(k-1) + \arctg \frac{b}{a} \right]
 \end{aligned}$$

Од изразот (2.170) се гледа дека оваа компонента е периодична функција, што значи дека таа осцилира помеѓу нејзината максимална и минимална вредност, поради што нејзината трајна вредност е неопределена. Од друга страна, бидејќи нејзината амплитуда е конечна и еднаква на 2, трајната вредност:

$$(2.171) \quad 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left| ce^{j\frac{\pi}{4}(k-1)} + \bar{c}e^{-j\frac{\pi}{4}(k-1)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| 2 \cos \left[ \frac{\pi}{4}(k-1) + \arctg \frac{b}{a} \right] \right| \leq 2$$

е ограничена.

**Задача.2.20.** Да се определи трајната вредност на дискретниот сигнал  $f(kT)$ , чија  $Z$  – сликата е:

$$(2.172) \quad F(z) = \frac{3z}{(z-1)(z-0.5)^2(z-1.5)}; \quad |z| > 1.5$$

**Решение:** Дробно-рационалната функција (2.172) има прост реален пол во точката  $z_1 = 1$ , двократен реален пол во точката  $z_{2,3} = \frac{1}{2}$  и прост реален пол во точката  $z_4 = \frac{3}{2}$ .

Половите  $z_{2,3} = \frac{1}{2}$  лежат во внатрешноста од единичниот круг  $|z| \leq 1$  во  $z$ -комплексната рамнина, полот  $z_1 = 1$  се наоѓа на самата кружницата  $|z| = 1$ , додека полот  $z_4 = \frac{3}{2}$  лежи надвор од единичниот круг  $|z| \leq 1$ . Со оглед на тоа дека  $Z$ -сликата  $F(z)$  на набљудуваниот дискретен оригинал  $f(kT)$  има еден пол надвор од единичниот круг во  $Z$ -комплексната рамнина, неговата трајна вредност ќе биде неограничена.

$$(2.173) \quad f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \infty$$

Резултатот може да се провери ако се определи оригиналот  $f(kT)$  кон дадената  $Z$ -слика  $F(z)$ :

$$\begin{aligned} (2.174) \quad f(kT) &= Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{3z}{(z-1)(z-0.5)^2(z-1.5)}\right\} = \sum_i \operatorname{Re}_z F(z) z^{k-1} = \\ &= \operatorname{Re}_z \frac{3z^k}{z=1 (z-1)(z-0.5)^2(z-1.5)} + \operatorname{Re}_z \frac{3z^k}{z=\frac{1}{2} (z-1)(z-0.5)^2(z-1.5)} + \\ &+ \operatorname{Re}_z \frac{3z^k}{z=\frac{3}{2} (z-1)(z-0.5)^2(z-1.5)} = \frac{3z^k}{(z-0.5)^2(z-1.5)} \Big|_{z=1} + \\ &+ \frac{3z^k}{(z-1)(z-0.5)^2} \Big|_{z=\frac{3}{2}} + \left[ \frac{3z^k}{(z-1)(z-1.5)} \right]' \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \\ &= -24(1)^k + 6(1.5)^k + 6(2k+3)(0.5)^k; \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Оттука:

$$\begin{aligned} (2.175) \quad f(\infty) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} [-24 + 6(1.5)^k + 6(2k+3)(0.5)^k] = \\ &= -24 + \lim_{k \rightarrow \infty} 6(1.5)^k + 0 = \infty \end{aligned}$$

**Задача.2.21.** Да се определи трајната вредност на дискретниот сигнал  $f(kT)$ , чија  $Z$ -сликата е:

$$(2.176) \quad F(z) = \frac{z}{(z+1)(z^2+4)}$$

**Решение:** Дробно-рационалната функција (2.176) има прост реален пол во точката  $z_1 = -1$  и пар конјугирано комплексни полови во точките  $z_{2,3} = \pm j2$ . Полот  $z_1 = -1$  се наоѓа на самата кружницата  $|z|=1$ , додека половите  $z_{2,3} = \pm j2$  лежат надвор од единичниот круг  $|z| \leq 1$ . Поради тоа, трајната вредност на набљудуваниот дискретен оригинал  $f(kT)$  ќе биде неограничена и неопределена.

Навистина, ако се определи самиот дискретен оригинал  $f(kT)$ :

$$\begin{aligned} (2.177) \quad f(kT) &= Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z+1)(z^2+4)}\right\} = \sum_i \operatorname{Re}_z F(z) z^{k-1} = \\ &= \operatorname{Re}_{z=-1} \frac{z^k}{(z+1)(z^2+4)} + \operatorname{Re}_{z=-j2} \frac{z^k}{(z+1)(z^2+4)} + \operatorname{Re}_{z=j2} \frac{z^k}{(z+1)(z^2+4)} = \\ &= \left. \frac{z^k}{(z^2+4)} \right|_{z=-1} + \left. \frac{z^k}{(z+1)(z-j2)} \right|_{z=-j2} + \left. \frac{z^k}{(z+1)(z+j2)} \right|_{z=j2} = \\ &= \frac{1^k}{5} + \frac{2+j}{20} (j2)^k + \frac{2-j}{20} (-j2)^k = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2+j}{20} \left( 2e^{j\frac{\pi}{2}} \right)^k + \frac{2-j}{20} \left( 2e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)^k = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2+j}{20} \left( 2^k e^{j\frac{\pi k}{2}} \right) + \frac{2-j}{20} \left( 2^k e^{-j\frac{\pi k}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2+j}{20} \left( 2^k e^{j\frac{\pi k}{2}} \right) - \frac{2-j}{20} \left( 2^k e^{-j\frac{\pi k}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{20} 2^k \cos \left[ \frac{\pi k}{2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2} \right) \right]; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

**Задача.2.22.** Со помош на соодветните особини на едностраната  $Z$  – трансформација, да се пресмета конечната сума:

$$(2.178) \quad S = \sum_{k=0}^n (2k+3)^2$$

**Решение:** Дадената сума може да се претстави на следниот начин:

$$(2.179) \quad S = \sum_{k=0}^n (2k+3)^2 = \sum_{k=0}^n (4k^2 + 12k + 9) = 4 \sum_{k=0}^n k^2 + 12 \sum_{k=0}^n k + 9 \sum_{k=0}^n 1 =$$

$$= 4S_1 + 12S_2 + 9S_3$$

при што, за одделните суми  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) важи:

$$(2.180) \quad S_1 = \sum_{k=0}^n k^2 = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} Z\{k^2\} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \right\} =$$

$$= Z^{-1} \left\{ \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4} \right\} = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{d^3}{dz^3} (z^{n+2} + z^{n+1}) \right] =$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 1} [(n+2)(n+1)nz^{n-1} + (n+1)n(n-1)z^{n-2}] =$$

$$= \frac{1}{6} [n(n+1)(n+2) + n(n-1)(n+1)] = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(2.181) \quad S_2 = \sum_{k=0}^n k = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} Z\{k\} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \right\} =$$

$$= Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{(z-1)^3} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{d^2}{dz^2} (z^{n+1}) \right] = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$(2.182) \quad S_3 = \sum_{k=0}^n 1 = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} Z\{1\} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} \right\} =$$

$$= Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{(z-1)^2} \right\} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{d}{dz} (z^{n+1}) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} [(n+1)z^n] = (n+1)$$

Тогаш, бараната сума  $S$  ќе биде:

$$(2.183) \quad S = 4S_1 + 12S_2 + 9S_3 = \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) + 6n(n+1) + 9(n+1) =$$

$$= \frac{n+1}{3} [2n(2n+1) + 18n + 27] = \frac{(n+1)(4n^2 + 20n + 27)}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} (4n^3 + 24n^2 + 47n + 27)$$

**Задача.2.23.** Со помош на соодветните особини на едностраната  $Z$  – трансформација, да се определи конечната сума:

$$(2.184) \quad S = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta); \quad \theta = \text{const.} \in \Re$$

**Решение:** Врз основа на соодветната особина на  $Z$  – трансформацијата за одредување  $Z$  – слика на конечен ред, се добива:

$$(2.185) \quad Z \left\{ \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) \right\} = \frac{z}{z-1} Z \{ \sin(k\theta)h(k) \} = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}; \quad |z| > 1$$

па оттука, за бараната конечна сума следува:

$$\begin{aligned} (2.186) \quad S &= \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} Z [\sin(k\theta)h(k)] \right\} = \\ &= Z^{-1} \left\{ \frac{z^2 \sin \theta}{(z-1)(z^2 - 2z \cos \theta + 1)} \right\} = \\ &= \sin \theta \cdot Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{(z-1)(z - \cos \theta - j \sin \theta)(z - \cos \theta + j \sin \theta)} \right\} = \\ &= \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} + \frac{(\cos \theta + j \sin \theta)^{k+1}}{j2(\cos \theta - 1 + j \sin \theta)} - \frac{(\cos \theta - j \sin \theta)^{k+1}}{j2(\cos \theta - 1 - j \sin \theta)} = \\ &= \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} + \frac{e^{j(k+1)\theta}}{j2(\cos \theta - 1 + j \sin \theta)} - \frac{e^{-j(k+1)\theta}}{j2(\cos \theta - 1 - j \sin \theta)} = \\ &= \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} + \frac{(\cos \theta - 1 - j \sin \theta)e^{j(k+1)\theta} - (\cos \theta - 1 + j \sin \theta)e^{-j(k+1)\theta}}{j4(\cos \theta - 1 + j \sin \theta)(\cos \theta - 1 - j \sin \theta)} = \\ &= \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} + \frac{(\cos \theta - 1) \left[ e^{j(k+1)\theta} - e^{-j(k+1)\theta} \right]}{j4(1 - \cos \theta)} - \frac{\sin \theta \left[ e^{j(k+1)\theta} + e^{-j(k+1)\theta} \right]}{4(1 - \cos \theta)} = \\ &= \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} - \frac{1}{2} \sin[(k+1)\theta] - \frac{\sin \theta \cos[(k+1)\theta]}{2(1 - \cos \theta)} \end{aligned}$$

**Задача.2.24.** Со помош на  $Z$  – трансформацијата да се определи решението  $x(k)$  на диферентната равенка:

$$(2.187) \quad x(k+2) - 3x(k+2) + 2x(k) = 2y(k)$$

ако:

$$(2.188) \quad y(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 2^k, & k \geq 0 \end{cases}$$

Да се претпостават нулеви почетни услови.

**Решение:** Со примена на  $Z$  – трансформацијата и нејзините особини, за  $Z$  – сликата  $X(z)$  на бараното решение  $x(k)$  се добива:

$$(2.189) \quad Z\{x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k)\} = Z\{2y(k)\}$$

$$\left[ z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) \right] - 3[zX(z) - zx(0)] + 2X(z) = 2Y(z)$$

$$(z^2 - 3z + 2)X(z) = 2Y(z)$$

$$(2.190) \quad X(z) = \frac{2}{(z-1)(z-2)} Y(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-2)^2}$$

Оттука, самиот дискретен оригинал  $x(k)$  ќе биде:

$$(2.191) \quad x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{ \frac{2z}{(z-1)(z-2)^2} \right\} =$$

$$= \operatorname{Re}_{z=1} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=2} X(z)z^{k-1}$$

$$(2.192) \quad \operatorname{Re}_{z=1} X(z)z^{k-1} = \left[ (z-1)X(z)z^{k-1} \right]_{z=1} =$$

$$= \left[ \frac{2z^k}{(z-2)^2} \right]_{z=1} = 2; k \geq 0$$

$$(2.193) \quad \operatorname{Re}_{z=2} X(z)z^{k-1} = \left\{ \frac{d}{dz} \left[ (z-2)^2 X(z)z^{k-1} \right] \right\}_{z=2} =$$

$$= \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{2z^k}{z-1} \right) \right]_{z=2} = 2 \left[ \frac{kz^{k-1}(z-1) - z^k}{(z-1)^2} \right]_{z=2} =$$

$$= 2(k2^{k-1} - 2^k) = (k-2)2^k; k \geq 0$$

$$(2.194) \quad x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 2 + (k-2)2^k, & k \geq 0 \end{cases}$$

**Задача.2.25.** Со помош на инверзната  $Z$  – трансформација, да се определи оригиналот  $x(k)$  кој припаѓа на следната  $Z$  – слика:

$$(2.195) \quad X(z) = \frac{(2z+1)(z-1)}{z(z^2+3z+3)}, |z| > \sqrt{3}$$

**Решение:**

$$(2.196) \quad x(k) = Z^{-1} \left\{ \frac{(2z+1)(z-1)}{z(z^2+3z+3)} \right\} = \operatorname{Re}_{z=0(k=0)} X(z)z^{-1} + \operatorname{Re}_{z=0(k=1)} X(z)z^{-1} +$$

$$+ \operatorname{Re}_{z=-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} X(z)z^{k-1} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 2, & k = 1 \\ \frac{-7}{j3\sqrt{3}} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k + \frac{7}{j3\sqrt{3}} \left( -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k, & k \geq 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 2, & k = 1 \\ \frac{-7}{j3\sqrt{3}} \left( \sqrt{3}e^{j\arctg\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^k + \frac{7}{j3\sqrt{3}} \left( \sqrt{3}e^{-j\arctg\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^k, & k \geq 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 2, & k = 1 \\ \frac{-7}{j3\sqrt{3}} \left( \sqrt{3}^k \right) e^{jk\arctg\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{7}{j3\sqrt{3}} \left( \sqrt{3}^k \right) e^{-jk\arctg\frac{1}{\sqrt{3}}}, & k \geq 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 2, & k = 1 \\ \frac{-14}{3} \sqrt{3}^{k-1} \sin\left(k\arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right), & k \geq 2 \end{cases}$$

бидејќи:



$$(2.197) \quad x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(2z+1)(z-1)}{z(z^2+3z+3)} = 0$$

$$(2.198) \quad x(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} [zX(z) - zx(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(2z+1)(z-1)}{(z^2+3z+3)} = 2$$

$$(2.199) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} X(z) z^{k-1} &= \operatorname{Re}_{z = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{z^{k-2}(2z+1)(z-1)}{z^2+3z+3} = \\ &= \left[ \left( z + \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{z^{k-2}(2z+1)(z-1)}{\left( z + \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( z + \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \right]_{z = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \left[ \frac{z^{k-2}(2z+1)(z-1)}{\left( z + \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \right]_{z = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \frac{\left[ 2 \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \right] \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)}{\left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{k-2} = \\ &= \frac{(2 + j\sqrt{3}) \left( -\frac{5}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{j\sqrt{3} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k = \\ &= \frac{2(2 + j\sqrt{3})(-5 - j\sqrt{3})}{j\sqrt{3}(-3 - j\sqrt{3})^2} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k = \\ &= 2 \frac{-10 - j5\sqrt{3} - j2\sqrt{3} + 3}{j\sqrt{3}(6 + j6\sqrt{3})} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k = \\ &= -14 \frac{1 + j\sqrt{3}}{j6\sqrt{3}(1 + j\sqrt{3})} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k = \frac{-7}{j3\sqrt{3}} \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k \end{aligned}$$

$$(2.200) \quad \operatorname{Re} z = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad X(z)z^{k-1} = \frac{7}{j3\sqrt{3}} \left( -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k$$

**Задача.2.26.** Дадена е линеарната диферентна равенка:

$$(2.201) \quad x(k+5) - 5x(k+4) + 0.5x(k+3) + 0.25x(k+2) - 0.1875x(k+1) + 0.03125x(k) = y(k)$$

со нулеви почетни услови:

$$(2.202) \quad x(0) = x(1) = x(2) = x(3) = x(4) = 0$$

Да се определи  $Z$ -сликата  $X(z)$  на нејзиното решение  $x(k)$ . Да се провери дали таа слика има прост пол во  $z_1 = -0.5$  и четирикратен пол во  $z_2 = 0.5$ . Потоа да се определи решението  $x(k)$  на дадената диферентна равенка за:

$$(2.203) \quad y(k) = \begin{cases} 0; & k=-1, -2, \dots \\ 1; & k=0 \\ -1; & k=1 \\ 0.25; & k=2 \\ 0; & k=3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

**Решение:** Со  $Z$ -трансформација на дадената диферентна равенка, во просторот на  $Z$ -сликите се добива следната алгебарска равенка:

$$(2.204) \quad (z^5 - 1.5z^4 + 0.5z^3 + 0.25z^2 - 0.1875z + 0.03125)X(z) = Y(z)$$

односно:

$$(2.205) \quad a(z)X(z) = Y(z)$$

каде што:

$$(2.206) \quad a(z) = z^5 - 1.5z^4 + 0.5z^3 + 0.25z^2 - 0.1875z + 0.03125$$

Оттука, бараната  $Z$ -слика  $X(z)$  ќе биде:

$$(2.207) \quad X(z) = \frac{1}{a(z)}Y(z)$$

а нејзините полови се, очигледно, нули на полиномот  $a(z)$ . Проверката дека  $z_1 = -0.5$  е проста, а  $z_2 = 0.5$  е четирикратна нула на полиномот  $a(z)$ , може да се направи на повеќе начини како, на пример, со помош на Хорнеровата шема. Меѓутоа, доволно ќе биде да се покаже дека:

$$(2.208) \quad z^5 - 1.5z^4 + 0.5z^3 + 0.25z^2 - 0.1875z + 0.03125 = (z + 0.5)(z - 0.5)^4$$

За дадената дискретна возбуда  $y(k)$ , чија што  $Z$ -слика  $Y(z)$  е:

$$(2.209) \quad Y(z) = Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{0.25}{z^2} = \left(\frac{z-0.5}{z}\right)^2$$

оригиналот  $x(k)$  кон  $Z$ -сликата  $X(z)$  ќе биде:

$$(2.210) \quad x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{z^2(z+0.5)(z-0.5)^2}\right\} =$$

$$= \sum_i \operatorname{Re}_z X(z)z^{k-1} =$$

$$= \operatorname{Re}_{z=0, k=0} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=0, k=1} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=0, k=2} X(z)z^{k-1} +$$

$$+ \operatorname{Re}_{z=-0.5} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=0.5} X(z)z^{k-1} =$$

$$= \begin{cases} 0; & k < 0 \\ x(0); & k = 0 \\ x(1); & k = 1 \\ x(2); & k = 2 \\ \operatorname{Re}_{z=-0.5} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=0.5} X(z)z^{k-1}; & k \geq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0; & k < 5 \\ 8[(-1)^{k+1} + 2k - 7] \cdot 2^{-k}; & k \geq 5 \end{cases}$$

Имено:

$$(2.211) \quad x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = 0$$

$$(2.212) \quad x(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} [zX(z) - zx(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = 0$$

$$(2.213) \quad x(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 X(z) = 0$$

$$(2.214) \quad x(3) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^3 X(z) - z^3 x(0) - z^2 x(1) - zx(2)] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 X(z) = 0$$

$$(2.215) \quad x(4) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^4 X(z) - z^4 x(0) - z^3 x(1) - z^2 x(2) - zx(3)] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 X(z) = 0$$

$$(2.216) \quad \operatorname{Re}_{z=-0.5} X(z)z^{k-1} = \left[ (z+0.5)X(z)z^{k-1} \right]_{z=-0.5} = \\ = \left[ \frac{z^{k-3}}{(z-0.5)^2} \right]_{z=-0.5} = -8(-0.5)^k; k \geq 0$$

$$(2.217) \quad \operatorname{Re}_{z=0.5} X(z)z^{k-1} = \left\{ \frac{d}{dz} \left[ (z-0.5)^2 X(z)z^{k-1} \right] \right\}_{z=0.5} = \\ = \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{z^{k-3}}{z+0.5} \right) \right]_{z=0.5} = \left[ \frac{(k-3)z^{k-4}(z+0.5) - z^{k-3}}{(z+0.5)^2} \right]_{z=0.5} = \\ = (k-3)0.5^{k-4} - 0.5^{k-3} = 16(k-3)0.5^k - 8 \cdot 0.5^k; k \geq 0$$

**Задача.2.27.** Со помош на  $Z$  – трансформацијата, да се определи решението  $x(k)$  на линеарната диферентна равенка:

$$(2.218) \quad 2\Delta^2 x(k) - 4\Delta x(k) = y(k)$$

со почетни услови:

$$(2.219) \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2$$

ако а)

$$(2.220) \quad y(k) \equiv 0 \quad \forall k$$

и б)

$$(2.221) \quad y(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

**Решение:** Со помош на смените:

$$(2.222) \quad \Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$$

$$(2.223) \quad \Delta^2 x(k) = \Delta[\Delta x(k)] = x(k+2) - 2x(k+1) + x(k)$$

Равенката (2.218) се трансформира во облик:

$$(2.224) \quad 2x(k+2) - 8x(k+1) + 6x(k) = y(k)$$

со истите почетни услови (2.219), па со нејзина  $Z$  – трансформација:

$$\begin{aligned}
 (2.225) \quad & Z\{2x(k+2) - 8x(k+1) + 6x(k) = y(k)\} \\
 & Z\{2x(k+2) - 8x(k+1) + 6x(k)\} = Z\{y(k)\} \\
 & 2Z\{x(k+2)\} - 8Z\{x(k+1)\} + 6Z\{x(k)\} = Z\{y(k)\} \\
 & 2[z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)] - 8[zX(z) - zx(0)] + 6X(z) = Y(z) \\
 & 2[z^2 X(z) - 2z] - 8zX(z) + 6X(z) = Y(z) \\
 & (2z^2 - 8z + 6)X(z) = Y(z) + 4z
 \end{aligned}$$

за  $Z$  – сликата  $X(z)$  на бараното решение  $x(k)$  се добива изразот:

$$(2.226) \quad X(z) = \frac{1}{2(z^2 - 4z + 3)} Y(z) + \frac{2z}{z^2 - 4z + 3}$$

Тогаш, за  $y(k)$  дадена со (2.220), сликата (2.226) добива облик:

$$(2.227) \quad X(z) = \frac{2z}{z^2 - 4z + 3}$$

па бараниот оригинал  $x(k)$  ќе биде:

$$\begin{aligned}
 (2.228) \quad & x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{2z}{z^2 - 4z + 3}\right\} = \\
 & = Z^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-1)(z-3)}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-3}\right\} = \\
 & = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 3^k - 1, & k \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

додека за  $y(k)$  зададена со (2.221), сликата (2.226) има облик:

$$(2.229) \quad X(z) = \frac{z(4z-3)}{2(z-1)^2(z-3)}$$

па нејзиниот дискретен оригинал  $x(k)$  ќе биде:

$$(2.230) \quad x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z(4z-3)}{2(z-1)^2(z-3)}\right\} =$$

$$= Z^{-1} \left\{ -\frac{1}{4} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{9}{8} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{9}{8} \cdot \frac{z}{z-3} \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \frac{9}{8} 3^k - \frac{9}{8} - \frac{k}{4}, & k \geq 0 \end{cases}$$

**Задача.2.28.** Со помош на  $Z$  – трансформацијата, да се определи решението  $x(k)$  на линеарната диферентна равенка:

$$(2.231) \quad \Delta^2 x(k) + 1.3\Delta x(k) + 0.4x(k) = 0$$

со почетни услови:

$$(2.232) \quad x(0) = 0.3, \quad x(1) = 0.18$$

**Решение:** Со помош на смените (2.222)-(2.223), равенката (2.231) се трансформира во облик:

$$(2.233) \quad x(k+2) - 0.7x(k+1) + 0.1x(k) = 0$$

со истите почетни услови (2.232), па со нејзина  $Z$  – трансформација:

$$(2.234) \quad Z\{x(k+2) - 0.7x(k+1) + 0.1x(k)\} = 0$$

$$Z\{x(k+2)\} - 0.7Z\{x(k+1)\} + 0.1Z\{x(k)\} = 0$$

$$\left[ z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) \right] - 0.7[zX(z) - zx(0)] + 0.1X(z) = 0$$

$$\left[ z^2 X(z) - 0.3z^2 - 0.18z \right] - 0.7[zX(z) - 0.3z] + 0.1X(z) = 0$$

$$(z^2 - 0.7z + 0.1)X(z) = 0.3z^2 - 0.03z$$

за  $Z$  – сликата  $X(z)$  на бараното решение  $x(k)$  се добива изразот:

$$(2.235) \quad X(z) = \frac{0.3z^2 - 0.03}{(z^2 - 0.7z + 0.1)}$$

Бараниот оригинал  $x(k)$  се добива со инверзна  $Z$  – трансформација на сликата (2.235):

$$(2.236) \quad x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1} \left\{ \frac{0.3z^2 - 0.03}{(z^2 - 0.7z + 0.1)} \right\} =$$

$$= \operatorname{Re}_{z=0.2} X(z) z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=0.5} X(z) z^{k-1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ (z-0.2) \frac{0.3z^{k+1} - 0.03z^k}{(z-0.2)(z-0.5)} \right]_{z=0.2} + \\
 &+ \left[ (z-0.5) \frac{0.3z^{k+1} - 0.03z^k}{(z-0.2)(z-0.5)} \right]_{z=0.5} = \\
 &= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ -0.1(0.2)^k + 0.4(0.5)^k, & k \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Задача.2.29.** Да се определи вредноста  $x(5)$  ако:

$$(2.237) \quad x(0) = x(1) = 0$$

$$(2.238) \quad \Delta^2 x(k) = k; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Решение:** Равенката (2.238), чие што решение е дискретниот оригинал  $x(k)$ , може да се трансформира во облик:

$$(2.239) \quad x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) = kh(k)$$

па, со нејзина  $Z$  – трансформација:

$$(2.240) \quad Z\{x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) = kh(k)\}$$

$$Z\{x(k+2) - 2x(k+1) + x(k)\} = Z\{kh(k)\}$$

$$Z\{x(k+1)\} - 2Z\{x(k+1)\} + Z\{x(k)\} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$(z^2 - 2z + 1)X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

за  $Z$  – сликата  $X(z)$  се добива:

$$(2.241) \quad X(z) = \frac{z}{(z-1)^4}; |z| > 1$$

Оттука, дискретниот оригинал  $x(k)$  што припаѓа на сликата (2.241), ќе биде:

$$(2.242) \quad x(k) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^4}\right\} = \operatorname{Re}_{z=1} z X(z) z^{k-1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3}{dz^3} \left[ (z-1)^4 \frac{z^k}{(z-1)^4} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{6} \cdot \frac{d^3}{dz^3} (z^k) = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{6} \cdot k(k-1)(k-2) (z^{k-3}) = \frac{1}{6} k(k-1)(k-2)
 \end{aligned}$$

па, неговата вредност за  $k = 5$  изнесува:

$$(2.243) \quad x(5) = \frac{5(5-1)(5-2)}{6} = \frac{5(4)(3)}{6} = 10$$

**Задача.2.30.** Да се определат половите на дискретниот еквивалент  $F(z)$  на  $L$ -сликата  $F(s)$ , која има пар конјугирано комплексни полови во левата полурамнина од  $s$ -комплексната рамнина и карактеристичен полином  $a(s)$  од облик:

$$(2.244) \quad a(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

каде што:  $\zeta$  е фактор на релативно придрушување ( $0 \leq \zeta \leq 1$ ) на оригиналот  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$  и  $\omega_n$  е природната (непридрушувана) фреквенција на истиот, имајќи на ум дека пресликувањето на половите од  $s$ -комплексната рамнина во  $z$ -комплексната рамнина се врши преку функцијата:

$$(2.245) \quad z = e^{sT}$$

Потоа да се дискутираат ефектите од ова пресликување од гледиште на нивното влијание врз оригиналот  $f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}$ . Под претпоставка за константен период на дискретизација  $T$ , да се утврди дали половите од левата полурамнина на  $s$ -комплексната рамнина, кои се наоѓаат оддалечени од имагинарната оска  $\operatorname{Re} s = 0$ , се пресликуваат во  $z$ -комплексната рамнина во полови поблизу или подалеку од координатниот почеток на  $z$ -рамнината. Кога влијанието на половите во  $z$ -комплексната рамнина врз оригиналот  $f(kT)$  ќе биде поголемо: кога тие полови се поблизу или подалеку од координатниот почеток во  $z$ -комплексната рамнина? На крај да се определи оригиналот  $f(kT)$  кон  $Z$ -сликата  $F(z)$ , ако таа е од општ облик:

$$(2.246) \quad F(z) = z \frac{Az + B}{(z - z_1)(z - z_2)}; A, B = \text{const.} (\in \mathfrak{R})$$

**Решение:** Половите на дадената  $L$ -слика  $F(s)$  се:

$$(2.247) \quad s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

$$(2.248) \quad |s_{1,2}| = \omega_n$$

и тие се пресликуваат во десната полурамнина од  $z$ -комплексната рамнина во точките:



$$(2.249) \quad z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_n T \pm j\omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} = \rho e^{\pm j\varphi}$$

$$(2.250) \quad \rho = e^{-\zeta\omega_n T}$$

Од добиените изрази (2.248) и (2.250) е очигледно дека, колку половите (2.247) на сликата  $F(s)$  се подалеку од имагинарната оска  $\operatorname{Re} s = 0$ , толку пресликаните полови (2.249) се поблизу до координатниот почеток од  $z$  – рамнината. Оттаму, исто како што половите (2.247) на сликата  $F(s)$ , кои што се наоѓаат далеку од имагинарната оска  $\operatorname{Re} s = 0$  во левата полурамнина од  $s$  – комплексната рамнина, имаат мало влијание врз нејзиниот оригинал  $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ , така и половите (2.249) на соодветната слика  $F(z) = Z\{L^{-1}[F(s)]\}$ , кои се наоѓаат близу до координатниот почеток во  $z$  – комплексната рамнина, имаат многу мало влијание врз дискретниот оригинал  $f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}$ .

Оригиналот  $f(kT)$  кон  $Z$  – сликата  $F(z)$  се добива со инверзна  $Z$  – трансформација на изразот (2.248):

$$\begin{aligned} (2.251) \quad f(kT) &= Z^{-1}\{F(z)\} = Z^{-1}\left\{z \frac{Az + B}{(z - z_1)(z - z_2)}\right\} = \\ &= \sum_{i=1,2} \operatorname{Re}_z [F(z)z^{k-1}] = \operatorname{Re}_z F(z)z^{k-1} \Big|_{z=z_1} + \operatorname{Re}_z F(z)z^{k-1} \Big|_{z=z_2} = \\ &= \left[ (z - z_1)F(z)z^{k-1} \right]_{z=z_1} + \left[ (z - z_2)F(z)z^{k-1} \right]_{z=z_2} = \\ &= \left[ \frac{Az + B}{z - z_2} z^k \right]_{z=z_1} + \left[ \frac{Az + B}{z - z_1} z^k \right]_{z=z_2} = \\ &= \frac{Az_1 + B}{z_1 - z_2} z_1^k + \frac{Az_2 + B}{z_2 - z_1} z_2^k = \\ &= A \frac{z_1^{k+1} - z_2^{k+1}}{z_1 - z_2} + B \frac{z_1^k - z_2^k}{z_1 - z_2} = \\ &= A \frac{\rho^k [e^{j(k+1)\varphi} - e^{-j(k+1)\varphi}]}{(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})} + B \frac{\rho^{k-1} (e^{jk\varphi} - e^{-jk\varphi})}{(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})} = \\ &= A \frac{\rho^k \sin[(k+1)\varphi]}{\sin \varphi} + B \frac{\rho^{k-1} \sin(k\varphi)}{\sin \varphi}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

каде што  $\rho$  и  $\varphi$  се дефинирани со (2.249).



### 3. АНАЛИЗА НА ЛИНЕАРНИ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Одзивот на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем со еден влез  $y(kT)$  и еден излез  $x(kT)$  во просторот на оригиналите секогаш може да се претстави со следната конволуциска сума:

$$(3.1) \quad x(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)y((k-n)T)$$

Бидејќи сите сигнали и системи кои се разгледуваат во овој труд се, под претпоставка, каузални, границите во горната конволуциска сума се стеснуваат на следниот начин:

$$(3.2) \quad x(kT) = \sum_{n=0}^k g(nT)y((k-n)T)$$

Функцијата  $g(kT)$  во (3.2) се нарекува **тежинската низа** на набљудуваниот дискретен систем и, по дефиниција, таа претставува одзив на системот на **Кронекер-Делта функцијата**:

$$(3.3) \quad \delta_0(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Најопштиот облик на Кронекер-Делта функцијата е:

$$(3.4) \quad \delta_n(kT) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Тежинската низа, исто како и диферентната равенка, претставува модел на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем во просторот на оригиналите, бидејќи со помош на неа може да се определи одзивот на дискретниот систем на произволен зададен влез под претпоставка на нулеви почетни услови.

$Z$ -сликата на тежинската низа  $g(kT)$  ја претставува преносната функција на набљудуваниот дискретен систем и таа се дефинира како однос помеѓу  $Z$ -сликите на излезот  $x(kT)$  и влезот на системот  $y(kT)$  за нулеви почетни услови:

$$(3.5) \quad G(z) = Z\{g(kT)\} = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, m \leq n$$

Преносната функција на дискретните системи разгледувани во овој труд секогаш е од обликот (3.5), односно претставува дробно рационална функција од комплексната

променлива  $z$ . Нулите на полиномот  $b(z)$  претставуваат **нули** на преносната функција  $F(z)$ , додека нулите на полиномот  $a(z)$  претставуваат нејзини **полови**. Преку своите нули и полови, преносната функција  $F(z)$  секогаш може да се претстави во факторизиран облик на следниот начин:

$$(3.6) \quad F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = K \frac{\prod_{j=1}^m (z - w_j)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)}; \quad K = \frac{b_m}{a_n}, \quad m \leq n$$

Нулите и половите на преносната функција  $F(z)$  едновременно се нарекуваат нули и полови на набљудуваниот дискретен систем.

Преносната функција  $G(z)$  претставува математички модел на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем во просторот на  $Z$ -сликите. Имено, ако е позната преносната функција  $G(z)$ , секогаш може да се определи одсивот  $x(kT)$  на даден дискретен систем на произволен зададен влез  $y(kT)$  според формулата:

$$(3.7) \quad X(z) = G(z)Y(z)$$

каде што  $Y(z) = Z\{y(kT)\}$  и  $X(z) = Z\{x(kT)\}$ . Самиот дискретен оригинал  $x(kT)$  без проблем може да се определи со инверзна  $Z$ -трансформација на сликата  $X(z)$ .

Одсивот на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем со нулеви почетни услови во просторот на  $Z$ -сликите секогаш може да се претстави на следниот начин:

$$(3.8) \quad X(z) = G(z)Y(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{c(z)}{a(z)} + \frac{d(z)}{A(z)} = X_{preod}(z) + X_{stac}(z)$$

од каде што се гледа дека тој има две компоненти – **преодна**:

$$(3.9) \quad x_{preod}(kT) = Z^{-1}\{X_{preod}(z)\} = Z^{-1}\{\text{развој на } X(z) \text{ по половите од } G(z)\}$$

и **стационарна**:

$$(3.10) \quad x_{stac}(kT) = Z^{-1}\{X_{stac}(z)\} = Z^{-1}\{\text{развој на } X(z) \text{ по половите од } Y(z)\}$$

Преодната компонента на одсивот на набљудуваниот дискретен систем го карактеризира неговиот **преоден режим**, додека стационарната компонента на одсивот го карактеризира **стационарниот режим** на набљудуваниот дискретен систем. Бидејќи  $Z$ -сликата на преодната компонента на одсивот на еден дискретен систем има исти полови како и неговата преносна функција, следува дека преодниот режим на системот ќе има ист временски тек (облик) како и неговата тежинска низа. Од друга страна, бидејќи  $Z$ -сликата на стационарната компонента на одсивот има исти полови како и

$Z$  – сликата на влезот, следува дека стационарниот режим на системот ќе има ист временски тек (облик) како и неговиот влез.

Доколку набљудуваниот дискретен систем има ненулеви почетни услови,  $Z$  – сликата на неговиот одзив на даден влез може да се претстави на следниот начин:

$$(3.11) \quad X(z) = G(z)Y(z) + \frac{p(z)}{a(z)} = \frac{c(z)}{a(z)} + \frac{d(z)}{A(z)} + \frac{p(z)}{a(z)} = X_{preod}(z) + X_{stac}(z) + X_{sl}(z)$$

каде што компонентата  $x_{sl}(kT) = Z^{-1}\{X_{sl}(z)\}$  го претставува **автономниот (слободен) режим** на набљудуваниот дискретен систем.

Линеарните стационарни дискретни системи на автоматско управување претставуваат поткласа на линеарните стационарни дискретни системи, со одредени специфичности. Така, реалните дискретни системи на автоматско управување по својата природа се хибридни системи, што значи дека во себе содржат и континуални и дискретни компоненти и сигнали. Секој еден систем на автоматско управување, без оглед на неговата изведба и сложеност, мора да содржи две основни компоненти – управуван објект и управувач. Кај реалните дискретни системи на автоматско управување, објектот на управување по својата природа секогаш е континуален, додека управувачкиот дел е дискретен. Оттаму произлегува и нивната хибридна природа. За да може да се воспостави врска помеѓу дискретниот управувач и континуалниот објект, дискретниот систем на управување мора да содржи и компоненти кои не се присутни кај континуалните системи на автоматско управување, а тоа се тн. А/Д и Д/А претворувачи. Едноставно кажано, **А/Д претворувачот** е уред кој континуалниот аналоген сигнал од својот влез го претвора во дискретен дигитален сигнал на својот излез. Дали процесот на А/Д претворба на сигналите во еден дискретен систем ќе има важност од математичка гледна точка, т.е. дали треба да се вклучи во математичкиот модел на системот или не, зависи од брзината на А/Д претворба и битниот капацитет на резултантниот бинарен сигнал. Кај современите дискретни системи на автоматско управување, А/Д претворбата е занемарлива од математичка гледна точка заради големата брзина на претворба и големиот битен капацитет на резултантниот дигитален сигнал. Од друга страна, **Д/А претворувачот** е уред, кој дискретниот дигитален сигнал од својот влез, го претвора во континуален аналоген сигнал на својот излез. Тој во себе содржи и дел, кој едноставно се нарекува **форматор**. Бидејќи од математичка гледна точка не постои никаква разлика помеѓу форматорот и Д/А претворувачот, тие можат да се третираат на истоветен начин, што е сторено во продолжение.

Форматорот има важна улога во секој еден дискретен систем на автоматско управување и учествува во математичкиот модел на системот. Бидејќи на влезот од Д/А претворувачот се појавуваат само дискретни вредности на соодветниот управувачки сигнал, форматорот мора помеѓу секои два соседни мигови на дискретизација  $kT$  и  $kT + T$  да екстраполира помеѓу тековната и следната вредност на влезната низа. Со тоа форматорот всушност работи како обичен екстраполатор.

Погоден облик на екстраполација е тн. **полиномна екстраполација**, па еден форматор од  $m$ -ти ред кој врши полиномна екстраполација е опишан со следниот модел:

$$(3.12) \quad u(kT + \tau) = a_m \tau^m + a_{m-1} \tau^{m-1} + \dots + a_1 \tau + a_0, \quad 0 \leq \tau < T$$

Коефициентите на полиномот (3.12) се определуваат секој период на дискретизација  $T$  од условот вредностите на излезот од форматорот  $u(t)$  во дискретните временски мигови  $kT$  да се поклопуваат со соодветните дискретни вредности на неговиот влез. Колку е поголем редот на форматорот, толку неговиот излез е поблиску до енвелопата на неговиот дискретен влез. Меѓутоа, од практични причини, во пракса се применуваат најчесто форматори од нулти и евентуално прв ред.

Излезот на форматор од нулти ред е даден со изразот:

$$(3.13) \quad u(t) = \phi(kT), \quad kT \leq t < kT + T$$

каде што со  $\phi(kT)$  е означена неговата влезна низа, додека неговата преносна функција има облик:

$$(3.14) \quad G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Излезот на форматор од прв ред е даден со изразот:

$$(3.15) \quad u(t) = \frac{\phi(kT) - \phi((k-1)T)}{T} (t - kT) + \phi(kT), \quad kT \leq t < kT + T$$

додека неговата преносна функција има облик:

$$(3.16) \quad G_1(s) = \frac{Ts + 1}{Ts^2} (1 - e^{-sT})^2$$

Со зголемувањето на редот на форматорот, од една страна се зголемува неговата сложеност на изведба и неговата цена на чинење, а од друга страна се зголемува доцнењето што тој го внесува во системот. Едновремено, се влошуваат и условите за стабилност на целиот систем. Оттаму во пракса најчесто се користат форматори од нулти ред.

Иако реалните дискретни системи на автоматско управување се хибридни по својата природа, нивната анализа може успешно да се врши со помош на математичкиот апарат на  $Z$ -трансформацијата, што значи дека за нив може да се состави соодветен дискретен математички модел. Тоа е овозможено со воведување на концептот на **импулсен дискретизатор**, кој не претставува реален физички систем туку само фиктивен математички концепт, воведен за целите на математичката анализа на реалните дискретни системи на автоматско управување. Импулсниот дискретизатор симболично може да се претстави со прекинувач, кој на својот излез генерира поворка од Диракови импулси, чија јачина во соодветните дискретни временски мигови  $kT$  одговара на дискретните вредности од влезната низа на форматорот  $\phi(kT)$ :

$$(3.17) \quad \phi^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(kT) \delta(t - kT)$$

Лапласовата трансформација на оваа низа се означува како  $( )^*$  – трансформација и изнесува:

$$(3.18) \quad \Phi^*(s) = L\{\phi^*(t)\} = L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \phi(kT) \delta(t - kT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(kT) e^{-skT}$$

Со смената:

$$(3.19) \quad z = e^{sT}$$

таа поминува во  $Z$  – трансформацијата  $\Phi(z) = Z\{\phi(kT)\}$ . Концептот на импулсен дискретизатор овозможува дискретно еквивалентирање на континуалните системи, кое е прикажано на крајот од овој труд во соодветен прилог.

Управувачкиот закон кој го реализира дискретниот управувач во еден дискретен систем на автоматско управување може да биде од наједноставен до многу сложен. Неговата изведба е многу полесна отколку кај континуалните управувачи, зошто се изведува софтверски. Еден пример за дискретен управувачки закон е дискретниот еквивалент на ПИД управувачкиот закон кај континуалните системи на автоматско управување, кој е даден со релацијата:

$$(3.20) \quad u(kT) = K \left\{ \phi(kT) + \frac{1}{T_i} \sum_{n=0}^k T \phi(nT) + \frac{T_d}{T} [\phi(kT) - \phi(kT - T)] \right\}$$

каде што  $u(kT)$  е излезот на дискретниот управувач, односно соодветниот дискретен управувачки закон, а  $\phi(kT)$  е неговиот влез.



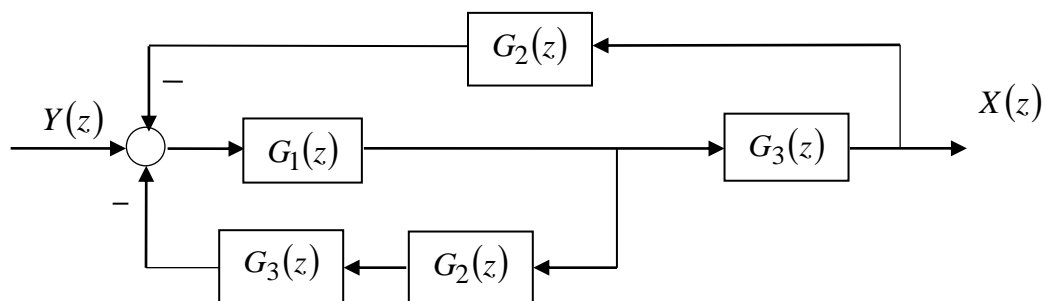
**Задача 3.1.** Со помош на правилата на алгебрата на блок-шемите да се определи еквивалентната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на затворениот дискретен систем од

Слика 3.1. Потоа да се определат нулите и половите од дискретната преносна функција  $G(z)$ , како и нејзиниот радиус на апсолутна конвергенција, ако  $T = 1s$ . и:

$$(3.21) \quad G_1(z) = \frac{1}{z}, \quad |z| > 0$$

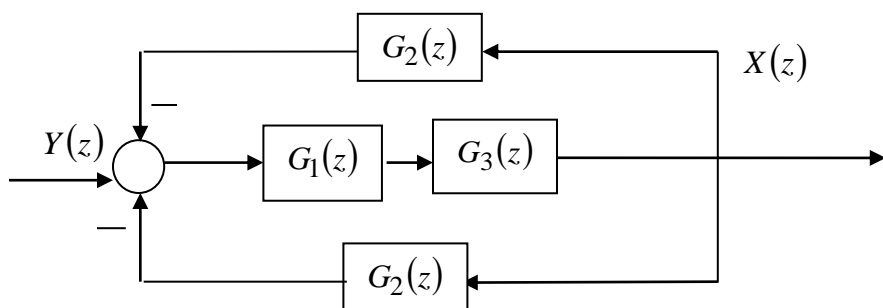
$$(3.22) \quad G_2(z) = Z\{G_2(s)\}; \quad G_2(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$(3.23) \quad G_3(z) = Z\{G_3(s)\}; \quad G_3(s) = \frac{1}{s + \ln 3}, \quad \operatorname{Re} s > \ln \frac{1}{3}$$

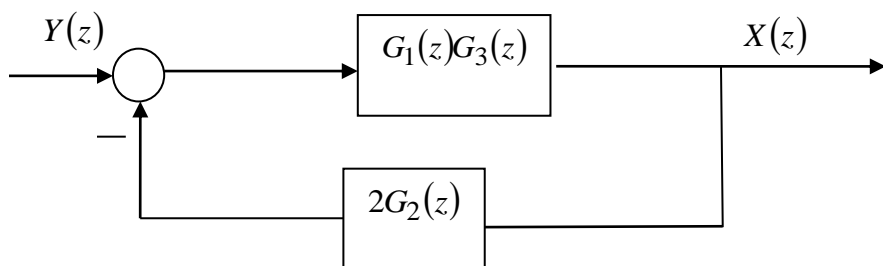


Слика 3.1. Илустрација кон Задача 3.1

**Решение:** а) Со примен на правилата на алгебрата на блок-шемите, шемата од Слика 3.1 може да се трансформира како на Слика 3.2 и Слика 3.3. Оттука, за бараната преносна функција  $G(z) = X(z)/Y(z)$  се добива:



Слика 3.2. Трансформација на шемата од Слика 3.1



Слика 3.3. Трансформација на шемата од Слика 3.2



$$(3.24) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{G_1(z)G_3(z)}{1 + 2G_1(z)G_2(z)G_3(z)}$$

каде што  $G_1(z)$  е определена со (3.21), додека:

$$(3.25) \quad G_2(z) = Z\left\{L^{-1}[G_2(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\right\} = Z\{h(t)\} = Z\{h(kT)\} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$(3.26) \quad G_3(z) = Z\left\{L^{-1}[G_3(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s + \ln 3}\right]\right\} = Z\left\{e^{-t \ln 3} h(t)\right\} = Z\left\{e^{-kT \ln 3} h(kT)\right\} =$$

$$= Z\left\{\left(e^{-\ln 3}\right)^{kT} h(kT)\right\} = Z\left\{\left(e^{\ln \frac{1}{3}}\right)^{kT} h(kT)\right\} =$$

$$= Z\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{kT} h(kT)\right\} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} = \frac{3z}{3z - 1}, |z| > \frac{1}{3}$$

Со воведување на конкретните изрази за  $G_1(z)$ ,  $G_2(z)$  и  $G_3(z)$  во (3.24), се добива:

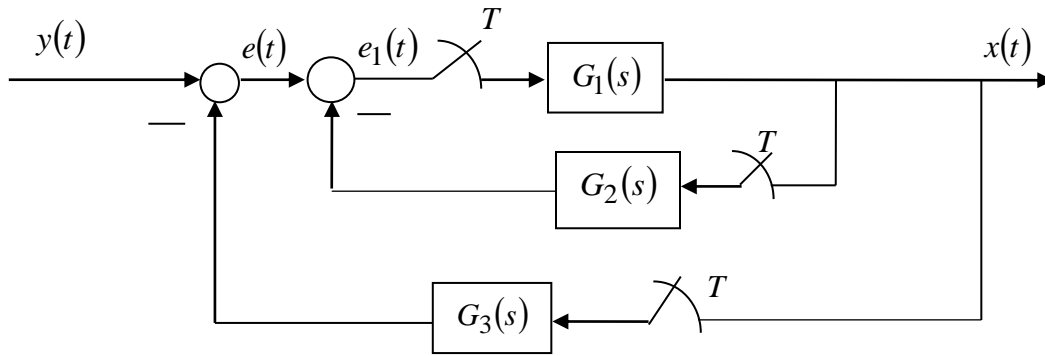
$$(3.27) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{G_1(z)G_3(z)}{1 + 2G_1(z)G_2(z)G_3(z)} = \frac{\frac{1}{z} \cdot \frac{3z}{3z-1}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{3z}{3z-1}} =$$

$$= \frac{3(z-1)}{(z-1)(3z-1) + 6z} = \frac{3(z-1)}{3z^2 + 2z + 1}; |z| > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Преносната функција (3.27) има една реална конечна нула во точката  $z_1^0 = 1$ , конјугирано комплексен пар прости полови во точките  $z_{1,2}^* = -\frac{1}{3} \pm j \frac{\sqrt{2}}{3}$  и радиус на апсолутна конвергенција:

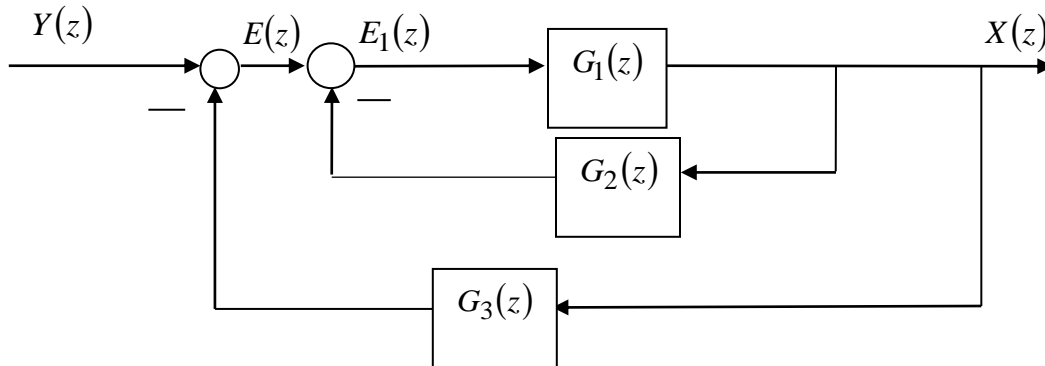
$$R = |z_{1,2}^*| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**Задача 3.2.** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се определат  $Z$ -сликите на сигналите  $e(t)$ ,  $e_1(t)$  и  $x(t)$  во затворениот систем од Слика 3.4.



Слика 3.4. Илустрација кон Задача 3.2

**Решение:** Со оглед на тоа дека за секој континуален систем  $G_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), на чиј влез се наоѓа импулсен дискретизатор, може да се определи соодветен дискретен еквивалент  $G_i(z) = Z\{G_i(s)\}$ , структурната блок-шема од Слика 3.4 може да се еквивалентира со шемата од Слика 3.5. Притоа не смее да се изгуби од предвид дека оваа еквиваленција важи само во миговите на дискретизација  $t = kT; k = 0, 1, 2, \dots$



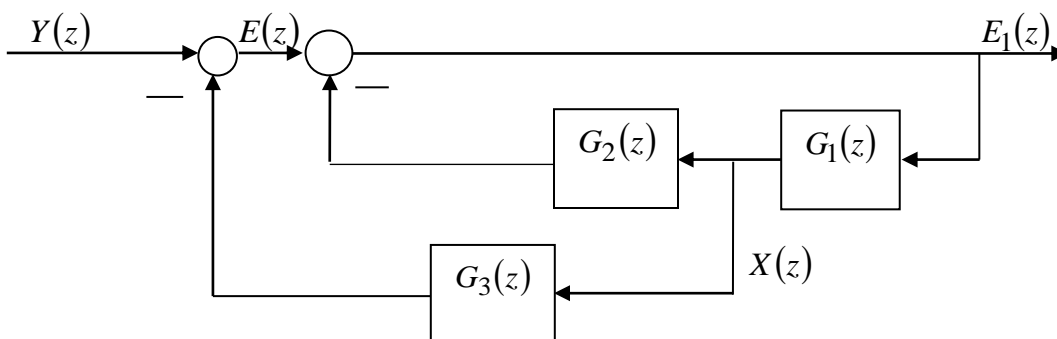
Слика 3.5. Дискретен модел на системот од Слика 3.4

Шемата од Слика 3.5 се состои од внатрешна и надворешна повратна врска, па за дискретната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  се добива:

$$(3.28) \quad X(z) = \frac{\frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}}{1 + \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} \cdot G_3(z)} Y(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)[G_2(z) + G_3(z)]} Y(z)$$

За да се определи сигналот  $E_1(z)$ , шемата од Слика 3.5 може да се претстави како на Слика 3.6, од каде непосредно следува:

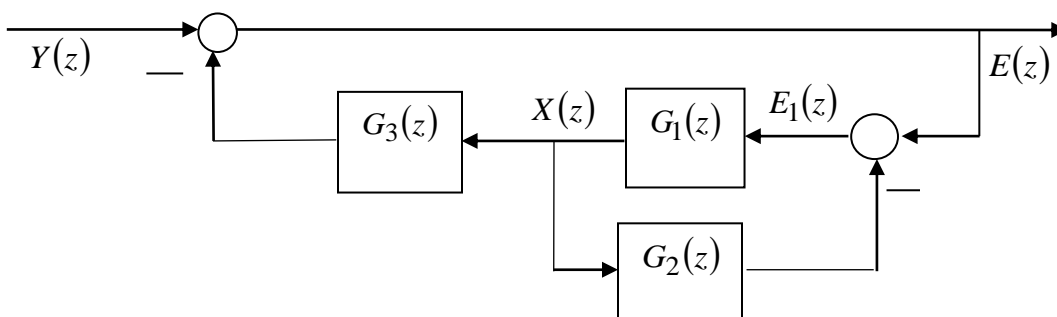
$$(3.29) \quad E_1(z) = \frac{1}{1 + G_1(z)[G_2(z) + G_3(z)]} Y(z)$$



Слика 3.6. Еквивалентна блок-шема со шемата од Слика 3.5

Конечно,  $Z$ -сликата на сигналот  $e(t)$  се определува врз основа на блок-шешмата од Слика 3.7, која е еквивалентна со шешмата од Слика 3.5 и Слика 3.6, и за неа се добива:

$$(3.30) \quad E(z) = \frac{1}{1 + \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} \cdot G_3(z)} Y(z) = \frac{1 + G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)[G_2(z) + G_3(z)]} Y(z)$$



Слика 3.7. Еквивалентна блок-шема со шешмите од Слика 3.5 и 3 Слика.6

Задачата може да се реши и со следење на текот на сигналите во шешмата од Слика 3.4, од каде се добиваат релациите:

$$(3.31) \quad X(s) = G_1(s)E_1^*(s)$$

$$(3.32) \quad E_1(s) = E(s) - G_2(s)X^*(s)$$

$$(3.33) \quad E(s) = Y(s) - G_3(s)X^*(s)$$

На овие равенки во просторот на  $( )^*$  –сликите им одговараат равенките:

$$(3.34) \quad X^*(s) = G_1^*(s)E_1^*(s)$$

$$(3.35) \quad E_1^*(s) = E^*(s) - G_2^*(s)X^*(s)$$

$$(3.36) \quad E^*(s) = Y^*(s) - G_3^*(s)X^*(s)$$

кои со смената:

$$(3.37) \quad z = e^{sT}$$

се трансформираат во равенките:

$$(3.38) \quad X(z) = G_1(z)E_1(z)$$

$$(3.39) \quad E_1(z) = E(z) - G_2(z)X(z)$$

$$(3.40) \quad E(z) = Y(z) - G_3(z)X(z)$$

бидејќи за  $z = e^{sT}$ ,  $( )^*$  –сликите преминуваат во соодветни  $Z$  –слики. Бараните  $Z$  –слики  $E(z)$ ,  $E_1(z)$  и  $X(z)$  се добиваат со решавање на системот равенки (3.38) – (3.40) по соодветната променлива:

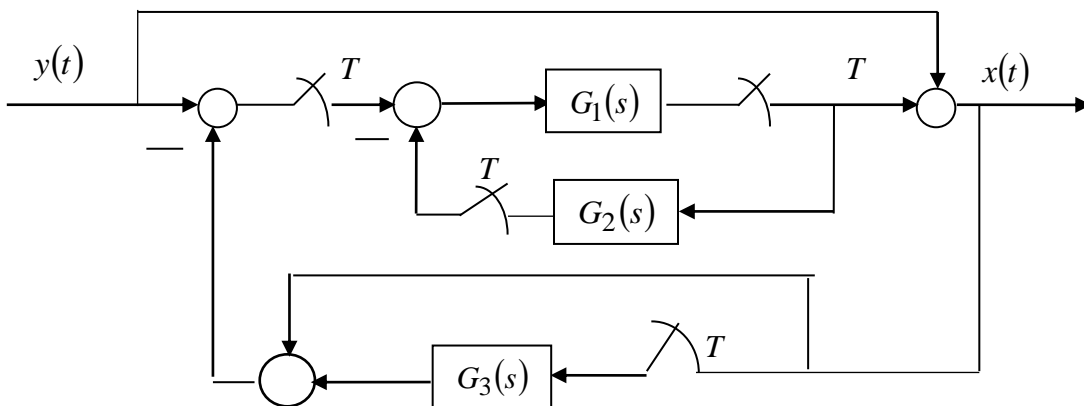
$$(3.41) \quad E_1(z) = E(z) - G_2(z)X(z) = [Y(z) - G_3(z)X(z)] - G_2(z)X(z) = \\ = Y(z) - [G_2(z) + G_3(z)]X(z) = Y(z) - [G_2(z) + G_3(z)]G_1(z)E_1(z) \Rightarrow$$

$$(3.42) \quad E_1(z) = \frac{1}{1 + G_1(z)[G_2(z) + G_3(z)]} Y(z)$$

$$(3.43) \quad X(z) = G_1(z)E_1(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)[G_2(z) + G_3(z)]} Y(z)$$

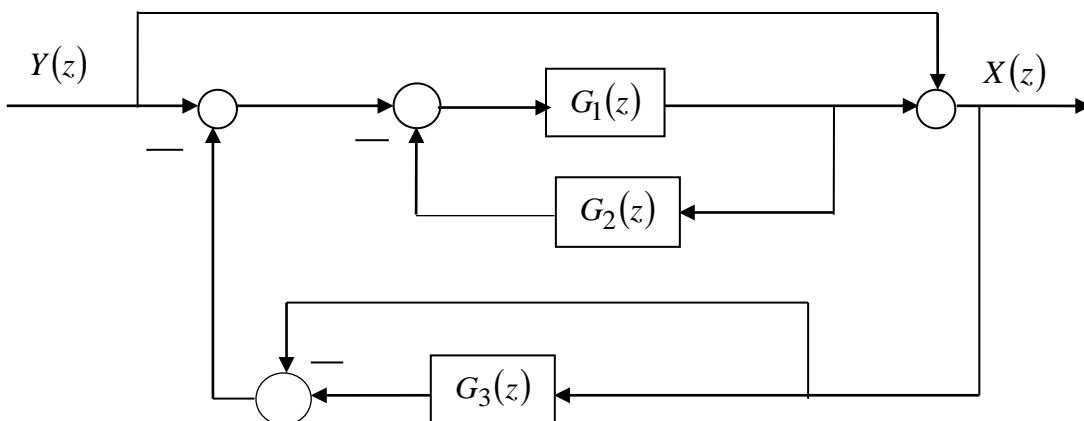
$$(3.44) \quad E(z) = Y(z) - G_3(z)X(z) = Y(z) - G_3(z) \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)[G_2(z) + G_3(z)]} Y(z) = \\ = \frac{1 + G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)[G_2(z) + G_3(z)]} Y(z)$$

**Задача 3.3.** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се упрости структурната блок-шема од Слика 3.8 и да се определи сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот систем.

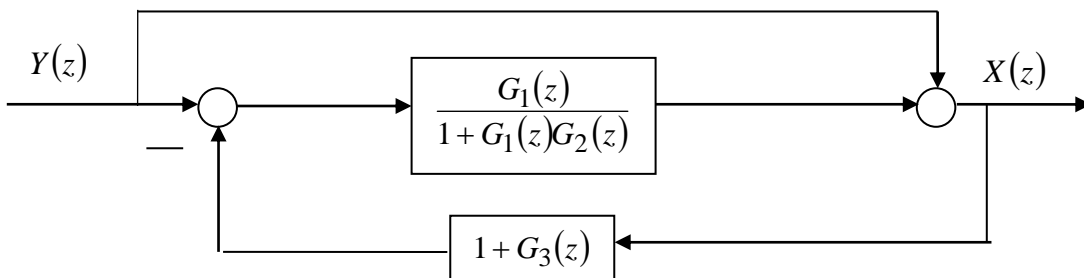


Слика 3.8. Илустрација кон Задача 3.3

**Решение:** На Слика 3.9 е прикажан дискретен еквивалент на дадената структурна блок-шема. Со еквивалентирање на антипаралелната врска во директната гранка и паралелната врска во повратната гранка од шемата на Слика 3.9, се добива еквивалентната шема од Слика 3.10.



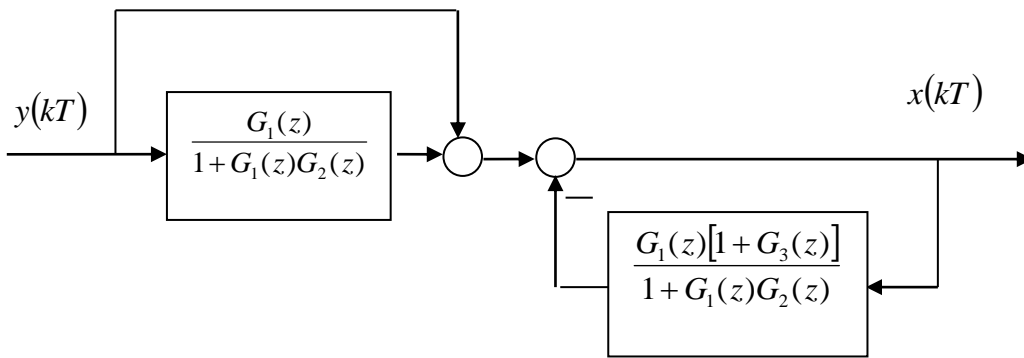
Слика 3.9. Дискретен еквивалент на системот од Слика 3.8



Слика 3.10. Упростување на блок-шешата од Слика 3.9

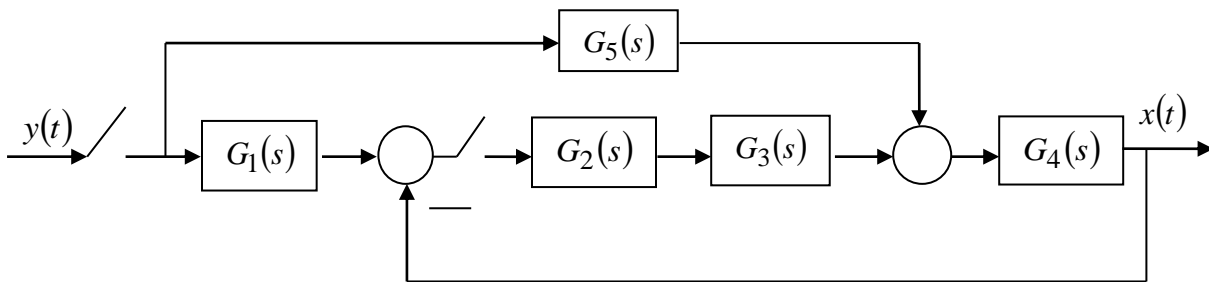
Со префрлување на компараторот од влезот на блокот во директната гранка на неговиот излез и замена на местата со суматорот, структурната блок-шема од Слика 3.10 го добива дефинитивно обликот како на Слика 3.11. Шемата од Слика 3.11 претставува сервиска врска на паралелна и антипаралелна врска, па бараната преносна функција ќе биде:

$$(3.45) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{1 + \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}}{1 + \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} [1 + G_3(z)]} = \frac{1 + G_1(z) + G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z) + G_1(z)G_2(z) + G_1(z)G_3(z)}$$



Слика 3.11. Еквивалентна структурна блок-шема на шемата од Слика 3.10

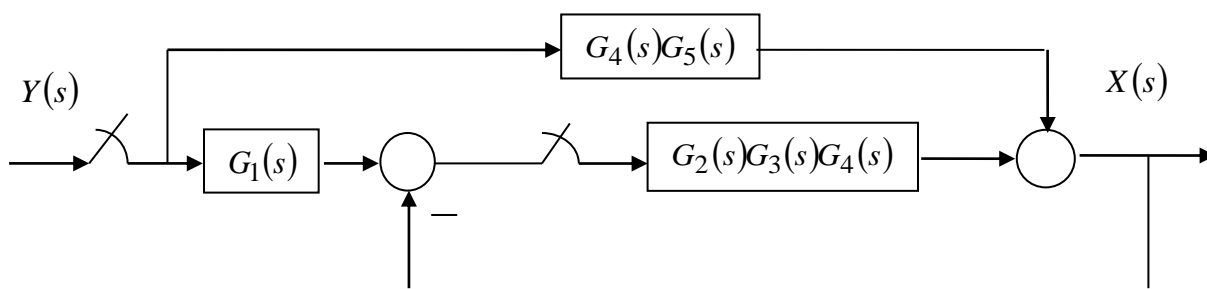
**Задача 3.4.** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се најде  $Z$  –сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  на затворениот систем од Слика 3.12.



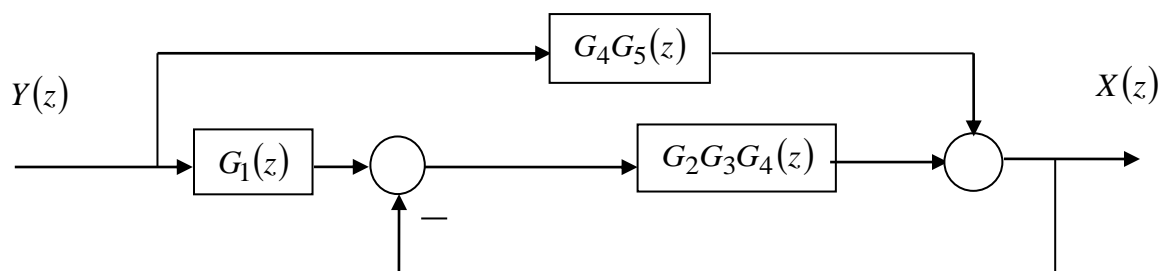
Слика 3.12. Илустрација кон Задача 3.4

**Решение:** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите, структурната блок-шема од Слика 3.12 може да се трансформира во шемата од Слика 3.13, а врз основа на

правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, шемата од Слика 3.13 може да се замени со шемата од Слика 3.14.

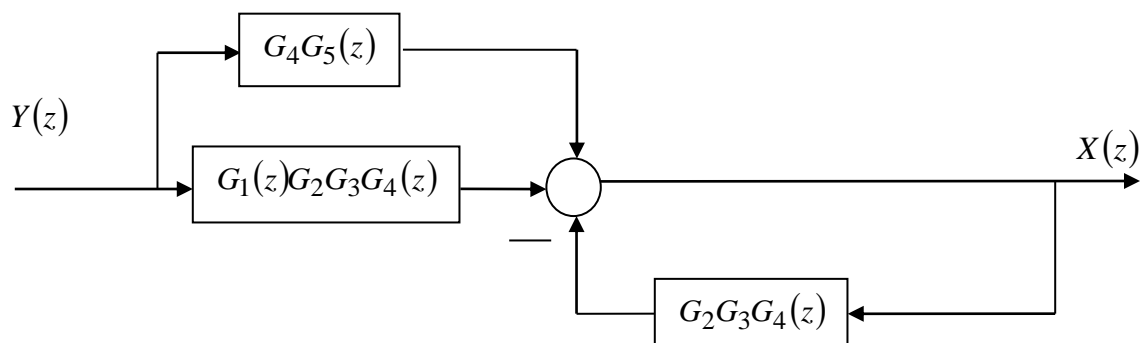


Слика 3.13. Еквивалентна структурна блок-шема на шемата од Слика 3.12



Слика 3.14. Дискретен еквивалент на блок-шемата од Слика 3.13

Со префрлување на компараторот од влезот на блокот со дискретна преносна функција  $G_2G_3G_4(z)$  на неговиот излез, се добива структурната блок-шема од Слика 3.15, која претставува сериска врска од една паралелна и антипаралелна врска динамички елементи.

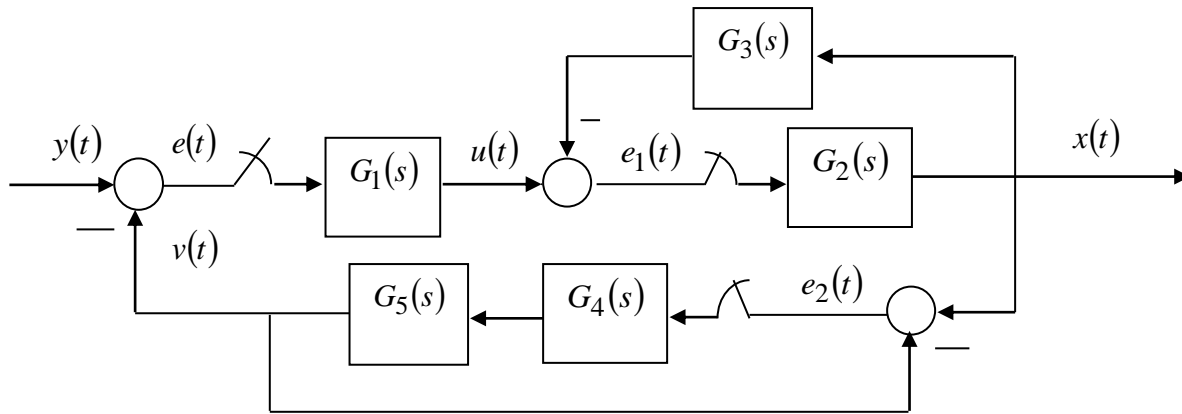


Слика 3.15. Еквивалентна блок-шема на шемата од Слика 3.14

Врз основа на Слика 3.15 лесно се определува бараната  $Z$  – слика  $X(z)$ :

$$(3.46) \quad X(z) = [G_1(z)G_2G_3G_4(z) + G_4G_5(z)] \cdot \left[ \frac{1}{1 + G_2G_3G_4(z)} \right] Y(z) = \\ = \frac{G_1(z)G_2G_3G_4(z) + G_4G_5(z)}{1 + G_2G_3G_4(z)} Y(z)$$

**Задача 3.5.** Да се определи дискретната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на затворениот систем од Слика 3.16. Под претпоставка, прекинувачите во шемата се идеални импулсни дискретизатори, кои работат синхронно со период на дискретизација  $T$ .



Слика 3.16. Илустрација кон Задача 3.5

**Решение:** Од блок-шемата на Слика 3.16 следуваат релациите:

$$(3.47) \quad X(s) = G_2(s)E_1^*(s)$$

$$(3.48) \quad E_1(s) = U(s) - G_3(s)X(s)$$

$$(3.49) \quad U(s) = G_1(s)E^*(s)$$

$$(3.50) \quad E(s) = Y(s) - V(s)$$

$$(3.51) \quad V(s) = G_4(s)G_5(s)E_2^*(s)$$

$$(3.52) \quad E_2(s) = X(s) - V(s)$$

каде што  $E_1(s)$  е сигналот на излезот од вториот компаратор во директната гранка, а  $U(s)$  е неинвертираниот влез на истиот,  $E(s)$  е сигналот на излезот од првиот



компаратор во директната гранка, а  $V(s)$  е неговиот инвертиран влез и  $E_2(s)$  е сигналот на излезот од компараторот во повратната гранка од набљудуваниот затворен систем на Слика 3.16.

Од системот равенки (3.47) - (3.52) се определуваат следните (\*) – слики:

$$(3.53) \quad X^*(s) = G_2^*(s)E_1^*(s)$$

$$(3.54) \quad E_1^*(s) = \frac{1}{1 + G_2G_3^*(s)}U^*(s)$$

$$(3.55) \quad U^*(s) = G_1^*(s)E^*(s)$$

$$(3.56) \quad E^*(s) = Y^*(s) - V^*(s)$$

$$(3.57) \quad V^*(s) = G_4G_5^*(s)E_2^*(s)$$

$$(3.58) \quad E_2^*(s) = \frac{1}{1 + G_4G_5^*(s)}X^*(s)$$

а врз основа на релациите (3.53) - (3.58) непосредно следува:

$$(3.59) \quad X^*(s) = G_2^*(s)E_1^*(s) = G_3^*(s)\frac{1}{1 + G_2G_3^*(s)}U^*(s) = \frac{G_2^*(s)}{1 + G_2G_3^*(s)}G_1^*(s)E^*(s) = \\ = \frac{G_1^*(s)G_2^*(s)[1 + G_4G_5^*(s)]}{[1 + G_2G_3^*(s)][1 + G_4G_5^*(s)] + G_1^*(s)G_2^*(s)G_4G_5^*(s)}Y^*(s)$$

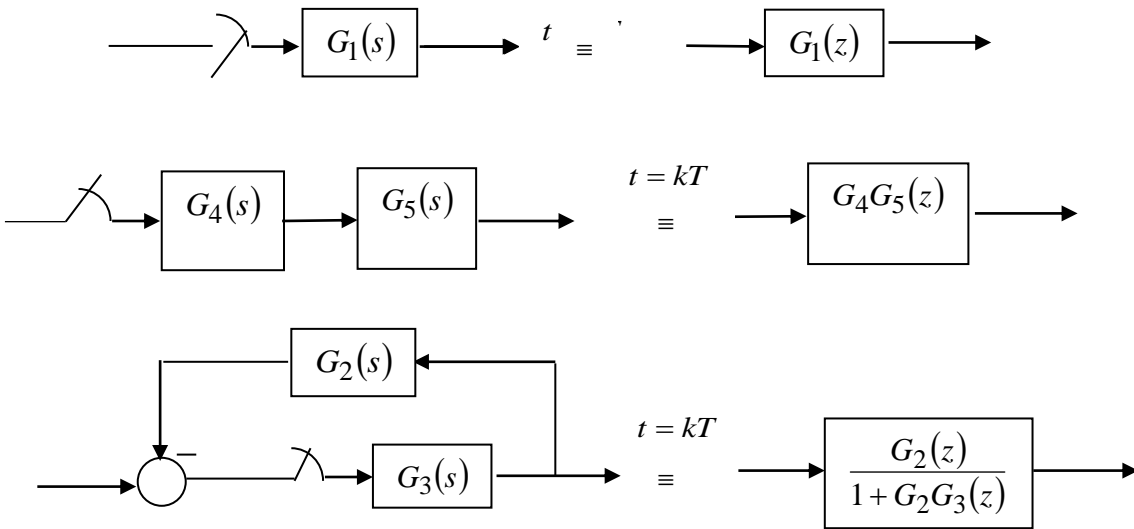
Во просторот на  $Z$  – сликите, на сликата (3.59) и' одговара сликата:

$$(3.60) \quad X(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)[1 + G_4G_5(z)]}{[1 + G_2G_3(z)][1 + G_4G_5(z)] + G_1(z)G_2(z)G_4G_5(z)}Y(z)$$

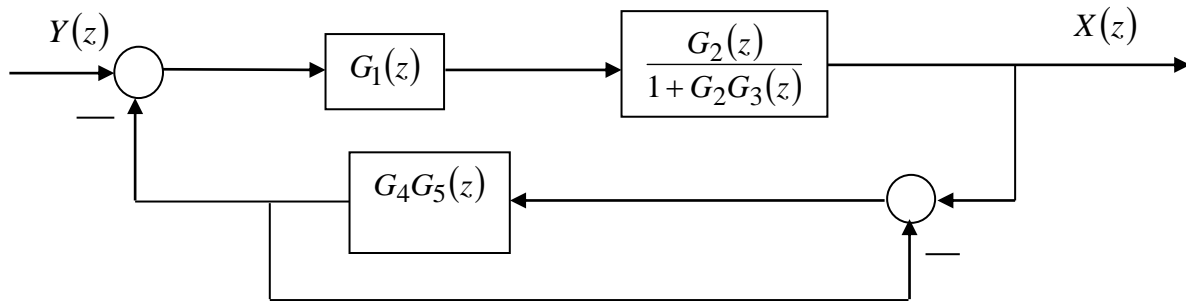
а релацијата (3.60) ја дефинира врската меѓу  $Z$  – сликите на одсивот  $x(t)$  и влезот  $y(t)$  на набљудуваниот затворен систем од Слика 3.16, односно бараната дискретна преносна функција на системот  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$ :

$$(3.61) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)[1 + G_4G_5(z)]}{[1 + G_2G_3(z)][1 + G_4G_5(z)] + G_1(z)G_2(z)G_4G_5(z)}$$

Задачата може да се реши и со примена на правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи и правилата на алгебрата на блок-шемите, како што е покажано во продолжение. Имајќи на ум дека во дискретните временски мигови  $t = kT; k = 0, 1, 2, \dots$  важат еквиваленциите од Слика 3.17, структурната блок-шема од Слика 3.16 може да се замени со нејзиниот дискретен еквивалент од Слика 3.18.

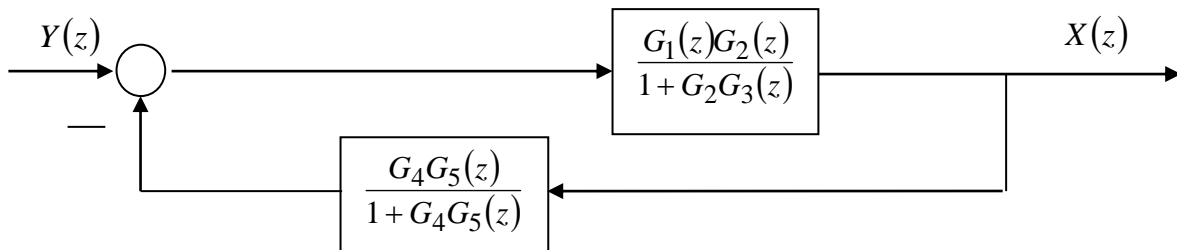


Слика 3.17. Дискретно еквивалентирање одделни потсистеми во системот од Слика 3.16



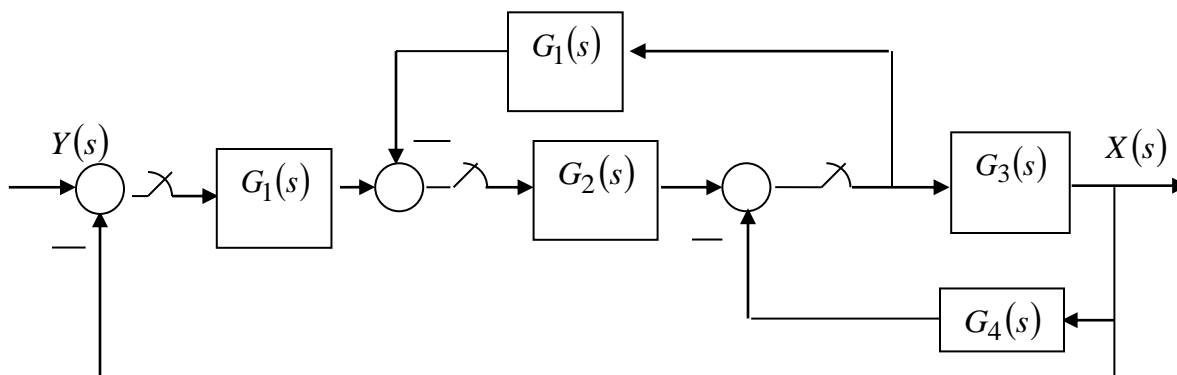
Слика 3.18. Дискретен еквивалент на системот од Слика 3.16

Со примена на соодветни правила на алгебрата на блок-шемите, шемата од Слика 3.18 се трансформира во еквивалентната шема од Слика 3.19, од каде непосредно следува изразот (3.61) за бараната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$ .



Слика 3.19. Еквивалентна блок-шема со шемата од Слика 3.18

**Задача 3.6.** Да се определи преносната функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на затворениот систем на автоматско управување од Слика 3.20.



Слика 3.20. Илустрација кон Задача 3.6

**Решение:** Од дадената структурна блок-шема непосредно произлегува:

$$(3.62) \quad X(s) = G_3(s)E_3^*(s)$$

$$(3.63) \quad E_3(s) = G_2(s)E_2^*(s) - G_4(s)X(s) = G_2(s)E_2^*(s) - G_3(s)G_4(s)E_3^*(s)$$

$$(3.64) \quad E_2(s) = G_1(s)E_1^*(s) - G_1(s)E_3^*(s)$$

$$(3.65) \quad E_1(s) = Y(s) - X(s)$$

Следствено:

$$(3.66) \quad X(z) = G_3(z)E_3(z)$$

$$(3.67) \quad E_3(z) = G_2(z)E_2(z) - G_3G_4(z)E_3(z)$$

$$(3.68) \quad E_2(z) = G_1(z)E_1(z) - G_1(z)E_3(z)$$

$$(3.69) \quad E_1(z) = Y(z) - X(z)$$

од каде што, со непосредно решавање, се добива:

$$(3.70) \quad E_3(z) = \frac{G_2(z)}{1 + G_3G_4(z)} E_2(z)$$

$$(3.71) \quad E_2(z) = \frac{G_1(z)}{1 + \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_3G_4(z)}} E_1(z) = \frac{G_1(z)[1 + G_3G_4(z)]}{1 + G_1(z)G_2(z) + G_3G_4(z)} E_1(z)$$

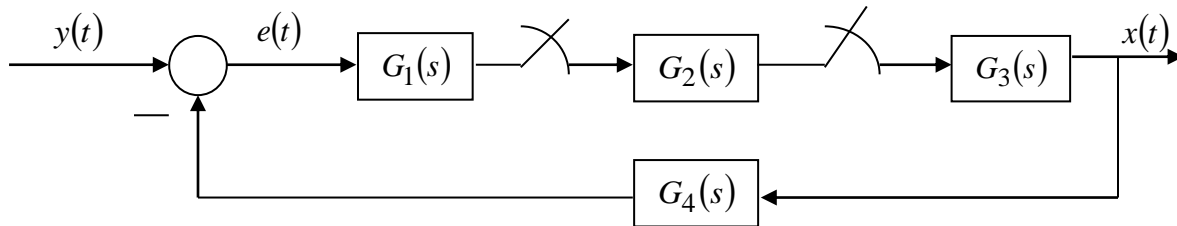
$$(3.72) \quad X(z) = G_3(z)E_3(z) = G_3(z) \frac{G_2(z)}{1 + G_3G_4(z)} E_2(z) = \\ = \frac{G_2(z)G_3(z)}{1 + G_3G_4(z)} \cdot \frac{G_1(z)[1 + G_3G_4(z)]}{1 + G_1(z)G_2(z) + G_3G_4(z)} E_1(z)$$

$$(3.73) \quad X(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)G_3(z)}{1 + G_3G_4(z) + G_1(z)G_2(z)[1 + G_3(z)]} R(z)$$

Бараната преносна функција ќе биде:

$$(3.74) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)G_3(z)}{1 + G_3G_4(z) + G_1(z)G_2(z)[1 + G_3(z)]}$$

**Задача 3.7.** Да се определи  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  на затворениот систем од Слика 3.21.



Слика 3.21. Илустрација кон Задача 3.7

**Решение:** Со следење на текот на сигналите во шемата од Слика 3.21 се добива:

$$(3.75) \quad X(s) = X_3(s) = G_3(s)X_2^*(s) \Rightarrow X^*(s) = X_3^*(s) = G_3^*(s)X_2^*(s)$$

$$(3.76) \quad X_2(s) = G_2(s)X_1^*(s) \Rightarrow X_2^*(s) = G_2^*(s)X_1^*(s)$$

$$(3.77) \quad X_1(s) = G_1(s)E(s) = G_1(s)[Y(s) - G_4(s)X(s)]$$

Оттука:

$$(3.78) \quad X_1(s) = G_1(s)Y(s) - G_1(s)G_3(s)G_4(s)X_2^*(s) \Rightarrow X_1^*(s) = G_1Y^*(s) - G_1G_3^*(s)X_2^*(s)$$

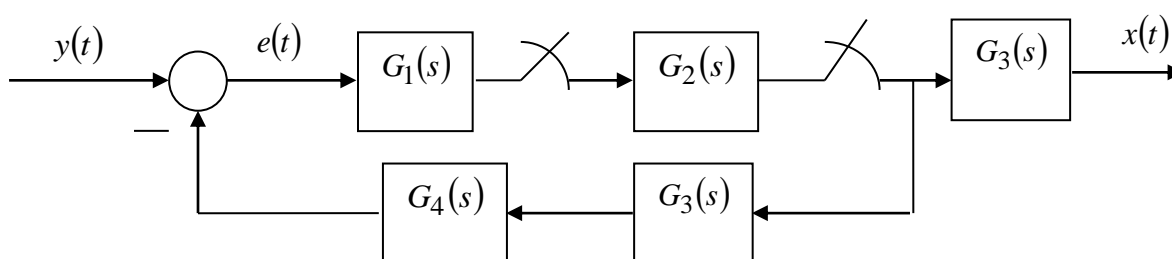
$$(3.79) \quad X_2^*(s) = G_2^*(s)G_1Y^*(s) - G_2^*(s)G_1G_3G_4^*(s)X_2^*(s) \Rightarrow X_2^*(s) = \frac{G_2^*(s)G_1Y^*(s)}{1 + G_2^*(s)G_1G_3G_4^*(s)}$$

$$(3.80) \quad X_3^*(s) = G_3^*(s) \frac{G_2^*(s)G_1Y^*(s)}{1 + G_2^*(s)G_1G_3G_4^*(s)}$$

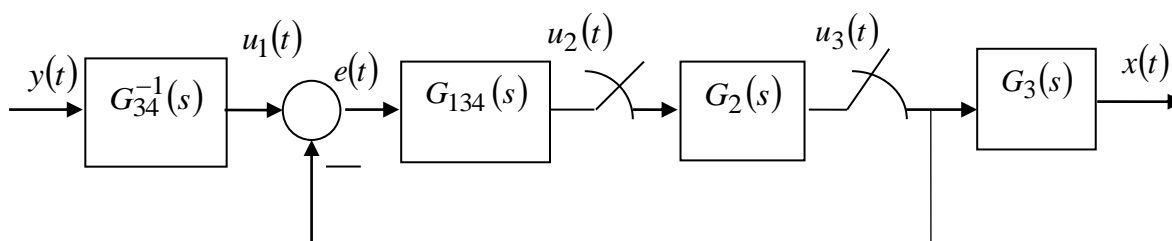
или, во просторот на  $Z$  – сликите:

$$(3.81) \quad X(z) = \frac{G_2(z)G_3(z)G_1Y(z)}{1 + G_2(z)G_1G_3G_4(z)}$$

До истиот резултат може да се дојде и со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите, по што структурната блок-шема од Слика 3.21 се трансформира како на Слика 3.22, а шемата од Слика 3.22 се сведува на шемата од Слика 3.23.



Слика 3.22. Еквивалентна структурна блок-шема на шемата од Слика 3.21



Слика 3.23. Еквивалентна структурна блок-шема на шемата од Слика 3.22

Од Слика 3.23 непосредно следуваат релациите:

$$(3.82) \quad U_1(s) = \frac{1}{G_{34}(s)} Y(s) = \frac{1}{G_3(s)G_4(s)} Y(s)$$

$$(3.83) \quad E(s) = U_1(s) - U_3^*(s)$$

$$(3.84) \quad U_2(s) = G_1(s)G_3(s)G_4(s)E(s)$$

$$(3.85) \quad U_3(s) = G_2(s)U_2^*(s)$$

$$(3.86) \quad X(s) = G_3(s)U_3^*(s)$$

кои во просторот на (\*) – сликите стануваат:

$$(3.87) \quad E^*(s) = U_1^*(s) - U_3^*(s)$$

$$(3.88) \quad U_2^*(s) = G_1 Y^*(s) - G_1 G_3 G_4^*(s) U_3^*(s)$$

$$(3.89) \quad U_3^*(s) = G_2^*(s) U_2^*(s)$$

$$(3.90) \quad X^*(s) = G_3^*(s) U_3^*(s)$$

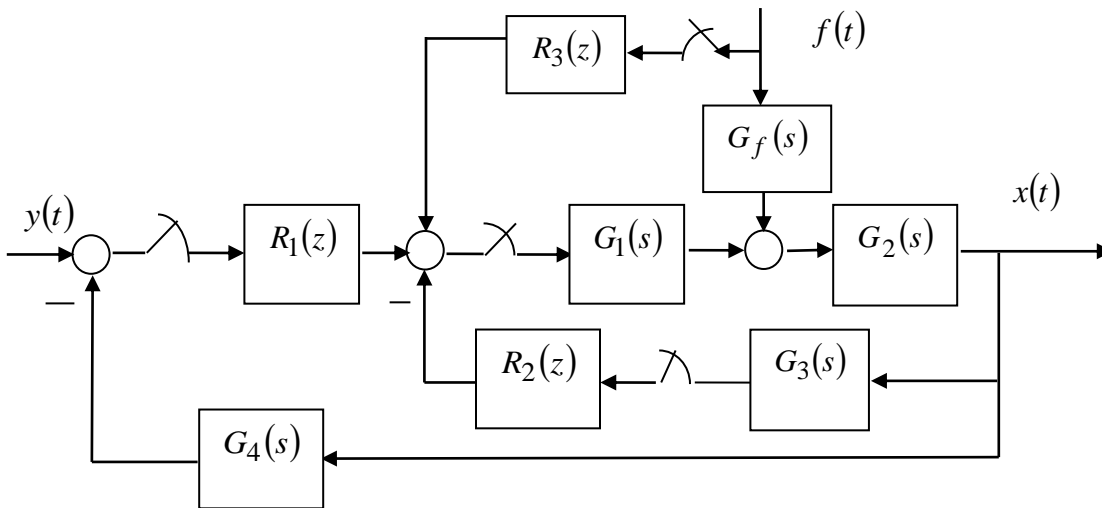
Со решавање на системот равенки (3.87) - (3.90), за сликата  $X^*(s)$  се добива:

$$(3.91) \quad X^*(s) = \frac{G_2^*(s)G_3^*(s)G_1 Y(s)}{1 + G_2^*(s)G_1 G_3 G_4^*(s)}$$

а нејзе ѝ одговара  $Z$  – сликата:

$$(3.92) \quad X(z) = \frac{G_2(z)G_3(z)G_1 Y(z)}{1 + G_2(z)G_1 G_3 G_4(z)}$$

**Задача 3.8.** Со примена на правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се определат  $Z$  – сликите  $E(z) = Z\{e(t)\}$  и  $X(z) = Z\{x(t)\}$  на соодветните сигнали во системот, чија структурна блок-шема е прикажана на Слика 3.24.



Слика 3.24. Структурна блок-шема на системот од Задача 3.8

**Решение:** Од структурната блок-шема на Слика 3.24 непосредно следува:

$$(3.93) \quad X(s) = G_2(s)G_f(s)F(s) + G_2(s)G_1(s)E_1^*(s)$$

$$(3.94) \quad E_1(s) = R_1^*(s)E^*(s) + R_3^*(s)F^*(s) - R_2^*(s)[G_3(s)X(s)]^*$$

$$(3.95) \quad E(s) = Y(s) - G_4(s)X(s)$$

Со воведување на првата од горните равенки во втората и третата, за излезите од двата компаратори во шемата од Слика 3.24 се добива:

$$(3.96) \quad E_1(s) = R_1^*(s)E^*(s) + R_3^*(s)F^*(s) - R_2^*(s)G_2G_3G_fF^*(s) - \\ - R_2^*(s)G_1G_2G_3^*(s)E_1^*(s)$$

$$(3.97) \quad E(s) = Y(s) - G_2(s)G_4(s)G_f(s)F(s) - G_1(s)G_2(s)G_4(s)E_1^*(s)$$

или, во просторот на  $Z$  – сликите:

$$(3.98) \quad E_1(z) = R_1(z)E(z) + R_3(z)F(z) - R_2(z)G_2G_3G_fF(z) - \\ - R_2(z)G_1G_2G_3(z)E_1(z)$$

$$(3.99) \quad E(z) = Y(z) - G_2G_4G_fF(z) - G_1G_2G_4(z)E_1(z)$$

Оттука, со решавање на (3.98) по непознатата  $E_1(z)$  се добива:

$$(3.100) \quad E_1(z) = \frac{R_1(z)}{1 + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} E(z) + \\ + \frac{R_3(z)}{1 + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} F(z) - \\ - \frac{R_2(z)G_2G_3G_fF(z)}{1 + R_2(z)G_1G_2G_3(z)}$$

а со воведувањето на (3.100) во (3.99), за сликата  $E(z)$  се добива изразот:

$$(3.101) \quad E(z) = \frac{1 + R_2(z)G_1G_2G_3(z)}{1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} Y(z) - \\ - \frac{1 + R_2(z)G_1G_2G_3(z)}{1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} G_2G_4G_fF(z) + \\ + \frac{R_3(z)G_1G_2G_4(z)}{1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} F(z) + \\ + \frac{R_2(z)G_1G_2G_4(z)G_2G_3G_fF(z)}{1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)}$$

За да се определи бараната слика  $X(z)$ :

$$(3.102) \quad X(z) = G_2 G_f F(z) + G_1 G_2(z) E_1(z)$$

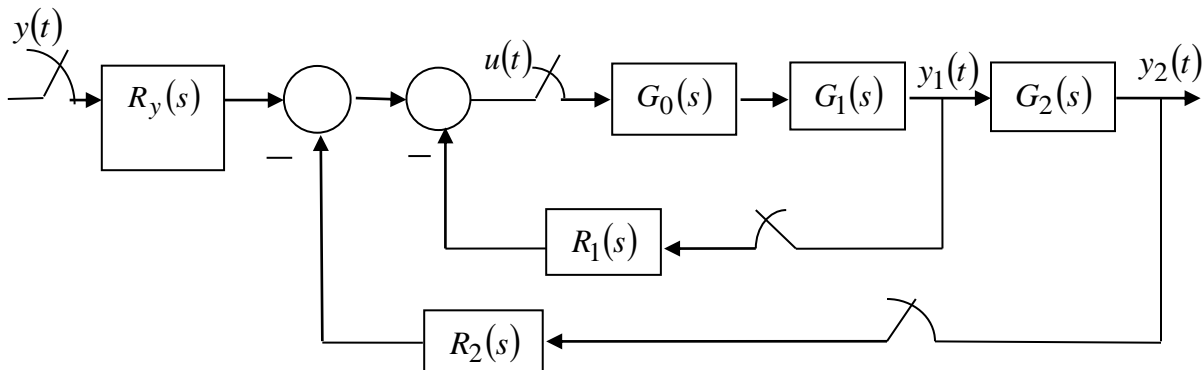
најнапред сликата  $E_1(z)$  се изразува во функција од влезовите  $Y(z)$  и  $F(z)$ , како решение на системот равенки (3.100) - (3.101):

$$(3.103) \quad [1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)]E_1(z) = \\ = R_1(z)Y(z) + R_3(z)F(z) - R_1(z)G_2G_4G_f F(z) - R_2(z)G_2G_3G_f F(z)$$

и потоа се внесува во изразот за  $X(z)$ , со чие средување се добива:

$$(3.104) \quad X(z) = \frac{R_1(z)G_1G_2(z)}{1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} Y(z) + \\ + \frac{R_3(z)G_2G_1(z)}{1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} F(z) - \\ - \frac{R_1(z)G_1G_2(z)}{1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} G_2G_4G_f F(z) - \\ - \frac{R_2(z)G_1G_2(z)}{1 + R_1(z)G_1G_2G_4(z) + R_2(z)G_1G_2G_3(z)} G_2G_3G_f F(z) + G_2G_f F(z)$$

**Задача 3.9.** Да се определи  $Z$ -сликата  $Y_2(z)$  на одзивот  $y_2(t)$  на затворениот дискретен систем од Слика 3.25.



Слика 3.25. Илустрација кон Задача 3.9

**Решение:** За одделните сигнали во шемата од Слика 3.25 важат следните релации:



$$(3.105) \quad Y_2(s) = G_2(s)G_1(s)G_0(s)U^*(s)$$

$$(3.106) \quad Y_1(s) = G_1(s)G_0(s)U^*(s)$$

$$(3.107) \quad U(s) = R_y(s)Y^*(s) - R_2(s)Y_2^*(s) - R_1(s)Y_1^*(s)$$

кои во просторот на (\*) – сликите имаат облик:

$$(3.108) \quad Y_2^*(s) = G_2G_1G_0^*(s)U^*(s)$$

$$(3.109) \quad Y_1^*(s) = G_1G_0^*(s)U^*(s)$$

$$(3.110) \quad U^*(s) = R_y^*(s)Y^*(s) - R_2^*(s)Y_2^*(s) - R_1^*(s)Y_1^*(s)$$

Оттука, со смената (3.37) се добиваат релациите:

$$(3.111) \quad Y_2(z) = G_2G_1G_0(z)U(z)$$

$$(3.112) \quad Y_1(z) = G_1G_0(z)U(z)$$

$$(3.113) \quad U(z) = R_y(z)Y(z) - R_2(z)Y_2(z) - R_1(z)Y_1(z)$$

а со решавање на системот равенки (3.111) - (3.113) по непознатата  $Y_2(z)$ , се добива:

$$(3.114) \quad Y_1(z) = G_0G_1(z)[R_y(z)Y(z) - R_2(z)Y_2(z) - R_1(z)Y_1(z)]$$

$$Y_2(z) = G_0G_1G_2(z)[R_y(z)Y(z) - R_2(z)Y_2(z) - R_1(z)Y_1(z)]$$

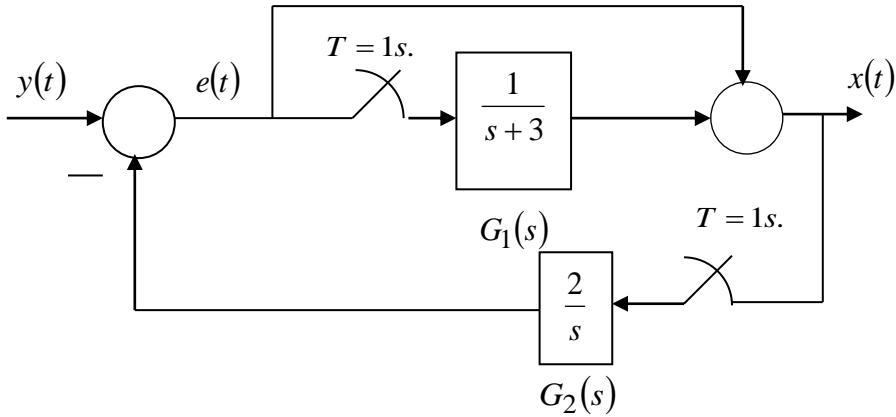
$$(3.115) \quad [1 + G_0G_1(z)R_1(z)]Y_1(z) + G_0G_1(z)R_2(z)Y_2(z) = G_0G_1(z)R_y(z)Y(z)$$

$$G_0G_1G_2(z)R_1(z)Y_1(z) + [1 + G_0G_1G_2(z)R_2(z)]Y_2(z) = G_0G_1G_2(z)R_y(z)Y(z)$$

$$(3.116) \quad Y_2(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 + G_0G_1(z)R_1(z) & G_0G_1(z)R_y(z)Y(z) \\ G_0G_1G_2(z)R_1(z) & G_0G_1G_2(z)R_y(z)Y(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + G_0G_1(z)R_1(z) & G_0G_1(z)R_2(z) \\ G_0G_1G_2(z)R_1(z) & 1 + G_0G_1G_2(z)R_2(z) \end{vmatrix}}$$

$$(3.117) \quad Y_2(z) = \frac{G_0G_1G_2(z)R_y(z)Y(z)}{1 + G_0G_1(z)R_1(z) + G_0G_1G_2(z)R_2(z)}$$

**Задача 3.10.** Да се определи дискретната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на затворениот систем, чија што структурна блок-шема е дадена на Слика 3.26.



Слика 3.26. Илустрација кон Задача 3.10

**Решение:** Со следење на текот на сигналите во структурната блок-шема од Слика 3.26, се добиваат следните релации:

$$(3.118) \quad X(s) = E(s) + G_1(s)E^*(s)$$

$$(3.119) \quad E(s) = Y(s) - G_2(s)X^*(s)$$

кои во просторот на (\*) – сликите добиваат облик:

$$(3.120) \quad X^*(s) = E^*(s) + G_1^*(s)E^*(s)$$

$$(3.121) \quad E^*(s) = Y^*(s) - G_2^*(s)X^*(s)$$

а со смената (3.37) се трансформираат во равенките:

$$(3.122) \quad X(z) = E(z) + G_1(z)E(z)$$

$$(3.123) \quad E(z) = Y(z) - G_2(z)X(z)$$

Системот (3.122) - (3.123) претставува математички модел на дискретниот еквивалент на набљудуваниот систем од Слика 3.26 и со негово решавање се добиваат аналитичките изрази за Z – сликите  $X(z)$  и  $E(z)$  на одзивот  $x(t)$  и сигналот на грешката  $e(t)$  во истиот:

$$(3.124) \quad E(z) = \frac{1}{1 + G_1(z)G_2(z) + G_2(z)} Y(z)$$

$$(3.125) \quad X(z) = \frac{1 + G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z) + G_2(z)} Y(z)$$

при што  $G_1(z)$  и  $G_2(z)$  се дискретните преносни функции на континуалните системи во директната и повратната гранка на зададениот затворен систем од Слика 3.26, соодветно:

$$(3.126) \quad G_1(z) = Z\{L^{-1}[G_1(s)]\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]\right\} = \frac{z}{z-e^{-3}}; \quad |z| > \frac{1}{e^3}$$

$$(3.127) \quad G_2(z) = Z\{L^{-1}[G_{21}(s)]\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right]\right\} = \frac{2z}{z-1}; \quad |z| > 1$$

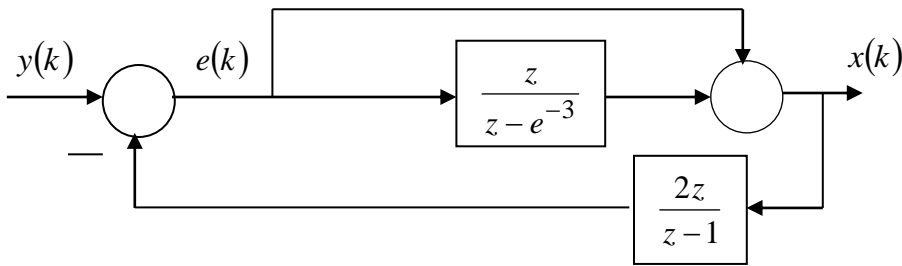
Дискретната преносна функција на системот од Слика 3.26 е дефинирана на следниот начин:

$$(3.128) \quad G(z) = \frac{1 + G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z) + G_2(z)}$$

и за конкретните вредности на дискретните преносни функции  $G_1(z)$  и  $G_2(z)$ , определени со (3.126) и (3.127), соодветно, таа ќе биде:

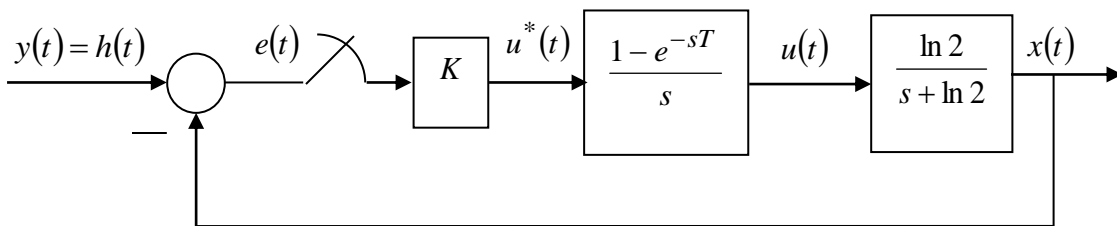
$$(3.129) \quad G(z) = \frac{2z^2 - (2 + e^{-3})z + e^{-3}}{5z^2 - (1 + 3e^{-3})z + e^{-3}}; \quad |z| > \frac{1 + 3e^{-3} + \sqrt{1 - 14e^{-3} + 9e^{-6}}}{10}$$

Соодветниот дискретен еквивалент на системот од Слика 3.26 е прикажан со својата структурна блок-шема на Слика 3.27.



Слика 3.27. Блок-шема на дискретниот еквивалент на системот од Слика 3.26

**Задача 3.11.** Да се определи најмалата можна вредност на стационарната грешка во затворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.28 ако, под претпоставка,  $T = 1s$ . За која вредност на променливиот параметар  $K$  системот од Слика 3.28 ќе има пол во точката  $z = 1$ ?



Слика 3.28. Илустрација кон Задача 3.11

**Решение:** Еквивалентната дискретна преносна функција на објектот на управување во затворениот дискретен систем од Слика 3.28 е:

$$\begin{aligned}
 (3.130) \quad G_0G(z) &= Z\left\{L^{-1}[G_0(s)G(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{\ln 2}{s+\ln 2}\right]\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{\ln 2}{s(s+\ln 2)}\right]\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\ln 2}\right]\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} Z\left\{\left(1-e^{-t\ln 2}\right)h(t)\right\} = \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right) = \\
 &= 1 - 2\frac{z-1}{2z-1} = 1 - \frac{2z-2}{2z-1} = \frac{1}{2z-1}; \quad |z| > 0.5
 \end{aligned}$$

а  $Z$ -сликата  $E(z)$  на сигналот на грешката  $e(t)$  е дадена со изразот:

$$(3.131) \quad E(z) = \frac{1}{1+KG_0G(z)} Y(z) = \frac{z(2z-1)}{(z-1)(2z-1+K)}$$

Вредноста на грешката  $e(t)$  во системот од Слика 3.28 во стационарен режим може да се определи со помош на II гранична теорема на  $Z$ -трансформацијата, доколку функцијата  $(z-1)E(z)$  нема полини во областа  $|z| \geq 1$ , а тоа ќе биде исполнето ако единствениот нејзин пол:

$$(3.132) \quad z = 0.5 - 0.5K$$

лежи во областа  $|z| < 1$ . Оттука произлегуваат следните ограничувања на вредностите од променливиот параметар  $K$  на набљудуваниот дискретен систем на автоматско управување:

$$\begin{aligned}
 (3.133) \quad 2-1+K &> 0 \\
 2+1-K &> 0
 \end{aligned}$$

односно условот:

$$(3.134) \quad -1 < K < 3 = K_{\max}$$

Тогаш стационарната грешка во системот од Слика 3.28 ќе изнесува:

$$(3.135) \quad e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(2z-1)}{2z-1+K} = \frac{1}{1+K}$$

а нејзината најмала можна вредност ќе биде:

$$(3.136) \quad e_{\min}(\infty) = \frac{1}{1 + K_{\max}} = 0.25$$

Условот набљудуваниот затворен дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.28 да има пол во точката  $z = 1$ , значи:

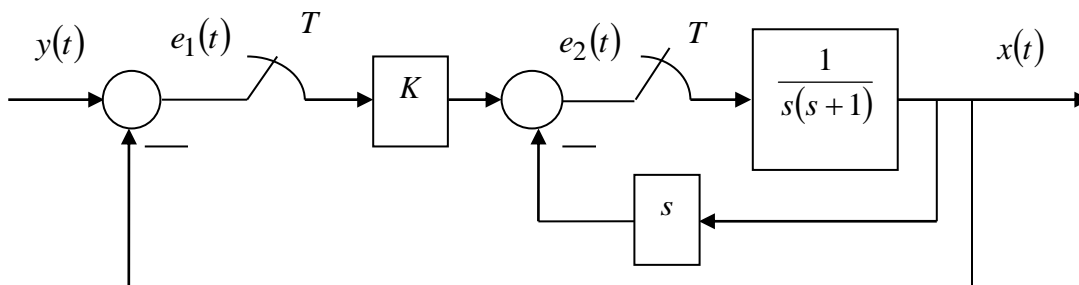
$$(3.137) \quad z - 0.5 + 0.5K = z - 1$$

и тој се сведува на условот:

$$(3.138) \quad K = -1$$

Меѓутоа, оваа вредност на параметарот  $K$  не припаѓа на параметарската област на стабилност на набљудуваниот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.28, туку на нејзината граница, поради што за  $K = -1$  системот ќе биде на границата на стабилност.

**Задача 3.12.** За стабилниот затворен дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.29, да се определи стационарната вредност на одзивот на системот  $x(t)$  и стационарната вредност на грешката во системот  $e_1(t)$  за отскочна влезна возбуда  $y(t) = h(t)$ . Што може да се констатира за квалитетот на поведението на набљудуваниот систем на автоматско управување во стационарен режим при дадената отскочна влезна возбуда? Колку изнесува стационарната грешка на системот за линеарно растечка влезна возбуда  $y(t) = th(t)$ ? (Да се види Задача 4.29.)



Слика 3.29. Илустрација кон Задача 3.12

**Решение:** За системот од Слика 3.29, во  $s$ -комплексното подрачје важат следните релации:

$$(3.139) \quad X(s) = G_1(s)E_2^*(s)$$

$$(3.140) \quad E_2(s) = KE_1^*(s) - G_2(s)X(s)$$

$$(3.141) \quad E_1(s) = Y(s) - X(s)$$

каде што со  $G_1(s)$  и  $G_2(s)$  се означени преносните функции на блоковите во директната и повратната гранка од локалната антипаралелна врска во системот, соодветно. Оттука, со воведување на равенката (3.139) во равенката (3.141):

$$(3.142) \quad E_2(s) = KE_1^*(s) - G_2(s)G_1(s)E_2^*(s)$$

и нејзино префрлање во просторот на  $( )^*$  – сликите:

$$(3.143) \quad E_2^*(s) = KE_1^*(s) - G_1G_2^*(s)E_2^*(s)$$

се добива:

$$(3.144) \quad E_2^*(s) = \frac{KE_1^*(s)}{1 + G_1G_2^*(s)}$$

или, во просторот на  $Z$  – сликите:

$$(3.145) \quad E_2(z) = \frac{KE_1(z)}{1 + G_1G_2(z)}$$

Од друга страна, со воведување на првата равенка од системот равенки (3.139) - (3.141) во третата, се добива:

$$(3.146) \quad E_1(s) = Y(s) - G_1(s)E_2^*(s)$$

или, во просторот на  $Z$  – сликите:

$$(3.147) \quad E_1(z) = Y(z) - G_1(z)E_2(z)$$

па, со воведување на изразот (3.145) за сликата  $E_2(z)$  во (3.147), за сликата  $E_1(z)$  се пресметува:

$$(3.148) \quad E_1(z) = \frac{1 + G_1G_2(z)}{1 + KG_1(z) + G_1G_2(z)} Y(z)$$

Конечно, врз основа на равенката (3.139) и изразите за  $E_1(z)$  и  $E_2(z)$ , за одзивот на набљудуваниот систем во просторот на  $Z$  – сликите се добива:

$$(3.149) \quad X(z) = G_1(z)E_2(z) = \frac{G_1(z)K}{1 + G_1G_2(z)} E_1(z) = \frac{KG_1(z)Y(z)}{1 + KG_1(z) + G_1G_2(z)}$$

Притоа,  $Z$  – сликите  $G_1(z)$  и  $G_2G_1(z)$  се:

$$(3.150) \quad G_1(z) = Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s(s+1)} \right] \right\} = Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] \right\} = \\ = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = z \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}; \quad |z| > 1$$

$$(3.151) \quad G_2 G_1(z) = Z\left\{L^{-1}[G_2(s)G_1(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]\right\} = \frac{z}{z-e^{-T}}; \quad |z| > e^{-T}$$

па, трајната вредност на одсивот  $x(t)$  на набљудуваниот систем во случај на отскочна влезна возбуда ќе биде:

$$(3.152) \quad x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{Kz \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}}{1 + Kz \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} + \frac{z}{z-e^{-T}}} \cdot \frac{z}{z-1} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Kz^2(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T}) + z(z-1)} = 1$$

додека стационарната вредност на грешката  $e_1(t)$  изнесува:

$$(3.153) \quad e_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_1(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_1(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \left(1 + \frac{z}{z-e^{-T}}\right)}{1 + Kz \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} + \frac{z}{z-e^{-T}}} \cdot \frac{z}{(z-1)} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z(2z-e^{-T})}{(z-1)(2z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T})} = 0$$

Врз основа на добиениот резултат (3.153), може да се заклучи дека во стационарен работен режим одсивот на набљудуваниот систем на автоматско управување идеално го следи доведениот отскочен влез.

За линеарно растечка влезна возбуда, стационарната грешка  $e_1(\infty)$  изнесува:

$$(3.154) \quad e_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_1(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_1(z) =$$

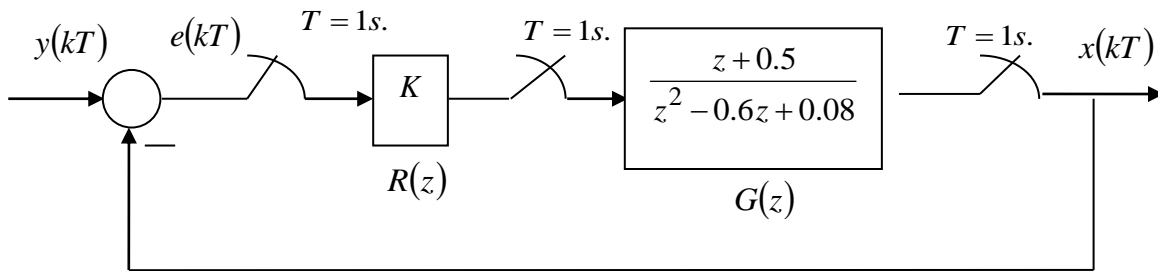
$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{zT(2z-e^{-T})}{(z-1)(2z-e^{-T}) + Kz(1-e^{-T})} = \frac{T(2-e^{-T})}{K(1-e^{-T})}$$

па, очигледно, во овој работен режим излезот на набљудуваниот систем на автоматско управување во стационарна состојба не може идеално да го следи доведениот линеарен

влез, туку тоа го прави со отстапување кое зависи обратно пропорционално од вредноста на коефициентот на засилување во директната гранка  $K$ .

**Задача 3.13.** Под претпоставка дека карактеристичниот полином  $a(z)$  на затворениот дискретен систем од Слика 3.30 е Хурвицов  $z$  – полином, што значи дека сите негови нули се наоѓаат во внатрешноста од единичниот круг  $|z| \leq 1$ , да се определи најмалата можна стационарна вредност на грешката  $e(kT)$ , ако во системот е употребен пропорционален регулатор  $R(z)$  со фактор на пропорционалност  $K$  и на влезот од системот дејствува единична отскочна возбуда  $y(kT)$ .

**Решение:** Карактеристичниот полином  $a(z)$  на затворениот дискретен систем од Слика 3.30 е броител на долниот израз:



Слика 3.30. Илустрација кон задачата 3.13

$$(3.155) \quad \frac{a(z)}{A(z)} = 1 + R(z)G(z) = 1 + K \frac{z+0.5}{z^2-0.6z+0.08} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(z) = z^2 + (K-0.6)z + 0.5K + 0.08$$

и тој е Хурвицов  $z$  – полином за вредности на параметарот  $K$  од интервалот:

$$(3.156) \quad K_{\min} = -0.32 < K < 1.84 = K_{\max}$$

Тогаш, за грешката  $e(kT)$  во стационарна состојба се добива:

$$(3.157) \quad e(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + R(z)G(z)} Y(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + KG(z)} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1 + KG(z)} \frac{z}{z-1} =$$

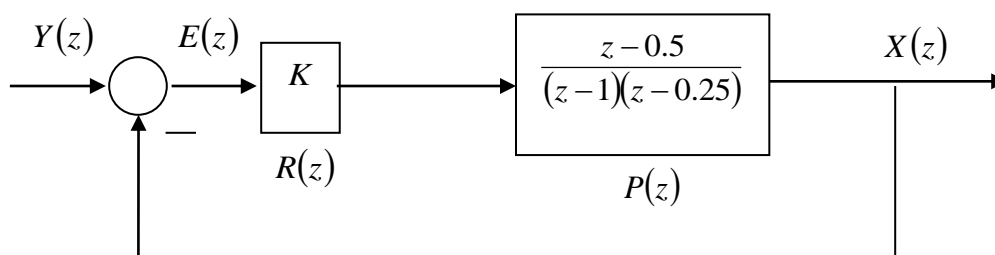
$$= \lim_{z \rightarrow 1} z \frac{z^2 - 0.6z + 0.08}{z^2 + (K-0.6)z + 0.5K + 0.08} = \frac{0.48}{0.48 + 1.5K}$$



а нејзината најмала вредност ќе биде:

$$(3.158) \quad e_{\min}(\infty) = \frac{0.48}{0.48 + 1.5K_{\max}} = 0.148$$

**Задача 3.14.** Даден е затворениот дискретен систем од Слика 3.31. Под претпоставка,  $T = 1s.$  и  $0 < K < \frac{5}{3}$ . Да се определи дали овој систем може да следи влезна возбуда од облик  $y(kT) = kTh(kT)$  и да се пресмета големината на евентуалната стационарна грешка во зависност од параметарот  $K$ .



Слика 3.31. Илустрација кон Задача 3.14

**Решение:** Преносната функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 3.31 е:

$$(3.159) \quad G_0(z) = R(z)P(z) = K \frac{z-0.5}{(z-1)(z-0.25)} = \frac{2K(2z-1)}{(z-1)(4z-1)}; \quad |z| > 1$$

па,  $Z$ -сликата  $E(z)$  на грешката  $e(kT)$  во системот ќе биде:

$$(3.160) \quad E(z) = \frac{1}{1+G_0(z)} Y(z) = \frac{(z-1)(4z-1)}{4z^2 + (4K-5)z + (1-2K)} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

Нејзината стационарна вредност може да се определи со помош на II гранична теорема на  $Z$ -трансформацијата, доколку карактеристичниот полином  $a(z)$  на затворениот систем, кој гласи:

$$(3.161) \quad a(z) = \text{num}[1+G_0(z)] = 4z^2 + (4K-5)z + (1-2K)$$

е Хурвицов  $z$ -полином, односно сите негови нули лежат во внатрешноста од единичниот круг во  $z$ -комплексната рамнина со центар во координатниот почеток.

Ова барање ќе биде исполнето доколку  $0 < K < \frac{5}{3}$ :

$$(3.162) \quad 4 + (4K-4) + (1-2K) = 2K > 0 \Rightarrow K > 0$$

$$4 - (4K - 4) + (1 - 2K) = 10 - 6K > 0 \Rightarrow K < \frac{5}{3}$$

$$1 - (1 - 2K) = 2K > 0 \Rightarrow K > 0$$

што е дадено со условот од задачата, па за  $e(\infty)$  се добива:

$$(3.163) \quad e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{(z-1)(4z-1)}{4z^2 + (4K-5)z + (1-2K)} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{3}{2K}$$

Оттука може да се заклучи дека набљудуваниот затворен систем од Слика 3.31 не е во состојба идеално да следи линеарно растечки влез, туку влезната возбуда  $y(kT) = kTh(kT)$  ја следи со одредена грешка  $e(\infty)$ , дефинирана со (3.163). За

вредности на параметарот  $K$  од интервалот  $K \in \left(0, \frac{5}{3}\right)$ , оваа грешка се движи во

интервалот  $(0.9, \infty)$ :

$$(3.164) \quad 0.9 = e_{\min}(\infty) = \frac{3}{2K_{\max}} < e(\infty) < \frac{3}{2K_{\min}} = e_{\max}(\infty) = \infty$$

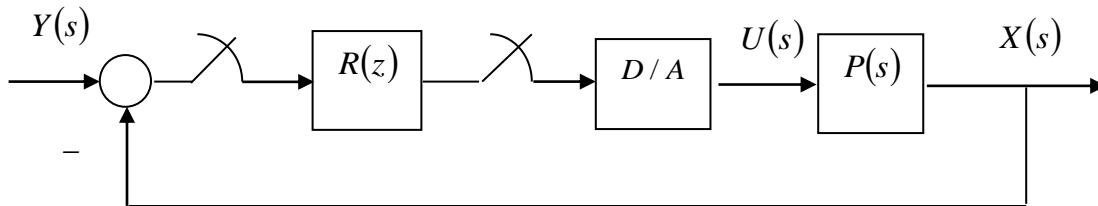
**Задача 3.15.** Да се определат дискретните вредности  $x(kT)$  на одзивот  $x(t)$  на затворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.32, ( $k = 0, 1, 2, \dots; T = \text{const.} > 0$ ), доколку на неговиот влез дејствува отскочната возбуда  $y(t) = h(t)$ , а дигиталниот регулатор  $R(z)$  реализира дискретен еквивалент на

конвенционалниот И-управувачки закон  $y(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t e(\tau) d\tau$ . Објектот на

управување е опишан со преносната функција  $P(s) = \frac{K}{T_0s + 1} e^{-Ts}$ , каде што  $T = 1s$  е

периодот на дискретизација, а  $T_0 = \frac{T}{\ln 2}$  е временската константа на објектот на

управување. Под претпоставка, Д/А уредот содржи форматор од нулти ред и  $K = \frac{1}{8}$ .



Слика 3.32. Илустрација кон Задача 3.15

Решение: Дискретната преносна функција на објектот на управување  $P(z)$ , земајќи го предвид форматорот од нулти ред на неговиот влез, е:

$$(3.165) \quad P(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{K}{s(T_0s+1)} e^{-sT} \right\} = K \frac{z-1}{z^2} Z \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T_0}} \right\} =$$

$$= K \frac{z-1}{z^2} Z \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1/2} \right\} = \frac{1}{8z(2z-1)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

додека преносната функција на дискретниот регулатор  $R(z)$  е:

$$(3.166) \quad R(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

Тогаш, одзивот на набљудуваниот дискретен систем од Слика 3.32 може да се определи на следниот начин:

$$(3.167) \quad x(kT) = Z^{-1} \{X(z)\} = Z^{-1} \{G(z)Y(z)\} =$$

$$= Z^{-1} \left\{ \frac{R(z)P(z)}{1 + R(z)P(z)} R(z) \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{16z^2 - 24z + 9} \cdot \frac{16z}{z-1} \right\} =$$

$$= Z^{-1} \left\{ \frac{1}{(z-3/4)^2} \cdot \frac{z}{z-1} \right\} = \operatorname{Re}_{z \rightarrow 1} C(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z \rightarrow \frac{3}{4}} C(z)z^{k-1} =$$

$$= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 16 - 16 \left(1 + \frac{k}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^k, & k \geq 0 \end{cases}$$

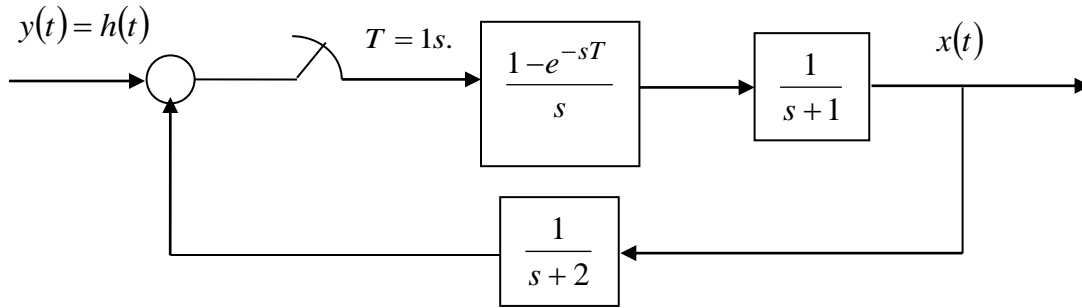
каде што:

$$(3.168) \quad \operatorname{Re}_{z \rightarrow 1} X(z)z^{k-1} = \left[ (z-1) \frac{z^k}{(z-1)(z-3/4)^2} \right]_{z=1} = 16$$

$$(3.169) \quad \operatorname{Re}_{z \rightarrow \frac{3}{4}} X(z)z^{k-1} = \frac{d}{dz} \left[ \left(z - \frac{3}{4}\right)^2 \frac{z^k}{(z-1)(z-3/4)^2} \right]_{z=\frac{3}{4}} = \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^k}{z-1} \right]_{z=\frac{3}{4}}$$

$$= \left[ \frac{kz^{k-1}(z-1) - z^k}{(z-1)^2} \right]_{z=\frac{3}{4}} = \left[ \frac{kz^{k-1}(z-1) - z^k}{(z-1)^2} \right]_{z=\frac{3}{4}} = -16 \left[ 1 + \frac{1}{3}k \right] \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

**Задача 3.16.** Да се определат дискретните вредности  $x(kT)$  на одзивот  $x(t)$  на затворениот дискретен систем од Слика 3.33. (Упатство: да се усвои дека  $e^{-1} \approx \frac{1}{3}$  и  $e^{-2} \approx \frac{1}{9}$ ).



Слика 3.33. Илустрација кон Задача 3.16

**Решение:** Дискретната преносна функција на затворениот систем од Слика 3.33 е:

$$(3.170) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1 G_2(z)}$$

кадешто  $G_1(z)$  и  $G_1 G_2(z)$  се следните дискретни преносни функции:

$$(3.171) \quad G_1(z) = Z\left\{L^{-1}[G_1(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s+1}\right]\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}\right) = 1 - \frac{z-1}{z - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3z-1}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$(3.172) \quad G_1 G_2(z) = Z\left\{L^{-1}[G_1(s)G_2(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s(s+1)(s+2)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}\right]\right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{z-1}{z} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{z-1}{z-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z-1}{z-\frac{1}{9}} = \frac{6z+2}{(3z-1)(9z-1)}, \quad |z| > \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

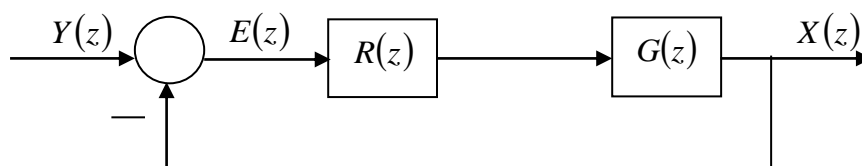
Со воведување на (3.171) и (3.172) во (3.170), се добива:

$$(3.173) \quad G(z) = \frac{2(9z-1)}{27z^2-6z+3}; \quad |z| > \frac{1}{3}$$

па, бараниот оригинал  $x(kT)$  ќе биде:

$$\begin{aligned}
 (3.174) \quad x(kT) &= Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\{G(z)Y(z)\} = \\
 &= Z^{-1}\left\{ \frac{2(9z-1)}{27z^2-6z+3} \cdot \frac{z}{z-1} \right\} = \\
 &= Z^{-1}\left\{ \frac{2z(9z-1)}{27(z-1)\left(z-\frac{1}{9}-j2\frac{\sqrt{2}}{9}\right)\left(z-\frac{1}{9}+j2\frac{\sqrt{2}}{9}\right)} \right\} = \\
 &= \operatorname{Re}_{z=1} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=\frac{1-j2\sqrt{2}}{9}} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=\frac{1+j2\sqrt{2}}{9}} X(z)z^{k-1} = \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{4-j\sqrt{2}}{12} \left( \frac{1-j2\sqrt{2}}{9} \right)^k - \frac{4+j\sqrt{2}}{12} \left( \frac{1+j2\sqrt{2}}{9} \right)^k, \quad k=0,1,2,\dots
 \end{aligned}$$

**Задача 3.17.** Даден е затворениот дискретен систем од Слика 3.34.



Слика 3.34. Илустрација кон Задача 3.18

Да се определи преносната функција  $R(z)$ , така што одзивот на набљудуваниот систем  $x(kT)$  за на единичен отскочен влез да биде од облик  $x(kT) = kT$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots; T = 1s$ . Објектот  $P(z)$ , под претпоставка, е чист интегратор од прв ред. За така пресметаната  $R(z)$ , да се определи грешката во набљудуваниот систем  $e(kT)$  за отскочна влезна возбуда.

**Решение:** Непознатата преносна функција  $R(z)$  се определува од изразот за преносната функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на набљудуваниот дискретен систем:

$$(3.175) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{R(z)P(z)}{1 + R(z)P(z)} = \frac{\frac{z}{(z-1)^2}}{\frac{z}{z-1}} = \frac{1}{z-1} \Rightarrow$$

$$(z-1)R(z)P(z) = 1 + R(z)P(z) \Rightarrow (z-2)R(z)P(z) = 1 \Rightarrow$$

$$(3.176) \quad R(z) = \frac{1}{(z-2)P(z)} \Rightarrow R(z) = \frac{z-1}{z(z-2)}; \quad |z| > 2$$

Оттука,  $Z$ -сликата  $E(z)$  на бараната грешка  $e(kT)$  ќе биде:

$$(3.177) \quad E(z) = \frac{1}{1 + R(z)P(z)} Y(z) = \frac{1}{1 + \frac{z-1}{z(z-2)} \cdot \frac{z}{z-1}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{z-2}} \cdot \frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{z-2}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z(z-2)}{(z-1)^2}$$

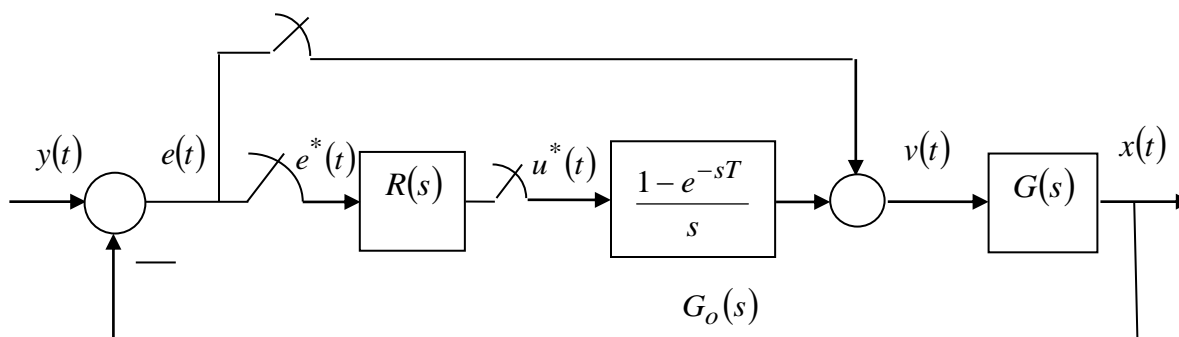
додека самата грешка  $e(kT)$  изнесува:

$$(3.178) \quad e(kT) = \sum_i \operatorname{Re} z E(z) z^{k-1} = \operatorname{Re} z \frac{z^k(z-2)}{(z-1)^2} = \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{z^k(z-2)}{(z-1)^2} \right]_{z=1} =$$

$$= \frac{d}{dz} \left[ z^k(z-2) \right]_{z=1} = (k+1) - 2k = 1-k, \quad k \geq 0$$

**Задача 3.18.** Даден е затворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.35. Објектот  $G(s)$ , под претпоставка, е чист интегратор од прв ред. Да се определи дискретната преносна функција  $R(z)$ , така што одзивот на системот  $x(t)$  на единичен отскочен влез  $y(t)$  во дискретните временски мигови  $t = kT$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) ќе биде од облик:

$$(3.179) \quad x(kT) = 2^{-k-1}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



Слика 3.35. Илустрација кон Задача 3.18

**Решение:** За системот од Слика 3.35 важат следните релации:

$$(3.180) \quad E(s) = Y(s) - X(s)$$

$$(3.181) \quad V(s) = G_0(s)U^*(s) + E^*(s)$$

$$(3.182) \quad X(s) = G(s)V(s) = G(s)[G_0(s)U^*(s) + E^*(s)]$$

$$(3.183) \quad U^*(s) = R^*(s)E^*(s)$$

на кои во просторот на  $( )^*$  – сликите им одговараат равенките:

$$(3.184) \quad E^*(s) = Y^*(s) - X^*(s)$$

$$(3.185) \quad V^*(s) = G_0^*(s)U^*(s) + E^*(s)$$

$$(3.186) \quad X^*(s) = G_0G^*(s)U^*(s) + G^*(s)E^*(s)$$

$$(3.187) \quad U^*(s) = R^*(s)E^*(s)$$

а овие, пак, со смената (3.17) се трансформираат во равенките:

$$(3.188) \quad E(z) = Y(z) - X(z)$$

$$(3.189) \quad V(z) = G_0(z)U(z) + E(z)$$

$$(3.190) \quad X(z) = G_0G(z)U(z) + G(z)E(z)$$

$$(3.191) \quad U(z) = R(z)E(z)$$

Со решавање на системот равенки (3.188) - (3.191) по непознатата  $X(z)$  се добива:

$$(3.192) \quad X(z) = G_0 G(z)U(z) + G(z)E(z) = [G_0 G(z)R(z) + G(z)]E(z) = \\ = [G_0 G(z)R(z) + G(z)]Y(z) - [G_0 G(z)R(z) + G(z)]X(z)$$

од каде што непосредно следува:

$$(3.193) \quad X(z) = \frac{G_0 G(z)R(z) + G(z)}{1 + G_0 G(z)R(z) + G(z)} Y(z)$$

Имајќи предвид дека:

$$(3.194) \quad Y(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(3.195) \quad G(z) = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(3.196) \quad G_0 G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s^2}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{1}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(3.197) \quad X(z) = Z\left\{\frac{1}{2^{k+1}}\right\} = \frac{1}{2} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z}{2z-1}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

равенката (3.193) се трансформира во равенката:

$$(3.198) \quad \frac{z-1}{2z-1} = \frac{z + R(z)}{2z-1 + R(z)}$$

со чие што решавање по непознатата дискретна преносна функција  $R(z)$  се добива:

$$(3.199) \quad R(z) = \frac{1-2z}{z}, \quad |z| > 0$$

**Задача 3.19.** Да се определи: а) дискретната преносна функција  $G(z)$ , б) зависноста на нулите и половите на дискретната преносна функција  $G(z)$  од периодот на дискретизација  $T$ , в) тежинската низа  $g(kT)$  и г) диферентната равенка на динамичко поведење на еден електричен мотор, чија преносна функција е:

$$(3.200) \quad G(s) = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

(Упатство: да се претпостави дека на влезот од моторот има форматор од нулти ред).

**Решение:** а) Дискретната преносна функција  $G(z)$  на електричниот мотор од задачата се определува на следниот начин:



$$\begin{aligned}
 (3.201) \quad G(z) &= Z\left\{L^{-1}[G_0(s)G(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right]\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{K_m}{s^2(T_ms+1)}\right]\right\} = \\
 &= K_m \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{T_m}{s} + \frac{T_m}{s+1}\right]\right\} = \\
 &= K_m \frac{z-1}{z} \left[ \frac{zT}{(z-1)^2} - \frac{T_m z}{z-1} + \frac{T_m z}{z-e^{-T/T_m}} \right] = \\
 &= K_m \left( \frac{T}{z-1} - T_m + T_m \frac{z-1}{z-e^{-T/T_m}} \right) = \\
 &= K_m \frac{[T - T_m(1 - e^{-T/T_m})]z + T_m(1 - e^{-T/T_m}) - Te^{-T/T_m}}{(z-1)(z - e^{-T/T_m})}; \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

б) Преносната функција (3.201) има една конечна нула во точката:

$$(3.202) \quad z_1^0 = \frac{Te^{-T/T_m} - T_m(1 - e^{-T/T_m})}{T - T_m(1 - e^{-T/T_m})}$$

и два пола во точките:

$$(3.203) \quad z_1^* = 1, \quad z_2^* = e^{-T/T_m}$$

Очигледно, единствената нула на  $G(z)$  претставува аperiодична функција од  $T$ , односно зависи од периодот на дискретизација  $T$  и тоа така што, кога  $T$  се менува во интервалот од 0 до  $\infty$ ,  $z_1^0$  се менува во интервалот од -1 до 0:

$$(3.204) \quad \lim_{T \rightarrow 0} z_1^0 = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{Te^{-T/T_m} - T_m(1 - e^{-T/T_m})}{T - T_m(1 - e^{-T/T_m})} = -1$$

$$(3.205) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} z_1^0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{Te^{-T/T_m} - T_m(1 - e^{-T/T_m})}{T - T_m(1 - e^{-T/T_m})} = 0$$

Што се однесува до половите од  $G(z)$ , полот  $z_1^* = 1$  не зависи од  $T$ , додека  $z_2^* = e^{-T/T_m}$  претставува аperiодична функција од  $T$  и кога  $T$  се менува во интервалот од 0 до  $\infty$ ,  $z_2^* = e^{-T/T_m}$  се менува во интервалот од 1 до 0:

$$(3.206) \quad \lim_{T \rightarrow 0} z_2^* = \lim_{T \rightarrow 0} e^{-T/T_m} = 1$$

$$(3.207) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} z_2^* = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-T/T_m} = 0$$

в) Тежинската низа  $g(kT)$  на електричниот мотор од задачата се определува аналитички како оригинал кон неговата дискретна преносна функција  $G(z)$ :

$$(3.208) \quad \begin{aligned} g(kT) &= Z^{-1}\{G(z)\} = \\ &= Z^{-1}\left\{K_m \frac{\left[T - T_m(1 - e^{-T/T_m})\right]z + T_m(1 - e^{-T/T_m}) - Te^{-T/T_m}}{(z-1)(z - e^{-T/T_m})}\right\} = \\ &= \operatorname{Re}_{z=0, k=0} z G(z) z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=1} z G(z) z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=e^{-T}} z G(z) z^{k-1} = \\ &= K_m \begin{cases} 0, & k < 1 \\ T + T_m(1 - e^{T/T_m})e^{-kT/T_m}, & k \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

бидејќи:

$$(3.209) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z=0, k=0} z G(z) z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z \frac{G(z)}{z} \right] = \\ &= K_m \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{\left[T - T_m(1 - e^{-T/T_m})\right]z + T_m(1 - e^{-T/T_m}) - Te^{-T/T_m}}{(z-1)(z - e^{-T/T_m})} \right] = \\ &= K_m T_m (e^{T/T_m} - 1) - K_m T \end{aligned}$$

$$(3.210) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z=1} z G(z) z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (z-1)G(z) z^{k-1} \right] = \\ &= K_m \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{\left[T - T_m(1 - e^{-T/T_m})\right]z + T_m - (T + T_m)e^{-T/T_m}}{(z - e^{-T/T_m})} z^{k-1} \right] = K_m T \end{aligned}$$

$$(3.211) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}_{z=e^{-T/T_m}} z G(z) z^{k-1} &= \lim_{z \rightarrow e^{-T/T_m}} \left( z - e^{-T/T_m} \right) G(z) z^{k-1} = \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{-T/T_m}} \left[ K_m \frac{\left[T - T_m(1 - e^{-T/T_m})\right]z + T_m(1 - e^{-T/T_m}) - Te^{-T/T_m}}{z-1} z^{k-1} \right] = \\ &= K_m T_m (1 - e^{T/T_m}) e^{-kT/T_m} \end{aligned}$$

Импулсната карактеристика  $g(t)$  на електричниот мотор од задачата, во дискретните временски мигови  $t = kT; k = 0, 1, 2, \dots$  се поклопува со вредностите на неговата тежинска низа  $g(kT)$  во истите точки.

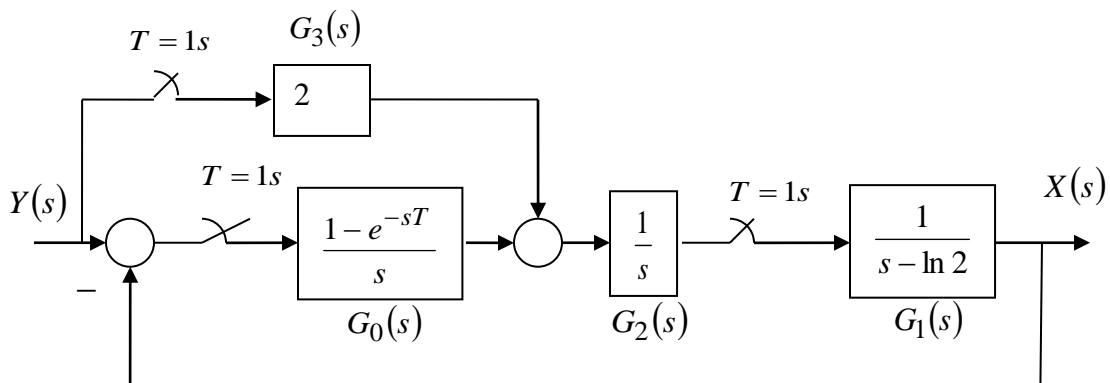
г) Диферентната равенка на динамичко поведење, која претставува дискретен модел на динамиката на набљудуваниот електричен мотор, има облик:

$$(3.212) \quad x((k+2)T) - (1 + e^{-T/T_m})x((k+1)T) + e^{-T/T_m}x(kT) = \\ = K_m(T - T_m + T_m e^{-T/T_m})y((k+1)T) + K_m[T_m - (T + T_m)e^{-T/T_m}]y(kT)$$

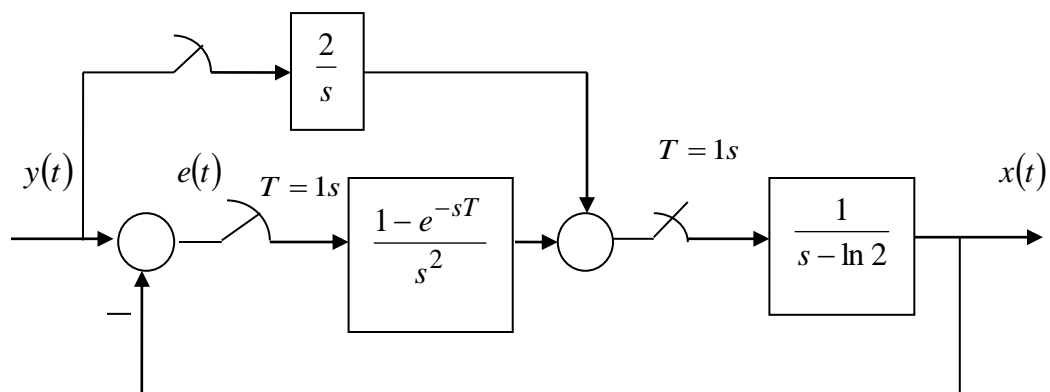
**Задача 3.20.** Да се определат дискретните вредности  $x(kT)$  на одсивот  $x(t)$  на затворениот дискретен систем од Слика 3.36, ако на неговиот влез дејствува следната возбуда:

$$(3.213) \quad y(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 1, & k = 1 \\ -1, & k = 2 \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

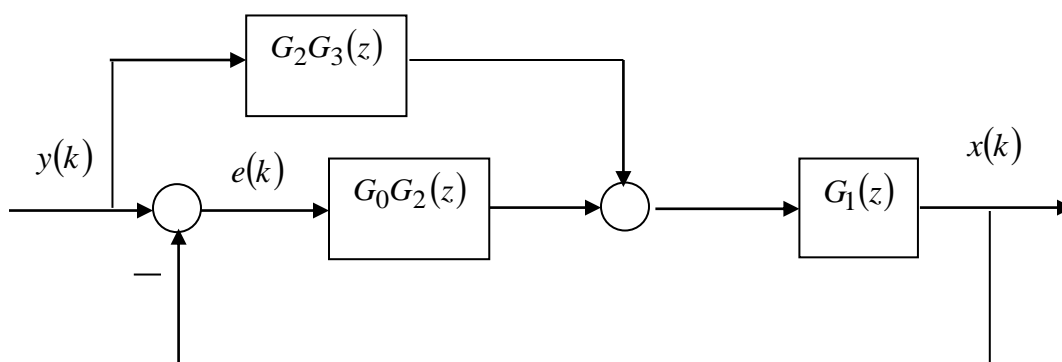
**Решение:** Структурната блок-шема од Слика 3.36 може да се преуреди како што е покажано на Слика 3.37 и со примена на правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи да се трансформира во шемата од Слика 3.38. Конечно, со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите се добива шемата од Слика 3.39, од каде непосредно следува изразот за еквивалентната дискретна преносна функција  $G(z)$  на набљудуваниот затворен систем од Слика 3.36.



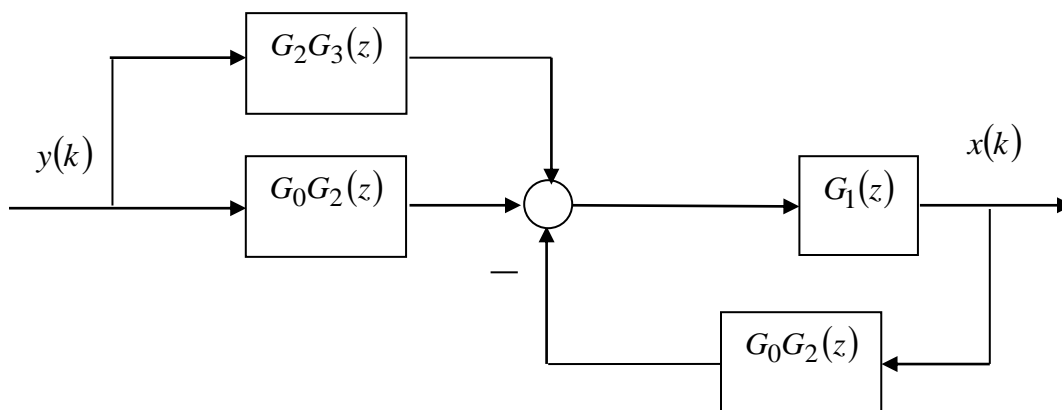
Слика 3.36. Илустрација кон Задача 3.20



Слика 3.37. Еквивалентна структурна блок-шема на шемата од Слика 3.36



Слика 3.38. Дискретен еквивалент на системот од Слика 3.37



Слика 3.39. Дискретен еквивалент на системот од Слика 3.38

Следствено:

$$(3.214) \quad G(z) = \frac{G_1(z)[G_0G_2(z) + G_2G_3(z)]}{1 + G_1(z)G_0G_2(z)}$$

каде што:

$$(3.215) \quad G_1(z) = Z\{G_1(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s - \ln 2}\right\} = \frac{z}{z - 2}, |z| > 2$$

$$(3.216) \quad G_2G_3(z) = Z\{G_2(s)G_3(s)\} = Z\left\{\frac{2}{s}\right\} = \frac{2z}{z - 1}, |z| > 1$$

$$(3.217) \quad G_0G_2(z) = Z\{G_0(s)G_2(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s^2}\right\} = \frac{1}{z - 1}, |z| > 1$$

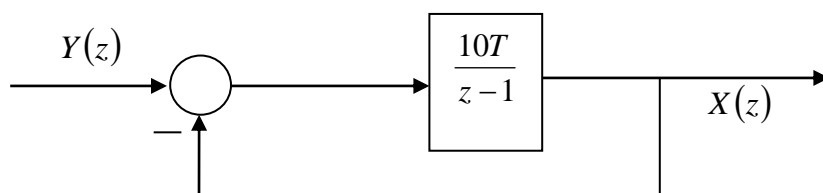
$Z$  – сликата  $X(z)$  на одзивот на набљудуваниот систем е:

$$(3.218) \quad X(z) = \frac{G_1(z)[G_0G_2(z) + G_2G_3(z)]}{1 + G_1(z)G_0G_2(z)} Y(z) = \\ = \frac{z(2z + 1)}{z^2 - 2z + 2} \cdot \frac{z - 1}{z^2} = \frac{(z - 1)(2z + 1)}{z(z^2 - 2z + 2)}, |z| > \sqrt{2}$$

па, за бараниот дискретен оригинал  $x(kT)$  се добива:

$$(3.219) \quad x(kT) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{(z - 1)(2z + 1)}{z(z^2 - 2z + 2)}\right\} = \\ = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 2, & k = 1 \\ \sqrt{2^k} \left[ \frac{3}{2} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) \right], & k \geq 2 \end{cases}$$

**Задача 3.21.** Даден е затворениот дискретен систем од Слика 3.40, со влезна возбуда од облик  $y(t) = th(t)$ , каде што  $h(t)$  е единичната отскочна функција.



Слика 3.40. Илустрација кон Задача 3.21

Да се определи: а) вредноста на периодот на дискретизација  $T$  за која преодниот процес во системот ќе заврши за време  $t=T$  и б) трајната вредност  $e(\infty)$  на сигналот на грешка  $e(t)$  во системот.

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G(z)$  на затворениот систем на автоматско управување од Слика 3.40 е дадена со изразот:

$$(3.220) \quad G(z) = \frac{G_0(z)}{1+G_0(z)} = \frac{10T}{z+10T-1}, \quad |z| > |1-10T|$$

каде што:

$$(3.221) \quad Y(z) = Z\{y(t)\} = Z\{th(t)\} = \frac{zT}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

Тогаш, за  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(kT)$  на набљудуваниот систем се добива:

$$(3.222) \quad X(z) = G(z)Y(z) = \frac{10T}{z+10T-1} \cdot \frac{zT}{(z-1)^2}$$

а) Преодниот режим на работа на зададениот систем е определен со преодната компонента на неговиот одзив  $x_{preod}(kT)$ , која има облик:

$$(3.223) \quad x_{preod}(kT) = Z^{-1}\{\text{развој на } X(z) \text{ по половите на } G(z)\} = \lim_{z \rightarrow 1-10T} \operatorname{Re}_z X(z) z^{k-1} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1-10T} \left[ (z+10T-1) \frac{T^2}{(z+10T-1)(z-1)^2} \cdot z^k \right] =$$

$$= 0.01(1-10T)^k, \quad k \geq 0$$

и тој, очигледно, ќе биде идентички еднаков на нула за секое  $k \geq 1$  ако:

$$(3.224) \quad 1-10T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0.1$$

б)  $Z$ -сликата  $E(z)$  на грешката  $e(kT)$  во набљудуваниот дискретен систем е:

$$(3.225) \quad E(z) = \frac{1}{1+G_0(z)} Y(z) = \frac{zT}{(z+10T-1)(z-1)}$$

па функцијата:

$$(3.226) \quad (z-1)E(z) = \frac{zT}{z+10T-1}, \quad |z| > |1-10T|$$

ќе биде аналитичка во областа  $|z| \leq 1$  ако нејзиниот единствен пол има модул помал од единица, од каде што непосредно следуваат ограничувањата на вредностите за  $T$ :

$$(3.227) \quad 1 - 10T < 1 \Rightarrow T > 0$$

$$(3.228) \quad -1 < 1 - 10T \Rightarrow T < 0.2$$

Тогаш трајната вредност  $e(\infty)$  на грешката  $e(kT)$  може да се определи со помош на II гранична теорема на  $Z$  – трансформацијата, и таа ќе биде:

$$(3.229) \quad e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{zT}{(z+10T-1)} = 0.1$$

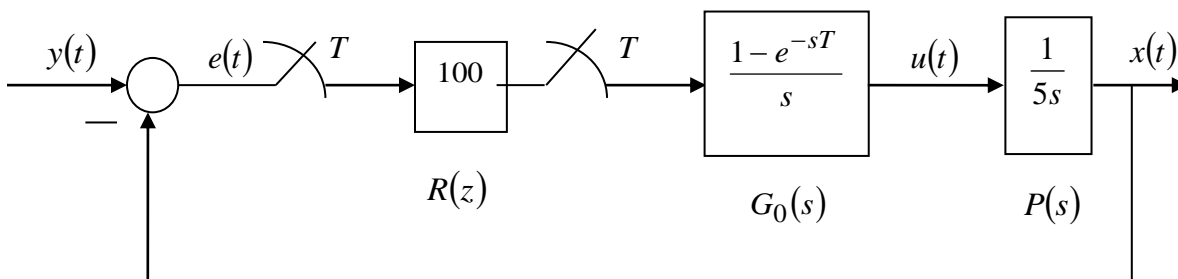
За вредности на  $T$  надвор од интервалот  $0 < T < 0.2$  не важи II гранична теорема на  $Z$  – трансформацијата и тогаш бараната вредност  $e(\infty)$  се одредува како:

$$(3.230) \quad e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

**Задача 3.22.** За затворениот дискретен систем од Слика 3.41, да се определи: а) вредноста на периодот на дискретизација  $T$  за која преодниот процес во системот ќе заврши за време  $t = T$  и б) трајната вредност  $e(\infty)$  на сигналот на грешката  $e(t)$  во системот, ако на влезот од системот дејствува возбуда од облик:

$$(3.231) \quad y(t) = \left(2 + \frac{1}{2}t\right)h(t)$$

Каде што  $h(t)$  е единичната отскочна функција.



Слика 3.41. Илустрација кон Задача 3.22

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G(z)$  на затворениот систем на автоматско управување од Слика 3.41 е дадена со изразот:

$$(3.232) \quad G(z) = \frac{R(z)G_0P(z)}{1 + R(z)G_0P(z)} = \frac{20T}{z + 20T - 1}, \quad |z| > |1 - 20T|$$

каде што:

$$(3.233) \quad G_0P(z) = Z\left\{L^{-1}[G_0(s)P(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1 - e^{-sT}}{5s^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{5s^2} \right] \right\} = \frac{T}{5(z-1)}, \quad |z| > 1$$

а  $Z$  –сликата  $Y(z)$  е:

$$(3.234) \quad Y(z) = Z\{y(t)\} = Z \left\{ \left( 2 + \frac{1}{2}t \right) h(t) \right\} = \frac{4z^2 + (T-4)z}{2(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

Тогаш, за  $Z$  –сликата  $X(z)$  на одсивот  $x(t)$  на набљудуваниот систем се добива:

$$(3.235) \quad X(z) = G(z)Y(z) = \frac{20T}{z+20T-1} \cdot \frac{4z^2 + (T-4)z}{2(z-1)^2}$$

а) Преодниот режим на работа на овој систем е определен со преодната компонента на неговиот одсив, која има облик:

$$(3.236) \quad x_{preod}(kT) = Z^{-1} \{ \text{развој на } X(z) \text{ по половите на } G(z) \} = \lim_{z \rightarrow 1-20T} \operatorname{Re}_z X(z) z^{k-1} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1-20T} \left[ (z+20T-1) \frac{40Tz + 10T^2 - 40T}{(z+20T-1)(z-1)^2} \cdot z^k \right] =$$

$$= -1.975(1-20T)^k, \quad k \geq 0$$

и тој, очигледно, ќе биде идентички еднаков на нула за секое  $k \geq 1$ , ако:

$$(3.237) \quad 1-20T=0 \quad \Rightarrow \quad T=0.05$$

б)  $Z$  –сликата  $E(z)$  на сигналот на грешка  $e(t)$  во набљудуваниот дискретен систем од Слика 3.41 е:

$$(3.238) \quad E(z) = \frac{1}{1+R(z)G_0P(z)} Y(z) = \frac{4z^2 - (T-4)z}{2(z+20T-1)(z-1)}$$

па, функцијата:

$$(3.239) \quad (z-1)E(z) = \frac{4z^2 - (T-4)z}{2(z+20T-1)}, \quad |z| > |1-20T|$$

ќе биде аналитичка во областа  $|z| \leq 1$  ако нејзиниот единствен пол има модул помал од 1, од каде што непосредно следуваат ограничувањата на можните вредности за  $T$ :

$$(3.240) \quad 1-20T < 1 \quad \Rightarrow \quad T > 0$$

$$-1 < 1-20T \quad \Rightarrow \quad T < 0.1$$

Тогаш, трајната вредност  $e(\infty)$  на грешката  $e(t)$  може да се определи со помош на II гранична теорема на  $Z$  –трансформацијата:



$$(3.241) \quad e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(4z+T-4)}{2(z+20T-1)} = 0.025$$

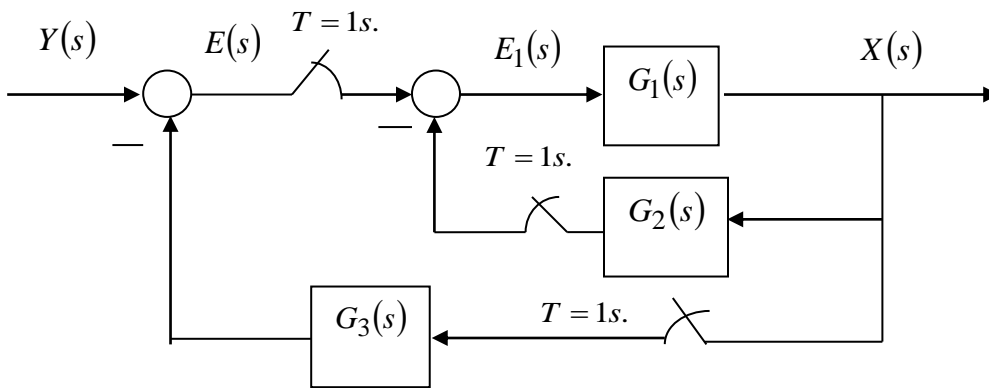
За вредности на  $T$  надвор од интервалот дефиниран со (3.240), II гранична теорема на  $Z$ -трансформацијата не важи и тогаш бараната трајна вредност  $e(\infty)$  се одредува како граничната вредност  $e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  и е неограничена.

**Задача 3.23.** Со помош на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се определи дискретната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на затворениот систем од Слика 3.42, чиј отворен систем има преносна функција  $G_0(z)$ . Потоа да се определат константата на положба  $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z)$ , брзинската константа  $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z)$  и константата на забрзување  $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z)$  за набљудуваниот дискретен систем и да се издискутира способноста на овој систем да следи отскочна  $y_1(t) = h(t)$ , линеарно растечка  $y_2(t) = th(t)$  и квадратна влезна возбуда  $y_3(t) = \frac{1}{2}t^2 h(t)$ . Под претпоставка:

$$(3.242) \quad G_1(s) = \frac{1}{s}, \text{Re } s > 0$$

$$(3.243) \quad G_2(s) = \frac{\ln 2}{s + \ln 2}, \text{Re } s > \ln \frac{1}{2}$$

$$(3.244) \quad G_3(s) = \frac{1}{s + \ln 4}, \text{Re } s > \ln \frac{1}{4}$$



Слика 3.42. Илустрација кон Задача 3.23

**Решение:** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, а имајќи на ум дека:

$$(3.245) \quad G_1(z) = Z\{G_1(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$$

$$(3.246) \quad G_3(z) = Z\{G_3(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 4}\right\} = \frac{4z}{4z-1}, |z| > \frac{1}{4}$$

$$(3.247) \quad G_1G_2(z) = Z\{G_1(s)G_2(s)\} = Z\left\{\frac{\ln 2}{s(s + \ln 2)}\right\} = \\ = Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \ln 2}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z}{(z-1)(2z-1)}, |z| > 1$$

за преносната функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на набљудуваниот затворен систем од сл.3.42 се добива:

$$(3.248) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{\frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z)}}{1 + \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z)}G_3(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z) + G_1(z)G_3(z)} = \\ = \frac{z(4z-1)(2z-1)}{(z-1)(2z-1)(4z-1) + z(4z-1) + 4z^2(2z-1)} = \frac{8z^3 - 6z^2 + z}{16z^3 - 14z^2 + 6z - 1}$$

Од друга страна, преносната функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем е дадена со изразот:

$$(3.249) \quad G_0(z) = \frac{G_1(z)G_3(z)}{1 + G_1G_2(z)} = \frac{\frac{z}{z-1} \cdot \frac{4z}{4z-1}}{1 + \frac{z}{(z-1)(2z-1)}} = \frac{4z^2(2z-1)}{(4z-1)(2z^2 - 2z + 1)}, |z| > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Следствено, бараните константи на грешка ќе бидат:

$$(3.250) \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) = \frac{4}{3}$$

$$(3.251) \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{4z^2(2z-1)}{(4z-1)(2z^2 - 2z + 1)} = 0$$

$$(3.252) \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{4z^2(2z-1)}{(4z-1)(2z^2 - 2z + 1)} = 0$$

Z-сликата  $E(z)$  на грешката  $e(t)$  во набљудуваниот затворен систем, е дадена со изразот:

$$\begin{aligned}
 (3.253) \quad E(z) &= Y(z) - G_3(z)X(z) = Y(z) - G_3(z)G(z)Y(z) = \\
 &= [1 - G_3(z)G(z)]Y(z) = \left[ 1 - \frac{G_1(z)G_3(z)}{1 + G_1G_2(z) + G_1(z)G_3(z)} \right] Y(z) = \\
 &= \frac{1 + G_1G_2(z)}{1 + G_1G_2(z) + G_1(z)G_3(z)} Y(z) = \frac{1}{1 + G_0(z)} Y(z)
 \end{aligned}$$

па,  $e(\infty)$  изнесува:

$$(3.254) \quad e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{1 + G_0(z)} Y(z)$$

За конкретните влезни возбуди од задачата, грешката  $e(\infty)$  ќе биде:

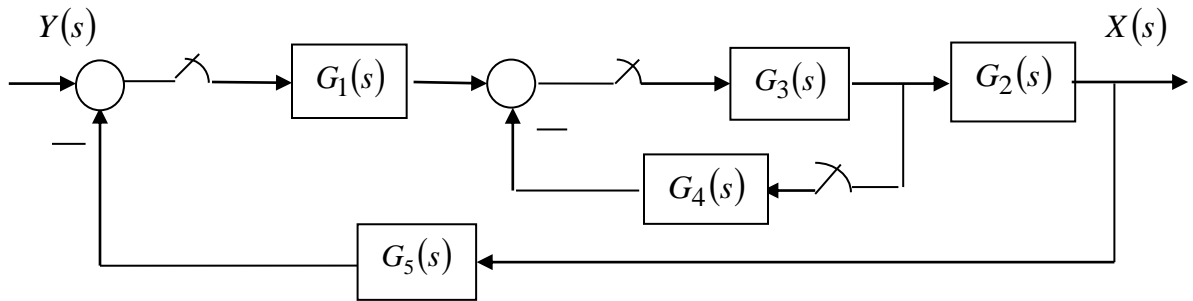
$$(3.255) \quad e_1(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_1(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{1 + G_0(z)} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$(3.256) \quad e_2(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{1 + G_0(z)} \cdot \frac{zT}{(z-1)^2} = \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z)} = \frac{T}{K_v}$$

$$(3.257) \quad e_3(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_3(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{1 + G_0(z)} \cdot \frac{zT^2(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{2T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z)} = \frac{2T^2}{K_a}$$

и таа, очигледно, зависи од вредноста на соодветната константа на грешка. Оттука може да се заклучи дека набљудуваниот затворен дискретен систем од Слика 3.42, не може идеално да следи ниту една од зададените влезни возбуди. Тој е во состојба да следи само отскочна влезна возбуда, но со одредено константно отстапување. Ова се должи на фактот дека соодветниот отворен систем (3.249) има астатизам од нулти ред.

**Задача 3.24.** Со примена на правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи и правилата на алгебрата на блок-шемите, да се определи изразот за  $Z$ -сликата  $X(z) = Z\{x(t)\}$  на излезот на системот од Слика 3.43.



Слика 3.43. Илустрација кон Задача 3.24

Потоа да се определат дискретните вредности на одзивот  $x(t)$  во миговите  $t = kT (k = 0, 1, 2, \dots)$ , ако на неговиот влез дејствува Кронекер-делта функцијата

$\delta_0(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$  и дискретната преносна функција  $G(z)$  изнесува:

$$(3.258) \quad G(z) = \frac{z(2z-1)}{2z^2-2z+1}, \quad |z| > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

За период на дискретизација да се усвои  $T = 1s$ .

**Решение:** Со следење на текот на сигналите во шемата од Слика 3.43 и примена на соодветните трансформации се добива:

$$(3.259) \quad \begin{aligned} X(s) &= G_2(s)G_3(s)E_2^*(s) \\ E_2(s) &= G_1(s)E_1^*(s) - G_4(s)G_3^*(s)E_2^*(s) \\ E_1(s) &= Y(s) - G_5(s)X(s) = Y(s) - G_5(s)G_2(s)G_3(s)E_2^*(s) \end{aligned}$$

$$(3.260) \quad \begin{aligned} X^*(s) &= G_2G_3^*(s)E_2^*(s) \\ E_2^*(s) &= G_1^*(s)E_1^*(s) - G_4^*(s)G_3^*(s)E_2^*(s) \Rightarrow E_2^*(s) = \frac{G_1^*(s)}{1 + G_3^*(s)G_4^*(s)} E_1^*(s) \\ E_1^*(s) &= Y^*(s) - G_2G_3G_5^*(s)E_2^*(s) \end{aligned}$$

$$(3.261) \quad \begin{aligned} X(z) &= G_2G_3(z)E_2(z) \\ E_2(z) &= \frac{G_1(z)}{1 + G_3(z)G_4(z)} E_1(z) \\ E_1(z) &= Y(z) - G_2G_3G_5(z)E_2(z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_1(z) = Y(z) - G_2G_3G_5(z) \frac{G_1(z)}{1 + G_4(z)G_3(z)} E_1(z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_1(z) = \frac{1 + G_3(z)G_4(z)}{1 + G_1(z)G_2G_3G_5(z) + G_3(z)G_4(z)} Y(z) \end{aligned}$$

Оттука:

$$(3.262) \quad \begin{aligned} X(z) &= G_2G_3(z)E_2(z) = \frac{G_1(z)G_2G_3(z)}{1 + G_4(z)G_3(z)} E_1(z) = \\ &= \frac{G_1(z)G_2G_3(z)}{1 + G_4(z)G_3(z)} \cdot \frac{1 + G_3(z)G_4(z)}{1 + G_1(z)G_2G_3G_5(z) + G_3(z)G_4(z)} Y(z) = \end{aligned}$$

$$= \frac{G_1(z)G_2G_3(z)}{1 + G_1(z)G_2G_3G_5(z) + G_3(z)G_4(z)} Y(z)$$

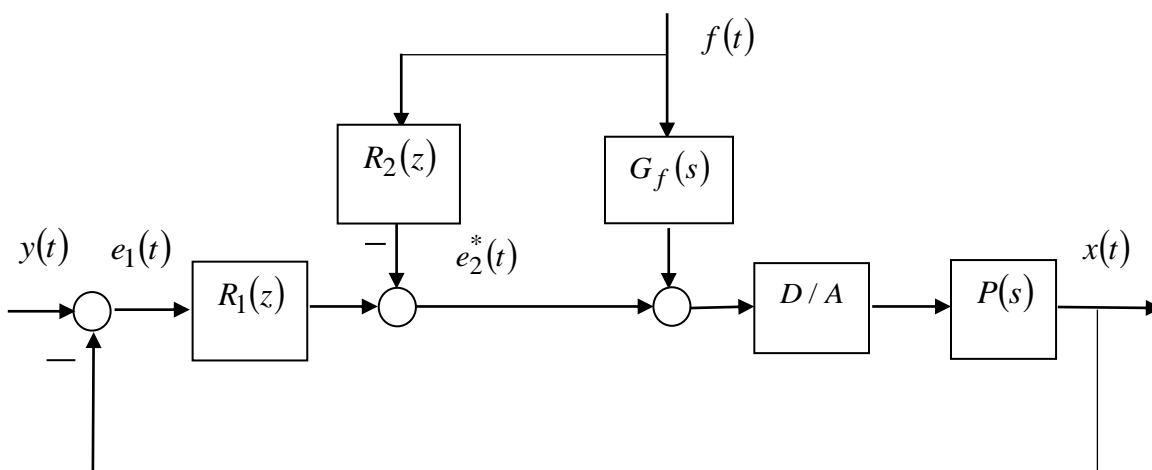
па, за дискретните вредности на одзивот  $x(t)$  во миговите  $t = kT (k = 0, 1, 2, \dots)$ , кога на неговиот влез дејствува Кронекер-делта функцијата  $\delta_0(kT) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$  се добива:

$$(3.263) \quad x(kT) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\{G(z)Y(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z(2z-1)}{2z^2-2z+1}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}_{z=\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}} X(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}} X(z)z^{k-1} =$$

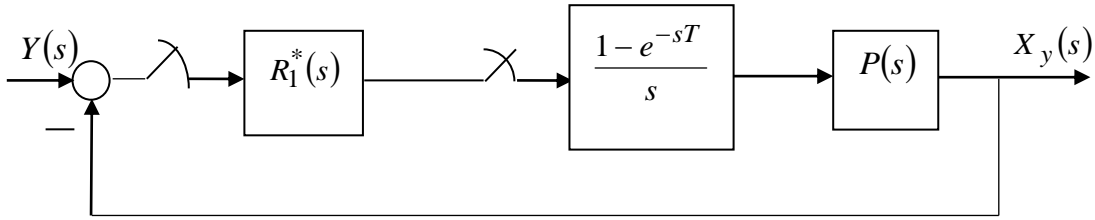
$$= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}\right)^k, & k \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right), & k \geq 0 \end{cases}$$

**Задача 3.25.** Со помош на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се определи  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  на затворениот систем од Слика 3.44. Колку треба да изнесува преносната функција  $R_2(z)$ , за управуваната големина  $x(t)$  да биде независна од влијанието на надворешните пречки  $f(t)$ ? (Упатство: да се претпостави форматор од нулти ред и период на дискретизација  $T = 1s$ .)



Слика 3.44. Илустрација кон Задача 3.25

**Решение:** Ако се претпостави дека  $f(t) \equiv 0$ , структурната блок-шема од Слика 3.44 ќе се сведе на шемата од Слика 3.45. Оттука:



Слика 3.45. Илустрација кон Задача 3.25

$$(3.264) \quad E_1(s) = Y(s) - X_y(s) \Rightarrow E_1^*(s) = Y^*(s) - X_y^*(s)$$

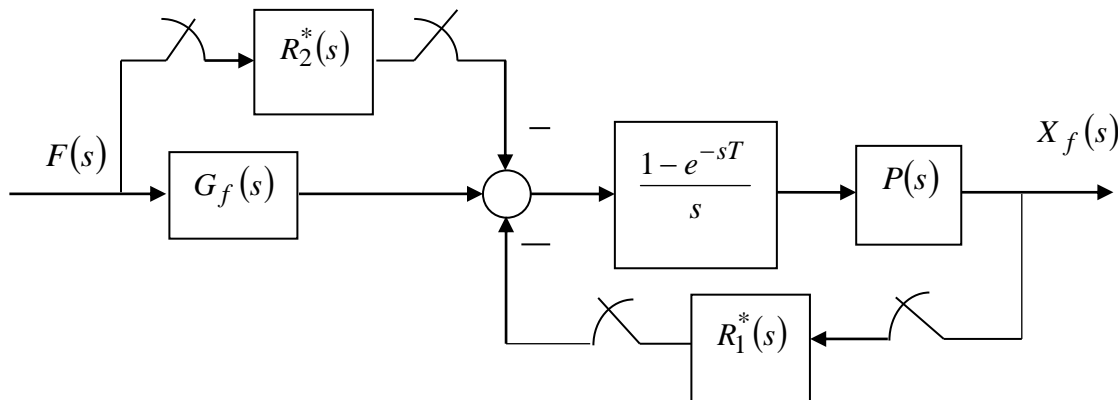
$$(3.265) \quad X_y(s) = P(s) \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) R_1^*(s) E_1^*(s) \Rightarrow X_y^*(s) = \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right]^* R_1^*(s) E_1^*(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_y^*(s) = \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right]^* R_1^*(s) E_1^*(s) = G^*(s) R_1^*(s) Y^*(s) - G^*(s) R_1^*(s) X_y^*(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_y^*(s) = \frac{G^*(s) R_1^*(s)}{1 + G^*(s) R_1^*(s)} Y^*(s)$$

$$(3.266) \quad X_y(z) = \frac{R_1(z) G(z)}{1 + R_1(z) G(z)} Y(z)$$

Ако сега се претпостави дека  $y(t) \equiv 0$ , структурната блок-шема од Слика 3.45 може да се претстави како на Слика 3.46.



Слика 3.46. Илустрација кон Задача 3.25

Оттука:

$$(3.267) \quad X_f(s) = \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right] \cdot \left[ G_f(s)F(s) - R_1^*(s)X_f^*(s) - R_2^*(s)F^*(s) \right] \Rightarrow$$

$$(3.268) \quad X_f^*(s) = GG_fF^*(s) - R_1^*(s)G^*(s)X_f^*(s) - R_2^*(s)G^*(s)F^*(s) \Rightarrow$$

$$(3.269) \quad X_f^*(s) = \frac{GG_fF^*(s)}{1 + R_1^*(s)G^*(s)} - \frac{R_2^*(s)G^*(s)F^*(s)}{1 + R_1^*(s)G^*(s)}$$

или, во просторот на  $Z$  – сликите:

$$(3.270) \quad X_f(z) = \frac{GG_fF(z)}{1 + R_1(z)G(z)} - \frac{R_2(z)G(z)F(z)}{1 + R_1(z)G(z)}$$

Бидејќи набљудуваниот систем од сл.3.47 е линеарен, за него важи принципот на суперпозиција, па  $Z$  – сликата  $X(z)$  на неговиот одзив  $x(t)$  ќе биде збир од сликите (3.271) и (3.275):

$$(3.271) \quad X(z) = X_y(z) + X_f(z) = \frac{R_1(z)G(z)}{1 + R_1(z)G(z)} Y(z) + \frac{GG_fF(z)}{1 + R_1(z)G(z)} - \frac{R_2(z)G(z)F(z)}{1 + R_1(z)G(z)}$$

Одзивот  $x(t)$  нема да зависи од влијанието на пречките  $f(t)$  ако изразот:

$$(3.272) \quad \frac{GG_fF(z)}{1 + R_1(z)G(z)} - \frac{R_2(z)G(z)F(z)}{1 + R_1(z)G(z)}$$

биде еднаков на нула, од каде следува условот за  $R_2(z)$ :

$$(3.273) \quad R_2(z) = \frac{GG_fF(z)}{G(z)F(z)}$$

Тогаш:

$$(3.274) \quad X(z) = X_y(z) = \frac{R_1(z)G(z)}{1 + R_1(z)G(z)} Y(z)$$

**Задача 3.26.** Даден е затворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.47. Дали карактеристичниот полином на системот зависи од дискретната преносна функција  $R_2(z)$  на компензаторот на пореметувањата  $f(t)$ ? Да се определи одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот систем во случај кога тој не зависи од пореметувањата  $f(t)$ , ако:

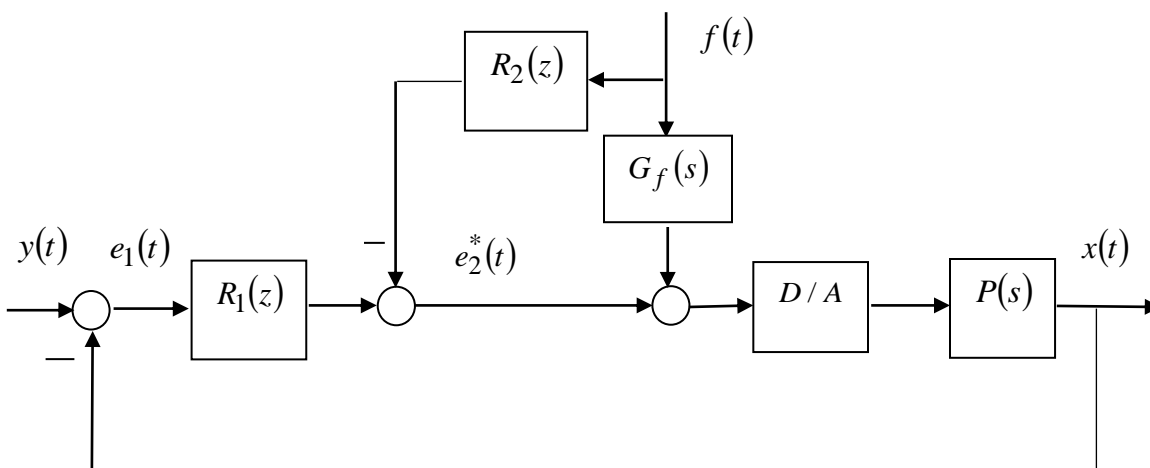
$$(3.275) \quad R_1(z) = \frac{10z}{z-1}$$

$$(3.276) \quad P(s) = \frac{1}{s+5}$$

$$(3.277) \quad G_f(s) = 5$$

$$(3.278) \quad f(t) = h(t)$$

$$(3.279) \quad y(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 0 \\ 1, & k = 1 \\ -1, & k = 2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$$



Слика 3.47. Илустрација кон Задача 3.26

**Решение:** Под претпоставка дека во набљудуваниот систем не дејствуваат пречките  $f(t)$ , се добива:

$$(3.280) \quad X^*(s) = \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right]^* R_1^*(s) E^*(s) =$$

$$= \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right]^* R_1^*(s) [Y^*(s) - X^*(s)], \quad f(t) \equiv 0$$

$$(3.281) \quad \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{\frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} R_1(z)}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} R_1(z)}, \quad f(t) \equiv 0$$

од каде се гледа дека карактеристичниот полином  $a(z)$  на системот, односно неговата карактеристична равенка  $a(z) = 0$  не зависи од преносната функција  $R_2(z)$ :



$$(3.282) \quad a(z) = 1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} D_1(z) = 0$$

$Z$  – сликата  $X(z)$  на одзивот  $X(t)$  на набљудуваниот дискретен систем зависи од референтниот влез  $y(t)$  и пречките  $f(t)$  на следниот начин:

$$(3.283) \quad X(s) = \left[ \frac{1-e^{-sT}}{s} P(s) \right]^* R_1^*(s) E^*(s) +$$

$$+ \left[ \frac{1-e^{-sT}}{s} P(s) \right]^* R_2^*(s) F^*(s) - \left( \frac{1-e^{-sT}}{s} \right) P(s) G_f(s) F(s) =$$

$$= \left[ \frac{1-e^{-sT}}{s} P(s) \right]^* R_1^*(s) [Y^*(s) - X^*(s)] +$$

$$+ \left[ \frac{1-e^{-sT}}{s} P(s) \right]^* R_2^*(s) F^*(s) - \left( \frac{1-e^{-sT}}{s} \right) P(s) G_f(s) F(s)$$

$$(3.284) \quad X(z) = \frac{\frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} R_1(z)}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} R_1(z)} Y(z) +$$

$$+ \frac{\frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} R_2(z) F(z) - G G_f F(z)}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} D_1(z)}; \quad G(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} P(s)$$

Оттука, одзивот  $x(t)$  на системот нема да зависи од влијанието на пречките  $f(t)$  доколку вториот член во горниот израз е еднаков на нула:

$$(3.285) \quad \frac{\frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} R_2(z) F(z) - G G_f F(z)}{1 + \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} R_1(z)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{P(s)}{s} \right\} R_2(z) F(z) - G G_f F(z) = 0$$

односно, доколку:

$$(3.286) \quad R_2(z) = \frac{GG_f F(z)}{\frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} F(z)}$$

па, ако во (3.286) се внесат конкретните изрази за сликите:

$$(3.287) \quad Z\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} = Z\left\{\frac{1}{s(s+5)}\right\} = Z\left\{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}e^{-5t}\right)h(t)\right\} = \\ = \frac{1}{5}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-5}}\right) = \frac{1}{5(z-1)}; \quad |z| > 1, \quad e^{-5} \approx 0$$

$$(3.288) \quad Z\left\{\frac{P(s)G_f(s)F(s)}{s}\right\} = Z\left\{\frac{25}{s^2(s+5)}\right\} = Z\left\{\left(t^2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}e^{-5t}\right)h(t)\right\} = \\ = \frac{1}{5}\left[\frac{5z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-5}}\right] = \frac{4z+1}{5(z-1)^2}; \quad |z| > 1, \quad e^{-5} \approx 0$$

$$(3.289) \quad F(z) = Z\{f(t)\} = Z\{h(t)\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

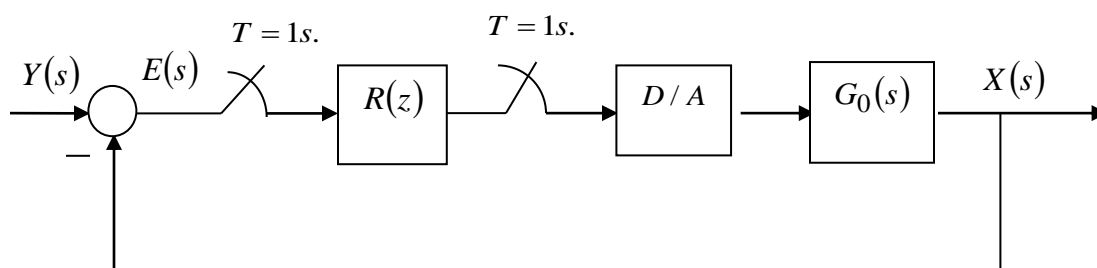
за  $R_2(z)$  ќе се добие:

$$(3.290) \quad R_2(z) = \frac{GG_f F(z)}{\frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} F(z)} = \frac{\frac{4z+1}{5(z-1)^2}}{\frac{z}{5(z-1)^2}} = \frac{4z+1}{z}$$

Кога  $R_2(z)$  е определена со (3.290), одзивот на системот  $x(t)$  ќе биде нечувствителен кон пречките  $f(t)$  и во дискретните временски мигови  $t = kT; k = 0, 1, 2, \dots$  ќе изнесува:

$$(3.291) \quad x(kT) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{\frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} R_1(z)}{1 + \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{P(s)}{s}\right\} R_1(z)} Y(z)\right\} = \\ = Z^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{z-1} \cdot \frac{10z}{z-1} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)}{1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{z-1} \cdot \frac{10z}{z-1} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)}\right\} = \\ = Z^{-1}\left\{\frac{2}{z+1} \cdot \frac{z+1}{z^2}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{2}{z^2}\right\} = \begin{cases} 0, & k \neq 2 \\ 2, & k = 2 \end{cases}$$

**Задача 3.27.** Даден е затворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.48.



Слика 3.48. Илустрација кон Задача 3.27

Да се определи грешката  $e(kT)$  во системот, ако  $T = 1s$ . и:

$$(3.292) \quad R(z) = \frac{0.025}{z + 0.1}; \quad |z| > 0.1$$

$$(3.293) \quad G_0(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_0(s) \right\} = \frac{1}{z + 0.2}; \quad |z| > 0.2$$

$$(3.294) \quad y(kT) = \begin{cases} 0, & k \leq 1 \\ (-0.2)^k, & k \geq 2 \end{cases}$$

**Решение:**  $Z$  –сликата  $Y(z)$  на влезниот сигнал  $y(kT)$  е:

$$(3.295) \quad Y(z) = Z\{y(kT)\} = \frac{0.04}{z(z + 0.2)}; \quad |z| > 0.2$$

па за бараната  $Z$  –сликата  $E(z)$  се добива:

$$\begin{aligned} (3.296) \quad E(z) &= \frac{1}{1 + R(z)G(z)} Y(z) = \frac{1}{1 + \frac{0.025}{z + 0.1} \cdot \frac{1}{z + 0.2}} \cdot \frac{0.04}{z(z + 0.2)} = \\ &= \frac{(z + 0.1)(z + 0.2)}{(z + 0.1)(z + 0.2) + 0.025} \cdot \frac{0.04}{z(z + 0.2)} = \frac{0.04(z + 0.1)}{z(z^2 + 0.3z + 0.045)} = \\ &= \frac{0.04(z + 0.1)}{z(z + 0.15 + j0.15)(z + 0.15 - j0.15)} \end{aligned}$$

Оттука:

$$(3.297) \quad e(k) = Z^{-1}\{E(z)\} = \begin{cases} 0, k < 0 \\ e(0), k = 0 \\ e(1), k = 1 \\ \operatorname{Re}_{z=z_1} E(z)z^{k-1} + \operatorname{Re}_{z=z_2} E(z)z^{k-1}, k \geq 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, k < 0 \\ e(0), k = 0 \\ e(1), k = 1 \\ \frac{0.15^k}{27} \sqrt{2^k} \cdot \left[ 24 \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) - 8 \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) \right], k \geq 2 \end{cases}$$

бидејќи:

$$(3.298) \quad e(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.04(z+0.1)}{z(z^2+0.3z+0.045)} = 0$$

$$(3.299) \quad e(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} [zE(z) - ze(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.04(z+0.1)}{(z^2+0.3z+0.045)} = 0$$

$$(3.300) \quad \operatorname{Re}_{z=z_1} E(z)z^{k-1} = \operatorname{Re}_{z=z_1=(-0.15+j0.15)} \frac{0.04(z+0.1)z^k}{z^2(z+0.15+j0.15)(z+0.15-j0.15)} =$$

$$= \frac{0.04(z+0.1)z^k}{z^2(z+0.15+j0.15)} \Big|_{z=-0.15+j0.15} = 4 \frac{(-1+j3)(-0.15+j0.15)^k}{27} =$$

$$= \frac{-4+j12}{27} 0.15^k \sqrt{2^k} e^{-j\frac{k\pi}{4}}$$

$$(3.301) \quad \operatorname{Re}_{z=z_2} E(z)z^{k-1} = \operatorname{Re}_{z=z_2=-0.15-j0.15} = \frac{(-4-j12)(-0.15-j0.15)^k}{27} =$$

$$= \frac{-4-j12}{27} 0.15^k \sqrt{2^k} e^{j\frac{k\pi}{4}}$$

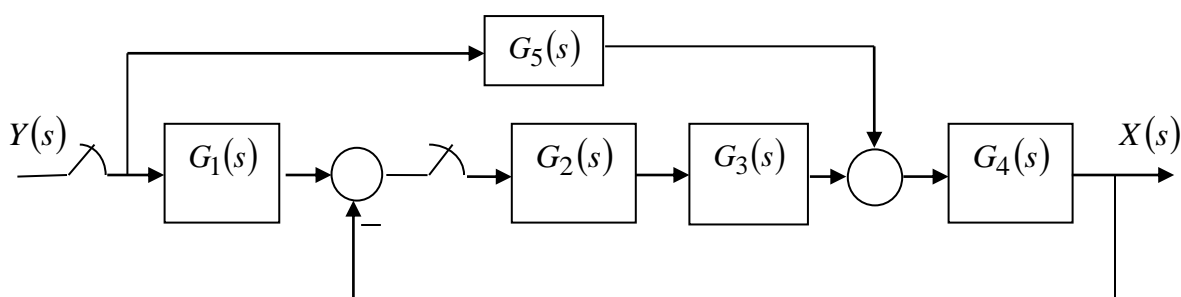
**Задача 3.28.** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се определи  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  на затворениот линеарен стационарен дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.49. Потоа да се определат дискретните вредности  $x(kT)$  на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот затворен систем во миговите  $t = kT$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots (T = 1s.)$  ако:

$$(3.302) \quad G_1(s) = \frac{1}{s}$$

$$(3.303) \quad G_2(s)G_3(s)G_4(s) = \frac{\ln \frac{3}{2}}{(s + \ln 2)(s + \ln 3)}$$

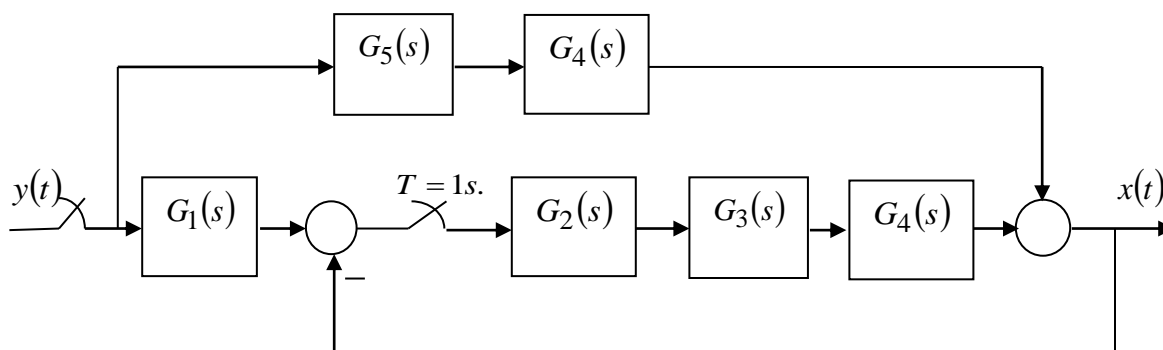
$$(3.304) \quad G_4(s)G_5(s) = \frac{1}{s}$$

$$(3.305) \quad y(t) = t^2 h(t)$$

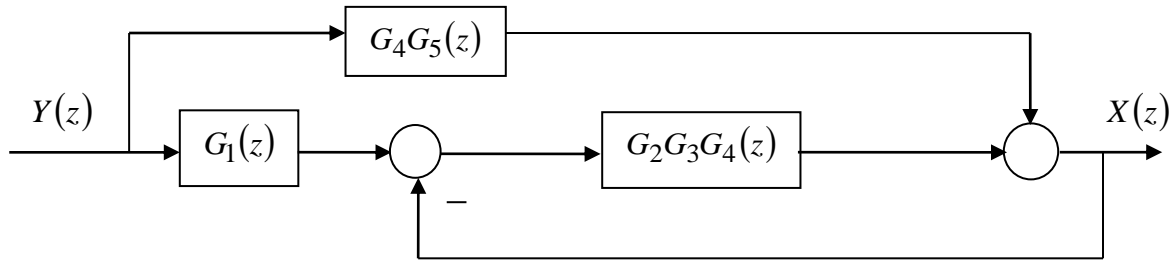


Слика 3.49. Илустрација кон Задача 3.28

**Решение:** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите, структурната блок-шема од Слика 3.49 може да се трансформира во шемата од Слика 3.50, а со примена на правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, шемата од Слика 3.50 се трансформира во шемата од Слика 3.51.



Слика 3.50. Еквивалентна шема на шемата од Слика 3.49



Слика 3.51. Дискретен еквивалент на шемата од Слика 3.50

Блок-шешата од Слика 3.51 претставува дискретен еквивалент на шешата од Слика 3.49 и, со примена на соодветни правила на алгебрата на блок-шешите, може да се трансформира во шешата од Слика 3.52. Оттука, лесно се определува дискретната преносна функција на набљудуваниот затворен систем  $G(z) = X(z)/Y(z)$ :

$$(3.306) \quad G(z) = \frac{G_1(z)G_2G_3G_4(z) + G_4G_5(z)}{1 + G_2G_3G_4(z)}$$

Имајќи на ум дека:

$$(3.307) \quad G_1(z) = Z\{G_1(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = Z\{h(t)\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(3.308) \quad G_2G_3G_4(z) = Z\{G_2(s)G_3(s)G_4(s)\} = Z\left\{\frac{\ln(3/2)}{(s + \ln 2)(s + \ln 3)}\right\} =$$

$$= Z\left\{\frac{1}{(s + \ln 2)} - \frac{1}{(s + \ln 3)}\right\} = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t h(t) - \left(\frac{1}{3}\right)^t h(t)\right\} =$$

$$= \frac{z}{z-1/2} - \frac{z}{z-1/3} = \frac{z}{(2z-1)(3z-1)}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

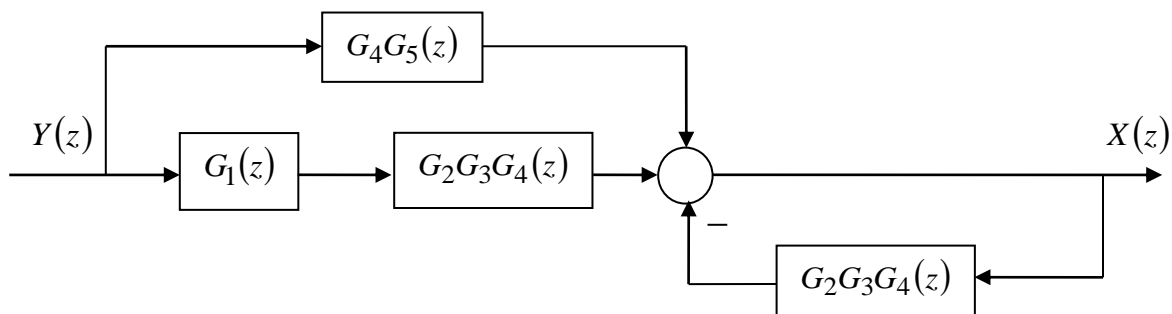
$$(3.309) \quad G_4G_5(z) = Z\{G_4(s)G_5(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = Z\{h(t)\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(3.310) \quad Y(z) = Z\{y(t)\} = Z\{t^2 h(t)\} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, \quad |z| > 1$$

за  $Z$ -сликата  $X(z)$  се добива:

$$(3.311) \quad X(z) = G(z)Y(z) = \frac{G_1(z)G_2G_3G_4(z) + G_4G_5(z)}{1 + G_2G_3G_4(z)} Y(z) =$$

$$= \frac{\frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(2z-1)(3z-1)} + \frac{z}{z-1}}{1 + \frac{z}{(2z-1)(3z-1)}} \cdot \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4}, \quad |z| > 1$$



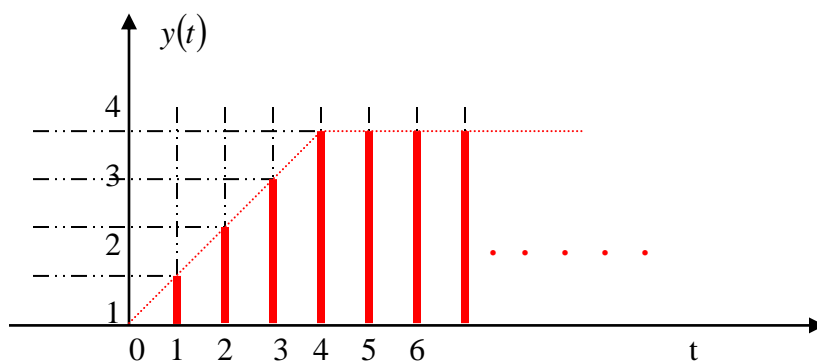
Слика 3.52. Еквивалентна блок-шема на шемата од Слика 3.51

Оттука, бараниот дискретен оригинал  $x(kT)$  ќе биде:

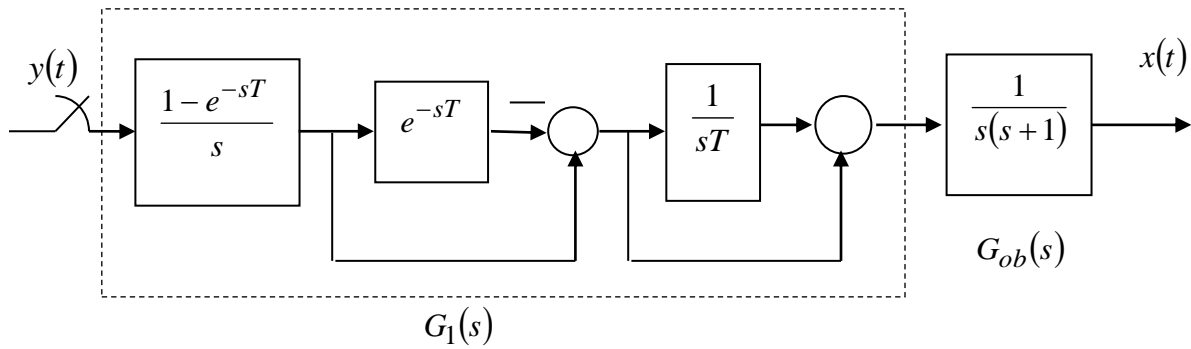
$$(3.312) \quad x(k) = Z^{-1} \left\{ \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4} \right\} = \operatorname{Re}_{z=1} z \frac{z^{k+1}(z+1)}{(z-1)^4} = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left[ z^{k+1}(z+1) \right]_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{d^3}{dz^3} \left[ z^{k+1}(z+1) \right]_{z=1} = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1), \quad k \geq 0$$

**Задача 3.29.** Даден е отворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.54, со влез  $y(t)$  прикажан на Слика 3.53, и период на дискретизација  $T = 1s$ . Да се определи одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот систем во дискретните временски мигови  $t_k = kT (k = 0, 1, 2, \dots)$ .



Слика 3.53. Илустрација кон Задача 3.29



Слика 3.54. Илустрација кон Задача 3.29

**Решение:** Преносната функција  $G_1(s)$  изнесува:

$$(3.313) \quad G_1(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot (1 - e^{-sT}) \cdot \left(1 + \frac{1}{Ts}\right) = \frac{Ts + 1}{Ts^2} (1 - e^{-sT})^2$$

За да се определи дискретната преносна функција  $Z\{G_1(s)G_{ob}(s)\}$  може да се дефинира помошната функција  $W(s)$ , таква што за неа важи:

$$(3.314) \quad W(s) = \frac{Ts + 1}{Ts^2} G_{ob}(s)$$

Тогаш:

$$\begin{aligned} (3.315) \quad Z\{L^{-1}[G_1(s)G_{ob}(s)]\} &= Z\left\{L^{-1}\left[\frac{Ts + 1}{Ts^2} (1 - e^{-sT})^2 G_{ob}(s)\right]\right\} = \\ &= Z\left\{L^{-1}\left[(1 - e^{-sT})^2 W(s)\right]\right\} = \\ &= Z\{L^{-1}[W(s) - 2e^{-sT}W(s) + e^{-2sT}W(s)]\} = \\ &= Z\{w(t) - 2w(t-T) + w(t-2T)\} = \\ &= Z\{w(kT) - 2w((k-1)T) + w((k-2)T)\} = \\ &= W(z) - 2z^{-1}W(z) + z^{-2}W(z) = \\ &= (1 - 2z^{-1} + z^{-2})W(z) = (1 - z^{-1})^2 W(z) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 W(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^2 W(z) \end{aligned}$$

каде што:

$$W(z) = Z\left[\frac{Ts + 1}{Ts^2} G_{ob}(s)\right] = Z\left\{\frac{s+1}{s^2} \cdot \frac{1}{s(s+1)}\right\} = Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} =$$



$$= Z \left\{ \frac{t^2}{2} h(t) \right\} = \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3}, \quad |z| > 1$$

па, за дискретната преносна функција  $Z\{G_1(s)G_{ob}(s)\}$  дефинитивно се добива:

$$(3.316) \quad G_1 G_{ob}(z) = Z\{G_1(s)G_{ob}(s)\} = \left( \frac{z-1}{z} \right)^2 W(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right)^2 \cdot \frac{z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{(z+1)}{2z(z-1)}, \quad |z| > 1$$

$Z$ -сликата  $Y(z)$  на влезната возбуда  $y(t)$ , која е зададена графички, се определува врз основа на дефиницијата и сл.3.57:

$$(3.317) \quad Y(z) = Z\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = 0 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \sum_{k=4}^{\infty} 4z^{-k} =$$

$$= \frac{z^2 + z + 1}{z^3} + \sum_{k=0}^{\infty} 4z^{-k} - \sum_{k=0}^3 4z^{-k} =$$

$$= \frac{z^2 + z + 1}{z^3} + \frac{4z}{z-1} - 4 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right) =$$

$$= \frac{z^2 + z + 1 - 4z^3 - 4z^2 - 4z - 4}{z^3} + \frac{4z}{z-1} =$$

$$= -\frac{4z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^3} + \frac{4z}{z-1} = \frac{(z+1)(z^2+1)}{z^3(z-1)}, \quad |z| > 1$$

па,  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  од набљудуваниот систем ќе биде:

$$(3.318) \quad X(z) = G_1 G_{ob}(z) Y(z) = \frac{z+1}{2z(z-1)} \cdot \frac{(z+1)(z^2+1)}{z^3(z-1)} = \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

Нејзиниот оригинал може да се определи преку почетните вредности  $x(0)$ ,  $x(1)$ ,  $x(2)$ ,  $x(3)$ ,  $x(4)$ , кои се пресметуваат со помош на првата гранична теорема на  $Z$ -трансформацијата:

$$(3.319) \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} =$$

$$= x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + x(3T)z^{-3} + x(4T)z^{-4} + \sum_{k=5}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$$(3.320) \quad zX(z) = zx(0) + x(T) + x(2T)z^{-1} + x(3T)z^{-2} + x(4T)z^{-3} + \sum_{k=5}^{\infty} x(kT)z^{-k+1}$$

$$\Rightarrow x(T) = zX(z) - zx(0) - \sum_{k=2}^{\infty} x(kT)z^{-k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(T) = \lim_{z \rightarrow \infty} [zX(z) - zx(0)]$$

$$(3.321) \quad z^2 X(z) = z^2 x(0) + zx(T) + x(2T) + \sum_{k=3}^{\infty} x(kT)z^{-k+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2T) = z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(T) - \sum_{k=3}^{\infty} x(kT)z^{-k+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2T) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(T)]$$

$$(3.322) \quad z^3 X(z) = z^3 x(0) + z^2 x(T) + zx(2T) + x(3T) + \sum_{k=4}^{\infty} x(kT)z^{-k+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(3T) = z^3 X(z) - z^3 x(0) - z^2 x(T) - zx(2T) - \sum_{k=4}^{\infty} x(kT)z^{-k+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(3T) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^3 X(z) - z^3 x(0) - z^2 x(T) - zx(2T)]$$

$$(3.323) \quad z^4 X(z) = z^4 x(0) + z^3 x(T) + z^2 x(2T) + zx(3T) + x(4T) + \sum_{k=5}^{\infty} x(kT)z^{-k+4}$$

$$\Rightarrow x(4T) = z^4 X(z) - z^4 x(0) - z^3 x(T) - z^2 x(2T) - zx(3T) - \sum_{k=5}^{\infty} x(kT)z^{-k+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(4T) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^4 X(z) - z^4 x(0) - z^3 x(T) - z^2 x(2T) - zx(3T)]$$

$$(3.324) \quad x(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} [zX(z) - zx(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} zX(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} = 0$$

$$(3.325) \quad x(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$(3.326) \quad x(3) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^3 X(z) - z^3 x(0) - z^2 x(1) - zx(2)] = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^3 X(z) - \frac{1}{2}z] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{z^3(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} - \frac{1}{2}z \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z(z-1)^2} - \frac{1}{2}z \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{(z+1)^2(z^2+1) - z^2(z-1)^2}{2z(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{4z^3 + z^2 + 2z + 1}{2z(z-1)^2} \right] = 2 \\
 (3.327) \quad x(4) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ z^4 X(z) - \frac{1}{2}z^2 - 2z \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2(z-1)^2} - \frac{1}{2}z^2 - 2z \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{(z+1)^2(z^2+1) - z^2(z-1)^2 - 4z(z-1)^2}{2(z-1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{9z^2 - 2z + 1}{2(z-1)^2} \right] = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

на следниот начин:

$$\begin{aligned}
 (3.328) \quad x(k) &= Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{ \frac{z+1}{2z(z-1)} \cdot \frac{(z+1)(z^2+1)}{z^3(z-1)} \right\} = Z^{-1}\left\{ \frac{(z+1)^2(z^2+1)}{2z^4(z-1)^2} \right\} = \\
 &= \begin{cases} 0, & k < 0 \\ x(0), & k = 0 \\ x(1), & k = 1 \\ x(2), & k = 2 \\ x(3), & k = 3 \\ x(4), & k = 4 \\ \operatorname{Re}_{z=1} \frac{(z+1)^2(z^2+1)z^{k-5}}{2(z-1)^2}, & k \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k < 2 \\ \frac{1}{2}, & k = 2 \\ 2, & k = 3 \\ \frac{9}{2}, & k = 4 \\ 4k - 12, & k \geq 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Задача 3.30.** За затворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 3.55 да се определи вредноста на параметарот  $a$  на дискретниот регулатор

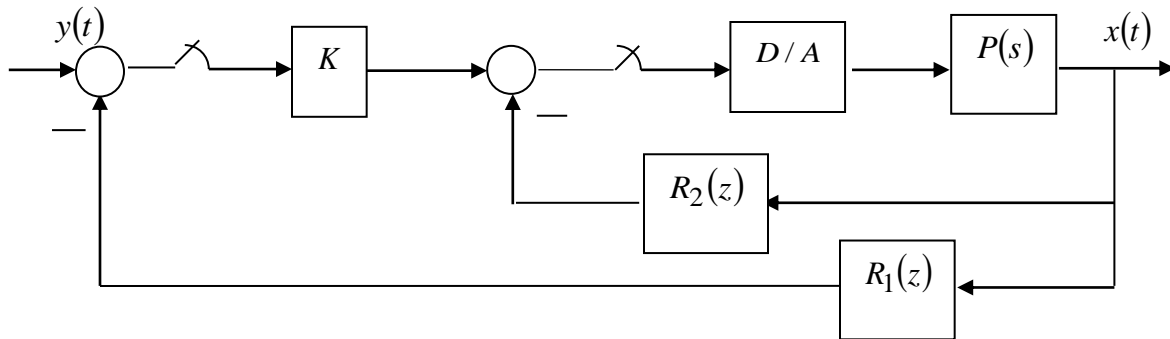
$R_2(z) = \frac{z}{z-a}$ , така што соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем да има астатизам од втор ред ако затворениот систем има нула во точката  $z = 2$

и двократен пол во точката  $z = 1/2$ , D/A претворувачот од шемата вклучува форматор од нулти ред, објектот на управување претставува аperiодичен елемент од прв ред со

преносна функција  $P(s) = \frac{1}{T_p s + 1}$ ,  $K = 2$  и  $T = T_p \ln 2$ . Потоа да се определат

константите  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$  и врз нивна основа да се оцени поведението на затворениот систем во стационарен режим за константна (отскочна), линеарна и квадратна влезна возбуда од облик:

а)  $y(t) = h(t)$ , б)  $y(t) = th(t)$ , в)  $y(t) = \frac{t^2}{2}h(t)$ .



Слика 3.55. Илустрација кон Задача 3.30

**Решение:** Дискретната преносна функција  $P(z)$  на континуалниот објект  $P(s)$ , земајќи го предвид и присуството на форматор од нулти ред на неговиот влез, е:

$$\begin{aligned}
 (3.329) \quad P(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} P(s) \right\} = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{T_p s + 1} \right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{T_p s \left( s + \frac{1}{T_p} \right)} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T_p}} \right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{T_p}}} \right\} = 1 - \frac{z-1}{z - e^{-\ln 2}} = \\
 &= 1 - \frac{z-1}{z - e^{-\ln 2}} = 1 - \frac{z-1}{z - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2z-1}, \quad |z| > \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

додека:

$$(3.330) \quad G_0(z) = R_1(z) \frac{KP(z)}{1 + R_2(z)P(z)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= KR_1(z) \frac{\frac{1}{2z-1}}{1 + \frac{1}{2z-1} \cdot \frac{z}{z-a}} = KR_1(z) \frac{z-a}{(2z-1)(z-a) + z} = \\
 &= KR_1(z) \frac{z-a}{2z^2 - z - 2az + a + z} = KR_1(z) \frac{z-a}{2z^2 - 2az + a}
 \end{aligned}$$

е дискретната преносна функција на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем. Од условот на задачата отворениот систем да има астатизам од втор ред произлегува дека неговиот карактеристичен полином  $a_0(z)$  треба да биде од облик:

$$(3.331) \quad a_0(z) = 2z^2 - 2az + a = 2(z-1)^2 = 2z^2 - 4z + 2$$

Оттука непосредно следува бараната вредност на параметарот  $a$  на дискретниот регулатор  $R_2(z)$ :

$$(3.332) \quad a = 2$$

$$(3.333) \quad R_2(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{z}{z-2}, |z| > 2$$

$$(3.334) \quad G_0(z) = K \frac{(z-2)R_1(z)}{2(z-1)^2}$$

Дискретната преносна функција  $R_1(z)$  се определува од изразот за дискретната преносна функција на затворениот систем од сл. 3.55 која, според условот од задачата има облик:

$$(3.335) \quad G(z) = \frac{z-2}{(z-1/2)^2}, |z| > \frac{1}{2}$$

Следствено, со решавање на еднаквоста:

$$\begin{aligned}
 (3.336) \quad G(z) &= \frac{K \frac{P(z)}{1 + P(z)R_2(z)}}{1 + K \frac{P(z)}{1 + P(z)R_2(z)} R_1(z)} = \\
 &= \frac{KP(z)}{1 + P(z)R_2(z) + KP(z)R_1(z)} = \frac{z-2}{(z-1/2)^2} \\
 &= \frac{K \frac{1}{2z-1}}{1 + \frac{1}{2z-1} \cdot \frac{z}{z-2} + K \frac{1}{2z-1} R_1(z)} = \frac{z-2}{(z-1/2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{K(z-2)}{(z-2)(2z-1)+z+K(z-2)R_1(z)} = \frac{z-2}{(z-1/2)^2}$$

$$\frac{K}{(z-2)(2z-1)+z+K(z-2)R_1(z)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\frac{K}{2(z-1)^2 + K(z-2)R_1(z)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{(z-1)^2 + 2(z-2)R_1(z)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - (z-1)^2 = 2(z-2)R_1(z)$$

$$\left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right) - z^2 + 2z - 1 = 2(z-2)R_1(z)$$

за  $R_1(z)$  се добива:

$$(3.337) \quad R_1(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z - \frac{3}{4}}{z - 2}, \quad |z| > 2$$

Бараните константи  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$  се:

$$(3.338) \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - \frac{3}{4}}{2(z-1)^2} = \infty$$

$$(3.339) \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - \frac{3}{4}}{2(z-1)} = \infty$$

$$(3.340) \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_0(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} \left(z - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

од чии вредности може да се заклучи дека набљудуваниот затворен систем идеално следи константна влезна возбуда и влезна возбуда со константна брзина на промена, додека квадратната влезната возбуда ја следи со одредено константно отстапување пропорционално на  $K_a^{-1}$ .

## 4. СТАБИЛНОСТ НА ЛИНЕАРНИ ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ

Еден линеарен стационарен дискретен динамички систем е **стабилен**, доколку на ограничен по амплитуда влез одговара со ограничен по амплитуда излез. Математичката интерпретација на стабилноста кај овие системи е следната: набљудуваниот линеарен стационарен дискретен динамички систем е стабилен, доколку сите негови полови лежат во внатрешноста на единичниот круг во  $z$ -комплексната рамнина  $|z| \leq 1$ , односно доколку нивниот модул е помал од единица. Дискретниот систем што не е стабилен, може да биде нестабилен или на границата на стабилност. Еден линеарен стационарен дискретен динамички систем е **нестабилан**, доколку има барем еден пол надвор од единичниот круг  $|z| \leq 1$ . Системот е нестабилен и ако има кратни полови на кружницата  $|z| = 1$ , иако нема полови надвор од единичниот круг  $|z| \leq 1$ . Доколку набљудуваниот дискретен систем има само прости (еднократни) полови на кружницата  $|z| = 1$ , и нема полови надвор од единичниот круг  $|z| \leq 1$ , тој се наоѓа на тн. **граница на стабилност**.

Најдиректен начин да се испита стабилноста на еден дискретен систем од набљудуваната класа системи, е да се определат неговите полови и да се одреди нивната положба во  $z$ -комплексната рамнина. Меѓутоа, тоа не е така едноставна задача, посебно кога се работи за системи од повисок ред, зошто претпоставува решавање алгебарски равенки од произволен степен  $n$ . Оттаму, развиени се критериуми и постапки за иследување на стабилноста на линеарните дискретни системи, кои се засниваат врз особините на коефициентите на нивните карактеристични полиноми. Имено, нулите на карактеристичниот полином на еден дискретен систем се полови на преносната функција на системот, односно полови на самиот систем. Кога системот е стабилен, сите негови полови лежат во внатрешноста од единичниот круг  $|z| \leq 1$ , па, следствено, нулите на неговиот карактеристичен полином сите ќе имаат модул помал од единица. Ваквиот полином се нарекува **Хурвицов  $z$ -полином**. Математичката интерпретација на стабилноста кај линеарните дискретни системи може да се искаже и на следниот начин: еден линеарен стационарен дискретен динамички систем е стабилен, доколку неговиот карактеристичен полином е Хурвицов  $z$ -полином.

Карактеристичниот полином на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем е од следниот општ облик:

$$(4.1) \quad a(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Тој ќе биде Хурвицов  $z$ -полином, доколку задоволува одредени потребни и доволни услови. Едновремено, тоа се нужни и доволни услови за стабилност на самиот дискретен систем. Притоа, нужните услови за стабилност гласат:

$$(4.2) \quad |a_i| < \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Меѓутоа, условот (4.2) е само неопходен услов за стабилност, што значи дека еден дискретен систем кој не го задоволува условот (4.2) сигурно нема да биде стабилен, додека систем што го задоволува може, но не мора да биде стабилен. За да со сигурност се констатира дека еден систем, кој го задоволува нужниот услов (4.2) е стабилен, потребно е да се проверат и доволните услови за стабилност според некој од познатите критериуми за стабилност на линеарните дискретни системи.

**Критериумот на I.E.Jury** претставува алгебарски критериум за иследување на стабилноста кај линеарните дискретни системи. Проверката на стабилноста според овој критериум се врши со помош на долната Таблица 4.1, која ја претставува редукцијата на карактеристичниот полином на испитуваниот дискретен систем (4.1) за  $a_0 > 0$ .

**Таблица 4.1. Таблица за испитување на стабилноста на еден дискретен систем според критериумот на I.E.Jury**

1	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-3}$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
2	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	...	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
3	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{n-3}$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
4	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	...	$b_2$	$b_1$	$b_0$	
5	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...	$c_{n-3}$	$c_{n-2}$		
6	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	...	$c_1$	$c_0$		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$2n-3$	$s_0$	$s_1$	$s_2$						

$$(4.3) \quad b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$(4.4) \quad c_j = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-j-1} \\ b_{n-1} & b_j \end{vmatrix}; \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

Редиците во Таблица 4.1 се составуваат во парови, при што елементите на секоја парна редица се елементите од претходната непарна редица, но во обратен редослед. Во првата непарна редица, пак, се сместуваат коефициентите на карактеристичниот полином (4.1) на испитуваниот дискретен систем, по опаѓачки редослед на степенот од комплексната променлива  $z$ , додека елементите од останатите непарни редици се пресметуваат како детерминанти од елементите на соодветната претходна непарна и парна редица по колони, како што е покажано со изразите (4.3) и (4.4). Редукцијата се врши сè додека не се добие полином со три коефициенти  $s_0$ ,  $s_1$  и  $s_2$ . Тогаш, еден линеарен стационарен



дискретен динамички систем ќе биде стабилен според критериумот на I.E.Jury, односно неговиот карактеристичен полином ќе биде Хурвицов  $z$ -полином, доколку едновременно се исполнети условите:

$$(4.5) \quad a(1) > 0 \\ (-1)^n a(-1) > 0$$

$$(4.6) \quad |a_0| > |a_n| \\ |b_0| > |b_{n-1}| \\ |c_0| > |c_{n-2}| \\ \vdots \\ |s_0| > |s_2|$$

**Критериумот на Михаилов** е графо-аналитички критериум за испитување на стабилноста на линеарните стационарни дискретни системи. Во основа, тој претставува геометриска интерпретација на познатиот принцип на аргументот, кој е општ и важи како во  $s$ -комплексната рамнина, така и во  $z$ -комплексната рамнина. Оттаму, критериумот на Михаилов може да се користи и кај континуалните и кај дискретните системи. За таа цел се поаѓа од карактеристичниот полином (4.1) и со воведување на смената  $z = e^{j\omega T_0}$  се определува тн. **карактеристичен вектор** или **векторот на Михаилов** за испитуваниот дискретен систем:

$$(4.7) \quad a(e^{j\omega T_0}) = a_0 e^{jn\omega T_0} + a_1 e^{j(n-1)\omega T_0} + a_2 e^{j(n-2)\omega T_0} + \dots + a_{n-1} e^{j\omega T_0} + a_n = \\ = a_0 \cos(n\omega T_0) + a_1 \cos[(n-1)\omega T_0] + a_2 \cos[(n-2)\omega T_0] + \dots + a_{n-1} \cos(\omega T_0) + a_n + \\ + j\{a_0 \sin(n\omega T_0) + a_1 \sin[(n-1)\omega T_0] + a_2 \sin[(n-2)\omega T_0] + \dots + a_{n-1} \sin(\omega T_0)\}$$

Ходографот на овој вектор е геометриско место на точки што ги опишува врвот на векторот на Михаилов кога се врти во комплексната рамнина околу својот почеток, при измена на фреквенцијата  $\omega$  во интервалот  $\left(0, \frac{\omega_0}{2}\right)$ , каде што  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Тоа се нарекува

**карактеристична крива** или **крива на Михаилов** за набљудуваниот дискретен систем. Карактеристичната крива на еден стабилен дискретен систем ги има следните својства:

- започнува во конечна точка на позитивниот дел од реалната оска
- се одвива во позитивна насока
- наизменично ги сече координатните оски од комплексната рамнина во која е претставена
- во ниен момент не минува низ координатниот почеток
- завршува во конечна точка на негативниот дел од реалната оска за систем од непарен ред, односно во конечна точка на позитивниот дел од реалната оска за систем од парен ред

Овие особини на карактеристичната крива на еден стабилен дискретен систем се опишани во следниот тн. **изворен критериум на Михаилов**:

1. Системот треба да ги исполнува нужните услови за стабилност
2. Модулот на карактеристичниот вектор не смее да биде еднаков на нула за ниедна вредност на фреквенцијата  $\omega$  од интервалот  $\left(0, \frac{\omega_0}{2}\right)$ :

$$(4.8) \quad |a(j\omega)| \neq 0 \vee \omega \in \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right)$$

3. Аргументот на карактеристичниот вектор мора монотонно да расте во позитивна насока од 0 до вредноста  $n\pi$ , каде што  $n$  е редот на испитуваниот дискретен систем:

$$(4.9) \quad \Delta_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}} \arg[a(j\omega)] = n\pi$$

**Модифицираниот критериум на Михаилов** гласи:

1. Карактеристичната крива на испитуваниот дискретен систем мора да започнува во конечна точка на позитивниот дел од реалната оска и да завршува во конечна точка на негативниот дел од реалната оска за систем од непарен ред, односно во конечна точка на позитивниот дел од реалната оска за систем од парен ред

$$(4.10) \quad a(j0) > 0, \begin{cases} a\left(j\frac{\omega_0}{2}\right) < 0, & n \text{ непарно} \\ a\left(j\frac{\omega_0}{2}\right) > 0, & n \text{ парно} \end{cases}$$

2. Истата мора да се одвива во позитивна насока

$$(4.11) \quad \left[ \frac{dv(j\omega)}{d\omega} \right]_0 > 0$$

3. Карактеристичната крива мора наизменично да ги сече координатните оски од комплексната рамнина во која е претставена

$$(4.12) \quad 0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \frac{\omega_0}{2}$$

каде што  $\omega_{2k}$  и  $\omega_{2k+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) се решенија на следниот систем равенки:

$$(4.13) \quad v(\omega) = \text{Im}[a(j\omega)] = 0$$

$$(4.14) \quad u(\omega) = \text{Re}[a(j\omega)] = 0$$

**Критериумот на Најквист** за испитување на стабилноста на линеарните стационарни дискретни динамички системи овозможува стабилноста на еден затворен дискретен систем со единична повратна врска да се одреди преку особините на фреквентната карактеристика на соодветниот отворен систем, која уште се нарекува **Најквистова крива**. За таа цел се исцртува фреквентната карактеристика на отворениот систем за набљудуваниот затворен систем и, доколку отворениот систем има астатизам од некој ред  $q$ , таа се дополнува со соодветниот лак на астатизам. Овој лак почнува на позитивниот дел од реалната оска доколку  $B(1)C(1) > 0$ , односно на негативниот дел од реалната оска доколку  $B(1)C(1) < 0$ , завршува на фреквентната карактеристика од отворениот систем, има бесконечно голем радиус и му одговара централен агол од  $-q \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ . Притоа,  $B(z)$  е броителот, а  $C(z)$  е именителот на преносната функција од отворениот систем со ред на астатизам  $q$ :

$$(4.15) \quad G_0(z) = \frac{B(z)}{(z-1)^q C(z)}; \quad q = 1, 2, \dots$$

Тогаш, набљудуваниот затворен дискретен систем ќе биде стабилен, доколку е исполнет условот:

$$(4.16) \quad \Delta_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}} \arg[F(j\omega)] = p_0 \pi$$

каде што:

$$(4.17) \quad F(j\omega) = 1 + G_0(j\omega)$$

а  $p_0$  е бројот полови на отворениот систем со модул поголем од единица.

Сите познати критериуми за испитување на стабилноста на линеарните стационарни континуални динамички системи можат да се применат за испитување на стабилноста на линеарните стационарни дискретни динамички системи, ако се примени тн. **билинеарна трансформација**:

$$(4.18) \quad z = \frac{s+1}{s-1}$$

Со помош на оваа трансформација се врши пресликување од  $z$  во  $s$  — комплексната рамнина:

$$(4.19) \quad a(z) = a\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \frac{b(s)}{(s-1)^n}$$

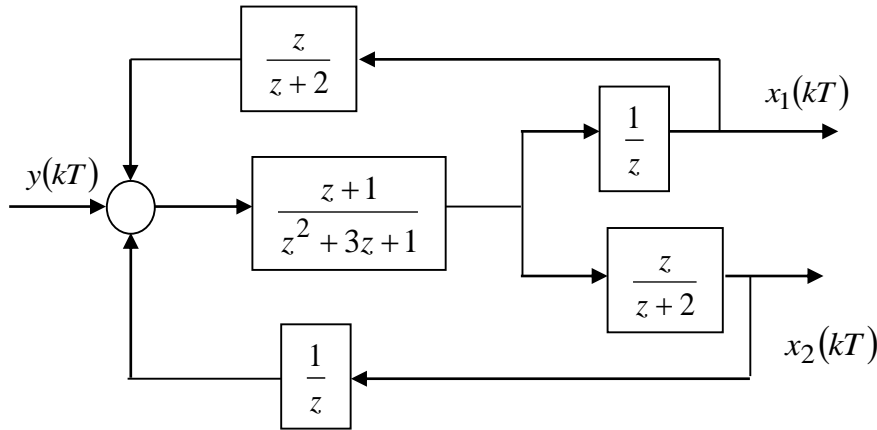
па, наместо полиномот  $a(z)$ , се испитува полиномот  $b(s)$ . Тогаш, набљудуваниот дискретен систем ќе биде стабилен, доколку полиномот  $b(s)$  е Хурвицов  $s$ -полином, односно сите негови нули имаат негативен реален дел. Имено, ако  $a(z)$  е Хурвицов  $z$ -полином, тогаш  $b(s)$  сигурно ќе биде Хурвицов  $s$ -полином и обратно. Наместо билинеарната трансформација (4.18), може да се користи и билинеарната трансформација:

$$(4.20) \quad z = \frac{1+s}{1-s}$$

Кога сите параметри на испитуваниот дискретен систем се определени и познати, со секој од дадените критериуми може да се одговори на прашањето дали тој систем е стабилен или не. Меѓутоа, кога барем еден од параметрите на испитуваниот дискретен систем е непознат или променлив, споменатите критериуми овозможуваат да се определи тн. **параметарска област на стабилност** на набљудуваниот дискретен систем. Точките од таа област ги претставуваат можните вредности на неопределените параметри на системот, за кои системот ќе биде стабилен. За вредности на неопределените или променливи параметри на системот надвор од оваа област, системот ќе биде сигурно нестабилен, додека за вредности на границите од параметарската област на стабилност, системот ќе биде на границата на стабилност.



**Задача 4.1.** Да се испита стабилноста на дискретниот систем со еден влез  $y(kT)$  и два излеза  $x_1(kT)$  и  $x_2(kT)$ , чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.1.



Слика 4.1. Структурна блок-шема на системот од Задача 4.1

**Решение:** Нека:

$$(4.21) \quad G_1(z) = \frac{1}{z}$$

$$(4.22) \quad G_2(z) = \frac{z}{z+2}$$

$$(4.23) \quad G_3(z) = \frac{z+1}{z^2+3z+1}$$

Тогаш:

$$(4.24) \quad X_1(z) = G_1(z)G_3(z)[Y(z) + G_2(z)X_1(z) + G_1(z)X_2(z)]$$

$$X_2(z) = G_2(z)G_3(z)[Y(z) + G_2(z)X_1(z) + G_1(z)X_2(z)]$$

$$(4.25) \quad [1 - G_1(z)G_2(z)G_3(z)]X_1(z) - G_1^2(z)G_3(z)X_2(z) = G_1(z)G_3(z)Y(z) \\ - G_2^2(z)G_3(z)X_1(z) + [1 - G_1(z)G_2(z)G_3(z)]X_2(z) = G_2(z)G_3(z)Y(z)$$

Карактеристичниот полином  $a(z)$  на дискретниот систем од Слика 4.1 претставува броител на дробно-рационалниот израз:

$$(4.26) \quad D = \begin{vmatrix} 1 - G_1(z)G_2(z)G_3(z) & -G_1^2(z)G_3(z) \\ -G_2^2(z)G_3(z) & 1 - G_1(z)G_2(z)G_3(z) \end{vmatrix} = \\ = [1 - G_1(z)G_2(z)G_3(z)]^2 - G_1^2(z)G_2^2(z)G_3^3(z) = \\ = 1 - 2G_1(z)G_2(z)G_3(z) = \\ = 1 - 2 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+2} \cdot \frac{z+1}{z^2+3z+1} =$$

$$= \frac{z^3 + 5z^2 + 5z}{(z+2)(z^2 + 3z + 1)} = \frac{a(z)}{b(z)}$$

и лесно може да се утврди дека тој не претставува Хурвицов  $z$  – полином. Имено:

$$(4.27) \quad a(z) = z^3 + 5z^2 + 5z = z(z^2 + 5z + 5) = z\tilde{a}(z)$$

а полиномот:

$$(4.28) \quad \tilde{a}(z) = z^2 + 5z + 5 = a_0z^2 + a_1z + a_2 = a_0(z - z_1)(z - z_2)$$

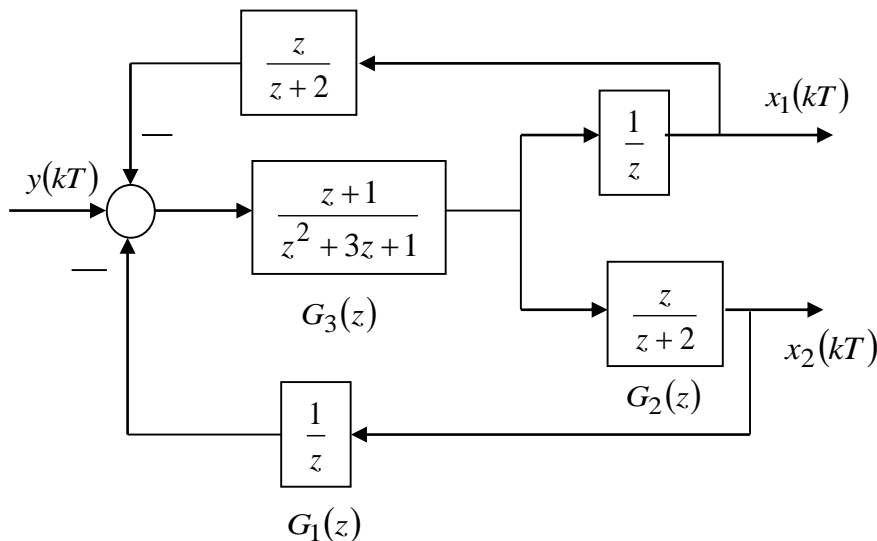
не го задоволува ни нужниот услов  $|a_2| < |a_0|$  за да биде Хурвицов  $z$  – полином. Оттука, набљудуваниот дискретен систем од Слика 4.1 сигурно не е стабилен. Навистина, ако се одредат неговите полови, кои претставуваат нули на полиномот  $a(z)$

$$(4.29) \quad z_0 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

се заклучува дека половите  $z_1$  и  $z_2$  не лежат во внатрешноста од единичниот круг  $|z| \leq 1$  во  $z$  – комплексната рамнина, што е потребен и доволен услов системот од Слика 4.1 да биде стабилен.

**Задача 4.2.** Да се испита стабилноста на дискретниот систем со еден влез  $y(kT)$  и два излеза  $x_1(kT)$  и  $x_2(kT)$ , чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.2.



Слика 4.2. Структурна блок-шема на системот од Задача 4.2

**Решение:** Од структурната блок-шема на Слика 4.2 непосредно произлегува:

$$(4.30) \quad \begin{aligned} X_1(z) &= G_1(z)G_3(z)[Y(z) - G_2(z)X_1(z) - G_1(z)X_2(z)] \\ X_2(z) &= G_2(z)G_3(z)[Y(z) - G_2(z)X_1(z) - G_1(z)X_2(z)] \end{aligned}$$

а оттука, со мало средовање, се добива следниот систем од две равенки по непознатите  $X_1(z)$  и  $X_2(z)$ :

$$(4.31) \quad \begin{aligned} [1 + G_1(z)G_2(z)G_3(z)]X_1(z) + G_1^2(z)G_3(z)X_2(z) &= G_1(z)G_3(z)Y(z) \\ G_2^2(z)G_3(z)X_1(z) + [1 + G_1(z)G_2(z)G_3(z)]X_2(z) &= G_2(z)G_3(z)Y(z) \end{aligned}$$

Карактеристичниот полином  $a(z)$  на дискретниот систем од Слика 4.2 претставува броител на дробно-рационалниот израз:

$$(4.32) \quad \begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 + G_1(z)G_2(z)G_3(z) & G_1^2(z)G_3(z) \\ G_2^2(z)G_3(z) & 1 + G_1(z)G_2(z)G_3(z) \end{vmatrix} = \\ &= [1 + G_1(z)G_2(z)G_3(z)]^2 - G_1^2(z)G_2^2(z)G_3^3(z) = \\ &= 1 + 2G_1(z)G_2(z)G_3(z) = \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+2} \cdot \frac{z+1}{z^2+3z+1} = \\ &= \frac{z^3+5z^2+9z+4}{(z+2)(z^2+3z+1)} = \frac{a(z)}{b(z)} = \frac{a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3}{b_0z^3+b_1z^2+b_2z+b_3} \end{aligned}$$

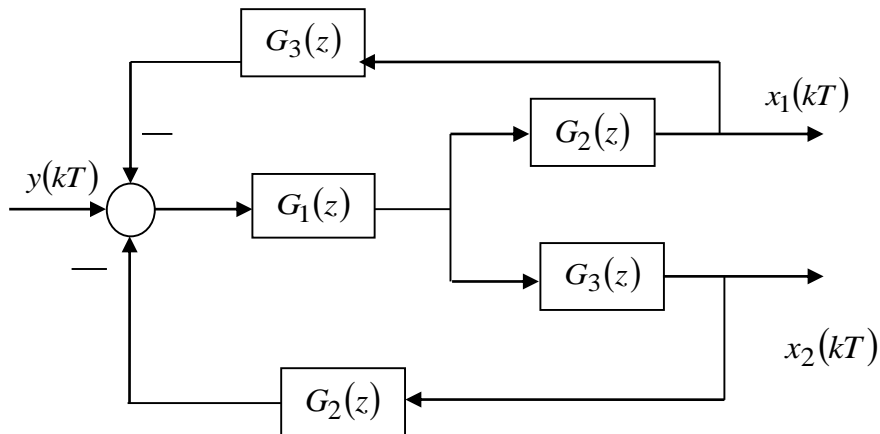
Оттука, со проверка, лесно може да се заклучи дека набљудуваниот систем од Слика 4.2 не ги задоволува ни нужните услови за стабилност. Имено, слободниот член  $a_3$  на полиномот  $a(z)$  е поголем од коефициентот  $a_0$  пред највисокиот степен на комплексната променлива  $z$ :

$$(4.33) \quad |4| = |a_3| > |a_0| = |1|$$

па, следствено, набљудуваниот дискретен систем сигурно не е стабилен.

**Задача 4.3.** Даден е дискретниот систем од Слика 4.3. Со помош на критериумот на Jury да се испита стабилноста на овој систем, ако:

$$(4.34) \quad G_1(z)G_2(z)G_3(z) = \frac{0.5}{z-2} \cdot \frac{2z-1}{z} \cdot \frac{z-1}{12z^2-7z+1}$$



Слика 4.3. Структурна блок-шема на системот од задачата 4.3

**Решение:** Карактеристичниот полином на набљудуваниот систем е броител во долниот дробно-рационален израз:

$$\begin{aligned}
 (4.35) \quad \frac{a(z)}{b(z)} &= 1 + 2G_1(z)G_2(z)G_3(z) = \\
 &= 1 + 2 \cdot \frac{0.5}{z-1} \cdot \frac{2z-1}{z} \cdot \frac{1}{12z^2-7z+1} = \\
 &= \frac{12z^4 - 19z^3 + 8z^2 + z - 1}{z(z-1)(12z^2-7z+1)} = \frac{a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4}{b_0z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3}
 \end{aligned}$$

Неговата проверка според критериумот на Југу е прикажана во Таблица 4.2.

**Таблица 4.2. Проверка на стабилноста на системот од Слика 4.3 според критериумот на Југу**

1	12	-19	8	1	-1
2	-1	1	8	-19	12
3	143	-227	104	-7	
4	-7	104	-227	143	
5	20400	.....	13283		

Со оглед на тоа дека се исполнети сите потребни и доволни услови, може да се заклучи дека набљудуваниот систем е стабилен:

$$(4.36) \quad a(1) = 12 - 19 + 8 + 1 - 1 = 1 > 0$$

$$(4.37) \quad (-1)^4 a(-1) = 12 + 19 + 8 - 1 - 1 = 37 > 0$$



(4.38)  $|12| > |-1|$

(4.39)  $|143| > |-7|$

(4.40)  $|20400| > |13283|$

**Задача 4.4.** Да се определи дискретната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на затворениот систем од Слика 4.4 и, потоа, со помош на критериумот на Јуру за иследување на стабилноста на линеарните дискретни системи, да се испита неговата стабилност ако:

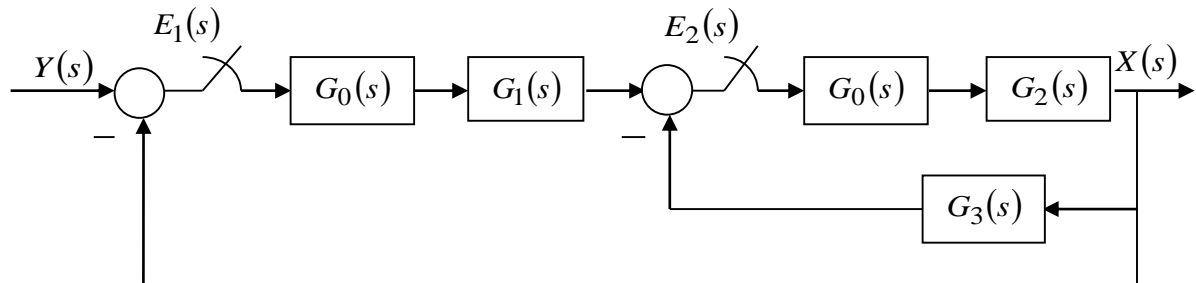
(4.41)  $G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$

(4.42)  $G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

(4.43)  $G_2(s) = \frac{2}{s+2}$

(4.44)  $G_3(s) = \frac{10}{s+10}$

(Упатство: да се усвои дека  $e^{-1} \approx 0.3$ ,  $e^{-2} \approx 0.1$ ,  $e^{-10} \approx 0$  и  $T = 1s$ .)



Слика 4.4. Илустрација кон Задача 4.4

**Решение:** Со помош на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, од горната блок-шема непосредно следува дека бараната дискретна преносна функција на зададениот затворен систем е од облик:

(4.45) 
$$G(z) = \frac{G_0 G_1(z) G_0 G_2(z)}{1 + G_0 G_1(z) G_0 G_2(z) + G_0 G_2 G_3(z)}$$

каде што  $G_0 G_1(z)$ ,  $G_0 G_2(z)$  и  $G_0 G_2 G_3(z)$  се следните дискретни преносни функции:

$$\begin{aligned}
 (4.46) \quad G_0G_1(z) &= Z\left\{L^{-1}[G_0(s)G_1(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s^2(s+1)}\right]\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right]\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-1}}\right] = \\
 &= \frac{1}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-0.3} = \frac{0.3z+0.4}{(z-1)(z-0.3)}; \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.47) \quad G_0G_2(z) &= Z\left\{L^{-1}[G_0(s)G_2(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[2\frac{1-e^{-sT}}{s(s+2)}\right]\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{2}{s(s+2)}\right]\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right]\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2}}\right] = 1 - \frac{z-1}{z-0.1} = \frac{0.9}{z-0.1}; \quad |z| > 0.1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.48) \quad G_0G_2G_3(z) &= Z\left\{L^{-1}[G_0(s)G_2(s)G_3(s)]\right\} = \\
 &= Z\left\{L^{-1}\left[\frac{20(1-e^{-sT})}{s(s+2)(s+10)}\right]\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{20}{s(s+2)(s+10)}\right]\right\} = \\
 &= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1.25}{s+2} + \frac{0.25}{s+10}\right]\right\} = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{1.25z}{z-e^{-2}} + \frac{0.25z}{z-e^{-10}}\right] = \\
 &= 1 - 1.25\frac{z-1}{z-0.1} + 0.25\frac{z-1}{z} = \frac{0.875z+0.025}{z(z-0.1)}; \quad |z| > 0.1
 \end{aligned}$$

Тогаш, со воведување на изразите (4.46), (4.47) и (4.48) во (4.45), за дискретната преносна функција  $G(z)$  се добива следниот конкретен израз:

$$(4.49) \quad G(z) = \frac{z(0.27z+0.36)}{z^4 - 0.525z^3 - 0.4125z^2 + 0.56z + 0.0075}$$

чиј именител претставува карактеристичен полином на набљудуваниот дискретен систем:

$$(4.50) \quad a(z) = z^4 - 0.525z^3 + 0.375z^2 + 0.34625z + 0.0075$$

Полиномот (4.50) ги исполнува неопходните услови да биде Хурвицов  $z$ -полином:

$$(4.51) \quad \begin{aligned} |-0.525| &= |a_1| \langle n = 4 \\ |-0.4125| &= |a_2| \langle \frac{n(n-1)}{2} = 6 \\ |0.56| &= |a_3| \langle n = 4 \\ |0.0075| &= |a_4| \langle 1 \end{aligned}$$

па, може да се проследи со постапката за испитување на доволните услови за стабилност на системот (4.49). За таа цел, во согласност со постапката на Јуру, се формира Таблицата 4.3 од каде, со проверка, лесно се заклучува дека системот (4.49) е стабилен, зошто ги исполнува сите потребни и доволни услови за стабилност според критериумот на Јуру:

$$(4.52) \quad \begin{aligned} a(1) &= 1.197 > 0 \\ (-1)^4 a(-1) &= 1.5545 > 0 \\ |1| = |a_0| &> |a_4| = |0.0075| \\ |1| = |b_0| &> |b_3| = |0.3466| \\ |1| = |c_0| &> |c_2| = |0.5568| \end{aligned}$$

**Таблица 4.3. Таблица за проверка на стабилноста на дискретниот систем (4.49) според критериумот на Јуру**

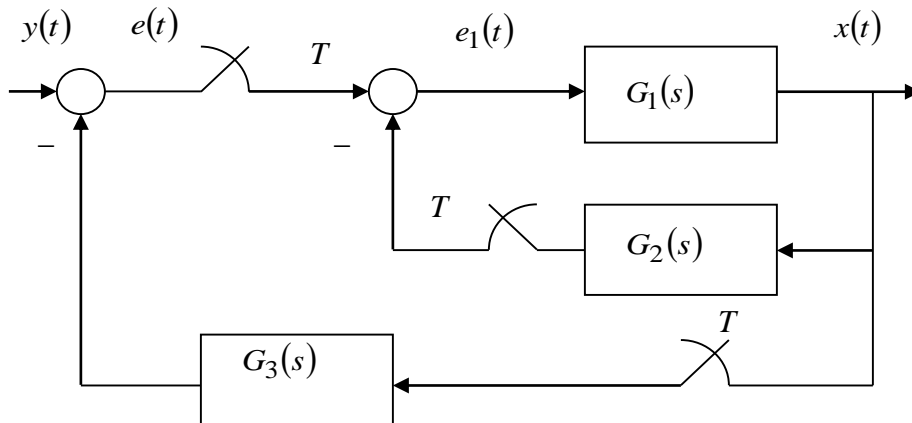
1	$1(= a_0)$	$-0.525(= a_1)$	$0.375(= a_2)$	$0.34625(= a_3)$	$0.00075(= a_4)$
2	0.00075	0.34625	0.375	-0.525	1
3	$1(= b_0)$	$-0.5253(= b_1)$	$0.3747(= b_2)$	$0.3466(= b_3)$	
4	0.3466	0.3747	-0.5253	1	
5	$0.8799(= c_0)$	$-0.6552(= c_1)$	$0.5568(= c_2)$		

**Задача 4.5.** Со помош на критериумот на Јуру да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем од долната слика, ако  $T = 1s$ . и:

$$(4.53) \quad G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$(4.54) \quad G_2(s) = \frac{\ln 2}{s + \ln 2}, \quad \operatorname{Re} s > -\ln 2$$

$$(4.55) \quad G_3(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$



Слика 4.5. Илустрација кон Задача 4.5

**Решение:** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, за дискретната преносна функција

$G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на набљудуваниот затворен систем од Слика 4.5 се добива:

$$\begin{aligned}
 (4.56) \quad G(z) &= \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}}{1+\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}G_3(z)} = \frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)+G_1(z)G_3(z)} = \\
 &= \frac{z(z-1)^2(2z-1)}{(z-1)^3(2z-1)+z^2(2z-1)+z(z-1)^2} = \frac{2z^4-5z^3+4z^2-z}{2z^4-4z^3+6z^2-4z+1}
 \end{aligned}$$

Притоа:

$$(4.57) \quad G_1(z) = Z\{G_1(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(4.58) \quad G_3(z) = Z\{G_3(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1$$

$$\begin{aligned}
 (4.59) \quad G_1G_2(z) &= Z\{G_1(s)G_2(s)\} = Z\left\{\frac{\ln 2}{s(s+\ln 2)}\right\} = \\
 &= Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\ln 2}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} = \frac{z}{(z-1)(2z-1)}, \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

Со проверка според критериумот на Jury, се покажува дека карактеристичниот полином  $a(z)$ :

$$(4.60) \quad a(z) = 2z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1$$

на набљудуваниот затворен дискретен систем од Слика 4.5 не е Хурвицов  $z$  – полином:

$$(4.61) \quad \begin{aligned} a(1) &= 2 - 4 + 6 - 4 + 1 = 1 > 0 \\ (-1)^4 a(-1) &= 2 + 4 + 6 + 4 + 1 = 17 > 0 \\ |2| &> |1| \\ |b_0| &= |3| < |-4| = |b_3| \\ |c_0| &= |-7| > |2| = |c_2| \end{aligned}$$

бидејќи не е исполнет условот:

$$(4.62) \quad |b_0| > |b_3|$$

**Таблица 4.4. Проверка на стабилноста на системот од Слика 4.5 според Jury**

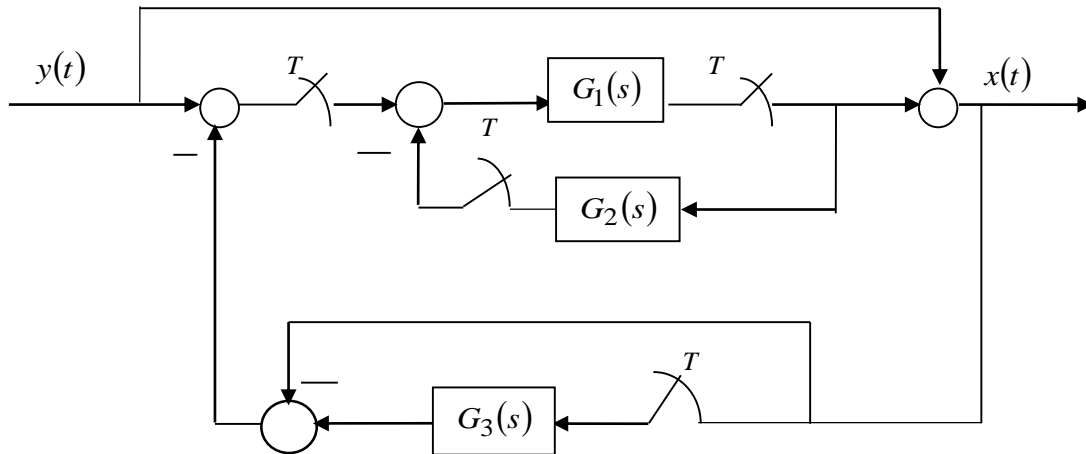
1	2	-4	6	-4	1
2	1	-4	6	-4	2
3	3	-4	6	-4	
4	-4	6	-4	3	
5	-7	12	2		

**Задача 4.6.** Со помош на критериумот на I.E. Jury да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем од Слика 4.6, ако:

$$(4.63) \quad G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$(4.64) \quad G_2(s) = \frac{1}{s + \ln 2}, \quad \operatorname{Re} s > \ln \frac{1}{2}$$

$$(4.65) \quad G_3(s) = \frac{1}{s + \ln 4}, \quad \operatorname{Re} s > \ln \frac{1}{4}$$



Слика 4.6. Илустрација кон Задача 4.6

**Решение:** Дискретната преносна функција на затворениот систем од Слика 4.6 е (да се види Задача 3.4):

$$\begin{aligned}
 (4.66) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} &= \frac{1 + \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}}{1 + \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)} [1 + G_3(z)]} = \\
 &= \frac{1 + G_1(z) + G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z) + G_1(z)G_2(z) + G_1(z)G_3(z)}
 \end{aligned}$$

Ако во (4.66) се воведат конкретните изрази за дискретните преносни функции  $G_1(z) = Z\{G_1(s)\}$ ,  $G_2(z) = Z\{G_2(s)\}$  и  $G_3(z) = Z\{G_3(s)\}$ :

$$(4.67) \quad G_1(z) = Z\{G_1(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(4.68) \quad G_2(z) = Z\{G_2(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 2}\right\} = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t h(t)\right\} = \frac{2z}{2z-1}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(4.69) \quad G_3(z) = Z\{G_3(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 4}\right\} = Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^t h(t)\right\} = \frac{4z}{4z-1}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

за карактеристичниот полином  $a(z)$  ќе се добие:

$$\begin{aligned}
 (4.70) \quad \frac{a(z)}{A(z)} &= 1 + G_1(z) + G_1(z)G_2(z) + G_1(z)G_3(z) = \\
 &= 1 + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-1} \cdot \frac{2z}{2z-1} + \frac{z}{z-1} \cdot \frac{4z}{4z-1} = \\
 &= \frac{(z-1)(2z-1)(4z-1) + z(2z-1)(4z-1) + z^2(4z-1) + z^2(2z-1)}{(z-1)(2z-1)(4z-1)} = \\
 &= \frac{32z^3 - 26z^2 + 8z - 1}{(z-1)(2z-1)(4z-1)} \Rightarrow a(z) = 32z^3 - 26z^2 + 8z - 1
 \end{aligned}$$

Со проверка според критериумот на И.Е. Југу, се заклучува дека полиномот (4.71) е Хурвицов  $z$ -полином, што значи дека набљудуваниот дискретен систем е стабилен.

**Таблица 4.5. Проверка на стабилноста на системот од Слика 4.6 според Југу**

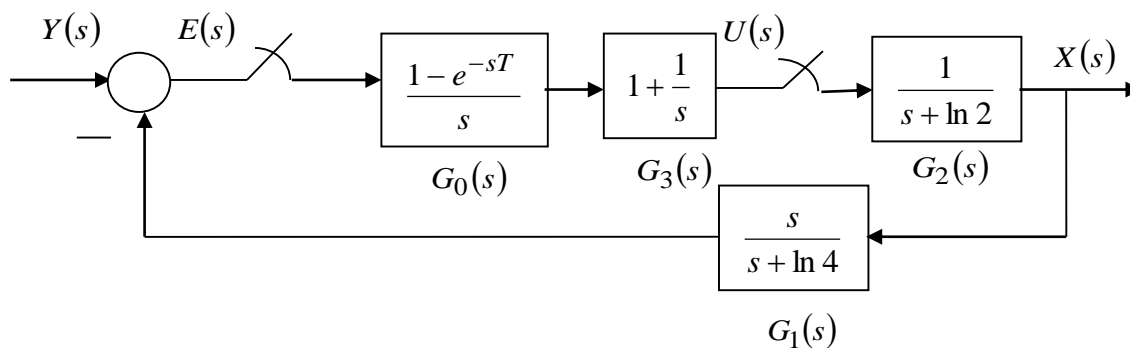
1	32	-26	8	-1
2	-1	8	-26	32
3	1023	-824	230	

$$\begin{aligned}
 (4.71) \quad a(1) &= 32 - 26 + 8 - 1 = 13 > 0 \\
 (-1)^3 a(-1) &= 32 + 26 + 8 + 1 > 0 \\
 |32| &> |-1| \\
 |1023| &> |230|
 \end{aligned}$$

**Задача 4.7.** Со помош на билинеарната трансформација:

$$(4.72) \quad z = \frac{1+s}{1-s}$$

да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем од Слика 4.7.



Слика 4.7. Илустрација кон Задача 4.7

**Решение:** Од блок-шeмата на Слика 4.7 непосредно следуваат релациите:

$$(4.73) \quad X(s) = G_2(s)U^*(s)$$

$$(4.74) \quad U(s) = G_0(s)G_3(s)E^*(s)$$

$$(4.75) \quad E(s) = Y(s) - G_1(s)X(s) = Y(s) - G_1(s)G_2(s)U^*(s)$$

кои во просторот на  $( )^*$  –сликите добиваат облик:

$$(4.76) \quad X^*(s) = G_2^*(s)U^*(s)$$

$$(4.77) \quad U^*(s) = G_0G_3^*(s)E^*(s)$$

$$(4.78) \quad E^*(s) = Y^*(s) - G_1G_2^*(s)U^*(s)$$

Оттука, со решавање на горниот систем равенки по сликите  $E^*(s)$  и  $X^*(s)$  се добива:

$$(4.79) \quad E^*(s) = \frac{1}{1 + G_1G_2^*(s)G_0G_3^*(s)} Y^*(s)$$

$$(4.80) \quad X^*(s) = \frac{G_2^*(s)G_0G_3^*(s)}{1 + G_1G_2^*(s)G_0G_3^*(s)} Y^*(s)$$

а за смената:

$$(4.81) \quad z = e^{sT}$$

изразот (4.80) станува:

$$(4.82) \quad X(z) = \frac{G_2(z)G_0G_3(z)}{1 + G_1G_2(z)G_0G_3(z)} Y(z)$$

каде што:

$$(4.83) \quad G_2(z) = Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s + \ln 2} \right] \right\} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{2z}{2z - 1}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(4.84) \quad G_0G_3(z) = Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{s+1}{s} \right] \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{s+1}{s^2} \right] \right\} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right] \right\} = \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} \right) = \\
&= 1 + \frac{1}{z-1} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.85) \quad G_1 G_2(z) &= Z \left\{ L^{-1} [G_1(s)G_2(s)] \right\} = \\
&= Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{s}{(s + \ln 2)(s + \ln 4)} \right] \right\} = \\
&= Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{2}{s + \ln 4} - \frac{1}{s + \ln 2} \right] \right\} = \\
&= \frac{2z}{z - \frac{1}{4}} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{2z(4z - 3)}{(4z - 1)(2z - 1)}, \quad |z| > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

За конкретните вредности (4.83) - (4.85), карактеристичниот полином  $a(z)$  на набљудуваниот дискретен систем од Слика 4.7, со дискретна преносна функција  $G(z)$ :

$$(4.86) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{G_2(z)G_3(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)G_3(z)}$$

е полиномот:

$$(4.87) \quad a(z) = 16z^3 - 20z^2 + 7z - 1 = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$$

и тој ќе биде Хурвицов  $z$ -полином, односно сите негови нули ќе лежат во внатрешноста на единичниот круг  $|z| \leq 1$  во  $z$ -комплексната рамнина, ако и само ако полиномот  $b(s)$ , кој се добива со воведување на смената (4.72) во (4.87):

$$\begin{aligned}
(4.88) \quad a(z) &= a \left( \frac{1+s}{1-s} \right) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3 = \\
&= a_0 \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^3 + a_1 \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^2 + a_2 \left( \frac{1+s}{1-s} \right) + a_3 = \\
&= \frac{a_0(1+s)^3 + a_1(1+s)^2(1-s) + a_2(1+s)(1-s)^2 + a_3(1-s)^3}{(1-s)^3} = \\
&= \frac{(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)s^3 + [3(a_0 - a_3) + (a_1 - a_2)]s^2 + \dots}{(1-s)^3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{[3(a_0 + a_3) - (a_1 + a_2)]s + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3)}{(1-s)^3} = \\
 & = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(1-s)^3} = \frac{b(s)}{(1-s)^3}
 \end{aligned}$$

е Хурвицов  $s$ -полином, односно сите негови нули лежат во левата полурамнина од  $s$ -комплексната рамнина, што може да се провери со некој од критериумите за испитување стабилност на линеарните континуални системи. Така, со примена на Рут-Шуровиот критериум се добива Таблица 4.6:

**Таблица 4.6. Проверка на стабилноста на еден континуален систем со карактеристичен полином  $b(s)$  од 3. степен според Рут-Шур**

$b_3$	$b_2$	$b_1$	$b_0$	
$-b_3$	$-\frac{b_3}{b_2}b_0$	$b_1 - \frac{b_3}{b_2}b_0$	$b_0$	$c_1 = \frac{b_3}{b_2}$
	$b_2$	$b_1 - \frac{b_3}{b_2}b_0$	$b_0$	

Од неа се гледа дека полиномот  $b(s)$  ги исполнува потребните и доволни услови да биде Хурвицов  $s$ -полином:

$$\begin{aligned}
 (4.89) \quad & b_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 16 - (-20) + 7 - (-1) = 44 > 0 \\
 & b_1 = 3(a_0 + a_3) - (a_1 + a_2) = 3(16 - 1) - (-20 + 7) = 58 > 0 \\
 & b_2 = 3(a_0 - a_3) + (a_1 - a_2) = 3[16 - (-1)] + (-20 - 7) = 24 > 0 \\
 & b_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 16 - 20 + 7 - 1 = 2 > 0 \\
 & b_1 b_2 - b_0 b_3 = 58 \cdot 24 - 44 \cdot 2 = 1304 > 0
 \end{aligned}$$

**Задача 4.8.** Со помош на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се упрости структурната блок-шема од Слика 4.8 и да се определи  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот систем со влез  $y(t)$ . Потоа, со помош на билинеарната трансформација  $z = \frac{s+1}{s-1}$ , да се испита стабилноста на системот, доколку:

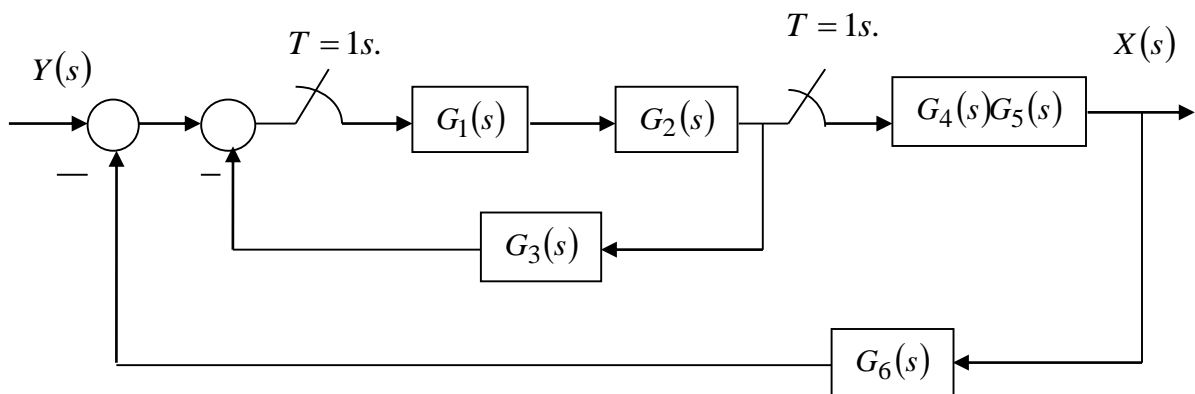
$$(4.90) \quad G_1(s) = G_4(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$(4.91) \quad G_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$(4.92) \quad G_3(s) = \frac{s \ln 3}{s + \ln 3}$$

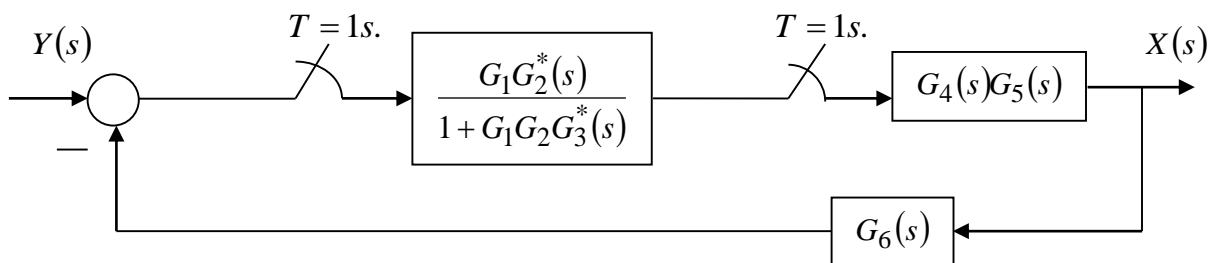
$$(4.93) \quad G_5(s) = \frac{\ln 2}{s + \ln 2}$$

$$(4.94) \quad G_6(s) = \frac{s}{s + \ln 4}$$



Слика 4.8. Илустрација кон Задача 4.8

**Решение:** Со примена на правилата за дискретно еквивалентирање континуални сигнали, шемата од Слика 4.8 може да се трансформира како на Слика 4.9.



Слика 4.9. Еквивалентна шема со шемата од Слика 4.8

Аналогно се трансформира и шемата од Слика 4.9, па, за еквивалентната дискретна преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на набљудуваниот затворен систем од Слика 4.8 се добива:

$$\begin{aligned}
(4.95) \quad G(z) &= \frac{G_1 G_2(z) G_4 G_5(z)}{1 + \frac{G_1 G_2 G_3(z)}{1 + G_1 G_2 G_3(z)}} = \frac{G_1 G_2(z) G_4 G_5(z)}{1 + G_1 G_2 G_3(z) + G_1 G_2(z) G_4 G_5 G_6(z)} = \\
&= \frac{1}{\frac{(z-1)(2z-1)}{2} + \frac{(z-1)(2z-1)}{2}} = \\
&= \frac{1}{1 + \frac{2}{3z-1} + \frac{2}{(2z-1)(4z-1)}} = \\
&= \frac{(3z-1)(4z-1)}{(z-1)[(2z-1)(3z-1)(4z-1) + 2(2z-1)(4z-1) + 2(3z-1)]} = \\
&= \frac{(3z-1)(4z-1)}{(z-1)[(6z^2 - 5z + 1)(4z-1) + 2(8z^2 - 6z + 1) + 2(3z-1)]} = \\
&= \frac{(3z-1)(4z-1)}{(z-1)[(24z^3 - 26z^2 + 9z - 1) + 2(8z^2 - 6z + 1) + 2(3z-1)]} = \\
&= \frac{(3z-1)(4z-1)}{(z-1)(24z^3 - 10z^2 + 3z - 1)} = \frac{b(z)}{(z-1)\tilde{a}(z)}
\end{aligned}$$

каде што:

$$\begin{aligned}
(4.96) \quad G_1 G_2(z) &= Z\{G_1(s)G_2(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s}\right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1}, |z| > 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.97) \quad G_1 G_2 G_3(z) &= Z\{G_1(s)G_2(s)G_3(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{s \ln 3}{s + \ln 3}\right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{\ln 3}{s(s + \ln 3)}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \ln 3}\right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{3}}\right) = 1 - \frac{z-1}{z - \frac{1}{3}} = \frac{z - \frac{1}{3} - z + 1}{z - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3z-1}, |z| > \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.98) \quad G_4 G_5(z) &= Z\{G_4(s)G_5(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{\ln 2}{s + \ln 2}\right\} = \\
&= \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{\ln 2}{s + \ln 2}\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \ln 2}\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \right) = 1 - \frac{z-1}{z-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2z-1}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (4.99) \quad G_4 G_5 G_6(z) &= Z\{G_4(s)G_5(s)G_6(s)\} = \\ &= Z\left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{\ln 2}{s+\ln 2} \cdot \frac{s}{s+\ln 4} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z\left\{ \frac{\ln 2}{s+\ln 2} \cdot \frac{1}{s+\ln 4} \right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{ \frac{1}{s+\ln 2} - \frac{1}{s+\ln 4} \right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \right) = (z-1) \frac{\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \\ &= \frac{2(z-1)}{(2z-1)(4z-1)}, |z| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Преносната функција (4.95) има еден прост позитивен реален пол во  $z=1$  и три пола во внатрешноста на единичниот круг  $|z| \leq 1$  во  $z$ -комплексната рамнина, бидејќи проверката со постапката на билинеарната трансформација  $z = \frac{s+1}{s-1}$  покажува дека полиномот:

$$(4.100) \quad \tilde{a}(z) = 24z^3 - 10z^2 + 3z - 1 = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$$

е Хурвицов  $z$ -полином:

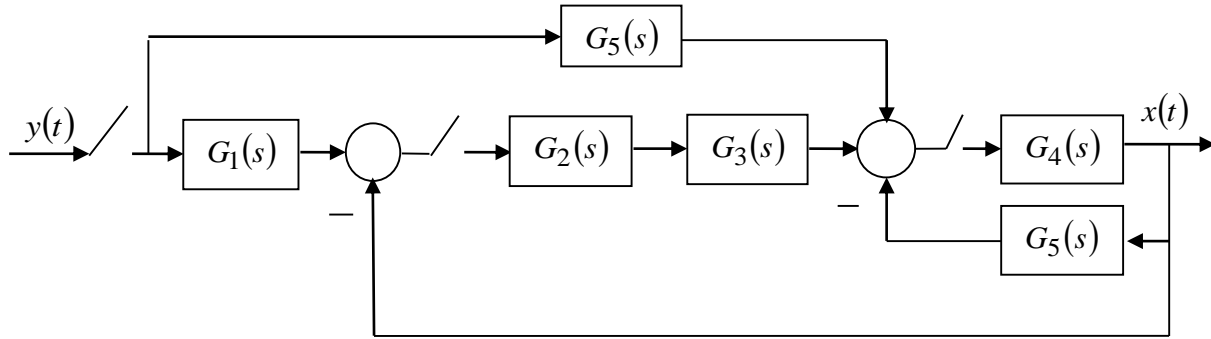
$$\begin{aligned} (4.141) \quad b_3 &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 24 - 10 + 3 - 1 = 16 > 0 \\ b_2 &= 3a_3 - a_2 - a_1 + 3a_0 = 72 + 10 - 3 - 3 = 76 > 0 \\ b_1 &= 3a_3 + a_2 - a_1 - 3a_0 = 72 - 10 - 3 + 3 = 62 > 0 \\ b_0 &= a_3 - a_2 + a_1 - a_0 = 24 + 10 + 3 + 1 = 38 > 0 \\ b_1 b_2 - b_0 b_3 &= 76 \cdot 62 - 38 \cdot 16 > 0 \end{aligned}$$

Следствено, набљудуваниот затворен систем од задачата е на границата на стабилност.

**Задача 4.9.** Со примена на правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, да се определи дискретната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  и  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  на затворениот систем од Слика 4.10. Потоа, со примена на

билинеарната трансформација (4.20) да се испита стабилноста на овој систем, ако неговата дискретна преносна функција е од облик:

$$(4.101) \quad G(z) = \frac{1}{0.5z^4 - 0.25z^3 + 0.125z^2}$$



Слика 4.10. Илустрација кон Задача 4.9

**Решение:** Од Слика 4.10 непосредно следува:

$$(4.102) \quad X(s) = G_4(s)E_2^*(s)$$

$$(4.103) \quad E_2(s) = G_2(s)G_3(s)E_1^*(s) + G_5(s)Y^*(s) - G_5(s)X(s) = \\ = G_2(s)G_3(s)E_1^*(s) + G_5(s)Y^*(s) - G_5(s)G_4(s)E_2^*(s)$$

$$(4.104) \quad E_1(s) = G_1(s)Y^*(s) - X(s) = G_1(s)Y^*(s) - G_4(s)E_2^*(s)$$

Во просторот на  $( )^*$  -сликите, равенките (4.102) - (4.104) поминуваат во следниот облик:

$$(4.105) \quad X^*(s) = G_4^*(s)E_2^*(s)$$

$$(4.106) \quad E_2^*(s) = G_2G_3^*(s)E_1^*(s) + G_5^*(s)Y^*(s) - G_4G_5^*(s)E_2^*(s)$$

$$(4.107) \quad E_1^*(s) = G_1^*(s)Y^*(s) - X^*(s) = G_1^*(s)Y^*(s) - G_4^*(s)E_2^*(s)$$

а со смената  $z = e^{sT}$  стануваат следните равенки:

$$(4.108) \quad X(z) = G_4(z)E_2(z)$$

$$(4.109) \quad E_2(z) = G_2G_3(z)E_1(z) + G_5(z)Y(z) - G_4G_5(z)E_2(z)$$

$$(4.110) \quad E_1(z) = G_1(z)Y(z) - X(z) = G_1(z)Y(z) - G_4(z)E_2(z)$$

Бараната  $Z$ -сликата  $X(z)$  се добива како решение на системот равенки (4.108) - (4.110):

$$(4.111) \quad \begin{aligned} E_2(z) &= G_2 G_3(z) E_1(z) + G_5(z) Y(z) - G_4 G_5(z) E_2(z) = \\ &= G_2 G_3(z) [G_1(z) Y(z) - G_4(z) E_2(z)] + G_5(z) Y(z) - G_4 G_5(z) E_2(z) = \\ &= G_1(z) G_2 G_3(z) Y(z) - G_2 G_3(z) G_4(z) E_2(z) + G_5(z) Y(z) - G_4 G_5(z) E_2(z) = \\ &= [G_1(z) G_2 G_3(z) + G_5(z)] Y(z) - [G_2 G_3(z) G_4(z) + G_4 G_5(z)] E_2(z) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(4.112) \quad E_2(z) = \frac{G_1(z) G_2 G_3(z) + G_5(z)}{1 + G_2 G_3(z) G_4(z) + G_4 G_5(z)} Y(z)$$

$$(4.113) \quad X(z) = G_4(z) E_2(z) = G_4(z) \frac{G_1(z) G_2 G_3(z) + G_5(z)}{1 + G_2 G_3(z) G_4(z) + G_4 G_5(z)} Y(z)$$

Оттука, дискретната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  ќе биде:

$$(4.114) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = G_4(z) \frac{G_1(z) G_2 G_3(z) + G_5(z)}{1 + G_2 G_3(z) G_4(z) + G_4 G_5(z)}$$

За  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  дефинирана со (4.114), карактеристичната равенка на набљудуваниот дискретен систем ќе биде:

$$(4.115) \quad a(z) = 0.5z^4 + 0.25z^3 + 0.125z^2 = 0.5z^2(z^2 + 0.5z + 0.25) = 0.5z^2 \tilde{a}(z)$$

Системот ќе биде стабилен, доколку неговиот карактеристичен полином  $a(z)$  е Хурвицов  $z$ -полином, меѓутоа, бидејќи точката  $z=0$  припаѓа на единичниот круг  $|z| < 1$ , доволно е да се провери полиномот  $\tilde{a}(z)$ . Со смената (4.20), полиномот  $\tilde{a}(z)$  се трансформира во следниот израз:

$$(4.116) \quad \begin{aligned} \tilde{a}\left(\frac{1+s}{1-s}\right) &= \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + 0.5\left(\frac{1+s}{1-s}\right) + 0.25 = \\ &= \frac{(1+s)^2 + 0.5(1+s)(1-s) + 0.25(1-s)^2}{(1-s)^2} = \frac{\tilde{b}(s)}{(1-s)^2} \end{aligned}$$

од каде, по мало средување, за полиномот  $\tilde{b}(s)$  се добива:

$$(4.117) \quad \tilde{b}(s) = (1 + 2s + s^2) + (0.5 - 0.5s^2) + (0.25 - 0.5s + 0.25s^2) =$$

$$= (1 - 0.5 + 0.25)s^2 + 2(1 - 0.25)s + (1 + 0.5 + 0.25) = 0.75s^2 + 1.5s + 1.75$$

Полиномот  $\tilde{b}(s)$ , кој е од втор степен, е сигурно Хурвицов  $s$ -полином, бидејќи сите негови коефициенти се позитивни, па, оттука, со сигурност може да се тврди дека полиномот  $\tilde{a}(z)$  е Хурвицов  $z$ -полином. Следствено, набљудуваниот дискретен систем  $G(z)$  е стабилен.

**Задача 4.10.** Со помош на критериумот на Михаилов, да се испита стабилноста на дискретниот систем со карактеристичен полином:

$$(4.118) \quad a(z) = z - 1$$

$$(4.119) \quad a(z) = 2z - 2$$

$$(4.120) \quad a(z) = z - 3$$

$$(4.121) \quad a(z) = z + 5$$

$$(4.122) \quad a(z) = 2z - 1$$

$$(4.123) \quad a(z) = 6z^2 - 5z + 1$$

$$(4.124) \quad a(z) = z^2 + 1$$

**Решение:** а) Ако во изразот (4.118) за карактеристичниот полином  $a(z)$  на набљудуваниот дискретен систем се воведо смената  $z = e^{j\omega T}$ , ќе се добие изразот за карактеристичниот вектор на набљудуваниот систем, односно тн. вектор на Михаилов  $a(j\omega)$ :

$$(4.125) \quad a(j\omega) = e^{j\omega T} - 1 = \cos \omega T + j \sin \omega T - 1 = \\ = (\cos \omega T - 1) + j \sin \omega T$$

Реалниот и имагинарниот дел на комплексниот израз (4.125) се:

$$(4.126) \quad u(\omega) = \operatorname{Re}[a(j\omega)] = \cos \omega T - 1$$

$$(4.127) \quad v(\omega) = \operatorname{Im}[a(j\omega)] = \sin \omega T$$

и со елиминирање на параметарот  $\omega$  од горните две параметарски равенки се добива аналитичкиот израз за соодветната крива на Михаилов за набљудуваниот дискретен систем, која претставува геометриско место на точки што ги испишува врвот на векторот на Михаилов  $a(j\omega)$ , кога се движи во комплексната рамнина околу својот почеток, при измената на  $\omega$  во интервалот  $\left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ :

$$(4.128) \quad [u(\omega) + 1]^2 + v^2(\omega) = 1$$



Равенката (4.139) претставува равенка на кружница со центар во точката  $[-1, j0]$  и радиус еднаков на единица. Кривата на Михаилов за набљудуваниот систем, која се црта за вредности на  $\omega$  од интервалот  $\left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ , лежи на кружницата (4.128), а нејзиниот конкретен тек се одредува врз основа на (4.126) и (4.127), од каде што непосредно следува дека во конкретниот случај таа почнува за  $\omega = 0$  во точката  $[u(0), jv(0)] = [0, j0]$  :

$$(4.129) \quad u(0) = \operatorname{Re}[a(j0)] = \cos(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$(4.130) \quad v(0) = \operatorname{Im}[a(j0)] = \sin(0) = 0$$

завршува за  $\omega = \frac{\pi}{T}$  во точката  $\left[u\left(\frac{\pi}{T}\right), jv\left(\frac{\pi}{T}\right)\right] = [-2, j0]$ :

$$(4.131) \quad u\left(\frac{\pi}{T}\right) = \operatorname{Re}\left[a\left(j\frac{\pi}{T}\right)\right] = \cos(\pi) - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$(4.132) \quad v\left(\frac{\pi}{T}\right) = \operatorname{Im}\left[a\left(j\frac{\pi}{T}\right)\right] = \sin(\pi) = 0$$

и нема пресеци со координатните оски во комплексната рамнина. Имено, од сите можни решенија на системот равенки:

$$(4.133) \quad \begin{aligned} u(\omega) &= 0 \\ v(\omega) &= 0 \end{aligned}$$

со кој се одредуваат пресеците на кривата (4.128) со координатните оски:

$$(4.134) \quad u(\omega) = \cos \omega T - 1 = 0 \Rightarrow \cos \omega T = 1 \Rightarrow \omega T = 2l\pi \Rightarrow \omega = \frac{2l\pi}{T}; l = 0, 1, 2, \dots$$

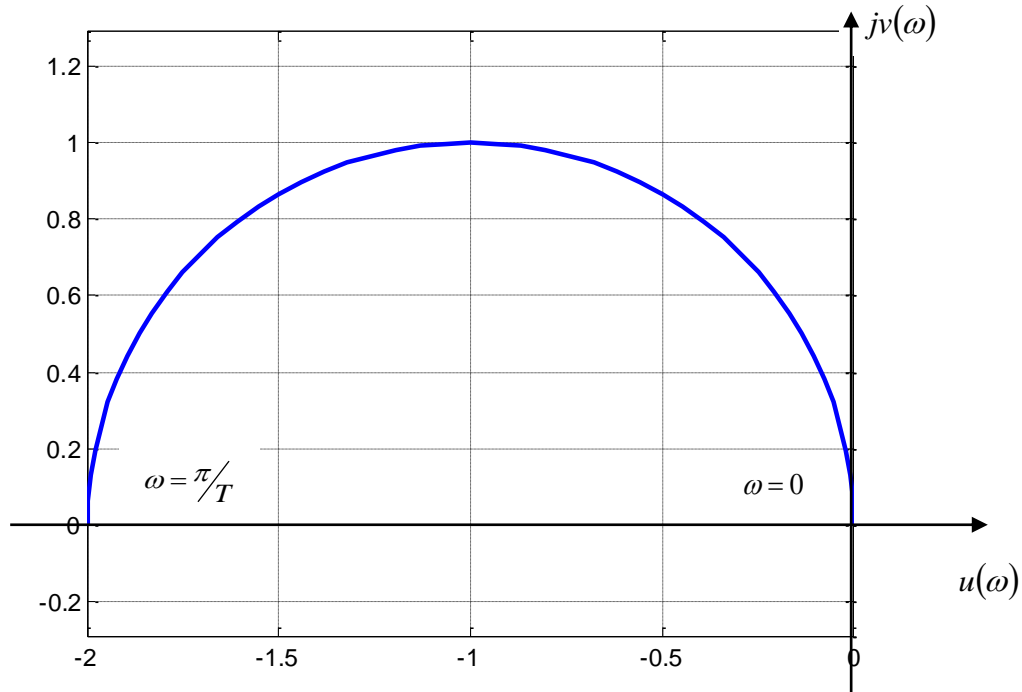
$$v(\omega) = \sin \omega T = 0 \Rightarrow \omega T = l\pi \Rightarrow \omega = \frac{l\pi}{T}; l = 0, 1, 2, \dots$$

за набљудуваниот интервал вредности на параметарот  $\omega$ ,  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ , од интерес се само решенијата што се добиваат за  $l = 0$ , а тие ја одредуваат почетната и крајната точка на бараната крива на Михаилов, која е прикажана на Слика 4.11.

Врз основа на текот на кривата на Михаилов од Слика 4.11, која започнува од координатниот почеток, може да се заклучи дека набљудуваниот дискретен систем има пол во точката  $z = 1$  и сигурно не е стабилен, зошто неговиот карактеристичен вектор не го задоволува условот од критериумот на Михаилов:

$$(4.135) |a(j\omega)| \neq 0 \forall \omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$$

Бидејќи во примерот се работи за систем од прв ред, следува дека полот во точката  $z = 1$  е прост (еднократен), што значи дека системот е на границата на стабилност.



Слика 4.11. Графички приказ на кривата на Михаилов за системот (4.118)

б) Карактеристичниот вектор  $a(j\omega)$  на дискретниот систем со карактеристичен полином (4.119) е даден со комплексниот израз:

$$(4.136) \quad a(j\omega) = 2e^{j\omega T} - 2 = 2 \cos \omega T + j2 \sin \omega T - 2 = 2(\cos \omega T - 1) + j2 \sin \omega T$$

па, неговиот реален и имагинарен дел се:

$$(4.137) \quad u(\omega) = \operatorname{Re}[a(j\omega)] = 2 \cos \omega T - 2$$

$$(4.138) \quad v(\omega) = \operatorname{Im}[a(j\omega)] = 2 \sin \omega T$$

Оттука, равенката на соодветната карактеристична крива за набљудуваниот дискретен систем ќе биде опишана со следниот аналитички израз:

$$(4.139) \quad [u(\omega) + 2]^2 + v^2(\omega) = 4$$

кој претставува равенка на кружница со центар во точката  $[-2, j0]$  и радиус еднаков на два. Кривата на Михаилов за набљудуваниот систем, која се црта за вредности на  $\omega$  од интервалот  $\left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ , лежи на кружницата (4.139), а нејзиниот конкретен тек се одредува врз основа на (4.139) и (4.138), и е прикажан на Слика 4.12. Таа почнува за  $\omega = 0$  во точката  $[u(0), jv(0)] = [0, j0]$ :

$$(4.140) \quad u(0) = \operatorname{Re}[a(j0)] = 2 \cos 0 - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$(4.141) \quad v(0) = \operatorname{Im}[a(j0)] = 2 \sin 0 = 0$$

завршува за  $\omega = \frac{\pi}{T}$  во точката  $\left[u\left(\frac{\pi}{T}\right), jv\left(\frac{\pi}{T}\right)\right] = [-4, j0]$ :

$$(4.142) \quad u\left(\frac{\pi}{T}\right) = \operatorname{Re}\left[a\left(j\frac{\pi}{T}\right)\right] = 2 \cos \pi - 2 = -2 - 2 = -4$$

$$(4.143) \quad v\left(\frac{\pi}{T}\right) = \operatorname{Im}\left[a\left(j\frac{\pi}{T}\right)\right] = 2 \sin \pi = 0$$

и нема пресеци со координатните оски во комплексната рамнина. Имено, решенијата на системот равенки:

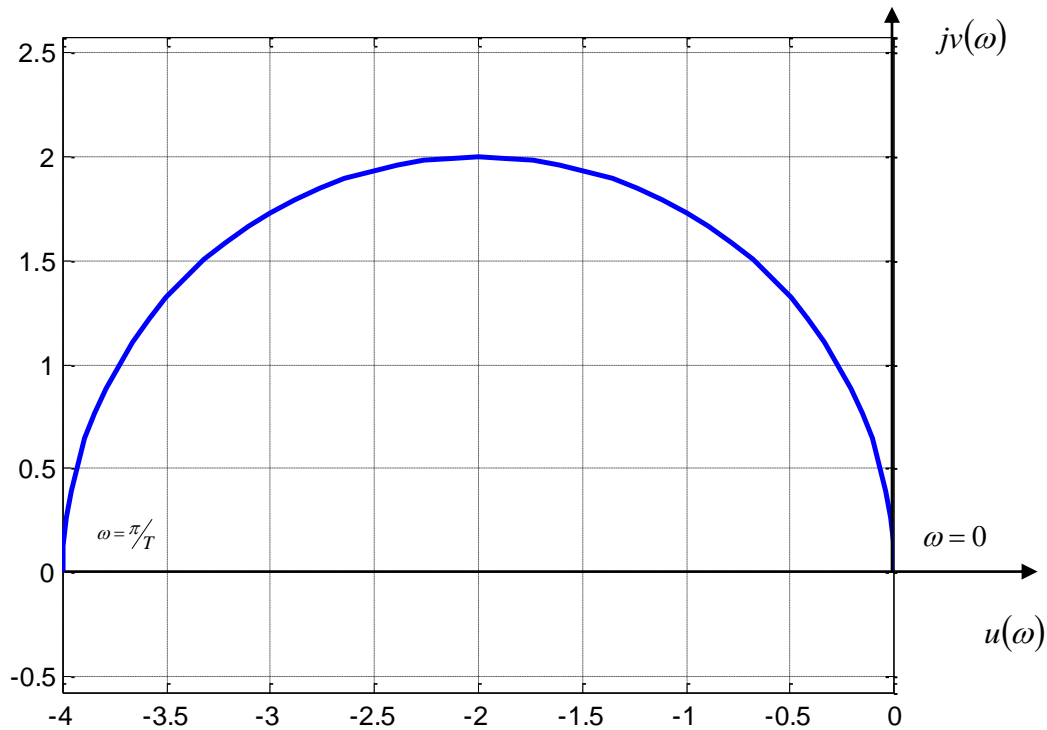
$$(4.144) \quad u(\omega) = 2 \cos \omega T - 2 = 0 \Rightarrow \cos \omega T = 1 \Rightarrow \omega T = 2l\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega = \frac{2l\pi}{T}; l = 0, 1, 2, \dots$$

$$v(\omega) = 2 \sin \omega T = 0 \Rightarrow \omega T = l\pi \Rightarrow \omega = \frac{l\pi}{T}; l = 0, 1, 2, \dots$$

кои се добиваат за  $l = 0$  и кои ги одредуваат пресеците на кривата (4.139) со координатните оски, за набљудуваниот интервал вредности на параметарот  $\omega$ ,  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ , ги претставуваат само граничните точки на бараната крива на Михаилов.

Текот на кривата на Михаилов од Слика 4.12 зборува дека набљудуваниот дискретен систем сигурно не е стабилен, бидејќи неговата карактеристична крива минува низ координатниот почеток на комплексната рамнина во која е претставена, што значи дека системот има пол во точката  $z = 1$ . Систем што не е стабилен заради пол во точката  $z = 1$ , во општ случај може да биде или нестабилен или на границата на стабилност, што зависи од кратноста на тој пол. Меѓутоа, во конкретниот случај се работи за систем од прв ред, што значи дека  $z = 1$  е негов единствен пол, па, следствено, набљудуваниот систем и во овој пример е на границата на стабилност. Ако се споредат кривите од Слика 4.11 и Слика 4.12, лесно може да се забележи дека се слични, со тоа што сите точки од

кривата на сл.4.13 имаат двапати поголеми координати. Ова е разбирливо, бидејќи полиномот (4.119) има иста нула со полиномот (4.118), но двапати поголеми коефициенти.



Слика 4.12. Графички приказ на кривата на Михаилов за системот (4.119)

в) Комплексниот израз за векторот на Михаилов  $a(j\omega)$  за дискретниот систем со карактеристичен полином (4.120) е:

$$(4.145) \quad a(j\omega) = e^{j\omega T} - 3 = \cos \omega T + j \sin \omega T - 3 = (\cos \omega T - 3) + j \sin \omega T$$

а неговата карактеристична крива аналитички е одредена со параметарските равенки на реалниот и имагинарниот дел од изразот (4.145):

$$(4.146) \quad u(\omega) = \operatorname{Re}[a(j\omega)] = \cos \omega T - 3$$

$$(4.147) \quad v(\omega) = \operatorname{Im}[a(j\omega)] = \sin \omega T$$

Со елиминирање на параметарот  $\omega$  од горните две равенки, се добива равенка на кружница со центар во точката  $[-3, j0]$  и радиус еднаков на единица:

$$(4.148) \quad [u(\omega) + 3]^2 + v^2(\omega) = 1$$

Кривата на Михаилов за набљудуваниот дискретен систем, која претставува ходограф на векторот на Михаилов (4.145) за вредности на  $\omega$  од интервалот  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ , лежи на кривата (4.148). Таа почнува во точката  $[-2, j0]$ :

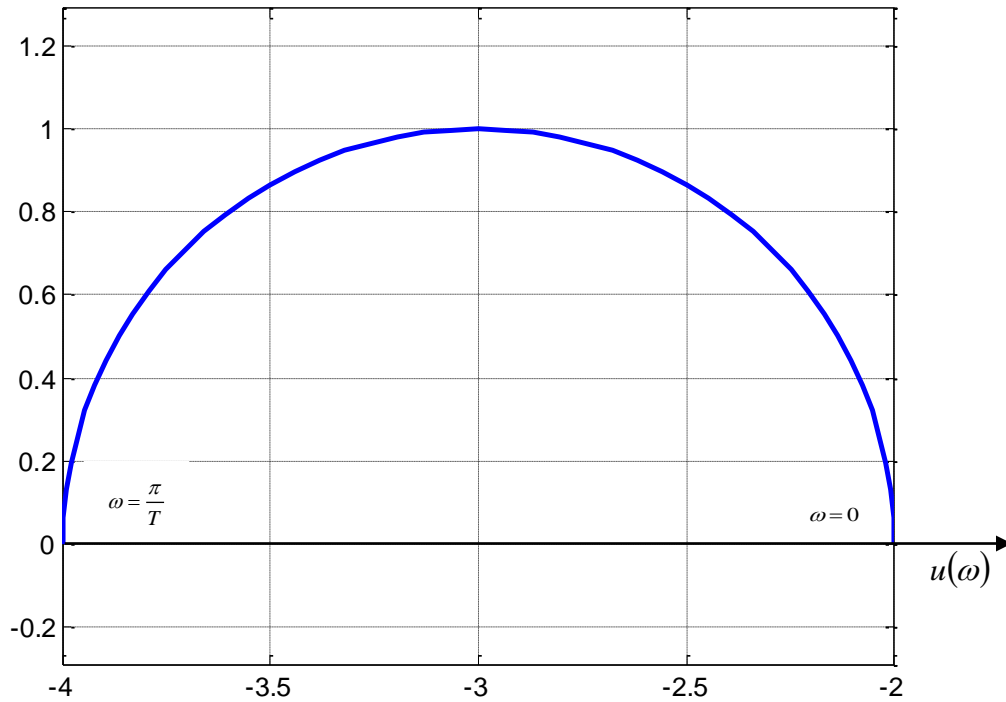
$$(4.149) \quad u(0) = \operatorname{Re}[a(j0)] = \cos 0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$(4.150) \quad v(0) = \operatorname{Im}[a(j0)] = \sin 0 = 0$$

завршува за  $\omega = \frac{\pi}{T}$  во точката  $\left[u\left(\frac{\pi}{T}\right), jv\left(\frac{\pi}{T}\right)\right] = [-4, j0]$ :

$$(4.151) \quad u\left(\frac{\pi}{T}\right) = \operatorname{Re}\left[a\left(j\frac{\pi}{T}\right)\right] = \cos \pi - 3 = -1 - 3 = -4$$

$$(4.152) \quad v\left(\frac{\pi}{T}\right) = \operatorname{Im}\left[a\left(j\frac{\pi}{T}\right)\right] = \sin \pi = 0$$



Слика 4.13. Графички приказ на кривата на Михаилов за системот зададен со (4.131)

и нема пресеци со координатните оски во комплексната рамнина, бидејќи системот равенки:

$$(4.153) \quad \begin{aligned} u(\omega) &= \cos \omega T - 3 = 0 \\ v(\omega) &= \sin \omega T = 0 \end{aligned}$$

не дава такви решенија.

Текот на кривата на Михайлов од Слика 4.13 за системот со карактеристичен полином (4.120) покажува дека тој систем е сигурно нестабилен, бидејќи не го задоволува условот од изворниот критериум на Михайлов:

$$(4.154) \quad \Delta \arg[a(j\omega)] = n\pi \\ 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

Имено, во конкретниот случај:

$$(4.155) \quad \Delta \arg[a(j\omega)] = -\alpha + \alpha = 0 \neq \pi \\ 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

г) Карактеристичниот вектор на системот со карактеристичен полином (4.121) е даден со изразот:

$$(4.156) \quad \begin{aligned} a(j\omega) &= e^{j\omega T} + 5 = \cos \omega T + j \sin \omega T + 5 = \\ &= (\cos \omega T + 5) + j \sin \omega T \end{aligned}$$

а неговиот реален и имагинарен дел се:

$$(4.157) \quad \begin{aligned} u(\omega) &= \cos \omega T + 5 \\ v(\omega) &= \sin \omega T \end{aligned}$$

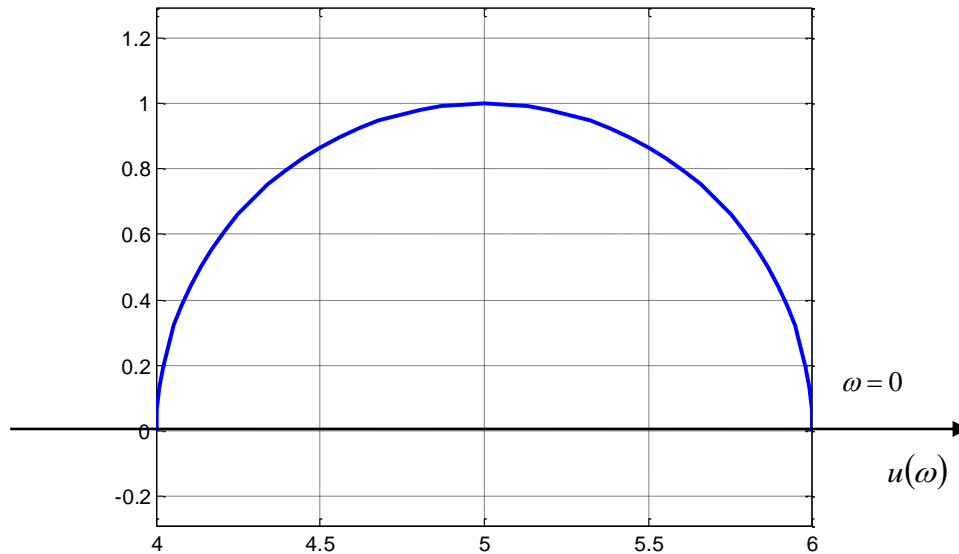
Ходографот на овој вектор за вредности на  $\omega$  од интервалот  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ , односно соодветната крива на Михайлов за набљудуваниот дискретен систем, лежи на кружницата:

$$(4.158) \quad [u(\omega) - 5]^2 + v^2(\omega) = 1$$

претставува полукружница со центар во точката  $[5, j0]$  и радиус еднаков на единица и графички е прикажан на Слика 4.14. Од неа, со проверка, лесно се утврдува дека набљудуваниот систем сигурно е нестабилен, бидејќи:

$$\Delta \arg[a(j\omega)] = +\alpha - \alpha = 0 \neq \pi$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$



Слика 4.14. Графички приказ на кривата на Михаилов за системот зададен со (4.121)

д) Системот со карактеристичен полином (4.122) има карактеристичен вектор:

$$(4.159) \quad a(j\omega) = 2e^{j\omega T} - 1 = 2(\cos \omega T + j \sin \omega T) - 1 =$$

$$= 2 \cos \omega T - 1 + j2 \sin \omega T$$

чиј реален и имагинарен дел се:

$$(4.160) \quad u(\omega) = 2 \cos \omega T - 1$$

$$v(\omega) = 2 \sin \omega T$$

Неговата карактеристична крива, која се добива како ходограф на карактеристичниот вектор (4.160) за вредности на  $\omega$  од интервалот  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ , претставува полукружница со центар во точката  $[u(0), jv(0)] = [-1, j0]$  и радиус еднаков на два и лежи на кружницата:

$$(4.161) \quad [u(\omega) + 1]^2 + v^2(\omega) = 4$$

Таа почнува за  $\omega = 0$  во точката  $[u(0), jv(0)] = [1, j0]$ :

$$(4.162) \quad u(0) = \operatorname{Re}[a(j0)] = 2 \cos 0 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$(4.163) \quad v(0) = \text{Im}[a(j0)] = \sin 0 = 0$$

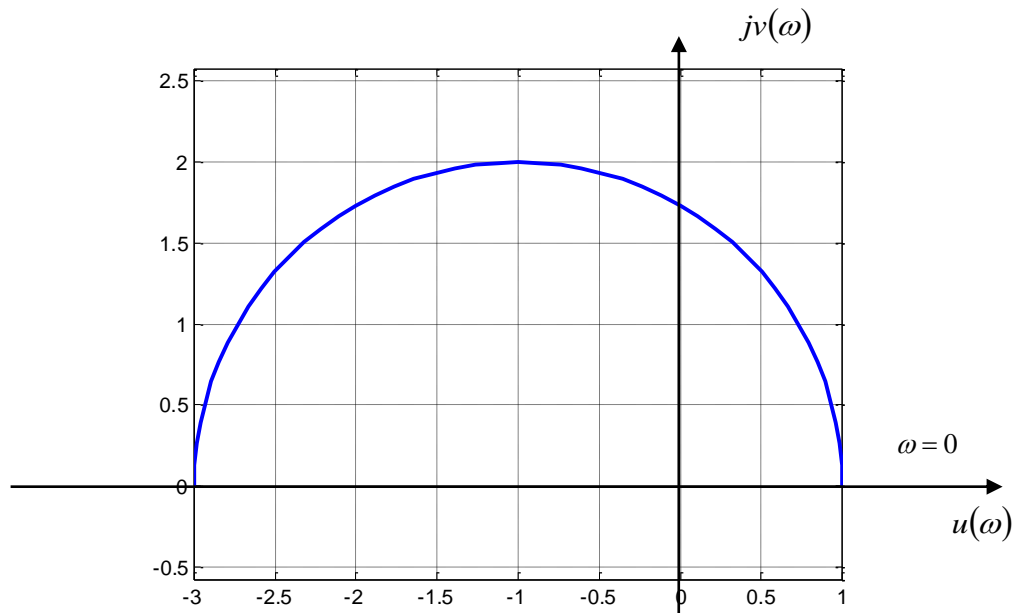
и завршува за  $\omega = \frac{\pi}{T}$  во точката  $\left[ u\left(\frac{\pi}{T}\right), jv\left(\frac{\pi}{T}\right) \right] = [-3, j0]$ :

$$(4.164) \quad u\left(\frac{\pi}{T}\right) = \text{Re}\left[ a\left(j\frac{\pi}{T}\right) \right] = 2 \cos \pi - 1 = -2 - 1 = -3$$

$$(4.165) \quad v\left(\frac{\pi}{T}\right) = \text{Im}\left[ a\left(j\frac{\pi}{T}\right) \right] = \sin \pi = 0$$

Оваа крива графички е прикажана на Слика 4.15 и од неа, со проверка, се утврдува дека набљудуваниот дискретен систем од примерот е сигурно стабилен, бидејќи кривата ги задоволува сите неопходни и доволни услови од критериумот на Михаилов:

- таа почнува во конечна точка на позитивниот дел од реалната оска
- завршува во конечна точка на негативниот дел од реалната оска (за систем со непарен ред)
- се одвива во позитивна насока, т.е. насока спротивна од насоката на движење на стрелките од часовникот
- за ни една вредност на  $\omega$  не минува низ координатниот почеток од комплексната рамнина
- и аргументот на векторот на Михаилов монотонно расте од вредност 0 до крајната вредност  $\pi$ .
- 



Слика 4.15. Графички приказ на кривата на Михаилов за системот даден со (4.122)

Споменатите услови можат да се опишат и аналитички:



$$(4.166) \quad u(0) > 0, \quad v(0) < 0$$

$$(4.167) \quad |a(j\omega)| \neq 0, \quad \forall \omega$$

$$(4.168) \quad \Delta \arg[a(j\omega)] = \pi \\ 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

г) Карактеристичниот вектор на дискретниот систем со карактеристичен полином (4.123) е:

$$(4.169) \quad a(j\omega) = 6e^{j2\omega T} - 5e^{j\omega T} + 1 = 6(\cos 2\omega T + j \sin 2\omega T) - 5(\cos \omega T + j \sin \omega T) + 1$$

а неговиот реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

$$(4.170) \quad u(\omega) = 6 \cos 2\omega T - 5 \cos \omega T + 1 = 12 \cos^2 \omega T - 5 \cos \omega T - 5$$

$$v(\omega) = 6 \sin 2\omega T - 5 \sin \omega T = \sin \omega T (12 \cos \omega T - 5)$$

Сите карактеристични точки од карактеристичната крива на набљудуваниот дискретен систем се одредени со решенијата на долниот систем равенки за вредности на  $\omega$  од интервалот  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ :

$$(4.171) \quad u(\omega) = 12 \cos^2 \omega T - 5 \cos \omega T - 5 = 0 \\ v(\omega) = \sin \omega T (12 \cos \omega T - 5) = 0$$

Овие решенија за првата равенка од системот (4.172) се:

$$(4.172) \quad \cos \omega_1 T = 0.8866 \quad \text{односно} \quad \omega_1 T = 27.55^0$$

$$(4.173) \quad \cos \omega_3 T = -0.4699 \quad \text{односно} \quad \omega_3 T = 118.03^0$$

додека за втората равенка решенијата се:

$$(4.174) \quad \sin \omega_0 T = 0 \quad \text{односно} \quad \omega_0 T = 0$$

$$(4.175) \quad \cos \omega_2 T = \frac{5}{12} \quad \text{односно} \quad \omega_2 T = 65.38^0$$

$$(4.176) \quad \sin \omega_4 T = 0 \quad \text{односно} \quad \omega_4 T = \pi$$

Притоа важи:

$$(4.177) \quad \omega_0 (= 0) \langle \omega_1 \left( = \frac{27.55^0}{T} \right) \rangle \langle \omega_2 \left( = \frac{65.38^0}{T} \right) \rangle \langle \omega_3 \left( = \frac{118.03^0}{T} \right) \rangle \langle \omega_4 \left( = \frac{\pi}{T} \right) \rangle$$

Добиените решенија ги дефинираат:

— почетокот на карактеристичната крива

$$(4.178) \quad [u(\omega_0), jv(\omega_0)] = [u(0), jv(0)] = [2, j0]$$

— првиот нејзин пресек со имагинарната оска

$$(4.179) \quad [u(\omega_1), jv(\omega_1)] = \left[ u\left(\frac{27.55^0}{T}\right), jv\left(\frac{27.55^0}{T}\right) \right] = [0, j2.6]$$

— единствениот пресек со реалната оска

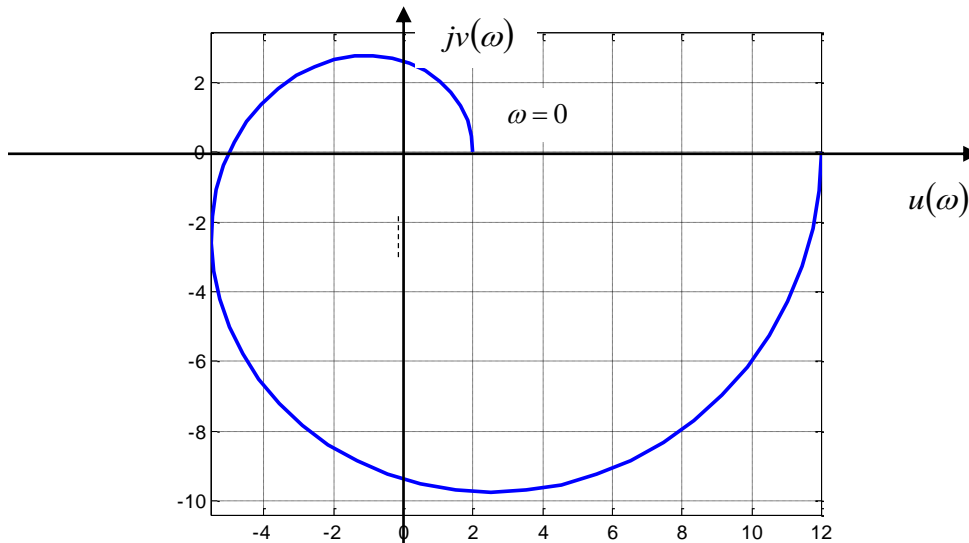
$$(4.180) \quad [u(\omega_2), jv(\omega_2)] = \left[ u\left(\frac{65.38^0}{T}\right), jv\left(\frac{65.38^0}{T}\right) \right] = [-5, j0]$$

— вториот пресек со имагинарната оска

$$(4.181) \quad [u(\omega_3), jv(\omega_3)] = \left[ u\left(\frac{118.03^0}{T}\right), jv\left(\frac{118.03^0}{T}\right) \right] = [0, -j9.4]$$

— завршетокот на карактеристичната крива

$$(4.182) \quad [u(\omega_4), jv(\omega_4)] = \left[ u\left(\frac{\pi}{T}\right), jv\left(\frac{\pi}{T}\right) \right] = [12, j0]$$



Слика 4.16. Графички приказ на кривата на Михайлов за дискретниот систем (4.123)

Карактеристичната крива графички е прикажана на Слика 4.16. Од неа, со проверка, може да се утврди дека набљудуваниот дискретен систем сигурно е стабилен, зошто ги исполнува сите потребни и доволни услови според критериумот на Михаилов за иследување на стабилноста на линеарните дискретни системи. Имено, кривата почнува во конечна точка на позитивниот дел од реалната оска, се одвива во позитивна насока, наизменично ги сече координатните оски, не минувајќи низ координатниот почеток за ни една вредност на параметарот  $\omega$  и завршува повторно во конечна точка на позитивниот дел од реалната оска. Едновременно, аргументот на векторот на Михаилов монотono расте од вредност 0 до вредност  $2\pi$  :

$$(4.183) \quad \Delta \arg[a(j\omega)] = \pi + \pi = 2\pi \\ 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

е) Системот со карактеристичен полином (4.124) има карактеристичен вектор од облик:

$$(4.184) \quad a(j\omega) = e^{j2\omega T} + 1 = \cos 2\omega T + j \sin 2\omega T + 1 = (\cos 2\omega T + 1) + j \sin 2\omega T$$

чиј реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

$$(4.185) \quad u(\omega) = \cos 2\omega T + 1$$

$$(4.186) \quad v(\omega) = \sin 2\omega T$$

Карактеристичната крива на набљудуваниот систем е прикажана на Слика 4.17. Таа лежи на кружницата:

$$(4.187) \quad [u(\omega) - 1]^2 + v^2(\omega) = 1$$

почнува за  $\omega = 0$  во точката  $[u(0), jv(0)] = [2, j0]$ :

$$(4.188) \quad u(0) = \operatorname{Re}[a(j0)] = \cos 0 + 1 = 2$$

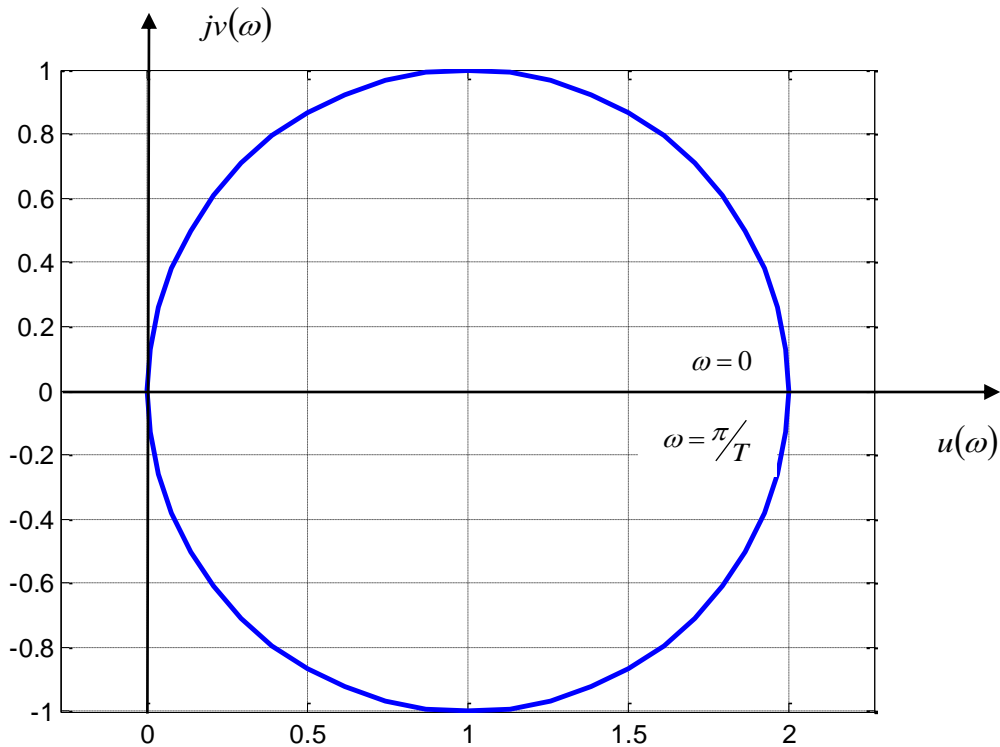
$$(4.189) \quad v(0) = \operatorname{Im}[a(j0)] = \sin 0 = 0$$

се одвива во позитивна насока и завршува во точката  $\left[ u\left(\frac{\pi}{T}\right), jv\left(\frac{\pi}{T}\right) \right] = [2, j0]$ :

$$(4.190) \quad u\left(\frac{\pi}{T}\right) = \operatorname{Re}\left[ a\left(j\frac{\pi}{T}\right) \right] = \cos 2\pi + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$(4.191) \quad v\left(\frac{\pi}{T}\right) = \operatorname{Im}\left[ a\left(j\frac{\pi}{T}\right) \right] = \sin \pi = 0$$

Врз основа на текот на кривата на Михаилов од Слика 4.17 може да се заклучи дека набљудуваниот дискретен систем сигурно не е стабилен, зошто не го задоволува вториот услов од изворниот критериум на Михаилов за стабилност на линеарните дискретни системи (4.8), според кој карактеристичната крива на стабилен систем за ниедна вредност на  $\omega$  не смее да минува низ координатниот почеток од комплексната рамнина во која е прикажана.



Слика 4.17. Графички приказ на карактеристичната крива на дискретниот систем со карактеристичен полином од облик (4.124)

**Задача 4.11.** Со помош на критериумот на Михаилов да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем, чиј карактеристичен полином има облик:

$$(4.192) \quad a(z) = z^3 - z^2 + z - 1$$

**Решение:** Набљудуваниот систем од задачата има карактеристичен вектор од облик:

$$(4.193) \quad a(j\omega) = e^{j3\omega T} - e^{j2\omega T} + e^{j\omega T} - 1 = \cos 3\omega T - \cos 2\omega T + \\ + \cos \omega T - 1 + j(\sin 3\omega T - \sin 2\omega T + \sin \omega T) =$$

чиј реален и имагинарен дел се:

$$(4.194) \quad u(\omega) = \cos(3\omega T) - \cos(2\omega T) + \cos(\omega T) - 1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(2\omega T + \omega T) - [\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)] + \cos(\omega T) - 1 = \\
&= [\cos(2\omega T)\cos(\omega T) - \sin(2\omega T)\sin(\omega T)] - [\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)] + \\
&+ \cos \omega T - 1 = [\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)]\cos(\omega T) - \\
&- [2\sin(\omega T)\cos(\omega T)]\sin(\omega T) - [2\cos^2(\omega T) - 1] + \cos \omega T - 1 = \\
&= [2\cos^2(\omega T) - 1]\cos(\omega T) - 2\sin^2(\omega T)\cos(\omega T) - 2\cos^2(\omega T) + \cos(\omega T) = \\
&= 2\cos^3(\omega T) - \cos(\omega T) - 2[1 - \cos^2(\omega T)]\cos \omega T - 2\cos^2(\omega T) + \cos(\omega T) = \\
&= 2\cos^3(\omega T) - 2\cos(\omega T) + 2\cos^3(\omega T) - 2\cos^2(\omega T) = \\
&= 4\cos^3(\omega T) - 2\cos^2(\omega T) - 2\cos(\omega T) = 2\cos(\omega T)[2\cos^2(\omega T) - \cos(\omega T) - 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.195) \quad v(\omega) &= \sin(3\omega T) - \sin(2\omega T) + \sin(\omega T) = \\
&= \sin(2\omega T + \omega T) - 2\sin(\omega T)\cos(\omega T) + \sin(\omega T) = \\
&= \sin(2\omega T)\cos(\omega T) + \cos(2\omega T)\sin(\omega T) + \sin(\omega T)[1 - 2\cos(\omega T)] = \\
&= 2\sin(\omega T)\cos^2(\omega T) + [\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)]\sin(\omega T) + \\
&+ \sin(\omega T)[1 - \cos(\omega T)] = \\
&= 2\sin(\omega T)\cos^2(\omega T) + [2\cos^2(\omega T) - 1]\sin(\omega T) + \sin(\omega T)[1 - 2\cos(\omega T)] = \\
&= \sin(\omega T)[4\cos^2(\omega T) - 1] + \sin(\omega T)[1 - 2\cos(\omega T)] = \\
&= \sin(\omega T)[4\cos^2(\omega T) - 2\cos(\omega T)] = \\
&= 2\sin(\omega T)\cos(\omega T)[2\cos(\omega T) - 1]
\end{aligned}$$

Равенката (4.195) во интервалот  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$  ги има следните решенија:

$$\begin{aligned}
(4.196) \quad \cos \omega_1 T = 1 & \quad \text{односно} \quad \omega_1 T = 0 \\
\cos \omega_3 T = 0 & \quad \text{односно} \quad \omega_3 T = \frac{\pi}{2} \\
\cos \omega_5 T = -0.5 & \quad \text{односно} \quad \omega_5 T = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

додека равенката (4.196) на истиот интервал има решенија:

$$\begin{aligned}
(4.197) \quad \sin \omega_{0,6} T = 0 & \quad \text{односно} \quad \omega_0 T = 0 \quad \text{и} \quad \omega_6 T = \pi \\
\cos \omega_2 T = 0 & \quad \text{односно} \quad \omega_2 T = \frac{\pi}{3} \\
\cos \omega_4 T = 0 & \quad \text{односно} \quad \omega_4 T = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

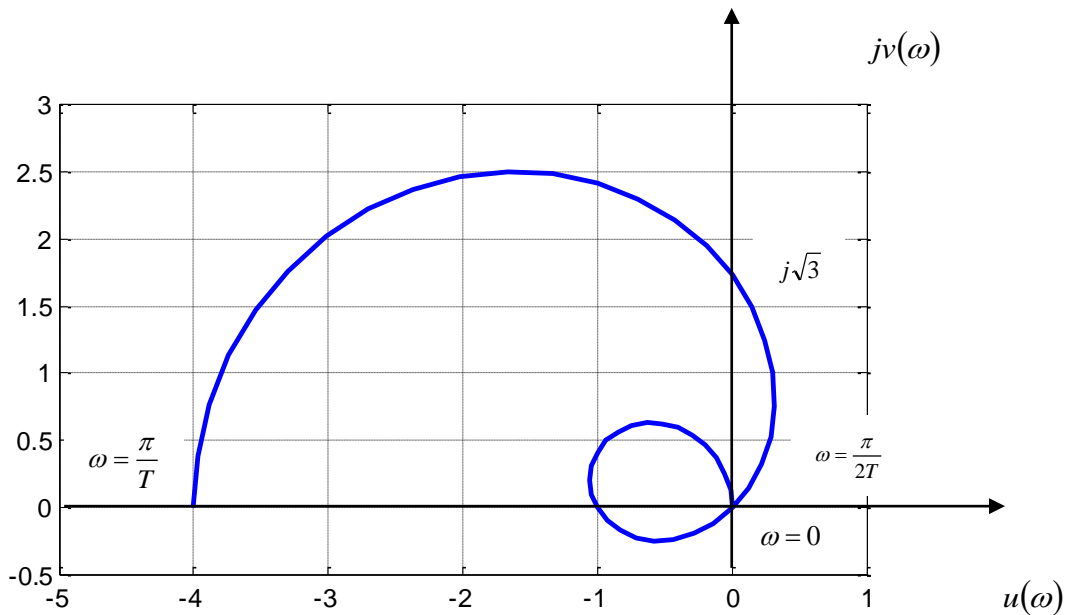
и тие решенија ги дефинираат пресеците на карактеристичната крива од Слика 4.18 со реалната оска:

$$(4.198) \quad \begin{aligned} [u(\omega_0), jv(\omega_0)] &= [0, j0] \\ [u(\omega_2), jv(\omega_2)] &= [-1, j0] \\ [u(\omega_4), jv(\omega_4)] &= [0, j0] \\ [u(\omega_6), jv(\omega_6)] &= [-4, j0] \end{aligned}$$

и нејзините пресеци со имагинарната оска од комплексната рамнина во која е прикажана:

$$(4.199) \quad \begin{aligned} [u(\omega_1), jv(\omega_1)] &= [0, j0] \\ [u(\omega_3), jv(\omega_3)] &= [0, j0] \\ [u(\omega_5), jv(\omega_5)] &= [0, j\sqrt{3}] \end{aligned}$$

Врз основа на текот на кривата на Михаилов за набљудуваниот дискретен систем со карактеристичен полином (4.194), може да се заклучи дека овој систем сигурно не е стабилен, зошто неговата карактеристична крива двапати минува низ координатниот почеток од комплексната рамнина во која е прикажана и не ги сече наизменично координатните оски.



Слика 4.18. Ходограф на векторот (4.194)

**Задача 4.12.** Со помош на критериумот на Михаилов, да се испита стабилноста на дискретниот систем, чиј карактеристичен полином е од облик:

$$(4.200) \quad a(z) = z + 1$$

$$(4.201) \quad a(z) = 2z^3 - z^2 + 2z - 1$$

$$(4.202) \quad a(z) = 4z^3 - 2z^2 + 2z - 1$$

**Решение:** а) Карактеристичниот вектор на системот со карактеристичен полином (4.201) е:

$$(4.203) \quad a(j\omega) = e^{j\omega T} + 1 = \cos \omega T + j \sin \omega T + 1 = \cos \omega T + 1 + j \sin \omega T$$

а неговиот реален и имагинарен дел се дадени со изразите:

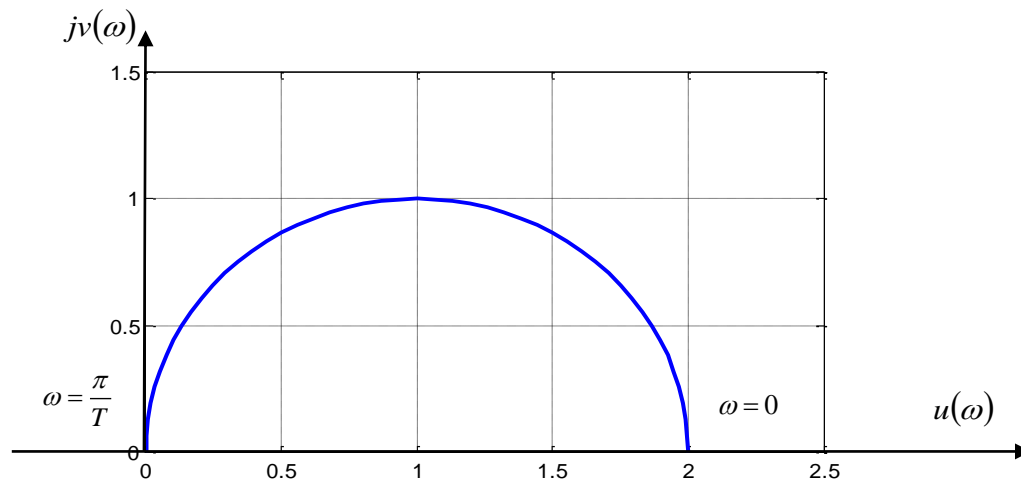
$$(4.204) \quad u(\omega) = \operatorname{Re}[a(j\omega)] = \cos \omega T + 1$$

$$v(\omega) = \operatorname{Im}[a(j\omega)] = \sin \omega T$$

Карактеристичната крива на овој систем лежи на кружница со центар во точката  $[1, j0]$  и радиус еднаков на единица, опишан со аналитичкиот израз:

$$(4.205) \quad [u(\omega) - 1]^2 + v^2(\omega) = 1$$

Текот на карактеристичната крива се одредува со помош на равенките (4.205) за вредности на  $\omega$  во интервалот  $\left(0, \frac{\pi}{T}\right)$  и истата е прикажана на Слика 4.19.



Слика 4.19. Кривата на Михаилов за системот со карактеристичен полином (4.201)

Врз основа на изгледот на оваа крива може да се заклучи дека набљудуваниот дискретен систем сигурно не е стабилен, зошто кривата завршува во координатниот почеток од комплексната рамнина во која е претставена, а со тоа е нарушен вториот услов од изворниот критериум на Михаилов (4.8). Ова воедно значи дека системот има пол во  $z$  – комплексната рамнина со модул еднаков на единица. Во општ случај, дискретен систем што не е стабилен, може да биде или нестабилен или на границата на стабилност, што зависи од положбата на неговите полови во  $z$  – комплексната рамнина во однос на единичниот круг  $|z| \leq 1$  и нивната кратност. Меѓутоа, овде конкретно се работи за систем од прв ред, па следува дека тој има единствен пол со модул еднаков на единица, што значи дека системот е на границата на стабилност.

б) Векторот на Михаилов  $a(j\omega)$  за дискретен систем со карактеристичен полином (4.202) е даден со изразот:

$$\begin{aligned}
 (4.206) \quad a(j) &= 2e^{j3\omega T} - e^{j2\omega T} + 2e^{j\omega T} - 1 = \\
 &= 2(\cos 3\omega T + j \sin 3\omega T) - (\cos 2\omega T + j \sin 2\omega T) + \\
 &\quad + 2(\cos \omega T + j \sin \omega T) - 1 = \\
 &= 2 \cos 3\omega T - \cos 2\omega T + 2 \cos \omega T - 1 + \\
 &\quad + j(2 \sin 3\omega T - \sin 2\omega T + 2 \sin \omega T)
 \end{aligned}$$

додека неговиот реален и имагинарен дел се одредени со изразите:

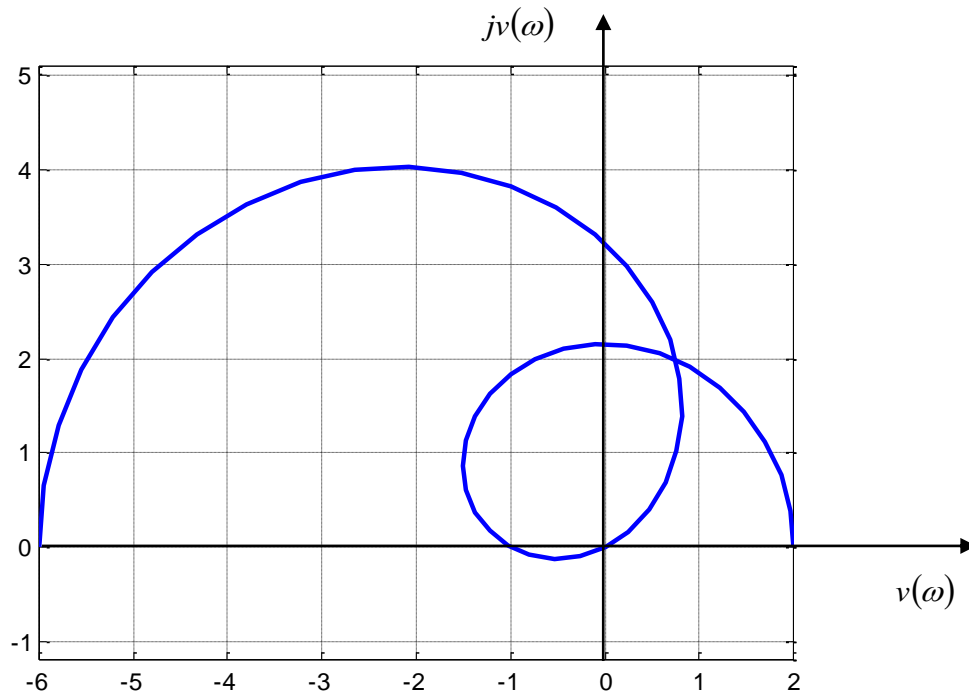
$$\begin{aligned}
 (4.207) \quad u(\omega) &= 2 \cos 3\omega T - \cos 2\omega T + 2 \cos \omega T - 1 = \\
 &= 2 \cos(2\omega T + \omega T) - (\cos^2 \omega T - \sin^2 \omega T) + 2 \cos \omega T - 1 = \\
 &= 2(\cos 2\omega T \cos \omega T - \sin 2\omega T \sin \omega T) - (2 \cos^2 \omega T - 1) + 2 \cos \omega T - 1 = \\
 &= 2[\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)]\cos(\omega T) - 2[2 \sin(\omega T) \cos(\omega T)]\sin(\omega T) - \\
 &\quad - 2 \cos^2 \omega T + 1 + 2 \cos \omega T - 1 = \\
 &= 2(2 \cos^2 \omega T - 1)\cos \omega T - 4 \sin^2 \omega T \cos \omega T - 2 \cos^2 \omega T + 2 \cos \omega T = \\
 &= 4 \cos^3 \omega T - 2 \cos \omega T - 4(1 - \cos^2 \omega T)\cos \omega T - \\
 &\quad - 2 \cos^2 \omega T + 2 \cos \omega T = \\
 &= 4 \cos^3 \omega T - 2 \cos \omega T - 4 \cos \omega T + 4 \cos^3 \omega T - 2 \cos^2 \omega T + 2 \cos \omega T = \\
 &= 8 \cos^3 \omega T - 2 \cos^2 \omega T - 4 \cos \omega T = \\
 &= 2 \cos \omega T (4 \cos^2 \omega T - \cos \omega T - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.208) \quad v(\omega) &= 2 \sin(3\omega T) - \sin(2\omega T) + 2 \sin(\omega T) = \\
 &= 2 \sin(2\omega T + \omega T) - 2 \sin(\omega T) \cos(\omega T) + 2 \sin(\omega T) = \\
 &= 2[\sin(2\omega T) \cos(\omega T) + \cos(2\omega T) \sin(\omega T)] - 2 \sin(\omega T) \cos(\omega T) + 2 \sin(\omega T) = \\
 &= 4 \sin(\omega T) \cos^2(\omega T) + \\
 &\quad + 2[\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)] \sin \omega T + 2 \sin(\omega T)[1 - \cos(\omega T)] =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= 6 \sin(\omega T) \cos^2(\omega T) + 2[\cos^2(\omega T) - \cos(\omega T)] \sin \omega T = - \\
 &= 2 \sin(\omega T) \cos(\omega T) [4 \cos(\omega T) - 1]
 \end{aligned}$$

Оттука, за разни вредности на  $\omega$  во интервалот  $\left(0, \frac{\pi}{T}\right)$ , се добиваат одредени точки од карактеристичната крива на набљудуваниот систем, прикажана на Слика 4.20.



Слика 4.20. Кривата на Михаилов за дискретниот систем со карактеристичен полином (4.202)

Кривата започнува за  $\omega = 0$  во точката  $[u(0), jv(0)] = [2, j0]$ :

$$\begin{aligned}
 (4.209) \quad u(0) &= 2 \cos(0)[4 \cos^2(0) - \cos(0) - 2] = 2(4 - 1 - 2) = 2 \\
 v(0) &= 2 \sin(0) \cos(0)[4 \cos(0) - 1] = 0
 \end{aligned}$$

завршува за  $\omega = \frac{\pi}{T}$  во точката  $\left[u\left(\frac{\pi}{T}\right), jv\left(\frac{\pi}{T}\right)\right] = [-6, j0]$ :

$$\begin{aligned}
 (4.210) \quad u(\pi) &= 2 \cos(\pi)[4 \cos^2(\pi) - \cos(\pi) - 2] = -2(4 + 1 - 2) = -6 \\
 v(\pi) &= 2 \sin(\pi) \cos(\pi)[4 \cos(\pi) - 1] = 0
 \end{aligned}$$

и има пресеци со координатните оски од комплексната рамнина во која е прикажана, одредени со решенијата на равенките (4.208) - (4.209):

$$(4.211) \quad u(\omega) = 0: \quad \begin{array}{ll} \cos \omega_1 T = 0.84 & \text{односно} \quad \omega_1 T = 32.5^\circ \\ \cos \omega_3 T = 0 & \text{односно} \quad \omega_3 T = 90^\circ \\ \cos \omega_5 T = -0.59 & \text{односно} \quad \omega_5 T = 126.4^\circ \end{array}$$

$$(4.212) \quad v(\omega) = 0: \quad \begin{array}{ll} \sin \omega_{0,6} T = 0 & \text{односно} \quad \omega_0 T = 0^\circ \quad \text{и} \quad \omega_6 T = 180^\circ \\ \cos \omega_2 T = 0.25 & \text{односно} \quad \omega_2 T = 75.5^\circ \\ \cos \omega_4 T = 0 & \text{односно} \quad \omega_4 T = 90^\circ \end{array}$$

Тие пресеци се во точките:

$$(4.213) \quad \begin{array}{ll} [u(\omega_0), jv(\omega_0)] = [2, j0]; & [u(\omega_1), jv(\omega_1)] = [0, j2.15] \\ [u(\omega_2), jv(\omega_2)] = [-1, j0] & [u(\omega_3), jv(\omega_3)] = [0, j0] = [u(\omega_4), jv(\omega_4)] \\ [u(\omega_5), jv(\omega_5)] = [0, j3.22] & [u(\omega_6), jv(\omega_6)] = [-6, j0] \end{array}$$

Од текот на оваа крива се гледа дека набљудуваниот дискретен систем со карактеристичен полином (4.202) сигурно не е стабилен, бидејќи таа минува низ координатниот почеток од комплексната рамнина за една вредност на  $\omega$ .

в) Дискретниот систем со карактеристичен полином (4.203) има карактеристичен вектор од облик:

$$(4.214) \quad \begin{aligned} a(j\omega) &= 4e^{j3\omega T} - 2e^{j2\omega T} + 2e^{j\omega T} - 1 = \\ &= 4(\cos 3\omega T + j \sin 3\omega T) - 2(\cos 2\omega T + j \sin 2\omega T) + \\ &+ 2(\cos \omega T + j \sin \omega T) - 1 = \\ &= 4 \cos 3\omega T - 2 \cos 2\omega T + 2 \cos \omega T - 1 + \\ &+ j(4 \sin 3\omega T - 2 \sin 2\omega T + 2 \sin \omega T) \end{aligned}$$

чиј реален и имагинарен дел се дадени со аналитичките изрази:

$$(4.215) \quad \begin{aligned} u(\omega) &= 4 \cos(3\omega T) - 2 \cos(2\omega T) + 2 \cos(\omega T) - 1 = \\ &= 4 \cos(2\omega T + \omega T) - 2[\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)] + 2 \cos(\omega T) - 1 = \\ &= 4[\cos(2\omega T) \cos(\omega T) - \sin(2\omega T) \sin(\omega T)] - \\ &- 2[2 \cos^2(\omega T) - 1] + 2 \cos(\omega T) - 1 = \\ &= 4[\cos^2(\omega T) - \sin^2(\omega T)] \cos(\omega T) - 8 \sin^2(\omega T) \cos(\omega T) - \\ &- 4 \cos^2(\omega T) + 2 + 2 \cos(\omega T) - 1 = \\ &= 4 \cos^3(\omega T) - 4[1 - \cos^2(\omega T)] \cos(\omega T) - \\ &- 8[1 - \cos^2(\omega T)] \cos(\omega T) - 4 \cos^2(\omega T) + 2 \cos(\omega T) + 1 = \\ &= 16 \cos^3(\omega T) - 4 \cos^2(\omega T) - 10 \cos(\omega T) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.216) \quad v(\omega) &= 4 \sin 3\omega T - 2 \sin 2\omega T + 2 \sin \omega T = \\
&= 4 \sin(2\omega T + \omega T) - 4 \sin \omega T \cos \omega T + 2 \sin \omega T = \\
&= 4(\sin 2\omega T \cos \omega T + \sin \omega T \cos 2\omega T) - \\
&\quad - 4 \sin \omega T \cos \omega T + 2 \sin \omega T = \\
&= 8 \sin \omega T \cos^2 \omega T + 4 \sin \omega T (\cos^2 \omega T - \sin^2 \omega T) - \\
&\quad - 4 \sin \omega T \cos \omega T + 2 \sin \omega T = \\
&= 8 \sin \omega T (1 - \sin^2 \omega T) + 4 \sin \omega T (1 - 2 \sin^2 \omega T) - \\
&\quad - 4 \sin \omega T \cos \omega T + 2 \sin \omega T = \\
&= 14 \sin \omega T - 16 \sin^3 \omega T - 4 \sin \omega T \cos \omega T = \\
&= 2 \sin \omega T (7 - 8 \sin^2 \omega T - 2 \cos \omega T) = \\
&= 2 \sin \omega T (8 \cos^2 \omega T - 2 \cos \omega T - 1)
\end{aligned}$$

Решенијата на равенките (4.216) – (4.217) на интервалот  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{T}\right)$  се:

$$\begin{aligned}
(4.217) \quad \cos \omega_1 T &= 0.87968 & \text{односно:} & \quad \omega_1 T = 28.4^{\circ} \\
\cos \omega_3 T &= 0.097718 & \text{односно:} & \quad \omega_3 T = 84.4^{\circ} \\
\cos \omega_5 T &= -0.7274 & \text{односно:} & \quad \omega_5 T = 136.7^{\circ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.218) \quad \sin \omega_0 T &= 0 & \text{односно:} & \quad \omega_0 T = 0^{\circ} \\
\sin \omega_2 T &= 0.5 & \text{односно:} & \quad \omega_2 T = 60^{\circ} \\
\sin \omega_4 T &= -0.25 & \text{односно:} & \quad \omega_4 T = 104.5^{\circ} \\
\sin \omega_6 T &= 0 & \text{односно:} & \quad \omega_6 T = 180^{\circ}
\end{aligned}$$

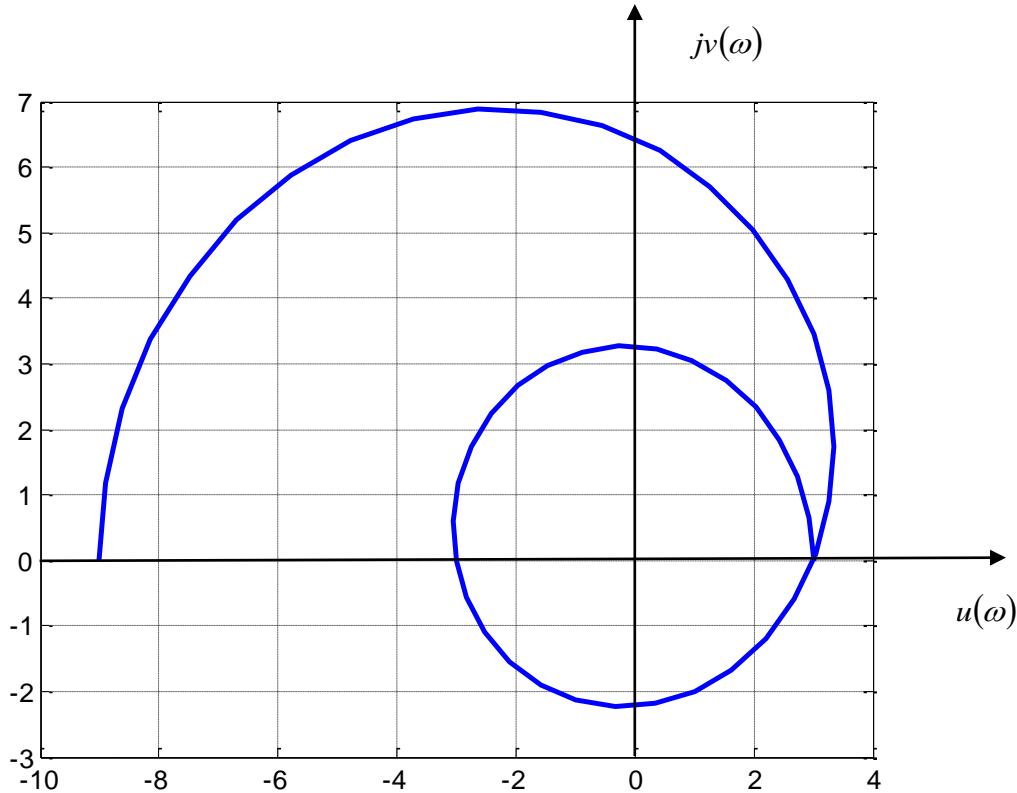
и тие наплно ја определуваат карактеристичната крива на системот, прикажана на Слика 4.21. Од текот на оваа крива се гледа дека набљудуваниот дискретен систем сигурно е стабилен по критериумот на Михаилов, бидејќи кривата започнува на позитивниот дел од реалната оска во конечна точка  $[u(0), jv(0)] = [3, j0]$ , се одвива во позитивна насока, наизменично ги сече координатните оски во точките:

$$\begin{aligned}
(4.219) \quad [u(\omega_1), jv(\omega_1)] &= [0, j3.3] \\
[u(\omega_2), jv(\omega_2)] &= [-3, j0] \\
[u(\omega_3), jv(\omega_3)] &= [0, -j2.2] \\
[u(\omega_4), jv(\omega_4)] &= [3, j0] \\
[u(\omega_5), jv(\omega_5)] &= [0, j6.4]
\end{aligned}$$

завршува во конечна точка на негативниот дел од реалната оска  $[u(\omega_6), jv(\omega_6)] = [-9, j0]$ , што одговара на случајот за систем од непарен ред, во ниту еден случај не минува низ координатниот почеток на комплексната рамнина во која е претставена и вкупната

измена на аргументот на векторот  $a(j\omega)$ , кој монотono расте во позитивна насока, изнесува:

$$(4.220) \quad \Delta_{0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}} \arg[a(j\omega)] = 3\pi = k\pi$$



Слика 4.21. Графички приказ на кривата на Михайлов за дискретниот систем со карактеристичен полином (4.214)

**Задача 4.13.** Врз основа на дадената крива на Михайлов од Слика 4.18, да се определат половите и карактеристичниот полином на соодветниот затворен дискретен систем од трет ред.

**Решение:** Половите на еден дискретен систем се нули на неговиот карактеристичен полином, кој за систем од трет ред има општ облик:

$$(4.221) \quad a(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = a_0 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$

каде што  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  се половите на системот. Карактеристичниот вектор на системот, пак, чиј ходограф има изглед како на Слика 4.18, е од облик:

$$(4.222) \quad a(j\omega) = a_0(e^{j\omega T} - z_1)(e^{j\omega T} - z_2)(e^{j\omega T} - z_3)$$

Бидејќи кривата од Слика 4.18 минува низ координатниот почеток за  $\omega = 0$ , следува дека за набљудуваниот дискретен систем важи:

$$(4.223) \quad |a(j0)| = 0$$

Оттука и од (4.223) непосредно произлегува дека набљудуваниот дискретен систем има еден пол во точката  $z = 1$ :

$$(4.224) \quad |a(j0)| = |1 - z_1||1 - z_2||1 - z_3| = 0$$

Нека тоа биде, на пример, полот  $z_1$ . Во продолжение, кривата од Слика 4.18 минува низ координатниот почеток од комплексната рамнина за уште една вредност на  $\omega$ ,  $\omega = \frac{\pi}{2T}$ , па, за набљудуваниот дискретен систем важи:

$$(4.225) \quad \left| a\left(j\frac{\pi}{2T}\right) \right| = 0$$

Оттука и од (4.223) непосредно следува дека, на пример:

$$(4.226) \quad \left| e^{j\frac{\pi}{2}} - z_2 \right| = |j - z_2| = 0$$

што значи дека системот има еден комплексен пол во точката  $z_2 = j$ . Меѓутоа, ако  $z_2 = j$  е комплексен пол на системот, тогаш и неговиот коњугирано-комплексен пар  $\bar{z}_2 = -j$  ќе биде исто така пол на системот, што значи дека  $z_3 = -j$ . На овој начин се определени сите три полови на набљудуваниот дискретен систем од трет ред, а со тоа е определен и неговиот карактеристичен полином со точност до константата  $a_0$ . Таа се

определува од условот  $\left[ u\left(\frac{\pi}{T}\right), jv\left(\frac{\pi}{T}\right) \right] = [-4, j0]$ :

$$(4.227) \quad a\left(j\frac{\pi}{T}\right) = a_0(e^{j\pi} - 1)(e^{j\pi} - j)(e^{j\pi} + j) = \\ = a_0(-1 - 1)(-1 - j)(-1 + j) = -4a_0 = -4$$

и е еднаква на единица,  $a_0 = 1$ . Оттука, карактеристичниот полином на набљудуваниот дискретен систем ќе биде од облик:

$$(4.228) \quad a(z) = (z-1)(z-j)(z+j) = (z-1)(z^2+1) = z^3 - z^2 + z - 1$$

**Задача 4.14.** Да се определи квалитативно положбата на половите во  $z$ -комплексната рамнина на затворениот дискретен систем од трет ред кој го задоволува неопходниот услов за стабилност, ако неговата карактеристична крива има тек како на Слика 4.20.

**Решение:** Карактеристичниот полином на набљудуваниот затворен дискретен систем е од облик (4.222), а неговиот карактеристичен вектор е од облик (4.223). Бидејќи карактеристичната крива од Слика 4.20 минува низ координатниот почеток само за една вредност на фреквенцијата  $\omega$ , некоја  $\omega_c$ , следува дека:

$$(4.229) \quad |a(j\omega_c)| = |a_0| |e^{j\omega_c T} - z_1| \cdot |e^{j\omega_c T} - z_2| \cdot |e^{j\omega_c T} - z_3| = 0$$

односно системот има комплексен пол во точката  $e^{j\omega_c T}$  со модул еднаков на единица. Меѓутоа, ако  $e^{j\omega_c T}$  претставува пол на набљудуваниот систем, тогаш и неговиот коњугирано-комплексен пар  $e^{-j\omega_c T}$  исто така ќе претставува пол на системот. Останува дека третиот пол на системот мора да биде реален, зошто комплексните полови секогаш се јавуваат во коњугирано-комплексни парови. Од условот дека:

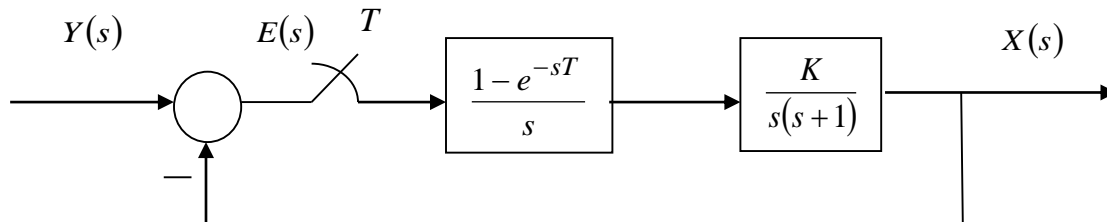
$$(4.230) \quad a(0) = a_3 = a_0(-z_1)(-z_2)(-z_3) = -a_0 z_3$$

и условот дека системот ги исполнува неопходните услови за стабилност, според кои:

$$(4.231) \quad a_3^2 < a_0^2$$

следува дека единствениот реален пол  $z_3$  на системот лежи во внатрешноста на единичниот круг  $|z| \leq 1$ . Следствено, системот има пар коњугирано-комплексни полови на кружницата  $|z| = 1$  и еден реален пол во внатрешноста на единичниот круг  $|z| \leq 1$ .

**Задача 4.15.** Со помош на билинеарната трансформација (4.20) да се определи интервалот дозволени вредности на променливиот параметар  $K$ , за кои затворениот дискретен систем од Слика 4.22 ќе биде стабилен. Да се усвои:  $T = 1s$  и  $\frac{1}{e} \approx \frac{1}{3}$ .



Слика 4.22. Илустрација кон Задача 4.15

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.22 е:

$$\begin{aligned}
 (4.232) \quad G_0(z) &= Z \left\{ L^{-1} \left[ K \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)} \right] \right\} = K \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s+1)} \right] \right\} = \\
 &= K \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right] \right\} = K \frac{z-1}{z} \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] = \\
 &= K \frac{z-1}{z} \left[ \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \right] = K \left( \frac{1}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-\frac{1}{3}} \right) = \\
 &= K \frac{\frac{1}{3}z + \frac{1}{3}}{(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)} = K \frac{z+1}{(z-1)(3z-1)}
 \end{aligned}$$

додека дискретната преносна функција на самиот затворен систем е:

$$(4.233) \quad G(z) = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)}$$

Оттука, неговиот карактеристичен полином  $a(z)$  ќе биде:

$$\begin{aligned}
 (4.234) \quad a(z) &= (z-1)(3z-1) + K(z+1) = \\
 &= 3z^2 + (K-4)z + K+1 = \\
 &= a_0z^2 + a_1z + a_2
 \end{aligned}$$

Условите за стабилност на набљудуваниот затворен дискретен систем, според методот на билинеарната трансформација (4.20), се:

$$\begin{aligned}
 (4.235) \quad a_0 + a_1 + a_2 &> 0 \\
 a_0 - a_2 &> 0 \\
 a_0 - a_1 + a_2 &> 0
 \end{aligned}$$

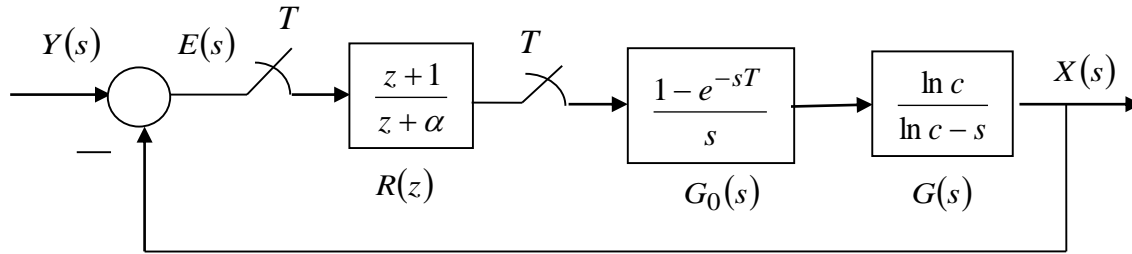
од каде што непосредно следуваат ограничувањата:

$$\begin{aligned}
 (4.236) \quad K &> 0 \\
 8 &> 0 \\
 2 - K &> 0
 \end{aligned}$$

Вториот услов од (4.237) е секогаш исполнет, а првиот и третиот го дефинираат интервалот дозволени вредности на променливиот параметар  $K$  од набљудуваниот затворен дискретен систем, за кои системот сигурно ќе биде стабилен:

$$(4.237) \quad 0 < K < 2$$

**Задача 4.16.** Да се определи интервалот вредности на параметарот  $\alpha$  на дискретниот регулатор  $R(z)$  во блок-шешата од Слика 4.23, за кои набљудуваниот затворен систем на автоматско управување ќе биде стабилен. Под претпоставка,  $0 < c < 1$  и  $T = 1s$ .



Слика 4.23. Илустрација кон Задача 4.16

**Решение:** Карактеристичниот полином  $a(z)$  на иследуваниот затворен систем на автоматско управување од Слика 4.23 е даден со именителот на дробно-рационалниот израз:

$$(4.238) \quad a(z) = 1 + R(z)G_0G(z) = 0$$

каде што  $G_0G(z)$  е дискретната преносна функција на континуалниот дел во директната гранка од системот:

$$\begin{aligned} (4.239) \quad G_0G(z) &= Z\left\{L^{-1}[G_0(s)G(s)]\right\} = \\ &= Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{\ln c}{\ln c - s}\right]\right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{-\ln c}{s(s-\ln c)}\right]\right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-\ln c}\right]\right\} = \\ &= \frac{z-1}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-c}\right) = \frac{1-c}{z-c} \end{aligned}$$

Оттука, изразот (4.239) добива облик:

$$(4.240) \quad a(z) = 1 + \frac{z+1}{z+\alpha} \cdot \frac{1-c}{z-c} = 0$$



па, карактеристичниот полином  $a(z)$  на набљудуваниот затворен систем ќе биде:

$$(4.241) \quad a(z) = (z + \alpha)(z - c) + (1 - c)(z + 1) = \\ = z^2 + (1 + \alpha - 2c)z + 1 - c - \alpha c$$

Во согласност со условите (4.236), полиномот (4.242) ќе биде Хурвицов  $z$  – полином, ако и само ако едновременно се исполнети следните услови:

$$(4.242) \quad \begin{aligned} 1 + (1 + \alpha - 2c) + (1 - c - \alpha c) &= (1 - c)(3 + \alpha) > 0 \\ 1 - (1 - c - \alpha c) &= c(1 + \alpha) > 0 \\ 1 - (1 + \alpha - 2c) + (1 - c - \alpha c) &= (1 + c)(1 - \alpha) > 0 \end{aligned}$$

кои, со оглед на претпоставката од задачата за вредностите на параметарот  $c$ , се сведуваат на условите:

$$(4.243) \quad \begin{aligned} 3 + \alpha &> 0 \\ 1 + \alpha &> 0 \\ 1 - \alpha &> 0 \end{aligned}$$

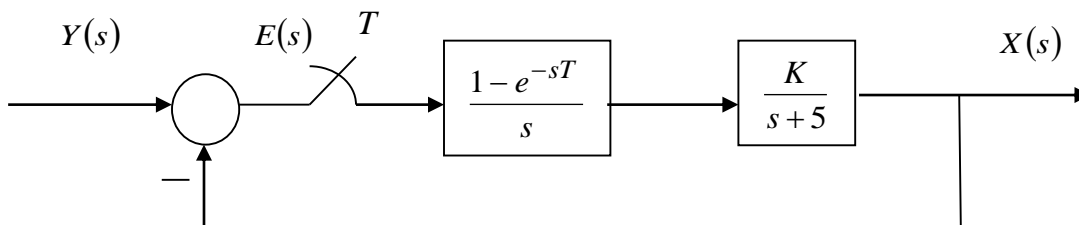
Оттука следуваат долните ограничувања на вредностите на променливиот параметар  $\alpha$  на набљудуваниот систем од Слика 4.23:

$$(4.244) \quad \begin{aligned} \alpha &> -3 \\ \alpha &> -1 \\ \alpha &< 1 \end{aligned}$$

па, интервалот дозволени вредности на параметарот  $\alpha$ , за кои зададениот затворен систем на автоматско управување од Слика 4.23 ќе биде стабилен, изнесува:

$$(4.245) \quad -1 < \alpha < 1$$

**Задача 4.17.** Со помош на билинеарната трансформација (4.20) во рамнината  $(T, K)$  да се определи аналитички и графички параметарската област на стабилност  $D$  на затворениот систем од Слика 4.24.



Слика 4.24. Илустрација кон Задача 4.17

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.24 е:

$$\begin{aligned}
 (4.246) \quad G_0(z) &= Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s+5} \right] \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{K}{s(s+5)} \right] \right\} = \\
 &= K \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{5s} - \frac{1}{5(s+5)} \right] \right\} = \frac{K}{5} \cdot \frac{z-1}{z} Z \left\{ (1 - e^{-5t}) h(t) \right\} = \\
 &= \frac{K}{5} \cdot \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-5T}} \right) = \frac{K}{5} \left( 1 - \frac{z-1}{z - e^{-5T}} \right) = \\
 &= \frac{K}{5} \cdot \frac{z - e^{-5T} - z + 1}{z - e^{-5T}} = \frac{K(1 - e^{-5T})}{5(z - e^{-5T})}
 \end{aligned}$$

додека дискретната преносна функција  $G(z)$  на самиот затворен систем е:

$$(4.247) \quad G(z) = \frac{G_0(z)}{1 + G_0(z)} = \frac{5(z - e^{-5T})}{5(z - e^{-5T}) + K(1 - e^{-5T})}$$

Оттука, карактеристичниот полином  $a(z)$  на испитуваниот систем ќе биде:

$$(4.248) \quad a(z) = 5z + K(1 - e^{-5T}) - 5e^{-5T} = a_1 z + a_0$$

а условите тој да биде Хурвицов  $z$ -полином, односно сите негови нули да лежат во внатрешноста на единичниот круг  $|z| \leq 1$ , се сведуваат на:

$$(4.249) \quad a_1 + a_0 > 0$$

$$a_1 - a_0 > 0$$

Условите (4.250) ги даваат следните ограничувања за дозволените вредности на параметрите  $T$  и  $K$  на набљудуваниот затворен систем од Слика 4.24, за кои тој ќе биде стабилен:

$$(4.250) \quad 5 + K(1 - e^{-5T}) - 5e^{-5T} = (1 - e^{-5T})(K + 5) > 0$$

$$5 - K(1 - e^{-T}) + 5e^{-5T} = 5(1 + e^{-5T}) - K(1 - e^{-5T}) > 0$$

Со оглед на тоа дека:

$$(4.251) \quad 1 - e^{-5T} > 0 \quad \forall T > 0$$

ограничувањата (4.251) се сведуваат на следните услови:

$$(4.252) \quad K + 5 > 0$$

$$5(1 + e^{-5T}) - K(1 - e^{-5T}) > 0$$

Оттука, бараната параметарската област на стабилност  $D$  на набљудуваниот затворен систем од Слика 4.24 аналитички е определена со изразот:

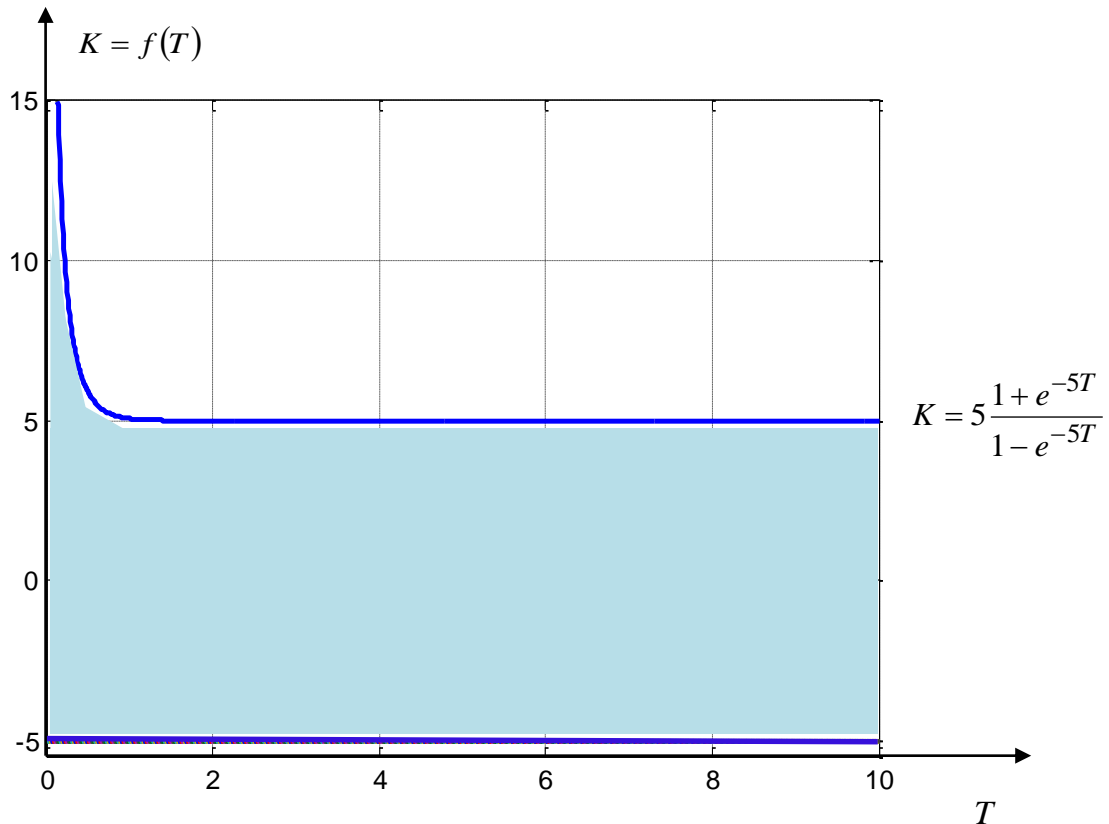
$$(4.253) \quad -5 < K < 5 \frac{1 + e^{-5T}}{1 - e^{-5T}} = f(T)$$

каде што  $f(T)$  е експоненцијално опаѓачка аperiодична функција со следните гранични вредности:

$$(4.254) \quad f(0) = \lim_{T \rightarrow 0} f(T) = +\infty$$

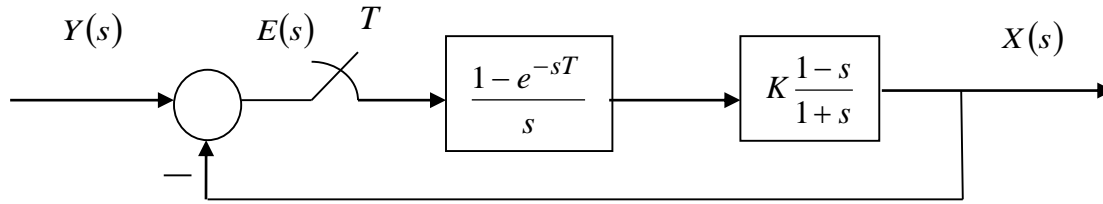
$$f(\infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = 5$$

Истата графички е прикажана на Слика 4.25.



Слика 4.25. Графички приказ на параметарската област на стабилност  $D$  на затворениот дискретен систем од Слика 4.24

**Задача 4.18.** Со помош на билинеарната трансформација (4.20), во рамнината  $(T, K)$  да се определи аналитички и графички параметарската област на стабилност  $D$  на затворениот систем од Слика 4.26.



Слика 4.26. Илустрација кон Задача 4.18

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.26 е:

$$\begin{aligned}
 (4.255) \quad G_0(z) &= Z \left\{ L^{-1} \left[ K \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1 - s}{1 + s} \right] \right\} = K \frac{z - 1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1 - s}{s(1 + s)} \right] \right\} = \\
 &= K \frac{z - 1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{2}{s + 1} \right] \right\} = K \frac{z - 1}{z} \left( \frac{z}{z - 1} - 2 \frac{z}{z - e^{-T}} \right) = \\
 &= K \left( 1 - 2 \frac{z - 1}{z - e^{-T}} \right) = K \frac{-z + 2 - e^{-T}}{z - e^{-T}}
 \end{aligned}$$

Следствено, карактеристичниот полином  $a(z)$  на затворениот дискретен систем ќе биде броител на дробно-рационалниот израз:

$$(4.256) \quad 1 + G(z) = 1 + K \frac{-z + 2 - e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

и ќе има облик:

$$(4.257) \quad a(z) = (1 - K)z + 2K - (1 + K)e^{-T} = a_0 z + a_1$$

Потребните и доволни услови за стабилност на затворениот дискретен систем од Слика 4.26 според билинеарната трансформација (4.20) се дадени со (4.250), од каде што непосредно следуваат ограничувањата:

$$(4.258) \quad (1 - e^{-T})(1 + K) > 0, \quad 1 + e^{-T} - (3 - e^{-T})K > 0$$

Заради својата физичка природа, константата  $T$  секогаш е позитивен реален број (претставува време), па важи:

$$(4.259) \quad 1 - e^{-T} > 0 \quad \forall T > 0, \quad (T \in \mathbb{R})$$

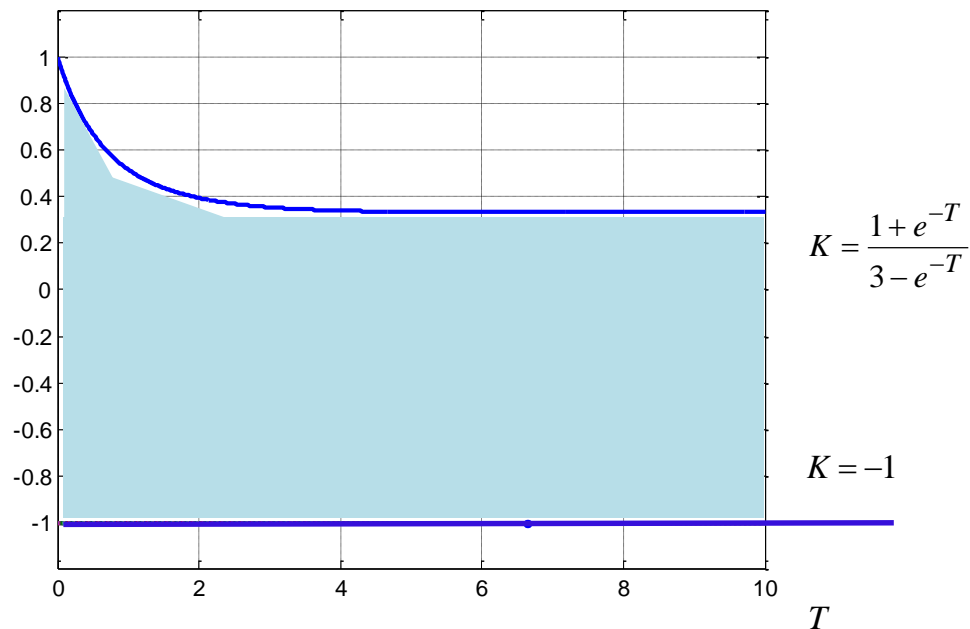
Оттука, ограничувањата (4.259) се сведуваат на условите:

$$(4.260) \quad 1 + K > 0, \quad 1 + e^{-T} - (3 - e^{-T})K > 0$$

$$(4.261) \quad -1 < K < \frac{1+e^{-T}}{3-e^{-T}}$$

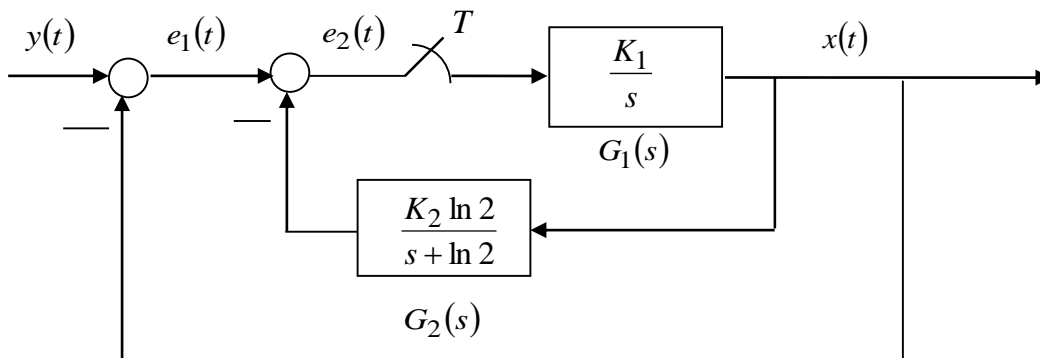
Параметарската област на стабилност  $D$  на набљудуваниот дискретен систем е прикажана графички на Слика 4.27.

$$K = f(T)$$



Слика 4.27. Графички приказ на областа (4.262)

**Задача 4.19.** Со помош на билинеарната трансформација (4.20), во рамнината  $(K_1, K_2)$  да се определи аналитички и графички параметарската област на стабилност  $\Sigma$  на затворениот дискретен систем од Слика 4.28. Периодот на дискретизација  $T$ , под претпоставка, е  $T = 1s$ .



Слика 4.28. Илустрација кон Задача 4.19

**Решение:** Од структурната блок-шема на Слика 4.28 непосредно следуваат односите:

$$(4.262) \quad X(s) = G_1(s)E_2^*(s)$$

$$(4.263) \quad E_2(s) = E_1(s) - G_2(s)X(s)$$

$$(4.264) \quad E_1(s) = Y(s) - X(s)$$

од каде, со воведување на (4.265) во (4.264), се добива:

$$(4.265) \quad E_2(s) = [Y(s) - X(s)] - G_2(s)X(s) = \\ = Y(s) - [1 + G_2(s)]X(s)$$

Имајќи ја на ум зависноста (4.263), изразот (4.266) може да се доведе на облик:

$$(4.266) \quad E_2(s) = Y(s) - [1 + G_2(s)]G_1(s)E_2^*(s) = \\ = Y(s) - G_1(s)E_2^*(s) - G_1(s)G_2(s)E_2^*(s)$$

па, во просторот на  $( )^*$  - сликите, за сигналот  $e_2(t)$  важи:

$$(4.267) \quad E_2^*(s) = \frac{1}{1 + G_1^*(s) + G_1G_2^*(s)} Y^*(s)$$

Едновремено, за излезот  $x(t)$  на набљудуваниот систем во просторот на  $( )^*$  - сликите се добива:

$$(4.268) \quad X^*(s) = G_1^*(s)E_2^*(s)$$

што лесно може да се заклучи врз основа на (4.263), па, оттука, со воведување на (4.268) во (4.269) се добива:

$$(4.269) \quad X^*(s) = \frac{G_1^*(s)}{1 + G_1^*(s) + G_1G_2^*(s)} Y^*(s)$$

Со смената:

$$(4.270) \quad z = e^{sT}$$

од просторот на  $( )^*$  - сликите се поминува во просторот на  $Z$  - сликите и изразите (4.269) и (4.270) стануваат:

$$(4.271) \quad E_2(z) = \frac{1}{1 + G_1(z) + G_1 G_2(z)} Y(z)$$

$$X(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z) + G_1 G_2(z)} Y(z)$$

Тие го карактеризираат соодветниот дискретен модел на набљудуваниот динамички систем од Слика 4.28, чиј карактеристичен полином е броителот на изразот:

$$(4.272) \quad 1 + G_1(z) + G_1 G_2(z) = \frac{a(z)}{A(z)}$$

каде што:

$$(4.273) \quad G_1(z) = Z\left\{L^{-1}[G_1(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{K_1}{s}\right]\right\} = K_1 \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(4.274) \quad G_1 G_2(z) = Z\left\{L^{-1}[G_1(s)G_2(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{K_1 K_2 \ln 2}{s(s + \ln 2)}\right]\right\} =$$

$$= K_1 K_2 Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \ln 2}\right]\right\} =$$

$$= K_1 K_2 \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}}\right) = \frac{K_1 K_2 z}{(z-1)(2z-1)}, \quad |z| > 1$$

Следствено, за  $a(z)$  се добива:

$$(4.275) \quad a(z) = (z-1)(2z-1) + K_1 z(2z-1) + K_1 K_2 z =$$

$$= 2(K_1 + 1)z^2 + (K_1 K_2 - K_1 - 3)z + 1 =$$

$$= a_0 z^2 + a_1 z + a_2$$

Потребни и доволни услови за стабилност на набљудуваниот дискретен систем, кога се користи билинеарната трансформација (4.20), се:

$$(4.276) \quad a_0 + a_1 + a_2 > 0$$

$$a_0 - a_2 > 0$$

$$a_0 - a_1 + a_2 > 0$$

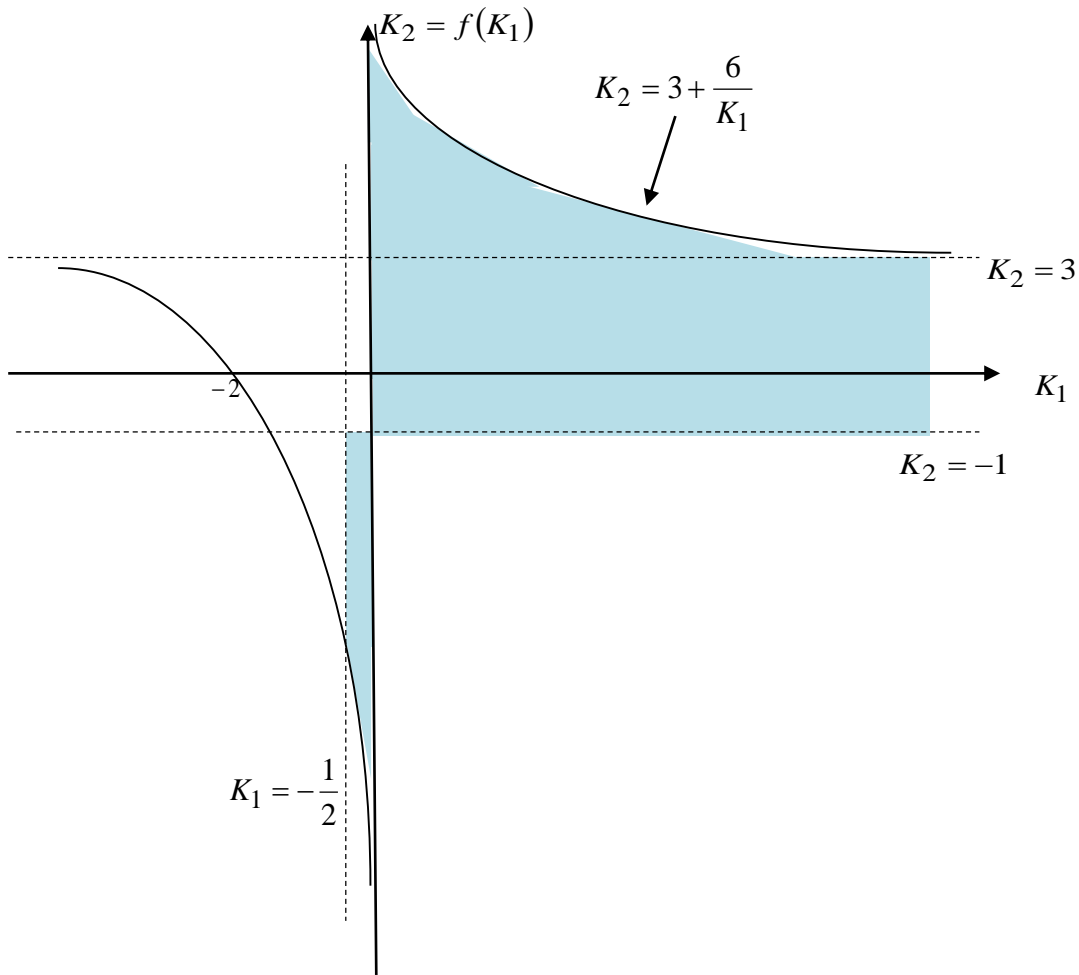
од каде што непосредно следуваат ограничувањата:

$$(4.277) \quad \begin{aligned} K_1(1+K_2) &> 0 \\ 2K_1+1 &> 0 \\ 3K_1+6-K_1K_2 &> 0 \end{aligned}$$

Параметарската област на стабилност  $D$  на набљудуваниот дискретен систем ја сочинуваат дозволените вредности на променливите параметри на системот  $K_1$  и  $K_2$  за кои системот е стабилен, и аналитички таа е дефинирана со неравенствата:

$$(4.278) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{2} < K_1 < 0, & \quad 3 + \frac{6}{K_1} < K_2 < -1 \\ 0 < K_1, & \quad -1 < K_2 < 3 + \frac{6}{K_1} \end{aligned}$$

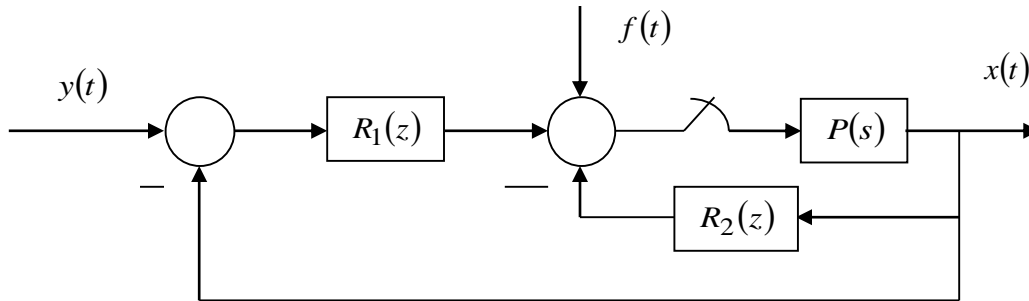
а графички е прикажана на Слика 4.29.



Слика 4.29. Графички приказ на областа (4.279)



**Задача 4.20.** Даден е стабилен затворен дискретен систем на автоматско управување од Слика 4.30, со влез  $y(t)$  и излез  $x(t)$ .



Слика 4.30. Илустрација кон Задача 4.20

а) Да се определи  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот на системот  $x(t)$ . б) Да се определат половите на дискретниот регулатор  $R(z)$ , кои ќе обезбедат компонентата на грешката во системот предизвикана од влијанието на пречките  $f(t)$  да биде нулева во стационарна состојба, ако, под претпоставка,  $T = 1s$ . и:

$$(4.279) \quad R(z) = R_1(z) + R_2(z) = \frac{cz + d}{z^2 + az + b}$$

$$(4.280) \quad P(s) = \frac{\ln 2}{s(s + \ln 2)}$$

$$(4.281) \quad f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

в) Во продолжение, под претпоставка дека  $a = -1$ , да се определат параметрите  $c$  и  $d$  на регулаторот  $R(z)$ .

**Решение:** Врз основа на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, можат да се постават следните релации:

$$(4.282) \quad X(s) = P(s)E_2^*(s)$$

$$(4.283) \quad E_2(s) = F(s) + R_1^*(s)E_1^*(s) - R_2^*(s)X(s)$$

$$(4.284) \quad E_1(s) = Y(s) - X(s)$$

Оттука непосредно следува:

$$(4.285) \quad X^*(s) = P^*(s)E_2^*(s)$$

$$(4.286) \quad E_2^*(s) = F^*(s) + R_1^*(s)E_1^*(s) - R_2^*(s)X^*(s)$$

$$(4.287) \quad E_1^*(s) = Y^*(s) - X^*(s)$$

или во  $z$  – комплексното подрачје:

$$(4.288) \quad X(z) = P(z)E_2(z)$$

$$(4.289) \quad E_2(z) = F(z) + R_1(z)E_1(z) - R_2(z)X(z)$$

$$(4.290) \quad E_1(z) = Y(z) - X(z)$$

Со решавање на горниот систем равенки (4.289) – (4.291):

$$(4.291) \quad X(z) = P(z)E_2(z) = P(z)F(z) + R_1(z)P(z)E_1(z) - R_2(z)P(z)X(z) = \\ = P(z)F(z) + R_1(z)P(z)Y(z) - R_1(z)P(z)X(z) - R_2(z)P(z)X(z)$$

за  $Z$  – сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот затворен систем на автоматско управување, се добива:

$$(4.292) \quad X(z) = G_R(z)Y(z) + G_F(z)F(z) = \\ = \frac{R_1(z)G(z)}{1 + [R_1(z) + R_2(z)]G(z)} Y(z) + \frac{G(z)}{1 + [R_1(z) + R_2(z)]G(z)} F(z) = \\ = \frac{R_1(z)P(z)}{1 + R(z)P(z)} R(z) + \frac{P(z)}{1 + R(z)P(z)} F(z); \quad R(z) = R_1(z) + R_2(z)$$

додека грешката во системот  $e(kT)$ , во просторот на  $Z$  – сликите е определена со изразот:

$$(4.293) \quad E(z) = Y(z) - X(z) = \\ = \frac{1 + R_2(z)G(z)}{1 + [R_1(z) + R_2(z)]G(z)} Y(z) - \frac{G(z)}{1 + [R_1(z) + R_2(z)]G(z)} F(z) = \\ = \frac{R_2(z)P(z)}{1 + R(z)P(z)} Y(z) - \frac{P(z)}{1 + R(z)P(z)} F(z) = \\ = E_R(z) + E_F(z); \quad R(z) = R_1(z) + R_2(z)$$

Очигледно, таа има две компоненти – едната, која зависи од референтниот влез  $y(t)$  и втората, која зависи од несаканите надворешни пречки  $f(t)$ . Оваа втората, во  $z$  – комплексното подрачје е дадена со изразот:

$$(4.294) \quad E_f(z) = -\frac{P(z)}{1 + R(z)P(z)} F(z); \quad R(z) = R_1(z) + R_2(z)$$

каде што:

$$(4.295) \quad P(z) = Z\{P(s)\} = Z\left\{\frac{\ln 2}{s(s + \ln 2)}\right\} = Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \ln 2}\right\} = Z\left\{\left(1 - e^{-t \ln 2}\right)h(t)\right\} =$$

$$= Z\left\{\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t\right]h(t)\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{2z-1} =$$

$$= z \frac{2z-1-2z+2}{(z-1)(2z-1)} = \frac{z}{(z-1)(2z-1)}; \quad |z| > 1$$

Нејзината стационарна вредност, под направената претпоставка дека набљудуваниот дискретен систем е стабилен, се определува со помош на втората гранична теорема на  $Z$ -трансформацијата. Оттука, условот стационарната компонента на грешката  $e_F(t)$  да биде еднаква на нула, ќе гласи:

$$(4.296) \quad e_F(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_F(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e_F(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_F(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{-G(z)}{1 + [R_1(z) + R_2(z)]G(z)} F(z) =$$

$$= -\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{\frac{z}{(z-1)(2z-1)}}{1 + \frac{z}{(z-1)(2z-1)} \cdot \frac{cz+d}{z^2+az+b}} \cdot \frac{z}{z-1} =$$

$$= -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2(z^2+az+b)}{(z-1)(2z-1)(z^2+az+b) + z(cz+d)} = -\frac{1+a+b}{c+d} = 0$$

од каде што непосредно следува дека:

$$(4.297) \quad 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow b = -1 - a$$

Бараните полови на дискретниот регулатор се добиваат како решение на равенката:

$$(4.298) \quad z^2 + az + b = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(-1-a)}}{2} = \frac{-a \pm (a+2)}{2} \Rightarrow$$

и тие се:

$$(4.299) \quad z_1 = 1; \quad z_2 = -1 - a$$

Карактеристичниот полином  $a(z)$  на набљудуваниот дискретен систем претставува броител во дробно-рационалниот израз  $1 + P(z)R(z)$ , кој е именител на преносната функција на системот:

$$(4.300) \quad 1 + P(z)R(z) = 1 + \frac{z}{(z-1)(2z-1)} \cdot \frac{cz+d}{z^2+az+b} =$$

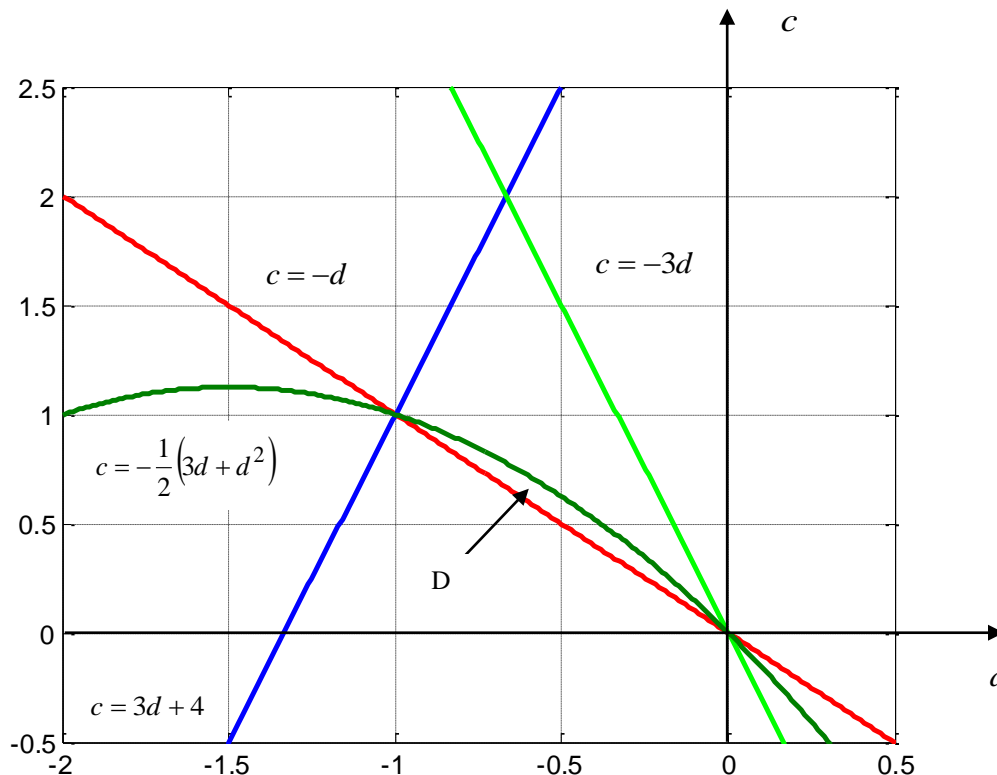
$$= 1 + \frac{z}{(z-1)(2z-1)} \cdot \frac{cz+d}{z^2-z} = 1 + \frac{z}{(z-1)(2z-1)} \cdot \frac{cz+d}{z(z-1)} =$$

$$= \frac{(z-1)^2(2z-1) + (cz+d)}{(z-1)^2(2z-1)} = \frac{2z^3 - 5z^2 + (4+c)z + (d-1)}{(z-1)^2(2z-1)}$$

Оттука:

$$(4.301) \quad a(z) = (z-1)^2(2z-1) + cz + d =$$

$$= 2z^3 - 5z^2 + (c+4)z + (d-1) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$$



Слика 4.31. Параметарска област на стабилност на системот од Слика 4.30

Бидејќи, под претпоставка, набљудуваниот затворен дискретен систем на автоматско управување од задачата е стабилен, карактеристичниот полином  $a(z)$  ќе биде Хурвицов  $z$ -полином, што може да се провери со некој од критериумите за испитување стабилност кај линеарните дискретни системи. Така, според критериумот за стабилност со билинеарната трансформација (4.20), за  $a(z)$  ќе важат условите:

$$(4.302) \quad a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2 - 5 + c + 4 + d - 1 = c + d > 0 \Rightarrow c > -d$$

$$(4.303) \quad a_3 - a_2 + a_1 - a_0 = 2 + 5 + c + 4 - d + 1 = 12 + c - d > 0 \Rightarrow c > d - 12$$

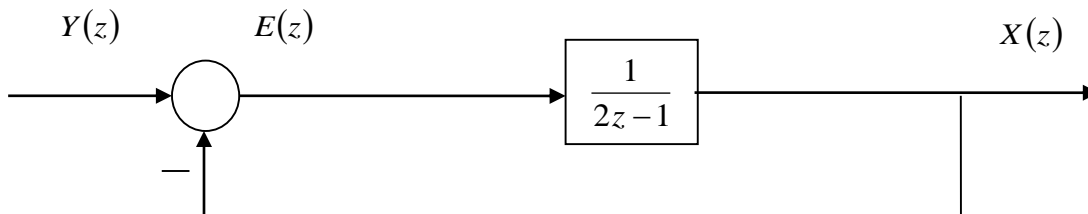
$$(4.304) \quad 3(a_3 - a_0) + (a_2 - a_1) = 3(2 - d + 1) + (-5 - c - 4) = -3d - c > 0 \Rightarrow c < -3d$$

$$(4.305) \quad 3(a_3 + a_0) - (a_2 + a_1) = 3(2 + d - 1) - (c + 4 - 5) = 4 + 3d - c > 0 \Rightarrow c < 3d + 4$$

$$(4.306) \quad 2c > -d^2 - 3d$$

Параметарската област на стабилност на набљудуваниот дискретен систем  $D$  е површината опфатена со правата  $c = -d$  и квадратната крива  $c = -\frac{1}{2}(3d + d^2)$ , помеѓу точките  $(-1,1)$  и  $(0,0)$  и таа е прикажана на Слика 4.31. Дозволените вредности за параметрите  $c$  и  $d$  се определени со точките од внатрешноста на оваа област.

**Задача 4.21.** Со помош на Најквистовиот критериум, да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем на автоматско управување, чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.32.



Слика 4.32. Илустрација кон Задача 4.21

**Решение:** Преносната функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.32 е:

$$(4.307) \quad G_0(z) = \frac{1}{2z-1}, |z| > \frac{1}{2}$$

Оттука, фреквентната преносна функција  $G_0(j\omega)$  на отворениот систем ќе има облик:

$$(4.308) \quad G_0(j\omega) = \frac{1}{2e^{j\omega T_0} - 1} = \frac{1}{2e^{j\omega T_0} - 1} \cdot \frac{2e^{-j\omega T_0} - 1}{2e^{-j\omega T_0} - 1} = \frac{2e^{-j\omega T_0} - 1}{4 - 2(e^{-j\omega T_0} + e^{-j\omega T_0}) + 1} =$$

$$= \frac{2 \cos(\omega T_0) - j2 \sin(\omega T_0) - 1}{4 - 4 \cos(\omega T_0) + 1} = \frac{2 \cos(\omega T_0) - 1}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} - j \frac{2 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)}$$

Фреквентната карактеристика на отворениот систем се црта врз основа на реалниот и имагинарниот дел од неговата фреквентна преносна функција:

$$(4.309) \quad U_0(\omega) = \frac{2 \cos(\omega T_0) - 1}{5 - 4 \cos(\omega T_0)}$$

$$(4.310) \quad V_0(\omega) = -\frac{2 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)}$$

за различни вредности на фреквенцијата  $\omega$ . Така, карактеристиката почнува во точката определена со фреквенцијата  $\omega = 0$ :

$$(4.311) \quad U_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2 \cos(\omega T_0) - 1}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 1$$

$$(4.312) \quad V_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0$$

завршува во точката определена со фреквенцијата  $\omega = \frac{\pi}{T_0}$ :

$$(4.313) \quad U_0\left(\frac{\pi}{T_0}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T_0}} U_0(\omega) = -\frac{1}{3}$$

$$(4.314) \quad V_0\left(\frac{\pi}{T_0}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T_0}} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T_0}} \frac{-2 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0$$

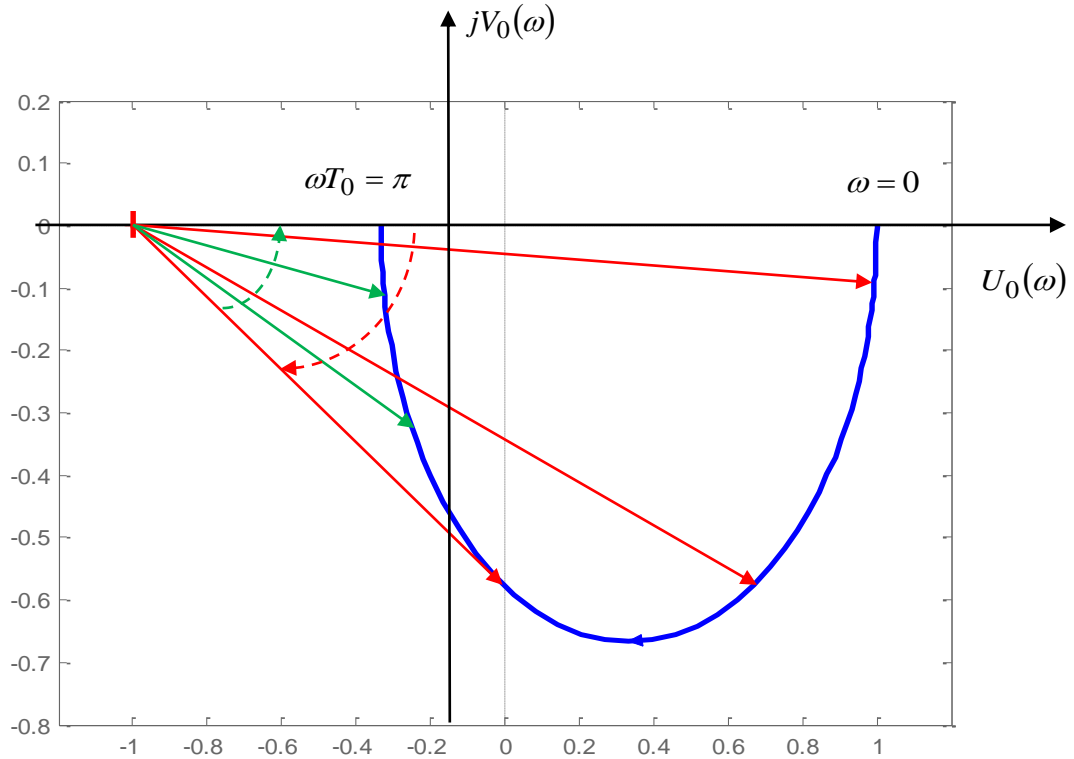
и ги сече координатните оски од комплексната рамнина  $[U_0(\omega), jV_0(\omega)]$  во точки определени со решенијата на системот равенки:

$$(4.315) \quad U_0(\omega) = \frac{2 \cos(\omega T_0) - 1}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0 \Rightarrow 2 \cos(\omega T_0) - 1 \Rightarrow \cos(\omega T_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega T_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$(4.316) \quad V_0(\omega) = -\frac{2 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0 \Rightarrow \sin(\omega T_0) = 0 \Rightarrow \omega T_0 = 0, \pi$$

Очигледно, карактеристиката има само еден пресек со имагинарната оска при фреквенцијата  $\omega = \frac{\pi}{3T_0}$ :

$$(4.317) \quad U_0\left(\frac{\pi}{3T_0}\right) = 0, \quad V_0\left(\frac{\pi}{3T_0}\right) = -\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{5 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{5 - 4 \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

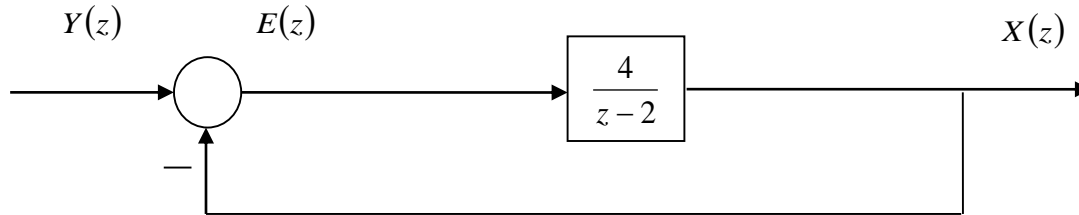


Слика 4.33. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.308)

затоа што решенијата на равенката  $V_0(\omega) = 0$  само го одредуваат почетокот и крајот на фреквентната карактеристика. Следствено, кривата на Најквист за набљудуваниот дискретен систем започнува на позитивниот дел од реалната оска во точката  $[1, j0]$ , се одвива во негативна насока, ја сече имагинарната оска во точката  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, j0\right]$  и завршува во точката  $\left[-\frac{1}{3}, j0\right]$  на негативниот дел од реалната оска. Таа е прикажана на Слика 4.33 и врз основна на нејзиниот тек, набљудуваниот затворен дискретен систем од Слика 4.32 е стабилен:

$$(4.318) \quad \Delta_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}} \arg[F(j\omega)] = -\alpha + \alpha = 0 = p_0\pi = 0$$

**Задача 4.22.** Со помош на Најквистовиот критериум, да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем на автоматско управување, чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.34.



Слика 4.34. Илустрација кон Задача 4.22

**Решение:** Преносната функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.34 е:

$$(4.319) \quad G_0(z) = \frac{4}{z-2}, \quad |z| > 2$$

Оттука, фреквентната преносна функција  $G_0(j\omega)$  на отворениот систем ќе има облик:

$$(4.320) \quad G_0(j\omega) = \frac{4}{e^{j\omega T_0} - 2} = \frac{4}{e^{j\omega T_0} - 2} \cdot \frac{4e^{-j\omega T_0} - 8}{e^{-j\omega T_0} - 2} = \frac{4e^{-j\omega T_0} - 8}{1 - 2(e^{-j\omega T_0} + e^{-j\omega T_0}) + 4} =$$

$$= \frac{4 \cos(\omega T_0) - j4 \sin(\omega T_0) - 8}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 4 \frac{\cos(\omega T_0) - 2}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} - j \frac{4 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)}$$

Фреквентната карактеристика на отворениот систем, прикажана на Слика 4.35, се црта врз основа на реалниот и имагинарниот дел од неговата фреквентна преносна функција:

$$(4.321) \quad U_0(\omega) = 4 \frac{\cos(\omega T_0) - 2}{5 - 4 \cos(\omega T_0)}$$

$$(4.322) \quad V_0(\omega) = -j \frac{4 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)}$$

за различни вредности на фреквенцијата  $\omega$ . Така, карактеристиката почнува во точката определена со фреквенцијата  $\omega = 0$ :



$$(4.323) \quad U_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 4 \frac{\cos(\omega T_0) - 2}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = -4$$

$$(4.324) \quad V_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-4 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0$$

завршува во точката определена со фреквенцијата  $\omega = \frac{\pi}{T_0}$  :

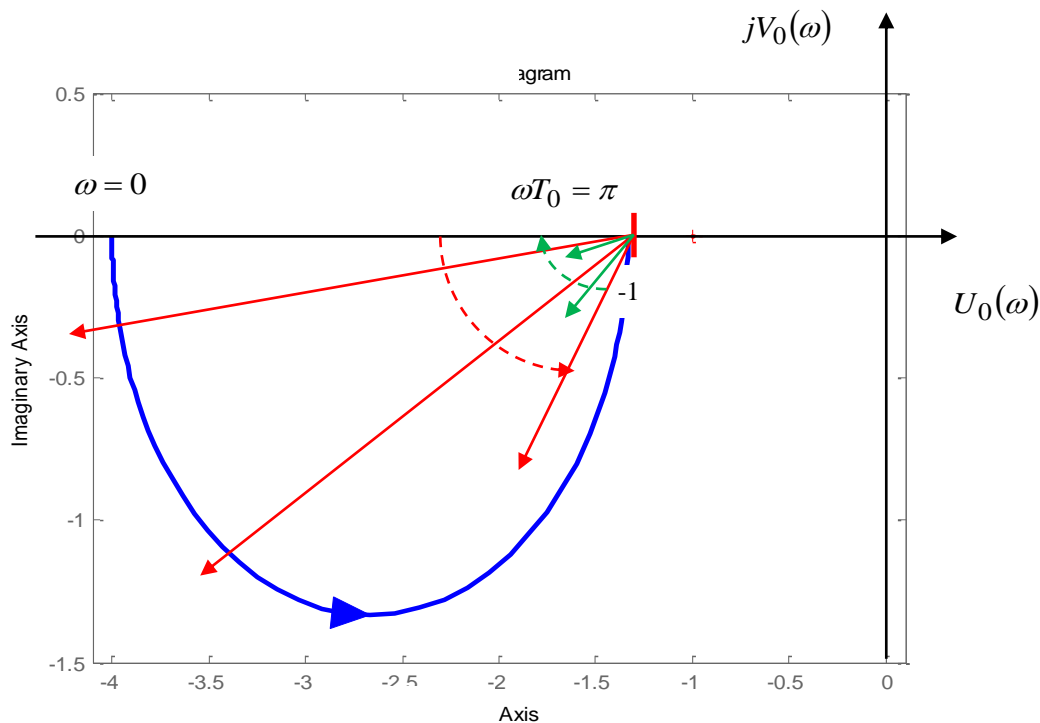
$$(4.325) \quad U_0\left(\frac{\pi}{T_0}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T_0}} U_0(\omega) = -\frac{4}{3}$$

$$(4.326) \quad V_0\left(\frac{\pi}{T_0}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T_0}} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T_0}} \frac{-4 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0^-$$

и ги сече координатните оски од комплексната рамнина  $[U_0(\omega), jV_0(\omega)]$  во точки определени со решенијата на системот равенки:

$$(4.327) \quad U_0(\omega) = 4 \frac{\cos(\omega T_0) - 2}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0 \Rightarrow \cos(\omega T_0) - 2 = 0 \Rightarrow \cos(\omega T_0) = 2 \Rightarrow \text{нема решение}$$

$$(4.328) \quad V_0(\omega) = -\frac{2 \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0 \Rightarrow \sin(\omega T_0) = 0 \Rightarrow \omega T_0 = 0, \pi$$

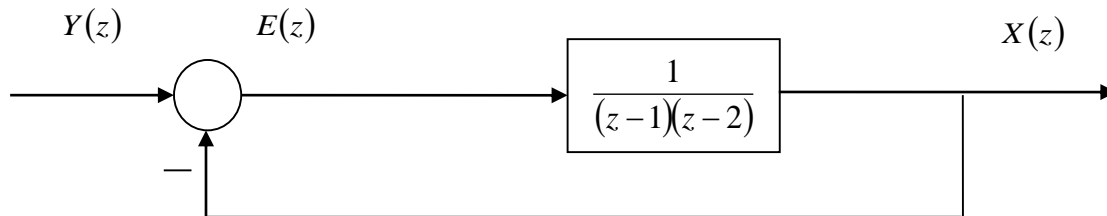


Слика 4.35. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.320)

Очигледно, карактеристиката нема пресеци со координатните оски, бидејќи решенијата на равенката  $V_0(\omega) = 0$  само ги одредуваат нејзините крајни точки. Следствено, кривата на Најквист за набљудувниот дискретен систем започнува на негативниот дел од реалната оска во точката  $[-4, j0]$ , се одвива во позитивна насока и завршува во точката  $\left[-\frac{4}{3}, j0\right]$  на негативниот дел од реалната оска. Врз основа на текот на карактеристиката од Слика 4.35, може да се заклучи дека набљудуваниот затворен дискретен систем од Слика 4.34 е нестабилен:

$$(4.329) \quad \Delta_{0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}} \arg[F(j\omega)] = \alpha - \alpha = 0 \neq p_0\pi = \pi$$

**Задача 4.23.** Со помош на Најквистовиот критериум, да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем на автоматско управување, чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.36.



Слика 4.36. Илустрација кон Задача 4.23

**Решение:** Преносната функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.36 е:

$$(4.330) \quad G_0(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Оттука, фреквентната преносна функција  $G_0(j\omega)$  на отворениот систем ќе има облик:

$$(4.331) \quad G_0(j\omega) = \frac{1}{(e^{j\omega T_0} - 1)(e^{j\omega T_0} - 2)} = \frac{1}{(e^{j\omega T_0} - 1)(e^{j\omega T_0} - 2)} \cdot \frac{(e^{-j\omega T_0} - 1)(e^{-j\omega T_0} - 2)}{(e^{-j\omega T_0} - 1)(e^{-j\omega T_0} - 2)} =$$

$$= \frac{(e^{-j2\omega T_0} - e^{-j\omega T_0} - 2e^{-j\omega T_0} + 2)}{(1 - e^{j\omega T_0} - e^{-j\omega T_0} + 1)(1 - 2e^{j\omega T_0} - 2e^{-j\omega T_0} + 4)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[\cos(2\omega T_0) - j \sin(2\omega T_0)] - 3[\cos(\omega T_0) - j \sin(\omega T_0)] + 2}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = \\
&= \frac{[\cos(2\omega T_0) - 3 \cos(\omega T_0) + 2] + j[3 \sin(\omega T_0) - \sin(2\omega T_0)]}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = \\
&= \frac{[\cos^2(\omega T_0) - \sin^2(\omega T_0) - 3 \cos(\omega T_0) + 2] + j[3 \sin(\omega T_0) - 2 \sin(\omega T_0) \cos(\omega T_0)]}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = \\
&= \frac{[2 \cos^2(\omega T_0) - 3 \cos(\omega T_0) + 1] + j \sin(\omega T_0)[3 - 2 \cos(\omega T_0)]}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]}
\end{aligned}$$

Фреквентната карактеристика на отворениот систем се црта врз основа на реалниот и имагинарниот дел од неговата фреквентна преносна функција:

$$(4.332) \quad U_0(\omega) = \frac{2 \cos^2(\omega T_0) - 3 \cos(\omega T_0) + 1}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]}$$

$$(4.333) \quad V_0(\omega) = \frac{\sin(\omega T_0)[3 - 2 \cos(\omega T_0)]}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]}$$

за различни вредности на фреквенцијата  $\omega$ . Така, карактеристиката почнува во точката определена со фреквенцијата  $\omega = 0$ :

$$(4.334) \quad U_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2(\omega T_0) - 3 \cos(\omega T_0) + 1}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = -\frac{1}{2}$$

$$(4.335) \quad V_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega T_0)[3 - 2 \cos(\omega T_0)]}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = \infty$$

завршува во точката определена со фреквенцијата  $\omega = \frac{\pi}{T_0}$ :

$$(4.336) \quad U_0\left(\frac{\pi}{T}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}} U_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}} \frac{2 \cos^2(\omega T_0) - 3 \cos(\omega T_0) + 1}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = \frac{1}{6}$$

$$(4.337) \quad V_0\left(\frac{\pi}{T}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}} V_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega T_0)[3 - 2 \cos(\omega T_0)]}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = 0$$

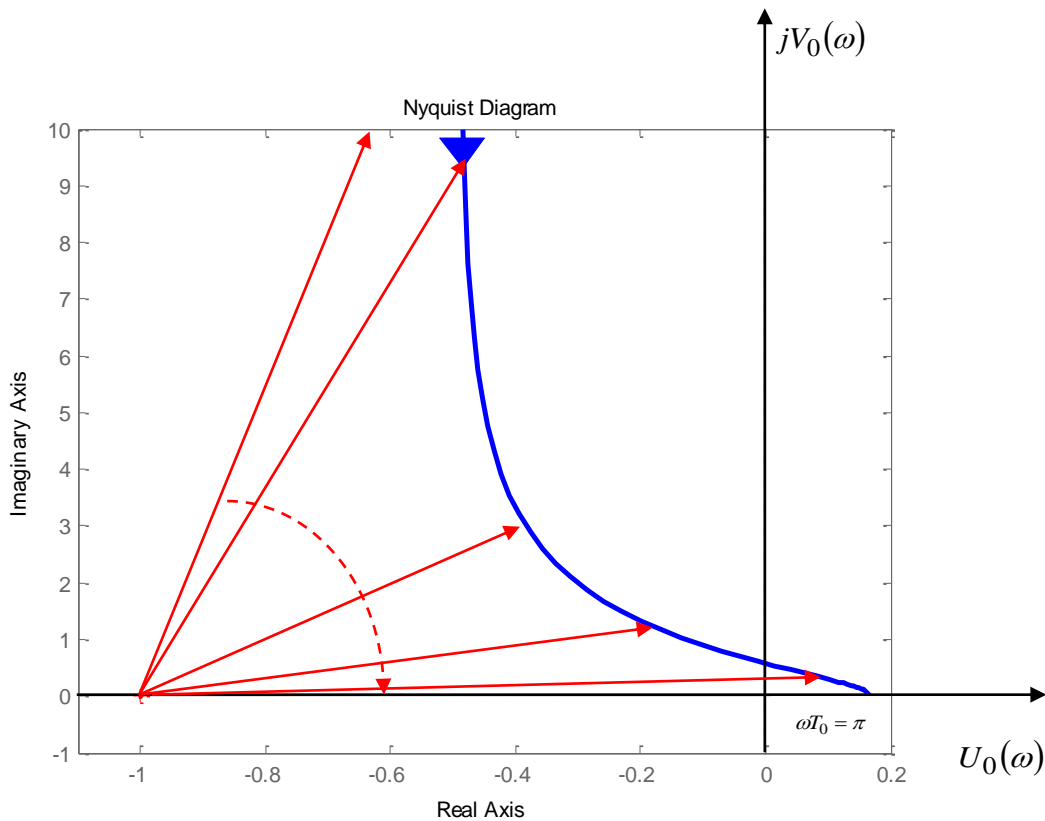
и ги сече координатните оски од комплексната рамнина  $[U_0(\omega), jV_0(\omega)]$  во точки определени со решенијата на системот равенки:

$$(4.338) \quad U_0(\omega) = \frac{2 \cos^2(\omega T_0) - 3 \cos(\omega T_0) + 1}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\omega T_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega T_0 = \frac{\pi}{3} \\ \cos(\omega T_0) = 1 \Rightarrow \omega T_0 = 0, \omega T_0 = \pi \end{cases}$$

$$(4.339) \quad V_0(\omega) = \frac{\sin(\omega T_0)[3 - 2 \cos(\omega T_0)]}{2[1 - \cos(\omega T_0)][5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega T_0) = 0 \Rightarrow \omega T_0 = 0, \omega T_0 = \pi \\ \cos(\omega T_0) = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{нема решение} \end{cases}$$



Слика 4.37. Фреквентна карактеристика на отворениот систем (4.331)

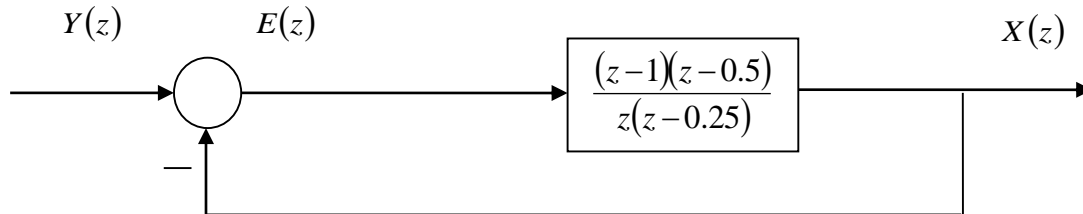
Очигледно, карактеристиката има само еден пресек со имагинарната оска при фреквенцијата  $\omega = \frac{\pi}{3T_0}$ , бидејќи останатите решенија ги одредуваат само нејзините

крајни точки или се неможни. Следствено, кривата на Најквист за набљудуваниот дискретен систем започнува во бесконечност и има асимптота во точката на негативниот

дел од реалната оска  $\left[-\frac{1}{2}, j0\right]$ , се одвива во негативна насока и завршува во точката  $\left[\frac{1}{6}, j0\right]$  на позитивниот дел од реалната оска. Таа е прикажана на Слика 4.37 и врз основа на нејзиниот тек, се заклучува дека набљудуваниот затворен дискретен систем од Слика 4.36 е нестабилен:

$$(4.340) \quad \Delta_{0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}} \arg[F(j\omega)] = -\frac{\pi}{2} \neq p_0\pi = \pi$$

**Задача 4.24.** Со помош на Најквистовиот критериум, да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем на автоматско управување, чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.38.



Слика 4.38. Илустрација кон Задача 4.24

**Решение:** Кога соодветниот отворен систем за испитуваниот затворен дискретен систем со единична повратна врска е стабилен, Најквистовиот критериум може да се искаже на следниот начин: при стабилен отворен систем, затворениот дискретен систем е стабилен, доколку не ја опфаќа ни еднаш критичната точка  $(-1, j0)$ .

Преносната функција на отворениот систем за дадениот затворен дискретен систем од задачата е:

$$(4.341) \quad G_0(z) = \frac{(z-1)(z-0.5)}{z(z-0.25)}$$

и сите нејзини полови лежат во областа  $|z| < 1$ . Следствено, отворениот систем е стабилен. Неговата фреквентна преносна функција изнесува:

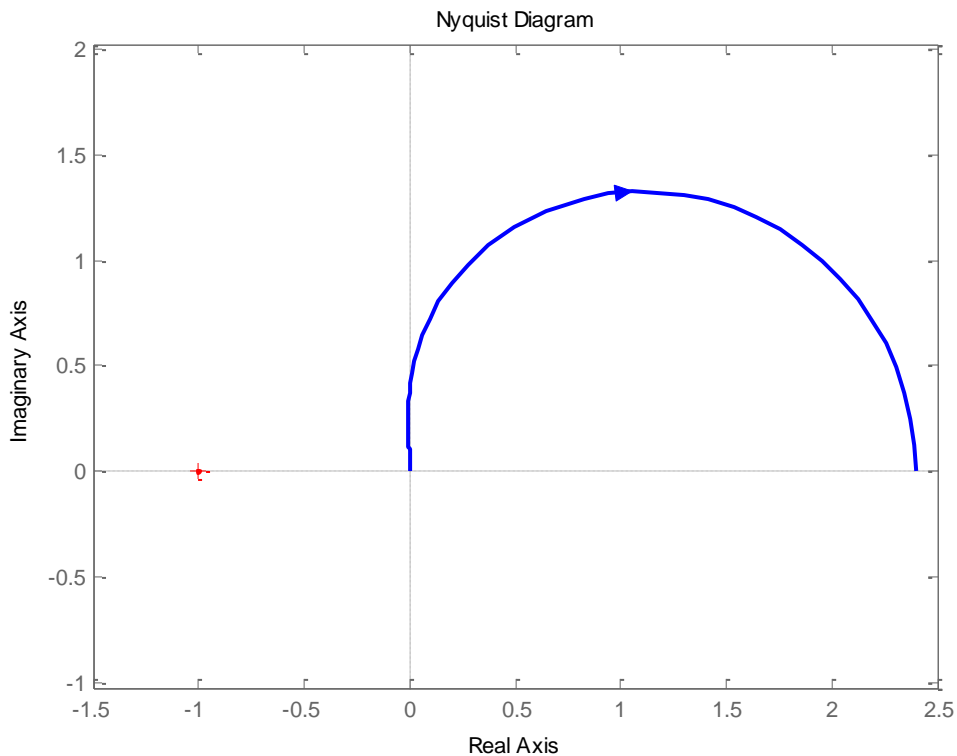
$$(4.342) \quad G_0(j\omega) = \frac{(e^{j\omega} - 1)(e^{j\omega} - 0.5)}{e^{j\omega}(e^{j\omega} - 0.25)}$$

$$= \frac{14 - 30\cos(\omega) + 16\cos^2(\omega)}{17 - 8\cos(\omega)} + j \frac{\sin(\omega)[22 - 16\cos(\omega)]}{17 - 8\cos(\omega)}$$

а соодветната фреквентната карактеристика е прикажана на Слика 4.39. Од (4.343) и Слика 4.39 се гледа дека карактеристиката почнува во точката  $(0, j0)$ , се одвива во негативна насока, лежи во првиот квадрант и завршува во точката  $(-2.4, j0)$ , при што не ја опфаќа критичната точка  $(-1, j0)$ . Следствено, може да се заклучи дека набљудуваниот затворен дискретен систем е стабилен. Добиениот резултат лесно може да се провери ако се пресмета вкупната измена на аргументот на векторот

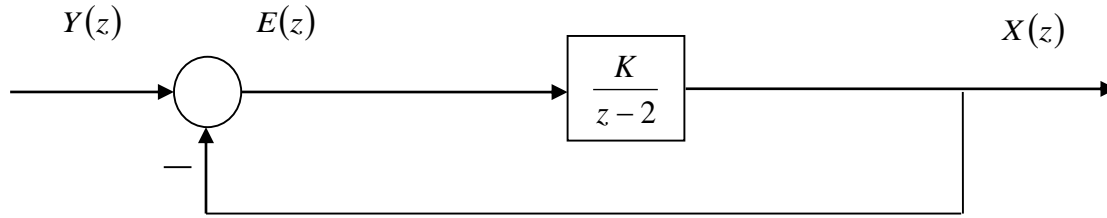
$$F(j\omega) = 1 + G_0(j\omega), \text{ кога фреквенцијата } \omega \text{ се менува на интервалот } \left(0, \frac{\omega_0}{2}\right):$$

$$(4.343) \quad \Delta_{0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}} \arg[F(j\omega)] = \alpha - \alpha = 0 = p_0\pi = 0; p_0 = 0$$



Слика 4.39. Најквистова крива за системот од Задача 4.24

**Задача 4.25.** Со помош на Најквистовиот критериум, да се определи параметарската област на стабилност на затворениот дискретен систем на автоматско управување, чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.40.



Слика 4.40. Илустрација кон Задача 4.25

**Решение:** Преносната функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.40 е:

$$(4.344) \quad G_0(z) = \frac{K}{z-2}$$

За да може да се примени Најквистовиот критериум за стабилност, наместо преносната функција  $G_0(z)$  се набљудува преносната функција  $\tilde{G}_0(z) = \frac{G_0(z)}{K}$ . Оттука, фреквентната преносна функција  $\tilde{G}_0(j\omega)$  ќе има облик:

$$(4.345) \quad \begin{aligned} \tilde{G}_0(j\omega) &= \frac{1}{e^{j\omega T_0} - 2} = \frac{1}{e^{j\omega T_0} - 2} \cdot \frac{e^{-j\omega T_0} - 2}{e^{-j\omega T_0} - 2} = \\ &= \frac{e^{j\omega T_0} - 2}{1 - 2e^{j\omega T_0} - 2e^{-j\omega T_0} + 4} = \\ &= \frac{[\cos(\omega T_0) - j \sin(\omega T_0)] - 2}{[5 - 4 \cos(\omega T_0)]} = \frac{[\cos(\omega T_0) - 2] + j \sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} \end{aligned}$$

Фреквентната карактеристика на отворениот систем се црта врз основа на реалниот и имагинарниот дел од фреквентната преносна функција  $\tilde{G}_0(j\omega)$ :

$$(4.346) \quad \tilde{U}_0(\omega) = \frac{\cos(\omega T_0) - 2}{5 - 4 \cos(\omega T_0)}$$

$$(4.347) \quad \tilde{V}_0(\omega) = \frac{-\sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)}$$

за различни вредности на фреквенцијата  $\omega$ . Така, карактеристиката почнува во точката определена со фреквенцијата  $\omega = 0$ :

$$(4.348) \quad \tilde{U}_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{U}_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\cos(\omega T_0) - 2}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = -1$$

$$(4.349) \quad \tilde{V}_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{V}_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-\sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0^-$$

завршува во точката определена со фреквенцијата  $\omega = \frac{\pi}{T_0}$ :

$$(4.350) \quad \tilde{U}_0\left(\frac{\pi}{T}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}} \tilde{U}_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}} \frac{\cos(\omega T_0) - 2}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = -\frac{1}{3}$$

$$(4.351) \quad \tilde{V}_0\left(\frac{\pi}{T}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}} \tilde{V}_0(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-\sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0^-$$

и ги сече координатните оски од комплексната рамнина  $[\tilde{U}_0(\omega), j\tilde{V}_0(\omega)]$  во точки определени со решенијата на системот равенки:

$$(4.352) \quad \tilde{U}_0(\omega) = \frac{\cos(\omega T_0) - 2}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0 \Rightarrow \cos(\omega T_0) = 2 \text{ неможно решение}$$

$$(4.353) \quad \tilde{V}_0(\omega) = \frac{-\sin(\omega T_0)}{5 - 4 \cos(\omega T_0)} = 0 \Rightarrow \sin(\omega T_0) = 0 \Rightarrow \omega T_0 = 0, \omega T_0 = \pi$$

Очигледно, во конкретниот случај карактеристиката нема пресеци со координатните оски, бидејќи едното решение е невозможно, а останатите само ги одредуваат крајните точки од карактеристиката. Следствено, кривата на Најквист за набљудуваниот дискретен систем започнува во конечна точка на негативниот дел од реалната оска  $[-1, j0]$ , се одвива во позитивна насока и завршува во точката  $\left[-\frac{1}{3}, j0\right]$  исто така на негативниот дел од реалната оска. Таа е прикажана на Слика 4.41.

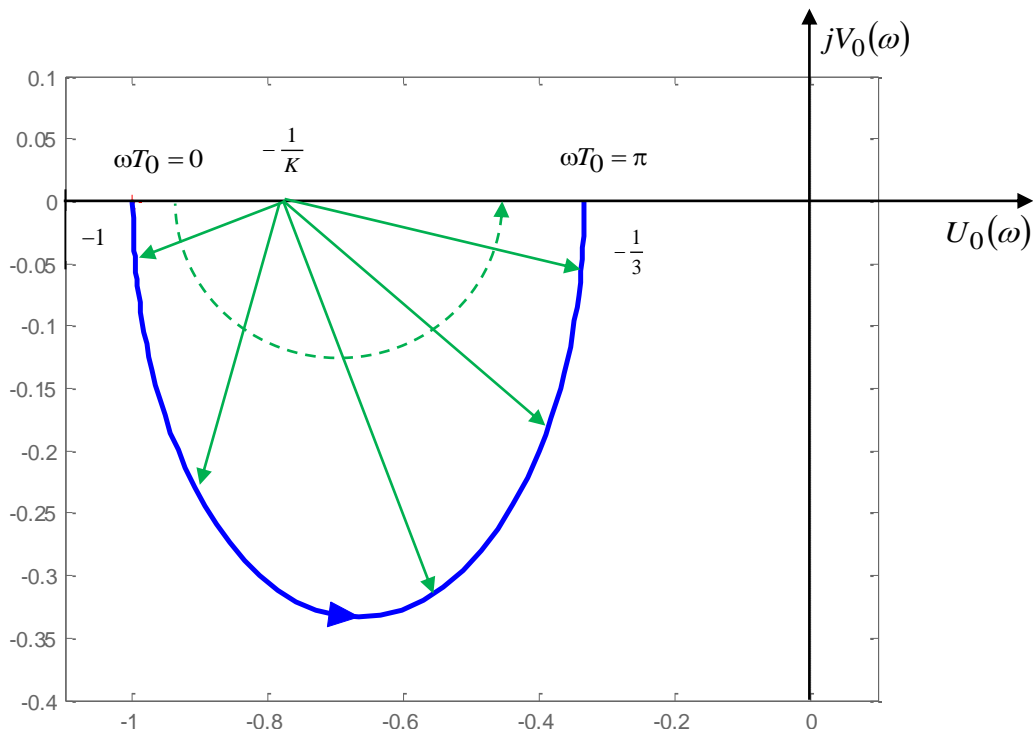
Набљудуваниот затворен дискретен систем од Слика 4.40 ќе биде стабилен, доколку фреквентната карактеристика од Слика 4.41 ја опфаќа критичната точка  $\left[-\frac{1}{K}, j0\right]$  само еднаш, а тоа ќе биде исполнето доколку:

$$(4.354) \quad -1 < -\frac{1}{K} < -\frac{1}{3}$$

Оттука, со решавање на неравенството (4.354) се добива бараната параметарска област на стабилност на набљудуваниот систем:

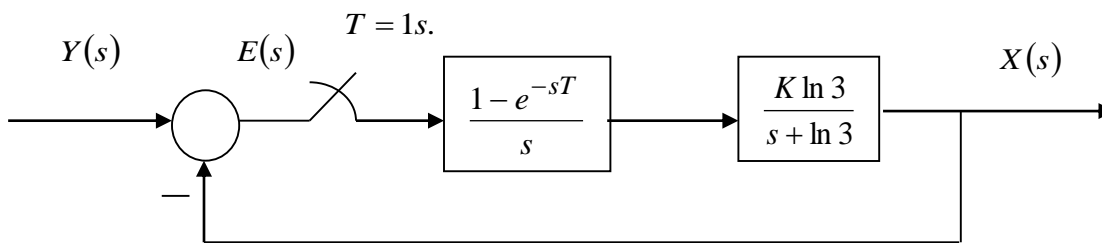


(4.355)  $1 < K < 3$



Слика 4.41. Фреквентната карактеристика (4.346) на отворениот систем  $\tilde{G}_0(z) = \frac{G_0(z)}{K}$

**Задача 4.26.** Со помош на Најквистовиот критериум, да се определи параметарската област на стабилноста на затворениот дискретен систем на автоматско управување, чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.42.



Слика 4.42. Илустрација кон Задача 4.26

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.42 е:

$$\begin{aligned}
(4.356) \quad G_0(z) &= Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{K \ln 3 (1 - e^{-sT})}{s(s + \ln 3)} \right] \right\} = K \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{\ln 3}{s(s + \ln 3)} \right] \right\} = \\
&= K \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \ln 3} \right] \right\} = K \frac{z-1}{z} Z \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{kT} \right] h(kT) \right\} = \\
&= K \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \right) = K \left( 1 + \frac{z-1}{z - \frac{1}{3}} \right) = K \frac{2}{z - \frac{1}{3}} = \frac{2K}{3z-1}, |z| > \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Најквистовата крива за дадениот дискретен систем претставува ходограф на векторот  $\frac{G_0(j\omega)}{K}$  во комплексната рамнина за  $\omega \in \left( 0, \frac{\omega_0}{2} \right)$ , кој вектор се определува на следниот начин:

$$\begin{aligned}
(4.357) \quad \frac{G_0(j\omega)}{K} &= \tilde{U}_0(\omega) + j\tilde{V}_0(\omega) = \frac{2}{3e^{j\omega T_0} - 1} = \\
&= \frac{2}{3\cos(\omega T_0) + j3\sin(\omega T_0) - 1} \cdot \frac{3\cos(\omega T_0) - j3\sin(\omega T_0) - 1}{3\cos(\omega T_0) - j3\sin(\omega T_0) - 1} = \\
&= \frac{3\cos(\omega T_0) - j3\sin(\omega T_0) - 1}{5 - 3\cos(\omega T_0)} = \frac{3\cos(\omega T_0) - 1}{5 - 3\cos(\omega T_0)} - j \frac{3\sin(\omega T_0)}{5 - 3\cos(\omega T_0)}
\end{aligned}$$

За да се нацрта бараната Најквистова крива, доволно е да се определат нејзините карактеристични точки: почетокот, крајот, и пресеците со координатните оски. Така, кривата започнува за  $\omega = 0$  во точката  $T_1(1; j0)$ :

$$(4.358) \quad \tilde{U}_0(0) = \frac{3-1}{5-3} = 1, \quad \tilde{V}_0(0) = -\frac{3 \cdot 0}{5-3} = 0^-$$

завршува за  $\omega = \pi$  во точката  $T_3(-0.5; j0)$ :

$$(4.359) \quad \tilde{U}_0(\pi) = \frac{-3-1}{5+3} = -0.5, \quad \tilde{V}_0(\pi) = -\frac{3 \cdot 0}{5+3} = 0^-$$

а пресеците со координатните оски се одредени со решенијата на системот равенки:

$$\begin{aligned}
(4.360) \quad \tilde{U}_0(\omega) &= 0 \\
\tilde{V}_0(\omega) &= 0
\end{aligned}$$

Во конкретниот случај, Најквистовата крива на зададениот систем има само еден пресек со имагинарната оска од комплексната рамнина во која се претставува, и тоа во точката  $T_2(0, -j0.707)$ , која се добива за фреквенција  $\omega T_0 = \arctg \frac{1}{3}$ . (Останатите решенија на системот равенки (4.372) не дефинираат пресеци со координатните оски.)

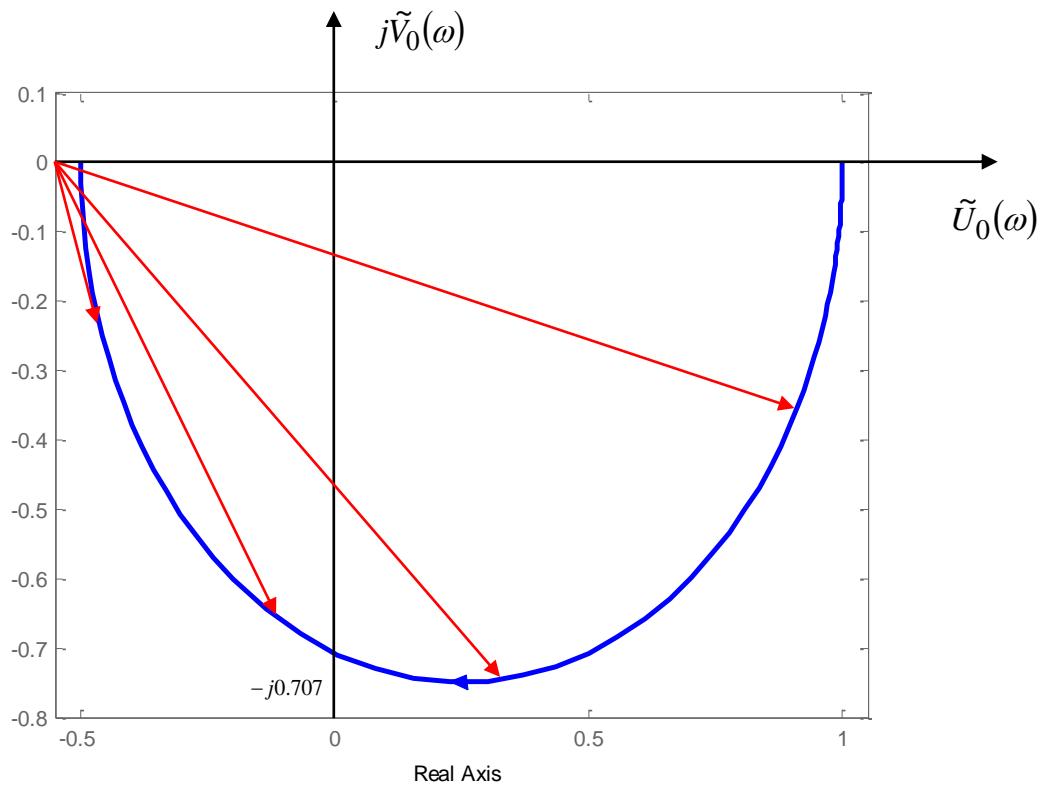
Најквистовата крива за системот од Слика 4.42 е прикажана на Слика 4.43. Оттука се гледа дека набљудуваниот затворен систем ќе биде стабилен, доколку критичната точка  $\left[-\frac{1}{K}, j0\right]$  лежи надвор и лево од карактеристиката. Следствено, мора да бидат исполнети условите:

$$(4.361) \quad -\frac{1}{K} < 1 \Rightarrow -1 < K$$

$$(4.362) \quad -\frac{1}{K} < -\frac{1}{2} \Rightarrow K < 2$$

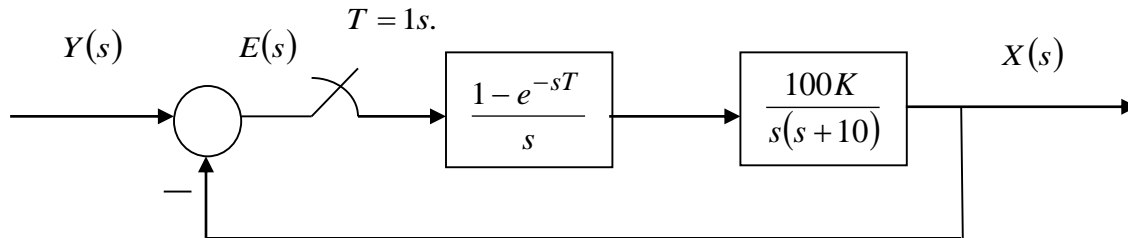
односно:

$$(4.363) \quad -1 < K < 2$$



Слика 4.43. Најквистова крива за затворениот дискретен систем од Слика 4.42

**Задача 4.27.** Со помош на Најквистовиот критериум, да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем на автоматско управување, чија што структурна блок-шема е прикажана на Слика 4.44.



Слика 4.44. Илустрација кон Задача 4.27

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G_0(z)$  на соодветниот отворен систем за набљудуваниот затворен систем од Слика 4.44 е:

$$\begin{aligned}
 (4.364) \quad G_0(z) &= Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{100K(1 - e^{-sT})}{s^2(s+10)} \right] \right\} = \\
 &= K \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{100}{s^2(s+10)} \right] \right\} = \\
 &= K \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{10}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+10} \right] \right\} = \\
 &= K \frac{z-1}{z} Z \left\{ (10k - 1 + e^{-10k}) h(k) \right\} = \\
 &= K \frac{z-1}{z} \left( \frac{10z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-10}} \right) = \\
 &= K \left( \frac{10}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z} \right) = K \left( \frac{10}{z-1} - \frac{1}{z} \right)
 \end{aligned}$$

Најквистовата крива за дадениот дискретен систем претставува ходограф на векторот  $G_0(j\omega)/K$  во комплексната рамнина за  $\omega \in (0, \omega_0/2)$ , кој вектор се определува на следниот начин:

$$\begin{aligned}
 (4.365) \quad \frac{G_0(j\omega)}{K} &= U(\omega) + jV(\omega) = \frac{10}{e^{j\omega} - 1} - \frac{1}{e^{j\omega}} = \\
 &= \frac{10(e^{-j\omega} - 1)}{(e^{j\omega} - 1)(e^{-j\omega} - 1)} - \frac{e^{-j\omega}}{e^{j\omega}e^{-j\omega}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10[\cos(\omega) - j \sin(\omega) - 1]}{2[1 - \cos(\omega)]} - [\cos(\omega) - j \sin(\omega)] = \\
&= -5 - \frac{j5 \sin(\omega)}{1 - \cos(\omega)} - \cos(\omega) + j \sin(\omega) = \\
&= -5 - \cos(\omega) + j \sin(\omega) \left[ 5 - \frac{j \sin(\omega)}{1 - \cos(\omega)} \right] = \\
&= -5 - \cos(\omega) - j \frac{\sin(\omega)[4 + \cos(\omega)]}{1 - \cos(\omega)}
\end{aligned}$$

За да се нацрта бараната Најквистова крива, доволно е да се определат нејзините карактеристични точки; почетокот, крајот, и пресеците со координатните оски. Така, кривата започнува за  $\omega = 0$  во точката  $T_1(-6; -j\infty)$ :

$$(4.366) \quad U(0) = -5 - 1 = -6 \\ V(0) = -\infty$$

завршува за  $\omega = \pi$  во точката  $T_2(-4; j0)$ :

$$(4.367) \quad U(\pi) = -5 + 1 = -4 \\ V(\pi) = \frac{-\sin(\pi)[4 + \cos(\pi)]}{1 - \cos \pi} - \frac{-\sin \pi}{2} = 0^-$$

додека пресеците со координатните оски се одредени со решенијата на системот равенки:

$$(4.368) \quad U(\omega) = 0 \\ V(\omega) = 0$$

Бидејќи ни една од равенките (4.369) нема конечно решение, Најквистовата крива на зададениот систем нема пресеци со координатните оски од комплексната рамнина во која се претставува.

Најквистовата крива за системот од Слика 4.44 е прикажана на Слика 4.45. Бидејќи отворениот систем поседува астатизам од прв ред (тој има еден прост пол во точката  $z = 1$ ), за да може да се примени Најквистовиот критериум за иследување на стабилноста на зададениот затворен дискретен систем, потребно е неговата Најквистова крива да се надополни со соодветниот лак на астатизам. Овој лак почнува на позитивниот дел од реалната оска, се одвива во негативна насока, има централен агол од  $-\frac{\pi}{2}$  и бесконечно голем радиус. Бидејќи отворениот систем  $G_0(z)$  нема полови надвор од единичниот круг  $|z| \leq 1$ , набљудуваниот затворен дискретен систем ќе биде

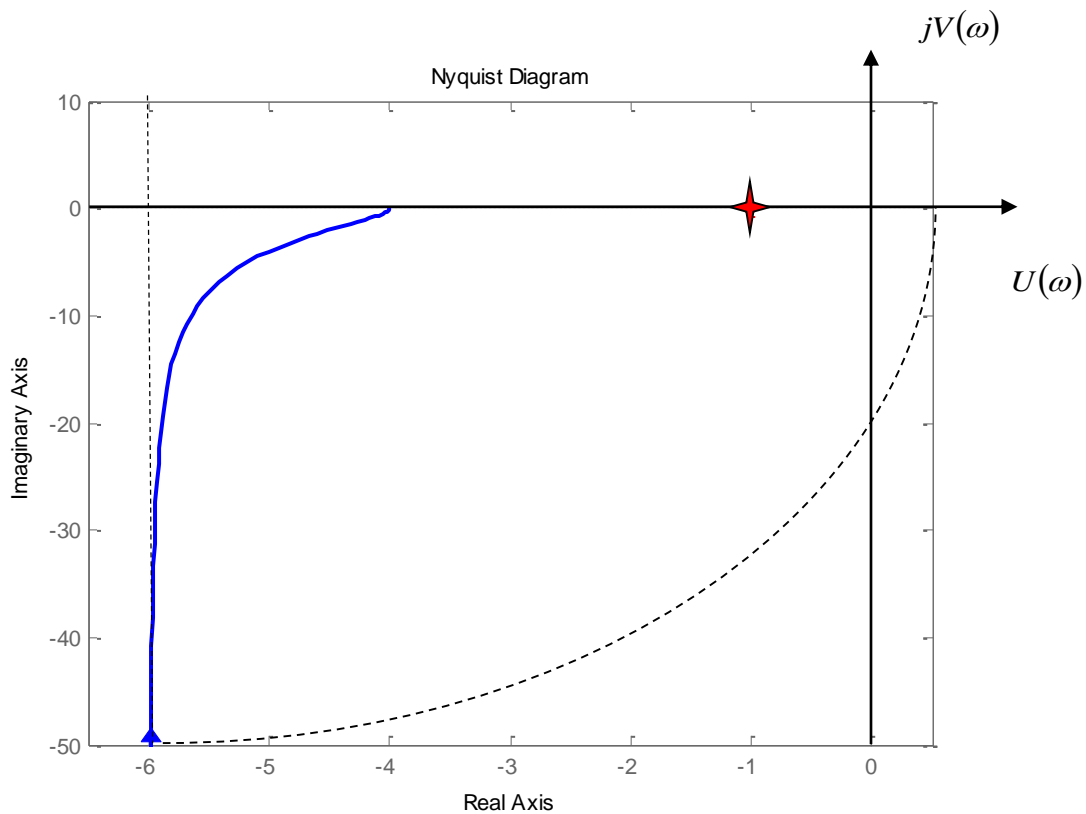
стабилен, ако неговата критична точка  $\left(-\frac{1}{K}, j0\right)$  лежи помеѓу точките  $(-\infty, j0)$  и  $(-4, j0)$ , кој услов ќе биде исполнет доколку:

$$(4.369) \quad -\infty < -\frac{1}{K} < -4$$

односно, доколку:

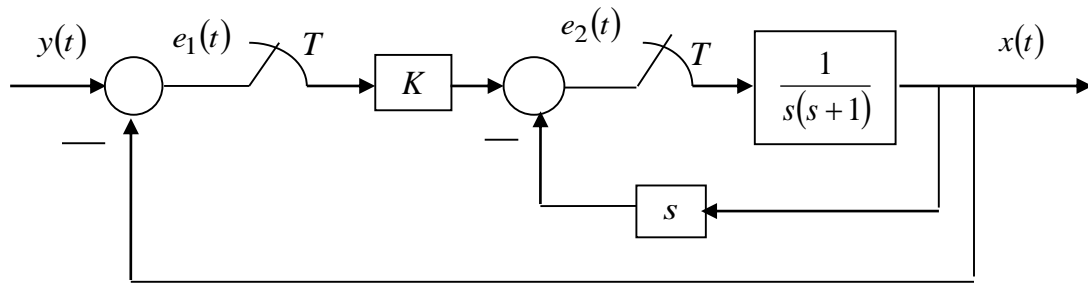
$$(4.370) \quad 0 < K < \frac{1}{4}$$

Оттука, параметарската област на стабилност на заданиот затворен дискретен систем е дефинирана со интервалот (4.371).



Слика 4.45. Најквистова крива на системот од Слика 4.44

**Задача 4.28.** Со примена на билинеарната трансформација (4.20), да се испита стабилноста на затворениот дискретен систем на автоматско управување од Слика 4.46.



Слика 4.46. Илустрација кон Задача 4.28

**Решение:** За системот од Слика 4.46, во  $s$ -комплексното подрачје важат следните релации:

$$(4.371) \quad X(s) = G_1(s)E_2^*(s)$$

$$(4.372) \quad E_2(s) = KE_1^*(s) - G_2(s)X(s) = KE_1^*(s) - G_2(s)G_1(s)E_2^*(s)$$

$$(4.373) \quad E_1(s) = Y(s) - X(s) = Y(s) - G_1(s)E_2^*(s)$$

Оттука, во просторот на  $( )^*$ -сликите се добиваат равенките:

$$(4.374) \quad X^*(s) = G_1^*(s)E_2^*(s)$$

$$(4.375) \quad E_2^*(s) = KE_1^*(s) - G_1G_2^*(s)E_2^*(s)$$

$$(4.376) \quad E_1^*(s) = Y^*(s) - G_1^*(s)E_2^*(s)$$

на кои, во просторот на  $Z$ -сликите, им одговараат изразите:

$$(4.377) \quad X(z) = G_1(z)E_2(z)$$

$$(4.378) \quad E_2(z) = KE_1(z) - G_1G_2(z)E_2(z)$$

$$(4.379) \quad E_1(z) = Y(z) - G_1(z)E_2(z)$$

Со решавање на системот равенки (4.378) – (4.380) по непознатата  $X(z)$  се добива:

$$(4.380) \quad E_2(z) = KE_1(z) - G_1G_2(z)E_2(z) = KY(z) - KG_1(z)E_2(z) - G_1G_2(z)E_2(z)$$

$$(4.381) \quad E_2(z) = \frac{KY(z)}{1 + KG_1(z) + G_1G_2(z)}$$

$$(4.382) \quad X(z) = G_1(z)E_2(z) = \frac{KG_1(z)Y(z)}{1 + KG_1(z) + G_1G_2(z)}$$

каде што:

$$(4.383) \quad G_1(z) = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]\right\} = \\ = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = z \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}; \quad |z| > 1$$

$$(4.384) \quad G_2G_1(z) = Z\left\{L^{-1}[G_2(s)G_1(s)]\right\} = Z\left\{L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]\right\} = \frac{z}{z-e^{-T}}; \quad |z| > e^{-T}$$

Карактеристичниот полином на набљудуваниот дискретен систем е броител на дробно-рационалниот израз:

$$(4.385) \quad 1 + KG_1(z) + G_1G_2(z) = 1 + Kz \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} + \frac{z}{z-e^{-T}} = \\ = 1 + Kz \frac{1-e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} + \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{(z-1)(z-e^{-T}) + z(z-1) + Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} = \\ = \frac{2z^2 + [(1-e^{-T})K - (2+e^{-T})]z + e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

и тој ќе биде Хурвицов  $z$ -полином доколку едновремено се исполнети условите:

$$(4.386) \quad 2 + (1-e^{-T})K - (2+e^{-T}) + e^{-T} = (1-e^{-T})K > 0 \\ 2 - e^{-T} > 0 \\ 2 - (1-e^{-T})K + (2+e^{-T}) + e^{-T} = 2(2+e^{-T}) - (1-e^{-T})K > 0$$

Оттука се добиваат следните ограничувањата на вредностите на променливиот параметар на системот  $K$ :

$$(4.387) \quad 0 < K < \frac{2(2+e^{-T})}{(1-e^{-T})}$$

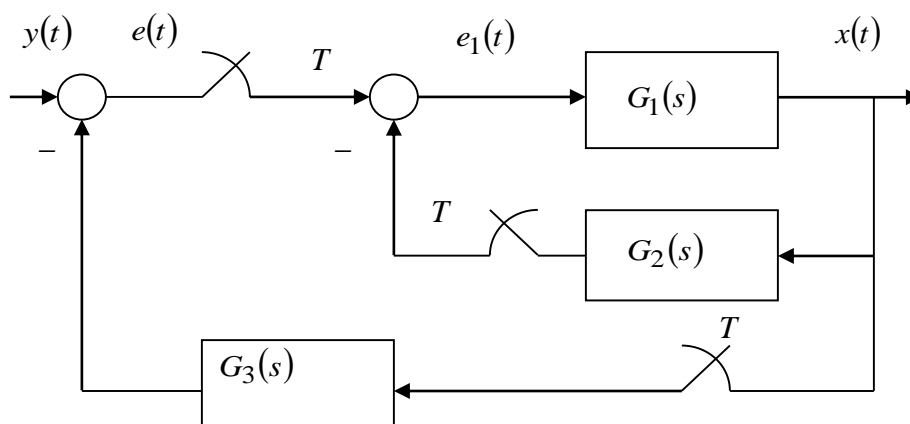
**Задача 4.29.** Да се определи параметарската област на стабилност на дискретен динамички систем од втор ред со карактеристичен полином од облик:

$$(4.388) \quad a(z) = z^2 + az + b; \quad a, b = const. \neq 0$$

Потоа со помош на неа да се провери стабилноста на затворениот дискретен систем од Слика 4.47, ако:



$$(4.389) \quad G_1(s) = \frac{1}{s}, \quad G_2(s) = \frac{2 \ln 2}{s + \ln 2}, \quad G_3(s) = \frac{1}{s + \ln 2}, \quad T = 1s.$$



Слика 4.47. Илустрација кон Задача 4.29

**Решение:** Полиномот (4.389) ќе биде Хурвицов  $z$ -полином, доколку едновремено се исполнети условите:

$$(4.390) \quad \begin{aligned} 1 + a + b &> 0 \\ 1 - a + b &> 0 \\ 1 - b &> 0 \end{aligned}$$

Од каде што непосредно следува:

$$(4.391) \quad \begin{aligned} b &> -1 - a \\ b &> a - 1 \\ b &< 1 \end{aligned}$$

Следствено, бараната параметарска област на стабилност за систем со карактеристичен полином (4.389) ќе изгледа како на Слика 4.48.

Дискретната преносна функција на системот од Слика 4.47 е дадена со изразот:

$$(4.392) \quad G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1 G_2(z) + G_1(z) G_3(z)}$$

каде што:

$$(4.393) \quad G_1(z) = Z\{G_1(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

$$(4.394) \quad G_1 G_2(z) = Z\{G_1(s) G_2(s)\} = Z\left\{\frac{2 \ln 2}{s(s + \ln 2)}\right\} =$$

$$= 2Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \ln 2}\right\} = \frac{2z}{z-1} + \frac{2z}{z-1/2} = \frac{2z}{(z-1)(2z-1)}, \quad |z| > 1$$

$$(4.395) \quad G_3(z) = Z\{G_3(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 2}\right\} = \frac{z}{z-1/2}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Со воведување на (4.405) – (4.407) во (4.404), за преносната функција  $G(z)$  се добива:

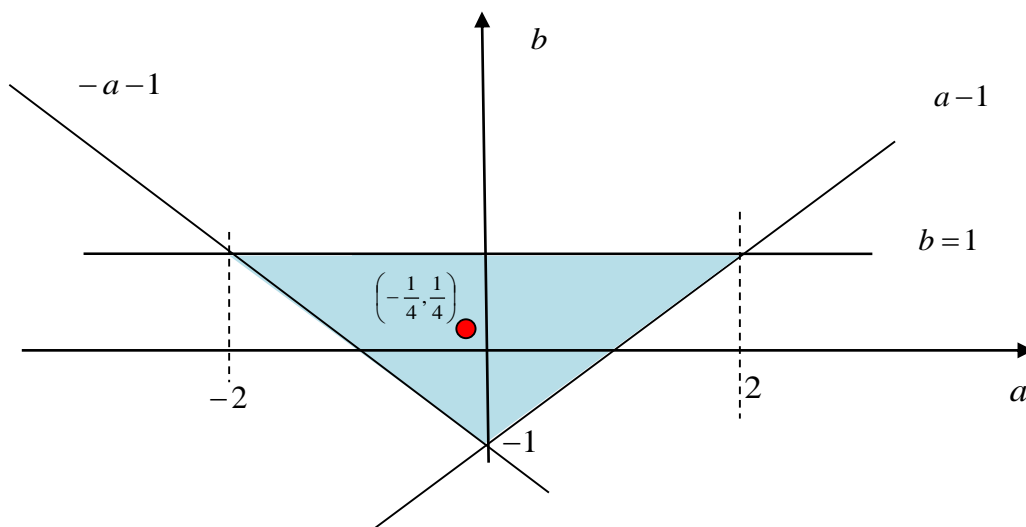
$$(4.396) \quad G(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1G_2(z) + G_1(z)G_3(z)} = \frac{\frac{z}{z-1}}{1 + \frac{z}{(z-1)(2z-1)} + \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-1/2}} =$$

$$= \frac{z(2z-1)}{(z-1)(2z-1) + 2z + 2z^2} = \frac{z(2z-1)}{2z^2 - 3z + 1 + 2z + 2z^2} = \frac{z(2z-1)}{4z^2 - z + 1} = \frac{\frac{1}{4}z(2z-1)}{z^2 - 1/4z + 1/4}$$

од каде што следува дека карактеристичниот полином на набљудуваниот затворен дискретен систем е:

$$(4.397) \quad a(z) = z^2 - 1/4z + 1/4$$

Тој е од обликот (4.389), со параметри  $a = -0.25$  и  $b = 0.25$ . Бидејќи точката  $(-0.25, 0.25)$  припаѓа на областа од Слика 4.48, може да се заклучи дека набљудуваниот дискретен систем од Слика 4.47 е стабилен.



Слика 4.48. Параметарска област на стабилност на дискретен систем од втор ред со карактеристичен полином (4.389)

## 5. ДИСКРЕТНИ СИСТЕМИ ВО ПРОСТОРОТ НА СОСТОЈБИ

Воведувањето на поимот за преносна функција го поедноставува проблемот на опишување и изучување на линеарните стационарни дискретни динамички системи. Имено, за одредување на поведението на кој и да било линеарен стационарен дискретен динамички систем доволно е да се познава неговата преносна функција и соодветните почетни услови. Меѓутоа, методите на трансформација од временското во комплексното подрачје се засновани врз принципот на суперпозиција, што значи дека концептот на преносна функција е наполно неупотреблив кај линеарните нестационарни и нелинеарните дискретни динамички системи. Затоа се барани поинакви форми за математичко опишување на дискретните динамичките системи.

Кон крајот на 50-тите години од минатиот е вовед **концептот на просторот на состојби** и тој овозможува изучување на дискретните динамички системи преку нивниот модел односно опис со состојбени големини. Суштината на описот на дискретните динамички системи во просторот на состојби е следната: динамички систем од  $n$  – ти ред, наместо со една диферентна равенка од  $n$  – ти ред (за системи со еден влез и еден излез), се опишува со симултан систем од  $n$  диферентни равенки од прв ред. Решенијата на тој систем равенки се нарекуваат **состојбени големини** на набљудуваниот систем и тие се елементи на тн. **вектор на состојба** на изучуваниот дискретен динамички систем.

Значењето на описот на дискретните динамички системи преку векторот на состојба е многу подлабоко од самата погодност при записот. Имено, концептот на состојбени големини, за разлика од другите концепти, дава целосен опис не само на надворешната, туку и на внатрешната динамика на набљудуваниот систем. Покрај тоа, векторот на состојба во секој временски миг во себе ја опфаќа сета “предисторија“ на соодветниот систем.

Постојат и други причини за широката примена на концептот на векторот на состојба во изучувањето на дискретните динамички системи:

- Концептот на просторот на состојби подеднакво успешно се применува и кај системите со еден влез и еден излез, и кај повеќевеличинските системи.
- Ваквиот приод може да се примени и на одредени класи нестационарни и/или нелинеарни системи.
- Некои битни одлики на динамичките системи, какви што се управливоста и набљудливоста, можат лесно да се воочат и едноставно да се формулираат кога моделот на набљудуваниот систем е даден во просторот на состојби.
- Концептот на просторот на состојби, наспроти популарните трансформациони методи, често овозможува синтезата на еден дискретен динамички систем целосно да се изврши во временско подрачје, што има голема важност и значење

кога проектираниот систем не е линеарен, па, трансформационите методи не можат директно да се применат, а и постапките за анализа и синтеза на динамичките системи во временско подрачје даваат подобар увид во самата анализа и синтеза.

Заради сите погоре наведени причини, постапките за анализа и синтеза на дискретните динамички системи засновани врз концептот на просторот на состојби наоѓаат голема примена и во изучувањето на дискретните системи.

Еден дискретен динамички систем од произволен  $n$ -ти ред со  $p$  влезови и  $q$  излези, во просторот на состојби е опишан со следниот систем равенки:

$$(5.1) \quad \underline{v}(t_{k+1}) = \underline{f}[\underline{v}(t_k), \underline{y}(t_k), t_k]$$

$$(5.2) \quad \underline{x}(t_k) = \underline{g}[\underline{v}(t_k), \underline{y}(t_k), t_k]$$

каде што  $\underline{y}$  е  $p \times 1$ -димензионалниот **вектор на влезови**, односно влезен вектор:

$$(5.3) \quad \underline{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_p]^T = [y_1(t_k) \quad y_2(t_k) \quad \cdots \quad y_p(t_k)]^T = \underline{y}(t_k)$$

$\underline{x}$  е  $q \times 1$ -димензионалниот **вектор на излези** или излезниот вектор:

$$(5.4) \quad \underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_q]^T = [x_1(t_k) \quad x_2(t_k) \quad \cdots \quad x_q(t_k)]^T = \underline{x}(t_k)$$

$\underline{v}$  е  $n \times 1$ - димензионалниот **вектор на состојба**:

$$(5.5) \quad \underline{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T = [v_1(t_k) \quad v_2(t_k) \quad \cdots \quad v_n(t_k)]^T = \underline{v}(t_k)$$

а  $\underline{f}$  и  $\underline{g}$  се векторски функции од аргументите  $\underline{v}(t_k)$  и  $\underline{y}(t_k)$ :

$$(5.6) \quad \underline{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T = [f_1(\underline{v}, \underline{y}, t_k), f_2(\underline{v}, \underline{y}, t_k), \dots, f_n(\underline{v}, \underline{y}, t_k)]^T$$

$$(5.7) \quad \underline{g} = [g_1, g_2, \dots, g_q]^T = [g_1(\underline{v}, \underline{y}, t_k), g_2(\underline{v}, \underline{y}, t_k), \dots, g_q(\underline{v}, \underline{y}, t_k)]^T$$

Во случај на еквиливантна дискретизација, изразите (5.1) и (5.2) добиваат облик:

$$(5.8) \quad \underline{v}((k+1)T) = \underline{f}[\underline{v}(kT), \underline{y}(kT), kT]$$

$$(5.9) \quad \underline{x}(kT) = \underline{g}[\underline{v}(kT), \underline{y}(kT), kT]$$

или, поедноставно:

$$(5.10) \quad \underline{v}(k+1) = \underline{f}[\underline{v}(k), \underline{y}(k), k]$$

$$(5.11) \quad \underline{x}(k) = \underline{g}[\underline{v}(k), \underline{y}(k), k]$$

Притоа, векторската равенка (5.8) претставува систем  $n$  диферентни равенки од прв ред и тоа се **равенките на векторот на состојба** на набљудуваниот дискретен систем.

Кај линеарните повеќевеличински дискретни системи,  $\underline{f}$  и  $\underline{g}$  се линеарни функции од своите аргументи, па, моделот (5.8)-(5.9) односно моделот (5.10)-(5.11) го добива следниот облик:

$$(5.12) \quad \underline{v}((k+1)T) = \underline{A}(kT)\underline{v}(kT) + \underline{B}(kT)\underline{y}(kT)$$

$$\underline{x}(kT) = \underline{C}(kT)\underline{v}(kT) + \underline{D}(kT)\underline{y}(kT)$$

$$(5.13) \quad \underline{v}(k+1) = \underline{A}(k)\underline{v}(k) + \underline{B}(k)\underline{y}(k)$$

$$\underline{x}(k) = \underline{C}(k)\underline{v}(k) + \underline{D}(k)\underline{y}(k)$$

каде што  $\underline{A}(kT), \underline{B}(kT), \underline{C}(kT), \underline{D}(kT)$  се  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $q \times n$  и  $q \times p$  димензионални матрици, соодветно, чии елементи, во општ случај, се функции од дискретната променлива  $k$ .

Аргументот  $kT$  во изразите (5.12) – (5.13) се јавува експлицитно само во случаите кога набљудуваниот дискретен систем е нестационарен. Во спротивно, кога се работи за стационарен дискретен систем, што значи дека ниеден од неговите параметри не се менува со времето,  $kT$  не се јавува експлицитно во моделот на системот, а матриците  $\underline{A}(kT), \underline{B}(kT), \underline{C}(kT), \underline{D}(kT)$  имаат константни елементи. Тогаш моделот (5.12) го има следниот облик:

$$(5.14) \quad \underline{v}((k+1)T) = \underline{A}\underline{v}(kT) + \underline{B}\underline{y}(kT)$$

$$\underline{x}(kT) = \underline{C}\underline{v}(kT) + \underline{D}\underline{y}(kT)$$

Конечно, ако се работи за линеарен стационарен дискретен динамички систем со еден влез и еден излез, моделот (5.14) ќе гласи:

$$(5.15) \quad \underline{v}((k+1)T) = \underline{A}\underline{v}(kT) + \underline{b}\underline{y}(kT)$$

$$\underline{x}(kT) = \underline{c}\underline{v}(kT) + d\underline{y}(kT)$$

каде што  $\underline{b}$  е вектор со димензија  $n \times 1$ ,  $\underline{c}$  е матрица-редица со димензија  $1 \times n$  и  $d$  е скалар.

Изборот на состојбените големини  $v_i(t_k)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) за даден дискретен систем не е еднозначна работа. Тоа значи дека векторот на состојба  $\underline{v}(t_k)$  може да се формира на повеќе начини, односно еден ист дискретен систем во просторот на состојби може да се опише со повеќе модели. Во продолжение се набљудуваат линеарни стационарни дискретни динамички системи со еден влез и еден излез, чија надворешна динамика е опишана со следната диферентна равенка од  $n$ -ти ред:

$$(5.16) \quad \begin{aligned} x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + \dots + a_1x(k+1) + a_0x(k) = \\ = b_ny(k+n) + b_{n-1}y(k+n-1) + \dots + b_1y(k+1) + b_0y(k) \end{aligned}$$

односно со преносната функција:

$$(5.17) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

каде што  $Y(z) = Z\{y(k)\}$  и  $X(z) = Z\{x(k)\}$  се  $Z$ -слики на влезот и излезот на набљудуваниот дискретен систем.

Секогаш кога полиномите во броителот и именителот од преносната функција (5.17) се со ист степен, најнапред се врши нивно еднократно делење, при што се добива количник од делењето и остаток:

$$(5.18) \quad G(z) = b_n + \frac{\tilde{b}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_1 z + \tilde{b}_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = d + \tilde{G}(z)$$

каде што  $\tilde{G}(z)$  е дробно-рационална функција која има ист именител како и преносната функција  $G(z)$ , но броител со барем за еден понизок степен. Притоа:

$$(5.19) \quad \tilde{b}_i = b_i - b_n a_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Нека, под претпоставка,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  се полови на функцијата  $G(z)$ , следствено и на функцијата  $\tilde{G}(z)$ , кои се реални и прости. Тогаш,  $Z$ -сликата  $X(z)$  на моделираниот дискретен систем, може да се претстави на следниот начин:

$$(5.20) \quad X(z) = dY(z) + \frac{c_1}{z - z_1} Y(z) + \frac{c_2}{z - z_2} Y(z) + \dots + \frac{c_n}{z - z_n} Y(z)$$

каде што:

$$(5.21) \quad c_i = \lim_{z \rightarrow z_i} [(z - z_i) \tilde{G}(z)]; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Состојбените големини  $v_1 = v_1(k), v_2 = v_2(k), \dots, v_n = v_n(k)$  се одбираат така што за нивните  $Z$ -слики важи:

$$(5.22) \quad V_i(z) = \frac{1}{z - z_i} Y(z); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Тогаш, еден модел во просторот на оригиналите гласи:

$$(5.23) \quad v_i(k+1) = z_i v_i(k) + y(k); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

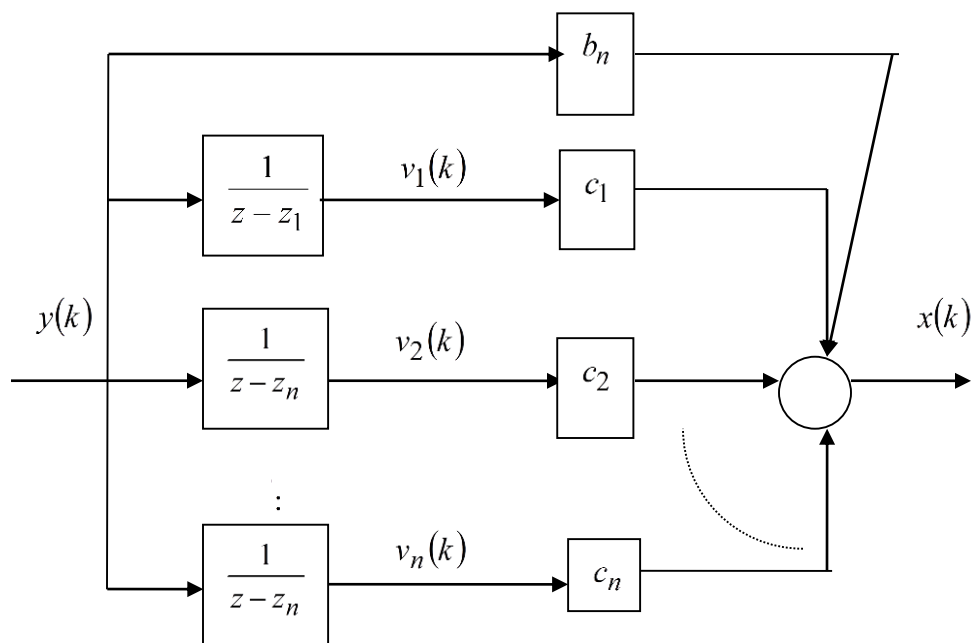
$$(5.24) \quad x(k) = dy(k) + c_1 v_1(k) + c_2 v_2(k) + \dots + c_n v_n(k)$$

Него му одговара структурната блок-шема од Слика 5.1, врз основа на чиј изглед го добил и своето име **модел со разгранет влез**.

Моделот (5.23)-(5.24) во матричен облик гласи:

$$(5.25) \quad \underline{v}(k+1) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & z_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & z_n \end{bmatrix} \underline{v}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} y(k)$$

$$(5.26) \quad x(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \underline{v}(k) + b_n y(k)$$



Слика 5.1. Структурна блок-шема на моделот со разгранет влез за еден дискретен систем

Многу често нулите и половите на преносната функција од набљудуваниот дискретен систем не се познати, ниту можат едноставно да се определат. Исто така, тие во никој случај не мора да бидат реални. Тогаш, за избор на состојбените големини може да се примени тн. **директен метод**, кај која се воведува помошна променлива  $w(k)$ , за чија  $Z$ -слика важи:

$$(5.27) \quad W(z) = \frac{1}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_1z^{n-1} + a_0z^{-n}} Y(z)$$

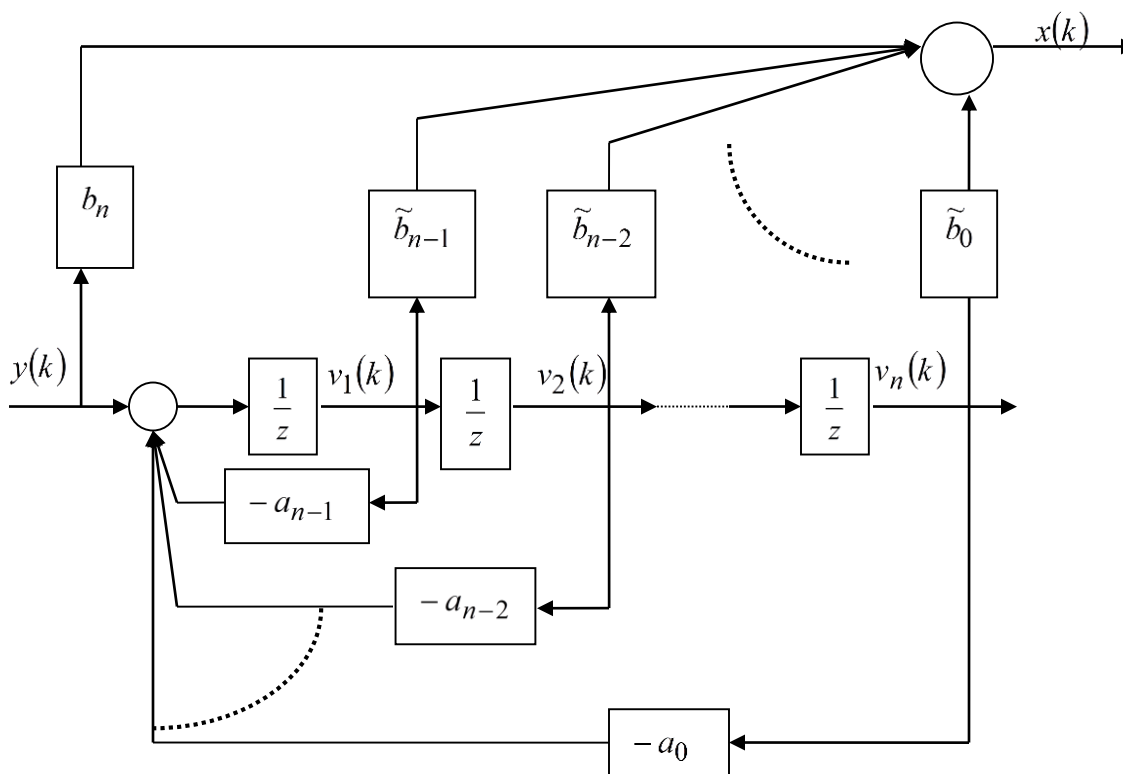
Состојбените големини на набљудуваниот дискретен систем се одбираат преку помошната променлива  $w(k)$  и нејзините дискретни вредности:

$$\begin{aligned}
 (5.28) \quad & V_1(z) = z^{-1}W(z) \\
 & V_2(z) = z^{-2}W(z) \\
 & \vdots \\
 & V_n(z) = z^{-n}W(z)
 \end{aligned}$$

па добиениот модел во просторот на состојби гласи:

$$\begin{aligned}
 (5.29) \quad & v_1(k+1) = -a_{n-1}v_1(k) - \dots - a_1v_{n-1}(k) - a_0v_n(k) + y(k) \\
 & v_2(k+1) = v_1(k) \\
 & \vdots \\
 & v_n(k+1) = v_{n-1}(k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.30) \quad & x(k) = b_n w(k) + b_{n-1}v_1(k) + \dots + b_1v_{n-1}(k) + b_0v_n(k) = \\
 & = (b_{n-1} - b_n a_{n-1})v_1(k) + \dots + (b_1 - b_n a_1)v_{n-1}(k) + (b_0 - b_n a_0)v_n(k) + b_n y(k)
 \end{aligned}$$



Слика 5.2. Структурна блок-шема на моделот (5.29) - (5.30)

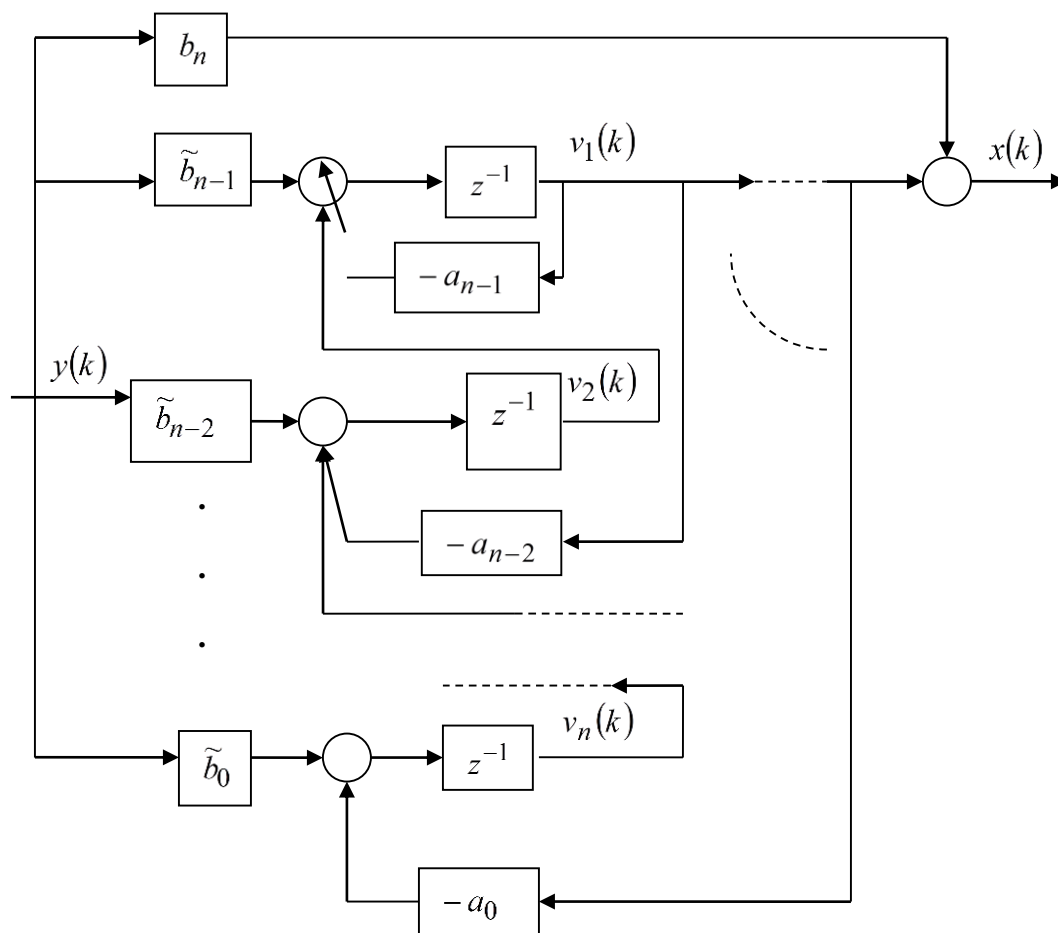


Неговите елементи се:

$$(5.31) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{c} = [\tilde{b}_{n-1} \quad \tilde{b}_{n-2} \quad \cdots \quad \tilde{b}_2 \quad \tilde{b}_1 \quad \tilde{b}_0], \quad d = b_n$$

**Моделот со разгранет влез и излез** е уште еден начин за опис на линеарните дискретни системи во просторот на состојби, во случај кога нулите и половите на дискретната преносна функција (5.18) не се познати и/или не можат да се определат. Називот го добил по изгледот на соодветната структурна блок-шема, прикажана на Слика 5.3.



Слика 5.3. Структурна блок-шема на моделот (5.34)

Ако  $Z$  –сликата  $X(z)$  на набљудуваниот дискретен систем се претстави во облик:

$$(5.32) \quad X(z) = b_n Y(z) + z^{-1} \{ [b_{n-1} Y(z) - a_{n-1} X(z)] + z^{-1} \{ [b_{n-2} Y(z) - a_{n-2} X(z)] + \dots + z^{-1} [b_0 Y(z) - a_0 X(z)] \} \}$$

состојбените големини  $v_1 = v_1(k), v_2 = v_2(k), \dots, v_n = v_n(k)$  можат да се одберат така што за нивните  $Z$  –слики ќе важи:

$$(5.33) \quad \begin{aligned} V_1(z) &= z^{-1} \{ [b_{n-1} Y(z) - a_{n-1} X(z)] + V_2(z) \} \\ V_2(z) &= z^{-1} \{ [b_{n-2} Y(z) - a_{n-2} X(z)] + V_3(z) \} \\ &\vdots \\ V_{n-1}(z) &= z^{-1} \{ [b_1 Y(z) - a_1 X(z)] + V_n(z) \} \\ V_n(z) &= z^{-1} \{ [b_0 Y(z) - a_0 X(z)] \} \end{aligned}$$

Тогаш се добива следниот модел во просторот на оригиналите:

$$(5.34) \quad \begin{aligned} v_1(k+1) &= -a_{n-1} v_1(k) + v_2(k) + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) y(k) \\ v_2(k+1) &= -a_{n-2} v_1(k) + v_3(k) + (b_{n-2} - b_n a_{n-2}) y(k) \\ &\vdots \\ v_{n-1}(k+1) &= -a_1 v_1(k) + v_n(k) + (b_1 - b_n a_1) y(k) \\ v_n(k+1) &= -a_0 v_1(k) + (b_0 - b_n a_0) y(k) \\ x(k) &= b_n y(k) + v_1(k) \end{aligned}$$

со елементи:

$$(5.35) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{n-1} \\ \tilde{b}_{n-2} \\ \dots \\ \tilde{b}_0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{c} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad d = b_n$$

**Итеративната постапка** за избор на состојбените големини на еден линеарен стационарен дискретен динамички систем, како и останатите, поаѓа од неговата

преносна функција, која во најопшт случај има облик (5.17). Постапката има ограничување во примената, затоа што бара познавање и на половите и на нулите од дробно рационалната функција  $\tilde{G}(z)$  во (5.18). Уште повеќе, тие нули и полови мора да бидат реални.

Ако  $Z$  –сликата  $X(z)$  на одзивот од набљудуваниот дискретен систем (5.17) се претстави во облик:

$$\begin{aligned}
 (5.36) \quad X(z) &= G(z)Y(z) = [b_n + \tilde{G}(z)]Y(z) = \\
 &= b_n Y(z) + \frac{\tilde{b}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_1z + \tilde{b}_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} Y(z) = \\
 &= b_n Y(z) + Y(z) \frac{\tilde{b}_{n-1}(z-w_1)(z-w_2)\dots(z-w_{n-1})}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)} = \\
 &= b_n Y(z) + Y(z) \frac{\tilde{b}_{n-1}}{(z-z_1)} \left\{ \frac{(z-w_1)}{(z-z_2)} \left\{ \dots \left\{ \frac{(z-w_{n-1})}{(z-z_n)} \right\} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

кадкe што  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$  се нулите, а  $z_1, z_2, \dots, z_n$  половите на дробно рационалната функција  $\tilde{G}(z)$ , состојбените големини  $v_1 = v_1(k), v_2 = v_2(k), \dots, v_n = v_n(k)$  се одбираат така што за нивните  $Z$  –слики да важи:

$$\begin{aligned}
 (5.37) \quad V_1(z) &= Y(z) \frac{\tilde{b}_{n-1}}{(z-z_1)} \\
 V_2(z) &= V_1(z) \frac{(z-w_1)}{(z-z_2)} \\
 V_3(z) &= V_2(z) \frac{(z-w_2)}{(z-z_3)} \\
 &\vdots \\
 V_n(z) &= V_{n-1}(z) \frac{(z-w_{n-1})}{(z-z_n)}
 \end{aligned}$$

Тогаш, соодветниот модел во просторот на состојби ќе биде од облик:

$$\begin{aligned}
 (5.38) \quad v_1(k+1) &= z_1 v_1(k) + \tilde{b}_{n-1} y(k) \\
 v_2(k+1) &= z_2 v_2(k) + (z_1 - w_1) v_1(k) + \tilde{b}_{n-1} y(k)
 \end{aligned}$$

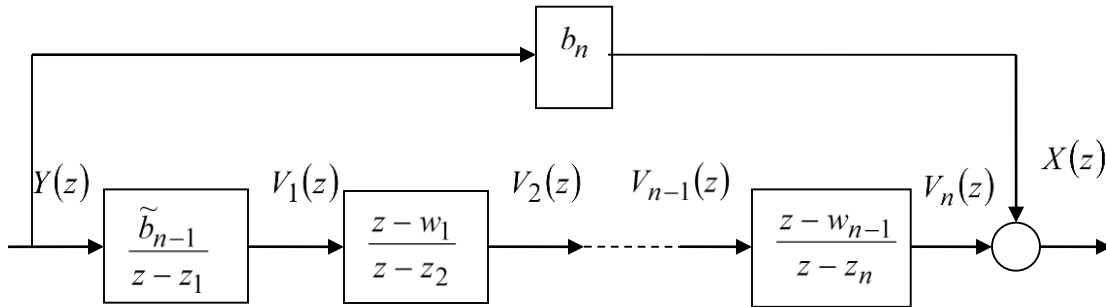
$$\begin{aligned}
 v_3(k+1) &= z_3 v_3(k) + (z_2 - w_2) v_2(k) + (z_1 - w_1) v_1(k) + \tilde{b}_{n-1} y(k) \\
 &\vdots \\
 v_n(k+1) &= z_n v_n(k) + (z_{n-1} - w_{n-1}) v_{n-1}(k) + \dots + (z_1 - w_1) v_1(k) + \tilde{b}_{n-1} y(k) \\
 (5.39) \quad x(k) &= b_n y(k) + v_n(k)
 \end{aligned}$$

со следните елементи:

$$(5.40) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ z_1 - w_1 & z_2 & 0 & \cdot & 0 \\ z_1 - w_1 & z_2 - w_2 & z_3 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1 - w_1 & z_2 - w_2 & z_3 - w_3 & \cdot & z_n - w_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \tilde{b}_{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{c} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1], \quad d = b_n$$

Заради изгледот на соодветната структурна блок-шема, прикажана на сл.5.4, овој модел се нарекува уште **сериски модел**.



Слика 5.4. Структурна блок-шема на серискиот модел во просторот на состојби на еден дискретен систем

Решението на матричниот систем равенки (5.12) во просторот на  $Z$  – сликите е:

$$(5.41) \quad \underline{V}(z) = (z\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{Y}(z) + z(z\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{v}(0)$$

$$(5.42) \quad \underline{X}(z) = [\underline{C}(z\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}] \underline{Y}(z) + z\underline{C}(z\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{v}(0)$$

каде што  $\underline{I}$  е единична дијагонална квадратна матрица со димензија  $n \times n$ , додека во просторот на оригиналите тоа гласи:

$$(5.43) \quad \underline{v}(kT) = \underline{A}^k \underline{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{A}^{k-i-1} \underline{B} \underline{y}(iT); \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(5.44) \quad \underline{x}(kT) = \underline{C} \underline{A}^k \underline{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{C} \underline{A}^{k-i-1} \underline{B} \underline{y}(iT) + \underline{D} \underline{y}(kT); \quad k = 1, 2, \dots$$

Со воведување на смената:

$$(5.45) \quad \underline{\Phi}(z) = z(z\underline{I} - \underline{A})^{-1}$$

релациите (5.40) – (5.41) можат да се доведат на облик:

$$(5.46) \quad \underline{V}(z) = z^{-1} \underline{\Phi}(z) \underline{B} \underline{Y}(z) + \underline{\Phi}(z) \underline{v}(0)$$

$$(5.47) \quad \underline{X}(z) = [z^{-1} \underline{\Phi}(z) \underline{B} + \underline{D}] \underline{Y}(z) + \underline{\Phi}(z) \underline{v}(0)$$

додека со смената:

$$(5.48) \quad \underline{\phi}(kT) = \underline{A}^k$$

равенките (5.42) – (5.43) се трансформираат во следните равенки:

$$(5.49) \quad \underline{v}(kT) = \underline{\phi}(kT) \underline{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\phi}((k-i-1)T) \underline{B} \underline{y}(iT); \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(5.50) \quad \underline{x}(kT) = \underline{C} \underline{\phi}(kT) \underline{v}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{C} \underline{\phi}((k-i-1)T) \underline{B} \underline{y}(iT) + \underline{D} \underline{y}(kT); \quad k = 1, 2, \dots$$

Матрицата  $\underline{\phi}(kT)$  се нарекува **фундаментална матрица** на набљудуваниот дискретен систем (5.12) и има извонредно значење при изучувањето на линеарните дискретни динамички системи во просторот на состојби. Таа секогаш може да се определи како оригинал кон  $Z$  – сликата  $\underline{\Phi}(z)$ :

$$(5.51) \quad \underline{\phi}(kT) = Z^{-1} \{ \underline{\Phi}(z) \} = Z^{-1} \{ z(z\underline{I} - \underline{A})^{-1} \}$$

Две битни својства на дискретните системи во теоријата на управувањето се својството за управливост и набљудливост. По дефиниција, еден линеарен стационарен дискретен динамички систем од произволен ред  $n$  е **целосно управлив** во однос на своите состојби, доколку постои управување  $\underline{y}(kT)$  кое системот ќе го преведе од произволна почетна во произволна конечна состојба за најмногу  $n$  периоди на дискретизација.

Математичкиот услов за оваа целосна управливост гласи: рангот на **матрицата на управливост**  $\underline{M}$  треба да биде еднаков на  $n$  :

$$(5.52) \quad \text{rang } \underline{M} = \text{rang} \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{AB} & \underline{A^2B} & \dots & \underline{A^{n-1}B} \end{bmatrix} = n$$

На сличен начин може да се дефинира и целосната управливост на еден систем во однос на неговите излези.

Еден линеарен стационарен дискретен динамички систем од произволен ред  $n$  е **целосно набљудлив** во однос на своите состојби, доколку секоја состојба  $\underline{y}(kT)$  на системот во произволен миг  $kT$  може да се определи врз основа на  $n$  претходни вредности на неговиот излез  $\underline{x}(kT)$ . Математичкиот услов за оваа целосна набљудливост гласи: рангот на **матрицата на набљудливост**  $\underline{N}$  треба да биде еднаков на  $n$  :

$$(5.53) \quad \text{rang } \underline{N} = \text{rang} \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA}^{-1} \\ \underline{CA}^{-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{CA}^{-n+1} \end{bmatrix} = n$$

За еден линеарен стационарен континуален динамички систем со модел:

$$(5.54) \quad \underline{v}'(t) = \underline{A}\underline{v}(t) + \underline{B}\underline{y}(t)$$

$$(5.55) \quad \underline{x}(t) = \underline{C}\underline{v}(t) + \underline{D}\underline{y}(t)$$

секогаш може да се определи соодветен дискретен еквивалент во просторот на состојби:

$$(5.56) \quad \underline{v}((k+1)T) = \tilde{\underline{A}}\underline{v}(kT) + \tilde{\underline{B}}\underline{y}(kT)$$

$$(5.57) \quad \underline{x}(kT) = \tilde{\underline{C}}\underline{v}(kT) + \tilde{\underline{D}}\underline{y}(kT)$$

чии елементи се:

$$(5.58) \quad \tilde{\underline{A}} = e^{\underline{A}T} = \underline{\phi}(T), \quad \tilde{\underline{B}} = \int_0^T e^{\underline{A}t} \underline{B} dt, \quad \tilde{\underline{C}} = \underline{C}, \quad \tilde{\underline{D}} = \underline{D}$$



**Задача 5.1.** Со помош на моделот со разгранет влез, да се опише во просторот на состојби дискретниот систем со еден влез  $y(k)$  и еден излез  $x(k)$  со преносна функција:

$$(5.59) \quad G(z) = \frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2 + 5z + 6}$$

**Решение:** Со делење на полиномите во броителот и именителот од преносната функција (5.59) се добива:

$$(5.60) \quad G(z) = 2 - \frac{8z + 11}{z^2 + 5z + 6} = 2 - \tilde{G}(z)$$

Дробно-рационалната функција  $\tilde{G}(z)$  има прости полови во  $z = -2$  и  $z = -3$ , па нејзиниот развој во парцијални дробки е:

$$(5.61) \quad \tilde{G}(z) = \frac{8z + 11}{z^2 + 5z + 6} = \frac{-5}{z + 2} + \frac{13}{z + 3}$$

Оттука, за  $Z$ -сликата  $X(z)$  на моделираниот дискретен систем се добива:

$$(5.62) \quad X(z) = G(z)Y(z) = \left[2 - \tilde{G}(z)\right]Y(z) = \left(2 + \frac{5}{z + 2} - \frac{13}{z + 3}\right)Y(z) = \\ = 2Y(z) + \frac{5}{z + 2}Y(z) - \frac{13}{z + 3}Y(z)$$

Состојбените големини  $v_1(k)$  и  $v_2(k)$  се одбираат така што за нивните  $Z$ -слики важи:

$$(5.63) \quad V_1(z) = \frac{1}{z + 2}Y(z)$$

$$(5.64) \quad V_2(z) = \frac{1}{z + 3}Y(z)$$

па, со воведување на смените (5.63)-(5.64) во (5.62), за излезот  $X(z)$  се добива:

$$(5.65) \quad X(z) = 2Y(z) + 5V_1(z) - 13V_2(z)$$

Равенките (5.63)-(5.65) го претставуваат бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот дискретен систем:

$$(5.66) \quad zV_1(z) = -2V_1(z) + Y(z)$$

$$(5.67) \quad zV_2(z) = -3V_2(z) + Y(z)$$

$$(5.68) \quad X(z) = 2Y(z) + 5V_1(z) - 13V_2(z)$$

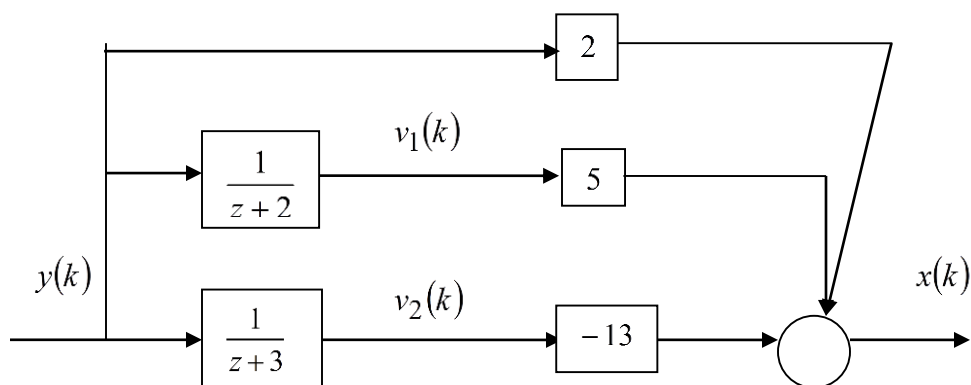
прикажан во  $z$  – комплексното подрачје. Во просторот на оригиналите моделот (5.63)-(5.65) гласи:

$$(5.69) \quad v_1(k+1) = -2v_1(k) + y(k)$$

$$(5.70) \quad v_2(k+1) = -3v_2(k) + y(k)$$

$$(5.71) \quad x(k) = 5v_1(k) - 13v_2(k) + 2y(k)$$

Соодветната структурна блок-шема е прикажана на Слика 5.5.



Слика 5.5. Структурна блок-шема на дискретниот систем од Задача 5.1

Елементите на моделот (5.69)-(5.71) се:

$$(5.72) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = [5 \quad -13] \quad d = 2$$

**Задача 5.2.** Со помош на директниот метод, да се опише во просторот на состојби дискретниот систем од Задача 5.1.

**Решение:** За  $Z$  – сликата  $W(z)$  на помошната променлива  $w(k)$  во конкретниот случај се добива:

$$(5.73) \quad W(z) = \frac{1}{1 + 5z^{-1} + 6z^{-2}} Y(z)$$

од каде што непосредно следува:

$$(5.74) \quad W(z) = -5z^{-1}W(z) - 6z^{-2}W(z) + Y(z)$$



Состојбените големина на моделираниот дискретен систем се одбираат во согласност со (5.28):

$$(5.75) \quad V_1(z) = z^{-1}W(z)$$

$$V_2(z) = z^{-2}W(z)$$

па со нивно воведување во (5.74) се добива:

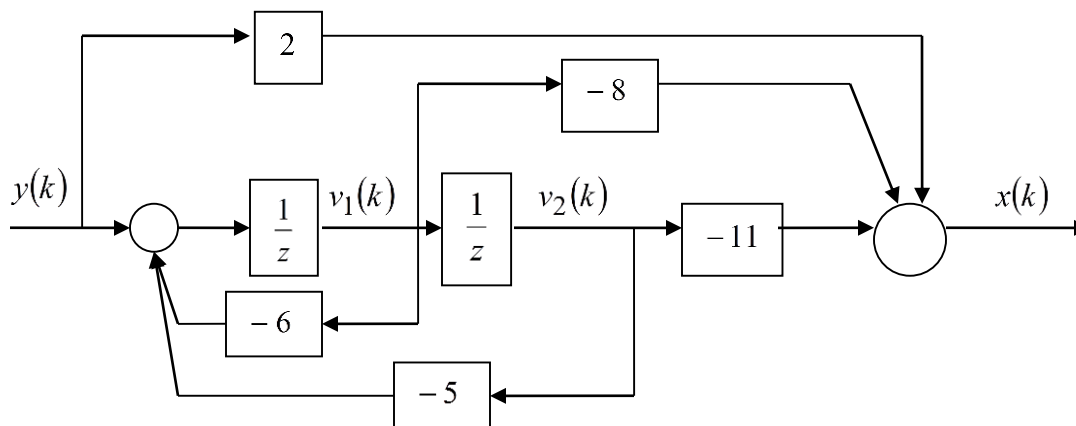
$$(5.76) \quad W(z) = -5V_1(z) + 6V_2(z) + Y(z)$$

Бараниот модел на дискретниот систем од Задача 5.1 во просторот на состојби добиен со директниот метод, во комплексното подрачје ќе биде:

$$(5.77) \quad zV_1(z) = W(z) = -5V_1(z) - 6V_2(z) + Y(z)$$

$$zV_2(z) = z^{-1}W(z) = V_1(z)$$

$$(5.78) \quad X(z) = -8V_1(z) - 11V_2(z) + 2Y(z)$$



Слика 5.6. Структурна блок-шема на моделот (5.79)-(5.80)

или, во просторот на оригиналите:

$$(5.79) \quad v_1(k+1) = -5v_1(k) - 6v_2(k) + y(k)$$

$$v_2(k+1) = v_1(k)$$

$$(5.80) \quad x(k) = -8v_1(k) - 11v_2(k) + 2y(k)$$

Неговите елементи се:

$$(5.81) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = [-8 \quad -11], \quad d = 2$$

а соодветната структурна блок-шема е прикажана на Слика 5.6.

**Задача 5.3.** Со помош на директниот метод, да се состави модел во просторот на состојби на дискретниот систем со еден влез  $y(k)$  и еден излез  $x(k)$ , чија што влезно-излезна динамика е опишана со линеарната диферентна равенка од втор ред:

$$(5.82) \quad x(k+2) + 0.9x(k+1) + 0.2x(k) = y(k+1) + 2y(k)$$

**Решение:** Со  $Z$ -трансформација на диферентната равенка (5.82), под претпоставка на нулеви почетни услови, се добива:

$$(5.83) \quad Z\{x(k+2) + 0.9x(k+1) + 0.2x(k)\} = Z\{y(k+1) + 2y(k)\}$$

$$z^2 X(z) + 0.9zX(z) + 0.2X(z) = zY(z) + 2Y(z)$$

$$X(z) = \frac{z+2}{z^2 + 0.9z + 0.2} Y(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}} Y(z)$$

Бараните состојбени големини  $v_1(k)$  и  $v_2(k)$  се определуваат преку помошната променлива  $w(k)$  дефинирана на следниот начин:

$$(5.84) \quad W(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}} Y(z)$$

и тоа така што за нивните  $Z$ -слики да важи:

$$(5.85) \quad V_1(z) = z^{-1}W(z)$$

$$V_2(z) = z^{-2}W(z)$$

Тогаш:

$$(5.86) \quad zV_1(z) = W(z)$$

$$zV_2(z) = z^{-1}W(z) = V_1(z)$$

Сликата  $W(z)$  може да се определи од равенката (5.84):

$$(5.87) \quad W(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}} Y(z) \Rightarrow$$

$$W(z) + 0.9z^{-1}W(z) + 0.2z^{-2}W(z) = Y(z) \Rightarrow$$

$$W(z) + 0.9V_1(z) + 0.2V_2(z) = Y(z) \Rightarrow$$

$$W(z) = Y(z) - 0.9V_1(z) - 0.2V_2(z)$$

па со воведување на изразот за  $W(z)$  во (5.86) се добива:

$$(5.88) \quad zV_1(z) = Y(z) - 0.9V_1(z) - 0.2V_2(z)$$

$$zV_2(z) = V_1(z)$$

Равенките (5.88), заедно со равенката:

$$(5.89) \quad X(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}} Y(z) = (z^{-1} + 2z^{-2})W(z) = V_1(z) + 2V_2(z)$$

го претставуваат бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот дискретен систем, прикажан во комплексното подрачје. Во просторот на оригиналите, тој модел гласи:

$$(5.90) \quad v_1(k+1) = y(k) - 0.9v_1(k) - 0.2v_2(k)$$

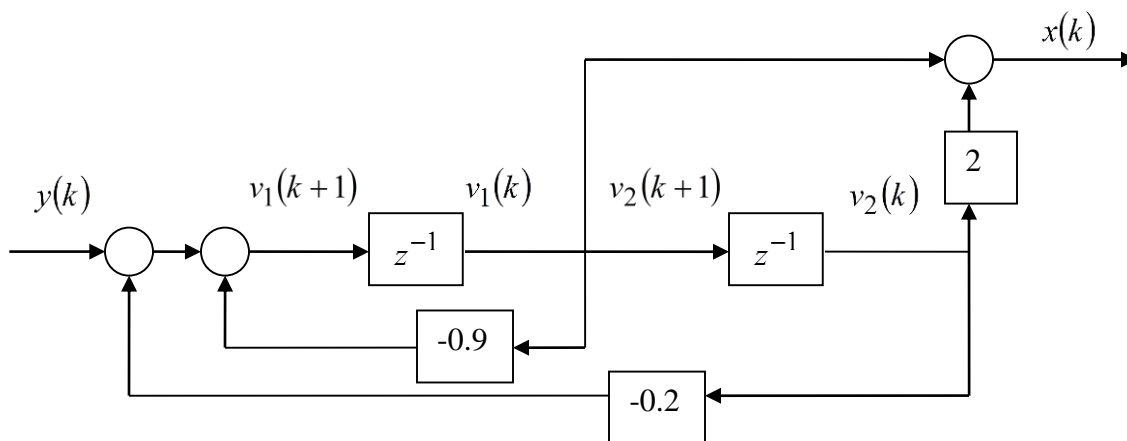
$$v_2(k+1) = v_1(k)$$

$$x(k) = v_1(k) + 2v_2(k)$$

и неговите елементи се:

$$(5.91) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -0.9 & -0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = [1 \quad 2], \quad d = 0$$

Соодветната структурна блок-шема е прикажана на Слика 5.7.



Слика 5.7. Структурна блок шема кон моделот (5.90)

**Задача 5.4.** Со помош на метод разгранет влез и излез, да се состави соодветниот модел во просторот на состојби на дискретен систем со еден влез  $y(kT)$  и еден излез  $x(kT)$ , чија што влезно-излезна динамика е опишана со линеарната диферентна равенка од втор ред:

$$(5.92) \quad x((k+2)T) - x((k+1)T) + 0.21x(kT) = 2y((k+1)T) + y(kT)$$

**Решение:** Со  $Z$  – трансформација на диферентната равенка (5.92), под претпоставка на нулеви почетни услови, се добива:

$$(5.93) \quad Z\{x((k+2)T) - x((k+1)T) + 0.21x(kT)\} = Z\{2y((k+1)T) + y(kT)\}$$

$$Z\{x((k+2)T) - x((k+1)T) + 0.21x(kT)\} = Z\{2y((k+1)T) + y(kT)\}$$

$$Z\{x((k+2)T)\} - Z\{x((k+1)T)\} + 0.21Z\{x(kT)\} = 2Z\{y((k+1)T)\} + Z\{y(kT)\}$$

$$z^2 X(z) - zX(z) + 0.21X(z) = 2zY(z) + Y(z)$$

од каде што, по мало преуредување, непосредно следува:

$$(5.94) \quad X(z) = z^{-1} \{2Y(z) + X(z) + z^{-1}[Y(z) - 0.21X(z)]\}$$

Динамиката на набљудуваниот дискретен систем, кој е од втор ред, ќе биде целосно опишана во просторот на состојби со најмалку две состојбени големини  $v_1(kT)$  и  $v_2(kT)$ , кои можат да се дефинираат на следниот начин:

$$(5.95) \quad V_1(z) = z^{-1}[2Y(z) + X(z) + V_2(z)]$$

$$V_2(z) = z^{-1}[Y(z) - 0.21X(z)]$$

Равенките (5.95) се трансформираат во следните равенки:

$$(5.96) \quad zV_1(z) = 2Y(z) + X(z) + V_2(z)$$

$$zV_2(z) = Y(z) - 0.21X(z)$$

а равенката (5.94), по воведувањето на смените (5.95), станува:

$$(5.97) \quad X(z) = V_1(z)$$

На равенките (5.96) во просторот на оригиналите им одговараат следните диферентни равенки:

$$(5.98) \quad v_1((k+1)T) = 2y(kT) + x(kT) + v_2(kT)$$

$$v_2((k+1)T) = y(kT) - 0.21x(kT)$$

а на равенката (5.97) ѝ одговара равенката:

$$(5.99) \quad x(kT) = v_1(kT)$$

Диферентните равенки од прв ред (5.98), чии решенија се состојбените големини на набљудуваниот дискретен систем, ги претставуваат равенките на векторот на состојба, додека равенката (5.99) е равенка на излезот на системот (5.92). Следствено, тие го чинат бараниот модел во просторот на состојби на зададениот дискретен систем, кој, по воведувањето на (5.99) во (5.98), го добива конечниот облик:

$$(5.100) \quad \begin{aligned} v_1((k+1)T) &= 2y(kT) + v_1(kT) + v_2(kT) \\ v_2((k+1)T) &= y(kT) - 0.21v_1(kT) \end{aligned}$$

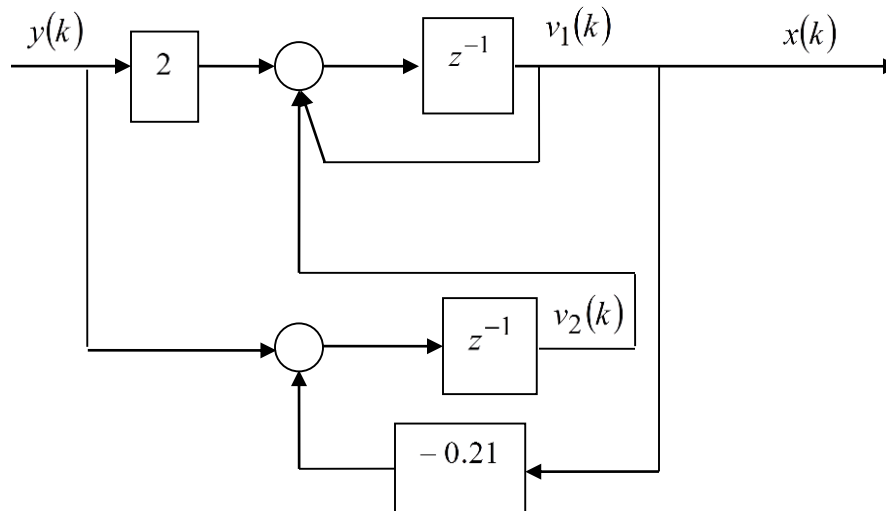
$$(5.101) \quad x(kT) = v_2(kT)$$

или, во матрична форма:

$$(5.102) \quad \underline{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.21 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}(kT) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} y(kT) = \underline{A}\underline{v}(kT) + \underline{b}y(kT)$$

$$(5.103) \quad x(kT) = [1 \quad 0] \underline{v}(kT) = \underline{c}\underline{v}(kT)$$

Структурната блок-шема кон моделот (5.102) – (5.103) е прикажана на Слика 5.8.



Слика 5.8. Структурна блок-шема на моделот (5.102) – (5.103)

**Задача 5.5.** Со помош на методот разгранет влез и излез, да се опише во просторот на состојби дискретниот систем од Задача 5.1.

**Решение:** Ако  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот од набљудуваниот дискретен систем се претстави во облик:

$$(5.104) \quad \begin{aligned} X(z) &= -5z^{-1}X(z) - 6z^{-2}X(z) + 2Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = \\ &= 2Y(z) + z^{-1}[2Y(z) - 5X(z)] + z^{-2}[Y(z) - 6X(z)] = \end{aligned}$$

$$= 2Y(z) + z^{-1} \{ [2Y(z) - 5X(z)] + z^{-1} [Y(z) - 6X(z)] \}$$

станува очигледно како можат да се одберат состојбените големина на моделираниот дискретен систем. Нека:

$$(5.105) \quad V_1(z) = z^{-1} \{ [2Y(z) - 5X(z)] + V_2(z) \}$$

$$V_2(z) = z^{-1} \{ [Y(z) - 6X(z)] \}$$

Тогаш:

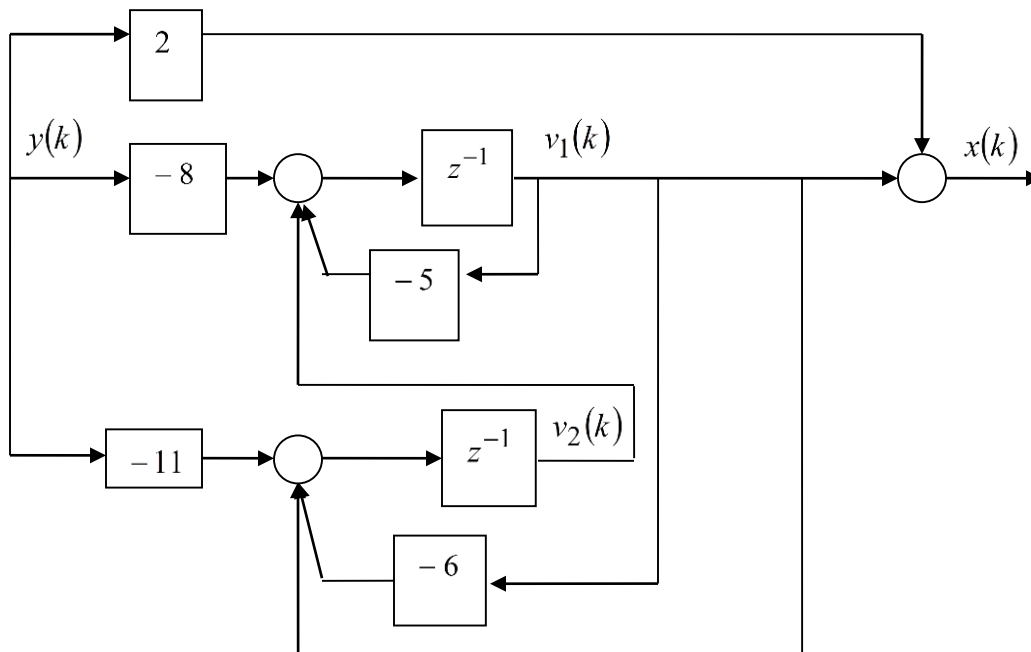
$$(5.106) \quad X(z) = 2Y(z) + V_1(z)$$

па бараниот модел ќе биде:

$$(5.107) \quad v_1(k+1) = -5x(k) + v_2(k) + 2y(k)$$

$$v_2(k+1) = -6x(k) + y(k)$$

$$x(k) = 2y(k) + v_1(k)$$



Слика 5.9. Структурна блок-шема на моделот (5.108) – (5.109)

Дефинитивниот облик на (5.107) се добива по елиминирањето на  $x(k)$  од равенките на векторот на состојба:

$$(5.108) \quad v_1(k+1) = -5v_1(k) + v_2(k) - 8y(k)$$

$$v_2(k+1) = -6v_1(k) - 11y(k)$$

$$x(k) = 2y(k) + v_1(k)$$

или, во матричен облик:

$$(5.109) \quad \underline{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}(kT) + \begin{bmatrix} -8 \\ -11 \end{bmatrix} y(kT) =$$

$$(5.110) \quad x(kT) = [1 \quad 0] \underline{v}(kT) + 2y(k)$$

Елементите на моделот (5.109) – (5.110) се:

$$(5.111) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -11 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = [1 \quad 0] \quad d = 2$$

а соодветната структурна блок-шема е прикажана на Слика 5.9.

**Задача 5.6.** Со помош на постапката разгранет влез и излез да се состави соодветен модел во просторот на состојби за дискретниот систем со еден влез  $y(k) = 1$  и еден излез  $x(k)$ , чија што влезно излезна динамика е опишана со линеарната диферентна равенка од втор ред:

$$(5.112) \quad x(k+2) - 1.3x(k+1) + 0.4x(k) = y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k); \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0$$

**Решение:** Со  $Z$ -трансформација на диферентната равенка (5.112), под претпоставка на нулеви почетни услови, се добива:

$$(5.113) \quad \begin{aligned} Z\{x(k+2) - 1.3x(k+1) + 0.4x(k) = y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k)\} \\ Z\{x(k+2) - 1.3x(k+1) + 0.4x(k)\} &= Z\{y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k)\} \\ Z\{x(k+2)\} - 1.3Z\{x(k+1)\} + 0.4Z\{x(k)\} &= Z\{x(k+2)\} + 3Z\{x(k+1)\} + 2Z\{x(k)\} \\ z^2X(z) - 1.3zX(z) + 0.4X(z) &= z^2Y(z) + 3zY(z) + 2Y(z) \end{aligned}$$

од каде што, по мало средување, непосредно следува:

$$(5.114) \quad X(z) = Y(z) + z^{-1}\{3Y(z) + 1.3X(z) + z^{-1}[2Y(z) - 0.4X(z)]\}$$

Динамиката на набљудуваниот дискретен систем, кој е од втор ред, ќе биде целосно опишана во просторот на состојби со две состојбени големини  $v_1(kT)$  и  $v_2(kT)$ , кои можат да се дефинираат на следниот начин:

$$(5.115) \quad \begin{aligned} V_1(z) &= z^{-1}[2Y(z) - 0.4X(z)] \\ V_2(z) &= z^{-1}[3Y(z) + 1.3X(z) + V_1(z)] \end{aligned}$$

Равенките (5.115) се трансформираат во следните равенки:

$$(5.116) \quad zV_1(z) = 2Y(z) - 0.4X(z)$$

$$zV_2(z) = 3Y(z) + 1.3X(z) + V_1(z)$$

а равенката (5.114), по воведувањето на смените (5.115), станува:

$$(5.117) \quad X(z) = Y(z) + V_2(z)$$

На равенките (5.116) - (5.117) во просторот на оригиналите им одговараат следните диферентни равенки:

$$(5.118) \quad v_1(k+1) = 2y(k) - 0.4x(k)$$

$$v_2(k+1) = 3y(k) + 1.3x(k) + v_1(k)$$

$$x(k) = y(k) + v_2(k)$$

Првите две равенки во овој модел се диферентни равенки од прв ред, чии решенија се состојбените големини на набљудуваниот дискретен систем, па тие ги претставуваат равенките на состојба на системот, додека последната равенка е равенка на излезот од системот. Со воведување на третата равенка во првите две, моделот (5.118) го добива конечниот облик:

$$(5.119) \quad v_1(k+1) = 1.6y(k) - 0.4v_2(k)$$

$$v_2(k+1) = 3.3y(k) + v_1(k) + 1.3v_2(k)$$

$$x(k) = y(k) + v_2(k)$$

или, во матричен облик:

$$(5.120) \quad \underline{v}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & 1.3 \end{bmatrix} \underline{v}(k) + \begin{bmatrix} 1.6 \\ 3.3 \end{bmatrix} y(k) = \underline{A}\underline{v}(k) + \underline{b}y(k)$$

$$x(k) = [0 \quad 1] \underline{v}(k) + y(k) = \underline{c}\underline{v}(k) + y(k)$$

Соодветната структурна блок-шема за овој модел е прикажана на Слика 5.10.

Почетните услови на (5.120) се определуваат на следниот начин:

$$(5.121) \quad v_2(0) = x(0) - y(0) = 1 - 1 = 0$$

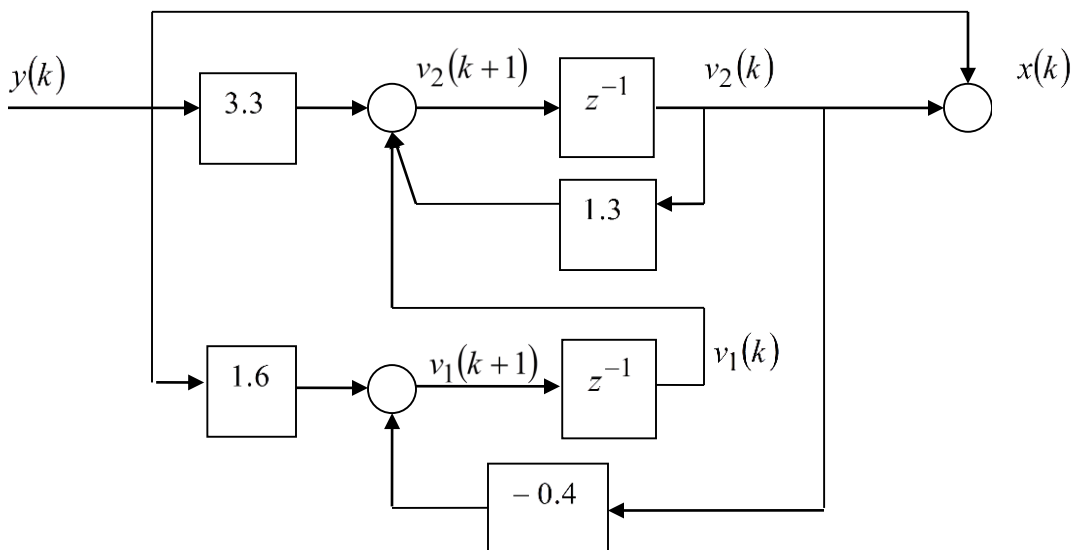
$$v_2(1) = x(1) - y(1) = 0 - 1 = -1$$

$$v_2(1) = 3.3y(0) + v_1(0) + 1.3v_2(0) = 3.3 + v_1(0) = -1 \Rightarrow v_1(0) = -4.3$$

па, следствено:

$$(5.122) \quad \underline{v}(0) = \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$





Слика 5.10. Структурна блок-шема на моделот (5.121)

**Задача 5.7.** Да се состави сериски модел во просторот на состојби на дискретниот систем од Задача 5.1.

**Решение:** Со оглед на тоа дека полиномите во броителот и именителот од преносната функција на моделираниот дискретен систем (5.59) се со ист степен, најнапред се врши нивно еднократно делење, при што се добива (5.60). Дробно-рационалната функција  $\tilde{G}(z)$  во (5.60) има два прости реални полови во  $z_1 = -2$  и  $z_2 = -3$  и една проста реална нула во  $w_1 = -\frac{11}{8}$ , па може да се запише во следниот факторизиран облик:

$$(5.123) \quad \tilde{G}(z) = \frac{8z + 11}{(z + 2)(z + 3)}$$

Тогаш, за  $Z$ -сликата  $X(z)$  на одзивот  $x(k)$  од набљудуваниот дискретен систем (5.59) се добива:

$$(5.124) \quad X(z) = 2Y(z) - \frac{8\left(z + \frac{11}{8}\right)}{(z + 2)(z + 3)}Y(z)$$

Состојбените големини  $v_1(k)$  и  $v_2(k)$  се одбираат така што нивните  $Z$ -слики се:

$$(5.125) \quad V_1(z) = \frac{8}{(z + 2)}Y(z)$$

$$V_2(z) = \frac{\left(z + \frac{11}{8}\right)}{(z+3)} V_1(z)$$

Равенките на векторот на состојба на набљудуваниот дискретен систем се добиваат со преуредување на равенките (5.125) и елиминирање на членовите  $zV_i(z)$  ( $i = 1,2$ ) од нив:

$$(5.126) \quad \left. \begin{aligned} (z+2)V_1(z) &= 8Y(z) \\ (z+3)V_2(z) &= \left(z + \frac{11}{8}\right)V_1(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} zV_1(z) &= -2V_1(z) + 8Y(z) \\ zV_2(z) &= -3V_2(z) + \left(z + \frac{11}{8}\right)V_1(z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} zV_1(z) &= -2V_1(z) + 8Y(z) \\ zV_2(z) &= -3V_2(z) - \frac{5}{8}V_1(z) + 8Y(z) \end{aligned} \right\}$$

Следствено, бараниот модел во просторот на состојби ќе биде:

$$(5.127) \quad \begin{aligned} zV_1(z) &= -2V_1(z) + 8Y(z) \\ zV_2(z) &= -3V_2(z) - \frac{5}{8}V_1(z) + 8Y(z) \\ X(z) &= 2Y(z) - V_2(z) \end{aligned}$$

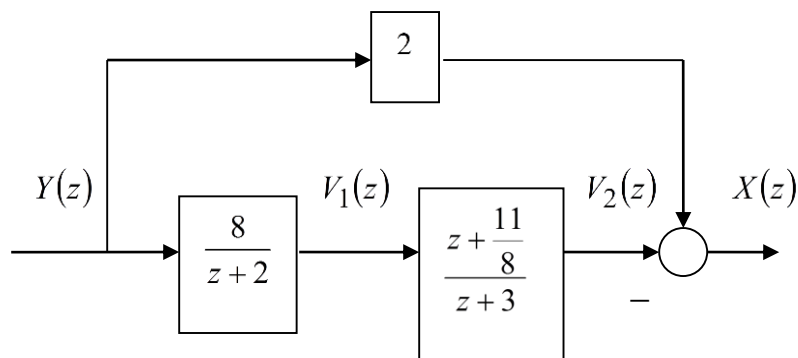
односно:

$$(5.128) \quad \begin{aligned} v_1(k+1) &= -2v_1(k) + 8y(k) \\ v_2(k+1) &= -3v_2(k) - \frac{5}{8}v_1(k) + 8y(k) \\ x(k) &= 2y(k) - v_2(k) \end{aligned}$$

Елементите на моделот (5.127) се:

$$(5.129) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -\frac{5}{8} & -3 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \underline{c} = [0 \quad -1] \quad d = 2$$

а неговата структурна блок-шема е прикажана на Слика 5.11.



Слика 5.11. Структурна блок-шема на серискиот модел во просторот на состојби на дискретниот систем (5.128)

**Задача 5.8.** Да се претстави во просторот на состојби дискретниот систем со модел:

$$(5.130) \quad 2\Delta^2 x(k) - 4\Delta x(k) = y(k); \quad x(0) = 1, x(1) = 0$$

каде што  $y(k)$  е влезот, а  $x(k)$  е излезот на системот и, потоа, врз основа на добиениот модел во просторот на состојби, да се определи неговата преносна функција  $G(z)$ .

**Решение:** За претставување на зададениот дискретен систем од втор ред во просторот на состојби потребни се две состојбени големини  $v_1(k)$  и  $v_2(k)$ , кои можат да се дефинираат на следниот начин:

$$(5.131) \quad v_1(kT) = x(kT)$$

$$(5.132) \quad v_2(kT) = \Delta x(kT)$$

Тогаш, од (5.130), (5.131) и (5.132) непосредно следува:

$$(5.133) \quad \Delta v_1(kT) = \Delta x(kT) = v_2(kT)$$

$$\Delta v_2(kT) = \Delta^2 x(kT) = 0.5y(kT) + 2v_2(kT)$$

при што (5.133) претставуваат диферентни равенки од прв ред со еквивалентен облик:

$$(5.134) \quad v_1((k+1)T) = v_1(kT) + v_2(kT)$$

$$v_2((k+1)T) = 0.5y(kT) + 3v_2(kT)$$

чии што решенија се состојбените големини на набљудуваниот дискретен систем. Тие се диферентните равенки на векторот на состојби и заедно со равенката на излезот:

$$(5.135) \quad x(kT) = v_1(kT)$$

го чинат бараниот модел во просторот на состојби на набљудуваниот дискретен систем. Во матричен облик моделот (5.134) – (5.135) може да се претстави на следниот начин:

$$(5.136) \quad \underline{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{v}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(kT) = [1 \quad 0] \underline{v}(kT)$$

со почетни услови:

$$(5.137) \quad \underline{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

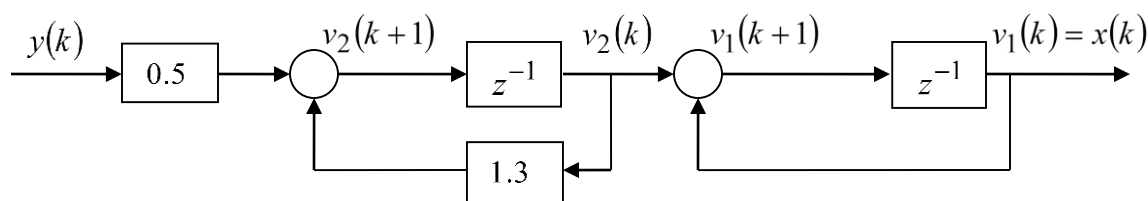
Структурната блок-шема, која одговара на моделот (5.136), е прикажана на Слика 5.12. Преносната функција  $G(z)$  на дискретниот систем (5.130) може да се определи врз основа на (5.136) на следниот начин:

$$(5.138) \quad G(z) = \underline{c}(zI - \underline{A})^{-1} \underline{b} = [1 \quad 0] \cdot \left( z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} =$$

$$= [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)(z-3)} [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)(z-3)} [z-3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2(z-1)(z-3)}, \quad |z| > 3$$



Слика 5.12. Структурна блок-шема на моделот (5.136)

**Задача 5.9.** Да се состави соодветен модел во просторот на состојби за затворениот динамички систем од Слика 5.13, ако:

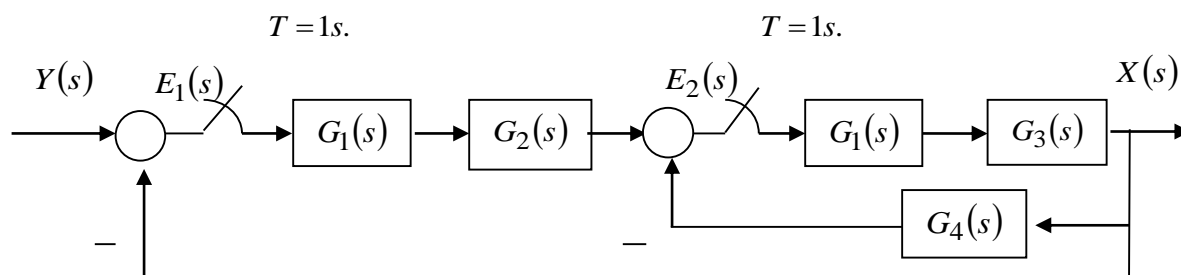
$$(5.139) \quad G_1(s) = \frac{1}{s}$$

$$(5.140) \quad G_2(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$(5.141) \quad G_3(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$(5.142) \quad G_4(s) = \frac{40}{s+10}$$

(Упатство: да се усвои дека  $e^{-1} \approx 0.3$ ,  $e^{-2} \approx 0.1$ ,  $e^{-10} \approx 0$ .)



Слика 5.13. Илустрација кон Задача 5.9

**Решение:** Дискретната преносна функција на набљудуваниот затворен систем е:

$$(5.143) \quad G(z) = \frac{G_1 G_2(z) G_1 G_3(z)}{1 + G_1 G_2(z) G_1 G_3(z) + G_1 G_3 G_4(z)}$$

каде што  $G_1 G_2(z)$ ,  $G_1 G_3(z)$  и  $G_1 G_3 G_4(z)$  се следните дискретни преносни функции:

$$(5.144) \quad G_1 G_2(z) = Z \left\{ L^{-1} [G_1(s) G_2(s)] \right\} = Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s(s+1)} \right] \right\} =$$

$$= Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] \right\} = \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} \right] =$$

$$= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.3} = \frac{0.7z}{(z-1)(z-0.3)}; \quad |z| > 1$$

$$(5.145) \quad G_1 G_3(z) = Z \left\{ L^{-1} [G_1(s) G_3(s)] \right\} = Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{2}{s(s+2)} \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right] \right\} = \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2}} \right] = \\
 &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.1} = \frac{0.9z}{(z-1)(z-0.1)}; \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.146) \quad G_1 G_3 G_4(z) &= Z \left\{ L^{-1} [G_1(s)G_3(s)G_4(s)] \right\} = Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{80}{s(s+2)(s+10)} \right] \right\} = \\
 &= Z \left\{ L^{-1} \left[ \frac{4}{s} - \frac{5}{s+2} + \frac{1}{s+10} \right] \right\} = \left[ \frac{4z}{z-1} - \frac{5z}{z-e^{-2}} + \frac{z}{z-e^{-10}} \right] = \\
 &= \frac{4z}{z-1} - \frac{5z}{z-0.1} + 1 = \frac{3.5z+0.1}{(z-1)(z-0.1)}; \quad |z| > 1
 \end{aligned}$$

Тогаш, со воведување на изразите (5.144), (5.145) и (5.146) во (5.143), за дискретната преносна функција  $G(z)$  се добива следниот конкретен израз:

$$(5.147) \quad G(z) = \frac{0.63z^2}{z^4 + 1.1z^3 - 1.99z^2 + 0.46z + 0.006}$$

Бидејќи дискретниот модел (5.147) е од четврти ред, за негово претставување во просторот на состојби се потребни најмалку четири состојбени големини:  $v_1(k)$ ,  $v_2(k)$ ,  $v_3(k)$  и  $v_4(k)$ . Еден начин тие да се изберат, е преку помошната променлива  $w(k)$ , на следниот начин:

$$(5.148) \quad V_1(z) = z^{-1}W(z)$$

$$(5.149) \quad V_2(z) = z^{-2}W(z)$$

$$(5.150) \quad V_3(z) = z^{-3}W(z)$$

$$(5.151) \quad V_4(z) = z^{-4}W(z)$$

од каде што непосредно следува:

$$(5.152) \quad zV_1(z) = W(z)$$

$$(5.153) \quad zV_2(z) = z^{-1}W(z) = V_1(z)$$

$$(5.154) \quad zV_3(z) = z^{-2}W(z) = V_2(z)$$

$$(5.155) \quad zV_4(z) = z^{-3}W(z) = V_3(z)$$

или, во просторот на оригиналите:

$$(5.156) \quad v_1(k+1) = w(k)$$

$$(5.157) \quad v_2(k+1) = v_1(k)$$

$$(5.158) \quad v_3(k+1) = v_2(k+1)$$

$$(5.159) \quad v_4(k+1) = v_3(k)$$

Равенките (5.156) – (5.159) ги претставуваат равенките на векторот на состојба на набљудуваниот дискретен систем.

За да се пресмета конкретниот израз за помошната променлива  $w(k)$ , дискретната преносна функција (5.147) се доведува на облик:

$$(5.160) \quad G(z) = \frac{0.63z^{-2}}{1 + 1.1z^{-1} - 1.99z^{-2} + 0.46z^{-3} + 0.006z^{-4}}$$

па, за  $Z$  – сликата  $W(z)$  се усвојува:

$$(5.161) \quad W(z) = \frac{1}{1 + 1.1z^{-1} - 1.99z^{-2} + 0.46z^{-3} + 0.006z^{-4}} Y(z)$$

Преку смените (5.148) – (5.151), равенката (5.161) може да се претстави во следниот погоден облик:

$$\begin{aligned} (5.162) \quad & \left(1 + 1.1z^{-1} - 1.99z^{-2} + 0.46z^{-3} + 0.006z^{-4}\right)W(z) = \\ & = W(z) + 1.1z^{-1}W(z) - 1.99z^{-2}W(z) + 0.46z^{-3}W(z) + 0.006z^{-4}W(z) = \\ & = W(z) + 1.1V_1(z) - 1.99V_2(z) + 0.46V_3(z) + 0.006V_4(z) = Y(z) \end{aligned}$$

од каде, за помошната променлива  $w(k)$  се добива:

$$(5.163) \quad w(k) = -1.1v_1(k) + 1.99v_2(k) - 0.46v_3(k) - 0.006v_4(k) + y(k)$$

Така, равенките на векторот на состојба (5.156) – (5.159) го добиваат следниот конечен облик:

$$(5.164) \quad v_1(k+1) = -1.1v_1(k) + 1.99v_2(k) - 0.46v_3(k) - 0.006v_4(k) + y(k)$$

$$(5.165) \quad v_2(k+1) = v_1(k)$$

$$(5.166) \quad v_3(k+1) = v_2(k+1)$$

$$(5.167) \quad v_4(k+1) = v_3(k)$$

Со смената (5.161), равенката на излезот на набљудуваниот дискретен систем во  $z$  – комплексното подрачје може да се претстави на следниот начин:

$$(5.168) \quad X(z) = G(z)Y(z) = 0.63z^{-2}W(z) = 0.63V_2(z)$$

или, во просторот на оригиналите:

$$(5.169) \quad x(k) = 0.63v_2(k)$$

Следствено, равенките (5.164) – (5.167) и (5.169) претставуваат еден дискретен модел на набљудуваниот затворен систем од Слика 5.13 во просторот на состојби.

**Задача 5.10.** Да се определат половите на дискретниот динамички систем од втор ред, опишан со следниот модел во просторот на состојби:

$$(5.170) \quad \underline{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 2\cos(2T) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}(kT) + \begin{bmatrix} \cos(2T) \\ 1 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$x(kT) = [1 \quad 0] \underline{v}(kT) + y(kT)$$

**Решение:** Преносната функција на набљудуваниот дискретен динамички систем може да се определи според изразот:

$$(5.171) \quad G(z) = \underline{c}(z\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} = \underline{c} \frac{\text{adj}^T(z\underline{I} - \underline{A})}{\det(z\underline{I} - \underline{A})} \underline{b}$$

Оттука, неговиот карактеристичен полином  $a(z)$ , ќе биде:

$$(5.172) \quad a(z) = \det(z\underline{I} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} z - 2\cos(2T) & 1 \\ -1 & z \end{vmatrix} = \\ = z^2 - 2z\cos\omega T + 1 = (z - e^{-j\omega T})(z - e^{j\omega T}) \quad |z| > 1$$

Тој има две прости нули и тие се бараните полови на набљудуваниот систем:

$$(5.173) \quad z_{1,2} = e^{\pm j\omega T}$$

**Задача 5.11.** Да се определи дискретната преносна функција  $G(z)$  на еден систем на автоматско управување, опишан со следниот модел во просторот на состојби:

$$(5.174) \quad \underline{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} -0.8 & a \\ 1 & 0.6 \end{bmatrix} \underline{v}(kT) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT) \\ x(kT) = [1 \quad 1] \underline{v}(kT)$$

и да се испита неговата стабилност во зависност од вредностите на променливиот параметар  $a$ .

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G(z)$  на системот (5.174) е дадена со изразот:



$$\begin{aligned}
 (5.175) \quad G(z) &= [1 \quad 1] \cdot \left( \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.8 & a \\ 1 & 0.6 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} z+0.8 & -a \\ -1 & z-0.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{[1 \quad 1]}{(z-0.6)(z+0.8)+a} \begin{bmatrix} z-0.6 & a \\ 1 & z+0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{[z+0.4 \quad z+0.8+a]}{z^2+0.2z+a-0.48} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2z+a+1.2}{z^2+0.2z+a-0.48}
 \end{aligned}$$

а неговиот карактеристичен полином  $a(z)$  е:

$$(5.176) \quad a(z) = z^2 + 0.2z + a - 0.48$$

Условите полиномот (5.176) да биде Хурвицов  $z$ -полином гласат:

$$(5.177) \quad 1 + 0.2 + a - 0.48 = 0.72 + a > 0$$

$$(5.178) \quad 1 - a + 0.48 = 1.48 - a > 0$$

$$(5.179) \quad 1 - 0.2 + a - 0.48 = 0.32 + a > 0$$

и тие се сведуваат на неравенството:

$$(5.180) \quad -0.32 < a < 1.48$$

со кое е дефинирана параметарската област на стабилност на зададениот дискретен систем (5.174). Таа претставува интервал дозволени вредности на параметарот  $a$  за кои набљудуваниот дискретен систем ќе биде стабилен.

**Задача 5.12.** Да се определи векторот на состојба  $\underline{v}(kT)$  на дискретниот систем со модел во просторот на состојби од општ облик:

$$(5.181) \quad \underline{v}((k+1)T) = \underline{A}\underline{v}(kT) + \underline{b}y(kT)$$

$$(5.182) \quad x(kT) = \underline{c}\underline{v}(kT)$$

ако:

$$(5.183) \quad y(kT) = h(kT) = \begin{cases} 0; & k < 0 \\ 1; & k \geq 0 \end{cases}$$

$$(5.184) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(5.185) \quad \underline{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Решение:** Со  $Z$ -трансформација на системот равенки (5.181)-(5.182), за  $Z$ -сликата  $\underline{V}(z)$  на векторот на состојба  $\underline{v}(kT)$  на набљудуваниот дискретен систем се добива:

$$\begin{aligned} (5.186) \quad \underline{V}(z) &= (zI - \underline{A})^{-1} [z\underline{v}(0) + \underline{b}Y(z)] = \\ &= \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ 2-z \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = \\ &= \frac{z}{(z-1)(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 2-z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{z^3 + 2z}{(z-1)(z+0.2)(z+0.8)} \\ \frac{-z^3 + 1.84z^2}{(z-1)(z+0.2)(z+0.8)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

од каде што, со примена на инверзната  $Z$ -трансформација, за  $\underline{v}(kT)$  непосредно следува:

$$(5.187) \quad \underline{v}(kT) = \begin{bmatrix} 1.39 - 2.83(-0.2)^k + 2.44(-0.8)^k \\ 0.39 + 0.57(-0.2)^k - 1.95(-0.8)^k \end{bmatrix}; \quad k \geq 0$$

**Задача 5.13.** Да се определи дискретната преносна функција  $G(z)$  и одзивот  $x(kT)$  на дискретниот систем со следниот модел во просторот на состојби:

$$(5.188) \quad \underline{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \underline{v}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT)$$

$$(5.189) \quad x(kT) = [0 \quad 1] \underline{v}(kT)$$

ако:

$$(5.190) \quad \underline{v}(0) = \underline{0}$$

$$(5.191) \quad u(kT) = h(kT) = \begin{cases} 0; & k < 0 \\ 1; & k \geq 0 \end{cases}$$

**Решение:** Дискретната преносна функција  $G(z)$  на набљудуваниот дискретен систем со модел (5.188) - (5.189) е:

$$(5.192) \quad G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \underline{c}(z\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{b} = \underline{c} \frac{\text{adj}^T(z\underline{I} - \underline{A})}{\det(z\underline{I} - \underline{A})} \underline{b} =$$

$$= \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}; \quad |z| > 2$$

Оттука, за  $Z$ -сликата  $X(z)$  на неговиот одзив  $x(kT)$  се добива:

$$(5.193) \quad X(z) = G(z)U(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-2)}$$

Оригиналот  $x(kT)$  кон  $Z$ -сликата  $X(z)$ , дадена со (5.193) може да се определи со нејзин развој во парцијални дропки:

$$(5.194) \quad \frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{(z-1)^2} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z-2} =$$

$$= \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{-2}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

па, од (5.194) следува:

$$(5.195) \quad x(kT) = Z^{-1}\{X(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{-z}{(z-1)^2} + \frac{-2z}{z-1} + \frac{2z}{z-2}\right\} =$$

$$= -k - 2 + 2^{k+1}; \quad k \geq 0$$

**Задача 5.14.** Со помош на критериумот на I. E. Jury, да се испита стабилноста на дискретниот систем опишан со следниот модел во просторот на состојби:

$$(5.196) \quad \mathbf{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 & 0 \\ 0.53 & 0 & 1 \\ 0.04 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(kT) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.4 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$(5.197) \quad x(kT) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{v}(kT)$$

**Решение:** Карактеристичниот полином на набљудуваниот дискретен систем е:

$$(5.198) \quad a(z) = \det(z\underline{I} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} z-1.4 & -1 & 0 \\ -0.53 & z & -1 \\ -0.04 & 0 & z \end{vmatrix} = z^2(z-1.4) - 0.04 + 0.53z =$$

$$= z^3 - 1.4z^2 + 0.53z - 0.04$$

и, со негова проверка според критериумот на I. E. Jury, се заклучува дека тој е Хурвицов  $z$ -полином. Следствено, набљудуваниот дискретен систем е стабилен. Проверката на стабилност на системот (5.196)-(5.197) е дадена во долната таблица.

$$(5.199) \quad a(1) = 1 - 1.4 + 0.53 - 0.04 = 0.13 - 0.04 = 0.09 > 0$$

$$(5.200) \quad (-1)^3 a(1) = 1 + 1.4 + 0.53 + 0.04 = 2.44 + 0.53 = 2.97 > 0$$

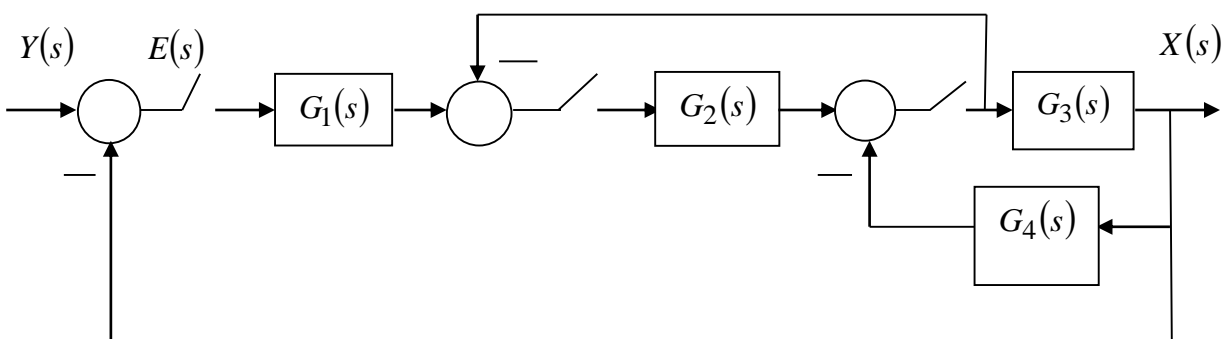
$$(5.201) \quad |1| > |-0.04|$$

$$(5.202) \quad |0.9984| > |0.474|$$

**Таблица 5.1. Испитување на стабилноста на системот од задача 5.14 според I. E. Jury**

<b>1</b>	-1.4	0.53	-0.04
-0.04	0.53	-1.4	1
<b>0.9984</b>	<b>-1.3788</b>	<b>0.474</b>	

**Задача 5.15.** Со помош на методот разгранет влез и разгранет излез, да се состави дискретен модел во просторот на состојби за затворениот динамички систем од Слика 5.14 со влез  $y(t)$  и излез  $x(t)$ . Потоа, со помош на критериумот на I. E. Jury да се испита стабилноста на добиениот дискретен модел.



Слика 5.14. Илустрација кон Задача 5.15

Да се претпостави дека  $T = 1s$ . и:

$$(5.203) \quad G_1(s) = \frac{1}{s + \ln 2}$$

$$(5.204) \quad G_2(s) = \frac{1}{s + \ln 3}$$

$$(5.205) \quad G_3(s) = \frac{1}{s + \ln 4}$$

$$(5.206) \quad G_4(s) = 1 + \frac{\ln 2}{s + \ln 2}$$

**Решение:** Со примена на правилата на алгебрата на блок-шемите и правилата за дискретно еквивалентирање континуални системи, за дискретната преносна функција на системот од Слика 5.14 се добива:

$$(5.207) \quad G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)G_3(z)}{1 + G_2(z) + G_3G_4(z) + G_1(z)G_2(z)G_3(z)} = \frac{24z^3}{96z^3 - 58z^2 + 14z - 1}$$

каде што:

$$(5.208) \quad G_1(z) = Z\{G_1(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 2}\right\} = Z\left\{e^{-t \ln 2} h(t)\right\} = \\ = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t h(t)\right\} = \frac{z}{z - 1/2} = \frac{2z}{2z - 1}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(5.209) \quad G_2(z) = Z\{G_2(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 3}\right\} = Z\left\{e^{-t \ln 3} h(t)\right\} = \\ = Z\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^t h(t)\right\} = \frac{z}{z - 1/3} = \frac{3z}{3z - 1}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$(5.210) \quad G_3(z) = Z\{G_3(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 4}\right\} = Z\left\{e^{-t \ln 4} h(t)\right\} = \\ = Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^t h(t)\right\} = \frac{z}{z - 1/4} = \frac{4z}{4z - 1}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$(5.211) \quad G_3G_4(z) = Z\{G_3(s)G_4(s)\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 4} \cdot \left[1 + \frac{\ln 2}{s + \ln 2}\right]\right\} = Z\left\{\frac{1}{s + \ln 2}\right\} = \\ = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^t h(t)\right\} = \frac{z}{z - 1/2} = \frac{2z}{2z - 1}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Еден модел во просторот на состојби на набљудуваниот затворен дискретен систем (5.207) се добива со постапката на разгранет влез и излез, така што неговиот одзив  $X(z)$  ќе се претстави на следниот начин:

$$(5.212) \quad (96z^3 - 58z^2 + 14z - 1)X(z) = 24z^3Y(z)$$

$$96z^3X(z) - 58z^2X(z) + 14zX(z) - X(z) = 24z^3Y(z)$$

$$96z^3X(z) = 58z^2X(z) - 14zX(z) + X(z) + 24z^3Y(z)$$

$$X(z) = \frac{29}{48}z^{-1}X(z) - \frac{7}{48}z^{-2}X(z) + \frac{1}{96}z^{-3}X(z) + \frac{1}{4}Y(z)$$

$$(5.213) \quad X(z) = \frac{1}{4}Y(z) + z^{-1} \left\{ \frac{29}{48}X(z) + z^{-1} \left\{ -\frac{7}{48}X(z) + z^{-1} \left[ \frac{1}{96}X(z) \right] \right\} \right\}$$

и состојбените големини  $V_1(z)$ ,  $V_2(z)$  и  $V_3(z)$  ќе се изберат на следниот начин:

$$(5.214) \quad V_1(z) = z^{-1} \left\{ \frac{29}{48}X(z) + V_2(z) \right\}$$

$$(5.215) \quad V_2(z) = z^{-1} \left\{ -\frac{7}{48}X(z) + V_3(z) \right\}$$

$$(5.216) \quad V_3(z) = z^{-1} \left[ \frac{1}{96}X(z) \right]$$

Тогаш, за равенките на векторот на состојби и равенката на излезот во комплексното подрачје се добива:

$$(5.217) \quad zV_1(z) = \frac{29}{48}X(z) + V_2(z)$$

$$(5.218) \quad zV_2(z) = -\frac{7}{48}X(z) + V_3(z)$$

$$(5.219) \quad zV_3(z) = \frac{1}{96}X(z)$$

$$(5.220) \quad X(z) = \frac{1}{4}Y(z) + V_1(z)$$

или, во просторот на оригиналите:

$$(5.221) \quad v_1(k+1) = \frac{29}{48}x(k) + v_2(k)$$

$$(5.222) \quad v_2(k+1) = -\frac{7}{48}x(k) + v_3(k)$$

$$(5.223) \quad v_3(k+1) = \frac{1}{96}x(k)$$

$$(5.224) \quad x(k) = \frac{1}{4}y(k) + v_1(k)$$

Со воведување на (5.224) во (5.221) – (5.223), конечно се добива:

$$(5.225) \quad v_1(k+1) = \frac{29}{48}v_1(k) + v_2(k) + \frac{29}{192}y(k)$$

$$(5.226) \quad v_2(k+1) = -\frac{7}{48}v_1(k) + v_3(k) - \frac{7}{192}y(k)$$

$$(5.227) \quad v_3(k+1) = \frac{1}{96}v_1(k) + \frac{1}{384}y(k)$$

$$(5.228) \quad x(k) = \frac{1}{4}y(k) + v_1(k)$$

Равенките (5.225) – (5.228) го претставуваат бараниот модел во просторот на состојби на дискретниот систем (5.207), со следните елементи:

$$(5.229) \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{29}{48} & 1 & 0 \\ -\frac{7}{48} & 0 & 1 \\ \frac{1}{96} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \frac{1}{384} \begin{bmatrix} 58 \\ -14 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad d = \frac{1}{4}$$

Карактеристичниот полином на набљудуваниот дискретен систем (5.207) е:

$$(5.230) \quad a(z) = 96z^3 - 58z^2 + 14z - 1$$

и, со проверка според критериумот на I.E. Југу, се заклучува дека тој е Хурвицов  $z$ -полином:

$$(5.231) \quad a(1) = 96 - 58 + 14 - 1 = 51 > 0$$

$$(5.232) \quad (-1)^3 a(1) = 96 + 58 + 14 + 1 = 169 > 0$$

$$(5.233) \quad |96| > |-1|$$

$$(5.234) \quad |9215| > |1286|$$

Следствено, дискретниот модел (5.207) е стабилен.

**Таблица 5.2. Испитување на стабилноста на системот од Задача 5.15 според I. E. Jury**

<b>1</b>	96	-58	14	-1
<b>2</b>	-1	14	-58	96
<b>3</b>	<b>9215</b>	<b>.....</b>	<b>1286</b>	

**Задача 5.16.** Да се состави дискретниот модел во просторот на состојби на континуалниот динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , опишан со неговата преносна функција:

$$(5.235) \quad G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

ако се претпостави дека  $T = 1s$ . и влезот на системот е од облик:

$$(5.236) \quad y(t) = y(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Решение:** Еден начин да се опише зададениот континуален систем во просторот на состојби е со воведување на помошната променлива  $w(t)$  на следниот начин:

$$(5.237) \quad G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

$$(5.238) \quad X(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} Y(s)$$

$$(5.239) \quad W(s) = \frac{1}{s(s+1)} Y(s)$$

Тогаш, за  $L$ -сликата  $X(s)$  на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот континуален систем (5.235), се добива:

$$(5.240) \quad X(s) = (s+2)W(s)$$

На равенките (5.239) и (5.240) во просторот на оригиналите им одговараат следните равенки:

$$(5.241) \quad w''(t) + w'(t) = y(t)$$

$$(5.242) \quad x(t) = w'(t) + 2w(t)$$

кои, со воведување на смените:



$$(5.243) \quad v_1(t) = w(t)$$

$$(5.244) \quad v_2(t) = w'(t)$$

се трансформираат во равенките:

$$(5.245) \quad v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = -v_2(t) + y(t)$$

$$(5.246) \quad x(t) = 2v_1(t) + v_2(t)$$

Променливите  $v_1(kT)$  и  $v_2(kT)$  претставуваат состојбени големини на набљудуваниот континуален систем, па, следствено, равенките (5.245) се равенки на векторот на состојба, а (5.246) е равенката на излезот на моделот во просторот на состојби на континуалниот систем (5.235). Матричниот облик на моделот (5.245) – (5.246) гласи:

$$(5.247) \quad \underline{v}'(t) = \underline{A}\underline{v}(t) + \underline{b}y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$(5.248) \quad x(t) = \underline{c}\underline{v}(t) + d y(t) = [2 \quad 1] \underline{v}(t)$$

и тој има дискретен еквивалент од облик:

$$(5.249) \quad \underline{v}((k+1)T) = \tilde{\underline{A}}\underline{v}(kT) + \tilde{\underline{b}}y(kT)$$

$$(5.250) \quad x(kT) = \tilde{\underline{c}}\underline{v}(kT) + \tilde{d}y(kT)$$

каде што:

$$(5.251) \quad \tilde{\underline{A}} = e^{\underline{A}T} = \underline{f}(T), \quad \tilde{\underline{b}} = \int_0^T e^{\underline{A}t} \underline{b} dt, \quad \tilde{\underline{c}} = \underline{c}, \quad \tilde{d} = d$$

Фундаменталната матрица  $\underline{f}(t)$  на системот (5.245) – (5.246) е:

$$(5.252) \quad \underline{f}(t) = L^{-1} \left\{ (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \right\} = \\ = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

а со нејзина помош се пресметува:

$$(5.253) \quad \tilde{\underline{A}} = \underline{f}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.63 \\ 0 & 0.37 \end{bmatrix}$$

$$(5.254) \quad \tilde{\underline{b}} = \int_0^T \underline{f}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t + e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \Big|_0^T = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.63 \end{bmatrix}$$

Оттука, еден дискретен модел во просторот на состојби на зададениот континуален систем (5.235) е моделот:

$$(5.255) \quad \underline{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.63 \\ 0 & 0.37 \end{bmatrix} \underline{v}(kT) + \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.63 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$(5.256) \quad x(kT) = [2 \quad 1] \underline{v}(kT)$$

**Задача 5.17.** Да се состави дискретен модел во просторот на состојби на континуалниот систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$  со модел:

$$(5.257) \quad \underline{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \underline{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$(5.258) \quad x(t) = \underline{c} \underline{v}(t)$$

под претпоставка, дека влезот  $y(t)$  е од облик (5.236).

**Решение:** Фундаменталната матрица  $\underline{f}(t)$  на системот (5.257) - (5.258) се определува на следниот начин:

$$\begin{aligned} (5.259) \quad \underline{f}(t) &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s + 2\zeta\omega \end{bmatrix}^{-1} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix} \right\} = \\ &= L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

каде што  $s_1$  и  $s_2$  се нули на полиномот:

$$(5.260) \quad a(s) = s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = (s - s_1)(s - s_2)$$

и тие, со оглед на тоа дека  $\zeta$  претставува фактор на релативно пригушување во системот помало од 1, изнесуваат:

$$(5.261) \quad s_{1,2} = -\zeta\omega \pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2}$$

Тогаш, за елементите на  $\underline{f}(t)$  се добива:

$$(5.262) \quad f_{11}(t) = e^{-\zeta\omega t} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) + e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega t\sqrt{1-\zeta^2})$$

$$(5.263) \quad f_{12}(t) = e^{-\zeta\omega t} \frac{1}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2})$$

$$(5.264) \quad f_{21}(t) = -e^{-\zeta\omega t} \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2})$$

$$(5.265) \quad f_{22}(t) = -e^{-\zeta\omega t} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) + e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega t\sqrt{1-\zeta^2})$$

па, бараниот дискретен модел на системот (5.257) - (5.258), е определен со матрицата:

$$(5.266) \quad \underline{\tilde{A}} = \underline{f}(T)$$

и векторот:

$$(5.267) \quad \underline{\tilde{b}} = \int_0^T \begin{bmatrix} f_{12}(t) \\ f_{22}(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} - e^{-\zeta\omega t} \frac{\zeta}{\omega^2\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) + \frac{1}{\omega^2} e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) \\ e^{-\zeta\omega t} \frac{1}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega t\sqrt{1-\zeta^2}) \end{bmatrix}$$

**Задача 5.18.** Даден е стабилен континуален динамички систем со преносна функција:

$$(5.268) \quad G(s) = \frac{0.2s + 1}{0.05s + 1}, \quad \text{Re } s > -20$$

со влез  $y(t)$  и излез  $x(t)$ . Да се најде дискретниот еквивалент на моделот (5.268) за влезна возбуда од облик:

$$(5.269) \quad y(t) = y(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

и да се определи положбата на неговата нула и пол во  $z$ -комплексната рамнина.

**Решение:** Еден модел во просторот на состојби на зададениот континуален систем (5.268) е :

$$(5.270) \quad \begin{aligned} v'(t) &= -20v(t) + y(t) \\ x(t) &= -60v(t) + 4y(t) \end{aligned}$$

а за неговиот дискретен еквивалент се добива:

$$(5.271) \quad \begin{aligned} v((k+1)T) &= e^{-20T} v(kT) + \int_0^T e^{-20t} y(kT) dt = \\ &= e^{-20T} v(kT) - 0.05e^{-20t} \Big|_0^T y(kT) = \\ &= e^{-20T} v(kT) + 0.05(1 - e^{-20T}) y(kT) \\ x(kT) &= -60v(kT) + 4y(kT) \end{aligned}$$

Оттука, дискретната преносна функција  $G(z) = \frac{X(z)}{Y(z)}$  на набљудуваниот континуален систем ќе биде:

$$(5.272) \quad \begin{aligned} G(z) &= \frac{X(z)}{Y(z)} = -60 \cdot (z - e^{-20T})^{-1} 0.05(1 - e^{-20T}) + 4 = \\ &= \frac{4z - e^{-20T} - 3}{z - e^{-20T}}, \quad |z| > e^{-20T} \end{aligned}$$

Функцијата (5.272) има една конечна нула во точката:

$$(5.273) \quad z^0 = \frac{1}{4}(3 + e^{-20T})$$

и еден пол во точката:

$$(5.274) \quad z^* = e^{-20T}$$

Лесно се проверува дека и двете точки припаѓаат на областа  $|z| < 1$ .

**Задача 5.19.** Да се состави дискретен модел во просторот на состојби на континуалниот динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , кој е опишан со преносната функција:

$$(5.275) \quad G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}, \quad \operatorname{Re} s > -1$$

ако се претпостави дека влезот на системот е од облик:

$$(5.276) \quad y(t) = y(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Потоа да се испита стабилноста на добиениот дискретен систем.

**Решение:** Еден модел во просторот на состојби на зададениот континуален систем (5.275) е:

$$(5.277) \quad v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = -2v_1(t) - 3v_2(t) + y(t)$$

$$(5.278) \quad x(t) = 3v_1(t) + v_2(t)$$

а, за неговата фундаментална матрица  $\underline{f}(t)$  се добива:

$$(5.279) \quad \underline{f}(t) = L^{-1} \left\{ (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \right\} =$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Со нејзина помош се пресметуваат елементите на дискретниот еквивалент на моделот (5.277) – (5.278):

$$(5.280) \quad \underline{\tilde{A}} = \underline{f}(T) = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$(5.281) \quad \underline{\tilde{b}} = \int_0^T \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt =$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix}$$

па, оттука, еден дискретен модел во просторот на состојби на зададениот континуален систем (5.275) е моделот:

$$(5.282) \quad \underline{y}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} + 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix} \underline{y}(kT) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix} y(kT)$$

$$(5.283) \quad x(kT) = [3 \quad 1] \underline{y}(kT)$$

Карактеристичниот полином на дискретниот еквивалент (5.282) – (5.283) се пресметува како детерминанта на матрицата  $z\underline{I} - \tilde{\underline{A}}$ :

$$(5.284) \quad a(z) = \det(z\underline{I} - \tilde{\underline{A}}) = \begin{vmatrix} z - 2e^{-T} + e^{-2T} & -e^{-T} + e^{-2T} \\ 2e^{-T} - 2e^{-2T} & z + e^{-T} - 2e^{-2T} \end{vmatrix} =$$

$$= (z - 2e^{-T} + e^{-2T})(z + e^{-T} - 2e^{-2T}) - (2e^{-T} - 2e^{-2T})(-e^{-T} + e^{-2T}) =$$

$$= z^2 - (e^{-T} + e^{-2T})z + e^{-3T} = (z - e^{-T})(z - e^{-2T})$$

и тој има два прости реални пола во точките:

$$(5.285) \quad z_1 = e^{-T}, \quad z_2 = e^{-2T}$$

кои лежат во внатрешноста на единичниот круг  $|z| \leq 1$ . Следствено, дискретниот модел (5.282) – (5.283) е стабилен.

**Задача 5.20.** Да се состави дискретниот модел во просторот на состојби на еден континуален динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , опишан со својата преносна функција:

$$(5.286) \quad G(s) = \frac{s+3}{s(s+2)}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

ако се претпостави дека влезот на системот е од облик:

$$(5.287) \quad y(t) = y(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Потоа да се испита управливоста на така добиениот дискретен модел.

**Решение:** Еден начин да се опише зададениот континуален систем во просторот на состојби е со воведување на помошната променлива  $h(t)$  на следниот начин:

$$(5.288) \quad G(s) = \frac{s+3}{s(s+2)} = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

$$(5.289) \quad X(s) = \frac{s+3}{s(s+2)} Y(s)$$

$$(5.290) \quad H(s) = \frac{1}{s(s+2)} Y(s)$$

Тогаш, со воведување на смената (5.290) во (5.289), за  $L$ -сликата  $X(s)$  на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот континуален систем (5.286), се добива:

$$(5.291) \quad X(s) = (s+3)H(s)$$

На равенките (5.290) и (5.291) во просторот на оригиналите им одговараат следните равенки:

$$(5.292) \quad h''(t) + 2h'(t) = y(t)$$

$$(5.293) \quad x(t) = h'(t) + 3h(t)$$

кои со воведување на смените:

$$(5.294) \quad v_1(t) = h(t)$$

$$(5.295) \quad v_2(t) = h'(t)$$

се трансформираат во равенките:

$$(5.296) \quad v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = -2v_2(t) + y(t)$$

$$(5.297) \quad x(t) = 3v_1(t) + v_2(t)$$

Променливите  $v_1(kT)$  и  $v_2(kT)$  се состојбени големини на набљудуваниот континуален систем, па, следствено, равенките (5.296) се диференцијалните равенки на векторот на состојби, а (5.297) е равенката на излезот од моделот во просторот на состојби на континуалниот систем (5.286), чиј што матричен облик гласи:

$$(5.298) \quad \underline{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) = \underline{A}\underline{v}(t) + \underline{b}y(t)$$

$$(5.299) \quad x(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \underline{v}(t) = \underline{c}\underline{v}(t) + \underline{d}y(t)$$

Моделот (5.298) - (5.299) го има следниот дискретен еквивалент:

$$(5.300) \quad \underline{v}((k+1)T) = \underline{\tilde{A}}\underline{v}(kT) + \underline{\tilde{b}}y(kT)$$

$$(5.301) \quad x(kT) = \underline{\tilde{c}}\underline{v}(kT) + \underline{\tilde{d}}y(kT)$$

каде што елементите:

$$(5.302) \quad \underline{\tilde{A}} = e^{\underline{A}T} = \underline{f}(T), \quad \underline{\tilde{b}} = \int_0^T e^{\underline{A}t} \underline{b} dt, \quad \underline{\tilde{c}} = \underline{c}, \quad \underline{\tilde{d}} = \underline{d}$$

се пресметуваат со помош на фундаменталната матрица  $\underline{f}(t)$ :

$$(5.303) \quad \underline{f}(t) = L^{-1}\left\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\right\} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \\ = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$(5.304) \quad \underline{A} = \underline{f}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.375 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$(5.305) \quad \underline{b} = \int_0^T \underline{f}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0.159 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

Оттука, еден дискретен модел во просторот на состојби на зададениот континуален систем (5.286), е моделот:

$$(5.306) \quad \underline{y}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 1 & 0.375 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \underline{y}(kT) + \begin{bmatrix} 0.159 \\ 0.375 \end{bmatrix} y(kT)$$

$$(5.307) \quad x(kT) = [3 \quad 1] \underline{y}(kT)$$

За да се испита управливоста на дискретниот модел (5.306) - (5.307) со ред  $n = 2$ , се формира матрицата:

$$(5.308) \quad \underline{M} = [\underline{b} \quad \underline{A}\underline{b} \quad \underline{A}^2\underline{b} \quad \dots \quad \underline{A}^{n-1}\underline{b}] = [\underline{b} \quad \underline{A}\underline{b}] = \begin{bmatrix} 0.159 & 0.300 \\ 0.375 & 0.094 \end{bmatrix}$$

чија детерминанта е:

$$(5.309) \quad |\underline{M}| = \begin{vmatrix} 0.159 & 0.300 \\ 0.375 & 0.094 \end{vmatrix} = 0.15 \neq 0$$

Следствено, дискретниот модел (5.306) - (5.307) на зададениот континуален систем (5.286) е целосно управлив.

**Задача 5.21.** Да се состави дискретен модел во просторот на состојби на еден континуален динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , опишан со неговата преносна функција:

$$(5.310) \quad G(s) = \frac{20}{s(0.2s+1)}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

ако се претпостави дека  $T = 1s$ . и влезот на системот е од облик:



$$(5.311) \quad y(t) = y(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Дали може да се определи управување  $y(kT)$ , кое добиениот дискретен модел ќе го преведе од произволна почетна состојба  $y(0) = y_0$  во координатниот почеток за два периода на дискретизација  $T$ .

**Решение:** Од дефиницијата на преносната функција  $G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)}$  и (5.310) следува:

$$(5.312) \quad X(s) = \frac{20}{s(0.2s+1)}Y(s)$$

а со воведување на смената  $W(s)$ :

$$(5.313) \quad W(s) = \frac{1}{s(s+5)}Y(s)$$

за  $L$ -сликата  $X(s)$  на одзивот  $x(t)$  на набљудуваниот континуален систем (5.310) се добива:

$$(5.314) \quad X(s) = 100W(s)$$

На равенките (5.313) и (5.314) во просторот на оригиналите им одговараат следните равенки:

$$(5.315) \quad w''(t) + 5w'(t) = y(t)$$

$$(5.316) \quad x(t) = 100w(t)$$

кои, со воведување на смените:

$$(5.317) \quad v_1(t) = w(t)$$

$$(5.318) \quad v_2(t) = w'(t)$$

се трансформираат во системот:

$$(5.319) \quad v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = -5v_2(t) + y(t)$$

$$(5.320) \quad x(t) = 100v_1(t)$$

Равенките (5.319) се равенки на векторот на состојба, а (5.320) е равенка на излезот од моделот во просторот на состојби на континуалниот систем (5.310), чиј матричен облик гласи:

$$(5.321) \quad \underline{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) = \underline{A} \underline{v}(t) + \underline{b} y(t)$$

$$(5.322) \quad \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}(t) = \underline{c} \underline{v}(t) + d y(t)$$

Фундаменталната матрица  $\underline{f}(t)$  на системот (5.321) – (5.322) е:

$$(5.323) \quad \underline{f}(t) = L^{-1} \left\{ (sI - \underline{A})^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5}(1 - e^{-5t}) \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

па, елементите  $\tilde{\underline{A}}$  и  $\tilde{\underline{b}}$  на неговиот дискретен еквивалент се:

$$(5.324) \quad \underline{A} = \underline{f}(T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) \\ 0 & e^{-5T} \end{bmatrix}$$

$$(5.325) \quad \underline{b} = \int_0^T \underline{f}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \left( t + \frac{1}{5} e^{-5t} \right) \\ -\frac{1}{5} e^{-5t} \end{bmatrix} \Bigg|_0^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \left( T + \frac{1}{5} e^{-5T} - \frac{1}{5} \right) \\ -\frac{1}{5} e^{-5T} + \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{5} - \frac{1}{5} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-5T} \right) \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-5T} \end{bmatrix}$$

Следствено, еден дискретен модел во просторот на состојби на заддениот континуален систем (5.310) е моделот:

$$(5.326) \quad \underline{v}((k+1)T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) \\ 0 & e^{-5T} \end{bmatrix} \underline{v}(kT) + \begin{bmatrix} \frac{T}{5} - \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) \\ \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) \end{bmatrix} y(kT)$$

$$(5.327) \quad \underline{x}(kT) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}(kT)$$

За да може да се оствари поставената задача на управување, добиениот дискретен модел (5.326) – (5.327) од произволна почетна состојба  $\underline{v}(0) = \underline{v}_0$  да се преведе во крајната состојба  $\underline{v}(2T) = \underline{0}$ , потребно е моделот да биде целосно управлив во однос на состојбите. Оттука, следен чекор е да се формира матрицата на управливост  $\underline{M}$  на набљудуваниот дискретен систем и да се провери нејзиниот ранг. Таа, во конкретниот случај изнесува:

$$(5.328) \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{A}\underline{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T}{5} - \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) & \frac{T}{5} - \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) + \frac{1}{5}(1 - e^{-5T})^2 \\ \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) & \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) e^{-5T} \end{bmatrix}$$

и, со проверка, може да се утврди дека нејзината детерминанта секогаш е различна од нулата:

$$(5.329) \quad |\underline{M}| = \begin{vmatrix} \frac{T}{5} - \frac{1}{25}(1 - e^{-5T}) & \frac{T}{5} - \frac{1}{25}(1 - e^{-5T}) + \frac{1}{25}(1 - e^{-5T})^2 \\ \frac{1}{5}(1 - e^{-5T}) & \frac{1}{5}(1 - e^{-5T})e^{-5T} \end{vmatrix} = \frac{-T}{25}(1 - e^{-5T})^2 \neq 0$$

Следствено, дискретниот модел (5.326) – (5.327) е целосно управлив, што значи дека постои управување  $y(kT)$ , кое ќе го преведе од произволна почетна состојба  $v(0) = v_0$  во координатниот почеток за два периода на дискретизација  $T$ . Тоа управување се добива како решение на матричната равенка:

$$(5.330) \quad \underline{0} = \underline{A}^2 v(0) + \underline{A}b y(0) + b y(T)$$

**Задача 5.22.** Да се состави моделот во просторот на состојби на континуалниот динамички систем од втор ред со еден влез  $y(t)$  и еден излез  $x(t)$ , опишан со неговата преносна функција:

$$(5.331) \quad G(s) = \frac{4}{s^2 + 4}, \quad \text{Re } s > 0$$

Потоа, под претпоставка дека е исполнет условот (5.311), да се состави еквивалентен дискретен модел на овој систем во просторот на состојби и да се испита дали условите за целосна управливост и набљудливост на дискретниот модел зависат од периодот на дискретизација  $T$ .

**Решение:** Со оглед на дефиницијата на една преносна функција, за дадениот континуален систем може да се запише:

$$(5.332) \quad G(s) = \frac{4}{s^2 + 4} = \frac{X(s)}{Y(s)}$$

Оттука, непосредно следува:

$$(5.333) \quad X(s) = \frac{4}{s^2 + 4} Y(s)$$

Со воведување на помошната променлива  $w(t)$ , така што за нејзината  $L$ -слика да важи:

$$(5.334) \quad W(s) = \frac{1}{s^2 + 4} Y(s)$$

равенката (5.333) се трансформира во равенката:

$$(5.335) \quad X(s) = 4W(s)$$

На равенките (5.334) и (5.335) во просторот на оригиналите им одговараат следните равенки:

$$(5.336) \quad w''(t) + 4w(t) = y(t)$$

$$(5.337) \quad x(t) = 4w(t)$$

кои, со воведување на состојбените големина  $v_1(kT)$  и  $v_2(kT)$ :

$$(5.338) \quad v_1(t) = w(t)$$

$$(5.339) \quad v_2(t) = w'(t)$$

поминуваат во равенките:

$$(5.340) \quad v_1'(t) = v_2(t)$$

$$v_2'(t) = -4v_1(t) + y(t)$$

$$(5.341) \quad x(t) = 4v_1(t)$$

Равенките (5.340) – (5.341) го претставуваат моделот во просторот на состојби на континуалниот систем (5.331), чиј матричен облик е:

$$(5.342) \quad \underline{v}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y(t)$$

$$(5.343) \quad x(t) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \underline{v}(t)$$

Фундаменталната матрица  $\underline{f}(t)$  на системот (5.342) – (5.343) гласи:

$$(5.344) \quad \underline{f}(t) = L^{-1} \left\{ (s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\} =$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 4} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \frac{1}{2} \sin(2t) \\ -2 \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

па со нејзина помош се пресметува:

$$(5.345) \quad \underline{\tilde{A}} = \underline{f}(T) = \begin{bmatrix} \cos(2T) & \frac{1}{2} \sin(2T) \\ -2 \sin(2T) & \cos(2T) \end{bmatrix}$$

$$(5.346) \quad \underline{\tilde{b}} = \int_0^T \underline{f}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cos(2t) \\ \frac{1}{2} \sin(2t) \end{bmatrix}^T \Big|_0^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cos(2T) + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \sin(2T) \end{bmatrix}$$

Следствено, бараниот дискретен модел во просторот на состојби на дадениот континуален систем (5.331) е:

$$(5.347) \quad \underline{y}((k+1)T) = \begin{bmatrix} \cos(2T) & \frac{1}{2} \sin(2T) \\ -2 \sin(2T) & \cos(2T) \end{bmatrix} \underline{y}(kT) + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} [1 - \cos(2T)] \\ \frac{1}{2} \sin(2T) \end{bmatrix} \underline{y}(kT)$$

$$(5.348) \quad \underline{x}(kT) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \underline{y}(kT)$$

Условот за целосна управливост на дискретниот модел (5.347) – (5.348) гласи:

$$(5.349) \quad \det \underline{M} = |\underline{M}| = \begin{vmatrix} \tilde{b} & \tilde{A}\tilde{b} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{4} [1 - \cos(2T)] & \frac{1}{4} [1 - \cos(2T) + \sin^2(2T) - \cos^2(2T)] \\ \frac{1}{2} \sin(2T) & \frac{1}{2} \sin(2T) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^3(2T) \neq 0$$

од каде што непосредно следува дека тој ќе биде целосно управлив во однос на состојбите само и ако само:

$$(5.350) \quad T \neq \frac{k\pi}{2}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Од друга страна, условот за целосна набљудливост на дискретниот модел (5.347) – (5.348) во просторот на оригиналите е:

$$(5.351) \quad \det \underline{M}^* = |\underline{M}^*| = \begin{vmatrix} \underline{c} \\ \underline{c}\tilde{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4\cos(2T) & 2\sin(2T) \end{vmatrix} = 8\sin(2T) \neq 0$$

па, оттука следува дека тој ќе биде целосно набљудлив ако и само ако важи условот (5.350).



# ПРИЛОЗИ

ТАБЛИЦА НА ОСОБИНИ НА Z-ТРАНСФОРМАЦИЈАТА

ТЕОРЕМА	ОРИГИНАЛ	Z-СЛИКА
Теорема за хомогеност	$af(kT); a = const. \in \mathbb{C}$	$aF(z)$
Теорема за адитивност	$f_1(kT) + f_2(kT)$	$F_1(z) + F_2(z)$
Теорема за линеарност	$a_1f_1(kT) + a_2f_2(kT);$ $a_1, a_2 = const. \in \mathbb{C}$	$a_1F_1(z) + a_2F_2(z)$
Теорема за промена на $z$ -скалата	$a^{kT} f(kT); a = const. \in \mathbb{C}$	$F(za^{-T})$
Теорема за множење на дискретниот оригинал со $kT$ или диференцирање на $Z$ -сликата	$kTf(kT)$	$-zT \frac{d}{dz} F(z)$
Проширување на теоремата за диференцирање на $Z$ -сликата	$(kT)^n f(kT)$	$\left[-zT \frac{d}{dz} F(z)\right]^{n-пати}$
Теорема за делење на дискретниот оригинал со $kT$ или интегрирање на $Z$ -сликата	$\frac{f(kT)}{kT}$	$\frac{1}{T} \int_z^\infty \frac{F(w)}{w} dw + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(kT)}{kT}$
Теорема за translација во просторот на оригиналите во лево	$f(kT + nT)$	$z^n \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k} \right]$
Теорема за translација во просторот на оригиналите во десно	$f(kT - nT)$	$z^{-n} \left[ F(z) - \sum_{k=-n}^{-1} f(kT)z^{-k} \right]$

Теорема за пресликување на конечна сума	$\sum_{m=-\infty}^{k-1} f(mT)$	$\frac{F(z)}{z-1} + \frac{z}{z-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} f(kT)$
Теорема за пресметување на бесконечна сума	$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)$	$\sum_{k=0}^{\infty} f(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z)$
Теорема за почетната вредност на дискретниот оригинал	$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT)$	$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
Теорема за крајната вредност на дискретниот оригинал	$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$	$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$
Теорема за конволуција на дискретни оригинали или множење на Z-слики	$\sum_{n=0}^k f_1(kT - nT) f_2(nT)$	$F_1(z)F_2(z)$
Теорема за множење на дискретни оригинали или конволуција на Z-слики	$f_1(kT) f_2(kT)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F_1(w)F_2\left(\frac{z}{w}\right)}{w} dw$
Парсервалова теорема	$\sum_{k=0}^{\infty} f^2(kT)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_{ z =1} \frac{F(z)F(z^{-1})}{z} dz$



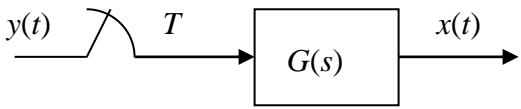
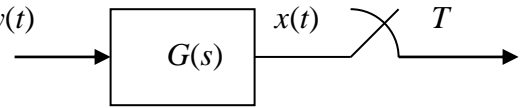
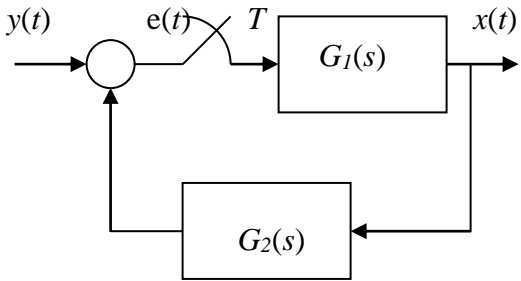
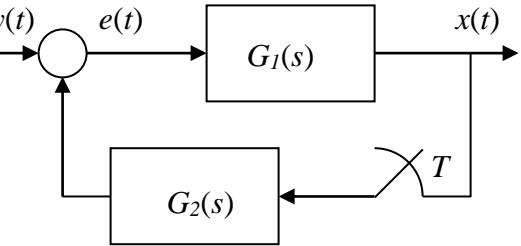
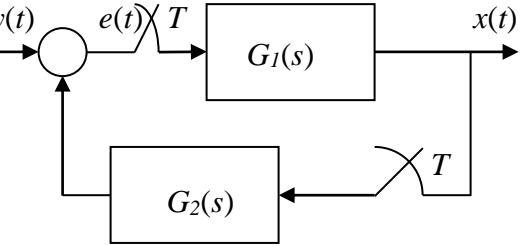
ТАБЛИЦА НА Z-ТРАНСФОРМАЦИОНИ ПАРОВИ

ОРИГИНАЛ	Z-СЛИКА
$\delta(kT)$	1
$\delta(k - nT)$	$z^{-n}$
$h(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
$kTh(kT)$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$(kT)^2 h(kT)$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$(kT)^3 h(kT)$	$\frac{T^3 z(z^2 + 4z - 1)}{(z-1)^4}$
$(kT)^n h(kT)$	$\left[ -zT \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) \right]^{n-pati}$
$e^{-akT} h(kT)$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$(kT)e^{-akT} h(kT)$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$(kT)^n e^{-akT} h(kT)$	$\left[ -zT \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right) \right]^{n-pati}$
$a^{kT} h(kT)$	$\frac{z}{z - a^T}$
$a^{(k-1)T} h((k-1)T)$	$\frac{1}{z - a^T}$
$kTa^{(k-1)T} h((k-1)T)$	$\frac{zT}{(z - a^T)^2}$
$(kT)^2 a^{(k-1)T} h((k-1)T)$	$\frac{zT^2(z + a^T)}{(z - a^T)^3}$

ТАБЛИЦА НА Z-ТРАНСФОРМАЦИОНИ ПАРОВИ-ПРОДОЛЖЕНИЕ

ОРИГИНАЛ	Z-СЛИКА
$(kT)^3 a^{(k-1)T} h((k-1)T)$	$\frac{zT^3(z^2 + 4za^T + a^{2T})}{(z - a^T)^4}$
$(kT)^4 a^{(k-1)T} h((k-1)T)$	$\frac{zT^4(z^3 + 11a^T z^2 + 11za^{2T} + a^{3T})}{(z - a^T)^5}$
$(1 - e^{-akT})h(kT)$	$\frac{1 - e^{-aT}}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$
$\sin(\omega kT)h(kT)$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos(\omega kT)h(kT)$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

ДИСКРЕТНИ ЕКВИВАЛЕНТИ НА КОНТИНУАЛНИ СИСТЕМИ

СИСТЕМ	ОДСИВ
	$G(z)Y(z)$
	$GY(z)$
	$\frac{G_1(z)Y(z)}{1 - G_1G_2(z)}$
	$\frac{G_1Y(z)}{1 - G_1G_2(z)}$
	$\frac{G_1(z)Y(z)}{1 - G_1(z)G_2(z)}$



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. F. Franklin, J. D. Powell, M. L. Workman, **Digital Control of Dynamic Systems**, Prentice-Hall, 1997.
- [2] M. Stoic, **Digitalni sistemi upravljanja**, Nauka, Beograd, RS, 1996.
- [3] R. C. Dorf & R. H. Bishop, **Modern Control Systems**, Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1995.
- [4] K. Ogata, **Discrete-Time Control Systems**, Prentice-Hall, 1995.
- [5] C. L. Phillips, H. T. Nagle, **Digital Control Systems Analysis and Design**, Prentice-Hall, 1994.
- [6] J. J. DiStefano III , A. R. Stubberud & I. J. Williams, **Feedback and Control Systems**, Mc Graw-Hill Inc., New York, New York, 1990.
- [7] K. Astrom & B. Wittenmark, **Computer Controlled Systems**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [8] B. C. Kuo, **Discrete-Data Control Systems**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
- [9] J. A. Cadzow & H. R. Martens, **Discrete-Time and Computer Control Systems**, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.
- [10] J. T. Tou, **Digital and Sampled-Data Control Systems**, Mc Graw-Hill Inc., New York, New York, 1959.
- [11] Е. Лазаревска, **Анализа на линеарните дискретни системи на управување**, КИП ЖАКИ, Скопје, 1994.
- [12] П. Видинчев, Е. Лазаревска, **Збирка решени задачи по дискретни системи на управување**, УКИМ, Скопје, 1985.

