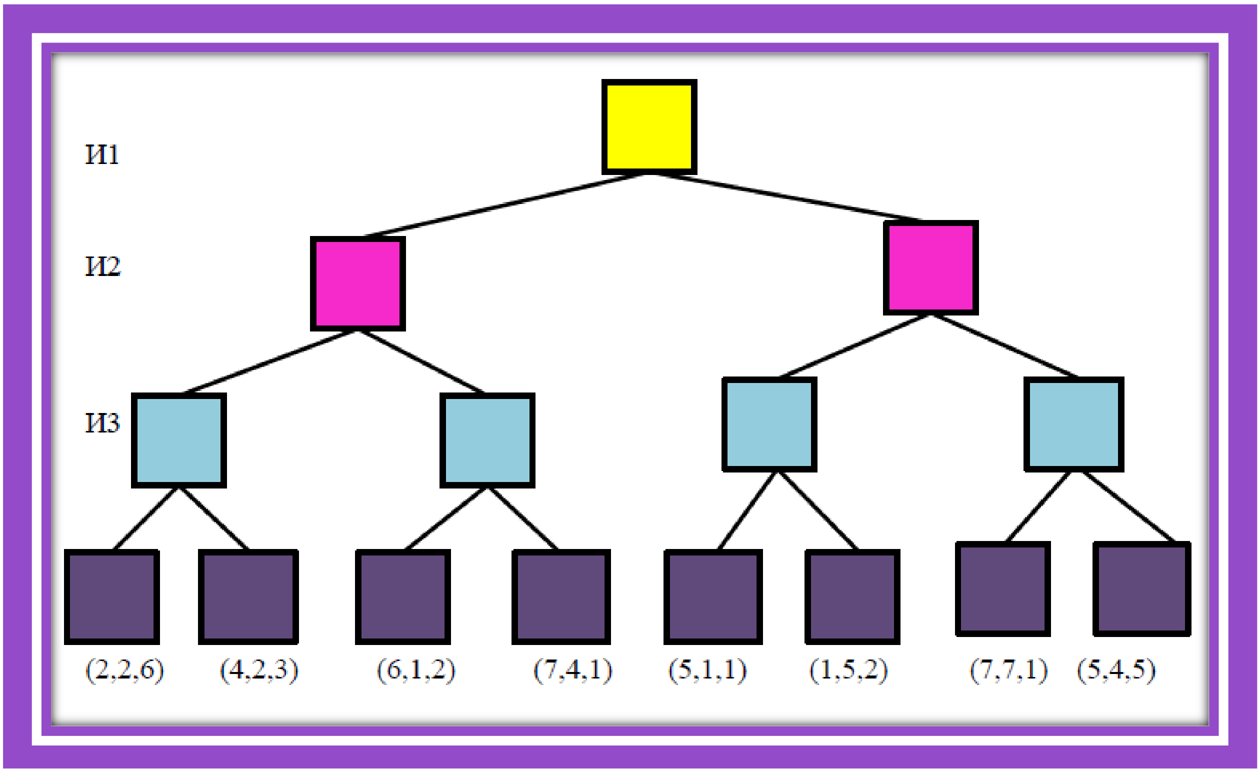
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје

Факултет за електротехника и информациски технологии - Скопје

ЕЛИЗАБЕТА ЛАЗАРЕВСКА

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО ВЕШТАЧКА ИНТЕЛИГЕНЦИЈА



Скопје, 2020

Издавач:

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:

Проф. д-р Елизабета Лазаревска, редовен професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии - Скопје

Рецензенти

1. Д-р Весна Ојлеска Латкоска, вонреден професор на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

2. Д-р Горјан Нацински, доцент на Факултетот за електротехника и информациски технологии – Скопје

Техничка обработка

Проф. д-р Елизабета Лазаревска

Лектура на македонски јазик:

Дијана Ристова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

004.8(075.8)(076)

ЛАЗАРЕВСКА, Елизабета
Збирка решени задачи по вештачка интелигенција [Електронски извор] / Елизабета Лазаревска. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Факултет за електротехника и информациски технологии, 2020

Начин на пристап (URL): http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53 &glavno=41. - Текст во PDF формат, содржи 302 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 15.01.2020. -
Библиографија: стр. 301-302

ISBN 978-9989-43-442-6

а) Вештачка интелегенција - Високошколски учебници - Вежби COBISS.MK-ID 111991050

ПРЕДГОВОР

Збирката првенствено е наменета за студентите од V семестар на новата програма Компјутерско системско инженерство, автоматика и роботика (КСИАР) на Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, кои го слушаат предметот Основи на вештачката интелигенција. Меѓутоа, таа подеднакво добро ќе им послужи и на сите останати студенти од техничките факултети во Република Северна Македонија кои ја изучуваат вештачката интелигенција, како и на инженерите и практичарите кои работат на ова поле. Како релативно нова научна област, вештачката интелигенција сè уште не е покриена со доволно учебници, а посебно збирки решени задачи, така што Збирката има за цел барем малку да придонесе кон подобрување на оваа состојба. Колку што му е познато на авторот, збирки од областа на вештачката интелигенција во светот сè уште нема, ако не се земат предвид страниците на интернет со испитни задачи, кои сепак не се систематски сортирани и презентирани, и најчесто се заштитени со лозинки.

Материјалот претставен во Збирката е поделен на 6 поглавја: 1. Дефиниции и прашања, 2. Пребарување, 3. Пребарување со ограничувања, 4. Игри, 5. Машинско учење и 6. Вештачки невронски мрежи. Првото поглавје е наместо вовед во теоријата на вештачката интелигенција, и низ дефиниции и прашања го воведува читателот во проблематиката на Збирката. Тоа содржи 33 дефиниции, 52 прашања од типот точно/погрешно и 70 куси прашања. Второто поглавје ги прикажува постапките за решавање проблеми во вештачката интелигенција со пребарување. Низ вкупно 30 решени задачи се прикажани најпознатите алгоритми за слепо неоптимално и оптимално пребарување, како и евристичко неоптимално и оптимално пребарување. Тоа се алгоритамот за пребарување прво по широчина, прво по длабочина, до одредена длабочина, итеративно пребарување по длабочина, пребарување со униформна цена, алчно пребарување прво од најдобриот јазол и A* алгоритамот. Третото поглавје ги илустрира постапките за пребарување со ограничувања, при што се разгледувани само случаите на унарни и бинарни ограничувања. Тоа опфаќа 22 решени задачи. Четвртото поглавје е посветено на играње игри во вештачката интелигенција, при што се разгледувани игри со нулта сума, игри со повеќе играчи и игри со елементи на среќа (неизвесност). Постапките за играње игри МИН-МАКС и АЛФА-БЕТА се илустрирани со 25 решени задачи. Петтото поглавје ги илустрира основните постапки за учење во вештачката интелигенција, како учењето со конјукции, со нормална дисјунктивна форма, стебла на одлучување, наивниот Баесов алгоритам. Тоа опфаќа 23 решени задачи. Конечно, шестото поглавје е резервирано за вештачките невронски мрежи, кои тука се илустрирани само на воведно ниво. Затоа ова поглавје е конципирано како и првото поглавје, со 63 куси прашања и задачи. Најголем дел од задачите изложени и решени во оваа Збирка се оригинални, со исклучок на неколку референцирани во литературата и се разбира, со исклучок на многу познатите проблеми кои можат да се најдат насекаде на интернет, како на пример криптоаритметичките сложувалки. Меѓутоа, и овде авторот направил напор и составил оригинална криптоаритметичка сложувалка на македонски јазик. Збирката завршува со седмото поглавје кое е резервирано за литература. Како што може да се забележи, таа литература е многу ретка.

Авторот е свесен дека вклучувањето кус осврт кон теоријата од различните области на вештачката интелигенција кои се застапени во Збирката, значително ќе го олеснеше решавањето на многуте прашања и задачи од Збирката. Меѓутоа, поради ограничениот број страници во Збирката, тоа не е направено. Материјалот во Збирката целосно ги следи предавањата по истиот предмет, кои можат да се најдат во скриптата Предавања по машинско учење издадена од страна на ФЕИТ – Скопје 2015.

На крајот, авторот однапред им се заблагодарува на рецензентите за нивниот труд во рецензирањето на оваа Збирка, како и на сите нејзини читатели за сите евентуални забелешки, кои сигурно ќе го подобрат квалитетот на Збирката.

Авторот,

Скопје, 2020

СОДРЖИНА

" The journey of a thousand miles begins with one step. " ~ Lao Tzu

„ Патувањето од илјада милји започнува со еден чекор. “ – Лао Ча

1. ДЕФИНИЦИИ И ПРАШАЊА

1.1. Дадете куса прецизна дефиниција на поимот:

- агент

Одговор: Сè што може да ја восприма својата околина преку сензори и да произведува соодветни акции (дејствија) како одговор на таа околина преку актуатори.

- агент-функција

Одговор: Функција која секоја дадена низа перцепции ја пресликува во соодветно дејство.

- рационален агент

Одговор: Агент кој за секоја можна низа перцепции, врз основа на своето знаење и информациите добиени од низата перцепции, одбира дејствие кое ја максимизира мерката за оцена на неговото поведение.

- епизодна околина на еден агент

Одговор: Околина во која искуството на агентот е поделено на епизоди, а секоја епизода се состои од перцепција и соодветно дејствие. Притоа, изборот на дејствие во секоја епизода зависи исклучиво од самата епизода.

- полудинамичка околина на еден агент

Одговор: Околината се смета за полудинамичка, ако со текот на времето таа не се менува, но се менува резултатот од поведението на агентот. Играњето шах на време е полудинамичко.

- агент-програм

Одговор: Програм со кој се реализира една агент-функција.

- рефлексен агент заснован врз модел

Одговор: Рефлексен агент кој поседува внатрешна состојба во која чува информации за тоа како се однесува и менува околината – накусо кажано, кој поседува модел на околината.

- рефлексен агент заснован врз цел

Одговор: Рефлексен агент кој, освен познавањето на тековната состојба, располага и со информации за саканата цел.

- функција на полезност

Одговор: Пресликување на состојба или низа од состојби во реален број, кој го претставува степенот на успешност на таа состојба во остварувањето на целта.

- агент што учи

Одговор: Агент што може да ја осознава својата околина и да учи од своето искуство. Тоа му овозможува да го компензира недоволното или погрешно претходно знаење за средината и да биде успешен и во непозната средина. По доволно искуство, поведението на еден рационален агент што учи станува ефикасно, без оглед на неговото претходно знаење.

- елемент за контрола кај еден агент што може да учи

Одговор: Елемент кој одредува колку е успешен агентот во согласност со одреден зададен критериум за успешност.

- простор на состојби за еден проблем на пребарување

Одговор: Околината на еден проблем

- пат низ просторот на состојби за еден проблем на пребарување

Одговор: Низа од состојби поврзани со соодветни дејствија.

- прифатлива евристичка функција на проценка

Одговор: Евристичка функција на проценка која секогаш го потценува стварното преостанато растојание од јазолот *n* до целта

- просторна сложеност на алгоритамот за пребарување прво по длабочина

Одговор: За стебло со фактор на разгранување b и максимална длабочина *d*, алгоритамот за пребарување прво по длабочина памети само bd јазли. Следствено, неговата просторна сложеност е $S(bd)$.

- граф

Одговор: Множество од јазли меѓусебно поврзани со еднонасочни или двонасочни врски.

- евристичко пребарување

Одговор: Пребарување кое користи дополнителни информации (знаење, евристика) за решаваниот проблем.

- комплетен алгоритам на пребарување

Одговор: Алгоритам кој сигурно наоѓа решение доколку такво постои на конечна длабочина.

- фактор на разгранување b на едно стебло

Одговор: Фактор на разгранување b го отсликува бројот различни избори во еден чекор (или бројот можни потези во една игра).

- длабочината d на едно стебло на пребарување

Одговор: Длабочината d претставува број нивоа во едно стебло на пребарување и го отсликува бројот чекори при пребарувањето.

- игри со нулта сума

Одговор: Игри во кои еден играч добива онолку колку што другиот губи.

- функција на проценка на позиција во игра

Одговор: Ја отсликува веројатноста да се победи од таа позиција.

- МИН-МАКС постапка

Одговор: Постапка за избор на најдобар (оптимален) потег во една игра, при што се претпоставува дека играчите секогаш влечат потези кои се најдобри за нив, а најлоши за нивниот противник. Со други зборови, играчот што влече потег секогаш настојува да го максимизира својот резултат, а да го минимизира резултатот на противникот.

- АЛФА-БЕТА постапка

Одговор: АЛФА-БЕТА постапката претставува оптимизација на МИН-МАКС постапката од аспект на бројот на состојби што треба да се пребаруваат.

- АЛФА-БЕТА алгоритам на пребарување

Одговор: Ги пресметува истите оптимални потези како и МИН-МАКС, но е многу поефикасен затоа што ги елиминира потстеблата кои не се битни.

- учење со надгледување

Одговор: Учењето со надгледување може да се дефинира на следниот начин: за дадено множество влезно – излезни парови да се дефинира правило со помош на кое ќе може да се определи излезот кој соодветствува на некој нов влез.

- учење со поттикнување

Одговор: Учењето со поттикнување може да се опише на следниот начин: еден агент, кој содејствува со својата околина, е „наградуван“ или „казнуван“ во зависност од дејствијата што ги презема врз основа на своите перцепции на околината; тој мора да научи да ги одбира дејствијата што му носат „награда“, а не „казна“.

- критериум за избор на една претпоставка (хипотеза)

Одговор: $E(h,D)+\alpha C(h)$, каде што $E(h,D)$ е грешката на хипотезата h за дадено множество за обучување D, $C(h)$ е мерка за е нејзината сложеност, а α е број преку кој се одредува важноста на грешката на претпоставката во однос на нејзината сложеност.

-скриени неврони на една вештачка невронска мрежа

Одговор: Неврони чии излези претставуваат влезови на други неврони и, следствено, не се видливи како излези на мрежата.

- Backpropagation или повратно простирање

Одговор: Повратно простирање на грешката низ мрежата, со цел да се нагодат тежините на мрежата.

- активирачка функција на еден неврон

Одговор: Активирачката функција на еден неврон го дефинира излезот на тој неврон за даден влез или множество влезови.

- чекор на учење на една невронска мрежа

Одговор: Чекорот на учење одредува за колку се менуваат параметрите на мрежата при секој чекор на обучување. Ако тој е многу мал, на алгоритамот за учење ќе му треба многу време да конвергира, ако е многу голем, алгоритамот може да дивергира.

- постапка на опаѓачки градиент

Одговор: Итеративна нумеричка техника, која се користи за одредување на параметрите на еден регресионен модел, односно нагодување на тежинските фактори на влезовите во невроните од една невронска мрежа во насоката на опаѓачкиот градиент на грешката.

1.2. Одговорете со **П** (погрешно) или **Т** (точно) на следните прашања:

1.	Целта на науката за вештачка интелигенција е да овозможи градба на системи кои ќе делуваат како луѓето.	**Т**	**П**
2.	Еден систем мора да размислува како човек за да може со сигурност да го помине Тјуринговиот тест.	**Т**	**П**
3.	Цврстото логичко резонирање не е неопходно да се помине Тјуринговиот тест.	**Т**	**П**
4.	Рационалниот агент мора да биде автономен.	**Т**	**П**
5.	Еден рационален агент е подобар од сите нерационални агенти, бидејќи го знае резултатот од своите дејствија.	**Т**	**П**
6.	Совршената рационалност денес е машински остварлива дури и во сложени околини.	**Т**	**П**
7.	Денес е општо прифатено дека првиот труд на полето на ВИ е вештачкиот неврон на Warren Mc Culloch и Walter Pitts.	**Т**	**П**
8.	Научниците што го создале програмот за превод од арапски на англиски (Брант и други, 2007) меѓудругото биле одлични познавачи на арапски.	**Т**	**П**
9.	Постојат работни околини E1, E2 и E3 и агент A, такви што агентот A е совршено рационален во сите, иако околините не се идентични.	**Т**	**П**

10.	Еден совршено рационален агент кој игра табла никогаш не губи.	**Т**	**П**
11.	Може да се направи агент заснован врз знаење кој ќе биде чист рефлексен агент.	**Т**	**П**
12.	Агентите во ВИ се машини кои ја примаат околината преку сензори и дејствуваат врз неа преку актуатори.	**Т**	**П**
13.	Една непозната околина за некој агент може да биде целосно набљудлива.	**Т**	**П**
14.	Проблемот на пребарување не смее да има повеќе од една целна состојба.	**Т**	**П**
15.	Јазол во едно стебло може да нема, да има еден или повеќе наследници.	**Т**	**П**
16.	Јазлите во еден граф можат да имаат повеќе родители.	**Т**	**П**
17.	Затворените патишта низ графовите можат да се избегнат ако при нивното пребарување се обезбеди секој јазол да биде посетен само еднаш.	**Т**	**П**
18.	Разните постапки за пребарување се разликуваат во редоследот на разгранување на јазлите од соодветното стебло.	**Т**	**П**
19.	Евристичката функција се дефинира на состојба, не на пат.	**Т**	**П**
20.	Евристичките пребарувања гарантираат оптимално решение.	**Т**	**П**
21.	Стеблата претставуваат поткласа неориентирани графови.	**Т**	**П**
22.	Листата посетени јазли кај алгоритамот за слепо пребарување прво по широчина е од типот ПОСЛЕДЕН ВНЕСЕН – ПРВ ИСФРЛЕН (LIFO)	**Т**	**П**
23.	Алгоритамот за оптимално слепо пребарување со униформна цена е насочен кон изнаоѓање најкуси патишта до секој јазол во графот, наместо кон поставената цел.	**Т**	**П**
24.	Алгоритамот за „алчно“ пребарување прво од најдобриот јазол е оптимален и комплетен.	**Т**	**П**
25.	Алгоритамот за „алчно“ пребарување прво од најдобриот јазол бара повеќе време од останатите неоптимални алгоритми за пребарување.	**Т**	**П**
26.	А* е најбрз алгоритам за пребарување.	**Т**	**П**
27.	А* алгоритамот разгранува најмал можен број јазли во однос на другите алгоритми за пребарување.	**Т**	**П**
28.	Брзината на А* алгоритамот зависи од квалитетот на усвоената евристика.	**Т**	**П**
29.	Ако евристиката е бескорисна, $h(n)=0$, алгоритамот А* станува идентичен со алгоритамот за пребарување со униформна цена.	**Т**	**П**
30.	Ако евристиката е идеална, не постои вистинско пребарување; алгоритамот А* едноставно „маршира“ кон целта.	**Т**	**П**
31.	Конзистентноста на еден лак може да се постигне со отфрлање вредности од областите на променливите кои не го задоволуваат ограничувањето на лакот.	**Т**	**П**
32.	Конзистентноста на лаците во еден граф на ограничувања е доволен услов за постоење решение на проблемот со ограничувања.	**Т**	**П**
33.	Секој проблем на пребарување со ограничувања со исклучиво унарни ограничувања има решение.	**Т**	**П**
34.	Стеблото на една игра го дефинираат почетната состојба и дозволените потези за секој од играчите во играта.	**Т**	**П**
35.	Може да се определи точна функција за проценка на потезите кај играта шах.	**Т**	**П**
36.	Проценката на вредноста на позициите во една игра е дотолку подобра, доколку стеблото на играта се разгранува до поголема длабочина.	**Т**	**П**

37.	Кај игрите со нулта сума, за оценување на вредноста на позициите на двата играчи може да се користи иста функција.	Т	П
38.	Со МИН-МАКС постапката се пресметуваат вредностите на јазлите од коренот кон листовите на стеблото.	Т	П
39.	Јазолот *n* во стеблото на една игра со два играчи ги добива вредностите на оној наследник кој има најголема вредност за играчот кој го влече потегот на нивото на кое се наоѓа јазолот *n*.	Т	П
40.	При имплементацијата на МИН-МАКС постапката се претпоставува дека секој играч влече потези со кои го максимизира негативниот резултат на противникот.	Т	П
41.	Ако максималната длабочина на стеблото на една игра е *m*, а факторот на неговото разгранување е *b*, временската сложеност на МИН-МАКС алгоритамот изнесува $T(bm)$.	Т	П
42.	АЛФА-БЕТА постапката води кон поинакво решение од МИН-МАКС постапката.	Т	П
43.	АЛФА-БЕТА постапката овозможува разгранување на стеблото на играта до двапати поголема длабочина од МИН-МАКС постапката за исто време.	Т	П
44.	Вештачките невронски мрежи, кои имаат способност да учат, се точен модел на човечкиот нервен систем.	Т	П
45.	Процесот на учење кај една вештачка невронска мрежа се состои од прилагодување на тежинските фактори на врските врз основа на информациите за грешките во мрежата.	Т	П
46.	Алгоритамот за учење со нормална дисјунктивна форма може да генерира произволна Булова функција.	Т	П
47.	Постои зависност помеѓу сложеноста на еден Булов израз и големината на соодветното стебло за негово генерирање.	Т	П
48.	Познавањето на теоријата на веројатноста е неопходно за да се совладаат многу постапки од вештачката интелигенција.	Т	П
49.	Ентропијата е најголема кога соодносот помеѓу бројот позитивни примероци и бројот на сите примероци од едно множество е 0.5.	Т	П
50.	Успешноста на една хипотеза може да се процени врз основа на нејзината успешност врз множеството за обучување.	Т	П
51.	Сите параметри на наивниот Баесов алгоритам за учење се определуваат само со едно учење на даденото множество за обучување (едно поминување низ податоците).	Т	П
52.	Кога активирачката функција на невроните во една невронска мрежа е нелинеарна, може да се докаже дека двослојната невронска мрежа е универзален апроксиматор на функции.	Т	П

1.2.3. **Точно.** Луѓето често не резонираат логички.

1.2.4. **Точно.** Рационалниот агент мора да се ослонува и врз сопствените перцепции и да биде во состојба да научи како може да го компензира недоволното или погрешно претходно знаење.

1.2.10. **Погрешно**. Може да изгуби ако, на пример, нема „среќа“ при фрлањето коцки.

1.2.11. **Точно.** Иако базата на знаење е меморија, агентот може да ја користи само за чување на рефлексните правила.

1.2.14. **Погрешно.** На пример, при планирањето лет од Скопје според картата на авионски сообраќај на Северна Македонија, целна состојба може да биде само Белград, но може да биде и кој и да било друг град, а не само Белград.

1.2.20. Погрешно. Општо земено, евристичките пребарувања не гарантираат ни најкусо, ни какво и да било најдобро решение, дури и кога се нарекуваат прво од најдобриот јазол.

1.2.21. Погрешно. Стеблата претставуваат поткласа на ориентираните графови, дури и кога насоката на одделните врски не е прикажана.

1.2.22. Погрешно. Таа е од типот ПРВ ВНЕСЕН – ПРВ ИСФРЛЕН (FIFO).

1.2.23. Точно. Тој не е насочен кон поставената цел, затоа што нема информации (евристика) каде се наоѓа таа цел.

1.2.24. Погрешно. Алгоритамот не е оптимален и комплетен, бидејќи може да тргне по бесконечен пат и никогаш да не се врати да ги испита останатите можности.

1.2.32. Погрешно. Не само што не гарантира единствено решение, туку воопшто не гарантира какво и да било решение. Тој е само нужен услов.

1.2.37. Точно. Бидејќи кај овие игри победата на едниот играч значи пораз за вториот, за оценување на вредноста на позициите на двата играчи може да се користи иста функција, со тоа што резултатот на противникот се оценува со негативни вредности.

1.2.42. Погрешно. АЛФА-БЕТА постапката дава исто решение како и МИН-МАКС постапката, но ги отфрла сите гранки од стеблото кои не можат на ниеден начин да влијаат врз конечната одлука на играчот за неговиот следен потег.

1.2.46. Точно. Но само ако се вклучат и негациите од влезните карактеристики.

1.2.50. Погрешно. Успешноста на една хипотеза не може да се проценува врз основа на нејзината успешност врз множеството за обучување. Секоја хипотеза се генерира така што ќе има нулева грешка на множеството за обучување. Меѓутоа, ни во најоптимистичкиот случај не може да се очекува таа да биде толку успешна кога ќе се примени врз ново влезно-излезно множество.

1.3. Накусо одговорете на следните прашања:

1.3.1. Кои се шесте најзначајни дисциплини на вештачката интелигенција?

Одговор:

- Процесирање природен говор
- Репрезентација на знаење
- Машинско резонирање

- Машинско учење
- Машински вид
- Роботика

1.3.2. Кои способности треба да ги поседува еден сметач, за да може да го помине Тјуринговиот тест за машинска интелигенција?

Одговор:

- **Способност за процесирање природен говор** - за да може успешно да комуницира со испитувачот на некој јазик (на пр. англиски)
- **Способност за репрезентазија на знаење** – за да може да го памети она што веќе го знае или она што допрва ќе го научи
- **Способност за резонирање** – за да може врз основа на своето знаење да одговара на прашања и да извлекува заклучоци
- **Способност за учење** – за да може да се прилагоди на новонастанати услови и ситуации и да одредува закономерност во појавите и настаните

1.3.3. Која од наведените задачи денес е остварлива со помош на сметачите? Која не е и дали можете да ги посочите потешкотиите околу нејзината реализација со помош на сметачи и вашето предвидување кога тоа може да се оствари?

а) Успешно играње бадминтон

б) Успешно возење низ центарот на Атина

в) Успешно пазарење во маркет

г) Успешна набавка на одредени производи преку интернет

д) Успешно играње бриџ

ѓ) Откривање и докажување на нова математичка теорема

е) Пишување намерно смешна приказна

ж) Давање компетентен правен совет за некоја правна работа

з) Превод на говорен англиски во говорен шведски во реално време

ѕ) Изведување на сложена хируршка операција

Одговор: а) Група кинески студенти и професори во 2015 година имаат развиено робот кој може успешно да игра бадминтон на аматерско ниво.

б) Иако постои голем напредок во автоматското возење, сепак тоа сè уште се сведува на возење со констатна брзина по една лента. Автоматските возачи сè уште се потпираат на многу претпоставки како на пример, дека патиштата имаат тротоари и средишна линија, дека останатите возачи ќе останат на својата страна од патот итн. Тие сè уште не се во состојба успешно да заобиколат пречки на патот и да се префрлуваат од една во друга лента. Возењето низ центарот на Атина не задоволува ниедна од овие претпоставки.

в) Да, оваа задача е целосно остварлива, затоа што роботите практично можат да се движат во околини со пречки, какви што се маркетите, да ги разликуват објектите и да ги фаќаат без да ги оштетат.

г) Да, софтверските роботи се во состојба да решаваат и остваруваат вакви задачи, посебно доколку соодветните Web-сајтови за набавка не се менуваат радикално.

д) Да, програмот GIB успешно игра бриџ.

ѓ) Да, пример е доказот на Robbins-оновата алгебра.

е) Не, иако некои состави напишани од страна на сметачи се дури многу смешни, тоа не е намерно.

ж) Да во одреден степен. Пример е извонредниот експерски систем заснован на PROLOG кој се применува во Британија за да ѝ овозможи на јавноста да се справат со барањата на социјалното осигурување. Меѓутоа не во други правни области.

з) Полека станува реалност. Во јануари 2019 Google објави дека наскоро Google Assistant апликацијата ќе биде во можност да преведува говор на 27 различни јазици, меѓу кои и шведскиот, во реално време. Засега апликацијата се применува само во некои хотели како пробна програма.

ѕ) Денес роботи се користат масовно за извршување на сложени хируршки операции во светските центри, но само под контрола на стручњак.

1.3.4. Зошто еволуцијата води кон рационални системи? Што е задачата на тие системи?

Одговор: Во суштина, еволуцијата ги поддржува организмите (како и нивните комбинации и мутации) кои се доволно успешни да можат да се размножуваат. Со други зборови, таа ги поддржува организмите кои се успешни во оптимизирање на нивната мерка на поведение да достигнат полна зрелост и да најдат партнер за размножување. Рационалноста значи максимизирање на мерката на поведение, поради што можеме да усвоиме дека успешните организми во природата се рационални.

1.3.5. Дали рефлексните дејствија, како на пример кога ја тргате раката од огин, или замижувате кога мушичка лета кон вашето лице, се рационални? Дали се интелигентни?

Одговор: Да, овие дејствија се рационални, зашто ако не ја тргнете раката од огин ќе се изгорите, или мушичката ќе ви влета во окото. Бидејќи под интелигентно однесување подразбираме примена на некое знаење, односно размислување и резонирање, заклучуваме дека овие дејствија не се интелигентни. Значи, интелигенцијата не е потребна за извршување на рефлексни дејствија.

1.3.6. Дали вториот дел од тврдењето е точен, и дали го имплицира првиот дел: Сметачите во никој случај не можат да бидат интелигентни – тие прават само она за што се програмирани.

Одговор: Тоа зависи од вашето сфаќање на интелигенцијата. Навистина, сметачите го извршуваат она што им го задава програмерот, но многу често она што го прават е различно од она што им го задал програмерот, на пример кога во програмот има некоја грешка. Друг пример е кога програмерот му задава задача на сметачот да научи да игра некоја игра. Тој му вели на сметачот: „Следи го овој алгоритам за учење." И сметачот навистина научува да ја игра играта.

1.3.7. „Животните во никој случај не можат да бидат интелигентни. Тие го прават само она што им е вградено во гените." Дали оваа изјава е точна?

Одговор: Не, затоа што тие можат и да учат.

1.3.8. И мерката за поведение и мерката за полезност всушност ја мерат успешноста на еден агент. Која е разликата помеѓу двете?

Одговор: Мерката за поведение е мерка која ја користи надворешен набљудувач за да ја оцени успешноста на еден агент. Мерката за полезност ја користи самиот агент за да оцени колку се пожелни одредени состојби или дејствија. Во овој контекст, тие две се различни. Дури, еден агент не мора да има експлицитна мерка за полезност, но секогаш мора да има мерка за поведение.

1.3.9. Овие прашања ја отсликуваат разликата помеѓу еден агент-програм и агент-функција.

а) Дали можат да постојат повеќе агент-програми кои реализираат одредена агент-функција?

б) Дали постојат агент функции кои не можат да се остварат со ниеден агент програм?

в) Ако имате фиксна машинска архитектура, дали еден агент-програм реализира само една агент-функција?

г) Дали агент-функцијата ќе се промени ако агент-програмот остане фиксен, а брзината на машината се зголеми двапати?

Одговор: Одговорите се однесуваат на статички околини.

а) Да. На пример, за реализација на една агент-функција која зависи само од *p* претходни перцепции, еден програм може да памети само *p* претходни перцепции, додека друг може да памети и повеќе од *p* перцепции.

б) Да. Тоа се агент-функции кои бараат бесконечна меморија од агент-програмот.

в) Да, поведението на еден агент е одредено со неговата архитектура и програм.

г) Не.

1.3.10. Наведете какви видови работна околина постојат и која работна околина е „најтешка"?

Одговор: Работната околина може да биде целосно или делумно набљудлива, детерминистичка или стохастичка, статичка или динамичка, дискретна или континуална, со еден агент или со повеќе агенти. „Најтешка" работна околина е онаа која е парцијално набљудлива, стохастичка, динамичка, континуална и со повеќе агенти.

1.3.11. Дефинирајте ги: поведението, околината, дејствијата и сензорите на еден автономен агент за трговија со берзантски акции.

Одговор:

- **Поведение:** максимизира добивка, минимизира ризик
- **Околина:** електронски систем за трговија, јавен интернет, интерфејс со човечки клиенти (електронска пошта, интернет www-мрежа итн.)
- **Акции (дејствија)**: реализира трговски зделки – продажба и купување, испраќа пораки до луѓето клиенти
- **Сензори:** информации за пазарот од електронски систем за трговија, финансиски извештаи и вести преку интернет, информации од луѓето клиенти

1.3.12. Дефинирајте ги: поведението, околината, дејствијата и сензорите на:

а) Роботски играч на фудбал

б) автономно возило на Марс

в) агент за купување книги на интернет

Одговор:

Агент	Мерка за поведение	Околина	Актуатори	Сензори
Роботски играч на фудбал	Победа, голови	Фудбалското поле, тимот, противничкиот тим, топката	Уредите за движење и кинематика	Камери, сензори за допир, за ориентација, акцелерометри
Автономно возило на Марс	Собирање примероци, извршени анализи	Самото возило, околината на Марс	Уредите за собирање примероци, за анализа, за испраќање пораки, за движење	Сензори за допир, за ориентација, акцелерометри, радиоприемници
Агент за купување книги на интернет	Набавка на бараните книги, минимално време на испорака	Интернет	Следење на линкови, пополнување порачки, информации за корисниците	Веб-страници, барањата на корисниците

1.3.13. Дефинирајте ја околината за еден роботски фудбалер, роботско вселенско возило, интернет-купувач и автоматски докажувач на теореми.

Одговор:

агент / околина	роботски фудбалер	роботско вселенско возило	интернет-купувач	автоматски докажувач на теореми
набљудливост	делумна	делумна	делумна	целосна
стохастичка/ детерминистичка	стохастичка	стохастичка	детерминистичка	детерминистичка
епизодна/ секвенцијална	секвенцијална	секвенцијална	секвенцијална	секвенцијална
динамичка/ статичка	динамичка	динамичка	статичка	статичка
дискретна/ континуална	континуална	континуална	дискретна	дискретна
агенти	многу	еден	еден	еден

1.3.14. Изберете го типот агент со кој успешно ќе се остварат задачите од прашањето 1.3.12.

Одговор: а) Агент заснован врз модел ќе задоволи во најголемиот број случаи. За тактичка игра, подобар ќе биде агент заснован врз полезност.

б) За навигација на помиско ниво и избегнување препреки ќе задоволи агент заснован на модел. За решавање посложени задачи на планирање на патот, планирање на експериментите, потребна е комбинација од агент заснован врз цел и полезност.

в) Агент заснован врз модел ќе задоволи во најголемиот број случаи. За барања во стилот „Најди ми некоја интересна книга“, подобар ќе биде агент заснован врз полезност.

1.3.15. Набљудувајте агент правосмукалка во нејзината околина. Нека таа е казнувана за секое движење со 1 поен.

а) Дали едноставен рефлексен агент ќе биде рационален во вакви услови?

б) Дали рефлексен агент со модел е рационален под направената претпоставка?

Одговор: а) Не, затоа што едноставниот рефлексен агент постојано се движи помеѓу двете полиња. Тој ја нема опцијата застани.

б) Да.

1.3.16. Како се дефинира еден проблем во ВИ?

Одговор: Еден проблем во ВИ формално може да се дефинира со четири компоненти:

- почетна состојба
- можни дејствија
- целна состојба
- функција за одредување на цената на едно решение (еден пат).

1.3.17. Такси-возилото собира 4 патници. Патниците плаќаат фиксна цена за превоз до аеродромот. Задачата на возачот е да качи 4 патници и да ги превезе до аеродромот по најкус пат. Овој проблем може да се претстави со граф во кој јазлите ги претставуваат одделните локации на кои може да има патници, додека страните го претставуваат растојанието помеѓу одделните јазли. а) Што претставува просторот на состојби за овој конкретен проблем на пребарување? б) Што е добра функција на цената на изнаоѓање решение за поставениот проблем на пребарување?

Одговор: а) Секоја состојба претставува една локација и бројот патници во возилото. Просторот на состојби ги содржи сите можни состојби. б) Должината на изминатиот пат.

1.3.18. Што претставува типичен простор на пребарување во вештачката интелигенција?

Одговор: Тоа е стебло со униформен фактор на разгранување b и длабочина d .

1.3.19. Која е разликата помеѓу граф и стебло?

Одговор: И двете претставуваат множества јазли поврзани со соодветни врски, само што во графот можат да постојат затворени контури, додека во стеблото не. Исто така, во графот еден јазол може да има повеќе родители, додека во стеблото не.

1.3.20. Кои елементи се потребни за да се дефинира формално еден проблем на пребарување?

Одговор: Почетна состојба, целна состојба, опис на операторите.

1.3.21. Дефинирајте го проблемот на решавање на равенката $F(x,y,z)=0$ во однос на z како проблем на пребарување, ако $F(\cdot)$ е некој имплицитен математички израз со три променливи x, y и z.

Одговор: **почетна состојба** – дадената равенка $F(x,y,z)=0$, **целна состојба** – равенката $z=f(x,y)$ во која z не се јавува на десната страна, **оператори** – математички операции со кои се доаѓа до бараното решение како: префрлување членови од една на друга страна од равенката, множење на левата и десната страна од равенката со некој израз со цел таа да се трансформира во попогоден облик за решавање, упростување на равенката итн.

1.3.22. Дефинирајте го проблемот на решавање на равенката: $x^4-6x^2+9=0$ во однос на x како проблем на пребарување.

Одговор: Почетна состојба – дадената равенка, **целна состојба** – решението на равенката, кое гласи $x = \pm\sqrt{3}$, **оператори** – математички операции, со кои се доаѓа до бараното решение: воведување смена $x^2 = y$, определување решение на квадратната равенка $y^2 - 6y + 9 = 0$, кое гласи $y = 3$, пресметување квадратен корен од y.

1.3.23. Дефинирајте го проблемот на решавање на системот равенки:

$$y^2 - 8x^2y^2 - y^4 = 0,\ y > 0$$

$$x^2 - 8x^2y^2 - x^4 = 0,\ x > 0 \tag{1-3.1}$$

во однос на непознатите x и y како проблем на пребарување.

Одговор: Почетна состојба – дадениот систем равенки, **целна состојба** – решението на системот равенки $(x, y) = (1/3, 1/3)$, **оператори** – делење на првата равенка со y^2 и делење на втората равенка со x^2, по што се добива:

$$1 - 8x^2 - y^2 = 0$$

$$1 - 8y^2 - x^2 = 0 \tag{1-3.2}$$

изедначување на двете равенки, по што се добива:

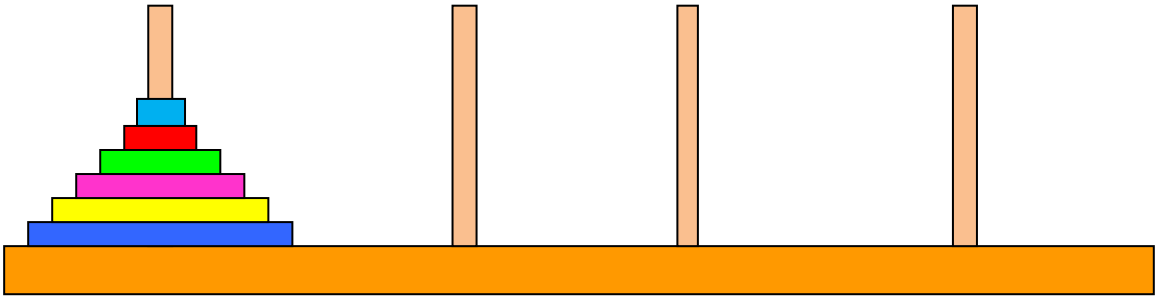
$$x^2 = y^2 \tag{1-3.3}$$

воведување на смената $x^2 = y^2$ во која и да било равенка од системот, по што се добива: $x^2 = y^2 = 1/9$, пресметување квадратен корен од $1/9$, по што се добива $x = y = 1/3$.

1.3.24. Дефинирајте го проблемот на решавање на равенката: $x'(t) + 3t^2x(t) = 0,\ x(0) = 0$ во однос на x, како проблем на пребарување.

Одговор: Почетна состојба – Дадената равенка, **целна состојба** – решението на равенката, кое гласи: $x(t) = e^{-t^3}$, **оператори** – математички операции, со кои се доаѓа до бараното решение: префрлање на вториот член од левата страна на равенката на десната и доведување на равенката на облик $x'(t) = -3t^2x(t)$, раздвојување на променливите во равенката, со што таа се трансформира во облик $\dfrac{dx(t)}{x(t)} = -3t^2dt$, интегрирање на левата и десната страна од равенката $\ln x(t) = -t^3$, антилогаритмирање на последниот израз.

1.3.25. Дефинирајте го проблемот на Ханојските кули како проблем на пребарување. Ханојските кули претставуваат древна игра која во најопшт случај се состои од разместување n прстени со различна големина на p стапа прицврстени вертикално за подлогата, како што е покажано на слика 1.1.



Слика 1.1. Илустрација кон прашањето 1.3.25

Во почетокот од играта сите прстени подредени (како кула) по големина се поставени врз крајниот лев стап, при што најголемиот прстен е најдолу, а најмалиот најгоре. Целта на играта е прстените да се префрлат на крајниот десен стап во истиот редослед – најголемиот најдолу, најмалиот најгоре, при што правилата на играта се следните: секогаш се преместува само по еден прстен од еден стап на друг и во ниеден момент поголем прстен не смее да се најде врз помал.

Одговор:

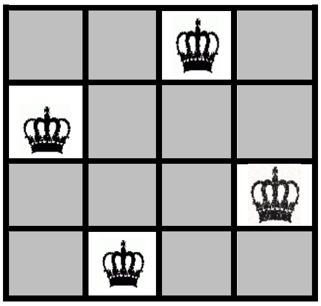
- **Почетна состојба:** сите прстени на левиот стап подредени по големина со најмалиот прстен најгоре
- **Целна состојба:** сите прстени на десниот стап подредени по големина со најголемиот прстен најдолу
- **Оператори** (функција на разгранување): поместувај го секој прстен од врвот на едната кула на врвот од другата кула при што тој не смее да се најде врз помал прстен
- **Цена на секој потег:** 1

1.3.26. Дефинирајте го проблемот на n кралици како проблем на пребарување со ограничувања, ако проблемот се состои во следното: n кралици треба да се распоредат на $n \times n$ табла, така што нема да се напаѓаат меѓусебно.

Решение:

- Променливи на проблемот – колоните од таблата Q_i; $i = 1,2,3,4,\ldots,n$.
- Вредности на променливите – реден број на редицата во која се наоѓа кралицата $D_i = \{1,2,3,4,\ldots,n\}$
- Почетна состојба – празна табла

- Цел – n кралици распоредени на таблата така што нема да се напаѓаат меѓусебе
- Ограничувања – две кралици не смеат да бидат во иста редица, $Q_i \neq Q_j$; две кралици не смеат да бидат на иста дијагонала, $\left|Q_i - Q_j\right| \neq \left|i - j\right|$



$Q_1 = 2 \; Q_2 = 4 \; Q_3 = 1 \; Q_4 = 3$

Слика 1.2. Илустрација кон прашањето 1.3.26

1.3.27. Доминото е игра во која две плочки се редат долж некоја ивица (линија). Во овој контекст, n-омино е игра во која n плочки се редат по желба, но така да се допираат една до друга со слободните страни. Додека за домино фигурата постои само еден облик, за триминото, на пример, постојат две различни домино фигури – три плочки во една линија и три плочки во вид на буквата L. Нека, под претпоставка, треба да составиме n-омино фигура за дадено n, која е убава. Целосно дефинирајте го овој проблем како проблем на пребарување, сметајќи дека располагате со соодветен детектор на убавина. На која класа би припаѓал соодветниот алгоритам на пребарување?

Одговор:

- **Почетна состојба** – една плочка (под претпоставка дека $n \geq 1$)
- **Оператори** – додавање плочка на слободната страна од која било поставена плочка
- **Целна состојба** – состојба што содржи n плочки и го поминува тестот на убавина

Бидејќи за проблемот не е дадена никаква евристика, пребарувањето мора да биде слепо.

1.3.28. Дефинирајте го проблемот на проверка на вистинитоста на следниот Булов израз:

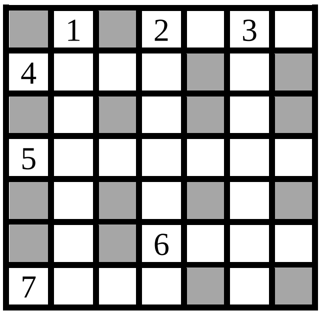
$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg T) \qquad (1\text{-}3.4)$$

Решение:

- Променливи на проблемот – логичките променливи P, Q, R, S, T
- Вредности на променливите – $\{0,1\}$
- Почетна состојба – $P, Q, R, S, T = 0$

- Секоја дисјункција мора да има вредност 1, што значи дека барем една променлива во дисјункцијата мора да има вредност 1
- Цел - $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg T) = 1$

1.3.29. Да се претстави како проблем на пребарување со ограничувања проблемот на пополнување на 7×7 крстозбор со зборови од следната листа: (ADDRESS, BLUE, FROG, NEST, SLIPPER, SPIDER, WEAK, WEDDING) ако крстозборот изгледа како на слика 1.3. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 во одделните полиња од крстозборот ги означуваат полињата од крстозборот во кои треба да се запишат одделните зборови. (Значи крстозборот се пополнува со 8 зборови од листата – 5 внесени хоризонтално и 3 внесени вертикално.)



Слика 1.3. Илустрација кон прашањето 1.3.29

Почетна состојба – празниот крстозбор од сликата 1.3

Цел – пополнет крстозбор со зборови од листата според дадените ограничувања

Променливи – полињата во крстозборот. **Област на вредности** на секоја променлива е листа на зборови кои можат да се запишат на соодветната позиција во крстозборот. Така, позицијата 2 - хоризонтално бара збор со 4 букви, исто како 4 - хоризонтално, 6 - хоризонтално и 7 - хоризонтално, 5 - хоризонтално бара збор со 7 букви, исто како 1 - вертикално, 2 - вертикално и 3 - вертикално.

Променлива	Почетна позиција	Област
2 хоризонтално	2	BLUE, FROG, NEST, WEAK
4 хоризонтално	4	BLUE, FROG, NEST, WEAK
5 хоризонтално	5	ADDRESS, SLIPPER, WEDDING
6 хоризонтално	6	BLUE, FROG, NEST, WEAK
7 хоризонтално	7	BLUE, FROG, NEST, WEAK
1 вертикално	1	ADDRESS, SLIPPER, WEDDING
2 вертикално	2	ADDRESS, SLIPPER, WEDDING
3 вертикално	3	ADDRESS, SLIPPER, WEDDING

Бидејќи има 4 променливи, чија област има 4 можни вредности, и 4 променливи чија област има 3 можни вредности, вкупниот број можни состојби е $4^4 + 4^3 = 320$.

Сите ограничувања се бинарни:

$2\ \mathrm{HORIZONTALNO}(1) = 2\ \mathrm{VERTIKALNO}(1)$

$2\ \mathrm{HORIZONTALNO}(3) = 3\ \mathrm{VERTIKALNO}(1)$

$4\ \mathrm{HORIZONTALNO}(2) = 1\ \mathrm{VERTIKALNO}(2)$

$4\ \mathrm{HORIZONTALNO}(4) = 2\ \mathrm{VERTIKALNO}(2)$

$5\ \mathrm{HORIZONTALNO}(2) = 1\ \mathrm{VERTIKALNO}(4)$

$5\ \mathrm{HORIZONTALNO}(4) = 2\ \mathrm{VERTIKALNO}(4)$

$5\ \mathrm{HORIZONTALNO}(6) = 3\ \mathrm{VERTIKALNO}(4)$

$6\ \mathrm{HORIZONTALNO}(1) = 2\ \mathrm{VERTIKALNO}(6)$

$6\ \mathrm{HORIZONTALNO}(3) = 2\ \mathrm{VERTIKALNO}(6)$

$7\ \mathrm{HORIZONTALNO}(2) = 1\ \mathrm{VERTIKALNO}(7)$

$7\ \mathrm{HORIZONTALNO}(4) = 2\ \mathrm{VERTIKALNO}(7)$

1.3.30. Кога еден јазол се смета за посетен?

Одговор: Еден јазол се смета за посетен, доколку соодветниот пат, кој го поврзува јазолот со коренот, за првпат е внесен во таблицата парцијални патишта **Q**.

1.3.31. Кога еден јазол се смета за разгранет?

Одговор: Еден јазол се смета за разгранет, кога патот што го поврзува со коренот е отстранет од таблицата парцијални патишта **Q** .

1.3.32. Колку јазли треба да посети и разграни во најлош случај алгоритамот за пребарување прво по широчина?

Одговор: Сите.

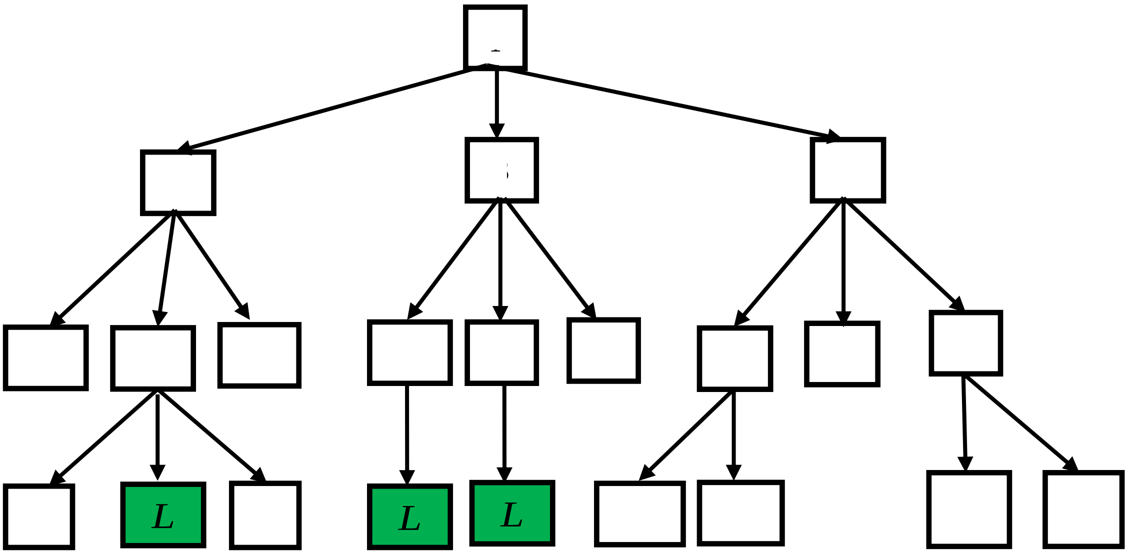
1.3.33. Колку јазли треба да посети и разграни во најлош случај алгоритамот за пребарување прво по длабочина?

Одговор: Сите.

1.3.34. Даден е простор на состојби (стебло на пребарување) со фактор на разгранување $b = 1$ и решение (цел) на длабочина n. Да се споредат алгоритмите за пребарување на ова стебло прво по длабочина и итеративно пребарување по длабочина од аспект на нивната временска и просторна сложеност. Колку јазли ќе разграни алгоритамот за пребарување прво по длабочина, а колку алгоритамот за итеративно пребарување по длабочина?

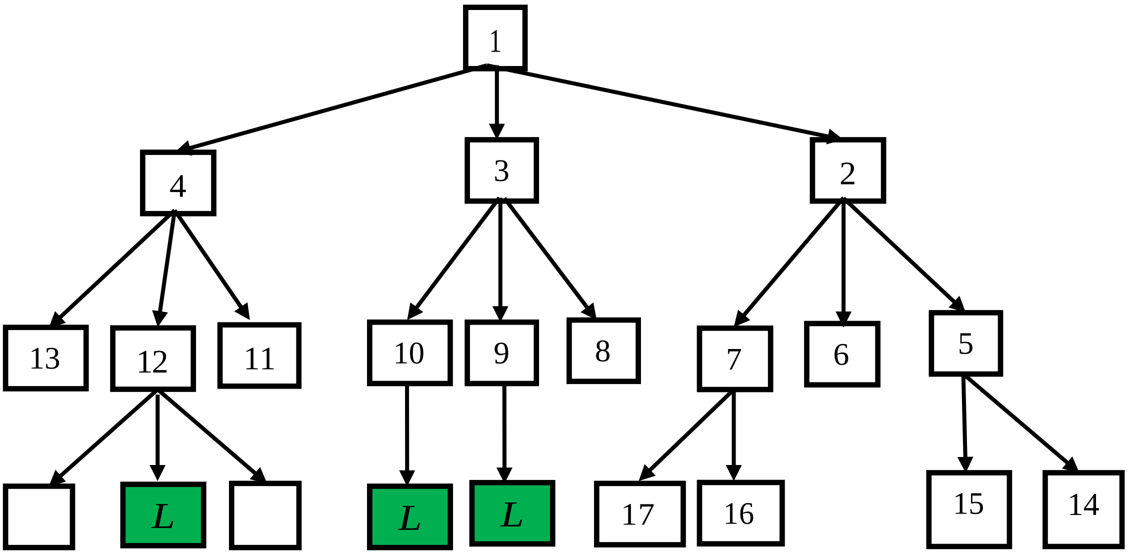
Одговор: Временската сложеност на еден алгоритам е пропорционална на бројот разгранети јазли, додека неговата просторна сложеност е пропорционална на длабочината до која пребарува. Алгоритамот за пребарување прво по длабочина во конкретниот случај ќе разграни n јазли, додека алгоритамот за итеративно пребарување по длабочина ќе разграни $n(n+1)/2$ јазли. Следствено, во конкретниот случај вториот алгоритам е многу полош избор од првиот кога n е голем број.

1.3.35. Означете го редоследот на разгранување на јазлите во стеблото од слика 1.4 со помош на алгоритамот за пребарување прво по широчина, ако јазлите во исто ниво се разгрануваат од десно во лево.



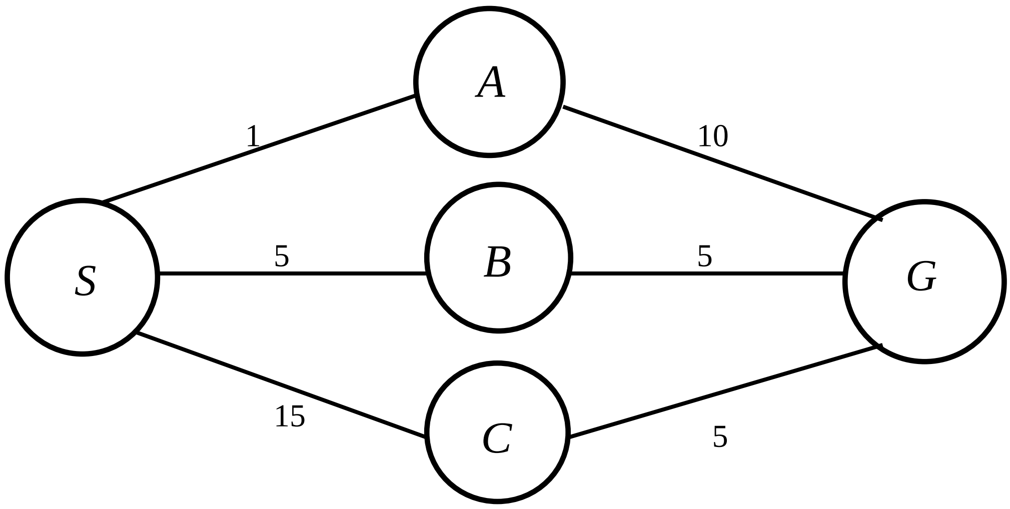
Слика 1.4. Илустрација кон прашањето 1.3.35

Одговор:



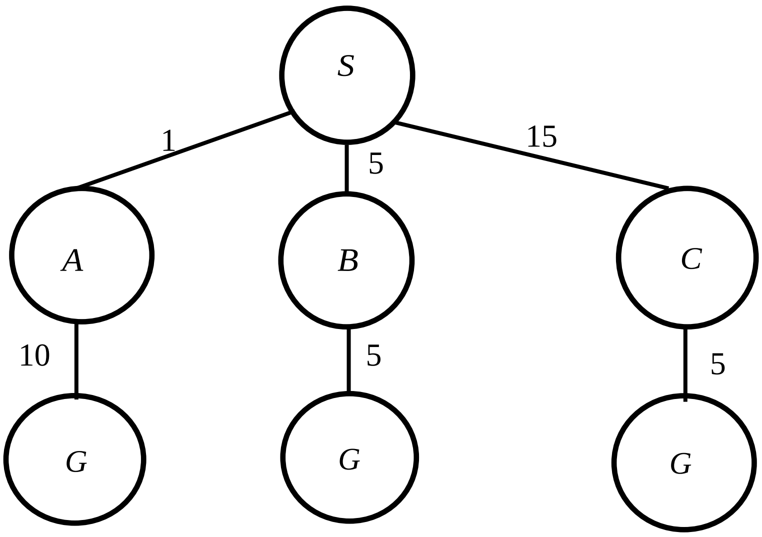
Слика 1.5. Редослед на разгранување на јазлите во стеблото од слика 1.45

1.3.36. Даден е графот од слика 1.6. Јазолот S е почетен јазол, додека јазолот G е целта. Да се изврши пребарување на зададениот граф прво по широчина и да се утврди дали добиеното решение е оптимално. Зошто?



Слика 1.6. Илустрација кон прашањето 1.3.36

Решение: Стеблото за пребарување на графот од слика 1.5 е прикажано на слика 1.6.



Слика 1.7. Стебло на пребарување за графот од слика 1.5

Пребарувањето на ова стебло прво по широчина е прикажано во долната таблица.

Чекор	**Парцијални патишта**	**Листа разгранети јазли**
1	S	S
2	(AS), (BS), (CS)	S, A
3	(BS), (CS), (GAS)	S, A, G

Постапката за пребарување прво по широчина наоѓа едно решение – патот GAS, коешто не е оптимално, затоа што цената на одделните патишта во графот не е иста.

Оптималното решение е GBS.

1.3.37. Нека е дадено стебло со фактор на разгранување $b=10$, максимална длабочина $m=7$ и решение на длабочина $d=5$. Колку изнесува временската сложеност на пребарувањето на ова стебло прво по широчина и итеративно пребарување прво по длабочина?

Одговор: Временската сложеност на пребарувањето на даденото стебло прво по широчина изнесува:

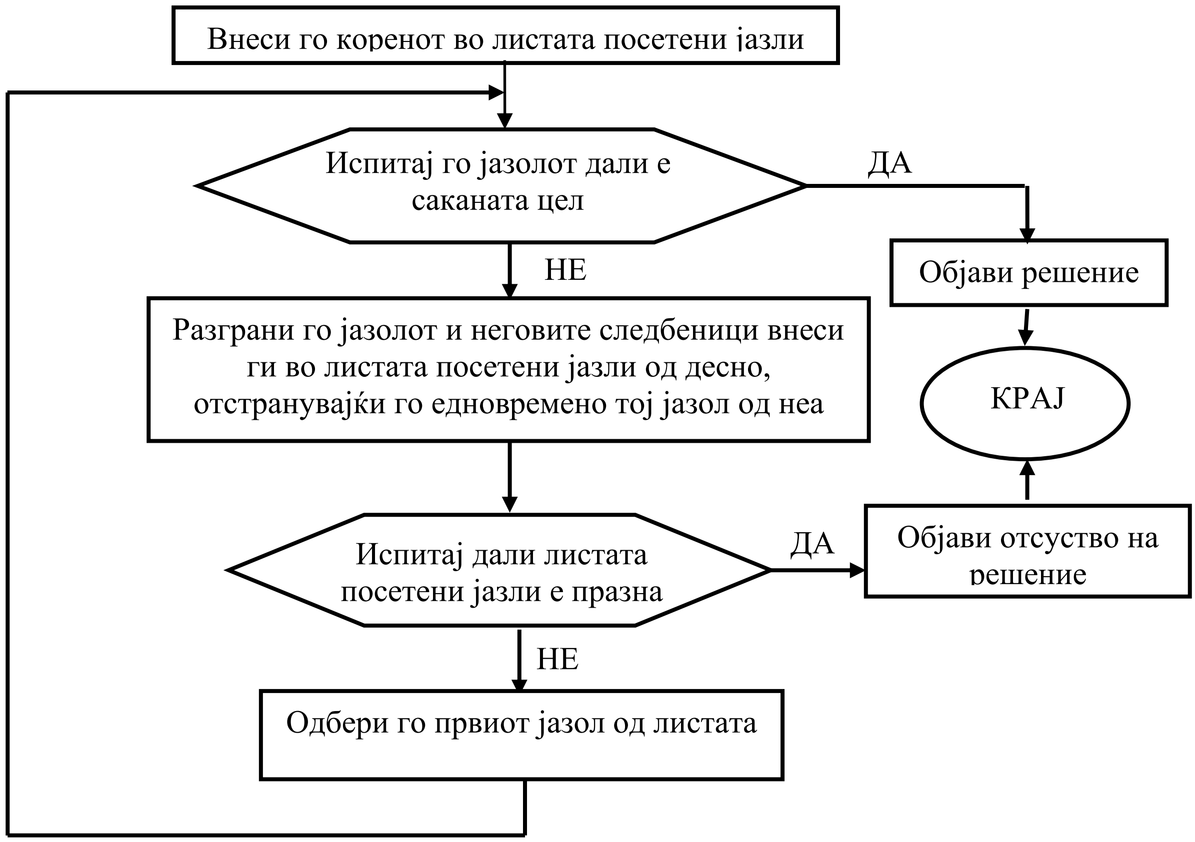
$$T(PS)=T\left(b^d\right)=1+b+b^2+b^3+b^4+b^5=111{,}111 \tag{1-3.5}$$

додека временската сложеност на итеративното пребарување на стеблото прво по длабочина изнесува:

$$T(IPD)=T\left(b^d\right)=\sum_{i=0}^{d}(d+1-i)b^i=6+50+400+3\cdot 10^3+2\cdot 10^4+10^5=123{,}456 \tag{1-3.6}$$

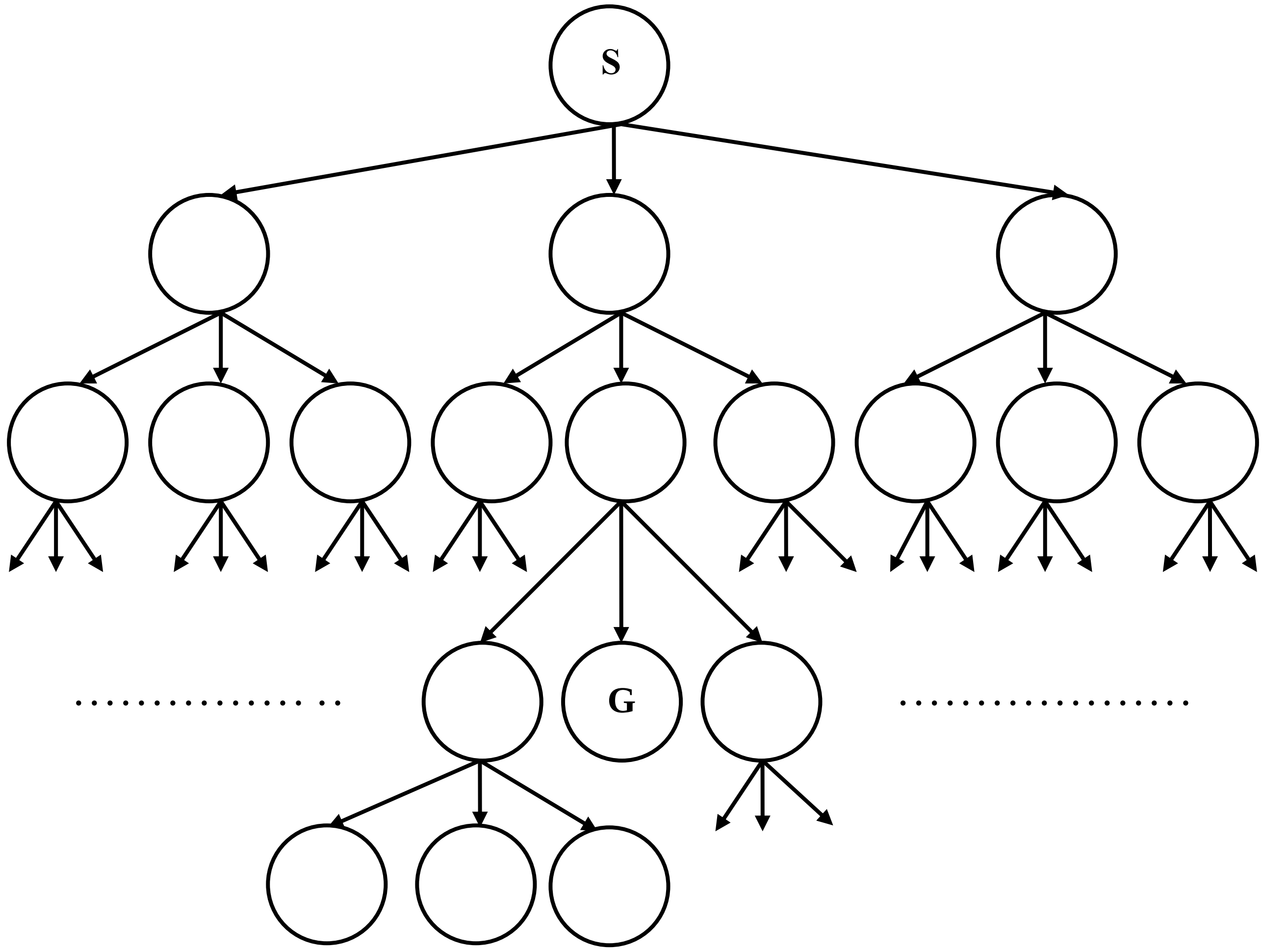
1.3.38. Да се претстави алгоритамот за пребарување прво по широчина со соодветен дијаграм.

Решение:



Слика 1.8. Дијаграм на алгоритамот за пребарување прво по широчина

1.3.39. Дадено е стеблото на пребарување од слика 1.9. (Заради недостиг на простор, крајните јазли не се прикажани во целост). Корен на стеблото е јазолот S, а јазолот G ја претставува целта на пребарувањето. Колку изнесува факторот на разгранување на ова стебло b? Колку изнесува длабочината на прикажаното решение d? Колкава е максималната длабочина на стеблото m? Да се определи просторната сложеност на алгоритмите за пребарување прво по широчина и прво по длабочина на ова стебло.



Слика 1.9. Стебло на пребарување на даден простор на состојби

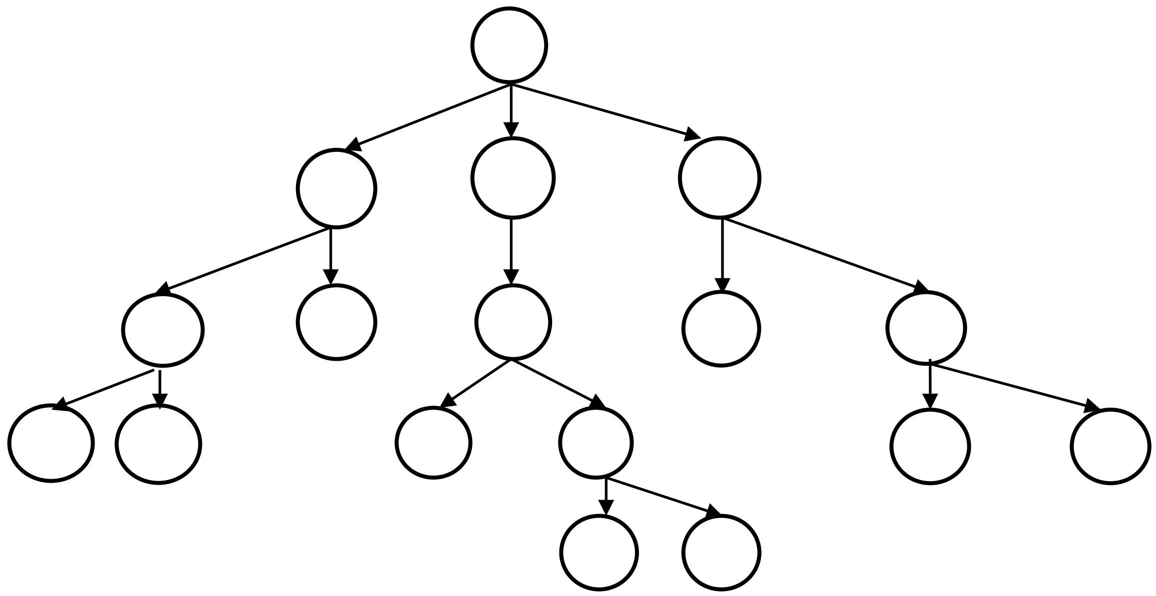
Решение: Факторот на разгранување на стеблото од слика 1.9 е $b=3$. Максималната длабочина на стеблото изнесува $m=4$, а прикажаното решение G се наоѓа на длабочина $d=3$. Просторната сложеност на пребарувањето на стеблото прво по широчина изнесува:

$$S_{PS}\left(b^d\right)=1+b+b^2+b^3+\cdots+b^d=1+b+b^2+b^3=40 \qquad (1\text{-}3.7)$$

додека просторната сложеност на пребарувањето прво по длабочина е:

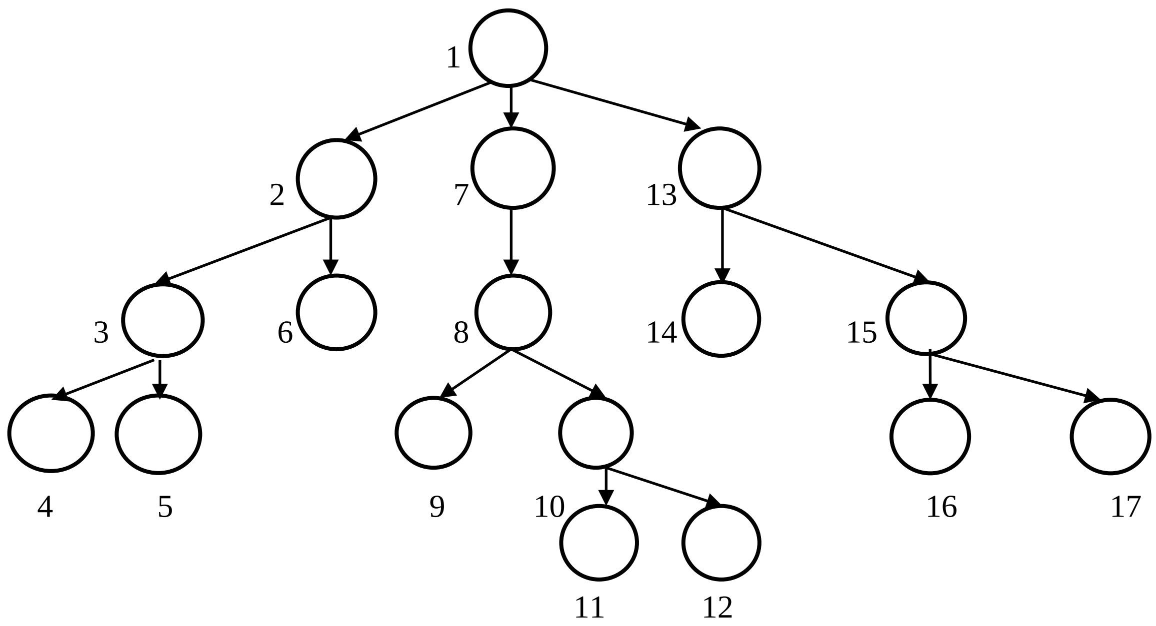
$$S_{PD}\left(bd\right)=S_{PD}\left(3\cdot 3\right)=S_{PD}\left(9\right)=9 \qquad (1\text{-}3.8)$$

1.3.40. Да се означи редоследот на разгранување на јазлите во стеблото од слика 1.10 според алгоритамот за пребарување прво по длабочина, ако јазлите во исто ниво се разгрануваат од лево на десно.



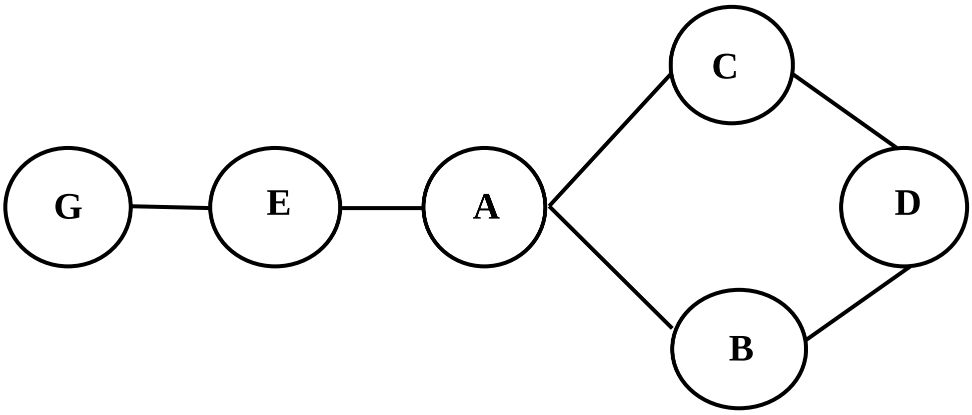
Слика 1.10. Илустрација кон задачата 1.3.40

Решение: Одговорот е прикажан на сликата 1.11.



Слика 1.11. Решение на задачата 1.3.40

1.3.41. Одредувајќи го редоследот разгранети јазли на дадениот граф од слика 1.12, да се покаже што ќе се случи ако алгоритамот за пребарување прво по длабочина не ги памети разгранетите јазли. Соодветното стебло се пребарува од A до G.



Слика 1.12. Илустрација кон задачата 1.3.41

Решение: При пребарувањето прво по длабочина на стеблото за графот од слика 1.12, и под претпоставка дека ги памети разгранетите јазли, алгоритамот ќе ги разграни јазлите од стеблото по наведениот редослед: A, B, D, C, E, G. Меѓутоа, доколку не ги памети разгранетите јазли, алгоритамот за пребарување прво по длабочина ќе влезе во затворениот круг A, B, D, C нема никогаш да ги посети јазлите E и G.

1.3.42. Дефинирајте ја функцијата на проценка $f(n) = g(n) + h(n)$

Одговор: Најдобра расположлива проценка на должината на еден пат на пребарување од коренот до целта преку јазолот *n*.

1.3.43. Коментирајте го A* алгоритамот од аспект на комплетност и оптималност.

Одговор: A* алгоритамот за пребарување е комплетен и оптимален, под претпоставка дека користи прифатлива евристика.

1.3.44. Во далечната 1400 и некоја година, еден истражувач бара нов пат за Индија. а) Верувајќи дека Земјата е рамна плоча и познавајќи ги растојанијата по воздушна линија помеѓу секои два града на Земјата, која стратегија за одредување на најкусиот пат до Индија треба да ја одбере истражувачот? (Ако проблемот на изнаоѓање најкус пат до Индија се претстави како проблем на пребарување, кој алгоритам за пребарување ќе биде добар избор за одредување на најкусиот пат до Индија)? б) Под претпоставка, непосредно пред заминувањето на пат, истражувачот дознава дека Земјата сепак не е рамна плоча туку топка, па познатите растојанија по воздушна линија помеѓу одделните градови на Земјата не одговараат на вистинските. Дали истражувачот може да ја задржи истата стратегија за решавање на поставениот проблем?

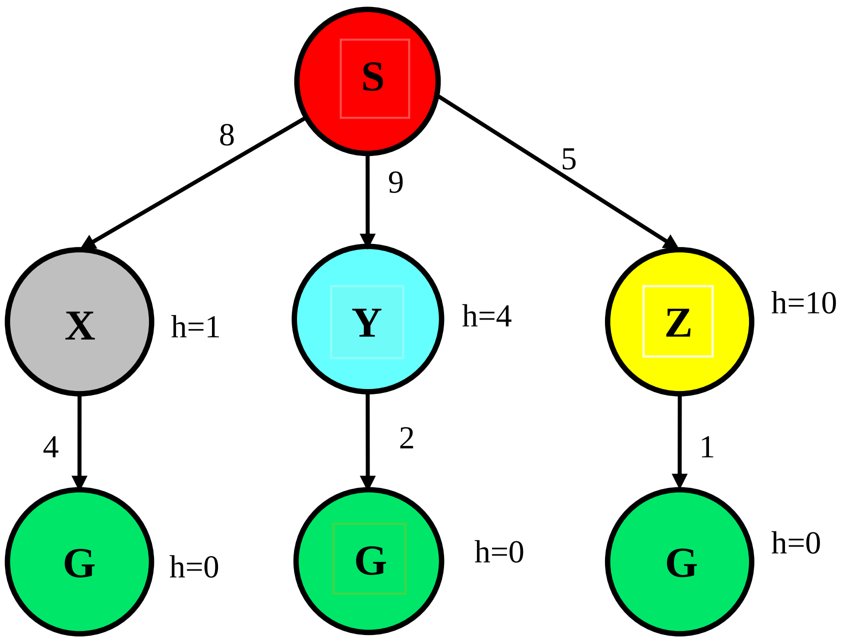
Одговор: а) A* алгоритамот за пребарување ќе го даде саканиот резултат, затоа што растојанието по воздушна линија помеѓу градовите на Земјата претставува прифатлива евристика. Под овие услови A* пребарувањето е комплетно и оптимално, што значи ќе доведе до најдоброто решение, односно ќе го одреди најкусиот пат до поставената цел.

б) Да. Евристиката е прифатлива сѐ додека не го преценува вистинското растојание до целта.

1.3.45. Зошто се користи листата посетени јазли?

Одговор: Листата посетени јазли ја зголемува просторната сложеност на алгоритамот за пребарување. Меѓутоа, со самото тоа што спречува една состојба (јазол) да биде посетена повеќе од еднаш, го намалува потребното време за извршување на алгоритамот. Со други зборови – листата посетени јазли го намалува времето за сметка на меморискиот простор потребен за извршување на алгоритамот за пребарување. Исто така, таа спречува алгоритмот да „заглави" во затворена контура, зашто по самата дефиниција на затворен пат следува дека еден јазол ќе биде посетен повеќе од еднаш.

1.3.46. Дадено е стеблото од слика 1.13, во кое S е почетен јазол, а G е целта. Проблемот се состои во изнаоѓање најкус пат од почетниот јазол S до целта G. Броевите крај секоја врска во стеблото ја означуваат должината на патот помеѓу крајните јазли од врската, додека броевите крај јазлите ги претставуваат вредностите на евристиката h за конкретниот јазол. Пребарувањето треба да се изврши со A* алгоритамот за пребарување. Дали најденото решение е оптимално? Зошто?



Слика 1.13. Илустрација кон прашањето 1.3.46

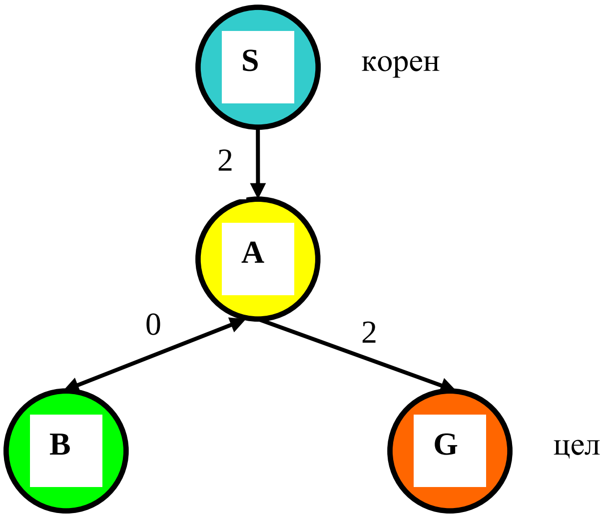
Одговор: A* алгоритамот ќе го одбере патот SXG и воопшто нема да ги разгледува патиштата SYG и SZG, затоа што вредноста на функцијата за одредување на цената (должината) на патот од S до до G преку X, $f(X)=g(X)+h(X)=8+1=9$, е многу помала во споредба со вредноста на патот од S до G преку Y: $f(Y)=g(Y)+h(Y)=9+4=13$ и од вредноста на патот од S до G преку Z:

$f(Z)=g(Z)+h(Z)=5+10=15$. Одбраното решение SXG не е оптимално (должина на SXG=12), затоа што, очигледно, патиштата SYG и SZG се покуси (должина на SYG=11, должина на SZG=6). Алгоритамот A* не е во состојба да го одбере оптималното решение затоа што не користи прифатлива евристика: $h(Y)=4>2$ и $h(Z)=10>1$.

1.3.47. Како се мери времето потребно за извршување на некој алгоритам за пребарување?

Одговор: Времето потребно за извршување на одделните алгоритми за пребарување секако зависи од можностите на сметачот (вградениот хардвер и софтвер). Меѓутоа, алгоритмите за пребарување можат да се споредуваат од гледиште на парцијалните патишта додадени во листата парцијални патишта Q односно бројот разгранети јазли. Грубо земено, времето на извршување на еден алгоритам за пребарување зависи пропорционално од бројот разгранети јазли.

1.3.48. Што ќе се случи ако за пребарување на графот од слика 1.14 се примени алгоритамот за пребарување со униформна цена?



Слика 1.14. Илустрација кон прашањето 1.3.48

Одговор: Бидејќи алгоритамот за пребарување со униформна цена секогаш го избира јазолот со најниска цена $g(n)$, тој ќе „заглави“ во затворена јамка помеѓу јазлите A и B и нема никогаш да заврши, односно да најде решение. Имено, $g(G)=4>g(A)=g(B)=2$.

1.3.49. Кога насочениот лак (V_i,V_j) е конзистентен?

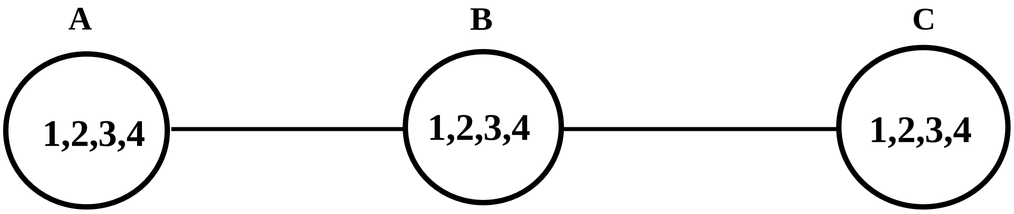
Одговор: Насочениот лак (V_i,V_j) е конзистентен доколку за секоја вредност x на променливата V_i од нејзината област D_i, во областа D_j постои вредност y на променливата V_j, која е дозволена со ограничувањето на лакот.

1.3.50. Кога графот со кој е претставен еден проблем со ограничувања нема решение?

Одговор: Доколку во процесот на проверка на конзистентноста на лаците во графот на ограничувања одредена променлива остане со празна област.

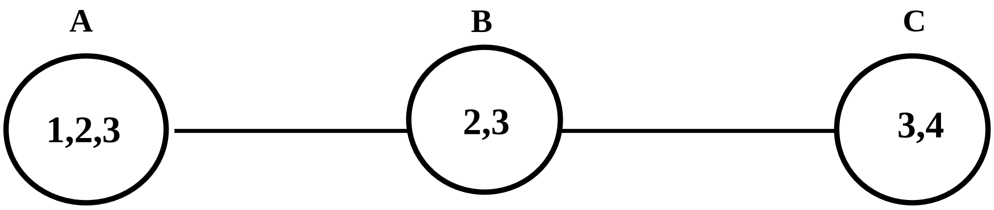
1.3.51. Даден е проблем на пребарување со ограничувања. Променливите на проблемот се: A, B и C. Секоја од променливите може да поприми една од следните вредности: 1, 2, 3 и 4. Ограничувањата на проблемот се: $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} < \mathbf{C}$. Да се предефинираат областите на променливите на проблемот, така што ќе ги содржат само конзистентните вредности (вредности кои ги исполнуваат дадените ограничувања).

Решение:



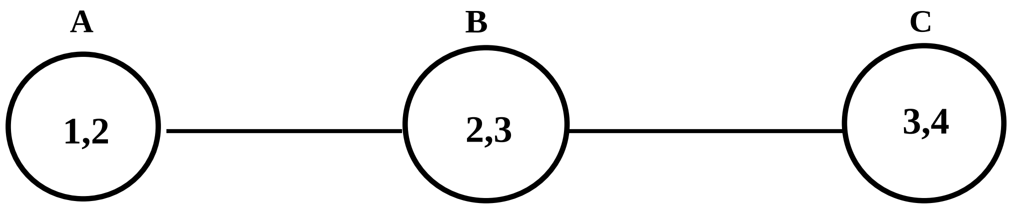
Слика 1.15. Почетна поставеност на проблемот од прашањето 1.3.51

Вредноста $\mathbf{A} = \mathbf{4}$ не е конзистентна со ограничувањето $\mathbf{A} < \mathbf{B}$, па се исфрла од областа $\mathbf{D_A}$. Исто така, вредноста $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ не е конзистентна со ограничувањето $\mathbf{A} < \mathbf{B}$, па се исфрла од областа $\mathbf{D_B}$. Од друга страна, вредноста $\mathbf{B} = 4$ не е конзистентна со ограничувањето $\mathbf{B} < \mathbf{C}$, па и таа се исфрла од областа $\mathbf{D_B}$. Едновремено, вредностите $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ и $\mathbf{C} = \mathbf{2}$ не се конзистентни со истото ограничување и се исфрлаат од областа $\mathbf{D_C}$. Сега проблемот може да се предефинира како на слика 1.16.



Слика 1.16. Предефиниција на проблемот од прашањето 1.3.51

По направената промена во областите на променливите на зададениот проблем, треба повторно да се провери конзистентноста на сите лаци, кај кои е извршена промена на доменот на почетната променлива. Така, ако повторно го провериме лакот $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, ќе видиме дека станал неконзистентен за вредноста $\mathbf{A} = \mathbf{3}$, па истата се исфрла од доменот $\mathbf{D_A}$. Сега сите лаци се конзистентни и проблемот е решен како на слика 1.17.



Слика 1.17. Решение на проблемот од прашањето 1.3.51

1.3.52. Кој е најчест начин на претставување на игрите во вештачката интелигенција?

Одговор: Во вештачката интелигенција игрите најчесто се претставуваат со графови и стебла.

1.3.53. Кој е основниот недостаток на претставувањето игри преку стебла?

Одговор: Основниот недостаток на претставувањето на една игра со стебло е големината на стеблото.

1.3.54. Што претставуваат јазлите и гранките во стеблото на некоја игра?

Одговор: Јазлите во стеблото на една игра претставуваат позиции во играта, а гранките можни потези во играта.

1.3.55. Што претставува функцијата за проценка на вредноста на позициите на една игра?

Одговор: Оваа функција доделува нумерички вредности на позициите во играта, кои на соодветен начин ја отсликуваат веројатноста за победа од конкретната позиција.

1.3.56. Која функција за проценка на вредностите на позициите во една игра е доволна ако се располага со комплетното стебло на играта?

Одговор: Кога се има целосен увид во играта, доволна е функција за проценка со две вредности: 1 за победа и -1 за пораз.

1.3.57. Со кои компоненти може една игра да се дефинира како проблем на пребарување?

Одговор: Една игра може да се дефинира како проблем на пребарување со следните компоненти:

- Почетна состојба
- Функција за генерирање наследници
- Тест за крај на играта
- Функција за награда

1.3.58. Што доделува функцијата за проценка на вредностите на позициите во една игра во случајот на игра со повеќе играчи?

Одговор: Во случајот на игра со повеќе играчи функцијата за проценка на позициите наместо една вредност доделува вектор вредности $(v_A, v_B, ..., v_G)$, каде што со A, B,…,G се означени играчите во играта.

1.3.59. Што претставуваат бинарните стебла на одлучување?

Одговор: Бинарните стебла на одлучување претставуваат Булови функции кои ја дефинираат врската помеѓу влезните вектори (вектори на карактеристиките на влезовите) и излезите на едно множество за обучување, кои се Булови величини.

1.3.60. Како едно стебло на одлучување се претвора во соодветен Булов израз?

Одговор: Секој пат низ стеблото кој завршува со лист со вредност 1 се претставува со конјукција. Потоа од сите вакви конјукции се формира дисјункција.

1.3.61. Кога една претпоставка h од типот конјукции е точна за одреден податок од дадено множество за обучување D?

Одговор: За една претпоставка h од типот конјукции се вели дека е точна за даден влезно-излезен пар од множеството за обучување D, доколку сите влезни карактеристики опфатени во конјукцијата имаат вредност 1 за тој податок.

1.3.62. Оценете ја постапката МИН-МАКС од аспект на комплетност, оптималност, временска и просторна сложеност и објаснете.

Одговор: Комплетна (за конечно стебло).

Оптимална (со оптимален противник).

Временска сложеност: $T\left(b^m\right)$

Просторна сложеност: $S\left(bm\right)$ (пребарување прво по длабочина)

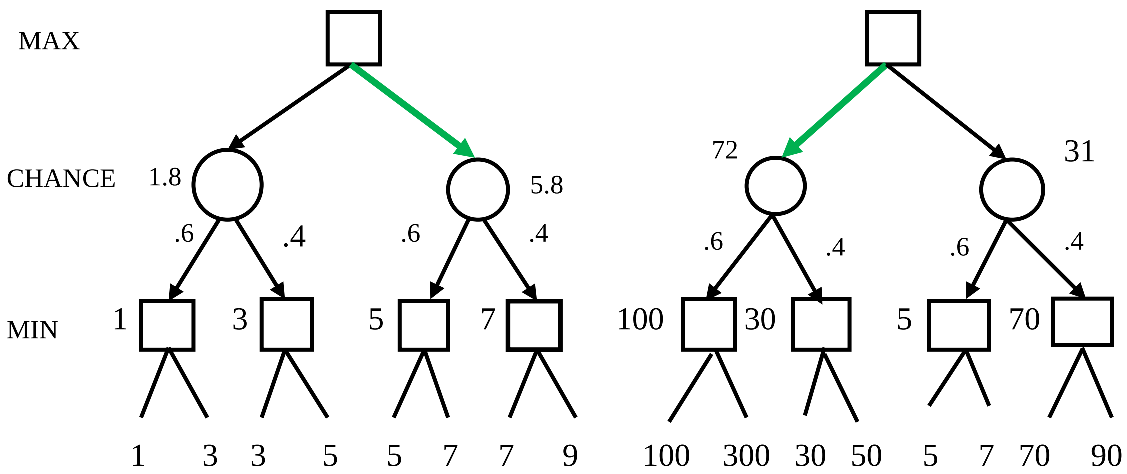
1.3.63. Колкава е сложеноста на МИН-МАКС и АЛФА-БЕТА постапките во идеален случај?

Одговор: Во најдобар случај, АЛФА-БЕТА постапката испитува само $T\left(b^{m/2}\right)$ јазли, наспроти МИН-МАКС постапката која во идеален случај испитува $T\left(b^m\right)$.

1.3.64. Кога се врши АЛФА-БЕТА „отсекување“ на еден јазол?

Одговор: АЛФА-БЕТА поткаструвањето се применува секогаш кога ќе се утврди дека вредноста на јазолот, која треба да се определи следна, нема да влијае врз изборот на најдобар потег од коренот на стеблото.

1.3.65. Дали вредностите на листовите влијаат врз исходот на една игра на среќа? Објаснете го тоа на дадениот пример од слика 1.18.



Слика 1.18. Илустрација кон прашањето 1.3.65

Одговор: Да. На примерот се гледа дека исходот на играта се променил со промената на вредностите на листовите. Поведението ќе остане исто само при позитивна линеарна трансформација на функцијата за проценка на вредностите на листовите. Следствено, оваа функција треба да биде пропорционална со очекуваната награда во играта.

1.3.66. Колку изнесува оптималната временска сложеност на АЛФА-БЕТА постапката и од што зависи?

Одговор: Во најдобар случај $T\left(b^{m/2}\right)$, а се остварува со перфектно подредување на гранките кои завршуваат со листови, според нивните вредности.

1.3.67. Што претставува ентропијата во областа на вештачката интелигенција?

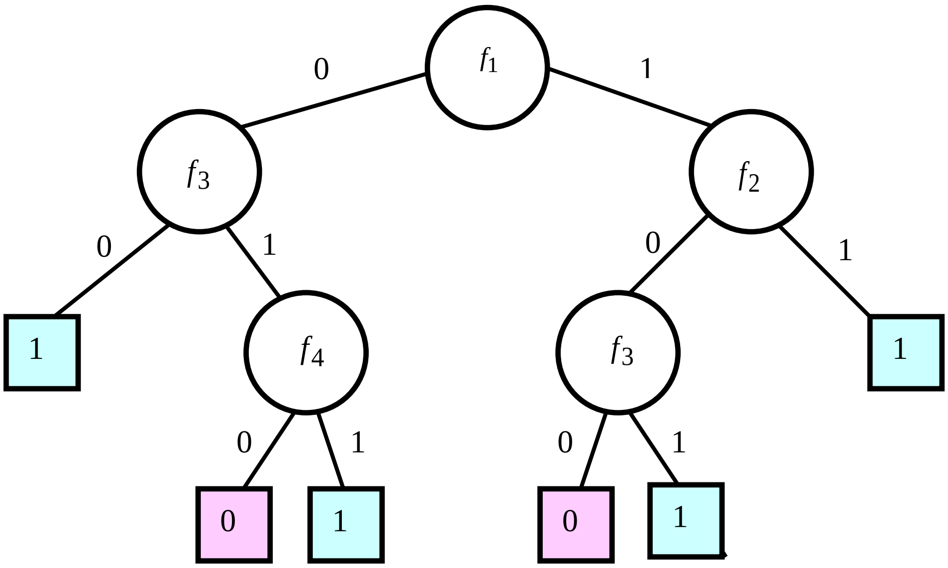
Одговор: Ентропијата се користи како мерка за униформноста на множествата и подмножествата кои се добиваат со раздвојување на влезните податоци врз основа на некоја влезна карактеристика.

1.3.68. Во долната таблица е претставено едно множество за обучување. Колкава е грешката на претпоставката $h = f_2 \wedge f_4$?

Примерок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1.	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
2.	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
3.	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
4.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
5.	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
6.	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Одговор: Грешката на претпоставката $h = f_2 \wedge f_4$ може да се изрази преку бројот примероци кои таа ги класифицира погрешно. Така, со проверка на дадената таблица се заклучува дека претпоставката $h = f_2 \wedge f_4$ има грешка = 2, бидејќи погрешно ги класифицира вториот и четвртиот податок, додека останатите ги класифицира точно.

1.3.69. Каков излез ќе генерира влезниот вектор $(0,1,1,0)$, со четири карактеристики: f_1, f_2, f_3 и f_4, во согласност со стеблото на одлучување од слика 1.19?



Слика 1.19. Илустрација кон прашањето 1.3.69 - Стебло на одлучување

Одговор: Дадениот влезен вектор $(0,1,1,0)$, во согласност со стеблото на одлучување од слика 1.19, ќе генерира излез нула.

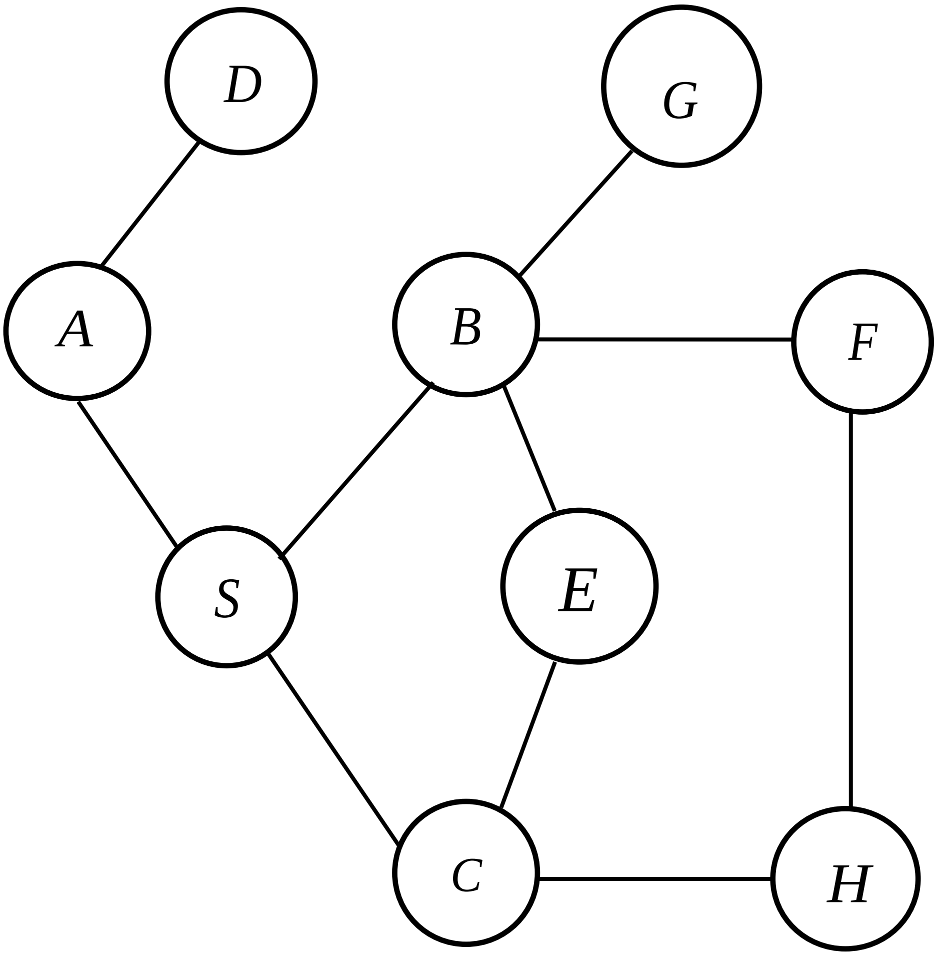
1.3.70. Каков Булов израз генерира стеблото на одлучување од слика 1.19?

Одговор: Стеблото на одлучување од слика 1.19 ја генерира следната Булова функција:

$$h = (\bar{f}_1 \wedge \bar{f}_3) \vee (\bar{f}_1 \wedge f_3 \wedge f_4) \vee (f_1 \wedge \bar{f}_2 \wedge f_3) \vee (f_1 \wedge f_2) \qquad (1\text{-}3.9)$$

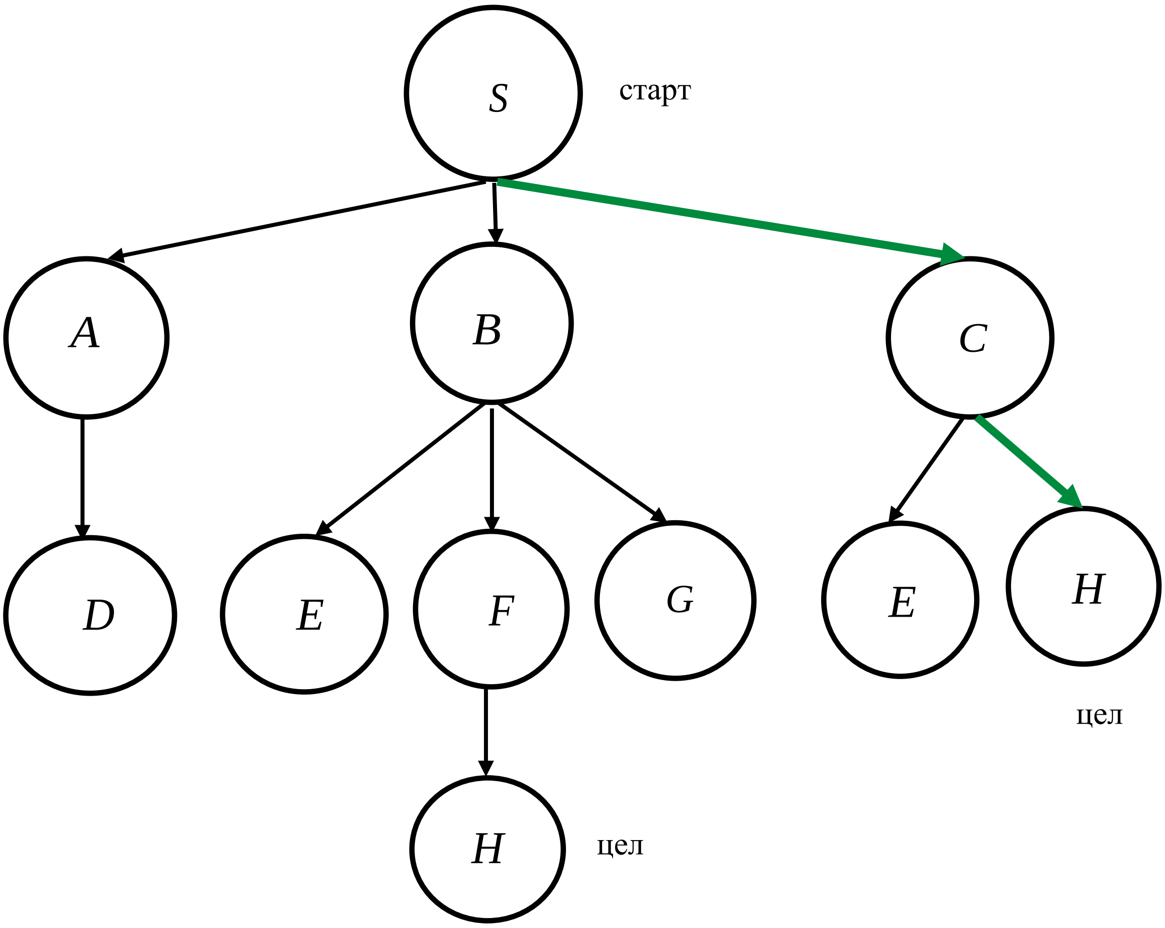
2. ПРЕБАРУВАЊЕ

2.1. Со помош на алгоритамот за слепо пребарување прво по широчина да се најде патот од почетниот јазол S до целниот јазол H во графот прикажан на слика 2.1. Да се состави соодветното стебло за пребарување, а постапката на пребарување да се претстави со соодветна таблица. Разгранувањето на јазлите во едно ниво се врши од лево на десно, а тестот за целта се применува при разгранувањето на јазлите. Повторените состојби да не се прикажуваат.



Слика 2.1.   Илустрација кон задача 2.1

Решение: Стеблото за графот од слика 2.1 е прикажано на слика 2.2, додека постапката на пребарување прво по широчина за ова стебло е дадена во таблица 2.1. Треба да се воочи дека алгоритамот за пребарување секој јазол го разгранува само еднаш, зашто во спротивно може да западне во бесконечна јамка. Со додавање на новоразгранетите јазли од десно, се обезбедува алгоритамот да ги разгранува јазлите по ниво во зададениот редослед. Изнајденото решение е означено на слика 2.2 со зелени линии.

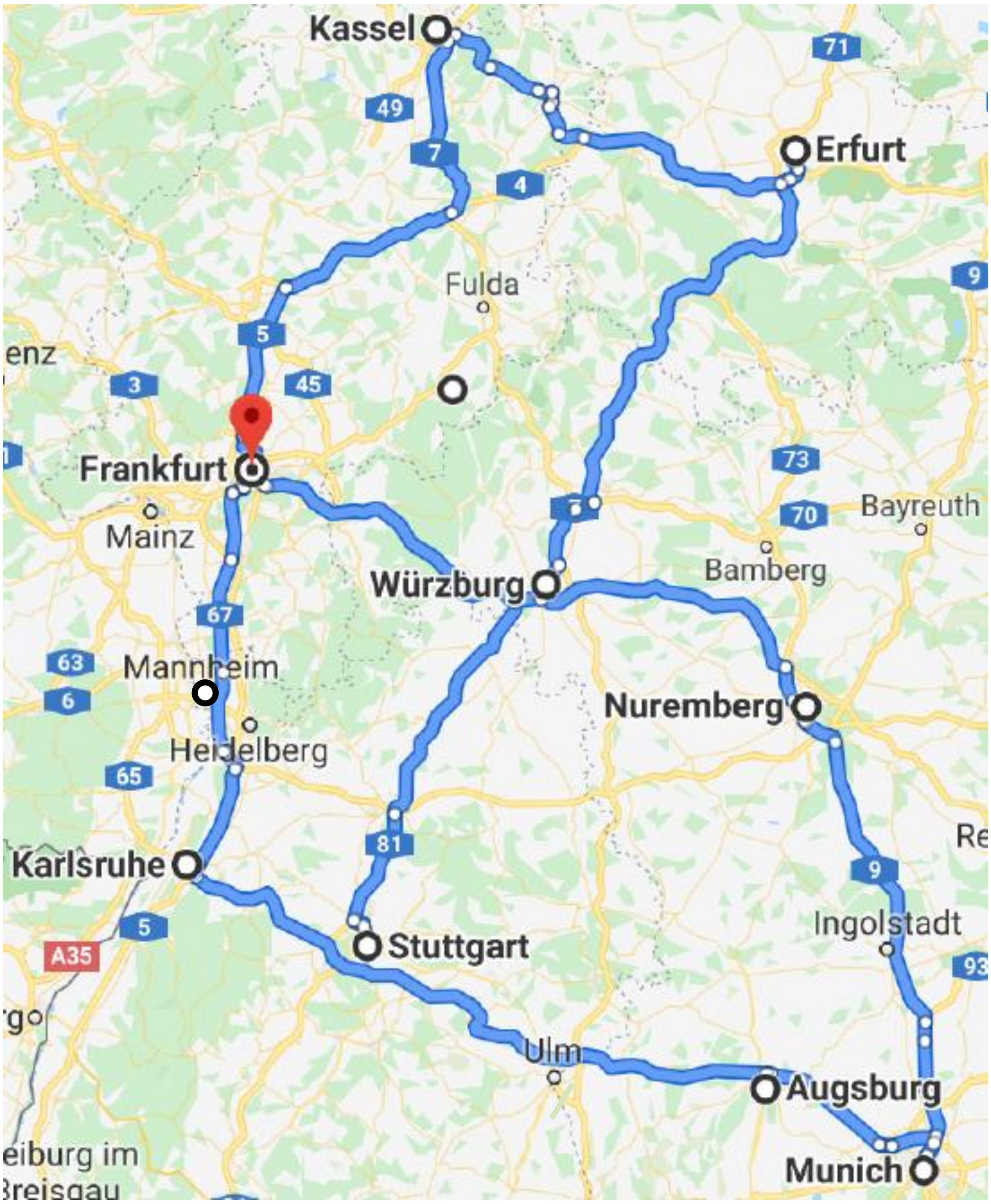


Слика 2.2. Стебло на пребарување за графот од слика 2.1

Таблица 2.1. Парцијални патишта за графот од слика 2.1

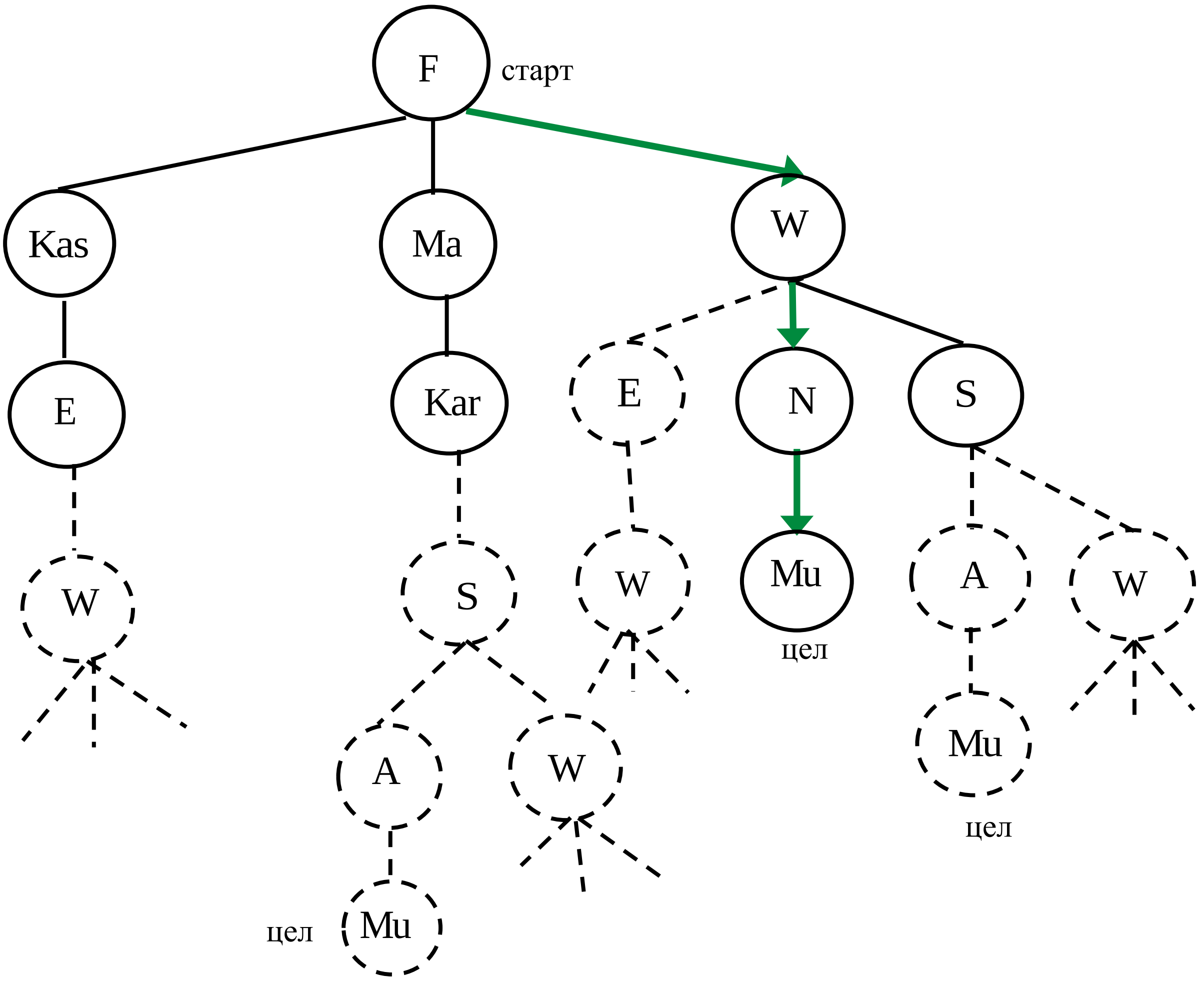
ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	(S)
1	(AS), (BS), (CS)
2	(BS), (CS), (DAS)
3	(CS), (DAS), (EBS), (FBS), (GBS)
4	(DAS), (EBS), (FBS), (GBS), (ECS), (HCS)
5	(EBS), (FBS), (GBS), (ECS), (HCS)
6	(FBS), (GBS), (ECS), (HCS)
7	(GBS), (ECS), (HCS), (HFBS)
8	(ECS), (HCS), (HFBS)
9	**(HCS)**, (HFBS)

2.2. Дадена е карта на Германија на слика 2.3. Со помош на постапката за слепо пребарување прво по широчина со примена на листа посетени јазли да се определи еден можен пат од Франкфурт до Минхен. Тестот за целта се применува при генерирањето нови јазли.



Слика 2.3. Патна карта на Германија (https://www.google.com/maps)

Решение: Соодветното стебло за пребарување на графот од слика 2.3 е прикажано на слика 2.4, а самата постапка на пребарување со листа посетени јазли во таблица 2.2. За поголема едноставност, градовите се означени со соодветни латинични букви: Frankfurt (F), Mannheim (Ma), Würzburg (W), Kassel (Kas), Karlsruhe (Kar), Nuremberg (N), Erfurt (E), Munich (Mu), Augsburg (A) и Stuttgart (S). Јазлите во едно ниво се подредени по азбучен редослед. Саканото решение е означено на слика 2.4 со зелени линии.

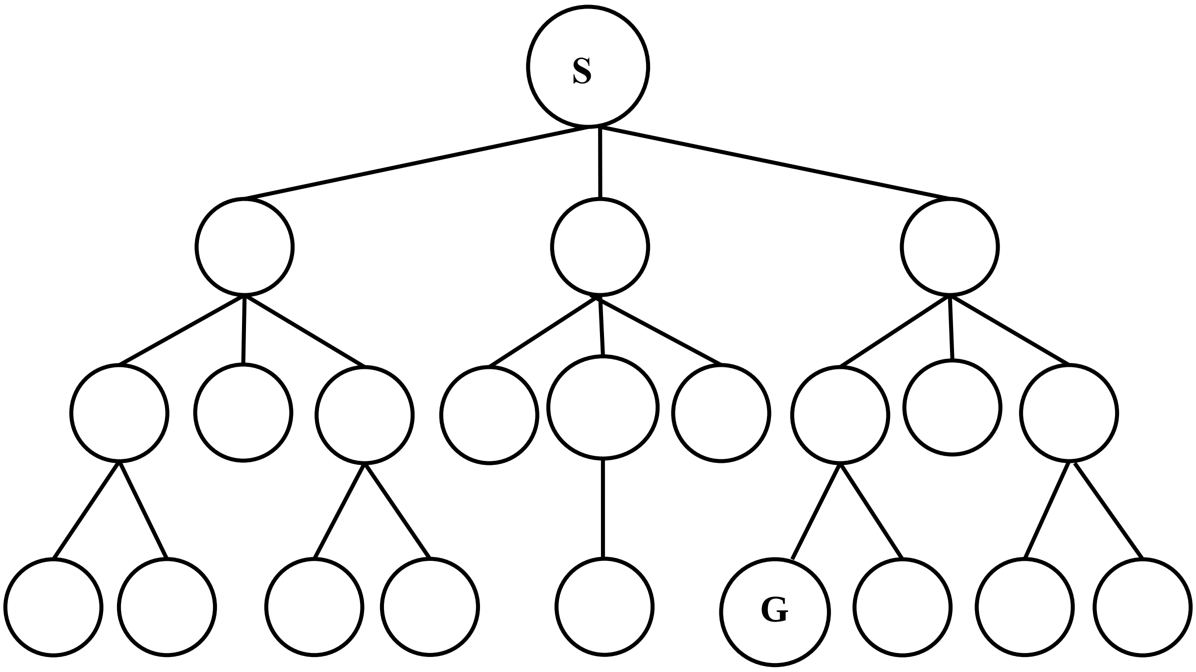


Слика 2.4. Стебло за пребарување на графот од слика 2.3

Табелица 2.2. Пребарување прво по широчина на графот од слика 2.3

	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА	ПОСЕТЕНИ ЈАЗЛИ
1.	(F)	F
2.	(F-Kas), (F-Ma), (F-W)	F, Kas, Ma, W
3.	(F-Ma), (F-W), (F-Kas-E)	F, Kas, Ma, W, E
4.	(F-W), (F-Kas-E), (F-Ma-Kar)	F, Kas, Ma, W, E, Kar
5.	(F-Kas-E), (F-Ma-Kar), (F-W-N), (F-W-S)	F, Kas, Ma, W, E, Kar, N, S
6.	(F-Ma-Kar), (F-W-N), (F-W-S)	F, Kas, Ma, W, E, Kar, N, S
7.	(F-W-N), (F-W-S)	F, Kas, Ma, W, E, Kar, N, S
8.	(F-W-S), **(F-W-N-Mu)**	F, Kas, Ma, W, E, Kar, N, S, Mu

2.3. Даденото стебло од слика 2.5 се пребарува според: а) алгоритамот за пребарување прво по широчина и б) алгоритамот за пребарување прво по длабочина. Почетниот јазол е означен со S, а целниот јазол (целта) е означен со G. По договор, јазлите со ист приоритет се разгрануваат од лево на десно. Да се означат јазлите во стеблото според редоследот на разгранување при соодветниот алгоритам на пребарување (да не се заборави и почетниот јазол). Јазлите што не се разгрануваат при конкретниот тип на пребарување не треба да се означуваат.



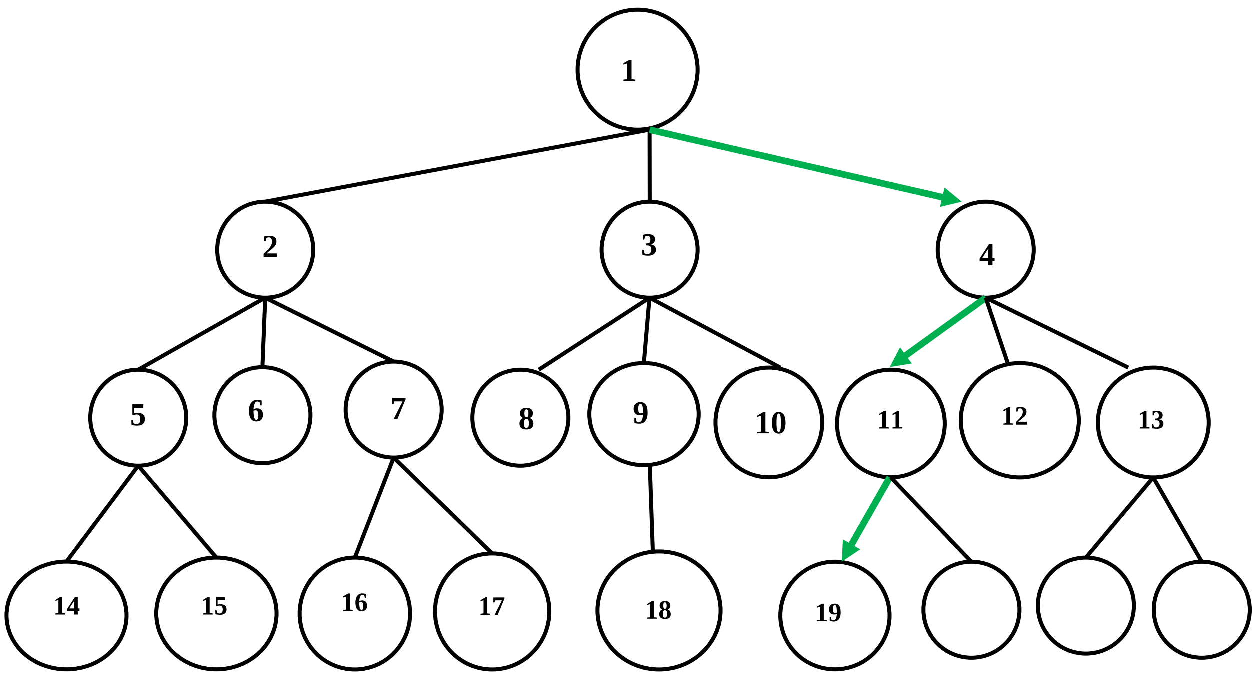
Слика 2.5. Илустрација кон задачата 2.3 – пребарување на стебло

Решение: Пребарувањето прво по широчина е прикажано во таблица 2.3 и на слика 2.6. Тестот за целта е применет при разгранување на јазлите.

Табела 2.3. Пребарување прво по широчина на стеблото од слика 2.5

	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1.	(1)
2.	(1-2), (1-3), (1-4)
3.	(1-3), (1-4), (1-2-5), (1-2-6), (1-2-7)
4.	(1-4), (1-2-5), (1-2-6), (1-2-7), (1-3-8), (1-3-9), (1-3-10)
5.	(1-2-5), (1-2-6), (1-2-7), (1-3-8), (1-3-9), (1-3-10), (1-4-11), (1-4-12), (1-4-13)
6.	(1-2-6), (1-2-7), (1-3-8), (1-3-9), (1-3-10), (1-4-11), (1-4-12), (1-4-13), (1-2-5-14), (1-2-5-15)
7.	(1-2-7), (1-3-8), (1-3-9), (1-3-10), (1-4-11), (1-4-12), (1-4-13), (1-2-5-14), (1-2-5-15)

8.	(1-3-8), (1-3-9), (1-3-10), (1-4-11), (1-4-12), (1-4-13), (1-2-5-14), (1-2-5-15), (1-2-7-16), (1-2-7-17)
9.	(1-3-9), (1-3-10), (1-4-11), (1-4-12), (1-4-13), (1-2-5-14), (1-2-5-15), (1-2-7-16), (1-2-7-17)
10.	(1-3-10), (1-4-11), (1-4-12), (1-4-13), (1-2-5-14), (1-2-5-15), (1-2-7-16), (1-2-7-17), (1-3-9-18)
11.	(1-4-11), (1-4-12), (1-4-13), (1-2-5-14), (1-2-5-15), (1-2-7-16), (1-2-7-17), (1-3-9-18)
12.	(1-4-12), (1-4-13), (1-2-5-14), (1-2-5-15), (1-2-7-16), (1-2-7-17), (1-3-9-18), (1-4-11-19), (1-4-11-20)
13.	(1-4-13), (1-2-5-14), (1-2-5-15), (1-2-7-16), (1-2-7-17), (1-3-9-18), (1-4-11-19), (1-4-11-20)
14.	(1-2-5-14), (1-2-5-15), (1-2-7-16), (1-2-7-17), (1-3-9-18), (1-4-11-19), (1-4-11-20), (1-4-13-21), (1-4-13-22)
15.	(1-2-5-15), (1-2-7-16), (1-2-7-17), (1-3-9-18), (1-4-11-19), (1-4-11-20), (1-4-13-21), (1-4-13-22)
16.	(1-2-7-16), (1-2-7-17), (1-3-9-18), (1-4-11-19), (1-4-11-20), (1-4-13-21), (1-4-13-22)
17.	(1-2-7-17), (1-3-9-18), (1-4-11-19), (1-4-11-20), (1-4-13-21), (1-4-13-22)
18.	(1-3-9-18), (1-4-11-19), (1-4-11-20), (1-4-13-21), (1-4-13-22)
19.	**(1-4-11-19)**, (1-4-11-20), (1-4-13-21), (1-4-13-22)

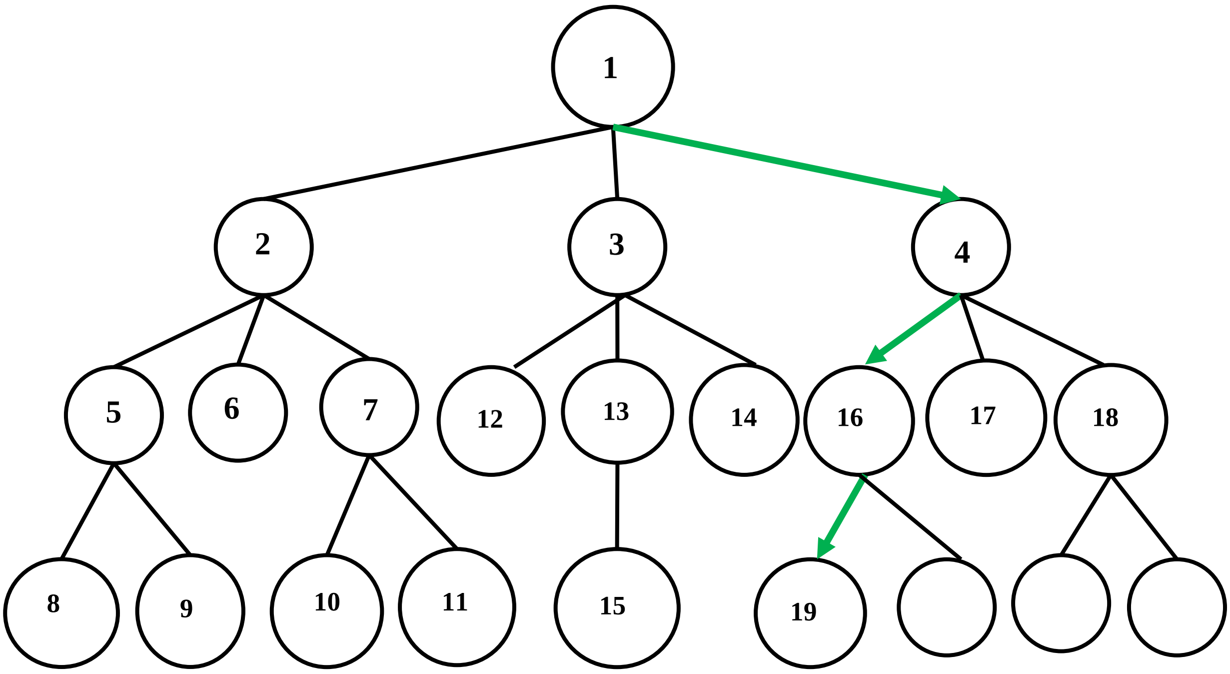


Слика 2.6. Решение на задачата 2.3 – пребарување прво по широчина

Пребарувањето прво по длабочина е прикажано во таблица 2.4 и на слика 2.7.

Таблица 2.4. Пребарување прво по длабочина на стеблото од слика 2.5

	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА		**ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА**
1.	(1-2), (1-3), (1-4)	9.	(1-3), (1-4)
2.	(1-2-5), (1-2-6), (1-2-7), (1-3), (1-4)	10.	(1-3-12), (1-3-13), (1-3-14), (1-4)
3.	(1-2-5-8), (1-2-5-9), (1-2-6), (1-2-7), (1-3), (1-4)	11.	(1-3-13), (1-3-14), (1-4)
4.	(1-2-5-9), (1-2-6), (1-2-7), (1-3), (1-4)	12.	(1-3-13-15), (1-3-14), (1-4)
5.	(1-2-6), (1-2-7), (1-3), (1-4)	13.	(1-3-14), (1-4)
6.	(1-2-7), (1-3), (1-4)	14.	(1-4-16), (1-4-17), (1-4-18)
7.	(1-2-7-10), (1-2-7-11), (1-3), (1-4)	15.	**(1-4-16-19)**, (1-4-17), (1-4-18)
8.	(1-2-7-11), (1-3), (1-4)		



Слика 2.7. Решение на задачата 2.3 – пребарување прво по длабочина

2.4. Еден селанец со својата лисица, кокошка и вреќа пченица тргнал на пат и по извесно време стасал на брегот од некоја река. Реката била длабока за поминување, но за среќа на брегот имало заврзано чамец. Единствен проблем било што чамецот бил многу мал и во него одеднаш можеле да се сместат најмногу две нешта. Се разбира, само селанецот можел да весла, па во чамецот можел да се вози или само селанецот, или селанецот и лисицата, или селанецот и кокошката итн. Тоа значи дека сите не можеле да се префрлат на другата страна од реката одеднаш, туку постепено во етапи, при што селанецот морал да внимава во ниеден момент да не ги остави насамо на иста страна од реката лисицата и кокошката, затоа што лисицата ќе ја изеде кокошката, или кокошката и пченицата, затоа што кокошката ќе ја исколва пченицата. Дали и како селанецот може безбедно да ги префрли сите на другата страна од реката? Забелешка: проблемот изложен во задачата е модификација на проблем кој датира уште од 8-миот век, а бил прикажан во ракописите на Alcuin – поет, учител, клериканец и пријател на Charlemagne.

Решение: Нека:

С	**Л**	**К**	**П**

означува состојба кога сите се наоѓаат на едната страна од реката (почетна состојба),

С		**К**	**П**
	Л		

означува состојба кога лисицата се наоѓа на другата страна од реката,

	Л		**П**
С		**К**	

означува состојба кога селанецот и кокошката се наоѓаат на другата страна од реката итн.

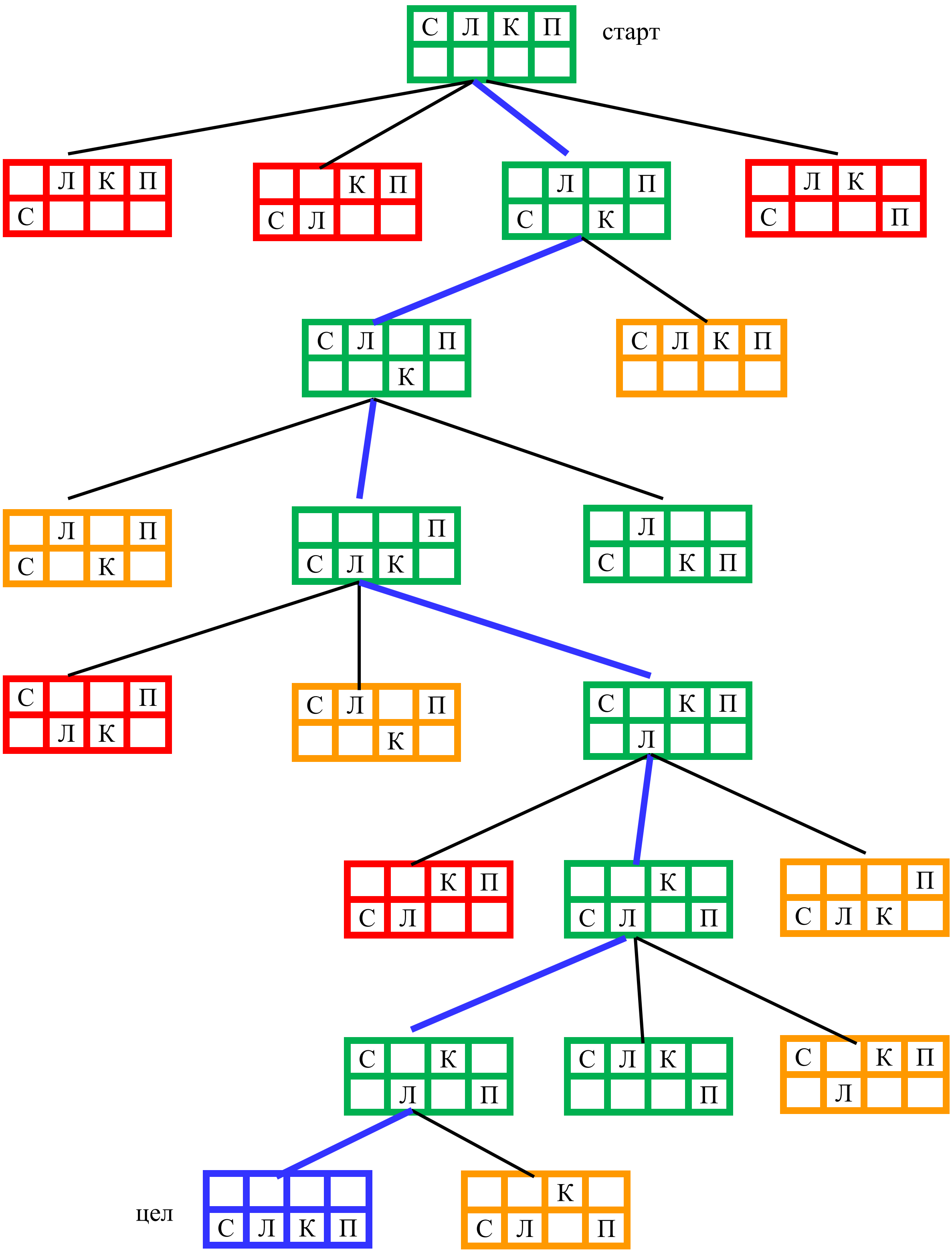
Крајната состојба е кога сите се наоѓаат на другата страна од реката.

С	**Л**	**К**	**П**

Стеблото на пребарување е прикажано на слика 2.8, а пребарувањето е извршено прво по длабочина.

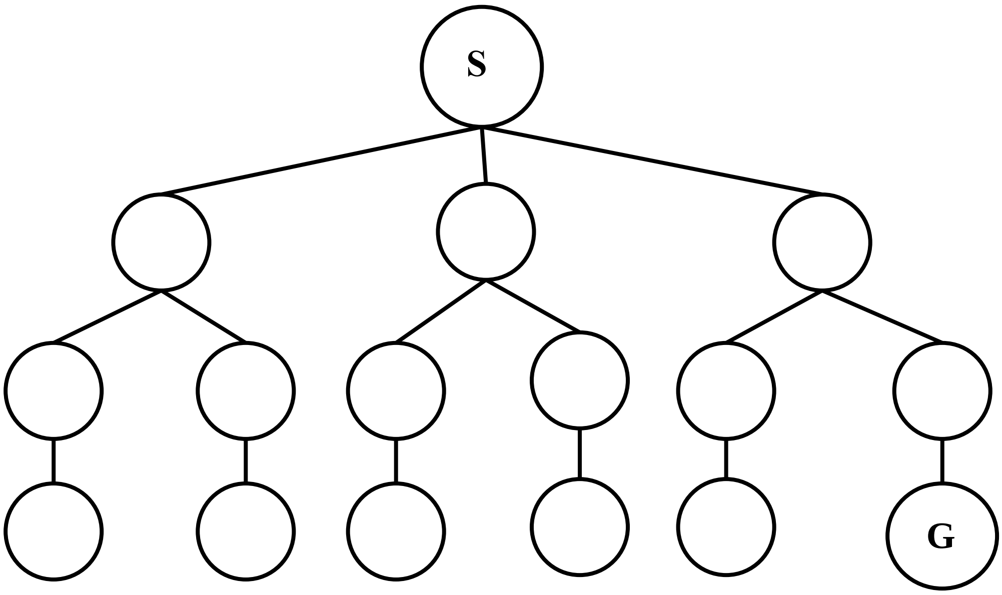
Илегалните состојби се означени со црвени линии, повторените состојби со жолти, дозволените состојби со зелени и крајната состојба со сини. Бараното решение е следното:

- Селанецот најпрво ја пренесува кокошката на спротивниот брег и се враќа сам назад
- Потоа ја пренесува лисицата на спротивниот брег и се враќа назад со кокошката
- Селанецот ја пренесува вреќата пченица на спротивниот брег и се враќа назад сам
- Селанецот ја пренесува кокошката на спротивниот брег
- Сите се безбедно на спротивниот брег



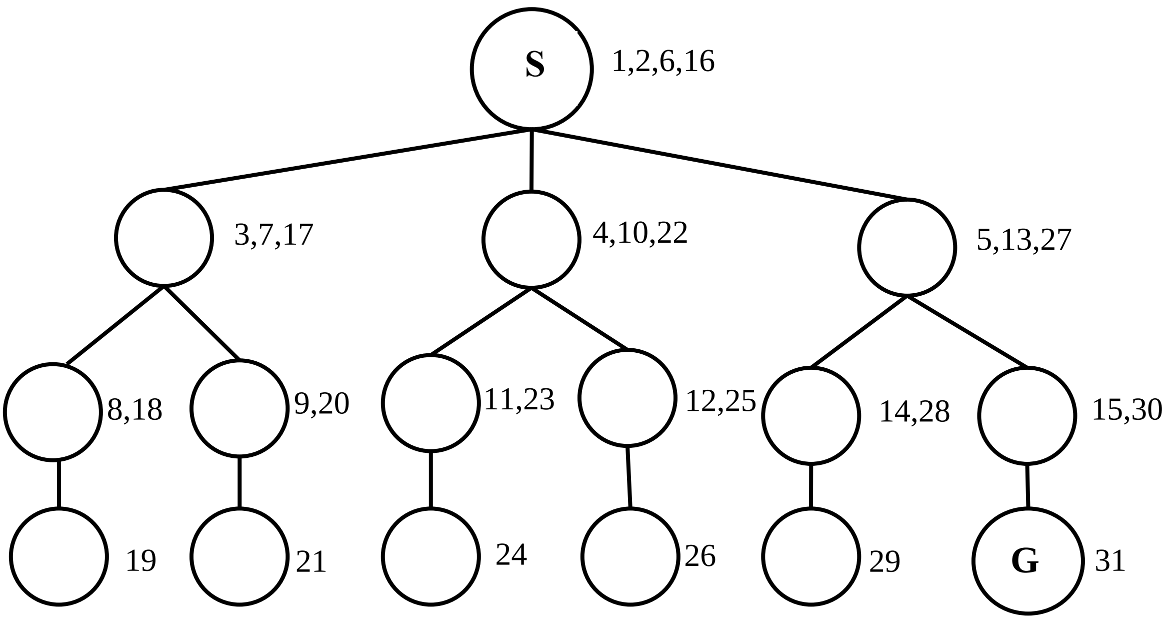
Слика 2.8. Стебло на разгранување прво по длабочина за задача 2.4

2.5. Стеблото прикажано на слика 2.9 се пребарува според алгоритамот за итеративно пребарување прво по длабочина. Почетниот јазол е означен со S, а целниот јазол (целта) е означен со G. Да се означат јазлите во стеблото според редоследот на разгранување при соодветниот алгоритам на пребарување (да не се заборави и почетниот јазол). Јазлите што не се разгрануваат при конкретниот тип на пребарување не треба да се означуваат.



Слика 2.9. Илустрација кон задачата 2.5 – итеративно пребарување на стебло

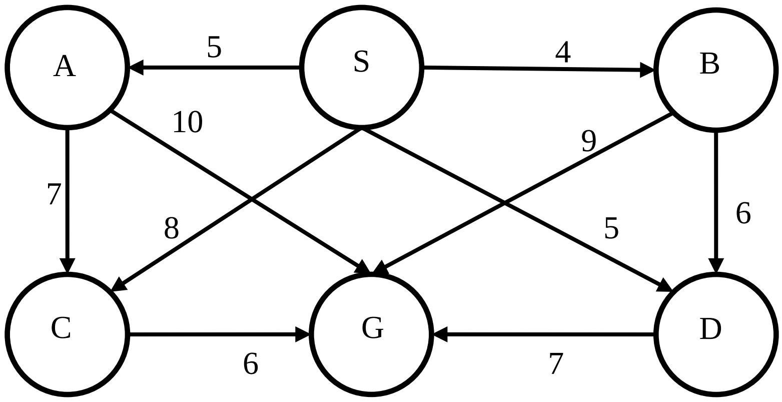
Решение:



Слика 2.10. Редоследот на разгранување на јазлите во стеблото од слика 2.9 според алгоритамот за итеративно пребарување во длабочина

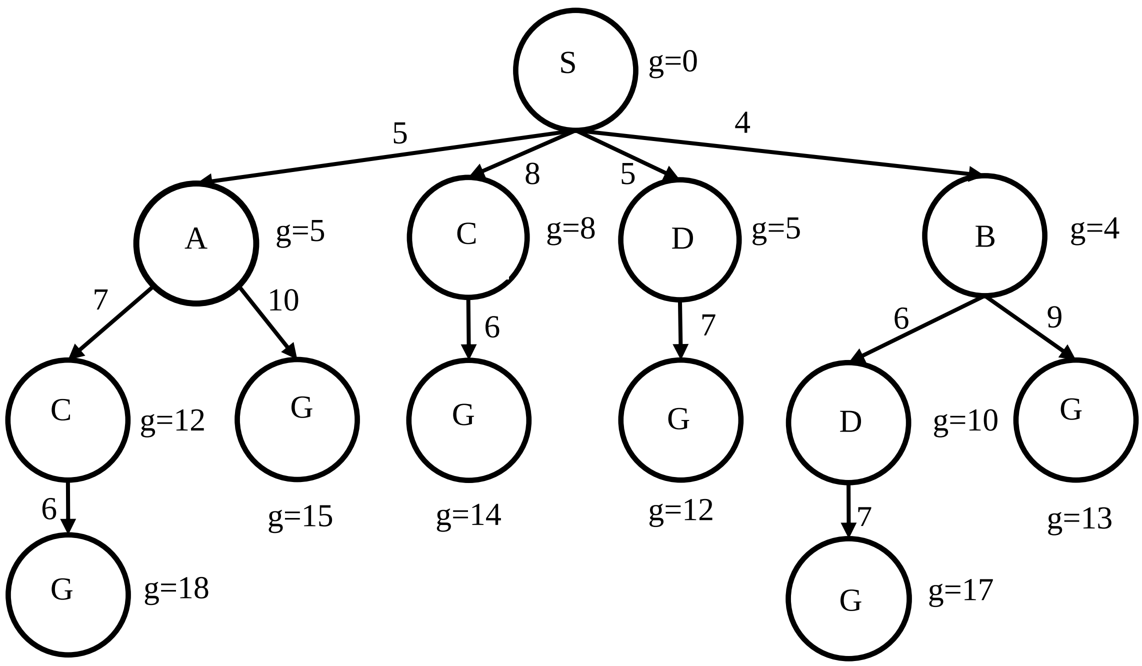
Решението на задачата е прикажано на слика 2.10. Треба да се забележи дека кај овој вид пребарување, јазлите имаат повеќекратни ознаки за редоследот на пребарување. Тоа се должи на фактот дека алгоритамот повеќе пати се враќа кај ист јазол, односно иста состојба.

2.6. Да се состави стебло на пребарување за графот прикажан на слика 2.11, со почетен јазол S и цел G. Крај секој јазол во стеблото да се означи соодветната должина на патот до него. Пребарувањето на стеблото да се изврши со алгоритамот со униформна цена.



Слика 2.11. Илустрација кон задача 2.6

Решение: Бараното стебло на пребарување е прикажано на слика 2.12.



Слика 2.12. Стебло на пребарување за графот од слика 2.11

Таблица 2.5. Разгранување на стеблото од слика 2.12

	Парцијални патишта
1.	**(0S)**
2.	**(4BS) (5AS), (5DS), (8CS)**
3.	**(5AS), (5DS), (8CS), (10DBS), (13GBS)**
4.	**(5DS), (8CS), (10DBS), (12CAS), (13GBS), (15GAS)**
5.	**(8CS), (10DBS), (12CAS), (12GDS), (13GBS), (15GAS)**
6.	**(10DBS), (12CAS), (12GDS), (13GBS), (14GCS), (15GAS)**
7.	**(12CAS), (12GDS), (13GBS), (14GCS), (15GAS), (17GDBS)**
8.	**(12GDS), (13GBS), (14GCS), (15GAS), (17GDBS), (18GCAS)**

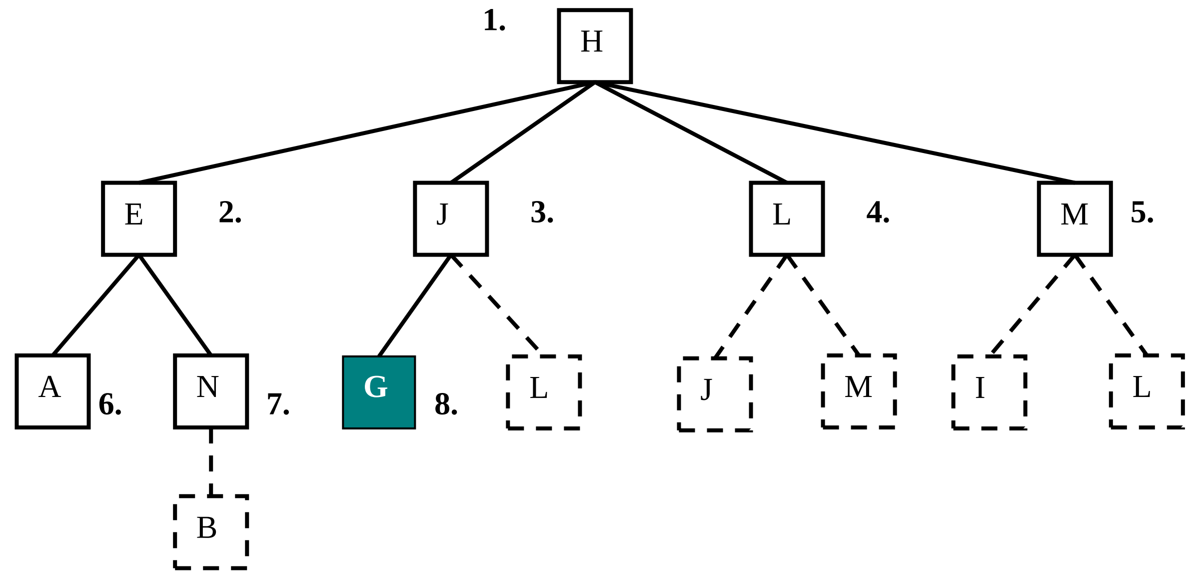
2.7. Таблицата 2.6 го содржи растојанието по директна воздушна линија помеѓу сите градови од картата на воздушен сообраќај на една авионска компанија. Ѕвездичката покрај одредено растојание покажува дека авионската компанија има директен лет помеѓу соодветните два града. Растојанието помеѓу два града кои не се поврзани со директна воздушна линија е збир од растојанијата помеѓу градовите преку кои се одвива летот.

Таблица 2.6. Табела на градови и нивните меѓусебни растојанија (во km x 100) од картата за воздушен собраќај на една авиокомпанија

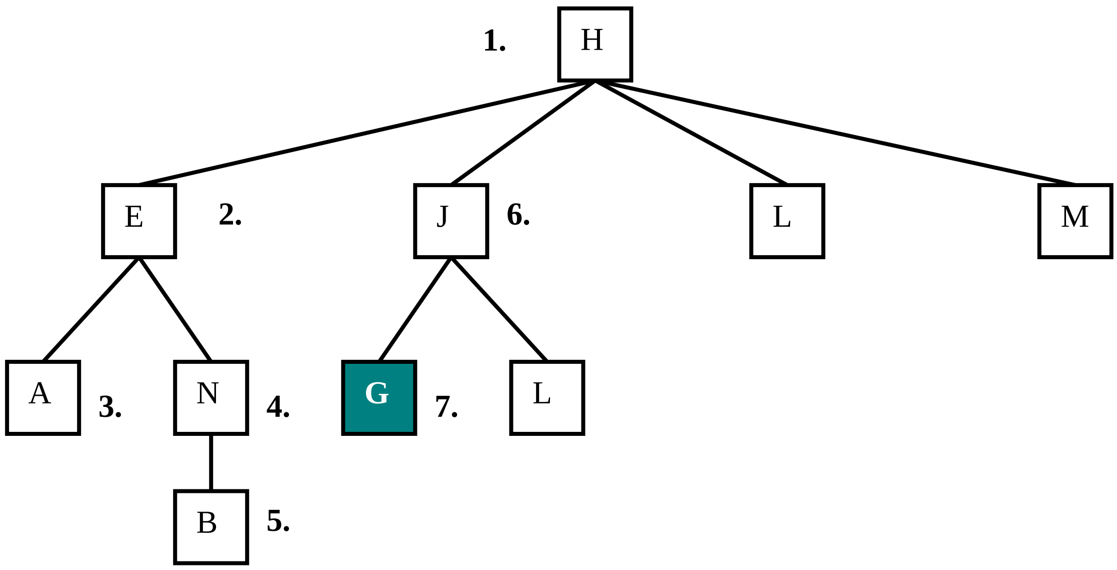
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**
A	**0**	**8**	**75**	**77**	**15***	**86**	**63**	**18**	**16**	**33**	**55**	**21**	**33**	**4**	**17**	**53**
B	**8**	**0**	**80**	**84**	**20**	**92**	**69**	**22**	**23**	**39**	**62**	**23**	**39**	**5***	**24**	**59**
C	**75**	**80**	**0**	**35***	**62**	**18**	**15**	**64**	**59**	**43**	**21**	**64**	**43**	**76**	**59**	**24***
D	**77**	**84**	**35***	**0**	**64**	**14***	**16**	**66**	**61**	**45**	**24**	**65**	**45**	**79**	**62**	**25***
E	**15***	**20**	**62**	**64**	**0**	**72**	**49**	**6***	**7**	**19**	**42**	**9**	**20**	**15***	**13**	**39**
F	**86**	**92**	**18**	**14***	**72**	**0**	**23**	**72**	**70**	**53**	**31**	**72**	**52**	**87**	**71**	**33**
G	**63**	**69**	**15**	**16**	**49**	**23**	**0**	**50**	**47**	**30***	**7***	**50**	**30**	**64**	**48**	**10**
H	**18**	**22**	**64**	**66**	**6***	**72**	**50**	**0**	**13**	**20***	**43**	**3***	**21***	**18**	**19**	**40**
I	**16**	**23**	**59**	**61**	**7**	**70**	**47**	**13**	**0**	**18**	**40**	**16**	**18***	**18**	**6***	**37**
J	**33**	**39**	**43**	**45**	**19**	**53**	**30***	**20***	**18**	**0**	**23**	**20***	**1**	**34**	**21**	**20**
K	**55**	**62**	**21**	**24**	**42**	**31**	**7***	**43**	**40**	**23**	**0**	**43**	**22**	**57**	**41**	**3***
L	**21**	**23**	**64**	**65**	**9**	**72**	**50**	**3***	**16**	**20***	**43**	**0**	**22***	**20**	**22**	**40**
M	**33**	**39**	**43**	**45**	**20**	**52**	**30**	**21***	**18***	**1**	**22**	**22***	**0**	**35**	**21**	**20**
N	**4**	**5***	**76**	**79**	**15***	**87**	**64**	**18**	**18**	**34**	**57**	**20**	**35**	**0**	**19**	**54**
O	**17**	**24**	**59**	**62**	**13**	**71**	**48**	**19**	**6***	**21**	**41**	**22**	**21**	**19**	**0**	**39**
P	**53**	**59**	**24***	**25***	**39**	**33**	**10**	**40**	**37**	**20**	**3***	**40**	**20**	**54**	**39**	**0**

Да се нацрта соодветно стебло на пребарување за секој од алгоритмите на пребарување: а) пребарување прво по широчина на патот од градот H до градот G, б) пребарување прво по длабочина на патот од градот H до градот G и в) пребарување со константна цена на патот од градот N до градот I. Парцијалните патишта добиени со разгранување на одделните јазли се внесуваат во листата парцијални патишта по азбучен редослед на нивните крајни јазли доколку алгоритамот за пребарување не наложува поинаку. Состојбите што се повторуваат долж еден пат се испуштаат (на тој начин се избегнува при разгранувањето на јазолот n во соодветниот парцијален пат да биде внесен потомок на n кој веќе се појавува на набљудуваниот пат до n). Останатите повторени состојби не се елиминираат. Јазлите во стеблото треба да бидат означени според редоследот на разгранување (вклучувајќи го и почетниот јазол). Кај алгоритамот со униформна цена крај секој јазол да се означи и соодветната вредност на функцијата $g(n)$.

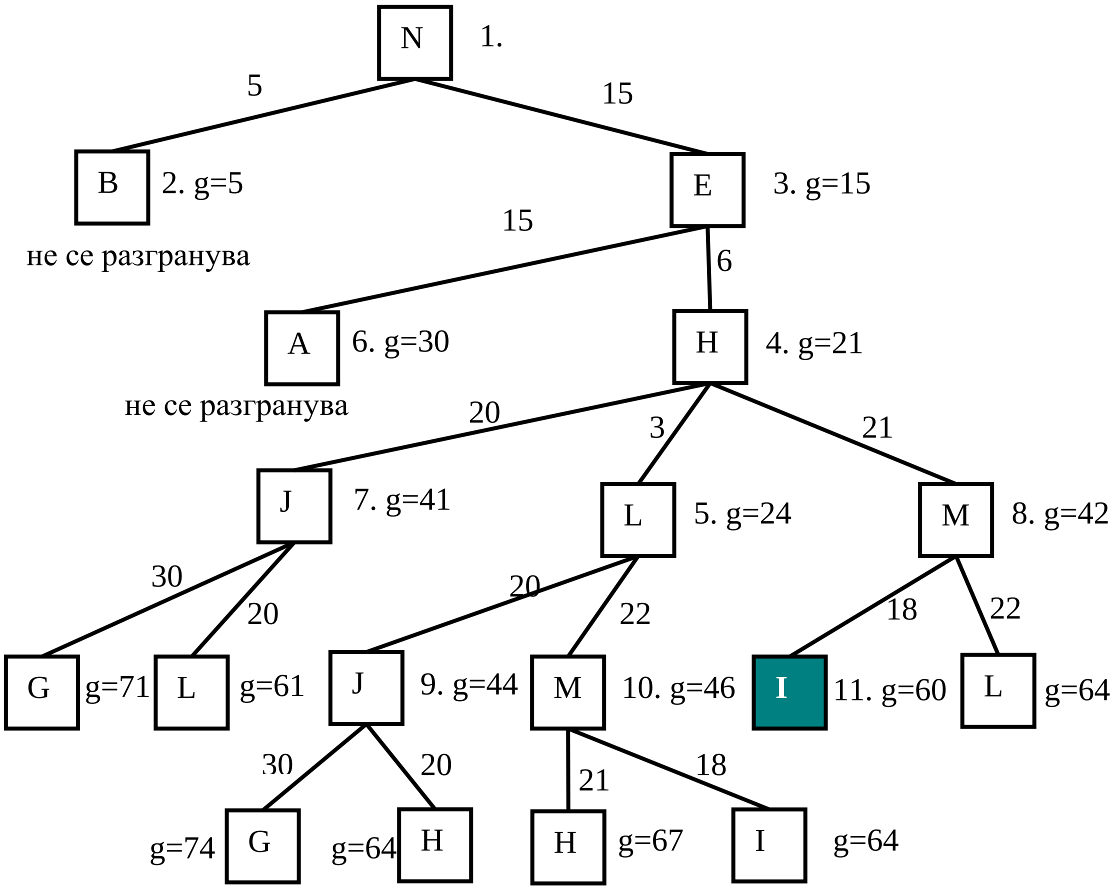
Решение:



Слика 2.13. Решение на задачата 2.7 – пребарување прво по широчина



Слика 2.14. Решение на задачата 2.7 – пребарување прво по длабочина



Слика 2.15. Решение на задачата 2.7 – пребарување со униформна цена

Табела 2.7. Пребарување прво по широчина

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	H
2	E-H, J-H, L-H, M-H
3	J-H, L-H, M-H, A-E-H, N-E-H
4	L-H, M-H, A-E-H, N-E-H, **G-J-H**, L-J-H

Табела 2.8. Пребарување прво по длабочина

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	H
2	E-H, J-H, L-H, M-H
3	A-E-H, N-E-H, J-H, L-H, M-H
4	N-E-H, J-H, L-H, M-H
5	B-N-E-H, J-H, L-H, M-H
6	J-H, L-H, M-H
7	**G-J-H**, L-J-H, J-H, L-H, M-H

Таблица 2.9. Пребарување со униформна цена

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	**0-N**
2	**5-B-N**, 15-E-N
3	**15-E-N**
4	**21-H-E-N**, 30-A-E-N
5	**24-L-H-E-N**, 30-A-E-N, 41-J-H-E-N, 42-M-H-E-N
6	**30-A-E-N**, 41-J-H-E-N, 42-M-H-E-N, 44-J-L-H-E-N, 46-M-L-H-E-N
7	**41-J-H-E-N**, 42-M-H-E-N, 44-J-L-H-E-N, 46-M-L-H-E-N
8	**42-M-H-E-N**, 44-J-L-H-E-N, 46-M-L-H-E-N, 61-L-J-H-R-N, 71-G-J-H-E-N
9	**44-J-L-H-E-N**, 46-M-L-H-E-N, 60-I-M-H-E-N, 61-L-J-H-R-N, 64-L-M-H-E-N, 71-G-J-H-E-N
10	**46-M-L-H-E-N**, 60-I-M-H-E-N, 61-L-J-H-R-N, 64-H-J-L-H-E-N, 64-L-M-H-E-N, 71-G-J-H-E-N, 74-G-J-L-H-E-N
11	**60-I-M-H-E-N**, 61-L-J-H-R-N, 64-H-J-L-H-E-N, 64-I-M-L-H-E-N, 64-L-M-H-E-N, 67-I-M-L-H-E-N, 71-G-J-H-E-N, 74-G-J-L-H-E-N

2.8. Нека, под претпоставка, двајца пријатели, кои живеат во различни градови во Македонија, тргнуваат на пат за да се сретнат. Тие патуваат едновремено и постапно, така што по секоја етапа од патувањето стасуваат во првиот соседен град од картата. Времето потребно да се стаса од градот I до соседниот град на картата J е претставено преку растојанието на двата града $d(I,J)$. Секој пријател, што прв ќе стаса во соседниот град од картата, мора да чека додека неговиот пријател исто така не пристигне во својата соседна дестинација и му се јави по мобилен телефон. Дури тогаш може да започне следната етапа од нивното патување. Целта е двајцата пријатели да се сретнат што е можно поскоро. Оваа задача може да се формулира како проблем на пребарување.

а) Што е просторот на состојби на вака дефинираниот проблем?

Одговор: Состојби се сите можни парови градови (I,J). Картата на Македонија **не претставува** простор на состојби.

б) Што претставува цел (целна состојба) за дефинираниот проблем на пребарување?

Одговор: Целта е состојбата (I,I) за одредено I.

в) Што е цената на секој чекор од патувањето?

Одговор: Цената на патувањето од (I,J) до (K,L) е $\max\left[d(I,K),d(J,L)\right]$.

г) Нека $r(I,J)$ го претставува растојанието по воздушна (права) линија меѓу кои и да било два града I и J на картата. Која од следните, и дали воопшто некоја, е прифатлива евристичка функција?

(1) $r(I,J)$ (2) $2r(I,J)$ (3) $r(I,J)/2$ (4) Ниедна

Одговор: Во најдобар случај двајцата пријатели се упатени директно еден кон друг и во секоја етапа изминуваат подеднакво растојание, намалувајќи го на тој начин во секоја етапа од патувањето меѓусебното растојание за двапати. Следствено, (3) е прифатлива евристика.

д) Дали следното тврдење е точно: Постојат целосно поврзани карти за кои нема решение.

Точно. Пример е карта со два јазли поврзани со една врска.

2.9. За следење на загаденоста на воздухот во главниот град Метропола на државата Република се користат 10 дронови, кои ја мерат концентрацијата на различни штетни гасови како, на пример, јаглероден диоксид CO_2, метан CH_4 итн. Секој ден дроновите ја напуштаат базната станица, извршуваат мерења на вкупно 50 различни локации во градот (секој дрон снима по 5 локации) и повторно се враќаат во станицата. Дроновите располагаат со уред за водење кој ги управува директно од една до друга зададена локација. Следствено, секој од дроновите ги извршува следните едноставни дејствија: **оди-во-базата**, **оди-до-локација-1**, **оди-до-локација-2,..., оди-до-локација-5**. Времето потребно дронот да се префрли од една до друга зададена локација исто така е познато. Треба да се одреди редоследот дејствија со кои еден дрон ќе ја заврши поставената задача во најкусо можно време.

а) Поставениот проблем да се дефинира како проблем на пребарување. Што е просторот на состојби, почетната и крајната (целна) состојба, како и цената на патот?

Одговор: Состојби – тековна локација, мерење 1, мерење 2, мерење 3, мерење 4, мерење 5

Состојбената променлива **тековна локација** е дефинирана на множеството (**база**, **локација 1**, **локација 2**, **локација 3**, **локација 4**, **локација 5**). Останатите состојбени променливи **мерење 1**, **мерење 2**, **мерење 3**, **мерење 4**, **мерење 5** се бинарни (**да**, **не**).

Почетна состојба - **(база, не, не, не, не, не)**

Цена на патот = должина на патот – збир од растојанијата помеѓу локациите на мерењата

Цел (целна состојба) – **(база, да, да, да, да, да)**

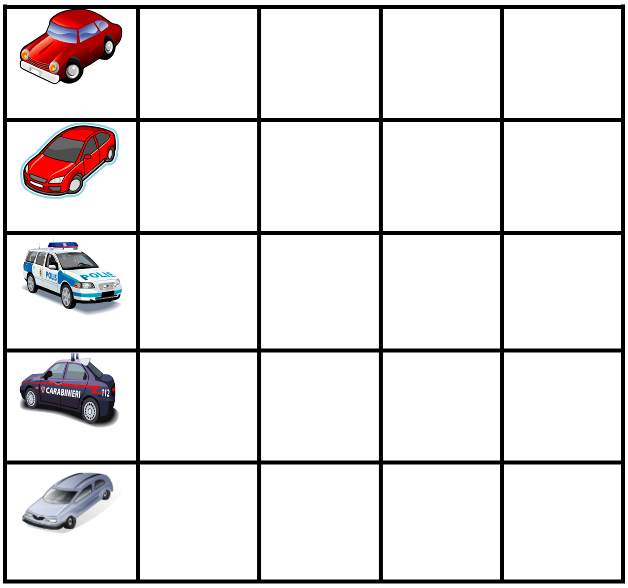
б) Да се одбере најсоодветниот алгоритам за пребарување и да се објасни.

Одговор: Бидејќи се бара најкусиот пат, соодветни алгоритми за пребарување се алгоритамот со униформна цена и A* алгоритамот, а бидејќи се располага со соодветна прифатлива евристика, најдобро е да се одбере A* алгоритамот, зашто побрзо ќе доведе до решение.

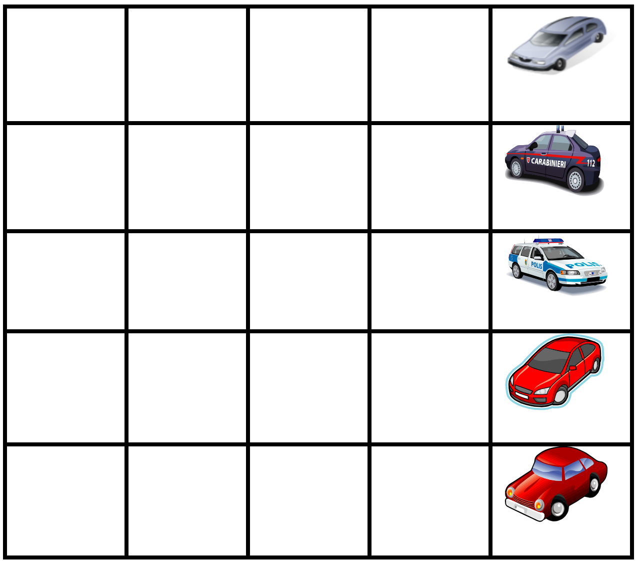
в) Да се дефинира прифатлива евристика за овој проблем.

Одговор: Една прифатлива евристичка функција на проценка е времето потребно дронот да се врати од конкретна локација во базата.

2.10. На квадратна табла со димензии 5×5, слика 2.16, во првата колона се поставени 5 колички BURAGO. Количките треба да се преместат во последната колона, но во обратен редослед. Тоа значи дека количката i што се наоѓа на почетна позиција $(i,1)$ мора да се најде на крајната позиција $[5-(i-1),5]$. При секој чекор на поместување, секоја од количките може да се помести за едно поле во лево, десно, горе, долу или да остане на истата позиција. Доколку во тековниот чекор некоја количка не се помести од својата тековна позиција, една од соседните колички (но само една) може да ја прескокне. Две колички не можат едновремено да се најдат на исто поле.



а) почетна состојба



б) крајна состојба

Слика 2.16. Илустрација кон задачата 2.10

1) Колкава е, грубо земено, големината на просторот на состојби на овој проблем?

а) $5^2 = 25$ б) $5^3 = 125$ в) $5^{2\times 5} = 5^{10}$ г) $5^{5^2} = 5^{25}$

2) Колку изнесува, грубо земено, факторот на разгранување во конкретниот проблем?

а) 5 б) $5^2 = 25$ в) $5^5 = 3125$

3) Нека, под претпоставка, количката i се наоѓа на полето (x_i, y_i). Да се дефинира нетривијална прифатлива евристика h_i за бројот чекори потребни количката да се најде во својата крајна позиција $[5-(i-1),5]$ ако, под претпоставка, на таблата нема други колички.

4) Која од дадените евристики е прифатлива ако се поместуваат сите 5 колички до нивните крајни позиции:

а) $\sum_{i=1}^{5} h_i$ б) $\max(h_1,h_2,\cdots,h_5)$ в) $\min(h_1,h_2,\cdots,h_5)$ г) ниедна од наведените

1) Одговор: На таблата има $5^2 = 25$ полиња и 5 колички што се движат по тие полиња. Следствено, ако се занемари ограничувањето од само една количка на едно поле, грубо може да се земе дека просторот на состојби на овој проблем има $\left(5^2\right)^5 = 25^5 = 5^{10} =$ $= 9,765,625$ состојби.

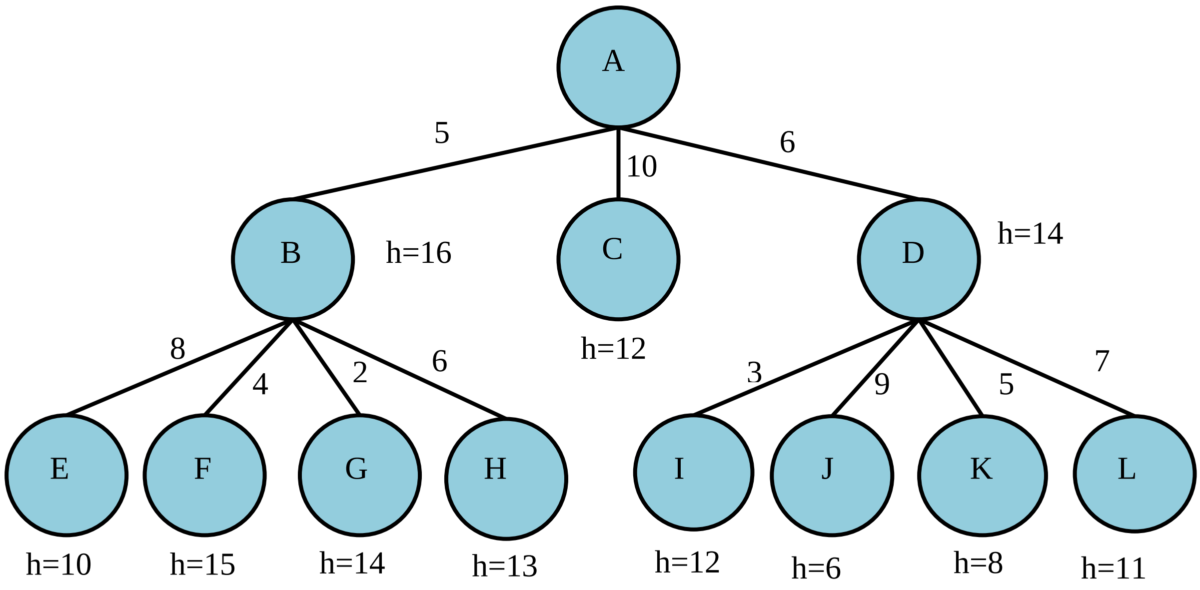
2) Одговор: Грубо земено, факторот на разгранување е $5^2 = 25$.

3) Одговор: Една нетривијална прифатлива евристика h_i за бројот чекори потребни количката да се најде во својата крајна позиција $[5-(i-1),5]$ ако, под претпоставка, на таблата нема други колички е:

$$h_i = \left|(5-i+1)-x_i\right| + \left|5-y_i\right|;\ i = 1,2,\cdots,5 \tag{2.1}$$

4) Одговор: Прифатлива е само евристиката $\min(h_1,h_2,\cdots,h_5)$. До овој заклучок се доаѓа ако најнапред се констатира дека вкупниот број поместувања потребни сите 5 колички да се пренесат од нивните почетни во крајните позиции на таблата е $\geq 5\min(h_1,h_2,\cdots,h_5)$ и дека вкупниот број поместувања по еден чекор е ≤ 5. Следствено, за решавање на поставениот проблем потребни се најмалку $5\min(h_1,h_2,\cdots,h_5)/5 = \min(h_1,h_2,\cdots,h_5)$ чекори.

2.11. Слика 2.17 претставува делумно разгрането стебло на пребарување. Секоја врска е означена со соодветната цена (должина), а листовите се означени со соодветната евристичка вредност $h(n)$.



Слика 2.17. Илустрација кон задачата 2.11

а) Кој јазол ќе биде разгранет како следен по јазолот A според алгоритмот за алчно пребарување прво од најдобриот јазол?

Одговор: Јазолот C, како наследник на јазолот A со најниска вредност за $h(n)$ (проценка на растојанието на јазолот n до целта), $h(C)=12$.

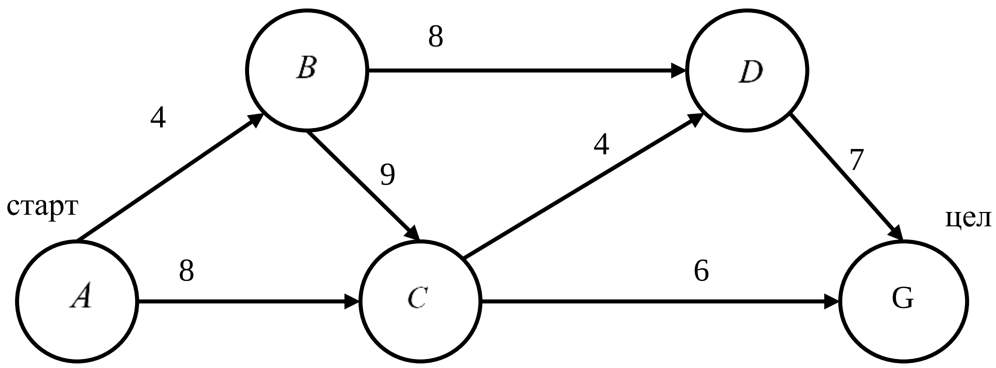
б) Кој јазол ќе биде разгранет како следен по јазолот A според алгоритмот за пребарување со константен фактор на чинење?

Одговор: Јазолот B, како наследник на јазолот A со најниска вредност за $g(n)$ (растојание од коренот до јазолот n), $g(B)=g(A)+5<g(D)=g(A)+6<g(C)=$ $=g(A)+10$

в) Кој јазол ќе биде разгранет како следен по јазолот A според A* алгоритамот?

Одговор: Јазолот D, како наследник на јазолот A со најниска вредност за $f(n)=g(n)+h(n)$ (функција на проценка на должината на патот преку јазолот n до целта), $f(D)=g(D)+h(D)=g(A)+20<f(B)=g(A)+21<f(C)=g(A)+22$.

2.12. Даден е графот од слика 2.18, во кој се означени должините на врските помеѓу одделните јазли. Едновремено во таблица 2.10 е дадена дополнителна евристика за овој проблем на пребарување. Дали оваа евристика е прифатлива? Дали таа е конзистентна?



Слика 2.18. Илустрација кон задачата 2.12

Табелица 2.10. Евристичка проценка на растојанијата на конкретните јазли до целта

n	A	B	C	D
$h(n)$	12	7	3	2

Решение: Евристиката е прифатлива доколку го потценува растојанието од еден јазол до целта. Евристиката е конзистентна, доколку растојанието од еден јазол до некој негов наследник, одредено како разлика помеѓу евристичките вредности на тие јазли, не е поголемо од означената должина на врската помеѓу нив. Во дадениот пример, евристиката е прифатлива, затоа што е помала од вистинското растојание на јазлите до целта:

- $\min(\mathrm{ACG}=14,\ \mathrm{ACDG}=19,\ \mathrm{ABDG}=19, ABCG=19, ABCDG=24)>12$
- $\min(\mathrm{BCG}=15,\ \mathrm{BDG}=15, BCDG=20)>7$
- $\min(\mathrm{CG}=6, CDG=11)>3$
- DG = 7 > 2

Евристиката не е конзистентна, бидејќи разликата $h(A)$-$h(B)$ е поголема од должината на врската помеѓу јазлите A и B и $h(A)-h(C)$ е поголема од должината на врската помеѓу јазлите A и C:

- $h(A)-h(B)=12-7=5>4$
- $h(A)-h(C)=12-3=9>8$

2.13. За секој од опишаните проблеми на пребарување, одберете го најсоодветниот алгоритам за пребарување и објаснете го накусо изборот (осврнувајќи се на евентуалната примена на листа посетени јазли).

а) Многу голем простор на пребарување со голем фактор на разгранување и можни бесконечни патишта низ него. Отсуство на евристика. Треба да се најде пат со најмал број состојби на него.

б) Простор на пребарување со разумен број состојби (не премногу голем), но со многу затворени патишта низ неговиот граф. Познати се должините (цените) на одделните врски, но не постои никаква евристика. Треба да се најде најкусиот пат.

в) Простор на пребарување претставен како стебло со фиксна длабочина. Некои од листовите на стеблото се сакананата цел (има повеќе решенија). Постои евристика за решаваниот проблем. Треба да се дојде до какво и да било решение за најкусо можно време.

г) Простор на пребарување со разумен број состојби (не премногу голем), но со многу затворени патишта низ неговиот граф. Познати се должините (цените) на одделните врски и прифатлива евристика за состојбите. Треба да се најде најкусиот пат.

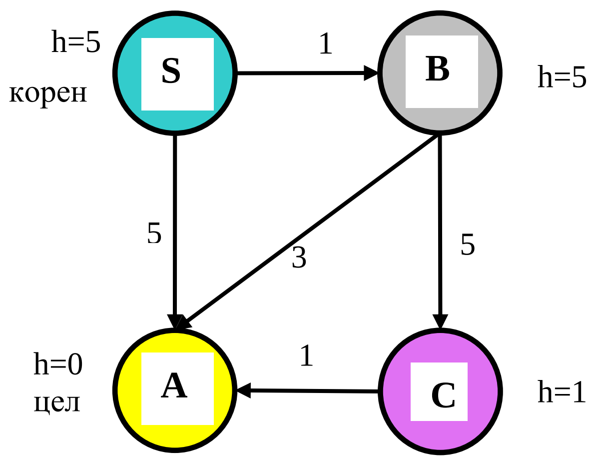
Одговор: а) Итеративно пребарување по длабочина. Користи малку меморија како пребарувањето прво по длабочина, а гарантира решение со најмал број состојби како пребарувањето прво по широчина. Дозволена примена на листа посетени јазли.

б) Пребарување со константна цена. Не е дозволена примена на листа посетени јазли.

в) Алчно пребарување прво од најдобриот јазол. Нема потреба од листа посетени јазли, бидејќи просторот е претставен со стебло во кое нема затворени патишта.

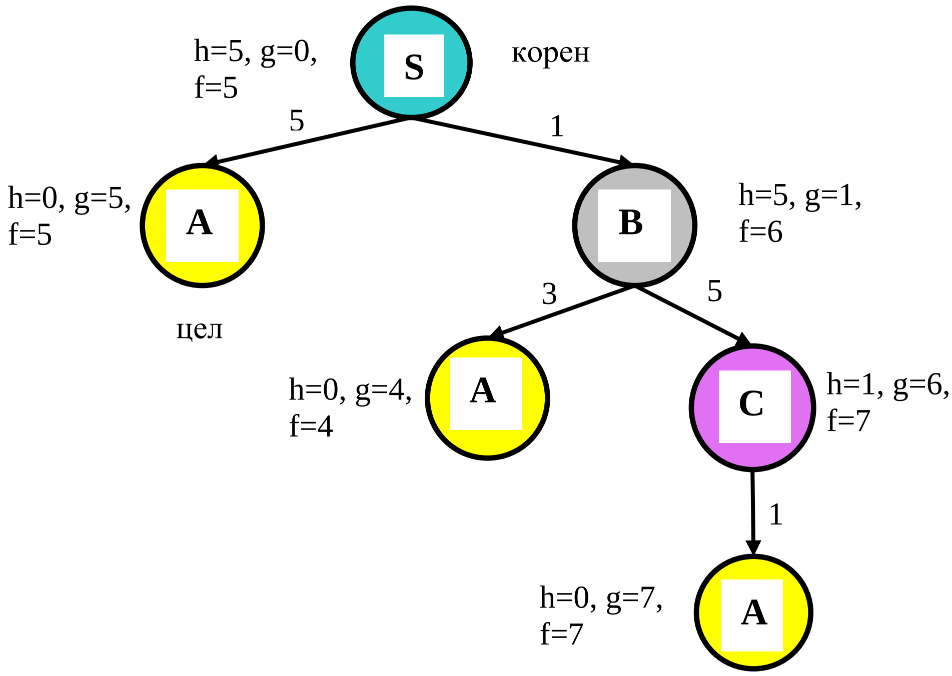
г) A* пребарување. Листа посетени јазли не е дозволена кај оптималните пребарувања.

2.14. Даден е графот од слика 2.19. Под претпоставка, S е почетен јазол, а A е сакананата цел. Крај одделните јазли во графот е означена и вредноста на соодветната евристика $h(n)$ која претставува проценка на растојанието на јазолот n до целта. Со примена на алгоритамот за пребарување A*, да се определи решение на проблемот на пребарување дефиниран со зададениот граф, односно да се најде пат од јазолот S до јазолот A. Дали најденото решение е оптимално и зошто?



Слика 2.19. Илустрација кон задачата 2.14

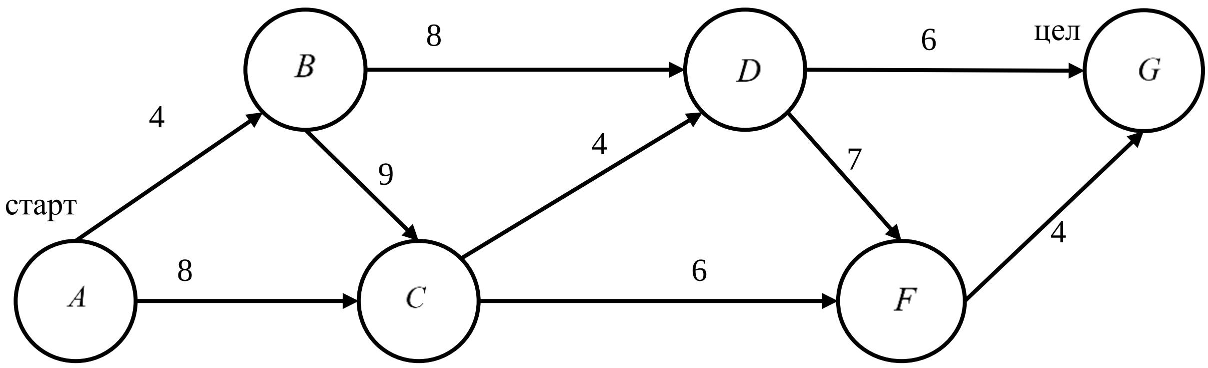
Решение: Соодветното стебло за пребарување на графот од слика 2.19 е прикажано на слика 2.20.



Слика 2.20. Стебло на пребарување за графот од слика 2.19

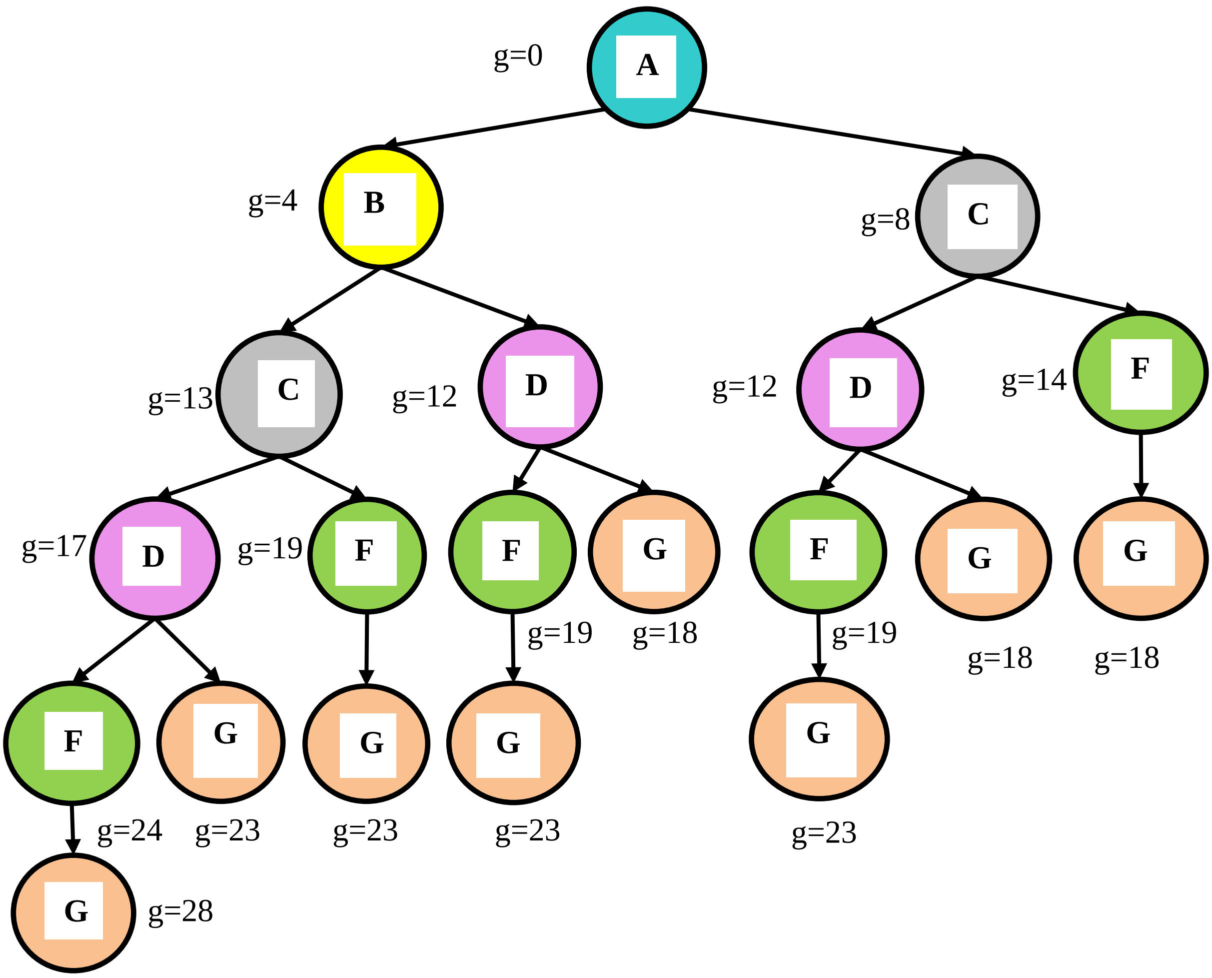
Алгоритамот A*, кој секогаш го одбира јазолот со најмала вредност за $f(n)$, за решение ќе го определи патот 5AS. Ова решение не е оптимално, бидејќи патот 4ABS е покус. Причината алгоритамот A* да не одбере оптимално решение лежи во дефинираната евристика. Имено, $h(S)=5>4$ и $h(B)=5>3$, што значи дека усвоената евристика $h(n)$ е поголема од вистинското растојание на конкретниот јазол до целта и како таква не е прифатлива.

2.15. Да се изврши пребарување на графот од слика 2.21 со помош на алгоритамот за пребарување со константен фактор на чинење.



Слика 2.21. Илустрација кон задачата 2.15

Решение:



Слика 2.22. Стебло на разгранување за графот од слика 2.21

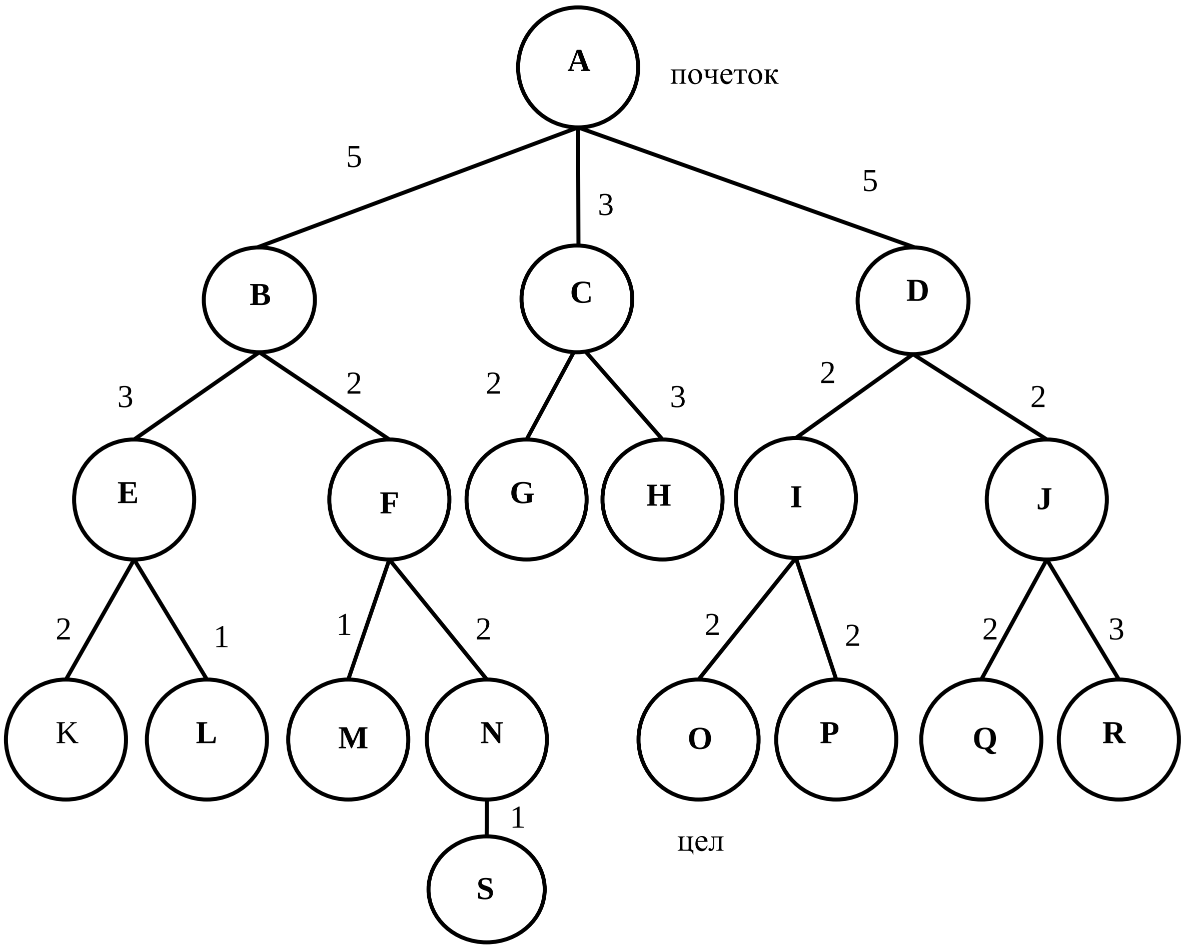
Таблица 2.11. Разгранување на стеблото од слика 2.22 со униформна цена

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ
1.	**(0A)**	0A
2.	**(4BA)**, (8CA)	4B
3.	**(8CA)**, (12DBA), (13CBA)	8C
4.	**(12DBA)**, (12DCA), (13CBA), (14FCA)	12D
5.	(**12DCA**), (13CBA), (14FCA) , (18GDBA), (19FDBA)	12D
6.	(**13CBA**), (14FCA), (18GDBA), (18GDCA), (19FDBA), (19FDCA)	13C
7.	(**14FCA**), (17DCBA), (18GDBA), (18GDCA), (19FCBA), (19FDBA), (19FDCA)	14F
8.	**(17DCBA)**, (18GDBA), (18GDCA), (18GFCA), (19FCBA), (19FDBA), (19FDCA)	17D
9.	**(18GDBA)**, (18GDCA), (18GFCA), (19FCBA), (19FDBA), (19FDCA), (23GDCBA), (24FDCBA)	18G

2.16. Стеблото прикажано на слика 2.23, се пребарува според: а) алгоритамот со униформна цена и б) А* алгоритамот. По договор, јазлите со ист приоритет се разгрануваат по азбучен редослед, доколку алгоритамот за пребарување не наложува поинаку. За пребарувањето на даденото стебло според алгоритамот со униформна цена, крај секој јазол да се означи и соодветната вредност на функцијата $g(n)$. За пребарувањето на даденото стебло според А* алгоритамот, крај секој јазол да се означи и соодветната вредност на функцијата $f(n)=g(n)+h(n)$. Разгранувањето завршува кога ќе се достигне целта. Во таблица 2.12 е дадена евристика за проценка на растојанието на еден јазол до целта.

Таблица 2.12. Евристичка проценка на растојанието на јазлите во стеблото од слика 2.23 до целта

Јазол	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
$h(n)$	9	3	2	4	1	1	7	7	2	7	4	3	2	1	0	2	5	6	8



Слика 2.23. Илустрација кон задачата 2.16

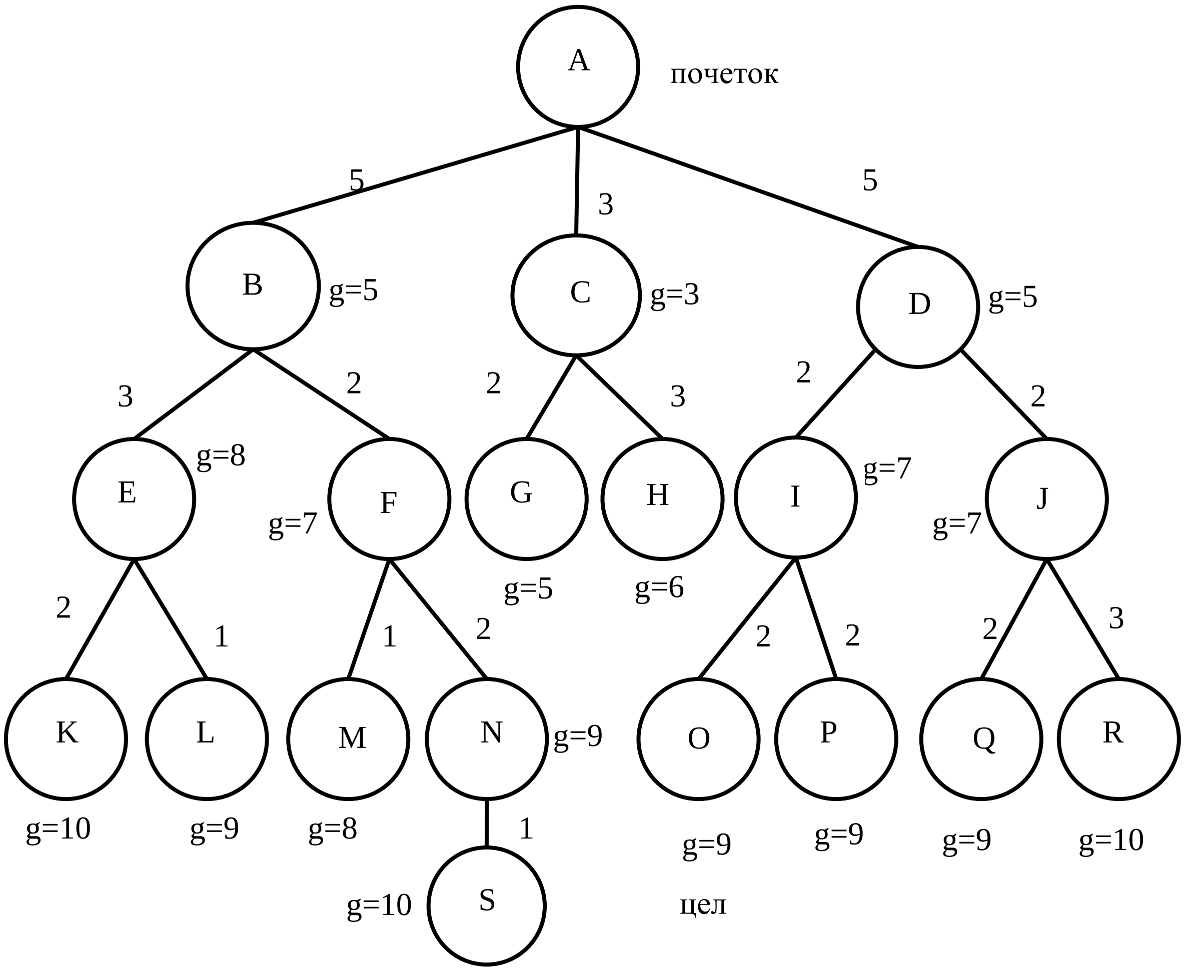
Решение: а) Пребарувањето на стеблото од слика 2.23 со алгоритамот за пребарување со униформна цена детално е прикажано во таблица 2.13. Заради прегледност, јазлите во стеблото се означени од лево на десно и одгоре надолу со буквите на латиничната азбука: A, B, C, D,….S. Тогаш, A ќе биде почетниот јазол, а O ќе биде целта. Новоформираните парцијални патишта што се додаваат во листата **Q** се означени со розово, а парцијалниот пат, чиј краен јазол се разгранува следен е подвлечен и нагласен.

Колоните од таблицата на пребарување се означени со:

Q –листа парцијални патишта

R – листа разгранети јазли

Стеблото на пребарување со униформна цена е прикажано на слика 2.24.



Слика 2.24. Стебло на пребарување со униформна цена за задача 2.16

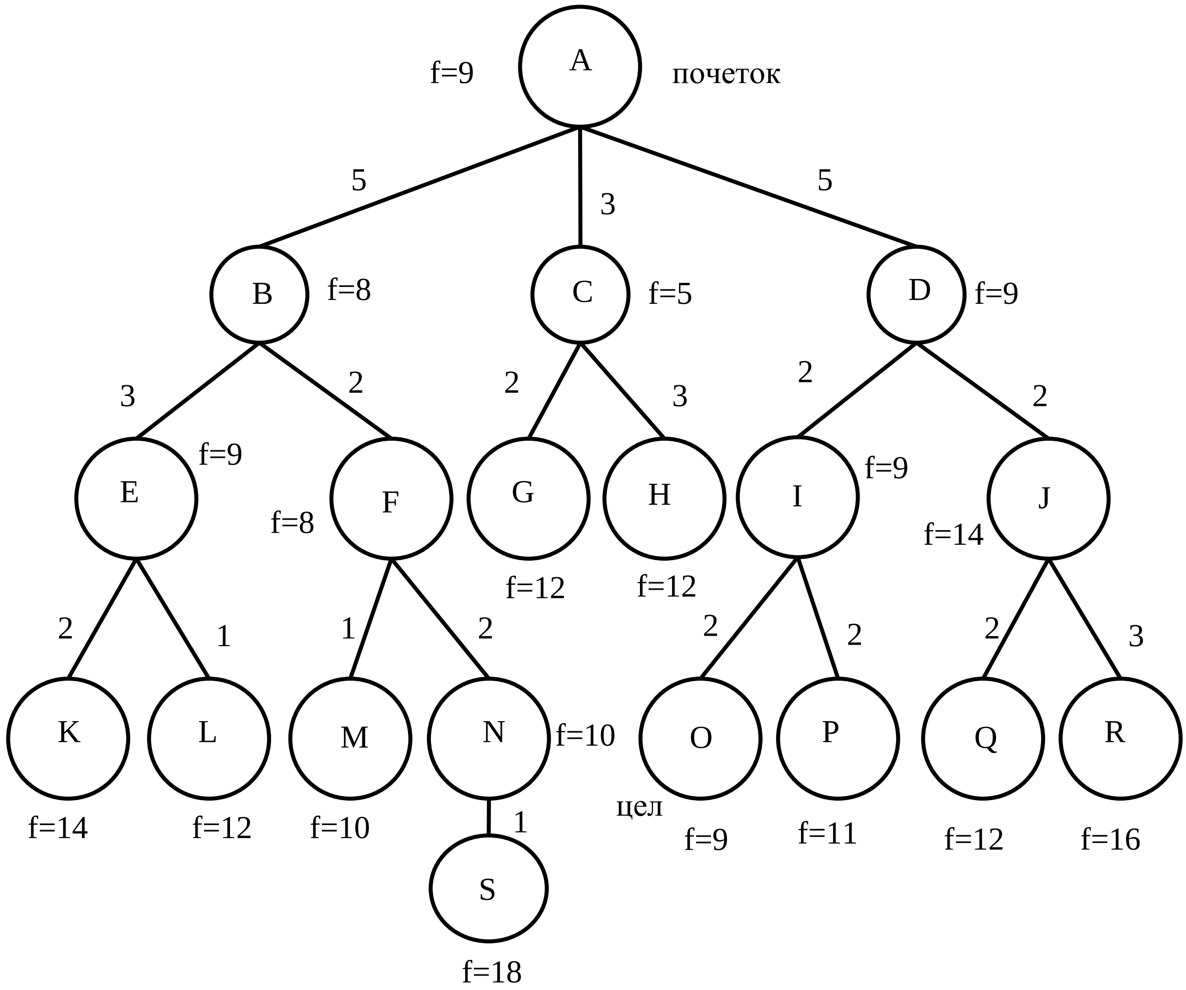
Табліца 2.13. Пребарување со униформна цена на стеблото од слика 2.23

	Q– ЛИСТА ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА	**R**
1.	**(0A)**	0A
2.	**(3CA)** (5BA) (5DA)	3C
3.	**(5BA)** (5DA) (5GCA) (6HCA)	5B
4.	**(5DA)** (5GCA) (6HCA) (7FBA) (8EBA)	5D
5.	**(5GCA)** (6HCA) (7FBA) (7IDA) (7JDA) (8EBA)	5G
6.	**(6HCA)** (7FBA) (7IDA) (7JDA) (8EBA)	6H
7.	**(7FBA)** (7IDA) (7JDA) (8EBA)	7F
8.	**(7IDA)** (7JDA) (8EBA) (8MFBA) (9NFBA)	7I
9.	**(7JDA)** (8EBA) (8MFBA) (9NFBA) (9OIDA) (9PIDA)	7J
10.	**(8EBA)** (8MFBA) (9NFBA) (9OIDA) (9PIDA) (9QJDA) (10RJDA)	8E
11.	**(8MFBA)** (9LEBA) (9NFBA) (9OIDA) (9PIDA) (9QJDA) (10KEBA) (10RJDA)	8M
12.	**(9LEBA)** (9NFBA) (9OIDA) (9PIDA) (9QJDA) (10KEBA) (10RJDA)	9L
13.	**(9NFBA)** (9OIDA) (9PIDA) (9QJDA) (10KEBA) (10RJDA)	9N
14.	**(9OIDA)** (9PIDA) (9QJDA) (10KEBA) (10RJDA) (10SNFBA)	9O

б) Пребарувањето на стеблото од слика 2.23 со алгоритамот A* детално е прикажано во таблица 2.14, а самото стебло е дадено на слика 2.25.

Таблица 2.14. Пребарување со A* на стеблото од слика 2.25

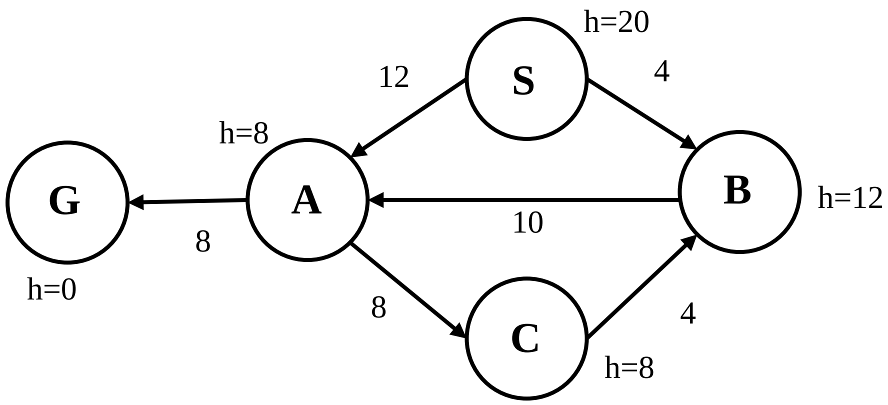
	Q – ЛИСТА ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА	**R**
1.	**(9A)**	9A
2.	**(5CA)** (8BA) (9DA)	5C
3.	**(8BA)** (9DA) (12GCA) (12HCA)	8B
4.	**(8FBA)** (9DA) (9EBA) (12GCA) (12HCA)	8F
5.	**(9DA)** (9EBA) (10MFBA) (10NFBA) (12GCA) (12HCA)	9D
6.	**(9EBA)** (9IDA) (10MFBA) (10NFBA) (12GCA) (12HCA) (14JDA)	9E
7.	**(9IDA)** (10MFBA) (10NFBA) (12GCA) (12HCA) (12LEBA) (14JDA) (14KEBA)	9I
8.	**(9OIDA)** (10MFBA) (10NFBA) (11PIDA) (12GCA) (12HCA) (12LEBA) (14JDA) (14KEBA)	9O



Слика 2.25. Стебло на пребарување со алгоритамот A* за задача 2.16

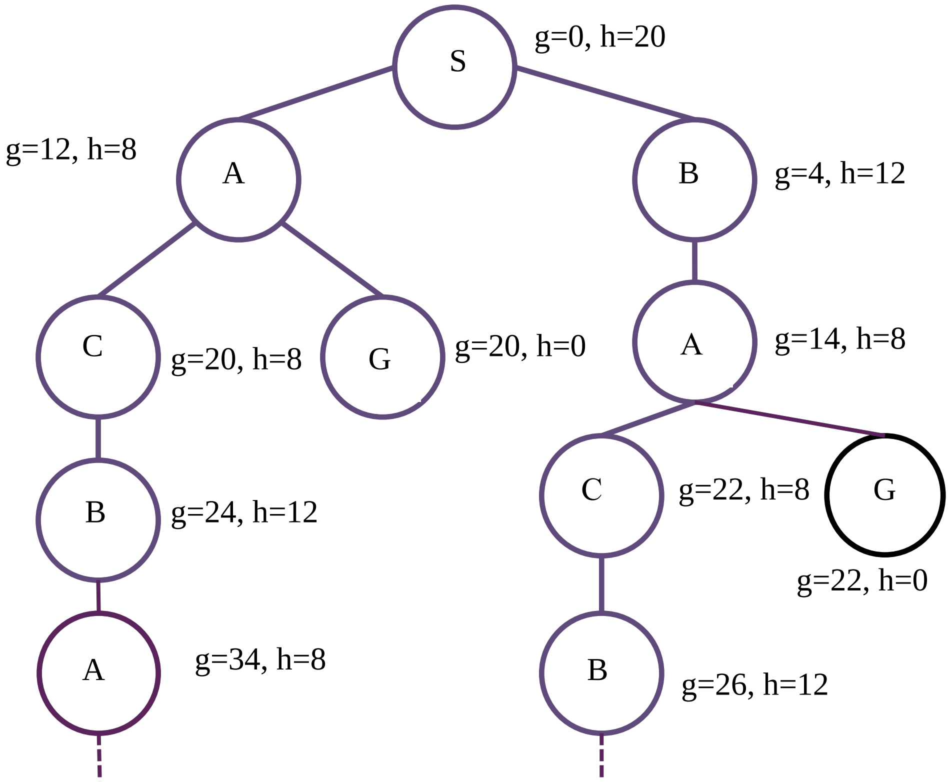
2.17. На слика 2.26 е прикажан граф за пребарување од почетниот јазол S до крајниот јазол G. Да се нацрта комплетното стебло на пребарување за овој граф. Секој јазол во стеблото да се означи со цената на патот $g(n)$ до тој јазол и евристичката проценка на цената на патот $h(n)$ од тој јазол до целта. Потоа да се изврши пребарување на добиеното стебло: а) прво по широчина, со примена на листа посетени јазли, б) прво по длабочина, со примена на листа посетени јазли, в) со униформен фактор на чинење, г) алчно пребарување прво од најдобриот јазол и д) со A* пребарување. Да се состават соодветните листи парцијални патишта Q за секој тип пребарување и да се одреди низата јазли кои се разгранети во текот на секоја постапка на пребарување. Дали евристиката во примерот е прифатлива и конзистентна. Објаснете!

Упатство: При пребарувањето на стеблото, јазлите од стеблото да се разгрануваат по азбучен редослед и од лево на десно секогаш кога алгоритамот за пребарување не наложува поинаку. При подредувањето на разгранетите јазли од стеблото при пребарувањето со константна цена и A* пребарувањето, тие да се означат со името на состојбата и цената на патот до таа состојба (A3, B1,...)



Слика 2.26. Илустрација кон задачата 2.17

Решение: Стеблото на пребарување за набљудуваниот граф од слика 2.26 е прикажано на слика 2.27.



Слика 2.27. Стебло на пребарување за графот од слика 2.26

Во соодветните листи парцијални патишта на пребарување, со розово се означени новододадените парцијални патишта, додека парцијалните патишта што се разгрануваат како следни се подвлечени.

а) Тестот за целта при пребарувањето прво по широчина прикажано во таблица 2.15 е применет при разгранување на јазлите.

Табалица 2.15. Пребарување прво по широчина без листа посетени јазли

	Q-листа парцијални патишта	Редослед на разгранување
1	(S)	S
2	(AS) (BS)	A
3	(BS) (CAS) (GAS)	B
4	(CAS) (GAS) (ABS)	C
5	(GAS) (ABS) (BCAS)	G

Табалица 2.16. Пребарување прво по широчина со листа посетени јазли

	Q-листа парцијални патишта	V-листа посетени јазли	Редослед на разгранување
1	(S)	S	S
2	(AS) (BS)	S, A, B	A
3	(BS) (CAS) (GAS)	S, A, B, C, G	G

Парцијалните патишта (ABS) и (BCAS) не се внесени во листата парцијални патишта, бидејќи јазлите A и B веќе се наоѓаат на листата посетени јазли (таму се сместени при разгранувањето на S).

б)

Табалица 2.17. Пребарување прво по длабочина без листа посетени јазли

	Q-листа парцијални патишта	Редослед на разгранување
1	(S)	S
2	(AS) (BS)	A
3	(CAS) (GAS) (BS)	C
4	(BCAS) (GAS) (BS)	B
5	(ABCAS) (GAS) (BS)	A
6	(CABCAS) (GABCS), (GAS) (BS)	C
7	(BCABCAS) (GABCS), (GAS) (BS)	B
8	(ABCABCAS) (GABCS), (GAS) (BS)	A
9	Програмот влегува во затворен круг и нема никогаш да најде решение	C

Табліца 2.18. Пребарување прво по длабочина со листа посетени јазли

	Q-листа парцијални патишта	V-листа посетени јазли	Редослед на разгранување
1.	(S)	S	S
2.	(AS) (BS)	A, B, S	A
3.	(CAS) (GAS) (BS)	C, G, A, B, S	G

в)

Табела 2.19. Пребарување со униформен фактор на чинење

	Q-листа парцијални патишта	Редослед на разгранување
1	(20S)	S20
2	(4BS) (12AS)	B4
3	(12AS) (14ABS)	A12
4	(14ABS) (20CAS) (20GAS)	A14
5	(20CAS) (20GAS) (22CABS) (22GABS)	C20
6	(20GAS) (22CABS) (22GABS) (24BCAS)	G20

г)

Табела 2.20. Алчно пребарување прво од најдобриот јазол

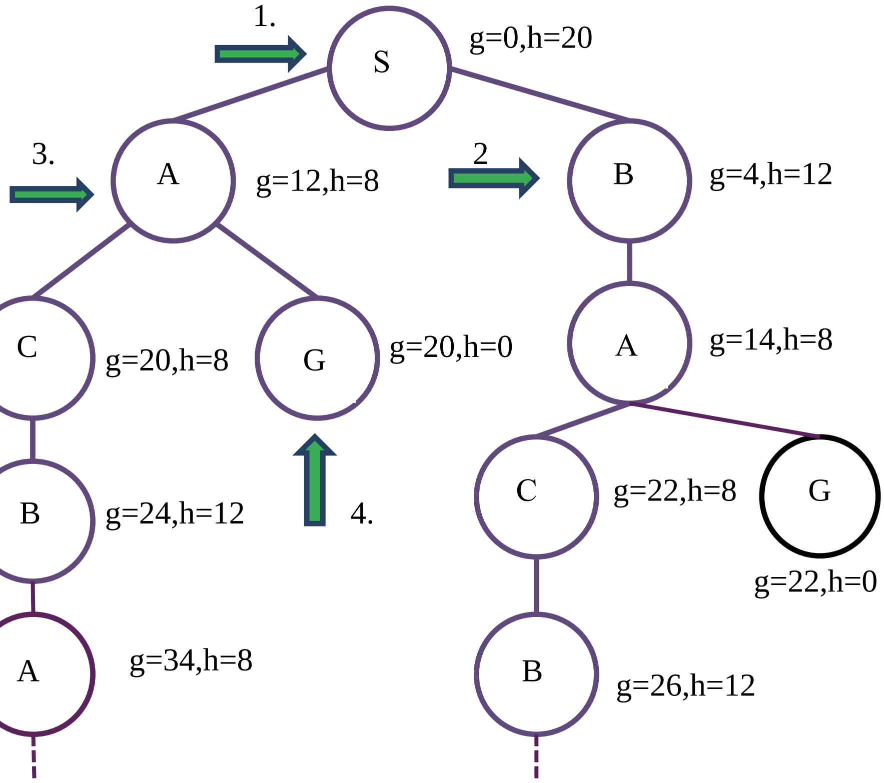
	Q-листа парцијални патишта	Редослед на разгранување
1	(20S)	S
2	(8AS) (12BS)	A
3	(0GAS) (3BS) (8CAS)	G

д)

Табела 2.21. Пребарување со A* алгоритамот

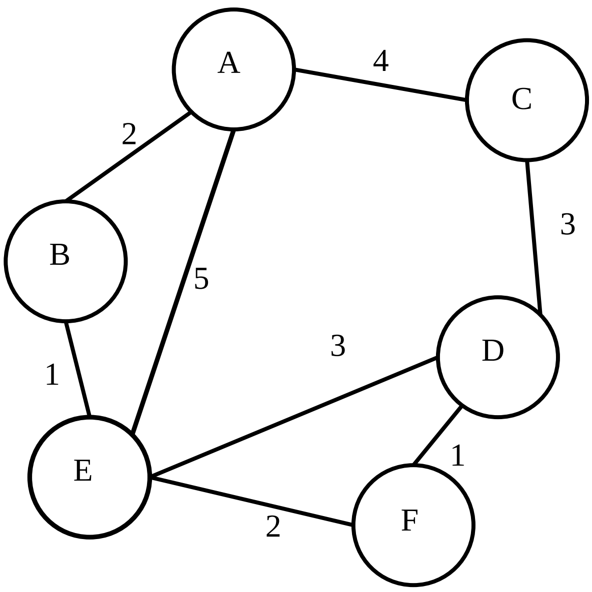
	Q-листа парцијални патишта	Редослед на разгранување
1	(20S)	S0 (0+5)
2	(16BS) (20AS)	B1 (1+3)
3	(20AS) (22ABS)	C2 (2+2)
4	(20GAS) (22ABS) (28CAS)	A3 (3+2)

Да, евристиката во примерот е прифатлива, бидејќи вредностите на *h* се помали или еднакви со вистинската цена на патот до целта. Не, евристиката во примерот не е конзистентна, бидејќи од вредност 20 во S таа се намалува на вредност 12 во B, а цената на патот помеѓу S и B изнесува само 4.



Слика 2.28. Пребарување на стеблото од слика 2.26 со алгоритамот A*

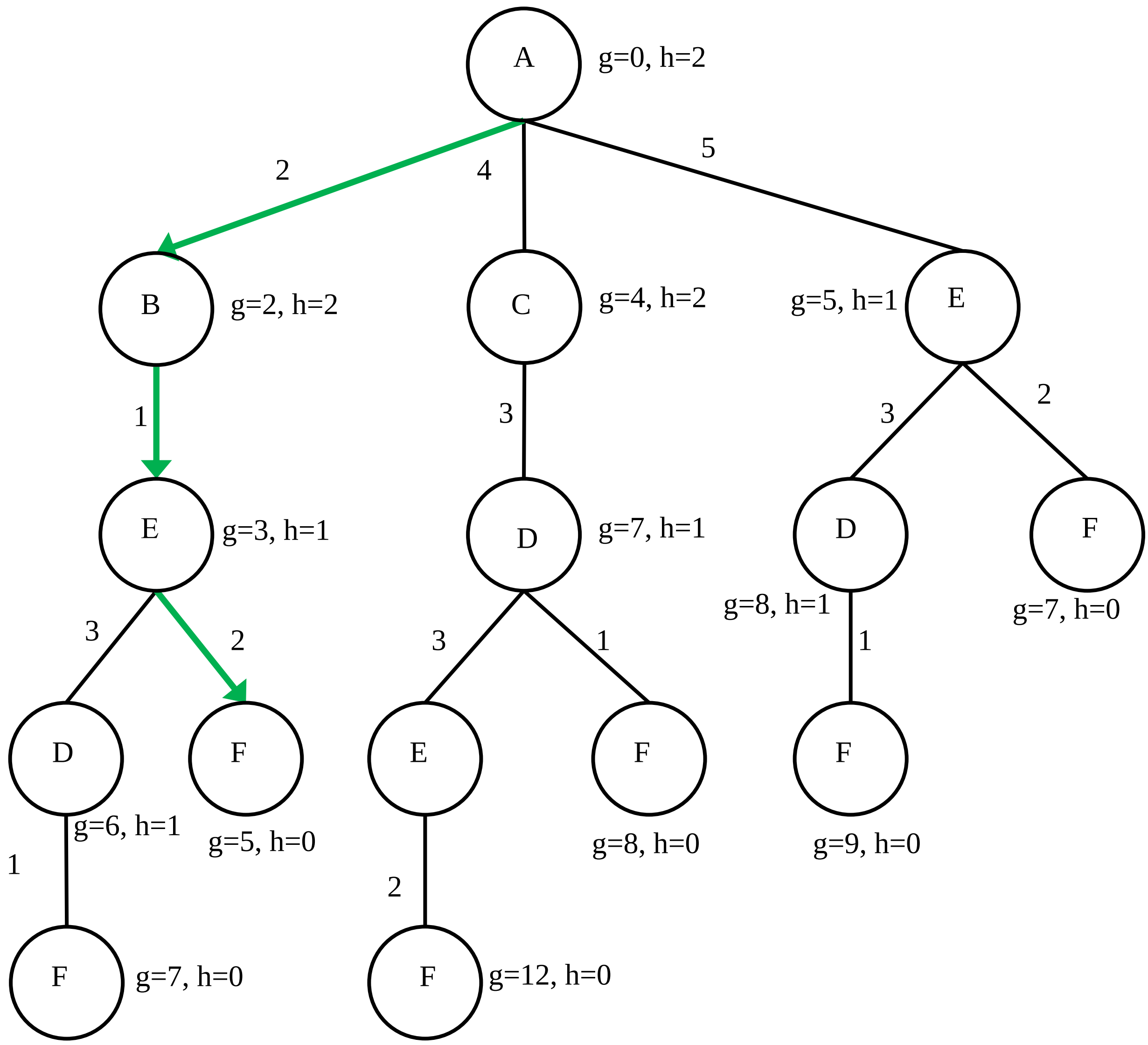
2.18. Даден е графот од слика 2.29, каде A е почетен јазол, а јазолот F е саканата цел.



Слика 2.29. Илустрација кон задачата 2.18

а) Ако, под претпоставка, еден јазол може да биде разгранет само еднаш, во кој редослед алгоритамот со униформна цена ги разгранува јазлите од графот? б) Нека за евристика се прифати најмалиот број лаци од еден јазол *n* до целта. Дали оваа евристика е прифатлива и зошто? в) За евристичката функција усвоена под б) во кој редослед алгоритамот А* ги посетува јазлите од графот? (Упатство: да се состави соодветното стебло за пребарување, да се дефинира цената на патот за секој јазол и јазлите да се разгрануваат по азбучен редослед, доколку алгоритамот за пребарување не наложува поинаку).

Решение: а) Бараното решение е прикажано на слика 2.30 и во таблица 2.22.



Слика 2.30. Стебло на пребарување за графот од слика 2.29

Таблица 2.22. Решение на задачата 2.18 со униформна цена

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ НА ЈАЗЛИТЕ
1	(0A)	A
2	(2BA) (4CA) (5EA)	B
3	(3EBA) (4CA) (5EA)	E
4	(4CA) (5EA) (5FEBA) (6DEBA)	C
5	(5EA), (5FEBA), (6DEBA), (7DCA)	F

б) Да, предложената евристика е прифатлива, бидејќи претставува конзервативна проценка на растојанието.

в) Вредностите на функцијата $h(n)$ за одделните јазли се прикажани во таблицата 2.23.

Таблица 2.23. Евристика за проблемот од задачата 2.18

состојба	A	B	C	D	E	F
H	2	2	2	1	1	0

A(2), B(4), E(4), F(5)

Таблица 2.24. Решение на задача 2.18 со A*

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ НА ЈАЗЛИТЕ
1	(2A)	A
2	(4BA) (6CA) (6EA)	B
3	(4EBA) (6CA) (6EA)	E
4	(5FEBA) (6CA) (6EA) (7DEBA)	F

2.19. Даден е ориентираниот граф од слика 2.31. Да се определи пат од јазолот A до јазолот I со помош на:

а) алгоритамот за пребарување прво по широчина

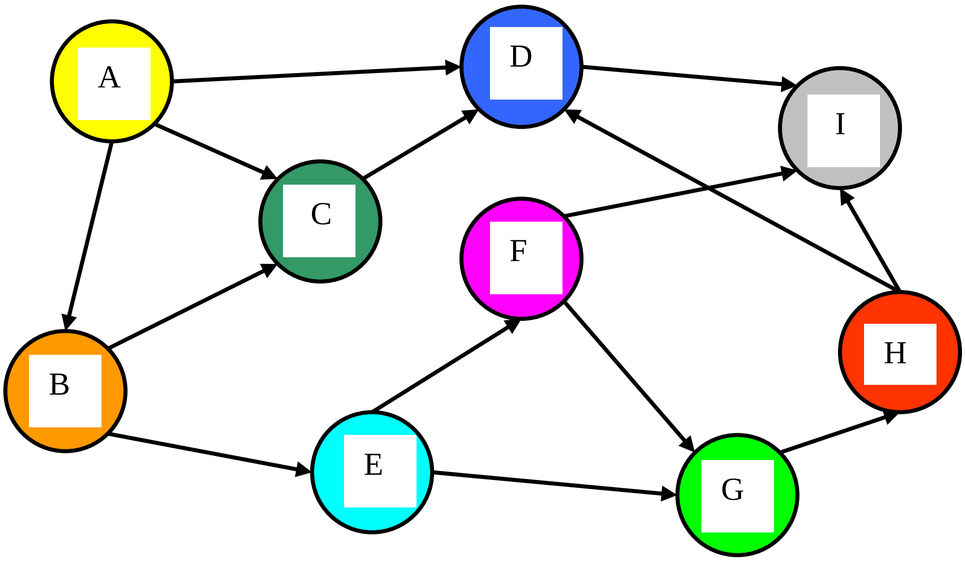
б) алгоритамот за пребарување прво по длабочина

в) алгоритамот A* . Нека, под претпоставка, „цената“ (должината) на сите врски во графот е 1 и е дадена евристиката во таблица 2.25.

Таблица 2.25. Евристика за проблемот од задачата 2.19

состојба	A	B	C	D	E	F	G	H	I
H	4	3	2	1	2	1	2	1	0

г) Дали дадената евристика под в) е прифатлива?



Слика 2.31. Илустрација кон задачата 2.19

Решение: а) Тестот за целта е применет при разгранување на јазлите.

Табилца 2.26. Пребарување прво по широчина

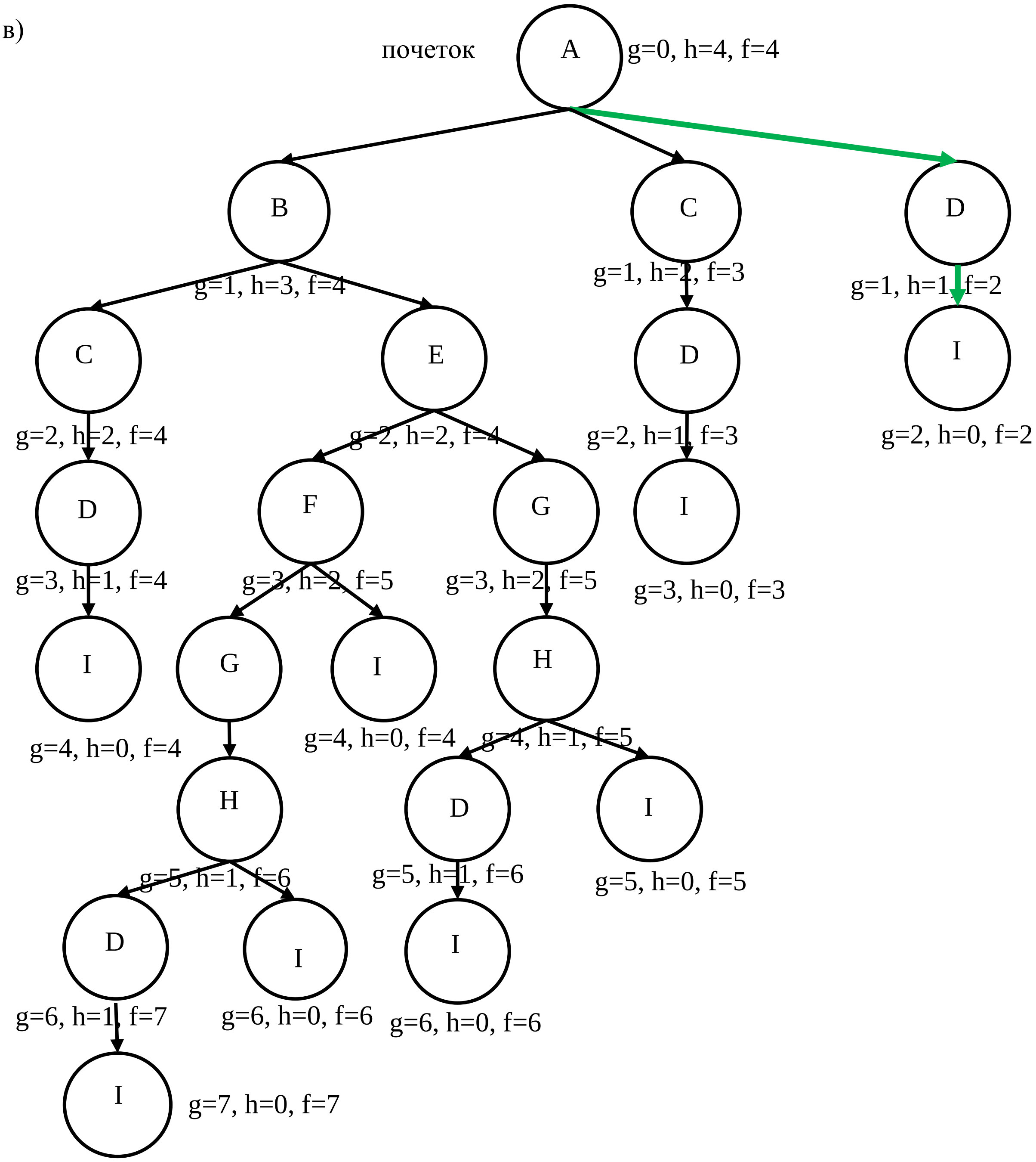
ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ
1	(A)	A
2	(BA) (CA) (DA)	B
3	(CA) (DA) (CBA) (EBA)	C
4	(DA) (CBA) (EBA) (DCA)	D
5	(CBA) (EBA) (DCA) (IDA)	C
6	(EBA) (DCA) (IDA) (DCBA)	E
7	(DCA) (IDA) (DCBA) (FEBA) (GEBA)	D
8	(IDA) (DCBA) (FEBA) (GEBA) (IDCA)	I

б)

Табилца 2.27. Пребарување прво по длабочина

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ
1	(A)	A
2	(BA) (CA) (DA)	B
3	(CBA) (EBA) (CA) (DA)	C
4	(DCBA) (EBA) (CA) (DA)	D
5	(IDCBA) (EBA) (CA) (DA)	I

в)



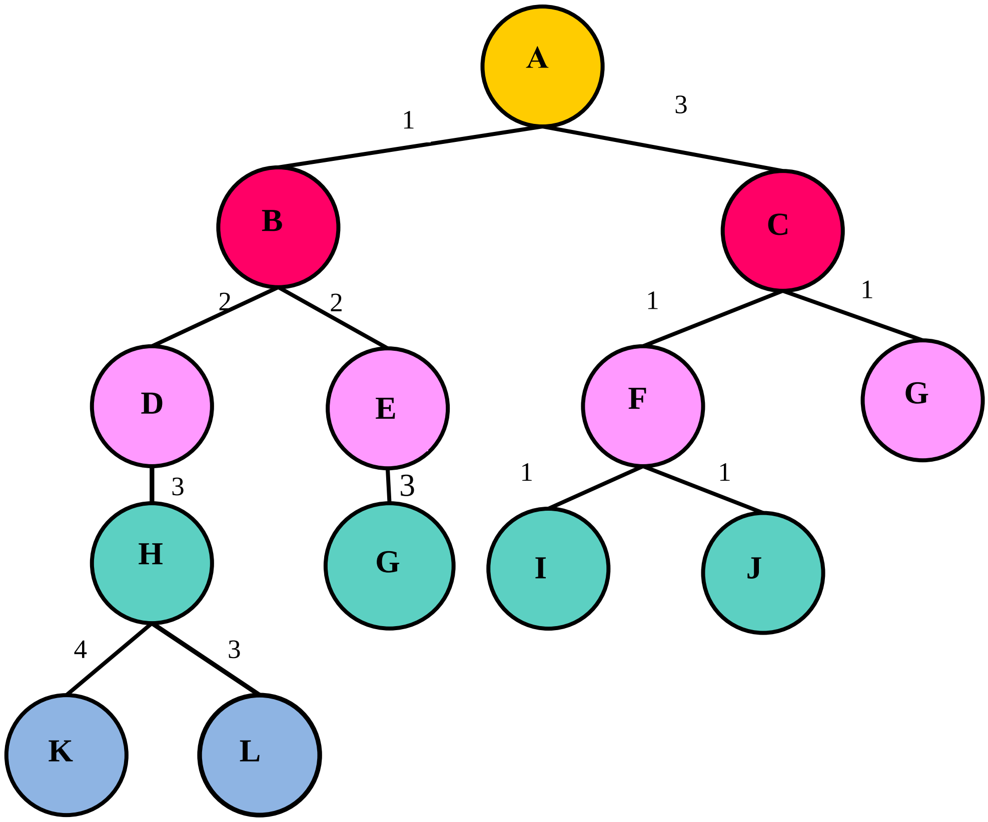
Слика 2.32. Стебло на пребарување за графот од слика 2.31

Табличка 2.28. Пребарување со А*

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ
1	**(4A)**	**A**
2	**(2DA) (3CA) (4BA)**	**D**
3	**(2IDA) (3CA) (4BA)**	**I**

г) Евристиката дадена во таблица 2.25 е прифатлива, бидејќи не е поголема од вистинското растојание.

2.20. Дадено е стеблото од слика 2.33, во кое цел е јазолот *G*. Броевите крај врските ја означуваат должината на врската. Нека, под претпоставка, јазлите се разгрануваат по азбучен редослед секогаш кога алгоритамот за пребарување не го специфицира редоследот на разгранување. Да се наведе редоследот на разгранување на јазлите од стеблото ако се користи: а) пребарување прво по широчина, б) пребарување прво по длабочина и в) пребарување со константна цена.



Слика 2.33. Илустрација кон задачата 2.20

Решение: а) Пребарувањето прво по широчина е прикажано во таблица 2.29. Тестот за целта е применет при разгранување на јазлите.

Таблица 2.29. Пребарување прво по широчина

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ НА ЈАЗЛИТЕ
1	**(A)**	**A**
2	**(BA) (CA)**	**B**
3	**(CA) (DBA) (EBA)**	**C**
4	**(DBA) (EBA) (FCA) (GCA)**	**D**
5	**(EBA) (FCA) (GCA) (HDBA)**	**E**
6	**(FCA) (GCA) (HDBA) (GEBA)**	**F**
7	**(GCA) (HDBA) (GEBA) (IFCA) (JFCA)**	**G**

б) Пребарувањето прво по длабочина е прикажано во таблица 2.30.

Таблица 2.30. Пребарување прво по длабочина

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ НА ЈАЗЛИТЕ
1	(A)	A
2	(BA) (CA)	B
3	(DBA) (EBA) (CA)	D
4	(HDBA) (EBA) (CA)	H
5	(KHDBA) (LHDBA) (EBA) (CA)	K
6	(LHDBA) (EBA) (CA)	L
7	(EBA) (CA)	E
8	(GEBA) (CA)	G

в) Пребарувањето со константна цена е прикажано во таблица 2.31.

Таблица 2.31. Пребарување со константна цена

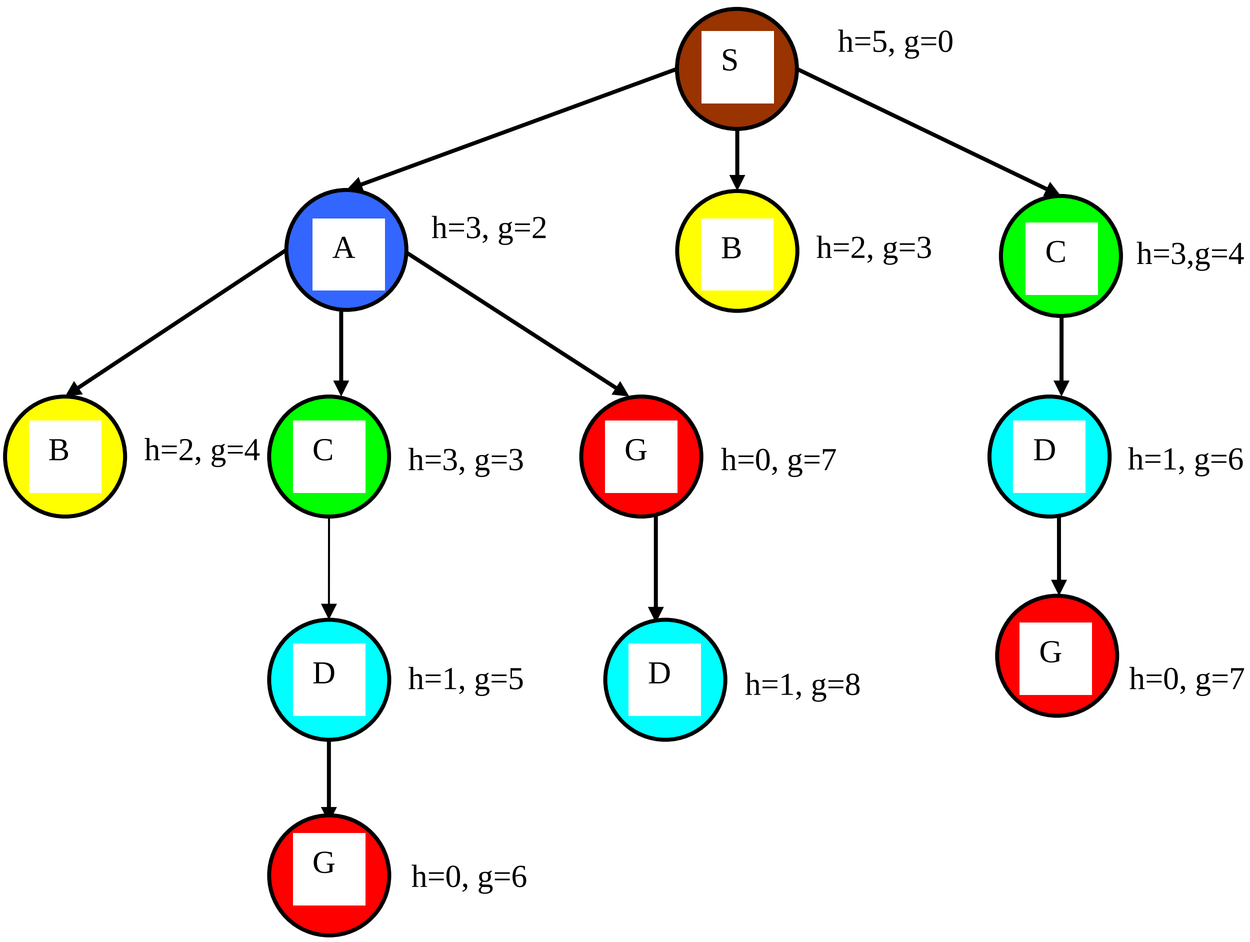
ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ НА ЈАЗЛИТЕ
1	(0A)	0A
2	(1BA) (3CA)	1B
3	(3DBA) (3EBA) (3CA)	3C
4	(4FCA) (4GCA) (3DBA) (3EBA)	3D
5	(6HDBA) (4FCA) (4GCA) (3EBA)	3E
6	(6HDBA) (4FCA) (4GCA) (6GEBA)	4F
7	(6HDBA) (4GCA) (6GEBA) (5IFCA) (5JFCA)	4G

Забелешка: Јазлите се разгрануваат по азбучен редослед секогаш кога тоа не е поинаку наложено од алгоритамот за пребарување. Во соодветните листи парцијални патишта на пребарување, со виолетово се означени новододадените парцијални патишта, додека парцијалните патишта што се разгрануваат како следни се подвлечени. Бараното решение на задачата е резимирано во таблица 2.32.

Таблица 2.32. Решение на задача 2.20

вид пребарување	редослед на разгранување на јазлите
прво по широчина	A, B, C, D, E, F, G
прво по длабочина	A, B, D, H, K, L, E, G
со униформна цена	A, B, C, D, E, F, G

2.21. Да се изврши пребарување на стеблото од слика 2.34: а) прво по длабочина (без листа посетени јазли), б) прво по широчина (со листа посетени јазли), в) со униформна цена (при што секој јазол може да биде разгранет само еднаш) и г) со A* постапката.



Слика 2.34. Илустрација кон задачата 2.21

Да се наведе редоследот на разгранување на јазлите за секоја од специфицираните постапки на пребарување. Секогаш кога алгоритамот за пребарување не бара поинаку, јазлите се разгрануваат по азбучен редослед. Под претпоставка, јазолот G е целта на пребарувањето.

Решение: а)

Табелица 2.33. Пребарување прво по длабочина без листа посетени јазли

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ
1	**(S)**	**S**
2	**(AS) (BS) (CS)**	**A**
3	**(BAS) (CAS) (GAS) (BS) (CS)**	**B**
4	**(CAS) (GAS) (BS) (CS)**	**C**
5	**(DCAS) (GAS) (BS) (CS)**	**D**
6	**(GDCAS) (GAS) (BS) (CS)**	**G**

б) Тестот за целта е применет при генерирање на јазлите.

Таблица 2.34. Пребарување прво по широчина со листа посетени јазли

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	ПОСЕТЕНИ ЈАЗЛИ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ
1	(S)	S	S
2	(AS) (BS) (CS)	S, A, B, C	A
3	(BS) (CS) (GAS)	S, A, B, C, G	G

в) Редослед разгранети јазли: **0S, 2A, 3B, 3C, 5D, 6G**

Таблица 2.35. Пребарување со униформна цена без повторно разгранување на исти јазли

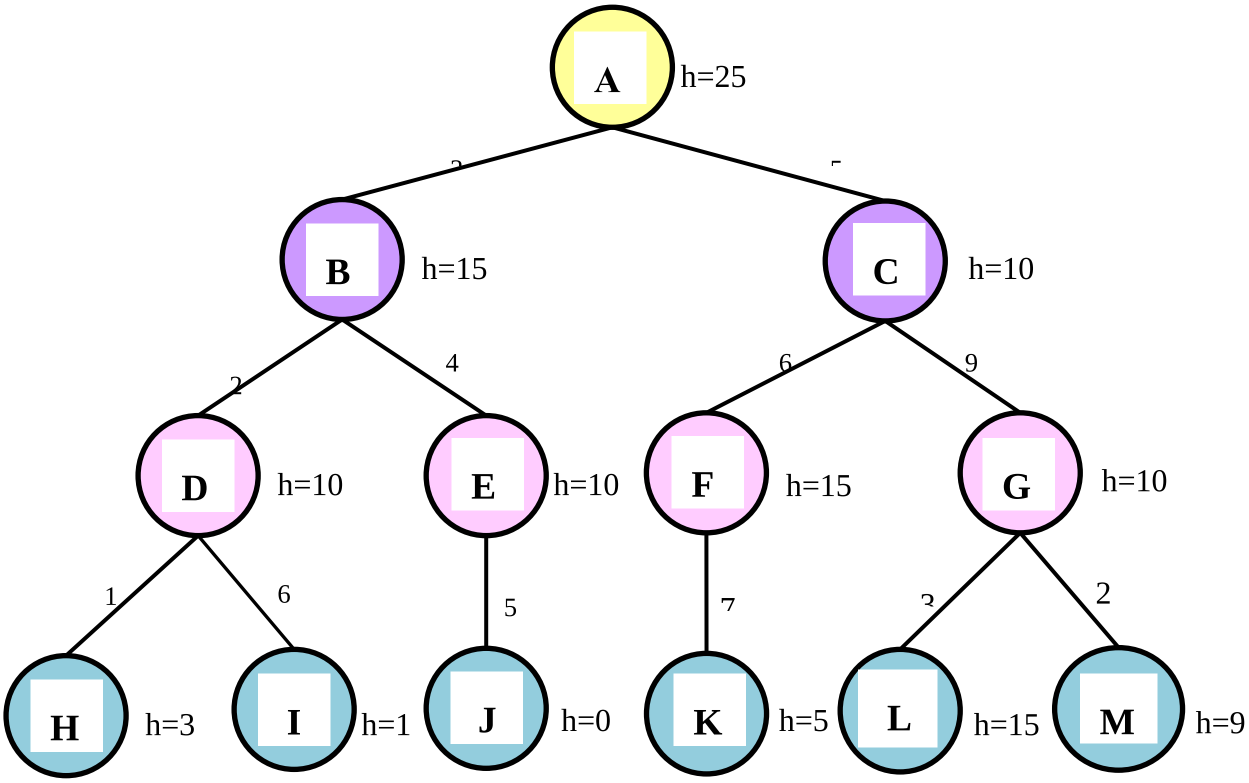
ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РАЗГРАНЕТИ ЈАЗЛИ
1	(0S)	0S
2	(2AS) (3BS) (4CS)	0S, 2A
3	(3BS) (3CAS) (4BAS) (4CS) (7GAS)	0S, 2A, 3B
4	(3CAS) (4BAS) (4CS) (7GAS)	0S, 2A, 3B, 3C
5	(4BAS) (4CS) (5DCAS) (7GAS)	0S, 2A, 3B, 3C
5	(4CS) (5DCAS) (7GAS)	0S, 2A, 3B, 3C
6	(5DCAS) (7GAS)	0S, 2A, 3B, 3C, 5D
7	(6GDCAS) (7GAS)	0S, 2A, 3B, 3C, 5D, 6G

г) Редослед разгранети јазли: **5S, 5A, 5B, 6B, 6C, 6D, 6G**

Таблица 2.36. Пребарување со A* постапката

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА НИЗ ГРАФОТ	РЕДОСЛЕД НА РАЗГРАНУВАЊЕ
1	(5S)	5S
2	(5AS) (5BS) (7CS)	5S, 5A
3	(5BS) (6BAS) (6CAS) (7CS) (7GAS)	5S, 5A, 5B
3	(6BAS) (6CAS) (7CS) (7GAS)	5S, 5A, 5B
4	(6CAS) (7CS) (7GAS)	5S, 5A, 5B, 6C
5	(6DCAS) (7CS) (7GAS)	5S, 5A, 5B, 6C, 6D
6	(6GDCAS) (7CS) (7GAS)	5S, 5A, 5B, 6C, 6D, 6G

2.22. Дадено е стеблото од слика 2.35, во кое цел е јазолот J. Броевите крај врските ја означуваат должината на врската. Нека, под претпоставка, јазлите се разгрануваат по азбучен ред секогаш кога алгоритамот за пребарување не го специфицира редоследот на разгранување. Да се наведе редоследот на разгранување на јазлите од стеблото ако се примени: а) пребарување прво по широчина, б) пребарување прво по длабочина, в) пребарување со константна цена, г) алчно пребарување прво од најдобриот јазол и д) пребарување со A*.



Слика 2.35. Илустрација кон задачата 2.22

Решение: а) Тестот за целта е применет при разгранување на јазлите.

Табелица 2.37. Пребарување прво по широчина

	Q – листа парцијални патишта	**Забелешка**	**R редослед**
1.	(A)		A
2.	(BA) (CA)		B
3.	(CA) (DBA) (EBA)	парцијалните патишта се додават од десно	C
4.	(DBA) (EBA) (FCA) (GCA)		D
5.	(EBA) (FCA) (GCA) (HDBA) (IDBA)		E
6.	(FCA) (GCA) (HDBA) (IDBA) (JEBA)	F нема наследници	F
7.	(GCA) (HDBA) (IDBA) (JEBA) (KFCA)	G нема наследници	G
8.	(HDBA) (IDBA) (JEBA) (KFCA) (LGCA) (MGCA)	H нема наследници	H
9.	(IDBA) (JEBA) (KFCA) (LGCA) (MGCA)	I нема наследници	I
10.	**(JEBA)** (KFCA) (LGCA) (MGCA)	J е цел	J

б)

Таблица 2.38. Пребарување прво по длабочина

	Q – листа парцијални патишта	**Забелешка**	**R-редослед**
1.	(A)	Новите парцијални патишта се додаваат од лево	A
2.	(BA) (CA)		B
3.	(DBA) (EBA) (CA)		D
4.	(HDBA) (IDBA) (EBA) (CA)	H нема наследници	H
5.	(IDBA) (EBA) (CA)	I нема наследници	I
6.	(EBA) (CA)		E
7.	(JEBA) (CA)	J е цел	J

в)

Таблица 2.39. Пребарување со униформна цена

	Q – листа парцијални патишта	**Забелешка**	**R-редослед**
1.	(0A)		A
2.	(3BA) (5CA)		B
3.	(5CA) (5DBA) (7EBA)		C
4.	(5DBA) (7EBA) (11FCA) (14GCA)		D
5.	(6HDBA) (7EBA) (11FCA) (11IDBA) (14GCA)	H нема наследници	H
6.	(7EBA) (11FCA) (11IDBA) (14GCA)		E
7.	(11FCA) (11IDBA) (12JEBA) (14GCA)		F
8.	(11IDBA) (12JEBA) (14GCA) (18KFCA)	I нема наследници	I
9.	**(12JEBA)** (14GCA) (18KFCA)	J е цел	J

г)

Таблица 2.40. Алчно пребарување прво од најдобриот јазол

	Q – листа парцијални патишта	**Забелешка**	**R-редослед**
1.	(25A)		25A
2.	(10CA) (15BA)		10C
3.	(10GCA) (15BA) (15FCA)		10G
4.	(9MGCA) (15BA) (15FCA) (15LGCA)	M нема наследници	9M
5.	(15BA) (15FCA) (15LGCA)		15B
6.	(10DBA) (10EBA) (15FCA) (15LGCA)		10D
7.	(1IDBA) (3HDBA) (10EBA) (15FCA) (15LGCA)	I нема наследници	1I
8.	(3HDBA) (10EBA) (15FCA) (15LGCA)	H нема наследници	3H
9.	(10EBA) (15FCA) (15LGCA)		10E
10.	**(0JEBA)** (15FCA) (15LGCA)	J е цел	0J

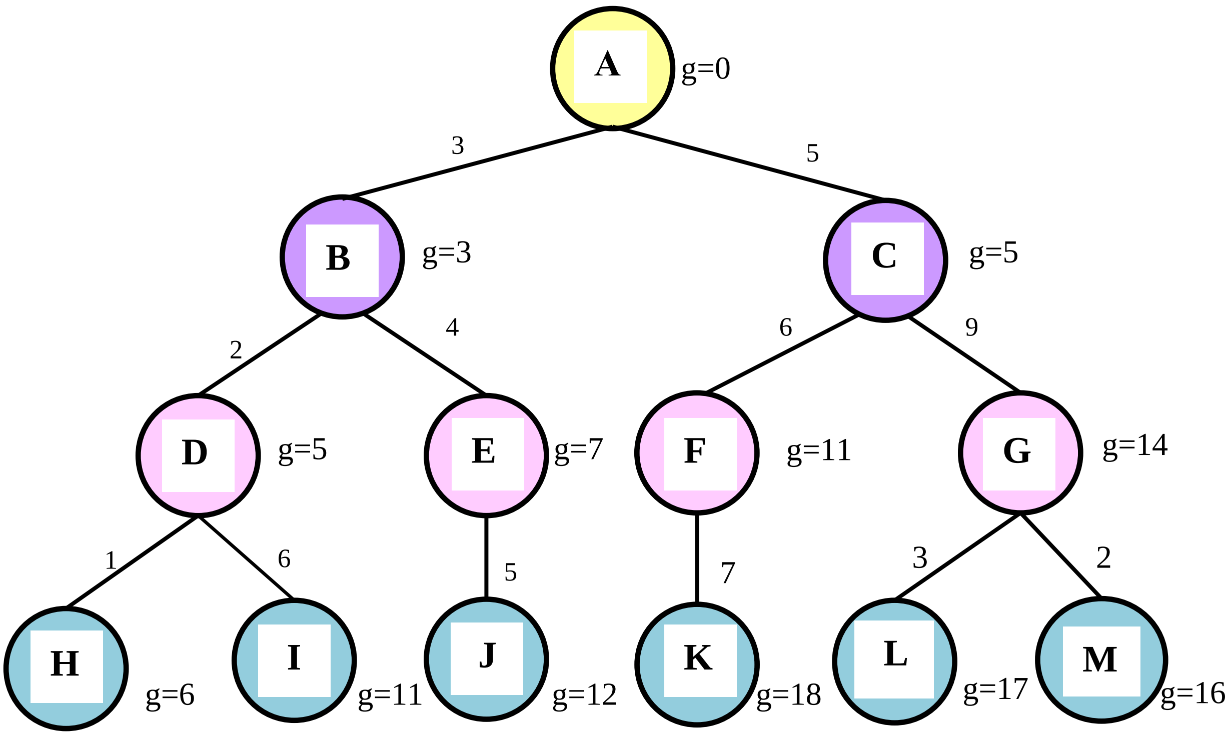
д)

Табліца 2.41. Пребарување со A*

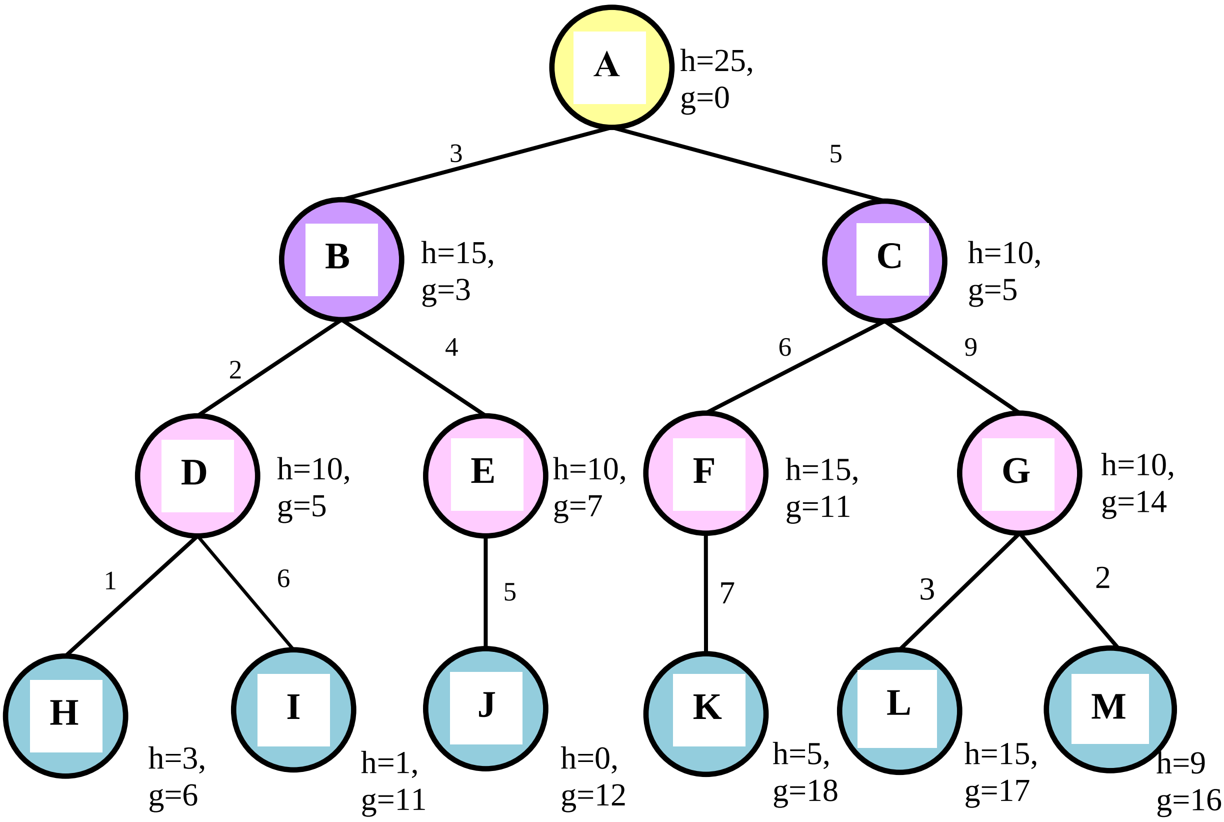
	Q – листа парцијални патишта	**Забелешка**	**R-редослед**
1.	(25A)		25A
2.	(15CA) (18BA)		15C
3.	(18BA) (24GCA) (26FCA)		18B
4.	(15DBA) (17EBA) (24GCA) (26FCA)		15D
5.	(9HDBA) (12IDBA) (17EBA) (24GCA) (26FCA)	H нема наследници	9H
6.	(12IDBA) (17EBA) (24GCA) (26FCA)	I нема наследници	12I
	(17EBA) (24GCA) (26FCA)		17E
7.	**(12JEBA)** (17EBA) (24GCA) (26FCA)	J е цел	12J

Табела 2.42. Решение на задачата 2.22

вид пребарување	**редослед на разгранување на јазлите**
прво по широчина	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J
прво по длабочина	A, B, D, H, I, E,J
со униформна цена	A, B, C, D, H, E, F, I, J
прво од најдобриот	A, C, G, M, B, D, I, H, E, J
A*	A, C, B, D, H, I, E, J



Слика 2.36. Пребарување со униформна цена



Слика 2.37. Пребарување со A*

2.23. Дадена е таблата од слика 2.38. Треба да се најде пат од полето A2 до полето D1. Дозволени се следните движења: лево, надолу и десно по наведениот редослед. Затемнетите полиња на таблата означуваат препреки. Кој од алгоритмите за слепо пребарување што сме ги изучувале најбрзо ќе даде решение во конкретниот случај? Да се разграни соодветното стебло за избраниот алгоритам и да се најде тоа решение. Пребарувањето да се прикаже со табела на чекори и разгранети парцијални патишта. Да се оцени алгоритамот според критериумите изучувани на предавања.

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B1	B2	B3	B4	B5	B6
C1	C2	C3	C4	C5	C6
D1	D2	D3	D4	D5	D6
E1	E2	E3	E4	E5	E6
F1	F2	F3	F4	F5	F6

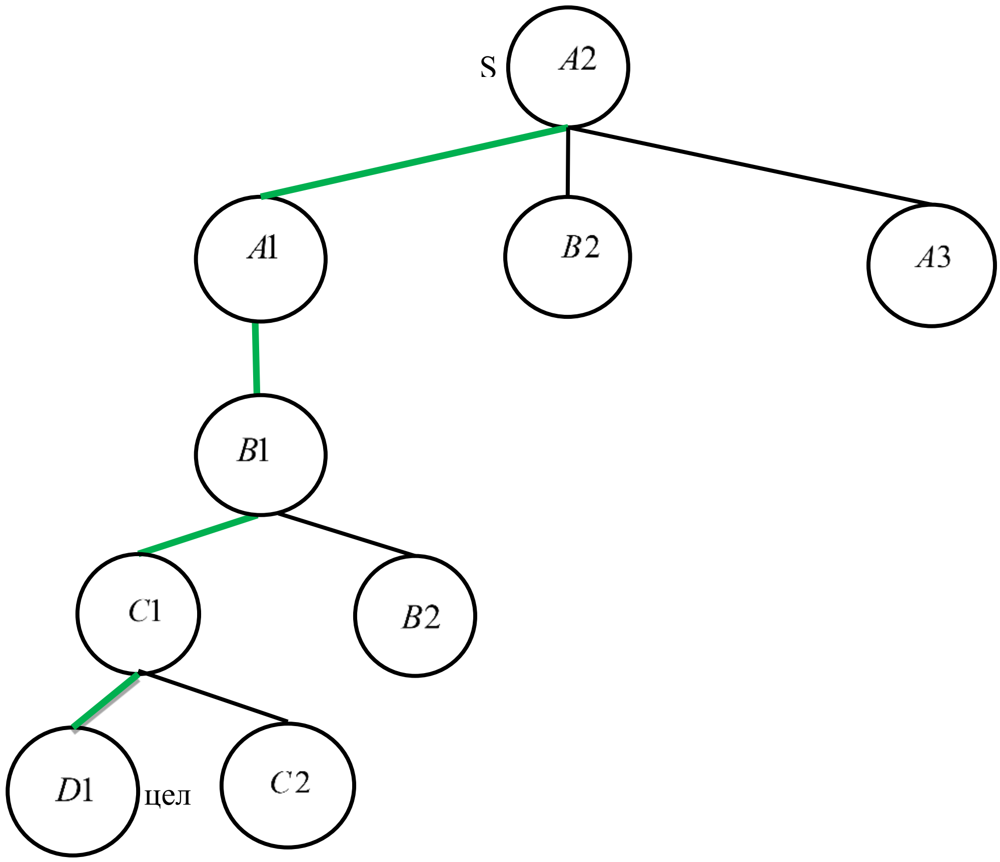
Слика 2.38. Илустрација кон задача 2.23

Решение: Во конкретниот случај најбрзо до решение ќе доведе алгоритамот за пребарување прво по длабочина, затоа што решението е на многу мала длабочина $d = 4$
.

- Алгоритамот во овој случај е комплетен затоа што наоѓа решение.
- Најденото решение во овој случај е оптимално.
- Просторната сложеност на алгоритамот е S=9 m, каде што m е бројот потрошени бајти меморија по јазол, затоа што тој памети само еден пат од коренот до крајниот лист и преостанатите неразгранети јазли на тој пат, односно памети најмногу 9 јазли.
- Временската сложеност на алгоритамот е T=4 t, каде што t е потребното време за разгранување на еден јазол.

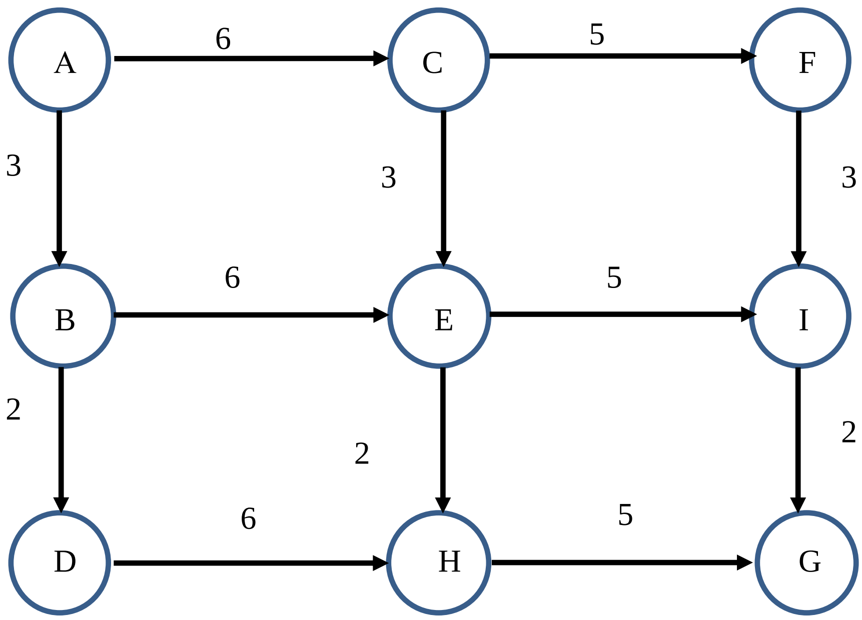
Таблица 2.43. Пребарување прво по длабочина

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	(A2)
2	(A1, A2) (B2, A2) (A3, A2)
3	(B1, A1, A2) (B2, A2) (A3, A2)
4	(C1, B1, A1, A2) (B2, B1, A1, A2) (B2, A2) (A3, A2)
5	**(D1, C1, B1, A1, A2)** (C2, C1, B1, A1, A2) (B2, B1, A1, A2) (B2, A2) (A3, A2)



Слика 2.39. Стебло на разгранување на проблемот од задача 2.23

2.24. Да се определи најкусиот пат од почетниот јазол означен со A до крајниот јазол означен со G во графот од слика 2.40. Да се користи алгоритам за оптимално слепо пребарување со униформна цена.



Слика 2.40. Илустрација кон задача 2.24

Решение: Јазлите со ист приоритет се разгрануваат по азбучен редослед.

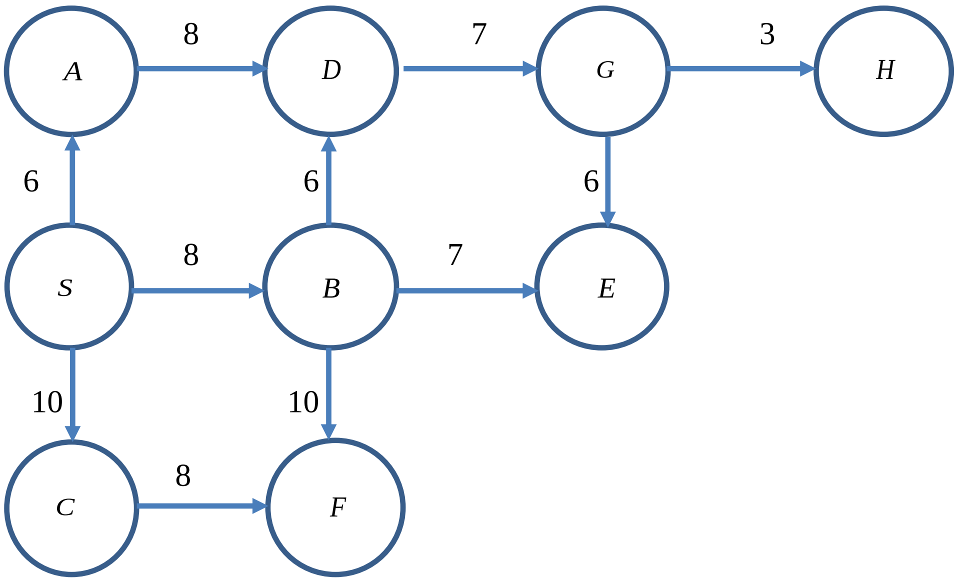
Табела 2.44. Пребарување со униформна цена

	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	(0A)
2	(3BA) (6CA)
3	(5DBA) (6CA) (9EBA)
4	(6CA) (9EBA) (11HDBA)
5	(9EBA) (9ECA) (11FCA) (11HDBA)
6	(9ECA) (11FCA) (11HDBA) (11HEBA) (14IEBA)
7	(11FCA) (11HDBA) (11HEBA) (11HECA) (14IEBA) (14IECA)
8	(11HDBA) (11HEBA) (11HECA) (14IEBA) (14IECA) (14IFCA)
9	(11HEBA) (11HECA) (14IEBA) (14IECA) (14IFCA) (16GHDBA)
10	(11HECA) (14IEBA) (14IECA) (14IFCA) (16GHDBA) (16GHEBA)
11	(14IEBA) (14IECA) (14IFCA) (16GHDBA) (16 GHEBA) (16GHECA)
12	(14IECA) (14IFCA) (16GHDBA) (16 GHEBA) (16GHECA) (16GIEBA)
13	(14IFCA) (16GHDBA) (16 GHEBA) (16GHECA) (16GIEBA) (16GIECA)
14	(16GHDBA) (16 GHEBA) (16GHECA) (16GIEBA) (16GIECA) (16GIFCA)

2.25. Да се определи најкусиот пат од коренот S до крајниот јазол H со алгоритамот A* во графот од слика 2.41. Евристиката за овој граф е дадена во табела 2.45.

Табела 2.45. Евристика за проблемот од задача 2.25

S	A	B	C	D	E	F	G	H
18	10	14	8	6	4	2	1	0



Слика 2.41. Илустрација кон задача 2.25

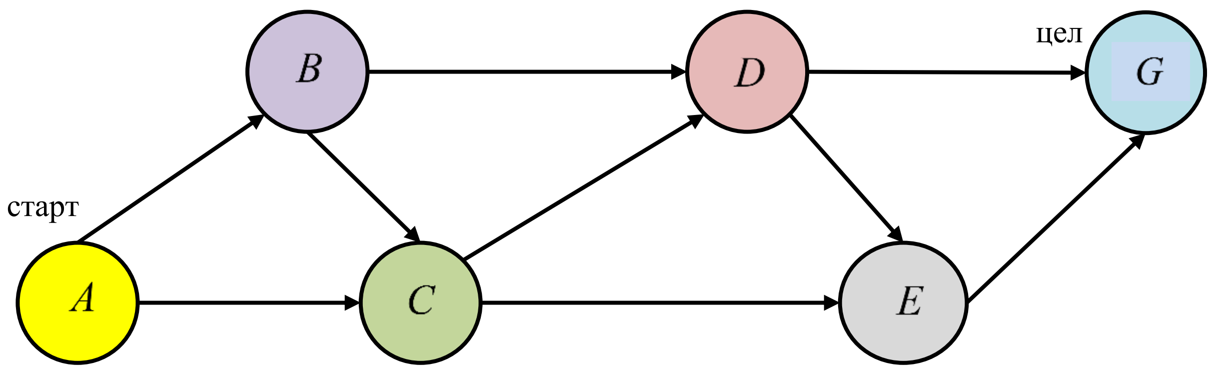
Решение:

Таблица 2.46. A* пребарување

	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	(18S)
2	(16AS) (18CS) (22BS)
3	(18CS) (20DAS) (22BS)
4	(20DAS) (20FCS) (22BS)
5	(20FCS) (22BS) (22GDAS)
6	(22BS) (22GDAS)
7	(19EBS) (20DBS) (20FBS) (22GDAS)
8	(20DBS) (20FBS) (22GDAS)
9	(20FBS) (22GDAS) (22GDBS)
10	(22GDAS) (22GDBS)
11	(22DGBS) (24HGDAS) (31EGDAS)
12	(24HGDAS) (24HGDBS) (31EGDAS) (31EGDBS)

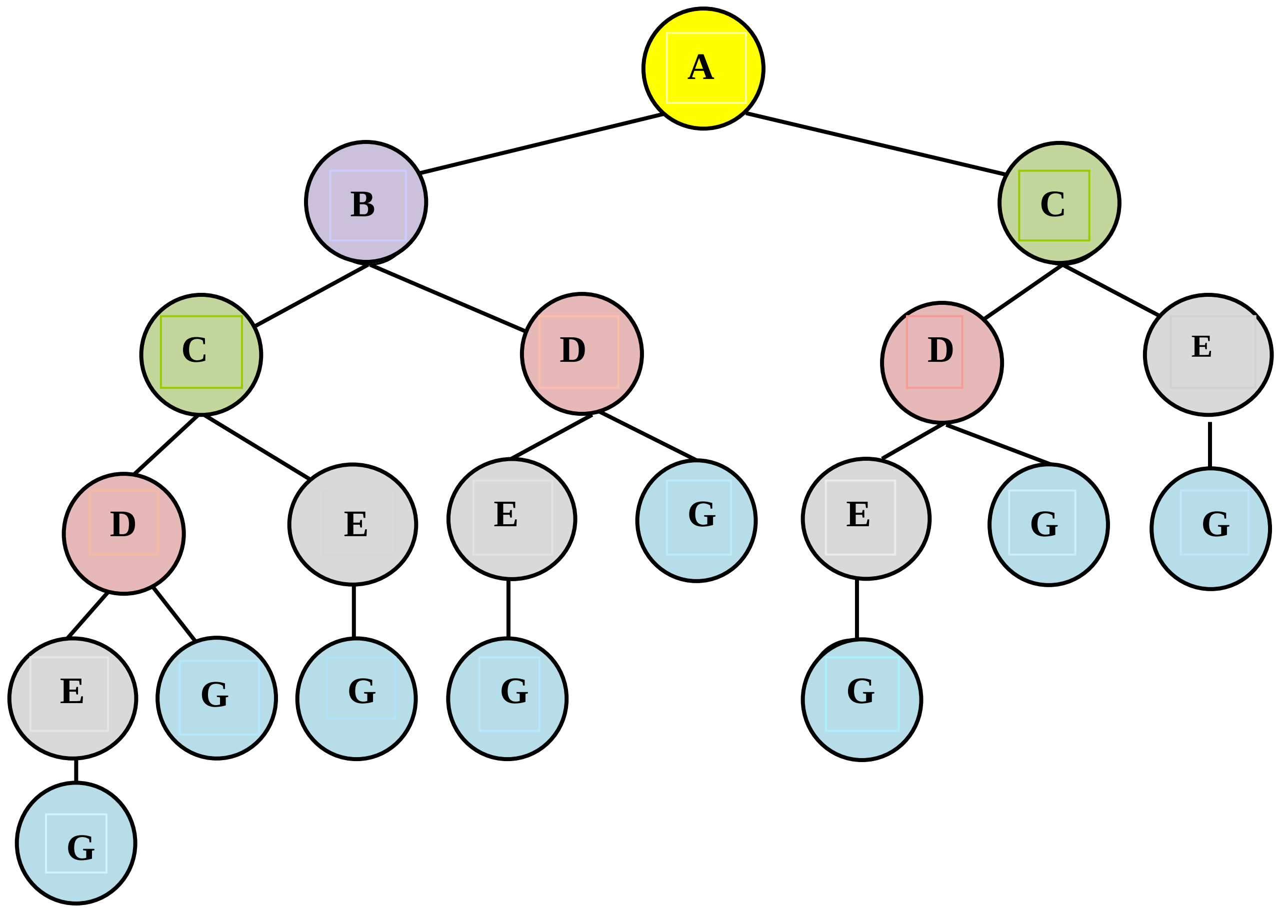
S-A-D-G-H=24

2.26. Да се состави соодветно стебло за дадениот граф од слика 2.42. Потоа да се изврши пребарување на стеблото од јазолот A (како старт) до јазолот G (како цел) прво по широчина, прво по длабочина и итеративно пребарување прво по длабочина.



Слика 2.42. Илустрација кон задача 2.26 - граф на пребарување

Решение: Стеблото на пребарување за графот од слика 2.42 е дадено на слика 2.43.



Слика 2.43. Стебло за графот од слика 2.42

а) Тестот за цел е применет при генерирањето на јазлите.

Табилца 2.47. Пребарување прво по широчина

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	A
2	BA, CA
3	CA, CBA, DBA
4	CBA, DBA, DCA, ECA
5	DBA, DCA, ECA, DCBA, ECBA
6	DCA, ECA, DCBA, ECBA, EDBA, **GDBA**

б)

Таблица 2.48. Пребарување прво по длабочина

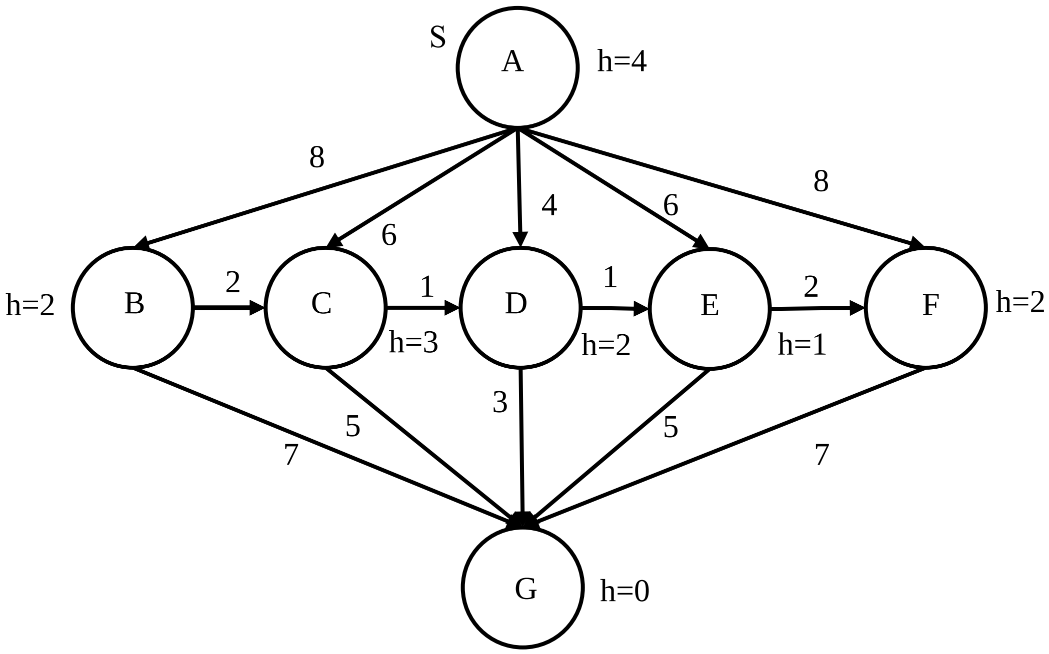
ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1	A
2	BA, CA
3	CBA, DBA, CA
4	DCBA, ECBA, DBA, CA
5	EDCBA, GDCBA, ECBA, DBA, CA
6	**GEDCBA**, GDCBA, ECBA, DBA, CA

в)

Таблица 2.49. Итеративно пребарување прво по длабочина

НИВО	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
0	A
1	A
	BA, CA
2	A
	BA, CA
	CBA, DBA, CA
	DBA, CA
	CA
	DCA, ECA
3	A
	BA, CA
	CBA, DBA, CA
	DCBA, ECBA, DBA, CA
	ECBA, DBA, CA
	DBA, CA
	EDBA, GDBA, CA
	GDBA, CA

2.27. Графот прикажан на слика 2.44, се пребарува според: алгоритамот со униформна цена, алчниот алгоритам „прво од најдобриот јазол“ и A* алгоритамот. По договор, јазлите со ист приоритет се разгрануваат според правилото ПРВ ПОСЕТЕН – ПРВ РАЗГРАНЕТ, доколку алгоритамот за пребарување не наложува поинаку. Да се нацрта соодветното стебло за пребарување. Разгранувањето на стеблото завршува кога ќе се достигне целта.



Слика 2.44. Илустрација кон задача 2.27

Пребарувањата да се прикажат во соодветна таблица, во која колоните се означени со **Q** –листа парцијални патишта, **V** – листа посетени јазли и **R** – листа разгранети јазли.

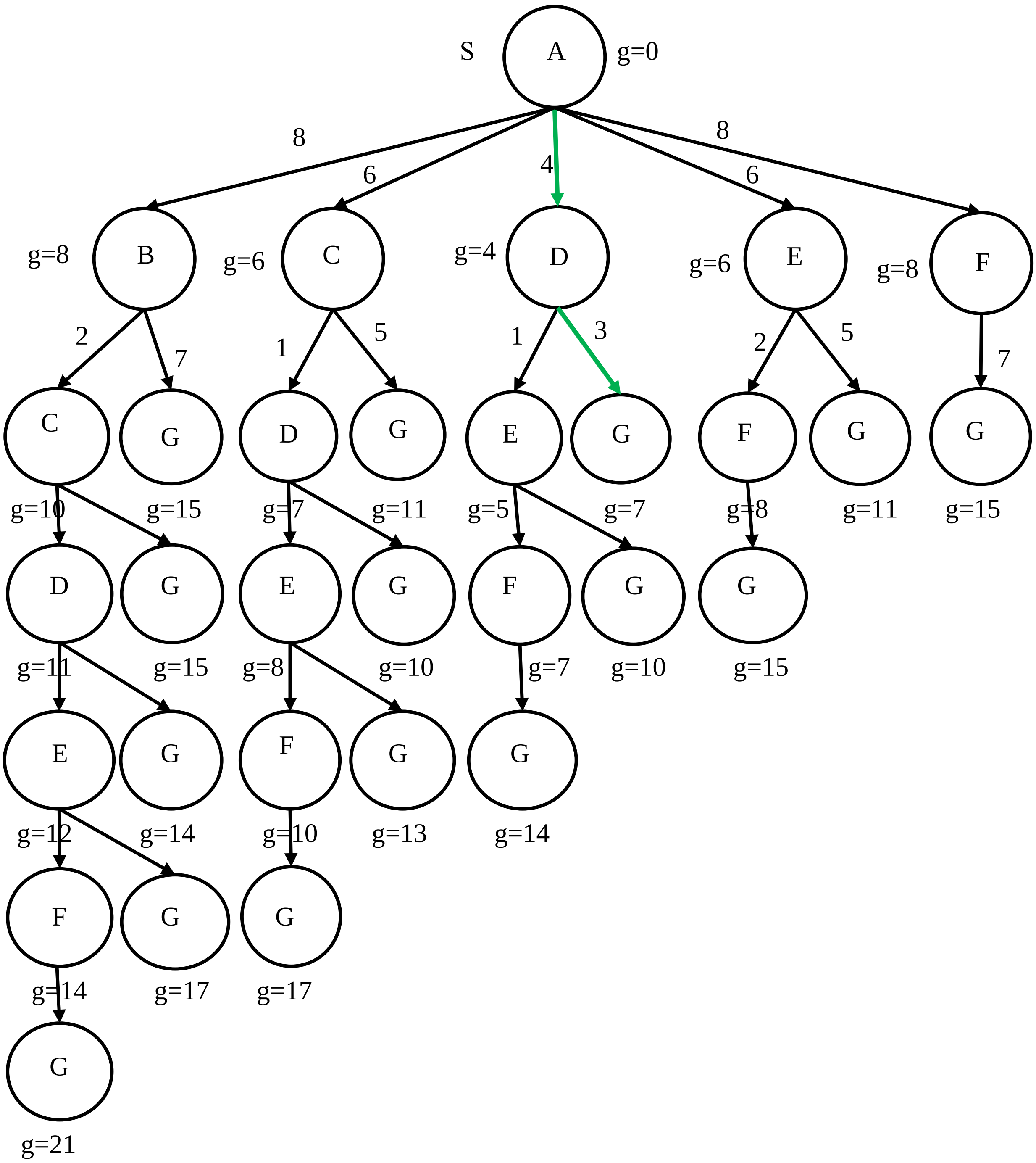
Во таблица 2.50 е дадена евристика за проценка на растојанието на еден јазол до целта.

Таблица 2.50. Евристичка проценка на растојанието на јазлите од слика 2.44 до целта

Јазол	A	B	C	D	E	F	G
$h(n)$	4	2	3	2	1	2	0

Решение: Решението на пребарувањето со униформна цена е прикажано на слика 2.45. Изнајденото решение е оптимално, затоа што алгоритамот е оптимален.

Пребарувањето на стеблото од слика 2.45 со алгоритамот за пребарување со униформна цена детално е прикажано во таблицата 2.51.



Слика 2.45. Решение на задачата 2.27 – пребарување со униформна цена

Таблица 2.51. Пребарување со униформна цена

	Q	R
1.	**(0A)**	**0A**
2.	**(4DA) (6CA) (6EA) (8BA) (8FA)**	**4D**
3.	**(5EDA) (6CA) (6EA) (7GDA) (8BA) (8FA)**	**5E**
4.	**(6CA) (6EA) (7FEDA) (7GDA) (8BA) (8FA) (10GEDA)**	**6C**
5.	**(6EA) (7DCA) (7FEDA) (7GDA) (8BA) (8FA) (10GEDA) (11GCA)**	**6E**
6.	**(7DCA) (7FEDA) (7GDA) (8BA) (8FA) (8FEA) (10GEDA) (11GCA) (11GEA)**	**7D**
7.	**(7FEDA) (7GDA) (8BA) (8EDCA) (8FA) (8FEA) (10GDCA) (10GEDA) (11GCA) (11GEA)**	**7F**
8.	**(7GDA) (8BA) (8EDCA) (8FA) (8FEA) (10GDCA) (10GEDA) (11GCA) (11GEA) (14GFEDA)**	**7G**

Решението на алчното пребарување прво од најдобриот јазол е детално прикажано во таблица 2.52, а соодветното стебло на пребарување е прикажано на слика 2.46. Изнајденото решение не е оптимално, затоа што алгоритамот не е оптимален. Тој едноставно го одбира решението што се наоѓа најблизу до тековниот јазол.

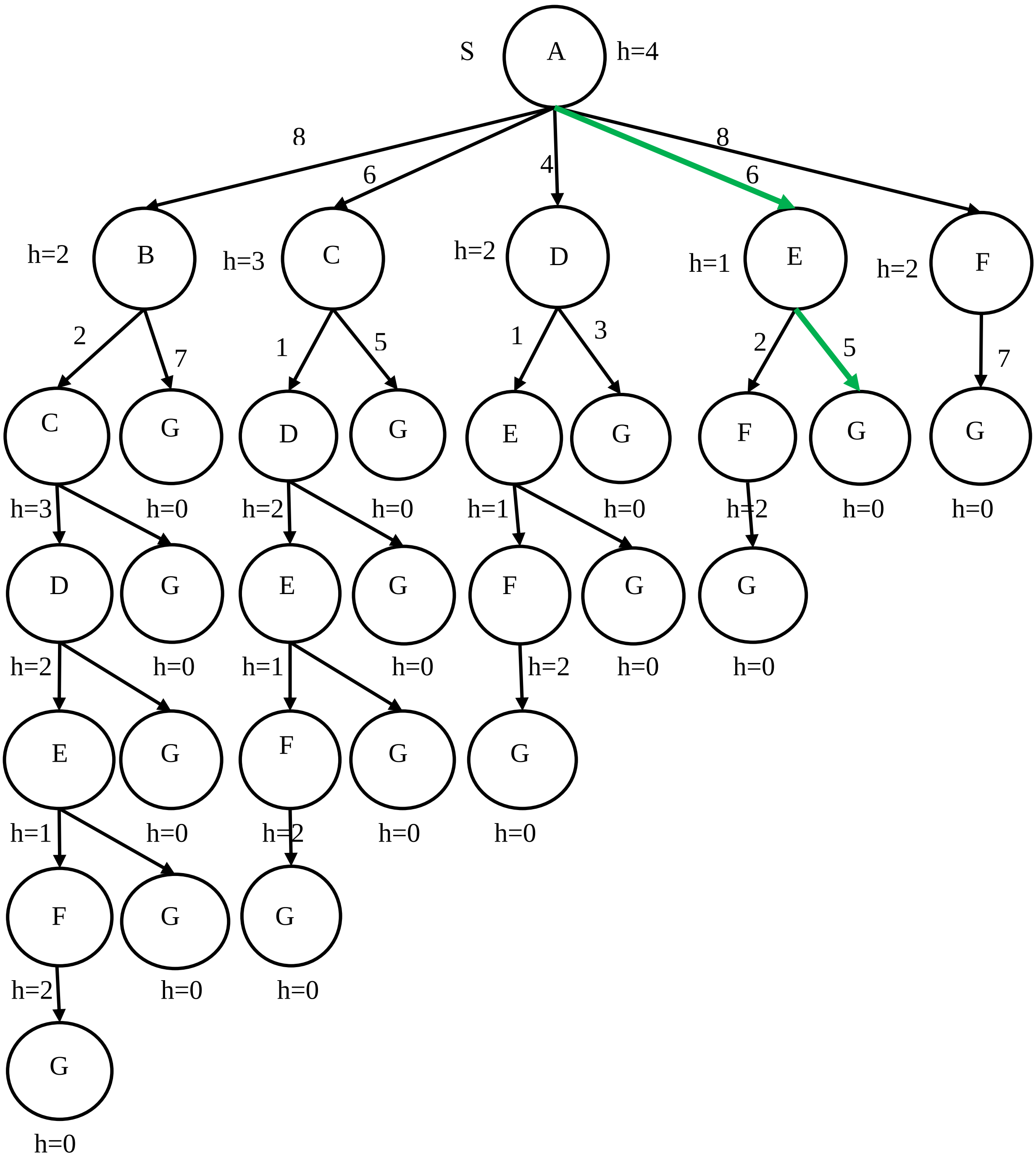
Таблица 2.52. Алчно пребарување прво од најдобриот јазол

	Q	R
1.	**(4A)**	**4A**
2.	**(1EA) (2BA) (2DA) (2FA) (3CA)**	**1E**
3.	**(0GEA) (2BA) (2DA) (2FA) (2FEA) (3CA)**	**0G**

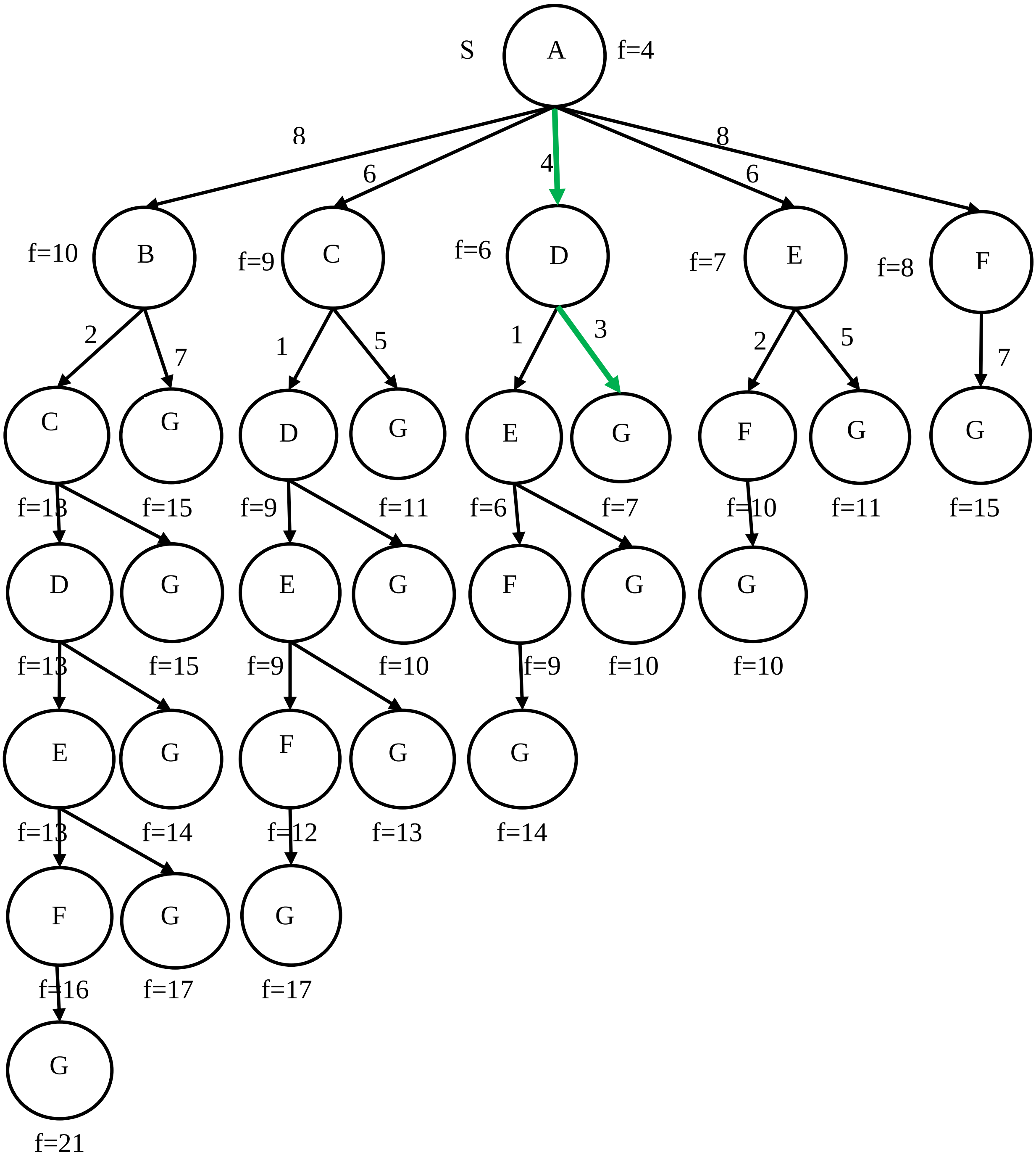
Пребарувањето со A* е илустрирано на слика 2.47 и детално прикажано во таблица 2.53. Решението е оптимално.

Таблица 2.53. A* пребарување

	Q	R
1.	**(4A)**	**4A**
2.	**(6DA) (7EA) (8FA) (9CA) (10BA)**	**6D**
3.	**(6EDA) (7EA) (7GDA) (8FA) (9CA) (10BA)**	**6E**
4.	**(7EA) (7GDA) (8FA) (9CA) (9FEDA) (10BA) (10GEDA)**	**7E**
5.	**(7GDA) (8FA) (9CA) (9FEDA) (10BA) (10FEA) (10GEDA) (11GEA)**	**7G**



Слика 2.46. Решение на задачата 2.27 – алчно пребарување прво од најдобриот јазол

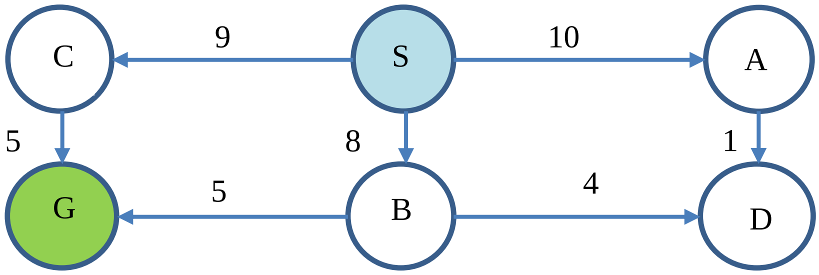


Слика 2.47. Решение на задачата 2.27 – пребарување со алгоритамот A*

2.28. Со помош на алгоритамот за оптимално слепо пребарување, да се реши проблемот на изнаоѓање пат од јазолот S до јазолот G во дадениот граф од слика 2.48. Потоа истото да се стори со помош на алгоритам за оптимално евристичко пребарување.

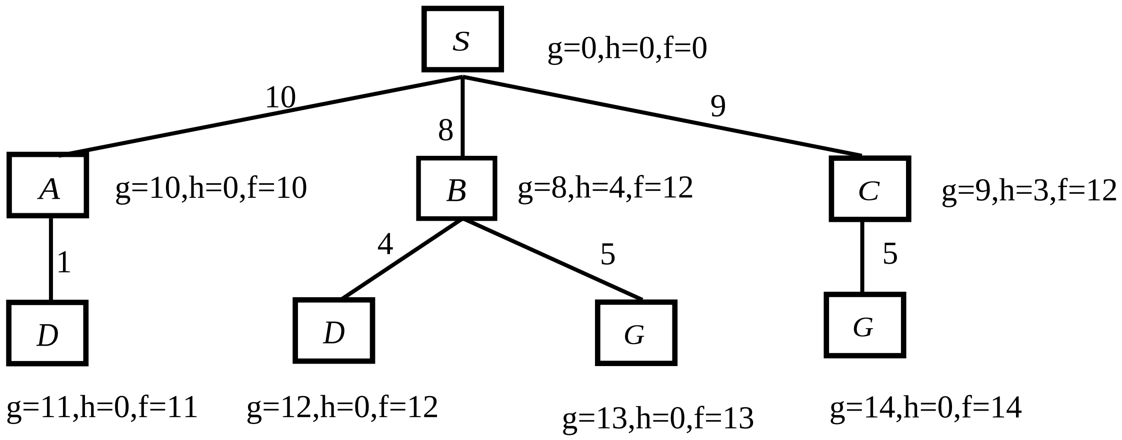
Табллица 2.54. Евристика за задачата 2.28

Јазол	**S**	**A**	**B**	**C**	**D**	**G**
евристика	**0**	**0**	**4**	**3**	**0**	**0**



Слика 2.48. Илустрација кон задачата 2.28

Решение: а) Соодветното стебло на пребарување и бараното решение со униформна цена се прикажани на слика 2.49.



Слика 2.49. Стебло на пребарување за задачата 2.28

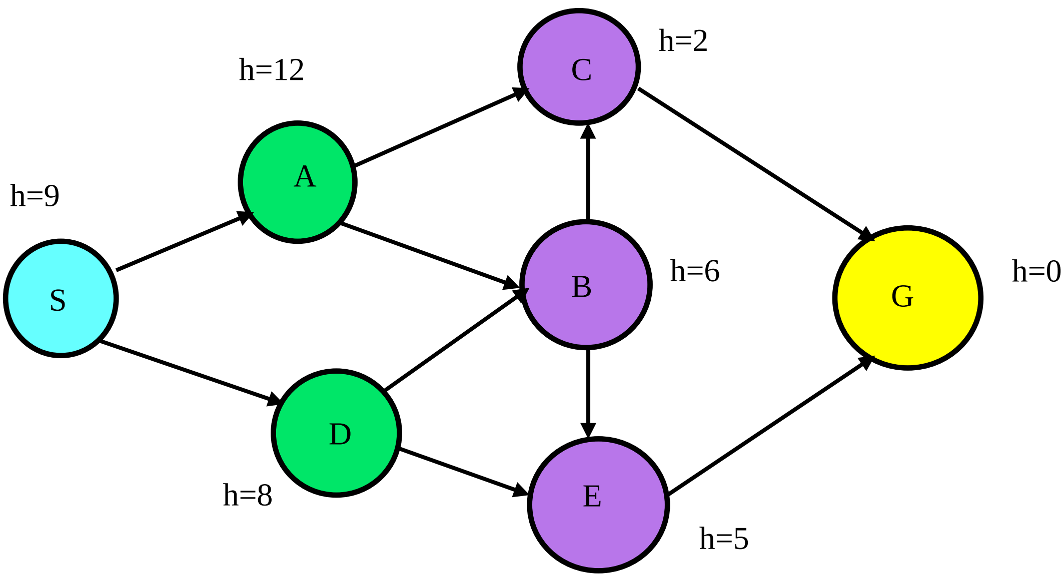
Табллица 2.55. Пребарување со униформна цена

1	(0S)
2	(8BS), (9CS), (10AS)
3	(9CS), (10AS), (12DBS), (13GBS)
4	(10AS), (12DBS), (13GBS), (14GCS)
5	(11DAS), (12DBS), (13GBS), (14GCS)
6	(12DBS), (13GBS), (14GCS)
7	**(13GBS)**, (14GCS)

Таблица 2.56. Пребарување со A*

1	(0S)
2	(10AS), (12BS), (12CS)
3	(11DAS), (12BS), (12CS)
4	(12BS), (12CS)
5	(12DBS), (12CS), (13GBS)
6	(12CS), (13GBS)
7	**(13GBS)**, (14GCS)

2.29. Со помош на алчниот алгоритам за пребарување прво од најдобриот јазол, да се најде најкус пат од јазолот S до јазолот G во графот од слика 2.50.

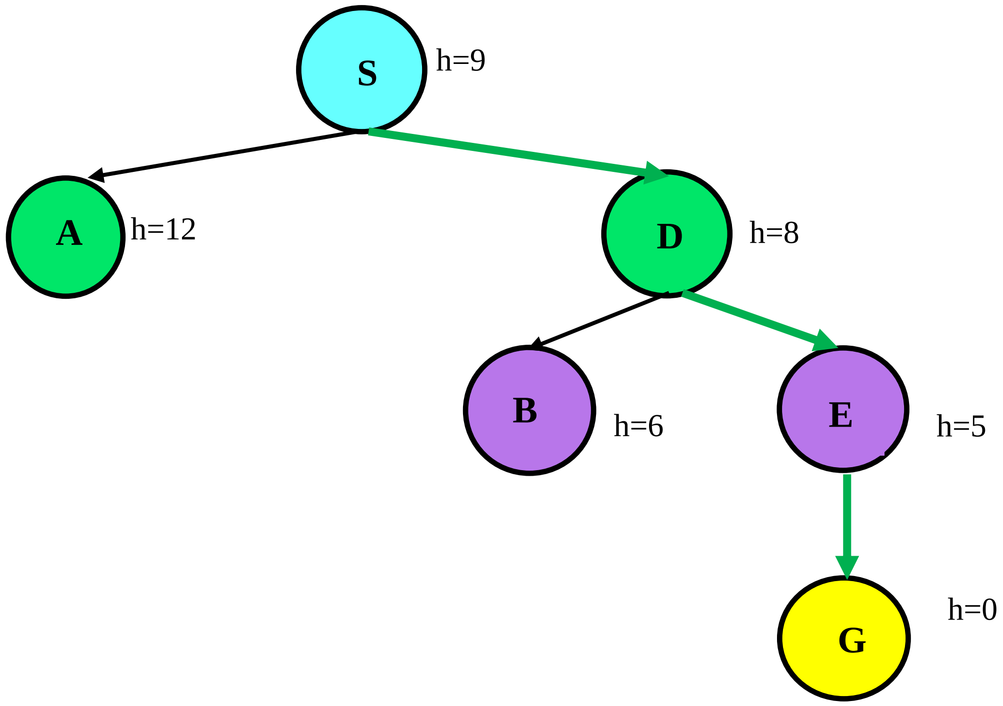


Слика 2.50. Илустрација кон задача 2.29

Решение: Стеблото на пребарување за графот од слика 2.50 е прикажано на слика 2.51, а самото пребарување е дадено во таблицата 2.57.

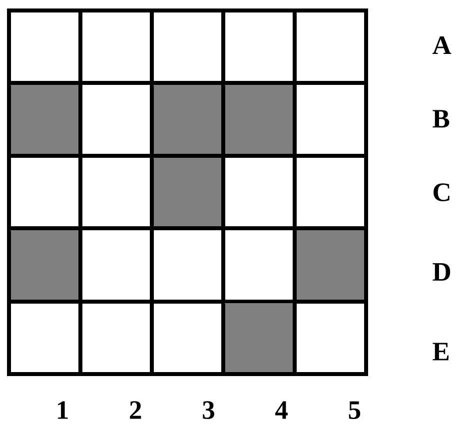
Таблица 2.57. Алчно пребарување прво од најдобриот јазол

ЧЕКОР	ПАРЦИЈАЛНИ ПАТИШТА
1.	**(9S)**
2.	**(8DS), (12AS)**
3.	**(5EDS), (6BDS), (12AS)**
4.	**(0GEDS), (6BDS), (12AS)**



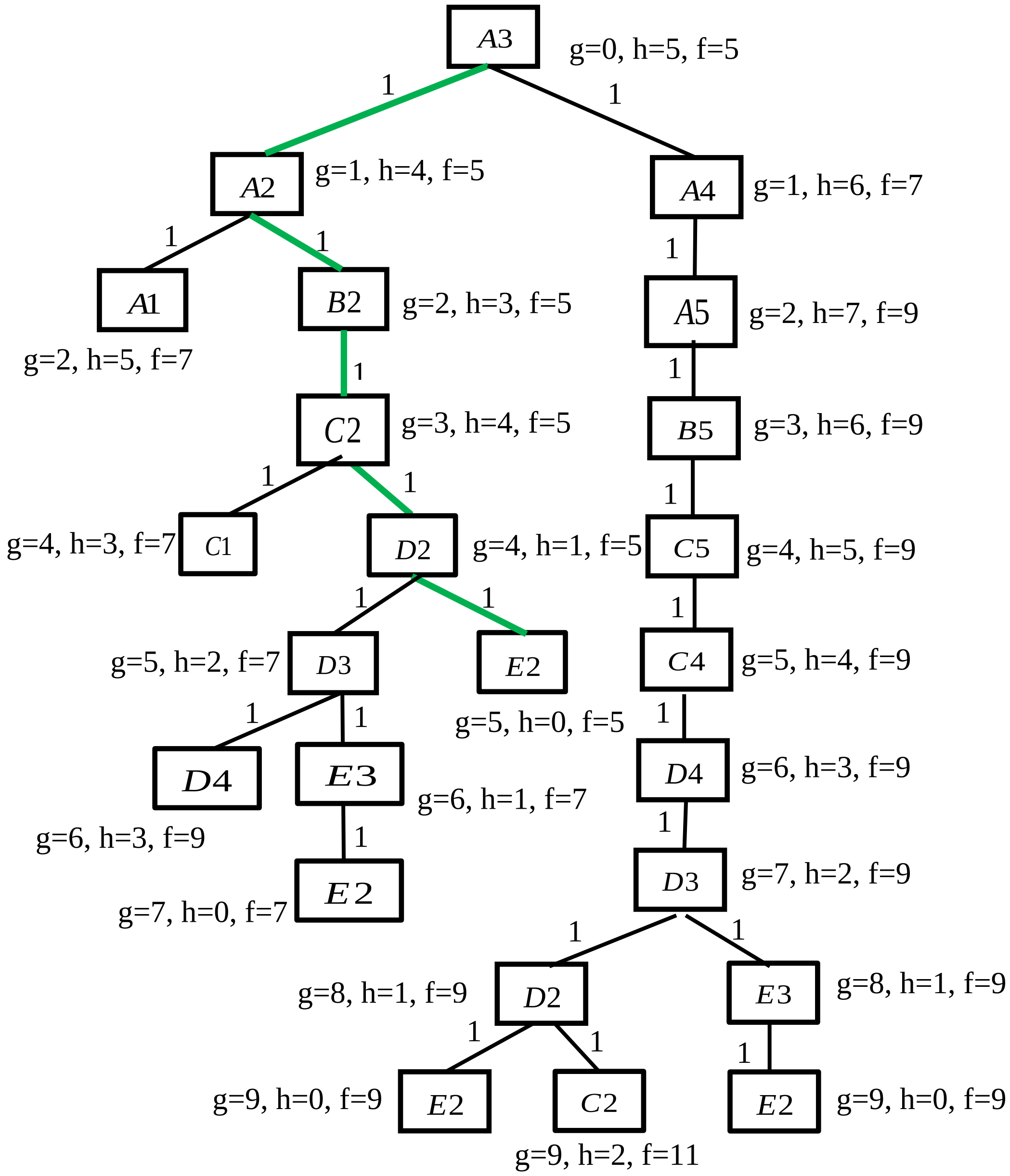
Слика 2.51. Алчно пребарување прво од најдобриот јазол на графот од слика 2.50

2.30. Даден е лавиринтот од слика 2.52. Со избор на соодветен алгоритам за пребарување (A*), да се реши проблемот на изнаоѓање пат од позицијата A3 до позицијата E2 со избегнување на препреките на патот (сивите квадрати). Не е дозволено прескокнување на квадрати. Упатство: да не се прикажуваат илегалните и повторените позиции.



Слика 2.52. Илустрација кон задачата 2.30

Решение: Проблемот на пребарување од задачата може да се дефинира на следниот начин: **почетна состојба** - А3, **крајна состојба (цел)** - Е2, **оператори (дозволени дејствија)** – оди лево, оди десно, оди долу, оди горе, **цена на чинење на секој чекор** – 1, **прифатлива евристика** – Менхетен растојание. Соодветното стебло на пребарување и бараното решение означено со зелени линии се прикажани на слика 2.53.



Слика 2.53. Решение на задачата 2.30

3. ПРЕБАРУВАЊЕ СО ОГРАНИЧУВАЊА

3.1. Вкупно k ловци треба да се распоредат на шаховска табла со $n \times n$ полиња, така што ловците нема да се напаѓаат помеѓу себе. Под претпоставка, k е дадено и $k \leq n^2$. Задачата да се формулира како проблем на пребарување со ограничувања.

а) Кои се променливите на вака формулираниот проблем?

Одговор А: Променливи на набљудуваниот проблем можат да бидат полињата на шаховската табла – вкупно n^2 .

Одговор Б: Исто така, по една променлива може да се придружи на секој ловец.

б) Кои се вредностите на секоја променлива?

Одговор А: Секоја променлива V_i може да поприми само една од две можни вредности $V_i \in \{\text{слободна, зафатена}\}$.

Одговор Б: Областа на секоја променлива е множеството полиња на таблата.

в) Кои множества променливи се ограничени и на кој начин?

Одговор А: Секој пар полиња во правец на движењето на ловецот е ограничен во смисла на тоа дека двете не можат да бидат зафатени истовремено. Во продолжение, и целото множество полиња на таблата е ограничено во смисла на тоа дека вкупниот број зафатени полиња е k.

Одговор Б: Секој пар ловци е ограничен во смисла на тоа дека два ловци не можат да бидат истовремено на исто поле од таблата или на полиња кои се наоѓаат на правецот на движење на ловецот. Одговорот под Б е подобар од одговорот под А, затоа што во овој случај не постои општо ограничување (на целото множество променливи). Меѓутоа, за големо k, одговорот под А се карактеризира со помал простор на состојби.

3.2. Се набљудува популарната игра Sudoku во која треба да се исполни таблица со 9×9 полиња. Полињата од таблицата се пополнуваат со броевите $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, при што мора да бидат задоволени одредени услови. Така, секоја од редиците и колоните на таблицата мора да ги содржи сите девет цифри $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; исто така секој од квадратите со димензија 3×3 внатре во таблицата мора да ги содржи сите девет цифри $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Во продолжение, одделни полиња од таблицата веќе се пополнети со конкретни цифри, така што решението на проблемот мора да ги содржи истите. Играта, под претпоставка, има единствено решение. Нека со $n_{i,j}$ е означен бројот во i-тата редица и j-тата колона од таблицата и нека M го означува бројот однапред зададени цифри (во конкретниот случај M=29). Проблемот да се дефинира како проблем на пребарување со ограничувања.

а) Што претставуваат променливи на вака дефинираниот проблем и кои се нивните вредности?

Одговор А: На секое поле од таблицата (без оглед на тоа дали е веќе пополнето или е празно) може да се придружи по една променлива $V_{i,j}$ која може да има една од следните вредности $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Одговор Б: Кон секое празно поле од таблицата може да се придружи по една променлива.

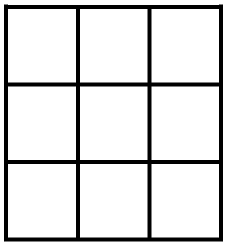
3				**8**				**6**
		7		**3**		**8**	**2**	
	4		**2**		**6**	**9**		
	7				**8**		**3**	
4		**5**				**6**		**2**
	3		**6**				**5**	
		4	**7**		**2**		**6**	
	2	**9**		**6**		**1**		
6				**1**				**7**

Слика 3.1 Илустрација кон задачата 3.2

б) Да се дефинираат ограничувањата при решавањето на проблемот, вклучувајќи ги и оние зададени со почетниот изглед на таблицата. Колку променливи се опфатени со секое ограничување?

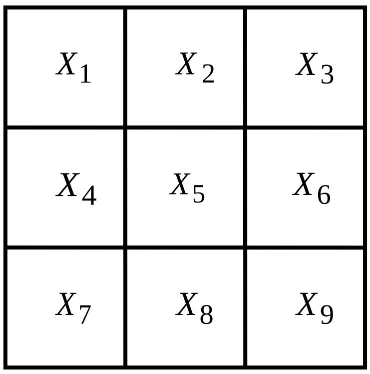
Одговор: Постојат четири класи ограничувања. Променливите во секоја редица не смеат да имаат исти вредности; истото важи и за променливите во секоја колона и во секој од 3×3 квадратите. Во продолжение, постојат и дополнителни унитарни ограничувања: полињата од таблицата кои се дадени пополнети, мора да ги содржат однапред зададените вредности. (Во случајот на одговорот б) од претходното прашање овие ограничувања не постојат).

3.3. Се набљудува проблемот на составување крстозбор од дадени зборови: $D = \{\text{CAN, AGE, ROW, CAR, AGO, NEW}\}$, прикажан на слика 3.2. Проблемот да се дефинира како проблем на пребарување со ограничувања, во кој на секое поле од крстозборот е доделена по една променлива. а) Кои се ограничувањата во вака дефинираниот проблем?



Слика 3.2   Илустрација кон задачата 3.3

Одговор: Нека со D е означено множеството зборови (речникот) од кој се составува крстозборот и нека со w^i е означен i-тиот збор во речникот. Во продолжение, секој збор од речникот D може да се претстави на следниот начин: $w^i = w_1^i, w_2^i, \ldots, w_{l_i}^i$, каде што w_j^i е j-тата буква од i-тиот збор w^i, а l_i е неговата должина. Кон секое поле од крстозборот е придружена соодветна променлива X_i. Во конкретниот случај од задачата крстозборот има 9 празни полиња и, следствено, проблемот на составување на крстозборот има 9 променливи: $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$. За секој збор во крстозборот постои соодветно ограничување. Во конкретниот случај од задачата, постојат вкупно 6 ограничувања. Нека C_1 е ограничувањето кое се однесува на првиот хоризонтален збор во крстозборот. Под претпоставка, полињата во крстозборот се означени со броеви од лево на десно и одгоре надолу. Тогаш, променливите кои се опфатени со ограничувањето C_1 се X_1, X_2, X_3.



Слика 3.3   Дефинирање променливи во задачата 3.3

Бидејќи во конкретниот случај единствените дозволени зборови се $\{\text{CAN,AGE,ROW,CAR,AGO,NEW}\}$, множеството дозволени тројки вредности за C_1 е $\{(C,A,N),(A,G,E),(R,O,W),(C,A,R),(A,G,O),(N,E,W)\}$. Меѓутоа, бидејќи X_1 е првата буква на зборовите под 1 хоризонтално и 1 вертикално, а во D има само два збора што почнуваат на иста буква, CAN и CAR, следува дека множеството дозволени тројки вредности за C_1 е $\{(C,A,N),(C,A,R)\}$ и $X_1 = C$. Во овој момент уште не се знае дали под 1 хоризонтално е CAN или CAR, меѓутоа се забележува дека втората буква во двата збора е A, што значи дека $X_2 = X_4 = A$. Конечно, преостанува $X_3 = (N, R)$ и $X_7 = (N, R)$. На сличен начин се размислува и околу останатите ограничувања C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6. Лесно може да се забележи дека овие ограничувања не се бинарни. Едно можно решение на проблемот е прикажано во продолжение.

C	**A**	**N**
A	**G**	**E**
R	**O**	**W**

Слика 3.4 Едно решение на задачата 3.3

б) Проблемот од задачата да се предефинира како бинарен проблем на пребарување со ограничувања.

Одговор: Во овој случај променливите на проблемот соодветствуваат на зборовите во крстозборот, кои ги има шест, а не на полињата од крстозборот. Нивните вредности се претставени со множеството $D = \{\text{CAN,AGE,ROW,CAR,AGO,NEW}\}$. Ограничувањата се однесуваат на фактот дека секои два збора од крстозборот кои се „сечат“ мора да имаат иста буква во заедничкото поле од крстозборот.

3.4. Нека, под претпоставка, е зададен празен крстозбор, со однапред дефинирани бели и црни полиња. (Тоа значи дека должината на зборовите во крстозборот е однапред одредена.) Исто така, под претпоставка, на располагање стои листа зборови односно речник, а задачата се состои во пополнување на дадениот крстозбор со зборовите од речникот. Секој збор од речникот може да се употреби во крстозборот само еднаш, а по употребата соодветниот збор се отстранува од речникот. Да се формулира овој проблем како проблем за пребарување и да се предложи соодветна стратегија за негово решавање (алгоритам за пребарување). Кои се променливите и нивните области?

Одговор: Формулација на проблемот:

- Почетна состојба – празен крстозбор и полн речник
- Целна состојба (цел) – пополнет крстозбор и празен речник, при што зборовите во крстозборот не се повторуваат (сите се различни) и секој пар зборови што се „пресекуваат“ имаат иста „пресечна“ буква.
- Функција за генерирање наследници – одбира позиција во крстозборот која претходно не е одбрана и ја пополнува со збор од речникот така што евентуалните букви кои веќе се наоѓаат на таа позиција се совпаѓаат со буквите

од одбраниот збор. Генерираната состојба се одликува со нова пополнета позиција во крстозборот и збор помалку во речникот. (Овде е битно позициите од крстозборот кои не биле одбрани, а веќе се пополнети при пополнувањето на други позиции во крстозборот, да можат да бидат одбрани. На тој начин се открива проблемот кога при пополнувањето други позиции дадена позиција е пополнета со букви кои не прават збор.)

- Цена на патот – секое дејствие има цена 1, бидејќи сите состојби се еквивалентни.

Решавање на проблемот:

- Алгоритам за пребарување – составувањето крстозбор припаѓа во класата проблеми со ограничувања. Следствено, прифатлива стратегија за пребарување е распространување на ограничувањата. Променливи би биле позициите во крстозборот, а нивни вредности – зборовите од речникот со соодветна должина.

3.5. Организацијата „Конгрес“ се занимава со организирање стручни конференции. Таа мора постојано да прави распоред на одржувањето различни конференции во расположливите конференциски центри односно сали во градот. Нека конференциите ги означиме со C_i, а салите со H_j. Траењето на една конференција ќе го означиме со L_i, а секоја конференција има точно одреден датум на почеток T_k. Исто така, однапред е дефинирано времето $T_{\max}$ за кое се планира одржувањето на конференциите во една сала. Конечно, се претпоставува дека секоја од конференциите може да се одржи во која и да било сала од тие што се на располагање. Проблемот треба да се дефинира како проблем на пребарување со ограничување.

а) Едно решение е за променливи да се одберат конференциите што се одржуваат, а нивни вредности да бидат паровите $\left(H_j, T_k\right)$. Во продолжение е разгледан случајот кога 5 конференции треба да се организираат во 2 сали во траење од 7 денови, $T_{\max} = 7$, со почетни термини $T_k \in \{1,2,3,4,5\}$ и времиња на траење на конференциите:

- времетраење на конференцијата C_1 е $L_1 = 2$ дена
- времетраење на конференцијата C_2 е $L_2 = 4$ дена
- времетраење на конференцијата C_3 е $L_3 = 3$ дена
- времетраење на конференцијата C_4 е $L_4 = 1$ ден
- времетраење на конференцијата C_5 е $L_5 = 2$ дена

Изразот $C_1 = (H_2, 2)$ значи дека конференцијата C_1 треба да се одржи во салата H_2, почнувајќи на вториот ден $T_1 = 2$.

а) Кои се ограничувањата за вака дефинираниот проблем на пребарување со ограничувања?

Одговор: За секоја од променливите на вака дефинираниот проблем на пребарување важи следното унитарно ограничување:

$$T_k + L_i \le T_{\max};\ i,k = 1,2,3,4,5 \tag{3.1}$$

Исто така мора да бидат задоволени следните бинарни ограничувања:

$$H_j = H_n \to T_k + L_i \le T_p \vee T_p + L_m \le T_k \tag{3.2}$$

што значи дека две конференции $C_i = \left(H_j, T_k\right)$ и $C_m = \left(H_n, T_p\right)$, што се одржуваат во иста сала, не смеат да се преклопуваат временски. Следствено, или конференциите $C_i = \left(H_j, T_k\right)$ и $C_m = \left(H_n, T_p\right)$ се одржуваат во различни сали, $H_j \ne H_n$, или се одржуваат во иста сала, $H_j = H_n$, во различни временски термини.

б) Да се состави комплетно решение за дадениот пример со 5 конференции и 2 сали.

Одговор: Едно такво решение е следното:

$$C_1 = \left(H_1, 1\right) \tag{3.3}$$

$$C_2 = \left(H_1, 3\right) \tag{3.4}$$

$$C_3 = \left(H_2, 1\right) \tag{3.5}$$

$$C_4 = \left(H_2, 4\right) \tag{3.6}$$

$$C_5 = \left(H_2, 5\right) \tag{3.7}$$

Постојат и други можни решенија.

в) Проблемот на пребарување со ограничувања во конкретниот случај може да се дефинира и така што за негови променливи ќе се усвојат салите H_j. Под претпоставка дека има N сали и K конференции, да се дефинираат вредностите на променливите H_j

Одговор: Вредност на секоја променлива е комплетниот распоред за соодветната сала, односно листа на сите конференции што треба да се одржат во салата.

г) Кои се недостатоците на вториот начин на дефинирање на проблемот на пребарување?

Одговор: Областа на можни вредности за секоја од променливите H_j ќе биде многу голема – ќе содржи голем број можни вредности како резултат на сите можни начини на распределба на K конференции помеѓу N сали, така што збирот од времињата на одржување на тие конференции да не го надминува максималното дозволено времетраење $T_{\max}$.

3.6. Нека, под претпоставка, треба да се направи план за одржување на четири конференции A, B, C и D, кои треба да се одржат во период од 10 дена. Притоа треба да се испочитуваат следните ограничувања:

Конференцијата A трае 3 дена и претходи на конференциите B и C

- Конференцијата B трае 4 дена и претходи на конференцијата D
- Конференцијата C трае 4 дена и претходи на конференцијата D
- Конференцијата D трае 3 дена

Проблемот да се дефинира како пребарување со ограничувања и да се дефинираат областите на неговите променливи.

Решение: Променливи на проблемот се времињата на отпочнување на одделните конференции: startA, startB, startC и startD, како и променливите кои го дефинираат почетокот на планираните настани start и времето на завршување на планираните настани finish. Доменот на променливата start е {1}, додека доменот на сите останати променливи е {1,...,10}, затоа што генерално гледано, секоја од конференциите може да започне во кој и да било ден помеѓу 1 и 10. Ограничувањата на поставениот проблем математички можат да се формулираат на следниот начин:

- start ≤ startA
- startA + 3 < startB
- startA + 3 < startC
- startB + 4 < startD
- startC + 4 < startD
- startD + 3 ≤ finish

што се сведува на следните ограничувања за соодветните променливи:

(start, startA)={(1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,10)}

(startA, start)={(1,1), (2,1), (3,0), ..., (10,1)}

(startA, startB)={(1,4), (1,5), ..., (1,10), (2,5), (2,6), ..., (7,10)}

(startB, startA)= {(10,7),…,(6,2),(5,2),(10,1),…,(5,1),(4,1)} итн.

Сите вредности од доменот на една променлива, кои ги задоволуваат поставените ограничувања, се нарекуваат конзистентни, па во конкретниот случај, имајќи ги на ум дадените ограничувања, конзистентни вредности за променливата startA се {1,2,...,10}.

Лаците (start, startA)={(1,1), (1,2), (1,3), ..., (1,10)} и (startA, start)={(1,1), (2,1), (3,1), ..., (10,1)} се конзистентни.

Ако се погледне лакот (startA, startB), може да се забележи дека тој е неконзистентен, затоа што за startA=7, startA=8, startA=9 и startA=10 не постои соодветна вредност во доменот на startB која го задоволува второто ограничување. Имено, ако конференцијата A треба да започне и заврши пред конференцијата B, во интервалот од 1 до 10 денови, а нејзиното траење е 3 дена, таа не може да започне подоцна од 6-тиот ден. Следствено, доменот на променливата startA се стеснува на {1,2,…,6}. Едновремено, доменот на променливата startB се стеснува на {4,5,6,…,10}, со што лаците (startA, startB) и (startB, startA) стануваат конзистентни. На сличен начин се утврдува дека лакот (startA,startC) е конзистентен, но лакот (startC,startA) не е. Имајќи го на ум третото ограничување, доменот на променливата startC мора да се стесни на {4,5,6,…,10}. Во продолжение се испитува конзистентноста на лаците (startB,startD) и (startD,startB). Ако конференцијата B трае 4 дена и претходи на конференцијата D, таа не може да започне подоцна од 7-миот ден, па нејзиниот домен се стеснува на {4,5,6,7}. Од друга страна, доменот на променливата startD се стеснува на {8,9,10}. Како следни во оваа итерација се проверуваат лаците (startC,startD) и (startD,startC). Со оглед на петтото ограничување, доменот на променливата startC се стеснува на {4,5,6,7}, а доменот на променливата startD останува {8,9,10}. Конечно, заради шестото ограничување, доменот на променливата startD се ограничува дополнително на {8}.

Секогаш кога ќе се промени доменот на некоја променлива, соодветните лаци мора повторно да се проверуваат за конзистентност. Така, со стеснувањето на доменот на променливата startB, лакот (startA, startB) повторно станува неконзистентен, бидејќи такви се вредностите startA=5 и startA=6 и како такви мора да се исфрлат од доменот на променливата startA. Сега ја имаме следната ситуација: startA={1,2,3,4}, startB={4,5,6,7} и лаците (startA, startB) и (startB, startA) се повторно конзистентни. Проверките се прикажани во долните таблици.

Таблица 3.1. Решение на задача 3.6

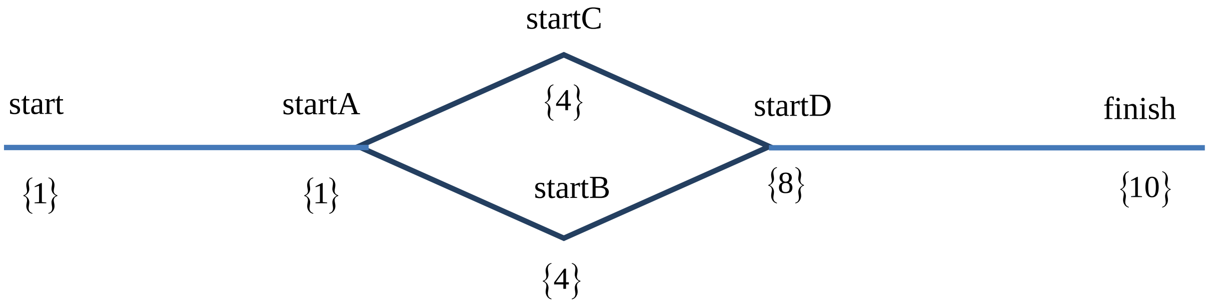
Лак	**Конзистентен**	**Отстранета вредност**	**Домен**
Start-startA	Да	Нема	Start={1},startA={1,2,…,10}
startA-start	Да	Нема	Start={1},startA={1,2,…,10}
startA-startB	Не	startA=7,8,9,10	startA={1,2,…,6}
startB-startA	Не	startB=1,2,3	startB={4,5,…,10}
startA-startC	Да	Нема	startA={1,2,…,6}
startC-startA	Не	startC=1,2,3	startC={4,5,…,10}
startB-startD	Не	startB=8,9,10	startB={4,5,6,7}
startD-startB	Не	startD=1,2,3,4,5,6,7	startD={8,9,10}
startC-startD	Не	startC=8,9,10	startC={4,5,6,7}

startD-startC	Да	Нема	startD={,8,9,10}
startD-finish	Не	startD=9,10	startD={8}
Finish-startD	Не	Finish=1,2,…,8,9	Finish={10}

Лак	**Конзистентен**	**Отстранета вредност**	**Домен**
Start-startA	Да	Нема	Start= {1},startA={1,…,6}
startA-start	Да	Нема	Start={1},startA={1,…,6}
startA-startB	Не	startA=5,6	startA={1,2,3,4}
startB-startA	Да	Нема	startB={4,5,6,7}
startA-startC	Не	Нема	startA={1,2,3,4}
startC-startA	Да	Нема	startC={4,5,6,7}
startB-startD	Не	startB=5,6,7	startB={4}
startD-startB	Не	Нема	startD={8}
startC-startD	Не	startC=5,6,7	startC={4}
startD-startC	Да	Нема	startD={8}
startD-finish	Да	Нема	startD={8}
Finish-startD	Да	Нема	Finish={10}

Лак	**Конзистентен**	**Отстранета вредност**	**Домен**
Start-startA	Да	Нема	Start={1}, startA={1,2,3,4}
startA-start	Да	Нема	Start={1}, startA={1,2,3,4}
startA-startB	Да	startA=2,3,4	startA={1}
startB-startA	Да	Нема	startB={4}
startA-startC	Не	Нема	startA={1}
startC-startA	Да	Нема	startC={4}
startB-startD	Да	Нема	startB={4}
startD-startB	Да	Нема	startD={8}
startC-startD	Да	Нема	startC={4}
startD-startC	Да	Нема	startD={8}
startD-finish	Да	Нема	startD={8}
Finish-startD	Да	Нема	Finish={10}

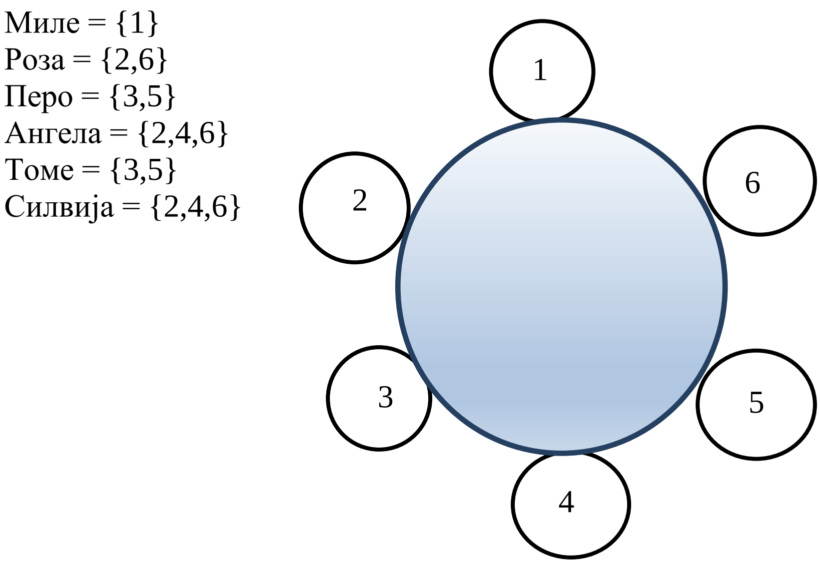
Соодветниот граф на ограничувања е даден на слика 3.5.



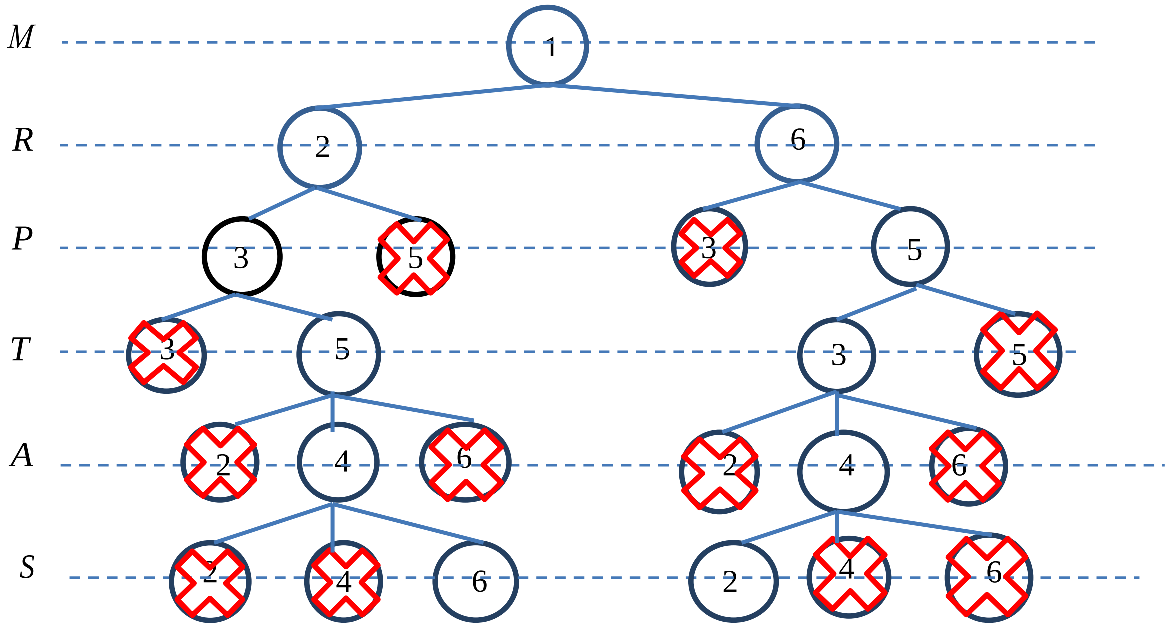
Слика 3.5 Решение на задачата 3.6

3.7. Три брачни парови треба да седнат на маса за шестмина во некој ресторан. Столовите се означени од 1 до 6. Притоа Миле, кој е домаќин на вечерата, седи на стол 1, а неговата сопруга Роза седи до него. Останатите два пара се Перо со Ангела и Томе со Силвија. Паровите треба да се сместат на масата така што ќе седат наизменично маж – жена, при што Ангела сака да седи до Перо, а Перо сака да седи до Роза. Да се реши овој проблем како проблем на пребарување со ограничувања.

Решение: Проблемот е илустриран на слика 3.6. Стеблото на пребарување со ограничувања е прикажано на слика 3.7. За променливи на проблемот се усвоени гостите Миле $= M$, Роза $= R$, Перо $= P$, Ангела $= A$, Томе $= T$, Силвија $= S$, а нивните области се редните броеви на столовите $D_M = D_R = D_T = D_S = D_P = D_A = \{1,2,3,4,5,6\}$. При разгранувањето на јазлите секогаш се поаѓа од јазолот за кој има најмногу ограничувања. Задачата има две решенија: M=1, R=2, P=3, A=4, T=5, S=6 и M=1, R=6, P=5, A=4, T=3, S=2.

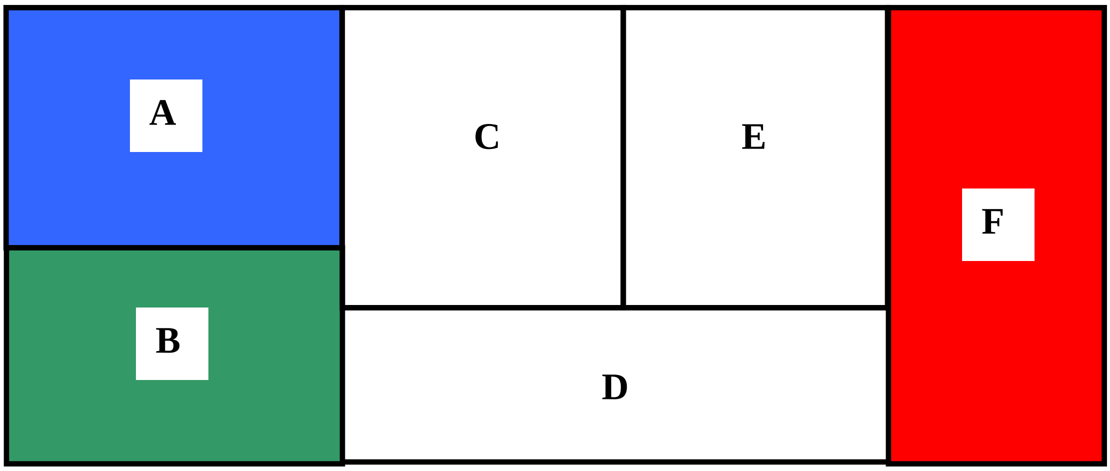


Слика 3.6 Илустрација кон задачата 3.7



Слика 3.7 Стебло на пребарување за задача 3.7

3.8. Дадена е геометриската фигура составена од 6 правоаголници: A, B, C, D, E и F. Фигурата треба да се обои со три бои: црвена, зелена и сина, така што секој правоаголник ќе биде обоен со една боја, а соседните правоаголници не смеат да бидат обоени со иста боја. Во продолжение, правоаголникот A не смее да биде обоен ни црвено ни зелено, правоаголникот B не смее да биде обоен ни црвено ни сино, а правоаголникот F не смее да биде обоен ни зелено ни сино. Фигурата е прикажана на слика 3.8.



Слика 3.8 Илустрација кон задачата 3.8

а) Да се дефинираат променливите на проблемот и нивните области, како и ограничувањата на проблемот. б) Да се состави соодветниот граф на ограничувања и да се означат лаците на ограничувања. в) Да се реши проблемот со примена на постапката за распространување на ограничувањата.

Решение: а) Променливи на проблемот се:

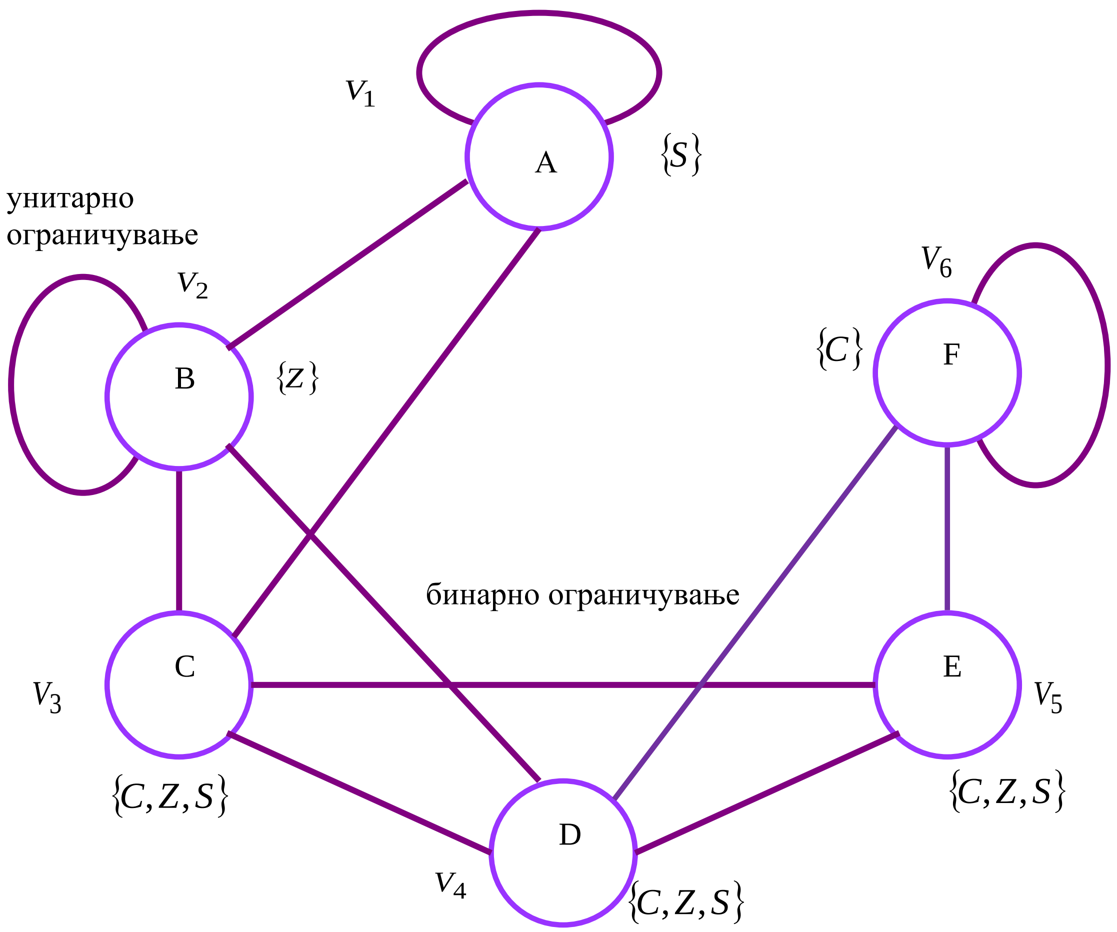
$$V_1 = A,\ V_2 = B,\ V_3 = C,\ V_4 = D,\ V_5 = E,\ V_6 = F \tag{3.8}$$

со следните области:

$$D_1 = \{S\},\ D_2 = \{Z\},\ D_3 = \{C, Z, S\},\ D_4 = \{C, Z, S\},\ D_5 = \{C, Z, S\},\ D_6 = \{C\} \tag{3.9}$$

Унитарни ограничувања на проблемот (ја ограничува областа на променливите): V_1 не смее да биде обоена ни со црвена ни со зелена боја, V_2 не смее да биде обоена ни со црвена ни со сина боја, V_6 не смее да биде обоена ни со зелена ни со сина боја; бинарно ограничување: два соседни правоаголници не смеат да бидат обоени со иста боја.

б) Соодветниот граф на ограничувања е прикажан на слика 3.9.

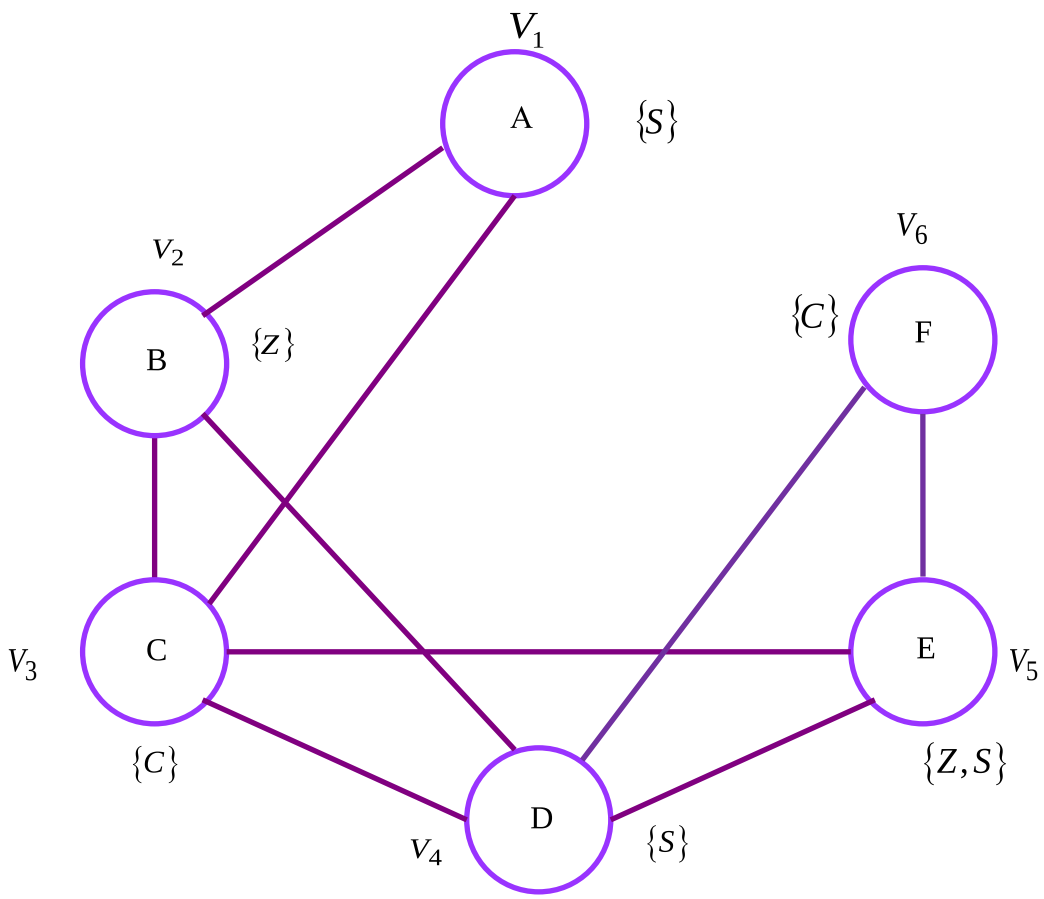


Слика 3.9   Граф на ограничувања за проблемот од задача 3.8

в)

Таблица 3.2. Пребарување со распространување на ограничувањата

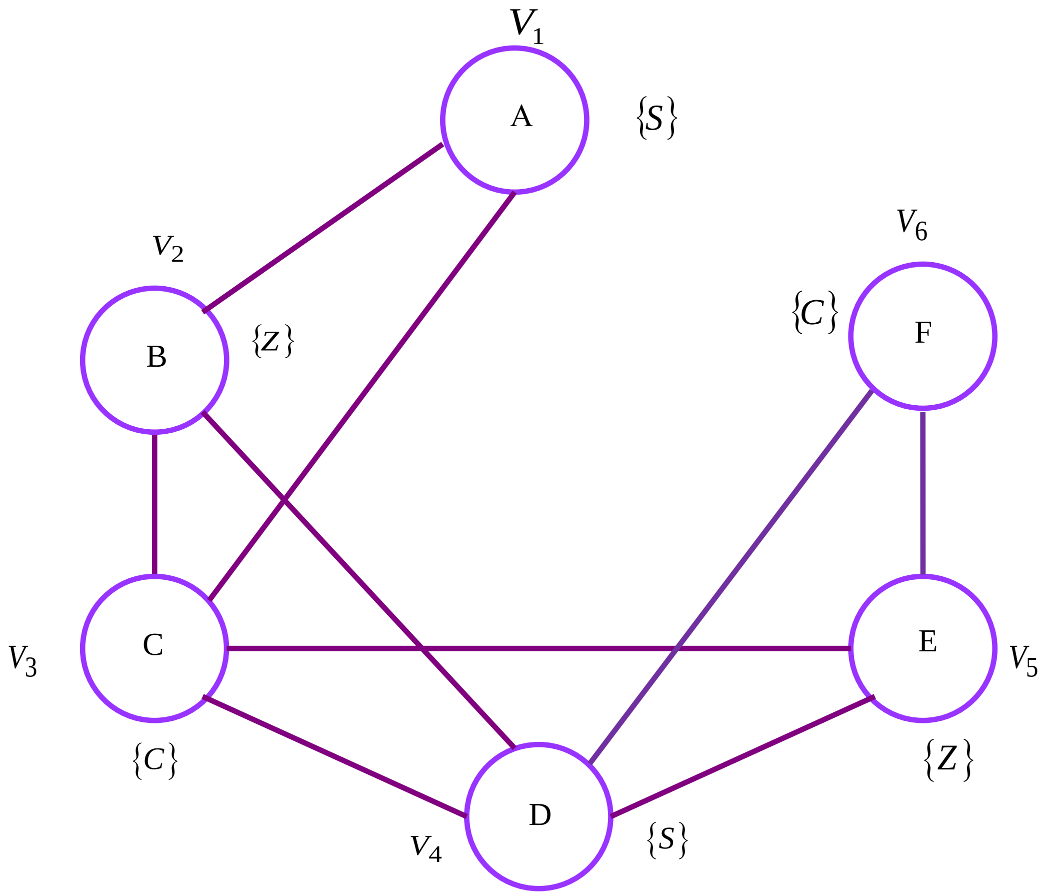
Лак на ограничување	Отфрлена вредност	Лак на ограничување	Отфрлена вредност
$V_1 - V_2$	Нема	$V_3 - V_5$	Нема
$V_2 - V_1$	Нема	$V_5 - V_3$	Нема
$V_1 - V_3$	Нема	$V_4 - V_5$	Нема
$V_3 - V_1$	$V_3 = S$	$V_5 - V_4$	Нема
$V_2 - V_3$	Нема	$V_4 - V_6$	$V_4 = C$
$V_3 - V_2$	$V_3 = Z$	$V_6 - V_4$	Нема
$V_2 - V_4$	Нема	$V_5 - V_6$	$V_5 = C$
$V_4 - V_2$	$V_4 = Z$	$V_6 - V_5$	Нема
$V_3 - V_4$	Нема		
$V_4 - V_3$	Нема		



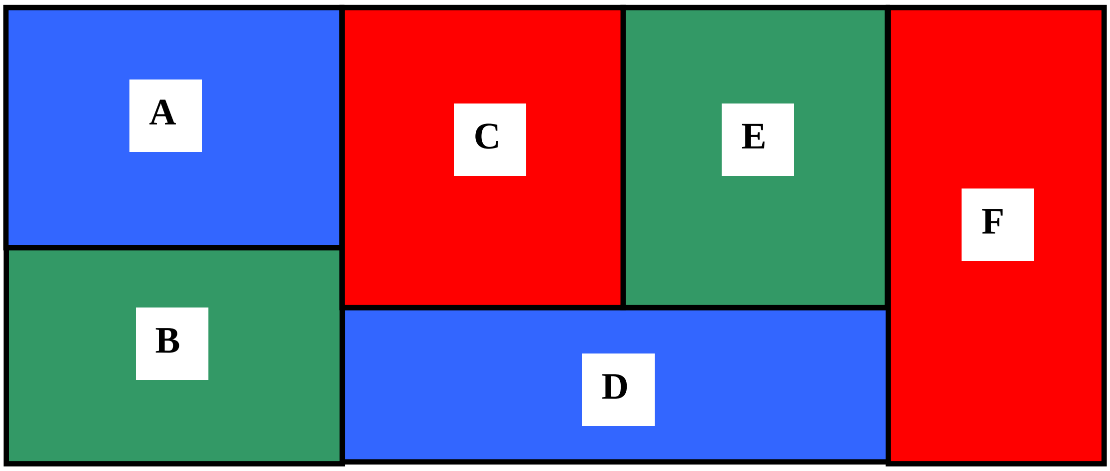
Слика 3.10 Пребарување со распространување на ограничувањата - таблица 3.2

Табилица 3.3. Пребарување со распространување на ограничувањата

Лак на ограничување	Отфрлена вредност	Лак на ограничување	Отфрлена вредност
$V_1 - V_2$	Нема	$V_3 - V_5$	Нема
$V_2 - V_1$	Нема	$V_5 - V_3$	Нема
$V_1 - V_3$	Нема	$V_4 - V_5$	Нема
$V_3 - V_1$	Нема	$V_5 - V_4$	$V_5 = S$
$V_2 - V_3$	Нема	$V_4 - V_6$	Нема
$V_3 - V_2$	Нема	$V_6 - V_4$	Нема
$V_2 - V_4$	Нема	$V_5 - V_6$	Нема
$V_4 - V_2$	Нема	$V_6 - V_5$	Нема
$V_3 - V_4$	Нема		
$V_4 - V_3$	Нема		

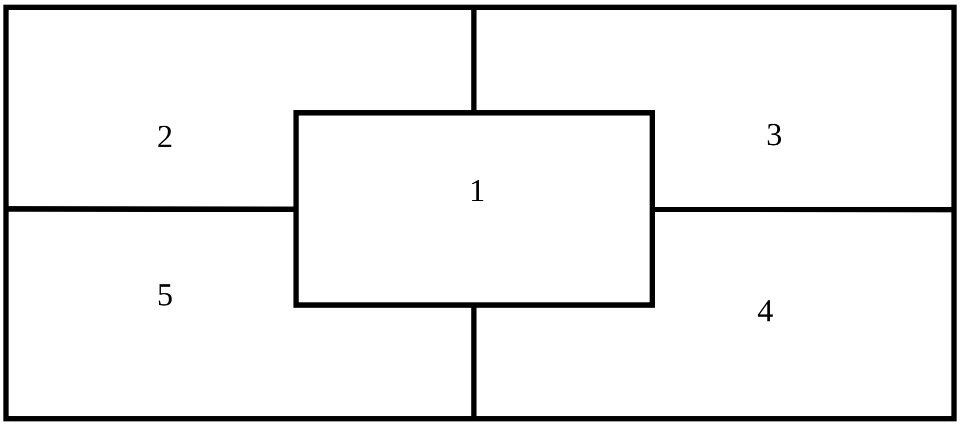


Слика 3.11 Пребарување со распространување на ограничувањата - таблица 3.3



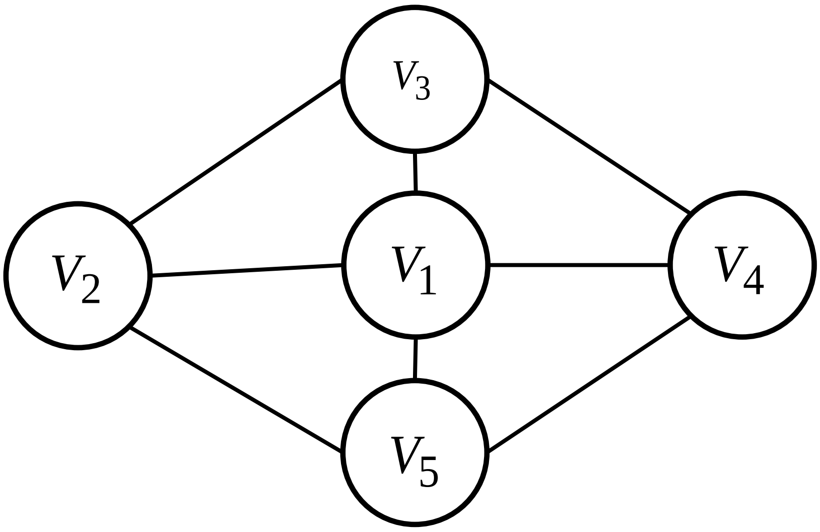
Слика 3.12 Решение на задачата 3.8

3.9. Картата од слика 3.13 треба да се обои со четири бои: R – црвена, G – зелена, B – сина и Y – жолта, така што соседните области секогаш ќе бидат обоени во различни бои. Притоа, областа 1 може да биде обоена само црвено, областа 2 – црвено или зелено, а областа 4 – сино или жолто. Проблемот да се дефинира и реши како проблем на пребарување со ограничувања. Упатство: да се дефинираат променливите, областите на променливите и ограничувањата на поставениот проблем. Да се состави граф и соодветно стебло на пребарување.

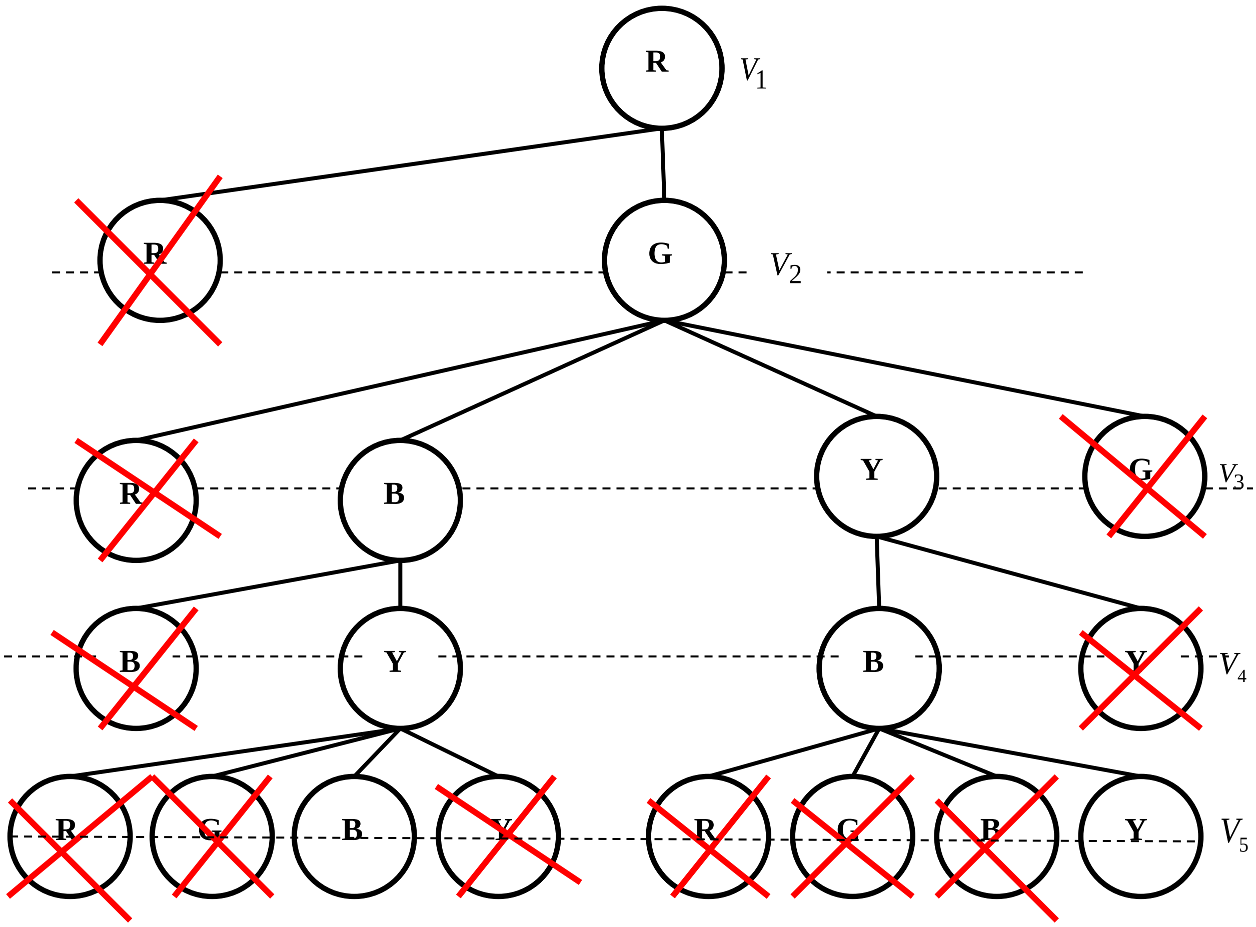


Слика 3.13 Карта со пет области за боење – илустрација кон задачата 3.9

Решение: За променливи на проблемот се усвојуваат областите 1, 2, 3 ,4 и 5. Следствено, проблемот има 5 променливи: V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. Нивните области се: $D_1 = \{R\}$, $D_2 = \{R, G\}$, $D_3 = \{R, G, B, Y\}$, $D_4 = \{B, Y\}$, $D_5 = \{R, G, B, Y\}$. Ограничувањата на проблемот се дека соседните области не смеат да бидат обоени со иста боја. Графот на пребарување кој одговара на поставениот проблем е прикажан на слика 3.14, а соодветното стебло на слика 3.15.

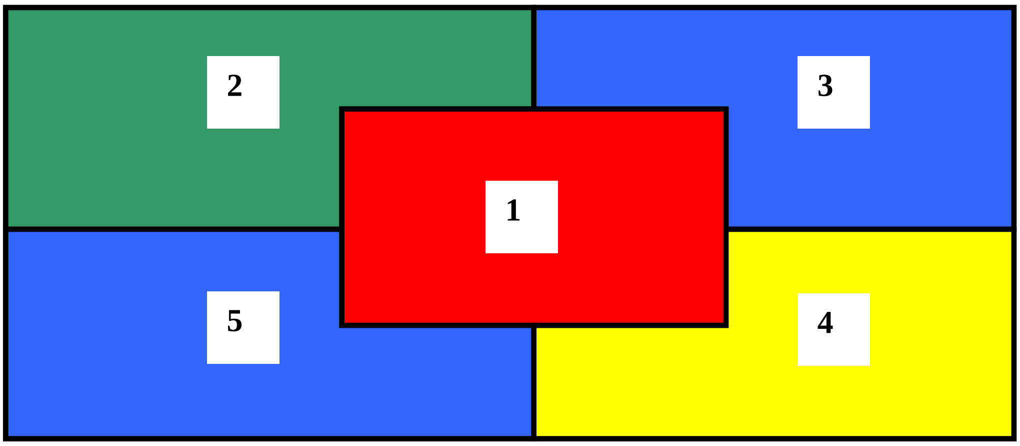


Слика 3.14 Граф на проблемот од слика 3.13

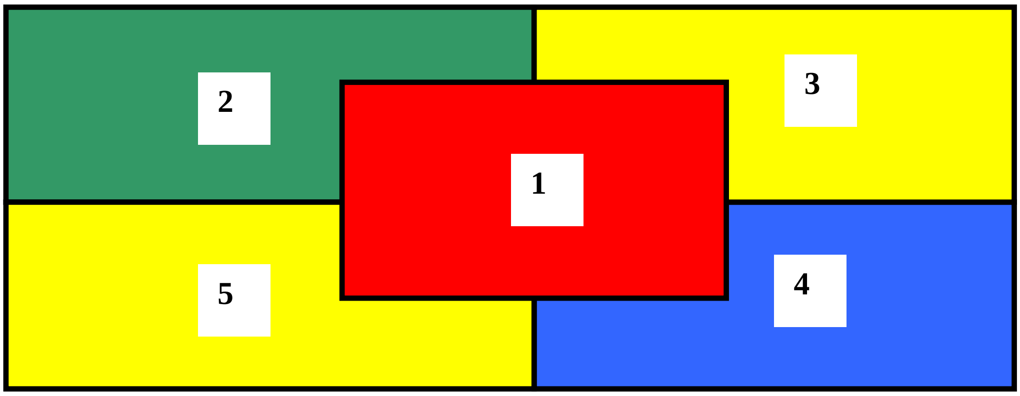


Слика 3.15 Стебло на пребарување за проблемот од задача 3.9

Вака поставениот проблем има две решенија прикажани на слика 3.16 и слика 3.17.



Слика 3.16 Едно решение на задача 3.9



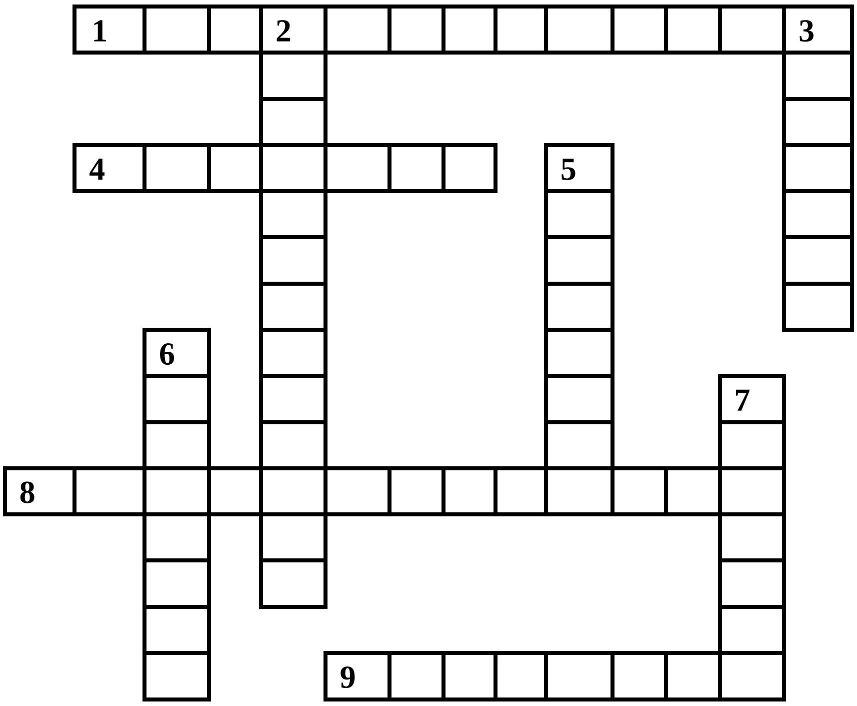
Слика 3.17 Второ решение на поставениот проблем од задача 3.9

3.10. Даден е крстозборот од слика 3.18. Броевите во крстозборот го означуваат зборот што треба да се пополни во крстозборот: 1-хоризонтално, 2-вертикално, 3-вертикално, 4-хоризонтално, 5-вертикално, 6-вертикално, 7-вертикално, 8-хоризонтално и 9-хоризонтално.

Крстозборот треба да се пополни со следните зборови:

PARALLELOGRAM-A	PERPENDICULAR-B	QUADRILATERAL-C
PARALLEL-D	PENTAGON-E	TRIANGLE-F
HEXAGON-G	POLYGON-H	RHOMBUS-I

Пребарувањето се одвива по азбучен редослед. Да се дефинираат променливите на проблемот, нивните области, да се состави соодветно стебло на пребарување и да се реши проблемот.



Слика 3.18 Илустрација на задача 3.10

Решение: Крстозборот има единствено решение. **Почетна состојба** е празниот крстозбор од сликата 3.18. **Цел** е пополнет крстозбор со зборови од листата според дадените ограничувања. **Променливи** на проблемот се полињата во крстозборот. **Област на вредности** на секоја променлива е листа на зборови кои можат да се запишат на соодветната позиција во крстозборот. Така, позицијата 1 хоризонтално бара збор со 13 букви, исто како 2 вертикално и 8 хоризонтално, 3 вертикално бара збор со 7 букви, исто како 4 хоризонтално и 7 вертикално, 5 вертикално бара збор со 8 букви, исто како 6 вертикално и 9 хоризонтално.

Табелица 3.4. Променливи и нивните области од задача 3.10

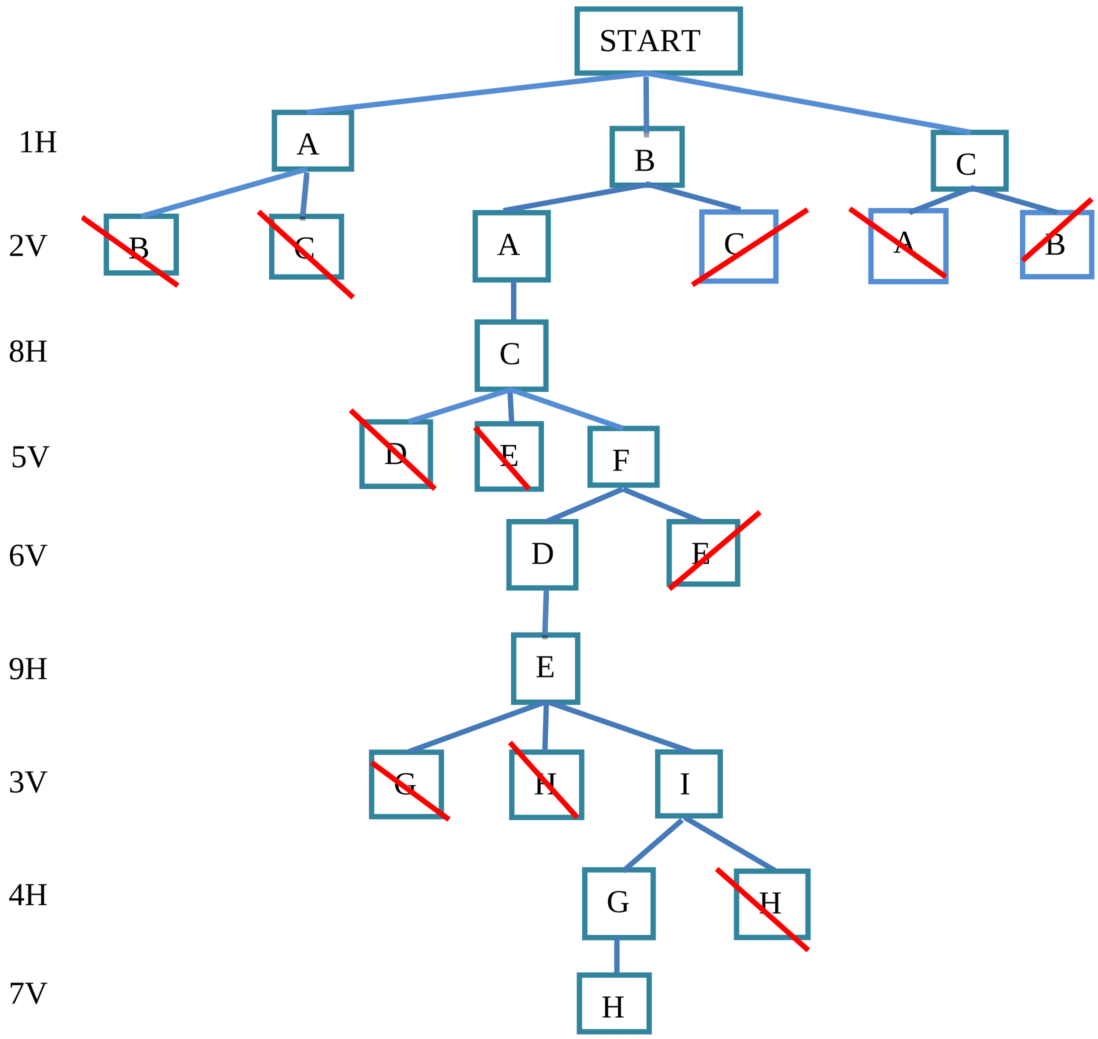
Променлива	**Област**
1 хоризонтално	PARALLELOGRAM, PERPENDICULAR, QUADRILATERAL
2 вертикално	PARALLELOGRAM, PERPENDICULAR, QUADRILATERAL
3 вертикално	HEXAGON, POLYGON, RHOMBUS
4 хоризонтално	HEXAGON, POLYGON, RHOMBUS
5 вертикално	PARALLEL, PENTAGON, TRIANGLE
6 вертикално	PARALLEL, PENTAGON, TRIANGLE
7 вертикално	HEXAGON, POLYGON, RHOMBUS
8 хоризонтално	PARALLELOGRAM, PERPENDICULAR, QUADRILATERAL
9 хоризонтално	PARALLEL, PENTAGON, TRIANGLE

Бидејќи има 9 променливи, а секоја област има 3 можни вредности, вкупниот број можни состојби е $9^3 = 729$. Сите ограничувања се бинарни:

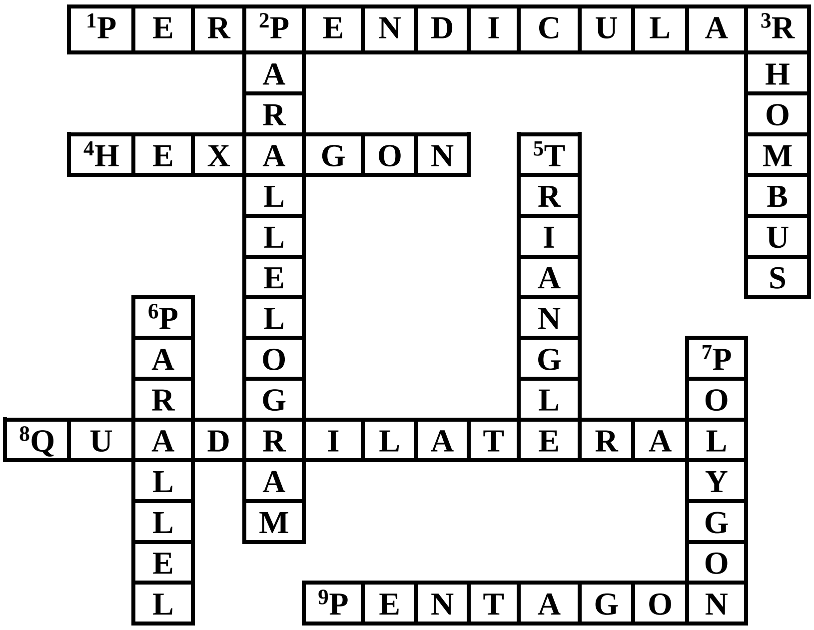
Таблица 3.5. Ограничувања од задачата 3.10

$1\ \text{HORIZONTALNO}\ (4) = 2\ \text{VERTIKALNO}\ (1)$	$8\ \text{HORIZONTALNO}\ (5) = 2\ \text{VERTIKALNO}\ (11)$
$1\ \text{HORIZONTALNO}\ (13) = 3\ \text{VERTIKALNO}\ (1)$	$8\ \text{HORIZONTALNO}\ (10) = 5\ \text{VERTIKALNO}\ (8)$
$4\ \text{HORIZONTALNO}\ (4) = 2\ \text{VERTIKALNO}\ (4)$	$8\ \text{HORIZONTALNO}\ (13) = 7\ \text{VERTIKALNO}\ (3)$
$8\ \text{HORIZONTALNO}\ (3) = 6\ \text{VERTIKALNO}\ (4)$	$9\ \text{HORIZONTALNO}\ (8) = 7\ \text{VERTIKALNO}\ (7)$

За поголема едноставност на стеблото, зборовите се означени со латинските букви по азбучен редослед. Соодветното стебло на пребарување прво по длабочина и решението на крстозборот се прикажани на слика 3.19 и слика 3.20, соодветно.



Слика 3.19 Стебло на пребарување прво по длабочина за проблемот на крстозборот



Слика 3.20   Решение на крстозборот

3.11. Дадени се два броја *S*=456 и *G*=777 од множеството броеви помеѓу 100 и 999. Исто така, дадено е множество т.н. „лоши“ броеви $\{455, 555, 666, 755, 866\}$. Проблемот се состои во трансформирање на бројот *S* во бројот *G* во најмал можен број чекори, при што секој чекор се состои од промена (зголемување или намалување) на само една цифра во бројот за еден. Промената на цифрите да се врши од лево на десно (прво стотките, па десетките и на крај единиците) и надолу па нагоре (прво соодветната цифра се намалува за еден, па се зголемува за еден). Чекорите се со иста цена 1 и подлежат на следните ограничувања:

- не може да се додава на цифра еднаква на 9, ниту да се одзема од цифра еднаква на 0 (со други зборови, не е дозволено „пренесување“ на броеви и цифрите мора да останат во доменот помеѓу 0 и 9)
- не е дозволен чекор со кој тековниот број се трансформира во број од множеството „лоши“ броеви
- иста цифра не може да се промени двапати во два последователни чекори

Проблемот да се реши како проблем на пребарување со ограничувања, при што ќе се примени алгоритамот за пребарување А*. За евристичка функција да се усвои функцијата:

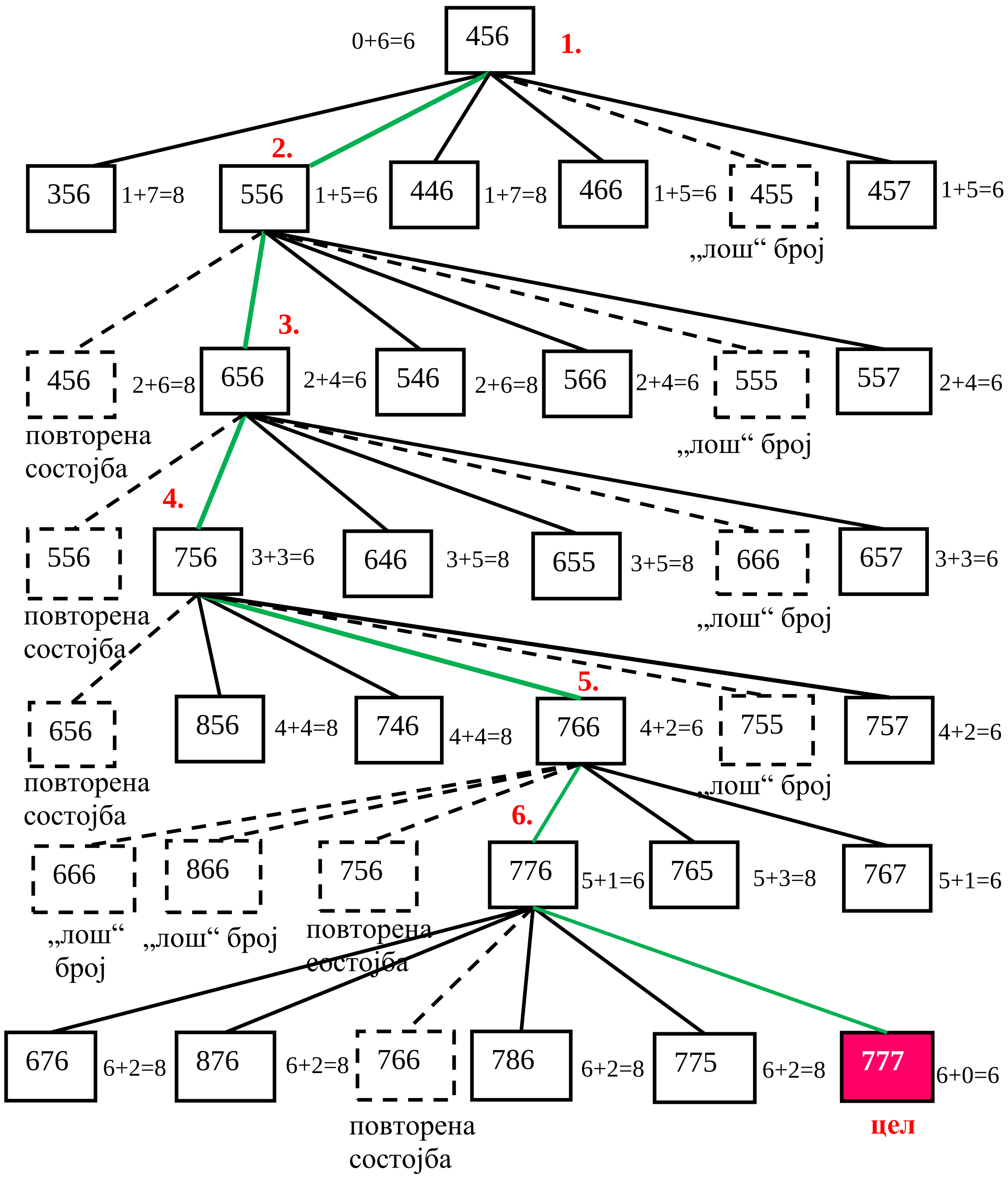
$$h(n) = |G_1 - n_1| + |G_2 - n_2| + |G_3 - n_3| \tag{3.10}$$

каде што G_1, G_2, G_3 се цифрите на целниот број *G*, додека n_1, n_2, n_3 се цифрите на тековниот број.

а) Да се состави соодветно стебло на пребарување. Крај секој јазол да се означат функциите $g(n)$, $h(n)$ и $f(n)$, како и редоследот на разгранување на јазолот. Во случај повеќе јазли да имаат иста $f(n)$ функција, следниот јазол за разгранување се одбира според правилото FIFO (first in – first out). Повторените состојби да не се разгрануваат.

б) Да се објасни зошто дадената функција $h(n)$ е прифатлива евристика за овој проблем.

Одговор: а) Соодветното стебло на пребарување е прикажано на слика 3.21.



Слика 3.21 Решение на задачата 3.11

б) Евристичката функција $h(n)$ ја дефинира „цената“ на најкусиот пат, под претпоставка дека сите чекори се дозволени (множеството „лоши“ броеви е празно) и дозволено е повторување на чекори. Бидејќи реалниот проблем нема ограничувања, стварниот најкус пат може да биде само еднаков или подолг од патот одреден со $h(n)$.

3.12. Нека, под претпоставка, се дадени четири променливи A, B, C и D, кои можат да имаат само по две вредности: $A \in \{0,1\}$, $B \in \{0,1\}$, $C \in \{0,1\}$, $D \in \{0,1\}$. Во продолжение се дадени дозволените вредности за секој пар променливи и истите се прикажани во таблицата 3.6:

$$(A,B):\quad (0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1) \tag{3.11}$$

$$(A,C):\quad (0,1),\ (1,0),\ (1,1) \tag{3.12}$$

$$(A,D):\quad (0,1),\ (1,1) \tag{3.13}$$

$$(B,C):\quad (0,0),\ (1,0),\ (1,1) \tag{3.14}$$

$$(B,D):\quad (1,0),\ (1,1) \tag{3.15}$$

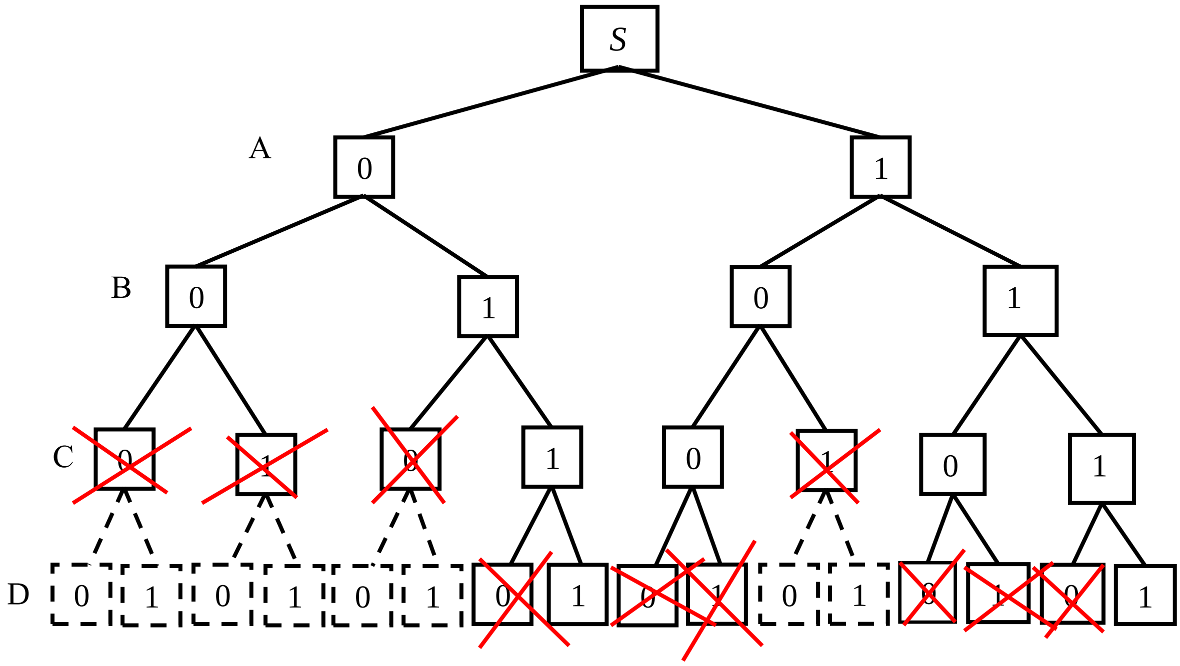
$$(C,D):\quad (1,1) \tag{3.16}$$

Таблица 3.6. Таблица на ограничувања за задачата 3.12

		A		B		C		D	
		0	1	0	1	0	1	0	1
A	0			X	X		X		X
	1			X	X	X	X		X
B	0	X	X			X			
	1	X	X			X	X	X	X
C	0		X	X					
	1	X	X	X	X				X
D	0				X				
	1	X	X		X		X		

Треба да се определат вредностите на променливите во согласност со дадените ограничувања. Да се состави соодветно стебло за дадениот проблем, низ кое ќе се проследи постапката за распространување на ограничувањата. Кое е решението на овој проблем? Колку решенија има?

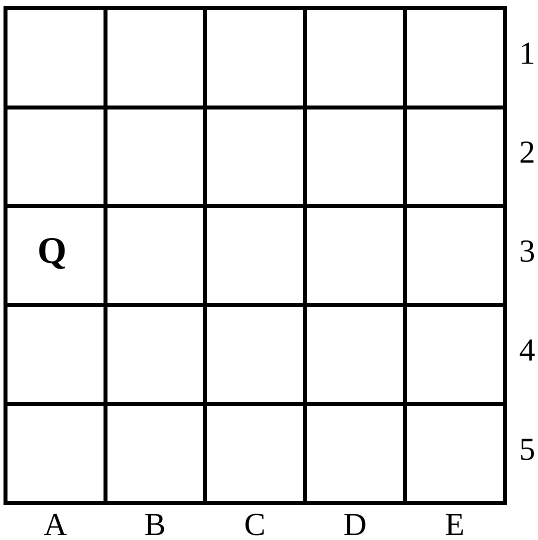
Решение:



Слика 3.22 Стебло на ограничувања за задачата 3.12

Проблемот има две решенија $(A,B,C,D)=(0,1,1,1)$ и $(A,B,C,D)=(1,1,1,1)$.

3.13. Се бара решение на проблемот за распределување 5 кралици на табла со димензии 5×5, така што кралиците нема да се напаѓаат меѓу себе. Почетната позиција на таблата е прикажана на слика 3.23.



Слика 3.23 Илустрација кон задачата 3.13

а) Проблемот да се дефинира како проблем на пребарување со ограничувања, чии променливи се колоните од таблата. (Да се дефинираат: почетната состојба, променливите и нивните области, ограничувањата и целната состојба).

б) Да се состави соодветно стебло на пребарување за дадената почетна позиција, на кое јасно ќе биде означено решението на проблемот. Решението да се прикаже и сликовито, како одредена состојба на таблата. Колку решенија има проблемот?

Решение: а) Дефиниција на проблемот како проблем на пребарување со ограничувања:

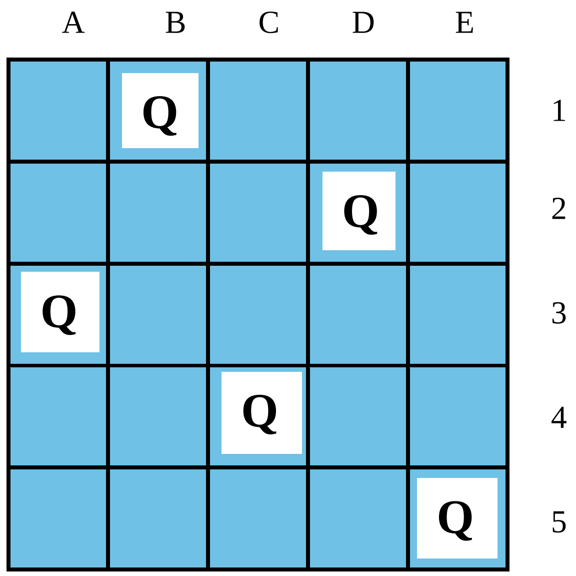
Почетна состојба: Почетната позиција на таблата, прикажана на слика 3.23. (Во најопшт случај, почетната состојба би била празна табла. Во конкретниот случај почетната состојба е кралица на полето 3-А и сите останати полиња на таблата празни.)

Променливи на проблемот се колоните на таблата $V1, V2, V3, V4, V5$, а нивни можни вредности се редните броеви на редиците. Следствено, **области на променливите** $V1,V2,V3,V4,V5$ се: $V_1 \rightarrow D_1 = \{3\}$, $V_2 \rightarrow D_2 = \{1,5\}$, $V_3 \rightarrow D_3 = \{2,4\}$, $V_4 \rightarrow D_4 = \{1,2,4,5\}$, $V_5 \rightarrow D_5 = \{1,2,4,5\}$. (Во најопштиот случај, областите на променливите V_1,V_2,V_3,V_4,V_5 се: $D1 = D2 = D3 = D4 = D5 = \{1,2,3,4,5\}$).

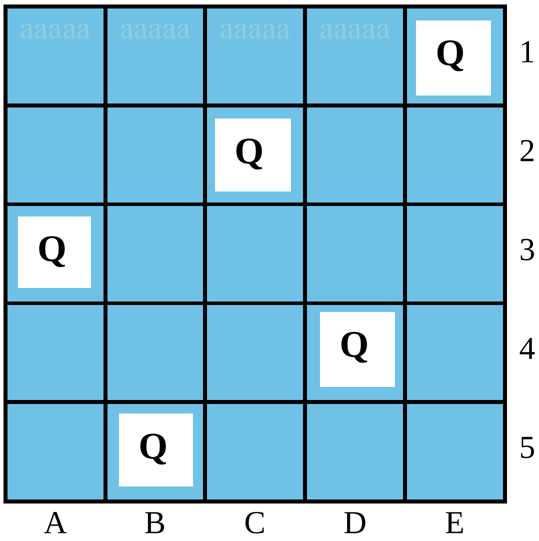
Ограничувања на проблемот: Во полињата кои се наоѓаат на правецот на движење на една кралица (хоризонтално, вертикално и дијагонално) не смее да има друга кралица.

Целна состојба: Кралиците поставени на таблата на полиња од кои не се напаѓаат меѓу себе, прикажана на слика 3.24 односно слика 3.25.

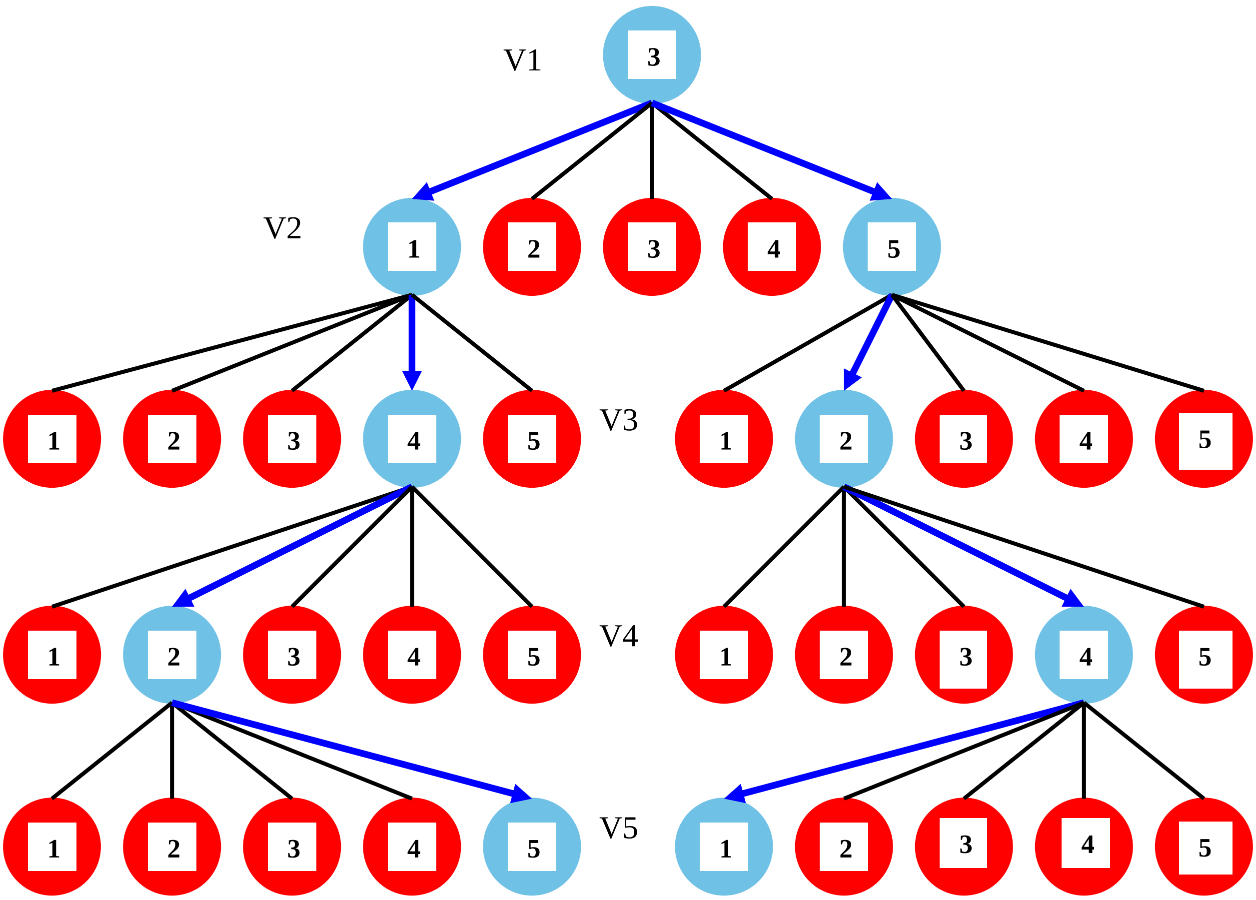
б) Соодветното стебло на пребарување е дадено на слика 3.26. Недозволените состојби се обоени црвено.



Слика 3.24 Едно решение на проблемот од задача 3.13



Слика 3.25 Второ решение на проблемот од задача 3.13



Слика 3.26 Стебло на пребарување за проблемот од задача 3.13

3.14. Дадена е табла со $3 \times 3 = 9$ полиња, кои треба да се обојат така што две соседни полиња во хоризонтален или вертикален правец не смеат да имаат иста боја. Задачата може да се реши само со помош на две бои, на пример, C - црвена и B - бела. Нека проблемот се формулира како проблем на пребарување со ограничувања, при што променливи на проблемот ќе бидат полињата од таблата. Што претставуваат нивни вредности? Дали ќе се променат областите на променливите на проблемот, ако се примени постапката за распространување на ограничувањата? Да се реши проблемот.

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

Слика 3.27 Илустрација кон задачата 3.14

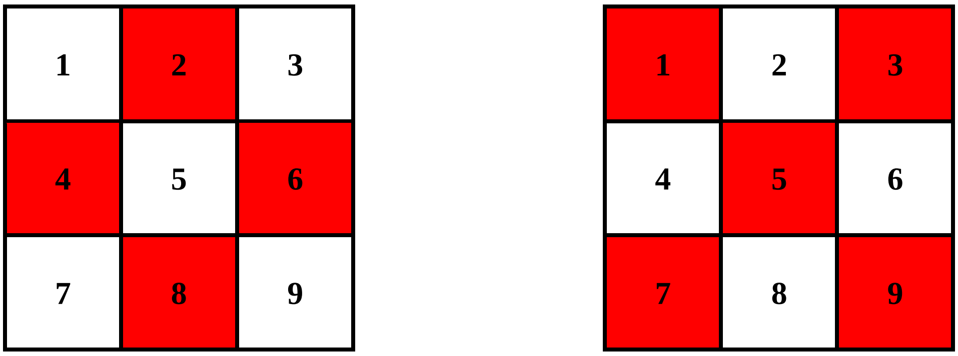
Одговор: За променливи на проблемот се усвојуваат полињата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Следствено, проблемот има 9 променливи: V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9. Нивните области се: $D_i = \{C, B\}$; $i = 1, 2, ..., 9$. Ограничувањата на проблемот се дека соседните области не смеат да бидат обоени со иста боја. Вредности на променливите на проблемот се боите C и B.

Таблица 3.7. Две можни решенија на задача 3.14

$V_1 = C$			$V_1 = B$		
лак	**отфрла**	**домен**	**лак**	**отфрла**	**домен**
$V_1 - V_2$	$V_2 = C$	$D_2 = \{B\}$	$V_1 - V_2$	$V_2 = B$	$D_2 = \{C\}$
$V_2 - V_1$	нема		$V_2 - V_1$	нема	
$V_1 - V_4$	$V_4 = C$	$D_4 = \{B\}$	$V_1 - V_4$	$V_4 = B$	$D_4 = \{C\}$
$V_4 - V_1$	нема		$V_4 - V_1$	нема	
$V_2 - V_3$	$V_3 = B$	$D_3 = \{C\}$	$V_2 - V_3$	$V_3 = C$	$D_3 = \{B\}$
$V_3 - V_2$	нема		$V_3 - V_2$	нема	
$V_2 - V_5$	$V_5 = B$	$D_5 = \{C\}$	$V_2 - V_5$	$V_5 = C$	$D_5 = \{B\}$
$V_5 - V_2$	нема		$V_5 - V_2$	нема	
$V_3 - V_6$	$V_6 = C$	$D_6 = \{B\}$	$V_3 - V_6$	$V_6 = B$	$D_6 = \{C\}$

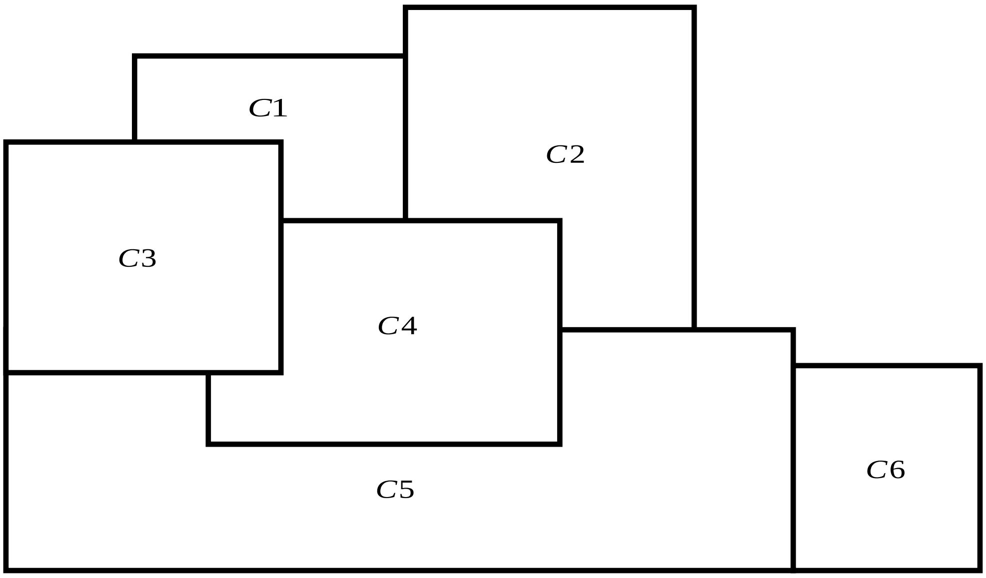
лак	**отфрла**	**домен**	**лак**	**отфрла**	**домен**
$V_6 - V_3$	нема		$V_6 - V_3$	нема	
$V_4 - V_5$	нема		$V_4 - V_5$	нема	
$V_5 - V_4$	нема		$V_5 - V_4$	нема	
$V_4 - V_7$	$V_7 = B$	$D_7 = \{C\}$	$V_4 - V_7$	$V_7 = C$	$D_7 = \{B\}$
$V_7 - V_4$	нема		$V_7 - V_4$	нема	
$V_5 - V_6$	нема		$V_5 - V_6$	нема	
$V_6 - V_5$	нема		$V_6 - V_5$	нема	
$V_5 - V_8$	$V_8 = C$	$D_8 = \{B\}$	$V_5 - V_8$	$V_8 = B$	$D_8 = \{C\}$
$V_8 - V_5$	нема		$V_8 - V_5$	нема	
$V_6 - V_9$	$V_9 = B$	$D_9 = \{C\}$	$V_6 - V_9$	$V_9 = C$	$D_9 = \{B\}$
$V_9 - V_6$	нема		$V_9 - V_6$	нема	
$V_7 - V_8$	нема		$V_7 - V_8$	нема	
$V_8 - V_7$	нема		$V_8 - V_7$	нема	
$V_8 - V_9$	нема		$V_8 - V_9$	нема	
$V_9 - V_8$	нема		$V_9 - V_8$	нема	

На слика 3.28 се прикажани графички двете решенија на набљудуваниот проблем на боење од слика 3.28.



Слика 3.28 Двете решенија на набљудуваниот проблем на боење од слика 3.27

3.15. Да се обои дадената карта, така што соседните земји ќе бидат обоени во различни бои. Боењето да се изврши со три бои: црвена, зелена и сина. Упатство: Да се нацрта соодветен граф на проблемот, да се дефинира проблемот и да се реши со пребарување на соодветното стебло со изнаоѓање барем на едно решение.



Слика 3.29 Илустрација кон задачата 3.15

Решение: Графот на проблемот е прикажан на слика 3.30.

Променливи на проблемот се земјите C_i; $i = 1, 2, ..., 6$

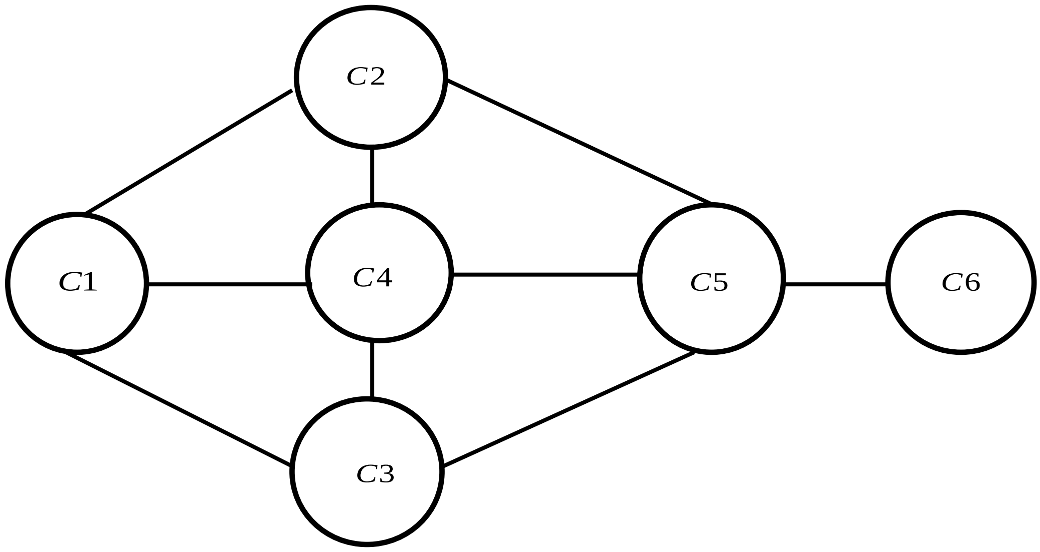
Вредности на променливите се $D_i =$ {црвена, зелена, сина}

Ограничувањата на проблемот се дадени во таблица 3.8.

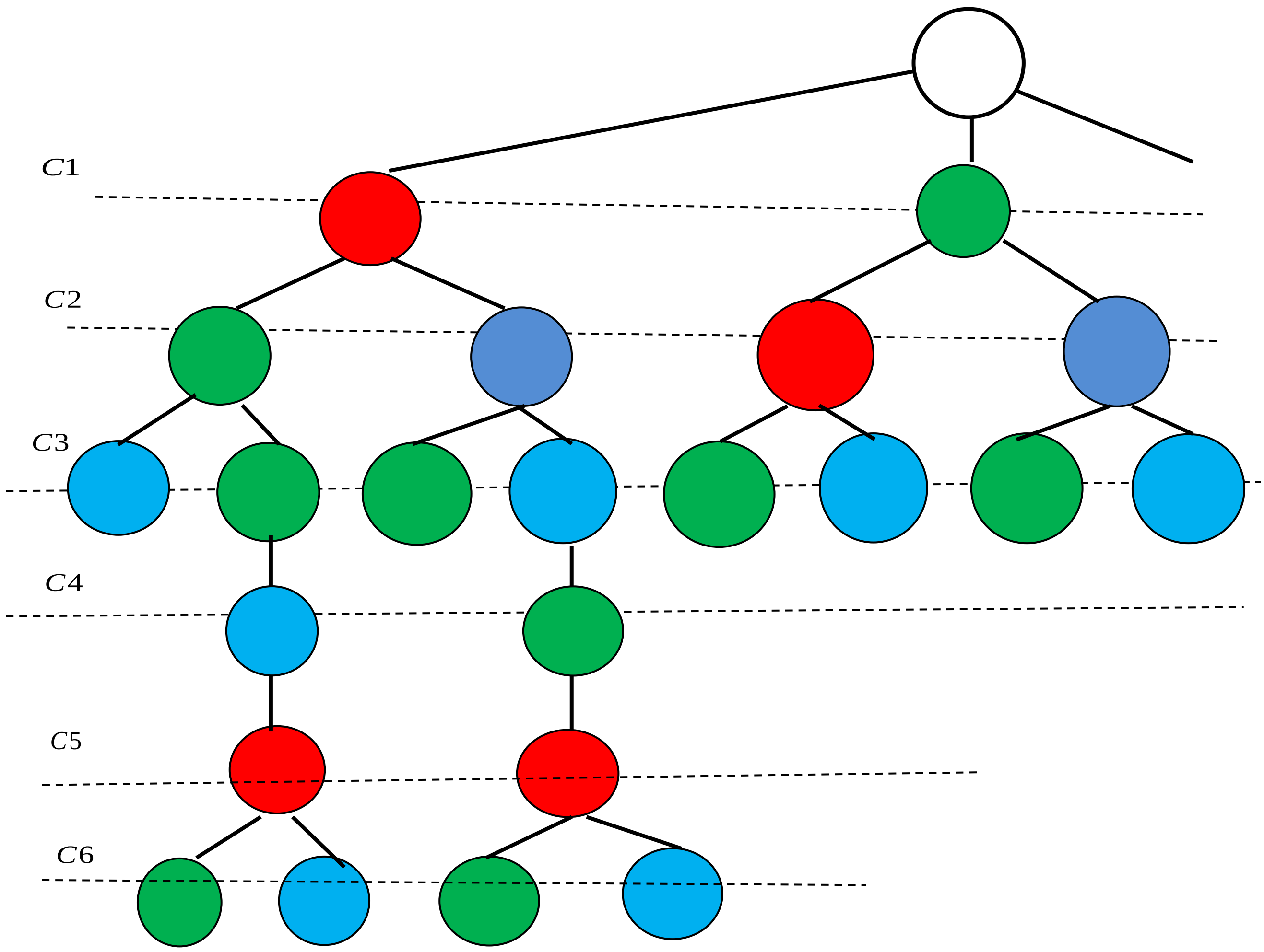
Таблица 3.8. Бинарни ограничувања на проблемот на боење од задача 3.15

$C1 \neq C2$	$C1 \neq C3$	$C1 \neq C4$	
$C2 \neq C1$	$C2 \neq C4$	$C2 \neq C5$	
$C3 \neq C1$	$C3 \neq C4$	$C3 \neq C5$	
$C4 \neq C1$	$C4 \neq C2$	$C4 \neq C3$	$C4 \neq C5$
$C5 \neq C2$	$C5 \neq C3$	$C5 \neq C4$	$C5 \neq C6$
$C6 \neq C5$			

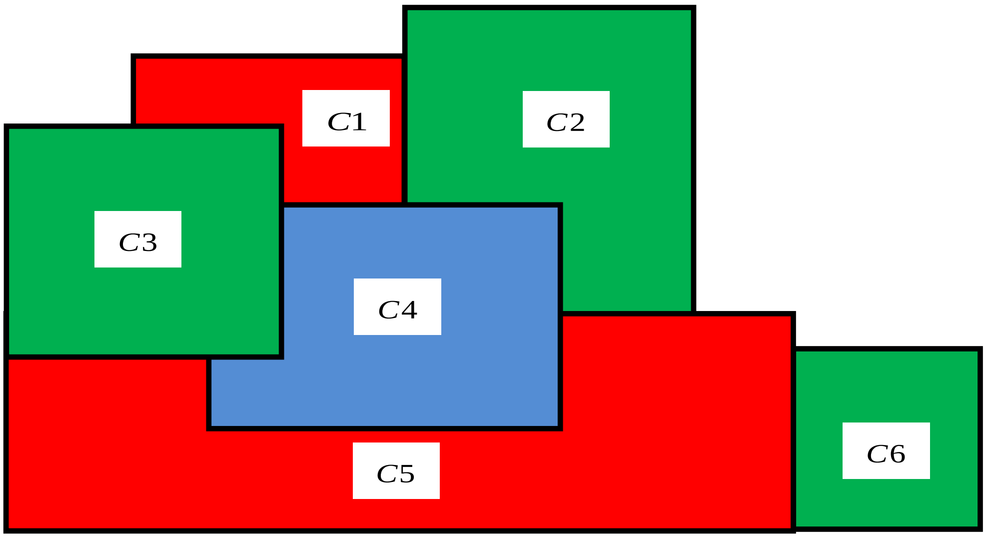
Стеблото на распространување на ограничувањата е дадено на слика 3.31, додека на слика 3.32 графички е прикажано едно можно решение.



Слика 3.30 Граф на проблемот од задачата 3.15



Слика 3.31 Парцијално стебло на распространување на ограничувањата за задачата 3.15



Слика 3.32 Едно од четирите можни решенија на задачата 3.15

3.16. а) Друштвото за патување низ времето на Универзитетот „Знаење“ поканило неколку значајни историски личности да одржат предавање на нивната годишна конференција и потребно е да се направи соодветен распоред за овие предавања. За жал, на располагање се само 4 временски термини од по 1 час помеѓу 13 и 16 часот и распоредот на предавања мора да излезе во пресрет на желбите на одделните групи слушатели. Така, на пример, студентите по физика би биле разочарани доколку двајца големи физичари држат предавање во исто време. За среќа, секој студент припаѓа само на една група слушатели.

Листата на поканети предавачи ја сочинуваат: Ален Тјуринг, Ада Лавлејс, Нилс Бор, Марија Кири, Сократ, Питагора и Исак Њутн.

1. Тјуринг мора рано да се врати дома за да работи на дешифрирање на енигмата, и затоа може да настапи само во 13 часот.
2. Питагора и Сократ патуваат најдолго низ времето и не можат да стасаат за првите два термина.
3. Студентите по физика сакаат да ги слушнат сите физичари: Бор, Кири и Њутн.
4. Студентите по математика сакаат да ги слушнат сите три математичари: Лавлејс, Питагора и Њутн.
5. Членовите на групата Почитувачи на Античка Грција сакаат да ги слушнат предавањата на старите Грци: Питагора и Сократ.
6. Гостите од соседниот Универзитет „Наука“ сакаат да ги чујат женските предавачи: Лавлејс и Кири.
7. Студентите по компјутерски науки сакаат да ги чујат англиските говорници: Тјуринг, Лавлејс и Њутн.
8. И конечно, како творец на овој распоред, вие сакате да ги чуете Кири и Питагора.

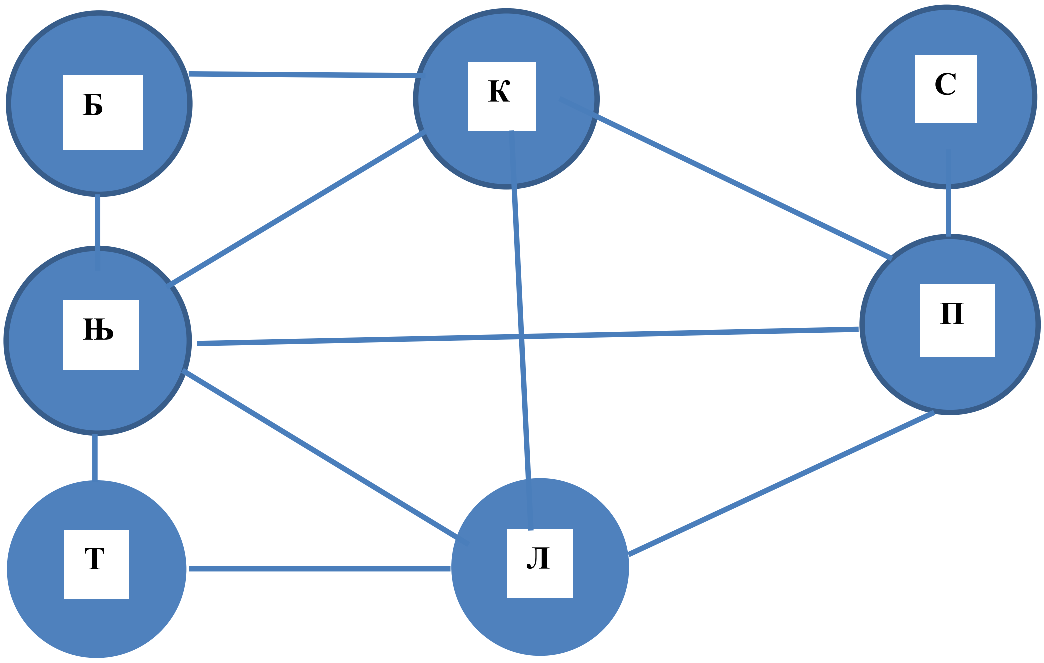
Дефинирајте ги променливите и нивните области за овој проблем на пребарување со ограничувања. Проблемот претставете го со соодветен граф на пребарување со ограничувања. Конечно решете го проблемот односно направете го распоредот со пребарување на соодветно стебло на пребарување.

Решение: Нека како променливи на проблемот ги усвоиме говорниците. Тогаш проблемот има 7 променливи. Начелно, областите на овие променливи ќе бидат временските термини на почеток на предавањето во 13, 14, 15 и 16 часот. За поголема едноставност, тие можат да се одбележат со 1, 2, 3 и 4. Сите говорници можат да предаваат во секој од овие термини освен Тјуринг, кој може да предава само во првиот. Следствено, променливите на проблемот и нивните области се дадени во таблица 3.9.

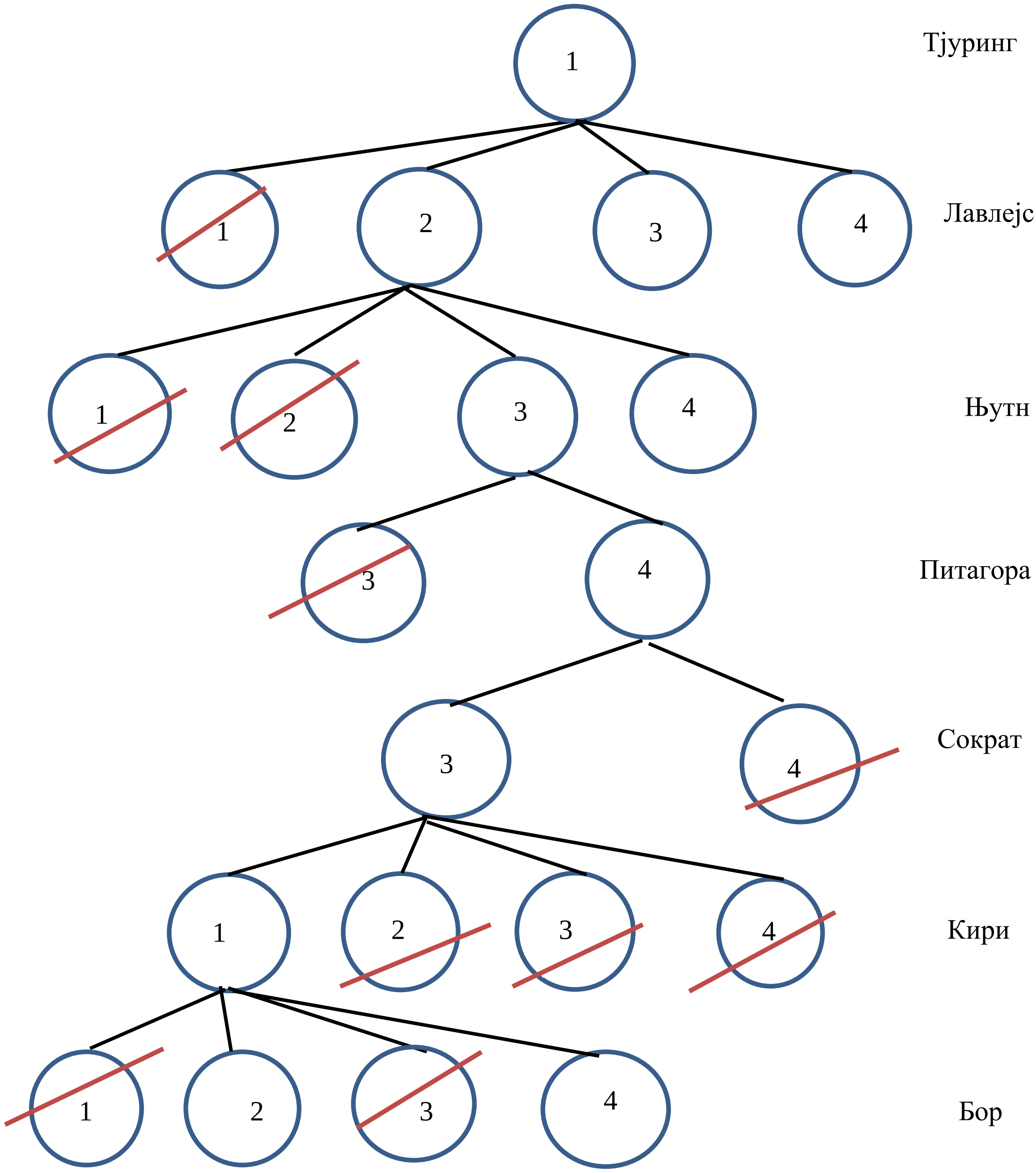
Таблица 3.9. Променливи и нивните области за задача 3.16

Променливи	Област
Т	1
Л	1,2,3,4
Б	1,2,3,4
К	1,2,3,4
С	3,4
П	3,4
Њ	1,2,3,4

Ограничувањата на проблемот се бинарни и кажуваат кои двајца предавачи не можат да одржат предавање во исто време, односно ист термин. Следствено, графот на проблемот ќе изгледа како на слика 3.33.



Слика 3.33 Граф на проблемот од задача 3.16



Слика 3.34 Стебло на пребарување од задача 3.16

Таблица 3.10. Едно решение на задачата 3.16

	Тјуринг, Кири	Лавлејс, Бор	Њутн, Сократ	Питагора, Бор
час	13	14	15	16

3.17. Да се дефинира проблемот и да се најдат цели позитивни броеви помеѓу 0 и 999 кои ја задоволуваат следната многу позната криптоаритметичка сложувалка:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{T} & \mathbf{W} & \mathbf{O} \\ + & \mathbf{T} & \mathbf{W} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{F} & \mathbf{O} & \mathbf{U} & \mathbf{R} \end{array}$$

Решение: Променливи на проблемот се F,O,R,T,U,W, со почетни области $D_i = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\};\ i = F,O,R,T,U,W$ и помошните променливи $X1, X2, X3$ со области $D_{X1} = D_{X2} = D_{X3} = \{0,1\}$. Ограничувањата можат да се искажат на следниот начин:

променливите F,O,R,T,U,W мора да се разликуваат помеѓу себе

$$i \neq j;\ i,j = F,O,R,T,U,W \tag{3.17}$$

водечките цифри во броевите не смеат да бидат нули

$$F \neq 0,\ T \neq 0 \tag{3.18}$$

и собирањето на цифрите по колони мора да ги задоволува следните релации

$$O + O = R + 10 \cdot X1 \tag{3.19}$$

$$W + W + X1 = U + 10 \cdot X2 \tag{3.20}$$

$$T + T + X2 = O + 10 \cdot X3 \tag{3.21}$$

$$X3 = F,\ F \neq 0,\ T \neq 0 \tag{3.22}$$

Од природата на проблемот следува дека $F = X3$ може да биде само 1, додека $X1$ и $X2$ можат да бидат или 0 или 1. Оттука, првобитните области на променливите се стеснуваат на следните множества:

$$D_F = D_{X3} = \{1\} \tag{3.23}$$

$$D_{X1} = D_{X2} = \{0,1\} \tag{3.24}$$

$$D_i = \{0,2,3,4,5,6,7,8,9\};\ i = O,R,U,W \tag{3.25}$$

$$D_T = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \tag{3.26}$$

При разгранувањето, секогаш се одбира променливата со најмногу ограничувања. Оттаму, како следна ќе ја испитуваме променливата T. Од ограничувањето (3.21) следува:

$$X2 + T + T = O + 10 \cdot X3 \Rightarrow O = X2 + 2T - 10 \tag{3.27}$$

од каде што непосредно се заклучува дека T не може да биде 2, 3 и 4. Така областа на T се стеснува на $D_T = \{5,6,7,8,9\}$. За $T = 5$ од (3.27) следува дека $O = X2 + 2T - 10 = X2 + 10 - 10 = X2$, па можните вредности за O ќе бидат $D_0 = \{0,1\}$. Меѓутоа, O не може да биде 0, затоа што тогаш и R ќе биде нула, а тоа не е дозволено со (3.17). Исто така, O не може да биде ни 1, затоа што тогаш $R = 2$ и $X2 = 0$, а тоа се коси со претпоставката дека во овој случај $X2 = 1$. Следствено, T не може да биде ни 5, па неговата област се стеснува на $D_T = \{6,7,8,9\}$. Така за T ја усвојуваме првата можна вредност 6. Сега ограничувањето (3.21) дава:

$$X2 + 2T = O + 10 \cdot X3 \Rightarrow X2 + 12 = O + 10 \Rightarrow O = X2 + 2 \tag{3.28}$$

Па со оглед на можните вредности за $X2$, областа на O ќе се сведе на $D_0 = \{2,3\}$. Нека најнапред за O усвоиме 2. Тогаш $R = 4$ и $X1 = 0$, па од ограничувањето (3.20) се заклучува:

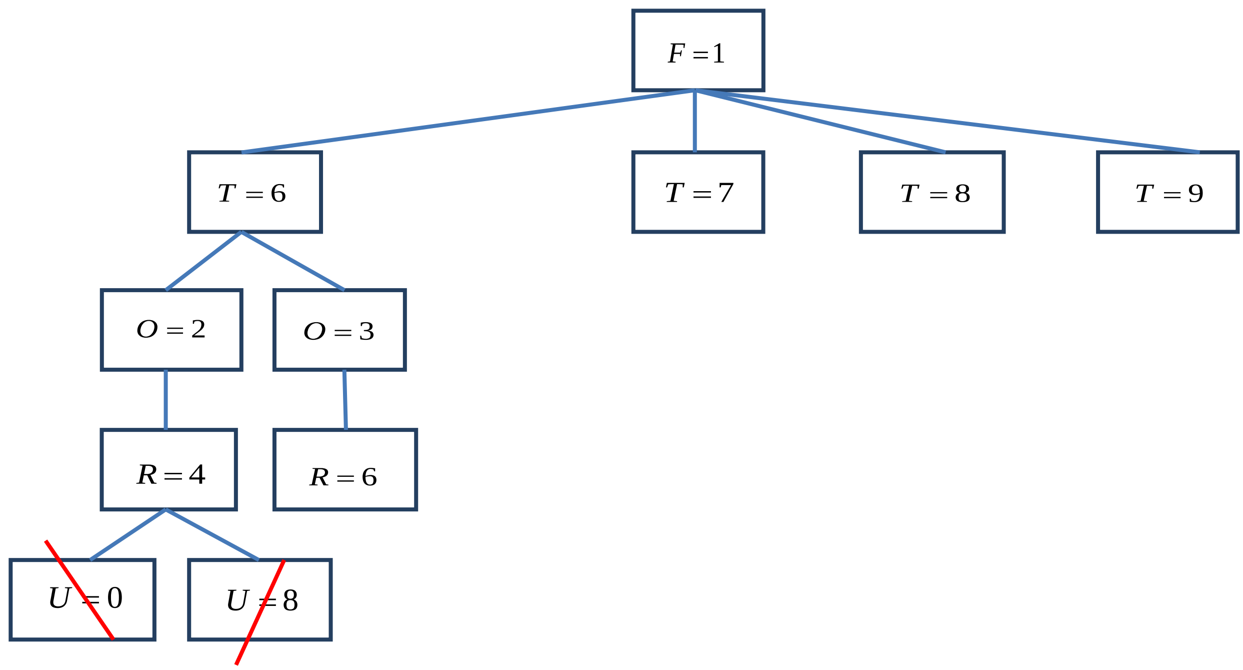
$$X1 + 2W = U + 10 \cdot X2 \Rightarrow U = 2W \tag{3.29}$$

Тоа значи дека U е парен број и може да има само една од следните вредности $D_U = \{0,2,4,6,8\}$, од каде следува дека $D_W = \{0,2,3,4\}$. Меѓутоа, оваа област се стеснува на $D_U = \{0,8\}$, бидејќи $U \neq R = 4$ и $U \neq T = 6$, а $D_W = \{0,4\}$. Меѓутоа, за $U = 0 \Rightarrow W = 0$, што не е дозволено со (3.17), и за $U = 8 \Rightarrow W = 4 = R$ што исто така не е дозволено со (3.17). Затоа ниедна од овие вредности не задоволува, и мораме да се вратиме назад да усвоиме нова вредност за O. Ако сега за O усвоиме 3, веднаш следува дека $R = 6$, што не е прифатливо со оглед на истата вредност на T. Оттаму, вредноста $T = 6$ нема решение. Парцијалното стебло на пребарување до овој момент изгледа како на слика 3.35.

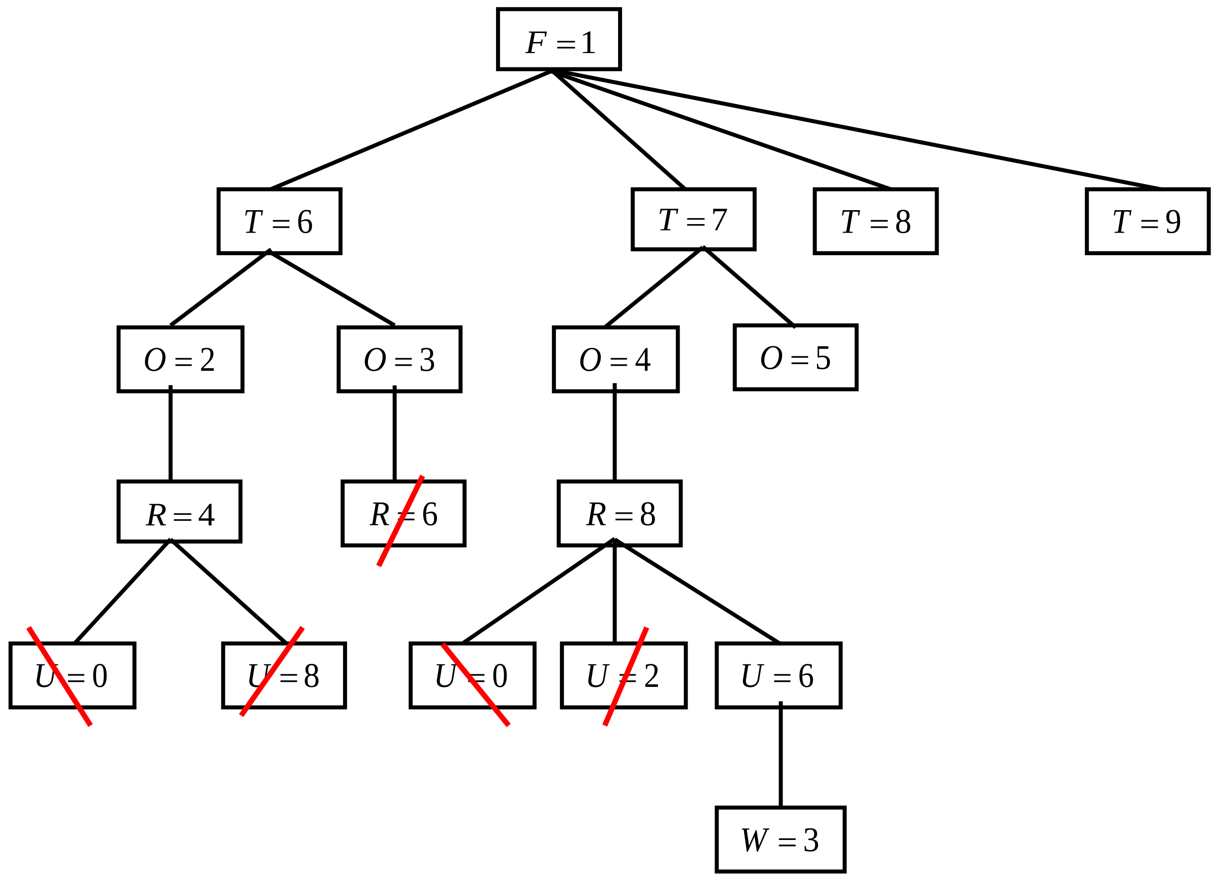
Во продолжение ја тестираме следната можна вредност за T, $T = 7$. Сега ограничувањето (3.21) дава:

$$X2 + 2T = O + 10 \cdot X3 \Rightarrow O + 10 = X2 + 14 \Rightarrow O = X2 + 4 \tag{3.30}$$

па $D_0 = \{4,5\}$. Најнапред ќе ја провериме вредноста $O = 4$, која за резултат има $R = 8$ и $X1 = 0$. Врз основа на ова, ограничувањето (3.20) води кон областа $D_U = \{0,2,6\}$ за променливата U. Меѓутоа, вредностите 0 и 2 не се прифатливи со оглед на дадените ограничувања, додека вредноста 6 е. Така, се добива едно решение на сложувалката, а парцијалното стебло на разгранување до овој момент може да се прикаже како на слика 3.36.

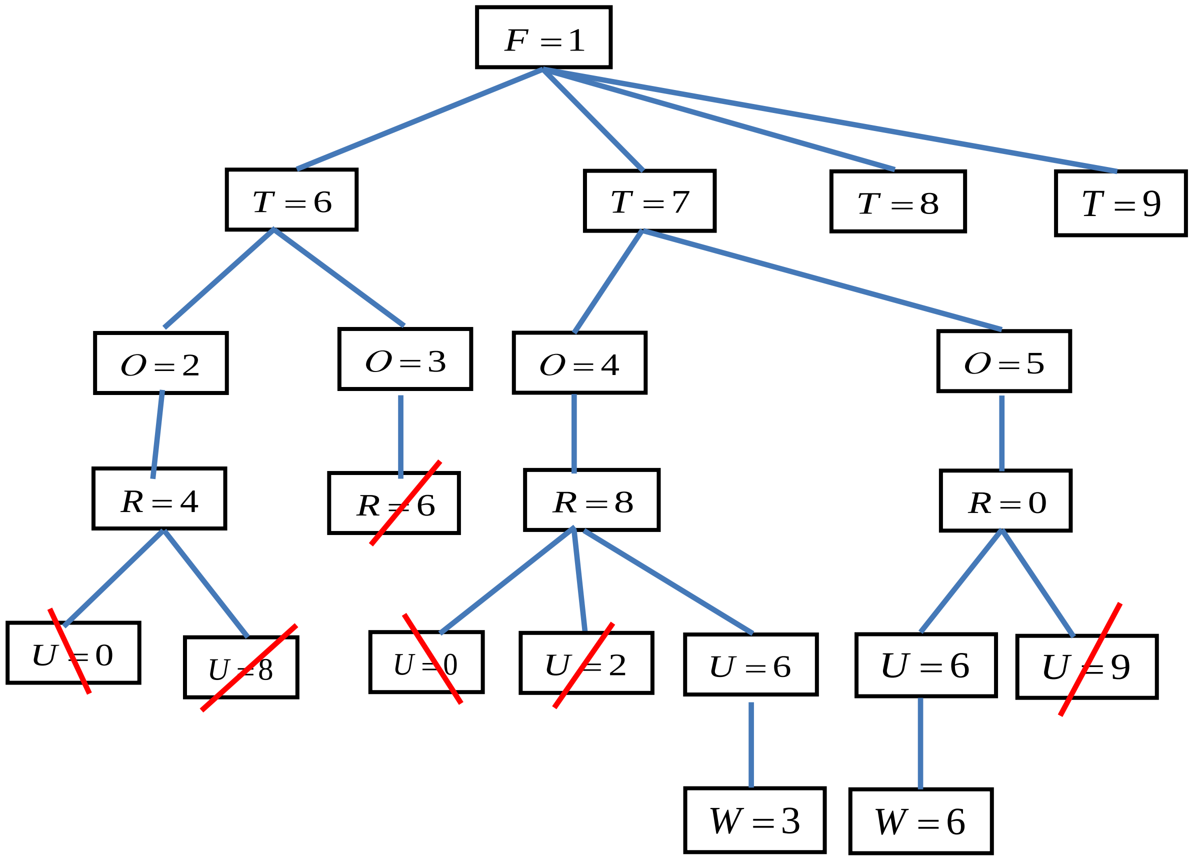


Слика 3.35 Парцијално разгрането стебло на пребарување за задача 3.17



Слика 3.36 Парцијално разгрането стебло на пребарување за задача 3.17

За $O=5$ следува $R=0$ и $X1=1$. Врз основа на ова, ограничувањето (3.20) води кон областа $D_U=\{3,5,7,9\}$ од која мора веднаш да се отфрлат вредностите $U=5=O$ и $U=7=T$, па така се добива $D_U=\{3,9\}$, на која одговара областа $D_W=\{6,9\}$ за променливата W. Вредноста $U=9=W$ не е прифатлива заради (3.17), додека вредноста $U=6$ значи $W=3$ и $X2=1$, што е прифатливо. Така се добива уште едно решение на поставената сложувалка и парцијалното стебло на разгранување до овој момент може да се прикаже како на слика 3.37.



Слика 3.37 Парцијално разгрането стебло на пребарување за задача 3.17

Освен овие две решенија, можни се и други. Во продолжение се дадени неколку можни решенија на поставениот проблем:

$$\begin{array}{r} \mathbf{7\ 3\ 4} \\ +\ \mathbf{7\ 3\ 4} \\ \hline \mathbf{1\ 4\ 6\ 8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\ 6\ 5 \\ +\ 7\ 6\ 5 \\ \hline 1\ 5\ 3\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8\ 6\ 7 \\ +\ 8\ 6\ 7 \\ \hline 1\ 7\ 3\ 4 \end{array}$$

3.18. Да се дефинира проблемот и да се најдат цели позитивни броеви помеѓу 0 и 999 кои ја задоволуваат следната криптоаритметичка сложувалка:

$$\begin{array}{r} Т\ Р\ И \\ +\ Т\ Р\ И \\ \hline Ш\ Е\ С\ Т \end{array}$$

Решение: Променливи на проблемот се $Е, И, Р, С, Т, Ш$, со почетни области $D_i = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $i = Е, И, Р, С, Т, Ш$ и помошните променливи $X1, X2, X3$ со области $D_{X1} = D_{X2} = D_{X3} = \{0,1\}$. Ограничувањата можат да се искажат на следниот начин:

променливите $Е, И, Р, С, Т, Ш$ мора да се разликуваат помеѓу себе

$$i \neq j;\ i, j = Е,\ И,\ Р,\ С,\ Т,\ Ш \tag{3.31}$$

водечките цифри во броевите не смеат да бидат нули

$$Т \neq 0,\ Ш \neq 0 \tag{3.32}$$

и собирањето на цифрите по колони мора да ги задоволува следните релации

$$И + И = Т + 10 \cdot X1 \tag{3.33}$$

$$X1 + Р + Р = С + 10 \cdot X2 \tag{3.34}$$

$$X2 + Т + Т = Е + 10 \cdot X3 \tag{3.35}$$

$$X3 = Ш,\ Ш \neq 0,\ Т \neq 0 \tag{3.36}$$

Од природата на проблемот следува дека $Ш = X3$ може да биде само 1, додека $X1$ и $X2$ можат да бидат или 0 или 1. Оттука, првобитните области на променливите се стеснуваат на следните множества:

$$D_{Ш} = D_{X3} = \{1\} \tag{3.37}$$

$$D_{X1} = D_{X2} = \{0,1\} \tag{3.38}$$

$$D_i = \{0,2,3,4,5,6,7,8,9\};\ i = E, И, P, C \tag{3.39}$$

$$D_T = \{2,3,4,5,6,7,8,9\} \tag{3.40}$$

При разгранувањето, секогаш се одбира променливата со најмногу ограничувања. Оттаму, како следна ќе ја испитуваме променливата T. Од ограничувањето (3.35) следува:

$$X2 + T + T = E + 10 \cdot X3 \Rightarrow E = X2 + 2T - 10 \tag{3.41}$$

од каде што непосредно се заклучува дека T не може да биде 2, 3 и 4. Така областа на T се стеснува на $D_T = \{5,6,7,8,9\}$. Меѓутоа, од (3.33) следува дека T може да биде само парен број, па неговата област дефинитивно се сведува на $D_T = \{6,8\}$.

Нека за T се усвои првата можна вредност 6. Тогаш ограничувањето (3.33) ќе даде:

$$И + И = T + 10 \cdot X1 \Rightarrow 2И = 6 + 10 \cdot X1 \Rightarrow И = 3 + 5 \cdot X1 = \begin{cases} 3, X1 = 0 \\ 8, X1 = 1 \end{cases} \tag{3.42}$$

па со оглед на можните вредности за $X1$, областа на $И$ ќе се сведе на $D_И = \{3,8\}$. Од друга страна, ограничувањето (3.35) има за резултат:

$$X2 + T + T = E + 10 \cdot X3 \Rightarrow E = X2 + 2 = \begin{cases} 2, X2 = 0 \\ 3, X2 = 1 \end{cases} \tag{3.43}$$

па областа на E ќе се сведе на $D_E = \{2,3\}$. Ограничувањето (3.34) дава:

$$X1 + P + P = C + 10 \cdot X2 \Rightarrow C = 2P + X1 - 10X2 = \begin{cases} 2P;\ X1, X2 = 0 \\ 2P + 1;\ X1 = 1, X2 = 0 \\ 2P - 10;\ X1 = 0, X2 = 1 \\ 2P - 9;\ X1 = 1, X2 = 1 \end{cases} \tag{3.44}$$

од каде што произлегуваат следните заклучоци:

$$D_P = \begin{cases} \{4\};\ X1, X2 = 0 \\ \{3,4\};\ X1 = 1, X2 = 0 \\ \Theta;\ X1 = 0, X2 = 1 \\ \{7\};\ X1 = 1, X2 = 1 \end{cases} \tag{3.45}$$

Оттука:

$$P=\begin{cases}4;\ X1=1, X2=0\\3;\ X1=1, X2=0\\4;\ X1=0, X2=1\\7;\ X1=1, X2=1\end{cases}\quad \text{и}\quad C=\begin{cases}8; X1=1, X2=0\\7, X1=1, X2=0\\9; X1=0, X2=1\\5; X1=1, X2=1\end{cases}\tag{3.46}$$

Односно:

$$\begin{array}{r}\mathbf{6\ 4\ 3}\\ \mathbf{+\ 6\ 4\ 3}\\ \hline \mathbf{1\ 2\ 8\ 6}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\mathbf{6\ 3\ 8}\\ \mathbf{+\ 6\ 3\ 8}\\ \hline \mathbf{1\ 2\ 7\ 6}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\mathbf{6\ 4\ 8}\\ \mathbf{+\ 6\ 4\ 8}\\ \hline \mathbf{1\ 2\ 9\ 6}\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\mathbf{6\ 7\ 8}\\ \mathbf{+\ 6\ 7\ 8}\\ \hline \mathbf{1\ 3\ 5\ 6}\end{array}$$

На сличен начин може да се испитаат можните решенија за $T=8$. Во овој случај ограничувањето (3.33) ќе даде:

$$И+И=T+10\cdot X1 \Rightarrow 2И=8+10X1 \Rightarrow И=4+5X1=\begin{cases}4,\ X1=0\\5,\ X1=1\end{cases}\tag{3.47}$$

Од друга страна, ограничувањето (3.35) има за резултат:

$$X2+T+T=E+10\cdot X3 \Rightarrow E=6+X2=\begin{cases}6,\ X2=0\\7,\ X2=1\end{cases}\tag{3.48}$$

Конечно, ограничувањето (3.34) води кон следните заклучоци:

$$D_P = \begin{cases} \Theta;\ X1, X2 = 0 \\ \{3\};\ X1 = 1, X2 = 0 \\ \{5,6\};\ X1 = 0, X2 = 1 \\ \{6\};\ X1 = 1, X2 = 1 \end{cases} \tag{3.49}$$

Оттука произлегуваат следните решенија:

$$P = \begin{cases} 3;\ X1 = 1, X2 = 0 \\ 5;\ X1 = 0, X2 = 1 \\ 6;\ X1 = 0, X2 = 1 \\ 6;\ X1 = 1, X2 = 1 \end{cases} \text{ и } C = \begin{cases} 7; X1 = 1, X2 = 0 \\ 0, X1 = 0, X2 = 1 \\ 2; X1 = 0, X2 = 1 \\ 3; X1 = 0, X2 = 1 \end{cases} \tag{3.50}$$

Односно:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \\ + & \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ + & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ + & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ + & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{8} \end{array}$$

3.19. Да се дефинира проблемот и да се најдат цели позитивни броеви помеѓу 0 и 999 кои ја задоволуваат следната позната криптоаритметичка сложувалка:

$$\begin{array}{cccccc} & \mathbf{C} & \mathbf{R} & \mathbf{O} & \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ + & \mathbf{R} & \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{D} & \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{A} & \mathbf{N} & \mathbf{G} & \mathbf{E} & \mathbf{R} \end{array}$$

(Упатство: доволно е да се изнајде само едно решение.)

Решение: Променливи на проблемот се $A, C, D, E, G, N, O, R, S$ а нивните области $V_i = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $i = A, C, D, E, G, N, O, R, S$. Ограничувањата на проблемот можат да се искажат на следниот начин:

$$S + S = R + 10 \cdot X1 \tag{3.51}$$

$$S + D + X1 = E + 10 \cdot X2 \tag{3.52}$$

$$O + A + X2 = G + 10 \cdot X3 \tag{3.53}$$

$$R + O + X3 = N + 10 \cdot X4 \tag{3.54}$$

$$C + R + X4 = A + 10 \cdot X5 \tag{3.55}$$

$$C \neq 0,\ D \neq 0,\ R \neq 0 \tag{3.56}$$

$$i \neq j;\ i, j = A, C, D, E, G, N, R, S \tag{3.57}$$

каде што $X1, X2, X3, X4, X5$ се единиците што се пренесуваат при собирањето. Бидејќи броевите што се собираат се помеѓу 0 и 9, областите на овие променливи се $V_{X1} = V_{X2} = V_{X3} = V_{X4} = V_{X5} = \{0,1\}$. Меѓутоа, од ограничувањето (3.56) следува дека $D = X5 = 1$ и $V_i = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $i = C, R$. Од друга страна, заради ограничувањето (3.57), областа на сите променливи не може да ја содржи 1, па така произлегува дека $V_i = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $i = C, R$; $V_i = \{0,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; $i = A, E, G, N, O, S$ и $V_D = \{1\}$.

Од ограничувањето (3.51) следува:

$$S + S = R + 10 \cdot X1 \Rightarrow R = 2S - 10X1 = \begin{cases} 2S, & X1 = 0 \\ 2S - 10, & X1 = 1 \end{cases} \tag{3.58}$$

што значи дека R е парен број, па неговата област на можни вредности се стеснува на $V_R = \{2,4,6,8\}$, додека за S следува $V_S = \{1,2,3,4\}$. Меѓутоа, S не смее да биде ни 1 заради ограничувањето (3.57), па нејзината област се сведува на $V_S = \{2,3,4\}$. Бидејќи S има најмногу ограничувања, таа се разгранува како следна променлива. Така, за $S = 2$ областите на останатите променливи ќе се стеснат на $V_C = \{3,4,5,6,7,8,9\}$, $V_i = \{0,3,4,5,6,7,8,9\}$; $i = A, E, G, N, O$ и $V_R = \{4\}$, додека ограничувањето (3.52) дава:

$$S + D + X1 = E + 10 \cdot X2 \Rightarrow E + 2 + D - 10 \cdot X2 = 3;\ X2 = 0 \tag{3.59}$$

Случајот $X2 = 1$ не е можен, а областа на E се стеснува на $V_E = \{3\}$. Тоа значи дека 3 и 4 треба да се исфрлат од областите на преостанатите променливи, кои стануваат $V_C = \{5,6,7,8,9\}$ и $V_i = \{0,5,6,7,8,9\}$; $i = A, G, N, O$.

Од ограничувањата (3.53), (3.54) и (3.55) следува:

$$O+A+X2=G+10\cdot X3 \Rightarrow O+A=G+10X3 \tag{3.60}$$

$$R+O+X3=N+10\cdot X4 \Rightarrow 4+O+X3=N+10\cdot X4 \tag{3.61}$$

$$C+R+X4=A+10\cdot X5 \tag{3.62}$$

Меѓутоа, ограничувањето (3.62) покажува дека A не е можно за ниедна вредност на C освен $C=7$ и $C=8$:

$$C=5 \Rightarrow A=\begin{cases}-3; X4=0\\ -2; X4=1\end{cases} \notin \{0,5,6,7,8,9\} \tag{3.63}$$

$$C=6 \Rightarrow A=\begin{cases}-2; X4=0\\ -1; X4=1\end{cases} \notin \{0,5,6,7,8,9\} \tag{3.64}$$

$$C=7 \Rightarrow A=\begin{cases}-1; X4=0 \notin \{0,5,6,7,8,9\}\\ 0; X4=1 \in \{0,5,6,7,8,9\}\end{cases} \tag{3.65}$$

$$C=8 \Rightarrow A=\begin{cases}0; X4=0 \in \{0,5,6,7,8,9\}\\ 1; X4=1 \notin \{0,5,6,7,8,9\}\end{cases} \tag{3.66}$$

$$C=9 \Rightarrow A=\begin{cases}1; X4=0\\ 2; X4=1\end{cases} \notin \{0,5,6,7,8,9\} \tag{3.67}$$

Меѓутоа, $C=7$ не е прифатливо затоа што:

$$C+R+X4=7+4+1=12=A+10\cdot X5=A+10 \Rightarrow A=2=R \tag{3.68}$$

што е во спротивност со ограничувањето (3.57), а исто така ни $C=8$, затоа што:

$$C+R+X4=8+4+1=13=A+10\cdot X5=A+10 \Rightarrow A=3=E \tag{3.69}$$

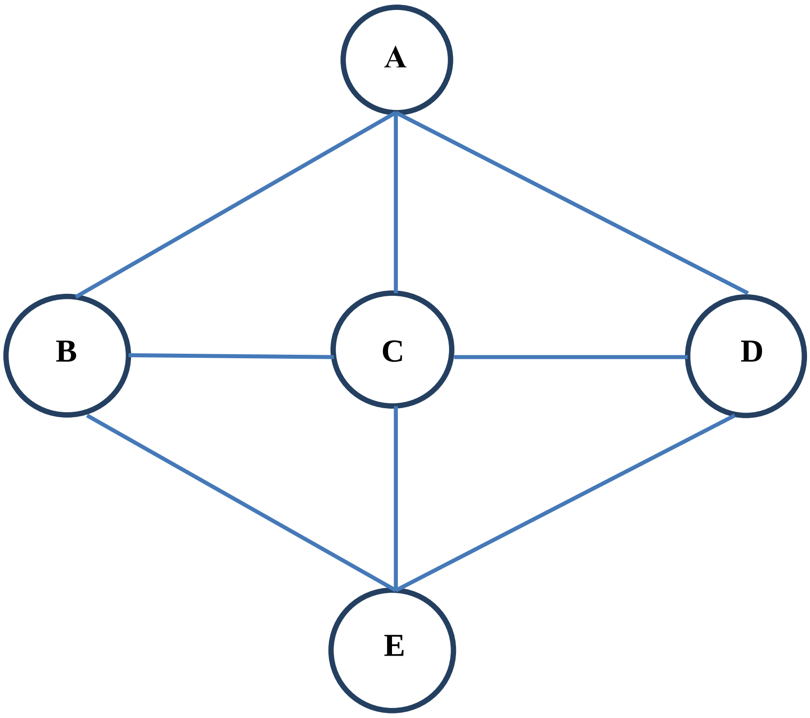
Следствено, S не може да биде 2. За $S=3$ областите на променливите стануваат $V_C=\{2,4,5,7,8,9\}, V_i=\{0,2,4,5,7,8,9\};\ i=A,E,G,N,O$ и $V_R=\{6\}$. Ограничувањето (3.52) дава:

$$S+D+X1=E+10\cdot X2 \Rightarrow E=3+D-10\cdot X2=4; X2=0 \tag{3.70}$$

Случајот $X2=1$ не е можен, а областа на E се стеснува на $V_E=\{4\}$. Тоа значи дека 4 треба да се исфрлат од областите на преостанатите променливи, кои стануваат $V_C=\{2,5,7,8,9\}$ и $V_i=\{0,2,5,7,8,9\};\ i=A,G,N,O$. Од сите вредности на C, можна е само $C=9$ и таа води кон $A=5$, $G=7$ и $O=2$. Така се добива едно решение на дадената сложувалка:

	9	**6**	**2**	**3**	**3**
+	**6**	**2**	**5**	**1**	**3**
1	**5**	**8**	**7**	**4**	**6**

3.20. Даден е графот од слика 3.38. Да се најде решение на проблемот на пребарување на овој граф, така што соседните области нема да имаат исти вредности. Променливите на проблемот се претставени со јазлите A, B, C, D и E, а нивните области на вредности се $\{1,2,3\}$. Дадени се следните унитарни ограничувања: променливата A не смее да има вредност 3, променливата E не смее да има вредност 2, а променливата D не смее да има вредност ни 1 ни 2. Исто така постојат 8 бинарни ограничувања, кои се сведуваат на условот областите поврзани со ист лак да немаат исти вредности.



Слика 3.38   Илустрација кон задача 3.20

Решение: Унитарните ограничувања ги ограничуваат областите вредности на одделните променливи: $A=\{1,2\}$, $D=[3]$ и $E=\{1,3\}$, додека бинарните ограничувања се:

$$A\neq B,\ A\neq C,\ A\neq D,\ B\neq C,\ B\neq E,\ C\neq D,\ C\neq E,\ D\neq E \qquad (3.71)$$

Таблица 3.11. Првично распространување на ограничувања

ограничување	отфрлена вредност	област
$A-B$	нема	
$B-A$	нема	
$A-C$	нема	
$C-A$	нема	
$A-D$	нема	
$D-A$	нема	
$B-C$	нема	
$C-B$	нема	
$B-E$	нема	
$E-B$	нема	
$C-D$	$C=3$	$C=\{1,2\}$
$D-C$	нема	
$C-E$	нема	
$E-C$	нема	
$D-E$	нема	
$E-D$	$E=3$	$E=\{1\}$

$$A=\{1,2\},\ B=\{1,2,3\},\ C=\{1,2\},\ D=\{3\},\ E=\{1\} \tag{3.72}$$

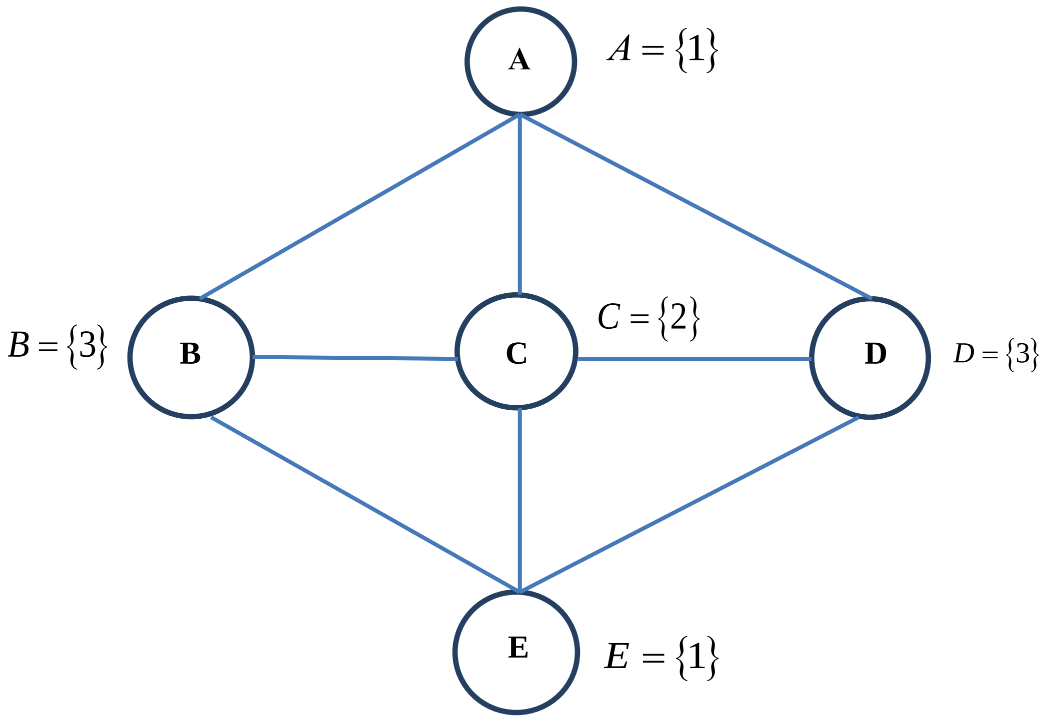
Таблица 3.12. Второ распространување на ограничувања

ограничување	отфрлена вредност	област	ограничување	отфрлена вредност	област
$A-B$	нема		$B-E$	$B=1$	$B=\{2,3\}$
$B-A$	нема		$E-B$	нема	
$A-C$	нема		$C-D$	нема	
$C-A$	нема		$D-C$	нема	
$A-D$	нема		$C-E$	$C=1$	$C=\{2\}$
$D-A$	нема		$E-C$	нема	
$B-C$	нема		$D-E$	нема	
$C-B$	нема		$E-D$	нема	

$$A=\{1,2\},\ B=\{2,3\},\ C=\{2\},\ D=\{3\},\ E=\{1\} \tag{3.73}$$

Таблица 3.13. Трето распространување на ограничувањата

ограничување	**отфрлена вредност**	**област**	**ограничување**	**отфрлена вредност**	**област**
$A-B$	нема		$B-E$	нема	
$B-A$	нема		$E-B$	нема	
$A-C$	$A=2$	$A=\{1\}$	$C-D$	нема	
$C-A$	нема		$D-C$	нема	
$A-D$	нема		$C-E$	нема	
$D-A$	нема		$E-C$	нема	
$B-C$	$B=2$	$B=\{3\}$	$D-E$	нема	
$C-B$	нема		$E-D$	нема	



Слика 3.39 Решение на задача 3.20

3.21. Дадени се три променливи X, Y и Z, со првични области на можни вредности: $D_X=\{1,2,\cdots,10\}$, $D_Y=\{1,2,\cdots,10\}$ и $D_Z=\{1,2,\cdots,10\}$. Меѓутоа, променливите мора да ги задоволуваат следните унитарни ограничувања:

$$C_{XX}:\ X=2n+1;\ n=0,1,2,\cdots \tag{3.74}$$

$$C_{ZZ}:\ Z>7 \tag{3.75}$$

Едновремено, тие мора да ги задоволат и следните бинарни ограничувања:

$$C_{XY}: \; Y = X + 1 \tag{3.76}$$

$$C_{XZ}: \; X + Z = 11 \tag{3.77}$$

$$C_{YZ}: \; Y + Z = 12 \tag{3.78}$$

Задачата да се реши со постапката на распространување на ограничувањата.

Решение: Заради првото унитарно ограничување, областа на променливата X се стеснува на $D_X = \{1,3,5,7,9\}$. Како последица на ова и првото бинарно ограничување, променливата Y може да биде само парен број, па нејзината област станува $D_Y = \{2,4,6,8,10\}$. Конечно, заради второто унитарно ограничување, областа на променливата Z се стеснува на $D_Z = \{8,9,10\}$. Сега, ако се проследат преостанатите две бинарни ограничувања, областите на променливите X, Y и Z, понатаму ќе се стеснат на следните вредности:

$$D_X = \{1,3\} \tag{3.79}$$

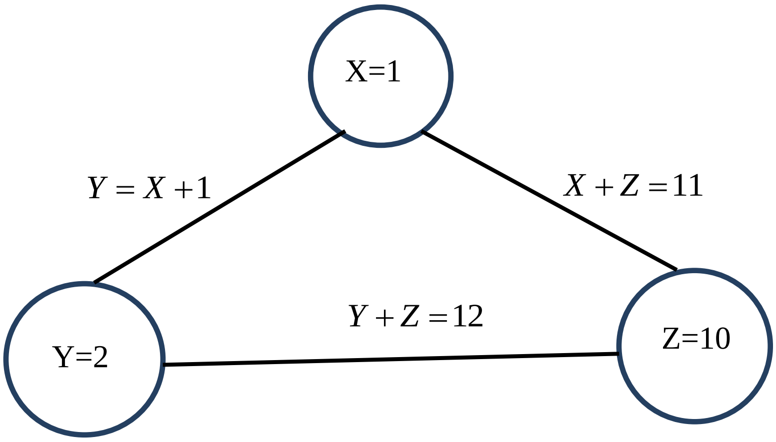
$$D_Y = \{2,4\} \tag{3.80}$$

$$D_Z = \{8,10\} \tag{3.81}$$

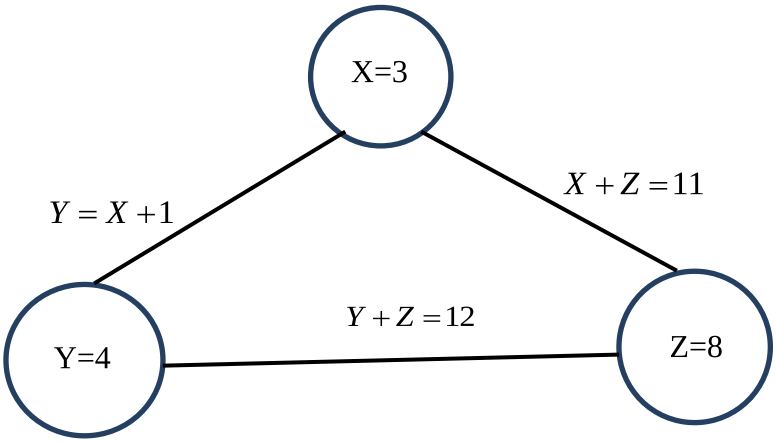
Лесно може да се провери дека за овие вредности на променливите, графот е конзистентен. Тоа значи дека задачата има две можни решенија: $(X1,Y1,Z1) = (1,2,10)$ и $(X2,Y2,Z2) = (3,4,8)$. Распространувањето на ограничувањата детално е претставено во таблица 3.14, а двете решенија на задачата се прикажани на слика 3.40 и слика 3.41.

Таблица 3.14. Распространување на ограничувањата од задача 3.21

лак	**се отфрла**	**област**
$X \to Z$	$X = 5,7,9$	$D_X = \{1,3\}$
$Z \to X$	$Z = 9$	$D_Z = \{8,10\}$
$Y \to Z$	$Y = 6,8,10$	$D_Y = \{2,4\}$
$Z \to Y$	/	/



Слика 3.40 Решение на задачата 3.21



Слика 3.41 Решение на задачата 3.21

3.22. Нека, под претпоставка, се дадени четири променливи A, B, C и D, кои можат да ги имаат само следните четири вредности: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Притоа, нивните вредности треба да ги задоволуваат следните услови:

$$(A, B):\ A < B \tag{3.82}$$

$$(B, C):\ B < C \tag{3.83}$$

$$(C, D):\ C < D \tag{3.84}$$

Треба да се определат вредностите на променливите во согласност со дадените ограничувања. Задачата да се реши со постапката за распространување на ограничувањата. Кое е решението на овој проблем? Колку решенија има?

Решение:

Таблица 3.15. Распространување на ограничувањата од задача 3.22

	врска	се отфрла	област
1.круг	$A-B$	$A=4$	$A\in\{1,2,3\}$
	$B-A$	$B=1$	$B\in\{2,3,4\}$
	$B-C$	$B=4$	$B\in\{2,3\}$
	$C-B$	$C=1,2$	$C\in\{3,4\}$
	$C-D$	$C=4$	$C\in\{3\}$
	$D-C$	$D=1,2,3$	$D\in\{4\}$
2. круг	$A-B$	$A=3$	$A\in\{1,2\}$
	$B-A$	/	$B\in\{2,3\}$
	$B-C$	$B=3$	$B\in\{2\}$
	$C-B$	/	$C\in\{3\}$
	$C-D$	/	
	$D-C$	/	$D\in\{4\}$
3. круг	$A-B$	$A=2$	$A\in\{1\}$
	$B-A$	/	$B\in\{2\}$
	$B-C$	/	$B\in\{2\}$
	$C-B$	/	$C\in\{3\}$
	$C-D$	/	$C\in\{3\}$
	$D-C$	/	$/D\in\{4\}$

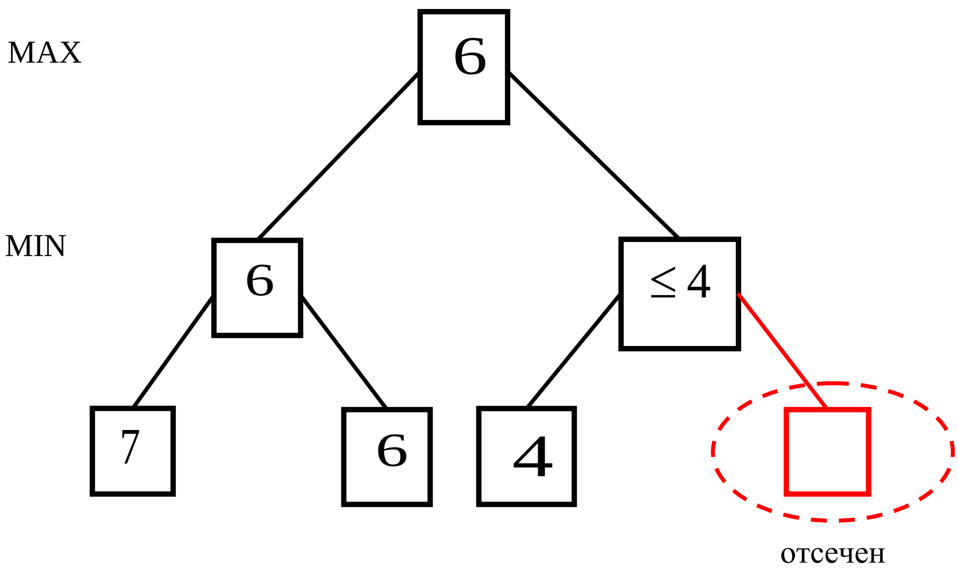
Задачата има само едно решение $A\in\{1\}$, $B\in\{2\}$, $C\in\{3\}$, $D\in\{4\}$, кое ги задоволува поставените ограничувања:

$$A=1<2=B<C=3<4=D \tag{3.85}$$

4. ИГРИ

4.1. Нацртајте го најмалото можно стебло на игра во кое со АЛФА-БЕТА процедурата ќе биде отсечен барем еден лист. Означете ги листовите со вредности и заокружете ги листовите кои се отсекуваат. Нека, под претпоставка, листовите во стеблото се испитуваат од лево во десно.

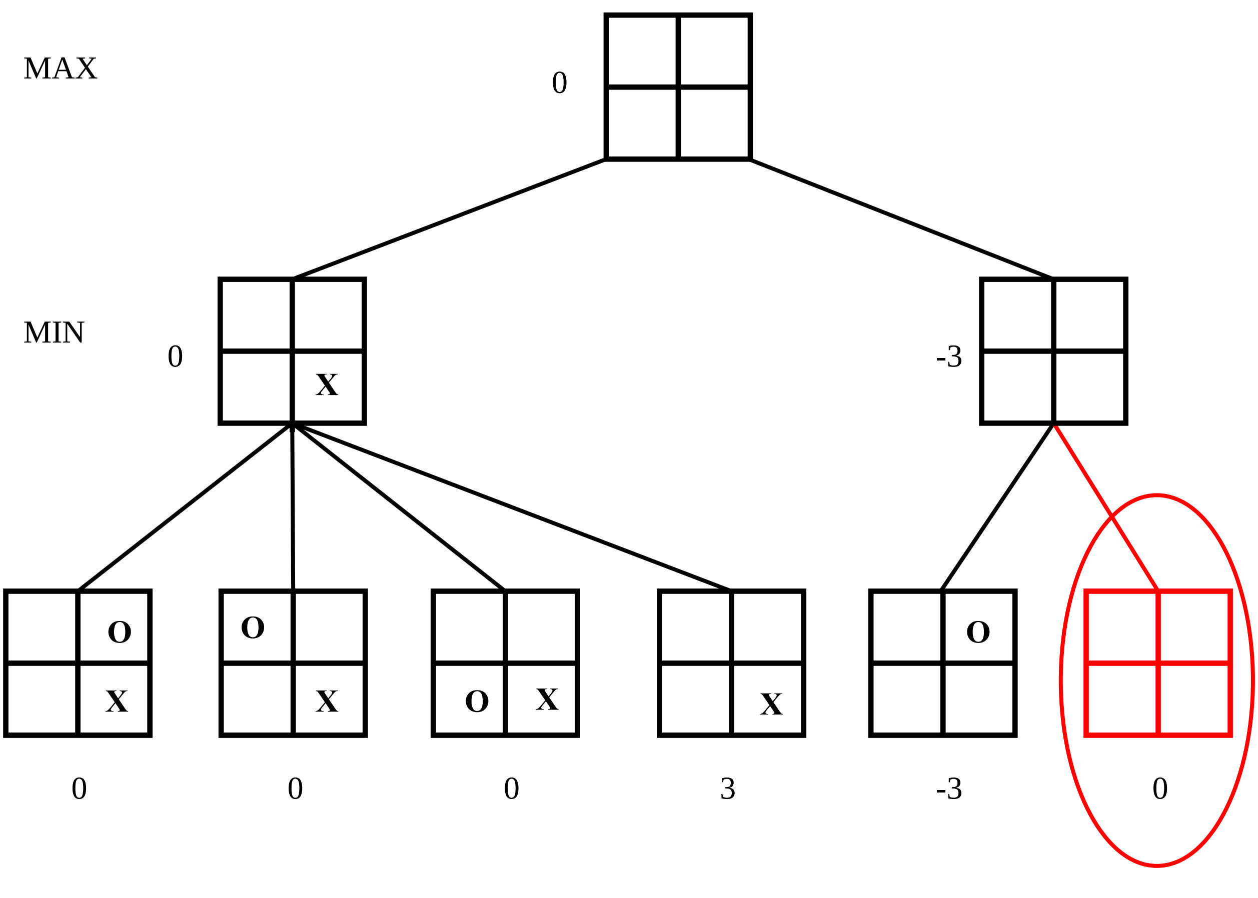
Решение: Бараното стебло е прикажано на слика 4.1. Алгоритамот за пребарување се спушта најнапред по левата гранка од коренот до листовите, кои имаат вредност 7 и 6, соодветно. Бидејќи претходниот јазол е на MIN ниво, тој ќе ја добие помалата вредност од неговите наследници, а тоа е вредноста 6. Така вредноста на коренот, кој се наоѓа на MAX нивото не може да биде помала од 6. Сега алгоритамот се спушта по десната гранка од коренот до листовите и го пронаоѓа листот со вредност 4. Тоа значи дека неговиот претходник не може да има вредност поголема од 4, бидејќи е на MIN ниво. Од друга страна, MAX играчот нема никогаш да го одбере овој потег, затоа што има понеповолна вредност за него. Затоа алгоритамот за пребарување нема потреба да ја проверува вредноста на листот кој се наоѓа на крај десно и тој дел од стеблото ќе биде отсечен.



Слика 4.1. Илустрација кон задачата 4.1

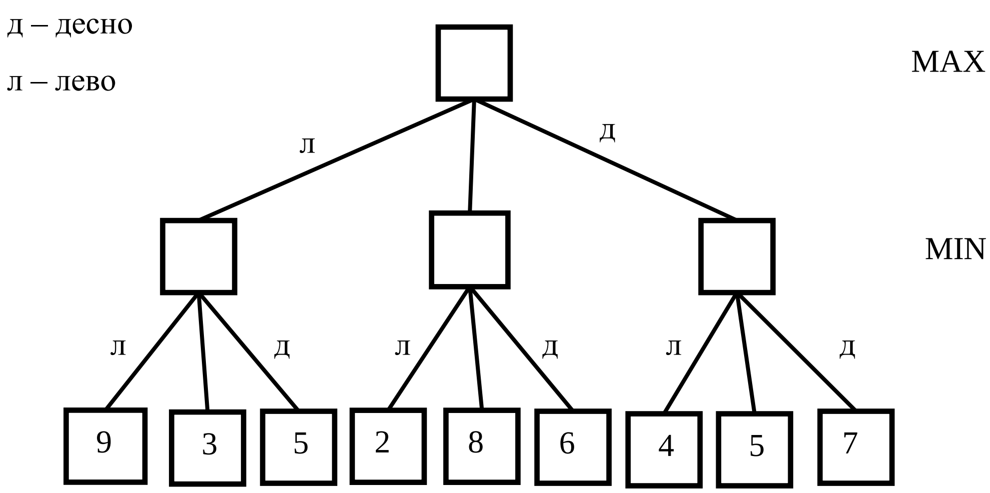
4.2. Набљудувајте ја играта X/O со димензија 2x2, во која секој играч има дополнителна опција да прескокне потег (да не означи ништо во таблицата). Нека, под претпоставка, X е прв на потег. Нацртајте го комплетното стебло на играта до длабочина 2. Во секое ниво испуштете ги сите позиции кои претставуваат пресликување или ротација на некоја друга (вашето стебло треба да има шест листа). Нека, под претпоставка, вредностите за секоја крајна позиција (лист) се добиваат како разлика од 2 можни X-овци во линја и 2 можни O во линија (хоризонтално, вертикално и дијагонално) за таа позиција. Означете ги вредностите на сите листови и внатрешни јазли. Заокружете ги листовите кои ќе бидат отсечени при АЛФА-БЕТА постапката за избор на потег. Листовите во стеблото да се испитуваат од лево во десно.

Решение: Бараното парцијално стебло е прикажано на слика 4.2. Прв влече потез секогаш MAX играчот, па во конкретниот случај тој има избор или да постави X во дадено поле, или да не означи ништо. Следен влече потег MIN играчот и неговите опции се прикажани на сликата 4.2. Вредностите на листовите во ова парцијално стебло се определени во согласност со дефинираната функција за награда. Алгоритамот се спушта од почетниот јазол во лево до листовите, кои имаат вредности 0, 0, 0 и 3, соодветно, па претходниот јазол ќе ја добие вредноста 0, бидејќи е на MIN ниво. Оттука, почетниот јазол ќе има вредност од најмалку 0. Сега алгоритамот се спушта во десно до првиот лист, кој има вредност -3, па претходниот јазол не може да има вредност поголема од -3, бидејќи е на MIN ниво и MIN играчот нема никогаш да одбере потег кој има поголема вредност. Меѓутоа, вредноста -3 е помала од 0, па MAX играчот нема никогаш да одбере потег кој е помал од 0. Затоа алгоритамот нема потреба да го проверува и преостанатиот лист во десно, туку тој дел од стеблото ќе биде отсечен.



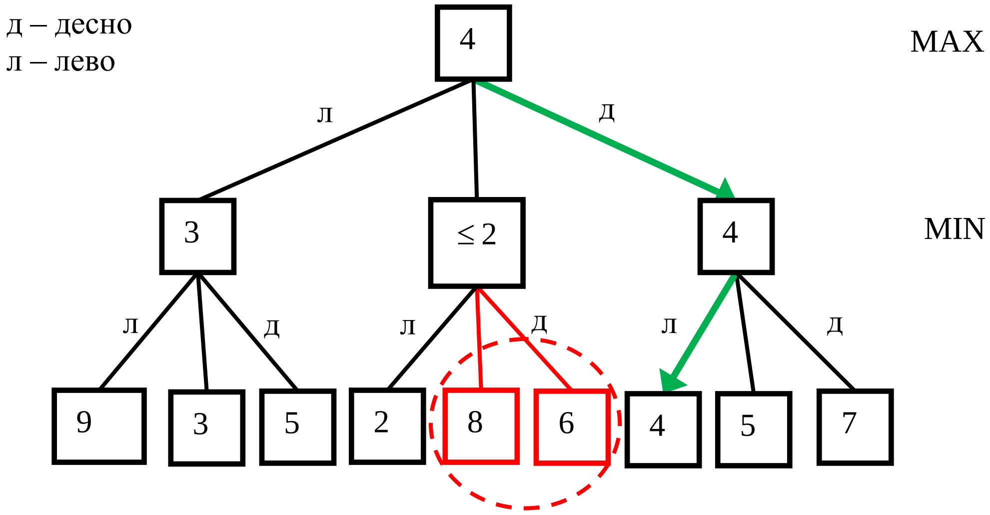
Слика 4.2.Илустрација кон задачата 4.2

4.3. Да се определат оптималните потези на играчите во играта, чие парцијално стебло е прикажано на слика 4.3. Притоа да се примени АЛФА-БЕТА постапката за поткастрување на едно стебло. Дали и кој дел од стеблото ќе биде отсечен со оваа постапка? Нека, под претпоставка, листовите во стеблото се испитуваат од лево во десно.



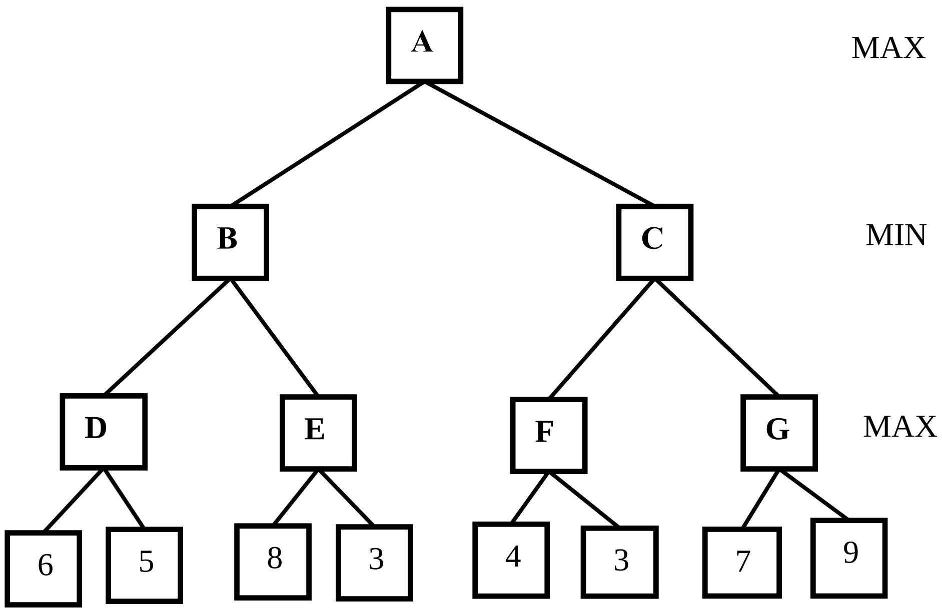
Слика 4.3.Илустрација кон задачата 4.3

Решение: Алгоритамот за пребарување се спушта по левиот крак и преку првиот следбеник од лево до неговите наследници со вредност 9, 3 и 5, соодветно. Бидејќи левиот наследник на коренот е на MIN ниво, тој ќе ја добие најмалата вредност од неговите наследници 3, што значи дека коренот не може да има вредност помала од 3. Потоа програмот се спушта по средниот крак и преку средниот следбеник до неговите наследници, од кои првиот од лево има вредност 2. Тоа значи дека средниот следбеник на коренот не може да има вредност поголема од два. Меѓутоа, бидејќи оваа вредност е помала од вредноста на левиот следбеник 3, играчот на MAX нивото нема никогаш да одбере потег кој води до средниот следбеник. Затоа нема потреба од испитување на преостанатите два негови наследници и овој дел од стеблото ќе биде отсечен со АЛФА-БЕТА постапката. Програмот конечно се спушта по десниот крак од стеблото преку десниот следбеник до неговите наследници со вредност 4, 5 и 7, соодветно. За да ја определи вредноста на десниот следбеник, тој мора да ги испита сите вредности на неговите наследници, додека тие се поголеми од 3, како што е овде случај. Така десниот следбеник на коренот ја добива најмалата вредност од неговите наследници 4. Со тоа, коренот ја добива вредноста 4, MAX играчот го влече потегот во десно кон десниот следбеник со вредност 4, а MIN играчот го влече потегот во лево кон својот краен лев наследник со истата вредност. Решението на задачата е прикажано на слика 4.4. Оптималните потези на играчите зе означени со зелени линии, а отсечените јазли и гранки со црвени линии.



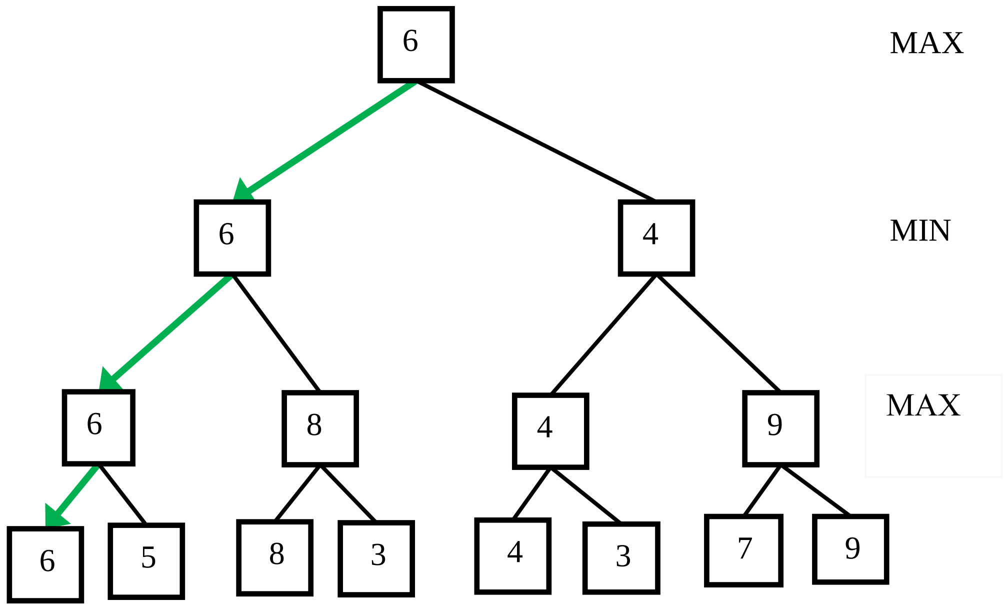
Слика 4.4.Решение на задачата 4.3

4.4. Дадено е парцијалното стебло на некоја игра од слика 4.5. Да се определат оптималните потези на играчите со МИН-МАКС постапката. Потоа да се примени АЛФА-БЕТА постапката за поткастрување на едно стебло и да се определат деловите од стеблото кои ќе бидат отсечени со оваа постапка. Колкав е бројот јазли што се испитуваат со секоја од двете постапки? Нека, под претпоставка, листовите на стеблото се испитуваат од лево во десно.

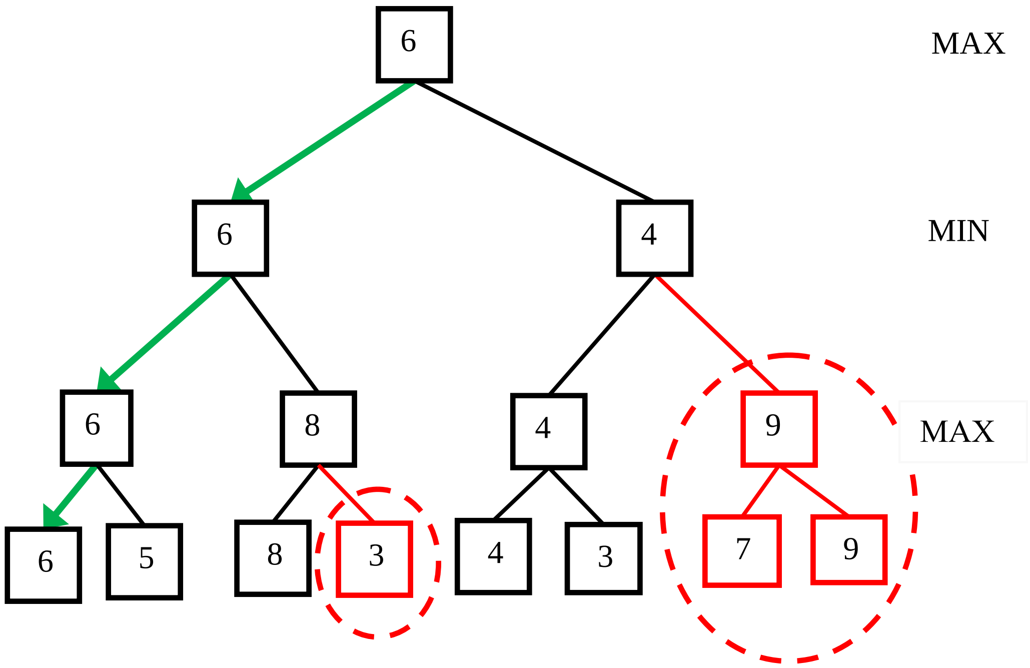


Слика 4.5.Илустрација кон задачата 4.4

Решение: Решението на задачата 4.4 со МИН-МАКС постапката е прикажано на слика 4.6, а решението со АЛФА-БЕТА постапката за поткастрување на едно стебло е прикажана на слика 4.7.



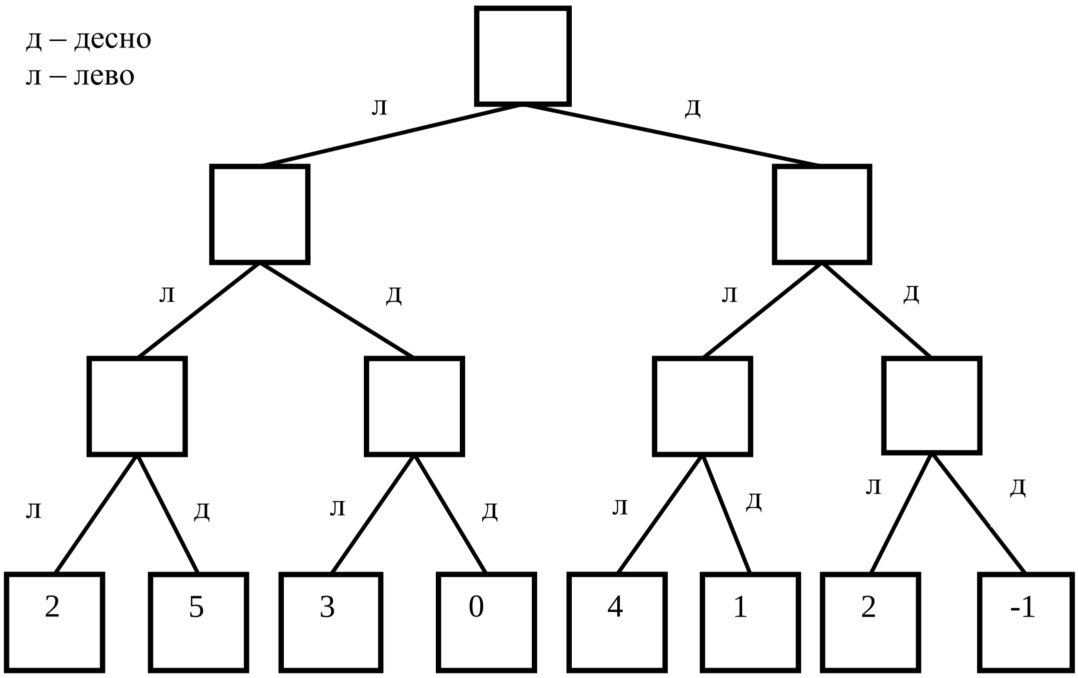
Слика 4.6. Решение на задачата 4.4 со МИН-МАКС постапката



Слика 4.7. Решение на задачата 4.4 со АЛФА-БЕТА постапката

И со двете постапки се добива исто решение. Со АЛФА-БЕТА постапката се намалува просторната сложеност на решението, затоа што конкретно се отсечени 4 гранки односно јазли. За да ја определи вредноста на јазолот D, кој е на MAX ниво, програмот мора да ги испита вредностите на сите негови наследници. Така D ја добива вредноста 6, бидејќи 6>5. Поради тоа, јазолот B не може да има вредност поголема од 6, бидејќи е на MIN ниво, додека коренот A не може да има вредност помала од 6, бидејќи е на MAX ниво. За да ја определи вредноста на јазолот E, програмот се спушта до неговиот прв наследник од лево со вредност 8 и заклучува дека јазолот E не може да има вредност помала од 8. Меѓутоа, оваа вредност е поголема од вредноста 6 на јазолот B, што значи дека MIN играчот нема никогаш да повлече потег кој води кон јазолот E. Затоа програмот нема потреба да го испитува десниот наследник на E и ја отсекува неговата гранка. Во продолжение програмот ги испитува наследниците на јазолот F и ја определува неговата вредност 4. Тоа значи дека јазолот C не може да има поголема вредност од 4, затоа што е на MIN ниво. Меѓутоа, оваа вредност е помала од најмалата можна вредност на коренот 6, па MAX играчот никогаш нема да повлече потег кој води кон јазолот C. Затоа програмот ги отсекува преостанатите гранки од стеблото и воопшто не го испитува вториот наследник на јазолот C, ниту неговите наследници.

4.5. Дадено е стеблото на една игра од слика 4.8. Нека, под претпоставка, коренот е MAX јазол. Ознаките крај гранките на стеблото ги означуваат потезите. Броевите крај најдолните јазли ја означуваат вредноста на соодветната позиција во играта од аспект на MAX играчот. Нека, под претпоставка, листовите во стеблото се испитуваат од лево во десно.



Слика 4.8. Илустрација кон задачата 4.5

а) Која е вредноста на играта за MAX играчот?

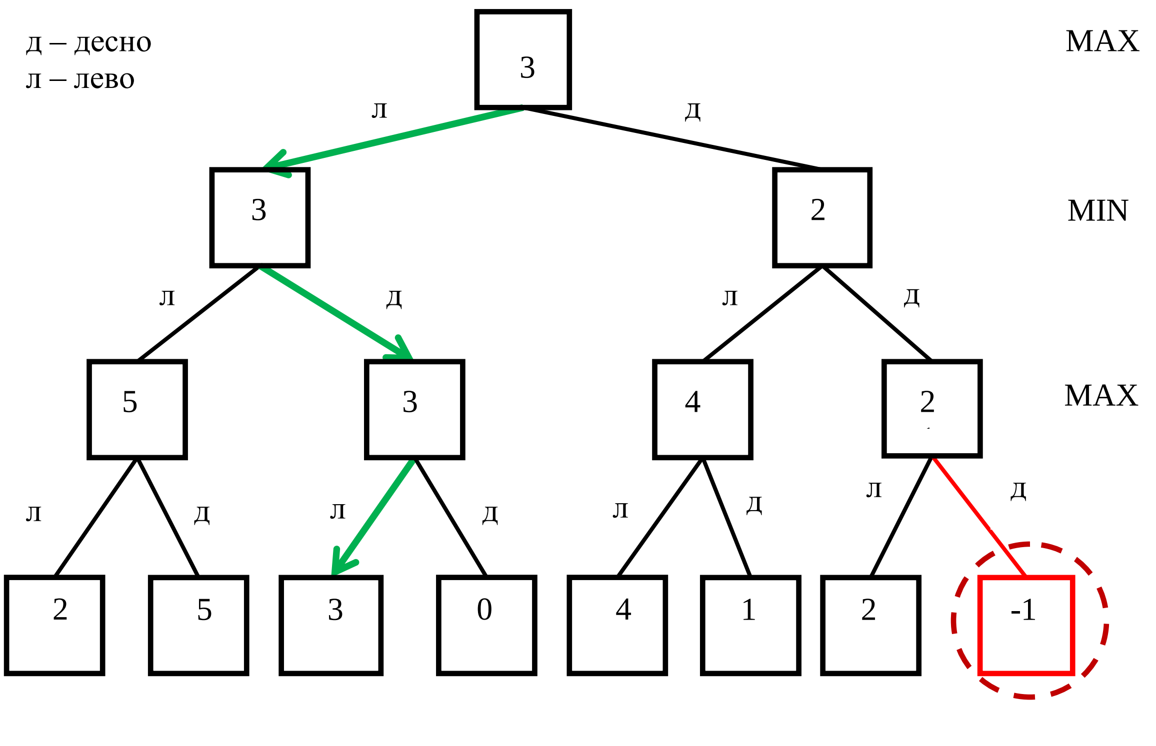
б) Кој е првиот потег што треба да го одигра MAX играчот?

в) Под претпоставка дека даденото стебло е комплетно, и MAX играчот го повлекува потегот под б), кој е следниот најдобар потег за MIN играчот?

г) Да се заокружат јазлите што се отсекуваат со АЛФА-БЕТА процедурата.

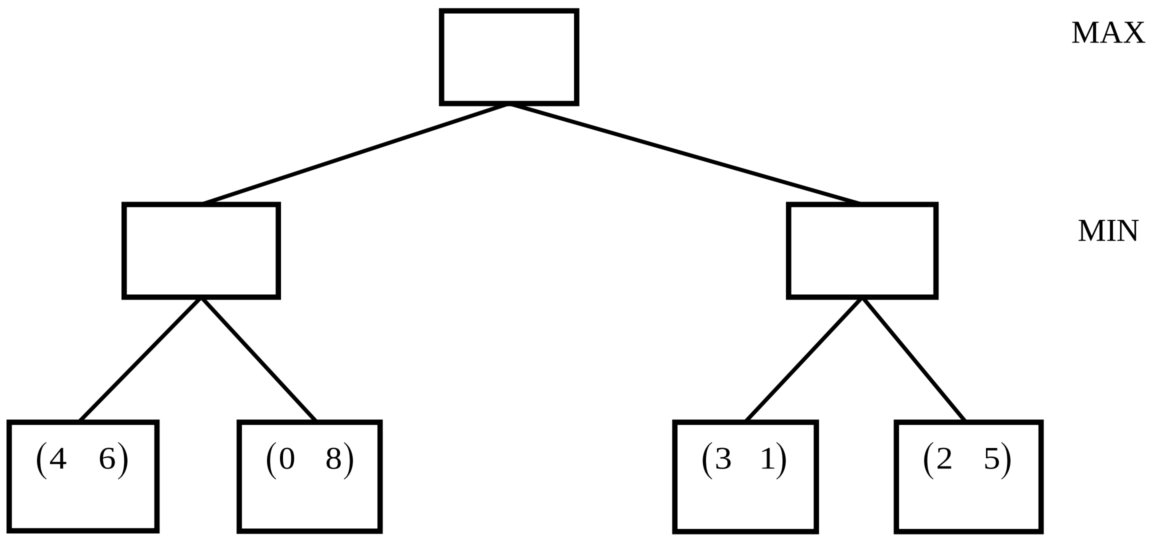
Решение: Вредностите на јазлите во даденото стебло, односно вредностите на соодветните позиции во играта се прикажани на слика 4.9. Оттаму следуваат и одговорите на поставените прашања.

а) 3 б) л в) д г) Отсечен е листот со вредност -1.



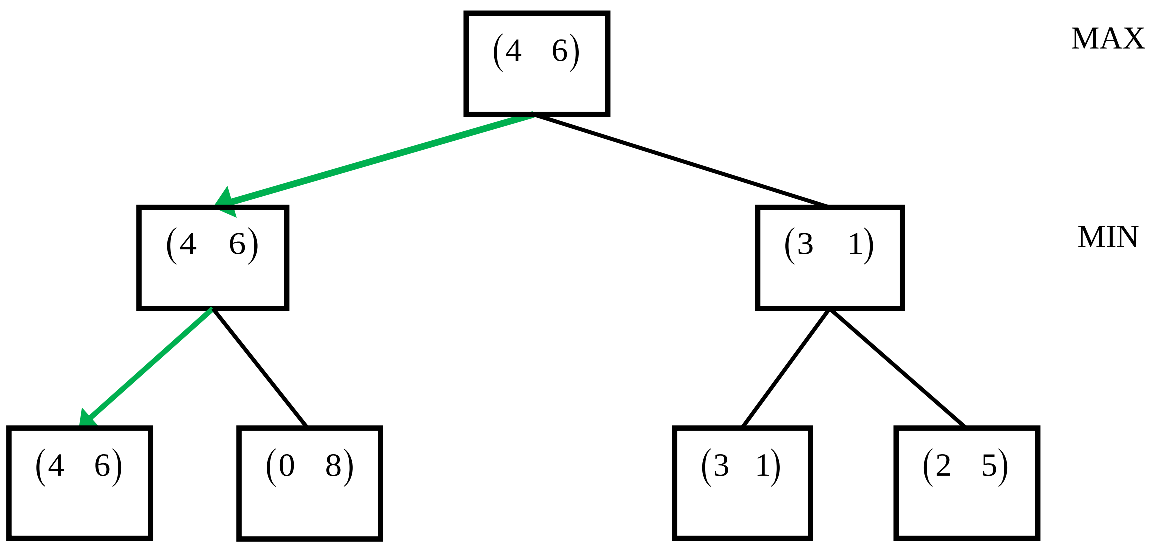
Слика 4.9. Решение на задачата 4.5

4.6. Пополнете го даденото потстебло на една игра со паровите вредности на јазлите. Функцијата за проценка на позициите во играта е со две вредности кои ја искажуваат веројатноста MAX да победи од дадената позиција според MAX и MIN, соодветно. Кога одлучува MAX – се максимизира првата вредност, кога одлучува MIN – се минимизира втората вредност. Кој потег треба да го избере играчот на почетната позиција од потстеблото? Секој играч, под претпоставка, ја знае функцијата на проценка на вредноста на позициите на својот противник.



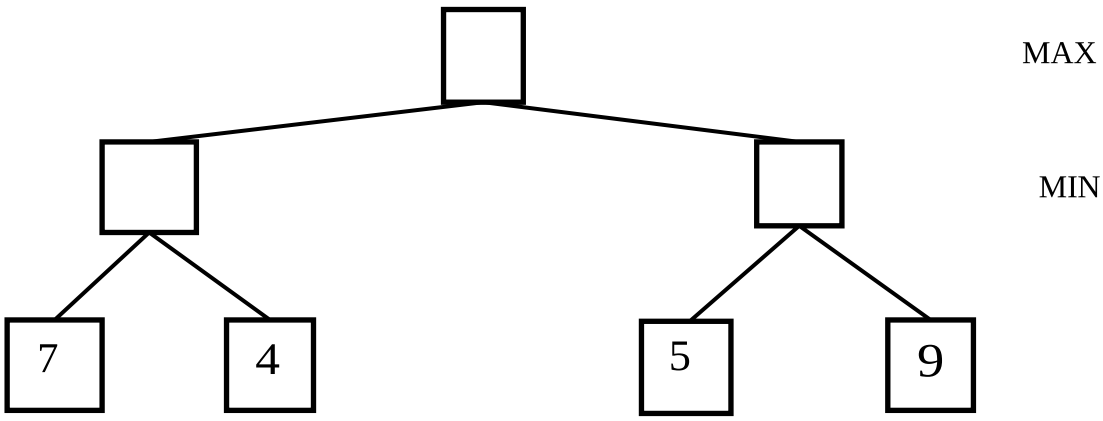
Слика 4.10. Илустрација кон задачата 4.6

Решение: Решението на задачата 4.6 е прикажано на слика 4.11. Оптималните потези на MAX и MIN играчот во стеблото на играта се означени со зелени линии.



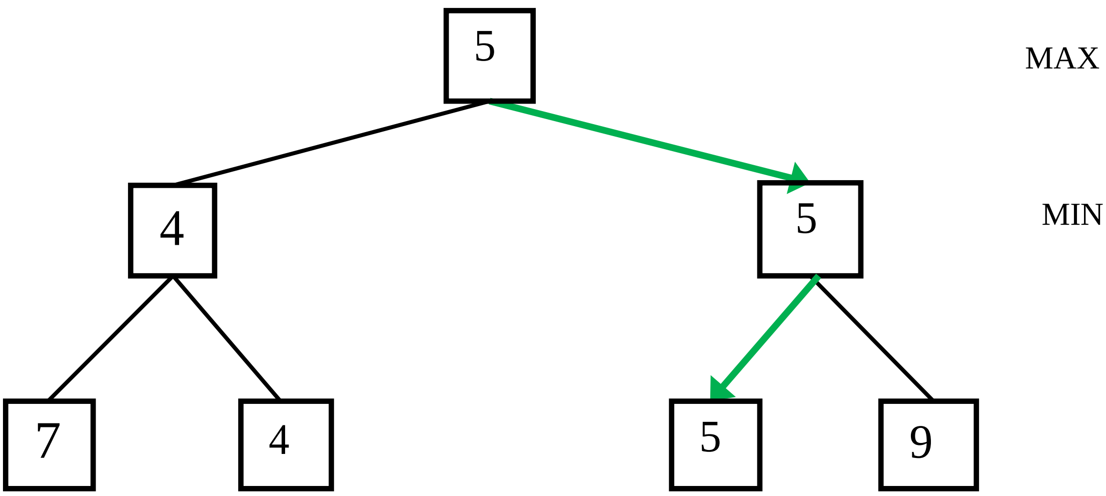
Слика 4.11. Решение на задачата 4.6

4.7. Дадено е стеблото на една игра со два играчи од слика 4.12. Прв влече потег играчот MAX. а) Кои јазли се отсекуваат со АЛФА-БЕТА постапката за поткастрување на ова стебло, ако листовите се испитуваат од лево на десно? б) Кои јазли се отсекуваат со АЛФА-БЕТА постапката за поткастрување, ако листовите се испитуваат од десно на лево?



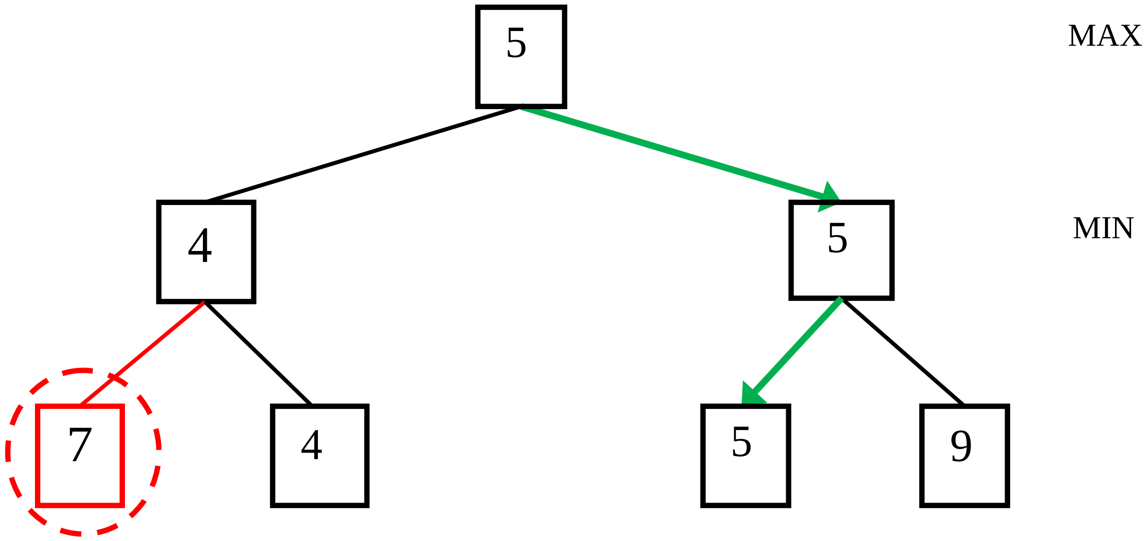
Слика 4.12. Илустрација кон задачата 4.7

Решение: а) Нема отсечени јазли.



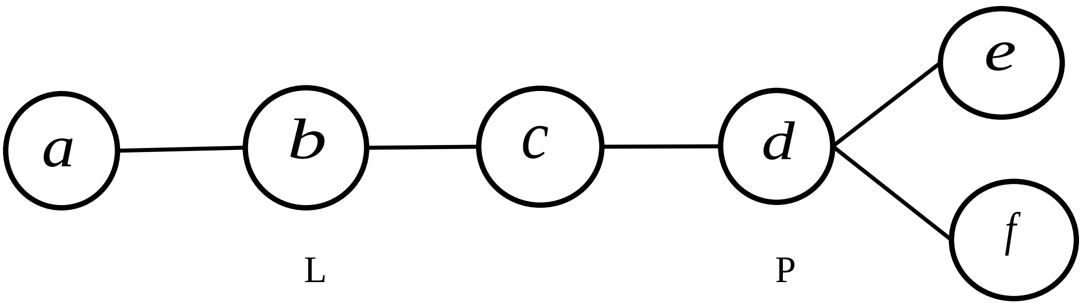
Слика 4.13. Решение на задачата 4.7 под а)

б) Отсечен е само крајниот лев лист со вредност 7. Имено, алгоритамот се спушта десно до листовите со вредност 5 и 9, па претходниот јазол ја добива помалата вредност 5, бидејќи е на MIN ниво. Тоа значи дека коренот не може да има помала вредност од 5, бидејќи е на MAX ниво. Во продолжение, алгоритамот се спушта лево до претпоследниот лист гледано од десно на лево, кој има вредност 4. Тоа значи дека претходниот јазол не може да има вредност поголема од 4, бидејќи е на MIN ниво. Меѓутоа, $4<5$, па MAX играчот нема никогаш да го одбере потегот на лево. Оттаму, алгоритамот нема потреба да ја проверува вредноста на крајниот лев лист и тој дел од стеблото се отсекува.



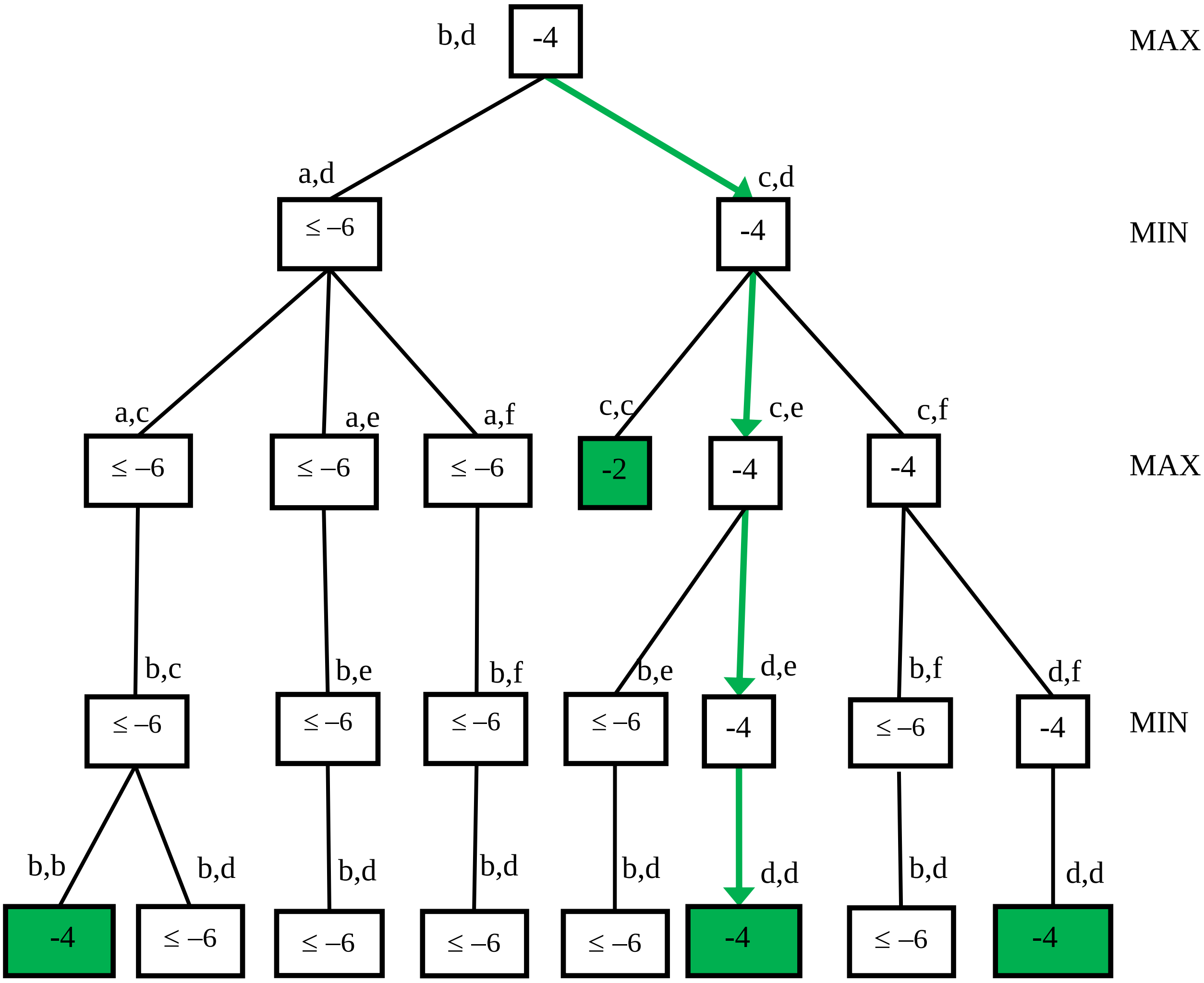
Слика 4.14. Решение на задачата 4.7 под б)

4.8. [8] Даден е графот на едноставна игра со два играчи L – ловец и P – плен. Почетната позиција на играчот L е b, а на играчот P е d. Цената на чинење на патот помеѓу секои два јазла во графот е 1. Играчите се поместуваат наизменично, прво играчот L, па играчот P. Да се состави соодветно стебло на оваа игра, при што јазлите во стеблото ќе бидат означени со тековната позиција на играчите, на пример, bd – почетна. Вредноста на листовите – крајните јазли во стеблото се одредува како негативна вредност од вкупниот број чекори потребни да се стаса од коренот на стеблото до соодветниот лист. Играта завршува кога двата играчи ќе се најдат на иста позиција. Повторените состојби да не се разгледуваат.



Слика 4.15. Граф на едноставна игра со два играчи – илустрација кон задачата 4.8

Решение: На слика 4.16 е прикажано едно решение на дадената игра.



Слика 4.16. Решение на задачата 4.8

4.9. Дадено е стеблото на една игра со двајца играчи MIN и MAX. Броевите крај листовите во стеблото ја означуваат вредноста на конкретната позиција од аспект на играчот MAX, кој го влече првиот потег во играта.

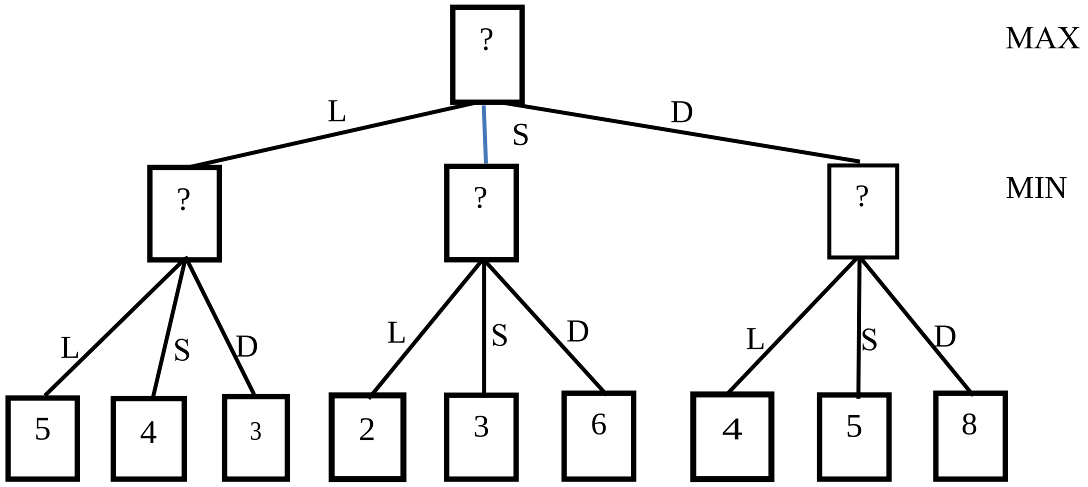
а) Која е вредноста на играта за играчот MAX?

б) Кој е првиот потег што треба да го направи играчот MAX?

в) Под претпоставка дека MAX играчот го повлекува најдобриот потег од почетната позиција, кој е најдобриот следен потег за играчот MIN?

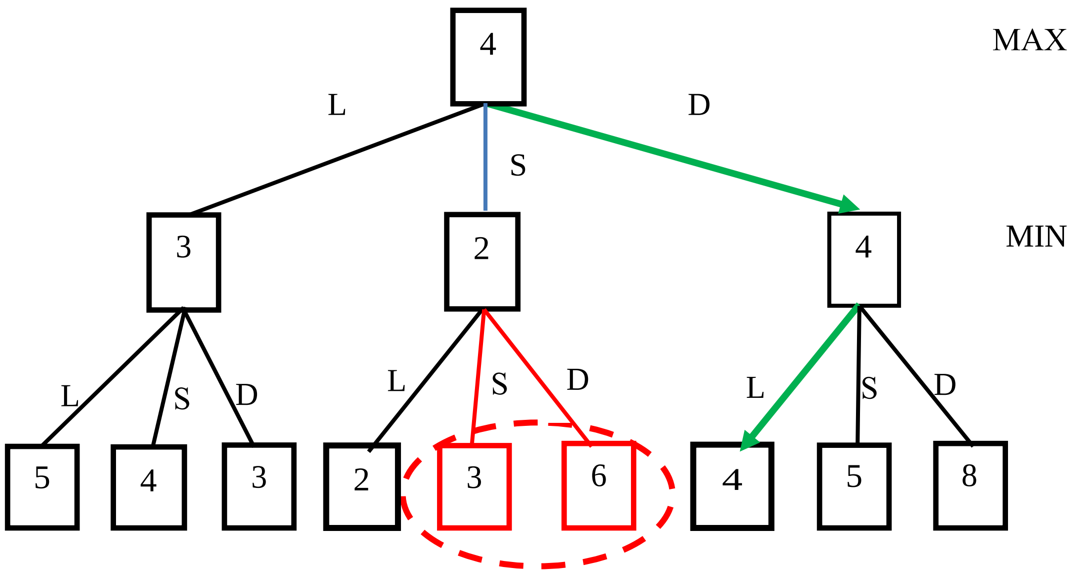
г) Набљудувајќи ги јазлите во стеблото секогаш од лево на десно, кои јазли ќе бидат „отсечени“ со АЛФА-БЕТА постапката?

д) Ако сега јазлите во стеблото се набљудуваат од десно на лево, кои јазли ќе бидат „отсечени“ со АЛФА-БЕТА постапката?



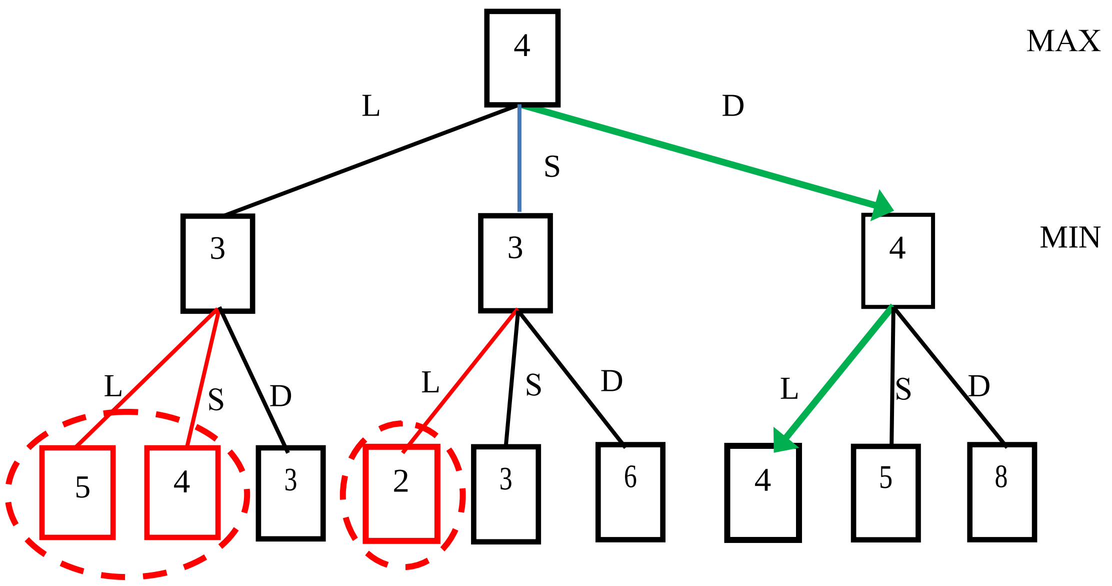
Слика 4.17. Илустрација кон задачата 4.9

Решение: а) Вредноста на играта за играчот MAX е 4. б) Првиот потег што треба да го направи играчот MAX е D. в) Под претпоставка дека MAX играчот го повлекува најдобриот потег од почетната позиција, најдобриот следен потег за играчот MIN е L. г) Набљудувајќи ги јазлите во стеблото секогаш од лево на десно, со АЛФА-БЕТА постапката ќе биде „отсечен“ петтиот и шестиот лист од лево со вредности 3 и 6, соодветно.



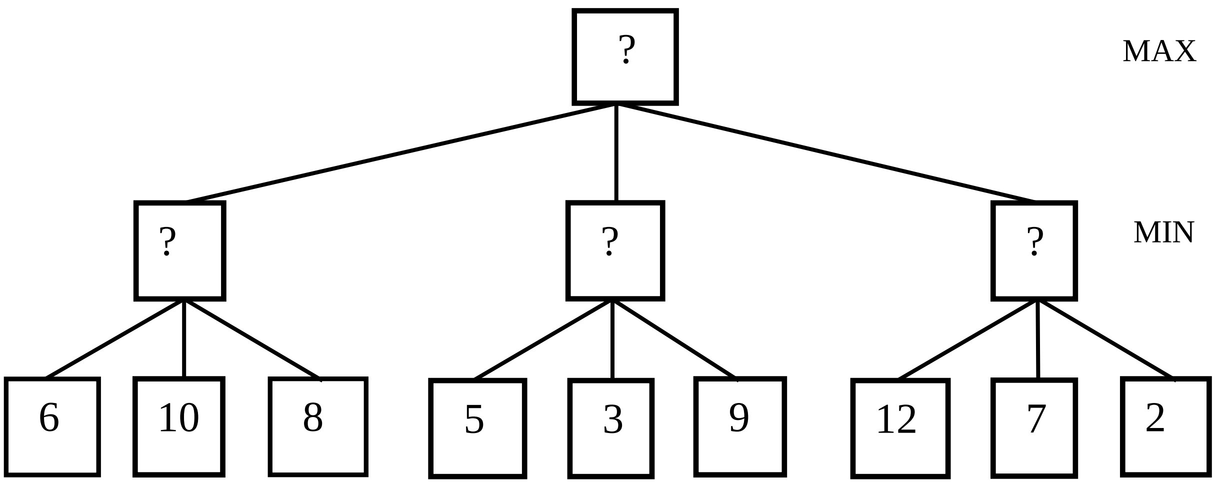
Слика 4.18. Решение на задачата 4.9 под г)

д) Ако сега јазлите во стеблото се набљудуваат од десно на лево, со АЛФА-БЕТА постапката ќе бидат отсечени шестиот лист од десно со вредност 2 и последните два листа од десно со вредности 4 и 5, соодветно.



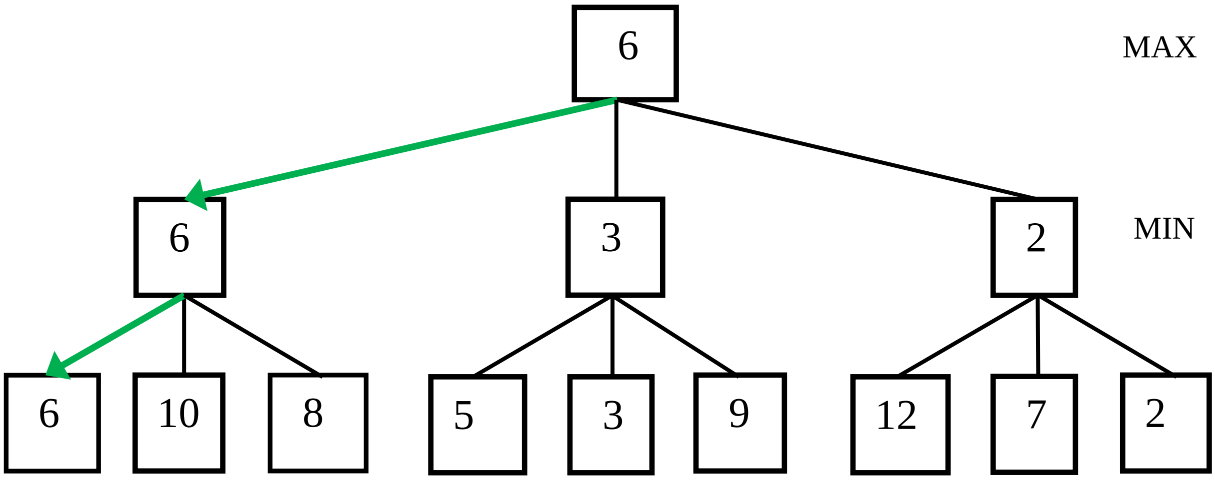
Слика 4.19. Решение на задачата 4.9 под д)

4.10. Дадено е стеблото на една игра со двајца играчи MIN и MAX. Броевите крај листовите во стеблото ја означуваат вредноста на конкретната позиција од аспект на играчот MAX, кој го влече првиот потег во играта. а) Како ќе игра играчот MAX, под претпоставка дека и двајцата играчи играат оптимално? б) Набљудувајќи ги јазлите во стеблото секогаш од лево на десно, кои јазли ќе бидат „отсечени“ со АЛФА-БЕТА постапката?



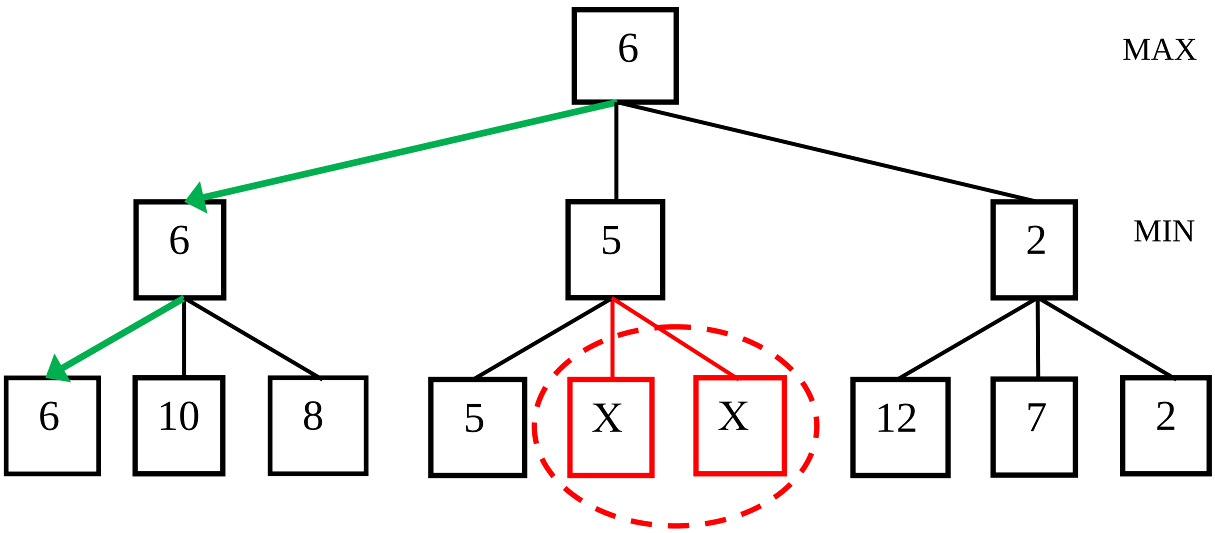
Слика 4.20. Илустрација кон задачата 4.10

Решение: а) Решението на задачата е прикажано на слика 4.21. MAX играчот ќе повлече потег во лево. Оптималните потези на играчите во играта се означени со зелени линии во соодветното стебло.



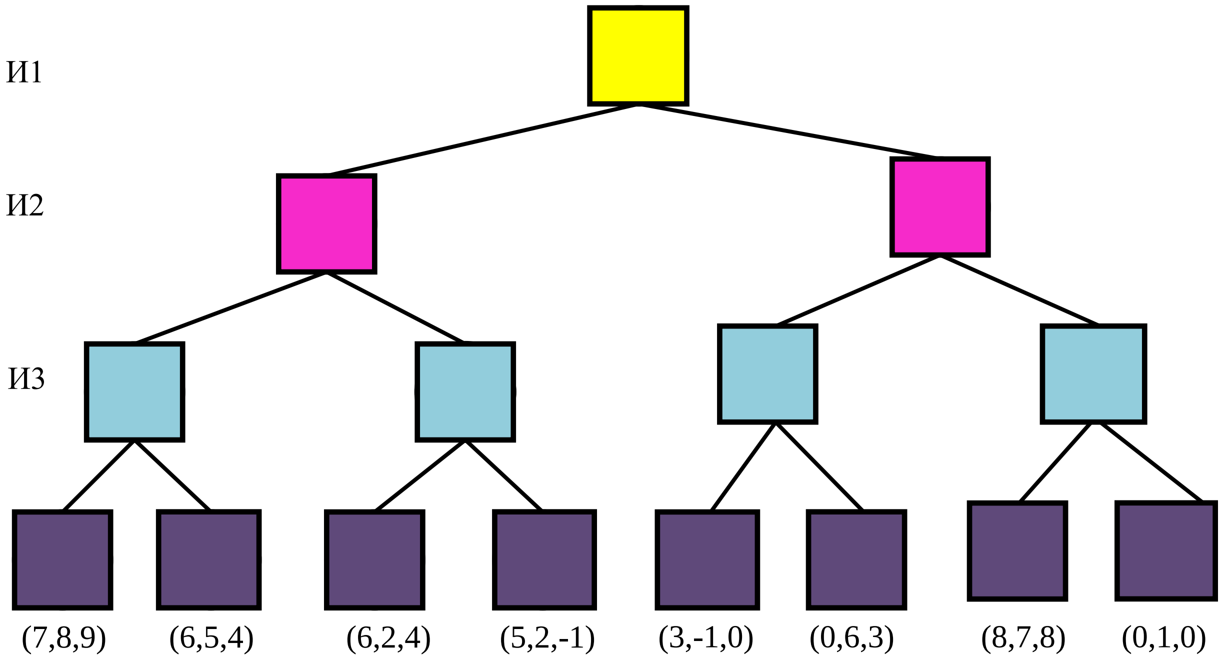
Слика 4.21. Решение на задачата 4.10 под а)

б) Решението на задачата со АЛФА-БЕТА постапката е прикажано на сликата 4.22.



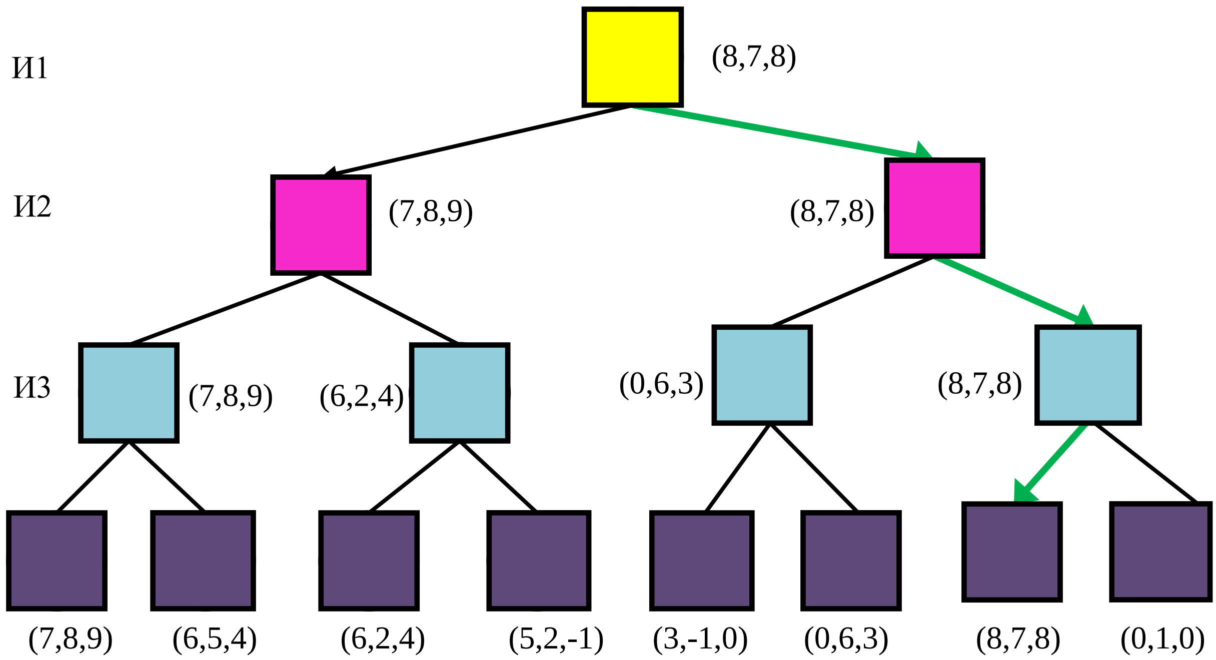
Слика 4.22. Решение на задача 4.10 под б)

4.11. Дадено е парцијалното стебло на една игра со три играчи И1, И2 и И3. Да се определи текот на играта од почетната позиција (редоследот на потези кои ги влечат играчите) ако, под претпоставка, сите играчи играат оптимално. Крај листовите се означени вредностите на крајните позиции од аспект на играчите.



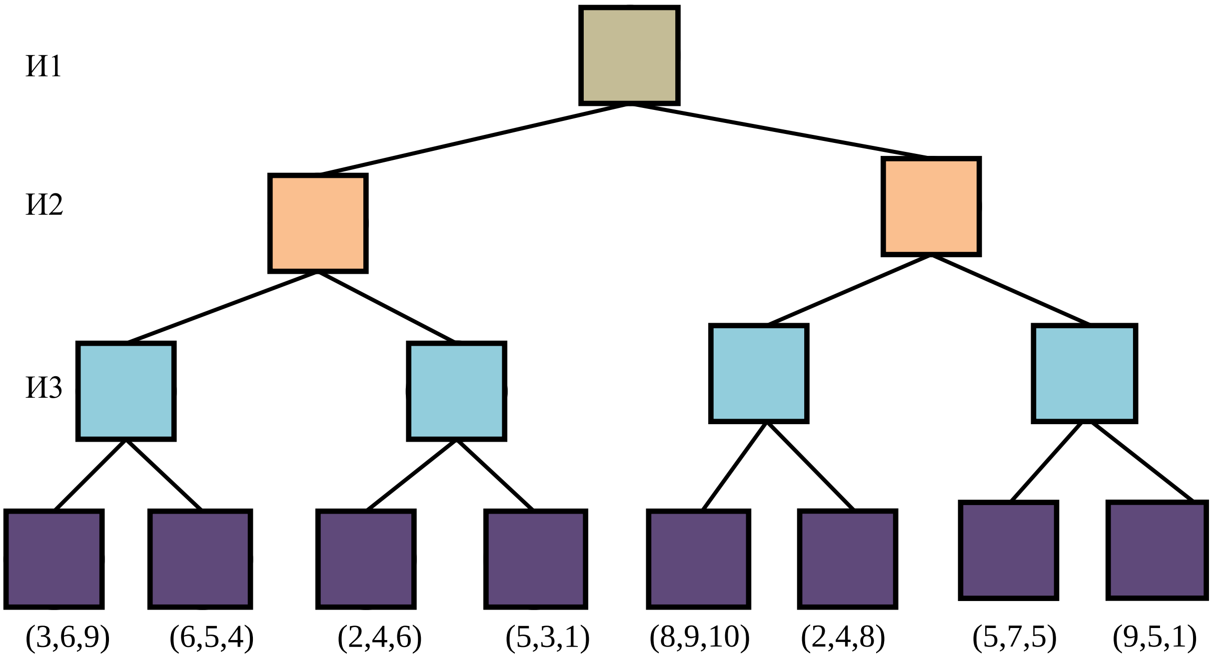
Слика 4.23. Илустрација кон задачата 4.11

Решение: На слика 4.24 е прикажано решението на задачата 4.11. Потезите што ги влечат играчите при оптимална игра се означени со задебелена зелена линија.



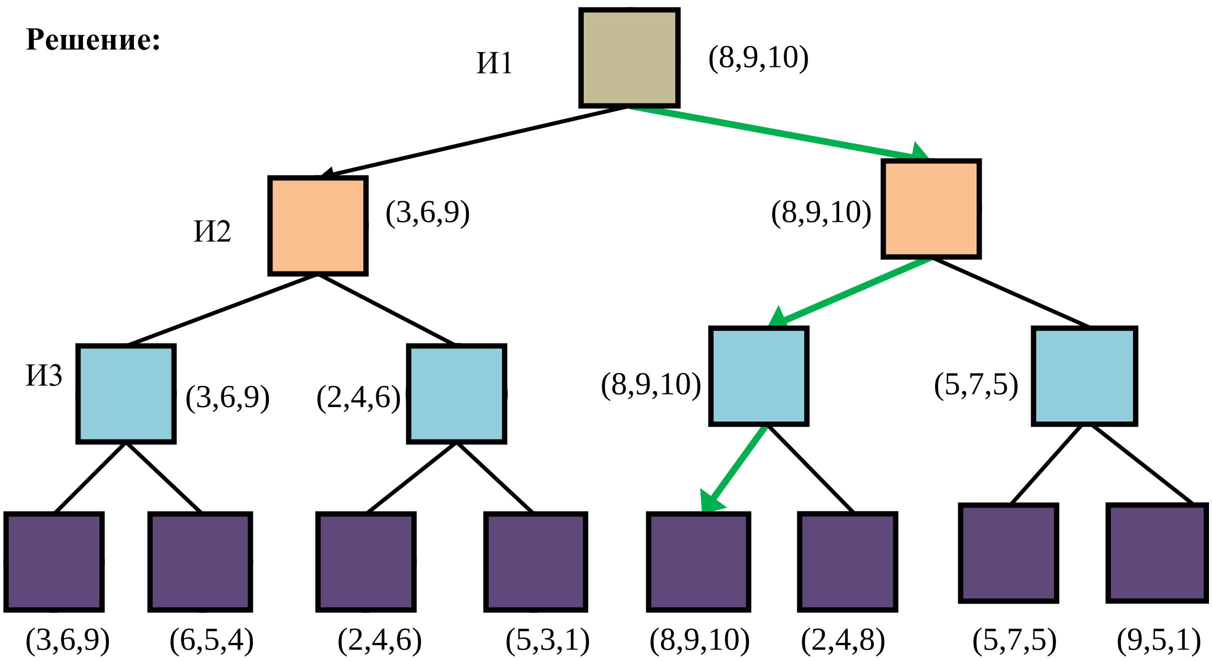
Слика 4.24. Решение на задачата 4.11

4.12. Дадено е парцијалното стебло на една игра со три играчи И1, И2 и И3. Да се определи текот на играта од почетната позиција ако, под претпоставка, сите играчи играат оптимално. Крај листовите се означени вредностите на крајните позиции од аспект на играчите.



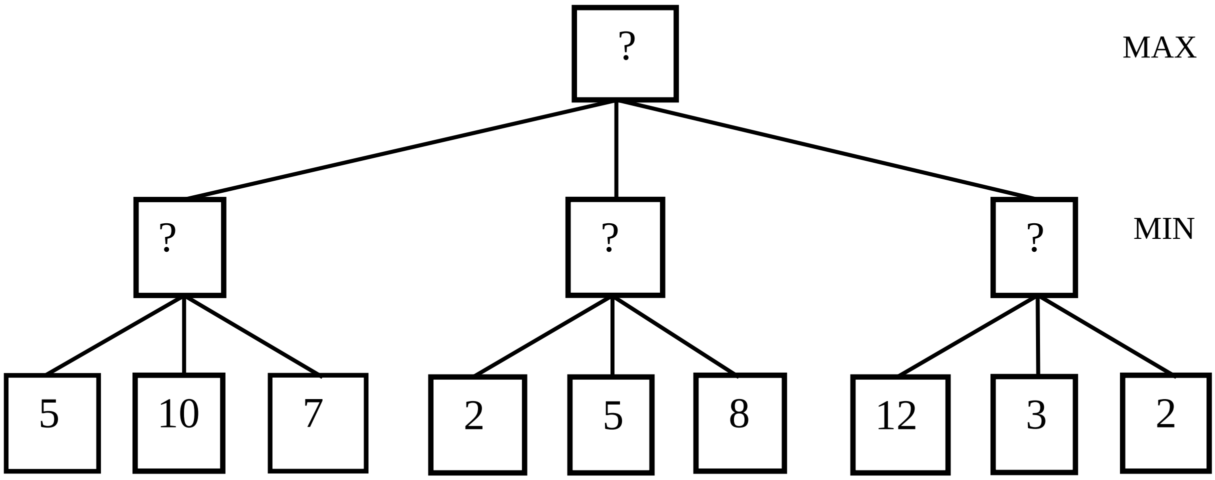
Слика 4.25. Илустрација кон задачата 4.12

Решение:



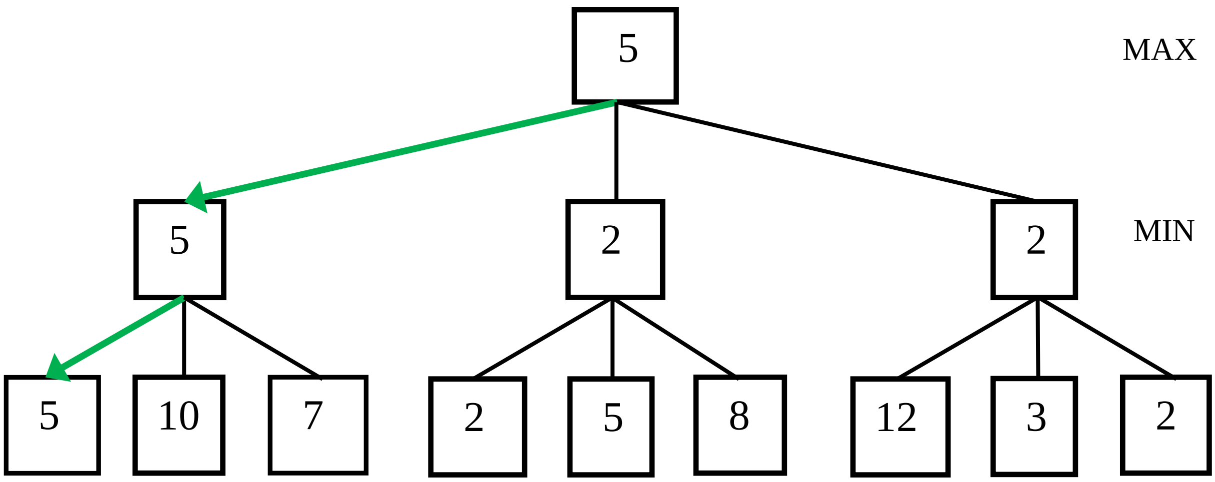
Слика 4.26. Решение на задачата 4.12

4.13. На слика 4.27 е дадено парцијално стебло од некоја измислена игра. Да се определи исходот на играта со МИН-МАКС постапката. Потоа да се примени АЛФА-БЕТА постапката за поткастрување на стеблото и да се означат отсечените јазли. Нека, под претпоставка, листовите во стеблото се испитуваат од лево во десно.



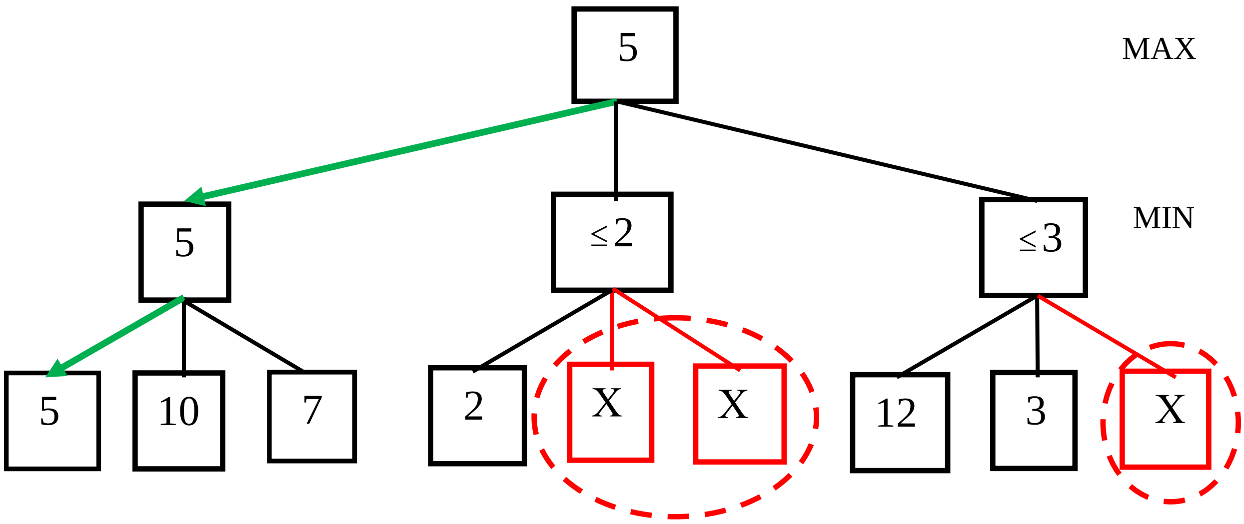
Слика 4.27. Илустрација кон задачата 4.13

Решение: а) Решението на задачата со МИН-МАКС постапката е прикажано на слика 4.28. Оптималните потези на играчите во играта се означени со зелени линии во соодветното стебло.



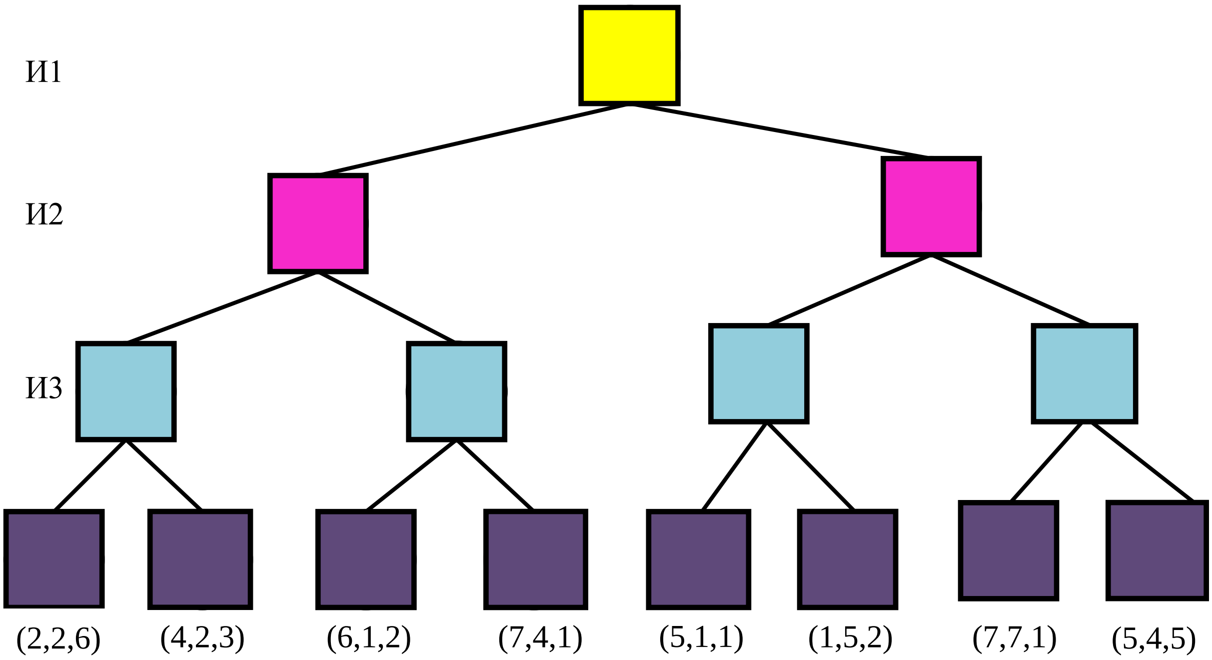
Слика 4.28. Решение на задача 4.13 под а)

б) Решението на задача 4.13 со АЛФА-БЕТА постапката е прикажано на слика 4.29. Оптималните потези на играчите се означени со зелени линии, а отсечените јазли и гранки со црвени.



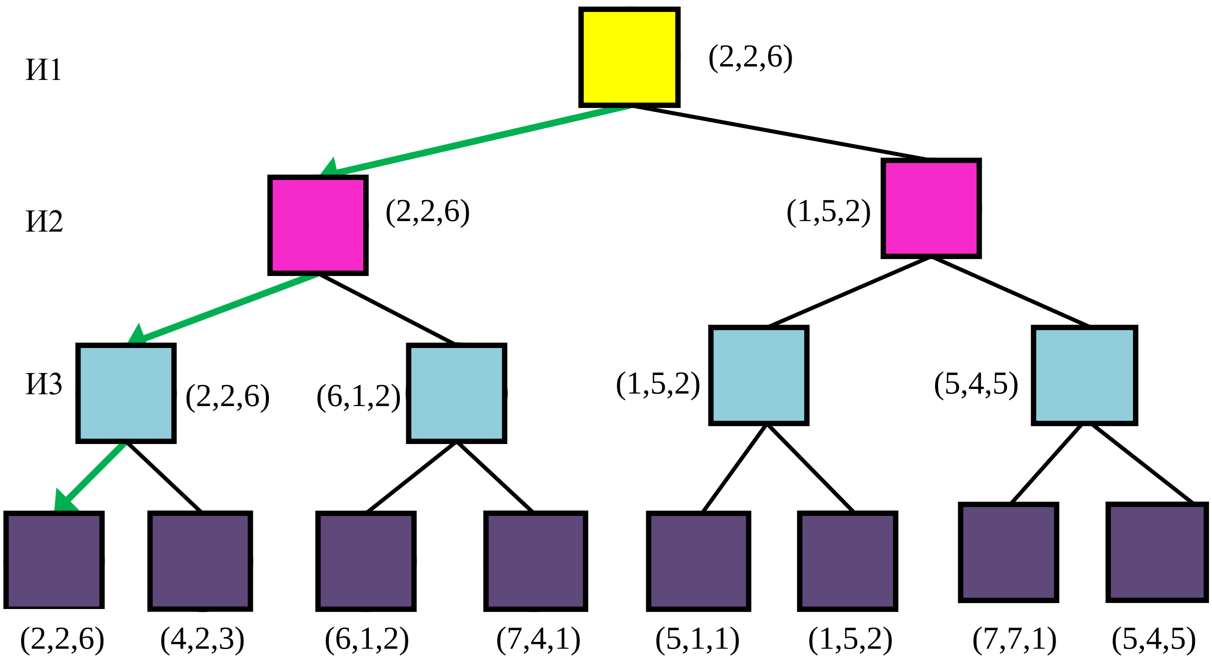
Слика 4.29. Исход на играта од задачата 4.13 со АЛФА-БЕТА постапката

4.14. Дадено е парцијалното стебло на една игра со три играчи И1, И2 и И3. Да се определи текот на играта од почетната позиција (редоследот на потези кои ги влечат играчите) ако, под претпоставка, сите играчи играат оптимално. Крај листовите се означени вредностите на крајните позиции од аспект на играчите.



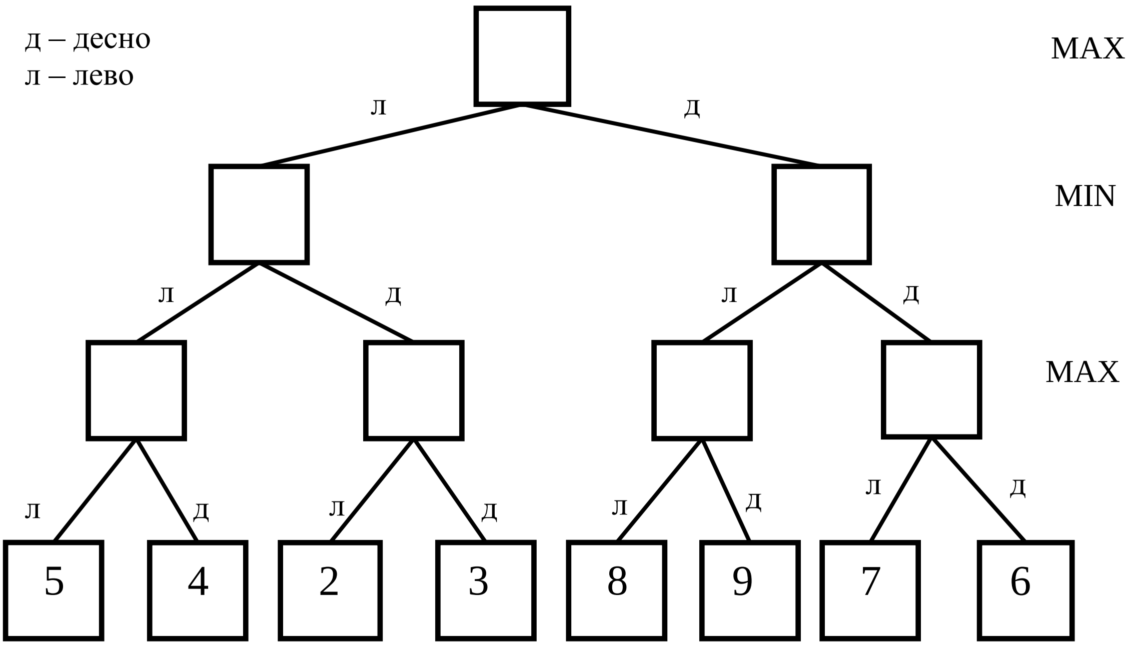
Слика 4.30. Илустрација кон задачата 4.14

Решение: Решението на задачата е прикажано на сликата 4.31. Оптималните потези на играчите во играта се означени со зелени линии.



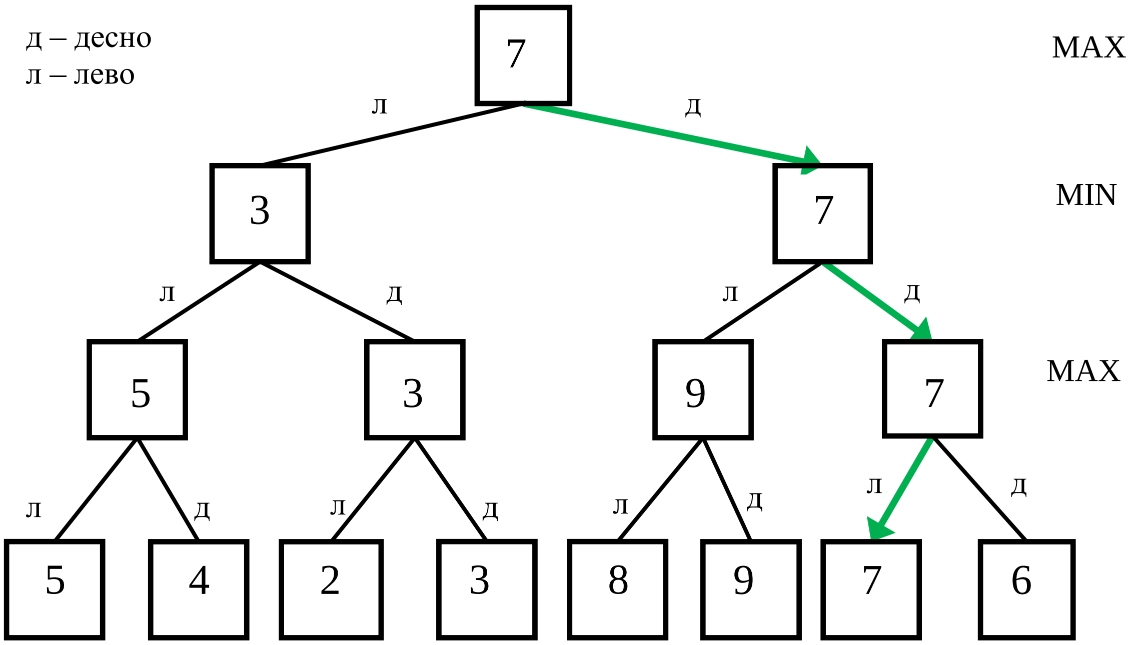
Слика 4.31. Решение на задачата 4.14

4.15. На слика 4.32 е прикажано парцијално стебло на некоја игра. Да се определат јазлите од стеблото кои ќе бидат исклучени од пребарувањето со помош на АЛФА-БЕТА постапката за поткастрување, ако листовите во стеблото се испитуваат од лево на десно и обратно.

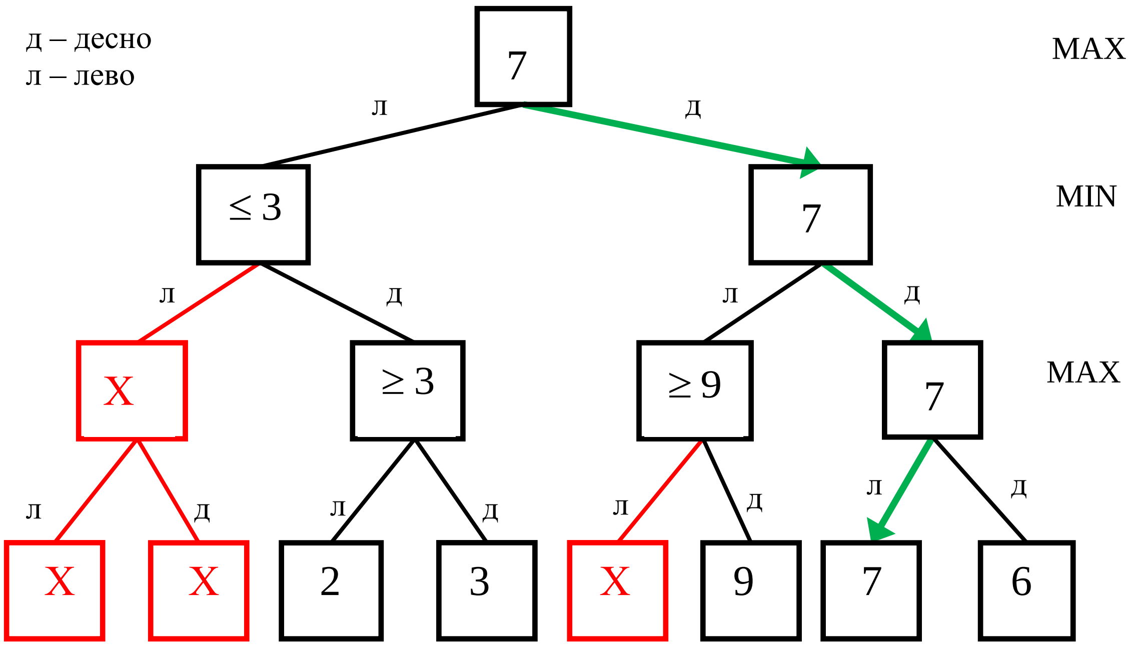


Слика 4.32. Илустрација кон задачата 4.15

Решение: При пребарувањето од лево на десно, нема поткастрување, додека во обратна насока се отсечени четири гранки и јазли, прикажани со црвени линии.



а) Испитување на листовите од лево во десно



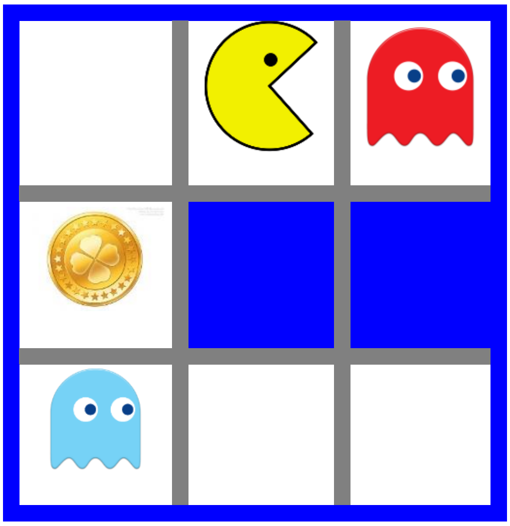
б) Испитување на листовите од десно во лево

Слика 4.33. Решение на задачата 4.15

4.16. [9] На слика 4.34 е прикажана почетната позиција на многу упростена верзија од една многу позната компјутерска игра. Црвената и сината фигура претставуваат духови, додека жолтата фигура е човече кое има задача да ги собира златниците означени со детелинка. Сините линии означуваат ѕид или препрека. Секогаш прво се придвижува човечето, па синиот, па црвениот дух. Правилата на игра се следни:

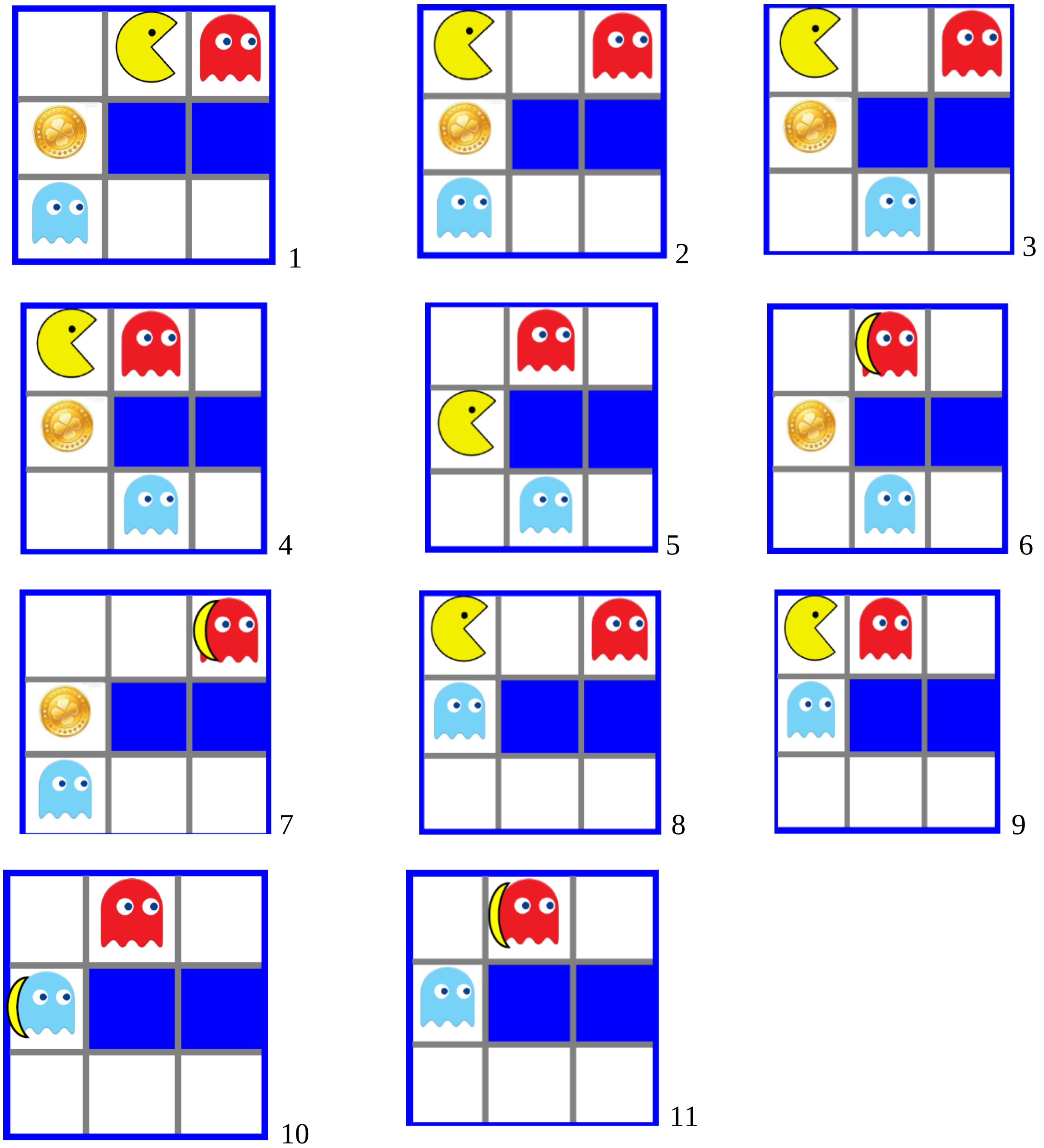
- Сите агенти можат да се движат во четири правци: лево, десно, горе и долу.
- Духовите не можат да се вратат назад освен ако не наидат на ѕид, односно препрека.
- Ако човечето се најде во исто поле со дух, ќе биде изедено.
- Ако човечето се најде во поле со златник и дух, ќе биде изедено пред да го собере златникот.
- Духовите се движат сосема случајно (стохастички) во дозволените правци.
- Агентите не смеат да прескокнат чекори, односно да останат на истото поле без да преземат соодветно дејствие.
- За секој чекор човечето добива -1 поен, за секој собран златник +10 поени.

Играта завршува кога човечето ќе ги собере сите златници, за што добива бонус +500 поени, или кога ќе биде изедено, за што е казнето со −500 поени. Поените се доделуваат на крајот од играта.



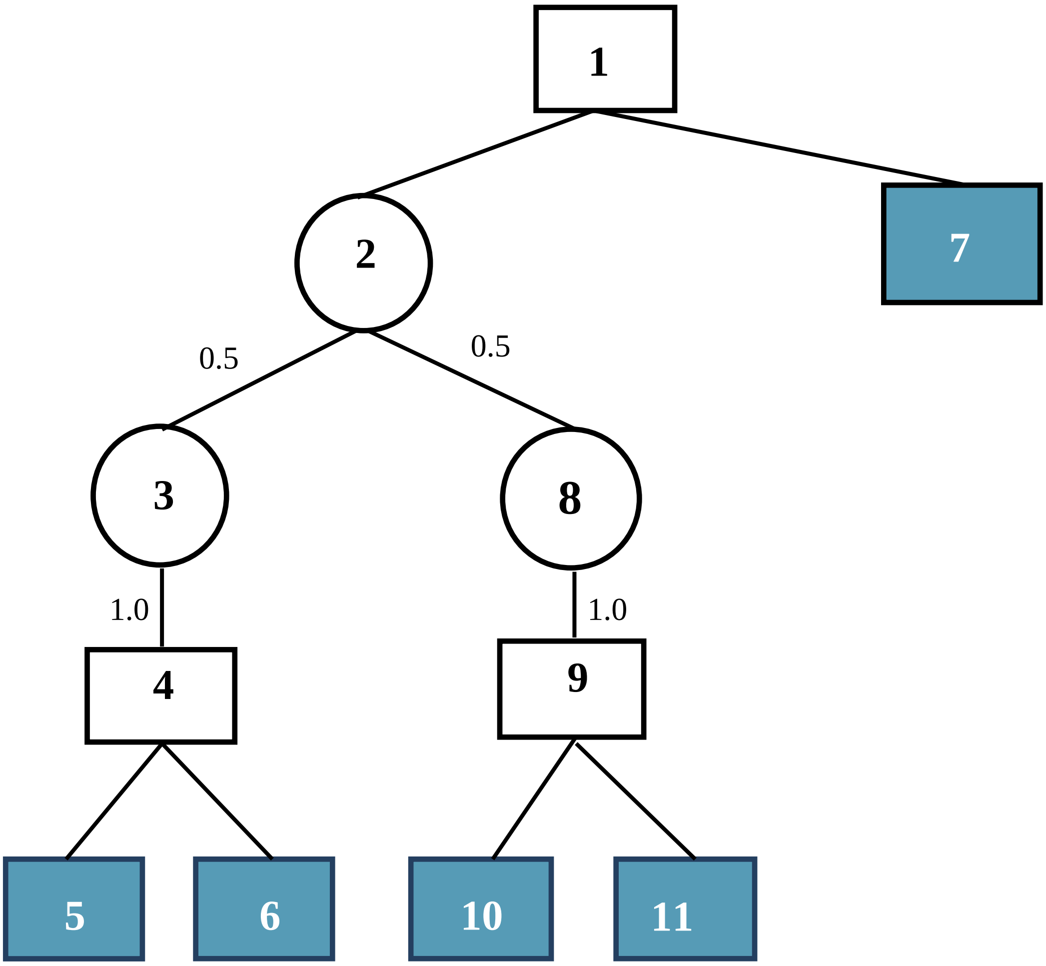
Слика 4.34. Почетна позиција на импровизираната компјутерска игра од задача 4.16

а) Да се нацрта соодветното стебло на оваа игра, ако подолу се прикажани сите можни позиции. Заради поголема едноставност, јазлите во стеблото да се означат со броевите на позициите. Во стеблото да се означат обичните јазли со правоаголници, јазлите на среќа со кругови и крајните јазли со сино обоени правоаголници. Крај јазлите на среќа да се означи и нивната веројатност. б) Да се означат вредностите на крајните состојби. в) Колку изнесува вредноста на коренот во стеблото?



Слика 4.35. Можни позиции во играта

Решение: а) Стеблото на набљудуваната игра е прикажано на сликата 4.36.



Слика 4.36. Стебло на играта од задача 4.16

б) Вредностите на крајните состојби се:

состојба 5: $-1+(-1)+10+500=508$

состојба 6: $-1+(-1)+(-500)=-502$

состојба 7: $-1+(-500)=-501$

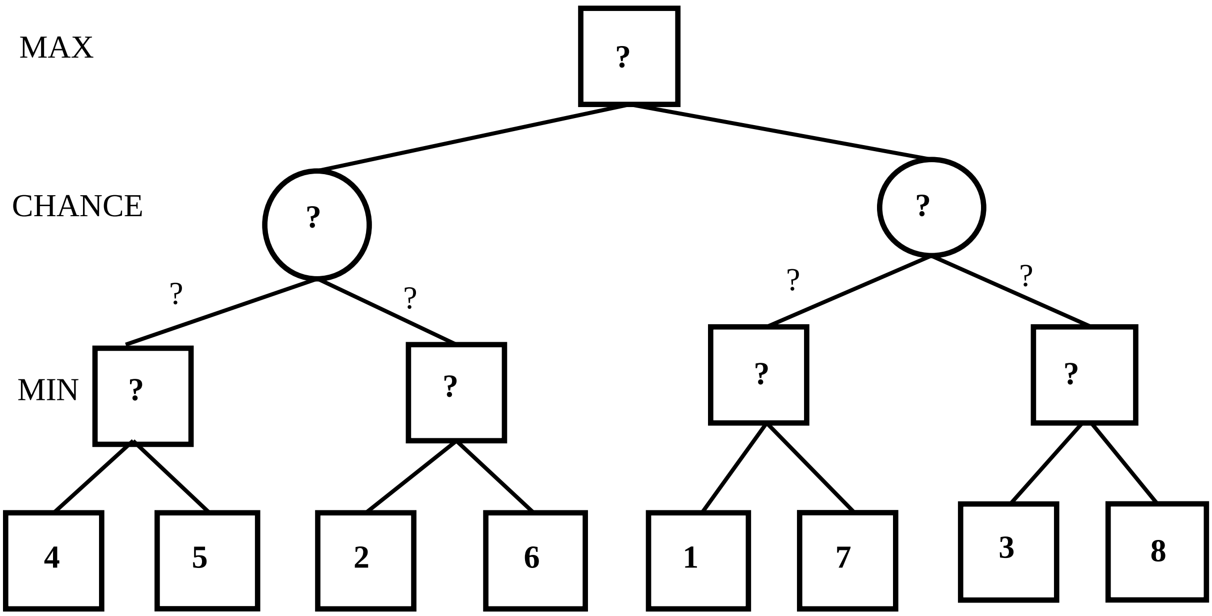
состојба 10: $-1+(-1)+(-500)=-502$

состојба 11: $-1+(-1)+(-500)=-502$

в) Вредноста на коренот е:

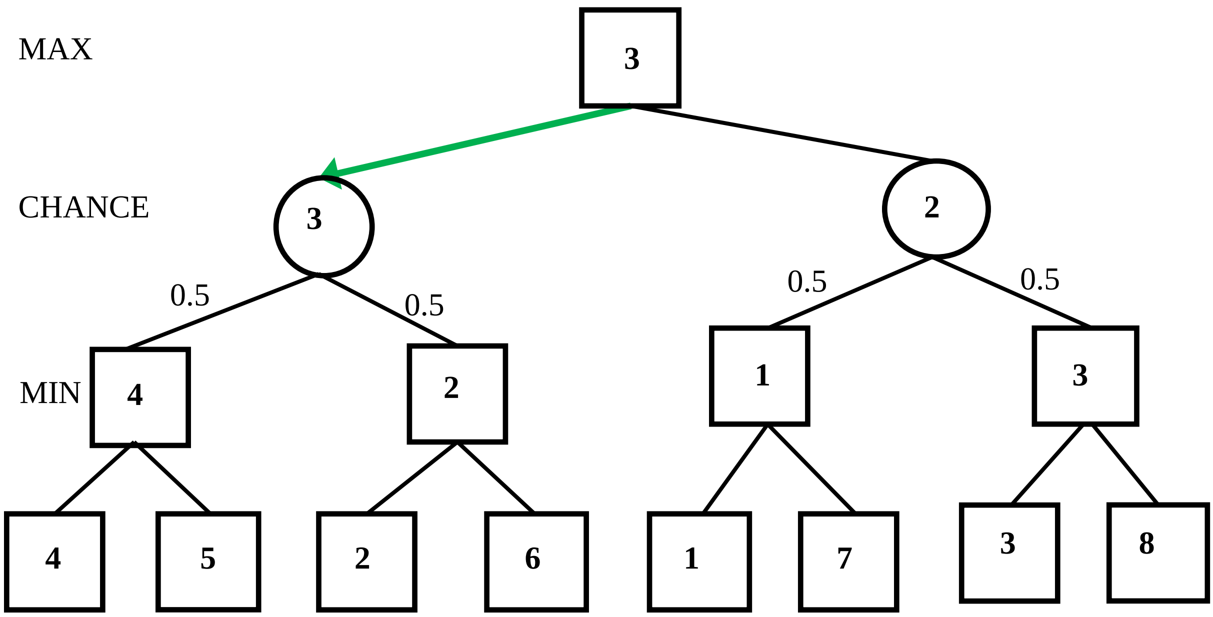
$$\max\{0.5[\max(508,-502)+\max(-502,-502)],-501\}=3$$

4.17. Стеблото на слика 4.37 претставува упростена верзија на игра на среќа. Потезите на играчите се одлучуваат со фрлање паричка. Да се определи првиот потег на MAX играчот.



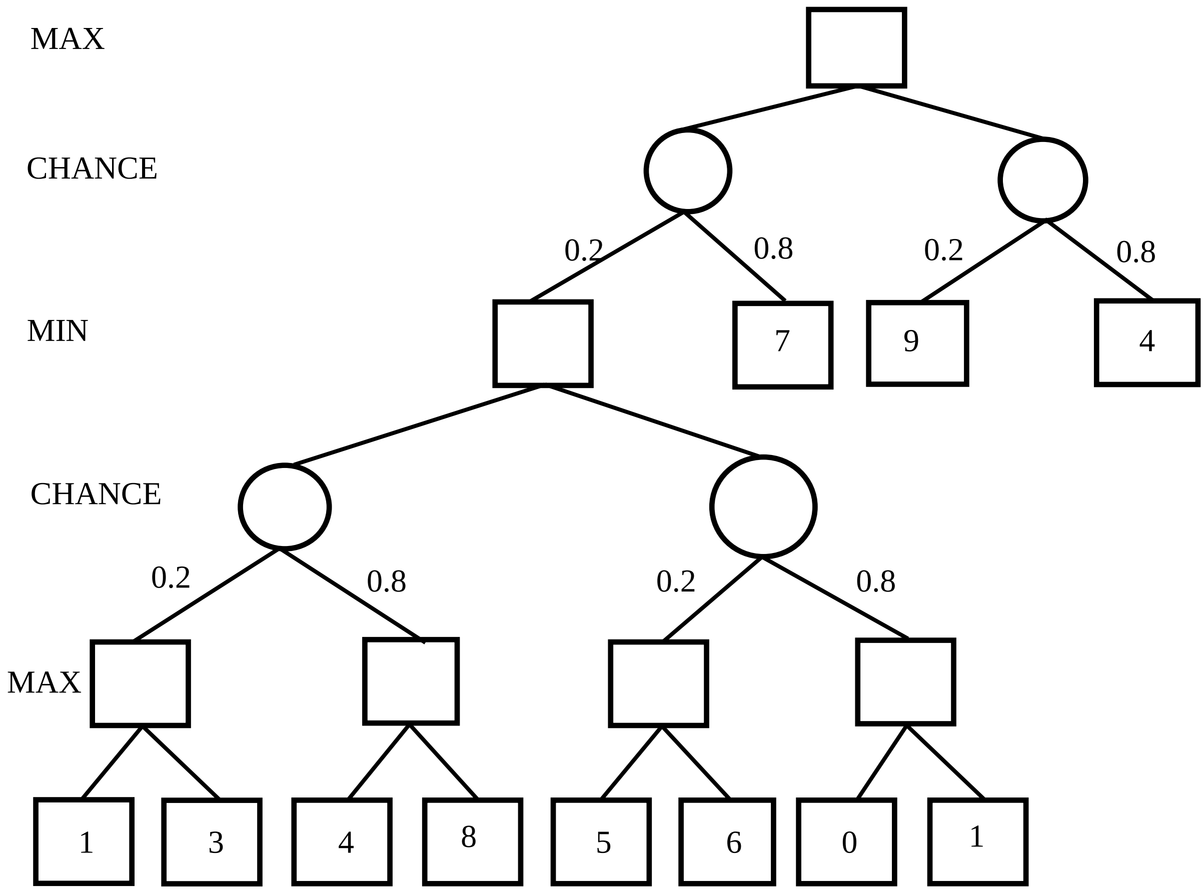
Слика 4.37. Илустрација кон задача 4.17

Решение: Вредностите на позициите во играта и првиот потег на MAX играчот, означен со зелена линија, се прикажани на слика 4.38.



Слика 4.38. Решение на задача 4.17

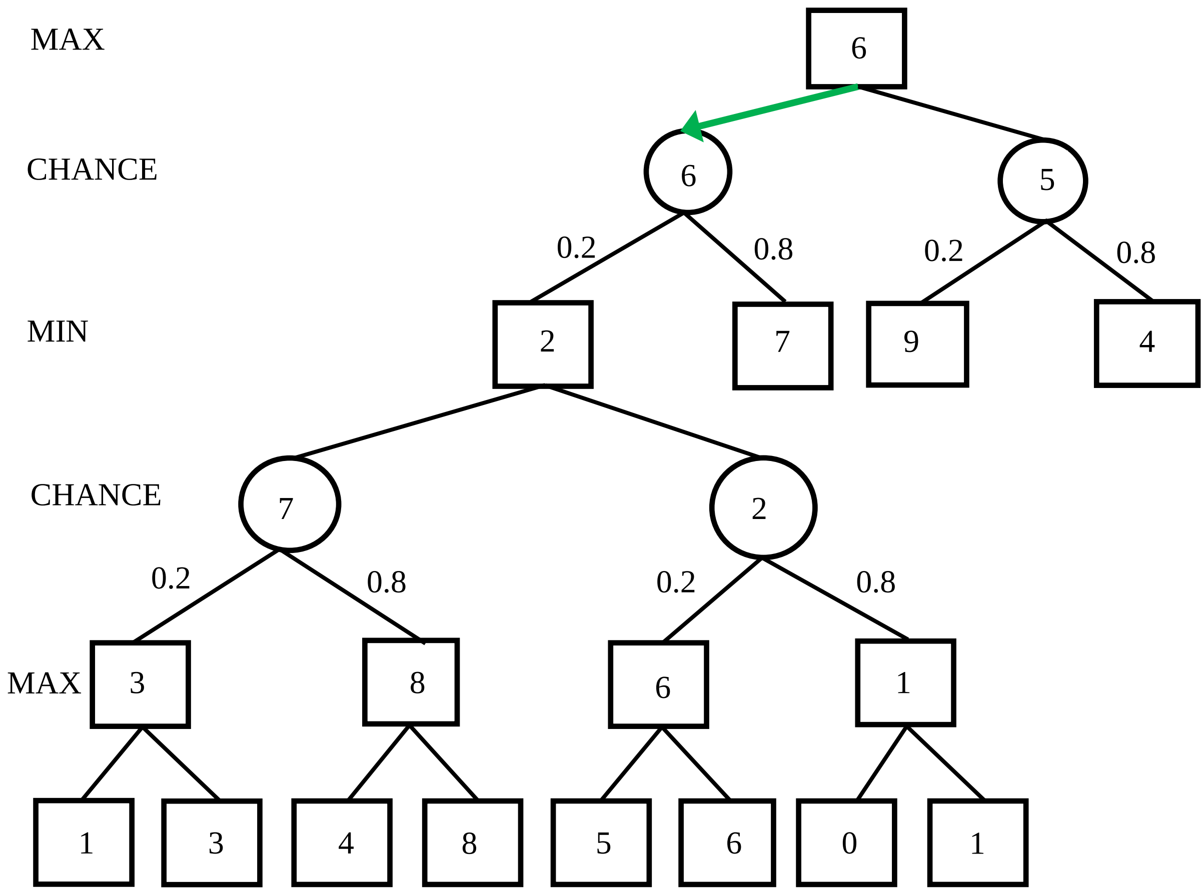
4.18. Дадено е стебло на некоја игра на среќа. Да се определи вредноста на коренот и потегот што ќе го преземе MAX играчот на почетната позиција.



Слика 4.39. Илустрација кон задача 4.18

Решение: Бидејќи MAX играчот секогаш го влече потегот со најголема вредност, директните претходници на листовите, кои се на MAX ниво, ќе ја добијат поголемата вредност од своите наследници. Вредноста на CHANCE јазлите односно позициите во играта, се определува секогаш како средна вредност од вредностите на нивните наследници, помножени со соодветната веројатност. MIN играчот секогаш влече потег со најмала можна вредност, па позициите кои им претходат на CHANCE јазлите, бидејќи се наоѓаат на MIN ниво, ќе ја добијат помалата вредност од своите наследници. Така конечно се добива дека коренот, кој се наоѓа на MAX ниво, ќе ја добие поголемата вредност од своите наследници, кои се CHANCE јазли со вредности 6 и 5, соодветно. Тоа е вредноста 6.

Вредностите на сите позиции во играта и потегот што ќе го повлече MAX играчот од почетната позиција, означен со зелена линија, се прикажани на слика 4.40.



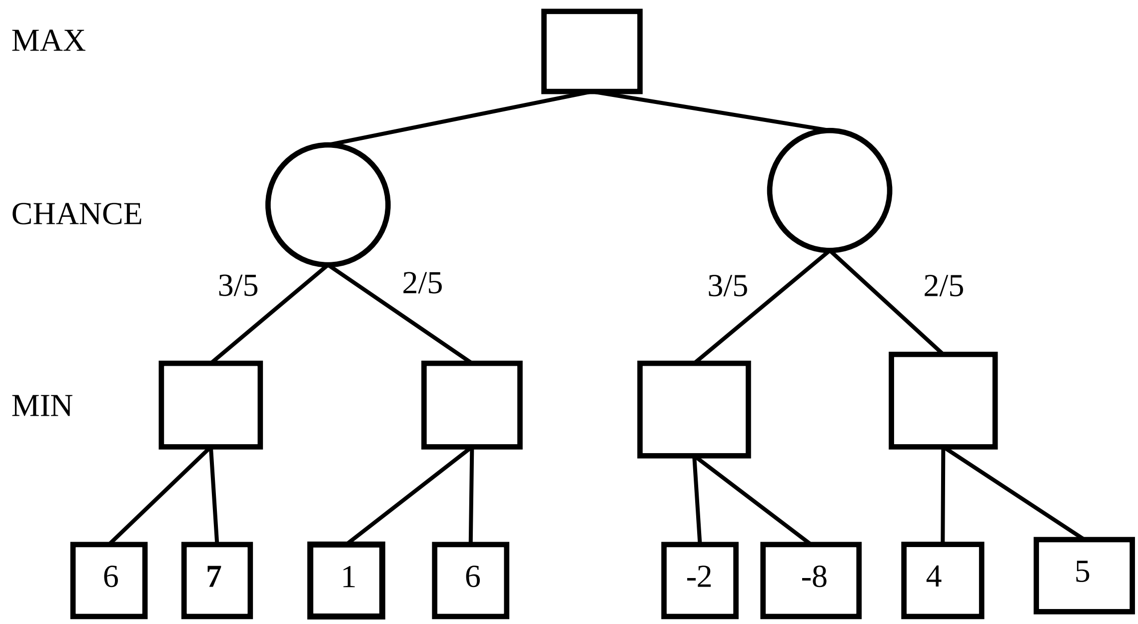
Слика 4.40. Решение на задача 4.18

4.19. На сликата 4.41 е дадено парцијалното стебло на една игра со два играчи. Играта содржи и елементи на среќа (случајност). Играчите се наречени MIN и MAX, соодветно. На сликата се означени вредностите на крајните јазли од стеблото односно листовите.

а) Да се означат вредностите и на преостанатите јазли од стеблото (внатрешните јазли и коренот).

б) Да се одбере и означи на сликата најдоброт потег од коренот.

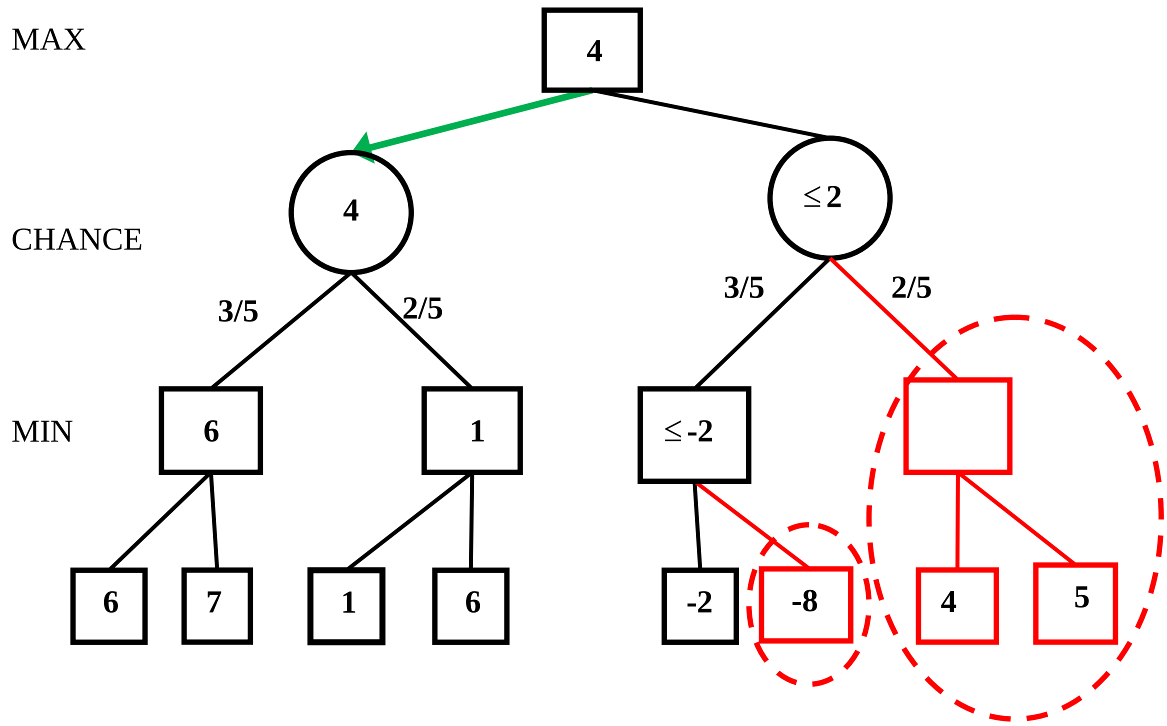
в) Нека, под претпоставка, вредностите на јазлите во стеблото се одредуваат од лево на десно и нека вредностите на листовите се ограничени во опсегот $[-8,8]$. Да се означат на стеблото листовите што ќе бидат „отсечени“ со АЛФА-БЕТА постапката за отсекување.



Слика 4.41. Парцијално стебло на игра со елементи на среќа – илустрација кон задачата 4.19

Решение: За вредност на секој MIN јазол се усвојува најмалата вредност на неговите следбеници; вредноста на секој MAX јазол се определува како најголемата од вредностите на неговите следбеници и вредноста на секој CHANCE јазол се определува како средна вредност од вредностите на неговите наследници, помножени со соодветната веројатност.

АЛФА-БЕТА поткаструвањето се применува секогаш кога ќе се утврди дека вредноста на јазолот, која треба да се определи следна, нема да влијае врз изборот на најдобар потег од коренот на стеблото. Ако вредностите на листовите во стеблото на една игра со елементи на случајност не се ограничени, такви ќе бидат и вредностите на CHANCE јазлите, сè додека не се определат вредностите на нивните следбеници. Следствено, при неограничени вредности на листовите, не може да се изврши „отсекување“. Кога вредностите на листовите се ограничени, можно е вредноста на еден CHANCE јазол да не биде доволно голема или мала за да влијае врз изборот на најдобар потег од коренот на стеблото, дури и кога преостанатите листови (чии вредности сè уште не се определени) имаат најголема или најмала вредност. Во конкретниот пример од задачата, еднаш кога е испитан петтиот лист од лево со вредност -2, нема потреба од испитување на вредностите на преостанатите листови во стеблото, односно листовите со вредност -8, 4 и 5 ќе бидат „отсечени“. Тоа се должи на фактот дека вредноста на вториот CHANCE јазол, броејќи од лево, не може да биде поголема од 2, бидејќи неговиот наследник десно не може да има вредност поголема од 8. Со други зборови, каква и да е вредноста на преостанатите листови во стеблото, играчот од почетната позиција (коренот) нема никогаш да повлече потег на десно, бидејќи вредноста на јазолот кон кој води овој потег во секој случај е помала од вредноста на јазолот кон кој води потегот на лево.



Слика 4.42. Решение на задачата 4.19

4.20. На слика 4.43 е прикажано целосното стебло на една многу едноставна игра, која вклучува и елементи на среќа (случајност). Нека, под претпоставка, крајните јазли односно листовите во стеблото се оценуваат од лево на десно, а опсегот можни вредности на листовите е од $-\infty$ до $+\infty$ (што значи дека пред оценувањето на листовите не се знае ништо за нивните вредности).

а) Да се означат вредностите на сите внатрешни јазли од стеблото и со стрелка да се означи најдобриот потег од врвот т.е. коренот на стеблото.

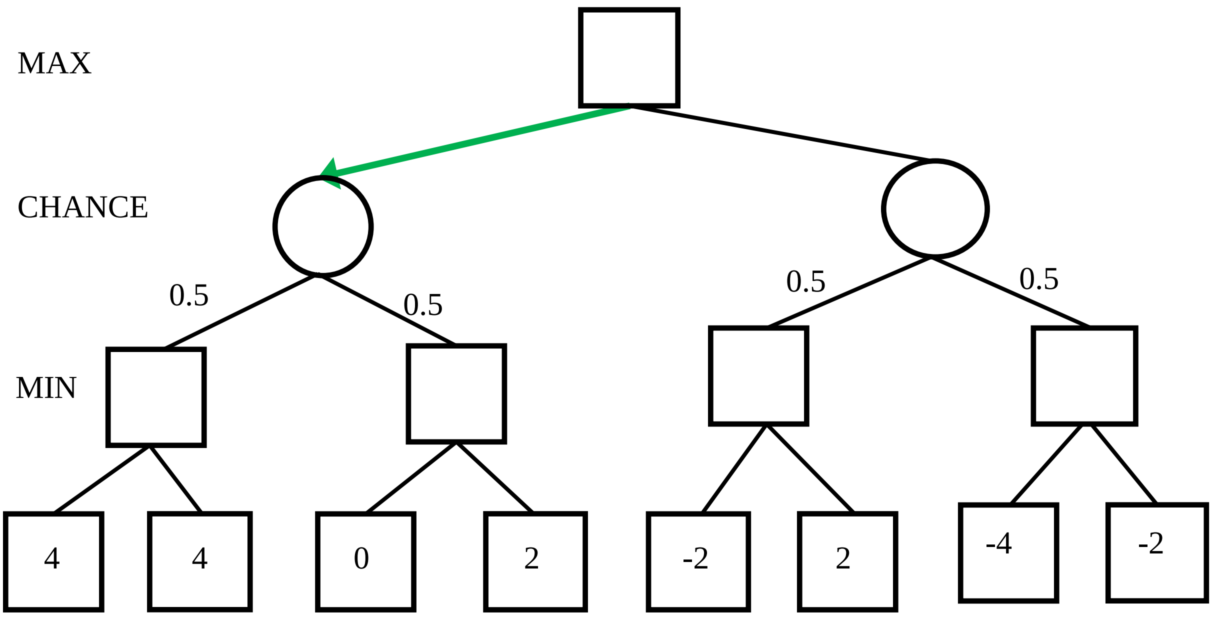
б) Да се одговори дали следното тврдење е точно или погрешно **Т/П:** За дадени вредности на првите шест листа, вредностите на седмиот и осмиот лист се неважни и не треба да се оценуваат.

в) Да се одговори дали следното тврдење е точно или погрешно **Т/П:** За дадени вредности на првите седум листа, вредноста на осмиот лист е неважна и не треба да се оценува.

г) Нека, под претпоставка, вредностите на сите листови од стеблото лежат помеѓу –4 и 4 (вклучувајќи ги и границите). По испитувањето на вредностите на првите два листа може да се заклучи дека опсегот вредности за левиот јазол под коренот е:

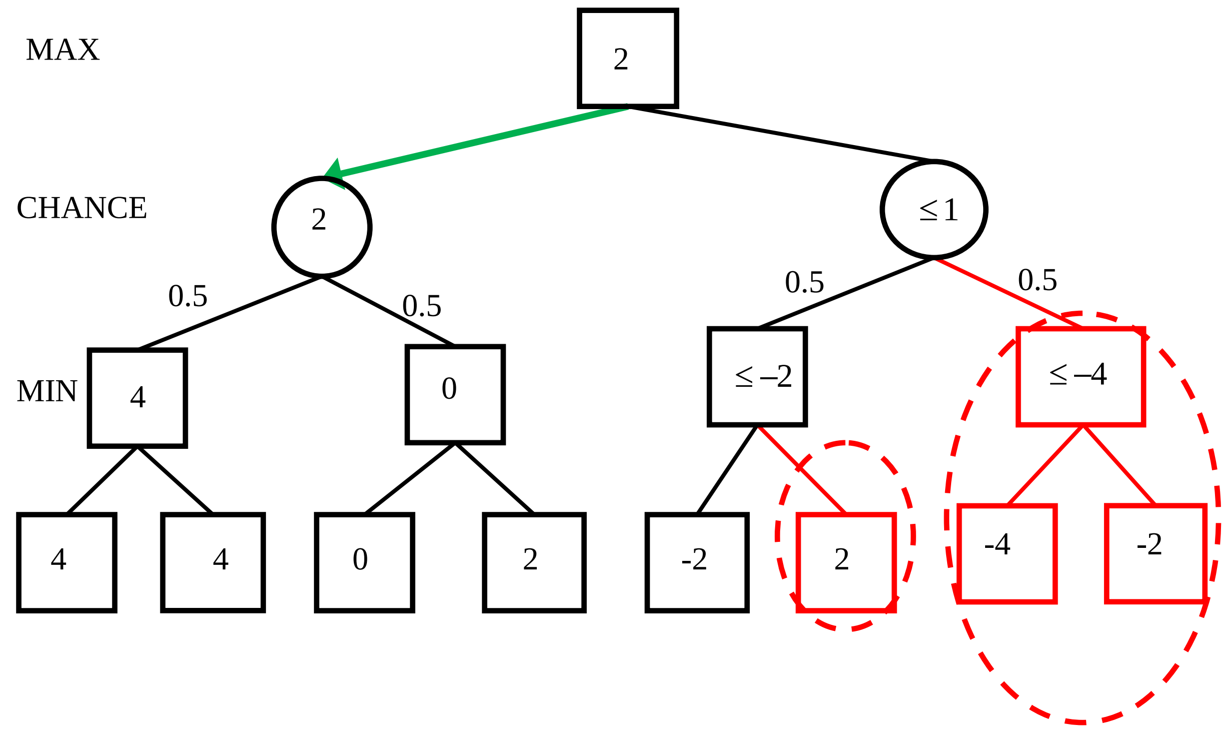
(i) $[-4,4]$ (ii) $[0,2]$ (iii) $[0,4]$

д) Да се заокружат листовите што не треба да се проценуваат доколку важи претпоставката направена под г)



Слика 4.43. Илустрација кон задачата 4.20

Одговор: а) Решението е прикажано на слика 4.44.



Слика 4.44. Решение на задачата 4.20

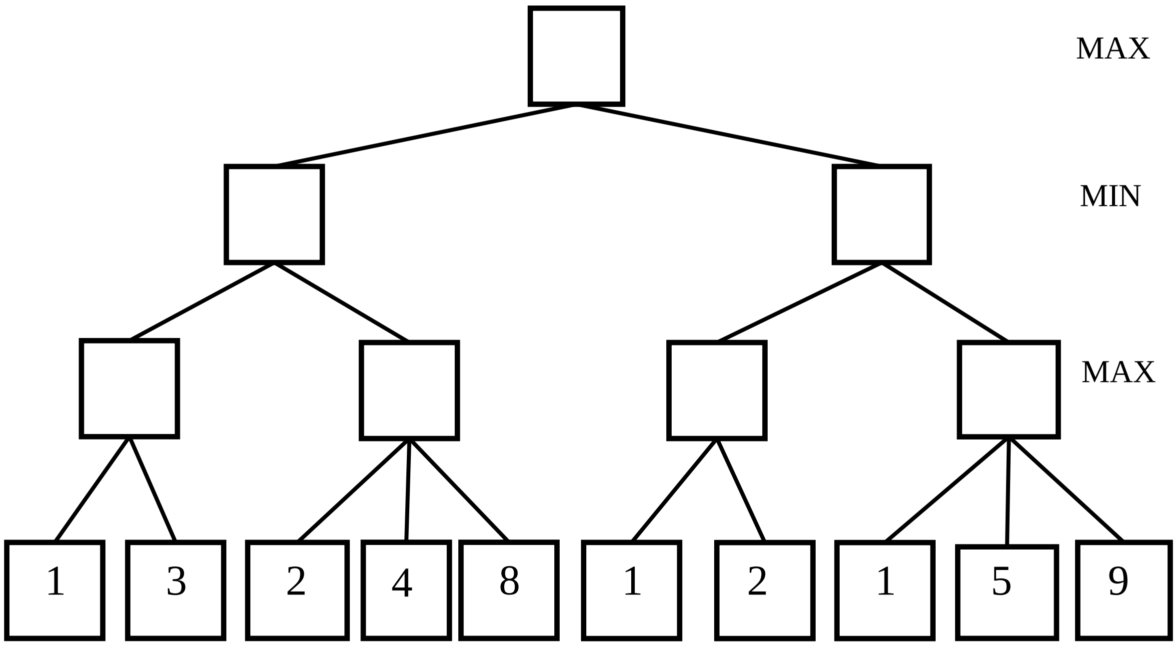
б) **П** – Ако и двата листа имаат вредност >6, вредноста на MIN јазолот ќе биде исто така >6, а вредноста на CHANCE јазолот ќе биде >2, па најдобриот потег ќе се смени.

в) **Т** – Вредноста на MIN јазолот не може да биде поголема од -4, а вредноста на CHANCE јазолот над него не може да биде поголема од -3, па најдобриот потег ќе остане ист.

г) (iii)

д) Отсечените јазли и гранки во стеблото со АЛФА-БЕТА постапката за поткастрување се значени на слика 4.44 со црвено.

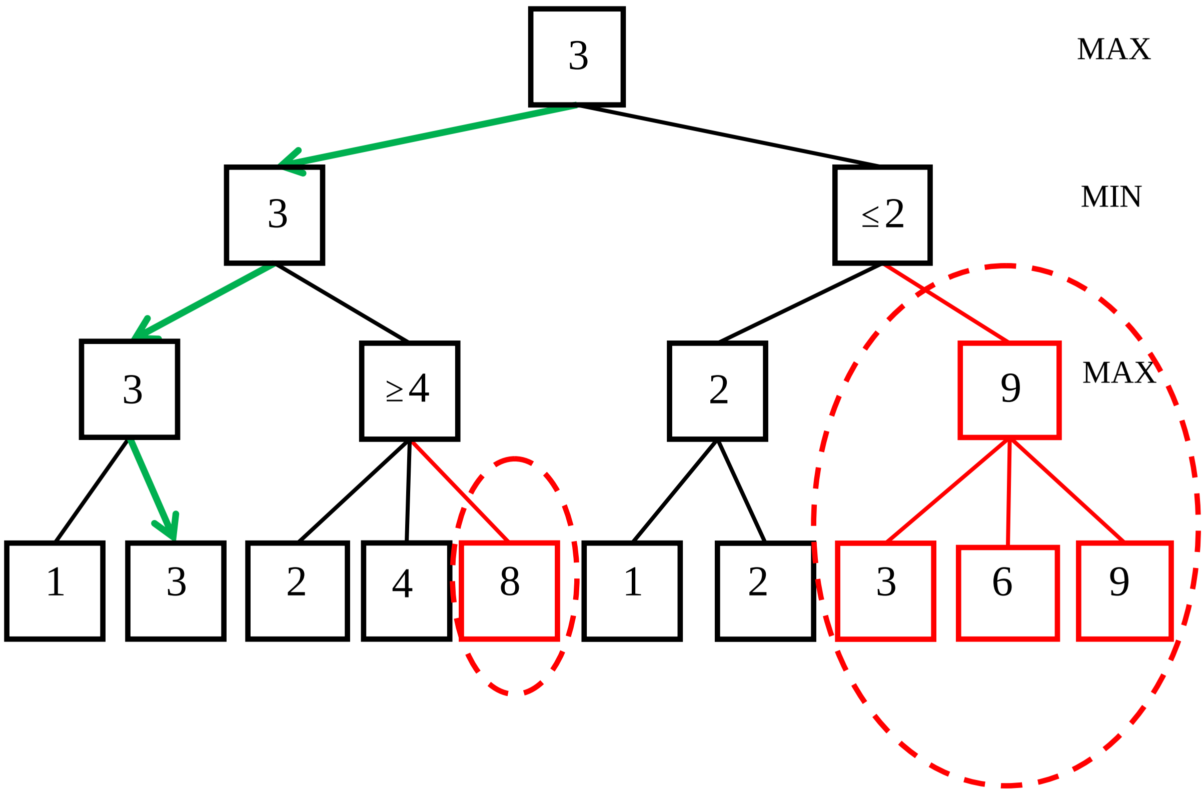
4.21. Дадено е парцијалното стебло на една игра од позиција на MAX играчот. Применете ја АЛФА-БЕТА постапката за да го одредите исходот на играта за MAX играчот.



Слика 4.45. Илустрација кон задачата 4.21

Решение: Програмот ги испитува првите два листа од лево и утврдува дека нивниот претходник ќе ја добие поголемата вредност 3, бидејќи е на MAX ниво. Тоа значи дека јазолот на MIN нивото не може да има вредност поголема од 3. Програмот потоа го испитува третиот лист од лево, но неговата вредност го задоволува условот за MIN јазолот. Четвртиот лист од лево има вредност 4, која е поголема од максималната можна вредност на јазолот на нивото MIN. Затоа програмот тука завршува со испитување на наследниците на вториот јазол од лево на MAX нивото. Вредноста на петтиот лист нема никакво влијание врз исходот на играта, затоа што ако е помала од 4, MAX играчот нема никогаш да го одбере тој потег, а ако е поголема, MIN играчот нема никогаш да се спушти по неговата гранка.

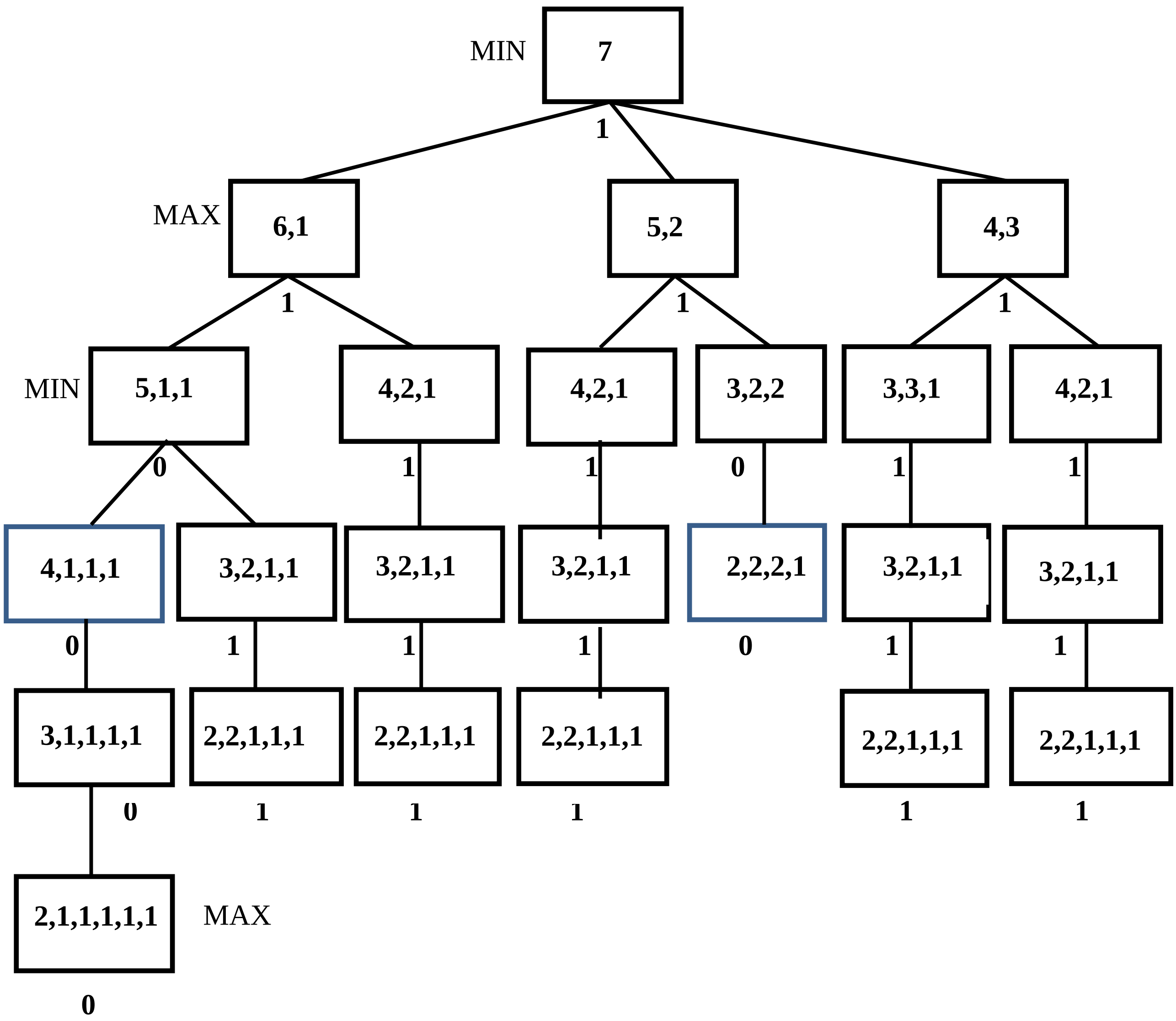
Со испитување на шестиот и седмиот лист од стеблото, се утврдува дека третиот јазол на MAX нивото ќе има вредност 2. Тоа значи дека соодветниот јазол на претходното MIN ниво не може да има вредност поголема од 2. Меѓутоа, бидејќи оваа вредност е помала од 3, алгоритамот нема воопшто да ги испитува преостанатите јазли и листови од стеблото, затоа што MAX играчот нема никогаш да го одбере потегот на десно.



Слика 4.46. Решение на задачата 4.21

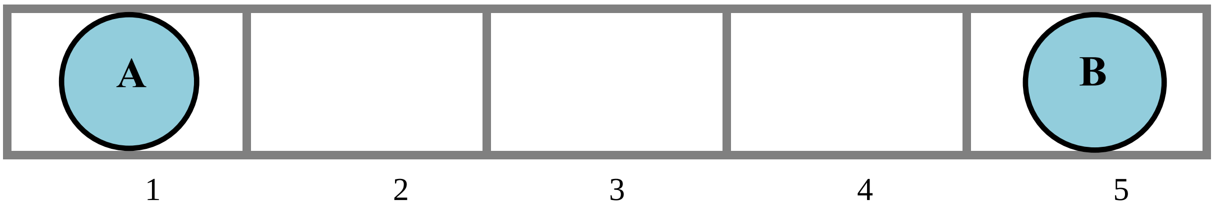
4.22. Се набљудува игра со купче стапчиња и два играчи. При секој потег играчите треба да го поделат купчето на два нееднакви дела. Губи оној кој веќе нема потег. Да се состави стеблото на оваа игра за 7 стапчиња и да се означат вредностите на сите позиции во играта. Под претпоставка, почнува играчот MIN. 0 значи победа за MIN, а 1 значи победа за MAX.

Решение:



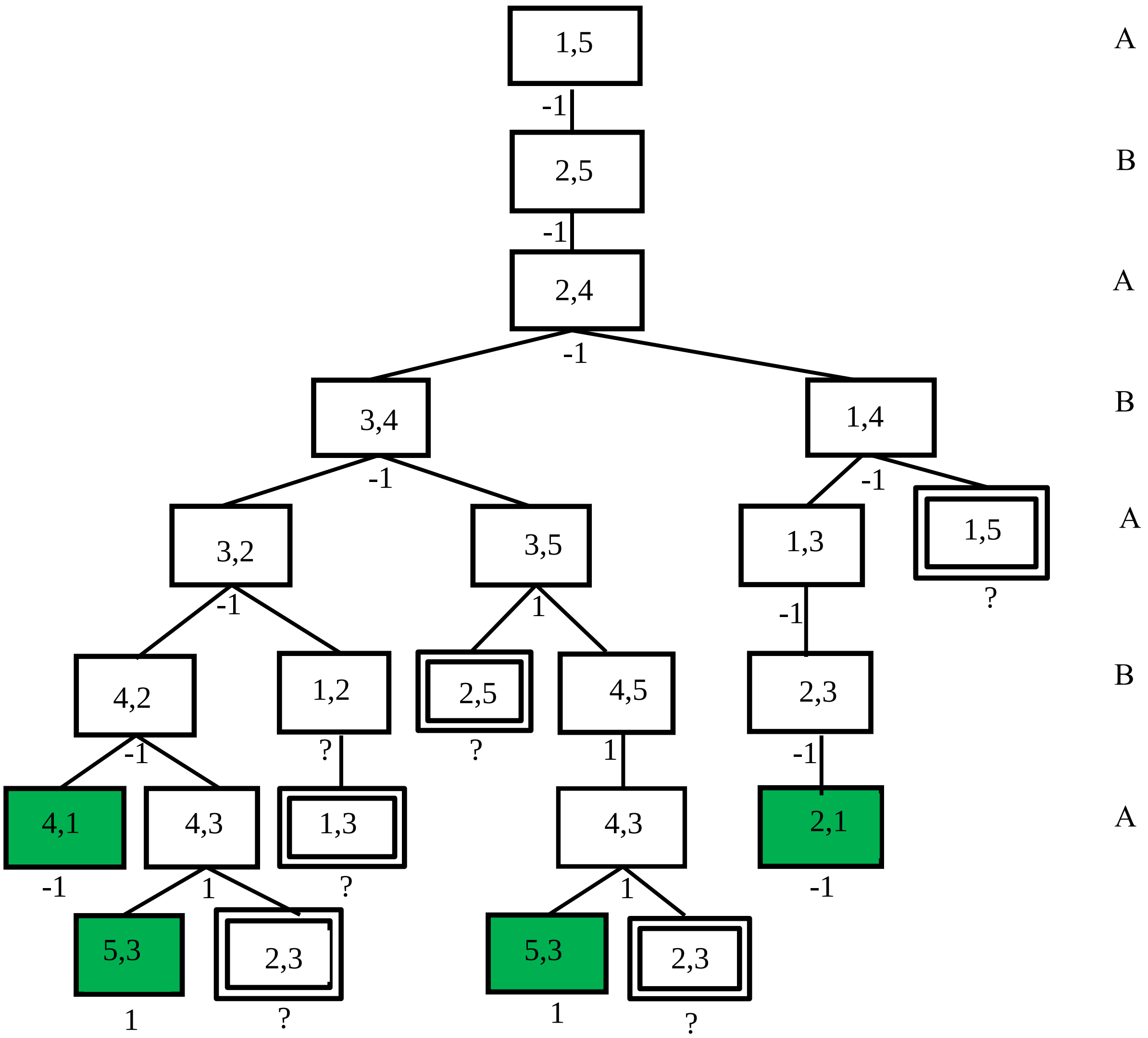
Слика 4.47. Стебло на играта од задача 4.22

4.23. На слика 4.48 е прикажана почетната позиција на едноставна игра со два играчи A и B. Прв влече потег играчот A. Играчите влечат потези наизменично, при што секој играч мора да го помести својот жетон во следното празно поле во која и да било насока. Доколку во соседно поле се наоѓа веќе жетонот на противникот, играчот може да го прескокне до следното слободно поле доколку такво постои. На пример, ако играчот A е на полето 2, а играчот B на полето 3, тогаш играчот A може да го прескокне играчот B и да застане на полето 4. И аналогно, играчот B може да го прескокне играчот A и да застане на полето 1. Играта ќе заврши кога некој од играчите ќе стаса на спротивниот крај од таблата. Доколку играчот A прв стаса до полето 5, вредноста на играта за него ќе биде 1. Доколку играчот B прв стаса до полето 1, вредноста на играта за играчот A ќе биде -1. Да се состави комплетното стебло на играта.



Слика 4.48. Илустрација кон задачата 4.23

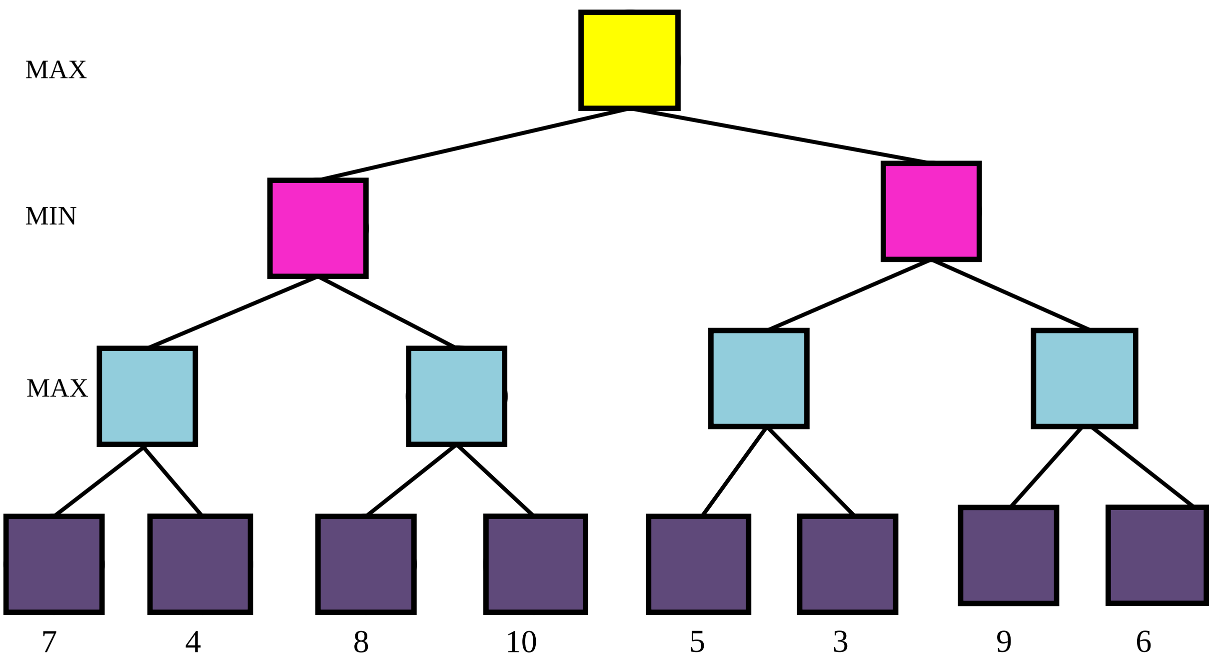
Решение:



Слика 4.49. Стебло на играта од задача 4.23

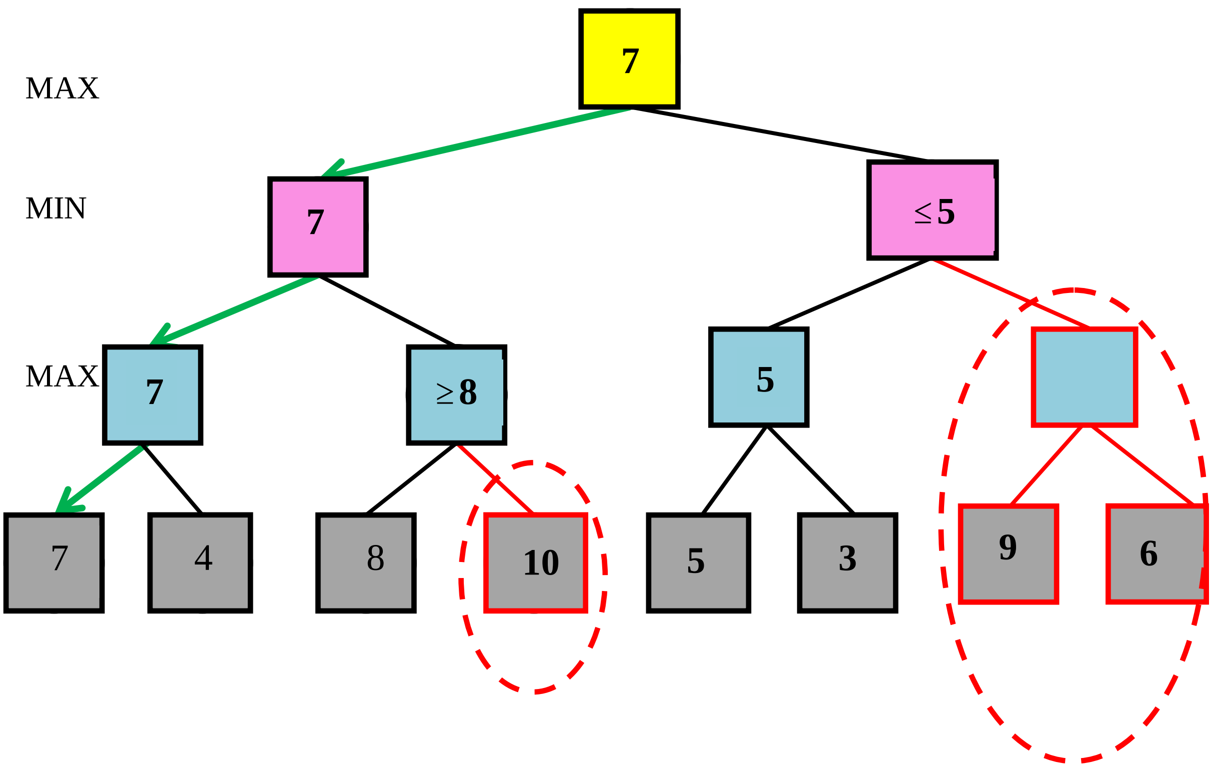
Во стеблото од слика 4.49, со правоаголници се означени соодветните позиции во играта, со зелени правоаголници се означени листовите, а со правоаголници со двојни линии се означени позиции што се повторуваат. Позициите се дефинирани со парови броеви кои ги претставуваат полињата на кои се наоѓаат тековно A и B играчот. Крај секоја позиција е означена нејзината вредност. Притоа, вредноста на повторените позиции е означена со „?“. При одредувањето на вредностите на позициите во стеблото, „?“ – вредностите се сметани под претпоставка дека еден играч кој има избор помеѓу победа и повторена состојба, секогаш ќе одбере потег кој води до победа. Тоа значи дека $\min(-1,?)=-1$ и $\max(1,?)=1$. Исто така, кога играчот има избор помеѓу нова и повторена позиција, секогаш ќе ја одбере новата позиција, што значи дека $\min(1,?)=1$ и $\max(-1,?)=-1$. Конечно, ако сите следбеници на некоја позиција се со вредност „?“, истата вредност ќе ја добие и таа позиција.

4.24. Дадено е парцијално стебло на една игра. Да се примени постапката АЛФА-БЕТА и да се означат јазлите кои не се разгрануваат, односно кои се „отсекуваат“ со оваа постапка. Како ќе игра MAX играчот кој ја почнува играта? Што може да се каже за својствата на алгоритамот од аспект на комплетност, оптималност, временска и просторна сложеност?



Слика 4.50. Илустрација кон задача 4.24

Решение: Решението на задачата е дадено на слика 4.51.



Слика 4.51. Решение на задача 4.24

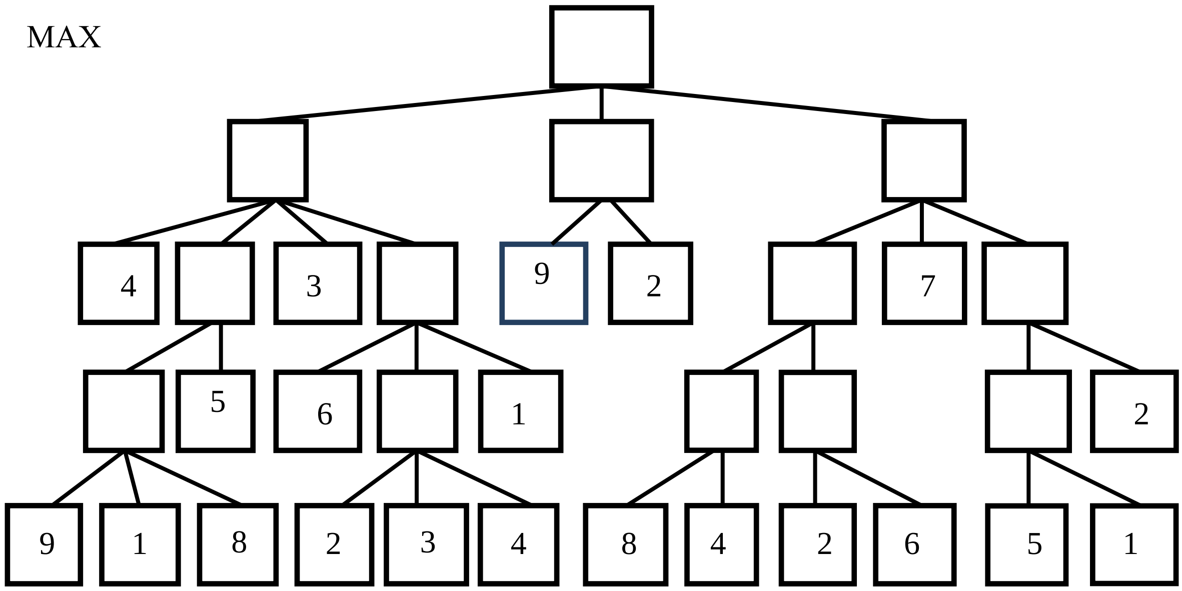
Алгоритамот е комплетен, затоа што стеблото на играта е комплетно. Тој е оптимален, затоа што играчите играат оптимално. Просторната сложеност на алгоритамот е 6 јазли, затоа што разгранува само 6 јазли. Временската сложеност исто така изнесува 6 јазли, затоа што алгоритамот разгранува 6 јазли.

4.25. Петре и Павле играат некоја игра. Непосредно пред крајот на играта Павле ја прекинува моментално играта за да донесе освежување од кујната. За тоа време, Петре за да се забавува, го црта стеблото на играта за последните потези, како што е прикажано на слика 4.52. Потоа се обидува да го одреди најдобриот потег во остатокот од играта, имајќи предвид дека тој е MAX играчот.

а) Наведете го најдобриот потег и преостанатиот тек на играта со МИН-МАКС постапката. Означете ги вредностите на јазлите во стеблото.

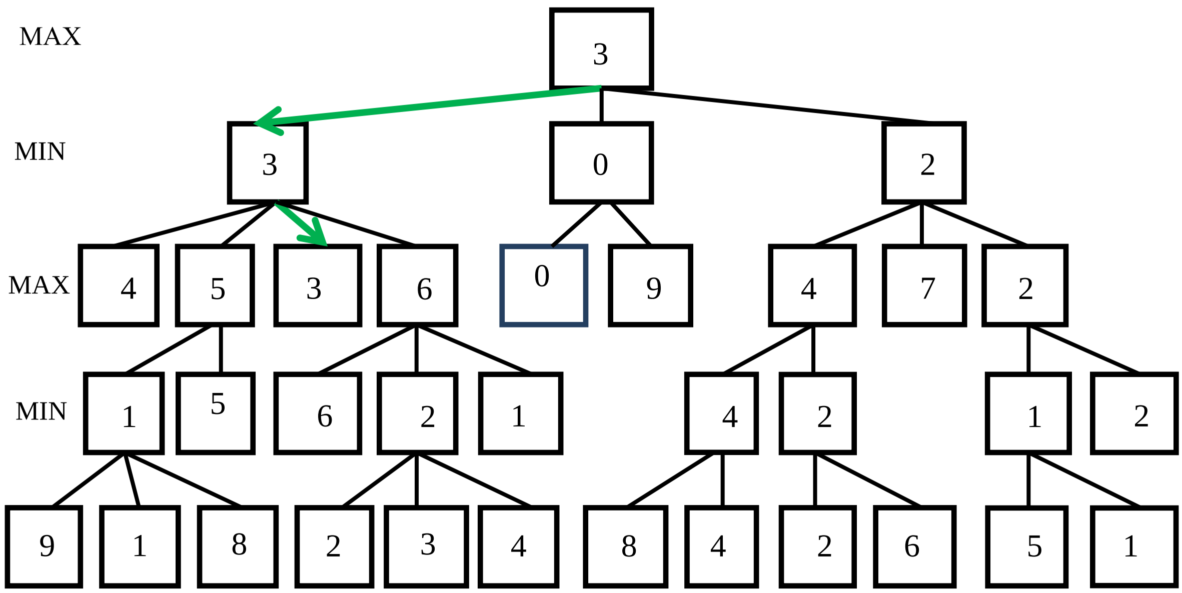
б) Означете кои јазли од стеблото нема да бидат разгранети со АЛФА-БЕТА постапката, така што ќе ги обоите истите во дадената таблица:

10	13	15	16	17	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34



Слика 4.52. Илустрација кон задача 4.25

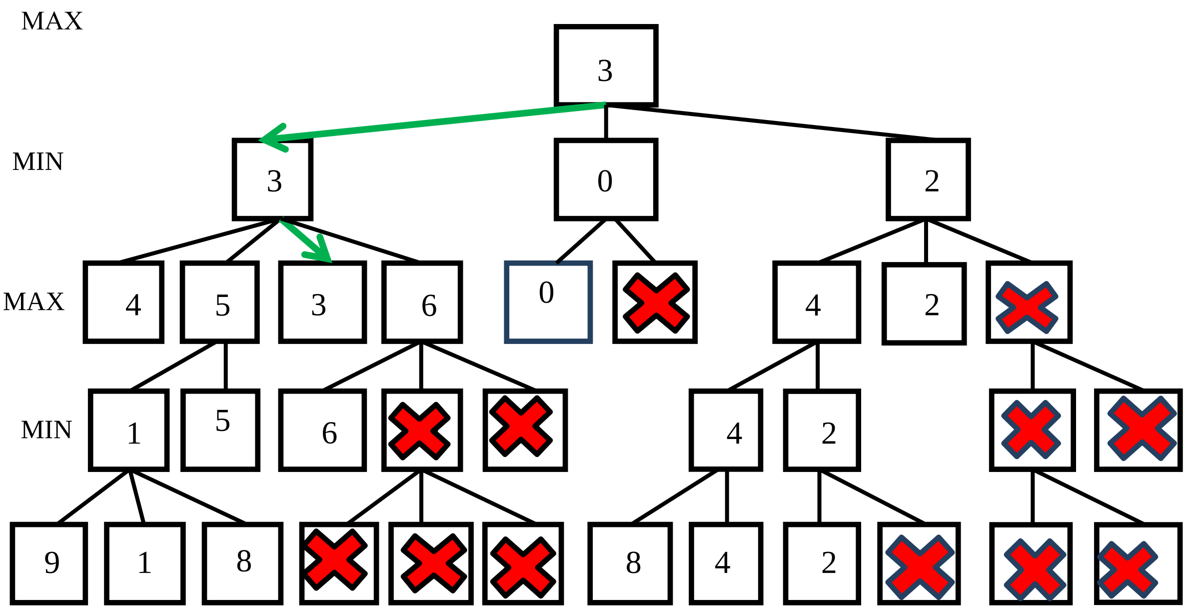
Решение: а) Јазлите во стеблото ќе бидат идентификувани преку нивниот редослед од лево на десно и одгоре надолу. Така првиот јазол ќе биде 1, вториот јазол 2, итн.



Слика 4.53. Решение на задача 4.25 под а)

1	2	7

б)



Слика 4.54. Решение на задача 4.25 под б)

10	13	15	16	17	18	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34

5. МАШИНСКО УЧЕЊЕ

5.1. Да се определи конјукцијата која точно ќе ги класифицира влезно-излезните податоци од множеството за обучување дадено во таблицата 5.1. Потоа да се класифицираат податоците од множеството за тестирање дадени во таблица 5.2.

Таблица 5.1. Множество за обучување од задачата 5.1

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	y
1.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
2.	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
3.	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
4.	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
5.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
6.	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
7.	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
8.	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
9.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
10.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**

Таблица 5.2. Множество за тестирање од задачата 5.1

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	y
1.	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**?**
2.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**?**
3.	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**?**

Решение: За почетна претпоставка се усвојува хипотезата $h=1$, која точно ги класифицира сите позитивни податоци и истите се обоени со сино во таблицата 5.3. Следствено, $P=\{x^2,x^4,x^6,x^8\}$ и $N=\{x^1,x^3,x^5,x^7,x^9,x^{10}\}$.

Од сите карактеристики на влезните податоци, само карактеристиките f_2, f_4 и f_5 ги опфаќаат сите позитивни податоци (имаат вредност 1 во овие влезно-излезни податоци). Оттаму, во конјукцијата $h=1$ ќе се додаде една од овие карактеристики и тоа онаа што отфрла најмногу негативни податоци од $N=\{x^1,x^3,x^5,x^7,x^9,x^{10}\}$. Бидејќи f_2 ги отфрла податоците $\{x^1,x^5,x^9\}$, f_4 ги отфрла податоците $\{x^3,x^7\}$ и f_5 ги отфрла податоците $\{x^9,x^{10}\}$, во конјукцијата $h=1$ се внесува карактеристиката f_2, па сега $h=f_2$ и $N'=\{x^3,x^7,x^{10}\}$, таблица 5.4.

Од преостанатите карактеристики f_4 и f_5, f_4 отфрла два податоци од новото множество N', x^3 и x^7, а f_5 отфрла еден, x^{10}, па во конјукцијата $h = f_2$ се внесува f_4. Сега, $h = f_2 \wedge f_4$ и $N'' = \{x^{10}\}$, таблица 5.5. Со сино се обоени податоците кои точно се класифицирани со усвоената хипотеза $h = f_2 \wedge f_4$.

Со внесувањето на карактеристиката f_5 во конјукцијата $h = f_2 \wedge f_4$, и последниот погрешен податок се отфрла од N, па N станува празно множество. Лесно може да се провери дека конјукцијата $h = f_2 \wedge f_4 \wedge f_5$ точно ги класифицира сите податоци од даденото влезно-излезно множество, таблица 5.6.

Табліца 5.3. Точно класифицирани позитивни податоци со $h = 1$

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	y
1.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
2.	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
3.	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
4.	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
5.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
6.	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
7.	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
8.	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
9.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
10.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**

Таблица 5.4. Точно класифицирани податоци со $h = f_2$

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	y
1.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
2.	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
3.	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
4.	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
5.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
6.	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
7.	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
8.	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
9.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
10.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**

Таблица 5.5. Точно класифицирани податоци со $h = f_2 \wedge f_4$

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	y
1.	0	0	1	1	1	0
2.	0	1	0	1	1	1
3.	0	1	1	0	1	0
4.	0	1	1	1	1	1
5.	1	0	0	1	1	0
6.	1	1	0	1	1	1
7.	1	1	1	0	1	0
8.	1	1	1	1	1	1
9.	1	0	1	1	0	0
10.	1	1	0	1	0	0

Таблица 5.6. Точно класифицирани податоци со $h = f_2 \wedge f_4 \wedge f_5$

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	y
1.	**0**	0	**1**	1	1	0
2.	**0**	1	**0**	1	1	1
3.	**0**	1	**1**	0	1	0
4.	**0**	1	**1**	1	1	1
5.	**1**	0	**0**	1	1	0
6.	**1**	1	**0**	1	1	1
7.	**1**	1	**1**	0	1	0
8.	**1**	1	**1**	1	1	1
9.	**1**	0	**1**	1	0	0
10.	**1**	1	**0**	1	0	0

Останува да се класифицираат податоците од даденото множество за тестирање од таблицата 5.2. Усвоената конјукција ги класифицира како што е покажано во таблицата 5.7.

Таблица 5.7. Класификација на множеството за тестирање со хипотезата $h = f_2 \wedge f_4 \wedge f_5$

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	y
1.	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
2.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
3.	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

5.2. Да се определи конјукцијата која точно ќе ги класифицира влезно-излезните податоци од множеството за обучување D дадено во таблицата 5.8. Потоа да се класифицираат податоците од множеството за тестирање дадени во таблица 5.9.

Таблица 5.8. Множество за обучување од задачата 5.2

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	y
1.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
2.	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
3.	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
4.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
5.	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
6.	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
7.	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Таблица 5.9. Множество за тестирање од задачата 5.2

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	y
1.	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**?**
2.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**?**
3.	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**?**

Решение: Даденото влезно-излезно множество D има 3 позитивни и 4 негативни податоци, прикажани во таблица 5.10 и таблица 5.11, соодветно. Следствено, подмножествата P и N се:

$$P = \{x^2, x^4, x^6\} \tag{5.1}$$

$$N = \{x^1, x^3, x^5, x^7\} \tag{5.2}$$

Таблица 5.10. Позитивни податоци во множеството D од задача 5.2

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	y
2.	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
4.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
6.	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Таблица 5.11. Негативни податоци во множеството D од задача 5.2

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	y
1.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
3.	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
5.	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
7.	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

За почетна претпоставка се усвојува хипотезата $h=1$, која точно ги класифицира сите позитивни податоци и не отфрла ниеден негативен податок. Оттука:

$$h=1, \quad P=\{x^2, x^4, x^6\}, \quad N=\{x^1, x^3, x^5, x^7\} \tag{5.3}$$

Со инспекција на даденото множество за обучување D, може да се забележи дека од сите карактеристики, само карактеристиките f_4 и f_6 ги опфаќаат сите позитивни податоци во P. Тоа значи дека конјукцијата треба да се гради од нив. Меѓутоа, ниту f_4 ниту f_6, ниту пак нивната конјукција, не ги отфрлаат сите негативни податоци од N, така што N нема да остане празно множество по формирањето на конјукцијата $f_4 \wedge f_6$. Или, со други зборови, конјукцијата $f_4 \wedge f_6$ не ги класифицира точно сите влезни податоци од множеството D. Конкретно, таа ќе го класифицира погрешно влезниот податок x^7.

Настанатата ситуација може лесно да се разреши ако се забележи дека карактеристиката f_1 ги отфрла сите позитивни податоци, што значи дека нејзината негација $\bar{f}_1$ ќе ги опфаќа сите позитивни податоци од множеството D, па, со додавање на $\bar{f}_1$ во таблицата 5.8, набљудуваме уште една карактеристика.

Таблица 5.12. Множеството D со додадена карактеристика $\bar{f}_1$

податок	$\bar{f}_1$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	y
1.	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
2.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
3.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
4.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
5.	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
6.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
7.	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Сега три карактеристики, $\bar{f}_1$, f_4 и f_6, ги опфаќаат сите позитивни податоци во P и конјукцијата ќе се гради од нив. Карактеристиката $\bar{f}_1$ ги отфрла од N негативните податоци x^1 и x^7, карактеристиката f_4 ги отфрла негативните податоци x^1 и x^3 и карактеристиката f_6 ги отфрла негативните податоци x^1 и x^5. Бидејќи сите три карактеристики отфрлаат ист број негативни податоци од N, тие се рамноправни, па произволно ја одбираме карактеристиката $\bar{f}_1$ и ја додаваме во нашата хипотеза $h = 1$. Така ја добиваме следната ситуација:

$$h = \bar{f}_1, \quad P = \left\{x^2, x^4, x^6\right\}, \quad N' = \left\{x^3, x^5\right\} \tag{5.4}$$

Таблица 5.13. Позитивни податоци во D со додадена карактеристика $\bar{f}_1$

податок	$\bar{f}_1$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	y
2.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
4.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
6.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Таблица 5.14. Негативни податоци во D со додадена карактеристика $\bar{f}_1$

податок	$\bar{f}_1$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	y
1.	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
3.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
5.	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
7.	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**

Нашата хипотеза $h = \bar{f}_1$ точно ги класифицира сите позитивни податоци од D и точно ги класифицира негативните податоци x^1 и x^7. Затоа x^1 и x^7 се исфрлаат од N, па новото множество N' има само два елементи. Во продолжение треба да се најдат други влезни карактеристики кои ќе ги отфрлат и овие податоци од N'.

Од преостанатите карактеристики f_4 и f_6, кои ги опфаќаат сите позитивни податоци во D односно P, f_4 го отфрла од новото N' само негативниот податок x^3, а f_6 го отфрла негативниот податок x^5. Следствено, и двете карактеристики мора да влезат во конјукцијата, па конечно се добива:

$$h = \bar{f}_1 \wedge f_4 \wedge f_6, \quad P = \left\{x^2, x^4, x^6\right\}, \quad N'' = \left\{\cdot\right\} \tag{5.5}$$

Конјукцијата $h = \bar{f}_1 \wedge f_4 \wedge f_6$ точно ги класифицира сите влезни податоци од D и го претставува бараното решение. Со помош на неа заклучуваме дека податоците за тестирање од таблицата 5.9 се сите негативни.

Таблица 5.15. Класификација на податоците од множеството за тестирање

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	y
1.	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
2.	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
3.	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**

5.3. Да се определи нормалната дисјунктивна форма, која точно ќе ги класифицира влезно-излезните податоци од множеството за обучување дадено во таблицата 5.16. Потоа да се класифицираат податоците од множеството за тестирање дадени во таблицата 5.17.

Таблица 5.16. Множество за обучување од задачата 5.3

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1.	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
2.	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
3.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
4.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
5.	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
6.	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
7.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
8.	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
9.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
10.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

Таблица 5.17. Множество за тестирање од задачата 5.3

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1.	**1**	**1**	**1**	**0**	**?**
2.	**1**	**0**	**0**	**1**	**?**
3.	**1**	**0**	**1**	**1**	**?**

Решение: Множеството позитивни податоци и множеството негативни податоци во конкретниот случај се:

$$P = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\} \tag{5.6}$$

$$N = \{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\} \tag{5.7}$$

Со проверка, лесно може да се утврди дека класификацијата на дадените влезно-излезни податоци не е можна со помош на конјукции, бидејќи ниедна од карактеристиките на влезните вектори не ги опфаќа целосно позитивните податоци во даденото множество за обучување. Оттаму, алгоритамот за учење мора да примени посложена функција од конјукциите, каква што е нормалната дисјунктивна форма. Обучувањето започнува од хипотезата:

$$h = 0 \tag{5.8}$$

која сите позитивни податоци ги класифицира како погрешни. Множеството позитивни податоци P опфатени со оваа претпоставка е празно, а множеството негативни податоци е полно:

$$P = \{\cdot\}, \quad N = \left\{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\right\} \tag{5.9}$$

Целта на учењето е да се формираат дисјункции од конјукции на влезни карактеристики кои опфаќаат што е можно повеќе позитивни податоци и, се разбира, отфрлаат што е можно повеќе негативни податоци од $N = \left\{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\right\}$, за на крај во P да се најдат сите позитивни податоци, а N да не содржи ниеден негативен податок.

При формирањето на првата конјукција се поаѓа од хипотезата:

$$r_1 = 1 \tag{5.10}$$

според која:

$$P_{r_1} = \left\{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\right\}, \quad N_{r_1} = \left\{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\right\} \tag{5.11}$$

Бидејќи ниедна карактеристика не ги опфаќа сите позитивни податоци од P_{r_1}, се бара онаа која опфаќа најголем број од нив, а едновремено отфрла и најголем број податоци од N_{r_1}. Едновремено со карактеристиките се набљудуват и нивните негации. Карактеристиката f_1 го опфаќа само позитивниот податок x^3 и не отфрла ниеден од негативните податоци, таблица 5.18; карактеристиката f_2 го опфаќа позитивниот податок x^1 и ги отфрла негативните податоци x^6, x^8, x^{10}, таблица 5.19; карактеристиката f_3 ги опфаќа позитивните податоци x^1, x^3, x^4 и ги отфрла негативните податоци x^6, x^7, x^8, x^9, таблица 5.20; карактеристиката f_4 ги опфаќа позитивните податоци x^2, x^4, а го отфрла негативниот податок x^8, таблица 5.21; карактеристиката $\bar{f}_1$ ги опфаќа позитивните податоци x^1, x^2, x^4, x^5 и ги отфрла негативните податоци $x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}$, таблица 5.22; карактеристиката $\bar{f}_2$ ги опфаќа позитивните податоци x^2, x^3, x^4, x^5 и ги отфрла негативните податоци x^7, x^9, таблица

5.23; карактеристиката $\bar{f}_3$ ги опфаќа позитивните податоци x^2, x^5 и го отфрла негативниот податок x^{10}, таблица 5.24 и карактеристиката $\bar{f}_4$ ги опфаќа позитивните податоци x^1, x^3, x^5, а ги отфрла негативните податоци x^6, x^7, x^9, x^{10}, таблица 5.25. Бидејќи карактеристиката $\bar{f}_1$ опфаќа најмногу позитивни податоци во $P_{r_1} = \{x^1, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ и ги отфрла сите негативни податоци во $N_{r_1} = \{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\}$, таа е најдобриот избор за конјукцијата r_1.

Таблица 5.18. Опфатени позитивни и отфрлени негативни податоци со f_1

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1.	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
2.	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
3.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
4.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
5.	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
6.	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
7.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
8.	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
9.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
10.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

Таблица 5.19. Опфатени позитивни и отфрлени негативни податоци со f_2

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1.	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
2.	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
3.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
4.	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
5.	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
6.	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
7.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
8.	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
9.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
10.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

Таблица 5.20. Опфатени позитивни и отфрлени негативни податоци со f_3

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1.	**0**	**1**	1	**0**	1
2.	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
3.	**1**	**0**	1	**0**	1
4.	**0**	**0**	1	**1**	1
5.	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
6.	**1**	**0**	0	**1**	0
7.	**1**	**1**	0	**1**	0
8.	**1**	**0**	0	**0**	0
9.	**1**	**1**	0	**1**	0
10.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

Таблица 5.21. Опфатени позитивни и отфрлени негативни податоци со f_4

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1.	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
2.	**0**	**0**	**0**	1	1
3.	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
4.	**0**	**0**	**1**	1	1
5.	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
6.	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
7.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
8.	**1**	**0**	**0**	0	0
9.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
10.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

Таблица 5.22. Опфатени позитивни и отфрлени негативни податоци со $\bar{f}_1$

податок	$\bar{f}_1$	f_2	f_3	f_4	y
1.	1	**1**	**1**	**0**	1
2.	1	**0**	**0**	**1**	1
3.	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
4.	1	**0**	**1**	**1**	1
5.	1	**0**	**0**	**0**	1
6.	0	**0**	**0**	**1**	0
7.	0	**1**	**0**	**1**	0
8.	0	**0**	**0**	**0**	0
9.	0	**1**	**0**	**1**	0
10.	0	**0**	**1**	**1**	0

Таблица 5.23. Опфатени позитивни и отфрлени негативни податоци со $\bar{f}_2$

податок	f_1	$\bar{f}_2$	f_3	f_4	y
1.	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
2.	**0**	1	**0**	**1**	1
3.	**1**	1	**1**	**0**	1
4.	**0**	1	**1**	**1**	1
5.	**0**	1	**0**	**0**	1
6.	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
7.	**1**	0	**0**	**1**	0
8.	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
9.	**1**	0	**0**	**1**	0
10.	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**

Таблица 5.24. Опфатени позитивни и отфрлени негативни податоци со $\bar{f}_3$

податок	f_1	f_2	$\bar{f}_3$	f_4	y
1.	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
2.	**0**	**0**	1	**1**	1
3.	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
4.	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
5.	**0**	**0**	1	**0**	1
6.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
7.	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
8.	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
9.	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
10.	**1**	**0**	0	**1**	0

Таблица 5.25. Опфатени позитивни и отфрлени негативни податоци со $\bar{f}_4$

податок	f_1	f_2	f_3	$\bar{f}_4$	y
1.	**0**	**1**	**1**	1	1
2.	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
3.	**1**	**0**	**1**	1	1
4.	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
5.	**0**	**0**	**0**	1	1
6.	**1**	**0**	**0**	0	0
7.	**1**	**1**	**0**	0	0
8.	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
9.	**1**	**1**	**0**	0	0
10.	**1**	**0**	**1**	0	0

Со внесување на карактеристиката $\bar{f}_1$ во конјукцијата $r_1 = 1$, таа станува:

$$r_1 = \bar{f}_1 \tag{5.12}$$

а N_{r_1} станува празно множество. Затоа конјукцијата $r_1 = \bar{f}_1$ се внесува во нормалната дисјунктивна форма $h = 0$ која сега гласи:

$$h = \bar{f}_1 \tag{5.13}$$

Позитивните податоци за кои е точна хипотезата (5.13) се внесуваат во P, па:

$$P' = \{x^1, x^2, x^4, x^5\} \tag{5.14}$$

Хипотезата (5.13) точно ги класифицира сите податоци од даденото влезно-излезно множество освен третиот, како што се гледа од таблицата 5.22, па останува да се најде конјукција која ќе го опфати и овој податок.

При втората итерација се почнува со хипотезата:

$$r_2 = 1 \tag{5.15}$$

само што сега:

$$P_{r_2} = \{x^3\}, \quad N_{r_2} = \{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\} \tag{5.16}$$

Со проверка се утврдува дека само карактеристиките $f_1, f_3, \bar{f}_2, \bar{f}_4$ го опфаќаат единствениот позитивен податок во P_{r_2}, па, во продолжение се набљудуваат само тие. Од нив, карактеристиката f_1 не отфрла ниеден од негативните податоци во $N_{r_2} = \{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\}$; карактеристиката f_3 ги отфрла негативните податоци x^6, x^7, x^8, x^9 во $N_{r_2} = \{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\}$; карактеристиката $\bar{f}_2$ ги отфрла негативните податоци x^7, x^9 од $N_{r_2} = \{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\}$ и карактеристиката $\bar{f}_4$ ги отфрла негативните податоци x^6, x^7, x^9, x^{10} во $N_{r_2} = \{x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}\}$. Бидејќи карактеристиките f_3 и $\bar{f}_4$ се рамноправни, опфаќаат најмногу позитивни податоци од P_{r_2} и отфрлаат најмногу негативни податоци од N_{r_2}, карактеристиката f_3 произволно се одбира како прва карактеристика во втората конјукција и се внесува во $r_2 = 1$, која станува:

$$r_2 = f_3 \tag{5.17}$$

Негативните податоци x^6, x^7, x^8, x^9 што ги опфаќа карактеристиката f_3 се отфрлаат од N_{r_2}, па, сега:

$$N_{r_2}{}' = \{x^{10}\} \tag{5.18}$$

Во продолжение од преостанатите влезни карактеристики се бара онаа која ќе го отфрли x^{10} од $N_{r_2}{}'$. Овој негативен податок го отфрла единствено карактеристиката $\bar{f}_4$, па и таа се внесува во втората конјукција:

$$r_2 = f_3 \wedge \bar{f}_4 \tag{5.19}$$

со што N'_{r_2} станува празно множество. Затоа конјукцијата $r_2 = f_3 \wedge \bar{f}_4$ се додава во нормалната дисјунктивна форма (5.13), која добива облик:

$$h = \bar{f}_1 \vee (f_3 \wedge \bar{f}_4) \tag{5.20}$$

Позитивните податоци кои се опфатени со хипотезата $h = \bar{f}_1 \vee (f_3 \wedge \bar{f}_4)$ се означени со сино во таблицата 5.26. Лесно може да се утврди дека хипотезата (5.20) точно ги класифицира сите влезни податоци од даденото множество за обучување.

Таблица 5.26. Позитивни податоци опфатени со хипотезата $h = \bar{f}_1 \vee (f_3 \wedge \bar{f}_4)$

податок	$\bar{f}_1$	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_4$	y
1.	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
2.	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
3.	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
4.	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
5.	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
6.	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
7.	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
8.	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
9.	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
10.	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**

Според хипотезата (5.20), податоците од множеството за тестирање ќе бидат класифицирани како што е покажано во таблица 5.27.

Таблица 5.27. Класификација на множеството за тестирање од задачата 5.3

податок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1.	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
2.	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
3.	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**

5.4. Да се определи нормалната дисјунктивна форма, која точно ќе ги класифицира влезно-излезните податоци од множеството за обучување дадено во таблицата 5.28.

Таблица 5.28. Множество за обучување од задачата 5.4

пподаток	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
2	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
4	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
5	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
6	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
7	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
8	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
9	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
10	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
11	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
12	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

Решение: Даденото влезно-излезно множество има 7 позитивни и 5 негативни податоци, прикажани во таблицата 5.29 и таблицата 5.30, соодветно.

Таблица 5.29. Позитивни податоци за обучување од задача 5.4

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
6	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
7	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
10	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
11	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
12	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

Таблица 5.30. Негативни податоци за обучување од задача 5.4

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
2	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
4	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
5	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
8	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
9	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**

Почетната хипотеза е $h = 0$ и таа ги класифицира погрешно сите позитивни податоци:

$$h=0, \quad P=\{\cdot\}, \quad N=\{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\} \tag{5.21}$$

Оттаму, почетното множество P е празно. Во првата итерација се поаѓа од хипотезата $r_1=1$, која точно ги класифицира сите позитивни податоци:

$$r_1=1, \quad P_{r_1}=\{x^1, x^3, x^6, x^7, x^{10}, x^{11}, x^{12}\}, \quad N_{r_1}=\{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\} \tag{5.22}$$

Целта е да се формира конјукција од влезните карактеристики на даденото множество за обучување, која ќе опфати што е можно повеќе од позитивните податоци во P_{r_1}, и ќе ги отфрли сите негативни податоци од N_{r_1}. Затоа се испитуваат сите влезни карактеристики на множеството за обучување, како и нивните негации. Резултатот е прикажан во таблицата 5.31. Во последната колона од оваа таблица е дадена одредена евристика, која овозможува да се избере најдобрата карактеристика и таа е дефинирана како однос помеѓу бројот опфатени позитивни податоци и бројот сè уште неотфрлени негативни податоци од соодветните множества.

Карактеристиката $\bar{f}_3$ опфаќа најмногу позитивни податоци и отфрла најмногу негативни податоци, па се усвојува за конјукцијата r_1:

$$r_1=\bar{f}_3, \quad P_{r_1}'=\{x^1, x^3, x^6, x^7, x^{10}, x^{11}, x^{12}\}, \quad N_{r_1}'=\{x^5\} \tag{5.23}$$

Втората карактеристика што треба да се вклучи во конјукцијата r_1 ја бараме помеѓу карактеристиките f_1, f_2, f_3 и $\bar{f}_4$, зашто само тие го отфрлаат елементот x^5. Меѓутоа, карактеристиката f_3 не може да се вклучи во конјукцијата r_1, зашто тогаш ваквата конјукција ќе ги отфрли сите позитивни примероци, па останува да се одбере помеѓу f_1, f_2 и $\bar{f}_4$.

Таблица 5.31. Избор на најдобра влезна карактеристика во првата итерација

карактеристика	**опфаќа**	**отфрла**	v_j
f_1	x^6, x^7, x^{10}, x^{11}	x^4, x^5, x^8, x^9	$4/1$
f_2	x^1, x^{10}, x^{11}	x^2, x^4, x^5	$3/2$
f_3	x^3, x^{10}	x^5	$2/4$
f_4	x^3, x^6, x^{11}	x^2, x^4, x^9	$3/2$
$\bar{f}_1$	x^1, x^3, x^{12}	x^2	$3/4$
$\bar{f}_2$	x^3, x^6, x^7, x^{12}	x^8, x^9	$4/3$
$\bar{f}_3$	$x^1, x^6, x^7, x^{11}, x^{12}$	x^2, x^4, x^8, x^9	$5/1$
$\bar{f}_4$	x^1, x^7, x^{10}, x^{12}	x^5, x^8	$4/3$

Табличка 5.32. Избор на втората влезна карактеристика во првата итерација

карактеристика	**опфаќа**	**отфрла**	v_j
f_1	x^6, x^7, x^{10}, x^{11}	x^5	4/0
f_2	x^1, x^{10}, x^{11}	x^5	3/0
$\bar{f}_4$	x^1, x^7, x^{10}, x^{12}	x^5	4/0

Бидејќи f_1 и $\bar{f}_4$ се рамноправни, произволно ја усвојуваме карактеристиката $\bar{f}_4$:

$$r_1 = \bar{f}_3 \wedge \bar{f}_4, \quad P_{r_1}'' = \{x^1, x^3, x^6, x^7, x^{10}, x^{11}, x^{12}\}, \quad N_{r_1}'' = \{\cdot\} \tag{5.24}$$

По првата итерација, нашата хипотеза станува:

$$h = \bar{f}_3 \wedge \bar{f}_4, \quad P = \{x^1, x^7, x^{12}\}, \quad N = \{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\} \tag{5.25}$$

а множеството што понатаму се набљудува е дадено во таблица 5.34.

Таблица 5.33. Множество за обучување со точно класифицирани податоци по првата итерација

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
2	1	0	0	1	1	0	0	1	0
3	0	1	0	1	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	0	0
6	1	0	0	1	0	1	1	0	1
7	1	0	0	1	0	1	0	1	1
8	0	1	1	0	1	0	1	0	0
9	0	1	1	0	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	0	1	1
11	1	0	1	0	0	1	1	0	1
12	0	1	0	1	0	1	0	1	1

Во втората итерација се започнува повторно со хипотеза еднаква на 1, само што сега од множеството P_{r_1} се исфрлени точно класифицираните позитивни податоци:

$$r_2 = 1, \quad P_{r_2} = \{x^3, x^6, x^{10}, x^{11}\}, \quad N_{r_2} = \{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\} \tag{5.26}$$

Табилица 5.34. Неопфатени позитивни податоци по првата итерација

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
6	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
10	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
11	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**

Изборот на најдобра карактеристика во втората итерација се врши според таблицата 5.35. Карактеристиката f_1 опфаќа најмногу позитивни податоци и отфрла најмногу негативни податоци, па се вклучува во конјукцијата r_2:

$$r_2 = f_1, \quad P_{r_2}{}' = \left\{x^3, x^6, x^{10}, x^{11}\right\}, \quad N_{r_2}{}' = \left\{x^2\right\} \tag{5.27}$$

Карактеристиката што го отфрла последниот податок од $N_{r_2}{}' = \left\{x^2\right\}$ се одбира според таблицата 5.36.

Таблица 5.35. Избор на првата карактеристика во втората конјукција

карактеристика	**опфаќа**	**отфрла**	v_j
f_1	x^6, x^{10}, x^{11}	x^4, x^5, x^8, x^9	3/1
f_2	x^{10}, x^{11}	x^2, x^4, x^5	2/2
f_3	x^3, x^{10}	x^5	2/4
f_4	x^3, x^6, x^{11}	x^2, x^4, x^9	3/2
$\bar{f}_1$	x^3	x^2	1/4
$\bar{f}_2$	x^{10}, x^{11}	x^8, x^9	2/3
$\bar{f}_3$	x^6, x^{11}	x^2, x^4, x^8, x^9	2/1
$\bar{f}_4$	x^{10}	x^5, x^8	1/3

Таблица 5.36. Избор на втората карактеристика во втората конјукција

карактеристика	**опфаќа**	**отфрла**	v_j
f_2	x^{10}, x^{11}	x^2	2/0
f_4	x^3, x^6, x^{11}	x^2	3/0
$\bar{f}_3$	x^6, x^{11}	x^2	2/0

$$r_2 = f_1 \wedge f_4, \quad P_{r_2}{}'' = \left\{x^3, x^6, x^{10}, x^{11}\right\}, \quad N_{r_2}{}'' = \{\cdot\} \qquad (5.28)$$

По втората итерација, нашата хипотеза станува:

$$h = \left(\bar{f}_3 \wedge \bar{f}_4\right) \vee \left(f_1 \wedge f_4\right), \quad P = \left\{x^1, x^6, x^7, x^{11}, x^{12}\right\}, \quad N = \left\{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\right\} \qquad (5.29)$$

а множеството што понатаму се набљудува е дадено во таблица 5.38.

Таблица 5.37. Множество за обучување со точно класифицирани податоци по втората итерација

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
2	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
4	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
5	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
6	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
7	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
8	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
9	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
10	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
11	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
12	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

Таблица 5.38. Неопфатени позитивни податоци по втората итерација

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
10	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

Во третата итерација се започнува повторно со хипотеза еднаква на 1, а множеството позитивни податоци $P_{r_3} = \left\{x^3, x^{10}\right\}$ ги содржи преостанатите неопфатени позитивни податоци од множеството за обучување:

$$r_3 = 1, \quad P_{r_3} = \left\{x^3, x^{10}\right\}, \quad N_{r_3} = \left\{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\right\} \qquad (5.30)$$

Формирањето на третата конјукција се врши со помош на таблица 5.39 и таблица 5.40. Врз основа на таблицата 5.39, како прва карактеристика во третата конјукција се усвојува f_1 и се добива:

$$r_3 = f_1, \quad P_{r_3}{}' = \{x^3, x^{10}\}, \quad N_{r_3}{}' = \{x^2\} \tag{5.31}$$

а врз основа на таблицата 5.40 како втора карактеристика во третата конјукција се усвојува f_2, па се добива:

$$r_3 = f_1 \wedge f_2, \quad P_{r_3}{}'' = \{x^3, x^{10}\}, \quad N_{r_3}{}'' = \{\cdot\} \tag{5.32}$$

Таблица 5.39. Избор на првата карактеристика од третата конјукција

карактеристика	**опфаќа**	**отфрла**	v_j
f_1	x^{10}	x^4, x^5, x^8, x^9	1/1
f_2	x^{10}	x^2, x^4, x^5	1/2
f_3	x^3, x^{10}	x^5	2/4
f_4	x^3	x^2, x^4, x^9	1/2
$\bar{f}_1$	x^3	x^2	1/4
$\bar{f}_2$	x^3	x^8, x^9	1/3
$\bar{f}_3$	/	x^2, x^4, x^8, x^9	0/1
$\bar{f}_4$	x^{10}	x^5, x^8	1/3

Таблица 5.40. Избор на втората карактеристика од третата конјукција

карактеристика	**опфаќа**	**отфрла**	v_j
f_2	x^{10}	x^2	2/0
f_4	x^3	x^2	2/0

По третата итерација, нашата хипотеза станува:

$$h = (\bar{f}_3 \wedge \bar{f}_4) \vee (f_1 \wedge f_4) \vee (f_1 \wedge f_2)$$

$$P = \{x^1, x^6, x^7, x^{10}, x^{11}, x^{12}\}, \quad N = \{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\} \tag{5.33}$$

а множеството што понатаму се набљудува е дадено во таблица 5.42.

Во четвртата итерација се започнува со хипотезата $r_4 = 1$ и следните множества:

$$r_4 = 1, \quad P_{r_4} = \{x^3\}, \quad N_{r_4} = \{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\} \tag{5.34}$$

Потоа се одбира првата карактеристика од четвртата конјукција:

$$r_4 = f_4, \quad P_{r_4}{}' = \{x^3\}, \quad N_{r_4}{}' = \{x^5, x^8\} \tag{5.35}$$

и останатите две:

$$r_4 = f_4 \wedge f_3 \wedge \bar{f}_2, \quad P_{r_4}{}'' = \{x^3\}, \quad N_{r_4}{}'' = \{\cdot\} \tag{5.36}$$

Изборот на карактеристиките од четвртата конјукција се врши според таблица 5.43 и таблица 5.44.

Таблица 5.41. Множество за обучување со точно класифицирани податоци по третата итерација

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
2	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
4	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
5	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
6	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
7	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
8	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
9	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
10	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
11	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
12	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**

Таблица 5.42. Неопфатени позитивни податоци по третата итерација

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
3	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

Таблица 5.43. Избор на првата карактеристика од четвртата конјукција

карактеристика	**опфаќа**	**отфрла**	v_j
f_3	x^3	x^5	$1/4$
f_4	x^3	x^2, x^4, x^9	$1/2$
$\bar{f}_1$	x^3	x^2	$1/4$
$\bar{f}_2$	x^3	x^8, x^9	$1/3$

Таблица 5.44. Избор на втората карактеристика од четвртата конјукција

карактеристика	**опфаќа**	**отфрла**	v_j
f_3	x^3	x^5	1/4
$\bar{f}_2$	x^3	x^8, x^9	1/3

По четвртата итерација, нашата хипотеза станува:

$$h = \left(\bar{f}_3 \wedge \bar{f}_4\right) \vee \left(f_1 \wedge f_4\right) \vee \left(f_1 \wedge f_2\right) \vee \left(f_4 \wedge f_3 \wedge \bar{f}_2\right),$$

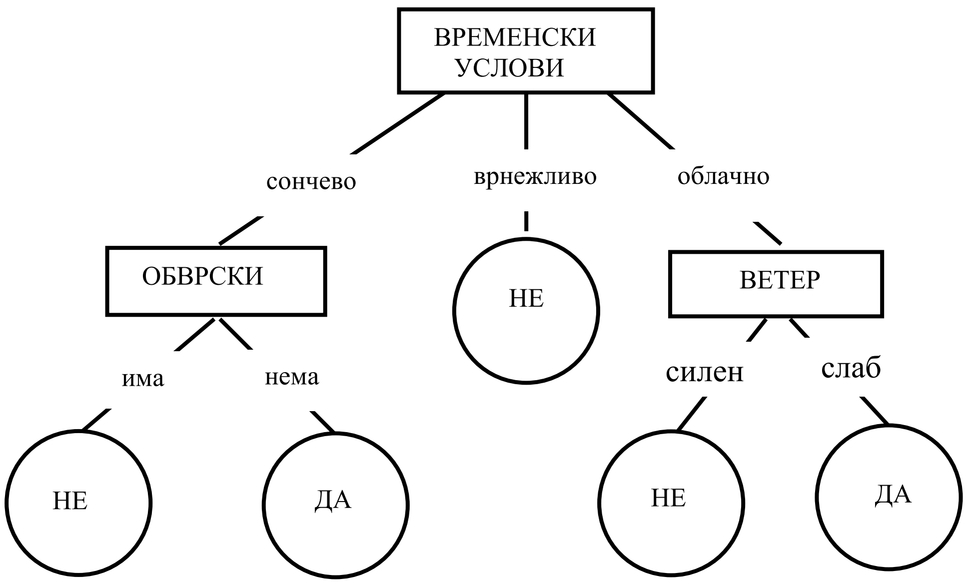
$$P = \left\{x^1, x^3, x^6, x^7, x^{10}, x^{11}, x^{12}\right\}, \quad N = \left\{x^2, x^4, x^5, x^8, x^9\right\} \tag{5.37}$$

и таа точно ги класифицира сите податоци од даденото влезно-излезно множество за обучување.

Таблица 5.45. Множество за обучување по четвртата итерација

податок	f_1	$\bar{f}_1$	f_2	$\bar{f}_2$	f_3	$\bar{f}_3$	f_4	$\bar{f}_4$	y
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
2	1	0	0	1	1	0	0	1	0
3	0	1	0	1	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	0	0
6	1	0	0	1	0	1	1	0	1
7	1	0	0	1	0	1	0	1	1
8	0	1	1	0	1	0	1	0	0
9	0	1	1	0	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	0	1	1
11	1	0	1	0	0	1	1	0	1
12	0	1	0	1	0	1	0	1	1

5.5. Нека, под претпоставка, Весна го користи стеблото на одлучување од слика 5.1 за да реши дали конкретниот ден ќе оди на прошетка. Задачата се состои во реконструкција на оригиналното стебло на одлучување на Весна врз основа на податоците добиени со набљудување на нејзиното однесување во одреден временски период. Нека со набљудување на однесувањето на Весна во текот на две седмици (оди или не оди на прошетка) се добиени податоците од таблица 5.46. Даденото влезно-излезно множество, под претпоставка, не содржи погрешни податоци (шум). Со помош на соодветен алгоритам за учење да се реконструира оригиналното стебло на одлучување на Весна врз основа на даденото влезно-излезно множество податоци, кое се користи како множество за обучување на алгоритамот за учење.



Слика 5.1. Илустрација кон задачата 5.5

Таблица 5.46. Множество за обучување од задачата 5.5

ден	**време**	**температура**	**обврски**	**ветер**	**шета**
Д1	сончево	топло	има	слаб	не
Д2	сончево	топло	има	силен	не
Д3	врнежливо	топло	има	слаб	не
Д4	облачно	умерено	има	слаб	да
Д5	облачно	свежо	нема	слаб	да
Д6	облачно	свежо	нема	силен	не
Д7	врнежливо	свежо	нема	силен	не
Д8	сончево	умерено	има	слаб	не
Д9	сончево	свежо	нема	слаб	да
Д10	облачно	умерено	нема	слаб	да
Д11	сончево	умерено	нема	силен	да
Д12	врнежливо	умерено	има	силен	не
Д13	врнежливо	топло	нема	слаб	не
Д14	облачно	умерено	има	силен	не

Решение: Секој податок од влезно-излезното множество D претставено со таблица 5.46 се одликува со четири влезни карактеристики. Нека, влезната карактеристика **време** ја означиме како f_1, влезната карактеристика **температура** како f_2, влезната карактеристика **обврски** како f_3 и влезната карактеристика **ветер** како f_4. Нека, во продолжение, p е бројот позитивни, а n е бројот негативни примероци во даденото влезно-излезно множество. За да може да се конструира бараното стебло на одлучување, треба да се определи која влезна карактеристика има најголемо влијание врз одлучувањето. Таа карактеристика потоа се усвојува за корен на стеблото на одлучување.

Општо земено, доколку бараното решение (излезот) има v_i ; $i = 1,2,\ldots,n$ можни одговори (вредности), секој со веројатност $P(v_i)$, количеството информација содржано во точниот одговор е:

$$I[P(v_1), P(v_2), \ldots, P(v_n)] = \sum_{i=1}^{n} - P(v_i) \log_2 P(v_i) \qquad (5.38)$$

Една проценка на веројатностите $P(v_i)$ на можните одговори v_i ; $i = 1,2,\ldots,n$ е дадена преку пропорциите на позитивни и негативни примероци во множеството за обучување D со формулата:

$$I\left(\frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n}\right) = -\frac{p}{p+n}\log_2\frac{p}{p+n} - \frac{n}{p+n}\log_2\frac{n}{p+n} \quad \text{(бита информација)} \qquad (5.39)$$

Во конкретниот случај од задачата, излезот **оди на прошетка (шета)** има две можни вредности – шета = 1 и не шета = 0. Следствено, количеството информација содржано во точниот одговор ќе биде:

$$I\left(\frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n}\right) = I\left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right) = -\frac{5}{14}\log_2\frac{5}{14} - \frac{9}{14}\log_2\frac{9}{14} = 0.94 \qquad (5.40)$$

Општата формула за пресметување на количеството информација во врска со точната класификација на податоците што го носи една влезна карактеристика f_j е:

$$K(f_j) = I\left(\frac{p}{p+n}, \frac{n}{p+n}\right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i + n_i}{p+n} I\left(\frac{p_i}{p_i + n_i}, \frac{n_i}{p_i + n_i}\right) \qquad (5.41)$$

при што карактеристиката f_j го дели даденото множество на m подмножества, а p_i и n_i се броевите позитивни и негативни примероци во подмножеството i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Во конкретниот случај, влезната карактеристика f_1 (**време**) има три можни вредности – сончево, врнежливо, облачно и таа го дели влезно-излезното множество D на три подмножества D_1, D_2 и D_3. За овие подмножества важи: $p_1 = 2$ и $n_1 = 3$, $p_2 = 0$ и $n_2 = 4$, $p_3 = 3$ и $n_3 = 2$, па количеството информација што го носи карактеристиката f_1 потребно за точно класифицирање на конкретниот примерок е:

$$K(f_1) = I\left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right) - \left[\frac{5}{14} I\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) + \frac{4}{14} I\left(\frac{0}{4}, \frac{4}{4}\right) + \frac{5}{14} I\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right] =$$

$$= I\left(\frac{5}{14},\frac{9}{14}\right)-\left[\frac{5}{14}(0.97)+\frac{4}{14}(0)+\frac{5}{14}(0.97)\right]=0.94-0.69=0.25 \quad (5.42)$$

Таблица 5.47. Подмножеството D_1 според влезната карактеристика f_1

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д1	сончево	топло	има	слаб	не
Д2	сончево	топло	има	силен	не
Д8	сончево	умерено	има	слаб	не
Д9	сончево	свежо	нема	слаб	да
Д11	сончево	умерено	нема	силен	да

Таблица 5.48. Подмножеството D_2 според влезната карактеристика f_1

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д3	врнежливо	топло	има	слаб	не
Д7	врнежливо	свежо	нема	силен	не
Д12	врнежливо	умерено	има	силен	не
Д13	врнежливо	топло	нема	слаб	не

Таблица 5.49. Подмножеството D_3 според влезната карактеристика f_1

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д4	облачно	умерено	има	слаб	да
Д5	облачно	свежо	нема	слаб	да
Д6	облачно	свежо	нема	силен	не
Д10	облачно	умерено	нема	слаб	да
Д14	облачно	умерено	има	силен	не

Влезната карактеристика f_2 (**температура**) го дели влезно-излезното множество D исто така на три подмножества D_1, D_2 и D_3, според трите можни вредности – топло, умерено, свежо. За овие подмножества важи: $p_1 = 2$ и $n_1 = 2$, $p_2 = 4$ и $n_2 = 2$, $p_3 = 3$ и $n_3 = 1$, па количеството информација што го носи карактеристиката f_2 потребно за точно класифицирање на еден конкретен примерок е:

$$K(f_2) = I\left(\frac{5}{14},\frac{9}{14}\right)-\left[\frac{4}{14}I\left(\frac{0}{4},\frac{4}{4}\right)+\frac{6}{14}I\left(\frac{3}{6},\frac{3}{6}\right)+\frac{4}{14}I\left(\frac{2}{4},\frac{2}{4}\right)\right]=$$

$$= I\left(\frac{5}{14},\frac{9}{14}\right)-\left[\frac{2}{7}(0)+\frac{3}{7}(1)+\frac{2}{7}(1)\right]=0.94-0.71=0.23 \quad (5.43)$$

Таблица 5.50. Подмножеството D_1 според влезната карактеристика f_2

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д1	сончево	топло	има	слаб	не
Д2	сончево	топло	има	силен	не
Д3	врнежливо	топло	има	слаб	не
Д13	врнежливо	топло	нема	слаб	не

Таблица 5.51. Подмножеството D_2 според влезната карактеристика f_2

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д4	облачно	умерено	има	слаб	да
Д8	сончево	умерено	има	слаб	не
Д10	облачно	умерено	нема	слаб	да
Д11	сончево	умерено	нема	силен	да
Д12	врнежливо	умерено	има	силен	не
Д14	облачно	умерено	има	силен	не

Таблица 5.52. Подмножеството D_3 според влезната карактеристика f_2

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д5	облачно	свежо	нема	слаб	да
Д6	облачно	свежо	нема	силен	не
Д7	врнежливо	свежо	нема	силен	не
Д9	сончево	свежо	нема	слаб	да

Влезната карактеристика f_3 (**обврски**) го дели влезно-излезното множество D на две подмножества D_1 и D_2, според двете можни вредности – има, нема. Тие се прикажани со таблица 5.53 и таблица 5.54. Бидејќи за овие подмножества важи: $p_1 = 1$ и $n_1 = 6$, $p_2 = 4$ и $n_2 = 3$, количеството информација што го носи карактеристиката f_3 потребно за точно класифицирање на еден конкретен примерок е:

$$K(f_3) = I\left(\frac{5}{14},\frac{9}{14}\right) - \left[\frac{7}{14} I\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right) + \frac{7}{14} I\left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)\right] =$$

$$= I\left(\frac{5}{14},\frac{9}{14}\right) - \left[\frac{1}{2}(0.59) + \frac{1}{2}(0.98)\right] = 0.94 - 0.78 = 0.16 \qquad (5.44)$$

Таблица 5.53. Подмножеството D_1 според влезната карактеристика f_3

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д1	сончево	топло	има	слаб	не
Д2	сончево	топло	има	силен	не
Д3	врнежливо	топло	има	слаб	не
Д4	облачно	умерено	има	слаб	да
Д8	сончево	умерено	има	слаб	не
Д12	врнежливо	умерено	има	силен	не
Д14	облачно	умерено	има	силен	не

Таблица 5.54. Подмножеството D_2 според влезната карактеристика f_3

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д5	облачно	свежо	нема	слаб	да
Д6	облачно	свежо	нема	силен	не
Д7	врнежливо	свежо	нема	силен	не
Д9	сончево	свежо	нема	слаб	да
Д10	облачно	умерено	нема	слаб	да
Д11	сончево	умерено	нема	силен	да
Д13	врнежливо	топло	нема	слаб	не

Конечно, влезната карактеристика f_4 (**ветер**), која има две можни вредности – силен и слаб, го дели влезно-излезното множество D на две подмножества D_1 и D_2, прикажани со таблицата 5.55 и таблицата 5.56, соодветно. За нив важи $p_1 = 1$ и $n_1 = 5$, $p_2 = 4$ и $n_2 = 4$, па, количеството информација што го носи карактеристиката f_4 потребно за точно класифицирање на конкретниот примерок е:

Таблица 5.55. Подмножеството D_1 според влезната карактеристика f_4

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д2	сончево	топло	има	силен	не
Д6	облачно	свежо	нема	силен	не
Д7	врнежливо	свежо	нема	силен	не
Д11	сончево	умерено	нема	силен	да
Д12	врнежливо	умерено	има	силен	не
Д14	облачно	умерено	има	силен	не

Таблица 5.56. Подмножеството D_2 според влезната карактеристика f_4

ден	време	температура	обврски	ветер	шета
Д1	сончево	топло	има	слаб	не
Д3	врнежливо	топло	има	слаб	не
Д4	облачно	умерено	има	слаб	да
Д5	облачно	свежо	нема	слаб	да
Д8	сончево	умерено	има	слаб	не
Д9	сончево	свежо	нема	слаб	да
Д10	облачно	умерено	нема	слаб	да
Д13	врнежливо	топло	нема	слаб	не

$$K(f_4) = I\left(\frac{5}{14},\frac{9}{14}\right) - \left[\frac{6}{14} I\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right) + \frac{8}{14} I\left(\frac{4}{8},\frac{4}{8}\right)\right] =$$

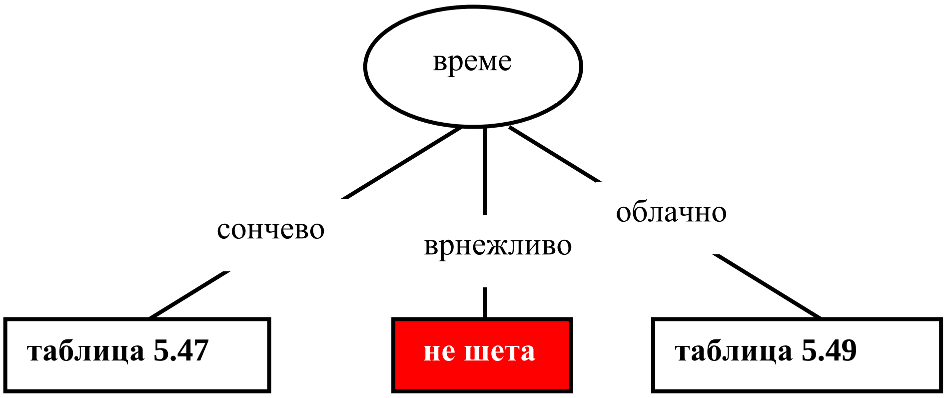
$$= I\left(\frac{5}{14},\frac{9}{14}\right) - \left[\frac{3}{7}\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right) + \frac{4}{7}(1)\right] = 0.94 - 0.85 = 0.09 \qquad (5.45)$$

Врз основа на вредностите (5.42) - (5.45), најголемо влијание врз точното класифицирање на влезните податоци (генерирање на точен одговор) има влезната карактеристика f_1. Следствено, бараното стебло на одлучување што го генерира овој алгоритам на учење започнува со јазолот **време**, кој се разгранува на три гранки: f_1= сончево, f_1 = облачно, f_1= врнежливо. За f_1= сончево подмножеството D_1 содржи и позитивни и негативни влезни примероци, па постапката мора да се повтори – треба да се определи која од преостанатите влезни карактеристики има најголемо влијание врз точната класификација на примероците. Истото важи и за f_1= облачно, додека за f_1 = врнежливо подмножество D_2 содржи само негативни примероци. Следствено, гранката f_1 = врнежливо завршува со краен јазол (лист) = **не шета**, како што е покажано на слика 5.2.

Постојат 5 влезни примероци кај кои карактеристиката f_1 има вредност сончево, од кои 2 се позитивни, а 3 се негативни. Количеството информација содржано во ова подмножество се пресметува според истата формула (5.39), само што сега параметрите се различни:

$$I\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right) = 0.97 \qquad (5.46)$$

Влијанието на влезните карактеристики f_2, f_3, f_4 врз одлуката за шетање кога f_1= сончево е определено со броевите:



Слика 5.2.Прв чекор при формирање на стеблото на одлучување (учење) од задачата 5.5

$$K(f_2) = 0.97 - \left[\frac{2}{5} I(0,1) + \frac{2}{5} I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} I(1,0)\right] =$$

$$= 0.97 - \left[\frac{2}{5}(0) + \frac{2}{5}(1) + \frac{1}{5}(0)\right] = 0.57 \qquad (5.47)$$

$$K(f_3) = 0.97 - \left[\frac{3}{5} I(0,1) + \frac{2}{5} I(1,0)\right] = 0.97 - \left[\frac{3}{5}(0) + \frac{2}{5}(0)\right] = 0.97 \qquad (5.48)$$

$$K(f_4) = 0.97 - \left[\frac{2}{5} I\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) + \frac{3}{5} I\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right] = 0.97 - \left[\frac{2}{5}(0.92) + \frac{3}{5}(0.99)\right] = 0.008 \qquad (5.49)$$

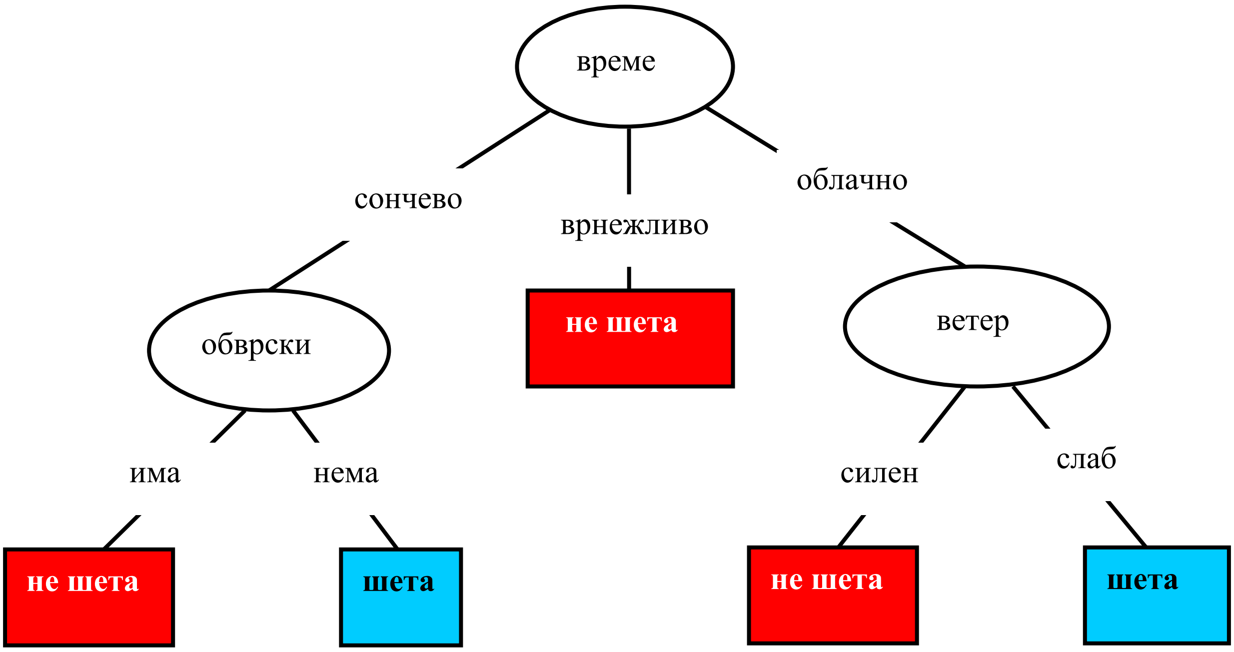
Очигледно, најголемо влијание има влезната карактеристика f_3 (**обврски**), па гранката f_1= сончево води кон следниот јазол во бараното стебло за одлучување што се разгранува, а тоа е јазолот **обврски**. Тој се разгранува на две гранки – има и нема. На тој начин подмножеството од таблица 5.47 се дели на две подмножества – едното содржи 3 примероци и тие сите се негативни, а второто содржи 2 примероци, кои сите се позитивни. Следствено, и двете гранки завршуваат со лист – **не шета** и **шета**, слика 5.3.

Пресметките за подмножеството D_3 од таблица 5.49 се следни:

$$K(f_2) = 0.97 - \left[\frac{3}{5} I\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{5} I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] = 0.97 - \left[\frac{2}{5}(0.99) + \frac{2}{5}(1)\right] = 0.174 \qquad (5.50)$$

$$K(f_3) = 0.97 - \left[\frac{2}{5} I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5} I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right] = 0.97 - \left[\frac{2}{5}(1) + \frac{3}{5}(0.92)\right] = 0.018 \qquad (5.51)$$

$$K(f_4) = 0.97 - \left[\frac{2}{5} I(0,1) + \frac{3}{5} I(1,0)\right] = 0.97 - \left[\frac{2}{5}(0) + \frac{3}{5}(0)\right] = 0.97 \qquad (5.52)$$



Слика 5.3. Втор чекор при формирање на стеблото на одлучување од задачата 5.5

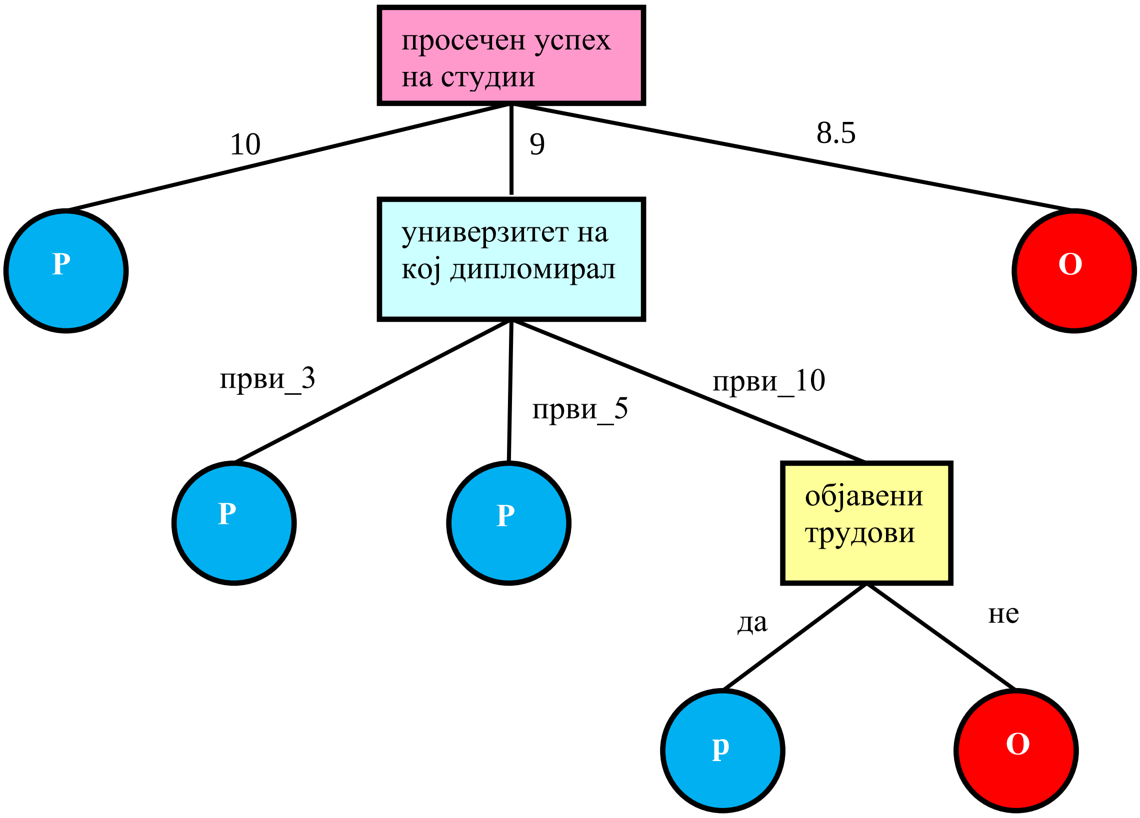
Од вредностите (5.50) – (5.52) очигледно е дека најголемо влијание има карактеристиката f_4 (**ветер**), па гранката f_1= облачно води кон јазолот **ветер**, кој се разгранува на две гранки – силен и слаб. Гранката f_4 = силен завршува со лист **не шета**, додека гранката f_4 = слаб завршува со лист – **шета**, слика 5.3. Бидејќи сите гранки во стеблото по вториот чекор на разгранување завршуваат со листови, формирањето на стеблото е конечно. За крај, може да се провери дека стеблото од слика 5.3 ги класифицира точно податоците од таблицата 5.46.

5.6. Се набљудуваат критериумите за прием на студенти на докторски студии по вештачка интелигенција на универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје. На слика 5.4 е прикажано едно можно стебло за одлучување според кое се решава за приемот на кандидатите на споменатите докторски студии. Секој кандидат се оценува според 4 карактеристики: просечен успех од студиите, квалитетот на универзитетот на кој дипломирал, објавените трудови и добиените препораки. Можните вредности на секоја од горните карактеристики се дискретизирани и ограничени на следниот начин: можен среден успех од претходните студии – 10, 9 и 8.5; универзитетите се поделени како – први_3, први_5 и први_10 (под први_5 се мисли на 4-тиот и 5-тиот, а под први_10 се мисли на 6-тиот, 7-миот, 8-миот, 9-тиот и 10-тиот на ранг-листата универзитети); карактеристиката објавени трудови е дефинирана како бинарна величина – или има или нема објавено трудови од обласа на интерес, и препораките се дефинирани како бинарни величини со две можни вредности – одлични и добри. Кандидатите се делат во две класи – примени Р или одбиени О. Кандидатот Владимир не го знае стеблото на одлучување од слика 5.4, но располага со одредени податоци за прием на студенти на студиите по вештачка интелигенција на универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје во текот на изминатите 12 години дадени во таблицата 5.57.

а) Да се провери дали стеблото од слика 5.4 точно ги класифицира влезните примероци.

б) Со помош на соодветен алгоритам, да се генерира стебло на одлучување врз основа на податоците од таблицата 5.57.

в) Дали стеблото добиено под б) е еквивалентно со стеблото од слика 5.4?



Слика 5.4. Стебло на одлучување за прием на студенти на докторски студии по вештачка интелигенција

Таблица 5.57. Влезно-излезно множество за обучување од задачата 5.6

просечен успех	универзитет	објавени трудови	препораки	статус
10	први_3	да	одлични	Р
10	први_3	не	одлични	Р
10	први_5	не	одлични	Р
9	први_3	да	одлични	Р
9	први_5	не	одлични	Р
9	први_10	да	одлични	Р
9	први_10	не	одлични	**О**
9	први_3	не	одлични	Р
8.5	први_5	да	добри	**О**
8.5	први_3	не	добри	**О**
8.5	први_10	да	добри	**О**
8.5	први_10	не	добри	**О**

Решение: а) Да. Студентите во таблицата 5.57 се класифицирани точно на примени и одбиени во согласност со стеблото од слика 5.4.

б) Количеството информација содржано во точниот одговор е:

$$I\left(\frac{p}{p+n},\frac{n}{p+n}\right)=I\left(\frac{7}{12},\frac{5}{12}\right)=-\frac{7}{12}\log_2\frac{7}{12}-\frac{5}{12}\log_2\frac{5}{12}=0.9796 \qquad (5.53)$$

каде што p е бројот позитивни, а n е бројот негативни примероци во даденото влезно-излезно множество. За да може да се конструира бараното стебло на одлучување, треба да се определи која влезна карактеристика има најголемо влијание врз одлучувањето.

Нека, $f_1=\{$**просечен успех од студиите**$\}$, $f_2=\{$**категорија на универзитетот**$\}$ на кој кандидатот дипломирал, $f_3=\{$**објавени трудови**$\}$ и $f_4=\{$**препораки**$\}$. Тогаш, врз основа на формулата (5.41) се заклучува дека:

$$K(f_1)=I\left(\frac{7}{12},\frac{5}{12}\right)-\left[\frac{3}{12}I(1,0)+\frac{5}{12}I\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)+\frac{4}{12}I(0,1)\right]=$$

$$=0.9796-\left[\frac{1}{4}(0)+\frac{5}{12}(0.72)+\frac{1}{3}(0)\right]=0.6796 \qquad (5.54)$$

$$K(f_2)=I\left(\frac{7}{12},\frac{5}{12}\right)-\left[\frac{5}{12}I\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{12}I\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)+\frac{4}{12}I\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\right]=$$

$$= 0.9796 - \left[\frac{5}{12}(0.72) + \frac{1}{4}(0.92) + \frac{1}{3}(0.81)\right] = 0.1796 \quad (5.55)$$

$$K(f_3) = I\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right) - \left[\frac{5}{12} I\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) + \frac{7}{12} I\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\right] =$$

$$= 0.9796 - \left[\frac{5}{12}(0.97) + \frac{7}{12}(0.98)\right] = 0.004 \quad (5.56)$$

$$K(f_4) = I\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right) - \left[\frac{8}{12} I\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) + \frac{4}{12} I\left(\frac{0}{4}, \frac{4}{4}\right)\right] =$$

$$= 0.9796 - \left[\frac{2}{3}(0.55) + \frac{1}{3}(0)\right] = 0.613 \quad (5.57)$$

најголемо влијание врз точното класифицирање на влезните податоци (генерирање на точен одговор) има влезната карактеристика f_1, односно просечниот успех од студиите на кандидатите. Следствено, бараното стебло на одлучување што го генерира овој алгоритам на учење започнува со јазолот **просечен успех**, кој се разгранува на три гранки: $f_1 = 10$, $f_1 = 9$ и $f_1 = 8.5$. За $f_1 = 10$ сите влезни примероци се позитивни (сите кандидати со просечен успех еднаков на 10 се примени на докторските студии). Следствено, гранката $f_1 = 10$ завршува со краен јазол (лист) P (примен). За $f_1 = 8.5$ сите влезни примероци се негативни (ниеден од кандидатите со просечен успех еднаков на 8.5 не се примени на докторските студии). Следствено, гранката $f_1 = 8.5$ завршува со краен јазол (лист) N (одбиен). За $f_1 = 9$ има и позитивни и негативни влезни примероци, па постапката мора да се повтори – треба да се определи која од преостанатите влезни карактеристики има најголемо влијание врз изборот на кандидатите.

Постојат 5 влезни примероци кај кои карактеристиката f_1 има вредност 9, од кои 4 се позитивни и 1 е негативен. Количеството информација содржано во ова подмножество се пресметува според формулата (5.39):

$$I\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) = 0.72 \quad (5.58)$$

Влијанието на преостанатите три влезни карактеристики врз изборот на кандидатите со просечен успех $f_1 = 9$ е определено со броевите:

$$K(f_2) = 0.72 - \left[\frac{2}{5} I\left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right) + \frac{1}{5} I(1,0) + \frac{2}{5} I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= 0.72 - \left[\frac{2}{5}(0) + \frac{1}{5}(0) + \frac{2}{5}(1) \right] = 0.32 \qquad (5.59)$$

$$K(f_3) = 0.72 - \left[\frac{3}{5} I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{5} I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= 0.72 - \left[\frac{3}{5}(0.81) + \frac{2}{5}(1) \right] = 0.486 \qquad (5.60)$$

$$K(f_4) = 0.72 - \left[\frac{5}{5} I\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right) \right] = 0.72 - 0.72 = 0 \qquad (5.61)$$

Очигледно, најголемо влијание има влезната карактеристика f_3, односно објавените трудови, па следниот јазол во бараното стебло за одлучување што се разгранува е јазолот **објавени трудови**. Тој се разгранува на две гранки – има односно нема објавени трудови. На тој начин подмножеството од 5 кандидати со просечен успех од студиите еднаков на 9 се дели на две подмножества – едното содржи 2 примероци и тоа се кандидати кои имаат објавено трудови, а второто содржи 3 примероци кои ги претставуваат кандидатите што немаат објавено трудови. Сите кандидати што имаат просечен успех од студиите 9 и имаат објавено трудови се примени, па така гранката **има објавени трудови** завршува со краен јазол односно лист – **примен P**. Останува уште подмножеството примероци со $f_1 = 9$ и $f_3 =$не, од кои 2 се позитивни и 1 е негативен. Количеството информација содржано во последното потстебло е:

$$I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = 0.92 \qquad (5.62)$$

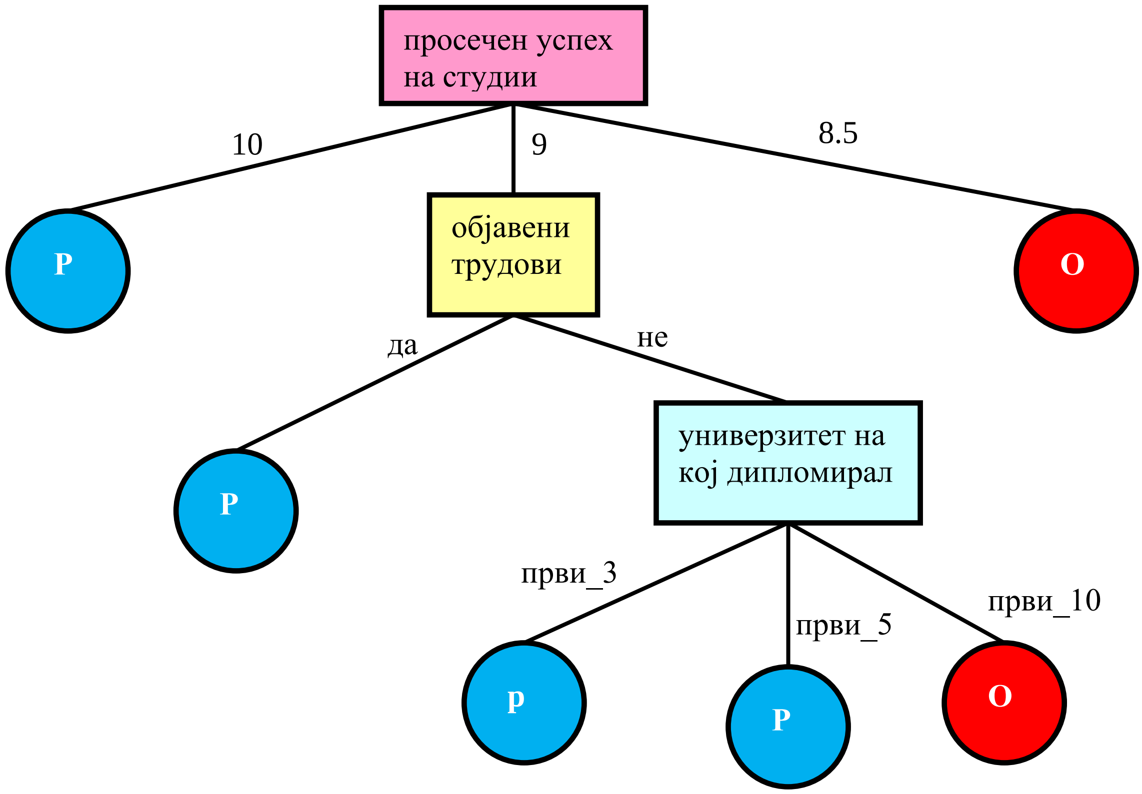
а влијанието на преостанатите две карактеристики е одредено со броевите:

$$K(f_2) = 0.92 - \left[\frac{1}{3} I(1,0) + \frac{1}{3} I(1,0) + \frac{1}{3} I(0,1) \right] = 0.92 \qquad (5.63)$$

$$K(f_4) = 0.92 - \left[\frac{3}{3} I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right] = 0 \qquad (5.64)$$

Следниот јазол во бараното стебло на одлучување што се разгранува е јазолот **универзитет** и тој се разгранува на три гранки – **први_3**, **први_5** и **први_10**. Секоја од овие гранки завршува со лист. Стеблото на одлучување формирано според изложениот алгоритам е прикажано на слика 5.5.

в) Стеблото од слика 5.5 е еквивалентно со стеблото од слика 5.4.



Слика 5.5. Стебло на одлучување добиено врз основа на податоци од таблица 5.57

5.7. Дадено е влезно-излезното множество податоци за обучување од таблица 5.58, кое се одликува со три влезни карактеристики: f_1, f_2 и f_3. Излез е променливата y. Да се состави соодветно стебло на одлучување врз основа на ова множество.

Таблица 5.58. Множество за обучување од задачата 5.7

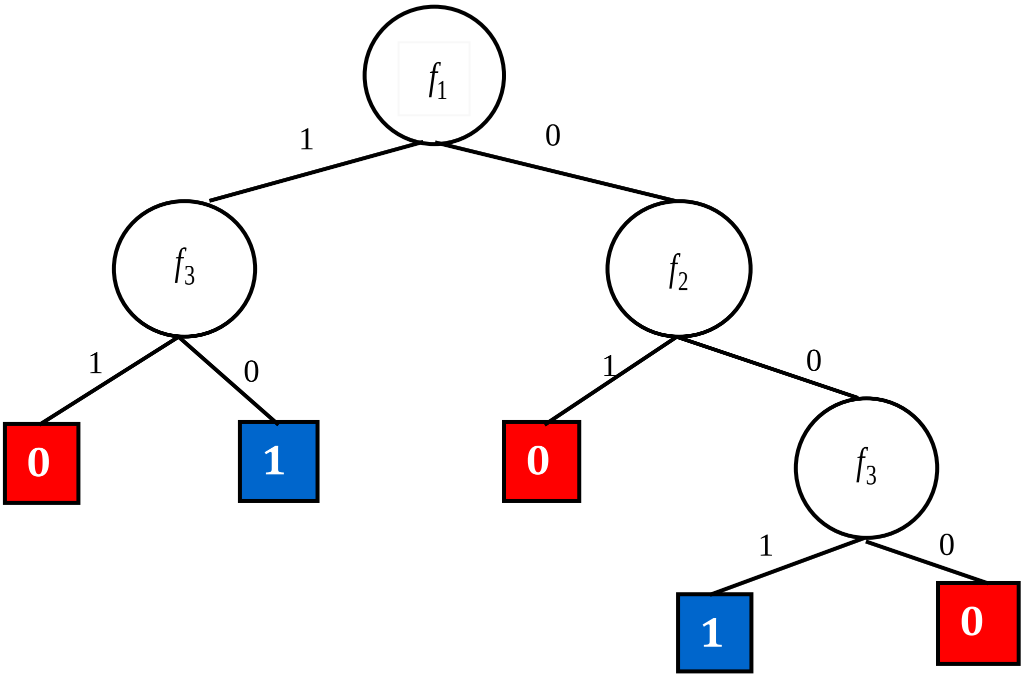
f_1	f_2	f_3	y
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Потоа генерираното стебло на одлучување да се тестира врз податоците дадени во таблицата 5.59.

Таблица 5.59. Множество за тестирање од задачата 5.7

f_1	f_2	f_3	y
0	**1**	**0**	**?**
1	**0**	**1**	**?**

Решение:



Слика 5.6. Решение на задачата 5.7

Таблица 5.60. Класификација на множество за тестирање од задачата 5.7

f_1	f_2	f_3	y
0	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**

5.8. Малата приватна компанија „Автомобил“ во текот на минатиот месец набавила 12 автомобили. Податоците за тие автомобили и нивната продажба се дадени во таблицата 5.61. Возилата се карактеризирани со четири карактеристики: јачина на моторот $-f_1$ (мала=0, голема=1), тип на гориво $-f_2$ (бензин=0, нафта=1), тип на возило $-f_3$ (седан=0, џип=1) и цена на чинење $-f_4$ (ниска=0, висока=1). Продадените возила се означени со 1, а непродадените со 0. Врз основа на овие податоци треба да се состави стебло на учење, кое ќе овозможи да се предвиди какви возила имаат најголема веројатност да бидат продавани во иднина. Нека, под претпоставка, мерка за грешката на соодветното стебло на одлучување е бројот погрешно одредени примероци. Тогаш оптимално стебло на одлучување е стеблото со најмала грешка.

а) Да се одреди оптимално стебло на одлучување со само еден јазол. Колкава е грешката на ова стебло?

б) Да се одреди оптимално стебло на пребарување со длабочина 1 (коренот е единствениот јазол што се разгранува). Крај секој јазол да се наведат соодветните податоци од даденото влезно-излезно множество во таблица 5.61. Колкава е грешката на ова стебло?

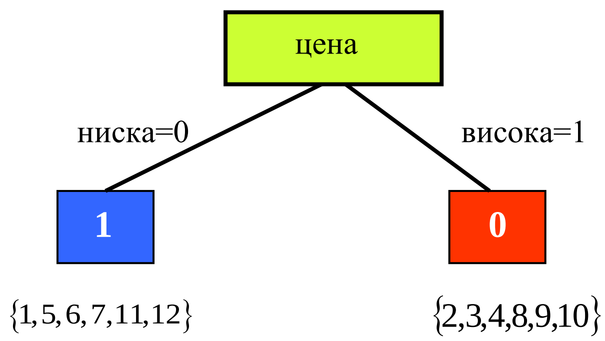
в) Да се состави стебло на одлучување врз основа на даденото влезно-излезно множество од таблицата 5.61, така што секогаш се раздвојува јазолот кон кој е придружена карактеристиката од влезните податоци која најмногу ја намалува грешката. Крај секој јазол да се означат податоците од влезното множество кои ги селектира тој јазол.

Таблица 5.61. Множество за учење од задача 5.8

примерок	**мотор** $-f_1$	**гориво** $-f_2$	**тип** $-f_3$	**цена** $-f_4$	**продаден**
1	0	1	0	0	**1**
2	1	0	0	1	**1**
3	0	0	1	1	**0**
4	0	0	0	1	**0**
5	0	0	1	0	**1**
6	1	0	1	0	**1**
7	1	0	0	0	**1**
8	0	1	1	1	**0**
9	0	1	0	1	**0**
10	1	1	0	1	**0**
11	1	1	1	0	**1**
12	0	0	0	0	**0**

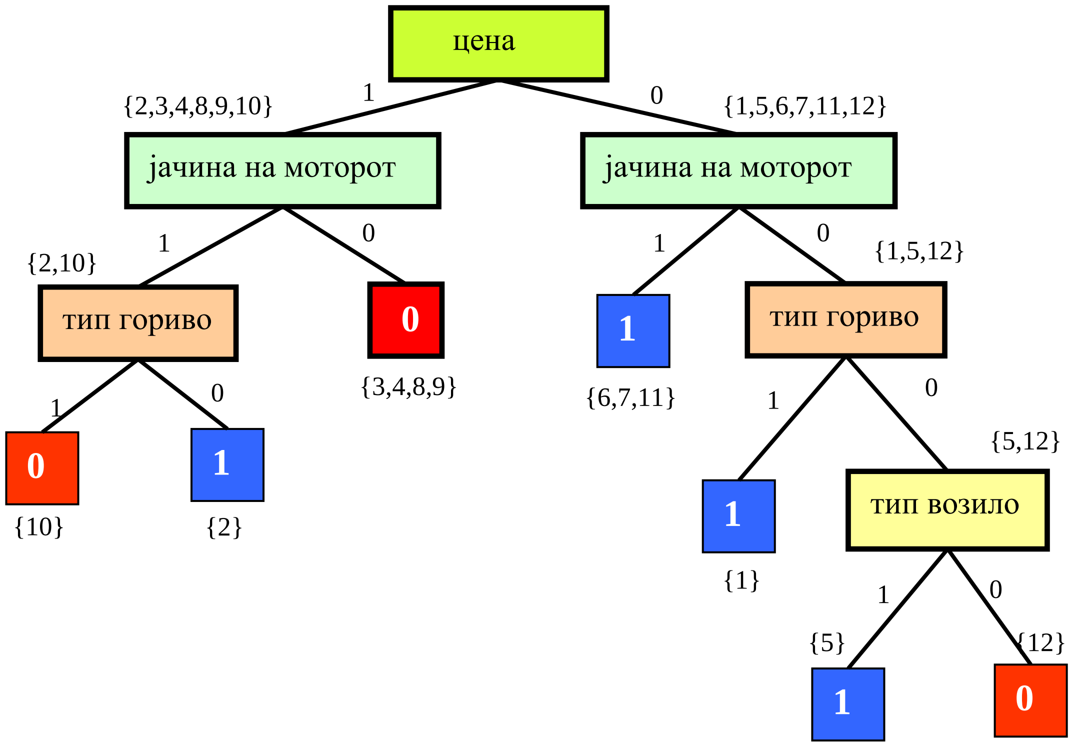
Решение: а) Оптимално стебло на одлучување со само еден јазол е стеблото со јазол **продаден=1**. Грешката на ова стебло е 6, бидејќи тоа погрешно ги класифицира примероците 3, 4, 8, 9, 10,12.

б) Тоа е стеблото од слика 5.7, кое има грешка 2 (погрешно ги класифицира податоците 2 и 12).



Слика 5.7. Оптимално стебло на одлучување од задачата 5.8 со длабочина 1

в) Решението не е еднозначно, но сите решенија ја имаат карактеристиката **цена** за корен. Едно решение е дадено на слика 5.8.



Слика 5.8.Стебло на одлучување за задачата 5.8

5.9. Студентската служба на еден факултет прави анализа на бројот студенти што секоја година предвреме се отпишуваат од факултетот и ги прекинуваат своите студии. Така за изминатата година го имаат множеството податоци прикажано во таблица 5.62. Врз основа на него службата треба да заклучи дали и кои од студентите ќе го напуштат факултетот на крајот од тековната година (се отпишале=1, не се отпишале=0). Заклучокот треба да биде заснован врз полот на студентот (машки=1, женски=0), колку семестри студентот успешно завршил до тековната година (0, 1, 2, 3 или 4), задоволството на студентот од студиите и неговиот успех (задоволен, незадоволен, многу разочаран) и националноста (Македонец, Албанец, Турчин, Србин или останата националност).

а) Колку е почетната ентропија на излезот **се отпишал**?

б) Која влезна карактеристика алгоритамот ќе ја одбере за корен на стеблото на одлучување?

в) Колку изнесува придонесот на карактеристиката (информационата добивка) која е избрана за корен на стеблото под б)?

г) Да се нацрта соодветното стебло на одлучување добиено врз основа на податоците од таблицата 5.62.

д) Врз основа на стеблото генерирано под г) да се одлучи дали студентите од таблицата 5.63 ќе се отпишат на крајот од тековната година.

Таблица 5.62. Множество за учење од задача 5.9

семестри	**пол**	**задоволство**	**националност**	**се отпишале**
4	0	задоволен	Македонец	**0**
8	0	задоволен	Турчин	**0**
8	1	задоволен	Македонец	**0**
5	0	незадоволен	останати	**0**
7	0	разочаран	Македонец	**0**
4	1	разочаран	Србин	**1**
3	0	незадоволен	Албанец	**0**
7	1	незадоволен	Албанец	**0**
6	1	задоволен	Македонец	**0**
4	1	незадоволен	Македонец	**1**
5	1	разочаран	Србин	**1**
5	1	разочаран	останати	**1**

Таблица 5.63. Множество за тестирање од задача 5.9

семестри	**пол**	**задоволство**	**националност**	**се отпишале**
4	1	разочаран	Македонец	**?**
7	1	разочаран	Турчин	**?**
7	1	задоволен	Албанец	**?**

Решение: а) Почетната ентропија на излезот **се отпишале** изнесува:

$$I\left(4,8\right)=-\frac{4}{12}\log_2\frac{4}{12}-\frac{8}{12}\log_2\frac{8}{12}=0.92 \qquad (5.65)$$

б) За корен на стеблото се одбира карактеристиката **пол**.

в) Информациската добивка на карактеристиката **пол** изнесува:

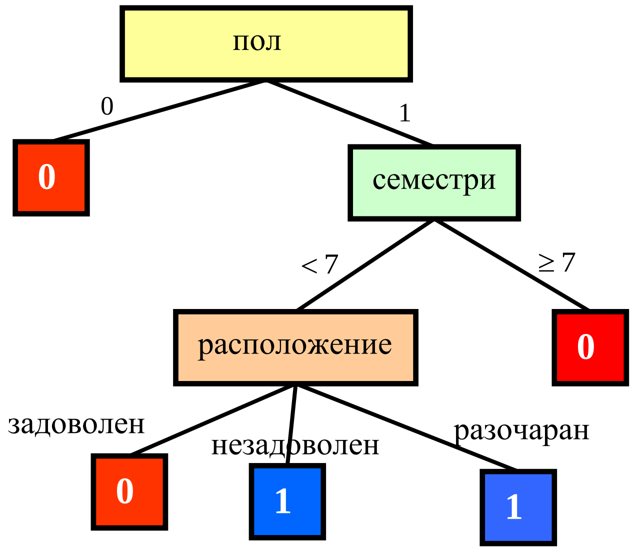
$$0.92-\left[\frac{5}{12}\left(-\frac{0}{5}\log_2\frac{0}{5}-\frac{5}{5}\log_2\frac{5}{5}\right)+\frac{7}{12}\left(-\frac{5}{7}\log_2\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\log_2\frac{2}{7}\right)\right]=0.41839 \qquad (5.66)$$

г) Бараното стебло на одлучување е прикажано на слика 5.9. Тоа покажува дека националноста не влијаела врз одлуката за отпишување.

д) Решението е прикажано во таблицата 5.64.

Таблица 5.64. Класификација на множеството за тестирање од задача 5.9

семестри	**пол**	**задоволство**	**националност**	**се отпишале**
4	1	разочаран	Македонец	**1**
7	1	разочаран	Турчин	**0**
7	1	задоволен	Албанец	**0**



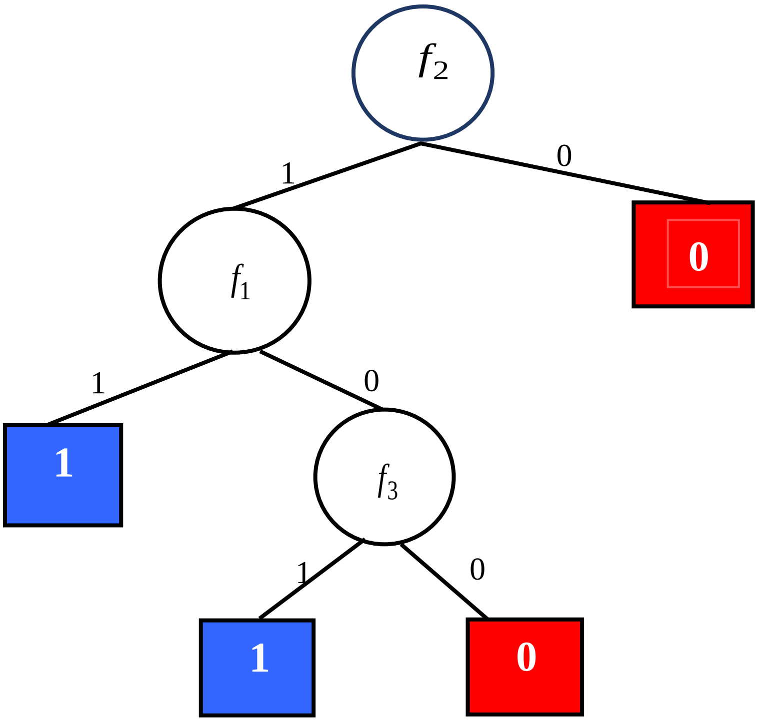
Слика 5.9. Стебло на одлучување за задачата 5.9

5.10. Да се состави стебло на одлучување за тоа дали некој ќе биде осуден врз основа на даденото влезно-излезно множество податоци во таблица 5.65. Крај секој јазол да се означат податоците од влезното множество кои ги селектира тој јазол.

Таблица 5.65. Множество за обучување од задачата 5.10

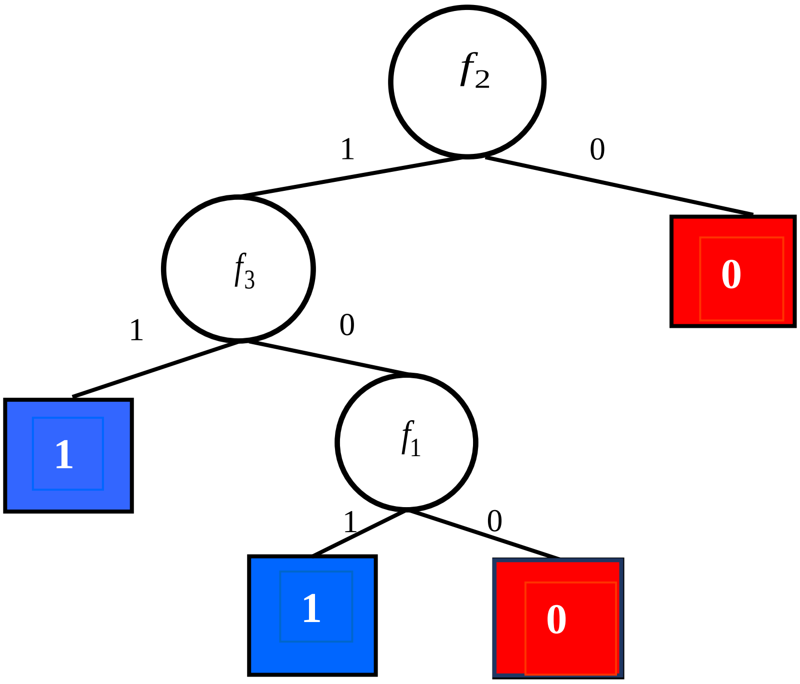
примерок	**го прекршил законот**	**уапсен**	**мотивиран обвинител**	**мотивиран бранител**	**осуден**
1	1	1	1	0	**1**
2	1	1	0	1	**1**
3	1	0	1	0	**0**
4	1	0	0	1	**0**
5	0	1	1	0	**1**
6	0	1	0	1	**0**
7	0	0	1	0	**0**
8	0	0	0	1	**0**

Потоа врз основа на формираното стебло на одлучување да се утврди дали ќе биде осудено лицето кое го прекршило законот, е уапсено, се соочува со мотивиран обвинител, но има и мотивиран бранител.

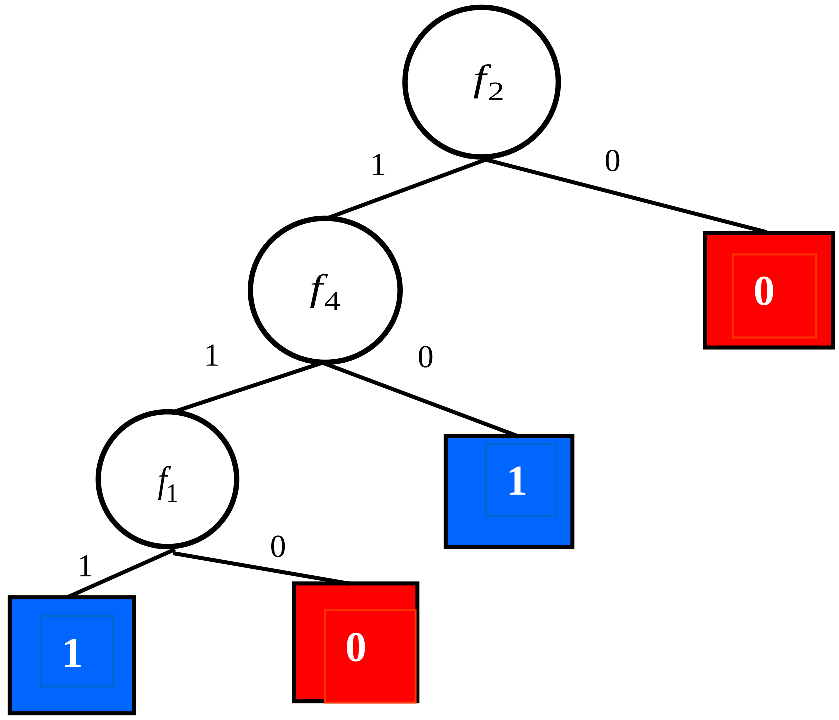


Слика 5.10. Стебло за одлучување од задача 5.10

Врз основа на добиеното стебло за одлучување, лицето кое го прекршило законот, е уапсено и се соочува со мотивиран обвинител, иако има мотивиран бранител, ќе биде осудено. Можни се и следните стебла на одлучување, прикажани на слика 5.11 и слика 5.12.



Слика 5.11. Алтернативно стебло за одлучување од задача 5.10



Слика 5.12. Алтернативно стебло за одлучување од задача 5.10

5.11. Новинарот Лазар Л. Лазаревски треба да предвиди дали некој политичар ќе биде избран на претстојните парламентарни избори врз основа на даденото влезно-излезно множество податоци од таблица 5.66. При одлучувањето предвид се земени следните карактеристики на политичарите: интелигентен (да – 1, не – 0), чесен (да – 1, не – 0), омилен кај избирачите (да – 1, не – 0), располага со значителни средства за политичка кампања (да – 1, не – 0).

а) Колку е почетната ентропија на излезот **избран**?

б) Да се состави стебло на одлучување врз основа на кое новинарот Лазар Л. Лазаревски ќе може точно да и класифицира дадените влезно-излезни податоци од таблицата 5.66.

в) Која влезна карактеристика алгоритамот ќе ја одбере за корен на стеблото на одлучување?

г) Колку изнесува придонесот на карактеристиката која е избрана за корен на стеблото под в)?

д) Врз основа на стеблото генерирано под б) новинарот Лазар Л. Лазаревски треба за своите читатели да предвиди дали тројцата политичари од таблицата 5.67 ќе бидат избрани на претстојните парламентарни избори.

Таблица 5.66. Множество за учење од задача 5.11

примерок	интелигентен	чесен	омилен	средства	избран
1	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
2	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
3	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
4	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
5	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
7	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
8	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
9	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
10	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
11	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
12	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

Таблица 5.67. Множество за тестирање од задача 5.11

примерок	интелигентен	чесен	омилен	средства	избран
13	**1**	**0**	**1**	**0**	**?**
14	**1**	**1**	**0**	**1**	**?**
15	**1**	**0**	**0**	**0**	**?**

Решение: а)

$$I\left(\frac{5}{12},\frac{7}{12}\right)=-\frac{5}{12}\log_2\frac{5}{12}-\frac{7}{12}\log_2\frac{7}{12}=0.97987 \tag{5.67}$$

б) Бараното стебло е прикажано на слика 5.13.

в) Карактеристиката f_3.

г) Придонесот на коренот од стеблото изнесува:

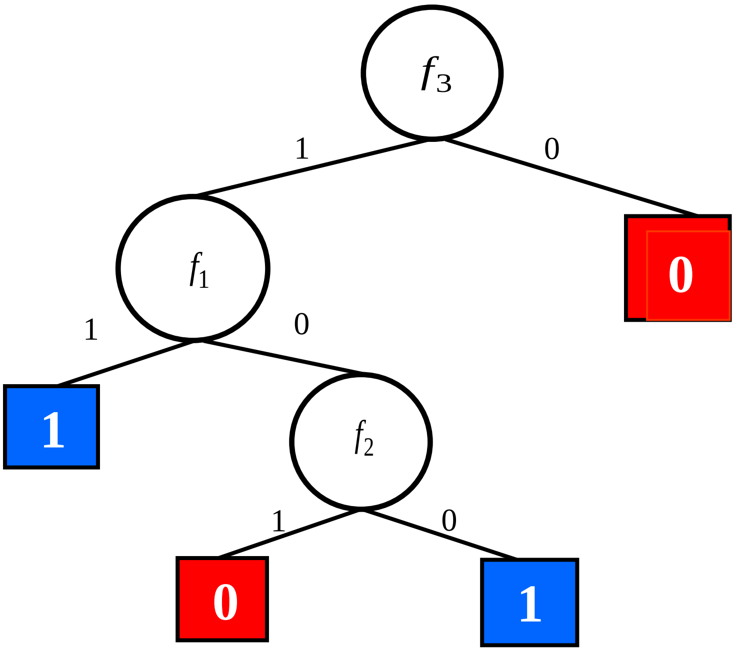
$$0.97987-\left[\frac{6}{12}\left(\frac{0}{6}\log_2\frac{0}{6}+\frac{6}{6}\log_2\frac{6}{6}\right)+\frac{6}{12}\left(\frac{5}{6}\log_2\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}\right)\right]=0.65487 \tag{5.68}$$

д)

Таблица 5.68. Множество за тестирање од задача 5.11

примерок	интелигентен	чесен	омилен	средства	избран
13	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
14	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
15	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

.



Слика 5.13. Стебло на одлучување за задача 5.11

5.12. Стефан се наоѓа сосем сам на пуст остров. Тој е последниот преживеан од групата 8 бродоломци. На островот нема никаква друга храна освен различни видови печурки кои слободно растат по целиот остров. Врз основа на искуството на неговите другари, Стефан знае дека некои печурки се отровни, а некои не. Во продолжение, во таблицата 5.69, се дадени податоците кои му се познати на Стефан.

Табліца 5.69. Множество за учење од задача 5.12

примерок	**тешка**	**смрдлива**	**со точки**	**мазна**	**отровна**
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1
5	0	1	1	0	1
6	0	0	1	1	1
7	0	0	0	1	1
8	1	1	0	0	1

Врз основа на тие податоци Стефан треба да одлучи дали печурките дадени во таблицата 5.70 се отровни.

Таблица 5.70. Множество за тестирање од задача 5.12

примерок	**тешка**	**смрдлива**	**со точки**	**мазна**	**отровна**
9	1	1	1	1	?
10	0	1	0	1	?
11	1	1	0	0	?

а) Колкава е ентропијата на променливата **отровна**?

б) Која карактеристика треба да се одбере за корен на стеблото на одлучување?

в) Колкаво е количеството информација содржано во карактеристиката која е одбрана за корен на стеблото на одлучување под б)?

г) Да се состави стебло на одлучување со помош на кое ќе се класифицираат печурките како отровни и неотровни.

д) Со помош на добиеното стебло, да се класифицираат печурките од таблицата 5.70 како отровни или неотровни.

Решение: а)

$$H = -\frac{5}{8}\log\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} = 0.9544 \qquad (5.69)$$

б) Карактеристиката **мазна**.

$$I\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right) = -\frac{5}{8}\log_2\frac{5}{8} - -\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} = 0.9544 \qquad (5.70)$$

$$K(f_1) = I\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right) - \left[\frac{3}{8}I\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{8}I\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)\right] = 0.9544 - 0.9512 = 0.0032 \qquad (5.71)$$

$$K(f_2) = I\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right) - \left[\frac{3}{8}I\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{8}I\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)\right] = 0.9544 - 0.9512 = 0.0032 \qquad (5.72)$$

$$K(f_3) = I\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right) - \left[\frac{3}{8}I\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{8}I\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)\right] = 0.9544 - 0.9512 = 0.0032 \qquad (5.73)$$

$$K(f_4) = I\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right) - \left[\frac{4}{8}I\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{8}I\left(\frac{2}{4},\frac{2}{4}\right)\right] = 0.9544 - 0.9056 = 0.0488 \qquad (5.74)$$

в)

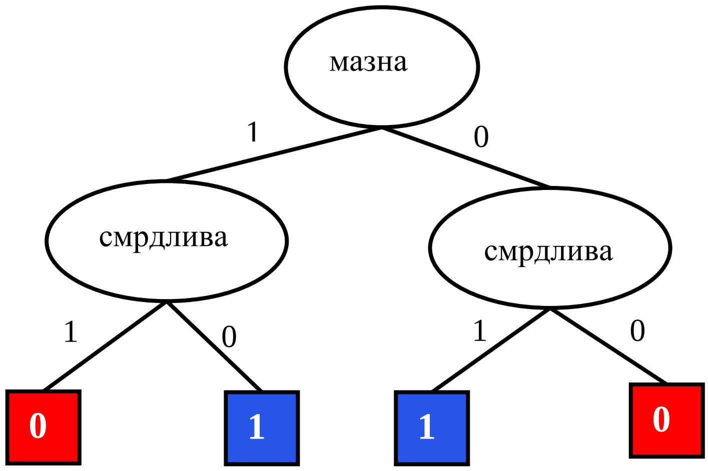
$$K(f_4) = I\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right) - \left[\frac{4}{8}I\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{8}I\left(\frac{2}{4},\frac{2}{4}\right)\right] = 0.9544 - 0.9056 = 0.0488 \qquad (5.75)$$

г) Едно стебло на одлучување за задачата 5.12 е прикажано на слика 5.14. Постојат и други можни стебла.

д) Решението е прикажано во таблицата 5.71.

Таблица 5.71. Множество за тестирање од задача 5.12

примерок	**тешка**	**смрдлива**	**со точки**	**мазна**	**отровна**
9	1	1	1	1	**0**
10	0	1	0	1	**0**
11	1	1	0	0	**1**



Слика 5.14. Стебло на одлучување составено врз основа на множеството од таблица.5.69

5.13. Да се состави стебло на одлучување кое ја претставува Буловата функција:

$$(f_1 \wedge f_2) \vee (f_3 \wedge f_4) \tag{5.76}$$

Крај секој јазол да се означат податоците од влезното множество кои ги селектира тој јазол.

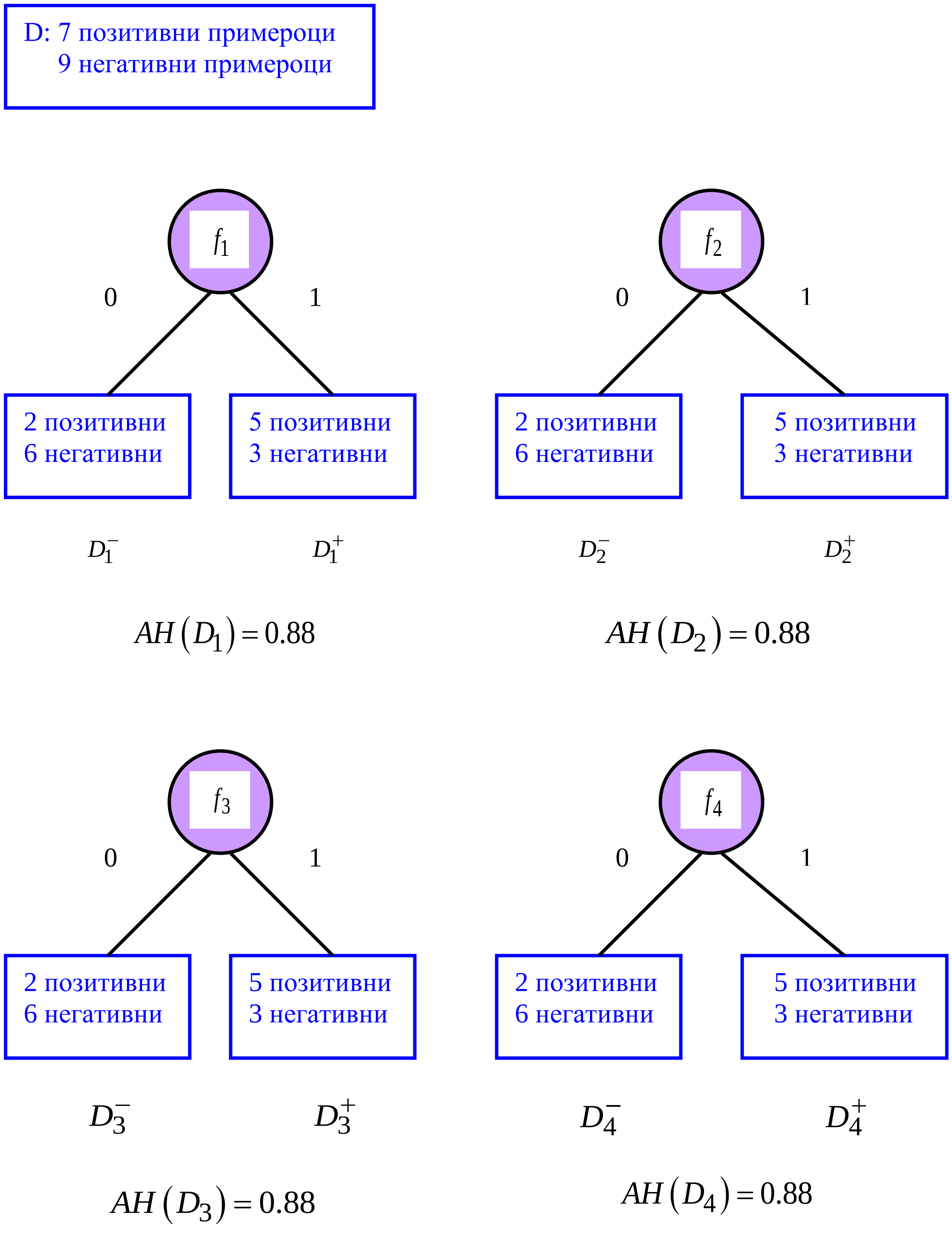
Решение: Врз основа на дадената Булова функција се генерира влезно-излезното множество податоци од таблица 5.72.

Таблица 5.72. Множество за учење од задача 5.13

примерок	f_1	f_2	f_3	f_4	y	**примерок**	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0	**0**	**9**	1	0	0	0	**0**
2	0	0	0	1	**0**	**10**	1	0	0	1	**0**
3	0	0	1	0	**0**	**11**	1	0	1	0	**0**
4	0	0	1	1	**1**	**12**	1	0	1	1	**1**
5	0	1	0	0	**0**	**13**	1	1	0	0	**1**
6	0	1	0	1	**0**	**14**	1	1	0	1	**1**
7	0	1	1	0	**0**	**15**	1	1	1	0	**1**
8	0	1	1	1	**1**	**16**	1	1	1	1	**1**

Ентропијата на влезно-излезното множество D е:

$$H(D) = -\frac{7}{16}\log_2\frac{7}{16} - \frac{9}{16}\log_2\frac{9}{16} \tag{5.77}$$



Слика 5.15. Раздвојување на множеството D со влезните карактеристики

Ентропијата на одделните подмножества D_j^+ и D_j^- е:

$$H(D_1^+) = -\frac{5}{8}\log_2\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} = 0.95 \qquad (5.78)$$

$$H\left(D_1^-\right) = -\frac{2}{8}\log_2\frac{2}{8} - \frac{6}{8}\log_2\frac{6}{8} = 0.81 \tag{5.79}$$

$$H\left(D_2^+\right) = -\frac{5}{8}\log_2\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} = 0.95 \tag{5.80}$$

$$H\left(D_2^-\right) = -\frac{2}{8}\log_2\frac{2}{8} - \frac{6}{8}\log_2\frac{6}{8} = 0.81 \tag{5.81}$$

$$H\left(D_3^+\right) = -\frac{5}{8}\log_2\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} = 0.95 \tag{5.82}$$

$$H\left(D_3^-\right) = -\frac{2}{8}\log_2\frac{2}{8} - \frac{6}{8}\log_2\frac{6}{8} = 0.81 \tag{5.83}$$

$$H\left(D_4^+\right) = -\frac{5}{8}\log_2\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} = 0.95 \tag{5.84}$$

$$H\left(D_4^-\right) = -\frac{2}{8}\log_2\frac{2}{8} - \frac{6}{8}\log_2\frac{6}{8} = -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} = -0.5 - 0.31 = 0.81 \tag{5.85}$$

Средната вредност на ентропиите од подмножествата D_j^+ и D_j^- се пресметува според формулата:

$$AH\left(D_j\right) = \rho_j H\left(D_j^+\right) + \left(1-\rho_j\right) H\left(D_j^-\right) \tag{5.86}$$

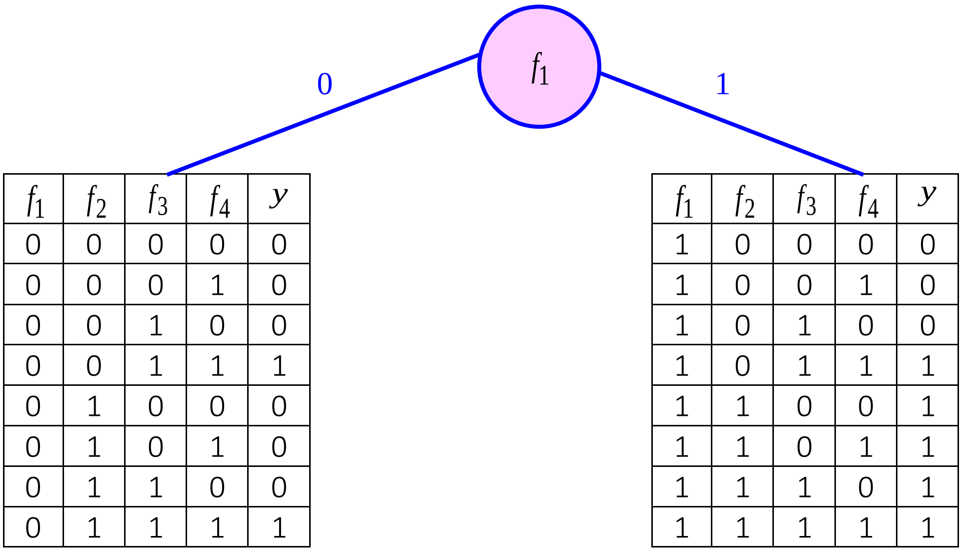
и таа е:

$$AH\left(D_1\right) = \frac{8}{16}H\left(D_1^+\right) + \frac{8}{16}H\left(D_1^-\right) = \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.81) = 0.88 \tag{5.87}$$

$$AH\left(D_2\right) = \frac{8}{16}H\left(D_2^+\right) + \frac{8}{16}H\left(D_2^-\right) = \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.81) = 0.88 \tag{5.88}$$

$$AH\left(D_3\right) = \frac{8}{16}H\left(D_3^+\right) + \frac{8}{16}H\left(D_3^-\right) = \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.81) = 0.88 \tag{5.89}$$

$$AH\left(D_4\right) = \frac{8}{16}H\left(D_4^+\right) + \frac{8}{16}H\left(D_4^-\right) = \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.81) = 0.88 \tag{5.90}$$



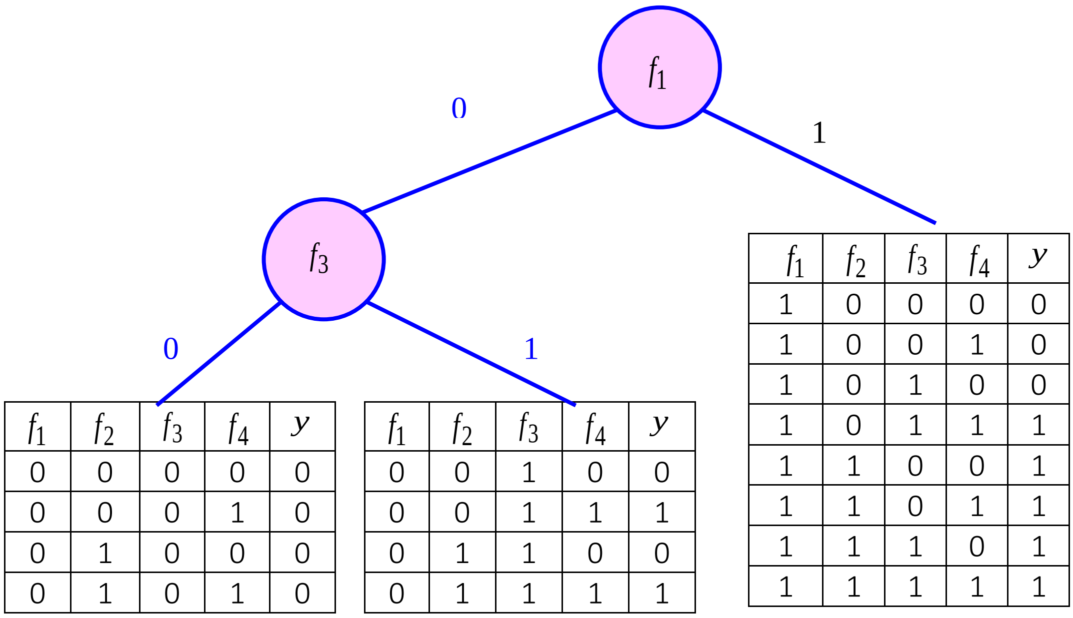
f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

AH_1=0.81, AH_2=0.81
AH_3=0.50, AH_4=0.50

AH_1=0.95, AH_2=0.405
AH_3=0.905, AH_4=0.905

Слика 5.16. Раздвојување на влезно-излезното множество од таблица 5.72 врз основа на карактеристиката f_1

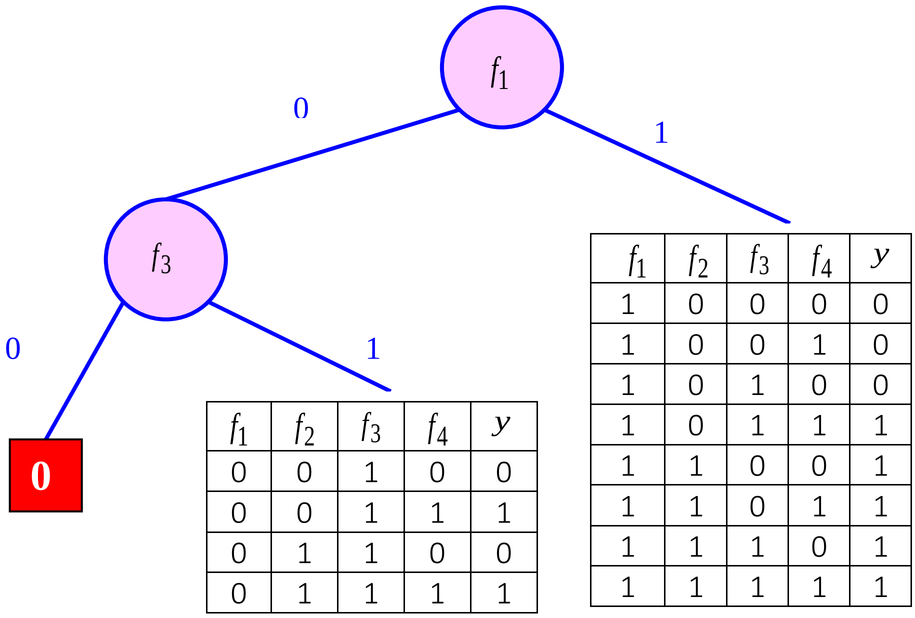


f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

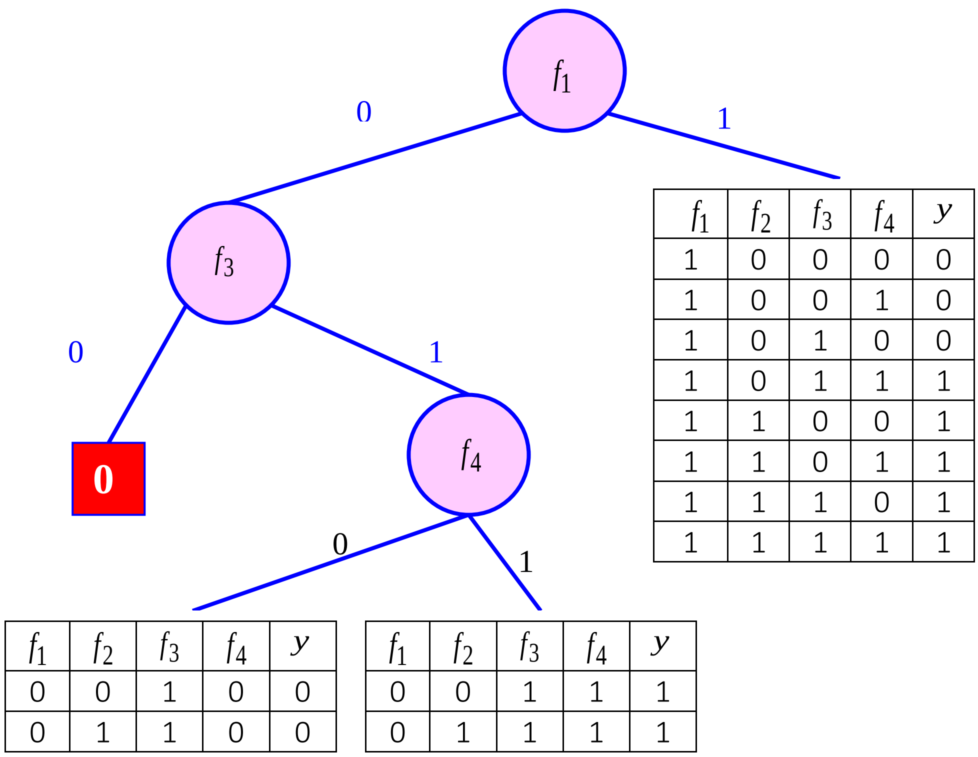
Слика 5.17. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.13 - бидејќи карактеристиките f_3 и f_4 се рамноправни, ја усвојуваме произволно f_3



f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1

f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Слика 5.18. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.13

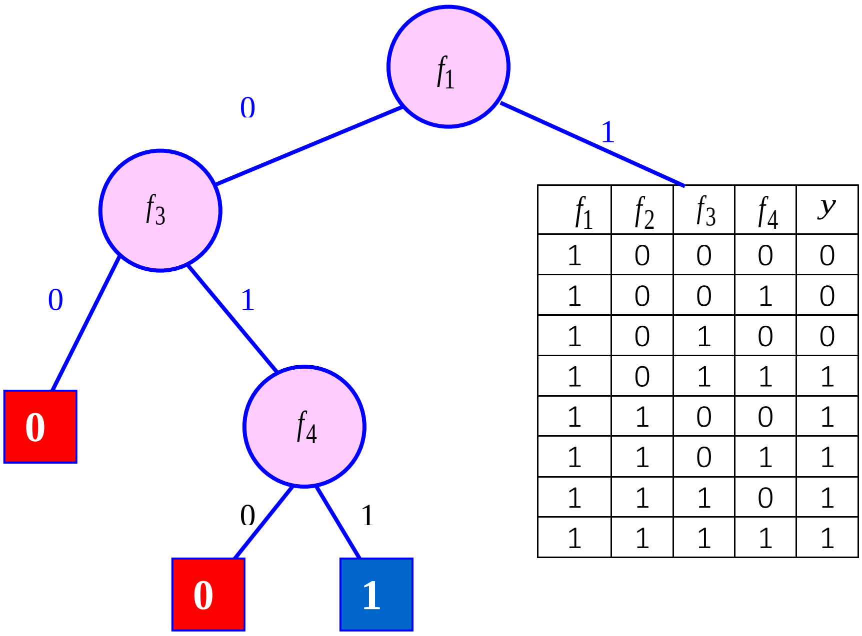


f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0

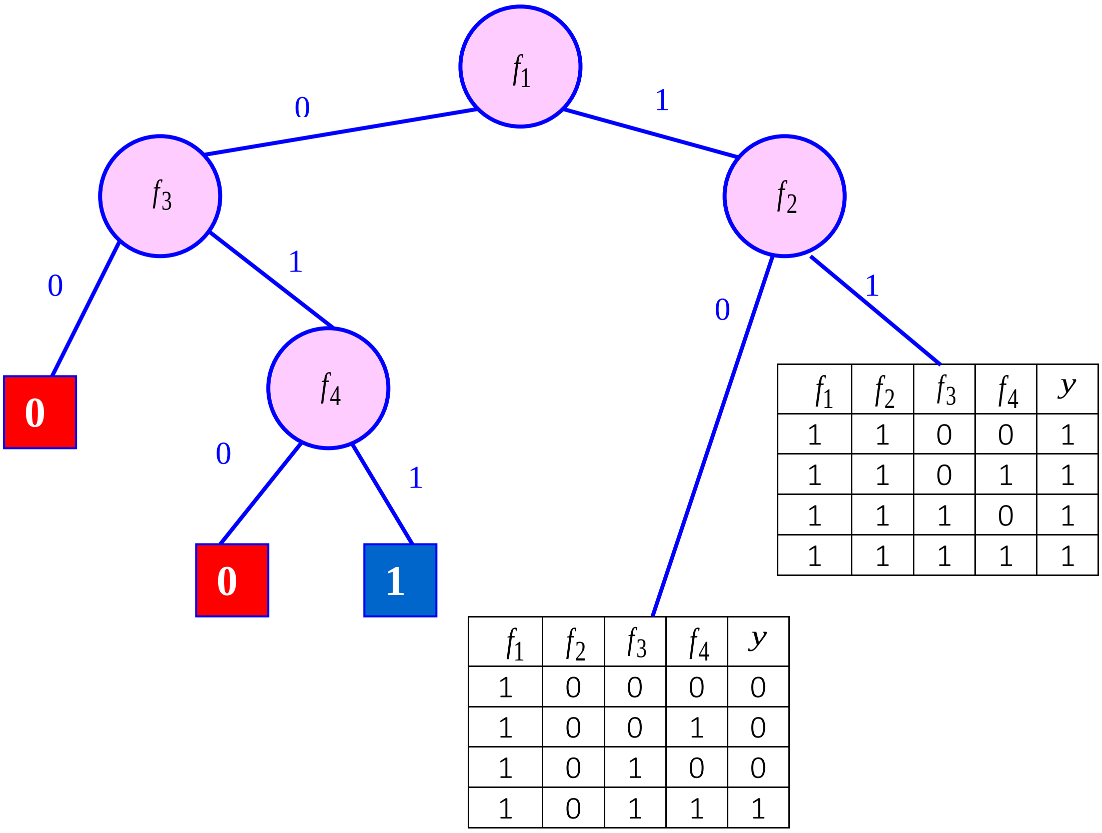
f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1

Слика 5.19. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.13



f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

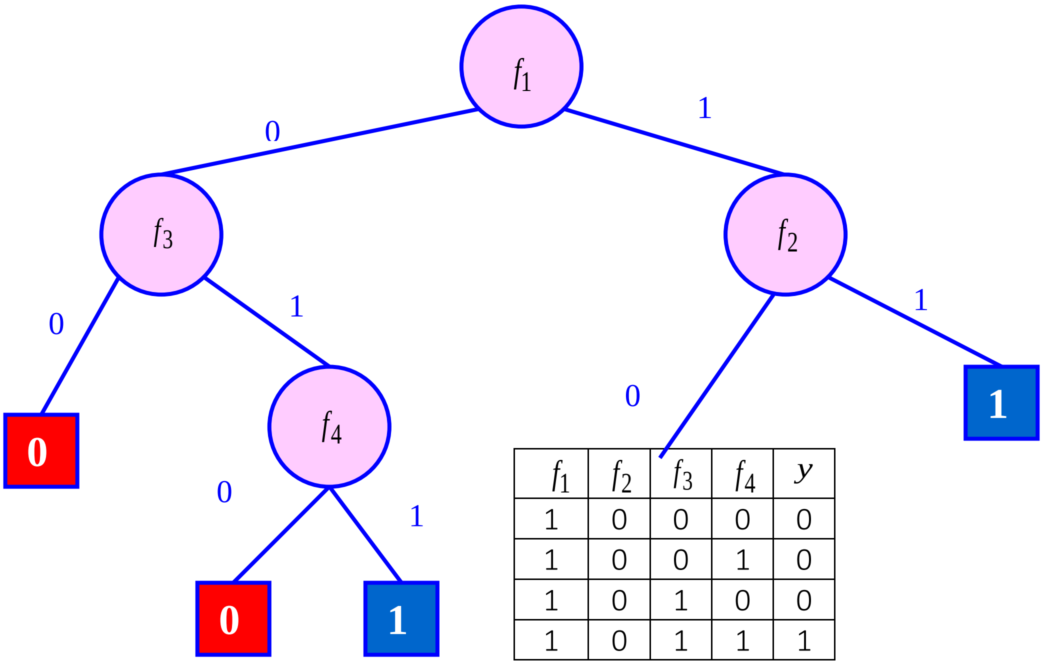
Слика 5.20. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.13



f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

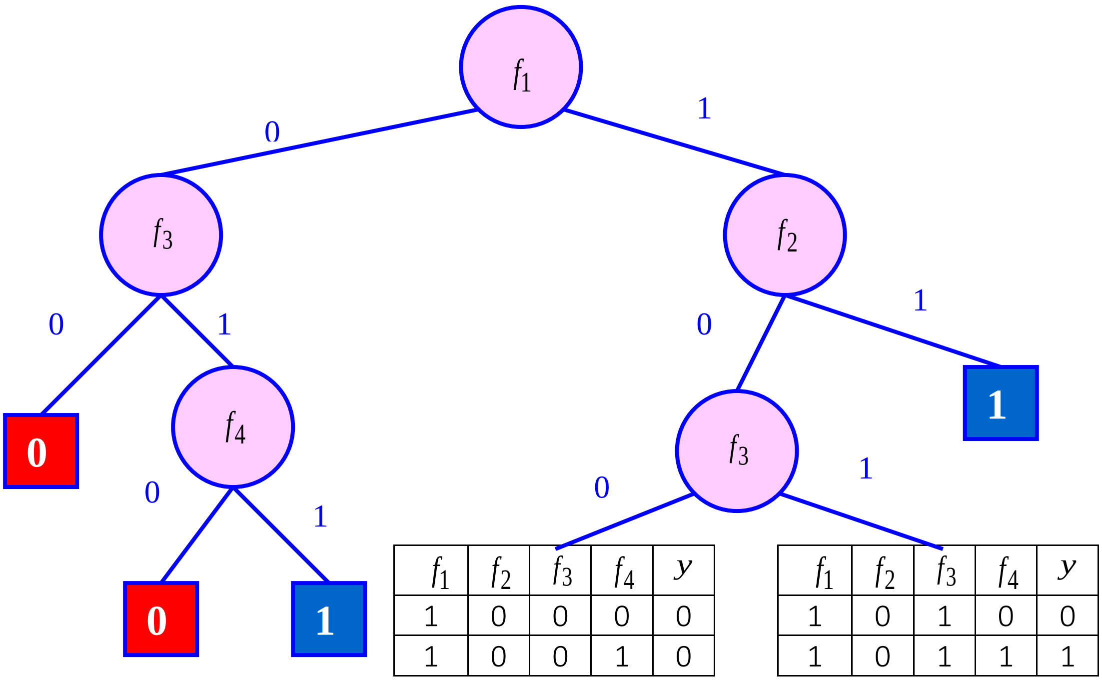
f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1

Слика 5.21. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.13



f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1

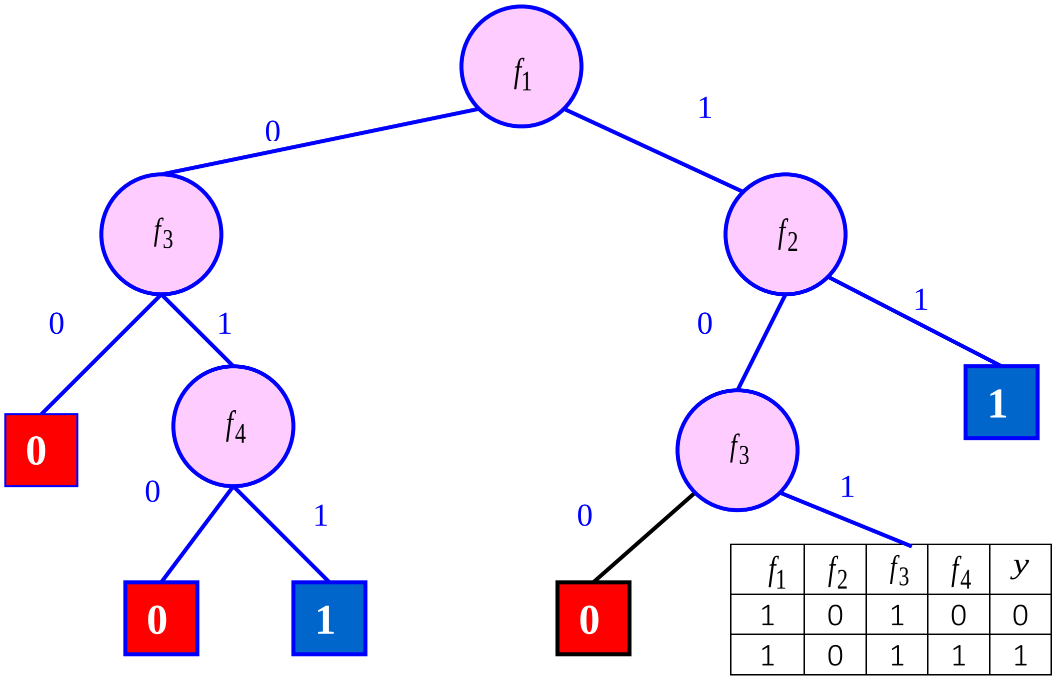
Слика 5.22. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.13



f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0

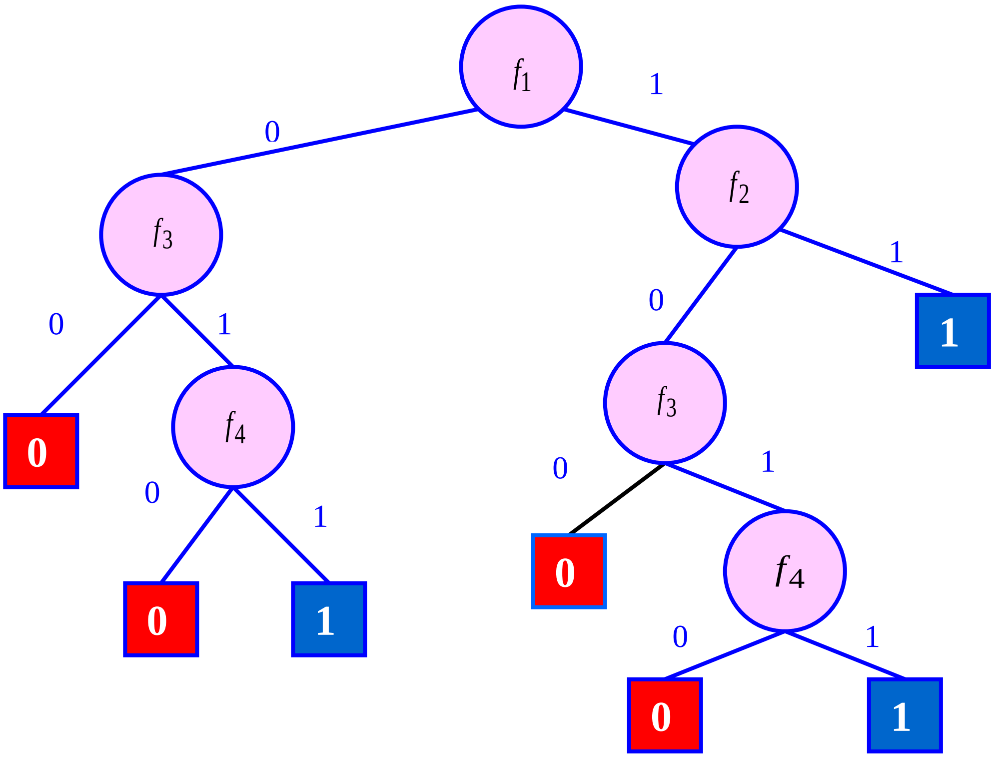
f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1

Слика 5.23. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.13



f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1

Слика 5.24. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.13



Слика 5.25. Конечно стебло на одлучување за задачата 5.13

5.14. Професорот по вештачка интелигенција се обидувал да предвиди каков резултат ќе имаат неговите студенти на престојниот испит. Врз основа на статистички податоци, кои се дадени во таблицата 5.73, утврдил дека студентите што учеле и на испит доаѓале здрави и одморени успешно го положувале истиот. Од друга страна, студентите кои на испит доаѓале болни, уморни и/или со главоболка, не биле успешни. Врз основа на дадените податоци, да се состави соодветно стебло за учење, со помош на кое подоцна ќе може да се предвиди дали студентите Томе Томовски и Ангелина Ангелова од таблица 5.74 ќе го положат престојниот испит или не.

Таблица 5.73. Влезно-излезно множество за задачата 5.14

примерок	**настинат**	**уморен**	**со главоболка**	**учел**	**положил**
1.	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	1	1
3.	0	0	1	0	0
4.	0	0	1	1	1
5.	0	1	0	0	0
6.	0	1	0	1	1
7.	0	1	1	0	0
8.	0	1	1	1	0
9.	1	0	0	0	0
10.	1	0	0	1	1
11.	1	0	1	0	0
12.	1	0	1	1	0
13.	1	1	0	0	0
14.	1	1	1	0	0

Таблица 5.74. Множество за тестирање од задачата 5.14

примерок	**настинат**	**уморен**	**со главоболка**	**учел**	**положил**
Ангелина Ангелова	1	1	0	1	**?**
Томе Томовски	1	1	1	1	**?**

Решение: За поголема едноставност на пресметките, таблицата 5.73 ќе ја претставиме во облик како таблицата 5.75 и ќе ја сортираме по последната колона, па даденото влезно-излезно множество е претставено со таблицата 5.76.

Од таблицата 5.76 лесно се гледа дека карактеристиката f_1 го дели влезно-излезното множество D на две подмножества D_1^- и D_1^+, како што е покажано на слика 5.26.

Таблица 5.75. Влезно-излезно множество за задачата 5.14

примерок	**настинат** f_1	**уморен** f_2	**со главоболка** f_3	**учел** f_4	**положил** y
1.	0	0	0	0	**0**
2.	0	0	0	1	**1**
3.	0	0	1	0	**0**
4.	0	0	1	1	**1**
5.	0	1	0	0	**0**
6.	0	1	0	1	**1**
7.	0	1	1	0	**0**
8.	0	1	1	1	**0**
9.	1	0	0	0	**0**
10.	1	0	0	1	**1**
11.	1	0	1	0	**0**
12.	1	0	1	1	**0**
13.	1	1	0	0	**0**
14.	1	1	1	0	**0**

Таблица 5.76. Сортирано влезно-излезно множество за задачата 5.14

примерок	**настинат** f_1	**уморен** f_2	**со главоболка** f_3	**учел** f_4	**положил** y
1.	0	0	0	0	**0**
3.	0	0	1	0	**0**
5.	0	1	0	0	**0**
7.	0	1	1	0	**0**
8.	0	1	1	1	**0**
9.	1	0	0	0	**0**
11.	1	0	1	0	**0**
12.	1	0	1	1	**0**
13.	1	1	0	0	**0**
14.	1	1	1	0	**0**
2.	0	0	0	1	**1**
4.	0	0	1	1	**1**
6.	0	1	0	1	**1**
10.	1	0	0	1	**1**

$$H\left(D_1^-\right) = -\frac{5}{8}\log_2\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} = 0.42 + 0.53 = 0.95 \tag{5.91}$$

$$H\left(D_1^+\right) = -\frac{5}{6}\log_2\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} = 0.22 + 0.43 = 0.65 \tag{5.92}$$

$$AH(D_1) = \frac{8}{14}(0.95) + \frac{6}{14}(0.65) = 0.8214 \tag{5.93}$$

Карактеристиката f_2 го дели влезно-излезното множество D на две подмножества D_2^- и D_2^+, како што е покажано на слика 5.27, додека карактеристиката f_3 го дели влезно-излезното множество D на две подмножества D_3^- и D_3^+, како што е покажано на слика 5.28.

$$H\left(D_2^-\right) = -\frac{5}{8}\log_2\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8} = 0.42 + 0.53 = 0.95 \tag{5.94}$$

$$H\left(D_2^+\right) = -\frac{5}{6}\log_2\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} = 0.22 + 0.43 = 0.65 \tag{5.95}$$

$$AH(D_2) = \frac{8}{14}(0.95) + \frac{6}{14}(0.65) = 0.8214 \tag{5.96}$$

Карактеристиката f_4 го дели влезно-излезното множество D на две подмножества D_4^- и D_4^+, како што е покажано на слика 5.29. Следствено, како почетен јазол во стеблото на одлучување се усвојува карактеристиката f_4 и во продолжение се набљудува подмножеството D_4^+ како ново множество за раздвојување $\hat{D}$, кое е дадено во таблицата 5.77.

$$H\left(D_3^-\right) = -\frac{4}{7}\log_2\frac{4}{7} - \frac{3}{7}\log_2\frac{3}{7} = 0.46 + 0.52 = 0.98 \tag{5.97}$$

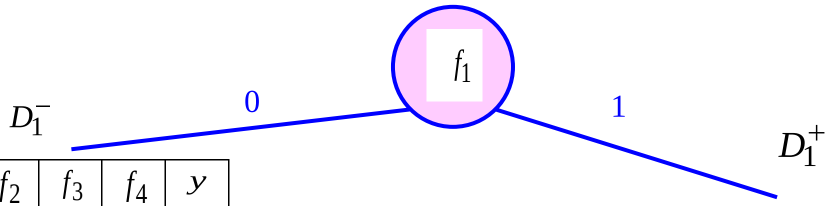
$$H\left(D_3^+\right) = -\frac{6}{7}\log_2\frac{6}{7} - \frac{1}{7}\log_2\frac{1}{7} = 0.19 + 0.43 = 0.62 \tag{5.98}$$

$$AH(D_3) = \frac{7}{14}(0.98) + \frac{7}{14}(0.62) = 0.74 \tag{5.99}$$

$$H\left(D_4^-\right) = -\frac{8}{8}\log_2\frac{8}{8} - \frac{0}{8}\log_2\frac{0}{8} = 0 \tag{5.100}$$

$$H\left(D_4^+\right) = -\frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6} - \frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} = 0.39 + 0.53 = 0.92 \tag{5.101}$$

$$AH(D_4) = \frac{8}{14}(0) + \frac{6}{14}(0.92) = 0.394 \tag{5.102}$$



D_1^-:

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1

D_1^+:

f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1

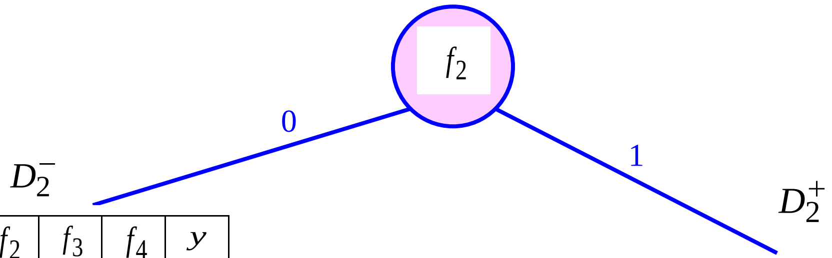
$n_1^- = 5$ негативни

$p_1^- = 3$ позитивни

$n_1^+ = 5$ негативни

$p_1^+ = 1$ позитивни

Слика 5.26. Раздвојување на влезно-излезното множество од таблицата 5.76 врз основа на карактеристиката f_1



D_2^-:

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1

D_2^+:

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
0	1	0	1	1

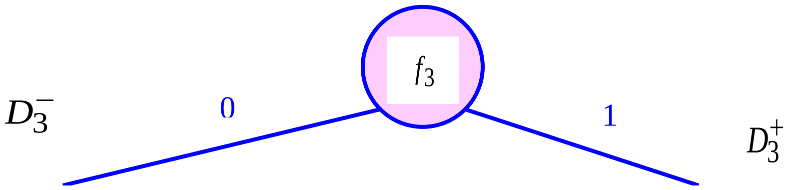
$n_2^- = 5$ негативни

$p_2^- = 3$ позитивни

$n_2^+ = 5$ негативни

$p_2^+ = 1$ позитивни

Слика 5.27. Раздвојување на влезно-излезното множество од таблицата 5.76 врз основа на карактеристиката f_2



f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	1	0	0
0	0	1	1	1

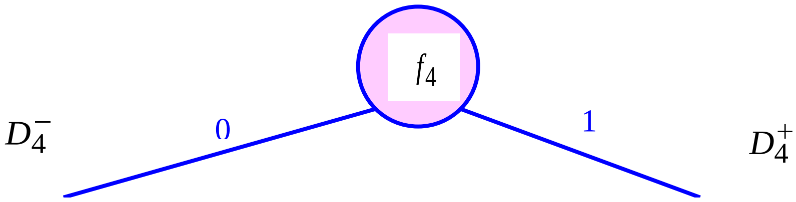
$n_3^- = 4$ негативни

$p_3^- = 3$ позитивни

$n_3^+ = 6$ негативни

$p_3^+ = 1$ позитивни

Слика 5.28. Раздвојување на множеството од таблица 5.76 врз основа на карактеристиката f_3



f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

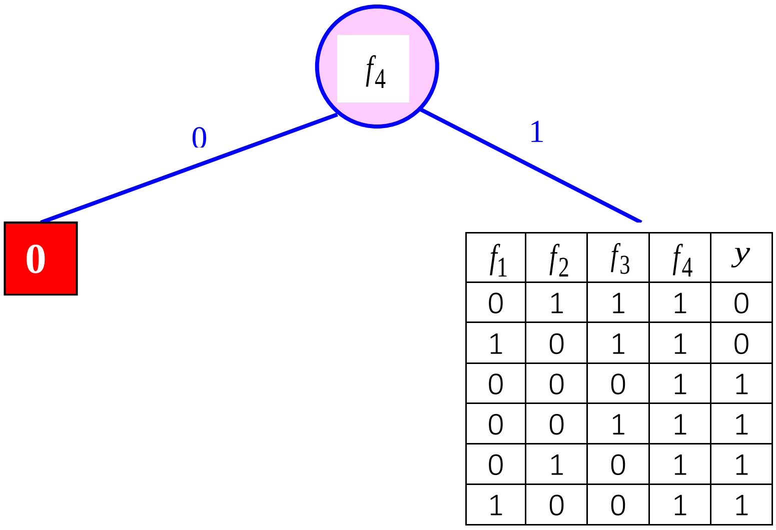
$n_4^+ = 2$ негативни

$p_4^+ = 4$ позитивни

$n_4^- = 8$ негативни

$p_4^- = 0$ позитивни

Слика 5.29. Раздвојување на множеството од таблица 5.76 врз основа на карактеристиката f_4



f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

Слика 5.30. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.14

Таблица 5.77. Ново множество за раздвојување $\hat{D}$

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

Карактеристиката f_1 го дели влезно-излезното множество од таблица 5.77 на две подмножества $\hat{D}_1^-$ и $\hat{D}_1^+$, како што е покажано на сликата 5.31:

$$H\left(\hat{D}_1^-\right)=-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4}=0.50+0.31=0.81 \qquad (5.103)$$

$$H\left(\hat{D}_1^+\right)=-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}=1 \qquad (5.104)$$

$$AH\left(\hat{D}_1\right)=\frac{2}{6}(1)+\frac{4}{6}(0.81)=0.8733 \qquad (5.105)$$

Карактеристиката f_2 го дели влезно-излезното множество $D_4^+=\hat{D}$ на две подмножества $\hat{D}_2^-$ и $\hat{D}_2^+$, како што е покажано на слика 5.32:

$$H\left(\hat{D}_2^-\right)=-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4}=0.50+0.31=0.81 \quad (5.106)$$

$$H\left(\hat{D}_2^+\right)=-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log \ 0 \ 1 \quad (5.107)$$

$$AH\left(\hat{D}_2\right)=\frac{2}{6}(1)+\frac{4}{6}(0.81)=0.8733 \quad (5.108)$$

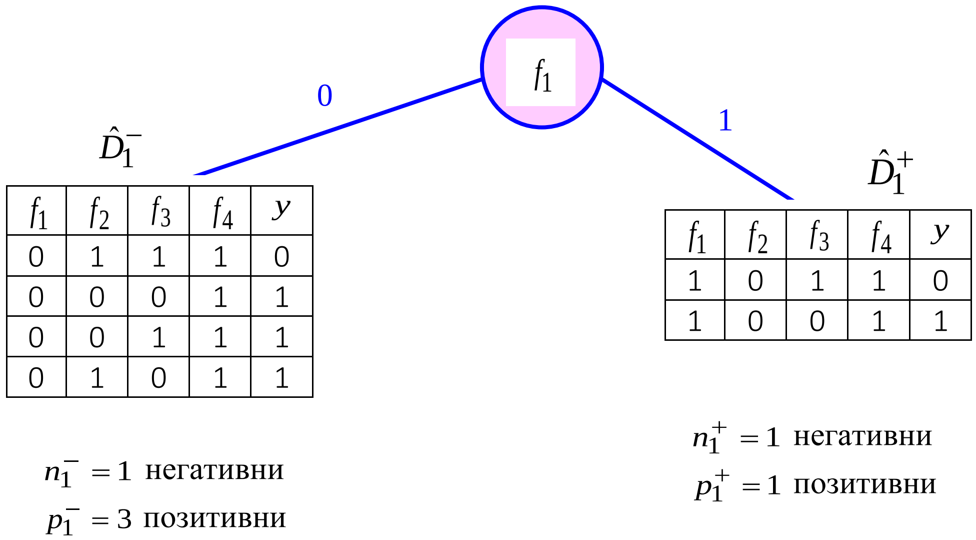
Карактеристиката f_3 го дели влезно-излезното множество $D_4^+=\hat{D}$ на две подмножества $\hat{D}_3^-$ и $\hat{D}_3^+$, како што е покажано на слика 5.33:

$$H\left(\hat{D}_3^-\right)=-\frac{0}{3}\log_2\frac{0}{3}-\frac{3}{3}\log_2\frac{3}{3}=0 \quad (5.109)$$

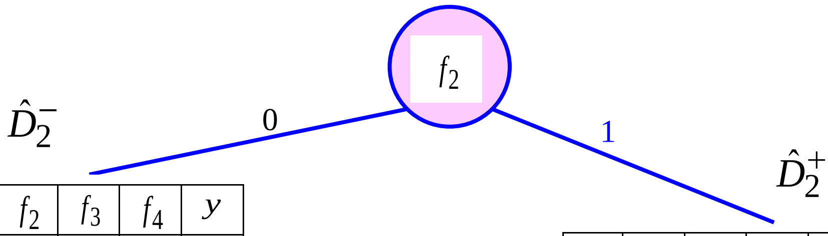
$$H\left(\hat{D}_3^+\right)=-\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}=0.39+0.53=0.92 \quad (5.110)$$

$$AH\left(\hat{D}_3\right)=\frac{3}{6}(0.92)+\frac{3}{6}(0)=0.41 \quad (5.111)$$

Следствено, како следен јазол во стеблото на одлучување се усвојува карактеристиката f_3 и во продолжение се набљудува множеството од таблица 5.78 како ново множество за раздвојување.



Слика 5.31. Раздвојување на новото множество $D_4^+=\hat{D}$ од таблица 5.77 врз основа на карактеристиката f_1



f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
1	0	0	1	1

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1

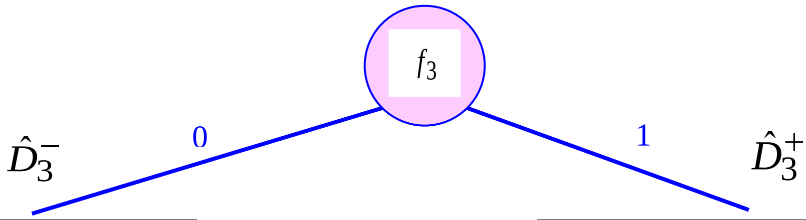
$n_2^- = 1$ негативни

$p_2^- = 3$ позитивни

$n_2^+ = 1$ негативни

$p_2^+ = 1$ позитивни

Слика 5.32. Раздвојување на новото множество $D_4^+ = \hat{D}$ од таблица 5.77 врз основа на карактеристиката f_2



f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	0	1	1	1

$n_3^- = 0$ негативни

$p_3^- = 3$ позитивни

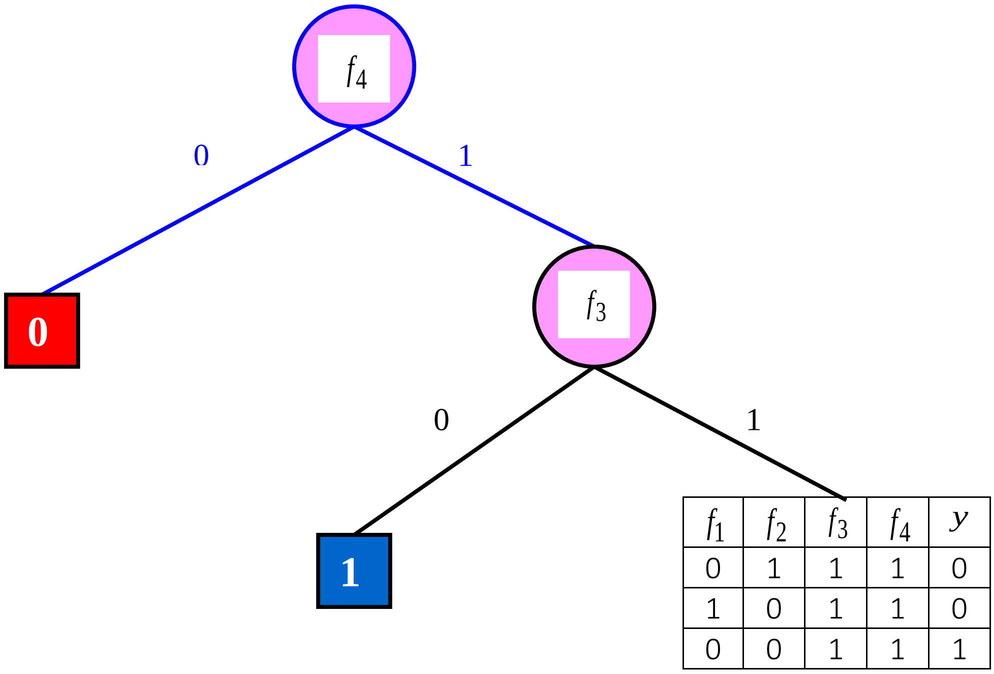
$n_3^+ = 2$ негативни

$p_3^+ = 1$ позитивни

Слика 5.33. Раздвојување на новото множество $D_4^+ = \hat{D}$ од таблица 5.77 врз основа на карактеристиката f_3

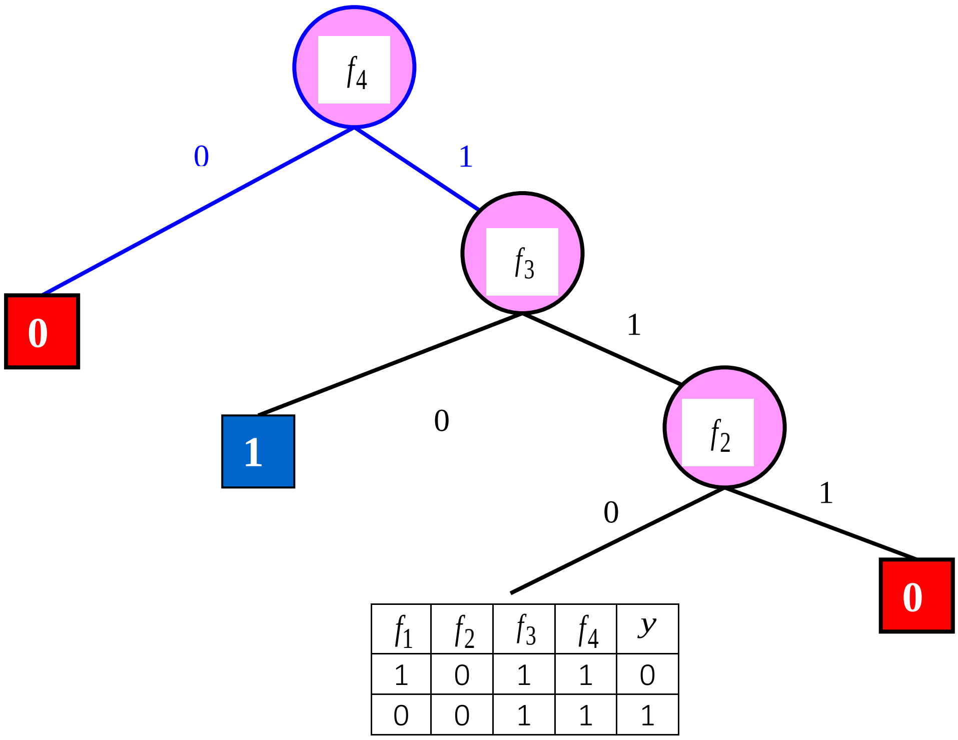
Табліца 5.78. Ново множество за раздвојување $\hat{D}_3^+ = \breve{D}$

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	0	1	1	1



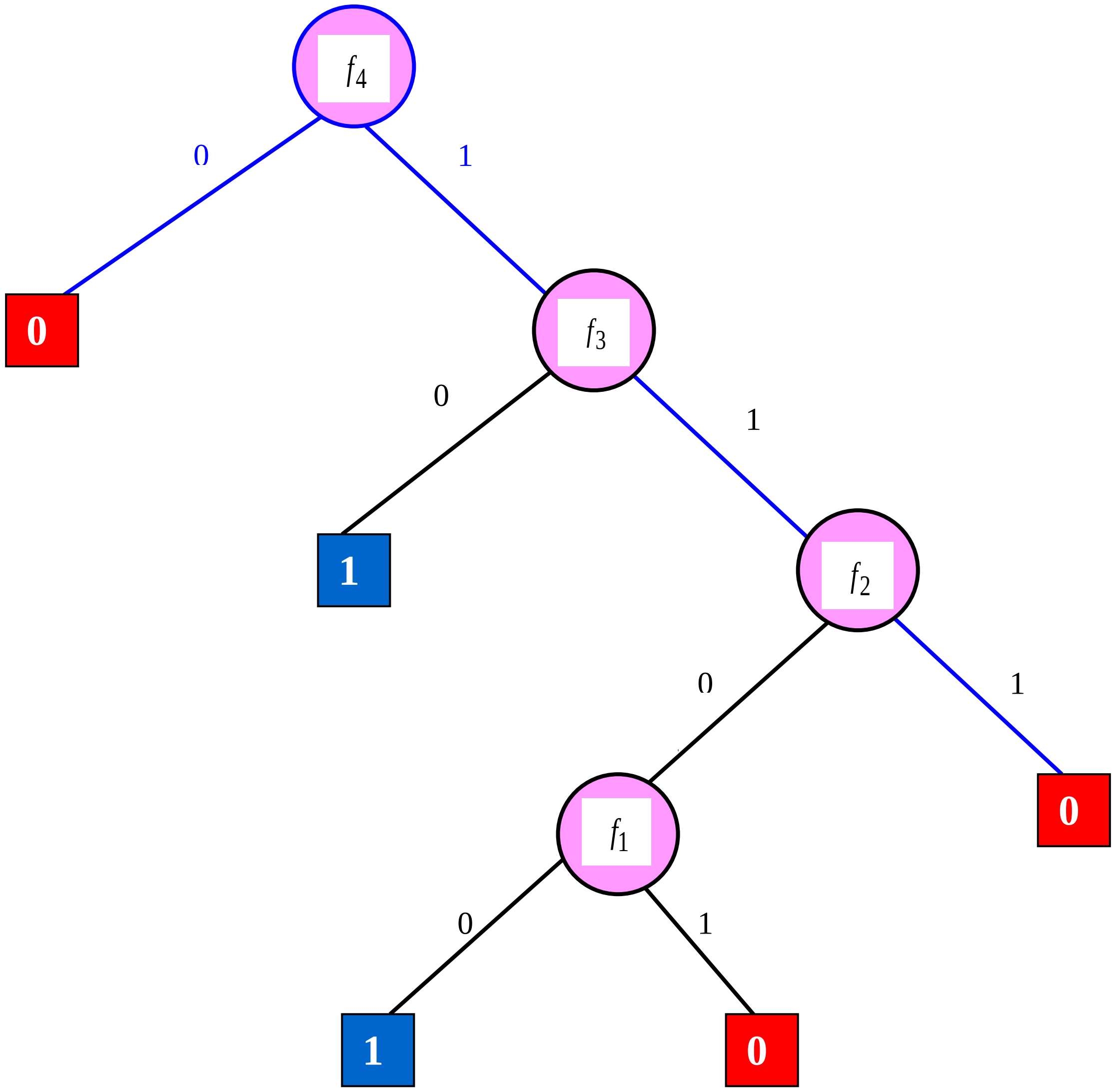
f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
0	0	1	1	1

Слика 5.34. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.14



f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	1	1	0
0	0	1	1	1

Слика 5.35. Натамошно разгранување на стеблото на одлучување за задачата 5.14



Слика 5.36. Стеблото на одлучување за задачата 5.14

Врз основа на стеблото од слика 5.36 може да се заклучи дека студентот Томе Томовски нема да го положи претстојниот испит, додека студентот Ангелина Ангелова ќе го положи.

Таблица 5.79. Множество за тестирање од задачата 5.14

примерок	**настинат**	**уморен**	**со главоболка**	**учел**	**положил**
Ангелина Ангелова	1	1	0	1	**1**
Томе Томовски	1	1	1	1	**0**

5.15. Дадено е множеството за обучување:

$$D = \{(1,0),\ (3,1),\ (5,1),\ (7,0),\ (8,0),\ (10,0),\ (11,1),\ (12,1)\} \qquad (5.112)$$

Кој од следните тестови треба да се одбере за корен (почетен јазол) на соодветното стебло на одлучување: а) $x < 3$, б) $x < 7$, в) $x < 11$?

Решение: Даденото множество за обучување се состои од следните примероци (влезно – излезни парови):

$$\left(x^1, y^1\right) = (1,0)$$

$$\left(x^2, y^2\right) = (3,1)$$

$$\left(x^3, y^3\right) = (5,1)$$

$$\left(x^4, y^4\right) = (7,0)$$

$$\left(x^5, y^5\right) = (8,0)$$

$$\left(x^6, y^6\right) = (10,0)$$

$$\left(x^7, y^7\right) = (11,1)$$

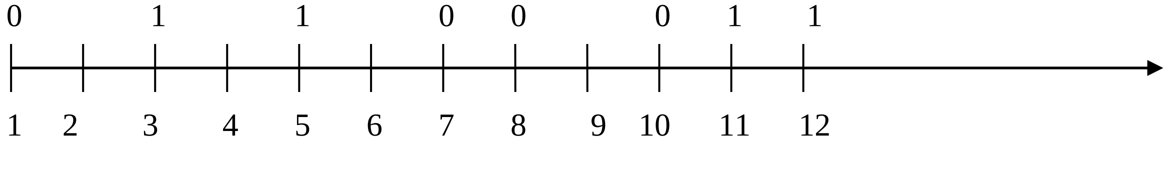
$$\left(x^8, y^8\right) = (12,1) \qquad (5.113)$$

Тоа може да се прикаже и со помош на таблицата 5.80.

Таблица 5.80. Множество за учење за задача 5.15

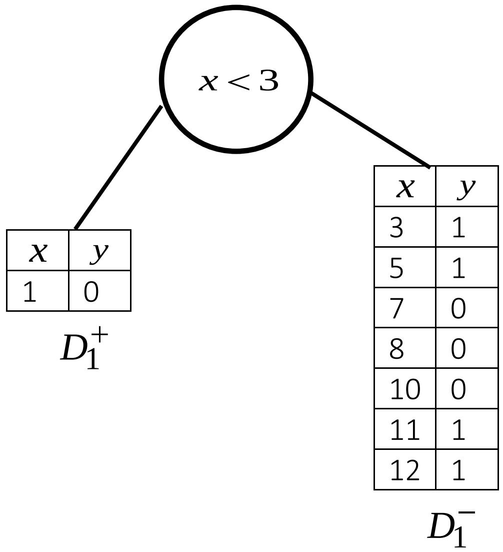
x	y
1	0
3	1
5	1
7	0
8	0
10	0
11	1
12	1

или графички, како на слика 5.37.



Слика 5.37. Графички приказ на множеството за обучување од задачата 5.15

Тестот $x < 3$ го дели множеството D на подмножествата D_1^+ и D_1^-, како што е покажано на сликата 5.38.



x	y
1	0

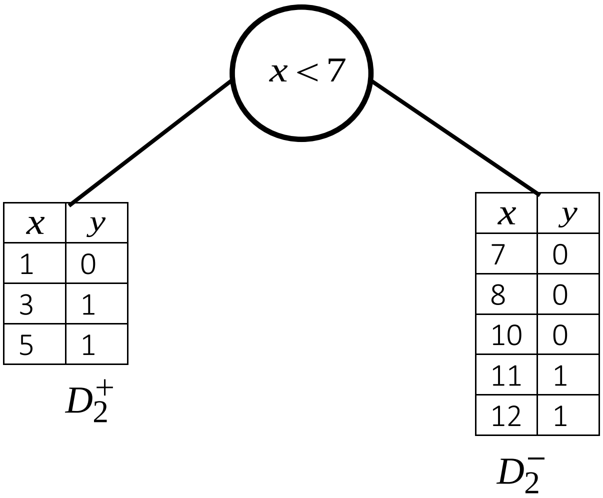
D_1^+

x	y
3	1
5	1
7	0
8	0
10	0
11	1
12	1

D_1^-

Слика 5.38. Раздвојување на влезно-излезното множество D од задачата 5.15 врз основа на тестот $x < 3$

Тестот $x < 7$ го дели множеството D на подмножествата D_2^+ и D_2^-, како што е покажано на сликата 5.39.



x	y
1	0
3	1
5	1

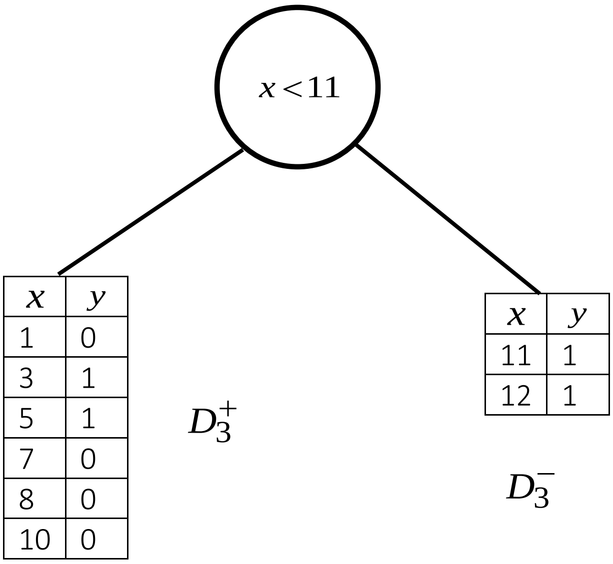
D_2^+

x	y
7	0
8	0
10	0
11	1
12	1

D_2^-

Слика 5.39. Раздвојување на влезно-излезното множество D од задачата 5.15 врз основа на тестот $x < 7$

Тестот $x < 11$ го дели множеството D на подмножествата D_3^+ и D_3^-, како што е покажано на сликата 5.40.



Слика 5.40. Раздвојување на влезно-излезното множество D од задачата 5.15 врз основа на тестот $x<11$

При составувањето на соодветното стебло на одлучување, цел е да се одвојат позитивните од негативните примероци во даденото множество на одлучување со најмал можен број тестови. Во идеален случај, ова раздвојување би се извршило по само еден тест. Најнеповолен случај е кога еден тест ги раздвојува примероците во подмножества со ист број позитивни и негативни примероци. За оценка на квалитетот на еден тест се користи следната мерка:

$$AE(j)=\rho_j H\left(D_j^+\right)+\left(1-\rho_j\right)H\left(D_j^-\right) \tag{5.114}$$

каде што:

$$H\left(D_j^+\right)=-\frac{p_j^+}{p_j^+ + n_j^+}\log_2\frac{p_j^+}{p_j^+ + n_j^+}-\frac{n_j^+}{p_j^+ + n_j^+}\log_2\frac{n_j^+}{p_j^+ + n_j^+} \tag{5.115}$$

е ентропијата на подмножеството D_j^+ од D, за чии елементи е точен набљудуваниот тест j,

$$H\left(D_j^-\right)=-\frac{p_j^-}{p_j^- + n_j^-}\log_2\frac{p_j^-}{p_j^- + n_j^-}-\frac{n_j^-}{p_j^- + n_j^-}\log_2\frac{n_j^-}{p_j^- + n_j^-} \tag{5.116}$$

е ентропијата на подмножеството D_j^- од D, за чии елементи не важи набљудуваниот тест j, а ρ_j е соодветен тежински фактор, кој го дава односот помеѓу бројот примероци во D_j^+ и D. Очигледно, $AE(j)$ е еден вид средна вредност од ентропите на подмножествата D_j^+ и D_j^- на D, помножени со соодветен тежински фактор. Во конкретниот случај се добиваат подмножествата прикажани на сликите 5.41 - 5.43, па соодветните ентропии ќе бидат:

$$H\left(D_1^+\right) = -\frac{0}{1}\log_2\frac{0}{1} - \frac{1}{1}\log_2\frac{1}{1} = 0 \tag{5.117}$$

$$H\left(D_1^-\right) = -\frac{4}{7}\log_2\frac{4}{7} - \frac{3}{7}\log_2\frac{3}{7} = 0.46 + 0.52 = 0.98 \tag{5.118}$$

$$H\left(D_2^+\right) = -\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = 0.39 + 0.53 = 0.92 \tag{5.119}$$

$$H\left(D_2^-\right) = -\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} = 0.53 + 0.44 = 0.97 \tag{5.120}$$

$$H\left(D_3^+\right) = -\frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6} - \frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} = 0.53 + 0.39 = 0.92 \tag{5.121}$$

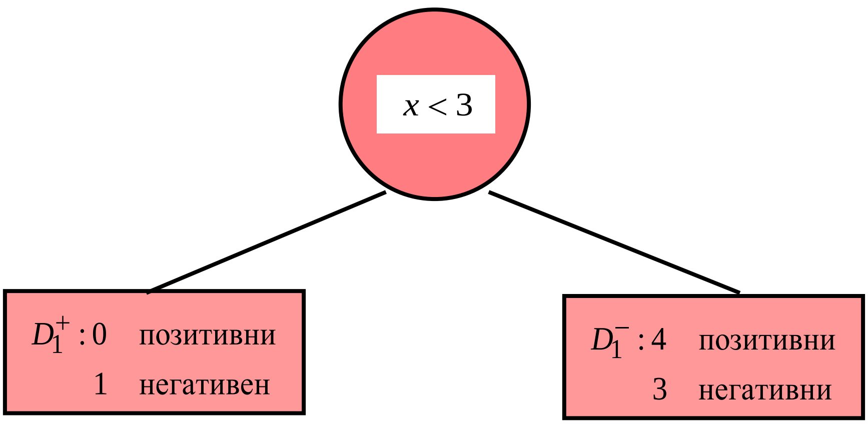
$$H\left(D_3^-\right) = -\frac{2}{2}\log_2\frac{2}{2} - \frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2} = 0 \tag{5.122}$$

$$AE(1) = \frac{1}{8}H\left(D_1^+\right) + \frac{7}{8}H\left(D_1^-\right) = \frac{1}{8}(0) + \frac{7}{8}(0.98) = 0.8575 \tag{5.123}$$

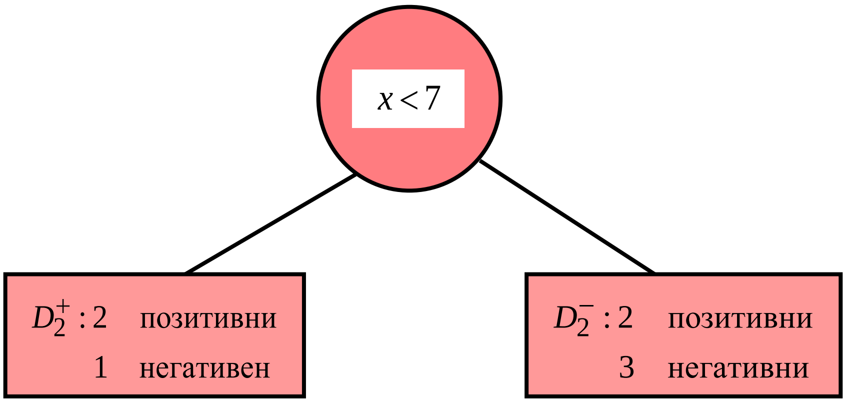
$$AE(2) = \frac{3}{8}H\left(D_2^+\right) + \frac{5}{8}H\left(D_2^-\right) = \frac{3}{8}(0.92) + \frac{5}{8}(0.97) = 0.951 \tag{5.124}$$

$$AE(3) = \frac{6}{8}H\left(D_3^+\right) + \frac{2}{8}H\left(D_3^-\right) = \frac{3}{4}(0.92) + \frac{1}{4}(0) = 0.69 \tag{5.125}$$

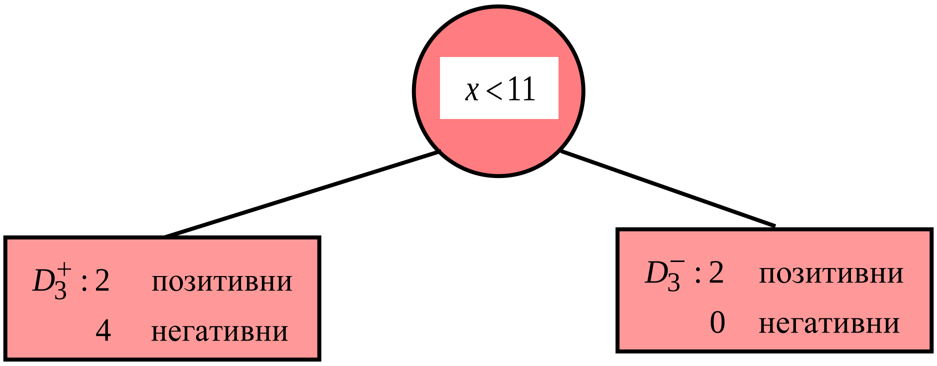
Следствено, за корен на стеблото за одлучување се одбира тестот $x < 11$, бидејќи неговата средна ентропија е најмала по вредност.



Слика 5.41. Поделба на множеството (5.112) според критериумот $x < 3$



Слика 5.42. Поделба на множеството (5.112) според критериумот $x < 7$



Слика 5.43. Поделба на множеството (5.112) според критериумот $x < 11$

Како следен се одбира тестот $x < 7$, бидејќи тој сега има најмала ентропија:

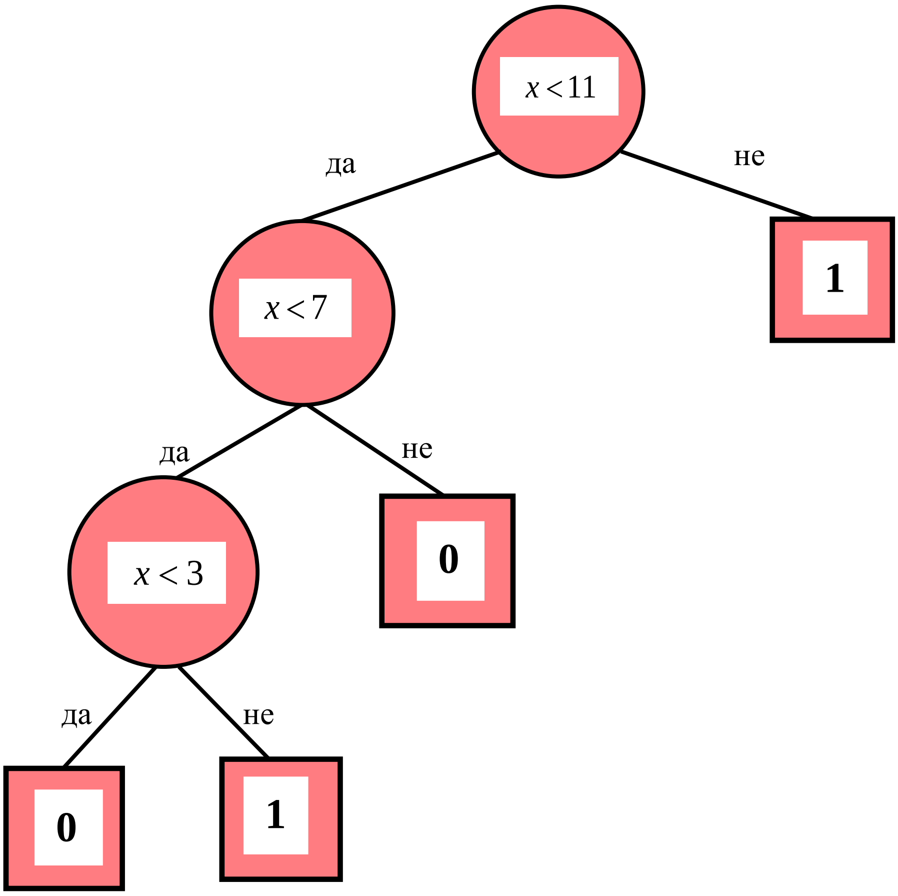
$$\begin{cases} H\left(\tilde{D}_1^+\right) = -\frac{0}{1}\log_2\frac{0}{1} - \frac{1}{1}\log_2\frac{1}{1} = 0 \\ H\left(\tilde{D}_1^-\right) = -\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} = 0.97 \end{cases} \quad (5.126)$$

$$\begin{cases} H\left(\tilde{D}_2^+\right) = -\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = 0.92 \\ H\left(\tilde{D}_2^-\right) = -\frac{0}{3}\log_2\frac{0}{3} - \frac{3}{3}\log_2\frac{3}{3} = 0 \end{cases} \quad (5.127)$$

$$AE\left(\tilde{1}\right) = \frac{1}{6}H\left(\tilde{D}_1^+\right) + \frac{5}{6}H\left(\tilde{D}_1^-\right) = 0.808 \quad (5.128)$$

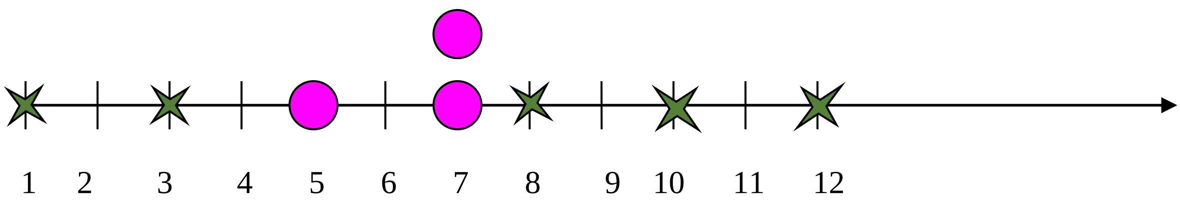
$$AE\left(\tilde{2}\right) = \frac{3}{6}H\left(\tilde{D}_2^+\right) + \frac{3}{6}H\left(\tilde{D}_2^-\right) = 0.46 \quad (5.129)$$

Така се добива стеблото на одлучување од слика 5.44.



Слика 5.44. Стебло на одлучување за задача 5.15

5.16. На сликата 5.45 е прикажано множество за обучување со 8 примероци, од кои два имаат иста вредност. Да се состави стебло на одлучување врз основа на даденото множество за обучување. Под претпоставка, тестовите во стеблото се од облик $x<N$, каде што N е природен број. За секој тест да се пресмета средната ентропија $AE(j)$.



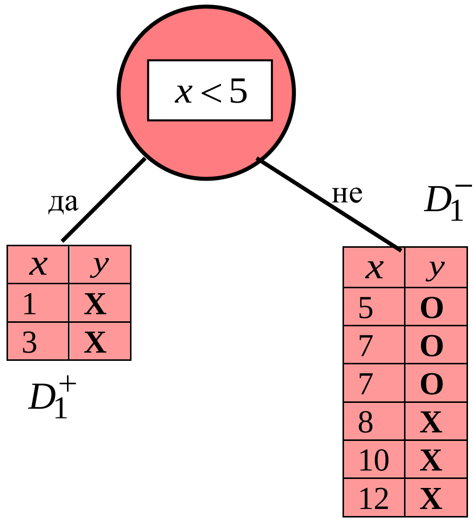
Слика 5.45. Графички приказ на множеството за обучување од задачата 5.16

Решение: Тестот $x<5$ го дели множеството D на подмножествата D_1^+ и D_1^-, како што е покажано на сликата 5.46, додека тестот $x<8$ го дели множеството D на подмножествата D_2^+ и D_2^-, како што е покажано на сликата 5.47:

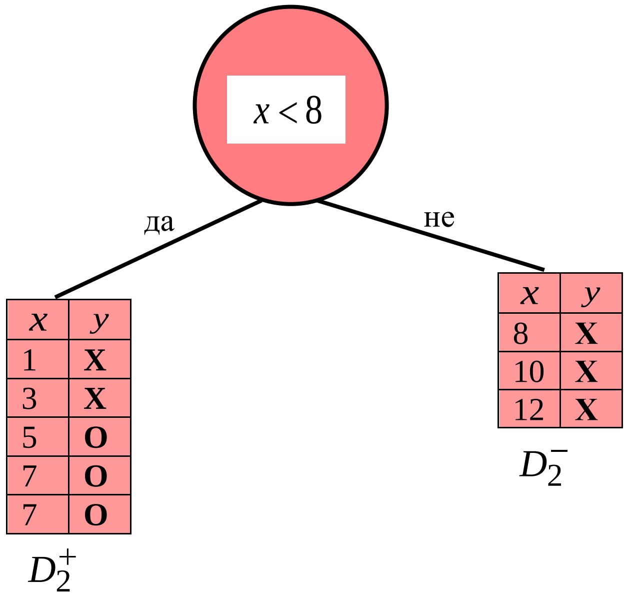
$$AE(1)=\frac{2}{8}H\left(D_1^+\right)+\frac{6}{8}H\left(D_1^-\right)=\frac{2}{8}\left(-\frac{2}{2}\ln\frac{2}{2}-\frac{0}{2}\ln\frac{0}{2}\right)+\frac{6}{8}\left(-\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6}-\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6}\right)=0.75$$

$$AE(2)=\frac{5}{8}H\left(D_2^+\right)+\frac{3}{8}H\left(D_2^-\right)=\frac{5}{8}\left(-\frac{2}{5}\ln\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\ln\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{8}\left(-\frac{3}{3}\ln\frac{3}{3}-\frac{0}{3}\ln\frac{0}{3}\right)=0.606 \qquad (5.130)$$

Следствено, за корен на стеблото на одлучување се одбира тестот $x<8$.

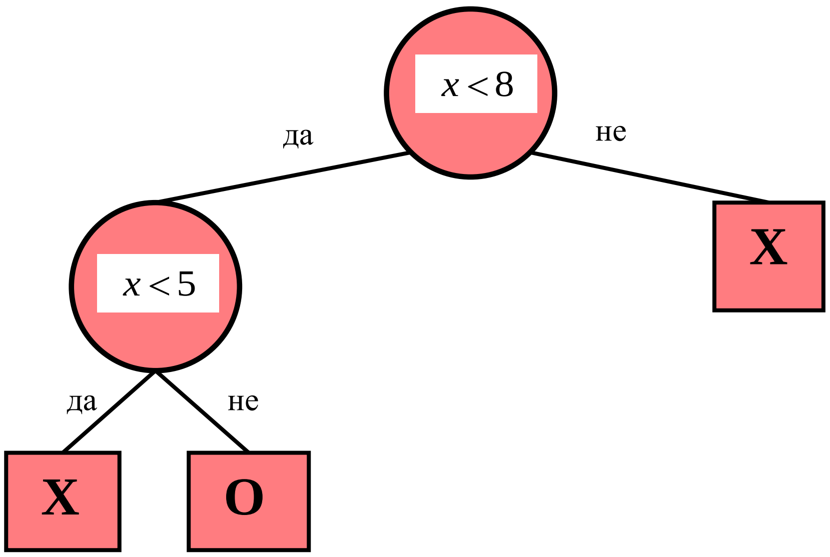


Слика 5.46. Раздвојување на влезно-излезното множество D од задачата 5.16 според тестот $x<5$



Слика 5.47. Раздвојување на влезно-излезното множество D од задачата 5.16 според тестот $x<8$

Бараното стебло е прикажано на слика 5.48.



Слика 5.48. Стебло на одлучување за задачата 5.16

5.17. Мила заклучила дека гардероберите ѝ се преполни и дека е крајно време да направи простор за нова облека. Затоа решила да се ослободи од дел од старата облека. При одлучувањето за тоа од која облека ќе се ослободи (точно=1) или нема (погрешно=0), решавачки фактор бил дали облеката е постара од 3 години (точно=1) или не (погрешно=0), дали е понова од 3 месеци (точно=1) или не (погрешно=0), дали ѝ е омилена (точно=1) или не (погрешно=0) и дали е скапа (точно=1) или не (погрешно=0). Така е добиено влезно-излезното множество бинарни податоци од таблицата 5.81.

Табела 5.81. Множество за учење за задача 5.17

стара	**нова**	**омилена**	**скапа**	**фрла**
точно	погрешно	точно	точно	погрешно
точно	погрешно	точно	погрешно	погрешно
точно	погрешно	погрешно	точно	точно
точно	погрешно	погрешно	погрешно	точно
погрешно	погрешно	точно	точно	погрешно
погрешно	погрешно	точно	погрешно	погрешно
погрешно	погрешно	погрешно	точно	точно
погрешно	погрешно	погрешно	погрешно	точно
погрешно	точно	погрешно	точно	погрешно
погрешно	точно	точно	точно	погрешно

Секој влезен податок има по четири карактеристики: $f_1 =$ **стара**, $f_2 =$ **нова**, $f_3 =$ **омилена**, $f_4 =$ **скапа**, а излезот е означен со $y =$ **фрла**. Со помош на наивен Баесов алгоритам за учење кој се обучува врз даденото влезно-излезно множество да се определи излезот за следните влезови:

Таблица 5.82. Множество за тестирање за задача 5.17

стара	**нова**	**омилена**	**скапа**	**фрла**
погрешно	точно	погрешно	погрешно	**?**
погрешно	точно	точно	погрешно	**?**

Одговор: За поголема едноставност, таблицата 5.81 може да се претстави на следниот начин:

Таблица 5.83. Множество за учење од задача 5.17

f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0

Аналогно, таблицата 5.82 може да се претстави како таблицата 5.84:

Таблица 5.84. Множество за учење од задача 5.17

f_1	f_2	f_3	f_4	y
0	1	0	0	**?**
0	1	1	0	**?**

Тогаш:

$R_1(1,1)=\frac{1}{2}$ - број позитивни примероци за кои $f_1=1$

$R_1(0,1)=\frac{1}{2}$ - број позитивни примероци за кои $f_1=0$

$R_1(1,0)=\frac{1}{3}$ - број негативни примероци за кои $f_1=1$

$R_1(0,0)=\frac{2}{3}$ - број негативни примероци за кои $f_1=0$ (5.131)

$R_2(1,1)=\frac{0}{4}=0$ - број позитивни примероци за кои $f_2=1$

$R_2(0,1)=\frac{4}{4}=1$ - број позитивни примероци за кои $f_2=0$

$R_2(1,0)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ - број негативни примероци за кои $f_2=1$

$R_2(0,0)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ - број негативни примероци за кои $f_2=0$ (5.132)

$R_3(1,1)=\frac{0}{4}=0$ - број позитивни примероци за кои $f_3=1$

$R_3(0,1)=\frac{4}{4}=1$ - број позитивни примероци за кои $f_3=0$

$R_3(1,0)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ - број негативни примероци за кои $f_3=1$

$R_3(0,0)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ - број негативни примероци за кои $f_3=0$ (5.133)

$R_4(1,1)=\frac{0}{4}=0$ - број позитивни примероци за кои $f_4=1$

$R_4(0,1)=\frac{4}{4}=1$ - број позитивни примероци за кои $f_4=0$

$R_4(1,0)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ - број негативни примероци за кои $f_4=1$

$R_4(0,0)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ - број негативни примероци за кои $f_4=0$ (5.134)

и, следствено, за првиот влезен податок $(0,1,0,0)$ од таблицата 5.84 се добива:

$$S(1)=R_1(0,1)\cdot R_2(1,1)\cdot R_3(0,1)\cdot R_4(0,1)=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1\cdot 1=0 \qquad (5.135)$$

каде што $S(1)$ е мерка за веројатноста податокот да биде позитивен,

$$S(0)=R_1(0,0)\cdot R_2(1,0)\cdot R_3(0,0)\cdot R_4(0,0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27} \qquad (5.136)$$

додека $S(0)$ е мерка за веројатноста податокот да биде негативен.

Бидејќи $S(1)=0<S(0)=1/27$, алгоритамот ќе заклучи дека $(0,1,0,0)$ е негативен податок и ќе генерира излез $y=0$.

На сличен начин за вториот влезен податок $(0,1,1,0)$ од таблицата 5.84 се пресметува:

$$S(1)=R_1(0,1)\cdot R_2(1,1)\cdot R_3(1,1)\cdot R_4(0,1)=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0\cdot 1=0 \quad (5.137)$$

$$S(0)=R_1(0,0)\cdot R_2(1,0)\cdot R_3(1,0)\cdot R_4(0,0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27} \quad (5.138)$$

Бидејќи $S(1)=0<S(0)=2/27$, алгоритамот заклучува дека вториот влезен податок од таблицата 5.84 е негативен, односно генерира излез $y=0$.

5.18. Со примена на наивниот Баесов алгоритам за учење со корекција, применет врз влезно-излезното множество податоци од таблица 5.85, да се одлучи излезот за влезните податоци од таблица 5.86.

Таблица 5.85. Множество за учење од задача 5.18

примерок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	1	1	0	1
2	0	0	0	1	1
3	1	0	1	0	1
4	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1
6	1	0	0	1	0
7	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	1	0	1	0
10	1	0	1	1	0

Таблица 5.86. Множество за тестирање од задача 5.18

примерок	f_1	f_2	f_3	f_4	y
1	0	1	0	0	?
2	0	0	0	1	?
3	1	0	1	0	?

Решение: Алгоритам за учење

$R_1(1,1)=\frac{1}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_1=1$

$R_1(0,1)=\frac{4}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_1=0$

$R_1(1,0)=\frac{5}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_1=1$

$R_1(0,0)=\frac{0}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_1=0$ (5.139)

$R_2(1,1)=\frac{1}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_2=1$

$R_2(0,1)=\frac{4}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_2=0$

$R_2(1,0)=\frac{2}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_2=1$

$R_2(0,0)=\frac{3}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_2=0$ (5.140)

$R_3(1,1)=\frac{3}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_3=1$

$R_3(0,1)=\frac{2}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_3=0$

$R_3(1,0)=\frac{1}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_3=1$

$R_3(0,0)=\frac{4}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_3=0$ (5.141)

$R_4(1,1)=\frac{2}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_4=1$

$R_4(0,1)=\frac{3}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_4=0$

$R_4(1,0)=\frac{4}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_4=1$

$R_4(0,0)=\frac{1}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_4=0$ (5.142)

Алгоритам за учење со корекција

$$R_1(1,1)=\frac{2}{7},\quad R_1(0,1)=\frac{5}{7},\quad R_1(1,0)=\frac{6}{7},\quad R_1(0,0)=\frac{1}{7} \tag{5.143}$$

$$R_2(1,1)=\frac{2}{7},\quad R_2(0,1)=\frac{5}{7},\quad R_2(1,0)=\frac{3}{7},\quad R_2(0,0)=\frac{4}{7} \tag{5.144}$$

$$R_3(1,1)=\frac{4}{7},\quad R_3(0,1)=\frac{3}{7},\quad R_3(1,0)=\frac{2}{7},\quad R_3(0,0)=\frac{5}{7} \tag{5.145}$$

$$R_4(1,1)=\frac{3}{7},\quad R_4(0,1)=\frac{4}{7},\quad R_4(1,0)=\frac{5}{7},\quad R_4(0,0)=\frac{2}{7} \tag{5.146}$$

Алгоритам за предвидување

За влезниот податок $x=(0,1,0,0)$ следува:

$$S(1)=R_1(0,1)*R_2(1,1)*R_3(0,1)*R_4(0,1)=\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{120}{2401}=0.049979$$

$$S(0)=R_1(0,0)*R_2(1,0)*R_3(0,0)*R_4(0,0)=\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{30}{2401}=0.01249479383$$

$$S(1)>S(0)\Rightarrow y=1 \tag{5.147}$$

За влезниот податок $x=(0,0,0,1)$ се пресметува:

$$S(1)=R_1(0,1)*R_2(0,1)*R_3(0,1)*R_4(1,1)=\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{225}{2401}=0.09371$$

$$S(0)=R_1(0,0)*R_2(0,0)*R_3(0,0)*R_4(1,0)=\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{40}{2401}=0.0.016659725$$

$$S(1)>S(0)\Rightarrow y=1 \tag{5.148}$$

Конечно, за влезниот податок $x=(1,0,1,0)$ се добива:

$$S(1)=R_1(1,1)*R_2(0,1)*R_3(1,1)*R_4(0,1)=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{160}{2401}=0.0666389$$

$$S(0)=R_1(1,0)*R_2(0,0)*R_3(1,0)*R_4(0,0)=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{96}{2401}=0.03998334$$

$$S(1)>S(0)\Rightarrow y=1 \tag{5.149}$$

5.19. Филип добил електронска порака, а неговата љубопитна сопруга Маја се обидува да погоди дали Филип ќе ја прочита пораката или не. Врз основа на минато искуство, Маја располага со следните податоци, дадени во таблица 5.87.

Табличa 5.87. Множество за учење од задача 5.19

примерок	**автор**	**датум**	**должина**	**го чита**
1	познат	нов	куса	да
2	непознат	нов	долга	да
3	непознат	стар	куса	не
4	познат	стар	куса	да
5	познат	нов	долга	да
6	познат	стар	куса	да
7	непознат	стар	долга	не
8	непознат	нов	долга	да
9	познат	стар	долга	да
10	познат	нов	куса	да
11	непознат	стар	долга	не
12	познат	нов	куса	да
13	познат	стар	долга	да
14	познат	нов	долга	да

Со помош на наивниот Баесов алгоритам за учење, Маја треба да одлучи дали Филип ќе ја прочита новодобиената електронска порака опишана во таблица 5.88.

Таблица 5.88. Множество за тестирање од задача 5.19

примерок	**автор**	**датум**	**должина**	**го чита**
1	непознат	нов	куса	?

Одговор: Секој влезен податок има три влезни карактеристики: автор, датум и должина, а секоја влезна карактеристика има по две можни вредности. Нека: познат=1, непознат=0, нов=1, стар=0, долго=1, кусо=0, чита=1, не чита=0. Тогаш таблица 5.87 може да се запише во облик:

Таблица 5.89. Множество за учење од задача 5.19

примерок	**автор**	**датум**	**должина**	**чита**	**примерок**	**автор**	**датум**	**должина**	**чита**
1	1	1	0	1	8	0	1	1	1
2	0	1	1	1	9	1	0	1	1
3	0	0	0	0	10	1	1	0	1
4	1	0	0	1	11	0	0	1	0
5	1	1	1	1	12	1	1	0	1
6	1	0	0	1	13	1	0	1	1
7	0	0	1	0	14	1	1	1	1

а таблицата 5.88 во облик:

Таблица 5.90. Множество за тестирање од задача 5.19

примерок	**автор**	**датум**	**должина**	**го чита**
1	0	1	0	**?**

Врз основа на таблица 5.89 непосредно следува:

$$R_1(1,1)=\frac{9}{11},\quad R_1(0,1)=\frac{2}{11},\quad R_1(1,0)=\frac{0+1}{3+2}=\frac{1}{5},\quad R_1(0,0)=\frac{4}{5}$$

$$R_2(1,1)=\frac{7}{11},\quad R_2(0,1)=\frac{4}{11},\quad R_2(1,0)=\frac{1}{5},\quad R_2(0,0)=\frac{4}{5}$$

$$R_3(1,1)=\frac{6}{11},\quad R_3(0,1)=\frac{5}{11},\quad R_3(1,0)=\frac{2}{3},\quad R_3(0,0)=\frac{1}{3} \qquad (5.150)$$

Следствено, веројатноста новиот податок (0,1,0) да биде позитивен примерок е:

$$S(1)=R_1(0,1)R_2(1,1)R_3(0,1)=\frac{2}{11}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{5}{11}=0.05259 \qquad (5.151)$$

додека веројатноста тој да биде негативен примерок е:

$$S(0)=R_1(0,0)R_2(1,0)R_3(0,0)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=0.0533 \qquad (5.152)$$

Бидејќи $S(0)>S(1)$ алгоритамот заклучува дека (0,1,0) е негативен примерок. Следствено, Маја ќе заклучи дека Филип нема да ја прочита новата куса порака од непознат автор.

5.20. Дарко сака да ѝ купи прстен на Маја за десетгодишнина од нивниот брак. При одлучувањето дали да го купи прстенот (точно=1) или не (погрешно=0), тој ги зема предвид следните фактори: дали прстенот е со голем скапоцен камен (точно=1) или не (погрешно=0), дали е скап (точно=1) или не (погрешно=0) и дали е убав (точно=1) или не (погрешно=0). Како резултат, се добива влезно-излезното множество податоци D, прикажано во таблица 5.91. Секој влез се карактеризира со три влезни карактеристики: ГОЛЕМ, СКАП и УБАВ. Излезната променлива е КУПУВА. Даденото множество да се употреби за обучување на наивниот Баесов алгоритам за учење со корекција и, потоа, со помош на овој алгоритам да се определи вредноста на излезот КУПУВА за влезните податоци од таблица 5.92.

Таблица 5.91. Влезно-излезно множество за обучување од задача 5.20

примерок	ГОЛЕМ	СКАП	УБАВ	КУПУВА
1	точно	погрешно	точно	точно
2	точно	погрешно	погрешно	погрешно
3	погрешно	точно	точно	точно
4	погрешно	точно	погрешно	погрешно
5	погрешно	погрешно	точно	точно
6	погрешно	погрешно	погрешно	погрешно

Таблица 5.92. Множество за тестирање од задача 5.20

примерок	ГОЛЕМ	СКАП	УБАВ	КУПУВА
1	точно	точно	погрешно	?
2	точно	точно	точно	?

Решение: Алгоритам за учење со корекција

$R_1(1,1) = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_1 = 1$

$R_1(0,1) = \frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_1 = 0$

$R_1(1,0) = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_1 = 1$

$R_1(0,0) = \frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_1 = 0$ (5.153)

$R_2(1,1) = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_2 = 1$

$R_2(0,1) = \frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_2 = 0$

$R_2(1,0) = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_2 = 1$

$R_2(0,0) = \frac{2+1}{3+2} = \frac{3}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_2 = 0$ (5.154)

$R_3(1,1) = \frac{3+1}{3+2} = \frac{4}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_3 = 1$

$R_3(0,1) = \frac{0+1}{3+2} = \frac{1}{5}$ - број позитивни примероци за кои $f_3 = 0$

$R_3(1,0) = \frac{0+1}{3+2} = \frac{1}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_3 = 1$

$R_3(0,0) = \frac{3+1}{3+2} = \frac{4}{5}$ - број негативни примероци за кои $f_3 = 0$ (5.155)

Алгоритам за предвидување

$x = (1,1,0)$

$$S(1) = R_1(1,1) * R_2(1,1) * R_3(0,1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$$

$$S(0) = R_1(1,0) * R_2(1,0) * R_3(0,0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$$

$$S(1) < S(0) \Rightarrow y = 0 \tag{5.156}$$

$x = (1,1,1)$

$$S(1) = R_1(1,1) * R_2(1,1) * R_3(1,1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$$

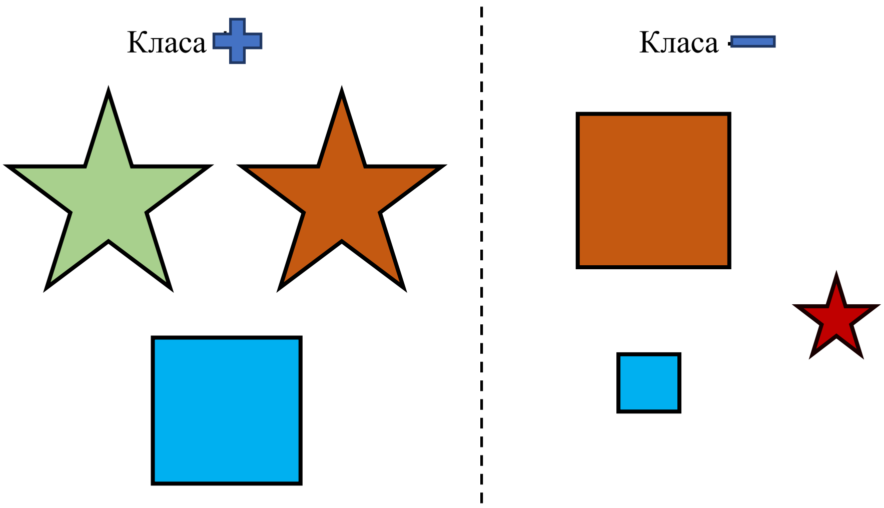
$$S(0) = R_1(1,0) * R_2(1,0) * R_3(1,0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$$

$$S(1) > S(0) \Rightarrow y = 1 \tag{5.157}$$

Таблица 5.93. Множество за тестирање

примерок	**ГОЛЕМ**	**СКАП**	**УБАВ**	**КУПУВА**
1	точно	точно	погрешно	погрешно
2	точно	точно	точно	точно

5.21. Дадено е множеството влезно - излезни податоци за обучување од слика 5.49. Треба да се состави стебло на одлучување кое правилно ќе ги класифицира дадените елементи (класа + или класа -) и со помош на кое ќе може да се класифицираат и елементите од некое множество за тестирање. Да се дефинираат влезните карактеристики и да се избере карактеристиката која ќе претставува корен на стеблото за одлучување. Да се состави целото стебло.



Слика 5.49. Множество за учење од задача 5.21

Решение:

Табела 5.94. Влезно-излезно множество за учење од задача 5.21

примерок	f_1 = **боја**	f_2 = **облик**	f_3 = **големина**	**класа**
1	зелена	ѕвезда	голема	+
2	син	квадрат	голем	+
3	кафена	ѕвезда	голема	+
4	кафена	ѕвезда	мала	_
5	кафен	квадрат	голем	_
6	син	квадрат	мал	_

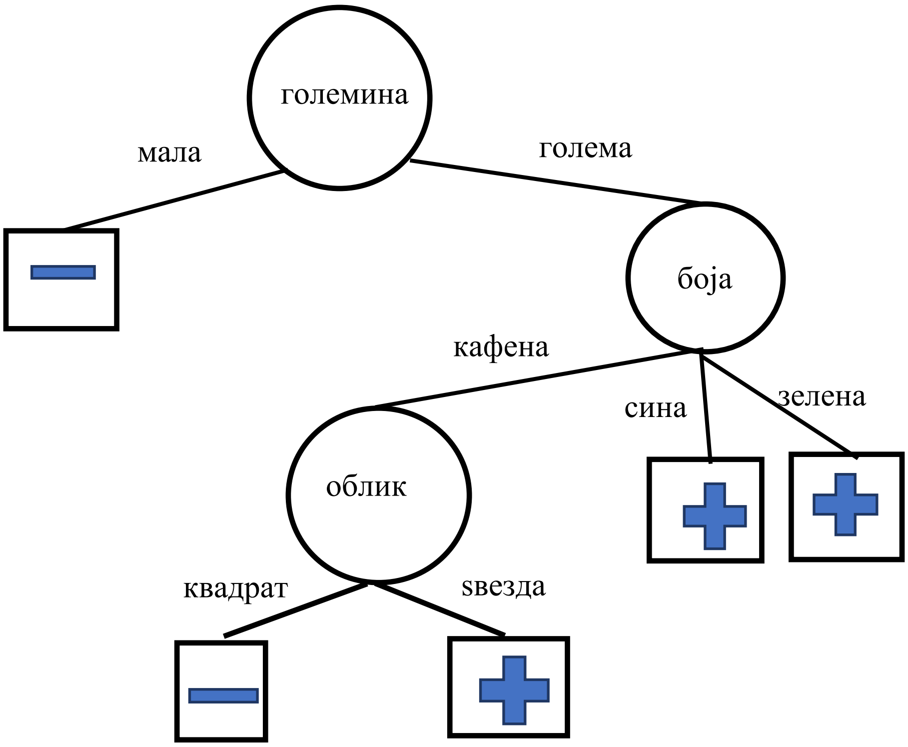
$$I\left(\frac{3}{6},\frac{3}{6}\right)=-\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6}-\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6}=1 \qquad (5.158)$$

$$I(f_1)=I\left(\frac{3}{6},\frac{3}{6}\right)-\left[\frac{1}{6}I(1,0)+\frac{2}{6}I(0,1)+\frac{3}{6}I\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right]=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(0.39+0.53)=0.21 \qquad (5.159)$$

$$I(f_2)=I\left(\frac{3}{6},\frac{3}{6}\right)-\left[\frac{3}{6}I\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{6}I\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right]=1-\frac{1}{2}(0.92+0.92)=0.08 \qquad (5.160)$$

$$I(f_3)=I\left(\frac{3}{6},\frac{3}{6}\right)-\frac{4}{6}I\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=1-\frac{2}{3}(0.81)=0.46 \qquad (5.161)$$

Следствено, за корен на стеблото на одлучување се одбира влезната карактеристика f_3 = **големина.**



Слика 5.50. Стебло на одлучување за задача 5.21

5.22. Дадено е множество за обучување и множество за тестирање добиено со набљудување на интернет-корисници кои донесуваат одлука дали да ги читаат објавените пораки на интернет. Тие својата одлука ја донесуваат врз основа на тоа дали авторот на пораката им е веќе познат, должината на пораката, местото на кое ја читаат, дали пораката припаѓа на веќе постоечки форум итн. Множеството за обучување има 18 парови податоци, а множеството за тестирање 2. Секој влезен податок има по 4 карактеристики:

$$\text{АВТОР} \begin{cases} \text{познат} \\ \text{непознат} \end{cases}, \quad \text{ФОРУМ} \begin{cases} \text{стар} \\ \text{нов} \end{cases}, \quad \text{ДОЛЖИНА} \begin{cases} \text{куса} \\ \text{долга} \end{cases}, \quad \text{МЕСТО} \begin{cases} \text{дома} \\ \text{на работа} \end{cases}$$

додека излезните податоци имаат само по една карактеристика:

$$\text{ДЕЈСТВИЕ} \begin{cases} \text{чита} \\ \text{не чита} \end{cases}$$

Задачата е типична задача на класификација. Целта е да се научи да се предвиди дали корисниците ќе ги читаат новите пораки x_{19} и x_{20} врз основа на нивните карактеристики. Да се состави соодветно стебло на одлучување за решавање на оваа задача и правилно да се класифицираат податоците од множеството за тестирање.

Табелица 5.95. Множество за обучување од задача 5.22

ПРИМЕРОК	АВТОР	ФОРУМ	ДОЛЖИНА	МЕСТО	ДЕЈСТВИЕ
x_1	познат	нов	долга	дома	не чита
x_2	непознат	нов	куса	на работа	чита
x_3	непознат	стар	долга	на работа	не чита
x_4	познат	стар	долга	дома	не чита
x_5	познат	нов	куса	дома	чита
x_6	познат	стар	долга	на работа	не чита
x_7	непознат	стар	куса	на работа	не чита
x_8	непознат	нов	куса	на работа	чита
x_9	познат	стар	долга	дома	не чита
x_{10}	познат	нов	долга	на работа	не чита
x_{11}	непознат	стар	куса	дома	не чита
x_{12}	познат	нов	долга	на работа	не чита
x_{13}	познат	стар	куса	дома	чита
x_{14}	познат	нов	куса	на работа	чита
x_{15}	познат	нов	куса	дома	чита
x_{16}	познат	стар	куса	на работа	чита
x_{17}	познат	нов	куса	дома	чита
x_{18}	непознат	нов	куса	на работа	чита

Таблица 5.96. Множество за тестирање од задача 5.22

ПРИМЕРОК	АВТОР	ФОРУМ	ДОЛЖИНА	МЕСТО	ДЕЈСТВИЕ
x_{19}	непознат	нов	долга	на работа	?
x_{20}	непознат	стар	долга	дома	?

Решение: Карактеристиката АВТОР го дели множеството за обучување на подмножеството $D_1^+ = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}\}$ и подмножеството $D_1^- = \{x_2, x_3, x_7, x_8, x_{11}, x_{18}\}$, чии ентропии се:

$$H\left(D_1^+\right) = -\frac{6}{12}\log_2\frac{6}{12} - \frac{6}{12}\log_2\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \tag{5.162}$$

$$H\left(D_1^-\right) = -\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} - \frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \tag{5.163}$$

Средната ентропија за карактеристиката АВТОР е:

$$H(1) = \frac{12}{18} \cdot 1 + \frac{6}{18} \cdot 1 = 1 \quad (5.164)$$

Карактеристиката ФОРУМ го дели множеството за обучување на две подмножества $D_2^+ = \{x_1, x_2, x_5, x_8, x_{10}, x_{12}, x_{14}, x_{15}, x_{17}, x_{18}\}$ и $D_2^- = \{x_3, x_4, x_6, x_7, x_9, x_{11}, x_{13}, x_{16}\}$, чии ентропии се:

$$H(D_2^+) = -\frac{7}{10}\log_2\frac{7}{10} - \frac{3}{10}\log_2\frac{3}{10} = 0.881 \quad (5.165)$$

$$H(D_2^-) = -\frac{2}{8}\log_2\frac{2}{8} - \frac{6}{8}\log_2\frac{6}{8} = -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} = 0.881 \quad (5.166)$$

Средната ентропија за карактеристиката ФОРУМ е:

$$H(2) = \frac{10}{18} \cdot (0.881) + \frac{8}{18} \cdot (0.881) = 0.881 \quad (5.167)$$

Карактеристиката ДОЛЖИНА го дели множеството за обучување на две подмножества $D_3^+ = \{x_2, x_5, x_7, x_8, x_{11}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}\}$ и $D_3^- = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_9, x_{10}, x_{12}\}$, чии ентропии се:

$$H(D_3^+) = -\frac{9}{11}\log_2\frac{9}{11} - \frac{2}{11}\log_2\frac{2}{11} = 0.684 \quad (5.168)$$

$$H(D_3^-) = -\frac{0}{7}\log_2\frac{0}{7} - \frac{7}{7}\log_2\frac{7}{7} = -0\log_2 0 - 1\log_2 1 = 0 \quad (5.169)$$

Средната ентропија за карактеристиката ДОЛЖИНА е:

$$H(3) = \frac{11}{18} \cdot (0.684) + \frac{7}{18} \cdot (0) = 0.418 \quad (5.170)$$

Карактеристиката МЕСТО го дели множеството за обучување на две подмножества $D_4^+ = \{x_1, x_4, x_5, x_9, x_{11}, x_{13}, x_{15}, x_{17}\}$ и $D_4^- = \{x_2, x_3, x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_{12}, x_{14}, x_{16}, x_{18}\}$, чии ентропии се:

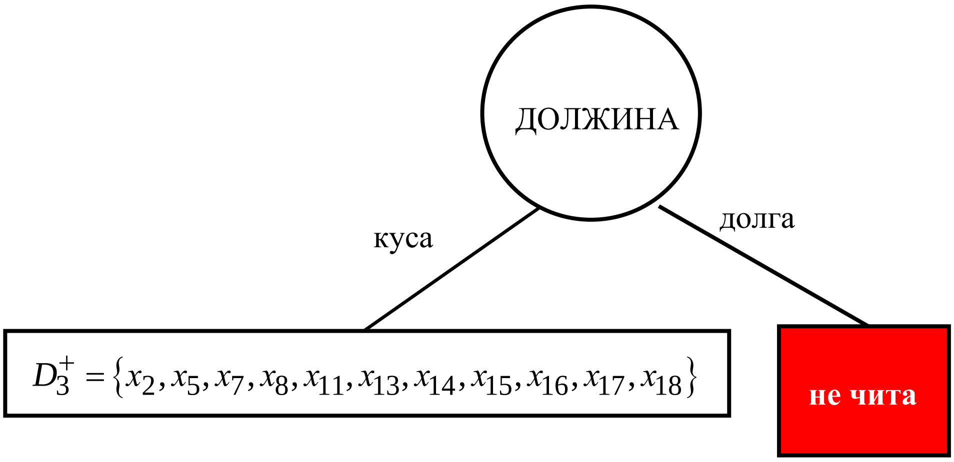
$$H(D_4^+) = -\frac{4}{8}\log_2\frac{4}{8} - \frac{4}{8}\log_2\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \quad (5.171)$$

$$H(D_4^-) = -\frac{5}{10}\log_2\frac{5}{10} - \frac{5}{10}\log_2\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \quad (5.172)$$

Средната ентропија за карактеристиката МЕСТО е:

$$H(4) = \frac{8}{18} \cdot (1) + \frac{10}{18} \cdot (1) = 1 \quad (5.173)$$

Бидејќи алгоритамот за учење има цел за намалување на ентропијата, ја одбира карактеристиката со најмала ентропија ДОЛЖИНА и го разгранува јазолот кој е придружен со оваа карактеристика.



Слика 5.51. Почетно разгранување на стеблото на одлучување за задача 5.22

Во продолжение, се одбира нова карактеристика помеѓу преостанатите три, за раздвојување на множеството D_3^+, кое станува ново множество D'.

Табелица 5.97. Новото множество D'

ПРИМЕРОК	АВТОР	ФОРУМ	ДОЛЖИНА	МЕСТО	ДЕЈСТВИЕ
x_2	непознат	нов	куса	на работа	чита
x_5	познат	нов	куса	дома	чита
x_7	непознат	стар	куса	на работа	не чита
x_8	непознат	нов	куса	на работа	чита
x_{11}	непознат	стар	куса	дома	не чита
x_{13}	познат	стар	куса	дома	чита
x_{14}	познат	нов	куса	на работа	чита
x_{15}	познат	нов	куса	дома	чита
x_{16}	познат	стар	куса	на работа	чита
x_{17}	познат	нов	куса	дома	чита
x_{18}	непознат	нов	куса	на работа	чита

Карактеристиката АВТОР го дели множеството D' на две подмножества $D'^+_1 = \{x_5, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}\}$ и $D'^-_1 = \{x_2, x_7, x_8, x_{11}, x_{18}\}$, чии ентропии се:

$$H\left(D'^{+}_{1}\right) = -\frac{6}{6}\log_2\frac{6}{6} - \frac{0}{6}\log_2\frac{0}{6} = -1\log_2 1 - 0\log_2 0 = 0 \tag{5.174}$$

$$H\left(D'^{-}_{1}\right) = -\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} = 0.44 + 0.53 = 0.97 \tag{5.175}$$

Средната ентропија за карактеристиката АВТОР е:

$$H'(1) = \frac{6}{11}\cdot 0 + \frac{5}{11}\cdot(0.97) = 0.44 \tag{5.176}$$

Карактеристиката ФОРУМ го дели множеството D' на две подмножества $D'^{+}_{2} = \{x_2, x_5, x_8, x_{14}, x_{15}, x_{17}, x_{18}\}$ и $D'^{-}_{2} = \{x_7, x_{11}, x_{13}, x_{16}\}$, чии ентропии се:

$$H\left(D'^{+}_{2}\right) = -\frac{7}{7}\log_2\frac{7}{7} - \frac{0}{7}\log_2\frac{0}{7} = 0 \tag{5.177}$$

$$H\left(D^{-}_{2}\right) = -\frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} - \frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \tag{5.178}$$

Средната ентропија за карактеристиката ФОРУМ е:

$$H'(2) = \frac{7}{11}\cdot(0) + \frac{4}{11}\cdot(1) = 0.3636 \tag{5.179}$$

Карактеристиката МЕСТО го дели множеството D' на две подмножества $D'^{+}_{4} = \{x_5, x_{11}, x_{13}, x_{15}, x_{18}\}$ и $D'^{-}_{4} = \{x_2, x_7, x_8, x_{14}, x_{16}, x_{18}\}$, чии ентропии се:

$$H\left(D'^{+}_{4}\right) = -\frac{4}{5}\log_2\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\log_2\frac{1}{5} = 0.26 + 0.46 = 0.72 \tag{5.180}$$

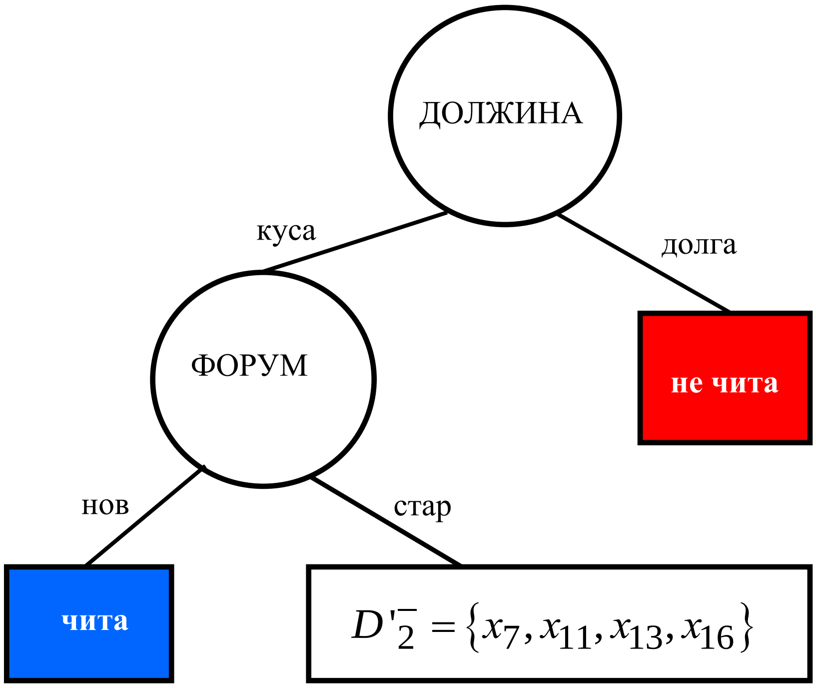
$$H\left(D'^{-}_{4}\right) = -\frac{5}{6}\log_2\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} = 0.22 + 0.43 = 0.65 \tag{5.181}$$

Средната ентропија за карактеристиката МЕСТО е:

$$H'(4) = \frac{5}{11}\cdot(0.72) + \frac{6}{11}\cdot(0.65) = 0.682 \tag{5.182}$$

Алгоритамот ја одбира како следна карактеристиката ФОРУМ, бидејќи таа има најмала ентропија.

Во продолжение, се одбира нова карактеристика помеѓу преостанатите две, за раздвојување на множеството D'^{-}_{2}, кое станува ново множество D''.



Слика 5.52. Натамошно разгранување на стеблото за одлучување од задача 5.22

Таблица 5.98. Множеството D''

ПРИМЕРОК	АВТОР	ФОРУМ	ДОЛЖИНА	МЕСТО	ДЕЈСТВИЕ
x_7	непознат	стар	куса	на работа	не чита
x_{11}	непознат	стар	куса	дома	не чита
x_{13}	познат	стар	куса	дома	чита
x_{16}	познат	стар	куса	на работа	чита

Карактеристиката АВТОР го дели множеството D'' на две подмножества $D_1''^{+} = \{x_{13}, x_{16}\}$ и $D_1''^{-} = \{x_7, x_{11}\}$, чии ентропии се:

$$H\left(D_1''^{+}\right) = -\frac{2}{2}\log_2\frac{2}{2} - \frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2} = 0 \qquad (5.183)$$

$$H\left(D_1''^{-}\right) = -\frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2} - \frac{2}{2}\log_2\frac{2}{2} = 0 \qquad (5.184)$$

Средната ентропија за карактеристиката АВТОР е:

$$H''(1) = \frac{2}{4}\cdot(0) + \frac{2}{4}\cdot(0) = 0 \tag{5.185}$$

Карактеристиката МЕСТО го дели множеството D'' на две подмножества $D_4''^{+} = \{e_{11}, e_{13}\}$ и $D_4''^{-} = \{e_7, e_{16}\}$, чии ентропии се:

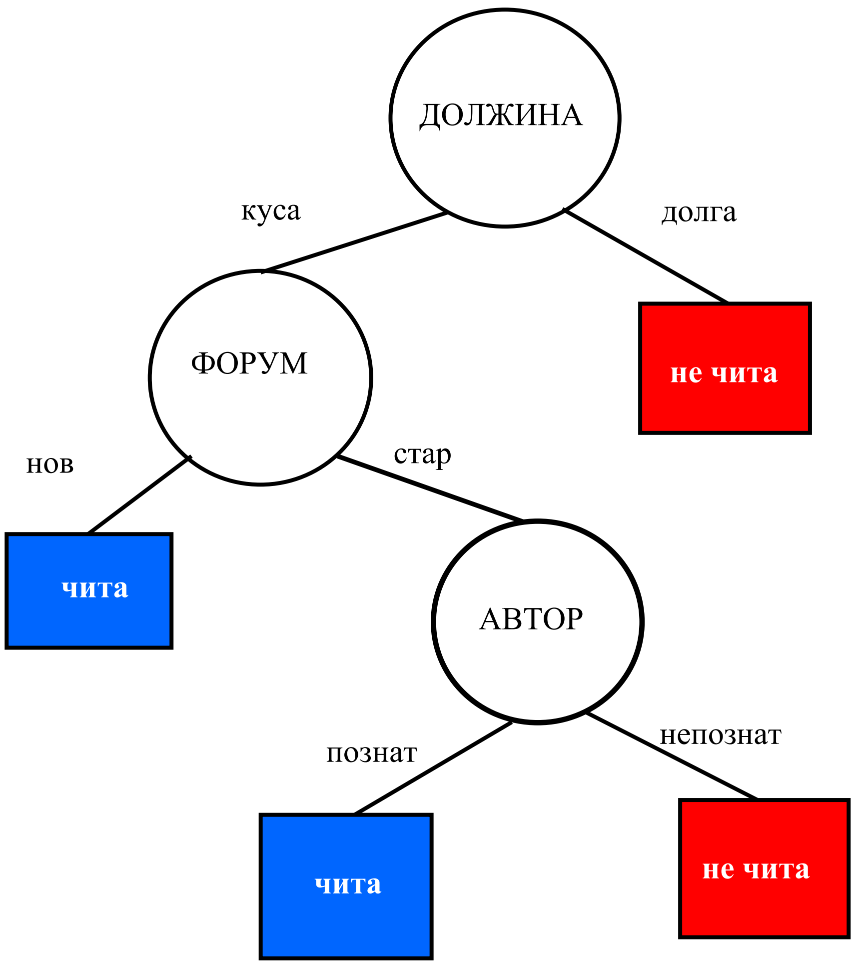
$$H\left(D_4''^{+}\right) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \tag{5.186}$$

$$H\left(D_4''^{-}\right) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1 \tag{5.187}$$

Средната ентропија за карактеристиката МЕСТО е:

$$H''(4) = \frac{2}{4}\cdot(1) + \frac{2}{4}\cdot(1) = 1 \tag{5.188}$$

Алгоритамот ја одбира карактеристиката АВТОР.



Слика 5.53. Стебло на одлучување за задача 5.22

5.23. Мила и Зоран се излезени на ручек во ресторан. Меѓутоа, во ресторанот во моментот нема слободна маса и тие треба да одлучат дали ќе чекаат или не. Нивната одлука зависи од повеќе нешта: дали во близината има соодветна замена за тој ресторан (f_1 – алтернатива), дали ресторанот има удобен бар каде што може да се чека (f_2 – бар), дали конкретниот ден е последен работен ден во неделата (f_3 – петок), дали тие се многу гладни (f_4 – гладен), колкави се цените во ресторанот (f_5 – цена), дали надвор врне (f_6 – дожд), кој вид на ресторан е (f_7 – тип), дали имаат резервација (f_8 – резервација) и колку треба да се чека (f_9 – време). Наведените карактеристики ги имаат следните вредности: алтернатива - да, не; бар – да, не; петок – да, не; гладен – да, не; цена – $, $$, $$$; дожд – да, не; резервација – да, не; тип – национален, италијански, кинески, сендвичарница; време на чекање – 0-10 мин., 10-30 мин., 30-60 мин., > 60 мин. Да се состави стебло на одлучување врз основа на даденото влезно-излезно множество податоци.

Таблица 5.99. Влезно-излезно множество за обучување од задача 5.23

алтернатива	**бар**	**петок**	**гладен**	**цена**	**дожд**	**резервација**	**тип**	**време**	**чека**
да	не	не	да	$$$	не	да	национален	0-10	да
да	не	не	да	$	не	не	кинески	30-60	не
не	да	не	не	$	не	не	сендвичарница	0-10	да
да	не	да	да	$	да	не	кинески	10-30	да
да	не	да	не	$$$	не	да	национален	>60	не
не	да	не	да	$$	да	да	италијански	0-10	да
не	не	не	не	$	да	не	сендвичарница	0-10	не
не	да	не	да	$$	да	да	кинески	0-10	да
не	да	да	не	$	да	не	сендвичарница	>60	не
да	да	да	да	$$$	не	да	италијански	10-30	не
не	не	не	не	$	не	не	кинески	0-10	не
да	да	да	да	$	не	не	сендвичарница	30-60	да

Решение:

$$H\left(D_1^+\right) = -\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} - \frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} = 1$$

$$H\left(D_1^-\right) = -\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} - \frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} = 1$$

$$E(1) = 1 \tag{5.189}$$

$$H\left(D_2^+\right) = -\frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6} = 0.92$$

$$H\left(D_2^-\right) = -\frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6} - \frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} = 0.92$$

$$E\left(2\right)=0.92 \tag{5.190}$$

$$H\left(D_3^+\right)=-\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5}=0.97$$

$$H\left(D_3^-\right)=-\frac{4}{7}\log_2\frac{4}{7}-\frac{3}{7}\log_2\frac{3}{7}=0.98$$

$$E\left(3\right)=0.9758 \tag{5.191}$$

$$H\left(D_4^+\right)=-\frac{5}{7}\log_2\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\log_2\frac{2}{7}=0.87$$

$$H\left(D_4^-\right)=-\frac{1}{5}\log_2\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\log_2\frac{4}{5}=0.72$$

$$E\left(4\right)=0.8075 \tag{5.192}$$

$$H\left(D_5^{\$}\right)=-\frac{3}{7}\log_2\frac{3}{7}-\frac{4}{7}\log_2\frac{4}{7}=0.98$$

$$H\left(D_5^{\$\$}\right)=-\frac{2}{2}\log_2\frac{2}{2}-\frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2}=0$$

$$H\left(D_5^{\$\$\$}\right)=-\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3}=0.92$$

$$E\left(5\right)=0.8017 \tag{5.193}$$

$$H\left(D_6^+\right)=-\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5}=0.97$$

$$H\left(D_6^-\right)=-\frac{3}{7}\log_2\frac{3}{7}-\frac{4}{7}\log_2\frac{4}{7}=0.98$$

$$E\left(6\right)=0.9758 \tag{5.194}$$

$$H\left(D_7^+\right)=-\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5}=0.97$$

$$H\left(D_7^-\right)=-\frac{3}{7}\log_2\frac{3}{7}-\frac{4}{7}\log_2\frac{4}{7}=0.98$$

$$E\left(7\right)=0.9758 \tag{5.195}$$

$$H\left(D_8^N\right)=-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}=1.00$$

$$H\left(D_8^I\right) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1.00$$

$$H\left(D_8^K\right) = -\frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} - \frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} = 1.00$$

$$H\left(D_8^S\right) = -\frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} - \frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} = 1.00$$

$$E\left(8\right) = 1.00 \qquad (5.196)$$

$$H\left(D_9^1\right) = -\frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6} = 0.92$$

$$H\left(D_9^2\right) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1.00$$

$$H\left(D_9^3\right) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1.00$$

$$H\left(D_9^4\right) = -\frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2} - \frac{2}{2}\log_2\frac{2}{2} = 0.00$$

$$E\left(9\right) = 0.7933 \qquad (5.197)$$

$$H\left(\tilde{D}_1^+\right) = -\frac{1}{1}\log_2\frac{1}{1} - \frac{0}{1}\log_2\frac{0}{1} = 0$$

$$H\left(\tilde{D}_1^-\right) = -\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} = 0.97$$

$$\tilde{E}\left(1\right) = 0.8083 \qquad (5.198)$$

$$H\left(\tilde{D}_2^+\right) = -\frac{3}{3}\log_2\frac{3}{3} - \frac{0}{3}\log_2\frac{0}{3} = 0$$

$$H\left(\tilde{D}_2^-\right) = -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} = 0.92$$

$$\tilde{E}\left(2\right) = 0.46 \qquad (5.199)$$

$$H\left(\tilde{D}_3^+\right) = 0$$

$$H\left(\tilde{D}_3^-\right) = -\frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6} = 0.92$$

$$\tilde{E}\left(3\right) = 0.92 \qquad (5.200)$$

$$H\left(\tilde{D}_4^{+}\right) = -\frac{3}{3}\log_2\frac{3}{3} - \frac{0}{3}\log_2\frac{0}{3} = 0$$

$$H\left(\tilde{D}_4^{-}\right) = -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} = 0.92$$

$$\tilde{E}(4) = 0.46 \tag{5.201}$$

$$H\left(\tilde{D}_5^{\$}\right) = -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} = 0.92$$

$$H\left(\tilde{D}_5^{\$\$}\right) = -\frac{2}{2}\log_2\frac{2}{2} - \frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2} = 0$$

$$H\left(\tilde{D}_5^{\$\$\$}\right) = -\frac{1}{1}\log_2\frac{1}{1} - \frac{0}{1}\log_2\frac{0}{1} = 0$$

$$\tilde{E}(5) = 0.46 \tag{5.202}$$

$$H\left(\tilde{D}_6^{+}\right) = -\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = 0.92$$

$$H\left(\tilde{D}_6^{-}\right) = -\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = 0.92$$

$$\tilde{E}(6) = 0.92 \tag{5.203}$$

$$H\left(\tilde{D}_7^{+}\right) = -\frac{3}{3}\log_2\frac{3}{3} - \frac{0}{3}\log_2\frac{0}{3} = 0$$

$$H\left(\tilde{D}_7^{-}\right) = -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} = 0.92$$

$$\tilde{E}(7) = 0.46 \tag{5.204}$$

$$H\left(\tilde{D}_8^{N}\right) = -\frac{1}{1}\log_2\frac{1}{1} - \frac{0}{1}\log_2\frac{0}{1} = 0$$

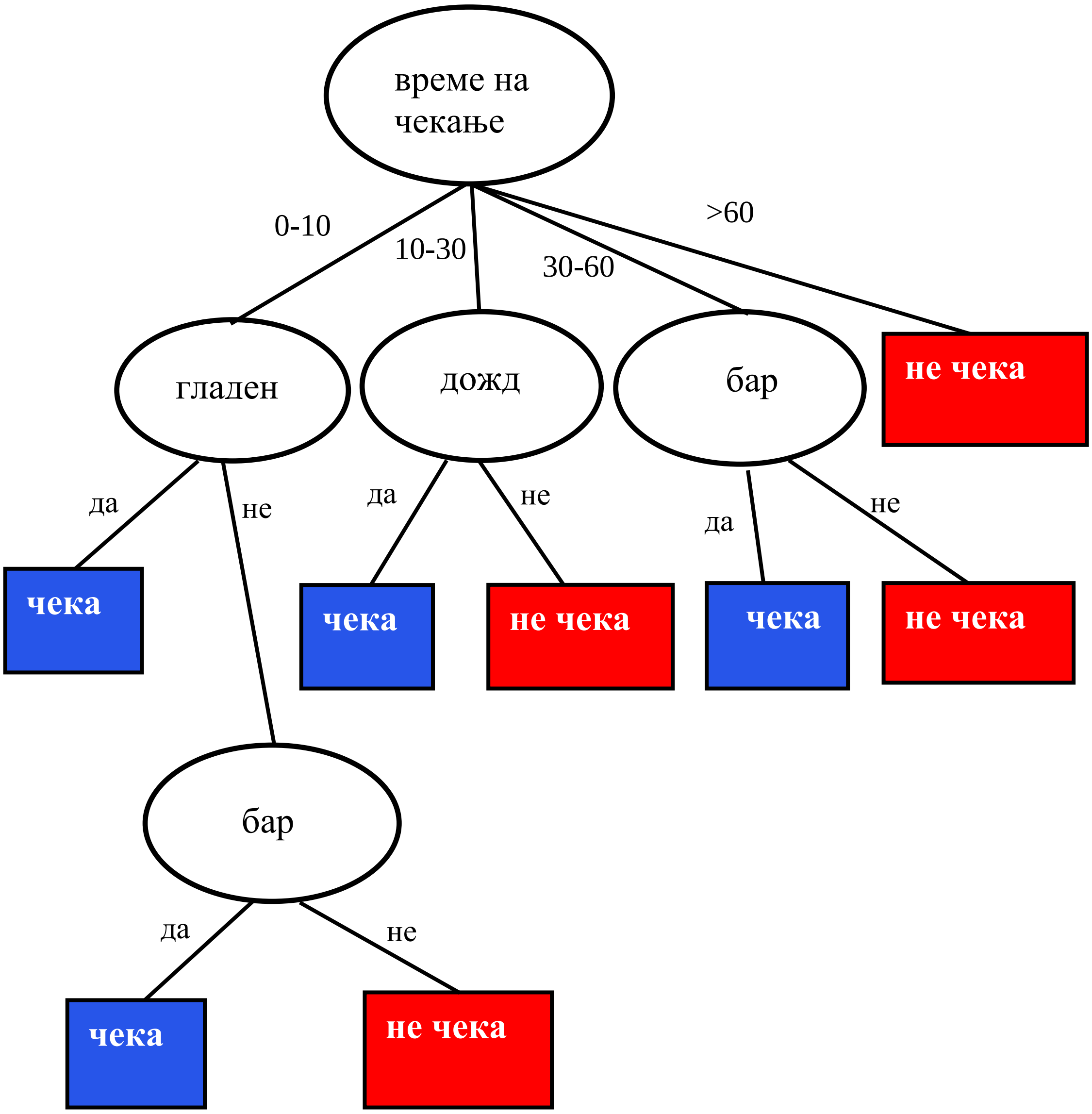
$$H\left(\tilde{D}_8^{I}\right) = -\frac{1}{1}\log_2\frac{1}{1} - \frac{0}{1}\log_2\frac{0}{1} = 0$$

$$H\left(\tilde{D}_8^{K}\right) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1.00$$

$$H\left(\tilde{D}_8^{S}\right) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1.00$$

$$\tilde{E}(8) = 0.67 \tag{5.205}$$

Бараното стебло на одлучување е дадено на сликата 5.54. Изборот помеѓу карактеристики со иста средна ентропија е направен произволно.



Слика 5.54. Стебло на одлучување за задача 5.23

6. ВЕШТАЧКИ НЕВРОНСКИ МРЕЖИ

6.1. Одговорете со точно или погрешно: Невроните во човечкиот мозок се делат на влезни, внатрешни и излезни неврони, при што влезните неврони носат информации кон мозокот, внатрешните ги обработуваат и надворешните ги носат информациите од мозокот кон другите органи.

A. Точно.

B. **Погрешно**. Поделбата на невроните според нивната функција лесно може да се направи само за ’рбетниот мозок на човекот, додека тоа е многу потешко за невроните во човечкиот мозок. Научниците сѐ уште се обидуваат да најдат начин да го класифицираат огромното множество различни неврони кои постојат во човечкиот мозок.

6.2. Која од следните реченици е точна за типичните неврони во човечкиот мозок?

A. Невроните не се размножуваат или репродуцираат; тие не се заменуваат со нови кога еднаш ќе изумрат.

B. Еден типичен неврон се состои од тело, наречено сома, аксон и дендрити.

C. Невроните комуницират меѓусебно преку синапси.

D. Сите претходни одговори.

6.3. Кои од наведените карактеристики под (i) - (v) ги поседуваат биолошките невронски мрежи ?

(i) Биолошките невронски мрежи можат да учат од примери.

(ii) Биолошките невронски мрежи имаат висок степен на паралелност.

(iii) Биолошките невронски мрежи бараат математички модел на проблемот.

(iv) Биолошките невронски мрежи можат да се адаптираат на промените на околината.

(v) Биолошките невронски мрежи се отпорни на грешки.

A. (i), (ii), (iii), (iv) и (v).

B. (i), (ii) и (iii).

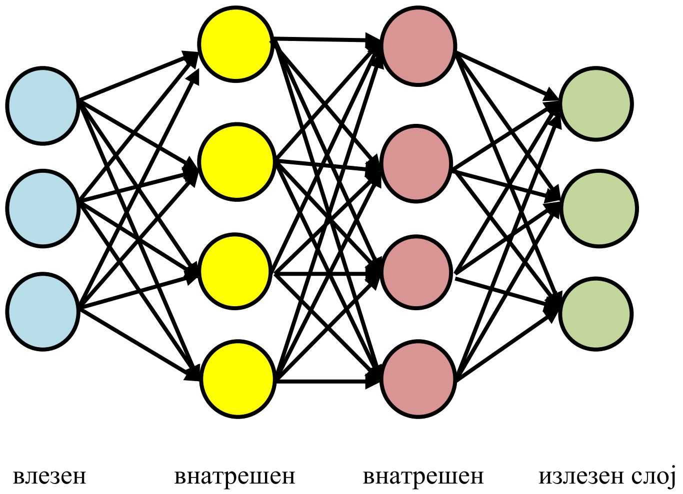
C. (i), (ii), (iv) и (v).

D. (i), (iii) и (iv).

E. (i), (iv) и (v).

6.4. Што претставува една вештачка невронска мрежа и која е нејзината основна структура?

Одговор: Наједноставна дефиниција на една вештачка невронска мрежа дал творецот на еден од првите невросметачи д-р Роберт Нилсен: Тоа е сметачки систем (било хардверски било софтверски) составен од одреден број едноставни меѓусебно поврзани сметачки елементи кои ги процесираат информациите добиени на неговиот влез. Во почетокот вештачките невронски мрежи главно биле градени врз основа на структурата на нервниот систем кај човекот, но тоа денес воопшто не е битно. Секоја вештачка невронска мрежа се состои од влезен, внатрешни скриени и излезен слој, како што е покажано на слика 6.1. Секој од слоевите содржи одреден број неврони.



Слика 6.1. Приказ на вештачка невронска мрежа

6.5. Која од следните изјави не претставува генерална особина на една вештачка невронска мрежа?

A. Вештачките невронски мрежи се во состојба да учат.

B. Излезот на една вештачка невронска мрежа зависи од миговите на активирање на нејзините неврони.

C. Вештачките невронски мрежи поседуваат својство за генерализација.

D. Вештачките невронски мрежи се одликуваат со робусно поведение.

E. Вештачките невронски мрежи се одликуваат со голем степен на паралелност во процесирањето.

6.6. За обучување и тестирање на една вештачка невронска мрежа се користат три множества податоци – множество за обучување, множество за тестирање 1 и множество за тестирање 2. Податоците за обучување се користат за нагодување на параметрите на мрежата, односно нејзините тежини. Податоците за тестирање 2 се користат за за оценка на поведението на готовата мрежа. Ова множество е независно од множеството за обучување, но мора да има иста распределба на веројатност. Зошто служи првото множество за тестирање, кое исто така е независно од множеството за обучување, но со иста распределба на веројатност?

Одговор: Првото множество за тестирање има хибридна улога зошто се користи за нагодување на хиперпараметрите на мрежата односно нејзината архитектура (број на скриени слоеви, број на скриени неврони, чекор на учење итн.).

6.7. Одговорете со точно или погрешно: Вештачките невронски мрежи се процесирачки системи сочинети од многу меѓусебно поврзани едноставни процесори кои вршат паралелно процесирање.

А. **Точно**.

В. Погрешно.

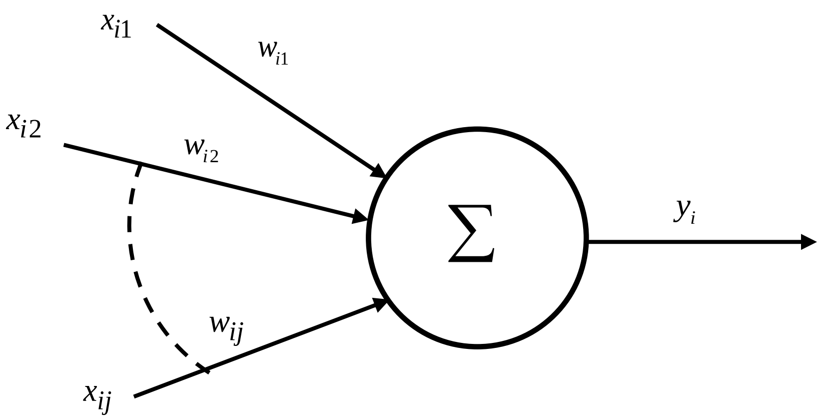
6.8. Вештачките невронски мрежи стекнуваат знаење преку процес на учење, и ова знаење е содржано во тежинските фактори на одделните врски помеѓу процесирачките елементи на мрежата.

А. **Точно**.

В. Погрешно.

6.9. Како изгледа математичкиот модел на еден вештачки неврон?

Одговор: На слика 6.2 е прикажана шема на еден вештачки неврон.



Слика 6.2. Симболична претстава на еден вештачки неврон

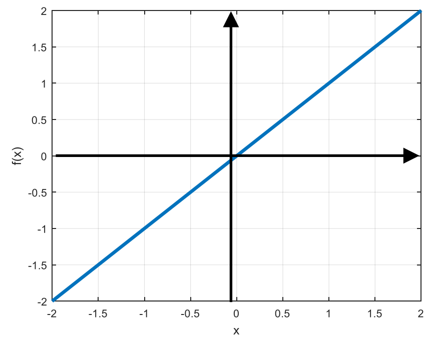
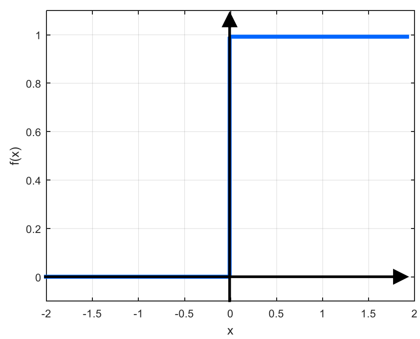
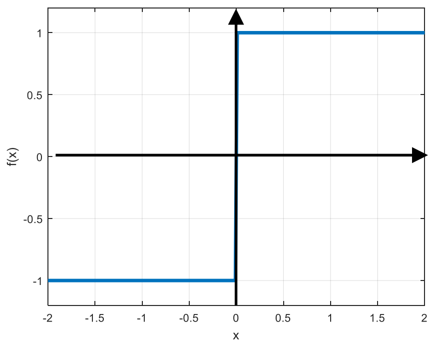
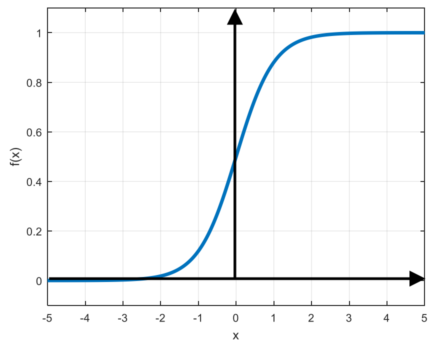
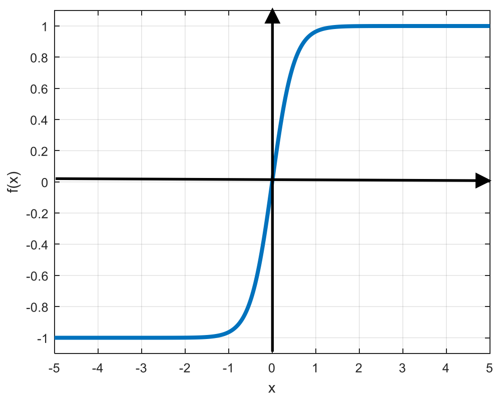
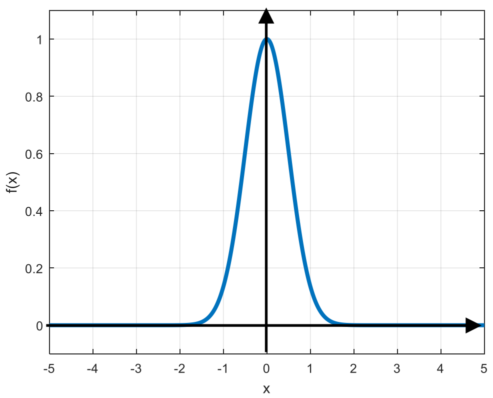
Невронот е основна процесирачка единица. Секој влез од невронот x_{ij} се множи со одреден тежински фактор w_{ij}, кој го моделира синаптичкото учење. На излезот од невронот се добива некоја функција f од збирот на неговите влезови:

$$y_i = f\left(\sum_j w_{ij} x_{ij}\right) \tag{6.1}$$

Функцијата f се нарекува активирачка функција на невронот.

6.10. Секој неврон се карактеризира со одредена активирачка функција. Какви видови активирачки функции постојат?

Одговор: На сликата 6.3 се прикажани неколку типични активирачки функции.

	
$f(x)=x$	$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$
Идентична функција	Униполарна чекорна функција
	
$f(x)=\begin{cases}-1, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$	$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-ax}}$
Биполарна отскочна функција	Логистичка или сигмоидална функција
	
$f(x)=\dfrac{1-e^{-ax}}{1+e^{-ax}}$	$f(x)=e^{-ax^2}$
Симетрична сигмоидална функција	Функција со радијална основа (Гаусова функција)

Слика 6.3. Видови активирачки функции

6.11. Што одредува константата *a* кај сигмоидалната функција? Со која друга функција е слична симетричната сигмоидална функција?

Одговор: Константата *a* го одредува наклонот односно стрмнината кај сигмоидалната функција. Што е *a* поголема, тоа и стрмнината на функцијата е поголема. Симетричната сигмоидална функција е еднаква со $\tanh(\cdot)$.

6.12. Да се пресметаат изводите на основните активирачки функции на еден неврон.

Одговор:

- Идентична функција:

$$\frac{d(x)}{dx} = 1 \tag{6.2}$$

- Униполарна чекорна функција: нема
- Биполарна чекорна функција: нема
- Логистичка или сигмоидална функција:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-ax}}\right) = \frac{-ae^{-ax}}{\left(1+e^{-ax}\right)^2} = af(x)\left[1-f(x)\right] \tag{6.3}$$

- Симетрична сигмоидална функција:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-e^{-ax}}{1+e^{-ax}}\right) = \frac{2ae^{-ax}}{\left(1+e^{-ax}\right)^2} = \frac{a}{2}\left[1-f^2(x)\right] \tag{6.4}$$

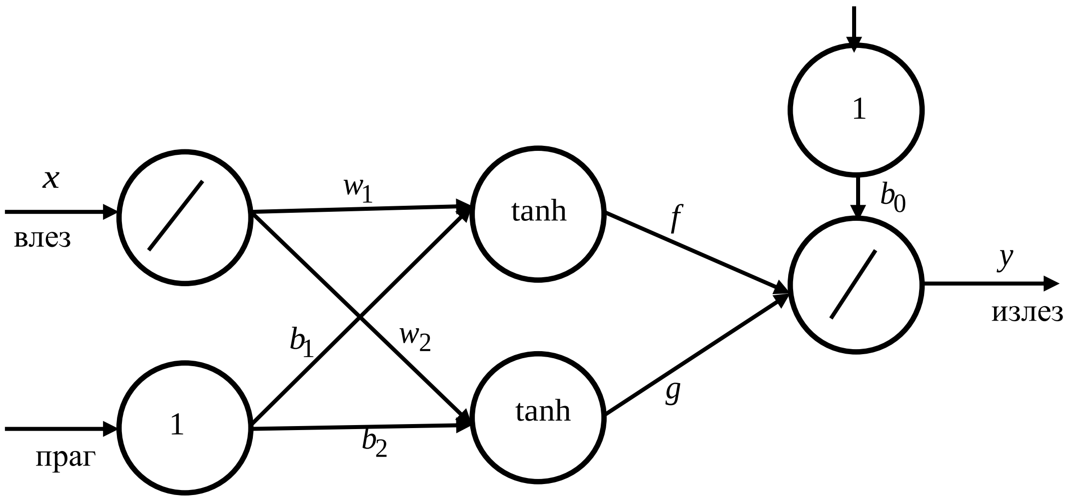
- Функција со радијална основа:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-ax^2}\right) = -2axe^{-ax^2} = -2axf(x) \tag{6.5}$$

6.13. Споредете ги логистичката и симетричната сигмоидална функција.

Одговор: И двете се нелинеарни функции. И двете имаат S-облик, меѓутоа симетричната сигмоидална функција минува низ координатниот почеток. Заради тоа, симетричната сигмоидална функција е подобра од логистичката функција. Овозможува полесно моделирање на влезови со изразито негативни, нулеви и позитивни вредности. Исто така, таа има „појак“ градиент (изводите се „пострми“). Логистичката функција има излез во опсегот $(0,1)$, додека симетричната сигмоидална функција има излез во опсегот $(-1,1)$. И двете го имаат проблемот на „изчезнувачки“ градиент, кој пак за последица има многу бавно учење на невронската мрежа или неможност за учење.

6.14. Дадена е вештачката невронска мрежа од слика 6.4. Да се опише мрежата и да се дефинира математички нејзиниот излез.



Слика 6.4. Илустрација кон прашањето 6.14

Одговор: Тоа е невронска мрежа со еден влез, еден излез и два внатрешни неврони.

$$y = f(x) + g(x) + b_0$$

$$f(x) = \tanh(w_1 x + b_1)$$

$$g(x) = \tanh(w_2 x + b_2) \qquad (6.6)$$

6.15. Зошто функцијата на грешка на една невронска мрежа се вика така?

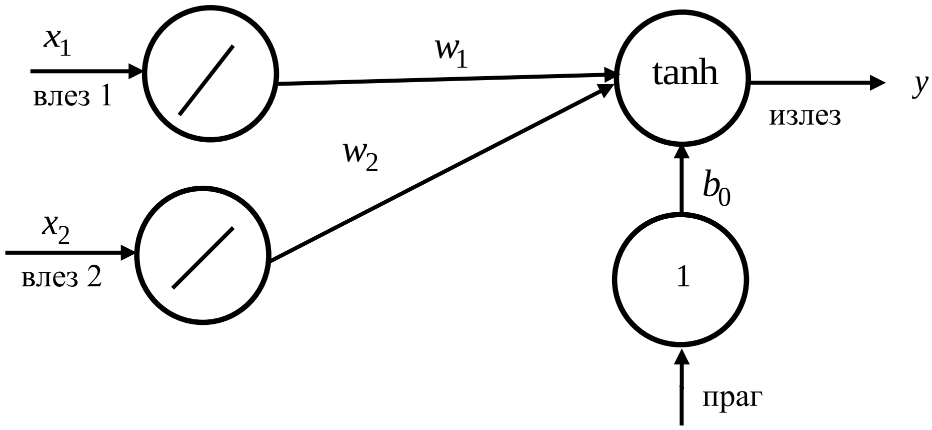
A. Едноставно така е наречена.

B. Затоа што го мери процентот погрешно класифицирани влезови.

C. Затоа што ја мери грешката на излезот од мрежата – големите вредности означуваат голема точност, малите вредности означуват мала точност.

D. Затоа што ја мери грешката на излезот од мрежата – големите вредности означуваат мала точност, малите вредности означуват голема точност.

6.16. Дадена е невронската мрежа од слика 6.5, која се состои од влезен и излезен слој. Активирачката функција на невронот од излезниот слој е $\tanh(\cdot)$. Какво е влијанието на тежинските фактори (параметрите на мрежата) врз функцијата која ја генерира мрежата?



Слика 6.5. Илустрација кон прашањето 6.16

Одговор: Се работи за еднослојна вештачка невронска мрежа која нема скриени слоеви. Мрежата има три параметри, затоа што постојат три врски помеѓу нејзините неврони и, следствено, три тежински фактори. Во процесот на обучување, мрежата го апроксимира даденото множество за обучување со функцијата $\tanh(\cdot)$. Секој од тежинските фактори има одредено влијание врз оваа функција. Тежинскиот фактор b_0 ја поместува функцијата долж x и y оската, додека преостанатите два w_1 и w_2 ја скалираат во однос на истите оски.

6.17. Одговорете со точно или погрешно: Бројот неврони во влезниот и излезниот слој на една повеќеслојна невронска мрежа треба да биде ист.

А. Точно.

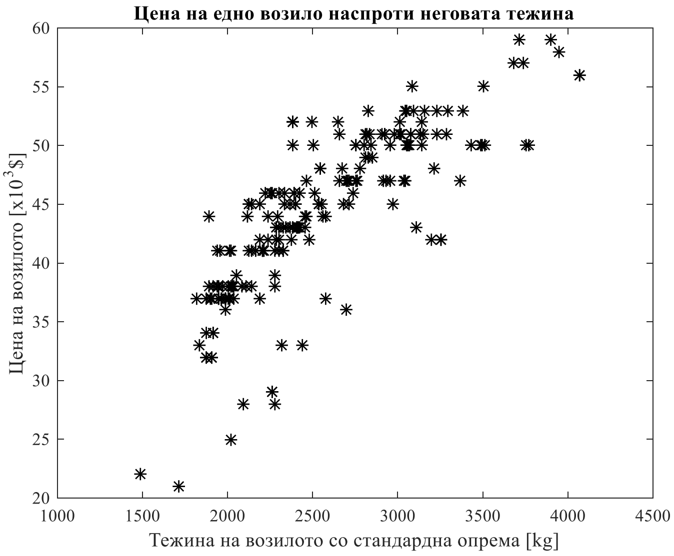
B. **Погрешно**.

6.18. Одговорете со точно или погрешно: Бројот врски во една невронска мрежа е пропорционален на бројот неврони.

А. Точно.

B. **Погрешно**.

6.19. Дадено е множеството влезно-излезни податоци од слика 6.6. Секоја точка од ова множество дава информација за тежината на едно возило со стандардна опрема и неговата цена. Множеството содржи информација за 201 возило. Очигледно, помеѓу тежината на возилото и неговата цена постои одредена врска така што, општо земено, потешките возила чинат повеќе. Со помош на дадените податоци, да се определи колкава ќе биде цената на ново возило кое не припаѓа на даденото множество и чија тежина е позната. Како најлесно може да се реши и на што се сведува овој проблем во вештачката интелигенција?



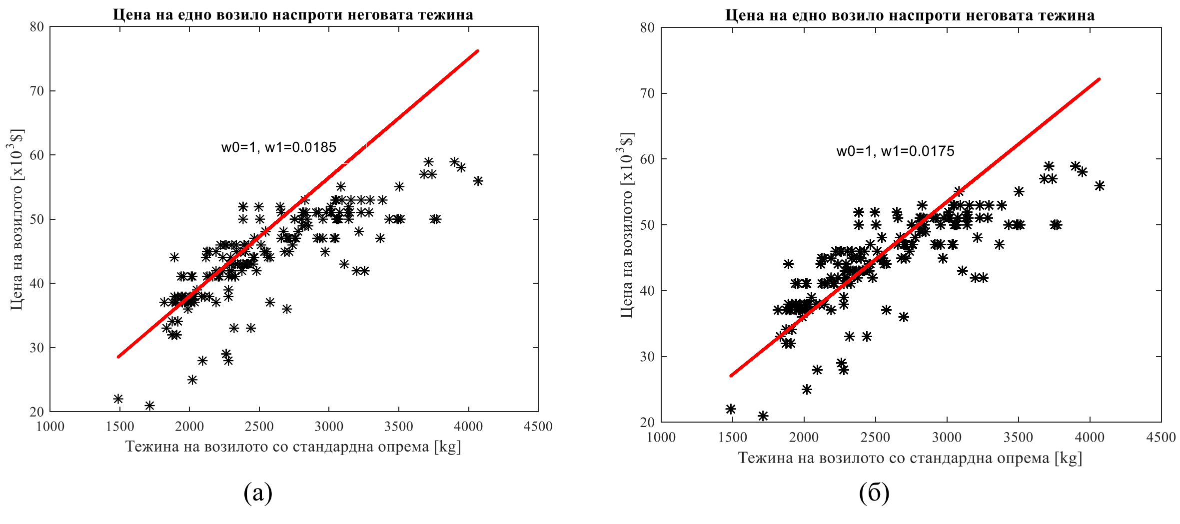
Слика 6.6. Илустрација кон прашањето 6.19

Одговор: Проблемот може да се реши ако составиме математички модел на даденото влезно-излезно множество, кој ќе ја дефинира врската помеѓу тежината на возилата како влез и нивната цена како излез. Наједноставен е линеарниот модел:

$$y = w_1 x + w_0 \tag{6.7}$$

Оваа равенка претставува права линија, чиј наклон е одреден со параметарот w_1, додека параметарот w_0 го одредува пресекот со вертикалната оска. Во вештачката интелигенција овој проблем се нарекува линеарна регресија.

6.20. Која од двете линии подобро го апроксимира даденото влезно-излезно множество и зошто? Како се оценува квалитетот на еден апроксиматор?



Слика 6.7. Илустрација кон прашањето 6.20

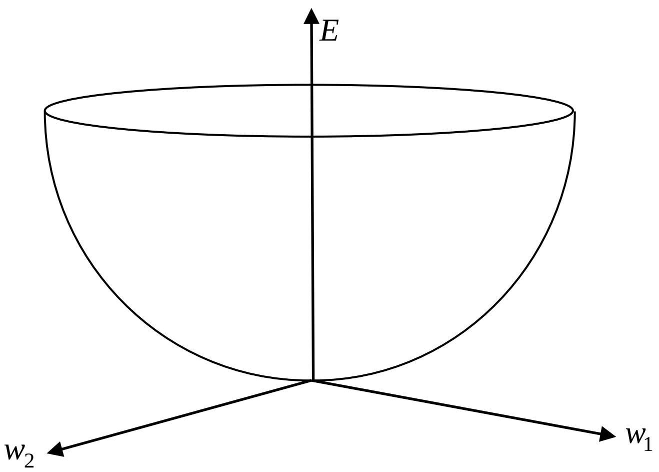
Одговор: Линијата прикажана на слика 6.7 под (б) е подобар апроксиматор на даденото влезно-излезно множество. Тоа може да се оцени со помош на некоја функција за оценка на грешката E на апроксиматорот. Многу често за оваа функција се усвојува збирот од квадратите на грешките помеѓу реалниот излез y_i и излезот од моделот $\hat{y}_i$:

$$E = \sum_i \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 \tag{6.8}$$

6.21. Да се нацрта односно графички да се прикаже функцијата на грешка E на апроксиматор од прв ред, ако за E се усвои сумата од квадратите на одделните грешки.

Одговор:

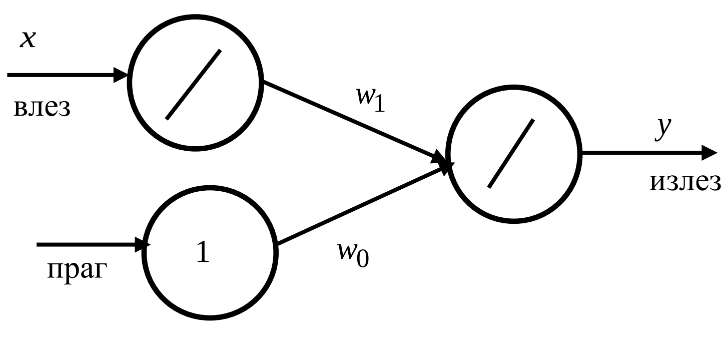
Површина на грешката Е на линеарен неврон со две тежини



Слика 6.8. Решение на прашањето 6.21

6.22. Да се состави едноставна невронска мрежа со која ќе се реализира еден линеарен регресор. Колку слоеви ќе има мрежата? Колку влезови и излези?

Одговор: Решен E е прикажано на слика 6.9.



Слика 6.9. Илустрација кон прашањето 6.22

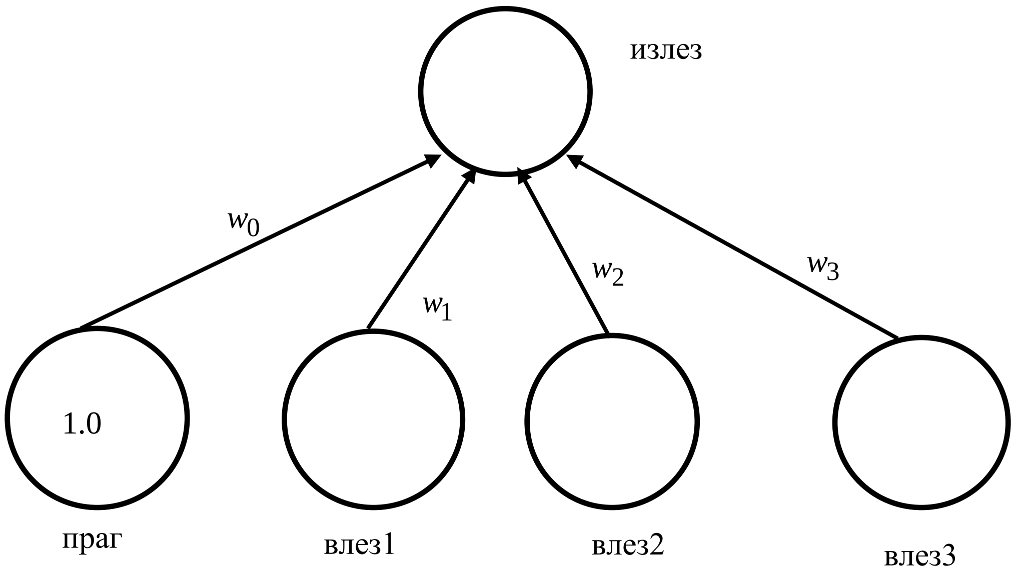
Мрежата се состои од два слоја – влезен и излезен, нема внатрешни слоеви. Таа има еден неврон во влезниот слој и еден неврон во излезниот слој. Прагот на излезниот неврон може исто така да се претстави со неврон со константна вредност 1 и тежински фактор еднаков на вредноста на прагот. Тежината на врската помеѓу излезниот и влезниот неврон и прагот на излезниот неврон се всушност параметрите на линеарниот регресор.

6.23. Како се определуваат параметрите на еден линеарен регресор, ако за функција на грешка се одбере сумата од квадратите на одделните грешки?

Одговор: Со минимизација на функцијата на грешка.

6.24. Во прашањето 6.19 и влезот и излезот претставуваат скалари. Меѓутоа, најчесто влезовите се претставени со вектори. Така, во примерот од прашањето 6.19, за секој автомобил освен тежината на возилото, како влез може да биде дефинирана уште некоја карактеристика, како на пример типот на моторот – бензиски или дизел и зафатнината на моторот. (Познато е дека автомобилите со дизел мотори се поскапи, исто како и автомобилите со мотори со поголема зафатнина.) Да се состави линеарен регресионен модел за влезно-излезно множество во кое секој влез има по 3 влезни карактеристики и истиот да се претстави со соодветна невронска мрежа.

Одговор:



Слика 6.10. Одговор на прашањето 6.24

$$y = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_0 \tag{6.9}$$

6.25. Колку внатрешни слоеви треба да има една невронска мрежа за да биде универзален апроксиматор (да може да претстави произволно влезно-излезно множество)?

Одговор: Теоретските резултати покажуваат дека невронска мрежа со само еден внатрешен слој со доволен број внатрешни неврони може да апроксимира произволна влезно-излезна зависност со произволна точност.

6.26. Да се дефинира класификацијата со помош на невронски мрежи.

Одговор: За дадена влезна вредност x, која не припаѓа на множеството за обучување, обучената невронска мрежа треба да ја предвиди најверојатната вредност на излезот y. Ова својство на мрежата се нарекува уште генерализација.

6.27. Во кој тип на учење спаѓа класификацијата?

Одговор: Учење со надгледување, затоа што ни се познати вредностите што треба да ги има излезот.

6.28. Наведете методи за обучување на една невронска мрежа која треба да врши класификација од типот на препознавање облици.

Одговор:

- Правило на перцептронот
- Делта-правило

6.29. Што претставува перцептронот?

Одговор: Перцептронот е правило за учење со надгледување кое одлучува дали некој влез, претставен со вектор вредности, припаѓа или не на некоја дефинирана класа. Тој е вид линеарен класификатор.

6.30. Дефинирајте го перцептронот (алгоритамот на перцептронот).

Одговор:

1. Задајте ги почетните вредности на тежинските фактори (нула или некоја мала случајна вредност)
2. Одберете чекор односно брзина на учење η (број помеѓу 0 и 1)
3. Сè додека не се исполни условот за завршување на алгоритамот (на пример кога тежинските фактори повеќе не се менуваат) да се извршуваат следните дејствија:

За секој примерок од влезно-излезното множество за обучување $(\mathbf{x}, y)$ да се пресмета вредноста на излезниот неврон $\hat{y} = f(\mathbf{wx})$

- Ако $\hat{y} = y$, да не се менува вредноста на тежинските фактори

- Ако $\hat{y} \neq y$, да се прилагодат тежинските фактори според формулата

$$\mathbf{w}_{new} = \mathbf{w}_{old} + \eta\left(y - \hat{y}\right)\mathbf{x} \tag{6.10}$$

6.31. Одговорете со точно или погрешно: Перцептронот ги моделира своите влезови, множејќи ги со одредени тежински фактори. Овие тежински фактори овозможуваат менување на јачината на влезовите, што му овозможува на перцептронот да учи.

A. **Точно**.

B. Погрешно.

6.32. Еден перцептрон ги собира сите влезови што ги прима, помножени со нивните тежински фактори. Ако збирот надмине одредена вредност, излезот на перцептронот ќе биде 1, во спротивно ќе биде 0.

A. **Точно**.

B. Погрешно.

C. Понекогаш тој може да даде на излез и континуални вредности помеѓи 0 и 1.

6.33. Функцијата опишана под 6.32 се нарекува:

A. Униполарна чекорна функција.

B. Биполарна чекорна функција.

C. Сигмоидална функција.

D. Идентична функција.

E. Перцептрон функција.

6.34. Перцептроните можат да се користат за многу различни задачи, на пример, да препознаваат букви од азбуката. Дали перцептронот ќе најде добро решение во секоја задача за препознавање облици?

A. Да.

B. Не.

6.35. Која од дадените равенки најдобро го опишува законот за учење на еден перцептрон?

A. $\mathbf{\Delta w}_i = -\eta y_i \mathbf{x}_j$

B. $\mathbf{\Delta w}_i = \eta\left(d_i - y_i\right)\mathbf{x}_j$

C. $\mathbf{\Delta w}_i = \eta\left(\mathbf{x}_j - \mathbf{w}_i\right)$

D. $\mathbf{\Delta w}_i = \eta\left(d_i - y_i\right)\mathbf{w}_i$

каде што $\mathbf{x}_j$ е влезен вектор, η е брзината на учење, $\mathbf{w}_i$ е векторот на тежински фактори, d_i е саканиот излез, и y_i е излезот од моделот i.

6.36. Одговорете со точно или погрешно: Учењето на еден перцептрон гарантирано конвергира во конечен број чекори кон тежински вектор кој точно го класифицира даденото множество податоци, под услов истото да е линеарно раздвоиво.

A. **Точно**.

B. Погрешно.

6.37. Зошто проблемот на ексклузивно ИЛИ (XOR) е интересен за истражувачите на невронски мрежи и дали истиот може да се реши со еднослоен перцептрон?

Одговор: Ексклузивното ИЛИ претставува наједноставен линеарно неделив проблем што постои и истиот не може да се реши со помош на еднослоен перцептрон. Меѓутоа, тој може да се реализира ако се примени повеќеслоен перцептрон. (Терминот повеќеслоен перцептрон во суштина означува повеќеслојна невронска мрежа, која има повеќе перцептрони.)

6.38. Ако влезните тежини на еден перцептрон се $w_1 = 2.5$ and $w_2 = 1.5$, а прагот му изнесува $w_0 = 0.5$, каков излез тој ќе произведе за влезовите $x_1 = 0.8$ и $x_2 = 0.6$?

A. $y = w_1x_1 + w_2x_2 = 2.5(0.8) + 1.5(0.6) = 2.9$

B. $y = w_1x_1 + w_2x_2 = 2.5(0.8) + 1.5(0.6) = 2.9$. Сега ако се извади прагот, ќе се добие $2.9 - 0.5 = 2.4$.

C. $y = w_1x_1 + w_2x_2 = 2.5(0.8) + 1.5(0.6) = 2.9$. Ова е повеќе од прагот, па излезот е 0.

D. $y = w_1x_1 + w_2x_2 = 2.5(0.8) + 1.5(0.6) = 2.9$. Ова е повеќе од прагот, па излезот е +1.

E. $x_1 = 0.8$ и $x_2 = 0.6$ се и двете поголеми од $w_0 = 0.5$, така двата влеза се заменуваат со +1. Оттука, излезот ќе изнесува $y = 2.5(1) + 1.5(1) = 4$.

6.39. Кои од дадените Булови логични функции со по два влеза не можат да се раздвојат линеарно?

(i) И (ii) ИЛИ (iii) Ексклузивно ИЛИ (iv) Не И (v) Ексклузивно НИЛИ.

Подолу се дадени таблиците на овие фукции.

И

x_1	x_2	d
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ИЛИ

x_1	x_2	d
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ЕКСКЛУЗИВНО ИЛИ

x_1	x_2	d
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

НЕ И

x_1	x_2	d
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ЕКСКЛУЗИВНО НИЛИ

x_1	x_2	d
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Слика 6.11. Илустрација кон прашањето 6.39

6.40. Ако на еден перцептрон му е дадено линеарно неразделиво множество, што ќе се случи за време на учењето?

A. Тежините на мрежата ќе достигнат стабилни вредности, и границата на раздвојување ќе биде најдобра.

B. Тежините на мрежата ќе достигнат стационарни вредности, но линијата на раздвојување може да биде субоптимална.

C. Тежините на мрежата нема да достигнат стационарни вредности и линијата на раздвојување нема никогаш да престане да се поместува.

D. Тежините на мрежата нема никогаш да постигнат стационарна состојба, па затоа не постои линија на раздвојување.

6.41. Дефинирајте го правилото за учење познато како делата правило (да се даде алгоритамот).

Одговор:

- Задајте ги почетните вредности на тежинските фактори произволно како многу мали вредности.

- Дефинирајте ја функцијата на грешка E како сума од квадратите на грешките на одделните елементи. Сè додека грешката E е во зададените граници, нагодувајте ги параметрите на мрежата според формулата за опаѓачки градиент:

$$w_{ij}^{new} = w_{ij}^{old} - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = w_{ij}^{old} + \Delta w_{ij} \tag{6.11}$$

$$E = \sum_i \frac{1}{2} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial \hat{y}_i} \cdot \frac{\partial \hat{y}_i}{\partial w_{ij}} = -\left(y_i - \hat{y}_i \right) x_j \tag{6.13}$$

$$\Delta w_{ij} = \eta \left(y_i - \hat{y}_i \right) x_j \tag{6.14}$$

6.42. Колку излези треба да поседува невронската мрежа за класификација, ако постојат само две класи (0 и 1, или -1 и 1 и сл.)? Каква е активирачката функција на излезните неврони во тој случај? Колку излези треба да поседува невронската мрежа за класификација (колку излезни неврони) ако има повеќе од две класи (на пример, -2,-1,0,1,2 или 1,2,3,4,5 итн.)?

Одговор: Во случајот на две класи, доволен е само еден излезен неврон, чија активирачка функција е отскочна функција (Хевисајдова). Тогаш излезот ќе биде 0, ако влезниот примерок од множеството за обучување припаѓа на едната класа, и вредност 1, ако влезот припаѓа на другата класа. Ако има повеќе од 2 класи, за секоја класа се доделува по еден излезен неврон со отскочна активирачка функција. Тогаш излезот ќе биде 1, ако влезниот примерок припаѓа на соодветната класа и 0 ако не припаѓа.

6.43. Која е главната предност и главниот недостаток на невронските мрежи со внатрешни слоеви?

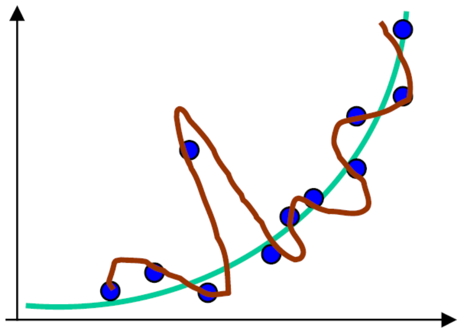
Одговор: Главната предност е што благодарение на скриениот слој, мрежата може да апроксимира произволна мазна функција со доволен број скриени неврони. Основен недостаток е што мрежата може да ги „научи“ и шумовите во множеството за обучување („претерано обучување“ или „overfitting“).

6.44. Како може да се избегне проблемот на „претерано обучување“ на мрежата?

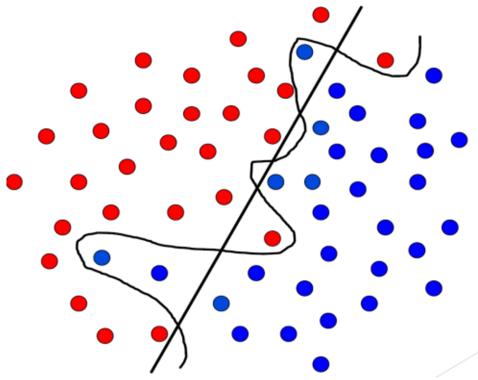
Одговор: Се користат повеќе постапки:

- Се намалува времето на обучување
- Се намалува бројот скриени неврони, а со тоа и бројот параметри на мрежата
- Се воведуваат ограничувања на вредностите на параметрите на мрежата

6.45. Прикажете ја сликовито појавата на „претерано обучување“ или „overfitting“ за случајот на регресија и класификација.



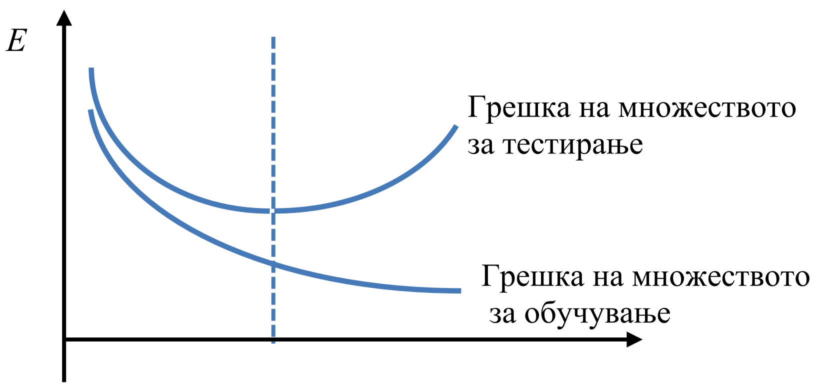
регресија



класификација

Слика 6.12. Илустрација кон прашањето 6.45

6.46. На слика 6.13 е прикажана грешката при обучувањето на една вештачка невронска мрежа во зависност од бројот итерации. Што може да се заклучи од сликата и до кога односно колку долго треба да се обучува мрежата?



Слика 6.13. Илустрација кон прашањето 6.46

Одговор: Со зголемување на времето на обучување на мрежата грешката на множеството на обучување постојано се намалува и тежи кон нулата. Меѓутоа, грешката на множеството за тестирање опаѓа само до одреден момент, а потоа почнува постојано да се зголемува. Тоа се должи на појавата на „претерано обучување“ на мрежата врз даденото множество за обучување. Затоа најдобро е да се прекине кога оваа грешка има минимум.

6.47. Што се подразбира под генерализација?

А. Можноста еден систем за препознавање облици да ги процени вредностите на излезот за податочните вектори надвор од множеството за тестирање.

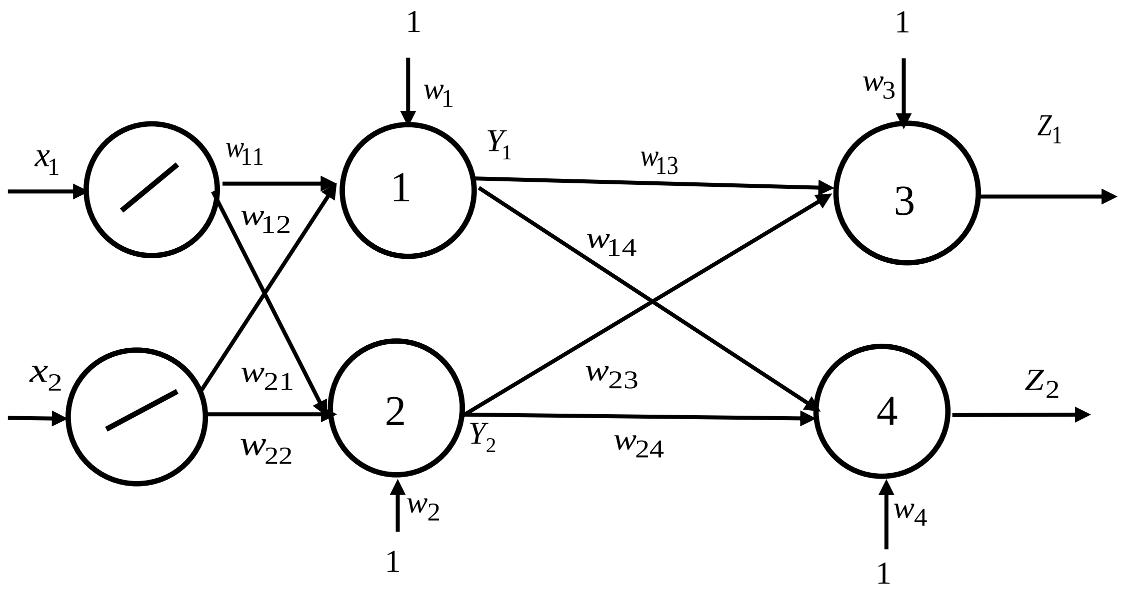
B. Можноста еден систем за препознавање облици да ги процени вредностите на излезот за податочните вектори надвор од множеството за обучување.

C. Способност на еден систем за препознавање облици да екстраполира врз основа на податочни вектори кои не припаѓаат на множеството за учење.

D. Способност на еден систем за препознавање облици да интерполира врз основа на податочни вектори надвор од множеството за тестирање.

6.48. Да се пресмета излезот на мрежата од слика 6.14, која се состои од вкупно шест неврони: два влеза x_1 и x_2, два скриени неврони $Y_1 = f(y_1)$ и $Y_2 = f(y_2)$ и два излеза $Z_1 = f(z_1)$ и $Z_2 = f(z_2)$. За тежинските фактори на мрежата да се усвојат: $w_{11} = 0.5$, $w_{12} = 1$, $w_{21} = 1.5$, $w_{22} = 0.5$, $w_{13} = -2$, $w_{23} = 2$, $w_{14} = 1.5$, $w_{24} = -1.5$, $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, $w_4 = 0$. Влезот, под претпоставка, е $(x_1, x_2) = (2, 4)$, а активирачките функции на внатрешните и излезните неврони се од облик:

$$f(\alpha) = \frac{1}{1+e^{-\alpha}} \tag{6.15}$$



Слика 6.14. Илустрација кон задача 6.48

Решение:

$$y_1 = w_{11}x_1 + w_{21}x_2 + w_1 = 0.5(2) + 1.5(4) + 0 = 7 \tag{6.16}$$

$$y_2 = w_{12}x_1 + w_{22}x_2 + w_2 = 1(2) + 0.5(4) + 0 = 4 \tag{6.17}$$

$$Y_1 = f\left(y_1\right) = \frac{1}{1+e^{-y_1}} = \frac{1}{1+e^{-7}} = 0.999 \tag{6.18}$$

$$Y_2 = f\left(y_2\right) = \frac{1}{1+e^{-y_2}} = \frac{1}{1+e^{-4}} = 0.982 \tag{6.19}$$

$$z_1 = w_{13}Y_1 + w_{23}Y_2 + w_3 = -2\left(0.999\right) + 2\left(0.982\right) + 0 = -0.034 \tag{6.20}$$

$$z_2 = w_{14}Y_1 + w_{24}Y_2 + w_4 = 1.5\left(0.999\right) - 1.5\left(0.982\right) + 0 = 0.0255 \tag{6.21}$$

$$Z_1 = f\left(z_1\right) = \frac{1}{1+e^{-z_1}} = \frac{1}{1+e^{0.034}} = 0.49 \tag{6.22}$$

$$Z_2 = f\left(z_2\right) = \frac{1}{1+e^{-z_2}} = \frac{1}{1+e^{-0.0255}} = 0.51 \tag{6.23}$$

6.49. Која е најголемата разлика помеѓу Делта-правилото за учење и правилото за учење на еден перцептрон во случајот на невронска мрежа со еден слој?

A. Нема разлика.

B. Делта-правилото е дефинирано за чекорни активирачки функции, додека правилото на перцептронот е дефинирано за линеарни активирачки функции.

C. Делта-правилото е дефинирано за сигмоидални активирачки функции, додека правилото на перцептронот е дефинирано за линеарни активирачки функции.

D. Делта-правилото е дефинирано за линеарни активирачки функции, додека правилото на перцептронот е дефинирано за отскочни активирачки функции.

E. Делта-правилото е дефинирано за сигмоидални активирачки функции, додека правилото на перцептронот е дефинирано за отскочни активирачки функции.

6.50. Перцептрон со униполарна отскочна функција има два влеза со тежини $w_1 = 1.5$ и $w_2 = -2$, и праг $\theta = 0$ (θ може да се третира како тежински фактор за некој дополнителен влез кој е постојано еднаков на 1). За даден примерок за обучување $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, саканиот излез е 0. Дали перцептронот ќе даде точен одговор?

A. Да.

B. Не.

6.51. Перцептрон од прашањето 6.50 е обучуван со правилото за учење од облик $\Delta \mathbf{w} = \eta(d - y)\mathbf{x}$, каде што $\mathbf{x}$ е влезен вектор, η е брзина на учење, $\mathbf{w}$ е вектор на тежини, d е саканиот излез, и y е излезот од мрежата. Кои ќе бидат новите вредности на тежините и прагот по еден чекор обучување со влезниот вектор $\mathbf{x} = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$, саканиот излез 1, и брзина на учење $\eta = 0.8$?

A. $w_1 = 2.3$; $w_2 = -1.2$; $\theta = 0.8$

B. $w_1 = -2.3$; $w_2 = -1.2$; $\theta = 0.8$

C. $w_1 = 2.3$; $w_2 = -1.2$; $\theta = -0.8$

D. $w_1 = 2.3$; $w_2 = 1.2$; $\theta = 0.8$

E. $w_1 = -2.3$; $w_2 = 1.2$; $\theta = -0.8$

6.52. Одговорете со точно или погрешно: Ексклузивно ИЛИ може да се реши со повеќеслоен перцептрон, меѓутоа не со линеарна активирачка функција.

A. **Точно.**

B. Погрешно.

6.53. Еден неврон со четири влеза има тежини $\mathbf{w} = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 4]^{\mathrm{T}}$ и нулев праг $\theta = 0$. Активирачката функција на невронот е линеарна, со константа на пропорционалност 2. Ако влезниот вектор е $\mathbf{x} = [5 \quad 7 \quad 9 \quad 3]^{\mathrm{T}}$ тогаш излезот на невронот ќе биде:

A. 1.

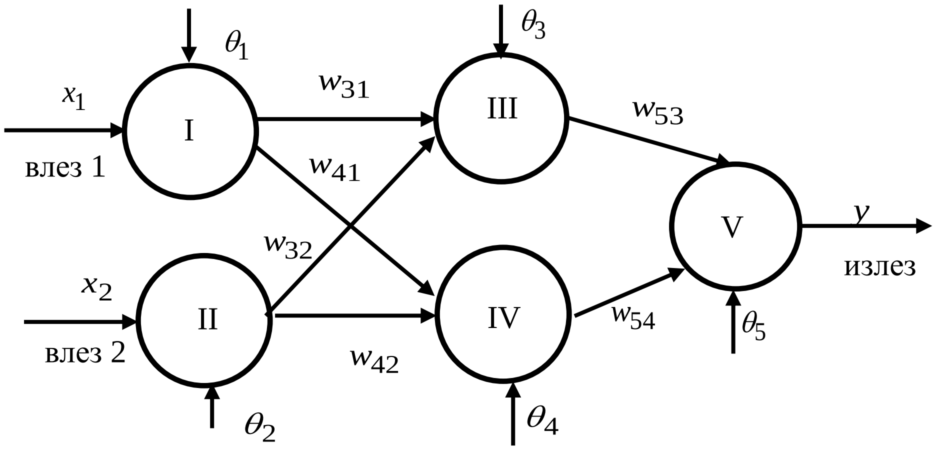
B. 56.

C. 50.

D. 112.

E. 100.

6.54. На слика 6.15 е прикажана мрежа на повеќеслоен перцептрон, кај која сите неврони имаат бинарни влезови (0 или 1) и бинарни излези (0 или 1). Тежините на перцептронот се $w_{31} = w_{42} = 10$, $w_{32} = w_{41} = -10$ и $w_{53} = w_{54} = 10$. Праговите на двата влеза (I и II) се $\theta_1 = \theta_2 = 0$, праговите на скриените неврони (III и IV) се $\theta_3 = \theta_4 = -5$ и прагот на излезниот неврон (V) е $\theta_5 = -5$. Која од наведените Булови функции може да се пресмета со дадената мрежа?



Слика 6.15. Илустрација кон прашањето 6.54

A. И.

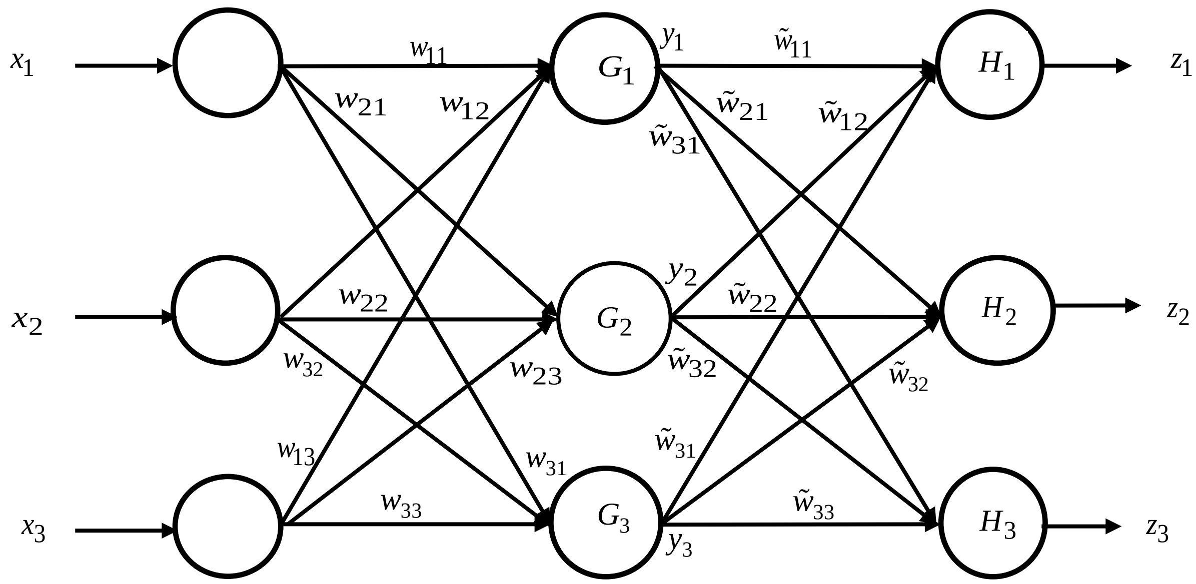
B. ИЛИ.

C. Ексклузивно ИЛИ.

D. Сите наведени погоре.

E. Ниедна од наведените.

6.55. Дадена е повеќеслојната невронска мрежа од сликата 6.16. На нејзиниот влез е доведен влезен податок $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}}$, а соодветниот излез е $\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^{\mathrm{T}}$.



Слика 6.16. Илустрација кон прашањето 6.55

Кој е вообичаениот редослед на чекори при обучувањето на оваа мрежа со постапката за повратно простирање на грешката (backpropagation)?

1. (i) Пресметување на $z_k = f(H_k)$, (ii) ажурирање на $\tilde{w}_{kj}$, (iii) пресметување на $y_j = f(G_j)$, (iv) ажурирање на w_{ji}.

2. (i) пресметување на $y_j = f(G_j)$, (ii) ажурирање на w_{ji}, (iii) пресметување на $z_k = f(H_k)$, (iv) ажурирање на $\tilde{w}_{kj}$.

3. (i) пресметување на $y_j = f(G_j)$, (ii) пресметување на $z_k = f(H_k)$, (iii) ажурирање на w_{ji}, (iv) ажурирање на $\tilde{w}_{kj}$.

4. (i) пресметување на $y_j = f(G_j)$, (ii) пресметување на $z_k = f(H_k)$, (iii) ажурирање на $\tilde{w}_{kj}$, (iv) ажурирање на w_{ji}.

6.56. По учењето, тежинските фактори на мрежата од слика 6.16 се:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -2.0 \\ 2.0 \\ -2.0 \end{bmatrix};\ \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix};\ \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \\ -0.5 \end{bmatrix};\tilde{\mathbf{w}}_1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -3.0 \\ 5.0 \end{bmatrix};\ \tilde{\mathbf{w}}_2 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -2.5 \\ 2 \end{bmatrix};\ \tilde{\mathbf{w}}_3 = \begin{bmatrix} 2.2 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

Нека сите неврони имаат сигмоидална активирачка функција $f(x) = \dfrac{1}{1+\exp(-x)}$ и нулев праг. Ако на влезот од мрежата е доведен примерок $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, колку ќе биде излезот на вториот скриен неврон y_2 и третиот излезен неврон z_3 од мрежата?

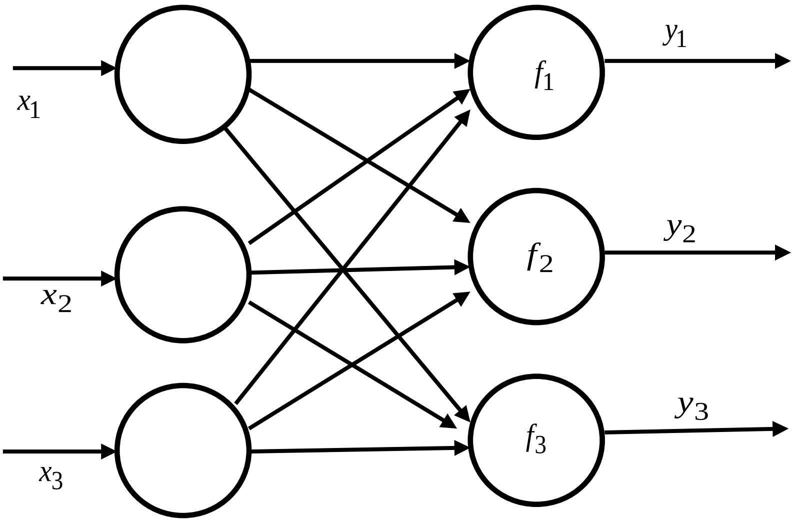
	y_2	z_3
1.	0.018	1.000
2.	0.500	0.928
3.	0.982	0.087
4.	1.000	0.782
5.	0.000	0.527

6.57. Перцептрон со униполарна отскочна функција има два влеза со тежински фактори $w_1 = 0.8$ и $w_2 = -0.4$, и праг $\theta = 0.6$. Излезот за влезниот податок $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ е 1. Дали перцептронот дава точен одговор?

А. Да.

В. Не.

6.58. Каква е невронската мрежа од слика 6.17?



Слика 6.17. Илустрација кон прашањето 6.58

A. Еднослојна feedforward невронска мрежа.

B. Повеќеслојна feedforward невронска мрежа.

C. Рекурентна невронска мрежа.

6.59. Истиот перцептрон опишан под 6.57 се обучува со правилото $\Delta\mathbf{w} = \eta(d - y)\mathbf{x}$ каде што $\mathbf{x}$ е влезниот вектор, η е чекорот на учење, $\mathbf{w}$ е векторот тежини, d е саканиот излез и y е фактичкиот излез на перцептронот. Кои се новите вредности на тежините и прагот по еден чекор на учење на перцептронот ако брзината на учење е $\eta = 0.5$?

A. $w_1 = 1.3,\ w_2 = 0.1,\ \theta = 0.1$

B. $w_1 = 1.3,\ w_2 = -0.9,\ \theta = 0.1$

C. $w_1 = 1.3,\ w_2 = 0.1,\ \theta = 1.1$

D. $w_1 = 0.3,\ w_2 = 0.1,\ \theta = 0.1$

E. $w_1 = 0.3,\ w_2 = 0.1,\ \theta = 1.1$

6.60. Да се обучи еден перцептрон правилно да го класифицира множеството податоци $\{(0.5,0.5);(2,-1);(1.5,-2);(-2,1.5);(-1,-1);(-2,-1)\}$, од кои $(0.5,0.5)$, $(2,-1)$ и $(-2,1.5)$ припаѓаат на класата „+“, додека $(1.5,-2)$, $(-1,-1)$ и $(-2,-1)$ припаѓаат на класата „o“. Нека за почетни вредности се усвојат:

- чекор на учење $\eta = 0.2$
- тежински фактори $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad w_0]^{\mathrm{T}} = [1 \quad 0.5 \quad 0]^{\mathrm{T}}$
- праг $\theta = w_0 x_0;\ x_0 = 1$

Излезот на перцептронот е:

$$d(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \text{ ако } \mathbf{x} \in \text{множество "+"} \\ -1, \text{ ако } \mathbf{x} \in \text{множество "o"} \end{cases} \tag{6.25}$$

Учењето на перцептронот се врши според следниот алгоритам:

- Се одбира следниот примерок од множеството за обучување.
- Ако класификацијата е коректна, не се презема ништо.
- Доколку примерокот е погрешно класифициран, се модифицираат тежинските фактори $\mathbf{w}$ според формулата:

$$\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^{i} + \eta d \mathbf{x};\ i = 0,1,2,\cdots \tag{6.26}$$

- Постапката се повторува сè додека целото множество за учење не се класифицира точно.

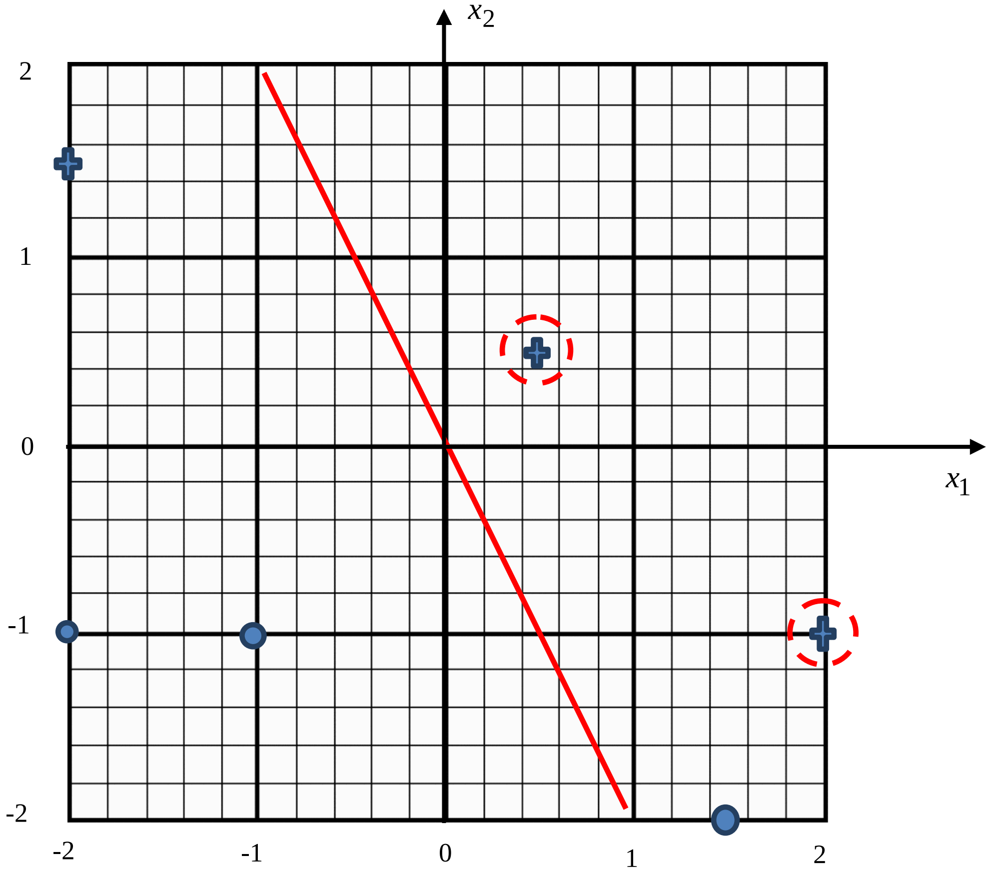
Решение: 1.

$$(x_1, x_2) = (0.5, 0.5) \tag{6.27}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^0 = [1 \quad 0.5 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{6.28}$$

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 1(0.5) + 0.5(0.5) + 0(1) = 0.75 > 0 \tag{6.29}$$

Точна класификација, не се презема ништо.



Слика 6.18. Точна класификација на податоците $(0.5, 0.5)$ и $(2, -1)$

2.

$$(x_1, x_2) = (2, -1) \tag{6.30}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^0 = [1 \quad 0.5 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{6.31}$$

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 1(2) + 0.5(-1) + 0(1) = 1.5 > 0 \tag{6.32}$$

Точна класификација, не се презема ништо.

3.

$$(x_1, x_2) = (1.5, -2) \tag{6.33}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^0 = [1 \quad 0.5 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{6.34}$$

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 1(1.5) + 0.5(-2) + 0(1) = 0.5 > 0 \tag{6.35}$$

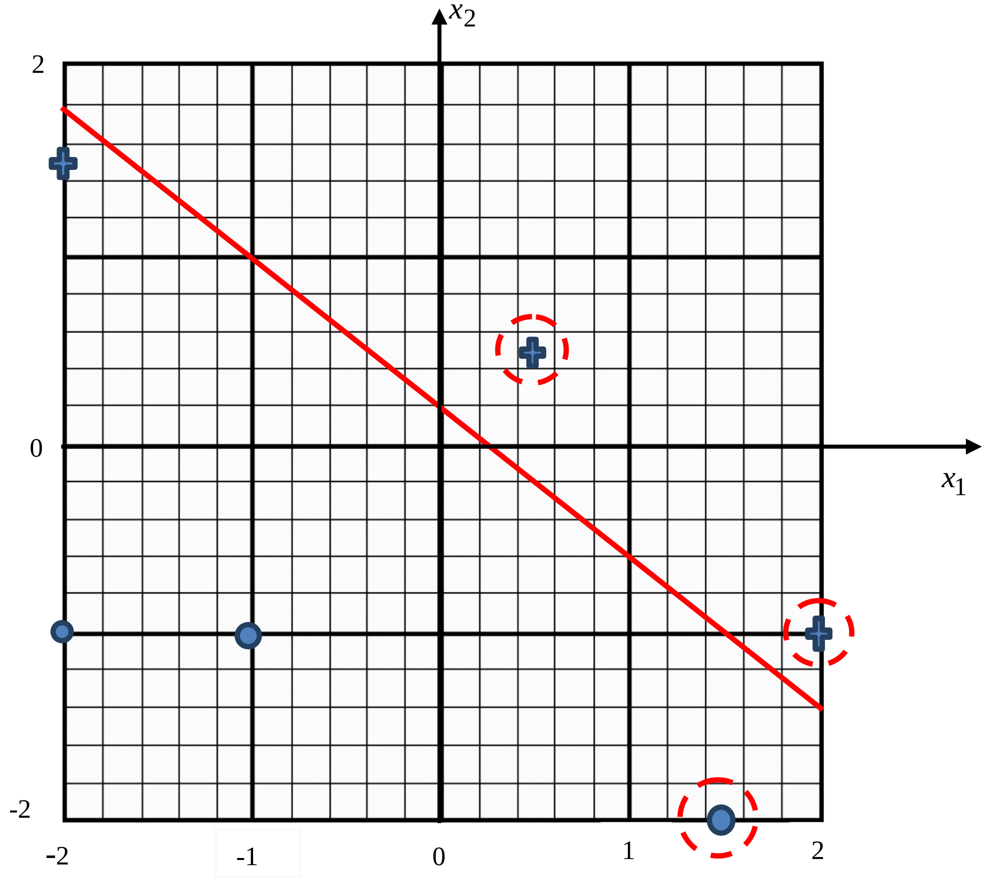
Погрешна класификација, перцептронот се обучува.

$$w_1^1 = w_1^0 - 0.2x_1 = 1 - 0.2(1.5) = 0.7 \tag{6.36}$$

$$w_2^1 = w_2^0 - 0.2x_2 = 0.5 - 0.2(-2) = 0.9 \tag{6.37}$$

$$w_0^1 = w_0^0 - 0.2x_0 = 0 - 0.2(1) = -0.2 \tag{6.38}$$

$$\mathbf{w}^1 = [0.7 \quad 0.9 \quad -0.2]^\mathrm{T} \tag{6.39}$$



Слика 6.19. Точна класификација и на податокот $(1.5,-2)$ по обучувањето на перцептронот

4.

$$(x_1, x_2) = (-2, 1.5) \tag{6.40}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^1 = [0.7 \quad 0.9 \quad -0.2]^\mathrm{T} \tag{6.41}$$

$$\mathbf{w}^\mathrm{T}\mathbf{x} = 0.7(-2) + 0.9(1.5) - 0.2(1) = -0.25 < 0 \tag{6.42}$$

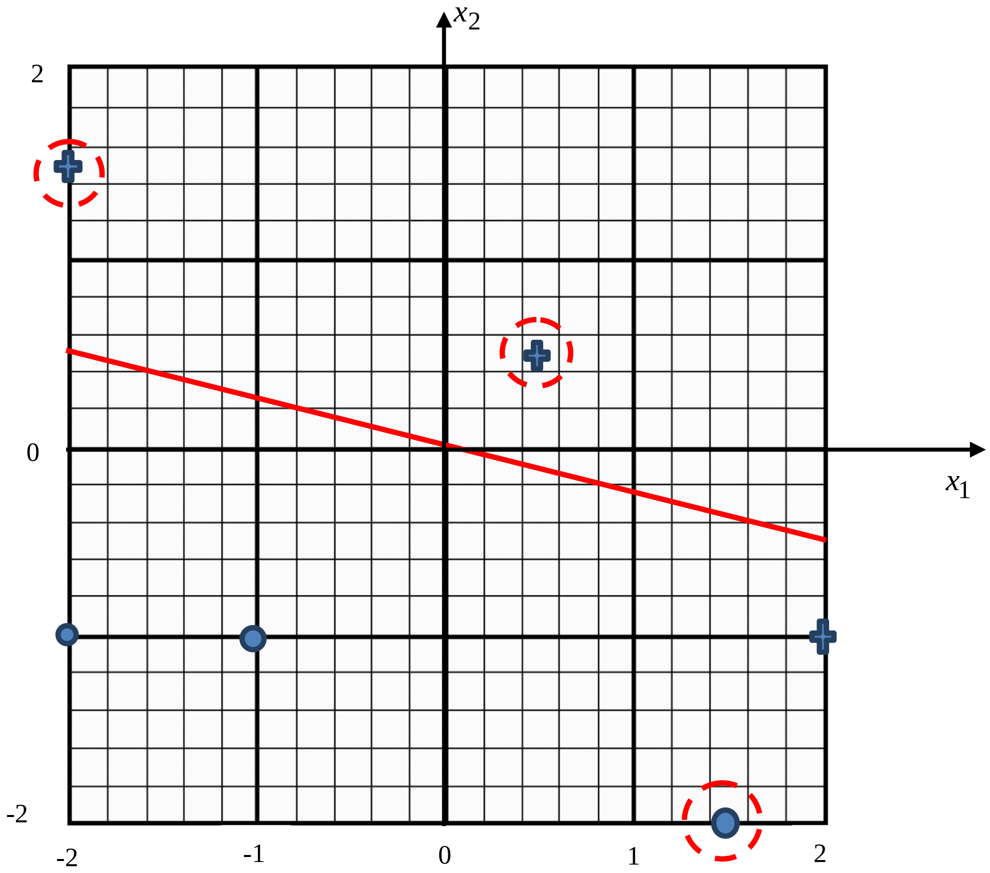
Погрешна класификација, перцептронот се обучува.

$$w_1^2 = w_1^1 - 0.2x_1 = 0.7 + 0.2(-2) = 0.3 \tag{6.43}$$

$$w_2^2 = w_2^1 + 0.2x_2 = 0.9 + 0.2(1.5) = 1.2 \tag{6.44}$$

$$w_0^2 = w_0^1 + 0.2x_0 = -0.2 + 0.2(1) = 0 \tag{6.45}$$

$$\mathbf{w}^2 = [0.3 \quad 1.2 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{6.46}$$



Слика 6.20. Точна класификација на податоците $(0.5, 0.5)$, $(2, -1)$ и $(-2, 1.5)$

5. Очигледно по второто учење на перцептронот податокот $(x_1, x_2) = (2, -1)$ е лошо односно погрешно класифициран. Затоа перцептронот мора да се обучува и понатаму.

$$w_1^3 = w_1^2 - 0.2x_1 = 0.3 + 0.2(2) = 0.7 \tag{6.47}$$

$$w_2^3 = w_2^2 + 0.2x_2 = 1.2 + 0.2(-1) = 1 \tag{6.48}$$

$$w_0^3 = w_0^2 + 0.2x_0 = 0 + 0.2(1) = 0.2 \tag{6.49}$$

$$\mathbf{w}^3 = [0.7 \quad 1 \quad 0.2]^{\mathrm{T}} \tag{6.50}$$

6. Лесно може да се провери дека по третото учење перцептронот правилно ги класифицира сите дадени податоци од множеството за обучување.

$$(x_1, x_2) = (0.5, 0.5):\ 0.7(0.5) + 1(0.5) + 0.2(1) = 1.05 > 0 \tag{6.51}$$

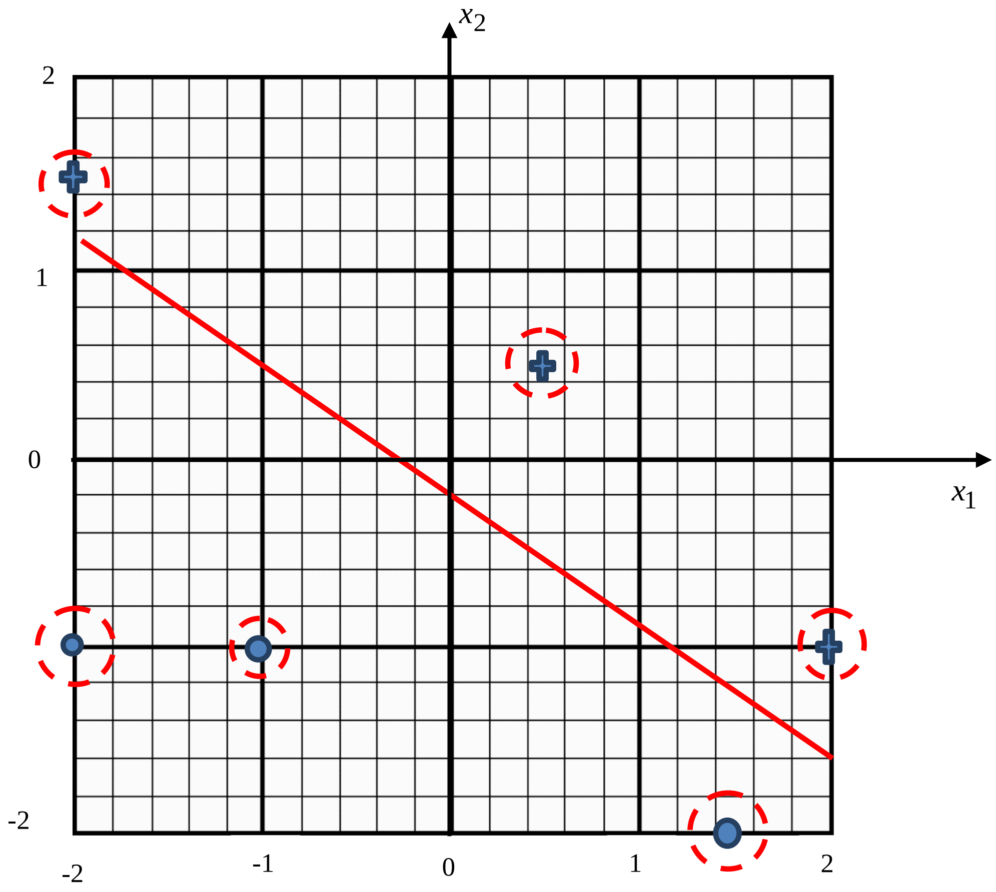
$$(x_1, x_2) = (2, -1):\ 0.7(2) + 1(-1) + 0.2(1) = 0.6 > 0 \tag{6.52}$$

$$(x_1, x_2) = (1.5, -2):\ 0.7(1.5) + 1(-2) + 0.2(1) = -0.75 < 0 \tag{6.53}$$

$$(x_1, x_2) = (-2, 1.5):\ 0.7(-2) + 1(1.5) + 0.2(1) = 0.3 > 0 \tag{6.54}$$

$$(x_1, x_2) = (-1, -1):\ 0.7(-1) + 1(-1) + 0.2(1) = -1.5 < 0 \tag{6.55}$$

$$(x_1, x_2) = (-2, -1):\ 0.7(-2) + 1(-1) + 0.2(1) = -2.2 < 0 \tag{6.56}$$

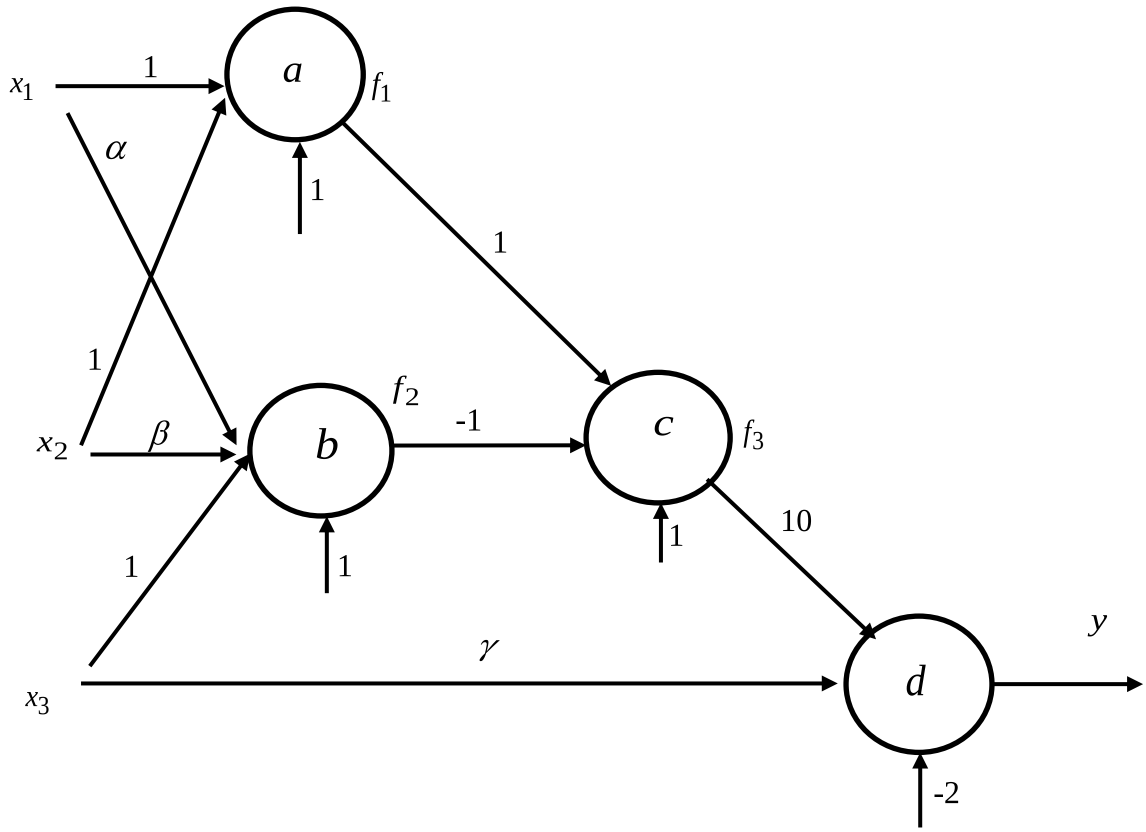


Слика 6.21. Точна класификација на целото множество за обучување од задача 6.60

6.61. Дадена е невронската мрежа од слика 6.22. Таа се состои од четири неврони означени со a, b, c и d, кои имаат Гаусова активирачка функција $f(x) = \exp\left(-x^2\right)$. Познати се сите тежини на мрежата освен три, означени со α, β и γ. Да се определат овие тежини ако се зададени следните влезови:

Таблица 6.1. Влезови и излез за мрежата од слика 6.22

x_1	x_2	x_3	y
-0.5	0	0	0.94
0	-0.25	0	0.83
-1	0	-1	0.72



Слика 6.22. Илустрација кон задачата 6.61

Решение: За првите влезни вредности:

$$\exp\left(-d^2\right) = y = 0.94 \;\Rightarrow\; d = 0.25 \tag{6.57}$$

$$d = 2(-1) + \gamma x_3 + 10 f_3 = -2 + \gamma(0) + 10 f_3 = -2 + 10 f_3 = 0.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3 = \exp\left(-c^2\right) = 0.225 \Rightarrow c = 1.22 \tag{6.58}$$

$$a = x_1 + x_2 + 1 = -0.5 + 0 + 1 = 0.5 \Rightarrow f_1 = e^{-a^2} = 0.78 \tag{6.59}$$

$$c = f_1 - f_2 + 1 = 0.78 - f_2 + 1 = 1.22 \Rightarrow$$

$$f_2 = 1.78 - 1.22 = 0.56 \Rightarrow b = 0.76 \tag{6.60}$$

$$b = \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 + 1 = -0.5\alpha + 1 = 0.76 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.48 \tag{6.61}$$

За вторите влезни вредности:

$$\exp\left(-d^2\right) = y = 0.83 \;\Rightarrow\; d = 0.43 \tag{6.62}$$

$$d = 2(-1) + \gamma x_3 + 10 f_3 = -2 + \gamma(0) + 10 f_3 = -2 + 10 f_3 = 0.43 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_3 = \exp\left(-c^2\right) = 0.243 \Rightarrow c = 1.19 \tag{6.63}$$

$$a = x_1 + x_2 + 1 = 0 - 0.25 + 1 = 0.75 \Rightarrow f_1 = e^{-a^2} = 0.57 \tag{6.64}$$

$$c = f_1 - f_2 + 1 = 0.57 - f_2 + 1 = 1.19 \Rightarrow$$

$$f_2 = 1.57 - 1.19 = 0.38 \Rightarrow b = 0.98 \tag{6.65}$$

$$b = \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 + 1 = -0.25\beta + 1 = 0.98 \;\Rightarrow\; \beta = 0.08 \tag{6.66}$$

За третите влезни вредности:

$$\exp\left(-d^2\right) = y = 0.72 \;\Rightarrow\; d = 0.57 \tag{6.67}$$

$$a = x_1 + x_2 + 1 = -1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow f_1 = 1 \tag{6.68}$$

$$b = \alpha x_1 + \beta x_2 + x_3 + 1 = 0.48(-1) - 1 + 1 = -0.48 \;\Rightarrow\; f_2 = 0.794 \tag{6.69}$$

$$c = f_1 - f_2 + 1 = 1 - 0.794 + 1 = 1.21 \Rightarrow f_3 = 0.23 \tag{6.70}$$

$$d = \gamma x_3 + 10 f_3 - 2 = \gamma(-1) + 2.3 - 2 = 0.57 \Rightarrow$$

$$-\gamma + 0.3 = 0.57 \Rightarrow \gamma = -0.27 \tag{6.71}$$

$$\alpha = 0.48,\ \beta = -0.37,\ \gamma = -0.27 \tag{6.72}$$

6.62. Нека е даден неврон со два влеза x_1 и x_2 и сигмоидална активирачка функција $f(z) = 1/(1+e^{-z})$. Да се пресмета излезот на невронот за следните влезови: $(x_1^1, x_2^1) = (0,-2)$, $(x_1^2, x_2^2) = (0,2)$, $(x_1^3, x_2^3) = (2,-2)$, ако тој има праг -1 и тежински фактори $w_0 = 0$, $w_1 = 0.5$ и $w_2 = 0.5$.

Решение:

$$z^1 = w_1 x_1^1 + w_2 x_2^1 + w_0 x_0 = 0.5(0) + 0.5(-2) + 0(-1) = -1 \tag{6.73}$$

$$z^2 = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_0 x_0 = 0.5(0) + 0.5(2) + 0(-1) = 1 \tag{6.74}$$

$$z^3 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 + w_0 x_0 = 0.5(2) + 0.5(-2) + 0(-1) = 0 \tag{6.75}$$

$$y_1 = \frac{1}{1+e^{-z_1}} = \frac{1}{1+e^{1}} = \frac{1}{1+e} = 0.27 \tag{6.76}$$

$$y_2 = \frac{1}{1+e^{-z_2}} = \frac{1}{1+e^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e}} = \frac{e}{e+1} = 0.73 \tag{6.77}$$

$$y_3 = \frac{1}{1+e^{-z_3}} = \frac{1}{1+e^{0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.50 \tag{6.78}$$

6.63. Колку ќе изнесува промената на тежинските фактори $\Delta\mathbf{w} = [\Delta w_1 \quad \Delta w_2]^{\mathrm{T}}$ за невронот од задача 6.62, ако се примени постапката на повратно простирање на грешката, за чекор $\eta = 2$, влез $[2 \quad -2]^{\mathrm{T}}$ и $d = 0$.

Решение:

$$z = \sum_{i=0}^{2} w_i x_i$$

$$y = f(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$E = \frac{1}{2}(d-y)^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial w_0} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial w_1} = x_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial w_2} = x_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = y(1-y)$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = y - d$$

$$\Delta w_1 = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_1} = -\eta \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial w_1} = -\eta (y-d) y (1-y) x_1 =$$

$$= (-2)(0.5)(0.5)(1-0.5)(2) = -0.5 \tag{6.79}$$

$$\Delta w_2 = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_2} = -\eta \frac{\partial E}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial w_2} = -\eta (y-d) y (1-y) x_2 =$$

$$= (-2)(0.5)(0.5)(1-0.5)(-2) = 0.5 \tag{6.80}$$

7. ЛИТЕРАТУРА

[1] Stuart Russell, Peter Norvig, Artificial Intelligence: A Modern Approach, 3. ed., Pearson, 2016.

[2] https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-034-artificial-inelligence-fall-2010/

[3] https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-825-techniques-in-artificial-intelligence-sma-5504-fall-2002/

[4] http://ai.stanford.edu/~latombe/cs121/

[5] http://web.stanford.edu/class/cs221/

[6] http://lab.fs.uni-lj.si/lasin/wp/IMIT_files/neural/NN-examples.pdf

[7] http://www.cs.cmu.edu/~aarti/Class/10701/prev.html

[8] https://hkn.eecs.berkeley.edu/exams/course/cs/188

[9] https://inst.eecs.berkeley.edu/~cs188/fa08/w4.pdf

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41